Topologie et Calcul différentiel

Semaine 1 : Introduction du cours, rappels de calcul différentiel.

Mardi 14 Février 2023 (Bonne Saint-Valentin < 3)

Contenu du cours

Calcul différentiel

- Rappels: dérivée partielle, développement limité, différentielle, fonctions composées
- Théorème des fonctions implicites: théorie, applications à la physique,
- S'il reste du temps: théorème d'inversion locale, théorème des extrema liés, ...

Convexité

- Introduction: définitions, propriétés, liens avec le calcul différentiel
- Inégalités de convexité: inégalité de moyennes, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de Jensen,

Contenu du cours

Tolopologie

- Définitions: normes, distances, ouverts, fermés, bornés, adhérence, intérieur, frontière, voisinages, points isolés,
- Espaces métriques: étude de la continuité dans un espace muni d'une distance,
- Espaces compacts: espaces dans lesquels tout se passe bien avec la continuité,
- Espaces vectoriels normés: espace munis d'une norme, + spécifique qu'une distance, + de résultats intéressants de continuité,
- S'il reste du temps: Connexité, espaces complets,

Evaluation

Quatre critères de notation

- Projets: un projet en calcul différentiel et convexité (15%), un projet de topologie (15%)
- Notes de colle et QCM: 20%
- Attitude: 20% (présence en cours et TD, participation, intérêt)
- Examen: 30%

Innovations pédagogiques

Essayer des choses pour améliorer le cours

- Fiche de rétrocation: A la fin de chaque cours, des fiches sont à rendre pour dire ce que vous avez trouvé bien, moins bien, trop facile, trop difficile, trop ennuyeux, trop abstrait, trop cool, trop nul,
- Contenu des colles: Le programme de colle comportera chaque semaine des preuves de cours ainsi que des exercices à savoir refaire,
- Références: Un grand nombre de références de cours et d'exercices à disposition sur Moodle, pour vous entraîner, voire aller plus loin,
- Pas de correction en TD: Les étudiants en TD seront aidés par les professeurs, et une correction (totale ou avec des trous) sera fournie sur Moodle, mais pas de correction au tableau,
- Beaucoup de QCM: si possible un à chaque cours,
- Des slides: Les cours se font sur slides avec des .... à compléter pendant le cours par les .... (Du coup, maintemant, les .... sont supposés aller sur .... pour télécharger les .... du cours).

Chapitre 1 : Calcul différentiel

Dérivée partielle et différentielle

Notations

- Les vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ sont notés $x = (x_1, \ldots, x_n)$
- La norme euclidienne est notée $|x| :=$ ....
- Le produit scalaire canonique de deux vecteurs $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ est noté $\langle x, y \rangle :=$ ....

Définition

- Si f est une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ (fonction vectorielle), on note f_1, f_2, ..., f_p ses fonctions composantes. Alors :

$$\forall x \in E,\ f(x) = \text{....................}$$

Boule ouverte, ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^n$

Définition

- Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et soit $r > 0$. La boule ouverte centrée en x de rayon r est définie par: $\mathrm{BO}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ldots\ldots\ldots\}$
- Un sous-ensemble O de $\mathbb{R}^n$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$ si:

$$\forall x \in O, \ \ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Continuité d'une fonction à plusieurs variables

Définitions

- Rappel : Une fonction $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est continue en $x \in]a, b[$ si

$$\ldots\ldots\ldots\ldots > 0, \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots > 0, \forall y \in]a, b[, \; (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

- Par analogie: Soit O un ensemble non vide ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et soit $f : O \to \mathbb{R}^p$. Une fonction f est dite continue en $x \in O$ si

$$\ldots\ldots\ldots\ldots > 0, \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots > 0, \forall y \in \ldots\ldots, \; (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

- La fonction f est continue en $x \in O$ si, et seulement si, f_j est continue en $x \in O$ pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$.
- La fonction f est dite continue sur O si

....

- On note $\mathcal{C}^0(O, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble des fonctions continues sur O.

Continuité d'une fonction à plusieurs variables

Propriété

L'ensemble $\mathcal{C}^0(O, \mathbb{R}^p)$ est stable par ...., ..., ... (si ....), et .... (si ....).

Exemple

- Une fonction polynomiale, c'est-à-dire de la forme

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq N} \underbrace{a_{i_1, \ldots, i_n}}_{\in \mathbb{R}} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

est continue sur $\mathbb{R}^n$ (par exemple $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2\, x + 3\, x\, y\, z - 3z + 2$ est continue sur $\mathbb{R}^3$).

Continuité d'une fonction à plusieurs variables

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

La fonction f est-elle continue en (0,0)?

Dérivée partielle

Définition

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : O \to \mathbb{R}^p$.

- On dit que f est admet une dérivée partielle par rapport à la j-ième variable en $x \in O$ si la fonction ci-dessous est dérivable en x_j :

$$\ldots \longmapsto f(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

- Si c'est le cas, le vecteur dérivée de $\mathbb{R}^p$ obtenu (ou nombre dérivé si $p = 1$) est noté

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \qquad \text{ou} \qquad \partial_j f(x)$$

- Si f admet une dérivée partielle par rapport à la j-ième variable en tout $x \in O$, on définit la j-ième dérivée partielle de f par

$$\ldots\ldots\ldots : \left\{ \begin{array}{ccc} O & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Dérivée partielle

Exercice

Justifier l'existence des dérivées partielles de ces fonctions, et les calculer.

- $f(x, y) = e^x \cos(y)$
- $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cos(xy)$
- $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 y^2}$

Dérivée partielle

Définition

- Pour un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ non nul, on peut définir plus généralement (sous réserve d'existence) la dérivée directionnelle de f dans la direction v en x, notée $\partial_v f(x)$, par[a]

$$\partial_v f(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

- En particulier, $\partial_j f(x)$ est la dérivée directionnelle de f dans la direction ..... en x: $\partial_j f(x) = \dots\dots$
- Toujours sous réserve d'existence, la dérivée directionnelle de f dans la direction v est alors définie par

$$\partial_v f : \begin{cases} O & \longmapsto & \mathbb{R}^p \\ v & \longmapsto & \partial_v f(x) \end{cases}$$

[a] Pour t assez petit, $x + t\,v \in O$ car ....

Dérivée partielle

ATTENTION !! Une fonction peut admettre des dérivées partielles en un point sans y être continue.

Exercice

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,\, y) = \begin{cases} \dfrac{x\, y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,\, y) \neq (0,\, 0) \\ 0 & \text{si } (x,\, y) = (0,\, 0) \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$

Dérivée partielle

Exercice

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,\, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0, 0)$ mais n'est pas continue en $(0, 0)$.

Développement limité

Notation

- La notation

$$\underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(|h|)$$

(qu'on appelle "petit o de h") désigne une fonction ϕ définie sur .... à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ telle que

$$\lim_{h \to 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{|\phi(h)|}{|h|} = 0$$

Exemple

- Si α........ et la la fonction f définie par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x|^\alpha \end{array} \right.$$

Fonction différentiable et différentielle en un point

Définition

- Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $x_0 \in O$. Une fonction $f : O \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $x_0 \in O$ s'il existe une application linéaire $df_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que [a] $x + h \in O$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si c'est le cas, df_{x_0} s'appelle la différentielle de f en x_0.

[a] C'est toujours le cas si h est .... car ....

Fonction différentiable et différentielle en un point

Remarques

- Dire que f est différentiable en x_0, c'est dire qu'elle admet

  ....

  $$f(x_0+h) = \underbrace{\text{terme constant}}_{f(x_0)} + \underbrace{\text{terme linéaire en } h}_{df_{x_0}(h)} + \underbrace{\text{terme négligeable}}_{\underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(|h|)}$$

- Le terme $f(x_0) + df_{x_0}(h)$ est donc approximation .... locale de f en x_0.
- On parle de LA différentielle de f en x_0 (si elle existe) car elle est ....

Fonction différentiable et différentielle en un point

Propriété (Caractérisation de la différentielle)

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, soit $x_0 \in O$ et soit $f : O \to \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable en x_0. L'application linéaire $df_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $x + h \in O$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + df_{x_0}(h) + \underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(|h|)$$

vérifie, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$df_{x_0}(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\,h) - f(x_0)}{t}$$

En particulier, cette application linéaire est unique.

Remarque

Autrement dit, $df_{x_0}(h)$ n'est rien d'autre que ....

....

Fonction différentiable et différentielle en un point

Preuve

- Soit $h \in \mathbb{R}^n$ fixé. Si $h = 0_{\mathbb{R}^n}$, ...
- Supposons donc $h \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, soit $t \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + t\,h \in O$ (possible car ....).
- Puisque ....,

$$f(x_0 + t\,h) - f(x_0) = df_{x_0}(t\,h) + \underset{t \to 0}{o}(|t\,h|) = t\,df_{x_0}(h) + \underset{t \to 0}{o}(t)$$

  puisque ....
- Il ne reste plus qu'à ....

Fonction différentiable et différentielle en un point

Lien entre différentielle et dérivée (dimension 1)

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, soit $x_0 \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$. Alors f est différentiable en x_0 si et seulement si .... Si c'est le cas, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$,
$f(x_0 + h) =$ ....
On en déduit que $df_{x_0}(h) =$ .... pour tout $h \in \mathbb{R}$.

Lien entre différentielle et dérivées partielles

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, soit $x_0 \in O$ et soit $f : O \to \mathbb{R}^p$. Si f est différentiable en x_0, alors elle admet des dérivées partielles en x_0 et

$$df_{x_0} : h \longmapsto \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x_0)\, h_j$$

Si c'est le cas, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_0 + h \in O$,
$f(x_0 + h) =$ ....

Fonction différentiable et différentielle en un point

Remarque

La réciproque est fausse: une fonction peut être continue et admettre des dérivées partielles en un point mais ne pas être différentiable en ce point
Pire : Elle peut avoir des dérivées partielles des TOUTES les directions et ne pas être différentiable !!!

Exercice

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,\, y) = \begin{cases} x & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en $(0, 0)$, qu'elle admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0, 0)$ mais qu'elle n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Fonction différentiable et différentielle en un point

Remarque (Utilité de la notion de différentielle)

Pourquoi introduire la notion de différentielle plutôt que de travailler seulement avec les dérivées partielles?

- L'idée centrale du calcul différentiel est de ....: au voisinage d'un point x_0, on approxime $f(x) - f(x_0)$ par un terme ...., ce qui donne exactement la notion de différentielle.
- Les dérivées partielles sont, par définition, liées à .... La différentielle est une notion indépendante du choix ....
- La notion de différentielle se généralise à des espaces plus généraux que $\mathbb{R}^n$, on peut par exemple parler de différentielle sur des espaces de matrices, ou même sur des espaces de dimension infinie.

Fonction différentiable et différentielle sur un ouvert

Définition

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : O \to \mathbb{R}^p$ est différentiable sur O si f est différentiable en tout $x \in O$. L'application

$$df : \begin{cases} O & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \\ x & \longmapsto & df_x \end{cases}$$

est appelée différentielle de f.

Remarque

La différentielle df n'est pas linéaire (par rapport à x) en général. Par contre, si $x \in O$ est fixé, $df_x : h \mapsto df_x(h)$ est linéaire (par rapport à h).