

19th EURO Working Group on Transportation Meeting, EWGT2016, 5-7 September 2016,
Istanbul, Turkey

Investigation Empirique de l'Existence de l'Equilibre Utilisateur Statique

Juste Raimbault ^{a,b,*}

^aUMR CNRS 8504 Géographie-cités, 13 rue du Four, 75006 Paris, France

^bUMR-T IFSTTAR 9403 LVMET, Cité Descartes, 77455 Champs-sur-Marne, France

Abstract

L'Equilibre Utilisateur Statique est un cadre puissant pour l'étude théorique du trafic. Malgré l'hypothèse restreignante de stationnarité des flots qui intuitivement limite son application aux systèmes de trafic réels, de nombreux modèles opérationnels qui l'implémentent sont toujours utilisés sans validation empirique de l'existence de l'équilibre. Nous étudions celle-ci sur un jeu de données de trafic couvrant trois mois sur la région parisienne. L'implémentation d'une application d'exploration interactive de données spatio-temporelles permet de formuler l'hypothèse d'une forte hétérogénéité spatiale et temporelle, guidant les études quantitatives. L'hypothèse de flots localement stationnaires est invalidée en première approximation par les résultats empiriques, comme le montrent une forte variabilité spatio-temporelle des plus courts chemins et des mesures topologiques du réseau comme la centralité de chemin. De plus, le comportement de l'index d'autocorrelation spatiale pour les motifs de congestion à différentes portées spatiales suggère une évolution chaotique à l'échelle locale, en particulier lors des heures de pointe. Nous discutons finalement les implications de ces résultats empiriques et proposons des possibles développements futurs basés sur l'estimation de la stabilité dynamique au sens de Lyapounov des flots de trafic.

© 2016 The Authors. Published by Elsevier B.V.

Peer-review under responsibility of the Scientific Committee of EWGT2016.

Keywords: Equilibre Utilisateur Statique, Visualisation de Données Spatio-temporelles, Stationnarité Spatio-temporelle, Stabilité Dynamique

1. Introduction

La modélisation du trafic a été largement étudiée depuis les travaux séminaux de Wardrop (Wardrop (1952)) : les enjeux économiques et techniques justifient entre autre le besoin d'une compréhension fine des mécanismes régissant les flots de trafic à différentes échelles. Différentes approches aux objectifs différents coexistent aujourd'hui, parmi lesquels on trouve par exemple les modèles dynamiques de micro-simulation, généralement opposés aux techniques de basant sur l'équilibre. Tandis que la validité des modèles microscopiques a été étudiée de façon conséquente et leur application souvent questionnée, la littérature est relativement pauvre en études empiriques assurant l'hypothèse d'équilibre stationnaire du cadre de l'Equilibre Utilisateur Statique (EUS). De nombreux développements plus réal-

* Auteur correspondant. Tel.: +33140464000.

E-mail address: juste.raimbault@polytechnique.edu

istes on été documentés dans la littérature, tels l'Equilibre Utilisateur Dynamique Stochastique (EUDS) (voir pour une description par exemple Han (2003)). A un niveau intermédiaire entre les cadres statiques et stochastiques se trouve l'Equilibre Utilisateur Stochastique Restreint, pour lequel les choix d'itinéraire des utilisateurs sont contraints à un ensemble d'alternatives réalistes (Rasmussen et al. (2015)). D'autres extensions prenant en compte le comportement de l'utilisateur via des modèles de choix ont été proposé plus récemment, comme Zhang et al. (2013) qui inclut à la fois l'influence de la tarification routière et de la congestion sur le choix avec un modèle Probit. La relaxation d'autres hypothèses restrictives comme la maximisation pure de l'utilité par l'utilisateur ont aussi été introduites, tels l'Equilibre Utilisateur Borné décrit par Mahmassani and Chang (1987). Dans ce cadre, l'utilisateur est satisfait si son utilité tombe dans un intervalle et l'équilibre est achevé lorsque chaque utilisateur est satisfait. Les dynamiques résultantes sont plus complexes comme révélé par l'existence d'équilibres multiples, et permet de rendre compte de faits stylisés spécifiques comme des évolutions irréversibles du réseau comme développé par Guo and Liu (2011). D'autres modèles d'attribution de trafic inspirés d'autres domaines ont également été plus récemment proposés: dans Puzis et al. (2013), une définition étendue de la centralité de chemin qui combine linéairement la centralité des flots non-contraints avec une centralité pondérée par le temps de parcours permet d'obtenir une forte corrélation avec les flots de trafic effectifs, fournissant ainsi un modèle d'attribution de trafic. Cela fournit également des applications pratiques comme l'optimisation de la distribution spatiale des capteurs de trafic.

Malgré ces nombreux développements, de nombreuses études et applications concrètes se reposent toujours sur l'Equilibre Utilisateur Statique. La région parisienne utilise par exemple un modèle statique (MODUS) pour gérer et planifier le trafic. Leurent and Boujnah (2014) introduit un modèle statique de flots qui inclut les recherches locales et le choix du parking : il est légitime de s'interroger, en particulier à de si faibles échelles, si la stationnarité de la distribution des flots est une réalité. Une exemple d'exploration empirique des hypothèses classiques est donné par Zhu and Levinson (2010), pour lequel les choix d'itinéraires révélés sont étudiés. Les conclusions questionnent le "premier principe de Wardrop" qui implique que les utilisateurs choisissent parmi un ensemble d'alternatives parfaitement connu. Dans le même esprit, nous étudions l'existence possible de l'équilibre en pratique. Plus précisément, l'EUS suppose une distribution stationnaire des flots sur l'ensemble du réseau. Cette hypothèse reste valable dans le cas d'une stationnarité locale, tant que l'échelle temporelle d'évolution des paramètres est considérablement plus grande que les échelles typiques de voyage. Le second cas qui est plus plausible et de plus compatible avec les cadres théoriques dynamiques est testé ici.

La suite de ce travail s'organise ainsi : la procédure de collection de données ainsi que le jeu de données sont décrits ; nous présentons ensuite une application interactive pour l'exploration du jeu de données, dans le but de fournir une intuitions sur les motifs présents ; puis nous donnons divers résultats d'analyses quantitatives allant dans le sens d'indices convergents pour une non-stationnarité des flots de trafic ; nous discutons finalement les implications de ces résultats et des développements possibles.

2. Collecte des données

2.1. Construction du jeu de données

Nous proposons de travailler sur l'étude de cas de la région métropolitaine de Paris. Un jeu de données ouvert a été construit, comprenant les liens autoroutiers dans la région, par collecte des données publiques en temps réel des temps de parcours (disponible sur www.syta.fr). Comme rappelé par Bouteiller and Berjoan (2013), la disponibilité de jeux de données ouverts pour les transports est loin d'être la règle, et nous contribuons ainsi à une ouverture par la construction de notre jeu de données. La procédure de collecte de données consiste en les points suivants, exécutés toutes les deux minutes par un script python :

- récupération de la page web brute donnant les informations de trafic
- parsing du code html afin de récupérer les identifiants des liens de trafic et les temps de parcours correspondants
- insertion des liens dans une base `sqlite` avec le temps courant.

Le script automatisé de collection des données continue d'enrichir la base au fur et à mesure du temps, permettant des développements futurs de ce travail sur un jeu de données plus large, et une réutilisation potentielle pour des

travaux scientifiques ou opérationnels. La dernière version du jeu de données au format sqlite est disponible en ligne sous une Licence *Creative Commons*¹.

2.2. Description des données

Une granularité de deux minutes a été obtenue pour une période de trois mois (de février 2016 à avril 2016 inclus). La granularité spatiale est en moyenne de 10km, les temps de trajet étant fournis pour les liens majeurs. Le jeu de données contient 101 liens. La variable brute utilisée est le temps de trajet effectif, à partir duquel il est possible de construire la vitesse de trajet et la vitesse relative de trajet, définie comme le rapport entre temps de trajet optimal (temps de trajet sans congestion, pris comme le temps minimal sur l'ensemble des pas de temps) et le temps de trajet effectif. La congestion est construite par inversion d'une fonction BPR simple avec exposant 1, i.e. en prenant $c_i = 1 - \frac{t_{i,min}}{t_i}$ avec t_i temps de trajet effectif dans le lien i et $t_{i,min}$ temps de trajet minimal.

3. Méthodes and Résultats

3.1. Visualisation des motifs spatio-temporels de congestion

Notre approche étant entièrement empirique, une bonne connaissance des motifs existants pour les variables de trafic, en particulier de leur variations spatio-temporelles, est crucial pour guider toute analyse quantitative. En s'inspirant de la littérature étudiant la validation empirique de modèles, plus précisément les techniques de *Modélisation orientée-motifs* introduites par Grimm et al. (2005), nous nous intéressons aux motifs macroscopiques à des échelles temporelles et spatiales données : d'une manière équivalente aux faits stylisés qui sont dans cette approche extraits d'un système avant de tenter de le modéliser, nous devons explorer les données de manière interactive dans le temps et l'espace afin d'identifier des motifs pertinents et les échelles associées. Une application web interactive a ainsi été implémentée pour explorer les données, à l'aide des packages R shiny et leaflet². Cela permet une visualisation dynamique des motifs de congestion sur l'ensemble du réseau ou dans une zone particulière grâce au zoom. L'application est accessible en ligne à l'adresse <http://shiny.parisgeo.cnrs.fr/transportation>. La Figure 1 présente une capture d'écran de l'interface. La conclusion majeure de l'exploration interactive des données est qu'une grande hétérogénéité spatiale et temporelle est la règle. Le motif temporel le plus récurrent, la périodicité journalière des heures de pointe, est perturbée pour une proportion non négligeable de jours. En première approximation, les heures creuses peuvent être approchées par une distribution localement stationnaire des flots, tandis que les heures de pointe sont trop courtes pour pouvoir impliquer la validation de l'hypothèse d'équilibre. Concernant l'espace, aucun motif spatial particulier n'émerge clairement. Cela signifie que dans le cas d'une validité de l'équilibre utilisateur statique, les méta-paramètres régissant son établissement doivent varier à des échelles temporelles plus courtes qu'un jour. Nous postulons au contraire que le système de trafic est loin de l'équilibre, en particulier pendant les heures de pointe pendant lesquelles des transitions de phase critiques à l'origine des embouteillages émergent.

3.2. Spatio-temporal Variability of Travel Path

Following interactive exploration of data, we propose to quantify the spatial variability of congestion patterns to validate or invalidate the intuition that if equilibrium does exist in time, it is strongly dependent on space and localized. The variability in time and space of travel-time shortest paths is a first way to investigate flow stationarities from a game-theoretic point of view. Indeed, the static User Equilibrium is the stationary distribution of flows under which no user can improve its travel time by changing its route. A strong spatial variability of shortest paths at short time scales is thus evidence of non-stationarity, since a similar user will take a few time after a totally different route and not contribute to the same flow as a previous user. Such a variability is indeed observed on a non-negligible number

¹ à l'adresse http://37.187.242.99/files/public/sytadin_latest.sqlite3

² le code source de l'application et des analyses est disponible sur le dépôt ouvert du projet à <https://github.com/JusteRaimbault/TransportationEquilibrium>

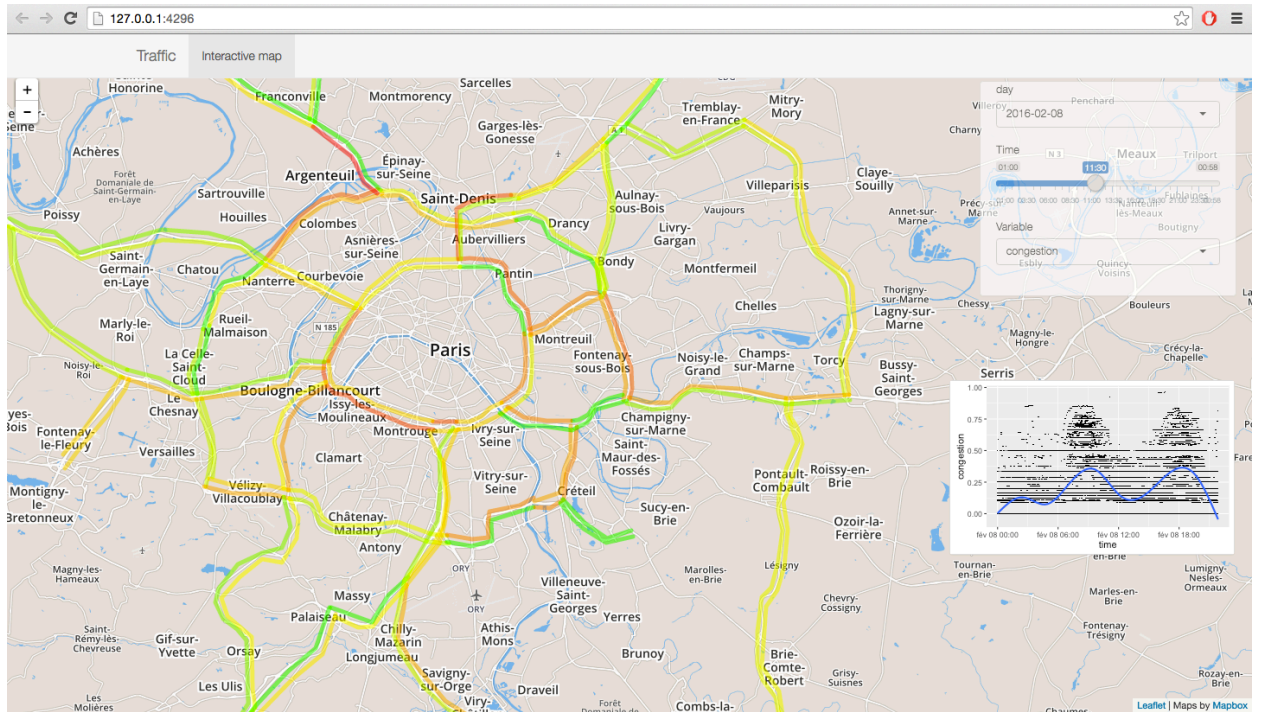


Fig. 1. Capture de l'application web permettant l'exploration spatio-temporelle des données de trafic pour la région Parisienne. Il est possible de choisir date et heure (précision de 15min sur un mois, réduite par rapport au jeu de données initial pour des raisons de performance). Un graphe résume les motifs de congestion pour la journée courante.

of paths on each day of the dataset. We show in Figure 2 an example of extreme spatial variation of shortest path for a particular Origin-Destination pair.

The systematic exploration of travel time variability across the whole dataset, and associated travel distance, confirms, as described in Figure 3, that travel time absolute variability has often high values of its maximum across OD pairs, up to 25 minutes with a temporal local mean around 10min. Corresponding spatial variability produces detours up to 35km.

3.3. Stability of Network measures

The variability of potential trajectories observed in the previous section can be confirmed by studying the variability of network properties. In particular, network topological measures capture global patterns of a transportation network. Centrality and node connectivity measures are classical indicators in transportation network description as recalled in Bavoux et al. (2005). The transportation literature has developed elaborated and operational network measures, such as network robustness measures to identify critical links and measure overall network resilience to disruptions (an example among many is the Network Trip Robustness index introduced in Sullivan et al. (2010)).

More precisely, we study the betweenness centrality of the transportation network, defined for a node as the number of shortest paths going through the node, i.e. by the equation

$$b_i = \frac{1}{N(N-1)} \cdot \sum_{o \neq d \in V} \mathbb{1}_{i \in p(o \rightarrow d)} \quad (1)$$

where V is the set of network vertices of size N , and $p(o \rightarrow d)$ is the set of nodes on the shortest path between vertices o and d (the shortest path being computed with effective travel times). This index is more relevant to our

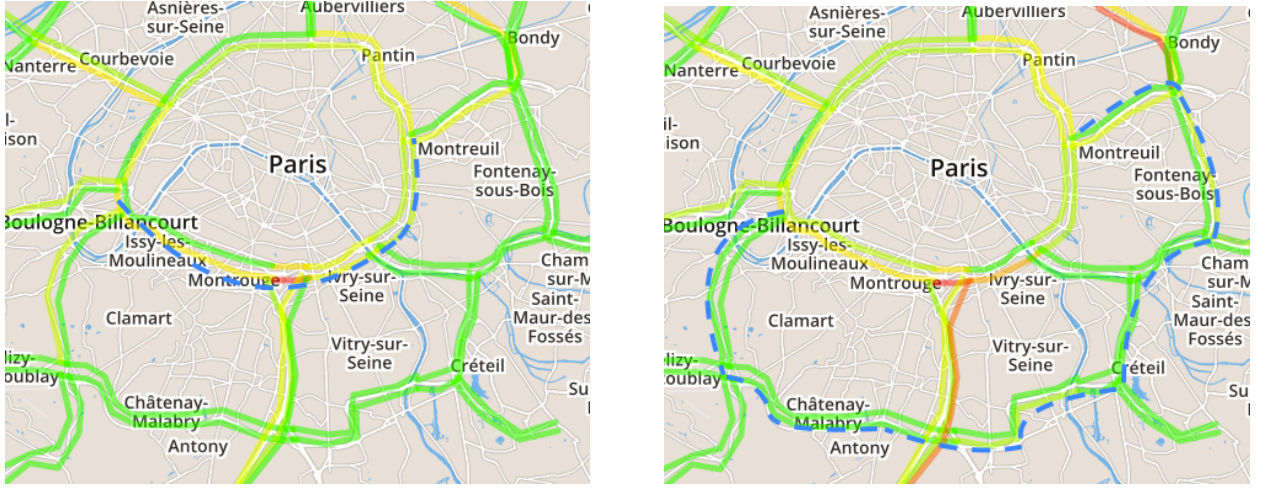


Fig. 2. Spatial variability of travel-time shortest path (shortest path trajectory in dotted blue). In an interval of only 10 minutes, between 11/02/2016 00:06 (left) and 11/02/2016 00:16 (right), the shortest path between *Porte d'Auteuil* (West) and *Porte de Bagnole* (East), increases in effective distance of $\approx 37\text{km}$ (with an increase in travel time of only 6min), due to a strong disruption on the ring of Paris.

purpose than other measures of centrality such as closeness centrality that does not include potential congestion as betweenness centrality does.

We show in Figure 4 the relative absolute variation of maximal betweenness centrality for the same time window than previous empirical indicators. More precisely we plot the value of

$$\Delta b(t) = \frac{|\max_i(b_i(t + \Delta t)) - \max_i(b_i(t))|}{\max_i(b_i(t))} \quad (2)$$

where Δt is the time step of the dataset (the smallest time window on which we can capture variability). This absolute relative variation has a direct meaning : a variation of 20% (which is attained a significant number of times as shown in Fig. 4) means that in case of a negative variation, at least this proportion of potential travels have changed route and the local potential congestion has decrease of the same proportion. In the case of a positive variation, a single node has captured at least 20% of travels. Under the assumption (that we do not try to verify in this work and assume to be also not verified as shown by Zhu and Levinson (2010), but that we use as a tool to give an idea of the concrete meaning of betweenness variability) that users rationally take the shortest path and assuming that a majority of travels are realized such a variation in centrality imply a similar variation in effective flows, leading to the conclusion that they can not be stationary in time (at least at a scale larger than Δt) nor in space.

3.4. Spatial heterogeneity of equilibrium

To obtain a different insight into spatial variability of congestion patterns, we propose to use an index of spatial autocorrelation, the Moran index (defined e.g. in Tsai (2005)). More generally used in spatial analysis with diverse applications from the study of urban form to the quantification of segregation, it can be applied to any spatial variable. It allows to establish neighborhood relations and unveils spatial local consistence of an equilibrium if applied on localized traffic variable. At a given point in space, local autocorrelation for variable c is computed by

$$\rho_i = \frac{1}{K} \cdot \sum_{i \neq j} w_{ij} \cdot (c_i - \bar{c})(c_j - \bar{c}) \quad (3)$$

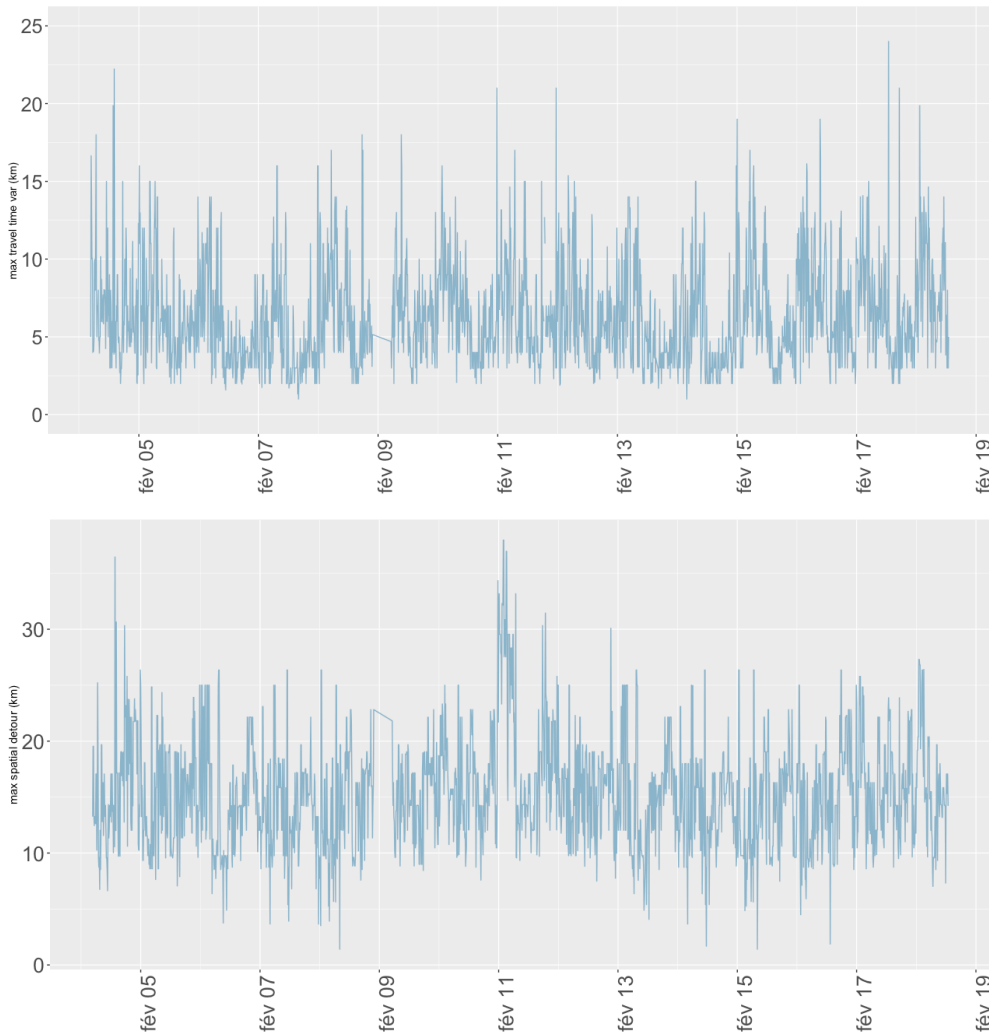


Fig. 3. Travel time (top) in min and corresponding travel distance (bottom) maximal variability on a two weeks sample. We plot the maximal on all OD pairs of the absolute variability between two consecutive time steps. Peak hours imply a high time travel variability up to 25 minutes and a path length variability up to 35km.

where K is a normalization constant equal to the sum of spatial weights times variable variance and \bar{c} is variable mean. In our case, we take spatial weights of the form $w_{ij} = \exp\left(\frac{-d_{ij}}{d_0}\right)$ with d_0 typical decay distance and compute the autocorrelation of link congestion localized at link center. We capture therefore spatial correlations within a radius of same order than decay distance around the point i . The mean on all points yields spatial autocorrelation index I . A stationarity in flows should yield some temporal stability of the index.

Figure 5 presents temporal evolution of spatial autocorrelation for congestion. As expected, we have a strong decrease of autocorrelation with distance decay parameter, for both amplitude and temporal average. The high temporal variability implies short time scales for potential stationarity windows. When comparing with congestion (fitted to plot scale for readability) for 1km decay, we observe that high correlations coincide with off-peak hours, whereas peaks involve vanishing correlations. Our interpretation, combined with the observed variability of spatial patterns, is that peak hours correspond to chaotic behaviour of the system, as jams can emerge in any link: correlation thus vanishes as feasible phase space for a chaotic dynamical system is filled by trajectories in an uniform way what is equivalent to apparently independent random relative speeds.

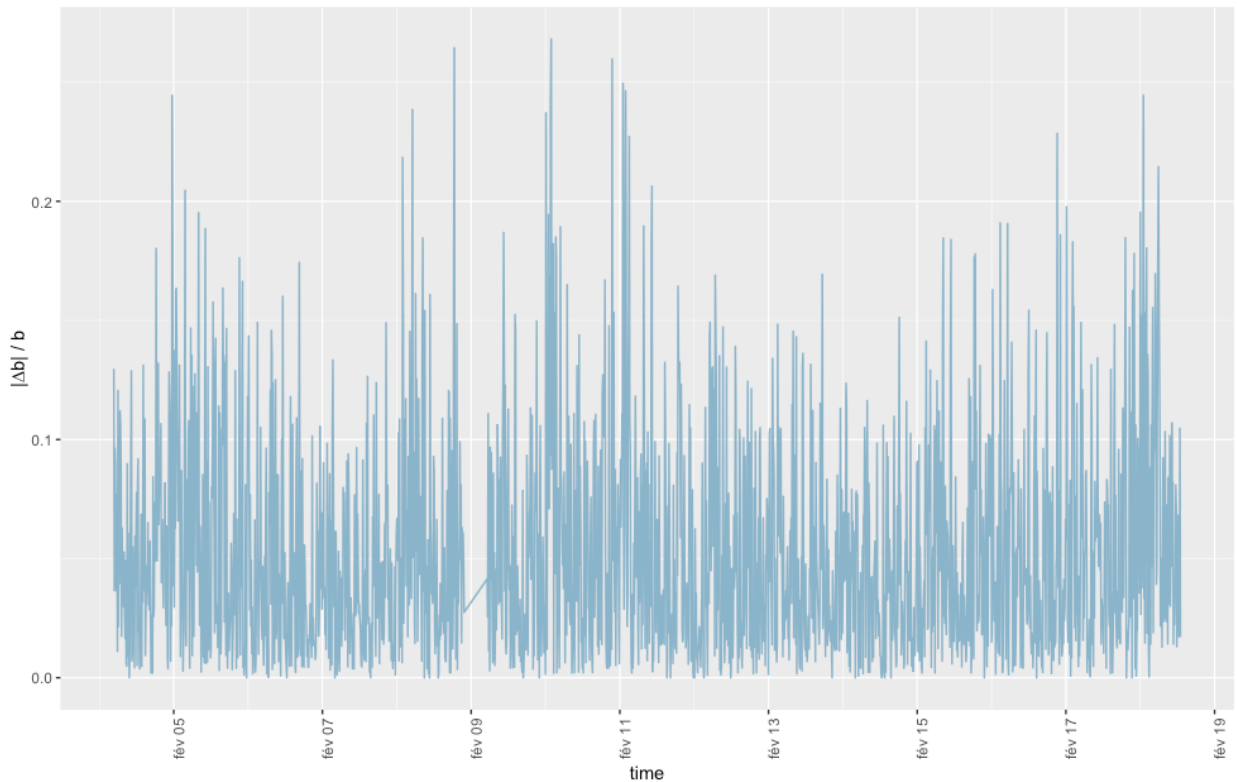


Fig. 4. Temporal stability of maximal betweenness centrality. We plot in time the normalized derivative of maximal betweenness centrality, that expresses its relative variations at each time step. The maximal value up to 25% correspond to very strong network disruption on the concerned link, as it means that at least this proportion of travelers assumed to take this link in previous conditions should take a totally different path.

4. Discussion

4.1. Theoretical and practical implications of empirical conclusions

We argue that the theoretical implications of our empirical findings do not imply in a total discarding of the Static User Equilibrium framework, but unveil more a need of stronger connections between theoretical literature and empirical studies. If each newly introduced theoretical framework is generally tested on one on more case study, there are no systematic comparisons of each on large and different datasets and on various objectives (prediction of traffic, reproduction of stylized facts, etc.) as systematic reviews are the rule in therapeutic evaluation for example. This imply however broader data and model sharing practices than the current ones. The precise knowledge of application potentialities for a given framework may induce unexpected developments such as its integration into larger models. The example of Land-use and Transportation Interaction studies (LUTI models) is a good illustration of how the SUE can still be used for larger purpose than transportation modeling. Kryvobokov et al. (2013) describe two LUTI models, one of which includes two equilibria for four-step transportation model and for land-use evolution (households and firms relocation), the other being more dynamical. The conclusion is that each model has its own advantages regarding the pursued objective, and that the static model can be used for long time policy purposes, whereas the dynamic model provide more precise information at smaller time scale. In the first case, a more complicated transportation module would have been complicated to include, what is an advantage of the static user equilibrium.

Concerning practical applications, it seems natural that static models should not be used for traffic forecast and management at small time scales (week or day) and efforts should be made to implement more realistic models. However the use of models by the planning and engineering community is not necessarily directly related to academic concerns and state-of-the-art. For the particular case of France and mobility models, Commenges (2013) showed that

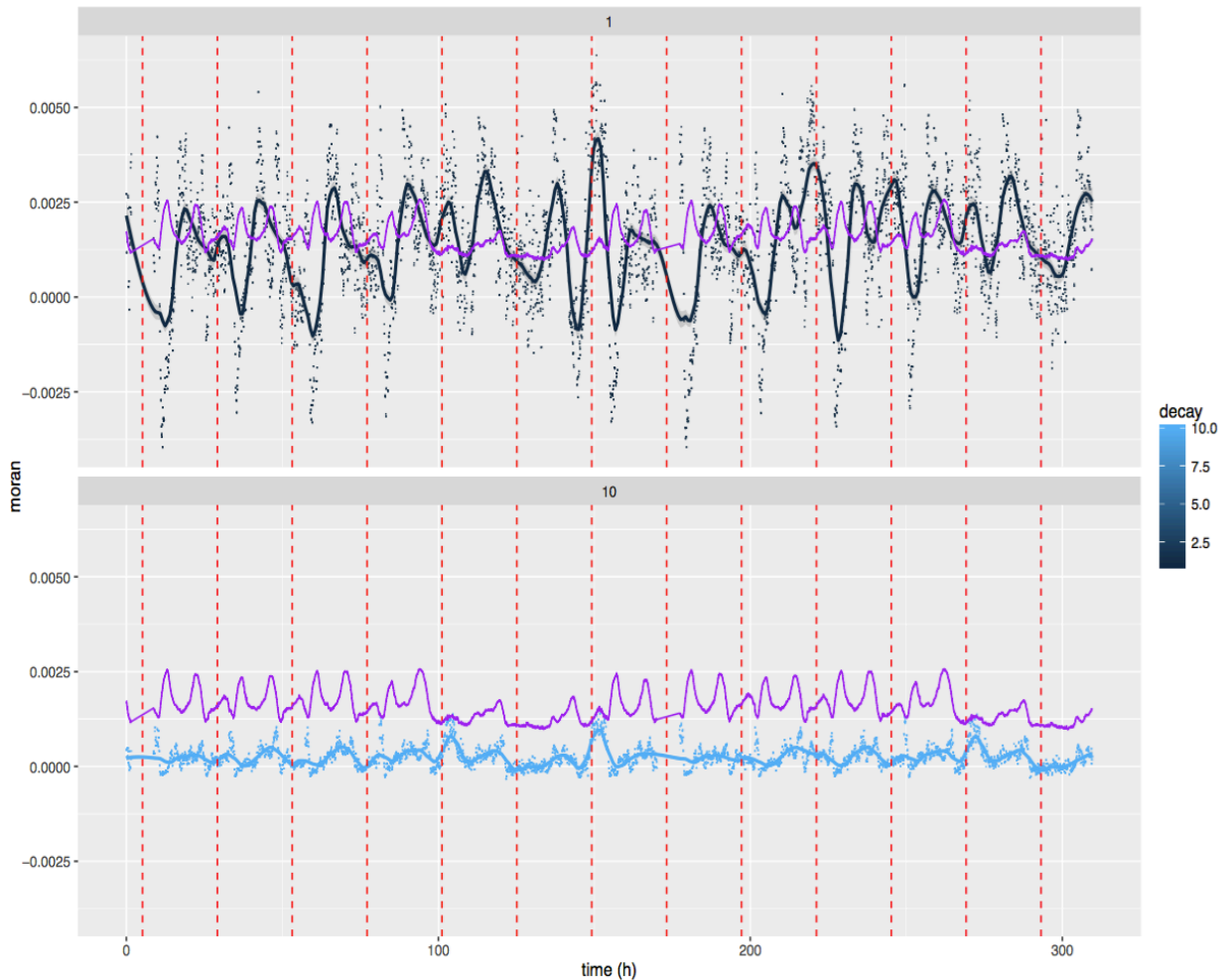


Fig. 5. Spatial auto-correlations for relative travel speed on two weeks. We plot for varying value of decay parameter (1,10km) values of auto-correlation index in time. Intermediate values of decay parameter yield a rather continuous deformation between the two curves. Points are smoothed with a 2h span to ease reading. Vertical dotted lines correspond to midnight each day. Purple curve is relative speed fitted at scale to have a correspondence between auto-correlation variations and peak hours.

engineers had gone to the point of constructing inexistent problems and implementing corresponding models that they had imported from a totally different geographical context (planning in the United States). The use of one framework or type of model has historical reasons that may be difficult to overcome.

4.2. Towards explanative interpretations of non-stationarity

An assumption we formulate regarding the origin of non-stationarity of network flows, in view of data exploration and quantitative analysis of the database, is that the network is at least half of the time highly congested and in a critical state. The off-peak hours are the larger potential time windows of spatial and temporal stationarity, but consist in less than half of the time. As already interpreted through the behavior of autocorrelation indicator, a chaotic behavior may be at the origin of such variability in the congested hours. The same way a supercritical fluid may condense under the smallest external perturbation, the state of the link may qualitatively change with a small incident, producing a network disruption that may propagate and even amplify. The direct effect of traffic events (notified incidents or accidents) can not be studied without external data, and it could be interesting to enrich the database in that direction. It would allow establishing the proportion of disruptions that do appear to have a direct effect and quantify a level of

criticality of network congestion in time, or to investigate more precise effects such as the consequences of an incident on traffic of the opposite lane.

4.3. Possible developments

Further work may be planned towards a more refined assessment of temporal stability on a region of the network, i.e. the quantitative investigation of consideration of peak stationarity given above. To do so we propose to compute numerically Liapounov stability of the dynamical system ruling traffic flows using numerical algorithms such as described by Goldhirsch et al. (1987). The value of Liapounov exponents provides the time scale by which the unstable system runs out of equilibrium. Its comparison with peak duration and average travel time, across different spatial regions and scales should provide more information on the possible validity of the local stationarity assumption. This technique has already been introduced at an other scale in transportation studies, as e.g. Tordeux and Lassarre (2016) that study the stability of speed regulation models at the microscopic scale to avoid traffic jams.

Other research directions may consist in the test of other assumptions of static user equilibrium (as the rational shortest path choice, which would be however difficult to test on such an aggregated dataset, implying the use of simulation models calibrated and cross-validated on the dataset to compare assumptions, without necessarily a direct clear validation or invalidation of the assumption), or the empirical computation of parameters in stochastic or dynamical user equilibrium frameworks.

5. Conclusion

We have described an empirical study aimed at a simple but from our point of view necessary investigation of the existence of the static user equilibrium, more precisely of its stationarity in space and time on a metropolitan highway network. We constructed by data collection a traffic congestion dataset for the highway network of Greater Paris on 3 months with two minutes temporal granularity. The interactive exploration of the dataset with a web application allowing spatio-temporal data visualization helped to guide quantitative studies. Spatio-temporal variability of shortest paths and of network topology, in particular betweenness centrality, revealed that stationarity assumptions do not hold in general, what was confirmed by the study of spatial autocorrelation of network congestion. We suggest that our findings highlight a general need of higher connections between theoretical and empirical studies, as our work can discard misunderstandings on the theoretical static user equilibrium framework and guide the choice of potential applications.

References

- Bavoux, J.J., Beaucire, F., Chapelon, L., Zembri, P., 2005. *Géographie des transports*. Paris.
- Bouteiller, C., Berjoan, S., 2013. Open data en transport urbain: quelles sont les données mises à disposition? quelles sont les stratégies des autorités organisatrices? .
- Commenges, H., 2013. The invention of daily mobility : Performative aspects of the instruments of economics of transportation. Theses, Université Paris-Diderot-Paris VII .
- Goldhirsch, I., Sulem, P.L., Orszag, S.A., 1987. Stability and lyapunov stability of dynamical systems: A differential approach and a numerical method. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 27, 311–337.
- Grimm, V., Revilla, E., Berger, U., Jeltsch, F., Mooij, W.M., Railsback, S.F., Thulke, H.H., Weiner, J., Wiegand, T., DeAngelis, D.L., 2005. Pattern-oriented modeling of agent-based complex systems: lessons from ecology. *science* 310, 987–991.
- Guo, X., Liu, H.X., 2011. Bounded rationality and irreversible network change. *Transportation Research Part B: Methodological* 45, 1606–1618.
- Han, S., 2003. Dynamic traffic modelling and dynamic stochastic user equilibrium assignment for general road networks. *Transportation Research Part B: Methodological* 37, 225–249.
- Kryvobokov, M., Chesneau, J.B., Bonnafous, A., Delons, J., Piron, V., 2013. Comparison of static and dynamic land use-transport interaction models: Pirandello and urbansim applications. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board* , 49–58.
- Leurent, F., Boujnah, H., 2014. A user equilibrium, traffic assignment model of network route and parking lot choice, with search circuits and cruising flows. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 47, 28–46.
- Mahmassani, H.S., Chang, G.L., 1987. On boundedly rational user equilibrium in transportation systems. *Transportation science* 21, 89–99.
- Puzis, R., Altshuler, Y., Elovici, Y., Bekhor, S., Shiftan, Y., Pentland, A., 2013. Augmented betweenness centrality for environmentally aware traffic monitoring in transportation networks. *Journal of Intelligent Transportation Systems* 17, 91–105.

- Rasmussen, T.K., Watling, D.P., Prato, C.G., Nielsen, O.A., 2015. Stochastic user equilibrium with equilibrated choice sets: Part ii—solving the restricted sue for the logit family. *Transportation Research Part B: Methodological* 77, 146–165.
- Sullivan, J., Novak, D., Aultman-Hall, L., Scott, D.M., 2010. Identifying critical road segments and measuring system-wide robustness in transportation networks with isolating links: a link-based capacity-reduction approach. *Transportation Research Part A: Policy and Practice* 44, 323–336.
- Tordeux, A., Lassarre, S., 2016. Jam avoidance with autonomous systems. arXiv preprint arXiv:1601.07713 .
- Tsai, Y.H., 2005. Quantifying urban form: compactness versus ' sprawl'. *Urban studies* 42, 141–161.
- Wardrop, J.G., 1952. Some theoretical aspects of road traffic research. *Proceedings of the institution of civil engineers* 1, 325–362.
- Zhang, K., Mahmassani, H.S., Lu, C.C., 2013. Dynamic pricing, heterogeneous users and perception error: Probit-based bi-criterion dynamic stochastic user equilibrium assignment. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 27, 189–204.
- Zhu, S., Levinson, D., 2010. Do people use the shortest path? an empirical test of wardrop's first principle, in: 91th annual meeting of the Transportation Research Board, Washington, Citeseer.