Hele-Šou plūsmas

Janis Erdmanis
akels14@gmail.com

(Dated: Janvāris 2015)

I. DĀRSĪ VIENĀDOJUMS

Ja plūsmas ātrums ir mazs, bet šķidruma viskozitāte ir liela, ko raksturo mazs Reinoldsa skaitlis $Re = v_0 L\rho/\mu$, tad ir spēkā Stoksa vienādojums:

$$\nabla p = \eta \Delta \vec{v} \tag{1}$$

Šī vienādojuma speciālgadījums ir Dārsī vienādojums:

$$\alpha \vec{v} + \nabla p = 0 \tag{2}$$

Tā pielietojums sniedzās no šķidruma plūsmas apraksta plānā slānītī līdz dinamikai porainās vidēs, kur praksē pielietojums ir pazemes ūdeņu, filtru, naftas ieguves aprasktstam.

Iegūsim, ka dārsī vienādojums ir arī ideāla šķidruma vienādojums. Ņemot rotoru no Dārsī vienādojuma iegūstam:

$$\nabla \times \vec{v} = 0 \tag{3}$$

tātad ātruma sadalījums ir izsakāms kā kādas funkcijas gradients jeb $\vec{v} = \nabla \phi$. Tā kā šķidrums mums ir nesaspiežams jeb $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, tad funkcijai ϕ jāapmierina Laplasa vienādojums:

$$\Delta \phi = 0 \tag{4}$$

kas ir arī ideāla šķidruma vienādojums.

A. Hele-Šou plūsmas

Apskatām šķidruma plūsmu plānā slānītī ar biezumu $2d$ starp divām paralēlām sieniņām. Novietosim x,y asis slānīša plaknē, tad pēc stoksa vienādojumiem komponentēm jāizpildās:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] \tag{5}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \eta \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] \tag{6}$$

Parasti demonstrējot potenciālas plūsmas raksturu, pa visu slānīša biezumu ievieto ķermeni ar raksturīgo izmēru L, kura izmēri daudz reiz pārsniedz slānīša biezumu d. Tādā gadījumā atvasināšana pa raksturīgiem mērogiem Laplasa operatorā izrakstāma šādi:

$$\Delta = \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{1}{d^2}\frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} \tag{7}$$

kur redzams, ka pie $d/L \gg 1$ atvasināšanas plaknes virzienā varam atmest. To mēdz saukt arī par tuvinājumu, ka plūsma visur ir tāda kā lokālais spiediena gradients ir aiztiecināts uz bezgalību (plūsmas ātruma virziens sakrīt ar spiediena gradienta virzienu). Veicot tādu pašu tuvinājumu arī otrai speidiena komponentei un ņemot vērā, ka dēļ šķidruma viskozitātes pie sieniņām tā ātrums ir 0 iegūstam:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \qquad v_x(\pm d) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \qquad v_y(\pm d) = 0 \tag{9}$$

Veicot integrēšanu un ievietojot robežnosacījumus iegūstam šādas ātruma vērtības:

$$v_x = -\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}(d^2 - z^2) \tag{10}$$

$$v_y = -\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial y}(d^2 - z^2) \tag{11}$$

Reālā experimentā mēs novērojam tikai projekciju šim ātruma sadalījumam plaknē, tādēļ sadalījums jāvidējo. Izmantojot šādu viedējošanu:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2d}\int_{-d}^{+d} f(z)dz \tag{12}$$

vidējotajam ātrumam iegūstam šādu vienādojumu:

$$\langle \vec{v} \rangle = -\frac{d^2}{3\eta}\nabla p \tag{13}$$

kas sakrīt ar Dārsī vienādojumu, kad $\alpha = 3\eta/d^2$.

Interesanti, ka dēļ tā, ka Dārsī vienādojumu apmierina ideāla šķidruma plūsma mēs kā robežnosacījumus uzdodam tikai, ka šķidrums caur ķermeni neplūst un ātrumu tālu no ievietotā ķermeņa, bet ne to ka šķidrums pie ķermeņa pielīp. Tas bija sagaidāms, jo šķērseniskos viskozitātes efektus mēs atmetām, kad izvedām Dārsī vienādojumu. Lai novērtētu kādu kļūdu tas ievieš atrisinājumā varam novērtēt robežslāņa izmērus, kas nepieciešams, lai tangenciālais ātrums nodiltu pie ķermeņa:

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\mu L}{u_\tau}} \tag{14}$$

kur izmantoju formulu *Landau (39.17)*.

B. Porainas vides

Porainās vidēs šķidrumam plūstot varam novērtēt divus raksturīgus parametrus - kapilāru garumu L, kurā šķidrums aptuveni var tecēt taisni un kapilāru diametru d, kas aptuveni sakrīt ar poru diametru. Tā kā atvasināšana kapilāra virzienā ir ar mērogu L, bet šķērsvirzienā ar mērogu d, varam Stoksa vienādojumos atavasināšanu garenvirzienā atmest. Ja vēl pieņemam, ka kapilārs savu diametru maina maz, tad varam secināt, ka katrā kapilārā realizējās aptuvena Puazeļa plūsma. Tā kā šādai plūsmai iztecējušais šķidrums proporcionāls spiediena gradientam, tad arī šajās vidēs vidēji pa tilpumu spēkā Dārsī vienādojums.

Porainas vides praksē parādās piemēram apskatot naftas ieguvi no okeāna dibeniem, jo nafta atrodās porainā vidē. Visvienkāršākais variants, kā to no okēana dibena dabūt ārā ir iestumt pa vienu galu ūdeni iekšā, lai pa otru nafta nāktu ārā. Šādu vienkāršotu metodi praksē pielietojot naftas vietā var sākt nākt ārā ūdens. Ir atklājies, ka tam par pamatu ir pirkstveidīgi izaugumi uz ūdens brīvās virsmas, ar kuru stabilitātes analīzi ir nodarbojies Saffmens un Teilors 1958. gadā Helle-Šou plūsmās.

II. SAFFMENA-TEILORA NESTABILITĀTE

Lai pētītu šo pirkstu veidošanos, Saffmans un Teilors izmantoja faktu, ka Dārsī vienādojums fizikāli realizējams arī ar Hele-Šou plūsmām. Izvēloties vienkāršāko ģeometriju, kurā šķidrums tiek stumts caur taisnstūrveidīgu spraugu ar garumu L, bet biezumu d viņi arī divās dimensijās spēja novērot pirkstu veidošanos.

Pieņemsim, ka šķidruma fronte kādā laika momentā ir taisnstūrveida, kura pārvietojās ar ātrumu v_0 vertikālā virzienā uz leju. Papildus tam apskatām, ka uz frontes izveidojās perturbācija $\xi(x,t)$, tad nekustīgā atskaites sistēmā šķidruma fronte:

$$y = -v_0 t + \xi(x,t) \tag{15}$$

A. Laplasa likums

Sķidrumam ieliecoties vai izliecoties mainās spiediens sķidrumā pie robežvirsmas, jo virsmai ir spraigums. Apzīmēsim ar p_0 atmossfēras spiedienu, bet ar $p = p(x)$ spiedienu pie virsmas. Apskatām patvaļīgu, mazu virsmas izmaiņu normāles virzienā par lielumu $\delta\xi$, tad darbs, kas nepieciešams, lai šādu izmaiņu veiktu dēļ spiediena starpības ir:

$$\int (p_0 - p)\delta\xi dS \tag{16}$$

Bez tā vēl darbs jāpastrādā, lai virsmu izstieptu par δS, tādēļ summārais darbs, kas jāpastrādā, lai veiktu šādu virsmas izmaiņu:

$$\delta A = \sigma\delta S + \int (p_0 - p)\delta\xi dS \tag{17}$$

Ja sistēma ir līdzsvarā, tad šis darbs ir vienāds ar 0, kam analogs ir virtuālā darba princips klasiskajā mehānikā. Tā kā apskatām tikai $2D$ gadījumu, kur biezums d, tad virsmas laukuma izmaiņa ir:

$$\delta S = d\delta l \tag{18}$$

Pieņemsim, ka virsmas rādiuss ir vienāds ar R apskatītajam elementam. Tad ja dl ir virsmas garums pirms, bet dl' virsmas garums pēc stiepšanas, tad pēc centra leņķa saglabāšanās:

$$\frac{dl}{R} = \frac{dl}{R + \delta\xi} \tag{19}$$

Virsmas izmaiņai tādējādi iegūstam:

$$\delta S = d\int dl' - d\int dl = \int \frac{1}{R}\delta\xi dl \tag{20}$$

ar ko varam darba variāciju izteikt kā:

$$\delta A = d\int \left[\frac{\sigma}{R} + p_0 - p\right]\delta\xi dl \tag{21}$$

Pieprasot $\delta A = 0$ pie jebkurām patvaļīgām variācijām $\delta\xi$ iegūstu Laplasa likumu:

$$p = p_0 + \frac{\sigma}{R} \tag{22}$$

Virsmas rādiuss ir iegūstams no virsmas apliecējfunkcijas $y(x) = \xi(x,t)$. Tādā gadījumā virziena vektors $\vec{l}$ un normāles vektors $\vec{n}$ ir uzdots pēc šāda likuma:

$$\vec{l} = \frac{(1, y')}{\sqrt{1 + y^2}} \qquad \vec{n} = \frac{(-y',1)}{\sqrt{1 + y^2}} \tag{23}$$

Parametrizējam šos vektorus pēc līnijas garuma s, tad:

$$\vec{n}(s)\vec{l}(s + \Delta s) = \cos(\pi/2 + \Delta\Theta) = -\Delta\Theta = -\frac{\Delta s}{R} \tag{24}$$

Izvirzot $\vec{l}(s+\Delta s)=\vec{l}+\Delta s\frac{d\vec{l}}{ds}$ iegūstam sekojošu sakarību liekuma rādiusa aprēķināšanai:

$$\frac{1}{R}=-\vec{n}\frac{d\vec{l}}{ds} \tag{25}$$

Izmantojot, ka $ds^2=dx^2+dy^2$ iegūstam sekojošu sakarību liekuma radiusa aprēķināšanai:

$$\frac{1}{R}=-\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \tag{26}$$

Tātad varam Laplasa likumu pārrakstīt sekojoši:

$$p=p_0-\sigma\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \tag{27}$$

B. Robežnosacījumi spiedienam uz perturbētās frontes

Mazām perturbācijām spiediens pēc Laplasa likuma ir sekojošs:

$$p|_{virsma}=p_0-\sigma\xi'' \tag{28}$$

Tā kā virsmas forma pirms problēmas atrisināšanas nav mums zināma, tad to izvirzam rindā ap neperturbētu virsmu $y=-v_0t$:

$$p|_{virsma}=p(x,\xi(x,t))=p|_{y=-v_0t}+\xi\frac{\partial p}{\partial y}|_{y=-v_0t} \tag{29}$$

Aizvietojot $\partial p/\partial y$ ar Dārsī vienādojumu $\alpha\vec{v}=-\nabla p$, un ātrumu $\vec{v}$ virzot rindā pēc ξ amplitūdas ϵ:

$$p|_{virsma}=p|_{-v_0t}-\alpha v_y|_{-v_0t}\xi=p|_{-v_0t}-\alpha(-v_0+\xi\frac{\partial v_y}{\partial\epsilon})|_{-v_0t}\xi=\alpha v_0\xi+p|_{-v_0t}+O(\xi^2) \tag{30}$$

Pēc spiedienu pielīdzināšanas iegūstam šādu izteiksmi spiedienam uz neperturbētās virsmas:

$$p|_{y=-v_0t}=p_0+\alpha v_0\xi-\sigma\xi'' \tag{31}$$

C. Problēmas risinājums

Pirms problēmu risinām atdalīsim perturbetā spiediena un ātrumu sadalījuma problēmu no neperturbētās. Kad perturbācijas nav jeb $\xi\equiv 0$, tad spiedieni p^0 un ātrumu lauks $\vec{v}^0$ apmierina Dārsī vienādojumu. Tāpat Dārsī vienādojumu apmierina summārais spiediens p un ātrums $\vec{v}$ tādēļ, ja ievedam perturbetos spiedienus un ātrumus šādi:

$$p=p^0+p' \qquad\qquad \vec{v}=\vec{v}^0+\vec{v}' \tag{32}$$

tad šīs perturbetās daļas arī apmierina Dārsī vienādojumu:

$$\alpha\vec{v}' + \nabla p' = 0 \tag{33}$$

Ievedot ātruma potenciālu kā $\phi = -p'/\alpha$ un izmantojot, izvesto speidienu uz frontes un salīdzinoši (ar pertubēto ātrumu frontē) nosakot, ka perturbācija uz šķidruma ātruma perturbāciju sānos ir 0, esam noformulējuši problēmu ātruma potenciālam:

$$\Delta\phi = 0 \tag{34}$$

$$\phi(\pm L,y) = 0 \tag{35}$$

$$\phi(x,-\infty) = 0 \tag{36}$$

$$\phi(x,-v_0 t) = -\frac{1}{\alpha}(p|_{y=-v_0 t} - p_0) = \frac{\sigma}{\alpha}\xi'' + v_0\xi \tag{37}$$

Pieņemam, ka frontes perturbācija izsakās $\xi = \xi_k(t)e^{ikx}$, tad ātruma potenciāla vērtība uz robežas:

$$\phi(x,-v_0 t) = (v_0 - \frac{\sigma}{\alpha}k^2)\xi_k(t)e^{ikx} \tag{38}$$

Risinot Laplasa vienādojumu ar šādu robežnosacījumu iegūstam:

$$\phi(x,y+v_0 t) = (v_0 - \frac{\sigma}{\alpha}k^2)\xi_k(t)e^{ikx}e^{-ky} \tag{39}$$

Tātad ātruma perturbācija uz frontes:

$$v_y'|_{y=-v_0 t} = k(v_0 - \frac{\sigma}{\alpha}k^2)\xi_k(t)e^{ikx} \tag{40}$$

D. Robežas dinamika izmantojot kinemātisko robežnosacījumu

Pēc atvasināšanas atrodam ka zinot $y = \xi(x,t)$, ātrums y ass virzienā izsakāms kā:

$$v_y' = \frac{dy}{dt} = \frac{\xi(x+v_x\Delta t, t+\Delta t) - \xi(x,t)}{\Delta t} = v_x\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial t} \tag{41}$$

Tā kā $v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}$, kur jau ietilpst ξ, tad pie maziem $\max\xi$ pirmais loceklis ir otrās kārtas mazs lielums, kuru atmetam. Kinemātiskais robežnosacījums mums dod vienādojumu pret $\xi_k(t)$ šādu:

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi_k(t)e^{ikx} = k(\frac{\sigma}{\alpha}k^2 + v_0)\xi_k(t)e^{ikx} \tag{42}$$

Meklējot vienādojuma atrisinājumu eksponentformā jeb $\xi_k(t) = e^{\lambda t}$ iegūstam sekojošu λ vērtību:

$$\lambda = k\left(v_0 - \frac{\sigma k^2}{\alpha}\right) \tag{43}$$

Šī izteiksme norāda, ka ir tādas pertubācijas, kuras nodilst. Visātrāk augošajai pertubācijai iegūstam šādu viļņa skaitli:

$$k = \sqrt{\frac{\alpha v_0}{3\sigma}} \tag{44}$$

Vēl varam noteikt, ka perturbācijas kļūst nestabilas tādiem viļņu garumiem, kuri pārsniedz:

$$l_{crit} = \frac{2\pi}{k_{crit}} = 2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{\alpha v_0}} = 2\pi \cdot 2d\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{12\mu v_0}} \tag{45}$$

kas sakrīt Saffmena-Teilora rakstu par Helē-Šho plūsmām.

III. SAFFMANA-TEILORA PIRKSTS

Eksperimentāli ir novērots, ka pietiekami ilgi pūšot ārā no Helē-Šou slānīša, no visām nestabilitātēm realizējās viens vienīgs pirksts ar platumu $2b$, kas pret šūnas platumu $2L$ izsakās kā $L = 2b$. Šī pirksta forma arī ir zināma, kuru mēs šeit aprēķināsim.

Apskatām stacionāru šķidruma izpūšanu no Hellē-Šou slānīša, kur gaisa pirkstam ātrums ir U y ass virzienā visos robežas punktos. Dēļ šķidruma viskozajiem spriegumiem šķērsvirzienā (kuri tika atmesti iegūstot Dārsī vienādojumu) plūsma kad $y \to +\infty$ kļūst vienmērīga ar ātrumu v_0. Tā kā šķidrums ir nesaspiežams un pirksta sākšanās vietā šķidruma ātrumu pieņemam par 0 tad ir spēkā:

$$\frac{b}{L} = \frac{v_0}{u} \stackrel{def}{=} \lambda \tag{46}$$

No Dārsī vienādojuma seko, ka to apmierina $\vec{v} = \nabla\phi$ jeb:

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad\qquad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{47}$$

bet dēļ šķidruma nesaspiežamības $\nabla \cdot \vec{v} = 0$:

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad\qquad v_y = \frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{48}$$

Tātad konstruēta funkcija:

$$f(x+iy) = \phi + i\psi \tag{49}$$

ir analītiska, jo apmierina Koši-Rīmana nosacījumus. Problēmas risināšana tādēļ no tieša Laplasa vienādojuma risināšanas tiek pārformulēta par analītiskas funkcijas atrašanu, kura apmierina robežnosacījumus.

A. Robežnosacījumu atrašana

Apskatīsim vispirms pirksta virsmu jeb robežu starp gaisu un ūdeni. Pēc Laplasa likuma pieņemot, ka $R \to +\infty$ spiediens šķidrumā pie virsmas ir vienāds ar atmosfēras spiedienu p_0. Izmantojot Dārsī vienādojumu secinām, ka:

$$v_\tau = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial p}{\partial s} = 0 \tag{50}$$

jeb šķidruma tangenciālais ātrums uz pirksta ir 0. Tā kā $v_\tau = \frac{\partial \phi}{\partial s}$, tad uz virsmas ātruma potenciāls ir konstants jeb $\phi|_p = const$. Šeit gan jāņem vērā, ka tas spēkā pie nosacījuma, kad ir spēkā Dārsī vienādojums, jeb ir atmetami šķērseniskie viskozitātes efekti. Reālā situācijā uz pirksta frontes veidojās robežslānis, kura biezumu vienkāršības labad tiecinam uz 0.

Pirksta ātrumu u var eksperimentāli nomērīt, kas pēc $u = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ dod strāvas funkcijas vērtību uz pirksta virsmas:

$$\psi|_p = ux \tag{51}$$

Šāda strāvas funkcija dod sekojošu ātruma sadalījumu uz pirksta:

$$v_n = \frac{\partial \psi}{\partial n} = u\frac{\partial x}{\partial n} = u\cos\theta \qquad v_\tau = \frac{\partial \psi}{\partial s} = u\frac{\partial x}{\partial s} = u\sin\theta \tag{52}$$

kur redzams, ka Dārsī vienādojums nestrādā tieši pie frontes, jo no tā izriet pielipšanas nosacījums.[1]

$$\psi(\pm L,y) = \mp v_0 L \qquad \phi(\pm L,y) = \int_{-\infty}^{y} v_y(y)dy \tag{53}$$

$$\psi|_p = -ux \qquad \phi|_p = 0 \tag{54}$$

$$\psi|_{y\to+\infty} = -v_0 x \qquad \phi|_{y\to+\infty} = v_0 y \tag{55}$$

[1] Interesanti, ka problēmu atrisinām ar konformo attelojumu metodi ar kuru pieprasām, lai transformeti apgabali būtu analītiskas funkcijas, bet tai pašā laikā robežas dodam neanalītiskas!

Lai problēma būtu noformulēta korekti, tad:

$$\psi|_{b<x<L} = -v_0 L - 0x \qquad \phi_{b<x<L} = 0 \tag{56}$$

$$\psi|_{-L<x<-b} = +v_0 L - 0x \qquad \phi_{-L<x<-b} = 0 \tag{57}$$

jeb plūsmas ātrums pie ieejas asimptotiski tiecās uz 0.

B. Konformā attēlojuma izmantošana

Esam izsprieduši par ko funkcija f attēlo risināmās problēmas apgabalu. Pieņemot, ka šī funkcija ir konforma, tad to varam izmantot, lai atrastu inverso attēlu no pirksta kontūru (ϕ,ψ) asīs tā kontūru (x,y) asīs tādējādi iegūstot meklējamo pirksta formu. Konformam attēlojumam inversā funkcija arī ir analītiska:

$$x + iy = f^{-1}(\phi + i\psi) \tag{58}$$

tādēļ tā apmierina Koši-Rīmana nosacījumus pret mainīgajiem ϕ,ψ:

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = \frac{\partial y}{\partial \psi} \qquad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \phi} \tag{59}$$

No tā savukārt seko, ka funkcija x apmierina Laplasa vienādojumu:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} = 0 \tag{60}$$

Robežnosacījumi funkcijai $x(\phi,\psi)$ ir atrodami no jau formulētajiem šādi:

$$x(\int_{-\infty}^{y} v_y(y)dy, \mp v_0 L) = \pm L \tag{61}$$

$$x(0,\psi) = -\psi/u \qquad -v_0 L \ < \psi < +v_0 L \tag{62}$$

$$x(v_0 y, \psi) = -\psi/v_0 \qquad -v_0 L \leq \psi \leq +v_0 L \tag{63}$$

C. Laplasa vienādojuma risināšana Teilora pirkstam

Pāriesim uz jaunu funkciju, kuru ar iepriekšējo saistam šādi:

$$x' = x + \frac{\psi}{v_0} \tag{64}$$

Šī funkcija tā kā atšķirās tikai pa lineāru locekli arī apmierina Laplasa vienādojumu tāpat kā x:

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 x'}{\partial \psi^2} = 0 \tag{65}$$

Robežnosacījumi transformējās par sekojošiem:

$$x'(\phi,v_0L) = x(\phi,v_0L) + \frac{v_0L}{v_0} = 0 \tag{66}$$

$$x'(\phi,-v_0L) = 0 \tag{67}$$

$$x'(0,\psi) = x(0,\psi) + \frac{\psi}{v_0} = -\frac{\psi}{u} + \frac{\psi}{v_0} = \psi\left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{u}\right) \overset{v_0=\lambda u}{=} \frac{\psi}{u}\frac{1-\lambda}{\lambda} \tag{68}$$

$$x'(\phi\to+\infty,\psi) = x(\phi\to+\infty,\psi) + \frac{\psi}{v_0} = 0 \tag{69}$$

Problēmas atrisinājumu meklējam formā:

$$x' = e^{-k\phi}(A_k \sin k\psi + B_k \cos k\psi) \tag{70}$$

Redzam, ka $x'|_{\phi\to+\infty} = 0$ apmierināts (tādēļ sākotnēji atmetām $e^{+k\phi}$), lai $x'(\phi,\pm v_0L)$ būtu 0 iegūstam, ka $B_k = 0$ un $k = \frac{\pi n}{v_0L}$. Lai apmierinātu robežnosacījumu uz pirksta virsmas izmantojam, ka jebkuru nepārtrauktu funkciju var izvirzīt Furjē rindā. Tā kā robeža ir aprakstīta ar nepāra funkciju, tad visi locekļi Furjē rindā pie kosinusiem ir 0 un tādēļ:

$$\frac{\psi}{u}\frac{1-\lambda}{\lambda} = \sum_n A_n \sin\left(\frac{\pi n}{v_0L}\psi\right) \tag{71}$$

Izmantosim šādas sakarības koeficientu A_n atrašanai:

$$\int_{-1}^{+1} \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)dx = \delta_{nm} \tag{72}$$

$$\int_{-1}^{+1} x\sin(n\pi x)dx = -\frac{2(-1)^n}{n\pi} \tag{73}$$

tādēļ integrējot augstāko vienādojumu ar $\sin\left(\frac{n\pi}{v_0L}\right)$ apgabalā $[-v_0L,+v_0L]$ iegūstam:

$$v_0LA_n = \frac{1-\lambda}{\lambda u}\int_{-v_0L}^{+v_0L} \psi \sin\left(\frac{n\pi}{v_0L}\psi\right)d\psi = \frac{1-\lambda}{\lambda u}(v_0L)^2\frac{-2(-1)^n}{n\pi} \tag{74}$$

Tas ļauj izteikt funkciju $x(\phi,\psi)$ šādi:

$$x = -(1-\lambda)\frac{2L}{\pi}\sum_n \frac{(-1)^n}{n} e^{-\frac{n\pi}{v_0L}\phi} \sin\left(\frac{n\pi}{v_0L}\psi\right) - \frac{\psi}{v_0} \tag{75}$$

kur izmantots $v_0 = \lambda u$. Redzams, ka funkcija x ir izsakāma kā reālā daļa no šādas funkcijas:

$$z = -(1-\lambda)\frac{2iL}{\pi}\sum_n \frac{(-1)^n}{n} e^{-\frac{n\pi}{v_0 L}(\phi + i\psi)} + \frac{i}{v_0}(\phi + i\psi) \tag{76}$$

Tā kā šī funkcija ir atkarīga tikai no kombinācijas $\phi + i\psi$ tad tā ir analītiska. Atbilstoši šīs funkcijas reālā un imaginārā daļa apmierina koši Rīmana nosacījumus:

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = \frac{\partial z^{Im}}{\partial \psi} \qquad\qquad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial z^{Im}}{\partial \phi} \tag{77}$$

No citas puses $x + iy = f^{-1}(\psi + i\phi)$ ir analītiska funkcija, kura arī apmierina Koši-Rīmana nosacījumus. Salīdzinot šos nosacījumus secinām, ka $y = z^{Im} + const$, kur konstantes vērtību noteiks atskaites izvēle.

Uz brīvās virsmas robežnosacījumi mums ir $\psi|_p = -ux$, $\phi|_p = 0$, kurus ievietojot un iegūstam:

$$z = -(1-\lambda)\frac{2iL}{\pi}\sum_n \frac{(-1)^n}{n} e^{+\frac{n\pi}{v_0 L}ux} + \frac{i}{v_0}(-ux) = (1-\lambda)\frac{2iL}{\pi}\log(1 + e^{\pi x/\lambda L}) - \frac{ix}{\lambda} \tag{78}$$

Šīs funkcijas imaginārā daļa:

$$z^{Im} = 2L(1-\lambda)\log\left[2\cos\frac{\pi x}{2\lambda L}\right] \tag{79}$$

Izvēloties tādu atskaites sistēmu kur $y|_{x=0} = 0$ noved mūs pie:

$$y = \frac{2L}{\pi}(1-\lambda)\log\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2\lambda L}\right)\right] \tag{80}$$