

Analysis

Jonathan Mayer

12.01.2023

1 Begriffe

Tabelle 1: Grundbegriffe

Symbol	Bedeutung
R	Relation
\in / \notin	Element / kein Element von
\forall / \nexists	für alle / für kein
\exists	Existenzquantor, mindestens ein
$\exists!$	Anzahlquantor, genau ein
$A \subset B$	echte Teilmenge, $a \in A \wedge a, b \in B : \exists b \notin A$
$A \subseteq B$	Teilmenge $a \in A \wedge a, b \in B$
$\{1, 3\}$	$x = 1, 3$, die Zahlen 1 und 3
$]1, 3[, (1, 3)$	$1 < x < 3$
$[1, 3]$	$1 \leq x \leq 3$
\Rightarrow	genau dann wenn
\Leftrightarrow	aus Aussage A folg B und umgekehrt
\rightarrow	Abbildungsvorschrift für Mengen
\mapsto	Abbildungsvorschrift für Elemente
\circ	Komposition / Verkettung von Funktionen
\wedge / \vee	und / oder
Lemma	Hilfssatz
\bar{z}, z^*	konjugiert komplexe Zahl
\preccurlyeq	beliebiges Symbol
$\stackrel{?}{=}$	zu zeigen
$\stackrel{!}{=}$	soll erfüllt sein um ... zu zeigen
$:=, \equiv$	definiere
\cup, \cap, \setminus	Vereinigung, Durchschnitt, Subtrahiert
disjunkt	$A \cap B = \{\}$

Continued on next page

Tabelle 1: Grundbegriffe (Continued)

Symbol	Bedeutung
infimum	
supremum	
notwendiges Kriterium	muss immer erfüllt sein, reicht aber nicht aus
hinreichendes Kriterium	wenn erfüllt dann ...
Nullfolge	$(a_k)_k$ ist eine Nullfolge wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$
surjektiv	$\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$ 3.0.1
injektiv	$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ 3.0.2
bijektiv	$\forall y \in Y : \exists! x \in X : f(x) = y$ 3.0.3
beschränkte Folge	$\exists b, c : \forall n : b < a_n < c$
nach oben beschränkte Folge	$\exists b : \forall n : a_n < b$
nach unten beschränkte Folge	$\exists b : \forall n : b < a_n$
$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$	

Zwischenwertsatz:

Eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal an.

Satz von Rolle:

Es sei $u, v \in \mathbb{R}$ mit $u < v$ und $f : [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(u) = f(v)$. Dann gibt es ein $x \in]u, v[$ mit $f'(x) = 0$.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

Es sei $u, v \in \mathbb{R}$ mit $u < v$ und $f : [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $x \in]u, v[$ mit $f'(x) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$.

verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

Es sei $u, v \in \mathbb{R}$ mit $u < v$ und $f, g : [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $\forall x : g'(x) \neq 0$. Dann gibt es ein $x \in]u, v[$ mit $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(v) - f(u)}{g(v) - g(u)}$.

2 Mengen

explizite Angabe: $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

spezifikation über charakteristische Eigenschaften: $B = \{a \in A : \varphi(a)\}$

$\{b \in A' : \text{es gibt ein } a \in A \text{ mit } b = t(a)\} : \{t(a) : a \in A\}$

Definition 1.1.4:

1. Zwee Mengen A und B sehen wir als gleich an, wenn sie dieselben Elemente enthalten.
2. Eine Menge A heißt Teilmenge einer Menge B ($A \subseteq B$) falls $\forall a : a \in B$.
Echte Teilmenge ($A \subset B$): $\{\exists b \in B : b \notin A\}$
3. Die Menge aller Teilmengen einer Menge A heißt Potenzmenge von A und wird mit $P(A)$ bezeichnet.

Definition 1.1.7:

1. **Durchschnitt:** $A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$
2. **Vereinigung:** $A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$
3. **Differenz:** $A \setminus B = \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\}$
4. **Komplement:** $\complement A = U \setminus A$

disjunkt: $A \cap B = \{\}$

Kartesisches Produkt: $A \times B = A^2 = \{(a, b) : a \in A \text{ und } b \in B\}$
Die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

3 Relationen und Funktionen

3.0.1 surjektivität:

$$\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$$

wenn es für jedes y aus Y **mindestens** ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

3.0.2 injektivität

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\forall b \in B : \exists \text{ höchstens ein } a \in A : f(a) = b$$

wenn es für jedes $y \in$ vom Wertebereich Y **höchstens** ein $x \in$ der Definitionsmenge X gibt.

3.0.3 bijektivität

$$\forall y \in Y : \exists! x \in X : f(x) = y$$

Injektiv und surjektiv

wenn es für jedes $y \in Y$ **genau ein** $x \in X$ gibt.

3.1 Relationen

Definition Relation: Es seien $A_1, \dots, A_n, n \geq 1$ Mengen, dann heißt die Teilmenge von $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$ eine Relation zwischen den Mengen A_1, \dots, A_n .

zweistellige Relation: $n=2$

binäre Relation: $A = A_1 = A_2$ dann wird meist $a_1 R a_2$ oder $R(a_1, a_2)$ geschrieben.

Typen von Relationen:

1. R heißt **reflexiv**, falls aRa für alle $a \in A$ gilt.
2. R heißt **irreflexiv**, falls aRa für kein $a \in A$ gilt.
3. R heißt **symmetrisch**, falls für $a, b \in A$ aRb genau dann gilt, wenn bRa .
4. R heißt **antisymmetrisch**, falls für $a, b \in A$ aus aRb und bRa stets $a = b$ folgt.
5. R heißt **transitiv**, falls für $a, b, c \in A$ aus aRb und bRc stets aRc folgt.

Komposition von Relationen: (Hintereinanderausführung) $S \circ R = \{(a, c) \in A \times C : \text{es gibt ein } b \in B \text{ mit } aRb \text{ und } bSc\}$ (mit $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ zweistelligen Relationen)

inverse Relation: $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$
 $(R^{-1})^{-1} = R, (S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

3.2 Funktionen

Definition: $\{\forall a \in A : \exists! b \in B : \text{mit } (a, b) \in f\}$

Definition 1.4.1

1. Die Menge $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ heißt das Bild von f
2. Die Menge $f(B) = \{a \in A : f(a) \in B\}$ heißt das Urbild

Lemma: $(g \circ f)(a) = g(f(a)) : \forall a \in A$ $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Funktionen

Daraus kann man zeigen: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ mit $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Umkehrfunktion/Inverse: $a = f^{-1}(f(a))$ Voraussetzung für die Umkehrbarkeit ist die **bijektivität** der Funktion.

Ist f bijektiv, so auch f^{-1}

Satz 1.4.7 Sind f und g injektiv/ surjektiv, so auch $f \circ g$

Identität (identische Abbildung) $id_A = a \rightarrow A, a \mapsto a$

Bei stetigen Funktionen darf der Grenzwert und die Funktion vertauscht werden $(\lim_{x \rightarrow 0} e^{x \cdot \ln(x)}) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(x)$.

3.3 Äquivalenzrelationen und Ordnungsrelationen

Äquivalenzrelation: eine *reflexive*, *transitive* und *symmetrische* binäre Relation.

Ordnungsrelation: eine *reflexive*, *transitive* und *antisymmetrische* binäre Relation.

lineare Ordnung / totale Ordnung eine Ordnungsrelation für die $\forall a, b \in P : a \leq b \vee b \leq a$ gilt. $(P; \leq)$ wird partiell/linear geordnete Menge genannt.

4 Zahlenbereiche

4.1 Induktionsbeweis

1. **Induktionsanfang/Induktionsvoraussetzung (IV)** wir zeigen dass $\varphi(0)$ gilt
2. **Induktionsannahme (IA)** wir nehmen an, dass $\forall m \geq 0 : \varphi(m)$ gilt
3. **Induktionsschritt (IS)** wir beweisen dass $\varphi(m)$ auch für alle $\varphi(m+1)$ gilt.
4. **Induktionsschluss** Wir schließen, dass $\varphi(n) \forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt

4.2 Mächtigkeit von Mengen (card)

Mächtigkeit: Anzahl der Elemente in einer Menge. Geschrieben als $\text{card } A$, $\#A$, $|A|$

mit A, B endliche Mengen:

1. $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$
2. $\text{card}(A \times B) = \text{card}A \cdot \text{card}B$
3. $\text{card}P(A) = 2^{\text{card}A}$

Eine **bijektive** Funktion zwischen zwei Mengen existiert genau dann, wenn sie gleich **mächtig** sind. Das heißt in der Umkehrung, wenn es eine bijektive Funktion zwischen zwei Mengen gibt, sind diese gleich mächtig.

abzählbar \mathbb{N} ist abzählbar. Operationen (Vereinigung, Kreuzprodukt, Komplement) zwischen zwei abzählbaren Mengen, ergibt wieder eine abzählbare Menge.

Definition 2.5.1 Es sei $(P; \leq)$ eine partiell geordnete Menge und $A \subseteq P$.

1. **untere Schranke** $\{\forall a \in A : \exists p \in P : p \leq a\}$, $p...$ untere Schranke, $A...$ nach unten beschränkt
2. **obere Schranke** wie oberes nur umgedreht
3. **Infimum** größte untere Schranke.
4. **Supremum** kleinste obere Schranke
5. sei A nach oben beschränkt gilt: $\sup\{ca : a \in A\} = c \cdot \sup A$

5 Metrische Räume

5.1 Metrik

Eine Metrik auf M ist eine Funktion $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ wenn für alle $x, y, z \in M$ folgendes gilt:

1. **Definitheit** $d(x, y) = 0$ g.d.w. $x = y$
2. **Symmetrie** $d(x, y) = d(y, x)$
3. **Dreiecksungleichung** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Wenn dies erfüllt ist, nennen wir M einen metrischen Raum.

5.2 topologische Grundbegriffe

1. **innerer Punkt** $a \in A$ ist ein innerer Punkt wenn $\exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(a) \subseteq A$
2. **offene Menge** jedes Element der Menge ist ein innerer Punkt
3. **Berührungspunkt** $m \in M$ ist ein Berührungspunkt wenn $\forall \epsilon > 0 : U_\epsilon(m) \cap A \neq \{\}$
4. **abgeschlossene Menge** jeder Berührungspunkt ist auch Teil der Menge
5. **isolierter Punkt** a ist ein isolierter Punkt wenn $U_\epsilon(a) \cap (A \setminus \{a\}) = \emptyset$

6 Folgen

Folge in M ist eine Funktion von \mathbb{N}_0 nach M $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow M, n \mapsto f(n)$

beschränkte Folge: $(a_n)_n$ ist beschränkt wenn $\exists b, c : \forall n : b < a_n < c$.

nach oben beschränkte Folge: $(a_n)_n$ ist nach oben beschränkt wenn $\exists b : \forall n : a_n < b$.

nach unten beschränkte Folge: $(a_n)_n$ ist nach unten beschränkt wenn $\exists b : \forall n : b < a_n$.

7 Reihen

Definition: Eine Reihe ist eine Partialsumme einer Folge

$$(p_n)_n = \left(\sum_{i=0}^n a_i \right)_n, p_n \dots \text{Reihe}, a_i \dots \text{Folge}$$

geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ mit $|q| < 1$ konvergent, $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent

... Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ konvergiert für $r \geq 2$

Rechenregeln für konvergente Reihen:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \gamma a_i = \gamma \sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

7.1 Konvergenzkriterien für Reihen

absolute Konvergenz: Eine Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ in \mathbb{R} oder \mathbb{C} heißt absolut konvergent, falls $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$ konvergiert. Es gilt: $\left| \sum_{i=0}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$.

Eine **Komplexe Reihe** $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert/konvergiert absolut wenn $\sum_{i=0}^{\infty} \Re(a_i)$ und $\sum_{i=0}^{\infty} \Im(a_i)$ konvergieren/absolut konvergieren.

konvergiert die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ muss $(\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0)$ sein (notwendiges aber nicht hinreichendes Kriterium).

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **konvergiert** genau dann, wenn die Folge von **Partialsummen** beschränkt ist.

7.1.1 Leibnitz Kriterium

Sei $(a_k)_k$ eine monoton fallende Nullfolge positiver reeller Zahlen dann konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

zeigt Konvergenz aber **nicht** absolute Konvergenz.

7.1.2 Minoranten- Majoranten Kriterium

falls $\forall n : 0 \leq a_n \leq b_n \wedge \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ konvergent, dann konvergiert auch $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$

falls $\forall n : 0 \leq a_n \leq b_n \wedge \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ divergent, dann divergiert auch $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$

7.1.3 Quotientenkriterium

Sei $(a_n)_n$ eine Folge in \mathbb{R} oder \mathbb{C} und $\forall n : a_n \neq 0$ dann ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ absolut konvergent wenn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

divergent wenn obiges > 1 ist.

7.1.4 Wurzelkriterium

Sei $(a_n)_n$ eine beschränkte Folge in \mathbb{R} oder \mathbb{C} dann ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ absolut konvergent wenn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

divergent wenn obiges > 1 .

8 Stetigkeit

Definition Stetigkeit:

$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta : |f(x) - f(a)| < \epsilon$

$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : f(U_\delta(a)) \subseteq U_\epsilon(f(a))$

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \text{sodass aus } |x - a| < \delta \text{ stets } |f(x) - f(a)| < \epsilon \text{ folgt}$

Definition Unstetigkeit: $\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 : \exists x \in D : |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| > \epsilon$

8.1 links-rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

x_0 wird von rechts und links angenähert. Sind beide Grenzwerte gleich, ist die Funktion stetig.

8.2 $\epsilon - \delta$ Kriterium

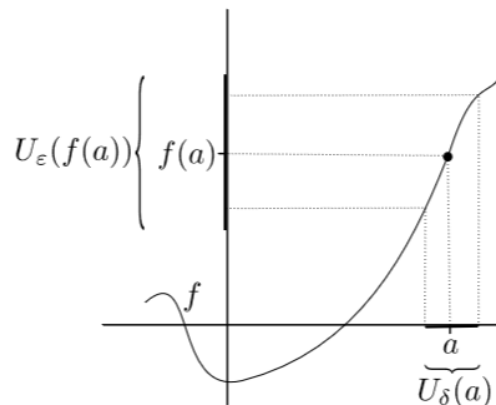


Abbildung 5.1: Stetigkeit einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle a : Zu jeder (noch so kleinen) ϵ -Umgebung von $f(a)$ gibt es eine δ -Umgebung von a , dessen Bild vollständig in ersterer liegt.

Stetigkeit zeigen:

- $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ aufstellen
- alle x rausbringen ($x - a = \delta$, manchmal einfügen einer geschickten Null $(+a - a)$)
- Formel auf $\delta =$ umformen
- das berechnete δ in dne Beweis einsetzen
- Wahre Aussage

9 l'Hospital

	Funktion $\varphi(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$	Umformung
(A)	$u(x) \cdot v(x)$	$0 \cdot \infty$	$\frac{u(x)}{1/v(x)}$ oder $\frac{v(x)}{1/u(x)}$
(B)	$u(x) - v(x)$	$\infty - \infty$	$\frac{1/v(x) - 1/u(x)}{1/(u(x) \cdot v(x))}$
(C)	$u(x)^{v(x)}$	$0^0, \infty^0, 1^\infty$	$\exp(v(x) \ln(u(x)))$

Abbildung 1: Umformung für l'Hospital

this is a test to test