

# Explication de l'évaluation de la puissance du test pour un changement de GARCH

Louis Geist

22 mars 2023

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappel (Back)Test</b>	<b>2</b>
1.1	L'hypothèse nulle . . . . .	2
1.2	Test du Khi-deux . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Représentation</b>	<b>3</b>
2.1	Simulation . . . . .	3
2.2	Représentation graphique . . . . .	3
2.2.1	Exemple de graphiques . . . . .	3
2.2.2	Légende de la représentation . . . . .	3
2.2.3	Lecture . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Résultats et interprétations</b>	<b>4</b>
3.1	Variation du cut de changement de GARCH . . . . .	4
3.2	Variation du nombre de jours de simulation . . . . .	4
3.2.1	dans le cas favorable : cut=0.8 . . . . .	4
3.2.2	dans le cas défavorable : cut=0.4 . . . . .	4
3.3	Variation de la loi du bruit blanc . . . . .	5
3.4	Interprétation générale . . . . .	5
3.4.1	Justification de la droite d'acceptation de la partie 3.2.1 . . . . .	5
3.4.2	Étude pour alpha+beta constant . . . . .	5
3.4.3	Conclusion sur la zone d'acceptation dans le domaine de la condition de stationnarité	6

# Introduction

But : tester la puissance du test pour un changement de GARCH(1,1).

On appelle **changement de GARCH(1,1)** une modification du paramètre  $\theta$  du GARCH(1,1) à une date "cut" (exprimé en pourcentage de l'échantillon totale). En l'occurrence, nous nous concentrons sur la variation des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .

## 1 Rappel (Back)Test

### 1.1 L'hypothèse nulle

$H_0$  :

- les rendements suivent un modèle GARCH,
- $\eta_t \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ . (*Cette hypothèse est forte.*)

### 1.2 Test du Khi-deux

Tester si bien 95% rendements sont bien dans l'intervalle  $\mathcal{J}_{t-1}(0.05) = [q_{0.025}\hat{\sigma}_t; q_{0.975}\hat{\sigma}_t]$ .

On pose  $Z_t := \mathbb{1}(\varepsilon_t \in \mathcal{J}_{t-1}(\alpha))$ .

On a  $Z_t \sim \mathcal{B}(\alpha)$  et par indépendance des  $Z_t$ ,  $\sum_{t=1}^N Z_t \sim \mathcal{B}(N, \alpha)$ .

Un test d'adéquation du khi-deux à une  $\mathcal{B}(0.95)$  est réalisé sur la statique de test afin d'obtenir une p-valeur sur l'hypothèse "Les IC contiennent 95% des réalisations".

On choisit comme niveau de rejet du test 0.05. Pour chaque "case" du graphique, on fait la moyenne d'acceptation du test sur un nombre  $n\_path$  de trajectoires simulées (typiquement  $n\_path$  vaut 10 à 25, pour avoir une significativité et un temps de calcul raisonnable).

## 2 Représentation

### 2.1 Simulation

On simule des  $\eta_t \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ , ce qui correspond exactement à l'hypothèse du test. On est donc dans le cas le plus favorable<sup>1</sup>.

On en simule  $n$  (qu'on interprète comme un nombre de jours). Ces  $n$  simulations sont séparées selon les séparateurs suivants :

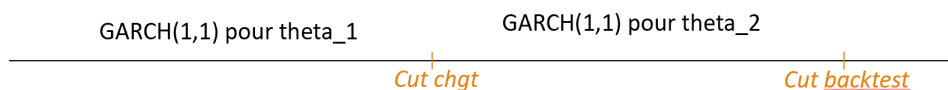


FIGURE 1 – Schéma de simulation changement GARCH

Nous avons donc deux séparateurs des données, qu'on appellera cut. Le cut du back test correspond au changement entre données d'entraînement et données de test. Nous prendrons typiquement cette séparation à 80% des données pour l'ensemble des données d'entraînement, 20% des données pour l'ensemble de test.

Le "cut chgt" sur la figure 1 est le cut du changement de GARCH(1,1), comme expliqué en introduction à la page 2. Dans la suite, nous désignerons cette séparation uniquement par "cut".

### 2.2 Représentation graphique

#### 2.2.1 Exemple de graphiques

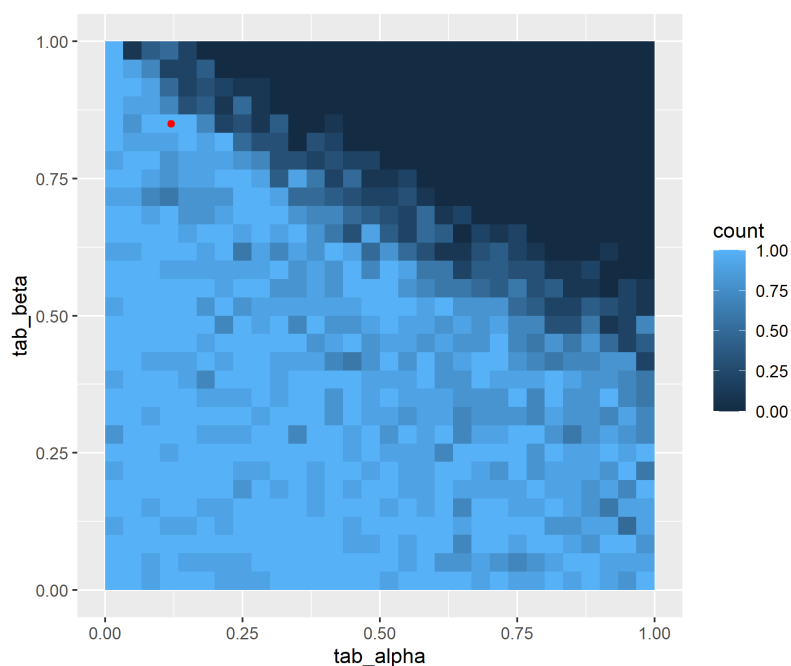


FIGURE 2 – Carte bleue - ( $n_{\text{path}} = 10$ ,  $n = 2000$ ,  $\text{cut}=0.4$ )

#### 2.2.2 Légende de la représentation

- abscisse :  $\alpha$  du paramètre  $\theta_2$
- ordonnée :  $\beta$  du paramètre  $\theta_2$
- La valeur de  $\omega$  ne varie pas :  $\omega_1 = \omega_2$
- point rouge :  $\theta_1$  ( $\theta_1 = (0.0001, 0.12, 0.85)^T$ , on le fait pas varier dans la suite)
- couleur bleue : le taux d'acceptation du test

1. la robustesse/souplesse du test pour des lois est testée autre part.

### 2.2.3 Lecture

Les couples  $(\alpha, \beta)$  pour  $\theta_2$  du coin supérieur droit du graphique mènent à un rejet à 100% du test.  
Remarque : cela correspond au domaine où la condition de stationnarité n'est pas respectée.

## 3 Résultats et interprétations

### 3.1 Variation du cut de changement de GARCH

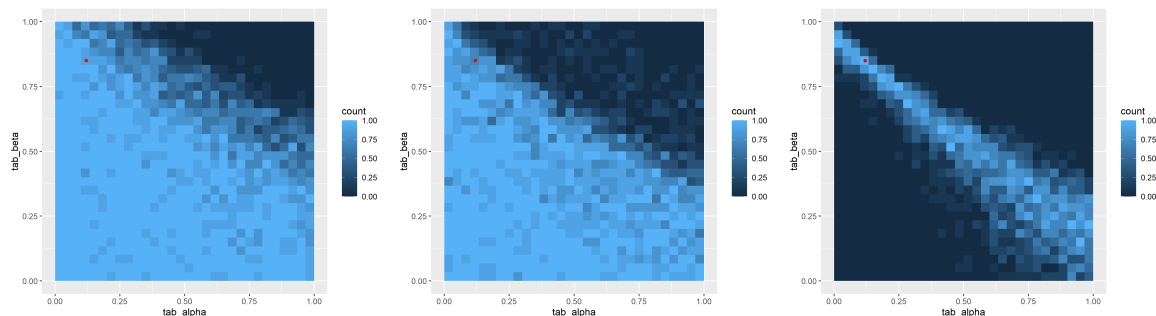


FIGURE 3 – Variation du cut de changement de GARCH (0.4 ; 0.6 ; 0.8) ; pour  $n=1000$  et  $n\_path=10$

### 3.2 Variation du nombre de jours de simulation

#### 3.2.1 dans le cas favorable : cut=0.8

Le cas  $\text{cut} = 0.8$  est particulier, car le cut du changement de GARCH coïncide avec le cut du backtest.

Cela signifie que l'estimation<sup>2</sup> du paramètre  $\theta$  est exactement réalisé sur l'échantillon qui n'est que simulé selon  $\theta_1$ . Quant à l'échantillon de test, il est exclusivement simulé par selon le paramètre  $\theta_2$ .

Lorsque les paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont trop distincts, le test devrait "facilement" pouvoir rejeter l'hypothèse nulle.

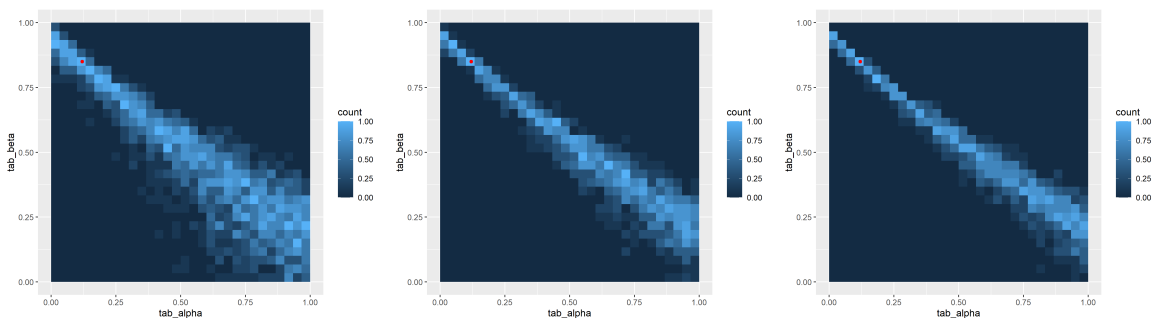


FIGURE 4 – Variation du nombre de jours ( $n=1000, 2000, 3000$ ) pour  $\text{cut}=0.8$ ,  $n\_path=10$

Nous constatons que le test ne parvient pas à rejeter l'hypothèse nulle sur la droite  $\alpha_2 + \beta_2 = \alpha_1 + \beta_1$ .

#### 3.2.2 dans le cas défavorable : cut=0.4

Le cas  $\text{cut}=0.4$  correspond à :

- training set :
  - 50% simulé par GARCH(1,1) de paramètre  $\theta_1$ ,
  - 50% simulé par GARCH(1,1) de paramètre  $\theta_2$ ,
- test set : 100% simulé par GARCH(1,1) de paramètre  $\theta_2$ .

2. notre fonction de backtest essaie d'estimer un unique paramètre  $\theta$  pour toute la longueur, il ignore le changement de paramètre

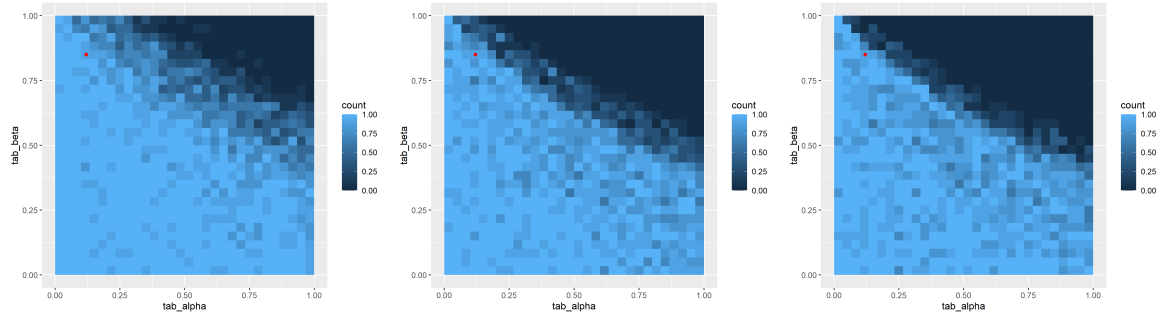


FIGURE 5 – Variation du nombre de jours (n=1000, 2000, 3000) pour cut=0.4, n\_path=10

### 3.3 Variation de la loi du bruit blanc

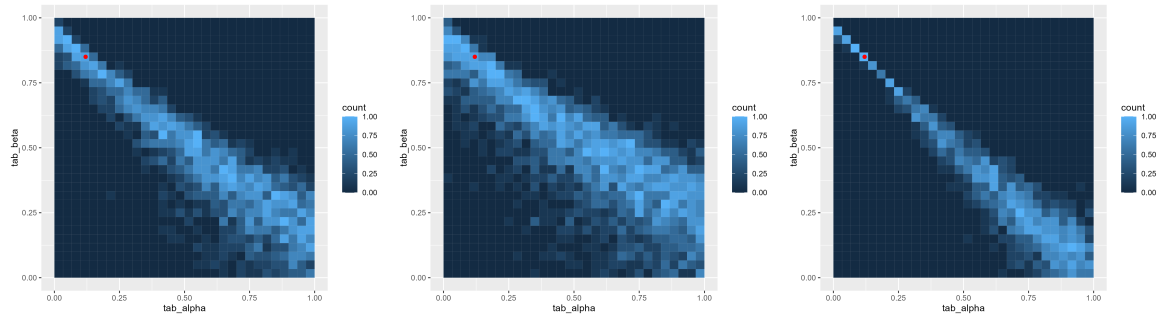


FIGURE 6 – Variation de la loi des eta (normale, Student à 5 DDL, uniforme - centrées réduites) pour cut=0.4, n\_path=10

### 3.4 Interprétation générale

#### 3.4.1 Justification de la droite d'acceptation de la partie 3.2.1

On a  $V(\epsilon_t) = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$  qui est constant pour  $\alpha + \beta$  constant.

Or le test repose sur  $Z_t = \mathbb{1}_{\epsilon_t \in [-1,96\hat{\sigma}_t; 1,96\hat{\sigma}_t]}$ .

D'une part,  $\hat{\sigma}_t$  est estimé par récurrence, avec comme première valeur arbitraire  $\hat{\sigma}_0 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$ .

D'autre part, les valeurs estimées  $\hat{\sigma}_t$  ne devraient jamais trop s'éloigner de leur espérance théorique  $\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$ .

#### 3.4.2 Étude pour alpha+beta constant

Il s'agit toujours d'essayer de comprendre la droite d'acceptation, c'est-à-dire la situation dans laquelle le cut du changement de GARCH coïncide avec le cut de backtest.

On étudie donc ici comment nos fonctions d'estimation réagissent pour un changement de GARCH avec la somme  $\alpha + \beta$  constante.

Afin de pouvoir comparer les résultats, on s'intéresse à deux cas :

- pas de changement de GARCH,
- changement de GARCH, tel que  $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$  (en notant  $\theta_1$  le paramètre GARCH qui génère avant le cut,  $\theta_2$  le paramètre qui génère après  $\theta_2$ ).

Puisque le *training set* est le même dans les deux cas énoncés, les estimateurs de  $\theta$  sont égaux presque sûrement.

**REMARQUE ANNEXE :** On dirait, surtout pour les 50 premières dates, que les  $\sigma^2$  sont toujours sous-estimés..

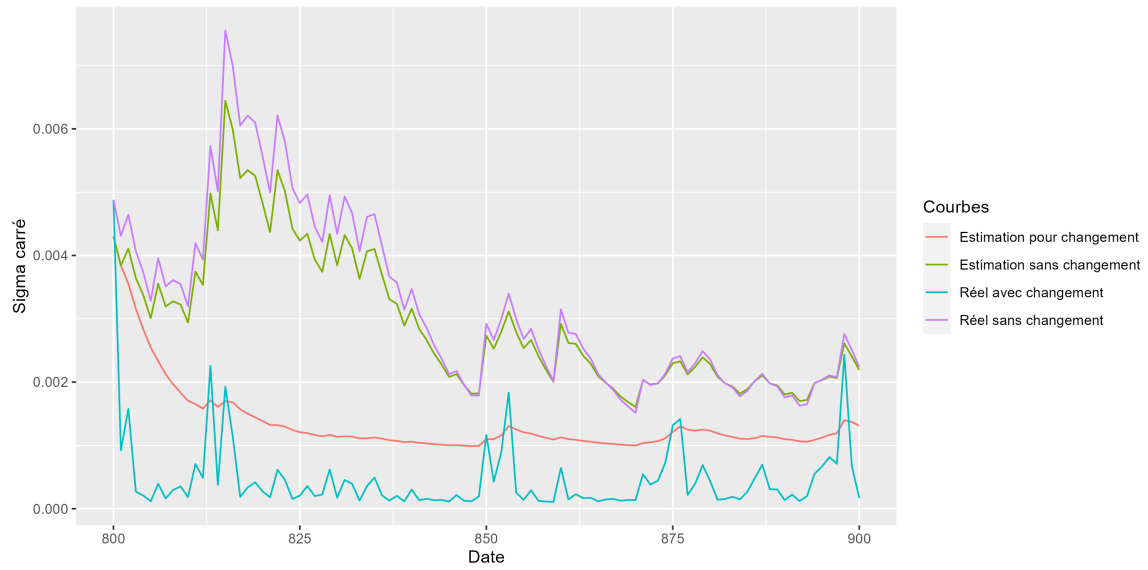


FIGURE 7 – Graphique des carrés des sigma en fonction du temps dans le *test set* du back test.

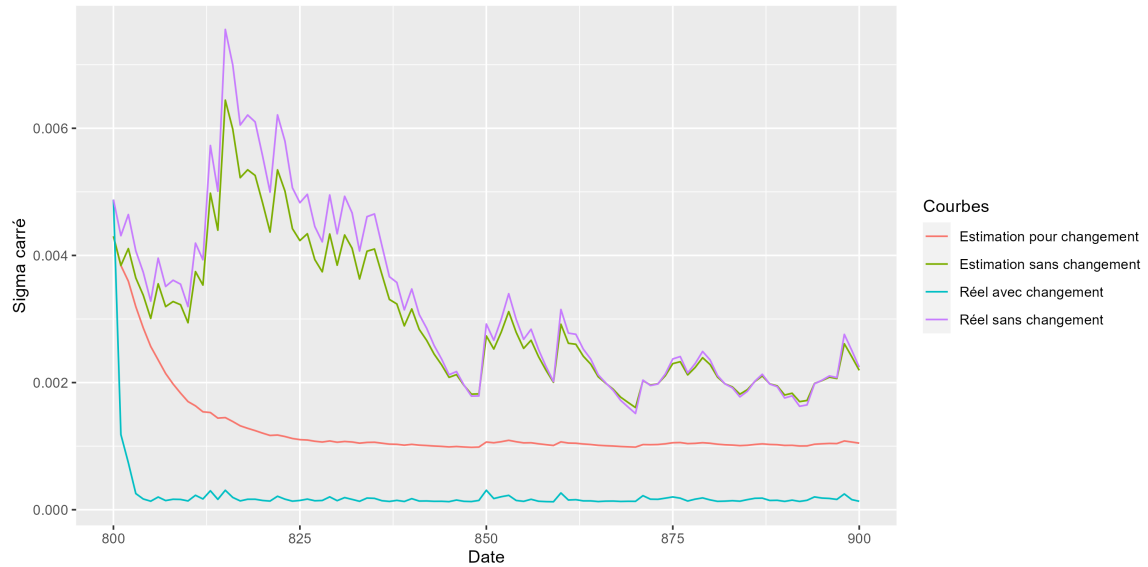


FIGURE 8 – Graphique des carrés des sigma en fonction du temps dans le *test set* du back test pour un paramètre de changement hors de la droite ( $\theta = (0.0001, 0.2, 0, 2)$ )

### 3.4.3 Conclusion sur la zone d'acceptation dans le domaine de la condition de stationnarité

Nous ne l'expliquons pas.

”Cela montre que le test est peu puissant. Mais la puissance augmente quand meme avec la taille de l'échantillon. *Avez-vous essayé une très grande taille ?*”

”Noter aussi que quand le cut est à 0.4 l'estimateur sera une sorte de moyenne de  $\theta_{1.1}$  et  $\theta_{2.2}$ . Donc si  $\theta_{2.2}$  est petit, l'estimateur le sera aussi et peut-être pas si loin de  $\theta_{2.2}$ . Dans la période de backtest, les données sont simulées avec  $\theta_{2.2}$  mais l'estimateur de la volatilité peut être proche de la vraie valeur, ce qui peut expliquer que le test ne rejette pas.”