

# Note de synthèse du projet de statistiques appliquées : Prédiction des carrés des rendements à moyen ou long horizon

Thomas Aujoux      Maël Duverger      Louis Geist      Justin Ruelland

26 mai 2023

## Introduction

L'objet de notre travail est la prédiction des puissances des rendements financiers à moyen ou long horizon. Les données utilisées sont des prix journaliers, nous avons choisi les prix à l'ouverture du marché. Puisque les prix ne constituent pas une série temporelle stationnaire, nous en considérons une transformation, en l'occurrence les rendements, qui sont définis comme le logarithme du rapport des prix.

Les processus GARCH ont été utilisés pour modéliser les rendements. On dit qu'un processus  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  suit un modèle **GARCH(1,1)** de paramètre  $\theta = (\omega, \alpha, \beta)$  s'il existe un bruit blanc fort normalisé  $\eta$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \text{ avec } \begin{cases} \sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\ \omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \end{cases}$$

Différentes prévisions sont possibles : la prédiction des rendements, des carrés des rendements et la prédiction d'intervalles de confiance de ces mêmes quantités. La prédiction à horizon  $h \in \mathbb{N}^*$  correspond à la prédiction de  $X_{t+h}$  sachant  $\sigma(\{X_u, u \leq t\})$  ; différents horizons de prédiction ont été distingués dans notre travail.

## 1 Validation du modèle pour la prédiction à horizon 1

A partir d'une série financière réelle, nous souhaitons mettre en place un test pour déterminer si la modélisation par un modèle GARCH(1,1) est crédible. On appelle ce procédé *backtest*. Pour ce faire, nous séparons la série étudiée en deux parties. Sur les 80% premières données (les données d'entraînement), nous estimons les paramètres du modèle en supposant que la série est une réalisation d'un GARCH(1,1). Sur les 20% dernières données (le jeu de données de test), nous comparons les prédictions du modèle GARCH estimé avec les vraies valeurs. L'idée du *backtest* est la suivante : si les écarts (dans un sens que l'on va préciser) entre les vraies valeurs et les prédictions du GARCH sont trop élevés, le modèle n'est pas validé.

L'estimation est faite par la méthode du Quasi-Maximum de Vraisemblance (QML<sup>1</sup>). Cette méthode consiste à calculer la vraisemblance du modèle en remplaçant la densité inconnue des  $\eta_t$  par la densité d'une loi normale centrée réduite. Quelle que soit la loi suivie par les  $\eta_t$ , l'estimateur obtenu par QML est convergent et asymptotiquement normal.

A horizon 1, la prédiction optimale des rendements (au sens de l'espérance conditionnelle) est 0. L'encadrement de la série par un intervalle de confiance est donc plus pertinent pour faire de la prédiction. Pour *backtester* le modèle, nous vérifions que 95% des observations des données de test sont bien comprises dans les intervalles de confiance à 95% donnés par la modèle GARCH. Un test d'adéquation du Khi-deux est employé pour déterminer si l'écart entre la fréquence empirique et 0.95 est significatif.

---

1. Quasi-Maximum Likelihood en anglais

On distingue deux backtests, le *backtest* gaussien et le *backtest* empirique. Le backtest gaussien fait une hypothèse de normalité sur les  $\eta_t$  du modèle GARCH pour obtenir les intervalles de confiance. Le *backtest* empirique utilise des intervalles de confiance construits à partir des quantiles empiriques des  $\hat{\eta}_t$  estimés. Les résultats de ces deux *backtests* sont présentés dans le tableau 1.

Série financière	p-valeur <i>backtest</i> gaussien	p-valeur <i>backtest</i> empirique
CAC40	0.23	0.74
DAX	0.20	0.11
ArcelorMittal	0.18	0.86
Nikkei 225	0.95	0.72
Euro Stoxx 50	0.48	0.20
Google	0.32	0.19
Stellantis	0.73	0.56
Walmart	0.48	0.11
EUR/USD	0.04	0.09

TABLE 1 – *Backtests* (gaussiens et empiriques) sur différentes séries financières réelles, les séries sont prises sur les 5 dernières années jusqu’au 2 mai 2023.

Le modèle GARCH(1,1) est rejeté à 10% seulement pour le taux de change euro/dollar (EUR/USD).

## 2 Test de la puissance du test

La validation du modèle est d’autant plus fondée que la puissance du *backtest* est grande. Nous avons décidé de tester cette puissance dans différents cas, en particulier le cas d’un changement de GARCH que nous exposons ici.

On appelle **changement de GARCH(1,1)** une modification du paramètre  $\theta$  du GARCH(1,1) à une certaine date, que nous désignerons par *cut*.

Nous souhaitons obtenir un unique graphique qui illustre la puissance du test pour un changement de GARCH. Nous nous sommes concentrés sur la variation des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  et avons ainsi choisi d’utiliser un quadrillage de l’ensemble  $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$ .

### 2.1 Algorithme pour créer la figure 2

Pour le bruit blanc, on simule des  $\eta_t \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ , ce qui correspond exactement à l’hypothèse du test. On est donc dans le cas le plus favorable, car le quasi-maximum de vraisemblance est alors en réalité un maximum de vraisemblance.

On en simule  $n$ . On se place dans le cas particulier où l’ensemble d’apprentissage correspond à une série simulée selon un premier paramètre et l’ensemble de test correspond à la suite de la série dont le paramètre du GARCH a changé. Nous prenons *cut* = 80% qui est une valeur usuelle de taille d’ensemble de test. Nous noterons  $\theta_1$  le paramètre du GARCH avant le *cut* et  $\theta_2$  le paramètre du GARCH après le *cut*.

### 2.2 Légende de la figure 2

- abscisse :  $\alpha$  du paramètre  $\theta_2$
- ordonnée :  $\beta$  du paramètre  $\theta_2$
- la valeur de  $\omega$  ne varie pas :  $\omega_1 = \omega_2$
- point rouge :  $\theta_1$  ( $\theta_1 = (0.0001, 0.12, 0.85)^T$ , on le fait pas varier dans la suite)
- couleur bleue : le taux de non-rejet du test au niveau 5%
- pour chaque case de la grille, 10 trajectoires de prix ont été simulées.

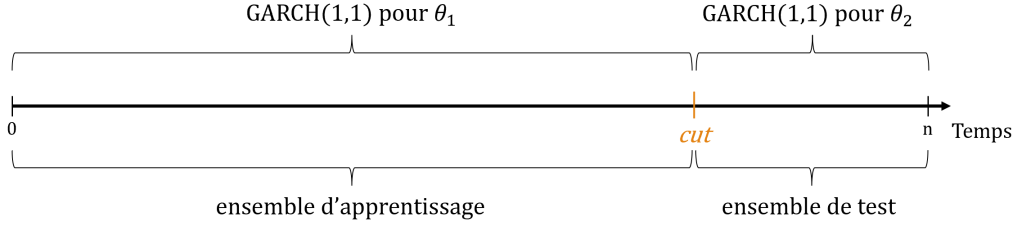


FIGURE 1 – Schéma des ensembles d'apprentissage et de test en relation avec le changement de GARCH

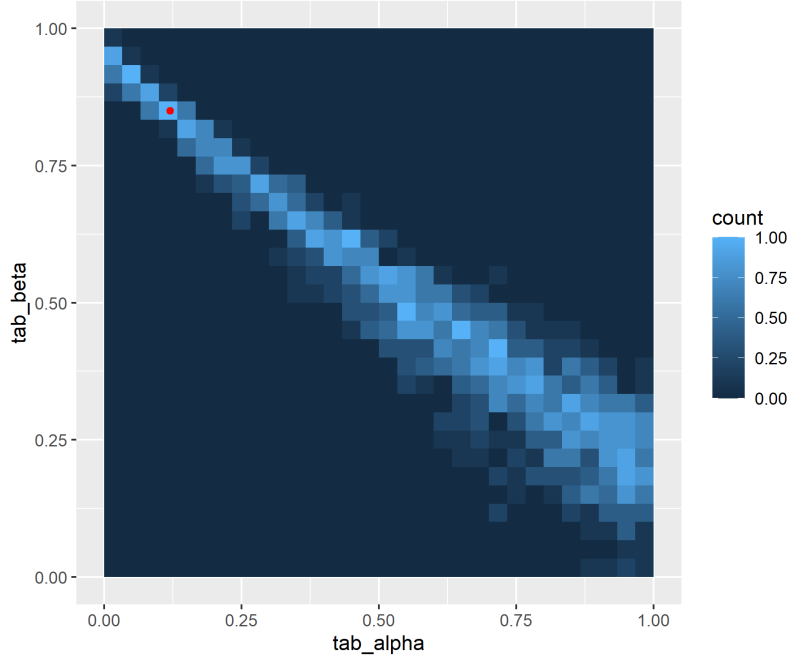


FIGURE 2 – Taux de non-rejet du test au niveau 5% du *backtest*

### 2.3 Commentaire/interprétation de la droite de non-rejet

La zone de d'absence de rejet sur la figure 2 semble correspondre à une droite dans le plan  $(\alpha, \beta)$ , plus précisément à l'ensemble des couples tels que  $\alpha + \beta$  est constant. Or, cet ensemble est l'ensemble des modèles GARCH(1,1) qui ont la même variance pour  $(\varepsilon_t)$  ( $\mathbb{V}(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$ ).

Ainsi, le *backtest* semble avoir une puissance faible dans certains contextes, notamment pour un changement de paramétrisation de GARCH(1,1) qui laisse la variance constante.

## 3 GARCH invaincu

Afin d'établir l'intérêt d'une modélisation GARCH pour l'estimation des rendements au carré d'une série financière, nous avons cherché à la comparer statistiquement à d'autres modèles. Le test de Diebold-Mariano permet de déterminer si une méthode de prévision a une erreur quadratique moyenne significativement plus faible qu'une autre méthode. Les méthodes alternatives comparées au modèle GARCH sont : une moyenne glissante, un modèle de Markov caché (HMM<sup>2</sup>) et des méthodes de *Machine Learning* (dont un réseau de neurones).

---

2. Hidden Markov Model en anglais

Sur les séries financières testées, le GARCH est globalement invaincu (au sens de du test de Diebold-Mariano) à courts et moyens horizons par les méthodes de *ML*. De plus, le modèle GARCH l'emporte sur la moyenne glissante exponentielle et le HMM. À de petits horizons ( $\leq 5$ ) de prédiction, le GARCH est généralement meilleur face aux autres modélisations.

Il est battu par le réseau de neurones sur des horizons plus longs (par exemple 10). Toutefois, un tel réseau de neurones nécessite un jeu de données important pour la calibration et a une complexité algorithmique élevée.

Ces résultats soulignent l'intérêt d'une modélisation GARCH pour l'estimation des rendements au carré seulement à courts et moyens horizons. On notera tout de même que le GARCH ne bat pas non plus le réseau de neurones pour des petits horizons. Nous illustrons ces résultats dans la table 2 comparant les différentes prévisions des rendements au carré du CAC40(2015-2019). Des comparaisons sur d'autres séries financières, telles que les actions d'Apple ou de Google, donnent des résultats similaires.

Méthode	Horizon	P-valeur DM	Stat DM
MA	1	0.00561	-2.7995
HMM	1	0.0002252	-3.7561
OLS-40	1	0.278	-1.085
OLS-100	1	0.0019	-3.139
NN-40	1	0.247	-1.160
NN-100	1	0.608	0.513
OLS-40	2	0.107	-1.613
NN-40	2	0.572	0.565
OLS-40	5	0.962	0.047
NN-40	5	0.396	0.849
OLS-40	10	0.510	0.659
NN-40	10	0.041	2.052
OLS-100	10	0.215	-1.241
NN-100	10	0.122	-1.549

TABLE 2 – Tableau de comparaison des méthodes alternatives et du modèle GARCH pour différents horizons et différentes structures des méthodes. OLS- $x$  (NN- $x$ ) signifie que la régression linéaire (resp. le NN) prend  $x$  variables en entrée. Les prédictions sont faites sur les rendements au carré du CAC40(01/15 - 01/19). P-valeur DM et Stat DM sont respectivement la p-valeur et la statistique de test du test de Diebold-Mariano en comparaison avec la prédiction du modèle GARCH. Une statistique négative est ici favorable au modèle GARCH.

## 4 Conclusion

La modélisation GARCH des rendements financiers permet de rendre compte efficacement des propriétés des séries financières. Elle donne aussi des prévisions sur les rendements et leur carré pour différents horizons. Ces prévisions peuvent être encadrées par des intervalles de confiance. Cette modélisation a été validée par les *backtests*. De plus, l'erreur quadratique moyenne d'un modèle GARCH est statistiquement semblable à d'autres modélisations plus complexes.

Ce projet nous a apporté des connaissances et de l'expérience en termes de modélisation et d'estimation statistiques. Il nous a donné envie d'approfondir l'étude de certains modèles et nous a fourni de nouveaux outils pour des projets futurs.