Schranken für die optimale Lösung

$$\begin{aligned} \min \quad & 7x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 = 2 \\ & 3x_1 + x_2 = 4 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Möglichst gute untere Schranke?

Wir wissen:

mit Nichtnegativitätsbedingung gültig

$7x_1 + 3x_2 \geq x_1 + x_2 = 2$ → Minimalwert ≥ 2

$7x_1 + 3x_2 \geq 3x_1 + x_2 = 4$ → Minimalwert ≥ 4

$6x_1 + 2x_2$ $7x_1 + 3x_2 \geq 2(3x_1 + x_2) = 8$ → Minimalwert ≥ 8

$7x_1 + 3x_2 \geq x_1 + x_2 + 2(3x_1 + x_2) = 10$ → Minimalwert ≥ 10 ⇒ $ZF \geq y_1$ (Constraint 1) + y_2 (Constraint 2)

= 1 Constraint + 2 · 2. Constraint

Was ist die beste Kombination der Nebenbedingungen, die beste untere Schranke?

$$7x_1 + 3x_2 \geq \overbrace{y_1(\underbrace{x_1 + x_2}_{=2}) + y_2(\underbrace{3x_1 + x_2}_{=4})}^{\max}$$

⇒ Wenn primal min dann dual max

⇒ Wenn primal max dann dual min

Ist erfüllt, wenn

$7 \geq y_1 + 3y_2$ (x_1-Terme)

$3 \geq y_1 + y_2$ (x_2-Terme)

Recall that, $x_1 + x_2 = 2$ and $3x_1 + x_2 = 4$

$$\Rightarrow \max \; (2y_1 + 4y_2)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & y_1 + 3y_2 \leq 7 \\ & y_1 + y_2 \leq 3 \end{aligned}$$

⇒ Duales Programm

Warum dual?

{ 1. Ein primales Minproblem ist ein duales Maxproblem und vice versa
2. Normalform bleibt Normalform
3. Aus einer unbeschränkten Variable folgt Gleichheitsrestriktion

Primal

Max $\square$ → 35

Dual

Min $\square$ → $\boxed{38}$, 40

⇒ + Spieltheorie

Das duale als obere (kleinste) Schranke: (primal bei Max) (oder untere (größte) bei Minimierungsproblemen)

irgendeine Lösung { Schwache Dualität: Sei x' eine Lösung für das primale Problem und y' eine zulässige Lösung für das Duale

Dann gilt: $\underbrace{c^T x'}_{\text{primal}} \leq \underbrace{b^T y'}_{\text{dual}}$ (gilt für Standardform)

optimallösung { Starke Dualität: Wenn x^* optimal primal und y^* optimal dual, dann $c^T x^* = b^T y^*$