EXERCICE 1. Spectre d'émission de l'hydrogène et étude quantique

---

Données numériques

- *Constante de Planck :* $h = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$
- *Vitesse de la lumière dans le vide :* $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
- *Charge élémentaire :* $e = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
- *Définition de l'électron-volt :* $1\,\mathrm{eV} = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$
- *Permittivité diélectrique du vide :* $\varepsilon_0 = 8{,}854\,187\,82 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$
- *Masse de l'électron :* $m_\mathrm{e} = 9{,}109\,39 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
- *Masse du proton :* $m_\mathrm{p} = 1{,}672\,62 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
- *Masse du neutron :* $m_\mathrm{n} = 1{,}674\,93 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
- *Masse moyenne d'un nucléon :* $m_\mathrm{nu} = 1{,}673\,78 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

Le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène (naturel) est constitué de plusieurs raies, regroupées en séries : Lyman, Balmer, Paschen, Brackett, Pfund, Humphreys, etc.

• Introduction théorique

En supposant le noyau de l'atome d'hydrogène immobile, la théorie quantique permet de montrer que l'énergie des niveaux électroniques de l'atome d'hydrogène est quantifiée : $E_n = -\dfrac{E_0}{n^2}$, où $E_0 = \dfrac{m_\mathrm{e}\, e^4}{8\,\varepsilon_0^2\, h^2}$ et n est le nombre quantique principal.

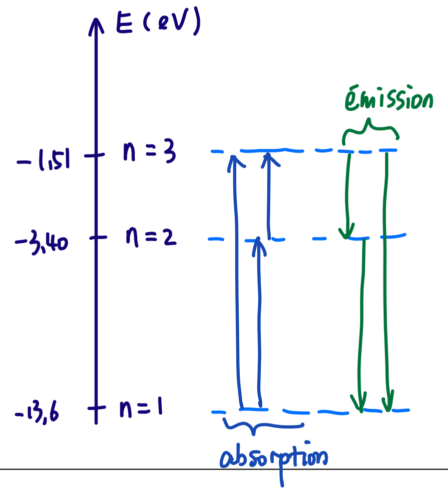
La série de Balmer correspond à la désexcitation de l'électron d'un niveau d'énergie E_p ($p > 2$) vers le niveau d'énergie E_2 ($n = 2$).

1. Calculer la valeur de l'énergie E_0. *Donner le résultat en électron-volts et avec 3 chiffres significatifs.*

$$E_0 = \frac{m_e\, e^4}{8\, \varepsilon_0^2\, h^2}$$

A.N. $E_0 = 13{,}6\ \mathrm{eV}$

2. Sur un diagramme d'énergie, représenter les trois premiers niveaux d'énergie et y indiquer les transitions possibles. Calculer le nombre d'onde $\sigma_\mathrm{min} = \dfrac{1}{\lambda_\mathrm{max}}$ correspondant à la transition la moins énergétique.



$$\sigma_{min} = \frac{1}{\lambda_{max}} = \frac{E_0}{hc}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)$$

Ici, $n = 2$ et $p = 3$

Donc, $\sigma_{min} = 1{,}52 \cdot 10^6\ \mathrm{m^{-1}}$

3. Déterminer l'expression théorique du nombre d'onde $\sigma_{2,p} = \dfrac{1}{\lambda_{2,p}}$ en fonction de E_0, h, c, et p, valable pour toute raie de la série de Balmer. Le nombre d'onde $\sigma_{2,p}$ est-il croissant (augmente) ou décroissant (diminue) avec p ? Calculer la valeur théorique de la constante $\dfrac{E_0}{h\,c}$.

- $\sigma_{2,p} = \dfrac{1}{\lambda_{2,p}} = \dfrac{E_0}{hc}\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{p^2}\right)$, avec $p > 2$
- Quand p augmente, $\sigma_{2,p}$ croissant
- Constante de Rydberg : $\dfrac{E_0}{hc} = \dfrac{m_e e^4}{8 \varepsilon_0 h^3 c}$

  A.N. $\dfrac{E_0}{hc} = 1{,}10 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

• Une première étude expérimentale

Un expérimentateur obtient le spectre d'une lampe à vapeur d'eau H_2O (g). En particulier, ce spectre contient quatre raies pour l'atome d'hydrogène (naturel) dans la série de Balmer : H_α, H_β, H_γ, et H_δ.

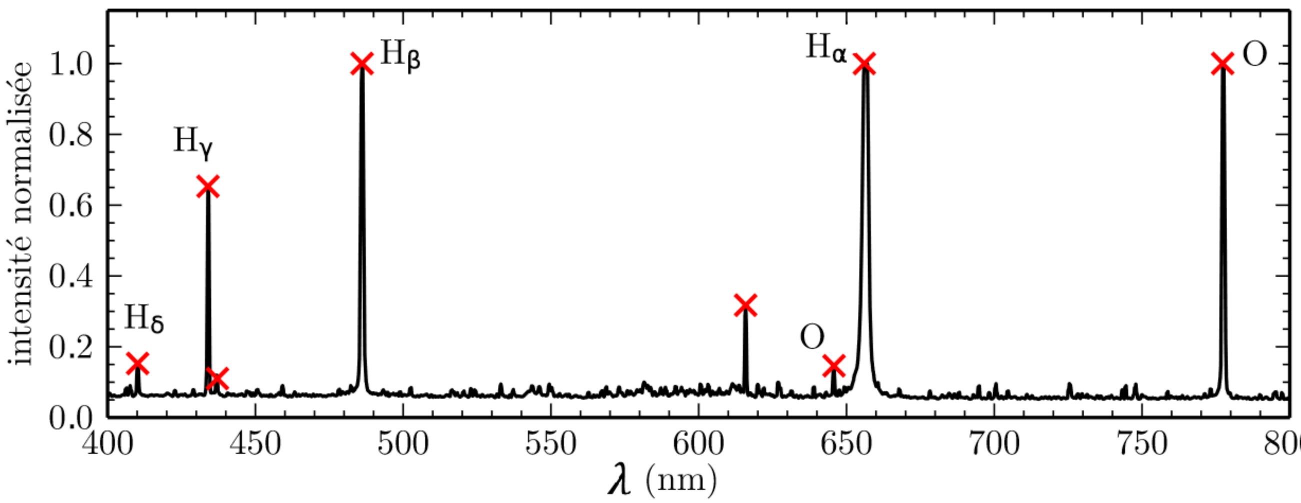


FIGURE 1 – Quelques radiations émises par une lampe à vapeur d'eau

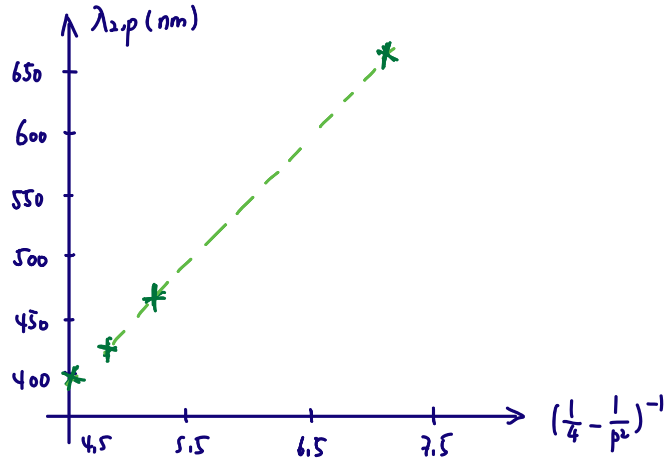
4. Que signifient « λ » et « nm » sur l'axe des abscisses (axe horizontal) ? Quel est le domaine du spectre électromagnétique associé à cette étude ?

- λ : longueur d'onde, nm : 10^{-9} m
- $\lambda \in [400 ; 800 \text{ nm}]$: domaine de la lumière visible

5. Proposer une méthode qui montre que l'expression théorique du nombre d'onde $\sigma_{2,p}$ est vérifiée expérimentalement d'après la figure 1.

- $\sigma_{2,p} = \frac{E_0}{hc}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p^2}\right)$, donc $\lambda_{2,p} = \frac{hc}{E_0}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p^2}\right)^{-1}$ (*)

- On trace $\lambda_{2,p}^{exp}$ en fonction de $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p^2}\right)^{-1}$:



p	3	4	5	6
$\lambda_{2,p}^{exp}$ (nm)	656	487	434	400
$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p^2}\right)^{-1}$	7,2	5,3	4,8	4,5

- Une regression linéaire des données expérimentales permet de vérifier (*).

• Une seconde étude expérimentale - existence du déplacement isotopique

En réalité, chaque isotope naturel de l'hydrogène a son propre spectre d'émission. Par exemple, le protium ^{1}H (noté P) et le deutérium ^{2}H (noté D) ont des spectres légèrement différents.

Les résultats expérimentaux d'une étude isotopique sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	raie δ	raie γ	raie β	raie α
transition	de $p = 6$ à $n = 2$	de $p = 5$ à $n = 2$	de $p = 4$ à $n = 2$	de $p = 3$ à $n = 2$
λ_P (nm)	410,07	433,94	486,01	656,11
λ_D (nm)	409,96	433,82	485,88	655,93

Pour vérifier théoriquement ces valeurs expérimentales, le modèle quantique doit être amélioré : en réalité, le noyau n'est pas immobile, mais c'est le centre de masse (重心) du système {noyau + électron} qui est immobile.

Avec ce nouveau modèle, l'énergie du niveau fondamental de l'isotope i est $E_0 = \dfrac{\mu_i\, e^4}{8\,\varepsilon_0^2\, h^2}$, avec $\mu_i = \dfrac{m_e\, M_i}{m_e + M_i}$ la masse réduite du système {noyau i + électron} où M_i est la masse du noyau de l'isotope i.

6. Déterminer l'expression du rapport $d = \dfrac{\sigma_D - \sigma_P}{\sigma_P}$ en fonction des masses m_e, M_P, et M_D.

- $d = \dfrac{\sigma_D}{\sigma_p} - 1 = \dfrac{E_{0D}}{E_{0p}} - 1$

$= \dfrac{m_e M_D}{m_e + M_D} \cdot \dfrac{m_e + M_p}{m_e M_p} - 1$

$= \dfrac{M_D}{M_p} \cdot \dfrac{m_e + M_p}{m_e + M_D} - 1$

$= \dfrac{m_e}{M_p} \, \dfrac{M_D - M_p}{m_e + M_D}$

7. En faisant certaines hypothèses qu'il faut expliciter (解释), montrer que l'expression précédente se simplifie : $d = \dfrac{m_e}{2\, m_{nu}}$. Faire l'application numérique. *Donner le résultat avec 2 chiffres significatifs.*

- $M_p \simeq m_{nu}$ et $M_D \simeq 2\, m_{nu}$
- $m_e \ll M_p$, $m_e \ll M_D$
- Donc $d \simeq \dfrac{m_e}{m_{nu}} \cdot \dfrac{m_{nu}}{2\, m_{nu}} = \dfrac{m_e}{2\, m_{nu}}$

A.N. $d = 2{,}7 \cdot 10^{-4}$

8. Montrer que le résultat précédent permet d'expliquer qualitativement que les raies de l'isotope D sont toutes déplacées vers le bleu par rapport à celles de l'isotope P.

- $d > 0$, donc $\sigma_D - \sigma_P > 0$, donc $\lambda_P > \lambda_D$

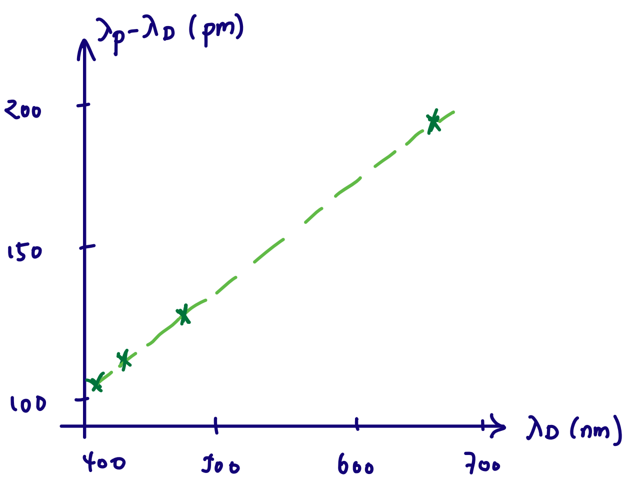
- Les raies de D ont des longueurs d'onde plus petites que celles de P, donc elles sont toutes déplacées vers le bleu par rapport à celles de P.

9. Proposer une méthode qui montre que l'expression théorique du rapport $d = \dfrac{\sigma_D - \sigma_P}{\sigma_P}$ est vérifiée expérimentalement (voir les valeurs expérimentales dans le tableau).

- $d = \dfrac{\sigma_D - \sigma_P}{\sigma_P} = \dfrac{\lambda_P - \lambda_D}{\lambda_P} \simeq \dfrac{m_e}{2m_{u}}$

  $\Rightarrow \quad \lambda_P - \lambda_D = \dfrac{m_e}{2M_{au}} \cdot \lambda_D \qquad (\Delta)$

- On trace $\lambda_P - \lambda_D$ en fonction de λ_D et vérifie si elle est linéaire :



p	3	4	5	6
λ_D^{exp} (nm)	655,93	485,88	433,82	409,96
$\lambda_P^{exp} - \lambda_D^{exp}$ (nm)	0,18	0,13	0,12	0,11

- Un ajustement linéaire montre que les données expérimentales sont en accord avec l'expression théorique de d (Δ).

Remarque historique
En 1931, Harold Clayton Urey (1893–1981) découvre le deutérium en observant, dans le spectre de l'hydrogène, les raies dues au déplacement isotopique. Pour cette découverte, il a obtenu le prix Nobel de chimie en 1934.

Exercice 2 :

L'uranium est l'élément chimique de numéro atomique 92, de symbole U. Il fait partie de la famille des actinides (锕系).

I. Radioactivité naturelle et datation

L'uranium est un métal lourd radioactif (émetteur α) de période très longue.

1. Écrire l'équation bilan de la désintégration α de l'uranium 238.

$$^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}He$$

2. À l'instant t, la population de noyaux radioactifs identiques est $N(t)$. Donner la relation entre la constante radioactive λ, la durée élémentaire $\mathrm{d}t$, la population $N(t+\mathrm{d}t)$, et la population $N(t)$. Montrer alors que l'évolution de $N(t)$ est gouvernée par l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}(t) + \lambda N(t) = 0$.

$$N(t+dt) - N(t) = -\lambda N(t)\, dt \quad , \quad [\lambda] = s^{-1}$$

posons $dN(t) = N(t+dt) - N(t)$

Soit $\frac{dN(t)}{dt} + \lambda N(t) = 0$

3. Établir le lien entre λ et $T_{1/2}$, la durée de demi-vie (période radioactive).

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot T_{1/2}}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

4. Calculer numériquement les valeurs des constantes radioactives λ_{238} et λ_{235} des noyaux respectifs d'uranium 238 et 235. Commenter. Est-ce que l'abondance d'uranium 235 augmente ou diminue au cours du temps ?

$$\lambda_{238} = \frac{\ln 2}{T^{238}_{1/2}} = \frac{\ln 2}{4,468 \cdot 10^9} = 1,551 \cdot 10^{-10} \text{ ans}^{-1}$$

$$\lambda_{235} = \frac{\ln 2}{T^{235}_{1/2}} = \frac{\ln 2}{703,8 \cdot 10^6} = 9,849 \cdot 10^{-10} \text{ ans}^{-1}$$

λ represente la probabilité de disintégration d'un noyau par unité de temps. $\lambda_{235} > \lambda_{238}$ donc le noyau de ^{235}U est plus probable de desintegrer. Ainsi l'abondance d'uranium 235 diminue au cours du temps.

5. Au moment de la formation de la Terre, les quantités des deux isotopes sont supposées égales. Utiliser les abondances naturelles actuelles de ces deux isotopes pour en déduire l'âge de la Terre.

$$N_{235}(t) = N^0_{235} \cdot e^{-\lambda_{235} \cdot t}$$

$$N_{238}(t) = N^0_{238} \cdot e^{-\lambda_{238} \cdot t}$$

donc, $$\frac{N_{235}(t)}{N_{238}(t)} = \frac{N^0_{235}}{N^0_{238}} \cdot e^{(\lambda_{238} - \lambda_{235}) \cdot t}$$

Or, $$\frac{N^0_{235}}{N^0_{238}} = \frac{\frac{1}{2} N_0}{\frac{1}{2} N_0} = 1$$

Soit $$\frac{0,72}{99,28} = e^{(1,551 \cdot 10^{-10} - 9,849 \cdot 10^{-10}) \cdot t}$$

donc $t = 5,9 \cdot 10^9$ ans

II. Fission et énergie nucléaire

L'isotope 235 de l'uranium est le seul isotope fissile naturel. Dans les réacteurs nucléaires, la production d'énergie repose sur la fission de cet isotope. Lorsqu'un neutron heurte (撞到) un noyau d'uranium 235, un des modes de fission possible conduit à la formation d'un noyau de cérium $^{146}_{58}\mathrm{Ce}$, d'un noyau de sélénium $^{85}_{Z}\mathrm{Se}$, et à un nombre n de neutrons.

6. Écrire l'équation complète de cette réaction nucléaire, et donner les valeurs de n et Z.

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{146}_{58}Ce + ^{85}_{34}Se + 5\,^{1}_{0}n$$

$$\begin{cases} Z = 92 - 58 = 34 \\ n = 1 + 235 - 146 - 85 = 5 \end{cases}$$

7. Calculer la variation de masse Δm qui accompagne la fission d'un noyau d'uranium 235. *Donner le résultat en unité de masse atomique (u).*

$$\Delta m = m(^{146}_{58}Ce) + m(^{85}_{34}Se) + 5m(^{1}_{0}n) - m(^{235}_{92}U) - m(^{1}_{0}n)$$

A.N. $$\Delta m = 145{,}8782 + 84{,}9033 - 234{,}9935 + 4\,\frac{1{,}6749 \cdot 10^{-27}}{1{,}6605 \cdot 10^{-27}}$$

$$= -0{,}1773 \quad u$$

8. Pour une mole d'uranium 235, calculer l'énergie ΔE libérée par cette réaction de fission. *Donner le résultat en joule (J).*

$$\Delta E = N_A \cdot \Delta m \cdot c^2$$

A.N. $$\Delta E = 6{,}02 \cdot 10^{23} \times (-0{,}1773) \times 1{,}6605 \cdot 10^{-27} \times (2{,}9979 \cdot 10^{8})^2$$

$$= -1{,}59 \cdot 10^{13} \quad J$$

La fission de l'uranium 235 produit aussi le césium 137 ($^{137}_{55}$Cs) qui est un émetteur radioactif β^-. Le noyau de baryum Ba issu de cette désintégration se trouve dans un état d'énergie excité, puis passe dans son état fondamental.

9. Écrire l'équation bilan de la désintégration β^- du césium 137.

$$^{137}_{55}Cs \longrightarrow \, ^{137}_{56}Ba + \, ^{0}_{-1}e + \, ^{0}_{0}\overline{\nu_e}$$

10. Quel type de rayonnement émet le noyau de baryum ? Comment se protéger contre ce rayonnement ?

$$^{137}_{56}Ba^* \rightarrow \, ^{137}_{56}Ba + \gamma$$

Rayonnement gamma γ

Le rayonnement γ est très pénétrant, il faut une forte épaisseur de bêton ou de plomb pour s'en protéger.