

第四次作业 LP

姓名：梁付槐

学号：2018Z8013261003

题目二：Interval Scheduling Problem

算法：

首先将课先按照 F_i 进行排序, $x_{ij} = 1$ 就就是课程 i 安排在教室 j .

那么：

$$\begin{aligned} \max & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \sum_{j=1}^m x_{ij} \leq 1, i = 1, \dots, n \\ F_i(x_{ij} + x_{kj} - 1) \leq S_k, 0 < i < k \leq n, j = 1, \dots, m \\ x_{ij} = 0/1, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \end{cases} \end{aligned}$$

对于第一个约束，保证了一门课只能安排在一间教室。

对于第二个约束，如果两门课安排在同一个教室，则它们时间不能冲突。

当 $x_{ij} = x_{kj} = 1$ 时，说明课程 i 和课程 k 被安排在同一间教室，此时要有 $F_i \leq S_k$.

举例：

设 $m = 2, n = 3$.三门课(按 F_i 排序)依次为 $[8,9]$ 、 $[8.5,9.5]$ 、 $[9,10]$.

问题转化为：

$$\max \{x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} + x_{31} + x_{32}\}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_{11} + x_{12} \leq 1 \\ x_{21} + x_{22} \leq 1 \\ x_{31} + x_{32} \leq 1 \\ 9(x_{11} + x_{21} - 1) \leq 8.5 \\ 9(x_{11} + x_{21} - 1) \leq 8.5 \\ 9(x_{11} + x_{31} - 1) \leq 9 \\ 9(x_{12} + x_{32} - 1) \leq 9 \\ 9.5(x_{21} + x_{31} - 1) \leq 9 \\ 9.5(x_{22} + x_{32} - 1) \leq 9 \end{cases}$$

用GLPK解得：

$$x_{11} = 1, x_{12} = 0, x_{21} = 0, x_{22} = 1, x_{31} = 1, x_{32} = 0.$$

题目三：Gas Station Placement

算法：

依题意，设 x_i 为第 i 个加油站的位置， y 为各个 x 之差的最大值,因此有：

$$\begin{aligned} & \min y \\ & s.t. \begin{cases} x_i - x_{i-1} \leq y, i = 2, \dots, n \\ d_i - r \leq x_i \leq d_i + r, i = 1, \dots, n \\ d_1 < d_2 < \dots < d_n \\ 0 < r < d_1 \\ d_i + r < d_{i+1} - r, i = 1, \dots, n-1 \end{cases} \end{aligned}$$

第一个约束，找出加油站之间的最大距离差 y 。

第二个约束，保证加油站 x_i 在小镇 d_i 的 r 范围内。

剩下三个约束是题目的已知条件。

举例：

设四个城镇, $[d_1, d_2, d_3, d_4] = [4, 10, 19, 30], r = 2$.

问题转化为：

$$\begin{aligned} & \max \{y\} \\ & s.t. \begin{cases} x_2 - x_1 \leq y \\ x_3 - x_2 \leq y \\ x_4 - x_3 \leq y \\ 2 \leq x_1 \leq 6 \\ 8 \leq x_2 \leq 12 \\ 17 \leq x_3 \leq 21 \\ 28 \leq x_4 \leq 32 \end{cases} \end{aligned}$$

用Simplex算法解得：

$$\min y = 8,$$

其中 $x_1 = 4, x_2 = 12, x_3 = 20, x_4 = 28$.