Analysis

Jonathan Mayer

12.01.2023

1 Begriffe

Tabelle 1: Grundbegriffe

Symbol	**Bedeutung**
R	Relation
$\in$ / $\notin$	Element / kein Element von
$\forall / \nexists$	für alle / für kein
$\exists$	Existenzquantor, mindestens ein
$\exists!$	Anzahlquantor, genau ein
$A \subset B$	echte Teilmenge, $a \in A \wedge a, b \in B : \exists b \notin A$
$A \subseteq B$	Teilmenge $a \in A \wedge a, b \in B$
$\{1, 3\}$	$x = 1, 3$, die Zahlen 1 und 3
$]1, 3[$, $(1, 3)$	$1 < x < 3$
$[1, 3]$	$1 \leq x \leq 3$
$\Rightarrow$	genau dann wenn
$\Leftrightarrow$	aus Aussage A folg B und umgekehrt
$\rightarrow$	Abbildungsvorschrift für Mengen
$\mapsto$	Abbildungsvorschrift für Elemente
$\circ$	Komposition / Verkettung von Funktionen
$\wedge$ / $\vee$	und / oder
Lemma	Hilfssatz
$\overline{z}$, z^*	konjungiert komplexe Zahl
$\preccurlyeq$	beliebiges Symbol
$\stackrel{?}{=}$	zu zeigen
$\stackrel{!}{=}$	soll erfüllt sein um ... zu zeigen
$:=, \equiv$	definiere
$\cup, \cap, \setminus$	Vereinigung, Durchschnitt, Subtrahiert
disjunkt	$A \cap B = \{\}$

Continued on next page

Tabelle 1: Grundbegriffe (Continued)

Symbol	**Bedeutung**
infimum	
supremum	
notwendiges Kriterium	muss immer erfüllt sein, reicht aber nicht aus
hinreichendes Kriterium	wenn erfüllt dann ...
Nullfolge	$(a_k)_k$ ist eine Nullfolge wenn $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$
surjektiv	$\forall y \in Y : \exists\ x \in X : f(x) = y$ 3.0.1
injektiv	$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ 3.0.2
bijektiv	$\forall y \in Y : \exists!\ x \in X : f(x) = y$ 3.0.3
beschränkte Folge	$\exists b, c : \forall n : b < a_n < c$
nach oben beschränkte Folge	$\exists b : \forall n : a_n < b$
nach unten beschränkte Folge	$\exists b : \forall n : b < a_n$
$\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$	

Zwischenwertsatz:
Eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(a)$ mindestens einmal an.

Satz von Rolle:
Es sei $u, v \in \mathbb{R}$ mit $u < v$ und $f : [u, v] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(u) = f(v)$. fann gibt es ein $x \in]u, v[\to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung:
Es sei $u, v \in \mathbb{R}$ mit $u < v$ und $f : [u, v] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $x \in]u, v[$ mit $f'(x) = \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$.

veralgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung:
Es sei $u, v \in \mathbb{R}$ mit $u < v$ und $f, g : [u, v] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktionen und $\forall x : g'(x) \neq 0$. Dann gibt es ein $x \in]u, v[$ mit $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(v)-f(u)}{g(v)-g(u)}$.

2 Mengen

explizite Angabe: $A = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

spezifikation über charakteristische Eigenschften: $B = \{a \in A : \varphi(a)\}$

$\{b \in A' :$ es gibt ein $a \in A$ mit $b = t(a)\}$: $\{t(a) : a \in A\}$

Definition 1.1.4:

1. Zwie Mengen A und B sehen wir als gleich an, wenn sie dieselben Elemente enthalten.
2. Eine Menge A heißt Teilmenge einer Menge B ($a \subseteq B$) falls $\forall a : a \in B$.
   Echte Teilmenge ($A \subset B$): $\{\exists b \in B : b \notin A\}$
3. Die Menge aller Tielmengen einerm Menge A heißt Potenzmenge von A und wird mit $P(a)$ bezeichnet.

Definition 1.1.7:

1. **Durchschnitt:** $A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$
2. **Vereinigung:** $A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$
3. **Differenz:** $A \backslash B = \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\}$
4. **Komplement:** $\complement A = U \backslash A$

disjunkt: $a \cap B = \{\}$

Kartesisches Produkt: $A \times B = A^2 = \{(a, b) : a \in A \text{ und } b \in B\}$
Die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

3 Relationen und Funktionen

3.0.1 surjektivität:

$\boldsymbol{\forall y \in Y : \exists\ x \in X : f(x) = y}$
wenn es für jedes y aus Y **mindestens** ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

3.0.2 injektivität

$\boldsymbol{\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$
$\forall b \in B : \exists$ höchstens ein $a \in A : f(a) = b$
wenn es für jedes $y \in$ vom Wertebereich Y **höchstens** ein $x \in$ der Definitionsmenge X gibt.

3.0.3 bijektivität

$\boldsymbol{\forall y \in Y : \exists!\ x \in X : f(x) = y}$
Injektiv und surjektiv
wenn es für jedes $y \in Y$ **genau ein** $x \in X$ gibt.

3.1 Relationen

Definition Relation: Es seien $A_1, ..., A_n, n \geq 1$ Mengen, dann heißt die Teilmenge von $R \subseteq A_1 \times ... \times A_n$ eine Relation zwischen den Mengen $A_1, ..., A_n$.

zweistellige Relation: n=2

binäre Relation: $A = A_1 = A_2$ dann wird meist $a_1 R a_2$ oder $R(a_1, a_2)$ geschrieben.

Typen von Relationen:

1. R heißt **reflexiv**, falls aRa für alle $a \in A$ gilt.
2. R heißt **irreflexiv**, falls aRa für kein $a \in A$ gilt.
3. R heißt **symmetrisch**, falls für $a, b \in A$ aRb genau dann gilt, wenn bRa.
4. R heißt **antisymmetrisch**, falls für $a, b \in A$ aus aRb und bRa stets $a = b$ folgt.
5. R heißt **transitiv**, falls für $a, b, c \in A$ aus aRb und bRc stets aRc folgt.

Komposition von Relationen: (Hintereinanderausführung) $S \circ R = \{(a, c) \in A \times C :$ es gibt ein $b \in B$ mit aRb und $bSc\}$ (mit $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ zweistellingen Relationen)

inverse Relation: $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$
$(R^{-1})^{-1} = R$, $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

3.2 Funktionen

Definition: $\{\forall a \in A : \exists! b \in B : \text{ mit } (a, b) \in f\}$

Definition 1.4.1

1. Die Menge $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ heißt das Bild von f
2. Die Menge $f(B) = \{a \in A : f(a) \in B\}$ heißt das Urbild

Lemma: $(g \circ f)(a) = g(f(a)) : \forall a \in A$ $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen
Daraus kann man zeigen: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ mit $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$
$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Umkehrfunktion/Inverse: $a = f^{-1}(f(a))$ Vorraussetzung für die Umkehrbarkeit ist die **bijektivität** der Funktion.
Ist f bijektiv, so auch f^{-1}

Satz 1.4.7 Sind f und g injektiv/ surjektiv, so auch $f \circ g$

Identität (identische Abbildung) $id_A = a \to A,\ a \mapsto a$

Bei stetigen Funktionen darf der Grenzwert und die Funktion vertauscht werten $(\lim\limits_{x \to 0} e^{x \cdot \ln(x)} = e^{\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \ln(x)})$.

3.3 Äquivalenzrelationen und Ordnungsrelationen

Äquivalenzrelation: eine *reflexive, transitive* und *symmetrische* binäre Relation.

Ordnungsrelation: eine *reflexive, transitive* und *antisymmetrische* binäre Relation.

lineare Ordnung / totale Ordnung eine Ordnungsrelation fur die $\forall a, b \in P : a \leq b \vee b \leq a$ gilt. $(P; \leq)$ wird partiell/linear geordnete Menge genannt.

4 Zahlenbereiche

4.1 Induktionsbeweis

1. **Induktionsanfang/Indunktionsvorraussetzung (IV)** wir zeigen dass $\varphi(0)$ gilt
2. **Induktionsannamhe (IA)** wir nehmen an, dass $\forall m \geq 0 : \varphi(m)$ gilt
3. **Induktionsschritt (IS)** wir beweisen dass $\varphi(m)$ auch für alle $\varphi(m+1)$ gilt.
4. **Induktionsschluss** Wir schließen, dass $\varphi(n) \forall b \in \mathbb{N}_0$ gilt

4.2 Mächtigkeit von Mengen (card)

Mächtigkeit: Anzahl der Elemente in einer Menge. Geschrieben als card A, $\#A$, $|A|$

mit A, B endliche Mengen:

1. $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$
2. $\text{card}(A \times B) = \text{card}A \cdot \text{card}B$
3. $\text{card}P(A) = 2^{cardA}$

Eine **bijektive** Funktion zwischen zwei Mengen existiert genau dann, wenn sie gleich **mächtig** sind. Das heißt in der Umkehrung, wenn es eine bijektive Funktion zwischen zwei Mengen gibt, sind diese gleich mächtig.

abzählbar $\mathbb{N}$ ist abzählbar. Operationen (Vereinigung, Kreuzprodukt, Kompliment) zwischen zwei abzählbaren Mengen, ergiebt wieder eine abzählbare Menge. Jede bijektive Funktion auf $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

Definition 2.5.1 Es sei $(P; \leq)$ eine partiell geordnete Menge und $A \subseteq P$.

1. **untere Schranke** $\{\forall a \in A : \exists p \in P : p \leq a\}$, p... untere Schranke, A... nach unten beschränkt
2. **obere Schranke** wie oberes nur umgedreht
3. **Infimum** größte untere Schranke.
4. **Supremum** kleinste obere Schranke
5. sei A nach oben beschränkt gilt: $\sup\{ca : a \in A\} = c \cdot \sup A$
6. **Minimum** Infimum, muss jedoch $\in A$ sein.
7. **Maximum** Supremum, muss jedoch $\in A$ sein.

5 Metrische Räume

5.1 Metrik

Eine Metrik auf M ist eine Funktion $d : M \times M \to \mathbb{R}_0^+$ wenn für alle $x, y, z \in M$ folgendes gilt:

1. **Definitheit** $d(x, y) = 0$ g.d.w. $x = y$
2. **Symmetrie** $d(x, y) = d(y, x)$
3. **Dreiecksungleichung** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Wenn dies erfüllt ist, nennen wir M einen metrischen Raum.

5.2 topologische Grundbegriffe

1. **innerer Punkt** $a \in A$ ist ein innerer Punkt wenn $\exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(a) \subseteq A$
2. **offene Menge** jedes Element der Menge ist ein innerer Punkt
3. **Berührungspunkt** $m \in M$ ist ein Berührungspunkt wenn $\forall \epsilon > 0 : U_\epsilon(m) \cap A \neq \{\}$
4. **abgeschlossene Menge** jeder Berührungspunkt ist auch Teil der Menge
5. **isolierter Punkt** a ist ein isolierter Punkt wenn $U_\epsilon(a) \cap (A \backslash \{a\}) = \{\}$

6 Folgen

Folge in M ist eine Funktion von $\mathbb{N}_0$ nach M $f : \mathbb{N}_0 \to M, n \mapsto f(n)$

beschränkte Folge: $(a_n)_n$ ist beschränkt wenn $\exists b, c : \forall n : b < a_n < c$.
nach oben beschränkte Folge: $(a_n)_n$ ist nach oben beschränkt wenn $\exists b : \forall n : a_n < b$.
nach unten beschränkte Folge: $(a_n)_n$ ist nach unten beschränkt wenn $\exists b : \forall n : b < a_n$.

6.1 Konvergenz von Folgen

Eine Folge konvergiert, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert. Sie konvergiert gegen genau diesen Grenzwert.

Einquetschkriterium konvergieren $(a_n)_n$ und $(c_n)_n$ gegen den selben Wert d und gilt $\forall n : (a_n)_n \leq (b_n)_n \leq (c_n)_n$ dann konvergiert auch $(b_n)_n$ gegen d.

konvergente Folgen

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $a \in \mathbb{R}^+$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (p)^n = 0$ konvergiert für $q < 1$ gegen null, divergiert für $q > 1$.

Eine momoton steigenden, nach oben beschränkten Folge konvergiert und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Bei fallend inf.

7 Reihen

Definition: Eine Reihe ist eine Partialsumme einer Folge

$(p_n)_n = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_n$, p_n... Reihe, a_i... Folge

geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ mit $|q| < 1$ konvergent, $\boldsymbol{\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}}$

harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent

... Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ konvergiert für $r \geq 2$

Rechenregeln für konvergente Reihen:

$\sum_{i=0}^{\infty}(a_i + b_i) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i$

$\sum_{i=0}^{\infty} \gamma a_i = \gamma \sum_{i=0}^{\infty} a_i$

7.1 Konvergenzkriterien für Reihen

absolute Konvergenz: Eine Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$ konvergiert. Es gilt:$|\sum_{i=0}^{\infty} a_i| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$.

Eine **Komplexe Reihe** $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert/konvergiert absolut wenn $\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Re}(a_i)$ und $\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Im}(a_i)$ konvergieren/absolut konvergieren.

konvergiert die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ muss $(\lim_{i\to\infty} a_i = 0)$ sein (notwendiges aber nicht hinreichendes Kriterium).

$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{\infty} a_k}$ **konvergiert** genau dann, wenn die Folge von **Partialsummen** beschränkt ist.

7.1.1 Leibnitz Kriterium

Sei $(a_k)_k$ eine monoton fallende Nullfolge positiver reeller Zahlen dann konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$$

zeigt Konvergenz aber **nicht** absolute Konvergenz.

7.1.2 Minoranten- Majoranten Kriterium

falls $\forall n : 0 \leq a_n \leq b_n \wedge \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ konvergent, dann konvergiert auch $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$

falls $\forall n : 0 \leq a_n \leq b_n \wedge \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ divergent, dann divergiert auch $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$

7.1.3 Quotientenkriterium

Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $\forall n : a_n \neq 0$ dann ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ absolut konvergent wenn:

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

divergent wenn obiges > 1 ist.

7.1.4 Wurzelkriterium

Sei $(a_n)_n$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ dann ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ absolut konvergent wenn:

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

divergent wenn obiges > 1.

8 Stetigkeit

Definition Stetigkeit:
$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta : |f(x) - f(a)| < \epsilon$
$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : f(U_\delta(a) \subseteq U_\epsilon(f(a)))$
$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :$ sodass aus $|x - a| < \delta$ stets $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ folgt

Definition Unstetigkeit: $\exists \epsilon > 0 \forall\ \delta > 0 : \exists x \in D : |x - x_0| < \delta \land |f(x) - f(x_0)| > \epsilon$

8.1 links-rechtsseitiger Grenzwetz:

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$
x_0 wird von rechts und links angenähert. Sind beide Grenzwerte gleich, ist die Funktion stetig.

8.2 $\epsilon - \delta$ Kriterium

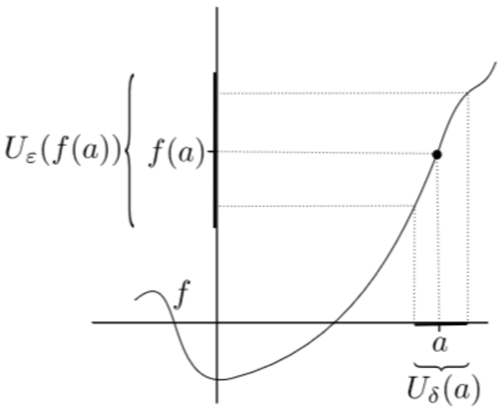

Abbildung 5.1: Stetigkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle a: Zu jeder (noch so kleinen) ε-Umgebung von $f(a)$ gibt es eine δ-Umgebung von a, dessen Bild vollständig in ersterer liegt.

Stetigkeit zeigen:

- $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ aufstellen
- alle x rausbringen ($x - a = \delta$, manchmal einfügen einer geschickten Null $(+a - a)$)
- Formel auf $\delta =$ umformen
- das berechnete δ in dne Beweis einsetzen
- Wahre Aussage

9 l´Hospital

	Funktion $\varphi(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$	Umformung
(A)	$u(x) \cdot v(x)$	$0 \cdot \infty$	$\frac{u(x)}{1/v(x)}$ oder $\frac{v(x)}{1/u(x)}$
(B)	$u(x) - v(x)$	$\infty - \infty$	$\frac{1/v(x) - 1/u(x)}{1/(u(x) \cdot v(x))}$
(C)	$u(x)^{v(x)}$	0^0, ∞^0, 1^∞	$\exp(v(x)\ln(u(x)))$

Abbildung 1: Umformung für l´Hospital