Développons. Soit $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle u(x), x\rangle + \lambda\langle u(e), x\rangle + \lambda\langle u(x), e\rangle + \cancel{\lambda^2 \overbrace{\langle u(e), e\rangle}^{= M}}$$

$$\leq M\left(\|x\|^2 + 2\lambda\langle x, e\rangle + \cancel{\lambda^2 \underbrace{\|e\|^2}_{=1}}\right)$$

$$M\|x\|^2 - \langle u(x), x\rangle + \lambda\left(2M\langle x, e\rangle - \langle u(e), x\rangle - \langle u(x), e\rangle\right) \geq 0$$

Ceci est vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, donc

$$2M\langle x, e\rangle - \langle u(e), x\rangle - \langle u(x), e\rangle = 0$$

$$\|$$

$$\langle x, 2Me - u(e) - u^*(e)\rangle = 0$$

Ceci est vrai pour tout $x \in E$, donc

$$2\Pi . e - u(e) - u^*(e) = 0$$

ou encore $\boxed{\dfrac{u+u^*}{2}(e) = \Pi . e}$

$\forall u \in \mathcal{L}(E)$

Ici : $u^* = u$ on obtient $u(e) = \Pi . e$.

Bilan : on a montré que si $\Pi = \max_{x \in S} \langle u(x), x \rangle = \langle u(e), e \rangle$ où $\|e\| = 1$

$u^* = u$

alors $u(e) = \Pi . e$.

Démonstration du théorème spectral

E euclidien, $n = \dim(E)$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$,

$(\mathcal{H}_n)$: $[u^* = u] \Longleftrightarrow [\exists (e_1 - e_n) \in E^n$ Base orthonormée
$\exists (\lambda_1 - \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$,
$\forall k \in [\![1, n]\!], \; u(e_k) = \lambda_k \cdot e_k]$

$(\Leftarrow)$ déjà fait

$(\Rightarrow)$ Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

* $\underline{\mathcal{H}_1 \text{ vraie}}$: si $n = 1$, $E = \mathbb{R} \cdot e$ pour tout $e \neq 0_E$.

on prend $e_1 = \dfrac{1}{\|e\|} \cdot e$ $\{e_1\}$ base orthonormée

$u(e_1) \in E$, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $u(e_1) = \lambda_1 \cdot e_1$

* Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

Soit E, $\dim(E) = n+1$, $u \in \mathcal{L}(E)$, $u^* = u$

① Posons $\Pi = \max\limits_{x \in S} (\langle u(x), x \rangle) = \langle u(e), e \rangle$ où $e \in S$ $\qquad S = \{x, \|x\| = 1\}$.

$e_1 = e$, $\quad u(e_1) = \Pi . e_1$ donc $\lambda_1 = \Pi$

② $E = \mathbb{R}.e_1 \oplus (\mathbb{R}.e_1)^\perp$. (dimension finie).

(si $\dim E < +\infty$, si E_1 sous-espace vectoriel de E, $E = E_1 \oplus E_1^\perp$)

(ça marche encore si $\dim E = +\infty$, $\dim E_1 < +\infty$)

$u(\mathbb{R}.e_1) \subset \mathbb{R}.e_1$

donc (proposition technique).

$u^*((\mathbb{R}e_1)^\perp) \subset (\mathbb{R}.e_1)^\perp$.

$\quad \Vert$

$u((\mathbb{R}e_1)^\perp)$ $\qquad$ donc $(\mathbb{R}e_1)^\perp$, est stable par u.

$$u_1 = u\Big|_{(\mathbb{R}.e_1)^\perp}^{(\mathbb{R}.e_1)^\perp} \left(\stackrel{\text{not}}{=} u_{/(\mathbb{R}.e_1)^\perp}\right)$$

et si $(x,y) \in (\mathbb{R}e_1)^\perp$.

$$\langle u_1(x), y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = \langle x, u_1(y)\rangle.$$

$$u_1 \in \mathcal{S}((\mathbb{R}.e_1)^\perp) \quad \text{et} \quad \dim((\mathbb{R}e_1)^\perp) = n$$

d'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_n)$: il existe $(e_2 - e_{n+1})$ base orthonormée de $(\mathbb{R}.e_1)^\perp$.

et il existe $(\lambda_2 - \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$,

$$\forall k \in [\![2, n+1]\!] \quad \underset{\underset{u(e_k)}{\shortparallel}}{u_1(e_k)} = \lambda_k . e_k$$

On a trouvé $(e_1 - e_{n+1})$ base orthonormée de E

et $(\lambda_1 - \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\forall k \in [\![1, n+1]\!], \quad u(e_k) = \lambda_k . e_k . \qquad \blacksquare$$

<u>Les choses importantes de cette démonstration</u>

1) Méthode de dédoublement des termes

2) Récurrence sur $\dim(E)$

3) <u>Proposition technique</u> : Si E_1 sous-espace vectoriel de E

$$[u(E_1) \subset E_1] \Leftrightarrow [u^*(E_1^{\perp}) \subset E_1^{\perp}]$$

4) Chercher un objet (ici e_1) comme un maximum.

2.2 Endomorphismes auto-adjoints

Définition 2.1 – Endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f \in \mathscr{L}(E)$, on dit que f *est auto-adjoint ou symétrique* si $f^\star = f$. On a donc

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$$

On note

$$\mathscr{S}(E) = \{f \in \mathscr{L}(E),\ f^\star = f\}$$

C'est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

Exemple 2.2 – Endomorphismes autoadjoints

1. Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs auto-adjoints. Dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ adaptée à la somme directe orthogonale

$$E = \operatorname{Ker}(f) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(f)$$

en notant $p = \dim \operatorname{Ker}(f)$, on a

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ f(e_k) = 0_E \text{ et } \forall k \in [\![p+1, n]\!],\ f(e_k) = e_k$$

2. Plus généralement, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base *orthonormée* de E et s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, tels que

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ f(e_k) = \lambda_k . e_k$$

alors f est auto-adjoint.

Théorème 2.1 – de réduction des endomorphismes auto-adjoints

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathscr{S}(E)$, alors il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et il existe des scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, tels que

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ f(e_k) = \lambda_k.e_k$$

On dit que f se diagonalise en base orthonormée. *Les vecteurs e_k s'appellent* des vecteurs propres de f *et les réels λ_k s'appellent* des valeurs propres de f.

Démonstration

(*Plan*) La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de E.

1. On trouve un vecteur unitaire e_1 et un scalaire λ_1 tel que $f(e_1) = \lambda_1.e_1$.
2. On décompose E sous la forme

$$E = \mathbb{R}.e_1 \overset{\perp}{\oplus} \underbrace{(\mathbb{R}.e_1)^{\perp}}_{=E_1}.$$

et on montre que l'on peut appliquer la récurrence à l'espace vectoriel E_1 et à l'endomorphisme

$$f_1 = f\Big|_{E_1}^{E_1}$$

(*Récurrence*)

— (*Initialisation*) Le résultat est clairement vrai pour $n = \dim(E) = 1$, car, si $\{e\}$ est une base orthonormée de E de dimension 1, tout endomorphisme vérifie

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ f(e) = \lambda.e$$

— (*Hérédité*) Supposons le résultat connu pour tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace vectoriel euclidien de dimension p, et soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $p+1$, et $f \in \mathscr{S}(E)$.

1. Cherchons un vecteur unitaire e_1 et un scalaire λ_1 tels que $f(e_1) = \lambda_1.e_1$.

- (*Analyse*) Si la base orthonormée $(e_1, \dots, e_{p+1})$ existe, on a

$$\langle x, f(x) \rangle = \sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k \langle e_k, x \rangle^2$$

en supposant de plus les valeurs propres ordonnées $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_{p+1}$, il vient

$$\langle x, f(x) \rangle \leqslant \lambda_1 \left(\sum_{k=1}^{p+1} \langle e_k, x \rangle^2 \right) = \lambda_1 \|x\|^2$$

De plus, il y a égalité si $x = e_1$. Cette étape s'appelle *caractérisation géométrique de* (e_1, λ_1).

- (*Synthèse*) Posons

$$S = \{x \in E,\ \|x\| = 1\} \ \text{(la sphère unité)}$$

Et considérons l'application

$$\varphi \ : \begin{cases} S \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle x, f(x) \rangle \end{cases}$$

Nous allons montrer successivement que [a]

(a) φ est bornée et les bornes sont atteintes.

(b) La borne supérieure est la plus grande valeur propre λ_1 cherchée.

- (φ *est bornée*) En effet

$$|\varphi(x)| \leqslant \|x\| \, \|f(x)\|, \ \text{d'après Cauchy-Schwarz}$$

Ici, $\|x\| = 1$, mais que peut-on dire de $\|f(x)\|$? Soit $(b_1, \dots, b_{p+1})$ une base orthonormée quelconque de E, alors

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{p+1} \langle b_k, x \rangle . b_k \right) = \sum_{k=1}^{p+1} \langle b_k, x \rangle . f(b_k)$$

donc

$$\|f(x)\| \leqslant \sum_{k=1}^{p+1} \underbrace{|\langle b_k, x\rangle|}_{\leqslant \|x\|=1} \|f(b_k)\| \leqslant \sum_{k=1}^{p+1} \|f(b_k)\|$$

- (*Les bornes sont atteintes*) Posons

$$\lambda_1 = \sup_{x\in S} \varphi(x)$$

Par discrétisation, on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\varphi(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda_1$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|x_n\| = 1 \text{ et } x_n = \sum_{k=1}^{p+1} \langle b_k, x_n\rangle.b_k$$

De la suite $(\langle b_1, x_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée on peut extraire une suite $(\langle b_1, x_{\psi_1(n)}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers α_1, puis de la suite $(\langle b_2, x_{\psi_1(n)}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, on peut extraire une sous-suite $(\langle b_2, x_{\psi_2(n)}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers α_2, etc. jusqu'à $(\langle b_{p+1}, x_{\psi_{p+1}(n)}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers α_{p+1}. Finalement, [b]

$$x_{\psi_{p+1}(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underbrace{\sum_{k=1}^{p+1} \alpha_k.b_k}_{e_1 \text{ tel que } \|e_1\|=1} \quad \text{et } \varphi(e_1) = \lambda_1$$

- (*On a bien trouvé un vecteur propre de f de valeur propre λ_1.*) De plus, on a

$$\forall x \in E,\ \langle x, f(x)\rangle \leqslant \lambda_1 \|x\|^2$$

Soit $x \in E$ et $\mu \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\forall \mu \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ \varphi(e_1 + \mu.x) = \langle e_1 + \mu.x, f(e_1) + \mu.f(x)\rangle \leqslant \lambda_1\ \|e_1 + \mu.x\|^2$$

C'est une équation du second degré en μ qui garde un signe $\geqslant 0$, donc

$$\forall x \in E,\ \langle f(e_1) - \lambda_1.e_1, x\rangle = 0$$

soit, finalement

$$f(e_1) = \lambda_1.e_1$$

2. On écrit alors

$$E = \mathbb{R}.e_1 \overset{\perp}{\oplus} \underbrace{(\mathbb{R}.e_1)^{\perp}}_{E_1}.$$

et on a

$$f(E_1) = f^{\star}(E_1) \subset E_1$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à l'espace vectoriel E_1 (toujours euclidien, avec le même produit scalaire) et l'endomorphisme $f\Big|_{E_1}^{E_1}$ (toujours auto-adjoint), on en déduit le résultat cherché.

---

a. Dans le cours de topologie, il s'agit d'une fonction continue sur un compact, à valeurs dans $\mathbb{R}$, elle est bornée et les bornes sont atteintes (ce sont donc un maximum et un minimum).

b. Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $l \in E$, sont tels que

$$\|y_n - l\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\ \text{on écrira } y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$

Remarque 2.1

Plusieurs aspects de cette démonstration sont intéressants à noter

1. La récurrence sur n qui permet de diminuer la dimension de l'espace euclidien concerné. Si E est un espace euclidien, de produit scalaire ϕ, alors, si E_1 est un sous-espace vectoriel de E, $\phi\Big|_{E_1\times E_1}$ est un produit scalaire sur E_1.

2. On a utilisé la proposition 2.2, page 30, qui est simple, mais très importante. On part de $\mathbb{R}.e_1$ stable, par f, donc E_1 est stable par $f^\star = f$. Et $f\Big|_{E_1}^{E_1}$ est dans $\mathscr{S}(E)$.

3. La *caractérisation géométrique* de la plus grande valeur propre comme une valeur extrémale (la plus petite peut aussi être caractérisée d'une manière semblable).

$$\lambda_1 = \max_{x\in S}\langle x, f(x)\rangle = \max_{x\neq 0_E} \frac{\langle x, f(x)\rangle}{\|x\|^2}$$

Cf Cours Topologie

4. Dans S, on a pu extraire une sous-suite convergente, en utilisant une succession d'extractions coordonnées par coordonnées. Plus généralement, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite *bornée* (c'est-à-dire que $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée), on peut extraire une sous-suite convergente, car nous sommes en dimension finie !

5. La technique utilisée pour montrer que e_1 est un vecteur propre de f (associé à la valeur propre λ_1) s'appelle *la méthode de dédoublement des termes*. Elle fonctionne ainsi
   - Si on a une propriété d'égalité sur des normes (ou quelque chose qui y ressemble), on peut passer au produit scalaire en l'appliquant à $x + y$.
   - Si on a une propriété d'inégalité sur des normes (ou quelque chose qui y ressemble), on peut passer au produit scalaire en l'appliquant à $x + \mu.y$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.3 – Dédoublement

(a) Supposons que $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie

$$\forall x \in E,\ \langle x, f(x)\rangle = 0$$

égalité avec du x

alors, en l'appliquant à $x + y$ quelconques de E, il vient

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \underbrace{\langle x, f(y)\rangle}_{=\langle f^\star(x),y\rangle} + \langle f(x), y\rangle = 0 \text{ donc } \boxed{f^\star = -f}$$

(b) Supposons que $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie

$$\forall x \in E,\ \langle x, f(x)\rangle \geqslant 0$$

Inégalité avec du x.

alors, en l'appliquant à $\boxed{x + \mu.y,}$ (x et y quelconques dans E et μ dans $\mathbb{R}$), il vient

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \left\langle x, \frac{f+f^\star}{2}(y)\right\rangle^2 \leqslant \langle x, f(x)\rangle \langle y, f(y)\rangle$$

qui peut nous rappeler une inégalité de Cauchy-Schwarz... N'est-ce pas avec ce type de méthode que nous avions obtenu l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?

$\forall (x,y) \in E^2 \quad \langle x,y\rangle^2 \leqslant \|x\|^2 \|y\|^2$ ou $|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\| \|y\|$

(Si $(x,y) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\underbrace{\|x+\lambda.y\|^2 \geqslant 0}_{\text{inégalité}}$)

Propriété 2.2

$\mathscr{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ de dimension

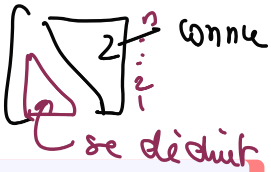
$$\frac{n(n+1)}{2} \text{ où } n = \dim(E)$$

Si E euclidien,
si $u \in \mathscr{S}(E)$
si $(e_1 - e_n)$ base orthonormée
$A = \mathrm{Mat}(u, (e_1 - e_n))$
alors $A = {}^tA$ Élodie

Démonstration

Connaître f revient à connaître les $f(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base *orthonormée de* E, et donc, connaître les $(\langle e_i, f(e_j) \rangle)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$. Or, on a

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \; \langle e_i, f(e_j) \rangle = \underbrace{\langle f(e_i), e_j \rangle}_{\text{car } f \text{ est auto-adjoint}} = \underbrace{\langle e_j, f(e_i) \rangle}_{\text{par symétrie du produit scalaire}}$$



$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Propriété 2.3

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$, on dit que f est *un endomorphisme auto-adjoint positif* s'il vérifie de plus

$$\forall x \in E, \; \langle x, f(x) \rangle \geqslant 0$$

ou, si l'on connaît une base de vecteurs propres $(e_1, \ldots, e_n)$ associée à des valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \; \lambda_k \in \mathbb{R}_+$$

On note $\mathscr{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs. *Ce n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{L}(E)$. C'est un cône positif de $\mathscr{L}(E)$.

Définition : Soit E euclidien, $u \in \mathcal{S}(E)$.

* On dit que u est <u>positif</u> si $\forall x \in E, \ \langle u(x), x \rangle \geq 0$

$$\mathcal{S}^+(E) = \{u \in \mathcal{S}(E), \ u \text{ positif}\}$$

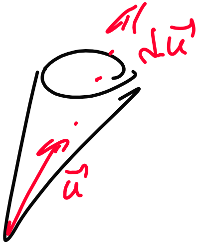
* On dit que u est <u>défini positif</u> si $\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \ \langle u(x), x \rangle > 0$.

$$\mathcal{S}^{++}(E) = \{u \in \mathcal{S}(E), \ u \text{ défini positif}\}.$$

(ces espaces vérifient :

$$\forall u \in \mathcal{S}^+(E), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \ \lambda . u \in \mathcal{S}^+(E) \quad)$$

cône positif



<u>Remarque</u> : si $u \in \mathcal{S}(E)$, $(e_1 — e_n)$ base orthonormée

$(\lambda_1 — \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $u(e_k) = \lambda_k . e_k$

$$\boxed{\langle u(x), x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_k, x \rangle^2}$$

car $\boxed{x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle . e_k}$

(Groupe : Florence, Élodie, Hugo)

(on développe $\left\langle u\left(\sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle . e_k\right), \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, x \rangle . e_j \right\rangle$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle e_k, x \rangle \langle e_j, x \rangle \underbrace{\langle u(e_k), e_j \rangle}_{\lambda_k \langle e_k, e_j \rangle = \lambda_k \delta_{k,j}} \quad \text{(bilinéarité)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_k, x \rangle^2 \,)$$

<u>Conséquence</u> : Soit $u \in \mathcal{S}(E)$

$$\begin{cases} [u \in \mathcal{S}^+(E)] \iff [\forall k \in [\![1,n]\!],\ \lambda_k \geqslant 0] \\ [u \in \mathcal{S}^{++}(E)] \iff [\forall k \in [\![1,n]\!],\ \lambda_k > 0] \end{cases}$$

Pourquoi on s'intéresse à $\mathcal{S}^+(E)$ et $\mathcal{S}^{++}(E)$?

<u>Remarque</u> : Soit E euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$, alors

$$u^* \circ u \in \mathcal{S}^+(E)$$

et si $u \in \mathcal{GL}(E)$ (u bijectif), $u^* \circ u \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

(Soit $x \in E$, $\langle u^* \circ u(x), x \rangle = \langle u(x), u(x) \rangle = \|u(x)\|^2 \geqslant 0$

et ~~de plus~~ si $\langle u^* \circ u(x), x \rangle = 0$, alors $\|u(x)\|^2 = 0$ donc $u(x) = 0_E$

si u injectif (donc dimension finie + endomorphisme

[u injectif] $\Leftrightarrow$ [u bijectif]).

(utiliser le théorème du rang).

$x = 0_E$.

en ce cas, $\forall x \in E \setminus \{0_E\}$, $\langle u^* \circ u(x), x \rangle > 0$)

base canonique

Remarque : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\text{Mat}(u, \mathcal{C}^n) = A$

1) Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, et si $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique ($(\varepsilon_1 - \varepsilon_n)$ orthonormée)

$({}^tA = A)$.

alors $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

il existe une base orthonormée $\overbrace{(e_1, \ldots, e_n)}^{\text{nor } \mathcal{E}}$ de $\mathbb{R}^n$.

et des réels $(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$,

$u(e_k) = \lambda_k . e_k$.

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{E}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

si $P \in P_{e^n}^{\mathcal{E}} \in Gl_n(\mathbb{R})$, $\quad P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

(Comme $\mathcal{E}$ et e^n orthonormées,

on verra que $P^{-1} = {}^tP$)

2) $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\quad {}^tA.A \in S_n(\mathbb{R})$

il existe $P \in Gl_n(\mathbb{R})$, $\quad P^{-1}\,{}^tA.A.P$ diagonale.

$(P^{-1} = {}^tP)$

3) $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

$${}^tA \cdot A \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R}) \quad (\text{et } A \cdot {}^tA \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})).$$

(. Math pour IA : plein d'applications

. Statistiques : ____________

. Optimisation linéaire : ____________)

Démonstration

- ($\Rightarrow$) On prend la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres de f, il vient, pour $k \in [\![1, n]\!]$

$$\lambda_k = \langle e_k, f(e_k)\rangle \geqslant 0$$

- ($\Leftarrow$) Soit $x \in E$, alors

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle.e_k, \text{ donc } f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle \lambda_k.e_k$$

  et, finalement

$$\langle x, f(x)\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_k, x\rangle^2 \geqslant 0$$

Propriété 2.4

De même, on définit les *endomorphismes définis positifs* par

$$f \in \mathscr{S}(E) \text{ et } \underbrace{\forall x \in E\backslash\{0_E\},\ \langle x, f(x)\rangle > 0}_{\iff \forall k \in [\![1,n]\!],\ \lambda_k > 0}$$

On note $\mathscr{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs. C'est toujours un cône positif.

Démonstration

Il suffit de remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes dans la démonstration précédente (en faisant attention au fait que $x \neq 0_E$).

Remarque 2.2

Si $f \in \mathscr{S}^+(E)$ et si $\varepsilon > 0$, alors

$$f + \varepsilon.\,\mathrm{id}_E \in \mathscr{S}^{++}(E)$$

utile en topologie

$$\overline{\mathscr{S}^{++}(E)} = \mathscr{S}^+(E)$$

Démonstration

Soit $x \in E$, on a

$$\langle x, (f + \varepsilon.\,\mathrm{id}_E)(x)\rangle = \underbrace{\langle x, f(x)\rangle}_{\geqslant 0} + \varepsilon \|x\|^2$$

Propriété 2.5

On a

$$\forall f \in \mathscr{L}(E),\ f^\star \circ f \in \mathscr{S}^+(E) \text{ et, de même } f \circ f^\star \in \mathscr{S}^+(E)$$

De même, on a

$$\forall f \in \mathscr{L}(E),\ \left[f^\star \circ f \in \mathscr{S}^{++}(E)\right] \iff \left[f \in \mathscr{GL}(E)\right] \quad (*)$$

(Même chose avec $f \circ f^\star$).

On a de plus

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{L}(E),\ \mathrm{Ker}(f^\star \circ f) = \mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f^\star \circ f) = \mathrm{Im}(f^\star) = (\mathrm{Ker}(f))^\perp.} \quad (**)$$

Démonstration

(*) $\langle f^* \circ f(x), x \rangle = \|f(x)\|^2$ $\quad f \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$

(**) $\underline{\mathrm{Ker}(f^* \circ f) = \mathrm{Ker}(f)}$

Idée : double inclusion et $\underline{\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^* \circ f)}$ $\quad \left(\begin{array}{l} \forall g \in \mathcal{L}(E) \\ \mathrm{Ker}(g \circ f) \supset \mathrm{Ker}(f) \end{array} \right)$

($\supset$). Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^* \circ f)$.

alors $f^* \circ f(x) = 0_E$

donc $\underbrace{\langle f^* \circ f(x), x \rangle}_{= \|f(x)\|^2} = 0$ donc $f(x) = 0_E$, donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

(**) $\underline{\mathrm{Im}(f^* \circ f) = \mathrm{Im}(f^*)}$ $\quad \left(= (\mathrm{Ker}\, f)^{\perp}. \right)$.

* $\operatorname{Im}(f^*) \supset \operatorname{Im}(f^* \circ f)$ $\quad$ $\big(\forall g \in \mathcal{L}(E) \quad \operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}(g) \big)$

* Soit $x \in \operatorname{Im}(f^*)$.

Il existe $y \in E$, $x = f^*(y)$

Or $E = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)^{\perp}$, il existe $z \in E$

$t \in \underbrace{\operatorname{Im}(f)^{\perp}}_{= \operatorname{Ker}(f^*)}$.

$$y = f(z) + t$$

$$x = f^*(y) = f^* \circ f(z) + \underbrace{f^*(t)}_{= 0_E}$$

donc $x \in \operatorname{Im}(f^* \circ f)$.

$\blacksquare$

Démonstration

1. ($f^\star \circ f \in \mathscr{S}^+(E)$) Clairement $f^\star \circ f \in \mathscr{S}(E)$ car
$$(f^\star \circ f)^\star = f^\star \circ (f^\star)^\star = f^\star \circ f$$
De plus, si $x \in E$
$$\langle f^\star \circ f(x), x\rangle = \langle f(x), f(x)\rangle = \|f(x)\|^2 \geqslant 0 \tag{2.1}$$
2. ($f \circ f^\star \in \mathscr{S}^+(E)$) On applique la question précédente à $f^\star$.
3. *Cas où f est un automorphisme*
   - ($\Rightarrow$) Supposons que $f^\star \circ f \in \mathscr{S}^{++}(E)$, alors si $x \neq 0_E$, on a
   $$0 < \langle f^\star \circ f(x), x\rangle = \|f(x)\|^2 \text{ d'après l'équation 2.1, de la présente page}$$
   donc, en particulier $f(x) \neq 0_E$. Ce qui montre que f est injective, mais comme c'est un endomorphisme et que nous sommes en dimension finie (par application du théorème du rang), nous pouvons conclure que f est bijective.
   - ($\Leftarrow$) Si $x \neq 0_E$, d'après l'équation 2.1, de la présente page, on a
   $$\langle f^\star \circ f(x), x\rangle = \|f(x)\|^2 > 0$$
   car $f(x) \neq 0_E$.
4. ($\mathrm{Ker}\,(f^\star \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$) On a une inclusion toujours vérifiée
$$\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f^\star \circ f)$$
mais, si $x \in \mathrm{Ker}\,(f^\star \circ f)$, en appliquant l'équation 2.1, de la présente page, on a
$$0 = \langle f^\star \circ f(x), x\rangle = \|f(x)\|^2$$
donc $f(x) = 0_E$ et $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

Proposition 2.3

Soit $f \in \mathscr{S}^+(E)$*, alors il existe un* unique endomorphisme $g \in \mathscr{S}^+(E)$ *tel que*[a]

$$f = g \circ g$$

a. C'est une sorte de « racine carrée » de f.

Démonstration

— (*Existence*) Si $f \in \mathscr{S}^+(E)$, alors on sait qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres, et il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ des réels $\geqslant 0$, tels que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \; f(e_k) = \lambda_k . e_k$$

Si on définit l'endomorphisme g par

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \; g(e_k) = \sqrt{\lambda_k} . e_k$$

Alors g est un endomorphisme auto-adjoint (il possède une base orthonormée de vecteurs propres), positif car les $\sqrt{\lambda_k}$ sont positifs. Et, clairement, $f = g \circ g$.

— (*Unicité*) Soit $g \in \mathscr{S}^+(E)$ tel que $f = g \circ g$, alors,

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \; f(g(e_k)) = g(f(e_k)) = g(\lambda_k . e_k) = \lambda_k . g(e_k)$$

donc $g(e_k) \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_k . \mathrm{id}_E)$. Malheureusement, cet espace peut-être très grand, cela ne nous assure pas que $g(e_k)$ soit colinéaire à e_k. Mais, si l'on pose $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \lambda_k . \mathrm{id}_E)$, on a par le même raisonnement

$$g(E_1) \subset E_1 \text{ et } g_1 = g\Big|_{E_1}^{E_1} \in \mathscr{S}^+(E_1)$$

Proposition : Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$, alors il existe un unique $v \in \mathcal{S}^+(E)$, $u = v \circ v \left(\overset{\text{Not}}{=} v^2\right)$

$\perp$

Démonstration

① **Existence**, il existe $\underbrace{(e_1 - e_n)}_{\text{Not}/\!/ \ \mathcal{E}}$ base orthonormée de E

$(\lambda_1 - \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$,

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $u(e_k) = \lambda_k \cdot e_k$

(théorème spectral).

$$\text{Mat}(u, \mathcal{E}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \left(\text{et } \forall k \in [\![1,n]\!],\ \underline{\lambda_k \geq 0}\right)$$

$u \in \mathcal{S}^+(E)$

Posons $v \in \mathcal{S}^+(E)$, $\text{Mat}(v, \mathcal{E}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$

On a immédiatement $\mathrm{Mat}(v \circ v, \mathcal{E}) = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{E})$

donc $v \circ v = u$ et $v \in \mathcal{S}^+(E)$

car sa matrice dans une base orthonormée est symétrique (diagonale).

<u>Remarque</u> : si on n'impose pas v <u>positif</u>.

alors tous les v qui ont une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} \pm\sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm\sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

vérifieront $v \circ v = u$.

② <u>Unicité</u> :

Analyse : si $v \in \mathcal{S}^+(E)$ existe et vérifie $v \circ v = u$.

alors il existe $(b_1 - b_n)$ base orthonormée

et $(\mu_1 - \mu_n) \in \mathbb{R}_+^n$,

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $v(b_k) = \mu_k . b_k$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$, $v \circ v(b_k) = \underline{\underline{\mu_k^2 . b_k = u(b_k)}}$.

(On a $(e_1 - e_n)$ base orthonormée, $(\lambda_1 - \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$ $\underline{\underline{u(e_j) = \lambda_j . e_j}}$)

{ Question Victor : pourquoi peut-on choisir $(b_1 - b_n) = (e_1 - e_n)$?

pour lundi (Indic : penser à la proposition technique).