

Методы оптимизации.

Семинар 8. Условия оптимальности

Александр Катруца

Московский физико-технический институт

20 октября 2020 г.

Напоминание

- ▶ Сопряжённые функции
- ▶ Неравенство Юнга-Фенхеля
- ▶ Примеры сопряжённых функций

Задача минимизации с ограничениями типа равенств

Задача

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\rightarrow \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } g_i(\mathbf{x}) &= 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Лагранжиан

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

Возможные варианты

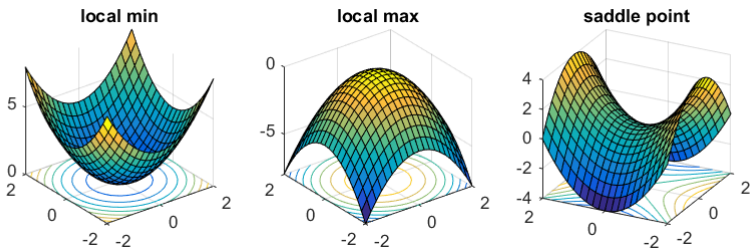


Рис. 1: Рисунок взят из блога

<http://www.offconvex.org/2016/03/22/saddlepoints/>

Простой пример

$$\begin{aligned} x + y &\rightarrow \min_{(x,y)} \\ \text{s.t. } x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Задача минимизации с ограничениями типа равенств и неравенств

Задача

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Лагранжиан

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(\mathbf{x})$$

Условия оптимальности Каруша-Куна-Таккера (ККТ)

Необходимые условия

Пусть для задачи выполнено условие регулярности. Тогда если \mathbf{x}^* локальное решение задачи, и функции f, h_j, g_i дифференцируемы, то найдутся такие $\boldsymbol{\mu}^*$ и $\boldsymbol{\lambda}^*$, для которых выполнено следующее:

- ▶ $g_i(\mathbf{x}^*) = 0, i = 1, \dots, m$
- ▶ $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0, j = 1, \dots, p$
- ▶ $\mu_j^* \geq 0, j = 1, \dots, p$
- ▶ $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0, j = 1, \dots, p$
- ▶ $L'(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = 0$

Если задача выпуклая, то эти же условие является достаточным.

Примеры условий регулярности

- ▶ Если g_i и h_j линейны, то дополнительные условия не нужны
- ▶ Градиенты ограничений типа равенств и активных ограничений типа неравенств линейно независимы в \mathbf{x}^*
- ▶ Условие Слейтера:
 - ▶ Задача является выпуклой, то есть g_i — аффинные, h_j и f — выпуклые
 - ▶ Существует точка \mathbf{x}_0 такая что $g_i(\mathbf{x}_0) = 0$ и $h_j(\mathbf{x}_0) < 0$

Примеры



$$\begin{array}{ll}\min & x + 3y \\ \text{s.t.} & x - y \geq 0 \\ & (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 9\end{array}$$



$$\begin{array}{ll}\min & (x + 1)^2 + (y + 1)^2 \\ \text{s.t.} & 2x + 3y \geq 5\end{array}$$



$$\begin{array}{ll}\min & x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 + x_3 \leq -2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ & x_i \geq 0\end{array}$$

Резюме

- ▶ Седловые точки
- ▶ Условия оптимальности для задач типа равенств
- ▶ Условия Каруша-Куна-Таккера
- ▶ Условие регулярности Слейтера