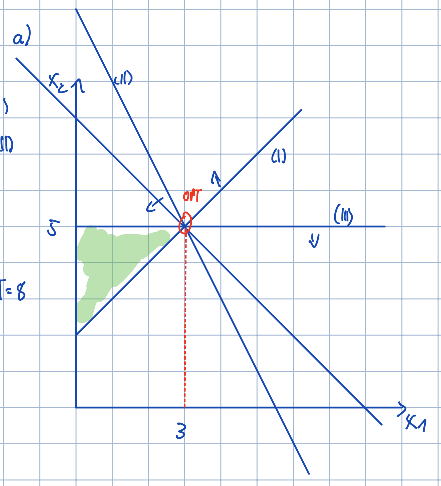
Aufgabe Ü2.1.

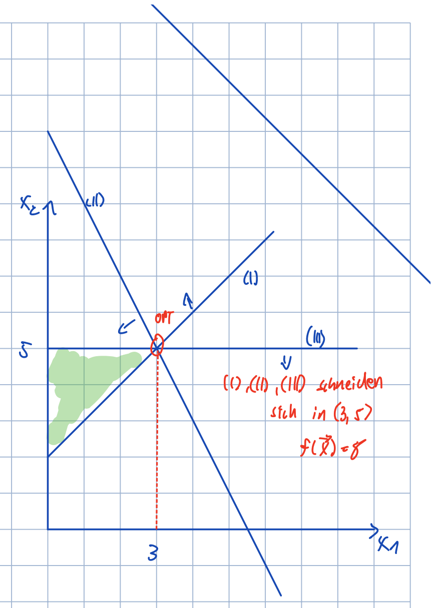
$$\arg\max_x \; x_1 + x_2$$
$-x_1 + x_2 \geq 2$ $\quad x_2 \geq x_1 + 2$ (I)
$2x_1 + x_2 \leq 11$ $\quad x_2 \leq -2x_1 + 11$ (II)
$x_2 \leq 5$ $\quad$ (III)
$x \in \mathbb{R}^2 \geq 0$

$x_2 = -x_1$

$\Rightarrow$ Normalform $x_1 - x_2 \leq -2$ $\quad (3,5)$ $\quad$ OPT = 8

a)





Normalform

Max	$c^T x$	Min	$c^T x$
s.t.	$Ax \leq b$	s.t.	$Ax \geq b$
	$x \geq \vec{0}$		$x \geq \vec{0}$

$x_2 + x_3 \geq b \quad | \cdot (-1)$

$-x_2 - x_3 \leq -b$

Standardform:

$(1,1)^T x$

Max $c^T x$
$Ax = b$ $\quad b \geq \vec{0}$
$x \geq \vec{0}$

- nur "=" constraints
- b-vektor ≥ 0
- Maximierungsproblem

Wenn $x_1 + x_2 = 10$
Standardform ✓
kanonische Form nicht zwingend

$x_1 + x_2 \overset{+x_3}{=} 10$
$x_1 + 2x_2 \overset{+x_4}{\leq} 100$

$$\arg\max_x \; x_1 + x_2$$
$-x_1 + x_2 \geq 2$
$2x_1 + x_2 \leq 11$
$x_2 \leq 5$
$x \in \mathbb{R}^2 \geq 0$

slack-Variablen $\longrightarrow$

max ✓ $\quad x_1 + x_2$
$-x_1 + x_2 \; -x_3 \; = 2$
$2x_1 + x_2 \; +x_4 \; = 11$
$x_2 \; +x_5 \; = 5$
$x \in \mathbb{R}^5_{\geq 0}$

$\vec{b} \geq 0$ ✓

Kanonische Form?

1 $\quad$ −1
1 $\quad$ 1
1 $\quad$ 1

Kanonische Form $\hat{=}$ Standardform + Jede Gleichung ($\hat{=}$ jeder Constraint) enthält eine Variable mit Koeffizienten = 1 welche Koeffizienten 0 in allen anderen Gleichungen besitzt

The lasso:

Exkurs: $\arg\min_\beta \sum_{i=1}^{N} (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta)^2 + \lambda \sum_{j=1}^{p} \beta_j^2$

s.t. $\sum_{j=1}^{p} \beta_j^2 \leq t$

10.000 $\rightarrow w_1 \rightarrow 0$ $\quad \Rightarrow$ Wenn w_1 nicht 0 dann kann problem nicht "maximiert" werden

max $\quad x_1 + x_2 \; - 10w_1$
s.t. $\quad -x_1 + x_2 \; -x_3 \; +w_1 = 2$
$2x_1 + x_2 \; +x_4 = 11$
$x_2 \; +x_5 = 5$
$x \in \mathbb{R}^5_{\geq 0}$
$w_1 \geq 0$

$w_1 \rightarrow 0$

1 $\quad$ 1 ✓
1

Max $\quad 5 + 5 - 10000 \cdot 0$

$-x_1 + x_2 \geq 2$
$-x_1 + x_2 - x_3 = 2$
$-x_1 + x_2 - x_3 + w_1 = 2$ $\quad \Rightarrow$ wenn w_1 nicht 0 dann ist die Gleichung verletzt

Simplex: Starte mit LP in kanonischer Form (ohne Umformungen) => Müssen garantieren dass $w_1 \to 0$

Standardform: $\leq n$ neue Variablen n = Zahl der Constraints -> Wie garantieren wir das?

max $4x_1 + 5x_2$
$x_1 + x_2 \leq 9$
$x_1 + 2x_2 = 10$ $+x_3$

Max $x_1 + x_2 - 500.000\,w$

-> kann nur hohen positiven Funktionswert erreichen wenn $w_1 = 0$ weil $w_1 \geq 0$

$$\begin{aligned}
\text{Max } z = x_1 + x_2 \quad & - M w_1 \\
-x_1 + x_2 - x_3 \quad & + w_1 = 2 \\
2x_1 + x_2 + x_4 \quad & = 11 \\
x_2 + x_5 \quad & = 5 \\
x \in \mathbb{R}^5 & \geq 0 \\
w & \geq 0
\end{aligned}$$

$z - x_1 - x_2 + M w_1 = 0$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	Result
z	-1	-1				M	0
w_1	-1	1	-1			1	2
x_4	2	1		1			11
x_5		1			1		5

$-M$

Schritt 1: Bringe in kanonische Form wegen M

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	Result
z	-1+M	-1-M	M				-2M
w_1	-1	1	-1			1	2
x_4	2	1		1			11
x_5		1			1		5

Kanonische Form ✓

Schritt 2: Simplex

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	Result	
z	-1+M	-1-M	M				-2M	
-> w_1	-1	1	-1			1	2	2/1
x_4	2	1		1			11	11/1
x_5		1			1		5	5/1

Pivotspalte: Negativstes Element in z-Zeile $\hat{=}\ p_s$
Pivotzeile: min (b/p_s)

$w_1 \Leftrightarrow x_2$

	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	Result
(1+M)	z	-2		-1			1+M	2
	x_2	-1	1	-1			1	2
-1	x_4	3		1	1		-1	9
-1	x_5	1		1		1	-1	3

$2(1+M) = 2+2M$
$-1 \cdot (1+M) = -1-M$

$x_1 + x_2$ 8

$4+4$
$5+3$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	Resul	
z	-2		-1			1+M	2	
x_2	-1	1	-1			1	2	
x_4	3		1	1		-1	9	9/3 = 3
x_5	$\boxed{1}$		1		1	-1	3	3/1 = 3

entweder $x_1 \leftrightarrow x_4$

|| $x_1 \leftrightarrow x_5$

$\oplus \cdot 2$, 1, -3

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	Result
z			1		2	-1+M	8
x_2		1			1		5
x_4			-2	1	-3	2	0
x_1	1		1		1	-1	3

=> Nur noch positive Koeffizienten

Termination!

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & w_1 \\ (3, & 5, & 0, & 0, & 0, & 0) \end{array}$$

OPT = 8

Degenerierung: Grafisch: > 2 Nebenbedingungen schneiden sich in einem Punkt

Simplex: Optimaltableau hat eine BV = 0

$\vec{b} / p_s$