Методы оптимизации. Семинар 7. Сопряжённые функции

Александр Катруца

Московский физико-технический институт

13 октября 2020 г.

Напоминание

- Субградиент и субдифференциал
- Условный субдифференциал
- Условия оптимальности для общей задачи оптимизации
- Условие первого порядка для выпуклых задач
- Достаточное условие второго порядка для невыпуклых задач

Определение

Снова сопряжённое?

- Ранее были рассмотрены сопряжённые (двойственные) множества и, в частности, конусы
- Сейчас будут рассмотрены сопряжённые (двойственные) функции
- Далее будет введена двойственная оптимизационная задача

Определение

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Функция $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется сопряжённой функцией к функции f и определена как
$$f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathrm{dom}\, f} (\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x})).$$
Область определения f^* — это множество таких $\mathbf{y}$, что супремум конечен.

Свойства

- Сопряжённая функция f^* всегда выпукла как супремум линейных функций независимо от выпуклости f

Свойства

- Сопряжённая функция f^* всегда выпукла как супремум линейных функций независимо от выпуклости f
- Неравенство Юнга-Фенхеля: $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \le f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y})$
  Обобщение квадратичного случая:
  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \le \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|_2^2$

Свойства

- Сопряжённая функция f^* всегда выпукла как супремум линейных функций независимо от выпуклости f
- Неравенство Юнга-Фенхеля: $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y})$
  Обобщение квадратичного случая:
  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|_2^2$
- Если f выпукла и замкнута, то $f^{**} = f$

Свойства

- Сопряжённая функция f^* всегда выпукла как супремум линейных функций независимо от выпуклости f
- Неравенство Юнга-Фенхеля: $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y})$
  Обобщение квадратичного случая:
  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|_2^2$
- Если f выпукла и замкнута, то $f^{**} = f$
- Для выпуклой функции следующие условия эквивалентны:

Свойства

- Сопряжённая функция f^* всегда выпукла как супремум линейных функций независимо от выпуклости f
- Неравенство Юнга-Фенхеля: $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y})$
  Обобщение квадратичного случая:
  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|_2^2$
- Если f выпукла и замкнута, то $f^{**} = f$
- Для выпуклой функции следующие условия эквивалентны:
  - $\mathbf{y} \in \partial f(\mathbf{x})$

Свойства

- Сопряжённая функция f^* всегда выпукла как супремум линейных функций независимо от выпуклости f
- Неравенство Юнга-Фенхеля: $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y})$
  Обобщение квадратичного случая:
  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|_2^2$
- Если f выпукла и замкнута, то $f^{**} = f$
- Для выпуклой функции следующие условия эквивалентны:
  - $\mathbf{y} \in \partial f(\mathbf{x})$
  - $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = f^*(\mathbf{y}) + f(\mathbf{x})$

Свойства

- Сопряжённая функция f^* всегда выпукла как супремум линейных функций независимо от выпуклости f
- Неравенство Юнга-Фенхеля: $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y})$
  Обобщение квадратичного случая:
  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|_2^2$
- Если f выпукла и замкнута, то $f^{**} = f$
- Для выпуклой функции следующие условия эквивалентны:
  - $\mathbf{y} \in \partial f(\mathbf{x})$
  - $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = f^*(\mathbf{y}) + f(\mathbf{x})$

  Если f замкнута, то $\mathbf{x} \in \partial f^*(\mathbf{y})$.

Свойства

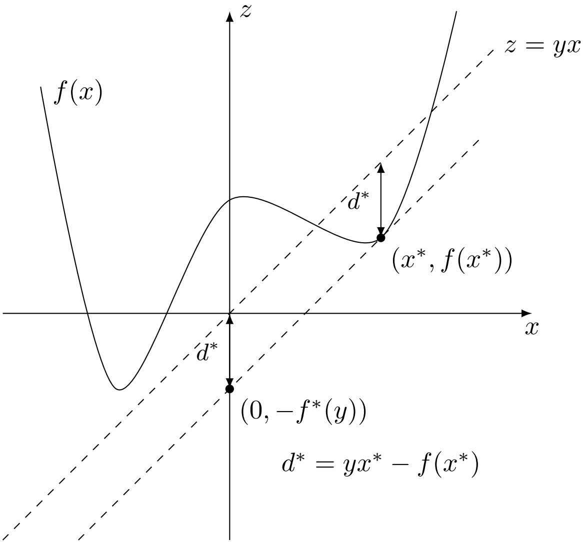
- Сопряжённая функция f^* всегда выпукла как супремум линейных функций независимо от выпуклости f
- Неравенство Юнга-Фенхеля: $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{y})$
  Обобщение квадратичного случая:
  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|_2^2$
- Если f выпукла и замкнута, то $f^{**} = f$
- Для выпуклой функции следующие условия эквивалентны:
  - $\mathbf{y} \in \partial f(\mathbf{x})$
  - $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = f^*(\mathbf{y}) + f(\mathbf{x})$

  Если f замкнута, то $\mathbf{x} \in \partial f^*(\mathbf{y})$.

Определение

Выпуклая функция называется замкнутой, если её эпиграф замкнутое множество.
Пример: $f(x) = x \log x$ при $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}_{++}$ — незамкнутая

Геометрический смысл



$$d^* = yx^* - f(x^*)$$

Примеры

1. Линейная функция: $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b$
2. Отрицательная энтропия: $f(x) = x \log x$
3. Индикаторная функция множества S: $I_S(\mathbf{x}) = 0$ iff $\mathbf{x} \in S$
4. Норма: $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$
5. Квадрат нормы: $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2$

Операции с сопряжёнными функциями

- Разделение переменных: $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = g(\mathbf{x}_1) + h(\mathbf{x}_2)$ и $f^*(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = g^*(\mathbf{y}_1) + h^*(\mathbf{y}_2)$

Операции с сопряжёнными функциями

- Разделение переменных: $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = g(\mathbf{x}_1) + h(\mathbf{x}_2)$ и $f^*(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = g^*(\mathbf{y}_1) + h^*(\mathbf{y}_2)$
- Сдвиг аргумента: $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ и $f^*(\mathbf{y}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{y} + g^*(\mathbf{y})$

Операции с сопряжёнными функциями

- Разделение переменных: $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = g(\mathbf{x}_1) + h(\mathbf{x}_2)$ и $f^*(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = g^*(\mathbf{y}_1) + h^*(\mathbf{y}_2)$
- Сдвиг аргумента: $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ и $f^*(\mathbf{y}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{y} + g^*(\mathbf{y})$
- Суперпозиция с обратимым линейным преобразованием: $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{A}\mathbf{x})$ и $f^*(\mathbf{y}) = g^*(\mathbf{A}^{-\top}\mathbf{y})$

Операции с сопряжёнными функциями

- Разделение переменных: $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = g(\mathbf{x}_1) + h(\mathbf{x}_2)$ и $f^*(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = g^*(\mathbf{y}_1) + h^*(\mathbf{y}_2)$
- Сдвиг аргумента: $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ и $f^*(\mathbf{y}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{y} + g^*(\mathbf{y})$
- Суперпозиция с обратимым линейным преобразованием: $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{A}\mathbf{x})$ и $f^*(\mathbf{y}) = g^*(\mathbf{A}^{-\top}\mathbf{y})$
- Инфимальная конволюция (свёртка инфимумом): $f(\mathbf{x}) = (h \Box g)(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{x}} (h(\mathbf{u}) + g(\mathbf{v}))$ и $f^*(\mathbf{y}) = h^*(\mathbf{y}) + g^*(\mathbf{y})$

Moreau-Yosida envelope

- $f(\mathbf{x})$ выпуклая, но *негладкая*

Moreau-Yosida envelope

- $f(\mathbf{x})$ выпуклая, но *негладкая*
- Moreau-Yosida envelope $(\lambda > 0)$

$$M_{\lambda f}(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}}(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\lambda}\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|_2^2) = \left(f\Box\frac{1}{2\lambda}\|\cdot\|_2^2\right)(\mathbf{x})$$

Moreau-Yosida envelope

- $f(\mathbf{x})$ выпуклая, но *негладкая*
- Moreau-Yosida envelope $(\lambda > 0)$

$$M_{\lambda f}(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}}(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\lambda}\|\mathbf{x}-\mathbf{u}\|_2^2) = \left(f \Box \frac{1}{2\lambda}\|\cdot\|_2^2\right)(\mathbf{x})$$

- Функция Хьюбера – $M_{\lambda f}$ для модуля

Moreau-Yosida envelope

- $f(\mathbf{x})$ выпуклая, но *негладкая*
- Moreau-Yosida envelope ($\lambda > 0$)

$$M_{\lambda f}(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}}(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\lambda}\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|_2^2) = \left(f \square \frac{1}{2\lambda}\| \cdot \|_2^2\right)(\mathbf{x})$$

- Функция Хьюбера – $M_{\lambda f}$ для модуля
  - $f(x) = |x|$

Moreau-Yosida envelope

- $f(\mathbf{x})$ выпуклая, но *негладкая*
- Moreau-Yosida envelope $(\lambda > 0)$

$$M_{\lambda f}(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}}(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\lambda}\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|_2^2) = \left(f \square \frac{1}{2\lambda}\|\cdot\|_2^2\right)(\mathbf{x})$$

- Функция Хьюбера – $M_{\lambda f}$ для модуля
  - $f(x) = |x|$
  - $M_{\lambda f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\lambda} & |x| \le \lambda \\ |x| - \lambda/2 & |x| \ge \lambda \end{cases}$

Moreau-Yosida envelope

- $f(\mathbf{x})$ выпуклая, но *негладкая*
- Moreau-Yosida envelope ($\lambda > 0$)

$$M_{\lambda f}(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}}(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\lambda}\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|_2^2) = \left(f\square\frac{1}{2\lambda}\|\cdot\|_2^2\right)(\mathbf{x})$$

- Функция Хьюбера – $M_{\lambda f}$ для модуля
  - $f(x) = |x|$
  - $M_{\lambda f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\lambda} & |x| \leq \lambda \\ |x| - \lambda/2 & |x| \geq \lambda \end{cases}$

Moreau-Yosida envelope

- $f(\mathbf{x})$ выпуклая, но *негладкая*
- Moreau-Yosida envelope ($\lambda > 0$)

$$M_{\lambda f}(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}}(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\lambda}\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|_2^2) = \left(f \square \frac{1}{2\lambda}\|\cdot\|_2^2\right)(\mathbf{x})$$

- Функция Хьюбера – $M_{\lambda f}$ для модуля
  - $f(x) = |x|$
  - $M_{\lambda f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\lambda} & |x| \le \lambda \\ |x| - \lambda/2 & |x| \ge \lambda \end{cases}$

Упражнение

Moreau-Yosida envelope

- $f(\mathbf{x})$ выпуклая, но *негладкая*
- Moreau-Yosida envelope $(\lambda > 0)$

$$M_{\lambda f}(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}}(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\lambda}\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|_2^2) = \left(f\Box\frac{1}{2\lambda}\|\cdot\|_2^2\right)(\mathbf{x})$$

- Функция Хьюбера – $M_{\lambda f}$ для модуля
  - $f(x) = |x|$
  - $M_{\lambda f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\lambda} & |x| \leq \lambda \\ |x| - \lambda/2 & |x| \geq \lambda \end{cases}$

Упражнение

- Нарисуйте на одном графике $f(x)$ и $M_{\lambda f}(x)$

Moreau-Yosida envelope

- $f(\mathbf{x})$ выпуклая, но *негладкая*
- Moreau-Yosida envelope ($\lambda > 0$)

$$M_{\lambda f}(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}}(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\lambda}\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|_2^2) = \left(f \Box \frac{1}{2\lambda}\|\cdot\|_2^2\right)(\mathbf{x})$$

- Функция Хьюбера – $M_{\lambda f}$ для модуля
  - $f(x) = |x|$
  - $M_{\lambda f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\lambda} & |x| \leq \lambda \\ |x| - \lambda/2 & |x| \geq \lambda \end{cases}$

Упражнение

- Нарисуйте на одном графике $f(x)$ и $M_{\lambda f}(x)$
- Получите выражение $M_{\lambda f}$ для $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_1$

Почему получилась гладкая функция?

- $M_{\lambda f}(\mathbf{x})$ – выпукла
- $M^*_{\lambda f}(\mathbf{y}) = f^*(\mathbf{y}) + \frac{\lambda}{2}\|\mathbf{y}\|_2^2$ – сильно выпукла с параметром λ
- $M_{\lambda f} = M^{**}_{\lambda f} = (f^* + \frac{\lambda}{2}\|\cdot\|_2^2)^*$
- Сопряжённая функция к сильно выпуклой функции является гладкой $\Rightarrow M_{\lambda f}$ – гладкая функция и

$$M'_{\lambda f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{x}-\mathbf{u}^*), \quad \mathbf{u}^* = \arg\min_{\mathbf{u}} \left(f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2\lambda}\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|_2^2 \right)$$

Важное свойство

Множество точек минимума f и $M_{\lambda f}$ совпадает.

Резюме

- Сопряжённые функции
- Неравенство Юнга-Фенхеля и другие свойства
- Сглаживание негладких функций
- Примеры