Column-Generation Algorithm

Consider the following Cutting-Stock problem: (see Lecture)

- We have 17 meter planks
- Clients want 25 x 3 meter, 20 x 5 meter, 15 x 9 meter

Possible Formulation:

- b_j = # Anzahl der benötigten Bretter der Länge l_i
- x_j = vom großen Brett $j \in K$ mit Länge L werden kleinere Bretter abgeschnitten $\in \{0,1\}$
- y_{ji} = Anzahl der produzierten Bretter der Länge l_i, die von Brett j abgeschnitten werden

$$\min \sum_{j \in K} x_j$$

$$\sum_{j \in K} y_{ij} \geq b_i \quad \forall i$$

$$\sum_i l_i y_{ij} \leq L x_j \quad \forall j \in K$$

$$x_j \in \{0,1\}$$

$$y_{ij} \in \mathbb{N}_0$$

LP-Relaxation liefert schlechte Schranken

Schwierigkeiten für Solver die auf Branch & Bound basieren

Alternative Formulation: Enumerate all possible cutting patterns

		# 3 Meter	# 5 Meter	# 9 Meter
Pattern	1	5	0	0
Pattern	2	4	1	0
	3	2	2	0
	4	2	0	1
	5	1	1	1
	6	0	3	0
	7	0	0	1
	⋮	⋮	⋮	⋮

$\Rightarrow \min \; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$ (Number of times we cut each pattern)

subject to

$$\left(\begin{array}{l} 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 \\ x_4 + x_5 + x_7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \geq 25 \quad \text{(3 Meter Constraint)} \\ \geq 20 \quad \text{(5 Meter Constraint)} \\ \geq 15 \quad \text{(9 Meter Constraint)} \end{array}$$

$$x \in \mathbb{R}^7 \geq 0$$

$\downarrow$

A im revidierten Simplex

Problem: In reality too many possible cutting patterns
$\Rightarrow$ cannot store A in the RAM
$\Rightarrow$ cannot solve for $c_N' = -(c_N - N'^T c_B)$
$\Rightarrow$ matrix operations (esp. inverse) very expensive

bei Min-Problem ist das Ziel, die ZF-Koeffizienten nichtpositiv zu machen d.h. es wird i.d.R. die Spalte mit dem größten c_j als Pivotspalte gewählt

Goal: Find optimal/better solution without storing each pattern
$\Rightarrow$ Generate Column that improves the solution (= positive, since we are minimizing)

$$c_N' = -c_N + (B^{-1}N)^T c_B$$

$$= c_B^T B^{-1} N_j - c_{N_j}$$

cost for pattern is 1 in example

$$(1/5, 1/3, 1) \leftarrow \underbrace{c_B^T B^{-1}}_{\text{We know}} \begin{pmatrix} a_{3M} \\ a_{5M} \\ a_{9M} \end{pmatrix} - 1$$

↑ generated column that improves solution (> 0)

We arrive at the PRICING PROBLEM:

Find a pattern for which $\frac{1}{5}a_{3m} + \frac{1}{3}a_{5m} + a_{9m} - 1 > 0$

$$\Rightarrow \quad \max \ \frac{1}{5}a_{3m} + \frac{1}{3}a_{5m} + a_{9m} - 1$$

$$\text{s.t.} \quad 3a_{3m} + 5a_{5m} + 9a_{9m} \leq 17$$

$$a \geq 0$$

If optimal solution of pricing problem is positive it improves the master problem.

$$\begin{matrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix} \qquad \text{Bedarf} \quad b = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$$

v in above

$$\begin{matrix} 1/6 & 0 & v \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{matrix} \qquad c_B^T B^{-1} = (1/3, 2/3, 1/2)$$

$$y = (1,1,1)^T$$

$$b' = B^{-1}b = (5, 10/3, 13/2)$$

$$N' = y' = B^{-1}y = (1/6, 1/3, 1/2)^T = N$$

$$b'/y' = (30, \boxed{10}, 13)$$

$$\begin{matrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix} \qquad c_B^T = (1,1,1)$$

$$B^{-1} = \begin{matrix} 1/6 & -1/6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{matrix}$$

$$c_B^T B^{-1} = (1/3, 1/6, 1/2)$$

$\Rightarrow y = (1,0,2)^T \qquad b' = B^{-1}b = (10/3, 10, 3/2)^T \qquad y' = B^{-1}y = (1/6, 0, 1)^T$

$(20, NA, 3/2)$