2023-3-13

Bonjour

Question (Élodie) : Si E muni d'un produit scalaire

si F de dimension finie (sous-espace vectoriel de E)

alors $E = F \oplus F^{\perp}$.

(Comme F est de dimension finie, on peut trouver $(e_1 - e_p)$ base orthonormée de F

Soit $p_F : E \longrightarrow E$

$x \longmapsto \sum_{k=1}^{p} \langle e_k, x \rangle \cdot e_k$

p_F projecteur

$(p_F \circ p_F = p_F)$

donc $E = \mathrm{Ker}(p_F) \oplus \mathrm{Im}(p_F)$.

Il reste à démontrer que $\mathrm{Im}(p_F) = \mathrm{Ker}(p_F)^{\perp}$.

~~Soit~~ $\cancel{y \in \mathrm{Im}(p_F),\ x \in \mathrm{Ker}(p_F)}$.

Soit $\cancel{x \in E}$, ~~il existe~~ $\cancel{w \in \mathrm{Ker}(p_F)}$ ~~et~~ $\cancel{y \in E}$,

$x = \cancel{w + p_F(y)}$. ~~donc~~ $\cancel{p_F(x) = p_F(y)}$

$\cancel{w = x - p_F(x)}$

($x = p(x) + x - p(x)$ toujours vrai quand p projecteur)

__Objectif__ : $\langle x - p_F(x), p_F(y) \rangle$ $\forall (x,y) \in E$.

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^{p} \langle e_k, x \rangle \cdot e_k, \sum_{j=1}^{p} \langle e_j, y \rangle \cdot e_j \right\rangle$$ (merci Victor)

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \langle e_j, y\rangle \langle e_j, x\rangle}_{} - \underbrace{\sum_{j,k} \langle e_k, x\rangle \langle e_j, y\rangle \underbrace{\langle e_k, e_j\rangle}_{\delta_{k,j}}}_{} = 0$$

$$= \sum_{j} \langle e_j, x\rangle \langle e_j, y\rangle$$

<u>Question</u> (Victor) : Unicité de v / $u = v \circ v$ ($u \in \mathcal{S}^+(E)$, $v \in \mathcal{S}^+(E)$).

<u>Théorème spectral</u> : il existe $(e_1 - e_n)$ Base <u>orthonormée</u> de E

il existe $(\lambda_1 - \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$,

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $u(e_k) = \lambda_k . e_k$.

Les λ_k ne sont pas nécessairement distincts

Python : set([$\lambda_1 - \lambda_n$]) $= \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ (si $i \neq j$, $\alpha_i \neq \alpha_j$)

Pour $j \in [\![1, p]\!]$, $\underline{\{x \in E,\ u(x) = \alpha_j . x\}} = \mathrm{Ker}\,(u - \alpha_j . id_E) = E_j$

$u|_{E_j}^{E_j} = \alpha_j . id_{E_j}$ (homothétie).

Analyse : si v existe

Mais $u \circ v = v \circ u$ car $v = u^2$ ($u \circ v = u \circ u^2 = u^3 = u^2 \circ u = v \circ u$).

et $v(E_j) \subset E_j$

(soit $x \in E_j$, alors $u(x) = \alpha_j . x$

et $\underset{u \circ v(x) = u(v(x))}{v \circ u(x) = \alpha_j . v(x)}$ donc $\underline{\underline{v(x) \in E_j}}$))

$v|_{E_j}^{E_j} \in \mathcal{L}(E_j)$ il existe une base $(b_1 - b_{p_j})$ de E_j ($p_j = \dim E_j$)

et $(\mu_1 - \mu_{p_j}) \in \mathbb{R}^{p_j}$

avec $v|_{E_j}^{E_j}(b_k) = \mu_k . b_k \quad \forall k \in [\![1, p_j]\!]$. $\quad (\underline{\mu_k \geq 0})$

Mais $v \circ v(b_k) = \mu_k^2 . b_k$ or $b_k \in E_j$

$$\begin{array}{l} v\circ v(b_k) \\ \quad \| \\ u(b_k) = \alpha_j . b_k . \end{array}$$

donc $\mu_k^2 = \alpha_j$

donc $\mu_k = \sqrt{\alpha_j}$

donc $\boxed{v|_{E_j}^{E_j} = \sqrt{\alpha_j} . id_{E_j}}$

$\left(x = \sum_{k=1}^{p_j} \langle b_k, x \rangle . b_k \in E_j \right.$

$v|_{E_j}^{E_j}(x) = \sqrt{\alpha_j} . \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{p_j} \langle b_k, x \rangle . b_k}_{x} \right)$

de plus $E = \bigoplus_{j=1}^{p} E_j$ (car $(e_1 - e_n)$ base de E)

donc $\underline{v \text{ determiné de manière unique}}$

Or g_1 se diagonalise dans une base orthonormée $(b_1, \dots, b_p)$ de vecteurs propres de E_1, et il existe des réels positifs $(\mu_1, \dots, \mu_p)$ tels que

$$\forall k \in [\![1, p]\!]\,,\ g(b_k) = \mu_k . b_k$$

N'oublions cependant pas que $f = g \circ g$, donc

$$\forall x \in E_1,\ f(x) = \lambda_k . x = \lambda_k . \left(\sum_{j=1}^{p} \langle b_j , x \rangle . b_j \right)$$

et

$$g(g(x)) = \sum_{j=1}^{p} \mu_j^2 \langle b_j , x \rangle . b_j$$

Donc

$$\boxed{\forall j \in [\![1, p]\!]\,,\ \mu_j^2 = \lambda_k}$$

Or, les μ_j sont $\geqslant 0$, il n'y a qu'une possibilité $\mu_j = \sqrt{\lambda_k}$, qui est indépendant de j. Finalement

$$g_1 = \sqrt{\lambda_k} . \operatorname{id}_{E_1} \quad \text{et, donc } g(e_k) = \sqrt{\lambda_k} . e_k$$

Notation 2.1

Nous noterons

1. $\mathrm{S}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des *matrices symétriques* (vérifiant $M = {}^tM$), si nous sommes en *base orthonormée*, elles représentent les endomorphismes auto-adjoints.

2. Nous noterons donc aussi $\mathrm{S}_p^+(\mathbb{R})$ pour les matrices symétriques M vérifiant de plus

$$\forall X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX \centerdot M \centerdot X \geqslant 0$$

ces matrices sont dites *symétriques positives*, elles représentent *en base orthonormée* les endomorphismes auto-adjoints positifs.

3. Et de même $\mathrm{S}_p^{++}(\mathbb{R})$...

Remarque 2.3

On peut traduire les résultats sur les matrices symétriques en termes matriciels. Par exemple

1. Le théorème spectral

$$\forall M \in \mathrm{S}_p(\mathbb{R}),\ \exists P \in \mathrm{O}_p(\mathbb{R}),\ \underbrace{P^{-1}}_{={}^tP} \centerdot M \centerdot P \in \mathrm{D}_p(\mathbb{R})$$

2. Ou encore

$$\forall M \in \mathrm{S}_p^+(\mathbb{R}),\ \exists! N \in \mathrm{S}_p^+(\mathbb{R}), M = N \centerdot N$$

Exercice(s) 2.2

2.2.1 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 2$, $a \in E$, $\|a\| = 1$ et $k \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On considère l'endomorphisme f de E défini par

$$x \mapsto x + k\,\langle a, x\rangle.a$$

Que devient tout cela en termes de matrices ?

* $S_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tA = A \}$ (matrices symétriques).

* Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $A = \mathrm{Mat}(u, \underbrace{(e_1 - e_n)}_{\text{BON}})$

BON : ① Rd Bonormée

$$\boxed{u \in \mathcal{S}(E) \Longleftrightarrow A \in S_n(\mathbb{R})}$$

(car $\underbrace{\langle u(x), y \rangle}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{{}^t(A \cdot X) \cdot Y}_{\in M_1(\mathbb{R})}$ où $X = \mathrm{Mat}(x, (e_1 - e_n))$
$Y = \mathrm{Mat}(y, (e_1 - e_n))$

où $[a] \underset{=}{\overset{\text{Not}}{}} a$)

* $[u \in \mathcal{S}^+(E)] \Longleftrightarrow [\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})\quad {}^tX \cdot A \cdot X \geq 0]$
(tous les $\lambda_k \geq 0$).

$$S_n^+(\mathbb{R}) \overset{\text{def}}{=} \{A \in S_n(\mathbb{R}),\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ \ {}^tX \cdot A \cdot X \geq 0\}$$

$$S_n^{++}(\mathbb{R}) \overset{\text{def}}{=} \{A \in S_n^+(\mathbb{R}),\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ [X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}] \Rightarrow [{}^tX \cdot A \cdot X > 0]\}$$

$$[u \in \mathcal{S}^+(E)] \Leftrightarrow [\mathcal{M}at(u, \underbrace{(e_1 - e_n)}_{\text{orthonormée}}) \in S_n^+(\mathbb{R})]$$

$$[u \in \mathcal{S}^{++}(E)] \Leftrightarrow [\mathcal{M}at(u, (e_1 - e_n)) \in S_n^{++}(\mathbb{R})]$$

$$\boxed{{}^tP \cdot P = I_n \quad (P^{-1} = {}^tP)}$$

<u>théorème spectral</u> : $\forall A \in S_n(\mathbb{R}),\ \exists P \in O_n(\mathbb{R}),\ \exists (\lambda_1 - \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,$

$$P^{-1} A \cdot P = {}^tP \cdot A \cdot P = \mathrm{Diag}(\lambda_1 - \lambda_n) \overset{\text{Nor}}{=} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P = P_{en}^{(e_1 - e_n)} \leftarrow \text{orthonormée}$$

Q : Derake

$$(\forall (i,j) \in [\![1-n]\!]^2 \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{C}^n = (c_1 - c_n)$ orthonormé

$$P = \begin{array}{c} e_1 \quad\text{———}\quad e_n \\ \left[\langle c_i, e_j \rangle \right] \end{array} \begin{array}{c} c_1 \\ | \\ c_n \end{array}$$

$${}^tP \cdot P = [\langle c_j, e_i \rangle] \cdot [\langle c_i, e_j \rangle] = \Big[\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \langle c_k, e_i \rangle \langle c_k, e_j \rangle}_{\langle e_i, e_j \rangle} \Big] = I_n .$$

$$\left([a_{ij}] \cdot [b_{ij}] = \left[\sum_k a_{ik} b_{kj} \right] \right)$$

$$\left(\text{Car} \quad \begin{array}{l} e_i = \sum \langle c_k, e_i \rangle \cdot c_k \\ e_j = \sum \langle c_k, e_j \rangle \cdot c_k \end{array} \right)$$

Racine carrée : Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique $B \in S_n^+(\mathbb{R})$

$$A = B \cdot B = B^2$$

Quel est l'intérêt de trouver $v \in \mathcal{S}^+(E)$, $u = v \circ v$ $(u \in \mathcal{S}^+(E))$?

$(x,y) \in E^2$

$$\langle u(x), y \rangle = \langle v \circ v(x), y \rangle = \underbrace{\langle v(x), v(y) \rangle}_{\text{expression symétrique.}}$$

(a) Montrer que f est auto-adjoint.

(b) Montrer que f est un automorphisme.

(c) Préciser les vecteurs propres et les valeurs propres de f.

2.2.2 Soit E un espace vectoriel euclidien. Trouver les $f \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f^\star \circ f = f$.

2.2.3 Soit E un espace vectoriel euclidien et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base quelconque de E. Montrer que l'endomorphisme défini par

$$x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle . e_k \text{ est auto-adjoint}$$

2.2.4 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.

(a) Soit $(u, v) \in \mathscr{S}(E)^2$, montrer que

$$\Big[u \circ v = v \circ u\Big] \iff \Big[\exists (e_1, \ldots, e_n) \text{ base orthonormée de vecteurs propres de } u \text{ et } v\Big]$$

(b) Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathscr{S}(E)^I$, montrer que

$$\Big[\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \implies u_i \circ u_j = u_j \circ u_i\Big] \iff \Big[\exists (e_1, \ldots, e_n) \text{ base orthonormée de vecteurs propres communs à tous les } u_i\Big]$$

2.2.5 Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$, montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \Big[i \neq j\Big] \implies \Big[\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = 0\Big]$$

2.2.6 Soit u un endomorphisme auto-adjoint, défini positif d'un espace vectoriel euclidien E.

(a) Montrer que u est un automorphisme.

(b) Soit $y \in E$, montrer que

$$\sup_{x \in E} \left(\langle x, y \rangle - \frac{1}{2} \langle u(x), x \rangle \right) = \frac{1}{2} \langle u^{-1}(y), y \rangle$$

2.2.7 Dans $\mathscr{S}(E)$, on dit que $f \leqslant g$ si $g - f \in \mathscr{S}^+(E)$. On dit qu'une suite $(f_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathscr{S}(E)^{\mathbb{N}}$ est *croissante* si elle vérifie

$$\forall p \in \mathbb{N},\ f_p \leqslant f_{p+1}$$

on dit qu'elle est majorée si

$$\exists \phi \in \mathscr{S}(E),\ \forall p \in \mathbb{N},\ f_p \leqslant \phi$$

Soit $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite croissante, majorée de $\mathscr{S}(E)$, montrer qu'elle est convergente, c'est-à-dire

$$\exists f \in \mathscr{S}(E),\ \forall x \in E,\ \|f(x) - f_p(x)\| \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$$

2.2.8 Soit E un espace vectoriel euclidien et p_1 et p_2 deux projecteurs orthogonaux de E.

(a) Montrer que $p_1 + p_2$ est auto-adjoint.

(b) À quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $p_1 \circ p_2 \in \mathscr{S}(E)$?

(c) Montrer que l'on peut décomposer E sous la forme

$$E = \overset{p}{\underset{k=1}{\overset{\perp}{\bigoplus}}} E_k,\ \text{ où } \forall k \in [\![1, p]\!]\,,\ \begin{cases} \dim(E_k) \in \{1, 2\} \\ p_1(E_k) \subset E_k \\ p_2(E_k) \subset E_k \end{cases}$$

(d) Montrer que l'on peut trouver une base $(e_1, \ldots, e_n)$ non nécessairement orthonormée, adaptée à la décomposition en somme directe précédente, telle que [a]

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R},\ p_1 \circ p_2(e_k) = \lambda_k . e_k$$

2.2.9 Soit E un espace vectoriel euclidien, et soit $f \in \mathscr{S}(E)$. On suppose que ses valeurs propres sont ordonnées sous la forme $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$, associés aux vecteurs propres $(e_1, \ldots, e_n)$ (donc, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f(e_k) = \lambda_k . e_k$).

Option IA

(a) Montrer que (Quotients de Rayleigh)

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \lambda_k = \max_{\substack{x \in \mathrm{Vect}(\{e_1, \ldots, e_k\}),\\ x \neq 0_E}} \frac{\langle x, f(x) \rangle}{\|x\|^2} = \min_{\substack{x \in (\mathrm{Vect}(\{e_1, \ldots, e_{k-1}\}))^{\perp},\\ x \neq 0_E}} \frac{\langle x, f(x) \rangle}{\|x\|^2}$$

Conseillé

(b) Soit, pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$M_k = \{F \text{ sous-espace vectoriel de } E,\ \dim(F) = k\}$$

Montrer que

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \lambda_k = \min_{F \in M_k} \max_{x \in F \setminus \{0_E\}} \frac{\langle x, f(x) \rangle}{\|x\|^2} = \max_{F \in M_{k-1}} \min_{x \in F \setminus \{0_E\}} \frac{\langle x, f(x) \rangle}{\|x\|^2}$$

a. Autrement dit, $p_1 \circ p_2$ est diagonalisable.

On vient de voir P qui vérifiée $P^{-1} = {}^tP$. $\left(P = P_{e^n}^{(e_1 - e_n)}\right)$

Imaginons que $P = \mathrm{Mat}(u, (c_1 - c_n))$ $u(c_k) = e_k$. $\forall k \in [\![1, n]\!]$.

$P^{-1} = {}^tP$ devient $\boxed{u^{-1} = u^*}$

Définition : Soit E un espace euclidien $u \in \mathcal{GL}(E)$ automorphisme de E

on dit que u est un automorphisme orthogonal s'il vérifie $u^{-1} = u^*$

on note $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{GL}(E),\ u^{-1} = u^*\}$

$$\boxed{\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E),\ u^* \circ u = \mathrm{id}_E\}}$$

$\mathcal{O}(E)$ s'appelle le groupe orthogonal de E

(c'est-à-dire : 1) $\forall (u,v) \in O(E)^2,\ u \circ v \in O(E)$
2) $\forall u \in O(E),\ u^{-1} \in O(E)$.)

(1) Soit $(u,v) \in O(E)$

$$(u \circ v)^* \circ u \circ v = v^* \circ \underbrace{u^* \circ u}_{id_E} \circ v = v^* \circ v = id_E$$

2) $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$ donc $(u^{-1})^* \circ u^{-1} = (u^*)^{-1} \circ u^{-1} = (u \circ u^*)^{-1} = id_E^{-1} = id_E$

<u>Remarque</u>: si $u^* \circ u = id_E$, $u^* = u^{-1}$ donc $u \circ u^* = id_E$

dim E finie

$\mathcal{L}(E)$)

⚠ Problème avec le mot « orthogonal ».

<u>projecteur orthogonal</u> : $p^* = p$ et $p \circ p = p$.

Ce n'est pas dans $O(E)$ (sauf $p = id_E$)

2.3 Automorphismes orthogonaux

Automorphisme = endomorphisme + bijectif

$\mathscr{GL}(E)$

Définition 2.2 – Automorphisme orthogonal d'un espace euclidien

Soit E un espace vectoriel euclidien, on appelle *automorphisme orthogonal* tout automorphisme $f \in \mathscr{GL}(E)$ qui vérifie

$$f^\star \circ f = f \circ f^\star = \mathrm{id}_E$$

On note $\mathscr{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux, on l'appelle *groupe orthogonal de E*.

Remarque 2.4

$\mathscr{O}(E)$ *n'est pas stable par* $+$ *et* ., mais, en revanche, il est stable par $(f, g) \mapsto f \circ g$ et par $f \mapsto f^{-1}$. Nous dirons plus tard que c'est un sous-groupe de $(\mathscr{GL}(E), \circ)$.

Exemple 2.4

1. ⚠ Les projecteurs orthogonaux *ne sont pas des automorphismes (sauf* id_E *!)*, et donc pas des automorphismes orthogonaux.
2. Quand on a un projecteur orthogonal p, on peut lui associer une *symétrie orthogonale* (symétrie par rapport à

Im(p)) sous la forme

$$s = 2.p - \mathrm{id}_E, \text{ en ce cas, } s \text{ est à la fois } \begin{cases} \text{— un automorphisme orthogonal,} \\ \text{— un endomorphisme auto-adjoint.} \end{cases}$$

Démonstration

On a

$$E = \mathrm{Ker}(p) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(p) \text{ qui traduit } \forall x \in E,\ x = (x - p(x)) + p(x)$$

Calculons $s^\star$. On a

$$s^\star = (2.p - \mathrm{id}_E)^\star = 2.p^\star - \mathrm{id}_E^\star = 2.p - \mathrm{id}_E$$

Car, p est auto-adjoint (projecteur *orthogonal*). Donc $s^\star = s$, $s \in \mathscr{S}(E)$. Calculons maintenant [a]

$$s^\star \circ s = s \circ s^\star = s \circ s = \mathrm{id}_E, \text{ car } p^2 = p$$

Donc $s \in \mathscr{O}(E)$.

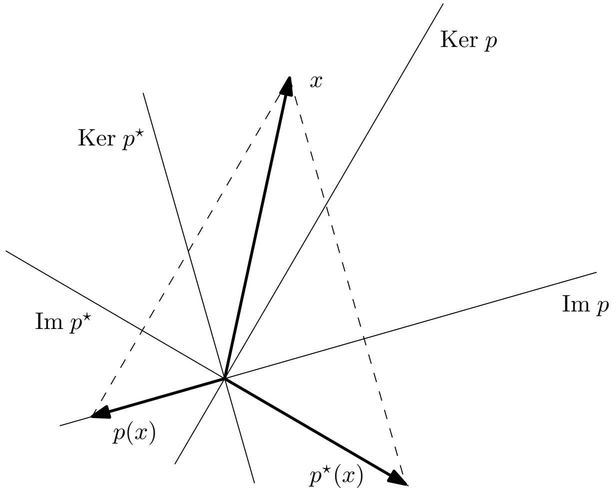
[a]. Toutes les symétries s orthogonales ou non, vérifient bien sûr $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

Remarque 2.5

Réciproquement, soit $f \in \mathscr{S}(E) \cap \mathscr{O}(E)$, alors f est une symétrie orthogonale. En effet, posons

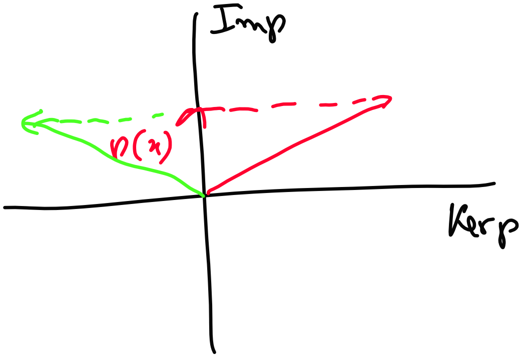
$$p = \frac{1}{2}.(f + \mathrm{id}_E), \text{ alors on a } p \circ p = p \text{ et } p^\star = p$$

Figure 2.1 – Adjoint d'un projecteur



Remarque : si p projecteur orthogonal ($p^* = p$) $\quad s^* = s$

alors $s = 2.p - id_E$ est la symétrie orthogonale associée



et ☺ s est un automorphisme orthogonal.

$$\left(s^* \circ s = s \circ s = id_E \right)$$

Définition 2.3 – Symétrie orthogonale

Soit E un espace vectoriel euclidien, on appelle *symétrie orthogonale* tout élément de $s \in \mathscr{S}(E) \cap \mathscr{O}(E)$, son projecteur associé ($s = 2.p - \mathrm{id}_E$) est un projecteur orthogonal.

Lorsque le projecteur est une projection orthogonale sur un hyperplan, on dit que s est *une réflexion de* E.

Proposition 2.4 – Caractérisation des automorphismes orthogonaux

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes

1. $f \in \mathscr{O}(E)$.
2. $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$ *(conservation de la norme).* (isométrie)
3. $\forall (x, y) \in E, \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ *(conservation du produit scalaire).*
4. *Quelle que soit la base orthonormée de E $(e_1, \dots, e_n)$*

$$(f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ est encore une base orthonormée}$$

5. *Il existe une base orthonormée de E $(e_1, \dots, e_n)$ telle que*

$$(f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ soit encore une base orthonormée}$$

$(1 \Rightarrow 2)$ Soit $u \in \mathcal{O}(E)$, $x \in E$

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle u^* \circ u(x), x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

$(2 \Rightarrow 3)$. On a $u \in \mathcal{L}(E)$, $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$

Soit $(x,y) \in E^2$ Rexence : dédoublement des termes

$$\|u(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2 -$$

donc $\cancel{\|u(x)\|^2} + 2\langle u(x), u(y) \rangle + \cancel{\|u(y)\|^2} = \cancel{\|x\|^2} + 2\langle x, y \rangle + \cancel{\|y\|^2}$

donc $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

$(3 \Rightarrow 4)$ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\forall (x,y) \in E^2 \; \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

et $(e_1 - e_n)$ une base orthonormée de E.

alors pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

donc $\langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$

donc $(u(e_1) — u(e_n))$ base orthonormée

donc libre

(famille orthonormée de cardinal n

dans un espace de dimension n)

$(4 \Rightarrow 5)$ rien à dire

$(5 \Rightarrow 1)$ Soit $(e_1 - e_n)$ la base orthonormée telle que $u \in \mathcal{L}(E)$

$(u(e_1) — u(e_n))$ une base orthonormée

Soit $x \in E$ $\quad u^* \circ u(x) - x = 0_E$??

Soit $y \in E$ $\langle u^* \circ u(x) - x, y \rangle = \langle u^* \circ u(x), y \rangle - \langle x, y \rangle$.

$= \langle u(x), u(y) \rangle - \langle x, y \rangle = 0$

Car $x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle . e_k$, $y = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, y \rangle . e_k$ $\langle x, y \rangle = \sum_{k} \langle e_k, x \rangle \langle e_k, y \rangle$.

u linéaire

$u(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle . u(e_k)$ $u(y) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, y \rangle . u(e_k)$

$\langle u(x), u(y) \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle \langle e_k, y \rangle$

$\blacksquare$

Démonstration

— (1 $\Rightarrow$ 2) Soit $x \in E$,
$$\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle = \langle f^\star \circ f(x), x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$
— (2 $\Rightarrow$ 3) *Dédoublement des termes dans le cas d'une égalité.* Soit $(x, y) \in E^2$,
$$\underbrace{\|f(x+y)\|^2}_{=\|x+y\|^2} = \underbrace{\|f(x)\|^2}_{=\|x\|^2} + 2\langle f(x), f(y) \rangle + \underbrace{\|f(y)\|^2}_{=\|y\|^2}$$
d'où, en développant le terme de gauche et en simplifiant
$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$
— (3 $\Rightarrow$ 4) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, alors
$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$$
— (4 $\Rightarrow$ 5) Évident.

— (5 $\Rightarrow$ 1) On a
$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \delta_{i,j} = \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle f^\star \circ f(e_i), e_j \rangle$$
donc $f^\star \circ f(e_i) = e_i$. Ce qui montre (par linéarité) que $f^\star \circ f = \mathrm{id}_E$ (et donc, $f \circ f^\star = \mathrm{id}_E$ aussi).

Propriété 2.6 – Décomposition polaire

Soit E un espace vectoriel euclidien, alors
$$\forall f \in \mathscr{GL}(E),\ \exists!(\rho, \theta) \in \mathscr{S}^{++}(E) \times \mathscr{O}(E),\ f = \rho \circ \theta$$

Y1S2 Math II : $\mathbb{C}$

× $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ \exists (\rho,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\quad x+iy = \rho e^{i\theta}$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = ??$$

* $z \longmapsto \rho e^{i\theta} z$

$z \longmapsto e^{i\theta} z$ (rotation d'angle θ) ← ressemble à un automorphisme orthogonal $|e^{i\theta} z| = |z|$.

$z \longmapsto \rho z$ (homothétie)

Proposition : Soit $u \in GL(E)$, il existe un unique $(\rho, \theta) \in S^{++}(E) \times O(E)$

$$u = \rho \circ \theta$$

Démonstration :

Analyse : si (ρ, θ) existent alors $u = \rho \circ \theta$

$$u^* = \theta^* \circ \rho^* = \theta^{-1} \circ \rho$$

donc $u \circ u^* = \rho^2$

Or $u \circ u^* \in S^+(E)$. $\begin{cases} \langle u \circ u^*(x), x \rangle = \|u^*(x)\|^2 \geqslant 0 \\ \text{et } (u \circ u^*)^* = u^{**} \circ u^* = u \circ u^* . \end{cases}$

$= 0$ si $x \in \ker u^*$

Mais $u \in GL(E)$, donc $u \circ u^* \in GL(E)$, donc $u \circ u^* \in S^{++}(E)$.

donc ρ existe et est unique. (racine carrée de $u \circ u^*$)

Unicité

$$\theta = \rho^{-1} \circ u \qquad \theta^* = u^* \circ (\rho^{-1})^* = u^* \circ (\rho^*)^{-1} = u^* \circ \rho^{-1}$$

<u>Synthèse</u> : ρ racine carrée de $u \circ u^*$ et $\theta = \rho^{-1} \circ u$.

alors $\theta \circ \theta^* = \rho^{-1} \circ \underbrace{u \circ u^*}_{\rho^2} \circ \rho^{-1} = id_E$ donc $\theta \in \mathcal{O}(E)$

Existence

et $\rho \in \mathcal{S}^{++}(E)$. et $\boxed{u = \rho \circ \theta}$

$\blacksquare$