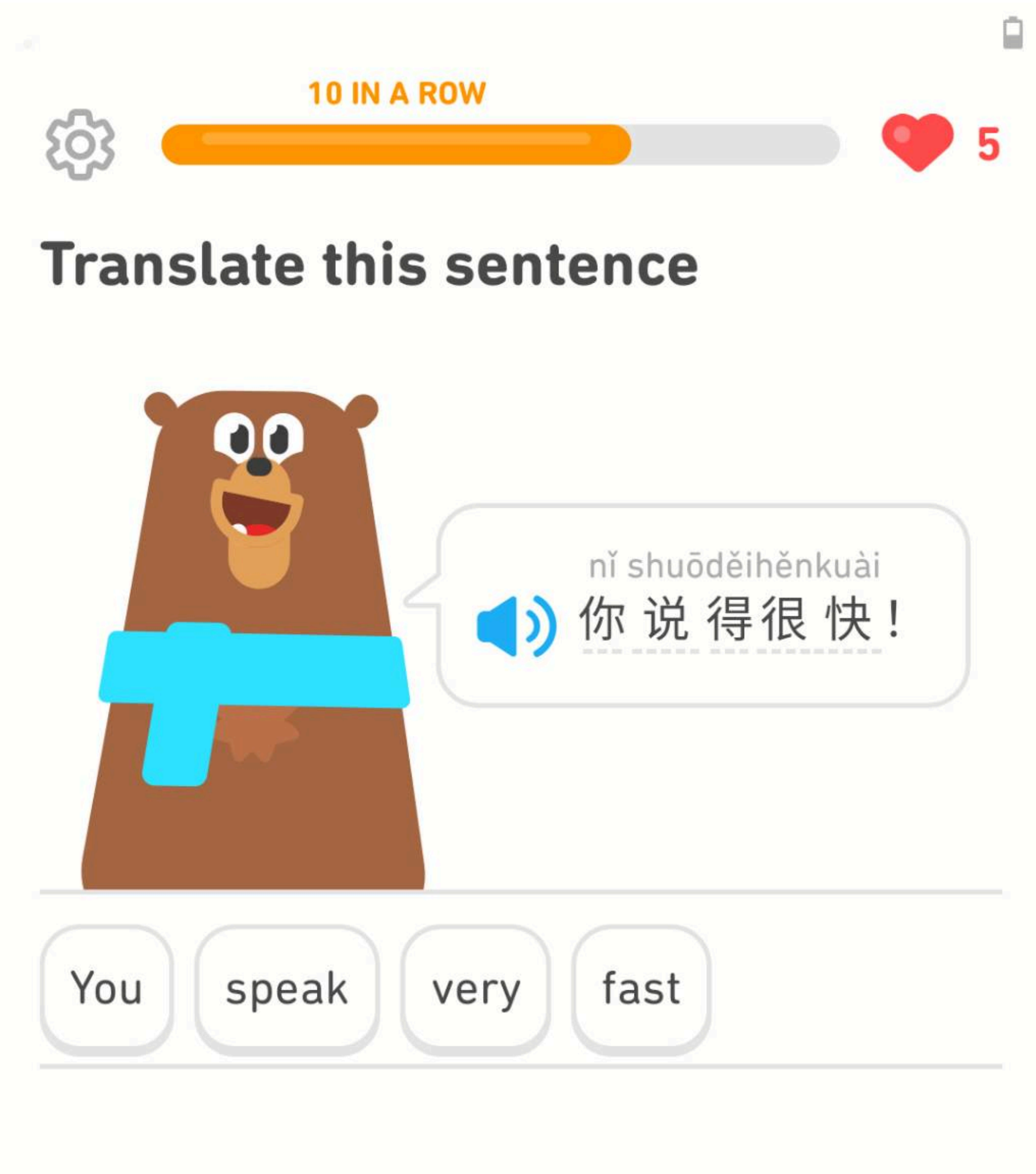
Topologie et Calcul différentiel

Semaine 2 : Propriétés de la fonction différentielle

Mardi 21 Février 2023

NB : Il y aura un QCM en ligne jeudi soir

Message subliminal du mardi soir



Rappels utiles pour cette séance

Comment calcule-t-on la différentielle d'une application ?

- On écrit $f(x_0 + h)$ sous cette forme :

$$f(x_0+h) = \underbrace{\text{terme constant}}_{f(x_0)} + \underbrace{\text{terme linéaire en } h}_{df_{x_0}(h)} + \underbrace{\text{terme négligeable}}_{\underset{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(|h|)}$$

Propriétés de la différentielle

Propriété

1. Si $f : O \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en x_0, alors f est continue en x_0.
2. Si $f : O \to \mathbb{R}^p$ est constante sur O, alors ....

   ....
3. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est linéaire, alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $df_{x_0} = \ldots$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
4. Si $f : O \to \mathbb{R}^p$ et $g : O \to \mathbb{R}^p$ sont différentiables en x_0 et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable en x_0 et $d(\lambda f + \mu g)_{x_0} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriétés de la différentielle

Preuve

1. La fonction $df_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Nous verrons au chapitre "Topologie" que les applications linéaires définies sur un espace vectoriel normé de dimension finie sont continues.
2. Si f est constante sur O, pour tout $x_0 \in O$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que négligeable, $o(h)$
$x_0 + h \in O$, $f(x_0 + h) =$ …… $f(x_0) = f(x_0) + 0 + 0$ ……
Donc …… $df_{x_0}(h) = 0$, donc …… $df_{x_0}(h) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)}$ ……
3. Si f est linéaire sur O, pour tout $x_0 \in O$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que
$x_0 + h \in O$, $f(x_0 + h) =$ …… $f(x_0) + f(h) + 0 \cdot \|h\|$ ……
Donc …… f est différentiable en x_0 , $h \to 0_{\mathbb{R}^n}$ …… $h \mapsto f(h)$, $df_{x_0} = f$
4. Exercice

Le cas des fonctions composées

Propriété (Différentielle d'une fonction composée)

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, soit $x_0 \in O$ et soit $f : O \to \mathbb{R}^p$. Soit également O' un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ contenant $f(O)$ et soit $g : O' \to \mathbb{R}^q$. On peut alors considérer

$$g \circ f : O \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} f(O) \subset O' \subset \mathbb{R}^p \xrightarrow{g} \mathbb{R}^q$$

Si f est différentiable en x_0 et si g est différentiable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est différentiable en x_0 et

$$d(g \circ f)_{x_0} = dg_{f(x_0)} \circ df_{x_0} \quad (1)$$

Le cas des fonctions composées

Preuve : Soit $x_0 \in O$, et soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in O$.

Alors : $(g \circ f)(x_0 + h) = g[f(x_0+h)]$

$$= g(\underbrace{f(x_0)}_{X_0} + \underbrace{df_{x_0}(h) + o(\|h\|)}_{H})$$

dépend de h

$$= g(f(x_0)) + dg_{f(x_0)}(df_{x_0}(h) + o(\|h\|)) + o(H)$$

$$= g(f(x_0)) + dg_{f(x_0)}(df_{x_0}(h)) + dg_{f(x_0)}(o(\|h\|)) + o(H)$$

$$= \underbrace{g(f(x_0))}_{\text{constante}} + \underbrace{dg_{f(x_0)} \circ df_{x_0}(h)}_{\text{linéaire}} + \underbrace{o(\|h\|)}_{\text{négligeable}}$$

Donc. $d(g \circ f)_{x_0} = dg_{f(x_0)} \circ df_{x_0}$

Matrice jacobienne

Définition

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, soit $x_0 \in O$ et soit $f : O \to \mathbb{R}^p$ différentiable en x_0. La matrice de la différentielle $\mathrm{d}f_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ de f en x_0 dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^p$ est appelée la matrice jacobienne de f en x_0, notée $\mathrm{J}f_{x_0}$. On a donc

$$\mathrm{J}f_{x_0} = \left[\partial_j f_i(x_0)\right]_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}} = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \partial_2 f_1(x_0) & \cdots & \partial_n f_1(x_0) \\ \partial_1 f_2(x_0) & \partial_2 f_2(x_0) & \cdots & \partial_n f_2(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_p(x_0) & \partial_2 f_p(x_0) & \cdots & \partial_n f_p(x_0) \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

Bien comprendre pour ne pas confondre n et p

- C'est la matrice de l'application df_{x_0} donc elle mange des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ et recrache des vecteurs dans $\mathbb{R}^p$ donc elle appartient à $M_{p,n}(\mathbb{R})$
- La fonction f a p lignes et n colonnes.

Composition = produit matriciel

La formule de la différentielle composée, qui est une égalité d'applications linéaires, se traduit de deux façons:

1. en une égalité matricielle (la composition devient un produit matriciel):
$$\mathrm{J}(g\circ f)_{x_0} = \left(\mathrm{J}_{f(x_0)}g\right)\mathrm{J}f_{x_0}$$
2. en une égalité vectorielle (scalaire si $p = 1$): pour tout $k \in$ ....,

$$\partial_k(g\circ f)(x_0) = \text{la } k\text{-ième colonne de}$$

$$J(g\circ f)_{x_0} = Jg_{f(x_0)} \cdot Jf_{x_0}$$

$$= \sum_{l=1}^{p} \partial_l g(f(x_0)) \cdot \partial_k f_l(x_0)$$

Coordonnées polaires et différentielle le long d'une courbe

Exemple 1.5 – Coordonnées polaires

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable et soit

$$P : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{cases}$$

Comme les deux composantes de P sont différentiables, alors $f \circ P$ aussi. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \partial_1(f\circ P)(r,\theta) &= \partial_1 f\big(P(r,\theta)\big)\partial_1 P_1(r,\theta) + \partial_2 f\big(P(r,\theta)\big)\partial_1 P_2(r,\theta) \\ &= \partial_1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \partial_2 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta \\ \partial_2(f\circ P)(r,\theta) &= \partial_1 f\big(P(r,\theta)\big)\partial_2 P_1(r,\theta) + \partial_2 f\big(P(r,\theta)\big)\partial_2 P_2(r,\theta) \\ &= -\partial_1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\sin\theta + \partial_2 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\cos\theta \end{aligned}$$

On retrouve les formules bien connues des physiciens. En effet, en notant (abusivement) toujours f pour la fonction $f \circ P$, $e_r = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $e_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$, les formules ci-dessus peuvent s'écrire

$$\operatorname{grad} f(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)\, e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta)\, e_\theta$$

Exemple 1.6 – Différentielle le long d'une courbe

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable et soit $f : O \to \mathbb{R}^p$ différentiable, où O est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant $\gamma(I)$. Alors $f \circ \gamma$ est dérivable et, pour tout $t \in I$,

$$(f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{d}(f\circ\gamma)_t(1) = \mathrm{d}f_{\gamma(t)}\big(\mathrm{d}\gamma_t(1)\big) = \mathrm{d}f_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)$$

Différentielle d'une application bilinéaire

Proposition

Soit $B : \mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2} \to \mathbb{R}^q$ une application bilinéaire[a], soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, soit $x_0 \in O$ et soient $f : O \to \mathbb{R}^{p_1}$, $g : O \to \mathbb{R}^{p_2}$ deux fonctions différentiables en x_0. Alors $B(f, g) : O \to \mathbb{R}^q$ est différentiable en x_0 et

$$\mathrm{d}\big(B(f, g)\big)_{x_0} : h \longmapsto B\big(\mathrm{d}f_{x_0}(h), g(x_0)\big) + B\big(f(x_0), \mathrm{d}g_{x_0}(h)\big) \tag{2}$$

[a] C'est-à-dire que $B(\cdot, y_0) : x \mapsto B(x_0, y_0)$ (avec $y_0 \in \mathbb{R}^{p_2}$ fixé) et $B(x_0, \cdot) : y \mapsto B(x_0, y)$ (avec $x_0 \in \mathbb{R}^{p_1}$ fixé) sont linéaires.

Preuve : admise (outils de Topologie pas encore introduits)

Différentielle d'une application bilinéaire

Exercice

- Trouver la différentielle de l'application $B(f,g) = f \times g$.
- Trouver la différentielle de l'application $B(f,g) = \langle f, g \rangle$.

① $d(f \times g)_{x_0} = dB(f,g)_{x_0}$ où $B : E \times E \to E$

$(f, g) \mapsto f \times g$

On remplace x par une fonction B formule

$= B(df_{x_0}, g) + B(f, dg_{x_0})$

On re-remplace B par x .

$= df_{x_0} \times g + f \times dg_{x_0}$

② $d\langle f, g \rangle_{x_0} = dB(f,g)_{x_0}$ où $B : E \times E \to E$

(f, g)

$= B(df_{x_0}, g) + B(f, dg_{x_0})$

$= \langle df_{x_0}, g \rangle + \langle f, dg_{x_0}$

Différentielle de la norme

Exercice

Calculer la différentielle de la norme euclidienne.

Si $x \in \mathbb{R}^n$, alors $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = f \circ B \circ F$ où

f : .... B : .... F : ....

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Proposition

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : O \to \mathbb{R}^p$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

1. f admet des dérivées partielles sur O et ces dérivées partielles sont continues sur O;
2. f est différentiable sur O et $\mathrm{d}f$ est continue sur O.

Preuve : admise

Définition

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur O si elle vérifie les conditions précédentes. On note $\mathcal{C}^1(O, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de O à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Exemple 1.8 – Caractère $\mathscr{C}^1$ des fonctions polynomiales

Les fonctions polynomiales sur O (voir l'exemple 1.1) sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur O.

En utilisant la proposition 1.2, il est immédiat que $\mathscr{C}^1(O, \mathbb{R}^p)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension infinie d'après l'exemple 1.8). En particulier, il est stable par combinaison linéaire. Si $p = 1$, il est aussi stable par produit et par quotient (si le dénominateur ne s'annule pas). De plus, $\mathscr{C}^1(O, \mathbb{R}^p) \subset \mathscr{C}^0(O, \mathbb{R}^p)$ d'après le point 1 de la proposition 1.2. Enfin, la composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ est encore de classe $\mathscr{C}^1$.

Remarque 1.10 – Et aux ordres supérieurs ?

Il est bien sûr possible de définir les espaces $\mathscr{C}^k(O, \mathbb{R}^p)$ pour $k \geqslant 1$ et $k = +\infty$.

- Du point de vue des dérivées partielles, c'est assez clair. L'espace $\mathscr{C}^k(0, \mathbb{R}^p)$ est simplement l'espace des fonctions qui admettent des dérivées partielles jusqu'à l'ordre k et telles que toutes les dérivées partielles d'ordre k

$$\partial^k_{i_1,\ldots,i_k} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \partial_{i_1} \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f$$

  soient continues sur O. L'espace $\mathscr{C}^\infty(0, \mathbb{R}^p)$ est l'intersection des $\mathscr{C}^k(0, \mathbb{R}^p)$ pour $k \geqslant 1$.
- Du point de vue des différentielles, la situation est plus compliquée. On a envie de « différentier la différentielle », qui est une application $O \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. La différentielle seconde serait alors une application $O \to \mathscr{L}\big(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)\big)$ qu'on peut heureusement identifier comme une application de O dans les applications bilinéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Le cours de calcul différentiel de troisième année reviendra en détails sur cette notion et ses applications, notamment la recherche d'extremums.
- Rappelons le *théorème de Schwarz* qui nous dit que si f est de classe $\mathscr{C}^2$ alors

$$\partial^2_{i,j} f = \partial^2_{j,i} f$$

  pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. L'ordre de dérivation n'a donc pas d'importance.

Différentielle seconde

Comment calcule-t-on la différentielle seconde d'une application ?

- Un fonction admet une différentielle seconde au point x si si différentielle est différentiable. Donc on écrit df_{x_0+h} sous cette forme :

$$\underbrace{d_{x_0+h}f}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)} = \underbrace{\text{terme constant}}_{d_{x_0}f} + \underbrace{\text{terme linéaire en } h}_{d^2_{x_0}f(h)} + \underbrace{\text{terme négligeable}}_{\underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{o}(\|h\|)}$$

Ceci est une égalité dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Elle peut donc s'écrire également ainsi :

- Pour tout $k \in \mathbb{R}^n$,

$$d_{x_0+h}f(k) = \overbrace{\text{terme constante en } h}^{\substack{\text{linéaire en } k \\ d_{x_0}f(k)}}$$

$$+ \underbrace{\text{terme linéaire en } h}_{\text{linéaire en } k} + \text{terme négligeable}$$

Exercice

Exercice

Exercice

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,\, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x,\, y) \neq (0,\, 0) \\ 0 & \text{si } (x,\, y) = (0,\, 0) \end{cases}$$

Montrer que f est différentiable mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice

Exercice