

Līdzsvara figūras un dinamika magnētiskā šķidrums pilienam ārējā laukā

Jānis Erdmanis

Līdzsvara figūras pilieniem (Vēsture)

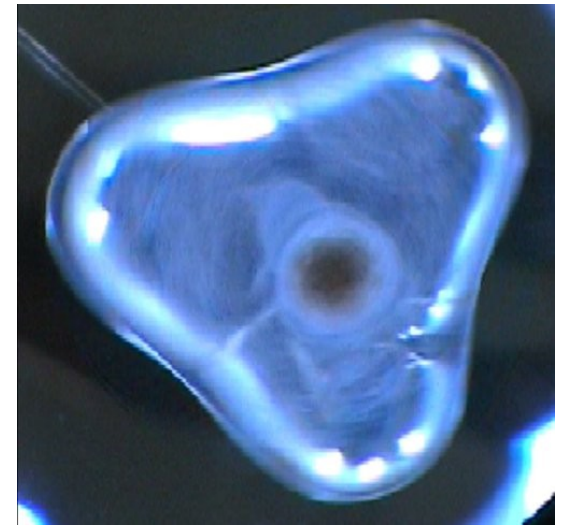
Saturna gredzeni;

Planētas saspiešanās centrālās spēku dēļ;

Dubultzvaigžņu sistēmas veidošanās;

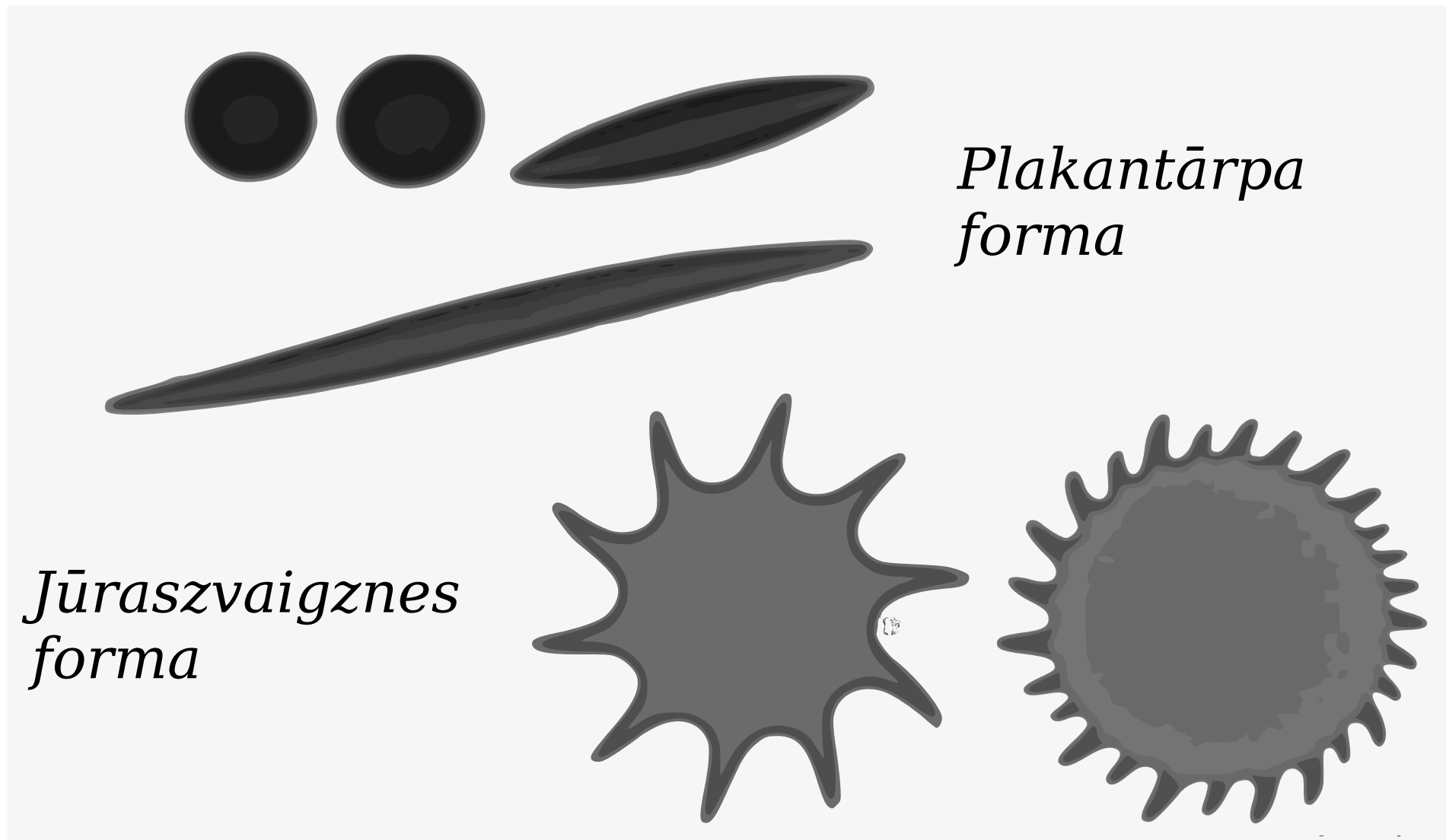
Rotējoši pilieni; *Plateau (1863)*

Pielietojums kodolfizikā.



Gamov (1930); Chandrasekhar (1965); Hill (2008)

Līdzvara figūras magnētiskā šķidruma pilieniem rotējošā laukā



Kas darīts iepriekš?

2D un aksiālsimetriskā gadījumā 3D ir veidotas simulācijas ar BEM. *Cebers (1983), Baygents (1998), Lac (2007)*

3D veidotas simulācijas ar FEM. *Ghaffari (2015)*

Bez ārēja lauka ir veidotas 3D pilienu simulācijas ar BEM (lielas deformācijas). *Zinchenko (1997), Pozikridis (2001), Cristini (2001)*

Tādēļ esmu izvēlējies BEM magnētiskā šķidruma piliena simulācijām.

Problēma

Vai piliens ieņem trīsas eliposodiālu formu?

Vai kvantitatīvi jūraszvaigznei var iegūt atbilstību ar teorētisko modeli?

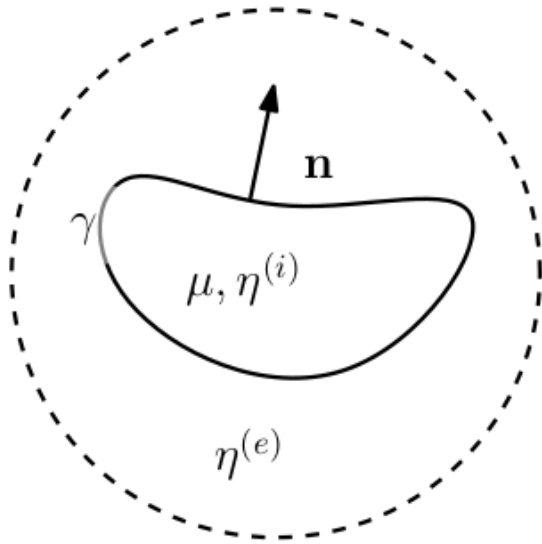
Vai pastāv histerēze līdzvara figūrām mainot rotējošā magnētiskā lauka intensitāti?

Kāda ir dinamika? Kas ir uzskatāms par augstfrekvences lauku?

Vai piliena nestabilitātes aug spontāni?

Tādēļ veidoju 3D piliena datorsimulāciju.

Modelis



$$\mathbf{H}(\mathbf{x} \rightarrow \infty) = \mathbf{H}_0$$

Spēks pilienā lauka dēļ $(\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{H}$

Virsmas spraigums γ

Stoksa vienādojumi η

Magnetizācijas spēku tilpumā var reducēt, kā spēku uz piliena virsmas.

Problēmas formulējums

$$-\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\sigma_{nn}^{(e)} - \sigma_{nn}^{(i)} = \gamma \nabla \cdot \mathbf{n} - \frac{\mu(\mu - 1)}{8\pi} H_n^2 - \frac{\mu - 1}{8\pi} H_t^2$$

$$\sigma_{tn}^{(e)} - \sigma_{tn}^{(i)} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Tādēļ iepriekš veiktās 3D simulācijas pilieniem ir jāpapildina ar magnētiskā lauka rēķināšanu uz virsmas.

Magnētiskais lauks uz virsmas

$$\mathbf{H} = \nabla \psi \qquad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$$

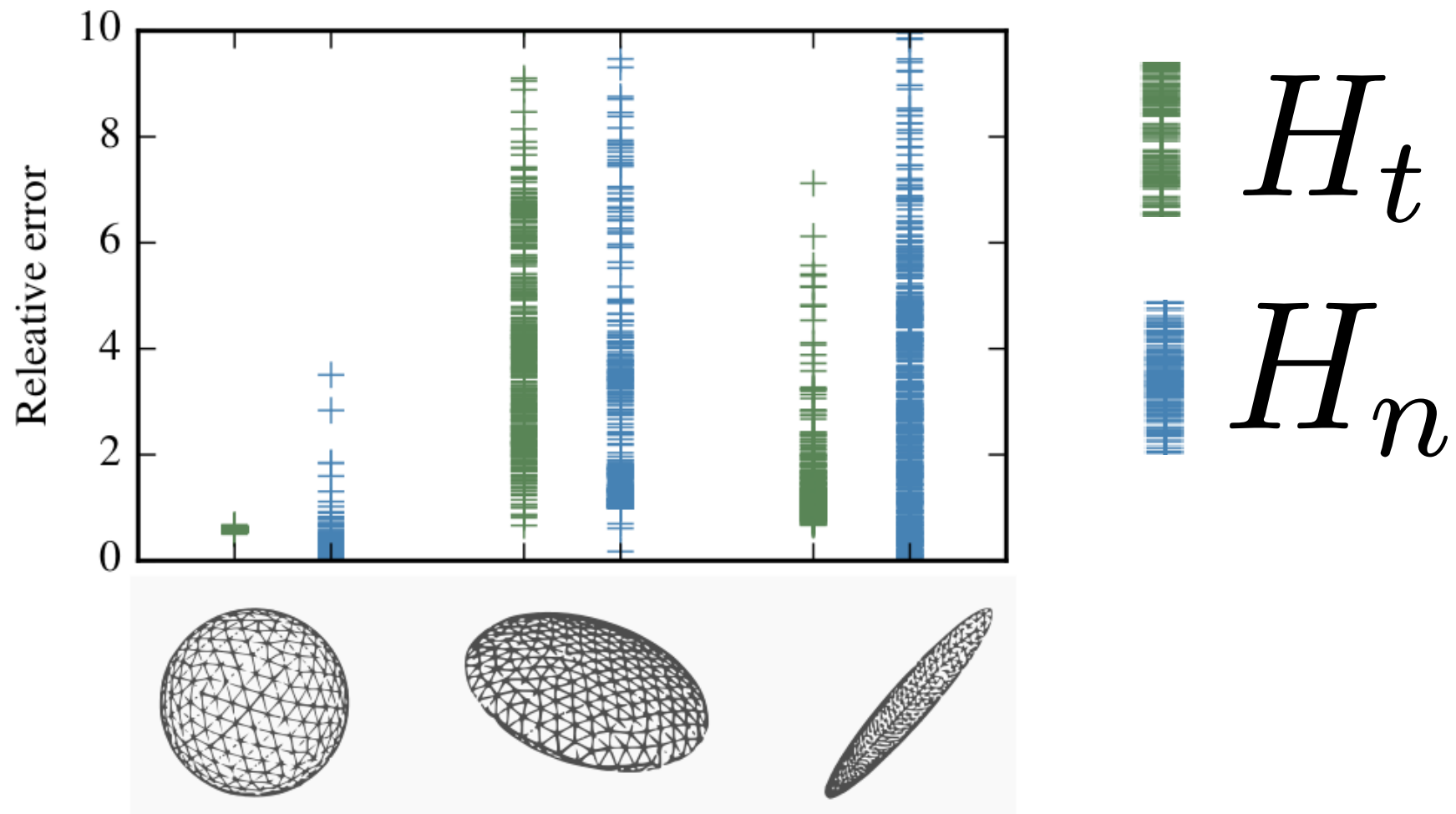
$$\psi(\mathbf{x}_0) = \frac{2\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{x}_0}{\mu + 1} - \frac{1}{2\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \mathcal{P} \int_{\partial D} \psi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{x}}} \frac{1}{r} dS_{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{t}} = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \nabla \psi \qquad H_{\mathbf{t}} = |\mathbf{H}_{\mathbf{t}}|$$

$$H_n(\mathbf{x}_0) = \frac{\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{x}_0}}{\mu} + \frac{1}{4\pi} \frac{1 - \mu}{\mu} \mathcal{P} \int_{\partial D} \mathbf{n}_{\mathbf{x}_0} \cdot \left[(\mathbf{n}_{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}_{\mathbf{t}}) \times \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{r} \right] dS_{\mathbf{x}}$$

Kurus regularizēju, diskretizēju trijstūru elementos un integrēju ar trapeces kvadrāturu.

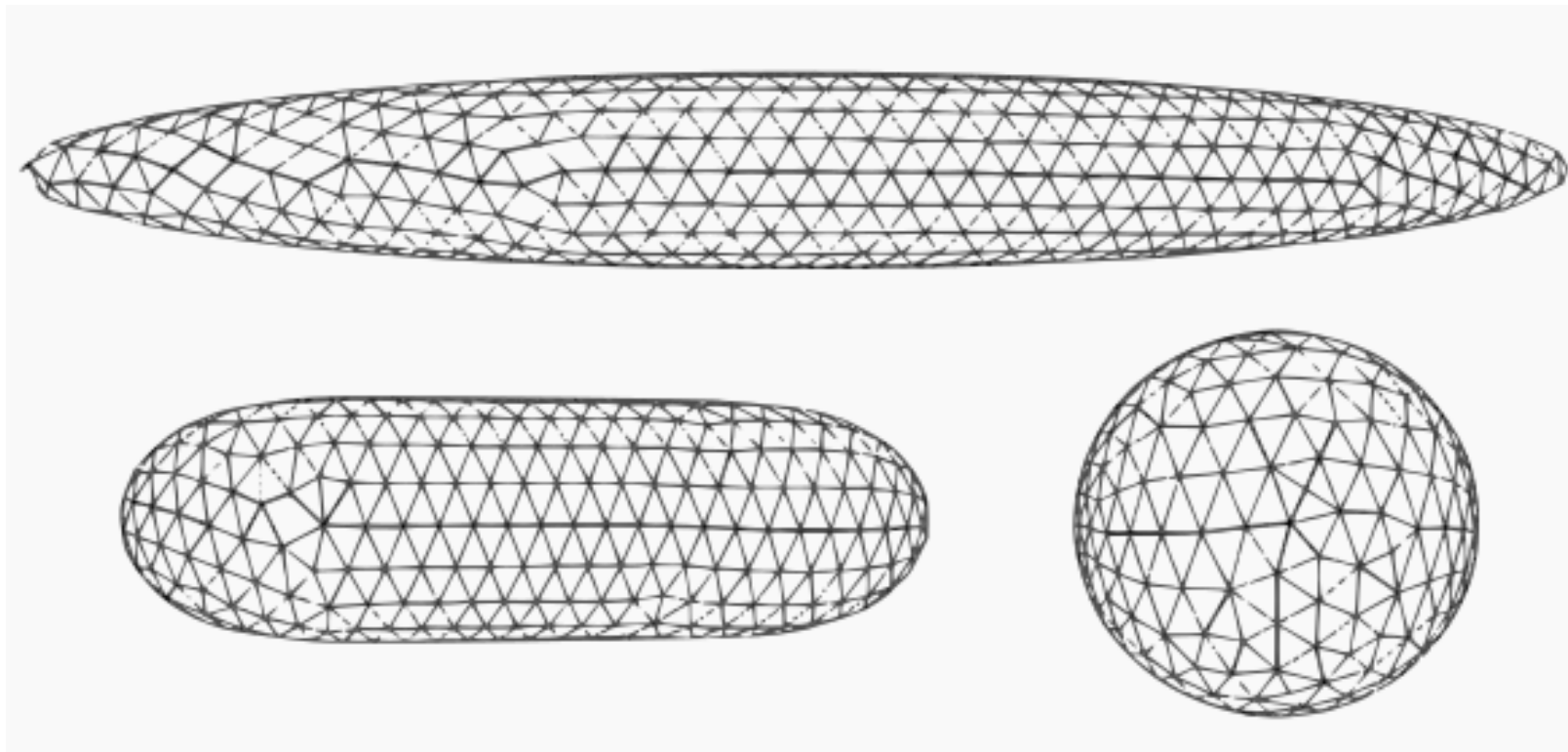
Magnētiskā lauka rēķināšanas tests



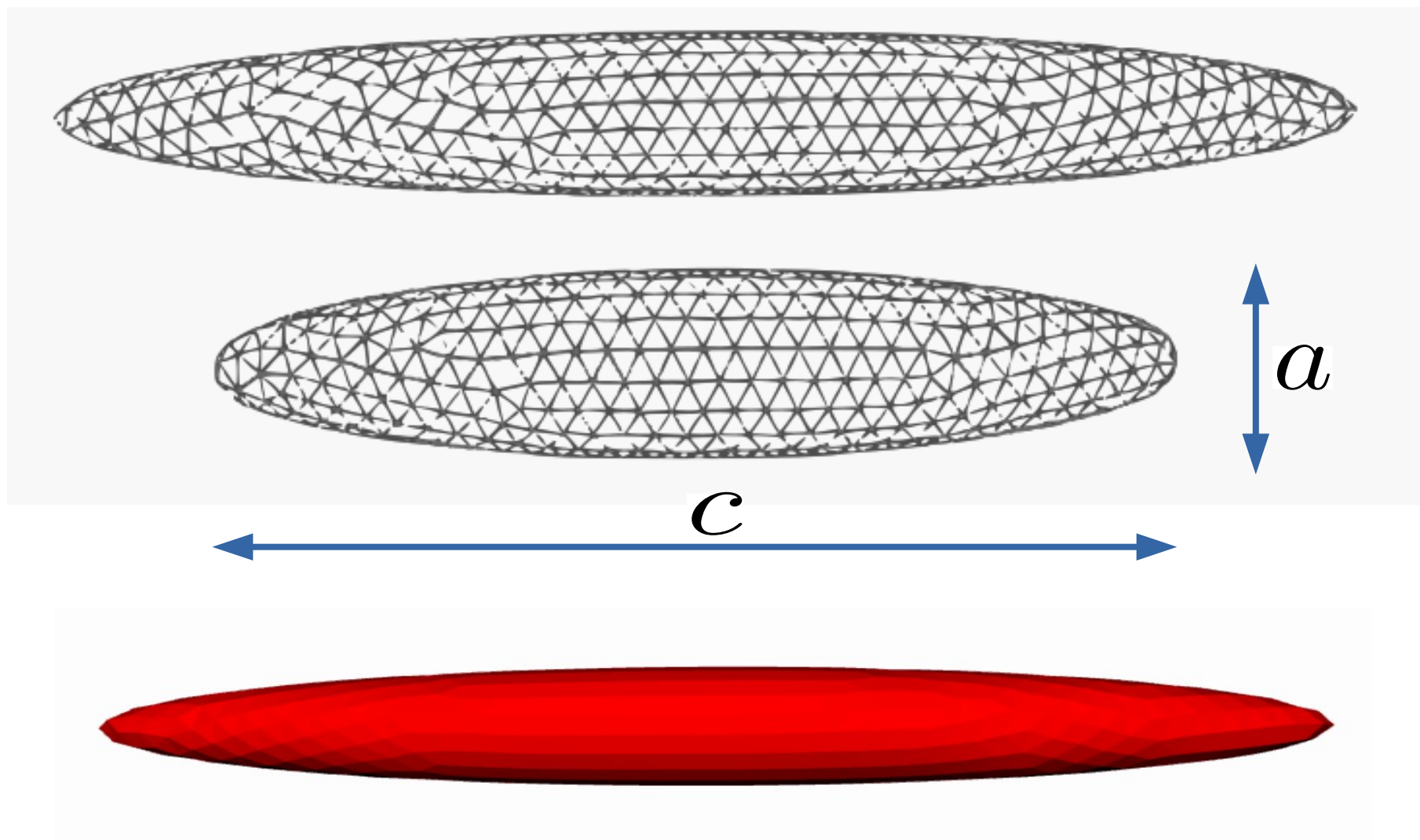
$$N \approx 500$$

$$\langle r \rangle \approx 5\%$$

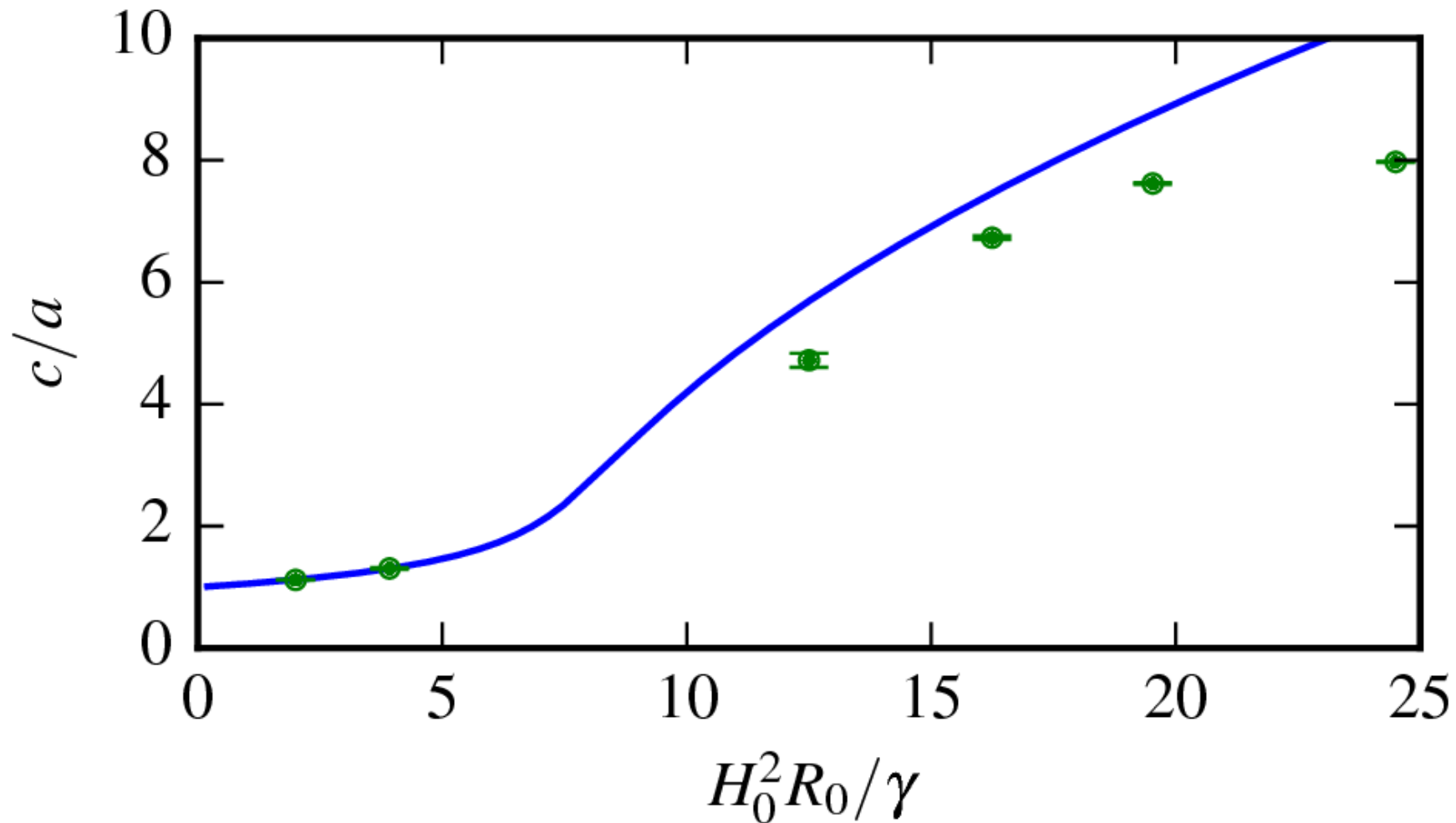
Relaksācijas dinamikas tests



Līdzvara figūra konstantā laukā

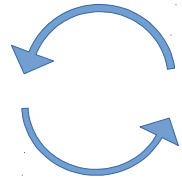


Pusasu attiecības salīdzinājums ar elipsoīda enerģijas minimumu ($\mu = 10$)

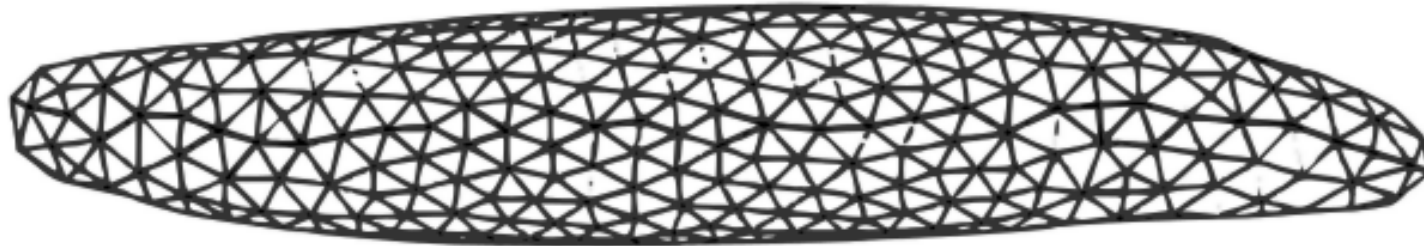


Bacri & Salin (1982), Afkhami (2010)

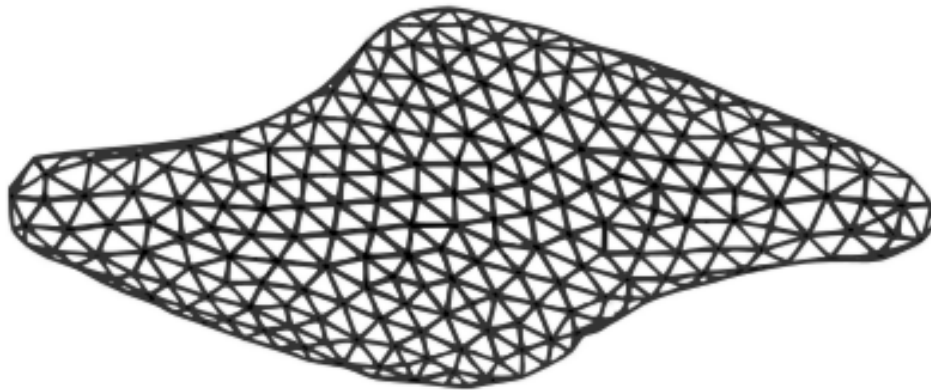
Simulācijas ar rotējošu lauku ($H_0^2 R_0 / \gamma = 35$)



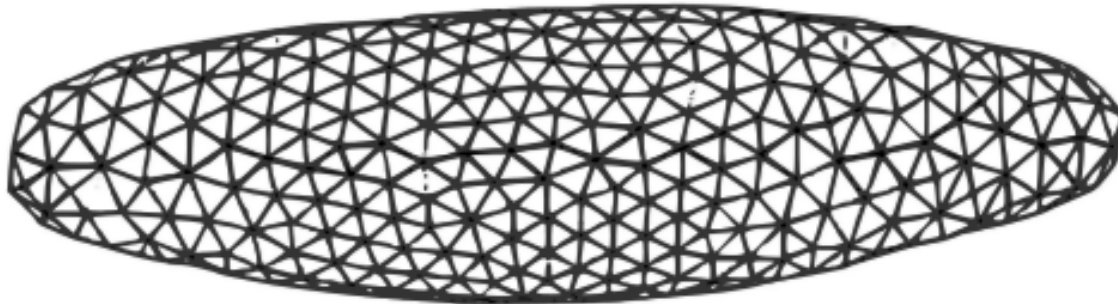
$$\mathbf{H}(t) = H_0(\cos \omega t, \sin \omega t, 0)$$



$$\omega = 0.175 \frac{\gamma}{\eta R_0}$$



$$\omega = 0.35 \frac{\gamma}{\eta R_0}$$

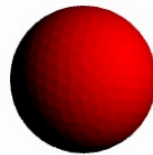


$$\omega = 2.80 \frac{\gamma}{\eta R_0}$$

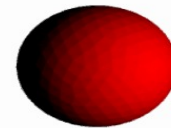
Simulācijas ar rotējošu lauku ($H_0^2 R_0 / \gamma = 35$)



$$\omega = 0.175 \frac{\gamma}{\eta R_0}$$



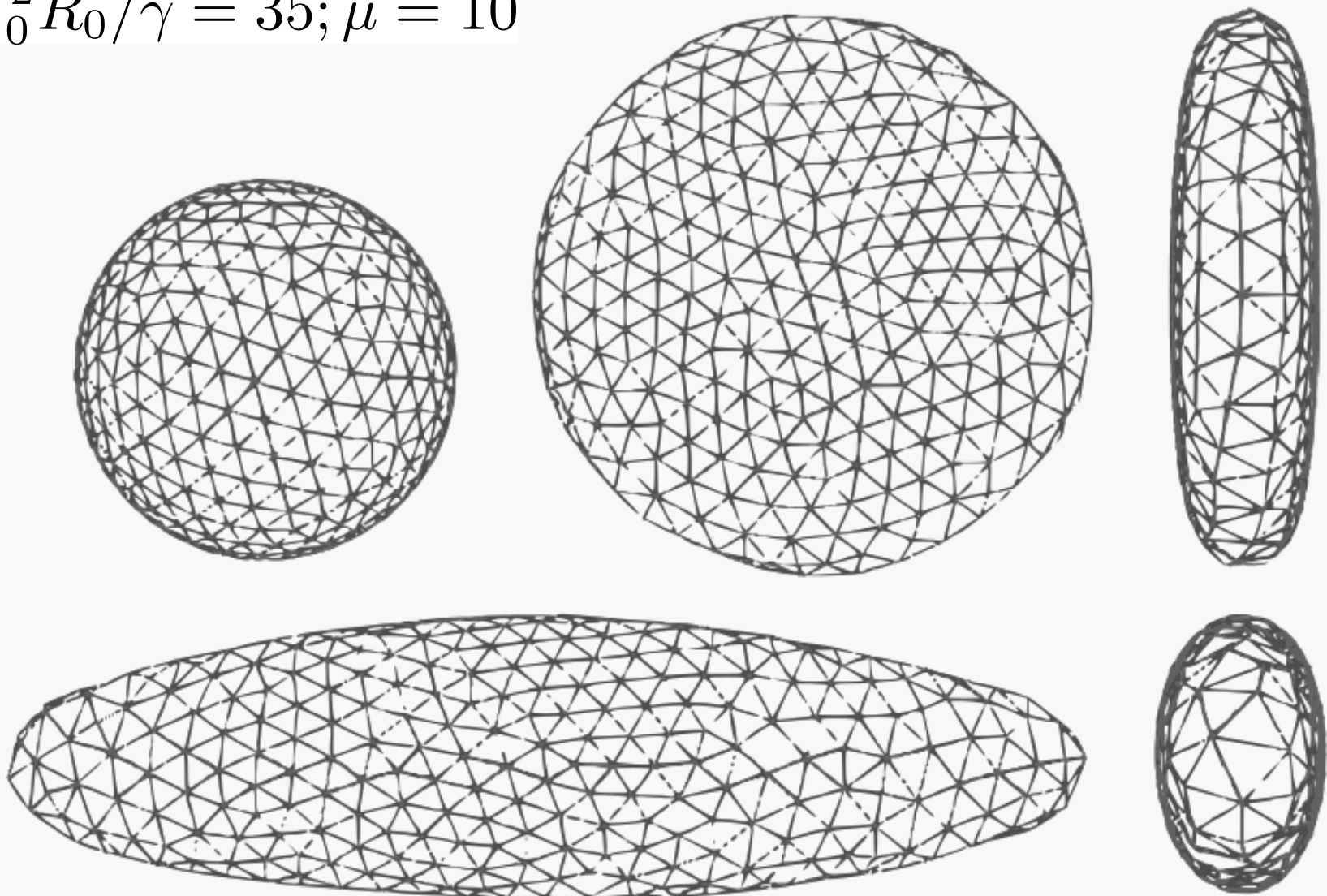
$$\omega = 0.35 \frac{\gamma}{\eta R_0}$$



$$\omega = 2.80 \frac{\gamma}{\eta R_0}$$

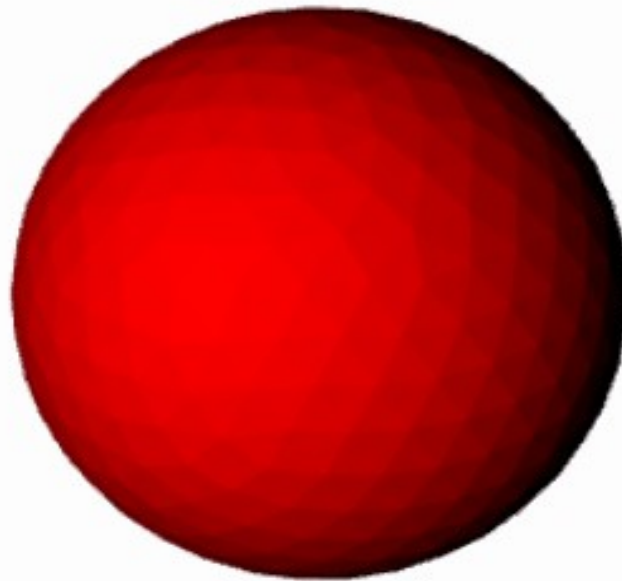
Simulācija augstfrekvences laukā

$$H_0^2 R_0 / \gamma = 35; \mu = 10$$

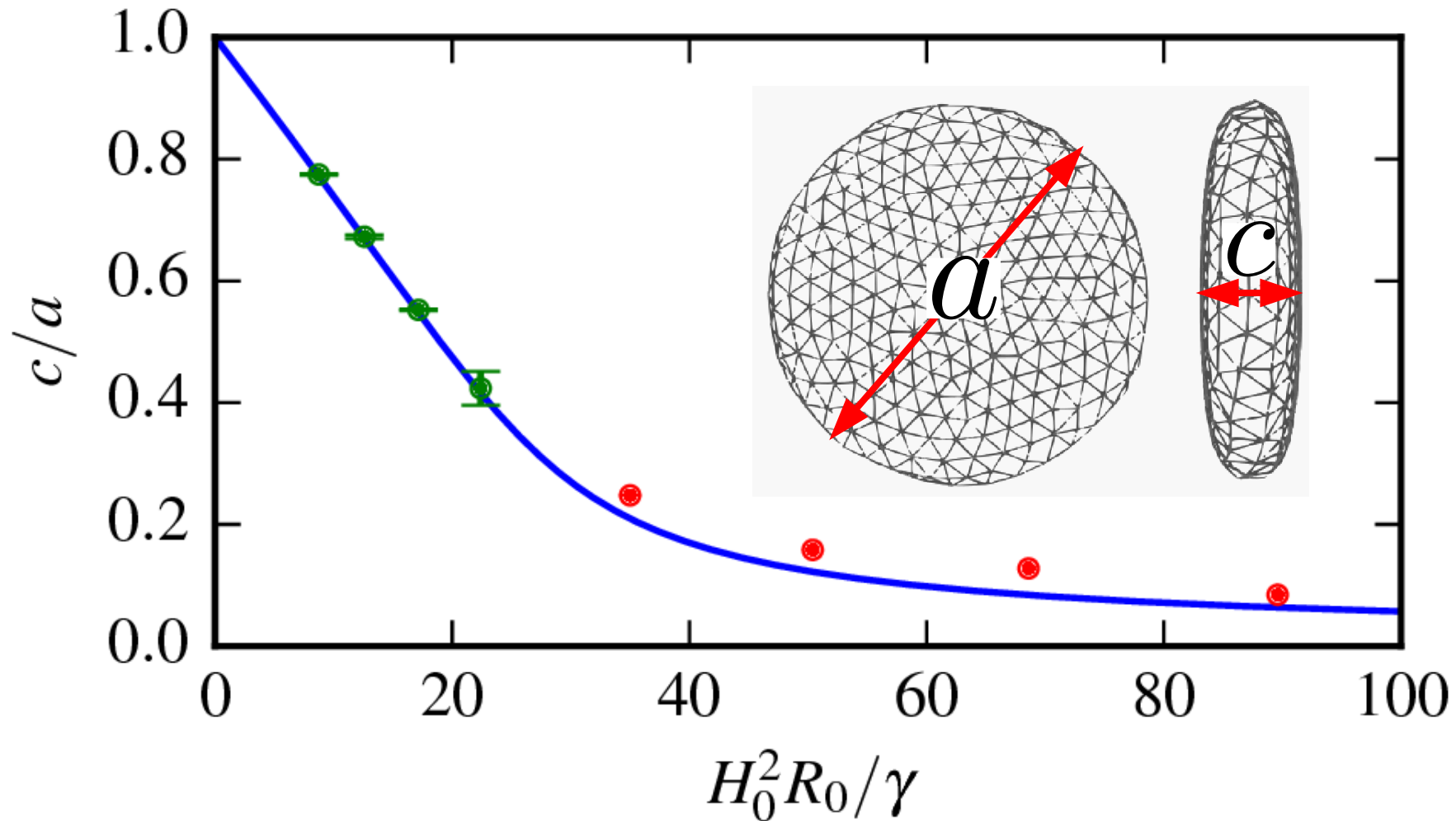


Simulācija augstfrekvences laukā

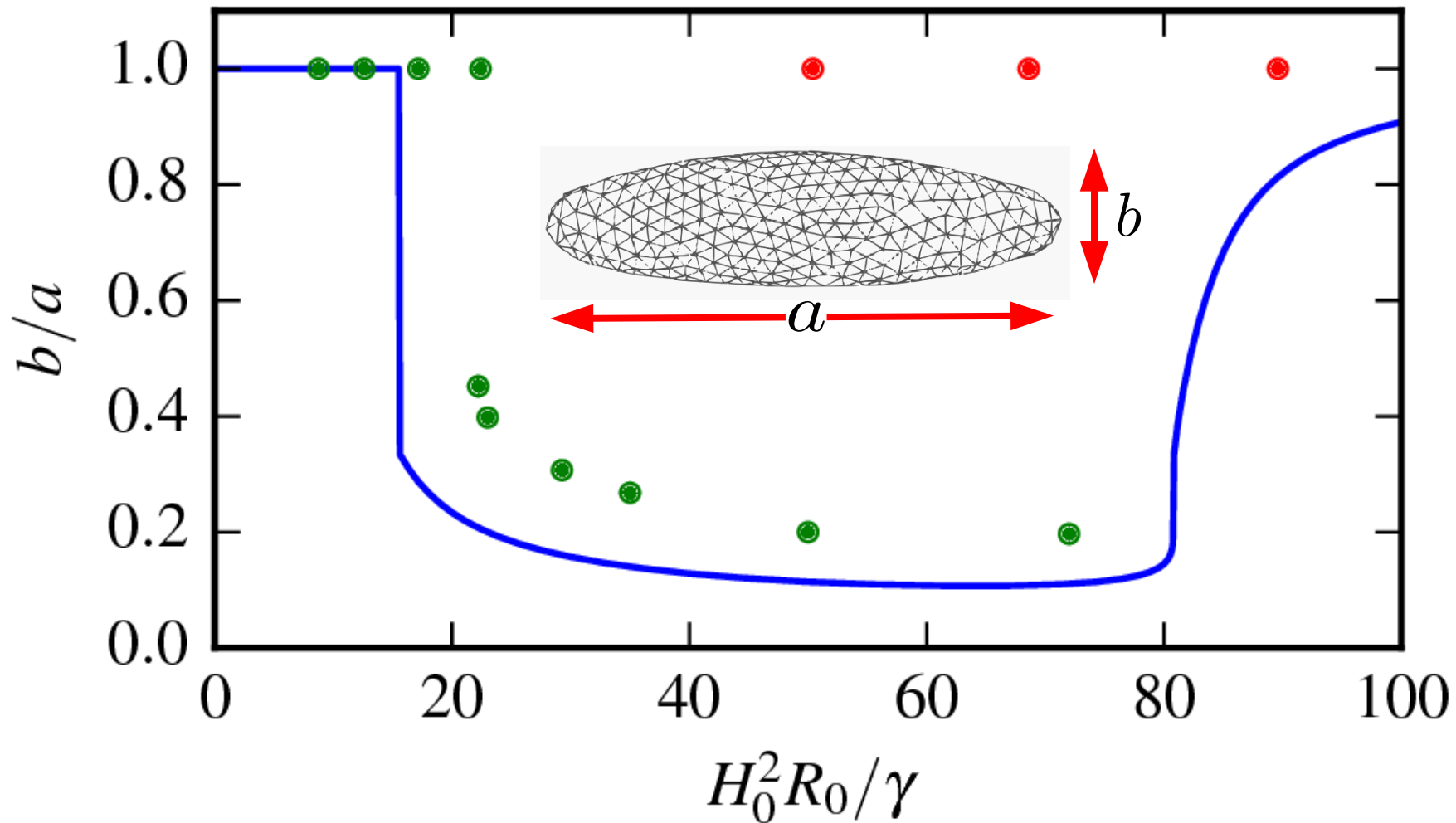
$$H_0^2 R_0 / \gamma = 35; \mu = 10$$



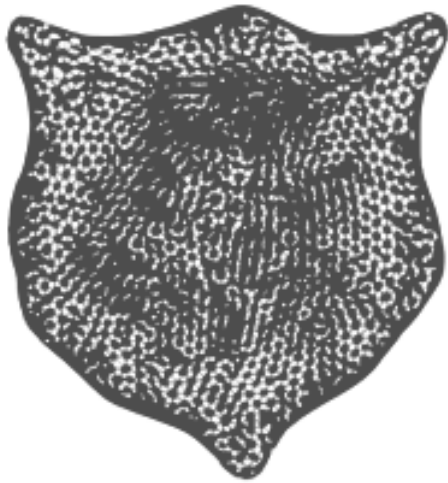
Pankūkas salīdzinājums ar rotācijas elipsoīda enerģijas minimumu ($\mu = 10$)



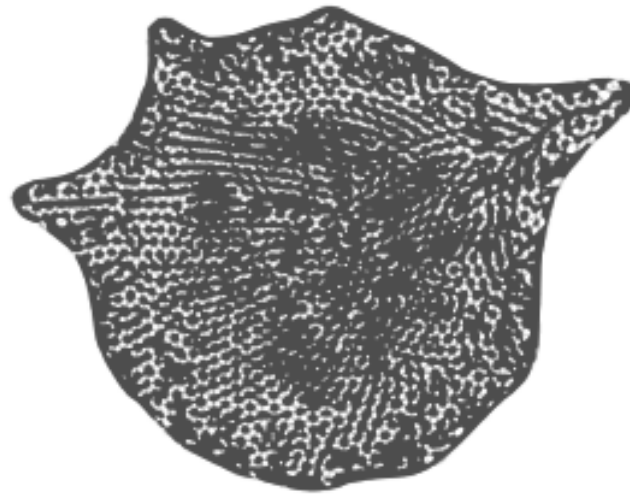
Plakantārpa salīdzinājums ar trīsasu elipsoīda minimumu ($\mu = 10$)



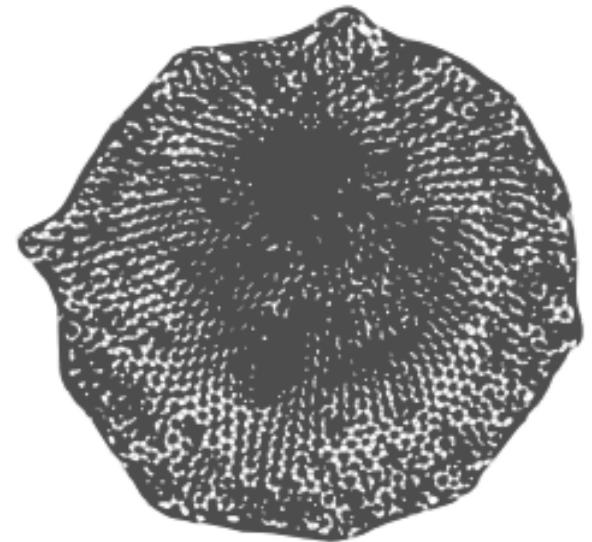
Pie lieliem laukiem pankūka spontāni
sabrūk par zvaigzni ($\mu = 10$)



$$H_0^2 R_0 / \gamma = 50$$



$$H_0^2 R_0 / \gamma = 69$$



$$H_0^2 R_0 / \gamma = 90$$



$$H_0^2 R_0 / \gamma = 50; \mu = 10$$

$$t = 0 \dots 170 \quad \eta R_0 / \gamma$$

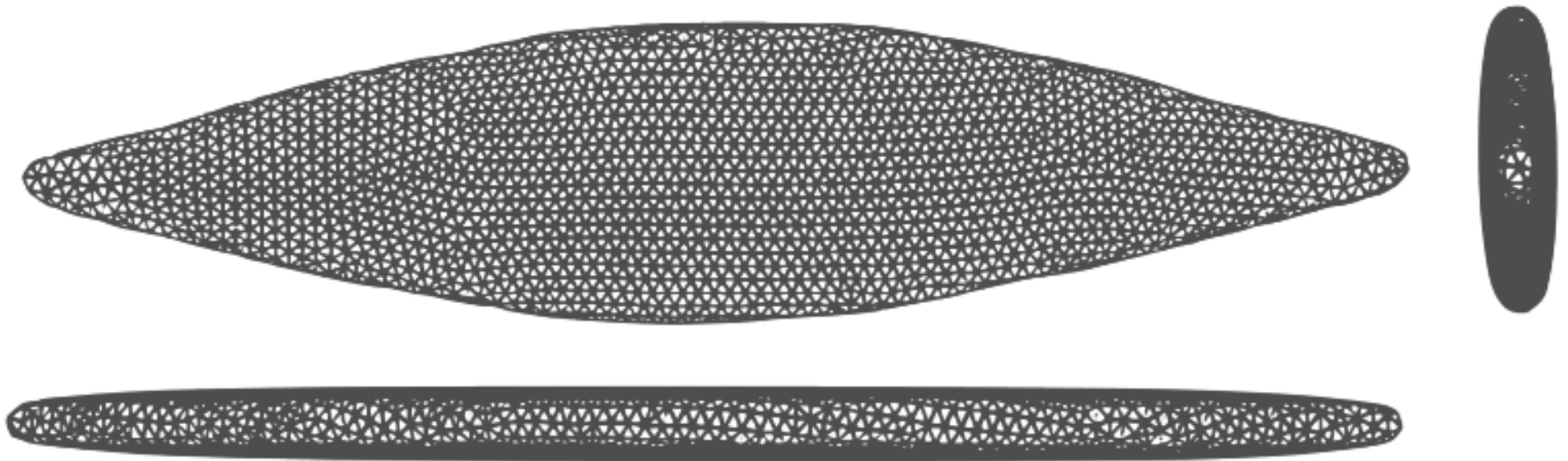
Trijstūru skaits
6000 ($N \approx 3000$)

Laika soli 2400

Aprēķins $\approx 100\text{h}$

Bet, ja sākotnējais stāvoklis ir elipsoīds (kvazistatiskais gadījums)

$$H_0^2 R_0 / \gamma = 72; \mu = 10$$



Iespējams triangulācijas stabilizācijas algoritms nolīdzina nestabilitātes. Vajag smalkāku triangulāciju.

Secinājumi

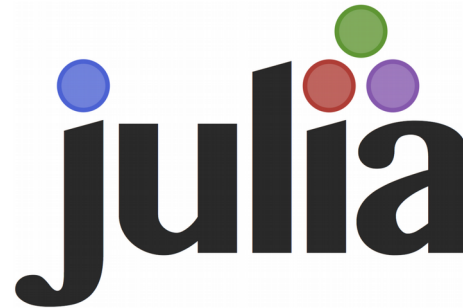
- 3D magnētiskā lauka aprēķināšanai jāizmanto citi robežintegrālvienādojumi;
- Novērots sinhronais un asinhronais gadījums. Augstfrekvence $\omega \gg 3\gamma/\eta R_0$;
- Spontāni sabrūk pankūka par plakantārpu vai jūraszvaigzni;
- Pankūka labi atbilst rotācijas elipsoīdam, bet plakantārps trīsas elipsoīdam;
- Elipsoīda enerģijas minimums labi apraksta piliena formu augstfrekvences laukā.

Kādu softu izmantoju



(require '**xcscope**)
(**cscope**-setup)

(require '**ess-site**)
(require '**ibuffer**)



Using JLD

Using PyPlot

Using ThreeJS

Using SurfaceGeometry

tmux

ssh janiserdmanis@5.179.6.146

rsync -a janiserdmanis@5.179.6.146:
~/SimulationData/ ~/SimulationData

Recenzenta jautājumi

Vai magnētiskā uzņēmība un caurlaidība ir viens un tas pats un kāda ir tās dimensija?

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} & \boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi \boldsymbol{M} & \mu = 1 + 4\pi\chi \\ \boldsymbol{M} = \chi \boldsymbol{H} & & \end{array}$$

CGS sistēmā μ bezdimensionāls.

Recenzenta jautājumi

Ko nozīmē “lineārs magnētiskais materiāls”?

Neveikli esmu vēlējies teikt $B = \mu H, \mu = \text{const}$

... magnētiskais materiāls ir lineārs ... \rightarrow ...
magnētiskā lauka indukcija ir lineāri
atkarīga no magnētiskā lauka intensitātes ...

Recenzenta jautājumi

Ko sauc par Košī integrāli?

Par Košī integrāli sauc tādu integrāli, kas eksistē izlaižot simetriskas formas mazu apkārtni ap singularitāti.

Par vāji singulāru integrāli sauc tādu, kas eksistē izlaižot patvaļīgas formas mazu apkārtni ap singularitāti.

$$\int_{\varepsilon} \psi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{x}}} \frac{1}{r} dS_{\mathbf{x}} \approx -\psi(\mathbf{x}_0) \int_{\varepsilon} \frac{r}{r^3} \mathbf{n} dS_{\mathbf{x}}$$

Recenzenta jautājums

Vai izlaižot singulāra integrāļa aprēķināšanu rezultāti var būt kļūdaini?

- Integrālim $\int_{\varepsilon} \psi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{x}}} \frac{1}{r} dS_{\mathbf{x}}$ varam izlaist patvaļīgas formas mazu apkārtni, kura kļūst mazāka palielinot elementu skaitu.
- Virsmu aprakstām ar plakaniem trijstūrveida elementiem, tādēļ integrāļi trijstūriem ar singularitāti ir 0.

$$\mathbf{n}_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

$$\mathbf{n}_{\mathbf{x}_0} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

Recenzenta jautājums

Formulējiet savu ieguldījumu darbā un perspektīvas tālākiem pētījumiem!

- Uzlabot simulācijas algoritmu – adaptīvs laika solis, atrast stabila laika soļa tuvinātu izteiksmi, precīzāks normāļu rēķināšanas algoritms, liekumam adaptīvs triangulācijas stabilizācijas algoritms, Runge-Kutte → Ādamsa-Bašforda (mainās virsotņu skaits, interpolācija), saprast kādēļ ir dažas lielas relatīvās kļūdas magnētisko lauku aprēķinot.
- Veikt analīzi modu augšanas ātrumiem un salīdzināt ar eksperimentu.
- Vai pie mazākiem μ var iegūt stabilu pankūku, kad $H_0^2 R_0 / \gamma \rightarrow \infty$?
- Precesējošs lauks.
- Vispārināt simulāciju dažādām viskozitātēm. Salīdzināt piliena formu un tā rotācijas frekvenci ar eksperimentu lēni rotējošā laukā.
- Kapilāros spēkus → virsmas elastību. Simulēt lipīdu bislāni ārējā laukā.
- Citas 3D elektrostrikcijas vai magnetostrikcijas parādības.
(*electrospinning, electrospraying*)