Методы оптимизации. Семинар 9. Двойственность.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт

24 августа 2020 г.

Напоминание

- Существование решения оптимизационной задачи
- Условия оптимальности для
  - общей задачи оптимизации
  - задачи безусловной оптимизации
  - задачи оптимизации с ограничениями типа равенств
  - задачи оптимизации с ограничениями типа равенств и неравенств

Обозначения

Задача

$$\begin{aligned} & \min f(\mathbf{x}) = p^* \\ \text{s.t. } & g_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = 1, \ldots, m \\ & h_j(\mathbf{x}) \leq 0,\ j = 1, \ldots, p \end{aligned}$$

Лагранжиан

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(\mathbf{x})$$

Двойственные переменные

Вектора $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ называются двойственными переменными.

Двойственная функция

Функция $g(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \inf\limits_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ называется двойственной функцией Лагранжа.

Свойства двойственной функции

Вогнутость

Двойственная функция является вогнутой как инфимум аффинных функций по $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ вне зависимости от того, является ли исходная задача выпуклой.

Нижняя граница

Для любого $\boldsymbol{\lambda}$ и для $\boldsymbol{\mu} \geq 0$ выполнено $g(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \leq p^*$.

Двойственная задача

$$
\begin{aligned}
\max g(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) &= d^* \\
\text{s.t. } \boldsymbol{\mu} &\geq 0
\end{aligned}
$$

Зачем?

- Двойственная задача выпукла независимо от того, выпукла ли прямая
- Нижняя оценка **может** достигаться

Связь с сопряжённой функцией

Рассмотрим задачу

$$
\begin{aligned}
&\min f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } &\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\
&\mathbf{Cx} = \mathbf{d}
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) &= \inf_{\mathbf{x}} (f_0(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\top(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) + \boldsymbol{\mu}^\top(\mathbf{Cx} - \mathbf{d})) = \\
&- \mathbf{b}^\top\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}^\top\mathbf{d} + \inf_{\mathbf{x}} (f_0(\mathbf{x}) + (\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{C}^\top\boldsymbol{\mu})^\top\mathbf{x}) = \\
&- \mathbf{b}^\top\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}^\top\mathbf{d} - f_0^*(-\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{C}^\top\boldsymbol{\mu})
\end{aligned}
$$

Области определений двойственной и сопряжённой функций связаны:

$$
\mathrm{dom}\ g = \{(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \mid -\mathbf{A}^\top\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{C}^\top\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{dom}\ f_0^*\}
$$

Примеры

Найти двойственную функцию:

- Решение СЛУ минимальной нормы
$$
\begin{aligned}
\min \|\mathbf{x}\|_2^2\\
\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}
\end{aligned}
$$
- Линейное программирование
$$
\begin{aligned}
\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x}\\
\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\\
\mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}
$$
- Задача разбиения
$$
\begin{aligned}
\min \mathbf{x}^\top \mathbf{W}\mathbf{x}\\
\text{s.t. } x_i^2 = 1,\ i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Слабая и сильная двойственность

Определение

Оптимальные значения целевой функции в прямой и двойственной задаче связаны соотношением

$$d^* \leq p^*.$$

Если $d^* < p^*$, то свойство называют слабой двойственностью. Если $d^* = p^*$, то — сильной двойственностью.

Замечание

Слабая двойственность есть всегда по построению двойственной задачи.

Вопросы

- При каких условиях выполняется сильная двойственность?
- Как использовать двойственность для проверки оптимальности?

Критерий субоптимальности

По построению $p^* \geq g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$, поэтому

$$f_0(\mathbf{x}) - p^* \leq f_0(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \varepsilon.$$

Определение

Разность $f_0(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ называется *двойственным зазором* и является оценкой сверху для разности текущего и оптимального значения функции.

Способы использования:

- критерий остановки в итерационном процессе
- теоретическая оценка сходимости алгоритма
- проверка оптимальности данной точки

Условия Слейтера

Теорема

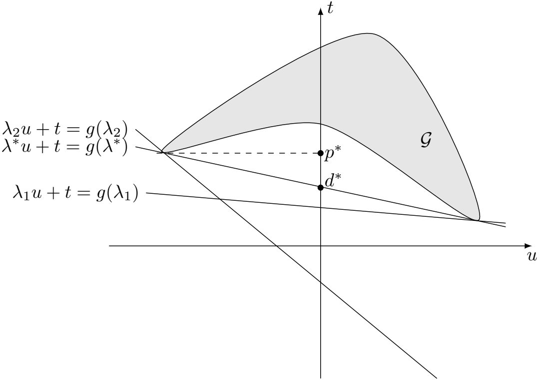
Если задача выпуклая и существует $\mathbf{x}$, лежащий внутри допустимой области, т.е. ограничения типа неравенств выполнены как строгие неравенства, то выполнено свойство сильной двойственности.

- Решение СЛАУ наименьшей нормы
- Линейное программирование
- Квадратичное программирование с квадратичными огранчиениями

Геометрическая интерпретация

$$\min_x f_0(x), \text{ где } f_1(x) \leq 0.$$

$$g(\lambda) = \inf_{(u,t)\in\mathcal{G}} (t + \lambda u) \qquad \mathcal{G} = \{(f_1(x), f_0(x))\}$$



- $\lambda = 0$
- λ^* — оптимальное значение
- $\lambda > \lambda^*$

Условия дополняющей нежёсткости

Пусть $\mathbf{x}^*$ и $(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ решения прямой и двойственной задачи. То есть

$$f(\mathbf{x}^*) = g(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \inf_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \leq$$
$$f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) \leq$$
$$f(\mathbf{x}^*), \qquad \boldsymbol{\mu} \geq 0$$

Условия дополняющей нежёсткости

$$\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0, \qquad j = 1, \dots, p$$

Для каждого неравенства

- либо множитель Лагранжа равен нулю
- либо оно активно.

Условия Каруша-Куна-Таккера

Из прошлого семинара известны необходимые условия ККТ:

1. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$ — допустимость в прямой задаче
2. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$ — допустимость в прямой задаче
3. $\mu_j^* \geq 0$ — допустимость в двойственной задаче
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$ — условие дополняющей нежёсткости
5. $L'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = 0$ — стационарность лагранжиана по прямым переменным

Пример $(\mathbf{P} \in \mathbf{S}_+^n)$

$$
\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r
$$

$$
\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}
$$

Примеры

- Отрицательная энтропия при линейных ограничениях

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} & \sum_{i=1}^n x_i \log x_i \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\
& \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1
\end{aligned}
$$

- Сформулировать двойственную задачу и по её решению найти решение прямой задачи:

$$
\begin{aligned}
& \min \frac{1}{2}x^2 + 2y^2 + \frac{1}{2}z^2 + x + y + 2z \\
& \text{s.t. } x + 2y + z = 4
\end{aligned}
$$

- Релаксация Лагранжа для задачи бинарного линейного программирования:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} & \ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\
& x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n
\end{aligned}
$$

Главное

- Двойственая задача: что это такое и зачем она нужна?
- Сильная и слабая двойственность
- Условие Слейтера
- Геометрическая интерпретация
- Связь с сопряжённой функцией