

Tillåtna hjälpmedel: Anteckningar, böcker, miniräknare, Python, R, och all möjlig skrivutrustning.

OBS! Alla lösningar skall göras **enskilt**, samarbete är **ej** tillåtet.

Lösningarna skall vara väl motiverade och försedda med förklarande text. Alla steg i dina uträkningar o.s.v. ska redovisas för full poäng. Om du inte kan få till en fullständig lösning, försök då att ange i ord hur du tänkt och hur långt du kommit. Totalpoängen på denna skrivtenta är 40 poäng och för godkänt behövs 21 poäng, med minst 5 poäng på statistikdelen och minst 10 poäng på matematikdelen.

Om alla inlämningsuppgifter, datalabbar, samt skrivtentan är godkända bestäms betyget på kursen 'Matematik och statistik för biologer' av poängen på skrivtentan. Betyg 3: 21p-27p, Betyg 4: 28p-35p, Betyg 5: 36p-40p.

Matematikproblem

Lösningar på dessa problem måste göras för hand. Inga hänvisningar till kod i Python eller R, eller till grafer gjorda med hjälp av en dator/miniräknare kommer godkännas som lösning. Dessa verktyg får däremot användas för att kontrollera att lösningen är rätt, och detta behöver inte redovisas.

1. (5p) Thomas H. Dawson 2014 visade i en studie på däggdjur att det finns ett allometriskt samband mellan massan m , mätt i kg, och radien på kapillärerna r , mätt i mm. Sambandet ges av

$$r = 0.0027m^{1/12}.$$

Använd sambandet för att svara på följande frågor:

- (a) Vad är radien på kapillärerna på ett däggdjur som väger 75 kg?
 - (b) Om kapillärerna på ett djur har radien 0,004 mm, hur stor bör massan på djuret vara?
 - (c) Om vi plottar det allometriska sambandet i ett diagram med bägge axlarna logaritmerade får vi en rät linje $R = kM + c$ i de nya variabler $R = \log r$ och $M = \log m$. Bestäm linjens ekvation, d.v.s. hitta k och c .
2. (5p) Betrakta funktionen

$$f(x) = e^{2/3x^3 - x/2}.$$

- (a) Visa att derivatan av $f(x)$ ges av

$$f'(x) = 2e^{2x^3/3 - x/2} \left(x^2 - \frac{1}{4} \right).$$

- (b) Hitta det största och minsta värdet av $f(x)$ på intervallet $[0, 2]$.
 - (c) Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $x = 0$.
3. (5p) Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Visa att egenvärdena till matrisen A är $\lambda_1 = -1/2$ och $\lambda_2 = 1$.
- (b) Hitta egenvektorer till A .
- (c) Diagonalisera matrisen A , d.v.s. hitta matriser D , C och C^{-1} , där D är en diagonalmatris, så att $A = CDC^{-1}$.
- (d) Beräkna A^7 .
(Tips: Använd ditt svar i (c).)

4. (5p) Betrakta differensekvationen

$$3x_{n+2} = 6x_{n+1} + \frac{16}{3}x_n,$$

med begynnelsevärden $x_0 = 1$ och $x_1 = 2$.

- (a) Hitta en explicit formel för x_n .
 - (b) Beräkna x_9 .
5. (5p) Givet är det kontinuerliga dynamiska systemet, $y(t)$, som bestäms av differentialekvationen

$$y' = (y^2 - 2y)e^y.$$

- (a) Bestäm alla jämviktslösningar till systemet.
- (b) Bestäm stabiliteten på lösningarna du fann i (a), dvs avgör om de är stabila/attraherande eller instabila/repellerande.

Statistikproblem

Lämna in svaren till statistikdelen **via GM**. Dina svar ska bestå dels av text där du besvarar frågorna och förklarar hur du löst problemen, och dels av den tillhörande R-koden. Ange tydligt vilka metoder du använder, vilka hypoteser som testas (om några) och vad resultatet blir.

- (5p) I boken *The Effect of Cross- and Self-fertilization in the Vegetable Kingdom* av C. Darwin (publicerad 1876) beskrivs ett försök för att undersöka om självpollinerad majs (*Zea mays*) får lika starka plantor som korspollinerad majs. Forskaren odlade en korspollinerad planta och en självpollinerad planta sida vid sida under identiska förhållanden. Efter en viss tid mätte han sedan höjden (enhet: tum) för vardera planta. Detta upprepades 15 gånger. Datamaterialet finns i filen `majs.csv`.

 - Får självpollinerad majs lika starka (höga) plantor som korspollinerad majs enligt dessa data?
 - Ange ett 90 % konfidensintervall för skillnaden i höjd mellan korspollinerade och självpollinerade majsplantor.
- (5p) I artikeln *Ripening of Nectarine Fruit* av Harker & Maindonald (publicerad i *Plant Physiology* 1994) ville man ta reda på om den elektriska resistansen i nektariner (*Prunus persica*) förändrades när frukten mognade. Syftet var att förstå hur fruktens vävnad förändras under mognadsprocessen. Deras datamaterial finns i filen `nektarin.csv` och består av två kolumner: `juice` (andel juice i frukten, i procent) och `ohms` (resistansen i ohm).

 - Anpassa en lämplig regressionsmodell som beskriver hur andelen juice i frukten påverkar resistansen. Ange hur den anpassade modellen ser ut. Finns det ett samband?
 - Vilken resistans kan man utifrån din modell förvänta sig i en mogen nektarin där andelen juice i frukten är 50 %?
- (5p) I artikeln *Evaluation of bat adenoviruses suggests co-evolution and host roosting behaviour as drivers for diversity* av Ntumvi *et al.* (publicerade i *Microbial Genomics* 2021) undersöktes förekomsten av adenovirus hos olika fladdermusarter i Kamerun. Forskarna tog blodprov från ett stort antal fladdermöss tillhörande flera olika arter och testade dessa för förekomsten av adenovirus med PCR-analys. För familjen rundbladsnäsor (*Hipposideridae*) bar 41 av 413 undersökta individer på adenovirus. För familjen flyghundar (*Pteropodidae*) bar 35 av 161 undersökta individer på adenovirus. Kan man utifrån detta sluta sig till att andelen individer som bär på adenovirus skiljer sig åt mellan de två familjerna?