

Électromagnétisme

Brandon LIN

October 27, 2023

Préliminaire :

- Électrostatique, Magnétostatique

Recommandé :

- Mécanique I
- Ondes unidimensionnelles

Contents

Chapter 1	Équations de Maxwell	Page 4
1.1	Rappels Distribution de charges — 6 • Distribution de courant — 6 • Distribution stationnaire — 7 • Conservation de la charge — 7 • Champs statiques — 9	6
1.2	Mathématique : Opérateurs Relations entre opérateurs — 10 • L'opérateur nabla — 10	10
1.3	Postulats fondamentaux de l'électromagnétisme Force de Lorentz — 11 • Équations de Maxwell — 11 • Loi d'Ohm — 12	11
1.4	Symétries du champ électromagnétique	13
1.5	Champ électromagnétique dans le vide Opérateur Laplacien vectoriel — 13 • Équations de Maxwell dans le vide — 14	13
1.6	Formulation intégrale de l'électromagnétisme Outil mathématique — 15 • Théorème de Gauss — 15 • Conservation du flux magnétique — 16 • Loi de Faraday — 16 • Théorème d'Ampère — 17 • Cas des distributions surfaciques — 17	15
1.7	Potentiel scalaire et potentiel vecteur, Approximation des Régimes Quasi Stationnaires Définitions — 19 • Indétermination — 19 • Jauge de Coulomb — 19 • Jauge de Lorentz — 20 • Equations de Poisson retardées — 20 • Solutions des potentiels retardés — 20 • Valabilité d'ARQS — 20 • Champ magnétique ARQS — 21 • Champ électrique ARQS — 21	19
Chapter 2	Aspects énergétiques de l'électromagnétisme	Page 22
2.1	Énergie Électromagnétique Densité d'énergie électromagnétique — 22 • Énergie électromagnétique — 22 • Situation statiques — 23	22
2.2	Transferts d'énergie électromagnétique Révision: Puissance volumique locale fournie aux charges — 24 • Vecteur de Poynting — 24 • Équation locale de Poynting — 24 • Bilan local dans le vide — 25 • Bilan intégral d'énergie électromagnétique — 25	24
2.3	Exemples Solénoïde parcouru par un courant variable — 26 • Condensateur plan circulaire — 27 • Résistance — 27	26
Chapter 3	Induction conducteurs immobiles	Page 28
3.1	Conducteur dans un champ magnétique variable Loi d'Ohm locale — 28 • Charge dans un conducteur ohmique — 29 • Exemple de courant induit — 30 • Effet de peau — 31	28
Chapter 4	Conducteurs en mouvement, Induction de Lorentz	Page 33

Chapter 5	Ondes électromagnétiques dans le vide	Page 34
5.1	Structure des ondes électromagnétiques Le champ électromagnétique dans le vide — 35 • Ondes Electromagnétiques Planes — 36 • Ondes Electromagnétiques Planes Progressives — 37 • Aspects énergétiques de l'OEMPP dans le vide — 38	35
5.2	Ondes Electromagnétiques Planes Progressives Harmoniques Définitions — 39 • Relation de dispersion — 40 • Polarisation des OEMPPH — 40	39
5.3	La lumière comme onde électromagnétique Signal Lumineux — 44 • Polarisation de la lumière — 44 • Lois de Malus — 48	44
5.4	Exercices	49

Chapter 1

Équations de Maxwell

ELECTROSTATIQUE ET MAGNÉTOSTATIQUE

- ▷ Toute l'électrostatique :
 - charge (volumique/surfacique/linéique)
 - champ électrique, propriétés et symétries, lien avec le potentiel électrostatique
 - théorème de Gauss
 - exemples d'utilisation du théorème de Gauss : boule uniformément chargée, plan infini uniformément chargé, cylindre infini uniformément chargé (activité 1.2 du cours)
 - Calculs de potentiel V
- ▷ Toute la magnétostatique :
 - densité volumique/surfacique/linéique de courant
 - champ magnétique, propriétés et symétries
 - théorème d'Ampère
 - exemples d'utilisation du théorème d'Ampère : fil cylindrique infini parcouru par un courant uniformément réparti, nappe plane infinie avec densité de courant surfacique uniforme, solénoïde infini (activité 1.3 du cours)

POSTULATS FONDAMENTAUX DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

- ▷ Force de Lorentz en régime statique et régime variable
- ▷ Equations de Maxwell dans le cas général et dans le cas statique
- ▷ Équation de conservation de la charge \textcircled{D}

FORMULATION INTÉGRALE DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

- ▷ Maxwell-Gauss et lien avec le théorème de Gauss \textcircled{D}
- ▷ Maxwell-Ampère et lien avec le théorème d'Ampère généralisé \textcircled{D} . Cas statique.
- ▷ Maxwell-Faraday et forme intégrale \textcircled{D}
- ▷ Maxwell-flux et forme intégrale

ARQS

- ▷ Définition et critères (fréquence/temps/distance) de cette approximation.
- ▷ Modification des équations de Maxwell dans le cas de l'ARQS magnétique \textcircled{D}

Figure 1.1: Programme du chapitre 1

1.1 Rappels

Pour plus d'information, aller voir mes notes d'électromagnétisme(1re année) : [le cours d'électromagnétisme](#).

1.1.1 Distribution de charges

Proposition 1.1.1 Distribution de charges

- Linéique

$$dq(P) = \lambda(P) \times dl$$

- Surfaique

$$dq(P) = \sigma(P) \times d\Sigma$$

- Volumique

$$dq(P) = \rho(P) \times dV$$

1.1.2 Distribution de courant

Definition 1.1.1: Vecteur densité de courant

Chaque porteur de charges est en mouvement à la vitesse moyenne $\vec{v}(M, t)$.

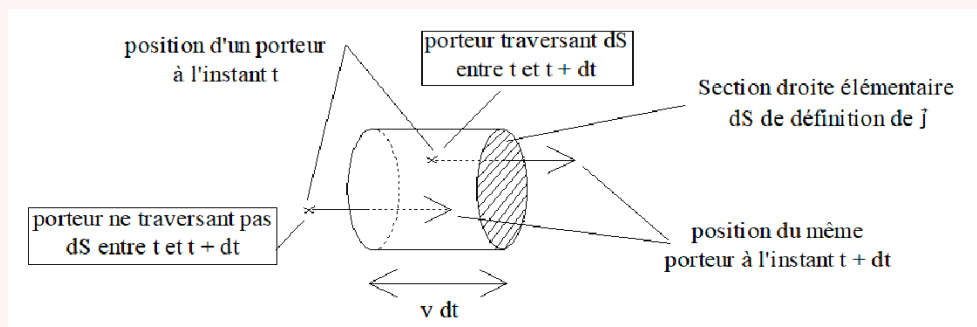


Figure 1.2: Vecteur densité de courant

Calculons la charge $\delta^2 q$ qui traverse un élément de surface $d\vec{S}$ pendant une durée dt :

$$\rho \times (v dt \times ds) = \delta^2 q \quad (1.1)$$

On définit le **vecteur densité de courant** $\vec{j}(M, t)$ tel que

$$\boxed{\delta^2 q = \vec{j} \cdot d\vec{S} dt} \implies \vec{j} = \rho \vec{v}$$

Proposition 1.1.2 Intensité du courant électrique

Un **courant réparti en volume** est caractérisé par un vecteur densité de courant $\vec{j}(M, t)$,

- L'intensité qui traverse un élément de surface dS_M de normale \vec{n}_M au voisinage du M à l'instant t est :

$$dI_M = \vec{j}(M, t) \cdot \vec{n}_M dS_M$$

- j tangent aux lignes de courant

- L'intensité du courant I traversant un conducteur de section S est le *flux* du vecteur densité de courant traversant cette section : (Grandeur *macroscopique*)

$$I = \iint_{(S)} \vec{j}(M, t) \cdot \vec{n}_M \cdot dS_M$$

- Intensité surfacique

$$I = \int_{(L)} \vec{j}_s \cdot \vec{n}_M \cdot dl \text{ avec } \vec{j}_s = \sigma \vec{v}$$

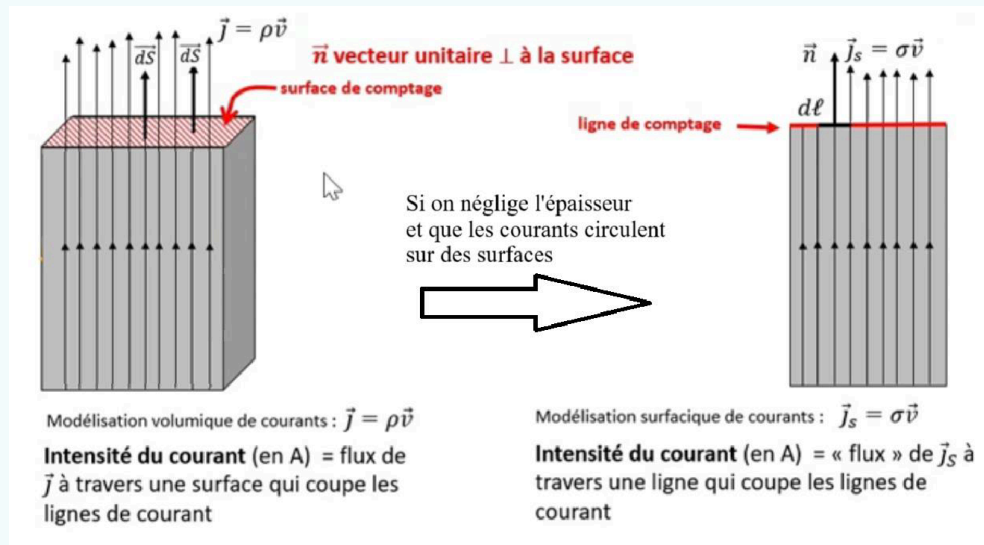


Figure 1.3: Intensité du courant surfacique

1.1.3 Distribution stationnaire

Les distributions sont dites stationnaires si elles sont indépendantes du temps :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0, \quad \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}(M, t) = 0 \quad (1.2)$$

1.1.4 Conservation de la charge

Proposition 1.1.3 Equation locale de la conservation de charge

$$\operatorname{div} \vec{j}(M, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0$$

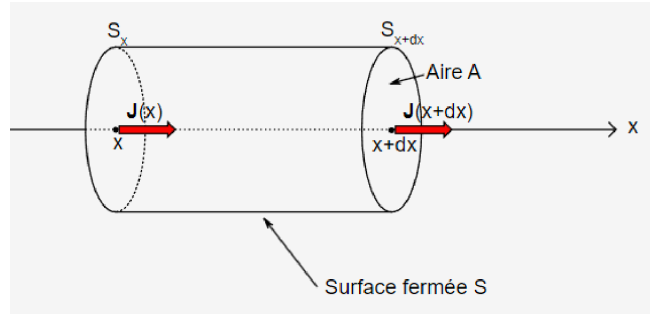


Figure 1.4: Preuve - Conservation des charges

Proof: • À la date t , il y a une quantité de charge : $d^2q(t) = \rho(x, t)d\tau$, et à la date $t + dt$, $d^2q(t + dt) = \rho(x, t + dt)d\tau$ dans le volume $d\tau$.

- Bilan spatial :

$$\begin{aligned}
 \delta^2 q &= \delta^2 q_{\text{entrant}} - \delta^2 q_{\text{sortant}} \\
 &= \iint_{(S)} \vec{j}(x, t) \cdot \vec{dS} dt - \iint_{(S)} \vec{j}(x + dx, t) \cdot \vec{dS} dt \\
 &= [j(x, t) - j(x + dx)] S \cdot dt \\
 &= -dx \cdot \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} S \cdot dt
 \end{aligned}$$

Donc,

$$-dx \cdot \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} S dt = \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dt \cdot d\tau$$

Finalement,

$$\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = 0$$

☺

Proof: Généralisation à (3D) : - Flux sortant = Changement de densité :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} d\tau = \oint_{\Sigma} -\vec{j}(P, t) \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (1.3)$$

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \text{div} \vec{j}(M, t) \right] d\tau = 0 \quad (1.4)$$

☺

Proposition 1.1.4 Conséquences en régime stationnaire

- Si ρ indépendant du temps, alors $\text{div} \vec{j} = 0$
- On en déduit que \vec{j} est à flux conservatif
- Le long d'un tube de champ, $I_1 = I_2$
- La loi des noeuds

1.1.5 Champs statiques

- Soit une charge immobile q_t placée en un point M . Plongée dans un champ $\vec{E}(M)$, cette charge subie une force $\vec{F} = q_t \vec{E}(M)$
- Soit une charge mobile q_t se déplaçant à la vitesse \vec{v} . Plongée dans un champ $\vec{B}(M)$, cette charge subie une force $\vec{F} = q_t \vec{v} \wedge \vec{B}(M)$

1.2 Mathématique : Opérateurs

Voir le dossier [Formulaire d'analyse vectorielle](#)

1.2.1 Relations entre opérateurs

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot} X}) = 0 \quad (1.5)$$

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad} X}) = \Delta X \quad (1.6)$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot} X}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \overrightarrow{X}) - \Delta \overrightarrow{X} \quad (1.7)$$

1.2.2 L'opérateur nabla

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} A = \overrightarrow{\nabla} A \quad (1.8)$$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{X} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{X} \quad (1.9)$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{X} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{X} \quad (1.10)$$

$$\Delta A = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} A \quad (1.11)$$

1.3 Postulats fondamentaux de l'électromagnétisme

1.3.1 Force de Lorentz

$$\vec{F} = q_t(\vec{E}(M, t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(M, t)) \quad (1.12)$$

1.3.2 Équations de Maxwell

Theorem 1.3.1 Equations de Maxwell

Le champ électromagnétique et les densité de charge et de courant vérifient localement 4 équations :

$$\text{Équation de Maxwell-Gauss} \quad \text{div} \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0} \quad (1.13)$$

$$\text{Équation de conservation du flux magnétique} \quad \text{div} \vec{B}(M, t) = 0 \quad (1.14)$$

$$\text{Équation de Maxwell-Faraday} \quad \text{rot} \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} \quad (1.15)$$

$$\text{Équation de Maxwell-Ampère} \quad \text{rot} \vec{B}(M, t) = \mu_0 \left(\vec{j}(M) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \right) \quad (1.16)$$

Cas statique

Proposition 1.3.1 Equations de Maxwell statique

$$\text{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} \quad (1.17)$$

$$\text{div} \vec{B}(M) = 0 \quad (1.18)$$

$$\text{rot} \vec{E}(M) = \vec{0} \quad (1.19)$$

$$\text{rot} \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}(M) \quad (1.20)$$

Remarques

Definition 1.3.1: Vecteur densité de courant de déplacement

$$\vec{j}_D(M, t) = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \quad (1.21)$$

Linéarité

Proposition 1.3.2 Principe de superposition

Les équations de Maxwell sont linéaires. Les solutions vérifient le principe de superposition.

Couplage

Proposition 1.3.3 Couplage

Les équations de Maxwell donne deux types de couplages :

- Deux champs, électronique et magnétique
- Deux champs de distribution, courant et charges

Les champs $\{\vec{j}(M, t), \rho(M, t)\}$ sont conjointement sources des champs électroniques et magnétiques.

Application : Vérification de la conservation de la charge

Proposition 1.3.4 Conservation de la charge

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.22)$$

Proof: Utilise $\operatorname{div}(MA)$ et $\operatorname{div} \vec{E}$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{B}) = \mu_0 \operatorname{div} \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (1.23)$$

$$0 = \operatorname{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{E}) \quad (1.24)$$

☺

1.3.3 Loi d'Ohm

Présentera dans la partie 3.1.1 :

Theorem 1.3.2 Loi d'Ohm

Pour un conducteur électrique,

$$\vec{j}(M, t) = \gamma \vec{E}(M, t) \quad (1.25)$$

1.4 Symétries du champ électromagnétique

Considérons une source constituée de charge et de courant de distributions $\{\rho(P, t), \vec{j}(P, t)\}$,

- Les plans de symétrie des sources sont les plans de symétrie du champ \vec{E} et les plans d'anti-symétrie du champ \vec{B} .

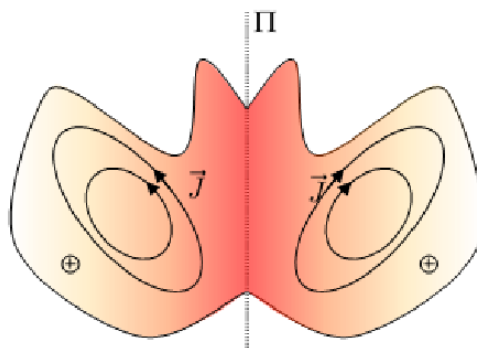


Figure 1.5: Distribution symétrique

- Les plans de anti-symétrie des sources sont les plans de anti-symétrie du champ \vec{E} et les plans d'symétrie du champ \vec{B} .

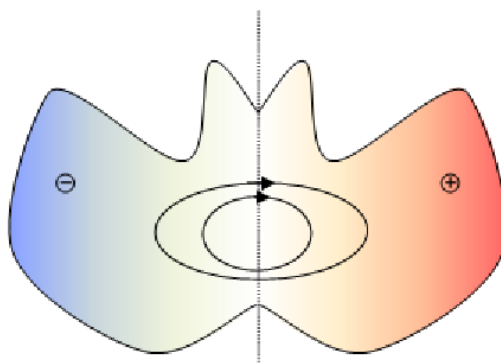


Figure 1.6: Distribution anti-symétrique

1.5 Champ électromagnétique dans le vide

1.5.1 Opérateur Laplacien vectoriel

Definition 1.5.1: Opérateur Laplacien vectoriel

$$\Delta \vec{A} = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) \quad (1.26)$$

Exemple 1.5.1 (Coordonnées cartésiennes)

$$\Delta \vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^{(2)}} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^{(2)}} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^{(2)}} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^{(2)}} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^{(2)}} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^{(2)}} \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

1.5.2 Équations de Maxwell dans le vide

Proposition 1.5.1 Champ Électromagnétique dans le vide

Dans le vide,

- Equation de Maxwell-Gauss (M.G.)

$$\text{div } \vec{E}(M, t) = 0$$

- Equation de Maxwell-Flux (M.φ.)

$$\text{div } \vec{B}(M, t) = 0$$

- Equation de Maxwell-Faraday (M.F.)

$$\vec{\text{rot}} \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$$

- Equation de Maxwell-Ampère (M.A.)

$$\vec{\text{rot}} \vec{B}(M, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}$$

Proposition 1.5.2 Équations de d'Alembert

Les champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ peuvent être découplés, on obtient alors les équations de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Proof: Rappel que : $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{B})$$

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

On note $c^2 = 1/(\varepsilon_0 \mu_0)$, de même façon, on calcule le rotation de l'équation de (M.A)

☺

1.6 Formulation intégrale de l'électromagnétisme

1.6.1 Outil mathématique

Theorem 1.6.1 Théorème de Green-Ostrogradski

$$\oiint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iiint_{(V)} \text{div} \vec{A} d\tau \quad (1.28)$$

Le flux d'un champ vectoriel \vec{A} sortant d'une surface fermée (S) est égal à l'intégrale de sa divergence étendue au volume (V) délimité par (S)

Theorem 1.6.2 Théorème de Stokes

$$\oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (1.29)$$

La circulation du champ vectoriel \vec{A} est égale au flux du rotationnel de \vec{A} à travers toute surface (S_c) s'appuyant sur un contour fermé **orienté**.

1.6.2 Théorème de Gauss

Theorem 1.6.3 Théorème de Gauss

$$(MG) \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.30)$$

$$(\text{Green-Ostrogradski}) \quad \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iiint \text{div} \vec{E} d\tau = \iiint \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau \quad (1.31)$$

$$\boxed{\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}} \quad (1.32)$$

Cas du vide

$$Q_{int}(t) = 0 \implies \oiint \vec{E}(M, t) \cdot \vec{n}_{ext, M} dS = 0 \quad (1.33)$$

Le champ électrique dans le vide est donc à flux conservatif ($\text{div} \vec{E} = 0$)

Example 1.6.1

Une sphère chargée de rayon R , placée dans un conducteur ohmique de conductivité γ . La charge totale de la sphère évolue avec le temps.

Proof:

$$E(R, t) \times 4\pi R^2 = \frac{Q(t)}{\epsilon_0} \quad (1.34)$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -J(R, t) \times 4\pi R^2 \quad (1.35)$$

$$J(R, t) = \gamma E(R, t) \quad (1.36)$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} Q(t) = 0 \implies Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (1.37)$$

1.6.3 Conservation du flux magnétique

Theorem 1.6.4 Conservation du flux magnétique

$$(M\Phi) \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (1.38)$$

$$(\text{Green-Ostrogradski}) \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iiint \text{div } \vec{B} \cdot d\tau = 0 \quad (1.39)$$

Donc, le flux de \vec{B} à travers une surface fermée est nul.

Conséquence

- **Tube de champ \vec{B}** : Le flux de \vec{B} à travers une section de tube de champ est indépendant de cette section. (= champ magnéostatique)
- **Notion de flux à travers un contour** : Le flux de \vec{B} à travers une surface s'appuyant sur un contour ne dépend que du contour, et pas de la surface particulière choisie.

$$\iint \vec{B} \cdot \vec{n}_1 dS = \iint \vec{B} \cdot \vec{n}_2 dS \quad (1.40)$$

1.6.4 Loi de Faraday

Theorem 1.6.5 Loi de Faraday

Notons $\Phi_{\vec{B}/(C)}$ le flux du champ \vec{B} à travers la surface S_C donc à travers le contour C :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M, t) \quad (1.41)$$

$$\oint_{(C)} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{l}_M = \iint_{(S_C)} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M, t) \cdot \vec{n}_M \cdot dS_M = -\frac{d}{dt} \iint_{(S_C)} \vec{B}(M, t) \cdot \vec{n}_M \cdot dS_M \quad (1.42)$$

$$\boxed{\oint_{(C)} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{l}_M = -\frac{d\Phi_{\vec{B}/(C)}}{dt}(t)} \quad (1.43)$$

Cas stationnaire

$$-\frac{d\Phi_{\vec{B}/(C)}}{dt}(t) = 0 \implies \oint_{(C)} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{l}_M = 0 \quad (1.44)$$

Le champ électrostatique est à circulation conservative. Donc, c'est impossible d'avoir des lignes de champ électrique fermées.

MAIS, en régime dépendant du temps, ils peuvent être fermées !!

1.6.5 Théorème d'Ampère

Theorem 1.6.6 Théorème d'Ampère

Théorème d'Ampère généralisé :

$$(MA) \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.45)$$

$$(\text{Théorème de Stokes}) \quad \oint_{(C)} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{l}_M = \mu_0 \iint_{(S_c)} \vec{j}(M, t) \cdot \vec{n}_M dS_M + \mu_0 \iint_{(S_c)} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \cdot \vec{n}_M dS_M \quad (1.46)$$

$$\oint_{(C)} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{l}_M = \mu_0 \iint_{(S_c)} \vec{j}(M, t) \cdot \vec{n}_M dS_M + \mu_0 \iint_{(S_c)} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \cdot \vec{n}_M dS_M \quad (1.47)$$

Intensité du courant de déplacement

$$\oint_{(C)} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{l}_M = \mu_0 (I_{\text{enlacé}} + I_D) \quad (1.48)$$

Notant l'intensité du courant de déplacement :

$$I_{D,(S_c)} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_{(S_c)} \vec{E}(M, t) \cdot \vec{n}_M dS_M \quad (1.49)$$

1.6.6 Cas des distributions surfaciques

Remarque :

- Dans une distribution volumique, \vec{E} et \vec{B} sont continues en tout point.
- Le potentiel est TOUJOURS continue.

Champ électrique

Considérons une distribution de charges où les charges sont localisées sur le plan infini $z = 0$ avec une densité de charge uniforme σ . À l'aide du théorème de Gauss, le champ électrostatique est :

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z (z > 0), \quad \vec{E}(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z (z < 0) \quad (1.50)$$

Le champ électrique est donc discontinue en $z = 0$, avec la discontinuité

$$\vec{E}(z = 0^+) - \vec{E}(z = 0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z \quad (1.51)$$

Proposition 1.6.1 Relation de passage pour le champ électrique

Cas général :

$$\vec{E}(M^+, t) - \vec{E}(M^-, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\varepsilon_0} \vec{n}_M \quad (1.52)$$

- Continuité de la composante tangentielle du champ électrique

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{t}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{t}_{1 \rightarrow 2} \quad (1.53)$$

$$E_{2T} - E_{1T} = 0 \implies E_{2T} = E_{1T} \quad (1.54)$$

- Discontinuité de la composante normale du champ électrique

Champ magnétique

Proposition 1.6.2 Relation de passage pour le champ magnétique

Cas général :

$$\vec{B}(M^+, t) - \vec{B}(M^-, t) = \mu_0 \vec{j}_S(M, t) \wedge \vec{n}_M \quad (1.55)$$

- Discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique
- Continuité de la composante normale du champ magnétique

1.7 Potentiel scalaire et potentiel vecteur, Approximation des Régimes Quasi Stationnaires

1.7.1 Définitions

Definition 1.7.1: Potentiel vecteur et Potentiel scalaire

Potentiel vecteur :

$$(M\varphi) \quad \text{div} \vec{B} = 0 \implies \exists \vec{A}(M, t), \quad \boxed{\vec{B}(M, t) = \text{rot} \vec{A}(M, t)}, \quad \text{div}(\text{rot} \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = 0 \quad (1.56)$$

Potentiel scalaire : en injectant dans l'équation (MF) :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot} \vec{A}) = -\text{rot}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \quad (1.57)$$

$$\text{rot} \left(\vec{E}(M, t) + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(M, t) \right) = \vec{0} \quad (1.58)$$

$$\exists V(M, t), \quad \boxed{\vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(M, t) - \text{grad} V(M, t)} \quad (1.59)$$

1.7.2 Indétermination

Soient deux couples de potentiels $\{\vec{A}, V\}$ et $\{\vec{A}', V'\}$ associé à un champ électromagnétique.

$$\vec{B}(M, t) = \text{rot} \vec{A} = \text{rot} \vec{A}' \implies \text{rot}(\vec{A} - \vec{A}') = \vec{0} \quad (1.60)$$

Donc $(\vec{A} - \vec{A}')$ est à circulation conservative. Il existe un champ scalaire $g(M, t)$ tel que :

$$\boxed{\vec{A} - \vec{A}' = -\text{grad} g} \quad (1.61)$$

Ensuite,

$$-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} V = -\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \text{grad} V' \quad (1.62)$$

$$\text{grad}(V - V') = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}' - \vec{A}) = -\frac{\partial}{\partial t}(-\text{grad} g) \quad (1.63)$$

$$\boxed{V - V' = \frac{\partial g}{\partial t}} \quad (1.64)$$

Conclusion :

$$\vec{A}'(M, t) = \vec{A}(M, t) + \text{grad} g(M, t) \quad \text{et} \quad V'(M, t) = V(M, t) - \frac{\partial g}{\partial t}(M, t) \quad (1.65)$$

Transformation de jauge : transformation qui fait passer d'un couple de potentiel à un autre.

1.7.3 Jauge de Coulomb

En régime statique ou quasi-statique, il est commode de choisir un potentiel vecteur

- indépendant du temps

- La condition : **Jauge de Coulomb** : $\boxed{\text{div} \vec{A}(M, t) = 0}$

1.7.4 Jauge de Lorentz

En régime dépendant du temps, il est plus intéressant de fixer la condition, appelée **Jauge de Lorentz** :

$$\operatorname{div} \vec{A}(M, t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t}(M, t) = 0 \quad (1.66)$$

1.7.5 Equations de Poisson retardées

Dans le cas de la jauge de Lorentz, on peut découpler V et \vec{A}

Proposition 1.7.1 Equations de Poisson retardées

- **Potentiel scalaire :**

$$\Delta V(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V(M, t)}{\partial t^2} = -\frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0} \quad (1.67)$$

- **Potentiel vecteur :**

$$\Delta \vec{A}(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(M, t)}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}(M, t) \quad (1.68)$$

Proof: Respectivement,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V \right) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.69)$$

$$\Delta \vec{A} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \left(-\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t}(M, t) \right) - \operatorname{rot} \vec{B} \quad (1.70)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V \right) \quad (1.71)$$

☺

1.7.6 Solutions des potentiels retardés

$$V(M, t) = \iiint_{(D)} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(P, t - PM/c)}{PM} d\tau_P, \quad \vec{A}(M, t) = \iiint_{(D)} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(P, t - PM/c)}{PM} d\tau_P \quad (1.72)$$

Dans le cas de distributions statiques, nous retrouvons les expressions rencontrées en électrostatique et magnétostatique.

Notation :
ARQS = **A**pproximation des **R**égimes **Q**uasi **S**tationnaires

1.7.7 Valabilité d'ARQS

Tout changement des sources en P est immédiatement perceptible en tout point M :

$$\rho(P, t - PM/c) \approx \rho(P, t), \quad \vec{j}(P, t - PM/c) \approx \vec{j}(P, t) \quad (1.73)$$

ARQS valable si :

$$PM \ll \lambda, \quad \frac{PM}{c} \ll \tau \quad (1.74)$$

1.7.8 Champ magnétique ARQS

Le champ magnétique sera donné par la même relation que l'expression du champ magnétostatique du même circuit.

1.7.9 Champ électrique ARQS

La champ électrique n'est plus égal à celle du champ électrostatique :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_{QS}(t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(M, t) \quad (1.75)$$

Chapter 2

Aspects énergétiques de l'électromagnétisme

2.1 Énergie Électromagnétique

2.1.1 Densité d'énergie électromagnétique

Pour établir un tel champ $\{\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t)\}$ dans un petit volume d'espace au voisinage d'un point M , un opérateur doit fournir une énergie :

$$dW_{em} = w_{em}(M, t)d\tau_M \quad (2.1)$$

avec w_{em} est la **densité volumique d'énergie électromagnétique**, s'exprime en $J.m^{-3}$, sous la forme (sans démonstration) :

$$w_{em}(M, t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(M, t) + \frac{1}{2\mu_0} B^2(M, t) \quad (2.2)$$

2.1.2 Énergie électromagnétique

Dans un volume V donné, l'énergie électromagnétique totale est la somme des énergies de chaque volume :

$$E_{em}(t) = \iiint_{(V)} w_{em}(M, t)d\tau_M \quad (2.3)$$

Pour créer une distribution donnée de charge il faut dépenser l'énergie électromagnétique associée qui règne dans tout l'espace.

2.1.3 Situation statiques

Condensateur plan

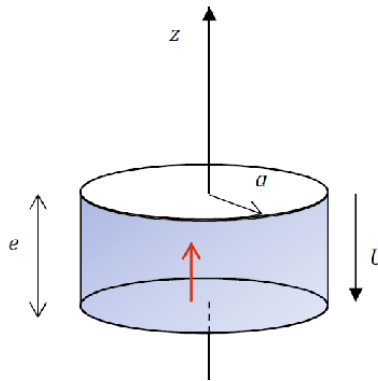


Figure 2.1: Condensateur plan

Entre les armatures du condensateur : $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$, ailleurs $\vec{E} = \vec{0}$.

- $Q = \sigma \pi a^2$
- Énergie stockée :

$$W_{el} = E_{el} = \iiint \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} \pi a^2 e \quad (2.5)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sigma^2 \pi a^2}{\epsilon_0} e \quad (2.6)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (2.7)$$

- Avec $C = \epsilon_0 \frac{S}{l}$

Sphère chargée en surface

Bobine parcourue par un courant

2.2 Transferts d'énergie électromagnétique

2.2.1 Révision: Puissance volumique locale fournie aux charges

Lorsque des charges se déplacent dans un conducteur, la force électromagnétique fournit une certaine puissance :

$$\vec{F}_{\rightarrow q} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (2.8)$$

La puissance de cette force :

$$P_{\rightarrow q} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v} \quad (2.9)$$

Dans un petit volume $d\tau$:

$$p_v = \frac{nq \times d\tau \vec{E} \cdot \vec{v}}{d\tau} = nq \vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (2.10)$$

Finalement, la **puissance volumique reçue par les charges** :

$$p_v(M) = \vec{j}(M) \cdot \vec{E}(M) \quad (2.11)$$

2.2.2 Vecteur de Poynting

On définit le **vecteur de Poynting**, ou **bilan local d'énergie électromagnétique** par :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_0} \quad (2.12)$$

s'exprime en W.m^{-2} , il s'agit d'une puissance par unité de surface.

2.2.3 Équation locale de Poynting

L'**Équation locale de Poynting** s'écrit :

$$\boxed{\text{div}(\vec{\Pi}(M, t)) + \frac{\partial w_{em}(M, t)}{\partial t} = -\vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t)} \quad (2.13)$$

où

$$p_v(M, t) = \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t) \quad (2.14)$$

représente la **puissance volumique locale fournie aux charges** par le biais de la force de Lorentz.

Proof: • Outil mathématique 1 :

$$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{E}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} - \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \quad (2.15)$$

• Outil mathématique 2 :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B} \cdot \vec{B}) = 2 \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.16)$$

• D'après l'équation Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.17)$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.18)$$

En utilisant le résultat précédent :

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} [\vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot \vec{E}] - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \quad (2.19)$$

$$= \frac{1}{\mu_0} [\vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{E} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B})] - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \quad (2.20)$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{B} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) \right] - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \quad (2.21)$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} B^2 + \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) \right] + \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \quad (2.22)$$

☺

2.2.4 Bilan local dans le vide

Dans le vide, la densité de courant est nulle. Par conséquent, nous aurons :

$$\text{div}(\vec{\Pi}(M, t)) + \frac{\partial w_{em}(M, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.23)$$

qui est à rapprocher de l'équation locale de conservation de la charge.

2.2.5 Bilan intégral d'énergie électromagnétique

Considérons une surface fermée délimitant un volume. L'énergie électromagnétique contenue dans ce volume est :

$$E_{em}(t) = \iiint_{(V)} d\tau_M \quad (2.24)$$

Elle varie en fonction du temps, et d'après l'équation locale de Poynting 2.13 :

$$\frac{dE_{em}}{dt}(t) = \iiint_{(V)} \frac{\partial w_{em}(M, t)}{\partial t} d\tau_M \quad (2.25)$$

$$= \iiint_{(V)} -\text{div}(\vec{\Pi}(M, t)) d\tau_M - \iiint_{(V)} \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t) d\tau_M \quad (2.26)$$

$$= \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi}(M, t) \cdot \vec{n}_{\text{int}, M} dS_M - P_{\rightarrow \text{charges}} \quad (2.27)$$

Conclusion, l'énergie électromagnétique varie au cours du temps sous l'effet de deux causes :

- l'énergie qui est donnée aux charges
- terme complémentaire s'exprime comme un flux à travers la surface limitant le volume (V)

2.3 Exemples

2.3.1 Solénoïde parcouru par un courant variable

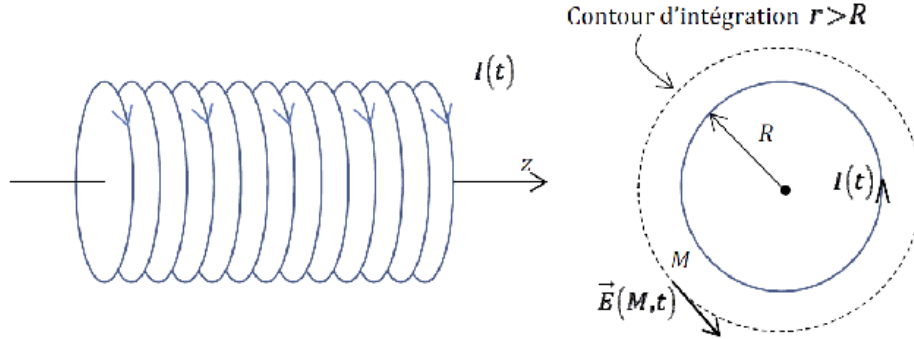


Figure 2.2: Solénoïde parcouru par un courant variable

- Symétrie et invariance : $\vec{E}(M, t) = E(r, t)\vec{e}_\theta$, $\vec{B}(M, t) = B(r, t)\vec{e}_z$
- Dans l'ARQS, $\vec{B}(M, t) = \vec{B}_{QS}(M, t) = \mu_0 n I \vec{e}_z$ à l'intérieur et $\vec{0}$ à l'extérieur.
- À l'aide de la loi de Faraday, on obtient

$$E(r, t) = \begin{cases} -\mu_0 \frac{nr}{2} \frac{dI(t)}{dt} & (r < R) \\ -\mu_0 n \frac{R^2}{2r} \frac{dI(t)}{dt} & (r > R) \end{cases} \quad (2.28)$$

On observe que à l'extérieur du solénoïde, $\vec{B}(M, t) = \vec{0}$ alors que $\vec{E}(M, t) \neq \vec{0}$. Comme \vec{E} selon \vec{e}_θ , les lignes de champ sont fermées (différent du cas d'électrostatique)

- À l'intérieur, La densité d'énergie dans le solénoïde est essentiellement sous forme magnétique

Proof: On les exprime :

$$w_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(-\mu_0 n \frac{r}{2} \frac{dI}{dt} \right)^2, \quad w_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0 n I(t))^2 \quad (2.29)$$

La proportion :

$$\frac{w_{mag}}{w_{el}} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{4}{r^2} \frac{I^2(t)}{\left(\frac{dI}{dt}\right)^2} \quad (2.30)$$

Pour un courant variable du type $I(t) = I_0 \cos \omega t$, $\langle I^2 \rangle = I_0^2/2$ et $\langle \dot{I}^2 \rangle = I_0^2 \omega^2/2$: (Rappel : $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$)

$$\frac{\langle w_{mag} \rangle}{\langle w_{el} \rangle} = \frac{4c^2}{r^2 \omega^2} \quad (2.31)$$

La condition d'ARQS s'impose : $R \ll \lambda$ donc $r \ll c \times 2\pi/\omega$. Enfin,

$$\frac{\langle w_{mag} \rangle}{\langle w_{el} \rangle} \gg \frac{1}{\pi^2} \quad (2.32)$$

- Le vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi}(t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\mu_0 n^2 \frac{r}{2} I(t) \frac{dI(t)}{dt} \vec{e}_r \quad (2.33)$$

- Puissance électromagnétique rentrante :

$$- \iint_{(S)} \vec{\Pi}(r = R^-, t) \cdot d\vec{S}_{ext} = +\mu_0 n^2 R I(t) \frac{dI(t)}{dt} \pi R l \quad (2.34)$$

- Cas $r = R^-$. Variation d'énergie électromagnétique dans le volume vide (V) :

$$\frac{dw_{em}}{dt} = \mu_0 n^2 R^2 \pi l \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I^2(t) \right) \quad (2.35)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L I^2(t) \right) \text{ avec } L = \mu_0 n^2 R^2 \pi l = \mu_0 \frac{N^2}{l} R^2 \pi \quad (2.36)$$

- Cas $r = R^+$. Comme $\vec{B}_{ext} = \vec{0}$ donc $\vec{\Pi}(r = R^+, t) = \vec{0}$.

$$\frac{dW_{em}}{dt} = - \iiint_{(V)} \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t) d\tau \quad (2.37)$$

Par continuité :

$$\frac{dW_{em}}{dt} \Big|_{r=R^-} = \frac{dW_{em}}{dt} \Big|_{r=R^+} \quad (2.38)$$

Résultat : L'énergie électromagnétique du système est intégralement prélevée ou fournie aux charges qui circulent dans le solénoïde :

$$P_{\rightarrow q} = - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L I^2 \right) \quad (2.39)$$

2.3.2 Condensateur plan circulaire

2.3.3 Résistance

Chapter 3

Induction conducteurs immobiles

D'après les équations de Maxwell, un champ magnétique dépendant du temps peut engendrer un champ électrique.

Ce champ électrique est susceptible de mettre en mouvement des charges électriques au sein d'un conducteur et donc de créer des courants. On parle de **courants induits**.

3.1 Conducteur dans un champ magnétique variable

3.1.1 Loi d'Ohm locale

Modèle de Drude

Quand on émet un électron se déplace dans un métal, il subit des chocs avec les atomes du temps. Ces collisions freinent le déplacement de l'électron. Il est soumis à une force de frottement d'expression :

$$\vec{F}_f = -\frac{m}{\tau} \vec{v} \quad (3.1)$$

Analyse dimensionnelle

$$[\|\vec{F}_f\|] = \frac{[m]}{[\tau]} [\|\vec{v}\|] \implies [\tau] = \frac{[m]}{[F]} [v] = \frac{ML.T^{-1}}{MLT^{-2}} = T \quad (3.2)$$

Remarque : τ

- représente la durée moyenne entre 2 collisions
- τ est appelé **temp caractéristique d'amortissement**
- $\tau \approx 10^{-12}$ à 10^{-15} s

Analyse mécanique

- Système étudié : Un électron de charge $q = -e$, de masse m
- Référentiel d'étude : référentiel terrestre supposé galiléen, repère lié au conducteur
- Bilan des forces :
 - Le poids de l'électron : \vec{P} est négligeable
 - La force de frottement 3.1 : $\vec{F}_f = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$
 - Présence de (\vec{E}, \vec{B}) , force de Lorentz : $\vec{F}_l = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \approx q\vec{E}$

Proof: Raison de négligence Or $B = E/c$ dans la vide mais aussi dans le métal,

$$\frac{qvB}{qE} = \frac{v}{c} \ll 1 \quad (3.3)$$

☺

– PFD :

$$q\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \text{ or } \vec{j} = nq\vec{v} \quad (3.4)$$

$$q\vec{E} - \frac{m}{\tau}\frac{\vec{j}}{nq} = \frac{m}{nq}\frac{d\vec{j}}{dt} \quad (3.5)$$

- En régime statique : $\frac{d\vec{j}}{dt} = 0$

$$q\vec{E} = \frac{m}{\tau}\frac{\vec{j}}{nq} \quad (3.6)$$

$$\vec{j} = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E} = \gamma\vec{E} \quad (3.7)$$

avec

$$\gamma = \frac{n(-e)^2\tau}{m} = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (3.8)$$

est appelé **conductivité électrique** d'un conducteur. Il dépend du caractéristique du métal (n : densité de charges par unité de volume)

- En régime dépendant du temps :

$$q\vec{E}(t) - \frac{m}{\tau nq}\frac{d\vec{j}(t)}{dt} = \frac{m}{nq}\frac{d\vec{j}(t)}{dt} \quad (3.9)$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}\vec{j}(t) = \frac{nq^2}{m}\vec{E}(t) = \frac{\gamma}{\tau}\vec{E} \quad (3.10)$$

Pour une variation de type sinusoïdale $\underline{\vec{j}}(t) = j(t)\exp(i\omega t + \varphi_i)$ avec $i^2 = -1$.

$$\left[i\omega + \frac{1}{\tau}\right]\underline{\vec{j}} = \frac{\gamma}{\tau}\underline{\vec{E}} \quad (3.11)$$

$$\underline{\vec{j}} = \frac{\gamma}{\tau(i\omega + \frac{1}{\tau})}\underline{\vec{E}} = \left(\frac{\gamma}{1 + i\omega\tau}\right)\underline{\vec{E}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}} \quad (3.12)$$

Si $\omega\tau \ll 1$, alors $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}}$, c'est-à-dire si $f \ll 10^{12}$ Hz.

3.1.2 Charge dans un conducteur ohmique

Équation de conservation de la charge et loi d'Ohm locale

$$\text{div}\vec{j}(M, t) + \frac{\partial\rho(M, t)}{\partial t} = 0 \text{ or } \vec{j}(M, t) = \gamma\overrightarrow{E(M, t)} \quad (3.13)$$

$$\text{div}|\gamma\vec{E}(M, t)| + \frac{\partial\rho(M, t)}{\partial t} = 0 \text{ or Maxwell-Gauss} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial\rho(M, t)}{\partial t}(M, t) + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho(M, t) = 0 \quad (3.15)$$

Hypothèse : À $t = 0$ on a créé une densité de charge ρ_0 .

Solutions de l'équation différentielle

$$\rho(M, t) = \rho_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon_0}t\right) = \rho_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right) \quad (3.16)$$

avec $\tau_c = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$ est appelé **temps de relaxation des charges**. (ODG : Pour les métaux : $\tau_c \approx 10^{-19}$ s)

Conclusion : La charge disparaît presque

Régime sinusoïdal

En régime sinusoïdal, de pulsation ω :

$$\frac{\partial \underline{\rho}(M, t)}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \underline{\rho}(M, t) = 0 \quad (3.17)$$

$$\left(i\omega + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \right) \underline{\rho}(M, t) = 0 \implies \underline{\rho} = 0 \quad (3.18)$$

En régime sinusoïdal, il est impossible d'établir une densité de charge dans un conducteur.

Conclusion

Dans tous les cas, on considère que la densité de charge dans un conducteur est nul.

3.1.3 Exemple de courant induit

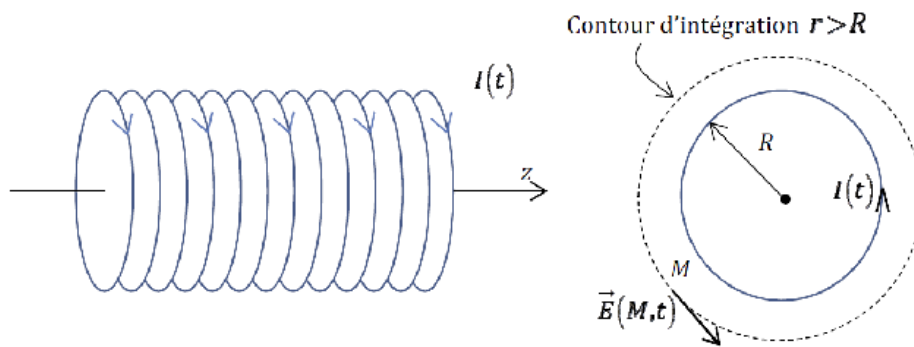


Figure 3.1: Solénoïde parcouru par un courant variable

On considère un solénoïde parcouru par un courant variable :

$$I(t) = I_0 \cos \omega t \quad (3.19)$$

On obtient :

$$\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{e}_\theta, \quad \vec{B}(M, t) = B(r, t) \vec{e}_z \quad (3.20)$$

Condition ARQS magnétique

Dans l'ARQS magnétique, $I(t)$ varie lentement et $\vec{B}(M, t) = \vec{B}_{QS}(M, t)$:

$$\vec{B}(M, t) = \vec{B}_{QS}(M, t) = \begin{cases} \mu_0 n I(t) \vec{e}_z & (r < R) \\ 0 & (r > R) \end{cases} \quad (3.21)$$

Champ électrique

Appliquons la **loi de Faraday** à un contour fermé circulaire d'axe Oz de rayon r :

- Si $r < R$:

$$\vec{E}(r < R, t) = -\mu_0 \frac{nr}{2} I_0 (-\omega) \sin(\omega t) \vec{e}_\theta \quad (3.22)$$

- Si $r > R$:

$$\vec{E}(r > R, t) = -\mu_0 \frac{nR^2}{2r} I_0 (-\omega) \sin(\omega t) \vec{e}_\theta \quad (3.23)$$

À l'intérieur du solénoïde, on place un cylindre conducteur de conductivité γ , de rayon a et de longueur L .

3.1.4 Effet de peau

On se place dans un conducteur ohmique dans lequel existent un champ $\vec{E}(M, t)$ et un champ $\vec{B}(M, t)$ dépendant du temps de façon sinusoïdale à la pulsation ω .

Nous considérons un métal qui occupe le demi-espace $z > 0$:

Il existe en surface du conducteur un champ magnétique :

$$\vec{B}(z = 0^-, t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x \quad (3.24)$$

Dans le conducteur :

$$\vec{E}(z > 0, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_E) \quad (3.25)$$

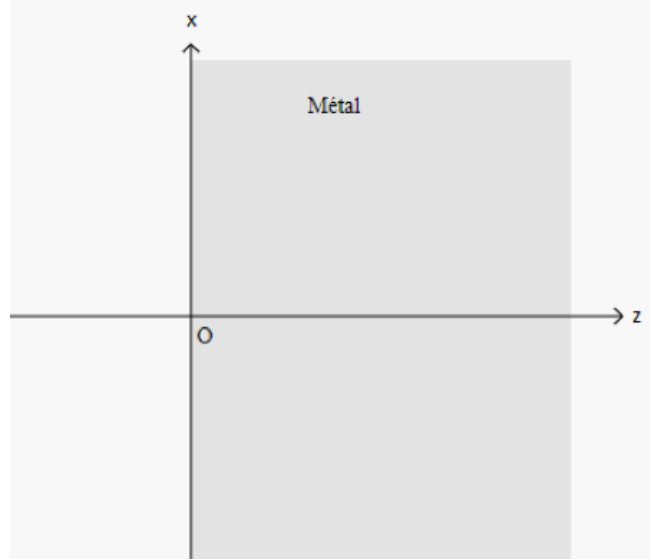


Figure 3.2: Effet de peau

Le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction

On les exprime :

$$\vec{j}_{\text{conduction}} = \gamma \vec{E} \quad \vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.26)$$

Donc,

$$\frac{\|\vec{j}_D\|}{\|\vec{j}\|} = \frac{\epsilon_0 \omega E_0}{\gamma E_0} = \frac{\epsilon_0}{\gamma} \omega = \omega \tau_c \quad (3.27)$$

avec $\tau_c = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$ temps de relation d'ordre de grandeur $\approx 10^{-19}$ s. $\tau_c \ll \tau$

Conclusion :

$$\|\vec{j}_D\| \ll \|\vec{j}\| \quad (3.28)$$

Équations de Maxwell modifiées

$$\text{div} \vec{E} = 0 \quad (\text{R.S.}) \quad (3.29)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (3.30)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.31)$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (3.32)$$

Équation de diffusion du type

Pour le champ \vec{E} :

$$\vec{\text{rot}}(M.F.) \implies \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) \quad (3.33)$$

$$\vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{j}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \vec{E}) \mu_0 \quad (3.34)$$

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad (3.35)$$

Phénomène **irréversible** causé par le caractère dissipatif de la force de frottement entre les porteurs de charge et le réseau.

Invariance par translation selon \vec{e}_x et \vec{e}_y pour le champ \vec{B} .

Notation complexe

On peut donc écrire en notation complexe :

$$\underline{\vec{B}}(z, t) = \underline{f}(z) \exp(i\omega t) \quad (3.36)$$

Chapter 4

Conducteurs en mouvement, Induction de Lorentz

Chapter 5

Ondes électromagnétiques dans le vide

CHAPITRE 5 - ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE

- ▷ Structure des ondes électromagnétiques dans le vide
 - Savoir établir l'équation de d'Alembert pour les OEMP (Ondes ElectroMagnétiques Planes) **(D)**
 - Savoir démontrer le caractère transversal des OEMP **(D)**
 - Savoir établir la relation de structure des OEMPP (Ondes ElectroMagnétiques Planes Progressives) **(D)**
 - Savoir démontrer le caractère transversal des OEMPPH (Ondes ElectroMagnétiques Planes Progressives Harmoniques) **(D)**
 - Savoir établir la relation de dispersion des OEMPPH **(D)**
- ▷ Polarisation des OEMPPH
 - Savoir décrire l'état de polarisation d'une OEMPPH et le dessiner
 - Dans le cas d'une polarisation circulaire ou elliptique, savoir retrouver le sens de polarisation droite ou gauche
 - Lame à retard quart d'onde et demi-onde : expliquer le changement de l'état de polarisation lorsque l'onde traverse la lame à retard
- ▷ Loi de Malus
 - Savoir expliquer expérimentalement la loi de Malus
 - Savoir exprimer l'éclairement reçu par un écran (exemple : le luxmètre) à partir de l'expression du champ électrique de l'OEMPPH

Figure 5.1: Programme du chapitre 5

5.1 Structure des ondes électromagnétiques

5.1.1 Le champ électromagnétique dans le vide

Voir la partie 1.5

Proposition 5.1.1 Champ Électromagnétique dans le vide

Dans le vide,

- Equation de Maxwell-Gauss (M.G.)

$$\operatorname{div} \vec{E}(M, t) = 0$$

- Equation de Maxwell-Flux (M.φ.)

$$\operatorname{div} \vec{B}(M, t) = 0$$

- Equation de Maxwell-Faraday (M.F.)

$$\operatorname{rot} \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$$

- Equation de Maxwell-Ampère (M.A.)

$$\operatorname{rot} \vec{B}(M, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}$$

Proposition 5.1.2 Équations de d'Alembert

Les champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ peuvent être découplés, on obtient alors les équations de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Proof: Rappel que : $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) &= \operatorname{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}) \\ -\Delta \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \vec{0} \end{aligned}$$

On note $c^2 = 1/(\varepsilon_0 \mu_0)$, de même façon, on calcule le rotation de l'équation de (M.A.)

☺

5.1.2 Ondes Electromagnétiques Planes

Definition 5.1.1: Onde électromagnétique plane (OEMP)

Un champ électromagnétique $\{\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)\}$ correspond à une **onde électromagnétique plane** dans la direction du vecteur unitaire \vec{u} , si :

À chaque instant, \vec{E} et \vec{B} sont uniformes sur tout plan perpendiculaires à \vec{u} .

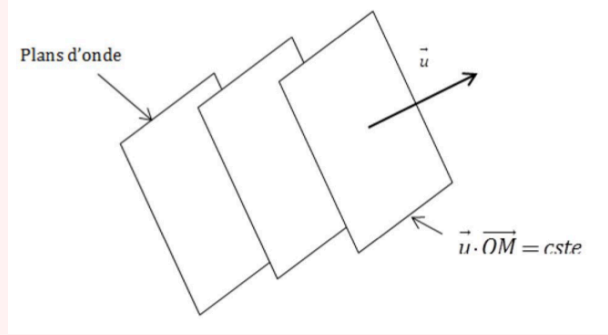


Figure 5.2: Ondes Electromagnétiques Planes

Plan d'ondes : Les plans perpendiculaires à \vec{u} .

Proposition 5.1.3 Plan d'onde

Les points M appartenant à un plan perpendiculaire à \vec{u} vérifie :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = C_{te}$$

Les champs d'une OEMP s'écrivent sous la forme : $\vec{E}(\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}, t)$ et $\vec{B}(\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}, t)$, ou si on a choisit d'étudier des ondes planes dans la direction \vec{e}_z par exemple, les champs s'écrivent $\vec{E}(z, t)$ et $\vec{B}(z, t)$

Proposition 5.1.4 Équation de d'Alembert unidimensionnelle

- On obtient l'équation de d'Alembert unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(z, t) = 0$$

- Les solutions générales sont de la forme :

$$\psi(z, t) = f\left(t - \frac{z}{c}\right) + g\left(t + \frac{z}{c}\right)$$

avec f et g correspondent respectivement à une onde progressive dans le sens des z croissants et décroissants.

- On peut remplacer :

$$z \longleftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$$

Proposition 5.1.5 Vitesse de propagation

Les ondes progressives se propagent toutes à la vitesse : *Indépendance du référentiel*

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Proposition 5.1.6 Caractère transversal des OEMP

Les OEMP sont des ondes transversales

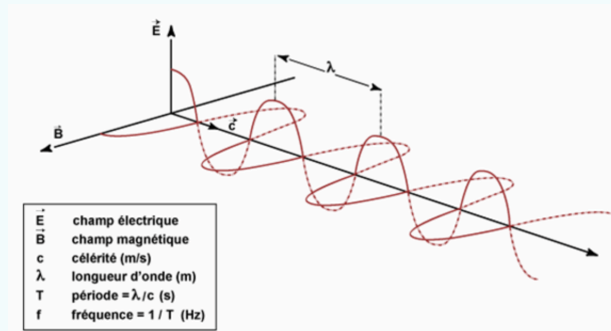


Figure 5.3: Ondes Electromagnétiques Transversales

Proof: Supposons une onde plane dans la direction $\vec{u} = \vec{e}_z$

- D'abord, on a :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}(z, t) = \frac{\partial E_y}{\partial y}(z, t) = 0$$

- (M.G.) donne

$$\text{div } \vec{E} = 0 \implies \frac{\partial E_z(z, t)}{\partial z} = 0$$

Conclusion : $E_z(t)$ ne dépend que du temps

- (M.A.) donne

$$\vec{\text{rot}} \vec{B}(z, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(z, t)}{\partial t} \implies \frac{\partial B_y(z, t)}{\partial x} - \frac{\partial B_x(z, t)}{\partial y} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z(t)}{\partial t} \implies \frac{\partial E_z(t)}{\partial t} = 0$$

Conclusion : E_z est une vraie constante, composante uniforme

- Montrera par la suite que $E_z = 0$ et $B_z = 0$ (À revoir!)



5.1.3 Ondes Electromagnétiques Planes Progressives

On considère le cas d'ondes **progressives** dans la direction \vec{e}_z : la fonction $f(t - z/c)$.

Proposition 5.1.7 Relation de structure

$$\vec{B} = \frac{1}{c} (\vec{e}_z \wedge \vec{E} \text{ ou } \overrightarrow{B(M, t)} = \frac{1}{c} (\vec{u} \wedge \vec{E}(M, t))$$

Proof: De la relation de Maxwell :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \iff \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{bmatrix} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial z} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{aligned}$$

La relation entre les dérivées démontre que, pour $f(t - z/c)$,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$$

Donc,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

D'où en considérant les constantes d'intégration nulles : $B_y = \frac{1}{c} E_x$ et $B_x = -\frac{1}{c} E_y$. ☺

5.1.4 Aspects énergétiques de l'OEMPP dans le vide

Voir chapitre 2 - Aspects énergétiques de l'électromagnétisme

5.2 Ondes Electromagnétiques Planes Progressives Harmoniques

5.2.1 Définitions

Definition 5.2.1: Onde plane progressive harmonique (OEMPPH)

En physique ondulatoire, une onde progressive harmonique est sous la forme :

$$\psi(M, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi)$$

où

- ω la **pulsation** de l'onde
- \vec{k} le **vecteur d'onde**
- φ la **phase** de l'onde à l'origine
- A l'**amplitude** de la grandeur φ

Par exemple, nous écrirons les composantes du champ \vec{E} sous la forme :

$$E_i = E_{i0} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi_{E_i})$$

On introduit le vecteur unitaire parallèle à \vec{k} :

$$\vec{u} = \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$$

Proposition 5.2.1 Double périodicité

- Périodicité temporelle : T
- Périodicité spatiale, appelée **longueur d'onde** : λ
- **Pulsation spatiale** : k

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \lambda = \frac{2\pi}{k} \text{ avec } k = \|\vec{k}\|$$

Proposition 5.2.2 Vitesse de phase d'une OEMPPH

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Proof:

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz + \varphi) = A \cos\left(\omega \left(t - \frac{z}{(\omega/k)}\right) + \varphi\right) = \psi\left(0, t - \frac{z}{\omega/k}\right)$$



Proposition 5.2.3 Représentation complexe d'une OEMPPH

En notation complexe, $\vec{E} = \text{Re}(\underline{\vec{E}})$, et $\vec{B} = \text{Re}(\underline{\vec{B}})$, on généralise :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 \exp[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})], \quad \underline{\vec{B}} = \underline{B}_0 \exp[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})]$$

Proposition 5.2.4 Opérateurs en représentation complexe

Remplace

$$\vec{\nabla} \longleftrightarrow -j\vec{k}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$$

On aura aussi:

$$\text{rot} \underline{\vec{E}} = -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}, \quad \text{div} \underline{\vec{E}} = -j\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}, \quad \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = j\omega \underline{\vec{E}}, \quad \Delta \underline{\vec{E}} = -k^2 \underline{\vec{E}}$$

Proof: Rappel :

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$



5.2.2 Relation de dispersion

Proposition 5.2.5 Relation de dispersion des OEMPPH dans le vide

$$\omega = ck, \quad \lambda = c \times T$$

Pour les OEMPPH, la vitesse de phase est la vitesse de lumière :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$$

Proof: En représentation complexe,

$$\Delta \underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0} \implies \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \times \underline{\vec{E}} = \vec{0}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \implies k = \pm \frac{\omega}{c} (\text{OPPH+}, \text{OPPH-})$$



5.2.3 Polarisation des OEMPPH

Definition 5.2.2: Direction de polarisation de l'onde

La *direction du vecteur champ* \vec{E} d'une OEMPPH détermine la direction de **polarisation de l'onde**.
La direction du champ \vec{B} se déduit de celle de \vec{E} car $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ est une base directe.

Proposition 5.2.6 Cas général : OEMPPH polarisée elliptiquement

Pour $\vec{k} = k\vec{e}_z$ (avec $k > 0$), les composantes du champ \vec{E} d'une OEMPPH sont, avec E_{0x}, E_{0y} positifs :

$$\vec{E}(M, t) = \begin{bmatrix} E_{0x} \cos(\omega t' - kz + \varphi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t' - kz + \varphi_y) \\ 0 \end{bmatrix}$$

En changeant l'origine des temps et en se plaçant en $z = 0$, on a :

$$\vec{E}(M, t) = \begin{bmatrix} E_{0x} \cos(\omega t' - kz) \\ E_{0y} \cos(\omega t' - kz + \varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \text{ avec } \varphi = \varphi_y - \varphi_x$$

À z fixé, l'extrémité de \vec{E} parcourt une ellipse dans le plan $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$. On parle de **polarisation elliptique**.

$$\tan 2\alpha = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \cos \varphi$$

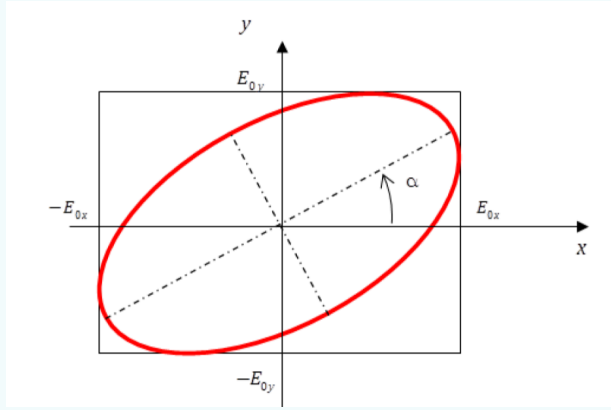


Figure 5.4: Polarisation Ellipse

Le sens de parcours dépend du signe de φ , $\varphi > 0$ en **avance** sinon en **retard**. $\varphi > 0$ tourne en sens droit.

Proof: Équation d'un conique : $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ avec $x = E_x$, $y = E_y$, c'est un ellipse si $ac - b^2 < 0$.

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t) \implies \frac{E_x}{E_{0x}} = \cos(\omega t)$$

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t + \varphi) = E_{0y} [\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi] \implies \sin(\omega t) \sin \varphi = \frac{E_x}{E_{0x}} \cos \varphi - \frac{E_y}{E_{0y}}$$

Comme $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}} \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right) - \frac{E_y}{E_{0y}} \frac{1}{\sin \varphi} \right)^2 &= 1 \\ \left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 \sin^2 \varphi + \left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 \cos^2 \varphi + \left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 - 2 \left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right) \cos \varphi \left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right) &= \sin^2 \varphi \\ \left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 - 2 \left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right) \left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right) \cos \varphi - \sin^2 \varphi &= 0 \end{aligned}$$

Dans la forme $ax^2 + cy^2 + 2bxy + 2dx + 2ey + f = 0$, $a = 1$, $c = 1$, $b = -\cos \varphi$, $d = 0$, $e = 0$, $f = -\sin^2 \varphi$.
 Ellipse si $ac - b^2 > 0$ et $1 \times 1 - (-\cos \varphi)^2 > 0$

☺

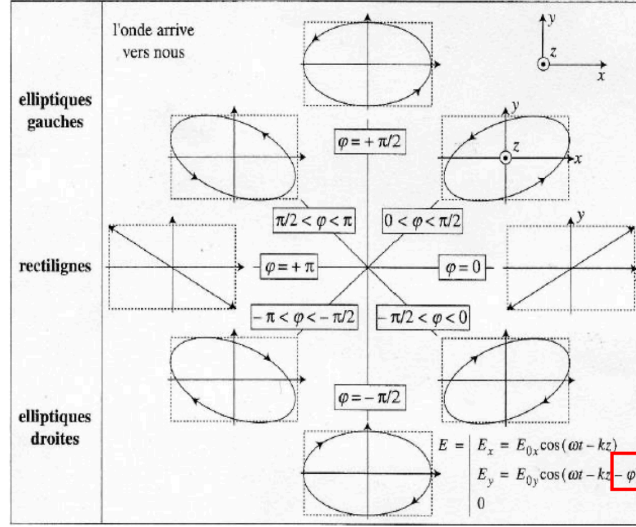


Figure 5.5: Sens de polarisation (Importante de savoir, ce résumé dépend de la convention observateur, la signe de φ peut changer)

Proposition 5.2.7 Polarisation rectiligne

Le vecteur champ \vec{E} garde une direction fixe dans l'espace, on parle de **polarisation rectiligne**.
 C'est lorsque le cas où $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$

Proof: Comme $E_x = E_{0x} \cos \omega t$ et $E_y = E_{0y} \cos \omega t$ ou $E_y = E_{0y} \cos(\omega t + \pi)$

$$\frac{E_x}{E_y} = \frac{E_{0x}}{E_{0y}} \implies E_y = \left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}} \right) E_x$$

$$\frac{E_x}{E_y} = -\frac{E_{0x}}{E_{0y}} \implies E_y = -\left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}} \right) E_x$$

On obtient une droite sous la forme $y = ax + b$ et $y = -ax + b$ ($b = 0$)

☺

Proposition 5.2.8 Polarisation circulaire

Cas particulier où $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ et $\varphi = \pm\pi/2$

Proof: Sachant que $E_x = E_0 \cos \omega t$ et $E_y = \pm E_0 \sin \omega t$,

$$\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1 \implies \left(\frac{E_x}{E_0} \right)^2 + \left(\pm \frac{E_y}{E_0} \right)^2 = 1$$

☺

Une OEMPPH est décomposable en somme de deux ondes polarisées *rectilignement* dans des directions perpendiculaires.

$$\vec{E} = \exp(j(\omega t - kz)) \begin{Bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \exp(j\varphi) \end{Bmatrix} = \exp(j(\omega t - kz)) \begin{Bmatrix} E_{0x} \\ 0 \end{Bmatrix} + \exp(j(\omega t - kz)) \begin{Bmatrix} 0 \\ E_{0y} \exp(j\varphi) \end{Bmatrix}$$

Une OEMPPH est décomposable en une somme de deux ondes polarisées *circulairement* dans deux sens opposés.

$$\vec{E} = \exp(j(\omega t - kz)) \times \left(\frac{E_{0x} - jE_{0y} \exp(j\varphi)}{2} \right) \times \begin{Bmatrix} 1 \\ j \end{Bmatrix} + \exp(j(\omega t - kz)) \times \left(\frac{E_{0x} + jE_{0y} \exp(j\varphi)}{2} \right) \times \begin{Bmatrix} 1 \\ -j \end{Bmatrix}$$

5.3 La lumière comme onde électromagnétique

5.3.1 Signal Lumineux

Dans l'optique ondulatoire et le signal lumineux :

$$I = 2\langle s^2(M, t) \rangle \iff \mathcal{E} = K\langle E^2(M, t) \rangle = \frac{1}{2c\mu_0}(E_{0x}^2 + E_{0y}^2)$$

- \mathcal{E} : Eclairement (unité : lux lx), mesuré avec un luxmètre
- I : Intensité lumineuse
- K : constante qui dépend du capteur et de constantes

5.3.2 Polarisation de la lumière

Proposition 5.3.1 Lumière Naturelle

La plupart des sources lumineuses naturelles délivrent

- des ondes non polarisées
- des trains d'ondes incohérentes

Definition 5.3.1: Polariseurs

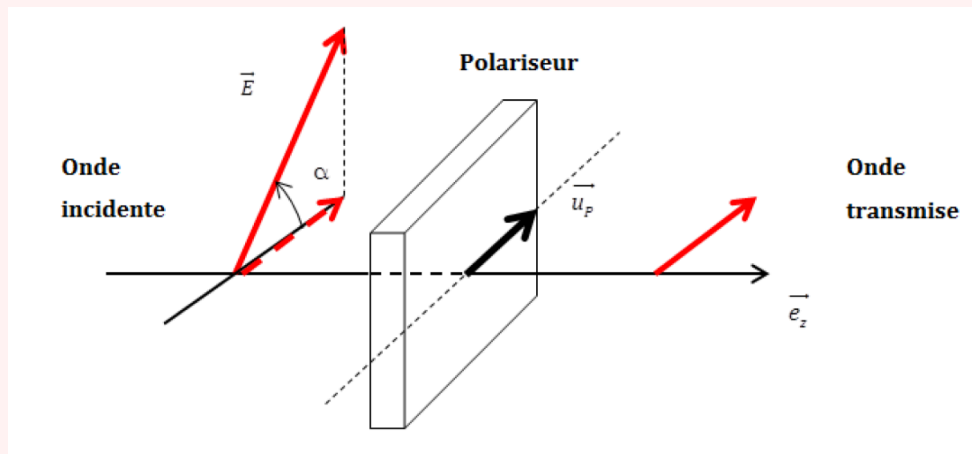


Figure 5.6: Polariseur rectiligne

Un **polariseur** idéal possède une direction liée au système, de vecteur directeur \vec{u}_p , telle que :

- Tout onde polarisée rectilignement perpendiculairement à \vec{u}_p est totalement absorbée
- Tout onde polarisée rectilignement parallèlement à \vec{u}_p est totalement transmise

Definition 5.3.2: lame à retard de phase

Lames à retard : Une lame à retard de phase est un cristal *biréfringent* capable de modifier la polarisation de la lumière la traversant.

Axe rapide, axe lent : On note respectivement n_L , n_R d'axes lent ou rapide.

Comme $v = c/n$, Si $v_y < v_x$, donc $n_L > n_R$.

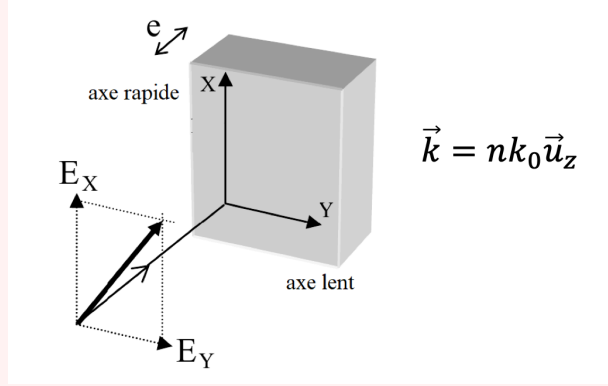


Figure 5.7: lame à retard de phase

Proposition 5.3.2

Dans la figure 5.7, la composante E_y du champ incident prend un retard de phase par rapport à E_x d'une valeur de :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_L - n_R)e > 0 \quad (5.1)$$

Avant la traversée de la lame \Rightarrow Après la traversée de la lame :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{E}' = \begin{cases} E'_{0x} \cos(\omega t - kz) & \text{rapide} \\ E'_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi - \Delta\varphi) & \text{lent} \\ 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

avec $\Delta\varphi = k_0\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \times \Delta n \times e$.

Definition 5.3.3: lame $\lambda/2$ et $\lambda/4$

- lame $\lambda/2$: $\Delta n \times e = \lambda/2 \Rightarrow \Delta\varphi = \pm\pi$
- lame $\lambda/4$: $\Delta n \times e = \lambda/4 \Rightarrow \Delta\varphi = \pm\pi/2$

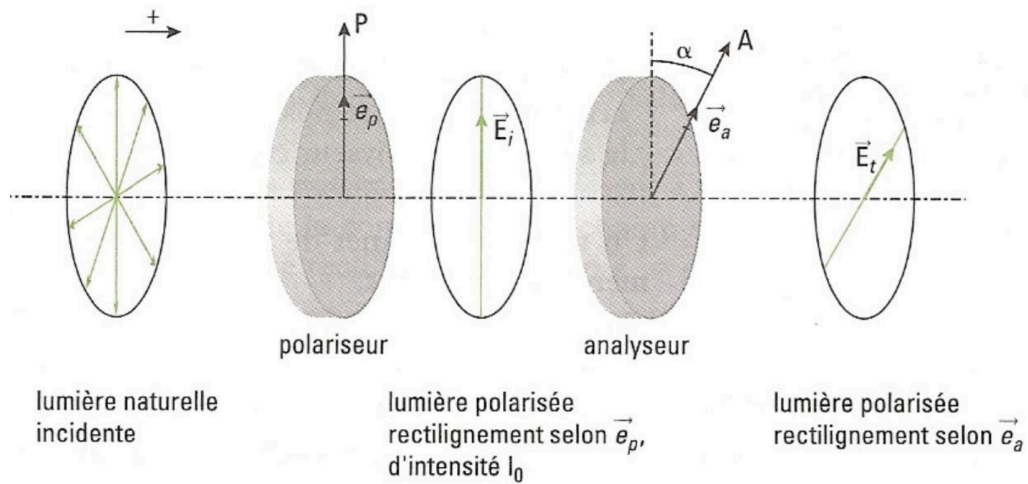


Figure 5.8: Polariseur + Analyseur

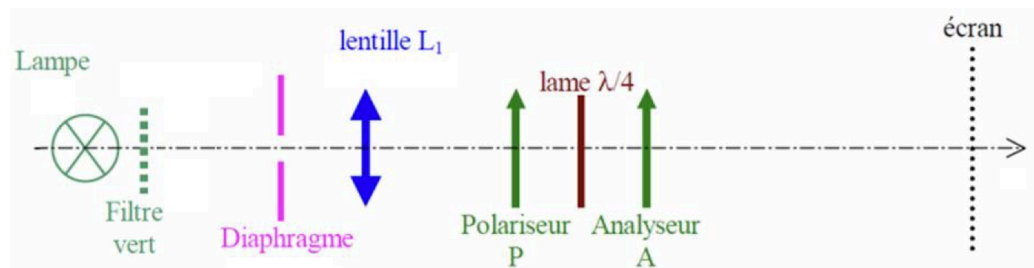


Figure 5.9: Dispositif Expérimental

Exemple 5.3.1 (Polarisation à la sortie (Cas $\lambda/2$))

- Positionner les deux polariseurs en position croisée pour obtenir l'extinction.
- Placer une lame demi-onde entre les deux polariseurs. Relever les directions des lignes neutres de la lame.
- Tourner la lame de 25° par rapport à l'une des lignes neutres.

$$\vec{E}_p = E_p \cdot \vec{u}_p = \vec{E}_{av}$$

$$\vec{E}_{av} = \begin{cases} -E_0 \sin \alpha \cos \omega t \\ E_0 \cos \alpha \cos \omega t \\ 0 \end{cases} \implies \vec{E}_{ap} = \begin{cases} -E_0 \sin \alpha \cos \omega t \\ E_0 \cos \alpha \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -E_0 \cos \alpha \sin \omega t \\ 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Conclusion : Il faut $E_0 \sin \beta = E_0 \cos \beta$ donc $\beta = \pi/4 = 45^\circ$

Exemple 5.3.3 (Application : PCG)

PCG : produire une OEMPPM.

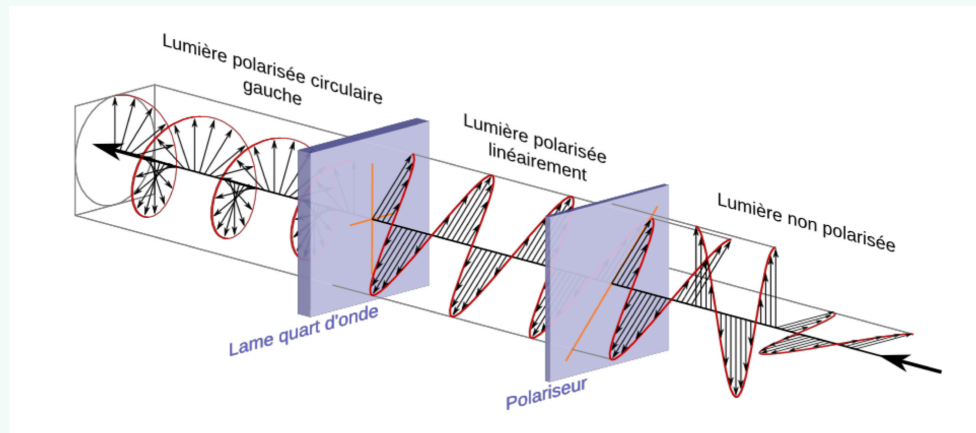


Figure 5.12: PCG

5.3.3 Lois de Malus

Theorem 5.3.1 Loi de Malus

L'intensité électromagnétique de l'onde transmise est

$$I_{ap} = I_{av} \cos^2 \alpha \quad (5.5)$$

5.4 Exercices

TD1