Методы оптимизации. Семинар 1. Введение. Выпуклые множества. Конусы.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт

9 августа 2020 г.

О чём этот курс?

Первый семестр (теоретический):

- Основы выпуклого анализа
- Условия оптимальности
- Теория двойственности
- Линейное программирование: симплекс-метод

О чём этот курс?

Первый семестр (теоретический):

- Основы выпуклого анализа
- Условия оптимальности
- Теория двойственности
- Линейное программирование: симплекс-метод

Второй семестр (практический):

- Методы безусловной минимизации первого и второго порядка
- Методы условной оптимизации
- Барьерные методы
- Оптимальные методы
- ...

План на семестр

- Семинар и лекция раз в неделю

План на семестр

- Семинар и лекция раз в неделю
- Миниконтрольные в начале каждого семинара

План на семестр

- Семинар и лекция раз в неделю
- Миниконтрольные в начале каждого семинара
- Домашние задания примерно раз в месяц. Решения оформляются в $\LaTeX$

План на семестр

- Семинар и лекция раз в неделю
- Миниконтрольные в начале каждого семинара
- Домашние задания примерно раз в месяц. Решения оформляются в LaTeX
- Итоговая контрольная в конце семестра

План на семестр

- Семинар и лекция раз в неделю
- Миниконтрольные в начале каждого семинара
- Домашние задания примерно раз в месяц. Решения оформляются в $\LaTeX$
- Итоговая контрольная в конце семестра
- Экзамен в конце семестра. Оценка за курс — среднее арифметическое:

План на семестр

- Семинар и лекция раз в неделю
- Миниконтрольные в начале каждого семинара
- Домашние задания примерно раз в месяц. Решения оформляются в $\LaTeX$
- Итоговая контрольная в конце семестра
- Экзамен в конце семестра. Оценка за курс — среднее арифметическое:
    - оценки за работу в семестре

План на семестр

- Семинар и лекция раз в неделю
- Миниконтрольные в начале каждого семинара
- Домашние задания примерно раз в месяц. Решения оформляются в $\LaTeX$
- Итоговая контрольная в конце семестра
- Экзамен в конце семестра. Оценка за курс — среднее арифметическое:
  - оценки за работу в семестре
  - ответа на экзамене

План на семестр

- Семинар и лекция раз в неделю
- Миниконтрольные в начале каждого семинара
- Домашние задания примерно раз в месяц. Решения оформляются в $\LaTeX$
- Итоговая контрольная в конце семестра
- Экзамен в конце семестра. Оценка за курс — среднее арифметическое:
  - оценки за работу в семестре
  - ответа на экзамене
- Piazza для Q&A

Литература

Основная книга
S. Boyd and L. Vandenberghe *Convex Optimization*
https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/

- К.Ю. Осипенко Лекции
- В.Г. Жадан *Методы оптимизации. Часть 1. Введение в выпуклый анализ и теорию оптимизации*
- R.T. Rockafellar *Convex analysis*

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества
- Обоснование правильности принятия решения

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества
- Обоснование правильности принятия решения
- Разнообразные приложения:

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества
- Обоснование правильности принятия решения
- Разнообразные приложения:
  - машинное обучение

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества
- Обоснование правильности принятия решения
- Разнообразные приложения:
  - машинное обучение
  - молекулярное моделирование

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества
- Обоснование правильности принятия решения
- Разнообразные приложения:
  - машинное обучение
  - молекулярное моделирование
  - анализ рисков

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества
- Обоснование правильности принятия решения
- Разнообразные приложения:
  - машинное обучение
  - молекулярное моделирование
  - анализ рисков
  - выбор активов (portfolio optimization)

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества
- Обоснование правильности принятия решения
- Разнообразные приложения:
  - машинное обучение
  - молекулярное моделирование
  - анализ рисков
  - выбор активов (portfolio optimization)
  - оптимальное управление

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества
- Обоснование правильности принятия решения
- Разнообразные приложения:
  - машинное обучение
  - молекулярное моделирование
  - анализ рисков
  - выбор активов (portfolio optimization)
  - оптимальное управление
  - обработка сигналов

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества
- Обоснование правильности принятия решения
- Разнообразные приложения:
  - машинное обучение
  - молекулярное моделирование
  - анализ рисков
  - выбор активов (portfolio optimization)
  - оптимальное управление
  - обработка сигналов
  - оценка параметров в статистике

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества
- Обоснование правильности принятия решения
- Разнообразные приложения:
  - машинное обучение
  - молекулярное моделирование
  - анализ рисков
  - выбор активов (portfolio optimization)
  - оптимальное управление
  - обработка сигналов
  - оценка параметров в статистике
  - и другие

Предварительные навыки

Первый семестр

- Линейная алгебра
- Математический анализ
- Элементы вычислительной математики

Второй семестр

- Программирование: Python (NumPy, SciPy, CVXPY, JAX/PyTorch)
- Элементы вычислительной математики

Методология

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции

Методология

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений

Методология

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений
3. Постановка и анализ оптимизационной задачи

Методология

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений
3. Постановка и анализ оптимизационной задачи
4. Выбор наилучшего алгоритма для решения поставленной задачи

Методология

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений
3. Постановка и анализ оптимизационной задачи
4. Выбор наилучшего алгоритма для решения поставленной задачи
5. Реализация алгоритма и проверка его корректности

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in X} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \ldots, p \\
& f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \; j = p+1, \ldots, m,
\end{aligned}
$$

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in X} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \dots, p \\
& f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \; j = p+1, \dots, m,
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x} \in X} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \ldots, p \\
& f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \; j = p+1, \ldots, m,
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор
- $f_0(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — целевая функция

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x} \in X} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \ldots, p \\
& f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \; j = p+1, \ldots, m,
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор
- $f_0(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — целевая функция
- $f_k(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функции ограничений типа равенств и неравенств

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in X} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) = 0, \ i = 1, \ldots, p \\
& f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \ j = p + 1, \ldots, m,
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор
- $f_0(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — целевая функция
- $f_k(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функции ограничений типа равенств и неравенств
- $\mathbf{x}^*$ — точка минимума (локального или глобального)

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}\in X} f_0(\mathbf{x})\\
\text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = 1,\dots,p\\
& f_j(\mathbf{x}) \leq 0,\ j = p+1,\dots,m,
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор
- $f_0(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — целевая функция
- $f_k(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функции ограничений типа равенств и неравенств
- $\mathbf{x}^*$ — точка минимума (локального или глобального)
- f^* — минимальное значение (локальное или глобальное) функции на допустимом множестве

Пример формализации задачи

Дан набор активов между которыми надо распределить имеющиеся средства. Нужно определить, какую часть в какой актив вложить.

Обозначения

- $\mathbf{x}$ — размер инвестиций в каждый актив
- $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ — суммарный риск или вариация прибыли при данном распределении $\mathbf{x}$
- $\mathbf{c}$ — бюджетные ограничения: ограничения по вложению в каждый актив

Возможные задачи

- Максимизация ожидаемой прибыли
- Минимизация рисков

Как решать?

В общем случае:

- NP-полные
- рандомизированные алгоритмы: время vs. стабильность

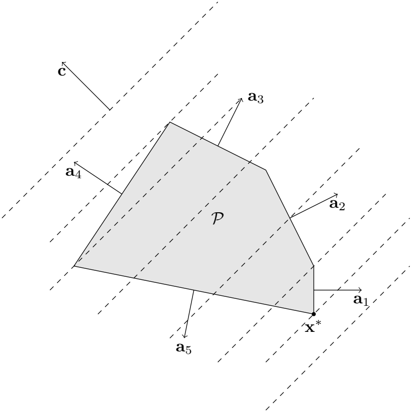
Но определённые классы задач могут быть решены быстро!

- Линейное программирование
- Линейная задача наименьших квадратов
- Задача о малоранговом приближении матрицы
- Задача выпуклой оптимизации

Линейное программирование

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$$

$$\text{s.t. } \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \le b_i,\ i = 1, \ldots, m$$



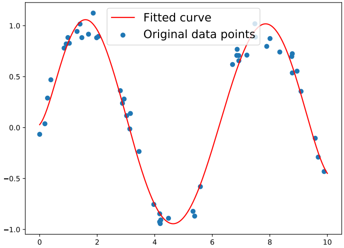
- нет аналитического решения
- существуют эффективные алгоритмы
- разработанная технология
- симплекс-метод входит в Top-10 алгоритмов XX века[1]

[1] https://archive.siam.org/pdf/news/637.pdf

Линейная задача наименьших квадратов

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2,$$

где $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $m > n$.

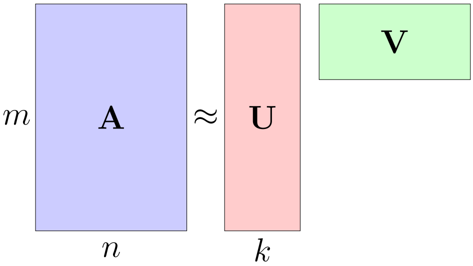


- имеет аналитическое решение
- существуют эффективные алгоритмы для его вычисления
- разработанная технология
- имеет статистическую интерпретацию

Малоранговое приближение матрицы

$$\min_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}} \|\mathbf{A} - \mathbf{X}\|_F$$

$$\text{s.t. } \operatorname{rank}(\mathbf{X}) \leq k$$



Задача выпуклой оптимизации

$$
\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \; i = 1, \ldots, p \\
& \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \; m < n
\end{aligned}
$$

- f_0, f_i — выпуклые функции:

$$
f(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2),
$$

где $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$.

Задача выпуклой оптимизации

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \; i = 1, \ldots, p \\
& \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \; m < n
\end{aligned}
$$

- f_0, f_i — выпуклые функции:

$$
f(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2),
$$

  где $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$.

- нет аналитического решения

Задача выпуклой оптимизации

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \; i = 1, \dots, p \\
& \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \; m < n
\end{aligned}
$$

- f_0, f_i — выпуклые функции:

$$
f(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2),
$$

  где $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$.
- нет аналитического решения
- существуют эффективные методы решения

Задача выпуклой оптимизации

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \; i = 1, \dots, p \\
& \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \; m < n
\end{aligned}
$$

- f_0, f_i — выпуклые функции:

$$
f(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2),
$$

  где $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$.
- нет аналитического решения
- существуют эффективные методы решения
- существуют приёмы для преобразования задачи к стандартному виду

Главное в первой части

- Организация работы
- Предмет курса по оптимизации
- Общая формулировка оптимизационных задач
- Классические оптимизационные задачи

Выпуклые множества и конусы

- Для задания целевой функции необходимо задать область её определения
- Выпуклые функции определены на выпуклых множествах
- Коническое представление задачи оптимизации существенно упрощает её решение
- Большинство универсальных солверов для задач выпуклой оптимизации работают с коническими задачами

Операции с множествами

- Линейная комбинация множеств $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$

$$\alpha\mathcal{G}_1 + \beta\mathcal{G}_2 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_1 \in \mathcal{G}_1,\ \mathbf{x}_2 \in \mathcal{G}_2\},$$

  где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- Декартово произведение $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$

$$\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mid \mathbf{x}_1 \in \mathcal{G}_1,\ \mathbf{x}_2 \in \mathcal{G}_2\}$$

Внутренности множества

Внутренность множества

Внутренность множества $\mathcal{G}$ состоит из точек $\mathcal{G}$, таких что:

$$\mathrm{int}\,(\mathcal{G}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{G} \mid \exists \varepsilon > 0, B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset \mathcal{G}\},$$

где $B(\mathbf{x}, \varepsilon) = \{\mathbf{y} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq \varepsilon\}$

Относительная внутренность

Относительной внутренностью множества $\mathcal{G}$ называют следующее множество:

$$\mathrm{relint}\,(G) = \{\mathbf{x} \in G \mid \exists \varepsilon > 0, B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathrm{aff}\,(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{G}\}$$

Q: зачем нужна концепция относительной внутренности?

Примеры

Найти относительные внутренности следующих множеств

1. $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$
2. $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 \leq 1,\ \alpha_i > 0, i = 1, \dots, n\}$
3. $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 = 1,\ \alpha_i > 0, i = 1, \dots, n\}$
4. $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x_1 \leq 1,\ -1 \leq x_2 \leq 1,\ x_3 = 0\}$

Аффинное множество

Аффинное множество

Множество $\mathcal{A}$ называется аффинным, если для любых $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ точка $\theta\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$.

Примеры: $\mathbb{R}^n$, гиперплоскость, точка.

Аффинная комбинация точек

Пусть $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathcal{G}$, тогда **точка** $\theta_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \theta_k\mathbf{x}_k$ при $\sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i = 1$ называется аффинной комбинацией точек $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$.

Аффинная оболочка точек

Множество $\left\{ \sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i\mathbf{x}_i \mid \mathbf{x}_i \in \mathcal{G}, \sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i = 1 \right\}$ называется аффинной оболочкой множества $\mathcal{G}$ и обозначается $\mathrm{aff}\,(\mathcal{G})$.

Факты об аффинных множествах

Утверждение 1

Множество является аффинным тогда и только тогда, когда в него входят все аффинные комбинации его точек.

Утверждение 2

Множество является аффинным тогда и только тогда, когда его можно представить в виде $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$, где $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $m \leq n$.

Выпуклое множество

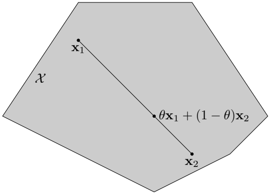
Выпуклое множество

Множество $\mathcal{X}$ называется выпуклым, если

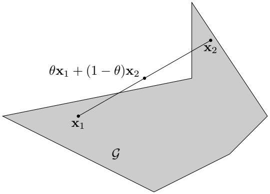
$$\forall\, \mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X},\ \theta \in [0, 1] \to \theta \mathbf{x}_1 + (1 - \theta)\mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}.$$

Множества $\varnothing$ и $\{\mathbf{x}_0\}$ также считаются выпуклыми.

Примеры: $\mathbb{R}^n$, аффинное множество, луч, отрезок.



Выпуклое множество



Невыпуклое множество

Выпуклая оболочка множества

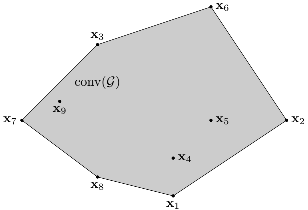
Выпуклая комбинация точек

Точка $\theta_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \theta_k\mathbf{x}_k$ при $\sum\limits_{i=1}^{k}\theta_i = 1,\ \theta_i \geq 0$ называется выпуклой комбинацией точек $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$.

Выпуклая оболочка множества

Выпуклой оболочкой множества $\mathcal{G}$ называется **множество**

$$\mathrm{conv}\left(\mathcal{G}\right) = \left\{ \sum_{i=1}^{k}\theta_i\mathbf{x}_i \mid \mathbf{x}_i \in \mathcal{G}, \sum_{i=1}^{k}\theta_i = 1, \theta_i \geq 0 \right\}.$$



Выпуклая оболочка множества $\mathcal{G} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_9\}$

Факты о выпуклых множествах

1. Множество $\mathcal{G}$ выпукло тогда и только тогда, когда любая выпуклая оболочка точек из $\mathcal{G}$ лежит в $\mathcal{G}$
2. Если $\mathcal{X}$ выпуклое множество и $\bar{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}$, то $\mathrm{conv}\left(\bar{\mathcal{X}}\right) \subset \mathcal{X}$.

Теорема Каратеодори

Если множество $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$, тогда любая точка из $\mathrm{conv}\left(\mathcal{G}\right)$ является выпуклой комбинацией не более чем $n+1$ точки из $\mathcal{G}$.

Операции, сохраняющие выпуклость множества

- Пересечение любого (**конечного или бесконечного**) числа выпуклых множеств — выпуклое множество
- Образ аффинного отображения, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, выпуклого множества — выпуклое множество
- Линейная комбинация выпуклых множеств — выпуклое множество
- Декартово произведение выпуклых множеств — выпуклое множество

Примеры

Проверьте на аффинность и выпуклость следующие множества:

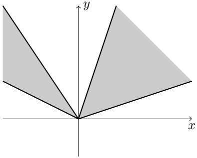
1. Полупространство: $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq c\}$
2. Многоугольник: $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{C}\mathbf{x} = 0\}$
3. Шар по норме в $\mathbb{R}^n$: $B(r, \mathbf{x}_c) = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c\| \leq r\}$
4. Эллипсоид: $\mathcal{E}(\mathbf{x}_c, \mathbf{P}, r) = \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)^\top \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \leq r^2\}$
5. Множество симметричных положительно-определённых матриц: $\mathbf{S}_+^n = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \mathbf{X}^\top = \mathbf{X},\ \mathbf{X} \succeq 0\}$
6. $\{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \mathrm{trace}(\mathbf{X}) = const\}$
7. Гиперболическое множество: $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \mid \prod\limits_{i=1}^n x_i \geq 1\}$

Конус

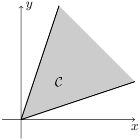
Определение

Множество $\mathcal{C}$ называется

- конусом, если $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}, \theta \geq 0 \to \theta \mathbf{x} \in \mathcal{C}$



- выпуклым конусом, если $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{C}, \theta_1, \theta_2 \geq 0 \to \theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2 \in \mathcal{C}$



Примеры: аффинное множество, включающее 0; луч.

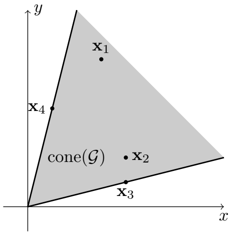
Коническая комбинация и коническая оболочка

Коническая (неотрицательная) комбинация точек

Пусть $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathcal{G}$, тогда **точка** $\theta_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + \theta_k \mathbf{x}_k$ при $\theta_i \geq 0$ называется конической (неотрицательной) комбинацией точек $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$.

Коническая оболочка точек

Множество $\left\{ \sum_{i=1}^{k} \theta_i \mathbf{x}_i \mid \mathbf{x}_i \in \mathcal{G}, \theta_i \geq 0 \right\}$ называется конической оболочкой множества $\mathcal{G}$, обозначается $\mathrm{cone}\,(\mathcal{G})$.



Коническая оболочка $\mathcal{G} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_4\}$

Примеры конусов

1. Неотрицательный октант
   $\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$
2. Множество симметричных положительно-определённых матриц $\mathbf{S}^n_+$
3. Нормальный конус: $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| \leq t\}$
   Для ℓ_2-нормы называется конусом второго порядка или Лоренцевым конусом
4. Экспоненциальный конус: $\{(x, y, z) \mid x \geq ye^{z/y},\ y > 0\}$ и его замыкание

Коническая оптимизация

Коническая оптимизация

Постановка задачи

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \in \mathcal{C}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{C}$ — некоторый выпуклый конус.

Коническая оптимизация

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{x} \in \mathcal{C},
\end{aligned}
$$

где $\mathcal{C}$ — некоторый выпуклый конус.

Q: Какие задачи можно представить в таком виде?

Коническая оптимизация

Постановка задачи

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \in \mathcal{C}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{C}$ — некоторый выпуклый конус.

Q: Какие задачи можно представить в таком виде?

A: Большинство задач, возникающих в приложениях

Коническая оптимизация

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{x} \in \mathcal{C},
\end{aligned}
$$

где $\mathcal{C}$ — некоторый выпуклый конус.

Q: Какие задачи можно представить в таком виде?

A: Большинство задач, возникающих в приложениях

Q: Почему это важно?

Коническая оптимизация

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{x} \in \mathcal{C},
\end{aligned}
$$

где $\mathcal{C}$ — некоторый выпуклый конус.

Q: Какие задачи можно представить в таком виде?

A: Большинство задач, возникающих в приложениях

Q: Почему это важно?

A: Если задача представима в таком виде, то с высокой вероятностью её можно решить за полиномиальное время.

Коническая оптимизация

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
&\min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{x} \in \mathcal{C},
\end{aligned}
$$

где $\mathcal{C}$ — некоторый выпуклый конус.

Q: Какие задачи можно представить в таком виде?

A: Большинство задач, возникающих в приложениях

Q: Почему это важно?

A: Если задача представима в таком виде, то с высокой вероятностью её можно решить за полиномиальное время.

!!! Однако есть выпуклые задачи[2], которые эквивалентны NP-полным задачам!

[2] De Klerk, Etienne, and Dmitrii V. Pasechnik. "Approximation of the stability number of a graph via copositive programming." SIAM Journal on Optimization 12.4 (2002): 875-892.

Главное во второй части

- Аффинное множество
- Выпуклое множество
- Конус
- Методы проверки свойств конкретных множеств