Chapitre 2 : endomorphismes d'un espace euclidien

Université PSL - CPES2

Avril-Mai 2020

Introduction

Objectif. Étude de certains endomorphismes remarquables des espaces euclidiens :

- Propriétés géométriques (ex : transformations du plan/espace)
- Propriétés matricielles.
- Propriétés de réduction (ex : diagonalisabilité)

Introduction

Objectif. Étude de certains endomorphismes remarquables des espaces euclidiens :

- Propriétés géométriques (ex : transformations du plan/espace)
- Propriétés matricielles.
- Propriétés de réduction (ex : diagonalisabilité)

Classes d'endomorphismes que l'on va regarder.

- Endomorphismes auto-adjoints $\longrightarrow$ propriétés de réduction.
- Automorphismes orthogonaux $\longrightarrow$ propriétés géométriques.

Introduction

Objectif. Étude de certains endomorphismes remarquables des espaces euclidiens :

- Propriétés géométriques (ex : transformations du plan/espace)
- Propriétés matricielles.
- Propriétés de réduction (ex : diagonalisabilité)

Classes d'endomorphismes que l'on va regarder.

- Endomorphismes auto-adjoints $\longrightarrow$ propriétés de réduction.
- Automorphismes orthogonaux $\longrightarrow$ propriétés géométriques.

Résultats centraux.

- Théorème spectral (diagonalisabilité des matrices symétriques réelles/endomorphismes auto-adjoints).
- Étude du groupe orthogonal en petite dimension.

Plan

I) Définitions

a) Rappels

b) Endomorphismes auto-adjoints

c) Isométries et automorphismes orthogonaux

Rappels sur l'adjoint

Soit E un espace euclidien. On fixe une base **orthonormée** de E et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$. L'endomorphisme adjoint $f^* \in \mathcal{L}(E)$ de f vérifie pour tous $x, y \in E$:

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle.$$

Matriciellement, si M désigne la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de f^* dans la base $\mathcal{B}$ est M^T. Cela provient de l'approche matricielle du produit scalaire : si $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et X, Y désignent les coordonnées de x, y dans $\mathcal{B}$, on a

$$\langle f(x), y\rangle = X^T M^T Y \text{ et } \langle x, f(y)\rangle = X^T MY$$

donc $X^T M^T Y = X^T MY$ et, puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée, $M^T = M$.

Exemple

On pose $E = \mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B}$ et

$$f : \begin{cases} E \to E \\ (x, y) \mapsto (x + y, y - x) \end{cases}$$

On a

$$M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$M^T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement

$$f^* : \begin{cases} E \to E \\ (x, y) \mapsto (x - y, x + y) \end{cases}$$

Propriétés de l'adjoint

1. L'application $T : f \mapsto f^*$ est linéaire i.e
$$\forall f, g \in \mathcal{L}(E),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ (\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^*$$
et involutive i.e $(f^*)^* = f$;
2. $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$;
3. Si $f \in \mathrm{GL}(E)$ alors $\left(f^{-1}\right)^* = (f^*)^{-1}$
4. $\ker(f^*) = \mathrm{im}(f)^\perp$;
5. $\ker(f) = \mathrm{im}(f^*)^\perp$;
6. $\mathrm{im}(f^*) = \ker(f)^\perp$;
7. $\mathrm{im}(f) = \ker(f^*)^\perp$.

Endomorphismes auto-adjoints

Définition

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est un endomorphisme auto-adjoint (ou symétrique) si $f = f^*$ i.e

$$\forall x, y \in E,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle.$$

Matriciellement, un endomorphisme auto-adjoint est représenté dans toute base orthonormée par une **matrice symétrique réelle**. Réciproquement, une matrice symétrique réelle représente dans une base orthonormée un endomorphisme auto-adjoint.

Exemple/Exercice

1) Si $E = \mathbb{R}^2$ muni du ps canonique

$$f : \begin{cases} E \to E \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y) \end{cases}$$

est auto-adjoint.

Exemple/Exercice

1) Si $E = \mathbb{R}^2$ muni du ps canonique

$$f : \begin{cases} E \to E \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y) \end{cases}$$

est auto-adjoint.

2) Un projecteur othogonal est autoadjoint (cf TD2).

Exemple/Exercice

1) Si $E = \mathbb{R}^2$ muni du ps canonique

$$f : \begin{cases} E \to E \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y) \end{cases}$$

est auto-adjoint.
2) Un projecteur othogonal est autoadjoint (cf TD2).
3) Une symétrie orthogonale d'un espace euclidien est auto-adjointe.
Soit s une telle symétrie ; on rappelle que

$$\ker(s - \mathrm{Id}) \overset{\perp}{\oplus} \ker(s + \mathrm{Id}) = E.$$

On concatène une base orthonormée de $\ker(s - \mathrm{Id})$ avec une base orthonormée de $\ker(s + \mathrm{Id})$. Cela donne une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E. Dans cette base, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1, -1 \cdots, -1)$ qui est bien symétrique.

Exercice.

1. Montrer que l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Quelle est sa dimension ?
3. La composée de deux endomorphismes auto-adjoints est-elle auto-adjointe ?
4. Si $f \in \mathcal{S}(E)$, on définit $f^k := f \circ \cdots \circ f$ (composée k fois). A-t-on $f^k \in \mathcal{S}(E)$? Si $f \in \mathcal{S}(E) \cap \mathcal{GL}(E)$, a-t-on $f^{-1} \in \mathcal{S}(E)$?

Endomorphismes auto-adjoints définis positifs

Définition (Endomorphisme défini positif)

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. On dit que f est positif (resp. défini positif) si pour tout $x \in E \backslash \{0\}$,

$$\langle f(x), x\rangle \geq 0 \ \ (\text{resp.} \ \ \langle f(x), x\rangle > 0).$$

On note $\mathcal{S}^{+}(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs (resp. définis positifs).

Endomorphismes auto-adjoints définis positifs

Définition (Endomorphisme défini positif)

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. On dit que f est positif (resp. défini positif) si pour tout $x \in E \setminus \{0\}$,

$$\langle f(x), x \rangle \geq 0 \quad (\text{resp. } \langle f(x), x \rangle > 0).$$

On note $\mathcal{S}^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs (resp. définis positifs).

Remarque. Un endomorphisme auto-adjoint défini positif est représenté dans une base orthonormée par une matrice symétrique définie positive. Il devrait définir un produit scalaire, non ? Soit $\phi(x, y) = \langle f(x), y \rangle$. Alors ϕ est un produit scalaire sur E !

On le vérifie ?

- La forme ϕ est bilinéaire par linéarité de f et bilinéarité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$;
- La forme ϕ est symétrique car f est auto-adjoint :

$$\forall x, y \in E,\ \phi(x, y) = \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle = \langle f(y), x\rangle = \phi(y, x)$$

- La forme ϕ est définie positive

$$\forall x \in E\backslash\{0\},\ \phi(x, x) = \langle f(x), x\rangle > 0.$$

Bilan sur les endomorphismes auto-adjoints

- $f \in \mathcal{L}(E)$ est auto-adjoint (ou symétrique) si $f^* = f$. Dans ce cas, pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.
- Dans une base orthonormée, la matrice d'un endomorphisme auto-adjoint est symétrique réelle.
- L'ensemble des endomorphismes auto-adjoints est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n(n+1)/2$.
- $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit auto-adjoint défini positif s'il est auto-adjoint et $\langle f(x), x \rangle > 0$ pour tout $x \in E \backslash \{0\}$.
- Un endomorphisme symétrique défini positif est représenté dans une base orthonormée par une matrice symétrique définie positive.
- Un endomorphisme symétrique défini positif induit un produit scalaire par la forme ϕ : $\phi(x, y) = \langle f(x), y \rangle$.

Isométries vectorielles

Définition

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E), (F, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$ *deux espaces euclidiens. Soit* $f \in \mathcal{L}(E, F)$. *On dit que* f *est une isométrie (vectorielle) si pour tout* $x \in E$, $\|f(x)\|_F = \|x\|_E$.
Dans le cas où $E = F$, *on note* $\mathcal{O}(E)$ *l'ensemble des isométries. On parle alors d'automorphisme orthogonal*

Isométries vectorielles

Définition

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E), (F, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$ *deux espaces euclidiens. Soit* $f \in \mathcal{L}(E, F)$. *On dit que* f *est une isométrie (vectorielle) si pour tout* $x \in E$, $\|f(x)\|_F = \|x\|_E$.
Dans le cas où $E = F$, *on note* $\mathcal{O}(E)$ *l'ensemble des isométries. On parle alors d'automorphisme orthogonal*

Un peu de vocabulaire. iso/endo/auto : comment s'y retrouver ?

$$\text{automorphisme} = \underbrace{\text{auto}}_{\text{iso+endo}} + \underbrace{\text{morphisme}}_{\text{conserve une structure/operation}}$$

et iso = "semblable" (bijectif) / endo = dans lui même.
Terme le plus général : application linéaire !

Exemples

La définition ci-dessus indique qu'une isométrie est nécessairement injective. En particulier, si $\dim E = \dim F$, une isométrie est un isomorphisme. Dans ce cas, on dit que E et F sont isométriques.

Exemples

La définition ci-dessus indique qu'une isométrie est nécessairement injective. En particulier, si $\dim E = \dim F$, une isométrie est un isomorphisme. Dans ce cas, on dit que E et F sont isométriques.

Exemples.

- Tout espace euclidien est isométrique à $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique (par les coordonnées d'une base orthonormée).
- Dans le plan, toute rotation est une isométrie.
- Dans le plan ou l'espace, toute symétrie axiale est une isométrie.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. f est une isométrie si, et seulement si, f conserve les angles (non orientés) i.e

$$\forall x, y \in E,\ \langle f(x), f(y)\rangle_F = \langle x, y\rangle_E$$

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. f est une isométrie si, et seulement si, f conserve les angles (non orientés) i.e

$$\forall x, y \in E,\ \langle f(x), f(y)\rangle_F = \langle x, y\rangle_E$$

Démonstration.

($\Longrightarrow$) Si f est une isométrie, alors fixons $x, y \in E$. On a d'une part

$$\|f(x+y)\|_F^2 = \|f(x)\|_F^2 + \|f(y)\|_F^2 + 2\langle f(x), f(y)\rangle_F$$

et d'autre part

$$\|x+y\|_E^2 = \|x\|_E^2 + \|y\|_E^2 + 2\langle x, y\rangle_E.$$

En utilisant que f est une isométrie, on conclut que : $\langle f(x), f(y)\rangle_F = \langle x, y\rangle_E$.
($\Longleftarrow$) Supposons que f conserve les angles. Appliquant la propriété pour $y = x$, on conclut que f est une isométrie. $\square$

La proposition précédente permet de retrouver que si E est un espace euclidien, $\mathcal{B}$ une BON de E et X (resp. Y) le vecteur coordonnées de x (resp. y) dans la base $\mathcal{B}$, alors

$$\langle x, y\rangle_E = \langle \Psi(x), \Psi(y)\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle X, Y\rangle_{\mathbb{R}^n} = X^T Y,$$

où $\Psi : x \mapsto X$ est une isométrie entre E et $\mathbb{R}^n$ (par les coordonnées).

La proposition précédente permet de retrouver que si E est un espace euclidien, $\mathcal{B}$ une BON de E et X (resp. Y) le vecteur coordonnées de x (resp. y) dans la base $\mathcal{B}$, alors

$$\langle x, y \rangle_E = \langle \Psi(x), \Psi(y) \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^n} = X^T Y,$$

où $\Psi : x \mapsto X$ est une isométrie entre E et $\mathbb{R}^n$ (par les coordonnées).

Exercice. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et f une application de E dans E telle que pour tous $x, y \in E$,

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Montrer que f est linéaire. La linéarité est donc impliquée par la conservation des angles. Dans la proposition 4, seule la conservation des angles est primordiale.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Alors f est une isométrie si, et seulement si, $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E. En particulier, f transforme une base orthonormée en une base orthonormée.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Alors f est une isométrie si, et seulement si, $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E. En particulier, f transforme une base orthonormée en une base orthonormée.

Démonstration.

($\Longrightarrow$) Supposons que f soit une isométrie. Soit $1 \leq i, j \leq n$; on a $\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$ par conservation des angles.
($\Longleftarrow$) Notons $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et supposons que $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est une BON de E. Soit $x \in E$, $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. On a $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Par ailleurs,

$$\|f(x)\|^2 = \|f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)\|^2 = \|x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n)\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

d'où $f \in \mathcal{O}(E)$. $\square$

Structure de l'ensemble des automorphismes orthogonaux

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $f \in \mathcal{O}(E)$ si, et seulement si, $f^* \circ f = Id$. Autrement dit,

$$\mathcal{O}(E) = \{f \in \mathcal{L}(E),\ f^* \circ f = Id\}.$$

En particulier $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{GL}(E)$ et $f^{-1} = f^*$.
Par ailleurs, $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un groupe. En particulier,

- *La composée de deux isométries est une isométrie ;*
- *L'inverse d'une isométrie est une isométrie.*

Un groupe ?

Soit G un ensemble. On définit sur G une loi de composition interne, c'est-à-dire une application

$$* : G \times G \to G.$$

Exemple : si $G = \mathbb{R}$, l'addition $+ : (x, y) \mapsto x + y$ est une loi de composition interne.
Un groupe est un couple $(G, *)$ où G est un ensemble et $*$ est une loi de composition interne sur G satisfaisant en plus :

- Associativité. Si $x, y, z \in G$, alors $(x * y) * z = x * (y * z)$ (peu importe le sens dans lequel on fait les opérations)
- Élément neutre. Il existe un élément $e \in G$ tel que pour tout $x \in G$, $e * x = x * e = x$.
- Inverse. Pour tout $x \in G$, il existe un (unique) élément $y \in G$ tel que $x * y = y * x = e$. On note x^{-1} cet élément.

Exemples. $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R}_*^+,\times)$ sont des groupes : quels sont leurs éléments neutres ?

NB : si $x*y=y*x$ pour tous $x,y\in G$, on dit que $(G,*)$ est un groupe commutatif. Dans ce cas, on note souvent la loi de composition interne $+$ et l'élément neutre 0_G.

On peut, comme pour les espaces vectoriels, définir la notion de sous-groupe. Soit $H\subset G$ où $(G,*)$ est un groupe ; on dit que H est un sous-groupe de G si $(H,*)$ est un groupe. Il suffit de vérifier que

- Élément neutre. $e\in H$
- Stabilité. Si $x,y\in H$, alors $x*y^{-1}\in H$.

Preuve de la proposition 6 : partie 1.

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Fixons $x \in E$. Pour tout $y \in E$, on a

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle f^* \circ f(x), y\rangle = \langle x, y\rangle \implies \langle (f^* \circ f - \mathrm{Id})(x), y\rangle = 0.$$

Ainsi, $(f^* \circ f - \mathrm{Id})(x) \in E^\perp = \{0\}$. D'où $(f^* \circ f - \mathrm{Id})(x) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on en déduit que $f^* \circ f = \mathrm{Id}$.
Réciproquement, si $f^* \circ f = \mathrm{Id}$, alors

$$\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x)\rangle = \langle f^* \circ f(x), x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$$

donc $f \in \mathcal{O}(E)$. □

Preuve de la proposition 6 : partie 2.

On montre maintenant que $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un groupe.

- *Loi de composition interne*. Soient $f, g \in \mathcal{O}(E)$, alors

  $$(f\circ g)^* \circ (f \circ g) = (g^* \circ f^*) \circ (f \circ g) = g^* \circ (f^* \circ f) \circ g = g^* \circ g = \mathrm{Id}.$$

  D'où $f \circ g \in \mathcal{O}(E)$ i.e $\circ$ est une loi de composition interne.
- *Associativité*. Elle découle de l'associativité de $\circ$ sur $\mathcal{L}(E)$.
- *Élément neutre*. L'identité est l'élément neutre de $\circ$ et Id $\in \mathcal{O}(E)$.
- *Inverse*. Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. On a $f^* = f^{-1}$ donc $\left(f^{-1}\right)^* = f^{**} = f$. Ainsi, $\left(f^{-1}\right)^* \circ f^{-1} = f \circ f^* = \mathrm{Id}$. D'où $f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

□

Groupe orthogonal

L'ensemble des automorphismes orthogonaux est un groupe appelé le **groupe orthogonal**. C'est en fait un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E), \circ)$.

Dans la partie **III**, on décrira complètement $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ et $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$.

Groupe orthogonal

L'ensemble des automorphismes orthogonaux est un groupe appelé le **groupe orthogonal**. C'est en fait un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E), \circ)$.

Dans la partie III, on décrira complètement $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ et $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$.

Attention. Le groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$ mais ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$: pourquoi ?

Approche matricielle du groupe orthogonal

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ et $M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
On rappelle (ch. précédent) que $M^T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*)$. Puisque $f^* \circ f = Id$, on obtient $M^T M = I_n$ D'où

$$M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M^T M = \mathrm{I}_n\}.$$

Bilan. Toute isométrie est représentée dans une base orthonormée quelconque par une matrice orthogonale.

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et

$$f : \begin{cases} E \to E \\ (x, y, z) \mapsto -\frac{1}{3}(-2x + y + 2z, 2x + 2y + z, x - 2y + 2z) \end{cases}$$

Montrer que f définit une isométrie. Plusieurs méthodes :

1) Par la définition : montrer que $\|f(x)\| = \|x\|$.

2) Par les bases, vérifier que si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une BON de E alors $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))$ est une BON de E.

3) Version matricielle : montrer que $M^T M = \mathrm{I}_n$ où M est la matrice de f dans une BON de E. Ici, dans la base canonique,

$$M = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Au travail !

1) Soit $u := (x, y, z) \in E$,

$$\begin{aligned}
\|f(u)\|^2 &= \frac{1}{9}\left[(-2x+y+2z)^2 + (2x+2y+z)^2 + (x-2y+2z)^2\right] \\
&= \frac{1}{9}(4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy - 8xz + 4yz + 4x^2 + 4y^2 + z^2 \\
&+ 8xy + 4xz + 4yz + x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4xy + 4xz - 8xz) \\
&= \frac{1}{9}\left(9x^2 + 9y^2 + 9z^2\right) = \|u\|^2.
\end{aligned}$$

Au travail !

1) Soit $u := (x, y, z) \in E$,

$$\begin{aligned}\|f(u)\|^2 &= \frac{1}{9}\left[(-2x+y+2z)^2+(2x+2y+z)^2+(x-2y+2z)^2\right]\\ &= \frac{1}{9}(4x^2+y^2+4z^2-4xy-8xz+4yz+4x^2+4y^2+z^2\\ &+8xy+4xz+4yz+x^2+4y^2+4z^2-4xy+4xz-8xz)\\ &= \frac{1}{9}\left(9x^2+9y^2+9z^2\right)=\|u\|^2.\end{aligned}$$

2) Il faut vérifier que $-\frac{1}{3}(-2,2,1), -\frac{1}{3}(1,2,-2), -\frac{1}{3}(2,1,2)$ est une BON de E. Puisque $\sqrt{2^2+2^2+1}=3$, ces vecteurs sont normés. On vérifie qu'ils sont orthogonaux : on ne fait que les deux premiers $(-2,2,1)\cdot(1,2,-2)=-2+4-2=0$.

Au travail !

1) Soit $u := (x, y, z) \in E$,

$$\|f(u)\|^2 = \frac{1}{9}\left[(-2x + y + 2z)^2 + (2x + 2y + z)^2 + (x - 2y + 2z)^2\right]$$
$$= \frac{1}{9}(4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy - 8xz + 4yz + 4x^2 + 4y^2 + z^2$$
$$+ 8xy + 4xz + 4yz + x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4xy + 4xz - 8xz)$$
$$= \frac{1}{9}\left(9x^2 + 9y^2 + 9z^2\right) = \|u\|^2.$$

2) Il faut vérifier que $-\frac{1}{3}(-2, 2, 1), -\frac{1}{3}(1, 2, -2), -\frac{1}{3}(2, 1, 2)$ est une BON de E. Puisque $\sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 3$, ces vecteurs sont normés. On vérifie qu'ils sont orthogonaux : on ne fait que les deux premiers $(-2, 2, 1) \cdot (1, 2, -2) = -2 + 4 - 2 = 0$.

Au travail !

3) On a

$$\begin{aligned} M^T M &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{I}_3 \end{aligned}$$

Au travail !

3) On a

$$M^T M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{I}_3$$

Choisissez votre méthode !

Et pour finir, une définition pour la route

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $f \in \mathcal{O}(E)$. Puisque $M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice orthogonale, on a $M^T M = \mathrm{I}_n$ et en particulier $|\det M| = 1$. On a alors $|\det f| = 1$ i.e $\det f = \pm 1$.

Définition (Isométrie directe)

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Si $\det f = 1$, on dit que f est une isométrie directe (c'est-à-dire que f conserve l'orientation du repère). On note $\mathcal{SO}(E)$ l'ensemble des isométries directes et on l'appelle le groupe spécial orthogonal.

Remarque. Si $f \in \mathcal{O}(E) \backslash \mathcal{SO}(E)$, on dit que f est une isométrie négative.

Bilan sur les isométries

- Une isométrie $f : E \to F$ est une application linéaire conservant les distances i.e $\|f(x)\|_F = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$.
- Une application linéaire est une isométrie si, et seulement si, elle conserve les angles i.e $\langle f(x), f(y)\rangle_F = \langle x, y\rangle_E$ pour tous $x, y \in E$.
- Si $E = F$, une isométrie est appelée automorphisme orthogonal. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux.
- $f \in \mathcal{O}(E)$ si, et seulement si, l'image d'une BON par f est une BON.
- $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un groupe.
- Dans une BON, la matrice d'un automorphisme orthogonal est orthogonale i.e vérifie $M^T M = \mathrm{I}_n$.
- Si $f \in \mathcal{O}(E)$, on a $\det(f) = \pm 1$. Si $\det f = 1$, on dit que f est une isométrie directe. On note $\mathcal{SO}(E)$ l'ensemble des isométries directes ; c'est un sous-groupe de $(\mathcal{O}(E), \circ)$.
- Tout espace euclidien est isométrique à $\mathbb{R}^n$ muni du ps canonique.

Plan

II) Réduction des endomorphismes auto-adjoints : Théorème spectral

a) Énoncés

b) Preuve du Théorème spectral

c) Exemples et applications

Objectif de cette partie

- Étudier la diagonalisabilité des endomorphismes auto-adjoints d'un espace euclidien.
- Conséquences :
  - Version matricielle (théorème spectral) $\longrightarrow$ résultats en analyse matricielle ;
  - Version forme bilinéaire symétrique (réduction des formes bilinéaires symétriques) $\longrightarrow$ classification des formes quadratiques réelles.

Rappels sur la diagonalisabilité

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition (Valeur propre, vecteur propre, espace propre)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe $x \in E \backslash \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Le vecteur x est appelé vecteur propre. Le sous-espace propre associé à λ est $E_\lambda(f) := \ker(f - \lambda \mathrm{Id})$.
f est dit diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres de f.

Les valeurs propres sont données par les racines du polynôme caractéristique $\chi_f = \det(f - X\mathrm{Id})$. Géométriquement, la matrice de f dans une base de diagonalisation est diagonale.

Énoncés

On donne, comme toujours, une version endomorphisme et une version matricielle.

Théorème (Théorème de réduction des endomorphismes auto-adjoints)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint. Alors f est diagonalisable en base orthonormée i.e il existe une base orthonormée de vecteurs propres réels de E.

Théorème (Théorème spectral - version matricielle)

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale réelle $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = P^{-1}DP$.

Remarque : Le Théorème 10 se déduit du Théorème 9. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (muni du ps canonique) représenté par M dans la base canonique de E. Puisque $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et la base canonique est orthonormale pour le ps canonique, f est un endomorphisme auto-adjoint. Par le Théorème 9, il se diagonalise en base orthonormée : il existe donc une matrice de passage $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = P^{-1}MP$, d'où le Théorème 10.

Remarque. Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de passage de la base canonique à une BON de vecteurs propres de M alors $M = PDP^T$.

Version forme bilinéaire symétrique

Théorème (Théorème de réduction des formes bilinéaires symétriques)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espace euclidien et* ϕ *une forme bilinéaire symétrique sur* E*. Il existe une base orthonormée* $(e_1, \cdots, e_n)$ *de* E *telle que* $\phi(e_i, e_j) = 0$ *si* $i \neq j$*. Autrement dit,* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ *est diagonale.*

Question. Comment déduire ce Théorème du théorème spectral ?

Règle de calcul. Si ϕ est une forme bilinéaire symétrique sur E, il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormale telle que pour tout $x \in E$,

$$\phi(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i \rangle^2$$

où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. De même,

$$\phi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle.$$

Remarque importante (et rappels sur les changements de base)

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On note X (resp. X') les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$). Soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.
1) Changement de base pour les vecteurs : $X = PX'$
2) Changement de base pour les endomorphismes : $M' = P^{-1}MP$ (relation de similitude).
3) Changement de base pour les applications bilinéaires : $M' = P^T MP$ (relation de congruence).

Théorème spectral = théorème de réduction pour les endomorphismes ET les applications bilinéaires car $P^T = P^{-1}$ quand $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$!

Preuve du Théorème de réduction : stratégie de preuve

On utilise une stratégie par récurrence sur la dimension de l'espace. Cette stratégie est à maîtriser. Soit $f \in \mathcal{S}(E)$ (auto-adjoint).

- **Étape 1**. On montre que f admet une valeur propre réelle. On note x un vecteur propre non nul associé.
  $\longrightarrow$ cela va donner le premier vecteur de la base orthonormée recherchée !
- **Étape 2**. On se place dans $F = \mathrm{Vect}(x)^{\perp}$. F est un sous-espace stable par f i.e $f(F) \subset F$.
- **Étape 3**. On considère $f_F = f_{|F} \in \mathcal{L}(F)$. On vérifie que f_F est auto-adjoint. Puisque $\dim F = \dim E - 1$, on peut appliquer une hypothèse de récurrence à f_F et obtenir $\dim E - 1$ vecteurs propres de f_F et donc $\dim E - 1$ vecteurs propres de f. Concaténés avec x, on a notre base orthonormée !

C'est subjectif mais ordre de difficulté : $1 > 2 > 3$.

Etape 1 : existence d'une valeur propre réelle

Lemme (Existence d'un vecteur propre)

Soit f un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E. Il existe un vecteur $x^* \in E\backslash\{0\}$ et un réel λ tel que $f(x^*) = \lambda x^*$.

Quelques notations. Définissons

$$\lambda := \sup_{y \in S} \langle f(y), y \rangle,$$

où $S := \{y \in E, \langle y, y \rangle = 1\}$ est la sphère unité de E. On rappelle que S est un ensemble compact (fermé/borné) et l'on note que $y \mapsto \langle f(y), y \rangle$ est une fonction continue (car polynomiale). Donc λ est bien défini et il existe $x^* \in S$ tel que $\lambda = \langle f(x^*), x^* \rangle$.

But : montrer que $f(x^*) = \lambda x^*$.

Notons pour $x, y \in E$, $\phi(x, y) = \langle \lambda x - f(x), y \rangle$.

Preuve

Démonstration.

On note aisément que ϕ est une forme bilinéaire. Par ailleurs, puisque f est auto-adjoint, elle est symétrique :

$$\begin{aligned}\forall x, y \in E, \quad \langle \lambda x - f(x), y\rangle &= \lambda\langle x, y\rangle - \langle f(x), y\rangle \\ &= \lambda\langle x, y\rangle - \langle x, f(y)\rangle = \langle \lambda y - f(y), x\rangle.\end{aligned}$$

Enfin, ϕ est positive sur E. Soit en effet $x \in S$, alors $\phi(x,x) = \lambda\langle x, x\rangle - \langle f(x), x\rangle \geq 0$. On étend cette propriété pour $x \in E$ par homogénéité. Finalement, ϕ est une f.b.s.
Par inégalité de Cauchy-Schwarz [a], on obtient :

$$\forall y \in E, \quad |\phi(x^*, y)| \leq \sqrt{\phi(x^*, x^*)}\sqrt{\phi(y, y)}.$$

Puisque $\phi(x^*, x^*) = 0$, on conclut que $\phi(x^*, y) = 0$ pour tout $y \in E$ i.e $\lambda x^* - f(x^*) \in E^{\perp} = \{0\}$. Donc $f(x^*) = \lambda x^*$. □

---

a. Exercice : Vérifier que **l'inégalité** de Cauchy-Schwarz reste valable si la forme n'est pas définie ! Quid du cas d'égalité ?

Étape 2 : stabilité d'un sous-espace vectoriel

Lemme (Stabilité des sous-espaces vectoriels)

Soit f un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E. Soit F un sev de E stable par f (i.e $f(F) \subset F$), alors $F^\perp$ est stable par f.

Preuve du Lemme 13.

Soit $y \in F^\perp$, il s'agit de montrer que $f(y) \in F^\perp$. Soit donc $z \in F$, on a :

$$\langle f(y), z \rangle = \langle y, f(z) \rangle = 0$$

où la première égalité provient du caractère auto-adjoint de f et la seconde du fait que $f(z) \in F$ (par stabilité de F par f) et $y \in F^\perp$. Donc $f(y) \in F^\perp$. Finalement, $F^\perp$ est bien stable par f. □

Étape 3 : on rassemble tout

Preuve du Théorème 9.

On montre par récurrence sur $n > 0$ le résultat suivant : soit E un espace euclidien de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint. Il existe une base orthonormée (de E) de vecteurs propres de f.
Pour $n = 1$, le résultat est vérifié. Soit n quelconque tel que la propriété soit vérifiée au rang $n-1$. Montrons-la au rang n. Soit pour cela $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint. Par le Lemme 12, il existe un vecteur propre $x \in E \backslash \{0\}$ de f. Notons que le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f ; ainsi, par le Lemme 13, $F := \mathrm{Vect}(x)^\perp$ est stable par f. Par hypothèse de récurrence, puisque $\dim(F) = n-1$, il existe une base orthonormée de F notée $(e_1, \cdots, e_{n-1})$ formée de vecteurs propres de $f_{|F}$ (donc de f). La famille

$$(x, e_1, \cdots, e_{n-1})$$

est alors une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f. Cela conclut la récurrence et la preuve du Théorème. $\square$

Exercices/questions théoriques

Questions. 1) Dans l'étape 1, qui est λ ?
2) La base orthonormale construite est-elle unique ?

Exercices/questions théoriques

Questions. 1) Dans l'étape 1, qui est λ ?
2) La base orthonormale construite est-elle unique ?

Exercice 1 (cf TD). Soit f un endomorphisme auto-adjoint. Montrer que les sous-espaces propres de f sont orthogonaux.

Exercice 2 (cf TD). Soit f un endomorphisme auto-ajdoint de $\mathbb{R}^n$. Montrer en passant par $\mathbb{C}^n$ que ses valeurs propres sont réelles. En déduire que χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$. Cela implique-t-il que f est diagonalisable ?

Exemples

Exemple 1. On pose $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a

$$\chi_A = (X-1)(X+1) - 1 = X^2 - 2$$

dont les racines (réelles) sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Le sous-espace propre associé à 1 est $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et le sous-espace propre associé à -1 est $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. On vérifie aisément que ces deux sous-espaces sont orthogonaux.

Exemples

Exemple 1. On pose $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a

$$\chi_A = (X-1)(X+1) - 1 = X^2 - 2$$

dont les racines (réelles) sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Le sous-espace propre associé à 1 est $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et le sous-espace propre associé à -1 est $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. On vérifie aisément que ces deux sous-espaces sont orthogonaux.

Exemple 2. On note $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $n \geq 2$ et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $J_{i,j} = 1$ pour $i, j \in \{1, \cdots, n\}$. On a $\mathrm{rg}(J) = 1$ et donc par le Théorème du rang $\dim \ker(J) = n - 1$. Ainsi, 0 est valeur propre de J de multiplicité $n-1$. Par ailleurs, on note que si $x = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^T$, alors $Jx = nx$. Ainsi, n est valeur propre de J d'ordre 1 et $E_n(J) = \mathrm{Vect}(x)$. Ensuite,

$$\ker(J) = \left\{ (x_1, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,\ x_1 + \cdots + x_n = 0 \right\}.$$

On a $\ker(J)^\perp = \mathrm{Vect}(x)$. On obtient une base orthonormée de vecteurs propres de J en concaténant x et une base orthonormée de $\ker(J)$.

Quid du cas complexe ?

1) Le théorème spectral matriciel n'est pas valable quand $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: considérons $M := \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$; c'est une matrice symétrique complexe. MAIS on a $M^2 = 0$: aucune chance que M ne soit diagonalisable !

Quid du cas complexe ?

1) Le théorème spectral matriciel n'est pas valable quand $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: considérons $M := \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$; c'est une matrice symétrique complexe. MAIS on a $M^2 = 0$: aucune chance que M ne soit diagonalisable !

2) La version endomorphismes/fbh est vraie. Attention :

$$M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \implies M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \; ; \; M = \overline{M}^T$$

$$P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \implies P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \text{ i.e } \overline{P}^T P = \mathrm{I}_n.$$

Exemple. $M := \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de M sont $\pm\sqrt{2}$ donc M est diagonalisable. Trouver les espaces propres !

Application 1. Retour sur les matrices symétriques définies positives. Caractérisation par le spectre

Théorème (Caractérisation des matrices symétriques définies positives par leur spectre)

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\mathrm{sp}(M) \subset \mathbb{R}_*^+$.

Remarque. Ce théorème est aussi valable pour la version endomorphisme auto-adjoint défini positif : $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$ si, et seulement si, $\mathrm{sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Exercice. On considère sur $\mathbb{R}^2$ la forme bilinéaire

$$\phi(x, y) = 4x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2.$$

Cette forme définit-elle un produit scalaire ?

Explication du Théorème précédent

Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = P\Delta P^T$ où Δ est une matrice diagonale. On note $(V_1, \cdots, V_n)$ les vecteurs formés par les colonnes de P ; on a $V_i = Pe_i$. Or

$$V_i^T MV_i = (Pe_i)^T MPe_i = e_i^T P^T MPe_i = e_i^T \Delta e_i = \lambda_i.$$

Puisque $V_i^T MV_i > 0$, on conclut que $\mathrm{sp}(M) \subset \mathbb{R}_*^+$.
NB : $(v_1, ..., v_n)$ est une BON de diagonalisation de M.

Explication du Théorème précédent

Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = P\Delta P^T$ où Δ est une matrice diagonale. On note $(V_1, \cdots, V_n)$ les vecteurs formés par les colonnes de P ; on a $V_i = Pe_i$. Or

$$V_i^T MV_i = (Pe_i)^T MPe_i = e_i^T P^T MPe_i = e_i^T \Delta e_i = \lambda_i.$$

Puisque $V_i^T MV_i > 0$, on conclut que $\mathrm{sp}(M) \subset \mathbb{R}_*^+$.
NB : $(v_1, ..., v_n)$ est une BON de diagonalisation de M.

Réciproquement, si $\mathrm{sp}(M) \subset \mathbb{R}_*^+$, on note $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ les valeurs propres de M et $(V_1, \cdots, V_n)$ une BON de vecteurs propres de M. On a si $X \neq 0$

$$X^T MX = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i V_i\right)^T \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j V_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \lambda_j V_i^T V_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2 > 0.$$

Donc $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Application 2. Calcul pratique de l'exponentielle d'une matrice symétrique réelle (cf TD 1 Analyse)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on rappelle que $\exp A$ est définie par

$$\exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

où la série est absolument convergente (donc convergente). Il existe une matrice orthogonale P telle que $A = P^{-1} \Delta P$ où Δ est une matrice diagonale réelle. Écrivant $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, on trouve

$$\exp A = P^{-1} \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}) P.$$

Application 2. Calcul pratique de l'exponentielle d'une matrice symétrique réelle (cf TD 1 Analyse)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on rappelle que $\exp A$ est définie par

$$\exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

où la série est absolument convergente (donc convergente). Il existe une matrice orthogonale P telle que $A = P^{-1} \Delta P$ où Δ est une matrice diagonale réelle. Écrivant $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, on trouve

$$\exp A = P^{-1} \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}) P.$$

Exercice. Résoudre le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 9y(t) \\ x(0) = 1 \text{ et } y(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Application 3. Racine carrée et décomposition polaire

Motivation. On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ (comme $\mathbb{R}-$espace vectoriel). On considère la multiplication par z :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ w \mapsto zw. \end{cases}$$

C'est une application linéaire. Que fait-elle ?
On sait qu'il existe $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \rho e^{i\theta}$. Ainsi,

$$f(w) = zw = \underbrace{\rho}_{\text{homothetie}} \times \underbrace{e^{i\theta}}_{\text{rotation}} \times w$$

L'application f correspond donc à la composition d'une rotation et d'une homothétie de centre l'origine. On peut décomposer une transformation bijective du plan en une isométrie et un endomorphisme auto-adjoint défini positif.

Application 3. Racine carrée et décomposition polaire

Motivation. On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ (comme $\mathbb{R}-$espace vectoriel). On considère la multiplication par z :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ w \mapsto zw. \end{cases}$$

C'est une application linéaire. Que fait-elle ?
On sait qu'il existe $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \rho e^{i\theta}$. Ainsi,

$$f(w) = zw = \underbrace{\rho}_{\text{homothetie}} \times \underbrace{e^{i\theta}}_{\text{rotation}} \times w$$

L'application f correspond donc à la composition d'une rotation et d'une homothétie de centre l'origine. On peut décomposer une transformation bijective du plan en une isométrie et un endomorphisme auto-adjoint défini positif.

Et si on généralisait ?

Théorème (Décomposition polaire)

Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Il existe un unique couple $(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.

On en propose ici une preuve s'appuyant sur la notion de racine carrée d'endomorphisme.

Théorème (Décomposition polaire)

Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Il existe un unique couple $(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.

On en propose ici une preuve s'appuyant sur la notion de racine carrée d'endomorphisme. On va utiliser le Lemme suivant :

Lemme (Racine carrée d'une matrice symétrique définie positive)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. On l'appelle la racine carrée de A.

Décomposition polaire.

Existence. Posons $U := M^T M$. Alors $U \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car U est symétrique et si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\}$, alors

$$X^T UX = X^T M^T MX = (MX)^T MX = \|MX\|^2 > 0$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Par le Lemme 16, il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (et $\in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$) telle que $U = S^2$. Soit $O = MS^{-1}$. On note que $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$:

$$O^T O = \left(MS^{-1}\right)^T MS^{-1} = \left(S^{-1}\right)^T M^T MS^{-1} = S^{-1}US^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = \mathrm{I}_n.$$

Unicité. Soit $(O', S') \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS = O'S'$. On a $U = M^T M = S^2 = S'^2$. Par unicité de la racine carrée, on obtient $S = S'$ et finalement $O = O'$. $\square$

Décomposition polaire.

Existence. Posons $U := M^T M$. Alors $U \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car U est symétrique et si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\}$, alors

$$X^T UX = X^T M^T MX = (MX)^T MX = \|MX\|^2 > 0$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Par le Lemme 16, il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (et $\in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$) telle que $U = S^2$. Soit $O = MS^{-1}$. On note que $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$:

$$O^T O = \left(MS^{-1}\right)^T MS^{-1} = \left(S^{-1}\right)^T M^T MS^{-1} = S^{-1} US^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = \mathrm{I}_n.$$

Unicité. Soit $(O', S') \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS = O'S'$. On a $U = M^T M = S^2 = S'^2$. Par unicité de la racine carrée, on obtient $S = S'$ et finalement $O = O'$. $\square$

Il reste à montrer l'existence/unicité de la racine carrée !

Preuve de l'existence de la racine carrée

Démonstration.

L'existence est une conséquence directe du Théorème spectral (Théorème 10). En effet, il existe une matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^T \Delta P$ où $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs (Théorème 14). On pose $B := P^T \sqrt{\Delta} P$ où $\sqrt{\Delta} = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$. On vérifie que

$$\begin{aligned} B^2 &= \left(P^T \sqrt{\Delta} P\right)\left(P^T \sqrt{\Delta} P\right) = P^T \sqrt{\Delta}\left(P P^T\right)\sqrt{\Delta} P \\ &= P^T \left(\sqrt{\Delta}\right)^2 P = P^T \Delta P = A, \end{aligned}$$

ce qui conclut l'existence.

Unicité : cf cours ! $\square$

Plan

III) Étude des automorphismes orthogonaux en petite dimension

1) Retour sur la théorie des groupes

2) Etude des automorphismes orthogonaux en dimension 2 et 3

3) Exemples et applications

Rappels

Un groupe $(G, *)$ est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre et tel que tout élément admette un inverse. Exemples déjà vus :

$$(\mathbb{R}, +) \ , \ (\mathbb{R}_*^+, \times) \ , \ (\mathbb{Z}, +) \ , \ (\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \times) \ , \ (\mathcal{O}(E), \circ)...$$

Définition (Sous-groupe)

Soit $(G, *)$ un groupe. On dit que $H \subset G$ est un sous-groupe de $(G, *)$ si $(H, *)$ est un groupe i.e

- $e_G \in H$;
- *Pour tous* $x, y \in H$, $x * y \in H$;
- *Pour tout* $x \in H$, $x^{-1} \in H$.

Définition (Groupe commutatif)

Soit $(G, *)$ un groupe. Il est dit commutatif si pour tous $x, y \in G$, $x * y = y * x$.

Exemple : dans la liste précédente, quels groupes sont commutatifs ?

Définition (Morphisme de groupes)

Soient $(G, *_G)$ et $(G', *_{G'})$ deux groupes. On dit que $f : G \to G'$ est un ***morphisme de groupes*** *si*

- $f(e_G) = e_{G'}$ *où e_G (resp. $e_{G'}$) désigne l'élément neutre de G (resp. G') ;*
- *Pour tous $x, y \in G$, on a $f(x *_G y) = f(x) *_{G'} f(y)$.*

On définit alors

$$\ker(f) = \{x \in G,\ f(x) = e_{G'}\} \quad \text{et} \quad \mathrm{im}(f) = \{f(x),\ x \in G\}.$$

On dit que f est un ***isomorphisme de groupes*** *si f est bijectif.*

1) Le noyau (resp. l'image) d'un morphisme de groupe est un sous-groupe de G (resp. G').
2) f est injectif si, et seulement si, $\ker(f) = \{e_G\}$.

Exemple fondamental. L'exponentielle réelle $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_*^+, \times)$ est un isomorphisme de groupes.

Introduction

Objectif : décrire l'ensemble des automorphismes orthogonaux en dimension 2 et 3.
Soit E un espace euclidien de dimension 2 ou 3. On fixe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de référence. Dans cette base, la matrice d'un automorphisme orthogonal est un élément de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $n = 2, 3$.

Introduction

Objectif : décrire l'ensemble des automorphismes orthogonaux en dimension 2 et 3.
Soit E un espace euclidien de dimension 2 ou 3. On fixe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de référence. Dans cette base, la matrice d'un automorphisme orthogonal est un élément de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $n = 2, 3$.
$\longrightarrow$ Tout revient donc à étudier $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$. On rappelle que toute matrice $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est de déterminant ± 1 et que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \det M = 1\}$.

Introduction

Objectif : décrire l'ensemble des automorphismes orthogonaux en dimension 2 et 3.
Soit E un espace euclidien de dimension 2 ou 3. On fixe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de référence. Dans cette base, la matrice d'un automorphisme orthogonal est un élément de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $n = 2, 3$.
$\longrightarrow$ Tout revient donc à étudier $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$. On rappelle que toute matrice $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est de déterminant ± 1 et que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \det M = 1\}$.

Définition (Une définition utile)

Une BON $\mathcal{B}'$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est dite ***directe****.*

On dit que $\mathcal{B}$ définit une orientation sur E.

En dimension 2, hop on attaque sans détour

Soit $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. On écrit $M := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Puisque M est orthogonale, on a

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases} \implies \exists\ \theta, \phi \in \mathbb{R} \text{ t.q } \begin{cases} a = \cos\theta\ ;\ \ b = \sin\theta \\ c = \cos\phi\ ;\ \ d = \sin\phi \end{cases}.$$

En dimension 2, hop on attaque sans détour

Soit $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. On écrit $M := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Puisque M est orthogonale, on a

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases} \implies \exists\ \theta, \phi \in \mathbb{R} \text{ t.q } \begin{cases} a = \cos\theta\ ;\ b = \sin\theta \\ c = \cos\phi\ ;\ d = \sin\phi \end{cases}.$$

Or,

$$ac + bd = \cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi) = \cos(\theta - \phi) = 0$$

donc $\theta - \phi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

En dimension 2, hop on attaque sans détour

a) Si k est pair, alors $\phi = \theta + 2j\pi + \frac{\pi}{2}$. Donc $\phi \equiv \theta + \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Dans ce cas, $\det(M) = 1$.

En dimension 2, hop on attaque sans détour

a) Si k est pair, alors $\phi = \theta + 2j\pi + \frac{\pi}{2}$. Donc $\phi \equiv \theta + \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Dans ce cas, $\det(M) = 1$.
b) Si k est impair alors $\phi = \theta + (2j+1)\pi + \frac{\pi}{2}$. Donc $\phi \equiv \theta - \frac{\pi}{2}$.
D'où

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Dans ce cas, $\det(M) = -1$.

En dimension 2, hop on attaque sans détour

a) Si k est pair, alors $\phi = \theta + 2j\pi + \frac{\pi}{2}$. Donc $\phi \equiv \theta + \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Dans ce cas, $\det(M) = 1$.
b) Si k est impair alors $\phi = \theta + (2j+1)\pi + \frac{\pi}{2}$. Donc $\phi \equiv \theta - \frac{\pi}{2}$.
D'où

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Dans ce cas, $\det(M) = -1$.
Finalement, si $\det(M) = 1$ alors M est de la forme (2). Si $\det(M) = -1$ alors M est de la forme (3).

C'est bien beau mais ça ressemble à quoi géométriquement ?

a) $M_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$?

Soit $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$. On écrit par forme polaire $\begin{cases} x = r\cos(\phi) \\ y = r\sin(\phi) \end{cases}$. On a

$$M_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\sin(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta+\phi) \\ r\sin(\theta+\phi) \end{pmatrix}.$$

Donc $M_\theta =$ la rotation d'angle θ et de centre l'origine !

C'est bien beau mais ça ressemble à quoi géométriquement ?

a) $M_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$?

Soit $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$. On écrit par forme polaire $\begin{cases} x = r\cos(\phi) \\ y = r\sin(\phi) \end{cases}$. On a

$$M_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\sin(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta+\phi) \\ r\sin(\theta+\phi) \end{pmatrix}.$$

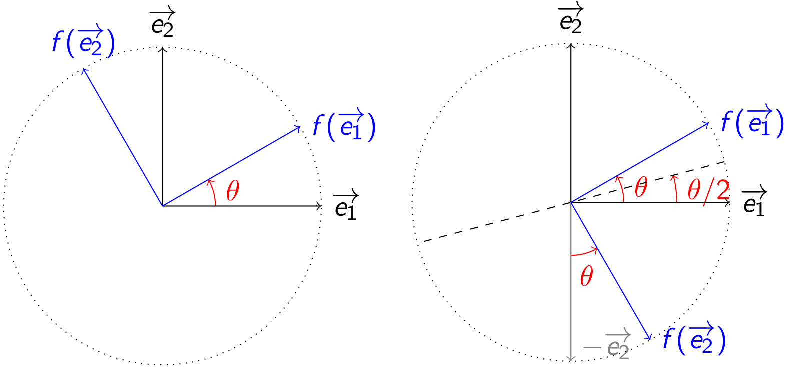
Donc $M_\theta =$ la rotation d'angle θ et de centre l'origine !

b) $S_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$? On note que

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ composée de la symétrie orthogonale par rapport à $\overrightarrow{e_2}$ et de la rotation d'angle $\theta \Longrightarrow$ réflexion !

Un petit dessin



(a) Un élément de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$. (b) Un élément de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})\backslash\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

Figure – Classification des matrices orthogonales en dimension 2.

Bilan

Théorème (Classification des matrices orthogonales en dimension 2)

- *Isométries positives : on a*

$$\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta), & \cos(\theta) \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Un élément de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ représente une rotation d'angle θ.

- *Isométries négatives : on a*

$$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta), & -\cos(\theta) \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Un élément de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ représente une symétrie orthogonale par rapport à la droite faisant un angle $\theta/2$ avec l'axe $\overrightarrow{e_1}$. Toute matrice $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est orthogonalement semblable à $\mathrm{diag}(1, -1)$.

Un corollaire important sur le groupe $\mathcal{SO}(E)$ quand $\dim(E) = 2$.

Théorème (Propriété du groupe $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$)

Le groupe $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ *est commutatif ;*

Un corollaire important sur le groupe $\mathcal{SO}(E)$ quand $\dim(E) = 2$.

Théorème (Propriété du groupe $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$)

Le groupe $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ est commutatif ;

Démonstration.

On vérifie par les formules trigonométriques que si $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, alors $M_\theta M_{\theta'} = M_{\theta+\theta'}$. Ainsi,

$$M_\theta M_{\theta'} = M_{\theta+\theta'} = M_{\theta'+\theta} = M_{\theta'} M_\theta.$$

ce qui prouve que $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ est commutatif. $\square$

Un corollaire important sur le groupe $\mathcal{SO}(E)$ quand $\dim(E) = 2$.

Théorème (Propriété du groupe $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$)

Le groupe $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ est commutatif ;

Démonstration.

On vérifie par les formules trigonométriques que si $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, alors $M_\theta M_{\theta'} = M_{\theta+\theta'}$. Ainsi,

$$M_\theta M_{\theta'} = M_{\theta+\theta'} = M_{\theta'+\theta} = M_{\theta'} M_\theta.$$

ce qui prouve que $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ est commutatif. $\square$

Remarque. La preuve du Théorème 22 montre que l'application $\theta \to M_\theta$ est un morphisme de groupe surjectif de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$.

En dimension 3

Théorème (Classification des matrices orthogonales en dimension 3)

Soit $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ tels que

$$M = P^T \begin{pmatrix} \det(M) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} P.$$

De plus, P peut-être choisie dans $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.

1) Soit $f \in \mathcal{O}(E)$, $\dim E = 3$. Alors, il existe une BON directe $\mathcal{C}$ de E telle que,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \det(f) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

$\Longrightarrow$ f admet une direction propre et une v.p ± 1.

1) Soit $f \in \mathcal{O}(E)$, $\dim E = 3$. Alors, il existe une BON directe $\mathcal{C}$ de E telle que,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \det(f) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

$\Longrightarrow f$ admet une direction propre et une v.p ± 1.

2) On note $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de réduction de f.

a) Si $\det(f) = 1$ alors f est la rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé par $\overrightarrow{e_1}$.

b) Si $\det(f) = -1$ alors f est composée de la rotation d'angle θ autour de l'axe $\overrightarrow{e_1}$ et de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

Un petit dessin

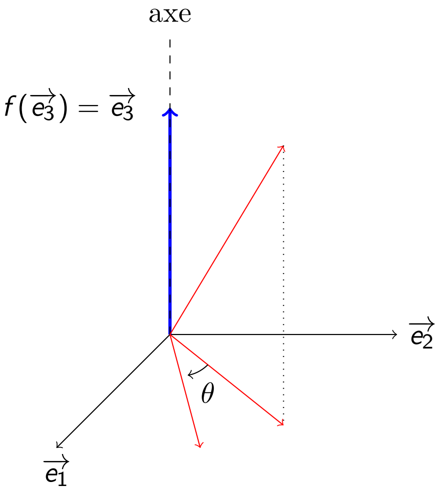


Figure – Un élément de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.

Preuve rapide et instructive !

Preuve du Théorème de classification en dimension 3.

f est l'endomorphisme canoniquement associé à M.
Étape 1. Direction propre. Le polynôme $\chi_f := \det(f - X\mathrm{Id})$ est réel de degré 3. Par le TVI, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_f(\lambda) = 0$. Donc il existe $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ de norme 1 tel que $f(x) = \lambda x$. Or, $\|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| = \|x\|$ donc $\lambda = \pm 1$.

Étape 2. Restriction à $\{x\}^\perp$. On note que $\{x\}^\perp$ est stable par f. Soit $y \in \{x\}^\perp$. On a $\langle f(y), x\rangle = \langle y, f^*(x)\rangle = \langle y, f^{-1}(x)\rangle = \langle y, \frac{1}{\lambda}x\rangle = 0$. Soit $g := f_{|F}$; on a $g \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Par le Th. 21, il existe une BON $(\vec{e_2}, \vec{e_3})$ de $\{x\}^\perp$ t.q.

$$\mathrm{Mat}_{(\vec{e_2}, \vec{e_3})}(g) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathrm{Mat}_{(\vec{e_2}, \vec{e_3})}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Étape 3. Bilan. Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. On a

$$M = P^T \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} P \quad \text{ou} \quad M = P^T \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P.$$

a) Dans le premier cas, la preuve est terminée.
b) Dans le deuxième cas, si $\lambda = 1$, on permute $\vec{e_3}$ et $\vec{e_1}$ et on pose $\theta = 0$. Si $\lambda = -1$, on permute $\vec{e_2}$ et $\vec{e_1}$ et l'on pose $\theta = \pi$.

□

Comment fait-on en pratique pour réduire un élément de $\mathcal{O}(E)$?

En dimension 2. Soit $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Deux possibilités :

- Si $\det M = 1$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que M soit la rotation d'angle θ.
- Si $\det M = -1$ alors M est une symétrie orthogonale par rapport à une droite. Comment trouve-t-on cette droite ? On résout l'équation $Mx = x$.

Comment fait-on en pratique pour réduire un élément de $\mathcal{O}(E)$?

En dimension 2. Soit $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Deux possibilités :

- Si $\det M = 1$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que M soit la rotation d'angle θ.
- Si $\det M = -1$ alors M est une symétrie orthogonale par rapport à une droite. Comment trouve-t-on cette droite ? On résout l'équation $Mx = x$.

Exemple : f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté dans la base canonique par $M := \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. M est une matrice orthogonale et $\det(M) = -1$. Donc f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite. On trouve cette droite en résolvant l'équation $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On trouve que l'axe de la symétrie est dirigé par $(1, \frac{\sqrt{13}+2}{3})$.

En dimension 3 : seul ce transparent est **au programme** !

Soit $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$. On adopte la stratégie suivante :

1. On calcule $\det(M)$.
2. On cherche une direction propre $\mathrm{Vect}(\vec{e_1})$. La valeur propre que l'on utilise est donnée par $\det(M)$: cela donne l'axe de rotation.
3. Il reste à déterminer l'angle de la rotation. Pour cela, on calcule

$$\mathrm{tr}(M) = \lambda + 2\cos(\theta),$$

avec $\lambda = \det M = \pm 1$. On obtient $\cos(\theta)$ et donc θ au signe près. On n'a donc pas complètement terminé...

En dimension 3 : seul ce transparent est **au programme** !

Soit $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$. On adopte la stratégie suivante :

1. On calcule $\det(M)$.
2. On cherche une direction propre $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1})$. La valeur propre que l'on utilise est donnée par $\det(M)$: cela donne l'axe de rotation.
3. Il reste à déterminer l'angle de la rotation. Pour cela, on calcule

$$\mathrm{tr}(M) = \lambda + 2\cos(\theta),$$

avec $\lambda = \det M = \pm 1$. On obtient $\cos(\theta)$ et donc θ au signe près. On n'a donc pas complètement terminé...

Question : **Dans quel sens on tourne autour de l'axe** $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1})$ **?**

Orientation (HP)

$\longrightarrow$ Il faut fixer une orientation dans le plan de rotation $\vec{e_1}^{\perp}$.
Comment on fait ? Il n'y a pas de sens "naturel" !

Orientation (HP)

$\longrightarrow$ Il faut fixer une orientation dans le plan de rotation $\overrightarrow{e_1}^\perp$.
Comment on fait ? Il n'y a pas de sens "naturel" !

Première chose à faire : orienter l'axe de rotation en fixant un vecteur normé $\overrightarrow{e} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1})$
Deuxième chose à faire : compléter $\overrightarrow{e}$ en une BON directe $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de $\mathbb{R}^3$ $\longrightarrow$ $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ définit une orientation sur $\overrightarrow{e_1}^\perp$.

Orientation (HP)

$\longrightarrow$ Il faut fixer une orientation dans le plan de rotation $\overrightarrow{e_1}^{\perp}$.
Comment on fait ? Il n'y a pas de sens "naturel" !

Première chose à faire : orienter l'axe de rotation en fixant un vecteur normé $\overrightarrow{e} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1})$
Deuxième chose à faire : compléter $\overrightarrow{e}$ en une BON directe $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de $\mathbb{R}^3$ $\longrightarrow$ $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ définit une orientation sur $\overrightarrow{e_1}^{\perp}$.
Et θ dans tout ça ? il est donné par la matrice de f dans $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$:

$$\mathrm{Mat}_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}(f) \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Remarques (HP)

1) Un angle θ est attaché à une orientation de l'axe de rotation.

Remarques (HP)

1) Un angle θ est attaché à une orientation de l'axe de rotation.
2) Que se passe-t-il si l'on change $\overrightarrow{e}$ en $-\overrightarrow{e}$? La formule (5) montre que θ est changé en $-\theta$.

Remarques (HP)

1) Un angle θ est attaché à une orientation de l'axe de rotation.
2) Que se passe-t-il si l'on change $\overrightarrow{e}$ en $-\overrightarrow{e}$? La formule (5) montre que θ est changé en $-\theta$.
3) Que se passe-t-il si l'on change $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ en gardant l'orientation de l'axe $\overrightarrow{e}$ inchangée ? C'est pas grave ! θ est inchangé (par commutativité de $\mathcal{SO}_2$).

Remarques (HP)

1) Un angle θ est attaché à une orientation de l'axe de rotation.
2) Que se passe-t-il si l'on change $\overrightarrow{e}$ en $-\overrightarrow{e}$? La formule (5) montre que θ est changé en $-\theta$.
3) Que se passe-t-il si l'on change $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ en gardant l'orientation de l'axe $\overrightarrow{e}$ inchangée ? C'est pas grave ! θ est inchangé (par commutativité de $\mathcal{SO}_2$).
4) L'angle θ dans le Théorème 23 n'est pas unique (son signe est déterminé par le choix du premier vecteur de la BON directe choisie !)

Remarques (HP)

1) Un angle θ est attaché à une orientation de l'axe de rotation.
2) Que se passe-t-il si l'on change $\overrightarrow{e}$ en $-\overrightarrow{e}$? La formule (5) montre que θ est changé en $-\theta$.
3) Que se passe-t-il si l'on change $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ en gardant l'orientation de l'axe $\overrightarrow{e}$ inchangée ? C'est pas grave ! θ est inchangé (par commutativité de $\mathcal{SO}_2$).
4) L'angle θ dans le Théorème 23 n'est pas unique (son signe est déterminé par le choix du premier vecteur de la BON directe choisie !)
5) Notons enfin que, une fois cet axe orienté donné, on dispose de méthodes pratiques pour trouver le sens de rotation positif : règle de la main droite, règle du tire-bouchon par exemple.

Explication de 3)

Soit $\mathcal{B} := (\vec{e}, \vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e}, \vec{u}', \vec{v}')$ deux BON directes de $\mathbb{R}^3$. On note $P := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$. Alors P est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$. On remarque que $Q \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$. On a

$$M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M' := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_{\theta'} \end{pmatrix}.$$

Or, puisque $M' = P^T M P$, on calcule

$$M' = P^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_\theta \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^T M_\theta Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_\theta \end{pmatrix}.$$

La dernière égalité est justifiée par commutativité de $\mathcal{SO}_2$. Donc $\theta = \theta' [2\pi]$.

Bon, et la méthode promise dans tout ça ?

a) On fixe d'abord un vecteur normé $\overrightarrow{e} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1})$.
b) On prend ensuite un vecteur particulier $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{e_1}^{\perp}$.
c) On calcule $f(\overrightarrow{u})$.
d) On calcule $\overrightarrow{e} \wedge \overrightarrow{u}$ et $\left(\overrightarrow{e} \wedge \overrightarrow{u}\right) \cdot f(\overrightarrow{u})$.
e) On exploite enfin le fait que (cf exercice 13 du TD pour une preuve)

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 \sin(\theta) = \left(\overrightarrow{e} \wedge \overrightarrow{u}\right) \cdot f(\overrightarrow{u}) \tag{5}$$

et le tour est joué pour trouver le signe de θ !

Bon, et la méthode promise dans tout ça ?

a) On fixe d'abord un vecteur normé $\overrightarrow{e} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1})$.
b) On prend ensuite un vecteur particulier $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{e_1}^{\perp}$.
c) On calcule $f(\overrightarrow{u})$.
d) On calcule $\overrightarrow{e} \wedge \overrightarrow{u}$ et $\left(\overrightarrow{e} \wedge \overrightarrow{u}\right) \cdot f(\overrightarrow{u})$.
e) On exploite enfin le fait que (cf exercice 13 du TD pour une preuve)

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 \sin(\theta) = \left(\overrightarrow{e} \wedge \overrightarrow{u}\right) \cdot f(\overrightarrow{u}) \tag{5}$$

et le tour est joué pour trouver le signe de θ !

Rappel.

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}, \quad \left\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right\| = \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| |\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|.$$

Bon, et la méthode promise dans tout ça ?

a) On fixe d'abord un vecteur normé $\vec{e} \in \mathrm{Vect}(\vec{e_1})$.
b) On prend ensuite un vecteur particulier $\vec{u} \in \vec{e_1}^{\perp}$.
c) On calcule $f(\vec{u})$.
d) On calcule $\vec{e} \wedge \vec{u}$ et $\left(\vec{e} \wedge \vec{u}\right) \cdot f(\vec{u})$.
e) On exploite enfin le fait que (cf exercice 13 du TD pour une preuve)

$$\|\vec{u}\|^2 \sin(\theta) = \left(\vec{e} \wedge \vec{u}\right) \cdot f(\vec{u}) \tag{5}$$

et le tour est joué pour trouver le signe de θ !

Rappel.

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}, \quad \left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\vec{u}, \vec{v})|.$$

Une intuition. La base $(\vec{e}, \vec{u}, \vec{e} \wedge \vec{u})$ est directe. La direction 'positive' est donnée par $\vec{e} \wedge \vec{u}$. Si $\theta > 0$, $f(\vec{u})$ va aller dans le sens de $\vec{e} \wedge \vec{u}$.

Exemple. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(f) = 1$, on est donc en présence d'une rotation. On résout ensuite l'équation $Mx = x$. On trouve une droite propre dirigée par $(1, 1, 1)^T$: c'est l'axe de la rotation.

Exemple. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(f) = 1$, on est donc en présence d'une rotation. On résout ensuite l'équation $Mx = x$. On trouve une droite propre dirigée par $(1,1,1)^T$: c'est l'axe de la rotation.
On détermine maintenant l'angle θ.
a) On a $\mathrm{Tr}(M) = 0$ donc $1 + 2\cos(\theta) = 0$. Ainsi, $\cos(\theta) = -1/2$.

Exemple. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(f) = 1$, on est donc en présence d'une rotation. On résout ensuite l'équation $Mx = x$. On trouve une droite propre dirigée par $(1,1,1)^T$: c'est l'axe de la rotation.
On détermine maintenant l'angle θ.
a) On a $\mathrm{Tr}(M) = 0$ donc $1 + 2\cos(\theta) = 0$. Ainsi, $\cos(\theta) = -1/2$.
b) On choisit une orientation donnée par $\overrightarrow{e} = (1,1,1)^T/\sqrt{3}$. On pose $\overrightarrow{u} = (1,-1,0)^T \in (1,1,1)^{T,\perp}$. On a

$$M\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{e} \wedge \overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e} \wedge \overrightarrow{u} \cdot f(\overrightarrow{u}) = \sqrt{3}.$$

Finalement,

$$2\sin(\theta) = \sqrt{3} \implies \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\theta = 2\pi/3$.

Exemple. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(f) = 1$, on est donc en présence d'une rotation. On résout ensuite l'équation $Mx = x$. On trouve une droite propre dirigée par $(1, 1, 1)^T$: c'est l'axe de la rotation.
On détermine maintenant l'angle θ.
a) On a $\mathrm{Tr}(M) = 0$ donc $1 + 2\cos(\theta) = 0$. Ainsi, $\cos(\theta) = -1/2$.
b) On choisit une orientation donnée par $\overrightarrow{e} = (1, 1, 1)^T/\sqrt{3}$. On pose $\overrightarrow{u} = (1, -1, 0)^T \in (1, 1, 1)^{T,\perp}$. On a

$$M\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{e} \wedge \overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e} \wedge \overrightarrow{u} \cdot f(\overrightarrow{u}) = \sqrt{3}.$$

Finalement,

$$2\sin(\theta) = \sqrt{3} \implies \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\theta = 2\pi/3$.

Bilan. On conclut que f est la rotation autour de l'axe orienté $(1, 1, 1)^T$ d'angle $2\pi/3$.

Et voilà, le cours est terminé. Merci pour votre attention !

Compléments

IV - Compléments : formes quadratiques réelles

a) Introduction

b) Orthogonalité pour les formes quadratiques

c) Applications

Dans toute la suite, on fixe $n \geq 1$ et l'on se place dans un espace euclidien de dimension n. On définit les formes quadratiques réelles :

Définition (Forme quadratique)

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E. On définit la forme quadratique associée à ϕ par $q(x) = \phi(x, x)$.

Remarque. Si ϕ est un produit scalaire sur E, $q(x) = \|x\|^2$ où $\|\cdot\|$ est la norme associée à ϕ. Qu'est ce qui change alors avec le cadre produit scalaire ? Eh bien, on peut par exemple avoir $q(x) \leq 0$, $q(x) = 0$! Dans le monde des formes quadratiques, on peut aussi avoir x orthogonal à lui-même, ou même à tout vecteur...

Correspondance entre forme polaire et forme quadratique

Proposition (Unicité de la forme polaire)

*Soit q une forme quadratique. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique ϕ telle que $\phi(x,x) = q(x)$. On l'appelle **forme polaire** de q. Elle se calcule par les formules*

$$\phi(x,y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2} = \frac{q(x+y) - q(x-y)}{4}. \qquad (6)$$

Démonstration.

D'une part, ϕ définie par (6) est une forme bilinéaire symétrique telle que $q(x) = \phi(x,x)$. D'autre part, si ψ est une autre forme bilinéaire symétrique telle que $\psi(x,x) = q(x)$ alors par identité de polarisation, ψ vérifie nécessairement (6). □

Approche matricielle

On peut définir dans une base $\mathcal{B}$ la matrice de ϕ : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)_{i,j} = \phi(e_i, e_j)$. On a alors

$$\phi(x, y) = X^T MY \quad \text{et} \quad q(x) = X^T MX.$$

L'opération de changement de base pour les formes bilinéaires est l'opération de congruence. Si $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi) = P^T \ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) \ P.$$

Définition (Matrice associée à une forme quadratique q)

Si $\mathcal{B}$ est une base de E, on appelle matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ la matrice de la forme polaire ϕ de q dans $\mathcal{B}$.

On dispose de tout un vocabulaire (que l'on ne définit pas *in extenso*) issu d'une part :

- de l'algèbre linéaire : matrice, rang, noyau... Ces notions proviennent de l'approche matricielle. Par exemple, $\mathrm{rg}(q) = \mathrm{rg}(M)$ où M est la matrice de q dans une base [1] $\mathcal{B}$. On définit aussi

$$\ker(q) := \{x \in E, \forall y \in E, \phi(x, y) = 0\}.$$

et d'autre part :

- de la géométrie : forme quadratique définie, définie positive [2], et, par symétrie, définie, définie négative...

1. Notons une indépendance par rapport au choix de la base !
2. Par exemple, une forme quadratique est dite positive (resp. définie positive) si pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $q(x) \geq 0$ (resp. $q(x) > 0$).

Remarque

Peut-on voir $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ comme la matrice d'une application linéaire ?

Remarque

Peut-on voir $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ comme la matrice d'une application linéaire ?
Soit

$$f : \begin{cases} E \to E^* \\ x \mapsto \phi(x, \cdot) \end{cases} .$$

Munissons E d'une base $\mathcal{B}$ et E^* de la base duale $\mathcal{B}^*$ associée. On a

$$f(e_i)(y) = \phi(e_i, y) = \sum_{j=1}^{n} \phi(e_i, e_j) y_j = \sum_{j=1}^{n} \phi(e_i, e_j) e_j^*(y).$$

Donc $f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \phi(e_i, e_j) e_j^*$ i.e

$$\mathrm{Mat}_B(q) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(f).$$

Comment interpréter les formes quadratiques ? Introduisons $\mathcal{B} := \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. On calcule

$$q(x) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \phi(e_i, e_j).$$

Ainsi, une forme quadratique est un polynôme à n indéterminées homogène de degré 2. Réciproquement, tout polynôme à n indéterminées homogène de degré 2 définit une forme quadratique.

Comment interpréter les formes quadratiques ? Introduisons $\mathcal{B} := \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. On calcule

$$q(x) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \phi(e_i, e_j).$$

Ainsi, une forme quadratique est un polynôme à n indéterminées homogène de degré 2. Réciproquement, tout polynôme à n indéterminées homogène de degré 2 définit une forme quadratique.

Exemple. Soit $q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2xy + 4xz$. C'est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$. Sa matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la forme polaire de q ?
2. Donner le rang de q, le noyau de q.
3. q est-elle définie ? positive ? définie positive ? négative ? définie négative ?

On fixe une forme quadratique sur E et ϕ la forme polaire associée. On dit que deux vecteurs $x, y \in E$ sont $\phi-$orthogonaux si $\phi(x, y) = 0$. On dispose alors à nouveau de tout le vocabulaire des espaces euclidiens dans un cadre plus général. Par exemple, si $F \subset E$, on définit

$$F^{\perp\phi} := \{x \in E, \forall y \in F, \phi(x, y) = 0\}.$$

Exemples.

1. Si $q(x, y) = x^2 - y^2$ alors $q(1, 1) = 0$ donc $(1, 1)$ est orthogonal à lui-même. Par ailleurs,

$$\{(1, 1)\}^{\perp\phi} = \mathrm{Vect}(1, 1).$$

2. Si $q(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$, alors $\{(1, -1)\}^{\perp\phi} = \mathbb{R}^2$, en particulier $\{0\} \subsetneq (\mathbb{R}^2)^{\perp\phi}$.

Définition (Base $\phi-$orthogonale)

On dit que $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base $\phi-$orthogonale si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E et $\phi(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$. Dans cette base, la matrice de ϕ est diagonale et, par ailleurs,

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} q(e_i) x_i^2, \quad x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Définition (Base $\phi-$orthogonale)

On dit que $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base $\phi-$orthogonale si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E et $\phi(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$. Dans cette base, la matrice de ϕ est diagonale et, par ailleurs,

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} q(e_i) x_i^2, \quad x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Exemple. Soit $q(x, y) = x^2 - y^2$. La base canonique est $\phi-$orthogonale.

Théorème

Il existe une base $\phi-$orthogonale.

Démonstration.

La preuve se fait par récurrence sur $\dim E$. L'initialisation est claire. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le résultat soit vrai pour toute forme quadratique définie sur un e.v de dimension n. Soit E un ev de dimension $n+1$. Si $q = 0$, toute base convient.
Sinon, il existe $v \in E$ tel que $q(v) \neq 0$. Considérons alors la forme linéaire $\phi(v, \cdot)$. Elle est non nulle donc son noyau est un hyperplan de E, noté H. Puisque $v \notin H$, on a $\mathrm{Vect}(v) \oplus H = E$. On applique alors l'hypothèse de récurrence à $q_{|H}$: cela donne une base $(e_1, .., e_{n-1})$ de H qui est $\phi-$orthogonale. La base $(v, e_1, ..., e_{n-1})$ convient. $\square$

Et si on utilisait un Théorème déjà prouvé dans le cas réel ?

Théorème (Réduction des formes quadratiques réelles)

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique réelle de forme quadratique q associée. Il existe une base $\mathcal{B}$ qui est $\phi-$orthogonale et, de plus, une base orthonormée de E. Autrement dit, la matrice de ϕ dans une base de référence est <u>congruente</u> à une matrice diagonale.

Démonstration.

Cela résulte du Théorème de réduction des formes bilinéaires symétriques. □

Remarques

1) Le fait que $\mathcal{B}$ soit une BON de E est une spécificité réelle/hermitienne. Cela ne marcherait pas si le corps de base était quelconque.

Remarques

1) Le fait que $\mathcal{B}$ soit une BON de E est une spécificité réelle/hermitienne. Cela ne marcherait pas si le corps de base était quelconque.

2) Le Théorème 29 donne l'existence d'une base $\phi-$orthogonale mais ne donne pas de méthode. Bien sûr, on pourrait par le Théorème spectral écrire la matrice de ϕ, la diagonaliser et utiliser les vecteurs propres obtenus. Mais il y a deux inconvénients : 1) Cette méthode est attachée au cas réel/hermitien (car on diagonalise i.e on n'obtient formellement pas une relation de congruence mais une relation de similitude) et 2) diagonaliser une matrice $n \times n$, hum, c'est du travail !

Remarques

1) Le fait que $\mathcal{B}$ soit une BON de E est une spécificité réelle/hermitienne. Cela ne marcherait pas si le corps de base était quelconque.

2) Le Théorème 29 donne l'existence d'une base $\phi-$orthogonale mais ne donne pas de méthode. Bien sûr, on pourrait par le Théorème spectral écrire la matrice de ϕ, la diagonaliser et utiliser les vecteurs propres obtenus. Mais il y a deux inconvénients : 1) Cette méthode est attachée au cas réel/hermitien (car on diagonalise i.e on n'obtient formellement pas une relation de congruence mais une relation de similitude) et 2) diagonaliser une matrice $n \times n$, hum, c'est du travail !

3) Une conséquence du théorème précédent est : il existe une famille libre $(l_1, \cdots, l_r)$ de formes linéaires telle que $q = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i l_i^2$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{R}$.

Remarques

1) Le fait que $\mathcal{B}$ soit une BON de E est une spécificité réelle/hermitienne. Cela ne marcherait pas si le corps de base était quelconque.

2) Le Théorème 29 donne l'existence d'une base $\phi-$orthogonale mais ne donne pas de méthode. Bien sûr, on pourrait par le Théorème spectral écrire la matrice de ϕ, la diagonaliser et utiliser les vecteurs propres obtenus. Mais il y a deux inconvénients : 1) Cette méthode est attachée au cas réel/hermitien (car on diagonalise i.e on n'obtient formellement pas une relation de congruence mais une relation de similitude) et 2) diagonaliser une matrice $n \times n$, hum, c'est du travail !

3) Une conséquence du théorème précédent est : il existe une famille libre $(l_1, \cdots, l_r)$ de formes linéaires telle que $q = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i l_i^2$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{R}$.

4) Il y a une méthode **algébrique** pour expliciter une base de diagonalisation (non nécessairement **orthonormée** du coup...). C'est la <u>Méthode de Gauss</u>. On en explique le principe ci-dessous par des exemples en dimension 3. Bien sûr, il y a une technique générale mais c'est plus éclairant de comprendre sur un exemple (à mon sens...).

Méthode de Gauss sur un exemple

Considérons sur $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique

$$q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2xy + 4xz + 2yz.$$

On veut décomposer q en une "somme de carrés". On va successivement avaler les variables dans des carrés par la formule

$$x^2 + 2xy = (x + y)^2 - y^2.$$

Méthode de Gauss sur un exemple

Considérons sur $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique

$$q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2xy + 4xz + 2yz.$$

On veut décomposer q en une "somme de carrés". On va successivement avaler les variables dans des carrés par la formule

$$x^2 + 2xy = (x + y)^2 - y^2.$$

Étape 1. On avale x. On travaille sur les termes comportant x :

$$3x^2+2xy+4xz = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{4}{3}xz\right) = 3\left[\left(x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right)^2 - \frac{4}{9}yz - \frac{y^2}{9} - \frac{4z^2}{9}\right].$$

Donc

$$q(x, y, z) = 3\left(x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right)^2 + \frac{2}{3}yz + \frac{2}{3}y^2 - \frac{4}{3}z^2.$$

Étape 2. On avale y. On travaille sur les termes comportant y :

$$\frac{2}{3}yz+\frac{2}{3}y^2=\frac{2}{3}\left[y^2+yz\right]=\frac{2}{3}\left[\left(y+\frac{1}{2}z\right)^2-\frac{1}{4}z^2\right].$$

Donc

$$q(x,y,z)=3\left(x+\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z\right)^2+\frac{2}{3}\left(y+\frac{1}{2}z\right)^2-\frac{3}{2}z^2.$$

Étape 3. On vérifie ! Il faut vérifier que

$$(l_1,l_2,l_3):=\left(e_1^*+\frac{1}{3}e_2^*+\frac{2}{3}e_3^*\ ,\ e_2^*+\frac{1}{2}e_3^*\ ,\ e_3^*\right)$$

est une famille libre (une base ici) de E^* et remonter le calcul (Exercice !).

Remarque. Le fait que (l_1,l_2,l_3) soit une base de E^* peut se constater en notant que les coordonnées de (l_1,l_2,l_3) dans la base $(e_1^*,e_2^*,e_3)^*$ forment une matrice inversible.

On n'a pas tout à fait terminé ! On voulait une base ϕ−orthogonale de E. Autrement dit, il faut identifier (l_1, l_2, l_3) à une base de E :

$$\begin{aligned}(l_1, l_2, l_3) &\overset{P}{\longleftrightarrow} (e_1^*, e_2^*, e_3^*)\\ (f_1, f_2, f_3) &\overset{?}{\longleftrightarrow} (e_1, e_2, e_3).\end{aligned}$$

avec $f_i^* = l_i$ pour $i = 1, 2, 3$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

Le théorème de la base antéduale nous dit que c'est possible, mais en pratique, comment faire ?

Interprétons notre calcul

Posons P la matrice de passage de la base canonique de E^* à (l_1, l_2, l_3). On a, si $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $D = \mathrm{diag}(3, \frac{2}{3}, -\frac{3}{2})$,

$$P^T X = \begin{pmatrix} x + \frac{y}{3} + \frac{2}{3}z \\ y + \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D(P^T X) = \begin{pmatrix} 3(x + \frac{y}{3} + \frac{2}{3}z) \\ \frac{2}{3}(y + \frac{1}{2}z) \\ -\frac{3}{2}z \end{pmatrix}.$$

Notre calcul a montré que

$$q(u) = \left(P^T X\right)^T D(P^T X) = X^T PDP^T X.$$

Si M désigne la matrice de q dans la base canonique, on a alors $M = PDP^T$. En particulier,

$$D = \left[(P^{-1})^T\right]^T M(P^{-1})^T,$$

donc la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par $\left(P^{-1}\right)^T$ est une base de diagonalisation. Notons que cette base n'est pas nécessairement orthonormée.

Retour sur notre exemple

Exercice. Donner la base obtenue et vérifier qu'elle est bien $\phi-$orthogonale.
On a

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left(P^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$(f_1, f_2, f_3) = \left(e_1, -\frac{1}{3}e_1 + e_2, -\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 + e_3\right).$$

On a par exemple

$$\phi(f_2, f_3) = F_2^T M F_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = 0.$$

Pour finir, une remarque sur la méthode de Gauss

Remarque. Vous noterez que la méthode de Gauss ne peut pas démarrer s'il n'y a pas de carrés dans q ! On contourne le problème en avalant x et y en même temps (si le terme devant xy est nul, sinon on prend un autre couple). Regardons l'exemple

$$q(x, y, z) = xy + 2yz + xz.$$

$$\begin{aligned} xy + 2yz + xz &= (x + 2z)(y + z) - 2z^2 \\ &= \frac{[x + 2z + (y + z)]^2 - [x + 2z - (y + z)]^2}{4} - 2z^2 \end{aligned}$$

et l'on simplifie.

Deux applications

1) Classification des formes quadratiques

2) Optimisation

Théorème (Critère de Sylvester)

Soit q une forme quadratique réelle sur un espace euclidien E. Il existe deux entiers $p, r \geq 0$ tels que $p + r \leq n$ et une base orthogonale de E, notée $\mathcal{B}$, telle que

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+r}^2$$

où $(x_1, \cdots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$. De plus, les entiers p, r ne dépendent que de q. Le couple (p, r) est appelé signature de r.

Matriciellement, dans une base donnée par le Théorème 30, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1, 0, \cdots, 0)$ avec p fois 1 et r fois -1.

Démonstration.

L'existence de p, r découle du Théorème 29 en regardant le signe de $q(e_i)$ et en choisissant $e_i / \sqrt{\pm q(e_i)}$ comme nouveau vecteur de base. L'indépendance de p, r de la base est délicate et admise. □

Exemple. La forme quadratique $q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2xy + 4xz + 2yz$ est de signature $(2, 1)$.

Remarque : coniques/quadriques

$\longrightarrow$ le Théorème précédent permet la classification des coniques/quadriques. Une conique/quadrique est une partie du plan/de l'espace définie par une équation du type $q(x) + L(x) = \alpha$ où q est une forme quadratique, L une forme linéaire et α une constante.
En dimension 2, on parle de **conique**, en dimension trois de **quadrique**.

Exemples. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 3y^2 = 2\}$ est une conique. C'est plus précisément une hyperbole.
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + 3z^2 = 1\}$ est une quadrique, c'est plus précisément une ellipsoide.

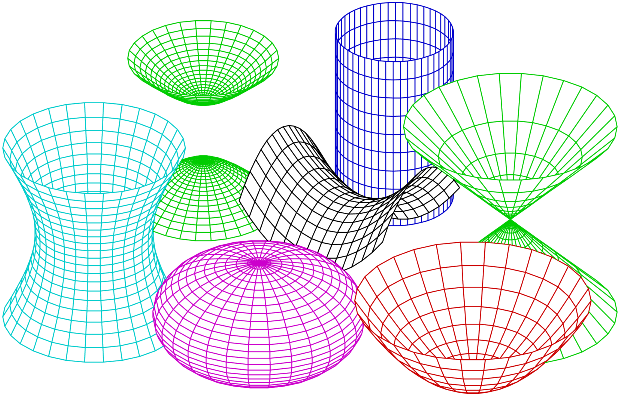


Figure – Quadriques

Optimisation

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On rappelle que la Hessienne de f est définie en un point x^* par la matrice des dérivées partielles secondes :

$$D^2 f(x^*) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*)\right]_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Par le Lemme de Schwarz, on obtient que $D^2 f(x^*)$ est une matrice symétrique.

On cherche à trouver $\min_{\mathcal{U}} f$. Pour cela, un candidat doit nécessairement satisfaire $\nabla f(x^*) = 0$. En revanche, la seule condition $\nabla f(x^*)$ n'est pas suffisante ! Par exemple, si $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^3$, on constate que 0 n'est pas un minimum local de f et pourtant $f'(0) = 0$...
Soit $x^* \in \mathcal{U}$ tel que $\nabla f(x^*) = 0$. La formule de Taylor donne, au voisinage de x^*,

$$f(x^* + h) = f(x^*) + D^2 f(x^*) \cdot (h, h) + o(h^2).$$

Une condition suffisante pour que x^* soit minimum local de f est que $D^2 f(x^*)$ soit définie positive. En effet, il existe une BON de E et $D^2 f(x^*)-$orthogonale telle que $\phi(e_i, e_i) = \lambda_i > 0$. Posant $\lambda = \min_{i \in \{1, \cdots, n\}} \lambda_i$, on a pour tout $h \in E$,
$D^2 f(x^*)(h, h) \geq \lambda \|h^2\|$. Par conséquent,

$$f(x^* + h) = f(x^*) + D^2 f(x^*)(h, h) + o(h^2) \geq f(x^*) + \lambda \|h\|^2 + o(h^2)$$

i.e $f(x^* + h) \geq f(x^*)$ pour $\|h\|$ assez petit. On a donc montré le

Théorème

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $\nabla f(x^*) = 0$ et $D^2 f(x^*)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive. Alors x^* est un minimum local de f.

Peut-on décrire le comportement approximatif de f au voisinage d'un point critique x^* (i.e tel que $\nabla f(x^*) = 0$) quelconque ? Toujours par la formule de Taylor, on a

$$f(x^* + h) \approx f(x^*) + D^2 f(x^*) \cdot (h, h).$$

Or, par le critère de Sylvester (Th. 30), on sait qu'il existe une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$f(x^* + h) - f(x^*) \approx +h_1^2 + \cdots + h_p^2 - h_{p+1}^2 - \cdots - h_{p+q}^2.$$

Cela donne les directions vers lesquelles f devrait augmenter. Ces directions sont données par des vecteurs propres de $D^2 f(x^*)$.

Exemple

Exemple. Soit $f : (x, y) \mapsto xy(x + y - 1)$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Par ailleurs, $Df(x, y) = (y(2x + y - 1), x(2y + x - 1))$. Les points critiques sont $(0, 0)$,$(1, 0)$,$(0, 1)$,$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. On regarde maintenant les Hessiennes. On a

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 2y - 1 \\ 2x + 2y - 1 & 2x \end{pmatrix}.$$

1) Regardons le premier point critique $(0, 0)$: on a $D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont ± 1 et des vecteurs propres $(1, 1)$ (pour la valeur propre -1) et $(-1, 1)$ pour la valeur propre 1). $(0, 0)$ n'est pas un extrémum de f : il y a une direction vers laquelle f augmente et une vers laquelle f diminue, on dit que c'est un point selle.

2) C'est de même pour les points critiques $(1, 0)$ et $(0, 1)$ (Exercice !)

3) Pour $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, la Hessienne est $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et les valeurs propres associées sont $3 > 0$ et $1 > 0$: c'est donc un minimum local.

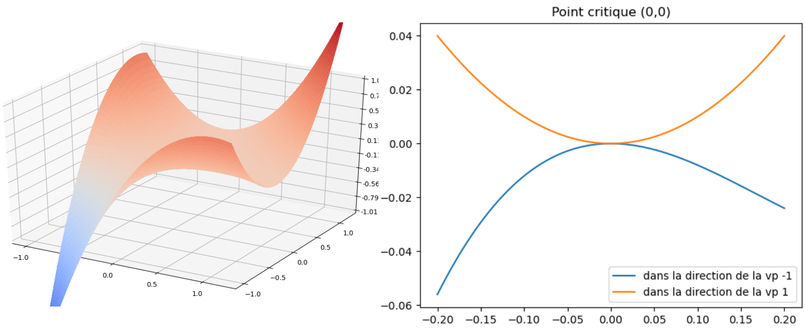


Figure – Représentation grahique de la fonction f. A gauche, on voit le point minimum, à droite un point selle avec les deux directions propres.