



ENSAE PARIS

Mémoire de statistiques appliquées : Prévision des carrés des rendements à moyen ou long horizon

Auteurs :

Thomas AUJOUX
Maël DUVERGER
Louis GEIST
Justin RUELLAND

Encadrant :

Jean-Michel ZAKOÏAN

26 mai 2023

Remerciements

Nous tenons à remercier notre encadrant Jean-Michel ZAKOÏAN pour sa disponibilité, son investissement et sa bienveillance.

Table des matières

1	Modélisation	4
1.1	Statistiques descriptives des séries financières	4
1.1.1	Source et format des séries financières	4
1.1.2	Faits stylisés des séries financières	4
1.2	Le modèle GARCH	6
1.2.1	Définition	6
1.2.2	Justification empirique	6
1.3	La condition de stationnarité	6
2	Estimation, validation et prédictions	8
2.1	Estimation : la méthode du Quasi-Maximum de Vraisemblance	8
2.1.1	Présentation de la méthode	8
2.1.2	Evaluation et application à des séries financières	8
2.1.3	Normalité asymptotique	9
2.2	Validation et prédiction	10
2.2.1	La prévision à horizon 1	10
2.2.1.1	La prévision des rendements	10
2.2.1.2	La prévision des carrés des rendements	12
2.2.2	Validation pour prédiction (backtest)	12
2.2.3	Evaluation du test	13
2.2.3.1	Niveau non-asymptotique du test	13
2.2.3.2	Mauvaise spécification de la loi des η_t	13
2.2.3.3	Changement de Garch	14
2.2.4	Backtests sur données réelles	16
2.2.5	La prévision à horizon plus grand que 1	17
2.2.5.1	Complexité théorique des lois conditionnelles	17
2.2.5.2	Méthode de simulation	17
3	Comparaison à d'autres modèles	19
3.1	Test de Diebold-Mariano	19
3.2	Présentation des autres modèles développés	20
3.2.1	Moyenne glissante	20
3.2.2	HMM	20
3.2.3	Machine Learning	21
3.2.3.1	OLS	21
3.2.3.2	Neural Network	21
3.2.3.3	Critiques des modèles	21
3.3	Résultats	22
A	Graphiques des faits stylisés	25
B	Graphiques sur la puissance du test pour un changement de GARCH	27
C	Graphiques simulations GARCH	29
D	Graphiques des comparaisons à d'autres modèles	30

Introduction

La prévision à moyen ou long terme des carrés des rendements joue un rôle essentiel en finance de marché. Les carrés des rendements fournissent une mesure de la volatilité des actifs financiers, ce qui permet aux investisseurs d'évaluer la sensibilité de leurs investissements.

Le modèle GARCH, introduit par Engle (1982)[4] et Bollerslev (1986)[1], permet notamment la prévision des carrés de rendements futurs à horizon 1 jour. Ce modèle permet aussi la construction d'intervalles de confiance à horizon 1 jour et est compatible avec un certain nombre de caractéristiques communes aux rendements d'actifs financiers. De plus, le problème de prévision des carrés des rendements futurs peut être étendu à des horizons plus longs. Les intervalles de confiance à horizons plusieurs jours ne sont pas explicitement données par le modèle GARCH et sont une problématique peu traitée dans la littérature actuelle. D'autres modèles statistiques tels que le modèle Hidden Markov de Leonard E. Baum (1960) ou des modèles d'apprentissage supervisé permettent également la prévision des rendements au carré, se basant aussi sur les valeurs passées.

Le dessein de ce projet est donc de se demander si le modèle GARCH est le meilleur¹ modèle de prévision des rendements au carré à court et long horizon.

Dans une première partie, nous nous intéresserons à la modélisation GARCH. Nous aborderons les motivations d'une telle modélisation, en détaillant les faits stylisés communs aux séries financières. Nous verrons en détail la théorie et les hypothèses inhérentes à une telle modélisation. Dans une seconde partie, nous verrons comment mettre en place une modélisation GARCH. Nous présenterons l'estimation du modèle, sa validation statistique et la prédiction à différents horizons. Finalement, nous comparerons le modèle GARCH à d'autres modélisations des rendements au carré. Nous étudierons comment comparer statistiquement deux modèles de prévisions avec le test de Diebold-Mariano et nous donnerons les résultats des comparaisons du GARCH avec les modèles alternatifs présentés.

1. Il conviendra de définir rigoureusement ce qui sera qualifié de "meilleur modèle".

Chapitre 1

Modélisation

1.1 Statistiques descriptives des séries financières

1.1.1 Source et format des séries financières

Les séries financières, objet d'étude de ce projet, proviennent du site [Yahoo! Finance](#), qui publie en libre accès les cotations d'un grand nombre d'actifs financiers. Nous définissons une **série financière** comme étant une série temporelle du prix d'un actif financier coté sur un marché.

Le projet a pour objectif la prévision des carrés des rendements à horizon moyen et long, nous appelons moyen et long des horizons de l'ordre de quelques jours (≤ 10). Les séries financières étudiées dans ce projet seront donc journalières. Le choix de cette fréquence d'étude permet notamment d'éviter les effets de microstructure de marché et de traiter des données en libre accès. Il est à noter que les actifs financiers sont cotés pour la plupart sur des marchés financiers fermés les week-ends et certains jours fériés. La fréquence journalière d'une série financière représente environ 255 jours par an.

1.1.2 Faits stylisés des séries financières

La modélisation d'une série temporelle passe avant tout par l'étude de ses statistiques observables. Nous observons certaines régularités statistiques communes aux séries financières. Ces régularités statistiques sont souvent présentées sous la forme de 7 faits stylisés, mis en avant par de nombreux articles, tels que [2].

I. La non stationnarité des séries financières

Les séries financières comme définies ne sont en général pas stationnaires et semblent plutôt suivre une marche aléatoire sans tendance. La figure 1.1 représente la série de l'indice du CAC40 sur 4 ans (2015-2019), la forme de la trajectoire fait suspecter une marche aléatoire.

Le test de KPSS, que nous ne développerons pas plus, nous permet de rejeter statistiquement l'hypothèse nulle de stationnarité contre l'hypothèse de racine unitaire, pour plusieurs séries financières. Ce rejet de l'hypothèse de stationnarité est illustré par les p-valeurs obtenues dans la table A.1.

En revanche, on remarque que les rendements des séries financières sont compatibles avec l'hypothèse de stationnarité au second ordre. La figure 1.1, représente les log-rendements de l'indice du CAC40 sur 4 ans (2015-2019), la trajectoire observée semble compatible avec une série stationnaire au second ordre. On appelle **log-rendements** $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ de la série financière $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, la série $\varepsilon_t := \log(\frac{X_t}{X_{t-1}})$.

Le passage aux log-rendements est motivé par plusieurs raisons :

- Le passage aux rendements permet de s'affranchir des unités monétaires des séries financières et de pouvoir comparer et modéliser des séries financières de manière cohérente.
- Une transformation en série stationnaire :

$$\log(X_t) = \log(X_{t-1}) + \varepsilon_t \text{ avec } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2) \Rightarrow \log\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) \sim WN(0, \sigma^2) \text{ stationnaire}$$

- Le choix du log permet aussi la réduction de certains effets de non linéarité tel que l'hétéroscédasticité, présente par nature sur les prix. Par ailleurs, les log-rendements ont pour qualité face aux rendements d'être *symétriques*. Nous qualifions de *symétriques* les log-rendements du fait que si

le prix varie à la hausse (à la baisse) de $x\%$ puis varie à la baisse (resp. à la hausse) de $x\%$, le log-rendement sera nul à la différence du rendement simple.

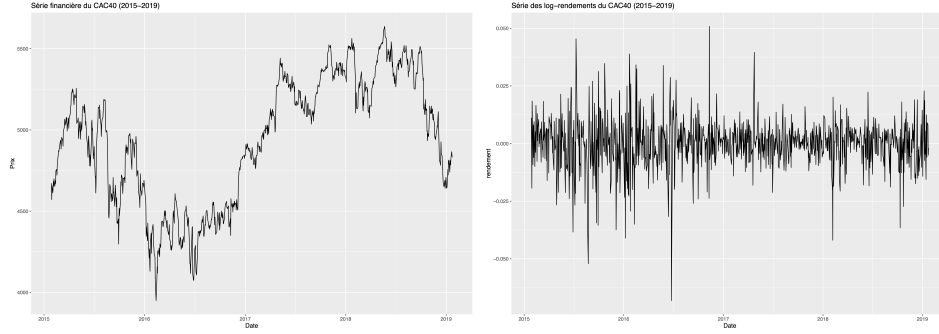


FIGURE 1.1 – Série financière et log-rendements du CAC40 (2015-2019)

Dans la suite du rapport, nous utiliserons de manière interchangeable les mots *rendement* et *log-rendement* pour désigner la série des log-rendements.

II. Absence d'autocorrélation pour les log-rendements

Les log-rendements journaliers d'une série financière ont en général des autocorrélations proches de 0, comme on peut l'observer sur le graphique A.1. On utilise, de manière heuristique, l'intervalle de confiance à 95% d'une gaussienne standard pour souligner l'absence d'autocorrélation. Cette propriété motive la modélisation des log-rendements sous la forme d'un bruit blanc.

III. Autocorrélations des carrés des log-rendements

Les autocorrélations des carrés des log-rendements, ou de leur valeur absolue, ne sont en général pas nulles, comme on peut l'observer sur le graphique A.1. Cette observation n'est pas incompatible avec la modélisation sous la forme d'un bruit blanc des log-rendements mais exclut en revanche la modélisation sous la forme d'un bruit blanc fort.

Cette caractéristique justifie l'intérêt d'étudier un modèle de série temporelle sur les log-rendements de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{Z} \quad \varepsilon_t = \eta_t \sigma_t, \quad \eta_t \sim iid(0,1), \quad \sigma_t > 0 \text{ un processus prévisible}$$

IV. Cluster de forte volatilité pour les log-rendements

On observe que les log-rendements avec une grande volatilité apparaissent en *clusters*. Ces *clusters* sont non périodiques, propriété illustrée sur la figure A.2. La non périodicité des *clusters* reste compatible avec l'hypothèse de stationnarité des log-rendements.

V. Distribution à queue lourde des log-rendements

Les log-rendements ne peuvent être modélisés par une loi normale, ils ont en effet une queue plus lourde qu'une gaussienne. On peut observer cette propriété par le calcul du coefficient d'acuité (kurtosis) de quelques log-rendements de série financières, cf table A.1.

VI. Leverage effect

On constate une asymétrie de l'influence du signe des log-rendements passés sur la volatilité, cet effet *levier* décrit la caractéristique suivante : Soit $(t, h) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et en notant $\varepsilon_t^+ := \max(\varepsilon_t, 0)$, $\varepsilon_t^- := \max(-\varepsilon_t, 0)$, on a empiriquement :

$$\hat{Corr}(\varepsilon_t^+, |\varepsilon_{t+h}|) \leq \hat{Corr}(\varepsilon_t^-, |\varepsilon_{t+h}|)$$

Cette propriété est notamment illustrée dans [5].

VII. Saisonnalité des marchés

Enfin, des effets *calendaires* sont observables sur les log-rendements. On observe sur les périodes de ré-ouverture de marché, à la suite d'une longue fermeture, une certaine accumulation d'informations. Ces effets seront négligés, compte tenu de leur incompatibilité avec l'hypothèse de stationnarité des log-rendements. Qui plus est l'accumulation n'est empiriquement pas constante suivant la durée de fermeture.

1.2 Le modèle GARCH

1.2.1 Définition

Un processus $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est **bruit blanc fort** si $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est indépendant et identiquement distribué, $\mathbb{E}[\eta_0] = 0$ et $\mathbb{E}[\eta_0^2] = \sigma^2$.

Un processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ suit un modèle **GARCH(1,1)** de paramètre $\theta = (\omega, \alpha, \beta)$ s'il existe un bruit blanc fort normalisé η tel que :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \text{ avec } \begin{cases} \sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\ \omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \end{cases}$$

Nous utiliserons un GARCH(1,1) ainsi défini pour modéliser les rendements.

1.2.2 Justification empirique

On considère un processus ε suivant un GARCH(1,1). On garde les notations de la définition précédente.

Tout d'abord, l'espérance de ε est nulle : $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}[\varepsilon_t] = \mathbb{E}[\sigma_t \eta_t] = \mathbb{E}[\sigma_t] \mathbb{E}[\eta_t] = 0$.

L'écriture $\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t$ avec η qui est un bruit blanc rend compte de **l'absence d'auto-corrélation rendements** et de **l'auto-corrélation des carrés des rendements**. En effet : $\forall h \in \mathbb{N}, \gamma_\varepsilon(h) = \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = \mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t+h}] = \mathbb{E}[\eta_{t+h}] \mathbb{E}[\eta_t \sigma_t \sigma_{t+h}] = 0$.

De plus, la relation de récurrence concernant la volatilité rend compte du regroupement temporel de valeurs extrêmes. Le coefficient β est prépondérant dans cette relation. En effet, les valeurs typiques trouvées pour des séries financières réelles sont : $(\omega, \alpha, \beta) = (0.0001, 0.12, 0.85)$. Ainsi, une valeur "élevée" de $|\sigma_t|$ aura tendance à persister quelques périodes et provoque par conséquent un regroupement des valeurs extrêmes.

1.3 La condition de stationnarité

En reprenant les notations de la définition précédente, [5] donne le théorème suivant sur la stationnarité du GARCH :

$$\boxed{\text{GARCH}(1,1) \text{ admet une solution stationnaire} \Leftrightarrow \mathbb{E}[\log(\alpha \eta_t^2 + \beta)] < 0.}$$

Cette équivalence permet de décrire un ensemble, dans le plan (α, β) , de points qui correspondent à des paramètres de GARCH(1,1) admettant une solution stationnaire.

Il s'agit de trouver les couples (α, β) tels que $\mathbb{E}[\log(\alpha \eta_t^2 + \beta)] < 0$. A l'aide de R, nous avons donc simulé des variables aléatoires η iid admettant un moment d'ordre 2 et avons évalué $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(\alpha \eta_i^2 + \beta)$, qui, du fait de la loi forte des grands nombres, converge presque sûrement vers $\mathbb{E}[\log(\alpha \eta_t^2 + \beta)]$ (Méthode de Monte-Carlo).

Grâce à la propriété de stationnarité, la variance des rendements se calcule : $V(\varepsilon_t) = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$.

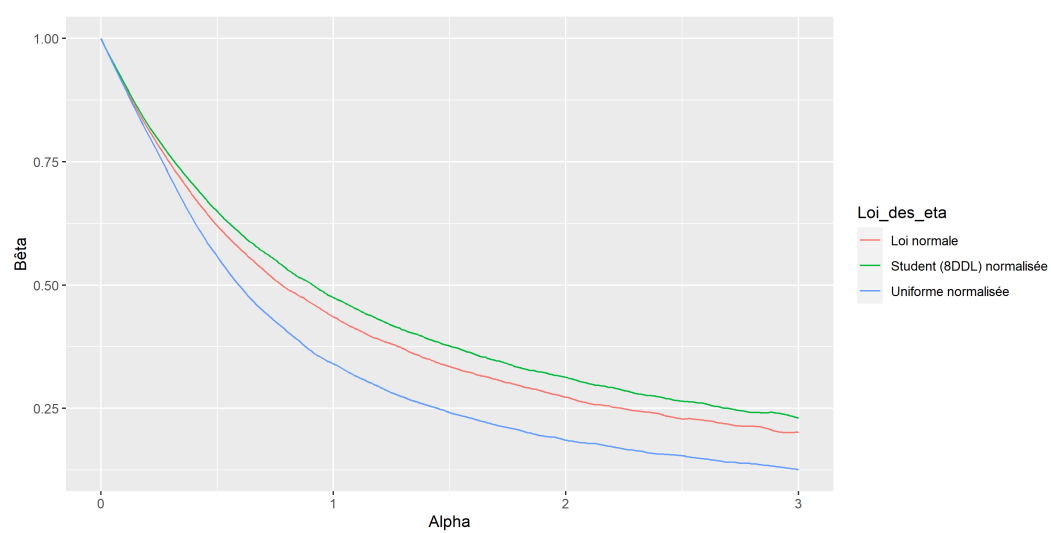


FIGURE 1.2 – Condition de stricte stationnarité pour différents bruits blancs forts. Les modèles GARCH(1,1) de couple (α, β) sous la courbe sont strictement stationnaires.

Chapitre 2

Estimation, validation et prédictions

L'objectif est la prévision d'une série financière donnée. Différentes prévisions sont possibles : la prévision des rendements, des carrés des rendements et la prévision d'intervalles de confiance de ces mêmes quantités. La prévision à horizon $h \in \mathbb{N}^*$ correspond à la prévision de X_{t+h} sachant $\sigma(\{X_u, u \leq t\})$. Différents horizons de prévisions seront distingués.

Afin d'obtenir un modèle de prévision, nous séparons notre échantillon de valeurs en deux ensembles : les premiers quatre cinquièmes des valeurs sont affectés à l'ensemble d'apprentissage et le dernier cinquième est affecté à l'ensemble de test. L'ensemble d'apprentissage permet d'estimer le modèle GARCH sur la série temporelle. L'ensemble de test permet de valider le modèle estimé en vue de faire des prédictions.

2.1 Estimation : la méthode du Quasi-Maximum de Vraisemblance

2.1.1 Présentation de la méthode

Lorsque l'on souhaite étudier une série supposée être une réalisation d'un modèle GARCH(1,1), l'estimation du vecteur de paramètres (ω, α, β) du modèle est la première étape. Si l'on ne fait pas d'hypothèse sur la loi suivie par les $(\eta_t)_t$, le problème d'estimation est semi-paramétrique. L'estimation de la loi des $(\eta_t)_t$ parmi l'ensemble des lois telles que $\mathbb{E}[\eta_t] = 0$ et $\mathbb{E}[\eta_t^2] = 1$ ne nous est pas utile et rend le problème plus complexe. Cependant, supposer que les $(\eta_t)_t$ suivent une certaine loi est une hypothèse restrictive. La méthode du Quasi-Maximum de Vraisemblance (Quasi-Maximum Likelihood en anglais que nous abrègerons QML) donne un estimateur convergent du vecteur de paramètres $\theta = (\omega, \alpha, \beta)$, quelque soit la loi suivie par les $(\eta_t)_t$ et sans avoir à estimer cette loi. La méthode repose sur le fait qu'en faisant comme si les η_t suivaient une loi normale (centrée réduite), l'estimateur du maximum de vraisemblance obtenu est convergent, même si la vraie loi des $(\eta_t)_t$ n'est pas normale. De plus, le QML ne requiert pas l'existence de certains moments du processus étudié, contrairement à d'autres méthodes d'estimation basées sur les moindres carrés [5] et nécessitant l'existence d'un moment d'ordre 4.

2.1.2 Evaluation et application à des séries financières

Pour évaluer la qualité de l'estimation par QML, nous avons simulé 100 séries de longueur 1000 suivant un GARCH(1,1). Le vecteur de paramètre est $\theta^* = (0.1, 0.12, 0.83)$ et les $(\eta_t)_t$ suivent une loi normale centrée réduite (cas gaussien). Dans ce cas là, l'estimateur du QML coïncide avec l'estimateur du maximum de vraisemblance comme les η_t sont normaux. Le vecteur θ^* vérifie la condition de stationnarité et α et β sont du même ordre de grandeur que ceux estimés sur des indices boursiers usuels. De même, la longueur des séries est réaliste, elle correspond à peu près à 4 ans d'observation d'un indice journalier (ces indices étant observés environ 255 fois par an). Sur chaque série, nous avons estimé par QML le vecteur θ^* , nous avons calculé la différence entre les vecteurs estimés $(\hat{\theta}_i)_{i=1, \dots, 100}$ et θ^* . Dans le cas gaussien, les moyennes sont proches de 0 et l'erreur d'estimation en valeur absolue dépasse rarement 0.1 (cf figure 2.1.2). Les estimateurs sont asymptotiquement normaux, ce résultat est détaillé dans la

section suivante. Nous pouvons faire des tests de Student pour vérifier que les moyennes ne sont pas significativement différentes de 0, l'hypothèse nulle est que la moyenne vaut 0. Pour des séries de longueur 1000, seule la p-valeur du test sur α est au dessus de 0.05 (elle vaut 0.4). En allongeant la longueur des séries à 10 000, les p-valeurs des tests sur chaque paramètre sont au dessus de 0.05, les moyennes ne sont donc pas significativement différentes de 0 (au seuil de 5%). La méthode d'estimation est satisfaisante.

Nous répétons la même procédure mais en simulant les $(\eta_t)_t$ à partir d'une loi de Student (normalisée) à 8 degrés de liberté. La loi utilisée par le QML (loi normale) est donc différente de celle des $(\eta_t)_t$. Le QML estime encore de manière convergente le vecteur θ^* , les estimations sont aussi satisfaisantes (moyennes statistiquement nulles, les p-valeurs sont au-dessus de 0.05 pour des séries de longueur 10 000).

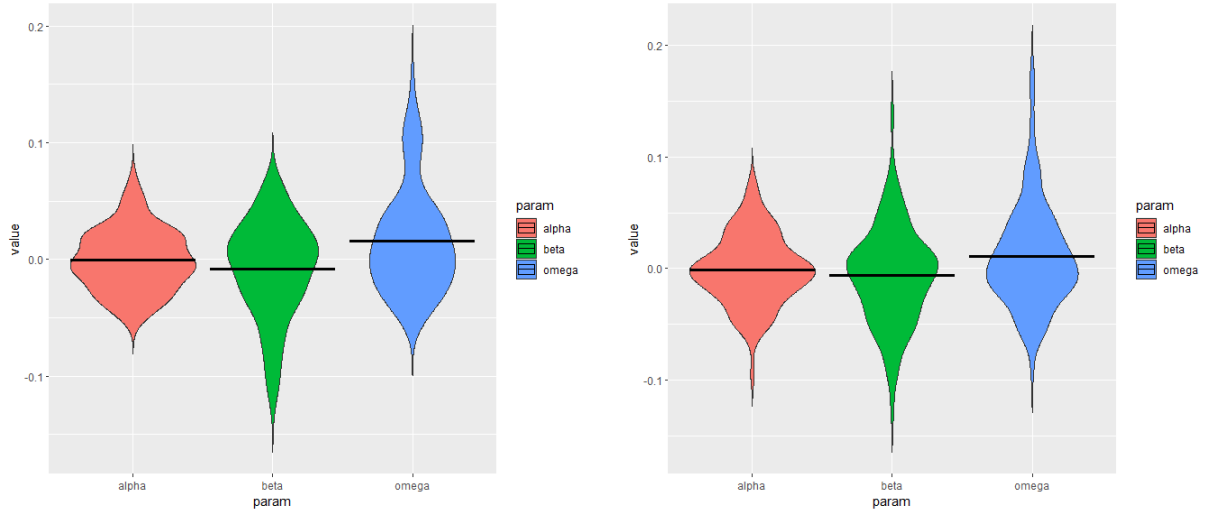


FIGURE 2.1 – Boîtes à moustache (forme violon) de la différence entre les paramètres estimés et le vrai paramètre (100 séries de longueur 1000 simulées), les moyennes sont indiquées par les traits horizontaux. À gauche le cas Gaussien, à droite le cas Student.

Pour finir, nous avons estimé les paramètres du CAC 40 observés 500 fois entre 2015 et 2017, en supposant que le CAC 40 est une réalisation d'un modèle GARCH(1,1). Les paramètres estimés sont $\hat{\theta} = (10^{-4}, 0.12, 0.8)$. De manière générale, sur les principaux indices boursiers et sur les actions des grandes entreprises, les paramètres estimés sont tels que $\hat{\alpha} + \hat{\beta} \approx 1$ et $\hat{\alpha} + \hat{\beta} < 1$, typiquement $\hat{\alpha} \approx 0.12$ et $\hat{\beta} \approx 0.85$.

2.1.3 Normalité asymptotique

Le vecteur estimé par la méthode du QML est aussi asymptotiquement normal, en reprenant les notations de la section précédente $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta^*) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma)$ (où n est la longueur de la série utilisée pour l'estimation). Nous allons estimer la matrice de variance asymptotique pour étudier la distribution asymptotique de notre estimateur.

La matrice de variance asymptotique Σ peut être réécrite avec les $(\sigma_t)_t$ et les $(\eta_t)_t$: $\Sigma = (K - 1)J^{-1}$ avec $J = \mathbb{E}[\frac{1}{\sigma_t^4} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta^T}]$ et $K = \mathbb{E}(\eta_t^4)$.

Nous estimons séparément les termes K et J .

- Nous observons la série financière et donc les log-rendements $(\epsilon_t)_t$. L'estimation $\hat{\theta}_n$ du vecteur des paramètres permet d'estimer la volatilité : $\hat{\sigma}_t := \sigma(\hat{\theta}_n)_t$. Ainsi, nous avons une estimation convergente des résidus, $\hat{\eta}_t := \epsilon_t / \hat{\sigma}_t$. Ceci permet d'estimer de manière convergente le terme K par :

$$\hat{K} := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\eta}_t^4$$

Le résultat sous-jacent pour la convergence est la loi des grands nombres comme les $(\eta_t)_t$ sont *i.i.d.* .

- Pour estimer la matrice J , on utilise l'estimateur convergent : $\hat{J} := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{\hat{\sigma}_t^4} \left[\frac{\partial \hat{\sigma}_t^2}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{\sigma}_t^2}{\partial \theta^T} \right]_{\theta=\hat{\theta}}$.

Les $(\sigma_t)_t$ n'étant pas *i.i.d.*, la convergence de \hat{J} vers J repose sur leur ergodicité.

A partir d'un même vecteur $\theta^* = (0.1, 0.12, 0.83)$, nous avons simulé 1000 GARCH(1,1) de longueur $n = 1000$, les résidus suivant une loi normale centrée réduite. Sur chaque série, nous avons estimé le vecteur θ^* , nous obtenons les estimateurs $(\hat{\theta}_i)_{i=1, \dots, 1000}$. Pour pouvoir visualiser les résultats obtenus, nous n'étudions que le coefficient α de θ (les résultats sont similaires pour ω et β). Nous comparons la distribution empirique de $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_n - \alpha^*)$ à la densité d'une $\mathcal{N}(0, \hat{\Sigma}_\alpha)$ ¹ :

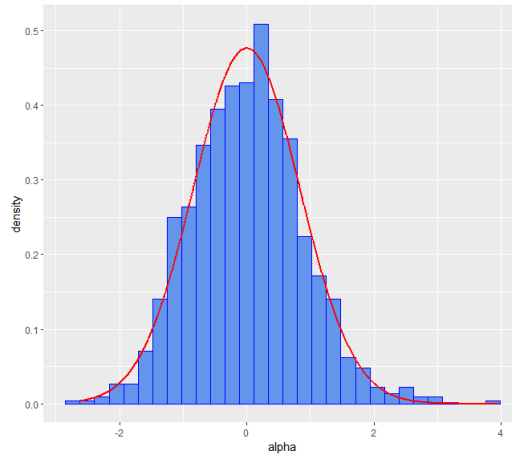


FIGURE 2.2 – En bleu l'histogramme de $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_n - \alpha^*)$, en rouge la densité d'une $\mathcal{N}(0, \hat{\Sigma}_\alpha)$

Le test de Kolmogorov-Smirnov d'hypothèse nulle $H_0 : \sqrt{n}(\hat{\alpha}_n - \theta^*) \sim \mathcal{N}(0, \hat{\Sigma}_\alpha)$ renvoie une p-valeur de 0.86 ; on ne rejette pas H_0 . Nous précisons que $\hat{\alpha}_n$ et $\hat{\Sigma}_\alpha$ ont été calculés sur des jeux de données indépendants.

2.2 Validation et prédiction

Nous allons à présent étudier la prédiction des rendements et de leur carré dans le modèle GARCH(1,1). La première partie de cette section porte sur la prévision à horizon 1, la seconde partie se concentre sur la prévision à horizon h , $h > 1$.

A horizon 1, nous commencerons par donner les formules optimales de prévision (au sens de l'espérance conditionnelle), puis nous construirons des intervalles de confiance pour la valeur future des rendements et de leur carré. Dans un troisième temps, nous effectuerons des *backtests* : nous utiliserons ces intervalles de confiance pour valider le modèle pour la prévision.

À horizon plus grand que 1, nous évoquerons tout d'abord les formules de prévision optimale et le problème de construction des intervalles de confiance. Nous présenterons ensuite la méthode utilisée pour pallier cette complexité dans la construction d'intervalles de confiance.

2.2.1 La prévision à horizon 1

2.2.1.1 La prévision des rendements

A partir de la formulation du modèle GARCH(1,1), comme $(\sigma_t)_t$ est un processus prévisible, il vient que :

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{t+1} | \varepsilon_u, u \leq t] = \sigma_{t+1} \mathbb{E}[\eta_{t+1} | \varepsilon_u, u \leq t] = 0$$

la dernière égalité venant du fait que η_{t+1} est centré et indépendant de $(\varepsilon_u)_{u \leq t}$.

1. $\hat{\Sigma}_\alpha$ désigne le coefficient diagonal de $\hat{\Sigma}$ correspondant à la variance asymptotique de α

En d'autres termes, la prévision optimale de ε_t sachant ses valeurs passées, au sens de l'espérance conditionnelle, est 0. Notons que comme les ε_t sont de carré intégrable, cette prévision optimale au sens de l'espérance conditionnelle coïncide avec la prévision optimale au sens \mathbb{L}^2 . Nous nous sommes donc concentrés sur l'encadrement de la valeur future par un intervalle de confiance étant donné que la prédiction d'une valeur optimale est connue et constante au cours du temps.

Si l'on suppose que les η_t (qui sont *iid*) suivent une certaine loi \mathcal{L} , alors $\mathcal{L}(\varepsilon_t | \varepsilon_u, u \leq t) = \sigma_t \times \mathcal{L}$. Par exemple, si $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$. Sous une telle hypothèse, on peut construire des intervalles de confiance à partir des quantiles de la loi normale. En notant q_u le quantile d'ordre u de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, $\mathcal{J}_{t-1}(u) = [q_{\frac{u}{2}} \sigma_t; q_{1-\frac{u}{2}} \sigma_t]$ est un intervalle de confiance de niveau u pour ε_t . En pratique, nous utilisons l'intervalle $\hat{\mathcal{J}}_{t-1}(u) = [q_{\frac{u}{2}} \hat{\sigma}_t; q_{1-\frac{u}{2}} \hat{\sigma}_t]$ où $\hat{\sigma}_t$ est la valeur estimée pour σ_t à partir de l'observation de $(\varepsilon_u)_{u < t}$. Si l'on ne fait pas d'hypothèse sur la loi suivie par les η_t , nous utilisons les quantiles empiriques des $\hat{\eta}_t$ estimés (on rappelle que $\hat{\eta}_t = \varepsilon_t / \hat{\sigma}_t$) pour obtenir une estimation robuste des quantiles inconnus des η_t . Dans ce cas là, l'intervalle de confiance est noté $\hat{\mathcal{J}}_t^{emp}(u)$.

Nous avons simulé une série de rendements de longueur 1000 suivant un modèle GARCH(1,1) avec comme paramètre $\theta = (10^{-4}, 0.12, 0.83)$. Les η_t suivent une loi normale centrée réduite. Avec les 800 premiers rendements (80% de la série), nous avons estimé le vecteur θ par QML, nous obtenons les estimations $(\hat{\sigma}_t)_{t=1, \dots, 800}$ et $(\hat{\eta}_t)_{t=1, \dots, 800}$. Ensuite, pour chaque rendement à la date t au delà du seuil $T = 800$, nous utilisons les rendements précédents et nos estimations pour calculer deux intervalles de confiance.

Nous répétons cette opération à partir de 1000 rendements du CAC 40 (les premières observations datent de 2015). L'intervalle $\hat{\mathcal{J}}_t(0.95)$ est toujours construit à partir des quantiles de la loi normale, mais nous ne connaissons désormais plus la loi suivie par les η_t . Il peut donc y avoir un problème de spécification dans la construction de cet intervalle.

- $\hat{\mathcal{J}}_t(0.95)$ construit à partir des quantiles de la loi normale (les quantiles théoriques dans ce cas)
- $\hat{\mathcal{J}}_t^{emp}(0.95)$ construit avec les quantiles empiriques estimés sur $(\hat{\eta}_t)_{t=1, \dots, 800}$

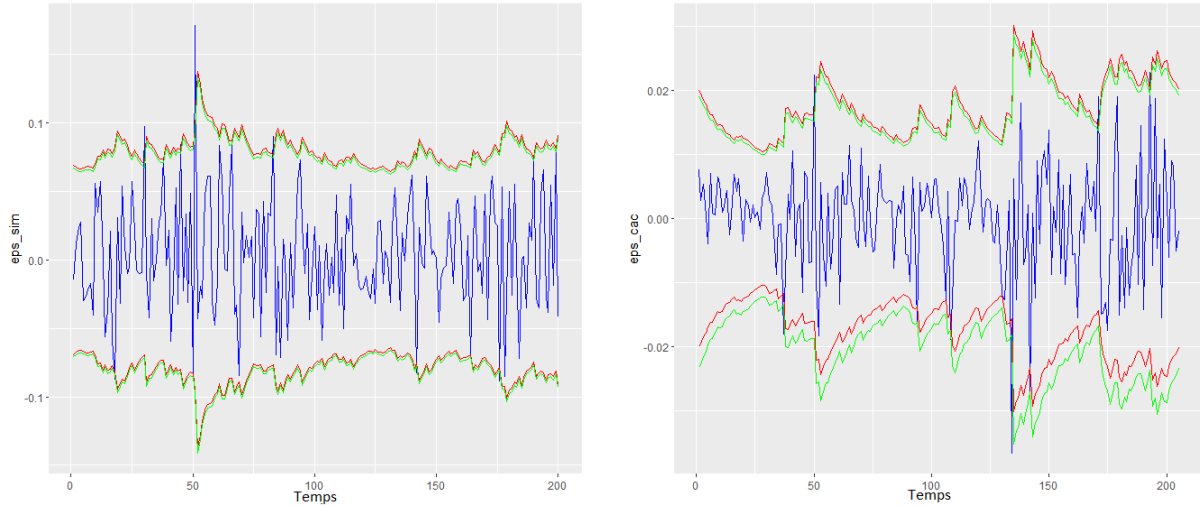


FIGURE 2.3 – Bornes données par les intervalles de confiance (intervalles empiriques en vert, ceux basés sur la loi normale en rouge) par rapport à une série temporelle (en bleu). A gauche la série est une simulation d'un GARCH(1,1), à droite la série est le CAC 40

On remarque que les bornes supérieures des intervalles sont relativement proches, par contre l'intervalle empirique est plus prudent sur la borne inférieure. On ignore à ce stade si les intervalles avec les quantiles de la loi normale sont valides. Les *backtests* étudiés dans la section suivante permettront de statuer sur leur validité.

2.2.1.2 La prévision des carrés des rendements

Comme pour les rendements, en utilisant le fait que $(\sigma_t)_t$ est un processus prévisible, on obtient une formule de prévision optimale pour les carrés :

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{t+1}^2 | \varepsilon_u, u \leq t] = \sigma_{t+1}^2 \mathbb{E}[\eta_{t+1}^2 | \varepsilon_u, u \leq t] = \sigma_{t+1}^2$$

La dernière égalité vient du fait que η_{t+1}^2 est indépendant du passé et $\mathbb{E}[\eta_{t+1}^2] = 1$ par hypothèse du modèle. La meilleure prévision des carrés des rendements à l'horizon 1 est donc la volatilité à cette date, qui est déterminée à partir des valeurs présentes puisque $\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha \varepsilon_t^2 + \beta \sigma_t^2$.

A présent, l'hypothèse $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ conduit à $\varepsilon_t^2 \sim \sigma_t^2 \times \chi^2(1)$. En notant k_u le quantile d'ordre u de la loi $\chi^2(1)$, l'intervalle $\mathcal{J}_t^2(u) := [\sigma_t^2 k_{\frac{u}{2}}, \sigma_t^2 k_{1-\frac{u}{2}}]$ est un intervalle de confiance de niveau u pour ε_{t+1}^2 . De la même manière que pour les rendements, si l'on ne fait pas d'hypothèse sur la loi des η_t , on peut obtenir un intervalle de confiance à partir des quantiles empiriques sur les valeurs estimées.

Nous avons simulé un GARCH(1,1) de longueur 1000 avec $\theta = (10^{-4}, 0.12, 0.83)$ et des η_t gaussiens. Nous avons utilisé les 800 premières données (le jeu de données d'entraînement) pour l'estimation. Pour les 200 dernières données (le jeu de données de test), nous avons construit les intervalles de confiance pour la prévision à l'horizon 1 des carrés des rendements (en utilisant la normalité des η_t).

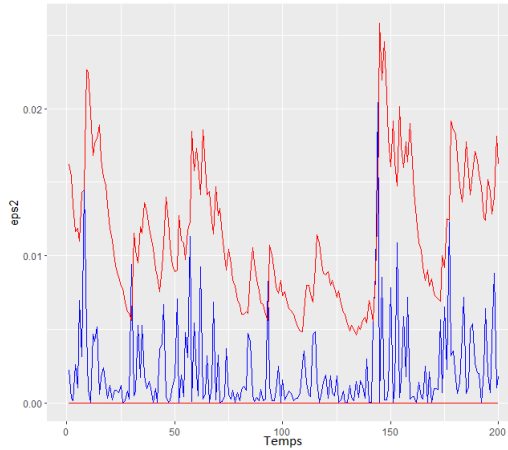


FIGURE 2.4 – Simulation d'un processus ε_t^2 avec $\varepsilon_t \sim \text{GARCH}(1,1)$ (en bleu) et intervalles de confiance à horizon 1 pour les carrés (en rouge)

2.2.2 Validation pour prédiction (backtest)

L'objet est de valider le modèle pour la prévision des rendements à l'horizon 1.

A partir de maintenant, nous prendrons le quantile $u = 0.05$ et nous écrirons \mathcal{J}_{t-1} au lieu de $\mathcal{J}_{t-1}(0.05)$ pour alléger les notations. Les résultats que nous donnons restent valables pour tout u compris entre 0 et 1. A partir des intervalles introduits en 2.2.1.1, on définit les variables $Z_t := \mathbb{1}_{\varepsilon_t \in \mathcal{J}_{t-1}}$ et $Z_t^{\text{emp}} := \mathbb{1}_{\varepsilon_t \in \mathcal{J}_{t-1}^{\text{emp}}}$. On peut montrer que les variables Z_t sont deux à deux indépendantes (par indépendance des η_t), la suite $(Z_t)_t$ est donc une suite de variables *iid* de loi $\mathcal{B}(0.95)$. Quant aux variables Z_t^{emp} , ceux sont des approximations des variables Z_t lorsque la loi des η_t est inconnue. Si le modèle est bien spécifié on peut raisonnablement espérer qu'elles se comportent comme des variables *iid* de loi $\mathcal{B}(0.95)$. Nous allons tester le modèle à partir de ces variables.

L'hypothèse nulle est H_0 "les rendements suivent un modèle GARCH". Si l'on suppose de plus que $\eta_t \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$, on teste l'hypothèse \tilde{H}_0 "les rendements suivent un modèle GARCH et $\eta_t \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ ". Sous l'hypothèse H_0 (resp. \tilde{H}_0), 95% des rendements sont compris dans les intervalles $\mathcal{J}_{t-1}^{\text{emp}}$ (resp. \mathcal{J}_{t-1}). Pour prendre une décision sur H_0 (resp. \tilde{H}_0), nous testons avec un test d'adéquation du Khi-deux (de niveau asymptotique 5%) que $Z_t^{\text{emp}} \sim \mathcal{B}(0.95)$ (resp. $Z_t \sim \mathcal{B}(0.95)$).

Le test d'adéquation du Khi-deux est un test basé sur un pivot asymptotique, il est convergent et atteint asymptotiquement le niveau souhaité. L'hypothèse que nous testons avec le test du Khi-deux est en fait incluse dans l'hypothèse initiale H_0 . Ceci garantit que le test mis en place est de niveau asymptotique 5%, mais cela ne garantit pas la convergence du test. Avant d'utiliser ce test pour valider le modèle sur des données réelles, nous allons d'abord étudier sa puissance sur des données simulées.

2.2.3 Évaluation du test

2.2.3.1 Niveau non-asymptotique du test

Le niveau du test n'étant qu'asymptotique, nous avons vérifié que la probabilité de rejet sous l'hypothèse nulle était raisonnable. Nous avons simulé 1000 GARCH(1,1) de longueur 1000 à partir du vecteur de paramètres $\theta = (10^{-4}, 0.12, 0.83)$ et de η_t suivant une loi normale centrée réduite. Les hypothèses H_0 et \tilde{H}_0 sont bien vérifiées. Comme précédemment, nous utilisons les 800 premières données pour l'estimation puis nous faisons des intervalles de confiance pour la prévision à horizon 1 sur les 200 dernières. Pour chaque série, à partir de ces 200 dernières données nous avons testé H_0 et \tilde{H}_0 . L'hypothèse H_0 est rejetée par notre test 57 fois sur 1000, \tilde{H}_0 est rejetée 71 fois sur 1000. Dans les deux cas, le taux de rejet sous l'hypothèse nulle est proche de 5% ce qui est rassurant quant au niveau du test.

2.2.3.2 Mauvaise spécification de la loi des η_t

Une première évaluation assez simple de la puissance de notre test consiste à tester \tilde{H}_0 lorsque les η_t suivent une autre loi, assez différente de la loi normale (par exemple asymétrique ou ayant des queues de distribution épaisses). On espère que dans un tel cas l'erreur de spécification conduit le test à rejeter le modèle. Pour ce faire nous simulons les η_t selon trois lois, recentrées et réduites si nécessaire, la loi uniforme sur $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$ et deux lois log-normales de paramètres σ respectifs 2 et 3. Le test semble être relativement puissant dans ces cas là :

Loi	quantile(0.025)	quantile(0.975)	nombre de rejets ²
Uniforme	-1.64	1.64	1000
Log-normale(2)	-0.17	0.99	511
Log-normale(3)	-0.04	0.121	788

TABLE 2.1 – Nombre de rejets du test sur 1000 simulations pour la loi uniforme, log-normale(2) et log-normale(3) centrées réduites ; les quantiles à 2.5% et 97.5% sont indiqués

Nous illustrons ceci avec le graphique d'une simulation d'un GARCH(1,1) réalisée à partir de η_t suivant une loi uniforme. Les intervalles de confiance de prévision (gaussiens et empiriques) sont également dessinés. Cette simulation a conduit le test à rejeter.

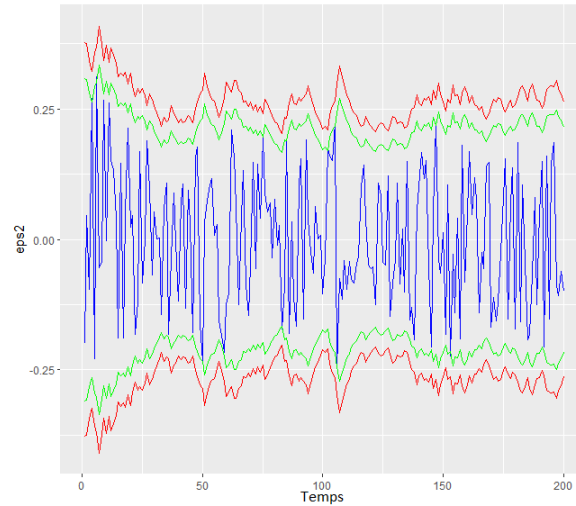


FIGURE 2.5 – Simulation d'un GARCH(1,1) à partir de η_t uniformes (en bleu), IC gaussiens (en rouge) et empiriques (en vert)

Les intervalles de confiance basés sur les quantiles de la loi normales sont trop prudents dans ce cas là.

2.2.3.3 Changement de Garch

On appelle **changement de GARCH(1,1)** une modification du paramètre θ du GARCH(1,1) à une date "cut" (exprimée en pourcentage de l'échantillon total).

Nous souhaitons obtenir un unique graphique qui illustre la puissance du test pour un changement de GARCH. Nous nous sommes concentrés sur la variation des paramètres α et β et avons ainsi choisi d'utiliser un quadrillage de l'ensemble $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$.

Algorithme pour créer la figure 2.7 Pour le bruit blanc, on simule des $\eta_t \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$, ce qui correspond exactement à l'hypothèse du test. On est donc dans le cas le plus favorable, car le quasi-maximum de vraisemblance est alors en réalité un maximum de vraisemblance.

On en simule n (qu'on interprète comme un nombre de jours). On se place dans le cas particulier où l'ensemble d'apprentissage correspond à une série simulée selon un premier paramètre et l'ensemble de test correspond à la suite de la série dont le paramètre du GARCH a changé. Nous prenons $cut = 80\%$ qui est une valeur usuelle de taille d'ensemble de test. Nous noterons θ_1 le paramètre du GARCH avant le cut et θ_2 le paramètre du GARCH après le cut .

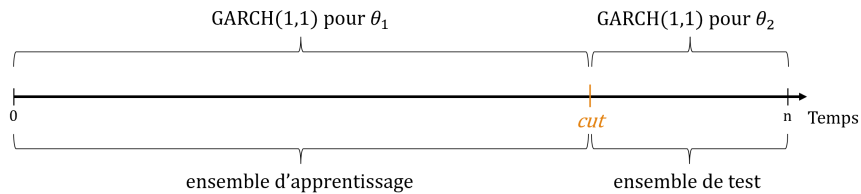
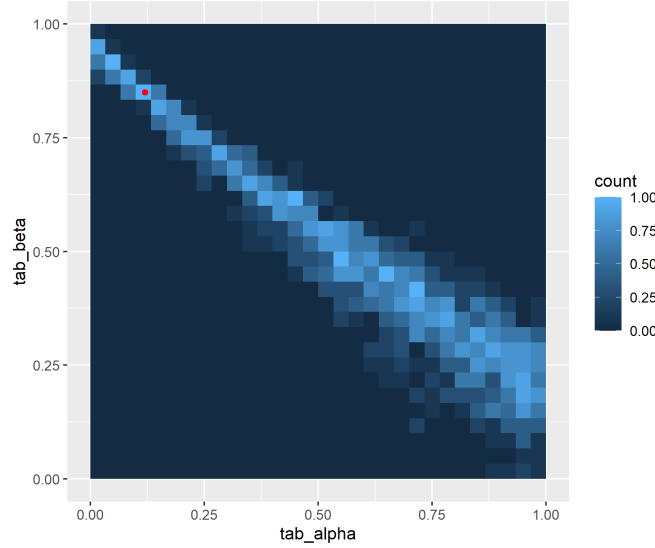


FIGURE 2.6 – Schéma des ensembles d'apprentissage et de test en relation avec le changement de GARCH

Afin d'obtenir des temps de calculs raisonnables, nous avons choisi de prendre un quadrillage régulier de $[0, 1]^2$ dont la plus petite subdivision sur un des axes est $1/30$. Pour chaque couple (α, β) , nous simulons 10 trajectoires. Pour une représentation graphique, le script réalise $30^2 * 10 = 9000$ QML et *backtests* sur des trajectoires de $n = 2000$ jours. Pour ces paramètres, le script durait environ 15 minutes. C'est pourquoi le quadrillage reste assez grossier et le nombre de trajectoires assez faible, mais la représentation graphique permet tout de même de rendre compte de faits intéressants.

FIGURE 2.7 – Taux de non-rejet du *backtest* au niveau 5%**Légende de la figure 2.7**

- abscisse : α du paramètre θ_2
- ordonnée : β du paramètre θ_2
- la valeur de ω ne varie pas : $\omega_1 = \omega_2$
- point rouge : θ_1 ($\theta_1 = (0.0001, 0.12, 0.85)$, on le fait pas varier dans la suite)
- couleur bleue : le taux de non-rejet du test au niveau 5%
- pour chaque case de la grille, 10 trajectoires de prix ont été simulées.

Commentaire/interprétation de la droite de non-rejet La zone de d'absence de rejet sur la figure 2.7 semble correspondre à une droite dans le plan (α, β) , plus précisément à l'ensemble des couples tels que $\alpha + \beta$ est constant. Or, cet ensemble est l'ensemble des modèles GARCH(1,1) qui ont la même variance pour (ε_t) (cf. partie 1.3).

Comportement des σ_t^2 Nous nous intéressons au comportement de σ_t^2 après la date de changement de GARCH. Nous considérons le même cadre décrit dans la figure 2.6 et en conservons les notations. Nous nous concentrons sur deux points particuliers de cette droite de non-rejet :

- le cas sans changement de GARCH : $\theta_1 = \theta_2 = (0.0001, 0.12, 0.85)$
- le cas avec changement de GARCH : $\theta_1 = (0.0001, 0.12, 0.85)$ et $\theta_2 = (0.0001, 0.9, 0.07)$

n (en puissance de 10)	3	4	5	6	7
Sans changement de GARCH	34	30	33	34	33
Avec changement de GARCH	9	8	10	18	16

TABLE 2.2 – Moyennes empiriques des $\hat{\sigma}^2$ après la date de changement de GARCH (en 10^{-4}) en fonction du nombre d'observations n de la série complète. La valeur théorique est $\mathbb{E}[\sigma^2] = 33 \times 10^{-4}$.

Chaque case du tableau 2.2.3.3 a été moyennée sur 5 trajectoires.

[5] indique que les conditions d'existence de moments d'ordre 2 et 4 de la loi de σ sont respectivement $\alpha + \beta < 1$ et $(\alpha + \beta)^2 + \alpha^2(\mathbb{E}[\eta^4] - 1) < 1$. Dans notre cas théorique présent, $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Donc $\mathbb{E}[\eta_t^4] = 3$ et donc le modèle GARCH(1,1) de paramètre $\theta_2 = (0.0001, 0.9, 0.07)$ donne des σ_t^2 qui admettent des moments d'ordre 1, mais pas d'ordre 2. Dès lors, nous savons que le théorème central limite ne s'applique pas et nous n'avons donc aucun résultat de vitesse de convergence de la moyenne empirique des σ^2 .

Conclusion sur la puissance du test pour un changement de GARCH Ainsi, le backtest semble avoir une puissance faible dans certains contextes, notamment pour un changement de paramétrisation de GARCH(1,1) qui laisse la variance constante.

2.2.4 Backtests sur données réelles

Pour finir, nous avons *backtesté* le modèle sur des séries financières réelles. Dans le cas où le test validait le modèle GARCH(1,1), nous avons effectué des prévisions à horizon 1 sur ces séries. Nous donnons une liste des séries étudiées en précisant si le modèle est validé ou non. Toutes les séries sont prises sur les 5 dernières années jusqu'au 2 mai 2023. Comme précédemment, 80% des données sont utilisées pour l'estimation. Nous ne présentons que les prévisions du CAC 40.

Pour le CAC 40, les tests des hypothèses H_0 et \tilde{H}_0 renvoient respectivement les p-valeurs 0.23 et 0.74. Les deux modèles sont donc validés pour la prédiction, voici les intervalles de confiance obtenus :

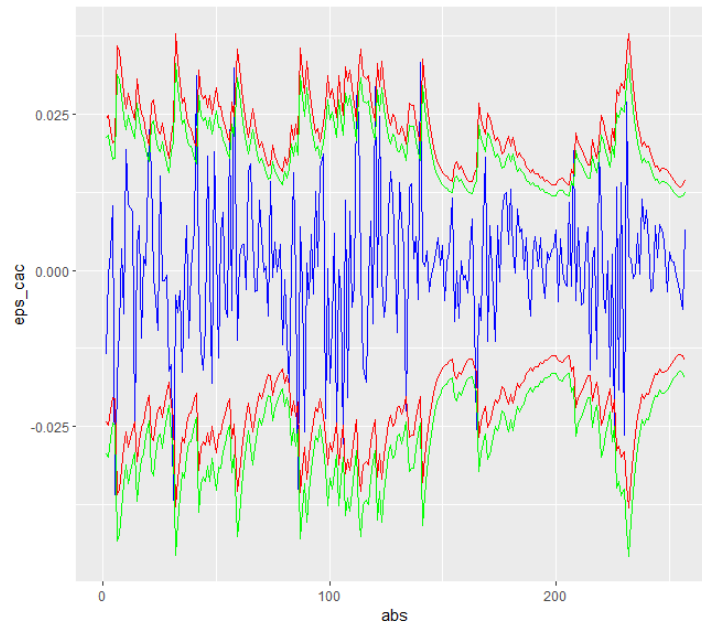


FIGURE 2.8 – Intervalles de confiance à 95% pour la prévision à horizon 1 du CAC 40, les intervalles empiriques sont en vert, ceux supposant la normalité des résidus en rouge

Série financière	p-valeur backtest gaussien (\tilde{H}_0)	p-valeur backtest empirique (H_0)
CAC40	0.23	0.74
DAX	0.20	0.11
ArcelorMittal	0.18	0.86
Nikkei 225	0.95	0.72
Euro Stoxx 50	0.48	0.20
Google	0.32	0.19
Stellantis	0.73	0.56
Walmart	0.48	0.11
EUR/USD	0.04	0.09

TABLE 2.3 – Backtests (gaussiens et empiriques) sur différentes séries financières réelles, les séries sont prises sur les 5 dernières années jusqu'au 2 mai 2023.

Parmi ces séries, le modèle GARCH(1,1) est rejeté à 10% seulement pour le taux de change euros-

dollars (EUR/USD).

2.2.5 La prévision à horizon plus grand que 1

2.2.5.1 Complexité théorique des lois conditionnelles

À long terme, horizon plus grand que 1, la loi conditionnelle des rendements se complexifie avec l'horizon étudié. En raison de l'hypothèse de bruit blanc faite sur les (η_t) , les moments conditionnels d'ordre 1 et 2 des rendements sont explicites. En revanche, les intervalles de confiance ne s'obtiennent plus de manière explicite sans hypothèse supplémentaire sur la loi des bruits blancs (η_t) .

À horizon 2, $\mathcal{L}(\varepsilon_{t+2}^2 | \mathcal{F}_t)$ est complexe par rapport à l'horizon 1 en raison d'absence d'hypothèse sur la loi des (η_t) :

$$\varepsilon_{t+2}^2 = \underbrace{\eta_{t+2}^2}_{\notin \mathcal{F}_t} [\underbrace{\omega + \sigma_{t+1}^2}_{\in \mathcal{F}_t} (\underbrace{\alpha \eta_{t+1}^2 + \beta}_{\notin \mathcal{F}_t})]$$

Sous des hypothèses paramétriques sur les (η_t) , telle que $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$, on peut se ramener à des lois explicites des (ε_t) et calculer des intervalles de confiances. Mais ce type d'hypothèse est forte et peu réaliste en pratique. La figure C.1 illustre notamment le manque de réalisme d'une hypothèse de normalité des (η_t) . À horizon 1 on a utilisé cette hypothèse pour la construction d'intervalles de confiance, néanmoins à horizons plus grands pour la prédiction cette hypothèse peut entraîner des erreurs trop importantes.

2.2.5.2 Méthode de simulation

Afin de s'affranchir d'hypothèse forte sur la loi des (η_t) , nous avons utilisé une méthode de simulation Monte-Carlo semi-paramétrique. Cette méthode nous permet de surcroît de simplifier les calculs de prévisions et d'intervalles de confiance.

La méthode de simulation utilisée consiste en la simulation de N ($\simeq 3000$) trajectoires de (ε_t) à horizon h , prolongeant l'historique connu de (ε_t) . Les trajectoires sont construites par des simulations de processus GARCH ayant pour paramètres ceux estimés sur l'historique des rendements. La figure 2.9 illustre ces simulations de trajectoires en prolongement de l'historique de la série.

Les bruits blancs (η_t) , seuls éléments aléatoires des simulations, sont simulés par une méthode de "Boostrapping Non-Paramétrique", permettant de ne pas supposer de loi sur les bruits blancs. Un nombre h de tirages avec remise de η_t parmi les $(\hat{\eta}_t)$ passés estimés sont effectués. Cette méthode offre des avantages de consistance sur des échantillons de grande taille.

Des méthodes de simulations de (η_t) par approximation non-paramétrique (e.g. estimation de densité par noyau, abrégée KDE³) donnent en pratique des résultats similaires. Nous avons par exemple comparé les simulations obtenues par méthode de BNP et celles obtenues par KDE. La simulation par KDE repose sur la méthode de la transformée inverse appliquée sur la fonction de répartition estimée par noyau. La figure C.2 illustre la similarité de résultat entre la méthode BNP et la méthode d'estimation par noyau. Un test d'adéquation basé sur la statistique de Kolmogorov-Smirnov nous donne une p-valeur de 0.79 pour l'hypothèse nulle que les deux échantillons simulés par BNP et KDE suivent la même loi. La méthode de BNP est comparativement plus simple à mettre en place et permet des simulations plus rapides.

Afin de déterminer une prévision ou un intervalle de confiance, nous avons utilisé les statistiques des trajectoires simulées (moyenne, quantiles...). Ces prévisions sont illustrées par la figure D.1 représentant une prévision sur 15 jours avec intervalle de confiance. À partir de la prévision des rendements on obtient aisément la prévision des rendements au carré, en passant au carré les prévisions.

3. kernel density estimation

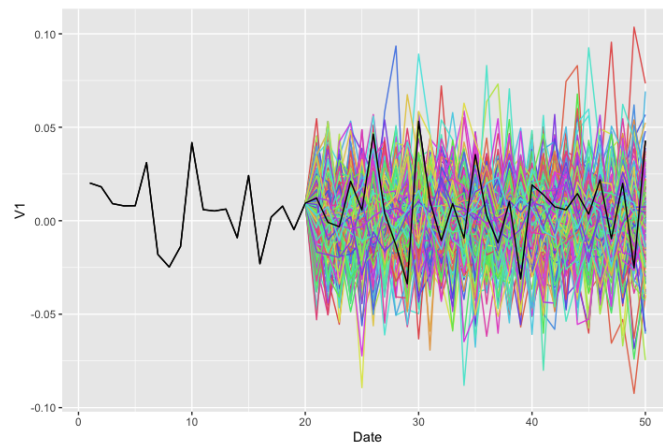


FIGURE 2.9 – Graphique des trajectoires simulées sur 30 jours des rendements : En noire la vraie trajectoire des rendements de l'action AAPL (2020) ; En couleurs 300 trajectoires de processus GARCH simulés par Bootstrap Non-Paramétrique et de paramètres estimés sur l'historique de 629 jours de l'action AAPL.

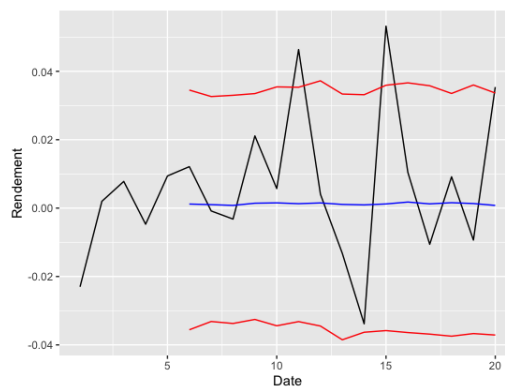


FIGURE 2.10 – Estimation sur l'action AAPL jusqu'à horizon 15 jours des rendements par modèle GARCH et méthode de "Bootstrap Non-Paramétrique". En rouge l'intervalle de confiance à 95% (quantiles 97.5% / 2.5%) ; En bleu la moyenne ; En noire la vraie trajectoire. Données historiques AAPL (629 jours 2017-2020).

Chapitre 3

Comparaison à d'autres modèles

Les parties précédentes nous ont permis d'obtenir des prévisions de nos séries financières à différents horizons h avec le modèle GARCH. Dans cette partie nous allons étudier d'autres modèles de prévision. Pour pouvoir comparer les prévisions données par ces différents modèles, nous commençons par présenter un test statistique, le test de Diebold-Mariano. Ce test permet de déterminer si une méthode de prévision a une erreur quadratique moyenne significativement plus faible qu'une autre méthode.

3.1 Test de Diebold-Mariano

Quelque soit le modèle, nous avons utilisé 80% de la série financière pour l'estimation puis les 20% restants comme période de comparaison des prédictions.

Soit un horizon h quelconque et une période de longueur n sur laquelle nous observons une série $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. Supposons que nous disposons de deux prévisions à horizon h sur cette période à partir de deux modèles stationnaires différents. Notons g_1, \dots, g_n et f_1, \dots, f_n les prévisions respectives. Nous souhaitons déterminer quelle méthode de prévision est la plus précise. Pour une observation donnée, l'erreur commise par un modèle est la différence au carré entre la prévision du modèle et l'observation. La différence entre les erreurs de chaque modèle pour l'observation i est $d_i := (g_i - \varepsilon_i)^2 - (f_i - \varepsilon_i)^2$. Le test de Diebold-Mariano nécessite que $(d_i)_i$ soit un processus stationnaire, ce qui est le cas avec les hypothèses faites sur les modèles. L'hypothèse nulle (H_0) du test de Diebold et Mariano est que la différence des erreurs de prévision de ces deux méthodes est nulle.

La moyenne des différences d'erreur entre ces deux méthodes est donc : $m_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$. Une forme naturelle de test est de rejeter H_0 si la statistique m_n est trop élevée en valeur absolue. Sous certaines hypothèses de régularité [3] et sous $H_0 : \sqrt{n}m_n \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma(k)$ où γ désigne la fonction d'auto-covariance de $(d_i)_i$. Si σ^2 était connu, nous aurions un pivot asymptotique qui nous permettrait de mettre en place un test. Il s'agit donc de trouver un estimateur $\hat{\sigma}^2$ qui converge en probabilité vers σ^2 . Ainsi, avec le lemme de Slutsky, $S_n := \frac{\sqrt{n}m_n}{\hat{\sigma}}$ convergerait en loi vers une loi normale centrée réduite. Notons K le noyau gaussien, l'estimateur $\hat{\sigma}^2 := \sum_{k=0}^{K_{max}} K(kn^{-\frac{1}{5}}) \hat{\gamma}(k)^1$ converge en probabilité vers σ^2 . En définissant la statistique S_n à partir de cet estimateur, le carré S_n suit asymptotiquement une loi du Khi-deux à un degré de liberté. Le test est construit à partir des quantiles du Khi-deux, notés $k_{1-\alpha}$. Les deux modèles sont significativement différents si $S_n^2 > k_{1-\alpha}$. Pour connaître le modèle qui l'emporte, il faut regarder le signe de S_n .

1. $\hat{\gamma}$ est l'estimateur habituel de la fonction d'autocorrélation

3.2 Présentation des autres modèles développés

Nous développons d'autres modèles de séries temporelles afin d'avoir des références pour comparer les prédictions du modèle GARCH.

3.2.1 Moyenne glissante

Le modèle de moyenne glissante (aussi appelé modèle naïf) a comme propriété intéressante de lisser les données au cours du temps : une observation est remplacée par la moyenne sur les h dernières périodes (fenêtre h). Nous utilisons ce modèle, car il est simple et permet de faire une première comparaison avant d'étudier d'autres modèles plus complexes.

Il existe principalement deux types de moyennes glissantes :

- Moyenne Glissante Simple (MGS) : une moyenne arithmétique des rendements financiers.
- Moyenne Glissante Exponentielle (MGE) : une moyenne glissante pondérée par des poids décroissant exponentiellement.

Pour donner plus d'importance aux dernières valeurs des rendements financiers au carré, nous allons utiliser dans la suite du projet le modèle MGE. De manière empirique, nous pouvons constater que la fenêtre (h) qui prédit le mieux les rendements financiers au carré à l'horizon 1 est $h = 4$. Ce paramètre a été choisi de manière arbitraire, sans fondement théorique ni test statistique. Ce paramètre aurait pu faire l'objet d'une cross-validation, cependant n'étant pas l'objet central de notre projet nous avons décidé de le fixer arbitrairement.

3.2.2 HMM

Le Hidden Markov Model (HMM) est un type de modèle statistique qui est utilisé pour modéliser des données de séries temporelles, dans notre cas les rendements financiers au carré $\varepsilon_t^2 = \sigma(\Delta_t)^2 \eta_t^2$. L'hypothèse principale est que le processus sous-jacent Δ_t est supposé être un processus de Markov avec des états non observés. Nous supposons qu'il y a deux états différents ($\sigma(\Delta_1)$, $\sigma(\Delta_2)$). Les HMM sont souvent utilisés en finance et en économie pour modéliser la volatilité des séries temporelles financières, telles que les cours des actions que nous avons utilisées précédemment.

Nous avons suivi les étapes suivantes afin de prédire les rendements au carré du CAC40.

1. La première étape consiste à définir l'espace d'états du HMM, c'est-à-dire le nombre d'états que peut prendre la volatilité dans notre modèle et sa loi. A partir de la littérature [6] nous avons choisi que l'espace d'état de notre modèle soit égal à $k = 2$ ($\sigma(\Delta_1)$, $\sigma(\Delta_2)$) et que la distribution de chaque état était une mixture de quatre gaussiennes.
2. L'étape suivante consiste à estimer les probabilités de transition $P(i,j) = P(\sigma(\Delta_t) = j | \sigma(\Delta_{t-1}) = i)$ entre les états. Les paramètres peuvent être estimés à l'aide de l'algorithme de Baum-Welch. Les paramètres sont estimés sur les 80% du jeu de données du CAC40.
3. Une fois les paramètres du modèle estimés, la vraisemblance des données observées peut être calculée à l'aide de l'algorithme de Viterbi. Nous obtenons donc pour chaque rendement au carré un état entre 1 et 2, une matrice contenant les probabilités de transition d'un état vers un autre et les paramètres des mixtures de gaussiennes pour chaque état.
4. Le modèle est utilisé pour prédire la volatilité future en calculant la séquence d'états cachés la plus probable compte tenu des données observées jusqu'à un certain moment. A partir des données d'entraînement et de l'état que nous avons attribué à y_t , nous allons pouvoir pour chaque y_t appartenant au 20 restant prédire y_{t+1} . Pour cela, nous utiliserons la formule suivante :

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t^2 | I_{t-1}] = \sum_{i=1}^2 \sigma(i)^2 \times P(\sigma(\Delta_t) = i | F_{t-1})$$

3.2.3 Machine Learning

Nous nous sommes intéressés à deux méthodes d'apprentissage supervisé. Ces méthodes permettent des prévisions des rendements au carré à plusieurs horizons : 1, 2, 5, et 10. Afin de comparer de manière équitable au modèle GARCH, ces deux méthodes de *ML* ne prennent aucune autre information en entrée que l'historique des rendements au carré.

Les deux méthodes sont entraînées sur 75% de la série et comparées au GARCH sur les 25% restants.

3.2.3.1 OLS

La première méthode est une régression linéaire, elle a été choisie car étant la solution la plus simple à mettre en place. C'est une régression linéaire obtenue par la méthode des moindres carrés ordinaire sur les données passées avec *intercept*. Le nombre de régresseurs a été choisi de manière arbitraire, sans fondement théorique ni test statistique. Nous avons déterminé ce nombre à partir de l'autocorrélogramme de la série, en distinguant heuristiquement une "coupure" dans les corrélations. Les coupures choisies sont en pratique 40 et 100. La régression estime donc la valeur d'un rendement au carré à partir des 40 rendements au carré passés.

3.2.3.2 Neural Network

La seconde méthode est un réseau de neurones séquentiel, que nous noterons NN². Le NN est construit similairement à la régression linéaire, en prenant en *features* les rendements au carré passés de la série. Le NN est composé de trois couches cachées de neurones, avec la fonction d'activation *ReLU*, et d'une couche composée d'un neurone linéaire de sortie.

3.2.3.3 Critiques des modèles

L'implémentation de ces deux méthodes en l'état est critiquable. Elles n'ont pas fait l'objet d'une adaptation particulière au vu de la structure en série temporelle des données. Le nombre de *features* choisies n'a pas été déterminé de manière rigoureuse. Une étude avec l'utilisation de critères d'information serait une piste. Outre l'architecture naïve du NN, sa convergence n'est pas assurée pour des données de type série temporelle et il pourrait être considéré comme une régression fallacieuse.

Néanmoins ces méthodes ont pour intérêt d'être génériques, facilement implémentables et notoires. Elles permettent *in fine* d'éprouver le GARCH à moyen et long horizon, et présentent en pratique des résultats intéressants proches de ceux obtenus par le modèle GARCH.

2. Neural Network

3.3 Résultats

Méthode	Horizon	P-valeur DM	Stat DM
MA	1	0.00561	-2.7995
HMM	1	0.0002252	-3.7561
OLS-40	1	0.278	-1.085
OLS-100	1	0.0019	-3.139
NN-40	1	0.247	-1.160
NN-100	1	0.608	0.513
OLS-40	2	0.107	-1.613
NN-40	2	0.572	0.565
OLS-40	5	0.962	0.047
NN-40	5	0.396	0.849
OLS-40	10	0.510	0.659
NN-40	10	0.041	2.052
OLS-100	10	0.215	-1.241
NN-100	10	0.122	-1.549

TABLE 3.1 – Tableau de comparaison des méthodes alternatives et du modèle GARCH pour différents horizons des rendements au carré. OLS- x (NN- x) signifie que la régression linéaire (resp. le NN) prend x variables en entrée. Les prédictions sont faites sur les rendements au carré du CAC40(01/15 - 01/19). P-valeur DM et Stat DM sont respectivement la p-valeur et la statistique de test du test de Diebold-Mariano en comparaison avec la prédiction du modèle GARCH. Une statistique négative est ici favorable au modèle GARCH.

Horizons	Prédictions équivalentes	GARCH meilleur	NN meilleur
Horizon 1	70%	0%	30%
Horizon 2	85%	15%	0%
Horizon 10	57%	0%	43%

TABLE 3.2 – Tableau de comparaison du NN et du modèle GARCH pour différents horizons. Le NN prend les 100 variables passées en argument. Les modèles sont comparés sur 7 séries financières (DAX, Arcelor Mittal, EuroStoxx50, Google, Stellantis, Walmart, FTX) prises sur les 5 dernières années jusqu'au 2 mai 2023. Les résultats détaillés sont en annexe D.1

À horizon 1, le modèle GARCH est globalement invaincu face aux méthodes implémentées. Nous qualifions de vaincu le modèle GARCH face à un modèle alternatif, si ce dernier est statistiquement meilleur, au sens du test de Diebold-Mariano. Nous constatons que le GARCH l'emporte significativement sur la moyenne glissante et le HMM. En revanche, le NN (réseau de neurones) parvient sur certaines séries à battre le GARCH. Il est à noter que le GARCH n'est pas battu sur des horizons courts et moyens par l'OLS mais ne le bat pas non plus.

À horizon de prédiction plus grand que 1, le GARCH reste aussi globalement invaincu à moyen horizon (≤ 5), cf. table 3.2. En revanche, à long horizon ($h = 10$) il est fréquemment battu par le NN.

Ces résultats nous permettent ainsi d'établir l'intérêt d'une modélisation GARCH pour l'estimation de rendements au carré de série financière seulement à court et moyen horizon.

Conclusion

Ce projet a débuté avec la modélisation des rendements d'une série financière par un modèle GARCH. Nous avons étudié des méthodes d'estimation dans ce cadre. Ces méthodes ont été implémentées puis évaluées sur R , elles se sont révélées robustes. Elles ont ensuite été utilisées sur des séries financières réelles. Une des contraintes lors de la modélisation de telles séries est d'avoir un modèle estimable en pratique. En ce sens, les estimateurs issus du modèle GARCH nécessitent un nombre de données raisonnable et se sont montrés performants. Suite à cela, nous avons élaboré un test afin de valider le modèle. L'étude du test a mis en évidence un manque de puissance dans certains cas. Notre méthode de validation du modèle n'est donc que partielle.

Les prévisions des rendements au carré fournies par le modèle GARCH ont été comparées aux prévisions d'autres modèles, notamment un modèle de Markov Caché et un réseau de neurones. Ces comparaisons ont été faites sur plusieurs séries financières réelles. Nous avons présenté les résultats obtenus sur le CAC40, qui sont représentatifs de l'ensemble de notre étude. Le GARCH est en général invaincu pour la prévision des rendements au carré à petits horizons ($h \leq 5$), il est en revanche quelques fois battu par le réseau de neurones à horizon plus grand ($h = 10$). Le modèle GARCH présente toutefois des avantages comparés à un modèle d'apprentissage. C'est un modèle dont la formulation et les paramètres sont interprétables, nécessitant relativement peu de données d'entraînement et ne faisant pas intervenir de paramètres arbitraires.

Ce projet nous a appris tant du point de vue théorique que pratique. Nous avons étudié un nouveau modèle et des méthodes d'estimations étroitement liés au cours de séries temporelles linéaires. L'application à des séries financières réelles nous a confrontés à certaines difficultés. Par exemple, l'observation d'une série financière sur une certaine période ne correspond statistiquement qu'à une trajectoire incomplète d'un processus. Les méthodes d'estimation doivent être précises à partir seulement d'une trajectoire partielle. L'utilisation de données simulées nous a permis de vérifier nos modèles avant de les tester sur des données réelles.

Bibliographie

- [1] T. BOLLERSLEV. “Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity”. In : *Journal of Econometrics* (1986)).
- [2] Rama CONT. “Empirical properties of asset returns : stylized facts and statistical issues”. In : (2000). URL : <http://rama.cont.perso.math.cnrs.fr/pdf/empirical.pdf>.
- [3] Francis X DIEBOLD et Robert S MARIANO. “Comparing Predictive Accuracy”. In : *Journal of Business & Economic Statistics* 20.1 (2002), p. 134-144. DOI : [10.1198/073500102753410444](https://doi.org/10.1198/073500102753410444). eprint : <https://doi.org/10.1198/073500102753410444>. URL : <https://doi.org/10.1198/073500102753410444>.
- [4] R.F. ENGLE. “Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation”. In : *Econometrica* (1982).
- [5] Christian FRANCO et Jean-Michel ZAKOÏAN. “GARCH Models : Structure, Statistical Inference and Financial Applications”. In : (2019). DOI : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/9781119313472>.
- [6] Nguyet NGUYEN. “An Analysis and Implementation of the Hidden Markov Model to Technology Stock Prediction”. In : (2017)). URL : <https://doi.org/10.3390/risks5040062>.

Annexe A

Graphiques des faits stylisés

Série financière	p-valeur KPSS test	Kurtosis
CAC40 (01/15 - 01/19)	<0.01	7.27
DAX (11/02 - 11/22)	<0.01	9.67
AAPL (12/17 - 11/22)	<0.01	5.63
GOOG (12/17 - 11/22)	<0.01	6.13
EURUSD (01/21 - 05/23)	<0.01	3.91
IXIC (05/21 - 05/23)	<0.01	4.44

TABLE A.1 – Tableau d’indicateurs calculés sur séries financières. L’hypothèse nulle du test KPSS est la stationnarité en tendance de la série. À titre de comparaison le coefficient Kurtosis pour une loi normale est 3.

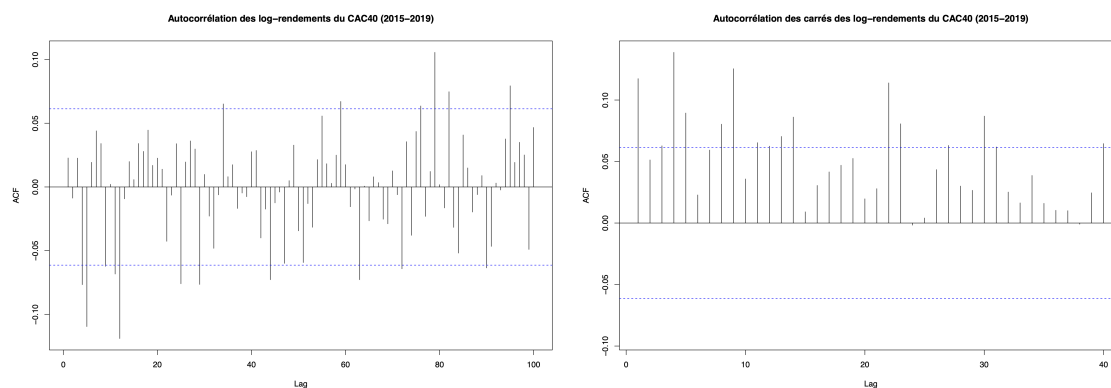


FIGURE A.1 – Autocorrélation des log-rendements et des carrés des log-rendements du CAC40 (2015-2019)

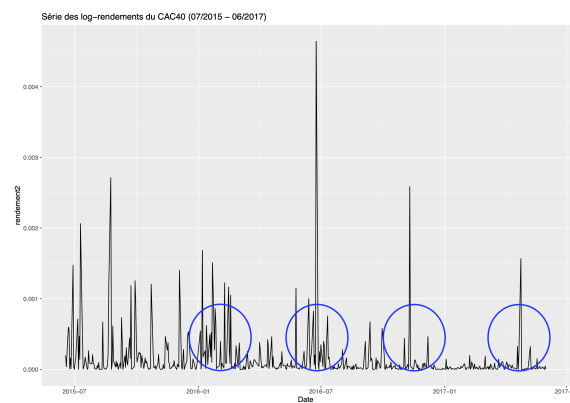


FIGURE A.2 – Identification de *clusters* de volatilité sur la série des log-rendements au carré du CAC40 (07/2015 - 06/2017)

Annexe B

Graphiques sur la puissance du test pour un changement de GARCH

L'élaboration et les notations des graphiques ci-dessous ont été présentées en partie 2.2.3.3.

Le nombre de trajectoires simulées pour chaque case du quadrillage est fixé pour tous les graphiques qui suivent à 10.

B.0.1 Variation du cut de changement de GARCH

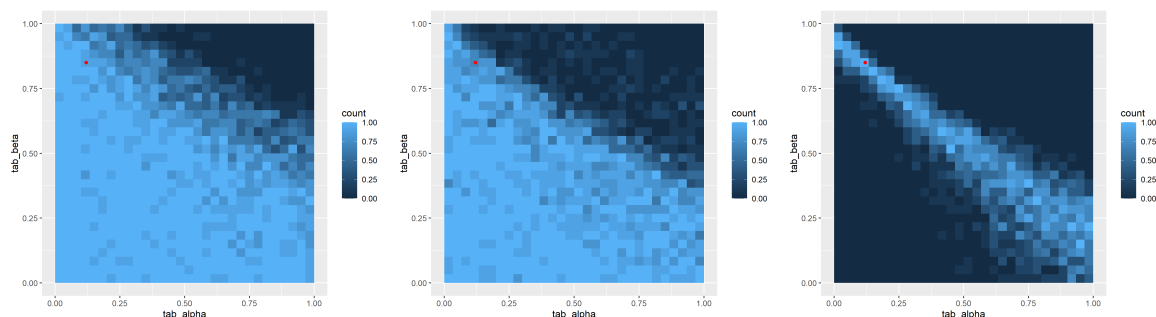


FIGURE B.1 – Variation du cut de changement de GARCH (0.4 ; 0.6 ; 0.8) ; pour n=1000

B.0.2 Variation du nombre de jours de simulation

B.0.2.1 dans le cas favorable : cut=0.8

Le cas $\text{cut} = 0.8$ est particulier, car le cut du changement de GARCH coïncide avec le cut du backtest.

Cela signifie que l'estimation¹ du paramètre θ est exactement réalisé sur l'échantillon qui n'est que simulé selon θ_1 . Quant à l'échantillon de test, il est exclusivement simulé par selon le paramètre θ_2 .

Lorsque les paramètres θ_1 et θ_2 sont trop distincts, le test devrait "facilement" pouvoir rejeter l'hypothèse nulle.

Nous constatons que le test ne parvient pas à rejeter l'hypothèse nulle sur la droite $\alpha_2 + \beta_2 = \alpha_1 + \beta_1$.

B.0.2.2 dans le cas défavorable : cut=0.4

Le cas $\text{cut}=0.4$ correspond à :

- training set :
 - 50% simulé par GARCH(1,1) de paramètre θ_1 ,
 - 50% simulé par GARCH(1,1) de paramètre θ_2 ,
- test set : 100% simulé par GARCH(1,1) de paramètre θ_2 .

1. Notre fonction de backtest essaie d'estimer un unique paramètre θ pour toute la longueur, il ignore le changement de paramètre.

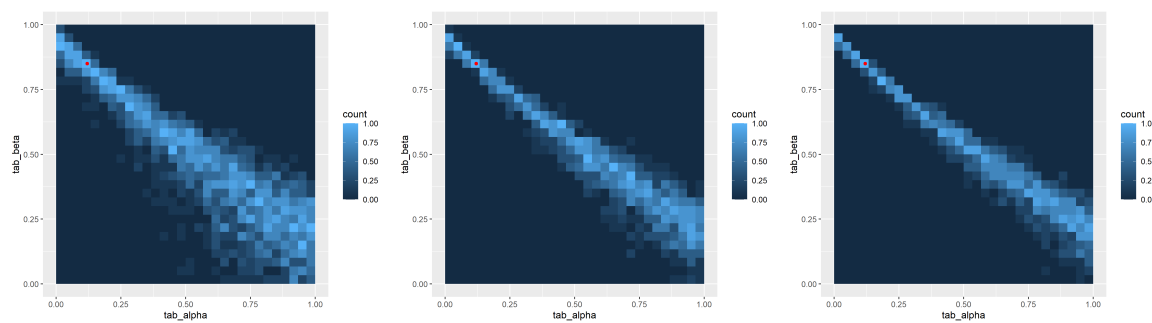


FIGURE B.2 – Variation du nombre de jours ($n=1000, 2000, 3000$) pour $\text{cut}=0.8$

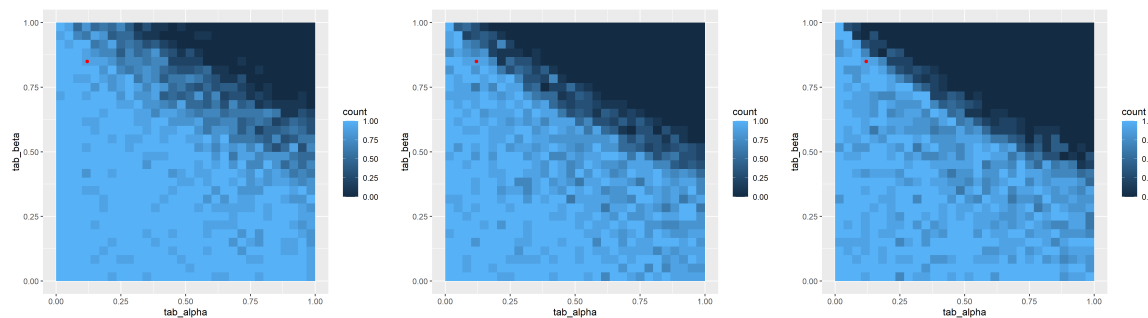


FIGURE B.3 – Variation du nombre de jours ($n=1000, 2000, 3000$) pour $\text{cut}=0.4$

B.0.3 Variation de la loi du bruit blanc

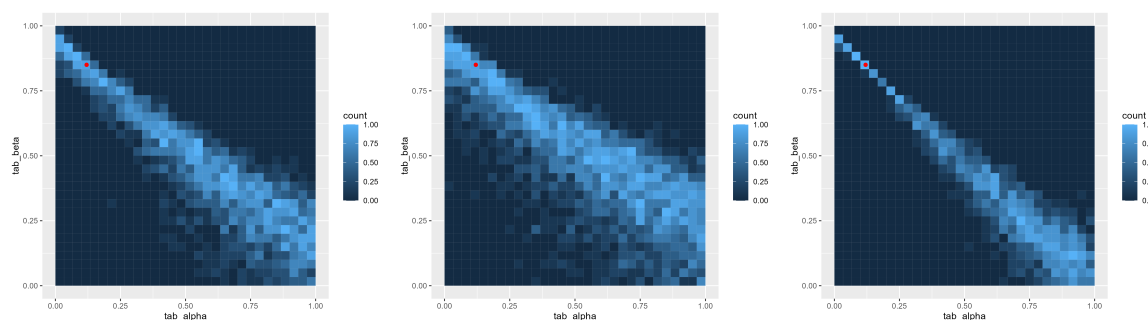


FIGURE B.4 – Variation de la loi des ϵ (normale, Student à 5 DDL, uniforme - centrées réduites) pour $\text{cut}=0.8$

Annexe C

Graphiques simulations GARCH

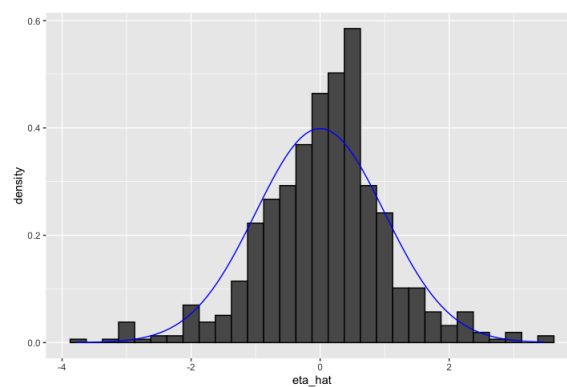


FIGURE C.1 – Histogramme des $(\hat{\eta}_t)$ estimés sur 630 jours (2017-2020) pour l'action AAPL, en bleu la fonction de densité de $\mathcal{N}(0, 1)$

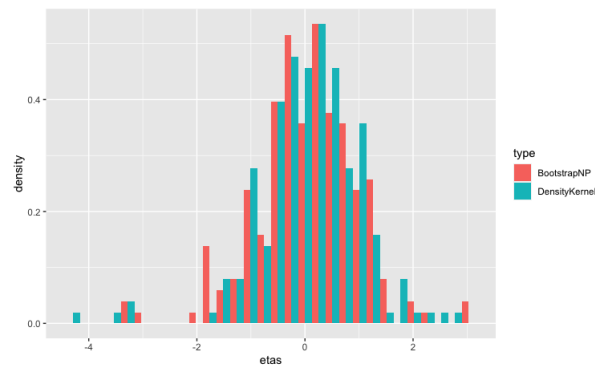


FIGURE C.2 – Histogrammes en position côte à côte (dodge) de 200 (η_t) simulés par "Bootstrap Non-Paramétrique" et par méthode d'estimation par noyau. Les (η_t) proviennent de l'action GOOG (600 jours 2017-2020).

Annexe D

Graphiques des comparaisons à d'autres modèles

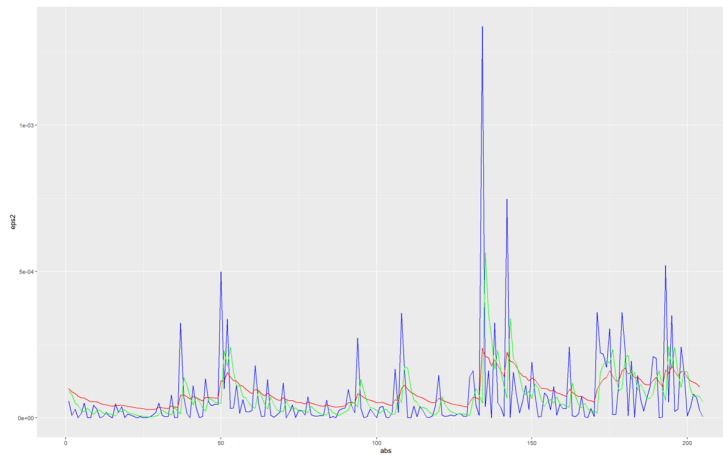


FIGURE D.1 – Représentation des ε^2 en bleu, des prédictions des rendements au carré du GARCH(1,1) en rouge et du MGE en vert.

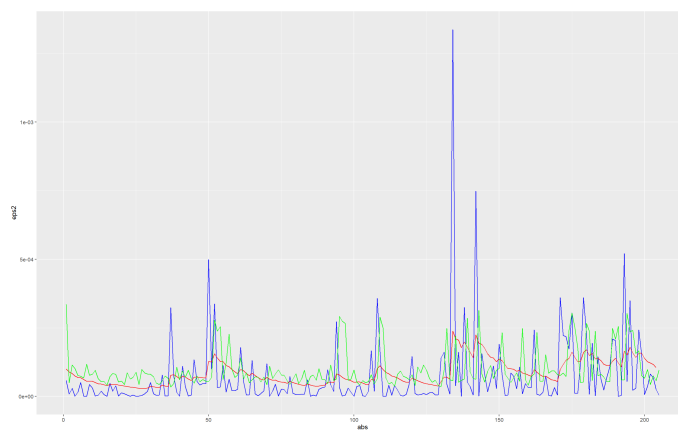


FIGURE D.2 – Représentation des ε^2 en bleu, des prédictions des rendements au carré du GARCH(1,1) en rouge et du HMM en vert.

Séries financières	Prédictions équivalentes	GARCH meilleur	NN meilleur
DAX	1-2		10
Arcelor Mittal	1-2-10		
EuroStoxx50	1-10	2	
Google	1-2		10
Stellantis	2		1-10
Walmart	2-10		1
FTX	1-2-10		

TABLE D.1 – Tableau de comparaison du NN et du modèle GARCH pour différents horizons. Le NN prend les 100 variables passées en argument.