Aufgabe Ü3.1.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ & 3x_1 - x_2 + x_4 = 7 \\ & x \in \mathbb{R}^4_{\geq 0} \end{aligned}$$

~ 1

Standardform ✓, weil
- Maximierungsproblem
- rechte Seiten positiv
- "=" Constraints

$\Rightarrow$ Gross M-Methode

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & x_1 + x_2 - Mw_1 = z \\ & x_1 - x_2 - x_3 + w_1 = 1 \\ & 3x_1 - x_2 + x_4 = 7 \\ & x \in \mathbb{R}^4_{\geq 0} \\ & w_1 \geq 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \quad z - x_1 - x_2 + M_1 = 0$

$\Rightarrow$ Kanonische Form möglich,
da Standardform + für jeden constraint eine Basisvariable

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	Result
z	-1	-1			M	0
w_1	1	-1	-1		1	1
x_4	3	-1		1		7

$\cdot(-M)$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	Result	
z	-1-M	-1+M	M			-M	$\Rightarrow$ Kanonische Form
$\rightarrow w_1$	$\boxed{1}$	-1	-1		1	1	1/1
x_4	3	-1		1		7	$\wedge$ 7/3

$w_1 \leftrightarrow x_1$

$\cdot(1+M)$

$\cdot -3$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	Result
z		-2	-1		1+M	1
x_1	1	-1	-1		1	1
x_4		$\boxed{2}$	3	1	-3	4

! Nur positive Elemente kommen für Pivotzeile in Frage

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	Result
z			2	1	-2+M	5
x_1	1		0.5	0.5	-0.5	3
x_2		1	1.5	0.5	-1.5	2

2

1

$(\cdot \frac{1}{2})$

! $-2+M \geq 0 \rightarrow$ True

$x^* = (3, 2) \quad OPT = 5$

Aufgabe Ü3.2.

$$A = \begin{array}{c} \overbrace{\quad x_1 \quad x_2 \quad}^{\text{Iteration 3}} \overbrace{\quad x_3 \quad x_4 \quad}^{\text{Iteration 2}} \; w_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} (I) \\ (II) \end{array} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (I) \\ (II) \end{array} \qquad c = \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & w_1 \\ (1 & 1 & 0 & 0 & -M)^T \end{array}$$

Iteration 1 $\quad x_B = (x_4, w_1)^T \quad x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad c_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -M \end{pmatrix} \quad c_N = (1, 1, 0)^T$$

Austretende BV: kleinstes Element, wenn wir b'/N' nehmen für die Spalte die der eintretenden entspricht

$$B^{-1} = B \qquad N' = B^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & & \\ \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{3} & -1 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_4 \\ w_1 \end{array}$$

$7/3$

$1/1$

$$c_N' = -(c_N - N'^T c_B) = -\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -M \end{pmatrix}\right) \qquad b' = x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -M \\ M \\ M \end{pmatrix}\right)$$

$$= -\begin{pmatrix} 1+M \\ 1-M \\ -M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-M \\ -1+M \\ 0+M \end{pmatrix} \begin{array}{c} x_1 \\ \\ \\ \end{array}$$

Negativstes Element aus c_N' ist eintretende BV

Iteration 2 $\quad x_B = (x_1, x_4)^T \quad x_N = (x_2, x_3, \cancel{w_1})^T$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad c_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N' = B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_4 \leftarrow \end{array}$$

$x_4 \leftrightarrow x_2$

$$c_N' = -(c_N - N'^T c_B) = -\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= -\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \qquad b' = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = (1, 4)^T$$

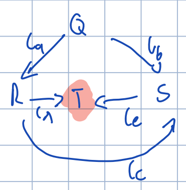
$$= -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \end{array} \leftarrow \text{negativstes Element}$$

Iteration 3 $\quad x_B = (x_1, x_2)^T \quad x_N = (x_3, x_4)^T$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_N = (0, 0)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad N' = B^{-1}N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad c_N' = (2, 1)^T \quad b' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe Ü3.2.



a)

l_a	l_b	l_c	l_d	l_e	→ Pipelines
800	400	300	600	600	
-||-	-||-	-||-	-||-	-||-	
a	b	c	d	e	→ Menge Öl

$a \leq 800$ (1)
$b \leq 400$ (2)
$c \leq 300$ (3)
$d \leq 600$ (4)
$e \leq 600$ (5)

b) $d + e = 1000$ „es muss 1000 liter bei T ankommen" (6)

$a = c + d$ „alles was von Q losgeschickt wird in a wird nicht in R (7)
$b + c = e$ zwischengelagert sondern verlässt R direkt über c und d (8)

c) $\min \quad 0.2a + 0.3b + 0.2d + 0.1e + 0.1\,\delta_c^+ - 0.1\,\delta_c^- = z^*$

$c - \delta_c^+ + \delta_c^- = 200$ (9)
$\delta_c^+ \leq 50$ (10)
$\delta_c^- \leq 50$ (11)
$\delta_c^+, \delta_c^- \in \mathbb{R}_{\geq}$ (12)

→ Löse LP1 und errechne Zielfunktionswert
⇒ Erstelle neues LP mit neuem Ziel mit LP1 = Zielfunktionswert als Constraint

$d - T^+ + T^- = e$
$T^+, T^- \geq 0$

$\min \quad T^+ + T^-$

LP1:

$\min \quad 0.2a + 0.3b + 0.2d + 0.1e + 0.1\,\delta_c^+ - 0.1\,\delta_c^-$

s.t. (1) – (12)

⇒ lösen und erhalten OPT = z^*

LP2: $\min\ T^+ + T^-$

zusätzliches Ziel

s.t. $d - T^+ + T^- = e$

$T^+, T^- \geq 0$

(1) - (12)

Hauptziel

$0.2a + 0.3b + 0.2d + 0.1c + 0.1\, \delta_c^+ - 0.1\, \delta_c^- = OPT$

$4x_1 + 5x_2 \geq 2$

$\Downarrow$ standardform

Keine BV $\quad 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 2$

Können nur NOCH eine Slackvariable hinzufügen wenn diese $= 0$ ist

Kanonische Form

$4x_1 + 5x_2 - x_3 \overset{+1}{+ w_1} = 2$ Wird nur nicht verletzt wenn $w_1 = 0$

immer addieren

Problem: Müssen sicherstellen, dass $w_1 \overset{!}{=} 0$

↳ Lösung:

$\text{Max} \ldots - 1000000\, w_1$

immer subtrahieren

denn dann muss $w_1 = 0$ sein damit wir maximieren können $\Leftrightarrow$ optimale funktionswert wird immer $w_1 = 0$ haben

$\text{Min}\ x_1 + x_2$

$4x_1 + 4x_2 = 5$

$\text{Max}\ -x_1 - x_2$

$4x_1 + 4x_2 \leq 5$

$-4x_1 - 4x_2 \leq -5$