Probabilité

Brandon LIN

October 14, 2023

Contents

Chapter 1

Dénombrement

1.1 Cardinal d'un ensemble fini

1.1.1 Cardinal d'un ensemble fini

Definition 1.1.1: Ensemble fini, cardinal d'un ensemble fini

E un ensemble non vide est dit **ensemble fini** s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de E dans $[\![1, n]\!]$.
n est unique et appelé **cardinal** de E : $\boxed{\mathrm{Card}(E)}$.

1.1.2 Cardinal d'une partie

Theorem 1.1.1 Cardinal des parties

Soit E un ensemble fini et A une partie de E. Alors,

- A est un **ensemble fini** et $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(E)$
- $A = E \iff \mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(E)$

1.1.3 Application entre deux ensembles

Proposition 1.1.1

Soit f une application de E dans F, où E et F sont deux ensembles finis. Si (il 'existe) f (qui) est

- injective, $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(E)$
- surjective, $\mathrm{card}(A) \geq \mathrm{card}(E)$
- bijective, $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(E)$

Theorem 1.1.2

Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal, et f une application de E et F. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est injective
- f est surjective
- f est bijective

1.1.4 Opérations sur les cardinaux

Theorem 1.1.3 Produit cartésien de deux ensembles finis

$$\mathrm{card}(E \times F) = \mathrm{card}(E) \times \mathrm{card}(F) \tag{1.1}$$

Theorem 1.1.4 Réunion de deux ensembles finis

$$\mathrm{card}(E \cup F) = \mathrm{card}(E) + \mathrm{card}(F) - \mathrm{card}(E \cap F) \tag{1.2}$$

De plus, si les deux ensembles sont disjoints, alors

$$\mathrm{card}(E \cup F) = \mathrm{card}(E) + \mathrm{card}(F) \tag{1.3}$$

Corollary 1.1.1 Complémentaire

$$\mathrm{card}(C_E A) = \mathrm{card}(E) - \mathrm{card}(A) \tag{1.4}$$

1.1.5 Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre

Theorem 1.1.5

$$\mathrm{card}(\mathcal{F}(E, F)) = (\mathrm{card}(F))^{\mathrm{card}(E)} \tag{1.5}$$

Proof: Pour chaque x_i dans E, on choisit $f(x_i)$ dans E donc pour chaque élément on a $\mathrm{card}(F)$ possibilités. Cela implique que il y

$$\mathrm{card}(F) \times \mathrm{card}(F) \times \cdots \times \mathrm{card}(F) \tag{1.6}$$

possibilités. ☺

1.1.6 Nombre de parties d'un ensemble fini

Theorem 1.1.6

$$\mathrm{card}(\mathscr{P}(E)) = 2^{\mathrm{card}(E)} \tag{1.7}$$

Proof: Pour une partie de E : A, considérer la fonction $\mathbb{1}_A : E \longrightarrow \{0, 1\}$ ☺

1.2 Liste et combinaisons

1.2.1 p-listes

Definition 1.2.1: p-liste d'élément de E

Soit E un ensemble fini. Une **p-liste d'éléments de** E est un élément de la forme $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$.

Theorem 1.2.1 Nombre de p-listes

Le nombre de p-listes de E est $(\text{card}(E))^p$.

Proof: $\text{card}(E) \times \cdots \times \text{card}(E)$ ☺

Theorem 1.2.2 Nombre de p-listes d'éléments distincts

Soit $n = \text{card}(E)$. Le nombre de p-listes de E d'éléments **distincts** de E est égal à

$$\frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) \tag{1.8}$$

Theorem 1.2.3 Nombre d'injections

Le nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans unsemble de cardinal n est :

$$\frac{n!}{(n-p)!} \tag{1.9}$$

Note:-

Application injective $\iff$ p-listes d'éléments distincts, tout x_i correpond y_i unique, ensuite il y a p éléments dans l'ensemble $\{y_1, \ldots, y_n\}$ selectionnés.

1.2.2 Permutations

Definition 1.2.2: Permutation

Une **permutation** est une bijection de E dans lui-même.

Theorem 1.2.4 Nombre de permutations

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de permutations de E dans lui-même est

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1 \tag{1.10}$$

Theorem 1.2.5 Nombre de bijections

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1 \tag{1.11}$$

1.2.3 p-combinaisons

Definition 1.2.3: p-combinaison

Soit E un ensemble fini. p**-combinaison** de E est toute partie de E à p éléments.

Theorem 1.2.6

Le nombre de p-combinaisons de E :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } p \in [\![0,n]\!] \\ 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

Proof: Récurrence : Pour $a \in E$ avec $\text{card}(E) = n+1$ fixé. Nombre p-combinaison = Nombre de parties contenant a + Nombre de parties ne contenant pas a

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} \tag{1.13}$$

☺

Theorem 1.2.7
Nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments :

$$\binom{n}{p} \tag{1.14}$$

1.2.4 Règles de calcul sur les coefficients binomiaux

Theorem 1.2.8

$$\forall p \in [\![0,n]\!],\ \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \tag{1.15}$$

Theorem 1.2.9

$$\forall p \in [\![1,n]\!],\ \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} \tag{1.16}$$

Theorem 1.2.10

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n \tag{1.17}$$

Proof: Tous les parties dans un ensemble de cardinal n ☺

Theorem 1.2.11 Formule de Pascal

$$\forall p \in [\![1,n-1]\!],\ \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \tag{1.18}$$

Theorem 1.2.12 Formule du binôme de Newton

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2,\ (x + y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^n y^{n-p} \tag{1.19}$$

Chapter 2

Probabilités sur un univers fini

2.1 Définition

2.1.1 Expériences et événements aléatoire

Definition 2.1.1: Expérience aléatoire, univers des possibles

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prédire avec certitude le résultat.
- L'ensemble des résultats possibles est appelé **univers des possibles**, noté Ω.

Definition 2.1.2: Événement aléatoire

Un **événement aléatoire** est un événement qui peut se produire ou non. Il s'agit donc d'une partie de Ω : $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.

- L'événement A est **réalisé** si le résultat ω de cette expérience est élément de A.
- Ω est l'événement certain, $\emptyset$ est l'événement impossible.

Definition 2.1.3

- Événement A et B
- Événement A ou B
- Événement $\overline{A}$, **contraire de** A.

Definition 2.1.4: Événement incompatibles

$$A \cap B = \emptyset \tag{2.1}$$

Definition 2.1.5: Système complet d'événements (SCE)

Une famille finie d'événements deux à deux incompatibles et recouvrent Ω :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega,\ \forall (i,j) \in I^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset \tag{2.2}$$

2.1.2 Variable aléatoire

Definition 2.1.6: Variable aléatoire

Variable aléatoire sur Ω toute application $X : \Omega \longrightarrow E$ définie sur l'univers Ω et à valeurs dans un ensemble E.

- $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\} \in E^n$
- On note pour tout $x \in E$,

$$(X = x) = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \tag{2.3}$$

- Pour tout partie A de E,

$$(X \in A) = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in A\} \tag{2.4}$$

2.2 Espaces probabilisés finis

2.2.1 Probabilité

Definition 2.2.1: Probabilité

Soit Ω un ensemble fini non vide. Toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ est appellé **probabilité** sur Ω si elle vérifie :

- $P(\Omega) = 1$
- et si A et B deux événements incompatibles, alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{2.5}$$

On dit alors (Ω, P) est un **espace probabilisé fini**. $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $P(A) \in [0, 1]$

2.2.2 Probabilité uniforme sur un ensemble fini

Definition 2.2.2: Probabilité uniforme

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} \tag{2.6}$$

2.2.3 Propriétés des probabilités finies

Theorem 2.2.1 Formule d'additivité finie

Si (A_i) deux à deux incompatibles, alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{2.7}$$

2.3 Conditionnement

2.3.1 Probabilité conditionnelles

Definition 2.3.1: Probabilité conditionnelles

Soit (Ω, P) espace probabilisé et B un événement non négligeable. La **probabilité conditionnelle de** $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ **sachant** B :

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{2.8}$$

Proposition 2.3.1

P_B est un probabilité sur Ω

2.3.2 Formules

Corollary 2.3.1

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) \tag{2.9}$$

Proof: A, B ont lieu en même temps $=$ B déjà a lieu $+$ de plus, A aura lieu ☺

Corollary 2.3.2 Inversion des conditionnements

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)} \tag{2.10}$$

Proposition 2.3.2 Formule des probabilités composées

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \times P_{A_1} \times P(A_2) \times \dots P_{\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i}(A_n) \tag{2.11}$$

Proposition 2.3.3 Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ système complet d'événements non négligeables. Pour tout événements $B \in \mathscr{P}(\Omega)$,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(B) \tag{2.12}$$

Theorem 2.3.1 Formule de Bayes

Soit $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ système complet d'événements non négligeables. Pour tout événements $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$P_B(A_j) = \frac{P(A_j) \times P_{A_j}(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P_{A_i}(B)} \tag{2.13}$$

Proof: Combinaison des propositions précédantes. ☺

2.4 Indépendance en probabilité

2.4.1 Indépendance de deux événements

Definition 2.4.1: Indépendants pour la probabilité P

Deux événements A et B sont **indépendants pour la probabilité** P lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \tag{2.14}$$

En particulier, si $P(B) > 0$, donc ils sont indépendants si et seulement si

$$P_B(A) = P(A) \tag{2.15}$$

2.4.2 Mutuellement indépendants

Definition 2.4.2: Mutuellement indépendants

Pour tous $i_1, \dots, i_k \in [\![1, n]\!]$,

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \dots P(A_{i_k}) \tag{2.16}$$

Proposition 2.4.1

Mutuellement indépendant $\implies$ Deux à deux indépendant, maix la réciproque est fausse en général.

Definition 2.4.3: Variable aléatoire discrète

On appelle **variable aléatoire discrète** sur l'espace probabilisé Ω et à valeurs dans E toute application $X : \Omega \longrightarrow E$ vérifiant

- $\{X(\Omega)\}$ est fini ou dénombrable
- $\forall x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est élément de la tribu $\mathcal{A}$.

Note:-

Une **variable aléatoire discrète** est une fonction parfaitement déterminée. Ce sont les valeurs de X qui vont varier.

$$X \,:\, \text{Événement} \longrightarrow \text{Résultat}$$

Definition 2.4.4: Événements valeurs

Soit $X : \Omega \longrightarrow E$.
On note pour tout $x \in E$,

$$(X = x) = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \tag{2.17}$$

Pour tout partie A de E,

$$(X \in A) = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in A\} \tag{2.18}$$

Il s'agit d'un événement, et l'on peut en calculer la probabilité : $P(X = x)$

Proposition 2.4.2

$$(X \in A) = \bigcup_{x \in X(\omega) \cap A} (X = x) \tag{2.19}$$

Definition 2.4.5

Si X une variable aléatoire discrète *réelle*, $a \in \mathbb{R}$,

$$(X \leq a) = X^{-1}(]-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq a\} \tag{2.20}$$

2.5 Lois

Definition 2.5.1: Loi d'une variable aléatoire discrète

Loi de la variable $X : \Omega \longrightarrow E$:

$$\forall A \in X(\Omega),\ P_X(A) = P(X \in A) \tag{2.21}$$

Corollary 2.5.1

La loi est entièrement déterminée par les valeurs

$$\forall x \in P(\Omega),\ p_x = P_X(x) = P(X = x) \tag{2.22}$$

et

$$\sum_{x \in X(\omega)} p_x = 1 \tag{2.23}$$

2.5.1 Loi uniforme

2.5.2 Loi de Bernoulli

2.5.3 Loi binomiale

Definition 2.5.2: Loi binomiale

$$X \sim \mathcal{B}(n, p) = \left\{X(\omega) = [\![0, n]\!],\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\right\} \tag{2.24}$$

2.6 Couples de variables aléatoires discrètes

2.7 Indépendance de variable aléatoires

2.8 Espérance

Definition 2.8.1: Espérance

On dit que X admet une **espérance** si la famille $(xP(X = x))_{x \in \Omega}$ est <u>sommable</u>.
L'**espérance** vaut :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) \tag{2.25}$$

ne dépend que la loi de la variable X.

Example 2.8.1

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$,

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k.\binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)} = np \tag{2.26}$$

2.9 Variance

2.10 Variables aléatoires à valeurs naturelles

Chapter 3

Espérance et variance

3.1 Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

3.2 Variance d'une variable aléatoire réelle