

Методы оптимизации.

Семинар 3. Проекция точки на множество, отделимость, опорная гиперплоскость

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет Управления и Прикладной Математики

18 сентября 2019 г.

- Аффинная оболочка и аффинное множество
- Выпуклая оболочка и выпуклое множество
- Коническая оболочка и выпуклый конус
- Операции, сохраняющие выпуклость

Внутренности множества

Внутренность множества

Внутренность множества G состоит из точек из G , таких что:

$$\text{int}G = \{x \in G \mid \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset G\},$$

где $B(x, \varepsilon) = \{y \mid \|x - y\| \leq \varepsilon\}$

Относительная внутренность

Относительной внутренностью множества G называют следующее множество:

$$\text{relint}G = \{x \in G \mid \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap \text{aff}G \subseteq G\}$$

Вопрос: зачем нужна концепция относительной внутренности?

Найти относительные внутренности следующих множеств

1. $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$
2. $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 \leq 1, \alpha_i > 0, i = 1, \dots, n\}$
3. $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 = 1, \alpha_i > 0, i = 1, \dots, n\}$
4. $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1, x_3 = 0\}$

Проекция точки на множество

Расстояние между точкой и множеством

Расстоянием d от точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ до замкнутого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ является

$$d(\mathbf{a}, X, \|\cdot\|) = \inf\{\|\mathbf{a} - \mathbf{y}\| \mid \mathbf{y} \in X\}$$

Проекция точки на множество

Проекцией точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ на множество $X \subset \mathbb{R}^n$ по норме $\|\cdot\|$ будем называть такую точку $\pi_X(\mathbf{a}) \in X$, что

$$\pi_X(\mathbf{a}) = \arg \min_{\mathbf{y} \in X} \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|$$

Вопросы: единственна ли проекция? Если нет, то в каких случаях единственна? Какая связь между единственностью проекции и выпуклостью множества?

Факты о проекциях

Критерий проекции

Точка $\pi_X(\mathbf{a}) \in X$ является проекцией точки \mathbf{a} на множество $X \Leftrightarrow \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{a} - \pi_X(\mathbf{a})\|, \forall \mathbf{x} \in X$.

Критерий проекции для нормы ℓ_2

Точка $\pi_X(\mathbf{a}) \in X$ является проекцией точки \mathbf{a} на множество $X \Leftrightarrow \langle \pi_X(\mathbf{a}) - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \pi_X(\mathbf{a}) \rangle \geq 0, \forall \mathbf{x} \in X$.

1. Проекция на шар $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1\}$
2. Проекция на плоскость $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = b\}$
3. Проекция на аффинное множество
 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \text{rank}(\mathbf{A}) = m\}$

Отделимость выпуклых множеств

Определение

Пусть $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^n$ произвольные множества. Они называются:

- отделимыми, если $\exists \mathbf{p}, \beta : \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle \geq \beta \geq \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle, \forall \mathbf{x}_1 \in X_1$ и $\forall \mathbf{x}_2 \in X_2$.
- собственно отделимыми, если они отделимы и $\exists \mathbf{x}_1^* \in X_1$ и $\exists \mathbf{x}_2^* \in X_2 : \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1^* \rangle > \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2^* \rangle$
- сильно отделимыми, если $\exists \mathbf{p} \neq 0$ и $\beta :$
$$\inf_{\mathbf{x}_1 \in X_1} \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle > \beta > \sup_{\mathbf{x}_2 \in X_2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle$$
- строго отделимы, если $\forall \mathbf{x}_1 \in X_1$ и $\forall \mathbf{x}_2 \in X_2 :$
$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle > \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle.$$

Разделяющая гиперплоскость

Разделяющей гиперплоскостью для множеств X_1, X_2 является такая гиперплоскость $\{\mathbf{x} | \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$, что $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_1 \rangle \geq \beta$ для всех $\mathbf{x}_1 \in X_1$ и $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_2 \rangle \leq \beta$ для всех $\mathbf{x}_2 \in X_2$

Факты об отделимости

Существование

Пусть X_1 и X_2 выпуклые не пересекающиеся множества, тогда существует разделяющая их гиперплоскость.

Критерий для выпуклых множеств

Два выпуклых множества, таких что по крайней мере одно из них открыто, не пересекаются тогда и только тогда, когда существует разделяющая гиперплоскость.

Критерий сильной отделимости

Два выпуклых множества сильно отделимы тогда и только тогда когда расстояние между ними положительно.

1. Построить разделяющую гиперплоскость для множеств X_1, X_2 : $X_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 > 1, x_1 > 0\}$, $X_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq 9 + \frac{4}{x_1 - 1}\}$.
2. Критерий разрешимости системы строгих линейных неравенств $\mathbf{Ax} < \mathbf{b}$ как не пересечение аффинного множества $\{\mathbf{b} - \mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ и множества $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid y_i > 0\}$
3. Пример двух замкнутых выпуклых не пересекающихся множеств, которые не являются строго отделимыми

Опорная гиперплоскость

Опорная гиперплоскость

Гиперплоскость $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$ называется опорной к множеству X в граничной точке \mathbf{x}_0 , если $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geq \beta = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_0 \rangle$ для всех $\mathbf{x} \in X$.

Собственно опорная гиперплоскость

Гиперплоскость $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$ называется собственно опорной к множеству X в точке \mathbf{x}_0 , если она опорная и $\exists \tilde{\mathbf{x}} \in X: \langle \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle > \beta$.

Теорема об опорной гиперплоскости

В любой граничной (относительно граничной) точке выпуклого множества существует опорная (собственно опорная) гиперплоскость.

1. Выразить множество $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x_1 x_2 \geq 1\}$ как пересечение гиперплоскостей
2. Построить опорную гиперплоскость к множеству $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid e^{x_1} \leq x_2\}$ в точке $x_0 = (0, 1)$
3. Найти уравнение гиперплоскости опорной к множеству $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geq x_1^2 + x_2^2\}$ и отделяющей его от точки $x_0 = (-5/4, 5/16, 15/16)$

- Внутренность и относительная внутренность выпуклого множества
- Проекция точки на множество
- Отделимость выпуклых множеств
- Опорная гиперплоскость