Bonjour

1) Poser des questions

2) Barême du cours : évaluation

40% : projets

40% : évaluations continues

* QCM.
* TP Notés ?

20% : attitude (* absences, retards... (négative))
* questions/réponses, coller.

Raphaël : Colles ? 3 colles dans le semestre.

W4-11, W13-16

Projets : en groupe.

Mercredi : QCM sur le chapitre espaces vectoriels

10' (on aura 20' pour le faire) - 11 questions
notées sur 10.

La dualité : ⚠ cours qui paraît facile, mais qui est difficile

À quoi ça sert ?

Idée : Pour étudier un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on va étudier

$$\mathcal{L}(E,\mathbb{K}) \qquad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}).$$

Ça paraît plus compliqué ??!

Méthode : $\dim E = \dim \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ si $\dim E < +\infty$.

Exemple : $\mathrm{Vect}(x \mapsto x^k, k \in \mathbb{N})$ de dimension infinie

$\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$ où I intervalle de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Qu'apporte la dualité ?

* Mise en équation de sous-espaces vectoriels (particuliers)

Exemple : ① $\{ f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\ f(0)=0 \} = F$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$,

d'équation

Pascal : $f(0)=0$. est l'équation de F.

② $E = \mathrm{Vect}(x \mapsto x^k,\ k \in \mathbb{N})$.

$F = \mathrm{Vect}(x \mapsto x^k,\ k \in \mathbb{N}^*)$

équation de F : $[f \in F] \Leftrightarrow [f(0)=0]$ (Emma).

* <u>Mécanique quantique</u> : Bra, Ket

$$\underbrace{\langle a|}_{\text{forme linéaire}} \quad \underbrace{|b\rangle}_{\text{vecteur.}}$$

Si $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$
$x \in E$

$$\varphi(x) \underset{\text{MQ}}{\overset{\text{Not}}{=}} \langle \varphi | x \rangle.$$

Ça fait penser à (Élodie) un produit scalaire

→ faire des raisonnements comme avec un produit scalaire

* Équations aux dérivées partielles (linéaires) $O \subset \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^n$

(PDE in English)

Chercher des solutions d'une EDP dans $\mathcal{L}(\mathcal{C}^k(O, \mathbb{R}), \mathbb{R})$

donne la notion de « solution faible ».

Q.
Agathe
Raphaël
Maxence

<u>exemple</u>: $a(x,y)\,\partial_1 f + b(x,y)\,\partial_2 f = c(x,y)$.

Table des matières

Chapitre 1

Dualité

注释 1.1

本小节介绍了线性空间的对偶空间和超平面。

1.1 Étude du dual

Définition 1.1 – Dual d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle *dual de E* et on note

$$E^\star \overset{\text{Not}}{=} \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$$

Les éléments de $E^\star$ s'appellent des *formes linéaires* [a].

a. Le mot « forme », désigne en général une application à valeurs dans le corps de base. On aura des formes linéaires, des formes bilinéaires, etc.

Propriété 1.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $E^\star$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

对偶空间本身也是线性空间，它的元素是线性映射也称作线性泛函。

Démonstration

C'est un cas particulier de la propriété 1.23, page 41 de [1].

Notre ensemble de travail est $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

* il s'appelle <u>dual de E</u> (dualité = étude du dual).
* il se note E^*

(☆ je dirai « star » E^*

* je dirai « étoile » $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$)

<u>Propriétés</u> : 1) E^* est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

2) si E est de dimension finie, $\dim E = \dim E^*$.

ils sont <u>isomorphes</u>

Rappel : si E et E' sont deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels.

On dit que E est isomorphe à E' si

il existe $u \in \mathcal{L}(E, E')$ bijective

injective $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$

surjective $\operatorname{Im} u = E'$

Objectif de la dualité : travailler en dimension infinie

Propriété 1.2

Si E est de dimension finie, alors $E^\star$ est de dimension finie et

$$\dim E = \dim E^\star$$

En dimension finie, les deux espaces sont donc isomorphes. C'est faux en dimension infinie.

在有限维时，线性空间E 和它的对偶空间$E^\star$ 是同构的。

Démonstration

Si E est de dimension finie, c'est un cas particulier de la proposition 1.8, page 57 de [1].

$$\dim E^\star = \dim \mathscr{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E \times \dim \mathbb{K} = \dim E \times 1 = \dim E$$

Si E n'est pas de dimension finie, voir l'exemple ci-dessous.

Exemple 1.1 – Dual et espace non isomorphes

Prenons

$$E = \mathrm{Vect}(\{x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}\}),\ \text{sous-espace vectoriel du } \mathbb{Q}\text{-espace vectoriel } \mathscr{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$$

On a alors

En dimension infinie E et E^* ne sont jamais isomorphes

(E^* est toujours plus gros)

Exemple: $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ est infini, dénombrable. (en bijection avec $\mathbb{N}$).

(on admet qu'on sait bien faire des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda . x \end{aligned}$$
)

ⓐ E est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{Q}, E)$

$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{Q})$.

ⓑ et $\mathcal{L}(\mathbb{Q}, E)$ n'est pas isomorphe à $\mathcal{L}(E, \mathbb{Q})$.

ⓐ $\Psi : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{Q}, E). \\ x \longmapsto (\lambda \longmapsto \lambda . x) \end{array}$

Ψ est un isomorphisme de E sur $\mathcal{L}(\mathbb{Q}, E)$.

1) Ψ est linéaire $\Rightarrow$(

2) $\operatorname{Ker} \Psi = \{0_E\}$.

3) $\operatorname{Im} \Psi = \mathcal{L}(\mathbb{Q}, E)$.

* Soit $(x, y) \in E^2$

$\Psi(x+y) = (\lambda \mapsto \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y)$

donc $\Psi(x+y) = \Psi(x) + \Psi(y)$

* soit $x \in E$, $\mu \in \mathbb{Q}$.

$\Psi(\mu.x) = (\lambda \mapsto \lambda.(\mu.x) = (\cancel{\lambda}\mu).x$

$= (\mu\lambda).x$

$= \mu.(\lambda.x))$

$= \mu.\Psi(x)$)

2) Soit $x \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda.x = 0_E$

si $\lambda = 1$ $x = 0_E$

3) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{Q}, E)$, $x = \varphi(1)$ alors $\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda \times 1) = \lambda.\varphi(1)$

$= \lambda.x$

$= \Psi(x)(\lambda)$

b) $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{Q})$

Imaginons que E ait une base $(e_i)_{i\in I}$

$\mathcal{L}(E,\mathbb{Q})$ est alors isomorphe à $\mathbb{Q}^I$

par $\boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \mathbb{Q}^I \\ u & \longmapsto & (u(e_i))_{i\in I} \end{array}}$

Exemple : I infini $E = \mathrm{Vect}(\underbrace{x \mapsto x^k}_{e_k.}, k\in\mathbb{N})$. $\boxed{\mathbb{K}=\mathbb{Q}}$

$I = \mathbb{N}$

$\mathcal{L}(E,\mathbb{Q})$ est en bijection avec $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui n'est pas dénombrable.

E en bijection avec $\mathcal{L}(\mathbb{Q},E)$. (ⓐ)

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\mathrm{Vect}\left(x\mapsto x^k,\ k\in[\![0,n]\!]\right)}_{\text{isomorphe à } \mathbb{Q}^{n+1}}.$$

$$\left((\alpha_0 \ldots \alpha_n) \mapsto \left(x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k\right)\right)$$

et $\mathbb{Q}^{n+1}$ est dénombrable.

et E est réunion dénombrable d'ensembles dénombrables,

donc E est dénombrable

et $\mathcal{L}(\mathbb{Q},E)$ est dénombrable ▨

<u>Bilan</u>: Ici, $\ast$ E n'est pas isomorphe à $E^\star$

$\ast$ $\mathcal{L}(E,\mathbb{Q})$ ———— à $\mathcal{L}(\mathbb{Q},E)$

)) Vrai dès que $\dim E = +\infty$

— *E est dénombrable* car

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\mathrm{Vect}(\{x \mapsto x^k,\ k \in [\![0,n]\!]\})}_{\text{en bijection avec } \mathbb{Q}^{n+1} \text{ donc } \mathbb{Q},}$$

et une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

— *$E^\star$ n'est pas dénombrable* car

$$E^\star \text{ isomorphe à (donc en bijection avec) } \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$$

par l'isomorphisme usuel

$$\varphi \mapsto (\varphi(x \mapsto x^n))_{n\in\mathbb{N}}$$

Or, $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable (voir le procédé diagonal de Cantor) [a].

Remarquons que le dual est toujours *plus gros que l'espace de départ !*

$$\text{C'est donc un isomorphisme non-géométrique.}$$

a. Ceci est aussi un exemple où

$$\mathscr{L}(E, E') \text{ n'est pas isomorphe à } \mathscr{L}(E', E)$$

Toute correction d'erreurs sur le livre ou le polycopié est
TRÈS appréciée

⚠ En général $\mathcal{L}(E,F)$ <u>N'EST PAS</u> isomorphe à $\mathcal{L}(F,E)$.

Mais si E de dimension $p \in \mathbb{N}$

F ———— $q \in \mathbb{N}$

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = p \times q \quad \text{(Victor)}$$

$$\dim \mathcal{L}(F,E) = q \times p$$

$\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est isomorphe à $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$

$$A \longmapsto {}^tA \quad \text{(Maxence)}.$$

Dans la vie des espaces vectoriels il y a 2 types d'isomorphismes.

1) Ceux qui passent à la dimension infinie

$\longrightarrow$ isomorphisme traduisant une situation géométrique.

2) Ceux qui n'existent plus en dimension infinie

~~Exemple~~ **Exercice** : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F un sous-espace vectoriel de E, G_1 et G_2 deux supplémentaires de F

alors G_1 et G_2 sont isomorphes

$$\left(\left[E = F \oplus G_1 = F \oplus G_2\right] \Rightarrow \left[G_1 \simeq G_2\right]\right).$$

13/2/2023