

# Методы оптимизации. Семинар 7.

## Сопряжённые функции

Александр Катруца

Московский физико-технический институт

25 октября 2021 г.

# Напоминание

- ▶ Субградиент и субдифференциал
- ▶ Условный субдифференциал
- ▶ Условия оптимальности для общей задачи оптимизации
- ▶ Условие первого порядка для безусловных выпуклых задач
- ▶ Достаточное условие второго порядка для безусловных невыпуклых задач

# Определение

## Снова сопряжённое?

- ▶ Ранее были рассмотрены сопряжённые (двойственные) множества и, в частности, конусы
- ▶ Сейчас будут рассмотрены сопряжённые (двойственные) функции
- ▶ Далее будет введена двойственная оптимизационная задача

## Определение

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Функция  $f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется сопряжённой функцией к функции  $f$  и определена как

$$f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \text{dom } f} (\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x})).$$

Область определения  $f^*$  — это множество таких  $\mathbf{y}$ , что супремум конечен.

## Свойства

- ▶ Сопряжённая функция  $f^*$  всегда выпукла как супремум линейных функций независимо от выпуклости  $f$

# Свойства

- ▶ Сопряжённая функция  $f^*$  всегда выпукла как супремум линейных функций независимо от выпуклости  $f$
- ▶ Неравенство Юнга-Фенхеля:  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y})$   
Обобщение квадратичного случая:  
$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{y}\|_2^2$$

# Свойства

- ▶ Сопряжённая функция  $f^*$  всегда выпукла как супремум линейных функций независимо от выпуклости  $f$
- ▶ Неравенство Юнга-Фенхеля:  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y})$   
Обобщение квадратичного случая:  
$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{y}\|_2^2$$
- ▶ Если  $f$  выпукла и замкнута, то  $f^{**} = f$

# Свойства

- ▶ Сопряжённая функция  $f^*$  всегда выпукла как супремум линейных функций независимо от выпуклости  $f$
- ▶ Неравенство Юнга-Фенхеля:  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y})$   
Обобщение квадратичного случая:  
$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{y}\|_2^2$$
- ▶ Если  $f$  выпукла и замкнута, то  $f^{**} = f$
- ▶ Для выпуклой функции следующие условия эквивалентны:

# Свойства

- ▶ Сопряжённая функция  $f^*$  всегда выпукла как супремум линейных функций независимо от выпуклости  $f$
- ▶ Неравенство Юнга-Фенхеля:  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y})$   
Обобщение квадратичного случая:  
$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{y}\|_2^2$$
- ▶ Если  $f$  выпукла и замкнута, то  $f^{**} = f$
- ▶ Для выпуклой функции следующие условия эквивалентны:
  - ▶  $\mathbf{y} \in \partial f(\mathbf{x})$



# Свойства

- ▶ Сопряжённая функция  $f^*$  всегда выпукла как супремум линейных функций независимо от выпуклости  $f$
- ▶ Неравенство Юнга-Фенхеля:  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y})$   
Обобщение квадратичного случая:  
$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{y}\|_2^2$$
- ▶ Если  $f$  выпукла и замкнута, то  $f^{**} = f$
- ▶ Для выпуклой функции следующие условия эквивалентны:
  - ▶  $\mathbf{y} \in \partial f(\mathbf{x})$
  - ▶  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = f^*(\mathbf{y}) + f(\mathbf{x})$

# Свойства

- ▶ Сопряжённая функция  $f^*$  всегда выпукла как супремум линейных функций независимо от выпуклости  $f$
  - ▶ Неравенство Юнга-Фенхеля:  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y})$   
Обобщение квадратичного случая:  
$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{y}\|_2^2$$
  - ▶ Если  $f$  выпукла и замкнута, то  $f^{**} = f$
  - ▶ Для выпуклой функции следующие условия эквивалентны:
    - ▶  $\mathbf{y} \in \partial f(\mathbf{x})$
    - ▶  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = f^*(\mathbf{y}) + f(\mathbf{x})$
- Если  $f$  замкнута, то  $\mathbf{x} \in \partial f^*(\mathbf{y})$ .

# Свойства

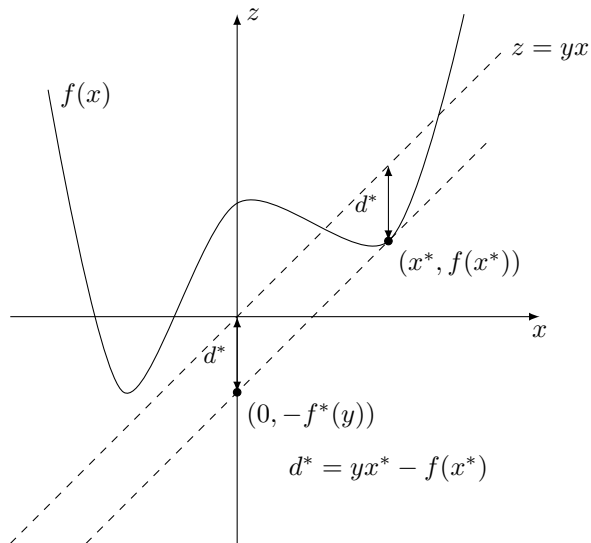
- ▶ Сопряжённая функция  $f^*$  всегда выпукла как супремум линейных функций независимо от выпуклости  $f$
- ▶ Неравенство Юнга-Фенхеля:  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y})$   
Обобщение квадратичного случая:  
$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{y}\|_2^2$$
- ▶ Если  $f$  выпукла и замкнута, то  $f^{**} = f$
- ▶ Для выпуклой функции следующие условия эквивалентны:
  - ▶  $\mathbf{y} \in \partial f(\mathbf{x})$
  - ▶  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = f^*(\mathbf{y}) + f(\mathbf{x})$Если  $f$  замкнута, то  $\mathbf{x} \in \partial f^*(\mathbf{y})$ .

## Определение

Выпуклая функция называется замкнутой, если её эпиграф замкнутое множество.

Пример:  $f(x) = x \log x$  при  $\text{dom } f = \mathbb{R}_{++}$  — незамкнутая

# Геометрический смысл



# Примеры

1. Линейная функция:  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b$
2. Отрицательная энтропия:  $f(x) = x \log x$
3. Индикаторная функция множества  $S$ :  $I_S(\mathbf{x}) = 0$  iff  $\mathbf{x} \in S$
4. Норма:  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$
5. Квадрат нормы:  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2$

# Операции с сопряжёнными функциями

- ▶ Разделение переменных:  $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = g(\mathbf{x}_1) + h(\mathbf{x}_2)$  и  $f^*(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = g^*(\mathbf{y}_1) + h^*(\mathbf{y}_2)$

# Операции с сопряжёнными функциями

- ▶ Разделение переменных:  $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = g(\mathbf{x}_1) + h(\mathbf{x}_2)$  и  $f^*(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = g^*(\mathbf{y}_1) + h^*(\mathbf{y}_2)$
- ▶ Сдвиг аргумента:  $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} - \mathbf{a})$  и  $f^*(\mathbf{y}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{y} + g^*(\mathbf{y})$

# Операции с сопряжёнными функциями

- ▶ Разделение переменных:  $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = g(\mathbf{x}_1) + h(\mathbf{x}_2)$  и  $f^*(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = g^*(\mathbf{y}_1) + h^*(\mathbf{y}_2)$
- ▶ Сдвиг аргумента:  $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} - \mathbf{a})$  и  $f^*(\mathbf{y}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{y} + g^*(\mathbf{y})$
- ▶ Суперпозиция с обратимым линейным преобразованием:  $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{A}\mathbf{x})$  и  $f^*(\mathbf{y}) = g^*(\mathbf{A}^{-\top} \mathbf{y})$



# Операции с сопряжёнными функциями

- ▶ Разделение переменных:  $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = g(\mathbf{x}_1) + h(\mathbf{x}_2)$  и  $f^*(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = g^*(\mathbf{y}_1) + h^*(\mathbf{y}_2)$
- ▶ Сдвиг аргумента:  $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} - \mathbf{a})$  и  $f^*(\mathbf{y}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{y} + g^*(\mathbf{y})$
- ▶ Суперпозиция с обратимым линейным преобразованием:  $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{A}\mathbf{x})$  и  $f^*(\mathbf{y}) = g^*(\mathbf{A}^{-\top} \mathbf{y})$
- ▶ Инфимальная конволюция (свёртка инфимумом):  
 $f(\mathbf{x}) = (h \square g)(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{x}} (h(\mathbf{u}) + g(\mathbf{v}))$  и  
 $f^*(\mathbf{y}) = h^*(\mathbf{y}) + g^*(\mathbf{y})$

# Moreau-Yosida envelope

- ▶  $f(\mathbf{x})$  выпуклая, но *негладкая*

# Moreau-Yosida envelope

- ▶  $f(\mathbf{x})$  выпуклая, но *негладкая*
- ▶ Moreau-Yosida envelope ( $\lambda > 0$ )

$$M_{\lambda f}(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}} \left( f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\lambda} \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|_2^2 \right) = \left( f \square \frac{1}{2\lambda} \|\cdot\|_2^2 \right) (\mathbf{x})$$

# Moreau-Yosida envelope

- ▶  $f(\mathbf{x})$  выпуклая, но *негладкая*
- ▶ Moreau-Yosida envelope ( $\lambda > 0$ )

$$M_{\lambda f}(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}} \left( f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\lambda} \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|_2^2 \right) = \left( f \square \frac{1}{2\lambda} \|\cdot\|_2^2 \right) (\mathbf{x})$$

- ▶ Функция Хьюбера –  $M_{\lambda f}$  для модуля

# Moreau-Yosida envelope

- ▶  $f(\mathbf{x})$  выпуклая, но негладкая
- ▶ Moreau-Yosida envelope ( $\lambda > 0$ )

$$M_{\lambda f}(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}} \left( f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\lambda} \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|_2^2 \right) = \left( f \square \frac{1}{2\lambda} \|\cdot\|_2^2 \right) (\mathbf{x})$$

- ▶ Функция Хьюбера –  $M_{\lambda f}$  для модуля
  - ▶  $f(x) = |x|$

# Moreau-Yosida envelope

- ▶  $f(\mathbf{x})$  выпуклая, но негладкая
- ▶ Moreau-Yosida envelope ( $\lambda > 0$ )

$$M_{\lambda f}(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}} \left( f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\lambda} \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|_2^2 \right) = \left( f \square \frac{1}{2\lambda} \|\cdot\|_2^2 \right) (\mathbf{x})$$

- ▶ Функция Хьюбера –  $M_{\lambda f}$  для модуля
  - ▶  $f(x) = |x|$
  - ▶  $M_{\lambda f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\lambda} & |x| \leq \lambda \\ |x| - \lambda/2 & |x| \geq \lambda \end{cases}$

# Moreau-Yosida envelope

- ▶  $f(\mathbf{x})$  выпуклая, но негладкая
- ▶ Moreau-Yosida envelope ( $\lambda > 0$ )

$$M_{\lambda f}(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}} \left( f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\lambda} \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|_2^2 \right) = \left( f \square \frac{1}{2\lambda} \|\cdot\|_2^2 \right) (\mathbf{x})$$

- ▶ Функция Хьюбера –  $M_{\lambda f}$  для модуля
  - ▶  $f(x) = |x|$
  - ▶  $M_{\lambda f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\lambda} & |x| \leq \lambda \\ |x| - \lambda/2 & |x| \geq \lambda \end{cases}$

# Moreau-Yosida envelope

- ▶  $f(\mathbf{x})$  выпуклая, но негладкая
- ▶ Moreau-Yosida envelope ( $\lambda > 0$ )

$$M_{\lambda f}(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}} \left( f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\lambda} \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|_2^2 \right) = \left( f \square \frac{1}{2\lambda} \|\cdot\|_2^2 \right) (\mathbf{x})$$

- ▶ Функция Хьюбера –  $M_{\lambda f}$  для модуля
  - ▶  $f(x) = |x|$
  - ▶  $M_{\lambda f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\lambda} & |x| \leq \lambda \\ |x| - \lambda/2 & |x| \geq \lambda \end{cases}$

## Упражнение



# Moreau-Yosida envelope

- ▶  $f(\mathbf{x})$  выпуклая, но *негладкая*
- ▶ Moreau-Yosida envelope ( $\lambda > 0$ )

$$M_{\lambda f}(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}} \left( f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\lambda} \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|_2^2 \right) = \left( f \square \frac{1}{2\lambda} \|\cdot\|_2^2 \right) (\mathbf{x})$$

- ▶ Функция Хьюбера –  $M_{\lambda f}$  для модуля
  - ▶  $f(x) = |x|$
  - ▶  $M_{\lambda f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\lambda} & |x| \leq \lambda \\ |x| - \lambda/2 & |x| \geq \lambda \end{cases}$

## Упражнение

- ▶ Нарисуйте на одном графике  $f(x)$  и  $M_{\lambda f}(x)$

# Moreau-Yosida envelope

- ▶  $f(\mathbf{x})$  выпуклая, но *негладкая*
- ▶ Moreau-Yosida envelope ( $\lambda > 0$ )

$$M_{\lambda f}(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}} \left( f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\lambda} \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|_2^2 \right) = \left( f \square \frac{1}{2\lambda} \|\cdot\|_2^2 \right) (\mathbf{x})$$

- ▶ Функция Хьюбера –  $M_{\lambda f}$  для модуля
  - ▶  $f(x) = |x|$
  - ▶  $M_{\lambda f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\lambda} & |x| \leq \lambda \\ |x| - \lambda/2 & |x| \geq \lambda \end{cases}$

## Упражнение

- ▶ Нарисуйте на одном графике  $f(x)$  и  $M_{\lambda f}(x)$
- ▶ Получите выражение  $M_{\lambda f}$  для  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_1$

# Почему получилась гладкая функция?

- ▶  $M_{\lambda f}(\mathbf{x})$  – выпукла
- ▶  $M_{\lambda f}^*(\mathbf{y}) = f^*(\mathbf{y}) + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{y}\|_2^2$  – сильно выпукла с параметром  $\lambda$
- ▶  $M_{\lambda f} = M_{\lambda f}^{**} = (f^* + \frac{\lambda}{2} \|\cdot\|_2^2)^*$
- ▶ Сопряжённая функция к сильно выпуклой функции является гладкой  $\Rightarrow M_{\lambda f}$  – гладкая функция и

$$M'_{\lambda f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{x} - \mathbf{u}^*), \quad \mathbf{u}^* = \arg \min_{\mathbf{u}} \left( f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\lambda} \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|_2^2 \right)$$

## Важное свойство

Множество точек минимума  $f$  и  $M_{\lambda f}$  совпадает.

# Резюме

- ▶ Сопряжённые функции
- ▶ Неравенство Юнга-Фенхеля и другие свойства
- ▶ Сглаживание негладких функций
- ▶ Примеры