A1

$u_R = i_s \cdot R$

$i_1 = C_1 \frac{du_1}{dt} \Rightarrow \dot{u}_1 = \frac{i_1}{C_1}$

$\dot{u}_2 = \frac{i_2}{C_2}$

$u_1 - u_2 = 0$

$u_s - u_R - u_1 = 0$

$i_s - i_1 - i_2 = 0$

$x_1 = u_1, x_2 = u_2 \quad z_1 = i_1, z_2 = i_2, z_3 = u_R, z_4 = i_s, u = u_s$

$\underline{x} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \underline{z} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_R \\ i_s \end{pmatrix}$

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{z}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{z}$$

$$0 = g_1(\underline{z}) = (1 \; 1 \; 0 \; -1) \cdot \underline{z}$$

$$0 = g_2(\underline{z}) = (0 \; 0 \; -1 \; R) \cdot \underline{z}$$

$$0 = g_3(\underline{x}, \underline{z}, u) = (0 \; 0 \; 1 \; 0)\, \underline{z} + (1 \; 0)\, \underline{x} - u$$

$$0 = g_4(\underline{x}) = (1 \; -1)\, \underline{x}$$

Indexreduktion:

1\. $\frac{dg}{dt}$:

$$(1 \; 1 \; 0 \; -1) \cdot \dot{\underline{z}} = 0 \qquad (1)$$

$$(0 \; 0 \; -1 \; R) \cdot \dot{\underline{z}} = 0 \qquad (2)$$

$$(0 \; 0 \; 1 \; 0)\, \dot{\underline{z}} + (1 \; 0)\, \dot{\underline{x}} - \dot{u} = 0 \qquad (3)$$

$$(1 \; -1)\, \dot{\underline{x}} = 0 \qquad (4)$$

① ② ③ sind schon DGL für $\underline{z}$

Aber ④ nicht.

2. $\frac{d^2 y}{dt^2}$: $(1 \quad -1)\, \ddot{\underline{x}} = 0$

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = 0$$

$$\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2 = 0$$

$$\frac{\dot{i}_1}{C_1} - \frac{\dot{i}_2}{C_2} = 0$$

$$\frac{1}{C_1}\dot{z}_1 - \frac{1}{C_2}\dot{z}_2 = 0$$

$$\left(\frac{1}{C_1} \quad -\frac{1}{C_2} \quad 0 \quad 0\right)\dot{\underline{z}} = 0$$

$\longrightarrow$ Index = 2, wegen 2 mal Differenzialion

Anfangswerte

$U_s(0) = 10\,V \qquad u(0) = 10$

$U_1(0) = U_2(0) = 0 \Rightarrow x_1(0) = x_2(0) = 0$

$R = 100\,\Omega \quad C_1 = 0{,}01F \quad C_2 = 0{,}02F$

Aus Indexreduktion

$$\begin{cases} z_3(0) + x_1(0) - u(0) = 0 \\ z_3(0) - z_4(0)\cdot R = 0 \\ \frac{1}{C_1} z_1 - \frac{1}{C_2} z_2 = 0 \\ z_1(0) + z_2(0) - z_4(0) = 0 \end{cases}$$

$$z_3(0) = u(0)$$

$$z_4(0) = \frac{z_3(0)}{R}$$

$$z_2(0) = \frac{u(0)\, C_2}{R(C_1+C_2)}$$

$$z_1(0) = \frac{u(0)\, C_1}{R(C_1+C_2)}$$

Auf 2 Trapezmethode

$$\begin{cases} x_{i+1} = \hat{x}_i + \frac{h}{2}\left[f(\hat{x}_i, \hat{z}_i) + f(\hat{x}_{i+1}, \hat{z}_{i+1})\right] \\ 0 = g(\hat{x}_{i+1}, \hat{z}_{i+1}) \end{cases}$$

Umformung

$$\underline{\varphi}(\underline{P}) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i - \frac{h}{2}\left[f(\hat{x}_i, \hat{z}_i) + f(\hat{x}_{i+1}, \hat{z}_{i+1})\right] \\ g(\hat{x}_{i+1}, \hat{z}_{i+1}) \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\underline{P} = (\hat{x}_{i+1} \quad \hat{z}_{i+1})^T$$

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{z}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= M_1} \cdot \underline{z}$$

$$\underline{0} = g(\bar{x}, \underline{z}, u) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & R \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_2} \underline{z} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{M_3} \underline{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{M_4} u$$

Lösung $\underline{\varphi}(\underline{P}) = \underline{0}$ mit Newton-Raphson-Verfahren:

$$\underline{P}_{n+1} = \underline{P}_n - \underline{J}(\underline{P}_n)^{-1} \underline{\varphi}(\underline{P}_n), \text{ solange bis } \|\underline{P}_{n+1} - \underline{P}_n\| \leq \varepsilon$$

$$\underline{J}(\underline{P}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{i+1}} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_{i+1}} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{i+1}} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_{i+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}$$

hier gilt: $\underline{J}(\underline{P}) = \begin{pmatrix} I & -\frac{h}{2} M_1 \\ M_3 & M_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{h}{2C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{h}{2C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & R \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analytische Lösung von $U_2(t)$

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_S(s)} = \frac{\frac{1}{sC_2} \| \frac{1}{sC_1}}{\left(\frac{1}{sC_2} \| \frac{1}{sC_1}\right) + R} = \frac{1}{1 + s(C_1+C_2)R}$$

$$U_S(t) = 10$$
$$U_S(s) = \frac{10}{s}$$
$$U_2(s) = G(s) \cdot U_S(s) = \frac{10}{s + s^2(C_1+C_2)R}$$

$$= \frac{10}{s} - \frac{10(C_1+C_2)R}{1 + s(C_1+C_2)R}$$

$$= 10\left(1 - e^{-\frac{t}{R(C_1+C_2)}}\right)$$

Kriterium für eine numerische Genauigkeit

$$\lim_{h \to 0} (\det J) \neq 0$$

Überprüfung: hier $\det J = \dfrac{h^2 + 2C_1 h r + 2C_2 h r}{4 C_1 C_2}$

hier $\lim_{h \to 0} (\det J) = 0 \Rightarrow$ nicht erfüllt

↳ Konvergenz Probleme und und Simulationsfehler, wenn h sehr klein ist

BILD 1, 2, 3 mit $h = 0{,}1$

BILD 3 unten zeigt, dass die Zahl zum Konvergenz für $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$ immer gleich 2

BILD 4 mit $h = 10^{-4}$ (10^{-5} unmöglich auf mein LAPTOP)

BILD 4 oben zeigt ein GDF $\leq 0{,}19$

wenn $h = 0{,}1$, $GDF \leq 3{,}4 \times 10^{-4}$