

Rapport de stage PHIMECA

Kristof Attila Simady
e-mail: kristof.simady@sigma-clermont.fr

05/03/2020

Contents

1	Introduction	2
2	Recherche bibliographique	2
2.1	Travaux retenus	3
2.2	Méthodes et outils de travail	3
2.3	Prémices	3
2.3.1	Mission confiée et tâches associées	3
2.3.2	Prise en main d'openTURNS et de la théorie sur les champs stochastiques	3
2.4	Exemple théorique simple, premiers codes	6
2.5	Choix des codes et difficultés algorithmiques	8
2.6	Premiers essais d'analyse de la sensibilité du modèle	10
2.6.1	Interprétation et essais avec le papier : "Time-variant global reliability sensitivity analysis of structures with both input random variables and stochastic processes" . . .	10
2.7	Example of verbatim text	12
2.8	Lists	13
3	Results	13
4	Tables and figures	14
5	Discussion	14
6	Conclusions	14

Avant propos

Le cadre d'étude offert par SIGMA Clermont a donné la possibilité d'effectuer une année supplémentaire de stage pour étoffer nos connaissances scientifiques, et découvrir le monde industriel comme des cultures étrangères. De par mon appétence pour la recherche et l'informatique, j'ai eu la chance de pouvoir venir effectuer mon stage au sein de l'entreprise **PHIMECA**, située à Clermont-Ferrand, et depuis longtemps en partenariat avec SIGMA.

Ce stage aura été l'occasion pour moi ... (à suivre)

Je souhaite remercier ... (à suivre)

Note: Ce document est autant un rapport de stage qu'une note à qui voudrait se servir des différentes méthodes explorées et codes développés.

1 Introduction

Dans le cadre d'analyse probabiliste et fiabiliste, il est d'usage d'effectuer des analyses de sensibilité sur une ou plusieurs grandeurs d'intérêt, grâce à divers moyens comme les indices de Sobol' ou les analyses de corrélation.

Ces analyses sont néanmoins souvent cantonnées à des modèles n'ayant en sortie et entrée que des grandeurs scalaires, pour lesquelles de nombreuses méthodes existent dans la littérature.

L'objectif du travail présenté ici, est d'effectuer ce type d'analyse sur des modèles ayant en entrée plusieurs champs aléatoires et des variables aléatoires scalaires et en sortie aussi des champs et grandeurs scalaires.

Pour compléter cela, il était bien sûr aussi demandé de d'abord créer un modèle simple gouverné par des champs stochastiques et de faire de l'analyse de sensibilité sur ce modèle.

Il sera d'abord présenté différentes méthodes présentes dans la littérature, avec leurs potentiels avantages et défauts.

Cette approche des l'analyse de sensibilité nous renvoie aussi sur des champs de recherche bien différents, car les méthodes peuvent autant venir du champ de la mécanique que de la géologie ou l'étude environnementale.

2 Recherche bibliographique

Ce travail de recherche a été l'occasion de parcourir un grand nombre de travaux, liés de plus ou moins loin à l'analyse de sensibilité sur des processus gaussiens. On notera notamment les travaux de [Lilburne and Tarantola, 2009] qui donnent dans leur travail un état de l'art complet sur les différentes méthodes utilisables pour l'analyse de sensibilité sur champs gaussiens.

D'autres techniques plus récentes ont néanmoins vu le jour, et ce sont ces dernières que nous avons explorés en premier. Notamment les travaux de [Wei et al., 2017] sur l'analyse de sensibilité de structures ayant en entrée des variables aléatoires et processus stochastiques variant dans le temps, ou encore le travail de [Pronzato, 2019] qui développe un métamodèle entre l'entrée et sortie d'un modèle gouverné par des champs stochastiques.

2.1 Travaux retenus

Etant donné que les missions d'analyse de sensibilité et d'incertitudes se font classiquement en se basant sur la bibliothèque *openTURNS* développé par PHIMECA, le choix a été fait d'adapter techniques de recherche et méthodes déjà existantes dans l'API au problème étudié.

2.2 Methodes et outils de travail

L'ensemble des codes ont été écrits dans le langage *Python*, en se servant majoritairement des bibliothèques à caractère scientifique (*SciPy*, *NumPy*) et la bibliothèque développée en partie par **PHIMECA** : *openTURNS (open treatment of Uncertainties and Risk & Statistics)* [Michaël Baudin and Popelin, 2015]. **PHIMECA** a fourni un poste de travail Linux, tout comme un accès au serveur de calcul pour les modèles un peu plus conséquents.

2.3 Analyse de la problématique, premier tests et prise en main des outils

2.3.1 Mission confiée et tâches associées

L'objectif du stage était de développer une méthodologie pour l'analyse de sensibilité sur des modèles gouvernés par des champs aléatoires (Champs Stochastiques) et des variables aléatoires, et qui en sortie sont aussi représentables par une collection de champs et variables aléatoires.

Plus spécifiquement, cette méthodologie était à appliquer à un modèle d'échangeur de chaleur air-air commercialisé par **LIEBHERR** et utilisé pour la régulation thermique de l'air ambiant dans les avions de ligne.

Comme la mission confiée au sein de **PHIMECA** se rapprochait d'un travail de recherche, celui-ci était bien sur accompagné de nombreuses étapes distinctes. En effet, en plus du développement des codes et de l'application analytique, une recherche bibliographique a du être menée en amont pour parvenir à lister les différentes méthodes d'analyse existantes et tester celles qui pourraient convenir au mieux. De plus, une phase d'apprentissage et de tests a du d'abord être nécessaire pour parvenir à prendre en main les différents outils, et comprendre la théorie et les mathématiques sous-jacentes.

2.3.2 Prise en main d'openTURNS et de la théorie sur les champs stochastiques

Champs Stochastiques

Un champ stochastique est un champ de variables aléatoires toutes corrélées entre elles, et dont l'intensité de la corrélation est déterminée par leur proximité dans l'espace. Par exemple la position de tout objet est corrélée à sa position aux intervalles de temps proches (continuité du temps), ou bien les températures au dessus d'un pays sont corrélés à faible distance mais l'effet aléatoire est plus présent lorsque les distances sont importantes.

Ce type de modélisation des champs est couramment utilisée pour modéliser des

propriétés présentant des variabilités gaussiennes mais une continuité dans leur espace de définition.

Lorsque la corrélation est seulement dépendante de la distance entre deux points de l'espace et non d'une position absolue, on parle d'un champ stationnaire. Lors de cette étude l'on se place dans ce cas.



Figure 1: Réalisation d'un champ stochastique en deux dimension. Le champ est continu dans l'espace et la primitive est une gaussienne en deux dimensions.

Mathématiquement, cette corrélation peut être définie par différents modèles. Les deux modèles de corrélation les plus simples sont les fonctions de covariance exponentielles (1) et les exponentielles quadratiques (2).

$$C(d) = \exp(-d/V) \quad (1)$$

$$C(d) = \exp(-(d/V)^2); \quad (2)$$

Avec V étant le paramètre d'échelle et d la norme euclidienne de la distance entre deux points de l'espace considéré. *(plus le paramètre d'échelle est grand, plus le champ est lissé, tout comme le modèle quadratique est aussi plus lisse)* Une autre fonction de covariance, celle de *Matérn*, est aussi très utilisée, puisqu'elle présente des comportements limites similaires aux deux fonctions exponentielles présentes plus haut.

$$C_v(d) = \sigma^2 \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\sqrt{2\nu} \frac{d}{\rho} \right)^\nu K_\nu \left(\sqrt{2\nu} \frac{d}{\rho} \right); \quad (3)$$

La continuité des processus gaussiens et leur comportement quasi ondulatoire, permet de les traiter de manière un peu analogue à la décomposition de fourrier, et des les décomposer en une somme infinie de variables aléatoires gaussiennes décorréliées.. Cette méthode de décomposition vient du théorème de *Karhunen-Loève*.

La construction de cette série infinie se fait grâce aux vecteurs propres issus de la matrice de corrélation du modèle, et grâce à une base de vecteurs orthonormaux dans un espace Hilbertien. Les détails mathématiques de cette méthode peuvent être trouvées en [Sudret and Kiureghian, 2000].

Lors de l'approximation de *Karhunen-Loève*, la série est tronquée à l'ordre \mathbf{M} .

$H(\mathbf{x}, \theta)$	Approx. Procéssus Gaussien
λ_i	Valeur Propre de la matrice de covariance
ξ_i	Variable Normale Centrée Réduite
$\varphi_i(\mathbf{x})$	Vecteur propre de la matrice de covariance

$$H(\mathbf{x}, \theta) = \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) \varphi_i(\mathbf{x}); \quad (4)$$

Cette décomposition permet de représenter l'ensemble de variabilité du champ avec des variables gaussiennes décorréées, et donc de faire des analyses de sensibilités sur cette nouvelle représentation du champ.

openTURNS

openTURNS est initialement un projet de bibliothèque open-source pour le traitement des incertitudes et des risques, commun a trois entreprises fondatrices, **Airbus**, **EDF** et **Phimeca Engineering**, projet ayant débuté en 2005. Depuis, deux autres organismes, **IMACS** et l'**ONERA** ont rejoint le développement d'*openTURNS*, qui se révèle être un grand atout pour le traitement des incertitudes et l'ingénierie fiabiliste. En effet, le projet d'*openTURNS* est un regroupement d'un ensemble d'algorithmes performants écrits en C++, se basant sur la théorie développée pour les traitement des incertitudes, l'optimisation robuste, et les études de sensibilité.

Un *wrapper* a été utilisée pour lier l'ensemble de la bibliothèque C++ à un module Python, et de pouvoir profiter de la facilité d'utilisation du langage Python et de sa flexibilité, tout en gardant les vitesses d'exécution du C++.

PHIMECA développe des logiciels commerciaux en se basant sur le module *openTURNS*, qui sont plus ergonomiques dans leur utilisation et automatisent certaines parties moins évidentes en utilisation directe de la librairie.

Néanmoins, la librairie reste quand même extrêmement bien documentée, avec la théorie mathématique sous-jacente à chaque algorithme d'explicitée, tout comme de nombreux exemples. La documentation présente de même des cas d'applications précis montrant la logique à avoir lors de l'écriture de codes avec *openTURNS*.

2.4 Exemple théorique simple, premiers codes

Pour parvenir a tester les méthodes trouvées lors de la recherche bibliographique, et avoir un modèle simple et rapide à exécuter, un exemple simple a été développé : Il s'agit d'un modèle de poutre en appui sur ses deux extrémités

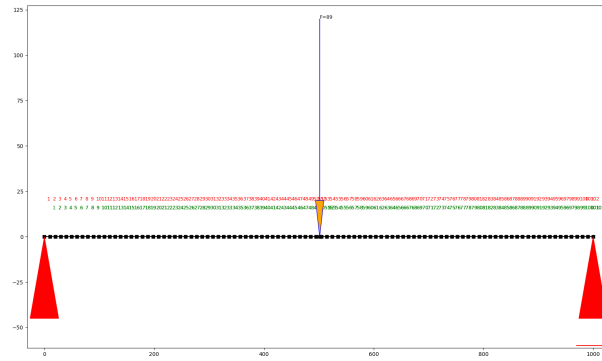


Figure 2: Modélisation d'une poutre en appui sur ses deux extrémités avec la bibliothèque anastruct

La particularité de ce modèle de poutre est, en plus d'être une aberration physique, le fait que le diamètre et le module de young sont gouvernés par un processus gaussien en une dimension, suivant la longueur de la barre. Pour parvenir à modéliser cette variation, le modèle est bien-sûr subdivisé en une centaine d'éléments finis, et le champ discrétisé sur un maillage de même longueur. En plus de ces deux grandeurs gouvernées par des champs, la densité du matériau, la position de la force, et la norme de la force dont représentés par des variables aléatoires Gaussiennes.

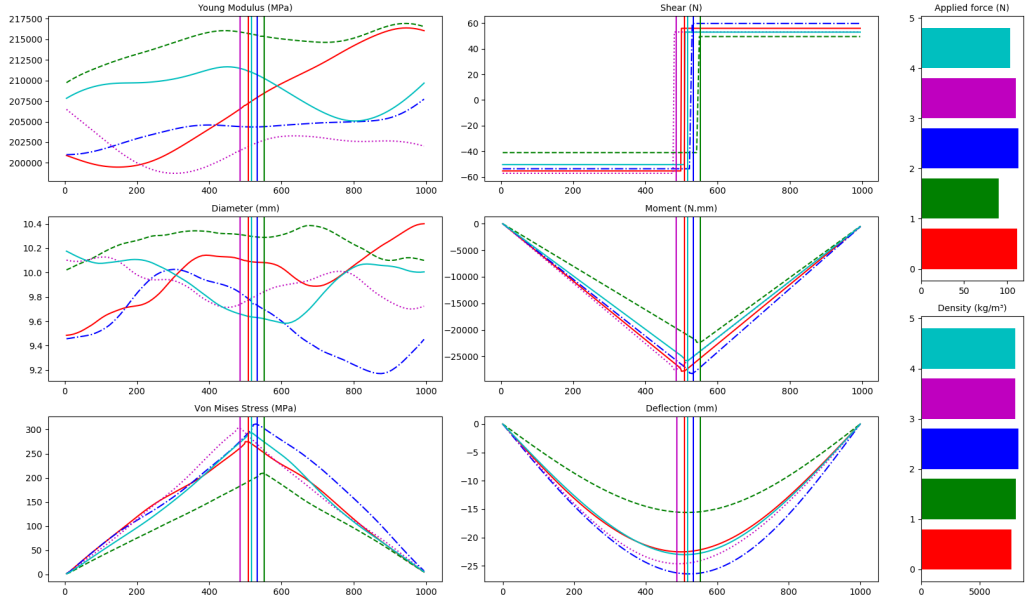


Figure 3: Échantillon de 5 réalisations de la poutre en flexion. [Sur la gauche : Processus gouvernant le module de young, Processus gouvernant le diamètre, contrainte de Von Mises] | [Sur la droite : Contrainte de cisaillement, moment de flexion, déflexion]

Les grandeurs d'étude choisies ici sont la contrainte de Von Mises, la déflexion de chaque noeud, et la déflexion maximale. On pourrait de même choisir une contrainte de Von Mises maximale pour représenter la défaillance.

Comme chacun des processus stochastiques peut être décomposé en une somme finie de variables aléatoires normales grâce à la décomposition de karhunen-Loeve, l'on peut à l'inverse, générer des champs stochastiques à partir d'une collection de variables aléatoires, dont les paramètres sont issus de l'analyse même du champ.

L'on considère donc notre modèle plus comme fonction de variables aléatoires et de processus stochastiques, mais seulement comme une fonction de variables aléatoires scalaires.

Ceci permet de faire l'analyse de sobol classique (avec l'algorithme de sensibilité de *Saltelli*) sur ces nouvelles variables aléatoires.

La difficulté ici, est d'ensuite relier les indices de sensibilité de Sobol des variables aléatoires définissant le champ au champ stochastique même. (On ne souhaite n'avoir qu'un seul indice de sobol pour un champ.)

2.5 Choix des codes et difficultés algorithmiques

Au vu de choix de développer une méthode algorithmique pour l'analyse de sensibilité sur des champs stochastiques, et non pas de juste faire l'analyse de sensibilité sur une seule problématique, il y avait un besoin de robustesse supplémentaire pour l'écriture des différents codes. Ces derniers doivent pouvoir fonctionner avec tout type de fonction en python prenant en entrée des champs et variables aléatoire, et renvoyant un tuple de variables aléatoires.

Pour pouvoir tester ceci, l'exemple de la poutre en éléments fins à été codée à part, et peut être utilisée directement comme fonction, indépendamment de l'analyse de sensibilité. Cette dernière prend de même en entrée deux champs stochastiques et trois variables aléatoires, et peut renvoyer plusieurs arguments. Les tests ont été faits avec la fonction renvoyant qu'une collection de champs (contraintes de von mises) et avec la fonction renvoyant un tuple (collection de champs + vecteur déflexion maximale). Ce choix augmente le nombre de vérification qu'il y a effectuer au sein du code, mais permet l'utilisation d'un plus grand nombre de fonctions, et l'analyse de sensibilité sur l'ensemble des variables de sortie en une seule fois.

Pour parvenir à bien contrôler les processus stochastiques, une classe a été écrite *NdGaussianProcessConstructor*, qui permet de définir entièrement un processus stochastique, et possède de nombreuses méthodes pour créer des samples, faire les décompositions de Karhunen-Loeve, ou encore reconstituer un champ à partir de la dite décomposition. Enfin, comme les samples sont nécessaires pour la décomposition de Karhunen-Loeve, et que ceux-ci peuvent être de taille plutôt importante, ils sont enregistrés sous forme de *numpy.memmap* dans un fichier temporaire, pour relacher un peu de pression sur la mémoire vive.

En interne, le modèle fonction de champs stochastiques, passe par un wrapper qui fait qu'on peut la considérer comme seulement fonction de variables aléatoires gaussiennes. Cela permet d'utiliser les méthodes internes à openturns comme l'algorithme de saltellie pour identifier les indices de sobol.

Néanmoins, pour pallier à certaines difficultés comme les fonctions qui par moment renvoient des *np.nan* (donc lorsqu'il y a eu une erreur), on passe d'abord par une étape de correction: l'ensemble des valeurs de sortie contenant des *nan* sont régénérées, et comme les entrées de l'étude sont des combinaison de deux ensembles de variables aléatoires A et B, toutes les autres permutations des entrées ayant entraîné des erreurs sont supprimées et remplacées.

Les codes sont accessibles via *github*:
https://github.com/Kramer84/stochastic_process_analysis

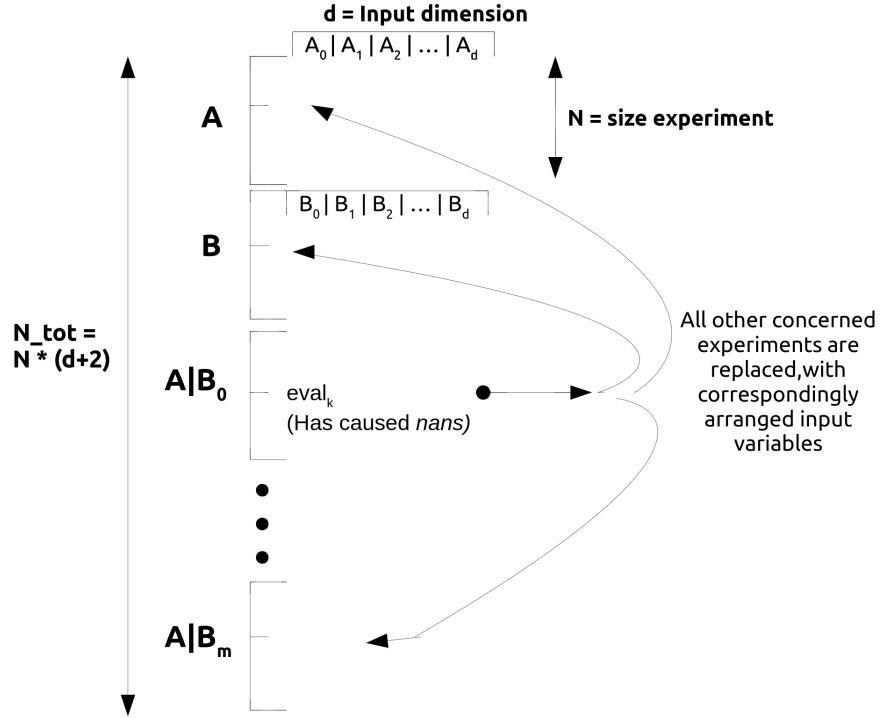


Figure 4: Organsiation des variables d'entrée, expliquant l'étape de postprocessing

Une fois cette étape finie, on a accès aux indices de sobol pour chaque élément du champ.

Dans le cas de la poutre en flexion, prennant initialement 5 arguments en entrée (champ du module de young et champ du diamètre, densité, position de la force et norme de la force), la décomposition des deux champs en entrée fait que le modèle est ensuite régi par 24 variables aléatoires. Bien que cela fait augmenter la dimensionalité du problème, nous avons désormais la possibilité de travailler seulement avec des variables aléatoires gaussiennes décorréliées, et donc faire une analyse de sensibilité classique.

La difficulté qui découle de cette analyse, est de trouver la manière qui permettra de relier les indices de sobol de ces variables aléatoire décorréliées, au champ stochastique d'origine.

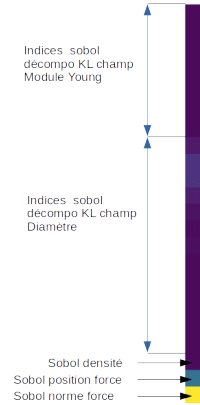


Figure 5: indices de sobol des V.A. de Karhunen-Loève pour la déflexion maximale



Figure 6: indices de sobol des V.A. de Karhunen-Loève pour le champ des contrainte de Von Mises

Pour parvenir à faire ce lien, nous avons comme base différentes études sur le sujet, notamment le papier par [Wei et al., 2017], sur l'analyse de sensibilité sur des modèles ayant des paramètres dépendants du temps. (Le variables étant gouvernés par le temps étant généralement stochastiques, ex: température, effort etc.)

2.6 Premiers essais d'analyse de la sensibilité du modèle

Comme nous avons désormais accès aux différents indices de sobol de notre modèle basé sur la décomposition de Karhunen-Loève, le travail pouvait désormais se focaliser sur l'interprétation de ces différents indices. En effet, cette décomposition était très classique lors du travail avec des champs stochastiques, et plusieurs papiers de recherche se sont intéressés à comment faire des analyses de sensibilité de ce type de champs avec cette même décomposition. Comme mentionné précédemment, le travail de [Wei et al., 2017] offre une première approche pour l'interprétation de ces résultats, mais d'autres comme [Pronzato, 2019] ont aussi développés des méthodes pour l'analyse de ces indices issus de l'expansion de Karhunen-Loève. Dans le travail de [Shang and Yun, 2013], il est rapporté d'une méthodologie pour lier un modèle en élément finis d'Abaqus avec des champs stochastiques générés avec MATLAB et pour l'analyse probabiliste de ce modèle. L'utilisation de l'expansion de KL y est aussi mentionné, et ce travail offre une analyse intéressante sur la capacité de cette méthode à reproduire le champs stochastique, en fonction de l'élément à partir duquel on tronature cette expansion.

2.6.1 Interprétation et essais avec le papier : "Time-variant global reliability sensitivity analysis of structures with both input random variables and stochastic processes"

Ce papier de recherche datant de 2017, offre une approche pour l'analyse de sensibilité de modèles définis dans le temps et leur analyse de fiabilité. En effet, de nombreuses structures mécaniques (ponts, tours etc.) sont soumis à des

grandeurs variant dans le temps, et si celles se trouvent être continues dans celui-ci, alors cette grandeur peut être représentée par un champ stochastique. Bien qu'il y ait une différence notable entre les grandeurs par rapport auxquelles il y a continuité (dans leur papier le temps, et nous l'espace), des analogies peuvent être faites.

L'approche se base sur la décomposition de Karhunen-Loève du champ stochastique, permettant de considérer le problème comme uniquement dépendant de variables aléatoires gaussiennes décorrélatées, et de déduire la sensibilité du modèle au champ stochastique à partir de la sensibilité de chaque composant de la décomposition du champ.

La décomposition de KL est particulièrement utile pour le calcul de fonction d'enveloppe et les calculs fiabilistes. Dans ce papier, l'utilisation de l'expérience de Monte-Carlo est essentiellement utilisée pour être comparée aux autres méthodes développées (**FOEF** : First Order Envelope Function et **AK-MCS** Active learning Kriging based Monte Carlo Simulation).

L'utilité de cette approche est de pouvoir identifier les sources principales d'incertitude ayant le plus d'influence sur la fiabilité du modèle. Enfin, elle permet de classer les variables selon leur ordre d'influence.

Néanmoins, leur approche se base sur la définition d'un état limite du modèle (par exemple la différence entre la contrainte maximale et la contrainte limite) et d'une fonction indicatrice de l'état limite, alors que nous cherchons à évaluer la sensibilité d'une grandeur en sortie (par exemple la contrainte) par rapport aux variables aléatoires en entrée. Ceci revient à priori à mesurer l'impact qu'à une variable en entrée sur la variance de la grandeur en sortie.

La définition mathématique de leur problème est la suivante :

- S : Etat limite du modèle
- \mathbf{X} : Vecteur de variables aléatoires
- $\mathbf{Y}(t)$: Vecteur de champs stochastiques dépendants du temps
- \mathbf{Z} : Fonction de performance
- I_S : Fonction indicatrice
- R : Probabilité de défaillance sur l'intervalle $[0, T]$

$$S = \{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : Z(t) = g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t), t) < 0 \forall t \in [0, T]\} ; \quad (5)$$

$$I_S(t) = I_S(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t), T) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in S \\ 0 & (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \notin S \end{cases} ; \quad (6)$$

$$R = R(T) = P_r(I_S = 1) = P_r(Z(t) = g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t)) < 0, \forall t \in [0, T]) ; \quad (7)$$

Les variables aléatoires et champs stochastiques ici définis sont tous indépendants entre eux.

Soient $\mu_X = (\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_n})$ et $\sigma_X = (\sigma_{X_1}, \dots, \sigma_{X_n})$ les vecteurs des moyennes et écarts types des variables aléatoires et $\mu_Y = (\mu_{Y_1}, \dots, \mu_{Y_n})$ et $\sigma_Y = (\sigma_{Y_1}, \dots, \sigma_{Y_n})$ les vecteurs des moyennes et écarts types des champs stochastiques.

Comme explicité lors de la définition de la décomposition de Karhunen-Loève, tout champ stochastique $Y_i(t)$ peut être écrit comme une somme de variables aléatoire gaussiennes décorrélées.

$Y_i(t)$	Approx. Procéssus Gaussien Y_i
λ_{ik}	Valeur Propre de la matrice de covariance
ξ_{ik}	Variable Normale Centrée Réduite
$\varphi_{ik}(t)$	Vecteur propre de la matrice de covariance

$$Y_i(t) = \mu_{Y_i}(t) + \sum_{k=1}^M \sqrt{\lambda_{ik}} \xi_{ik} \varphi_{ik}(t); \quad (8)$$

D'où chaque champ gaussien peut être exprimé à partir d'un ensemble de variables aléatoire gaussiennes décorélées $\xi_i = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{iM_i})$ et l'ensemble des champs est représenté par le vecteur $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$. ξ_i étant la représentation par des variables auxilliaires du champ Y_i .

Grâce à la propriété de décomposition de la variance, on a :

$$\begin{aligned} V(I_S) = & \sum_{i=1}^n V_{X_i} + \sum_{i=1}^m V_{\xi_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i, j=1}^n V_{X_i X_j} \\ & + \sum_{i=1}^m \sum_{j \neq i, j=1}^m V_{\xi_i \xi_j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m V_{X_i \xi_j} + \dots \\ & + V_{X_1 \dots X_n \xi_1, \dots, \xi_m} \end{aligned}$$

Figure 7: Décomposition de la variance de la fonction indicatrice

Ici, c'est la variance de la fonction en sortie qui est traitée, mais ceci est faisable pour tout modèle dépendant d'un ensemble de variables aléatoire. Il est à remarquer ici que : $V_{X_i} = V[E(I_S|X_i)]$ qui est la variance conditionnelle de la sortie I_S lorsque la variable aléatoire X_i est connue.

Néanmoins, dans le cas du vecteur $\xi_i = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{iM_i})$ on a:

$V_{\xi_i} = V[E(I_S|\xi_i)] = V[E(I_S|(\xi_{i1}, \dots, \xi_{iM_i}))] - \sum_{p=1}^{M_i} V_{\xi_{i_p}}$ qui est la variance conditionnelle de la sortie lorsque le vecteur aléatoire ξ_i représentatif du champ stochastique Y_i est connu.

2.7 Example of verbatim text

PROGRAM area

```

REAL base, height, area
PRINT *, 'Enter the values for the base and height of a triangle.'
READ *, base, height
area = (1.0/2.0) * base * height
PRINT *, 'The area of a triangle with base ', base
PRINT *, 'and height ', height, ' is ', area
STOP
END

```

Note: In *verbatim* mode you can easily end up outside the margins, as in the example above: pay attention to that!

2.8 Lists

Example of a list with numbered items:

1. Planets, asteroids, moons ...
2. Stars, galaxies, quasars

Example of a list with unnumbered items:

- Planets, asteroids, moons ...
- Stars, galaxies, quasars

3 Results

4 Tables and figures

Table 1: Example of table caption: opacity sources.

Source	$T/[\text{K}]$
Yorke 1979, Yorke 1980a	≤ 1700
Krügel 1971	$1700 \leq T \leq 5000$
Cox & Stewart 1969	$5000 \leq$

5 Discussion

6 Conclusions

References

- [Lilburne and Tarantola, 2009] Lilburne, L. and Tarantola, S. (2009). Sensitivity analysis of spatial models. *International Journal of Geographical Information Science*, 23(2):151–168.
- [Michaël Baudin and Popelin, 2015] Michaël Baudin, Anne Dutfoy, B. I. and Popelin, A.-L. (2015). Openturns: An industrial software for uncertainty quantification in simulation.
- [Pronzato, 2019] Pronzato, L. (2019). Sensitivity analysis via Karhunen–Loève expansion of a random field model: Estimation of Sobol’ indices and experimental design. *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, 187:93–109.
- [Shang and Yun, 2013] Shang, S. and Yun, G. J. (2013). Stochastic finite element with material uncertainties: Implementation in a general purpose simulation program. *Finite Elements in Analysis and Design*, 64:65–78.
- [Sudret and Kiureghian, 2000] Sudret, B. and Kiureghian, A. D. (2000). Stochastic Finite Element Methods and Reliability A State-of-the-Art Report. *ResearchGate*.
- [Wei et al., 2017] Wei, P., Wang, Y., and Tang, C. (2017). Time-variant global reliability sensitivity analysis of structures with both input random variables and stochastic processes. *Struct. Multidiscip. Optim.*, 55(5):1883–1898.