MA3305P – Semaine 01

24 février 2023

Le but de ce TD est d'apprendre à manipuler des calculs de différentielles.
On rappelle le résultat suivant du cours d'algèbre linéaire :

Théorème : Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. On définit les applications suivantes :

$$||M||_F = \mathrm{Tr}({}^tM \cdot M),\ ||M||_2 = \sup_{|x|=1} |Mx|$$

Alors ces deux applications sont des normes d'algèbre. C'est-à-dire que ce sont des normes sur l'espace des matrices, et qu'elles satisfont de plus la propriété suivante :

$$\forall (M,N) \in M_n(\mathbb{R})^2,\ ||MN|| \leqslant ||M|| \times ||N||$$

On admet aussi le théorème de topologie que nous montrerons à la fin de l'année :

Théorème 1. *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

En particulier, on peut écrire les $o(|h|)$ pour n'importe quelle norme.

Exercice 1 :

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$ et φ l'application définie par :

$$\varphi : \begin{cases} E \to E \\ A \mapsto {}^tA \cdot A \end{cases}$$

1. Montrer que l'application φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. → Composition des fonctions de classe ∞.

   C'est le produit d'applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui sont :

   $$A \mapsto {}^tA \text{ et } A \mapsto A,$$

   qui sont toutes deux linéaires, donc de classe $\mathscr{C}^\infty$.

   Exprimer

   $\varphi(A_0 + \underbrace{H}_{\text{ce que on ajoute}}) = \varphi(A_0) + \underbrace{\boxed{\cancel{(\quad)}}}_{\text{terme linéaire}} + o(|H|)$

2. Calculer la différentielle de φ en A_0.

   On fait un développement limité au voisinage de A_0. Soit $H \in E$, on a :

   转置是线性变换

   $$\varphi(A_0 + H) = {}^t(A_0 + H) \cdot (A_0 + H) = \varphi(A_0) + \underbrace{{}^tH \cdot A_0 + {}^tA_0 \cdot H}_{\text{linéaire en } H} + \underbrace{{}^tH \cdot H}_{=o(|H|)}.$$

   $\cancel{{}^t}A_0 \cdot A_0 + {}^tA_0 \cdot H$

   Finalement :

   $$\mathrm{d}\varphi_{A_0}(H) = {}^tH \cdot A_0 + {}^tA_0 \cdot H.$$

3. Calculer la différentielle seconde de φ en A_0. → Seulement $d\varphi_{A_0}(H)$, Exprimer

   $d\varphi_{A_0+H}(K) = d\varphi_{A_0}(K) + \underbrace{\boxed{\cancel{(\quad)}}}_{\text{terme linéaire en } H} + o(\|H\|)$

   Soit H et K dans E, on a alors :

   $$\mathrm{d}\varphi_{A_0+H}(K) = {}^tK \cdot (A_0 + H) + {}^t(A_0 + H) \cdot K = \mathrm{d}\varphi_{A_0}(K) + \underbrace{{}^tK \cdot H + {}^tH \cdot K}.$$

   Finalement :

   $$\mathrm{d}^2\varphi_{A_0}(H, K) = {}^tH \cdot K + {}^tK \cdot H.$$

   (ou $d^2\varphi_{A_0}(H) : K \mapsto {}^tH \cdot K + {}^tK \cdot H$)

Exercice 2 :

On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) & \to M_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto A^3 \end{cases}$$

cad, exprimer $f(x+h) = f(x) + O(h) + R(h)$; $R(h) = o(h)$

1. Montrer que f est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$, et calculer sa différentielle en $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Faisons un développement limité de f au voisinage de A. On obtient pour $H \in M_n(\mathbb{R})$:

$$(A+H)^3 = \underbrace{A^3}_{=f(A)} + \underbrace{H \cdot A^2 + A \cdot H \cdot A + A^2 \cdot H}_{\text{linéaire en } H} + \underbrace{H^2 \cdot A + H \cdot A \cdot H + A \cdot H^2 + H^3}_{=R(H)=o(|H|)}.$$

En effet, toutes les normes sur $M_n(\mathbb{R})$ sont équivalentes, choisissons une norme d'algèbre. On a alors :

$$|R(H)| \leq 3\,|A| \times |H|^2 + |H|^3 = O\left(|H|^2\right) = o\left(|H|\right).$$

On a donc la différentiabilité de f en A et :

$$\boxed{\mathrm{d}f_A \ : \ H \mapsto H \cdot A^2 + A \cdot H \cdot A + A^2 \cdot H.}$$

2. Montrer que f est deux fois différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$, et calculer sa différentielle seconde en $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Faisons un développement limité de $A \mapsto \mathrm{d}f_A$, on a donc, pour $(H, K) \in M_n(\mathbb{R})^2$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_{A+H}(K) &= K \cdot (A+H)^2 + (A+H) \cdot K \cdot (A+H) + (A+H)^2 \cdot K \\ &= \mathrm{d}f_A(K) + \underbrace{K \cdot H \cdot A + K \cdot A \cdot H + H \cdot K \cdot A + A \cdot K \cdot H + H \cdot A \cdot K + A \cdot H \cdot H}_{\text{partie linéaire en } K \text{ et en } H} + \\ &\qquad \underbrace{K \cdot H^2 + H \cdot K \cdot H + H^2 \cdot K}_{=o(|H|)}. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathrm{d}^2 f_A \ : \ (H, K) \mapsto H \cdot K \cdot A + H \cdot A \cdot K + K \cdot H \cdot A + A \cdot H \cdot K + K \cdot A \cdot H + A \cdot K \cdot H.}$$

3. Vérifier vos résultats avec Python (voire le Notebook sur Moodle).

Voir le notebook sur Moodle.

Exercice 3 :

3. De classe $\mathscr{C}^1$ en 0, continuité de ∂f ?

1. $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
2. Différentiabilité ? (En 0)

$\Leftrightarrow f(x+h) = f(x) + O(h) + R(h)$

$R(h) = o(h)$?

L'application suivante est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$? De classe $\mathscr{C}^1$?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} (0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \left(x^2 \cos(\frac{1}{x^2+y^4}), y^2 \sin(\frac{1}{x^4+y^2})\right) & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

(On pourra s'aider de Python pour le calcul des dérivées partielles de f).

▷ L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car ses fonctions coordonnées le sont.
▷ Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|f(x,y)| \leqslant x^2 + y^2 = |(x,y)|^2$. Donc $f(x,y) = (0,0) + o(|(x,y)|)$.
Donc f est différentiable en 0 et $\mathrm{d}f_0 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}$.
▷ Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(2x\cos(\frac{1}{x^2+y^4}) + \frac{2x^3}{(x^2+y^4)^2}\sin(\frac{1}{x^2+y^4}), -\frac{4x^3y^2}{(x^4+y^2)^2}\cos(\frac{1}{x^4+y^2})\right).$$

continue ? continue ?

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \left(2x\cos(\frac{1}{x^2+x^4}) + \frac{2}{x(1+x^2)^2}\sin(\frac{1}{x^2+x^4}), \frac{-4x}{(x^2+1)^2}\cos(\frac{1}{x^4+x^2})\right).$$

continue ✗ Continue ?

Le terme $2x\cos(\frac{1}{x^2+x^4})$ tend vers 0 quand $x \to 0$, et le terme $\frac{2}{x(1+x^2)^2}\sin(\frac{1}{x^2+x^4})$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est donc pas continue en $(0,0)$.
Donc f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 :

Soit $f : E \to E$ bijective telle que f et f^{-1} soient différentiables. Pour $x \in E$, déterminer $\mathrm{d}(f^{-1})_x$ en fonction de $\mathrm{d}f$.

On a $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_E$. D'après la formule de différentiation des composées, on a pour $x \in E$:

$$\mathrm{d}f_{f^{-1}(x)} \circ \mathrm{d}(f^{-1})_x = \mathrm{d}(\mathrm{Id}_E)_x = \mathrm{Id}_E$$

$\mathrm{d}(f \circ g)_x = \mathrm{id}_E$, $g = f^{-1}$

$= \mathrm{d}f_{g(x)} \circ \mathrm{d}g_x$, $g = f^{-1}$

De même, avec $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$, on obtient pour tout $y \in E$:

$$\mathrm{d}(f^{-1})_{f(y)} \circ \mathrm{d}f_y = \mathrm{Id}_E$$

Donc, pour $y = f^{-1}(x)$, on a

$$\mathrm{d}(f^{-1})_x \circ \mathrm{d}f_{f^{-1}(x)} = \mathrm{Id}_E.$$

Ces deux différentielles sont donc inversibles et on a

$$\boxed{\mathrm{d}(f^{-1})_x = \left(\mathrm{d}f_{f^{-1}(x)}\right)^{-1}.}$$

Exercice 5 :

Soit $n \geqslant 2$. On considère $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n. En admettant que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert, calculer la différentielle du déterminant sur l'ensemble

$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}),\ \det(A) \neq 0\}$ des matrices inversibles. (On pourra commencer par calculer la différentielle de la matrice identité).

Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $H = (h_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$, de colonnes $(H_1, \ldots, H_n)$. Alors par n-linéarité du déterminant,

$$\begin{aligned}
\det(I_n + H) &= \det(e_1 + H_1, \ldots, e_n + H_n) \\
&= \det(e_1, \ldots, e_n) + \sum_{i=1}^{n} \det(e_1, \ldots, e_{i-1}, H_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \\
&\quad \underbrace{+ \sum_{i<j} \det(e_1, \ldots, e_{i-1}, H_i, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, H_j, e_{j+1}, \ldots, e_n) + \cdots}_{\text{terme contenant plusieurs colonnes}} \\
&= \det I_n + \sum_{i=1}^{n} h_{i,i} + O(|H|^2) \\
&= \det I_n + \mathrm{tr}(H) + o(|H|).
\end{aligned}$$

L'application trace étant linéaire, on a :

$$\boxed{\det \text{ est différentiable en } I_n \text{ et } \mathrm{d}(\det)_{I_n} = \mathrm{tr}.}$$

▷ Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}
\det(A + H) &= \det(A)\det(I_n + A^{-1}H) \\
&= \det(A)\left(\det(I_n) + \mathrm{tr}(A^{-1}H) + o(|A^{-1}H|)\right) \\
&= \det(A) + \mathrm{tr}(\det(A)A^{-1}H) + o(|H|) \\
&= \det(A) + \mathrm{tr}((\mathrm{com}(A))^T H) + o(|H|)
\end{aligned}.$$

Comme l'application $H \mapsto \mathrm{tr}((\mathrm{com}(A))^T H)$ est linéaire, l'application det est différentiable en A de différentielle $H \mapsto \mathrm{tr}((\mathrm{com}(A))^T H)$. On a :

$$\boxed{d(\det)_A : H \mapsto \mathrm{tr}((\mathrm{com}(A))^T H).}$$

Remarque : comme dans la question 2.(a), on aurait pu voir que si les colonnes de A sont $A_1, \ldots, A_n$ et les colonnes de H sont $H_1, \ldots, H_n$, alors

$$d(\det)_A(H) = \sum_{i=1}^{n} \det(A_1, \ldots, A_{i-1}, H_i, Ai + 1, \ldots, A_n).$$

Il est cependant difficile d'en déduire l'expression de $d(\det)_A$ qui utilise la trace.

Exercice 6 :

Soit E un espace euclidien. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire et $|.|$ sa norme. Soit O un ouvert de E et soit f et $g : O \to \mathbb{R}$ deux applications différentiables sur O, soit enfin φ une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle le théorème de représentation de Riesz (Théorème 4.3 page 31 du poly d'algèbre linéaire du S1) :

Théorème 2 (de représentation de Riesz)**.** *Soit E un espace euclidien, et soit $f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire sur E. Alors,*

$$\exists! v \in E,\ \forall x \in E,\ f(x) = \langle v, x\rangle$$

Dans le cas où la forme linéaire est la différentielle d'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ (pas forcément linéaire), on note $\mathrm{grad}_x\, f$ le vecteur v dans le théorème de représentation de Riesz, que l'on apppelle gradient de f au point x. On a donc :

$$\forall x \in O,\ \forall h \in E,\ \mathrm{d}f_x(h) = \left\langle \operatorname{grad}_x f, h \right\rangle.$$

4. Calculer pour $x \in O$:
$$\operatorname{grad}_x(f \times g).$$

On sait (différentielle du produit scalaire) que l'on a pour $x \in O$ et $h \in E$:

$$\mathrm{d}(f \times g)_x(h) = f(x) \times \mathrm{d}g_x(h) + \mathrm{d}f_x(h) \times g(x)$$

En remplaçant par les gradients, on a :

$$\operatorname{grad}_x(f \times g) = f(x) \cdot \operatorname{grad}_x g + g(x) \cdot \operatorname{grad}_x f$$

5. Calculer pour $x \in O$:
$$\operatorname{grad}_x(\varphi \circ f).$$

On a pour $x \in O$ et $h \in E$:

$$\mathrm{d}(\varphi \circ f)_x(h) = \mathrm{d}\varphi_{f(x)}\left(\mathrm{d}f_x(h)\right).$$

Par ailleurs, comme φ est une fonction de la variable réelle (il n'y a qu'une variable), on a pour $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$:
$$\mathrm{d}\varphi_t(k) = k \times \varphi'(t)$$

Finalement :
$$\operatorname{grad}_x(\varphi \circ f) = \varphi'(f(x)) \cdot \operatorname{grad}_x f$$

On suppose dans la suite de cet exercice que $E = M_n(\mathbb{R})$.
On suppose dans cette question que le produit scalaire est défini par :

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2,\ \langle A, B \rangle = \operatorname{Tr}\left({}^tA \cdot B\right).$$

6. Calculer le gradient de l'application $f = \det$ en $x = A \in GL_n(\mathbb{R})$.

On a montré en cours que :

$$\mathrm{d}(\det)_A(H) = \operatorname{Tr}\left({}^t\operatorname{Com}(A) \cdot H\right).$$

Le gradient est donc immédiatement :

$$\operatorname{grad}_A \det = \operatorname{Com}(A).$$

► *On suppose dans cette question que le produit scalaire est défini par ($S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$) :*

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2,\ \langle A, B \rangle = \operatorname{Tr}\left({}^tA \cdot S \cdot B\right).$$

7. Calculer le gradient de l'application $f = \det$ en $x = A \in M_n(\mathbb{R})$.

Le calcul de la différentielle ne change pas, mais le calcul du gradient, lui, dépend du choix du produit scalaire. En reprenant la formule et en écrivant :

$$\mathrm{d}(\det)_A(H) = \operatorname{Tr}\left({}^t\operatorname{Com}(A) \cdot S^{-1} \cdot S \cdot H\right),$$

et en utilisant
$${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA,$$

il vient

$$\operatorname{grad}_A \det = S^{-1} \cdot \operatorname{Com}(A).$$

Exercice 7 :

Soit E un espace euclidien, nous noterons $\langle \ , \ \rangle$ son produit scalaire et $|\cdot|$ sa norme associée. Soit $f \in E^\star$ une forme linéaire non nulle sur E. On considère l'application :

$$g \ : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \times \exp\left(-|x|^2\right). \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur E.

Nous sommes en dimension finie, toutes les formes linéaires sont continues. Par ailleurs, la norme est toujours continue par rapport à elle-même, l'exponentielle est aussi continue, donc g, produit et composée de fonctions continues est continue sur E.

2. Montrer que g est différentiable sur E et calculer sa différentielle en un point $x_0 \in E$.

① Calculer $g(a+h) = g(a) + O(h) + R(h)$

Calculons pour $x \in E$ et $h \in E$, $g(x+h)$ et faisons un développement limité au voisinage de $h = 0_E$.

$$g(x+h) = f(x+h) \times \exp\left(-|x+h|^2\right) = (f(x) + f(h)) \times \exp\left(-|x|^2 - 2\langle x, h\rangle - |h|^2\right).$$

② Vérifier si $R(h) = o(h)$?

Or, on connaît un développement limité de l'exponentielle au voisinage d'un point $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{t+\delta} = e^t \times e^\delta = e^t \times (1 + \delta + o(\delta)).$$

Finalement :

$$g(x+h) = g(x) + f(h) \times \exp\left(-|x|^2\right) - 2\, f(x) \times \exp\left(-|x|^2\right) \times \langle x, h\rangle + o\left(|h|\right).$$

Soit

$$\boxed{\mathrm{d}g_x \ : \ h \mapsto f(h) \times \exp\left(-|x|^2\right) - 2\, f(x) \times \exp\left(-|x|^2\right) \times \langle x, h\rangle.}$$

Exercice 8 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, croissante et vérifiant $f(0) = 1$. On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel noté $\langle ., . \rangle$ et de la norme euclidienne $|\cdot|$. On pose $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par :

$$F(x) = f(|x|) \cdot x$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et déterminer sa différentielle.

▷ L'application $x \mapsto |x|$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Par produit et composée d'applications de classe $\mathscr{C}^1$,

$$\boxed{F \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}.}$$

▷ Comme $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, la différentielle en $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ de la

$\|\cdot\| = \sqrt{\cdot} \circ \langle \cdot , \times \rangle \circ (\cdot , \times)$ (f, B, F)

$\langle \cdot , \cdot \rangle$ $(\cdot , \times)$ $\times$

norme $|.|$ est

$$h \mapsto \frac{2\langle x,h\rangle}{2\sqrt{\langle x,x\rangle}} = \frac{\langle x,h\rangle}{|x|}.$$

$d(B\circ F)_x = dB_{F(x)} \circ dF_x(h)$

$2\langle x,h\rangle$ $\quad (x,x)$

F est linéaire, $dF = F$

$\triangleright$ On en déduit, pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$: Pourquoi ?

$d(fg) = fdg + gdf$

$B(x+h, y+k) = B(x,y) + \langle x,k\rangle + \langle h,y\rangle + o(\cdot)$

$dB_{(x,y)} : (h,k) \mapsto \ldots$ $\quad (h,h)$

$$\boxed{\mathrm{d}F_x : h \mapsto \frac{\langle x,h\rangle}{|x|} f'(|x|).x + f(|x|).h}$$

$gdf \qquad fdg$

Soit $g : x \mapsto f(|x|)$ $\quad dg = df_{|x|} \circ d(|.|)$

2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa différentielle en $0_{\mathbb{R}^n}$.

$d(f\circ(B\circ F))_x = df_{(B\circ F)(x)} \circ d(B\circ F)_x$

$\langle x,x\rangle \qquad 2\langle x,h\rangle$

$t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{t}}$

$\frac{2\langle x,h\rangle}{2\sqrt{\langle x,x\rangle}} = \frac{\langle x,h\rangle}{|x|}$

$\triangleright$ Pour $h \in \mathbb{R}^n$, on a

$$F(h) = f(|h|).h = \left(f(0) + o_{h\to 0}(1)\right).h = h + o_{h\to 0}(h).$$

Comme l'application $h \mapsto h$ est linéaire,

$$\boxed{F \text{ est différentiable en } 0 \text{ et } \mathrm{d}F_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}.}$$

$\triangleright$ Soit $h \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Alors

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, croissante et vérifiant $f(0) = 1$. On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel noté $\langle .,. \rangle$ et de la norme euclidienne $|\cdot|$. On pose $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par :

$F(x) = f(|x|)\cdot x$

$$\begin{aligned}|\mathrm{d}F_x(h) - \mathrm{d}F_0(h)| &= \left|\frac{\langle x,h\rangle}{|x|} f'(|x|).x + (f(|x|) - 1).h\right| \\ &\leqslant |x| \times |f'(|x|)| \times |h| + |f(|x|) - 1| \times |h| \xrightarrow[x\to 0]{} 0.\end{aligned}$$

continuité de la différentielle

Donc la différentielle de F est continue en 0. D'après la question précédente,

$$\boxed{F \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^n.}$$

3. Montrer que

$$\forall (x,h) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \langle \mathrm{d}F_x(h), h\rangle \geqslant f(|x|) \times |h|^2.$$

Soit $h \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

$\triangleright$ Si $x = 0$, alors $\langle \mathrm{d}F_x(h), h\rangle = |h|^2$ et $f(|x|) \times |h|^2 = |h|^2$, donc l'inégalité est vraie.

$\triangleright$ Si $x \neq 0$, comme f est croissante, $f'(|x|)$ est positif et on a :

$$\langle \mathrm{d}F_x(h), h\rangle = \underbrace{\frac{(\langle x,h\rangle)^2}{|x|} f'(|x|).x}_{\geqslant 0} + f(|x|)|h|^2,$$

d'où

$$\boxed{\langle \mathrm{d}F_x(h), h\rangle \geqslant f(|x|) \times |h|^2.}$$

4. Montrer que $t \mapsto t \times f(t)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, puis montrer que F est injective.

$\triangleright$ Posons $g : t \mapsto t \times f(t)$, définie sur $\mathbb{R}^+$. L'application g est dérivable comme produit de fonctions dérivables. Comme f est croissante, on a $f(t) \geqslant 1$ et $f'(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$g'(t) = f(t) + t \times f'(t) \geqslant 1 > 0.$$

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tels que $F(x) = F(y)$.
▷ Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors $F(x) = F(y) = 0$. Comme la fonction f n'est jamais nulle, on en déduit $x = y = 0$.
▷ Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$: On a $F(x) = |x|f(|x|).\dfrac{x}{|x|} = g(|x|).\dfrac{x}{|x|}$. Donc $g(|x|) = |F(x)|$. De même on obtient

$$g(y) = |F(y)| = |F(x)| = g(x).$$

Comme g est strictement croissante, on a $|y| = |x|$, et donc, f ne s'annulant pas :

$$y = \frac{1}{f(|y|)}.F(y) = \frac{1}{f(|x|)}.F(x) = x$$

F est injective sur $\mathbb{R}^n$.

5. Soit $y \in \mathbb{R}^n$; on définit l'application $\psi : t \mapsto |F(t.y)|$. Montrer qu'il existe $t \in [0,1]$ tel que $\psi(t) = |y|$, puis montrer que F est surjective.

▷ On a $\psi(0) = 0$ et $\psi(1) = |f(|y|)| \times |y|$. Comme f est croissante, on obtient $\psi(1) \geqslant |y|$. Comme ψ est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

il existe $t \in [0,1]$ tel que $\psi(t) = |y|$.

▷ On a alors $F(t.y) = (f(|t.y|) \times t).y$ et donc, comme f est positive,

$$|y| = |F(t.y)| = f(|t.y|) \times t \times |y|.$$

▷ Si $y \neq 0$, cela fournit $f(|t.y|) \times t = 1$ et donc $F(t.y) = y$. Si $y = 0$, alors $F(0) = 0 = y$.

f est surjective.