Jeudi et vendredi Td-Tp

Venir avec son ordinateur.

- Python ≥ 3.8
- Sympy
- Numpy
- Matplotlib
- Jupyter (ou JupyterLab).

Exercice : (E =) $E_1 \oplus F = E_2 \oplus F$ alors E_1 est isomorphe à E_2

① **En dimension finie**

$$\dim(E_1 \oplus F) = \dim E_1 + \dim F$$
$$\parallel$$
$$\dim(E_2 \oplus F) = \dim E_2 + \dim F$$

donc $\dim(E_1) = \dim(E_2)$.

donc E_1 et E_2 sont isomorphes

② **En dimension infinie**

Une seule solution : donner une application linéaire et montrer que c'est un isomorphisme

1) Chercher une application linéaire « naturelle ».

2) Vérifier que c'est un isomorphisme.

1)
$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & E_2 \\ E_1 \oplus F = E_2 \oplus F \arrow[ur, "p_{E_2 // F}|^{E_2}"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Rappel</u> : Si $u \in \mathcal{L}(E, E')$, si F' sous-espace de E',

qui vérifie $\boxed{\mathrm{Im}(u) \subset F'}$

alors $u|^{F'} : E \longrightarrow F'$

$$x \longmapsto u(x)$$

Si F sous-espace de E.

$$u|_F : \begin{array}{l} F \longrightarrow E' \\ x \longmapsto u(x). \end{array}$$

et si $u(F) \subset F'$, $\quad u|_F^{F'} \underset{=}{\text{Not}} \left(u|_F\right)|^{F'}$

Théorème de factorisation des applications linéaires

(À savoir absolument).

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $u \in \mathcal{L}(E, E')$.

si $E_1 \oplus \operatorname{Ker}(u) = E$.

alors E_1 est isomorphe à $\operatorname{Im}(u)$.

$$\left(x_1 \in E_1 \longmapsto u(x_1) \right)$$

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \operatorname{Im} u \\ E = E_1 \oplus \operatorname{Ker}(u) \arrow[ur, "u|^{\operatorname{Im} u}"'] & \end{tikzcd}$$

(Raphaël)

(Engoin)

$$\phi = \left| \begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & E_2 \\ x_1 & \longmapsto & P_{E_2 /\!/ F}\Big|^{E_2}(x_1) \end{array} \right.$$

* ϕ linéaire, car c'est la corestriction d'une application linéaire

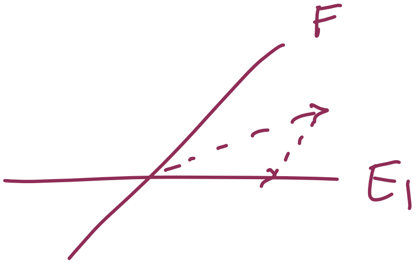
* $x_1 \in \mathrm{Ker}(\phi) \subset E_1$, $P_{E_2/\!/F}(x_1) = 0$

donc $x_1 \in F$

donc $x_1 \in E_1 \cap F = \{0_E\}$.

$\mathrm{Ker}(\phi) = \{0_E\}$, donc

ϕ est injective



* Soit $x_2 \in E_2 \subset E_2 \oplus F = \underbrace{E_1 \oplus F}$

il existe $(x_1, x_F) \in E_1 \times F$, $x_2 = x_1 + x_F$

Victor : et on a unicité, car la somme est directe

or $\phi(x_1) = P_{E_2//F}(\underbrace{x_2}_{\in E_2} - \underbrace{x_F}_{\in F}) = x_2$

donc ϕ est surjective

Conclusion : ϕ est un isomorphisme de E_1 sur E_2.

Une mauvaise idée (en dualité) : utiliser les bases (parties libres et (Derek) génératrices).

$e_1^\star$

Définition 1.2 – Famille duale

Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, on peut définir la *famille duale* associée $(e_i^\star)_{i\in I} \in (E^\star)^I$ par

$$\boxed{\forall j \in I,\ e_i^\star(e_j) = \delta_{i,j}} \leftarrow \text{symbole de Kronecker.}$$

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}$$

Remarque importante 1.1 – Notation impropre

Cette notation est très dangereuse ! En effet, si l'on change *un des vecteurs* e_i, alors on change *tous les vecteurs* $e_i^\star$.

Propriété 1.3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. La famille duale associée est une partie libre de $E^\star$.

Démonstration

Soit $(i_1, \ldots, i_p)$ une sous-famille quelconque finie de I d'éléments distincts deux-à-deux et soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . e_{i_k}^\star = 0_{E^\star}$$

Soit $j \in [\![1, p]\!]$. Par définition de la famille duale, on a

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . e_{i_k}^\star (e_{i_j})}_{=\lambda_j} = 0_{E^\star}(e_j) = 0$$

donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$, ce qui montre que la famille duale $(e_i^\star)_{i\in I}$ est libre.

La famille $(e_i^*)_{i\in I}$ est bien définie car on connaît ses valeurs sur tous les vecteurs de la base $(e_i)_{i\in I}$

(E un espace vectoriel de base $(e_i)_{i\in I}$

F un espace vectoriel

$$\mathcal{L}(E,F) \text{ est isomorphe à } F^I$$

$$u \longmapsto (u(e_i))_{i\in I}$$)

⚠ Cette notation est **TRÈS** mauvaise !!

Si on change $(e_i)_{i\in I}$ en $(e'_i)_{i\in I}$ où ($i_0 \in I$)

$$\forall i \neq i_0,\ e_i = e'_i,\ e_{i_0} \neq e'_{i_0}$$

alors $\forall i \in I$ $e_i^* \neq e_i'^*$ (en général).

Proposition : $(e_i^*)_{i\in I}$ est une famille libre de E^*

(Soit $n \in \mathbb{N}$, $(i_0 \dots i_n) \in I^{n+1}$ différents 2 à 2

$(\lambda_0 \dots \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot e_{i_k}^* = 0_{E^*}$$

soit $p \in [\![0,n]\!]$. on va l'appliquer à e_{i_p}

on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \underbrace{e_{i_k}^*(e_{i_p})}_{\delta_{i_k,i_p} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq p \\ 1 & \text{si } k = p \end{cases}} = 0_{\mathbb{K}} = \lambda_p$) $\blacksquare$

C'est beaucoup plus facile de montrer l'indépendance de formes linéaires, que l'indépendance de vecteurs.

Propriété 1.4 – Base duale

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si E est de dimension finie et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors la famille duale associée est une base de $E^\star$ (dite *base duale*).

简称为$E^\star$的对偶基底。

$\dim(E) = \dim(E^*)$

$(e_i^*)_{i \in I}$ est de cardinal $\operatorname{card} I = \dim(E)$

$\boxed{\text{c'est bien une base}}$

Démonstration

D'après la propriété précédente, c'est une famille libre à n éléments. Or $\dim E^\star = \dim E = n$ (propriété 1.2, page 5) donc c'est bien une base de $E^\star$.

Propriété 1.5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E. Si E est de dimension infinie, alors la famille duale associée *n'est jamais* génératrice.

Démonstration

Considérons la forme linéaire $f \in E^\star$ définie par $f(e_i) = 1$ pour tout $i \in I$. Si la famille duale associée à $(e_i)_{i \in I}$ était génératrice, il existerait une sous-famille $(i_1, \ldots, i_p)$ finie de I tel que $f \in \operatorname{Vect}(\{f_{i_1}, \ldots, f_{i_p}\})$. En considérant $j \in I$ tel que $j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}$ (possible car E est de dimension infinie donc I est infini), on a $f(e_j) = 1$ mais $f_{i_1}(e_j) = \ldots = f_{i_p}(e_j) = 0$, contradiction.

Utilité de la Propriété 1.4

Polynômes d'interpolation de Lagrange :

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Soit $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $(a_1, \ldots, a_n) \in I^n$, $a_1 < \cdots < a_n$

alors il existe une unique fonction polynomiale P, de degré $\leq n-1$

telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(a_i) = y_i$

(On remarque que $x \xrightarrow{\psi_k} \dfrac{\prod_{j \neq k} (x - a_j)}{\prod_{j \neq k} (a_k - a_j)}$. vérifie $\psi_k(a_j) = \delta_{k,j}$

$$P = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \varphi_k$$ comment

* Comment faire cette remarque ?
* Quel lien avec la dualité ?

$\varphi_k \in \mathrm{Vect}(\{x \mapsto x^j, j \in [\![0, n-1]\!]\})^*$ de dimension n.

$\boxed{\varphi_k : P \longmapsto P(a_k)}$ C'est bien une forme linéaire).

$(\varphi_1 \ldots \varphi_n)$ de cardinal n, c'est une base de

$\mathrm{Vect}(\{x \mapsto x^j, j \in [\![0, n-1]\!]\})^*$. fabriquée à partir de.

Imaginons que $(\varphi_1 \ldots \varphi_n)$ soit la base duale $\mathcal{V}.(e_1 \ldots e_n)$

alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\varphi_k = e_k^*$

Si $j \in [\![1,n]\!]$, $\quad \underbrace{\varphi_k(e_j)}_{= e_j(a_k)} = \delta_{j,k}$

donc $e_j = \psi_j$

<u>alors</u> on cherche. $P = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j . \psi_j$

$$P(a_k) = y_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j . \psi_j(a_k) = \alpha_k .$$

<u>Remarque</u> : pour trouver e_j il faut résoudre

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad e_k^*(e_j) = \delta_{k,j}$$

$$e_k^*(e_j) = \varphi_k(e_j) = e_j(a_k)$$

$\longrightarrow$ construit naturellement le ψ_j donné.

Proposition 1.1 – Base ante-duale

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une base de $E^\star$, alors il existe une unique base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, telle que

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ e_i^\star = \varphi_i}$$

Cette base est appelée base ante-duale de la base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Démonstration

Soit l'application définie par

$$\phi\ :\begin{cases} E \to \mathbb{K}^n \\ x \mapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \end{cases}$$

Cette application a les propriétés suivantes

— ϕ est linéaire.

— ϕ est injective. Donc, comme E et $\mathbb{K}^n$ ont même dimension n, ϕ est un isomorphisme.

— Considérons $(b_1, \ldots, b_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Comme un isomorphisme envoie une base sur une base, si l'on pose

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ e_i = \phi^{-1}(b_i)$$

la famille obtenue convient, et c'est clairement la seule.

Remarque 1.2

Comment démontrer qu'une famille de formes linéaires est une base ? En utilisant la base ante-duale (si l'on est capable de la trouver). On veut étudier $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une famille de formes linéaires de $E^\star$. Si on considère la base ante-duale $(e_1, \ldots, e_n)$, (ou la famille que l'on imagine être la base ante-duale), c'est alors facile. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ des scalaires tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.\varphi_k = 0_{E^\star}$$

alors

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.\underbrace{\varphi_k(e_j)}_{\delta_{k,j}} = \lambda_j = 0$$

注释 1.2

设 $(e_1, \ldots, e_n)$ 是 E 的基底，$(e_1^\star, \ldots, e_n^\star)$ 是 $E^\star$ 的对偶基底，我们有如下性质：

1. 当 $f = k_1.e_1^\star + \cdots + k_n.e_n^\star \in E^\star$, $x = l_1.e_1 + \cdots + l_n.e_n \in E$ 时，

$$f(x) = k_1\, l_1 + \cdots + k_n\, l_n$$

2. $x \in E$ 可以表示成，

$$x = e_1^\star(x).e_1 + \cdots + e_n^\star(x).e_n$$

3. $f \in E^\star$ 可以表示成，

$$f = f(e_1).e_1^\star + \cdots + f(e_n).e_n^\star$$

en <u>dimension infinie</u>, $(e_i^*)_{i\in I}$ n'est <u>jamais</u> génératrice

(Soit $(e_i)_{i\in I}$ la base de E où I est <u>infini</u>

soit $\varphi \in E^*$, $\forall i \in I$, $\varphi(e_i) = 1$. (bien définie)

Alors $\boxed{\varphi \notin \mathrm{Vect}(\{e_i^*, i \in I\})}$

(car si $\varphi \in \mathrm{Vect}(\{e_i^*, i\in I\})$, $J_\varphi = \{j \in I, \varphi(e_j) \neq 0\}$ est <u>fini</u>

car il existe $n \in \mathbb{N}$, $(i_1 - i_n) \in I^n$, $(\lambda_1 - \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

tel que $\psi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot e_{i_k}^*$

Une combinaison linéaire est une somme finie

donc si $i \notin \{i_1 - i_n\}$, $\psi(e_i) = 0$.

(et $I \setminus \{i_1 - i_n\}$ est infini)

$J_\psi \subset \{i_1 - i_n\}$ est fini

$\blacksquare$

Pascal.