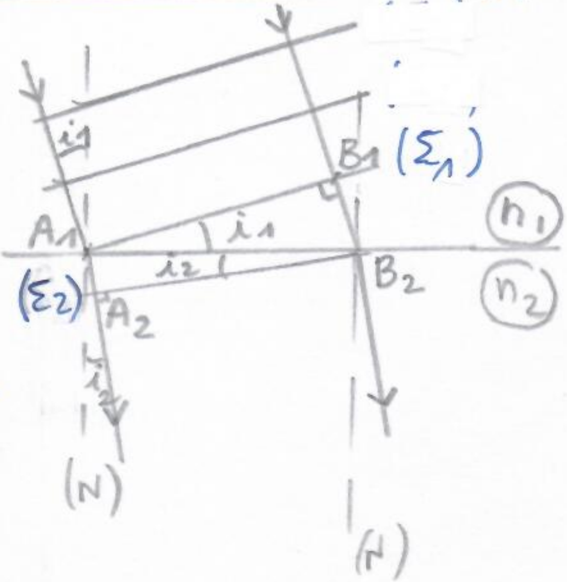
Ex1.4 poly

Ex 1.1 - Lois de Snell - Descartes et théorème de Malus

Opt. Ond TD1. Ex 1



1) Soient (Σ_i) des surfaces d'onde.
- D'après le théorème de Malus, la surface d'onde est perpendiculaire au rayon lumineux en chacun de ses points.
  Ici, A_1 et $B_1 \in (\Sigma_1)$ et on peut dessiner les 2 rayons rayons lumineux passant respectivement par A_1 et B_1 dans le milieu 1.
- La réfraction des rayons lumineux entraîne celle des plans d'onde (qui leur sont toujours orthogonaux d'après le théorème de Malus).
- Hypothèse : $n_1 < n_2 \iff v_1 < v_2$
  le rayon se réfracte en se rapprochant de la normale
  Soit A_2 le point tel que A_2B_2 constitue un plan d'onde perpendiculaire au rayon dans le milieu 2.
- Entre les surfaces d'onde (Σ_1) à la date t et (Σ_2) à la date $(t+\Delta t)$, la propagation des rayons permet d'écrire

$$\Delta t = \frac{B_1B_2}{v_1} \quad \text{(propagation dans le milieu 1)}$$

$$\Delta t = \frac{A_1A_2}{v_2} \quad (\text{"} \qquad \text{"} \quad 2)$$

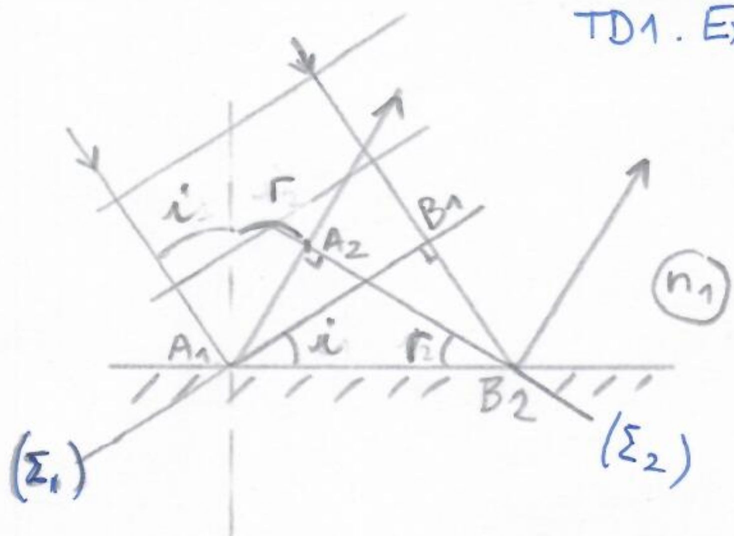
avec $\begin{cases} v_1 = \dfrac{c}{n_1} \quad \text{et} \quad v_2 = \dfrac{c}{n_2} \\ \sin i_1 = \dfrac{B_1B_2}{A_1B_2} \quad \text{et} \quad \sin i_2 = \dfrac{A_1A_2}{A_1B_2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{B_1B_2}{v_1} = \frac{A_1B_2 \sin i_1}{(c/n_1)} = \frac{A_1B_2 \sin i_2}{(c/n_2)} = \frac{A_1A_2}{v_2}$$

on retrouve ainsi la loi de la réfraction de Descartes

$$\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$$

2) . A_1 et $B_1 \in (\Sigma_1)$
A_2 et $B_2 \in (\Sigma_2)$



Entre les surfaces d'onde (Σ_1) à la date t et (Σ_2) à la date $(t+\Delta t)$, la propagation des rayons permet d'écrire :

$$\Delta t = \frac{A_1A_2}{v_1} = \frac{B_1B_2}{v_1}$$

or $\sin i = \dfrac{B_1B_2}{A_1B_2}$ et $\sin r = \dfrac{A_1A_2}{A_1B_2}$

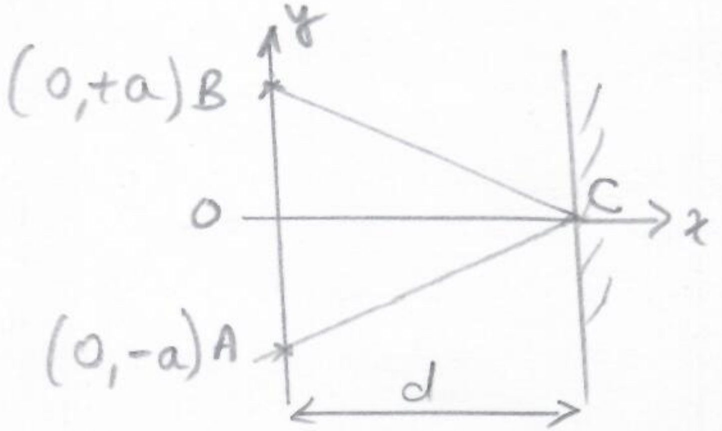
$$\Rightarrow \Delta t = \frac{A_1B_2}{\sin r} = \frac{A_1B_2}{\sin i} \Rightarrow \sin i = \sin r$$

$$\boxed{i = r}$$

on retrouve ainsi la loi de la réflexion de Descartes.

Ex 1.2 - Utiliser la définition du chemin optique dans un milieu homogène.

Ex 1 $\delta_{AB} = (AC) + (CB)$



$AC^2 = a^2 + d^2 = CB^2$

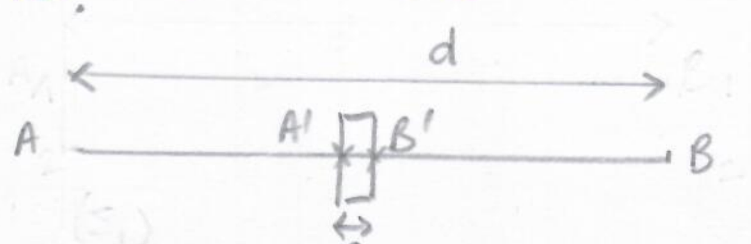
$\boxed{\delta_{AB} = 2\,n\sqrt{a^2+d^2}}$ différence de marche

Rem : $\varphi_{AB} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_{AB} + \varphi_{sup}$

différence de phase

$\varphi_{AB} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \times 2n\sqrt{a^2+d^2} + \pi$ (réflexion sur 1 miroir)

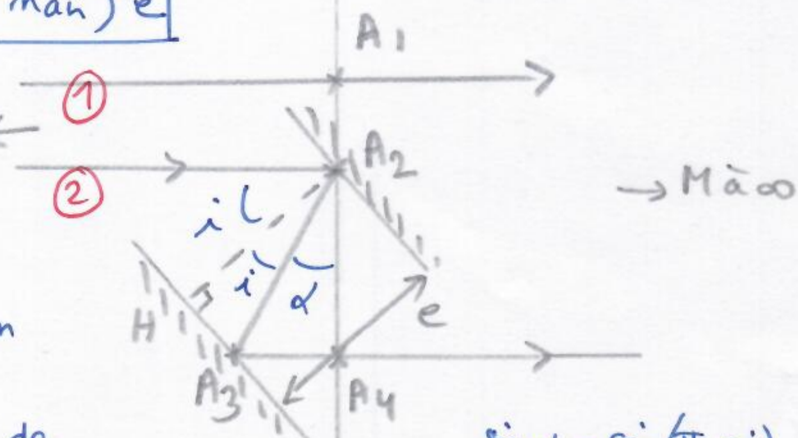
Ex 2



$$\begin{aligned}(AB) &= (AA') + (A'B') + (B'B) \\ &= (AA') + (B'B) + (A'B') \\ &= n_{air} \times (d-e) + n_v \times e\end{aligned}$$

$\boxed{(AB) = n_{air}\, d + (n_v - n_{air})\, e}$

Ex 3 $\delta_{2/1} = (SM)_2 - (SM)_1$



$\delta_{2/1} = \cancel{(SA_2)} + (A_2A_3) + (A_3A_4) + \cancel{(A_4M)}$
$\quad - \cancel{(SA_1)} - \cancel{(A_1M)}$

les points A_1 et A_2 $\in$ au même plan d'onde. donc $(SA_1) = (SA_2)$.

Par le principe du retour inverse de la lumière, les points A_4 et A_1 $\in$ au même plan d'onde donc $(MA_1) = (MA_4)$

$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2i\right)$
$= \cos 2i$
$= \frac{1+\cos^2 i}{2}$

$\delta_{2/1} = (A_2A_3 + A_3A_4)\, n_{air}$

Dans le triangle (A_2HA_3), $\cos i = \frac{e}{A_2A_3} \Rightarrow A_2A_3 = \frac{e}{\cos i}$

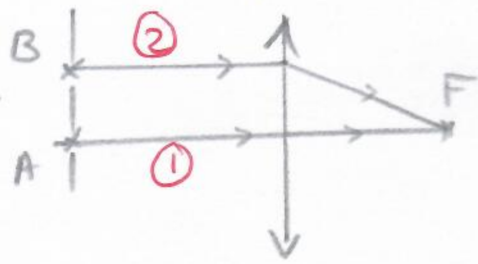
" $(A_2A_3A_4)$, $\sin\alpha = \frac{A_3A_4}{A_2A_3} \Rightarrow A_3A_4 = \sin\alpha\left(\frac{e}{\cos i}\right)$

$\delta_{2/1} = n_{air}\left[\frac{e}{\cos i}\right](1+\sin\alpha) = n_{air}\frac{e}{\cos i}(1+\cos 2i) = n_{air}\frac{e}{\cos i}(2\cos^2 i)$

$\boxed{\delta_{2/1} = 2\,n_{air}\, e\cos i}$

Rem : $\Delta\varphi_{2/1} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_{2/1} + \Delta\varphi_{sup} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(2n_{air}e\cos i) + 2\times\pi$

<u>Ex 4</u> $\delta_{2/1} = (SF')_2 - (SF')_1$



$\delta_{2/1} = (SB) + (BF') - (SA) - (AF')$ S à ∞ ←

or A et B ∈ au même plan d'onde

donc $(SA) = (SB)$

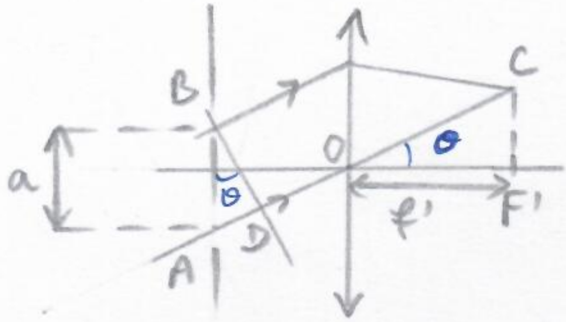
$\delta_{2/1} = (BF') - (AF')$

A et B ∈ au même plan d'onde.

La lentille est un système optique. ~~(A et F' sont conjugués par L ainsi que B et F')~~ donc $(BF') = (AF')$

$$\boxed{\delta_{2/1} = 0}$$

<u>Ex 5</u> $\delta = (AC) - (BC)$



Par le principe du retour inverse de la lumière B et D ∈ au même plan d'onde donc $(DC) = (BC)$

$\delta = (AD) + (DC) - (BC) = (AD)$

Dans le triangle (ABD), $\sin\theta = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{a}$

$$\boxed{\delta = n_{air} \times a \sin\theta}$$

<u>Rem</u> : pour des petits angles $\sin\theta \simeq \theta$ et $\tan\theta = \frac{CF'}{f'} \simeq \theta$ (triangle (OCF'))

$\delta = n_{air}\, a \frac{CF'}{f'}$

<u>Ex 6</u> $\delta_{2/1} = (SM)_2 - (SM)_1 = (SS_2) + (S_2M) - (SS_1) - (S_1M)$

avec $(SS_2) - (SS_1) = (n - n_{air})\, e$ (Exemple 2)

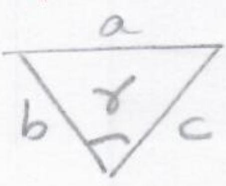
et $(S_2M) \quad (S_1M) = n_{air}\, a \sin\alpha'$ (Méthode Al-Kashi)

$\delta_{2/1} = (n - n_{air})\, e + n_{air}\, a \sin\alpha'$

$$\boxed{\delta_{2/1} \simeq (n - n_{air})\, e + n_{air}\, a \frac{x}{D}}$$ à démontrer.

<u>Méthode al-Kashi ou loi des cosinus</u>

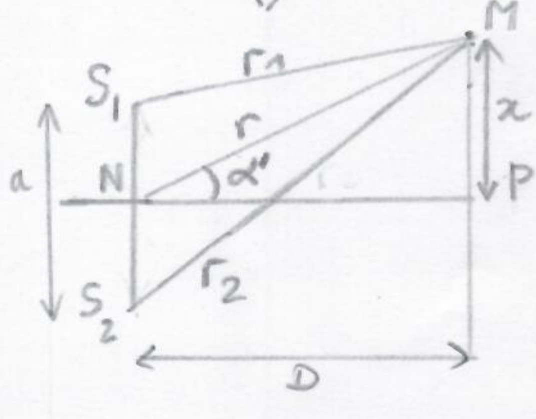
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma$$



$r_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 - 2\frac{a}{2}\, r \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)$

$= r^2\left[1 - \frac{a}{r}\sin\alpha' + \left(\frac{a}{2r}\right)^2\right]$

$r_1 = r\left[1 - \frac{a}{r}\sin\alpha' + \left(\frac{a}{2r}\right)^2\right]^{1/2}$



DL ordre 1 en a/2 → $r_1 \simeq r\left[1 - \frac{a}{2r}\sin\alpha' + \cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2r}\right)^2}\right]$ ordre 2

$r_1 \simeq r - \frac{a}{2}\sin\alpha'$

De même

$$r_2 = r + \frac{a}{2}\sin\alpha'$$

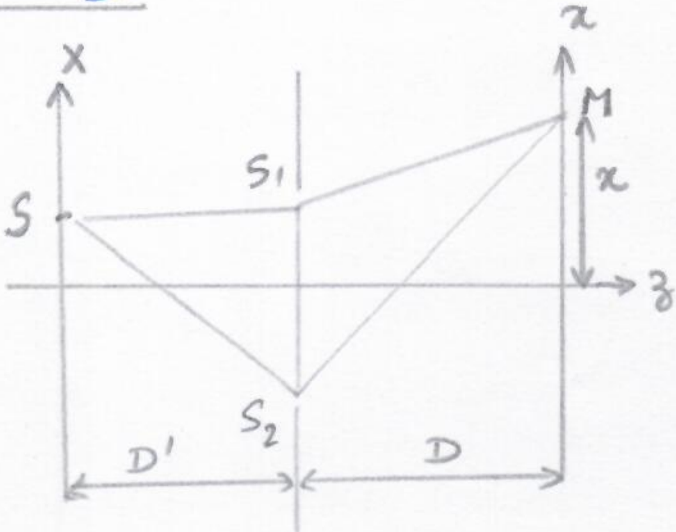
$$(S_2M) - (S_1M) = (r_2 - r_1)\, n_{air} = n_{air}\, a \sin\alpha'$$

Pour des petits angles $\sin\alpha' \simeq \alpha'$

Dans le triangle (NMP) on a $\tan\alpha' = \frac{x}{D} \simeq \alpha'$

$$\Rightarrow (S_2M) - (S_1M) \simeq n_{air}\, a\frac{x}{D}$$

$$\boxed{\delta_{2/1} = (n - n_{air})\,e + n_{air}\, a\frac{x}{D}}$$



Ex7 $\delta_{2/1} = (SM)_2 - (SM)_1$

$$\delta_{2/1} = (SS_2) + (S_2M) - (SS_1) - (S_1M)$$

$$\delta_{2/1} = (SS_2) - (SS_1) + (S_2M) - (S_1M)$$

D'après l'Ex6, on a

$$(S_2M) - (S_1M) = n_{air}\, a\frac{x}{D}$$

Par analogie, on a

$$(SS_2) - (SS_1) = n_{air}\, a\frac{X}{D'}$$

$$\boxed{\delta_{2/1} = n_{air}\, a\left(\frac{x}{D} + \frac{X}{D'}\right)}$$

Rem : $\Delta\varphi_{2/1}(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_{2/1} + \Delta\varphi_{sup}$

$$= \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_{2/1} + \varphi_{sup_2} - \varphi_{sup_1}$$

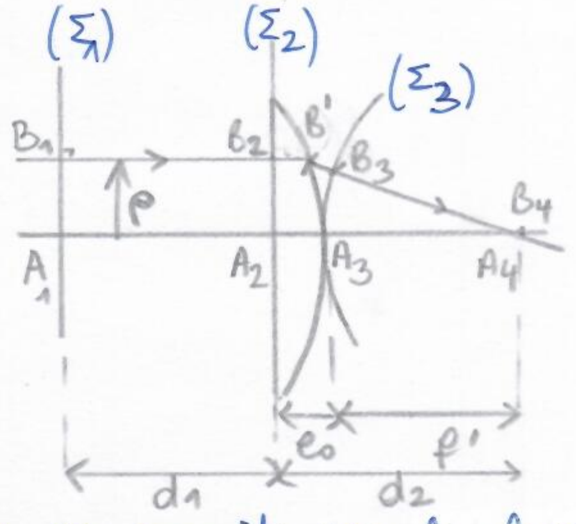
$$= \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_{2/1} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$ passage par un trou diffractant

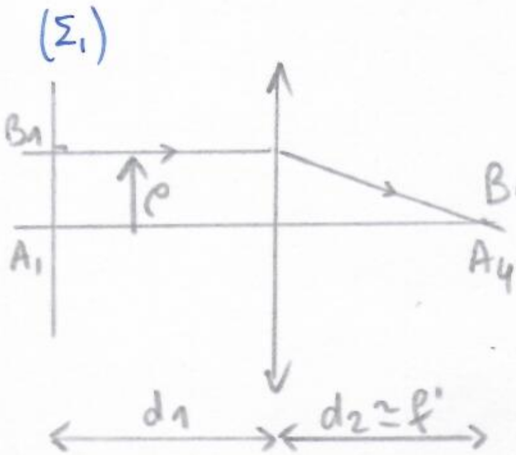
$$\boxed{\Delta\varphi_{2/1}(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_{2/1}}$$

Ex 1.5 poly

Ex 1-2 - Détermination du profil d'une lentille   TD1 - Ex 6

1)





On ne connait pas la forme exacte de la lentille : pour faire des constructions on pourra utiliser la schématisation habituelle de l'optique géométrique (voir schéma ci-dessus à droite).

Méthode 1 (à partir du schéma de gauche).

On a A_1 et $B_1 \in (\Sigma_1)$; A_2 et $B_2 \in (\Sigma_2)$; A_3 et $B_3 \in (\Sigma_3)$.

On a A_4 et A_1 conjugués ainsi que B_4 et B_1 conjugués.

En terme de chemin optique, on a :

$$(A_1 A_4) = (B_1 B_4)$$

$$\underbrace{(A_1 A_2)}_{=\times} + (A_2 A_3) + \underbrace{(A_3 A_4)}_{=\sim} = \underbrace{(B_1 B_2)}_{=\times} + (B_2 B') + (B' B_3) + \underbrace{(B_3 B_4)}_{=\sim}$$

$$n e_0 = n\, e(\rho) + B'B_3$$

D'après le théorème de Pythagore :

$$[B'B_4]^2 = \rho^2 + (d_2 - e(\rho))^2 = (d_2 - e(\rho))^2 \left(1 + \left(\frac{\rho}{d_2 - e(\rho)}\right)^2\right)$$

$$B'B_4 = (d_2 - e(\rho))\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{(d_2 - e(\rho))^2}\right)$$

avec $e(\rho) \ll d_2$, on a $B'B_4 \simeq d_2 - e(\rho) + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{(d_2 - \cancel{e(\rho)})}$

$$\simeq (f' + e_0 - e(\rho)) + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{d_2}$$

et $B'B_3 = B'B_4 - f'$

$$\Rightarrow \quad n e_0 = n\, e(\rho) + e_0 - e(\rho) + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{d_2}$$

$$e(\rho)[n-1] = e_0 [n-1] - \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{d_2}$$

$$\boxed{e(\rho) = e_0\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{d_2 e_0 (n-1)}\right)} = e_0 (1 - \alpha \rho^2) \text{ avec } \alpha = \frac{1}{2 d_2 e_0 (n-1)}$$

$$e(\rho) \simeq e_0\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{f' e_0 (n-1)}\right) \text{ car } e_0 \ll f' = 20 \text{ cm.}$$

$f' \simeq d_2$

Méthode 2 (à partir du schéma de droite) TD1 Ex 7

Si l'on utilise la schématisation habituelle de l'optique géométrique, on peut écrire directement :

$$(A_1A_4) = d_1 + f' + (n-1)e_0$$
$$(B_1B_4) = d_1 + (f'^2+\rho^2)^{1/2} + (n-1)e(\rho)$$

or $f' \gg \rho \Rightarrow (f'^2+\rho^2)^{1/2} = f'\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{f'^2}\right)$

les chemins optiques (A_1A_4) et (B_1B_4) sont égaux.

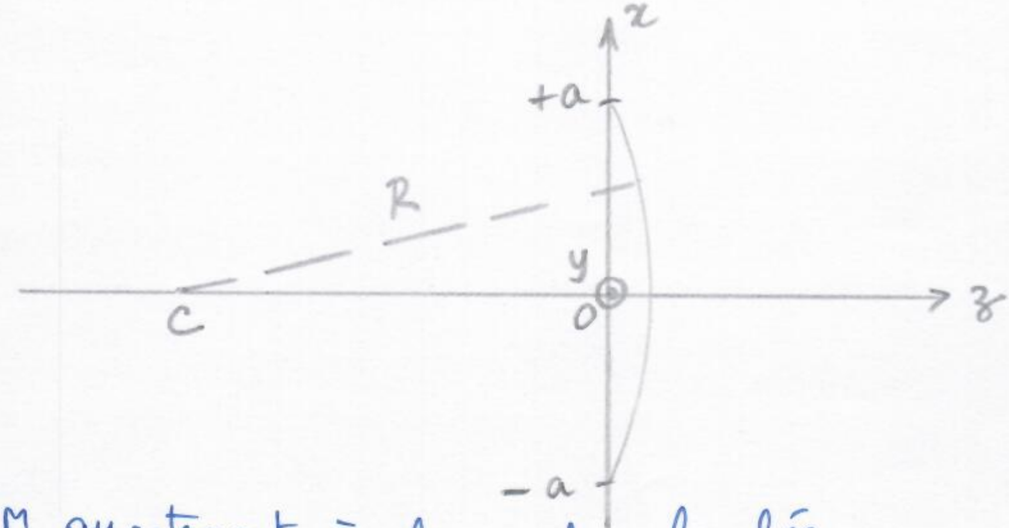
$$\cancel{d_1} + \cancel{f'} + (n-1)e_0 = \cancel{d_1} + \cancel{f'} + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{f'} + (n-1)e(\rho)$$

$$\boxed{e(\rho) = e_0\left(1 - \frac{\rho^2}{2e_0f'(n-1)}\right)}$$

Remarque : $e(\rho) = e_0 - \beta\rho^2$ équation d'un profil parabolique.

avec $\beta = \frac{1}{2f'(n-1)}$

2)



Soit M appartenant à la surface bombée.
M possède des coordonnés qui vérifient l'équation de la sphère.
Le centre C de la sphère se trouve en $\begin{cases} x_C = 0 \\ y_C = 0 \\ z_C = e(0,0) - R \\ \quad = e_0 - R \end{cases}$

L'équation de la sphère s'écrit :

$$x^2 + y^2 + (z - z_C)^2 = R^2$$
$$(z - z_C)^2 = R^2 - x^2 - y^2$$
$$z - z_C \simeq R\left[1 - \left(\frac{x^2+y^2}{R^2}\right)\right]^{1/2}$$
$$z - z_C \simeq R\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{R^2}\right) = R - \left(\frac{x^2+y^2}{2R}\right) = z - e_0 + R$$
$$z = e_0 - \left(\frac{x^2+y^2}{2R}\right)$$

lorsque $(x^2+y^2=a^2)$, l'épaisseur de verre est nulle (on se trouve au bord de la lentille).

$$z = 0 = e_0 - \left(\frac{a^2}{2R}\right) \Rightarrow e_0 = \frac{a^2}{2R}$$

D'après la question 1)

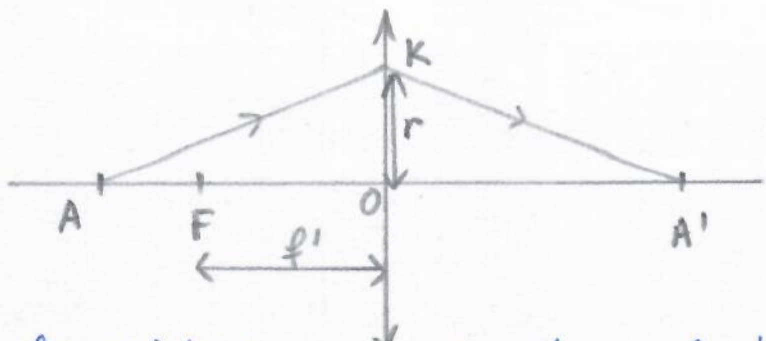
$$e(\rho) = e_0 - \beta\rho^2$$

Au bord de la lentille, $e(\rho=a)=0 \Rightarrow e_0 = \beta a^2$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2R} = \beta a^2 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2R} = \frac{1}{2f'(n-1)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R = f'(n-1)}$$ où R est le rayon de courbure.

3)



On considère les points A et A' conjugués par la lentille convergente. Tous les rayons issus de A et convergeant en A' parcourent le même chemin optique.

$(AKA') = (AOA')$

$AK + (n-1)e(r) + KA' = AA' + (n-1)e_0$

$\sqrt{AO^2+r^2} + (n-1)e(r) + \sqrt{OA'^2+r^2} = AO + OA' + (n-1)e_0$.

Comme précédemment, $\sqrt{AO^2+r^2} = AO\sqrt{1+\left(\frac{r}{AO}\right)^2} \simeq AO\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{AO^2}\right)\right)$

et $\sqrt{OA'^2+r^2} = OA'\sqrt{1+\left(\frac{r}{OA'}\right)^2} \simeq OA'\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{OA'^2}\right)\right)$

$$\Rightarrow \cancel{AO} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{AO} + (n-1)e(r) + \cancel{OA'} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{OA'} = \cancel{AO} + \cancel{OA'} + (n-1)e_0$$

$$\frac{1}{2}\frac{r^2}{AO} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{OA'} = (n-1)(e_0 - e(r))$$

En utilisant le résultat de la question 1), $e_0 - e(r) = \frac{r^2}{2f'(n-1)}$

on obtient : $\frac{1}{AO} + \frac{1}{OA'} = \frac{1}{f'}$

On introduit les grandeurs algébriques : $\overline{OA'} = OA' > 0$ et $\overline{OA} = -AO < 0$ pour obtenir la relation de conjugaison :

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}}$$