Aufgabe 04.1.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	0	0	1	0.5	0	35
x_2	0	1	1	-0.5	0	5
x_1	1	0	-1	1	0	10
x_5	0	0	-1	0	1	5

$x_1 \hat{=}$ Produzierte Menge Aquamarin (in 10 Litern)
$x_2 \hat{=}$ Produzierte Menge Bubbleburst (in 10 Litern)
$x_3, x_4, x_5 \hat{=}$ Slack-Variablen für Koffein, Orangen, Zucker
ZF: Max Gewinn
Res: Maximaler Verbrauch von beschränken Res $\hat{=}$ Restriktion
Nichtnegativitätsbedingungen

b) $(x_1, x_2)^* = (10, 5)$

$\Rightarrow$ 100 Liter Aquamarin und 50 Liter Bubbleburst

c) Schattenpreise sind die Koeffizienten der NBV in der ZF-Zeile und stellen die marginalen Kosten für eine weitere Einheit des Gutes x_i dar. ($= c_N'$ im Optimalitätstab.)

Schattenpreise: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	0	0	1	0.5	0	35
x_2	0	1	1	-0.5	0	5
x_1	1	0	-1	1	0	10
x_5	0	0	-1	0	1	5

weil x_4 die Slackvariable für Orangen ist
50 cent

Orangen sind ein knappes Gut, da $x_4 = 0$ in der Optimallösung

d)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	0	0	1	0.5	0	35
x_2	0	1	1	-0.5	0	5
x_1	1	0	-1	1	0	10
x_5	0	0	-1	0	1	5

Zucker $\hat{=} x_5$

x_5 ist in Basis mit wert 5 $\Rightarrow$ Wir haben noch 5 Einheiten Zucker übrig.
Daher ist der Schattenpreis 0.

Note: $x_4 \hat{=}$ Orangen sind restlos aufgebraucht, deshalb zahle für jede weitere Einheit 50 cent.

Orangen: $2x_1 + 2x_2 + x_4 = 30$

$2 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 0 = 30$

Wenn Schattenpreis > 0, dann ist die Ressource restlos aufgebraucht, ein knappes Gut

$\Rightarrow$ Weil wir noch 5 kg übrig haben, können 4 kg für 7€ verkaufen und somit sogar den Gewinn steigern

e) Frage: Obere und untere Grenze für Verkaufspreis von 10L Aquamarin ohne dass sich optimale Basis (oder Produktionsplan) ändert?

Originale ZF: Max $(12-10)x_1 + (18-15)x_2$ $\hat{=}$ Gewinnmaximierung

Im Tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Z	-2	-3	0	0	0

Neue ZF: Max $(2+\Delta)x_1 + 3x_2$

Im Tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	$-2-\Delta$	-3	0	0	0

Wir können Optimaltableau von Mattea verwenden, nur das $-\Delta$ fehlt:

Korrektur:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	$-\Delta$	0	1	0.5	0	35
x_2	0	1	1	-0.5	0	5
x_1	1	0	-1	1	0	10
x_5	0	0	-1	0	1	5

$\oplus\Delta$

$1-\Delta \geq 0$

$0.5+\Delta \geq 0$

Stelle wieder kanonische Form her:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Rest
z	0	0	$1-\Delta$	$0.5+\Delta$	0	$35+10\Delta$

wird negativ

Damit sich optimale Basis nicht ändert müssen alle Zielfunktionskoeff. ≥ 0 sein

Intervall für Δ bestimmen: $\hat{=}$ Schwankungsbereich

I $1-\Delta \geq 0$ $\qquad -\Delta \geq -1 \quad |\cdot(-1)$ $\qquad \Delta \leq 1$

II $0.5+\Delta \geq 0$ $\qquad \Delta \geq -0.5$

$\Rightarrow \Delta \in [-0.5, 1]$

$\Rightarrow$ Verkaufspreis $\in [12-0.5, 12+1] = [11.5, 13]$

(Optimalwert schwankt damit zwischen $[30, 45]$)

Frage: Obere Grenze wird verletzt: $\Rightarrow x_3$ ZF-Koeffizient wird negativ

$\Rightarrow x_3$ tritt in Basis ein $\hat{=}$ Pivotspalte

$\Rightarrow x_2$ tritt aus $\Rightarrow$ Wir stellen kein bubble tea mehr her, weil wir Aquamarin so teuer verkaufen

Koffein bleibt übrig

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	$-\Delta$	0	1	0.5	0	35
x_2	0	1	1	-0.5	0	5
x_1	1	0	-1	1	0	10
x_5	0	0	-1	0	1	5

weil x_2 einziges zulässiges Element >0

$\Rightarrow$ Orangen sind knappes Gut (x_4 ist immernoch nicht in Basis und somit Restbestand $=0$)

$\Rightarrow$ Koffein und Zucker bleiben übrig

f) Frage wie kann Orangenbestand (=30) schwanken (Slackvariable $=x_4$)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	$-\Delta$	0	1	0.5	0	35
x_2	0	1	1	-0.5	0	5
x_1	1	0	-1	1	0	10
x_5	0	0	-1	0	1	5

$\oplus\Delta$

Wichtig: Es sollen weiter beide produziert werden $\hat{=}$ beide Basis

I $5-0.5\Delta > 0$ $\qquad -0.5\Delta > -5 \quad |\cdot(-2)$ $\qquad \Delta < 10$

II $10+\Delta > 0$ $\qquad \Delta > -10$ $\qquad \Rightarrow \Delta \in (-10, 10)$

III $5+0\Delta \geq 0$

Zulässigkeit ($\vec{b} \geq 0$)

$\Rightarrow$ Es müssen mehr als 20kg Orangen vorhanden sein damit weiterhin beide produziert werden

Unterschreitung $\hat{=}$ $\Delta = -10$ (ansonsten unzulässig für <-10) $\Rightarrow$ Wir wissen II wird verletzt $\nearrow$ Degenerierung

z	0	0	1	0.5	0	35
x_1	1	0	-1	1	0	10

$\oplus t$

$\Rightarrow$

	x_1	x_2	x_3			
z	t	0	$1-t$	$0.5+t$	0	$35+10t$

I $t \geq 0$

II $1-t \geq 0$ $\qquad -t \geq -1$ $\qquad t \leq 1$

III $0.5+t \geq 0$ $\qquad t \geq -0.5$ (egal wegen I)

$\Rightarrow t \in [0, 1]$

Für $t \geq 1$ tritt x_3 in Basis ein

$\Rightarrow z(t=1)$ 1 0 0 1.5 0 (neue Schattenpreise)

g) - 1kg Orangen x_4
- 1kg Koffein x_3
- 3kg Zucker x_5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	0	1	0.5	0	35
x_2	0	1	1	-0.5	0	5
x_1	1	0	-1	1	0	10
x_5	0	0	-1	0	1	5

ist nach 5kg übrig deshalb für 3kg gültig

$1 \cdot 0.5 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 8 = 9.5$ € minimum

Kosten außerhalb der Zutaten

Aufgabe Ü4.2.

Max $-2x_1 + 3x_2$

s.t. $x_1 + 3x_2 \leq 7$

$x_1 + \frac{1}{2}x_2 \geq 1$

$2x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x \geq 0$

a) Max $-2x_1 + 3x_2$

s.t. $x_1 + 3x_2 + x_3 = 7$

$x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_4 = 1$

$2x_1 + 2x_2 + x_5 = 4$

$x \in \mathbb{R}^5 \geq 0$

Kanonische Form? $\Rightarrow$ Nein keine BV für 2ten Constraint

5	0	0	0	3/2	6
-2	0	1	0	-3/2	1
1	1	0	0	1/2	2
$-\frac{1}{2}$	0	0	1	1/4	0

b) $x^* = (0, 2)^T$

(0, 2, 0, 0, 0)

c)

z	5	0	0	0	3/2	6
x_3	-2	0	1	0	-3/2	1
x_2	1	1	0	0	1/2	2
x_4	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	1/4	0

$\Rightarrow$ Degenierung aber es bleibt bei (0,2) (x_1 oder x_5 in Basis nehmen)

Lösung ist eindeutig, aber Tableau nicht

d) Max $(-2+\Delta)x_1 + 3x_2$

z	$5-\Delta$	0	0	0	3/2	6
x_3	-2	0	1	0	-3/2	1
x_2	1	1	0	0	1/2	2
x_4	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	1/4	0

$\Rightarrow$ müssen nicht kanonische Form herstellen

I $5 - \Delta \geq 0$ $\quad \Delta \in (-\infty, 5]$ $\Rightarrow (-\infty, 3]$

$-\Delta \geq -5 \quad | \cdot (-1)$

$\Delta \leq 5$

$\Rightarrow (-2-\infty, -2+5]$

e)

$\oplus \Delta$

z	5	$-\Delta$	0	0	3/2	6
x_3	-2	0	1	0	-3/2	1
x_2	1	1	0	0	1/2	2
x_4	-1/2	0	0	1	1/4	0

$\max\ 2x_1 + (3+\Delta)x_2$

da x_2 in basis erst wieder kanonische Form herstellen

I $5+\Delta \geq 0$ $\qquad \Delta \geq -5$

II $3/2 + \frac{1}{2}\Delta \geq 0$ $\qquad \Delta \geq -3$

$\Delta \in [-3, \infty)$

$\in [0, \infty)$

f)

z	5	0	0	0	3/2	6
x_3	-2	0	1	0	-3/2	1
x_2	1	1	0	0	1/2	2
x_4	-1/2	0	0	1	1/4	0

$\oplus \Delta$

I $1+\Delta \geq 0$ $\qquad \Delta \geq -1$

z	5	0	0	0	3/2	6
x_3	-2	0	1	0	-3/2	1
x_2	1	1	0	0	1/2	2
x_4	-1/2	0	0	1	1/4	0

$-\Delta$

$-\Delta \geq 0 \iff \Delta \leq 0$

z	5	0	0	0	3/2	6
x_3	-2	0	1	0	-3/2	1
x_2	1	1	0	0	1/2	2
x_4	-1/2	0	0	1	1/4	0

$1 - \frac{3}{2}\Delta \geq 0$ $\qquad -\frac{3}{2}\Delta \geq -1$ $\qquad \Delta \leq \frac{2}{3}$

$2 + \frac{1}{2}\Delta \geq 0$ $\qquad \Delta \geq -4$

$\frac{1}{4}\Delta \geq 0$ $\qquad \Delta \geq 0$

$\Delta \in [0, \frac{2}{3}]$