Topologie et Calcul différentiel

Semaine 5 : Fonctions convexes

Mardi 14 Mars 2023,
Le projet est en ligne, à rendre pour dans trois semaines

Debrief du QCM de jeudi dernier

Dans quel cas regarde-t-on une dérivée partielle de $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ pour appliquer le théorème des fonctions implicites plutôt que de regarder la jacobienne de f ?

- Quand $p = 1$.
- Quand $n = 1$.
- Quand $p = n$.
- Quanq $n > p$.

Debrief du QCM de jeudi dernier

Quand on cherche un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}$ et une fonction $\phi : U \to \mathbb{R}$ telle que $f(\phi(x), x) = 0$ sur U pour pouvoir appliquer le théorème des fonctions implicites, on regarde :

- $\partial_1 f$
- $\partial_2 f$
- $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$
- La copie du voisin.

Debrief du QCM de jeudi dernier

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pourquoi a-t-on le droit de dériver l'expression $f(x, y) = 0$ par rapport à x au voisinage de (x_0, y_0) quand $f(x_0, y_0) = 0$ et $\partial_2 f(x_0, y_0) \neq 0$?

- Parce que $y = \phi(x)$ sur un ouvert U qui contient x, donc on peut dériver l'expression par rapport à x.
- Parce que si une fonction s'annule en un point, sa dérivée s'annule aussi en ce point.
- Parce que la fonction f est nulle pour tous les couples (x, y) au voisinaage de (x_0, y_0) et que la dérivée d'une fonction nulle est nulle.
- On n'a pas le droit.

Debrief du QCM de jeudi dernier

Pourquoi calcule-t-on un développement limité de ϕ dans l'exercice fait en cours plutôt que de donner l'expression de ϕ ?

- Parce qu'on ne peut pas donner l'expression explicite de ϕ.
- Parce que c'est plus facile.
- Parce que ϕ n'est pas de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- Il faut calculer les dérivées secondes de f pour donner une expression explicite de ϕ.

Debrief du QCM de jeudi dernier

46 étudiants sur 73 ont fait le QCM

Les fonctions convexes

Plan du cours

- Définitions, propriétés
- Liens avec la dérivée d'une fonction
- Inégalité de Hölder
- Inégalité de Jensen
- Pleins d'exercices

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, f est dite convexe si elle vérifie

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \forall t \in [0,1],\ f((1-t)\,a + t\,b) \leq (1-t)\,f(a) + t\,f(b)$$

Lorsque $-f$ est convexe, on dit que f est concave.

Remarque

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est à la fois convexe et concave, alors f est ....

Définitions et propriétés

Propriété

Sur l'intervalle $[a, b]$, la courbe passe en-dessous de sa corde entre a et b. En-dehors de l'intervalle $[a, b]$, elle passe au-dessus de cette corde.

Preuve.

Définitions et propriétés

Définition

- Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$, on appelle épigraphe de f, l'ensemble

$$\mathcal{E}_f = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R},\ y \geq f(x)\}$$

- Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$, on dit que $\mathcal{C}$ est convexe si

$$\forall (A, B) \in \mathcal{C}^2,\ \forall t \in [0, 1],\ \mathrm{Bary}\left((A, 1-t), (B, t)\right) := (1-t)\cdot A + t\cdot B \in \mathcal{C}$$

Propriété

L'épigraphe $\mathcal{E}_f$ de f est un ensemble convexe $\Leftrightarrow$ la fonction f est convexe.

Preuve.

($\Rightarrow$) Soit $A_1 = (x_1, y_1)$ et $A_2 = (x_2, y_2)$ deux points de $\mathcal{E}_f$ et soit $t \in [0, 1]$, alors comme f est convexe,

....

....

($\Leftarrow$) Soit $(x, y) \in I^2$ et $t \in [0, 1]$, alors $A = (x, f(x))$ et $B = (y, f(y))$ sont deux points de $\mathcal{E}_f$ et donc $\mathrm{Bary}\left((A, 1-t), (B, t)\right)$ aussi. Ce qui se traduit par

....

....

Définitions et propriétés

Propriété

Soit f une fonction **continue** sur I. Alors

$$[f \text{ convexe}] \Leftrightarrow \left[\forall (x,y) \in I^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}\right]$$

Preuve.

- $(\Rightarrow)$ ....
- $(\Leftarrow)$ Soit x et y dans I fixés. On montre facilement par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{0, \ldots, 2^n\}$,

$$f\left(\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x + \frac{k}{2^n}y\right) \leq \left(1-\frac{k}{2^n}\right)f(x) + \frac{k}{2^n}f(y)$$

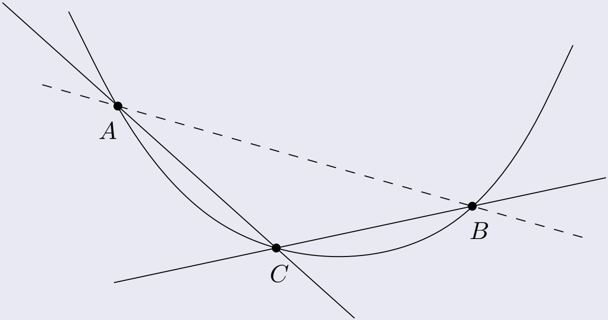
En remarquant que, si $t \in [0,1]$, alors $\frac{\lfloor t\,2^n \rfloor}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} t$ on peut, en passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus pour $k = \lfloor t\,2^n \rfloor$ et en utilisant la continuité de f obtenir la convexité de f.

Définitions et propriétés

Propriété (Inégalité des pentes)

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si $\forall (x, y, z) \in I^3$,

$$[x < z < y] \Leftrightarrow \left[\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}\right]$$



Définitions et propriétés

Preuve.

Preuve (suite).

Propriété (Taux d'accroissement)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. La fonction f est convexe sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, l'application

$$\tau_x : \left\{ \begin{array}{rcl} I \setminus \{x\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x} \end{array} \right. \quad \text{est croissante}$$

Définitions et propriétés

Propriété (Continuité d'une fonction convexe)

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors f est continue sur $\mathring{I}$.

Preuve.

1. Soit $z \in \mathring{I}$, on peut alors trouver x et y dans I tels que $x < z < y$. On a alors pour tout $h \in [z, y]$.

   ....

2. Le .... nous permet de déduire que

$$f(h) \xrightarrow[h \to z^+]{} f(z)$$

ce qui est la continuité à droite de f en z. La continuité à gauche s'obtient de la même manière.

Définitions et propriétés

Remarque : contre-exemple

Il n'y a pas nécessairement continuité aux bornes de l'intervalle. Par exemple, la fonction

$$f \; : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,1[\\ 1 & \text{si } x \in \{0,1\} \end{cases} \end{cases}$$

est convexe sur $[0,1]$, mais n'est pas continue en 0 à droite, ni en 1 à gauche.

Fonctions convexes

Plan du cours

- Définitions, propriétés
- Liens avec la dérivée d'une fonction
- Inégalité de Hölder
- Inégalité de Jensen

Liens avec la dérivée d'une fonction

Rappel

On rappelle que si $I = [a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in]a,+\infty[\cup \{+\infty\}$, alors $\mathring{I} =]a,b[$.

Dérivée d'une fonction convexe

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable sur $\mathring{I}$

$$[f \text{ convexe sur } I] \iff \left[f' \text{ croissante sur } \mathring{I}\right]$$

Liens avec la dérivée d'une fonction

Preuve. $(\Rightarrow)$ (f convexe $\Rightarrow f'$ croissante) On a vu que si $x < z < y$, alors

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

En faisant tendre z vers x^+, il vient

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

En faisant tendre z vers y^-, il vient

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Liens avec la dérivée d'une fonction

Preuve (suite). ($\Leftarrow$) (f' croissante $\Rightarrow$ f convexe) Soit x, y et z dans I, tels que $x < z < y$. D'après ...., on a l'existence de $c \in]x, z[$ et de $d \in]z, y[$ tels que

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(c) \text{ et } \frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(d)$$

Or $f'(c) \leq f'(d)$, donc on a

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Ce qui nous donne la convexité de f (l'inégalité des pentes).

Liens avec la dérivée d'une fonction

Dérivée seconde d'une fonction convexe

Si la fonction f est continue sur I et deux fois dérivable sur $\mathring{I}$, alors

$$[f \text{ convexe}] \iff \left[f'' \geq 0\right]$$

Preuve. On utilise $[f' \text{ croissante}] \iff [f'' \geq 0]$.

Exemples

Fonctions convexes : exp, $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto x^4$, $x \longmapsto x^{2n}$, $x \longmapsto x^{2n+1}$ sur $[0, \infty[$, $x \longmapsto \sin(x)$ sur $[-\pi, 0]$, $x \longmapsto \cos(x)$ sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $x \longmapsto \tan(x)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $x \longmapsto \arcsin(x)$ sur $[0, 1]$, $x \longmapsto \arccos(x)$ sur $[-1, 0]$, $x \longmapsto \arctan(x)$ sur $]-\infty, 0]$.

Fonctions concaves : $x \longmapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \ln(x)$, $x \longmapsto x^{2n+1}$ sur $]-\infty, 0]$, $x \longmapsto \sin(x)$ sur $[0, \pi]$, $x \longmapsto \cos(x)$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \longmapsto \tan(x)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $x \longmapsto \arcsin(x)$ sur $[-1, 0]$, $x \longmapsto \arccos(x)$ sur $[0, 1]$, $x \longmapsto \arctan(x)$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice

Exercice

Montrer les inégalités suivantes :

- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \leq x$
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x \leq e^x - 1$
- Trouver un encadrement des fonctions cos et sin sur l'intervalle $[0, \pi/2]$.