# Методы оптимизации. Семинар 4. Выпуклые функции.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт

22 сентября 2020 г.

# Напоминание

- Производная по скаляру
- Производная по вектору
- Производная по матрице
- Производная сложной функции
- Автоматическое дифференцирование

# Определения функций

## Выпуклая функция

Функция $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется выпуклой (строго выпуклой), если $\mathcal{X}$ — выпуклое множество и для $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}$ и $\alpha \in [0, 1]$ ($\alpha \in (0, 1)$) выполнено:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \ (<)\ \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

## Вогнутая функция

Функция $f$ вогнутая (строго вогнутая), если $-f$ выпуклая (строго выпуклая).

## Сильно выпуклая функция

Функция $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется сильно выпуклой с константой $m$, если $\mathcal{X}$ — выпуклое множество и для $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ и $\alpha \in [0, 1]$ выполнено:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2) - \frac{m}{2}\alpha(1-\alpha)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2^2$$

для минимально возможного $m > 0$.

# Определения множеств

## Надграфик (эпиграф)

Надграфиком функции $f$ называется множество
$\text{epi} f = \{(\mathbf{x}, y) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R},\ y \geq f(\mathbf{x})\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

## Множество подуровней (множество Лебега)

Множество подуровня функции $f$ называется следующее множество
$$C_\gamma = \{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) \leq \gamma\}.$$

## Квазивыпуклая функция

Функция $f$ называется квазивыпуклой, если её область определения и множество подуровней для любых $\gamma$ выпуклые множества.

# Критерии выпуклости

## Дифференциальный критерий первого порядка

Функция $f$ выпукла $\Leftrightarrow$ она определена на выпуклом множестве $\mathcal{X}$ и $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ выполнено:

$$
f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle
$$

## Дифференциальный критерий второго порядка

Непрерывная и дважды дифференцируемая функция $f$ выпукла $\Leftrightarrow$ она определена на выпуклом множестве $\mathcal{X}$ и $\forall \mathbf{x} \in \mathrm{relint}\,(\mathcal{X}) \subset \mathbb{R}^n$ выполнено:

$$
f''(\mathbf{x}) \succeq 0.
$$

## Связь с надграфиком

Функция выпукла $\Leftrightarrow$ её надграфик выпуклое множество.

## Ограничение на прямую

Функция $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ выпукла тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}$ выпуклое множество и выпукла функция $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$ на множестве $\{t \mid \mathbf{x} + t\mathbf{v} \in \mathcal{X}\}$ для всех $\mathbf{x} \in \mathrm{dom}(f)$ и $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n (\mathbf{S}^n)$.

# Критерии сильной выпуклости

## Дифференциальный критерий первого порядка

Функция $f$ сильно выпукла с константой $m$ $\Leftrightarrow$ она определена на выпуклом множестве $\mathcal{X}$ и $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ выполнено:

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle + \frac{m}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2$$

## Дифференциальный критерий второго порядка

Непрерывная и дважды дифференцируемая функция $f$ сильно выпукла с константой $m$ $\Leftrightarrow$ она определена на выпуклом множестве $\mathcal{X}$ и $\forall \mathbf{x} \in \mathrm{relint}\,(\mathcal{X}) \subset \mathbb{R}^n$ выполнено:

$$f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}.$$

# Примеры

1. Квадратичная функция: $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{P} \in \mathbf{S}^n$

# Примеры

1. Квадратичная функция: $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{P} \in \mathbf{S}^n$
2. Нормы в $\mathbb{R}^n$

# Примеры

1. Квадратичная функция: $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{P} \in \mathbf{S}^n$
2. Нормы в $\mathbb{R}^n$
3. $f(\mathbf{x}) = \log\left(e^{x_1} + \ldots + e^{x_n}\right)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — гладкое приближение максимума

# Примеры

1. Квадратичная функция: $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{P} \in \mathbf{S}^n$
2. Нормы в $\mathbb{R}^n$
3. $f(\mathbf{x}) = \log\left(e^{x_1} + \ldots + e^{x_n}\right)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — гладкое приближение максимума
4. Логарифм детерминанта: $f(\mathbf{X}) = -\log\det \mathbf{X}$, $\mathbf{X} \in \mathbf{S}^n_{++}$

# Примеры

1. Квадратичная функция: $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{P} \in \mathbf{S}^n$
2. Нормы в $\mathbb{R}^n$
3. $f(\mathbf{x}) = \log\left(e^{x_1} + \ldots + e^{x_n}\right)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — гладкое приближение максимума
4. Логарифм детерминанта: $f(\mathbf{X}) = -\log\det \mathbf{X}$, $\mathbf{X} \in \mathbf{S}^n_{++}$
5. Множество выпуклых функций — выпуклый конус

# Примеры

1. Квадратичная функция: $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{P} \in \mathbf{S}^n$
2. Нормы в $\mathbb{R}^n$
3. $f(\mathbf{x}) = \log\left(e^{x_1} + \ldots + e^{x_n}\right)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — гладкое приближение максимума
4. Логарифм детерминанта: $f(\mathbf{X}) = -\log\det \mathbf{X}$, $\mathbf{X} \in \mathbf{S}^n_{++}$
5. Множество выпуклых функций — выпуклый конус
6. Поэлементный максимум выпуклых функций: $f(\mathbf{x}) = \max\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\}$, dom $f$ = dom $f_1 \cap$ dom $f_2$

# Примеры

1. Квадратичная функция: $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{P} \in \mathbf{S}^n$
2. Нормы в $\mathbb{R}^n$
3. $f(\mathbf{x}) = \log\left(e^{x_1} + \ldots + e^{x_n}\right)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — гладкое приближение максимума
4. Логарифм детерминанта: $f(\mathbf{X}) = -\log\det \mathbf{X}$, $\mathbf{X} \in \mathbf{S}^n_{++}$
5. Множество выпуклых функций — выпуклый конус
6. Поэлементный максимум выпуклых функций: $f(\mathbf{x}) = \max\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\}$, dom $f$ = dom $f_1 \cap$ dom $f_2$
7. Расширение на бесконечное множество функций: если для $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$ функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ выпуклая функция по $\mathbf{x}$, тогда $\sup\limits_{\mathbf{y} \in \mathcal{A}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ выпукла по $\mathbf{x}$

# Примеры

1. Квадратичная функция: $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{P} \in \mathbf{S}^n$
2. Нормы в $\mathbb{R}^n$
3. $f(\mathbf{x}) = \log\left(e^{x_1} + \ldots + e^{x_n}\right)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — гладкое приближение максимума
4. Логарифм детерминанта: $f(\mathbf{X}) = -\log\det \mathbf{X}$, $\mathbf{X} \in \mathbf{S}^n_{++}$
5. Множество выпуклых функций — выпуклый конус
6. Поэлементный максимум выпуклых функций: $f(\mathbf{x}) = \max\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\}$, dom $f$ = dom $f_1 \cap$ dom $f_2$
7. Расширение на бесконечное множество функций: если для $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$ функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ выпуклая функция по $\mathbf{x}$, тогда $\sup\limits_{\mathbf{y} \in \mathcal{A}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ выпукла по $\mathbf{x}$
8. Максимальное собственное значение: $f(\mathbf{X}) = \lambda_{\max}(\mathbf{X})$

# Неравенство Йенсена

## Неравенство Йенсена

Для выпуклой функции $f$ выполнено следующее неравенство:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{x}_i),$$

где $\alpha_i \geq 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

или в бесконечномерном случае: $p(x) \geq 0$ и $\int\limits_X p(x) = 1$

$$f\left(\int\limits_X p(x) x dx\right) \leq \int\limits_X f(x) p(x) dx$$

при условии, что интегралы существуют.

# Примеры

1. Неравенство Гёльдера
2. Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом
3. $f(\mathrm{E}[\mathbf{x}]) \leq \mathrm{E}[f(\mathbf{x})]$
4. Выпуклость множества $\left\{\mathbf{x} \mid \prod\limits_{i=1}^{n} x_i \geq 1\right\}$

# Резюме

- Выпуклая функция
- Надграфик и множество подуровня функции
- Критерии выпуклости функции
- Неравенство Йенсена