

# MathMeth 1 Zusammenfassung

Vektoren, Matritzen, Integrale, DGL, Nabla, ...

27.12.2022

## Begriffe und Zeichen

Symbol	Bedeutung
$ a $	Betrag, Länge eines Skalars
$  \vec{a}  $	Norm, Länge eines Vektors
$\partial$	partielle Ableitung
$\subset, \supset$	echte Teil-/Ober-menge
$\subseteq, \supseteq$	Teil-/Ober-menge
$\nabla$	Nabla
$\times$	Kreuzprodukt
$\sinh(x)$	$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -i \cdot \sin(i \cdot x)$
$\cosh(x)$	$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = -i \cdot \cos(i \cdot x)$

Tabelle 1: Allgemeine Symbole und Begriffe

**skalares Feld:** eine Funktion, die jedem Punkt eines Raumes einen Skalar zuordnet.

**Vektor Feld:** eine Funktion, die jedem Punkt eines Raumes einen Vektor zuordnet.

**Definitionsbereich:** Bereich, für den eine Funktion definiert ist.

**Wertebereich:** Werte die die Funktion annehmen kann.

**Parameterdarstellung:**  $C(t), C \in \mathbb{R}^3$  in Parameterdarstellung:  $\gamma = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

$\delta_{ij} \dots$  Kronecker Delta  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$

**Additionstheoreme:**

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$$

## 1 Reihen und Folgen

### 1.1 Fourrierreihe

**gerade Funktionen:** können nur durch **gerade** Funktionen dargestellt werden

$$b_n = 0 : \forall k \in \mathbb{N}$$

**ungerade Funktionen:** können nur durch **ungerade** Funktionen dargestellt werden

$$a_n = 0 : \forall k \in \mathbb{N}$$

**weder gerade noch ungerade:** werden durch eine Kombination aus geraden und ungeraden Funktionen dargestellt.

$$b_n, a_n \neq 0$$

## 1.2 Taylorreihe

$$T(f(x)) = \sum_0^n \frac{f^n(x)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

mit  $f^n$  ist die n-te Ableitung von f

## 2 Vektoren

**Einheitsvektor:** Jeder Vektor mit Betrag 1.  $\vec{e}_x = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$

**Skalarprodukt:**  $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\varphi)$

Null, wenn  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  normal aufeinander stehen. Gibt die gemeinsame Länge von in eine Richtung an.

**Schwarzsche Ungleichung:**  $|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$

**Kreuzprodukt:**  $z = \vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$

$z$  steht **senkrecht** auf  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$

$A = |\vec{x} \times \vec{y}| \dots$  Fläche des von  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  aufgespannten Parallelogramms.

**Winkel zwischen Vektoren:**  $\varphi = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$

**Spatprodukt:** Fläche zwischen 3 Vektoren,  $V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \varphi = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

**Projektion von x in Richtung y:**  $x_y = \vec{e}_y \cdot \vec{x} \cdot \vec{e}_y = \frac{\vec{y} \cdot \vec{x}}{|\vec{y}|^2} \cdot \vec{y}$

$\vec{e}_y \cdot \vec{x} = |\vec{e}_y|$  gibt die Länge von x in Richtung y an. Multipliziert mit  $\vec{e}_y$  um einen Vektor zu erhalten.

## 3 Komplexe Zahlen und Funktionen

### 3.1 rechnen mit komplexen Zahlen

$$z = a + ib = |z|e^{i\varphi} \quad z_1 = a_1 + ib_1 \quad z_2 = a_2 + ib_2$$

$$z^* \dots \text{konjugiert komplex} (z = a + ib \quad z^* = a - ib)$$

**Betrag:**  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot z^*}$

**Winkel:**  $\varphi_z = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

**Komponentenform:**  $z = a + ib$

**Polarform:**  $z = |z|e^{i\varphi_z}$

**Addition:**  $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$

**Multiplikation:**  $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$   
 $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_{z_1} + \varphi_{z_2})}$

**Division:**  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$   
 $z_1 \cdot z_2 = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_{z_1} - \varphi_{z_2})}$

**Wurzel**  $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}} \quad n \in [0, \dots, n-1]$

Da n verschiedene Lösungen herauskommen müssen, wird zu  $\varphi, k \cdot 2\pi$  addiert (verändert die Funktion nicht). Beim ziehen der n-ten Wurzel wird der Exponent mit  $\frac{1}{n}$  multipliziert.

### 3.2 Differenzierbarkeit komplexer Funktionen (Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen)

Komplexe Funktionen sind differenzierbar, wenn die Cauchy-Riemannschen Dgl erfüllt sind.

$$z = u(x, y) + iv(x, y) \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$\text{Cauchy-Riemannschen Dgl:} \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

## 4 Integrieren / Differenzieren

### 4.1 Differenzieren

Berechnung der Steigung der Funktion. ( $\frac{dy}{dx}$ )

#### Ableitungsregeln

Faktorregel	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$
Summenregel	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
Produktregel	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \text{mit } g(x) \neq 0$
Kettenregel	$h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Abbildung 1: Formelsammlung [1, S. 13]

### 4.2 Integrieren

Berechnung der Fläche zwischen der Funktion und der X-Achse. ( $dx \cdot dy$ )

1. Man bestimme eine Stammfunktion  $F(x)$  zum Integranden  $f(x)$
2. Mit dieser Stammfunktion berechnet man die Differenz  $F(b) - F(a)$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

**unbestimmtes Integral:** Das unbestimmte Integral gibt zu einer Funktion die Menge aller Stammfunktionen an.

#### 4.2.1 Grundintegrale

Funktion $f$	Ableitungsfunktion $f'$	Stammfunktion $F$
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$F(x) = k \cdot x$
$f(x) = x^q$	$f'(x) = q \cdot x^{q-1}$	$F(x) = \frac{x^{q+1}}{q+1}$ für $q \neq -1$ $F(x) = \ln( x )$ für $q = -1$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln(a)}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = x \cdot \ln(x) - x$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(x) - x)$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$F(x) = -\cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$F(x) = -\ln( \cos(x) )$

Abbildung 2: Grundintegrale [1, S. 13]

#### 4.2.2 Substituieren

Bei Funktionen in Funktionen immer die innere Funktion substituieren. Substitution wird gemacht, damit man die  $x$  wegekürzen kann. Wenn man eine substituierte Funktion integriert, müssen alle  $x$  weg sein! Integrieren nach  $u$  ist mit  $x$  in der Gleichung **nicht möglich!!!**

$$\int f[g(x)] dx = \int f(u) \frac{du}{g'(x)}$$

#### 4.2.3 Partielle Integration:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x)' \cdot v(x) dx$$

#### 4.2.4 Phönix Integral:

$$f(x) = \int g(x)h(x)dx$$

Wenn weder  $g(x)$  noch  $h(x)$  beim Ableiten einfacher wird, sondern gleich bleibt oder sich wiederholt (Bsp.:  $e^x$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ...) wird solange partiell integriert, bis im Integral-Teil vom partiellen Integrieren die Ausgangsfunktion steht. Die beiden gleichen Integrale werden auf eine Seite gebracht und umgeformt bis  $\int g(x)h(x)dx = \dots$  dasteht.

### 4.3 Integrieren über den Betrag

Beim Integrieren über einen Betrag muss die Funktion an jedem Nulldurchgang (falls vorhanden) aufgeteilt und integriert. Die negativen Stellen müssen in die Summe negativ eingehen. Bsp.:  $\int_0^e |\ln(x)| = |x * (\ln(x) - 1)|_0^e = -x * (\ln(x) - 1)|_0^1 + x * (\ln(x) - 1)|_1^e$

### 4.4 Uneigentliche Integrale

Ein Integral existiert, jedoch sind die Integrationsgrenzen nicht beschränkt.

**Fall 1:** Eine Grenze des Integrals ist  $\infty$ .

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^\lambda f(x)dx$$

**Fall 2:** Eine Polstelle von  $f(x)$  liegt im zu integrierenden Bereich. Ist der Grenzwert des Integrals für  $\lambda \rightarrow 0$  vorhanden, wird das uneigentliche Integral **konvergent** genannt, andernfalls heißt es **divergent**.

**Bsp.:**  $b$  ist Polstelle von  $f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^{b-\lambda} f(x)dx$$

**Bsp.:**  $c$  ist Polstelle von  $f(x)$  mit  $a < c < b$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^{c-\lambda} f(x)dx + \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_a^{c-\mu} f(x)dx$$

### 4.5 Kurvenintegrale:

Beim klassischen eindimensionalen Riemann- Integral integriert man über ein Intervall  $[a, b]$  der reellen Achse.

Beim Kurvenintegral werden die integrationsbereiche als Kurven  $C$  im  $\mathbb{R}^n$  betrachtet.

**Kurvenintegral 1. Art:** Eine **reellwertige** Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  wird über eine Kurve  $C$  integriert. Es wird ein skalares Feld über eine Kurve integriert. Es kann zur berechnung der Länge einer Kurve sowie zur Berechnung linienhafter Ladungs/Masseverteilungen dienen.

**Kurvenintegral 2. Art (Arbeitsintegral):** Ein **Vektorfeld** wird über eine Kurve  $C$  integriert. Dient zur Berechnung der nötigen Arbeit, um eine Masse/Ladung in einem Kraftfeld längs einer Kurve zu bewegen.

**Bogenelement:**  $|\gamma'(t)dt|$

#### 4.5.1 Kurvenintegral 1. Art

Für eine stückweise stetige Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist das Kurvenintegral von  $f$  längs  $\vec{\gamma}$ :

$$J = \int_{\vec{\gamma}} f ds = \int_{t_a}^{t_e} f(\vec{\gamma}(t)) \cdot |\dot{\gamma}(t)| dt$$

**Bsp.:** Bogenlänge  $s(t)$  des Kurvenstücks  $[t_a, t_e]$  der Kurve  $C$ :

$$s(t) = \int_{t_a}^{t_e} |\dot{\vec{\gamma}}(t)| dt = \int_{t_a}^{t_e} \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + \dot{x}_n^2(t)} dt$$

**Algorithmus zum Berechnen eines Kurvenintegrals 1. Art:**

- Parametrisierung der Kurve  $\vec{\gamma}(t)$
- Berechnung der Funktionswerte  $f(\vec{\gamma}(t))$  der Belegungsfunktion
- Berechnung von  $|\dot{\vec{\gamma}}(t)|$
- Berechnung des Kurvenintegrals

$$\int_{\vec{\gamma}} f ds = \int_{t_a}^{t_e} f(\vec{\gamma}(t)) \cdot |\dot{\vec{\gamma}}(t)| dt$$

#### 4.5.2 Kurvenintegral 2. Art

- Parametrisierung der Kurve  $\vec{\gamma} : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$
- Berechnung der Werte  $k(\vec{\gamma}(t))$  in den Kurvenpunkten
- Berechnung des Tangentenvektors  $|\dot{\vec{\gamma}}(t)|$
- Berechnung des Kurvenintegrals

$$\int_{\vec{\gamma}} k ds = \int_{t_a}^{t_e} k(\vec{\gamma}(t)) \cdot |\dot{\vec{\gamma}}(t)| dt$$

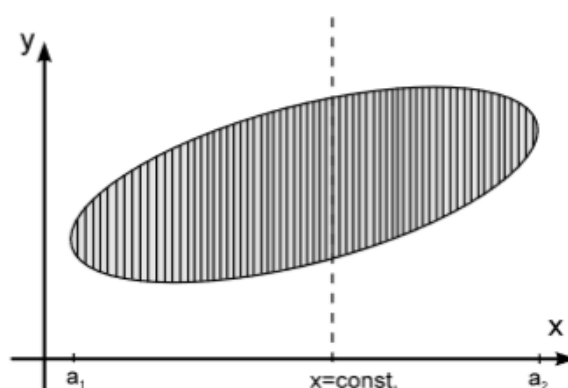
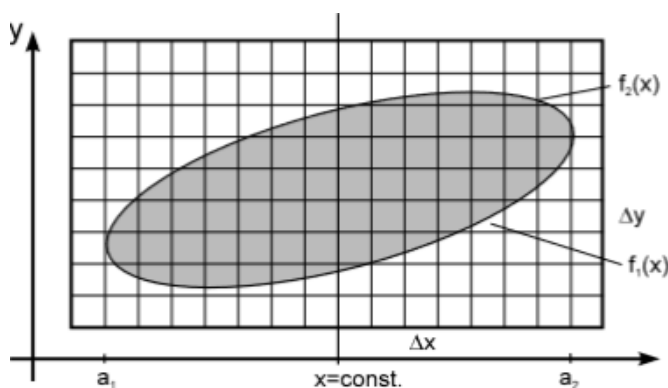
#### 4.6 Gebietsintegrale / Doppelintegrale

Skript 2022x11x29 Seite 9

Keine Flächenberechnung!! Es wird das Volumen, welches vom Skalarfeld und der  $x/y$  Ebene im Gebiet  $G$  eingeschlossen wird, berechnet.

$f(x, y)$ ... Skalarfeld,  $f_{1/2}(x)$ ... untere/obere "Beschränkungsfunktion",  $G$ ... Gebiet welches von  $f_{1/2}(x)$  eingeschlossen wird.

$$\int \int_{(G)} f(x, y) dG = \int_{a_1}^{a_2} \left( \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$



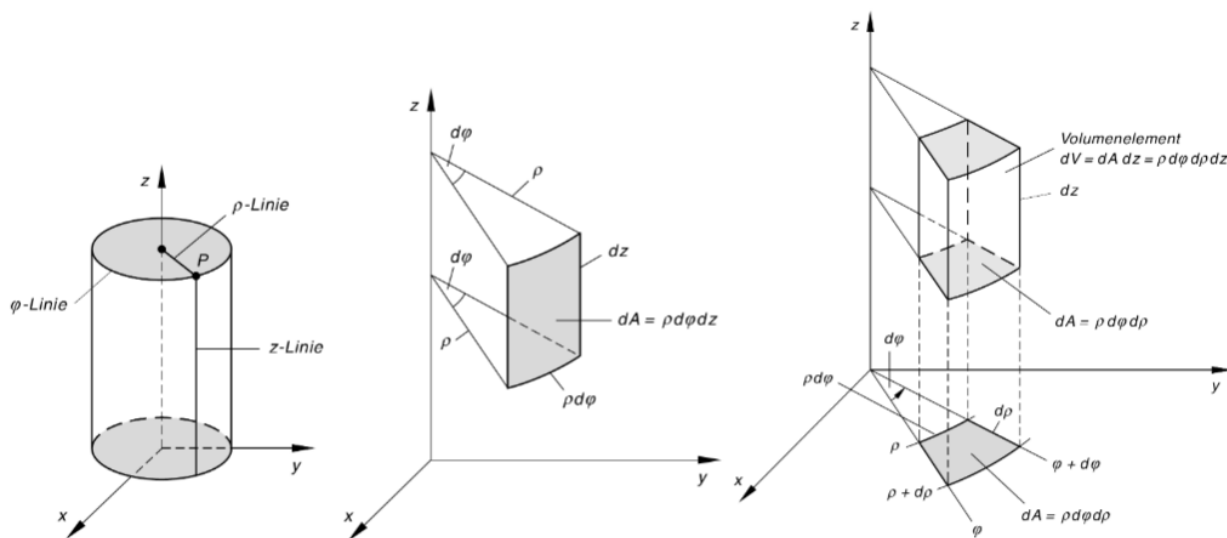
- es ist egal, ob zuerst nach  $x$  oder  $y$  integriert wird (wählen was einfacher ist).
- Bei Integration nach  $y$ :  $y(x)$  für die Obere- und Untere- Begrenzungsfunktion berechnen.
- nach  $y$  integrieren. Mit dem somit berechneten Integral wird die "Strichlänge" (eigentlich die Fläche zwischen der  $x/y$  Ebene und dem Strich) abhängig von  $x$  berechnet.
- Von  $a_1$  bis  $a_2$  über  $x$  integrieren. (wird zuerst nach  $x$  integriert,  $x$  und  $y$  jeweils vertauschen)

## 5 Koordinatensysteme

### 5.1 Zylinderkoordinaten

**Flächenelement:**  $dA = \rho \, d\phi \, dz$

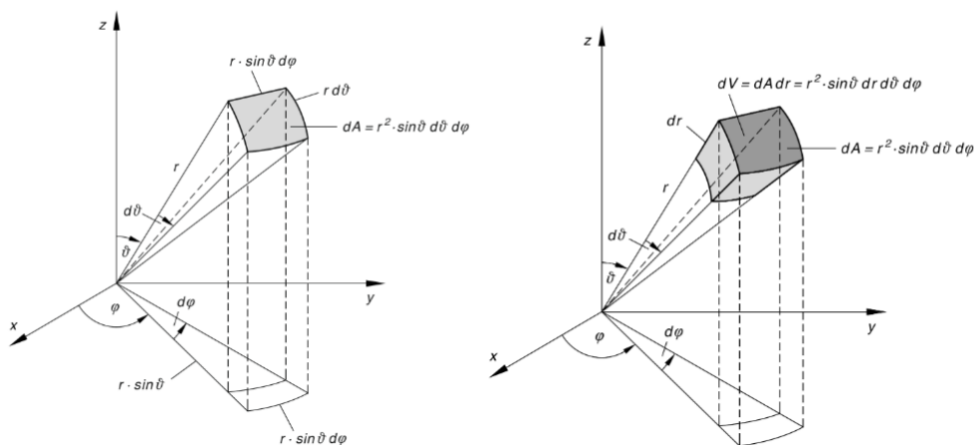
**Volumenelement:**  $dV = \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$



### 5.2 Kugelkoordinaten

**Flächenelement:**  $dA = r^2 \cdot \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\phi$

**Volumenelement:**  $dV = dA \, dr = r^2 \cdot \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\phi$



## 6 Differentialgleichungen

**Definition Differentialgleichung:** Eine Gleichung die neben der gesuchten Funktion auch deren Ableitung enthält.

**Gewöhnliche DGL:** Keine partiellen Ableitungen.

**Ordnung:** Höchste vorkommende Ableitung.

**linear / nicht linear:** nicht linear, wenn die Funktion quadratisch vorkommt.

**homogene DGL:**  $y'(x) = h(x)y(x)$

**inhomogene DGL:**  $y'(x) = h(x)y(x) + f(x)$

**Ansatz:** Idee zum Lösen einer DGL. Dieser wird in die DGL eingesetzt und anschließend aufgelöst.

**homogene Lösung:** Lösung ohne Störfunktion. ( $y_h(x)$ )

**partikuläre Lösung:** Lösung mit Störterm ( $y_p(x)$ )

**allgemeine Lösung:** Lösung der DGL ( $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ )

### 6.1 Gewöhnliche DGL

**implizite Form:**  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

**explizite Form:**  $y^n = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

#### 6.1.1 Lösen einer homogenen DGL 1. Ordnung

$y'(x) = \alpha y(x)$  Lösen durch trennen der Variablen oder Exponentialansatz.

**Trennen der Variablen**

- $y'$  durch  $\frac{dy}{dx}$  ersetzen
- alle  $y$  und  $dy$  sowie  $x$  und  $dx$  jeweils auf eine Seite bringen.
- integrieren

$$y'(x) = h(x)y(x) \quad \rightarrow \quad y(x) = y_0 e^{\int_0^x h(\tilde{x}) d\tilde{x}}$$

**Exponentialansatz, nur bei konstanten Koeffizienten!!**

$$y_0 = C \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

#### 6.1.2 partikuläre Lösung:

mit Tabelle:



Inhomogenität	Ansatzfunktion	Parameter
$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ (Polynom vom Grad $n$ )	$y_p(x) = \sum_{i=0}^n A_i x^i$	$A_0, \dots, A_n$
$f(x) = a \cdot \sin(\omega x)$ (Sinusanregung)	$y_p(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)$	$A, B$
$f(x) = a \cdot \cos(\omega x)$ (Kosinusanregung)	$y_p(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)$	$A, B$
$f(x) = a e^{\mu x} \quad (\mu \neq \alpha)$ (Exponentialfunktion)	$y_p(x) = A e^{\mu x}$	$A$

**Bemerkung:** Besteht die Inhomogenität  $f(x)$  aus einer Summe von mehreren Störgliedern, wählt man für jedes Störglied einzeln die entsprechende Ansatzfunktion und bestimmt durch Einsetzen der Ansatzfunktion in die Differenzialgleichung die zugehörigen Parameter. Zum Schluss addiert man alle partikulären Lösungen auf und erhält eine spezielle Lösung des gestellten, inhomogenen Problems.

Abbildung 3: Partikuläre Lösungen

Der passende Ansatz wird in die DGL eingesetzt und ausgerechnet. Die partikuläre Lösung (bzw. Lösungen bei mehreren Störthermen) werden zur homogenen Lösung addiert und man erhält die Lösung der DGL.

**durch Variation der Konstanten:**

$$y'(x) = h(x)y(x) + f(x)$$

Berechnen des zugehörigen homogenen Problems  $y(x) = C \cdot e^{\int_{x_0}^x h(\tilde{x}) d\tilde{x}}$ .

Die Konstante  $C$  wird als variabel  $C(x)$  angesehen und der Rest der homogenen Lösung wird  $\varphi(x) = e^{\int_{x_0}^x h(\tilde{x}) d\tilde{x}}$  geschrieben

Es ergibt sich der Ansatz:  $y(x) = c(x) \cdot \varphi(x)$ , achtung! das ist die **allgemeine** Lösung

Durch Einsetzen von  $y(x)$  in die DGL kann man zeigen:

$$c'(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

somit ist  $c(x) = c_0 + \int_{x_0}^x \frac{f(\tilde{x})}{\varphi(\tilde{x})} d\tilde{x}$  mit  $c_0 = y_0$ .

Eingesetzt in  $y(x)$ :

$$y(x) = \varphi(x) \cdot \left( y_0 + \int_{x_0}^x \frac{f(\tilde{x})}{\varphi(\tilde{x})} d\tilde{x} \right)$$

## 6.2 exakte DGL

Eine DGL 1. Ordnung vom Typ  $g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0$  ist genau dann **exakt**, wenn die Bedingung  $\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial h(x, y)}{\partial x}$  erfüllt ist.

Dann ist:  $g(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$  und  $h(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$

Durch unbestimmte Integration lässt sich  $u(x, y)$  gewinnen, welche in impliziter Form als  $u(x, y) = \text{const.} = C$  dargestellt werden kann.

$g(x, y)$  muss nach  $x$  integriert werden, wobei sich eine Integrationskonstante  $K(y)$  ergibt. Um die Integrationskonstante zu bestimmen muss  $u(x, y)$  nach  $y$  abgeleitet und mit  $h(x, y)$  gleichgesetzt werden. Dann kann  $K(y)$  durch integration bestimmt werden.  $u(x, y)$  bildet die implizite Lösung und ist konstant ( $U(x, y) = \text{const.} = C_2$ ). Um die explizite Lösung zu erhalten, muss die implizite Lösung  $u(x, y) = C_2$  nach  $y$  aufgelöst werden.

### Lösen einer exakten DGL:

- $g(x, y)$  nach  $x$  integrieren, Integrationskonstante:  $K(y)$
- $g(x, y)$  nach  $y$  ableiten und mit  $h(x, y)$  gleichsetzen und damit  $K'(y)$  bestimmen
- $K(y)$  durch integrieren bestimmen
- $u(x, y)$  ist die **implizite Lösung** der DGL
- $u(x, y) = C_2$  nach  $y$  auflösen  $\rightarrow$  **explizite Lösung!**

## 6.3 DGL 2. Ordnung

Ansatz:  $y_0 = C \cdot e^{\lambda \cdot x}$

**homogene Lösung** (Skript 2022x12x07 Seite 8)

- Ansatz in DGL einsetzen. Dabei die DGL als homogen behandeln.
- $C \cdot e^{\lambda \cdot x}$  herausheben. Der Rest bildet das charakteristische Polynom. Dieses 0 setzen.
- Alle Nullstellen eingesetzt in den Ansatz sind Lösungen der DGL. Die einzelnen Lösungen können linear kombiniert werden, sprich jede Addition von Lösungen ist wieder eine Lösung der DGL. Die **allgemeine homogene** Lösung ist die Summe der Lösungen, multipliziert mit Konstanten (nur bei linearen DGL). Durch geschicktes Kombinieren von Komplexe Lösungen können reell konstruiert werden.

### partikuläre Lösung

- Partikuläre Lösung von  $f(x)$  mit Tabelle bilden.
- Homogene und partikuläre Lösung addieren.

## 6.4 LDGL, lineare Differenzialgleichungssysteme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\vec{y}(t) = A \cdot \vec{y}(t) + \vec{f}(t)$$

mit:  $I$ ... Intervall  $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $A$ ...  $n \times n$  Matrix.

Ist  $f_i(t) = 0$  wird die LDGDL als homogen bezeichnet.

## 7 Matritzen

### 7.1 Determinante

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad \det(A) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

$$\det(A) = +a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 - b_3 \cdot c_2 \cdot a_1 - c_3 \cdot a_2 \cdot b_1$$

**Regel von Sarrus:** Diagonalen miteinander multiplizieren und anschließend summieren. Geht nur bei 3x3 Matrix.

#### 7.1.1 Laplace'scher Entwicklungssatz:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A'_{ij} \quad \text{für ein festes } i \in \{1, \dots, n\}$$

Die Determinante ändert sich nicht, wenn zu einer Zeile/Spalte ein Vielfaches einer anderen Zeile/Spalte hinzu addiert. Mit dieser Methode versucht man möglichst viele Nullen in eine Zeile/Spalte, nach der man dann die Determinante entwickelt, bekommt.

**Gauß-Jordan-Verfahren:** Beschreibt die elementare Zeilenumformung zum Vereinfachen der Matrix um das Berechnen der Determinante zu erleichtern. Dazu dürfen ganze Zeilen oder Spalten mit einem Faktor multipliziert werden. Weiters dürfen Vielfache von Zeilen/Spalten zu anderen Zeilen/Spalten addiert werden. Wenn zwei Zeilen/Spalten vertauscht werden, ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

### 7.2 Matrix Multiplikation

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_2 & a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot d_2 \\ a_2 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 & a_2 \cdot d_1 + b_2 \cdot d_2 \end{pmatrix}$$

### 7.3 Eigenwert und Eigenvektor

charakteristisches Polynom:  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

**Eigenwerte:** Nullstellen  $\lambda_i$  von  $P(\lambda)$ ,  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$

**Eigenvektor:**  $\text{Eig}(A, \lambda_i) = (A - \lambda_i I) \cdot \vec{x}$  mit  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Die Gleichung nach  $x$  auflösen, dann kann der Eigenvektor in Form

$$\text{Eig}(A, \lambda_i) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$$

geschrieben werden.

## 7.4 Invertieren einer Matrix

### Invertieren einer Matrix mit Gauß-Jordan-Verfahren

- Eine Matrix ist invertierbar, wenn sie
- - quadratisch ist
- - und die Determinante  $\neq 0$  ist.

Neben die Matrix wird die Einheitsmatrix geschrieben

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} a_1 & b_1 & c_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Die Matrix wird solange mit elementarer Zeilenumformung umgeformt, bis auf der linken Seite die Einheitsmatrix steht (Gauß-Jordan-Verfahren).

### elementare Zeilenumformungen:

- Vertauschen von zwei Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit  $k \neq 0$
- Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

## 7.5 Wichtige Identitäten

Identität
$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
$(A^{-1})^{-1} = A$
$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

## 7.6 Lösungsverfahren:

### 7.6.1 Gaußsches Eliminationsverfahren:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \rightarrow \quad \left( A \mid \vec{b} \right)$$

Soll  $\vec{x}$  berechnet werden, wird eine Matrix der Form  $(\mathbf{A}|\vec{b})$  aufgeschrieben und solange mit elementarer Zeilenumformung umgeformt, bis über oder unter der Hauptdiagonale von A nur nullen stehen. Mit dem Wissen dass die n-te Spalte der Matrix mit  $x_n$  multipliziert wird, kann in die erste/letzte Zeile eingesetzt werden.

## 8 Nabla

**Normaleinheitsvektor:**  $N = \frac{\nabla\phi(r)}{|\nabla\phi(r)|}$

**Nabla:**  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$

Bedeutung	Berechnung
$\text{grad}\Phi = \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} \right)$	$\nabla\Phi$
$\text{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \nabla\Phi$	$\nabla \cdot \mathbf{A}$
$\text{rot}\mathbf{A} = \text{rot grad}\Phi = \nabla \times \nabla\Phi$	$\nabla \times \mathbf{A}$

### Gradient

Erzeugt ein Vektorfeld mit den Steigungen des skalaren Feldes aus einem skalaren Feld. (Vektor)

### Divergenz

Gibt an ob die Vektoren in diesem Punkt zusammen oder auseinander zeigen. (Skalar)

- $\text{div}\mathbf{A} > 0$   $A > 0$ : im Volumenelement befindet sich eine Quelle (mehr raus als rein)
- $\text{div}\mathbf{A} < 0$   $A < 0$ : im Volumenelement befindet sich eine Senke (mehr rein als raus)
- $\text{div}\mathbf{A} = 0$   $A = 0$ : Im Volumenelement befindet sich weder eine Quelle noch eine Senke, das Vektorfeld ist an dieser Stelle quellenfrei.

### Rotation

Gibt an, ob sich das Vektorfeld um einen Punkt dreht. (Vektor)

## Literatur

- [1] Bundesministerium. „Formelsammlung SRDP Angewandte Mathematik BHS“. DE. In: (2019).