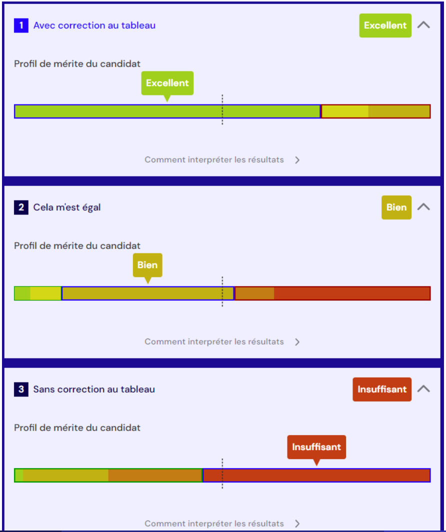
Topologie et Calcul différentiel

Semaine 4 : Applications du théorème des fonctions implicites

Mardi 07 Mars 2023,
Annonces :
QCM non-noté jeudi soir
Projet en ligne ce week-end (calcul différentiel et convexité)

Résultats du sondage

Sondage effectué au vote au jugement majoritaire
Créez votre propre vote ici : https://app.mieuxvoter.fr/fr



Rappels de la semaine dernière

Théorème des fonctions implicites

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, soit $(a, b) \in O$ et soit $f : O \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ ou $k = +\infty$. On suppose que:

$$f(a, b) = 0_{\mathbb{R}^p} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}[f(a, \cdot)]_b \text{ inversible}$$

en la variable y

Alors il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ qui contient a, un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ qui contient b avec $U \times V \subset O$ et une fonction $\phi : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^k$ tels que

$$\forall x \in U,\ \forall y \in V, \quad f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^p} \iff y = \phi(x)$$

Applications du théorème des fonctions implicites

Application 1 : Thermodynamique

Application à la thermodynamique

Considérons un système thermodynamique décrit par sa pression P, son volume V et sa température T. Ces quantités sont ici décrites par une *équation d'état* de la forme

$$f(P, V, T) = 0$$

Exemples :

- *équation des gaz parfait:*

  $PV = nRT$ ....

  où n est ....?.......... et R est ....?..;

- *équation de van der Waals:*

  $$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - n\,b) = n\,R\,T$$

  où a est ....?.........., b est ....?...............................;

Application à la thermodynamique

On va appliquer le théorème des fonctions implicites sur l'équation $PV = nRT$. Autrement dit, on souhaite exprimer une (resp. deux) variable(s) en fonction des autres (resp. de l'autre). Pour cela il faut :

- Une fonction $f : (P, V, T) \mapsto$ $PV - nRT$
- Trouver un bon ouvert. On choisit

$$O = \{(P,V,T) \in \mathbb{R}^3,\ P>0,\ V>0,\ T>0\}$$

- Se placer en un point (P_0, V_0, T_0) tel que

$f(P_0,V_0,T_0) = 0$ et $*\ \partial_1 f(P_0,V_0,T_0) \neq 0$ si on veut $P = \phi(V,T)$
(resp. $\partial_2 f(P_0,V_0,T_0) \neq 0$ si on veut $V = \phi(P,T)$)
...

Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur O. Le théorème des fonctions implicites assure alors, que dans un voisinage de (P_0, V_0, T_0),

$f(P,V,T) = 0 \iff P = \phi(V,T) = P(V,T)$
(resp. $V = \phi(P,T)$)

Application à la thermodynamique

En dérivant par rapport à V l'équation $f(P(V,T), V, T) = 0$ il vient :

$$\partial_1 f(P(V,T), V, T) \cdot \partial_1 P(V,T) + \partial_2 f(P(V,T), V, T) = 0$$

Dans ce voisinage de (P_0, V_0, T_0) on a donc

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T := \partial_1 P(V,T) = -\frac{\partial_2 f(P(V,T), V, T)}{\partial_1 f(P(V,T), V, T)} \quad (1)$$

De même :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P := \partial_2 V(P,T) = \frac{-\partial_3 f(P, V(P,T), T)}{\partial_2 f(P, V(P,T), T)} \quad (2)$$

et

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V := \partial_1 T(P,V) = -\frac{\partial_1 f(P, V, T(P,V))}{\partial_3 f(P, V, T(P,V))} \quad (3)$$

Or dans ce voisinage, $(P(V,T), V, T) = (P, V(P,T), T) = (P, V, T(P,V)) = (P, V, T)$.

D'où $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = (1) \times (2) \times (3) = -1$

Application à la thermodynamique

Application 2 : Les racines de polynômes

Applications aux racines d'une équation polynomiale

Considérons une équation du second degré

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

avec $p, q \in \mathbb{R}$.
On voudrait comprendre comment les racines dépendent des paramètres p et q. Pour les équations du second degré, on connaît les solutions :

- Si $p^2 - 4q > 0$, il y a deux racines simples

$$x_+(p,q) = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_-(p,q) = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

- Si $p^2 - 4q = 0$, il n'y a plus qu'une seule solution $-p/2$: les surfaces $(p,q) \mapsto x_+(p,q)$ et $(p,q) \mapsto x_-(p,q)$ se rencontrent sur $\{(p,q) \in \mathbb{R}^2 : p^2 - 4q = 0\}$

Applications aux racines d'une équation polynomiale

Autre preuve : théorème des fonctions implicites.
Fixons $p_0 \in \mathbb{R}$ et $q_0 \in \mathbb{R}$ et considérons une racine x_0 correspondante, c'est-à-dire $f(x_0, p_0, q_0) = x_0^2 + p_0\, x_0 + q_0 = 0$. On a

$$\partial_1 f(x_0, p_0, q_0) = 2x_0 + p_0$$

On voit donc que le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas si $x_0 = \frac{-p_0}{2}$ (on retrouve la racine double). En injectant cela dans $f(x_0, p_0, q_0) = 0$, on obtient

$$\left(\frac{-p_0}{2}\right)^2 + p_0 \cdot \left(\frac{-p_0}{2}\right) + q_0 = 0 \Rightarrow \frac{-p_0^2}{4} + q_0 = 0$$

On retrouve donc la condition $p_0^2 - 4q_0 = 0$

Applications aux racines d'une équation polynomiale

Si on a $p_0^2 - 4q_0 > 0$, le théorème des fonctions implicites s'applique: il existe un voisinage V de (x_0, p_0, q_0) et une fonction $x : (p, q) \mapsto x(p, q)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que

$$\forall (x, p, q) \in V, \; f(x,p,q) = 0 \Leftrightarrow x = x(p,q)$$

On en déduit deux choses importantes:

- dans un voisinage de (x_0, p_0, q_0), la racine $x(p, q)$ est simple ;
- la dépendance $\mathcal{C}^\infty$ de cette racine par rapport à p et à q.

Applications aux racines d'une équation polynomiale

On peut généraliser à des équations polynomiales de degré supérieur à 2.

Racines simples, doubles, multiples d'une fonction polynomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels, soit

$$P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$$

une fonction polynomiale de degré n $(a_n \neq 0)$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Si $P(x_0) = 0$, on dit que x_0 est une racine de P.
- Le plus petit entier $\ell \geq 1$ tel que $P^{(\ell)}(x_0) \neq 0$ mais $P(x_0) = P'(x_0) = \ldots = P^{(\ell-1)}(x_0) = 0$ est appelé l'ordre de la racine x_0.
- Si $\ell = 1$, on dit que x_0 est une racine simple de P, sinon on dit que c'est une racine multiple. Si $\ell = 2$, on parle de racine double.

Applications aux racines d'une équation polynomiale

Considérons maintenant l'équation polynomiale

$$\underbrace{f(x, a_0, a_1, \ldots, a_n)}_{=P(x)} = 0$$

où la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$. On suppose que P est de degré n, c'est-à-dire $a_n \neq 0$. Considérons également une racine simple x_0 de P qui vérifie donc $P(x_0) = 0$ et $P'(x_0) \neq 0$, c'est-à-dire

$$f(x_0, a_0, \ldots, a_n) = 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_1 f(x_0, a_0, \ldots, a_n) \neq 0$$

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\partial_1 f$ est continue donc on en déduit qu'il existe un ouvert V de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$ contenant $(x_0, a_0, a_1, \ldots, a_n)$ où $\partial_1 f$ ne s'annule pas. En particulier, dans cet ouvert V, les racines de P sont simples. Le théorème des fonctions implicites va nous donner des informations plus précises.

Applications aux racines d'une équation polynomiale

Proposition

Il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^{n+1}$ contenant $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, un ouvert V de $\mathbb{R}$ contenant x_0 et une fonction $\phi : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que

$$f(x, b_0, b_1, \ldots, b_n) = 0 \iff x = \phi(b_0, b_1, \ldots, b_n)$$

pour tout $x \in V$ et tout $(b_0, b_1, \ldots, b_n) \in U$.

Preuve : Puisque x_0 est une racine simple de P, on a $P(x_0) = 0$ et $P'(x_0) \neq 0$, ce qui est équivalent à

$$f(x_0, a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_1 f(x_0, a_0, a_1, \ldots, a_n) \neq 0$$

On applique le théorème des fonctions implicites à f en $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

Applications aux racines d'une équation polynomiale

Interprétation

Que veut dire ce résultat? Cela veut dire que toutes les fonctions polynomiales Q de coefficients $b_0, b_1, \dots, b_n$ qui sont proches de P (c'est-à-dire que $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in U$) ont une unique racine $y_0 = \phi(b_0, b_1, \dots, b_n)$ qui est proche de x_0 (c'est-à-dire $y_0 \in V$) et que ϕ varie de manière $\mathcal{C}^\infty$ en fonction des coefficients b_j. Autrement dit,

Les racines simples dépendent de manière $\mathcal{C}^\infty$ des coefficients.

Autres Applications

En mathématiques

- Changement de coordonnées en plusieurs dimensions (cours d'intégration Y3)
- Equations d~~e~~ifférentielles (dépendance $\mathcal{C}^1$ de y' en fonction de t et de y dans l'équation différentielle $y' = f(t, y)$.
- Géométrie (de très jolis dessins, cf le folium de Descartes dans le poly)

En physique

- Thermodynamique
- Partout où on a une équation dépendant de plusieurs paramètres

En économie

- Multiplicateurs de Lagrange : minimiser des fonctions "coût" de plusieurs variables avec contraintes (industrielles).
- élasticité croisée des prix en fonction de la demande et des biens.

Exercice

On considère la fonction de deux variables $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ définie par

$$\psi(x, y) = x \exp(y) + \sin(\log(y)) \exp(x)$$

1. Calculer les dérivées partielles de ψ.
2. Démontrer qu'il existe un voisinage de 0 noté $\mathcal{V}(0) \subseteq \mathbb{R}$ et une unique fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^1(\mathcal{V}(0); \mathbb{R}_+^*)$ telle que $\phi(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathcal{V}(0)$, $\psi(x; \phi(x)) = 0$
3. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de ϕ en 0.

1. $\partial_1 \psi(x,y) = \exp(y) + \sin(\log(y)).\exp(x)$

$\partial_2 \psi(x,y) = x.\exp(y) + \frac{1}{y}.\cos(\log(y)).\exp(x)$

② $* \ \Psi(0,1) = 0 \times \exp(1) + \sin(\log(1)) \cdot \exp(0) = 0 + \sin(0) = 0$

$* \ \partial\Psi_2(0,1) = 0 \times \exp(1) + \frac{1}{1} \cdot \cos(\log(1)) \cdot \exp(0) = \cos(0) = 1 \neq 0$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe une unique fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^1(V(0, \mathbb{R}_+^*))$ telle que $\phi(0)=1$ et $\forall x \in V(0)$, $\Psi(x, \phi(x)) = 0$

③ Notons $\phi(x) = 1 + ax + bx^2 + o(x^2)$ car $\phi(0) = 1$.

$$\Psi(x, \phi(x)) = 0$$

et $\Psi(x, \phi(x)) = x \cdot \exp(\phi(x)) + \sin(\log(\phi(x))) \exp(x)$

$$= x \cdot \exp(1 + ax + bx^2 + o(x^2)) + \sin(\log(1 + ax + bx^2 + o(x^2))) \cdot \exp(x)$$

$$= x \cdot e^1 \cdot \left(1 + \frac{(ax + bx^2)}{1!} + \frac{(ax)^2}{2!} + o(x^2)\right) + \sin\left((ax + bx^2) - \frac{(ax)^2}{2} + o(x^2)\right) \cdot \exp(x) = 0$$

$$= xe\left(1 + ax + bx^2 + \frac{a^2x^2}{2}\right) + \left(ax + \left(b - \frac{a^2}{2}\right)x^2\right) \cdot (1 + x) + o(x^2)$$

$$= ex + aex^2 + ax + ax^2 + \left(b - \frac{a^2}{2}\right)x^2 + o(x^2)$$

En identifiant les termes en x et en x^2 on trouve : $\begin{cases} e + a = 0 \\ ae + a + b - \frac{a^2}{2} = 0 \end{cases}$