MathMeth 1 Zusammenfassung

Jonathan Mayer

27.12.2022

Begriffe und Zeichen

Symbol	**Bedeutung**
$\|a\|$	Betrag, Länge eines Skalars
$\|\|\vec{a}\|\|$	Norm, Länge eines Vektors
∂	partielle Ableitung
$\subset, \supset$	echte Teil-/Ober-menge
$\subseteq, \supseteq$	Teil-/Ober-menge
∇	Nabla
$\times$	Kreuzprodukt
$\sinh(x)$	$\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = -i \cdot \sin(i \cdot x)$
$\cosh(x)$	$\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = -i \cdot \cos(i \cdot x)$
a	b

Tabelle 1: Allgemeine Symbole und Begriffe

skalares Feld: eine Funktion, die jedem Punkt eines Raumes einen Skalar zuordnet.
Vektor Feld: eine Funktion, die jedem Punkt eines Raumes einen Vektor zuordnet.
Definitionsbereich: Bereich, für den eine Funktion definiert ist.
Wertebereich: Werte die die Funktion annehmen kann.

1 Reihen und Folgen

Fourrierreihen $_{geradeFunktionen:_{knnennurdurch_{gerade_{Funktionendargestelltwerden}}}}$ $\mathrm{b}_n = 0 : \forall k \in \mathbb{N}$
$_{ungeradeFunktionen:_{knnennurdurch_{ungerade_{Funktionendargestelltwerden}}}}$ $\mathrm{a}_n = 0 : \forall k \in \mathbb{N}$
$_{wedergeradenochunerade:_{werdendurcheineKombinationausgeradenundungeradenFunktionendargestellt.}}$ $\mathrm{b}_n, a_n \neq 0$

2 Integrieren / Differenzieren

2.1 Differenzieren

Berechnung der Steigung der Funktion. $(\frac{dy}{dx})$

Ableitungsregeln

Faktorregel	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$
Summenregel	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
Produktregel	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ mit $g(x) \neq 0$
Kettenregel	$h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Abbildung 1: Formelsammlung [**Formelsammlung_BHS**]

2.2 Integrieren

Berechnung der Fläche Funktion der Funktion. $(dx \cdot dy)$

2.2.1 Grundintegrale

Funktion f	Ableitungsfunktion f'	Stammfunktion F
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$F(x) = k \cdot x$
$f(x) = x^q$	$f'(x) = q \cdot x^{q-1}$	$F(x) = \frac{x^{q+1}}{q+1}$ für $q \neq -1$ $F(x) = \ln(\lvert x \rvert)$ für $q = -1$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln(a)}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = x \cdot \ln(x) - x$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(x) - x)$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$F(x) = -\cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$F(x) = -\ln(\lvert \cos(x) \rvert)$

Abbildung 2: Grundintegrale [**Formelsammlung_BHS**]

2.2.2 Substituieren

Bei Funktionen in Funktionen immer die innere Funktion substituieren. Substitution wird gemacht, damit man die x wegkürzen kann. Wenn man eine substituierte Funktion integriert, müssen alle x weg sein! Integreieren nach u ist mit x in der Gleichung **nicht möglich**!!!

2.2.3 Integrieren über den Betrag

Beim Integrieren über einen Betrag muss die Funktion an jedem Nulldurchgang (falls vorhanden) aufgeteilt und integriert. Die negativen Stellen müssen in die Summe negativ eingehen.
Bsp.: $\int_0^e |ln(x)| = |x*(ln(x)-1)|\Big|_0^e = -x*(ln(x)-1)\Big|_0^1 + x*(ln(x)-1)\Big|_1^e\ \alpha$

3 Differentialgleichungen

Definition Differentialgleichung: Eine Gleichung die neben der gesuchten Funktion auch deren Ableitung enthält.
Gewöhnliche DGL: Keine partiellen Ableitungen.
Ordnung: Höchtse vorkommende Ableitung.
linear / nicht linear: nicht linear, wenn die Funktion quadratisch vorkommt.
homogene DGL: $y'(x) = h(x)y(x)$
inhomogene DGL: $y'(x) = h(x)y(x) + f(x)$
Ansatz: Ïdeeßum Lösen einer DGL. Dieser wird in die DGL eingesetzt und anschließend aufgelöst.
homogene Lösung: Lösung ohne Störfunktion. $(y_h(x))$
partikuläre Lösung: Lösung mit Störtherm$(y_p(x))$
allgemeine Lösung: Lösung der DGL $(y(x) = y_h(x) + y_p(x))$

3.1 Gewöhnliche DGL

implizite Form: $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$
explizite Form: $y^n = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$

3.1.1 Lösen einer homogenen DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$y'(x) = \alpha\ y(x)$ Lösen durch trennen der Variablen oder Exponentialansatz.

Trennen der Variablen

- y' durch $\frac{dy}{dx}$ ersetzen
- alle y und dy sowie x und dx jeweils auf eine Seite bringen.
- integrieren

$$y'(x) = h(x)y(x) \qquad \rightarrow \qquad y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} h(\tilde{x})d\tilde{x}}$$

Exponentialansatz

$y_0 = C \cdot e^{\lambda \cdot x}$

3.1.2 partikuläre Lösung:

mit Tabelle:

Inhomogenität	Ansatzfunktion	Parameter
$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ (Polynom vom Grad n)	$y_p(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i x^i$	$A_0, \ldots, A_n$
$f(x) = a \cdot \sin(\omega x)$ (Sinusanregung)	$y_p(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)$	$A,\ B$
$f(x) = a \cdot \cos(\omega x)$ (Kosinusanregung)	$y_p(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)$	$A,\ B$
$f(x) = a\, e^{\mu x} \quad (\mu \neq \alpha)$ (Exponentialfunktion)	$y_p(x) = A\, e^{\mu x}$	A

Bemerkung: Besteht die Inhomogenität $f(x)$ aus einer Summe von mehreren Störgliedern, wählt man für jedes Störglied einzeln die entsprechende Ansatzfunktion und bestimmt durch Einsetzen der Ansatzfunktion in die Differenzialgleichung die zugehörigen Parameter. Zum Schluss addiert man alle partikulären Lösungen auf und erhält eine spezielle Lösung des gestellten, inhomogenen Problems.

Abbildung 3: Partikuläre Lösungen

Der passende Ansatz wird in die DGL eingesetz und ausgerechnet. Die partikuläre Lösung (bzw. Lösungen bei mehreren Störthermen) werden zur homogenen Lösung addiert und man erhält die Lösung der DGL.

durch Variation der Konstanten:

$$y'(x) = h(x)y(x) + f(x)$$

Berechnen des zugehörigen homogenen Problems $y(x) = C \cdot e^{\int_{x_0}^{x} h(\tilde{x})d\tilde{x}}$.
Die Konstante C wird als variabel $C(x)$ angesehen und der Rest der homogenen Lösung wird $\varphi(x) = e^{\int_{x_0}^{x} h(\tilde{x})d\tilde{x}}$ geschrieben

Es ergibt sich der Ansatz: $\boldsymbol{y(x) = c(x) \cdot \varphi(x)}$

Durch Einsetzen von $y(x)$ in die DGL kann man zeigen:

$$c'(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

somit ist $\boldsymbol{c(x) = c_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{f(\tilde{x})}{\varphi(\tilde{x})} d\tilde{x}}$ mit $c_0 = y_0$.
Eingesetzt in $y(x)$:

$$y(x) = \varphi(x) \cdot \left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{f(\tilde{x})}{\varphi(\tilde{x})} d\tilde{x} \right)$$

3.2 exakte DGL

Eine DGL 1. Ordnung vom Typ $g(x,y)dx + h(x,y)dy = 0$ ist genau dann **exaxt**, wenn die Bedingung $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial h(x,y)}{\partial x}$ erfüllt ist.

Dann ist: $\boldsymbol{g(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}}$ und $\boldsymbol{h(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}}$

Durch unbestimmte Integration lässt sich $u(x,y)$ gewinnen, welche in impliziter Form als $u(x,y) = \text{const.} = C$ dargestellt werden kann.

$g(x,y)$ muss nach x integriert werden, wobei sich eine Integrationskonstante $K(y)$ ergibt. Um die Integrationskonstante zu bestimmen muss $u(x,y)$ nach y abgeleitet und mit $h(x)$ gleichgesetzt werden. Dann kann $K(y)$ durch integration bestimmt werden. $u(x,y)$ bildet die implizite Lösung und ist konstant ($U(x,y) = \text{const.} = C_2$). Um die explizite Lösung zu erhalten, muss die implizite Lösung $u(x,y) = C_2$ nach y aufgelöst werden.

Lösen einer exakten DGL:

- $g(x,y)$ nach x integrieren, Integrationskonstante: $K(y)$
- $g(x,y)$ nach y ableiten und mit $h(x,y)$ gleichsetzen und damit $K'(y)$ bestimmen
- $K(y)$ durch integrieren bestimmen
- $u(x,y)$ ist die **implizite Lösung** der DGL
- $u(x,y) = C_2$ nach y auflösen –> **explizite Lösung!**

3.3 LDGL, lineare Differenzialgleichungssysteme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\vec{y}(t) = A \cdot \vec{y}(t) + \vec{f}(t)$$

mit: I... Intervall $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n$, A... $n \times n$ Matrix.

Ist $f_i(t) = 0$ wird die LDGDL als homogen bezeichnet.