Rappel : MATH1, exercice 2.1.2 p 71 Violaine

Définition : Soit $\mathcal{E}$ un ensemble (non vide).

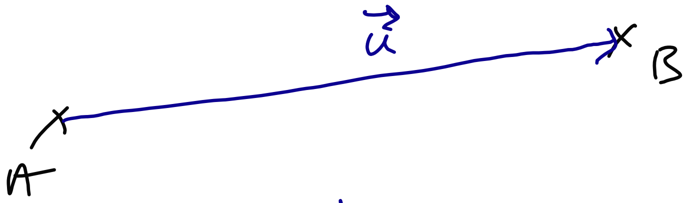
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on dit que

$\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E

s'il existe
$$\begin{aligned} \mathcal{E} \times E &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (A, \vec{u}) &\longmapsto A + \vec{u}. \end{aligned} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} A \in \mathcal{E} & \text{point} \\ \vec{u} \in E & \text{vecteur.} \end{array} \right.$$

qui vérifie

1) $\forall (A,B) \in \mathcal{E}^2,\ \exists!\, \vec{u} \in E,\ / \ B = A + \vec{u}$

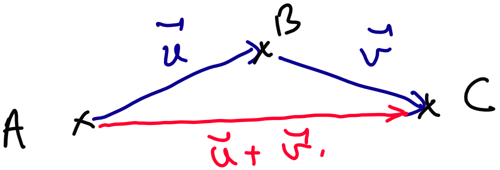


Il se note aussi $\overrightarrow{AB}$

On a donc $A + \overrightarrow{AB} = B$.

2) $\forall (A, \vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{E} \times E \times E$,

$$(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v}).$$



Exemples : ① $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$

$$\left\{\begin{array}{ll} \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) & \text{n-uplet.} \\ X = (x_1 \dots x_n) & \text{point} \\ \vec{x} = (x_1 \dots x_n) & \text{vecteur} \end{array}\right.$$

⚠ **Les opérations ne sont pas les mêmes**

* n-uplets : $\underbrace{(x_1 \dots x_n) + (y_1 \dots y_n)}_{}$ — $\underline{x} + \underline{y}$

$$\overset{\underline{x} + \underline{y}}{(x_1 \dots x_n) + (y_1 \dots y_n)} \overset{\text{déf}}{=} (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$$

$$\cdot\ (x_1 \dots x_n) \times (y_1 \dots y_n) \overset{\text{déf}}{=} (x_1 y_1, \dots, x_n y_n).$$

$$\underline{x} \times \underline{y}$$

($\mathbb{R}^n$ anneau commutatif)

* vecteurs :

$$\overset{\vec{x} + \vec{y}}{(x_1 \dots x_n) + (y_1 \dots y_n)} \overset{\text{déf}}{=} (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$$

$$\underset{\lambda \cdot \vec{x}}{\lambda \cdot (x_1 \dots x_n)} \overset{\text{déf}}{=} (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$X + \vec{y}$

* points : $(x_1 — x_n) + (y_1 — y_n) \underset{=}{\text{def}} (x_1+y_1 — x_n+y_n)$

X + Y n'a pas de sens !

X Y où est X+Y ?

X

X

Dans un espace affine, on sait dessiner la situation !

Cela correspond aux situations de visualisation

Revenons à la dualité

dans $\mathbb{R}^2$ $\qquad 2x-3y=0$ droite (vecteurs).

$$H = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ 2x-3y=0 \}.$$

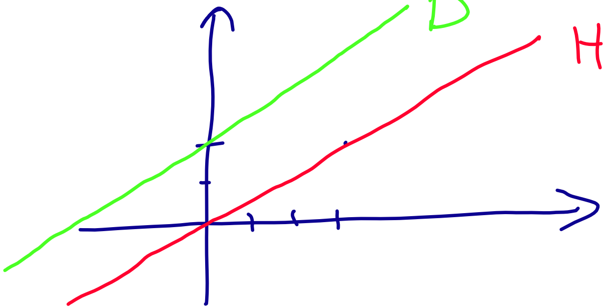
$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto 2x-3y$$

est une forme linéaire

$H = \mathrm{Ker}(\varphi)$

espace vectoriel

Exigence : H peut être vu comme un ensemble de points



$D : 2x - 3y = -6$

Propriété : Soit E un espace vectoriel, il est naturellement muni d'une structure d'espace affine (de direction E).

$$\begin{array}{ccc} \overset{\mathcal{E}}{E} \times E & \longrightarrow & \overset{\mathcal{E}}{E} \\ (X, \vec{y}) & \longmapsto & X + \vec{y} \end{array}$$

$\boxed{X = \vec{x}}$ si $\mathcal{E} = E$.

Définition : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E, soit $\varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$
(IK-espace vectoriel).

~~Soit $\alpha \in$ IK~~

On appelle <u>hyperplan affine</u> tout objet d'équation | de direction $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et passant par un point $A \in \mathcal{E}$

<u>Cotton</u> : ~~$\varphi(X) = \alpha$.~~ $\varphi(\overrightarrow{AX}) = 0$

pas possible car $X \notin E$ $(X \in \mathcal{E})$

<u>Cas particulier</u> : $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} O = (0 - 0). \\ \underline{0} = \_\_\_\_ \\ \vec{0} = \_\_\_\_ \end{cases}$$

alors . $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}$.

$\varphi(\overrightarrow{AX}) = \varphi(\overrightarrow{OX}) - \varphi(\overrightarrow{OA})$. l'équation devient

$$\varphi(\overrightarrow{OX}) = \varphi(\overrightarrow{OA}) \overset{\text{Not}}{=} \alpha$$

$\begin{cases} \text{Raphael} \\ \text{Agathe} \end{cases}$

Bilan :

1) Oublier $\mathbb{R}^n$ $(0,0) \in \mathbb{R}^2$? on ne sait pas ce que c'est.

Cela dépend de la manière avec laquelle on va l'utiliser

2) * E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
* $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E.

Objet de la physique

Définitions : ① sous-espace affine $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ si

1) $\mathcal{A} \neq \emptyset$ Soit $\Omega \in \mathcal{A}$

2) il existe un sous-espace vectoriel E_1 de E.

(la direction de $\mathcal{A}$) tel que

$$\mathcal{A} = \Omega + E_1 = \{\Omega + \vec{u},\ \vec{u} \in E_1\}.$$

② Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E, une origine $A \in \mathcal{E}$

on appelle repère la donnée $(A; (e_i)_{i\in I})$.

À quoi ça sert ? À calculer !! ($\rightarrow$ Jupyter).

Exemple : $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère en physique.

③ Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E

$\mathcal{E}'$ ______ E'

On dit que ϕ est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ si il existe $\vec{\phi} \in \mathcal{L}(E, E')$, (application linéaire sous-jacente).

$\forall (A,B) \in \mathcal{E}^2$, $\boxed{\phi(B) = \phi(A+\vec{AB}) = \phi(A) + \vec{\phi}(\vec{AB})}$.

<u>Exemple dans $\mathbb{R}^2$:</u> pour connaître ϕ, il suffit de connaître

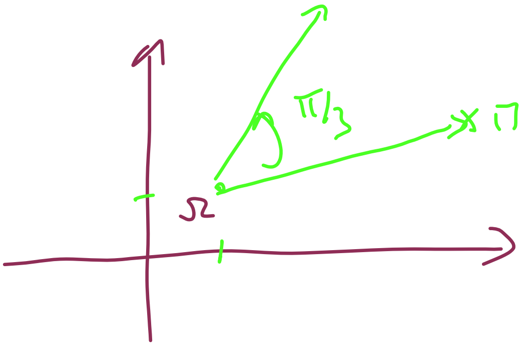
$\phi(O)$ et $\vec{\phi}$ ou encore sa matrice $M = \mathrm{Mat}(\vec{\phi}, \mathcal{E}^2)$

$$\phi(O) = (\alpha, \beta) \qquad M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad X = (x, y) \qquad \phi(X)\ ?$$

$$\mathrm{Mat}(\phi(X), \mathcal{E}^2) = \mathrm{Mat}(\phi(O), \mathcal{E}^2) + M \cdot \mathrm{Mat}(X, \mathcal{E}^2).$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + ax + by \\ \beta + cx + dy \end{bmatrix}$$

Exemple : dans $\mathbb{R}^2$, rotation de centre $(1,1)$ d'angle $\pi/3$.



C'est une application affine.

$$\phi(\Omega) = \Omega$$

$$\mathrm{Mat}(\vec{\phi}, \mathcal{E}^2) = \begin{bmatrix} \cos\pi/3 & -\sin\pi/3 \\ \sin\pi/3 & \cos\pi/3 \end{bmatrix}$$

$M = (x,y)$.

$$\phi(M) = \phi(\Omega) + \vec{\phi}(\overrightarrow{\Omega M}) \overset{\text{not}}{=} (x', y').$$

En passant aux matrices.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix}}$$

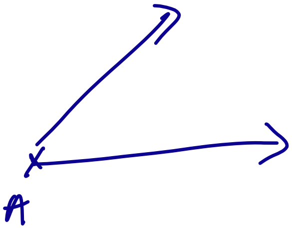
$$\mathrm{Rot}(\vec{\Omega M}, \varepsilon^2) = \mathrm{Rot}(M, \varepsilon^2) - \mathrm{Rot}(\Omega, \varepsilon^2).$$

(où $\mathrm{Rot}(M, \varepsilon^2) \overset{\text{not}}{=} \mathrm{Rot}(\vec{OM}, \varepsilon^2)$).

<u>Finalement</u>: Vous n'aimez pas les espaces affines ?

Fixez un point (origine) : $A \in \mathcal{E}$.

$$\begin{cases} \mathcal{E} \longrightarrow E \\ B \longmapsto \vec{AB} \end{cases}$$



Retour aux faisceaux d'hyperplans

Soit $\mathcal{E}$ de direction E, $\dim E = 3$

Soit $\mathcal{H}_1$ hyperplan passant par le point A_1 $(A_1 \in \mathcal{H}_1)$
de direction $\mathrm{Ker}(\varphi_1)$ $(\underline{\varphi_1 \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}})$

Soit $\mathcal{H}_2$ ——————————— A_2 $(\underline{\varphi_2 \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}})$
——————— $\mathrm{Ker}(\varphi_2)$ $(A_2 \in \mathcal{H}_2)$.

① Que dire de $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$?

(φ_1, φ_2) liée, $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \neq \emptyset$ a) $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ (plans confondus)

(φ_1, φ_2) liée b) $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$ (plans parallèles)

(φ_1, φ_2) libre c) $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ est une droite de direction $\overbrace{\mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_2)}^{\text{dimension } 1\ ?}$

Démonstration :

① $\underline{(\varphi_1, \varphi_2) \text{ liée}}$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\varphi_2 = \lambda . \varphi_1$

b) $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$

a) $\Omega \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$. $\quad \mathcal{H}_1 = A_1 + \mathrm{Ker}(\varphi_1) = \Omega + \mathrm{Ker}(\varphi_1)$

$\mathcal{H}_2 = A_2 + \mathrm{Ker}(\varphi_2) = \Omega + \mathrm{Ker}(\varphi_2) = \Omega + \mathrm{Ker}(\varphi_1)$.

donc $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$

② $\underline{(\varphi_1, \varphi_2) \text{ libre}}$. $\quad \dim(\mathrm{Ker}\,\varphi_1 \cap \mathrm{Ker}\,\varphi_2) < 2$

de plus $\underbrace{\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi_1 + \mathrm{Ker}\,\varphi_2)}_{\leq 3} = \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi_1)}_{=2} + \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi_2)}_{=2} - \dim(\mathrm{Ker}\,\varphi_1 \cap \mathrm{Ker}\,\varphi_2)$

$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \mathrm{Ker}\,\varphi_2) \geq 1$

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi_1 \cap \mathrm{Ker}\,\varphi_2) = 1}$$

Reste à démontrer que $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \neq \emptyset$ (exercice pour lundi).

$$D \left| \begin{array}{ll} 4x+y+z=0 & \mathcal{H}_1 \\ 2x+5y+3z+4=0 & \mathcal{H}_2 . \end{array} \right. \qquad \vec{D} \left| \begin{array}{l} 4x+y+z=0 \\ 2x+5y+3z \quad =0 \end{array} \right.$$

Équation d'un plan (P) contenant D.

$$\left(\begin{array}{c}\text{déjà vu} \\ \theta \in \mathbb{R}\end{array}\right) \qquad \vec{P} \; \big| \; \cos\theta(4x+y+z) + \sin\theta\,(2x+5y+3z) = 0$$

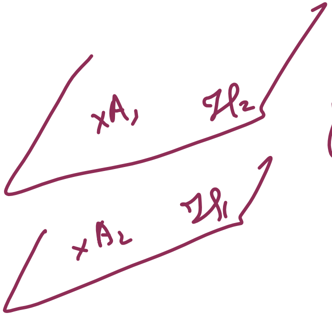
$$(P) \quad \cos\theta\,(4x+y+z) + \sin\theta\,(2x+5y+3z) = \alpha$$

Si on sait que $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \neq \emptyset$ soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$.

alors $\cos\theta\,(\underbrace{4x_0+y_0+z_0}_{=0}) + \sin\theta\,(\underbrace{2x_0+5y_0+3z_0}_{=-4}) = \alpha$

donc (P) $\boxed{\cos\theta\,(4x+y+z)+\sin\theta\,(2x+5y+3z+4)=0}$

Rettulah
Emma .



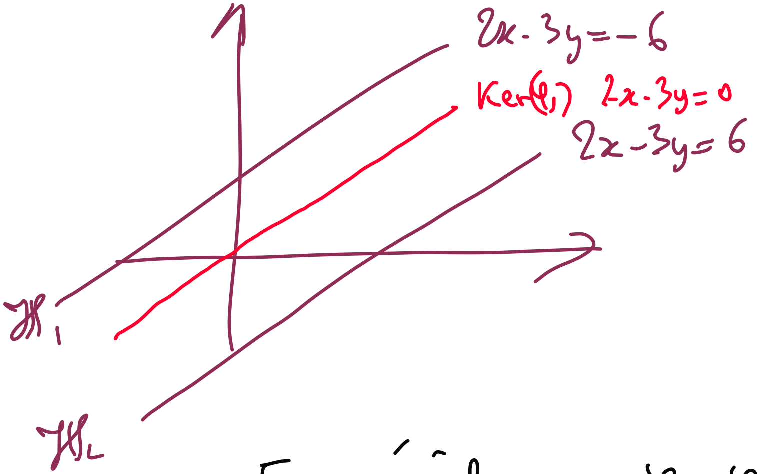
parallèles .

Question : Si $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$

alors (φ_1, φ_2) liée ?

C'est la contraposée de

$$\left[(\varphi_1,\varphi_2) \text{ libre}\right] \Rightarrow \left[\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \neq \emptyset\right]$$



$\varphi_1 : (x,y) \longmapsto 2x-3y$

$\shortparallel$

φ_2

$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$

<u>En général</u> : si $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ deux sous-espaces affines de E, de directions E_1 et E_2,

(Un jeu difficile) $\Downarrow$ alors ...