

## Chapitre 5

# ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE

Le phénomène de propagation du champ électromagnétique – dont la lumière visible est un cas particulier – est une des conséquences les plus directes et les plus spectaculaires des équations de Maxwell. En dehors de la lumière, les premières ondes électromagnétiques émises de façon artificielle datent de 1887 (Davide Edward Hughes : 1831-1900) et surtout 1888 (Heinrich Hertz : 1857-1894). Nous étudions dans ce chapitre de façon essentiellement descriptive les propriétés de ces ondes et de leur propagation, avant de nous intéresser à leur production dans le chapitre suivant.

## A STRUCTURE DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

### A.1 Le champ électromagnétique dans le vide

Dans le vide, nous avons vu que le champ électromagnétique vérifie les équations :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{B}(M, t) &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E}(M, t) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M, t) \\ \operatorname{div} \vec{E}(M, t) &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B}(M, t) &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M, t)\end{aligned}$$

Ces équations peuvent être découplées pour obtenir les *équations de d'Alembert* des champs électromagnétiques :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

L'opérateur  $\Delta$  est ici l'opérateur Laplacien vectoriel.

On connaît assez peu de solutions exactes à ces équations, en dehors de quelques situations de très haute symétrie (plane, sphérique ou cylindrique)

## A.2 Ondes Électromagnétiques Planes (OEMP)

### A.2.1 Définition

Un champ électromagnétique  $\{\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t)\}$  correspond à une **onde électromagnétique plane** dans la direction du vecteur unitaire  $\vec{u}$ , si à chaque instant,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont uniformes sur tout plan perpendiculaires à  $\vec{u}$

Les points  $M$  appartenant à un plan perpendiculaire à  $\vec{u}$  vérifient la condition :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = cste$$

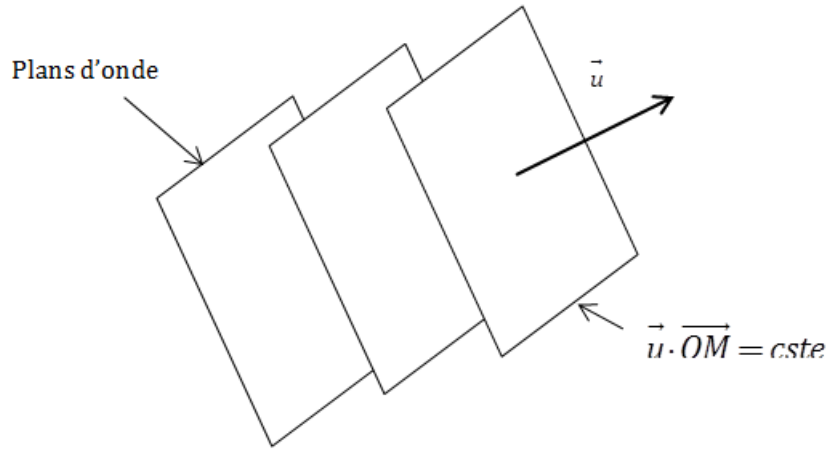


FIGURE 5.1 – Ondes électromagnétiques planes

Dans ce contexte, les plans perpendiculaires à  $\vec{u}$  sont appelés **plans d'ondes**

Par conséquent, on peut écrire les champs d'une OEMP sous la forme :

$$\vec{E}(\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}, t), \quad \vec{B}(\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}, t)$$

Si on choisit d'étudier des ondes planes dans la direction  $\vec{e}_z$ , par exemple, nous aurons des champs sous la forme :

$$\vec{E}(z, t) \quad \text{et} \quad \vec{B}(z, t)$$

### A.2.2 Forme générale des solutions

Considérons une onde plane dans la direction  $\vec{e}_z$

Toutes les coordonnées cartésiennes  $\{E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z\}$  dépendent de  $z$  et de  $t$  et vérifient la même équation :

$$\Delta\psi(z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = 0$$

Mais

$$\Delta\psi(z, t) = \underbrace{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(z, t)}_0 + \underbrace{\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(z, t)}_0 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(z, t) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(z, t)$$

Chaque composante vérifie donc l'*équation de d'Alembert unidimensionnelle*, rencontrée précédemment :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(z, t) = 0$$

### A.2.3 Solutions générales

Nous savons que toutes les solutions de l'équation de d'Alembert sont de la forme :

$$\psi(z, t) = f\left(t - \frac{z}{c}\right) + g\left(t + \frac{z}{c}\right)$$

où les fonctions d'une variable :  $f(\xi)$  et  $g(\xi)$  sont quelconques (mais au moins deux fois dérivables).

On interprète ces solutions comme la somme de deux ondes progressives.

- Le terme  $f(t - \frac{z}{c})$  correspond à une onde progressive dans le sens des  $z$  croissants.
- Le terme  $g(t + \frac{z}{c})$  correspond à une onde progressive dans le sens des  $z$  décroissants.

Il faut insister sur le fait que les fonctions  $f$  et  $g$  sont quelconques : n'importe quel signal est susceptible de se propager sans déformation.

#### Remarque 1 :

Pour une onde plane dans une direction  $\vec{u}$ , toutes les composantes sont de la forme :

$$f\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{OM}}{c}\right) + g\left(t + \frac{\vec{u} \cdot \vec{OM}}{c}\right)$$

#### Remarque 2 :

Formellement, les cas où  $f$  et/ou  $g$  sont des fonctions constantes non nulles correspondent à des solutions. Ce sont cependant des solutions triviales, correspondant à des champs uniformes et indépendants du temps. Nous ne les considérerons pas comme des *phénomènes ondulatoires*. Nous considérerons donc arbitrairement que :

Les seules ondes uniformes et constantes sont les ondes identiquement nulles.

### A.2.4 Vitesse de propagation

Les ondes progressives se propagent toutes à la vitesse :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Cette vitesse semble donc universelle, indépendante du référentiel de départ choisi. Si l'on admet que les équations de Maxwell dans le vide sont valables dans tout référentiel, une OEM donnée doit se propager à la même vitesse dans tout référentiel.

Aussi surprenant que cela puisse paraître, l'expérience prouve qu'il en est bien ainsi.

Cette constatation a conduit Albert Einstein (1879-1955) à modifier les règles classiques de changement de référentiel. Nous étudierons ce point fondamental, aux conséquences théoriques et pratiques capitales, en fin de cours.

### A.2.5 Caractère transversal des OEMP

Pour fixer les idées et simplifier les notations, nous choisissons une onde plane dans la direction  $\vec{u} = \vec{e}_z$ . Le champ électrique s'écrit, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E} = E_x(z, t)\vec{e}_x + E_y(z, t)\vec{e}_y + E_z(z, t)\vec{e}_z$$

L'équation de Maxwell Gauss dans le vide donne :

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

On en déduit simplement :

$$\frac{\partial E_z}{\partial z}(z, t) = 0$$

Par conséquent, la composante selon  $z$  est une fonction uniforme, dépendant explicitement du temps.

$$E_z = h(t)$$

Par ailleurs, la relation de Maxwell-Ampère :

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

donne, en projection sur  $\vec{e}_z$  :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial B_y(z, t)}{\partial x} - \frac{\partial B_x(z, t)}{\partial y} = 0$$

Donc

$$\frac{dh}{dt} = 0$$

On déduit que  $E_z = K$ , constante. La composante de  $\vec{E}$  sur  $\vec{e}_z$  est donc uniforme. Conformément à la remarque 2 du chapitre 1 paragraphe ??, nous aurons donc, pour un phénomène ondulatoire non trivial :

$$E_z = 0$$

De même, on établit :

$$B_z = 0$$

---

**Activité 5-1 :** Démontrer ce résultat à partir des équations de Maxwell.

---

De façon plus générale, pour une OEMP de direction  $\vec{u}$ , nous aurons :

$$\boxed{\vec{E}(M, t) \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) \cdot \vec{u} = 0}$$

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires à la direction  $\vec{u}$  de l'onde plane. On dit que les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont **transversaux**.

Les OEMP sont des ondes transversales.

### A.3 Ondes électromagnétiques planes progressives

Nous considérons le cas particulier d'ondes progressives dans la direction  $\vec{e}_z$ . Toutes les composantes sont donc des fonctions de l'unique variable  $t - \frac{z}{c}$ .

#### A.3.1 Relations entre les dérivées

Pour une fonction dans le sens des  $z$  croissants, de la forme  $f\left(t - \frac{z}{c}\right)$ , nous aurons :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$$

Pour une onde progressive dans le sens des  $z$  décroissants, nous aurons :

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial g}{\partial t}$$

Ces relations de proportionnalité sont caractéristiques des ondes progressives.

#### A.3.2 Relation de structure

De la relation de Maxwell :

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

on déduit :

$$\begin{vmatrix} 0 & \\ 0 & \\ \partial/\partial z & \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{vmatrix}$$

soit

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Compte tenu du fait qu'il s'agit d'une onde progressive dans la direction  $\vec{e}_z$ , nous aurons :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

D'où, en considérant les constantes d'intégration nulles :

$$B_y = \frac{1}{c} E_x \quad \text{et} \quad B_x = -\frac{1}{c} E_y$$

Ces deux relations peuvent s'écrire vectoriellement :

$$\vec{B} = \frac{1}{c} (\vec{e}_z \wedge \vec{E}).$$

D'une façon plus générale, pour une propagation dans la direction  $\vec{u}$ , nous aurons la **relation de structure** des OEMPP :

Pour une OEMPP :  $\vec{B}(M, t) = \frac{1}{c} (\vec{u} \wedge \vec{E}(M, t))$

---

**Activité 5-2 :** Montrer de deux façons différentes que  $\vec{E} = c(\vec{B} \wedge \vec{u})$ .

---

Les vecteurs  $\{\vec{u}, \vec{E}, \vec{B}\}$  forment un trièdre orthogonal direct. Il faut bien noter que ce résultat est valable pour une onde progressive seulement.

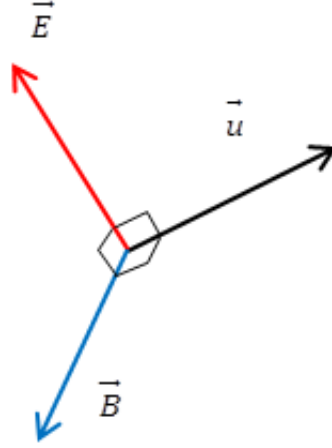


FIGURE 5.2 – Structure d'onde plane progressive

## A.4 Aspects énergétiques de l'OEMPP dans le vide

### A.4.1 Densité volumique d'énergie

Pour une onde plane **progressive**, nous avons toujours :

$$E^2(M, t) = c^2 B^2(M, t)$$

Par conséquent

$$\varepsilon_0 \frac{E^2(M, t)}{2} = \frac{B^2(M, t)}{2\mu_0}$$

Pour une OEM plane progressive, la densité d'énergie électrique est donc égale à la densité d'énergie magnétique.

Cette propriété illustre bien la symétrie qui existe entre les deux champs.

La densité d'énergie électromagnétique totale est donc, pour une onde **plane progressive** :

$$w_{em}(M, t) = \varepsilon_0 E^2(M, t) = \frac{B^2(M, t)}{\mu_0}$$

### A.4.2 Puissance transportée

Pour une onde plane progressive dans la direction  $\vec{u}$ , le vecteur de Poynting est :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_0}$$

Mais d'après la relation de structure :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{1}{c}(\vec{u} \wedge \vec{E}(M, t))$$

On en déduit :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{1}{c\mu_0} E^2(M, t) \vec{u}$$

Le vecteur de Poynting est parallèle à  $\vec{u}$  et de même sens. Il y a donc, comme on peut s'y attendre, transport d'énergie dans la direction de propagation.

La puissance électromagnétique instantanée qui traverse une surface  $S$  perpendiculaire à  $\vec{u}$  est simplement :

$$P_s = \frac{S}{c\mu_0} E^2(M, t)$$

car  $\vec{E}(M, t)$  est uniforme sur ce plan.

La puissance totale transportée à travers l'espace entier ( $S \rightarrow \infty$ ) est donc nécessairement infinie. Il est donc impossible en pratique de générer une OEMP :

Il s'agit d'idéalisations dont on peut s'approcher avec plus ou moins de précision mais que l'on ne peut jamais réaliser rigoureusement.

### A.4.3 Vitesse de transport de l'énergie

Comme  $\varepsilon_0\mu_0c^2 = 1$ , pour une onde plane progressive de direction  $\vec{u}$ , nous aurons :

$$\vec{\Pi}(M, t) = w_{em}(M, t) \times c\vec{u}$$

Cette relation est à rapprocher de la relation du transport de charges :

$$\vec{J}(M, t) = \rho_m(M, t) \vec{v}$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse des charges mobiles et  $\rho_m$  la densité volumique de charges mobiles. Dans cette analogie, nous avons :

$$\vec{\Pi}(M, t) \leftrightarrow \vec{J}(M, t); \quad w_{em}(M, t) \leftrightarrow \rho_m(M, t)$$

Nous pouvons donc en déduire que l'énergie est transportée par l'onde à la vitesse  $c\vec{u}$ , de norme  $c$ .

Une onde électromagnétique dans le vide transporte de l'énergie à la vitesse de la lumière.

## B ONDES PLANES PROGRESSIVES HARMONIQUES

### B.1 Définitions

#### B.1.1 Onde plane progressive harmonique

En physique ondulatoire, une onde progressive harmonique est telle que toutes les grandeurs associées à l'onde sont de la forme :

$$\psi(M, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi)$$

où

- $\omega$  est la **pulsation de l'onde**
- $\vec{k}$  est le **vecteur d'onde**
- $\varphi$  est la **phase** de l'onde à l'origine
- $A$  est la **amplitude** de la grandeur  $\psi$ .

Dans une onde électromagnétique plane progressive harmonique (**OEMPPH**), toutes les composantes de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  varient sous la forme indiquée. Par exemple, les coordonnées de  $\vec{E}$  seront de la forme :

$$E_i = E_{i0} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_{Ei})$$

et nous aurons des expressions similaires pour les coordonnées de  $\vec{B}$ , qui auront chacune leur propre amplitude et leur propre phase, mais elles partagent toutes la même pulsation et le même vecteur d'onde.

Il est commode d'introduire le vecteur unitaire parallèle à  $\vec{k}$  :

$$\vec{u} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$$

Il est alors évident que les OEMPPH sont des OEMPP se propageant dans la direction  $\vec{u}$ .

---

**Activité 5-3 : Démonstrez-le.**

---

### B.1.2 Double périodicité

Les OEMPPH présentent une double périodicité (et même une double harmonicité). Pour fixer les idées, nous prenons  $\vec{u} = \vec{e}_z$  :

$$\psi(M, t) = A \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

En un point donné, l'onde est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation  $\omega$  et de période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

À un instant donné, l'onde est une fonction sinusoïdale de  $z$  de **pulsation spatiale** :

$$k \stackrel{\text{def}}{=} \|\vec{k}\|$$

et de période, appelée **longueur d'onde**  $\lambda$  :

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi}{k}$$

Noter qu'à ce stade de notre raisonnement, il n'y a aucune relation particulière entre  $\omega$ ,  $k$  ou  $\lambda$ ,  $T$ .



### B.1.3 Vitesse de phase d'une OEMPPH

Pour une OEMPPH nous pouvons écrire

$$\psi(M, t) = A \cos(\omega t - kz + \varphi) = A \cos\left(\omega \times \left(t - \frac{z}{(\omega/k)}\right) + \varphi\right)$$

Nous reconnaissons la relation :

$$\psi(z, t) = \psi\left(0, t - \frac{z}{(\omega/k)}\right)$$

qui traduit une propagation dans la direction des  $z$  croissants avec une vitesse  $\omega/k$ . Cette vitesse est appelée **vitesse de phase**.

On la note :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

**Activité 5-4 :** Montrer qu'un plan pour lequel la valeur des phases est constante se déplace dans l'espace à la vitesse  $v_\varphi$ .

### B.1.4 Représentation complexe d'une OEMPPH

En notation complexe, les champs s'écrivent :

$$\vec{E} = \text{Re}(\underline{\vec{E}}); \quad \vec{B} = \text{Re}(\underline{\vec{B}})$$

avec

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM}); \quad \underline{\vec{B}} = \vec{B}_0 \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM})$$

Dans laquelle  $\vec{E}_0$  et  $\vec{B}_0$  sont des vecteurs complexes.

Prenons l'exemple d'une OEMPPH se propageant dans la direction des  $\vec{e}_z$ . Les composantes du champ électrique réel sont :

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x); \quad E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y); \quad E_z = E_{0z} \cos(\omega t - kz + \varphi_z)$$

Le vecteur **amplitude complexe** du champ électrique est donc :

$$\underline{\vec{E}}_0 = E_{0x} \exp(j\varphi_x) \vec{e}_x + E_{0y} \exp(j\varphi_y) \vec{e}_y + E_{0z} \exp(j\varphi_z) \vec{e}_z$$

### B.1.5 Opérateurs en représentation complexe

Les opérateurs vectoriels s'écrivent très simplement en représentation complexe pour une OEMPPH.

Il suffit de remplacer les opérateurs  $\vec{\nabla}$  par  $-j\vec{k}$  et  $\frac{\partial}{\partial t}$  par  $j\omega$ . Nous aurons ainsi

$$\text{rot} \underline{\vec{E}} = -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}, \quad \text{div} \underline{\vec{E}} = -j\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}, \quad \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = j\omega \underline{\vec{E}}, \quad \Delta \underline{\vec{E}} = -k^2 \underline{\vec{E}}$$

et les relations équivalentes pour  $\underline{\vec{B}}$ .

**Activité 5-5 :** Démontrez ces résultats.

**Activité 5-6 :** Retrouver le caractère transversal des OEMPPH en utilisant les notations de ce paragraphe.

**Activité 5-7 :** Montrer que l'on peut écrire  $\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}}$ .

---

**Remarque :** il existe une autre convention, où l'on écrit les représentations complexes sous la forme :

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp j(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \omega t); \quad \underline{\vec{B}} = \vec{B}_0 \exp j(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \omega t)$$


---

**Activité 5-8 :** Écrire les opérateurs vectoriels dans cette convention alternative.

---

## B.2 Relation de dispersion

À ce stade, nous ne savons pas encore si les OEMPPH sont réellement solutions des équations de propagation. Nous allons voir qu'il en est ainsi seulement si  $\omega$  et  $k$  vérifient une certaine relation : la relation de dispersion.

### B.2.1 Dispersion dans le vide

En représentation complexe, l'équation de d'Alembert,

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0},$$

s'écrit, pour une OEMPPH :

$$(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}) \times \underline{\vec{E}} = \vec{0}.$$

Nous souhaitons trouver des solutions vérifiant  $\underline{\vec{E}} \neq \vec{0}$ , donc nécessairement,  $\omega$  et  $k$  sont reliés par l'équation :

$$\boxed{\omega = ck}$$

Cette équation est la **relation de dispersion** des OEMPPH dans le vide.

On en déduit la relation très familière

$$\boxed{\lambda = c \times T}$$

### B.2.2 Spectre électromagnétique

On sait produire et détecter des ondes électromagnétiques dans un très grand domaine de longueur d'ondes, de quelques kilomètres à quelques dixièmes d'Angström. Grossièrement, on peut classer le domaine électromagnétique de la façon suivante :

- $\lambda > 10 \text{ cm}$  ( $f < 3 \text{ GHz}$ ) : ondes radio
- $10 \text{ cm} > \lambda > 100 \text{ } \mu\text{m}$  ( $3 \text{ GHz} < f < 3 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$ ) : micro-ondes
- $100 \text{ } \mu\text{m} - 0.8 \text{ } \mu\text{m}$  ( $3 \cdot 10^{12} \text{ Hz} < f < 3.75 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ ) : infra-rouge
- $0.4 - 0.8 \text{ } \mu\text{m}$  ( $f$  de l'ordre de  $10^{14} \text{ Hz}$ ) : visible
- $1 \text{ nm} - 0.4 \text{ } \mu\text{m}$  : Ultra-violet

- 0.01 nm – 1 nm : rayons X
- $\lambda < 1$  nm : rayons  $\gamma$

Ces domaines sont représentés graphiquement sur la figure 5.3

### B.3 Polarisation des OEMPPH

Nous savons que les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  d'une OEMPPH sont transverses, donc ils se situent dans le plan perpendiculaire à  $\vec{k}$ . La direction des vecteurs dans ce plan caractérise ***l'état de polarisation de l'onde***. Plus précisément :

La polarisation d'une OEMPPH est déterminée par la direction du vecteur ***champ électrique***.

#### B.3.1 Cas général : OEMPPH polarisée elliptiquement

Les composantes du champ électrique d'une OEMPPH de vecteur d'onde  $\vec{k} = k\vec{e}_z$  (avec  $k > 0$ ) sont, avec les modules  $E_{0x}, E_{0y}$  positifs :

$$\begin{cases} E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \\ 0 \end{cases}$$

Plaçons-nous à  $z$  fixé. L'extrémité de  $\vec{E}$  parcourt une ellipse dans le plan  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ .

L'allure de l'ellipse et sa forme dépendent :

- du rapport des amplitudes  $E_{0x}/E_{0y}$
- du déphasage entre les composantes  $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$  ( $\varphi$  est supposé dans l'intervalle  $]-\pi, +\pi]$ ).

L'ellipse et le sens de parcours sont indépendants de  $z$  car il suffit de changer l'origine des temps pour passer d'un  $z$  à un autre. En changeant l'origine des temps et en se plaçant en  $z = 0$ , on peut toujours écrire :

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t); \quad E_y = E_{0y} \cos(\omega t + \varphi), \quad \text{avec } \varphi = \varphi_y - \varphi_x.$$

L'ellipse possède les propriétés suivantes :

- Elle est inscrite dans un rectangle de côtés  $2E_{0x}, 2E_{0y}$ .
- Les axes de l'ellipse sont en général inclinés par rapport aux axes  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$  d'un angle  $\alpha$  vérifiant (résultat admis) :

$$\tan 2\alpha = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \cos \varphi. \quad (5.1)$$

- Dans les cas particuliers :  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ , les axes de l'ellipse sont confondus avec les axes  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ .
- Le sens de parcours dépend du signe de  $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$  :  
 $\varphi > 0$  : composante selon  $y$  en avance : "***polarisation elliptique droite***"  
 $\varphi < 0$  : composante selon  $y$  en retard : "***polarisation elliptique gauche***"

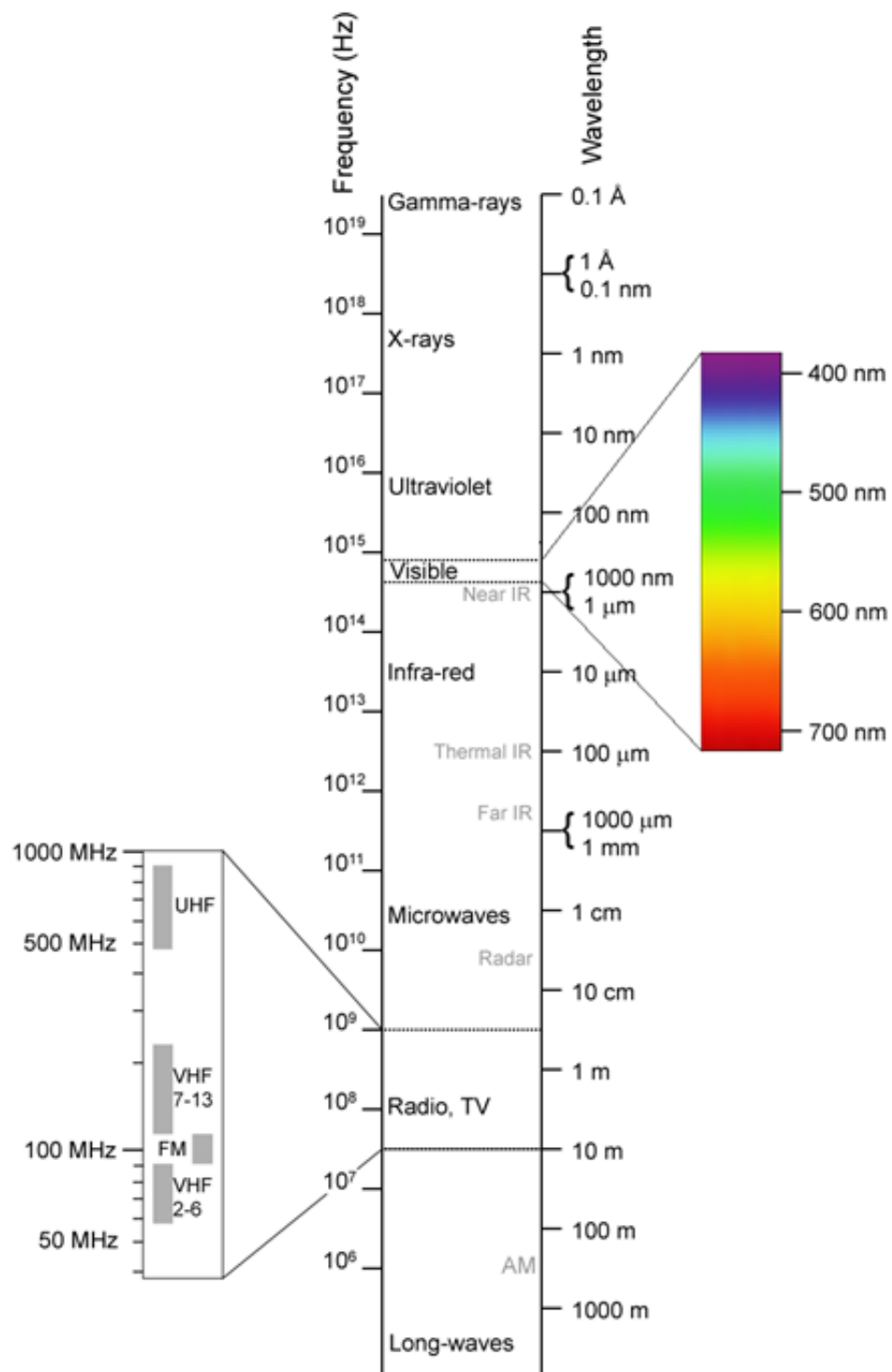


FIGURE 5.3 – Spectre électromagnétique.

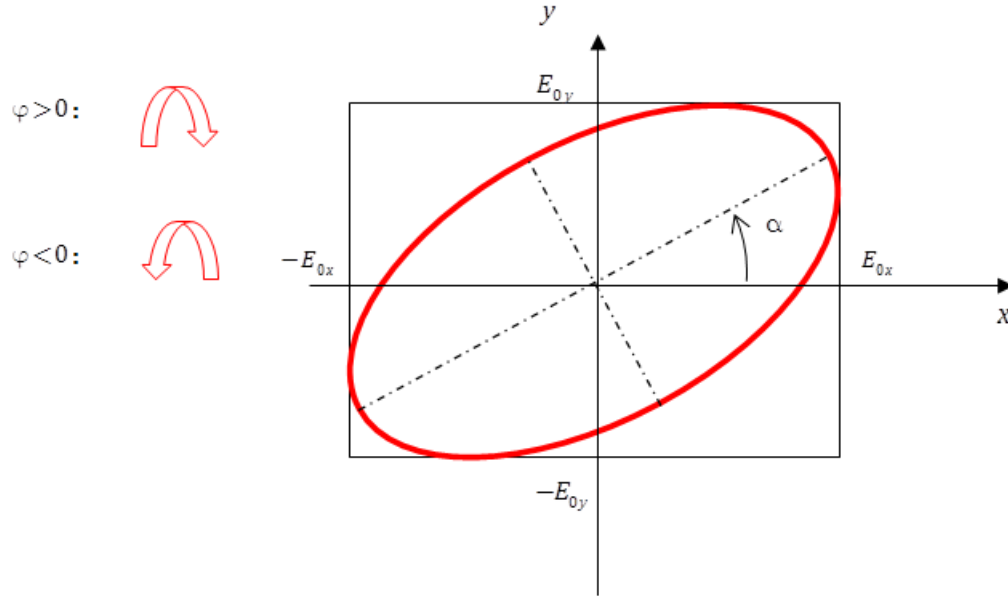


FIGURE 5.4 – Polarisation elliptique

---

**Activité 5-9 :** Démontrez ces résultats.

Remarque :

un des axes propres de l'ellipse est dirigé par le vecteur suivant :

$$\begin{pmatrix} E_{0x}^2 - E_{0y}^2 - \sqrt{E_{0x}^4 + 2E_{0x}^2 E_{0y}^2 \cos(2\varphi) + E_{0y}^4} \\ 2E_{0x} E_{0y} \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Ce résultat est équivalent au résultat 5.1.

### B.3.2 Polarisation rectiligne

L'état de polarisation le plus simple est celui dans lequel les champs gardent une direction fixe dans l'espace. On parle alors de **polarisation rectiligne**.

Il s'agit d'un état dégénéré de polarisation elliptique dans lequel les composantes sont en phase ou en opposition de phase :

$$\boxed{\varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi = \pi}$$

Dans ce cas, l'angle de polarisation  $\alpha$  avec l'axe des  $x$  vérifie :

$$\tan \alpha = \pm \frac{E_{0y}}{E_{0x}}$$

Noter que cet angle est défini à  $\pi$  près. Les angles  $\alpha$  et  $\alpha + \pi$  correspondent au même état de polarisation.

Si  $\varphi = 0$ , alors  $\alpha > 0$ . Si  $\varphi = \pi$ , alors  $\alpha < 0$ .

Pour une polarisation rectiligne générale, le vecteur  $\vec{E}$  garde une direction fixe  $\vec{w}$ , qui définit,

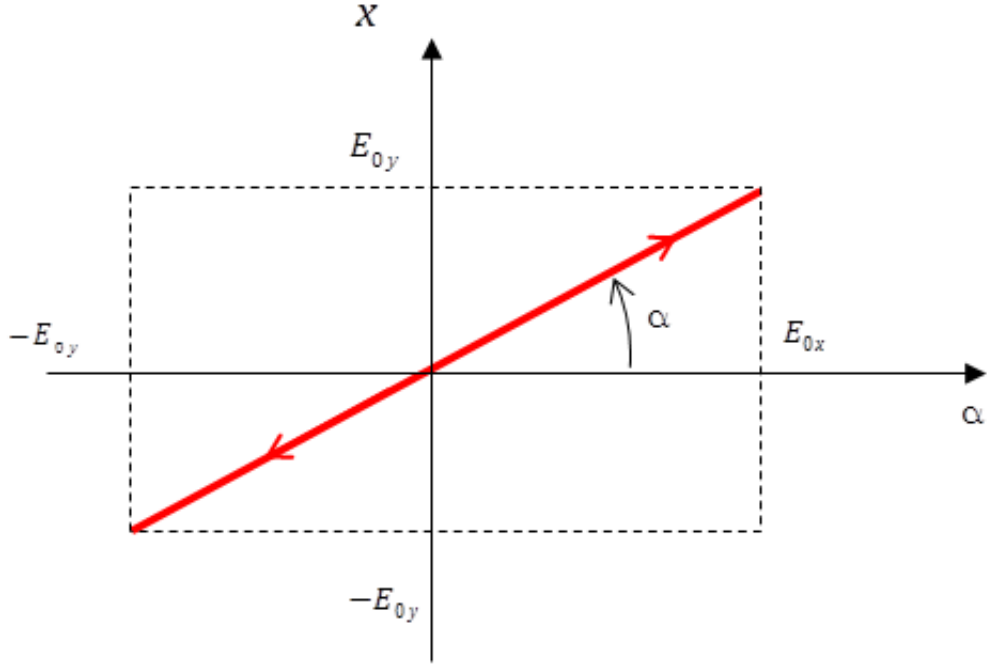


FIGURE 5.5 – Polarisation rectiligne

pour une direction de propagation  $\vec{u}$ , le **plan de polarisation** :  $\{\vec{w}, \vec{u}\}$ . La représentation complexe du champ est alors :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \vec{w} \exp(j(\omega t - k\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM})).$$

Le champ magnétique s'en déduit par :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{c} (\vec{u} \wedge \vec{w}) \exp(j(\omega t - k\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM})).$$

---

**Activité 5-10 :** Retrouvez ce résultat.

---

La figure 5.6 montre une représentation en perspective des vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , à un instant fixé. Ces trains de vecteurs se propagent à la vitesse  $c$  dans la direction  $\vec{u}$ .

À un instant donné, il existe des points où les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont simultanément nuls. Ces points se déplacent également à la vitesse  $c$  dans le sens de  $\vec{u}$ .

### B.3.3 Polarisation circulaire

L'état de polarisation circulaire est un autre cas particulier essentiel de polarisation elliptique. Il se produit quand les deux conditions suivantes sont réalisées :

$$E_{0x} = E_{0y} \quad \text{et} \quad \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

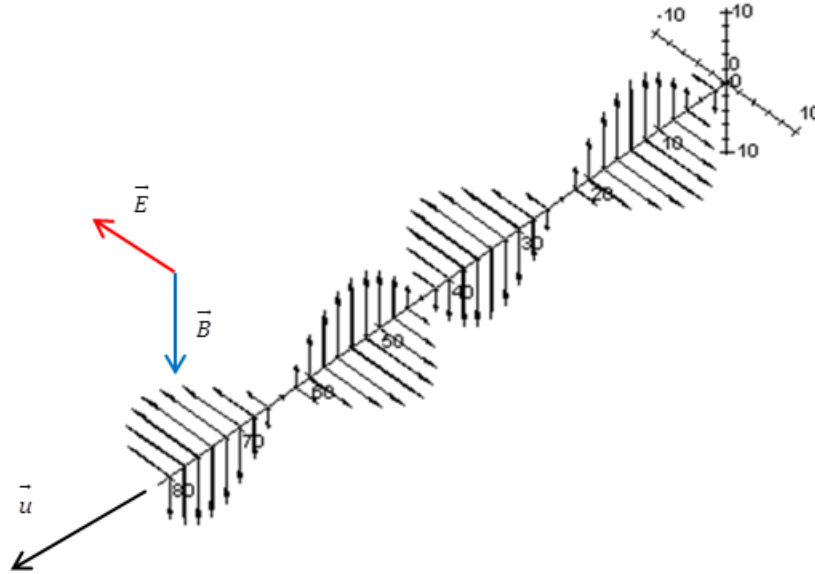


FIGURE 5.6 – Polarisation rectiligne - perspective

La représentation réelle du champ  $\vec{E}$  est alors :

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_y = E_0 \cos(\omega t - kz \pm \frac{\pi}{2}) = \mp E_0 \sin(\omega t - kz) \end{cases}$$

Si  $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ , on a une **polarisation circulaire droite**.

Si  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ , on a une **polarisation circulaire gauche**.

Noter que les représentations complexes des composantes du champ  $\vec{E}$  vérifient la relation très simple :

$$\underline{E}_y = \pm j \times \underline{E}_x$$

Contrairement au cas d'une polarisation rectiligne, le champ  $\vec{E}$  n'est jamais nul dans l'espace, à un instant donné. On a en effet :

$$\|E\| = E_0 \quad \text{pour toute valeur de } t \text{ et } z.$$

La représentation en perspective est donnée sur la figure 5.7.

---

**Activité 5-11 :** Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}$  associé au champ  $\vec{E}$  précédent (représentation complexe et expression réelle).

---

### B.3.4 Décomposition d'une polarisation quelconque

#### Base des polarisations rectilignes

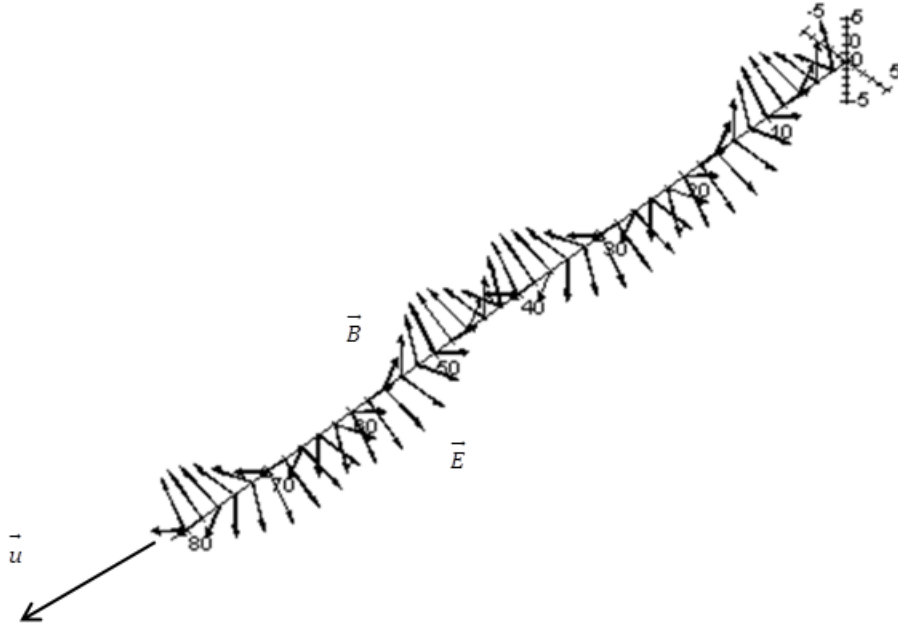


FIGURE 5.7 – Polarisation circulaire

Une OEMPPH de polarisation quelconque peut toujours être considérée comme la somme de deux OEMPPH polarisées rectilignement dans des directions orthogonales. Pour s'en convaincre, il suffit d'écrire les champs complexes :

$$\vec{E} = e^{j(\omega t - kz)} \begin{Bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} e^{j\varphi} \end{Bmatrix} = \underbrace{e^{j(\omega t - kz)} \begin{Bmatrix} E_{0x} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{PR} \parallel \vec{e}_x} + \underbrace{e^{j(\omega t - kz)} \begin{Bmatrix} 0 \\ E_{0y} e^{j\varphi} \end{Bmatrix}}_{\text{PR} \parallel \vec{e}_y}$$

Une OEMPPH est décomposable comme la somme de deux ondes polarisées rectilignement dans des directions perpendiculaires.

Les OEMPPH polarisées rectilignement selon  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  forment donc une base de l'ensemble des OEMPPH se propageant dans la direction  $\vec{e}_z$ .

### Base des polarisations circulaires

De la même façon, une OEMPPH quelconque est la somme de deux ondes polarisées circulairement. On commence par remarquer que :

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \times \left( \begin{Bmatrix} 1 \\ j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ -j \end{Bmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2j} \times \left( \begin{Bmatrix} 1 \\ j \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ -j \end{Bmatrix} \right).$$



Par conséquent,

$$\vec{E} = e^{j(\omega t - kz)} \left\{ \begin{array}{l} E_{0x} \\ E_{0y} e^{j\varphi} \end{array} \right\} = \underbrace{e^{j(\omega t - kz)} \times \left( \frac{E_{0x} - jE_{0y}e^{j\varphi}}{2} \right) \times \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ j \end{array} \right\}}_{\text{PCD}} + \dots$$

$$\underbrace{e^{j(\omega t - kz)} \times \left( \frac{E_{0x} + jE_{0y}e^{j\varphi}}{2} \right) \times \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ -j \end{array} \right\}}_{\text{PCG}}$$

Une OEMPPH est décomposable comme la somme de deux ondes polarisées circulairement dans deux sens opposés.

Les OEMPPH polarisées circulairement à gauche et à droite forment donc également une base de l'ensemble des OEMPPH dans la direction  $\vec{e}_z$ .

---

**Activité 5-12 :** Écrire la matrice de passage (et son inverse) entre la base  $[X, Y]$  des états de polarisation rectiligne selon  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  et la base  $[D, G]$  des états de polarisation circulaire droite et gauche.

---

## B.4 Aspects énergétiques des OEMPPH

Dans cette section, nous considérons une OEMPPH associée au champ électrique

$$\vec{E} = \begin{cases} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi) \end{cases}$$

### B.4.1 Densité d'énergie

Nous savons que la densité d'énergie est :

$$w_{em}(M, t) = \varepsilon_0 E^2(M, t) = \varepsilon_0 (E_{0x}^2 \cos^2(\omega t - kz) + E_{0y}^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi))$$

À un instant donné, cette densité change en général en fonction de la position.

---

**Activité 5-13 :** Pour quel état de polarisation  $w_{em}(M, t)$  est-il indépendant de  $M, t$  ?

---

En valeur moyenne dans le temps, nous aurons :

$$\langle w_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} (E_{0x}^2 + E_{0y}^2)$$

Cette densité d'énergie *moyenne* est indépendante du point considéré : en moyenne, tous les points de l'espace sont équivalents.

### B.4.2 Puissance moyenne transportée – Intensité électromagnétique

Le vecteur de Poynting est :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{1}{c\mu_0} E^2(M, t) \vec{e}_z$$

En valeur moyenne, nous avons donc :

$$\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle = \frac{1}{2c\mu_0} (E_{0x}^2 + E_{0y}^2) \vec{e}_z$$

À travers une unité de surface, on a donc une puissance moyenne transportée, dite ***intensité électromagnétique de l'OEMPPH*** :

$$I = \left\| \langle \vec{\Pi} \rangle \right\| = \frac{(E_{0x}^2 + E_{0y}^2)}{2c\mu_0}$$

Par exemple, pour une onde polarisée rectilignement dont le champ électrique a une amplitude  $E_0$ , nous aurons simplement (relation à retenir) :

$$I = \frac{E_0^2}{2c\mu_0}$$

Donnons quelques ordres de grandeur :

Pour un laser de laboratoire de puissance moyenne 1 mW, sur un spot de 0,1 mm de rayon, nous obtenons une intensité :

$$I \approx 3 \times 10^4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

D'où nous déduisons :

$$E_0 \approx 4.9 \times 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}, \quad B_0 \approx 1.6 \times 10^{-5} \text{ T}$$

L'énergie moyenne par unité de volume est de l'ordre de :

$$\langle w_{em} \rangle \sim 10^{-4} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

Noter que les lasers d'aujourd'hui permettent d'obtenir des puissances beaucoup plus grandes. Les lasers femto seconde délivrent couramment des puissances maximales de l'ordre de 10 GW, ce qui donne des champs de l'ordre de  $10^{10} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ . Ces champs très élevés ont de nombreuses applications. On essaie aujourd'hui par exemple de les utiliser pour accélérer des particules chargées.

## B.5 Limites et intérêt des OEMPPH

Les OEMPPH sont, nous l'avons vu, des idéalizations que l'on ne peut jamais réaliser rigoureusement en pratique, puisqu'elles sont associées à une puissance transportée et une énergie électromagnétique infinies.

On peut dès lors se demander pourquoi on les étudie. Il y a plusieurs raisons.

D'un point de vue pratique, on sait quand même aujourd'hui réaliser, avec les lasers, des ondes qui sont de très bonnes approximations des OEMPPH. De plus, les ondes émises par une source ponctuelle très éloignée sont, localement, considérées comme des ondes planes (voir chapitre

suivant).

D'un point de vue plus fondamental, les OEMPPH jouent le même rôle que les signaux harmoniques pour les signaux dépendant du temps. Nous admettons en effet le résultat suivant :

Toute onde électromagnétique, plane ou non, progressive ou non, peut être considérée comme la superposition d'OEMPPH polarisées rectilignement, de pulsations différentes et de phases différentes, se propageant dans des directions différentes.

Cette superposition est le plus souvent continue. Il s'agit alors d'un paquet d'ondes planes. Nous écrirons, par exemple, toute onde progressive dans la direction  $\vec{e}_z$  sous la forme :

$$\psi(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{j\omega(t - \frac{z}{c})} d\omega$$

De façon élémentaire, cette équation peut être comprise de la façon suivante :

En  $z = 0$ , le signal est la somme de signaux harmoniques  $f(\omega) e^{j\omega t}$  :

$$\psi(z = 0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Chacun de ces signaux se propage indépendamment (par linéarité), et donne, pour  $z$  quelconque, le signal harmonique  $f(\omega) e^{j\omega(t - \frac{z}{c})}$ . L'onde obtenue en  $z$  pour un temps  $t$  est simplement la somme de ces ondes :

$$\psi(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{j\omega(t - \frac{z}{c})} d\omega$$

## C LA LUMIÈRE COMME ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Nous pouvons maintenant faire le lien entre la théorie électromagnétique et la théorie optique ondulatoire étudiée précédemment.

### C.1 Le signal lumineux

On peut montrer expérimentalement (expérience de Wiener - 1889) que le **signal lumineux**, sur lequel est construite l'optique ondulatoire est en réalité le champ électrique de l'onde, non pas son champ magnétique. Plus précisément :

Les détecteurs de lumière (œil, cellules photoélectriques, ...) sont sensibles au carré du module du champ électrique, pris en valeur moyenne.

---

**Activité 5-14 :** \*Justifier que ce résultat ne peut pas être établi en considérant seulement des ondes progressives (l'expérience de Wiener se base en fait sur un phénomène d'ondes stationnaires).

---

## C.2 Polarisation de la lumière

### C.2.1 Lumière naturelle

La plupart des sources lumineuses naturelles délivrent des ondes non polarisées, dans lesquelles la direction du champ électrique n'est pas connue.

Ces ondes peuvent être considérées comme la superposition *incohérente* d'ondes qui sont polarisées rectilignement dans toutes les directions.

Le plus souvent cette décomposition est isotrope : la densité d'énergie correspondant aux ondes polarisées dans une direction donnée ne dépend pas de cette direction de polarisation. Il existe cependant de nombreux phénomènes naturels qui tendent à polariser partiellement l'onde lumineuse. Certaines directions de polarisations sont moins présentes que les autres dans la décomposition.

### C.2.2 Obtention de lumière polarisée : polariseurs

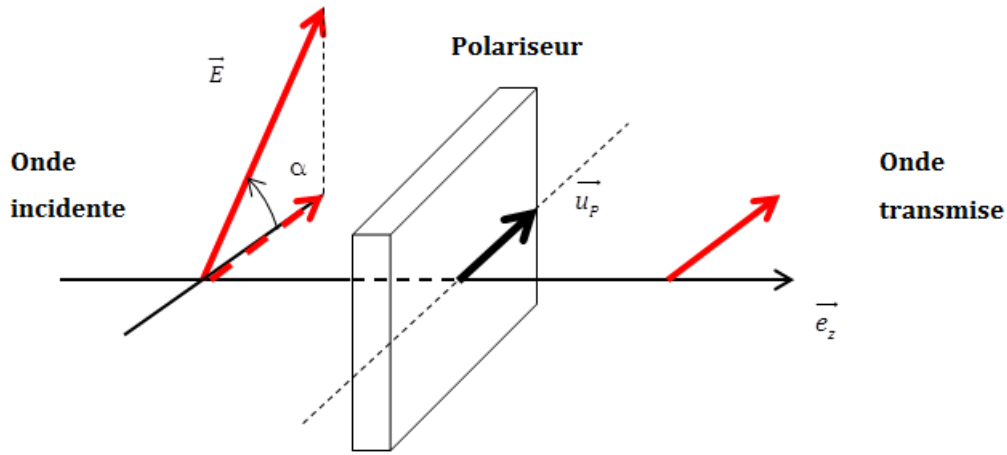


FIGURE 5.8 – Polariseur rectiligne

Un polariseur idéal est un système matériel anisotrope, qui possède une direction privilégiée, liée au système, de vecteur directeur  $\vec{u}_p$ , telle que :

- toute onde polarisée rectilignement perpendiculairement à  $\vec{u}_p$  est *totalelement absorbée*.
- toute onde polarisée rectilignement parallèlement à  $\vec{u}_p$  est *totalelement transmise*.

---

**Activité 5-15 :** Démontrer que deux polariseurs de vecteurs directeurs  $\vec{u}_p$  et  $-\vec{u}_p$  sont équivalents.

---

Considérons une onde lumineuse polarisée rectilignement qui arrive depuis  $z < 0$  vers le polariseur. Son champ électrique est :

$$\vec{E} = E_0 \vec{u} \times e^{j(\omega t - kz)}$$

Le vecteur  $\vec{u}$  s'écrit :

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{u}_p) \vec{u}_p + (\vec{u} \cdot \vec{u}_p^\perp) \vec{u}_p^\perp$$

où  $\vec{u}_p^\perp$  est le vecteur unitaire perpendiculaire à  $\vec{u}_p$  (on prend  $\{\vec{u}_p, \vec{u}_p^\perp, \vec{e}_z\}$  direct). Dans ces conditions, après le polariseur idéal, l'onde aura un champ électrique :

$$\vec{E} = E_0 (\vec{u} \cdot \vec{u}_p) e^{j(\omega t - kz + \varphi)} \vec{u}_p$$

où  $\varphi$  est un déphasage éventuel dû à la traversée de la lame.

On constate que l'onde transmise est polarisée rectilignement sur  $\vec{u}_p$  quelle que soit la direction de polarisation incidente.

On en conclut que :

Quelle que soit l'onde incidente, l'onde transmise est polarisée rectilignement selon  $\vec{u}_p$ .

---

**Activité 5-16 :** Démontrez ce résultat.

**Activité 5-17 :** Déterminer le champ électrique de l'onde transmise pour une onde incidente polarisée circulairement.

---

### C.2.3 Loi de Malus

L'intensité électromagnétique transportée par l'onde incidente est :

$$I_{\text{inc}} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$$

L'intensité électromagnétique de l'onde transmise est donc :

$$I_{\text{trans}} = \frac{E_0^2 (\vec{u} \cdot \vec{u}_p)^2}{2\mu_0 c} = I_{\text{inc}} \cos^2 \alpha$$

Ce résultat constitue la *loi de Malus*.

---

**Activité 5-18 :** Déterminer l'intensité sortant en fonction de la direction de  $\vec{u}_p$  pour une onde incidente polarisée circulairement. Commenter.

---

## D EXERCICES

### Exercice 5-1 : Propagation de l'énergie électromagnétique

Un faisceau laser émet une onde plane monochromatique polarisée rectilignement selon  $Oz$  qui se propage dans le plan  $Oxy$  suivant une direction  $\vec{e}_x$  inclinée de  $60^\circ$  par rapport à l'axe de direction  $\vec{e}_x$ .

1. Écrire les composantes du vecteur d'onde, du champ électrique, du champ magnétique et du vecteur de Poynting.  
Calculer leurs normes dans le cas d'un laser à argon ionisé ( $\lambda = 488 \text{ nm}$ ) qui émet en continu un faisceau cylindrique de  $1 \text{ mm}^2$  de section, de puissance moyenne  $1 \text{ W}$ .
2. Quelle est l'énergie électromagnétique localisée en moyenne dans une tranche d'espace plane perpendiculaire à  $Ox'$ , d'épaisseur  $dx'$  et de surface  $S$ ? Quelle est l'énergie rayonnée en moyenne à travers la surface  $S$  pendant le temps  $dt$ ? En déduire la vitesse à laquelle se propage l'énergie électromagnétique moyenne.