2023-3-6

Soit E un espace vectoriel.

$$\forall x \in E \quad [x = 0_E] \Leftrightarrow [\forall \varphi \in E^*, \varphi(x) = 0]$$

$(\Rightarrow)$ évident

$(\Leftarrow)$

En dimension finie, $E = \mathbb{K}x \oplus H$

si $x \neq 0_E$ $\quad \varphi$ définie par $\begin{cases} \varphi|_H = 0 \\ \varphi(x) = 1 \end{cases}$

on a montré que $(x \neq 0_E) \Rightarrow [\exists \varphi \in E^*, \varphi(x) \neq 0]$

En dimension infinie. $E = \mathbb{K}x \oplus H$.

(l'existence en général n'est pas simple.

Nous supposerons que nous sommes dans le cas où tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire).

* H hyperplan, alors $H \oplus \mathbb{K}\cdot e = E$ $(\forall e \in E \setminus H)$
* si $e \neq 0_E$ trouver H (hyperplan) tel que $\mathbb{K}e \oplus H = E$ en général difficile

---

Question : (Étude) Exemple 4.2 du livre.

$E = \mathrm{Vect}(\{x \mapsto x^k, k \in \mathbb{N}\})$.

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{\min(d^\circ P, d^\circ Q)} a_k b_k$$

$H = \{P \in E, P(1) = 0\}$, alors $H^\perp = \{0_E\}$.

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, (x \longmapsto x^n - 1) \in H$

2) Soit $Q \in H^\perp$, il existe $q \in \mathbb{N}$, $(\alpha_0 \dots \alpha_q) \in \mathbb{R}^{q+1}$

$$Q = \sum_{k=0}^{q} \alpha_k \cdot (x \longmapsto x^k)$$

(Une combinaison linéaire est une somme finie !)

* Si $j \in [\![1,q]\!]$ $\boxed{\langle \underset{\in H^\perp}{Q}, \underbrace{x \longmapsto x^j - 1}_{\in H} \rangle = 0}$ car $Q \in H^\perp$.

$$\langle Q, x \longmapsto x^j - 1 \rangle = \alpha_j - \alpha_0$$

donc $\forall j \in [\![1,q]\!]$, $\alpha_j = \alpha_0$

* Si $j \geqslant q+1$

$$\langle Q, x \longmapsto x^j - 1 \rangle = 0 \quad \text{car } Q \in H^\perp.$$

$$\langle Q, x \longmapsto x^j - 1 \rangle = -\alpha_0$$

donc $\alpha_0 = 0$

donc $\forall j \in [\![0,q]\!]$, $\alpha_j = 0$,

ce qui signifie $Q = 0$.

donc $H^\perp = \{0_E\}$

Démonstration

1. $(\Rightarrow)$ Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et E_1 un sous-espace vectoriel de E tel que $f(E_1) \subset E_1$. Soit $x \in E_1^{\perp\cdot}$, pour montrer que $f^\star(x) \in E_1^{\perp\cdot}$, nous allons montrer que $f^\star(x)$ est orthogonal à tout élément $x_1 \in E_1$. En effet, soit $x_1 \in E_1$
$$\langle f^\star(x), x_1\rangle = \langle x, f(x_1)\rangle = 0$$
car $f(x_1) \in E_1$ et $x \in E_1^{\perp\cdot}$.
2. $(\Leftarrow)$ On applique le sens direct au couple $\left(f^\star, E_1^{\perp\cdot}\right)$ et on utilise
$$(f^\star)^\star = f \text{ et } \left(E_1^{\perp\cdot}\right)^{\perp\cdot} = E_1$$
car nous sommes en dimension finie !

Exemple 2.1 – Adjoint d'un endomorphisme

1. On a vu en exercice que, si p est un projecteur de E, alors
$$\Big[p \text{ projecteur orthogonal}\Big] \iff \Big[p^\star = p\Big]$$
2. Plus généralement, il est facile de calculer l'adjoint d'un projecteur quelconque, comme indiqué sur le dessin de la figure 2.1, page 53. On a en effet
$$p^\star \circ p^\star = (p \circ p)^\star = p^\star,\ \operatorname{Ker}(p^\star) = \operatorname{Im}(p)^{\perp\cdot} \text{ et } \operatorname{Im}(p^\star) = \operatorname{Ker}(p)^{\perp\cdot}$$

Rappel : si E euclidien, si $u \in \mathcal{L}(E)$,

alors il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ (l'adjoint de u)

tel que

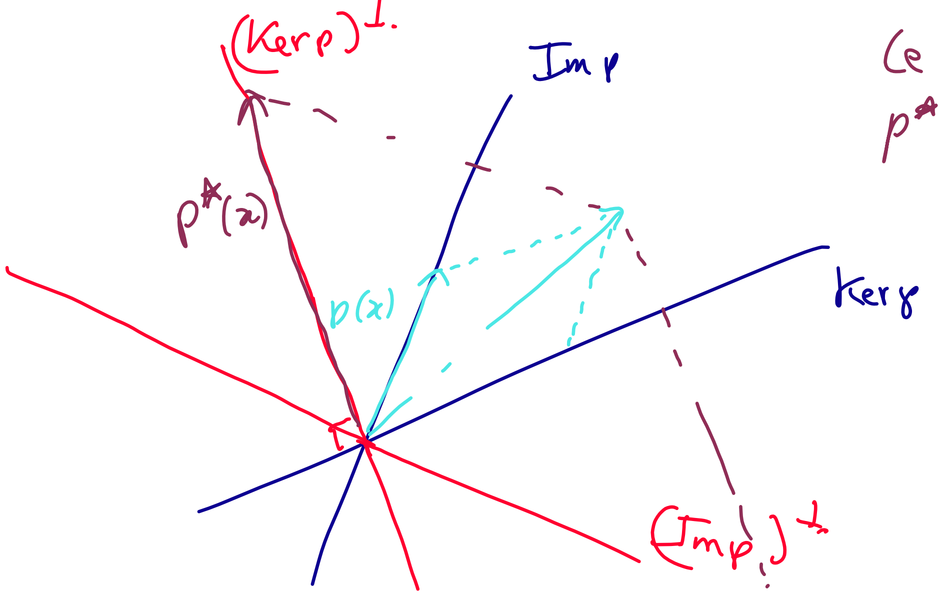
$$\forall (x,y) \in E^2, \ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle.$$

Exemples : ① si $p \circ p = p$ ($p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur de E)

alors $E = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Ker}(p)$.

$(p \circ p)^* = p^* \circ p^* = p^*$ donc p^* est aussi un projecteur.

et $\begin{cases} \operatorname{Ker}(p^*) = (\operatorname{Im}(p))^{\perp}. \\ \operatorname{Im}(p^*) = (\operatorname{Ker}(p))^{\perp}. \end{cases}$



Ce que représente p^* n'est pas évident sur le dessin

Remarque symétrie $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ $\quad p = \dfrac{\mathrm{Id}_E + s}{2}$ projecteur

ce qui permet de calculer s^* $\left((s \circ s)^* = s^* \circ s^* = \mathrm{Id}_E^* = \mathrm{Id}_E \right)$

s^* est une symétrie

Exercice(s) 2.1

2.1.1 Soit le produit scalaire sur $E = \mathrm{Vect}(\{x \mapsto x^k,\ k \in [\![1, n]\!]\})$ défini par :

$$\forall (P, Q) \in E^2,\ \langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)\, Q^{(k)}(0)$$

(a) Montrer que c'est un produit scalaire sur E.

(b) En orthonormalisant la base canonique de E, donner une base orthonormée de E.

(c) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ définie par

$$P \mapsto P'' = f(P)$$

Quel est l'adjoint de f ?

2.1.2 Soit E un espace vectoriel euclidien, et a, b, x_0 trois vecteurs de E. Montrer que

$$\Big[\exists f \in \mathscr{L}(E),\ f(x_0) = a \text{ et } f^\star(x_0) = b\Big] \iff \Big[\langle a, x_0\rangle = \langle b, x_0\rangle\Big]$$

2.1.3 Soit E un espace vectoriel euclidien, soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille libre de E, calculer la dimension du sous-espace vectoriel de E

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathscr{L}(E),\ \forall i \in [\![1, p]\!],\ f(x_i) = f^\star(x_i)\}$$

2.1.4 Soit E un espace vectoriel euclidien et

$$A = \{f \in \mathscr{L}(E),\ f \circ f^* \circ f = f\}$$

(a) Montrer que

$$\Big[f \in A\Big] \iff \Big[f^* \circ f \text{ projecteur orthogonal}\Big]$$

(b) Montrer que

$$\Big[f \in A\Big] \iff \Big[\forall x \in (\mathrm{Ker}(f))^{\perp \cdot},\ \|f(x)\| = \|x\|\Big]$$

(c) Soit $f \in A$, montrer que

$$(\mathrm{Ker}(f))^{\perp \cdot} = \{x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|\}$$

2.1.5 Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\| \leqslant \|x\|$$

(a) Montrer que

$$\forall x \in E,\ \|f^\star(x)\| \leqslant \|x\|$$

(b) Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{E}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_{E})$$

(c) Calculer pour $x \in E$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} . \left(x + f(x) + \cdots + f^n(x)\right),\ \text{où } f^1 = f \text{ et } f^{k+1} = f \circ f^k,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$$

1 Endomorphismes auto-adjoints (symétriques)

Définition : Soit E euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que

u est auto-adjoint si $\boxed{u^* = u}$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints de E

On a donc

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

Remarque : en particulier si $u \in \mathcal{S}(E)$

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(u)^\perp.$$

$(\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)^\perp.)$

Q : Raphaël/Pascal/Élodie

Pourquoi $(p \circ p)^* = p^* \circ p^*$?

Q. Capucine
Laurent

Parce que, en général,

$\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$, $\boxed{(u\circ v)^* = v^* \circ u^*.}$

(* par la formule Soit $(x,y) \in E^2$,

$$\langle (u\circ v)(x), y\rangle = \langle x, (u\circ v)^*(y)\rangle$$

$$\langle u(v(x)), y\rangle = \langle v(x), u^*(y)\rangle = \langle x, v^*\circ u^*(y)\rangle$$

donc $(u\circ v)^* = v^* \circ u^*$

* avec les matrices Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E

alors $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$

$B = \mathrm{Mat}(v, \mathcal{B})$

$\mathrm{Mat}(u\circ v, \mathcal{B}) = A\cdot B$

$\mathrm{Mat}(u^*, \mathcal{B}) = {}^tA$

$\mathrm{Mat}(v^*, \mathcal{B}) = {}^tB$

$\mathrm{Mat}((u\circ v)^*, \mathcal{B}) = {}^t(A\cdot B)$

et on sait que ${}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA$. donc $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$) ▨

Proposition technique : Soit E euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$,

E_1 sous-espace de E alors

$$\left[\underbrace{u(E_1) \subset E_1}\right] \Leftrightarrow \left[u^*(E_1^{\perp}) \subset E_1^{\perp}\right]$$

E_1 stable par u (on dit aussi u-stable)

Démonstration : $(\Rightarrow)$. On sait que $u(E_1) \subset E_1$.

Traduction de l'énoncé

Soit $x \in u^*(E_1^{\perp})$, montrons que $x \in E_1^{\perp}$.

Soit $y \in E_1$, montrons que $\langle x, y \rangle = 0$

Comme $x \in u^*(E_1^{\perp})$, il existe $x' \in E_1^{\perp}$, $x = u^*(x')$

donc $\langle x, y \rangle = \langle u^*(x'), y \rangle = \langle \underbrace{x'}_{\in E_1^{\perp}}, \underbrace{u(y)}_{\in E_1 \text{ car } y \in E_1 \text{ et } u(E_1) \subset E_1} \rangle = 0$

$\blacksquare$

Théorème spectral : Soit E euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$.

$[\underbrace{u \text{ auto-adjoint}}_{u \in \mathcal{S}(E)}] \iff [\underbrace{\exists (e_1 \ldots e_n) \in E^n, \text{ base orthonormée } \exists (\lambda_1 \ldots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \ \forall k \in [\![1, n]\!], u(e_k) = \lambda_k \cdot e_k}_{\mathrm{Mat}(u, (e_1 \ldots e_n)) = \mathrm{Diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_n)}]$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Démonstration :

$(\Leftarrow)$ $\mathrm{Mat}(u^*, (e_1 - e_n)) = {}^t\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathrm{Mat}(u, (e_1 - e_n))$

car la base est orthonormée

donc $u^* = u$.

$(\Rightarrow)$

Analyse : si $x \in E$, si $(e_1 - e_n)$ connue. (base orthonormée du théorème).

alors $x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle . e_k$

donc $u(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_k, x\rangle . e_k$

alors $\langle u(x), x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_k, x\rangle^2$

(Dans une base orthonormée $(e_1 - e_n)$.

$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle \times \langle e_k, y\rangle$)

Imaginons que $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

alors $\langle u(x), x\rangle \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_n \langle e_k, x\rangle^2 = \lambda_n \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle^2\right)}_{\|x\|^2}$

réalisée pour $x = e_n$.

<u>On trouve donc</u> que $\lambda_n = \underset{\|x\|=1}{\max} \langle u(x), x\rangle$.

et e_n réalise ce maximum.

<u>Synthèse</u> :

Voir cours Pr. Benoît $\Big\{$ on admet que $x \longmapsto \langle u(x), x\rangle$ admet un maximum sur $\{x \in E, \|x\| = 1\} \stackrel{.}{=} S$

Soit $M = \underset{x \in S}{\max} \langle u(x), x\rangle$ et $e \in S$, $\langle u(e), e\rangle = M$.

Montrons que $u(e) = \Pi . e$

Soit $x \in E$, $\langle u(e) - \Pi . e, x \rangle \overset{?}{=} 0$

1ère méthode : $f : x \mapsto \langle u(x), x \rangle$.

$\Gamma = S = \{ x \in E, \|x\|^2 = 1 \}$

on sait que e réalise le maximum de f sur Γ.

$g_1 : x \mapsto \|x\|^2 - 1$

$dg_{1,e} \in E^* \, ?$

(Soit $h \in E$, $x \in E$

$$g_1(x+h) = \langle x+h, x+h \rangle - 1$$

$$= \underbrace{\|x\|^2 - 1}_{g_1(x)} + \underbrace{2\langle x, h \rangle} + \underbrace{\overbrace{\langle h, h \rangle}^{\|h\|^2 = o(\|h\|)}}_{o(\|h\|)}$$

linéaire en h. donc c'est bien la différentielle

donc $dg_{1,e} : h \mapsto 2\langle e, h \rangle$

$dg_{1,e} \neq 0_{E^*}$

Théorème des extremums liés : si e extremum de f sur S alors, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, (e, λ_0) annule la différentielle du Lagrangien

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda\,(g_1(x))$$

$$L(x, \lambda) = \langle u(x), x \rangle - \lambda\,(\|x\|^2 - 1).$$

$$\big(L(e+h, \lambda_0+\delta)\big) = \langle u(e+h), e+h \rangle - (\lambda_0+\delta)(\|e+h\|^2 - 1)$$

$$= \langle u(e), e \rangle - \lambda_0(\|e\|^2 - 1)$$

$$+ \boxed{\langle u(h), e \rangle + \langle u(e), h \rangle - 2\lambda_0 \langle e, h \rangle - \delta\,\cancel{(\|e\|^2 - 1)}} = 0$$

$$\underbrace{+ \langle u(h), h \rangle - \lambda_0 \|h\|^2 - 2\delta \langle e, h \rangle + \delta \|h\|^2}_{o(\|(h,\delta)\|)}$$

On obtient donc

$$\forall h \in E, \quad \langle h, u^*(e) + u(e) - 2\lambda_0 . e \rangle = 0$$

donc $\boxed{\dfrac{u^*(e) + u(e)}{2} = \lambda_0 . e}$ (Propriété générale)

Mais ici $u^* = u$ donc $\boxed{u(e) = \lambda_0 . e}$

donc $\Pi = \langle u(e), e \rangle = \lambda_0 \underbrace{\|e\|^2}_{=1} = \lambda_0$

2ème méthode : la méthode de dédoublement des termes

On sait $\boxed{\forall x \in E, \quad \langle u(x), x\rangle \leq \Pi \ \|x\|^2}$ (*)

(si $x = 0_E$, simple, si $x \neq 0_E$ $\frac{1}{\|x\|}\cdot x \in S$

$$\left\langle u\left(\frac{1}{\|x\|}\cdot x\right), \frac{1}{\|x\|}\cdot x\right\rangle \leq \Pi$$

donc $\langle u(x), x\rangle \leq \Pi \ \|x\|^2$)

et de plus $\langle u(e), e\rangle = \Pi \ \|e\|^2 = \Pi$.

Idée : dédoublement des termes

Appliquer (*) sur $x + \lambda e$ où $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$
$\forall x \in E$ $\quad \langle u(x+\lambda e), x+\lambda\cdot e\rangle \leq \Pi \ \|x+\lambda\cdot e\|^2$

exercice pour mercredi