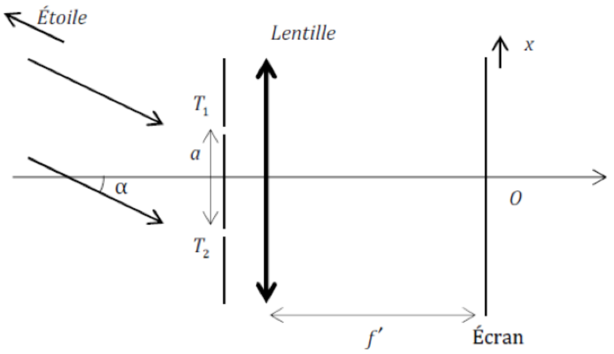
TD - Semaine 4 - Chapitre 3

Exercice 3-1 : Séparation d'une étoile double

On considère un télescope dont l'objectif est constitué d'une lentille convergente de focale $f' = 50$ m. On place devant l'objectif un écran percé de deux trous identiques distants de a.



1. On dirige l'ensemble vers une étoile quasi ponctuelle émettant une radiation monochromatique ($\lambda_0 = 550$ nm). Décrire le phénomène observé dans le plan focal de l'objectif. Calculer l'intensité $I(x)$. Si la direction de l'étoile fait l'angle α avec l'objectif, que devient $I(x)$?
2. L'étoile visée est maintenant une étoile double (deux étoiles quasi ponctuelles très proches) distantes angulairement de α. Calculer $I(x)$ et représenter la fonction dans les cas suivants : $\alpha = \frac{\lambda_0}{8a}, \frac{\lambda_0}{4a}, \frac{3\lambda_0}{8a}, \frac{\lambda_0}{2a}$.
3. $I_{\max}$et $I_{\min}$ désignant respectivement le maximum et le minimum de $I(x)$, calculer le contraste défini par : $V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ (en fonction de a, α et λ_0).
4. La distance a est variable, et on constate que l'éclairement est uniforme pour une valeur minimale a_0 de a. Déterminer a_0 si α= 2" (2 secondes d'arc). Quelle devrait être la valeur de a0 pour pouvoir évaluer le diamètre apparent d'une étoile double valant 8×10^{-3} seconde d'arc ?

1. La source est très loins, et elle émet 2 rayons parallèles, cela correspond à la division front d'onde.

On observe les franges d'interférences sur l'écran.

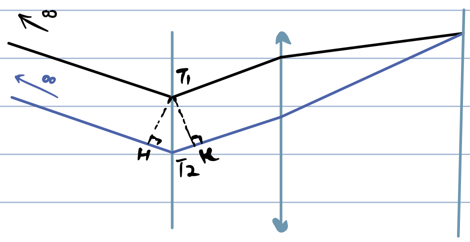
On note $I_1 = I_2 = I_0$, par la formule de Fresnel, on a :

$$I(M) = 2I_0\left[1 + \cos\Delta\varphi_{2/1}(M)\right]$$

$$\Delta\varphi_{2/1} = k_0\delta_{2/1} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_{2/1}$$

$\Delta\varphi$: le déphasage entre les 2 rayons $(SM)_2$ et $(SM)_1$

δ : la différence du chemin optique entre ce 2 rayons.



Les 2 rayons sont parallèles pour ST_1 et SH, $(ST_1)_1 = (SH)_2$

Par le retour des rayons $(T_1M)_1 = (KM)_2$

$$\delta_{2/1}(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = (HT_2)_2 + (T_2K)_2$$
$$= a\sin\alpha + a\sin\alpha'$$

Dans les cas des rayons proches de l'axe optique on a α et α' petit,

$$\delta_{2/1} = a(\alpha + \alpha') = a\left(\alpha + \frac{x}{f'}\right)$$

Donc, on a l'expression de $I(x)$

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0}\left(\alpha + \frac{x}{f'}\right)\right)\right]$$

Quand le dispositif est dirigé vers l'étoile, $\alpha = 0$,

$$I(x) = 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0}\frac{x}{f'}\right)\right]$$

L'interfrange est égale à $i = \frac{\lambda_0 f'}{a}$

La position de la frange de l'ordre 0 : $\alpha + \frac{x}{f'} = 0$

$$\Leftrightarrow x = -\alpha f'$$

2\. Les rayons sont issus de 2 étoiles, donc ils sont incohérents. On doit ajouter leur distribution de l'intensité directement.

$$I(x) = \sum_i \underbrace{I(x_i)}_{\text{issue d'étoile } i}$$

$$= \underbrace{2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi a x}{\lambda_0 f'}\right)\right]}_{\text{sur l'axe}} + 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0}\left(\alpha + \frac{x}{f'}\right)\right)\right]$$

$$= 4I_0\left[1 + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi a}{\lambda_0}\alpha\right)}_{(cte)} \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0}\underbrace{\left(\frac{x}{f'} + \frac{\alpha}{2}\right)}_{\varphi(x)}\right)\right]$$

terme de visibilité

x apparait, terme d'interférence

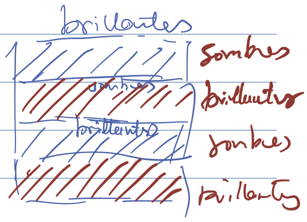
Frange brillant : $I_{max} = 4I_0\left(1 + \left|\cos\frac{\pi a}{\lambda_0}\alpha\right|\right)$

Frange sombre : $I_{min} = 4I_0\left(1 - \left|\cos\frac{\pi a}{\lambda_0}\alpha\right|\right)$

3\. Le contraste : $\gamma = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \left|\cos\frac{\pi a \alpha}{\lambda_0}\right|$

α	$\frac{\lambda_0}{8a}$	$\frac{\lambda_0}{4a}$	$\frac{3\lambda_0}{8a}$	$\frac{\lambda_0}{2a}$
γ	0,924	0,707	0,383	0

cas



les 2 systèmes de franges ont un déplacement $(m+\frac{1}{2})$ interfranges

4\. L'éclairement uniforme correspond à $\gamma = 0$

$I_{max} = I_{min} = I$

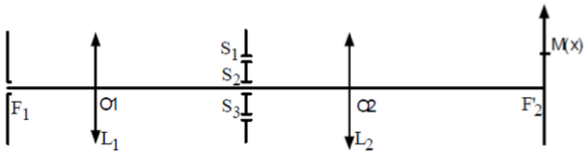
Déjà montré dans la question 3, on a $\alpha = \frac{\lambda_0}{2a}$.

$a_0 = \frac{\lambda_0}{2\alpha}$, A.N. $a_0 = \frac{550 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{\pi}{180}} = 0{,}028\,m$ Pour distinguer 2 étoiles séparées de $2''$.

$a_0 = 7{,}1\,m$ si $\alpha = 8\times10^{-3}\,''$ C'est un dispositif grand !

Exercice 3-5 : Expérience de Young avec trois trous

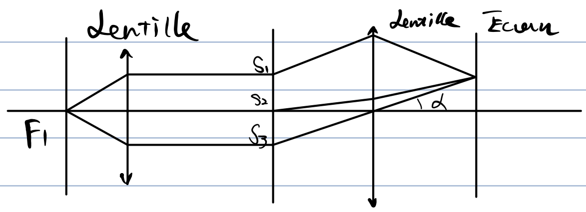
On considère le dispositif ci-dessous. (L_1) et (L_2) sont deux lentilles convergentes. F_1 est le foyer objet de (L_1), F_2' le foyer image de (L_2). S_1, S_2, S_3 sont trois fentes parallèles équidistantes. $S_1S_2 = d$. La fente F_1 est éclairée par une onde monochromatique (λ). Les deux lentilles ont la même distance focale f'.



1. Calculer la différence de marche $(S_2M) - (S_1M)$ des ondes issues de deux fentes voisines interférant en $M(x)$ sur l'écran.
2. On note I_0 l'éclairement que produirait en M la fente S_1 si elle était seule. Calculer l'éclairement en M en fonction de x dans les deux cas suivants :
   (a) Les trois fentes ont la même largeur (noter l'éclairement $I_1(x)$). Prévoir avec très peu de calcul la valeur de l'éclairement maximal. En raisonnant sur les représentations géométriques des amplitudes complexes, prévoir simplement les positions des zéros d'éclairement.

   (b) S_2 a une largeur double de S_1 et S_3, ce qui entraîne que l'onde émise a une amplitude double (noter l'éclairement $I_2(x)$). Prévoir avec très peu de calcul la valeur de l'éclairement maximal.
3. Rappeler l'expression de l'éclairement $I_3(x)$ que produirait sur l'écran deux fentes distantes de d (fentes d'Young).
4. À l'aide de Python, Matlab ou autre logiciel, tracer sur un même graphe les fonctions $I_1(x), I_2(x), I_3(x)$ et commenter.

1.



La difference de chemin optique $(S_2M)-(S_1M)$ $\delta_{2/1} = d \cdot \sin\alpha - \frac{n a \dots}{1}$

Pour les rayons proche de l'axe optique, $\alpha \to 0 \Rightarrow \sin\alpha = \alpha$

Cela implique $\delta_{2/1} = d.\alpha$

De même, $\delta_{3/2} = d.\alpha$

2a) On utilise l'amplitude complexe, $\begin{cases} \underline{A}_1(\alpha) = A \cdot \exp(-j\varphi_1) \\ \underline{A}_3(\alpha) = A \cdot \exp(-j\varphi_3) \end{cases}$

Les 3 rayons cohérentes, $\underline{A}(\alpha) = \sum_{i=1}^{3} \underline{A}_i(\alpha)$

$\exp(-j\delta_{3/2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda})$

$\exp(j\delta_{2/1} \cdot \frac{2\pi}{\lambda})$

$= A\exp(-j\varphi_2)\left[\exp(-j\varphi_1 + j\varphi_2) + 1 + \exp(-j\varphi_3 + j\varphi_2)\right]$

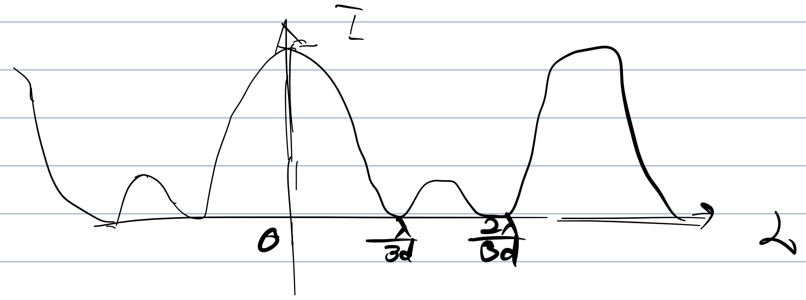
$= A\exp(-j\varphi_2)\left[1 + 2\cos\left(d\alpha\frac{2\pi}{\lambda}\right)\right]$

On note $|A\exp(-j\varphi_2)|^2 = I_0$, $I_{max} = I_0\left(1 + 2\cos\left(\frac{2\pi d\alpha}{\lambda}\right)\right)^2_{max}$

$= 9I_0 \quad (I_{max} = N^2 I_0)$

$I_{min} = 0$, $\cos\left(\frac{2\pi d\alpha}{\lambda}\right) = -\frac{1}{2}$

$I_{max,\ secondaire} = I_0(1-2)^2 = I_0$



2b) $A_2(\alpha) = 2A\exp(-i\varphi_2)$, car la largeur de S_2 double

$A(\alpha) = 2A\exp(-i\varphi_2)\left[1+\cos\left(d\alpha\frac{2\pi}{\lambda}\right)\right]$

$I_2(\alpha)_{,max} = 4I_0\left[1+\cos\left(d\alpha\frac{2\pi}{\lambda}\right)\right]^2_{max} = 16 I_0$

3) Pour le cas de 2 fentes, selon le polycopié, on a :

$I_3(\alpha) = 2I_0\left(1+\cos\left(d\alpha\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\right)\right)$