Методы оптимизации. Семинар 6. Условия оптимальности для безусловных задач

Александр Катруца

Московский физико-технический институт

18 октября 2021 г.

Напоминание

- Субградиент и субдифференциал
- Теорема Моро-Рокафеллара
- Условный субдифференциал

Мотивация

Вопрос 0

Когда существует решение оптимизационной задачи?

Вопрос 1

Как проверить, что точка является решением оптимизационной задачи?

Вопрос 2

Из каких условий можно найти решение оптимизационной задачи?

Существование решения

Теорема Вейерштрасса

Пусть $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ компактное множество и пусть $f(x)$ непрерывная функция на $\mathcal{X}$. Тогда точка глобального минимума функции $f(x)$ на $\mathcal{X}$ существует.

Эта теорема гарантирует, что решение подавляющего большинства разумных задач существует.

Условия оптимальности

Определение

Условием оптимальности будем называть некоторое выражение, выполнимость которого даёт необходимое и (или) достаточное условие экстремума.

Классы задач:

- Общая задача минимизации
- Задача безусловной минимизации
- Задача минимизации с ограничениями типа равенств
- Задача минимизации с ограничениями типа равенств и неравенств

Общая задача минимизации

Задача

$$f(\mathbf{x}) \to \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}}$$

Критерий оптимальности

Пусть $f(\mathbf{x})$ определена на множестве $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

1. если $\mathbf{x}^*$ точка минимума $f(\mathbf{x})$ на $\mathcal{X}$, то $0 \in \partial_{\mathcal{X}} f(\mathbf{x}^*)$
2. если для некоторой точки $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ существует субдифференциал $\partial_{\mathcal{X}} f(\mathbf{x}^*)$ и $0 \in \partial_{\mathcal{X}} f(\mathbf{x}^*)$, то $\mathbf{x}^*$ — точка минимума $f(\mathbf{x})$ на $\mathcal{X}$.

Какие недостатки у приведённого критерия?

Примеры

- $\mathbf{x}^\top \mathbf{x} + \alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|_2 \to \min\limits_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}$, $\alpha > 0$
- $\mathbf{x}^\top \mathbf{x} + \alpha \|\mathbf{c}^\top \mathbf{x} - b\|_2 \to \min\limits_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}$, $\alpha > 0$
- Ограничение на допустимое множество

$$
\begin{aligned}
&(x+2)^2 + |y+3| \to \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \\
\text{s.t. } & 8 + 2x - y \leq 0
\end{aligned}
$$

Задача безусловной минимизации

Задача: $f(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}$.

Критерий оптимальности для выпуклых функций

Пусть $f(\mathbf{x})$ выпуклая функция на $\mathbb{R}^n$. Тогда точка $\mathbf{x}^*$ решение задачи безусловной минимизации $\Leftrightarrow 0 \in \partial f(\mathbf{x}^*)$.

Следствие

Если $f(\mathbf{x})$ выпукла и дифференцируема на $\mathbb{R}^n$. Тогда точка $\mathbf{x}^*$ решение задачи безусловной минимизации $\Leftrightarrow$ $f'(\mathbf{x}^*) = 0$.

Достаточное условие для невыпуклых функций

Пусть f дважды дифференцируема на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbf{x}^*$ такая что $f'(\mathbf{x}^*) = 0$. Тогда если $f''(\mathbf{x}^*) \succ 0$, то $\mathbf{x}^*$ точка строгого локального минимума $f(\mathbf{x})$ на $\mathbb{R}^n$.

Примеры

- $x_1 e^{x_1} - (1 + e^{x_1}) \cos x_2 \to \min$
- Функция Розенброка:
  $(1 - x_1)^2 + \alpha \sum\limits_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1}^2)^2 \to \min,\ \alpha > 0$
- $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 + e^{x_1 + x_2} \to \min$

Резюме

- Существование решения оптимизационной задачи
- Условия оптимальности для
  - общей задачи оптимизации
  - задачи безусловной оптимизации