Aufgabe Ü5.1.

a) (P) Min $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4$

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &\geq 15 \\
x_1 - x_2 + 4x_4 &= 5 \\
2x_2 - 2x_3 + x_4 &\leq -15 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\
x_4 &\leq 0
\end{aligned}
$$

(D) Max $15y_1 + 5y_2 - 15y_3$

$$
\begin{aligned}
(x_1)\quad & -y_1 + y_2 \leq 2 \\
(x_2)\quad & y_1 - y_2 + 2y_3 \leq 2 \\
(x_3)\quad & 2y_1 - 2y_3 \leq 2 \\
(x_4)\quad & -y_1 + 4y_2 + y_3 \geq -1 \\
& y_1 \geq 0 \\
& y_2 \in \mathbb{R} \\
& y_3 \leq 0
\end{aligned}
$$

1. Ein primales Maximierungsproblem ist ein duales Minimierungsproblem und umgekehrt
2. Normalform bleibt Normalform

→ 3. Aus einer unbeschränkten Variable ($\in \mathbb{R}$) folgt eine Gleichheitsrestriktion

b) Geg.: Primaler Punkt $x = (5, 0, 10, 0)^T$

Überprüfe mit komplementärem Schlupf, ob x eine optimale Lösung für (P) ist

Komplementärer Schlupf: $\underbrace{(Ax - b)^T y = 0}_{\text{Primal}}$ $\qquad$ $\underbrace{(A^T y - c)^T x = 0}_{\text{Dual}}$

Herleitung: Wieso komplementärer Schlupf Optimalität prüft:

$2x_2 - 2x_3 + x_4 \leq -15$

Wir nehmen an, dass y^* optimal dual und x^* optimal primal

$$2x_2^* - 2x_3^* + x_4^* \leq -15$$

Wir wissen aus Sensitivätsanalyse:

- Wenn, $2x_2^* - 2x_3^* + x_4^* < -15$ dann ist der Constraint nicht bindend ⇒ Schattenpreis $(x_5) = 0$ $\Rightarrow y_1^* = 0$
- Wenn, $y_1^* > 0$ dann $2x_2^* - 2x_3^* + x_4^* = -15$ und Bedingung ist bindend

Dualvariablen y^* = Reduzierte Kosten und Schattenpreise (= Koeffizienten der Basis und NBV im Optimaltableau)

Einfacheres Beispiel: $x_1 \leq 4$

-> Standardform: $x_1 + \underset{\text{Slackvariable}}{x_2} = 4$

Wenn $x_1 < 4$, dann ist $x_2 \neq 0$ und in der Basis im Optimaltableau

"wir haben von x_2 noch etwas übrig"

⇒ Schattenpreis ist 0, weil wir haben von x_2 ja eh noch etwas übrig

$$
\Rightarrow \begin{array}{c|cc|c}
 & y_1 & y_2 & \\
z & 0 & \boxed{0} & \\
x_1 & 1 & 0 & 1 \\
x_2 & 0 & 1 & 1
\end{array}
\Big\} 2
$$

⇒ Schattenpreis $= y_1 = 0$

Wenn $x_1 = 4$, dann $y_1 > 0$ (Schattenpreis > 0)

$\Rightarrow (x_1 - 4) y_1 \stackrel{!}{=} 0$ in der Optimalen Lösung

Komplementärer Schlupf
$(Ax - b)^T y = 0$

$x = (5, 0, 10, 0)^T$ Prüfe Optimalität:

1. Primal zulässig?
2. Komplementärer Schlupf
3. Dual zulässig?

1. Primal zulässig: Setze Punkt in primales Programm ein und schaue ob zulässig

$-x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 15$ $\quad -5 + 0 + 2 \cdot 10 - 0 \geq 15$ $\quad -5 + 20 \geq 15 = 15 \geq 15$ ✓

$x_1 - x_2 + 4x_4 = 5$ $\quad 5 - 0 + 0 = 5$ ✓

$2x_2 - 2x_3 + x_4 \leq -15$ $\quad 0 - 20 + 0 \leq -15$ ✓ $\quad -20 \leq -15$ nicht strikt erfüllt

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$ ✓

$x_4 \leq 0$ $\quad x_4 \leq 0$ ✓

2. Primaler Schlupf: $(Ax - b)^T y = 0$

$\underbrace{(-x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 15)}_{0} y_1 = 0$ $\Rightarrow$ ist strikt erfüllt, wir wissen nicht was y_1 ist

$(x_1 - x_2 + 4x_4 - 5) y_2 = 0$ $\Rightarrow$ ist strikt erfüllt, wissen nicht was y_2 ist

$\underbrace{(2x_2 - 2x_3 + x_4 + 15)}_{\neq 0} y_3 = 0$ $\Rightarrow$ ist nicht strikt erfüllt $\Rightarrow y_3 = 0$

$\neq 0 \Rightarrow y_3 = 0$

Dualer Schlupf $(A^T y - c)^T x = 0$ $\quad x = (5, 0, 10, 0)^T$

$(-y_1 + y_2 - 2) x_1 = 0$ $\quad$ Weil $x_1 \neq 0$ muss $(-y_1 + y_2 - 2) = 0$

$(y_1 - y_2 + 2y_3 - 2) x_2 = 0$

$(2y_1 - 2y_3 - 2) x_3 = 0$ $\quad$ Weil $x_3 \neq 0$ muss $(2y_1 - 2y_3 - 2) = 0$

$(-y_1 + 4y_2 + y_3 + 1) x_4 = 0$

I $\; -y_1 + y_2 = 2$

Wir wissen aus primalem Schlupf, dass $y_3 = 0$

II $\; 2y_1 - 2y_3 = 2$

$2y_1 = 2 \Leftrightarrow y_1 = 1$

in I: $\; -1 + y_2 = 2 \quad y_2 = 3$

$\Rightarrow y = (1, 3, 0)^T$

3. Dual zulässig ?

$-y_1 + y_2 \leq 2$ $\quad$ $-1+3 \leq 2$ ✓
$y_1 - y_2 + 2y_3 \leq 2$ $\quad$ $-1+3+0 \leq 2$ ✓
$2y_1 - 2y_3 \leq 2$ $\quad$ $2-0 \leq 2$ ✓
$-y_1 + 4y_2 + y_3 \geq -1$ $\quad$ $-1+12+0 \geq -1$ ✓
$y_1 \geq 0$ ✓
$y_2 \in \mathbb{R}$ ✓
$y_3 \leq 0$ ✓

$\Rightarrow$ x muss optimale Lösung für P sein

Ü 5.2

a) Max $x_1 + x_2$ $\quad\rightarrow\quad$ Min $-y_1 + 2x_2$

$-3x_1 + 2x_2 \leq -1$ $\quad\rightarrow\quad$ $-3y_1 + y_2 \geq 1$
$x_1 - x_2 \leq 2$ $\quad\quad$ $2y_1 - y_2 \geq 1$
$x_1, x_2 \geq 0$ $\quad\quad$ $y_1, y_2 \geq 0$

Alles bleibt in NF

b) $(-3x_1 + 2x_2 + 1)y_1 = 0$ $\quad$ $(-3y_1 + y_2 - 1)x_1 = 0$

$(x_1 - x_2 - 2)y_2 = 0$ $\quad$ $(2y_1 - y_2 - 1)x_2 = 0$

c) Gibt es eine Lösungsmenge ? Primal

$\Rightarrow$ Ja, $-3x_1 + 2x_2 \leq -1$ $\quad$ z.B. $x_2 = 0$ und $x_1 = 1$
$x_1 - x_2 \leq 2$
$x_1, x_2 \geq 0$ $\quad$ $-3 \leq -1$
$1 \leq 2$

d) Gibt es eine Lösungsmenge ? Dual

I $-3y_1 + y_2 \geq 1$
II $2y_1 - y_2 \geq 1$ $\oplus$

Auch I + II muss erfüllt sein $\Rightarrow$ $-y_1 \geq 2$ $\Rightarrow$ $y_1 \leq -2$ ↯ NNB, dass $y_1 \geq 0$

$\Rightarrow$ Duales LP ist unzulässig
$\Rightarrow$ Primal unbeschränkt