Formální jazyky a automaty

Palčivé otázky

- Rozdíly v regulárních automatech / zásobníkových automatech a turingovu stroji na 2 věty a méne
- Totální přechodová fce: rozdíl TDFA a DFA — done
- Saturace **nasycuje** respektuje — done
- Pravá / levá kongruence — done
- Gramatika typu *xyz*

Základní formalismy

$$L^0 = \{\epsilon\}$$

$$L^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} L^n$$

$$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$$

Regulární jazyky

- přehled :

6 možných formalismů RV — dokázat, že daný jazyk je regulární

- Deterministický konečný automat (DFA)
- Nedeterministický konečný automat (NFA)
- Nedeterministický konečný automat s ϵ kroky (ϵNFA)
- Regulární transition graphs (RTG)
- Regulární výrazy (RE)
- Regulární gramatiky (RG)

Dokázat, že daný jazyk není regulární

- **pumping lemma**

Kolik paměti je potřeba na rozkódování daného jazyka

- minimální automat
- pravá kongruence
- prefixová ekvivalence
- Myhillova-nerodova věta

Deterministický konečný automat (DFA)

- $Q \ldots$ konečná množina stavů
- $\Sigma \ldots$ (konečná) množina vstupních znaků (abeceda)
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q \ldots$ (parciální) přechodová fce
- $q_0 \in Q \ldots$ počáteční stav
- $F \subseteq Q \ldots$ množina kaceptujících stavů
- $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to P(Q) \ldots$ rozšířená přechodová fce:
-
    - $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$
    - $\hat{\delta}(q, au) = \hat{\delta}(\delta(q, a), u)$ pro lib. $a \in \Sigma, u \in \Sigma^*, q \in Q$

Př.:

- děfinujte DFA

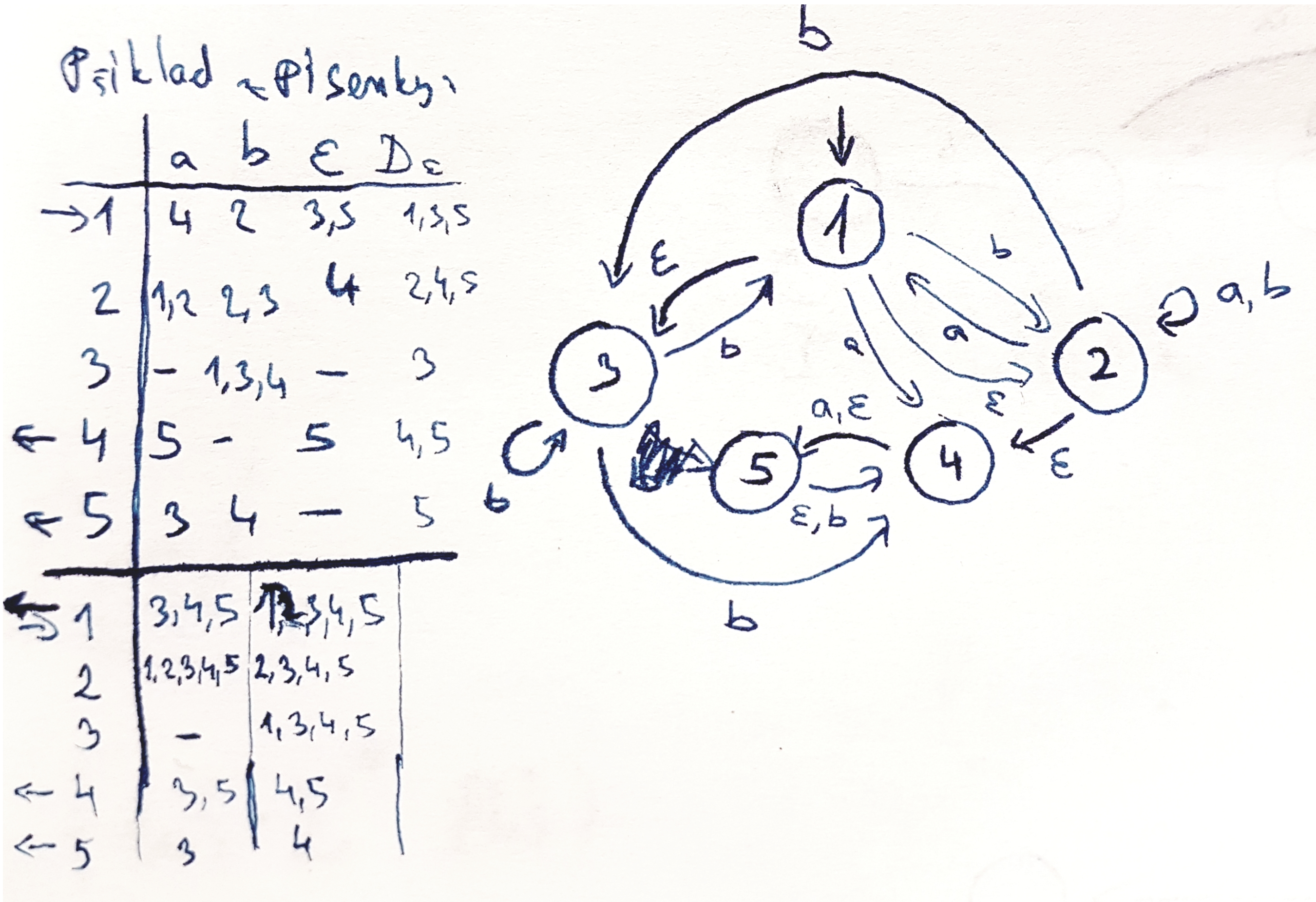
Nedeterministický konečný automat (NFA)

- $Q \ldots$ konečná množina stavů
- $\Sigma \ldots$ (konečná) množina vstupních znaků (abeceda)
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \langle \epsilon \rangle) \to Q \ldots$ (parciální) přechodová fce
- $q_0 \in Q \ldots$ počáteční stav
- $F \subseteq Q \ldots$ množina kaceptujících stavů
- $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to P(Q) \ldots$ rozšířená přechodová fce

Nedeterministický konečný automat s ϵ kroky (ϵNFA)

- PŘEDĚLAT!!!
- $Q \ldots$ konečná množina stavů
- $\Sigma \ldots$ (konečná) množina vstupních znaků (abeceda)
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \langle \epsilon \rangle) \to PQ \ldots$ (parciální) přechodová fce
- $q_0 \in Q \ldots$ počáteční stav
- $F \subseteq Q \ldots$ množina kaceptujících stavů
- $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to P(Q) \ldots$ rozšířená přechodová fce
-
    - $\hat{\delta}(q, \epsilon) = D_\epsilon(q)$
    - $\overline{D}_\epsilon = \bigcup_{p \in P} D_\epsilon(p)$ pro libovolný $p \subseteq Q$

Př.:



Př.: Rozhodněte, jestli je $L = a^n b^n | n \in \mathbb{N}$ regulární – *Pumping lemma*

- Předpokládejme pro spor, že L je regulární
- Pak existuje TDFA $\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, takový, že $\mathbb{L}(\mathbb{A}) = L$.
- Označme $n = |Q|$. Uvažme slovo $w = a^n b^n \in L$. Podle Dirichletova principu existují $i, j \in 0, 1, \ldots, n$, BÚNO $i < j$, takové, že $\hat{\delta}(q_0, a^i) = \hat{\delta}(q_0, a^j)$ (označme tento stav p).
- Platí tedy, že $\hat{\delta}(p, a^{j-i}) = p$.
- Uvažme slovo $w' = a^{n+j-i} b^n = a^i a^{j-i} a^{j-i} a^{n-j} b^n$.
- Pak $\hat{\delta}(q_0, w') = \ldots = \hat{\delta}(p, a^{n-j} b^n) = \ldots = \hat{\delta}(q_0, w)$
- Platí $w \int L$, tedy $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$, ale $w' \notin L$, tedy $\hat{\delta}(q_0, w') \notin F$, což je spor, neboť $\hat{\delta}(q_0, w) = \hat{\delta}(q_0, w=)$.

Pumping Lemma

- Předpoklad: jazyk je regulární $\Rightarrow$ existuje konečný automat s konečnou množinou stavů (n stavů), tak dle Dirichletova principu dojde pro dostatečně dlouhé slovo k zopakování stavu. Tento cyklus označíme y, část před cyklem x a část za cyklem z.

  Musí pak platit, že nezávisle na tom, kolikrát “napumpujeme” y, tak slovo zůstane popsatelné tímto automatem.

- L je regulární $\Rightarrow$

  $(\exists n \in \mathbb{N}^+)(\forall w \in \Sigma^*)(|w| \geq n \Rightarrow (\exists x, y, z \in \Sigma^*)$

  $(w = xyz \wedge y \neq \epsilon \wedge |xy| \leq n \wedge (\forall i \in \mathbb{N})(xy^i z \in L \Leftrightarrow w \in L)))$

- Vyvrácení regularity obměnou:
  Postup: “snažím se vypumpovat z jazyku”

1. soupeř zadá n
2. vymyslím slovo v závislosti na n
3. soupeř zadá rozdělení mezi x, y, z
4. já vymyslím i kdterým to přepumpuji

Myhillova–Nerodova věta

- Nechť L je jazyk. Následující výroky jsou ekvivalentní:

1. L je regulární
2. existuje práva kongruence $\sim \subseteq (\Sigma^*)^2$ s konečným indexem, která saturuje L
3. $\sim_L$ má konečný index

Def.: **Saturuje**

- pravá kongruence $\sim$ nad Σ^* **saturuje** (nasycuje, respektuje, *respektive???*) jazyk $L \subseteq \Sigma^* \Leftrightarrow L$ je sjednocení některých (0 až všech) podmnožin rozkladu $\Sigma^* / \sim$

Def.: **Prefixová ekvivalence**

- ???

Neregulární jazyky

Bezkontextové gramatiky (CFG)

- uspořádaná čtveřice: $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$
  - $N \ldots$ konečná množina neterminálů
  - $\Sigma \ldots$ konečná množina terminálů
  - $P \ldots$ konečná množina pravidel
  - $S \ldots$ konečná množina počátečních pravidel
- na levé straně je vždy právě jeden neterminál

Def.:

- Neterminál X je **dosažitelný** $\Leftrightarrow (\exists \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*)(S \Rightarrow^* \alpha X \beta)$
- Neterminál X je **normovaný** $\Leftrightarrow (\exists w \in \Sigma^*)(X \Rightarrow^* w)$
- Neterminál X je **použitelný** $\Leftrightarrow (\exists \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*)(\exists w \in \Sigma^*)(S \Rightarrow^* \alpha X \beta \Rightarrow^* w)$
- Gramatika je **redukovaná** $\Leftrightarrow$ všechny neterminály jsou použitelné
- Gramatika má vlastnost **sebevložení** $\Leftrightarrow (\exists A \in N)(\exists u, v \in \Sigma^+)(A \Rightarrow^* uAv)$
- Gramatika je **jednoznačná**
  $\Leftrightarrow$ pro každé slovo generované danou gramatikou existuje právě jedno *nejlevější odvození*
  $\Leftrightarrow$ existuje právě jeden **derivační strom** pro každé slovo generované danou gramatikou
- Gramatika je **cyklická** $\Leftrightarrow (\exists A \in N)(A \Rightarrow^+ A)$
- Gramatika je **vlastní** $\Leftrightarrow$ je bez ϵ pravidel $\wedge$ necyklická $\wedge$ redukovaná

- Gramatika je bez ϵ **pravidel** $\Leftrightarrow$ jediný ϵ krok je $S \to \epsilon$ a S není na pravé straně žádného pravidla

Věta:

- Gramatika je regulární $\Leftrightarrow$ gramatika nemá vlastnost sebevložení
- Jazyk je regulární $\Rightarrow$ jazyk je jednoznačný

> *Jaký je vztah mezi regularitou a sebevložením?*
>
> *Nemají se rádi: Dávno se rozešli a nikdy se od tédoby neviděli.*

Redukování gramatiky

1. odstraním nenormované neterminály
2. odstraním nedosažitelné neterminály

Přepsání CFG s ϵ slovy na CFG bez ϵ slov

1. odstraním pravidla přímo travu: $A \to \epsilon$
2. vytvořím až 2^n pravidel, kde n je počet výskytů ϵ pravidel

Př.:

- $\{a^i b^j c^j d^i | i, j \in \mathbb{N}\} : S \to aSd \mid E;\ E \to bEc \mid \epsilon$

Chunského normální forma

- ***Def.:***
  - Gramatika $\mathcal{G}$ je vlastní $\wedge$ pravidla jsou tvaru $A \to a|BC$
- ***Postup:***
  1. Odstraním nenormované neterminály (a pravidla s nimi)
  2. Odstraním nedosažitelné neterminály (a pravidla s nimi)
  3. Odstranění ϵ pravidel (přidat pravidla, kde je neterminál přepisující se na ϵ)
  4. Odstranění jednoduchých pravidel
  5. Pravidla delší jak 2 rozsekám:
     - $S \to SaSbS$

       na
     - $S \to S<aSbS>$

       $<aSbS> \to a<SbS>$

       $<SbS> \to S<bS>$

       $<bS> \to bS$
  6. Začárkuji nesamostatné terminály:
     - $S \to S<aSbS>$

$<aSbS> \to a<SbS>$

$<SbS> \to S<bS>$

$<bS> \to bS$

na

- $S \to S<aSbS>$

  $<aSbS> \to a'<SbS>$

  $<SbS> \to S<bS>$

  $<bS> \to b'S$

  $a' \to a$

  $b' \to b$

Pumping lemma v.2

Def.:

- gramatika $\mathcal{L}$ je bezkontextová $\Rightarrow$

  $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall w \in \mathcal{L})$

  $(|w| \geq n \Rightarrow (\exists u, v, x, y, z \in \Sigma^*)$

  $(w = uvxyz \wedge vy \neq \epsilon \wedge |vxy| \leq n \wedge (\forall i \in \mathbb{N})(uv^i xy^i z \in \mathcal{L})$

  $)$

  $)$

Př.:

- Nechť $n \in \mathbb{N}$. Uvažme slovo $w = a^n b^n c^n$. Zřejmě $|w| \geq n$ a $w \in \mathcal{L}$.
  Nechť $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ jsou taková, že $w = uvxyz, vy \notin \epsilon, |vxy| \leq n$.
  Uvažme slovo $w_0 = uxz$. Ukážeme, že $w_0 \notin \mathcal{L}$:

  Z $|vxy| \geq n$ plyne, že vy neobsahuje nějaký znak $d \in \{a, c\}$.
  Z $vy \neq \epsilon$ plyne, že vy obsahuje nějaký znak $e \in \{a, b, c\}$.

  Tedy $\#_d(w_0) = \#_d(w) - \#_d(vy) = n - 0 = n$,
  ale $\#_e(w_0) = \#_e(w) - \#_e(vy) < n$, proto $w \notin \mathcal{L}$.
  $(\#_e(w) = n$, $\#_e(vy) > 0)$

Zásobníkový konečný automat s ϵ kroky (PDA)

Def.: sedmice $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

- $Q \ldots$ konečná množina stavů

- $\Sigma\ldots$ (konečná) množina vstupních znaků (abeceda)
- $\Gamma\ldots$ konečná množina zásobníkových stavů
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \to P_{fin}(Q \times \Gamma^*)\ldots$ (parciální) přechodová fce
- $q_0 \in Q\ldots$ počáteční stav
- $Z_0 \in \Gamma\ldots$ počáteční stav v zásobníku
- $F \subseteq Q\ldots$ množina kaceptujících stavů

- $(p,u,\alpha) \vdash (q,v,\beta);\ p,q \in Q; u,v \in \Sigma^*; \alpha,\beta \in \Gamma^*$
  - $(\exists a \in \Sigma \cup \{\epsilon\})(u = a \cdot v$

    $\wedge (\exists \gamma \in \Gamma)(\exists \omega, \xi \in \Gamma^*)(\alpha = \xi \cdot \gamma \wedge \beta = \xi \cdot \omega \wedge (q,\omega) \in \delta(p,a,\gamma)))$
- $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* : (\exists q \in F)(\exists \alpha \in \Gamma^*)((q_0,w,Z_0) \vdash^* (q,\epsilon,\alpha))\}$
- $\mathcal{L}_\epsilon(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* : (\exists q \in Q)((q_0,w,Z_0) \vdash^* (q,\epsilon,\epsilon))\}$

Uzávěrové vlastnosti bezkontextových jazyků

- $\cup$ – $\surd$ – $\mathcal{G} = (\_,\_,(S \to S_1 || S_2),\_)$.
- $\cap$ – $\times$ – $\mathcal{L} = \{w \in \{a,b,c\}^* :\ \text{stejný počet } a,b \text{ a } b,c\}$.
- co- – $\times$ – důkaz $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = (\mathcal{L}_1^c \cup \mathcal{L}_2^c)^c$. (complement)
- R – $\surd$ – obrátím pravidla v gramatice (reverse)
- $\cdot$ – $\surd$ – $\mathcal{G} = (\_,\_,(S \to S_1 \cdot S_2),\_)$.
- $*$ – $\surd$ – opakované zřetězení

Zásobníkový konečný automat bez ϵ kroků (PDA)

Def.: sedmice $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

- $Q\ldots$ konečná množina stavů
- $\Sigma\ldots$ (konečná) množina vstupních znaků (abeceda)
- $\Gamma\ldots$ konečná množina zásobníkových stavů
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \to P_{fin}(Q \times \Gamma^*)\ldots$ (parciální) přechodová fce
- $q_0 \in Q\ldots$ počáteční stav
- $Z_0 \in \Gamma\ldots$ počáteční stav v zásobníku
- $F \subseteq Q\ldots$ množina kaceptujících stavů

operace / uzavřeno nad	reg	bezkont. nedeter	bezkont. determin
∪	✔	✔	✘
∩	✔	✘	✘
co-	✔	✘	✔
R	✔	✔	✘
·	✔	✔	✘
*	✔	✔	✘

*	✔	✔	✘

- $\forall$ co nedeterministické + tyto podmínky:

1. $(\forall q \in Q \wedge \forall a \in \Sigma \cup \{\epsilon\} \wedge \forall \alpha \in \Gamma)(|\delta(q,a,\alpha)| \leq 1)$
2. $(\forall q \in Q)(\forall \alpha \in \Gamma)(\forall a \in \Sigma)(|\delta(q,a,\alpha)| + |\delta(q,\epsilon,\alpha)| \leq 1))$

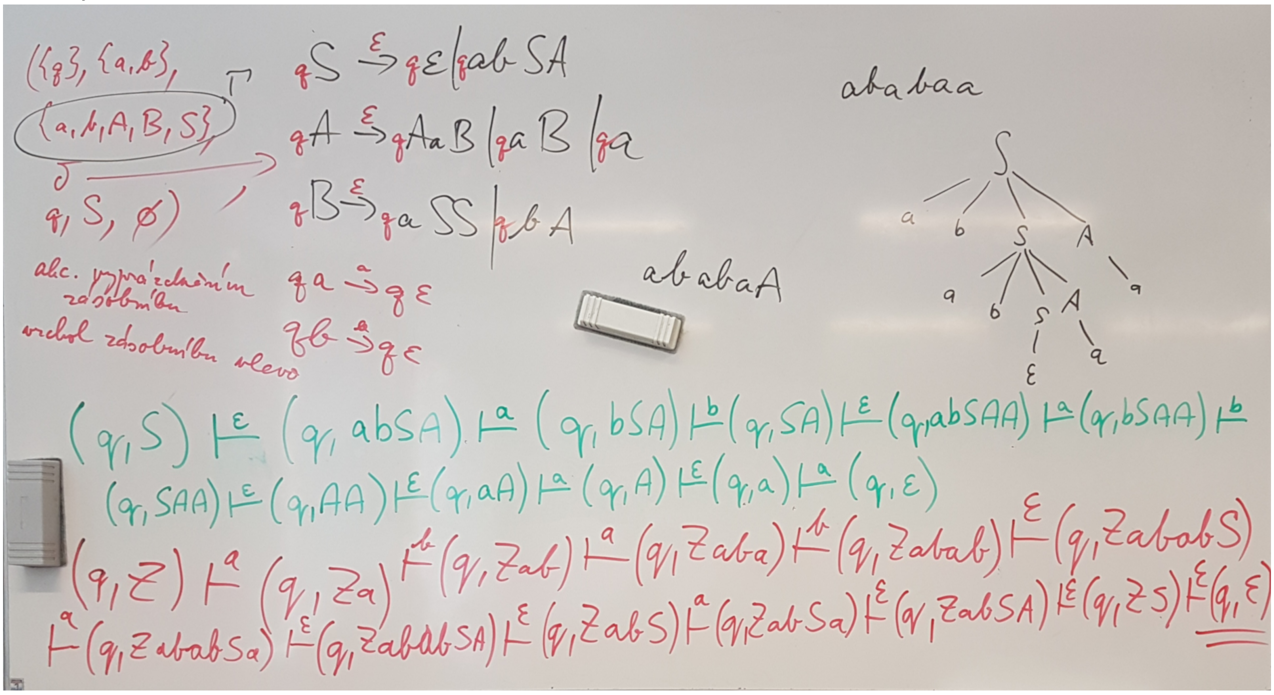
Syntaktická analýza

či **syntaktický analizátor** = (fancy název pro převod z **gramatiky** na **automat**)

Syntaktická analýza shora

HOWTO:

- Nechť je vrchol automatu vlevo



Syntaktická analýza zdola

HOWTO:

- Nechť je vrchol automatu vpravo

Syntaktická analýza shora dolů (do hloubky – vrchol zásobníku vlevo) – děláme automat

$$\left.\begin{array}{l} qS \xrightarrow{\varepsilon} q\varepsilon \mid qabSA \\ qA \xrightarrow{\varepsilon} qAaB \mid qaB \mid qa \\ qB \xrightarrow{\varepsilon} qaSS \mid qbA \\ \\ qa \xrightarrow{a} q\varepsilon \\ qb \xrightarrow{b} q\varepsilon \end{array}\right\}$$

δ; q je jediný stav, akceptuje prázdným ~~stavem~~ zásobníkem

průběh syntaktické analýzy:

~~(q, S) ⊢ (q, abSA) ⊢ (q, ababSAA) ⊢ (q, ababAA) ⊢ (q, ababaA) ⊢ (q, babaa~~

$(q, S) \overset{\varepsilon}{\vdash} (q, abSA) \overset{a}{\vdash} (q, bSA) \overset{b}{\vdash} (q, SA) \overset{\varepsilon}{\vdash} (q, abSAA) \overset{a}{\vdash} \dots \overset{\varepsilon}{\vdash} (q, SAA) \overset{\varepsilon}{\vdash} (q, AA) \overset{\varepsilon}{\vdash}$
$\overset{\varepsilon}{\vdash} (q, aA) \overset{a}{\vdash} (q, A) \overset{\varepsilon}{\vdash} (q, a) \overset{a}{\vdash} (q, \varepsilon)$

Rozhodnutelnost

- Pro jazyky
  - rekurzivní ($\approx$ rozhodnutelný) – skončí a řekne ANO / NE
  - rekurzivně spočetný ($\approx$ částečně rozhodnutelný) – skončí (ANO) / cyklí (NE)
- Pro problém
  - rozhodnutelný ($\approx$ rekurzivní) – skončí a řekne ANO / NE
  - částečně rozhodnutelný ($\approx$ rekurzivně spočetný) – skončí (ANO) / cyklí (NE)

Př.: (ekvivalentní jazyk × problém)

- $\mathcal{L} = \{w \in \{a, b\}^* : |w| \mod 2 = 0\}$ je regulární
- problém, zda slovo má sudou délku, je rozhodnutelný s konstantní pamětí

Př.:

- Problém zastavení není rozhodnutelný, ale je částečně rozhodnutelný
- TM není ani rekurzivně spočetný: komplement k rekurzivně spočetnému

Věta:

- $\mathcal{L}$ je rekurzivní $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}^c$ jsou rekurzivně spočetné

Turingův stroj

Def.: je devítice $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \rhd, \_, q_0, q_a, q_n)$

- $Q \dots$ konečná množina stavů

- $\Sigma \in \Gamma \ldots$ (konečná) množina vstupních znaků (abeceda)
- $\Gamma \ldots$ konečná množina pracovních stavů
- $\delta : (Q - \{q_a, q_n\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{-1, 1\} \ldots$ (parciální) přechodová fce
- $\rhd \in \Gamma \ldots$ levá zarážka
- $\_ \in \Gamma \ldots$ symbol prázdného políčka
- $q_0 \in Q \ldots$ počáteční stav
- $q_a \in Q \ldots$ akceptující stav
- $q_n \in Q \ldots$ zamítající stav

Množina všech konfigurací:

- $\vdash \ldots$ krok výpočtu
- $A = \{y\_^\omega | y \in \Gamma^*\}$
- $\vdash \subseteq (Q \times A \times \mathbb{N})^2$
- $(p, x, i) \vdash (q, y, j) \Leftrightarrow$

  $\delta(p, x_i) = (q, y_i, j - i) \wedge (\forall k \in \mathbb{N})(k \neq i \Rightarrow x_k = y_k)$ pro libovolné $p, q \in Q;\ x, y \in A;\ i, j \in \mathbb{N}$
- $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* : (\exists x \in A)(\exists i \in \mathbb{N})((q_0, \rhd w\_^\omega, 0) \vdash^* (q_a, x, i))\}$

> Ještě to nechápete?
>
> Tak já zkusím něco šílenějšího, ať to pochopíte.