Topologie [L3]

Brandon LIN

October 5, 2023

Contents

Chapter 1 **Connexité** — **Page 2**

1.1 Connexité par arcs — 3

Chemin — 3 • Connexité par arcs — 3 • Composante connexe par arcs — 5

1.2 Connexité — 7

Espace connexe — 7 • Connexité par arc et connexité — 9 • Composante connexe — 11

Chapter 2 **Complétude** — **Page 13**

2.1 Espace complète — 14

Suites de Cauchy — 14 • Convergence d'une suite de Cauchy — 14 • Espace complet, Espace de Banach — 15

2.2 Théorèmes — 19

Théorème de Point Fixe — 19 • Prolongement des applications uniformémemnt continues — 21

Chapter 3 **Applications aux espaces pré-hilbertiens** — **Page 25**

3.1 Espace préhilbertien — 25

3.2 Système totale — 25

Définition — 25 • Formule de Parseval — 26

Chapter 1

Connexité

Connexité : Mon espace est-il en un seul morceau ?

Figure 1.1: Connexité

- **Connexité par arcs** $\Longrightarrow$ Connexité
- Composante Connexe

1.1 Connexité par arcs

1.1.1 Chemin

Definition 1.1.1: Chemin, relié

Soit (x, y) deux points de (E, d), on dit x est **relié à** y dans E, s'il existe un **chemin**, qui est une application p suffit :

- $p : [0, 1] \longrightarrow E$ continue
- allant de x à y, c'est-à-dire $p(0) = x,\ p(1) = y$

1.1.2 Connexité par arcs

Definition 1.1.2: Connexe par arc

Soit $A \subset (E, d)$. On dit que A est **connexe par arc**, si pour $\forall (x, y) \in A^2$, il existe un **chemin** de x à y *dans* A.

$$\forall (x, y) \in A^2,\ \exists p \in \mathscr{C}([0, 1], A),\ p(0) = x,\ p(1) = y$$

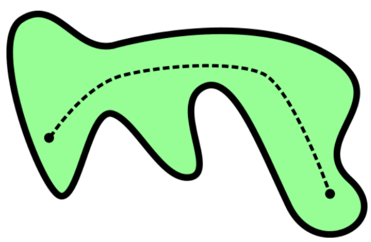


Figure 1.2: Connexe par arc

Example 1.1.1 (Dans $\mathbb{R}$)
Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

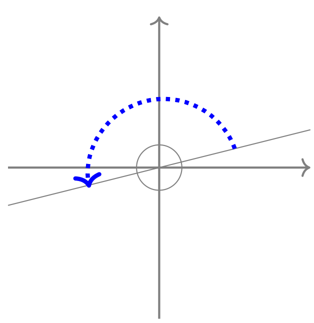
Example 1.1.2 ($\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$)

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arc, mais $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ le sont.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arc.

Proof:

- $n = 1$, $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = [a],\ a \neq 0,\ a \in \mathbb{C}$.

  C'est donc à peu près $\mathbb{C}^*$, qu'on visualise comme $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.



- Rappel : Algorithme du pivot du Gauss, transvection, dilatation

  Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{rg}(A) = r \in [\![0, n]\!]$, il existe $T_1, \dots, T_p$ et $T'_1, \dots, T'_p$ des transvections - dilatations - permutations tel que :

$$T_1 \dots T_p.A.T'_1 \dots T'_q = J_{n,n,r} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Les matrices de transvection et dilatation sont respectivement :

$$T_{k,l}(\lambda) = I_n + \lambda E_{k,l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & & \\ 0 & 1 & \dots & \lambda & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & \dots & & 1 \end{bmatrix}, \quad D_k(\lambda) = I_n + (\lambda - 1).E_{k,k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \lambda & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$$

- Ici, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on peut alors écrire ($\lambda$ ne doit être pas nul dans $D_k(\lambda)$)

$$A = B_1 \dots B_s = \dots = \mathrm{D}_n(\det(A)).T(\lambda_1) \dots T(\lambda_q)$$

  C'est un chemin comme : $I_n \to B_s \to B_{s-1}.B_s \to B_{s-2}.B_{s-1}.B \to \dots \to A$.

  On le montre comme on peut mettre

  - une seule dilatation $D_k(\mu).D_{k'}(\mu') \to \dots \to D_n(\det(A))$
  - à gauche : $T_{k,l}(\lambda).D_j(\mu) = D_{j'}(\mu').T_{k'.l'}(\lambda')$

- Cherchons un chemin allant de A à I_n dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ On construit, en sachant que $M = \mathrm{D}_n(1).M$:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0, 1] &\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ t &\mapsto T_{kl}(\lambda).M \end{aligned}$$

  et

$$\begin{aligned} \gamma_2 : [0, 1] &\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ t &\mapsto \mathrm{D}_n(1 + t(\det(A) - 1)).M = \mathrm{D}_n \psi(t) M \end{aligned}$$

  avec

$$\psi : t \mapsto 1 + t(\det(A) - 1)$$

  suffit $\psi(0) = 1$, $\psi(1) = \det(A)$, et $1/(\det(A) - 1) \in [0, 1]$

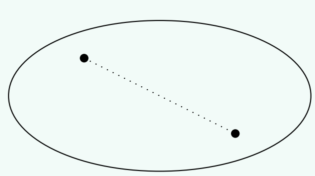
  Dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ on peut trouver une chemin canonique de 1 à $\det A$, mais dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, par exemple on ne pourra pas aller de 1 à -1.

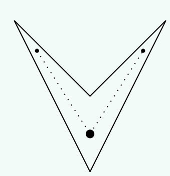
  Quand on passe de A à B, ϕ a une restriction : $\det(A)$ et $\det(B)$ ne doivent pas avoir des signes opposés. Donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a deux morceaux, respectivement $\det(A) > 0$ et $\det(A) < 0$.

☺

Example 1.1.3 (Dans espace vectoriel normé)

- Les convexes d'un espace vectoriel normé sont **connexe par arc**





- Les étoilés d'un espace vectoriel normé sont **connexe par arc**

Proof: 1. E convexe $\iff \forall (x,y) \in E^2, \forall t \in [0,1],\ tx + (1-t)y \in E$.

Soit $(x,y) \in E^2$. On pose :

$$\begin{aligned} \varphi : [0,1] &\to E \\ t &\mapsto tx + (1-t)y \end{aligned}$$

est un chemin de x à y dans E. ($\varphi(0) = y,\ \varphi(1) = x$, φ est continue) Donc, E est connexe par arcs

2. E étoilé $\iff \exists x_0 \in E, \forall y \in E, \forall t \in [0,1], tx_0 + (1-t)y \in E$.

Soit $(x,y) \in E^2$, $[x, x_0] \subset E$ et $[x_0, y] \subset E$, on pose :

$$\begin{aligned} \varphi : [0,1] &\to E \\ t &\mapsto \begin{cases} 2tx_0 + (1-2t)x \text{ si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2\bar{t}y + (1-2\bar{t})x_0 \text{ avec } \bar{t} = t - \frac{1}{2} \text{ si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

φ est continue, $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = y$ donc φ est un chemin de x à y dans E, E est connexe par arc.

😊

Proposition 1.1.1 Image d'un connexe par arcs par une application continue

Soit E est **connexe par arc**, E' est un espace métrique. $f : E \mapsto E'$ une fonction continue. Donc,

$$f(E) \text{ est } \textbf{connexe par arc}$$

Proof: Soit $(x', y') \in f(E)^2$, alors il exist $(x,y) \in E^2$ tel que $x' = f(x)$ et $y' = f(y)$.

Comme E est connexe par arc, il existe p allant de x à y dans E. De plus, comme f est continue, $f \circ p$ est un chemin allant de $x' = f(x)$ à $y' = f(y)$ dans $f(E)$. 😊

Example 1.1.4 (Homéomorphisme de deux espace)

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes. (Homéomorphes - Existe-il une <u>bijection</u> $\psi : E \to F$ suffit à la fois elle-même est <u>continue</u> et ψ^{-1} est <u>continue</u> ?)

Proof:

- Si ϕ est un homéomrphe de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{R}$, alors $\overline{\phi} : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \backslash \{\phi((0,0))\}$ seraient homéomorphe.
- Le premier est connexe par arc, mais la deuxième ne l'est pas.
- Contradiction de la proposition précédant.

😊

1.1.3 Composante connexe par arcs

Proposition 1.1.2 x relié à y est une relation d'équivalence

Soit $A \subset (E,d)$, on définit une relation $\mathcal{R}$ sur $A \times A$:

$$\forall (x,y) \in A^2, x\mathcal{R}y = [x \text{ relié à } y]$$

Donc, $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence**. (symétrique, réflexive, transitive)

$$\begin{gathered} x\mathcal{R}x \\ x\mathcal{R}y = y\mathcal{R}x \\ x\mathcal{R}y,\ y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z \end{gathered}$$

Proof: Soit x, y 2 points de A.

- $x \mapsto x$ la fonction constante.
- Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$, on a $\bar{\gamma} : t \mapsto \gamma(a + b - t)$
- Il existe un chemin γ_1 reliant x à y dans A, et un chemin γ_2 reliant y à z dans A. $\gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow A$, $\gamma_2 : [1, 2] \longrightarrow A$, on considère le chemin :

$$\gamma : t \mapsto \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) \text{ si } t \in [0,1] \\ \gamma_2(t) \text{ si } t \in [1,2] \end{cases}$$

  $\gamma_1(1) = y = \gamma_2(0)$ continuité à gauche en 1. De même, continuité à droite en 1.

😊

Definition 1.1.3: Composante connexe par arcs

Les classes d'équivalence $x\mathcal{R}y$ ou $x \in A$ sont appelées les **composantes connexes par arcs de** A, et forment une partition de A.

Definition 1.1.4: Composante connexe par arcs de x dans A

La **composante connexe par arcs de x dans** A est la plus grande partie connexe par arcs de A contenant x.

Proposition 1.1.3 Caractérisation des ouverts de $\mathbb{R}$

Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Proof: Soit O un ouvert et notons $(E_i)_{i \in I}$ indexé les composantes connnexes par arcs de O. Alors,

- $\forall i \in I$, E_i est un intervalle, car E_i est connexe par arc de $\mathbb{R}$ (Voir 1.1.2)
- $\forall i \in I$, E_i est ouvert non vide. Soit E_i ne l'est pas, supposons que $]a, b] \subset E_i$, alors $\exists \varepsilon > 0$, $]b, b + \varepsilon[\cap E_i = \emptyset$
- Les intervalles sont disjoints, car par définition d'une partition.
- I est dénombrable, d'après une application injective de I dans $\mathbb{Q}$: $i \mapsto x_i \in E_i \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

😊

1.2 Connexité

1.2.1 Espace connexe

Definition 1.2.1: Espace connexe

Un espace **connexe** est une partie en un seul morceau.

Plus précisément, soit $A \subset (E, d)$, les assertions suivant sont équivalentes :

1. A est un espace topologique **connexe**.
2. Les seules parties à la fois ouvertes et fermées dans A sont A ou $\emptyset$

$$\text{Si } B \subset A \text{ ouvert et fermé de } A, \text{ alors } B = \emptyset \text{ ou } B = A$$

Note:-
La deuxième est le plus utilisé lorsque on veut montrer A est connexe.
On commence par supposons qu'une sous-ensemble ouverte et fermée $B \neq \emptyset \subset A$, ensuite on prouvera $B = A$.

3. A n'est pas la réunion de deux ouverts/fermés non vides disjoints
   - Pour tout O_1 et O_2 sont ouverts *disjoints* dans A, si $A = O_1 \cup O_2$, alors $O_1 = O_2 = \emptyset$
   - Pour tout F_1 et F_2 sont ouverts *disjoints* dans A, si $A = F_1 \cup F_2$, alors $F_1 = F_2 = \emptyset$

Example 1.2.1
$A = \mathbb{R}^*$ n'est pas connexe.

Proof:
- $]-\infty, 0[$ est ouvert dans A
- $]-\infty, 0[$ est fermé dans A, c'est parce que $]0, +\infty[$ est ouvert
- $]-\infty, 0[$ n'est pas égale à A ou $\emptyset$

😊

Example 1.2.2
Dans $\mathbb{R}$, les intervalles I sont connexe dans $\mathbb{R}$.

Proof: Toute fonction $f'(x) = 0$, f est constante sur I. 😊

Example 1.2.3 (Dans $\mathbb{R}$)
Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Proof:
- I intervalle de $\mathbb{R}$, donc I convexe, cela montre que I est **connexe**.
- Par contraposition, on montra que si I n'est pas intervalle, donc I n'est pas connexe.
  Soit $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas un intervalle, caractérisation : $\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta < \gamma$ et $\alpha, \beta \in A$ mais $\beta \notin A$
  On pose $\mathcal{U} = A \cap]-\infty, \beta[$ et $\mathcal{V} = A \cap]\beta, +\infty[$ des ouverts de A. (*Ce n'est pas de* $\mathbb{R}$)
  On a
  - $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ car $]-\infty, \beta[\cap]\beta, +\infty[= \emptyset$.

– $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = (A \cap]-\infty, \beta[) \cup (A \cap]\beta, +\infty[) = A \cap (\mathbb{R} \backslash \{\beta\}) = A$ car $\beta \notin A$
– De plus $\alpha \in \mathcal{U}$ et $\gamma \in \mathcal{V}$, donc $\mathcal{U} \neq \emptyset$ et $\mathcal{V} \neq \emptyset$

Alors A n'est pas connexe.

Donc les connexe de $\mathbb{R}$ sont bien des intervalles.

☺

Proposition 1.2.1 Image d'un connexe par une application continue

Soit (E, d) un espace **connexe**, $f : E \to E'$ continue. Donc,

$f(E)$ est **connexe**

Proof: Soit $B \neq \emptyset$, $B \subset f(E)$, B est ouvert et fermé dans (E', d), montrer que $B = f(E)$

- $f^{-1}(B)$ est un ouvert de E
- $f^{-1}(B)$ est un fermé de E
- $f^{-1}(B) \neq \emptyset$ car $B \neq \emptyset$ et $B \subset f(E) \to f^{-1}(B) = E$, donc $B = f(E)$

☺

Example 1.2.4 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $A \subset (E, d)$ un connexe. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue sur A telle qu'il existe $(x, y) \in A^2$ vérifiant $f(x) < 0$ et $f(y) > 0$. Donc f s'annule en un point.

Proof: D'après la proposition, $f(A)$ est un connexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle.
$0 \in [f(x), f(y)] \subset f(A)$, c'est-à-dire $\exists x_0 \in A$, $f(x_0) = 0$ ☺

Proposition 1.2.2 Une autre méthode pour prouver que A soit connexe

$A \subset (E, d)$ est topologique **connexe** si et seulement si toute application continue $f : A \to \mathbb{Z}$ est constante. On remplace parfois $\mathbb{Z}$ par deux valeurs distincts, par exemple $\{0, 1\}$.

Proof: Dans deux sens :

- $(\Longrightarrow)$

  Soit $x \in A$ et $n = f(x)$. Comme $\{n\} \in \mathbb{Z}$ est à la fois ouvert et fermé, f est continue, $\emptyset \neq f^{-1}(\{n\}) \subset A$ est donc à la fois ouvert et fermé.

  Or, A est connexe, cela implique que $f^{-1}(\{n\}) = A$, et f est constante (égale à n).

- $(\Longleftarrow)$

  Soit $X = O_1 \cup O_2$ où les deux ouverts sont disjoints. On a $1_{O_1} : A \to \mathbb{Z}$ à la fois constant et continue, comme 1 est ouvert et O_1 est ouvert.

  Ainsi, ou bien $\varphi = 1$ et $O_2 = \emptyset$, ou bien $\varphi = 0$ et $O_1 = \emptyset$.

☺

Proposition 1.2.3 Prolongement du connexité

Soit A connexe dans E, donc tout ensemble B tel que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ (ainsi que $\overline{A}$) sont tous connexes.

Proof: Soit $f : B \to \{0, 1\}$ continue. Comme f est constante sur A, donc f est constante sur B car $B \subseteq \overline{A}$ ☺

Proposition 1.2.4

Une réunion de connexes d'intersection non vide est connexe.

1.2.2 Connexité par arc et connexité

Proposition 1.2.5 Relation entre connexe par arc et connexe

$$\text{Connexe par arc} \implies \text{Connexe. La réciproque est fausse en générale.}$$

Note:-

- La connexité par arcs est une notion facile.
- La connexité est une notion un peu difficile.

Donc, toujours essayer d'utiliser la connexité par arcs : Connexe par arcs $\implies$ connexe

Proof: Soit C **connexe par arc**, et B ouvert et fermé et non vide de C.

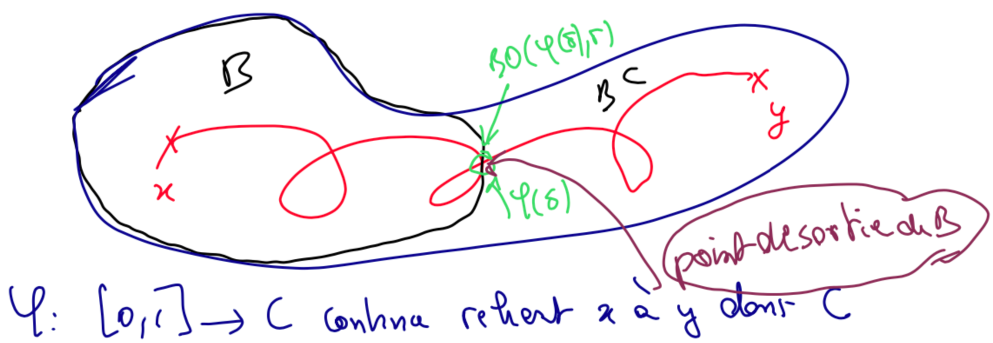


Figure 1.3: De connexe par arc à connexe

Soit $\varphi : [0, 1] \longrightarrow C$ un chemin reliant x à y dans C.

Si $B \neq C$, on trouve $x \in B$, $y \in B^c$. $\Delta = \{t \in [0, 1], \varphi(t) \in B\}$ et $\sup \Delta = \delta$, $\varphi(\delta) \in B$ car φ continue et B fermé dans C.

De plus, B ouvert dans C, donc il existe $r > 0$, $BO_C(\varphi(\delta), r) \subset B$.

Si $\varepsilon > 0$ assez petit et $\delta \neq 1$, $\varphi(\delta + \varepsilon) \in B$ d'après la continuité de φ.

Cela montre que $\delta + \varepsilon \in \Delta$, contradit la définition de $\delta = \sup(\Delta)$

Conclusion : Il est impossible de trouver $x \in B$ et $y \notin B$ dans C.

Donc, $B = C$. ☺

Example 1.2.5 (Connexe non connexe par arcs)

$$A = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right), x \in \mathbb{R}^* \right\} \bigcup \{0\} \times [-1, 1]$$

(adhérence du premier terme) est connexe, mais pas connexe par arcs.

Proof: On note $A = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ avec

$$C_1 = \{(x, \sin(1/x)), x > 0\}$$
$$C_2 = \{(x, \sin(1/x)), x < 0\}$$
$$C_3 = \{0\} \times [-1, 1]$$

Soit $B \subset A$, $B \neq \emptyset$ ouvert et fermé.

- C_1, C_2 et C_3 sont tous connexes par arcs.
- Rappel : O (resp. F) ouvert (resp. fermé) de (E, d), si $A \subset E$, $A \cap O$ (resp. $A \cap E$) ouvert (resp. fermé) de A.
- Montrer que $B = A$.
  - Soit $B \cap C_1 \neq \emptyset$, alors $B \cap C_1$ est ouvert et fermé dans C_1 car B est ouvert et fermé dans A. En outre, $B \neq \emptyset, B \cap C_1 = C_1$ car C_1 est connexe par arcs donc connexe.
  - De même, si $B \cap C_2 \neq \emptyset$, $B \cap C_2 = C_2$; Si $B \cap C_3 \neq \emptyset$, $B \cap C_3 = C_3$
  - Si $B \cap C_1 \neq \emptyset$, $B \supset C_1$ or $\underline{B \text{ est fermé dans } A}$, donc : $B \supset \overline{C_1} = C_1 \cup C_3$. Donc $C_3 \subset B$.
  - Comme $C_3 \subset B$, $\{0\} \times [-1, 1] \subset B$, $(0, 0) \in B$. Comme $\underline{B \text{ ouvert dans } A}$, $\exists r > 0,\ BO_A((0,0), r) \subset B$, $C_2 \cap B \neq \emptyset$, donc $B \cap C_2 = C_2$,
  - Finalement,

$$A = C_1 \cup C_2 \cup C_3,\ B \subset A,\ B = (C_1 \cap B) \cup (C_2 \cap B) \cup (C_3 \cap B) = C_1 \cup C_2 \cup C_3 = A$$

😃

Example 1.2.6 (Dans espace vectoriel normé)

- Les convexes d'un espace vectoriel normé sont **connexe**
- Les étoilés d'un espace vectoriel normé sont **connexe**

Proof: Connexe par arcs donc connexe. 😃

Theorem 1.2.1 Dans espace vectoriel normé
Dans un espace vectoriel normé, tout <u>ouvert connexe</u> est connexe par arcs. (Équivalence)

Note:-
(E, d) est connexe, on veut montrer que $\Delta = \{x \in E, \mathcal{P}(x) \text{ vraie}\} = E$: montrer que $\Delta \neq \emptyset$, Δ est fermé dans E, Δ est ouvert dans E.

Proof: Soit O un ouvert connexe non vide de $(E, \|.\|)$.
Soit $x \in O$, $\Delta = \{y \in O,$ il existe un chemin reliant x et y dans $O\}$. Montrons que $\Delta = O$.

- $\Delta \neq \emptyset$, car $x \in \Delta$.
- Δ ouvert dans O.

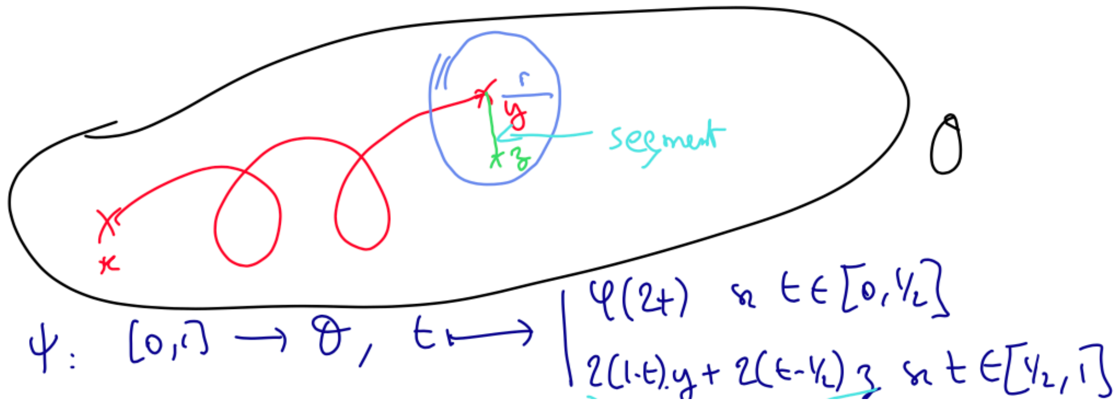


Figure 1.4: Ouvert Connexe

Soit $y \in \Delta$, il existe $r > 0$, $BO(y, r) \subset O$.
Soit $z \in BO(y, r)$, on peut construire un chemin reliant x à z dans O.
Donc, $BO(y, r) \subset \Delta$.

- Δ fermé dans O.

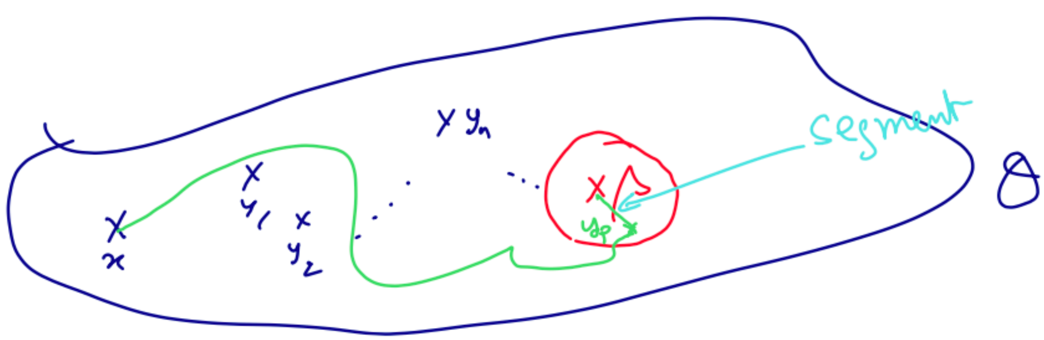


Figure 1.5: Ouvert Connexe

Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Delta^{\mathbb{N}}$, $y_n \longrightarrow \beta \in O$.

Comme O est ouvert, il existe $r > 0$, $BO(\beta, r) \subset O$, et si p assez grand, $y_p \in BO(\beta, r)$.
Il existe φ_p relie x à y_p, et le segment $[y_p, \beta]$ relie y_p à β dans O.
On recolle les 2 chemins pour avoir un chemin de x à β dans O, donc $\beta \in \Delta$.

En conclusion, Δ non vide, ouvert et fermé dans O et O connexe donc $\Delta = O$. ☺

1.2.3 Composante connexe

Definition 1.2.2: Composante connexe

Soit $A \subset (E, d)$, $a \in A$, on appelle **composante connexe de a dans A** le plus grand connexe de A contenant a. On la notera $C_A(a)$.

$\mathcal{F} = \{C \text{ connexe } \subset A,\ a \in C\}$, suffit

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$ car $\{a\} \in \mathcal{F}$
- $\mathcal{F}$ stable par $\bigcup$

On obtient

$$C_A(a) = \bigcup_{C \in \mathcal{F}} C$$

La relation

$$[x \mathcal{R} y] \iff [x \in C_A(y)]$$

induit une partition de A, et elle est une relation d'équivalence sur A. De plus, tout sous-ensemble A de E est réunion disjointe de ses composantes connexes.

Proposition 1.2.6 Sous-ensemble disjoint devient composantes connexes

Soit $A \subset (E, d)$.

$$A = \bigcup_{i \in I} C_i, \quad \forall (i, j) \in I^2,\ i \neq j \implies C_i \cap C_j = \emptyset$$

Les C_i sont les **composante connexe** de A si :

$$\forall i,\ C_i \ \underline{\text{connexe}} \text{ et } C_i \ \underline{\text{ouverte}} \text{ dans } A$$

Proof: Soit $a \in A$, il existe (unique) $i_0 \in I$, $a \in C_{i_0}$.

- C_{i_0} connexe, donc $C_{i_0} \subset C_A(a)$. (Définition : Composante connexe est le plus grand connexe inclus dans A contenant a)
- Comme $C_A(a) \subset A$,

  $$C_A(a) = \bigcup_{i \in I} (C_i \cap C_A(a)) = C_{i_0} \cup \left(\bigcup_{i \in I,\ i \neq i_0} C_i \cap C_A(a) \right)$$

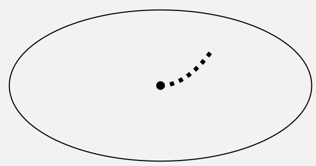
  C_{i_0} est donc fermé car $C_i \cap C_A(a)$ est ouvert dans $C_A(a)$ car C_i ouvert dans A.

  Or C_{i_0} est ouvert d'après définition. Elle est aussi non nul. Comme $C_A(a)$ est connexe, $C_{i_0} = C_A(a)$ ☺

Chapter 2

Complétude

Complétude : E complèt veut dire qu'il n'y a pas de **trou**.



2.1 Espace complète

2.1.1 Suites de Cauchy

Un **trou** dans espace, qu'est-ce que c'est ?

Par exemple, $E =]0, 1]$ avec $|.|$ le valeur absolue. $u_n = 1/(n+1) \to 0$ dans $\mathbb{R}$ mais n'a pas de limite dans E.
Comment reconnaître ce type de suites ?

Definition 2.1.1: Suite de Cauchy

Soit (E, d) un espace métrique, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est dite **suite de Cauchy** si :

Les termes de la suite sont très procher les uns des autres.

$$d(u_p, u_q) \underset{p,q\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Asymptotiquement :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ [p \geq q \geq N] \implies [d(u_p, u_q) \leq \varepsilon]$$

Proposition 2.1.1 Bornée d'une suite de Cauchy

Toute suite de Cauchy est bornée.

Proof: Posons $R = \max(d(u_0, u_N),\ ,\dots, d(u_{N-1}, u_N), \varepsilon)$, $u_n \in BF_d(u_N, R)$ ☺

2.1.2 Convergence d'une suite de Cauchy

Une **suite de Cauchy** peut converger vers

- un élément de E
- un *trou* de E (un élément qui est *en dehors de* E)

Proposition 2.1.2 Suite convergente et suite de Cauchy

- Toute suite convergente est de Cauchy.
- Soit u une suite de Cauchy, alors :

u est **convergente** si, et seulement si, $\text{Adh}(u) \neq \emptyset$.

Proof:

- Si $u_n \to \lambda$, donc $d(u_p, u_q) \leq d(u_p, \lambda) + d(\lambda, u_q)$
- Dans deux sens :
  - ($\implies$) Évident.
  - ($\impliedby$) Existence d'une sous-suite $u_{\varphi(n)} \to \lambda$ et $d(u_n, \lambda) \leq d(u_{\varphi(n)}, \lambda) + d(u_n, u_{\varphi(n)})$

☺

Note:-

Pour montrer une suite de Cauchy est convergente, trouver une valeur d'adhérence.
Con convergence : Essayer de trouver un trou dans l'espace.

Proposition 2.1.3 Suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$

Toute suite de Cauchy *à valeurs réelles* est convergente.

Proof: Bornée donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (toute suite *réelle bornée* admet une valeur d'adhérence), $\mathrm{Adh}(u) \neq \emptyset$. 😊

Example 2.1.1 (Suites de Cauchy non convergente)

- Cas métrique : Dans $(\mathbb{Q}, |.|)$,

$$u_n = \frac{E(10^n\sqrt{2})}{10^n}$$

  est une suite de Cauchy mais n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$. ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

  En fait, $\mathbb{Q}$ plein de trous avec tous les éléments de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

- Cas normé : Dans $E = \mathrm{Vect}(\{x \mapsto x^k, k \in \mathbb{N}\})$ (l'ensemble des fonctions polynomials) muni de $\|P\|_\infty = \max(|a_c|, c \in [\![0, \deg(P)]\!])$, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.(x \mapsto x^k)$$

  est une suite de Cauchy mais n'est pas convergente dans E.

Proof:

- Suite de Cauchy :

$$\|P_p - P_q\|_\infty = \|\sum_{n=q+1}^{p} \frac{1}{n!} x \mapsto x^n\|_\infty \leq \frac{1}{(q+1)!} \longrightarrow 0$$

- Pas de limite : Supposons que $P_n \longrightarrow Q \in E$, alors Q a un degré d. Si $n > d$, $n \longrightarrow +\infty$

$$\|P_n - Q\|_\infty \geq \frac{1}{(d+1)!} \not\to 0$$

😊

2.1.3 Espace complet, Espace de Banach

Definition 2.1.2: Espace complet, Espace de Banach

- Un espace (E, d) est dit **complet** si :

  Toute suite de Cauchy est convergente.

- Un espace (E, N) est dit **de Banach** si :

  L'espace vectoriel normé (E, N) est **complet**.

Example 2.1.2 ($\mathbb{K}$ et espace compact)

- $(\mathbb{K}, |.|)$ est complet.

- Si (E, d) est compact, il est complet.

Proof:

- $\mathbb{R}$ déjà fait.
- $z_n = x_n + iy_n$, et bornée + Bolzano-Weierstrass.
- Par définition, tout suite d'un compact admet une valeur d'adhérence.

😊

Note:-

Comment montrer qu'un espace E est complet ?

- On prend une suite de Cauchy dans E, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$
- On construit la limite de cette suite dans un espace *plus gros* F, avec *la même norme* : $u_n \longrightarrow u \in F$
- Montrer la convergence dans l'espace plus gros.
- On montre que la limite est dans cet espace. $u \in E$
  - L'espace E est fermé ?
  - Connection avec des espaces complet qu'on connaît ?

Comment montrer qu'un espace E n'est pas complèt ?

- On prend un élément de l'espace plus gros mais pas dans E
- On construit une suite de E qui converge vers cet élément dans l'espace plus gros.
- *Ou bien* une suite est de Cauchy, on montre qu'elle ne converge pas.

Example 2.1.3 (Espaces de fonctions continues)

Notant $I = [a, b]$,

1. $E = \mathscr{C}(I, \mathbb{R}), \|.\|_{\infty,I}$ est complet. (Banach)
2. $E = \mathscr{C}(I, \mathbb{R}), \|.\|_{1,I}$ n'est pas complet.

Proof:

1. Par étape :

- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ de Cauchy.
- Pour tout $x \in I$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle de Cauchy car :

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\|_{\infty,[a,b]}$$

  Or $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet, donc il existe un réel noté $f(x)$ tel que $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$. (Attention : $f \in F = \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ contenant E, on ne sait pas si f est continue)
- Sur F on peut avoir une notion de suite convergente définie par $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ si

$$\delta_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

  $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car lorsque on fait tendre p vers $+\infty$ dans l'écriture $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, on a montré :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, [n \geq N] \implies \forall x \in [a, b], |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

- Montrons que $f \in E$.
  Soit $\alpha \in [a,b]$, $h \in \mathbb{R}$, $\alpha + h \in [a,b]$, alors : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}+^*$, $\exists \eta > 0$, si $|h| < \eta$,

$$|f(\alpha+h) - f(\alpha)| \leq |f(\alpha+h) - f_n(\alpha+h)| + |f_n(\alpha+h) - f_n(\alpha)| + |f_n(\alpha) - f(\alpha)| \leq 3\varepsilon$$

  Ce qui montre la continuité en α.
  Donc, $f \in E$ et $\delta_n = \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} \longrightarrow 0$.

2. On prend $[a,b] = [0,1]$, supposons que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ si $x \in [0, 1/2]$ et $x \mapsto 0$ sinon. On construit la suite de fonctions comme :

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1, \; x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0, \; x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right] \\ n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - x\right), \text{ sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

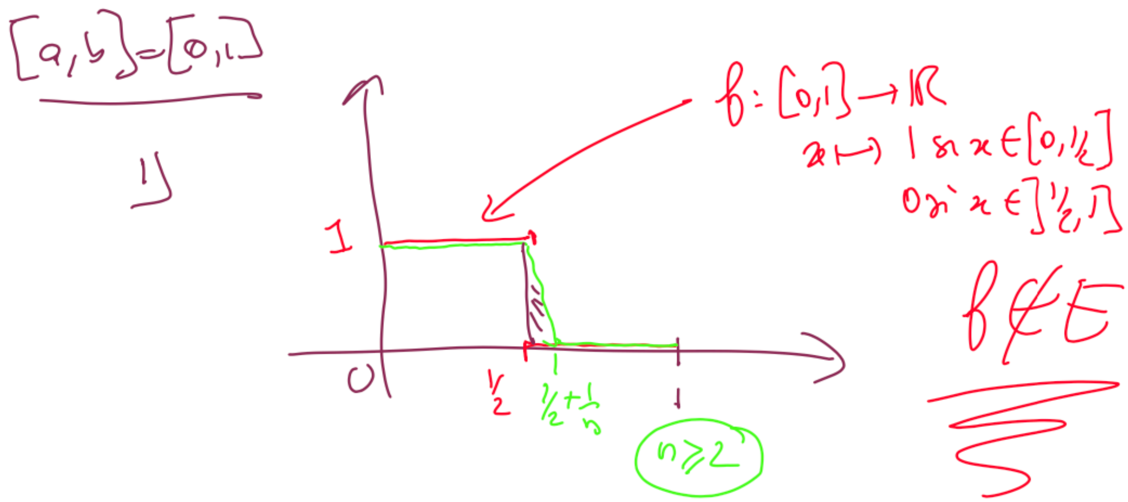


Figure 2.1: Preuve-$f_n \longrightarrow f$

- Convergence dans $C_{pm}([0,1], \mathbb{R})$

$$\|f - f_n\|_{1,[0,1]} = \int_0^1 |f(t) - f_n(t)| \mathrm{d}t = \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

  donc dans $C_{pm}([0,1], \mathbb{R})$, $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$.

- Non convergence dans $C([0,1], \mathbb{R})$
  Supposant que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g \in E$, alors

$$\int_0^1 |f(t) - g(t)| \mathrm{d}t \leq \int_0^1 |f(t) - f_n(t)| \mathrm{d}t + \int_0^1 |f_n(t) - g(t)| \mathrm{d}t$$

  Donc $\int_0^1 |f(t) - g(t)| \mathrm{d}t = 0$, on en déduire que $(f-g)(t) = 0$ si $f - g$ continue en E.
  Mais, g continue sur $[0,1]$ et f continue sur $[0,1] \backslash \{1/2\}$, il contradit la continuité de g car

$$g\left(\frac{1}{2}^-\right) = f\left(\frac{1}{2}^-\right) = 1, \quad g\left(\frac{1}{2}^+\right) = f\left(\frac{1}{2}^+\right) = 0$$

😊

Proposition 2.1.4
Un sous-ensemble fermé d'un espace complet est lui-même complet.

Proof: Si F un fermé dans un espace complet E, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de F.

- (x_n) est une suite de Cauchy de E, donc elle converge vers $\lambda \in E$.
- F est fermé dans E, donc $\lambda \in F$.

☺

Proposition 2.1.5
Si E' espace de Banach, $(\mathscr{LC}(E,E'), |||.|||_{N,N'})$ est aussi un espace de Banach.

Proof: Rappel : Si (E,N) et (E',N') deux espaces vectoriels normés. Soit $u \in \mathscr{L}(E,E')$

- u est continue ssi $\exists K \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in E$, $N'(u(x)) \leq K.N(x)$ et ssi u est continue en 0_E.
- On note $\mathscr{LC}(E,E') = \{u \in \mathscr{L}(E,E'),\ u \text{ continue}\}$
- On munit cet espace vectoriel de

$$|||u|||_{N,N'} = \sup_{x\neq 0}\left(\frac{N'(u(x))}{N(x)}\right) = \sup_{x,N(x)=1}(N'(u(x)))$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{LC}(E,E')$ une suite de Cauchy pour la norme.

- Construction de la limite + Verification que la suite converge dans un espace plus gros

  On a
  $$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \forall x \in E,\ N'(u_p(x) - u_q(x)) \leq |||u_p - u_q|||_{N,N'}N(x)$$
  On sait que E' est complet, donc $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, notons $u(x)$ sa limite.
  On peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq \mathbb{N}$ et $q \geq \mathbb{N}$:
  $$|||u_q - u_p|||_{N,N'} \leq \varepsilon \implies \forall x \in E,\ N'(u_q(x) - u_p(x)) \leq \varepsilon N(x)$$
  Donc, comme $u_q(x) \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} u(x)$
  $$\forall x \in E,\ N'(u(x) - u_p(x)) \leq \varepsilon N(x)$$
  (On n'a pas encore montré que $u \in \mathscr{LC}(E,E')$!!)

- Verification que la limite dans E

  u est linéaire, puisque u_n le sont.
  u est continue, car elle est lipschitzienne au voisinage de 0_E :
  $$\forall x \in E,\ N'(u(x)) \leq N'(u(x) - u_p(x)) + N'(u_p(x)) \leq (1 + |||u_p|||)N(x)$$

☺

Proposition 2.1.6
Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Proof: On passe aux coordonnées, la suite de Cauchy est bornée, et en même temps les Boules fermés sont compacts. C'est inutile de dire un espace complet en dimension infinie, utliser les notions de **compacité**. ☺

2.2 Théorèmes

2.2.1 Théorème de Point Fixe

Caractérisation séquentielle des application continues.

Proposition 2.2.1 Image par application continue ou uniformément continue d'une suite de Cauchy

Soit $f : (E, d) \to (E', d')$ une fonction. Si f est <u>uniformément continue</u>, alors, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, alors :

$$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite de Cauchy de } E'$$

Mais, si f est seulement continue, l'image par f d'une suite de Cauchy n'est pas nécessairement une suite de Cauchy.

Proof: Rappel : Définition d'**uniformément continue** :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ d(x, y) \leq \delta \implies d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

☺

Example 2.2.1 (Contre-Exemple)

On prend :

$$E =]0, 1], \quad x_n = \frac{1}{n+1}, \quad f : x \mapsto \frac{1}{x}$$

- x_n est de Cauchy dans E, car elle converge donc suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
- f est continue.

On obtient $f(x_n) = n + 1$ qui n'est pas une suite de Cauchy dans E

Theorem 2.2.1 Point fixe

Soit (E, d) un espace <u>complet</u> et f une application de E dans E <u>contractante</u>, alors :

Il <u>existe</u> un <u>unique</u> *point fixe* de f sur E.

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \exists k \in]0, 1[,\ d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y) \implies \boxed{\exists! a \in E,\ f(a) = a}$$

Cela aussi implique que, pour tout $a \in E$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

Note:-

Ce théorème nous donne :

- L'existence de $\alpha \implies$ permettre d'assurer que certains objets qui nous interessent ont un sens.
- un algorithme pour calculer $\alpha \implies$ dans suites et séries, résoudre des équations $g(x) = 0$ où g continue.

Utilisation : On veut montrer l'existence d'un objet mathématique $\implies$ On transforme le problème d'existence en la recherche d'un point fixe pour une fonction contractrante dans un espace complet.

Proof:
- <u>Existence</u>

Soit $u_0 = a$, $u_{n+1} = f(u_n)$, on va montrer que cette suite est de Cauchy.

Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $q > p$,

$$\begin{aligned} d(u_p, u_q) &\leq \sum_{j=p}^{q-1} d(u_j, u_{j+1}) \quad \text{Inégalités triangulaires} \\ &\leq \left(\sum_{j=p}^{q-1} k^j \right) .d(u_0, u_1) \\ &\leq \frac{k^p}{1-k} d(u_0, u_1) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans E, elle converge vers $\alpha \in E$.

Comme f est continue, $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\alpha)$, donc en passant à la limite dans la relation : $u_{n+1} = f(u_n)$ que $\alpha = f(\alpha)$, α est un point fixe.

- Unicité
  Si $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$, alors $d(\alpha, \beta) = d(f(\alpha), f(\beta)) \leq kd(\alpha, \beta)$. Sachant que $k < 1$, $d(\alpha, \beta) = 0$ donc $\alpha = \beta$.

😄

Proposition 2.2.2 Application : Suites et Séries

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et qui possède un point d'annulation α.
Idée principal : Supposons que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + \lambda.g(x) \end{aligned}$$

et trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que f soit contractante.

Example 2.2.2 (Application)

On cherche à montrer l'existance d'une solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y' = \psi(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{où } \psi : O \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ continue}$$

Proof: Si φ est une solution, c'est-à-dire : $\begin{cases} \varphi'(x) = \psi(x, \varphi(x)) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$ alors :

- Pour tout $x \in D_f(\varphi)$,
$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \psi(t, \varphi(t))\mathrm{d}t$$
- (De $f(\varphi(x)) = \varphi(x)$, on obtient) φ est un point fixe de l'application $f : \varphi \mapsto \left(x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} \psi(t, \varphi(t))\mathrm{d}t \right)$.
- Sous l'hypothèse φ de classe C^1, on peut trouver $\mathcal{V}_{x_0}$ voisinage de x_0, et un $E = \{g \in C(\mathcal{V}_{x_0}, \mathbb{R}), g(x_0) = y_0\}$.
  Si $\mathcal{V}_{x_0}$ est **compact**, (E, d) est complet.
- Si on prend V_{x_0} assez petit, on montre que f est contractante. C'est-à-dire, on veut montrer que $\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{V}_{x_0}^2$, $\|f(\varphi(x_1)) - f(\varphi(x_2))\|_\infty \leq k|x_1 - x_2|$.

$$\begin{aligned}|f(\varphi(x_1))-f(\varphi(x_2))| &= |\int_{x_1}^{x_2}\psi(t,\varphi(t))\mathrm{d}t| \\ &\leq |x_1-x_2|\sup_{t\in\mathcal{V}_{x_0}}|\psi(t,\varphi(t))|\end{aligned}$$

Si $\mathcal{V}_{x_0}$ assez petite, $|x_1-x_2|$ assez petit et $|\psi(t,\varphi(t)| \leq M$ est bornée.
Comme $y(x_0)=y_0$, $\psi(x_0,y_0)=0$ donc au voisinage de x_0, $\psi(t,\varphi(t)) \leq \varepsilon$.

- Donc, il existe un unique point fixe φ_0 et $\forall x \in \mathcal{V}_{x_0}$, $\varphi_0(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}\psi(t,\varphi_0(t))\mathrm{d}t$. D'après TFA, φ_0 est de classe C^1 et vérifie les conditions sur $\mathcal{V}_{x_0}$, on a trouvé une solution avec $\varphi_0 \in C^1$.

😊

Definition 2.2.1: Séries absolument convergentes

Soit (E,N) espace vectoriel normé, et $\sum x_n$ une séries à termes dans E.
$\sum x_n$ est **absolument convergente** si :

La séries à termes réels positifs $\sum N(x_n)$ est convergente.

Theorem 2.2.2 Séries et espace de Banach
Soit (E,N) espace vectoriel normé.

(E,N) est un **espace de Banach** si et seulement si toute séries **absolument convergente** d'éléments de E est convergente dans E.

2.2.2 Prolongement des applications uniformémemnt continues

Proposition 2.2.3 Théorème des prolongement C^1
Soit $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ de classe C^1. Si $f'(t)\underset{t\to b^-}{\longrightarrow} l$ alors :

- f admet une limite α en b^-
- La fonction $\widetilde{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$ est de classe C^1 :

$$\begin{aligned}\widetilde{f}:[a,b]&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto\begin{cases}f(t), & t\in[a,b[\\ \alpha, & t=b\end{cases}\end{aligned}$$

Remarque : Pour prolonger f, on n'a pas besoin que f' ait une limite.

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t, \quad x\in[a,b[$$

Comme $f'(t)\underset{t\to b^-}{\longrightarrow} l$, $\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t$

$$f(x)\underset{x\to b^-}{\longrightarrow} f(a)+\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t=\alpha$$

Ici, f' bornée sur $[a,b[$, f est lipschitzienne (TAF), donc f est **uniformément continue**.

Theorem 2.2.3 Prolongement des applications uniformémemnts continues

Soit (E,d) et (E',d') deux espaces métriques, tels que E' est *complet*, soit $A \subset E$, pour une fonction f uniformément continue, il existe une unique fonction définie et *continue* sur $\bar{A}$ telle que

$$\forall a \in A, \widetilde{f} = f$$

.

On l'appelle **prolongement** de f à $\overline{A}$.

De plus $\widetilde{f}$ est *uniformément continue* sur $\overline{A}$.

$$f : A \to E' \text{ uniformément continue } \implies \widetilde{f} : \overline{A} \to E' \text{ uniformément continue}$$

Remarque :

- Une application continue envoie une suite convergente sur une suite convergente (caractérisation séquentielle de la continuité)
- Une application *uniformémemnt continue* envoie une suite de Cauchy sur une suite de Cauchy.

Example 2.2.3 (Prolongements utiles)

- Fonction réelle : Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ uniformément continue, alors f admet une limite en a^+.
- L'intégrale sur les fonctions *continues par morceaux* sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est *uniformément continue* comme elle est linéaire et lipschitizienne en 0 :

$$\Psi : \begin{cases} \mathscr{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{K}), \|.\|_{\infty,[a,b]} \to \mathbb{K} \\ f \mapsto \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

Elle peut se prolonger à l'adhérence de $\mathscr{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{K})$ pour la norme $\|.\|_{\infty,[a,b]}$ dans $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$.

Proposition 2.2.4 Segments emboîtés (déjà vu)

Soit $I_n = [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$, si $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$, alors

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$$

de plus si $b_n - a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe un $\alpha \in \mathbb{R}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\alpha\}$

Theorem 2.2.4 Fermé emboîtés (complète)

Soit (E,d) un espace complet, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fermés non vides de E tels que

$$\mathrm{diam}(F_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+1} \subset F_n$$

Alors

$$\exists! \alpha \in E, \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{\alpha\}$$

Proof: Rappel : $\mathrm{diam}(F) = \sup_{(x,y)\in F^2} d(x,y) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ si $F \neq \emptyset$

- Existence : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F_n$.

Cette suite est de Cauchy car pour tout p, q, $d(x_p, x_q) \leq \text{diam}(F_q) \underset{q \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Cette suite converge donc vers un élément $\alpha \in E$. De plus, pour $p \in \mathbb{N}$, comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}, n \geq p} \in F_p^{\mathbb{N}}$ et que F_p est fermé dans E, $\alpha \in F_p$

- Unicité : Évidente d'après la propriété du diamètre.

☺

Theorem 2.2.5 Baire

Si (E, d), alors : $\forall (O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ouverts denses de E,

$$\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n} = E$$

Proof: On va montrer que, pour n'importe quelle $x \in E$, et une boule ouverte de x, il y a toujours une intersection avec $\bigcap O_n$.

Soit $x \in E$, soit $\varepsilon > 0$, nous allons montrer que

$$BO(x, \varepsilon) \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \right) \neq \emptyset$$

Récurrence :

- O_0 est dense, donc il existe $x_0 \in BO(x, \varepsilon) \cap O_0$ (ouvert de E)

  Il existe alors une boule de rayon $r_0 > 0$ telle que $BF(x_0, r_0) \subset BO(x, \varepsilon) \cap O_0$

- On construit de proche en proche $(x_n, r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (E \times \mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; BF(x_n, r_n) \subset BO(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n, \text{ et } r_n \leq \frac{r_{n-1}}{2}$$

D'après le théorème précédante, le diamètre $\leq 2r_n \underset{r \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe un point $\alpha \in E$ tel que :

$$\alpha \in BO(x, \varepsilon) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n \right)$$

☺

C'est un théorème très puissant conduisant à des résultats surprenants.

Proposition 2.2.5 Conséquence du théorème de Baire

Un espace complet ne peut être réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides.

Proof: En fait, O ouvert dense $\iff$ O^c fermé d'intérieur vide :

$$\overset{\circ}{\overline{O^c}} = \bar{O}^c = E^c = \emptyset; \quad \overline{O}^c = \overset{\circ}{\overline{O^c}} = \dot{\emptyset} = \emptyset$$

☺

Example 2.2.4 (Utilisation du théorème)

Fonction polynomiales : $(\text{Vect}(\{x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}\}, N)$ n'est jamais complet, quelle que soit N.

Proof: Soit $E_n = \mathrm{Vect}(\{x \mapsto x^k,\ k \in [\![0,n]\!]\})$ fonctions polynomiales de degré $\leq n$. $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

- E_n fermé dans E (de dimension finie)
- $\dot{E}_n = \emptyset$ car si $x \in \dot{E}_n$, il existe $\varepsilon > 0$, $BO(x,\varepsilon) \subset E_n$, alors $\mathrm{Vect}(BO(x,\varepsilon) \subset E_n$, mais $\mathrm{Vect}(BO(x,\varepsilon))$ est toujours E. (Voir proposition suivant) Contradiction.

😄

Proposition 2.2.6

Dans un espace vectoriel normé, toute boule ouverte non vide est une partie génératrice.

Proof: Soit (E,N), $B = BO(x_0,r)$, $E_1 = \mathrm{Vect}(B)$. On a

- $BO(0_E,r) \subset E_1$.
  Si $x \in BO(0_E,r)$, $x + x_0 \in BO(x_0,r) \subset E_1$, de plus $x_0 \in E_1$ donc $x \in E_1$
- $E_1 = E$, soit $x \in E\backslash\{0_E\}$, donc

$$\frac{r}{2N(x)}.x \in BO(0_E,r) \subset E_1 \implies x \in E_1$$

😄

Definition 2.2.2: Espace de Baire

La définition $\forall (O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ouverts denses, $\overline{\bigcap O_n} = E$ est une définition ne faisant pas intervenir la distance donc on peut s'utiliser quand on n'a pas de distance.
On la note **espace de Baire**.

Chapter 3

Applications aux espaces pré-hilbertiens

3.1 Espace préhilbertien

Definition 3.1.1: Espace préhilbertien; Espace euclidien; Espace hermitien

Les **espaces vectoriels préhilbertiens** sont des espaces vectoriels normés de corps $\mathbb{K}$ dont la norme définie à l'aide d'un produit scalaire.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on parle d'**espace préhilbertien réel**, le produit scalaire est *bilinéaire* et *symétrique*.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on parle d'**espace préhilbertien complexe**, le produit scalaire est *sesqui-linéaire* (c'est-à-dire *linéaire à droite, semi-linéaire à gauche*) et *hermitien*

De plus,

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ de dimension *finie*, on parle d'**espace euclidien**
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ de dimension *finie*, on parle d'**espace hermitien**

3.2 Système totale

3.2.1 Définition

En dimension infinie, on a très rarement des bases : Les bases sont essentiellement en dimension finie $\mathbb{K}^n$ ou infinie dénombrable $\text{Vect}(\{x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}\})$.

Definition 3.2.1: Système total d'un espace préhilbertien

Soit E un espace préhilbertien de dimension infinie, I un ensemble *dénombrable infini*, une famille $(x_n)_{n\in I}$ est dite **système total** de E, si elle vérifie :

1. $(x_n)_{n\in I}$ est orthonormée
$$\forall (n,m) \in I^2,\ \langle x_n | x_m \rangle = \delta_{n,m}$$
2. Le sous-espace vectoriel engendré par les $(x_n)_{n\in I}$ est dense dans E, pour la norme associée au produit scalaire :
$$\overline{\text{Vect}(\{x_n, n \in I\})} = E$$

3.2.2 Formule de Parseval

Theorem 3.2.1 Inégalité de Bessel

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée *dénombrable infinie* d'un espace préhilbertien de dimension infinie, alors

$$\forall x \in E, \sum |\langle x_n|x\rangle|^2 \text{ converge et } \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x_n|x\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Proof: Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, Supposons $I = \mathbb{N}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \text{Vect}(\{x_0, \ldots, x_n\})$ de dimension finie $n+1$.

Soit $x \in E$,

$$p_{F_n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \langle x_k|x\rangle . x_k, \ \|p_{F_n}(x)\|^2 = \sum_{k=0}^{n} |\langle x_k|x\rangle^2$$

D'après le théorème de Pythagore, comme $p_{F_n}(x) \perp x - p_{F_n}(x)$, donc

$$\|x\|^2 = \|p_{F_n}(x)\|^2 + \|x - p_{F_n}(x)\|^2 \implies \sum_{k=0}^{n} |\langle x_k|x\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Sachant que $\sum |\langle x_k, x\rangle|^2$ à termes positifs, de somme partielle majorée, donc elle converge et aussi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x_k|x\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

😊

De plus,

Theorem 3.2.2 Formule de Parseval

Si les $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment un système total d'un espace préhilbertien de dimension infinie, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x_n|x\rangle|^2 = \|x\|^2$$

Proof: Soit $x \in E$, $\varepsilon > 0$, d'après la définition de la densité, il existe $y \in \text{Vect}(\{x_n, n \in \mathbb{N}\})$ suffit $\|x - y\| \leq \varepsilon$.

y est donc une combinaison linéaire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \text{Vect}(\{x_0, \ldots, x_n\})$ de dimension finie $n+1$.

Rappel que *Toute combinaison linéaire est une somme finie*, donc il existe $N \in \mathbb{N}$, $y \in F_N$. Si $n \geq N$, $F_N \subset F_n$, donc $y \in F_n$.

$$\varepsilon^2 \geq \|x - y\|^2 \geq \|x - p_{F_n}(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_{F_n}(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\langle x_k|x\rangle|^2$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\langle x_k|x\rangle|^2 \leq \varepsilon^2 \implies \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x_k|x\rangle|^2 = \|x\|^2$$

😊

Example 3.2.1 ($I = \mathbb{Z}$)

Lorsque $I = \mathbb{Z}$, nous noterons

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\langle x_n | x \rangle|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x_n | x \rangle|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x_{-n} | x \rangle|^2$$

Example 3.2.2 (Séries de Fourier)

Soit E l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique, alors

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t$$

munit E d'une structure d'espace préhilbertien complexe.

1. $(e_n : x \mapsto e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ est un système totale de E
2. Si l'on pose

$$c_n : f \mapsto \langle e_n | f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-int) f(t) \, \mathrm{d}t$$

Alors la **formule de Parseval** donne :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$$