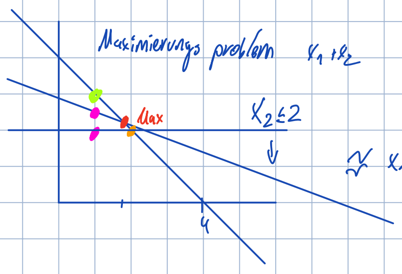
Lösen von IP's

Branch-Bound

Schnittebenen

Maximierungsproblem $x_1 + x_2$



1 Schritt: Lösen ganz normal für roten punkt

2 Schritt: Sehen das weder x_1 noch x_2 ganzzahlig

$x_1 = 1.8$ $x_2 = 2.3$ $\rightarrow$ 4.1 $\rightarrow$ Nicht zulässig

$x_1 = 1.8$

4.4 $x_2 = 2.3$

$x_1 \leq 1$ $\Rightarrow 3.5$

$x_2 = 2.5$

$x_1 = 2$

$x_2 = 2$ $\Rightarrow 4$ $\rightarrow$ ganzzahlig terminiert

$x_2 = 2$ ≤ 3

$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

Aufgabe 07.1 Rucksack B&B

- $n = 4$ Gegenstände $i \in \{1, \dots, n\}$
- Gegenstand i hat Wert $v_i \in \mathbb{N}$ und Gewicht $w_i \in \mathbb{N}$
- $x_i \in \{0,1\}$ Nehmen Gegenstand mit oder nicht

$$\max \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$ "Maximiere unseren Wert der eingepackten Gegenstände"

Capazität im Rucksack

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq C$$

$$x_i \in \{0, 1\}$$

$\Rightarrow$ LP-Relaxierung (ohne Binärconstraint) ohne die Ganzzahligkeitsbedingung im LP

"

$x_i \leq 1$ $\forall i = 1, \dots, n$

$x_i \geq 0$ $\forall i = 1, \dots, n$

i	1	2	3	4	$\to$ Gegenstände
v_i	10	16	12	2	$\to$ Value für G. i
w_i	2	2	2	1	$\to$ Weigth für G. i

$\div$ $C=5$

$2 + 2 = 4$, $+2 = 6$

$x_1 = 1$ wir nehmen x_1, x_2 mit

$x_2 = 1$

$\to$ können 3 nicht mitnehmen

a) Optimale Lösung:

1. bestimme Wert-Gewicht - Quotienten $(q_i = v_i / w_i)$

$q_1 = 5$ (10/2) $\quad q_2 = 8$ (16/2) $\quad q_3 = 6$ (12/2) $\quad q_4 = 2$ (2/1)

2. Sortieren $q_j \geq q_{j+1}$

Index:

i	1	2	3	4
j	2	3	1	4

$\underset{1}{q_2} = 8 \quad \underset{2}{q_3} = 6 \quad \underset{3}{q_1} = 5 \quad \underset{4}{q_4} = 2$

3. Wähle k so, dass $\sum_{j=1}^{k} w_j \leq C$ $\quad \sum_{j=1}^{k+1} w_j > C$ $\Rightarrow$ $\underset{2}{x_1 = 1}$ $\quad \underset{3}{x_2 = 1}$ $\Rightarrow k = 2$

4. $x_{k+1} = \left(C - \sum_{j=1}^{k} w_j x_j\right) / w_{k+1}$ und $x_j = 0$ für $j > k+1$

$k = 2 \quad k+1 = 3$

$x_3 = (5 - (1 \cdot 2 + 1 \cdot 2)) / w_3 = (5-4)/2 = 1/2$

$x_4 = \quad 4 > 2+1 \Rightarrow x_4 = 0$

i: $\quad x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 1/2 \quad x_4 = 0$

j: $\quad x_1 = 1/2 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 0$

OPT: $\frac{1}{2} \cdot 10 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 12 + 0 \cdot 2 = 33$

Problem: x_1 ist nicht ganzzahlig

1. Branchen x_1 $\quad \swarrow x_1 = 0 \quad \searrow x_1 = 1$

$x_1 \in 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$

1.1 $x_1 = 0$

Wieder dieselben Schritte für Lösung (diesel mal ohne x_1, da $x_1 = 0$)

i	1	2	3	4
v_i	~~10~~	16	12	2
w_i	~~2~~	2	2	1

$\to$ kriegen alle anderen unter $\quad x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 1 \quad C = 5$

$2 + 2 + 1 = 5$

OPT: $16 + 12 + 2 = 30$

1.2 $x_1 = 1$

$x_1 = 1$ $x_2 = 2$ dann ist Rucksack voll

$x_3 = (5-4)/2 = \frac{1}{2}$

$x_4 = 0$

$x_1 = 2$ $x_2 = 2$ $x_3 = \frac{1}{2}$ $x_4 = 0$ $\Rightarrow$ OPT : $1 \cdot 10 + 1 \cdot 16 + 1/2 \cdot 12 + 0 \cdot 2 = 32$

1.2.1 x_3 abrunden $x_3 = 0$

$\overset{2}{x_1}$ $\overset{2}{x_2}$ $x_3 = 0$ $\overset{1}{x_4}$

$1 \cdot 10 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 12 + 1 \cdot 2 = 28$

1.2.2 x_3 aufrunden $x_3 = 1$

$\sum_{j=1}^{k} w_j \leq C$

$x_3 = 1$ $x_1 = 1$ $x_2 = 0$ $x_4 = 0$

$w_3 \cdot 2$ $\cdot 2^{w_1}$

$x = (5-4)/2 = \frac{1}{2}$ $x_2 = 1/2$

$1 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 16 + 1 \cdot 12 + 0 \cdot 2 = 30$

x_2 ist nicht ganzzahlig weil 30 nicht besser ist als eine ganzzahlige Lösung

Aufgabe 7.2 Schnittebenen

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 - x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

LP-Relaxierung in Standardform

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 - x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ & x \in \mathbb{R}^4 \geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Lösen mit Simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	0	0	1/3	2/3	2/3
x_2	0	1	1/3	-1/3	2/3
x_1	1	0	2/3	2/3	4/3

OPT = 2/3

$(x_1, x_2)^T = (4/3, 2/3, 0, 0)$

$\Rightarrow$ Weder x_1 noch x_2 sind ganzzahlig $\Rightarrow$ Wir finden 2 Gomory-Schnittebenen

I $x_1 + 0x_2 + 2/3x_3 + 2/3x_4 = 4/3$

ganzzahlig auch links = fraktional rechts

$1x_1 + 2/3x_3 + 2/3x_4 = 1 + \frac{1}{3}$

$2/3x_3 = 0x_3 + \frac{2}{3}x_3$

$\boxed{x_1 + 0x_3 + 0x_4 - 1} = \frac{1}{3} - 2/3x_3 - 2/3x_4$

x_3 und x_4 müssen ganzzahlig und positiv sein

muss ≤ 0

$\frac{1}{3}$ - .... etwas positives ≤ 1

max $x_1 - x_2$

s.t. $x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$x_1 - 2x_2 + x_4 = 0$

$x_1 - 1 \leq 0$

$x \in \mathbb{R}^4 \geq 0$

$x_1 - 1 \leq 0$ mit in LP auf

II $x_2 + 1/3\, x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 2/3$

$-\frac{1}{3}x_4 = -x_4 + \frac{2}{3}x_4$

$x_2 + 0x_3 + 1/3\, x_3 - x_4 + 2/3\, x_4 = 0 + 2/3$

$y = \lfloor y \rfloor + (y - \lfloor y \rfloor)$

$x_2 - x_4 = 2/3 - 1/3\, x_3 - 2/3\, x_4$

$x_2 - x_4 \leq 0$

Aufgabe 07.3.

Indexmengen:

$I = \{1, \dots, 20\}$ Bewerber

$T = \{1, \dots, 30\}$ nächsten Monat

$S = \{Früh, Spät, Nacht\}$

Variablen:

- $x_i \in \{0,1\}$ ob Aushilfe $i \in I$ beschäftigt wird
- $y_{ist} \in \{0,1\}$ ob Aushilfe $i \in I$ in Schicht $s \in S$ an Tag $t \in T$ arbeitet
- $w_{it} \in \{0,1\}$ ob Aushilfe $i \in I$ am Tag $t \in T$ arbeitet

$\Rightarrow \quad 3 w_{it} \geq \sum_{s \in S} y_{ist} \quad \forall i \in I \quad \forall t \in T$

1. Falls eingestellt muss die Aushilfe in mindestens 5 und höchstens 15 Schichten arbeiten

pro / für jede Aushilfe

$$\sum_{t \in T} \sum_{s \in S} y_{ist} \geq 5 x_i \quad \forall i \in I$$

$$\sum_{t \in T} \sum_{s \in S} y_{ist} \leq 15 x_i$$

2. Eine Aushilfe darf höchstens eine Schicht pro Tag arbeiten:

"Pro Tag Pro Aushilfe Summe der Schichten max. 1"

$\forall$ $\forall$ $\sum$

$$\sum_{s \in S} y_{ist} \leq 1 \quad \forall i \in I, \ \forall t \in T$$

3. Arbeitet eine Aushilfe in der Nachtschicht, darf sie am nächsten Tag nicht in Frühschicht arbeiten:

y_{ist}

$$y_{i\{spät\}t} + y_{i\{früh\}(t+1)} \leq 1 \quad \forall i \in I, \ t \in \{1, \dots, 29\}$$

0 0
0 1 1 1 nicht erlaubt
1 0

4. Hat eine Aushilfe frei, so hat sie mindestens 2 Tage in Folge frei:

$$w_{i(t-1)} + w_{i(t+1)} \leq 1 + w_{it} \quad \forall i \in I \quad \forall t \in \{2, \dots, 29\}$$

1. arbeit 3. arbeit 2. frei

1 1 0 aber

2 $\leq 1 + 0$ $\lightning$

$0 + 1 \leq 1 + 0$

frei frei arbeit erlaubt

$1 + 0 \leq 1 + 0$

arbeit frei frei erlaubt

Eine Aushilfe darf höchsten 7 Tage in Folge arbeiten

$$\sum_{r=t}^{t+7} w_{ir} \leq 7 \quad \forall i \in I \quad t \in \{1, \dots, 23$$

Bedarf d_{st} an Aushilfen in Schicht s am Tag T

$$\sum_{i=1}^{20} y_{ist} \geq d_{st} \quad \forall s \in S \quad t \in T$$

ZF: Minimiere Anzahl Aushilfen

$$\min \sum_{i=1}^{20} x_i$$