Intégration [L3]

Brandon LIN

November 13, 2023

Contents

Chapter 1

Intégration sur un segment des fonctions à valeurs réelles

Requirements : Continuité
Last update : *13 Septembre, 2023*, Shanghai

1.1 Continuité Uniforme (Révision)

1.1.1 Fonctions uniformément continues

Definition 1.1.1: Fonction uniformément continue

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, f est **uniformément continue** lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in I^2,\ |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \tag{1.1}$$

Proposition 1.1.1 Lipschitz, uniformément continue, continue

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, donc : f lipschitizenne $\implies$ f uniformément continue $\implies$ f continue.

1.1.2 Théorèm de Heine

Theorem 1.1.1 Théorème de Heine

Une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

1.2 Fonctions en escaliers

1.2.1 Subdivision d'un segment

Definition 1.2.1: Subdivision

Une **subdivision** de $[a, b]$ est une suite finie $\sigma = (a_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ strictement croissante avec $a_0 = a$ et $a_n = b$.
On peut alors écrire :

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b \tag{1.2}$$

1.2.2 Fonctions en escaliers

Definition 1.2.2: Fonction en escalier

On appelle **fonction en escalier** sur $[a,b]$ toute fonction φ définie sur $[a,b]$ pour laqulle il existe une subdivision $\sigma = (a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ vérifiant

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R},\ \forall x \in]a_{k-1}, a_k[,\ \varphi(x) = \lambda_k \tag{1.3}$$

Remarque : La subdivision σ introduite eset **subordonnée** à φ

1.2.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Definition 1.2.3: Intégrale d'une fonction en escaliers

$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x_{k+1} - x_k) \tag{1.4}$$

1.2.4 Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escaliers

- **Linéarité** : L'intégrale d'une somme de fonctions en escalier est égale à la somme des intégrales de chaque fonction. De même, l'intégrale d'une fonction en escalier multipliée par un scalaire est égale au scalaire multiplié par l'intégrale de la fonction.
- Additivité : L'intégrale sur un segment peut être divisée en intégrales sur des sous-segments. Si le segment est divisé en sous-segments, l'intégrale sur le segment entier est la somme des intégrales sur chaque sous-segment.
- Valeur Absolue : L'intégrale de la valeur absolue d'une fonction en escalier est toujours supérieure ou égale à la valeur absolue de l'intégrale de la fonction.
- Inégalité de l'intégrale : Si une fonction en escalier est toujours supérieure ou égale à une autre sur un segment, alors son intégrale sur ce segment est également supérieure ou égale à celle de l'autre fonction.

1.3 Fonctions continues par morceaux

1.3.1 Définitions et propriétés

Definition 1.3.1: Fonction continue par morceaux sur un segment

Soit $[a, b]$ un segment. $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est **continue par morceaux** sur $[a, b]$ lorsqu'il existe une subdivision τ du segment telle que

- $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\varphi|_{]x_k, x_{k+1}[}$ est continue
- $\varphi|_{]x_k, x_{k+1}[}$ est prolongeable par continuité sur $]x_k, x_{k+1}[$.

Une telle subdivision est dite **adaptée** ou **subordonnée** à φ.

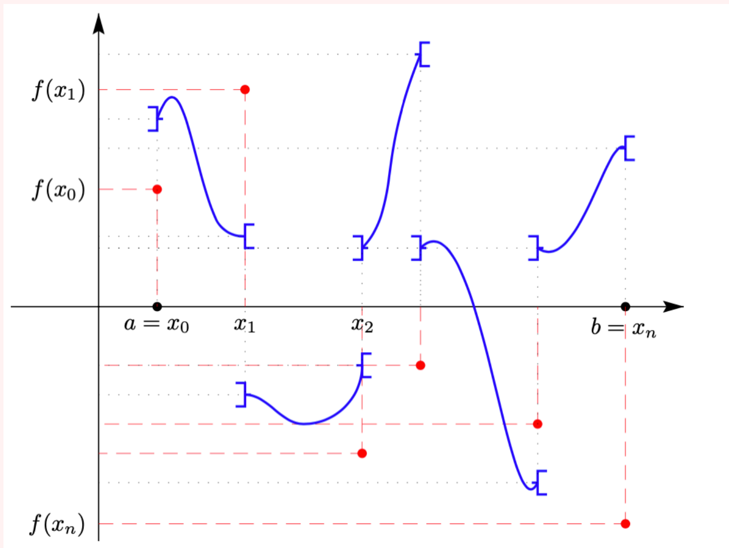

Figure 1.1: Fonction continue par morceaux sur un segment

Toute fonction en escalier sur $[a, b]$ est **continue par morceaux** sur $[a, b]$.

Proposition 1.3.1 Bornée d'une fonction continue par morceaux

Soit φ est une fonction **continue par morceaux** sur $[a, b]$ donc elle est bornée.

Proof: Soit f fonction continue, pour chaque $i \in [\![0, k-1]\!]$, $\bar{f_i}$ la fonction continue prolongé défini sur un segment $[x_i, x_{i+1}]$ pour chaque petit intervalle. Donc elle est bornée. 😊

Proposition 1.3.2

L'ensemble des fonctions réelles **continues par morceaux** sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$

1.3.2 Approximation des fonctions par morceaux par les fonctions en escalier

Theorem 1.3.1 Approximation d'une fonction continue par une fonction en escalier

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$.

Donc, il existe une fonction en escalier φ telle que

$$\|f-\varphi\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-\varphi(x)| \leq \varepsilon$$

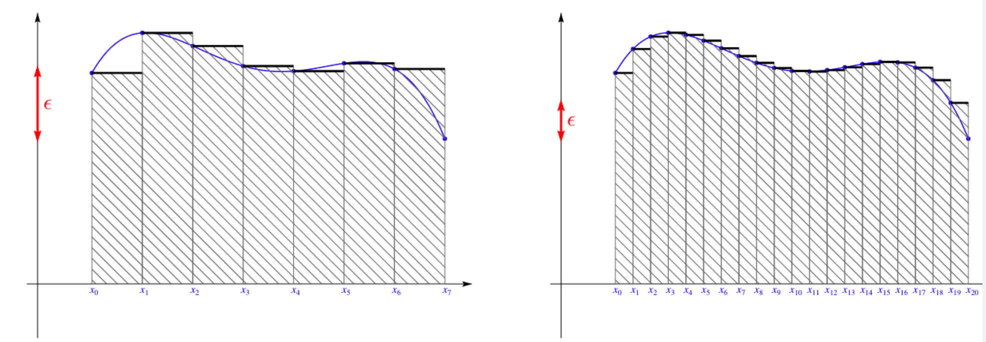

FIGURE 13.7 – Une approximation grossière avec ε assez grand

FIGURE 13.8 – Une approximation plus fine avec ε plus petit

Figure 1.2: Approximation d'une fonction continue

Proof: f est continue sur le segment, donc uniformément continue. (Théorème de Heine 1.1.2) Dans l'écriture $\varepsilon - \eta$, prenons $h = (b-a)/n \leq \varepsilon$, construisons :

$$x_i = a + ih, \ \forall x \in [x_i, x_{i+1}[, \ \varphi(x) = f(x_i), \ \varphi(b) = f(b) \tag{1.5}$$

Lenma 1.3.1 Décomposition d'une fonction continue par morceaux

Soit f une fonction continue par morceaux sur le gement $[a,b]$.
Il existe

- une fonction g continue sur $[a,b]$
- une fonction ψ en escalier sur $[a,b]$

telles que $f = g + \psi$

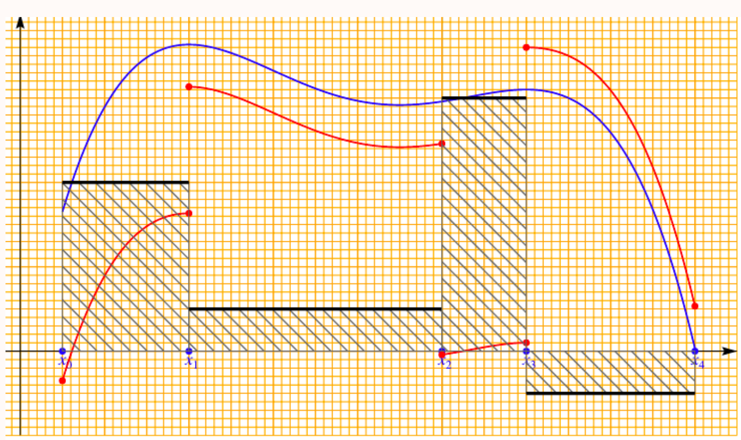

Figure 1.3: Décomposition d'une fonction continue par morceaux

Corollary 1.3.1 Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par une foncution en escalier

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$. Il existe φ en escalier sur $[a, b]$ telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.

Proof: Soit $f = g + \psi$, $\exists \xi$ telle que $\|g - \xi\|_\infty \leq \varepsilon$, notons $\varphi = \psi + \xi$, $\|f - \varphi\|_\infty = \|g - \xi\|_\infty \leq \varepsilon$ ☺

Corollary 1.3.2 Encadrement d'une fonction continue par morceaux par deux fonctions en escalier

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$. $\exists \varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ vérifiant :

- $\varphi \leq f \leq \psi$
- $\|\psi - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$

1.3.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Proposition 1.3.3 Intégrale de Riemann d'une fonction continue par morceaux

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$. Les ensembles

$$I_{<f} = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi,\ \varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}),\ \varphi \leq f \right\} \tag{1.6}$$

$$I_{>f} = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi,\ \varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}),\ \varphi \geq f \right\} \tag{1.7}$$

On a

- $I_{<f}$ admet une borne supérieur
- $I_{>f}$ admet une borne inférieur
- $\sup I_{<f} = \inf I_{>f}$

Definition 1.3.2: Intégrale de Riemann

L'**intégrale de Riemann** de la fonction continue par morceaux f sur $[a, b]$ par :

$$\int_{[a,b]} f = \sup I_{<f} = \inf I_{>f} \tag{1.8}$$

Note:-

Pour montrer qu'une fonction f est **intégrable sur un segment**, il suffit de montrer que f est continue par morceaux sur ce segment.

1.3.4 Propriétés de l'intégrale

Theorem 1.3.2 Forme linéaire

L'intégrale est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux.

Proposition 1.3.4 L'intégrale d'une fonction continue par morceaux positive

Soit φ continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors,

$$\forall x \in [a,b],\ \varphi(x) \geq 0 \implies \int_{[a,b]} \varphi_1 \geq 0 \tag{1.9}$$

Corollary 1.3.3

$$\varphi_1 \leq \varphi_2 \implies \int_{[a,b]} \varphi_1 \leq \int_{[a,b]} \varphi_2 \tag{1.10}$$

Proposition 1.3.5 Relation de Chasles

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f \tag{1.11}$$

1.3.5 Majorations fondamentales

Theorem 1.3.3
Soient f une fonction réelle continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. Donc, il existe $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$. donc,

$$\boxed{m(b-a) \leq \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)} \tag{1.12}$$

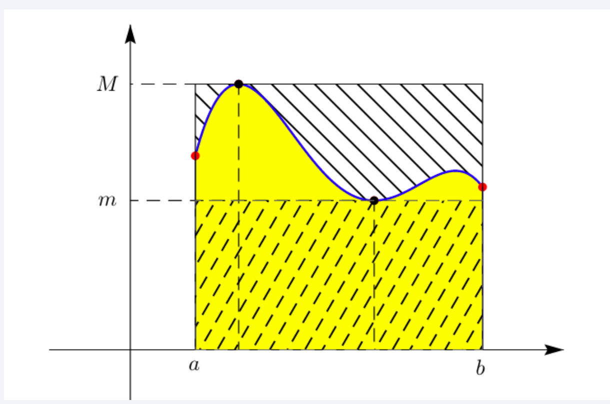

Figure 1.4: Encadrement d'une intégrale

Theorem 1.3.4 Inégalité triangulaire intégral
Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. Donc, f est bornée sur $[a,b]$ et

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leq (b-a)\sup_{[a,b]}|f|} \tag{1.13}$$

Proof: $-|f| \leq f \leq |f|| \implies -\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$. ☺

Theorem 1.3.5 Inégalité de la moyenne

Soient f, g continues par morceaux sur $[a, b]$. Alors,

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g| \tag{1.14}$$

Theorem 1.3.6 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient f et g continues sur le segment $[a, b]$. Notons $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{[a,b]} f^2(x)\mathrm{d}x}$, on obtient

$$\langle fg\rangle \leq \|f\|_2\|g\|_2 \implies \boxed{\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \sqrt{\int_{[a,b]} f^2}\sqrt{\int_{[a,b]} g^2}} \tag{1.15}$$

Proof: D'après la positivité de

$$P = \int_{[a,b]} (f + \alpha g)^2 \tag{1.16}$$

☺

Theorem 1.3.7 Inégalité de Minkowski

Soient f et g continues sur le segment $[a, b]$. Notons $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{[a,b]} f^2(x)\mathrm{d}x}$, on obtient

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 \tag{1.17}$$

Proof: Développer $\int_{[a,b]}(f + g)^2$ et utilisons Cauchy-Schwarz. ☺

1.4 Primitive et intégrale d'une fonction continue

1.4.1 Définitions

Definition 1.4.1: Primitive

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I. $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est **primitive** de f sur I si et seulement si :

- F dérivable sur I
- et $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$

Proposition 1.4.1 Deux primitives d'une même fonction

Les primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.
Soit F, G primitives de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors, $\exists c \in \mathbb{R}$, $F = G + c$

Lenma 1.4.1 Continuité de la primitive

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, alors F continue sur I.

Proof: Comme f continue par morceaux sur un intervalle, donc elle est bornée. Soient $(x, y) \in I^2$, alors

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_a^y f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \int_x^y |f(t)|\mathrm{d}t \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)||y - x| \tag{1.18}$$

donc lipschitizenne, donc continue. ☺

1.4.2 TFA

Theorem 1.4.1 Théorème fondamental de l'analyse (TFA)

Soit f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, soit $a \in I$.
Alors, la fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \tag{1.19}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et est <u>la seule primitive de f qui s'annule en a</u> :

$$F' = f, \quad F(a) = 0 \tag{1.20}$$

Corollary 1.4.1

Une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ <u>possède une primitive</u> sur I.

Corollary 1.4.2 Calcul d'intégrale

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur le <u>segment</u> $[a, b] \subset I$. Soit G une primitive de f (c'est-à-dire, $G_c = F + c$). Alors l'**intégrale** de F sur $[a, b]$ est :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = G(b) - G(a) \tag{1.21}$$

Theorem 1.4.2 TFA (deuxième forme)

Soit f une fonction de classe C^1 sur I de $\mathbb{R}$, soit $(a, b) \in I^2$, on a :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t \tag{1.22}$$

Note:-

Quand on a une hypothèse sur f', et je souhaite de svaoir f.

Example 1.4.1 (L'inégalité de Poincaré)

Soit $E = \{f \in C^1([a, b], \mathbb{R}),\ f(a) = 0\}$. $\exists C \geq 0$ telle que

$$\forall f \in E,\ \|f\|_2 \leq C\|f'\|_2 \tag{1.23}$$

Proof: Soit $x \in [a, b]$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t \tag{1.24}$$

$$\text{(Cauchy-Schwarz)} \implies f^2(x) \leq \int_a^x 1^2\mathrm{d}t \int_a^x f'^2(t)\mathrm{d}t \leq (x - a) \int_a^b f'^2(t)\mathrm{d}t \tag{1.25}$$

$$\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b f'^2(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b (x - a)\mathrm{d}x = \frac{(b - a)^2}{2} \int_a^b f'^2(t)\mathrm{d}t \implies C = \frac{b - a}{\sqrt{2}} \tag{1.26}$$

😊

Theorem 1.4.3 Dérivée d'une fonction définie par une integrale

Soit f continue sur I, $u, v : J \to I$ dérivables sur J. Alors, $G : J \to \mathbb{R}$ définie au-dessous est dérivable sur J :

$$G : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t, \quad G'(x) = v'(x)f[v(x)] - u'(x)f[u(x)] \tag{1.27}$$

Proof:

$$G(x) = \int_a^{v(x)} f(t)\mathrm{d}(t) - \int_a^{u(x)} f(t)\mathrm{d}(t) = F(v(x)) - F(u(x)) \implies G = F \circ v - F \circ u \tag{1.28}$$

😊

Example 1.4.2

Variations de la fonction : $g :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$:

$$g : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 1} \tag{1.29}$$

Proof:

$$g'(x) = 2xf(x^2) - f(x) \text{ avec} f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1} \tag{1.30}$$

Donc s'annule en $x_0 = 1 + \sqrt{2}$, croissante sur $]1, x_0]$ et décorissante sur $[x_0, +\infty[$ 😊

1.4.3 Valeur moyenne

Theorem 1.4.4 Valeur moyenne d'une fonction continue

Soit $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = f(c) \tag{1.31}$$

1.5 Calcul de primitives et d'intégrales

1.5.1 IPP

Proposition 1.5.1 Méthode d'intégration par partie (IPP)

Soit u et v des fonctions de classe C^1 sur intervalle I de $\mathbb{R}$, donc :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t \tag{1.32}$$

1.5.2 Changement de variable

Proposition 1.5.2 Changement de variable

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\mathrm{d}(\varphi(u)) \tag{1.33}$$

1.6 Formules de Taylor

1.6.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Theorem 1.6.1 Formule de Taylor avec reste intégral
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \tag{1.34}$$

- **Polynôme de Taylor de** f de degré n :

$$T_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \tag{1.35}$$

- **Reste intégral** :

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \tag{1.36}$$

Note:-
L'idée principal :

- TFA(2)
- IPP

Proof: Si la fonction f de classe $\mathscr{C}^1$, on sait que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t \tag{1.37}$$

Faisons une IPP à la dernière terme, et supposons que f de classe $\mathscr{C}^2$. Donc, en admettant que

$$f(x) = f(a) + [tf'(t)]_a^x - \int_a^x tf"(t)\mathrm{d}t = f(a) + xf'(x) - af'(a) - \int_a^x tf"(t)\mathrm{d}t \tag{1.38}$$

On ne sait pas $f'(x)$. Maintenant, considérons la primitive de $g : t \mapsto 1$ s'annule en x

$$f(x) = f(a) + [-(x-t)f'(t)]_a^x + \int_a^x (x-t)f"(t)\mathrm{d}t = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f"(t)\mathrm{d}t \tag{1.39}$$

Ensuite, une simple récurrence. 😃

1.6.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Theorem 1.6.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Dans la formule 1.6.1, on a $f = T_n + R_n$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \tag{1.40}$$

On a alors,

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[a,x]} |f^{(n+1)}(t)| \tag{1.41}$$

Proof: Utiliser les téchniques dans 1.3.5 ☺

1.6.3 Formule de Taylor-Young

Theorem 1.6.3 Formule de Taylor-Young

Soient f de classe $\mathscr{C}^n$. Dans la formule 1.6.1, on a $f = T_n + R_n$. Il existe une fonction $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ telle que

$$\forall x \in I,\ f(x) = T_n(x) + (x-a)^n \varepsilon(x) \tag{1.42}$$

Proof:
- Si f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, d'après le théorème 1.6.2, on trouve $\frac{|R_n(x)|}{|x-a|^n} \to 0$.

☺

1.6.4 Utilisation des trois formules de Taylor

- La **formule de Taylor-intégrale** est la plus précise, et les deux autres formules en sont une conséquence.
- **Formule de Taylor-Young** donne une approximation locale au voisinage d'un point a.
- **Inégalité de Taylor-Lagrange** fournit une majoration globale du reste R_n de cette approximation sur un segment $[a, x]$.

1.7 Méthode des rectangles, Sommes de Riemann

Theorem 1.7.1 Méthode des rectangles

- Approximation d'intégrale. Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$.
  - On effectue une subdivison du segment $[a, b]$ de pas constant $h = (b-a)/n$.
  - On pose pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$, $x_k = a + kh$.
  - Posons

$$R_n = h.(f(x_1) + \cdots + f(x_n)) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \tag{1.43}$$

- Majoration de l'erreur. Suposons que I l'intégrale de la fonction f.

$$|I - R_n| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \|f'\|_\infty \tag{1.44}$$

Proof: Pour chaque segment, l'erreur :

$$\varepsilon_{n,k} = \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} f(x_k) \right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\mathrm{d}t \tag{1.45}$$

$$|f(t) - f(x_k)| = \left| \int_{x_k}^{t} f'(t)\mathrm{d}t \right| \leq \sup_{[x \in [a,b]]} |f'(x)|(t - x_k) \tag{1.46}$$

$$|\varepsilon_{n,k}| \leq \|f'\|_\infty \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} = \|f'\|_\infty \frac{(b-a)^2}{2n^2} \tag{1.47}$$

😄

Theorem 1.7.2 Convergence d'une somme de Riemann

Soit f continue sur le segment $[0, 1]$, on a

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \tag{1.48}$$

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \tag{1.49}$$

Plus généralement, si f une fonction continue sur le segment $[a, b]$, et si $\xi_k \in [a + kh, a + (k+1)h]$, on a

$$u_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{1.50}$$

Proof:

- Si $f \in \mathscr{C}^1$, d'après le théorème précédante.
- Si f est uniquement continue.
  - Montrons que $\|f - \varphi_n\|_\infty \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ (Théorème de Heine - Importance d'un segment !!)
  - Donc,

$$|I - R_n| \leq \int_0^1 |f(t) - \varphi_n(t)|\mathrm{d}t \leq \|f - \varphi_n\|_\infty \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \tag{1.51}$$

😄

Example 1.7.1

Limite de suite

$$u_n = \sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{2p+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(2)}{2} \tag{1.52}$$

Chapter 2

Intégration sur un espace mesurable

Requirements :

- Topologie
- Suites et Séries
- Familles sommables

Contents :

- Définitions
  1. Tribu (σ-algèbre), tribu borélienne
  2. Mesure (positive, σ-finie)
  3. μ-négligeable, presque partout (ou sûrment), μ-complétée
  4. Fonction mesurable, étagée
  5. Fonction intégrable
  6. Tribu image, mesure image
  7. $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme
- Théorèmes, propositions, propriétés
  1. Propriétés de fonction intégrable (linéarité, croissance, restriction, relation de Chasles)
  2. Théorème de convergence monotone
  3. Lemme de Fatou
  4. Théorème de convergence dominée
  5. Tribu produit, mesure produit
  6. Théorème de Fubini-Tonelli, Fubini-Lebesgue (pas forcément savoir la démonstration)
  7. Changement de variable
  8. $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme

Last update : *12 Novembre, 2023*, Shanghai

2.1 Espace mesurable

2.1.1 Topologie

Rappel : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \to E$ de dimension finie $\to (E, d) \to E$ muni d'une topologie

Definition 2.1.1: Topologie

Une **topologie** sur E est un ensemble $\mathcal{TO}$ de parties de E qui vérifie l'ensembles des ouverts de E

- $\emptyset \in \mathcal{TO}$, $E \in \mathcal{TO}$
- Stabilité par réunion quelconque des ouverts : Si $(O_i)_{i\in I} \in \mathcal{TO}^I$, alors $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{TO}$
- Stabilité par intersection finie des ouverts : Si $n \in \mathbb{N}^*$, $(O_1, \ldots, O_n) \in \mathcal{TO}^n$, $\bigcap_{k=1}^n O_k \in \mathcal{TO}$.

Note:-

Ouf ! On ne va pas utiliser cette formalisation. Mais, on va souvent considérér $\mathcal{TO}$ les ouverts de E.

2.1.2 Tribu

Definition 2.1.2: Tribu, σ-algèbre

Une **tribu** ou **σ-algèbre** sur un ensemble Ω est une collection $\mathcal{T}$ de sous-ensembles de A qui possède les propriétés suivantes :

- Non vide : $\emptyset \in \mathcal{T}$
- Stabilité par passage au complémentaire : $\forall A \in \mathcal{T}$, $A^c \in \mathcal{T}$
- Stabilité par réunion dénombrable : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$

Les parties de $\mathcal{T}$ sont dites **parties mesurables**. On le note $(\Omega, \mathcal{T})$.

Definition 2.1.3: Espace mesurable

Un ensemble muni d'une **tribu** est dit **espace mesurable**.

Mais on travaille la plupart du temps dans un espace vectoriel normé (ou un espace métrique).
Pour faire le lien, on aimerait que les ouverts soient des parties mesurables.

Definition 2.1.4: Tribu borélienne

Si (E, d) un espace métrique (donc on peut définir des boules), on appelle **tribu borélienne** la plus petite tribu contenant les ouverts de E. On la note $\boxed{\mathcal{BO}(E)}$

Proof: Existence du **tribu borélienne** : $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}$ tribu sur E, $\mathcal{T} \supset \mathcal{TO}\}$ (Rappel : $\mathcal{TO}$ est l'ensemble des ouverts de E)

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$ car $\mathcal{P}(E) \in \mathcal{F}$
- $\mathcal{F}$ stable par intersection (très simple)

Donc, $\mathcal{BO}(E) = \bigcap_{\mathcal{T}\in\mathcal{F}} \mathcal{T}$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{TO}$ ☺

Proposition 2.1.1 Tribu borélienne dans $\mathbb{R}$

Dans $\mathbb{R}$, les ouverts sont réunions **dénombrables** d'intervalles ouverts. (Vois cours topologie)

Donc,

- Tribu borélienne

$$\mathcal{BO}(\mathbb{R}) = \text{Plus petit tribu contenant tous les }]a, b[$$

- Tous les intervalles de $\mathbb{R}$ sont dans $\mathcal{BO}(\mathbb{R})$.

Proof: Une tribu $\mathcal{T}$ est stable par réunion finie ou dénombrable, donc aussi stable par intersection finie ou dénombrable : soit $(B_0, \ldots, B_n) \in \mathcal{T}^{n+1}$, on construisons $A_0 = B_0, \ldots, A_n = B_n$, $\forall k > n, A_k = \emptyset \in \mathcal{T}$ (Formule de Moivre)

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n^c) \tag{2.1}$$

On peut construire tout intervalle sur $\mathbb{R}$ à partir des ensembles ouverts, des complémentaires, et des intersections dénombrables :

$$[a, b] = (]-\infty, a[\cup]b, +\infty[)^c \in \mathcal{T} \tag{2.2}$$

☺

Example 2.1.1

Dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{BO}(\mathbb{R}^n)$ = plus petite tribu contenant $\prod_{k=1}^n]a_k, b_k[$

Proposition 2.1.2 Tribu produit

Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2)$ deux **espaces mesurables**, on appelle **tribu produit** sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ et on note $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ la plus petite tribu contenant $A_1 \times A_2$ où $A_1 \in \mathcal{T}_1$ et $A_2 \in \mathcal{T}_2$.

2.1.3 Mesure

Definition 2.1.5: Mesure (positive)

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable, on appelle **mesure (positive)** sur Ω, toute application $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et qui vérifie :

- $\mu(\emptyset) = 0$
- σ-additivité (dénombrable) : $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, disjointes 2 à 2, $\mu(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nécessairement sommable.

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}, \ \left[\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, [i \neq j] \implies [A_i \cap A_j = \emptyset]\right] \implies \boxed{\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)} \tag{2.3}$$

$(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ s'appelle **espace mesuré**.

Theorem 2.1.1 Mesure de Lebesgne $(\mathbb{R})$

Dans $\mathbb{R}$, il existe une unique mesure (dite **mesure de Lebesgne** et notée λ) sur $\mathcal{BO}(\mathbb{R})$ qui vérifie

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \ [a < b] \implies [\lambda(]a, b[) = b - a] \tag{2.4}$$

Proof: Admis. ☺

Theorem 2.1.2 Mesure de Lebesgne ($\mathbb{R}^n$)

Dans $\mathbb{R}$, il existe une unique mesure (dite **mesure de Lebesgne** et notée λ) sur $\mathcal{BO}(\mathbb{R}^n)$ qui vérifie

$$\forall k \in [\![1,n]\!], [a_k \leq b_k] \implies \lambda\left(\prod_{k=1}^{n}]a_k, b_k[\right) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \tag{2.5}$$

Example 2.1.2 (Mesure de comptage sur les parties)

$$\forall A \subset \Omega,\ \mu(A) = \begin{cases} +\infty \text{ si } A \text{ est infini} \\ \text{card}(A) \text{ sinon} \end{cases} \tag{2.6}$$

Example 2.1.3 (Mesure de comptage des entiers sur les parties de $\mathbb{R}$)

$$\forall A \subset \Omega,\ \mu(A) = \begin{cases} +\infty \text{ si } A \in \mathbb{N} \text{ est infini} \\ \text{card}(A \cap \mathbb{N}) \text{ sinon} \end{cases} \tag{2.7}$$

Proposition 2.1.3 Propriétés d'un espace mesuré

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré (resp. $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé) :

Note:-

Remplacer μ par $\mathbb{P}$ et on retrouve les résultats dans le cours de probabilité.

- Croissance :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{T}^2,\ [A \subset B] \implies [\mu(A) \leq \mu(B)] \tag{2.8}$$

- Réunion + Intersection :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{T}^2,\ \mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) \tag{2.9}$$

- Limite croissante :

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}},\ [\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}] \implies \left[\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\right] = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) \tag{2.10}$$

- Limite décroissante

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}},\ \mu(A_0) \neq +\infty,\ [\forall n \in \mathbb{N}, A_n \supset A_{n+1}] \implies \left[\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\right] = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) \tag{2.11}$$

On note les deux limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \uparrow \mu(A_n), \quad \lim_{n\to+\infty} \downarrow \mu(A_n) \tag{2.12}$$

- Sous σ-additivité :

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}},\ \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) \tag{2.13}$$

Proof: Soit $(A, B) \in \mathcal{T}^2$,

- $A \subset B$ donc $B = A \cup (B \backslash A)$. De plus $B \backslash A = B \cap A^c$, donc

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geq \mu(A) \tag{2.14}$$

- Si $\mu(A \cup B) = +\infty$ alors $\mu(A) = +\infty$ ou $\mu(B) = +\infty$. Puisque, sinon,

$$A \cup B = A \cup (B \backslash A) \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \leq \mu(A) + \mu(B) \tag{2.15}$$

  Si $\mu(A \cup B) < +\infty$, considérer $B = (A \cap B) \cup (B \backslash A)$

- Construisons $B_n = A_n \backslash A_{n-1}$, $B_0 = A_0$.

  –
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \tag{2.16}$$

  –
$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) = \mu(B_0) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mu(A_n) \tag{2.17}$$

- $A_0 \backslash \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, appliquer la limite croissante.

- Construisons $B_0 = A_0$, $B_n = A_n \backslash \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k\right)$

😄

2.1.4 Négligeable, Presque partout, presque sûrement

Definition 2.1.6: μ-négligeable

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un ensemble mesuré, soit $A \subset \Omega$, on dit que A est **μ-négligeable** si :

$$\exists T \in \mathcal{T},\ A \subset T,\ \text{et}\ \mu(T) = 0 \tag{2.18}$$

Proposition 2.1.4

Dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$), tout ensemble dénombrable est de mesure nulle.

Example 2.1.4 (Mesure nulle)

- Ensemble dénombrable : $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ en effet, $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$ donc $\lambda(\mathbb{Q}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(\{q\}) = q - q = 0$

- Ensemble non dénombrable (Ensemble de Cantor) :

$$K = \left\{x \in [0, 1],\ \exists (\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}},\ x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{3^{k+1}}\right\} \tag{2.19}$$

  est λ-négligeable mais pas dénombrable.

Figure 2.1: Ensemble de Cantor

Proof: L'ensemble de Cantor est créé en enlevant répétitivement le tiers moyen d'un intervalle. Chaque point dans l'ensemble de Cantor peut être représenté de manière unique par une série infinie de 0 et de 2, cette représentation est similaire à une représentation binaire, donc bijection à $\mathbb{R}$. Donc, elle n'est pas dénombrable. ☺

Definition 2.1.7: μ-presque partout, μ-presque sûrement

- Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et P une propriété définie sur Ω. On dit que P est **vraie (μ)-presque partout** si

$$\{\omega \in \Omega,\ P(\omega) \text{ est fausse}\} \text{ est } \mu\text{-négligeable}$$

- Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et P une propriété définie sur Ω. On dit que P est **vraie (μ)-presque sûrement** si

$$\{\omega \in \Omega,\ P(\omega) \text{ est fausse}\} \text{ est } \mu\text{-négligeable}$$

On les note resp. P vraie (μ)-p.p. et P vraie $(\mathbb{P})$-p.s.

Example 2.1.5

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme $\mathcal{U}(0, 1)$, alors : $X \in [0, 1]$ p.s.

2.1.5 Partie négligeable, complétée

Definition 2.1.8: Partie μ-négligeable

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Une partie A de Ω est dite **μ-négligeable** s'il existe

$$T \in \mathcal{T},\ A \subset T,\ \mu(T) = 0 \tag{2.20}$$

Definition 2.1.9: μ-complétée

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, on pose

$$\mathcal{N} = \{A \subset \Omega, A\ \mu - \text{négligeable}\} \tag{2.21}$$

On appelle **tribu μ-complétée** de $\mathcal{T}$ la tribu définie par

$$\boxed{\mathcal{T}^* = \{T \cup N,\ T \in \mathcal{T},\ N \in \mathcal{N}\}} \tag{2.22}$$

Le mesure μ se prolonge à $\mathcal{T}^*$ par $\forall A \in \mathcal{T}^*,\ \mu^*(T \cup N) = \mu(T)$.

2.2 Intégrale de Lebesgne

2.2.1 Fonction mesurable

On voulait créer une intégrale sur des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ où $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Quelle propriété faut-il à f pour pouvoir définir son intégrale ?

Definition 2.2.1: Fonction mesurable

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$, $(\Omega', \mathcal{T}')$ deux espaces mesurables. $f : \Omega \to \Omega'$ est dite **mesurable** si

$$\forall T' \in \mathcal{T}',\ f^{-1}(T') \in \mathcal{T} \tag{2.23}$$

Remarque :

- Lorsque $(\Omega', \mathcal{T}') = (\mathbb{R}, \mathcal{BO}(\mathbb{R}))$, si f est **mesurable**, $f^{-1}(]a, b[) \in \mathcal{T}$. (Rappel : La plus petite tribu contenant les ouverts de $\mathbb{R}$)
- De plus, si $\mathcal{T}$ est la tribu borélienne de (Ω, d) alors, f continue sur Ω donc f mesurable sur Ω.

Definition 2.2.2: Fonction mesurable (2eme édition)

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ et $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$, on dit que f est **mesurable** si

$$\forall A \in \mathcal{BO}(\mathbb{R}),\ f^{-1}(A) \in \mathcal{T} \tag{2.24}$$

2.2.2 Fonction étagée

Note:-

Rappel : Notation semblable à **Fonctions en escalier**, découplage de $[a, b]$

Definition 2.2.3: Fonctions étagées

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ et $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ à valeurs réels, on dit que f est **étagée** si

- f est **mesurable**
- et $\text{card}(f(\Omega))$ est fini

Proposition 2.2.1

Une **fonction en escalier** sur $[a, b]$ est étagée.

Proof:

- Continue par morceaux donc mesurable
- Prenant un nombre fini de valeurs

😊

Example 2.2.1 (Fonction étagée)

Fonction étagée $\xi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\xi_{\mathbb{Q}} : x \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \tag{2.25}$$

Proposition 2.2.2

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$, toute focntion positive et mesurable est <u>limite croissante</u> d'une suite de fonctions étagées positives.

2.2.3 Intégrale

Definition 2.2.4: Intégrale

1. Soit f une fonction étagée, positive, définie sur Ω, on pose

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \sum_{\alpha \in f(\Omega)} \alpha \mu(f^{-1}(\{\alpha\})) \in [0, +\infty] \tag{2.26}$$

2. Soit f une fonction positive, mesurable définie sur Ω, donc

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \sup_{g \in \Sigma_f} \left(\int_\Omega g \mathrm{d}\mu \right) \in [0, +\infty] \tag{2.27}$$

où $\Sigma_f = \{g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ g \text{ étagée et } g \leq f\}$.
Notation : Si $\alpha = 0$ et $\mu(f^{-1}(\{0\})) = +\infty$, alors $\alpha \mu(f^{-1}(\{\alpha\})) = 0$

2.3 Intégrabilité

2.3.1 Existence d'intégrale de Riemann

Le problème est que on souhaite de montrer f est intégrable sur I, un intervalle donné, supposons $]a, b[$ ou $]a, b]$ ou etc.

- Continuité sur un intervalle fermé, ou après un prolongement de la fonction
- On peut trouver $c \in [a, b]$ tels que les deux limites existent :

$$\lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^c f(x) \mathrm{d}x, \quad \lim_{\beta \to b^-} \int_c^\beta f(x) \mathrm{d}x \tag{2.28}$$

- Comparaison asymptotique avec une intégrale de Riemann convergente

2.3.2 Existence d'intégrale d'une fonction quelconque

Definition 2.3.1: Intégrable

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$, considérer une fonction $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ mesurable sur Ω.

1. Si f est positive, on dit f est **intégrable** si

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu < +\infty \tag{2.29}$$

2. Si f n'est plus toujours positive, on dit f est **intégrable** si

$$\int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu < +\infty \tag{2.30}$$

et on pose

$$\int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f^+ \mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- \mathrm{d}\mu \tag{2.31}$$

où $f^+(\omega) = \max(0, f(\omega))$ et $f^-(\omega) = \max(0, -f(\omega))$

Proposition 2.3.1

Si f et g intégrables sur Ω et si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, alors :

1. Linéarité

$$\alpha f + \mu g \text{ intégrable sur } \Omega, \quad \int_\Omega (\alpha f + \mu g) \mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega f \mathrm{d}\mu + \beta \int_\Omega g \mathrm{d}\mu \tag{2.32}$$

2. Croissance

$$f \leq g \text{ p.p.} \implies \int_\Omega f \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g \mathrm{d}\mu \tag{2.33}$$

3. Restriction

$$A \in \mathcal{T} \implies f_{|A} \text{ intégrable sur } A, \quad \int_A f_{|A} \mathrm{d}\mu_{|A} = \int_\Omega \mathbb{1}_A f \mathrm{d}\mu \tag{2.34}$$

4. Relation de Chasles

$$(A, B) \in \mathcal{T}^2, \ \mu(A \cap B) = 0 \implies \int_{A \cup B} f \mathrm{d}\mu = \int_A f \mathrm{d}\mu + \int_B f \mathrm{d}\mu \tag{2.35}$$

Proposition 2.3.2

Si f intégrable sur I,

$$\int_I f \mathrm{d}\lambda = \int_{a=\inf I}^{b=\sup I} f \mathrm{d}\lambda < +\infty \tag{2.36}$$

Mais le sens inverse est faux : Existence de $\int_a^b f \mathrm{d}\lambda$, c'est-à-dire,

- ou bien $I = [a, b]$, toujours s'applique aux fonctions continue par morceaux.
- ou bien on peut trouver $c \in [a, b]$ tels que les deux limites existent :

$$\lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^c f(x) \mathrm{d}x, \quad \lim_{\beta \to b^-} \int_c^\beta f(x) \mathrm{d}x \tag{2.37}$$

n'implique pas f est intégrable.

Example 2.3.1 (Sens inverse)

La fonction $f : x \mapsto \sin x/x$ n'est pas intégrable sur $I =]0, +\infty[$ mais $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ existe.

Proof:

- f n'est pas intégrable sur I.
  - $|f|$ est mesurable sur $[0, +\infty[$ car continue sur $[0, +\infty[$ après un prolongement par $f(0) = 1$
  - Construisons une suite $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(x)| \mathrm{d}x$, donc la série $S_n(u) = \int_0^{(n+1)\pi} |f(x)| \mathrm{d}x$

$$u_n \underset{x=t+n\pi}{=} \int_0^{\pi} |\frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi}| \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+n\pi} \mathrm{d}t \geq \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n+n\pi} \mathrm{d}t = -\left[\frac{\cos t}{n+n\pi}\right]_0^{\pi} \implies u_n \geq \frac{2}{n+u\pi} = v_n \tag{2.38}$$

  - v_n est une suite divergente, donc $S_n(u) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc n'est pas intégrable.
- L'"intégrale" existe.

  Prenons $c = 1$.
  - $\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x$ car f est continue sur $[0, 1]$ après un prolongement.
  - $X > 1$

$$\int_1^X f(x) \mathrm{d}x = [\frac{-\cos x}{x}]_1^X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2} \mathrm{d}x = O\left(\frac{1}{x^2}\right) \tag{2.39}$$

😆

2.4 Convergence monotone

On a énoncé : Si $f : I \to \mathbb{R} \in C^0_{pm}$, posons que $a = \inf I$, $b = \sup I$, f intégrable sur I si et seulement si $\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ l'est.

On a de plus :

- La possibilité de faire des intégrales de fonctions $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ où $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$est un espace mesuré ($\Omega$ n'est pas nécessairement un intervalle)
- On s'intéresse aux fonctions mesurables (ce n'est plus nécessairement une fonction continue par morceaux)

2.4.1 Théorème de convergence monotone

Theorem 2.4.1 de convergence monotone

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions positives, *mesurables* !! sur Ω. Alors, il existe une fonction f positive, mesurable sur Ω telle que (voir notation 2.12)

$$\forall \omega \in \Omega,\ f(\omega) = \lim_{n\to+\infty} \uparrow f_n(\omega) \tag{2.40}$$

et plus important, on a :

$$\boxed{\int_\Omega f\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \uparrow \left(\int_\Omega f_n\mathrm{d}\mu\right)} \tag{2.41}$$

Autre écriture : **interversion de limites**

$$\int_\Omega f_n\mathrm{d}\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f\mathrm{d}\mu \tag{2.42}$$

Note:-

- On ne nous dit pas que f est intégrable sur Ω. (seulement mesurable)
- L'existence de f n'est pas une information nouvelle, mais ce qui est nouveau : f est mesurable sur Ω.

Note:-

Comment utiliser ce théorème ?

- Comment montrer qu'une fonction est mesurable ?
  - $\mathbb{1}_B$ est mesurable
  - Une fonction continue ou continue par morceaux est mesurable
  - Une combinaison des fonctions au-dessus est mesurable
  - f est limite des fonctions mesurables (À voir au-dessou)
- Un problème étant donné, comment se ramener à une suite croissante ?

Example 2.4.1

Montrer que $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$

$$F : a \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+a^2)}} \tag{2.43}$$

vérifie :

$$F(a) \underset{a\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty \quad F(a) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{a} \tag{2.44}$$

Proof:

- Comportement en 0^+.

– Construisons une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,+\infty[^{\mathbb{N}}$ décroissante et $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$, donc

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}_+ \tag{2.45}$$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+a_n^2)}} \tag{2.46}$$

– Si $n \in \mathbb{N}$, f_n est positive et mesurable car elle est continue.

– f_n est croissante comme a_n est décroissante.

– D'après le **théorème de convergence monotone**,

$$f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f : \begin{cases} [0,1] \to]0,+\infty[\\ x \mapsto \begin{cases} +\infty \text{ si } x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\times x} \text{ si } x \in]0,1] \end{cases} \end{cases} \tag{2.47}$$

– Donc,

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) \geq \frac{1}{2\sqrt{x^2+a_n^2}} \implies \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \geq \left[\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a_n^2})\right]_{x=0}^{x=1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \tag{2.48}$$

– $F(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ implique $F(a) \underset{a\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$

- Comportement en $+\infty$, on va étudier $aF(a)$ lorsque $a \to +\infty$.
  – On calcul :

$$aF(a) = \int_0^1 \frac{a}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+a^2)}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)\left(1+(x/a_n)^2\right)}} \geq 0 \tag{2.49}$$

  – Supposons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,+\infty[^{\mathbb{N}}$ croissante et $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(1+(x/a_n)^2)}} \tag{2.50}$$

  est croissante.

  – D'après le théorème, lorsque $x \in [0,1]$,

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \tag{2.51}$$

  – D'après le théorème,

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]_{x=0}^{x=1} = \ln(1+\sqrt{2}) \tag{2.52}$$

  – Enfin,

$$a_nF(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1+\sqrt{2}) \implies F(a) \sim \frac{1}{a}\ln(1+\sqrt{2}) \tag{2.53}$$

😀

Example 2.4.2

Montrer que $a \to +\infty$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+a^2}} \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2a} \tag{2.54}$$

Proof: On construit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante,

$$f_n(x) = \frac{a_n}{(1+x^2)\sqrt{x^2+a_n^2}} \tag{2.55}$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{(x/a_n)^2+1}} \underset{a_n\to\uparrow+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+x^2} \tag{2.56}$$

$$\tag{2.57}$$

Donc,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \tag{2.58}$$

😄

Example 2.4.3

Montrer que $a \to 0^+$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)(a^2+x^2)} \underset{a\to 0^+}{\sim} \frac{\pi}{2a} \tag{2.59}$$

Proof:

- Changement de variable :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(1+x^4)} \underset{x=au}{=} \int_0^{+\infty} \frac{a\mathrm{d}u}{a^2(1+u^2)(1+a^4u^4)} \tag{2.60}$$

- Avec une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante tendant vers 0^+,

$$f_n(u) = \frac{1}{(1+u^2)(1+u^4a^4)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+u^2} \tag{2.61}$$

- Donc,

$$\int_0^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u \underset{a\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{+\infty} f_n(u)\frac{1}{a}\mathrm{d}u \underset{a\to 0^+}{\sim} \frac{\pi}{2a} \tag{2.62}$$

😄

2.4.2 Lemme de Fatou

Definition 2.4.1: Limite supérieure, limite inférieure

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On appelle :

- **Limite supérieure de la suite u :**

$$\limsup u_n = \overline{\lim} u_n = \max(\mathrm{Adh}(u)) \in [-\infty, +\infty] \tag{2.63}$$

- **Limite inférieure de la suite u :**

$$\liminf u_n = \underline{\lim} u_n = \min(\mathrm{Adh}(u)) \in [-\infty, +\infty] \tag{2.64}$$

Notons $\mathrm{Adh}(u) \in [-\infty, +\infty]$, donc en ce cas, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, $\mathrm{Adh}(u)$ est toujours non vide.

Proposition 2.4.1

On peut transformer une limite inf. (resp. sup.) en limite croissante (resp. décroissante) :

$$\liminf u_n = \lim_{n \to +\infty} \uparrow \left(\inf_{k \geq n} u_k \right) \tag{2.65}$$

Conséquence :

- Toute limite inférieure et limite supérieure d'une suite de fonctions mesurables est mesurable.
- Si une suite de fonctions mesurables définies sur un espace mesuré à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$ converge vers une fonction f, alors f est mesurable sur Ω.

Proposition 2.4.2 Lemme de Fatou

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives définies sur Ω à valeurs dans $[0, +\infty]$:

$$\int_\Omega \liminf f_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \tag{2.66}$$

Proof:

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq n$.

$$f_p \geq \inf_{k \geq n} f_k \tag{2.67}$$

$$\int_\Omega f_p \mathrm{d}\mu \geq \inf_{p \geq n} \int_\Omega f_p \mathrm{d}\mu \geq \int_\Omega \inf_{k \geq n} f_k \mathrm{d}\mu \tag{2.68}$$

$$\liminf \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \geq \lim_{n \to +\infty} \left(\int_\Omega \inf_{k \geq n} f_k \mathrm{d}\mu \right) \tag{2.69}$$

- D'après le **théorème de convergence monotone**,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_\Omega \inf_{k \geq n} f_k \mathrm{d}\mu \right) = \int_\Omega \liminf f_n \mathrm{d}\mu \tag{2.70}$$

😄

2.5 Convergence dominée

Le théorème de convergence *monotone* a des hypothèses très fortes. Et pourtant, on aimerait pouvoir dire

$$\boxed{\int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f \mathrm{d}\mu \text{ avec } \forall \omega \in \Omega,\ f_n(\omega) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\omega)} \tag{2.71}$$

Mais, cette relation est **fausse** en général. Sinon, on parle d'**interversion de limites**.

Example 2.5.1
Considérons une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ définie comme :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n^2\left(x - \frac{1}{n}\right), & x < \frac{1}{n} \\ 0, & x \geq \frac{1}{n} \end{cases} \tag{2.72}$$

qui tend vers la fonction $\widetilde{0}$. Mais l'intégrale de f_n sur $[0,1]$ est toujours $1/2$.

Donc on va chercher des conditions suffisantes pour avoir ce résultat.

2.5.1 Théorème de convergence dominée

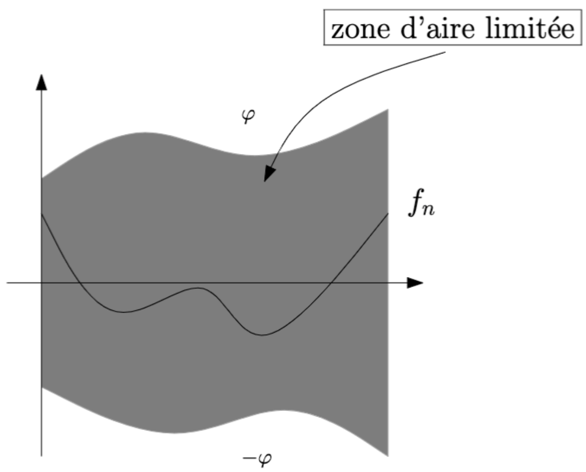

Figure 2.2: Convergence dominée

Theorem 2.5.1 de convergence dominée
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, et des applications $(f_n) \in (\Omega \to \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ mesurables sur Ω et vérifiant :

1. *Convergence simple*
   Il existe une fonction $f : \Omega \to \mathbb{K}$ mesurable telle que :
   $$\forall \omega \in \Omega,\ f_n(\omega) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\omega) \quad \mu - \text{p.p.} \tag{2.73}$$
2. *Domination uniforme*
   Il existe une fonction $\varphi : \Omega \to [0,+\infty]$ *intégrable !!* sur Ω, telle que :
   $$\forall \omega \in \Omega,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(\omega)| \leq \varphi(\omega) \quad \mu - \text{p.p.} \tag{2.74}$$

Alors,

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n intégrable sur Ω
2. f intégrable sur Ω
3. De plus

$$\int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f \mathrm{d}\mu \tag{2.75}$$

Note:-

Comment montrer qu'une fonction g est intégrable ? Vérifier deux conditions :

1. g doit être mesurable. (souvent si $BO(\Omega)$, g continue ou continue par morceaux est suffisant)
2. $g = O(h)$ où h connue intégrable sur Ω

Exemples :

- $x \mapsto 1/x^\alpha$ intégrable sur $[1, +\infty[$ ssi $\alpha > 1$
- $x \mapsto a^x$ intégrable sur $[0, +\infty[$ ssi $a < 1$

Example 2.5.2

Cherchons le comportement asymptotique de :

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} \mathrm{d}x \tag{2.76}$$

Solution

1. Problème de Ω. $\Omega \neq [0, n]$ car il ne doit pas dépendre de n. On a deux méthodes :
   - Faire un changement de variable pour fixer Ω :

   $$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} \mathrm{d}x = \int_0^1 n(1-u)^n e^{-n.u} \mathrm{d}u \tag{2.77}$$

     On observe la fontion $u \mapsto n(1-u)^n e^{-nu}$
     - est mesurable car elle est continue
     - Si $u \in [0, 1]$, $f_n(u) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si $u = 0$.

     On n'y arrive pas.
   - Fixer Ω en prolongement les fonctions par 0 : Notons

   $$f_n : [0, +\infty] \to \mathbb{R} \tag{2.78}$$

   $$x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x}, & x \in [0, n] \\ 0, & x \in]n, +\infty[\end{cases} \tag{2.79}$$

2. f_n mesurable car elle est continue par morceaux.
3. Limite de la suite de fonctions :

   $$f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-2x} = f(x) \tag{2.80}$$

   car $\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \to e^u$
4. Domination : Soit $x \in [0, +\infty[$, $n \in \mathbb{N}$,

   $$|f_n(x)| = |\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x}| + 0 \leq e^{-x} = \varphi(x) \tag{2.81}$$

- φ ne dépend pas de n
- φ mesurable sur $\mathbb{R}_+$ car elle est continue
- φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = 1 \tag{2.82}$$

5. Le théorème de convergence dominée s'applique et

$$I_n = \int_{[0,+\infty]} f_n \mathrm{d}\lambda \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[0,+\infty[} f \mathrm{d}\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \tag{2.83}$$

Example 2.5.3

La limite de I_n lorsque $n \to +\infty$:

$$I_n = \int_1^{+\infty} ne^{-x^n}\mathrm{d}x \tag{2.84}$$

Solution

Notons $\Omega = [1, +\infty[$,

- Notons $f_n : x \mapsto ne^{-x^n}$, f_n mesurable car f_n continue
- $x \in [1, +\infty[$,

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, & x > 1 \\ +\infty, & x = 1 \end{cases} \tag{2.85}$$

- Pas de dominant intégrable $\longrightarrow$ changement de variable Soit $t = x^n$

$$\int_1^X ne^{-x^n}\mathrm{d}x = \int_1^{X^n} e^{-t}t^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}t \tag{2.86}$$

  Donc

$$\int_1^X ne^{-x^n}\mathrm{d}x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} ne^{-x^n}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{1/n-1}\mathrm{d}t \tag{2.87}$$

  Notons $f_n : t \mapsto e^{-t}t^{1/n-1}$

- f_n est mesurable car f_n continue sur $[1, +\infty[$
- Convergence simple :

$$f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{-t}}{t} = f(t) \tag{2.88}$$

- Domination :

$$|f_n(t)| \leq e^{-t} = \varphi(t) \tag{2.89}$$

  - φ mesurable sur $[1, +\infty[$ car elle est continue
  - φ intégrable car $\int_1^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1 < +\infty$

  Donc,

$$\int_{[1,+\infty[} f_n \mathrm{d}\lambda \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[1,+\infty[} f \mathrm{d}\lambda, \quad I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t \tag{2.90}$$

2.6 Théorème de Fubini

2.6.1 Mesure σ-finie

Definition 2.6.1: Mesure σ-finie

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, on dit que μ est une **mesure σ- finie** s'il existe une famille dénombrable $(A_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

- $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) \in \mathbb{R}_+$ (finie)

Example 2.6.1

- La mesure de Lebesgue λ est σ-finie :

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n, +n], \quad \lambda([-n, +n]) = 2n \in \mathbb{R}_+ \tag{2.91}$$

- La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^p$ est σ-finie.
- Sur un espace probabilisé, $\mathbb{P}$ est σ-finie.
- La mesure de comptage n'est pas σ-finie :

$$\mu : A \longrightarrow \mathrm{card}(A) \tag{2.92}$$

Proposition 2.6.1

Soit $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ espaces mesurés, où μ_1 et μ_2 σ-finies. Alors il existe une unique mesure μ définie sur $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ vérifiant :

$$\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{T}_1 \times T_2,\ \mu(A_1 \times A_2) = \mu(A_1) \times \mu(A_2) \tag{2.93}$$

avec $0 \times +\infty = 0$. On note $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$, et μ est un mesure σ-finie.

Proof: Admis. σ-finie assure l'unicité. ☺

2.6.2 Théorème de Fubini-Tonelli

Le théorème de Fubini-Tonelli sert à montrer l'intégrabilité d'une fonction $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow [0, +\infty]$!! mesurable pour $\mathcal{BO}([-\infty, +\infty])$ et $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$

Theorem 2.6.1 de Fubini-Tonelli

Soit $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ avec mesures étant σ-finies, soit fonction $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurable pour $\mathcal{BO}([-\infty, +\infty])$ et $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$, alors :

1. L'application F_1 est mesurable par rapport à $\mathcal{T}_1$

$$F_1 : \Omega_1 \longrightarrow [0, +\infty] \tag{2.94}$$
$$x \longmapsto \int_{\Omega_2} f(x, y)\mathrm{d}\mu_2 \tag{2.95}$$

2. L'application F_2 est mesurable par rapport à $\mathcal{T}_2$

$$F_2 : \Omega_2 \longrightarrow [0, +\infty] \tag{2.96}$$
$$y \mapsto \int_{\Omega_1} f(x, y) \mathrm{d}\mu_1 \tag{2.97}$$

3. On a la relation :

$$\int_{\Omega} f \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} F_1 \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_2} F_2 \mathrm{d}\mu_2 \tag{2.98}$$

Example 2.6.2

Soit la fonction

$$f : [0, +\infty[\times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2.99}$$
$$(x, y) \mapsto e^{-xy} \tag{2.100}$$

Vérifications :

- Mesures de Lebesgue λ est σ-finie
- La fonction est mesurable positive

Après calculs,

- $F_1(x) = \left[\frac{-e^{-xy}}{x}\right]_a^b = \frac{1}{x}(e^{-ax} - e^{-bx})$ ou $b - a$ si $x = 0$
- $F_2(y) = \left[\frac{-e^{-xy}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{y}$

D'après le théorème :

- f intégrable sur $[0, +\infty[\times [a, b]$
- Une relation

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times [a,b]} f \mathrm{d}(\lambda \otimes \lambda) = \int_0^{+\infty} \left(\int_a^b f(x, y) \mathrm{d}y \right) = \int_a^b \left(\int_0^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \implies \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \mathrm{d}x = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{2.101}$$

2.6.3 Théorème de Fubini-Lebesgue

Le théorème de Fubini-Lebesgue sert à calculer $\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)$

Theorem 2.6.2 Fubini-Lebesgue

Soit $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_{@}, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés avec les mesures σ-finies. Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [-\infty, +\infty]$, $\mu_1 \otimes \mu_2$-intégrable sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ alors

1. L'application F_1 est définie μ_1-p.p. et intégrable !! sur Ω_1

$$F_1 : \Omega_1 \longrightarrow [-\infty, +\infty] \tag{2.102}$$
$$x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y) \mathrm{d}\mu_2 \tag{2.103}$$

2. L'application F_2 est définie μ_2-p.p. et <u>intégrable !!</u> sur Ω_2

$$
\begin{aligned}
F_2 : \Omega_2 &\longrightarrow [-\infty, +\infty] && (2.104)\\
y &\mapsto \int_{\Omega_1} f(x, y) \mathrm{d}\mu_1 && (2.105)
\end{aligned}
$$

3. On a la relation :

$$\int_{\Omega} f \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} F_1 \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_2} F_2 \mathrm{d}\mu_2 \tag{2.106}$$

2.7 Changement de variable

2.7.1 Tribu image, mesure image

Definition 2.7.1: Tribu image, Mesure image

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un *espace mesuré*, Ω' un ensemble, $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$
On appelle

- **tribu image** de Ω' :
$$\mathcal{T}'_f = \{A' \subset \Omega', f^{-1}(A') \in \mathcal{T}\} \tag{2.107}$$
- **mesure image** de μ par f :
$$\forall A' \in \mathcal{T}'_f,\ \mu'_f(A) = \mu(f^{-1}(A')) \tag{2.108}$$

Proposition 2.7.1
Si au départ $(\Omega', \mathcal{T}')$ est un espace mesurable et f mesurable, donc
$$T' \subset T'_f \tag{2.109}$$

Proof: Soit $A' \in \mathcal{T}'$, comme f mesurable, $f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$, donc $A' \in \mathcal{T}'_f$ ☺

2.7.2 Théorème de changement de variable

Theorem 2.7.1 changement de variable
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(\Omega', \mathcal{T}')$ un espace mesurable. Soit la fonction (de changement de variable) $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ mesurable,

1. Si $f : \Omega' \longrightarrow [0, +\infty]$ positive, mesurable,
$$\int_{\Omega'} f \mathrm{d}(\mu'_\varphi) = \int_\Omega f \circ \varphi \mathrm{d}\mu \tag{2.110}$$
2. Si $f : \Omega' \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ mesurable alors,
   - f est μ'_φ intégrable sur Ω' ssi $f \circ \varphi$ est intégrable sur Ω
   - Si elles sont intégrables, donc
$$\int_{\Omega'} f \mathrm{d}(\mu'_\varphi) = \int_\Omega f \circ \varphi \mathrm{d}\mu \tag{2.111}$$

2.7.3 Théorème de changement de variable pour un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme

Definition 2.7.2: Difféomorphisme

Soit $f \in \mathscr{C}^k(\Delta, \mathbb{R}^p)$, où Δ est un ouvert et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, on dit que f est un $\mathscr{C}^k$-**difféomorphisme** de Δ si on a :

- f injective
- $f(\Delta)$ est un ouvert dans $\mathbb{R}^p$
- f^{-1} de classe $\mathscr{C}^k$

Proposition 2.7.2

Si $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est un difféomorphisme, alors

- $n = p$. La dimension de l'espace d'arrivée est égale à la dimension de l'espace de départ
- Jacobienne de f au point $x \in \mathbb{R}^n$ définie par

$$J_f(x) = [\partial_j f_i(x)]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \tag{2.112}$$

Mémoire : $f : x \to \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$

Theorem 2.7.2 Changement de variable $\mathscr{C}^1$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.
Soit une fonction $f : \varphi(U) \to [-\infty, +\infty]$ une fonction mesurable et intégrable sur $\varphi(U)$, alors :

- $|\det(J_\varphi)|.(f \circ \varphi)$ intégrable sur U
- L'intégration :

$$\int_{\varphi(U)} f \mathrm{d}\lambda = \int_U |\det(J_\varphi)|.(f \circ \varphi)\mathrm{d}\lambda \tag{2.113}$$