Bonjour

QCM Lundi sur la dualité : tout le chapitre

Mini-projet donné dimanche ou Lundi

→ Groupes de 3 (ou 4)

projet $\neq$ DM

Questions : imprécises — précises

Réponses : beaucoup sont correctes — une seule réponse correcte

Éviter : solutions sur Internet

Chat GPT

Chapitre 2

Endomorphismes particuliers d'un espace euclidien

2.1 Adjoint d'un endomorphisme

Utilisation en

1) Physique : mécanique quantique

2) Analyse des données (statistiques)

3) Tous les outils actuels.

Le théorème en 51 fondamental : théorème de représentation des <u>formes linéaires</u>

<u>théorème</u> : Soit E un espace euclidien (donc de dimension finie)

$$\boxed{\forall \varphi \in E^*, \ \exists ! a \in E, \ \forall x \in E, \ \varphi(x) = \langle a, x \rangle.}$$

On dit que <u>a représente φ.</u>

(<u>Démonstration pour Mathilde</u>

<u>Existence</u>

* $\varphi = 0_E$, $a = 0_E$ convient.

* $\varphi \neq 0_E$, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan (donc de codimension 1)

$$\mathrm{Ker}(\varphi) \oplus (\mathrm{Ker}\,\varphi)^{\perp} = E$$

et $\dim (\mathrm{Ker}\,\varphi)^{\perp} = \dim E - \dim \mathrm{Ker}\,\varphi$

$= 1$

il existe $e \in E \setminus \{0_E\}$, $\mathrm{Ker}(\varphi)^{\perp} = \mathbb{R}\cdot e$.

cherchons $a = \mu . e$ pour $\mu \in \mathbb{R}$.

Si $x \in E$, $\varphi(x) = \lambda . \varphi(e) = \langle \mu . e, x\rangle$

$x = w + \lambda . e$ $\qquad = \lambda \mu \langle e, e\rangle$

$$\boxed{\mu = \frac{\varphi(e)}{\|e\|^2}} \qquad a = \frac{\varphi(e)}{\|e\|^2} . e .$$

Exercice $\rightarrow$ (ne dépend pas du choix de e)

Unicité : Si $\langle a, x \rangle = \langle b, x \rangle \quad \forall x \in E$

Pour tout $x \in E$, $\langle a-b, x \rangle = 0$ donc $a-b \in E^{\perp} = \{0_E\}$.

donc $a = b$) $\blacksquare$

Remarque : Si E euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$, $y \in E$ fixé

$$\varphi_y : x \longmapsto \underset{\underset{\mathbb{R}}{\uparrow}}{\langle u(x), y \rangle} \quad \text{est une forme linéaire.}$$

Il existe $a_y \in E$, $\forall x \in E$ $\varphi_y(x) = \langle a_y, x \rangle$

Ce qui nous intéresse : $y \overset{u^*}{\longmapsto} a_y$

Q : Florence
Q : Capucine
Q : Raphaël

Définition: Soit E euclidien, Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (linéaire de $E \to E$).

Il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$,

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2, \ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle}$$

u^* s'appelle « l'adjoint de u »

Pourquoi u^* est-elle linéaire ?

——— unique ?

(1) Unicité ? si v_1, v_2 vérifient

$\forall (x,y) \in E^2, \ \langle u(x), y \rangle = \langle x, v_1(y) \rangle = \langle x, v_2(y) \rangle$.

alors $v_1(y) - v_2(y)$ orthogonal à tout $x \in E$, donc nul

$v_1 = v_2$

Dans un espace euclidien, pour montrer qu'un vecteur est nul, on montre qu'il est orthogonal à tout $x \in E$.

$(E^{\perp} = \{0_E\})$

② linéarité ? Soit $(y_1, y_2) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. $x \in E$

$$\langle u^*(y_1 + \lambda . y_2) - u^*(y_1) - \lambda . u^*(y_2), x \rangle$$

$$= \langle u^*(y_1 + \lambda . y_2), x \rangle - \langle u^*(y_1), x \rangle - \lambda \langle u^*(y_2), x \rangle$$

$$= \langle y_1 + \lambda . y_2, u(x) \rangle - \langle y_1, u(x) \rangle - \lambda \langle y_2, u(x) \rangle = 0 \;) \blacksquare$$

Remarque : moi, j'aime pas les espaces vectoriels (Schtroumpf grognon)

Prenons une base $\mathcal{E} = (e_1 - e_n)$. Orthonormée !!

Pour un espace euclidien, si on prend une base, elle DOIT être

orthonormé

Soit $x \in E$ $\quad X = \mathrm{Mat}(x, \mathcal{E}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $\quad X = \begin{bmatrix} \langle e_1, x \rangle \\ \vdots \\ \langle e_n, x \rangle \end{bmatrix}$ BON

$$\left(\forall x \in E, \boxed{x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle . e_k} \right)$$

$A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{E}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & \dots & u(e_n) \end{array} \\ \begin{bmatrix} \quad \langle e_i, u(e_j) \rangle \quad \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

$(i,j) \in [\![1,n]\!]$

BON

Comme $\mathcal{E}$ est orthonormé

$\langle x, y \rangle = {}^tX \cdot Y$ où $Y = \mathrm{Mat}(y, \mathcal{E})$

BON = base orthonormée

alors $[\langle u(x), y\rangle] = {}^t\mathrm{Mat}(u(x), \mathcal{E}) \cdot Y$

si $(x,y) \in E$

$= {}^t(A \cdot X) \cdot Y = {}^tX \cdot ({}^tA \cdot Y) = \langle u(x), y\rangle$

abus d'écriture

(on confond $a \in \mathbb{R}$ avec $[a] \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$)

On obtient $\boxed{\mathrm{Mat}(u^*, \mathcal{E}) = {}^tA}$

$\mathcal{E}$ BON

On utilise souvent si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie

$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, \quad {}^tX \cdot M \cdot Y = 0$

alors $M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

Proposition 2.1 – Adjoint d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$, alors, il existe un unique endomorphisme de E, $f^\star$ vérifiant

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, f(y)\rangle = \langle f^\star(x), y\rangle}$$

Cet endomorphisme s'appelle l'adjoint de f.

Démonstration

1. (*Première démonstration*) Soit $x \in E$ fixé, l'application $y \mapsto \langle x, f(y)\rangle$ est une forme linéaire sur E. D'après le théorème de représentation, il existe un unique $a \in E$, tel que
$$\forall y \in E,\ \langle x, f(y)\rangle = \langle a, y\rangle$$
On pose donc naturellement, $a = f^\star(x)$. Il reste à montrer que $f^\star$ est linéaire. Or c'est la composée de deux applications linéaires
$$\begin{cases} E \to E^\star \\ x \mapsto (y \mapsto \langle x, f(y)\rangle) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} E^\star \to E \\ \varphi \mapsto a, \quad \forall y \in E,\ \varphi(y) = \langle a, y\rangle \end{cases}$$
2. (*Deuxième démonstration*) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, alors, pour définir $f^\star$, il suffit de définir la famille $(f^\star(e_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$, et pour définir chaque $f^\star(e_i)$, il suffit de connaître son produit scalaire avec e_j. Il vient alors immédiatement
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle f^\star(e_i), e_j\rangle = \langle e_i, f(e_j)\rangle$$
Il reste alors à vérifier que l'application construite convient, soit que
$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, f(y)\rangle = \langle f^\star(x), y\rangle$$

J'ai donné un sens à $A \longmapsto {}^tA$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice : (à réfléchir) Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies

$\mathcal{E} = (e_1 - e_p)$ base de E, $\mathcal{E}' = (e'_1 - e'_n)$ base de E'

alors $\mathcal{E}^* = (e_1^* - e_p^*)$ base de E^*, $\underbrace{(e_1'^* - e_n'^*)}_{= \mathcal{E}'^*}$ base de E'^*

Soit $u \in \mathcal{L}(E, E')$. $A = \mathrm{Mat}(u ; \mathcal{E}, \mathcal{E}')$

alors ${}^tA = \mathrm{Mat}({}^tu, \mathcal{E}'^*, \mathcal{E}^*)$

où ${}^tu : \left| \begin{array}{l} E'^* \longrightarrow E^* \\ \varphi' \longmapsto \varphi' \circ u. \end{array} \right.$

Cela se fait en écrivant que, pour $(x, y) \in E^2$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle . e_i \text{ et } y = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, y \rangle . e_j$$

on a alors

$$\langle x, f(y) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, x \rangle \langle e_j, y \rangle \langle e_i, f(e_j) \rangle$$

et

$$\langle f^\star(x), y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, x \rangle \langle e_j, y \rangle \langle f^\star(e_i), e_j \rangle$$

Propriété 2.1

$\mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$
$u \mapsto u^\star$
est linéaire

— On a immédiatement, pour f et g dans $\mathscr{L}(E)$ et λ dans $\mathbb{R}$

$$(f+g)^\star = f^\star + g^\star, \ (\lambda . f)^\star = \lambda . f^\star \text{ et } (f^\star)^\star = f$$

(même chose pour $A \mapsto {}^tA$)

— De même

$$\left(0_{\mathscr{L}(E)}\right)^\star = 0_{\mathscr{L}(E)} \text{ et } (\mathrm{id}_E)^\star = \mathrm{id}_E$$

et, pour f et g dans $\mathscr{L}(E)$

$$(f \circ g)^\star = g^\star \circ f^\star$$

${}^t(A.B) = {}^tB . {}^tA$

et, enfin, pour $f \in \mathscr{GL}(E)$

$$f^\star \in \mathscr{GL}(E) \text{ et } \left(f^{-1}\right)^\star = (f^\star)^{-1}$$

${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ si $A \in GL_n(\mathbb{R})$

Remarque : pourquoi

$\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \ {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$?

Preuve : ${}^t(A^{-1}) \cdot {}^tA = {}^t(A \cdot A^{-1}) = {}^tI_n = I_n$

$({}^tA)^{-1} \cdot {}^tA = I_n$. $\blacksquare$

Propriétés : Soit E euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$

alors

1. $\mathrm{Ker}(u^*) = \mathrm{Im}(u)^\perp$.
2. $\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$.

Demonstration : ① * $\mathrm{Ker}(u^*) \subset (\mathrm{Im}\, u)^\perp$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^*)$, et $y \in \mathrm{Im}(u)$. (il existe $z \in E$, $y = u(z)$)

$$\langle x, y \rangle = \langle x, u(z) \rangle = \langle \underbrace{u^*(x)}_{= 0_E}, z \rangle = 0 .$$

* $(\mathrm{Im}\, u)^\perp \subset \mathrm{Ker}(u^*)$.

Soit $x \in (\mathrm{Im}\, u)^\perp$, Soit $y \in E$

$$\langle u^*(x), y \rangle = \langle \underset{\in (\mathrm{Im}\, u)^\perp}{x}, \underbrace{u(y)}_{\in \mathrm{Im}(u)} \rangle = 0$$

Pour enlever le * qui nous gêne, utiliser

$$\langle u^*(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle .$$

② On applique ① à u^* et $(u^*)^* = u$, on obtient le résultat

$$(\operatorname{Im} u^*)^{\perp} = \operatorname{Ker}((u^*)^*) = \operatorname{Ker}(u).$$

$$\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Im} u^{*\perp})^{\perp} = \operatorname{Ker}(u)^{\perp}.$$

$\blacksquare$

En général, l'adjoint est un endomorphisme peu lisible

Cas particuliers.

1) u projecteur ($u \circ u = u$).
u symétrie

2) $u^* = u$ (endomorphismes auto-adjoints ou symétriques)

3) $u^{-1} = u^*$ (automorphismes orthogonaux) ⟵ $u \in \mathcal{O}(E)$.

4) $u^* = -u$ (endomorphismes anti-symétriques)

— On a aussi, pour $f \in \mathscr{L}(E)$

propriétés géométriques de l'adjoint

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f^\star) = (\operatorname{Im}(f))^{\perp.} \text{ et } \operatorname{Im}(f^\star) = (\operatorname{Ker}(f))^{\perp.}}$$

Démonstration de la dernière propriété (les autres sont évidentes)

1. $(\operatorname{Ker}(f^\star) \subset (\operatorname{Im}(f))^{\perp.})$ Soit $x \in \operatorname{Ker}(f^\star)$ et $y \in \operatorname{Im}(f)$, on a alors l'existence d'un $x_1 \in E$, tel que $y = f(x_1)$. Mais
$$\langle x, y\rangle = \langle x, f(x_1)\rangle = \langle f^\star(x), x_1\rangle = 0$$
Ce qui montre que $\operatorname{Ker}(f^\star) \subset (\operatorname{Im}(f))^{\perp.}$.
2. $(\operatorname{Ker}(f^\star) \supset (\operatorname{Im}(f))^{\perp.})$ Soit $x \in (\operatorname{Im}(f))^{\perp.}$ et $z \in E$, alors
$$0 = \langle x, f(z)\rangle = \langle f^\star(x), z\rangle$$
donc $f^\star(x) \in E^{\perp.} = \{0_E\}$, ce qui montre que $f^\star(x) = 0_E$.
3. $(\operatorname{Im}(f^\star) = (\operatorname{Ker}(f))^{\perp.})$ On applique l'égalité précédente à $f^\star$, on obtient
$$\operatorname{Ker}(f) = (\operatorname{Im}(f^\star))^{\perp.}, \text{ donc } (\operatorname{Ker}(f))^{\perp.} = \operatorname{Im}(f^\star)$$

2023.3.1

Proposition 2.2

Soit E un espace vectoriel euclidien, soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit E_1 un sous-espace vectoriel de E, alors

$$\left[E_1 \text{ stable par } f\right] \iff \left[E_1^{\perp.} \text{ stable par } f^\star\right]$$