

Topologie [L3]

Brandon LIN

October 18, 2023

Contents

Chapter 1	Connexité	Page 2
1.1	Connexité par arcs Chemin — 3 • Connexité par arcs — 3 • Composante connexe par arcs — 5	3
1.2	Connexité Espace connexe — 7 • Connexité par arc et connexité — 9 • Composante connexe — 11	7
Chapter 2	Complétude	Page 17
2.1	Espace complète Suites de Cauchy — 18 • Convergence d'une suite de Cauchy — 18 • Espace complet, Espace de Banach — 19	18
2.2	Théorèmes Théorème de Point Fixe — 23 • Séries et espace de Banach — 25 • Prolongement des applications uniformément continues — 25	23
Chapter 3	Applications aux espaces pré-hilbertiens	Page 29
3.1	Espace préhilbertien	29
3.2	Système totale Définition — 29 • Formule de Parseval — 30	29

Chapter 1

Connexité

Connexité : Mon espace est-il en un seul morceau ?



Figure 1.1: Connexité

- **Connexité par arcs** \Rightarrow Connexité
- Composante Connexe

- Définitions (mémoriser par coeur)
 1. Connexe par arcs, connexe
 2. Composante connexe par arcs, composante connexe
- Théorèmes, propositions, propriétés (savoir à démontrer)
 1. Image d'un connexe par arcs par une application continue
 2. Un connexe par arc est connexe
 3. Image d'un connexe par une application continue
 4. Relation d'équivalence induit une partition d'espace

1.1 Connexité par arcs

1.1.1 Chemin

Definition 1.1.1: Chemin, relié

Soit (x, y) deux points de (E, d) , on dit x est **relié à y** dans E , s'il existe un **chemin**, qui est une application p suffit :

- $p : [0, 1] \rightarrow E$ continue
- allant de x à y , c'est-à-dire $p(0) = x$, $p(1) = y$

1.1.2 Connexité par arcs

Definition 1.1.2: Connexe par arc

Soit $A \subset (E, d)$. On dit que A est **connexe par arc**, si pour $\forall(x, y) \in A^2$, il existe un **chemin** de x à y dans A .

$$\forall(x, y) \in A^2, \exists p \in \mathcal{C}([0, 1], A), p(0) = x, p(1) = y$$

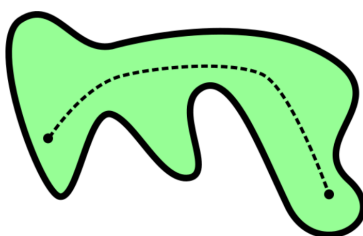


Figure 1.2: Connexe par arc

Exemple 1.1.1 (Dans \mathbb{R})

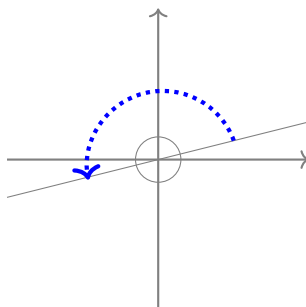
Les connexes par arcs de \mathbb{R} sont les intervalles.

Exemple 1.1.2 ($GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{C})$)

- $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arc, mais $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$ le sont.
- $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arc.

Proof: • $n = 1$, $GL_1(\mathbb{C}) = [a]$, $a \neq 0$, $a \in \mathbb{C}$.

C'est donc à peu près \mathbb{C}^* , qu'on visualise comme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.



- Rappel : Algorithme du pivot du Gauss, transvection, dilatation

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\text{rg}(A) = r \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe T_1, \dots, T_p et T'_1, \dots, T'_q des transvections - dilatations - permutations tel que :

$$T_1 \dots T_p \cdot A \cdot T'_1 \dots T'_q = J_{n,n,r} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les matrices de transvection et dilatation sont respectivement :

$$T_{k,l}(\lambda) = I_n + \lambda E_{k,l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & \dots & \lambda \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 1 \end{bmatrix}, \quad D_k(\lambda) = I_n + (\lambda - 1) \cdot E_{k,k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \lambda & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Ici, $A \in GL_n(\mathbb{C})$, on peut alors écrire (λ ne doit être pas nul dans $D_k(\lambda)$)

$$A = B_1 \dots B_s = \dots = D_n(\det(A)) \cdot T(\lambda_1) \dots T(\lambda_q)$$

C'est un chemin comme : $I_n \rightarrow B_s \rightarrow B_{s-1} \cdot B_s \rightarrow B_{s-2} \cdot B_{s-1} \cdot B_s \rightarrow \dots \rightarrow A$.

On le montre comme on peut mettre

- une seule dilatation $D_k(\mu) \cdot D_{k'}(\mu') \rightarrow \dots \rightarrow D_n(\det(A))$
- à gauche : $T_{k,l}(\lambda) \cdot D_j(\mu) = D_{j'}(\mu') \cdot T_{k',l'}(\lambda')$

- Cherchons un chemin allant de A à I_n dans $GL_n(\mathbb{C})$ On construit, en sachant que $M = D_n(1) \cdot M$:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0, 1] &\rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ t &\mapsto T_{kl}(\lambda) \cdot M \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_2 : [0, 1] &\rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ t &\mapsto D_n(1 + t(\det(A) - 1)) \cdot M = D_n \psi(t) M \end{aligned}$$

avec

$$\psi : t \mapsto 1 + t(\det(A) - 1)$$

suffit $\psi(0) = 1$, $\psi(1) = \det(A)$, et $1/(\det(A) - 1) \in [0, 1]$

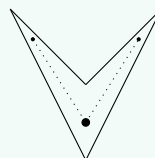
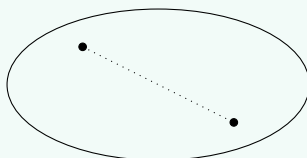
Dans $GL_n(\mathbb{C})$ on peut trouver une chemin canonique de 1 à $\det A$, mais dans $GL_n(\mathbb{R})$, par exemple on ne pourra pas aller de 1 à -1.

Quand on passe de A à B , ϕ a une restriction : $\det(A)$ et $\det(B)$ ne doivent pas avoir des signes opposés. Donc $GL_n(\mathbb{R})$ a deux morceaux, respectivement $\det(A) > 0$ et $\det(A) < 0$.

☺

Exemple 1.1.3 (Dans espace vectoriel normé)

- Les convexes d'un espace vectoriel normé sont **connexe par arc**



- Les étoilés d'un espace vectoriel normé sont **connexe par arc**

Proof: 1. E convexe $\iff \forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], tx + (1 - t)y \in E$.

Soit $(x, y) \in E^2$. On pose :

$$\begin{aligned}\varphi : [0, 1] &\rightarrow E \\ t &\mapsto tx + (1 - t)y\end{aligned}$$

est un chemin de x à y dans E . ($\varphi(0) = y$, $\varphi(1) = x$, φ est continue) Donc, E est connexe par arcs

2. E étoilé $\iff \exists x_0 \in E, \forall y \in E, \forall t \in [0, 1], tx_0 + (1 - t)y \in E$.

Soit $(x, y) \in E^2$, $[x, x_0] \subset E$ et $[x_0, y] \subset E$, on pose :

$$\begin{aligned}\varphi : [0, 1] &\rightarrow E \\ t &\mapsto \begin{cases} 2tx_0 + (1 - 2t)x & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2\bar{t}y + (1 - 2\bar{t})x_0 & \text{avec } \bar{t} = t - \frac{1}{2} \text{ si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}\end{aligned}$$

φ est continue, $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = y$ donc φ est un chemin de x à y dans E , E est connexe par arc. ☺

Proposition 1.1.1 Image d'un connexe par arcs par une application continue

Soit E est **connexe par arc**, E' est un espace métrique. $f : E \mapsto E'$ une fonction continue. Donc,

$f(E)$ est **connexe par arc**

Proof: Soit $(x', y') \in f(E)^2$, alors il exist $(x, y) \in E^2$ tel que $x' = f(x)$ et $y' = f(y)$.

Comme E est connexe par arc, il existe p allant de x à y dans E . De plus, comme f est continue, $f \circ p$ est un chemin allant de $x' = f(x)$ à $y' = f(y)$ dans $f(E)$. ☺

Exemple 1.1.4 (Homéomorphisme de deux espace)

\mathbb{R} et \mathbb{R}^2 ne sont pas homéomorphes. (Homéomorphes - Existe-il une bijection $\psi : E \rightarrow F$ suffit à la fois elle-même est continue et ψ^{-1} est continue ?)

Proof: • Si ϕ est un homéomrphe de \mathbb{R}^2 à \mathbb{R} , alors $\bar{\phi} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{\phi((0, 0))\}$ seraient homéomorphe.

- Le premier est connexe par arc, mais la deuxième ne l'est pas.
 - Contradiction de la proposition précédant.
- ☺

1.1.3 Composante connexe par arcs

Proposition 1.1.2 x relié à y est une relation d'équivalence

Soit $A \subset (E, d)$, on définit une relation \mathcal{R} sur $A \times A$:

$$\forall (x, y) \in A^2, x\mathcal{R}y = [x \text{ relié à } y]$$

Donc, \mathcal{R} est une **relation d'équivalence**. (symétrique, réflexive, transitive)

$$\begin{aligned}x &\mathcal{R} x \\ x\mathcal{R} y &= y\mathcal{R} x \\ x\mathcal{R} y, y\mathcal{R} z &\implies x\mathcal{R} z\end{aligned}$$

Proof: Soit x, y 2 points de A .

- $x \mapsto x$ la fonction constante.
- Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow A$, on a $\bar{\gamma} : t \mapsto \gamma(a + b - t)$
- Il existe un chemin γ_1 reliant x à y dans A , et un chemin γ_2 reliant y à z dans A . $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow A$, $\gamma_2 : [1, 2] \rightarrow A$, on considère le chemin :

$$\gamma : t \mapsto \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [0, 1] \\ \gamma_2(t) & \text{si } t \in [1, 2] \end{cases}$$

$\gamma_1(1) = y = \gamma_2(0)$ continuité à gauche en 1. De même, continuité à droite en 1.

☺

Definition 1.1.3: Composante connexe par arcs

Les classes d'équivalence $x\mathcal{R}y$ ou $x \in A$ sont appelées les **composantes connexes par arcs de A** , et forment une partition de A .

Definition 1.1.4: Composante connexe par arcs de x dans A

La **composante connexe par arcs de x dans A** est la plus grande partie connexe par arcs de A contenant x .

Proposition 1.1.3 Caractérisation des ouverts de \mathbb{R}

Tout ouvert de \mathbb{R} est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Proof: Soit O un ouvert et notons $(E_i)_{i \in I}$ indexé les composantes connexes par arcs de O . Alors,

- $\forall i \in I$, E_i est un intervalle, car E_i est connexe par arc de \mathbb{R} (Voir 1.1.2)
- $\forall i \in I$, E_i est ouvert non vide. Soit E_i ne l'est pas, supposons que $]a, b] \subset E_i$, alors $\exists \varepsilon > 0$, $]b, b + \varepsilon[\cap E_i = \emptyset$
- Les intervalles sont disjoints, car par définition d'une partition.
- I est dénombrable, d'après une application injective de I dans $\mathbb{Q} : i \mapsto x_i \in E_i \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

☺

1.2 Connexité

1.2.1 Espace connexe

Definition 1.2.1: Espace connexe

Un espace **connexe** est une partie en un seul morceau.

Plus précisément, soit $A \subset (E, d)$, les assertions suivant sont équivalentes :

1. A est un espace topologique **connexe**.
2. Les seules parties à la fois ouvertes et fermées dans A sont A ou \emptyset

Si $B \subset A$ ouvert et fermé de A , alors $B = \emptyset$ ou $B = A$

Note:-

La deuxième est le plus utilisé lorsque on veut montrer A est connexe.

On commence par supposons qu'une sous-ensemble ouverte et fermée $B \neq \emptyset \subset A$, ensuite on prouvera $B = A$.

3. A n'est pas la réunion de deux ouverts/fermés non vides disjoints
 - Pour tout O_1 et O_2 sont ouverts *disjoints* dans A , si $A = O_1 \cup O_2$, alors $O_1 = O_2 = \emptyset$
 - Pour tout F_1 et F_2 sont ouverts *disjoints* dans A , si $A = F_1 \cup F_2$, alors $F_1 = F_2 = \emptyset$

Exemple 1.2.1

$A = \mathbb{R}^*$ n'est pas connexe.

Proof: • $] -\infty, 0[$ est ouvert dans A

- $] -\infty, 0[$ est fermé dans A , c'est parce que $]0, +\infty[$ est ouvert
- $] -\infty, 0[$ n'est pas égale à A ou \emptyset



Exemple 1.2.2

Dans \mathbb{R} , les intervalles I sont connexe dans \mathbb{R} .

Proof: • I intervalle de \mathbb{R} , donc I convexe, cela montre que I est **connexe**.

- Par contraposition, on montra que si I n'est pas intervalle, donc I n'est pas connexe.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas un intervalle, caractérisation : $\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}, \alpha < \beta < \gamma$ et $\alpha, \beta \in A$ mais $\beta \notin A$

On pose $\mathcal{U} = A \cap] -\infty, \beta[$ et $\mathcal{V} = A \cap]\beta, +\infty[$ des ouverts de A . (Ce n'est pas de \mathbb{R})

On a

- $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ car $] -\infty, \beta[\cap]\beta, +\infty[= \emptyset$.
- $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = (A \cap] -\infty, \beta[) \cup (A \cap]\beta, +\infty[) = A \cap (\mathbb{R} \setminus \{\beta\}) = A$ car $\beta \notin A$
- De plus $\alpha \in \mathcal{U}$ et $\gamma \in \mathcal{V}$, donc $\mathcal{U} \neq \emptyset$ et $\mathcal{V} \neq \emptyset$

Alors A n'est pas connexe.

Donc les connexe de \mathbb{R} sont bien des intervalles.



Proposition 1.2.1 Image d'un connexe par une application continue

Soit (E, d) un espace **connexe**, $f : E \rightarrow E'$ continue. Donc,

$$f(E) \text{ est } \mathbf{connexe}$$

Proof: Soit $B \neq \emptyset$, $B \subset f(E)$, B est ouvert et fermé dans (E', d) , montrer que $B = f(E)$

- $f^{-1}(B)$ est un ouvert de E
- $f^{-1}(B)$ est un fermé de E
- $f^{-1}(B) \neq \emptyset$ car $B \neq \emptyset$ et $B \subset f(E) \rightarrow f^{-1}(B) = E$, donc $B = f(E)$

☺

Exemple 1.2.3 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $A \subset (E, d)$ un connexe. Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur A telle qu'il existe $(x, y) \in A^2$ vérifiant $f(x) < 0$ et $f(y) > 0$. Donc f s'annule en un point.

Proof: D'après la proposition, $f(A)$ est un connexe de \mathbb{R} , donc un intervalle.

$$0 \in [f(x), f(y)] \subset f(A), \text{ c'est-à-dire } \exists x_0 \in A, f(x_0) = 0$$

☺

Proposition 1.2.2 Une autre méthode pour prouver que A soit connexe

$A \subset (E, d)$ est topologique **connexe** si et seulement si toute application continue $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$ est constante. On remplace parfois \mathbb{Z} par deux valeurs distincts, par exemple $\{0, 1\}$.

Proof: Dans deux sens :

- (\implies)
Soit $x \in A$ et $n = f(x)$. Comme $\{n\} \in \mathbb{Z}$ est à la fois ouvert et fermé, f est continue, $\emptyset \neq f^{-1}(\{n\}) \subset A$ est donc à la fois ouvert et fermé.
Or, A est connexe, cela implique que $f^{-1}(\{n\}) = A$, et f est constante (égale à n).
- (\impliedby)
Soit $X = O_1 \cup O_2$ où les deux ouverts sont disjoints. On a $1_{O_1} : A \rightarrow \mathbb{Z}$ à la fois constant et continue, comme 1 est ouvert et O_1 est ouvert.
Ainsi, ou bien $\varphi = 1$ et $O_2 = \emptyset$, ou bien $\varphi = 0$ et $O_1 = \emptyset$.

☺

Exemple 1.2.4 (Dans \mathbb{R})

Les connexes de \mathbb{R} sont les intervalles.

Proof: Toute fonction $f'(x) = 0$, f est constante sur I .

☺

Proposition 1.2.3 Prolongement du connexité

Soit A connexe dans E , donc tout ensemble B tel que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ (ainsi que \overline{A}) sont tous connexes.

Proof: Soit $f : B \rightarrow \{0, 1\}$ continue. Comme f est constante sur A , donc f est constante sur B car $B \subseteq \overline{A}$ ☺

Proposition 1.2.4

Une réunion de connexes d'intersection non vide est connexe.

1.2.2 Connexité par arc et connexité

Proposition 1.2.5 Relation entre connexe par arc et connexe

Connexe par arc \implies Connexe. La réciproque est fausse en générale.

Note:-

- La connexité par arcs est une notion facile.
- La connexité est une notion un peu difficile.

Donc, toujours essayer d'utiliser la connexité par arcs : Connexe par arcs \implies connexe

Proof: Soit C connexe par arc, et B ouvert et fermé et non vide de C .

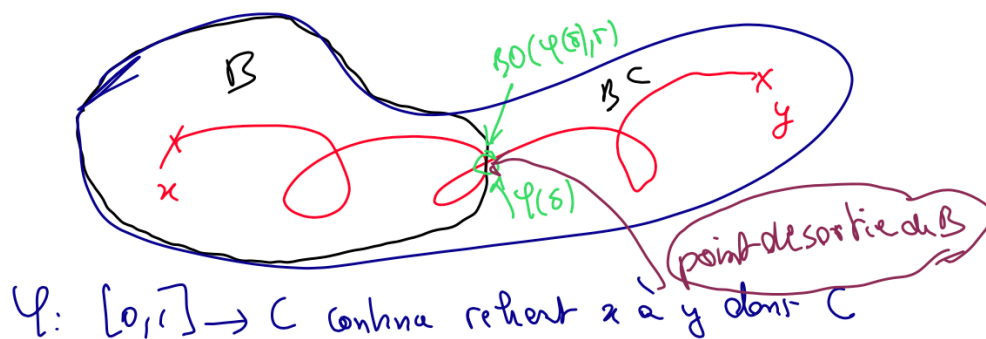


Figure 1.3: De connexe par arc à connexe

Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow C$ un chemin reliant x à y dans C .

Si $B \neq C$, on trouve $x \in B$, $y \in B^c$. $\Delta = \{t \in [0, 1], \varphi(t) \in B\}$ et $\sup \Delta = \delta$, $\varphi(\delta) \in B$ car φ continue et B fermé dans C .

De plus, B ouvert dans C , donc il existe $r > 0$, $BO_C(\varphi(\delta), r) \subset B$.

Si $\varepsilon > 0$ assez petit et $\delta \neq 1$, $\varphi(\delta + \varepsilon) \in B$ d'après la continuité de φ .

Cela montre que $\delta + \varepsilon \in \Delta$, contredit la définition de $\delta = \sup(\Delta)$

Conclusion : Il est impossible de trouver $x \in B$ et $y \notin B$ dans C .

Donc, $B = C$.

☺

Exemple 1.2.5 (Connexe non connexe par arcs)

$$A = \left\{ \left(x, \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right), x \in \mathbb{R}^* \right\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$$

(adhérence du premier terme) est connexe, mais pas connexe par arcs.

Proof: On note $A = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ avec

$$C_1 = \{(x, \sin(1/x)), x > 0\}$$

$$C_2 = \{(x, \sin(1/x)), x < 0\}$$

$$C_3 = \{0\} \times [-1, 1]$$

Soit $B \subset A$, $B \neq \emptyset$ ouvert et fermé.

- C_1, C_2 et C_3 sont tous connexes par arcs.
- Rappel : O (resp. F) ouvert (resp. fermé) de (E, d) , si $A \subset E$, $A \cap O$ (resp. $A \cap F$) ouvert (resp. fermé) de A .
- Montrer que $B = A$.
 - Soit $B \cap C_1 \neq \emptyset$, alors $B \cap C_1$ est ouvert et fermé dans C_1 car B est ouvert et fermé dans A .
En outre, $B \neq \emptyset, B \cap C_1 = C_1$ car C_1 est connexe par arcs donc connexe.
 - De même, si $B \cap C_2 \neq \emptyset$, $B \cap C_2 = C_2$; Si $B \cap C_3 \neq \emptyset$, $B \cap C_3 = C_3$
 - Si $B \cap C_1 \neq \emptyset$, $B \supset C_1$ or B est fermé dans A , donc : $B \supset \overline{C_1} = C_1 \cup C_3$. Donc $C_3 \subset B$.
 - Comme $C_3 \subset B$, $\{0\} \times [-1, 1] \subset B$, $(0, 0) \in B$. Comme B ouvert dans A , $\exists r > 0$, $BO_A((0, 0), r) \subset B$,
 $C_2 \cap B \neq \emptyset$, donc $B \cap C_2 = C_2$,
 - Finalement,

$$A = C_1 \cup C_2 \cup C_3, B \subset A, B = (C_1 \cap B) \cup (C_2 \cap B) \cup (C_3 \cap B) = C_1 \cup C_2 \cup C_3 = A$$

☺

Exemple 1.2.6 (Dans espace vectoriel normé)

- Les convexes d'un espace vectoriel normé sont **connexe**
- Les étoilés d'un espace vectoriel normé sont **connexe**

Proof: Connexe par arcs donc connexe.

☺

Note:-

Conclusion important !

Cas d'un espace vectoriel normé

Theorem 1.2.1 Dans espace vectoriel normé

Dans un espace vectoriel normé, tout ouvert connexe est connexe par arcs. (Équivalence)

Note:-

(E, d) est connexe, on veut montrer que $\Delta = \{x \in E, \mathcal{P}(x) \text{ vraie}\} = E$: montrer que $\Delta \neq \emptyset$, Δ est fermé dans E , Δ est ouvert dans E .

Proof: Soit O un ouvert connexe non vide de $(E, \|\cdot\|)$.

Soit $x \in O$, $\Delta = \{y \in O, \text{ il existe un chemin reliant } x \text{ et } y \text{ dans } O\}$. Montrons que $\Delta = O$.

- $\Delta \neq \emptyset$, car $x \in \Delta$.

- Δ ouvert dans O .

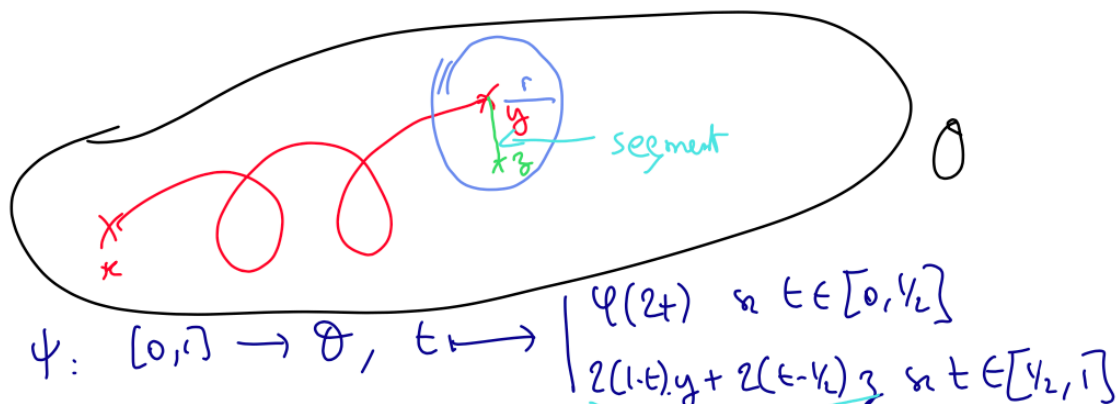


Figure 1.4: Ouvert Connexe

Soit $y \in \Delta$, il existe $r > 0$, $BO(y, r) \subset O$.

Soit $z \in BO(y, r)$, on peut construire un chemin reliant x à z dans O .

Donc, $BO(y, r) \subset \Delta$.

- Δ fermé dans O .

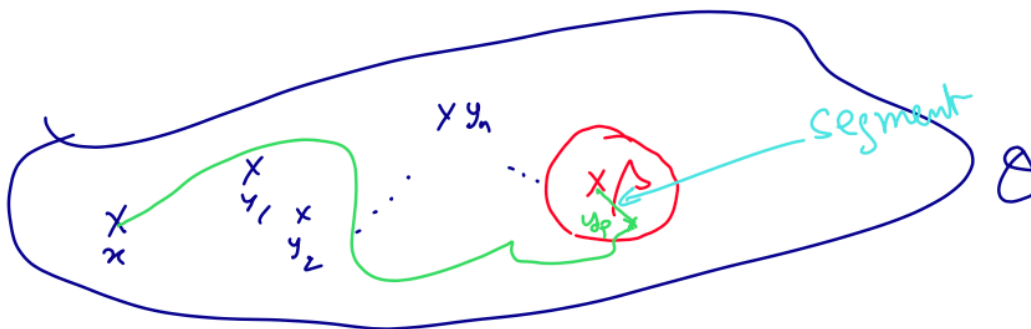


Figure 1.5: Ouvert Connexe

Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Delta^{\mathbb{N}}$, $y_n \rightarrow \beta \in O$.

Comme O est ouvert, il existe $r > 0$, $BO(\beta, r) \subset O$, et si p assez grand, $y_p \in BO(\beta, r)$.

Il existe φ_p relie x à y_p , et le segment $[y_p, \beta]$ relie y_p à β dans O .

On recolle les 2 chemins pour avoir un chemin de x à β dans O , donc $\beta \in \Delta$.

En conclusion, Δ non vide, ouvert et fermé dans O et O connexe donc $\Delta = O$.

☺

1.2.3 Composante connexe

Definition 1.2.2: Composante connexe

Soit $A \subset (E, d)$, $a \in A$, on appelle **composante connexe de a dans A** le plus grand connexe de A contenant a . On la notera $C_A(a)$.

Proposition 1.2.6 Relation d'équivalence

$\mathcal{F} = \{C \text{ connexe} \subset A, a \in C\}$, suffit

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$ car $\{a\} \in \mathcal{F}$
- \mathcal{F} stable par \bigcup

On obtient

$$C_A(a) = \bigcup_{C \in \mathcal{F}} C$$

La relation

$$[x\mathcal{R}y] \iff [x \in C_A(y)]$$

induit une partition de A , et elle est une relation d'équivalence sur A . De plus, tout sous-ensemble A de E est réunion disjointe de ses composantes connexes.

Proposition 1.2.7 Sous-ensemble disjoint devient composantes connexes

Soit $A \subset (E, d)$.

$$A = \bigcup_{i \in I} C_i, \quad \forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies C_i \cap C_j = \emptyset$$

Les C_i sont les **composante connexe** de A si :

$$\forall i, C_i \text{ connexe et } C_i \text{ ouverte dans } A$$

Proof: Soit $a \in A$, il existe (unique) $i_0 \in I$, $a \in C_{i_0}$.

- C_{i_0} connexe, donc $C_{i_0} \subset C_A(a)$. (Définition : Composante connexe est le plus grand connexe inclus dans A contenant a)
- Comme $C_A(a) \subset A$,

$$C_A(a) = \bigcup_{i \in I} (C_i \cap C_A(a)) = C_{i_0} \cup \left(\bigcup_{i \in I, i \neq i_0} C_i \cap C_A(a) \right)$$

C_{i_0} est donc fermé car $C_i \cap C_A(a)$ est ouvert dans $C_A(a)$ car C_i ouvert dans A .

Or C_{i_0} est ouvert d'après définition. Elle est aussi non nul. Comme $C_A(a)$ est connexe, $C_{i_0} = C_A(a)$ ☺

Question 1: Réunion des parties connexes par arcs et connexes

Soient $(C_i)_{i \in I}$ des parties non vides de E telles que

$$\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$$

1. On suppose que tous les C_i sont connexes par arcs, montrer que

$$\bigcup_{i \in I} C_i \text{ est connexe par arcs}$$

2. On suppose que les C_i sont seulement connexes (et non plus connexes par arcs) de (E, d) espace métrique, montrer que

$$\bigcup_{i \in I} C_i \text{ est connexe}$$

Proof: 1. Connexité par arcs

Soit $a \in \bigcap_{i \in I} C_i$ et $(x, y) \in (\bigcup_{i \in I} C_i)^2$, il existe alors $(j, k) \in I^2$ tels que $x \in C_j$ et $y \in C_k$. Mais, comme ils sont connexes par arcs, il existe un chemin φ dans C_j reliant x à a et un chemin ψ dans C_k reliant a à y . En ce cas, le chemin

$$\theta : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \\ t & \longmapsto \end{cases} \begin{cases} \bigcup_{i \in I} C_i \\ \varphi(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \psi(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

est un chemin reliant x à y dans $\bigcup_{i \in I} C_i$. Ce qui montre que $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe par arcs.

2. Connexité

Soit $a \in \bigcap_{i \in I} C_i$ et B un ouvert, fermé, non vide de $\bigcup_{i \in I} C_i$. Soit $j \in I$ tel que $B \cap C_j \neq \emptyset$, alors $B \cap C_j$ est un ouvert, fermé, non vide de C_j qui est connexe, c'est donc tout C_j . En particulier $a \in B$, donc, pour tout $i \in I$, $B \cap C_i \neq \emptyset$ et, par le même argument, $B \cap C_i = C_i$. Finalement

$$B = \bigcup_{i \in I} (B \cap C_i) = \bigcup_{i \in I} C_i$$

☺

Question 2

On considère le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 suivant :

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right), n \in \mathbb{N}^*, y \in [0, 1] \right\} \cup ([0, 1] \times \{0\}) \cup \{(0, 1)\}.$$

1. Montrer que A est connexe.
2. Montrer que A n'est pas connexe par arc.

Proof: 1. Montrons que A est connexe.

Pour cela, il suffit de montrer que tout fonction $f : A \rightarrow \{0, 1\}$ continue sur A est constante (Remarque 1.52 dans le cours).

Soit f une telle fonction. Notons

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right), n \in \mathbb{N}^*, y \in [0, 1] \right\} \cup ([0, 1] \times \{0\}).$$

Alors, B est connexe par arc, donc connexe, et f est continue sur B .

D'où f est constante sur B .

De plus, f est continue en $(0, 1)$ donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in A$,

$$\|(x, y) - (0, 1)\| \leq \eta \implies |f(x, y) - f(0, 1)| \leq \varepsilon.$$

Or, en prenant $\varepsilon = 1/2$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/n_0 < \eta$, il vient

$$\left| f\left(\frac{1}{n_0}, 1\right) - f(0, 1) \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Or f est à valeurs dans $\{0, 1\}$, donc $f(1/n_0, 1) = f(0, 1)$.

Ainsi, comme est constante sur B et que $(1/n_0, 1) \in B$, f est constante sur $A = B \cup \{(0, 1)\}$.

A est connexe.

2. Montrons que A n'est pas connexe par arc.

Par l'absurde, si A est connexe par arc, alors il existe une fonction $\varphi \in C([0, 1], A)$ telle que :

$$\varphi(0) = (0, 1) \text{ et } \varphi(1) = (1, 0).$$

On écrit, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\varphi(t) = (x(t), y(t)).$$

Comme φ est continue sur $[0, 1]$, x et y le sont aussi.

De plus, l'ensemble $\{t \in [0, 1], x(t) = 0\}$ est non vide (car $x(0) = 0$) et borné, donc

$$\alpha = \sup\{t \in [0, 1], x(t) = 0\}$$

existe.

De plus, $\alpha \neq 1$, car $x(1) \neq 0$ et x est continue sur $[0, 1]$.

Le fait que $\alpha < 1$ va entraîner une contradiction.

La continuité de x et la définition de α donnent,

$$\forall t \in [0, \alpha] \quad x(t) = 0.$$

Or, pour tout $t \in [0, \alpha]$, la point $\varphi(t) \in A$, donc $y(t) = 0$ ou $y(t) = 1$. Comme $[0, \alpha]$ est connexe, on en déduit que y est constante sur $[0, \alpha]$ et comme $y(0) = 1$, on a :

$$\forall t \in [0, \alpha] \quad y(t) = 1.$$

De plus, la continuité de φ en α entraîne que : il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in [\alpha, \alpha + \eta[$,

$$\|\varphi(t) - \varphi(\alpha)\|_{\infty} \leq \frac{1}{2}.$$

On pouvait prendre n'importe quelle norme sur \mathbb{R}^2 , elle sont toutes équivalentes (dimension finie).

D'où, comme $\varphi(\alpha) = (0, 1)$, on en déduit que : pour tout $t \in [\alpha, \alpha + \eta[$,

$$0 \leq x(t) \leq \frac{1}{2} \text{ et } y(t) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Or, montrons que ceci implique que $\forall t \in [\alpha, \alpha + \eta[$, $x(t) = 0$.

- En effet, sinon, il existe $s \in [\alpha, \alpha + \eta[$ tel que $x(s) > 0$, par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que $[0, x(s)] \subset x([\alpha, s])$.
- En particulier, il existe $u \in [\alpha, s]$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x(u) \neq 1/n$.
- Comme le point $\varphi(u) = (x(u), y(u)) \in A$, on en déduit que $y(u) = 0$, ce qui est impossible car $y(u) \geq 1/2$.

Donc,

$$\forall t \in [\alpha, \alpha + \eta[\quad x(t) = 0.$$

Or, ceci contredit la définition de α ! Ainsi, A n'est pas connexe par arc.



Question 3

Dans $M_n(\mathbb{R})$, avec $n > 3$, les ensembles

$$\Delta_1 = \{M \in M_n(\mathbb{R}), \text{rg}(M) \leq 2\}, \quad \Delta_2 = \{M \in M_n(\mathbb{R}), \text{rg}(M) > 2\}$$

sont connexes.

Proof: • Pour Δ_1 , si $M \in \Delta_1$, Δ_1 est l'étoile de centre $0_{M_n(\mathbb{R})}$, chemin :

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 1] &\rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto (1 - t).M\end{aligned}$$

• Si $M \in \Delta_2$,

– On cherche un chemin de M à $M_1 \in GL_n(\mathbb{R})$, $\det(M_1) \neq 0$.

$$\begin{aligned}\gamma_1 : [0, 1] &\rightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto M + t.I_n, \det(M + I_n) \neq 0 \text{ avec } t \neq 0\end{aligned}$$

– Chemin reliant M_1 à $\pm I_n$, on a déjà expliqué γ

– $-I_n$ à I_n :

$$\begin{aligned}\gamma_3 : [0, 1] &\rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto M + 2t.I_n\end{aligned}$$

☺

Question 4

Une boule ouverte est-elle toujours connexe dans (E, d) , resp. (E, N) ?

Proof: • Non pour (E, d) . Contre-exemple : Une boule dans \mathbb{R} , $BO_{\mathbb{R}}(\frac{1}{2}, 1) =] - 1/2, 3/2[$ dans $A = [0, 1[\cup]1, 2]$, $BO_A(1/2, 1) = [0, 1[\cup]1, 3/2]$

• Oui pour (E, N) , car convexe.

Note:-

(E, d) se comporte TRÈS différemment d'un (E, N) .

☺

Question 5

Soit (E, N) un \mathbb{R} -espace vectoriel normé et $f \in E^*$, une forme linéaire non nulle sur E . Montrer que

$$[E \setminus \text{Ker}(f) \text{ connexe par arcs}] \iff [f \text{ n'est pas continue}]$$

Proof: • (\implies)

Par contraposition, supposons f continue, alors $\text{Ker}(f)$ est fermé dans E et on a les deux composantes connexes par arcs évidentes de $E \setminus \text{Ker}(f)$ 1. $C_1 = \{x \in E, f(x) > 0\}$ 1. $C_2 = \{x \in E, f(x) < 0\}$

Ce sont des ouverts convexes. Pour passer de l'une à l'autre, la continuité de f et le théorème des valeurs intermédiaires nous oblige à passer par $\text{Ker}(f)$. En effet, soit $x \in C_1$, $y \in C_2$ et φ un chemin de x à y , alors $f \circ \varphi$ est continue sur $[0, 1]$ et vérifie $\varphi(0) > 0$ et $\varphi(1) < 0$, il existe donc un $t \in]0, 1[$, tel que $f \circ \varphi(t) = 0$, ce qui exprime que $\varphi(t) \in \text{Ker}(f)$.

• (\impliedby)

D'après la proposition 1.28, page 65 du cours de topologie, $\text{Ker}(f)$ n'est pas fermé et, comme c'est un hyperplan, il est dense dans E . Soit $(x, y) \in (E \setminus \text{Ker}(f))^2$, alors 1. si $y - x = h \in \text{Ker}(f)$, le chemin

$$t \mapsto x + t.h$$

relie x à y dans $E \setminus \text{Ker}(f)$; 1. si $y - x = \delta \notin \text{Ker}(f)$, on sait qu'il existe une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ker}(f)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers δ , on a donc un chemin dans $\text{Ker}(f)$, défini par (écrire la formule exacte)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \right) = h_n$$

reliant 0_E à δ , tout en restant dans $\text{Ker}(f)$ (sauf en δ). En ce cas le chemin défini par

$$t \mapsto x + \varphi(t)$$

relie x à y dans $E \setminus \text{Ker}(f)$. Ce qui montre que $E \setminus \text{Ker}(f)$ est connexe par arcs.

⊕

Question 6

Soit E un espace vectoriel normé, et F un fermé dont la frontière $\text{Fr}(F)$ est connexe par arcs dans E . Montrer que F est connexe par arcs.

Proof: Si $F = E$, alors F est connexe par arcs. Supposons désormais $F \subsetneq E$. Remarquons que, F étant fermé, on a $\text{Fr}(F) = F \setminus \overset{\circ}{F}$. En particulier, $\text{Fr}(F)$ est inclus dans F .

Nous considérons maintenant aux composantes connexes par arcs de F . Comme $\text{Fr}(F)$ est connexe par arcs et inclus dans F , tous les points de $\text{Fr}(F)$ appartiennent à la même composante connexe par arcs de F . Par transitivité, il nous suffit donc de montrer que tous les autres points de F , c'est-à-dire ceux de $\overset{\circ}{F}$, appartiennent à la même composante par arcs que ceux de $\text{Fr}(F)$. Concrètement, montrons que tout point de $\overset{\circ}{F}$ est relié, par un chemin à valeurs dans F , à un point de $\text{Fr}(F)$.

Soit $x \in \overset{\circ}{F}$. Prenons $y \in E \setminus F$ (un tel y existe car $F \subsetneq E$). Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ une application continue vérifiant $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$ (une telle application existe car l'espace E est connexe par arcs). Posons

$$c = \inf \{ t \in [0, 1], \gamma(t) \notin F \}.$$

Le réel c est bien défini car l'ensemble

$$\{ t \in [0, 1], \gamma(t) \notin F \}$$

est non vide (il contient 1) et minoré.

Si l'on montre que $\gamma(c) \in \text{Fr}(F)$, c'est terminé car alors la restriction de γ à l'intervalle $[0, t_0]$ constituera un chemin de F reliant x à un point de $\text{Fr}(F)$. Montrer que $\gamma(c) \in \text{Fr}(F)$ revient à montrer que

$$\gamma(c) \in \bar{F} \cap \overline{E \setminus F}.$$

- Tout d'abord, par définition de c comme borne inférieure, on peut trouver une suite (t_n) à valeurs dans $[c, 1]$ tendant vers c telle que

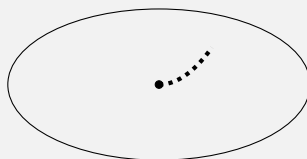
$$\forall n \in \mathbb{N}, \gamma(t_n) \notin F.$$

Comme γ est continue, on a $\gamma(t_n) \rightarrow \gamma(c)$, ce qui montre que $\gamma(c) \in \overline{E \setminus F}$. - Étant donné que $\gamma(c) \in \overline{E \setminus F}$ et que $x = \gamma(0) \in \overset{\circ}{F}$, on est assuré que $c > 0$. Soit (t_n) une suite à valeurs dans $[0, c[$ tendant vers c . Alors la suite $(\gamma(t_n))$ est à valeurs dans F et, par continuité de γ , tend vers $\gamma(c)$. On a donc $\gamma(c) \in \bar{F}$. ⊕

Chapter 2

Complétude

Complétude : E complet veut dire qu'il n'y a pas de **trou**.



- Définitions
 - Espace complet, espace de Banach
 - Séries absolument convergentes
- Théorèmes
 - Un espace compact est complet
 - Espace de Banach
 - Point fixe
 - Séries et espaces de Banach

2.1 Espace complète

2.1.1 Suites de Cauchy

Un **trou** dans espace, qu'est-ce que c'est ?

Par exemple, $E =]0, 1]$ avec $|\cdot|$ le valeur absolue. $u_n = 1/(n+1) \rightarrow 0$ dans \mathbb{R} mais n'a pas de limite dans E .
Comment reconnaître ce type de suites ?

Definition 2.1.1: Suite de Cauchy

Soit (E, d) un espace métrique, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est dite **suite de Cauchy** si :

Les termes de la suite sont très proches les uns des autres.

$$d(u_p, u_q) \xrightarrow{p, q \rightarrow +\infty} 0$$

Asymptotiquement :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, [p \geq q \geq N] \implies [d(u_p, u_q) \leq \varepsilon]$$

Proposition 2.1.1 Bornée d'une suite de Cauchy

Toute suite de Cauchy est bornée.

Proof: Posons $R = \max(d(u_0, u_N), \dots, d(u_{N-1}, u_N), \varepsilon)$, $u_n \in BF_d(u_N, R)$



2.1.2 Convergence d'une suite de Cauchy

Une **suite de Cauchy** peut converger vers

- un élément de E
- un *trou* de E (un élément qui est *en dehors* de E)

Proposition 2.1.2 Suite convergente et suite de Cauchy

- Toute suite convergente est de Cauchy.
- Soit u une suite de Cauchy, alors :

u est **convergente** si, et seulement si, $\text{Adh}(u) \neq \emptyset$.

Proof: • Si $u_n \rightarrow \lambda$, donc $d(u_p, u_q) \leq d(u_p, \lambda) + d(\lambda, u_q)$

- Dans deux sens :
 - (\implies) Évident.
 - (\impliedby) Existence d'une sous-suite $u_{\varphi(n)} \rightarrow \lambda$ et $d(u_n, \lambda) \leq d(u_{\varphi(n)}, \lambda) + d(u_n, u_{\varphi(n)})$



Note:-

Pour montrer une suite de Cauchy est convergente, trouver une valeur d'adhérence.
Convergence : Essayer de trouver un trou dans l'espace.

Proposition 2.1.3 Suite de Cauchy dans \mathbb{R}

Toute suite de Cauchy à valeurs réelles est convergente.

Proof: Bornée donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence), $\text{Adh}(u) \neq \emptyset$. ☺

Exemple 2.1.1 (Suites de Cauchy non convergente)

- Cas métrique : Dans $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$,

$$u_n = \frac{E(10^n \sqrt{2})}{10^n}$$

est une suite de Cauchy mais n'est pas convergente dans \mathbb{Q} . ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, convergence vers un élément s qui n'est plus dans cet ensemble)

En fait, \mathbb{Q} plein de trous avec tous les éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

- Cas normé : Dans $E = \text{Vect}(\{x \mapsto x^k, k \in \mathbb{N}\})$ (l'ensemble des fonctions polynomiales) muni de $\|P\|_\infty = \max(|a_c|, c \in \llbracket 0, \deg(P) \rrbracket)$, la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot (x \mapsto x^k)$$

est une suite de Cauchy mais n'est pas convergente dans E .

Proof: • Suite de Cauchy :

$$\|P_p - P_q\|_\infty = \left\| \sum_{n=q+1}^p \frac{1}{n!} x \mapsto x^n \right\|_\infty \leq \frac{1}{(q+1)!} \rightarrow 0$$

- Pas de limite : Supposons que $P_n \rightarrow Q \in E$, alors Q a un degré d . Si $n > d$, $n \rightarrow +\infty$

$$\|P_n - Q\|_\infty \geq \frac{1}{(d+1)!} \not\rightarrow 0$$

☺

2.1.3 Espace complet, Espace de Banach

Definition 2.1.2: Espace complet, Espace de Banach

- Un espace (E, d) est dit **complet** si :

Toute suite de Cauchy est convergente.

- Un espace (E, N) est dit **de Banach** si :

L'espace vectoriel normé (E, N) est **complet**.

Exemple 2.1.2 (\mathbb{K} et espace compact)

- $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ est complet.

- Si (E, d) est compact, il est complet.

Proof: • \mathbb{R} déjà fait.

- $z_n = x_n + iy_n$, et bornée + Bolzano-Weierstrass.
- Par définition, tout suite d'un compact admet une valeur d'adhérence.



Note:-

Comment montrer qu'un espace E est complet ?

- On prend une suite de Cauchy dans E , $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$
- On construit la limite de cette suite dans un espace *plus gros* F , avec *la même norme* : $u_n \rightarrow u \in F$
- Montrer la convergence dans l'espace plus gros.
- On montre que la limite est dans cet espace. $u \in E$
 - L'espace E est fermé ?
 - Connection avec des espaces complet qu'on connaît ?

Comment montrer qu'un espace E n'est pas complet ?

- On prend un élément de l'espace plus gros mais pas dans E
- On construit une suite de E qui converge vers cet élément dans l'espace plus gros.
- *Ou bien* une suite est de Cauchy, on montre qu'elle ne converge pas.

Example 2.1.3 (Espaces de fonctions continues)

Notant $I = [a, b]$,

1. $E = \mathcal{C}(I, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty, I}$ est complet. (Banach)
2. $E = \mathcal{C}(I, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{1, I}$ n'est pas complet.

Proof: 1. Par étape :

- Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ de Cauchy.
- Pour tout $x \in I$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle de Cauchy car :

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\|_{\infty, [a, b]}$$

Or $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet, donc il existe un réel noté $f(x)$ tel que $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$. (Attention : $f \in F = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ contenant E , on ne sait pas si f est continue)

- Sur F on peut avoir une notion de suite convergente définie par $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ si

$$\delta_n = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

$\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car lorsque on fait tendre p vers $+\infty$ dans l'écriture $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, on a montré :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, [n \geq N] \implies \forall x \in [a, b], |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

- Montrons que $f \in E$.

Soit $\alpha \in [a, b]$, $h \in \mathbb{R}$, $\alpha + h \in [a, b]$, alors : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists \eta > 0$, si $|h| < \eta$,

$$|f(\alpha + h) - f(\alpha)| \leq |f(\alpha + h) - f_n(\alpha + h)| + |f_n(\alpha + h) - f_n(\alpha)| + |f_n(\alpha) - f(\alpha)| \leq 3\varepsilon$$

Ce qui montre la continuité en α .

Donc, $f \in E$ et $\delta_n = \|f_n - f\|_{\infty, [a, b]} \rightarrow 0$.

2. On prend $[a, b] = [0, 1]$, supposons que $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ si $x \in [0, 1/2]$ et $x \mapsto 0$ sinon. On construit la suite de fonctions comme :

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0, & x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \\ n(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - x), & \text{sinon} \end{cases}$$

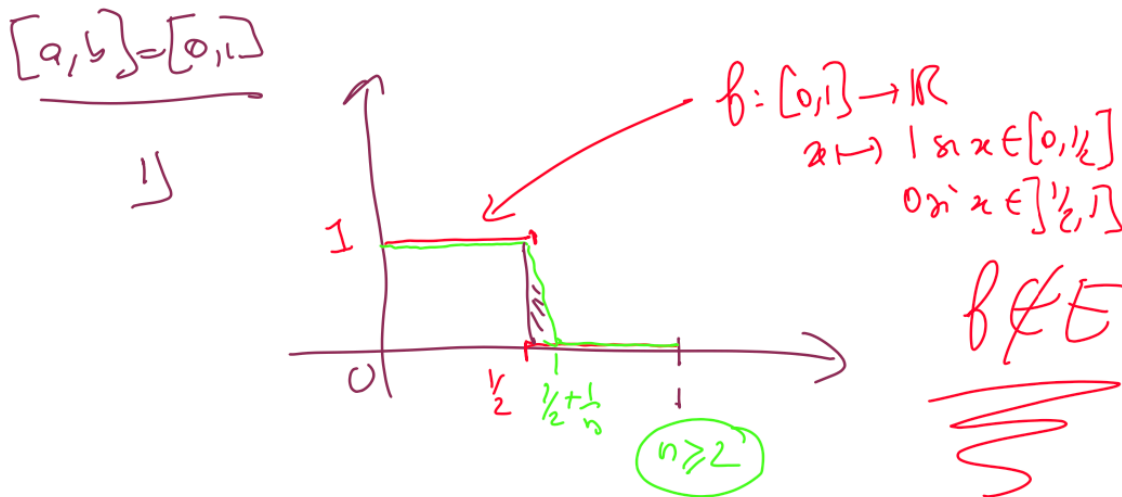


Figure 2.1: Preuve $f_n \rightarrow f$

- Convergence dans $C_{pm}([0, 1], \mathbb{R})$

$$\|f - f_n\|_{1, [0, 1]} = \int_0^1 |f(t) - f_n(t)| dt = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc dans $C_{pm}([0, 1], \mathbb{R})$, $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$.

- Non convergence dans $C([0, 1], \mathbb{R})$

Supposant que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g \in E$, alors

$$\int_0^1 |f(t) - g(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t) - f_n(t)| dt + \int_0^1 |f_n(t) - g(t)| dt$$

Donc $\int_0^1 |f(t) - g(t)| dt = 0$, on en déduit que $(f - g)(t) = 0$ si $f - g$ continue en E .

Mais, g continue sur $[0, 1]$ et f continue sur $[0, 1] \setminus \{1/2\}$, il contredit la continuité de g car

$$g\left(\frac{1}{2}^-\right) = f\left(\frac{1}{2}^-\right) = 1, \quad g\left(\frac{1}{2}^+\right) = f\left(\frac{1}{2}^+\right) = 0$$

Proposition 2.1.4

Un sous-ensemble fermé d'un espace complet est lui-même complet.

Proof: Si F un fermé dans un espace complet E , soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de F .

- (x_n) est une suite de Cauchy de E , donc elle converge vers $\lambda \in E$.
- F est fermé dans E , donc $\lambda \in F$.

☺

Proposition 2.1.5

Si E' espace de Banach, $(\mathcal{L}(E, E'), ||| \cdot |||_{N, N'})$ est aussi un espace de Banach.

Proof: Rappel : Si (E, N) et (E', N') deux espaces vectoriels normés. Soit $u \in \mathcal{L}(E, E')$

- u est continue ssi $\exists K \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, N'(u(x)) \leq K.N(x)$ et ssi u est continue en 0_E .
- On note $\mathcal{L}(E, E') = \{u \in \mathcal{L}(E, E'), u \text{ continue}\}$
- On munit cet espace vectoriel de

$$|||u|||_{N, N'} = \sup_{x \neq 0} \left(\frac{N'(u(x))}{N(x)} \right) = \sup_{x, N(x)=1} (N'(u(x)))$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}(E, E')$ une suite de Cauchy pour la norme.

- Construction de la limite + Verification que la suite converge dans un espace plus gros

On a

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \forall x \in E, N'(u_p(x) - u_q(x)) \leq |||u_p - u_q|||_{N, N'} N(x)$$

On sait que E' est complet, donc $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, notons $u(x)$ sa limite.

On peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N$ et $q \geq N$:

$$|||u_q - u_p|||_{N, N'} \leq \varepsilon \implies \forall x \in E, N'(u_q(x) - u_p(x)) \leq \varepsilon N(x)$$

Donc, comme $u_q(x) \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} u(x)$

$$\forall x \in E, N'(u(x) - u_p(x)) \leq \varepsilon N(x)$$

(On n'a pas encore montré que $u \in \mathcal{L}(E, E')$!!)

- Verification que la limite dans E

u est linéaire, puisque u_n le sont.

u est continue, car elle est lipschitzienne au voisinage de 0_E :

$$\forall x \in E, N'(u(x)) \leq N'(u(x) - u_p(x)) + N'(u_p(x)) \leq (1 + |||u_p|||)N(x)$$

☺

Proposition 2.1.6

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Proof: On passe aux coordonnées, la suite de Cauchy est bornée, et en même temps les Boules fermés sont compacts. C'est inutile de dire un espace complet en dimension infinie, utiliser les notions de **compacité**. ☺

2.2 Théorèmes

2.2.1 Théorème de Point Fixe

Caractérisation séquentielle des applications continues.

Proposition 2.2.1 Image par application continue ou uniformément continue d'une suite de Cauchy

Soit $f : (E, d) \rightarrow (E', d')$ une fonction. Si f est uniformément continue, alors, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, alors :

$$(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite de Cauchy de } E'$$

Mais, si f est seulement continue, l'image par f d'une suite de Cauchy n'est pas nécessairement une suite de Cauchy.

Proof: Rappel : Définition d'uniformément continue :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, d(x, y) \leq \delta \implies d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$



Example 2.2.1 (Contre-Exemple)

On prend :

$$E =]0, 1], \quad x_n = \frac{1}{n+1}, \quad f : x \mapsto \frac{1}{x}$$

- x_n est de Cauchy dans E , car elle converge donc suite de Cauchy dans \mathbb{R} .
- f est continue.

On obtient $f(x_n) = n + 1$ qui n'est pas une suite de Cauchy dans E

Theorem 2.2.1 Point fixe

Soit (E, d) un espace complet et f une application de E dans E contractante, alors :

Il existe un unique point fixe de f sur E .

$$\forall (x, y) \in E^2, \exists k \in]0, 1[, d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \implies \boxed{\exists! a \in E, f(a) = a}$$

Cela aussi implique que, pour tout $a \in E$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha$.

Note:-

Ce théorème nous donne :

- L'existence de $\alpha \implies$ permettre d'assurer que certains objets qui nous intéressent ont un sens.
- un algorithme pour calculer $\alpha \implies$ dans suites et séries, résoudre des équations $g(x) = 0$ où g continue.

Utilisation : On veut montrer l'existence d'un objet mathématique \implies On transforme le problème d'existence en la recherche d'un point fixe pour une fonction contractante dans un espace complet.

Proof: • Existence

Soit $u_0 = a, u_{n+1} = f(u_n)$, on va montrer que cette suite est de Cauchy.

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $q > p$,

$$\begin{aligned} d(u_p, u_q) &\leq \sum_{j=p}^{q-1} d(u_j, u_{j+1}) \quad \text{Inégalités triangulaires} \\ &\leq \left(\sum_{j=p}^{q-1} k^j \right) \cdot d(u_0, u_1) \\ &\leq \frac{k^p}{1-k} d(u_0, u_1) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy dans E , elle converge vers $\alpha \in E$.

Comme f est continue, $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\alpha)$, donc en passant à la limite dans la relation : $u_{n+1} = f(u_n)$ que $\alpha = f(\alpha)$, α est un point fixe.

- Unicité

Si $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$, alors $d(\alpha, \beta) = d(f(\alpha), f(\beta)) \leq kd(\alpha, \beta)$. Sachant que $k < 1$, $d(\alpha, \beta) = 0$ donc $\alpha = \beta$. \square

Proposition 2.2.2 Application : Suites et Séries

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et qui possède un point d'annulation α .

Idée principal : Supposons que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + \lambda \cdot g(x) \end{aligned}$$

et trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que f soit contractante.

Exemple 2.2.2 (Application)

On cherche à montrer l'existence d'une solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y' = \psi(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{où } \psi : O \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}$$

Proof: Si φ est une solution, c'est-à-dire : $\begin{cases} \varphi'(x) = \psi(x, \varphi(x)) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$ alors :

- Pour tout $x \in D_f(\varphi)$,

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x \psi(t, \varphi(t)) dt$$

- (De $f(\varphi(x)) = \varphi(x)$, on obtient) φ est un point fixe de l'application $f : \varphi \mapsto \left(x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^x \psi(t, \varphi(t)) dt \right)$.
- Sous l'hypothèse φ de classe C^1 , on peut trouver \mathcal{V}_{x_0} voisinage de x_0 , et un $E = \{g \in C(\mathcal{V}_{x_0}, \mathbb{R}), g(x_0) = y_0\}$. Si \mathcal{V}_{x_0} est **compact**, (E, d) est complet.
- Si on prend V_{x_0} assez petit, on montre que f est contractante. C'est-à-dire, on veut montrer que $\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{V}_{x_0}^2$, $\|f(\varphi(x_1)) - f(\varphi(x_2))\|_\infty \leq k|x_1 - x_2|$.

$$|f(\varphi(x_1)) - f(\varphi(x_2))| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \psi(t, \varphi(t)) dt \right|$$

$$\leq |x_1 - x_2| \sup_{t \in \mathcal{V}_{x_0}} |\psi(t, \varphi(t))|$$

Si \mathcal{V}_{x_0} assez petite, $|x_1 - x_2|$ assez petit et $|\psi(t, \varphi(t))| \leq M$ est bornée.

Comme $y(x_0) = y_0$, $\psi(x_0, y_0) = 0$ donc au voisinage de x_0 , $\psi(t, \varphi(t)) \leq \varepsilon$.

- Donc, il existe un unique point fixe φ_0 et $\forall x \in \mathcal{V}_{x_0}$, $\varphi_0(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \psi(t, \varphi_0(t)) dt$. D'après TFA, φ_0 est de classe C^1 et vérifie les conditions sur \mathcal{V}_{x_0} , on a trouvé une solution avec $\varphi_0 \in C^1$.

☺

2.2.2 Séries et espace de Banach

Definition 2.2.1: Séries absolument convergentes

Soit (E, N) espace vectoriel normé, et $\sum x_n$ une série à termes dans E .
 $\sum x_n$ est **absolument convergente** si :

La série à termes réels positifs $\sum N(x_n)$ est convergente.

Theorem 2.2.2 Séries et espace de Banach

Soit (E, N) espace vectoriel normé.

(E, N) est un **espace de Banach** si et seulement si toute série **absolument convergente** d'éléments de E est convergente dans E .

Proof: (...)

☺

2.2.3 Prolongement des applications uniformément continues

Rappel : **Théorème des prolongement C^1** Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Si $f'(t) \xrightarrow[t \rightarrow b^-]{} l$ alors :

- f admet une limite α en b^-
- La fonction $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 :

$$\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \begin{cases} f(t), & t \in [a, b[\\ \alpha, & t = b \end{cases}$$

Note:-

Pour prolonger $f \in C^1$, on n'a pas besoin que f' ait une limite.

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt, \quad x \in [a, b[$$

Comme $f'(t) \xrightarrow[t \rightarrow b^-]{} l$, $\int_a^x f'(t)dt \xrightarrow[x \rightarrow b^-]{} \int_a^b f'(t)dt$

$$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow b^-]{} f(a) + \int_a^b f'(t)dt = \alpha$$

Ici, f' bornée sur $[a, b[$, f est lipschitzienne (TAF), donc f est **uniformément continue**.

Theorem 2.2.3 Prolongement des applications uniformément continues

Soit (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, tels que E' est *complet*, soit $A \subset E$, pour une fonction $f : A \rightarrow E'$ uniformément continue, il existe une unique fonction définie et continue sur \bar{A} telle que

$$\forall a \in A, \tilde{f} = f$$

On l'appelle **prolongement** de f à \bar{A} .

De plus \tilde{f} est *uniformément continue* sur \bar{A} .

$$f : A \rightarrow E' \text{ uniformément continue} \implies \tilde{f} : \bar{A} \rightarrow E' \text{ uniformément continue}$$

Remarque :

- Une application continue envoie une suite convergente sur une suite convergente (caractérisation séquentielle de la continuité)
- Une application *uniformément continue* envoie une suite de Cauchy sur une suite de Cauchy.

Example 2.2.3 (Prolongements utiles)

- Fonction réelle : Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue, alors f admet une limite en a^+ .
- L'intégrale sur les fonctions *continues par morceaux* sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{K} est *uniformément continue* comme elle est linéaire et lipschitzienne en 0 :

$$\Psi : \begin{cases} \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\infty, [a, b]} \rightarrow \mathbb{K} \\ f \mapsto \int_a^b f(t)dt \end{cases}$$

Elle peut se prolonger à l'adhérence de $\mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{K})$ pour la norme $\|\cdot\|_{\infty, [a, b]}$ dans $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$.

Proposition 2.2.3 Segments emboîtés (déjà vu)

Soit $I_n = [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$, si $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$, alors

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$$

de plus si $b_n - a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, il existe un $\alpha \in \mathbb{R}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\alpha\}$

Theorem 2.2.4 Fermé emboîtés (complète)

Soit (E, d) un espace complet, $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des fermés non vides de E tels que

$$\text{diam}(F_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} \subset F_n$$

Alors

$$\exists! \alpha \in E, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{\alpha\}$$

Proof: Rappel : $\text{diam}(F) = \sup_{(x,y) \in F^2} d(x,y) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ si $F \neq \emptyset$

- Existence : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in F_n$.

Cette suite est de Cauchy car pour tout p, q , $d(x_p, x_q) \leq \text{diam}(F_q) \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0$

Cette suite converge donc vers un élément $\alpha \in E$. De plus, pour $p \in \mathbb{N}$, comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}, n \geq p} \in F_p^{\mathbb{N}}$ et que F_p est fermé dans E , $\alpha \in F_p$

- Unicité : Évidente d'après la propriété du diamètre.

☺

Theorem 2.2.5 Baire

Si (E, d) , alors : $\forall (O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ouverts denses de E ,

$$\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n} = E$$

Proof: On va montrer que, pour n'importe quelle $x \in E$, et une boule ouverte de x , il y a toujours une intersection avec $\bigcap O_n$.

Soit $x \in E$, soit $\varepsilon > 0$, nous allons montrer que

$$BO(x, \varepsilon) \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \right) \neq \emptyset$$

Récurrance :

- O_0 est dense, donc il existe $x_0 \in BO(x, \varepsilon) \cap O_0$ (ouvert de E)
Il existe alors une boule de rayon $r_0 > 0$ telle que $BF(x_0, r_0) \subset BO(x, \varepsilon) \cap O_0$
- On construit de proche en proche $(x_n, r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (E \times \mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, BF(x_n, r_n) \subset BO(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n, \text{ et } r_n \leq \frac{r_{n-1}}{2}$$

D'après le théorème précédente, le diamètre $\leq 2r_n \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$, il existe un point $\alpha \in E$ tel que :

$$\alpha \in BO(x, \varepsilon) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n \right)$$

☺

C'est un théorème très puissant conduisant à des résultats surprenants.

Proposition 2.2.4 Conséquence du théorème de Baire

Un espace complet ne peut être réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides.

Proof: En fait, O ouvert dense $\iff O^c$ fermé d'intérieur vide :

$$\dot{\overline{O}}^c = \bar{O}^c = E^c = \emptyset; \quad \overline{O}^c = \dot{\overline{O}}^c = \emptyset = \emptyset$$

☺

Example 2.2.4 (Utilisation du théorème)

Fonction polynomiales : $(\text{Vect}(\{x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}\}, N))$ n'est jamais complet, quelle que soit N .

Proof: Soit $E_n = \text{Vect}(\{x \mapsto x^k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\})$ fonctions polynomiales de degré $\leq n$. $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

- E_n fermé dans E (de dimension finie)
- $\dot{E}_n = \emptyset$ car si $x \in \dot{E}_n$, il existe $\varepsilon > 0$, $BO(x, \varepsilon) \subset E_n$, alors $\text{Vect}(BO(x, \varepsilon)) \subset E_n$, mais $\text{Vect}(BO(x, \varepsilon))$ est toujours E . (Voir proposition suivant) Contradiction.

☺

Proposition 2.2.5

Dans un espace vectoriel normé, toute boule ouverte non vide est une partie génératrice.

Proof: Soit (E, N) , $B = BO(x_0, r)$, $E_1 = \text{Vect}(B)$. On a

- $BO(0_E, r) \subset E_1$.
Si $x \in BO(0_E, r)$, $x + x_0 \in BO(x_0, r) \subset E_1$, de plus $x_0 \in E_1$ donc $x \in E_1$
- $E_1 = E$, soit $x \in E \setminus \{0_E\}$, donc

$$\frac{r}{2N(x)} \cdot x \in BO(0_E, r) \subset E_1 \implies x \in E_1$$

☺

Definition 2.2.2: Espace de Baire

La définition $\forall (O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ouverts denses, $\overline{\bigcap O_n} = E$ est une définition ne faisant pas intervenir la distance donc on peut s'utiliser quand on n'a pas de distance.

On la note **espace de Baire**.

Chapter 3

Applications aux espaces pré-hilbertiens

3.1 Espace préhilbertien

Definition 3.1.1: Espace préhilbertien; Espace euclidien; Espace hermitien

Les **espaces vectoriels préhilbertiens** sont des espaces vectoriels normés de corps \mathbb{K} dont la norme définie à l'aide d'un produit scalaire.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on parle d'**espace préhilbertien réel**, le produit scalaire est *bilinéaire* et *symétrique*.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on parle d'**espace préhilbertien complexe**, le produit scalaire est *sesqui-linéaire* (c'est-à-dire *linéaire à droite*, *semi-linéaire à gauche*) et *hermitien*.

De plus,

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ de dimension *finie*, on parle d'**espace euclidien**
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ de dimension *finie*, on parle d'**espace hermitien**

3.2 Système totale

3.2.1 Définition

En dimension infinie, on a très rarement des bases : Les bases sont essentiellement en dimension finie \mathbb{K}^n ou infinie dénombrable $\text{Vect}(\{x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}\})$.

Definition 3.2.1: Système total d'un espace préhilbertien

Soit E un espace préhilbertien de dimension infinie, I un ensemble *dénombrable infini*, une famille $(x_n)_{n \in I}$ est dite **système total** de E , si elle vérifie :

1. $(x_n)_{n \in I}$ est orthonormée

$$\forall (n, m) \in I^2, \langle x_n | x_m \rangle = \delta_{n,m}$$

2. Le sous-espace vectoriel engendré par les $(x_n)_{n \in I}$ est dense dans E , pour la norme associée au produit scalaire :

$$\overline{\text{Vect}(\{x_n, n \in I\})} = E$$

3.2.2 Formule de Parseval

Theorem 3.2.1 Inégalité de Bessel

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormée *dénombrable infinie* d'un espace préhilbertien de dimension infinie, alors

$$\forall x \in E, \sum |\langle x_n | x \rangle|^2 \text{ converge et } \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x_n | x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Proof: Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, Supposons $I = \mathbb{N}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormée.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \text{Vect}(\{x_0, \dots, x_n\})$ de dimension finie $n + 1$.

Soit $x \in E$,

$$p_{F_n}(x) = \sum_{k=0}^n \langle x_k | x \rangle \cdot x_k, \quad \|p_{F_n}(x)\|^2 = \sum_{k=0}^n |\langle x_k | x \rangle|^2$$

D'après le théorème de Pythagore, comme $p_{F_n}(x) \perp x - p_{F_n}(x)$, donc

$$\|x\|^2 = \|p_{F_n}(x)\|^2 + \|x - p_{F_n}(x)\|^2 \implies \sum_{k=0}^n |\langle x_k | x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Sachant que $\sum |\langle x_k, x \rangle|^2$ à termes positifs, de somme partielle majorée, donc elle converge et aussi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x_n | x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

⊕

De plus,

Theorem 3.2.2 Formule de Parseval

Si les $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment un système total d'un espace préhilbertien de dimension infinie, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x_n | x \rangle|^2 = \|x\|^2$$

Proof: Soit $x \in E$, $\varepsilon > 0$, d'après la définition de la densité, il existe $y \in \text{Vect}(\{x_n, n \in \mathbb{N}\})$ suffit $\|x - y\| \leq \varepsilon$.

y est donc une combinaison linéaire de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \text{Vect}(\{x_0, \dots, x_n\})$ de dimension finie $n + 1$.

Rappel que *Toute combinaison linéaire est une somme finie*, donc il existe $N \in \mathbb{N}$, $y \in F_N$. Si $n \geq N$, $F_N \subset F_n$, donc $y \in F_n$.

$$\varepsilon^2 \geq \|x - y\|^2 \geq \|x - p_{F_n}(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_{F_n}(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^n |\langle x_k | x \rangle|^2$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|x\|^2 - \sum_{k=0}^n |\langle x_k | x \rangle|^2 \leq \varepsilon^2 \implies \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x_n | x \rangle|^2 = \|x\|^2$$

⊕

Example 3.2.1 ($I = \mathbb{Z}$)

Lorsque $I = \mathbb{Z}$, nous noterons

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\langle x_n | x \rangle|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x_n | x \rangle|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x_{-n} | x \rangle|^2$$

Exemple 3.2.2 (Séries de Fourier)

Soit E l'ensemble des fonctions continues par morceaux de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , 2π -périodique, alors

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$$

munit E d'une structure d'espace préhilbertien complexe.

1. $(e_n : x \mapsto e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ est un système totale de E
2. Si l'on pose

$$c_n : f \mapsto \langle e_n | f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-int) f(t) dt$$

Alors la **formule de Parseval** donne :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$