Universidade Federal de Santa Catarina

Centro Tecnológico
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Aeroacústica Computacional

Lista de exercícios 5

André Mateus Netto Spillere

Florianópolis, Brasil - 3 de dezembro de 2015

SUMÁRIO

1 DIRETIVIDADE NO CAMPO DISTANTE

Este trabalho visa estudar a diretividade no campo distante causado pelo desprendimento de vórtices de um corpo sujeito a diferentes velocidades de escoamento. A Figura 1 mostra a geometria do anteparo de dimensões 40×40, onde um esquema de *bounce-back* simples é utilizado para modelar as paredes (1). Os limites da malha são terminações anecoicas ABC de espessura de 30 células (2), com valores alvo de $\rho = \rho_0$, $u_x = U_0$ e $u_y = 0$. O campo acústico será investigado para as velocidades de escoamento $M = 0,03$, $0,07$ e $0,10$. A região de propagação possui 500×500 células e segue o modelo LBGK,

$$F_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) = \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) F_i(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\tau} F_i^M(\mathbf{x}, t). \tag{1.1}$$

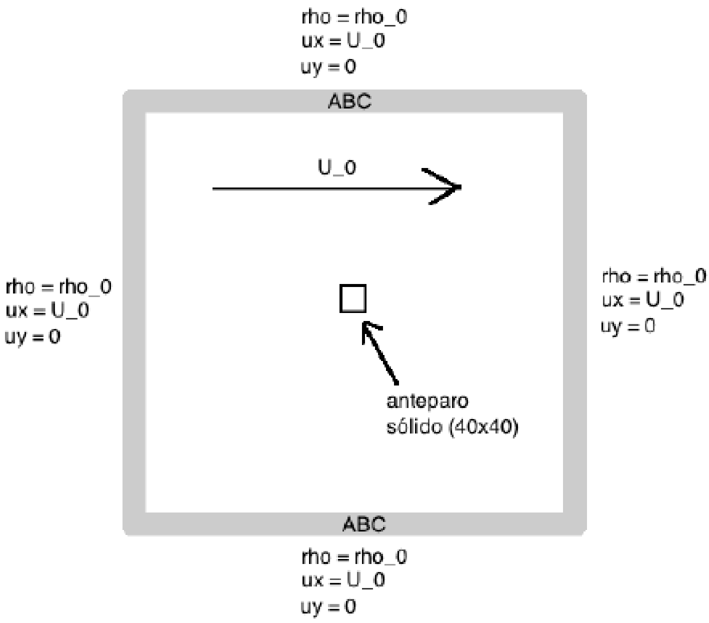

Figura 1: Geometria a ser estudada e condições de contorno.

Como o domínio da malha pode ser considerada como campo próximo, a diretividade no campo distante será calculada com base nas equações de Ffwocs Williams e Hawking (3), com implementação numérica proposta por Lockard (4). O código LBGK utilizad é o mesmo da Lista 4, com a diferença de linhas de código adicionadas para salvar o histórico de pressão, velocidade e densidade na superfície de Ffwocs Williams. O único parâmetro de entrada é o número de células entre a superfície de Ffowcs Williams e o anteparo. Vetores contendo os índices da células pertences a esta superfície são criados, permitindo que as velocidades, pressões e densidades nestes pontos sejam salvas. Outro código foi desenvolvido para implementar as equações e avaliar a diretividade para diferentes tamanhos de superfície.

```
Nsquare = 100; % number of cells away from the body for FW-H surface

% Measurement points
x0 = xl(1) - Nsquare;
xf = xl(2) + Nsquare;
y0 = yl(3) - Nsquare;
yf = yl(2) + Nsquare;
vecx = x0:xf;
Nx = length(vecx);
vecy = y0:yf;
Ny = length(vecy);
square = [vecx(2:end), repelem(xf,Ny-1), fliplr(vecx(2:end)), ...
    repelem(x0,Ny-1); repelem(yf,Nx-1), fliplr(vecy(2:end)), ...
    repelem(y0,Nx-1), vecy(2:end)];
x_direction = square(1,:);
y_direction = square(2,:);

for ta = 1 : total_time
...
    %   Save pressure and velocity history
    for i = 1:length(x_direction)
        hist_rho(i,ta) = rho(y_direction(i),x_direction(i));
        hist_ux(i,ta) = ux(y_direction(i),x_direction(i));
        hist_uy(i,ta) = uy(y_direction(i),x_direction(i));
        hist_u(i,ta) = u(y_direction(i),x_direction(i));
        hist_p(i,ta) = p(y_direction(i),x_direction(i));
    end
...
end
```

2 IMPLEMENTAÇÃO DAS EQUAÇÕES FW-H

As equações seguem o desenvolvimento de Lockard (4) e seu passo-a-passo será omitido aqui. A equação de que permite calcular a flutuação de pressão p' na posição de ouvinte $\boldsymbol{y} = (x, y)$ para uma fonte na posição $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$ e frequência ω é

$$\begin{aligned} H(f)p'(\boldsymbol{y}, \omega) = &- \int_{f=0} F_i(\boldsymbol{\xi}, \omega)\frac{\partial G(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i}\mathrm{d}l \\ &- \int_{f=0} \mathrm{i}\omega Q(\boldsymbol{\xi}, \omega) G(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\xi})\mathrm{d}l \\ &- \int_{f>0} T_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \omega) H(f) \frac{\partial^2 G(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Os termos Q, F_i e T_{ij} referem-se às contribuições dos monopolos, dipolos e quadrupolos, respectivamente. A superfície de FW é definida de tal forma que $f = 0$ em seu limite, $f < 0$ em seu interior e $f > 0$ no campo distante. A função Heaviside é definida tal que $H(f < 0) = 0$ e $H(f > 0) = 1$. O termo $G(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\xi})$ representa a função de Green bidimensional, que logo será definida.

Percebe-se que os dois primeiros termos da integral são avaliados na superfície, enquanto o terceiro é avaliado no campo distante. As equações para Q e F_i são facilmente obtidas, porém o termo T_{ij} é de difícil solução. Em muitos casos, para superfícies suficientemente distantes da fonte sonora, as parcelas dominantes de energia acústica são provenientes de monopolos e dipolos, de tal forma que a parcela do quadrupolo é englobada por estas, sendo possível desprezar o terceiro termo da equação. Esta abordagem será utilizada para a geometria em análise.

Os termos Q e F_i podem ser calculados por

$$Q = (\rho u_i - \rho_0 U_i)\frac{\partial f}{\partial y_i}, \tag{2.2}$$

$$F_i = (p\delta_{ij} + \rho(u_i - 2U_i)u_j + \rho_0 U_i U_j)\frac{\partial f}{\partial y_j}, \tag{2.3}$$

onde ρ, u_i e p são os valores totais de densidade, velocidade e pressão do escoamento[1], δ_{ij} é o delta de Kronecker, ρ_0 é a densidade de corrente livre, U_i a velocidade com que se move a superfície, e $\partial f/\partial y_i$ a normal da superfície. Como a superfície a ser implementada é estática, $U_i = 0$. A normais de superfície são normalizadas por $|\nabla f|$ e assumem valores entre -1, 0 e 1 pelo fato dos lados estarem alinhados com os eixos cartesianos, como visto na Figura 2.

[1] Neste caso, em unidades de *lattice* para posterior análise dos resultados da simulação.

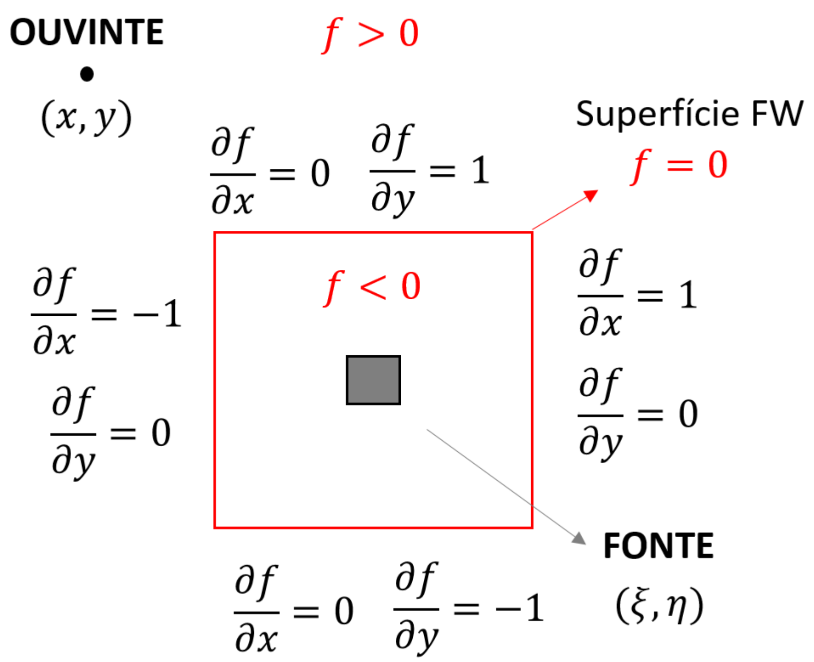

Figura 2: Representação da superfície de FW, onde $f = 0$. A região englobada pela superfície é definida como $f < 0$, e $f > 0$ para as demais regiões. A posição do ouvinte (x, y) e fonte (ξ, η) também são ilustradas, sendo esta última por conveniência posicionada no centro do eixo de coordenadas. As normais $\partial f / \partial y_i$ em cada lado superfície são também calculadas. Neste caso, a superfície possui velocidade $U_i = 0$.

O cálculo de Q e F_i envolve os valores de ρ, u_i e p, que por sua vez são variáveis temporais salvas ao longo da simulação. Após descartar o período transiente, Q e F_i são calculados para todos os pontos da superfície em todos os instantes de tempo. Expandindo para os índices $i = 1, 2$,

$$Q = \rho u_x \frac{\partial f}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial f}{\partial y}, \tag{2.4}$$

$$F_1 = (p + \rho u_x^2) \frac{\partial f}{\partial x} + \rho u_x u_y \frac{\partial f}{\partial y}, \tag{2.5}$$

$$F_2 = \rho u_x u_y \frac{\partial f}{\partial x} + (p + \rho u_y^2) \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{2.6}$$

F_1 e F_2 não são imediatamente somados pois na Equação 2.1 cada F_i deve ser multiplicado pela correspondente derivada da função de Green $\partial G / \partial x i_i$, para então serem somados.

Em seguida, uma transformada rápida de Fourier é aplicada em ambos em cada ponto da superfície, e toma-se o resultado na frequência de interesse ω, neste caso a frequência de pico para a velocidade de escoamento M. Após multiplicar este resultado pela função de Green, integra-se ao longo da superfície com auxílio da função `trapz` do MATLAB.

Resta agora definir a função de Green aplicável a este caso. Para casos de escoamento subsônico e geometria bidimensional, a função de Green é dada por

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{\mathrm{i}}{4\beta} \exp(\mathrm{i}Mk\bar{x}/\beta^2) H_0^{(2)} \left(\frac{k}{\beta^2} \sqrt{\bar{x}^2 + \beta^2 \bar{y}^2} \right), \tag{2.7}$$

onde $\bar{x} = (x - \xi)\cos\theta + (y - \eta)\,\mathrm{sen}\theta$ e $\bar{y} = -(x - \xi)\,\mathrm{sen}\theta + (y - \eta)\cos\theta$. O ângulo θ é definido como $\theta = \arctan(V/U)$, onde U e V são as velocidade de escoamento horizontal e vertical, respectivamente. Como o caso em questão possui apenas escoamento horizontal, portanto $\theta = 0$, e além disso $(\xi, \eta) = (0, 0)$, temos então $\bar{x} = x$ e $\bar{y} = y$. A velocidade de escoamento é dada por $M = U/c_0$, $k = \omega/c_0$ é o número de onda, $H_0^{(2)}$ é a função de Hankel de segundo tipo e ordem zero, $\beta = \sqrt{1 - M^2}$ e $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. As derivadas $\partial G/\partial\xi$ e $\partial G/\partial\eta$ são calculadas com auxílio da função `diff` do MATLAB.

2.1 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

O código abaixo define os pontos de cálculado de diretividade a uma distância de $r = 15$ m da fonte. Nota-se que esta distância é convertida para unidades de *lattice* através de

$$r_l = \frac{r}{\Delta x} \tag{2.8}$$

```
%% Directivity analysis points
theta = (0:3:360)*pi/180;
radius = 15;
radius_lat = radius/Dx;
[probe_x,probe_y] = pol2cart(theta,radius_lat);
```

A função de Green é calculada de maneira simbólica no código a seguir.

```
%% Green function
syms x y xi eta
x_bar = x - xi;
y_bar = y - eta;

beta = sqrt(1-M^2);
freq_lat = freq_peak*Dx/zeta;
k = 2*pi*freq_lat/cs;

z = k/beta^2*sqrt(x_bar^2 + beta^2*y_bar^2);
H = besselj(0,z) - 1i*bessely(0,z);
Green = 1i/(4*beta)*exp(1i*M*k*x_bar/beta^2)*H;
dGdxi = diff(Green, xi);
dGdeta = diff(Green, eta);
```

Os dados de densidade, velocidade e pressão foram salvos de tal forma que a i-ésima linha representa um ponto em $f = 0$, e a j-ésima coluna refere-se ao instante de tempo ta. Assim, para o cálculo de Q e F_i, optou-se por criar vetores de $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$, de tal forma que possuam os corretos valores na i-ésima coluna (-1,0 ou 1).

```
%% SURFACE NORMALS
% Surface derivatives
dfdx = [repelem(0,Nx-1), repelem(1,Nx-1), repelem(0,Nx-1), ...
    repelem(-1,Nx-1)];
dfdx = repmat(dfdx',1,length(hist_p));
dfdy = [repelem(1,Ny-1), repelem(0,Ny-1), repelem(-1,Ny-1), ...
    repelem(0,Ny-1)];
dfdy = repmat(dfdy',1,length(hist_p));
```

Pode-se então calcular os valores Q e F_i para cada instante de tempo em cada ponto da superfície, aplicar a FFT e multiplicar pela função de Green.

```
%% MONOPOLE
% Monopole source for each cell at each time step
Q_point = hist_rho.*hist_ux.*dfdx + hist_rho.*hist_uy.*dfdy;



% FFT on monopole source time history
fft_Q = zeros(size(Q_point));
for i = 1:length(x_direction)
fft_Q(i,:) = fft(Q_point(i,:))/L; % row = angle, column = frequency
end
fft_Q(:,1) = []; % removes first line
Q = fft_Q(:,I_peak);

monopole = zeros(1,length(probe_x));
for j = 1:length(probe_x)
G = subs(Green, [x,y,xi,eta], [probe_x(j),probe_y(j),0,0]);
monopole(j) = trapz(1i*2*pi*freq_lat*Q*G);
end

%% DIPOLE
% Dipole source for each cell at each time step
F1_point = (hist_p + hist_rho.*hist_ux.^2).*dfdx + ...
    hist_rho.*hist_ux.*hist_uy.*dfdy;
F2_point = hist_rho.*hist_ux.*hist_uy.*dfdx + (hist_p + ...
    hist_rho.*hist_uy.^2).*dfdy;



% FFT on dipole source time history
```

```
fft_F1 = zeros(size(F1_point));
fft_F2 = zeros(size(F2_point));
for i = 1:length(x_direction)
fft_F1(i,:) = fft(F1_point(i,:))/L; % row = angle, column = frequency
fft_F2(i,:) = fft(F2_point(i,:))/L; % row = angle, column = frequency
end
fft_F1(:,1) = []; % removes first line
fft_F2(:,1) = []; % removes first line

F1 = fft_F1(:,I_peak);
F2 = fft_F2(:,I_peak);

dipole = zeros(1,length(probe_x));
for j = 1:length(probe_x)
G1 = subs(dGdxi, [x,y,xi,eta], [probe_x(j),probe_y(j),0,0]);
G2 = subs(dGdeta, [x,y,xi,eta], [probe_x(j),probe_y(j),0,0]);
dipole(j) = trapz(F1*G1 + F2*G2);
end
```

A pressão é dada então pela soma das parcelas negativas de cada uma destas fontes.

```
pressure = - monopole - dipole;
```

3 RESULTADOS

As Figuras 3, 4 e 5 mostram a influência da distância do anteparo N nos resultados de diretividade, enquanto a Figura 6 avalia a influência da velocidade de escoamento para uma mesma superfície $N = 100$.

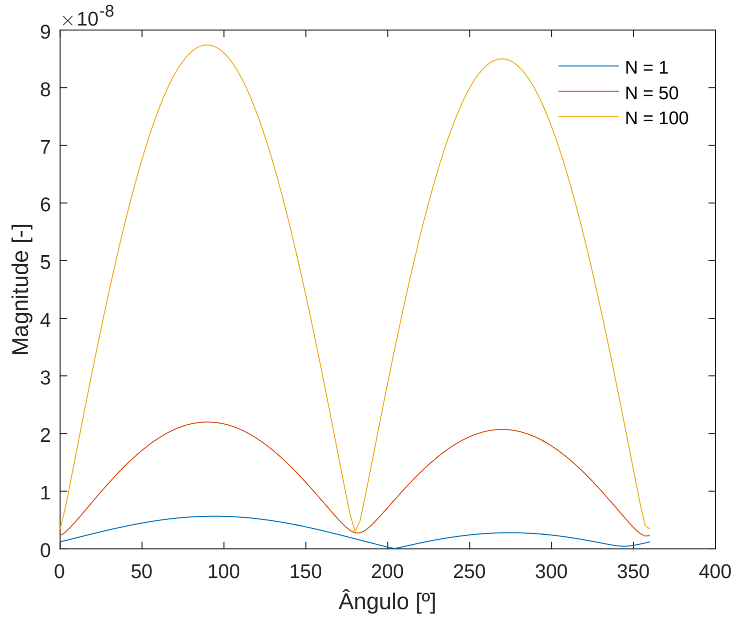

Figura 3: Diretividade para $M = 0,03$ para diferentes tamanhos de superfície.

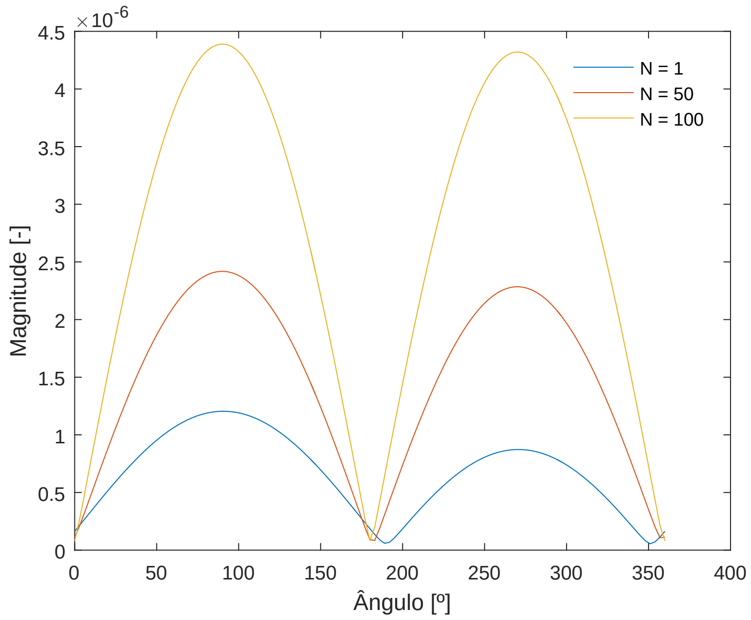

Figura 4: Diretividade para $M = 0,07$ para diferentes tamanhos de superfície.

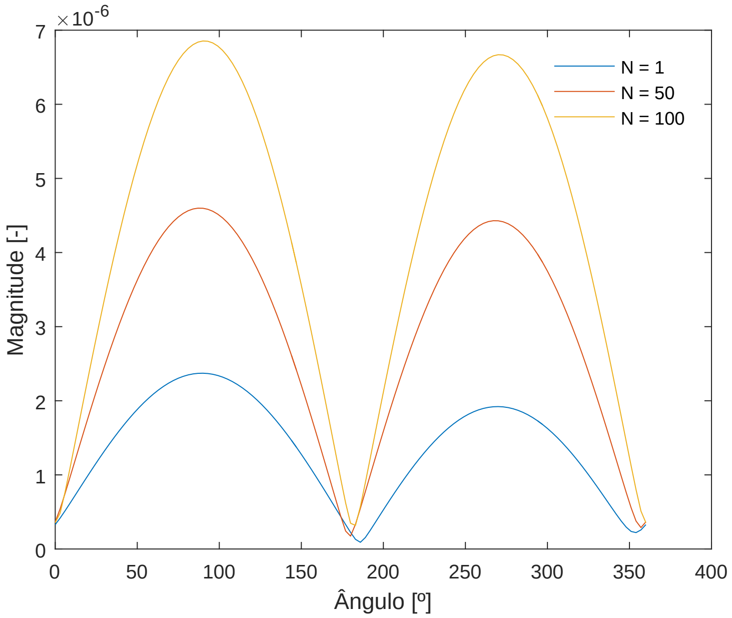

Figura 5: Diretividade para $M = 0,10$ para diferentes tamanhos de superfície.

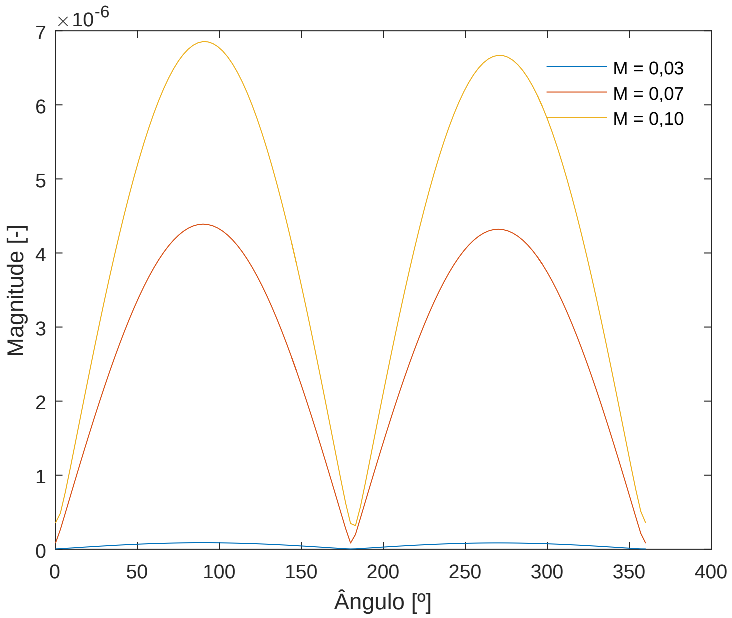

Figura 6: Diretividade para $N = 100$ para diferentes velocidades de escoamento.

Os resultados mostram que a pressão sonora aumenta com o aumento da superfície e claramente possuem forma de dipolo. De fato, a geração de som se dá por desprendimento de vórtices que se formam ao redor do corpo. Quanto maior a área, maiores as chances de englobar os termos de geração de monopolo, dipolo e quadrupolo. Os ângulos de máxima e mínima diretividade são alterados com o aumento da superfície, mostrando que o escoamento fora da superfície $N = 1$ possui ainda grande influência no campo distante. Analisando o aumento da velocidade no resultado de diretividade, os ângulos são os mesmos, porém a amplitude da pressão aumenta consideravelmente. Com uma maior velocidade de escoamento, a força exercida no anteparo é maior, e assim a intensidade acústica é também maior. Como a fonte possui característica predominantemente de dipolo, este formato de curva se mantém. Caso a velocidade fosse ainda maior, a ponto de gerar uma esteira de turbulência, provavelmente o efeito dos quadrupolos tornariam-se significativos, alterando as características da curva.

REFERÊNCIAS

1 BOUZIDI, M.; FIRDAOUSS, M.; LALLEMAND, P. Momentum transfer of a Boltzmann-lattice fluid with boundaries. Physics of Fluids, v. 13, n. 11, p. 3452–3459, 2001.

2 KAM, E. W. S.; SO, R. M. C.; LEUNG, R. C. K. Non-reflecting boundary for one-step lbm simulation of aeroacoustics. Proceedings of the 27th AIAA Aeroacoustics Conference, p. 1–9, 2006.

3 WILLIAMS, J. E. F.; HAWKINGS, D. L. Sound generation by turbulence and surface in arbitrary motion. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, v. 342, p. 264–321, 1969.

4 LOCKARD, D. P. An efficient, two-dimensional implementation of the Ffowcs Williams and Hawkings equation. Journal of Sound and Vibration, v. 229, n. 4, p. 897–911, 2000.