Методы оптимизации.
Семинар 8. Условия оптимальности

Александр Катруца

Московский физико-технический институт

1 ноября 2021 г.

Напоминание

- Сопряжённые функции
- Неравенство Юнга-Фенхеля
- Примеры сопряжённых функций

Задача минимизации с ограничениями типа равенств

Задача

$$
\begin{gathered}
f(\mathbf{x}) \to \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } g_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \ldots, m
\end{gathered}
$$

Лагранжиан

$$
L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x})
$$

Возможные варианты

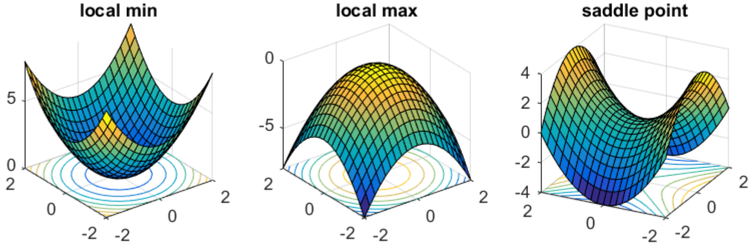

Рис. 1: Рисунок взят из блога
http://www.offconvex.org/2016/03/22/saddlepoints/

Простой пример

$$\begin{aligned} x + y &\to \min_{(x,y)} \\ \text{s.t. } x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Задача минимизации с ограничениями типа равенств и неравенств

Задача

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & g_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = 1, \ldots, m \\
& h_j(\mathbf{x}) \leq 0,\ j = 1, \ldots, p
\end{aligned}
$$

Лагранжиан

$$
L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(\mathbf{x})
$$

Условия оптимальности Каруша-Куна-Таккера (ККТ)

Необходимые условия

Пусть для задачи выполнено условие регулярности. Тогда если $\mathbf{x}^*$ локальное решение задачи, и функции f, h_j, g_i дифференцируемы, то найдутся такие $\boldsymbol{\mu}^*$ и $\boldsymbol{\lambda}^*$, для которых выполнено следующее:

- $g_i(\mathbf{x}^*) = 0,\ i = 1, \dots, m$
- $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0,\ j = 1, \dots, p$
- $\mu_j^* \geq 0,\ j = 1, \dots, p$
- $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0,\ j = 1, \dots, p$
- $L'(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = 0$

Если задача выпуклая, то эти же условие является достаточным.

Примеры условий регулярности

- Если g_i и h_j линейны, то дополнительные условия не нужны
- Градиенты ограничений типа равенств и активных ограничений типа неравенств линейно независимы в $\mathbf{x}^*$
- Условие Слейтера:
    - Задача является выпуклой, то есть g_i — аффинные, h_j и f — выпуклые
    - Существует точка $\mathbf{x}_0$ такая что $g_i(\mathbf{x}_0) = 0$ и $h_j(\mathbf{x}_0) < 0$

Примеры

- $$\begin{aligned} &\min x + 3y \\ \text{s.t. } &x - y \geq 0 \\ &(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 9 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} &\min\ (x+1)^2 + (y+1)^2 \\ \text{s.t. } &2x + 3y \geq 5 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} &\min\ \ x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t. } &-x_1 + x_2 + x_3 \leq -2 \\ &x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ &x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ &x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Резюме

- Седловые точки
- Условия оптимальности для задач типа равенств
- Условия Каруша-Куна-Таккера
- Условие регулярности Слейтера