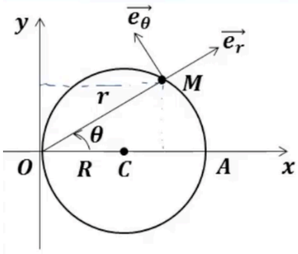
TD 1

Cinématique du point matériel

1.1. Mouvement sur un cercle

Dans le plan (Oxy), un point mobile M se déplace sur un cercle de rayon R et de centre C de coordonnées cartésiennes $(R, 0)$. À l'instant $t = 0$, M se trouve au point $A(2R, 0)$ et possède la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_y$. On désigne par r et θ les coordonnées polaires de M.

1. Faire un schéma précis représentant notamment la base polaire locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ en M à un instant quelconque.
2. Déterminer l'équation cartésienne du cercle
   En déduire son équation polaire, c'est à dire r en fonction de θ.
3. Calculer, en fonction de θ et de ses dérivées successives, les composantes des vecteurs vitesse et accélération de M dans la base polaire.
4. On désigne par ω la vitesse angulaire de M sur le cercle, et on suppose qu'elle est constante. Donner les expressions de θ puis de r en fonction du temps. En déduire les expressions de la vitesse et de l'accélération en fonction du temps, toujours dans la base polaire.



Question 1 et 2.

Le problème est plan puisque la trajectoire est circulaire. En posant $x_C = R$ et $y_C = 0$, l'équation catésienne du cercle est

$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=R^2 \Leftrightarrow \boxed{(x-R)^2+y^2=R^2}$

De plus, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, donc

转化 $\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \Rightarrow \left\{\begin{matrix} r \\ \theta \end{matrix}\right.$

$(x-R)^2+y^2 = (r\cos\theta - R)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2+R^2-2rR\cos\theta = R^2$

Comme $\theta \in [0, 2\pi[$ et $r \geq 0$, l'équation polaire du cercle est

$r^2 - 2rR\cos\theta = 0 \Leftrightarrow r = 0$ ou $r = 2R\cos\theta$

$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} r = 2R\cos\theta & \text{pour } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi[\\ r = 0 & \text{pour } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}}$

如何从已知 $\omega \rightarrow \theta$? α

Question 3 $r = 2R\cos\theta$

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r}$, $\dot r = -2R\sin\theta\cdot\dot\theta$

Vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot r\vec{e_r} + r\dot\theta\vec{e_\theta}$ $= -2R\sin\theta\cdot\dot\theta\,\vec{e_r} + 2R\cos\theta\cdot\dot\theta\,\vec{e_\theta}$

$= \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{(R)}$

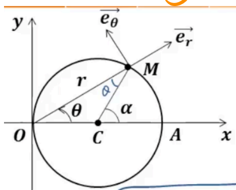
$\boxed{\vec v = -2R\dot\theta(\sin\theta\,\vec{e_r} - \cos\theta\,\vec{e_\theta})}$ tangente

Vecteur accélération : $\vec{a} = (\ddot r - r\dot\theta^2)\vec{e_r} + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\vec{e_\theta}$

$= \left(\frac{d\vec v}{dt}\right)_{(R)} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{(R)}$ $\ddot r = -2R\cos\theta\cdot\dot\theta^2 - 2R\sin\theta\cdot\ddot\theta$

alors $\boxed{\vec a} = (-2R\cos\theta\cdot\dot\theta^2 - 2R\sin\theta\,\ddot\theta - 2R\cos\theta\,\dot\theta^2)\vec{e_r} + (-2\cdot2R\sin\theta\cdot\dot\theta^2 + 2R\cos\theta\cdot\ddot\theta)\vec{e_\theta}$

$= -2R(\ddot\theta\sin\theta + 2\dot\theta^2\cos\theta)\vec{e_r} - 2R(2\dot\theta^2\sin\theta - \ddot\theta\cos\theta)\vec{e_\theta}$



Question 4 $\dot\alpha = \omega = \frac{d\alpha}{dt}$

$\alpha = \omega t + \alpha_A = \omega t$ car $\alpha_A = 0$.

D'après le théorème de l'angle au centre,

$$\alpha = 2\theta$$

Donc $\theta = (\omega t)/2$, $\dot\theta = \omega/2$ et $\ddot\theta = 0$. $r(t) = 2R\cos(\frac{\omega t}{2})$

D'où $\boxed{\vec v = -R\omega[\sin(\frac{\omega t}{2})\vec{e_r} - \cos(\frac{\omega t}{2})\vec{e_\theta}]}$

et $\boxed{\vec a = -R\omega^2[\cos(\frac{\omega t}{2})\vec{e_r} + \sin(\frac{\omega t}{2})\vec{e_\theta}]}$

$\vec v\cdot\vec a = 0$

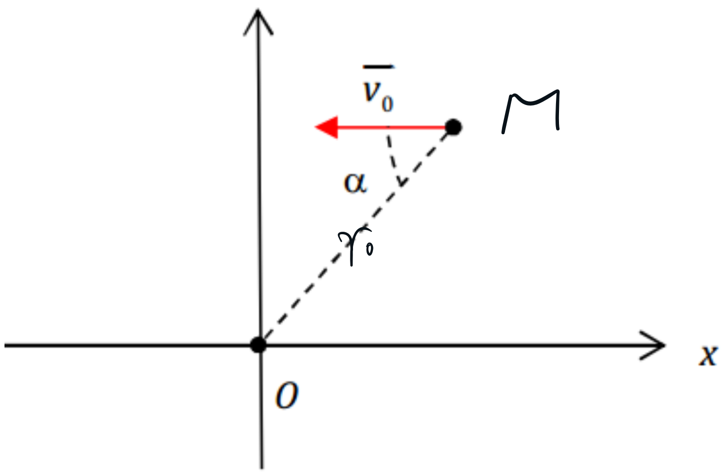
$\|\vec v\| = R\omega$

$r(t) = 2R\cos(\frac{\omega t}{2})$

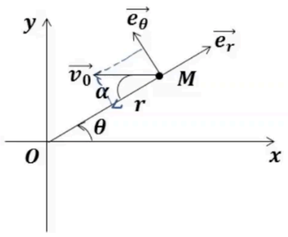
Remarque : $\vec v \perp \vec a$, la norme du vecteur vitesse est bien constante et vaut $R\omega$, ce qui est cohérent car le cercle de rayon R est parcouru avec la vitesse angulaire ω.

1.2. *Mouvement d'une guêpe*

Une guêpe, assimilée à un point matériel M, vole avec une vitesse de norme constante v_0 dans le plan horizontal (Oxy), en gardant un œil sur sa proie, qui reste fixe à l'origine O des coordonnées. La vitesse de la guêpe fait ainsi un angle constant α avec la direction OM. On note r_0 la valeur initiale en $t_0 = 0$ de la distance OM.



1. Au bout de combien de temps la guêpe rencontrera-t-elle sa proie ?
2. De quel angle aura-t-elle tourné autour de cette dernière ?
3. Quelle est la nature de la trajectoire de la guêpe ?
4. Déterminer l'accélération initiale de la guêpe.
5. Discuter ces résultats selon les valeurs de v_0 et α.



Question 1

$\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ $= -V_0\cos\alpha\,\vec{e_r} + V_0\sin\alpha\,\vec{e_\theta}$

alors $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = -V_0\cos\alpha$

on a $r(t) = -V_0\cos\alpha \cdot t + A$, A cte ?

or $r(t=0) = r_0$ donc $A = r_0$

Finalement, $r(t) = r_0 - v_0 t\cos\alpha$.) vérifier ?

r diminue au cours du temps, c'est cohérent.

La guêpe rencontre la proie en $t = t_f$ quand $\boxed{r(t_f) = 0}$

soit $\boxed{t_f = \frac{r_0}{V_0\cos\alpha}}$

Question 2

or $r\dot{\theta} = V_0\sin\alpha$, alors $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{V_0\sin\alpha}{r_0 - V_0\cos\alpha\cdot t} = \frac{V_0\sin\alpha}{r_0}\frac{1}{1 - \frac{V_0\cos\alpha}{r_0}t}$

On utilise la méthode de séparation des variables pour intégrer :

$\theta(t) - \theta_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' = \frac{V_0\sin\alpha}{r_0}\int_0^t \frac{1}{1 - \frac{V_0\cos\alpha}{r_0}t'}\,dt' = \frac{V_0\sin\alpha}{r_0}\left(-\frac{r_0}{V_0\cos\alpha}\right)\left[\ln\left(1 - \frac{V_0\cos\alpha}{r_0}t'\right)\right]_0^t$

$\boxed{\theta(t) - \theta_0 = -\tan\alpha\ln\left(1 - \frac{V_0\cos\alpha}{r_0}t\right)} = -\tan\alpha\ln\left[\frac{r(t)}{r_0}\right]$ vérifier ?

L'angle parcouru en t par la guêpe est $\theta(t) - \theta_0$, quantité bien positive car $r(t) < r_0$.

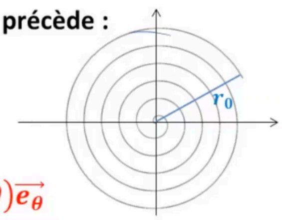
Cette quantité diverge lorsque $t \to t_f$, en effet, l'angle n'est plus défini en $r = 0$.

Question 3 (trajectoire)

On trouve l'équation polaire d'après ce qui précède :

$r(\theta) = r_0\exp\left[-\frac{\theta(t) - \theta_0}{\tan\alpha}\right]$

spirale



Question 4 $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta}$

D'après ce qui précède : $\dot{r} = -V_0\cos\alpha$ et $\ddot{r} = 0$

$\dot{\theta} = \frac{V_0\sin\alpha}{r}$ et $\ddot{\theta} = -\frac{V_0\sin\alpha}{r^2}\cdot\dot{r} = \frac{V_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{r^2}$

d'où $\vec{a}(t) = \ldots\ldots \quad -\frac{V_0^2\sin\alpha}{r}\left(\sin\alpha\,\vec{e_r} + \cos\alpha\,\vec{e_\theta}\right)$

$\boxed{\vec{a}(t=0) = -\frac{V_0^2\sin\alpha}{r_0}\left(\sin\alpha\,\vec{e_r} + \cos\alpha\,\vec{e_\theta}\right)}$

Question 5

Résultat de la question 1 : $t_f = \frac{r_0}{v_0\cos\alpha}$

- **Si v_0 augmente, t_f diminue. C'est cohérent.**
- **Si $\alpha = 0$, t_f est minimal, la guêpe fonce droit sur la proie avec $\theta = \theta_0$ constant.**
- **Si $\alpha \to \pi/2$, $t_f \to +\infty$, la guêpe suit une trajectoire circulaire sans jamais atteindre sa proie. En fait $r(t) = r_0$, le mouvement est circulaire.**