

Table des matières

1	Dualité	3
1.1	Étude du dual	4
1.2	Hyperplans	12
2	Endomorphismes particuliers d'un espace euclidien	27
2.1	Adjoint d'un endomorphisme	27
2.2	Endomorphismes auto-adjoints	34
2.3	Automorphismes orthogonaux	51
2.4	Endomorphismes antisymétriques	64
2.5	Bilan	72
2.6	Quelques décompositions matricielles	76
2.7	Méthodes numériques	84
2.7.1	Itération	84
2.7.2	Méthode de quadrature de Gauss	87

3	Réduction des endomorphismes	97
3.1	Éléments propres	98
3.2	Polynôme caractéristique	119
3.3	Diagonalisation	126
3.4	Trigonalisation	135
3.5	Réduction simultanée	144
3.6	Applications de la réduction	152
3.6.1	Systèmes linéaires récurrents à coefficients constants	152
3.6.2	Systèmes linéaires différentiels à coefficients constants	173
3.6.3	Espaces stables	187
4	Formes quadratiques	197
4.1	Cadre général	197
4.2	Cas euclidien	216
5	Compléments sur les espaces hermitiens	227
5.1	Formulation vectorielle	227
5.1.1	Propriétés des espaces préhilbertiens complexes	229
5.1.2	Propriétés des espaces hermitiens	239
5.2	Formulation matricielle	248

Chapitre 1

Dualité

注释 1.1

本小节介绍了线性空间的对偶空间和超平面。

1.1 Étude du dual

Définition 1.1 – Dual d'un espace vectoriel

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, on appelle *dual de E* et on note

$$E^{\star} \stackrel{\text{Not}}{=} \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$$

Les éléments de E^{\star} s'appellent des *formes linéaires*^a.

^a. Le mot « forme », désigne en général une application à valeurs dans le corps de base. On aura des formes linéaires, des formes bilinéaires, etc.

Propriété 1.1

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Alors E^{\star} est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

对偶空间本身也是线性空间，它的元素是线性映射也称作线性泛函。

Démonstration

C'est un cas particulier de la propriété 1.23, page 41 de [1].

Propriété 1.2

Si E est de dimension finie, alors E^* est de dimension finie et

$$\dim E = \dim E^*$$

En dimension finie, les deux espaces sont donc isomorphes. C'est faux en dimension infinie.

在有限维时，线性空间 E 和它的对偶空间 E^* 是同构的。

Démonstration

Si E est de dimension finie, c'est un cas particulier de la proposition 1.8, page 57 de [1].

$$\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E \times \dim \mathbb{K} = \dim E \times 1 = \dim E$$

Si E n'est pas de dimension finie, voir l'exemple ci-dessous.

Exemple 1.1 – Dual et espace non isomorphes

Prenons

$$E = \text{Vect}(\{x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}\}), \text{ sous-espace vectoriel du } \mathbb{Q}\text{-espace vectoriel } \mathcal{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$$

On a alors

— E est dénombrable car

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\text{Vect}(\{x \mapsto x^k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\})}_{\text{en bijection avec } \mathbb{Q}^{n+1} \text{ donc } \mathbb{Q}},$$

et une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

— E^\star n'est pas dénombrable car

E^\star isomorphe à (donc en bijection avec) $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$

par l'isomorphisme usuel

$$\varphi \mapsto (\varphi(x \mapsto x^n))_{n \in \mathbb{N}}$$

Or, $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable (voir le procédé diagonal de Cantor)^a.

Remarquons que le dual est toujours *plus gros que l'espace de départ* !

C'est donc un isomorphisme non-géométrique.

a. Ceci est aussi un exemple où

$\mathcal{L}(E, E')$ n'est pas isomorphe à $\mathcal{L}(E', E)$

Définition 1.2 – Famille duale

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E , on peut définir la *famille duale* associée $(e_i^*)_{i \in I} \in (E^*)^I$ par

$$\forall j \in I, e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

Remarque importante 1.1 – Notation impropre

Cette notation est très dangereuse ! En effet, si l'on change *un des vecteurs* e_i , alors on change *tous les vecteurs* e_i^* .

Propriété 1.3

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E . La famille duale associée est une partie libre de E^* .

Démonstration

Soit (i_1, \dots, i_p) une sous-famille quelconque finie de I d'éléments distincts deux-à-deux et soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot e_{i_k}^* = 0_{E^*}$$

Soit $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Par définition de la famille duale, on a

$$\underbrace{\sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot e_{i_k}^*(e_{i_j})}_{=\lambda_j} = 0_{E^*}(e_j) = 0$$

donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$, ce qui montre que la famille duale $(e_i^*)_{i \in I}$ est libre.

Propriété 1.4 – Base duale

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Si E est de dimension finie et si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , alors la famille duale associée est une base de E^* (dite *base duale*).

简称为 E^* 的对偶基底。

Démonstration

D'après la propriété précédente, c'est une famille libre à n éléments. Or $\dim E^* = \dim E = n$ (propriété 1.2, page 5) donc c'est bien une base de E^* .

Propriété 1.5

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E . Si E est de dimension infinie, alors la famille duale associée *n'est jamais* génératrice.

Démonstration

Considérons la forme linéaire $f \in E^*$ définie par $f(e_i) = 1$ pour tout $i \in I$. Si la famille duale associée à $(e_i)_{i \in I}$ était génératrice, il existerait une sous-famille (i_1, \dots, i_p) finie de I tel que $f \in \text{Vect}(\{f_{i_1}, \dots, f_{i_p}\})$. En considérant $j \in I$ tel que $j \notin \{i_1, \dots, i_p\}$ (possible car E est de dimension infinie donc I est infini), on a $f(e_j) = 1$ mais $f_{i_1}(e_j) = \dots = f_{i_p}(e_j) = 0$, contradiction.

Proposition 1.1 – Base ante-duale

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^* , alors il existe une unique base (e_1, \dots, e_n) de E , telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i^* = \varphi_i$$

Cette base est appelée base ante-duale de la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Démonstration

Soit l'application définie par

$$\phi : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{K}^n \\ x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \end{cases}$$

Cette application a les propriétés suivantes

- ϕ est linéaire.
- ϕ est injective. Donc, comme E et \mathbb{K}^n ont même dimension n , ϕ est un isomorphisme.
- Considérons (b_1, \dots, b_n) la base canonique de \mathbb{K}^n . Comme un isomorphisme envoie une base sur une base, si l'on pose

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i = \phi^{-1}(b_i)$$

la famille obtenue convient, et c'est clairement la seule.

Remarque 1.2

Comment démontrer qu'une famille de formes linéaires est une base ? En utilisant la base ante-duale (si l'on est capable de la trouver). On veut étudier $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille de formes linéaires de E^* . Si on considère la base ante-duale (e_1, \dots, e_n) ,

(ou la famille que l'on imagine être la base ante-duale), c'est alors facile. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ des scalaires tels que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \varphi_k = 0_{E^*}$$

alors

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \underbrace{\varphi_k(e_j)}_{\delta_{k,j}} = \lambda_j = 0$$

注释 1.2

设 (e_1, \dots, e_n) 是 E 的基底, (e_1^*, \dots, e_n^*) 是 E^* 的对偶基底, 我们有如下性质:

1. 当 $f = k_1 \cdot e_1^* + \dots + k_n \cdot e_n^* \in E^*$, $x = l_1 \cdot e_1 + \dots + l_n \cdot e_n \in E$ 时,

$$f(x) = k_1 l_1 + \dots + k_n l_n$$

2. $x \in E$ 可以表示成,

$$x = e_1^*(x) \cdot e_1 + \dots + e_n^*(x) \cdot e_n$$

3. $f \in E^*$ 可以表示成,

$$f = f(e_1) \cdot e_1^* + \dots + f(e_n) \cdot e_n^*$$

Exercice(s) 1.1

1.1.1 Soit $E = \mathbb{K}^n$, n impair, pour $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, on convient de noter $x_{n+1} = x_1$. On pose

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_i : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ \underline{x} \mapsto x_i + x_{i+1} \end{cases}$$

(a) Démontrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* .

(b) Calculer sa base ante-duale.

1.1.2 Soit

$$E = \text{Vect}(\{x \mapsto x^k, k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket\})$$

(a) Calculer $\dim E$.

(b) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a < c < b$, on pose

$$\varphi_1 : f \mapsto f(a), \varphi_2 : f \mapsto f(b), \varphi_3 : f \mapsto f(c) \text{ et } \varphi_4 : f \mapsto \int_a^b f(t) dt$$

i. À quelle CNS la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_4)$ est-elle une base de E^* ?

ii. Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, exprimer φ_4 en fonction des trois autres.

iii. En déduire une méthode de calcul approché d'une intégrale.

iv. Lorsque la fonction $f \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{R})$, évaluer l'erreur de méthode.

1.1.3 Trouver les formes linéaires ψ définies sur $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (f, g) \in E^2, \psi(fg) = \psi(f)\psi(g)$$

1.1.4 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, soit E_1, E_2, \dots, E_p des sous-espaces vectoriels de E , donner une CNS pour que

$$\forall (\varphi_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in \prod_{k=1}^p E_k^\star,$$

$$\left[\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \varphi_i|_{E_i \cap E_j} = \varphi_j|_{E_i \cap E_j} \right] \implies \left[\exists \varphi \in E^\star, \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \varphi|_{E_i} = \varphi_i \right]$$

1.2 Hyperplans

Définition 1.3 – Hyperplan d'un espace vectoriel

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, on appelle *hyperplan* de E , tout sous-espace vectoriel H tel que

$$\exists \varphi \in E^\star \setminus \{0_{E^\star}\}, H = \text{Ker}(\varphi)$$

L'écriture

$$(H) \quad \varphi(x) = 0$$

s'appelle *équation de l'hyperplan* H .

超平面是线性空间的子空间，它是对偶空间中线性泛函的核空间，我们可以写出超平面方程。

Remarque 1.3

Il n'y a pas unicité de l'équation, car, si φ convient, alors, quelque soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda.\varphi$ convient.

Définition 1.4 – Codimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E , on dit que F est de *codimension finie*, si F possède un supplémentaire de dimension finie. La dimension commune de tous les supplémentaires de F est appelée *codimension de F* et notée (si $E = F \oplus G$)

$$\text{codim } F \stackrel{\text{Not}}{=} \dim G$$

称作子空间的余维数，这一定义简化了线性空间 E 和子空间 F 是无限维时性质和定理的表示。

Remarque 1.4

Si E est de dimension finie, tous les sous-espaces vectoriels de E sont de codimension finie et si F est un sous-espace vectoriel de E , alors

$$\text{codim } F = \dim E - \dim F$$

Cette notion n'est donc pas intéressante en dimension finie, elle nous sera surtout utile en dimension infinie.

Exemple 1.2 – Hyperplans

1. Dans \mathbb{K}^3 , tout plan est un hyperplan, dans \mathbb{K}^2 , ce sont les droites (ces sous-espaces vectoriels sont usuellement décrits par *une* équation).
2. Dans $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si $a \in \mathbb{R}$, le sous-espace vectoriel défini par

$$F_a = \{f \in E, f(a) = 0\}$$

est un hyperplan d'équation $f(a) = 0$. F_a est de plus de codimension 1, car

$$E = F_a \oplus \underbrace{\mathbb{K} \cdot (x \mapsto 1)}_{\text{de dimension 1}}$$

en effet

$$\forall f \in E, f = \underbrace{(f - f(a))}_{\in F_a} + \underbrace{f(a)}_{\in \mathbb{K} \cdot (x \mapsto 1)}$$

et cette écriture est clairement unique.

Proposition 1.2 – Caractérisation des hyperplans

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, H un sous-espace vectoriel de E , alors

$$H \text{ hyperplan de } E \iff \text{codim } H = 1$$

Démonstration

- (\Rightarrow) Soit $\varphi(x) = 0$ une équation de H , comme φ est non nulle, on peut trouver un vecteur $a \in E$, tel que $\varphi(a) \neq 0$.
Alors

$$\forall x \in E, x = \underbrace{\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a\right)}_{\in H} + \underbrace{\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a}_{\in \mathbb{K} \cdot a}$$

donc

$$E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a, \text{ car } a \notin H$$

- (\Leftarrow) Si $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a$, $a \in E \setminus \{0_E\}$, alors, on peut prendre comme forme linéaire associée à H

$$\varphi \text{ telle que } \varphi|_H = 0_{H^*} \text{ et } \varphi(a) = 1$$

Remarque 1.5

Si E est de dimension finie, les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de dimension $\dim E - 1$.

当 E 的维数为 n 时, 超平面是 E 的 $n - 1$ 维子空间, 不同的线性泛函对应不同的超平面。

Exemple 1.3 – Hyperplans

1. Dans \mathbb{R}^2 , une équation de la droite (hyperplan) engendrée par $(1, 2)$ est, par exemple

$$2x - y = 0$$

2. Dans \mathbb{R}^3 , une équation du plan (hyperplan) engendré par $(1, 1, 0)$ et $(-1, 0, 2)$ est, par exemple

$$2x - 2y + z = 0$$

3. Dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, un supplémentaire de la droite engendrée par $x \mapsto x$, pourrait être donné par une équation du type

$$f(a) = 0 \text{ si } a \neq 0$$

Théorème 1.1 – Faisceaux d'hyperplans

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in E^{\star n}$, alors

$$\forall \psi \in E^{\star}, \psi \in \text{Vect}(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}) \iff \text{Ker}(\psi) \supset \bigcap_{k=1}^n \text{Ker}(\varphi_k)$$

Démonstration

- (\Rightarrow) Immédiat.
- (\Leftarrow) Par récurrence sur n .
 - (*Initialisation*) si $n = 1$ et $\text{Ker}(\psi) \supset \text{Ker}(\varphi)$, si φ est nulle, ψ l'est aussi. Si φ est non nulle, alors, il existe un

vecteur $a \in E$, $\varphi(a) \neq 0$. Alors

$$\psi = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)} \cdot \varphi$$

Il suffit de le vérifier pour $x = h + \lambda \cdot a$, où $h \in \text{Ker}(\varphi)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- (*Hérédité*) supposons le résultat vrai au rang $p \geq 1$, soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_{p+1})$ des formes linéaires de E et $\psi \in E^*$ telle que

$$\text{Ker}(\psi) \supset \bigcap_{k=1}^{p+1} \text{Ker}(\varphi_k)$$

Si φ_{p+1} est nulle, c'est terminé. Supposons donc φ_{p+1} non nulle et posons $H = \text{Ker}(\varphi_{p+1})$. On a alors

$$\text{Ker}(\psi|_H) \supset \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}(\varphi_k|_H)$$

on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence qui nous donne

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \psi|_H = \sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot \varphi_k|_H$$

On a alors

$$\text{Ker} \left(\psi - \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot \varphi_k \right) \right) \supset \text{Ker}(\varphi_{p+1})$$

donc, d'après l'initialisation

$$\exists \lambda_{p+1} \in \mathbb{K}, \psi = \sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k \cdot \varphi_k$$

Exemple 1.4 – Hyperplans de \mathbb{R}^3

Dans \mathbb{R}^3 , les hyperplans sont des plans et on a la situation géométrique de la figure 1.1, page suivante. Notons $H_1 = \text{Ker}(\varphi_1)$, $H_2 = \text{Ker}(\varphi_2)$, si φ_1 et φ_2 sont indépendantes, les deux plans se coupent suivant la droite D . Soit K un plan contenant D (comme sur le dessin), où $K = \text{Ker}(\psi)$, le théorème nous assure alors que

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0), \psi = \lambda_1 \cdot \varphi_1 + \lambda_2 \cdot \varphi_2$$

Le plan K a donc pour équation

$$(K) \quad \lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) = 0$$

Cette équation est définie à un coefficient de proportionnalité près, donc

$$\cos(\theta) \varphi_1(x) + \sin(\theta) \varphi_2(x) = 0$$

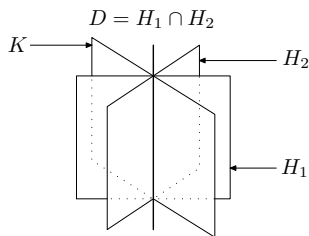
est l'équation de K , pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$, (qui vérifie $\cos(\theta) = \lambda_1 / \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$, et $\sin(\theta) = \lambda_2 / \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$).

Remarque 1.6

Le résultat de cette proposition est particulièrement intéressant en géométrie affine. Ainsi si $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_p$ sont des hyperplans affines (espaces affines ayant pour directions des hyperplans vectoriels) d'intersection non vide (soit A un point de l'intersection), d'équations

$$(\mathcal{H}_1) \quad \varphi_1(\overrightarrow{A_1 M}) = 0, \dots, (\mathcal{H}_p) \quad \varphi_p(\overrightarrow{A_p M}) = 0$$

Figure 1.1 – Hyperplans de \mathbb{R}^3



alors, pour tout hyperplan \mathcal{H} d'équation $\psi(\overrightarrow{AM}) = 0$, contenant cette intersection,

$$\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \psi = \sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot \varphi_k$$

Exemple 1.5 – Utilisation des faisceaux d'hyperplans

Soit $V = \mathbb{R}^3$, l'espace usuel muni de sa structure affine euclidienne usuelle. Soit D une droite affine et A un point, cherchons les plans tangents à la sphère de centre A de rayon 1, contenant D . Par exemple. Soit D la droite définie par $4x + y + z = 0$, $2x + 5y + 3z + 4 = 0$. Cherchons le plan P contenant D tel que P soit à une distance 1 du point $(1, 1, 1)$.

On va chercher le plan demandé sous la forme

$$(P) \quad \cos(\theta) (4x + y + z) + \sin(\theta) (2x + 5y + 3z + 4) = 0$$

Pour trouver θ , il suffit d'écrire $d((1, 1, 1), P) = 1$.

Théorème 1.2 – Mise en équation des sous-espaces de codimensions finies

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, soit E_1 un sous-espace de E , alors, pour $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\text{codim}(E_1) = p \iff \begin{cases} \exists (\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in E^{\star p}, \text{ indépendantes} \\ E_1 = \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}(\varphi_k) \end{cases}$$

此定理是超平面性质的拓展。

Démonstration

- (\Rightarrow) Si $\text{codim}(E_1) = p$, on peut, par définition trouver un supplémentaire F de dimension p , et une base de F (e_1, \dots, e_p) . Construisons alors, pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la forme linéaire

$$\varphi_k \text{ définie par } \begin{cases} \varphi_k|_{E_1} = 0_{E_1^*} \\ \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, j \neq k, \varphi_k(e_j) = 0 \\ \varphi_k(e_k) = 1 \end{cases}$$

Alors, $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ sont indépendantes et

$$E_1 = \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}(\varphi_k)$$

— (\Leftarrow) Par récurrence sur p .

— (*Initialisation*) C'est la proposition caractérisant les hyperplans comme les espaces de codimension 1.

— (*Hérédité*) Supposons le résultat vrai au rang p et prenons $p+1$ formes linéaires *indépendantes*, $(\varphi_1, \dots, \varphi_{p+1})$ et posons

$$E_1 = \bigcap_{k=1}^{p+1} \text{Ker}(\varphi_k) \text{ et } E_2 = \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}(\varphi_k) \text{ alors } E_1 = E_2 \cap \text{Ker}(\varphi_{p+1})$$

D'après l'hypothèse de récurrence, nous savons que E_2 est de codimension p . Soit F un supplémentaire de E_2 dans E de dimension p .

De plus,

$$\left[\varphi_{p+1} \notin \text{Vect}(\{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}) \right] \implies \left[E_2 \not\subset \text{Ker}(\varphi_{p+1}) \right]$$

On peut donc trouver un vecteur $a \in E_2 \setminus E_1$. Il reste à montrer que

$$E = E_1 \oplus \underbrace{\mathbb{K}.a \oplus F}_{\text{de dimension } p+1}$$

Or, on a

$$E = \text{Ker}(\varphi_{p+1}) \oplus \mathbb{K}.a$$

donc, en utilisant la première question de l'exercice 1.4.2, page 19 de [1], on obtient, puisque $a \in E_2$

$$E_2 = (E_2 \cap \text{Ker}(\varphi_{p+1})) \oplus (E_2 \cap \mathbb{K}.a), \text{ soit } E_2 = E_1 \oplus \mathbb{K}.a$$

Remarque 1.7

C'est ainsi que l'on retrouve que dans l'espace, les droites sont définies par 2 équations.

Remarque 1.8 – Équations non indépendantes

Que se passe-t-il lorsque les formes linéaires (et donc les équations) ne sont pas indépendantes ? Il est immédiat que

$$\text{codim}(E_1) = \text{rang}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$$

Remarque 1.9

En dimension finie, cela permet de calculer des dimensions. On dit souvent que

- la dimension de l'espace est le *nombre de degrés de liberté* ;
- le nombre d'équations indépendantes est le *nombre de contraintes* ;
- la dimension du sous-espace vectoriel est donc égale à « nombre de degré de liberté – nombre de contraintes ».



Cette relation n'est valable qu'avec des contraintes *linéaires* !

Remarque 1.10

Le théorème se généralise facilement à la situation affine. Cependant, l'intersection d'hyperplans affines peut-être vide, aussi faut-il, avant toutes choses, s'assurer qu'elle ne l'est pas ! Puis, en s'appuyant sur un point trouvé de l'intersection, on est ramené au cas vectoriel.

Proposition 1.3

Soit V un espace affine de direction un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ sont des formes linéaires de E indépendantes, et si \mathcal{H}_k est un hyperplan affine de direction $\text{Ker } \varphi_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, alors

$$\bigcap_{k=1}^p \mathcal{H}_k \neq \emptyset$$

Démonstration

Laissé en exercice.

Exercice(s) 1.2

1.2.1 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, soit (x_1, \dots, x_p) des vecteurs de E . Démontrer que

$$(x_1, \dots, x_p) \text{ libre} \iff$$

$$[\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \exists \varphi \in E^*, \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \varphi(x_k) = \lambda_k]$$

1.2.2 (a) $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est-il un hyperplan de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

(b) Démontrer que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est isomorphe à un hyperplan de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1.2.3 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, soit V un sous-espace vectoriel de E^* . On dit que V *sépare les vecteurs*, si

$$\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \implies [\exists \varphi \in V, \varphi(x) \neq \varphi(y)]$$

Démontrer que V sépare les vecteurs si, et seulement si, $V = E^*$.

1.2.4 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on appelle *orthogonal (direct) de A* et on note

$$A^\perp = \{\varphi \in E^*, \forall a \in A, \varphi(a) = 0\}$$

Démontrer que

(a) A^\perp est un sous-espace vectoriel de E^* .

(b) $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$.

Dans la suite A et B sont des sous-espaces vectoriels de E .

(c) $(A \cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$.

(d) $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

(e) Si $E = A \oplus B$, alors A^\perp est isomorphe à B^* .

(f) Si E est de dimension finie, alors $\dim A^\perp = \text{codim } A$.

1.2.5 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et $B \in \mathcal{P}(E^*)$, on appelle *orthogonal (indirect) de B* et on note

$$B^\top = \{x \in E, \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0\}$$

Démontrer que

(a) B^\top est un sous-espace vectoriel de E .

(b) $B^\top = \text{Vect}(B)^\top$.

Dans la suite, A et B sont des sous-espaces vectoriels de E^\star .

(c) $(A + B)^\top = A^\top \cap B^\top$.

(d) $(A \cap B)^\top \supset A^\top + B^\top$.

(e) Si E est de dimension finie, alors

$$\dim B^\top = \text{codim } B$$

(f) En déduire que l'inclusion de la question (d) est une inégalité en dimension finie.

(g) Donner un contre-exemple à l'égalité dans la question (d) lorsque E est de dimension infinie.

(h) Si A est un sous-espace vectoriel de E , comparer

$$A \text{ et } (A^\perp)^\top$$

(i) Si B est un sous-espace vectoriel de E^\star , comparer

$$B \text{ et } (B^\top)^\perp$$

1.2.6 Soit E et E' deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et soit $u \in \mathcal{L}(E, E')$. On définit l'application *transposée de u* et on note

$${}_t u : \begin{cases} E'^\star \rightarrow E^\star \\ \varphi \mapsto \varphi \circ u \end{cases}$$

(a) Démontrer que ${}^t(u \circ v) = {}^t u \circ {}^t v$.

(b) Démontrer que

$$\text{Ker}({}^t u) = \text{Im}(u)^\perp$$

(c) Démontrer que

$$\text{Im}({}^t u) = \text{Ker}(u)^\perp$$

Chapitre 2

Endomorphismes particuliers d'un espace euclidien

2.1 Adjoint d'un endomorphisme

Proposition 2.1 – Adjoint d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors, il existe un unique endomorphisme de E , f^* vérifiant

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, f(y) \rangle = \langle f^*(x), y \rangle$$

Cet endomorphisme s'appelle l'adjoint de f .

Démonstration

1. (*Première démonstration*) Soit $x \in E$ fixé, l'application $y \mapsto \langle x, f(y) \rangle$ est une forme linéaire sur E . D'après le théorème de représentation, il existe un unique $a \in E$, tel que

$$\forall y \in E, \langle x, f(y) \rangle = \langle a, y \rangle$$

On pose donc naturellement, $a = f^*(x)$. Il reste à montrer que f^* est linéaire. Or c'est la composée de deux applications linéaires

$$\begin{cases} E \rightarrow E^* \\ x \mapsto (y \mapsto \langle x, f(y) \rangle) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} E^* \rightarrow E \\ \varphi \mapsto a, \quad \forall y \in E, \varphi(y) = \langle a, y \rangle \end{cases}$$

2. (*Deuxième démonstration*) Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E , alors, pour définir f^* , il suffit de définir la famille $(f^*(e_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, et pour définir chaque $f^*(e_i)$, il suffit de connaître son produit scalaire avec e_j . Il vient alors immédiatement

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle f^*(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, f(e_j) \rangle$$

Il reste alors à vérifier que l'application construite convient, soit que

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, f(y) \rangle = \langle f^*(x), y \rangle$$

Cela se fait en écrivant que, pour $(x, y) \in E^2$

$$x = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle \cdot e_i \text{ et } y = \sum_{j=1}^n \langle e_j, y \rangle \cdot e_j$$

on a alors

$$\langle x, f(y) \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle e_i, x \rangle \langle e_j, y \rangle \langle e_i, f(e_j) \rangle$$

et

$$\langle f^*(x), y \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle e_i, x \rangle \langle e_j, y \rangle \langle f^*(e_i), e_j \rangle$$

Propriété 2.1

— On a immédiatement, pour f et g dans $\mathcal{L}(E)$ et λ dans \mathbb{R}

$$(f + g)^* = f^* + g^*, (\lambda \cdot f)^* = \lambda \cdot f^* \text{ et } (f^*)^* = f$$

— De même

$$(0_{\mathcal{L}(E)})^* = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } (\text{id}_E)^* = \text{id}_E$$

et, pour f et g dans $\mathcal{L}(E)$

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

et, enfin, pour $f \in \mathcal{GL}(E)$

$$f^* \in \mathcal{GL}(E) \text{ et } (f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$$

— On a aussi, pour $f \in \mathcal{L}(E)$

$$\text{Ker}(f^*) = (\text{Im}(f))^{\perp} \text{ et } \text{Im}(f^*) = (\text{Ker}(f))^{\perp}.$$

Démonstration de la dernière propriété (les autres sont évidentes)

1. $(\text{Ker}(f^*) \subset (\text{Im}(f))^{\perp})$ Soit $x \in \text{Ker}(f^*)$ et $y \in \text{Im}(f)$, on a alors l'existence d'un $x_1 \in E$, tel que $y = f(x_1)$. Mais

$$\langle x, y \rangle = \langle x, f(x_1) \rangle = \langle f^*(x), x_1 \rangle = 0$$

Ce qui montre que $\text{Ker}(f^*) \subset (\text{Im}(f))^{\perp}$.

2. $(\text{Ker}(f^*) \supset (\text{Im}(f))^{\perp})$ Soit $x \in (\text{Im}(f))^{\perp}$ et $z \in E$, alors

$$0 = \langle x, f(z) \rangle = \langle f^*(x), z \rangle$$

donc $f^*(x) \in E^{\perp} = \{0_E\}$, ce qui montre que $f^*(x) = 0_E$.

3. $(\text{Im}(f^*) = (\text{Ker}(f))^{\perp})$ On applique l'égalité précédente à f^* , on obtient

$$\text{Ker}(f) = (\text{Im}(f^*))^{\perp}, \text{ donc } (\text{Ker}(f))^{\perp} = \text{Im}(f^*)$$

Proposition 2.2

Soit E un espace vectoriel euclidien, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit E_1 un sous-espace vectoriel de E , alors

$$\left[E_1 \text{ stable par } f \right] \iff \left[E_1^{\perp} \text{ stable par } f^* \right]$$

Démonstration

1. (\Rightarrow) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et E_1 un sous-espace vectoriel de E tel que $f(E_1) \subset E_1$. Soit $x \in E_1^\perp$, pour montrer que $f^*(x) \in E_1^\perp$, nous allons montrer que $f^*(x)$ est orthogonal à tout élément $x_1 \in E_1$. En effet, soit $x_1 \in E_1$

$$\langle f^*(x), x_1 \rangle = \langle x, f(x_1) \rangle = 0$$

car $f(x_1) \in E_1$ et $x \in E_1^\perp$.

2. (\Leftarrow) On applique le sens direct au couple (f^*, E_1^\perp) et on utilise

$$(f^*)^* = f \text{ et } (E_1^\perp)^\perp = E_1$$

car nous sommes en dimension finie !

Exemple 2.1 – Adjoint d'un endomorphisme

1. On a vu en exercice que, si p est un projecteur de E , alors

$$\left[p \text{ projecteur orthogonal} \right] \Longleftrightarrow \left[p^* = p \right]$$

2. Plus généralement, il est facile de calculer l'adjoint d'un projecteur quelconque, comme indiqué sur le dessin de la figure 2.1, page 53. On a en effet

$$p^* \circ p^* = (p \circ p)^* = p^*, \quad \text{Ker}(p^*) = \text{Im}(p)^\perp \text{ et } \text{Im}(p^*) = \text{Ker}(p)^\perp.$$

Exercice(s) 2.1

2.1.1 Soit le produit scalaire sur $E = \text{Vect}(\{x \mapsto x^k, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\})$ défini par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0) Q^{(k)}(0)$$

- (a) Montrer que c'est un produit scalaire sur E .
- (b) En orthonormalisant la base canonique de E , donner une base orthonormée de E .
- (c) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par

$$P \mapsto P'' = f(P)$$

Quel est l'adjoint de f ?

2.1.2 Soit E un espace vectoriel euclidien, et a, b, x_0 trois vecteurs de E . Montrer que

$$\left[\exists f \in \mathcal{L}(E), f(x_0) = a \text{ et } f^*(x_0) = b \right] \iff \left[\langle a, x_0 \rangle = \langle b, x_0 \rangle \right]$$

2.1.3 Soit E un espace vectoriel euclidien, soit (x_1, \dots, x_p) une famille libre de E , calculer la dimension du sous-espace vectoriel de E

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{L}(E), \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(x_i) = f^*(x_i)\}$$

2.1.4 Soit E un espace vectoriel euclidien et

$$A = \{f \in \mathcal{L}(E), f \circ f^* \circ f = f\}$$

(a) Montrer que

$$\left[f \in A \right] \iff \left[f^* \circ f \text{ projecteur orthogonal} \right]$$

(b) Montrer que

$$\left[f \in A \right] \iff \left[\forall x \in (\text{Ker}(f))^{\perp}, \|f(x)\| = \|x\| \right]$$

(c) Soit $f \in A$, montrer que

$$(\text{Ker}(f))^{\perp} = \{x \in E, \|f(x)\| = \|x\|\}$$

2.1.5 Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \leq \|x\|$$

(a) Montrer que

$$\forall x \in E, \|f^*(x)\| \leq \|x\|$$

(b) Montrer que

$$E = \text{Ker}(f - \text{id}_E) \oplus^{\perp} \text{Im}(f - \text{id}_E)$$

(c) Calculer pour $x \in E$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (x + f(x) + \cdots + f^n(x)), \text{ où } f^1 = f \text{ et } f^{k+1} = f \circ f^k, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

2.2 Endomorphismes auto-adjoints

Définition 2.1 – Endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on dit que f est *auto-adjoint* ou *symétrique* si $f^\star = f$. On a donc

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

On note

$$\mathcal{S}(E) = \{f \in \mathcal{L}(E), f^\star = f\}$$

C'est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Exemple 2.2 – Endomorphismes autoadjoints

1. Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs auto-adjoints. Dans une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) adaptée à la somme directe orthogonale

$$E = \text{Ker}(f) \overset{\perp}{\oplus} \text{Im}(f)$$

en notant $p = \dim \text{Ker}(f)$, on a

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(e_k) = 0_E \text{ et } \forall k \in \llbracket p+1, n \rrbracket, f(e_k) = e_k$$

2. Plus généralement, si (e_1, \dots, e_n) est une base *orthonormée* de E et s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, tels que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_k) = \lambda_k \cdot e_k$$

alors f est auto-adjoint.

Théorème 2.1 – de réduction des endomorphismes auto-adjoints

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{S}(E)$, alors il existe une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de E et il existe des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, tels que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_k) = \lambda_k \cdot e_k$$

On dit que f se diagonalise en base orthonormée. Les vecteurs e_k s'appellent des vecteurs propres de f et les réels λ_k s'appellent des valeurs propres de f .

Démonstration

(Plan) La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de E .

1. On trouve un vecteur unitaire e_1 et un scalaire λ_1 tel que $f(e_1) = \lambda_1 \cdot e_1$.
2. On décompose E sous la forme

$$E = \mathbb{R} \cdot e_1 \oplus \underbrace{(\mathbb{R} \cdot e_1)^\perp}_{=E_1}.$$

et on montre que l'on peut appliquer la récurrence à l'espace vectoriel E_1 et à l'endomorphisme

$$f_1 = f|_{E_1}^{E_1}$$

(Récurrence)

- (Initialisation) Le résultat est clairement vrai pour $n = \dim(E) = 1$, car, si $\{e\}$ est une base orthonormée de E de dimension 1, tout endomorphisme vérifie

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, f(e) = \lambda \cdot e$$

— (*Hérédité*) Supposons le résultat connu pour tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace vectoriel euclidien de dimension p , et soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $p + 1$, et $f \in \mathcal{S}(E)$.

1. Cherchons un vecteur unitaire e_1 et un scalaire λ_1 tels que $f(e_1) = \lambda_1 \cdot e_1$.

► (*Analyse*) Si la base orthonormée (e_1, \dots, e_{p+1}) existe, on a

$$\langle x, f(x) \rangle = \sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k \langle e_k, x \rangle^2$$

en supposant de plus les valeurs propres ordonnées $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{p+1}$, il vient

$$\langle x, f(x) \rangle \leq \lambda_1 \left(\sum_{k=1}^{p+1} \langle e_k, x \rangle^2 \right) = \lambda_1 \|x\|^2$$

De plus, il y a égalité si $x = e_1$. Cette étape s'appelle *caractérisation géométrique de* (e_1, λ_1) .

► (*Synthèse*) Posons

$$S = \{x \in E, \|x\| = 1\} \text{ (la sphère unité)}$$

Et considérons l'application

$$\varphi : \begin{cases} S \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle x, f(x) \rangle \end{cases}$$

Nous allons montrer successivement que ^a

(a) φ est bornée et les bornes sont atteintes.

(b) La borne supérieure est la plus grande valeur propre λ_1 cherchée.

► (φ est bornée) En effet

$$|\varphi(x)| \leq \|x\| \|f(x)\|, \text{ d'après Cauchy-Schwarz}$$

Ici, $\|x\| = 1$, mais que peut-on dire de $\|f(x)\|$? Soit (b_1, \dots, b_{p+1}) une base orthonormée quelconque de E , alors

$$f(x) = f \left(\sum_{k=1}^{p+1} \langle b_k, x \rangle \cdot b_k \right) = \sum_{k=1}^{p+1} \langle b_k, x \rangle \cdot f(b_k)$$

donc

$$\|f(x)\| \leq \sum_{k=1}^{p+1} \underbrace{|\langle b_k, x \rangle|}_{\leq \|x\|=1} \|f(b_k)\| \leq \sum_{k=1}^{p+1} \|f(b_k)\|$$

► (Les bornes sont atteintes) Posons

$$\lambda_1 = \sup_{x \in S} \varphi(x)$$

Par discrétisation, on peut trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\varphi(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda_1$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| = 1 \text{ et } x_n = \sum_{k=1}^{p+1} \langle b_k, x_n \rangle \cdot b_k$$

De la suite $(\langle b_1, x_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée on peut extraire une suite $(\langle b_1, x_{\psi_1(n)} \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers α_1 , puis de la suite $(\langle b_2, x_{\psi_1(n)} \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée, on peut extraire une sous-suite $(\langle b_2, x_{\psi_2(n)} \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers α_2 , etc. jusqu'à $(\langle b_{p+1}, x_{\psi_{p+1}(n)} \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers α_{p+1} . Finalement,^b

$$x_{\psi_{p+1}(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{p+1} \alpha_k \cdot b_k}_{e_1 \text{ tel que } \|e_1\|=1} \quad \text{et } \varphi(e_1) = \lambda_1$$

► (On a bien trouvé un vecteur propre de f de valeur propre λ_1 .) De plus, on a

$$\forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle \leq \lambda_1 \|x\|^2$$

Soit $x \in E$ et $\mu \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\forall \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \varphi(e_1 + \mu \cdot x) = \langle e_1 + \mu \cdot x, f(e_1) + \mu \cdot f(x) \rangle \leq \lambda_1 \|e_1 + \mu \cdot x\|^2$$

C'est une équation du second degré en μ qui garde un signe ≥ 0 , donc

$$\forall x \in E, \langle f(e_1) - \lambda_1 \cdot e_1, x \rangle = 0$$

soit, finalement

$$f(e_1) = \lambda_1 \cdot e_1$$

2. On écrit alors

$$E = \mathbb{R} \cdot e_1 \oplus \underbrace{(\mathbb{R} \cdot e_1)^\perp}_{E_1}.$$

et on a

$$f(E_1) = f^\star(E_1) \subset E_1$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à l'espace vectoriel E_1 (toujours euclidien, avec le même produit scalaire) et l'endomorphisme $f|_{E_1}$ (toujours auto-adjoint), on en déduit le résultat cherché.

a. Dans le cours de topologie, il s'agit d'une fonction continue sur un compact, à valeurs dans \mathbb{R} , elle est bornée et les bornes sont atteintes (ce sont donc un maximum et un minimum).

b. Si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $l \in E$, sont tels que

$$\|y_n - l\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ on écrira } y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$$

Remarque 2.1

Plusieurs aspects de cette démonstration sont intéressants à noter

1. La récurrence sur n qui permet de diminuer la dimension de l'espace euclidien concerné. Si E est un espace euclidien, de produit scalaire ϕ , alors, si E_1 est un sous-espace vectoriel de E , $\phi|_{E_1 \times E_1}$ est un produit scalaire sur E_1 .

- On a utilisé la proposition 2.2, page 30, qui est simple, mais très importante. On part de $\mathbb{R}.e_1$ stable, par f , donc E_1 est stable par $f^\star = f$. Et $f|_{E_1}^{E_1}$ est dans $\mathcal{S}(E)$.
- La *caractérisation géométrique* de la plus grande valeur propre comme une valeur extrême (la plus petite peut aussi être caractérisée d'une manière semblable).

$$\lambda_1 = \max_{x \in S} \langle x, f(x) \rangle = \max_{x \neq 0_E} \frac{\langle x, f(x) \rangle}{\|x\|^2}$$

- Dans S , on a pu extraire une sous-suite convergente, en utilisant une succession d'extractions coordonnées par coordonnées. Plus généralement, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite *bornée* (c'est-à-dire que $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée), on peut extraire une sous-suite convergente, car nous sommes en dimension finie!
- La technique utilisée pour montrer que e_1 est un vecteur propre de f (associé à la valeur propre λ_1) s'appelle *la méthode de dédoublement des termes*. Elle fonctionne ainsi
 - Si on a une propriété d'égalité sur des normes (ou quelque chose qui y ressemble), on peut passer au produit scalaire en l'appliquant à $x + y$.
 - Si on a une propriété d'inégalité sur des normes (ou quelque chose qui y ressemble), on peut passer au produit scalaire en l'appliquant à $x + \mu.y$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.3 – Dédoublément

(a) Supposons que $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie

$$\forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle = 0$$

alors, en l'appliquant à $x + y$ quelconques de E , il vient

$$\forall (x, y) \in E^2, \underbrace{\langle x, f(y) \rangle + \langle f(x), y \rangle}_{= \langle f^*(x), y \rangle} = 0 \text{ donc } f^* = -f$$

(b) Supposons que $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie

$$\forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle \geq 0$$

alors, en l'appliquant à $x + \mu.y$, (x et y quelconques dans E et μ dans \mathbb{R}), il vient

$$\forall (x, y) \in E^2, \left\langle x, \frac{f + f^*}{2}(y) \right\rangle^2 \leq \langle x, f(x) \rangle \langle y, f(y) \rangle$$

qui peut nous rappeler une inégalité de Cauchy-Schwarz... N'est-ce pas avec ce type de méthode que nous avons obtenu l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?

Propriété 2.2

$\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension

$$\frac{n(n+1)}{2} \text{ où } n = \dim(E)$$

Démonstration

Connaître f revient à connaître les $f(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ où (e_1, \dots, e_n) est une base *orthonormée* de E , et donc, connaître les $(\langle e_i, f(e_j) \rangle)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$. Or, on a

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle e_i, f(e_j) \rangle = \underbrace{\langle f(e_i), e_j \rangle}_{\text{car } f \text{ est auto-adjoint}} = \underbrace{\langle e_j, f(e_i) \rangle}_{\text{par symétrie du produit scalaire}}$$

Propriété 2.3

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$, on dit que f est un *endomorphisme auto-adjoint positif* s'il vérifie de plus

$$\forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle \geq 0$$

ou, si l'on connaît une base de vecteurs propres (e_1, \dots, e_n) associée à des valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k \in \mathbb{R}_+$$

On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs. *Ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. C'est un cône positif de $\mathcal{L}(E)$.*

Démonstration

— (\Rightarrow) On prend la base (e_1, \dots, e_n) de vecteurs propres de f , il vient, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\lambda_k = \langle e_k, f(e_k) \rangle \geq 0$$

— (\Leftarrow) Soit $x \in E$, alors

$$x = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle \cdot e_k, \text{ donc } f(x) = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle \lambda_k \cdot e_k$$

et, finalement

$$\langle x, f(x) \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle e_k, x \rangle^2 \geq 0$$

Propriété 2.4

De même, on définit les *endomorphismes définis positifs* par

$$f \in \mathcal{S}(E) \text{ et } \underbrace{\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \langle x, f(x) \rangle > 0}_{\Longleftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k > 0}$$

On note $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs. C'est toujours un cône positif.

Démonstration

Il suffit de remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes dans la démonstration précédente (en faisant attention au fait que $x \neq 0_E$).

Remarque 2.2

Si $f \in \mathcal{S}^+(E)$ et si $\varepsilon > 0$, alors

$$f + \varepsilon \cdot \text{id}_E \in \mathcal{S}^{++}(E)$$

Démonstration

Soit $x \in E$, on a

$$\langle x, (f + \varepsilon \cdot \text{id}_E)(x) \rangle = \underbrace{\langle x, f(x) \rangle}_{\geq 0} + \varepsilon \|x\|^2$$

Propriété 2.5

On a

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), f^* \circ f \in \mathcal{S}^+(E) \text{ et, de même } f \circ f^* \in \mathcal{S}^+(E)$$

De même, on a

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \left[f^* \circ f \in \mathcal{S}^{++}(E) \right] \iff \left[f \in \mathcal{GL}(E) \right]$$

(Même chose avec $f \circ f^*$).

On a de plus

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \text{Ker}(f^* \circ f) = \text{Ker}(f) \text{ et } \text{Im}(f^* \circ f) = \text{Im}(f^*) = (\text{Ker}(f))^{\perp}.$$

Démonstration

1. ($f^* \circ f \in \mathcal{S}^+(E)$) Clairement $f^* \circ f \in \mathcal{S}(E)$ car

$$(f^* \circ f)^* = f^* \circ (f^*)^* = f^* \circ f$$

De plus, si $x \in E$

$$\langle f^* \circ f(x), x \rangle = \langle f(x), f(x) \rangle = \|f(x)\|^2 \geq 0 \quad (2.1)$$

2. ($f \circ f^* \in \mathcal{S}^+(E)$) On applique la question précédente à f^* .

3. *Cas où f est un automorphisme*

— (\Rightarrow) Supposons que $f^* \circ f \in \mathcal{S}^{++}(E)$, alors si $x \neq 0_E$, on a

$$0 < \langle f^* \circ f(x), x \rangle = \|f(x)\|^2 \text{ d'après l'équation 2.1, de la présente page}$$

donc, en particulier $f(x) \neq 0_E$. Ce qui montre que f est injective, mais comme c'est un endomorphisme et que nous sommes en dimension finie (par application du théorème du rang), nous pouvons conclure que f est bijective.

— (\Leftarrow) Si $x \neq 0_E$, d'après l'équation 2.1, de la présente page, on a

$$\langle f^* \circ f(x), x \rangle = \|f(x)\|^2 > 0$$

car $f(x) \neq 0_E$.

4. ($\text{Ker}(f^* \circ f) = \text{Ker}(f)$) On a une inclusion toujours vérifiée

$$\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^* \circ f)$$

mais, si $x \in \text{Ker}(f^* \circ f)$, en appliquant l'équation 2.1, de la présente page, on a

$$0 = \langle f^* \circ f(x), x \rangle = \|f(x)\|^2$$

donc $f(x) = 0_E$ et $x \in \text{Ker}(f)$.

Proposition 2.3

Soit $f \in \mathcal{S}^+(E)$, alors il existe un unique endomorphisme $g \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que^a

$$f = g \circ g$$

a. C'est une sorte de « racine carrée » de f .

Démonstration

- (*Existence*) Si $f \in \mathcal{S}^+(E)$, alors on sait qu'il existe une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de vecteurs propres, et il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ des réels ≥ 0 , tels que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_k) = \lambda_k \cdot e_k$$

Si on définit l'endomorphisme g par

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, g(e_k) = \sqrt{\lambda_k} \cdot e_k$$

Alors g est un endomorphisme auto-adjoint (il possède une base orthonormée de vecteurs propres), positif car les $\sqrt{\lambda_k}$ sont positifs. Et, clairement, $f = g \circ g$.

- (*Unicité*) Soit $g \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $f = g \circ g$, alors,

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(g(e_k)) = g(f(e_k)) = g(\lambda_k \cdot e_k) = \lambda_k \cdot g(e_k)$$

donc $g(e_k) \in \text{Ker}(f - \lambda_k \cdot \text{id}_E)$. Malheureusement, cet espace peut-être très grand, cela ne nous assure pas que $g(e_k)$ soit colinéaire à e_k . Mais, si l'on pose $E_1 = \text{Ker}(f - \lambda_k \cdot \text{id}_E)$, on a par le même raisonnement

$$g(E_1) \subset E_1 \text{ et } g_1 = g|_{E_1} \in \mathcal{S}^+(E_1)$$

Or g_1 se diagonalise dans une base orthonormée (b_1, \dots, b_p) de vecteurs propres de E_1 , et il existe des réels positifs (μ_1, \dots, μ_p) tels que

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, g(b_k) = \mu_k \cdot b_k$$

N'oublions cependant pas que $f = g \circ g$, donc

$$\forall x \in E_1, f(x) = \lambda_k \cdot x = \lambda_k \cdot \left(\sum_{j=1}^p \langle b_j, x \rangle \cdot b_j \right)$$

et

$$g(g(x)) = \sum_{j=1}^p \mu_j^2 \langle b_j, x \rangle \cdot b_j$$

Donc

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \mu_j^2 = \lambda_k$$

Or, les μ_j sont ≥ 0 , il n'y a qu'une possibilité $\mu_j = \sqrt{\lambda_k}$, qui est indépendant de j . Finalement

$$g_1 = \sqrt{\lambda_k} \cdot \text{id}_{E_1} \text{ et, donc } g(e_k) = \sqrt{\lambda_k} \cdot e_k$$

Notation 2.1

Nous noterons

1. $S_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des *matrices symétriques* (vérifiant $M = {}^t M$), si nous sommes en *base orthonormée*, elles représentent les endomorphismes auto-adjoints.

2. Nous noterons donc aussi $S_p^+(\mathbb{R})$ pour les matrices symétriques M vérifiant de plus

$$\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R}), {}^tX \cdot M \cdot X \geq 0$$

ces matrices sont dites *symétriques positives*, elles représentent *en base orthonormée* les endomorphismes auto-adjoints positifs.

3. Et de même $S_p^{++}(\mathbb{R})\dots$

Remarque 2.3

On peut traduire les résultats sur les matrices symétriques en termes matriciels. Par exemple

1. Le théorème spectral

$$\forall M \in S_p(\mathbb{R}), \exists P \in O_p(\mathbb{R}), \underbrace{P^{-1}}_{= {}^tP} \cdot M \cdot P \in D_p(\mathbb{R})$$

2. Ou encore

$$\forall M \in S_p^+(\mathbb{R}), \exists ! N \in S_p^+(\mathbb{R}), M = N \cdot N$$

Exercice(s) 2.2

2.2.1 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$, $a \in E$, $\|a\| = 1$ et $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On considère l'endomorphisme f de E défini par

$$x \mapsto x + k \langle a, x \rangle \cdot a$$

- (a) Montrer que f est auto-adjoint.
- (b) Montrer que f est un automorphisme.
- (c) Préciser les vecteurs propres et les valeurs propres de f .

2.2.2 Soit E un espace vectoriel euclidien. Trouver les $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f^* \circ f = f$.

2.2.3 Soit E un espace vectoriel euclidien et (e_1, \dots, e_n) une base quelconque de E . Montrer que l'endomorphisme défini par

$$x \mapsto \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle \cdot e_k \text{ est auto-adjoint}$$

2.2.4 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n .

- (a) Soit $(u, v) \in \mathcal{S}(E)^2$, montrer que

$$\left[u \circ v = v \circ u \right] \iff \left[\exists (e_1, \dots, e_n) \text{ base orthonormée de vecteurs propres de } u \text{ et } v \right]$$

- (b) Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}(E)^I$, montrer que

$$\left[\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies u_i \circ u_j = u_j \circ u_i \right] \iff \left[\exists (e_1, \dots, e_n) \text{ base orthonormée de vecteurs propres communs à tous les } u_i \right]$$

2.2.5 Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer qu'il existe une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de E telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \left[i \neq j \right] \implies \left[\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = 0 \right]$$

2.2.6 Soit u un endomorphisme auto-adjoint, défini positif d'un espace vectoriel euclidien E .

(a) Montrer que u est un automorphisme.

(b) Soit $y \in E$, montrer que

$$\sup_{x \in E} \left(\langle x, y \rangle - \frac{1}{2} \langle u(x), x \rangle \right) = \frac{1}{2} \langle u^{-1}(y), y \rangle$$

2.2.7 Dans $\mathcal{S}(E)$, on dit que $f \leq g$ si $g - f \in \mathcal{S}^+(E)$. On dit qu'une suite $(f_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(E)^{\mathbb{N}}$ est *croissante* si elle vérifie

$$\forall p \in \mathbb{N}, f_p \leq f_{p+1}$$

on dit qu'elle est majorée si

$$\exists \phi \in \mathcal{S}(E), \forall p \in \mathbb{N}, f_p \leq \phi$$

Soit $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite croissante, majorée de $\mathcal{S}(E)$, montrer qu'elle est convergente, c'est-à-dire

$$\exists f \in \mathcal{S}(E), \forall x \in E, \|f(x) - f_p(x)\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

2.2.8 Soit E un espace vectoriel euclidien et p_1 et p_2 deux projecteurs orthogonaux de E .

(a) Montrer que $p_1 + p_2$ est auto-adjoint.

(b) À quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $p_1 \circ p_2 \in \mathcal{S}(E)$?

(c) Montrer que l'on peut décomposer E sous la forme

$$E = \bigoplus_{k=1}^p E_k, \text{ où } \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \begin{cases} \dim(E_k) \in \{1, 2\} \\ p_1(E_k) \subset E_k \\ p_2(E_k) \subset E_k \end{cases}$$

- (d) Montrer que l'on peut trouver une base (e_1, \dots, e_n) non nécessairement orthonormée, adaptée à la décomposition en somme directe précédente, telle que ^a

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_k \in \mathbb{R}, p_1 \circ p_2(e_k) = \lambda_k \cdot e_k$$

2.2.9 Soit E un espace vectoriel euclidien, et soit $f \in \mathcal{S}(E)$. On suppose que ses valeurs propres sont ordonnées sous la forme $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, associés aux vecteurs propres (e_1, \dots, e_n) (donc, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_k) = \lambda_k \cdot e_k$).

- (a) Montrer que (Quotients de Rayleigh)

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = \max_{\substack{x \in \text{Vect}(\{e_1, \dots, e_k\}), \\ x \neq 0_E}} \frac{\langle x, f(x) \rangle}{\|x\|^2} = \min_{\substack{x \in (\text{Vect}(\{e_1, \dots, e_{k-1}\}))^\perp, \\ x \neq 0_E}} \frac{\langle x, f(x) \rangle}{\|x\|^2}$$

- (b) Soit, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$M_k = \{F \text{ sous-espace vectoriel de } E, \dim(F) = k\}$$

Montrer que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = \min_{F \in M_k} \max_{x \in F \setminus \{0_E\}} \frac{\langle x, f(x) \rangle}{\|x\|^2} = \max_{F \in M_{k-1}} \min_{x \in F \setminus \{0_E\}} \frac{\langle x, f(x) \rangle}{\|x\|^2}$$

a. Autrement dit, $p_1 \circ p_2$ est diagonalisable.

2.3 Automorphismes orthogonaux

Définition 2.2 – Automorphisme orthogonal d'un espace euclidien

Soit E un espace vectoriel euclidien, on appelle *automorphisme orthogonal* tout automorphisme $f \in \mathcal{GL}(E)$ qui vérifie

$$f^* \circ f = f \circ f^* = \text{id}_E$$

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux, on l'appelle *groupe orthogonal* de E .

Remarque 2.4

$\mathcal{O}(E)$ n'est pas stable par $+$ et \cdot , mais, en revanche, il est stable par $(f, g) \mapsto f \circ g$ et par $f \mapsto f^{-1}$. Nous dirons plus tard que c'est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E), \circ)$.

Exemple 2.4



1. Les projecteurs orthogonaux *ne sont pas des automorphismes (sauf id_E !)*, et donc pas des automorphismes orthogonaux.
2. Quand on a un projecteur orthogonal p , on peut lui associer une *symétrie orthogonale* (symétrie par rapport à

$\text{Im}(p))$ sous la forme

$s = 2.p - \text{id}_E$, en ce cas, s est à la fois

- un automorphisme orthogonal,
- un endomorphisme auto-adjoint.

Démonstration

On a

$$E = \text{Ker}(p) \oplus^{\perp} \text{Im}(p) \text{ qui traduit } \forall x \in E, x = (x - p(x)) + p(x)$$

Calculons s^* . On a

$$s^* = (2.p - \text{id}_E)^* = 2.p^* - \text{id}_E^* = 2.p - \text{id}_E$$

Car, p est auto-adjoint (projecteur *orthogonal*). Donc $s^* = s$, $s \in \mathcal{S}(E)$. Calculons maintenant ^a

$$s^* \circ s = s \circ s^* = s \circ s = \text{id}_E, \text{ car } p^2 = p$$

Donc $s \in \mathcal{O}(E)$.

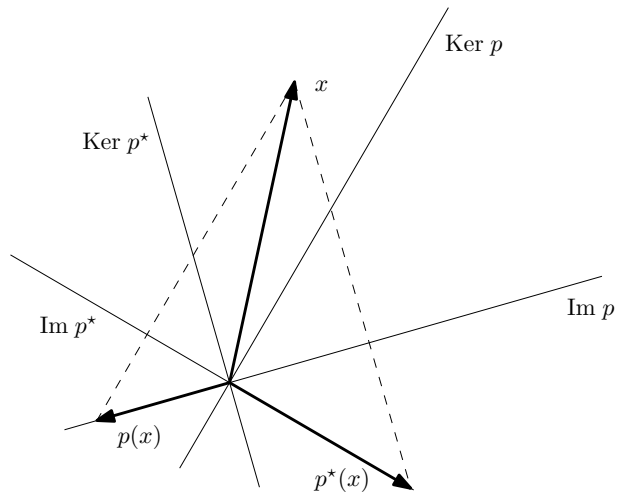
a. Toutes les symétries s orthogonales ou non, vérifient bien sûr $s \circ s = \text{id}_E$.

Remarque 2.5

Réciproquement, soit $f \in \mathcal{S}(E) \cap \mathcal{O}(E)$, alors f est une symétrie orthogonale. En effet, posons

$$p = \frac{1}{2} \cdot (f + \text{id}_E), \text{ alors on a } p \circ p = p \text{ et } p^* = p$$

Figure 2.1 – Adjoint d'un projecteur



Définition 2.3 – Symétrie orthogonale

Soit E un espace vectoriel euclidien, on appelle *symétrie orthogonale* tout élément de $s \in \mathcal{S}(E) \cap \mathcal{O}(E)$, son projecteur associé ($s = 2.p - \text{id}_E$) est un projecteur orthogonal.

Lorsque le projecteur est une projection orthogonale sur un hyperplan, on dit que s est *une réflexion de E* .

Proposition 2.4 – Caractérisation des automorphismes orthogonaux

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes

1. $f \in \mathcal{O}(E)$.
2. $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$ (conservation de la norme).
3. $\forall (x, y) \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ (conservation du produit scalaire).
4. Quelle que soit la base orthonormée de E (e_1, \dots, e_n)

$(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est encore une base orthonormée

5. Il existe une base orthonormée de E (e_1, \dots, e_n) telle que

$(f(e_1), \dots, f(e_n))$ soit encore une base orthonormée

Démonstration

— (1 \Rightarrow 2) Soit $x \in E$,

$$\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle = \langle f^* \circ f(x), x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

— (2 \Rightarrow 3) *Dédoublément des termes dans le cas d'une égalité.* Soit $(x, y) \in E^2$,

$$\underbrace{\|f(x+y)\|^2}_{=\|x+y\|^2} = \underbrace{\|f(x)\|^2}_{=\|x\|^2} + 2 \langle f(x), f(y) \rangle + \underbrace{\|f(y)\|^2}_{=\|y\|^2}$$

d'où, en développant le terme de gauche et en simplifiant

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

— (3 \Rightarrow 4) Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E , alors

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$$

— (4 \Rightarrow 5) Évident.

— (5 \Rightarrow 1) On a

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \delta_{i,j} = \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle f^* \circ f(e_i), e_j \rangle$$

donc $f^* \circ f(e_i) = e_i$. Ce qui montre (par linéarité) que $f^* \circ f = \text{id}_E$ (et donc, $f \circ f^* = \text{id}_E$ aussi).

Propriété 2.6 – Décomposition polaire

Soit E un espace vectoriel euclidien, alors

$$\forall f \in \mathcal{GL}(E), \exists ! (\rho, \theta) \in \mathcal{S}^{++}(E) \times \mathcal{O}(E), f = \rho \circ \theta$$

Démonstration

— (*Existence*).

1. (*Analyse*). Si ρ et θ existent, alors on a

$$f = \rho \circ \theta \text{ et, donc } f^* = \theta^* \circ \rho^*, \text{ d'où } \rho^2 = f \circ f^*$$

2. (*Synthèse*). $f \circ f^* \in \mathcal{S}^{++}(E)$, donc, on sait qu'il existe un endomorphisme (unique) $\rho \in \mathcal{S}^{++}(E)$, tel que $\rho^2 = f \circ f^*$, posons alors

$$\theta = \rho^{-1} \circ f, \text{ alors } \theta^* = f^* \circ \rho^{-1*} = f^* \circ \rho^{-1}$$

Donc

$$\theta \circ \theta^* = \rho^{-1} \circ f \circ f^* \circ \rho^{-1} = \text{id}_E$$

Théorème 2.2 – Décomposition d'un automorphisme orthogonal en un produit de réflexions

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f \in \mathcal{O}(E)$, alors si $p = \text{codim}(\text{Ker}(f - \text{id}_E))$, on peut trouver p réflexions (s_1, \dots, s_p) telles que

$$f = s_1 \circ \dots \circ s_p$$

De plus, p est le nombre minimal de réflexions utiles pour une telle décomposition.

Démonstration

1. (*Existence*). Par récurrence sur la dimension de E .

— (*Initialisation*). Si E est de dimension 1, $\mathcal{O}(E)$ contient deux éléments

$$x \mapsto x \text{ (0 réflexion), et } x \mapsto -x \text{ (1 réflexion)}$$

— (*Hérédité*). Supposons le résultat connu lorsque E est de dimension p , et prenons un espace vectoriel euclidien

E de dimension $p + 1$ et $f \in \mathcal{O}(E)$. On a alors plusieurs cas

- Il existe un vecteur $e \neq 0_E$ tel que $f(e) = e$ (on peut supposer que $\|e\| = 1$), on peut alors poser $E_1 = (\mathbb{R}.e)^\perp$, puis écrire

$$E = \mathbb{R}.e \oplus^\perp E_1$$

observer que $f(E_1) = E_1$ et appliquer l'hypothèse de récurrence à E_1 , où l'on considère l'automorphisme

$$f_1 = f|_{E_1}^{E_1} \in \mathcal{O}(E_1)$$

On a donc, par hypothèse de récurrence, l'existence de $p_1 = \text{codim}(\text{Ker}(f_1 - \text{id}_{E_1}))$ réflexions de E_1 , notées s_1, \dots, s_{p_1} réflexions de E_1 telles que

$$f_1 = s_1 \circ \dots \circ s_{p_1}$$

On peut alors construire des réflexions de E par

$$\forall k \in \llbracket 1, p_1 \rrbracket, \tau_k : \begin{cases} E \rightarrow E \\ x = \langle e, x \rangle . e + \underbrace{x_1}_{\in E_1} \mapsto \langle e, x \rangle . e + s_k(x_1) \end{cases}$$

et on a

$$f = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_{p_1} \text{ et } p_1 = p$$

- Il n'existe pas de vecteur $e \neq 0_E$ tel que $f(e) = e$, mais il existe un vecteur $e \neq 0_E$ tel que $f(e) = -e$ (on peut supposer que $\|e\| = 1$), alors, en posant s_0 la réflexion par rapport à $(\mathbb{R}.e)^\perp$, $s_0 \circ f(e) = e$, on peut donc lui appliquer le cas précédent.
- Il n'existe pas de vecteur $e \neq 0_E$ tel que $f(e) = \pm e$. Prenons un vecteur unitaire e et posons s_0 la réflexion par rapport à $(e - f(e))^\perp$. On $e + f(e) \in (e - f(e))^\perp$. D'où

$$s_0 \circ f(e) = s_0 \left(\frac{1}{2} \cdot (e + f(e)) - \frac{1}{2} \cdot (e - f(e)) \right) = e$$

On peut donc appliquer le premier cas à $s_0 \circ f$.

2. (*Nombre minimal*). Si $f = s_1 \circ \cdots \circ s_q$, alors l'espace

$$\bigcap_{k=1}^q \underbrace{\text{Ker}(s_k - \text{id}_E)}_{\text{hyperplan}} \text{ est invariant par } f, \text{ donc il est inclus dans } \text{Ker}(f - \text{id}_E)$$

Or, sa codimension est $\leq q$ (théorème du cours de dualité), sa dimension est donc $\geq (n - q)$, donc

$$\dim(\text{Ker}(f - \text{id}_E)) \geq n - q \text{ soit } \text{codim}(\text{Ker}(f - \text{id}_E)) \leq q$$

Exemple 2.5

Prenons $E = \mathbb{R}^2$ euclidien et représentons les vecteurs (x, y) par leurs affixes $x + iy$. Et prenons une rotation d'angle θ représentée par $\varphi : z \mapsto e^{i\theta} z$.

- Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\varphi = \text{id}_E$ (0 réflexion).
- Si $\theta \in \pi\mathbb{Z} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\varphi = -\text{id}_E$ qui est la composée des deux réflexions (par exemple), $s_1 \circ s_2$ où $s_1 : z \mapsto i\bar{z}$ et $s_2 : z \mapsto -i\bar{z}$.
- Sinon, φ est la composée (par exemple) de $s_1 : z \mapsto e^{i\theta/2}\bar{z}$ et $s_2 : z \mapsto e^{-i\theta/2}\bar{z}$. ($\varphi = s_1 \circ s_2$).

Théorème 2.3 – Forme canonique des automorphismes orthogonaux

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{O}(E)$, alors E peut se décomposer en une somme directe orthogonale de la

forme

$$E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_{-1} \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\bigoplus}_{k=1}^q V_k \right)$$

où

$$E_1 = \{x \in E, f(x) = x\}, E_{-1} = \{x \in E, f(x) = -x\}$$

et où les V_k sont des plans stables par f ($f(V_k) \subset V_k$) tels que

$$f \Big|_{V_k}^{\vee_k} \text{ soit une rotation du plan d'angle } \theta_k \in \mathbb{R} \setminus \pi.\mathbb{Z}$$

Démonstration

Par récurrence sur la dimension de E .

— (Initialisation)

- ▶ Si $\dim(E) = 1$, alors $f = \pm \text{id}_E$, on a donc

$$E = \begin{cases} E_1 & \text{si } f = \text{id}_E \\ E_{-1} & \text{si } f = -\text{id}_E \end{cases}.$$

- ▶ Si $\dim(E) = 2$, alors ^a

— f transforme une base orthonormée (e_1, e_2) en une base orthonormée. $f(e_1)$ s'écrit donc sous la forme $\alpha.e_1 + \beta.e_2$, avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, donc sous la forme $\cos(\theta).e_1 + \sin(\theta).e_2$, pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. De même, $f(e_2) = \cos(\varphi).e_1 + \sin(\varphi).e_2$. L'orthogonalité des deux vecteurs nous donne ensuite

$$\cos(\theta) \cos(\varphi) + \sin(\theta) \sin(\varphi) = \cos(\theta - \varphi) = 0$$

— Si $\varphi = \theta + \pi/2$, alors

$$f(e_1) = \cos(\theta).e_1 + \sin(\theta).e_2 \text{ et } f(e_2) = -\sin(\theta).e_1 + \cos(\theta).e_2$$

on a une rotation d'angle θ , avec deux cas particuliers $\theta \in 2\pi.\mathbb{Z}$, alors $f = \text{id}_E$ (et $E = E_1$) et $\theta \in \pi.\mathbb{Z} \setminus 2\pi.\mathbb{Z}$, alors $f = -\text{id}_E$ (et $E = E_{-1}$). Dans le cas général, on a donc

$$E_1 = \{0_E\}, \quad E_{-1} = \{0_E\} \text{ et } V_1 = E$$

— Si $\varphi = \theta - \pi/2$, alors

$$f(e_1) = \cos(\theta).e_1 + \sin(\theta).e_2 \text{ et } f(e_2) = \sin(\theta).e_1 - \cos(\theta).e_2$$

on a une symétrie par rapport à la droite dirigée par le vecteur $(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$. On a donc

$$E_1 = \text{Vect} \left(\left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).e_1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).e_2 \right\} \right) \text{ et } E_{-1} = \text{Vect} \left(\left\{ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).e_1 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).e_2 \right\} \right)$$

— (Hérédité)

► L'endomorphisme $(f + f^*)/2$ est auto-adjoint, on peut donc trouver un vecteur propre e , unitaire, associé à une valeur propre λ . L'espace vectoriel engendré par $(e, f(e))$ est donc stable par f .

— S'il est de dimension 1, alors e est un vecteur propre de f , et $\lambda = \pm 1$ (conservation de la norme par les automorphismes orthogonaux). De plus,

$$F = (\mathbb{R}.e)^{\perp} \text{ est stable par } f$$

on peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence au couple $(F, f|_F)$.

— S'il est de dimension 2, alors c'est un plan P , et

$$f|_P^P \in \mathcal{O}(P)$$

on peut donc appliquer la propriété en dimension 2 à $(P, f|_P^P)$. On pose ensuite

$$F = P^{\perp}, \text{ et on applique l'hypothèse de récurrence au couple } (F, f|_F^F)$$

a. Pourquoi faut-il initialiser par 1 et 2? Parce que, lors de la récurrence principale, on aura des cas où la dimension diminue de 1 et d'autres où la dimension diminue de 2!

Exemple 2.6

Soit E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathcal{O}(E)$ et $x \in E$, alors

$$\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^n f^k(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p_{E_1}(x)$$

Démonstration

On utilise la base orthonormée de E qui permet de travailler avec la forme canonique de f .

Notation 2.2

Nous noterons

1. $O_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des *matrices orthogonales* (vérifiant $M \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$ et $M^{-1} = {}^t M$), elles représentent *en base orthonormée* les automorphismes orthogonaux.

Les matrices de $O_p(\mathbb{R})$ sont de déterminants 1 ou -1 (l'inverse est faux).

2. $SO_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des *matrices orthogonales et de déterminant 1*, elles représentent *en base orthonormée* les automorphismes orthogonaux préservant l'orientation (si (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée directe de E alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est encore une base orthonormée directe).

Les rotations du plan sont des automorphismes orthogonaux directs.

Exercice(s) 2.3

2.3.1 Soit E un espace vectoriel euclidien, u et v deux vecteurs unitaires de E , $\lambda \in \mathbb{R}$, à quelles conditions nécessaires et suffisantes a-t-on

$$x \mapsto x + \lambda \langle u, x \rangle \cdot v \text{ automorphisme orthogonal ?}$$

2.3.2 Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{O}(E)$, montrer que

$$\left[f^2 = -\text{id}_E \right] \iff \left[\forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle = 0 \right]$$

2.3.3 Soit E un espace vectoriel euclidien, trouver

$$\{f \in \mathcal{O}(E), \forall g \in \mathcal{O}(E), f \circ g = g \circ f\}$$

2.3.4 Dans l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^3 , on considère s_1 , s_2 et s_3 des réflexions. À quelle condition nécessaire et suffisante $s_1 \circ s_2 \circ s_3$ est-elle une réflexion ?

2.3.5 Soit E est un espace vectoriel euclidien, soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, montrer que

$$\left[f^* \circ f = g^* \circ g \right] \iff \left[\exists \omega \in \mathcal{O}(E), f = \omega \circ g \right]$$

2.3.6 Soit E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall (x, y) \in E^2, \left[\langle x, y \rangle = 0 \right] \implies \left[\langle f(x), f(y) \rangle = 0 \right]$$

Montrer que

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists \omega \in \mathcal{O}(E), f = \lambda \cdot \omega$$

2.3.7 Déterminer toutes les matrices de $O_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans \mathbb{Z} .

2.3.8 Soit $A = [a_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

2.3.9 Soit $\omega \in \mathbb{R}^3$.

(a) Écrire la matrice de l'application $x \mapsto \omega \wedge x$ dans la base canonique.

(b) En déduire les éléments géométriques des rotations de matrices suivantes

$$A_1 = -\frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \text{ et } A_2 = -\frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

(c) Donner dans la base canonique la matrice de la rotation d'axe dirigé par $(1, -2, 1)$ et d'angle $\pi/3$.

2.4 Endomorphismes antisymétriques

Définition 2.4 – Endomorphisme anti-symétrique d'un espace euclidien

Soit E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$, on dit que f est *anti-symétrique* s'il vérifie

$$f^{\star} = -f$$

On note $\mathcal{A}(E)$ le sous-espace vectoriel des endomorphismes anti-symétriques de E .

Propriété 2.7

On a la décomposition en somme directe

$$\mathcal{L}(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E)$$

car

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), f = \underbrace{\frac{f + f^{\star}}{2}}_{\in \mathcal{S}(E)} + \underbrace{\frac{f - f^{\star}}{2}}_{\in \mathcal{A}(E)}$$

Donc

$$\dim(\mathcal{A}(E)) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Démonstration

Car on a

$$\dim(\mathcal{S}(E)) = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \dim(\mathcal{S}(E)) + \dim(\mathcal{A}(E)) = \dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$$

Propriété 2.8

On a la propriété suivante

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), [f \in \mathcal{A}(E)] \iff [\forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle = 0]$$

Démonstration

Voir l'exemple 2.3, page 40.

Exemple 2.7

1. Soit $E = \mathbb{R}^2$ euclidien, alors

$$[f \in \mathcal{O}(E) \cap \mathcal{A}(E)] \iff [f \text{ rotation d'angle } \pm \frac{\pi}{2}]$$

Démonstration

- (a) (\Leftarrow) Évident.
(b) (\Rightarrow) Dans une base orthonormée, il existe un $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice de f est de la forme

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \pm \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \mp \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Ce sera la matrice d'un endomorphisme antisymétrique en base orthonormée si, et seulement si, elle est antisymétrique. Donc $\cos(\theta) = 0$ et les deux seules possibilités sont

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Soit E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors, deux des trois propriétés suivantes impliquent la troisième

- (a) $f \circ f = -\text{id}_E$.
(b) $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$.
(c) $\forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle = 0$.

Démonstration

Il suffit de traduire les propriétés convenablement.

1. f est inversible et $f^{-1} = -f$.
2. $f \in \mathcal{O}(E)$, donc f est inversible et $f^{-1} = f^*$.
3. $f^* = -f$ (voir la propriété 2.8, page précédente).

Théorème 2.4 – Forme canonique d'un endomorphisme anti-symétrique

Soit E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathcal{A}(E)$, alors E peut se décomposer en une somme directe orthogonale de la forme

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^p V_k \right)$$

où les V_k sont des plans stables de E , dans lesquels il existe une base orthonormée $(e_{k,1}, e_{k,2})$ et un réel $\alpha_k \neq 0$, tels que

$$f(e_{k,1}) = \alpha_k \cdot e_{k,2} \text{ et } f(e_{k,2}) = -\alpha_k \cdot e_{k,1}$$

Démonstration

On peut procéder par récurrence sur la dimension de E .

— (Initialisation)

- ▶ Si $\dim(E) = 1$, alors $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- ▶ Si $\dim(E) = 2$, alors, ou bien f est nulle, ou bien, il existe un vecteur e_1 unitaire, tel que $f(e_1) \neq 0_E$. En ce cas, $\langle e_1, f(e_1) \rangle = 0$, on peut poser

$$e_2 = \frac{1}{\|f(e_1)\|} \cdot f(e_1)$$

(e_1, e_2) est une base orthonormée de E et alors

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^*, f(e_1) = \alpha \cdot e_2$$

Calculons alors $f(e_2)$

$$f(e_2) = \langle e_1, f(e_2) \rangle \cdot e_1 + \langle e_2, f(e_2) \rangle \cdot e_2 = \langle -f(e_1), e_2 \rangle \cdot e_1 = -\alpha \cdot e_1$$

- (Hérédité)
- L'endomorphisme $f^* \circ f = -f^2$ est auto-adjoint, il possède donc un vecteur propre e , que l'on peut supposer unitaire et de valeur propre λ . L'ensemble $P = \text{Vect}(\{e, f(e)\})$ est donc stable par f .
 - Si $\dim(P) = 1$, alors l'initialisation dans le cas de la dimension 1 nous donne que $f(e) = 0_E$. Posons

$$V = P^\perp, \text{ alors } f(V) \subset V$$

on peut donc appliquer la récurrence au couple $(V, f|_V^V)$.

- Si $\dim(P) = 2$, alors l'initialisation dans le cas de la dimension 2 nous donne une base orthonormée de P qui convient, il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence au couple

$$(V, f|_V^V) \text{ où } V = P^\perp.$$

Propriété 2.9

Si $f \in \mathcal{A}(E)$, alors $\text{rang}(f) \in 2\mathbb{N}$.

Démonstration

En utilisant la décomposition du théorème 2.4, page précédente, on obtient que

$$\text{rang}(f) = \sum_{k=1}^p \dim(V_k) = 2p$$

Propriété 2.10

Si $E = \mathbb{R}^3$ et soit $w \in E \setminus \{0_E\}$, alors l'endomorphisme défini par

$$f : x \mapsto w \wedge x$$

est anti-symétrique et on peut trouver une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) telle que

$$f(e_1) = 0_E, \quad f(e_2) = \|w\| \cdot e_3 \quad \text{et} \quad f(e_3) = -\|w\| \cdot e_2$$

Démonstration

On peut prendre

$$e_1 = \frac{1}{\|w\|} \cdot w$$

car e_1 doit être dans le noyau, donc colinéaire à w . Prenons un vecteur e_2 , de norme 1, orthogonal à w et

$$e_3 = e_1 \wedge e_2$$

D'après les propriétés du produit vectoriel, la famille (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée. De plus,

$$f(e_2) = w \wedge e_2 = \|w\| \cdot e_1 \wedge e_2 = \|w\| \cdot e_3$$

et

$$f(e_3) = w \wedge e_3 = \|w\| \cdot e_1 \wedge (e_1 \wedge e_2) = -\|w\| \cdot e_2$$

Remarque importante 2.6

Réciproquement, supposons que la matrice de l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dans la base canonique (c_1, c_2, c_3) soit antisymétrique de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$$

alors f est l'application $x \mapsto w \wedge x$ où

$$w = p.c_1 + q.c_2 + r.c_3$$

Notation 2.3

Nous noterons $A_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des *matrices anti-symétriques* (vérifiant ${}^tM = -M$), elles représentent *en base orthonormée* les endomorphismes anti-symétriques.

Exercice(s) 2.4

2.4.1 Dans $E = \mathbb{R}^3$, soit r la rotation d'angle θ et d'axe dirigé par w , quelle est la partie symétrique de r ? La caractériser géométriquement. Quelle est la partie anti-symétrique de r ?

2.4.2 Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{A}(E)$.

(a) Montrer que

$$\text{id}_E + f \in \mathcal{GL}(E)$$

(b) On considère l'application

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{A}(E) & \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ f & \longmapsto (\text{id}_E - f) \circ (\text{id}_E + f)^{-1} \end{cases}$$

Calculer l'image de ϕ .

2.4.3 Soit E un espace euclidien, $f \in \mathcal{A}(E)$. Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de réduction de f .

(a) Calculer

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} \cdot f^j(e_k)$$

(b) Montrer que l'application linéaire définie par

$$\forall x \in E, u(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} \cdot f^j(x)$$

est un automorphisme orthogonal de E .

(c) À quelle condition nécessaire et suffisante, un automorphisme orthogonal u peut-il s'écrire de cette manière?

2.5 Bilan

E est un espace vectoriel euclidien de dimension p , $\mathcal{E}_o = (e_1, \dots, e_p)$ et \mathcal{B}_o sont deux *bases orthonormées* de E , et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ est une base quelconque de E . Nous noterons le produit scalaire

$$\phi : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

La matrice de ϕ dans la base quelconque est

$$\Phi \stackrel{\text{Not}}{=} \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi) \stackrel{\text{Def}}{=} [\phi(f_i, f_j)]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \text{S}_n(\mathbb{R})$$

et dans cette base on a

$${}^t\text{Mat}_{\mathcal{F}}(x) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(y) = [\langle x, y \rangle] \in \text{M}_1(\mathbb{R})$$

et, *par abus de notation*, on identifiera $\langle x, y \rangle$ et $[\langle x, y \rangle]$.

Démonstration

On a



$$x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i, \quad y = \sum_{j=1}^n y_j \cdot f_j \quad \text{donc} \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \phi(f_i, f_j)$$

Le calcul matriciel se fait de manière identique.

Aspect vectoriel

Aspect matriciel

$x \in E$	$\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(x) = [\langle e_i, x \rangle]_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in \text{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ $\text{Mat}_{\mathcal{B}_o}(x) = {}^t P_{\mathcal{E}_o}^{\mathcal{B}_o} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(x)$ $\text{car} \left(P_{\mathcal{E}_o}^{\mathcal{B}_o} \right)^{-1} = {}^t P_{\mathcal{E}_o}^{\mathcal{B}_o}$
$u \in \mathcal{L}(E)$	<div data-bbox="1070 256 1153 332" data-label="Image"></div> <p>Base orthonormée</p> $\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u) = [\langle e_i, u(e_j) \rangle]_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2}$ $\text{Mat}_{\mathcal{B}_o}(u) = {}^t P_{\mathcal{E}_o}^{\mathcal{B}_o} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u) \cdot P_{\mathcal{E}_o}^{\mathcal{B}_o}$ <div data-bbox="1033 487 1445 583" data-label="Equation-Block"> $\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u^\star) = {}^t \text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u)$ </div>
$u \in \mathcal{S}(E)$	<div data-bbox="1070 603 1153 679" data-label="Image"></div> <p>Base orthonormée</p> $\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u) = {}^t \text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u)$ <p>On dit que $\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u) \in \text{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique</p>

$u \in \mathcal{O}(E)$	 Base orthonormée $(\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u))^{-1} = {}^t\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u)$ On dit que $\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u) \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale
$u \in \mathcal{A}(E)$	 Base orthonormée $\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u) = -{}^t\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u)$ On dit que $\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u) \in \text{A}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique
ϕ	$\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(\phi) = [\langle e_i, e_j \rangle]_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2} = I_p$ $\text{Mat}_{\mathcal{B}_o}(\phi) = \text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(\phi) = I_p$ $\text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi) = {}^tP_{\mathcal{E}_o}^{\mathcal{F}} \cdot P_{\mathcal{E}_o}^{\mathcal{F}} = {}^t\text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi)$
$(x, y) \in E^2$	$\langle x, y \rangle = {}^t\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(x) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(y)$ $\langle x, y \rangle = {}^t\text{Mat}_{\mathcal{F}}(x) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(y)$
$u \in \mathcal{L}(E)$	$\text{Mat}_{\mathcal{F}}(u^*) = (\text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi))^{-1} \cdot {}^t\text{Mat}_{\mathcal{F}}(u) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi)$

Remarque importante 2.7



Les propriétés matricielles liées à l'adjoint d'un endomorphisme n'apparaissent qu'en *bas orthonormée* ! En [bleu](#), ce qui se passe en base quelconque !

Si on a le choix de la base dans un espace euclidien, on choisit *toujours* de travailler en base orthonormée !

Démonstration de la dernière propriété

L'adjoint est défini par la relation vectorielle

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, u(y) \rangle = \langle u^*(x), y \rangle$$

Ce qui se traduit matriciellement par

$${}^t\text{Mat}_{\mathcal{F}}(x) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(u) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(y) = {}^t\text{Mat}_{\mathcal{F}}(x) \cdot {}^t\text{Mat}_{\mathcal{F}}(u^*) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(y)$$

En appliquant cette égalité sur tous les couples (f_i, f_j) possibles $((i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2)$, on obtient

$$\text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(u) = {}^t\text{Mat}_{\mathcal{F}}(u^*) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi)$$

d'où le résultat énoncé.

2.6 Quelques décompositions matricielles

Proposition 2.5 – Décomposition de Cholesky

Soit $A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$, alors il existe une unique matrice $T \in T_p^+(\mathbb{R}) \cap GL_p(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux > 0 , telle que

$$A = {}^tT \cdot T$$

Cette décomposition de A s'appelle la décomposition de Cholesky de A .

Démonstration - Version géométrique de l'existence

Si \mathcal{E}_o est une base orthonormée d'un espace euclidien de dimension p (par exemple, la base canonique de \mathbb{R}^p), alors on peut considérer A comme la matrice d'un endomorphisme auto-adjoint, défini, positif u .

- *Analyse* Si T est la matrice d'un endomorphisme w dans la base \mathcal{E}_o , alors $u = w^* \circ w$. Or, on sait que
 - u admet une « racine carrée ».
 - Pour obtenir une matrice triangulaire, il est conseillé d'envisager le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.
- *Synthèse* Soit $v \in \mathcal{S}^{++}(E)$, tel que $u = v \circ v$, V sa matrice dans la base orthonormée $\mathcal{E}_o = (e_1, \dots, e_p)$. On a alors

$$A = V^2 = {}^tV \cdot V \text{ car } V \text{ est symétrique}$$

La famille $(v(e_1), \dots, v(e_p))$ s'orthonormalise en $\mathcal{B}_o = (b_1, \dots, b_p)$ base orthonormée, et la matrice de passage

$$T = P_{\mathcal{B}_o}^{v(\mathcal{E}_o)} = [\langle b_i, v(e_j) \rangle]_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2} \in T_p^+(\mathbb{R})$$

Finalement

$${}^tT \cdot T = \left[\sum_{k=1}^p \langle b_k, v(e_i) \rangle \langle b_k, v(e_j) \rangle \right]_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2} = [\langle v(e_i), v(e_j) \rangle]_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2} = A$$

Démonstration - Version algorithmique

- *Unicité* Si on en a deux matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux > 0 qui conviennent, notées T_1 et T_2 , alors

$${}^tT_1 \cdot T_1 = {}^tT_2 \cdot T_2 \text{ donc } \underbrace{{}^tT_2^{-1} \cdot {}^tT_1}_{\in \mathbf{T}_p^-(\mathbb{R})} = \underbrace{T_2 \cdot T_1^{-1}}_{\in \mathbf{T}_p^+(\mathbb{R})}$$

la valeur commune est donc une matrice diagonale $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ et

$$T_2 = D \cdot T_1$$

En reportant dans $A = {}^tT_k \cdot T_k$ et en tenant compte des coefficients diagonaux > 0 , on trouve $D = I_p$.

- *Existence* On va procéder par récurrence.

— *Initialisation* Si $p = 1$, alors $A = [a]$ et $a > 0$, on prend $T = [\sqrt{a}]$.

— *Hérédité* Supposons le résultat vrai pour p et prenons $A \in \mathbf{S}_{p+1}^{++}(\mathbb{R})$, cherchons T .

1. *Analyse* Si T existe, on peut l'écrire sous la forme blocs

$$T = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & L \\ \hline 0 & T_1 \end{array} \right], \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}_+^*, L \in \mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R}) \text{ et } T_1 \in \mathbf{T}_p^+(\mathbb{R})$$

Si $A = {}^tT \cdot T$, on obtient

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \alpha^2 & \alpha \cdot L \\ \hline \alpha \cdot {}^tL & {}^tL \cdot L + {}^tT_1 \cdot T_1 \end{array} \right]$$

Si on écrit A sous la forme

$$A = \left[\begin{array}{c|c} a & L_1 \\ \hline {}^tL_1 & A_1 \end{array} \right] \text{ où } a \in \mathbb{R}, L_1 \in \mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R}) \text{ et } A_1 \in \mathbf{S}_p(\mathbb{R})$$

il suffit de résoudre le système

$$\alpha^2 = a, \alpha \cdot L = L_1 \text{ et } {}^tL \cdot L + {}^tT_1 \cdot T_1 = A_1$$

La récurrence pourra s'appliquer si on arrive à montrer que

$$a > 0 \text{ et } A_1 - \frac{1}{a} \cdot {}^tL_1 \cdot L_1 \in \mathbf{S}_p^{++}(\mathbb{R})$$

2. Synthèse

- Montrons que $a > 0$. Cela vient du fait que $A \in S_{p+1}^{++}(\mathbb{R})$. Si on prend $X = [\delta_{i,1}]_{i \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket}$, on a

$$a = {}^t X \cdot A \cdot X > 0$$

- Montrons que $A_1 - \frac{1}{a} \cdot {}^t L_1 \cdot L_1 \in S_p^{++}(\mathbb{R})$. Soit $Y \in M_{p,1}(\mathbb{R})$, on a alors

$${}^t Y \cdot \left(A_1 - \frac{1}{a} \cdot {}^t L_1 \cdot L_1 \right) \cdot Y = {}^t \left[\frac{-\frac{1}{a} \cdot L_1 \cdot Y}{Y} \right] \cdot A \cdot \left[\frac{-\frac{1}{a} \cdot L_1 \cdot Y}{Y} \right] > 0 \text{ si } Y \neq 0_{M_p(\mathbb{R})}$$

La suite est faite dans l'analyse...

Session Wxmaxima 2.1 – Exemple de décomposition de Cholesky

```
(%i1) A : genmatrix(lambda([i,j],gcd(i,j)),10,10);
```

```
(%o1) [1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 1 2 1 2 1 2 1 2
1 1 3 1 1 3 1 1 3 1
1 2 1 4 1 2 1 4 1 2
1 1 1 1 5 1 1 1 1 5
1 2 3 2 1 6 1 2 3 2
1 1 1 1 1 1 7 1 1 1
1 2 1 4 1 2 1 8 1 2
1 1 3 1 1 3 1 1 9 1
1 2 1 2 5 2 1 2 1 10]
```

```
(%i2) cholesky(A);
```

```
(%o2)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Remarquons que Wxmaxima nous donne une matrice triangulaire inférieure, c'est donc tT .

```
(%i3) zeromatrixp(% .transpose(%)-A);
```

```
(%o3) true
```

Proposition 2.6 – Décomposition QR

Soit $A \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$, alors il existe un unique couple $(O, T) \in \text{O}_p(\mathbb{R}) \times \text{T}_p^+(\mathbb{R})$, T ayant tous ses termes diagonaux > 0 , telles que

$$A = O \cdot T$$

Cette décomposition s'appelle décomposition QR.

Démonstration

— *Analyse/unicité* Si $A = O \cdot T$, alors ${}^tA = {}^tT \cdot {}^tO$, donc

$${}^tT \cdot T = {}^tA \cdot A$$

La décomposition de Cholesky nous assure alors l'unicité de T si ${}^tA \cdot A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$. Puis $O = A \cdot T^{-1}$ est unique.

— *Synthèse/existence* Remarquons que, puisque A est inversible, alors ${}^tA \cdot A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$, car

$$\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R}), {}^tX \cdot {}^tA \cdot A \cdot X = {}^t(A \cdot X) \cdot (A \cdot X) \geq 0$$

De plus, on reconnaît un produit scalaire, donc ce terme est nul si, et seulement si, $A \cdot X = 0_{M_p(\mathbb{R})}$, comme A est inversible, on trouve $X = 0_{M_p(\mathbb{R})}$.

D'après la décomposition de Cholesky, T existe vérifiant

$${}^tT \cdot T = {}^tA \cdot A$$

Il reste à vérifier que $O = A \cdot T^{-1} \in O_p(\mathbb{R})$, ce qui vient de

$${}^tO \cdot O = {}^tT^{-1} \cdot \underbrace{{}^tA \cdot A}_{= {}^tT \cdot T} \cdot T = I_p$$

Définition 2.5 – Matrice de Gram

Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel et $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E . On appelle *matrice de Gram de \mathcal{X}* et on note

$$G_{\mathcal{X}} = [\langle x_i, x_j \rangle]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in M_n(\mathbb{R})$$

Remarque 2.8

Cette définition nous permet de travailler dans un espace préhilbertien réel (donc, potentiellement de dimension infinie) avec des matrices, car, en fait, comme \mathcal{X} est finie, nous sommes en dimension finie (dans $\text{Vect}(\mathcal{X})$).

Propriété 2.11

On a

$$[\mathcal{X} \text{ libre}] \iff [G_{\mathcal{X}} \text{ inversible}]$$

Démonstration

Notons C_1, \dots, C_n les colonnes de $G_{\mathcal{X}}$.

- (\Rightarrow). Supposons \mathcal{X} libre, dire que $G_{\mathcal{X}}$ est inversible revient à dire (puisque la dimension de l'espace de départ est égale à la dimension de l'espace d'arrivée) que $G_{\mathcal{X}}$ est surjective, c'est-à-dire que ses colonnes sont indépendantes. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot C_k = 0_{M_{n,1}(\mathbb{K})}, \text{ alors } \left[\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle x_i, x_k \rangle = 0 \right]$$

Le vecteur $\sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot x_k$ est donc orthogonal à tous les x_i , il est donc dans

$$\text{Vect}(\{x_k, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}) \cup \text{Vect}(\{x_k, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\})^{\perp} = \{0_E\}$$

Comme \mathcal{X} est libre, on a $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

- (\Leftarrow). Le même raisonnement nous permet d'obtenir que si \mathcal{X} est liée, alors $G_{\mathcal{X}}$ n'est pas surjective (donc pas inversible).

Propriété 2.12

Plus précisément

$$\text{rang}(\mathcal{X}) = \text{rang}(G_{\mathcal{X}})$$

Démonstration

- Le même raisonnement que ci-dessus nous permet de dire que, si $(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ est une sous-famille libre de \mathcal{X} , alors les colonnes correspondantes $(C_{i_1}, \dots, C_{i_r})$ sont libres. Donc

$$\text{rang}(\mathcal{X}) \leq \text{rang}(G_{\mathcal{X}})$$

- Si $\text{rang}(G_{\mathcal{X}}) > \text{rang}(\mathcal{X}) = r$, alors on peut trouver $r + 1$ colonnes indépendantes d'indices (j_1, \dots, j_{r+1}) , mais les vecteurs $(x_{j_1}, \dots, x_{j_{r+1}})$ sont alors liés, et par conséquent les colonnes de $G_{\mathcal{X}}$ aussi... Donc

$$\text{rang}(\mathcal{X}) = \text{rang}(G_{\mathcal{X}})$$

Remarque 2.9

À quoi cela sert-il? Au départ les vecteurs sont dans un espace préhilbertien (donc peut-être de dimension finie), on a cependant ramené les calculs dans un univers matriciel.

Exercice(s) 2.5

2.5.1 Montrer, sans utiliser la décomposition de Cholesky, l'existence et l'unicité de la décomposition QR. Redémontrer Cholesky à partir de la décomposition QR.

2.5.2 Soit E un espace préhilbertien, $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ des vecteurs de E , $\mathcal{X}_1 = (x_1, \dots, x_p)$ ($p < n$) et $\mathcal{X}_2 = (x_{p+1}, \dots, x_n)$. Montrer que

$$\det G_{\mathcal{X}} \leq \det G_{\mathcal{X}_1} \det G_{\mathcal{X}_2}$$

2.5.3 Soit $A = [a_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que

$$0 < \det A \leq \prod_{k=1}^n a_{k,k}$$

Étudier le cas d'égalité. Soit A une matrice anti-symétrique réelle.

(a) Montrer que

$$\det(A + I_n) \geq 1$$

(b) Soit S une matrice symétrique positive, montrer que

$$\det(A + S) \geq \det S$$

2.5.4 Soit E un espace préhilbertien, $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ des vecteurs de E .

(a) Montrer que

$$0 \leq \det G_{\mathcal{X}} \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

avec égalité si, et seulement si, \mathcal{X} est orthogonale ou si l'un des vecteurs de \mathcal{X} est nul.

(b) Si \mathcal{X} est libre, et si $y \notin \text{Vect}(\mathcal{X})$, alors, en notant $\mathcal{Y} = (x_1, \dots, x_n, y)$, on a

$$d(y, \text{Vect}(\mathcal{X}))^2 = \frac{\det(G_{\mathcal{Y}})}{\det(G_{\mathcal{X}})}$$

2.5.5 E est l'ensemble des matrices réelles symétriques définies positives, $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$.

(a) Soit $A \in E$, $A = [a_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$, $B = [\gamma_i \gamma_j a_{ij}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$. Montrer que $B \in E$.

(b) Montrer que $\sqrt[n]{\det A} \leq \frac{1}{n} \text{trace}(A)$. En déduire que $\det A \leq \prod_{i=1}^n a_{i,i}$. (Indication, choisir convenablement les (γ_i)).

2.7 Méthodes numériques

2.7.1 Itération

1. *Principe.* Soit ¹ $f \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^n)$, (souvent n est très grand!). Posons $E = \mathbb{R}^n$. On veut évaluer la plus grande valeur propre $\lambda > 0$ (et un vecteur propre associé). Bien sûr, on ne connaît pas les vecteurs propres. On sait cependant que

$$E = \text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id}_E) \overset{\perp}{\oplus} (\text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id}_E))^{\perp}.$$

1. Ce n'est pas restrictif de supposer f auto-adjoint positif, car il sera souvent de la forme $g^* \circ g$, pour un certain endomorphisme g de E .

On prend un $x \in E$ (tel que $x \notin (\text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id}_E))^{\perp}$) et on calcule les itérés de x par f . Comme x s'écrit $x_1 + x_2$, avec

$$x_1 \in \text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id}_E) \text{ et } x_2 \in (\text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id}_E))^{\perp}.$$

on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, f^p(x) = \lambda^p \cdot x_1 + f^p(x_2) \text{ et } \|f^p(x)\|^2 = \lambda^{2p} \|x_1\|^2 + \|f^p(x_2)\|^2$$

En ce cas,

$$\frac{1}{\|f^p(x)\|} \cdot f^p(x) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} e = \frac{1}{\|x_1\|} \cdot x_1$$

Une fois trouvé e_1 , il est facile de trouver λ , on peut par exemple regarder une composante de $f^p(x)$ (prendre la plus grande) et la comparer à la même composante de $f^{p+1}(x)$. On peut aussi utiliser le quotient de Rayleigh, et évaluer

$$\langle e_1, f(e_1) \rangle = \lambda \text{ ou } \|f(e_1)\| = \lambda$$

2. Algorithme

- On prend un vecteur $\tilde{e}_0 = x$ « au hasard » dans E de norme 1 ;
- supposons calculé \tilde{e}_k de norme 1, on calcule $f(\tilde{e}_k)$;
- si la condition d'arrêt (voir plus loin) est satisfaite, on produit λ_k et \tilde{e}_k , approximations respectives de λ et e ;
- sinon, on pose

$$\widetilde{e_{k+1}} = \frac{1}{\|f(\tilde{e}_k)\|} \cdot f(\tilde{e}_k)$$

3. Erreur de méthode, on trouve dans les livres la condition d'arrêt

$$\|\widetilde{e_{k+1}} - \tilde{e}_k\| \leq \varepsilon$$

Cette condition ne fonctionne pas, et ne nous donne pas clairement l'erreur de méthode lorsque l'on évalue λ et e par λ_k et \tilde{e}_k ...

4. Code

Session Python 2.1 – Calcul de la plus grande valeur propre par itération

Cette méthode ne suppose pas explicitement que f soit un endomorphisme auto-adjoint...

In[1] – Itération

```
1  import numpy as np
2
3  def iteration(f,u0,epsilon):
4      u=u0
5      v=f(u)
6      n=np.linalg.norm(v)
7      while np.linalg.norm(v/n-u)>=epsilon:
8          u=v/n
9          v=f(u)
10         n=np.linalg.norm(v)
11     return (n,v)
```

2.7.2 Méthode de quadrature de Gauss

1. *Principe.* Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$, de classe \mathcal{C}^k , (k assez grand). On veut calculer

$$\int_a^b f(t) \, dt$$

L'idée de la méthode de Gauss est la suivante

(a) On se ramène d'abord à l'intervalle $[-1, 1]$, en posant

$$g(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + t \frac{b-a}{2}\right)$$

On aura alors

$$\int_a^b f(x) \, dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} g(t) \, dt$$

(b) On remarque que toutes les formules de quadrature approchée que nous avons trouvées sont de la forme

$$I_n = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,n} g(t_{k,n})$$

(c) On cherche ensuite les « meilleurs points » du segment $[-1, +1]$, $-1 \leq t_{1,n} < \cdots < t_{n,n} \leq +1$ qui permettent d'estimer l'intégrale en ne calculant que les $g(t_{k,n})_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$. Il reste alors à chercher les coefficients $\alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{n,n}$.

- Que sont ces meilleurs points ? Comme pour la formule des trapèzes (et celle de Simpson), on veut que la formule soit exacte pour les fonctions polynomiales de degré le plus élevé. Comme on a $2n$ inconnues (les $t_{k,n}$ et les $\alpha_{k,n}$), on peut espérer que la formule sera exacte pour les fonctions polynomiales de degré $\leq 2n - 1$. Pour les trouver, il suffit de résoudre le système

$$(\mathcal{S}) \quad \forall k \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket, \quad \int_{-1}^{+1} t^k dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_{t=-1}^{t=+1} = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{j=1}^n \alpha_{j,n} t_{j,n}^k$$

Ce système est un peu délicat à résoudre, car il n'est pas linéaire. On peut cependant utiliser nos compétences en espaces euclidiens. La base canonique de l'espace vectoriel E des fonctions polynomiales de degré $\leq 2n - 1$ est

$$(x \mapsto x^k)_{k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket}$$

que l'on munit du produit scalaire

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(t) g(t) dt$$

Cette base canonique s'orthonormalise par le procédé de Schmidt en (P_0, \dots, P_{2n-1}) où

$$\forall k \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket, \quad \text{Vect}(\{x \mapsto x^j, j \in \llbracket 0, k \rrbracket\}) = \text{Vect}(\{P_j, j \in \llbracket 0, k \rrbracket\})$$

Ce sont les *polynômes de Legendre*.

- On a, en particulier

$$\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, \quad \langle (x \mapsto x^k), P_n \rangle = 0$$

Si la formule de quadrature est exacte pour les fonctions polynomiales de degré $\leq 2n - 1$, elle l'est pour les fonctions polynomiales de la forme $x \mapsto x^k P_n(x)$, $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, de degrés $\leq 2n - 1$. Il vient

$$\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_{j,n} t_{j,n}^k P_n(t_{j,n}) = 0$$

qui est clairement satisfait lorsque l'on prend ²

$$\forall n \in \mathbb{N}, (t_{1,n}, \dots, t_{n,n}) \text{ sont les racines de } P_n$$

Pour trouver les $\alpha_{k,n}$, il suffit alors de prendre les n premières lignes de (\mathcal{S}) . ³

Session Wxmaxima 2.2 – Méthode de quadrature de Gauss

Le polynôme suivant est un multiple non nul du polynôme de Legendre P_n .

```
(%i1) P(n) := diff((x^2-1)^n, x, n);
```

```
(%o1) P(n) := diff((x^2-1)^n, x, n)
```

On définit les coefficients $t_{i,n}$ comme étant les racines de P_n

```
(%i2) realroots(P(6)), numer;
```

```
(%o2) [x = -0.93246951699257, x = -0.66120937466621, x = -0.23861917853355, x = 0.23861917853355, x =
```

2. Il est facile de montrer que P_n a toutes ses racines distinctes dans $] -1, 1[$, en effet, si

$$\Delta = \{x \in] -1, 1[, P_n(x) = 0 \text{ et change de signe en } x\}$$

n'est pas de cardinal n , alors, si l'on pose

$$f : t \mapsto \prod_{x \in \Delta} (t - x) \text{ on a } \langle f, P_n \rangle = 0$$

ce qui contredit son signe constant.

3. Nous montrerons dans le cours suivant que ce système, dit de Vandermonde, admet bien une solution.

0.66120937466621, $x = 0.93246951699257$]

```
(%i3) t(i,n) := rhs(ev(realroots(P(n)),numer)[i]);
```

```
(%o3) t(i,n) := rhs((ev(realroots(P(n)),numer))_i)
```

```
(%i4) t(3,6);
```

```
(%o4) - 0.23861917853355
```

Les n premières lignes de (\mathcal{S}) nous permettent alors de trouver les coefficients $\alpha_{k,n}$

```
(%i5) Systeme(n) := cons(sum(alpha[i],i,1,n)=2,  
makelist(sum(alpha[i]*t(i,n)^k,i,1,n)=((1-(-1)^(k+1))/(k+1)),k,1,n-1));
```

```
(%o5) Systeme(n) := cons  $\left( \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2, \text{makelist} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i t(i,n)^k = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1}, k, 1, n-1 \right) \right)$ 
```

```
(%i6) Systeme(6);
```

```
(%o6) 
$$\begin{aligned} [\alpha_6 + \alpha_5 + \alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 = 2, & 0.93246951699257 \alpha_6 + 0.66120937466621 \alpha_5 + 0.23861917853355 \alpha_4 - \\ & 0.23861917853355 \alpha_3 - 0.66120937466621 \alpha_2 - 0.93246951699257 \alpha_1 = 0, 0.86949940012035 \alpha_6 + \\ & 0.43719783714649 \alpha_5 + 0.056939112364028 \alpha_4 + 0.056939112364028 \alpha_3 + 0.43719783714649 \alpha_2 + \\ & 0.86949940012035 \alpha_1 = \frac{2}{3}, 0.81078168565556 \alpha_6 + 0.28907930850505 \alpha_5 + 0.013586764218734 \alpha_4 - \\ & 0.013586764218734 \alpha_3 - 0.28907930850505 \alpha_2 - 0.81078168565556 \alpha_1 = 0, 0.75602920680966 \alpha_6 + \\ & 0.19114194880557 \alpha_5 + 0.0032420625168034 \alpha_4 + 0.0032420625168034 \alpha_3 + 0.19114194880557 \alpha_2 + \\ & 0.75602920680966 \alpha_1 = \frac{2}{5}, 0.70497418930608 \alpha_6 + 0.12638484844221 \alpha_5 + 7.7361829451405985 \cdot 10^{-4} \alpha_4 - \end{aligned}$$

```

$$7.7361829451405985 \cdot 10^{-4} \alpha_3 - 0.12638484844221 \alpha_2 - 0.70497418930608 \alpha_1 = 0]$$

```
(%i7) if numer#false then numer:false else numer:true;
```

```
(%o7) true
```

```
(%i8) Alpha(n) := solve(Systeme(n),makelist(alpha[i],i,1,n));
```

```
(%o8) A(n) := solve(Systeme(n),makelist(alpha[i],i,1,n))
```

```
(%i9) Alpha(2);
```

```
(%o9) [[alpha_1 = 1, alpha_2 = 1]]
```

```
(%i10) Alpha(3);
```

```
(%o10) [[alpha_1 = 0.555555556690514, alpha_2 = 0.555555556690514, alpha_3 = 0.88888886618972]]
```

```
(%i11) Alpha(6);
```

```
(%o11) [[alpha_1 = 0.17132448845974, alpha_2 = 0.3607616046472, alpha_3 = 0.46791390689306, alpha_4 = 0.46791390689306, alpha_5 = 0.3607616046472, alpha_6 = 0.17132448845974]]
```

Remarque 2.10

Tous ces calculs sont dans la pratique inutiles, les valeurs sont données une fois pour toutes... Pour les petites valeurs de n , on peut même avoir des valeurs exactes des paramètres. ^a

```
(%i1) P(n) := diff((x^2-1)^n,x,n);
```

```
(%o1) P(n) := diff((x^2-1)^n,x,n)
```

```
(%i2) solve(P(3),x);
```

```
(%o2) [x = -sqrt(3)/sqrt(5), x = sqrt(3)/sqrt(5), x = 0]
```

```
(%i3) solve([a+b+c=2,-a*sqrt(3/5)+c*sqrt(3/5)=0,a*3/5+c*3/5=2/3],[a,b,c]);
```

```
(%o3) [[a = 5/9, c = 5/9, b = 8/9]]
```

Ce qui donne alors la valeur approchée

$$\int_{-1}^{+1} g(t) dt \text{ est évaluée par } \frac{1}{9} \left[5g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8g(0) + 5g\left(+\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right]$$

Un peu plus généralement, il est possible de trouver les racines exactes des polynômes de Legendre jusqu'au rang 5, et de trouver les coefficients associés.

```
(%i1) P(n) := diff((x^2-1)^n,x,n);
```

```
(%o1) P(n) := diff((x^2 - 1)^n, x, n)
```

```
(%i2) factor(P(5));
```

```
(%o2) 480 x (63 x^4 - 70 x^2 + 15)
```

```
(%i3) t(k,n) := rhs(solve(P(n),x)[k]);
```

```
(%o3) t(k,n) := rhs((solve(P(n),x))_k)
```

```
(%i4) t(3,5);
```

```
(%o4) 
$$-\frac{\sqrt{35-2\sqrt{70}}}{3\sqrt{7}}$$

```

```
(%i5) Systeme(n) := cons(sum(alpha[k],k,1,n)=2,  
makelist(sum(alpha[k]*t(k,n)^j,k,1,n-1)=(1-(-1)^(j+1))/(j+1),j,1,n-1));
```

```
(%o5) Systeme(n) := cons(
$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2, \text{makelist}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k t(k,n)^j = \frac{1 - (-1)^{j+1}}{j+1}, j, 1, n-1\right)\right)$$

```

```
(%i6) Systeme(3);
```

```
(%o6) 
$$[\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 = 2, \frac{\sqrt{3}\alpha_2}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{3}\alpha_1}{\sqrt{5}} = 0, \frac{3\alpha_2}{5} + \frac{3\alpha_1}{5} = \frac{2}{3}]$$

```

```
(%i7) Coefficients(n) := map(ratsimp,subst(  
solve(Systeme(n),makelist(alpha[k],k,1,n)),  
makelist([alpha[k],t(k,n)],k,1,n)))$
```

a. On peut même avoir des valeurs exactes jusqu'à $n = 6$.

Remarque 2.11

Il est aussi possible de subdiviser l'intervalle afin d'appliquer l'algorithme de quadrature de Gauss sur chaque subdivision.

2. Algorithme

- On choisit n , et on trouve les valeurs de $t_{j,n}$ et des $\alpha_{j,n}$;
- on calcule les

$$f\left(\frac{a+b}{2} + t_{j,n} \frac{b-a}{2}\right)$$

ce qui permet d'évaluer l'intégrale demandée avec

$$\tilde{I}_n = \frac{b-a}{2} \left[\sum_{j=1}^n \alpha_{j,n} f\left(\frac{b+a}{2} + t_{j,n} \frac{b-a}{2}\right) \right]$$

3. *Erreur de méthode.* La littérature donne (nous admettrons cette formule, qui n'est pas simple à obtenir)

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - \tilde{I}_n \right| \leq \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} \underbrace{\max_{x \in [a,b]} |f^{(2n)}(x)|}_{\stackrel{\text{Not}}{=} M_{2n}}$$

Si l'on coupe en p intervalles réguliers pour utiliser la formule donnée ci-dessus où $n = 3$ (on calcule donc $3p$ valeurs de $f(x)$), alors

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - \hat{I}_p \right| \leq \frac{(b-a)^7}{2016000 p^6} M_6$$

où, si on note $a_k = a + k(b-a)/p$, pour $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$

$$\hat{I}_p = \sum_{k=1}^p \frac{b-a}{18p} \left[5f\left(\frac{a_{k-1} + a_k}{2} - \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{b-a}{2p}\right) + 8f\left(\frac{a_{k-1} + a_k}{2}\right) + 5f\left(\frac{a_{k-1} + a_k}{2} + \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{b-a}{2p}\right) \right]$$

4. Code

Session Python 2.2 – Méthode de quadrature de Gauss

Exemple d'implantation pour $n = 3$

In[1] – Méthode de quadrature de Gauss

```
1 import numpy as np
2
3 def quadratureGauss(f,a,b,epsilon,M6):
4     p=1+np.floor(np.exp(1/6*np.log(M6*(b-a)**7/(2016000*epsilon))))
5     res=0
6     for k in range(p-1):
7         res+=(b-a)/(18*p)*(5*f(a+(k-1/2)*(b-a)/p-np.sqrt(3/5)*(b-a)/(2*p))+\
```

8
9
10

`return res`

```
8*f(a+(k-1/2)*(b-a)/p)+\  
5*f(a+(k-1/2)*(b-a)/p+np.sqrt(3/5)*(b-a)/(2*p)))
```

Exercice(s) 2.6

2.6.1 Soit la fonction $x \mapsto e^{x^2}$, comparer le nombre de valeurs à calculer pour évaluer

$$\int_0^2 f(t) dt \text{ lorsque}$$

- (a) on utilise la méthode des rectangles ;
- (b) on utilise la méthode de Simpson ;
- (c) on utilise la méthode de Gauss sur n points ;
- (d) on utilise la méthode de Gauss sur 3 points et p subdivisions.

Quelle vous semble être la meilleure méthode ?

Chapitre 3

Réduction des endomorphismes

注释 3.1

本章节介绍了自同态的约化，也就是说找到一组基底下其对应的自同态或者矩阵更加简单，比如对角矩阵，上三角矩阵等。自同态经过约化后，自同态的复合或者矩阵的计算会变得简单。本章节的最后一部分介绍了几种不同类型的约化方法以及计算机数学软件的实现。

3.1 Éléments propres

Définition 3.1 – Valeurs propres, vecteurs propres et espaces propres

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre de u* s'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que

$$u(x) = \lambda.x$$

On dit alors que x est un *vecteur propre de u associé à λ* .

- L'ensemble des valeurs propres de u s'appelle, dans ce cours, *le spectre* de u et se note $\text{Sp}(u)$.
- Si $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on appelle *espace propre de u associé à λ* le sous-espace vectoriel de E noté $E_u(\lambda)$ et défini par

$$E_u(\lambda) = \text{Ker}(u - \lambda.\text{id}_E)$$

理解特征值，特征向量，谱和特征空间是学习本章节的基础。

Remarque 3.1

- Par définition, un vecteur propre n'est jamais nul.
- La restriction de u à un espace propre $E_u(\lambda)$ est une homothétie de rapport λ .
- De même pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, on appelle valeur propre et vecteur propre de A tout couple $(\lambda, X) \in \mathbb{K} \times$

$M_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{n,1}\}$ tel que

$$A \times X = \lambda.X$$

Le spectre $\text{Sp}(A)$ de A est l'ensemble des valeurs propres de A et pour $\lambda \in \text{Sp}(A)$, $E_A(\lambda) = \text{Ker}(A - \lambda.I_n)$ est l'espace propre associé.

Si $A = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ est la matrice de u dans une base \mathcal{E} de E (en dimension finie), alors $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(u)$ et x est un vecteur propre de u si, et seulement si, $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(x)$ est un vecteur propre de A .

Remarque 3.2

La recherche des valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme u (on parle d'*éléments propres*) revient à résoudre un système linéaire homogène

$$(u - \lambda.\text{id}_E)(x) = 0_E$$

Exemple 3.1

On utilise donc les diverses méthodes de résolution des systèmes linéaires.

Par exemple, la matrice

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

ne possède qu'une valeur propre -2 . L'espace propre associé est de dimension 1.

```
(%i1) A : matrix([-3,-3,2],
                 [1,1,-2],[2,4,-4]);
```

On peut faire les calculs directement (ne marche qu'avec des matrices numériques!)

```
(%o1) 
$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i2) eigenvalues(A);
```

```
(%o2) [[-2],[3]]
```

```
(%i3) eigenvectors(A);
```

```
(%o3) [[[[-2],[3]], [[1,-1,-1]]]]
```

Le principe général est d'utiliser l'algorithme du pivot.

```
(%i4) A-X*ident(3);
```

```
(%o4) 
$$\begin{bmatrix} -X-3 & -3 & 2 \\ 1 & 1-X & -2 \\ 2 & 4 & -X-4 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i5) factor(rowop(%,1,2,%[1,1]));
```

$$(\%o5) \begin{bmatrix} 0 & -X \times (X + 2) & -2 \times (X + 2) \\ 1 & -(X - 1) & -2 \\ 2 & 2^2 & -(X + 4) \end{bmatrix}$$

(%i6) `factor(rowop(%,3,2,%[3,1]));`

$$(\%o6) \begin{bmatrix} 0 & -X \times (X + 2) & -2 \times (X + 2) \\ 1 & -(X - 1) & -2 \\ 0 & 2 \times (X + 1) & -X \end{bmatrix}$$

(%i7) `%o6,X=-2;`

$$(\%o7) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(%i8) `rank(%)`;

(%o8) 2

La fonction **rank** ne fonctionne qu'avec des matrices numériques. On a trouvé que -2 est valeur propre et que la dimension de l'espace propre associé est 1. Pour continuer, nous allons simplifier par $(X + 2)$ la première ligne. Ce faisant, nous supposons maintenant que la valeur propre est *différente* de -2 .

(%i9) `factor(rowop(%o6,1,1,1-1/(X+2)));`

$$(\%o9) \begin{bmatrix} 0 & -X & -2 \\ 1 & -(X - 1) & -2 \\ 0 & 2 \times (X + 1) & -X \end{bmatrix}$$

```
(%i11) factor(rowop(%,3,1,%[3,3]/%[1,3]));
```

$$(\%o11) \begin{bmatrix} 0 & -X & -2 \\ 1 & -(X-1) & -2 \\ 0 & \frac{(X+2)^2}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Session Python 3.1 – Exemple de réduction : valeurs propres

Traduction du Wxmaxima.

In[2]

```
1 A = Matrix(3, 3,  
2      [-3, -3, 2, 1, 1,  
3      -2, 2, 4, -4])  
4 A
```

Out[2]

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

In[3]

```
1 A.eigenvals()
```

Out[3]

$$\{-2 : 3\}$$

In[4]

```
1 A.eigenvects()
```

Out[4]

$$\left[\left(-2, 3, \left[\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right) \right]$$

In[5]

```
1 M = A-x*eye(3)
2 M
```

Out [5]

$$\begin{bmatrix} -x-3 & -3 & 2 \\ 1 & 1-x & -2 \\ 2 & 4 & -x-4 \end{bmatrix}$$

In[6]

```
1  _elementary_row_op('n->n+km',  
2                          row1=2,  
3                          row2=1,  
4                          k=-2)
```

Out [6]

$$\begin{bmatrix} -x-3 & -3 & 2 \\ 1 & 1-x & -2 \\ 0 & 2x+2 & -x \end{bmatrix}$$

In[7]

```
1  _._elementary_row_op('n->n+km',  
2                          row1=0,  
3                          row2=1,  
4                          k=x+3)
```

Out[7]

$$\begin{bmatrix} 0 & (1-x)(x+3)-3 & -2x-4 \\ 1 & 1-x & -2 \\ 0 & 2x+2 & -x \end{bmatrix}$$

In[8]

```
1  N = expand(_)  
2  N
```

Out [8]

$$\begin{bmatrix} 0 & -x^2 - 2x & -2x - 4 \\ 1 & 1 - x & -2 \\ 0 & 2x + 2 & -x \end{bmatrix}$$

In [9]

```
1 # -2 annule la première ligne  
2 _.subs({x: -2})
```

Out [9]

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

In [10]

```
1 _.rank()
```

Out[10]

2

In[10]

```
1 M.rank()
```

Out[10]

3

In[11]

```
1 N.elementary_row_op('n->kn',  
2 row=0,  
3 k=-1/(x+2))
```

Out[11]

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{-x^2-2x}{x+2} & -\frac{-2x-4}{x+2} \\ 1 & 1-x & -2 \\ 0 & 2x+2 & -x \end{bmatrix}$$

In[12]

```
1  _ . applyfunc(ratsimp)
```

Out[12]

$$\begin{bmatrix} 0 & x & 2 \\ 1 & 1-x & -2 \\ 0 & 2x+2 & -x \end{bmatrix}$$

In[13]

```
1  _ . elementary_row_op('n->n+km',  
2                               row1=2,  
3                               row2=0,  
4                               k=x/2)
```

Out[13]

$$\begin{bmatrix} 0 & x & 2 \\ 1 & 1-x & -2 \\ 0 & \frac{x^2}{2} + 2x + 2 & 0 \end{bmatrix}$$

In[14]

```
1 _ . applyfunc(sympy.factor)
```

Out[14]

$$\begin{bmatrix} 0 & x & 2 \\ 1 & 1-x & -2 \\ 0 & \frac{(x+2)^2}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque 3.3

Comme la valeur propre est différente de -2 , le rang est toujours 3. Il n'y a pas d'autre valeur propre que celles trouvées. Par ailleurs, comme nous avons travailler *sur les lignes uniquement*, les vecteurs propres sont solutions d'un système triangulaire très facile à résoudre.

Session Wxmaxima 3.2 – Exemple de réduction : vecteurs propres

```
(%i12) expand(%o7.matrix([x],[y],[z]));
```

```
(%o12)
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \times z + 3 \times y + x \\ 2 \times z - 2 \times y \end{bmatrix}$$

```
(%i13) solve(list_matrix_entries(%),[x,y,z]);
```

solve : dependent equations eliminated : (1)

```
(%o13) [[x = -%r1, y = %r1, z = %r1]]
```

Session Python 3.2 – Exemple de réduction : vecteurs propres

Traduction du Wxmaxima.

In[15]

```
1 X = Matrix(3, 1,  
2     [x, y, z])  
3 N.subs({x: -2})
```

Out[15]

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

In[16]

```
1  _*X
```

Out[16]

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x + 3y - 2z \\ -2y + 2z \end{bmatrix}$$

In[17]

```
1  solve(_,  
2      [x, y, z])
```

Out[17]

$$\{x : -z, y : z\}$$

In[18]

```
1  X.subs(_)
```

$$\begin{bmatrix} -z \\ z \\ z \end{bmatrix}$$

Exemple 3.2

On peut parfois trouver des valeurs propres et les vecteurs propres directement à partir de la matrice, sans résoudre un système linéaire. Par exemple, si $n \geq 2$ et si a et b sont dans \mathbb{K} , $a \neq b$, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

possède les valeurs propres $a + (n-1)b$ et $a - b$ (on verra qu'il n'y en a pas d'autre) et les espaces propres associés sont

$$E_A(a + (n-1)b) = \text{Vect} \left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right)$$

$$\text{et } E_A(a - b) = \text{Vect} (\{E_{1,1} - E_{k,1}, k \in \{2, \dots, n\}\})$$

Session Wxmaxima 3.3 – Exemple de réduction

```
(%i1) A(n) := genmatrix(lambda([i,j],if i=j then a else b),n,n);
```

```
(%o1) A(n) := genmatrix(lambda([i,j],if i=j then a else b),n,n)
```

```
(%i2) A(3);
```

```
(%o2) 
$$\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$$

```

```
(%i3) eigenvalues(A(n)),n=5;
```

```
(%o3)  $[[4 \times b + a, a - b], [1, 4]]$ 
```

```
(%i4) eigenvectors(A(n)),n=6;
```

```
(%o4)  $[[[5 \times b + a, a - b], [1, 5]], [[1, 1, 1, 1, 1, 1]], [[1, 0, 0, 0, 0, -1],$   
 $[0, 1, 0, 0, 0, -1], [0, 0, 1, 0, 0, -1], [0, 0, 0, 1, 0, -1], [0, 0, 0, 0, 1, -1]]]$ 
```

Session Python 3.3 – Exemple de réduction : vecteurs propres

Traduction du Wxmaxima.

In[2]

```
1 a, b = symbols('a b')
2 def A(n):
3     return Matrix(n, n,
4                     lambda i, j:
5                         b+(a-b)*
6                         KroneckerDelta(i, j)))
```

In[3]

```
1 A(3)
```

Out[3]

$$\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$$

In[4]

```
1 (A(5)).eigenvals()
```

Out [4]

$$\{a - b : 4, a + 4b : 1\}$$

In[5]

```
1 (A(6)).eigenvects()
```

Out [5]

$$\left[\left(a - b, 5, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \left(a + 5b, 1, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right]$$

Exemple 3.3

Si E est le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $2n$ et si $k \in \mathbb{R}$, alors l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par

$$\forall P \in E, u(P) = \left(x \mapsto (x^2 - 1) P'(x) - (2nx + k) P(x) \right)$$

vérifie

$$\mathrm{Sp}(u) = \{-k + 2i, i \in \{-n, \dots, +n\}\}$$

et

$$\forall i \in \{-n, \dots, +n\}, E_u(-k + 2i) = \mathrm{Vect}(\{x \mapsto (x-1)^{n+i} (x+1)^{n-i}\})$$

Session Wxmaxima 3.4 – Exemple de réduction

```
(%i1) eq : (x^2-1)*'diff(y,x)-(2*n*x+k)*y;
```

```
(%o1) (x^2 - 1) \times \left( \frac{d}{dx} \times y \right) - (2 \times n \times x + k) \times y
```

```
(%i2) ode2(eq,y,x);
```

```
(%o2) y = %c \times e^{\frac{(2 \times n - k) \times \log(x+1)}{2} + \frac{(2 \times n + k) \times \log(x-1)}{2}}
```

```
(%i3) solve([n-k/2=p,n+k/2=2*n-p],k);
```

solve : dependent equations eliminated : (2)

```
(%o3) [[k = 2 \times n - 2 \times p]]
```

```
(%i4) P[p] : subst(%[1],(x+1)^(n-k/2)*(x-1)^(n+k/2));
```

```
(%o4) (x - 1)^{\frac{2 \times n - 2 \times p}{2} + n} \times (x + 1)^{n - \frac{2 \times n - 2 \times p}{2}}
```

```
(%i5) ratsimp(%);
```

```
(%o5) (x-1)^{2*n-p}*(x+1)^p
```

Session Python 3.4 – Exemple de réduction

Traduction du Wxmaxima.

In[2]

```
1 f = Function('f')
2 eq = Eq((x**2-1)*
3         diff(f(x), x)-(2*n*x+t)*f(x),
4         0)
```

In[3]

```
1 dsolve(eq, f(x))
```

Out[3]

$$f(x) = C_1 e^{n \log(x-1) + n \log(x+1) + \frac{t \log(x-1)}{2} - \frac{t \log(x+1)}{2}}$$

In[4]

```
1 p = Symbol('p', integer=True)
2 solve([Eq(n+t/2, 2*n-p),
3        Eq(n-t/2, p)], t)
```

Out[4]

$$\{t : 2n - 2p\}$$

In[5]

```
1 ((x+1)**(n-t/2)*(x-1)**(n+t/2)).subs(_)
```

Out[5]

$$(x-1)^{2n-p}(x+1)^p$$

Exemple 3.4

Il faut parfois faire preuve de vision géométrique. Si E est le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré

inférieur ou égal à n et si $u \in \mathcal{L}(E)$ est défini par

$$\forall P \in E, u(P) = \left(x \mapsto P(1-x) \right)$$

alors les valeurs propres de u sont -1 et $+1$ et les vecteurs propres se calculent facilement dans une base adaptée.

3.2 Polynôme caractéristique

Propriété 3.1

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Les propositions suivantes sont équivalentes

1. $\lambda \in \text{Sp}(u)$;
2. $\text{Ker}(u - \lambda \cdot \text{id}_E) \neq \{0_E\}$;
3. $u - \lambda \cdot \text{id}_E$ n'est pas injectif.

En particulier, comme E est de dimension finie, u n'est pas inversible si, et seulement si, $0_E \in \text{Sp}(u)$. Si c'est le cas, $\text{Ker } u = E_u(0)$.

Démonstration

On a

$$\begin{aligned}\lambda \in \text{Sp}(u) &\iff \exists x \in E \setminus \{0_E\}, u(x) = \lambda.x \\ &\iff \exists x \in E \setminus \{0_E\}, (u - \lambda.\text{id}_E)(x) = 0_E \\ &\iff \text{Ker}(u - \lambda.\text{id}_E) \neq \{0_E\}\end{aligned}$$

et on remarque que u est injectif si, et seulement si, $\text{Ker}(u - \lambda.\text{id}_E) = \{0_E\}$.

Si E est de dimension finie, u est inversible si, et seulement si, il est injectif, d'où le résultat en prenant $\lambda = 0$.

Définition 3.2

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le *polynôme caractéristique* de u , noté χ_u , correspond à la fonction polynomiale

$$x \longmapsto \det(u - x.\text{id}_E)$$

Remarque 3.4

- Afin d'alléger les notations et les calculs, on note le polynôme caractéristique χ_u sous la forme d'un *polynôme formel* (voir le cours sur les polynômes)

$$\chi_u = \det(u - X.\text{id}_E)$$

au lieu d'une fonction polynomiale, où X est l'*indéterminée*, une variable ayant les mêmes règles de calcul que celles d'une variable dans \mathbb{K} .

Ainsi, une fonction polynomiale sur \mathbb{K} de la forme

$$x \mapsto \sum_{k=0}^n \underbrace{a_k}_{\in \mathbb{K}} x^k$$

se représente par

$$\sum_{k=0}^n a_k X^k$$

Autrement dit, X correspond à la fonction polynomiale $x \mapsto x$.

On note $\mathbb{K}[X]$ le \mathbb{K} -espace vectoriel des polynômes (formels) à coefficients dans \mathbb{K} et $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

- On définit de la même manière le polynôme caractéristique $\chi_A = \det(A - X.I_n)$ d'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si A est la matrice de u dans une base de E , alors $\chi_A = \chi_u$.
- Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. La réciproque est fausse.

Propriété 3.2

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors χ_u est de degré n . De plus, si $n \geq 2$, alors

$$\chi_u = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \text{trace}(u) + \cdots + \det(u)$$

Démonstration

Si $n = 1$, c'est évident. Supposons $n \geq 2$. Soit $A = [a_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice de u dans une base quelconque de E (donc $\chi_u = \chi_A$). Posons

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \alpha_{i,j} = \begin{cases} a_{i,i} - X & \text{si } i = j \\ a_{i,j} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

On a

$$\chi_A = \det \left([\alpha_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \alpha_{\sigma(i), i}$$

Pour $\sigma = \text{id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \alpha_{\sigma(i), i} &= \prod_{i=1}^n \underbrace{\alpha_{i,i}}_{=a_{i,i}-X} \\ &= (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{1,1} + \cdots + a_{n,n})}_{=\text{trace } A = \text{trace } u} X^{n-1} \\ &\quad + (\text{termes d'ordre} \leq n-2) \end{aligned}$$

Si $\sigma \neq \text{id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$, alors il existe $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $k \neq \ell$, $\sigma(k) \neq k$ et $\sigma(\ell) \neq \ell$ ce qui démontre que

$$\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \alpha_{\sigma(i), i} \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$$

puisque $\alpha_{\sigma(k), k} = a_{\sigma(k), k}$ et $\alpha_{\sigma(\ell), \ell} = a_{\sigma(\ell), \ell}$ ne dépendent pas de X . On en déduit le résultat, en remarquant que le terme constant est $\chi_u(0) = \det(u - 0 \cdot \text{id}_E) = \det u$.

Propriété 3.3

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors λ est une valeur propre de u si, et seulement si, $\chi_u(\lambda) = 0$. Autrement dit

$$\text{Sp}(u) = (\chi_u)^{-1}(\{0\})$$

Démonstration

Immédiat en utilisant la propriété 3.1, page 119 et en remarquant que $u - \lambda \cdot \text{id}_E$ n'est pas injectif si, et seulement si, $\chi_u(\lambda) = \det(u - \lambda \cdot \text{id}_E) = 0$.

Remarque 3.5

- Si E est de dimension $n \geq 1$, alors u a au plus n valeurs propres (car χ_u est un polynôme de degré n , il admet donc au plus n racines).
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors u a au moins une valeur propre car sur \mathbb{C} les polynômes non constants admettent toujours une racine (c'est faux pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Remarque importante 3.6

Il pourrait être tentant de passer systématiquement par le polynôme caractéristique pour trouver les éléments propres de u , ce serait pourtant une grosse erreur, car s'il nous permet de trouver les valeurs propres de u , il ne nous donne aucune information sur les espaces propres. Ainsi

$$A_k = \left[\begin{array}{c|c} I_k + N_k & 0 \\ \hline 0 & I_{n-k} \end{array} \right] \in M_n(\mathbb{K})$$

où $N_k = \sum_{i=1}^{k-1} E_{i,i+1} \in M_k(\mathbb{K})$ sont telles que toutes les A_k ($k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) ont même polynôme caractéristique alors que les espaces propres associés ont des dimensions allant de 1 à n .

Définition 3.3 – Multiplicité d'une valeur propre

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$. La *multiplicité de λ* est la multiplicité^a de λ en tant que racine du polynôme χ_u . On note

$\text{mult}_u(\lambda)$ la multiplicité de λ

Si $\text{mult}_u(\lambda) = 1$ on parle de valeur propre *simple*.

a. Une racine $\alpha \in \mathbb{K}$ de $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul a pour multiplicité $r \in \mathbb{N}^*$ si $P = (X - \alpha)^r Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(\alpha) \neq 0$.

Propriété 3.4

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \quad 1 \leq \dim E_u(\lambda) \leq \text{mult}_u(\lambda)$$

En particulier, si $\text{mult}_u(\lambda) = 1$ (valeur propre simple), alors $\dim E_u(\lambda) = 1$.

Démonstration

Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$. Par définition, il existe un vecteur propre associé à λ (donc non nul), d'où $E_u(\lambda) \neq \{0_E\}$ et donc $\dim E_u(\lambda) \geq 1$.

Posons $d = \dim E_u(\lambda)$. Soit (e_1, \dots, e_d) une base de $E_u(\lambda)$ qu'on complète en une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E (avec $n = \dim E$). La restriction de u à $E_u(\lambda)$ est une homothétie de rapport λ donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \left[\begin{array}{c|c} \lambda.I_d & B \\ \hline 0_{n-d,d} & C \end{array} \right], \quad B \in M_{d,n-d}(\mathbb{K}), \quad C \in M_{n-d}(\mathbb{K})$$

On a donc

$$\begin{aligned} \chi_u &= \det \left[\begin{array}{c|c} (\lambda - X).I_d & B \\ \hline 0_{n-d,d} & C - X.I_{n-d} \end{array} \right] \\ &= \det((\lambda - X).I_d) \det(C - X.I_{n-d}) \\ &= (\lambda - X)^d \det(C - X.I_{n-d}) \end{aligned}$$

d'où $d \leq \text{mult}_u(\lambda)$.

3.3 Diagonalisation

Proposition 3.1

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres de u toutes différentes ($k \geq 2$). Alors les espaces propres associés $E_u(\lambda_1), \dots, E_u(\lambda_k)$ sont en somme directe.

Démonstration

Par récurrence sur k .

- Pour $k = 2$, si $x \in E_u(\lambda_1) \cap E_u(\lambda_2)$, alors $u(x) - \lambda_1.x = u(x) - \lambda_2.x = 0_E$ donc $(\lambda_1 - \lambda_2).x = 0_E$. Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a $x = 0_E$ donc $E_u(\lambda_1) \cap E_u(\lambda_2) = \{0_E\}$, ce qui démontre que $E_u(\lambda_1)$ et $E_u(\lambda_2)$ sont en somme directe.
- Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Supposons le résultat vrai au rang k . Prenons pour tout $j \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$, $x_j \in E_u(\lambda_j)$ tel que (écriture de 0_E)

$$\sum_{j=1}^{k+1} x_j = 0_E, \quad \text{donc } x_{k+1} = - \sum_{j=1}^k x_j$$

Alors

$$0_E = u \left(\sum_{j=1}^{k+1} x_j = 0_E \right) = \sum_{j=1}^{k+1} u(x_j) = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j . x_j$$

D'après ces deux égalités

$$\sum_{j=1}^k \underbrace{(\lambda_j - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} . x_j = 0_E$$

donc, par hypothèse de récurrence, $x_1 = \dots = x_k = 0_E$ et donc $x_{k+1} = 0_E$. Le résultat est donc vrai au rang $k+1$.

Par principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

Définition 3.4 – Endomorphisme diagonalisable

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est *diagonalisable* si

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_u(\lambda)$$

Comme E est de dimension finie, alors u est diagonalisable si, et seulement si, E admet une base de vecteurs propres de u (on dit alors que u se *diagonalise* dans cette base).

Remarque 3.7

- Si E est de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, alors dans toute base \mathcal{E} de E formé de vecteurs propres de u , la matrice de u est diagonale et ses éléments sont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ qui apparaissent avec leur multiplicité

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \text{Diag}\left(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{\text{mult}_u(\lambda_1) \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{\text{mult}_u(\lambda_2) \text{ fois}}, \dots \right)$$

- On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé l'est. Autrement dit, une matrice est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Cependant, pour une matrice, il est fondamental de préciser le corps \mathbb{K} dans lequel on travaille (il est possible qu'une matrice $M_n(\mathbb{R})$ ne soit

pas diagonalisable mais qu'elle soit diagonalisable si on la voit comme une matrice de $M_n(\mathbb{C})$). Par exemple, la matrice

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \text{ où } \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$, mais pas dans $M_2(\mathbb{R})$.

注释 3.2

正如前面章节所讲，我们通过线性映射引出矩阵的定义，所以自同态的可对角化性质等价于矩阵的可对角化性质。

Propriété 3.5

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$u \text{ est diagonalisable si, et seulement si, } \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_u(\lambda) = \dim E$$

Démonstration

- Le sens direct est immédiat en considérant une base adaptée à la décomposition de E en somme directe d'espaces propres de u .

— Notons $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ et supposons que

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_u(\lambda) = \sum_{i=1}^k \dim E_u(\lambda_i) = \dim E$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, soit \mathcal{E}_i une base de $E_u(\lambda_i)$. Alors $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k)$ est une famille libre (car les espaces propres sont en somme directe, proposition 3.1, page 126) qui a $\sum_{i=1}^k \dim E_u(\lambda_i) = \dim E$ éléments par hypothèse. On en déduit que \mathcal{E} est une base de E formée de vecteurs propres de u , donc u est diagonalisable.

Théorème 3.1 – Caractérisation des endomorphismes diagonalisables

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si, et seulement si, χ_u est scindé et pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$,

$$\dim E_u(\lambda) = \text{mult}_u(\lambda)$$

Remarque 3.8

Par définition, un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant est scindé s'il est de la forme

$$P = a (X - \alpha_1) (X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_k), \text{ avec } a \in \mathbb{K}^* \text{ et, pour tout } i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \alpha_i \in \mathbb{K}$$

Les α_i ne sont pas nécessairement tous différents.

Démonstration

Notons $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ et pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $d_i = \dim E_u(\lambda_i)$.

— Supposons que u soit diagonalisable. Dans une base \mathcal{E} de E adaptée à la décomposition

$$E = \bigoplus_{i=1}^k E_u(\lambda_i)$$

la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ de u dans la base \mathcal{E} est diagonale

$$\chi_u = \det(A - X.I_n) = \text{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{d_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_k, \dots, \lambda_k}_{d_k \text{ fois}})$$

On a donc ($n = \dim E$)

$$\chi_u = \det(A - X.I_n) = (\lambda_1 - X)^{d_1} \dots (\lambda_k - X)^{d_k}$$

ce qui démontre que χ_u est scindé. De plus, il est de degré n (propriété 3.2, page 121) donc

$$\sum_{i=1}^k \text{mult}_u(\lambda_i) = \sum_{i=1}^k d_i = n$$

Mais pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $1 \leq d_i \leq \text{mult}_u(\lambda_i)$ (propriété 3.4, page 125), ce qui implique que, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $d_i = \text{mult}_u(\lambda_i)$.

— Supposons que χ_u soit scindé et que, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $d_i = \text{mult}_u(\lambda_i)$. Puisque les zéros de χ_u sont les valeurs propres de u , on a

$$\chi_u = (\lambda_1 - X)^{d_1} \dots (\lambda_k - X)^{d_k}$$

donc

$$\sum_{i=1}^k d_i = n = \dim E$$

D'après la propriété 3.5, page 128, u est diagonalisable.

Remarque importante 3.9 – Cas des racines simples

Si u admet n valeurs propres toutes différentes ($n = \dim E$), alors u est diagonalisable car $\dim E_u(\lambda) = \text{mult}_u(\lambda) = 1$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$. C'est le seul cas où il n'est pas nécessaire de calculer les dimensions des espaces propres de u , et où l'étude du polynôme caractéristique χ_u suffit pour démontrer que u est diagonalisable.

Remarque 3.10

On retrouve le fait qu'il est indispensable de préciser le corps dans lequel on se place quand on s'intéresse à la diagonalisation d'une matrice. Sur \mathbb{C} tous les polynômes non constants sont scindés, ce qui est faux sur \mathbb{R} .

Exemple 3.5

- La matrice de l'exemple 3.1, page 99 n'est pas diagonalisable (sur \mathbb{R} ou sur \mathbb{C}).
- La matrice de l'exemple 3.2, page 112 est diagonalisable sur \mathbb{K} .
- L'endomorphisme de l'exemple 3.3, page 115 est diagonalisable.
- Une rotation du plan euclidien \mathbb{R}^2 d'angle $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ n'est pas diagonalisable. Cependant, sa matrice est diagonalisable sur \mathbb{C} .

Exercice(s) 3.1

3.1.1 Pour $a \in \mathbb{C}$, dire si

$$\begin{bmatrix} a+1 & 1 & -1 \\ 2a+2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C}) \text{ est diagonalisable.}$$

3.1.2 Diagonaliser (c'est-à-dire démontrer qu'elle est diagonalisable et l'écrire sous la forme $P \times D \times P^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in M_3(\mathbb{R})$ diagonale) la matrice suivante

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

3.1.3 Démontrer que les matrices suivantes sont semblables

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

3.1.4 Diagonaliser l'endomorphisme ϕ de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par (pour $n \in \mathbb{N}^*$)

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \phi(P) = P + \frac{1-X}{n} P'$$

3.1.5 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et $B \in M_p(\mathbb{K})$ diagonalisable, démontrer que $A \otimes B$ est diagonalisable et préciser les éléments propres de $A \otimes B$ en fonction de ceux de A et de B .

3.1.6 Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $A \in M_n(\mathbb{C})$ pour que

$$\left[\begin{array}{c|c} 0_n & I_n \\ \hline 2.A & A \end{array} \right] \text{ soit diagonalisable}$$

3.1.7 Démontrer que toute matrice circulante, c'est-à-dire de la forme

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & a_1 \end{bmatrix}, \quad (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$$

est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et donner ses éléments propres.

3.1.8 La matrice suivante est-elle diagonalisable ($n \geq 2$) ?

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$$

3.1.9 La matrice suivante est-elle diagonalisable ($n \geq 2$) ?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

3.1.10 Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. À quelle condition nécessaire et suffisante la matrice M suivante est-elle diagonalisable ?

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & a_2 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

Même question avec $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$.

3.1.11 Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice suivante soit diagonalisable

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin(\phi) & \sin(2\phi) \\ \sin(\phi) & 0 & \sin(2\phi) \\ \sin(2\phi) & \sin(\phi) & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}), \phi \in \mathbb{R}$$

3.1.12 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer l'équivalence de

(a) u diagonalisable ;

(b) tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire stable par u .

3.1.13 Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$P \mapsto X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$$

3.4 Trigonalisation

Définition 3.5 – Endomorphisme trigonalisable

Endomorphisme trigonalisable Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est dit *trigonalisable* s'il existe un *drapeau* stable pour u , c'est-à-dire des sous-espaces vectoriels V_1, \dots, V_n de E qui sont stables par u et tels que

$$\{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_n = E$$

Remarque 3.11

- Nécessairement pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\dim V_k = k$.
- u est trigonalisable si, et seulement si, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure (considérer une base (e_1, \dots, e_n) de E adaptée au drapeau, c'est-à-dire telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, (e_1, \dots, e_k) est une base de V_k).
La diagonale de cette matrice est alors constituée des valeurs propres de u (avec leurs multiplicités).
- On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé l'est. Autrement dit, une matrice est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. De même que pour la diagonalisation, il est indispensable de préciser le corps \mathbb{K} dans lequel on travaille.

Théorème 3.2 – Caractérisation des endomorphismes trigonalisables

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors

u est trigonalisable si, et seulement si, χ_u est scindé

我们通常用此定理来判断自同态是否可三角化，如约化为上三角矩阵。

Démonstration

- Supposons que u soit trigonalisable. Il existe une base \mathcal{E} de E telle que $A = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = [a_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in M_n(\mathbb{K})$

(avec $n = \dim E$) soit triangulaire supérieure. On a alors

$$\chi_u = \det(A - X.I_n) = \prod_{i=1}^n (a_{i,i} - X)$$

donc χ_u est scindé.

— Démontrons la réciproque par récurrence sur $n = \dim E$.

— Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat vrai au rang n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n + 1$ tel que χ_u soit scindé. En particulier, il admet au moins une racine donc il existe un vecteur propre e_1 de $u : u(e_1) = \lambda_1.e_1$ avec $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ la valeur propre associée à e_1 . Comme $e_1 \neq 0_E$, on peut compléter (e_1) en une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_{n+1})$ de E . On a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & M \\ \hline 0_{n,1} & N \end{array} \right], \quad M \in M_{1,n}(\mathbb{K}), \quad N \in M_n(\mathbb{K})$$

donc

$$\chi_u = \det(\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) - X.I_{n+1}) = (\lambda - X) \chi_N$$

Puisque χ_u est scindé, nécessairement χ_N est aussi scindé. Or

$$N = \text{Mat}_{(e_2, \dots, e_{n+1})}(\pi_H \circ u|_H)$$

avec $H = \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$ qui est de dimension n , π_H la projection de H parallèlement à $\text{Vect}(\{e_1\})$ et $\pi_H \circ u|_H \in \mathcal{L}(H)$ qui a pour polynôme caractéristique χ_N qui est scindé. Par hypothèse de récurrence, $\pi_H \circ u|_H$ est trigonalisable donc il existe une base (h_2, \dots, h_{n+1}) de H telle que la matrice de $\pi_H \circ u|_H$ dans cette base soit triangulaire supérieure. Alors, par construction, la matrice de u dans la base $(e_1, h_2, \dots, h_{n+1})$ est triangulaire supérieure, donc u est trigonalisable.

Par principe de récurrence, le résultat est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 3.12

En particulier, tous les endomorphismes d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie non nulle sont trigonalisables (car les polynômes non constants sont scindés sur \mathbb{C}). Ils possèdent des espaces stables de dimension quelconque.

Exemple 3.6

La matrice

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

se trigonalise dans \mathbb{C} . Il suffit pour effectuer la trigonalisation de suivre la démonstration du théorème.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ où $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. On a vu que le vecteur $e_1 = -c_1 + c_2 + c_3$ est vecteur propre de u associé à la valeur propre -2 . On peut compléter en une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ en prenant $e_2 = c_1$ et $e_3 = c_2$.



Bien vérifier que l'on a une base !.

2. Pour trouver la matrice de u dans la base \mathcal{B}_1 , on procède comme ceci
 - $u(e_1) = -2.e_1$
 - $u(e_2) = u(c_1) = -3.c_1 + c_2 + 2.c_3 = 2.e_1 - c_2 - c_1 = 2.e_1 - e_2 - e_3$ (on regarde la première colonne de la matrice A).
 - $u(e_3) = u(c_2) = -3.c_1 + c_2 + 4.c_3 = 4.e_1 + c_1 - 3.c_2 = 4.e_1 + e_2 - 3.e_3$ (on regarde la deuxième colonne de la matrice).

On obtient donc, si $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

On peut vérifier en Wxmaxima, mais *il faut savoir le faire à la main !*

Session Wxmaxima 3.5 – Exemple de réduction

```
(%i1) A : matrix([-3,-3,2],[1,1,-2],[2,4,-4]);
```

```
(%o1)  $\begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$ 
```

```
(%i2) P : transpose(matrix([-1,1,1],[1,0,0],[0,1,0]));
```

```
(%o2)  $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 
```

```
(%i3) invert(P).A.P;
```

$$(\%o3) \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Session Python 3.5 – Exemple de réduction

Traduction du Wxmaxima.

In[2]

```
1 A = Matrix(3, 3,  
2     [-3, -3, 2, 1, 1,  
3     -2, 2, 4, -4])
```

In[2]

```
1 P = Matrix(3, 3,  
2     [-1, 1, 1, 1, 0,  
3     0, 0, 1, 0]).transpose()
```

In[3]

```
1 P**(-1)*A*P
```

Out[3]

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Exemple 3.6 – (suite)

On recommence sur la sous-matrice 2×2

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

A_1 est la matrice d'un endomorphisme u_1 de E_1 dans la base (e_2, e_3) , où $E_1 = \text{Vect}\{e_2, e_3\}$.

1. On cherche un vecteur propre de A_1 , il vérifie

$$\begin{aligned} -x + y &= -2x \\ -x - 3y &= -2y \end{aligned}$$

ce qui donne immédiatement $x = a$, $y = -a$ où $a \neq 0$, par exemple $(x, y) = (1, -1)$.

2. Ce vecteur est exprimé dans la base (e_2, e_3) , c'est donc

$$b_2 = e_2 - e_3$$

3. On complète la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ avec

$$b_1 = e_1 \text{ et } b_3 = e_2$$

où b_1 est choisi pour conserver le vecteur propre de A et b_3 est choisi pour compléter $\{b_2\}$ en une base de E_1 .

4. On a alors

$$\text{— } u(b_1) = -2b_1$$

$$\text{— } u(b_2) = u(e_2 - e_3) = u(e_2) - u(e_3) = (2e_1 - e_2 - e_3) - (4e_1 + e_2 - 3e_3) = -2e_1 - 2e_2 + 2e_3 = -2b_1 - 2b_2$$

$$\text{— } u(b_3) = u(e_2) = 2e_1 - e_2 - e_3 = 2b_1 + b_2 - 2b_3$$

Finalement

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u(b_1) & u(b_2) & u(b_3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Vérifions en Wxmaxima

Session Wxmaxima 3.6 – Vérification

```
(%i4) Q : transpose(matrix([1,0,0],[0,1,-1],[0,1,0]));
```

```
(%o4) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i5) invert(Q).%o3.Q;
```

```
(%o5) 
$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

```

Session Python 3.6 – Vérification

Traduction du Wxmaxima.

In[4]

```
1 Q = Matrix(3, 3,  
2     [1, 0, 0, 0, 1,  
3     -1, 0, 1, 0]).transpose()  
4 Q**(-1)*_Q
```

Out [4]

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$



Le calcul « à la main » est très différent de celui effectué à la machine.

L'objectif est de ne jamais inverser de matrice !

3.5 Réduction simultanée

Propriété 3.6

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle, soit $u \in \mathcal{E}$ et soit $F \neq \{0_E\}$ un sous-espace vectoriel de E stable par u (c'est-à-dire $u(F) \subset F$). Alors

1. pour tout $\lambda \in \text{Sp}(v)$, $E_v(\lambda) = E_u(\lambda) \cap F$ avec $v = u|_F$;
2. si u est diagonalisable, alors $u|_F^F$ est diagonalisable ;
3. si u est trigonalisable, alors $u|_F^F$ est trigonalisable.

Démonstration

1. Soit $\lambda \in \text{Sp}(v)$.

— On a $E_v(\lambda) \subset E_u(\lambda) \cap F$ car $E_v(\lambda) \subset E_u(\lambda)$ par définition de v et $E_v(\lambda) \subset F$ car $v \in \mathcal{L}(F)$.

— Soit $x \in E_u(\lambda) \cap F$. Alors

$$v(x) = u|_F^F(x) = u(x) = \lambda.x$$

donc $x \in E_v(\lambda)$, d'où $E_u(\lambda) \cap F \subset E_v(\lambda)$.

Par double inclusions, $E_v(\lambda) = E_u(\lambda) \cap F$.

2. Notons $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ et pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $d_i = \dim E_u(\lambda_i)$. Soit $x \in F$. Puisque u est diagonalisable, il existe une base de vecteurs propres de E donc on peut écrire

$$x = \sum_{i=1}^k x_i, \quad \text{avec, pour tout } i \in \llbracket 1, k \rrbracket, x_i \in E_u(\lambda_i)$$

On a donc

$$\forall j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, u^j(x) = \sum_{i=1}^k (\lambda_i)^j . x_i$$

Autrement dit, on a un système linéaire d'inconnues x_1, \dots, x_k vectorielles (éléments de E). Pour se ramener à un système linéaire d'inconnues scalaires, considérons $\phi \in E^*$ une forme linéaire. On a alors

$$\forall j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, \phi(u^j(x)) = \sum_{i=1}^k (\lambda_i)^j . \phi(x_i)$$

On a donc un système linéaire dont le déterminant de la matrice associée est un déterminant de Vandermonde (proposition 3.2, page 210 de [1]). En particulier, comme les valeurs propres λ_i sont toutes différentes, ce déterminant est non nul donc le système admet une unique solution. On peut donc écrire

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \phi(x_i) = \sum_{j=0}^{k-1} \underbrace{\alpha_{i,j}}_{\in \mathbb{K}} \phi(u^j(x))$$

Puisque que ceci est vrai pour toute forme linéaire $\phi \in E^\star$ et en remarquant que les $\alpha_{i,j}$ ne dépendent pas de ϕ (formules de Cramer), on a

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, x_i = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{i,j} \cdot \underbrace{u^j(x)}_{\in F} \in F$$

en utilisant le fait que F est stable par tous les u^j . On a donc démontré que tout élément de F s'écrit de manière unique comme une somme de vecteurs propres de u qui sont dans F , d'où

$$F = \bigoplus_{i=1}^k (E_u(\lambda_i) \cap F) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(v)} E_v(\lambda)$$

d'après le point 1. On en déduit que $v = u|_F^F$ est diagonalisable.

3. Si $F = E$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $F \neq E$. Soit \mathcal{F} une base de F que l'on complète en une base \mathcal{E} de E . On a alors ($n = \dim E$ et $p = \dim F$)

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_{n-p,p} & D \end{array} \right], \quad A = \text{Mat}_{\mathcal{F}}(v) \in M_p(\mathbb{K}), \quad B \in M_{p,n-p}(\mathbb{K}), \quad D \in M_{n-p}(\mathbb{K})$$

On en déduit que $\chi_u = \chi_v \chi_D$. Or χ_u est scindé car u est trigonalisable donc nécessairement χ_v est aussi scindé, ce qui démontre que v est trigonalisable.

Remarque 3.13

- On peut démontrer le point 2 beaucoup plus rapidement avec la notion de polynôme d'endomorphisme (voir le chapitre suivant).
- On peut retenir cette idée. Lorsqu'on a un système linéaire dont les inconnues x_1, \dots, x_p sont des vecteurs d'un espace

vectorel E

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^p a_{i,j} \cdot x_j = b_i$$

on peut utiliser la dualité. On considère une forme linéaire quelconque $\phi \in E^*$ et on obtient le système linéaire

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^p a_{i,j} \cdot \phi(x_j) = \phi(b_i)$$

dont les inconnues $\phi(x_1), \dots, \phi(x_p)$ sont des scalaires, que l'on sait résoudre (typiquement avec l'algorithme du pivot de Gauss). Si elles existent, les solutions s'écrivent sous la forme

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \phi(x_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} \cdot \phi(b_i)$$

Comme ceci est vrai pour toute forme linéaire $\phi \in E^*$ et les $\alpha_{i,j}$ ne dépendent pas de ϕ , on a

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} \cdot b_i$$

Propriété 3.7

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent ($u \circ v = v \circ u$). Alors

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), v(E_u(\lambda)) \subset E_u(\lambda)$$

Démonstration

Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et soit $x \in E_u(\lambda)$. On a donc $u(x) = \lambda.x$ donc

$$v(u(x)) = v(\lambda.x) = \lambda.v(x)$$

mais comme u et v commutent, on a $v(u(x)) = u(v(x))$ donc

$$u(v(x)) = \lambda.v(x)$$

c'est-à-dire $v(x) \in E_u(\lambda)$.

Théorème 3.3 – Critère de co-diagonalisation

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit u et v deux endomorphismes de E qui sont diagonalisables. Alors u et v commutent ($u \circ v = v \circ u$) si, et seulement si, ils sont co-diagonalisables, c'est-à-dire qu'ils se diagonalisent dans une même base de vecteurs propres.

Démonstration

- Supposons que u et v soient co-diagonalisables. Il existe une base \mathcal{E} de E dans laquelle les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(v)$ sont diagonales. En particulier, elles commutent donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u \circ v) = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{E}}(v) = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(v) \times \text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(v \circ u)$$

d'où $u \circ v = v \circ u$.

- Supposons que $u \circ v = v \circ u$. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$. D'après la propriété 3.7, page ci-contre, $E_u(\lambda)$ est stable par v . Comme v est diagonalisable, on en déduit que $v|_{E_u(\lambda)}$ est diagonalisable (propriété 3.6, page 144). Il existe donc une base de vecteurs propres (pour v) de $E_u(\lambda)$. Mais ces vecteurs propres sont dans $E_u(\lambda)$, donc ce sont aussi des vecteurs propres pour u .

Puisque u est diagonalisable, on a

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_u(\lambda)$$

D'après ce qui précède, pour toute $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on peut considérer une base de $E_u(\lambda)$ de vecteurs propres à la fois de u et de v , donc on construit par somme directe une base de E de vecteurs propres à la fois de u et de v , donc u et v sont co-diagonalisables.

Théorème 3.4 – Critère de co-trigonalisation

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit u et v deux endomorphismes de E qui sont trigonalisables. Si u et v commutent ($u \circ v = v \circ u$) alors ils sont co-trigonalisables, c'est-à-dire qu'ils se trigonalisent dans une même base de vecteurs propres.

Démonstration

On procède par récurrence sur $n = \dim E$.

- Si $n = 1$, il n'y a rien à démontrer.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat vrai au rang n et considérons u et v deux endomorphismes de E trigonalisables qui commutent (avec $\dim E = n + 1$). On démontre comme dans la démonstration du théorème 3.3, page 148 qu'il existe un vecteur propre x commun à u et v . En particulier il est non nul donc on peut compléter (x) en une base $\mathcal{E} = (x, e_2, \dots, e_{n+1})$ de E . Puisque $\text{Vect}(\{x\})$ est stable par u et par v , il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $(B, C) \in M_{1, n-1}(\mathbb{K})^2$ et $(M, N) \in M_{n-1}(\mathbb{K})^2$ tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & B \\ \hline 0_{n-1,1} & M \end{array} \right] \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{E}}(v) = \left[\begin{array}{c|c} \beta & C \\ \hline 0_{n-1,1} & N \end{array} \right]$$

Comme u et v commutent, $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(v)$ ce qui donne

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{E}}(v) = \left[\begin{array}{c|c} \alpha\beta & \alpha.C + B \times N \\ \hline 0_{n-1,1} & M \times N \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \beta\alpha & \beta.N + M \times C \\ \hline 0_{n-1,1} & N \times M \end{array} \right]$$

donc $M \times N = N \times M$. De plus, $\chi_u = (\alpha - X) \chi_M$ et χ_u est scindé (car u est trigonalisable) donc nécessairement χ_M est scindé donc M est trigonalisable. De même, χ_N est trigonalisable.

En notant $H = \text{Vect}(\{e_2, \dots, e_{n+1}\})$, $u' = \pi_H \circ u|_H$ et $v' = \pi_H \circ v|_H$ où π_H est la projection sur H parallèlement à $\text{Vect}(\{x\})$, on a $M = \text{Mat}_{(e_2, \dots, e_{n+1})}(u')$ et $N = \text{Mat}_{(e_2, \dots, e_{n+1})}(v')$. Or M et N commutent et sont trigonalisables, donc u' et v' aussi. Comme $\dim H = n$, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{H} = (h_2, \dots, h_{n+1})$ de H dans laquelle les matrices de u' et v' sont triangulaires supérieures.

Par construction, dans la base (x, h_2, \dots, h_{n+1}) , les matrices de u et v sont triangulaires supérieures donc le résultat est vrai au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 3.14

On peut généraliser les résultats des théorèmes 3.3, page 148 et 3.4, page 149 à un nombre quelconque d'endomorphismes qui commutent deux à deux.

Exercice(s) 3.2

3.2.1 Soit $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 12 & 3 & 8 \\ -12 & -4 & -9 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{C}}(v) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Démontrer que u et v sont co-diagonalisables et trouver une base de \mathbb{R}^3 pour laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(v)$ sont diagonales.

3.2.2 Soit E est \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie non nulle et u et v sont deux endomorphismes de E qui vérifient

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \quad u \circ v - v \circ u = \alpha.u + \beta.v$$

Démontrer que u et v possèdent au moins un vecteur propre commun.

3.2.3 Soit E est \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie non nulle et u, v et w trois endomorphismes de E qui vérifient

$$u \circ w = w \circ v$$

Démontrer que u et v possèdent au moins $\text{rang}(w)$ valeurs propres communes (en comptant les multiplicités).

3.2.4 Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Démontrer que u et v sont co-trigonalisables.

3.6 Applications de la réduction

注释 3.3

本小结我们给出了大量的关于矩阵的 Wxmaxima 和 Python 计算机代码, 方便读者实际操作所学知识。

3.6.1 Systèmes linéaires récurrents à coefficients constants

Définition 3.6 – Système linéaire récurrent à coefficients constants

On appelle *système linéaire récurrent à coefficients constants* tout ensemble d'équations récurrentes qui peut se mettre sous la forme

$$X_{n+1} = A \times X_n + B_n, \text{ où } A \in M_p(\mathbb{K}), (B_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M_{p,1}(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}, X_0 \in M_{p,1}(\mathbb{K})$$

X_0 s'appelle la *condition initiale* et B_n le *second membre*. Le système

$$X_{n+1} = A \times X_n,$$

s'appelle le *système homogène associé*.

La résolution passe par

1. La résolution du système homogène associé

$$X_n = A^n \times \Lambda \text{ où } \Lambda \in M_{p,1}(\mathbb{K})$$

2. La recherche d'une solution particulière, soit évidente, soit par variation de la constante ^a

$$A^{n+1} \times (\Lambda_{n+1} - \Lambda_n) = B_n$$

Nous sommes donc ramenés au calcul de A^n .

a. Cette méthode ne fonctionne que lorsque A est inversible.

Exemple 3.7

On peut utiliser la formule du binôme de Newton, notamment lorsque A est somme d'une matrice d'homothétie $\lambda.I_n$ et d'une matrice nilpotente N (c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0_n$)

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, k \geq p &\implies A^n = (N + \lambda.I_p)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} . N^k \times (\lambda.I_n)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \lambda^{n-k} . N^k \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 2^n & n 2^{n-1} & n(n-1) 2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

Session Wxmaxima 3.7 – A^n : binôme de Newton pour les matrices

```
(%i1) A : matrix([2,1,0],[0,2,1],[0,0,2]);
```

```
(%o1)
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
(%i2) N : A-2*ident(3);
```

```
(%o2)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
(%i3) ratsimp(2^n*ident(3)+binomial(n,1)*2^(n-1)*N  
+binomial(n,2)*2^(n-2)*N^2);
```

```
(%o3)
```

$$\begin{bmatrix} 2^n & n 2^{n-1} & (n^2 - n) 2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

Traduction du Wxmaxima.

In[2]

```
1 A = Matrix(3, 3,  
2         [2, 1, 0, 0, 2,  
3         1, 0, 0, 2])  
4 A
```

Out[2]

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

In[3]

```
1 N = A-2*eye(3)
```

In[3]

```
1 2**n*eye(3)+binomial(  
2    n, 1)*2**(n-1)*N+binomial(  
3    n, 2)*2**(n-2)*N**2
```

Out[3]

$$\begin{bmatrix} 2^n & 2^{n-1}n & 2^{n-2}\binom{n}{2} \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

Exemple 3.8

Lorsque la matrice A est diagonalisable, il suffit de la diagonaliser, car si $A = P \times \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \times P^{-1}$, alors

$$A^n = P \times \text{Diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_p^n) \times P^{-1}$$

Par exemple si

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

alors A est diagonalisable et on trouve

$$A^n = \begin{bmatrix} -4 + 3 \times 2^n + 2 \times 3^n & 4 - 4 \times 3^n & -4 + 6 \times 2^n - 2 \times 3^n \\ -3 + 2 \times 2^n + 3^n & 3 - 2 \times 3^n & -3 + 4 \times 2^n - 3^n \\ 2 - 2^n - 3^n & -2 + 2 \times 3^n & 2 - 2 \times 2^n + 3^n \end{bmatrix}$$

Session Wxmaxima 3.8 – A^n : en diagonalisant

```
(%i1) A : matrix([8,-8,2],[4,-3,2],[-3,4,1]);
```

```
(%o1)  $\begin{bmatrix} 8 & -8 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ 
```

```
(%i2) eigenvectors(A);
```

```
(%o2) [[[1,2,3],[1,1,1]], [[1,  $\frac{3}{4}$ ,  $-\frac{1}{2}$ ]], [[1,  $\frac{2}{3}$ ,  $-\frac{1}{3}$ ]], [[1,  $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2}$ ]]]
```

```
(%i3) P : transpose(matrix([1,3/4,-1/2],[1,2/3,-1/3],  
[1,1/2,-1/2]));
```

```
(%o3)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 
```

```
(%i4) invert(P).A.P;
```

$$(\%o4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(%i5) `P.diag_matrix(1,2^n,3^n).invert(P);`

$$(\%o5) \begin{bmatrix} 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n - 4 & 4 - 4 \cdot 3^n & 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n - 4 \\ 2^{n+1} + 3^n - 3 & 3 - 2 \cdot 3^n & 2^{n+2} - 3^n - 3 \\ -3^n - 2^n + 2 & 2 \cdot 3^n - 2 & -2^{n+1} + 3^n + 2 \end{bmatrix}$$

Session Python 3.8 – A^n : en diagonalisant

Traduction du Wxmaxima.

In[2]

```
1 A = Matrix(3, 3,
2           [8, -8, 2, 4, -3, 2, -3, 4, 1])
3 P, D = A.diagonalize()
4 D
```

Out [2]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

In [3]

```
1 P*diag(1, 2**n, 3**n)*P*(-1)
```

Out [3]

$$\begin{bmatrix} 3 \times 2^n + 2 \times 3^n - 4 & 4 - 4 \times 3^n & 6 \times 2^n - 2 \times 3^n - 4 \\ 2 \times 2^n + 3^n - 3 & 3 - 2 \times 3^n & 4 \times 2^n - 3^n - 3 \\ -2^n - 3^n + 2 & 2 \times 3^n - 2 & -2 \times 2^n + 3^n + 2 \end{bmatrix}$$

Exemple 3.9

Dans le cas où A est trigonalisable (ce qu'on peut toujours supposer en se plaçant dans \mathbb{C}), on se contente de trigonaliser la matrice et on résout le système triangulaire associé

$$Y_{n+1} = T \times Y_n,$$

ce qui est facile car il est triangulaire. Il n'est alors pas utile de calculer la matrice inverse de la matrice de passage,

car on a seulement $X_n = P \times Y_n$.

Considérons par exemple

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -10 \\ -2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

et trigonalisons-la avec Wxmaxima.

Session Wxmaxima 3.9 – A^n : en trigonalisant

```
(%i1) A : matrix([-1,-4,-10],[-2,-1,-7],[1,2,6]);
```

```
(%o1) 
$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -10 \\ -2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i2) eigenvectors(A);
```

```
(%o2) 
$$[[[2, 1], [1, 2]], [[1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}], [1, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}]]]$$

```

```
(%i3) P : transpose(matrix([1,1/2,-1/2],[1,3/4,-1/2],[1,0,0]));
```

```
(%o3) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

```



```
(%i4) T : invert(P).A.P;
```

```
(%o4)
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il est rappelé que sans machine on essaye de *ne pas calculer* P^{-1} !

```
(%i5) Y[n] : matrix([a[n]], [b[n]], [c[n]]);
```

```
(%o5)
```

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$$

```
(%i6) ratsimp(subst([n=n+1], Y[n]) - T.Y[n]);
```

```
(%o6)
```

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} - 2c_n - 2a_n \\ b_{n+1} + 4c_n - b_n \\ c_{n+1} - c_n \end{bmatrix}$$

```
(%i7) load(solve_rec)$
```

```
(%i8) solve_rec(%o6[3,1], c[n], c[0]=y[3]);
```

```
(%o8)
```

$$c_n = y_3$$

```
(%i9) solve_rec(subst([%], %o6[2,1]), b[n], b[0]=y[2]);
```

```
(%o9)
```

$$b_n = y_2 - 4y_3 n$$

```
(%i10) solve_rec(subst([%,%o8],%o6[1,1]),a[n],a[0]=y[1]);
```

```
(%o10)  $a_n = y_3 2^{n+1} + y_1 2^n - 2 y_3$ 
```

```
(%i11) subst([%,%o9,%o8],Y[n]);
```

```
(%o11) 
$$\begin{bmatrix} y_3 2^{n+1} + y_1 2^n - 2 y_3 \\ y_2 - 4 y_3 n \\ y_3 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i12) coeefmatrix(list_matrix_entries(%),[y[1],y[2],y[3]]);
```

```
(%o12) 
$$\begin{bmatrix} 2^n & 0 & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 & -4 n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i13) ratsimp(P.%.invert(P));
```

```
(%o13) 
$$\begin{bmatrix} 2^{n+1} - 4 n - 1 & 4 - 2^{n+2} & -2^{n+1} - 8 n + 2 \\ 2^n - 3 n - 1 & 3 - 2^{n+1} & -2^n - 6 n + 1 \\ -2^n + 2 n + 1 & 2^{n+1} - 2 & 2^n + 4 n \end{bmatrix}$$

```

```
(%i14) %,n=1;
```

```
(%o14) 
$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -10 \\ -2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

```

Session Python 3.9 – A^n : en trigonalisant

Traduction du Wxmaxima.

In[8]

```
1 A
```

Out[8]

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -10 \\ -2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

In[9]

```
1 A.eigenvects()
```

Out [9]

$$\left[\left(1, 2, \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right), \left(2, 1, \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right) \right]$$

In[10]

```
1 P = Matrix([_[0][2][0],  
2             _[1][2][0],  
3             Matrix([1, 0, 0])]  
4             ).reshape(3, 3).transpose()
```

In[11]

```
1 T = P**(-1)*A*P  
2 T
```

Out[11]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In[12]

```
1 alpha, beta, gamma = symbols(  
2     '\\alpha \\beta \\gamma',  
3     cls=Function)
```

In[13]

```
1 Y0 = Matrix([x, y, z])  
2  
3  
4 def Y(n):  
5     return(Matrix([alpha(n),  
6                     beta(n),  
7                     gamma(n)]))
```

In[14]

```
1 Y(n+1)-T*Y(n)
```

Out[14]

$$\begin{bmatrix} -\alpha(n) + \alpha(n+1) - 2\gamma(n) \\ -2\beta(n) + \beta(n+1) + \gamma(n) \\ -\gamma(n) + \gamma(n+1) \end{bmatrix}$$

In[15]

```
1 res = _
2 rsolve(res[2, 0],
3         gamma(n),
4         {gamma(0): Y0[2]})
```

Out[15]

z

In[16]

```
1 rsolve(res[1, 0].subs({gamma(n): _}),  
2       beta(n),  
3       {beta(0): Y0[1]})
```

Out[16]

$$2^n (y - z) + z$$

In[17]

```
1 rsolve(res[0, 0].subs({gamma(n): __,  
2                       beta(n): _}),  
3       alpha(n),  
4       {alpha(0): Y0[0]})
```

Out[17]

$$\frac{x}{2z+1} + 2z \left(n + \frac{x}{2z+1} \right)$$

In[18]

```
1 (Y(n)).subs({alpha(n): _,  
2             beta(n): __,  
3             gamma(n): ___})
```

Out[18]

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{2z+1} + 2z \left(n + \frac{x}{2z+1} \right) \\ 2^n (y - z) + z \\ z \end{bmatrix}$$

In[19]

```
1 Tn = Matrix([_.subs({x: 1, y: 0, z: 0}),  
2             _.subs({x: 0, y: 1, z: 0}),  
3             _.subs({x: 0, y: 0, z: 1})])  
4         ).reshape(3, 3).transpose()
```

In[20]

```
1 Tn
```


Out [20]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2n \\ 0 & 2^n & 1 - 2^n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In[21]

```
1 P*Tn*P**(-1)
```

Out [21]

$$\begin{bmatrix} 2 \times 2^n - 4n - 1 & 4 - 4 \times 2^n & -2 \times 2^n - 8n + 2 \\ 2^n - 3n - 1 & 3 - 2 \times 2^n & -2^n - 6n + 1 \\ -2^n + 2n + 1 & 2 \times 2^n - 2 & 2^n + 4n \end{bmatrix}$$

In[22]

```
1 _.subs({n: 1}) # Petite vérification !
```

Out [22]

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -10 \\ -2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Remarque 3.15

Lorsque l'on part d'une suite récurrente multiple (les coefficients étant constants), on peut vectorialiser et la considérer comme un système récurrent. La recherche des racines de l'équation caractéristique correspond au calcul du polynôme caractéristique de la matrice du système associé. La forme générale des solutions s'en déduit (parfois difficilement).

Par exemple, on peut transformer

$$u_{n+3} - 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n = 0$$

en

$$X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix} \text{ et } X_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix} \times X_n$$

Exercice(s) 3.3

3.3.1 Résoudre le système récurrent

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= 2u_n + 4v_n + 8w_n \\v_{n+1} &= -2u_n - 5v_n - 11w_n \\w_{n+1} &= 2u_n + 3v_n + 5w_n + n\end{aligned}$$

3.3.2 Calculer les puissances de A , où

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & -1 & 11 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

3.3.3 Soit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

- (a) A est-elle diagonalisable ?
- (b) Calculer A^n , pour $n \in \mathbb{N}$.

3.3.4 Calculer A^n , $n \in \mathbb{N}$ lorsque

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & -5 & -6 \\ 5 & 7 & 5 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 4 & 5 \\ -2 & -6 & -3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

3.3.5 Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

- (a) A est-elle diagonalisable ?
- (b) Démontrer que A est semblable à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (c) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

3.6.2 Systèmes linéaires différentiels à coefficients constants

Définition 3.7 – Système linéaire différentiel à coefficients constants

On appelle *système linéaire différentiel à coefficients constants* tout système d'équations différentielles qui peut se mettre sous la forme

$$X'(t) = A \times X(t) + B(t), \text{ où } A \in M_p(\mathbb{K}), B \in \mathcal{C}^0(I, M_{p,1}(\mathbb{K})) \text{ et } X_0 \in M_{p,1}$$

avec I un intervalle de \mathbb{R} et où $X_0 = X(t_0)$ est la condition initiale à l'instant $t_0 \in I$.

Remarque 3.16

La résolution passe par

1. La résolution du système homogène associé

$$X'(t) = A \times X(t)$$

2. La recherche d'une solution particulière (par exemple par la méthode de variation de la constante).

Remarque 3.17

Lorsque l'on part d'une équation différentielle linéaire d'ordre p , à coefficients constants de la forme

$$y^{(p)} + a_1 y^{(p-1)} + \cdots + a_p y = b(t)$$

on peut la vectorialiser, pour se ramener à un système en posant

$$X(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(p-1)}(t) \end{bmatrix} \in M_p(\mathbb{K})$$

Par exemple, on peut transformer

$$\theta''(t) + \theta(t) = 0$$

en

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times X(t), \quad X(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{bmatrix}$$

Exemple 3.10

Le cas où la matrice A est diagonalisable est facile car si $A = P \times D \times P^{-1}$ avec $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, alors $X'(t) = A \times X(t) = P \times D \times P^{-1} \times X(t)$ donc

$$P^{-1} \times X'(t) = D \times P^{-1} \times X(t)$$

En posant $Y(t) = P^{-1} \times X(t)$, on est ramené au système différentiel

$$Y'(t) = D \times Y(t)$$

qui est un système diagonal. En notant y_i les composantes de Y , on a donc

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad y_i'(t) = \lambda_i y_i(t)$$

donc

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \exists c_i \in \mathbb{K}, \quad y_i(t) = c_i \exp(\lambda_i t)$$

On calcule alors $X(t) = P \times Y(t)$. En particulier, on a jamais besoin de calculer l'inverse de P .

Par exemple, en reprenant le système de la remarque précédente (obtenu à partir de $\theta''(t) + \theta(t) = 0$), on a

$$X'(t) = A \times X(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il n'est pas difficile de démontrer que A est diagonalisable sur \mathbb{C} , ses valeurs propres sont $\pm i$ et

$$A = P \times \text{Diag}(i, -i) \times P^{-1}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$$

En posant $Y = P^{-1} \times X$, on a le système

$$\begin{cases} y_1'(t) = i y_1(t) \\ y_2'(t) = -i y_2(t) \end{cases}$$

donc il existe $(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 \exp(it) \\ y_2(t) = c_2 \exp(-it) \end{cases}$$

d'où

$$X(t) = P \times Y(t) = \begin{bmatrix} c_1 \exp(it) + c_2 \exp(-it) \\ i c_1 \exp(it) - i c_2 \exp(-it) \end{bmatrix}$$

Si on ajoute la condition initiale

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(qui correspond à $\theta(0) = 1$ et $\theta'(0) = 0$), on trouve $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ donc en particulier

$$\theta(t) = \frac{\exp(it) + \exp(-it)}{2} = \cos(t)$$

On retrouve donc la solution bien connue de $\theta''(t) + \theta(t) = 0$, $\theta(0) = 1$ et $\theta'(0) = 0$.

Exemple 3.11

Dans le cas général, on trigonalise A (ce qui est toujours possible en se plaçant dans \mathbb{C}) par $A = P \times T \times P^{-1}$ où T est une matrice triangulaire supérieure. On est donc ramené (par la même démarche qu'à l'exemple précédent en posant $Y(t) = P^{-1} \times X(t)$) à un système de la forme

$$Y'(t) = T \times Y(t)$$

où T est une matrice triangulaire supérieure que l'on peut résoudre facilement et on revient à X grâce à la relation $X(t) = P \times Y(t)$.


```
(%i1) load(diag)$
```

```
(%i2) A : matrix([-1,-4,-10],[-2,-1,-7],[1,2,6]);
```

```
(%o2) 
$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -10 \\ -2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i3) eigenvectors(A);
```

```
(%o3) [[[2,1],[1,2]], [[[1,  $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2}$ ]], [[1,  $\frac{3}{4}$ ,  $-\frac{1}{2}$ ]]]]
```

```
(%i4) P : transpose(matrix([1,1/2,-1/2],[1,3/4,-1/2],[1,0,0]));
```

```
(%o4) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i5) T : invert(P).A.P;
```

```
(%o5) 
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i6) Y(t) := matrix([a(t)],[b(t)],[c(t)]);
```

$$(\%o6) \quad Y(t) := \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix}$$

(%i7) diff(Y(t),t);

$$(\%o7) \quad \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} a(t) \\ \frac{d}{dt} b(t) \\ \frac{d}{dt} c(t) \end{bmatrix}$$

(%i8) syst : ratsimp(%o7-T.Y(t));

$$(\%o8) \quad \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} a(t) - 2c(t) - 2a(t) \\ \frac{d}{dt} b(t) + 4c(t) - b(t) \\ \frac{d}{dt} c(t) - c(t) \end{bmatrix}$$

(%i9) ode2(syst[3,1],c(t),t);

$$(\%o9) \quad c(t) = \%c e^t$$

(%i10) subst([%c=c0],%);

$$(\%o10) \quad c(t) = c0 e^t$$

(%i11) ode2(subst([%],syst[2,1]),b(t),t);

$$(\%o11) \quad b(t) = (\%c - 4c0t) e^t$$

```
(%i12) subst([%c=b0],%);
```

```
(%o12) b(t) = (b0 - 4 c0 t) e^t
```

```
(%i13) ode2(subst([%,%o10],syst[1,1]),a(t),t);
```

```
(%o13) a(t) = (%c - 2 c0 e^-t) e^2 t
```

```
(%i14) subst([%c=a0+2*c0],%);
```

```
(%o14) a(t) = (-2 c0 e^-t + 2 c0 + a0) e^2 t
```

```
(%i15) ratsimp(subst([%o10,%o12,%o14],Y(t)));
```

```
(%o15) 
$$\begin{bmatrix} (2 c0 + a0) e^{2 t} - 2 c0 e^t \\ (b0 - 4 c0 t) e^t \\ c0 e^t \end{bmatrix}$$

```

```
(%i16) coefmatrix(list_matrix_entries(%),[a0,b0,c0]);
```

```
(%o16) 
$$\begin{bmatrix} e^{2 t} & 0 & 2 e^{2 t} - 2 e^t \\ 0 & e^t & -4 t e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

```

```
(%i17) P.%.invert(P);
```

$$(\%o17) \begin{bmatrix} 2e^{2t} - 4te^t - e^t & 4e^t - 4e^{2t} & 2(2e^{2t} - 2e^t) - 6e^{2t} - 8te^t + 6e^t \\ \frac{2e^{2t} - 2e^t}{2} - 3te^t & 3e^t - 2e^{2t} & \frac{2(2e^{2t} - 2e^t) - 6e^{2t}}{2} + \frac{3(4e^t - 8te^t)}{4} \\ 2te^t - \frac{2e^{2t} - 2e^t}{2} & 2e^{2t} - 2e^t & -\frac{2(2e^{2t} - 2e^t) - 6e^{2t}}{2} - \frac{4e^t - 8te^t}{2} \end{bmatrix}$$

```
(%i18) f(x) := exp(t*x)$
      ratsimp(%o17-mat_function(f,A));
```

$$(\%o19) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Session Python 3.10 – Une matrice trigonalisable

Traduction du Wxmaxima.

In[7]

```
1 A.eigenvects()
```

Out [7]

$$\left[\left(1, 2, \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right), \left(2, 1, \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right) \right]$$

In[8]

```
1 C3 = Matrix([1, 0, 0])
2 P = Matrix([_[0][2][0],
3             _[1][2][0],
4             C3]).reshape(
5             3, 3).transpose()
6 P
```

Out [8]

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In[9]

```
1 T = P**(-1)*A*P
```

In[10]

```
1 eq = diff(Y(t), t)-T*Y(t)
2 eq
```

Out[10]

$$\begin{bmatrix} -\alpha(t) - 2\gamma(t) + \frac{d}{dt}\alpha(t) \\ -2\beta(t) + \gamma(t) + \frac{d}{dt}\beta(t) \\ -\gamma(t) + \frac{d}{dt}\gamma(t) \end{bmatrix}$$

In[11]

```
1 dsolve(eq[2, 0],
2         gamma(t),
3         ics={gamma(0): z})
```

Out[11]

$$\gamma(t) = ze^t$$

In[12]

```
1 dsolve(eq[1, 0].subs({gamma(t): _.rhs}),  
2       beta(t),  
3       ics={beta(0): y})
```

Out[12]

$$\beta(t) = (y - z + ze^{-t})e^{2t}$$

In[13]

```
1 dsolve(eq[0, 0].subs({gamma(t): __.rhs,  
2                       beta(t): _.rhs}),  
3       alpha(t), ics={alpha(0): x})
```

Out[13]

$$\alpha(t) = (2tz + x) e^t$$

In[14]

```
1 Yt = Y(t).subs({alpha(t): _.rhs,  
2                 beta(t): __.rhs,  
3                 gamma(t): ___.rhs})
```

In[15]

```
1 exptT = Matrix([Yt.subs({x: 1, y: 0, z: 0}),  
2                 Yt.subs({x: 0, y: 1, z: 0}),  
3                 Yt.subs({x: 0, y: 0, z: 1})])  
4           .reshape(3, 3).transpose()
```

In[16]

```
1 exptT
```


Out[16]

$$\begin{bmatrix} e^t & 0 & 2te^t \\ 0 & e^{2t} & (-1 + e^{-t})e^{2t} \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

In[17]

```
1 (P*exptT*P**(-1)).applyfunc(ratsimp)
```

Out[17]

$$\begin{bmatrix} -4te^t + 2e^{2t} - e^t & -4e^{2t} + 4e^t & -8te^t - 2e^{2t} + 2e^t \\ -3te^t + e^{2t} - e^t & -2e^{2t} + 3e^t & -6te^t - e^{2t} + e^t \\ 2te^t - e^{2t} + e^t & 2e^{2t} - 2e^t & 4te^t + e^{2t} \end{bmatrix}$$

In[18]

```
1 (_-f(A)).applyfunc(ratsimp)
```

Out [18]

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice(s) 3.4

3.4.1 Résoudre

$$x' = 2x + y + 3z, \quad y' = 2y \text{ et } z' = x$$

3.4.2 Résoudre

$$x' = x + z, \quad y' = 2x - y \text{ et } z' = x - y + \frac{1}{2}z$$

3.4.3 Résoudre le système différentiel

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

3.4.4 Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ non inversible. Démontrer que les solutions de $X' = A \times X$ sont des courbes planes.

3.4.5 Résoudre le système différentiel

$$x'(t) = 7x(t) + 3y(t) + t \text{ et } y'(t) = -3x(t) - 3y(t) + e^t$$

3.4.6 Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que le système

$$x' = ax + y \text{ et } y' = -x + y$$

admette au moins une solution non nulle bornée au voisinage de $+\infty$.

3.4.7 Quelle est la nature des courbes intégrales de $X' = A \times X$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} ?$$

3.6.3 Espaces stables

Remarque 3.18

La recherche des espaces stables par un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie en dimension finie repose sur quelques résultats

1. Si u est diagonalisable et E_1 est un sous-espace vectoriel stable par u , alors

$$E_1 = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_1 \cap E_u(\lambda)$$

(voir la propriété 3.6, page 144). En particulier, E_1 a une base constituée de vecteurs propres de u .

2. Si u est trigonalisable, alors il admet des espaces stables de toute dimension (donné par le drapeau) et de plus, si E_1 est un sous-espace vectoriel stable par u , alors

$$E_1 = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_1 \cap F_u(\lambda)$$

3. S'il existe un hyperplan H de E stable par u , alors u admet un vecteur propre.

En effet, soit (e_1, \dots, e_{n-1}) une base de H ($n = \dim E$) que l'on complète en une base (e_1, \dots, e_n) de E . Par projection, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_n) - \lambda.e_n \in H$. Alors pour tout $x \in E$, $u(x) - \lambda.x \in H$ (vrai sur $\text{Vect}(\{e_n\})$ et aussi sur H car il est stable par u) donc $\text{Im}(u - \lambda.\text{id}_E) \subset H$. On a donc $\text{Ker}(u - \lambda.\text{id}_E) \neq \{0_E\}$.

- Ces résultats suffisent en général lorsque l'on est en dimension 3, car il n'y a que les droites dirigées par un vecteur propre et les hyperplans qui peuvent être stables (avec en plus, bien évidemment, $\{0_E\}$ et E).

Exemple 3.12

Soit la matrice ^a

$$\begin{bmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{bmatrix}, \quad j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$$

Session Wxmaxima 3.11 – Une matrice symétrique *non* diagonalisable

```
(%i1) j : exp(2*i*pi/3)$
```

```
(%i2) A : matrix([1,j,j^2],[j,j^2,1],[j^2,1,j]);
```

```
(%o2) 
$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} & \left(\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 \\ \frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} & \left(\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 & 1 \\ \left(\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 & 1 & \frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

```

```
(%i3) eigenvectors(A);
```

```
(%o3) [[[0],[3]], [[1,0,\frac{1-\sqrt{3}i}{2}], [0,1,\frac{\sqrt{3}i+1}{2}]]]
```

Session Python 3.11 – Une matrice symétrique *non* diagonalisable

Traduction du Wxmaxima.

In[2]

```
1 J = exp(2*I*pi/3)
```

In[3]

```
1 A = Matrix(3, 3,  
2      [1, J, J**2, J, J**2,  
3      1, J**2, 1, J])  
4 A
```

kljsqf

Out[3]

$$\begin{bmatrix} 1 & e^{\frac{2i\pi}{3}} & e^{-\frac{2i\pi}{3}} \\ e^{\frac{2i\pi}{3}} & e^{-\frac{2i\pi}{3}} & 1 \\ e^{-\frac{2i\pi}{3}} & 1 & e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{bmatrix}$$

In[4]

```
1 A.eigenvects()
```

Out [4]

$$\left[\left(0, 2, \left[\begin{bmatrix} -e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -e^{-\frac{2i\pi}{3}} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right), \right. \\ \left. \left(1 - \sqrt[3]{-1} + (-1)^{\frac{2}{3}}, 1, \left[\begin{bmatrix} (-1)^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} + e^{-\frac{2i\pi}{3}} - e^{\frac{2i\pi}{3}} - \sqrt[3]{-1} e^{-\frac{2i\pi}{3}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -e^{-\frac{2i\pi}{3}} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right) \right]$$

Voilà qui est faux!!! On a deux fois le même vecteur propre!

In [5]

```
1 X = Symbol('X',
2         real=True)
3 det(A-X*eye(3)).factor()
```

Out [5]

$$-X^2 \left(X e^{\frac{2i\pi}{3}} - 1 - e^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{-\frac{2i\pi}{3}} \right) e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$

In[6]

```
1 re(_)
```

Out[6]

$-X^3$

In[7]

```
1 im(_)
```

Out[7]

0

Remarque 3.19

Le polynôme caractéristique est bien $-X^3$.

Les espaces stables sont

$$\begin{aligned}
 (\text{dimension } 0) \quad & \{0_{3,1}\}, \\
 (\text{dimension } 1) \quad & \left\{ \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ -jx - j^2 y \end{bmatrix} \right), \quad (x, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} \right\}, \\
 (\text{dimension } 2) \quad & \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad a \times x + b y + c z = 0 \right\}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \right. \\
 & \left. a + j b + j^2 c = 0 \right\}, \\
 (\text{dimension } 3) \quad & M_{3,1}(\mathbb{C}).
 \end{aligned}$$

a. On remarquera que la matrice est symétrique et non diagonalisable, seules les matrices symétriques *réelles* sont automatiquement diagonalisables.

Exercice(s) 3.5

3.5.1 Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^n ($n \geq 2$). Démontrer que u laisse un plan stable.

3.5.2 Soit $E = \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note T_σ l'application de E dans E définie par

$$T_\sigma((x_1, \dots, x_n)) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Démontrer que T_σ est dans $\mathcal{GL}(E)$. Trouver les sous-espaces vectoriels F de E tels que, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $T_\sigma(F) \subset F$.

3.5.3 Trouver tous les sous-espaces stables de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \in M_5(\mathbb{C})$$

3.5.4 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Démontrer que les sous-espaces stables par f sont les $\text{Ker}(f^k)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

3.5.5 Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- (a) Démontrer que si u n'admet qu'un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables alors chaque sous-espace propre est de dimension 1.
- (b) Quels sont les sous-espaces vectoriels stables par u si $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$?
- (c) Démontrer la réciproque de la question (a).

3.5.6 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que u est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé et que tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable.

3.5.7 On considère dans \mathbb{R}^3 l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Déterminer les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 qui sont stables par f .

Chapitre 4

Formes quadratiques

4.1 Cadre général

Définition 4.1 – Forme quadratique

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et B une forme bilinéaire symétrique sur E , on appelle *forme quadratique* l'application

$$q : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto B(x, x) \end{cases}$$

La forme bilinéaire B est dite *forme polaire* de la forme quadratique.

Propriété 4.1 – Expression matricielle

Si B est une forme bilinéaire de $E \times E$ dans \mathbb{R} , alors, si $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E , en notant

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(B) \stackrel{\text{Def}}{=} [B(e_i, e_j)]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} = \begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & \cdots & B(e_1, e_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_p, e_1) & \cdots & B(e_p, e_p) \end{bmatrix}$$

alors

$$B(x, y) = {}^tX \cdot M \cdot Y$$

On a alors

$$\left[B \text{ est une forme bilinéaire symétrique} \right] \iff \left[{}^tM = M \right]$$

et dans ce cas, si q est la forme quadratique associée

$$q(x) = {}^tX \cdot M \cdot X$$

Propriété 4.2 – Changement de bases pour les formes bilinéaires

Soit $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire (penser à la forme quadratique associée), soit \mathcal{E} et \mathcal{B} deux bases de E ,

alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(B) = {}^t P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{E}}(B) \cdot P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$$

Démonstration

Soit $(x, y) \in E^2$, on a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(x) = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{E}}(y) = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$$

De plus, on a

$$[\langle x, y \rangle] = {}^t \text{Mat}_{\mathcal{E}}(x) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{E}}(B) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{E}}(y) = {}^t \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(B) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$$

donc

$${}^t \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(B) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = {}^t \left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \right) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{E}}(B) \cdot P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$$

Ceci étant vrai pour tout $(x, y) \in E^2$, on obtient que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(B) = {}^t P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{E}}(B) \cdot P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$$

Définition 4.2 – Forme quadratique positive

1. Si pour tout $x \in E$, $q(x) \geq 0$, on dit que q est une forme quadratique *positive* ;
2. si pour tout $x \in E$, $q(x) \leq 0$, on dit que q est une forme quadratique *négative*.

Définition 4.3 – Forme quadratique définie

Si pour tout $x \in E \setminus \{O_E\}$ $q(x) \neq 0$, on dit que q est une forme quadratique *définie*.

Remarque 4.1

Une forme quadratique définie est soit positive, soit négative. Si elle est définie positive, c'est le carré d'une norme euclidienne. Si elle est seulement positive, c'est le carré d'une semi-norme euclidienne (on a donc toujours l'inégalité de Cauchy-Schwarz)...

Définition 4.4 – Forme bilinéaire symétrique (non) dégénérée

Si pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $B(x, \bullet) \neq 0_{E^*}$, on dit que la forme bilinéaire est *non dégénérée*.

Dans le cas contraire, on parle de forme bilinéaire *dégénérée* et on appelle *noyau de la forme bilinéaire* ou *noyau de la forme quadratique* q

$$\text{Ker}(q) = \text{Ker}(B) \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \in E, B(x, \bullet) = 0_{E^*}\}$$

Définition 4.5 – Vecteur isotrope d'une forme quadratique

Un vecteur $x \neq 0_E$ qui vérifie $q(x) = 0$ est dit *isotrope* pour la forme quadratique q .

Remarque 4.2

Un vecteur du noyau est toujours isotrope, en revanche, un vecteur isotrope n'a aucune raison d'être dans le noyau.

Exemple 4.1

Soit B la forme bilinéaire définie sur \mathbb{R}^2 par

$$B((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 x_2 - y_1 y_2$$

elle est non dégénérée (noyau réduit à $(0, 0)$) alors que le vecteur $(1, 1)$ est clairement isotrope.

Définition 4.6 – q -orthogonalité

1. Deux vecteurs (x, y) de E sont dits q -orthogonaux si $B(x, y) = 0$, on note $x \perp_q y$.
2. De même, si E_1 est un sous-espace vectoriel de E , on note

$$E_1^{\perp_q} \stackrel{\text{Not}}{=} \{x \in E, \forall x_1 \in E_1, B(x, x_1) = 0\}$$

Proposition 4.1

Si q est une forme quadratique sur E , \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, et si E_1 est un sous-espace de E , alors

$$\dim E_1^{\perp_q} = \dim E - \dim E_1 + \dim (E_1 \cap \text{Ker}(q))$$

Démonstration

- Si (e_1, \dots, e_p) est une base de E_1 , alors

$$E_1^{\perp q} = \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}(B(e_k, \bullet))$$

Le théorème de dualité nous permet alors de dire que

$$\text{codim}(E_1^{\perp q}) = \dim(\text{Vect}(\{B(e_k, \bullet), k \in \llbracket 1, p \rrbracket\}))$$

- On a de plus

$$E_1 = (E_1 \cap \text{Ker}(q)) \oplus E'_1$$

Supposons donc la base (e_1, \dots, e_p) adaptée à cette somme directe et posons

$$p' = \dim(E_1 \cap \text{Ker}(q))$$

On a alors

$$\forall k \in \llbracket 1, p' \rrbracket, B(e_k, \bullet) = 0_{E^*}$$

De plus, la famille

$$(B(e_k, \bullet))_{k \in \llbracket p'+1, p \rrbracket} \text{ est libre, en effet}$$

soit $(\lambda_{p'+1}, \dots, \lambda_p)$ tels que

$$\sum_{k=p'+1}^p \lambda_k \cdot B(e_k, \bullet) = B\left(\sum_{k=p'+1}^p \lambda_k \cdot e_k, \bullet\right) = 0_{E^*}$$

alors

$$\sum_{k=p'+1}^p \lambda_k \cdot e_k \in \text{Ker}(q) \cap E'_1 = \{0_E\}$$

Finalement, comme $(e_{p'+1}, \dots, e_p)$ est une famille libre, on trouve que

$$\forall k \in \llbracket p'+1, p \rrbracket, \lambda_k = 0$$

- Il reste à compter

$$\text{codim}(E_1^{\perp q}) = p - p' \text{ d'où } \dim(E_1^{\perp q}) = \dim(E) - \dim(E_1) + \dim(E_1 \cap \text{Ker}(q))$$

Proposition 4.2

Si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, et q une forme quadratique de E , alors q possède une base orthogonale (e_1, \dots, e_n) telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, q(e_i) \in \{-1, 0, 1\}$$

Démonstration

On va procéder par récurrence sur n .

— (Initialisation) Si E est de dimension 1, soit (e) une base de E . Alors

1. Si $q(e) = 0$, on prend $e_1 = e$.
2. Si $q(e) > 0$, on prend

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{q(e)}}.e$$

3. Si $q(e) < 0$, on prend

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{-q(e)}}.e$$

— (Hérédité) Supposons le résultat vrai pour tout espace E de dimension p et toute forme quadratique sur cet espace. Soit, maintenant, E un espace de dimension $p + 1$ et q une forme quadratique sur E .

1. Si q est la forme quadratique nulle, alors toute base convient.
2. Sinon, on peut trouver un vecteur e tel que $q(e) \neq 0$. En ce cas, $e \notin \text{Ker}(q)$, donc

$$H = (\mathbb{R}.e)^{\perp_q} \text{ est de dimension } p, \text{ et } \mathbb{R}.e \oplus H = E$$

on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence au couple $(H, q|_H)$ et procéder pour e comme dans la phase d'initialisation.

Proposition 4.3

Soit $q : E \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} [q \text{ quadratique}] &\iff \begin{cases} \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, q(\lambda.x) = \lambda^2 q(x) \\ \text{et} \\ (x, y) \mapsto \frac{1}{2} (q(x+y) - q(x) - q(y)) \text{ bilinéaire} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, q(\lambda.x) = \lambda^2 q(x) \\ \text{et} \\ (x, y) \mapsto \frac{1}{4} (q(x+y) - q(x-y)) \text{ bilinéaire} \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration

- (\Rightarrow) Immédiat.
- (\Leftarrow) Les deux implications se démontrent de la même manière. Il suffit de constater que la forme bilinéaire définie par

$$B : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} (q(x+y) - q(x) - q(y)), \text{ vérifie } q(x) = B(x, x)$$

On comprend alors l'importance de la première condition.

Remarque 4.3

Les formes bilinéaires trouvées sont la forme polaire de q .

Exemple 4.2

Soit la forme définie sur \mathbb{R}^2 par

$$q(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + 5xy$$

C'est une forme quadratique de forme polaire

$$B((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2x_1x_2 - 3y_1y_2 + \frac{5}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Définition 4.7 – Décomposition en carrés d'une forme quadratique

On dit que l'on a une *décomposition en carrés* d'une forme quadratique q , s'il existe $r \leq d = \dim E$ formes linéaires $(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \in E^{\star r}$, *indépendantes*, telles que

$$q(x) = \sum_{k=1}^r \epsilon_k (\varphi_k(x))^2, \text{ où } \forall k \in \{1, \dots, r\}, \epsilon_k = \pm 1$$

Remarque importante 4.4

Il est possible d'obtenir une décomposition en carrés, grâce à *l'algorithme de Gauss*

Soit q une forme quadratique définie par

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans une base de référence donnée (la base canonique dans \mathbb{R}^n , par exemple). On procède de manière itérative suivante

1. Si il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i_0, i_0} \neq 0$, alors ^a

$$q(x) = a_{i_0, i_0} \left(x_{i_0} + \sum_{j \neq i_0} \frac{a_{i_0, j}}{a_{i_0, i_0}} x_j \right)^2 + q'(x)$$

où q' est une forme quadratique *ne faisant pas intervenir la coordonnée x_{i_0}* .

2. Si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i, i} = 0$, alors, soit un couple (i_0, i_1) tel que $a_{i_0, i_1} \neq 0$, on écrit

$$q(x) = \frac{2}{a_{i_0, i_1}} \underbrace{\left(a_{i_0, i_1} x_{i_0} + \sum_{j \notin \{i_0, i_1\}} a_{i_1, j} x_j \right)}_A \underbrace{\left(a_{i_0, i_1} x_{i_1} + \sum_{j \notin \{i_0, i_1\}} a_{i_0, j} x_j \right)}_B + q'(x)$$

où q' est une forme quadratique *ne faisant pas intervenir les coordonnées x_{i_0} et x_{i_1}* . Il reste à remarquer que

$$A B = \frac{1}{4} ((A + B)^2 - (A - B)^2)$$

Suivant le signe du terme a_{i_0, i_0} ou a_{i_0, i_1} que l'on rentre dans le carré, on voit apparaître les ϵ_k .

Démonstration

Par récurrence sur le nombre de coordonnées intervenant dans la forme quadratique.

a. On pose pour $i > j$, $a_{i,j} = a_{j,i}$.

Exemple 4.3

1. Le premier cas

Session Wxmaxima 4.1 – Décomposition en carrés - premier cas

```
(%i1) q : 4*x^2-2*y^2+8*z^2-4*x*y+8*x*z-10*y*z;
```

```
(%o1) 8 z^2 - 10 y z + 8 x z - 2 y^2 - 4 x y + 4 x^2
```

```
(%i2) qprime : expand(q-(2*x-y+2*z)^2);
```

```
(%o2) 4 z^2 - 6 y z - 3 y^2
```

```
(%i3) expand(qprime+(sqrt(3)*y+sqrt(3)*z)^2);
```

```
(%o3) 7 z^2
```

On a donc

$$q(x, y, z) = (2x - y + 2z)^2 - (\sqrt{3}y + \sqrt{3}z)^2 + (\sqrt{7}z)^2$$

2. Le second cas

Session Wxmaxima 4.2 – Décomposition en carrés - second cas

```
(%i1) q : x*y+2*x*z+3*y*z;  
(%o1) 3 y z + 2 x z + x y  
  
(%i2) qprime : expand(q-(x+3*z)*(y+2*z));  
(%o2) - 6 z^2  
  
(%i3) q-((x+3*z+y+2*z)/2)^2+((x+3*z-y-2*z)/2)^2;  
(%o3) - (5 z + y + x)^2 / 4 + (z - y + x)^2 / 4 + 3 y z + 2 x z + x y  
  
(%i4) expand(%);  
(%o4) - 6 z^2
```

On a donc

$$q(x, y, z) = \left(\frac{x + y + 5z}{2}\right)^2 - \left(\frac{x - y + z}{2}\right)^2 - (\sqrt{6}z)^2$$

Théorème 4.1 – Inertie de Sylvester

Soit q une forme quadratique, alors, pour toute décomposition en carrés de q , les nombres

$$p = \text{card}\{k \in \{1, \dots, r\}, \epsilon_k = +1\}, \quad n = \text{card}\{k \in \{1, \dots, r\}, \epsilon_k = -1\} \text{ et } r = p + n$$

sont les mêmes, le couple (p, n) s'appelle la signature de q , et r son rang.

Démonstration

Les formes linéaires $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ qui interviennent dans la décomposition en carrés sont indépendantes, elles forment donc une famille libre de E^* , que l'on peut compléter en une base de E^* , $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$. Considérons alors la base ante-duale de $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$, (e_1, \dots, e_d) . On a alors

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, q(e_k) > 0, \forall k \in \llbracket p+1, p+n \rrbracket, q(e_k) < 0 \text{ et } \forall k \in \llbracket p+n+1, d \rrbracket, q(e_k) = 0$$

Soit maintenant une autre décomposition en carrés de q , donnant $p' \epsilon_k > 0, n' \epsilon_k < 0$. Lui est associé une nouvelle base (e'_1, \dots, e'_d) .

1. On voit alors que

$$\text{Vect}(\{e_1, \dots, e_p\}) \cap \text{Vect}(\{e'_{p'+1}, \dots, e'_d\}) = \{0_E\}$$

donc la somme des dimensions de ces deux espaces ne peut pas dépasser d (formule de Grassmann). Donc

$$p + (d - p') \leq d, \text{ ou encore } p \leq p' \text{ et, par symétrie } \boxed{p = p'}$$

2. On procède de même avec

$$\text{Vect}(\{e_{p+1}, \dots, e_{p+n}\}) \cap \text{Vect}(\{e'_1, \dots, e'_{p'}, e'_{p'+n'+1}, \dots, e'_d\}) = \{0_E\}$$

pour obtenir $n = n'$.

Exemple 4.4 – Signature d'une forme quadratique

Soit la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^3 par

$$q(x, y, z) = x y + x z + y z$$

alors sa signature est égale à $(1, 2)$ car (algorithme de Gauss)

$$q(x, y, z) = (x + z)(y + z) - z^2 = \left(\frac{x + y}{2} + z\right)^2 - \left(\frac{x - y}{2}\right)^2 - z^2$$

Propriété 4.3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie d . Soit q une forme quadratique définie sur E de rang r . Alors

$$\dim(\text{Ker}(q)) = d - r$$

Démonstration

Soit

$$q(x) = \sum_{k=1}^p (\varphi_k(x))^2 - \sum_{k=p+1}^{p+n} (\varphi_k(x))^2$$

une décomposition en carrés de q . (p, n) est la signature de q . Les formes linéaires intervenant dans cette décomposition sont indépendantes. Elles forment donc une famille libre de E^* , que l'on peut compléter en une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ de E^* . Soit (e_1, \dots, e_d) la base ante-duale de cette base.

Soit x un vecteur de E ,

$$x = \sum_{k=1}^d \varphi_k(x) \cdot e_k = \sum_{k=1}^d x_k \cdot e_k$$

Si $x \in \text{Ker}(q)$, alors $\varphi_q(x, \bullet) = 0_{E^*}$ et donc

$$\sum_{k=1}^p \varphi_k(x) \varphi_k(\bullet) - \sum_{k=p+1}^{p+n} \varphi_k(x) \varphi_k(\bullet) = 0_{E^*}$$

On en déduit que

$$\forall i \in \llbracket 1, p+n \rrbracket, x_i = \varphi_i(x) = 0 \quad (*)$$

car la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_{p+n})$ est libre dans E^* . Finalement

$$\left[x \in \text{Ker}(q) \right] \iff \left[x \in \text{Vect}(e_{p+n+1}, \dots, e_d) \right]$$

Le noyau de q est donc de dimension $d - p - n = d - r$.

Remarque 4.5

On aurait pu déduire de la ligne $(*)$ que

$$\text{Ker}(q) = \bigcap_{k=1}^{p+n} \text{Ker}(\varphi_k)$$

et donc, d'après le théorème de mise en équation (voir [1], théorème 1.9, page 80), on a $\text{codim}(\text{Ker}(q)) = p + n$.

Définition 4.8

Deux matrices M et N de $S_p(\mathbb{R})$ (donc réelles) sont dites *congruentes* si elles vérifient

$$\exists P \in GL_p(\mathbb{R}), N = {}^tP \cdot M \cdot P$$

Cette relation (appelée *congruence*) est une relation d'équivalence sur $S_p(\mathbb{R})$.

Propriété 4.4

1. Deux matrices de $S_p(\mathbb{R})$ sont congruentes si, et seulement si, elles représentent la même forme bilinéaire symétrique.
2. Lorsque $M \in S_p(\mathbb{R})$, la *signature* de M est la signature de la forme quadratique q associée.

Proposition 4.4

Deux matrices de $S_p(\mathbb{R})$ sont congruentes si, et seulement si, elles ont même signature.

Démonstration S

oit M et N deux matrices de $S_p(\mathbb{R})$.

— (\Rightarrow) Supposons que M et N soient congruentes, alors, en notant q_M et q_N les formes quadratiques associées, on a

$$\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R}), q_M(X) = {}^tX \cdot M \cdot X \text{ et } q_N(X) = {}^tX \cdot N \cdot X$$

or, il existe $P \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$, telle que $N = {}^tP \cdot M \cdot P$, donc

$$q_N(X) = {}^tX \cdot {}^tP \cdot M \cdot P \cdot X = q_M(P \cdot X)$$

l'égalité des signatures en découle.

- (\Leftarrow) Supposons que M et N ont même signature, alors, il existe une base orthogonale $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ pour q_M telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, q_M(e_i) \in \{-1, 0, +1\}$$

avec p_1 fois $+1$ et n_1 fois -1 . Et de même pour q_N une base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_p)$, avec les mêmes nombres de $+1$ et -1 , en prenant

$$P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}, \text{ on a } N = {}^tP \cdot M \cdot P$$

Remarque 4.6

Ainsi, on a les ensembles

1. $S_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des *matrices symétriques*, elles représentent les formes bilinéaires symétriques.
2. $S_p^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des *matrices symétriques positives*, elles représentent les formes bilinéaires positives.
3. $S_p^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des *matrices symétriques positives*, elles représentent les formes bilinéaires définies positives.

Remarque 4.7

On peut traduire le théorème d'inertie de Sylvester en termes matriciels

$$\forall M \in S_p(\mathbb{R}), \exists P \in \text{GL}_p(\mathbb{R}), {}^tP \cdot M \cdot P \in D_p(\{-1, 0, 1\})$$

4.1.1 Soit q une forme quadratique non dégénérée

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \left[\varphi_q(x, y) = 0 \right] \implies \left[x = 0_E \right]$$

On suppose qu'il existe un sous-espace H de dimension p tel que,

$$H^{\perp_q} = \{x \in E, \forall h \in H, \varphi_q(x, h) = 0\}$$

vérifie $H = H^{\perp_q}$.

- (a) Montrer que $n = 2p$.
- (b) Montrer que la signature de q est (p, p) .
- (c) Montrer qu'il existe une base (e_1, \dots, e_{2p}) de E telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \varphi_q(e_i, e_j) = \varphi_q(e_{i+p}, e_j) = \varphi_q(e_i, e_{j+p}) = \delta_{i,j}$$

$$\text{et } \forall (i, j) \in \llbracket p+1, 2p \rrbracket^2, \varphi_q(e_i, e_j) = 0$$

4.1.2 Soit la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^3 par

$$q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 4xz + 2yz + 4z^2$$

Préciser les plans vectoriels où la restriction de q est définie positive.

4.1.3 Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 2$. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur E et $x \in E, x \neq 0_E$, tel que $q(x) = 0$.

- (a) Montrer l'existence de $y \in E$, tel que (x, y) est libre et $q(y) = 0$.
- (b) Montrer l'existence d'une base (e_1, \dots, e_n) de E telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, q(e_i) = 0$$

4.1.4 Soit q une forme quadratique sur E . φ sa forme polaire, a un vecteur de E . On définit

$$p : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto q(a) q(x) - \varphi(a, x)^2 \end{cases}$$

- (a) Montrer que p est une forme quadratique dont on précisera la forme polaire.
- (b) Montrer que si q est positive, alors p l'est.
- (c) Calculer la signature et le rang de p en fonction de la signature de q et de $q(a)$.

4.1.5 Soit q une forme quadratique positive définie sur \mathbb{R}^n par

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_{i,j} x_i x_j$$

Soit $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^{*n}$, montrer que la forme quadratique définie par

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \gamma_i \gamma_j a_{i,j} x_i x_j \text{ est encore positive}$$

4.1.6 Quelle est la signature de la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^d par

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, d \rrbracket^2 \\ i < j}} x_i x_j ?$$

4.2 Cas euclidien

Remarque 4.8

Lorsque E est un espace euclidien, et que $u \in \mathcal{L}(E)$, alors

$$q_u : x \mapsto \langle u(x), x \rangle$$

est une forme quadratique. Sa forme polaire est

$$(x, y) \mapsto \left\langle \frac{u^\star + u}{2}(x), y \right\rangle$$

Nous ne nous intéresserons donc par la suite qu'au cas où $u \in \mathcal{S}(E)$. En ce cas, on a

$$\left[q_u \text{ est positive} \right] \iff \left[u \text{ positif} \right] \quad (4.1)$$

$$\left[q_u \text{ est définie positive} \right] \iff \left[u \text{ défini positif} \right] \quad (4.2)$$

$$\left[q_u \text{ est non dégénérée} \right] \iff \left[u \text{ est inversible} \right] \quad (4.3)$$

et, de plus

Signature(q_u) = (p, n) si, et seulement si, u possède p valeurs propres > 0 , n valeurs propres < 0 et $d - (p + n)$ valeurs propres nulles...

Propriété 4.5

Soit q_u une forme quadratique associée à l'endomorphisme $u \in \mathcal{S}(E)$, alors, il existe une base orthonormée (pour le produit scalaire) $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_d)$ de E telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, d \rrbracket^2, \varphi_{q_u}(e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{i,j}$$

où les λ_k sont > 0 , pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lambda_k < 0$, pour $k \in \llbracket p + 1, p + n \rrbracket$ et $\lambda_k = 0$, pour $k \in \llbracket p + n + 1, d \rrbracket$.

Démonstration

On utilise le théorème de réduction des endomorphismes auto-adjoints. La base orthonormée de vecteurs propres convient.

Exemple 4.5

Soit $E = \mathbb{R}^n$,

$$q_1(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_{i,j} x_i x_j \text{ et } q_2(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} b_{i,j} x_i x_j$$

deux formes quadratiques positives, alors, la forme quadratique définie par

$$q_3(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_{i,j} b_{i,j} x_i x_j \text{ est positive.}$$

Propriété 4.6

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{S}(E)$, et soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E , alors

$$\left[\exists (b_1, \dots, b_n) \text{ base orthonormée de } E, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, q_u(b_i) = 0 \right] \iff \left[\sum_{k=1}^n q_u(e_k) = 0 \right]$$

Démonstration

— (\Rightarrow) On a

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_k = \sum_{j=1}^n \langle b_j, e_k \rangle \cdot b_j$$

donc

$$\sum_{k=1}^n q_u(e_k) = \sum_{k=1}^n \left\langle \sum_{i=1}^n \langle b_i, e_k \rangle \cdot u(b_i), \sum_{j=1}^n \langle b_j, e_k \rangle \cdot b_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle u(b_i), b_j \rangle \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \langle b_i, e_k \rangle \langle b_j, e_k \rangle \right)}_{=\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{i,j}}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^n q_u(e_k) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\langle u(b_i), b_i \rangle}_{=q_u(b_i)} = 0$$

— (\Leftarrow) Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

— Si $n = 1$ c'est évident.

— Supposons le résultat vrai au rang n . Soit E euclidien de dimension $n + 1$, $u \in \mathcal{S}(E)$, et soit (e_1, \dots, e_{n+1}) une base orthonormée de E . $u \in \mathcal{S}(E)$ donc il existe (a_1, \dots, a_{n+1}) une base orthonormée de vecteurs propres de u . On note $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ les valeurs propres associées à ces vecteurs propres. On a

$$\sum_{k=1}^{n+1} q_u(a_k) = \sum_{k=1}^{n+1} \left\langle \sum_{i=1}^{n+1} \langle e_i, a_k \rangle \cdot u(e_i), \sum_{j=1}^{n+1} \langle e_j, a_k \rangle \cdot e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \langle u(e_i), e_j \rangle \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n+1} \langle e_i, a_k \rangle \langle e_j, a_k \rangle \right)}_{=\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{n+1} q_u(a_k) = \sum_{i=1}^{n+1} \underbrace{\langle u(e_i), e_i \rangle}_{=q_u(e_i)} = 0$$

On pose

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n+1} a_k$$

Alors

$$q_u(b_1) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} u(a_i), \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \sum_{j=1}^{n+1} a_j \right\rangle = \frac{1}{n+1} \left\langle \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot a_i, \sum_{j=1}^{n+1} a_j \right\rangle = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} q_u(a_i) = 0$$

Soit F le supplémentaire orthogonal de $\mathbb{R} \cdot b_1$. On a $E = \mathbb{R} \cdot b_1 \oplus F$. La restriction q' de q_u à F est une forme quadratique. Soit (c_1, \dots, c_n) une base orthonormée de F . On a

$$q_u(b_1) + \sum_{k=1}^n q_u(c_k) = 0 = \sum_{k=1}^n q'(c_k)$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à (F, q') . Il existe (b_2, \dots, b_{n+1}) une base orthonormée de F telle que

$$\forall i \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket, q_u(b_i) = 0$$

La famille (b_1, \dots, b_{n+1}) convient alors.

Exemple 4.6 – Courbe orthoptique

Soit une ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

alors, l'ensemble des points du plan, par lesquels passent deux tangentes à l'ellipse orthogonales est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$. Voir la figure 5.1, page 256.

Démonstration

Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, pour trouver les tangentes à l'ellipse passant par M_0 , on va écrire une droite passant par M_0 et dirigée par un vecteur (α, β) . Elle a pour équation

$$x = x_0 + t\alpha \text{ et } y = y_0 + t\beta \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

Cette droite rencontre l'ellipse pour les valeurs de t qui vérifient

$$\frac{(x_0 + t\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + t\beta)^2}{b^2} = 1$$

donc 0, 1 ou 2 valeurs de t . Ce sera une tangente si t est racine double, c'est-à-dire si le discriminant est nul.

$$\left(\frac{x_0\alpha}{a^2} + \frac{y_0\beta}{b^2} \right)^2 - \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} \right) \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 \right) = 0$$

On remarque que c'est une forme quadratique en (α, β) . Cette forme quadratique possède une base orthogonale de vecteurs isotropes si, et seulement si, la trace de sa matrice sera nulle. On obtient

$$\underbrace{\frac{x_0^2}{a^4} - \frac{1}{a^2} \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 \right)}_{\text{coefficient de } \alpha^2} + \underbrace{\frac{y_0^2}{b^4} - \frac{1}{b^2} \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 \right)}_{\text{coefficient de } \beta^2} = 0$$

ce qui donne, après simplification

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$$

Propriété 4.7 – Co-réduction de formes quadratiques

Soit E un espace euclidien, (u, v) deux endomorphismes symétriques de E , u étant défini positif, alors il existe une

base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle u(e_i), e_j \rangle = \delta_{i,j} \text{ et } \langle v(e_i), e_j \rangle = \lambda_i \delta_{i,j}$$

Démonstration

Il suffit de remarquer que $N_u : x \mapsto \sqrt{q_u(x)}$ définit sur E une nouvelle norme euclidienne, pour laquelle $u^{-1} \circ v$ est auto-adjoint. En effet, soit $(x, y) \in E^2$

$$B_u(u^{-1} \circ v(x), y) = \langle v(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle = \langle v(y), x \rangle = B_u(u^{-1} \circ v(y), x) = B_u(x, u^{-1} \circ v(y))$$

Le théorème spectral nous assure alors qu'il existe une base orthonormée pour N_u de vecteurs propres de $u^{-1} \circ v$, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$. Il existe des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$u^{-1} \circ v(e_i) = \lambda_i \cdot e_i \text{ et } \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, B_u(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$$

On obtient alors immédiatement, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$

$$B_u(e_i, e_j) = \langle u(e_i), e_j \rangle = \delta_{i,j} \text{ et } B_u(u^{-1} \circ v(e_i), e_j) = \langle v(e_i), e_j \rangle = \lambda_i \delta_{i,j}$$

Exemple 4.7

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ par

$$f(x, y, z) = \frac{2y^2 - 3z^2 + 2xz}{3x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xz}$$

ses minimum et maximum sont -1 et 2...

Démonstration

f est le quotient de deux formes quadratiques

1. Au dénominateur

$$q_1(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xz = 3\left(x - \frac{z}{3}\right)^2 + y^2 + \frac{8}{3}z^2$$

est définie, positive. Elle définit donc un produit scalaire. Sa matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Au numérateur

$$q_2(x, y, z) = 2y^2 - 3z^2 + 2xz$$

sa matrice dans la base canonique est

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

On sait qu'il existe une base q_1 -orthonormée dans laquelle, si on note (X, Y, Z) les nouvelles coordonnées de (x, y, z) , il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ tel que

$$q_1(x, y, z) = X^2 + Y^2 + Z^2 \text{ et } q_2(x, y, z) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2$$

On voit alors que f est minorée par λ_3 et majorée par λ_1 et que ces valeurs sont atteintes pour les vecteurs propres correspondants. Il reste donc à calculer ces valeurs propres. Elles sont racines de

$$\det(A^{-1} \cdot B - \lambda \cdot I_3) = 0 \text{ et donc de } \det(B - \lambda \cdot A) = 0$$

donc ce sont -1 , $1/8$ et 2 .

Remarque 4.9

On peut traduire la co-réduction en termes matriciels

$$\forall M \in S_p^{++}(\mathbb{R}), \forall N \in S_p(\mathbb{R}), \exists P \in GL_p(\mathbb{R}), \begin{cases} {}^tP \cdot M \cdot P = I_p \\ {}^tP \cdot N \cdot P \in D_p(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Exercice(s) 4.2

4.2.1 Soit E un espace euclidien, (u, v) deux endomorphismes symétriques positifs de E , alors

$$\det(u + v) \geq \det(u) + \det(v)$$

4.2.2 Soit E un espace euclidien, (u, v) deux endomorphismes symétriques positifs de E , alors

$$\forall x \in E, \left[q_u(x) \leq q_v(x) \right] \implies \left[\det(u) \leq \det(v) \right]$$

4.2.3 Soit $u \in S(E)$, alors, si $A = \text{Mat}(u, \mathcal{B}_o)$, où \mathcal{B}_o est une base orthonormée de E , on a

$$\left[u \in S^{++}(E) \right] \iff \left[\text{tous les mineurs principaux de } A \text{ sont } > 0 \right]$$

4.2.4 Soit l'ellipsoïde défini par

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

trouver les lieux des points de l'espace tels que

(a) Par ces points passent trois droites orthogonales tangentes à l'ellipsoïde.

(b) Par ces points passent trois plans orthogonaux tangents à l'ellipsoïde.

4.2.5 Soit q une forme quadratique sur \mathbb{R}^n de signature (r, s) . Que peut-on dire de la signature de la restriction de q à un sous-espace de \mathbb{R}^n ?

4.2.6 Soit (a_1, \dots, a_n) des réels, on considère la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^n par

$$q(\vec{x}) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_{\min(i,j)} x_i x_j$$

(a) Quelle est sa signature ?

(b) Condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit définie positive ?

4.2.7 Soient q_1 une forme quadratique non dégénérée de forme polaire φ_1 et q_2 une forme quadratique de forme polaire φ_2 , on leur associe les deux applications linéaires

$$\theta_1 : x \mapsto \varphi_1(x, \bullet) \text{ et } \theta_2 : x \mapsto \varphi_2(x, \bullet)$$

justifier que θ_1 est un isomorphisme. Montrer qu'il existe une base de E q_1 -orthogonale et q_2 -orthogonale si, et seulement si, il existe une base (e_1, \dots, e_n) et des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \theta_2(e_k) = \lambda_k \cdot \theta_1(e_k)$$

Chapitre 5

Compléments sur les espaces hermitiens

5.1 Formulation vectorielle

Définition 5.1 – Espace vectoriel préhilbertien complexe

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel, on dit que $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ est un *produit scalaire hermitien* sur E s'il est

1. (*linéaire à droite*)

$$\forall x \in E, \phi(x, \bullet) : y \mapsto \phi(x, y) \text{ est linéaire}$$

2. (*hermitien*)

$$\forall (x, y) \in E, \phi(y, x) = \overline{\phi(x, y)}$$

3. (*positif*)

$$\forall x \in E, \phi(x, x) \in \mathbb{R}_+$$

4. (*défini*)

$$\forall x \in E, \left[\phi(x, x) = 0 \right] \implies \left[x = 0_E \right]$$

Un \mathbb{C} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien est appelé *espace vectoriel préhilbertien complexe*. Si, de plus, il est de dimension finie, on dit que c'est un *espace hermitien*.

Remarque 5.1

Une telle application, linéaire à droite et hermitienne, vérifie donc

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \phi(\lambda.x + \mu.y, z) = \bar{\lambda} \phi(x, z) + \bar{\mu} \phi(y, z)$$

On dit que ϕ est *semi-linéaire à gauche*. Lorsqu'une fonction est semi-linéaire à gauche et linéaire à droite, elle est dite *sesqui-linéaire*.

Exemple 5.1 – Espaces préhilbertiens complexes

1. \mathbb{C}^n , muni de

$$\phi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k$$

est un espace hermitien.

2. $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(t)} g(t) \, dt$$

est un espace préhilbertien complexe.

Quelles sont les propriétés des espaces préhilbertiens réels qui sont encore vraies, quelles sont celles qui ont changé ?

5.1.1 Propriétés des espaces préhilbertiens complexes

Proposition 5.1 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien complexe, ϕ son produit scalaire, alors pour $(x, y) \in E^2$

$$|\phi(x, y)|^2 \leq \phi(x, x) \phi(y, y)$$

avec égalité si, et seulement si, x et y sont liés.

Démonstration

Soit $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors, en supposant que $\phi(x, y) \neq 0$ (sinon la relation est évidente), on a, en développant

$$\phi(x + \lambda y, x + \lambda y) = \phi(x, x) + \bar{\lambda} \phi(y, x) + \lambda \phi(x, y) + |\lambda|^2 \phi(y, y) \geq 0$$

si $t \in \mathbb{R}$, en prenant $\lambda = t \phi(y, x) = t \overline{\phi(x, y)}$ et en utilisant la propriété hermitienne du produit scalaire, on obtient

$$\phi(x, x) + 2t |\phi(x, y)|^2 + t^2 |\phi(x, y)|^2 \phi(y, y) \geq 0$$

Ceci étant vrai, pour tout $t \in \mathbb{R}$, nécessairement le discriminant doit être négatif (trinôme réel), ce qui nous donne

$$4 |\phi(x, y)|^4 - 4 |\phi(x, y)|^2 \phi(y, y) \phi(x, x) \leq 0$$

Ce qui donne, après simplification par $4 |\phi(x, y)|^2$ l'inégalité cherchée.

Cas d'égalité S'il y a égalité, le discriminant est nul, donc il existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\phi(x + t_0 \overline{\phi(x, y)}.y, x + t_0 \overline{\phi(x, y)}.y) = 0$$

ce qui montre que x et y sont liés, d'après le caractère défini du produit scalaire.^a

a. S'il y a égalité dans le cas où $\phi(x, y) = 0$, alors on a soit $\phi(x, x) = 0$, soit $\phi(y, y) = 0$, donc soit $x = 0$, soit $y = 0$, les deux vecteurs sont encore liés.

Proposition 5.2 – Norme hermitienne

Si E est un espace préhilbertien complexe, ϕ son produit scalaire, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{\phi(x, x)} \end{array} \right.$$

est une norme sur E (appelée norme hermitienne).

Démonstration

Notons N cette application. Pour être une norme, elle doit vérifier

0. N est bien définie, à valeurs dans \mathbb{R}_+ ;

1. N est *homogène*

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in E, N(\lambda.x) = |\lambda| N(x)$$

2. N est *définie*

$$\forall x \in E, [N(x) = 0] \iff [x = 0_E]$$

3. N vérifie l'*inégalité triangulaire*

$$\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

Vérifions ces propriétés.

0. Cela vient de la propriété 3. de ϕ .

1. C'est une application des propriétés 1. et 2. de ϕ .

2. Cela découle de la propriété 4. pour le sens direct, le sens indirect provient de l'homogénéité (par exemple).

3. C'est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En effet, soit $(x, y) \in E^2$, on a alors

$$\phi(x + y, x + y) = \phi(x, x) + \phi(y, x) + \phi(x, y) + \phi(y, y) = \phi(x, x) + 2 \operatorname{Re}(\phi(x, y)) + \phi(y, y) \quad (**)$$

or

$$\operatorname{Re}(\phi(x, y)) \leq |\phi(x, y)| \leq \sqrt{\phi(x, x)} \sqrt{\phi(y, y)}$$

en reportant, on obtient

$$N(x + y)^2 = \phi(x + y, x + y) \leq \phi(x, x) + 2 \sqrt{\phi(x, x)} \sqrt{\phi(y, y)} + \phi(y, y) = \left(\sqrt{\phi(x, x)} + \sqrt{\phi(y, y)} \right)^2 = (N(x) + N(y))^2$$

Proposition 5.3 – Formule de polarisation

Soit E un espace préhilbertien complexe, ϕ son produit scalaire et N sa norme, on a alors

$$\forall (x, y) \in E^2, N(x + y)^2 = N(x)^2 + 2 \operatorname{Re}(\phi(x, y)) + N(y)^2$$

Démonstration

C'est (**).

Notation 5.1 – Produit scalaire

Soit E un espace préhilbertien complexe de norme hermitienne N et de produit scalaire ϕ associé. On notera, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté

$$\forall x \in E, \|x\| \stackrel{\text{Not}}{=} N(x) \text{ et } \forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle \stackrel{\text{Not}}{=} \phi(x, y)$$

Remarque importante 5.2

La présence de cette partie réelle va provoquer quelques modifications.

1. La « reconstruction » de ϕ à partir de N est plus délicate. On a, pour $(x, y) \in E^2$

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2} (N(x+y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2) + \frac{i}{2} (N(ix+y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2)$$

2. L'identité de la médiane est toujours valide, mais ce n'est plus une condition suffisante pour avoir une norme hermitienne.
3. Le théorème de Pythagore devient

$$\forall (x, y) \in E^2, \left[N(x+y)^2 = N(x)^2 + N(y)^2 \right] \iff \left[\operatorname{Re}(\phi(x, y)) = 0 \right]$$

ce qui *n'est pas* l'orthogonalité !

Définition 5.2

Soit E un espace préhilbertien complexe, ϕ son produit scalaire.

1. On dit que deux vecteurs de E sont *orthogonaux* s'ils vérifient $\phi(x, y) = 0$.
2. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E , on dit qu'elle forme une *famille orthonormée* si elle vérifie

$$\forall (i, j) \in I^2, \phi(x_i, x_j) = \delta_{i,j} \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

3. Si $A \subset E$, on définit l'*orthogonal* de A par

$$A^\perp \stackrel{\text{Not}}{=} \{x \in E, \forall a \in A, \phi(x, a) = 0\}$$

4. Deux sous-espaces E_1 et E_2 sont dits *orthogonaux* si

$$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \phi(x_1, x_2) = 0$$

Proposition 5.4 – Famille orthonormée

Soit E un espace préhilbertien complexe, toute famille orthonormée est une famille libre. Lorsqu'elle est de plus génératrice, on parle de base orthonormée.

Démonstration

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille orthonormée de E .

Soit $J \subset I$ une partie finie de I , et $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{C}^J$ des scalaires tels que

$$\sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j = 0_E$$

Soit $j_0 \in J$, on a alors

$$0 = \left\langle x_{j_0}, \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j \right\rangle = \sum_{j \in J} \lambda_j \langle x_{j_0}, x_j \rangle = \lambda_{j_0}$$

ce qui prouve que la famille est libre.

Proposition 5.5 – Projection orthogonale

Soit E un espace préhilbertien complexe, $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ une famille orthonormée, notons F le sous-espace vectoriel engendré par la famille (e_1, \dots, e_n) , donc $F = \text{Vect}(\{e_1, \dots, e_n\})$, alors

$$E = F \oplus F^\perp.$$

et la projection orthogonale sur F (projection associée à cette décomposition en somme directe), notée p_F vérifie

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle \cdot e_k$$



Bien mettre le x à droite sinon la formule de droite n'est plus linéaire !

Démonstration

Notons

$$u : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle \cdot e_k \end{cases}$$

Cette application est manifestement linéaire (car le x est à droite !), montrons que c'est la projection orthogonale sur F .

1. $u \circ u = u$, en effet, soit $x \in E$

$$u \circ u(x) = \sum_{i=1}^n \left\langle e_i, \sum_{j=1}^n \langle e_j, x \rangle \cdot e_j \right\rangle \cdot e_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle e_j, x \rangle \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{=\delta_{i,j}} \cdot e_i = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle \cdot e_i = u(x)$$

C'est bien un projecteur (et donc une projection).

2. $\text{Im}(u) = F$, en effet
 - $\text{Im}(u) \subset F$ de manière évidente (combinaison linéaire des (e_1, \dots, e_n));
 - $F \subset \text{Im}(u)$, car

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_i) = \sum_{k=1}^n \langle e_k, e_i \rangle \cdot e_k = e_i$$

car la famille est orthonormée.

3. $\text{Ker}(u) = F^\perp$, en effet
 - $F^\perp \subset \text{Ker}(u)$, car si $x \in F^\perp$, on a

$$u(x) = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle \cdot e_k = 0_E$$

— $\text{Ker}(u) \subset F^{\perp}$ car tout élément $x \in \text{Ker}(u)$ vérifie immédiatement

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle e_k, x \rangle = 0$$

puisque la famille (e_1, \dots, e_n) est libre.

En conclusion, puisque u est un projecteur

$$E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = F^{\perp} \oplus F \text{ et } u = p_F$$

Théorème 5.1 – Orthonormalisation de Schmidt

Soit E un espace préhilbertien complexe, soit I un intervalle entier $\llbracket 1, n \rrbracket$ ou égal à \mathbb{N} , soit $(y_i)_{i \in I}$ une famille libre de E , alors il existe une famille orthonormée $(e_i)_{i \in I}$ de E qui vérifie pour tout $k \in I$

$$\text{Vect}(\{y_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket\}) = \text{Vect}(\{e_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket\}) \quad (5.1)$$

De plus, les $(e_i)_{i \in I}$ sont chacun définis à un complexe de module 1 près.

Démonstration

Posons, pour $k \in I$

$$F_k = \text{Vect}(\{y_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket\}) \text{ et } p_k = p_{F_k}$$

On procède ensuite par récurrence sur k .

1. *Initialisation* On doit avoir e_1 colinéaire à y_1 et de norme 1, donc, il existe un $\lambda_1 \in \mathbb{U}$ tel que

$$e_1 = \frac{\lambda_1}{\|y_1\|} \cdot y_1$$

et tous les e_1 possibles sont obtenus en prenant toutes les valeurs possibles de λ_1 .

2. *Hérédité* Supposons la propriété vraie au rang k ($k < n$ si on est dans le cas où I est fini). On sait alors qu'il existe (e_1, \dots, e_k) une famille orthonormée vérifiant l'équation 5.1, page précédente, chaque vecteur étant défini à un complexe près de module 1.

— On sait que $y_{k+1} \notin F_k$, car la famille (y_1, \dots, y_{k+1}) est libre, donc

$$y_{k+1} = \underbrace{p_k(y_{k+1})}_{\in F_k} + \underbrace{(y_{k+1} - p_k(y_{k+1}))}_{\in F_k^\perp \text{ et } \neq 0_E}$$

Donc, nécessairement, e_{k+1} doit être colinéaire à $z_{k+1} = y_{k+1} - p_k(y_{k+1})$.

— Comme e_{k+1} doit être de module 1, il existe un complexe $\lambda_{k+1} \in \mathbb{U}$ tel que

$$e_{k+1} = \frac{\lambda_{k+1}}{\|z_{k+1}\|} \cdot z_{k+1}$$

— Il reste à vérifier que e_{k+1} ne dépend pas des choix de $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Ceci vient du fait que

$$p_k(y_{k+1}) = \sum_{j=1}^k \langle e_j, y_{k+1} \rangle \cdot e_j$$

et si pour un $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on change e_j en $\mu_j \cdot e_j$ où $\mu_j \in \mathbb{U}$, alors

$$\langle \mu_j \cdot e_j, y_{k+1} \rangle \mu_j \cdot e_j = \underbrace{\overline{\mu_j} \mu_j}_{=1} \langle e_j, y_{k+1} \rangle \cdot e_j = \langle e_j, y_{k+1} \rangle \cdot e_j$$

Proposition 5.6

Tout espace vectoriel préhilbertien complexe de dimension dénombrable possède une base orthonormée.

Démonstration

Il suffit d'orthonormaliser une base dénombrable.

5.1.2 Propriétés des espaces hermitiens

Proposition 5.7

Soit E un espace hermitien (préhilbertien complexe de dimension finie), alors il existe des bases orthonormées de E

Démonstration

Il suffit d'orthonormaliser une base quelconque.

Proposition 5.8 – Coordonnées en base orthonormée

Soit E un espace hermitien et (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E , alors

$$\forall x \in E, x = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle \cdot e_k$$



Bien mettre le x à droite dans le produit scalaire !

Démonstration

Soit $x \in E$, comme (e_1, \dots, e_n) est une base, il existe un unique n -uplet $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$x = \sum_{k=1}^n a_k \cdot e_k$$

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, en faisant le produit scalaire à gauche par e_j , on obtient

$$\langle e_j, x \rangle = \left\langle e_j, \sum_{k=1}^n a_k \cdot e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_k \langle e_j, e_k \rangle \cdot e_k = a_j$$

Remarque importante 5.3

On a donc, lorsque (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de l'espace vectoriel hermitien E .

$$\forall x \in E, N(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |\langle e_k, x \rangle|^2}$$

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{\langle e_k, x \rangle} \langle e_k, y \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle e_k, y \rangle$$

Théorème 5.2 – de représentation des formes linéaires

Soit E un espace hermitien, alors

$$\forall \varphi \in E^*, \exists ! a \in E, \forall x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle$$



Bien mettre le x à droite !

De plus, l'application

$$\left\{ \begin{array}{ll} E^* & \longrightarrow E \\ \varphi & \longmapsto a \end{array} \right.$$

est semi-linéaire.

Démonstration

Soit $\varphi \in E^*$, non nulle (si elle est nulle $a = 0_E$ convient et est unique). Son noyau est donc un hyperplan H (sous-espace vectoriel de codimension 1).

— On a

$$E = H \overset{\perp}{\oplus} H^\perp.$$

puisque H est de dimension finie, d'après la proposition 5.5, page 235.

— Comme H est de codimension 1, la dimension de H^\perp est 1, soit e une base orthonormée de H^\perp .

— Tout élément $x \in E$ s'écrit

$$x = p_H(x) + \langle e, x \rangle \cdot e \text{ et donc } \varphi(x) = \langle e, x \rangle \varphi(e)$$

En conclusion, si on pose

$$a = \overline{\varphi(e)} \cdot e \text{ on obtient } \forall x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle$$

L'unicité et la semi-linéarité sont immédiates.

Proposition 5.9 – Adjoint

Soit E un espace hermitien, $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E , alors il existe un unique endomorphisme $f^ \in \mathcal{L}(E)$, appelé adjoint de f qui vérifie*

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, f(y) \rangle = \langle f^*(x), y \rangle$$

Démonstration

Soit $x \in E$, on peut lui associer la forme linéaire φ_x définie par

$$\forall y \in E, \varphi_x(y) = \langle x, f(y) \rangle$$

D'après le théorème de représentation, il existe un unique vecteur a que nous noterons $f^\star(x)$ tel que

$$\varphi_x = \langle f^\star(x), \bullet \rangle$$

Pour montrer que φ^\star est linéaire, on peut procéder de la manière suivante

- $x \mapsto \varphi_x$ est semi-linéaire ;
- $\varphi_x \mapsto f^\star(x)$ est semi-linéaire.

Donc, par composition, $x \mapsto f^\star(x)$ est linéaire. On peut raisonner de la même manière pour affirmer que $f \mapsto f^\star$ est semi-linéaire.

Remarque 5.4

Les propriétés de l'adjoint sont *presque* les mêmes que dans le cas euclidien, sauf que

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \forall \lambda \in \mathbb{C}, (\lambda.f)^\star = \bar{\lambda}.f^\star$$

Définition 5.3 – Endomorphisme hermitien

Soit E un espace hermitien, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, u est dit *hermitien* ou *auto-adjoint* s'il vérifie

$$u = u^\star$$

L'ensemble des endomorphismes hermitiens est noté $\mathcal{H}(E)$, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, mais il est stable par addition et par multiplication par un scalaire *réel*.

Propriété 5.1

Si $u \in \mathcal{H}(E)$, alors

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \in \mathbb{R}$$

Démonstration

En effet, soit $x \in E$, on a alors

$$\langle u(x), x \rangle = \langle x, u(x) \rangle = \overline{\langle u(x), x \rangle}$$

la première égalité venant du caractère auto-adjoint de u , la deuxième du fait que le produit scalaire est hermitien.

Définition 5.4

Soit E un espace hermitien, $u \in \mathcal{H}(E)$, on dit que

1. u est *positif* s'il vérifie

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geqslant 0$$

on note $\mathcal{H}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes hermitiens positifs de E .

2. u est *défini, positif* s'il vérifie

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \langle u(x), x \rangle > 0$$

on note $\mathcal{H}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes hermitiens définis, positifs de E .

Théorème 5.3 – Forme canonique des endomorphismes hermitiens

Soit E un espace hermitien, $u \in \mathcal{L}(E)$. u est un endomorphisme hermitien si, et seulement si u se diagonalise dans une base orthonormée et ses valeurs propres sont toutes réelles.

Il existe donc une base orthonormée telle que

$$\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(u) \in D_n(\mathbb{R})$$

Démonstration

1. (\Leftarrow) Si l'endomorphisme u se diagonalise dans une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) et ses valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ associées sont toutes réelles, alors il est auto-adjoint. Il suffit de faire le calcul. Soit $(x, y) \in E^2$, alors

$$x = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle \cdot e_i \text{ et } y = \sum_{j=1}^n \langle e_j, y \rangle \cdot e_j$$

donc

$$\langle x, u(y) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle \cdot e_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle e_j, y \rangle \cdot e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$$

et

$$\langle u(x), y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i, x \rangle \cdot e_i, \sum_{j=1}^n \langle e_j, y \rangle \cdot e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{\lambda_i} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$$

On a donc bien égalité puisque les valeurs propres sont toutes réelles.

2. (\Rightarrow) Procédons par récurrence avec l'hypothèse pour $n \in \mathbb{N}^*$ \mathcal{H}_n : « le théorème est vérifié pour tout espace hermitien E de dimension n et tout endomorphisme hermitien de E ».

(a) *Initialisation* Si $\dim(E) = 1$, soit (e) une base orthonormée de E et $u \in \mathcal{L}$, alors il existe un $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$u(e) = e$. Mais comme u est hermitien

$$\lambda = \langle e, u(e) \rangle = \langle u(e), e \rangle = \langle \lambda.e, e \rangle = \bar{\lambda} \langle e, e \rangle = \bar{\lambda}$$

donc $\lambda \in \mathbb{R}$. \mathcal{H}_1 est vraie.

(b) *Hérédité*, supposons connu un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que \mathcal{H}_n soit vérifiée. Soit E un espace hermitien de dimension $n+1$ et $u \in \mathcal{H}(E)$. On a successivement

- i. $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(u) \neq \emptyset$, car nous sommes dans \mathbb{C} ;
- ii. $\text{Sp}_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{R}$, c'est la même démonstration que l'initialisation ;
- iii. soit $e_{n+1} \in E$ et $\lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$u(e_{n+1}) = \lambda_{n+1}.e_{n+1}$$

on écrit alors

$$E = \mathbb{C}.e_{n+1} \oplus (\mathbb{C}.e_{n+1})^{\perp}.$$

et on remarque que $(\mathbb{C}.e_{n+1})^{\perp}$ est stable par u et que la restriction de u à cet espace est toujours un endomorphisme hermitien. Il suffit pour conclure d'appliquer \mathcal{H}_n au couple

$$\left((\mathbb{C}.e_{n+1})^{\perp}, u \Big|_{(\mathbb{C}.e_{n+1})^{\perp}} \right)$$

puisque $\dim (\mathbb{C}.e_{n+1})^{\perp} = n$.

Remarque 5.5

On a clairement, pour $u \in \mathcal{H}(E)$

$$\begin{aligned} \left[u \in \mathcal{H}^+(E) \right] &\iff \left[\text{Sp}_c(u) \subset \mathbb{R}_+ \right] \\ \left[u \in \mathcal{H}^{++}(E) \right] &\iff \left[\text{Sp}_c(u) \subset \mathbb{R}_+^* \right] \end{aligned}$$

Définition 5.5 – Automorphisme unitaire

Soit E un espace hermitien, $u \in \mathcal{L}(E)$, u est dit *automorphisme unitaire* s'il est inversible ($u \in \mathcal{GL}(E)$) et vérifie

$$u^{-1} = u^\star$$

L'ensemble des automorphismes unitaires de E est noté $\mathcal{U}(E)$, c'est un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$.

Théorème 5.4 – Forme canonique des automorphismes unitaires

Soit E un espace hermitien, $u \in \mathcal{U}(E)$, alors il existe une base orthonormée \mathcal{E}_0 dans laquelle

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) \in \text{D}_n(\mathbb{U})$$

Ce qui signifie que u se diagonalise en base orthonormée et toutes ses valeurs propres sont de module 1.

La réciproque est vraie.

Démonstration

La démonstration est toujours la même... par récurrence sur la dimension de E . La seule question originale est le pourquoi les valeurs propres de u sont de module 1. Soit $e \in E$ un vecteur propre unitaire de u associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}^*$ (car u est inversible). On a alors

$$\lambda = \langle e, u(e) \rangle = \langle u^{-1}(e), e \rangle = \left\langle \frac{1}{\lambda} \cdot e, e \right\rangle = \frac{1}{\lambda}$$

5.2 Formulation matricielle

Propriété 5.2 – Cas hermitien

Si E est un espace hermitien et $\mathcal{E}_o = (e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de E

1. si x et y sont deux vecteurs de E et $X = \text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(x)$, $Y = \text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(y)$, alors

$$\langle x, y \rangle = {}^t \overline{X} \cdot Y$$

2. si \mathcal{B}_o est une autre base orthonormée de E , on a

$$P_{\mathcal{B}_o}^{\mathcal{E}_o} = \left(P_{\mathcal{E}_o}^{\mathcal{B}_o} \right)^{-1} = {}^t \overline{P_{\mathcal{E}_o}^{\mathcal{B}_o}}$$

E est un espace vectoriel euclidien de dimension p , $\mathcal{E}_o = (e_1, \dots, e_p)$ et \mathcal{B}_o sont deux *bases orthonormées* de E , et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ est une base quelconque de E . Nous noterons le produit scalaire

$$\phi : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

La matrice de ϕ dans la base quelconque est

$$\Phi \stackrel{\text{Not}}{=} \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi) \stackrel{\text{Def}}{=} [\phi(f_i, f_j)]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \text{S}_n(\mathbb{R})$$

et dans cette base on a

$${}^t \overline{\text{Mat}_{\mathcal{F}}(x)} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(y) = [\langle x, y \rangle] \in \text{M}_1(\mathbb{R})$$



et, *par abus de notation*, on identifiera $\langle x, y \rangle$ et $[\langle x, y \rangle]$.


Démonstration

On a

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i, \quad y = \sum_{j=1}^n y_j \cdot f_j \quad \text{donc} \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \phi(f_i, f_j)$$

Le calcul matriciel se fait de manière identique.

$x \in E$	$\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(x) = [\langle e_i, x \rangle]_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in \text{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ $\text{Mat}_{\mathcal{B}_o}(x) = {}^t \overline{P_{\mathcal{E}_o}^{\mathcal{B}_o}} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(x)$ $\text{car} \left(P_{\mathcal{E}_o}^{\mathcal{B}_o} \right)^{-1} = {}^t \overline{P_{\mathcal{E}_o}^{\mathcal{B}_o}}$
$u \in \mathcal{L}(E)$	<div>  Base orthonormée </div> $\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u) = [\langle e_i, u(e_j) \rangle]_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2}$ $\text{Mat}_{\mathcal{B}_o}(u) = {}^t \overline{P_{\mathcal{E}_o}^{\mathcal{B}_o}} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u) \cdot P_{\mathcal{E}_o}^{\mathcal{B}_o}$ <div> $\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u^\star) = {}^t \overline{\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u)}$ </div>
$u \in \mathcal{H}(E)$	<div>  Base orthonormée </div> $\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u) = {}^t \overline{\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u)}$ <p>On dit que $\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u) \in \text{H}_n(\mathbb{R})$ est hermitienne</p>

$u \in \mathcal{U}(E)$	 Base orthonormée $(\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u))^{-1} = {}^t\overline{\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u)}$ On dit que $\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(u) \in \text{U}_n(\mathbb{R})$ est unitaire
ϕ	$\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(\phi) = [\langle e_i, e_j \rangle]_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2} = I_p$ $\text{Mat}_{\mathcal{B}_o}(\phi) = \text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(\phi) = I_p$ $\text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi) = {}^t\overline{P_{\mathcal{E}_o}^{\mathcal{F}}} \cdot P_{\mathcal{E}_o}^{\mathcal{F}} = {}^t\overline{\text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi)}$
$(x, y) \in E^2$	$\langle x, y \rangle = {}^t\overline{\text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(x)} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{E}_o}(y)$ $\langle x, y \rangle = {}^t\overline{\text{Mat}_{\mathcal{F}}(x)} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(y)$
$u \in \mathcal{L}(E)$	$\text{Mat}_{\mathcal{F}}(u^*) = (\text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi))^{-1} \cdot {}^t\overline{\text{Mat}_{\mathcal{F}}(u)} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi)$

Remarque importante 5.6



Les propriétés matricielles liées à l'adjoint d'un endomorphisme n'apparaissent qu'en *bas orthonormée* ! **En bleu**, ce qui se passe en base quelconque !

Si on a le choix de la base dans un espace hermitien, on choisit *toujours* de travailler en base orthonormée !

Démonstration de la dernière propriété

L'adjoint est défini par la relation vectorielle

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, u(y) \rangle = \langle u^*(x), y \rangle$$

Ce qui se traduit matriciellement par

$${}^t\overline{\text{Mat}_{\mathcal{F}}(x)} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(u) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(y) = {}^t\overline{\text{Mat}_{\mathcal{F}}(x)} \cdot {}^t\overline{\text{Mat}_{\mathcal{F}}(u^*)} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(y)$$

En appliquant cette égalité sur tous les couples (f_i, f_j) possibles $((i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2)$, on obtient

$$\text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(u) = {}^t\overline{\text{Mat}_{\mathcal{F}}(u^*)} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{F}}(\phi)$$

d'où le résultat énoncé.

Notation 5.2

Nous noterons

1. $H_p(\mathbb{C})$ l'ensemble des *matrices hermitiennes* (vérifiant $M = {}^t\overline{M}$), si nous sommes en *base orthonormée*, elles représentent les endomorphismes auto-adjoints.

Nous noterons donc aussi $H_p^+(\mathbb{C})$ pour les matrices hermitiennes M vérifiant de plus

$$\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{C}), {}^t\overline{X} \cdot M \cdot X \geq 0$$

ces matrices sont dites *hermitiennes positives*, elles représentent *en base orthonormée* les endomorphismes auto-

adjoints positifs.

Et de même $H_p^{++}(\mathbb{C})...$

2. $U_p(\mathbb{C})$ l'ensemble des *matrices unitaires* (vérifiant $M \in GL_p(\mathbb{C})$ et $M^{-1} = {}^t\overline{M}$), elles représentent *en base orthonormée* les automorphismes unitaires.

Remarque 5.7

Nous pouvons aussi traduire en termes matriciels les propriétés des espaces hermitiens, par exemple

1. Pour les matrices hermitiennes

$$\forall M \in H_p(\mathbb{C}), \exists P \in U_p(\mathbb{C}), {}^t\overline{P} \cdot M \cdot P \in D_p(\mathbb{R})$$

2. Pour les matrices unitaires

$$\forall M \in U_p(\mathbb{C}), \exists P \in U_p(\mathbb{C}), {}^t\overline{P} \cdot M \cdot P \in D_p(\mathbb{U})$$

Exercice(s) 5.1

5.1.1 Soit E un espace préhilbertien complexe de produit scalaire ϕ et de norme $\| \cdot \|$. Exprimer ϕ en fonction de la norme.

5.1.2 Soit E un espace hermitien, et $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer que

$$\left[f^* \circ f = f \circ f^* \right] \iff \left[f \text{ se diagonalise en base orthonormée} \right]$$

5.1.3 Soit E un espace hermitien, soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes

- (a) u est unitaire ;
- (b) u conserve la norme

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$$

- (c) u conserve le produit scalaire

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

- (d) si (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E , alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est encore une base orthonormée de E .

5.1.4 Reprendre tous les résultats du chapitre 2, page 27 et observer ce qui change ou pas lorsqu'on transforme « espace euclidien » en « espace hermitien ». Faire de même avec le chapitre sur les espaces euclidiens du cours du premier semestre.

Bibliographie

- [1] A. CHILLÈS, 吉宏俊, 欧亚飞, V. VINOLES, A. JOSEPH, *Algèbre linéaire*, Shanghai Jiao Tong University Press, 2021.
-

Figure 5.1 – Courbe orthoptique

