Analysis

Jonathan Mayer

12.01.2023

1 Begriffe

Symbol	**Bedeutung**
R	Relation
$\in$ / $\notin$	Element / kein Element von
$\forall / \nexists$	für alle / für kein
$\exists$	Existenzquantor, mindestens ein
$\exists!$	Anzahlquantor, genau ein
$A \subset B$	echte Teilmenge, $a \in A \wedge a, b \in B : \exists b \notin A$
$A \subseteq B$	Teilmenge $a \in A \wedge a, b \in B$
$]1, 3[$, $(1, 3)$	$1 < x < 3$
$[1, 3]$	$1 \leq x \leq 3$
$\Rightarrow$	genau dann wenn
$\Leftrightarrow$	aus Aussage A folg B und umgekehrt
$\rightarrow$	Abbildungsvorschrift für Mengen
$\mapsto$	Abbildungsvorschrift für Elemente
$\circ$	Komposition / Verkettung von Funktionen
$\wedge$ / $\vee$	und / oder
Lemma	Hilfssatz
$\overline{z}$, z^*	konjungiert komplexe Zahl
$\precsim$	beliebiges Symbol
$\stackrel{?}{=}$	zu zeigen
$\stackrel{!}{=}$	soll erfüllt sein um ... zu zeigen
$:=, \equiv$	definiere
$\cup, \cap, /$	Vereinigung, Durchschnitt, Subtrahiert
disjunkt	$A \cap B = \{\}$
infimum	
supremum	
notwendiges Kriterium	muss immer erfüllt sein, reicht aber nicht aus
hinreichendes Kriterium	wenn erfüllt dann ...
Nullfolge	$(a_k)_k$ ist eine Nullfolge wenn $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$
surjektiv	$\forall y \in Y : \exists\, x \in X : f(x) = y$ 2.1.1
injektiv	$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ 2.1.2
bijektiv	$\forall y \in Y : \exists!\, x \in X : f(x) = y$2.1.3
beschränkte Folge	$\exists b, c : \forall n : b < a_n < c$
nach oben beschränkte Folge	$\exists b : \forall n : a_n < b$
nach unten beschränkte Folge	$\exists b : \forall n : b < a_n$

2 Relationen und Funktionen

2.1 Funktionen

2.1.1 surjektivität:

wenn es für jedes y aus Y **mindestens** ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.
wenn es auf jeder gedachten Horizontalen in der Zielmenge **mindestens** einen Schnittpunkt mit der Funktion gibt.
$\forall y \in Y : \exists\ x \in X : f(x) = y$

2.1.2 injektivität

wenn es für jedes $y \in$ vom Wertebereich Y **höchstens** ein $x \in$ der Definitionsmenge X gibt.
Für jede gedachte Horizontale gibt es **höchstens** einen Schnittpunkt mit der Funktion.
$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
$\forall b \in B : \exists$ höchstens ein $a \in A : f(a) = b$

2.1.3 bijektivität

Injektiv und surjektiv
wenn es für jedes $y \in Y$ **genau ein** $x \in X$ gibt.
wenn es auf jeder gedachten Horizontalen in der Zielmenge **genau einen Schnittpunkt** mit der Funktion gibt.
$\forall y \in Y : \exists!\ x \in X : f(x) = y$

Bei stetigen Funktionen darf der Grenzwert und die Funktion vertauscht werten ($\lim\limits_{x \to 0} e^{x \cdot \ln(x)} = e^{\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \ln(x)}$).

3 Folgen

beschränkte Folge: $(a_n)_n$ ist beschränkt wenn $\exists b, c : \forall n : b < a_n < c$.

nach oben beschränkte Folge: $(a_n)_n$ ist nach oben beschränkt wenn $\exists b : \forall n : a_n < b$.
nach unten beschränkte Folge: $(a_n)_n$ ist nach unten beschränkt wenn $\exists b : \forall n : b < a_n$.

4 Reihen

Definition: Eine Reihe ist eine Partialsumme einer Folge

$$(p_n)_n = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right)_n$$, p_n... Reihe, a_i... Folge

geometrische Reihe: $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i$ mit $|q| < 1$ konvergent, $\boldsymbol{\sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}}$

harmonische Reihe: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent

... Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ konvergiert für $r \geq 2$

Rechenregeln für konvergente Reihen:

$\sum\limits_{i=0}^{\infty}(a_i + b_i) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i + \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i$

$\sum\limits_{i=0}^{\infty} \gamma a_i = \gamma \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$

4.1 Konvergenzkriterien für Reihen

absolute Konvergenz: Eine Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$ konvergiert. i=0 |ai| konvergiert. Es gilt:$| \sum_{i=0}^{\infty} a_i| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$.

Eine **Komplexe Reihe** $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert/konvergiert absolut wenn $\sum_{i=0}^{\infty} \Re(a_i)$ und $\sum_{i=0}^{\infty} \Im(a_i)$ konvergieren/absolut konvergieren.

konvergiert die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ muss $(\lim_{i\to\infty} a_i = 0)$ sein (notwendiges aber nicht hinreichendes Kriterium).

$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{\infty} a_k}$ **konvergiert** genau dann, wenn die Folge von **Partialsummen** beschränkt ist.

4.1.1 Leibnitz Kriterium

Sei $(a_k)_k$ eine monoton fallende Nullfolge positiver reeller Zahlen dann konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$$

zeigt Konvergenz aber **nicht** absolute Konvergenz.

4.1.2 Minoranten- Majoranten Kriterium

falls $\forall n : 0 \leq a_n \leq b_n \wedge \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ konvergent, dann konvergiert auch $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$

falls $\forall n : 0 \leq a_n \leq b_n \wedge \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ divergent, dann divergiert auch $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$

4.1.3 Quotientenkriterium

Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $\forall n : a_n \neq 0$ dann ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ absolut konvergent wenn:

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

divergent wenn obiges > 1 ist.

4.1.4 Wurzelkriterium

Sei $(a_n)_n$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ dann ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ absolut konvergent wenn:

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

divergent wenn obiges > 1.

5 Stetigkeit

Definition Stetigkeit:
$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta : |f(x) - f(a)| < \epsilon$
$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : f(U_\delta(a) \subseteq U_\epsilon(f(a)))$
$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :$ sodass aus $|x - a| < \delta$ stets $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ folgt

Definition Unstetigkeit: $\exists \epsilon > 0 \forall\ \delta > 0 : \exists x \in D : |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| > \epsilon$

5.1 links-rechtsseitiger Grenzwetz:

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$
x_0 wird von rechts und links angenähert. Sind beide Grenzwerte gleich, ist die Funktion stetig.

5.2 $\epsilon - \delta$ Kriterium

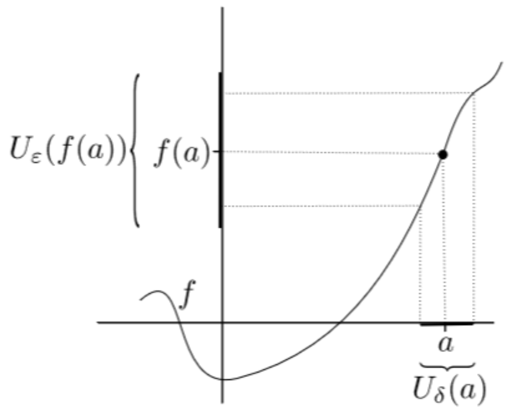

Abbildung 5.1: Stetigkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle a: Zu jeder (noch so kleinen) ε-Umgebung von $f(a)$ gibt es eine δ-Umgebung von a, dessen Bild vollständig in ersterer liegt.

Stetigkeit zeigen:

- $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ aufstellen
- alle x rausbringen ($x - a = \delta$, manchmal einfügen einer geschickten Null $(+a - a)$)
- Formel auf $\delta =$ umformen
- das berechnete δ in dne Beweis einsetzen
- Wahre Aussage

6 l´Hospital

	Funktion $\varphi(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$	Umformung
(A)	$u(x) \cdot v(x)$	$0 \cdot \infty$	$\dfrac{u(x)}{1/v(x)}$ oder $\dfrac{v(x)}{1/u(x)}$
(B)	$u(x) - v(x)$	$\infty - \infty$	$\dfrac{1/v(x) - 1/u(x)}{1/(u(x) \cdot v(x))}$
(C)	$u(x)^{v(x)}$	0^0, ∞^0, 1^∞	$\exp(v(x) \ln(u(x)))$

Abbildung 1: Umformung für l´Hospital