

# Методы оптимизации. Семинар 2.

## Сопряжённые конусы

Александр Катруца

Московский физико-технический институт

12 августа 2020 г.

# Напоминание

- ▶ Внутренность и относительная внутренность множества
- ▶ Аффинное множество
- ▶ Выпуклое множество
- ▶ Конус

# Определения

# Определения

## Сопряжённое множество

Сопряжённым (двойственным) к множеству  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  называют такое множество  $\mathcal{G}^*$ , что

$$\mathcal{G}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}\}.$$

# Определения

## Сопряжённое множество

Сопряжённым (двойственным) к множеству  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  называют такое множество  $\mathcal{G}^*$ , что

$$\mathcal{G}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}\}.$$

## Сопряжённый конус

Если  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$  конус, то

$$\mathcal{C}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}.$$

# Определения

## Сопряжённое множество

Сопряжённым (двойственным) к множеству  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$  называют такое множество  $\mathcal{G}^*$ , что

$$\mathcal{G}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}\}.$$

## Сопряжённый конус

Если  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$  конус, то

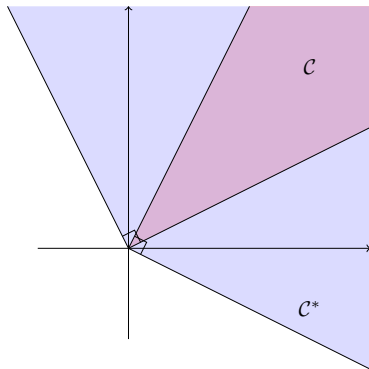
$$\mathcal{C}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}.$$

## Сопряжённое подпространство

Если  $\mathcal{L}$  линейное подпространство в  $\mathbb{R}^n$ , то

$$\mathcal{L}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\} = \mathcal{L}^\perp.$$

# Пример сопряжённого конуса



# Факты о сопряжённых множествах



# Факты о сопряжённых множествах

## Теорема

Пусть  $\mathcal{G}$  — произвольное множество в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\mathcal{G}^{**} = \overline{\text{conv}(\mathcal{G} \cup \{0\})}.$$

# Факты о сопряжённых множествах

## Теорема

Пусть  $\mathcal{G}$  — произвольное множество в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\mathcal{G}^{**} = \overline{\text{conv}(\mathcal{G} \cup \{0\})}.$$

## Теорема

Пусть  $\mathcal{G}$  — замкнутое выпуклое множество, включающее 0.

Тогда  $\mathcal{G}^{**} = \mathcal{G}$ .

# Факты о сопряжённых множествах

## Теорема

Пусть  $\mathcal{G}$  — произвольное множество в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\mathcal{G}^{**} = \overline{\text{conv}(\mathcal{G} \cup \{0\})}.$$

## Теорема

Пусть  $\mathcal{G}$  — замкнутое выпуклое множество, включающее 0.

Тогда  $\mathcal{G}^{**} = \mathcal{G}$ .

## Теорема

Пусть  $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ , тогда  $\mathcal{G}_2^* \subset \mathcal{G}_1^*$ .

# Примеры

Найти сопряжённые к следующим множествам:

1. Неотрицательный октант:  $\mathbb{R}_+^n$

# Примеры

Найти сопряжённые к следующим множествам:

1. Неотрицательный октант:  $\mathbb{R}_+^n$
2. Конус положительно полуопределённых матриц:  $S_+^n$

# Примеры

Найти сопряжённые к следующим множествам:

1. Неотрицательный октант:  $\mathbb{R}_+^n$
2. Конус положительно полуопределённых матриц:  $S_+^n$
3.  $\{(x_1, x_2) \mid |x_1| \leq x_2\}$

# Примеры

Найти сопряжённые к следующим множествам:

1. Неотрицательный октант:  $\mathbb{R}_+^n$
2. Конус положительно полуопределённых матриц:  $S_+^n$
3.  $\{(x_1, x_2) \mid |x_1| \leq x_2\}$
4.  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq r\}$

# Примеры

Найти сопряжённые к следующим множествам:

1. Неотрицательный октант:  $\mathbb{R}_+^n$
2. Конус положительно полуопределённых матриц:  $S_+^n$
3.  $\{(x_1, x_2) \mid |x_1| \leq x_2\}$
4.  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq r\}$
5. Конус, порождённый некоторой нормой:  
 $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| \leq t\}$



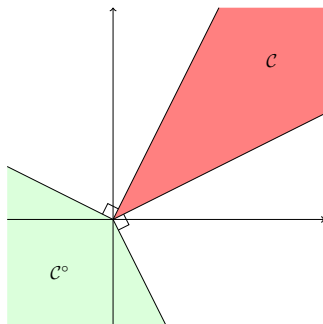
# Полярный конус

## Определение

Полярным конусом для конуса  $\mathcal{C}$  называется следующее множество

$$\mathcal{C}^\circ = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}.$$

Заметим, что  $\mathcal{C}^\circ = -\mathcal{C}^*$ .



# Разложение Moreau

## Теорема

- ▶ Для любого линейного подпространства  $\mathcal{L}$  и любого вектора  $\mathbf{x}$  выполнено  $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{L}^\perp}(\mathbf{x})$ , где  $\pi_{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$  — проекция точки  $\mathbf{x}$  на множество  $\mathcal{G}$

# Разложение Moreau

## Теорема

- ▶ Для любого линейного подпространства  $\mathcal{L}$  и любого вектора  $\mathbf{x}$  выполнено  $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{L}^\perp}(\mathbf{x})$ , где  $\pi_{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$  — проекция точки  $\mathbf{x}$  на множество  $\mathcal{G}$
- ▶  $\mathcal{L}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\} = \mathcal{L}^\perp = \mathcal{L}^\circ$

# Разложение Moreau

## Теорема

- ▶ Для любого линейного подпространства  $\mathcal{L}$  и любого вектора  $\mathbf{x}$  выполнено  $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{L}^\perp}(\mathbf{x})$ , где  $\pi_{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$  — проекция точки  $\mathbf{x}$  на множество  $\mathcal{G}$
- ▶  $\mathcal{L}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\} = \mathcal{L}^\perp = \mathcal{L}^\circ$
- ▶ Для выпуклого конуса  $\mathcal{C}$  и вектора  $\mathbf{x}$  справедливо

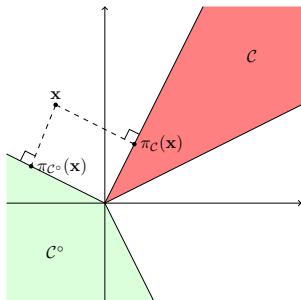
$$\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{x})$$

# Разложение Moreau

## Теорема

- ▶ Для любого линейного подпространства  $\mathcal{L}$  и любого вектора  $\mathbf{x}$  выполнено  $\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{L}^\perp}(\mathbf{x})$ , где  $\pi_{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$  — проекция точки  $\mathbf{x}$  на множество  $\mathcal{G}$
- ▶  $\mathcal{L}^* = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\} = \mathcal{L}^\perp = \mathcal{L}^\circ$
- ▶ Для выпуклого конуса  $\mathcal{C}$  и вектора  $\mathbf{x}$  справедливо

$$\mathbf{x} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathcal{C}^\circ}(\mathbf{x})$$



# Сопряжение для композиций конусов

Пусть  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  замкнутые выпуклые конусы, тогда

- ▶  $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$
- ▶  $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$
- ▶  $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*$

# Сопряжение для композиций конусов

Пусть  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  замкнутые выпуклые конусы, тогда

- ▶  $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \times \mathcal{C}_2^*$
- ▶  $(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* \cap \mathcal{C}_2^*$
- ▶  $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^* = \mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*$

**Q:** почему именно такие композиции интересны?

# Зачем нужны конусы?

- ▶ Исторически первым хорошо изученным классом задач были задачи линейного программирования (LP)



# Зачем нужны конусы?

- ▶ Исторически первым хорошо изученным классом задач были задачи линейного программирования (LP)

**Q:** как перейти от линейных задач к нелинейным с минимальными потерями?

# Зачем нужны конусы?

- ▶ Исторически первым хорошо изученным классом задач были задачи линейного программирования (LP)

**Q:** как перейти от линейных задач к нелинейным с минимальными потерями?

**A:** если в задаче LP  $x \in \mathbb{R}_+^n$ , то в задаче выпуклой оптимизации  $x \in \mathcal{C}$ , где  $\mathcal{C}$  — некоторый конус

# Зачем нужны конусы?

- ▶ Исторически первым хорошо изученным классом задач были задачи линейного программирования (LP)

**Q:** как перейти от линейных задач к нелинейным с минимальными потерями?

**A:** если в задаче LP  $x \in \mathbb{R}_+^n$ , то в задаче выпуклой оптимизации  $x \in \mathcal{C}$ , где  $\mathcal{C}$  — некоторый конус

- ▶ Все нелинейности кодируются с помощью конусов и их декартовых произведений

# Зачем нужны конусы?

- ▶ Исторически первым хорошо изученным классом задач были задачи линейного программирования (LP)

**Q:** как перейти от линейных задач к нелинейным с минимальными потерями?

**A:** если в задаче LP  $x \in \mathbb{R}_+^n$ , то в задаче выпуклой оптимизации  $x \in \mathcal{C}$ , где  $\mathcal{C}$  — некоторый конус

- ▶ Все нелинейности кодируются с помощью конусов и их декартовых произведений
- ▶ Теория для задач LP с небольшими изменениями переносится на случай конических задач

# Зачем нужны конусы?

- ▶ Исторически первым хорошо изученным классом задач были задачи линейного программирования (LP)

**Q:** как перейти от линейных задач к нелинейным с минимальными потерями?

**A:** если в задаче LP  $x \in \mathbb{R}_+^n$ , то в задаче выпуклой оптимизации  $x \in \mathcal{C}$ , где  $\mathcal{C}$  — некоторый конус

- ▶ Все нелинейности кодируются с помощью конусов и их декартовых произведений
- ▶ Теория для задач LP с небольшими изменениями переносится на случай конических задач
- ▶ Детальное обсуждение будет далее в курсе...

# Опорная гиперплоскость

# Опорная гиперплоскость

## Определение

Гиперплоскость  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$  называется опорной к множеству  $\mathcal{G}$  в граничной точке  $\mathbf{x}_0$ , если  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq \beta = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_0 \rangle$  для всех  $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$ .

# Опорная гиперплоскость

## Определение

Гиперплоскость  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$  называется опорной к множеству  $\mathcal{G}$  в граничной точке  $\mathbf{x}_0$ , если  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq \beta = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_0 \rangle$  для всех  $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$ .

## Собственно опорная гиперплоскость

Гиперплоскость  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$  называется собственно опорной к множеству  $\mathcal{G}$  в точке  $\mathbf{x}_0$ , если она опорная и  $\exists \tilde{\mathbf{x}} \in X: \langle \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle > \beta$ .



# Опорная гиперплоскость

## Определение

Гиперплоскость  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$  называется опорной к множеству  $\mathcal{G}$  в граничной точке  $\mathbf{x}_0$ , если  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq \beta = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_0 \rangle$  для всех  $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$ .

## Собственно опорная гиперплоскость

Гиперплоскость  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$  называется собственно опорной к множеству  $\mathcal{G}$  в точке  $\mathbf{x}_0$ , если она опорная и  $\exists \tilde{\mathbf{x}} \in X: \langle \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle > \beta$ .

## Теорема об опорной гиперплоскости

В любой граничной (относительно граничной) точке выпуклого множества существует опорная (собственно опорная) гиперплоскость.

# Как искать опорную гиперплоскость?

- ▶ Проверить множество на выпуклость
  - ▶ если множество выпукло, то опорная гиперплоскость существует и является касательной к границе
  - ▶ если множество невыпукло, то нужно дополнительно исследовать в каких точках границы опорная гиперплоскость существует
- ▶ Если граница задана в виде уравнения  $F(\mathbf{x}) = 0$ , то нормальный вектор касательной гиперплоскости в точке  $\mathbf{x}_0$  равен  $\nabla F(\mathbf{x}_0)$

Зачем нужны сопряжённые конусы?

# Зачем нужны сопряжённые конусы?

Способы описания множества

# Зачем нужны сопряжённые конусы?

## Способы описания множества

- ▶ Задать элементы

# Зачем нужны сопряжённые конусы?

## Способы описания множества

- ▶ Задать элементы
- ▶ Определить границу

# Зачем нужны сопряжённые конусы?

## Способы описания множества

- ▶ Задать элементы
- ▶ Определить границу

# Зачем нужны сопряжённые конусы?

## Способы описания множества

- ▶ Задать элементы
- ▶ Определить границу

## Сопряжённый конус и опорные гиперплоскости

- ▶ По определению  $C^*$  состоит из нормалей опорных гиперплоскостей для  $C$  в нуле



# Зачем нужны сопряжённые конусы?

## Способы описания множества

- ▶ Задать элементы
- ▶ Определить границу

## Сопряжённый конус и опорные гиперплоскости

- ▶ По определению  $C^*$  состоит из нормалей опорных гиперплоскостей для  $C$  в нуле
- ▶ Сопряжённый конус задаёт альтернативное описание исходного конуса

# Зачем нужны сопряжённые конусы?

## Способы описания множества

- ▶ Задать элементы
- ▶ Определить границу

## Сопряжённый конус и опорные гиперплоскости

- ▶ По определению  $C^*$  состоит из нормалей опорных гиперплоскостей для  $C$  в нуле
- ▶ Сопряжённый конус задаёт альтернативное описание исходного конуса
- ▶ Более наглядные приложения будут далее в курсе...

# Разделяющая гиперплоскость

# Разделяющая гиперплоскость

## Определение

Разделяющей гиперплоскостью для множеств  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  является такая гиперплоскость  $\{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$ , что  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle \geq \beta$  для всех  $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{G}_1$  и  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle \leq \beta$  для всех  $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{G}_2$

# Разделяющая гиперплоскость

## Определение

Разделяющей гиперплоскостью для множеств  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  является такая гиперплоскость  $\{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$ , что  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle \geq \beta$  для всех  $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{G}_1$  и  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle \leq \beta$  для всех  $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{G}_2$

## Существование

Пусть  $\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$  выпуклые непересекающиеся множества, тогда существует разделяющая их гиперплоскость.

# Разделяющая гиперплоскость

## Определение

Разделяющей гиперплоскостью для множеств  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  является такая гиперплоскость  $\{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$ , что  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle \geq \beta$  для всех  $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{G}_1$  и  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle \leq \beta$  для всех  $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{G}_2$

## Существование

Пусть  $\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$  выпуклые непересекающиеся множества, тогда существует разделяющая их гиперплоскость.

## Критерий для выпуклых множеств

Два выпуклых множества, таких что по крайней мере одно из них открыто, не пересекаются тогда и только тогда, когда существует разделяющая гиперплоскость.

# Как искать разделяющую гиперплоскость?

- ▶ Проверить множества на выпуклость

# Как искать разделяющую гиперплоскость?

- ▶ Проверить множества на выпуклость
  - ▶ если **оба множества выпуклы**, можно пользоваться теоремами



# Как искать разделяющую гиперплоскость?

- ▶ Проверить множества на выпуклость
  - ▶ если **оба множества выпуклы**, можно пользоваться теоремами
  - ▶ если **невыпукло хотя бы одно множество**, нужно придумать обоснование для конкретного случая

# Как искать разделяющую гиперплоскость?

- ▶ Проверить множества на выпуклость
  - ▶ если **оба множества выпуклы**, можно пользоваться теоремами
  - ▶ если **невыпукло хотя бы одно множество**, нужно придумать обоснование для конкретного случая
- ▶ Проверить пересекаются ли множества

# Как искать разделяющую гиперплоскость?

- ▶ Проверить множества на выпуклость
  - ▶ если **оба множества выпуклы**, можно пользоваться теоремами
  - ▶ если **невыпукло хотя бы одно множество**, нужно придумать обоснование для конкретного случая
- ▶ Проверить пересекаются ли множества
  - ▶ если множества пересекаются, то разделяющей гиперплоскости нет

# Как искать разделяющую гиперплоскость?

- ▶ Проверить множества на выпуклость
  - ▶ если **оба множества выпуклы**, можно пользоваться теоремами
  - ▶ если **невыпукло хотя бы одно множество**, нужно придумать обоснование для конкретного случая
- ▶ Проверить пересекаются ли множества
  - ▶ если множества пересекаются, то разделяющей гиперплоскости нет
  - ▶ если множества не пересекаются, найти максимально близкие точки, то есть решение задачи

$$\min_{\mathbf{x}_1 \in \mathcal{G}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{G}_2} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2^2$$

# Как искать разделяющую гиперплоскость?

- ▶ Проверить множества на выпуклость
  - ▶ если **оба множества выпуклы**, можно пользоваться теоремами
  - ▶ если **невыпукло хотя бы одно множество**, нужно придумать обоснование для конкретного случая
- ▶ Проверить пересекаются ли множества
  - ▶ если множества пересекаются, то разделяющей гиперплоскости нет
  - ▶ если множества не пересекаются, найти максимально близкие точки, то есть решение задачи

$$\min_{\mathbf{x}_1 \in \mathcal{G}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{G}_2} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2^2$$

- ▶ Разделяющая гиперплоскость — это гиперплоскость ортогональная отрезку, который соединяет  $\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*$

# Лемма Фаркаша

# Лемма Фаркаша

## Лемма

Пусть даны  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  и  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:

1.  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$
2.  $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0, \langle \mathbf{p}, \mathbf{b} \rangle < 0$

# Лемма Фаркаша

## Лемма

Пусть даны  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  и  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:

1.  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$
2.  $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0, \langle \mathbf{p}, \mathbf{b} \rangle < 0$

## Важное следствие

Пусть даны  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  и  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:

1.  $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$
2.  $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} = 0, \langle \mathbf{p}, \mathbf{b} \rangle < 0, \mathbf{p} \geq 0$



## Геометрическая интерпретация

- ▶  $Ax = b$  при  $x \geq 0$  означает, что  $b$  лежит в конусе, натянутом на столбцы матрицы  $A$

## Геометрическая интерпретация

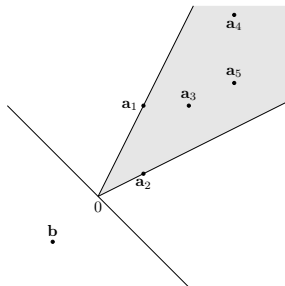
- ▶  $Ax = b$  при  $x \geq 0$  означает, что  $b$  лежит в конусе, натянутом на столбцы матрицы  $A$
- ▶  $p^T A \geq 0$ ,  $\langle p, b \rangle < 0$  означает, что существует разделяющая гиперплоскость между вектором  $b$  и конусом из столбцов матрицы  $A$ .

# Геометрическая интерпретация

- ▶  $Ax = b$  при  $x \geq 0$  означает, что  $b$  лежит в конусе, натянутом на столбцы матрицы  $A$
- ▶  $p^T A \geq 0$ ,  $\langle p, b \rangle < 0$  означает, что существует разделяющая гиперплоскость между вектором  $b$  и конусом из столбцов матрицы  $A$ .
- ▶ Разделяющая гиперплоскость существует, так как множества  $\{b\}$  и  $\{y \mid y = Ax, x \geq 0\}$  выпуклы

# Геометрическая интерпретация

- ▶  $Ax = b$  при  $x \geq 0$  означает, что  $b$  лежит в конусе, натянутом на столбцы матрицы  $A$
- ▶  $p^T A \geq 0$ ,  $\langle p, b \rangle < 0$  означает, что существует разделяющая гиперплоскость между вектором  $b$  и конусом из столбцов матрицы  $A$ .
- ▶ Разделяющая гиперплоскость существует, так как множества  $\{b\}$  и  $\{y \mid y = Ax, x \geq 0\}$  выпуклы



# Применение леммы Фаркаша

- ▶ Разрешимость задачи линейного программирования
- ▶ Существование равновесного распределения в Марковской цепи
- ▶ Теоремы об арбитраже в финансах

# Главное

- ▶ Сопряжённые конусы
- ▶ Свойства сопряжённых конусов
- ▶ Самосопряжённые конусы
- ▶ Опорная гиперплоскость
- ▶ Разделяющая гиперплоскость