MathMeth 1 Zusammenfassung

Vektoren, Matzitzen, Integrale, DGL, Nabla,...

17.01.2022

1 Begriffe / Zeichen / Rechenregeln

Symbol	**Bedeutung**
$\|a\|$	Betrag, Länge eines Skalars
$\|\|\vec{a}\|\|$	Norm, Länge eines Vektors
∂	partielle Ableitung
$\subset, \supset$	echte Teil-/Ober-menge
$\subseteq, \supseteq$	Teil-/Ober-menge
∇	Nabla
$\times$	Kreuzprodukt
$\sinh(x)$	$\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = -i \cdot \sin(i \cdot x)$
$\cosh(x)$	$\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = -i \cdot \cos(i \cdot x)$

Tabelle 1: Allgemeine Symbole und Begriffe

skalares Feld: eine Funktion, die jedem Punkt eines Raumes einen Skalar zuordnet.
Vektor Feld: eine Funktion, die jedem Punkt eines Raumes einen Vektor zuordnet.
Definitionsbereich: Bereich, für den eine Funktion definiert ist.
Wertebereich: Werte die die Funktion annehmen kann.

Parameterdarstellung: $C(t), C \in \mathbb{R}^3$ in Parameterdarstellung: $\gamma = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

δ_{ij}... Kronecker Delta $\qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ falls} & i = j \\ 0, \text{ falls} & i \neq j \end{cases}$

1.1 Additionstheoreme:

$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$

$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y)$

$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$

1.2 Binomische Formeln und Binomischer Lehrsatz:

$$x^2 + px + q = 0 \qquad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \tag{1}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k, n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

1.3 Polynomdivision

- Polynom auf Form $x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$
- Nullstelle x_1 erraten. Eine gute Strategie ist, alle positiven und negativen Teiler des konstanten Terms durchzuprobieren.
- Polynom durch $(x - x_1)$ dividieren. Sind mehrere Nullstellen bekannt kann durch $(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ dividiert werden.

Bsp.:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 12x^2 + 5x + 150) : (x-5) = x^2 - 7x - 30 \\
-\underline{(x^3 - 5x^2)} \\
 -7x^2 + 5x \\
-\underline{(-7x^2 + 35x)} \\
 -30x + 150 \\
-\underline{(-30x + 150)} \\
0
\end{array}$$

Abbildung 1: Polynomdivision

1.4 Rechenregeln

$x = \log_a(b) \Leftrightarrow a^x = b \qquad \log_e(x) = \ln(x)$
$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \qquad \ln(a^b) = b \cdot \ln(a) \qquad \log_a(a) = 1 \qquad \log(1) = 0$

$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \qquad \sqrt[r]{a} = a^{\frac{1}{r}}$
$(a^r)^s = a^{r \cdot s} \qquad \sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{r}{s}}$

1.5 Identitäten

Ableitung/Umkehrfunktion: $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

2 Reihen und Folgen

2.1 Fourrierreihe

gerade Funktionen: können nur durch **gerade** Funktionen dargestellt werden
$b_n = 0 : \forall k \in \mathbb{N}$
ungerade Funktionen: können nur durch **ungerade** Funktionen dargestellt werden
$a_n = 0 : \forall k \in \mathbb{N}$
weder gerade noch unerade: werden durch eine Kombination aus geraden und ungeraden Funktionen dargestellt.
$b_n, a_n \neq 0$

2.2 Taylorreihe

$$T(f(x)) = \sum_{0}^{n} \frac{f^n(x)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

mit f^n ist di n-te Ableitung von f

3 Vektoren

Einheitsvektor: Jeder Vector mit Betrag 1. $\vec{e_x} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$

Skalarprodukt: $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\varphi)$
Null, wenn $\vec{x}$ und $\vec{y}$ normal aufeinander stehen. Gibt die gemeinsame Länge von in eine Richtung an.
Schwarzsche Ungleichung: $|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$

Kreuzprodukt: $z = \vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$
z steht **senkrecht** auf $\vec{x}$ und $\vec{y}$
$A = |\vec{x} \times \vec{y}|$... Fläche des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms.
Kreuzt man einen Vektor mit sich selbst ergibt das immer **null**.
Dies ist spätestends bei $\nabla \times \nabla = 0$ gut zu wissen.

Winkel zwischen Vektoren: $\varphi = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$

Spatprodukt: Volumen welches drei Vectoren spannen, $V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\varphi = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Projektion von x in Richtung y: $x_y = \vec{e_y} \cdot \vec{x} \cdot \vec{e_y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{x}}{|\vec{y}|^2} \cdot \vec{y}$
$\vec{e_y} \cdot \vec{x} = |\vec{e_y}|$ gibt die Länge von x in Richtung y an. Multipliziert mit $\vec{e_y}$ um einen Vektor zu erhalten.

4 Komplexe Zahlen und Funktionen

4.1 rechnen mit komplexen Zahlen

$z = a + ib = |z|e^{i\varphi} \qquad z_1 = a_1 + ib_1 \qquad z_2 = a_2 + ib_2$
z^*... konjungiert komplex ($z = a + ib \qquad z^* = a - ib$)

Betrag: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot z^*}$
Winkel: $\varphi_z = \arctan(\frac{b}{a})$

Komponentenform: $z = a + ib$
Polarform: $z = |z|e^{i\varphi_z}$

Addition: $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$

Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$
$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|e^{i(\varphi_{z_1} + \varphi_{z_2})}$

Division: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_1^*}{z_2^*} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$
$z_1 \cdot z_2 = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_{z_1} - \varphi_{z_2})}$

Wurzel $\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot e^{i\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}} \quad n \in [0, ..., n-1]$
Da n verschiedene Lösungen herauskommen müssen, wird zu $\varphi, k * 2\pi$ addiert(verändert die Funktion nicht). Beim ziehen der n-ten Wurzel wird der Exponent mit $\frac{1}{n}$ multipliziert.

4.2 Differenzierbarkeit komplexer Funktionen (Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen)

Komplexe Funktionen sind differenzierbar, wenn die Chauchy-Riemannschen Dgl erfüllt sind.

$z = u(x,y) + iv(x,y) \qquad f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$$\text{Cauchy-Riemannschen Dgl:} \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

5 Integrieren / Differenzieren

5.1 Differenzieren

Berechnung der Steigung der Funktion. ($\frac{dy}{dx}$)

Ableitungsregeln

Faktorregel	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$
Summenregel	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
Produktregel	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ mit $g(x) \neq 0$
Kettenregel	$h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Abbildung 2: Formelsammlung [1, S. 13]

5.2 Integrieren

Berechnung der Fläche zwischen der Funktion und der X-Achse. ($dx \cdot dy$)

1. Man bestimme eine Stammfunktion $F(x)$ zum Integranden $f(x)$
2. Mit dieser Stammfunktion berechnet man die Differnenz $F(b) - F(a)$

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]|_a^b = F(b) - F(a)$$

unbestimmtes Integral: Das unbestimmte Integral gibt zu einer Funktion die Menge aller Stammfunktionen an.

5.2.1 Grundintegrale

Funktion f	Ableitungsfunktion f'	Stammfunktion F
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$F(x) = k \cdot x$
$f(x) = x^q$	$f'(x) = q \cdot x^{q-1}$	$F(x) = \frac{x^{q+1}}{q+1}$ für $q \neq -1$ $F(x) = \ln(\lvert x \rvert)$ für $q = -1$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln(a)}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = x \cdot \ln(x) - x$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(x) - x)$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$F(x) = -\cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$F(x) = -\ln(\lvert \cos(x) \rvert)$

Abbildung 3: Grundintegrale [1, S. 13]

5.2.2 Substituieren

Bei Funktionen in Funktionen immer die innere Funktion substituieren. Substitution wird gemacht, damit man die x wegkürzen kann. Wenn man eine substituierte Funktion integriert, müssen alle x weg sein! Integreieren nach u ist mit x in der Gleichung **nicht möglich**!!!

$$\int f\left[g(x)\right] dx = \int f(u) \frac{du}{g'(x)}$$

5.2.3 Partielle Integration:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x)' \cdot v(x) dx$$

5.2.4 Phönix Integral:

$f(x) = \int g(x)h(x)dx$

Wenn weder $g(x)$ noch $h(x)$ beim Ableiten einfacher wird, sondern gleich bleibt oder sich wiederholt (Bsp.: $e^x, sin(x), cod(x)...$) wird solange partiell integriert, bis im Integral-Teil vom partiellen Integrieren die Ausgangsfunktion steht. Die beiden gleichen Integrale werden auf eine Seite gebracht und umgeformt bis $\int g(x)h(x)dx = ...$ dasteht.

5.3 Integrieren über den Betrag

Beim Integrieren über einen Betrag muss die Funktion an jedem Nulldurchgang (falls vorhanden) aufgeteilt und integriert. Die negativen Stellen müssen in die Summe negativ eingehen. Bsp.: $\int\limits_0^e |ln(x)| =$

$|x*(ln(x)-1)|\big|_0^e = -x*(ln(x)-1)\big|_0^1 + x*(ln(x)-1)\big|_1^e\ \alpha$

5.4 Uneigentliche Integrale

Ein Integral existiert, jedoch sind die Integrationsgrenzen nicht beschränkt.
Fall 1: Eine Grenze des Integrals ist ∞.

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^\lambda f(x)dx$$

Fall 2: Eine Polstelle von f(x) liegt im zu integrierenden Bereich. Ist der Grenzwert des Integrals für $\lambda \to 0$ vorhanden, wird das uneigentliche Integral **konvergent** genannt, andernfalls heißt es **divergent**.
Bsp.: b ist Polstelle von f(x)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\int_a^{b-\lambda} f(x)dx$$

Bsp.: c ist Polstelle von $f(x)$ mit $a < c < b$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\int_a^{c-\lambda} f(x)dx + \lim_{\mu\to 0}\int_a^{c-\mu} f(x)dx$$

5.5 Kurvenintegrale:

Beim klassischen eindimensionalen Riemann- Integral integriert man über ein Intervall $[a, b]$ der reellen Achse.
Beim Kurvenintegral werden die integrationsbereiche als Kurven C im $\mathbb{R}^n$ betrachtet.
Kurvenintegral 1. Art: Eine **reellwertige** Funktion $f : \mathbb{R}^n\ to\mathbb{R}$ wird über eine Kurve C integriert. Es wird ein skalares Feld über eine Kurve integriert. Es kann zur berechnung der Länge einer Kurve sowie zur Berechnung linienhafter Ladungs/Masseverteilungen dienen.
Kurvenintegral 2. Art (Arbeitsintegral): Ein **Vektorfeld** wird über eine Kurve C integriert. Dient zur Berechnung der nötigen Arbeit, um eine Masse/Ladung in einem Kraftfeld längs einer Kurve zu bewegen.

Bogenelement: $|\gamma'(t)dt|$

5.5.1 Kurvenintegral 1. Art

Für eine stückweise stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist das Kurvenintegral von f längs $\vec{\gamma}$:

$$J = \int_{\vec{\gamma}} f ds = \int_{t_a}^{t_e} f(\vec{\gamma}(t)) \cdot |\dot{\gamma}(t)|dt$$

Bsp.: Bogenlänge $s(t)$ des Kurvenstücks $[t_a, t_e]$ der Kurve C:

$$s(t) = \int_{t_a}^{t_e} \dot{\vec{\gamma}}(t)|dt = \int_{t_a}^{t_e} \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + \dot{x}_n^2(t)}dt$$

Algorythmus zum Berechnen eines Kurvenintegrales 1. Art:

- Parametrisierung der Kurve $\vec{\gamma}(t)$
- Berechnung der Funktionswerte $f(\vec{\gamma}(t))$ der Belegungsfunktion
- Berechnung von $|\dot{\vec{\gamma}}(t)|$
- Berechnung des Kurvenintegrals

$$\int_{\vec{\gamma}} f ds = \int_{t_a}^{t_e} f(\vec{\gamma}(t)) \cdot |\dot{\vec{\gamma}}(t)| dt$$

5.5.2 Kurvenintegral 2. Art

- Parametrisierung der Kurve $\vec{\gamma} : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$
- Berechnung der Werte $k(\vec{\gamma}(t))$ in den Kurvenpunkten
- Berechnung des Tangentenvektors $|\dot{\vec{\gamma}}(t)|$
- Berechnung des Kurvenintegrals

$$\int_{\vec{\gamma}} k ds = \int_{t_a}^{t_e} k(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t) dt$$

5.6 Gebietsintegrale / Doppelintegrale

Skript 2022x11x29 Seite 9

Keine Flächenberechnung!! Es wird das Volumen, welches vom Skalarfeld und der x/y Ebene im Gebiet G eingeschlossen wird, berechnet.

$f(x, y)$... Skalarfeld, $f_{1/2}(x)$... untere/obere "Beschänkungsfunktion", G... Gebiet welches von $f_{1/2}(x)$ eingeschlossen wird.

$$\int\int_{(G)} f(x, y) dG = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

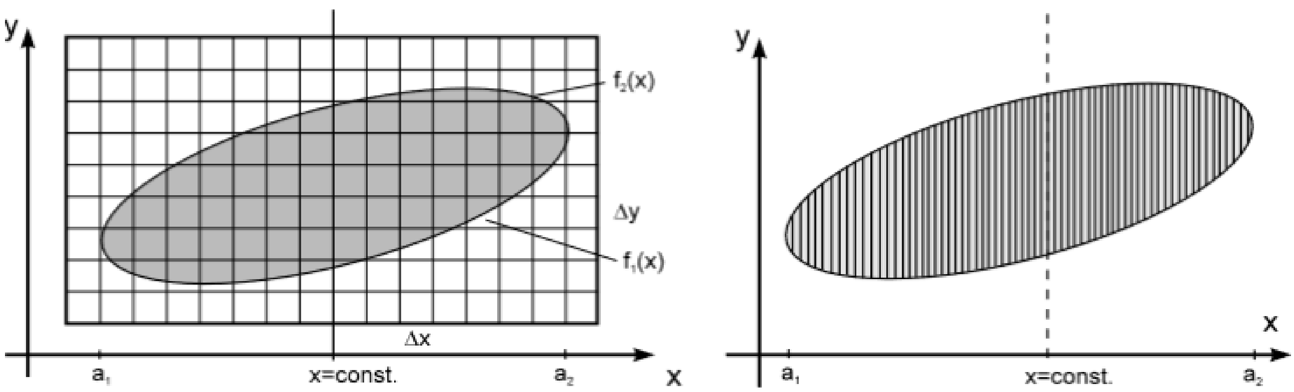


Abbildung 4: Gebietsintegrale

- es ist egal, ob zuerst nach x oder y integriert wird (wählen was einfacher ist).
- Bei Integration nach y: $y(x)$ für die Obere- und Untere- Begrenzungsfunktion berechnen.

- nach y integrieren. Mit dem somit berechneten Integral wird die "Strichlänge " (eigentlich die Fläche zwischen der x/y Ebene und dem Strich) abhängig von x berechnet.
- Von a_1 bis a_2 über x integrieren. (wird zuerst nach x integriert, x und y jeweils vertauschen)

6 Koordinatensysteme

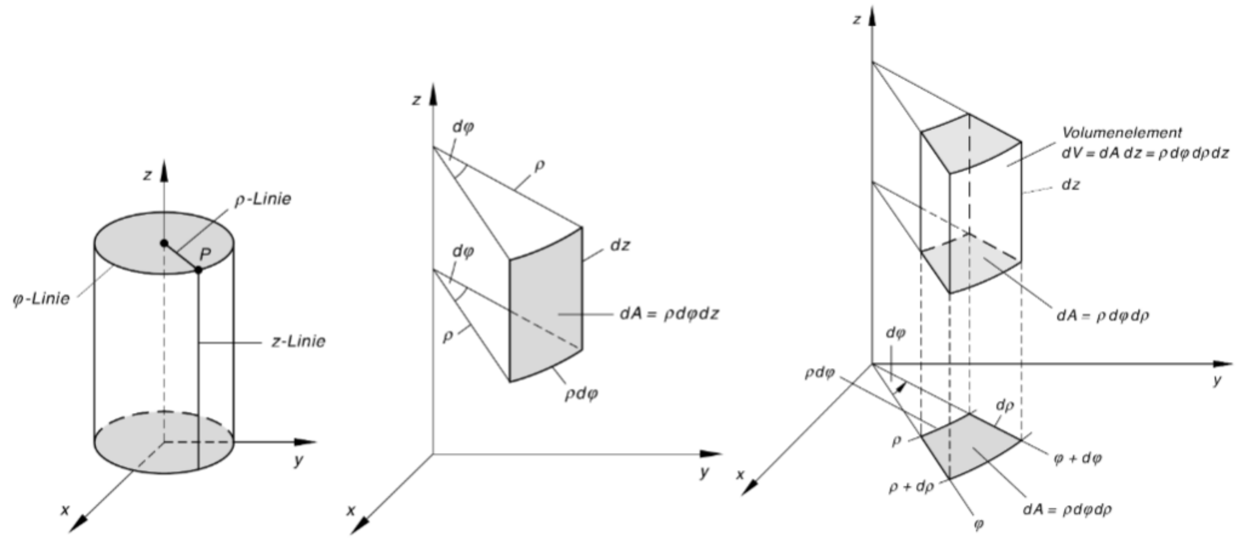
Schwerpunkt berechnen: $R = \int \rho(\vec{r}) \cdot \vec{r} \; dV$

6.1 Zylinderkoordinaten

Flächenelement: $dA = r \; d\phi dz$

Volumselement: $dV = r \; drd\phi dz$ $\qquad V_{ges} = \int\limits_0^h \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^r r \; drd\phi dz$

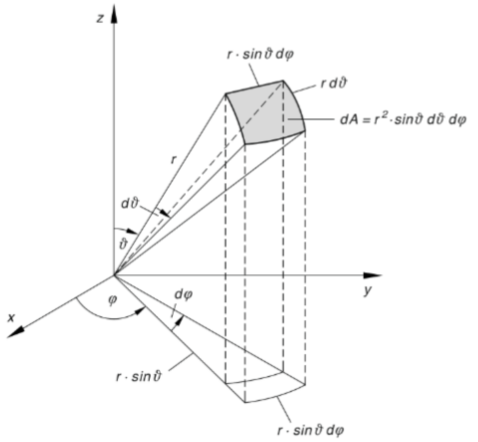
$\rho = r$

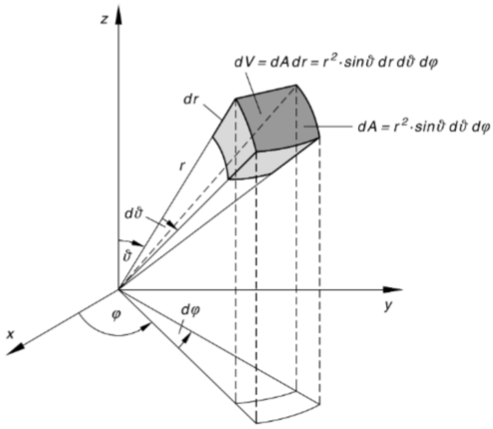


6.2 Kugelkoordinaten

Flächenelement: $dA = r^2 \cdot sin\vartheta \; d\vartheta d\varphi$ $\qquad A_{ges} = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} r^2 \cdot sin\theta \; d\theta d\varphi$

Volumselement: $dV = dAdr = r^2 \cdot sin\vartheta \; drd\vartheta d\varphi$ $\qquad V_{ges} = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^r r^2 \cdot sin\theta \; drd\theta d\varphi$





Schwerpunkt berechnen: $R = \int \rho(\vec{r}) \cdot \vec{r}\ dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{r} \rho(\vec{r}) \cdot \vec{r}\ drd\theta d\varphi$

7 Differentialgleichungen

Definition Differentialgleichung: Eine Gleichung die neben der gesuchten Funktion auch deren Ableitung enthält.
Gewöhnliche DGL: Keine partiellen Ableitungen.
Ordnung: Höchtse vorkommende Ableitung.
linear / nicht linear: nicht linear, wenn die Funktion quadratisch vorkommt.
homogene DGL: $y'(x) = h(x)y(x)$
inhomogene DGL: $y'(x) = h(x)y(x) + f(x)$
Ansatz: Idee zum Lösen einer DGL. Dieser wird in die DGL eingesetzt und anschließend aufgelöst.
homogene Lösung: Lösung ohne Störfunktion. ($y_h(x)$)
partikuläre Lösung: Lösung mit Störtherm($y_p(x)$)
allgemeine Lösung: Lösung der DGL ($y(x) = y_h(x) + y_p(x)$)

Lösungsverfahren:

Exponentialansatz: Nur bei **konstanten Koeffizienten!!**
Trennen der Variablen: nur bei **1. Ordnung.**
Partikuläre Lösung mit Tabelle: nur bei **konstanten Koeffizienten!!**
Variation der Konstanten: immer möglich.

7.1 Gewöhnliche DGL

implizite Form: $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$
explizite Form: $y^n = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$

7.1.1 Lösen einer homogenen DGL 1. Ordnung

$y'(x) = \alpha\ y(x)$ Lösen durch trennen der Variablen oder Exponentialansatz.

Trennen der Variablen

- y' durch $\frac{dy}{dx}$ ersetzen
- alle y und dy sowie x und dx jeweils auf eine Seite bringen.
- integrieren

$y'(x) = h(x)y(x) \qquad \rightarrow \qquad y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} h(\tilde{x})d\tilde{x}}$

Exponentialansatz, nur bei konstanten Koeffizienten!!
$y_0 = C \cdot e^{\lambda \cdot x}$

7.1.2 partikuläre Lösung:

mit Tabelle:

Inhomogenität	Ansatzfunktion	Parameter
$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ (Polynom vom Grad n)	$y_p(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i x^i$	$A_0, \ldots, A_n$
$f(x) = a \cdot \sin(\omega x)$ (Sinusanregung)	$y_p(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)$	A, B
$f(x) = a \cdot \cos(\omega x)$ (Kosinusanregung)	$y_p(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)$	A, B
$f(x) = a\, e^{\mu x}$ $(\mu \neq \alpha)$ (Exponentialfunktion)	$y_p(x) = A\, e^{\mu x}$	A

Bemerkung: Besteht die Inhomogenität $f(x)$ aus einer Summe von mehreren Störgliedern, wählt man für jedes Störglied einzeln die entsprechende Ansatzfunktion und bestimmt durch Einsetzen der Ansatzfunktion in die Differenzialgleichung die zugehörigen Parameter. Zum Schluss addiert man alle partikulären Lösungen auf und erhält eine spezielle Lösung des gestellten, inhomogenen Problems.

Abbildung 5: Partikuläre Lösungen

Der passende Ansatz wird in die DGL eingesetz und ausgerechnet. Die partikuläre Lösung (bzw. Lösungen bei mehreren Störthermen) werden zur homogenen Lösung addiert und man erhält die Lösung der DGL.

durch Variation der Konstanten:

$$y'(x) = h(x)y(x) + f(x)$$

Berechnen des zugehörigen homogenen Problems $y(x) = C \cdot e^{\int_{x_0}^{x} h(\tilde{x})d\tilde{x}}$.
Die Konstante C wird als variabel $C(x)$ angesehen und der Rest der homogenen Lösung wird $\varphi(x) = e^{\int_{x_0}^{x} h(\tilde{x})d\tilde{x}}$ geschrieben

Es ergibt sich der Ansatz: $\boldsymbol{y(x) = c(x) \cdot \varphi(x)}$, achtung! das ist die **allgemeine** Lösung

Durch Einsetzen von $y(x)$ in die DGL kann man zeigen:

$$c'(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

somit ist $\boldsymbol{c(x) = c_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{f(\tilde{x})}{\varphi(\tilde{x})} d\tilde{x}}$ mit $c_0 = y_0$.
Eingesetzt in $y(x)$:

$$y(x) = \varphi(x) \cdot \left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{f(\tilde{x})}{\varphi(\tilde{x})} d\tilde{x} \right)$$

7.2 exakte DGL

Eine DGL 1. Ordnung vom Typ $g(x,y)dx + h(x,y)dy = 0$ ist genau dann **exaxt**, wenn die Bedingung $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial h(x,y)}{\partial x}$ erfüllt ist.

Dann ist: $\boldsymbol{g(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}}$ und $\boldsymbol{h(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}}$

Durch unbestimmte Integration lässt sich $u(x,y)$ gewinnen, welche in impliziter Form als $u(x,y) = \text{const.} = C$ dargestellt werden kann.

$g(x,y)$ muss nach x integriert werden, wobei sich eine Integrationskonstante $K(y)$ ergibt. Um die Integrationskonstante zu bestimmen muss $u(x,y)$ nach y abgeleitet und mit $h(x)$ gleichgesetzt werden. Dann kann $K(y)$ durch integration bestimmt werden. $u(x,y)$ bildet die implizite Lösung und ist konstant ($U(x,y) = \text{const.} = C_2$). Um die explizite Lösung zu erhalten, muss die implizite Lösung $u(x,y) = C_2$ nach y aufgelöst werden.

Lösen einer exakten DGL:

- $g(x,y)$ nach x integrieren, Integrationskonstante: $K(y)$
- $g(x,y)$ nach y ableiten und mit $h(x,y)$ gleichsetzen und damit $K'(y)$ bestimmen
- $K(y)$ durch integrieren bestimmen
- $u(x,y)$ ist die **implizite Lösung** der DGL
- $u(x,y) = C_2$ nach y auflösen –> **explizite Lösung!**

7.3 DGL 2. Ordnung

Wenn die DGL linear ist, ist eine Kombination der Lösung durch Addition auch wieder eine Lösung.
Ansatz: $y_0 = C \cdot e^{\lambda \cdot x}$
homogene Lösung (Skript 2022x12x07 Seite 8)

- Ansatz in DGL einsetzen. Dabei die DGL als homogen behandeln.
- $C \cdot e^{\lambda \cdot x}$ herausheben. Der Rest bildet das charakteristische Polynom.Dieses 0 setzen.
- Alle Nullstellen eingesetzt in den Ansatz sind Lösungen der DGL. Die einzelnen Lösungen können linear kombiniert werden, sprich jede Addition von Lösungen ist wieder eine Lösung der DGL. Die **allgemeine homogene** Lösung ist die Summe der Lösungen, multipliziert mit Konstanten (nur bei linearen DGL). Durch geschicktes Kombinieren von Komplexe Lösungen können reell konstruiert werden.

partikuläre Lösung

- Partikuläre Lösung von f(x) mit Tabelle oder durch Variation der Konstanten bilden.
- Homogene und partikuläre Lösung addieren.

7.4 LDGL, lineare Differenzialgleichungssysteme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\boldsymbol{\dot{\vec{y}}(t) = A \cdot \vec{y}(t) + \vec{f}(t)}$$

Kochrezept:

- Aufstellen der Systemmatrix ($y'(t) = Ay(t)$)
- Eigenwerte λ von A bestimmen ($\det(A - \lambda I_n) \stackrel{!}{=} 0$)
- Eigenvektoren von A berechnen ($(A - \lambda_i I_n)\vec{x} \stackrel{!}{=} \vec{0}$)
- Fundamentalsystem ($\vec{x}_i e^{\lambda_i t}$)
- allgemeine Lösung (Summe des Fundamentalsysteme)
- homogene Lösung (Anfangsbedingungen einsetzen)
- partikuläre Lösung Variation der Konstanten oder Ansatz

7.4.1 partikuläre Lösung:

Zeilenweise auflösen:
Die partikuläre Lösung kann Zeilenweise über Variation der Konstanten oder per Ansatz mit Tabelle bestimmt werden.

Der partikuläre Ansatz wird in die Differentialgleichung Zeilenweise eingesetzt und anschließend in die Form

$$B \begin{pmatrix} \dot{C}_1 e^{i\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \dot{C}_i e^{i\lambda_i t} \end{pmatrix} = f(\vec{t})$$

gebracht. Durch invertieren kann umgeformt werden:

$$\begin{pmatrix} \dot{C}_1 e^{i\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \dot{C}_i e^{i\lambda_i t} \end{pmatrix} = B^{-1} f(\vec{t})$$

Die Komponenten von $\vec{C}(t)$ können durch zeilenweises umformen und integrieren bestimmt werden.

8 Matritzen

lineare Abhängig: Eine Zeile einer Matrix ist das Vielfache einer Anderen. In diesem Fall ist die Determinante = 0.

8.1 Determinante

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

$$\det(A) = +a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 - b_3 \cdot c_2 \cdot a_1 - c_3 \cdot a_2 \cdot b_1$$

Regel von Sarrus: Diagonalen miteinander multiplizieren und anschließend summieren. Geht nur bei 3x3 Matrix.

Rechenregeln zur Determinante:
$z_1, ..., z_n$ ... Zeilen, $s_1, ..., s_n$... Spalten der Matrix

- $\det(s_1, s_2, s_3) = (-1) \cdot \det(s_1, s_3, s_2) = \det(s_3, s_1, s_2)$
  werden zwei Zeilen/Spalten vertauscht, muss die Determinante mit (-1) multipliziert werden.
- Addition des Vielfachen einer Zeile/Spalte zu einer Anderen ändert den Wert nicht.
- $\det(k \cdot z_1, z_2, z_3)^T = k \cdot \det(z_1, z_2, z_3)^T \qquad \det(k \cdot a) = k^3 \cdot \det(A)$
- $\det(A^{-1} = \frac{1}{\det(A)})$
- $\det(A^k) = (\det(A))^k$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- Beil linearer Abhängigkeit ist die Determinante 0
- $\boldsymbol{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$

8.1.1 Laplace´scher Entwicklungssatz:

$$\det\, A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det\, A'_{ij} \qquad \text{für ein festes } i \text{ oder } j \in \{1, \ldots, n\}$$

Die Determinante ändert sich nicht, wenn zu einer Zeile/Spalte ien Vielfaches einer anderen Zeile/Spalte hinzu addiert. Mit dieser Methode versucht man möglichst viele Nullen in eine Zeile/Spalte, nach der man dann die Determinante entwickelt, bekommt.

Gauß-Jordan-Verfahren: Beschreibt die elementare Zeilenumformung zum Vereinfachen der Matrix um das Berechnen der Determinante zu erleichtern. Dazu dürfen ganze Zeilen oder Spalten mit einem Faktor multipliziert werden. Weiters dürfen Vielfache von Zeilen/Spalten zu anderen Zeilen/Spalten addiert werden. Wenn zwei Zeilen/Spalten vertauscht werden, ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

8.2 Matrix Multiplikation

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = A = \begin{pmatrix} a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_2 & a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot d_2 \\ a_2 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 & a_2 \cdot d_1 + b_2 \cdot d_2 \end{pmatrix}$$

$$k * A * x * B = k * x * (A * B) \qquad \text{mit } k, x \text{ Konstanten, } A, B \text{ Matritzen} \tag{3}$$

$$A \cdot \vec{b} = \vec{c} \leftrightarrow \vec{b} = A^{-1}\vec{c} \tag{4}$$

8.3 Invertieren einer Matrix

Invertieren einer Matrix mit Gauß-Jordan-Verfahren

- Eine Matrix ist invertierbar, wenn sie
- - quadratisch ist
- - und die Determinante $\neq 0$ ist.

Neben die Matrix wird die Einheitsmatrix geschrieben

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_1 & b_1 & c_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Die Matrix wird solange mit elementarer Zeilenumformung umgeformt, bis auf der linken Seite die Einheitsmatrix steht (Gauß-Jordan-Verfahren).

8.4 elementare Zeilenumforumengen:

Ändern weder die Lösung noch die Inverse der Matrix. Vertauschen von Zeilen ändert jedoch das Vorzeichen der Determinante!

- Vertauschen von zwei Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit $k \neq 0$
- Addition des Vielfachen eriner Zeile zu einer anderen

8.5 Wichtige Identitäten

Identität
$\det\,(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
$(A^{-1})^{-1} = A$
$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

8.6 Lösungsverfahren:

8.6.1 Gaußsches Eliminationsverfahren:

$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b} \qquad \rightarrow \qquad \left(\mathbf{A}\middle|\vec{b}\right)$

Soll $\vec{x}$ berechnet werden, wird eine Matrix der Form $(\mathbf{A}|\vec{b})$ aufgeschrieben und solange mit elementarer Zeilenumformung umgeformt, bis über oder unter der Hauptdiagonale von A nur nullen stehen. Mit dem wissen dass die n-te Spalte der Matrix mit x_n multipliziert wird, kann in die erste/letzte Zeile eingesetzt werden.

8.6.2 Cramersche Regel:

Sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$ - Matrix mit den Spaltenvektoren $(a^1, a^2, ..., a^n)$ und $\det A \neq 0$. Dann ist die Lösung des LGS

$$a \cdot x = b \qquad \text{mit} \qquad x = (x_1, ..., x_n)^T, b = (b_1, ..., b_n)^T$$

gegeben durch

$$x_i = \frac{\det(a^1, ...a^{i-1}, b, a^{i+1}, ..., a^n)}{\det A}$$

Man ersetz die i-te Spalete von A durch die Lösung b des LGS. Dann ist x_i der Quotient der so entstandenen Matrix und $\det A$.

8.7 Eigenwertproblem

A... Matrix, $\vec{v}$... Vektor, k... Konstante, I... Einheitsmatrix

$$\begin{aligned} & A \cdot \vec{v} = k \cdot \vec{v} \\ \textbf{Eigenwertproblem:} \quad & A \cdot v - \lambda \cdot v = 0 \\ & (A - \lambda I) \cdot v = 0 \end{aligned}$$

Jeder Vektor $\vec{v}$ welcher diese Gleichung erfüllt, ist ein Eigenvektor von A.

charakteristisches Polynom: $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

Eigenwerte: $P(\lambda) \stackrel{!}{=} 0$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die Eigenwerte der Matrix A.

Eigenvektor: $\mathrm{Eig}(A, \lambda_i) : (A - \lambda_i I) \cdot \vec{x} = 0$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Die Gleichung nach $x_1, x_2, ...1$ auflösen, dann kann der Eigenvektor in Form

$$\mathrm{Eig}(A, \lambda_i) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$$

geschrieben werden.

8.7.1 Herleitung:

Gibt es nun eine Zahl λ und einen Vektor v, sodass dieser durch Multiplikation mit der Matrix $(A - \lambda I_n)$ auf den Nullvektor abgebildet wird, so ist diese Matrix nicht von vollem Rang und die Multiplikation mit einem Vektor nicht injektiv . Dass die Matrix $(A - \lambda I_n)$ keinen vollen Rang besitzt ist gleichbedeutend damit, dass ihre Determinante Null ist. Wenn es also eine Lösung des Eigenwertproblems gibt, muss gelten:

$\det(A - \lambda I_n) = 0$

9 Nabla

Normaleinheitsvektor: $N = \frac{\nabla\phi(r)}{|\nabla\Phi(r)|}$
Nabla: $\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$

Bedeutung	Berechnung
$\mathrm{grad}\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)$	$\nabla\Phi$
$\mathrm{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \nabla\Phi$	$\nabla \cdot \mathbf{A}$
$\mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\Phi = \nabla \times \nabla\Phi$	$\nabla \times \mathbf{A}$

Gradient
Erzeugt ein Vektorfeld mit den Steigungen des skalaren Feldes aus einem skalaren Feld. (Vektor)

Divergenz
Gibt an ob die Vektoren in diesem Punkt zusammen oder auseinander zeigen. (Skalar)

- $\mathrm{div}\mathbf{A} > 0A > 0$: im Volumenelement befindet sich eine Quelle (mehr raus als rein)
- $\mathrm{div}\mathbf{A} < 0A < 0$: im Volumenelement befindet sich eine Senke (mehr rein als raus)
- $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0A = 0$: Im Volumenelement befindet sich weder eine Quelle noch eine Senke, das Vektorfeld ist an dieser Stelle quellenfrei.

Rotation
Gibt an, ob sich das Vektorfeld um einen Punkt dreht. (Vektor)

Literatur

[1] Bundesministerium. „Formelsammlung SRDP Angewandte Mathemmatik BHS“. DE. In: (2019).