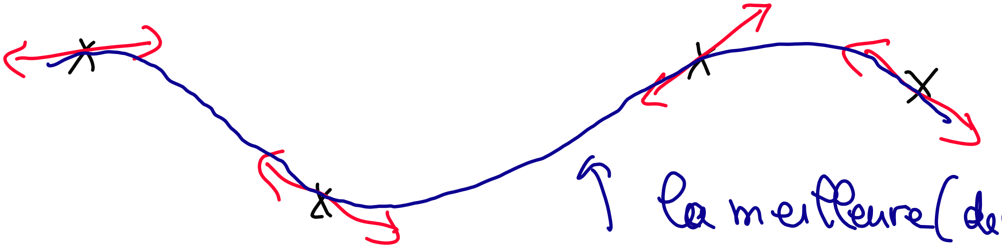
Bonjour

Interpolation de Jeudi



La meilleure (degré le plus petit) fonction polynomiale

Aujourd'hui : Mise en équation d'un sous-espace vectoriel

① dans $\mathbb{R}^2$: $2x - 3y = 0$ est une équation de droite.

(dirigée par le vecteur $(3,2)$).

② dans $\mathbb{R}^3$: $2x - 3y + z = 0$ est une équation de plan.

(dirigé par les vecteurs $(3,2,0)$ et $(0,1,3)$)

③ dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ est une équation de droite

(dirigée par ...)

② $(x,y,z) \xmapsto{\varphi} 2x-3y+z$
$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

<u>φ forme linéaire</u>

le plan d'équation $2x-3y+z=0$, c'est $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

<u>Mettre en équation</u> = décrire le sous-espace comme intersection de noyaux de forme linéaire

③ $\varphi_1 : (x,y,z) \longmapsto 2x-3y+z$
$\varphi_2 : (x,y,z) \longmapsto x+y-z$

deux formes linéaires

$$(D) \begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

signifie $\boxed{D = \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_2)}$

1.1.4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit E_1, E_2, ..., E_p des sous-espaces vectoriels de E, donner une CNS pour que

$$\forall\,(\varphi_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \in \prod_{k=1}^{p} E_k^\star,$$

$$\left[\forall(i,j)\in[\![1,p]\!]^2,\ \varphi_{i}{}_{|E_i\cap E_j} = \varphi_{j}{}_{|E_i\cap E_j}\right] \implies \left[\exists\varphi\in E^\star,\ \forall i\in[\![1,p]\!],\ \varphi_{|E_i} = \varphi_i\right]$$

1.2 Hyperplans

Très important

Définition 1.3 – Hyperplan d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle *hyperplan de E*, tout sous-espace vectoriel H tel que

$$\boxed{\exists\varphi\in E^\star\backslash\{0_{E^\star}\},\ H = \mathrm{Ker}(\varphi)}$$

$\varphi \neq 0_{E^\star}$

L'écriture

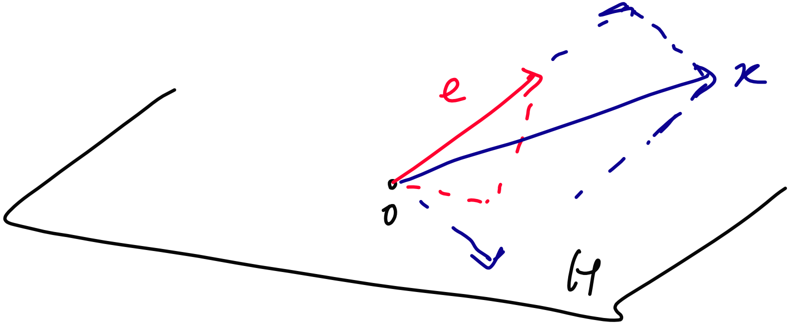
$$\boxed{(H)\qquad \varphi(x) = 0}$$

s'appelle *équation de l'hyperplan H*.

超平面是线性空间的子空间，它是对偶空间中线性泛函的核空间，我们可以写出超平面方程。

Propriété : Soit H un hyperplan de E. ($H = \ker(\varphi)$ où $\varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$)

alors $\boxed{\forall e \notin H, \quad H \oplus \mathbb{K}e = E}$



<u>Démonstration</u> : Soit $e \notin H$, donc $\varphi(e) \neq 0$

* $H \cap \mathbb{K}.e = \{0_E\}$. $\left(\mathbb{K}.e \overset{\text{Not}}{=} \mathrm{Vect}(\{e\}) = \{\lambda.e, \lambda \in \mathbb{K}\} \right)$

* <u>Analyse</u> : Soit $x \in E$, supposons qu'il existe $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$x = h + \lambda.e$$

alors $\varphi(x) = \varphi(h + \lambda.e) = \underbrace{\varphi(h)}_{=0} + \lambda\varphi(e)$

donc $\boxed{\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(e)}}$ car $\varphi(e) \neq 0$.

$$\boxed{h = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)}.e}$$

* <u>Synthèse</u> : Soit $x \in E$, $\alpha = \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)} \in \mathbb{K}$

$$h = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)} \cdot e.$$

Clairement $x = h + \alpha \cdot e$.

et $h \in H$, car $\varphi(h) = \varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)} \cdot e\right)$

(Eugène)

$$= \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)} \varphi(e) = 0.$$

$\blacksquare$

Donc H possède un supplémentaire de dimension 1

<u>exemple</u> : $\mathbb{K}e$ où $e \notin H$.

Remarque 1.3

Il n'y a pas unicité de l'équation, car, si φ convient, alors, quelque soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda.\varphi$ convient.

Si $\lambda \neq 0$
$\mathrm{Ker}(\lambda.\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi)$

Définition 1.4 – Codimension d'un sous-espace vectoriel = dimension d'un supplémentaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E, on dit que F *est de codimension finie*, si F possède un supplémentaire de dimension finie. La dimension commune de tous les supplémentaires de F est appelée *codimension de F* et notée (si $E = F \oplus G$)

$$\boxed{\operatorname{codim} F \overset{\text{Not}}{=} \dim G}$$ où $E = F \oplus G$.

称作子空间的余维数，这一定义简化了线性空间E 和子空间F是无限维时性质和定理的表示。

Rappel : Si G_1, G_2 sont deux supplémentaires de F, $F \oplus G_1 = F \oplus G_2$ $(= E)$
alors G_1 et G_2 sont isomorphes.

Remarque 1.4

Si E est de dimension finie, tous les sous-espaces vectoriels de E sont de codimension finie et si F est un sous-espace vectoriel de E, alors

$$\boxed{\operatorname{codim} F = \dim E - \dim F}$$

si $E = F \oplus G$ $(\dim E < +\infty)$
alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$

Cette notion n'est donc pas intéressante en dimension finie, elle nous sera surtout utile en dimension infinie.

Rappel : si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie alors

(Grassman) $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

(Mathilde)

si $F \cap G = \{0\}$, $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Remarque : $\phi : F \times G \longrightarrow F+G$, $(x, y) \longmapsto x+y$ ϕ est linéaire

On va utiliser le théorème de factorisation des applications linéaires

$u \in \mathcal{L}(E,E')$,

$$\begin{tikzcd}
E = \mathrm{Ker}(u) \oplus E_1 \arrow[rr, "u"] \arrow[d, "p_{E_1 // \mathrm{Ker}(u)}"', "|E_1"] & & E' \\
E_1 \arrow[rr, "\tilde{u}"] & & \mathrm{Im}(u) \arrow[u, hook, "i_{\mathrm{Im}\, u}"']
\end{tikzcd}$$

$\tilde{u}$ est un isomorphisme de E_1 sur $\mathrm{Im}(u)$.

<u>Remarque</u> : cela suppose qu'on connaît un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$.

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \{ (x,y) \in F \times G,\ x+y = 0_E \}$$
$$= \{ (x,-x),\ x \in F \cap G \} \text{ isomorphe à } F \cap G$$

$$\left(\begin{array}{ccc} F \cap G & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\phi) \\ x & \longmapsto & (x,-x) \end{array} \right)$$

$$\mathrm{Im}(\phi) = F + G.$$

Si E_1 est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(\phi)$ dans $F\times G$.

alors $F+G$ est isomorphe à E_1

* $\mathrm{Ker}(\phi)$ est isomorphe à $F\cap G$
* $\phi \in \mathcal{L}(F\times G, F+G)$
* $\mathrm{Ker}(\phi) \oplus E_1 = F\times G$

vision géométrique.

Dimension finie :

$$\dim(E_1) = \dim(F+G)$$

$$\| $$

$$\mathrm{Codim}(\mathrm{Ker}(\phi)) = \underbrace{\dim(F\times G)} - \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(\phi))}$$

$$= \dim F + \dim G \quad - \quad \dim(F\cap G)$$

Proposition : Soit E un espace vectoriel, H sous-espace vectoriel de E

alors
$$[\,H \text{ hyperplan}\,] \Longleftrightarrow [\,\operatorname{codim}(H) = 1\,]$$

Démonstration :

$(\Longrightarrow)$ la propriété précédente.

$(\Longleftarrow)$ comme $\operatorname{codim}(H) = 1$, H possède un supplémentaire

D de dimension 1 $\qquad E = H \oplus D$ et $\dim(D) = 1$

Soit $e \in D \setminus \{0_E\}$, $D = \mathbb{K}.e$.

Analyse : on cherche $\varphi \neq 0_{E^*}$, $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Supposons que φ existe. soit $x \in E$, on écrit

$x = h + \lambda.e$ où $h \in H$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

et $\varphi(x) = \lambda\, \varphi(e)$

Synthèse : soit $\varphi \in E^*$, $\begin{cases} \varphi(e) = 1 & (\text{n'importe quoi} \in \mathbb{K}^*) \\ \varphi_{|H} = 0_{H^*} \end{cases}$

Clairement $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

$\blacksquare$

Exemple 1.2 – Hyperplans

1. Dans $\mathbb{K}^3$, tout plan est un hyperplan, dans $\mathbb{K}^2$, ce sont les droites (ces sous-espaces vectoriels sont usuellement décrits par *une* équation).
2. Dans $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si $a \in \mathbb{R}$, le sous-espace vectoriel défini par

$$F_a = \{f \in E,\ f(a) = 0\}$$

est un hyperplan d'équation $f(a) = 0$. F_a est de plus de codimension 1, car

$$E = F_a \oplus \underbrace{\mathbb{K}.(x \mapsto 1)}_{\text{de dimension } 1}$$

en effet

$$\forall f \in E,\ f = \underbrace{\big(f - f(a)\big)}_{\in F_a} + \underbrace{f(a)}_{\in \mathbb{K}.(x \mapsto 1)}$$

et cette écriture est clairement unique.

Proposition 1.2 – Caractérisation des hyperplans

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, H un sous-espace vectoriel de E, alors

$$\boxed{\Big[H \textit{ hyperplan de } E\Big] \iff \Big[\operatorname{codim} H = 1\Big]}$$

Démonstration

— ($\Rightarrow$) Soit $\varphi(x) = 0$ une équation de H, comme φ est non nulle, on peut trouver un vecteur $a \in E$, tel que $\varphi(a) \neq 0$. Alors

$$\forall x \in E,\ x = \underbrace{\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}.a\right)}_{\in H} + \underbrace{\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}.a}_{\in \mathbb{K}.a}$$

donc

$$E = H \oplus \mathbb{K}.a,\ \text{car } a \notin H$$

— ($\Leftarrow$) Si $E = H \oplus \mathbb{K}.a$, $a \in E\backslash\{0_E\}$, alors, on peut prendre comme forme linéaire associée à H

$$\varphi \text{ telle que } \varphi_{|_H} = 0_{H^\star} \text{ et } \varphi(a) = 1$$

Remarque 1.5

Si E est de dimension finie, les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de dimension $\dim(E) - 1$.

当E的维数为n时，超平面是E的$n-1$维子空间，不同的线性泛函对应不同的超平面。

Exemple 1.3 – Hyperplans

1. Dans $\mathbb{R}^2$, une équation de la droite (hyperplan) engendrée par $(1, 2)$ est, par exemple

$$2\,x - y = 0$$

2. Dans $\mathbb{R}^3$, une équation du plan (hyperplan) engendré par $(1,1,0)$ et $(-1,0,2)$ est, par exemple
$$2\,x - 2\,y + z = 0$$

3. Dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, un supplémentaire de la droite engendrée par $x \mapsto x$, pourrait être donné par une équation du type
$$f(a) = 0 \text{ si } a \neq 0$$

Théorème 1.1 – Faisceaux d'hyperplans

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in E^{\star n}$, alors

$$\boxed{\forall \psi \in E^\star, \left[\psi \in \mathrm{Vect}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})\right] \iff \left[\mathrm{Ker}(\psi) \supset \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_k)\right]}$$

Démonstration

— $(\Rightarrow)$ Immédiat.

— $(\Leftarrow)$ Par récurrence sur n.

— (*Initialisation*) si $n = 1$ et $\mathrm{Ker}(\psi) \supset \mathrm{Ker}(\varphi)$, si φ est nulle, ψ l'est aussi. Si φ est non nulle, alors, il existe un

Démonstration :

($\Rightarrow$). Si $\psi \in \mathrm{Vect}(\{\varphi_1 - \varphi_n\})$, il existe $(\alpha_1 - \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\psi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k . \varphi_k$$

Soit $x \in \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$, alors $\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underbrace{\varphi_k(x)}_{0} = 0$

donc $x \in \mathrm{Ker}(\psi)$.

ce qui montre que $\mathrm{Ker}(\psi) \supset \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$

($\Leftarrow$) Par récurrence sur n

$(\mathcal{H}_n)$: $\left[\mathrm{Ker}(\psi) \supset \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_k)\right] \Longrightarrow \left[\psi \in \mathrm{Vect}(\{\varphi_1 - \varphi_n\})\right]$

* $(\mathcal{H}_1)$ vraie.

Soit (ψ, φ_1) $\ker(\psi) \supset \ker(\varphi_1)$, montrons que il existe $\mu \in \mathbb{K}$, $\psi = \mu \cdot \varphi_1$

remarque.

* Analyse : • si $\varphi_1 = 0_{E^*}$ $\ker(\varphi_1) = E = \ker(\psi)$

donc $\psi = 0_{E^*}$

n'importe quel μ convient

• si $\varphi_1 \neq 0_{E^*}$, $\ker(\varphi_1)$ est un hyperplan.

$\overset{\text{Nor}}{\underset{H.}{\parallel}}$

Si $e \notin H$, $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot e$

Si $x \in E$, il existe $h \in H$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $x = h + \lambda \cdot e$

$\varphi_1(x) = \lambda\, \varphi_1(e)$ où $\varphi_1(e) \neq 0$.

si $\psi = \mu . \varphi_1$ alors $\psi(x) = \mu\, \varphi(x) = \lambda \mu . \varphi_1(e)$.

$$= \underbrace{\psi(h)}_{=0 \text{ car } \mathrm{Ker}(\psi) \supset H} + \lambda\, \psi(e) = \lambda\, \psi(e).$$

$$\boxed{\mu = \frac{\psi(e)}{\varphi_1(e)}}$$

* <u>Synthèse</u> : . si $\varphi_1 = 0_{E^*}$, $\psi = 0_{E^*}$.

. si $\varphi_1 \neq 0_{E^*}$. $E = \mathrm{Ker}(\varphi_1) \oplus \mathbb{K} . e$.

$x = h + \lambda . e$. $\quad \psi(x) = \lambda\, \psi(e)$

$$\mu . \varphi_1(x) = \frac{\psi(e)}{\varphi_1(e)} \lambda\, \varphi_1(e) = \lambda\, \psi(e)$$

donc ψ et $\dfrac{\psi(e)}{\varphi_1(e)} \cdot \varphi_1$ coïncident sur $\left| \begin{array}{l} H \\ \mathbb{K}e \end{array} \right.$ donc sur E.

$$\boxed{\psi = \frac{\psi(e)}{\varphi_1(e)} \cdot \varphi_1}$$

---

* Soit p / $(\mathcal{H}_p)$ vraie, montrons que $(\mathcal{H}_{p+1})$ est vraie.

Soit $(\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_{p+1}) \in (E^*)^{p+2}$, $\quad \mathrm{Ker}(\psi) \supset \bigcap_{k=1}^{p+1} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$

$H \overset{\text{Not}}{=} \mathrm{Ker}(\varphi_{p+1})$.

$\mathrm{Ker}(\psi_{|H}) = \mathrm{Ker}(\psi) \cap H$, $\quad \mathrm{Ker}(\varphi_k|_H) = \mathrm{Ker}(\varphi_k) \cap H \quad \forall k$.

$\in [\![1, p+1]\!]$.

alors $\operatorname{Ker}(\varphi) \cap H \supset \left(\bigcap_{k=1}^{p+1} \operatorname{Ker}(\varphi_k) \right) \cap H$

$\operatorname{Ker}(\varphi_{|H}) = \left(\bigcap_{k=1}^{p+1} \operatorname{Ker}(\varphi_k) \right) \cap H$

$$= \bigcap_{k=1}^{p+1} \left(\operatorname{Ker}(\varphi_k) \cap H \right)$$

$$= \underbrace{\left(\bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(\varphi_k|_H) \right)}_{\subset H.} \cap \overbrace{\operatorname{Ker}(\varphi_{p+1}) \cap H}^{= H}$$

$$= \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(\varphi_k|_H).$$

Donc (d'après $(\mathcal{H}_p)$). il existe $(\lambda_1 - \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$.

$$\psi|_H = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot \varphi_k|_H .$$

alors $\operatorname{Ker}\left(\psi - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot \varphi_k\right) \supset H = \operatorname{Ker}(\varphi_{p+1})$.

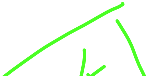
d'après $(\mathcal{H}_1)$. $\psi - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot \varphi_k = \alpha_{p+1} \cdot \varphi_{p+1}$

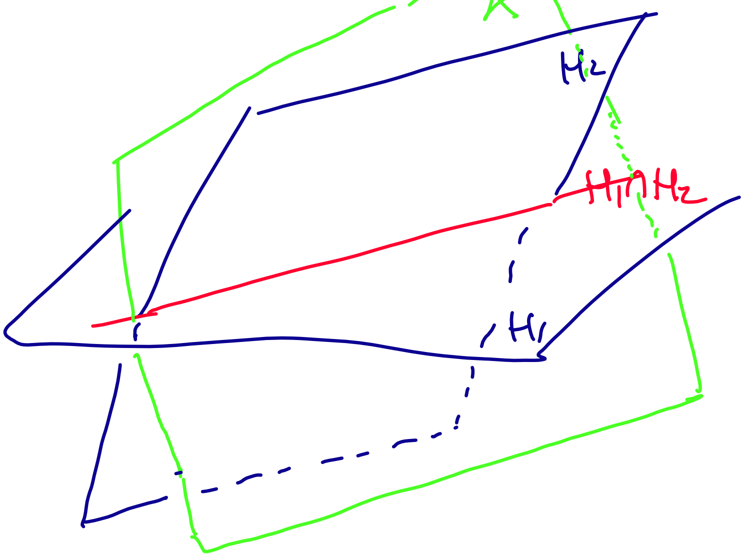
il existe $\alpha_{p+1} \in \mathbb{K}$

$\blacksquare$

---

dans $\underset{E}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}^3}}$, $\varphi_1 \neq 0_{E^*}$, $\varphi_2 \neq 0_{E^*}$. $H_1 = \operatorname{Ker}(\varphi_1)$ plan
$H_2 = \operatorname{Ker}(\varphi_2)$ plan.





Soit $\psi \in E^*$

$\psi \neq 0_{E^*}$

$K = \ker(\psi)$ plan

$K \supset H_1 \cap H_2$.

Qui est K ? Il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\psi = \lambda_1 . \varphi_1 + \lambda_2 . \varphi_2$$

comme $\psi \neq 0_{E^*}$

$(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$

Soit $K = \ker(\mu . \psi)$ $\forall \mu \in \mathbb{R}^*$

on va prendre
$$\psi = \frac{d_1}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}} . \varphi_1 + \frac{d_2}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}} . \varphi_2$$

il existe $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\boxed{\psi = \cos\theta . \varphi_1 + \sin\theta . \varphi_2}$$

vecteur $a \in E$, $\varphi(a) \neq 0$. Alors

$$\psi = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}.\varphi$$

Il suffit de le vérifier pour $x = h + \lambda.a$, où $h \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

— (*Hérédité*) supposons le résultat vrai au rang $p \geqslant 1$, soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p+1})$ des formes linéaires de E et $\psi \in E^\star$ telle que

$$\mathrm{Ker}(\psi) \supset \bigcap_{k=1}^{p+1} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$$

Si φ_{p+1} est nulle, c'est terminé. Supposons donc φ_{p+1} non nulle et posons $H = \mathrm{Ker}(\varphi_{p+1})$. On a alors

$$\mathrm{Ker}(\psi_{|_H}) \supset \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_{k|_H})$$

on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence qui nous donne

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \psi_{|_H} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\varphi_{k|_H}$$

On a alors

$$\mathrm{Ker}\left(\psi - \left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\varphi_k\right)\right) \supset \mathrm{Ker}(\varphi_{p+1})$$

donc, d'après l'initialisation

$$\exists \lambda_{p+1} \in \mathbb{K},\ \psi = \sum_{k=1}^{\mathbf{p+1}} \lambda_k.\varphi_k$$

Exemple 1.4 – Hyperplans de $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$, les hyperplans sont des plans et on a la situation géométrique de la figure 1.1, page suivante. Notons $H_1 = \operatorname{Ker}(\varphi_1)$, $H_2 = \operatorname{Ker}(\varphi_2)$, si φ_1 et φ_2 sont indépendantes, les deux plans se coupent suivant la droite D. Soit K un plan contenant D (comme sur le dessin), où $K = \operatorname{Ker}(\psi)$, le théorème nous assure alors que

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0),\ \psi = \lambda_1.\varphi_1 + \lambda_2.\varphi_2$$

Le plan K a donc pour équation

$$(K) \qquad \lambda_1\,\varphi_1(x) + \lambda_2\,\varphi_2(x) = 0$$

Cette équation est définie à un coefficient de proportionnalité près, donc

$$\cos(\theta)\,\varphi_1(x) + \sin(\theta)\,\varphi_2(x) = 0$$

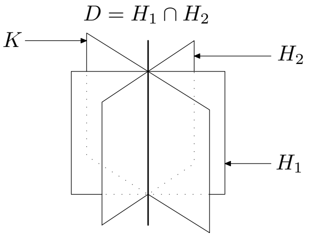
est l'équation de K, pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$, (qui vérifie $\cos(\theta) = \lambda_1/\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$, et $\sin(\theta) = \lambda_2/\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$).

Remarque 1.6

Le résultat de cette proposition est particulièrement intéressant en géométrie affine. Ainsi si $\mathcal{H}_1$, ..., $\mathcal{H}_p$ sont des hyperplans affines (espaces affines ayant pour directions des hyperplans vectoriels) d'intersection non vide (soit A un point de l'intersection), d'équations

$$(\mathcal{H}_1) \quad \varphi_1(\overrightarrow{A_1M}) = 0, \ldots, (\mathcal{H}_p) \quad \varphi_p(\overrightarrow{A_pM}) = 0$$

Figure 1.1 – Hyperplans de $\mathbb{R}^3$

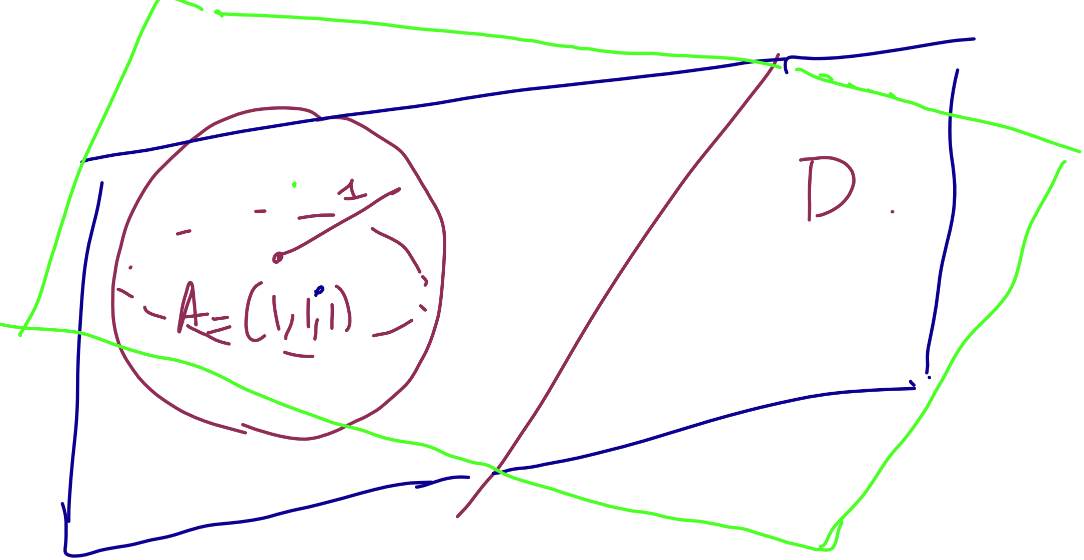


alors, pour tout hyperplan $\mathcal{H}$ d'équation $\psi(\overrightarrow{AM}) = 0$, contenant cette intersection,

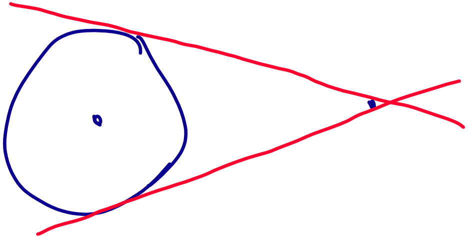
$$\exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \ \psi = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k . \varphi_k$$

Exemple 1.5 – Utilisation des faisceaux d'hyperplans

Soit $V = \mathbb{R}^3$, l'espace usuel muni de sa structure affine euclidienne usuelle. Soit D une droite affine et A un point, cherchons les plans tangents à la sphère de centre A de rayon 1, contenant D. Par exemple. Soit D la droite définie par $4\,x + y + z = 0$, $2\,x + 5\,y + 3\,z + 4 = 0$. Cherchons le plan P contenant D tel que P soit à une distance 1 du point $(1, 1, 1)$.

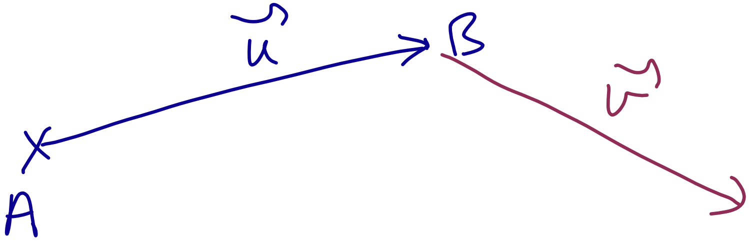


Dom $\mathbb{R}^2$



Q : Émile Colette

Géométrie affine



Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,

$\mathcal{E}$ est dit <u>espace affine de direction E</u> si

il existe

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \times E &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (A, \vec{u}) &\longmapsto A + \vec{u}. \end{aligned}$$

<u>qui vérifie</u> } Exercice pour <u>mercredi</u>