Suites et Séries [L3]

Brandon LIN

November 6, 2023

Contents

Chapter 1

Suites et séries de fonctions

1.1 Position des problèmes

Definition 1.1.1: Suite de fonctions, Séries de fonctions

Soit X une partie de I.

- Une **suite de fonctions** sur X est la donnée de

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ où } f_n \in \mathscr{F}(X, \mathbb{K}) \tag{1.1}$$

- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonction, la série de cette suite de fonction est $\sum f_n$.

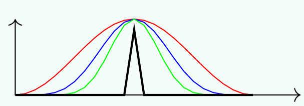
Questions :

- Qu'est-ce que le sens de la <u>convergence</u> pour une suite de fonctions ?
- Qu'en est-il de régularité ? Les fonctions peuvent être continues mais la limite n'est pas.

Example 1.1.1

Considérons la fonction avec $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$f_n = \sin(x)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 1 \text{ si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{1.2}$$



1.2 Types de convergences

1.2.1 Convergence simple

Definition 1.2.1: Convergence Simple

Pour $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{\mathscr{F}(\Omega, F)\}^{\mathbb{N}}$ avec $(F, \|.\|_F)$ un espace vectoriel normé, f_n **converge simplement** vers $f \in \mathscr{F}(\Omega, F)$ si :

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVS} f \iff \forall \omega \in \Omega,\ f_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{\|.\|_F} f(\omega) \tag{1.3}$$

Remarques :

- F pourrait être un espace métrique (E, d) :

$$d(f_n(\omega), f(\omega)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \tag{1.4}$$

- Quand il y a une norme sur l'ensemble des fonctions : Soit $f_n \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$,

$$\forall \omega \in \Omega,\ f_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{\|.\|_{\infty,[a,b]}} f(\omega) \iff \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \tag{1.5}$$

- Quand il y a une semi-norme (norme mais sans la propriété de la caractère défini : $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \implies x = 0_E$) sur l'ensemble des fonction.

> Exemple de semi-norme : $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R}) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f^2$ intégrable sur $\Omega\}$ dans $(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré :
>
> – C'est un espace vectoriel
>
> – On peut construire un semi-norme :
>
> $$f \underset{\|\cdot\|_{2,\Omega}}{\mapsto} \sqrt{\int_\Omega f^2 \mathrm{d}\mu} \tag{1.6}$$
>
> car $\{\|f\|_{2,\Omega} = 0\} = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f = 0 \text{ p.p.}\}$

- Quand on a une (presque)-norme : $\underline{N} : E \to [0, +\infty]$ avec $0 \times \infty = 0$:

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f \iff \underline{N}(f_n - f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \tag{1.7}$$

> Exemple de (presque)-norme : $\|f\|_{\infty,\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \in [0, +\infty]$:
>
> $$f_n : x \mapsto x + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \tag{1.8}$$

1.2.2 Convergence uniforme

Definition 1.2.2: Convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{\mathscr{F}(\Omega, E)^{\mathbb{N}}$ où E un espace métrique (de même pour les autres), la suite **converge uniformément** sur Ω vers f si : (lorsque E un espace vectoriel normé, on notera une (presque)-norme)

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU} f \iff \sup_{x\in\Omega} d(f_n(x), f(x)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ ou } \|f_n - f\|_{\infty,\Omega} \overset{Not}{=} \sup_{x\in\Omega} \|f_n(x) - f(x)\|_F \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \tag{1.9}$$

Remarque :

- Uniforme en mathématiques signifie indépendant d'un paramètre. L'écriture de convergence simple :

$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, [n \geq N] \implies [d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon] \tag{1.10}$$

avec $N = N(x, \varepsilon)$ Mais l'écriture de convergence simple :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, [n \geq N] \implies [\forall x \in A, d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon] \tag{1.11}$$

avec $N = N(\varepsilon)$

Proposition 1.2.1 De CVU vers CVS

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}(\Omega, E)^{\mathbb{N}}$, alors

$$[f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU} f] \implies [f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVS} f] \tag{1.12}$$

Proof: $[\exists b \in B,\ \forall a \in A,\ \mathscr{P}(a,b)]$ donc $[\forall a \in A,\ \exists b \in B,\ \mathscr{P}(a,b)]$, réciproque fausse car lorsque $\sup_{x\in\Omega} N(x,\varepsilon) = +\infty$, $N(\varepsilon)$ n'existe plus. 😃