2023-2-27

Bonjour

QCM mercredi

Révisions sur les espaces euclidiens.

(Premier chapitre).

Exercice : $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux hyperplans affines.

$$\mathcal{H}_1 = A_1 + \operatorname{Ker}(\varphi_1) \qquad A_1 \in \mathcal{H}_1 ,\ \varphi_1 \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$$

$$\left(\varphi_1(\overrightarrow{A_1 \Pi}) = 0 \right)$$

$$\mathcal{H}_2 = A_2 + \operatorname{Ker}(\varphi_2) \qquad A_2 \in \mathcal{H}_2 ,\ \varphi_2 \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$$

$$\left(\varphi_2(\overrightarrow{A_2 \Pi}) = 0 \right)$$

Plus généralement : un sous-espace affine est défini par la donnée d'un point Ω, d'une direction E_1 où E_1 sous-espace vectoriel de $\vec{E}$

On peut l'écrire $\mathcal{E}_1 = \Omega + E_1$

exercice (suite)

si (φ_1, φ_2) indépendantes, alors $\overline{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2} \neq \emptyset$.

Si (φ_1, φ_2) sont indépendantes, alors $E = \mathrm{Ker}(\varphi_1) + \mathrm{Ker}(\varphi_2)$

(car $\mathrm{Ker}\,\varphi_2 \not\subset \mathrm{Ker}\,\varphi_1$, donc il existe

$e \in \mathrm{Ker}\,\varphi_2 \setminus \mathrm{Ker}\,\varphi_1$ et alors

$E \supset \mathrm{Ker}\,\varphi_1 + \mathrm{Ker}\,\varphi_2 \supset \mathrm{Ker}\,\varphi_1 \oplus \mathbb{K}\cdot e = E$ (un hyperplan est de codimension 1)

car $e \in \mathrm{Ker}\,\varphi_2$

Alors $A_2 = A_1 + \overrightarrow{A_1A_2}$ $\quad \overrightarrow{A_1A_2} \in E$ donc il existe $\vec{u_1} \in \mathrm{Ker}\,\varphi_1$, $\vec{u_2} \in \mathrm{Ker}\,\varphi_2$

$\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$

donc $A_2 = A_1 + (\vec{u_1} + \vec{u_2}) = (A_1 + \vec{u_1}) + \vec{u_2}$

donc $\underbrace{A_1 + \vec{u_1}}_{\in \mathcal{H}_1} = \underbrace{A_2 - \vec{u_2}}_{\in \mathcal{H}_2} \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$

Proposition : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $(\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_p)$ hyperplans affines

Hp

on écrit $\mathcal{H}_K = A_K + \operatorname{Ker}(\varphi_K)$ pour $K \in [\![1, p]\!]$

où $A_K \in \mathcal{H}_K$, $\varphi_K \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$

alors

$$\left[(\varphi_1 - \varphi_p) \text{ indépendantes}\right] \Rightarrow \left[\bigcap_{K=1}^{p} \mathcal{H}_K \neq \emptyset\right]$$

Rappel : $\emptyset$ N'EST PAS un sous-espace affine

$\{A\}$ est un espace affine car $\{A\} = A + \underbrace{\{\vec{0}\}}$

sous-espace vectoriel de E.

Démonstration : par récurrence sur p.

1) (H_2) vraie. (exercice du jour)

2) Supposons (H_p) vraie, et prenons $(\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_{p+1})$ $p+1$ hyperplans, $(\varphi_1 - \varphi_{p+1})$ indépendantes $(\forall k \ \mathcal{H}_k = A_k + \ker(\varphi_k))$

$\rightarrow$ d'après (H_p) comme $(\varphi_1 - \varphi_p)$ indépendantes

$$\bigcap_{k=1}^{p} \mathcal{H}_k \neq \emptyset \quad \text{soit } \Omega_p \in \bigcap_{k=1}^{p} \mathcal{H}_k.$$

alors $\bigcap_{k=1}^{p} \mathcal{H}_k = \Omega_p + \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$.

(la direction d'une intersection de sous-espaces affines est l'intersection des directions)

alors $\boxed{E = \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_k) + \mathrm{Ker}(\varphi_{p+1})}$.

(* si $\mathrm{Ker}(\varphi_{p+1}) \supset \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}\,\varphi_k$ (Th des faisceaux d'hyperplans)

alors $\varphi_{p+1} \in \mathrm{Vect}(\{\varphi_1 - \varphi_p\})$.

* si $\mathrm{Ker}(\varphi_{p+1}) \subset \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}\,\varphi_k \subset \mathrm{Ker}\,\varphi_1$ alors $\varphi_1 = \lambda \cdot \varphi_{p+1}$)

alors $A_{p+1} = \Omega_p + \overrightarrow{\Omega_p A_{p+1}}$ et il existe $\vec{u}_1 \in \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$

$\vec{u}_2 \in \mathrm{Ker}(\varphi_{p+1})$, $\overrightarrow{\Omega_p A_{p+1}} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$

$$\Gamma = \underbrace{\Omega_p + \overrightarrow{u_1}}_{\in \bigcap_{k=1}^{p} \mathcal{H}_k} = \underbrace{A_{p+1} - \overrightarrow{u_2}}_{\in \mathcal{H}_{p+1}} \quad \text{donc } \Gamma \in \bigcap_{k=1}^{p+1} \mathcal{H}_k$$

Merci Maxence

Exemple d'utilisation du théorème des faisceaux

Énoncé

$E = \mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ Soit $(f, g_1, \dots, g_p) \in \mathcal{C}^1(O, \mathbb{R})^{p+1}$

O ouvert de $\mathbb{R}^n$.

$\Gamma_g = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n ; \ g_1(\underline{x}) = 0, \dots, g_p(\underline{x}) = 0 \}$

On cherche un maximum ou un minimum (extremum) de f sur Γ_g $(\underline{x}^0)$

($\rightarrow$ Cours d'optimisation)

CN Si $\underline{x}^0 \in \Gamma_g$ est un extremum, si $(dg_{1,\underline{x}^0}, \dots, dg_{p,\underline{x}^0})$ indépendantes.

alors $\mathrm{Ker}(df_{\underline{x_0}}) \supset \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}\, dg_{k,\underline{x_0}}$

donc (théorème)
$df_{\underline{x_0}} \in \mathrm{Vect}(\{dg_{1,\underline{x_0}}, \ldots, dg_{p,\underline{x_0}}\})$.

(Merci Eugène)

Remarque si $k \in [\![1,p]\!]$, $g_k \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$

$dg_{k,\underline{x_0}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$df_{\underline{x_0}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Pratique: Lagrangien du problème.

$$\boxed{L(\underline{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) \underset{=}{\text{Def}} f(\underline{x}) - \lambda_1 g_1(\underline{x}) \ldots - \lambda_p g_p(\underline{x})}$$

$\underline{x_0} \in \Gamma_g$ est un extremum si il existe $(\lambda_1^0 - \lambda_p^0) \in \mathbb{R}^p$.

$(\underline{x}^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_p^0)$ annule dL

$$\Big(L(\underline{x}^0+\underline{h}, \lambda_1^0+\delta\lambda_1, \dots, \lambda_p^0+\delta\lambda_p) = L(\underline{x}^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_p^0)$$

Raphaël

$(\delta\lambda_1, \dots, \delta\lambda_p) \in \mathbb{R}^p$

$$+ df_{\underline{x}_0}(\underline{h}) - \lambda_1^0\, dg_{1,\underline{x}_0}(\underline{h}) \dots - \lambda_p^0\, dg_{p,\underline{x}_0}(\underline{h})$$

$$- \delta\lambda_1 \cdot g_1(\underline{x}_0) \dots - \delta\lambda_p\, g_p(\underline{x}_0) + o(\|(\underline{h}, \delta\lambda_1 - \delta\lambda_p)\|)$$

$$dL_{(\underline{x}_0, \lambda_1^0 - \lambda_p^0)}(\underline{h}, \delta\lambda_1 - \delta\lambda_p).$$

$$\Big[\, dL_{(\underline{x}_0, \lambda_1^0 - \lambda_p^0)} = 0 \,\Big] \Longleftrightarrow \begin{cases} g_1(\underline{x}_0) = 0 \dots g_p(\underline{x}_0) = 0 \\ \text{et} \\ df_{\underline{x}_0}(\underline{h}) = \lambda_1^0\, dg_{1,\underline{x}_0}(\underline{h}) + \dots + \lambda_p^0\, dg_{p,\underline{x}_0}(\underline{h}) \end{cases}$$

$\Big) \; \underline{x}_0 \in \Gamma_g$

+ cette condition

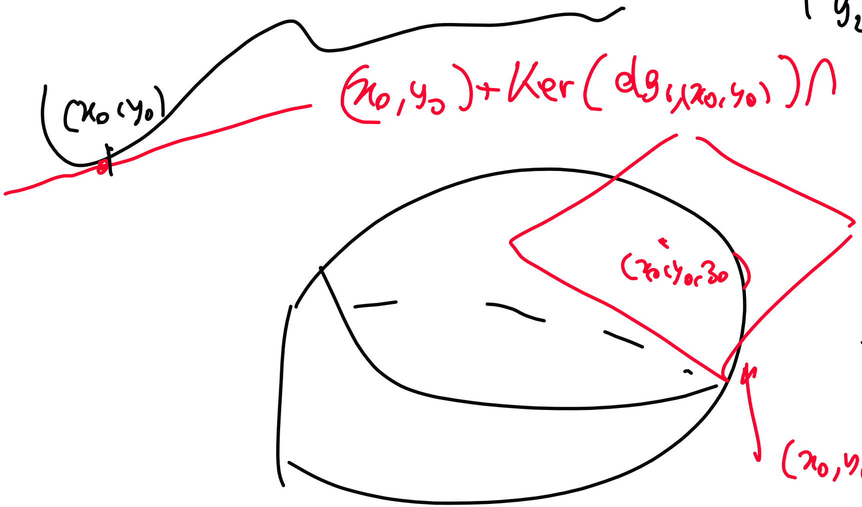
Élodie Emma

Capucine Mathilde

Agathe

Un dessin dans $\mathbb{R}^3$

$\Gamma : \left| \begin{array}{l} g_1(x,y)=0 \\ g_2(x,y)=0 \end{array}\right.$



$(x_0,y_0)+\mathrm{Ker}(dg_{1,(x_0,y_0)}) \cap \mathrm{Ker}(dg_{2,(x_0,y_0)})$

si indépendantes

$S : g(x,y,z)=0$

$(x_0,y_0,z_0)+\mathrm{Ker}(dg_{(x_0,y_0,z_0)})$

si $dg \neq 0$.

si $(dg_{1,\underline{x}_0} \,—\, dg_{p,\underline{x}_0})$ indépendantes

« l'espace tangent en $\underline{x}_0$ à Γ_g » est $\underline{x}_0 + \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(dg_{k,\underline{x}_0})$

et l'espace en $\underline{x}_0$ de $f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = 0$

$$= \underline{x}_0 + \mathrm{Ker}(df_{\underline{x}_0}) \quad (\text{si } df_{\underline{x}_0} \neq 0).$$

la condition naturelle est

$$\mathrm{Ker}(df_{\underline{x}_0}) \supset \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(dg_{k,\underline{x}_0}).$$

Simple visualisation

On va chercher le plan demandé sous la forme

$$(P) \qquad \boxed{\cos(\theta)\,(4\,x+y+z)+\sin(\theta)\,(2\,x+5\,y+3\,z+4)=0}$$

Pour trouver θ, il suffit d'écrire $d((1,1,1),P)=1$.

Théorème 1.2 – Mise en équation des sous-espaces de codimensions finies

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit E_1 un sous-espace de E, alors, pour $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{\operatorname{codim}(E_1)=p \iff \begin{cases} \exists(\varphi_1,\dots,\varphi_p)\in E^{\star p}, \ \textit{indépendantes} \\ E_1 = \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(\varphi_k) \end{cases}}$$

此定理是超平面性质的拓展。

Démonstration

— ($\Rightarrow$) Si $\operatorname{codim}(E_1)=p$, on peut, par définition trouver un supplémentaire F de dimension p, et une base de F $(e_1,\dots,e_p)$. Construisons alors, pour $k \in [\![1,p]\!]$, la forme linéaire

$$\varphi_k \text{ définie par } \begin{cases} {\varphi_k}_{|E_1} = 0_{E_1^\star} \\ \forall j \in [\![1,p]\!],\ j \neq k,\ \varphi_k(e_j)=0 \\ \varphi_k(e_k)=1 \end{cases}$$

Alors, $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ sont indépendantes et

$$E_1 = \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$$

— $(\Leftarrow)$ Par récurrence sur p.
  — (*Initialisation*) C'est la proposition caractérisant les hyperplans comme les espaces de codimension 1.
  — (*Hérédité*) Supposons le résultat vrai au rang p et prenons $p+1$ formes linéaires *indépendantes*, $(\varphi_1, \dots, \varphi_{p+1})$ et posons

$$E_1 = \bigcap_{k=1}^{p+1} \mathrm{Ker}(\varphi_k) \text{ et } E_2 = \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_k) \text{ alors } E_1 = E_2 \cap \mathrm{Ker}(\varphi_{p+1})$$

D'après l'hypothèse de récurrence, nous savons que E_2 est de codimension p. Soit F un supplémentaire de E_2 dans E de dimension p.

De plus,

$$\Big[\varphi_{p+1} \notin \mathrm{Vect}(\{\varphi_1, \dots, \varphi_p\})\Big] \implies \Big[E_2 \not\subset \mathrm{Ker}(\varphi_{p+1})\Big]$$

On peut donc trouver un vecteur $a \in E_2 \backslash E_1$. Il reste à montrer que

$$E = E_1 \oplus \underbrace{\mathbb{K}.a \oplus F}_{\text{de dimension } p+1}$$

Or, on a

$$E = \mathrm{Ker}(\varphi_{p+1}) \oplus \mathbb{K}.a$$

donc, en utilisant la première question de l'exercice 1.4.2, page 19 de [1], on obtient, puisque $a \in E_2$

$$E_2 = (E_2 \cap \mathrm{Ker}(\varphi_{p+1})) \oplus (E_2 \cap \mathbb{K}.a)\,, \text{ soit } E_2 = E_1 \oplus \mathbb{K}.a$$

Question : Donc E, $(\varphi_1 - \varphi_p) \in (E^*)^p$

$$E_1 = \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$$ sous-espace vectoriel de E. que peut-on dire de sa codimension ?

Théorème : Soit E un espace vectoriel, E_1 sous-espace vectoriel $p \in \mathbb{N}$.

$$\left[\mathrm{codim}(E_1) = p \right] \iff \left[\exists (\varphi_1 - \varphi_p) \in (E^*)^p, \text{ indépendantes}, \ E_1 = \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_k) \right]$$

donc E_1 a pour équation
$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_p(x) = 0 \end{cases}$$

Démonstration.

($\Rightarrow$) $\operatorname{codim}(E_1) = p$, il existe un sous-espace G de dimension p.

$$E_1 \oplus G = E$$

Soit $(g_1 - g_p)$ une base de G.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, φ_k définie par $\begin{cases} \varphi_k|_{E_1} = 0_{E_1^*} \\ \varphi_k(g_j) = \delta_{j,k} \end{cases}$

$$\operatorname{Ker}(\varphi_k) = E_1 \oplus \operatorname{Vect}(\{g_1 - g_{k-1}, g_{k+1} - g_p\}).$$

alors $\quad E_1 = \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(\varphi_k)$

$\left(* \ \underline{E_1 \subset \bigcap_{k=1}^{p} \ker(\varphi_k)} \right.$ car $\forall k \in [\![1,p]\!]$ $\varphi_k|_{E_1} = 0_{E_1}$

$*$ $\underline{\bigcap_{k=1}^{p} \ker \varphi_k \subset E_1}$ car si $x \in E$. il existe $x_1 \in E_1$
$(\lambda_1 - \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$.

$$x = x_1 + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k . g_k \qquad (E = E_1 \oplus G).$$

Soit $j \in [\![1,p]\!]$ $\quad \varphi_j(x) = \underbrace{\varphi_j(x_1)}_{=0} + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \underbrace{\varphi_j(g_k)}_{\delta_{j,k}} = \lambda_j$

si $x \in \bigcap_{k=1}^{p} \ker \varphi_k$ $\quad \varphi_j(x) = 0$

donc $\left. x = x_1 \in E_1 \right)$ $\blacksquare$

$(\Leftarrow)$. Soit $(\varphi_1 - \varphi_p)$ des formes linéaires indépendantes.
alors $\quad \operatorname{codim}\left(\bigcap_{k=1}^{p} \ker(\varphi_k)\right) = p$ $\qquad (H_p)$

démonstration par récurrence sur p

* (H_1) vraie. un hyperplan est de codimension 1.
* Supposons (H_p) vraie, et soit $(\varphi_1 - \varphi_{p+1})$ des formes linéaires indépendantes

d'après (H_p). $\bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$ de codimension p.

(il existe G de dimension p, $\bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_k) \oplus G = E$.)

de plus $\mathrm{Ker}(\varphi_{p+1}) \not\supset \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$ car $(\varphi_1 - \varphi_{p+1})$ indépendantes (Th. des faisceaux d'hyperplans).

et $\mathrm{Ker}(\varphi_{p+1}) \not\subset \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$

donc $\boxed{E = \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_k) + \mathrm{Ker}(\varphi_{p+1})}$

Soit $g_1 \in G \setminus \{0_E\}$, $G = \mathbb{K} g_1 \oplus G_1$ $\quad \dim(G_1) = p-1$

Il existe $w_p \in \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$ et $x_{p+1} \in \mathrm{Ker}(\varphi_{p+1})$.

$g_1 = w_p + x_{p+1}$ et $x_{p+1} \neq 0_E$

$G' = \mathbb{K} x_{p+1} \oplus G_1$ et $E = \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_k) \oplus G'$

$= \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}\,\varphi_k \oplus \mathbb{K} x_{p+1} \oplus G_1$

On recommence $\boxed{E = \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}\,\varphi_k \oplus G_p}$ où $G_p \subset \mathrm{Ker}(\varphi_{p+1})$.

$\dim G_p = p$

Si $E = F + G$ on peut trouver un supplémentaire de F inclus dans G. (facile si $\dim G < +\infty$)

$$\mathrm{Ker}(\varphi_{p+1}) \cap E = \mathrm{Ker}(\varphi_{p+1}) = \bigcap_{k=1}^{p+1} \mathrm{Ker}(\varphi_k) \oplus (G_p \cap \mathrm{Ker}\,\varphi_{p+1})$$

(si $(F+G) \cap H = F \cap \underset{H}{\cancel{G}} + G \cap H$ quand $\cancel{G \subset H}$) (Victor)

donc $\mathrm{Ker}(\varphi_{p+1}) = \bigcap_{k=1}^{p+1} \mathrm{Ker}(\varphi_k) \oplus G_p$.

Soit $e \notin \mathrm{Ker}(\varphi_{p+1})$ $E = \mathrm{Ker}(\varphi_{p+1}) \oplus \mathbb{K}e = \bigcap_{k=1}^{p+1} \mathrm{Ker}(\varphi_k) \oplus \underbrace{G_p \oplus \mathbb{K}e}_{\text{de dimension } p+1}$

Remarque 1.7

C'est ainsi que l'on retrouve que dans l'espace, les droites sont définies par 2 équations.

Remarque 1.8 – Équations non indépendantes

Que se passe-t-il lorsque les formes linéaires (et donc les équations) ne sont pas indépendantes ? Il est immédiat que

$$\boxed{\operatorname{codim}(E_1) = \operatorname{rang}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)}$$

Remarque 1.9

En dimension finie, cela permet de calculer des dimensions. On dit souvent que

— la dimension de l'espace est le *nombre de degrés de liberté* ;

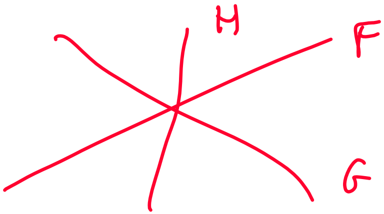
— le nombre d'équations indépendantes est le *nombre de contraintes* ;

— la dimension du sous-espace vectoriel est donc égale à « nombre de degré de liberté − nombre de contraintes ».

Cette relation n'est valable qu'avec des contraintes *linéaires* !

① On a-t-il $(F\oplus G)\cap H = F\cap H \oplus G\cap H$ si $G\subset H$.

⚠ faux en général



$(F\oplus G)\cap H = H$

$F\cap H + G\cap H = \{0\}$.

* $F\cap H \oplus G\cap H \subset (F\oplus G)\cap H$.

$x = x_1 + x_2$ alors $\begin{cases} x \in H \\ x\in F\oplus G \end{cases}$ $(x_1\in F, x_2\in G)$.

$x_1 \in F\cap \cancel{G}\, H$, $x_2 \in \cancel{F\cap G}\; G\cap H$

* $G\subset H$ alors $(F\oplus G)\cap H \subset F\cap H + G\cap \cancel{G}\, H$

Soit $x\in (F\oplus G)\cap H$. $x = x_F + x_G$ $x_F\in F$, $x_G\in G$.

et $x_G \in G\cap H$ car $G\subset H$. donc $x_F = x - x_G \in H$.

donc $x_F \in F \cap H$.

2) Si $E = F + G$. $\operatorname{codim} F < +\infty$

il existe sous espace G_1 de G, $E = F \oplus G_1$

<u>codim F = p</u>

<u>Analyse</u>

Soit $e_1 \in G \setminus F$ alors $E = F + G = (F \oplus \mathbb{K}e_1) + G$

et $\operatorname{codim}(F \oplus \mathbb{K}e_1) = p - 1$

Soit $e_2 \in G \setminus (F \oplus \mathbb{K}e_1)$. ...

<u>Synthèse</u> : récurrence sur p.

Remarque 1.10

Le théorème se généralise facilement à la situation affine. Cependant, l'intersection d'hyperplans affines peut-être vide, aussi faut-il, avant toutes choses, s'assurer qu'elle ne l'est pas ! Puis, en s'appuyant sur un point trouvé de l'intersection, on est ramené au cas vectoriel.

Proposition 1.3

Soit V un espace affine de direction un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ sont des formes linéaires de E indépendantes, *et si $\mathcal{H}_k$ est un hyperplan affine de direction* $\operatorname{Ker} \varphi_k$ *pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, alors*

$$\bigcap_{k=1}^{p} \mathcal{H}_k \neq \varnothing$$

Démonstration

Laissé en exercice.

Exercice(s) 1.2

1.2.1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $(x_1, \dots, x_p)$ des vecteurs de E. Démontrer que

$$(x_1, \dots, x_p) \text{ libre } \iff \left[\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \exists \varphi \in E^\star,\ \forall k \in [\![1, p]\!],\ \varphi(x_k) = \lambda_k\right]$$

1.2.2 (a) $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est-il un hyperplan de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

(b) Démontrer que $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est isomorphe à un hyperplan de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1.2.3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit V un sous-espace vectoriel de $E^\star$. On dit que V *sépare les vecteurs*, si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \neq y \implies \left[\exists \varphi \in V,\ \varphi(x) \neq \varphi(y)\right]$$

Démontrer que V sépare les vecteurs si, et seulement si, $V = E^\star$.

1.2.4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour $A \in \mathscr{P}(E)$, on appelle *orthogonal (direct) de* A et on note

$$A^\perp = \{\varphi \in E^\star,\ \forall a \in A,\ \varphi(a) = 0\}$$

Démontrer que

(a) $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $E^\star$.

(b) $A^\perp = \operatorname{Vect}(A)^\perp$.

Dans la suite A et B sont des sous-espaces vectoriels de E.

(c) $(A \cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$.

(d) $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

(e) Si $E = A \oplus B$, alors $A^\perp$ est isomorphe à $B^\star$.

(f) Si E est de dimension finie, alors $\dim A^\perp = \operatorname{codim} A$.

1.2.5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $B \in \mathscr{P}(E^\star)$, on appelle *orthogonal (indirect) de* B et on note

$$B^\top = \{x \in E,\ \forall \varphi \in B,\ \varphi(x) = 0\}$$

Démontrer que

(a) $B^\top$ est un sous-espace vectoriel de E.

(b) $B^\top = \mathrm{Vect}(B)^\top$.

Dans la suite, A et B sont des sous-espaces vectoriels de $E^\star$.

(c) $(A+B)^\top = A^\top \cap B^\top$.

(d) $(A \cap B)^\top \supset A^\top + B^\top$.

(e) Si E est de dimension finie, alors
$$\dim B^\top = \operatorname{codim} B$$

(f) En déduire que l'inclusion de la question (d) est une inégalité en dimension finie.

(g) Donner un contre-exemple à l'égalité dans la question (d) lorsque E est de dimension infinie.

(h) Si A est un sous-espace vectoriel de E, comparer
$$A \text{ et } \left(A^\perp\right)^\top$$

(i) Si B est un sous-espace vectoriel de $E^\star$, comparer
$$B \text{ et } \left(B^\top\right)^\perp$$

1.2.6 Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $u \in \mathscr{L}(E, E')$. On définit l'application *transposée de* u et on note
$$^t u \ : \begin{cases} E'^\star \to E^\star \\ \varphi \mapsto \varphi \circ u \end{cases}$$

(a) Démontrer que ${}^t(u \circ v) = {}^tu \circ {}^tv$.

(b) Démontrer que

$$\mathrm{Ker}({}^tu) = \mathrm{Im}(u)^\perp$$

(c) Démontrer que

$$\mathrm{Im}({}^tu) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$$

Exercice : Soit E un espace vectoriel $x \in E$

$$[x = 0_E] \Leftrightarrow [\forall \varphi \in E^*, \varphi(x) = 0]$$

2023-2-