2023-03-15

Bonjour

Questions : Raphaël, Élodie, Mathilde

Qu'est-ce qu'un endomorphisme auto-adjoint ?

1) On peut découper l'espace euclidien en morceaux

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i \qquad \left(E_i = \{ x \in E,\ u(x) = \alpha_i \cdot x \} \right)$$

$$\text{"}\{\lambda_1 - \lambda_n\}\text{"} = \underbrace{\{\alpha_1 - \alpha_p\}}_{i \neq j \quad \alpha_i \neq \alpha_j}$$

$p=2 \qquad E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^3$

Si $u \in \mathcal{S}(E)$

$u(E_i) \subset E_i$

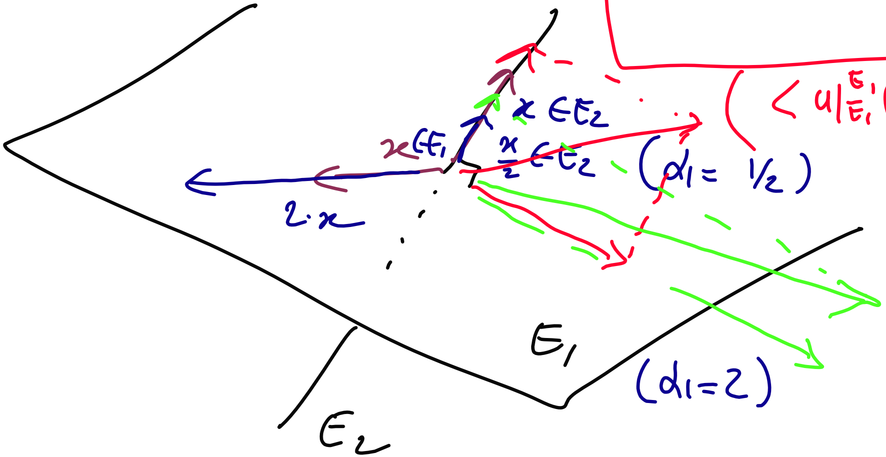
$u|_{E_i}^{E_i} \in \mathcal{S}(E_i)$

$\Big(\langle u|_{E_i}^{E_i}(x), y \rangle = \langle u(x), y \rangle$

$= \langle x, u(y) \rangle$

$= \langle x, u|_{E_i}^{E_i}(y) \rangle$

$(x,y) \in E_i^2 \Big)$



Plan de démonstration de la racine (unicité)

Sur chaque E_i, $u|_{E_i}^{E_i} = \lambda_i \cdot \mathrm{id}_{E_i}$, $v|_{E_i}^{E_i} = \sqrt{\lambda_i} \cdot \mathrm{id}_{E_i}$

Bilan des méthodes courantes

1. Dédoublement des termes

2. Récurrence sur dimension de E ($E = F \oplus F^{\perp}$. où F s'obtient en utilisant la récurrence.)

(en espérant garder la propriété sur $F^{\perp}$.)

3. $[u(F) \subset F] \iff [u^*(F^{\perp}) \subset F^{\perp}]$

(Proposition technique).

4. Dessiner (si possible en dimension 2, (ou 3))

Retour sur les automorphismes orthogonaux

$$O(E) = \{ u \in \mathcal{L}(E),\ u^* \circ u = id_E \}$$

$$= \{ u \in \mathcal{L}(E),\ u \circ u^* = id_E \}$$ dimension finie

(<u>Rappel</u> : si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\dim E < +\infty$

alors $[u \text{ injectif}] \Leftrightarrow [u \text{ surjectif}] \Leftrightarrow [u \text{ bijectif}]$)

⚠ <u>dimension finie indispensable</u>.

<u>ex</u> : $E = \mathrm{Vect}(\{x \mapsto x^k,\ k \in \mathbb{N}\})$

$u : P \mapsto P'$ (surjective, pas injective).

Qu'est-ce qu'un automorphisme orthogonal ?

$u \in \mathcal{L}(E)$

$$\left[u \in \mathcal{O}(E)\right] \Leftrightarrow \left[\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|\right]$$
$$\Leftrightarrow \left[\forall (x,y) \in E^2\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x,y\rangle\right]$$
$$\Leftrightarrow \left[\ \forall\ (e_1 \ldots e_n)\ \text{BON},\ (u(e_1) \ldots u(e_n))\ \text{BON}\right]$$

BON = « base orthonormée »

$\dim E = 1$. $\mathcal{L}(E) = \{x \overset{u}{\mapsto} \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ $\quad \mathrm{Mat}(u, (1)) = [\lambda]$

$$[u \in \mathcal{O}(E)] \Leftrightarrow [\ |\lambda| = 1] \qquad u = \pm \mathrm{id}_E$$

$\dim E = 2$ $\quad (e_1, e_2)$ base orthonormée

$$u \in O(E), \quad \mathrm{Mat}(u, (e_1, e_2)) = \begin{array}{cc} u(e_1) & u(e_2) \\ \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} c \\ d \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \in M_2(\mathbb{R})$$

où $(u(e_1), u(e_2))$ base orthonormée

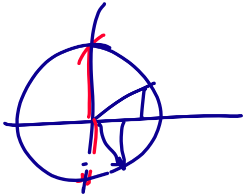
$\|u(e_1)\| = 1$: $\quad a^2 + b^2 = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $a = \cos\theta$ $\quad b = \sin\theta$

$\|u(e_2)\| = 1$ $\quad c^2 + d^2 = 1$, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ $\quad c = \cos\varphi$ $\quad d = \sin\varphi$.

$\langle u(e_1), u(e_2) \rangle = 0$ $\quad ac + bd = 0$.

$ac + bd = 0$ devient $\underbrace{\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi}_{= \cos(\theta - \varphi).} = 0$

il existe $k \in \mathbb{Z}$, $\quad \theta - \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$



alors $\cos\varphi = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2} - k\pi\right) = (-1)^k \cos(\theta - \pi/2) = (-1)^k \sin(\theta)$

$\sin\varphi = \sin\left(\theta - \pi/2 - k\pi\right) = (-1)^k \sin(\theta - \pi/2) = (-1)^{k+1} \cos(\theta)$.

$$\mathrm{Mat}(u, (e_1, e_2)) = \begin{bmatrix} \cos\theta & (-1)^k \sin\theta \\ \sin\theta & (-1)^{k+1} \cos\theta \end{bmatrix}$$

① k pair.

$$\mathrm{Mat}(u, (e_1, e_2)) = \begin{bmatrix} \cos\theta & +\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

(Symétrie orthogonale par rapport . ?)

② k impair

$$\mathrm{Mat}(u, (e_1, e_2)) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

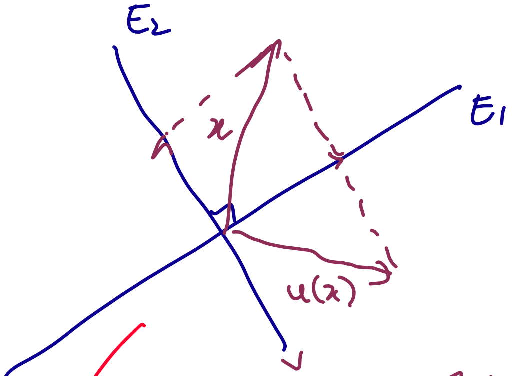
(rotation d'angle (Etoile) θ)

(YIS2 PAR II.

$$z \longmapsto e^{i\theta} z$$

$$x' + iy' = (\cos\theta + i\sin\theta)(x+iy)$$

$$= x\cos\theta - y\sin\theta + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$$)



symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 où $E_2 = E_1^{\perp}$.

① $z \longmapsto e^{i\theta}\bar{z} = z'$

$$x' + iy' = (\cos\theta + i\sin\theta)(x - iy)$$

$$= x\cos\theta + y\sin\theta + i(x\sin\theta - y\cos\theta)$$

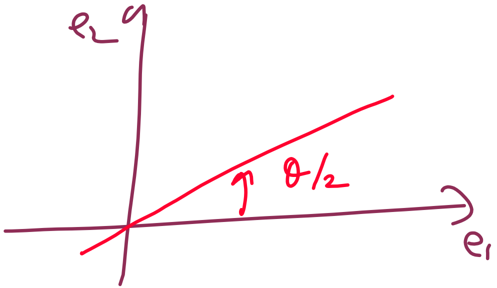
② $$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$E_1 = \{x \in E,\ u(x) = x\} \quad \left(E_2 = \{x \in E,\ u(x) = -x\}\right)$$

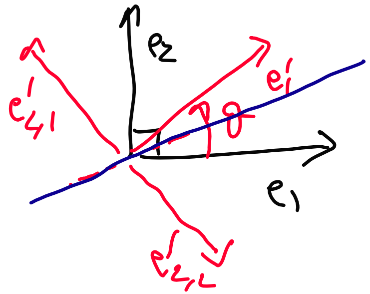
(① $e^{i\theta}\bar{z} = z$, $z = \rho e^{i\varphi}$ $\quad e^{i\theta}\rho e^{-i\varphi} = \rho e^{i\varphi}$

$$\varphi = \theta/2 \ [\pi].$$

Symétrie par rapport à droite



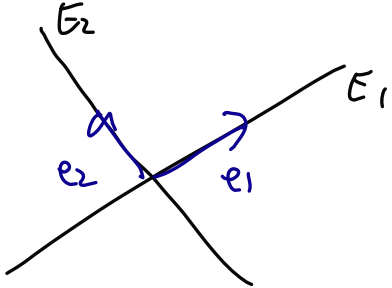
)



$(e'_1, e'_{2,1})$ s'obtient par rotation d'angle θ.

$(e'_1, e'_{2,2})$ s'obtient par symétrie (ligne bleue)

$\mathcal{E}$]



$\mathrm{Mat}(u, (e_1, e_2)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Définition: Soit E euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ u est dite réflexion de E

si $\ast$ c'est une symétrie orthogonale.

$$E_1 = \{x / u(x) = x\} \perp E_2 = \{x / u(x) = -x\}$$

$\ast$ $\dim E_1 = \dim E - 1$ (E_1 hyperplan).

Si $(e_1 - e_{n-1})$ base orthonormée de E_1

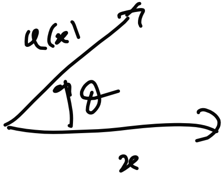
(e_n) base ——— de E_2

(réflexion)

$$\mathrm{Mat}(u, (e_1 - e_n)) = \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} u(e_1) & \cdots & u(e_{n-1}) & u(e_n) \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ & \vdots & & 1 & \\ 0 & 0 & & & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array} \in M_n(\mathbb{R})$$

$$= \mathrm{Diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1 \text{ fois}}, -1)$$

Rappel : toute rotation du plan peut être décomposée en un produit de réflexions (symétries orthogonales par rapport à une droite)



$$z \longmapsto e^{i\theta} z$$

$$z \longmapsto e^{i\varphi} \bar{z}$$

φ_1, φ_2

$$z \xmapsto{s_1} e^{i\varphi_1} \bar{z}$$

$$z \xmapsto{s_2} e^{i\varphi_2} \bar{z}$$

(ex : $\varphi_1 = 0$
$\varphi_2 = \theta$.)

$$s_2 \circ s_1(z) = e^{i\varphi_2} \overline{\left(e^{i\varphi_1} \bar{z}\right)} = e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} z$$

$$\boxed{\theta = \varphi_2 - \varphi_1}$$

Démonstration

— (*Existence*).

1. (*Analyse*). Si ρ et θ existent, alors on a

$$f = \rho \circ \theta \text{ et, donc } f^\star = \theta^\star \circ \rho^\star, \text{ d'où } \rho^2 = f \circ f^\star$$

2. (*Synthèse*). $f \circ f^\star \in \mathscr{S}^{++}(E)$, donc, on sait qu'il existe un endomorphisme (unique) $\rho \in \mathscr{S}^{++}(E)$, tel que $\rho^2 = f \circ f^\star$, posons alors

$$\theta = \rho^{-1} \circ f, \text{ alors } \theta^\star = f^\star \circ \rho^{-1\star} = f^\star \circ \rho^{-1}$$

Donc

$$\theta \circ \theta^\star = \rho^{-1} \circ f \circ f^\star \circ \rho^{-1} = \mathrm{id}_E$$

Théorème 2.2 – Décomposition d'un automorphisme orthogonal en un produit de réflexions

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f \in \mathscr{O}(E)$, alors si $p = \operatorname{codim}(\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E))$, on peut trouver p réflexions $(s_1, \ldots, s_p)$ telles que

$$f = s_1 \circ \cdots \circ s_p$$

De plus, p est le nombre minimal de réflexions utiles pour une telle décomposition.

Démonstration

1. (*Existence*). Par récurrence sur la dimension de E.
   — (*Initialisation*). Si E est de dimension 1, $\mathscr{O}(E)$ contient deux éléments

   $$x \mapsto x \text{ (0 réflexion), et } x \mapsto -x \text{ (1 réflexion)}$$

   — (*Hérédité*). Supposons le résultat connu lorsque E est de dimension p, et prenons un espace vectoriel euclidien

Proposition: Soit $u \in O(E)$, alors il existe $p \in \mathbb{N}$

des réflexions $s_1 \dots s_p$,

$$u = s_1 \circ \dots \circ s_p$$

$$\left(p_{min} = \operatorname{codim}\left(\{x \in E,\ u(x) = x\} \right) \right)$$

Démonstration: par récurrence sur $\dim E$

1) $\dim E = 1$. $\quad x \mapsto x$, 0 réflexion

$x \mapsto -x$ 1 réflexion

(Inutile pour la démonstration)

2) $\dim E = 2$.

- u = rotation d'angle θ. ($\theta = 0\,[2\pi]$, $u = id_E$ 0 réflexion)
($\theta \neq 0\,[2\pi]$, 2 réflexions)

- u = symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle $\theta/2$ — 1 réflexion

$(\mathcal{H}_n)$

2) Hérédité : n / supposons le résultat vrai pour tout E euclidien de dimension n, et tout $u \in O(E)$.

Soit E euclidien $\dim E = n+1$
$u \in O(E)$.

1^{er} cas : il existe $e \in E$, $\|e\| = 1$, $u(e) = e$.

$$E = \mathbb{R}.e \oplus \mathbb{R}e^{\perp}. \qquad u(\mathbb{R}e^{\perp}) \subset \mathbb{R}e^{\perp}$$

conservation du produit scalaire

(si $y \in \mathbb{R}e^{\perp}$; $\langle e, y\rangle = 0$ donc $\langle u(e), u(y)\rangle = 0$

donc $\langle e, u(y)\rangle = 0$, donc $y \in \mathbb{R}e^{\perp}$)

$$u\Big|_{\mathbb{R}e^{\perp}}^{\mathbb{R}e^{\perp}} \in \mathcal{O}(\mathbb{R}e^{\perp})$$ ← conservation de la norme

($y \in \mathbb{R}e^{\perp}$; $\|u(y)\| = \|y\|$

$$\| u\Big|_{\mathbb{R}e^{\perp}}^{\mathbb{R}e^{\perp}}(y) \|$$)

et $\dim \mathbb{R}e^{\perp} = n$

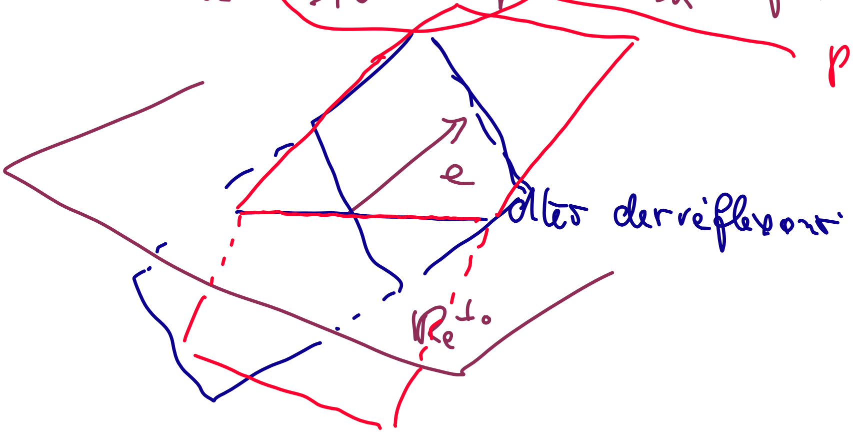
$\mathcal{H}_n$: il existe p reflexions de $\mathbb{R}e^{\perp}$; $u\Big|_{\mathbb{R}e^{\perp}}^{\mathbb{R}e^{\perp}} = s_1 \circ \cdots \circ s_p$

pour $k \in [\![1, p]\!]$, $\tilde{s}_k : \mathbb{R}e \oplus \mathbb{R}e^{\perp} \longrightarrow E$

$$\alpha . e + y \longmapsto \alpha . e + s_k(y).$$

alors $u = \tilde{s}_1 \circ \cdots \circ \tilde{s}_p$ et $\tilde{s}_k$ réflexion

$p =$ le nombre pour $u|_{\mathbb{R}e^{\perp}}$



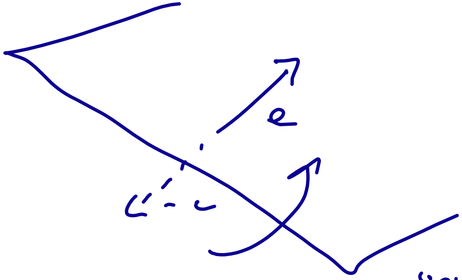
<u>2ème cas</u> : il existe $e \in E$ $\|e\|=1$, $u(e)=-e$

$S_0 =$ reflexion par rapport à $\mathbb{R}e^{\perp}$.

$S_0 \circ u\,(e) = e$.

il existe $(s_1, \dots, s_p)$ reflexions, $S_0 \circ u = s_1 \circ \dots \circ s_p$

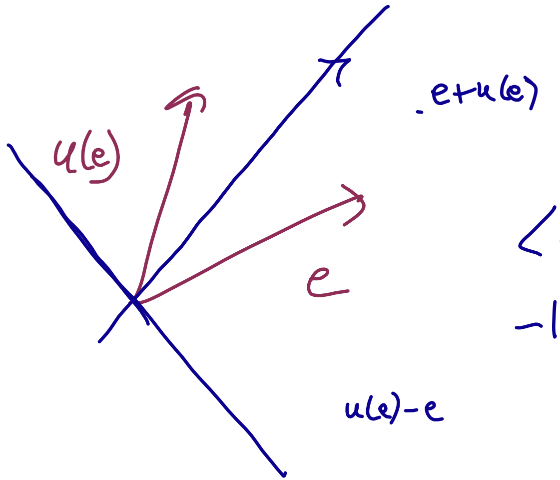
donc $u = S_0 \circ s_1 \circ \dots \circ s_p$.



<u>3ème cas</u> : $\forall e \neq 0_E$ $u(e) = \pm e$.

soit $e \in E$, $\|e\|=1$ alors $(u(e), e)$ libre

(sinon $u(e) = \lambda \cdot e$, $\|u(e)\| = \|e\|$ donc $\lambda = \pm 1$)



$$\langle e+u(e), u(e)-e\rangle = -\|e\|^2 + \underbrace{\|u(e)\|^2}_{=\|e\|^2} = 0$$

S_0 = reflexion par rapport à $(u(e)-e)^\perp$.

alors $S_0 \circ u(e) = e$, 1er car il existe $S_1 \dots S_p$ réflexions

$S_0 \circ u = S_1 \circ \dots \circ S_p$. $\quad u = S_0 \circ S_1 \circ \dots \circ S_p$. ∎

Comptons :

si $\dim\{x \in E, u(x) = x\} = K$,

* K fois $\underline{1^{er}\text{ cas}}$
* $n-K$ fois les autres cas

l'algorithme produit $\underline{p = n-K \text{ réflexions}} = \operatorname{codim}(E_1)$

Est-ce le minimum ?