

Методы оптимизации. Семинар 1.

Введение. Выпуклые множества.

Конусы.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт

1 сентября 2020 г.

О чём этот курс?

Первый семестр (теоретический):

- ▶ Основы выпуклого анализа
- ▶ Условия оптимальности
- ▶ Теория двойственности
- ▶ Линейное программирование: симплекс-метод

О чём этот курс?

Первый семестр (теоретический):

- ▶ Основы выпуклого анализа
- ▶ Условия оптимальности
- ▶ Теория двойственности
- ▶ Линейное программирование: симплекс-метод

Второй семестр (практический):

- ▶ Методы безусловной минимизации первого и второго порядка
- ▶ Методы условной оптимизации
- ▶ Барьерные методы
- ▶ Оптимальные методы
- ▶ ...

План на семестр

- ▶ Семинар и лекция раз в неделю

План на семестр

- ▶ Семинар и лекция раз в неделю
- ▶ Домашние задания раз в неделю. Решения оформляются в \LaTeX

План на семестр

- ▶ Семинар и лекция раз в неделю
- ▶ Домашние задания раз в неделю. Решения оформляются в \LaTeX
- ▶ Экзамен в конце семестра. Оценка за курс — среднее арифметическое:

План на семестр

- ▶ Семинар и лекция раз в неделю
- ▶ Домашние задания раз в неделю. Решения оформляются в \LaTeX
- ▶ Экзамен в конце семестра. Оценка за курс — среднее арифметическое:
 - ▶ оценки за работу в семестре

План на семестр

- ▶ Семинар и лекция раз в неделю
- ▶ Домашние задания раз в неделю. Решения оформляются в \LaTeX
- ▶ Экзамен в конце семестра. Оценка за курс — среднее арифметическое:
 - ▶ оценки за работу в семестре
 - ▶ ответа на экзамене

План на семестр

- ▶ Семинар и лекция раз в неделю
- ▶ Домашние задания раз в неделю. Решения оформляются в \LaTeX
- ▶ Экзамен в конце семестра. Оценка за курс — среднее арифметическое:
 - ▶ оценки за работу в семестре
 - ▶ ответа на экзамене
- ▶ Piazza для Q&A

Литература

Основная книга

S. Boyd and L. Vandenberghe *Convex Optimization*

<https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/>

- ▶ К.Ю. Осипенко Лекции
- ▶ В.Г. Жадан *Методы оптимизации. Часть 1. Введение в выпуклый анализ и теорию оптимизации*
- ▶ R.T. Rockafellar *Convex analysis*

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества
- ▶ Обоснование правильности принятия решения

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества
- ▶ Обоснование правильности принятия решения
- ▶ Разнообразные приложения:

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества
- ▶ Обоснование правильности принятия решения
- ▶ Разнообразные приложения:
 - ▶ машинное обучение

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества
- ▶ Обоснование правильности принятия решения
- ▶ Разнообразные приложения:
 - ▶ машинное обучение
 - ▶ молекулярное моделирование

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества
- ▶ Обоснование правильности принятия решения
- ▶ Разнообразные приложения:
 - ▶ машинное обучение
 - ▶ молекулярное моделирование
 - ▶ анализ рисков

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества
- ▶ Обоснование правильности принятия решения
- ▶ Разнообразные приложения:
 - ▶ машинное обучение
 - ▶ молекулярное моделирование
 - ▶ анализ рисков
 - ▶ выбор активов (portfolio optimization)

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества
- ▶ Обоснование правильности принятия решения
- ▶ Разнообразные приложения:
 - ▶ машинное обучение
 - ▶ молекулярное моделирование
 - ▶ анализ рисков
 - ▶ выбор активов (portfolio optimization)
 - ▶ оптимальное управление

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества
- ▶ Обоснование правильности принятия решения
- ▶ Разнообразные приложения:
 - ▶ машинное обучение
 - ▶ молекулярное моделирование
 - ▶ анализ рисков
 - ▶ выбор активов (portfolio optimization)
 - ▶ оптимальное управление
 - ▶ обработка сигналов

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества
- ▶ Обоснование правильности принятия решения
- ▶ Разнообразные приложения:
 - ▶ машинное обучение
 - ▶ молекулярное моделирование
 - ▶ анализ рисков
 - ▶ выбор активов (portfolio optimization)
 - ▶ оптимальное управление
 - ▶ обработка сигналов
 - ▶ оценка параметров в статистике

Зачем этот курс?

- ▶ Формализация задачи выбора элемента из множества
- ▶ Обоснование правильности принятия решения
- ▶ Разнообразные приложения:
 - ▶ машинное обучение
 - ▶ молекулярное моделирование
 - ▶ анализ рисков
 - ▶ выбор активов (portfolio optimization)
 - ▶ оптимальное управление
 - ▶ обработка сигналов
 - ▶ оценка параметров в статистике
 - ▶ и другие

Предварительные навыки

Первый семестр

- ▶ Линейная алгебра
- ▶ Математический анализ
- ▶ Элементы вычислительной математики

Второй семестр

- ▶ Программирование: Python (NumPy, SciPy, CVXPY, JAX/PyTorch)
- ▶ Элементы вычислительной математики

Методология

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции

Методология

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений

Методология

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений
3. Постановка и анализ оптимизационной задачи

Методология

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений
3. Постановка и анализ оптимизационной задачи
4. Выбор наилучшего алгоритма для решения поставленной задачи

Методология

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений
3. Постановка и анализ оптимизационной задачи
4. Выбор наилучшего алгоритма для решения поставленной задачи
5. Реализация алгоритма и проверка его корректности

Постановка задачи

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in X} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = p + 1, \dots, m, \end{aligned}$$

Постановка задачи

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in X} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = p + 1, \dots, m, \end{aligned}$$

- ▶ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор

Постановка задачи

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in X} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = p + 1, \dots, m, \end{aligned}$$

- ▶ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор
- ▶ $f_0(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — целевая функция

Постановка задачи

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in X} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = p + 1, \dots, m, \end{aligned}$$

- ▶ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор
- ▶ $f_0(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — целевая функция
- ▶ $f_k(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функции ограничений типа равенств и неравенств

Постановка задачи

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in X} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = p + 1, \dots, m, \end{aligned}$$

- ▶ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор
- ▶ $f_0(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — целевая функция
- ▶ $f_k(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функции ограничений типа равенств и неравенств
- ▶ \mathbf{x}^* — точка минимума (локального или глобального)

Постановка задачи

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in X} f_0(\mathbf{x}) \\ & \text{s.t. } f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & \quad f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = p + 1, \dots, m, \end{aligned}$$

- ▶ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор
- ▶ $f_0(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — целевая функция
- ▶ $f_k(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функции ограничений типа равенств и неравенств
- ▶ \mathbf{x}^* — точка минимума (локального или глобального)
- ▶ f^* — минимальное значение (локальное или глобальное) функции на допустимом множестве

Пример формализации задачи

Дан набор активов между которыми надо распределить имеющиеся средства. Нужно определить, какую часть в какой актив вложить.

Обозначения

- ▶ x — размер инвестиций в каждый актив
- ▶ $r(x)$ — суммарный риск или вариация прибыли при данном распределении x
- ▶ c — бюджетные ограничения: ограничения по вложению в каждый актив

Возможные задачи

- ▶ Максимизация ожидаемой прибыли
- ▶ Минимизация рисков

Как решать?

В общем случае:

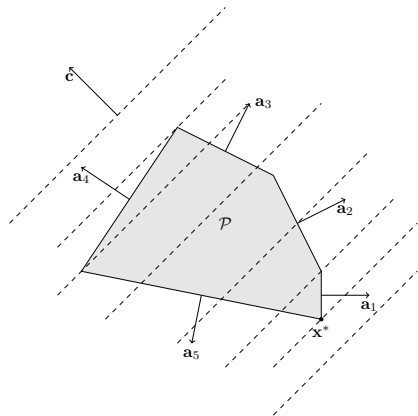
- ▶ NP-полные
- ▶ рандомизированные алгоритмы: время vs. стабильность

Но определённые классы задач могут быть решены быстро!

- ▶ Линейное программирование
- ▶ Линейная задача наименьших квадратов
- ▶ Задача о малоранговом приближении матрицы
- ▶ Задача выпуклой оптимизации

Линейное программирование

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$



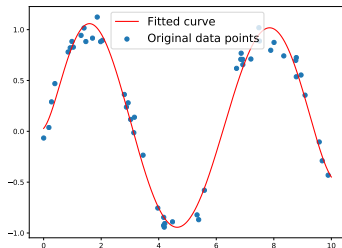
- ▶ нет аналитического решения
- ▶ существуют эффективные алгоритмы
- ▶ разработанная технология
- ▶ симплекс-метод входит в Топ-10 алгоритмов XX века¹

¹<https://archive.siam.org/pdf/news/637.pdf>

Линейная задача наименьших квадратов

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2,$$

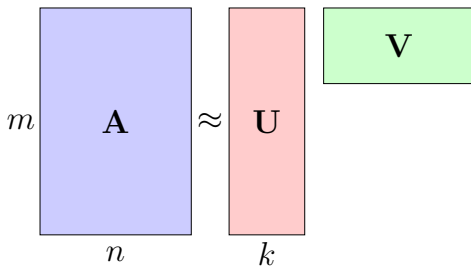
где $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$,
 $m > n$.



- ▶ имеет аналитическое решение
- ▶ существуют эффективные алгоритмы для его вычисления
- ▶ разработанная технология
- ▶ имеет статистическую интерпретацию

Малоранговое приближение матрицы

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}} \quad & \|\mathbf{A} - \mathbf{X}\|_F \\ \text{s.t.} \quad & \text{rank}(\mathbf{X}) \leq k \end{aligned}$$



Задача выпуклой оптимизации

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m < n \end{aligned}$$

- ▶ f_0, f_i — выпуклые функции:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2),$$

где $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$.

Задача выпуклой оптимизации

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) \\ & \text{s.t. } f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m < n \end{aligned}$$

- ▶ f_0, f_i — выпуклые функции:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2),$$

где $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$.

- ▶ нет аналитического решения

Задача выпуклой оптимизации

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m < n \end{aligned}$$

- ▶ f_0, f_i — выпуклые функции:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2),$$

где $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$.

- ▶ нет аналитического решения
- ▶ существуют эффективные методы решения

Задача выпуклой оптимизации

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m < n \end{aligned}$$

- ▶ f_0, f_i — выпуклые функции:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2),$$

где $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$.

- ▶ нет аналитического решения
- ▶ существуют эффективные методы решения
- ▶ существуют приёмы для преобразования задачи к стандартному виду

Главное в первой части

- ▶ Организация работы
- ▶ Предмет курса по оптимизации
- ▶ Общая формулировка оптимизационных задач
- ▶ Классические оптимизационные задачи

Выпуклые множества и конусы

- ▶ Для задания целевой функции необходимо задать область её определения
- ▶ Выпуклые функции определены на выпуклых множествах
- ▶ Коническое представление задачи оптимизации существенно упрощает её решение
- ▶ Большинство универсальных солверов для задач выпуклой оптимизации работают с коническими задачами

Операции с множествами

- ▶ Линейная комбинация множеств $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$

$$\alpha\mathcal{G}_1 + \beta\mathcal{G}_2 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \in \mathcal{G}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{G}_2\},$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- ▶ Декартово произведение $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$

$$\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mid \mathbf{x}_1 \in \mathcal{G}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{G}_2\}$$

Аффинное множество

Аффинное множество

Множество \mathcal{A} называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta\mathbf{x}_1 + (1 - \theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

Примеры: \mathbb{R}^n , гиперплоскость, точка.

Аффинная комбинация точек

Пусть $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathcal{G}$, тогда **точка** $\theta_1\mathbf{x}_1 + \dots + \theta_k\mathbf{x}_k$ при

$\sum_{i=1}^k \theta_i = 1$ называется аффинной комбинацией точек $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$.

Аффинная оболочка точек

Множество $\left\{ \sum_{i=1}^k \theta_i \mathbf{x}_i \mid \mathbf{x}_i \in \mathcal{G}, \sum_{i=1}^k \theta_i = 1 \right\}$ называется аффинной оболочкой множества \mathcal{G} и обозначается $\text{aff}(\mathcal{G})$.

Факты об аффинных множествах

Утверждение 1

Множество является аффинным тогда и только тогда, когда в него входят все аффинные комбинации его точек.

Утверждение 2

Множество является аффинным тогда и только тогда, когда его можно представить в виде $\{x \mid Ax = b\}$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $m \leq n$.

Внутренности множества

Внутренность множества

Внутренность множества \mathcal{G} состоит из точек \mathcal{G} , таких что:

$$\text{int}(\mathcal{G}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{G} \mid \exists \varepsilon > 0, B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset \mathcal{G}\},$$

где $B(\mathbf{x}, \varepsilon) = \{\mathbf{y} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq \varepsilon\}$

Относительная внутренность

Относительной внутренностью множества \mathcal{G} называют следующее множество:

$$\text{relint}(\mathcal{G}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{G} \mid \exists \varepsilon > 0, B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \text{aff}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{G}\}$$

Q: зачем нужна концепция относительной внутренности?

Примеры

Найти относительные внутренности следующих множеств

1. $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$
2. $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 \leq 1, \alpha_i > 0, i = 1, \dots, n\}$
3. $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 = 1, \alpha_i > 0, i = 1, \dots, n\}$
4. $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1, x_3 = 0\}$

Выпуклое множество

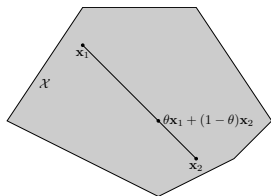
Выпуклое множество

Множество \mathcal{X} называется выпуклым, если

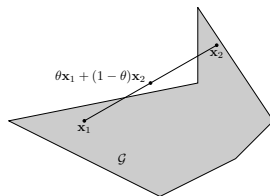
$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}, \theta \in [0, 1] \rightarrow \theta \mathbf{x}_1 + (1 - \theta) \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}.$$

Множества \emptyset и $\{\mathbf{x}_0\}$ также считаются выпуклыми.

Примеры: \mathbb{R}^n , аффинное множество, луч, отрезок.



Выпуклое множество



Невыпуклое множество

Выпуклая оболочка множества

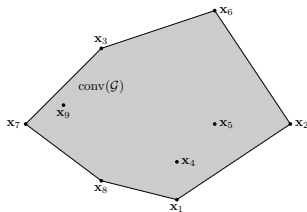
Выпуклая комбинация точек

Точка $\theta_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \theta_k \mathbf{x}_k$ при $\sum_{i=1}^k \theta_i = 1, \theta_i \geq 0$ называется выпуклой комбинацией точек $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$.

Выпуклая оболочка множества

Выпуклой оболочкой множества \mathcal{G} называется **множество**

$$\text{conv}(\mathcal{G}) = \left\{ \sum_{i=1}^k \theta_i \mathbf{x}_i \mid \mathbf{x}_i \in \mathcal{G}, \sum_{i=1}^k \theta_i = 1, \theta_i \geq 0 \right\}.$$



Выпуклая оболочка множества $\mathcal{G} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_9\}$

Факты о выпуклых множествах

1. Множество \mathcal{G} выпукло тогда и только тогда, когда любая выпуклая оболочка точек из \mathcal{G} лежит в \mathcal{G}
2. Если \mathcal{X} выпуклое множество и $\bar{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}$, то $\text{conv}(\bar{\mathcal{X}}) \subset \mathcal{X}$.

Теорема Каратеодори

Если множество $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$, тогда любая точка из $\text{conv}(\mathcal{G})$ является выпуклой комбинацией не более чем $n + 1$ точки из \mathcal{G} .

Операции, сохраняющие выпуклость множества

- ▶ Пересечение любого (**конечного или бесконечного**) числа выпуклых множеств — выпуклое множество
- ▶ Образ аффинного отображения, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$, выпуклого множества — выпуклое множество
- ▶ Линейная комбинация выпуклых множеств — выпуклое множество
- ▶ Декартово произведение выпуклых множеств — выпуклое множество

Примеры

Проверьте на аффинность и выпуклость следующие множества:

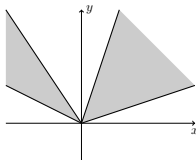
1. Полупространство: $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq c\}$
2. Многоугольник: $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{C}\mathbf{x} = 0\}$
3. Шар по норме в \mathbb{R}^n : $B(r, \mathbf{x}_c) = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c\| \leq r\}$
4. Эллипсоид:
 $\mathcal{E}(\mathbf{x}_c, \mathbf{P}, r) = \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)^\top \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \leq r^2\}$
5. Множество симметричных
положительно-полуопределённых матриц:
 $\mathbf{S}_+^n = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \mathbf{X}^\top = \mathbf{X}, \mathbf{X} \succeq 0\}$
6. $\{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{trace}(\mathbf{X}) = \text{const}\}$
7. Гиперболическое множество: $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \mid \prod_{i=1}^n x_i \geq 1\}$

Конус

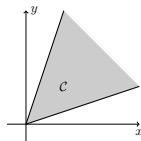
Определение

Множество \mathcal{C} называется

- ▶ конусом, если $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}, \theta \geq 0 \rightarrow \theta \mathbf{x} \in \mathcal{C}$



- ▶ выпуклым конусом, если $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{C}, \theta_1, \theta_2 \geq 0 \rightarrow \theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2 \in \mathcal{C}$



Примеры: аффинное множество, включающее 0; луч.

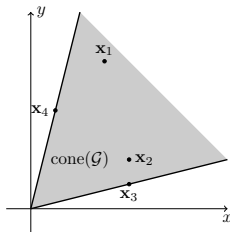
Коническая комбинация и коническая оболочка

Коническая (неотрицательная) комбинация точек

Пусть $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathcal{G}$, тогда **точка** $\theta_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \theta_k \mathbf{x}_k$ при $\theta_i \geq 0$ называется конической (неотрицательной) комбинацией точек $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$.

Коническая оболочка точек

Множество $\left\{ \sum_{i=1}^k \theta_i \mathbf{x}_i \mid \mathbf{x}_i \in \mathcal{G}, \theta_i \geq 0 \right\}$ называется конической оболочкой множества \mathcal{G} , обозначается $\text{cone}(\mathcal{G})$.



Коническая оболочка $\mathcal{G} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_4\}$

Примеры конусов

1. Неотрицательный октант
 $\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$
2. Множество симметричных
положительно-определённых матриц \mathbf{S}_+^n
3. Нормальный конус: $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| \leq t\}$
Для ℓ_2 -нормы называется конусом второго порядка
или Лоренцевым конусом
4. Экспоненциальный конус: $\{(x, y, z) \mid x \geq ye^{z/y}, y > 0\}$
и его замыкание

Коническая оптимизация

Коническая оптимизация

Постановка задачи

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \in \mathcal{C}, \end{aligned}$$

где \mathcal{C} — некоторый выпуклый конус.

Коническая оптимизация

Постановка задачи

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \in \mathcal{C}, \end{aligned}$$

где \mathcal{C} — некоторый выпуклый конус.

Q: Какие задачи можно представить в таком виде?

Коническая оптимизация

Постановка задачи

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \in \mathcal{C}, \end{aligned}$$

где \mathcal{C} — некоторый выпуклый конус.

Q: Какие задачи можно представить в таком виде?

A: Большинство задач, возникающих в приложениях

Коническая оптимизация

Постановка задачи

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \in \mathcal{C}, \end{aligned}$$

где \mathcal{C} — некоторый выпуклый конус.

Q: Какие задачи можно представить в таком виде?

A: Большинство задач, возникающих в приложениях

Q: Почему это важно?

Коническая оптимизация

Постановка задачи

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \in \mathcal{C}, \end{aligned}$$

где \mathcal{C} — некоторый выпуклый конус.

Q: Какие задачи можно представить в таком виде?

A: Большинство задач, возникающих в приложениях

Q: Почему это важно?

A: Если задача представима в таком виде, то с высокой вероятностью её можно решить за полиномиальное время.

Главное во второй части

- ▶ Аффинное множество
- ▶ Выпуклое множество
- ▶ Конус
- ▶ Методы проверки свойств конкретных множеств