# Bundle Adjustment

郭尧

2015.9.15

# 目录

- 1.问题背景
- 2.数学基础
- 3.优化方法
- 4.在SLAM/AR中的应用
- 5.Resources

# 1.问题背景

- 光束法平差：以特定点的成像点坐标为观测值，以图像点反投影残差的最小值为目标函数，通过最小二乘法或牛顿法求解最小值。
- 光束法的原理：来自空间每个3D特征点的光束聚集于摄像机的中心，并在像面上成像，空间点，摄像机中心与像点理论上满足三点一线。
- 目的：同步优化摄像机参数和3D重建的结构。

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \| (u_{ij}, v_{ij}) - (\hat{u}_{ij}, \hat{v}_{ij}) \|^2$$

- 其中，n表示三维点个数，m表示图像幅数，（$u_{ij}$,$v_{ij}$）是摄像机拍到的第i个三维点在第j幅图像上的投影坐标，（$u_{ij}'$,$v_{ij}'$）是根据摄像机畸变模型求解的坐标

# 1.问题背景

- 最小二乘法优化：对方程Ax=b求解

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \| (u_{ij}, v_{ij}) - (\hat{u}_{ij}, \hat{v}_{ij}) \|^2$$

- 存在的问题：特征点数量多的情况下，对矩阵求逆的效率很低；

  对异常值敏感，可靠性不高；

- We need choose a more realistic likelihood model

# 2.数学基础

- 牛顿方法(Newtown Methods)：通过多次迭代求解高阶方程近似解的方

设r是 $f(x)=0$ 的根，选取 $x_0$ 作为r的初始近似值，过点 $(x_0, f(x_0))$ 做曲线 $y=f(x)$ 的切线L，L的方程为 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，求出L与x轴交点的横坐标 $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，称$x_1$为r的一次近似值。过点 $(x_1, f(x_1))$ 做曲线 $y=f(x)$ 的切线，并求该切线与x轴交点的横坐标 $x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$，称 $x_2$ 为r的二次近似值。重复以上过程，得r的近似值序列，其中，$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 称为r的 $n+1$ 次近似值，上式称为**牛顿迭代公式**。

用牛顿迭代法解非线性方程，是把非线性方程 $f(x)=0$ 线性化的一种近似方法。把 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某邻域内展开成泰勒级数 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}+R_n(x)$，取其线性部分（即泰勒展开的前两项），并令其等于0，即 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$，以此作为非线性方程 $f(x)=0$ 的近似方程，若 $f'(x_0)\neq 0$，则其解为 $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，这样，得到牛顿迭代法的一个迭代关系式：$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$。

# 2.数学基础

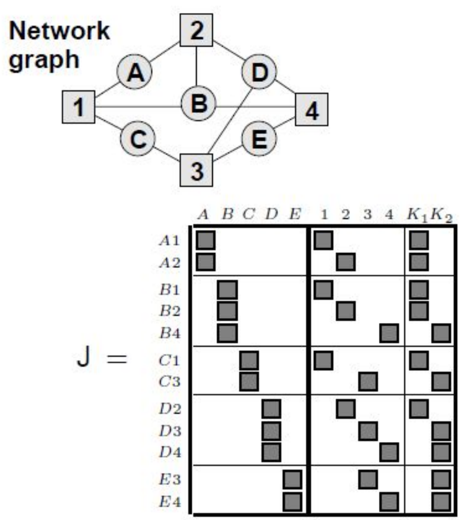
- Hessien 矩阵H：

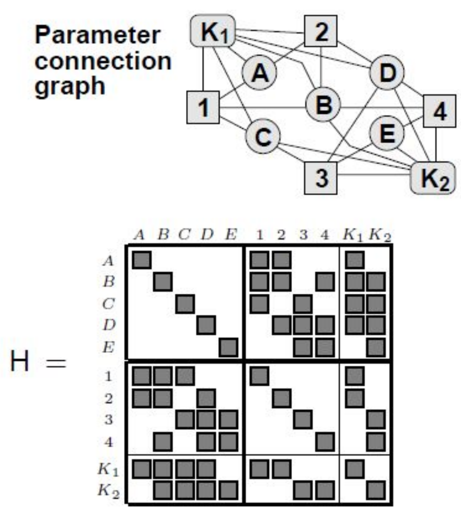
对于一个实值多元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，如果函数 $f$ 的二阶偏导数都存在，则定义 $f$ 的黑塞矩阵为

$$H(f)_{i,j}(\vec{x}) = D_i D_j f(\vec{x})$$

其中 $D_i$ 表示对第 $i$ 个变量的微分算子，$\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$。那么，$f$ 的黑塞矩阵即

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$



# 3.优化方法

- accurate,reliable,timesaving
- x为目标函数f(x)的自变量，是包含特征点图像坐标与相机参数的向量
- 使用基于稀疏海森矩阵的二阶的高斯-牛顿方法 优化f(x)，并采用近似优化方法以降低时间复杂度
- 使用条件：优化问题不能过大且满足稀疏矩阵条件($O(n^3)$)

$$f(x+\delta x) \approx f(x) + g^\top \delta x + \frac{1}{2}\delta x^\top H \delta x \qquad g \equiv \frac{df}{dx}(x) \qquad H \equiv \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$$

quadratic local model　　gradient vector　　Hessian matrix

$$\frac{df}{dx}(x+\delta x) \approx H\,\delta x + g \qquad \delta x = -H^{-1} g$$

$$f(x+\delta x) \approx f(x) - \frac{1}{2}\delta x^\top H\,\delta x = f(x) - \frac{1}{2} g^\top H^{-1} g$$

- 通过5-6次迭代即可将误差缩小到double以内

# 3.优化方法

- 二阶牛顿方法局限：算法复杂度仍高，适用于H为稀疏矩阵的情况
- 一阶牛顿方法：迭代收敛速度慢，迭代次数多,但单次迭代时间更短
- 例：轮流法(alternation)，将变量x分成多个子向量轮流优化，例如resection-intersection方法，将x分为特征点图像坐标与相机参数两个子向量

$$\begin{pmatrix} \delta x_S \\ \delta x_C \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} H_{SS}^{-1} & 0 \\ -H_{CC}^{-1} H_{CS} H_{SS}^{-1} & H_{CC}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_S \\ g_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{SS} & 0 \\ H_{CS} & H_{CC} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g_S \\ g_C \end{pmatrix}$$

# 4.在SLAM/AR中的应用

- 单目视觉SLAM通过多对匹配特征点的图像坐标计算摄像机位置，并更新地图，由于摄像机的抖动、环境干扰和针孔模型的固有缺陷，会造成特征点的投影误差，因此需要对投影结果进行实时的平差，光束法平差原理简单，适应性强，可用于最小化单目SLAM相机标定和特征点投影的误差防止累积
- 一般对目标函数f(x)在初始点$x_0$泰勒展开后取一阶或二阶近似，通过牛顿法进行迭代，以收敛到最小误差值，一般二阶牛顿法经过5-6次迭代后投影误差可降到0.05像素以下

# 5.Resources

- http://www.netlib.org/