Методы оптимизации. Семинар 2. Сопряжённые конусы

Александр Катруца

Московский физико-технический институт

8 сентября 2020 г.

Напоминание

- Внутренность и относительная внутренность множества
- Аффинное множество
- Выпуклое множество
- Конус

Определения

Определения

Сопряжённое множество

Сопряжённым (двойственным) к множеству $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ называют такое множество $\mathcal{G}^*$, что

$$\mathcal{G}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}\}.$$

Определения

Сопряжённое множество

Сопряжённым (двойственным) к множеству $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ называют такое множество $\mathcal{G}^*$, что

$$\mathcal{G}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}\}.$$

Сопряжённый конус

Если $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ конус, то

$$\mathcal{C}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}.$$

Определения

Сопряжённое множество

Сопряжённым (двойственным) к множеству $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ называют такое множество $\mathcal{G}^*$, что

$$\mathcal{G}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}\}.$$

Сопряжённый конус

Если $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ конус, то

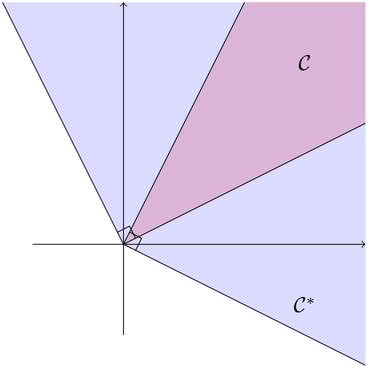
$$\mathcal{C}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}.$$

Сопряжённое подпространство

Если $\mathcal{L}$ линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, то

$$\mathcal{L}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\} = \mathcal{L}^\perp.$$

Пример сопряжённого конуса



Факты о сопряжённых множествах

Факты о сопряжённых множествах

Теорема

Пусть $\mathcal{G}$ — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\mathcal{G}^{**} = \overline{\mathrm{conv}\,(\mathcal{G} \cup \{0\})}.$$

Факты о сопряжённых множествах

Теорема

Пусть $\mathcal{G}$ — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\mathcal{G}^{**} = \overline{\mathrm{conv}\left(\mathcal{G} \cup \{0\}\right)}.$$

Теорема

Пусть $\mathcal{G}$ — замкнутое выпуклое множество, включающее 0. Тогда $\mathcal{G}^{**} = \mathcal{G}$.

Факты о сопряжённых множествах

Теорема

Пусть $\mathcal{G}$ — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\mathcal{G}^{**} = \overline{\mathrm{conv}\,(\mathcal{G} \cup \{0\})}.$$

Теорема

Пусть $\mathcal{G}$ — замкнутое выпуклое множество, включающее 0. Тогда $\mathcal{G}^{**} = \mathcal{G}$.

Теорема

Пусть $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, тогда $\mathcal{G}_2^* \subset \mathcal{G}_1^*$.

Примеры

Найти сопряжённые к следующим множествам:

1. Неотрицательный октант: $\mathbb{R}^n_+$

Примеры

Найти сопряжённые к следующим множествам:

1. Неотрицательный октант: $\mathbb{R}^n_+$
2. Конус положительно полуопределённых матриц: $\mathbf{S}^n_+$

Примеры

Найти сопряжённые к следующим множествам:

1. Неотрицательный октант: $\mathbb{R}^n_+$
2. Конус положительно полуопределённых матриц: $\mathbf{S}^n_+$
3. $\{(x_1, x_2) \mid |x_1| \leq x_2\}$

Примеры

Найти сопряжённые к следующим множествам:

1. Неотрицательный октант: $\mathbb{R}^n_+$
2. Конус положительно полуопределённых матриц: $\mathbf{S}^n_+$
3. $\{(x_1, x_2) \mid |x_1| \leq x_2\}$
4. $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq r\}$

Примеры

Найти сопряжённые к следующим множествам:

1. Неотрицательный октант: $\mathbb{R}^n_+$
2. Конус положительно полуопределённых матриц: $\mathbf{S}^n_+$
3. $\{(x_1, x_2) \mid |x_1| \leq x_2\}$
4. $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq r\}$
5. Конус, порождённый некоторой нормой:
   $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| \leq t\}$

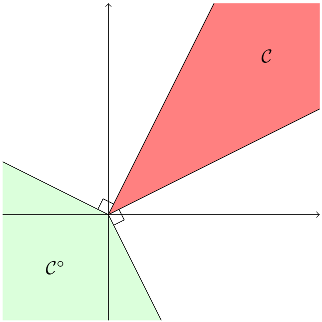
Полярный конус

Определение

Полярным конусом для конуса $\mathcal{C}$ называется следующее множество

$$\mathcal{C}^\circ = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}.$$

Заметим, что $\mathcal{C}^\circ = -\mathcal{C}^*$.



Разложение Moreau

Теорема

- *Для любого линейного подпространства* $\mathcal{L}$ *и любого вектора* $\mathbf{x}$ *выполнено* $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{L}^{\perp}}(\mathbf{x})$, *где* $\pi_{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ *— проекция точки* $\mathbf{x}$ *на множество* $\mathcal{G}$

Разложение Moreau

Теорема

- *Для любого линейного подпространства* $\mathcal{L}$ *и любого вектора* $\mathbf{x}$ *выполнено* $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{L}^\perp}(\mathbf{x})$, *где* $\pi_{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ *— проекция точки* $\mathbf{x}$ *на множество* $\mathcal{G}$
- $\mathcal{L}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\} = \mathcal{L}^\perp = \mathcal{L}^\circ$

Разложение Moreau

Теорема

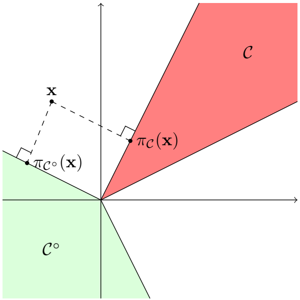
- *Для любого линейного подпространства* $\mathcal{L}$ *и любого вектора* $\mathbf{x}$ *выполнено* $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{L}^\perp}(\mathbf{x})$*, где* $\pi_{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ *— проекция точки* $\mathbf{x}$ *на множество* $\mathcal{G}$
- $\mathcal{L}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\} = \mathcal{L}^\perp = \mathcal{L}^\circ$
- *Для выпуклого конуса* $\mathcal{C}$ *и вектора* $\mathbf{x}$ *справедливо*
$$\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{x})$$

Разложение Moreau

Теорема

- *Для любого линейного подпространства* $\mathcal{L}$ *и любого вектора* $\mathbf{x}$ *выполнено* $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{L}^\perp}(\mathbf{x})$, *где* $\pi_{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ *— проекция точки* $\mathbf{x}$ *на множество* $\mathcal{G}$
- $\mathcal{L}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\} = \mathcal{L}^\perp = \mathcal{L}^\circ$
- *Для выпуклого конуса* $\mathcal{C}$ *и вектора* $\mathbf{x}$ *справедливо*

$$\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{x})$$



Сопряжение для композиций конусов

Пусть $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ замкнутые выпуклые конусы, тогда

- $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$
- $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$
- $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*$

Сопряжение для композиций конусов

Пусть $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ замкнутые выпуклые конусы, тогда

- $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$
- $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$
- $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*$

Q: почему именно такие композиции интересны?

Зачем нужны конусы?

- Исторически первым хорошо изученным классом задач были задачи линейного программирования (LP)

Зачем нужны конусы?

- Исторически первым хорошо изученным классом задач были задачи линейного программирования (LP)

Q: как перейти от линейных задач к нелинейным с минимальными потерями?

Зачем нужны конусы?

- Исторически первым хорошо изученным классом задач были задачи линейного программирования (LP)

Q: как перейти от линейных задач к нелинейным с минимальными потерями?

A: если в задаче LP $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, то в задаче выпуклой оптимизации $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ — некоторый конус

Зачем нужны конусы?

- Исторически первым хорошо изученным классом задач были задачи линейного программирования (LP)

Q: как перейти от линейных задач к нелинейным с минимальными потерями?

A: если в задаче LP $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, то в задаче выпуклой оптимизации $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ — некоторый конус

- Все нелинейности кодируются с помощью конусов и их декартовых произведений

Зачем нужны конусы?

- Исторически первым хорошо изученным классом задач были задачи линейного программирования (LP)

Q: как перейти от линейных задач к нелинейным с минимальными потерями?

A: если в задаче LP $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, то в задаче выпуклой оптимизации $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ — некоторый конус

- Все нелинейности кодируются с помощью конусов и их декартовых произведений
- Теория для задач LP с небольшими изменениями переносится на случай конических задач

Зачем нужны конусы?

- Исторически первым хорошо изученным классом задач были задачи линейного программирования (LP)

Q: как перейти от линейных задач к нелинейным с минимальными потерями?

A: если в задаче LP $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, то в задаче выпуклой оптимизации $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ — некоторый конус

- Все нелинейности кодируются с помощью конусов и их декартовых произведений
- Теория для задач LP с небольшими изменениями переносится на случай конических задач
- Детальное обсуждение будет далее в курсе...

Опорная гиперплоскость

Опорная гиперплоскость

Определение

Гиперплоскость $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$ называется опорной к множеству $\mathcal{G}$ в граничной точке $\mathbf{x}_0$, если $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq \beta = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_0 \rangle$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$.

Опорная гиперплоскость

Определение

Гиперплоскость $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$ называется опорной к множеству $\mathcal{G}$ в граничной точке $\mathbf{x}_0$, если $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq \beta = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_0 \rangle$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$.

Собственно опорная гиперплоскость

Гиперплоскость $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$ называется собственно опорной к множеству $\mathcal{G}$ в точке $\mathbf{x}_0$, если она опорная и $\exists \tilde{\mathbf{x}} \in X$: $\langle \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle > \beta$.

Опорная гиперплоскость

Определение

Гиперплоскость $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$ называется опорной к множеству $\mathcal{G}$ в граничной точке $\mathbf{x}_0$, если $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq \beta = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_0 \rangle$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$.

Собственно опорная гиперплоскость

Гиперплоскость $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$ называется собственно опорной к множеству $\mathcal{G}$ в точке $\mathbf{x}_0$, если она опорная и $\exists \tilde{\mathbf{x}} \in X$: $\langle \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle > \beta$.

Теорема об опорной гиперплоскости

В любой граничной (относительно граничной) точке выпуклого множества существует опорная (собственно опорная) гиперплоскость.

Как искать опорную гиперплоскость?

- Проверить множество на выпуклость
  - если множество выпукло, то опорная гиперплоскость существует и является касательной к границе
  - если множество невыпукло, то нужно дополнительно исследовать в каких точках границы опорная гиперплоскость существует
- Если граница задана в виде уравнения $F(\mathbf{x}) = 0$, то нормальный вектор касательной гиперплоскости в точке $\mathbf{x}_0$ равен $\nabla F(\mathbf{x}_0)$

Зачем нужны сопряжённые конусы?

Зачем нужны сопряжённые конусы?

Способы описания множества

Зачем нужны сопряжённые конусы?

Способы описания множества

- Задать элементы

Зачем нужны сопряжённые конусы?

Способы описания множества

- Задать элементы
- Определить границу

Зачем нужны сопряжённые конусы?

Способы описания множества

- Задать элементы
- Определить границу

Зачем нужны сопряжённые конусы?

Способы описания множества

- Задать элементы
- Определить границу

Сопряжённый конус и опорные гиперплоскости

- По определению $\mathcal{C}^*$ состоит из нормалей опорных гиперплоскостей для $\mathcal{C}$ в нуле

Зачем нужны сопряжённые конусы?

Способы описания множества

- Задать элементы
- Определить границу

Сопряжённый конус и опорные гиперплоскости

- По определению $\mathcal{C}^*$ состоит из нормалей опорных гиперплоскостей для $\mathcal{C}$ в нуле
- Сопряжённый конус задаёт альтернативное описание исходного конуса

Зачем нужны сопряжённые конусы?

Способы описания множества

- Задать элементы
- Определить границу

Сопряжённый конус и опорные гиперплоскости

- По определению $\mathcal{C}^*$ состоит из нормалей опорных гиперплоскостей для $\mathcal{C}$ в нуле
- Сопряжённый конус задаёт альтернативное описание исходного конуса
- Более наглядные приложения будут далее в курсе...

Разделяющая гиперплоскость

Разделяющая гиперплоскость

Определение

Разделяющей гиперплоскостью для множеств $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ является такая гиперплоскость $\{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$, что $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle \geq \beta$ для всех $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{G}_1$ и $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle \leq \beta$ для всех $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{G}_2$

Разделяющая гиперплоскость

Определение

Разделяющей гиперплоскостью для множеств $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ является такая гиперплоскость $\{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$, что $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle \geq \beta$ для всех $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{G}_1$ и $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle \leq \beta$ для всех $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{G}_2$

Существование

Пусть $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ выпуклые непересекающиеся множества, тогда существует разделяющая их гиперплоскость.

Разделяющая гиперплоскость

Определение

Разделяющей гиперплоскостью для множеств $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ является такая гиперплоскость $\{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$, что $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle \geq \beta$ для всех $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{G}_1$ и $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle \leq \beta$ для всех $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{G}_2$

Существование

Пусть $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ выпуклые непересекающиеся множества, тогда существует разделяющая их гиперплоскость.

Критерий для выпуклых множеств

Два выпуклых множества, таких что по крайней мере одно из них открыто, не пересекаются тогда и только тогда, когда существует разделяющая гиперплоскость.

Как искать разделяющую гиперплоскость?

- Проверить множества на выпуклость

Как искать разделяющую гиперплоскость?

- Проверить множества на выпуклость
  - если **оба множества выпуклы**, можно пользоваться теоремами

Как искать разделяющую гиперплоскость?

- Проверить множества на выпуклость
  - если **оба множества выпуклы**, можно пользоваться теоремами
  - если **невыпукло хотя бы одно множество**, нужно придумать обоснование для конкретного случая

Как искать разделяющую гиперплоскость?

- Проверить множества на выпуклость
  - если **оба множества выпуклы**, можно пользоваться теоремами
  - если **невыпукло хотя бы одно множество**, нужно придумать обоснование для конкретного случая
- Проверить пересекаются ли множества

Как искать разделяющую гиперплоскость?

- Проверить множества на выпуклость
  - если **оба множества выпуклы**, можно пользоваться теоремами
  - если **невыпукло хотя бы одно множество**, нужно придумать обоснование для конкретного случая
- Проверить пересекаются ли множества
  - если множества пересекаются, то разделяющей гиперплоскости нет

Как искать разделяющую гиперплоскость?

- Проверить множества на выпуклость
  - если **оба множества выпуклы**, можно пользоваться теоремами
  - если **невыпукло хотя бы одно множество**, нужно придумать обоснование для конкретного случая
- Проверить пересекаются ли множества
  - если множества пересекаются, то разделяющей гиперплоскости нет
  - если множества не пересекаются, найти максимально близкие точки, то есть решение задачи

$$\min_{\mathbf{x}_1 \in \mathcal{G}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{G}_2} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2^2$$

Как искать разделяющую гиперплоскость?

- Проверить множества на выпуклость
  - если **оба множества выпуклы**, можно пользоваться теоремами
  - если **невыпукло хотя бы одно множество**, нужно придумать обоснование для конкретного случая
- Проверить пересекаются ли множества
  - если множества пересекаются, то разделяющей гиперплоскости нет
  - если множества не пересекаются, найти максимально близкие точки, то есть решение задачи

$$\min_{\mathbf{x}_1 \in \mathcal{G}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{G}_2} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2^2$$

- Разделяющая гиперплоскость — это гиперплоскость ортогональная отрезку, который соединяет $\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*$

Лемма Фаркаша

Лемма Фаркаша

Лемма

Пусть даны $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *и* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. *Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:*

1. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \ \mathbf{x} \geq 0$
2. $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0, \ \langle \mathbf{p}, \mathbf{b} \rangle < 0$

Лемма Фаркаша

Лемма

Пусть даны $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *и* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. *Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:*

1. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \ \mathbf{x} \geq 0$
2. $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0, \ \langle \mathbf{p}, \mathbf{b} \rangle < 0$

Важное следствие

Пусть даны $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:

1. $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$
2. $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} = 0, \ \langle \mathbf{p}, \mathbf{b} \rangle < 0, \ \mathbf{p} \geq 0$

Геометрическая интерпретация

- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ при $\mathbf{x} \geq 0$ означает, что $\mathbf{b}$ лежит в конусе, натянутом на столбцы матрицы $\mathbf{A}$

Геометрическая интерпретация

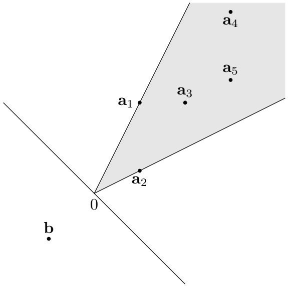
- $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ при $\mathbf{x} \geq 0$ означает, что $\mathbf{b}$ лежит в конусе, натянутом на столбцы матрицы $\mathbf{A}$
- $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0, \; \langle \mathbf{p}, \mathbf{b} \rangle < 0$ означает, что существует разделяющая гиперплоскость между вектором $\mathbf{b}$ и конусом из столбцов матрицы $\mathbf{A}$.

Геометрическая интерпретация

- $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ при $\mathbf{x} \geq 0$ означает, что $\mathbf{b}$ лежит в конусе, натянутом на столбцы матрицы $\mathbf{A}$
- $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0, \; \langle \mathbf{p}, \mathbf{b} \rangle < 0$ означает, что существует разделяющая гиперплоскость между вектором $\mathbf{b}$ и конусом из столбцов матрицы $\mathbf{A}$.
- Разделяющая гиперплоскость существует, так как множества $\{\mathbf{b}\}$ и $\{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \; \mathbf{x} \geq 0\}$ выпуклы

Геометрическая интерпретация

- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ при $\mathbf{x} \geq 0$ означает, что $\mathbf{b}$ лежит в конусе, натянутом на столбцы матрицы $\mathbf{A}$
- $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0,\ \langle \mathbf{p}, \mathbf{b} \rangle < 0$ означает, что существует разделяющая гиперплоскость между вектором $\mathbf{b}$ и конусом из столбцов матрицы $\mathbf{A}$.
- Разделяющая гиперплоскость существует, так как множества $\{\mathbf{b}\}$ и $\{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} = \mathbf{Ax},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ выпуклы



Применение леммы Фаркаша

- Разрешимость задачи линейного программирования
- Существование равновесного распределения в Марковской цепи
- Теоремы об арбитраже в финансах

Главное

- Сопряжённые конусы
- Свойства сопряжённых конусов
- Самосопряжённые конусы
- Опорная гиперплоскость
- Разделяющая гиперплоскость