Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Dans ce chapitre, nous noterons $\mathbb{K}$ *les corps* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. Cela signifie alors que le résultat énoncé est vrai dans* $\mathbb{R}$ et *dans* $\mathbb{C}$*.*

这里域 $\mathbb{K}$ 表示实数域或者复数域，域 $\mathbb{K}$ 是影响线性空间性质的重要因素。

1.1 Généralités

1.1.1 Premières définitions

Définition 1.1 – Espace vectoriel

Soit E un ensemble non vide, on dit que E *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$*)* s'il vérifie les axiomes suivants :

1. Il est muni d'une opération *interne*[a], notée $+$ et appelée *addition* qui vérifie :
   (a) $+$ est associative :
$$\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x + y) + z = x + (y + z) \overset{\text{Not}}{=} x + y + z$$

(b) $+$ possède un élément neutre noté 0_E (ou 0 lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) :

$$\forall x \in E,\ x + 0_E = 0_E + x = x$$

(c) Tout élément de E possède un unique opposé :

$$\forall x \in E,\ \exists! y \in E,\ x + y = y + x = 0_E,\ \text{on le note } y \overset{\text{Not}}{=} -x$$

de plus, on note $-$ l'opération :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x + (-y) \overset{\text{Not}}{=} x - y$$

(d) $+$ est commutative :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x + y = y + x$$

2. Il est muni d'une opération *externe*[b], notée . et appelée *multiplication par un scalaire* qui vérifie :

(a) . est distributive par rapport à l'addition de E :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x, y) \in E^2,\ \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$$

(b) . est distributive par rapport à l'addition de $\mathbb{K}$:

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$$

(c) . est distributive par rapport à la multiplication de $\mathbb{K}$:

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda\, \mu).x = \lambda.(\mu.x)$$

(d) L'unité 1 du corps est respectée :

$$\forall x \in E,\ 1.x = x$$

Les éléments de E s'appellent alors *vecteurs* et les éléments de $\mathbb{K}$ *scalaires.*

---

a. Cela signifie que si x et y sont dans E, alors $x + y$ est dans E.

b. Cela signifie que si λ est un *scalaire* (il est dans $\mathbb{K}$) et si x est dans E, alors $\lambda.x$ est dans E.

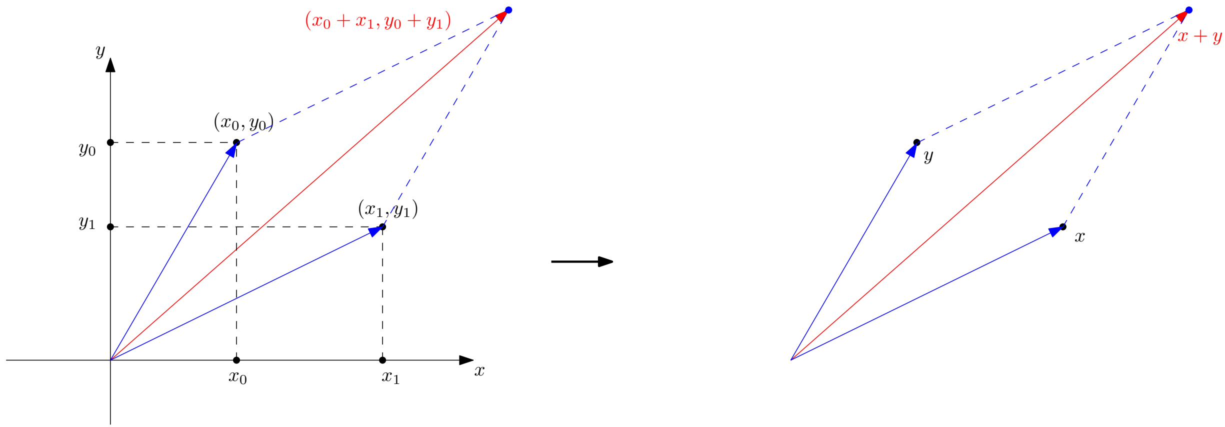
集合E 叫做域$\mathbb{K}$上的线性空间；当$\mathbb{K}=\mathbb{R}$时，集合 E 叫做实线性空间；当$\mathbb{K}=\mathbb{C}$时，集合 E 叫做复线性空间。

Remarque 1.1

Que veut-on faire ? Garder l'essentiel, et éliminer les coordonnées.

— Pour la somme de deux vecteurs, voir la figure 1.1, de la présente page.
— Pour le produit d'un vecteur par un scalaire, voir la figure 1.2, page suivante.

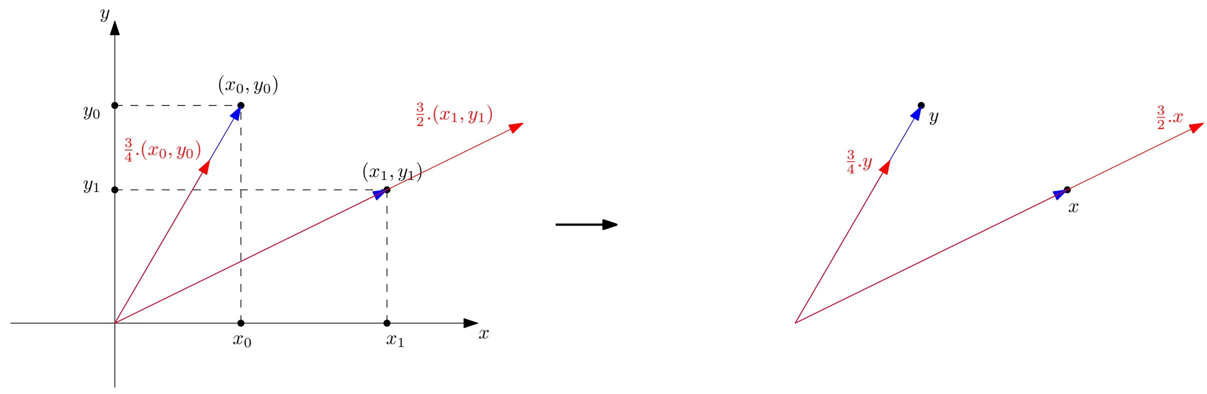
Figure 1.1 – Somme de deux vecteurs



Exemple 1.1 – Espaces vectoriels

1. Le corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Figure 1.2 – Produit d'un vecteur par un scalaire



2. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, alors les ensembles suivants sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

$$\mathscr{C}^k(I, \mathbb{K}) \stackrel{\text{Not}}{=} \{f \ : \ I \to \mathbb{K}, \text{ de classe } \mathscr{C}^k\}$$

3. De même, l'ensemble suivant est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

$$\mathscr{C}^0_{\text{pm}}(I, \mathbb{K}) \stackrel{\text{Not}}{=} \{f \ : \ I \to \mathbb{K}, \text{ continue par morceaux}\}$$

4. L'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; de même que les fonctions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.
5. Tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (la réciproque est fausse).
6. Si X est un ensemble et si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors

$$\mathscr{F}(X, E) \stackrel{\text{Not}}{=} \{f \ : \ X \to E\} \text{ est un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel}$$

Définition 1.2 – Combinaison linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ n vecteurs de E, on appelle *combinaison linéaire de ces vecteurs* toute expression de la forme :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k . x_k, \quad \text{où pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket\,,\ \lambda_k \in \mathbb{K}$$

Combinaison linéaire d'un nombre quelconque de vecteurs

Plus généralement, si on a un nombre quelconque de vecteurs de E, $(x_i)_{i \in I}$, on appelle *combinaison linéaire de ces vecteurs*, toute combinaison linéaire d'une *sous-famille finie* $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, où

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket\,,\ i_k \in I$$

注意我们定义中的关键词有限的(finie)。

Exemple 1.2 – Combinaisons linéaires

1. Dans $\mathbb{R}^2$, tout vecteur est combinaison linéaire de $\overrightarrow{\imath} = (1, 0)$ et $\overrightarrow{\jmath} = (0, 1)$.
2. Dans $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, tout nombre complexe est combinaison linéaire de 1 et i, mais aussi de 1 et $\exp(2\,i\,\pi/3) \overset{\text{Not}}{=} j$, ou de i et j, ou de 1, i et j, etc.
3. Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales, toute fonction polynomiale est combinaison linéaire de la famille :

$$\left(x \mapsto x^i\right)_{i \in \mathbb{N}}$$

Remarque importante 1.2

On ne sait faire que des sommes finies de vecteurs ! D'où la présence du n. Lorsque $n = 0$, on obtient (par convention) 0_E.

Définition 1.3 – Produit d'espaces vectoriels

Produit fini d'espaces vectoriels

Soit E_1, ..., E_n des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, l'ensemble $E_1 \times \cdots \times E_n$ est alors muni d'une *structure de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* définie par (avec des notations évidentes) :

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) + (x'_1, \ldots, x'_n) &\overset{\text{Def}}{=} (x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n) \\ \lambda.(x_1, \ldots, x_n) &\overset{\text{Def}}{=} (\lambda.x_1, \ldots, \lambda.x_n) \end{aligned}$$

Produit quelconque d'espaces vectoriels

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et I un ensemble (d'indices), alors, de même, E^I est muni d'une *structure de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* définie par (avec des notations évidentes) :

$$\begin{aligned} (x_i)_{i \in I} + (x'_i)_{i \in I} &\overset{\text{Def}}{=} (x_i + x'_i)_{i \in I} \\ \lambda.(x_i)_{i \in I} &\overset{\text{Def}}{=} (\lambda.x_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

Exemple 1.3 – Produit d'espaces vectoriels

1. $\mathbb{K}^n$ (l'ensemble des n-uplets à coefficients dans $\mathbb{K}$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des suites de $\mathbb{K}$ indexées par $\mathbb{N}$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice(s) 1.1

1.1.1 Démontrer que, dans tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
\forall x \in E, &\qquad 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E \\
\forall \lambda \in \mathbb{K}, &\qquad \lambda.0_E = 0_E \\
\forall x \in E, &\qquad (-1).x = -x \\
\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, &\qquad \lambda.x = 0_E \iff \big(\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E\big)
\end{aligned}$$

1.1.2 Parmi les ensembles suivants, lesquels, munis des opérations usuelles, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

(a) $\mathbb{Z}$?

(b) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(0) = 0\}$?

(c) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(0) = 1\}$?

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x\,y = 0\}$?

(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x\,y = 1\}$?

1.1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.4 – Sous-structure

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$, on dit que F est un *sous-espace vectoriel de* E si :

— $0_E \in F$;

— F est stable par $+$ (c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in F^2$, $x + y \in F$) ;

— F est stable par . (c'est-à-dire que pour tout $x \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.x \in F$).

证明集合F为E的子空间时，需要验证以上三个条件。

Exemple 1.4 – Sous-espaces vectoriels

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tel que $E \neq \{0_E\}$ et soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. La *droite vectorielle dirigée par* x, notée $\mathbb{K}.x$, est le sous-ensemble de E défini par
$$\mathbb{K}.x \stackrel{\text{Def}}{=} \{\lambda.x,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$$
Les droites vectorielles sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. L'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.
3. De même, pour I intervalle de $\mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^{p+1}(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^p(I, \mathbb{K})$.
4. De plus, $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^p(I, \mathbb{K})$.

Propriété 1.1

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E admet toujours les sous-espaces vectoriels (dits *triviaux*) E et $\{0_E\}$.

Démonstration

On démontre que E et $\{0_E\}$ vérifient les trois axiomes de la définition 1.4, page précédente.

Propriété 1.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $F \subset E$, $F \neq \emptyset$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, F muni des mêmes opérations $+$ et $.$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration

— Supposons que F soit sous-espace vectoriel de E. Alors $+$ est une opération interne sur $F \times F$ (car F est stable par $+$), qui est associative (car elle l'est sur $E \supset F$), possède un élément neutre $0_E \in F$, tout élément de F possède un unique opposé dans F (si $x \in F$, $-x = (-1).x \in F$ car F est stable par $.$) et est commutative (car elle l'est sur $E \supset F$).
De plus, $.$ est une opération externe sur $\mathbb{K} \times F$ (car F est stable par $.$), est distributive par rapport à l'addition de F ainsi que l'addition et la multiplication de $\mathbb{K}$ et l'unité du corps est respectée (car ces propriétés sont vraies sur $E \supset F$).
Conclusion : F muni des opérations $+$ et $.$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

— Réciproquement, si F muni des opérations $+$ et $.$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors il est immédiat que F vérifie les trois axiomes de la définition 1.4, page précédente.

Remarque 1.3

Pour démontrer qu'un ensemble est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il est très souvent plus simple et plus rapide de démontrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel déjà connu.

Propriété 1.3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $F \subset E$, $F \neq \emptyset$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, F est stable par combinaisons linéaires.

Démonstration

- Supposons que F soit un sous-espace vectoriel de E. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de F (qui existent car $F \neq \emptyset$) et soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Alors $\lambda_k.x_k \in F$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ car F est stable par . et par une récurrence immédiate sur n, on obtient
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.x_k \in F$$
donc F est stable par combinaisons linéaires.
- Réciproquement, supposons que F soit stable par combinaisons linéaires. Il est alors immédiat que F est stable par $+$ et par . (cas particuliers de combinaisons linéaires). De plus, puisque $F \neq \emptyset$, il existe $x \in F$. On a alors
$$0_E = x - x = x + (-1).x \in F$$
Finalement, F est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 1.4 – Stabilité par intersection

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Stabilité par intersection finie

Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

Stabilité par intersection quelconque

Plus généralement, si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E, alors

$$\bigcap_{i\in I} F_i \text{ est un sous-espace vectoriel de } E$$

Démonstration

Notons $F = \bigcap_{i\in I} F_i \subset E$.

- On a $0_E \in F$ car $0_E \in F_i$ pour tout $i \in I$;
- Soit $(x,y) \in F^2$. En particulier, pour tout $i \in I$ on a $x \in F_i$ et $y \in F_i$ donc $x+y \in F_i$ pour tout $i \in I$ (car les F_i sont stables par $+$). On a donc $x+y \in F$.
- Soit $x \in F$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. En particulier, pour tout $i \in I$ on a $x \in F_i$ donc $\lambda.x \in F_i$ pour tout $i \in I$ (car les F_i sont stables par .). On a donc $\lambda.x \in F$.

Finalement, F est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 1.5 – Non stabilité par réunion

Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors $F_1 \cup F_2$ n'est *jamais* un sous-espace vectoriel de E sauf si $F_1 \subset F_2$ ou $F_1 \supset F_2$.

Démonstration

- ($\Leftarrow$) Si $F_1 \subset F_2$ ou $F_1 \supset F_2$, alors $F_1 \cup F_2 = F_1$ ou $F_1 \cup F_2 = F_2$ donc $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.
- (*Un exemple*) Dans $\mathbb{R}^2$, considérons les droites vectorielles $F_1 = \mathbb{R}.(1,0)$ et $F_2 = \mathbb{R}.(0,1)$. On a $(1,0) \in F_1 \cup F_2 \supset F_1$ et $(0,1) \in F_1 \cup F_2 \supset F_2$, mais $(1,0)+(0,1) = (1,1) \notin F_1 \cup F_2$, donc $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (il n'est pas stable par addition).
- ($\Rightarrow$) Si $F_1 \not\subset F_2$, il existe $x_1 \in F_1 \setminus F_2$. De même, si $F_2 \not\subset F_1$, il existe $x_2 \in F_2 \setminus F_1$, et, en ce cas $x_1 + x_2 \notin F_1 \cup F_2$.

Définition 1.5 – Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $A \subset E$, on appelle *sous-espace vectoriel engendré par* A le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A. On le note :

$$\mathrm{Vect}(A)$$

Démonstration que la notion de sous-espace vectoriel engendré par une partie est bien définie

L'existence d'un plus petit sous-espace vectoriel contenant A mérite une justification.
Posons

$$\mathcal{F} = \{F \text{ sous-espace vectoriel de } E,\ F \supset A\} \text{ et } \operatorname{Vect}(A) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

Alors $\operatorname{Vect}(A) \neq \emptyset$ car $E \in \mathcal{F}$ et c'est bien un sous-espace vectoriel de E d'après la propriété 1.4, page 13. Par définition, tout sous-espace vectoriel de E qui contient A contient aussi $\operatorname{Vect}(A)$, c'est donc bien le petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

Exemple 1.5 – Engendrement de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. On a $\operatorname{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.
2. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\operatorname{Vect}(F) = F$.
3. Si $E \neq \{0_E\}$ et si $x \in E$, $x \neq 0_E$, alors $\operatorname{Vect}(\{x\})$ est la droite vectorielle engendrée par x :

$$\operatorname{Vect}(\{x\}) = \mathbb{K}.x = \{\lambda.x,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Proposition 1.1

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et si $A \subset E$, $A \neq \emptyset$, alors $\operatorname{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires construites à partir des vecteurs de A :

$$\operatorname{Vect}(A) = \left\{ x \in E,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \exists \lambda_k \in \mathbb{K}, \exists\, a_k \in A,\ x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.a_k \right\}$$

注释 1.1

$\operatorname{Vect}(A)$ 叫做由 A 生成的子空间，注意到 $\operatorname{Vect}(A)$ 是 A 中有限元素线性组合的集合。

Démonstration

($\subset$) L'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de A est un sous-espace vectoriel de E qui contient A, il contient donc $\mathrm{Vect}(A)$.

($\supset$) A est inclus dans $\mathrm{Vect}(A)$ (par définition) qui est stable par combinaisons linéaires, donc $\mathrm{Vect}(A)$ contient toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de A.

Définition 1.6 – Partie ou famille génératrice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Partie génératrice

Soit $A \subset E$, on dit que A est *une partie génératrice de E* si

$$\mathrm{Vect}(A) = E$$

Famille génératrice

Soit $(a_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de E, on dit que c'est une *famille génératrice de E* si

$$\mathrm{Vect}\left(\{a_i,\ i \in I\}\right) = E$$

Remarque 1.4

Quelle différence y a-t-il entre la famille $(a_i)_{i\in I}$ et $\{a_i,\ i \in I\}$? Dans un ensemble, les termes n'apparaissent qu'une seule fois, alors que dans une famille, il est possible de les répéter. C'est la même différence qu'entre une liste et un ensemble en informatique ! [a] Voir le code 1.1, page suivante.

a. L'ensemble $\{a_i,\ i \in I\}$ associé à la famille $(a_i)_{i\in I}$ s'appelle *le support de la famille.*

集合中不包含相同的元素，而 famille 可以包含。

Session Wxmaxima 1.1 – Partie ou famille génératrice ?

```
(%i1) Famille : [1,2,3,1,0,1,2,3,0];
```

(%o1) $[1,2,3,1,0,1,2,3,0]$

```
(%i2) Partie : setify(Famille);
```

(%o2) $\{0,1,2,3\}$

Session Python 1.1 – Initialisation de Sympy

Ces deux commandes sont à faire au début de chaque session ! *Nous ne les présenterons pas à chaque calcul, c'est pourquoi les codes commencent par* `In[2]` *!*

In[1]

```python
from sympy import *
init_session()
%matplotlib inline
```

```
IPython console for SymPy 1.6.2 (Python 3.8.2-64-bit) (ground types: python)

These commands were executed:
>>> from __future__ import division
>>> from sympy import *
>>> x, y, z, t = symbols('x y z t')
>>> k, m, n = symbols('k m n', integer=True)
>>> f, g, h = symbols('f g h', cls=Function)
>>> init_printing()

Documentation can be found at https://docs.sympy.org/1.6.2/
```

Session Python 1.2 – Partie ou famille génératrice ?

Traduction du Wxmaxima.

In [2]

```
Famille = [1, 2, 3, 1, 0, 1, 2, 3, 0]
Famille
```

Out [2]

$[1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 0]$

In [3]

```
Partie = {i for i in Famille}
Partie
```

Out [3]

$\{0, 1, 2, 3\}$

Exemple 1.6 – Partie ou famille génératrice

1. $(1, i)$, $(1, j)$, (i, j), $(1, i, j)$ sont des familles génératrices de $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. La base canonique $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{C}^n$, où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ième coordonnée}}, 0, \ldots, 0)$$

3. Plus généralement, si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et si $(f_j)_{j \in J}$ est une famille génératrice

d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F, alors la partie

$$\{(e_i, 0_F),\ i \in I\} \cup \{(0_E, f_j),\ j \in J\} \text{ est une partie génératrice de } E \times F$$

Exercice(s) 1.2

1.2.1 Démontrer que

$$\{(1,1,0), (0,1,1), (-1,1,0)\}$$

est une partie génératrice de $\mathbb{K}^3$.

1.2.2 Déterminer une partie génératrice simple du plan de $\mathbb{K}^3$ d'équation

$$x + y + z = 0$$

1.2.3 Déterminer une famille génératrice simple du plan vectoriel de $\mathbb{K}^4$, d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t &= 0 \\ x - y - 2z + t &= 0 \end{cases}$$

1.2.4 Soit $a \in \mathbb{R}$, démontrer que la famille $(x \mapsto (x-a)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales.

1.2.5 Déterminer dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\mathrm{Vect}\left(\{f,\ f \geq 0\}\right)$$

1.2.6 Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, que dire de

$$\mathrm{Vect}\left(E \setminus F\right) \text{ ?}$$

1.2.7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit E_1, E_2 et E_3 trois sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$E_1 \subset E_2 \cup E_3$$

Que peut-on en conclure ?

1.2.8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A et B deux parties de E, comparer :

$$\text{Vect}(A \cap B) \text{ et } \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$$

puis :

$$\text{Vect}(A \cup B) \text{ et } \text{Vect}(A) \cup \text{Vect}(B)$$

1.2.9 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tel que $E \neq \{0_E\}$ et soit $(E_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ des sous-espaces vectoriels de E, tous distincts de E. Démontrer que :

$$\Delta = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \neq E$$

À quelle condition Δ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

1.2.10 Reprendre l'exercice précédent lorsque l'on considère une famille *dénombrable* de sous-espaces vectoriels $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Plus précisément, pour $E = \mathbb{R}^p$, on pourra démontrer que le résultat est toujours vrai, mais qu'il devient faux pour l'espace vectoriel des fonctions polynomiales.

1.2.11 Donner un exemple d'une famille de sous-espaces $(E_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{R}^p$, distincts de $\mathbb{R}^p$, tels que

$$\bigcup_{i \in I} E_i = E$$

1.1.3 Sommes de sous-espaces vectoriels

Définition 1.7 – Somme de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Somme finie

Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, on appelle *somme de E_1 et E_2* et on note $E_1 + E_2$ le sous-espace vectoriel :

$$E_1 + E_2 \overset{\text{Def}}{=} \{x_1 + x_2,\ x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2\}$$

Somme quelconque

Plus généralement, si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E, on appelle *somme des* E_i et on note $\sum\limits_{i\in I} E_i$ le sous-espace vectoriel :

$$\sum_{i\in I} E_i \overset{\text{Def}}{=} \left\{ x \in E,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists (i_1,\dots,i_n) \in I^n,\ \exists (x_{i_1},\dots,x_{i_n}) \in E_{i_1} \times \dots \times E_{i_n},\ x = \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} = x_{i_1} + \dots + x_{i_n} \right\}$$

E 的子空间相加所得的空间还是E的子空间。

Remarque importante 1.5

Il est faux de penser :

$$x \in E_1 + E_2 \text{ et } x \notin E_1 \ \Rightarrow\ x \in E_2 \qquad \boxed{\text{FAUX}}$$

需要理解子空间相加的定义。

Exemple 1.7 – Sommes de sous-espaces vectoriels

1. $\mathbb{R}^2$ est somme de $\mathbb{R}.\overrightarrow{\imath}$ et de $\mathbb{R}.\overrightarrow{\jmath}$.
2. $\mathbb{C}$ est somme de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}.i$.
3. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors :

$$E = \sum_{i\in I} \text{Vect}(\{x_i\})$$

4. Si P_1 est le plan d'équation $x + y + z = 0$ et P_2 est le plan d'équation $x - 2y - z = 0$ de $\mathbb{R}^3$, alors

$$\mathbb{R}^3 = P_1 + P_2$$

Propriété 1.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Somme finie

Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors :

$$E_1 + E_2 = \operatorname{Vect}(E_1 \cup E_2)$$

Somme quelconque

Plus généralement, si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E, alors :

$$\sum_{i \in I} E_i = \operatorname{Vect}\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right)$$

Démonstration

($\subset$) Soit $x \in \sum_{i \in I} E_i$. En reprenant les notations de la définition 1.7, page 20, on a

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_{i_k}$$

où $x_{i_k} \in \bigcup_{i \in I} E_i \supset E_{i_k}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Le vecteur x s'écrit donc comme une combinaison linéaire d'éléments de $\bigcup_{i \in I} E_i$, donc $x \in \operatorname{Vect}\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right)$.

($\supset$) Soit $x \in \operatorname{Vect}\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right)$. On a donc

$$x = x_1 + \cdots + x_n$$

où $x_k \in \bigcup_{i \in I} E_i$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. En particulier, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe $i_k \in I$ tel que $x_k \in E_{i_k}$, donc $x \in \sum_{i \in I} E_i$.

Propriété 1.7

Il est équivalent de dire :

1. $(e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E ;

2. on a :

$$E = \sum_{i \in I} \mathrm{Vect}(\{e_i\}) = \sum_{i \in I} \mathbb{K}.e_i$$

Démonstration

Immédiat à partir des définitions.

Exercice(s) 1.3

1.3.1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit E_1, E_2 et E_3 trois sous-espaces vectoriels de E.

(a) Comparer pour l'inclusion les sous-espaces :

$$E_1 + (E_2 \cap E_3) \text{ et } (E_1 + E_2) \cap (E_1 + E_3)$$

(b) Comparer pour l'inclusion les sous-espaces :

$$E_1 \cap (E_2 + E_3) \text{ et } (E_1 \cap E_2) + (E_1 \cap E_3)$$

(c) Comparer pour l'inclusion les sous-espaces :

$$(E_1 \cap E_2) + (E_1 \cap E_3) \text{ et } E_1 \cap (E_2 + (E_1 \cap E_3))$$

1.3.2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit E_1, E_2 et E_3 trois sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que :

$$\left.\begin{array}{c} E_1 + E_2 = E_1 + E_3 \\ E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3 \\ E_2 \subset E_3 \end{array}\right\} \implies E_2 = E_3$$

Démontrer que ce n'est plus vrai, si l'on enlève une des hypothèses à gauche.

1.1.4 Sommes directes

Définition 1.8 – Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, on dit que E_1 *et* E_2 *sont en somme directe* si tout élément de $E_1 + E_2$ s'écrit, *de manière unique* sous la forme $x_1 + x_2$, où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. On écrit alors :

$$E_1 \oplus E_2 \text{ à la place de } E_1 + E_2$$

子空间 $E_1 + E_2$ 为直和，注意区分与上一小节子空间和的定义，特别注意惟一性。

Propriété 1.8 – Caractérisation limitée à deux sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E sont en somme directe si, et seulement si,

$$E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$$

Démonstration

— Supposons que E_1 et E_2 soient en somme directe. Soit $x \in E_1 \cap E_2$. On a

$$x = \underbrace{x}_{\in E_1} + \underbrace{0_E}_{\in E_2} = \underbrace{0_E}_{\in E_1} + \underbrace{x}_{\in E_2}$$

donc $x = 0_E$ par définition de la somme directe. On a donc $E_1 \cap E_2 \subset \{0_E\}$ et comme $\{0_E\} \subset E_1 \cap E_2$ (car $E_1 \cap E_2$ est un sous-espace vectoriel de E), on a $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

— Supposons que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. Soit $x \in E$, qu'on écrit sous la forme

$$x = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \underbrace{x_2}_{\in E_2} = \underbrace{y_1}_{\in E_1} + \underbrace{y_2}_{\in E_2}$$

On a

$$\underbrace{x_1 - y_1}_{\in E_1} = \underbrace{x_2 - y_2}_{\in E_2} \in E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$$

donc $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$. On en déduit que E_1 et E_2 sont en somme directe.

Propriété 1.9 – Caractérisation générale

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E sont en somme directe si, et seulement si, il y a *écriture unique de* 0_E, c'est-à-dire :

$$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2,\ x_1 + x_2 = 0_E \implies (x_1 = 0_E \text{ et } x_2 = 0_E)$$

Démonstration

— Supposons que E_1 et E_2 soient en somme directe. Soit $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tels que $x_1 + x_2 = 0_E$. On a

$$\underbrace{x_1}_{\in E_1} = \underbrace{-x_2}_{\in E_2} \in E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$$

donc $x_1 = x_2 = 0_E$.

— Supposons qu'il y ait écriture unique de 0_E. Soit $x \in E$ qu'on écrit sous la forme

$$x = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \underbrace{x_2}_{\in E_2} = \underbrace{y_1}_{\in E_1} + \underbrace{y_2}_{\in E_2}$$

Alors

$$\underbrace{(x_1 - y_1)}_{\in E_1} + \underbrace{(x_2 - y_2)}_{\in E_2} = 0_e$$

donc $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = 0_E$ d'où $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$. On en déduit que E_1 et E_2 sont en somme directe.

Définition 1.9 – Somme directe d'une famille d'espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E, on dit qu'ils sont *en somme directe*, si on a écriture unique de 0_E, soit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \underbrace{(i_1, \dots, i_n)}_{\text{distincts 2 à 2}} \in I^n,\ \forall (x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in E_{i_1} \times \cdots \times E_{i_n},\ x_{i_1} + \cdots + x_{i_n} = 0_E \ \Rightarrow\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_{i_k} = 0_E$$

On écrit alors

$$\bigoplus_{i \in I} E_i \text{ à la place de } \sum_{i \in I} E_i$$

Remarque importante 1.6

Ne pas oublier que l'on ne sait faire que des sommes finies de vecteurs !!

Remarque importante 1.7

Si I contient strictement plus de deux éléments, la condition $\bigcap_{i\in I} E_i = \{0_E\}$ ne suffit pas pour assurer que les E_i sont en somme directe, de même que les conditions $E_i \cap E_j = \{0_E\}$ pour tout $(i,j) \in I^2$ tels que $i \neq j$.
Pour s'en convaincre, on peut considérer les sous-espaces vectoriels $E_1 = \mathbb{R}.(1,0)$, $E_2 = \mathbb{R}.(0,1)$ et $E_3 = \mathbb{R}.(1,1)$ de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1.8 – Sommes directes

1. $\mathbb{R}^2$ est somme directe de $\mathbb{R}.\overrightarrow{\imath}$ et de $\mathbb{R}.\overrightarrow{\jmath}$.
2. $\mathbb{C}$ est somme directe de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}.i$.
3. Si P_1 est le plan d'équation $x+y+z=0$ et P_2 est le plan d'équation $x-2\,y-z=0$ de $\mathbb{R}^3$, alors

$$\mathbb{R}^3 = P_1 + P_2$$

mais la somme n'est pas directe car $(1,2,-3) \in P_1 \cap P_2$.

Exercice(s) 1.4

1.4.1 Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, démontrer que le sous-espace vectoriel des fonctions paires et celui des fonctions impaires sont en somme directe. Quelle est leur somme ?

1.4.2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit E_1, E_2 et E_3 trois sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$.

(a) Démontrer que si $E_2 \subset E_3$, alors
$$E_3 = (E_1 \cap E_3) \oplus (E_2 \cap E_3)$$

(b) Démontrer que le résultat devient faux lorsque $E_2 \not\subset E_3$ et $E_1 \not\subset E_3$.

1.4.3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(E_i)_{i\in I}$ et $(E'_i)_{i\in I}$ deux familles de sous-espaces vectoriels de E, telles que :

$$\forall i \in I,\ E'_i \subset E_i$$

Démontrer que :

$$\bigoplus_{i\in I} E_i = \bigoplus_{i\in I} E'_i \ \Rightarrow\ \forall i \in I,\ E_i = E'_i$$

1.4.4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit E_1, E_2 et E_3 trois sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que :

$$\left.\begin{array}{c} E = E_1 + E_2 \\ E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E_3 \end{array}\right\} \Longrightarrow E = E_1 \oplus E_3$$

1.1.5 Supplémentaires

Définition 1.10 – Espaces supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Supplémentaire

Soit E_1 et E_2 des sous-espace vectoriels de E, on dit que E_2 est un *supplémentaire de* E_1 si :

$$E = E_1 \oplus E_2$$

On dit aussi que les deux espaces E_1 et E_2 sont *supplémentaires*.

Décomposition en somme directe

On appelle *décomposition en somme directe de* E toute famille $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels de E telle que :

$$E = \bigoplus_{i\in I} E_i$$

子空间的互补与集合的互补并不一样。

Exemple 1.9 – Supplémentaires

1. Dans $\mathbb{R}^2$, deux droites vectorielles distinctes sont supplémentaires.
2. Dans $\mathbb{C}$ (vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel), deux droites vectorielles engendrées par des complexes z_1 et z_2 non nuls tels que
$$\frac{z_1}{z_2} \notin \mathbb{R}$$
sont supplémentaires. Ainsi :
$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.i = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.j = \mathbb{R}.i \oplus \mathbb{R}.j = \cdots$$
3. Dans $\mathbb{R}^3$, une droite vectorielle D et un plan vectoriel P tels que $D \not\subset P$ sont supplémentaires.
4. Dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les sous-espaces vectoriels des fonctions paires et impaires sont supplémentaires.
5. Dans $E = \mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}([0,1], \mathbb{R})$, la droite engendrée par la fonction $x \mapsto 1$ est supplémentaire de
$$\left\{ f \in E,\ \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

Propriété 1.10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E sont supplémentaires dans E si, et seulement si :
$$E = E_1 + E_2 \text{ et } E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$$

此性质是证明子空间互补的重要方法，而证明两集合相等我们通常用double inclusion的方法。

Remarque 1.8

Si $E_1 \neq E$ et $E \neq \{0_E\}$, il y a une *infinité* de supplémentaires de E_1 (cela peut être faux sur d'autres corps $\mathbb{K}$ que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Nous admettrons que tout sous-espace vectoriel de E (quelconque) admet un supplémentaire.

Exercice(s) 1.5

1.5.1 Dans $\mathbb{R}^3$, trouver un supplémentaire du plan d'équation $x - y + z = 0$. Recommencer dans $\mathbb{C}^3$ (en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel).

1.5.2 Dans $\mathbb{R}^3$, trouver un supplémentaire de la droite d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2\,x - y + 3\,z = 0 \end{cases}$$

1.5.3 Dans $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, trouver des supplémentaires de :

$$\{f \in E,\ f(0) = 0\}$$
$$\{f \in E,\ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0\}$$
$$\mathrm{Vect}(\{x \mapsto x\})$$

1.5.4 Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit $n \in \mathbb{N}$, trouver un supplémentaire de

$$E_n = \{f \in E,\ f(x) = o(x^n)\}$$

1.5.5 On considère ici $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel (on a ici $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$). En prenant en considération un supplémentaire de

$$\mathrm{Vect}(\{1, \sqrt{2}\}) \text{ dans } \mathbb{R}$$

démontrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est 1-périodique et une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est $\sqrt{2}$-périodique telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + g(x) = x$$

1.1.6 Bases

Définition 1.11 – Partie ou famille libre et liée

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Famille libre (finie)

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, on dit que cette famille est *libre*, ou que les vecteurs sont *linéairement indépendants*, si (écriture unique de 0_E) :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . x_k = 0_E \implies \forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k = 0_{\mathbb{K}}$$

On parle aussi de *partie libre*.

Famille liée (finie)

Une famille qui n'est pas libre est dite *famille liée* et les vecteurs de cette famille sont dits *linéairement dépendants*.

Famille libre

Plus généralement, une famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite *libre* (vecteurs *indépendants*), si (écriture unique de 0_E) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \underbrace{(i_1, \ldots, i_n)}_{\text{distincts 2 à 2}} \in I^n,\ (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \text{ est libre.}$$

Autrement dit, $(x_i)_{i \in I}$ est libre si toute sous-famille *finie* est libre.

理解线性相关及线性无关的定义。

Proposition 1.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. Il est équivalent de dire :

1. *la famille $(x_i)_{i \in I}$ est liée ;*

2. *il existe une écriture de 0_E non triviale, soit*[a] *:*

$$\exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\ \underbrace{(i_1, \dots, i_n)}_{\text{distincts 2 à 2}} \in I^N,\ \exists (\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\},\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k}.x_{i_k} = 0_E$$

3. *autre formulation :*

$$\exists i_0 \in I,\ x_{i_0} \in \mathrm{Vect}(\{x_i,\ i \in I \setminus \{i_0\}\})$$

a. Nous utiliserons parfois l'expression *non tous nuls*, pour parler de coefficients qui ne sont pas tous nuls. Notons la différence avec *tous non nuls* qui signifient que tous les coefficients sont non nuls, alors que *non tous nuls* signifie qu'il en existe au moins un non nul !

Démonstration

Immédiat.

Exemple 1.10 – Libre ou liée ?

1. Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $(1, 2)$ et $(1, 1)$ sont linéairement indépendants alors que les vecteurs $(1, 2)$, $(1, 1)$ et $(2, 3)$ sont liés.
2. Dans $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel les parties $\{1, i\}$, $\{1, j\}$ et $\{i, j\}$ sont libres, alors que la partie $\{1, i, j\}$ est liée.
3. Dans $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel, les parties $\{1, i\}$, $\{1, j\}$ et $\{i, j\}$ sont liées.

Propriété 1.11

Si $\{e_i,\ i \in I\}$ est une partie libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et si $x \notin \mathrm{Vect}(\{e_i,\ i \in I\})$, alors

$$\{x\} \cup \{e_i,\ i \in I\} \text{ est encore une partie libre de } E$$

Démonstration

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $(i_1, \dots, i_n) \in I^n$ (distincts 2 à 2) et $(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$\lambda.x + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k}.x_{i_k} = 0_E$$

Supposons que $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$. Alors

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{-\lambda_{i_k}}{\lambda}.x_{i_k} \in \mathrm{Vect}(\{e_i,\ i \in I\})$$

ce qui contredit $x \notin \mathrm{Vect}(\{e_i,\ i \in I\})$. On a donc $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ donc

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k}.x_{i_k} = 0_E$$

d'où, puisque $\{e_i,\ i \in I\}$ est une partie libre de E, $\lambda_{i_1} = \cdots = \lambda_{i_n} = 0_{\mathbb{K}}$.
On en déduit que $\{x\} \cup \{e_i,\ i \in I\}$ est une partie libre de E.

Propriété 1.12

Soit $\mathcal{X} = (x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors :

1. s'il existe $i_0 \in I$ tel que $x_{i_0} = 0_E$, alors $\mathcal{X}$ est liée ;
2. s'il existe $(i,j) \in I^2$ tel que $i \neq j$ et $x_i = x_j$, alors $\mathcal{X}$ est liée ;
3. si une sous-famille $(x_i)_{i\in J}$ où $J \subset I$ est liée, alors $\mathcal{X}$ est liée ;
4. si $\mathcal{X}$ est libre, alors toute sous-famille de $\mathcal{X}$ est libre.

Démonstration

1. Il existe une écriture de 0_E non trivial, car $0_E = 1.x_{i_0}$, donc $\mathcal{X}$ est liée.
2. Il existe une écriture de $0_{\mathbb{K}}$ non trivial, car $0_E = x_i - x_j = 1.x_i + (-1).x_j$, donc $\mathcal{X}$ est liée.
3. S'il existe une écriture de 0_E non trivial à partir des $(x_i)_{i\in J}$, c'est encore une écriture de 0_E non trivial à partir des vecteurs de $\mathcal{X}$, car $(x_i)_{i\in J}$ est une sous-famille de $\mathcal{X}$.
4. C'est la contraposée de la propriété précédente.

Définition 1.12 – Base d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, une famille $(x_i)_{i\in I}$ est appelée *base de* E, si elle est à la fois famille libre et famille génératrice.

一族向量是向量空间 E 的基底,需要同时满足线性无关和生成的空间是 E。

Propriété 1.13 – Propriété des bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E, alors [a] :

$$\boxed{\forall x \in E,\ \exists! n \in \mathbb{N},\ \exists! \underbrace{\{i_1, \ldots, i_n\}}_{\text{distincts 2 à 2}} \subset I,\ \exists! (\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_n}) \in (\mathbb{K} \setminus \{0_K\})^n,\ x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k}.e_{i_k}}$$

Cela signifie que tout vecteur de E s'écrit *de manière unique* comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$.

a. Notons que dans cette écriture, lorsque $x = 0_E$, on a $n = 0$.

向量空间 E 中的向量 x 在不同的基底下有不同的坐标。

Démonstration

Immédiat : x s'écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$ car $\mathcal{B}$ est génératrice et cette combinaison linéaire est unique car $\mathcal{B}$ est libre.

Remarque 1.9

La famille $(\mu_i)_{i \in I}$ définie par :

$$\forall i \in \{i_1, \ldots, i_n\},\ \mu_i = \lambda_i \text{ et } \forall i \in I \setminus \{i_1, \ldots, i_n\},\ \mu_i = 0_{\mathbb{K}}$$

est appelée *coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.*

Remarque 1.10

L'ensemble vide $\emptyset$ est une base de $\{0_E\}$.

Exemple 1.11

1. La *base canonique* de $\mathbb{K}^n$ est la famille $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, où pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$e_i = (0,\ldots,0,\underbrace{1}_{i\text{-ième élément}},0,\ldots,0)$$

   La base canonique est une base de $\mathbb{K}^n$.
2. La famille $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales.

Propriété 1.14

Il est équivalent de dire :

1. la famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E ;
2. on a la décomposition en somme directe de E suivante :

$$E = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Vect}(\{e_i\}) = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{K}.e_i$$

Démonstration

Immédiat : on utilise la proposition 1.7, page 22 et on remarque que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si les $\mathrm{Vect}(\{e_i\})$ sont en somme directe.

Remarque 1.11

La notion de base n'est donc qu'un cas très particulier de la décomposition en somme directe.

Exercice(s) 1.6

1.6.1 Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une famille de vecteurs de E, démontrer que :

(a) Dans tous les cas :

$$\forall p \in [\![1,n-1]\!],\ \mathrm{Vect}(\{e_1,\ldots,e_n\}) = \mathrm{Vect}(\{e_1,\ldots,e_p\}) + \mathrm{Vect}(\{e_{p+1},\ldots,e_n\})$$

(b) Si de plus, $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, alors :

$$\forall p \in [\![1, n-1]\!]\,,\ \mathrm{Vect}(\{e_1, \dots, e_n\}) = \mathrm{Vect}(\{e_1, \dots, e_p\}) \oplus \mathrm{Vect}(\{e_{p+1}, \dots, e_n\})$$

1.6.2 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \ \middle|\ \text{et} \quad \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ \\ x - 2\,y + 3\,z - 5\,t = 0 \end{array} \right\} \text{ et } G = \mathrm{Vect}\left(\{(1, -2, 0, 2), (0, 0, 1, 3)\}\right)$$

(a) Démontrer que

$$\mathbb{R}^4 = F \oplus G$$

(b) Trouver une base de E $(e_1, \dots, e_4)$ où $\{e_1, e_2\} \subset F$ et $\{e_3, e_4\} \subset G$.

(c) Exprimer les coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$ dans cette base.

1.6.3 Dans $\mathbb{R}^5$, on considère les vecteurs :

$$a = (2, 3, 0, 1, 2),\ b = (3, 0, 1, 2, 3),\ c = (0, 1, 2, 3, 0),\ d = (1, 2, 3, 0, 1) \text{ et } e = (-1, 4, 1, 2, -1)$$

On pose

$$F = \mathrm{Vect}(\{a, b, c\}) \text{ et } G = \mathrm{Vect}(\{d, e\})$$

(a) Trouver des bases de F, G, $F + G$ et $F \cap G$.

(b) Trouver des équations de ces sous-espaces vectoriels.

1.6.4 On considère dans $\mathbb{R}^4$ les cinq vecteurs suivants :

$$u_1 = (1, -3, 5, -1),\ u_2 = (-2, 5, 0, 1),\ u_3 = (-3, 7, 5, 1),\ u_4 = (3, -1, -2, 1) \text{ et } u_5 = (2, 1, 3, 1)$$

Donner une équation du sous-espace vectoriel engendré par ces cinq vecteurs.

1.6.5 Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions :

$$f_1\ :\ x \mapsto \sin(x + 1),\ f_2\ :\ x \mapsto \sin(x + 2) \text{ et } f_3\ :\ x \mapsto \sin(x + 3)$$

Déterminer une base de F.

1.6.6 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\alpha x} \end{cases}$$

Démontrer que :

$$(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}} \text{ est une famille libre de } \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

1.6.7 Soit A un ensemble, f une application de A dans $\mathbb{R}_+^*$, telle que $f(A)$ est infini. Démontrer que la famille $(f^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$.

1.6.8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_1 < \cdots < x_n$ des réels. On pose $x_0 = -\infty$ et $x_{n+1} = +\infty$. Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$, telles que la restriction de f à chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $(i \in [\![0, n]\!])$ est une fonction polynomiale de degré ≤ 2. Démontrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en donner une base.

1.6.9 Démontrer que dans $\mathbb{R}^n$, il existe une famille infinie F de vecteurs tels que chaque sous famille de cardinal n est libre.

1.1.7 Dimension finie

注释 1.2

本小结关于线性空间的性质和定理都是在有限维的情况下得出，无限维的情况并不成立。

Définition 1.13 – Espace vectoriel de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est *de dimension finie* s'il possède une base de cardinal fini. Dans le cas contraire, il est dit de *dimension infinie*.

Exemple 1.12 – Dimensions

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie.
2. Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, alors E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
3. L'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Théorème 1.1 – Échange

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $(g_1, \ldots, g_n)$ une famille génératrice et $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ une famille libre de E, alors :

1. *$p \leq n$.*
2. *On peut échanger certains vecteurs de la famille génératrice avec des vecteurs de la famille libre tout en gardant la propriété d'être génératrice, soit :*

$$\exists (i_{p+1}, \ldots, i_n) \in [\![1, n]\!]^{n-p}, \ (\ell_1, \ldots, \ell_p, g_{i_{p+1}}, \ldots, g_{i_n}) \text{ est une famille génératrice de } E$$

Démonstration

— Puisque $(g_1, \ldots, g_n)$ est génératrice, ℓ_1 est combinaison linéaire de $(g_1, \ldots, g_n)$. De plus, $\ell_1 \neq 0_E$ (car (ℓ_1) est libre), on peut supposer que les coefficients ne sont pas tous nuls, par exemple le premier :

$$\ell_1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i . g_i$$

avec $\lambda_1 \neq 0$. Alors

$$g_1 = \frac{1}{\lambda_1} . \ell_j - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} . g_i \in \mathrm{Vect}(\{\ell_1, g_2, \ldots, g_p\})$$

On a donc

$$E = \mathrm{Vect}(\{g_1, \ldots, g_p\}) = \mathrm{Vect}(\{\ell_1, g_2, \ldots, g_p\})$$

— On itère le procédé. Supposons qu'on ait formé une famille génératrice de la forme

$$(\ell_1, \ldots, \ell_k, g_{k+1}, \ldots, g_n)$$

avec $k \leq p - 1$ et $k \leq n - 1$. Alors

$$\ell_{k+1} \in \mathrm{Vect}(\{\ell_1, \ldots, \ell_k, g_{k+1}, \ldots, g_n\})$$

donc on peut écrire

$$\ell_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i . \ell_i + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i . g_i$$

Ce n'est pas possible d'avoir $\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ (car sinon $(\ell_1, \ldots, \ell_{k+1})$ donc $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ serait liées). Par le même argument qui ci-dessus, on a donc

$$\ell_{k+1} \in \mathrm{Vect}(\{\ell_1, \ldots, \ell_{k+1}, g_{k+2}, \ldots, g_n\})$$

On a donc

$$E = \mathrm{Vect}(\{\ell_1, \ldots, \ell_k, g_{k+1}, \ldots, g_n\}) = \mathrm{Vect}(\{\ell_1, \ldots, \ell_{k+1}, g_{k+2}, \ldots, g_n\})$$

— Il reste à démontrer que $p \leq n$. Si $p > n$, en prenant $k = n - 1$ dans la construction ci-dessus, on obtient que $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ est une partie génératrice de E. On aurait alors $\ell_{n+1} \in \mathrm{Vect}(\{\ell_1, \ldots, \ell_n\})$, donc $(\ell_1, \ldots, \ell_{n+1})$ serait liée, ce qui contredit le fait que $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ est libre. On a donc $p \leq n$.

Remarque 1.12

On peut aussi énoncer ce résultat avec une famille génératrice de cardinal quelconque (peut-être infini), où l'on pourra échanger p vecteurs de cette famille tout en la gardant génératrice.

Théorème 1.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors toutes *les bases ont même cardinal. Ce cardinal commun est appelé* dimension de E *et est notée*[a] *:*

$$\dim_{\mathbb{K}} E \text{ ou } \dim E \text{ s'il n'y a pas ambiguïté sur le corps } \mathbb{K}$$

a. On utiliser aussi parfois la notation $\dim(E)$ ou $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Démonstration

C'est une application immédiate du théorème de l'échange car les bases sont à la fois libres et génératrices.

Définition 1.14

Droite

On appelle *droite vectorielle* tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

Plan

On appelle *plan vectoriel* tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

Dimension nulle

On convient que l'espace vectoriel $\{0_E\}$ est de dimension 0.

Remarque 1.13

Cette définition est cohérente avec celle de droite vectorielle engendrée : si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel différent de $\{0_E\}$ et si $x \in E$, $x \neq 0_E$, alors $\{x\}$ est une base de $\mathbb{K}.x$, la droite vectorielle engendrée par x, qui est bien de dimension

1.

Exemple 1.13 – Dimensions

1. On a clairement :
$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n,\ \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$$
2. Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, alors :
$$\dim_{\mathbb{C}} E = n \implies \dim_{\mathbb{R}} E = 2\,n$$
3. Quelques espaces de dimensions infinies : le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales, mais aussi :
$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \mathscr{C}^p(\mathbb{R},\mathbb{R})\ (p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}),\ \ldots$$

由上例可以发现 $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$，线性空间的维数和域相关.

Théorème 1.3 – Base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ une famille libre de E, alors

1. $p \leq n$.
2. *On peut compléter la famille libre en une base, soit :*
$$\exists (\ell_{p+1}, \ldots, \ell_n) \in E^{n-p},\ (\ell_1, \ldots, \ell_n) \text{ est une base de } E$$

Démonstration

C'est une application immédiate du théorème de l'échange, en prenant comme famille génératrice une base de E (qui a n éléments).

Principe de construction de bases (en dimension finie). Si on veut trouver une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, on procède par itération :

1. Supposons construits les p premiers vecteurs de la base (au départ $p = 0$), notés $(e_1, \ldots, e_p)$, on prend alors un vecteur

de E qui n'est pas dans $\mathrm{Vect}(\{e_1, \dots, e_p\})$, cela fait un nouveau vecteur. Si l'on dispose d'une partie génératrice de E, on cherche le premier vecteur de la partie génératrice qui n'est pas dans $\mathrm{Vect}(\{e_1, \dots, e_p\})$.

2. On réitère.

Exemple 1.14

Trouvons une base du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$, d'équations $x + y + z + t = 0$ et $x - y + 2\,z + 3\,t = 0$. Les calculs sont explicités dans la session `Wxmaxima` 1.2, de la présente page. Ce qui nous donne, par exemple, la base $e_1 = (-2, 1, 0, 1)$ et $e_2 = (-3, 1, 2, 0)$.

Session `Wxmaxima` 1.2 – Recherche d'une base dans $\mathbb{R}^4$

(%i1) `solve([x+y+z+t=0,x-y+2*z+3*t=0],[x,y,z,t]);`

(%o1) $[[x = -\dfrac{3\,\%r2 + 4\,\%r1}{2}, y = \dfrac{\%r2 + 2\,\%r1}{2}, z = \%r2, t = \%r1]]$

(%i2) `subst([%r1=1,%r2=0],%);`

(%o2) $[[x = -2, y = 1, z = 0, t = 1]]$

(%i3) `subst([%r2=2,%r1=0],%o1);`

(%o3) $[[x = -3, y = 1, z = 2, t = 0]]$

Session `Python` 1.3 – Recherche d'une base dans $\mathbb{R}^4$

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```
X = Matrix([x, y, z, t])
X
```

Out [2]

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

In [3]

```
solve([Eq(x+y+z+t, 0),
       Eq(x-y+2*z+3*t, 0)], [x, y, z, t])
```

Out [3]

$$\left\{ x : -2t - \frac{3z}{2},\ y : t + \frac{z}{2} \right\}$$

In [4]

```
X.subs(_)
```

Out [4]

$$\begin{bmatrix} -2t - \frac{3z}{2} \\ t + \frac{z}{2} \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

In[5]

```
(_.subs({z: 2, t: 0}),
 _.subs({z: 0, t: 1}))
```

Out[6]

$$\left(\begin{bmatrix}-3\\1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$

Exemple 1.15

Cherchons un supplémentaire de F (et une base de ce supplémentaire) : on cherche un vecteur qui n'est pas dans $\mathrm{Vect}(\{e_1, e_2\})$. Pour cela, il suffit d'imposer $z = t = 0$ et $(x, y) \neq (0, 0)$, car

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a.e_1 + b.e_2 = (-2\,a - 3\,b, a + b, 2\,b, a)$$

Par exemple, on peut prendre :

$$e_3 = (1, 0, 0, 0) \text{ puis } e_4 = (0, 1, 0, 0)$$

Remarque 1.14

Remarquons que nous avons utilisé une partie génératrice bien connue : la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Propriété 1.15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Si $\dim E = n$, alors :

1. toute famille de plus de $n + 1$ éléments est liée ;
2. toute partie génératrice a plus de n éléments ;
3. toute partie libre a moins de n éléments ;

4. toute partie génératrice de n éléments est une base ;
5. toute partie libre de n éléments est une base.

Démonstration

1. Si une famille de plus de $n+1$ éléments est libre, on pourrait la compléter en une base qui contiendrait au moins $n+1$ éléments, ce qui contredit $\dim E = n$.
2. On utilise le théorème de l'échange avec une base comme famille libre.
3. C'est le théorème de la base incomplète.
4. Soit $\mathcal{G}$ une partie génératrice à n éléments. On utilise le théorème de l'échange pour extraire une base $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ de E (en partant d'une une sous-famille libre de $\mathcal{G}$). Mais $\mathcal{B}$ a $n = \dim E$ élément car c'est une base, donc on a $\mathcal{G} = \mathcal{B}$, c'est donc une base.
5. Soit $\mathcal{L}$ une partie libre à n éléments. On utilise le théorème de la base incomplète pour obtenir une base $\mathcal{L}' \supset \mathcal{L}$ de E. Mais $\mathcal{L}'$ a $n = \dim E$ élément car c'est une base, donc on a $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$, c'est donc une base.

Propriété 1.16

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors de toute partie génératrice on peut extraire une base (finie).

Démonstration

Si $E = \{0_E\}$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $E \neq \{0_E\}$.
Soit $\mathscr{G}$ une partie génératrice de E (éventuellement infinie). Il existe une base $\mathcal{B}$ de E qui est finie. Tous les vecteurs (en nombre fini) de $\mathcal{B}$ peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{G}$ donc E est en fait engendré par une sous-famille finie $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$.
Comme $E \neq \{0_E\}$, $\mathcal{G}'$ contient un vecteur $x \neq 0_E$. Le théorème de la base incomplète permet alors de construire une base de E en complétant la famille (x) par des éléments de $\mathcal{G}$.

Propriété 1.17

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors E est de dimension finie si, et seulement si, il possède une partie génératrice finie (c'est d'ailleurs une définition fréquente des espaces de dimension finie).

Démonstration

C'est une conséquence immédiate de la définition de la dimension finie et de la proposition précédente.

Propriété 1.18

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors E est de dimension infinie si, et seulement si, il existe des parties libres de cardinal quelconque $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration

Cela revient à démontrer que E est de dimension finie si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que toute famille de E à n éléments soit liée. On peut prendre $n = \dim E + 1$.

Propriété 1.19 – Dimension finie et sous-espaces

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si E est de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et, de plus :

$$\dim F \leq \dim E$$

De plus

$$E = F \iff \dim E = \dim F$$

Démonstration

Si $F = \{0_E\}$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $F \neq \{0_E\}$.
Notons p le nombre maximal d'éléments que peut avoir une famille libre $\mathcal{L}$ de F. On a $1 \leq p \leq \dim E$ (car $F \neq \{0_E\}$ et que $\mathcal{L}$ est une famille libre de E).
Soit $\mathcal{L}$ une famille libre d'éléments de F de cardinal p. Pour tout $x \in F$, la famille $(\mathcal{L}, x)$ est liée (car sinon cela contredit la définition de p), donc x est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{L}$, donc $\mathcal{L}$ est une famille génératrice de F, c'est donc une base de F. On a donc $\dim F = p \leq \dim E$.
Si $\dim E = \dim F = p$, $\mathcal{L}$ est une famille libre de E à $p = \dim E$ éléments, donc c'est une base de E : on a $\mathrm{Vect}(\mathcal{L}) = E$. Comme de plus $\mathrm{Vect}(\mathcal{L}) = F$, on a bien $E = F$.

Remarque 1.15

La proposition précédente est très pratique pour démontrer l'égalité de deux espaces vectoriels : au lieu de démontrer le résultat par double inclusion, on peut se limiter à démontrer une inclusion et conclure par une égalité de dimension.

Remarque importante 1.16

Attention à une erreur courante : si $\mathcal{B}$ est une base de E et si F est un sous-espace vectoriel de E, il est faux en général qu'une sous-famille de $\mathcal{B}$ soit une base de F.
Par exemple, une base de $F = \mathbb{R}.(1,1)$ n'est jamais une sous-famille de la base canonique $((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.15 – Base adaptée à une décomposition en somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Base adaptée à une somme directe de deux sous-espaces vectoriels

On suppose que $E = F \oplus G$, on peut alors construire une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que

$$(e_1, \dots, e_p) \text{ base de } F \text{ et } (e_{p+1}, \dots, e_n) \text{ base de } G, \text{ où } p = \dim F$$

Une telle base est dite *base adaptée à la somme directe.*

Base adaptée à une somme directe finie

De même, lorsque l'on a une décomposition en somme directe de E, on peut toujours construire une base adaptée à cette somme directe.

Propriété 1.20

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et si $E = F \oplus G$, alors :

$$\boxed{\dim E = \dim F + \dim G}$$

Plus généralement, si E admet une décomposition en somme directe [a] :

$$\boxed{E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k \;\Rightarrow\; \dim E = \sum_{k=1}^{p} \dim E_k}$$

a. Il y alors un nombre *fini* de termes dans la décomposition en somme directe, si on enlève les espaces réduits à $\{0_E\}$. Notons ce nombre p.

Démonstration

C'est immédiat en considérant une base adaptée à cette décomposition en somme directe.

Propriété 1.21

Si E_1 et E_2 sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, alors $E_1 \times E_2$ est de dimension finie et :

$$\boxed{\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2}$$

Plus généralement, si $E_1, \dots, E_p$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, alors $E_1 \times \cdots \times E_p$ est de dimension finie et :

$$\boxed{\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \sum_{k=1}^{p} \dim E_k}$$

Démonstration

Si $E_1 = \{0_E\}$ ou $E_2 = \{0_E\}$, c'est immédiat. Supposons que $E_1 \neq \{0_E\}$ et $E_2 \neq \{0_E\}$.
Si $(e_1, \dots, e_{n_1})$ est une base de E_1 et $(e'_1, \dots, e'_{n_2})$ est une base de E_2 (avec $n_1 = \dim E_1$ et $n_2 = \dim E_2$), alors on vérifie que

$$((e_1, 0_{E_2}), \dots, (e_{n_1}, 0_{E_2}), (0_{E_1}, e'_1), \dots, (0_{E_1}, e'_{n_2}))$$

est une base de $E_1 \times E_2$ (en démontrant que c'est une famille libre et génératrice) et qui a $n_1 + n_2 = \dim E_1 + \dim E_2$ éléments.
On en conclut que $E_1 \times E_2$ est de dimension finie et que $\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$.
Dans le cas général, on procède par récurrence sur p.

Proposition 1.3 – Formule de Grassman

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors :

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)}$$

Démonstration

Soit F_1 un supplémentaire de $F \cap G$ dans F et soit G_1 un supplémentaire de $F \cap G$ dans G :

$$F = (F \cap G) \oplus F_1 \text{ et } G = (F \cap G) \oplus G_1$$

On a alors

$$F + G = (F \cap G) \oplus F_1 \oplus G_1$$

Pour conclure, il suffit de prendre une base adaptée à cette décomposition en somme directe.

Propriété 1.22

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors, pour tout $p \in [\![2, n-1]\!]$:

$$\text{Vect}(\{e_1, \dots, e_p\}) \text{ et } \text{Vect}(\{e_{p+1}, \dots, e_n\}) \text{ sont supplémentaires dans } E.$$

2. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors il existe (au moins) un sous-espace supplémentaire de F dans E.

Démonstration

1. C'est immédiat : puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i . e_i}_{\in \text{Vect}(\{e_1, \dots, e_p\})} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i . e_i}_{\text{Vect}(\{e_{p+1}, \dots, e_n\})}$$

2. On considère une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F (avec $p = \dim F \leq n = \dim E$). C'est une famille libre de E qu'on peut compléter en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E. Alors d'après ce qui précède, $F = \text{Vect}(\{e_1, \dots, e_p\})$ et $\text{Vect}(\{e_{p+1}, \dots, e_n\})$ sont supplémentaires.

Exercice(s) 1.7

1.7.1 Soit
$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2\,x - 3\,y + z = 0\} \text{ et } F_2 = \{(\lambda+2,\mu,\lambda-\mu,\lambda-7,\mu),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$$
Démontrer que $F_1 = F_2$.

1.7.2 Dans $\mathbb{R}^5$, on pose
$$F = \{(v,w,x,y,z),\ v+y+z = x+y-z = 0\}$$
$$G_a = \{(v,w,x,y,z),\ v-x+a\,z = 0 = a\,v+w+x+2\,y\},\ a \in \mathbb{R}$$
Quelle est la dimension de $F \cap G_a$? Quelle est la dimension de $F + G_a$?

1.7.3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, on suppose qu'on a la somme directe $E = F_1 \oplus F_2$. Soit G un sous-espace vectoriel de E tel que :
$$G \cap F_1 = \{0_E\} \text{ et } F_2 \subset G$$
Démontrer que $F_2 = G$.

1.7.4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cap G = \{0_E\}$. Démontrer qu'il existe un supplémentaire de F contenant G.

1.7.5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel strict de E ($F \neq E$). Démontrer que F admet une infinité de supplémentaires.

1.7.6 Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $k \in \mathbb{N}^*$ et V_1 , V_2 , $\ldots$, V_k des sous-espaces vectoriels de V tels que
$$\sum_{i=1}^{k} \dim(V_i) > (k-1)\,n$$
Démontrer que
$$\bigcap_{i=1}^{k} V_i \neq \{0_V\}$$

1.7.7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension $p < n$.
(a) Démontrer que l'on peut alors trouver un supplémentaire commun à F_1 et F_2.
(b) Généraliser lorsque le corps est $\mathbb{R}$ à un nombre fini de sous-espaces vectoriels de dimension p.
(c) Puis, à une infinité dénombrable de tels sous-espaces vectoriels.
(d) Donner un contre-exemple pour une infinité non-dénombrable.

1.2 Applications linéaires

1.2.1 Généralités

Définition 1.16 – Applications linéaires

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, une application $f : E \to E'$ est dite *application linéaire* si elle est compatible avec les structures d'espaces vectoriels, c'est-à-dire [a] :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.f(x) + \mu.f(y)$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans E' se note :

$$\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E, E') \text{ ou } \mathscr{L}(E, E') \text{ lorsqu'il n'y a pas ambiguïté sur le corps } \mathbb{K}$$

1. Lorsque $E = E'$, on parle *d'endomorphisme de* E et on note $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\mathscr{L}(E)$.
2. Lorsque f est bijective, on parle *d'isomorphisme entre* E *et* E'.
3. Lorsque $E = E'$ et f est bijective, on parle *d'automorphisme de* E et on note $\mathscr{GL}_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\mathscr{GL}(E)$.
4. Lorsque $E' = \mathbb{K}$, on parle *de forme linéaire* et on note $E^\star$.

a. L'image d'une combinaison linéaire est donc la combinaison linéaire des images.

注释 1.3

我们把f称作 E 到 E' 的线性映射。当线性映射从向量空间到它本身称作自同态；当线性映射是双射时称作同构；当线性映射同时满足自同态和同构时称作自同构；当线性映射是从向量空间到它所对应的域$\mathbb{K}$ 时称作线性泛函。

Exemple 1.16 – Applications linéaires

1. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'*application identité*, notée id_E et définie par $\mathrm{id}_E(x) = x$ pour tout $x \in E$ est une application linéaire de E dans lui-même (c'est donc un endomorphisme de E).
   Plus généralement, si $\alpha \in \mathbb{K}$, l'*homothétie de rapport* α, définie par $x \mapsto \alpha.x$, est un endomorphisme de E. En particulier, l'application nulle $x \mapsto 0_E$ est un endomorphisme de E.
2. Dans $\mathbb{R}^n$ euclidien, les projections, symétries, rotations, homothéties vectorielles sont des endomorphismes. Les symétries, rotations et homothéties (de rapport non nul) sont des automorphismes. Les translations de vecteur non nul *ne sont pas* des applications linéaires !
3. La dérivation des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ est une application linéaire de
$$\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}) \text{ dans } \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$$
4. L'application définie pour $a < b$ par :
$$\begin{cases} \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R}) \to \{f \in \mathscr{C}^1([a,b], \mathbb{R}),\ f(a) = 0\} \\ f \mapsto \left(x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) \end{cases}$$
   est un isomorphisme.
5. L'application définie par :
$$\begin{cases} \mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \qquad \text{est une forme linéaire}$$

Remarque 1.17

Si $f \in \mathscr{L}(E, E')$, alors $f(0_E) = 0_{E'}$ car
$$f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E) = 2.f(0_E)$$

Propriété 1.23

Si E et E' sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors :

$$\mathscr{L}(E, E') \text{ est un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel}$$

Démonstration

Montrons que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E, E')$.

— Il est immédiat que l'application nulle $x \mapsto 0_{E'}$ est linéaire de E dans E'.

— Soit $f \in \mathscr{L}(E, E')$ et $g \in \mathscr{L}(E, E')$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in E^2,\ \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \quad (\lambda.f + \mu.g)(\alpha.x + \beta.y) &= \lambda.f(\alpha.x + \beta.y) + \mu.g(\alpha.x + \beta.y)\\ &= \lambda.\big(\alpha.f(x) + \beta.f(y)\big) + \mu.\big(\alpha.g(x) + \beta.g(y)\big)\\ &= (\lambda\,\alpha).f(x) + (\lambda\,\beta).f(y) + (\mu\,\alpha).g(x) + (\mu\,\beta).g(y)\\ &= \alpha.\big(\lambda.f(x) + \mu.g(x)\big) + \beta.\big(\lambda.f(y) + \mu.g(y)\big)\\ &= \alpha.(\lambda.f + \mu.g)(x) + \beta.(\lambda.f + \mu.g)(y)\end{aligned}$$

ce qui démontre que $\lambda.f + \mu.g \in \mathscr{L}(E, E')$.

Finalement, $\mathscr{L}(E, E')$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E, E')$, c'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété 1.24

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E, E')$.
Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors :

$$f(F) \overset{\text{Not}}{=} \{f(x),\ x \in F\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E'$$

De même, si F' est un sous-espace vectoriel de E', alors :

$$f^{-1}(F') \overset{\text{Not}}{=} \{x \in E,\ f(x) \in F'\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E$$

Démonstration

— On a vu (voir la remarque 1.17, page précédente) que $0_{E'} = f(0_E) \in f(F)$ (avec $0_E \in F$).

Soit $y_1 = f(x_1) \in f(F)$ et $y_2 = f(x_2) \in f(F)$ (avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F$) et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Par linéarité de f, on a

$$\lambda.y_1 + \mu.y_2 = \lambda.f(x_1) + \mu.f(x_2) = f(\underbrace{\lambda.x_1 + \mu.x_2}_{\in F}) \in f(F)$$

donc $f(F)$ est stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de E.

— On a bien $0_E \in f^{-1}(F')$ car $0_{E'} = f(0_E)$.
Soit $x_1 \in f^{-1}(F')$ et $x_2 \in f^{-1}(F')$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Par linéarité de f, on a

$$f(\lambda.x_1 + \mu.x_2) = \lambda.\underbrace{f(x_1)}_{\in F'} + \mu.\underbrace{f(x_2)}_{\in F'} \in F'$$

car F' est stable par combinaison linéaire. On en déduit que $f^{-1}(F')$ est stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 1.17

La composée de deux applications linéaires est une application linéaire. En particulier, on a :

1. Si E, E' et E'' sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, si $f \in \mathscr{L}(E, E')$ et $g \in \mathscr{L}(E', E'')$ les applications :

$$\rho_f \ : \begin{cases} \mathscr{L}(E', E'') \to \mathscr{L}(E, E'') \\ \varphi \mapsto \varphi \circ f \end{cases} \qquad \text{et } \lambda_g \ : \begin{cases} \mathscr{L}(E, E') \to \mathscr{L}(E, E'') \\ \varphi \mapsto g \circ \varphi \end{cases}$$

sont des applications linéaires.

2. On peut donc définir pour un endomorphisme f de E, la notion *d'itéré* de la manière suivante :

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{id}_E \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ f^n = f \circ f^{n-1} = f^{n-1} \circ f \end{cases}$$

On a alors les formules suivantes, si f et g sont deux endomorphismes de E tels que $\boxed{f \circ g = g \circ f}$:

(a) (Formule du binôme) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ (f + g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .f^k \circ g^{n-k}}$$

(b) (Identité remarquable) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n - g^n = (f-g) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k} \right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k} \right) \circ (f-g)}$$

3. Si f est un automorphisme de E, alors f^{-1} est aussi un automorphisme de E (en particulier c'est un endomorphisme de E) et on définit de même :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{-n} = \left(f^{-1}\right)^n$$

Exercice(s) 1.8

1.8.1 Soit f un endomorphisme de E, calculer

$$(2.\operatorname{id}_E + 3.f)^4$$

1.8.2 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (on dit que f *est nilpotent*). Démontrer que $\operatorname{id}_E - f$ est inversible.

1.2.2 Images et noyaux

Définition 1.17 – Image et noyau d'une application linéaire

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(E, E')$, alors :

— L'image de E par f est un sous-espace vectoriel de E' noté :

$$\operatorname{Im}(f) \overset{\text{Not}}{=} f(E) = \{f(x),\ x \in E\}$$

— L'image réciproque de $\{0_{E'}\}$ par f est un sous-espace vectoriel de E appelé *noyau de f* et noté

$$\operatorname{Ker}(f) \overset{\text{Not}}{=} f^{-1}(\{0_{E'}\}) = \{x \in E,\ f(x) = 0_{E'}\}$$

像空间和核空间，它们分别是E' 和 E 的子空间。

Exemple 1.18 – Images et noyaux

1. Pour tout endomorphisme p d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E

$$\boxed{p \circ p = p \;\Rightarrow\; E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)}$$

En effet, un raisonnement par analyse-synthèse démontre que x se décompose de manière unique sous la forme

$$\forall x \in E,\ x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{\big(x - p(x)\big)}_{\in \operatorname{Ker} p}$$

2. On peut utiliser les images et noyaux pour démontrer que des ensembles sont des sous-espaces vectoriels :
   (a) (Image – peu fréquent) :

$$\big\{f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R}),\ f(a) = 0\big\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$$

   en considérant l'endomorphisme de $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$:

$$f \mapsto \left(x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t\right)$$

   (b) (Noyau – très fréquent) :

$$\big\{f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R}),\ f(a) = 0\big\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$$

   en considérant la forme linéaire de $\mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$:

$$f \mapsto f(a)$$

Proposition 1.4

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, E')$, alors :

$$\begin{gathered} f \text{ est injective si, et seulement si, } \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\} \\ f \text{ est surjective si, et seulement si, } \operatorname{Im}(f) = E' \end{gathered}$$

Démonstration

La caractérisation de la surjectivité est immédiate. Pour l'injectivité, on utilise le fait que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ f(x) = f(y) \iff f(x) - f(y) = 0_{E'} \iff f(x - y) = 0_{E'} \iff x - y \in \operatorname{Ker}(f)$$

证明过程中运用了线性映射和核空间定义的性质。

Remarque importante 1.18

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_i)_{i \in I}$ une base de E, alors pour connaître une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, E')$, il faut et il suffit de connaître la famille des images $(f(e_i))_{i \in I}$.
Plus formellement :

$$\begin{cases} \mathscr{L}(E, E') \to {E'}^I \\ f \mapsto (f(e_i))_{i \in I} \end{cases} \quad \text{est un isomorphisme}$$

C'est pourquoi il suffit de donner uniquement les images des vecteurs d'une base pour décrire une application linéaire.
Plus généralement, pour tout $(x_i)_{i \in I} \in {E'}^I$, il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, E')$ telle que

$$\forall i \in I,\ f(e_i) = x_i$$

Propriété 1.25

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $f \in \mathscr{L}(E, E')$ et si $\mathcal{X} = (x_i)_{i\in I}$ est une famille de E, alors :

$$\begin{aligned}
f \text{ injective et } \mathcal{X} \text{ libre} &\implies \big(f(x_i)\big)_{i\in I} \text{ libre}\\
f \text{ surjective et } \mathcal{X} \text{ génératrice} &\implies \big(f(x_i)\big)_{i\in I} \text{ génératrice}\\
f \text{ bijective et } \mathcal{X} \text{ base} &\implies \big(f(x_i)\big)_{i\in I} \text{ base}\\
\mathcal{X} \text{ génératrice} &\implies \operatorname{Vect}\big(\{f(x_i),\ i \in I\}\big) = \operatorname{Im}(f)
\end{aligned}$$

Ces propriétés sont vraies même si E est de dimension infinie (mais ce sera surtout utile en dimension finie).

Démonstration

1. Notons $(i_1, \ldots, i_p)$ une sous-famille finie quelconque de I. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que
$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_i . f(x_{i_k}) = 0_{E'}$$
Par linéarité, on a donc
$$f\Big(\sum_{k=1}^{p} \lambda_i . x_{i_k}\Big) = 0_{E'}$$
donc
$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_i . x_{i_k} \in \operatorname{Ker} f$$
Puisque f est injective, on a $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ donc
$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_i . x_{i_k} = 0_E$$
Comme $\mathcal{X}$ est libre, on a $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$, ce qui démontre que $(f(x_{i_1}), \ldots, f(x_{i_p}))$ est libre, donc que $(f(x_i))_{i\in I}$ est libre.
2. Soit $y \in E'$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $\mathcal{X}$ est génératrice, il existe $(i_1, \ldots, i_p)$ une sous-famille finie de I et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que
$$x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_i . x_{i_k}$$
On a alors par linéarité de f
$$y = f(x) = f\Big(\sum_{k=1}^{p} \lambda_i . x_{i_k}\Big) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_i . f(x_{i_k})$$

ce qui démontre que y s'écrit comme une combinaison linéaire finie d'éléments de $(f(x_i))_{i\in I}$. Finalement, $(f(x_i))_{i\in I}$ est génératrice.

3. On applique les points 1 et 2 pour démontrer que $(f(x_i))_{i\in I}$ est à la fois libre et génératrice.
4. Il s'agit du point 2 en remplaçant E' par $\operatorname{Im} f$ et en remarquant que f est surjective sur son image.

Remarque importante 1.19

En particulier, si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et si $f \in \mathscr{L}(E, E')$, alors

1. f est surjective si, et seulement si, $(f(e_i))_{i\in I}$ engendre E' ;
2. f est injective si, et seulement si, $(f(e_i))_{i\in I}$ est libre ;
3. f est bijective si, et seulement si, $(f(e_i))_{i\in I}$ est une base de E'.

Propriété 1.26

Soit E, E' et E'' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(g\circ f), &\qquad (f \in \mathscr{L}(E,E'),\ g \in \mathscr{L}(E',E''))\\
\operatorname{Im}(g\circ f) \subset \operatorname{Im}(g), &\qquad (f \in \mathscr{L}(E,E'),\ g \in \mathscr{L}(E',E''))\\
g\circ f = 0_{\mathscr{L}(E,E'')} \iff \operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(g), &\qquad (f \in \mathscr{L}(E,E'),\ g \in \mathscr{L}(E',E''))\\
\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g), &\qquad (f \in \mathscr{L}(E,E'),\ g \in \mathscr{L}(E,E'))\\
\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(g) \subset \operatorname{Ker}(f+g), &\qquad (f \in \mathscr{L}(E,E'),\ g \in \mathscr{L}(E,E'))
\end{aligned}$$

Démonstration

1. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$, on a $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(0_{E'}) = 0_{E''}$ donc $x \in \operatorname{Ker}(g\circ f)$.
2. Soit $z = (g\circ f)(x) \in \operatorname{Im}(g\circ f)$ avec $x \in E$. En particulier, $z = g(f(x))$ avec $f(x) \in E'$ donc $z \in \operatorname{Im} g$.
3. Supposons $g\circ f = 0_{\mathscr{L}(E,E'')}$. Soit $y = f(x) \in \operatorname{Im} f$ avec $x \in E$. On a alors $g(y) = g(f(x)) = (g\circ f)(x) = 0_{E''}$ donc $y \in \operatorname{Ker} g$. Supposons $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(g)$. Soit $x \in E$. On a $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = 0_{E''}$ car $f(x) \in \operatorname{Im}(f)$, donc $g\circ f = 0_{\mathscr{L}(E,E'')}$.
4. Soit $y = (f+g)(x) \in \operatorname{Im}(f+g)$ avec $x \in E$. Alors $y = f(x) + g(x)$ avec $f(x) \in \operatorname{Im} f$ et $g(x) \in \operatorname{Im} g$ donc $y \in \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$.
5. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)$. Alors $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0_{E'} + 0_{E'} = 0_{E'}$ donc $x \in \operatorname{Ker}(f+g)$.

Propriété 1.27

Soit f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si $f \circ g = g \circ f$, alors :

$$g\left(\operatorname{Im}(f)\right) \subset \operatorname{Im}(f) \text{ et } g\left(\operatorname{Ker}(f)\right) \subset \operatorname{Ker}(f)$$

Démonstration

— Soit $y = f(x) \in \operatorname{Im} f$ avec $x \in E$. Alors $g(f(x)) = f(g(x)) \in \operatorname{Im} f$.
— Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. Alors $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$ donc $g(x) \in \operatorname{Ker} f$.

Propriété 1.28

Si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \operatorname{Ker}\left(f^n\right) \subset \operatorname{Ker}\left(f^{n+1}\right) \text{ et } \operatorname{Im}\left(f^{n+1}\right) \subset \operatorname{Im}\left(f^n\right)$$

Démonstration

On utilise les deux premiers points de la propriété 1.26, page précédente avec f^n à la place de f et f à la place de g.

Définition 1.18 – Sous-espace stable

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$, soit F un sous-espace vectoriel de E, on dit que F *est f-stable ou stable par f* si :

$$f(F) \subset F, \text{ c'est-à-dire que, pour tout } x \in F,\ f(x) \in F$$

Exemple 1.19 – Sous-espaces stables

1. $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$ sont stables par f.
2. Plus généralement,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \operatorname{Im}\left(\left(f - \lambda.\operatorname{id}_E\right)^k\right) \text{ et } \operatorname{Ker}\left(\left(f - \lambda.\operatorname{id}_E\right)^k\right)$$

   sont stables par f.

3. Si f est un automorphisme et F de dimension finie, alors

$$F \text{ est stable par } f \iff F \text{ est stable par } f^{-1}$$

Exercice(s) 1.9

1.9.1 Soit f, g et h trois endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que :

$$f \circ g = h,\ g \circ h = f \text{ et } h \circ f = g$$

Démontrer que ces trois endomorphismes ont même image et même noyau.

1.9.2 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, démontrer que :

$$\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = f\left(\operatorname{Ker}\left(f^2\right)\right)$$

1.9.3 Soit f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, démontrer que :

$$\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f) \iff \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g) = \{0_E\} \tag{1.1}$$

$$\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g) \iff E = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Ker}(g) \tag{1.2}$$

1.2.3 Projecteurs et symétries

注释 1.4

本小节介绍了投影映射和对称映射，它们是一类特殊线性映射的例子。

Définition 1.19 – Projection

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On appelle *projection de E sur*

F *parallèlement à* G l'endomorphisme de E défini par :

$$p_{F\|G} \; : \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x_F \quad \text{où } x = x_F + x_G \text{ avec } x_F \in F \text{ et } x_G \in G \end{cases}$$

Remarque 1.20

Puisque $E = F \oplus G$, x_F et x_G sont uniques donc $p_{F\|G}$ est bien définie. De plus, c'est un endomorphisme de E.

Propriété 1.29

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Alors :

$$p_{F\|G} + p_{G\|F} = \mathrm{id}_E$$

On a de plus :

$$G = \mathrm{Ker}(p_{F\|G}) \text{ et, pour tout } x \in G,\ p_{F\|G}(x) = 0_E$$

et :

$$F = \mathrm{Im}(p_{F\|G}) = \mathrm{Ker}(p_{F\|G} - \mathrm{id}_E) \text{ et, pour tout } x \in F,\ p_{F\|G}(x) = x$$

Démonstration

Soit $x \in E$ qu'on écrit de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F = p_{F\|G}(x) \in F$ et $x_G = p_{G\|F}(x) \in G$.

— On a
$$p_{F\|G}(x) + p_{G\|F}(x) = x_F + x_G = x$$
donc $p_{F\|G} + p_{G\|F} = \mathrm{id}_E$.

— On a
$$x \in G \iff x_F = 0_E \iff p_{F\|G}(x) = 0_E \iff x \in \mathrm{Ker}(p_{F\|G})$$
donc $G = \mathrm{Ker}(p_{F\|G})$. En particulier, $p_{F\|G}(x) = 0_E$ pour tout $x \in G$.

— On a
$$x \in F \iff x_G = 0_E \iff x - x_F = 0_E \iff (\mathrm{id}_E - p_{F\|G})(x) = 0_E$$
donc $F = \mathrm{Ker}(p_{F\|G} - \mathrm{id}_E)$. De plus,
$$x \in F \iff x - x_F = 0_E \iff x = x_F = p_{F\|G}(x)$$

donc $F = \mathrm{Im}(p_{F\|G})$. En particulier, $p_{F\|G}(x) = x$ pour tout $x \in F$.

Définition 1.20 – Projecteur

Soit E un espace vectoriel, on appelle *projecteur de E* tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.

Proposition 1.5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Toute projection de E est un projecteur de E et, réciproquement, tout projecteur de E est une projection de E.

Démonstration

1. Une projection est un projecteur, d'après la propriété 1.29, page précédente. En effet, si F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$ et si $p = p_{F\|G}$, alors pour tout $x \in E$ qu'on écrit de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, on a
$$p(x) = p(x_F + x_G) = p(x_F) + p(x_G) = x_F + 0_E = x_F$$
donc
$$(p \circ p)(x) = p(x_F) = x_F$$
d'où $(p \circ p)(x) = p(x)$ donc $p \circ p = p$.
2. Si p est un projecteur, on a alors :
$$\boxed{E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p}$$
d'après l'exemple 1.18, page 54, donc p est la projection de E sur son image $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à son noyau $\mathrm{Ker}\, p$.

Définition 1.21 – Symétrie par rapport à un sous-espace

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On peut définir de même la notion de *symétrie de E par rapport à F, parallèlement à G*. C'est l'automorphisme de E défini par :

$$s_{F\|G} \; : \begin{cases} E \to E \\ x = x_F + x_G \mapsto x_F - x_G, \quad \text{où } x = x_F + x_G \text{ avec } x_F \in F \text{ et } x_G \in G \end{cases}$$

Propriété 1.30

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On a alors :

$$s_{F\|G} \circ s_{F\|G} = \mathrm{id}_E$$

De plus, on a

$$s_{F\|G} = 2.p_{F\|G} - \mathrm{id}_E \ \text{ et } \ p_{F\|G} = \frac{1}{2}.\left(\mathrm{id}_E + s_{F\|G}\right)$$

et

$$F = \mathrm{Ker}(s_{F\|G} - \mathrm{id}_E) \text{ et } G = \mathrm{Ker}(s_{F\|G} + \mathrm{id}_E)$$

Démonstration

Analogue à la démonstration de la propriété 1.29, page 60.

Remarque 1.21

On peut définir plus généralement la notion de *symétrie de* E, ce sont les endomorphismes s de E tels que $s \circ s = \mathrm{id}_E$. On peut alors démontrer (à l'aide de la propriété 1.30, de la présente page) que si $s_{F\|G}$ est la symétrie de E par rapport à F, parallèlement à G, alors $s_{F\|G} \circ s_{F\|G} = \mathrm{id}_E$. Réciproquement, si s est une symétrie de E, c'est-à-dire un endomorphisme s de E tel que $s \circ s = \mathrm{id}_E$, alors (par un raisonnement par analyse-synthèse)

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)}$$

et que s est la symétrie de E par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
Enfin, si p est un projecteur de E, alors $s = 2.p - \mathrm{id}_E$ est une symétrie. Réciproquement, si s est une symétrie de E, alors $p = \frac{1}{2}.(s + \mathrm{id}_E)$ est un projecteur de E.

Exercice(s) 1.10

1.10.1 Soit p est une projection d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$. Démontrer que $p - \lambda.\mathrm{id}_E$ est bijective.

1.10.2 Soit

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (2\,x - 2\,y, x - y) \end{cases}$$

Démontrer que ϕ est une projection (sur quoi ? parallèlement à quoi ?).

1.10.3 Soit l'application :

$$\phi : \begin{cases} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f \mapsto (x \mapsto f(-x)) \end{cases}$$

Démontrer que ϕ est une symétrie (par rapport à quoi ? parallèlement à quoi ?).

1.10.4 Soit p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(a) $p+q$ est un projecteur.

(b) $p \circ q + q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

(c) $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1.10.5 Si p et q sont deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$, démontrer que $p+q$ est un projecteur et en calculer son image et son noyau.

1.10.6 Si p et q sont deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $p \circ q = 0_{\mathscr{L}(E)}$, démontrer que $p+q-q\circ p$ est un projecteur et en calculer son image et son noyau.

1.10.7 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et p un projecteur de E, démontrer que :

$$f \circ p = p \circ f \iff [f\left(\operatorname{Ker}(p)\right) \subset \operatorname{Ker}(p) \text{ et } f\left(\operatorname{Im}(p)\right) \subset \operatorname{Im}(p)]$$

1.2.4 Cas particulier de la dimension finie

Propriété 1.31

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et si $f \in \mathscr{L}(E,E')$, alors $\operatorname{Im}(f)$ est de dimension finie et

$$\dim \operatorname{Im}(f) \le \dim E$$

De plus, on a

$$\dim \operatorname{Im}(f) = \dim E \iff f \text{ injective}$$

Démonstration

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, avec $n = \dim E$.

- La famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$ et à n éléments, donc $\dim \operatorname{Im}(f) \leq n = \dim E$.
- Si f est injective, d'après la propriété 1.25, page 56, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre car $(e_1, \dots, e_n)$ l'est aussi. C'est donc une base de $\operatorname{Im} f$, d'où $\dim \operatorname{Im} f = n = \dim E$.
  Si $\dim \operatorname{Im}(f) = \dim E$, la famille génératrice $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ de $\operatorname{Im} f$ a $n = \dim E$ éléments, c'est donc une base de $\operatorname{Im} f$.
  En particulier, c'est une famille libre, donc f est injective.

Définition 1.22 – Rang d'une application linéaire

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, E')$ telle que $\operatorname{Im}(f)$ soit de dimension finie, on appelle *rang de f* et on note :

$$\operatorname{rang}(f) \overset{\text{Not}}{=} \dim(\operatorname{Im}(f))$$

在有限维时，像空间的维数称作f的秩。

Remarque 1.22

Lorsque E est de dimension finie, $\operatorname{Im}(f)$ est de dimension finie.

Propriété 1.32

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, E')$, alors :

$$\begin{aligned}
E' \text{ de dimension finie} &\implies \operatorname{rang}(f) \leq \dim E' \\
&\quad\ \text{et } \left[\operatorname{rang}(f) = \dim E' \iff f \text{ surjective}\right] \\
E \text{ de dimension finie} &\implies \operatorname{rang}(f) \leq \dim E \\
&\quad\ \text{et } \left[\operatorname{rang}(f) = \dim E \iff f \text{ injective}\right]
\end{aligned}$$

Démonstration

- $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de E' qui est de dimension finie donc $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et $\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Im} f \leq \dim E'$.
  Si f est surjective, alors $\operatorname{Im} f = E'$ donc $\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim E'$.
  Si $\dim \operatorname{Im} f = \dim E'$, comme $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de E' de dimension finie, on a $\operatorname{Im} f = E$ (propriété 1.19, page 44) donc f est surjective.
- C'est la propriété 1.31, page 63.

Propriété 1.33

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si E et E' sont de dimensions finies, alors :

$$\begin{aligned}
\dim E \leq \dim E' &\iff \exists f \in \mathscr{L}(E, E') \text{ injective} \\
\dim E \geq \dim E' &\iff \exists f \in \mathscr{L}(E, E') \text{ surjective} \\
\dim E = \dim E' &\iff \exists f \in \mathscr{L}(E, E') \text{ bijective}
\end{aligned}$$

En particulier, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit $(e'_1, \ldots, e'_p)$ une base de E' (avec $n = \dim E$ et $p = \dim E'$).

- Si $n \leq p$, on peut définir l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, E')$ telle que $f(e_i) = e'_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. La famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = (e'_1, \ldots, e'_n)$ est une sous-famille de la base $(e'_1, \ldots, e'_p)$ qui est libre, elle est donc libre, ce qui démontre que f est injective (voir la remarque 1.19, page 57).
  Réciproquement, s'il existe $f \in \mathscr{L}(E, E')$ injective, alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre à n éléments dans un espace de dimension p, donc $n \leq p$.
- Si $n \geq p$, on peut définir l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, E')$ telle que $f(e_i) = e'_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et $f(e_i) = 0_{E'}$ si $i > p$. La famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ contient la famille $(e'_1, \ldots, e'_p)$ qui est une base de E', donc est génératrice. En particulier, f est surjective.
  Réciproquement, s'il existe $f \in \mathscr{L}(E, E')$ surjective, alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice à n éléments dans un espace de dimension p, donc $n \geq p$.
- Si $n = p$, on peut définir l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, E')$ telle que $f(e_i) = e'_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!] = [\![1, p]\!]$. D'après ce qui précède, f est injective et surjective donc bijective.
  Réciproquement, s'il existe $f \in \mathscr{L}(E, E')$ bijective, alors d'après ce qui précède $n \leq p$ et $p \leq n$, donc $n = p$.

Ces propriétés sont très importantes pour démontrer des égalités ou des inégalités de dimensions !

Proposition 1.6 – Rang d'une composition

Soit E, E' et E'' trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $u \in \mathscr{L}(E, E')$ et $v \in \mathscr{L}(E', E'')$, alors :

$$\operatorname{rang}(v \circ u) + \dim E' \geq \operatorname{rang}(v) + \operatorname{rang}(u)$$

Démonstration

— On peut déjà remarquer que :

$$\operatorname{Im}(u) \subset E' \text{ et } \operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im}(v)$$

donc, en introduisant des supplémentaires :

$$E' = \operatorname{Im}(u) \oplus F' \text{ et } \operatorname{Im}(v) = \operatorname{Im}(v \circ u) \oplus F''$$

l'inégalité demandée devient :

$$\dim F' \geq \dim F''$$

— Or, il existe une « application naturelle » qui va de F' dans F'', l'application :

$$\varphi : x \in F' \mapsto = p_{F'' \| \operatorname{Im}(v \circ v)} \circ v(x)$$

L'énoncé devient :

$$\operatorname{Im} \varphi = F'' \ ?$$

— La démonstration n'est alors qu'une vérification : soit $x'' \in F''$, alors $x'' \in \operatorname{Im}(v)$, donc, il existe $x' \in E'$ tel que $x'' = v(x')$. Mais

$$x' = \underbrace{x'_{\operatorname{Im}(u)}}_{\in \operatorname{Im}(u)} + \underbrace{x'_{F'}}_{\in F'}$$

donc

$$\varphi(x'_{F'}) = \varphi(x' - x'_{\operatorname{Im}(u)}) = p_{F'' \| \operatorname{Im}(v \circ v)} \big(\underbrace{v(x')}_{\in F''} - \underbrace{v(x'_{\operatorname{Im}(u)})}_{\in \operatorname{Im}(v \circ u)} \big) = v(x') = x''$$

Théorème 1.4 – Théorème du rang

Soit E et E' des $\mathbb{K}$-espace vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,E')$. Si E est de dimension finie, alors :

$$\boxed{\operatorname{rang}(f) = \dim E - \dim \operatorname{Ker}(f)}$$

Théorème du rang 是线性代数的一个重要定理，它给出了线性映射的秩和它核空间维数之间的关系。

Démonstration

C'est une application immédiate du théorème de factorisation (théorème 1.5, page 75) dans le cas de la dimension finie.

Exemple 1.20 – Propriétés de rangs

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathscr{L}(E,E')$, alors

$$\dim f(F) = \dim F - \dim(F \cap \operatorname{Ker}(f))$$

2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$, alors :
   (a) En posant $f^0 = \mathrm{id}_E$, on a :
   $$\forall p \in \mathbb{N},\ \operatorname{Ker}(f^p) \subset \operatorname{Ker}(f^{p+1})$$
   (b) De plus,
   $$\forall p \in \mathbb{N},\ \operatorname{Ker}(f^p) = \operatorname{Ker}(f^{p+1}) \ \Rightarrow\ \forall n \geq p,\ \operatorname{Ker}(f^n) = \operatorname{Ker}(f^p)$$
   (c) On peut alors poser :
   $$p_0 = \min\left\{p \in \mathbb{N},\ \operatorname{Ker}(f^p) = \operatorname{Ker}(f^{p+1})\right\}$$
   (d) Et on a :
   $$E = \operatorname{Ker}(f^{p_0}) \oplus \operatorname{Im}(f^{p_0})$$

Proposition 1.7 – Caractérisation des automorphismes en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$, alors :

$$\boxed{f \textit{ injective } \iff f \textit{ surjective } \iff f \textit{ bijective}}$$

C'est faux en dimension infinie.

Démonstration

1. C'est une application immédiate du théorème du rang. On peut remarquer que le résultat est encore vrai lorsque $f \in \mathscr{L}(E, E')$ et $\dim E = \dim E'$.
2. En dimension infinie, on peut considérer, par exemple, la dérivation sur $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui est surjective, mais pas injective !

Proposition 1.8

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, alors

$$\boxed{\mathscr{L}(E \times E') \textit{ est de dimension finie, égale à } \dim E \times \dim E'}$$

Démonstration

Si $E = \{0_E\}$ ou $E' = \{0_{E'}\}$, il n'y a rien à démontrer. Supposons que $E \neq \{0_E\}$ et $E' \neq \{0_{E'}\}$.
Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $(e'_1, \ldots e'_n)$ une base de E', il suffit de vérifier alors que :

$$(u_{k,l})_{(k,l) \in [\![1,n]\!] \, [\![1,p]\!]} \text{ est une base de } \mathscr{L}(E \times E')$$

où si $(k,l) \in [\![1,n]\!] \, [\![1,p]\!]$, $u_{k,l}$ est définie par [a] :

$$\forall j \in [\![1,p]\!] \, , \; u_{k,l}(e_j) = \delta_{l,j}.e'_k$$

a. On rappelle la définition du *symbole de Kronecker* :

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque importante 1.23

On voit donc que si E et E' sont de dimensions finies, alors

$$\mathscr{L}(E \times E') \text{ et } \mathscr{L}(E' \times E) \text{ sont isomorphes}$$

car ils ont même dimension ! *Nous verrons que c'est faux en dimension infinie !* Il y a en fait deux sortes d'isomorphismes :

1. Des isomorphismes *géométriques* : c'est-à-dire vrais sans propriétés de dimensions.
2. Des isomorphismes *non géométriques* : c'est-à-dire qu'ils ne traduisent qu'une égalité de dimensions.

Exercice(s) 1.11

1.11.1 Soit E, E', F et F' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Démontrer que
 (a) Pour toute $\phi \in \mathscr{L}(E', E)$ surjective, $\operatorname{rang}(f \circ \phi) = \operatorname{rang} f$.
 (b) Pour toute $\psi \in \mathscr{L}(F, F')$ injective, $\operatorname{rang}(\psi \circ f) = \operatorname{rang} f$.

1.11.2 Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, E')$, $\varphi \in \mathscr{GL}(E)$ et $\psi \in \mathscr{GL}(E')$, alors :

$$\operatorname{rang}(f) = \operatorname{rang}(\psi \circ f) = \operatorname{rang}(f \circ \varphi) = \operatorname{rang}(\psi \circ f \circ \varphi)$$

1.11.3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\exists p \in \mathbb{N}^*,\ f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

 (a) Démontrer que :

$$f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

 (b) Démontrer que, si $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \dim \operatorname{Ker}(f^k) = k$$

1.11.4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$, démontrer qu'il existe un automorphisme $g \in \mathscr{GL}(E)$ et p un projecteur de E tel que :

$$f = g \circ p$$

1.11.5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$, on considère les applications :

$$\phi \; : \begin{cases} \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E) \\ u \mapsto f \circ u \end{cases} \qquad \text{et } \psi \; : \begin{cases} \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E) \\ f \mapsto u \circ f \end{cases}$$

(a) Démontrer que ϕ et ψ sont dans $\mathscr{L}\left(\mathscr{L}(E)\right)$.

(b) Calculer $\text{rang}(\phi)$ et $\text{rang}(\psi)$.

1.11.6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. On considère

$$\mathcal{F} = \{v \in \mathscr{L}(E),\; u \circ v \circ u = u\}$$

(a) Démontrer que $\mathcal{F}$ est non vide.

(b) Soit $v_0 \in \mathcal{F}$, démontrer que

$$-v_0 + \mathcal{F} \overset{\text{Not}}{=} \{v - v_0,\; v \in \mathcal{F}\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{L}(E)$$

On suppose dorénavant que E est de dimension finie n.

(c) Calculer la dimension de $-v_0 + \mathcal{F}$.

(d) Que peut-on dire du rang de v lorsque $v \in \mathcal{F}$?

1.11.7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$, démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\; \text{rang}\left(f^{k+1}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\text{rang}\left(f^k\right) + \text{rang}\left(f^{k+2}\right)\right)$$

1.11.8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$, démontrer que :

$$\dim \text{Ker}(f^2) \leq 2 \dim \text{Ker}(f)$$

1.11.9 Soit E, E', E'' et E''' quatre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $f \in \mathscr{L}(E, E')$, $g \in \mathscr{L}(E', E'')$ et $h \in \mathscr{L}(E'', E''')$, démontrer que :

$$\text{rang}(h \circ g \circ f) + \text{rang}(g) \geq \text{rang}(g \circ f) + \text{rang}(h \circ g)$$

1.11.10 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E) \setminus \mathscr{GL}(E)$.

(a) Démontrer que :

$$\exists g \in \mathscr{L}(E) \setminus \left\{0_{\mathscr{L}(E)}\right\},\; g \circ f = f \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

(b) Soit :

$$\mathcal{X} = \left\{g \in \mathscr{L}(E),\; g \circ f = f \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}\right\}$$

Démontrer que c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et en calculer sa dimension.

1.2.5 Factorisation des applications linéaires

注释 1.5

本小节中介绍几种特殊的线性映射，从先前小结的知识出发引出了如何把线性映射分解成不同线性映射的复合。

Propriété 1.34 – Restriction d'une application linéaire

Si F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors la *restriction* d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, E')$, notée $f_{|_F}$ et définie par :

$$\forall x \in F,\ f_{|_F}(x) = f(x)$$

est une application linéaire de F dans E'. De plus,

$$\begin{cases} \mathscr{L}(E, E') \to \mathscr{L}(F, E') \\ f \mapsto f_{|_F} \end{cases} \quad \text{est une application linéaire}$$

Démonstration

Immédiat.

Propriété 1.35 – Co-restriction d'une application linéaire

Si $f \in \mathscr{L}(E, E')$ et F' est un sous-espace vectoriel de E' tel que $\boxed{f(E) \subset F'}$, alors la *co-restriction* de f, notée $f^{|^{F'}}$ et définie par :

$$\forall x \in E,\ f^{|^{F'}}(x) = f(x) \in F'$$

est une application linéaire de E dans F'. De plus,

$$\begin{cases} \{f \in \mathscr{L}(E,E'),\ f(E) \subset F'\} \to \mathscr{L}(E,F') \\ f \mapsto f^{|F'} \end{cases} \quad \text{est une application linéaire}$$

Démonstration

Immédiat.

Notation 1.1

Par abus de notation, si F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, F' un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E' et $f \in \mathscr{L}(E,E')$ tels que $\boxed{f(F) \subset F'}$, nous noterons :

$$f\Big|_F^{F'} \overset{\text{Not}}{=} \left(f_{|F}\right)^{|F'}$$

Exemple 1.21

Soit E, E' et E'' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

— Si F est un sous-espace vectoriel de E, si $f \in \mathscr{L}(E,E')$ et $g \in \mathscr{L}(E',E'')$ alors :

$$(g \circ f)_{|F} = g \circ \left(f_{|F}\right)$$

— De même, si F'' est un sous-espace vectoriel de E'' *contenant* $g(E')$, alors :

$$(g \circ f)^{|F''} = \left(g^{|F''}\right) \circ f$$

Propriété 1.36 – Noyau d'une restriction

Si F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et f une application linéaire de E dans E', alors :

$$\boxed{\operatorname{Ker}\left(f_{|_F}\right) = F \cap \operatorname{Ker}(f)}$$

Démonstration

— Soit $x \in \operatorname{Ker} f_{|_F}$. Alors $x \in F$ (car l'ensemble de départ de $f_{|_F}$ est F) donc $f(x) = f_{|_F}(x) = 0_{E'}$ donc $x \in F \cap \operatorname{Ker} f$.
— Soit $x \in F \cap \operatorname{Ker} f$. On a $0_{E'} = f(x) = f_{|_F}(x)$ donc $x \in \operatorname{Ker}\left(f_{|_F}\right)$.

Par double inclusion, $\operatorname{Ker}\left(f_{|_F}\right) = F \cap \operatorname{Ker}(f)$.

Notation 1.2 – Inclusion canonique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E, on peut définir *l'inclusion canonique de F dans E* par :

$$i_{F\subset E} \ : \begin{cases} F \to E \\ x \mapsto x \end{cases}$$

On a donc :

$$i_{F\subset E} \overset{\text{Not}}{=} \left(\mathrm{id}_E\right)_{|_F}$$

Remarque 1.24

Si G est un supplémentaire de F dans E ($E = F \oplus G$), on a :

$$\left(p_{F\|G}\right)^{|^F} \circ i_{F\subset E} = \mathrm{id}_F$$

⚠ Ce ne sont pas des réciproques !

Propriété 1.37

Pour connaître une application linéaire définie sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont on connaît une décomposition en somme directe, il faut et il suffit d'en connaître ses restrictions à chaque sous-espace vectoriel composant la décomposition.

Démonstration

Supposons que :

$$E = \bigoplus_{i \in I} E_i$$

1. Supposons connue $f \in \mathscr{L}(E, E')$, il est alors facile de connaître :

$$\forall i \in I,\ f_{|E_i} \in \mathscr{L}(E_i, E')$$

2. Réciproquement, si on connaît :

$$\forall i \in I,\ f_{|E_i} = f_i \in \mathscr{L}(E_i, E')$$

alors on connaît f car si $x \in E$, il existe un entier n, des indices 2 à 2 distincts $(i_1, \ldots, i_n)$ de I et des vecteurs $x_{i_k} \in E_{i_k}$, quelque soit $k \in [\![1, n]\!]$ tels que :

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_{i_k}$$

On a alors :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_{i_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} f_{i_k}\left(x_{i_k}\right)$$

Remarque 1.25

Une autre façon de dire est que :

$$E = \bigoplus_{i \in I} E_i \implies \mathscr{L}(E, E') \text{ est isomorphe à } \prod_{i \in I} \mathscr{L}(E_i, E')$$

grâce à l'application (clairement linéaire) :

$$f \longmapsto \left(f_{|E_i}\right)_{i \in I}$$

Exemple 1.22 – Construction par morceaux

Soit $E = F \oplus G$, alors il existe un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, tel que

$$\mathrm{Ker}(f) = F \text{ et } \mathrm{Im}(f) = G$$

On construit [a] :

$$f_{|F} = 0_{\mathscr{L}(F,E)} \text{ et } f_{|G} = (\mathrm{id}_E)_{|G}$$

a. Remarquons que l'on obtient bien sûr la projection sur G parallèlement à F.

Théorème 1.5 – Factorisation des applications linéaires

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, E')$, F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E ($E = \mathrm{Ker}(f) \oplus F$), alors

$$\boxed{f\Big|_F^{\mathrm{Im}(f)} \text{ est un isomorphisme entre } F \text{ et } \mathrm{Im}(f)}$$

Démonstration

Posons $\widetilde{f} = f\Big|_F^{\mathrm{Im}(f)}$.

1. $\widetilde{f}$ est injective. En effet,
$$\mathrm{Ker}\left(\widetilde{f}\right) = \mathrm{Ker}(f) \cap F = \{0_E\}$$
2. $\widetilde{f}$ est surjective. En effet, soit $x' \in \mathrm{Im}(f)$, on sait alors qu'il existe $x \in E$, tel que $f(x) = x'$. Mais, par décomposition en somme directe, on a :
$$\exists!(x_F, x_{\mathrm{Ker}(f)}) \in F \times \mathrm{Ker}(f)), \ x = x_F + x_{\mathrm{Ker}(f)}$$
En appliquant f, il vient :
$$x' = f(x) = f(x_F + x_{\mathrm{Ker}(f)}) = f(x_F) + f(x_{\mathrm{Ker}(f)}) = f(x_F) = \widetilde{f}(x_F)$$

Remarque 1.26

Dans le cas de la dimension finie ($\dim E < +\infty$), on obtient que $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie et que

$$\dim \mathrm{Im}(f) = \dim F$$

Or, la formule de Grasmann (proposition 1.3, page 47) nous donne que

$$\dim F = \dim E - \dim \mathrm{Ker}(f)$$

soit, le théorème du rang ! (théorème 1.4, page 67)

Remarque 1.27

Pourquoi appelle-t-on ce résultat *théorème de factorisation des applications linéaires* ? Si on regarde le diagramme 1.3, page ci-contre. On a donc obtenu une factorisation de f à l'aide d'applications linéaires simples et d'un isomorphisme :

$$\boxed{f = i_{\mathrm{Im}(f) \subset E'} \circ \widetilde{f} \circ \left(p_{F \| \mathrm{Ker}(f)}\right)^{|F}}$$

Exemple 1.23

À quoi cela sert-il ? À faire apparaître un isomorphisme, ce qui permet d'utiliser sa réciproque ! Ainsi, sur le schéma précédent, il apparaît une application linéaire « naturelle » permettant d'aller de E' dans E (sans pour autant que f soit inversible), en introduisant un supplémentaire F' de $\mathrm{Im}(f)$ dans E'. Voir le diagramme 1.4, page 78. Notons cette application :

$$g = i_{F \subset E} \circ \widetilde{f}^{-1} \circ \left(p_{\mathrm{Im}(f) \| F'}\right)^{|\mathrm{Im}(f)}$$

regardons ce que deviennent $g \circ f$ et $f \circ g$. Soit un élément $x \in E$, que l'on décompose suivant la somme directe $F \oplus \mathrm{Ker}(f)$,

Figure 1.3 – Factorisation d'une application linéaire

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\left(p_{F\|\mathrm{Ker}(f)}\right)\Big|^{F}"'] & & E' \\
F \arrow[rr, "\widetilde{f}"] & & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, "i_{\mathrm{Im}(f)\subset E'}"']
\end{tikzcd}$$

alors

$$\begin{aligned}
g\circ f(x) &= g\big(f(x_F + x_{\mathrm{Ker}(f)})\big)\\
&= g\big(\widetilde{f}(x_F)\big)\\
&= i_{F\subset E}\left(\widetilde{f}^{-1}\Big(p_{\mathrm{Im}(f)\|F'}\big(\widetilde{f}(x_F)\big)\Big)\right)\\
&= i_{F\subset E}\Big(\widetilde{f}^{-1}\big(\widetilde{f}(x_F)\big)\Big)\\
&= i_{F\subset E}(x_F) = x_F = p_{F\|\mathrm{Ker}(f)}(x)
\end{aligned}$$

De même, si $x' \in E'$ que l'on décompose sous la forme $x' = x_{F'} + f(x) = x_{F'} + \widetilde{f}(x_F)$, alors :

$$\begin{aligned} f \circ g(x') &= f\big(g(x_{F'} + \widetilde{f}(x_F))\big) \\ &= ... \\ &= f(x_F) = p_{\mathrm{Im}(f) \parallel F'}(x') \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$g \circ f = p_{F \parallel \mathrm{Ker}(f)} \text{ et } f \circ g = p_{\mathrm{Im}(f) \parallel F'}$$

Figure 1.4 – Utilisation de la factorisation

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, dashed, "f"] & E' = \mathrm{Im}(f) \oplus F' \arrow[d, "\left(p_{\mathrm{Im}(f) \parallel F'}\right)|^{\mathrm{Im}(f)}"] \\
F \arrow[u, "i_{F \subset E}"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[l, "\widetilde{f}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Remarque importante 1.28

g dépend du choix de F' (et bien sûr de F).

Remarque 1.29

Notons de plus, que si f est un isomorphisme, alors $\widetilde{f} = f$ et $g = f^{-1}$.

Remarque importante 1.30

Notons que l'on a toujours les résultats suivants :

$$\boxed{f_{|F} \text{ est injective, et } f^{|\mathrm{Im}(f)} \text{ est surjective}}$$

On obtient donc, à l'aide de ce théorème, deux méthodes de démonstrations :

1. Quand on aura besoin de construire une application linéaire allant d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E à un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E', on pourra essayer d'utiliser des « chemins naturels » allant de E à E'.
2. Quand le problème est simple lorsqu'une application linéaire est bijective, on peut toujours essayer de se ramener à cette situation avec le théorème de factorisation.

Théorème 1.6 – Relèvement linéaire

Soit E, E' et E'' trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $w \in \mathscr{L}(E, E'')$ et $v \in \mathscr{L}(E', E'')$, alors :

$$\exists u \in \mathscr{L}(E, E'),\ w = v \circ u \iff \mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Im}(v)$$

Démonstration

— ($\Rightarrow$) Évident. Si $x'' \in \mathrm{Im}(w)$, alors il existe un $x \in E$, tel que $x'' = w(x) = v\big(u(x)\big) \in \mathrm{Im}(v)$.
— ($\Leftarrow$) Nous allons essayer les deux méthodes :

1. *(Chemins naturels)* On a le diagramme 1.5, page 81.

(*Analyse*) En utilisant le théorème de factorisation, on peut construire un chemin naturel allant de E à E' (en passant par E''). Voir le diagramme 1.6, page 82. On obtient un candidat au rôle de u. Il s'écrit :

$$u = i_{F' \subset E'} \circ \widetilde{v}^{-1} \circ \left(p_{\mathrm{Im}(v) \| F''}\right)^{|\mathrm{Im}(v)} \circ w$$

($Synthèse$) Il suffit alors de vérifier qu'il convient [a], si $x \in E$, alors :

$$\begin{array}{rcl} v \circ u(x) & = & v\left(i_{F' \subset E}\left(\widetilde{v}^{-1}\left(p_{\mathrm{Im}(v) \| F''}(w(x))\right)\right)\right) \\ & & \text{or } w(x) \in \mathrm{Im}(v) \text{ par hypothèse} \\ & = & v\left(i_{F' \subset E}\left(\widetilde{v}^{-1}(w(x))\right)\right) \\ & = & v\big(i_{F' \subset E}(x')\big) \text{ où } x' \in F',\ v(x') = w(x) \\ & = & v(x') = w(x) \end{array}$$

2. *(Et si v était inversible .)*
   — Si v est inversible, alors $u = v^{-1} \circ w$.
   — Dans le cas contraire, nous allons essayer de nous y ramener :
   ($Analyse$) Si u existe, alors [b]

$$w = v \circ u \text{ donc } w^{|\mathrm{Im}(v)} = (v \circ u)^{|\mathrm{Im}(v)} = v^{|\mathrm{Im}(v)} \circ u$$

Pour pouvoir restreindre v à F' (supplémentaire de $\mathrm{Ker}(v)$), nous allons imposer une condition supplémentaire à u permettant la co-restriction à F' de u :

$$\boxed{\mathrm{Im}(u) \subset F'}$$

Alors :

$$w^{|\mathrm{Im}(v)} = \underbrace{v\Big|_{F'}^{\mathrm{Im}(v)}}_{\widetilde{v} \text{ inversible !}} \circ u^{|F'}$$

donc, dans ce cas, on a la condition nécessaire :

$$u^{|F'} = \widetilde{v}^{-1} \circ w^{|\mathrm{Im}(v)}$$

($Synthèse$) Soit $u \in \mathscr{L}(E, E')$ défini par :

$$\forall x \in E,\ u(x) = \widetilde{v}^{-1} \circ w^{|\mathrm{Im}(v)}(x) = \widetilde{v}^{-1}(w(x))$$

ou, si l'on préfère :

$$u = i_{F' \subset E'} \circ \widetilde{v}^{-1} \circ w^{|\mathrm{Im}(v)}$$

Alors, si $x \in E$, on a

$$\begin{array}{rcl} v \circ u(x) & = & v\left(i_{F' \subset E'}\left(\widetilde{v}^{-1}\left(w^{|\mathrm{Im}(v)}(x)\right)\right)\right) \\ & = & v\left(i_{F' \subset E'}\left(\widetilde{v}^{-1}(w(x))\right)\right) \\ & = & v\big(i_{F' \subset E'}(x')\big) \text{ où } x' \in F',\ v(x') = w(x) \\ & = & v(x') = w(x) \end{array}$$

a. Le candidat n'est parfois pas celui dont on a besoin ! La vérification est <u>indispensable</u> !
b. La co-restriction est possible d'après l'hypothèse.

Figure 1.5 – Relèvement linéaire : position du problème

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "w"] \arrow[dr, dashed, "u\ ?"'] & E'' \\
 & E' \arrow[u, "v"']
\end{tikzcd}$$

Théorème 1.7 – Extension linéaire

Soit E, E' et E'' trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $w \in \mathscr{L}(E, E'')$ et $u \in \mathscr{L}(E, E')$, alors

$$\exists v \in \mathscr{L}(E', E''),\ w = v \circ u \iff \mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(w)$$

Figure 1.6 – Relèvement linéaire : construction des chemins

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "w"] \arrow[dddrr, dashed, bend left, blue] & & E'' = \mathrm{Im}(v) \oplus F'' \arrow[dr, "\left(p_{\mathrm{Im}(v) \| F''}\right)_{/\mathrm{Im}(v)}"] & \\
 & & & \mathrm{Im}(v) \arrow[d, "\widetilde{v}^{-1}"] \\
 & & & F' \arrow[dl, "i_{F' \subset E'}"] \\
 & & E' = \mathrm{Ker}(v) \oplus F' \arrow[uuu, dashed, "v"] &
\end{tikzcd}
$$

Démonstration

Laissé en exercice. Cette démonstration est très proche de celle du relèvement linéaire.

Proposition 1.9 – Surjectivité

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $v \in \mathscr{L}(E', E)$, alors :

$$\exists u \in \mathscr{L}(E, E'),\ \mathrm{id}_E = v \circ u \iff v \text{ surjective}$$

Démonstration

Prendre $w = \mathrm{id}_E$ dans le théorème de relèvement.

Proposition 1.10 – Injectivité

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E,E')$, alors :

$$\exists v \in \mathscr{L}(E',E),\ \mathrm{id}_E = v \circ u \iff u \text{ injective}$$

Démonstration

Prendre $w = \mathrm{id}_E$ dans le théorème d'extension.

Exercice(s) 1.12

1.12.1 Démontrer le théorème d'extension linéaire.

1.12.2 Soit E_0, E_1 et E_2 trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que :

$$E_0 \oplus E_1 = E_0 \oplus E_2$$

démontrer que E_1 et E_2 sont isomorphes.

1.12.3 Soit E_1, E_2, E_3 et E_4 quatre sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que :

$$E_1 + E_2 = E_2 \oplus E_3 \text{ et } E_1 = (E_1 \cap E_2) \oplus E_4$$

démontrer que E_3 et E_4 sont isomorphes.

1.12.4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(u,v,w) \in \mathscr{L}(E)^3$.

(a) Démontrer que

$$\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(w) \iff \exists (a,b) \in \mathscr{L}(E)^2,\ w = a \circ u + b \circ v$$

(b) Donner une CNS pour que :

$$\exists (a,b) \in \mathscr{L}(E)^2,\ w = u \circ a + v \circ b$$

(c) Donner une CNS pour que :

$$\exists (a,b) \in \mathscr{L}(E)^2,\ w = a \circ u + v \circ b$$

1.12.5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathscr{L}(E)$, démontrer que

$$\exists g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g \circ f = f$$

1.3 Dualité

注释 1.6

本小节介绍了线性空间的对偶空间和超平面。

1.3.1 Étude du dual

Définition 1.23 – Dual d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle *dual de E* et on note :

$$E^{\star} \overset{\text{Not}}{=} \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$$

Les éléments de $E^{\star}$ s'appellent des *formes linéaires* [a].

a. Le mot « forme », désigne en général une application à valeurs dans le corps de base. On aura des formes linéaires, des formes bilinéaires, etc.

Propriété 1.38

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $E^{\star}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

对偶空间本身也是线性空间，它的元素是线性映射也称作线性泛函。

Démonstration

C'est un cas particulier de la propriété 1.23, page 51.

Propriété 1.39

Si E est de dimension finie, alors $E^\star$ est de dimension finie et

$$\dim E = \dim E^\star$$

En dimension finie, les deux espaces sont donc isomorphes. C'est faux en dimension infinie.

在有限维时，线性空间E 和它的对偶空间$E^\star$ 是同构的。

Démonstration

Si E est de dimension finie, c'est un cas particulier de la proposition 1.8, page 68 :

$$\dim E^\star = \dim \mathscr{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E \times \dim \mathbb{K} = \dim E \times 1 = \dim E$$

Si E n'est pas de dimension finie, voir l'exemple ci-dessous.

Exemple 1.24 – Dual et espace non isomorphes

Prenons

$$E = \mathrm{Vect}(\{x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}\}),\ \text{sous-espace vectoriel du } \mathbb{Q}\text{-espace vectoriel } \mathscr{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$$

On a alors :

— E *est dénombrable* car :

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\mathrm{Vect}(\{x \mapsto x^k,\ k \in [\![0, n]\!]\})}_{\text{en bijection avec } \mathbb{Q}^{n+1} \text{ donc } \mathbb{Q},}$$

et une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

— $E^\star$ *n'est pas dénombrable* car :

$$E^\star \text{ isomorphe à (donc en bijection avec) } \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$$

par l'isomorphisme usuel :

$$\varphi \mapsto (\varphi(x \mapsto x^n))_{n \in \mathbb{N}}$$

Or, $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable (voir le procédé diagonal de Cantor) [a].
Remarquons que le dual est toujours *plus gros que l'espace de départ !*

C'est donc un isomorphisme non-géométrique.

a. Ceci est aussi un exemple où

$$\mathscr{L}(E, E') \text{ n'est pas isomorphe à } \mathscr{L}(E', E)$$

Définition 1.24 – Famille duale

Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, on peut définir la *famille duale* associée $(e_i^\star)_{i\in I} \in (E^\star)^I$ par :

$$\forall j \in I,\ e_i^\star(e_j) = \delta_{i,j}$$

Remarque importante 1.31

Cette notation est très dangereuse ! En effet, si l'on change *un des vecteurs* e_i, alors on change *tous les vecteurs* $e_i^\star$.

Propriété 1.40

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. La famille duale associée est une partie libre de $E^\star$.

Démonstration

Soit $(i_1, \dots, i_p)$ une sous-famille quelconque finie de I d'éléments distincts deux-à-deux et soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . e_{i_k}^\star = 0_{E^\star}$$

Soit $j \in [\![1, p]\!]$. Par définition de la famille duale, on a

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . e_{i_k}^\star (e_{i_j})}_{=\lambda_j} = 0_{E^\star}(e_j) = 0$$

donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$, ce qui montre que la famille duale $(e_i^\star)_{i\in I}$ est libre.

Propriété 1.41 – Base duale

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si E est de dimension finie et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors la famille duale associée est une base de $E^\star$ (dite *base duale*).

简称为$E^\star$的对偶基底。

Démonstration

D'après la propriété précédente, c'est une famille libre à n éléments. Or $\dim E^\star = \dim E = n$ (propriété 1.39, page 85) donc c'est bien une base de $E^\star$.

Propriété 1.42

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E. Si E est de dimension infinie, alors la famille duale associée *n'est jamais* génératrice.

Démonstration

Considérons la forme linéaire $f \in E^\star$ définie par $f(e_i) = 1$ pour tout $i \in I$. Si la famille duale associée à $(e_i)_{i \in I}$ était génératrice, il existerait une sous-famille $(i_1, \dots, i_p)$ finie de I tel que $f \in \mathrm{Vect}(\{f_{i_1}, \dots, f_{i_p}\})$. En considérant $j \in I$ tel que $j \notin \{i_1, \dots, i_p\}$ (possible car E est de dimension infinie donc I est infini), on a $f(e_j) = 1$ mais $f_{i_1}(e_j) = \ldots = f_{i_p}(e_j) = 0$, contradiction.

Proposition 1.11 – Base ante-duale

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de $E^\star$, alors il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E, telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ e_i^\star = \varphi_i$$

Cette base est appelée base ante-duale de la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Démonstration

Soit l'application définie par :

$$\phi \ : \begin{cases} E \to \mathbb{K}^n \\ x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \end{cases}$$

Cette application a les propriétés suivantes :

— ϕ est linéaire.

— ϕ est injective. Donc, comme E et $\mathbb{K}^n$ ont même dimension n, ϕ est un isomorphisme.

— Considérons $(b_1, \dots, b_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Comme un isomorphisme envoie une base sur une base, si l'on pose :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ e_i = \phi^{-1}(b_i)$$

la famille obtenue convient, et c'est clairement la seule.

Remarque 1.32

Comment démontrer qu'une famille de formes linéaires est une base ? En utilisant la base ante-duale (si l'on est capable de la trouver). On veut étudier $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille de formes linéaires de $E^\star$. Si on considère la base ante-duale $(e_1, \dots, e_n)$, (ou la famille que l'on imagine être la base ante-duale), c'est alors facile : soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ des scalaires tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k . \varphi_k = 0_{E^\star}$$

alors

$$\forall j \in [\![1, n]\!]\,,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . \underbrace{\varphi_k(e_j)}_{\delta_{k,j}} = \lambda_j = 0$$

注释 1.7

设 $(e_1, \dots, e_n)$ 是 E 的基底，$(e_1^\star, \dots, e_n^\star)$ 是 $E^\star$ 的对偶基底，我们有如下性质：

1. 当 $f = k_1.e_1^\star + \dots + k_n.e_n^\star \in E^\star$, $x = l_1.e_1 + \dots + l_n.e_n \in E$ 时，

$$f(x) = k_1\, l_1 + \dots + k_n\, l_n$$

2. $x \in E$ 可以表示成，

$$x = e_1^\star(x).e_1 + \dots + e_n^\star(x).e_n$$

3. $f \in E^\star$ 可以表示成，

$$f = f(e_1).e_1^\star + \cdots + f(e_n).e_n^\star$$

Exercice(s) 1.13

1.13.1 Soit $E = \mathbb{K}^n$, n impair, pour $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, on convient de noter $x_{n+1} = x_1$. On pose :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \varphi_i\ :\ \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ \underline{x} \mapsto x_i + x_{i+1} \end{cases}$$

(a) Dédémontrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $E^\star$.

(b) Calculer sa base ante-duale.

1.13.2 Soit

$$E = \text{Vect}(\{x \mapsto x^k,\ k \in [\![0, 3]\!]\})$$

(a) Calculer $\dim E$.

(b) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a < c < b$, on pose :

$$\varphi_1\ :\ f \mapsto f(a),\ \varphi_2\ :\ f \mapsto f(b),\ \varphi_3\ :\ f \mapsto f(c) \text{ et } \varphi_4\ :\ f \mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

i. À quelle CNS la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_4)$ est-elle une base de $E^\star$?

ii. Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, exprimer φ_4 en fonction des trois autres.

iii. En déduire une méthode de calcul approché d'une intégrale.

iv. Lorsque la fonction $f \in \mathscr{C}^\infty([a, b], \mathbb{R})$, évaluer l'erreur de méthode.

1.13.3 Trouver les formes linéaires ψ définies sur $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (f, g) \in E^2,\ \psi(f\,g) = \psi(f)\,\psi(g)$$

1.13.4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit E_1, E_2, ..., E_p des sous-espaces vectoriels de E, donner une CNS pour que :

$$\forall\,(\varphi_i)_{i \in [\![1,p]\!]} \in \prod_{k=1}^{p} E_k^\star,\ \left[\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2,\ \varphi_{i|_{E_i \cap E_j}} = \varphi_{j|_{E_i \cap E_j}}\right] \Rightarrow \left[\exists \varphi \in E^\star,\ \forall i \in [\![1, p]\!],\ \varphi_{|_{E_i}} = \varphi_i\right]$$

1.3.2 Hyperplans

Définition 1.25 – Hyperplan d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle *hyperplan de* E, tout sous-espace vectoriel H tel que :

$$\exists \varphi \in E^\star \setminus \{0_{E^\star}\},\ H = \operatorname{Ker}(\varphi)$$

L'écriture :

$$(H) \qquad \varphi(x) = 0$$

s'appelle *équation de l'hyperplan* H.

超平面是线性空间的子空间，它是对偶空间中线性泛函的核空间，我们可以写出超平面方程。

Remarque 1.33

Il n'y a pas unicité de l'équation, car, si φ convient, alors, quelque soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda.\varphi$ convient.

Définition 1.26 – Codimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E, on dit que F *est de codimension finie*, si F possède un supplémentaire de dimension finie. La dimension commune de tous les supplémentaires de F est appelée *codimension de* F et notée (si $E = F \oplus G$) :

$$\operatorname{codim} F \overset{\text{Not}}{=} \dim G$$

称作子空间的余维数，这一定义简化了线性空间E和子空间F是无限维时性质和定理的表示。

Remarque 1.34

Si E est de dimension finie, tous les sous-espaces vectoriels de E sont de codimension finie et si F est un sous-espace vectoriel de E, alors :

$$\operatorname{codim} F = \dim E - \dim F$$

Cette notion n'est donc pas intéressante en dimension finie, elle nous sera surtout utile en dimension infinie.

Exemple 1.25 – Hyperplans

1. Dans $\mathbb{K}^3$, tout plan est un hyperplan, dans $\mathbb{K}^2$, ce sont les droites (ces sous-espaces vectoriels sont usuellement décrits par *une* équation).
2. Dans $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si $a \in \mathbb{R}$, le sous-espace vectoriel défini par :

$$F_a = \{f \in E,\ f(a) = 0\}$$

est un hyperplan d'équation : $f(a) = 0$. F_a est de plus de codimension 1, car :

$$E = F_a \oplus \underbrace{\mathbb{K}.(x \mapsto 1)}_{\text{de dimension 1}}$$

en effet :

$$\forall f \in E,\ f = \underbrace{(f - f(a))}_{\in F_a} + \underbrace{f(a)}_{\in \mathbb{K}.(x \mapsto 1)}$$

et cette écriture est clairement unique.

Proposition 1.12 – Caractérisation des hyperplans

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, H un sous-espace vectoriel de E, alors :

$$\boxed{H \text{ hyperplan de } E \iff \operatorname{codim} H = 1}$$

Démonstration

— ($\Rightarrow$) Soit $\varphi(x)=0$ une équation de H, comme φ est non nulle, on peut trouver un vecteur $a\in E$, tel que $\varphi(a)\neq 0$. Alors :

$$\forall x\in E,\ x=\underbrace{\left(x-\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}.a\right)}_{\in H}+\underbrace{\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}.a}_{\in\mathbb{K}.a}$$

donc

$$E=H\oplus\mathbb{K}.a,\ \text{car } a\notin H$$

— ($\Leftarrow$) Si $E=H\oplus\mathbb{K}.a$, $a\in E\setminus\{0_E\}$, alors, on peut prendre comme forme linéaire associée à H :

$$\varphi \text{ telle que } \varphi_{|_H}=0_{H^\star} \text{ et } \varphi(a)=1$$

Remarque 1.35

Si E est de dimension finie, les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de dimension $\dim E-1$.

当E的维数为n时，超平面是E的$n-1$维子空间，不同的线性泛函对应不同的超平面。

Exemple 1.26 – Hyperplans

1. Dans $\mathbb{R}^2$, une équation de la droite (hyperplan) engendrée par $(1,2)$ est, par exemple :

$$2\,x-y=0$$

2. Dans $\mathbb{R}^3$, une équation du plan (hyperplan) engendré par $(1,1,0)$ et $(-1,0,2)$ est, par exemple :

$$2\,x-2\,y+z=0$$

3. Dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, un supplémentaire de la droite engendrée par $x\mapsto x$, pourrait être donné par une équation du type :

$$f(a)=0 \text{ si } a\neq 0$$

Théorème 1.8 – Faisceaux d'hyperplans

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in E^{\star n}$, alors

$$\forall \psi \in E^\star,\ \psi \in \operatorname{Vect}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}) \iff \operatorname{Ker}(\psi) \supset \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker}(\varphi_k)$$

Démonstration

— ($\Rightarrow$) Immédiat.

— ($\Leftarrow$) Par récurrence sur n.

(*Initialisation*) : si $n = 1$ et $\operatorname{Ker}(\psi) \supset \operatorname{Ker}(\varphi)$, si φ est nulle, ψ l'est aussi. Si φ est non nulle, alors, il existe un vecteur $a \in E$, $\varphi(a) \neq 0$. Alors :

$$\psi = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}.\varphi$$

Il suffit de le vérifier pour $x = h + \lambda.a$, où $h \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(*Hérédité*) : supposons le résultat vrai au rang $p \geq 1$, soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p+1})$ des formes linéaires de E et $\psi \in E^\star$ telle que :

$$\operatorname{Ker}(\psi) \supset \bigcap_{k=1}^{p+1} \operatorname{Ker}(\varphi_k)$$

Si φ_{p+1} est nulle, c'est terminé. Supposons donc φ_{p+1} non nulle et posons $H = \operatorname{Ker}(\varphi_{p+1})$. On a alors

$$\operatorname{Ker}(\psi_{|_H}) \supset \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}({\varphi_k}_{|_H})$$

on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence qui nous donne :

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \psi_{|_H} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.{\varphi_k}_{|_H}$$

On a alors :

$$\operatorname{Ker}\left(\psi - \left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\varphi_k\right)\right) \supset \operatorname{Ker}(\varphi_{p+1})$$

donc, d'après l'initialisation :

$$\exists \lambda_{p+1} \in \mathbb{K},\ \psi = \sum_{k=1}^{\mathbf{p+1}} \lambda_k.\varphi_k$$

Exemple 1.27 – Hyperplans de $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$, les hyperplans sont des plans et on a la situation géométrique de la figure 1.7, de la présente page. Notons $H_1 = \mathrm{Ker}(\varphi_1)$, $H_2 = \mathrm{Ker}(\varphi_2)$, si φ_1 et φ_2 sont indépendantes, les deux plans se coupent suivant la droite D. Soit K un plan contenant D (comme sur le dessin), où $K = \mathrm{Ker}(\psi)$, le théorème nous assure alors que :

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0),\ \psi = \lambda_1.\varphi_1 + \lambda_2.\varphi_2$$

Le plan K a donc pour équation :

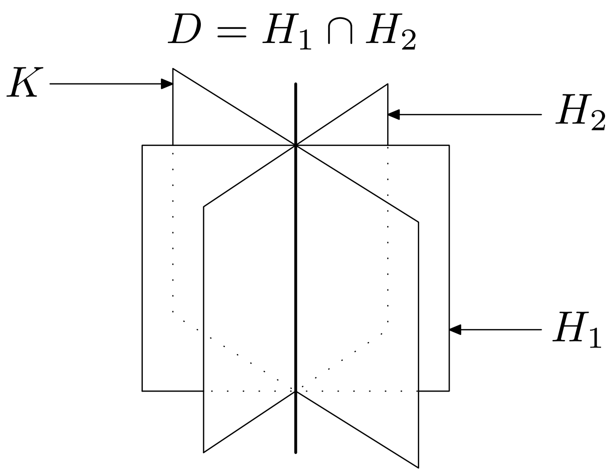
$$(K) \qquad \lambda_1\,\varphi_1(x) + \lambda_2\,\varphi_2(x) = 0$$

Cette équation est définie à un coefficient de proportionnalité près, donc

$$\cos(\theta)\,\varphi_1(x) + \sin(\theta)\,\varphi_2(x) = 0$$

est l'équation de K, pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$, (qui vérifie $\cos(\theta) = \lambda_1/\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$, et $\sin(\theta) = \lambda_2/\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$).

Figure 1.7 – Hyperplans de $\mathbb{R}^3$



Remarque 1.36

Le résultat de cette proposition est particulièrement intéressant en géométrie affine. Ainsi si $\mathcal{H}_1$, ..., $\mathcal{H}_p$ sont des hyperplans affines (espaces affines ayant pour directions des hyperplans vectoriels) d'intersection non vide (soit A un point de l'intersection), d'équations :

$$(\mathcal{H}_1) \quad \varphi_1(\overrightarrow{A_1 M}) = 0, \dots, (\mathcal{H}_p) \quad \varphi_p(\overrightarrow{A_p M}) = 0$$

alors, pour tout hyperplan $\mathcal{H}$ d'équation $\psi(\overrightarrow{AM}) = 0$, contenant cette intersection,

$$\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \ \psi = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\varphi_k$$

Exemple 1.28 – Utilisation des faisceaux d'hyperplans

Soit $V = \mathbb{R}^3$, l'espace usuel muni de sa structure affine euclidienne usuelle. Soit D une droite affine et A un point, cherchons les plans tangents à la sphère de centre A de rayon 1, contenant D. Par exemple : Soit D la droite définie par : $4\,x+y+z=0$, $2\,x+5\,y+3\,z+4=0$. Cherchons le plan P contenant D tel que P soit à une distance 1 du point $(1,1,1)$.
On va chercher le plan demandé sous la forme :

$$(P) \qquad \cos(\theta)\,(4\,x+y+z) + \sin(\theta)\,(2\,x+5\,y+3\,z+4) = 0$$

Pour trouver θ, il suffit d'écrire $d((1,1,1), P) = 1$.

Théorème 1.9 – Mise en équation des sous-espaces de codimensions finies

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit E_1 un sous-espace de E, alors, pour $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{\operatorname{codim}(E_1) = p \iff \begin{cases} \exists(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in E^{\star p}, \ \textit{indépendantes} \\ E_1 = \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(\varphi_k) \end{cases}}$$

此定理是超平面性质的拓展。

Démonstration

($\Rightarrow$) Si $\operatorname{codim}(E_1) = p$, on peut, par définition trouver un supplémentaire F de dimension p, et une base de F : $(e_1, \dots, e_p)$.
Construisons alors, pour $k \in [\![1, p]\!]$, la forme linéaire

$$\varphi_k \text{ définie par } \begin{cases} \varphi_k|_{E_1} = 0_{E_1^\star} \\ \forall j \in [\![1, p]\!]\,,\ j \neq k,\ \varphi_k(e_j) = 0 \\ \varphi_k(e_k) = 1 \end{cases}$$

Alors, $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ sont indépendantes et

$$E_1 = \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(\varphi_k)$$

($\Leftarrow$) Par récurrence sur p.
(*Initialisation*) C'est la proposition caractérisant les hyperplans comme les espaces de codimension 1.
(*Hérédité*) Supposons le résultat vrai au rang p et prenons $p+1$ formes linéaires *indépendantes*, $(\varphi_1, \dots, \varphi_{p+1})$ et posons :

$$E_1 = \bigcap_{k=1}^{p+1} \operatorname{Ker}(\varphi_k) \text{ et } E_2 = \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(\varphi_k) \text{ alors } E_1 = E_2 \cap \operatorname{Ker}(\varphi_{p+1})$$

D'après l'hypothèse de récurrence, nous savons que E_2 est de codimension p. Soit F un supplémentaire de E_2 dans E de dimension p.
De plus,

$$\varphi_{p+1} \notin \operatorname{Vect}(\{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}) \ \Rightarrow\ E_2 \not\subset \operatorname{Ker}(\varphi_{p+1})$$

On peut donc trouver un vecteur $a \in E_2 \setminus E_1$. Il reste à montrer que :

$$E = E_1 \oplus \underbrace{\mathbb{K}.a \oplus F}_{\text{de dimension } p+1}$$

Or, on a

$$E = \operatorname{Ker}(\varphi_{p+1}) \oplus \mathbb{K}.a$$

donc, en utilisant la première question de l'exercice 1.4.2, page 26, on obtient, puisque $a \in E_2$

$$E_2 = (E_2 \cap \operatorname{Ker}(\varphi_{p+1})) \oplus (E_2 \cap \mathbb{K}.a)\,,\ \text{soit } E_2 = E_1 \oplus \mathbb{K}.a$$

Remarque 1.37

C'est ainsi que l'on retrouve que dans l'espace, les droites sont définies par 2 équations.

Remarque 1.38

Que se passe-t-il lorsque les formes linéaires (et donc les équations) ne sont pas indépendantes ? Il est immédiat que :

$$\boxed{\operatorname{codim}(E_1) = \operatorname{rang}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)}$$

Remarque 1.39

En dimension finie, cela permet de calculer des dimensions. On dit souvent que :

— la dimension de l'espace est le *nombre de degrés de liberté* ;
— le nombre d'équations indépendantes est le *nombre de contraintes* ;
— la dimension du sous-espace vectoriel est donc égale à « nombre de degré de liberté − nombre de contraintes ».

Cette relation n'est valable qu'avec des contraintes *linéaires* !

Remarque 1.40

Le théorème se généralise facilement à la situation affine. Cependant, l'intersection d'hyperplans affines peut-être vide, aussi faut-il, avant toutes choses, s'assurer qu'elle ne l'est pas ! Puis, en s'appuyant sur un point trouvé de l'intersection, on est ramené au cas vectoriel.

Proposition 1.13

Soit V un espace affine de direction un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ sont des formes linéaires de E indépendantes, *et si $\mathcal{H}_k$ est un hyperplan affine de direction $\operatorname{Ker} \varphi_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, alors :*

$$\bigcap_{k=1}^{p} \mathcal{H}_k \neq \emptyset$$

Démonstration

Laissé en exercice.

Exercice(s) 1.14

1.14.1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $(x_1, \dots, x_p)$ des vecteurs de E. Démontrer que :

$$(x_1, \dots, x_p) \text{ libre } \iff \left[\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \exists \varphi \in E^\star,\ \forall k \in [\![1, p]\!],\ \varphi(x_k) = \lambda_k\right]$$

1.14.2 (a) $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est-il un hyperplan de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

(b) Démontrer que $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est isomorphe à un hyperplan de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1.14.3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit V un sous-espace vectoriel de $E^\star$. On dit que V *sépare les vecteurs*, si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \neq y \Rightarrow \left[\exists \varphi \in V,\ \varphi(x) \neq \varphi(y)\right]$$

Démontrer que V sépare les vecteurs si, et seulement si, $V = E^\star$.

1.14.4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour $A \in \mathscr{P}(E)$, on appelle *orthogonal (direct) de* A et on note :

$$A^\perp = \{\varphi \in E^\star,\ \forall a \in A,\ \varphi(a) = 0\}$$

Démontrer que :

(a) $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $E^\star$.

(b) $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.

Dans la suite A et B sont des sous-espaces vectoriels de E.

(c) $(A \cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$.

(d) $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

(e) Si $E = A \oplus B$, alors $A^\perp$ est isomorphe à $B^\star$.

(f) Si E est de dimension finie, alors $\dim A^\perp = \mathrm{codim}\, A$.

1.14.5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $B \in \mathscr{P}(E^\star)$, on appelle *orthogonal (indirect) de* B et on note :

$$B^\top = \{x \in E,\ \forall \varphi \in B,\ \varphi(x) = 0\}$$

Démontrer que :

(a) $B^\top$ est un sous-espace vectoriel de E.

(b) $B^\top = \mathrm{Vect}(B)^\top$.

Dans la suite, A et B sont des sous-espaces vectoriels de $E^\star$.

(c) $(A+B)^\top = A^\top \cap B^\top$.

(d) $(A \cap B)^\top \supset A^\top + B^\top$.

(e) Si E est de dimension finie, alors

$$\dim B^\top = \operatorname{codim} B$$

(f) En déduire que l'inclusion de la question (d) est une inégalité en dimension finie.

(g) Donner un contre-exemple à l'égalité dans la question (d) lorsque E est de dimension infinie.

(h) Si A est un sous-espace vectoriel de E, comparer :

$$A \text{ et } \left(A^\perp\right)^\top$$

(i) Si B est un sous-espace vectoriel de $E^\star$, comparer :

$$B \text{ et } \left(B^\top\right)^\perp$$

1.14.6 Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $u \in \mathscr{L}(E, E')$. On définit l'application *transposée de* u et on note :

$$^t u \ : \begin{cases} E'^\star \to E^\star \\ \varphi \mapsto \varphi \circ u \end{cases}$$

(a) Démontrer que $\,^t(u \circ v) = \,^t u \circ \,^t v$.

(b) Démontrer que :

$$\mathrm{Ker}(\,^t u) = \mathrm{Im}(u)^\perp$$

(c) Démontrer que :

$$\mathrm{Im}(\,^t u) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$$

1.4 Applications

1.4.1 Systèmes linéaires

注释 1.8

常见的一类线性系统应用问题是解线性方程组。本小节的结果也适用于其他线性系统问题。

Ce paragraphe, très simple, est *fondamental* ! Nous nous en servirons très souvent !

Définition 1.27 – Système linéaire

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E, E')$ et $e' \in E'$, on appelle *système linéaire* l'équation d'inconnue $x \in E$:

$$(\mathcal{S}) \qquad u(x) = e'$$

L'ensemble :

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) = \{x \in E,\ u(x) = e'\}$$

est appelé *ensemble des solutions de* $(\mathcal{S})$.

Exemple 1.29

Pour $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ définie par $u(x) = (x, x)$ et pour $e' = (1, 2)$, on a $\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) = \emptyset$.

Propriété 1.43

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E, E')$ et $e' \in E'$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) \neq \emptyset$, appelée *condition de compatibilité de* $(\mathcal{S})$ est :

$$\boxed{e' \in \mathrm{Im}(u)}$$

Démonstration

Si $\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) \neq \emptyset$, il existe $x \in E$ tel que $u(x) = e'$, en particulier $e' \in \mathrm{Im}\, u$.
Si $e' \in \mathrm{Im}\, u$, il existe $x \in E$ tel que $e' = u(x)$, donc $\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) \neq \emptyset$.

Définition 1.28 – Système linéaire homogène

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E, E')$ et $e' \in E'$. Si $e' = 0_{E'}$, le système est dit *homogène*. Dans ce cas,

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) = \mathrm{Ker}(u) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E$$

En particulier, $\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) \neq \emptyset$.

Définition 1.29 – Système linéaire homogène associé

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E, E')$ et $e' \in E'$. Si $e' \neq 0_{E'}$, le système :

$$(\mathcal{H}) \qquad u(x) = 0_{E'}$$

est dit *système homogène associé de* $(\mathcal{S})$.

Propriété 1.44

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E, E')$ et $e' \in E'$. Si $x_0 \in \mathrm{Sol}(\mathcal{S})$ existe alors :

$$\boxed{\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) = x_0 + \mathrm{Ker}(u)}$$

$\mathrm{Sol}(\mathcal{S})$ est un espace affine de direction $\mathrm{Ker}(u)$.

线性系统的解集为系统的一个特解加线性映射的核空间，即仿射空间。

Démonstration

Soit $x_0 \in \mathrm{Sol}(\mathcal{S})$.

— Soit $x \in \mathrm{Sol}(\mathcal{S})$. On a $u(x) = e' = u(x_0)$ donc $u(x - x_0) = 0_{E'}$ et donc $x - x_0 \in \operatorname{Ker} u$. On a donc bien $x \in x_0 + \operatorname{Ker}(u)$.

— Soit $x = x_0 + y \in x_0 + \operatorname{Ker}(u)$ (donc $y \in \operatorname{Ker} u$). On a $u(x) = u(x_0) + u(y) = e' + 0_{E'} = e'$ donc $x \in \mathrm{Sol}(\mathcal{S})$.

Par double inclusion, $\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) = x_0 + \operatorname{Ker}(u)$.

Propriété 1.45 – Principe de superposition des solutions

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E, E')$ et $e' \in E'$. Si e' s'écrit comme une somme :

$$e' = \sum_{k=1}^{p} e'_k, \text{ où pour tout } k \in [\![1, p]\!]\,,\ e'_k \in \operatorname{Im}(u)$$

Si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, x_k est une solution du système linéaire :

$$(\mathcal{S}_k) \qquad u(x) = e'_k$$

alors une solution de $(\mathcal{S})$ est

$$\sum_{k=1}^{p} x_k$$

Démonstration

C'est immédiat par linéarité de u :

$$u(x) = u\Big(\sum_{k=1}^{p} x_k\Big) = \sum_{k=1}^{p} u(x_k) = \sum_{k=1}^{p} e'_k = e'$$

donc $x \in \mathrm{Sol}(\mathcal{S})$.

Exemple 1.30 – Systèmes linéaires

1. Les systèmes de n équations à p inconnues $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$:

$$\begin{cases} a_{1,1}\, x_1 + \cdots + a_{1,p}\, x_p & = b_1 \\ \quad\vdots & \\ a_{n,1}\, x_1 + \cdots + a_{n,p}\, x_p & = b_n \end{cases} \quad \text{où les } a_{i,j} \text{ et les } b_i \text{ sont des scalaires}$$

2. Les équations différentielles linéaires du premier ordre :

$$y' + a(x)\, y = b(x),\ \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont continues sur } I$$

3. Les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants :

$$y'' + a\, y' + b\, y = c(x),\ \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des scalaires et } c \text{ est continue sur } I$$

4. Les équations récurrentes :

$$u_{n+1} + a_n\, u_n = b_n,\ \text{ où } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont dans } \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

Exercice(s) 1.15

1.15.1 Soit l'équation récurrente :

$$(\mathcal{S}) \qquad (n+1)\, u_{n+1} - (4\, n + 2)\, u_n = 1 - 3\, n^2$$

(a) Démontrer que c'est bien un système linéaire en précisant E, E' et u.
(b) Justifier l'existence de solutions.
(c) Écrire le système homogène associé et le résoudre.
(d) En utilisant une méthode de variation de la constante, trouver toutes les solutions de $(\mathcal{S})$.

1.15.2 Soit l'équation différentielle :

$$(\mathcal{S}) \qquad y'' + 3\, y' + 2\, y = \sqrt{x}$$

(a) Démontrer que c'est bien un système linéaire en précisant E, E' et u.
(b) Justifier l'existence de solutions.

(c) Écrire le système homogène associé et le résoudre.

(d) Trouver toutes les solutions de $(\mathcal{S})$.

(e) Comparer aux solutions du système récurrent obtenu par discrétisation :

$$(u_{n+2} - 2\,u_{n+1} + u_n) + 3\,(u_{n+1} - u_n) + 2\,u_n = \sqrt{n}$$

1.4.2 Interpolation

Proposition 1.14 – Interpolation de Lagrange

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_1 < \cdots < x_n$ des réels dans I, on appelle fonction polynomiale d'interpolation de Lagrange *l'unique fonction polynomiale P de degré $< n$, telle que*

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ P(x_k) = f(x_k)$$

Elle est égale à :

$$\boxed{\forall x \in I,\ P(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=1,\ i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) f(x_k).}$$

多项式插值函数用作函数的数值模拟。

Démonstration

Soit

$$E = \{f \text{ polynomiale de degré } < n\}$$

Cet espace vectoriel est clairement de dimension n, de base

$$\left(x \mapsto x^k\right)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$$

La famille de $E^\star$ définie par :

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \varphi_k\ : P \mapsto P(x_k)$$

étant une base de $E^\star$, on sait qu'il existe une base ante-duale $(P_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ qui vérifie :

$$\forall (j,k)\in [\![1,n]\!]^2\,,\ \varphi_k(x\mapsto x^j)=\delta_{j,k}$$

Un calcul simple nous démontre que :

$$\forall k\in [\![1,n]\!]\,,\ P_k=\prod_{i=1,\ i\neq k}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

On cherche ensuite une solution sous la forme :

$$P=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.P_k$$

en évaluant sur les x_j, on trouve l'unique solution de l'énoncé.

Exemple 1.31 – Interpolation de Lagrange

Soit la fonction sin sur l'intervalle $[0,2\pi]$, pour un $p\in\mathbb{N}^*$, prenons

$$\forall k\in [\![0,p]\!]\,,\ x_{k,p}=\frac{2k\,\pi}{p}$$

et regardons les interpolations pour différentes valeurs de p. Voir la session `Wxmaxima` 1.3, de la présente page.

Session `Wxmaxima` 1.3 – Interpolation de Lagrange

```
(%i1) x(k,p) := 2*k*%pi/p$
(%i2) load(interpol)$
(%i3) for p:3 thru 5 do
      P[p] : lagrange(makelist([x(k,p),sin(x(k,p))],k,0,p));
```

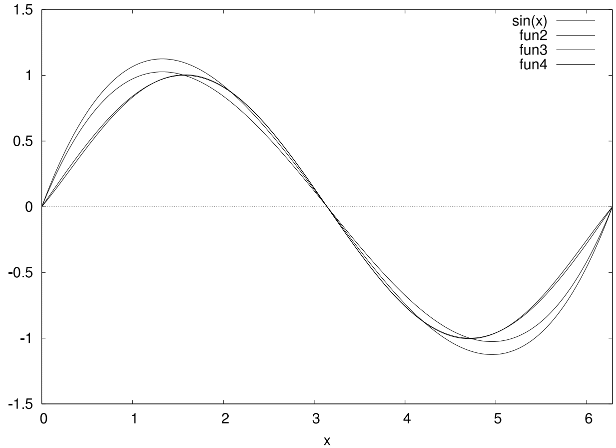
(%o3) *done*

```
(%i4) makelist(P[p],p,3,5);
```

(%o4) $\left[\frac{3^{\frac{7}{2}}\,x\,(x-2\,\pi)\,\left(x-\frac{2\,\pi}{3}\right)}{32\,\pi^3}+\frac{3^{\frac{7}{2}}\,x\,(x-2\,\pi)\,\left(x-\frac{4\,\pi}{3}\right)}{32\,\pi^3},\frac{8\,x\,(x-2\,\pi)\,(x-\pi)\,\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{3\,\pi^4}-\frac{8\,x\,(x-2\,\pi)\,\left(x-\frac{3\,\pi}{2}\right)\,(x-\pi)}{3\,\pi^4},-\frac{3125\sin\left(\frac{8\,\pi}{5}\right)\,x\right.$

$$\frac{3125\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)\,x\,(x-2\pi)\,\left(x-\frac{8\pi}{5}\right)\,\left(x-\frac{4\pi}{5}\right)\,\left(x-\frac{2\pi}{5}\right)}{384\,\pi^5} - \frac{3125\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\,x\,(x-2\pi)\,\left(x-\frac{8\pi}{5}\right)\,\left(x-\frac{6\pi}{5}\right)\,\left(x-\frac{2\pi}{5}\right)}{384\,\pi^5} + \frac{3125\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\,x\,(x-2\pi)\,\left(x-\frac{8\pi}{5}\right)\,\left(x-\frac{6\pi}{5}\right)\,\left(x-\frac{4\pi}{5}\right)}{768\,\pi^5}]$$

```
(%i5) plot2d([sin(x),P[3],P[4],P[5]],[x,0,2*%pi])$
```



Session Python 1.4 – Interpolation de Lagrange

Traduction du Wxmaxima.

In[2]

```
def xk(k, m):  # Éviter le nom x !
    return(2*k*pi/m)
```

In[3]

```
[interpolate([(xk(k, m),
               sin(xk(k, m)))
              for k in range(0, m+1)], x)
 for m in range(3, 6)]
```

Out[3]

$$\left[\frac{27\sqrt{3}x^3}{16\pi^3} - \frac{81\sqrt{3}x^2}{16\pi^2} + \frac{27\sqrt{3}x}{8\pi},\ \frac{8x^3}{3\pi^3} - \frac{8x^2}{\pi^2} + \frac{16x}{3\pi},\ -\frac{3125x^5\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}}}{192\pi^5} + \frac{3125x^5\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{8}+\frac{5}{8}}}{384\pi^5} - \frac{15625x^4\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{8}+\frac{5}{8}}}{384\pi^4} + \frac{15625x^4\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}}}{192\pi^4} - \frac{1125x^3\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}}}{8\pi^3} + \frac{875x^3\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{8}+\frac{5}{8}}}{12\pi^3} - \frac{5375x^2\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{8}+\frac{5}{8}}}{96\pi^2} + \frac{4625x^2\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}}}{48\pi^2} - \frac{125x\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}}}{6\pi} + \frac{125x\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{8}+\frac{5}{8}}}{8\pi}\right]$$

In[4]

```
Mp = plot(sin(x), (x, 0, 2*pi),
          show=False, line_color='red')
```

In[5]

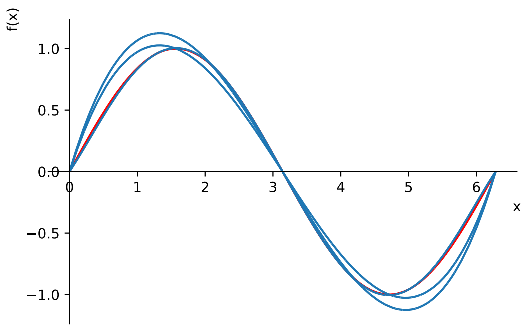
```
for q in _:
    Mp.append(
        plot(q, (x, 0, 2*pi),
             show=False)[0])
```

In[6]

```
Mp.show()
```

Voir la figure 1, de la présente page.

Figure 1



Exercice(s) 1.16

1.16.1 Redémontrer l'existence et l'unicité des fonctions polynomiales d'interpolation de Lagrange en utilisant un raisonnement sur les systèmes linéaires.

1.16.2 Soit $f : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathscr{C}^1$, soit $x_1 < \cdots < x_n$ des points de I. Démontrer l'existence et l'unicité d'une fonction polynomiale P de degré $< 2\,n$, telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ P(x_k) = f(x_k) \text{ et } P'(x_k) = f'(x_k)$$

1.16.3 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $L_p(f)$ la fonction polynomiale d'interpolation de Lagrange de

f pour les points :

$$x_{k,p} = a + k\,\frac{b-a}{p},\ k \in [\![0,p]\!]$$

On suppose que :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in [a,b],\ \forall k \in \mathbb{N},\ \left|f^{(k)}(x)\right| \leq M$$

Démontrer que :

$$\sup_{x\in[a,b]} \left|L_p(f)(x) - f(x)\right| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

1.16.4 Soit $f : x \mapsto |x|$, définie sur $[-1,1]$. Pour $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, on pose $L_p(f)$ la fonction polynomiale d'interpolation de Lagrange de f pour les points :

$$x_{k,p} = -1 + \frac{2k}{p},\ k \in [\![1, p-1]\!]$$

Démontrer que :

$$L_p(f)(1) \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$$

1.4.3 Fonctions *spline*

Remarque 1.41

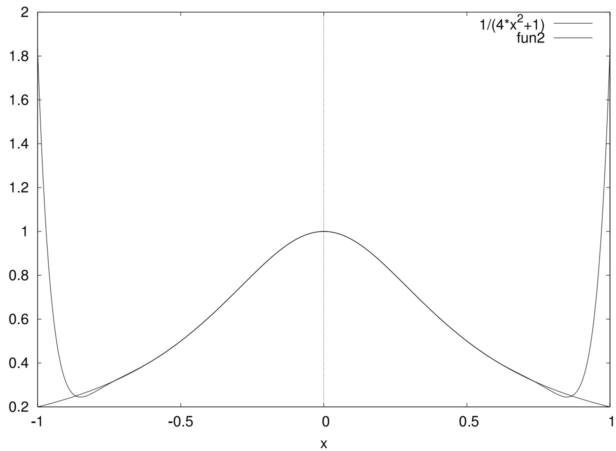
L'interpolation par les polynômes de Lagrange n'est pas toujours efficace pour être proche de la fonction de base. Voir la session `Wxmaxima` 1.4, de la présente page.

Session `Wxmaxima` 1.4 – Phénomène de Runge

```
(%i1)  load(interpol)$
```

```
(%i2) f(x) := 1/(1+4*x^2)$
      X(n) := makelist(-1+2*k/n,k,1,n-1)$
      Pts(m) := makelist([X(m)[k],f(X(m)[k])],k,1,m-1)$
      g(n) := lagrange(Pts(n))$

(%i6) plot2d([f(x),g(15)],[x,-1,1])$
```



Session Python 1.5 – Phénomène de Runge

Traduction du Wxmaxima.

In[2]

```python
def f(x):
    return(1/(1+4*x**2))


def xk(n):
```

```
    return([-1+S(2)*k/n for k in range(1, n)])


def Pts(m):
    return([(xk(m)[k], f(xk(m)[k]))
            for k in range(m-1)])


def g(n):
    return(interpolate(Pts(n), x))
```

In[3]

```
Mp = plot(f(x), (x, -1, 1), show=False,
          line_color='red')
Mp.append(plot(g(15), (x, -1, 1),
               show=False)[0])
Mp.show()
```

Voir la figure 2, page suivante.

Remarque 1.42

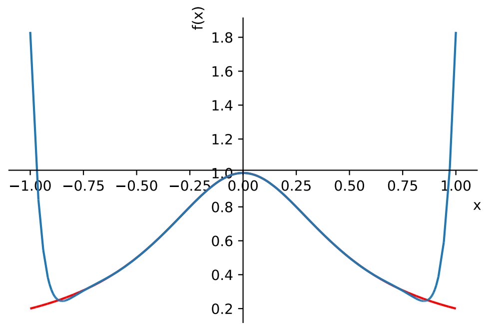
C'est pourquoi, il a fallu faire appel à d'autres classes de fonctions telles que :

- elles soient faciles à calculer ;
- elles approximent bien la fonction initiale ;
- elles soient insensibles à ce phénomène de divergence.

Définition 1.30 – Fonctions spline

On appelle *fonctions spline*, des fonctions qui ont une classe fixée (par exemple $\mathscr{C}^2$) et qui sont polynomiales par morceaux.

Figure 2



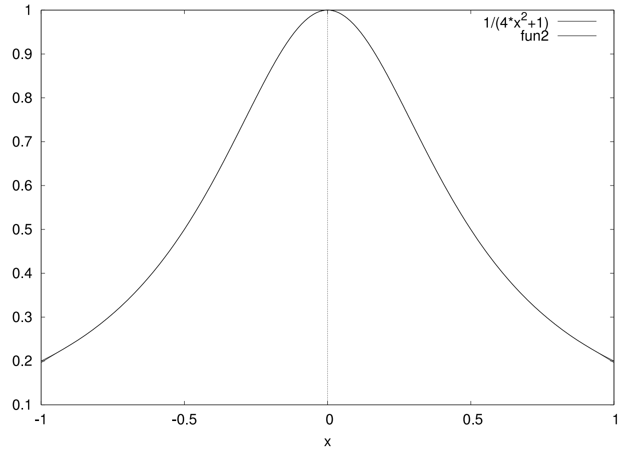
Exemple 1.32 – Fonction spline

Voici ce que donne l'approximation avec 30 points (pour Lagrange, cela diverge). Voir la session `Wxmaxima` 1.5, de la présente page.

Session `Wxmaxima` 1.5 – Fonctions spline

```
(%i1)  f(x) := 1/(1+4*x^2)$
       X(n) := makelist(-1+2*k/n,k,1,n-1)$
       Pts(n) := makelist([X(n)[k],f(X(n)[k])],k,1,n-1)$
       load(interpol)$

(%i5)  h(n) := cspline(Pts(n))$
       plot2d([f(x),h(30)],[x,-1,1])$
```



Session `Python` 1.6 – Fonctions spline

Traduction du `Wxmaxima`.

Pour faire comme en `Wxmaxima`, il faut choisir des *spline* cubiques.

In[4]

```
def h(n):
    return(
        interpolating_spline(
            3, x,
            [Pts(n)[k][0] for k in range(n-1)],
            [Pts(n)[k][1] for k in range(n-1)]))
```

In[5]

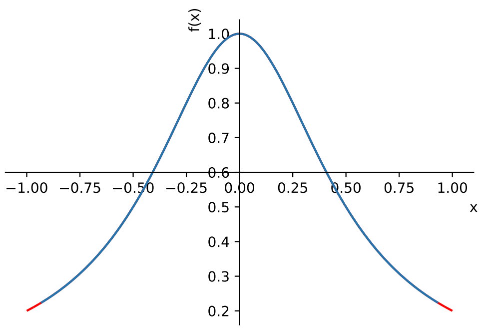
```
res = h(30)
```

In[6]

```
Mp = plot(f(x), (x, -1, 1),
          show=False, line_color='red')
Mp.append(plot(res, (x, -1, 1),
               show=False)[0])
Mp.show()
```

Voir la figure 3, de la présente page.

Figure 3



Chapitre 2

Matrices et systèmes linéaires

2.1 Matrices

2.1.1 Définitions

注释 2.1

本章节从线性空间中向量的基底表示法出发，得出了在基底确定的有限维线性空间中的线性映射，可以用惟一对应的矩阵来表示，进而引出矩阵的定义和运算，本章节是上一章节的延续。

Rappel 2.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, alors :

$$\forall x \in E,\ \exists!(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum_{k=1}^{p} x_k.e_k$$

Autrement dit, en utilisant la dualité, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $x_k = e_k^\star(x)$.

Rappel 2.2

Soit E et E' deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathscr{E}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ des bases de E et E, $f \in \mathscr{L}(E, E')$, alors :

$$\exists!(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathbb{R}^{n\times p},\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]\ ,\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.e'_i$$

Autrement dit, en utilisant la dualité, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{i,j} = (e'_i)^\star(u(e_j))$.
Pour tout $x \in E$, on a donc :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j.\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.e'_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, x_j\right).e'_i$$

Définition 2.1 – Matrice

On appelle *matrice à n lignes et p colonnes* $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, toute famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ d'éléments d'un ensemble A représentée sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes entouré par des crochets [a] :

$$M = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}$$

Les éléments $a_{i,j}$ de la matrice s'appellent *coefficients de la matrice.*
On dit aussi que la matrice M est $n \times p$.
L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans A se note :

$$\mathrm{M}_{n,p}(A)$$

Lorsque $n = p$, on dit que la matrice M est une *matrice carrée*. L'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans A se note :

$$\mathrm{M}_n(A)$$

a. On trouve aussi souvent des parenthèses (), mais nous utiliserons les crochets [] pour différencier familles et matrices.

当 $A=\mathbb{R}$ 时, $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 表示实 n 阶矩阵 (方阵) 的集合。

Définition 2.2 – Matrice d'un vecteur, d'une application linéaire

1. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p, si $\mathscr{E}=(e_1,\dots,e_p)$ est une base de E et si x est un vecteur de E, alors on appelle *matrice de x dans la base $\mathscr{E}$* et on note :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(x) \overset{\text{Not}}{=} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \text{ où } x=\sum_{k=1}^{n} x_k.e_k$$

On dit que M est une *matrice colonne.*

2. Si E et E' sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f\in\mathscr{L}(E,E')$, si $\mathscr{E}=(e_1,\dots,e_p)$ est une base de E, si $\mathscr{E}'=(e'_1,\dots,e'_n)$ est une base de E', alors on appelle *matrice de f dans les bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$* et on note :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f)=\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix} \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ où pour tout } j\in[\![1,p]\!]\,,\ f(e_j)=\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.e'_i$$

> Noter que n le nombre de lignes est la dimension de l'espace *d'arrivée* et p le nombre de colonnes est la dimension de l'espace de *départ* !

3. Réciproquement, si $A=[a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}\in\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on peut lui associer *canoniquement* l'application linéaire f définie sur $\mathbb{K}^p$ (de base canonique $(e_1,\dots,e_p)$) à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ (de base canonique $(e'_1,\dots,e'_n)$) telle que :

$$\forall j\in[\![1,p]\!]\,,\ f(e_j)=\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.e'_i$$

4. Dans le cas particulier d'un endomorphisme ($E=E'$, $\mathscr{E}=\mathscr{E}'$ et $f\in\mathscr{L}(E)$), on appelle *matrice de f dans la base $\mathscr{E}$* et on note :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) \overset{\text{Not}}{=} \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}}(f)$$

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)$ est une matrice carrée (nombre de lignes=nombre de colonnes).

以上四个例子非常重要，是理解本章节的重要基础。

Exemple 2.1

Si $E = \mathbb{R}^2$ et f est la symétrie par rapport à $y = x$, parallèlement à $y = -x$ et si $\mathscr{E} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathscr{E}' = \{(1,1),(1,-1)\}$ et $\mathscr{E}'' = \{(1,1),(0,1)\}$, calculons $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f)$ en utilisant l'ordinateur.

Session `Wxmaxima` 2.1 – Matrice d'une application linéaire

f est une symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice, car les droites $y = x$ et $y = -x$ sont orthogonales. Donc :

1. L'expression de f s'obtient à l'aide de la formule des symétries orthogonales vue en première année :

```
(%i1) f(x,y) := [y,x];
```

(%o1) $\mathrm{f}(x,y) := [y,x]$

2. La matrice de cette application dans la base $\mathscr{E}$ (qui est orthonormée) s'obtient alors facilement :

```
(%i2) E : [[1,0],[0,1]];
```

(%o2) $[[1,0],[0,1]]$

```
(%i3) A : genmatrix(lambda([i,j],E[i].apply(f,E[j])),2,2);
```

(%o3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. La base $\mathscr{E}'$ est orthogonale, on peut donc facilement calculer la matrice dans cette base.

```
(%i4) Ep : [[1,1],[1,-1]];
```

(%o4) $[[1,1],[1,-1]]$

```
(%i5) B : genmatrix(lambda([i,j],(Ep[i]/(Ep[i].Ep[i])).apply(f,Ep[j])),2,2);
```

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

4. La base $\mathscr{E}''$ n'est pas orthogonale. Pour trouver la matrice dans cette base, il faut calculer.

```
(%i6) Es : [[1,1],[0,1]];
```

(%o6) $[[1,1],[0,1]]$

```
(%i7) solve(apply(f,a*Es[1]+b*Es[2])-(x*Es[1]+y*Es[2]),[x,y]);
```

(%o7) $[[x=b+a, y=-b]]$

```
(%i8) C : matrix([1,1],[0,-1]);
```

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

5. En fait, il suffit que la base d'arrivée soit orthonormée pour que le calcul soit simple, ainsi la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}'',\mathscr{E}}(f)$ vaut :

```
(%i9) D : genmatrix(lambda([i,j],E[i].apply(f,Es[j])),2,2);
```

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Session `Python` 2.1 – Matrice d'une application linéaire

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```
def f(x, y):
    return([y, x])
```

In[3]

```
A = Matrix([f(1, 0),
            f(0, 1)]).transpose()
```

```
A
```

Out[3]

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

Mieux : utiliser directement les notations usuelles !

In[4]

```
def f(X):
    return(Matrix([X[1], X[0]]))
```

In[5]

```
X = Matrix([x, y])
X, f(X)
```

Out[5]

$$\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}\right)$$

Attention aux ordres des éléments !

In[6]

```
Matrix([X.subs({x: 1, y: 2}),
        X.subs({x: 3, y: 4})]).reshape(2, 2)
```

Out [6]

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$$

Il faudra donc transposer [1] pour mettre plusieurs vecteurs en colonne ! (la méthode `.transpose()`)

In [7]

```
A = Matrix(3, 4, [4*i+j-4
                  for i in range(1, 4)
                  for j in range(1, 5)])
A
```

Out [7]

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\5 & 6 & 7 & 8\\9 & 10 & 11 & 12\end{bmatrix}$$

In [8]

```
A.transpose()
```

Out [8]

$$\begin{bmatrix}1 & 5 & 9\\2 & 6 & 10\\3 & 7 & 11\\4 & 8 & 12\end{bmatrix}$$

1. Voir la définition de la transposition, définition 2.5, page 138

In[9]

```
e1 = X.subs({x: 1, y: 0})
e2 = X.subs({x: 0, y: 1})
e1, e2
```

Out[9]

$$\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

In[10]

```
Matrix([f(e1),
        f(e2)]).reshape(2, 2).transpose()
```

Out[10]

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

In[11]

```
ep1 = X.subs({x: 1, y: 1})
ep2 = X.subs({x: 1, y: -1})
ep1, ep2
```

Out[11]

$$\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)$$

In[12]

```
ep1.dot(ep2)
```

Out[12]

$$0$$

In[13]

```
Matrix(2, 2,
       [f(ep1).dot(ep1)/ep1.dot(ep1),
        f(ep1).dot(ep2)/ep2.dot(ep2),
        f(ep2).dot(ep1)/ep1.dot(ep1),
        f(ep2).dot(ep2)/ep2.dot(ep2)]).transpose()
```

Out[13]

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

In[14]

```
es1 = X.subs({x: 1, y: 1})
es2 = X.subs({x: 0, y: 1})
```

```
es1, es2
```

Out[14]

$$\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

In[15]

```
[solve(f(es1)-x*es1-y*es2, [x, y]),
 solve(f(es2)-x*es1-y*es2, [x, y])]
```

Out[15]

$$[\{x:1,\ y:0\},\ \{x:1,\ y:-1\}]$$

In[16]

```
Matrix([X.subs(_[0]),
        X.subs(_[1])]).reshape(2, 2).transpose()
```

Out[16]

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}$$

2.1.2 Opérations sur les matrices

On a vu qu'il y a une correspondance entre $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{L}(E,E')$ via l'application

$$\begin{cases} \mathscr{L}(E,E') \to \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) \end{cases}$$

Puisque $\mathscr{L}(E,E')$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il est naturel de définir des opérations sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de manière à ce que $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que l'application ci-dessus soit un isomorphisme.

Définition 2.3 – Addition et multiplication externe

On définit les deux opérations suivantes sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

— *L'addition* [a] : si $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $B \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit $A+B \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}}_{=A} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,p} \end{bmatrix}}_{=B} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{bmatrix}}_{=A+B}$$

— *La multiplication externe* : si $\lambda \in \mathbb{K}$ et si $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit $\lambda.A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par

$$\lambda.\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}}_{=A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda\, a_{1,1} & \cdots & \lambda\, a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\, a_{n,1} & \cdots & \lambda\, a_{n,p} \end{bmatrix}}_{=\lambda.A}$$

---

a. Il faut que les dimensions des matrices A et B soient les mêmes !

Remarque 2.1

L'élément neutre pour l'addition de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelée la *matrice nulle*, notée $0_{n,p}$ et définie par

$$0_{n,p} \overset{\text{Not}}{=} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = [0]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$

Cette matrice correspond à l'application linéaire nulle $0_{\mathscr{L}(E,E')}$.
Lorsque $n = p$, on note

$$0_n \overset{\text{Not}}{=} 0_{n,n}$$

Proposition 2.1

L'ensemble $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni des deux opérations ci-dessus est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel isomorphe à $\mathscr{L}(E,E')$ pour tous $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et E', toute base $\mathscr{E}$ de E et toute base $\mathscr{E}'$ de E', via l'isomorphisme

$$\Phi : \begin{cases} \mathscr{L}(E,E') \to \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) \end{cases}$$

En particulier :

$$\dim \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n\,p$$

et

$$\forall (f,g) \in \mathscr{L}(E,E')^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(\lambda.f + \mu.g) = \lambda.\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) + \mu.\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(g)$$

Démonstration

- Il est immédiat que $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : c'est le même espace que $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p$ muni des opérations usuelles (il est donc de dimension finie $n\,p$).
- La linéarité de Φ est immédiate.
- Démontrons que Φ est injective. Soit $f \in \operatorname{Ker}\Phi$. On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) = 0_{n,p}$. Autrement dit, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et en notant $\mathscr{E} = (e_1,\ldots,e_p)$, les coefficients de $u(e_i)$ dans la base $\mathscr{E}'$ sont tous nuls. On a donc $u = 0_{\mathscr{L}(E,E')}$ et on en déduit que $\operatorname{Ker}\Phi = \{0_{\mathscr{L}(E,E')}\}$ donc Φ est injective.
- Φ est linéaire et injective entre deux espaces de même dimension, elle est bijective. C'est donc un isomorphisme. En

particulier, on retrouve le fait que

$$\dim \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \dim \mathscr{L}(E,E') = n\,p$$

et la propriété de linéarité

$$\forall (f,g) \in \mathscr{L}(E,E')^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(\lambda.f + \mu.g) = \lambda.\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) + \mu.\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(g)$$

Remarque importante 2.2

En dimension finie, connaître une application linéaire revient à connaître sa matrice dans des bases données. Ainsi, pour résoudre un problème d'algèbre linéaire en dimension finie, on peut travailler *géométriquement* avec les applications linéaires, ou bien *algébriquement* avec des matrices, en fonction de ce qui est le plus pertinent.

Remarque 2.3

Il existe une base naturelle de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée *base canonique*, donnée par

$$(E_{k,\ell})_{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$

avec

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]\,,\ E_{k,\ell} \overset{\text{Not}}{=} [\delta_{i,k}\,\delta_{j,\ell}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$

Autrement dit, le coefficient en (i,j) de $E_{k,\ell}$ est nul, sauf pour $(i,j) = (k,\ell)$ en lequel il vaut 1.
On a donc

$$\forall A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ A = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{p} a_{k,l}.E_{k,\ell}$$

Session Wxmaxima 2.2 – Addition et multiplication externe

```
(%i1) A : genmatrix(lambda([i,j], a[i,j]), 3, 4);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix}$

(%i2) B : genmatrix(lambda([i,j], b[i,j]), 3, 4);

(%o2) $$\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} \end{bmatrix}$$

(%i3) A+B;

(%o3) $$\begin{bmatrix} b_{1,1}+a_{1,1} & b_{1,2}+a_{1,2} & b_{1,3}+a_{1,3} & b_{1,4}+a_{1,4} \\ b_{2,1}+a_{2,1} & b_{2,2}+a_{2,2} & b_{2,3}+a_{2,3} & b_{2,4}+a_{2,4} \\ b_{3,1}+a_{3,1} & b_{3,2}+a_{3,2} & b_{3,3}+a_{3,3} & b_{3,4}+a_{3,4} \end{bmatrix}$$

(%i4) k*A;

(%o4) $$\begin{bmatrix} a_{1,1}\,k & a_{1,2}\,k & a_{1,3}\,k & a_{1,4}\,k \\ a_{2,1}\,k & a_{2,2}\,k & a_{2,3}\,k & a_{2,4}\,k \\ a_{3,1}\,k & a_{3,2}\,k & a_{3,3}\,k & a_{3,4}\,k \end{bmatrix}$$

Session `Python` 2.2 – Addition et multiplication externe

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```python
a = IndexedBase('a')
A = Matrix(3, 4,
           [a[i, j]
            for i in range(1, 4)
            # Noter l'ordre des boucles !!!
            for j in range(1, 5)])
A
```

Out [2]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix}$$

In [3]

```
b = IndexedBase('b')
B = Matrix(3, 4,
           [b[i, j]
            for i in range(1, 4)
            for j in range(1, 5)])
B
```

Out [3]

$$\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} \end{bmatrix}$$

In [4]

```
A+B
```

Out [4]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & a_{1,3} + b_{1,3} & a_{1,4} + b_{1,4} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & a_{2,3} + b_{2,3} & a_{2,4} + b_{2,4} \\ a_{3,1} + b_{3,1} & a_{3,2} + b_{3,2} & a_{3,3} + b_{3,3} & a_{3,4} + b_{3,4} \end{bmatrix}$$

In[5]

```
t*A
```

Out[5]

$$\begin{bmatrix} ta_{1,1} & ta_{1,2} & ta_{1,3} & ta_{1,4} \\ ta_{2,1} & ta_{2,2} & ta_{2,3} & ta_{2,4} \\ ta_{3,1} & ta_{3,2} & ta_{3,3} & ta_{3,4} \end{bmatrix}$$

Puisque la composition de deux applications linéaires est encore une application linéaire, il est naturel de chercher à comprendre quelle est l'opération correspondante sur les matrices.

Définition 2.4 – Produit de deux matrices

Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on définit le *produit de A par B* comme la matrice $A \centerdot B \in \mathrm{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par

$$\boxed{A \centerdot B \overset{\mathrm{Def}}{=} \left[\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\, b_{k,j}\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]}}$$

Voir la figure 2.1, page 213 [a].

a. Tiré de http://www.texample.net/tikz/examples/matrix-multiplication/

Il faut bien faire attention à ce que les dimensions des matrices soient *compatibles* : lorsque l'on veut faire le produit $A \centerdot B$, le nombre de colonnes de A *doit être égal* au nombre de lignes de B.

只有在矩阵A 的列数等于矩阵B 的行数时矩阵才可以相乘。 另外矩阵的乘法满足结合律和分配律，但不满足交换律。

Propriété 2.1 – Évaluation d'une application linéaire

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie (avec $p = \dim E$ et $n = \dim E'$), soit $\mathscr{E}$ une base de E et $\mathscr{E}'$ une base de E', soit $f \in \mathscr{L}(E, E')$ et soit $x \in E$. Alors

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}'}\left(f(x)\right)}_{\in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})} = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f)}_{\in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})} \boldsymbol{.} \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(x)}_{\in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})}$$

Autrement dit, le produit matriciel $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) \boldsymbol{.} \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(x)$ traduit le calcul de $f(x)$.

Démonstration

On reprend les notations des points 1 et 2 de la définition 2.2, page 117. On a

$$f(x) = f\Big(\sum_{j=1}^{p} x_j.e_j\Big) = \sum_{j=1}^{p} x_j.f(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j.\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e'_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, x_j\Big).e'_i$$

Autrement dit, $\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, x_j$ est le i-ième coefficient de $f(x)$ dans la base $\mathscr{E}' = (e'_1, \dots, e'_p)$. On a donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}'}\left(f(x)\right) = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, x_j$$

qui est par définition du produit matriciel le i-ième coefficient de la matrice colonne $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) \boldsymbol{.} \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(x)$, d'où le résultat.

Proposition 2.2 – Correspondance entre composition et produit matriciel

Soit E, E' et E'' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie ($p = \dim E$, $n = \dim E'$ et $q = \dim E''$), soit $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E}''$ des bases de E, E' et E'' et soit $f \in \mathscr{L}(E, E')$ et $g \in \mathscr{L}(E', E'')$. Alors

$$\boxed{\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}''}(g \circ f)}_{\in \mathrm{M}_{q,p}(\mathbb{K})} = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}',\mathscr{E}''}(g)}_{\in \mathrm{M}_{q,n}(\mathbb{K})} \boldsymbol{.} \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f)}_{\in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})}}$$

Autrement dit, le produit matriciel $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}',\mathscr{E}''}(g) \boldsymbol{.} \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f)$ traduit le calcul de $g \circ f$.

线性映射的复合引出了矩阵的乘法。

Démonstration

Notons $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_p)$. Soit $j \in [\![1,p]\!]$. La j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}''}(g \circ f)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}''}(g\circ f) \bullet \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(e_j) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}''}\big((g\circ f)(e_j)\big)\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}''}\big(g(f(e_j))\big)\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}',\mathscr{E}''}(g) \bullet \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}'}\big(f(e_j)\big)\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}',\mathscr{E}''}(g) \bullet \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) \bullet \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(e_j)\end{aligned}$$

en remarquant que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(e_j) \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ a des zéros partout sauf en position j et en utilisant plusieurs fois la propriété 2.1, page précédente. Finalement, les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}''}(g \circ f)$ et de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}',\mathscr{E}''}(g) \bullet \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f)$ sont les mêmes, ces deux matrices sont donc égales.

Remarque 2.4

Lorsque $p = n$, on appelle *matrice identité d'ordre* p et on note :

$$I_p \overset{\text{Not}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\delta_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$$

La matrice identité I_p correspond l'endomorphisme id_E, l'application identité de E (avec $p = \dim E$), dans n'importe quelle base de E.

I_n 叫做 n 阶单位矩阵。

Session Wxmaxima 2.3 – Produit de matrices

```
(%i13) A : genmatrix(lambda([i,j], a[i,j]), 4, 3);
```

(%o13) $\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{bmatrix}$

```
(%i1) B : genmatrix(lambda([i,j], b[i,j]), 3, 2);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix}$

```
(%i3) A.B;
```

(%o3) $\begin{bmatrix} a_{1,3} \times b_{3,1} + a_{1,2} \times b_{2,1} + a_{1,1} \times b_{1,1} & a_{1,3} \times b_{3,2} + a_{1,2} \times b_{2,2} + a_{1,1} \times b_{1,2} \\ a_{2,3} \times b_{3,1} + b_{2,1} \times a_{2,2} + b_{1,1} \times a_{2,1} & a_{2,3} \times b_{3,2} + a_{2,2} \times b_{2,2} + b_{1,2} \times a_{2,1} \\ b_{3,1} \times a_{3,3} + b_{2,1} \times a_{3,2} + b_{1,1} \times a_{3,1} & b_{3,2} \times a_{3,3} + b_{2,2} \times a_{3,2} + b_{1,2} \times a_{3,1} \\ b_{3,1} \times a_{4,3} + b_{2,1} \times a_{4,2} + b_{1,1} \times a_{4,1} & b_{3,2} \times a_{4,3} + b_{2,2} \times a_{4,2} + b_{1,2} \times a_{4,1} \end{bmatrix}$

Session `Python` 2.3 – Produit de matrices

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```python
a = IndexedBase('a')
A = Matrix(4, 3,
           [a[i, j]
            for i in range(1, 5)
            for j in range(1, 4)])
A
```

Out[2]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{bmatrix}$$

In[3]

```
B = Matrix(3, 2,
           [b[i, j]
            for i in range(1, 4)
            for j in range(1, 3)])
B
```

Out[3]

$$\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix}$$

In[4]

```
A*B
```

Out[4]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + a_{1,3}b_{3,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,3}b_{3,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} + a_{2,3}b_{3,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} + a_{2,3}b_{3,2} \\ a_{3,1}b_{1,1} + a_{3,2}b_{2,1} + a_{3,3}b_{3,1} & a_{3,1}b_{1,2} + a_{3,2}b_{2,2} + a_{3,3}b_{3,2} \\ a_{4,1}b_{1,1} + a_{4,2}b_{2,1} + a_{4,3}b_{3,1} & a_{4,1}b_{1,2} + a_{4,2}b_{2,2} + a_{4,3}b_{3,2} \end{bmatrix}$$

Exemple 2.2

Il est important de savoir calculer les produits de matrices *et de savoir prouver que le résultat est correct* ! Ainsi, si $E_{k,\ell}$ est de taille $n \times p$, et $E_{r,s}$ est de taille $p \times q$, alors :

$$\boxed{E_{k,\ell} \bullet E_{r,s} = \delta_{\ell,r}.E_{k,s}}$$

En effet :

$$E_{k,\ell} = [\delta_{i,k}\,\delta_{j,\ell}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \text{ et } E_{r,s} = [\delta_{i,r}\,\delta_{j,s}]_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}$$

Les dimensions sont compatibles, on peut effectuer le produit et :

$$E_{k,\ell} \bullet E_{r,s} = [\delta_{i,k}\,\delta_{j,\ell}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \bullet [\delta_{i,r}\,\delta_{j,s}]_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} = \left[\sum_{t=1}^{p} \delta_{i,k}\,\delta_{t,\ell}\,\delta_{t,r}\,\delta_{j,s}\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]},$$

Or

$$\forall(\ell,t,r) \in [\![1,p]\!]^3,\ \delta_{t,\ell}\,\delta_{t,r} = \delta_{\ell,r}\,\delta_{t,r}$$

donc

$$E_{k,\ell} \bullet E_{r,s} = \delta_{\ell,r}.E_{k,s}$$

Propriété 2.2 – Propriétés du produit de matrices

- Le produit est associatif :

$$\forall(A,B,C) \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{q,r}(\mathbb{K}),\ A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C \overset{\text{Not}}{=} A \bullet B \bullet C$$

- Le produit est distributif à gauche et à droite :

$$\forall(A,B) \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2,\ \forall(C,D) \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2,\ \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \begin{cases}(\lambda.A + \mu.B) \bullet C = \lambda.A \bullet C + \mu.B \bullet C \\ A \bullet (\lambda.C + \mu.D) = \lambda.A \bullet C + \mu.A \bullet D\end{cases}$$

- Existence d'éléments neutres (à gauche et à droite) pour la multiplication :

$$\forall A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ I_n \bullet A = A \bullet I_p = A$$

— Existence d'éléments absorbants pour la multiplication :

$$\forall A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ 0_{q,n} \bullet A = 0_{q,p} \text{ et } A \bullet 0_{p,q} = 0_{n,q}$$

注释 2.2

矩阵的乘法与数乘运算之间也满足以上结合律的规律；矩阵的乘法与转置之间则满足倒置的分配律。注意区分矩阵的左乘和右乘的区别。

Démonstration

Deux méthodes : on peut vérifier ces égalités en calculant tous ces produits en utilisant la définition du produit (définition 2.4, page 130) ; on peut également utiliser l'isomorphisme Φ de la proposition 2.1, page 126, les égalités ci-dessus découlent alors des propriétés de la composition des applications linéaires (la démonstration est laissée en exercice).

Remarque 2.5

Pour toute matrice *carrée* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on pose

$$A^0 = I_n \text{ et pour tout } k \in \mathbb{N},\ A^{k+1} = A^k \bullet A$$

Si A et B sont deux matrices carrées *qui commutent* (c'est-à-dire $A \bullet B = B \bullet A$), alors on a la formule du binôme :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (A+B)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} . A^\ell \bullet B^{k-\ell}$$

L'hypothèse $A \bullet B = B \bullet A$ est indispensable. En général,

$$(A+B)^2 = A^2 + \underbrace{A \bullet B + B \bullet A}_{\neq 2.A \bullet B} + B^2$$

Exercice(s) 2.1

2.1.1 Calculer pour $M \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, les matrices $M.E_{k,\ell}$ et $E_{k,\ell}.M$ pour les valeurs de k et ℓ (à préciser).

2.1.2 Soit $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ où

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = i$$

Calculer A^2.

2.1.3 Résoudre l'équation $M^2 = 0_2$ d'inconnue $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

2.1.4 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \begin{cases} a_{i,j} = a & \text{si } i = j \\ a_{i,j} = b & \text{si } (i = 1 \text{ et } j \geq 2) \text{ ou } (j = n \text{ et } i \geq 2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Trouver toutes les matrices qui commutent avec A, c'est-à-dire déterminer l'ensemble

$$\{B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ A \bullet B = B \bullet A\}$$

2.1.5 On suppose que a, b et c sont trois nombrs complexes tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On pose :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = A^2 + I_3$$

Démontrer que :

$$A \bullet B = B \bullet A = 0_3 \text{ et } B^2 = B$$

2.1.6 Soit A, B et C trois matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall k \in [\![1,3]\!],\ A^k = B + k.C$$

Démontrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ A^p = B + p.C$$

2.1.3 Transposition

Définition 2.5 – Transposée d'une matrice

Soit A un ensemble, $(n,p) \in {\mathbb{N}^*}^2$, alors l'application définie par :

$$\begin{cases} \mathrm{M}_{n,p}(A) \to \mathrm{M}_{p,n}(A) \\ M = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix} \mapsto {}^t M = [a_{j,i}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,p} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix} \end{cases}$$

est appelée *transposition*. La matrice ${}^t M$ est appelée *la transposée*[a] *de* M.

a. On rencontre également la notation $M^\top$ pour la transposée de M.

${}^t M$ 叫做 M 的转置矩阵。

Propriété 2.3 – Propriétés de la transposition

— La transposition est une application linéaire :

$$\forall (A,B) \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2,\ {}^t(\lambda.A + \mu.B) = \lambda.{}^t A + \mu.{}^t B$$

— La transposition est involutive :

$$\forall A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ {}^t({}^t A) = A$$

— La transposition est contravariante :

$$\forall (A,B) \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ {}^t(A \boldsymbol{.} B) = {}^t B \boldsymbol{.} {}^t A$$

Démonstration

Les deux premiers points sont immédiats par définition. En notant $X_{i,j}$ le coefficient en (i,j) d'une matrice X, pour tout $(i,j) \in$

$[\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]$, on a

$$\left({}^t(A \centerdot B)\right)_{i,j} = \left(A \centerdot B\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{j,k}\, B_{k,i} = \sum_{k=1}^{p} B_{k,i}\, A_{j,k} = \sum_{k=1}^{p} ({}^tB)_{i,k}\, ({}^tA)_{k,j} = \left({}^tB \centerdot {}^tA\right)_{i,j}$$

d'où le troisième point.

Exemple 2.3

1. Il y deux manières de considérer les formes linéaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie :
   — comme des applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$; elles sont alors représentées par des matrices de $\mathrm{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ en fixant une base de E (avec $p = \dim E$) ;
   — comme des vecteurs de $E^\star$; elles sont alors représentées dans une base de $E^\star$ par des matrices de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
   Y a-t-il un lien entre ces deux représentations ? Soit $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\varphi \in E^\star$, en prenant (1) comme base de $\mathbb{K}$, on a :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},(1)}(\varphi) = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{bmatrix}, \quad \text{où pour tout } i \in [\![1,p]\!],\ \varphi(e_i) = a_i$$
   On a donc, pour tout $x \in E$:
   $$\mathrm{Mat}_{(1)}\left(\varphi(x)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},(1)}(\varphi) \centerdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(x) = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_k\, x_k \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$$

   Notation 2.1

   Dans la suite de ce cours, on conviendra que les matrices à 1 ligne et 1 colonne seront notées comme des scalaires. Soit :
   $$\forall a \in \mathbb{K},\ a \overset{\text{Not}}{=} [a]$$

   On a donc, avec cet abus de notation,
   $$\mathrm{Mat}_{(1)}\left(\varphi(x)\right) = \sum_{k=1}^{p} a_k\, x_k$$

Soit $\mathscr{E}^\star$ la base duale de $\mathscr{E}$, notons :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}^\star}(\varphi) = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}$$

de sorte que :

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{p} b_k . e_k^\star(x) = \sum_{k=1}^{p} b_k\, x_k.$$

Finalement :

$$\forall k \in [\![1, p]\!]\,,\; a_k = b_k$$

Autrement dit,

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},(1)}(\varphi) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}^\star}(\varphi)}$$

2. En `Wxmaxima`, on obtient :

Session `Wxmaxima` 2.4 – Transposée d'une matrice

```
(%i1) A : genmatrix(lambda([i,j], 4*i+j-4), 3, 4);
```

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

```
(%i2) transpose(A);
```

$$(\%o2)\quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Session `Python` 2.4 – Transposée d'une matrice

Traduction du `Wxmaxima`.

In [2]

```
A = Matrix(3, 4, [4*i+j-4
                  for i in range(1, 4)
                  for j in range(1, 5)])
A
```

Out [2]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

In [3]

```
A.transpose()
```

Out [3]

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Définition 2.6 – Matrices symétriques et matrices antisymétriques

Soit $M \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.

— On dit que $M \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ est *symétrique*[a] si elle vérifie ${}^tM = M$. L'ensemble des matrices symétriques de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ est noté

$$\mathrm{S}_p(\mathbb{K}) = \{M \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K}),\ {}^tM = M\}$$

— On dit que $M \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ est *antisymétrique* si elle vérifie ${}^tM = -M$. L'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ est noté

$$\mathrm{A}_p(\mathbb{K}) = \{M \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K}),\ {}^tM = -M\}$$

a. Les matrices M vérifiant ${}^tM = M$ sont nécessairement carrées !

Exercice(s) 2.2

2.2.1 Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

(a) Démontrer que $\mathrm{S}_p(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_p(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.

(b) Démontrer que

$$\mathrm{M}_p(\mathbb{K}) = \mathrm{S}_p(\mathbb{K}) \oplus \mathrm{A}_p(\mathbb{K})$$

(c) Déterminer la dimension de $\mathrm{S}_p(\mathbb{K})$ et la dimension de $\mathrm{A}_p(\mathbb{K})$.

2.1.4 Matrices diagonales, matrices triangulaires

Définition 2.7 – Matrices diagonales et matrices triangulaires

Soit [a] $A = [a_{i,j}]_{(i,j) \in [\![1,p]\!]} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.

— On dit que A est *diagonale* si tous ses coefficients non-diagonaux sont nuls, c'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ i \neq j \implies a_{i,j} = 0$$

Autrement dit :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{p,p} \end{bmatrix} \overset{\text{Not}}{=} \mathrm{Diag}(a_{1,1}, \dots, a_{p,p})$$

On note $\mathrm{D}_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.

— On dit que A est *triangulaire supérieure* si tous ses coefficients au-dessous de sa diagonale sont nuls, c'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2\,,\ i > j \implies a_{i,j} = 0$$

Autrement dit :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,p} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{p,p} \end{bmatrix}$$

On note $\mathrm{T}_p^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.

— On dit que A est *triangulaire inférieur* si tous ses coefficients au-dessus de sa diagonale sont nuls, c'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2\,,\ j > i \implies a_{i,j} = 0$$

Autrement dit :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{p,1} & \cdots & \cdots & a_{p,p} \end{bmatrix}$$

On note $\mathrm{T}_p^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.

---

a. Il est indispensable que A soit une matrice carrée !

Exercice(s) 2.3

2.3.1 Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

(a) Démontrer que $\mathrm{D}_p(\mathbb{K})$, $\mathrm{T}_p^+(\mathbb{K})$ et $\mathrm{T}_p^-(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$. Quelles sont leurs dimension respectives ?

(b) Démontrer que ces trois espaces sont stables par produit et exprimer simplement les coefficients diagonaux du produit.

2.1.5 Trace d'une matrice

Définition 2.8 – Trace d'une matrice

Soit [a] $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$. On définit la *trace* de A, notée $\mathrm{trace}(A)$, comme la somme des éléments diagonaux de A :

$$\mathrm{trace}(A) = \sum_{k=1}^{p} a_{k,k}$$

---

a. Il est indispensable que A soit une matrice carrée !

Propriété 2.4

1. $A \mapsto \mathrm{trace}(A)$ est une forme linéaire sur $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.
2. La trace est invariante par transposition :
$$\forall \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K}),\ \mathrm{trace}({}^tA) = \mathrm{trace}(A)$$
3. La trace est invariante par commutation de deux matrices [a] :
$$\forall A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K}),\ \mathrm{trace}(A \centerdot B) = \mathrm{trace}(B \centerdot A)$$

---

a. Mais il est *faux* de penser que
$$\mathrm{trace}(A \centerdot B \centerdot C) = \mathrm{trace}(A \centerdot C \centerdot B)$$
On peut commuter deux matrices, mais on ne peux pas changer n'importe quel ordre !

Démonstration

En exercice.

2.1.6 Matrices inversibles

Définition 2.9

Soit[a] $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$. On dit que A est *inversible* si :

$$\exists B \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K}),\ A \centerdot B = B \centerdot A = I_p$$

On dit alors que B est l'*inverse* de A et on note

$$A^{-1} \stackrel{\text{Not}}{=} B$$

On note

$$\mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ l'ensemble des matrices inversibles de } \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$$

---

a. ⚠ ⚠ Il est indispensable que A soit une matrice carrée !

Remarque 2.6

S'il existe, l'inverse est unique. En effet, si B et B' sont deux inverses de A, on a :

$$B = B \centerdot I_p = B \centerdot (A \centerdot B') = (B \centerdot A) \centerdot B' = I_p \centerdot B' = B'$$

Exemple 2.4

Soit $A \in \mathrm{D}_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonale :

$$A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$$

Alors A est inversible si, et seulement si, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_k \neq 0$. Si c'est le cas, on a

$$A^{-1} = \mathrm{Diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_p^{-1})$$

Proposition 2.3 – Lien entre automorphismes et matrices inversibles

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $\mathscr{E}$ une base de E et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors f est inversible si, et seulement si, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)$ est inversible. Si c'est le cas :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)^{-1}$$

Démonstration

— Supposons f inversible. On a
$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$$
d'où
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f \circ f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f^{-1} \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(\mathrm{id}_E)$$
et donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) \bullet \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f^{-1}) \bullet \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) = I_p$$
ce qui démontre que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)$ est inversible et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)^{-1}$.

— Supposons $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)$ inversible. D'après la proposition 2.1, page 126, il existe un unique $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)^{-1}$$
On a donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) \bullet \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(g) \bullet \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) = I_p$$
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f \circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(\mathrm{id}_E)$$
d'où
$$f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_E$$
ce qui démontre que f est inversible.

Remarque 2.7

Ainsi, les matrices inversibles représentent les automorphismes. À noter qu'il suffit de vérifier l'inversibilité matriciel dans une seule base.

Propriété 2.5

Soit $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$. Alors :

1. $A^{-1} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$;

2. $A \bullet B \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $(A \bullet B)^{-1} = B^{-1} \bullet A^{-1}$;
3. pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, on note alors $A^{-k} \overset{\text{Not}}{=} (A^k)^{-1}$;
4. ${}^tA \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $({}^tA)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

Démonstration

— La relation $A \bullet A^{-1} = A^{-1} \bullet A$ démontre que A^{-1} est inversible et que son inverse est A.

— On a
$$(A \bullet B) \bullet (B^{-1} \bullet A^{-1}) = A \bullet (B \bullet (B^{-1}) \bullet A^{-1} = A \bullet I_p \bullet A^{-1} = A \bullet A^{-1} = I_p$$
et de même $(B^{-1} \bullet A^{-1}) \bullet (A \bullet B) = I_p$, d'où le résultat.

— Par récurrence sur k en utilisant le point 2.

— On a
$${}^tA \bullet {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1} \bullet A) = {}^tI_p = I_p$$
et de même ${}^t(A^{-1}) \bullet {}^tA = I_p$, d'où le résultat.

Remarque importante 2.8

Si A et B sont inversibles, il est faux en général que $A + B$ est inversible.
Par exemple $A - A = 0_p$ n'est jamais inversible.
En particulier, $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$. Il est cependant stable par produit.

2.1.7 Changement de bases

注释 2.3

本小结首先介绍了在同一域$\mathbb{K}$上的线性空间下，单位映射不同基底的矩阵表示方法(matrice de passage)，接着介绍了不同线性空间下线性映射在不同基底下的矩阵表示法及变换关系。

Définition 2.10 – Matrice d'une famille

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{E}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E (avec $p=\dim E$). Soit $\mathscr{X}=(x_1,\dots,x_r)$ une famille de r vecteurs de E. On appelle *matrice de la famille* $\mathscr{X}=(x_1,\dots,x_r)$ *dans la base* $\mathscr{E}$ et on note :

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{E}}(\mathscr{X})=\operatorname{Mat}_{\mathscr{E}}\big((x_1,\dots,x_r)\big)=[a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,r]\!]}=\begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & \cdots & x_r \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,r} \end{bmatrix} \end{array}$$

où $a_{i,j}$ est le i-ième coefficient de x_j dans la base $\mathscr{E}$:

$$\forall j\in[\![1,r]\!]\,,\ x_j=\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}.e_i$$

Autrement dit, par dualité, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,r]\!]$, $a_{i,j}=e_i^\star(x_j)$.

Exemple 2.5

1. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{E}$ une base de E et $x\in E$, alors :

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{E}}\big((x)\big)=\operatorname{Mat}_{\mathscr{E}}(x)$$

2. Si E et E' sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{E}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E (avec $p=\dim E$), $\mathscr{E}'$ une base de E' et $f\in\mathscr{L}(E,E')$, alors :

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{E}'}\big((u(e_1),\dots,u(e_p))\big)=\operatorname{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(u)$$

Définition 2.11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{E}=(e_1,\dots,e_p)$ et $\mathscr{B}=(b_1,\dots,b_p)$ deux bases de E (avec $p=\dim E$). On appelle *matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{B}$* et on note :

$$P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}} \overset{\text{Not}}{=} \text{Mat}_{\mathscr{E}}(\mathscr{B}) = [e_i^\star(b_j)]_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$$

C'est donc la matrice de la *nouvelle base* $\mathscr{B}$ exprimée dans l'*ancienne base* $\mathscr{E}$.

Remarque 2.9

On a (attention à l'ordre des bases !) :

$$\boxed{P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}} = \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{E}}(\text{id}_E)}$$

Propriété 2.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B}$ deux bases de E.
Alors la matrice de passage $P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}$ est inversible et

$$\boxed{\left(P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{E}}}$$

Démonstration

On a

$$P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}} \centerdot P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{E}} = \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{E}}(\text{id}_E) \centerdot \text{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{B}}(\text{id}_E) = \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\text{id}_E \circ \text{id}_E) = \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\text{id}_E) = I_p$$

et de même $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{E}} \centerdot P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}} = I_p$, d'où le résultat.

Propriété 2.7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ trois bases de E. Alors :

$$\boxed{P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{C}} = P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}} \cdot P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}}$$

Démonstration

Analogue à la démonstration de la propriété 2.6, page précédente (en exercice).

Remarque 2.10

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie avec $p = \dim E$, si $\mathscr{E}$ est une base de E, alors une famille $\mathscr{X} = (x_1, \ldots, x_p)$ de p vecteurs de E est une base de E si, et seulement si, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(\mathscr{X})$ est inversible.
Si c'est le cas, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(\mathscr{X}) = P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{X}}$.

Proposition 2.4 – Changement de base pour les vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B}$ deux bases de E, $x \in E$. Alors :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(x) = P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)}$$

Autrement dit, en multipliant à gauche par $P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}$, on obtient les anciennes coordonnées *en fonction des* nouvelles coordonnées.

Démonstration

On a

$$P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{E}}(\mathrm{id}_E) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}\left(\mathrm{id}_E(x)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(x)$$

Proposition 2.5 – Changement de base pour les applications linéaires

Soit E et E' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B}$ deux base de E, $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E', $f \in \mathscr{L}(E, E')$. Alors (voir la figure 2.2, page 214) :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \left(P_{\mathscr{E}'}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) \cdot P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}}$$

Dans le cas particulier où f est un endomorphisme de E ($E' = E$, $\mathscr{E}' = \mathscr{E}$, $\mathscr{B}' = \mathscr{B}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$), on a

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \left(P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) \cdot P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}}$$

注意E和E'都是有限维线性空间，理解线性映射在不同基底下的矩阵表示关系。
此公式是上一性质的特殊情况，解题时经常使用。

Démonstration

L'égalité $f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_{E'} \circ f$ donne

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{E}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{E}'}(\mathrm{id}_{E'}) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) \cdot P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{E}'}^{\mathscr{B}'} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$$

d'où le résultat.

Session `Wxmaxima` 2.5 – Changement de base

Reprenons l'exemple de la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice :

$$f(x, y) = (y, x).$$

On avait travaillé avec deux bases :

$$\mathscr{E} = ((1,0),(0,1)) \text{ et } \mathscr{E}' = ((1,1),(1,-1)).$$

```
(%i1) E : [[1,0],[0,1]]$
      Ep : [[1,1],[1,-1]]$
(%i3) P : apply(matrix,Ep);
```

(%o3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

La matrice de passage.

```
(%i4) A : matrix([0,1],[1,0]);
```

(%o4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

La matrice de f dans la base canonique $\mathscr{E}$.

```
(%i5) invert(P).A.P;
```

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

La matrice de f dans la base $\mathscr{E}'$ (ce qui est d'ailleurs évident).

```
(%i6) A.P;
```

(%o6) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}',\mathscr{E}}(f)$.

```
(%i7) invert(P).A;
```

(%o7) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f)$.

Session Python 2.5 – Changement de base

Traduction du Wxmaxima.

In[2]

```python
X = Matrix([x, y])
B = [X.subs({x: 1, y: 0}),
     X.subs({x: 0, y: 1})]
Bp = [X.subs({x: 1, y: 1}),
      X.subs({x: 1, y: -1})]
```

In[3]

```python
P = Matrix(Bp).reshape(
    2, 2).transpose()
P
```

Out[3]

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

In[4]

```python
A = Matrix([B[1], B[0]]).reshape(
    2, 2).transpose()
A
```

Out[4]

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In[5]

```
1  P**(-1)*A*P
```

Out[5]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

In[6]

```
1  A*P
```

Out[6]

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

In[7]

```
1  P**(-1)*A
```

Out[7]

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2.1.8 Noyau, image et rang

Définition 2.12 – Noyau, image et rang d'une matrice

Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ [a].

— Le *noyau* de A est le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ défini par :

$$\mathrm{Ker}(A) \overset{\mathrm{Def}}{=} \{X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ A \boldsymbol{.} X = 0_{n,1}\}$$

— L'*image* de A est le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par :

$$\mathrm{Im}(A) \overset{\mathrm{Def}}{=} \{A \boldsymbol{.} X,\ X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$$

— Le *rang* de A, noté $\mathrm{rang}(A)$, est la dimension de $\mathrm{Im}(A)$:

$$\mathrm{rang}(A) \overset{\mathrm{Def}}{=} \dim \mathrm{Im}(A)$$

a. On notera aussi $\mathrm{Ker}\, A$, $\mathrm{Im}\, A$ et $\mathrm{rang}\, A$.

注释 2.4

不难发现，矩阵所具有的性质与线性空间章节所学性质完全类似。

Remarque 2.11

Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A (vues comme des matrices colonnes de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$). Alors :

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(\{C_1, \dots, C_p\})$$

En particulier,

$$\operatorname{rang}(A) = \dim \operatorname{Im}(A) = \dim \operatorname{Vect}(\{C_1, \ldots, C_p\})$$

Remarque 2.12

Si $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a

$$\operatorname{rang} A \leq \min(n, p)$$

car $\operatorname{Im} A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par les p colonnes de A.

Propriété 2.8

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, soit $\mathscr{E}$ une base de E, soit $\mathscr{E}'$ une base de E' et soit $f \in \mathscr{L}(E, E')$. On note $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f)$. Alors :

1. Pour tout $x \in E$, $x \in \operatorname{Ker} f$ si, et seulement si, $\operatorname{Mat}_{\mathscr{E}}(x) \in \operatorname{Ker} A$. En particulier,

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} A$$

2. Pour tout $y \in E'$, $y \in \operatorname{Im} f$ si, et seulement si, $\operatorname{Mat}_{\mathscr{E}'}(y) \in \operatorname{Im} A$. En particulier, $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} A$ c'est-à-dire

$$\operatorname{rang} f = \operatorname{rang} A$$

Remarque 2.13

Si $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a le *théorème du rang* (voir le théorème 1.4, page 67) :

$$\operatorname{rang} A = p - \dim \operatorname{Ker} A$$

De plus, si $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ (matrice carrée), les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible ;
2. $\operatorname{Ker} A = \{0_{p,1}\}$;
3. $\operatorname{rang} A = p$;
4. Les colonnes $(C_1, \ldots, C_p)$ de A forment une base de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Remarque 2.14

La multiplication par une matrice inversible conserve le rang : si $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$\forall P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}),\ \forall Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{rang}(A \centerdot P) = \mathrm{rang}(Q \centerdot A) = \mathrm{rang}\, A$$

Exercice(s) 2.4

2.4.1 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, existe-t-il $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A \centerdot B \centerdot A \centerdot B = 0_n \text{ et } B \centerdot A \centerdot B \centerdot A \neq 0_n \text{ ?}$$

2.4.2 Soit A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, telles que :

$$\forall X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ A \centerdot X \centerdot B = 0_n$$

Démontrer que A ou B est la matrice nulle.

2.4.3 Démontrer que toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices inversibles.

2.4.4 Démontrer que toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.

2.4.5 Soit A et B dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, démontrer que :

$$\mathrm{rang}(A) \leq \mathrm{rang}(B) \iff \big(\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \exists Q \in M_p(\mathbb{K}),\ A = P \centerdot B \centerdot Q\big)$$

2.2 Relations d'équivalence et matrices

2.2.1 Relations d'équivalence

Définition 2.13 – Relation d'équivalence

Soit E un ensemble non vide, $\mathscr{R}$ une relation [a] sur E. On dit que :

— $\mathscr{R}$ est *réflexive* si :

$$\forall x \in E,\ x \mathscr{R} x$$

— $\mathscr{R}$ est *symétrique* si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathscr{R}y \implies y\mathscr{R}x$$

— $\mathscr{R}$ est *transitive* si :

$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ \big(x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z\big) \implies x\mathscr{R}z$$

On dit que $\mathscr{R}$ est une *relation d'équivalence sur* E si $\mathscr{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

a. c'est-à-dire la donnée d'un sous-ensemble A de $E \times E$, où on définit pour tout $(x,y) \in E^2$, $x\mathscr{R}y \overset{\text{Not}}{\Leftrightarrow} (x,y) \in A$

Exemple 2.6

1. L'égalité sur un ensemble est *toujours* une relation d'équivalence !
2. « avoir même parité » est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.
3. « avoir même dimension » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E de dimension finie.
4. « être en bijection avec » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble E.
5. « être parallèle » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des droites du plan.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, « avoir le même reste dans la division euclidienne par n » est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Définition 2.14 – Partition d'un ensemble

Soit E un ensemble non vide, on appelle *partition de* E, la donnée d'une famille $(E_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de E tels que :

— tous les E_i sont non vides :

$$\forall i \in I,\ E_i \neq \emptyset$$

— ils sont disjoints deux-à-deux :

$$\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \implies E_i \cap E_j = \emptyset$$

— ils recouvrent E :

$$E = \bigcup_{i\in I} E_i$$

Exemple 2.7

1. L'ensemble des singletons d'un ensemble est une partition de cet ensemble.
2. L'ensemble $2\,\mathbb{N} = \{2\,n,\ n \in \mathbb{N}\}$ des nombres pairs et l'ensemble $1+2\,\mathbb{N} = \{2\,n+1,\ n \in \mathbb{N}\}$ des nombres impairs forment une partition de $\mathbb{N}$.
3. Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on peut s'intéresser aux ensembles :

$$E_k = \{p \in \mathbb{N},\ n \text{ divise } (p-k)\}\,, \quad k \in [\![0, n-1]\!]$$

   Alors

$$(E_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]} \text{ est une partition de } \mathbb{N}$$

Propriété 2.9

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une partition d'un ensemble E non vide et soit $\mathscr{R}$ la relation sur E définie par :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \mathscr{R} y \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \big(\exists i \in I,\ x \in E_i \text{ et } y \in E_i\big)$$

(autrement dit, x et y sont en relation lorsque x et y appartiennent à un même E_i). Alors $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

Démonstration

C'est immédiat, une fois qu'on a remarqué que pour tout $x \in E$, il existe $i \in I$ tel que $x \in E_i$ car la partition $(E_i)_{i \in I}$ recouvre E.

Définition 2.15 – Classe d'équivalence et représentant

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E non vide et soit $x \in E$. La *classe d'équivalence de x modulo $\mathscr{R}$* est le sous-ensemble de E défini par :

$$\text{Classe}(x, \mathscr{R}) \overset{\text{Def}}{=} \{y \in E,\ x \mathscr{R} y\}$$

Un élément d'une classe d'équivalence est appelé un *représentant* de cette classe d'équivalence.

Remarque 2.15

Pour tout $x \in E$, on a toujours $x \in \text{Classe}(x, \mathscr{R})$ car $x\mathscr{R}x$. En particulier, une classe d'équivalence n'est jamais vide.

Propriété 2.10

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E non vide. Alors :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathscr{R}y \iff \text{Classe}(x,\mathscr{R}) = \text{Classe}(y,\mathscr{R})$$

Démonstration

Soit $(x,y) \in E^2$.

— Supposons $x\mathscr{R}y$. Soit $z \in \text{Classe}(x,\mathscr{R})$. On a donc $x\mathscr{R}z$ d'où $z\mathscr{R}x$. Or $x\mathscr{R}y$ donc $z\mathscr{R}y$ d'où $y\mathscr{R}z$, c'est-à-dire $z \in \text{Classe}(x,\mathscr{R})$. On a donc $\text{Classe}(x,\mathscr{R}) \subset \text{Classe}(y,\mathscr{R})$. De même, on démontre que $\text{Classe}(x,\mathscr{R}) \supset \text{Classe}(y,\mathscr{R})$, donc $\text{Classe}(x,\mathscr{R}) = \text{Classe}(y,\mathscr{R})$.

— Supposons $\text{Classe}(x,\mathscr{R}) = \text{Classe}(y,\mathscr{R})$. Comme $y \in \text{Classe}(y,\mathscr{R})$, on a $y \in \text{Classe}(x,\mathscr{R})$ donc $x\mathscr{R}y$.

Propriété 2.11

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E non vide. Alors les classes d'équivalence forment une partition de E. Plus formellement, si on définit la famille $(E_i)_{i\in I}$ des classes d'équivalence, donnée par

$$I = \{\text{Classe}(x,\mathscr{R}),\ x \in E\} \text{ et pour tout } i \in I,\ E_i = i$$

alors $(E_i)_{i\in I}$ est une partition de E.

Démonstration

— On a vu que pour tout $i \in I$, E_i est non vide. (remarque 2.15, de la présente page).

— Pour tout $x \in E$, on a $x \in \text{Classe}(x,\mathscr{R})$ donc il existe $i \in E$ tel que $x \in E_i$. On en déduit que $(E_i)_{i\in I}$ recouvre E

— Soit $(i,j) \in I^2$ tel que $i \neq j$. Supposons que $E_i \cap E_j \neq \emptyset$. Il existe donc $z \in E_i \cap E_j$. Comme $z \in E_i$, on a $x_i\mathscr{R}z$ où x_i est un représentant de E_1, donc $\text{Classe}(z,\mathscr{R}) = E_i$ (propriété 2.10, de la présente page). De même, on a $\text{Classe}(z,\mathscr{R}) = E_j$. On a donc $E_i = E_j$, ce qui contredit $i \neq j$ donc $E_i \cap E_j = \emptyset$.

Exercice(s) 2.5

2.5.1 On définit sur $\mathbb{C}$ la relation :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ z\mathscr{R}z' \iff |z| = |z'|$$

(a) Démontrer que c'est une relation d'équivalence.

(b) Préciser les classes d'équivalence.

(c) Donner un ensemble de représentants réels de ces classes d'équivalence.

2.5.2 Soit E un ensemble non vide et $A \subset E$, on définit une relation sur $\mathscr{P}(E)$ par :

$$\forall (X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2,\ X\mathscr{R}Y \iff A \cap X = A \cap Y$$

(a) Démontrer que c'est une relation d'équivalence.

(b) Démontrer que l'ensemble des classes d'équivalence est en bijection avec $\mathscr{P}(A)$.

On définit de même la relation sur $\mathscr{P}(E)$ par :

$$\forall (X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2,\ X\mathscr{S}Y \iff A \cup X = A \cup Y$$

(c) C'est une relation d'équivalence, trouver une bijection de l'ensemble des classes d'équivalence avec un ensemble connu.

2.5.3 Soit E un ensemble non vide, on définit la relation sur $\mathscr{P}(E)$ par :

$$\forall (X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2,\ X\mathscr{R}Y \iff \big(\exists f \in \mathscr{F}(X, Y),\ \text{injective}\big)$$

Cette relation est-elle réflexive ? Symétrique ? Transitive ?

2.5.4 Soit E un ensemble non vide muni d'une relation $\mathscr{R}$ réflexive et transitive. On définit les deux relations suivantes :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathscr{S}y \iff (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x)$$

et

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathscr{T}y \iff (x\mathscr{R}y \text{ ou } y\mathscr{R}x)$$

Les relations $\mathscr{S}$ et $\mathscr{T}$ sont-elles réflexives ? Symétriques ? Transitives ?

2.5.5 Soit E un ensemble non vide muni d'une relation d'équivalence $\mathscr{R}$, on pose :

$$\forall A \subset E,\ s(A) = \bigcup_{a \in A} \text{Classe}(a, \mathscr{R})$$

Soit A une partie de E.

(a) Démontrer que $A \subset s(A)$. Peut-on avoir $A = s(A)$? Donner un exemple.

(b) Que vaut $s(s(A))$?

(c) Que vaut $s(E \setminus s(A))$?

(d) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E. Comparer pour l'inclusion les ensembles :

$$s\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \text{ et } \bigcup_{i\in I} s(A_i), \text{ puis } s\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \text{ et } \bigcap_{i\in I} s(A_i)$$

2.2.2 Équivalence et similitudes

Définition 2.16 – Matrices équivalentes et matrices semblables

1. Deux matrices M et N de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites *équivalentes* si :

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ \exists Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}),\ N = P \centerdot M \centerdot Q$$

Si c'est le cas, on note

$$M \approx N$$

Cela définit une relation sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée *équivalence*.

2. Deux matrices M et N de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* si :

$$\exists P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}),\ N = P^{-1} \centerdot M \centerdot P$$

Si c'est le cas, on note

$$M \sim N$$

Cela définit une relation sur $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ appelée *similitude*.

Remarque 2.16

D'après la formule de changement de base (proposition 2.5, page 151) :

— deux matrices de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si, et seulement si, elles représentent la même application linéaire ;

— deux matrices de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme.

注释 2.5

注意区别等价矩阵以及相似矩阵，显然相似矩阵是等价矩阵，反之则不一定。两矩阵等价，则表示它们对应了同一的线性映射；两矩阵相似，则它们对应了同一自同态在不同基底下的表示。

Propriété 2.12

1. L'équivalence $\approx$ est une relation d'équivalence sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
2. La similitude $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.

Démonstration

Laissée en exercice (utiliser la formule de changement de base et les propriété des matrices de passage).

Notation 2.2

Nous noterons $J_{n,p,r}$ la matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$J_{n,p,r} = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \text{ où } \begin{cases} a_{i,j} = 1 & \text{si } i = j \leq r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $r \in [\![0, \min(n,p)]\!]$.

Proposition 2.6 – Caractérisation des matrices équivalentes

Deux matrices de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si, et seulement si, elles ont même rang.

Démonstration

Soit M et N deux matrices de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$\Rightarrow$ Supposons-les équivalentes, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $N = P \bullet M \bullet Q$. En notant u_X l'application linéaire canoniquement associée à une matrice X, on a

$$u_N = u_P \circ u_M \circ u_Q$$

La conservation du rang en découle, car u_P et u_Q sont inversibles (voir la remarque 2.14, page 157).

$\Leftarrow$ Supposons que $\operatorname{rang} N = \operatorname{rang} M$. Posons $r = \operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang}(N)$. La factorisation de u_M nous donne l'existence d'un supplémentaire E_1 de $\operatorname{Ker}(u_M)$ isomorphe à $\operatorname{Im}(u_M)$. Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de E_1, que l'on complète avec une base $(e_{r+1}, \ldots, e_p)$ de $\operatorname{Ker}(u_M)$ ce qui nous donne une base $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ de $\mathbb{K}^p$. Alors $(u_M(e_1), \ldots, u_M(e_r))$ est une partie libre de $\mathbb{K}^n$ que l'on complète en une base $\mathscr{E}'$ de $\mathbb{K}^n$. On a alors, par construction des bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(u_M) = J_{n,p,r}, \text{ donc } M \approx J_{n,p,r}$$

De même, on démontre que $N \approx J_{n,p,r}$. Puisque $\approx$ est une relation d'équivalence, on a donc $M \approx N$.

Remarque 2.17

On a donc démontré qu'il y a $\min(n,p)+1$ classe d'équivalence pour la relation d'équivalence $\approx$ dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, chaque classe d'équivalence est l'ensemble des matrices de rang $r \in [\![0, \min(n,p)]\!]$ et un représentant de chaque classe est $J_{n,p,r}$.
Il est beaucoup plus difficile de caractériser les classes d'équivalence pour la similitude $\sim$ (voir la partie sur les classes de similitude dans chapitre 4 sur la réduction des endormophismes).

Exercice(s) 2.6

2.6.1 Soit $(A, B) \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.
   (a) Démontrer que si $A \sim B$, alors $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B)$ et $\operatorname{trace}(A) = \operatorname{trace}(B)$.
   (b) Trouver un exemple où $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B)$ et $\operatorname{trace}(A) = \operatorname{trace}(B)$ mais A et B sont pas semblables.
   (c) Trouver un exemple où A et B sont équivalentes mais ne sont pas semblables.

2.6.2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
   (a) Justifier que la trace de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)$ ne dépend pas de la base $\mathscr{E}$ de E choisie.
   On définit alors la *trace de* f, notée $\operatorname{trace}(f)$, comme la valeur de $\operatorname{trace}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f))$ dans n'importe quelle base $\mathscr{E}$ de E.
   (b) Soit p un projecteur de E. Démontrer que $\operatorname{trace}(p) = \operatorname{rang}(p)$.

2.6.3 Démontrer que

$$\forall A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \mathrm{rang}({}^tA) = \mathrm{rang}(A)$$

2.6.4 Démontrer que toute matrice de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ non inversible est équivalente à une matrice B telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^k = 0_p$ (matrice dite *nilpotente*).

2.3 Systèmes linéaires

2.3.1 Algorithme du pivot de Gauss

注释 2.6

本小节介绍了高斯消元法，以及初等变换。通常应用此方法求解线性方程组及判断方阵是否可逆。

<

Notation 2.3

Soit $(k,\ell) \in [\![1,p]\!]^2$, $k \neq \ell$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on appelle *matrice de transvection* la matrice de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ définie par :

$$T_{k,\ell}(\lambda) = I_p + \lambda.E_{k,\ell}$$

Cette matrice est inversible et son inverse est :

$$T_{k,\ell}(\lambda)^{-1} = T_{k,\ell}(-\lambda)$$

Démonstration

Un calcul direct donne

$$T_{k,\ell}(\lambda) \bullet T_{k,\ell}(-\lambda) = (I_p + \lambda.E_{k,\ell}) \bullet (I_p - \lambda.E_{k,\ell}) = I_p$$

et $T_{k,\ell}(-\lambda) \bullet T_{k,\ell}(\lambda) = I_p$.

Notation 2.4

Soit $k \in [\![1, p]\!]$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on appelle *matrice de dilatation* la matrice de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ définie par :

$$D_k(\lambda) = I_p + (\lambda - 1).E_{k,k} = \underbrace{\mathrm{Diag}(1, \cdots, 1, \lambda, 1, \cdots, 1)}_{\lambda \text{ à la } k\text{-ième place}}$$

Cette matrice est inversible et son inverse est :

$$D_k(\lambda)^{-1} = D_k\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Démonstration

Un calcul immédiat démontre que

$$D_k(\lambda) \bullet D_k\left(\frac{1}{\lambda}\right) = D_k\left(\frac{1}{\lambda}\right) \bullet D_k(\lambda) = I_p$$

Notation 2.5

Soit σ une permutation [a] de $[\![1, p]\!]$, on appelle *matrice de permutation* la matrice de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ définie par :

$$P_\sigma = \left[\delta_{i,\sigma(j)}\right]_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$$

Cette matrice est inversible et son inverse est :

$$(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}.$$

a. C'est-à-dire une bijection de de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$.

Démonstration

Si σ et σ' sont deux permutations de $[\![1, p]\!]$ alors on remarque que :

$$P_\sigma \bullet P_{\sigma'} = \left[\sum_{k=1}^{p} \delta_{i,\sigma(k)}\, \delta_{k,\sigma'(j)}\right]_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} = P_{\sigma\circ\sigma'}$$

On prend alors $\sigma' = \sigma^{-1}$ en remarquant que si $\sigma = \mathrm{id}_{[\![1,p]\!]}$, alors $P_\sigma = I_p$.

Propriété 2.13 – Opérations élémentaires sur les lignes

Soit $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A (vues comme des matrices $1 \times p$), et $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A (vues comme des matrices $n \times 1$).

Produit à gauche = manipulation des lignes !

1. *Transvection*
$$T_{k,\ell}(\lambda) \bullet A = A + \lambda.E_{k,\ell} \bullet A = [a_{i,j} + \lambda\, \delta_{i,k}\, a_{\ell,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$
Cela revient donc à faire la transformation (dite *opération élémentaire*) :
$$\boxed{L_k \leftarrow L_k + \lambda.L_\ell}$$
(on remplace la k-ième ligne par la k-ième ligne à laquelle on a ajouté λ fois la ℓ-ième ligne).

2. *Dilatation*
$$D_k(\lambda) \bullet A = [a_{i,j} + (\lambda - 1) \times \delta_{i,k}\, a_{k,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$
Cela revient donc à faire la transformation (dite *opération élémentaire*) :
$$\boxed{L_k \leftarrow \lambda.L_k}$$
(on remplace la k-ième ligne par λ fois la k-ième ligne).

3. *Permutation*
$$P_\sigma \bullet A = \left[\sum_{t=1}^{n} \delta_{i,\sigma(t)}\, a_{t,j}\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = [a_{\sigma^{-1}(i),j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$
Cela revient donc à faire la transformation (dite *opération élémentaire*) :
$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!]\,,\ L_k \leftarrow L_{\sigma^{-1}(k)}}$$

Session Wxmaxima 2.6 – Permutations des lignes

```
(%i1) sigma : [3,1,2];
```

(%o1) $[3, 1, 2]$

```
(%i2) Psigma : genmatrix(lambda([i,j], if i=sigma[j] then 1 else 0),3,3);
```

(%o2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

```
(%i3) A : genmatrix(lambda([i,j],a[i,j]),3,4);
```

(%o3) $\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix}$

```
(%i4) Psigma.A;
```

(%o4) $\begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \end{bmatrix}$

Session Python 2.6 – Permutations des lignes

Traduction du Wxmaxima.

In[2]

```python
sigma = [3, 1, 2]  # La permutation s(1)=3, s(2)=1, s(3)=2

Psigma = Matrix(3, 3,
                [KroneckerDelta(
                    i+1, sigma[j])
                 for i in range(3)
                 for j in range(3)])
```

```python
Psigma
```

Out[2]

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In [3]

```python
# On peut aussi écrire
Psigma = Matrix(3, 3,
                lambda i, j:
                KroneckerDelta(i+1, sigma[j]))
Psigma
```

Out[3]

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In [4]

```python
a = IndexedBase('a')
A = Matrix(3, 4,
           [a[i, j]
            for i in range(1, 4)
            for j in range(1, 5)])
A
```

Out[4]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix}$$

In[5]

```
Psigma*A # On applique sigma**(-1) aux lignes !!!
```

Out[5]

$$\begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \end{bmatrix}$$

In[6]

```
A = Matrix(4, 3,
           [a[i, j]
            for i in range(1, 5)
            for j in range(1, 4)])
A
```

Out[6]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{bmatrix}$$

In[7]

```
A*Psigma # On applique sigma aux colonnes !!!
```

Out[7]

$$\begin{bmatrix} a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,3} & a_{4,1} & a_{4,2} \end{bmatrix}$$

Propriété 2.14 – Opérations élémentaires sur les colonnes

Soit $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A (vues comme des matrices $1 \times p$), et $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A (vues comme des matrices $n \times 1$).

Produit à droite = manipulation des colonnes !

1. *Transvection*

$$A \bullet T_{k,\ell}(\lambda) = A + \lambda.A \bullet E_{k,\ell} = [a_{i,j} + \lambda\, \delta_{j,\ell}\, a_{i,k}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$

   Cela revient donc à faire la transformation (dite *opération élémentaire*) :

$$\boxed{C_\ell \leftarrow C_\ell + \lambda.C_k}$$

   (on remplace la ℓ-ième colonne par la ℓ-ième colonne à laquelle on a ajouté λ fois la k-ième colonne).

2. *Dilatation*

$$A \bullet D_k(\lambda) = [a_{i,j} + (\lambda - 1)\, \delta_{j,k} \times a_{i,k}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$

   Cela revient donc à faire la transformation (dite *opération élémentaire*) :

$$\boxed{C_k \leftarrow \lambda.C_k}$$

   (on remplace la k-ième colonne par λ fois la k-ième colonne).

3. *Permutation*

$$A \centerdot P_\sigma = \left[a_{i,\sigma(j)}\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}.$$

Cela revient donc à faire la transformation (dite *opération élémentaire*) :

$$\boxed{\forall k \in [\![1,p]\!]\,,\ C_k \leftarrow C_{\sigma(k)}}$$

Session `Wxmaxima` 2.7 – Opérations élémentaires sur les colonnes

(%i1) `sigma : [3,1,2];`

(%o1) $[3,1,2]$

(%i2) `Psigma : genmatrix(lambda([i,j], if i=sigma[j] then 1 else 0),3,3);`

(%o2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(%i3) `A : genmatrix(lambda([i,j],a[i,j]),4,3);`

(%o3) $\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{bmatrix}$

(%i4) `A.Psigma;`

(%o4) $\begin{bmatrix} a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,3} & a_{4,1} & a_{4,2} \end{bmatrix}$

Session Python 2.7 – Opérations élémentaires sur les colonnes

Traduction du `Wxmaxima`.

In[8]

```
A.elementary_col_op('n->kn',
                    col=0,
                    k=3)
```

Out[8]

$$\begin{bmatrix} 3a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 3a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 3a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ 3a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{bmatrix}$$

In[9]

```
A.elementary_col_op('n<->m',
                    col1=0,
                    col2=2)
```

Out[9]

$$\begin{bmatrix} a_{1,3} & a_{1,2} & a_{1,1} \\ a_{2,3} & a_{2,2} & a_{2,1} \\ a_{3,3} & a_{3,2} & a_{3,1} \\ a_{4,3} & a_{4,2} & a_{4,1} \end{bmatrix}$$

In[10]

```python
A.elementary_col_op('n->n+km',
                    col1=0,
                    col2=1,
                    k=3)
```

Out[10]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}+3a_{1,2} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1}+3a_{2,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1}+3a_{3,2} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1}+3a_{4,2} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{bmatrix}$$

Remarque 2.18

Lorsqu'on utilise des opérations élémentaires, c'est généralement pour faire apparaître le plus de 0 possibles dans la matrice. Il est alors *indispensable* de présenter les calculs de manière lisible par le lecteur. Le principe est :

1. on encadre le *pivot* (terme dont on se sert pour faire apparaître les 0) ;
2. on signale la ou les opérations élémentaires effectuées sous la matrice.

Exemple 2.8

Soit la matrice :

$$A = \underset{L_2 \leftarrow L_2 - a_{2,1}/a_{1,1}.L_1}{\begin{bmatrix} \boxed{a_{1,1}} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix}} \to \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0 & a_{2,2} - \frac{a_{1,2}\,a_{2,1}}{a_{1,1}} & a_{2,3} - \frac{a_{1,3}\,a_{2,1}}{a_{1,1}} & a_{2,4} - \frac{a_{1,4}\,a_{2,1}}{a_{1,1}} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix}$$

Théorème 2.1 – du pivot généralisé de Gauss

Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de rang r, alors il existe des matrices de transvection-dilatation-permutation de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, notées $R_1, \dots, R_q$ et des matrices de transvection-dilatation-permutation de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, notées $S_1, \dots, S_s$ telles que :

$$R_1 \bullet \cdots \bullet R_q \bullet A \bullet S_1 \bullet \cdots \bullet S_s = J_{n,p,r}$$

Démonstration (algorithme du pivot de Gauss généralisé)

La démonstration est essentiellement l'algorithme du pivot de Gauss généralisé.

- Si $A = 0_{n,p}$, alors il n'y a rien à démontrer (on a $A = J_{n,p,0} = 0_{n,p}$ avec $r = 0$).
- Supposons $A \neq 0_{n,p}$.
  1. Il existe alors un élément non nul de A, qu'on place en position $(1,1)$ par permutation, puis qu'on transforme en 1 par dilatation. Ce coefficient s'appelle le *pivot*.
  2. Par transvection sur les lignes, on annule tous les coefficients en-dessous du pivot et par transvection sur les colonnes, on annule tous les coefficients à droite du pivot.
  3. On obtient donc une matrice de la forme (voir la partie suivante sur les matrices-blocs) :

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0_{1,p-1} \\ \hline 0_{n-1,1} & A' \end{array}\right]$$

     Si A' est vide ($n = 1$ ou $p = 1$) ou si $A' = 0_{n-1,p-1}$, on s'arrête. Sinon on recommence l'algorithme avec A' à la place de A

À la fin, on obtient une matrice $J_{n,p,r}$, obtenue par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'où le résultat. On a nécessairement $r = \mathrm{rang}(A)$, car le rang est invariant par multiplication par une matrice inversible (remarque 2.14, page 157).

Remarque 2.19

Autrement dit, toute matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r est équivalente à $J_{n,p,r}$. On retrouve ainsi le résultat de la proposition 2.6, page 163.

Exemple 2.9

En utilisant `Wxmaxima` :

Session Wxmaxima 2.8 – Algorithme du pivot de Gauss

```
(%i1)  A : matrix([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

1. $L_2 \leftarrow L_2 - 4.L_1$

```
(%i2)  (ident(3)+ematrix(3,3,-4,2,1)).A;
```

(%o2) $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

2. $L_3 \leftarrow L_3 - 7.L_1$

```
(%i3)  (ident(3)+ematrix(3,3,-7,3,1)).%;
```

(%o3) $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$

3. $C_2 \leftarrow C_2 - 2.C_1$

```
(%i4)  %.(ident(3)+ematrix(3,3,-2,1,2));
```

(%o4) $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$

4. $C_3 \leftarrow C_3 - 3.C_1$

```
(%i5)  %.(ident(3)+ematrix(3,3,-3,1,3));
```

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$

5. $L_3 \leftarrow L_3 - 2.L_2$

(%i6) `(ident(3)+ematrix(3,3,-2,3,2)).%;`

(%o6) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \boxed{-3} & -6\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

6. $C_3 \leftarrow C_3 - 2.C_2$

(%i7) `%.(ident(3)+ematrix(3,3,-2,2,3));`

(%o7) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \boxed{-3} & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

7. $L_2 \leftarrow -1/3.L_2$

(%i8) `%.(ident(3)+ematrix(3,3,-4/3,2,2));`

(%o8) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Session `Python` 2.8 – Algorithme du pivot de Gauss

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```
def Ematrix(p, q, k, i0, j0):  # Pour reproduire les calculs de Wxmaxima
    return(Matrix(
        p, q,
        lambda i, j:
        k*KroneckerDelta(
            i, i0)*KroneckerDelta(j, j0)))
```

In[3]

```
Ematrix(3, 3, -4, 1, 0)
```

Out[3]

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In[4]

```
A = Matrix(3, 3,
           list(range(1, 10)))
```

In[5]

```
(eye(3)+
 Ematrix(3, 3, -4, 1, 0))*A
```

Out[5]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

In[6]

```
(eye(3)+
 Ematrix(3, 3, -7, 2, 0))*_
```

Out[6]

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -3 & -6\\0 & -6 & -12\end{bmatrix}$$

In[7]

```
_*(eye(3)+
   Ematrix(3, 3, -2, 0, 1))
```

Out[7]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\0 & -3 & -6\\0 & -6 & -12\end{bmatrix}$$

In[8]

```
_*(eye(3)+
   Ematrix(3, 3, -3, 0, 2))
```

Out[8]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -3 & -6\\0 & -6 & -12\end{bmatrix}$$

In[9]

```
(eye(3)+
 Ematrix(3, 3, -2, 2, 1))*_
```

Out[9]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In[10]

```
_*(eye(3)+
   Ematrix(3, 3, -2, 1, 2))
```

Out[10]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In[11]

```
(eye(3)+
 Ematrix(3, 3, -S(4)/3, 1, 1))*_
```

Out[11]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple 2.10

On peut aussi travailler « à la main ».

Session `Wxmaxima` 2.9 – Algorithme du pivot de Gauss

```
(%i1) A : matrix([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

```
(%i2) rowop(%,2,1,4);
```

(%o2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

```
(%i3) rowop(%,3,1,7);
```

(%o3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$

```
(%i4) columnop(%,2,1,2);
```

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$

```
(%i5) columnop(%,3,1,3);
```

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$

```
(%i6) rowop(%,3,2,2);
```

(%o6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

```
(%i7) columnop(%,3,2,2);
```

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Je ne trouve pas les dilatations. Écrivons une fonction qui travaille sur les lignes.

```
(%i8) D(M,k,a) := block([],for j:1 thru matrix_size(M)[2] do M[k,j] : a*M[k,j],M)$
```

```
(%i9) D(%o7,2,-1/3);
```

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Session `Python` 2.9 – Algorithme du pivot de Gauss

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```
A = Matrix(3, 3,
           list(range(1, 10)))
A
```

Out[2]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

In[3]

```
A.elementary_row_op('n->n+km',
                    row1=1,
                    row2=0,
                    k=-4)
```

Out[3]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

In[4]

```
_.elementary_row_op('n->n+km',
                    row1=2,
                    row2=0,
                    k=-7)
```

Out[4]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

In[5]

```
_.elementary_col_op('n->n+km',
                    col1=1,
                    col2=0,
                    k=-2)
```

Out[5]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\0 & -3 & -6\\0 & -6 & -12\end{bmatrix}$$

In[6]

```
_.elementary_col_op('n->n+km',
                    col1=2,
                    col2=0, k=-3)
```

Out[6]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -3 & -6\\0 & -6 & -12\end{bmatrix}$$

In[7]

```
_.elementary_row_op('n->n+km',
                    row1=2,
                    row2=1,
                    k=-2)
```

Out[7]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In[8]

```
_.elementary_col_op('n->n+km',
                    col1=2,
                    col2=1,
                    k=-2)
```

Out[8]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In[9]

```
_.elementary_row_op('n->kn',
                    row=1,
                    k=-S(1)/3)
```

Out[9]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple 2.11

Que se passe-t-il lorsque, par exemple, la première colonne est remplie de 0 ? On commence par permuter les colonnes ! Ici, nous allons écrire les matrices nous-mêmes...

Session Wxmaxima 2.10 – Algorithme du pivot de Gauss

```
(%i1) A : matrix([0,2,3],[0,5,6]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

```
(%i2) sigma : [2,3,1]$
      Psigma : genmatrix(lambda([i,j],if i=sigma[j] then 1 else 0),3,3);
```

(%o3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$C_1 \leftarrow C_2$, $C_2 \leftarrow C_3$, $C_3 \leftarrow C_1$.

```
(%i4) A.Psigma;
```

(%o4) $\begin{bmatrix} \boxed{2} & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 - 5/2.L_1$

```
(%i5) matrix([1,0],[-5/2,1]).%;
```

(%o5) $\begin{bmatrix} \boxed{2} & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$

$C_2 \leftarrow C_2 - 3/2.C_1$

```
(%i6) %.matrix([1,-3/2,0],[0,1,0],[0,0,1]);
```

(%o6) $\begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$

$C_1 \leftarrow 1/2.C_1$

(%i7) `matrix([1/2,0],[0,1]).%;`

$$(\%o7)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-\frac{3}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$C_2 \leftarrow -2/3.C_2$

(%i8) `matrix([1,0],[0,-2/3]).%;`

$$(\%o8)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Session **Python** 2.10 – Algorithme du pivot de Gauss

Traduction du `Wxmaxima`.

In [2]

```python
A = Matrix(2, 3,
           [0, 2, 3, 0, 5, 6])
A
```

Out [2]

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

In [3]

```python
sigma = [2, 3, 1]
Psigma = Matrix(3, 3,
                lambda i, j:
```

```
                KroneckerDelta(i+1, sigma[j]))
```

In[4]

```
A*Psigma
```

Out[4]

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

In[5]

```
_.elementary_row_op('n->n+km',
                   row1 = 1,
                   row2 = 0,
                   k = -S(5)/2)
```

Out[5]

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

In[6]

```
_.elementary_col_op('n->n+km',
                   col1 = 1,
                   col2 = 0,
                   k = -S(3)/2)
```

Out[6]

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

In[7]

```
_.elementary_col_op('n->kn',
                    col = 1,
                    k = -S(2)/3)
```

Out[7]

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In[8]

```
_.elementary_col_op('n->kn',
                    col = 0,
                    k = S(1)/2)
```

Out[8]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriété 2.15 – Les permutations sont inutiles

Toute matrice de permutation peut s'exprimer comme produit de matrices de transvection-dilatation.

Démonstration

1. Toute permutation de $[\![1,p]\!]$ peut s'exprimer comme une composée de transpositions (une permutation qui échange seulement deux éléments). Ceci peut se démontrer par récurrence sur p.
   — *Initialisation* $p=1$, c'est évident.
   — *Hérédité* Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons le résultat vrai au rang p. Soit σ une permutation de $[\![1,p+1]\!]$. Alors $\sigma(p+1)=k \in [\![1,p+1]\!]$. Si $\sigma(p+1)=p+1$, on pose $\sigma'=\sigma$, sinon, on multiplie σ par la transposition $\tau_{k,p+1}$ de $[\![1,p+1]\!]$ définie par :
   $$\forall j \in [\![1,p+1]\!]\,,\ \tau_{k,p+1}(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \notin \{k,p+1\} \\ p+1 & \text{si } j=k \\ k & \text{si } j=p+1 \end{cases}$$
   On pose alors $\sigma' = \tau_{k,p+1} \circ \sigma$. On applique l'hypothèse de récurrence à $\sigma'\Big|_{[\![1,p]\!]}$
2. Soit P_σ une matrice de permutation de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$. On écrit
   $$\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_s$$
   où les τ_j sont des transpositions de $[\![1,p]\!]$. On a alors
   $$P_\sigma = P_{\tau_1} \bullet \cdots \bullet P_{\tau_s}$$
3. Il suffit donc de démontrer le résultat pour une transposition. Par décalage d'indices, il suffit de démontrer cela pour la transposition qui échange 1 et 2. On peut procéder de la manière suivante :
   $$\underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \boxed{1} & 0 \end{bmatrix}} \rightarrow \underset{L_2 \leftarrow L_2-L_1}{\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \rightarrow \underset{C_2 \leftarrow C_2-C_1}{\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \rightarrow \underset{C_2 \leftarrow -C_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} \end{bmatrix}} \rightarrow I_2$$

Session `Wxmaxima` 2.11 – Décomposition d'une permutation en produit de transpositions

```
(%i1) compose(s1,s2) := makelist(s1[s2[k]],k,1,length(s2));
```

(%o1) $\mathrm{compose}\,(s1, s2) := \mathrm{makelist}\,(s1_{s2_k}, k, 1, \mathrm{length}\,(s2))$

```
(%i2) sigma : random_permutation(makelist(k,k,1,5));
```

(%o2) $[3, 4, 5, 1, 2]$

```
(%i3) tau(k,l):= makelist(if i=k then l elseif i=l then k else i,i,1,5)$
```

(%i4) compose(tau(sigma[5],5),sigma);

(%o4) $[3, 4, 2, 1, 5]$

(%i5) compose(tau(%[4],4),%);

(%o5) $[3, 1, 2, 4, 5]$

(%i6) compose(tau(%[3],3),%);

(%o6) $[2, 1, 3, 4, 5]$

(%i7) compose(tau(%[2],2),%);

(%o7) $[1, 2, 3, 4, 5]$

Session `Python` 2.11 – Décomposition d'une permutation en produit de transpositions

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```
def compose(s1, s2):
    return([s1[s2[k]-1]
            for k in range(len(s2))])
```

In[3]

```
sigma = [3, 4, 5, 1, 2]


def tau(k, l):
    s = [1, 2, 3, 4, 5]
    s[k-1] = l
```

```python
    s[l-1] = k
    return(s)
```

In[4]

```python
compose(tau(sigma[4], 5),
        sigma)
```

Out[4]

[3, 4, 2, 1, 5]

In[5]

```python
compose(tau(_[3], 4), _)
```

Out[5]

[3, 1, 2, 4, 5]

In[6]

```python
compose(tau(_[2], 3), _)
```

Out[6]

[2, 1, 3, 4, 5]

In[7]

```
compose(tau(_[1], 2), _)
```

Out[7]

$[1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5]$

Propriété 2.16

Soit $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, alors il existe des matrices de transvection-dilatation-permutation de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, notées $R_1, \dots, R_q$ et des matrices de transvection-dilatation-permutation de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, notées $S_1, \dots, S_s$ telles que :

$$R_1 \bullet \cdots \bullet R_q \bullet A = I_p \text{ et } A \bullet S_1 \bullet \cdots \bullet S_s = I_p$$

Autrement dit, quand A est inversible, on peut se contenter de travailler soit uniquement sur les lignes, soit uniquement sur les colonnes.

Démonstration

En reprenant le résultat du théorème 2.1, page 175, il existe un produit de matrices de transvection-dilatation-permutation de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, noté R et un produit de matrices de transvection-dilatation-permutation de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, noté S tels que :

$$R \bullet A \bullet S = I_p$$

car $\mathrm{rang}(A) = p$ (car A est inversible) et $J_{p,p,p} = I_p$.
En multipliant à gauche par S et à droite par S^{-1}, on obtient $(S \bullet R) \bullet A = I_p$. De même, $A \bullet (S \bullet R) = I_p$, d'où le résultat.

Remarque 2.20

Lorsque la matrice A est dans $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, on peut se limiter à au plus une dilatation de type $D_p(\lambda)$ (et ne faire donc autrement que des transvections).

En effet, il suffit de savoir le faire sur une matrice 2×2 ($a \neq 0$ et $b \neq 0$) :

$$\begin{bmatrix} \boxed{a} & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} a & 0 \\ \boxed{a} & b \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - (1-1/a).L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -(1-1/a)\,b \\ a & b \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - a.L_1}{\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -(1-1/a)\,b \\ 0 & a \times b \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - a.L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -(1-1/a)\,b \\ 0 & \boxed{a\,b} \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + (1-1/a)/a\,L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a\,b \end{bmatrix}$$

Remarque importante 2.21

Il est important de noter que :

1. Lorsque l'on calcule un rang : on peut travailler à la fois sur les lignes et les colonnes.
2. Lorsque l'on résout un système d'équations linéaires, on ne travaille *que sur les lignes*.
3. Lorsque l'on calcule un noyau, on ne travaille que sur les lignes.
4. Lorsque l'on calcule une image, on ne travaille *que sur les colonnes*.

En effet, les opérations élémentaires correspondent à des multiplications par des matrices *inversibles*. Donc, lorsqu'on multiplie :

— *à gauche*, on ne change pas le rang, ni le noyau (manipulation sur les lignes) ;

— *à droite*, on ne change pas le rang, ni l'image (manipulation sur les colonnes).

Exercice(s) 2.7

2.7.1 Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

(a) Calculer son rang r.

(b) Trouver deux matrices P et Q inversibles telles que :

$$P \centerdot A \centerdot Q = J_{3,4,r}$$

2.7.2 Déterminer les $a \in \mathbb{K}$ tels que la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & 1 \\ a & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ soit inversible}$$

2.7.3 Soit $A = [a_{i,j}]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \, , \; a_{i,j} = \min(i,j)$$

Démontrer que A est inversible et calculer son inverse.

2.7.4 Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Déterminer le rang de A.

(b) Déterminer une base de l'image de A.

(c) Donner des équations de $\mathrm{Im}(A)$.

(d) Déterminer une base du noyau de A.

2.7.5 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\varphi \; : \begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ X \mapsto A \centerdot X \centerdot A \end{cases}$$

(a) Démontrer que φ est un isomorphisme si, et seulement si, A est inversible.

(b) Calculer le rang de φ en fonction de celui de A.

2.7.6 Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tri-diagonale (c'est-à-dire vérifiant $a_{i,j} = 0$ dès que $|i-j| \geq 2$). On suppose de plus que

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!]\,,\ a_{i,i+1}\, a_{i+1,i} > 0$$

Démontrer qu'il existe une matrice diagonale D inversible, telle que $D^{-1} \centerdot A \centerdot D \in S_n(\mathbb{R})$.

2.7.7 Soit $T \in \mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$, soit $\varepsilon > 0$, démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{D}_n(\mathbb{K}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$P^{-1} \centerdot T \centerdot P = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{T}_n^+(\mathbb{K}) \text{ et vérifiant } \left(\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\,,\ i < j \implies |a_{i,j}| \leq \varepsilon\right)$$

2.3.2 Systèmes linéaires

On a déjà vu au chapitre précédent (section 1.4.1, page 100) qu'en toute généralité, un système linéaire est une équation de la forme :

$$u(x) = b$$

où $u \in \mathscr{L}(E, E')$ et $b \in E'$ sont fixés et x est l'inconnue (E et E' sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels).
Dans le cas de la dimension finie et une fois des bases fixées, ce système linéaire est équivalent à un système de n équations à n inconnues, que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$A \centerdot X = B$$

où A est la matrice $n \times p$ de u, X la matrice $p \times 1$ de x et B la matrice $n \times 1$ de b (avec $p = \dim E$ et $n = \dim E'$)

Exemple 2.12

Lorsque l'on a un système de n équations à p inconnues, la condition de compatibilité (c'est-à-dire la condition pour que le système admette des solutions) s'écrit (voir la partie suivante sur les matrices-blocs) :

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}\left([A \,|\, B]\right)$$

ce qui se vérifie facilement à l'aide d'une méthode de pivot sur les lignes, où l'on ne prend *jamais* le pivot sur la colonne constituée des éléments de B.
La matrice $[A \,|\, B] \in \mathrm{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})$ s'appelle la *matrice augmentée* du système $A \centerdot X = B$.

Définition 2.17 – Système de Cramer

Un système de n équations à n inconnues :

$$A \bullet X = B$$

est dit *de Cramer*, lorsque A est inversible. En ce cas, il y a existence et unicité de la solution, donnée par $X = A^{-1} \bullet B$.

Remarque importante 2.22

Pour résoudre un système de Cramer, on ne calcule *jamais* l'inverse de la matrice A, on utilise l'algorithme du pivot de Gauss !

Exemple 2.13

Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2\,x + \lambda\,y - z & = 5 \\ (\lambda - 5)\,x + 3\,y + 7\,z & = 7 \\ x + 3\,y + 2\,z & = 4 \end{cases}$$

Appliquons l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice augmentée $[A\,|\,B]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & \lambda & -1 & 5 \\ \lambda - 5 & 3 & 7 & 7 \\ \boxed{1} & 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -6 + \lambda & \boxed{-5} & -3 \\ 0 & -3\,\lambda + 18 & -2\,\lambda + 17 & -4\,\lambda + 27 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2.L_3$ $\qquad$ $L_2 \leftarrow L_2 + (17 - 2\,\lambda)/5.L_1$

$L_2 \leftarrow L_2 - (\lambda - 5).L_3$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -6 + \lambda & -5 & -3 \\ 0 & -\dfrac{2}{5}\,(\lambda - 1)\,(-6 + \lambda) & 0 & -\dfrac{14}{5}\,\lambda + \dfrac{84}{5} \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

La deuxième ligne permet de discerner trois cas :

1. $\lambda = 1$, le système est incompatible car $\text{rang}(A) = 2$ et $\text{rang}[A \mid B] = 3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

2. $\lambda = 6$, le système est compatible car $\text{rang}(A) = \text{rang}[A \mid B] = 2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

   Comme on a travaillé sur les lignes, les solutions du système sont les solutions du système réduit, soit :

$$\begin{cases} -5\,z & = -3 \\ x + 3\,y + 2\,z & = 4 \end{cases} \text{ soit } x = \frac{14}{5} - 3\,y,\ y = y,\ z = \frac{3}{5}$$

3. $\lambda \notin \{1, 6\}$, le système est de Cramer (solution unique), le système réduit s'écrit :

$$\begin{cases} (\lambda - 6)\,y - 5\,z & = -3 \\ \frac{2}{5}\,(\lambda - 1)\,(\lambda - 6)\,y & = -\frac{14}{5}\,\lambda + \frac{84}{5} \\ x + 3\,y + 2\,z & = 4 \end{cases}$$

   soit

$$x = \frac{7}{1 - \lambda},\ y = \frac{7}{\lambda - 1},\ z = \frac{2\,\lambda - 9}{\lambda - 1}$$

   ⚠ On voit que le cas $\lambda = 6$ ne s'obtient pas par continuité du cas de Cramer. Donc : l'ordinateur ne fait pas apparaître le cas !!!

Session `Wxmaxima` 2.12 – Exemple de résolution d'un système linéaire

```
(%i1) solve([2*x+a*y-z=5,(a-5)*x+3*y+7*z=7,x+3*y+2*z=4],[x,y,z]);
```

(%o1) $[[x=-\frac{7}{a-1},y=\frac{7}{a-1},z=\frac{2\,a-9}{a-1}]]$

```
(%i2) solve(ev([2*x+a*y-z=5,(a-5)*x+3*y+7*z=7,x+3*y+2*z=4],a=6),[x,y,z]);
```

solve : dependent equations eliminated : (3)

(%o2) $[[x=-\frac{15\,\%r1-14}{5},y=\%r1,z=\frac{3}{5}]]$

Session `Python` 2.12 – Exemple de résolution d'un système linéaire

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```python
a = Symbol('a')
solve([Eq(2*x+a*y-z, 5),
       Eq((a-5)*x+3*y+7*z, 7),
       Eq(x+3*y+2*z, 4)],
      [x, y, z])
```

Out[2]

$$\left\{x:-\frac{7}{a-1},\ y:\frac{7}{a-1},\ z:\frac{2a-9}{a-1}\right\}$$

In[3]

```python
solve([Eq(2*x+a*y-z, 5).subs({a: 6}),
       Eq((a-5)*x+3*y+7*z, 7).subs({a: 6}),
       Eq(x+3*y+2*z, 4)], [x, y, z])
```

Out[3]

$$\left\{x : \frac{14}{5} - 3y,\; z : \frac{3}{5}\right\}$$

Remarque 2.23

Si on a vraiment besoin de calculer l'inverse d'une matrice $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ inversible, on peut appliquer l'algorithme du pivot de Gauss généralisée à la matrice augmentée $[A \,|\, I_p]$, avec des opérations sur les lignes. On obtient à la fin une matrice augmentée de la forme

$$[I_p \,|\, A^{-1}]$$

En effet, si on note E la matrice correspondante aux opérations élémentaires sur les lignes lors de l'algorithme, on a $E \centerdot A = I_p$, d'où $E \centerdot I_p = A^{-1}$. Autrement dit, en effectuant les mêmes opérations sur I_p, on obtient A^{-1}.

Exercice(s) 2.8

2.8.1 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^2$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + j\,y + j^2\,z = b \\ x + j^2\,y + j\,z = c \end{cases}$$

et donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que les solutions soient réelles.

2.8.2 Inverser la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2.8.3 Résoudre le système

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + \cdots + x_n & = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + \cdots + x_n & = 2 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} - x_n & = n \end{cases}$$

2.4 Matrices-blocs

注释 2.7

当矩阵很复杂时，有时我们可以借助分块矩阵来简化矩阵的计算。

2.4.1 Définitions

Notation 2.6

Si $A = [a_{i,j}] \in \mathrm{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $B = [b_{i,j}] \in \mathrm{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$, $C = [c_{i,j}] \in \mathrm{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$ et $D = [d_{i,j}] \in \mathrm{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$, écrire :

$$M = [m_{i,j}] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \in M_{n_1+n_2,p_1+p_2}(\mathbb{K})$$

signifie que :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, n_1]\!]\,,\ \forall j \in [\![1, p_1]\!]\,, & m_{i,j} = a_{i,j} \\ \forall i \in [\![n_1+1, n_1+n_2]\!]\,,\ \forall j \in [\![1, p_1]\!]\,, & m_{i,j} = c_{i-n_1,j} \\ \forall i \in [\![1, n_1]\!]\,,\ \forall j \in [\![p_1+1, p_1+p_2]\!]\,, & m_{i,j} = b_{i,j-p_1} \\ \forall i \in [\![n_1+1, n_1+n_2]\!]\,,\ \forall j \in [\![p_1+1, p_1+p_2]\!]\,, & m_{i,j} = d_{i-n_1,j-p_1} \end{cases}$$

On parle alors de *matrice-blocs*.
On peut généraliser cette notation à un nombre de blocs plus grand.

Exemple 2.14

La matrice $J_{n,p,r}$ (voir la notation 2.2, page 163) peut s'écrire sous la forme d'une matrice-blocs :

$$J_{n,p,r} = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right]$$

Propriété 2.17

— *Multiplication d'une matrice-bloc par un scalaire.* Si $A \in \mathrm{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathrm{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$, alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda. \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda.A & \lambda.B \\ \hline \lambda.C & \lambda.D \end{array}\right]$$

— *Somme de deux matrices-blocs compatibles.* Si $(A_1, A_2) \in \mathrm{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})^2$, $(B_1, B_2) \in \mathrm{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})^2$, $(C_1, C_2) \in \mathrm{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})^2$ et $(D_1, D_2) \in \mathrm{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})^2$, alors :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 \\ \hline C_1 + C_2 & D_1 + D_2 \end{array}\right] \in \mathrm{M}_{n_1+n_2,p_1+p_2}(\mathbb{K})$$

Les sommes entre matrices-blocs incompatibles ne peuvent s'exprimer en termes de blocs.

— *Produit*[a] *entre matrices-blocs compatibles.* Si $A \in \mathrm{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathrm{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$ et si $E \in \mathrm{M}_{p_1,q_1}(\mathbb{K})$, $F \in \mathrm{M}_{p_1,q_2}(\mathbb{K})$, $G \in \mathrm{M}_{p_2,q_1}(\mathbb{K})$ et $H \in \mathrm{M}_{p_2,q_2}(\mathbb{K})$, alors :

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \bullet \left[\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A \bullet E + B \bullet G & A \bullet F + B \bullet H \\ \hline C \bullet E + D \bullet G & C \bullet F + D \bullet H \end{array}\right] \in \mathrm{M}_{n_1\,q_1+n_1\,q_2,n_2\,q_1+n_2\,q_2}(\mathbb{K})$$

Même remarque que précédemment, lorsque les dimensions ne sont pas compatibles.

— On peut bien sûr, généraliser à un nombre de blocs plus grand, il faut faire attention à bien conserver les compatibilités entre les dimensions.

---

a. ⚠ Attention à ne pas oublier que la multiplication entre matrices *n'est pas commutative* !

Démonstration

Il s'agit de simples vérifications par calculs (laissées en exercice).

Proposition 2.7 – Correspondance matrices-blocs et décomposition en somme directe

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, avec

$$E = E_1 \oplus E_2 \text{ et } E' = E'_1 \oplus E'_2$$

Soit :
- $(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$ *une base de E adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$;*
- $(\mathscr{E}'_1, \mathscr{E}'_2)$ *une base de E' adaptée à la somme directe $E' = E'_1 \oplus E'_2$.*

Soit $f \in \mathscr{L}(E, E')$. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

avec
- $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}_1,\mathscr{E}'_1}(\pi_1|^{E'_1} \circ f|_{E_1})$ *où π_1 est la projection sur E'_1 parallèlement à E'_2 ;*
- $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}_2,\mathscr{E}'_1}(\pi_1|^{E'_1} \circ f|_{E_2})$;
- $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}_1,\mathscr{E}'_2}(\pi_2|^{E'_2} \circ f|_{E_1})$ *où $\pi_2 = \mathrm{id}_{E'} - \pi_1$ est la projection sur E'_2 parallèlement à E'_1 ;*
- $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}_2,\mathscr{E}'_2}(\pi_2|^{E'_2} \circ f|_{E_2})$.

Démonstration

Immédiat en décomposant chaque élément de $f(\mathscr{E}_1)$ et chaque élément de $f(\mathscr{E}_2)$ sur la base $(\mathscr{E}'_1, \mathscr{E}'_2)$ (en exercice)

Remarque 2.24

En particulier, pour le cas des endomorphismes (c'est-à-dire $E = E'$, $E'_1 = E_1$ et $E'_2 = E_2$), on a :

$$E_1 \text{ stable par } f \iff C = 0_{n_2,p_1} \quad \text{et} \quad E_2 \text{ stable par } f \iff B = 0_{n_1,p_2}$$

avec $n_1 = \dim E_1$, $n_2 = \dim E_2$, $p_1 = \dim E'_1$ et $p_2 = \dim E'_2$.
Ainsi, les matrices-blocs permettent de visualiser simplement certains sous-espaces stables.

2.4.2 Utilisation

Remarque 2.25

La notation par blocs est extrêmement pratique pour faire des récurrences, ainsi que pour représenter simplement les matrices.

Exemple 2.15

1. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est stable par la multiplication externe et par l'addition et la multiplication interne. De plus,
$$\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ est stable par } M \mapsto M^{-1}$$
2. Soit :
$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right]$$
où $A \in \mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{K})$, alors $M \in \mathrm{GL}_{n_1+n_2}(\mathbb{K})$ et son inverse est de la forme :
$$M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline 0 & H \end{array}\right]$$

Remarque 2.26

On rencontre souvent des transvections-blocs, des dilatations-blocs et des permutations-blocs, ainsi :

$$\Theta_{1,2}(\Lambda) = \left[\begin{array}{c|c} I_k & \Lambda \\ \hline 0_{\ell,k} & I_\ell \end{array}\right], \text{ où } \Lambda \in M_{k,\ell}(\mathbb{K})$$

vérifie clairement (en choisissant k et ℓ pour avoir des dimensions compatibles) :

$$\Theta_{1,2}(\Lambda) \boldsymbol{.} \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A + \Lambda \boldsymbol{.} C & B + \Lambda \boldsymbol{.} D \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

soit une opération élémentaire sur les blocs :

$$L_1 \leftarrow L_1 + \Lambda \boldsymbol{.} L_2 \qquad \text{(produit à gauche)}$$

et

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \bullet \Theta_{1,2}(\Lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A & A \bullet \Lambda + B \\ \hline C & C \bullet \Lambda + D \end{array}\right]$$

soit :

$$C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \bullet \Lambda \qquad \text{(produit à droite)}$$

De même avec les dilatations [a] :

$$\Gamma_1(\Lambda) = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda & 0 \\ \hline 0 & I_{p_2} \end{array}\right], \text{ où } \Lambda \in \mathrm{GL}_{p_1}(\mathbb{K})$$

vérifie :

$$\Gamma_1(\Lambda) \bullet \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda \bullet A & \Lambda \bullet B \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

soit

$$L_1 \leftarrow \Lambda \bullet L_1 \qquad \text{(produit à gauche)}$$

et

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \bullet \Gamma_1(\Lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A \bullet \Lambda & B \\ \hline C \bullet \Lambda & D \end{array}\right]$$

soit :

$$C_1 \leftarrow C_1 \bullet \Lambda \qquad \text{(produit à droite)}$$

La permutation-bloc serait par exemple :

$$\Pi_{(1,2)} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_p \\ \hline I_p & 0 \end{array}\right]$$

Cela permet (avec quelques précautions de calcul) de faire des manipulations sur les matrices-blocs comme sur des matrices usuelles.

---

a. Λ *doit être inversible*, car on veut conserver le rang !!

Exemple 2.16

1. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est de la forme :

$$\left[\begin{array}{c|c} \alpha & L \\ \hline C & A_1 \end{array}\right], \text{ où } \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

alors :

$$A_1 - \frac{1}{\alpha}.C \centerdot L \text{ est inversible}$$

2. On peut en déduire que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors il existe une matrice de permutation P_σ, une matrice T_1 triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et une matrice T_2 triangulaire supérieure telles que :

$$A = P_\sigma \centerdot T_1 \centerdot T_2.$$

2.4.3 Produit de Kronecker

Définition 2.18 – Produit de Kronecker

Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathrm{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$, on définit le *produit de Kronecker* de A et B comme la matrice-blocs :

$$A \otimes B = \left[\begin{array}{c|c|c} a_{1,1}.B & \cdots & a_{1,p_1}.B \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{n_1,1}.B & \cdots & a_{n_1,p_1}.B \end{array}\right] \in \mathrm{M}_{n_1\,n_2,p_1\,p_2}(\mathbb{K})$$

Exemple 2.17

1. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

alors pour toute matrice B à coefficients dans $\mathbb{K}$, on a

$$A \otimes B = \left[\begin{array}{c|c} B & 2.B \\ \hline 3.B & 4.B \end{array}\right]$$

2. Pour toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice de l'application :

$$\begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto M \bullet A \end{cases}$$

dans la base canonique (judicieusement ordonnée) est :

$$I_n \otimes {}^t A$$

3. En prenant le même ordre de la base canonique, pour toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de de l'application :

$$\begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto A \bullet M \end{cases}$$

est

$$A \otimes I_n$$

Proposition 2.8

Soit $(A_1, A_2) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2$ *et* $(B_1, B_2) \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})^2$*, alors :*

$$(A_1 \otimes B_1) \bullet (A_2 \otimes B_2) = (A_1 \bullet A_2) \otimes (B_1 \bullet B_2)$$

Démonstration

Il s'agit d'une simple vérification par calculs (laissée en exercice).

Session `Wxmaxima` 2.13 – Produit de Kronecker

```
(%i1) A : matrix([a,b],[c,d]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

```
(%i2) B : genmatrix(lambda([i,j],bb[i,j]),3,4);
```

(%o2) $$\begin{bmatrix} bb_{1,1} & bb_{1,2} & bb_{1,3} & bb_{1,4} \\ bb_{2,1} & bb_{2,2} & bb_{2,3} & bb_{2,4} \\ bb_{3,1} & bb_{3,2} & bb_{3,3} & bb_{3,4} \end{bmatrix}$$

```
(%i3) kronecker_product(A,B);
```

(%o3) $$\begin{bmatrix} bb_{1,1}\times a & bb_{1,2}\times a & bb_{1,3}\times a & bb_{1,4}\times a & bb_{1,1}\times b & bb_{1,2}\times b & bb_{1,3}\times b & bb_{1,4}\times b \\ bb_{2,1}\times a & bb_{2,2}\times a & bb_{2,3}\times a & bb_{2,4}\times a & bb_{2,1}\times b & bb_{2,2}\times b & bb_{2,3}\times b & bb_{2,4}\times b \\ bb_{3,1}\times a & bb_{3,2}\times a & bb_{3,3}\times a & bb_{3,4}\times a & bb_{3,1}\times b & bb_{3,2}\times b & bb_{3,3}\times b & bb_{3,4}\times b \\ bb_{1,1}\times c & bb_{1,2}\times c & bb_{1,3}\times c & bb_{1,4}\times c & bb_{1,1}\times d & bb_{1,2}\times d & bb_{1,3}\times d & bb_{1,4}\times d \\ bb_{2,1}\times c & bb_{2,2}\times c & bb_{2,3}\times c & bb_{2,4}\times c & bb_{2,1}\times d & bb_{2,2}\times d & bb_{2,3}\times d & bb_{2,4}\times d \\ bb_{3,1}\times c & bb_{3,2}\times c & bb_{3,3}\times c & bb_{3,4}\times c & bb_{3,1}\times d & bb_{3,2}\times d & bb_{3,3}\times d & bb_{3,4}\times d \end{bmatrix}$$

Session `Python` 2.13 – Produit de Kronecker

Traduction du `Wxmaxima`.

In [2]

```
a = IndexedBase('a')
A = Matrix(2, 2,
           [a[i, j]
            for i in range(1, 3)
            for j in range(1, 3)])
A
```

Out [2]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

In[3]

```
b = IndexedBase('b')
B = Matrix(3, 4,
           lambda i, j:
           b[i+1, j+1])
B
```

Out[3]

$$\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} \end{bmatrix}$$

In[4]

```
a[0,0]*B # Étrange erreur, contournons la difficulté
```

```
IndexException:
Range is not defined for all indices in: a[0, 0]
```

In[5]

```
A0 = Matrix(2, 2,
            lambda i, j:
            str(a)+str(i)+str(j))
BlockMatrix([[A0[i, j]*B
              for i in range(2)]
             for j in range(2)])
```

Out[5]

$$\left[\begin{array}{cc}\left[\begin{matrix}a_{00}b_{1,1} & a_{00}b_{1,2} & a_{00}b_{1,3} & a_{00}b_{1,4}\\ a_{00}b_{2,1} & a_{00}b_{2,2} & a_{00}b_{2,3} & a_{00}b_{2,4}\\ a_{00}b_{3,1} & a_{00}b_{3,2} & a_{00}b_{3,3} & a_{00}b_{3,4}\end{matrix}\right] & \left[\begin{matrix}a_{10}b_{1,1} & a_{10}b_{1,2} & a_{10}b_{1,3} & a_{10}b_{1,4}\\ a_{10}b_{2,1} & a_{10}b_{2,2} & a_{10}b_{2,3} & a_{10}b_{2,4}\\ a_{10}b_{3,1} & a_{10}b_{3,2} & a_{10}b_{3,3} & a_{10}b_{3,4}\end{matrix}\right]\\ \left[\begin{matrix}a_{01}b_{1,1} & a_{01}b_{1,2} & a_{01}b_{1,3} & a_{01}b_{1,4}\\ a_{01}b_{2,1} & a_{01}b_{2,2} & a_{01}b_{2,3} & a_{01}b_{2,4}\\ a_{01}b_{3,1} & a_{01}b_{3,2} & a_{01}b_{3,3} & a_{01}b_{3,4}\end{matrix}\right] & \left[\begin{matrix}a_{11}b_{1,1} & a_{11}b_{1,2} & a_{11}b_{1,3} & a_{11}b_{1,4}\\ a_{11}b_{2,1} & a_{11}b_{2,2} & a_{11}b_{2,3} & a_{11}b_{2,4}\\ a_{11}b_{3,1} & a_{11}b_{3,2} & a_{11}b_{3,3} & a_{11}b_{3,4}\end{matrix}\right]\end{array}\right]$$

In[6]

```python
Matrix(_).subs({str(a)+
                str(i)+str(j): A[i, j]
                for i in range(2)
                for j in range(2)})
```

Out[6]

$$\left[\begin{matrix}a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,1}b_{1,2} & a_{1,1}b_{1,3} & a_{1,1}b_{1,4} & a_{2,1}b_{1,1} & a_{2,1}b_{1,2} & a_{2,1}b_{1,3} & a_{2,1}b_{1,4}\\ a_{1,1}b_{2,1} & a_{1,1}b_{2,2} & a_{1,1}b_{2,3} & a_{1,1}b_{2,4} & a_{2,1}b_{2,1} & a_{2,1}b_{2,2} & a_{2,1}b_{2,3} & a_{2,1}b_{2,4}\\ a_{1,1}b_{3,1} & a_{1,1}b_{3,2} & a_{1,1}b_{3,3} & a_{1,1}b_{3,4} & a_{2,1}b_{3,1} & a_{2,1}b_{3,2} & a_{2,1}b_{3,3} & a_{2,1}b_{3,4}\\ a_{1,2}b_{1,1} & a_{1,2}b_{1,2} & a_{1,2}b_{1,3} & a_{1,2}b_{1,4} & a_{2,2}b_{1,1} & a_{2,2}b_{1,2} & a_{2,2}b_{1,3} & a_{2,2}b_{1,4}\\ a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,2}b_{2,2} & a_{1,2}b_{2,3} & a_{1,2}b_{2,4} & a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,2} & a_{2,2}b_{2,3} & a_{2,2}b_{2,4}\\ a_{1,2}b_{3,1} & a_{1,2}b_{3,2} & a_{1,2}b_{3,3} & a_{1,2}b_{3,4} & a_{2,2}b_{3,1} & a_{2,2}b_{3,2} & a_{2,2}b_{3,3} & a_{2,2}b_{3,4}\end{matrix}\right]$$

Exercice(s) 2.9

2.9.1 Soit $(A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose :

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right]$$

(a) Démontrer que :

$$\operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang}\left(\left[\begin{array}{c|c} A & 0_n \\ \hline A & B - A \end{array}\right]\right).$$

(b) En déduire le rang de M.

(c) On suppose M inversible. Calculer M^{-1}.

2.9.2 Inverser la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.9.3 Calculer $\operatorname{rang}(A \otimes B)$ en fonction de $\operatorname{rang}(A)$ et $\operatorname{rang}(B)$ pour $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{q,s}(\mathbb{K})$.

2.9.4 Soit A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A & B & \cdots & B \\ \hline B & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & B \\ \hline B & \cdots & B & A \end{array}\right] \in \mathrm{M}_{n\,p}(\mathbb{R})$$

Soit $E = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid A - \lambda.B \text{ inversible}\}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur E pour que M soit inversible et, dans ce cas, calculer M^{-1}.

2.9.5 Soit $A_1 \in \mathrm{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, ... $A_q \in \mathrm{M}_{n_q,p_q}(\mathbb{K})$. On considère la matrice diagonale par blocs :

$$M = \operatorname{Diag}(A_1, \ldots, A_q) \overset{\text{Not}}{=} \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0_{n_1,p_2} & \cdots & 0_{n_1,p_q} \\ \hline 0_{n_2,p_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0_{n_{q-1},p_q} \\ \hline 0_{n_q,p_1} & \cdots & 0_{n_q,p_{q-1}} & A_q \end{array}\right] \in \mathrm{M}_{(n_1+\cdots+n_q)\times(p_1+\cdots+p_q)}(\mathbb{K})$$

(a) Démontrer que

$$\operatorname{rang}(M) = \sum_{k=1}^{q} \operatorname{rang}(A_k)$$

Soit $B \in M_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$ et $D \in M_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$, on pose

$$A = \left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0_{n_2,p_1} & D \end{array}\right]$$

(b) Démontrer que :

$$\operatorname{rang}(A) \geq \operatorname{rang}(B) + \operatorname{rang}(D)$$

(c) Donner un exemple où l'inégalité est stricte.

(d) Démontrer que si B ou D est une matrice carrée inversible, alors il y a égalité.

Figure 2.1 – Produit matriciel

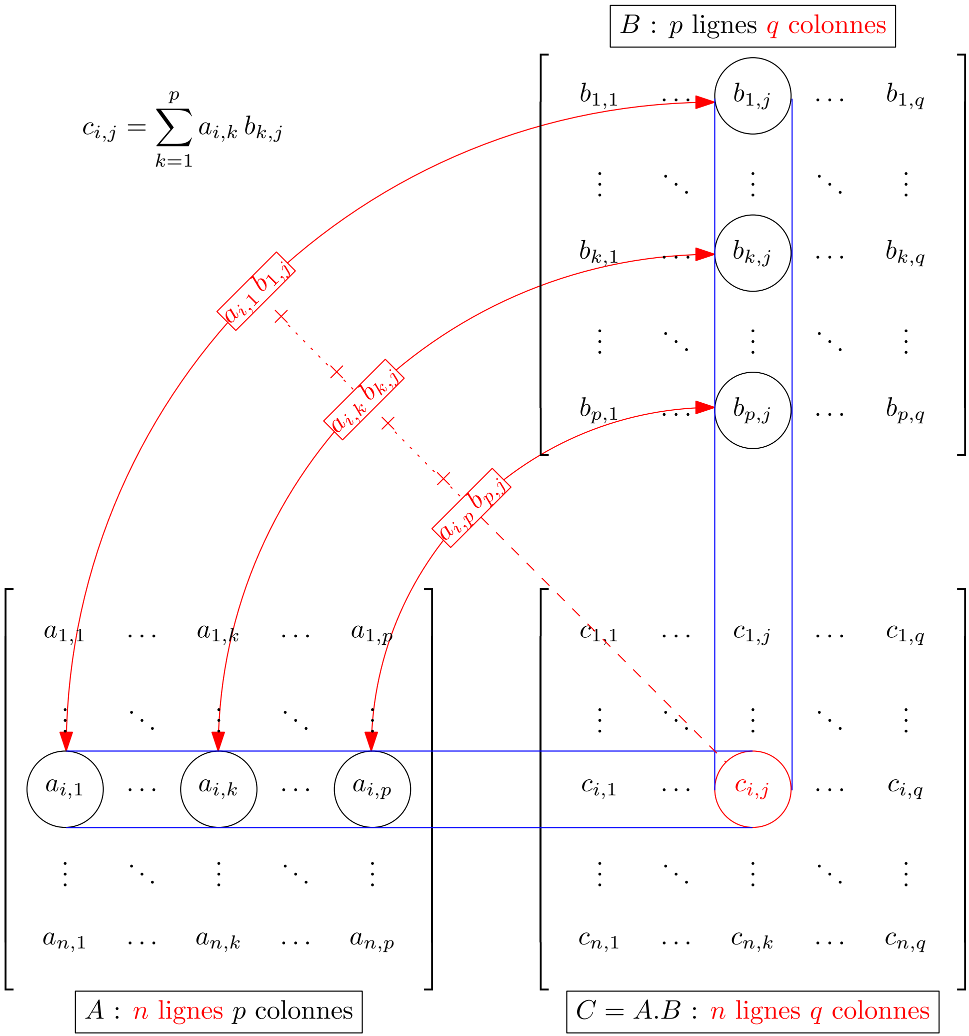


Figure 2.2 – Changement de base pour les applications linéaires

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathscr{B}) \arrow[r, "P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}"] \arrow[d, "\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)"'] & (E,\mathscr{E}) \arrow[d, "\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f)"] \\
(E',\mathscr{B}') & (E',\mathscr{E}') \arrow[l, "P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{E}'}=\left(P_{\mathscr{E}'}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Chapitre 3

Déterminant

3.1 Permutations et groupe symétrique

Définition 3.1 – Permutation

Soit E un ensemble non vide. Une *permutation de* E est une bijection de E dans E. On note

$$\mathfrak{S}(E) \text{ l'ensemble des permutations de } E$$

Dans le cas particulier où $E = [\![1, p]\!]$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathfrak{S}_p \overset{\text{Not}}{=} \mathfrak{S}([\![1, p]\!]) \text{ l'ensemble des permutations de } [\![1, p]\!]$$

Remarque 3.1

On a les propriétés suivantes :

- $\mathrm{id}_E \in \mathfrak{S}(E)$, en particulier $\mathfrak{S}(E)$ n'est jamais vide ;
- $\mathfrak{S}(E)$ est stable par composition :

$$\forall (\sigma, \sigma') \in \mathfrak{S}(E)^2,\ \sigma \circ \sigma' \in \mathfrak{S}(E)$$

— la composition est associative :

$$\forall(\sigma,\sigma',\sigma'')\in\mathfrak{S}(E)^2,\ (\sigma\circ\sigma')\circ\sigma''=\sigma\circ(\sigma'\circ\sigma'')\overset{\text{Not}}{=}\sigma\circ\sigma'\circ\sigma''$$

— il existe un élément neutre, en l'occurrence id_E :

$$\forall\sigma\in\mathfrak{S}(E)^2,\ \sigma\circ\mathrm{id}_E=\mathrm{id}_E\circ\sigma=\sigma$$

— $\mathfrak{S}(E)$ est stable par passage à l'inverse (qui existe toujours et est unique) :

$$\forall\sigma\in\mathfrak{S}(E)^2,\ \sigma^{-1}\in\mathfrak{S}(E)\text{ et }\sigma\circ\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\circ\sigma=\mathrm{id}_E$$

On dit que $(\mathfrak{S}(E),\circ)$ est un *groupe*. On l'appelle le *groupe symétrique de E* et $\mathfrak{S}_p$ s'appelle le *groupe symétrique de degré p*.

Propriété 3.1

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On a

$$\operatorname{card}\mathfrak{S}_p=p!$$

Démonstration

Pour construire une permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_p$:

— On a p choix possibles pour $\sigma(1)$ (les p éléments de $[\![1,p]\!]$) ;
— Une fois $\sigma(1)$ choisi, on a $p-1$ choix possibles pour $\sigma(2)$ (les $p-1$ éléments de $[\![1,p]\!]\setminus\{\sigma(1)\}$) ;
— Plus généralement, une fois $\sigma(1),\dots,\sigma(i)$ choisis, on a $p-i$ choix possibles pour $\sigma(i+1)$ (les $p-i$ éléments de $[\![1,p]\!]\setminus\{\sigma(1),\dots,\sigma(i)\}$) ;
— Une fois $\sigma(1),\dots,\sigma(p-1)$ choisis, il ne reste plus qu'un seul choix pour $\sigma(p)$ (l'unique élément de $[\![1,p]\!]\setminus\{\sigma(1),\dots,\sigma(p-1)\}$).

Finalement, on a

$$p\,(p-1)\,\cdots\,1=p!$$

choix possibles pour construire σ, d'où le résultat. La démonstration peut se faire plus rigoureusement par récurrence sur p.

Définition 3.2

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$, et soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $i \neq j$. La *transposition* $\tau_{i,j}$ est la permutation de $\mathfrak{S}_p$ qui échange i et j et qui laisse stable les autres entiers :

$$\tau_{i,j}(i) = j,\ \tau_{i,j}(j) = i \text{ et pour tout } k \in [\![1,p]\!] \setminus \{i,j\},\ \tau_{i,j}(k) = k$$

Propriété 3.2

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$. Toute permutation $\sigma \in [\![1,p]\!]$ s'écrit à l'aide de transpositions, c'est-à-dire qu'il existe des transpositions de $\mathfrak{S}_p$, notée $\tau_1, \dots, \tau_r$, telles que

$$\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r$$

Démonstration

Déjà démontré lors de la démonstration de la proposition 2.15, page 189 du chapitre 2.

Définition 3.3 – Signature d'une permutation

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, soit $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, on appelle *signature de* σ et on note[a] :

$$\varepsilon(\sigma) \overset{\text{Def}}{=} \prod_{1 \leq i < j \leq p} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

[a]. On fait le produit sur tous les couples $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ tels que $i < j$. Pour $p = 1$, on obtient un produit vide qui vaut 1 par convention.

ε 用来表示置换 σ 的符合，用来判断置换为偶置换或者奇置换。根据定义可以发现其值只能是1和-1。

Remarque 3.2

On a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$, où N est le nombre d'*inversions*, c'est-à-dire les couples $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. La signature mesure donc la parité du nombre d'inversions.

Propriété 3.3

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La signature ε est à valeurs dans $\{-1,+1\}$ et :

$$\forall (\sigma, \sigma') \in (\mathfrak{S}_p)^2,\ \varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\sigma')$$

Démonstration

Soit $(\sigma, \sigma') \in (\mathfrak{S}_p)^2$. On a :

$$\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \prod_{1 \leq i < j \leq p} \frac{\sigma(\sigma'(j)) - \sigma(\sigma'(i))}{j - i} = \underbrace{\left(\prod_{1 \leq i < j \leq p} \frac{\sigma(\sigma'(j)) - \sigma(\sigma'(i))}{\sigma'(j) - \sigma'(i)} \right)}_{=\varepsilon(\sigma)} \underbrace{\left(\prod_{1 \leq i < j \leq p} \frac{\sigma'(j) - \sigma'(i)}{j - i} \right)}_{=\varepsilon(\sigma')}$$

En effet, pour le premier produit, on peut faire le changement de variable $(i, j) \leftarrow (\sigma'(i), \sigma'(j))$ (grâce à la bijectivité de σ').

Remarque 3.3

On a $\varepsilon(\mathrm{id}_{[\![1,p]\!]}) = 1$ et

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_p,\ \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$$

car

$$\underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{\in\{-1,+1\}} \underbrace{\varepsilon(\sigma^{-1})}_{\in\{-1,+1\}} = \varepsilon(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \varepsilon(\mathrm{id}_{[\![1,p]\!]}) = 1$$

Propriété 3.4

La signature d'une transposition est -1.

Démonstration

On se place dans $\mathfrak{S}_p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$.

— C'est vrai pour $\sigma = \tau_{1,2}$, car en séparant les cas $(i=1,\ j=2)$, $(i=1,\ j\geq 3)$, $(i=2,\ j\geq 3)$ et $(3\leq i<j)$:

$$\varepsilon(\sigma) = \underbrace{\left(\frac{1-2}{2-1}\right)}_{=-1} \underbrace{\left(\prod_{j=3}^{p} \frac{j-2}{j-1}\right)}_{=1/(p-1)} \underbrace{\left(\prod_{j=3}^{p} \frac{j-1}{j-2}\right)}_{=p-1} \underbrace{\left(\prod_{3\leq i<j\leq p} \frac{j-i}{j-i}\right)}_{=1} = -1$$

— C'est vrai pour $\tau_{2,1} = \tau_{1,2}^{-1}$ car

$$\varepsilon(\tau_{2,1}) = \varepsilon(\tau_{1,2}^{-1}) = \varepsilon(\tau_{1,2}) = -1$$

— On exprime alors les autres transpositions à l'aide de $\tau_{1,2}$ et $\tau_{2,1}$. Par exemple, si $(k,\ell) \in [\![1,p]\!]^2$, $2<k<\ell$, on a :

$$\tau_{k,\ell} = \tau_{1,k} \circ \tau_{2,\ell} \circ \tau_{1,2} \circ \tau_{2,\ell} \circ \tau_{1,k}$$

d'où

$$\varepsilon(\tau_{k,\ell}) = \varepsilon(\tau_{1,k})^2\, \varepsilon(\tau_{2,\ell})^2\, \varepsilon(\tau_{1,2}) = -1$$

— Les autres cas sont analogues (laissés en exercice).

Exemple 3.1

Cela nous donne un moyen effectif de calculer la signature d'une permutation (bien qu'il existe des algorithmes nettement plus performants). En effet, en décomposant une permutation à l'aide de transpositions :

$$\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r$$

alors

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^{r} \varepsilon(\tau_i) = (-1)^r$$

et cela ne dépend pas de la décomposition choisie (qui n'est pas unique) car si

$$\sigma = \tau_1' \circ \cdots \circ \tau_s'$$

est une autre décomposition à l'aide de transpositions, on a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^r = (-1)^s$ (r et s ont même parité).
Soit la permutation de $[\![1,9]\!]$ donnée par [a] :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 9 & 7 & 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

alors sa signature vaut : $+1$. En effet :

— on a $\sigma(1) = 3$ et $\sigma(3) = 1$, ce qui donne la transposition $\tau_{1,3}$;
— on a le *cycle* $\sigma(2) = 5$, $\sigma(5) = 9$, $\sigma(9) = 4$ et $\sigma(4) = 2$, ce qui donne $\tau_{2,5} \circ \tau_{5,9} \circ \tau_{9,4}$;
— on a le cycle $\sigma(6) = 7$, $\sigma(7) = 8$ et $\sigma(8) = 6$, ce qui donne $\tau_{6,7} \circ \tau_{7,8}$.

Finalement, on a une décomposition en 6 transpositions :

$$\sigma = \tau_{1,3} \circ \tau_{2,5} \circ \tau_{5,9} \circ \tau_{9,4} \circ \tau_{6,7} \circ \tau_{7,8}$$

donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^6 = +1$.

a. C'est-à-dire que l'entier en $(2, j)$ (deuxième ligne) est l'image par σ de l'entier en $(1, j)$ (première ligne).

Bien retenir qu'il suffit de regarder ce qui se passe avec les transpositions !

3.2 Formes p-linéaires sur un espace vectoriel de dimension n

Définition 3.4 – Formes p-linéaires sur un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $p \in \mathbb{N}^*$.
On appelle *forme p-linéaire sur E* toute application :

$$\phi : \begin{cases} E^p \to \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_p) \mapsto \phi(x_1, \dots, x_p) \end{cases}$$

telle que :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p,\ \forall k \in [\![1, p]\!],\ \begin{cases} E \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \phi(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_p) \end{cases} \quad \text{soit linéaire}$$

On note

$$\mathscr{L}_p(E, \mathbb{K}) \text{ l'ensemble des formes } p\text{-linéaires sur } E$$

对偶空间中线性泛函定义的拓展。

Remarque 3.4

- L'ensemble $\mathscr{L}_p(E, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles.
- Pour $p = 1$, on retrouve les formes linéaires : $\mathscr{L}_1(E) = E^\star$.
- Pour $p = 2$, on dit *forme bilinéaire* au lieu de forme 2-linéaire.
- Attention à ne pas confondre les formes p-linéaires sur E avec les formes linéaires sur E^p. Considérons

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y) & \longmapsto & x\,y \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array}$$

La première application est bilinéaire sur $\mathbb{K}$ mais n'est pas linéaire sur $\mathbb{K}^2$ alors que la seconde est linéaire sur $\mathbb{K}^2$ mais pas bilinéaire sur $\mathbb{K}$.

Exemple 3.2

1. Le produit scalaire

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) & \longmapsto & x_1\,y_1 + \dots + x_n\,y_n \end{array}$$

est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$.

2. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \times \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est une forme bilinéaire sur $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

3. Si $f_1, \dots, f_p$ sont des formes linéaires sur E, alors

$$\begin{array}{ccc} E^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & f_1(x_1)\,f_2(x_2)\,\cdots\,f_p(x_p) \end{array}$$

est une forme p-linéaire sur E.

Définition 3.5 – Formes p-linéaires symétriques et antisymétriques

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, et soit $\phi \in \mathscr{L}_p(E, \mathbb{K})$.

— On dit que ϕ est *symétrique* si :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_p,\ \forall (x_1, \ldots, x_p) \in E^p,\ \phi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = \phi(x_1, \ldots, x_p)$$

On note

$\mathscr{S}_p(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes p-linéaires sur E symétriques

— On dit que ϕ est *antisymétrique* si :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_p,\ \forall (x_1, \ldots, x_p) \in E^p,\ \phi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)\, \phi(x_1, \ldots, x_p)$$

On note

$\mathscr{A}_p(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes p-linéaires sur E antisymétriques

Exemple 3.3

1. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, si ϕ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, alors l'application :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mapsto \phi\,(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$$

est bilinéaire antisymétrique.

2. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, l'application *produit mixte* définie par :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \mapsto \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \rangle$$

(où $\langle\, , \rangle$ est le produit scalaire euclidien) est 3-linéaire antisymétrique.

Remarque 3.5

— $\mathscr{S}_p(E, \mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_p(E, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{L}_p(E, \mathbb{K})$.

— D'après l'étude de $\mathfrak{S}_p$ de la partie précédent, pour savoir si une forme p-linéaire est symétrique ou anti-symétrique, il suffit de se restreindre aux transpositions. En particulier :

— ϕ est symétrique si, et seulement si, échanger deux vecteurs ne change pas le signe (ci-dessous seules les i-èmes et j-ièmes variables sont explicitées) :

$$\forall (x_1,\dots,x_p)\in E^p, \forall (i,j)\in\{1,\dots,p\}^2,\ \phi(\dots,x_i,\dots,x_j,\dots)=\phi(\dots,x_j,\dots,x_i,\dots)$$

— ϕ est antisymétrique si, et seulement si, échanger deux vecteurs change le signe (ci-dessous seules les i-èmes et j-ièmes variables sont explicitées) :

$$\forall (x_1,\dots,x_p)\in E^p, \forall (i,j)\in\{1,\dots,p\}^2,\ \phi(\dots,x_i,\dots,x_j,\dots)=-\phi(\dots,x_j,\dots,x_i,\dots)$$

Propriété 3.5

Soit $\phi\in\mathscr{L}_p(E,\mathbb{K})$. Alors ϕ est antisymétrique si, et seulement si, elle est *alternée*, c'est-à-dire :

$$\forall (x_1,\dots,x_p)\in E^p,\ \left[\exists (i,j)\in[\![1,p]\!]^2,\ i\neq j \text{ et } x_i=x_j\right] \implies \phi(x_1,\dots,x_p)=0$$

Démonstration

Soit $(x_1,\dots,x_p)\in E^p$ et soit $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$ tel que $i\neq j$ (ci-dessous, seules les i-èmes et j-ièmes variables sont explicitées).

— Supposons ϕ antisymétrique. Alors :

$$\phi(\dots,x_i,\dots,x_i,\dots)=-\phi(\dots,x_i,\dots,x_i,\dots)$$

d'où $\phi(\dots,x_i,\dots,x_i,\dots)=0$ donc ϕ est alternée.

— Supposons ϕ alternée. Alors :

$$\begin{aligned}0&=\phi(\dots,x_i+x_j,\dots,x_i+x_j,\dots)\\&=\underbrace{\phi(\dots,x_i,\dots,x_i,\dots)}_{=0}+\phi(\dots,x_i,\dots,x_j,\dots)+\phi(\dots,x_j,\dots,x_i,\dots)+\underbrace{\phi(\dots,x_j,\dots,x_j,\dots)}_{=0}\end{aligned}$$

d'où $\phi(\dots,x_i,\dots,x_j,\dots)=-\phi(\dots,x_j,\dots,x_i,\dots)$ donc ϕ est antisymétrique (car on peut se restreindre aux transpositions, voir la remarque ci-dessus).

Remarque 3.6

Attention, ce résultat n'est plus vrai dans d'autres corps K que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour lesquels $1_K+1_K=0_K$. Par exemple, $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$.

Propriété 3.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, soit $\phi \in \mathscr{A}_p(E, \mathbb{K})$ et soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$.

1. Si $(x_1, \dots, x_p)$ est liée, alors $\phi(x_1, \dots, x_p) = 0$.
2. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. La valeur de $\phi(x_1, \dots, x_p)$ ne change pas en ajoutant à x_i une combinaison linéaire de tous les x_k avec $k \in \{1, \dots, p\}$, $k \neq i$.

Démonstration

1. Si $(x_1, \dots, x_p)$ est liée, cela veut dire qu'il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que x_i soit une combinaison linéaire des autres vecteurs : il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$ tel que
$$x_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \lambda_k . x_k$$
Puisque ϕ est linéaire par rapport à sa i-ème variable :
$$\phi(x_1, \dots, x_p) = \phi\Big(\dots, x_{i-1}, \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \lambda_k . x_k, x_{i+1}, \dots\Big) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \lambda_k \underbrace{\phi(\dots, x_{i-1}, x_k, x_{i+1}, \dots)}_{=0} = 0$$
puisque x_k apparaît deux fois dans $(\dots, x_{i-1}, x_k, x_{i+1}, \dots)$ car $k \neq i$ et ϕ est alternée.
2. Soit $i \in \{1, \dots, p\}$ et soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$. Puisque ϕ est linéaire par rapport à sa i-ème variable :
$$\begin{aligned} \phi(x_1, \dots, x_p) &= \phi\Big(\dots, x_{i-1}, x_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \lambda_k . x_k, x_{i+1}, \dots\Big) \\ &= \phi(x_1, \dots, x_p) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \lambda_k \underbrace{\phi(\dots, x_{i-1}, x_k, x_{i+1}, \dots)}_{=0} \\ &= \phi(x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

Théorème 3.1 – Dimension de l'espace des formes n-linéaires alternées

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie *avec $n = \dim E \geq 1$. Alors :*

$$\boxed{\dim \mathscr{A}_n(E, \mathbb{K}) = 1}$$

Démonstration

Soit $\phi \in \mathscr{A}_n(E, \mathbb{K})$, soit $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On a :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \exists!(x_{1,j}, \dots, x_{n,j}) \in \mathbb{K}^n, \quad x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j}.e_i$$

— Comme ϕ est une forme p-linéaire :

$$\begin{aligned}\phi(x_1, \dots, x_n) &= \phi\Big(\sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1,1}.e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} x_{i_n,n}.e_{i_n}\Big) \\ &= \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in[\![1,n]\!]} x_{i_1,1} \cdots x_{i_n,n}\, \phi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})\end{aligned}$$

Or $\phi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$ dès que deux éléments sont égaux car ϕ est alternée (voir la propriété 3.5, page 223). Dans la somme ci-dessus, on peut garder uniquement les familles $(i_1, \dots, i_n)$ d'indices tous distincts, ce qui correspond exactement aux permutations de $[\![1, n]\!]$. On a donc, en utilisant le fait que ϕ est antisymétrique :

$$\begin{aligned}\phi(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n}\, \phi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\ &= \phi(e_1, \dots, e_n) \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n}\end{aligned}$$

Pour conclure, il reste à démontrer que

$$D\colon (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} x_{\sigma(j),j}$$

est une forme n-linéaire alternée non nulle.

— Le fait que D soit une forme n-linéaire est une simple vérification (en exercice).

— Soit $\sigma' \in \mathfrak{S}_n$. On a

$$D(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} x_{\sigma(j),\sigma'(j)}$$

Par le changement de variable $k = \phi(j)$:

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{j=1}^{n} x_{\sigma(j),\sigma'(j)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{k=1}^{n} x_{(\sigma\circ(\sigma')^{-1})(k),k}$$

L'application $s \mapsto \sigma \circ (\sigma')^{-1}$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ dans lui-même donc on peut faire le changement de variable $\theta = \sigma \circ (\sigma')^{-1}$:

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{k=1}^{n} x_{(\sigma\circ(\sigma')^{-1})(k),k} = \sum_{\theta \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\theta \circ \sigma') \prod_{k=1}^{n} x_{\theta(k),k}$$

Or $\varepsilon(\theta \circ \sigma') = \varepsilon(\theta)\varepsilon(\sigma')$ (propriété 3.3, page 218), donc finalement :

$$D(x_{\sigma'(1)}, \dots, x_{\sigma'(n)}) = \varepsilon(\sigma') \sum_{\theta \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\theta) \prod_{k=1}^{n} x_{\theta(k),k} = \varepsilon(\phi) D(x_1, \dots, x_n)$$

ce qui démontre que D est antisymétrique.

— On a

$$D(e_1, \dots, e_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e_{\sigma(j),j}$$

Or $e_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $e_{i,i} = 1$, donc les produits ci-dessus sont nuls pour tous les σ différents de l'identité. Finalement,

$$D(e_1, \dots, e_n) = \prod_{i=1}^{n} e_{i,i} = \prod_{i=1}^{n} 1 = 1$$

En particulier, D n'est pas la forme n-linéaire nulle.

Finalement, on a démontré que $\phi = \lambda.D$ avec $\lambda = \phi(e_1, \dots, e_n)$ et D une forme n-linéaire alternée non nulle, ce qui démontre que

$$\mathscr{A}_n(E, \mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\{D\}$$

d'où le résultat.

Remarque 3.7

Plus généralement, on a les dimensions suivantes :

$$\dim \mathscr{L}_p(E, \mathbb{K}) = n^p,\ \dim \mathscr{S}_p(E, \mathbb{K}) = \binom{n+p-1}{p} \text{ et } \dim \mathscr{A}_p(E, \mathbb{K}) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \binom{n}{p} & \text{si } p \leq n \end{cases}$$

1. On remarque en particulier que la famille $\left(e^{\star}_{(i_1,\dots,i_n)}\right)_{(i_1,\dots,i_p)\in[\![1,n]\!]^p}$ est une base de $\mathscr{L}_p(E,\mathbb{K})$, avec :

$$\forall (i_1,\dots,i_p) \in [\![1,n]\!]^p\,,\ \forall (x_1,\dots,x_p) \in E^p,\ e^{\star}_{(i_1,\dots,i_p)}(x_1,\dots,x_p) = e^{\star}_{i_1}(x_1)\, e^{\star}_{i_2}(x_2) \cdots e^{\star}_{i_p}(x_p)$$

2. de même, la famille

$$\left(e^{\star}_{(i_1,\dots,i_n)}\right)_{(i_1,\dots,i_p)\in[\![1,n]\!]^p,\ 1\le i_1\le\cdots\le i_p\le n}$$

   est une base de $\mathscr{S}_p(E,\mathbb{K})$;
3. et la famille, lorsque $p \le n$

$$\left(e^{\star}_{(i_1,\dots,i_n)}\right)_{(i_1,\dots,i_p)\in[\![1,n]\!]^p,\ 1\le i_1<\cdots< i_p\le n}$$

   est une base de $\mathscr{A}_p(E,\mathbb{K})$.

3.3 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 3.6 – Déterminant d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de *dimension finie* avec $n = \dim E \ge 1$, soit $\mathscr{E} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E et soit [a] $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$ avec

$$\forall j \in [\![1,n]\!]\,,\ x_j = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{x_{i,j}}_{\in\mathbb{K}} .e_i$$

On appelle *déterminant des vecteurs* $(x_1,\dots,x_n)$ *dans la base* $\mathscr{E}$ et on note :

$$\boxed{\det_{\mathscr{E}}(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} x_{\sigma(j),j}}$$

a. Attention, le nombre de vecteurs doit être égal à la dimension de l'espace.

Exemple 3.4

Considérons $E = \mathbb{K}^2$ muni de la base canonique $\mathscr{E} = (e_1, e_2)$ ainsi que deux vecteurs $u = (a, b) = a.e_1 + b.e_2$ et $v = (c, d) = c.e_1 + d.e_2$ de E. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_2$ a $2! = 2$ éléments, l'identité $\mathrm{id}_{[\![1,2]\!]}$ et la transposition $\tau_{1,2}$. On a donc :

$$\det_{\mathscr{E}}(u, v) = \varepsilon(\mathrm{id}_{[\![1,2]\!]})\, a\, d + \varepsilon(\tau_{1,2})\, b\, c = a\, d - b\, c$$

Propriété 3.7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie avec $n = \dim E \geq 1$, soit $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$.

1. $\det_{\mathscr{E}}$ est une forme n-linéaire antisymétrique sur E (et donc alternée).
2. On a
$$\boxed{\forall \phi \in \mathscr{A}_n(E),\ \phi = \phi(e_1, \ldots, e_n).\det_{\mathscr{E}}}$$
3. On a :
$$\det_{\mathscr{E}}(e_1, \ldots, e_n) = 1$$
4. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée, alors $\det_{\mathscr{E}}(x_1, \ldots, x_p) = 0$.
5. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. La valeur de $\det_{\mathscr{E}}(x_1, \ldots, x_p)$ ne change pas en ajoutant à x_i une combinaison linéaire de tous les x_j avec $j \in \{1, \ldots, p\}$, $j \neq i$.

Démonstration

Les trois propriétés ont déjà été démontrées lors de la démonstration du théorème 3.1, page 225 et les deux dernières sont exactement la propriété 3.6, page 224.

Propriété 3.8 – Changement de base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie avec $n = \dim E \geq 1$ et soit $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. Si $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ est une base de E, alors :
$$\det_{\mathscr{B}} = \det_{\mathscr{B}}(e_1, \ldots, e_n).\det_{\mathscr{E}}$$

2. Une famille $\mathscr{C} = (c_1, \dots, c_n) \in E^n$ est une base de E si, et seulement si, $\det_{\mathscr{E}}(c_1, \dots, c_n) \neq 0$. Si c'est le cas :

$$\det_{\mathscr{C}}(e_1, \dots, e_n) = \frac{1}{\det_{\mathscr{E}}(c_1, \dots, c_n)}$$

Démonstration

1. C'est le point 2 de la propriété 3.7, page précédente en remarquant que $\det_{\mathscr{B}}$ est une forme n-linéaire alternée sur E.
2. Supposons que $\mathscr{C}$ soit une base de E. D'après le résultat précédent, nous avons

$$\underbrace{\det_{\mathscr{C}}(c_1, \dots, c_n)}_{=1} = \det_{\mathscr{C}}(e_1, \dots, e_n)\ \det_{\mathscr{E}}(c_1, \dots, c_n)$$

donc $\det_{\mathscr{E}}(c_1, \dots, c_n)$ et

$$\det_{\mathscr{C}}(e_1, \dots, e_n) = \frac{1}{\det_{\mathscr{E}}(c_1, \dots, c_n)}$$

Par contraposition, si la famille $\mathscr{C}$ n'est pas une base de E alors elle est liée donc $\det_{\mathscr{E}}(c_1, \dots, c_n) = 0$ d'après la propriété 3.6, page 224.

3.4 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 3.7 – Déterminant d'une matrice carrée

Soit [a] $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle déterminant de A et on note

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Autrement dit, c'est le déterminant de la famille des n colonnes de A dans la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

a. Attention, il faut que la matrice soit carrée.

Exemple 3.5

1. On a :

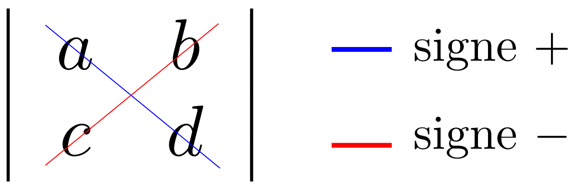
$$\boxed{\det I_n = 1}$$

car $\det I_n = \det_{\mathscr{C}}(C_1, \ldots, C_n) = 1$, en notant $\mathscr{C} = (C_1, \ldots, C_n)$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

2. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^2$, on a

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c}$$

d'après l'exemple 3.4, page 228. On mémorise par :



Propriété 3.9 – Propriétés issues du déterminant d'une matrice

1. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (A_1, \ldots, A_n) & \longmapsto & \det \underbrace{[A_1|\cdots|A_n]}_{\in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})} \end{array}$$

est une forme n-linéaire antisymétrique sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (donc alternée). En particulier,

$$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \det(\lambda.A) = \lambda^n \det A$$

2. On a

$$\forall (A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \det(A \centerdot B) = \det(A)\,\det(B)$$

3. Pour toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$. Si c'est le cas :

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

4. On a

$$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ \det({}^t A) = \det A$$

Démonstration

Notons $\mathscr{C} = (C_1, \dots, C_n)$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

1. C'est une conséquence immédiate du fait que $\det_{\mathscr{C}}$ est une forme n-linéaire alternée sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
2. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Considérons l'application

$$\phi\colon \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (B_1, \dots, B_n) & \longmapsto & \det \underbrace{[A \bullet B_1 | \cdots | A \bullet B_n]}_{\in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})} \end{array}$$

   On vérifie alors que c'est une forme n-linéaire alternée. D'après le point 2 de la propriété 3.7, page 228, on a

$$\phi = \phi(C_1, \dots, C_n).\det_{\mathscr{C}} = \det_{\mathscr{C}}(A_1, \dots, A_n).\det_{\mathscr{C}} = \det(A).\det_{\mathscr{C}}$$

   où $A_1, \dots, A_n$ sont les colonnes de A. Pour toute $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, en note $B_1, \dots, B_n$ ses colonnes,

$$\det(A \bullet B) = \phi(B_1, \dots, B_n) = \det(A).\det_{\mathscr{C}}(B_1, \dots, B_n) = \det(A)\ \det(B)$$

3. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si, et seulement si, ses colonnes $A_1, \dots, A_n$ forment une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ si, et seulement si $\det A = \det_{\mathscr{C}}(A_1, \dots, A_n) \neq 0$ (propriété 3.8, page 228). Si c'est le cas :

$$1 = \det I_n = \det(A \bullet A^{-1}) = \det(A)\ \det(A^{-1})$$

   d'où le résultat.
4. Considérons l'application

$$\phi\colon \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (A_1, \dots, A_n) & \longmapsto & \det({}^t[A_1 | \cdots | A_n]) \end{array}$$

   On vérifie alors que c'est une forme n-linéaire alternée. D'après le point 2 de la propriété 3.7, page 228, on a

$$\phi = \phi(C_1, \dots, C_n).\det_{\mathscr{C}} = \det({}^t I_n).\det_{\mathscr{C}} = \det(I_n).\det_{\mathscr{C}} = \det_{\mathscr{C}}$$

   d'où, pour toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $A_1, \dots, A_n$:

$$\det({}^t A) = \phi(A_1, \dots, A_n) = \det_{\mathscr{C}}(A_1, \dots, A_n) = \det A$$

Remarque importante 3.8

Le déterminant n'est pas linéaire ! Il est en général faux que $\det(A+B) = \det A + \det B$.

Remarque 3.9

On a donc une information intéressante : si A et B sont deux matrices semblables de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

$$\det A = \det B$$

En effet, s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1} \centerdot A \centerdot P$:

$$\det(B) = \det(P^{-1})\ \det(A)\ \det(P) = \frac{1}{\det(P)} \det(A)\ \det(P) = \det(A)$$

La réciproque est fausse (par exemple, une matrice non inversible est de déterminant nulle, mais n'est pas semblable à la matrice nulle sauf si elle est elle-même nulle).

3.5 Déterminant d'un endomorphisme

Définition 3.8 – Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Le *déterminant de* u, noté $\det u$, est défini par

$$\det u = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u)\big)$$

où $\mathscr{E}$ est une base quelconque de E

Remarque 3.10

Cette définition a bien un sens : les matrices de u dans deux bases de E différentes sont semblables, donc elles ont même déterminant (remarque 3.9, page précédente).

Exemple 3.6

On a
$$\det \mathrm{id}_E = \det I_n = 1$$

Propriété 3.10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $\mathscr{E}$ une base de E et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors :
$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,\ \det_{\mathscr{E}} \big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big) = \det(u)\ \det_{\mathscr{E}}(x_1, \dots, x_n)$$

Démonstration

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On a :
$$\begin{aligned}
\det_{\mathscr{E}} \big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big) &= \det \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) \\
&= \det \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) \bullet \det_{\mathscr{E}}(x_1, \dots, x_n)\big) \\
&= \det \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u)\big) \det \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(x_1, \dots, x_n)\big) \\
&= \det(u)\ \det_{\mathscr{E}}(x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

Propriété 3.11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda.u) = \lambda^n \det(u)$
2. $\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$
3. u est inversible si, et seulement si, $\det(u) \neq 0$. Si c'est le cas $\det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}$

Démonstration

Soit $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. posons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u)$ et $V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(v)$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a
$$\det(\lambda.u) = \det(\lambda.U) = \lambda^n \det U = \lambda^n \det u$$
2. On a
$$\det(u \circ v) = \det(U.V) = \det(U) \det(V) = \det(u) \det(v)$$
3. u est inversible si, et seulement si, U est inversible si, et seulement si, $\det u = \det U \neq 0$. Si c'est le cas, U est inversible donc
$$\det(u^{-1}) = \det(U^{-1}) = (\det U)^{-1} = (\det u)^{-1}$$

3.6 Méthodes de calcul de déterminants

Remarque 3.11

La formule définissant le déterminant et faisant intervenir $\mathfrak{S}_n$ est utile théoriquement [a] mais inutilisable en pratique dès que n est plus grand que 4 ou 5. En effet, il y a $n!$ permutations de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même. Ainsi, pour calculer un déterminant d'une matrice carrée d'ordre 5, il faut effectuer $5! = 120$ opérations...
Pire encore, $60! \simeq 10^{82}$ est supérieur au nombre d'atomes observables dans l'univers, alors que les problèmes de mathématiques appliquées et d'ingénierie moderne nécessitent de traiter des matrices qui ont des centaines de milliers voire des millions de lignes...
Il faut donc trouver des méthodes plus efficaces.

a. Par exemple pour démontrer que $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \mapsto \det\left([a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\right)$ est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Déterminant d'une matrice triangulaire

Propriété 3.12

Soit $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est triangulaire supérieure (ou triangulaire inférieure, ou diagonale), alors

$$\boxed{\det A = \prod_{j=1}^{n} a_{j,j}}$$

Démonstration

Supposons que A soit triangulaire supérieure. On a :

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}$$

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, s'il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(j) > j$, alors $a_{\sigma(j),j} = 0$ car A est triangulaire supérieure. Dans l'expression ci-dessus, il ne reste plus que les termes correspondant à une permutation σ telle que $\sigma(j) \leq j$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.
Démontrons qu'une telle permutation σ est l'identité.

- On a $\sigma(1) \leq 1$ donc $\sigma(1) = 1$ car $\sigma(1) \in [\![1,n]\!]$.
- Supposons que $s|_{[\![1,k]\!]}$ soit l'identité pour un $k \in [\![1,n]\!]$. On a d'une part $\sigma(k+1) \leq k+1$ mais comme σ est injective, $\sigma(k+1) \notin [\![1,k]\!]$ d'où $\sigma(k+1) = k+1$, c'est-à-dire que $\sigma|_{[\![1,k+1]\!]}$ est l'identité.

Par principe de récurrence, σ est l'identité.
Dans la formule du déterminant ci-dessus, il ne reste donc plus que le terme correspondant à $\sigma = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$, d'où

$$\det A = \varepsilon(\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}) \prod_{j=1}^{n} a_{j,j} = \prod_{j=1}^{n} a_{j,j}$$

Pour une matrice triangulaire inférieure, on utilise le fait que sa transposée est triangulaire supérieure.

Propriété 3.13

Soit $A \in \mathrm{M}_{n_1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathrm{M}_{n_2}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_{n_2,n_1} & D \end{array}\right] = \det(A)\det(D)$$

Démonstration

Considérons l'application

$$\phi \colon \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_{n_1,1}(\mathbb{K})^{n_1} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (A_1,\dots,A_{n_1}) & \longmapsto & \det \left[\begin{array}{c|c} [A_1|\dots|A_p] & B \\ \hline 0_{n_2,n_1} & C \end{array}\right] \end{array}$$

On vérifie que c'est une forme n_1-linéaire alternée sur $\mathrm{M}_{n_1,1}(\mathbb{K})^p$ donc, en notant $\mathscr{C} = (C_1,\dots,C_{n_1})$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n_1,1}(\mathbb{K})$:

$$\phi = \phi(C_1,\dots,C_{n_1}).\det_{\mathscr{C}} = \det \left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n_2,n_1} & B \end{array}\right].\det_{\mathscr{C}}$$

donc si $A_1,\dots,A_{n_1}$ sont les colonnes d'une matrice $A \in \mathrm{M}_{n_1}(\mathbb{K})$:

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{n_2,n_1} & B \end{array}\right] = \phi(A_1,\dots,A_{n_1}) = \det \left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n_2,n_1} & B \end{array}\right].\det_{\mathscr{C}}(A_1,\dots,A_{n_1}) = \det \left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n_2,n_1} & B \end{array}\right]\det A$$

Considérons maintenant l'application

$$\psi \colon \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_{n_2,1}(\mathbb{K})^{n_2} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (B_1,\dots,B_{n_2}) & \longmapsto & \det \left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n_2,n_1} & [B_1|\cdots|B_{n_2}] \end{array}\right] \end{array}$$

On vérifie que c'est une forme n_2-linéaire alternée sur $\mathrm{M}_{n_2,1}(\mathbb{K})^{n_2}$ donc, en notant $\mathscr{C}' = (C'_1,\dots,C'_{n_2})$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n_2,1}(\mathbb{K})$:

$$\psi = \psi(C'_1,\dots,C'_{n_2}).\det_{\mathscr{C}'} = \det \left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n_2,n_1} & I_{n-p} \end{array}\right].\det_{\mathscr{C}'}$$

donc si $B_1,\dots,B_{n_2}$ sont les colonnes d'une matrice $B \in \mathrm{M}_{n_2,1}(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} \det \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{n_2,n_1} & B \end{array}\right] &= \det \left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n_2,n_1} & B \end{array}\right] \det A \\ &= \det(A)\,\psi(C'_1,\dots,C'_{n_2}) \\ &= \psi(C'_1,\dots,C'_{n_2})\,\det_{\mathscr{C}'}(B_1,\dots,B_{n_2})\,\det(A) \\ &= \left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n_2,n_1} & I_{n-p} \end{array}\right] \det(B)\,\det(A) \end{aligned}$$

Mais :

$$\det \left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n_2,n_1} & I_{n-p} \end{array}\right] = \prod_{i=1}^{n} 1 = 1$$

car c'est une matrice triangulaire supérieure (voir la propriété 3.12, page précédente), d'où le résultat.

Remarque 3.12

Il n'y a pas de formule générale pour les déterminants des matrices-blocs. Par exemple, si A, B, C et D sont dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, alors, si D est inversible [a] :

$$\det\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \det(A \centerdot D - B \centerdot D^{-1} \centerdot C \centerdot D)$$

mais cela ne fonctionne pas lorsque D n'est pas inversible.

a. Exercice conseillé.

Par l'algorithme du pivot de Gauss

Remarque 3.13

En pratique, lors de l'algorithme du pivot de Gauss :

1. les opérations $L_i \leftarrow L_i + \lambda.L_j$ et $C_i \leftarrow C_i + \lambda.C_j$ (transvections) ne modifient pas la valeur du déterminant (d'après le point 5 de la propriété 3.7, page 228) ;
2. les opérations $L_i \leftarrow \lambda.L_i$ et $C_i \leftarrow \lambda.C_i$ (dilatations) multiplient le déterminant par λ (car le déterminant est n-linéaire par rapport aux colonnes et aux lignes) ;
3. les opérations $L_i \leftrightarrow L_j$ et $C_i \leftrightarrow C_j$ (échanges) multiplient le déterminant par -1 (car le déterminant est n-linéaire alternée par rapport aux colonnes et aux lignes).

Ainsi, cet algorithme permet de calculer des déterminants en se ramenant à des matrices triangulaires supérieures. On peut démontrer que le calcul du déterminant d'une matrice carrée de taille n par la méthode du pivot de Gauss nécessite un nombre d'opération de l'ordre de n^3, ce qui est bien meilleur que $n!$.

Exemple 3.7

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}
\quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}
\quad L_3 \leftarrow 2.L_3 \\
&= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}
\quad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & -10 & -20 \end{vmatrix}
\quad L_4 \leftarrow 10.L_4 \\
&= \frac{1}{20} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix}
\quad L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \\
&= \frac{1 \times (-4) \times 10 \times (-9)}{20} \\
&= 18
\end{aligned}
$$

Exemple 3.8

Soit à calculer ($n \geq 2$) :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 3 & \cdots & 2\,n-1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & n+1 & \cdots & n^2-n+1 \end{vmatrix}.$$

En faisant les transvections successives (qui conservent le déterminant) :

$$L_n \leftarrow L_n - L_{n-1} \text{ et } L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2},$$

On fait apparaître deux lignes identiques, donc :

$$\forall n \geq 2,\ \Delta_n = 0$$

Session `Wxmaxima` 3.1 – Pivot de Gauss

```
(%i1) A : genmatrix(lambda([i,j],1+(j-1)*(i)),5,5);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 1 & 6 & 11 & 16 & 21 \end{bmatrix}$

```
(%i2) determinant(A);
```

(%o2) 0

```
(%i3) rowop(A,5,4,1);
```

(%o3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

```
(%i4) rowop(%,4,3,1);
```

$$(\%o4)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Session Python 3.1 – Pivot de Gauss

Traduction du Wxmaxima.

In [2]

```python
A = Matrix(5, 5,
           lambda i, j:
           1+j*(i+1))
A
```

Out[2]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 1 & 6 & 11 & 16 & 21 \end{bmatrix}$$

In [3]

```python
_.det()
```

Out[3]

$$0$$

In[4]

```python
A.elementary_row_op('n->n+km',
                    row1=4,
                    row2=3,
                    k=-1)
```

Out[4]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

In[5]

```python
_.elementary_row_op('n->n+km',
                    row1=3,
                    row2=2,
                    k=-1)
```

Out[5]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Développement selon une ligne ou une colonne

Session `Wxmaxima` 3.2 – Déterminant 3×3

(%i1) `A : matrix([a,b,c],[d,e,f],[g,h,i]);`

(%o1) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

(%i2) `determinant(A);`

(%o2) $a \times (e \times i - f \times h) - b \times (d \times i - f \times g) + c \times (d \times h - e \times g)$

Intéressant ! Que fait-il ?

(%i3) `expand(%);`

(%o3) $a \times e \times i - b \times d \times i - a \times f \times h + c \times d \times h + b \times f \times g - c \times e \times g$

Session `Python` 3.2 – Déterminant 3×3

Traduction du `Wxmaxima`.

In [2]

```
a = IndexedBase('a')
A = Matrix(3, 3,
```

```
            lambda i, j:
            a[i+1, j+1])
A
```

Out[2]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

In[3]

```
A.det()
```

Out[3]

$$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}$$

In[4]

```
det(A)
```

Out[4]

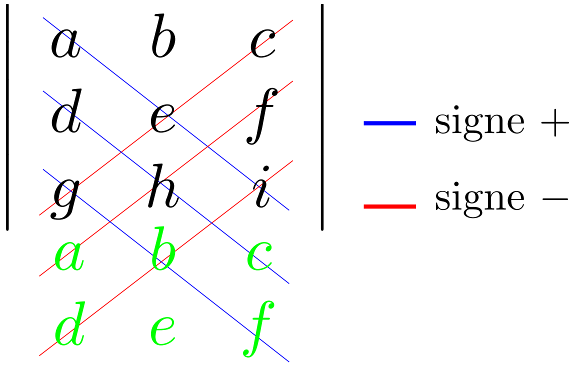
$$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}$$

Exemple 3.9

Si a, b, c, d, e, f, g, h et i sont dans $\mathbb{K}$, alors

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\,e\,i + d\,h\,c + g\,b\,f - g\,e\,c - a\,h\,f - d\,b\,i}$$

que l'on peut mémoriser par la *règle de Sarrus* :



Remarque 3.14

On remarque, qu'avant développement, `Wxmaxima` nous proposait une formule non développée, qu'on peut ré-écrire :

$$a \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Que se passe-t-il pour n plus grand ?

Session `Wxmaxima` 3.3 – Développement du déterminant

```
(%i1) A : matrix([a,b,c,d],[e,f,g,h],[i,j,k,l],[m,n,o,p]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$

```
(%i2) determinant(A);
```

(%o2) $a\times(f\times(k\times p-l\times o)-g\times(j\times p-l\times n)+h\times(j\times o-k\times n))-b\times(e\times(k\times p-l\times o)-g\times(i\times p-l\times m)+h\times(i\times o-k\times m))+c\times(e\times(j\times p-l\times n)-f\times(i\times p-l\times m)+h\times(i\times n-j\times m))-d\times(e\times(j\times o-k\times n)-f\times(i\times o-k\times m)+g\times(i\times n-j\times m))$

Session `Python` 3.3 – Développement du déterminant

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```python
a = IndexedBase('a')
A = Matrix(4, 4,
           lambda i, j:
           a[i+1, j+1])
det(A)
```

Out[2]

$$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4}-a_{1,1}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,3}-a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,4}+a_{1,1}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,2}+a_{1,1}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,3}-a_{1,1}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,2}-a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,4}+a_{1,2}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,3}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,4}-a_{1,2}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,1}-a_{1,2}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,3}+a_{1,2}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,1}+a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,4}-a_{1,3}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,2}-a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,4}+a_{1,3}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,1}+a_{1,3}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,2}-a_{1,3}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,1}-a_{1,4}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,3}+a_{1,4}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,2}+a_{1,4}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,3}-a_{1,4}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,1}-a_{1,4}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,2}+a_{1,4}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,1}$$

Remarque 3.15

On reconnaît l'expression :

$$a\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

Session Wxmaxima 3.4 – Développement suivant une ligne

```
(%i3) a*determinant(submatrix(1,A,1))
      -b*determinant(submatrix(1,A,2))
      +c*determinant(submatrix(1,A,3))
      -d*determinant(submatrix(1,A,4))$

(%i4) ratsimp(%-determinant(A));

(%o4) 0
```

Session Python 3.4 – Développement suivant une ligne

Traduction du Wxmaxima.

In[3]

```
sum([(-1)**j*A[0, j]*det(
    A.extract([1, 2, 3],
              list(range(j))+
              list(range(j+1, 4))))
     for j in range(4)])
```

Out[3]

$-(a_{2,1}a_{3,2}a_{4,3} - a_{2,1}a_{3,3}a_{4,2} - a_{2,2}a_{3,1}a_{4,3} + a_{2,2}a_{3,3}a_{4,1} + a_{2,3}a_{3,1}a_{4,2} - a_{2,3}a_{3,2}a_{4,1})\, a_{1,4} + (a_{2,1}a_{3,2}a_{4,4} - a_{2,1}a_{3,4}a_{4,2} - a_{2,2}a_{3,1}a_{4,4} + a_{2,}$
$(a_{2,1}a_{3,3}a_{4,4} - a_{2,1}a_{3,4}a_{4,3} - a_{2,3}a_{3,1}a_{4,4} + a_{2,3}a_{3,4}a_{4,1} + a_{2,4}a_{3,1}a_{4,3} - a_{2,4}a_{3,3}a_{4,1})\, a_{1,2} + (a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4} - a_{2,2}a_{3,4}a_{4,3} - a_{2,3}a_{3,2}a_{4,4} + a_{2,3}a$

In[4]

```
ratsimp(_-__)
```

Out[4]

0

Définition 3.9 – Mineur, cofacteur et comatrice

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, soit $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$, on note [a] $A_{k,\ell}$ la matrice de $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue à partir de A en supprimant sa k-ième ligne et sa ℓ-ième colonne.

1. Le déterminant de $A_{k,\ell}$ s'appelle *mineur d'indice* (k, ℓ) *de* A ;
2. on appelle *cofacteur d'indice* (k, ℓ) *de* A l'expression :

$$\mathrm{Cofacteur}_{k,\ell}(A) = (-1)^{k+\ell} \det A_{k,\ell}(A)$$

3. on appelle *comatrice de* A la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$\mathrm{Com}(A) = [\mathrm{Cofacteur}_{i,j}(A)]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cofacteur}_{1,1}(A) & \cdots & \mathrm{Cofacteur}_{n,1}(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cofacteur}_{n,1}(A) & \cdots & \mathrm{Cofacteur}_{n,n}(A) \end{bmatrix}$$

a. Attention, cette notation peut également désigner le coefficient en (k, ℓ) de A.

注释 3.1

这里我们定义了方阵A的余子式，代数余子式以及余子矩阵（$\mathrm{Com}(A)$），余子矩阵的转置叫做A的伴随矩阵。

Remarque 3.16

Pour retrouver les signes dans la comatrice, il suffit d'alterner les signes lorsque qu'on se « déplace de case en case dans la comatrice » :

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Proposition 3.1 – Développement selon une ligne ou une colonne

Soit $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors :*

1. *pour tout* $i \in \{1,\ldots,n\}$, *on a le* développement suivant la i-ème ligne *:*

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\ \mathrm{Cofacteur}_{i,j}(A)}$$

2. *pour tout* $j \in \{1,\ldots,n\}$, *on a le* développement suivant la j-ième colonne *:*

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\ \mathrm{Cofacteur}_{i,j}(A)}$$

Démonstration

Notons $A_1, \dots, A_n$ les vecteurs colonnes de A et $\mathscr{C} = (C_1, \dots, C_n)$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Comme le déterminant est une forme n-linéaire par rapport aux colonnes :

$$\det A = \det_{\mathscr{C}}\left(\dots, A_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.C_i, A_{j+1}, \dots\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{,ij} \det_{\mathscr{C}}(\dots, A_{j-1}, C_i, A_{j+1}, \dots)$$

En échangeant la j-ième colonne avec la $j-1$-ième, puis la $j-1$-ième avec la $j-1$-ième jusqu'à ce que la première colonne soit C_i, puisqu'il y a au total $j-1$ échanges :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \det_{\mathscr{C}}(\dots, A_{j-1}, C_i, A_{j+1}, \dots) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{i,j} \det_{\mathscr{C}}(C_i, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots)$$

En échangeant la i-ème ligne avec la $i-1$-ième, puis la $i-1$-ième avec la $i-1$-ième jusqu'à ce que la première ligne soit $[1\,0\,\cdots\,0]$, puisqu'il y a au total $i-1$ échanges, on a par la formule du déterminant d'une matrice-blocs (propriété 3.13, page 235) :

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(-1)^{i+j-2}}_{(-1)^{i+j}} a_{i,j} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det([1]) \det A_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \operatorname{Cofacteur}_{i,j}(A)
\end{aligned}$$

La formule du développement selon une colonne se démontre de la même façon (ou en utilisant la transposée).

Remarque 3.17

Les formules de développements selon une ligne ou une colonne sont très utiles théoriquement mais inefficaces en général dès que $n \geq 5$. En effet, ces formules ramènent le calcul d'un déterminant d'une matrice d'ordre n à n calculs de déterminants de matrice d'ordre $n-1$. En itérant, nous avons donc au total $n!$ calculs à faire.
Par contre, ces formules sont très utiles lorsque la matrice comporte plein de zéros (*matrice creuse*) ou pour obtenir des formules de récurrence.

注释 3.2

注意我们只有在三阶方阵下可以使用此方法快速计算矩阵的行列式，当$n > 3$时并不适用。

Exemple 3.10

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, calculer :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

On développe suivant la première colonne, puis le cofacteur d'indice $(2, 1)$ suivant la première ligne. Il vient :

$$\Delta_n = a\,\Delta_{n-1} - b\,c\,\Delta_{n-2}$$

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On peut obtenir son terme général en utilisant le fait que $\Delta_1 = a$ et $\Delta_2 = a^2 - b\,c$.

Exemple 3.11

Soit $(a, b, \gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^{n+2}$, avec $a \neq b$, calculer :

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & \gamma_n \end{vmatrix}$$

On considère la fonction :

$$x \mapsto \begin{vmatrix} \gamma_1 + x & b+x & \cdots & b+x \\ a+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+x \\ a+x & \cdots & a+x & \gamma_n + x \end{vmatrix}$$

C'est une fonction polynomiale en x. En effectuant les opérations élémentaires $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $C_k \leftarrow C_k - C_1$, puis en développant suivant la première colonne, on en déduit que cette fonction polynomiale est de degré inférieur ou égale à 1. Elle s'écrit donc sous la forme : $\alpha \times x + \beta$. Pour $x = -a$, le déterminant vaut

$$\prod_{k=1}^{n} (\gamma_k - a) = \beta - \alpha\, a$$

Pour $x = -b$, le déterminant vaut

$$\prod_{k=1}^{n} (\gamma_k - b) = \beta - b\, \alpha$$

On en déduit alors β, puis la valeur du déterminant en évaluant en $x = 0$.

Proposition 3.2 – Déterminant de Vandermonde

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, *alors :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Démonstration

1. On a :

$$\det(V(a_1, a_2)) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

$$\boxed{\det(V(a_1,a_2)) = a_2 - a_1}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\det(V(a_1,a_2,a_3)) &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 \\ 0 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 \\ a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 \\ 1 & a_3 + a_1 \end{vmatrix} \\
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \det(V(a_1,a_2)) = a_2 - a_1 \text{ et } \det(V(a_1,a_2,a_3)) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
\det(V(a_1,\dots,a_n)) &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ (C_2 \leftarrow C_2 - a_1.C_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ (C_n \leftarrow C_n - a_1.C_1) \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} \\
&= \left(\prod_{j=2}^{n} (a_j - a_1) \right) \det(V(a_2,\dots,a_n))
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \det(V(a_1,\dots,a_n)) = \left(\prod_{j=2}^{n}(a_j - a_1)\right)\det(V(a_2,\dots,a_n))}$$

3. Par une récurrence sur n on obtient :

$$\boxed{\det(V(a_1,\dots,a_n)) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i)}$$

4. La matrice $V(a_1,\dots,a_n)$ est inversible si et seulement si $\det(V(a_1,\dots,a_n)) \neq 0$ si et seulement si les a_i sont tous différents.

Théorème 3.2 – Propriété de la comatrice

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, *alors :*

$$\boxed{A \bullet {}^t\mathrm{Com}(A) = {}^t\mathrm{Com}(A) \bullet A = \det(A).I_n}$$

En particulier, si A *est inversible :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.{}^t\mathrm{Com}(A)$$

Démonstration

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

— Pour $i = j$, le coefficient en (i,i) de $A \bullet {}^t\mathrm{Com}(A)$ vaut, en utilisant la formule du développement suivant la i-ième ligne :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\,\mathrm{Cofacteur}_{i,k}(A) = \det A$$

— Pour $i \neq j$, posons B la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la j-ième ligne par la i-ème ligne de A. Puisque B a deux lignes égales, $\det B = 0$. De plus, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $A_{j,k} = B_{j,k}$. Le coefficient en (i,j) de $A \bullet {}^t\mathrm{Com}(A)$ vaut

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\,\mathrm{Cofacteur}_{j,k}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\,\mathrm{Cofacteur}_{k,j}(B) = \det B = 0$$

Finalement, $A \bullet {}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A).I_n$.

La relation ${}^t\mathrm{Com}(A) \centerdot A = \det(A).I_n$ se démontre exactement de la même manière.
Si A est inversible, en multipliant par A^{-1} :

$${}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A).A^{-1}$$

et comme $\det A \neq 0$, on obtient le résultat.

Remarque 3.18

Cette formule est *inutile pour calculer un inverse* ! En effet, elle mène à des calculs trop complexe.
Pour calculer l'inverse d'une matrice A, on peut par exemple utiliser la méthode du pivot de Gauss sur la matrice augmentée $[A \,|\, I_n]$ (voir la partie sur les systèmes linéaires du chapitre précédent), ou résoudre, toujours avec la méthode du pivot de Gauss, un système générique $A \centerdot X = Y$, où X et Y sont dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$, ce qui donne $X = A^{-1} \centerdot Y$.
Mais cette formule a un intérêt théorique. Si on note $A^{-1} = [\alpha_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, alors l'application :

$$(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \mapsto (\alpha_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (en particulier *continue*), donc une petite variation sur les coefficients de A provoque une petite variation sur les coefficients de A^{-1} : *on peut donc faire un calcul approché de A^{-1} !*

注释 3.3

当方阵阶数$n > 3$，如果用此公式计算逆矩阵，计算量会相当大，使用高斯消元法会更简单。

Exemple 3.12

Faisons quelques calculs en `Wxmaxima` :

Session `Wxmaxima` 3.5 – Comatrice

```
(%i1)  A : matrix([a,b],[c,d]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

```
(%i2) Com(A) := genmatrix(lambda([i,j],
      (-1)^(i+j)*determinant(submatrix(i,A,j))),matrix_size(A)[1],matrix_size(A)[2])$
```

```
(%i3) Com(A);
```

(%o3) $\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

```
(%i4) A.transpose(%);
```

(%o4) $\begin{bmatrix} a \times d - b \times c & 0 \\ 0 & a \times d - b \times c \end{bmatrix}$

```
(%i5) A : matrix([a,b,c],[d,e,f],[g,h,i]);
```

(%o5) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

```
(%i6) Com(A);
```

(%o6) $\begin{bmatrix} e \times i - f \times h & f \times g - d \times i & d \times h - e \times g \\ c \times h - b \times i & a \times i - c \times g & b \times g - a \times h \\ b \times f - c \times e & c \times d - a \times f & a \times e - b \times d \end{bmatrix}$

```
(%i7) ratsimp(A.transpose(%)-determinant(A)*identfor(A));
```

(%o7) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Session `Python` 3.5 – Comatrice

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```
a = IndexedBase('a')
A = Matrix(2, 2,
           lambda i, j:
           a[i+1, j+1])
A
```

Out[2]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

In[3]

```
A.cofactor_matrix()
```

Out[3]

$$\begin{bmatrix} a_{2,2} & -a_{2,1} \\ -a_{1,2} & a_{1,1} \end{bmatrix}$$

In[4]

```
A.transpose()*_
```

Out[4]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} & 0 \\ 0 & a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \end{bmatrix}$$

In[5]

```
A = Matrix(3, 3,
           lambda i, j:
           a[i+1, j+1])
A.cofactor_matrix()
```

Out[5]

$$\begin{bmatrix} a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2} & -a_{2,1}a_{3,3} + a_{2,3}a_{3,1} & a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1} \\ -a_{1,2}a_{3,3} + a_{1,3}a_{3,2} & a_{1,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{3,1} & -a_{1,1}a_{3,2} + a_{1,2}a_{3,1} \\ a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,2} & -a_{1,1}a_{2,3} + a_{1,3}a_{2,1} & a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \end{bmatrix}$$

In[6]

```
(_.transpose()*A-
 det(A)*eye(3)).expand()
```

Out[6]

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.7 Un peu de géométrie

Remarque 3.19

— Dans $\mathbb{R}^n$, nous avons une base de référence : la base canonique $\mathscr{C}_n$. Soit $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une autre base, alors :

$$\det_{\mathscr{C}_n}(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{R}^*.$$

Lorsque ce déterminant est positif, on dit que la base $\mathscr{E}$ est *directe*. Lorsqu'il est négatif, on dit qu'elle est *indirecte*.

— On peut alors interpréter le déterminant de la manière suivante :

1. Si $n = 2$, soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, alors :

$$|\det_{\mathscr{C}_2}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| = \mu(\Delta),$$

où $\mu(\Delta)$ désigne l'aire de Δ, le parallélogramme construit sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On peut alors donner un sens à une aire orientée en considérant le déterminant sans la valeur absolue.

2. Si $n = 3$, soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors :

$$|\det_{\mathscr{C}_3}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})| = \mu(\Delta),$$

où $\mu(\Delta)$ désigne le volume de Δ, le parallélépipède construit sur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

On avait trouvé une autre formule (qui est la même) car :

$$\det_{\mathscr{C}_3}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \rangle$$

Remarque 3.20

Plus généralement, si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux bases de E, on dit que $\mathscr{E}'$ *a la même orientation que* $\mathscr{E}$ si $\det_{\mathscr{E}}(\mathscr{E}') > 0$.
On démontre alors que la relation « avoir la même orientation » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E.
En fixant une base $\mathscr{E}$ de E, nous pouvons ainsi séparer les bases de E en deux ensembles (les deux classes d'équivalences) : celles qui ont la même orientation que $\mathscr{E}$ et celles qui n'ont pas la même orientation que $\mathscr{E}$.
On peut alors décréter arbitrairement qu'une base $\mathscr{E}$ est une *base directe*, on dit alors que E est *orienté*. Toutes les

bases ayant la même orientation que $\mathscr{E}$ sont dites *directes* et les autres *indirectes*.
Dans $\mathbb{R}^n$, il est bien entendu naturel de décréter que la base canonique est directe (ce qui est cohérent avec la remarque précédente).

3.8 Retour sur les systèmes linéaires

On rappelle qu'un système linéaire de n équations à n inconnues de la forme

$$A \cdot X = B$$

d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est dit de Cramer lorsqu'il y a existence et unicité de la solution. Autrement dit, c'est un système de Cramer si, et seulement si, A est inversible si, et seulement si, $\det A \neq 0$.

Proposition 3.3

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $A_1, \ldots, A_n$ et $B \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors l'unique solution

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

du système de Cramer

$$A \cdot X = B$$

est donnée par

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\; x_k = \frac{\det[A_1 \,|\, \cdots \,|\, A_{k-1} \,|\, B \,|\, A_{k+1} \,|\, \cdots \,|\, A_n]}{\det(A)}}$$

注释 3.4

克莱姆法则求解线性方程组时，需要注意矩阵行列式不为0, 即矩阵可逆。

Démonstration

On a :

$$B = \sum_{j=1}^{n} x_j . A_j$$

donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\det[A_1 \,|\, \cdots \,|\, A_{k-1} \,|\, B \,|\, A_{k+1} \,|\, \cdots \,|\, A_n] = \sum_{j=1}^{n} x_j \det[A_1 \,|\, \cdots \,|\, A_{k-1} \,|\, A_j \,|\, A_{k+1} \,|\, \cdots \,|\, A_n]$$

Lorsque $k \neq j$, le déterminant ci-dessus est nul puisque deux colonnes sont égales, donc :

$$\det[A_1 \,|\, \cdots \,|\, A_{k-1} \,|\, B \,|\, A_{k+1} \,|\, \cdots \,|\, A_n] = x_j \det A$$

ce qui donne le résultat puisque $\det A \neq 0$.

Remarque 3.21

Cette proposition *n'est pas* une méthode pratique de résolution (il est bien plus efficace d'utiliser la méthode du pivot de Gauss). Elle a cependant un intérêt théorique, elle permet d'obtenir que la solution X dépend de manière continue (et même $\mathscr{C}^\infty$) des coefficients de A et B : une petite variation sur les coefficients de A ou de B provoque une petite variation sur les coefficients de X : *on peut donc faire un calcul approché de X !*

Exercice(s) 3.1

3.1.1 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

Démontrer que A est inversible et que :

$$|\det(A)| \geq \prod_{i=1}^{n} \left(|a_{i,i}| - \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right)$$

3.1.2 Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $p_1 \in \mathbb{N}^*$, $p_2 \in \mathbb{N}^*$, $p_2 \leq n$. On considère l'ensemble des formes $(p_1 + p_2)$-linéaires ϕ vérifiant pour tout $(x_1, \ldots, x_{p_1+p_2}) \in V^{p_1+p_2}$, toute $\sigma_1 \in \mathfrak{S}_{p_1}$ et toute $\sigma_2 \in \mathfrak{S}_{p_2}$:

$$\phi(x_{\sigma_1(1)}, \ldots, x_{\sigma_1(p_1)}, x_{p_1+\sigma_2(1)}, \ldots, x_{p_1+\sigma_2(p_2)}) = \varepsilon(\sigma_2)\phi(x_1, \ldots, x_{p_1+p_2})$$

Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel des formes p-linéaires vérifiant cette propriété ?

3.1.3 Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, démontrer que :

$$\det(A \otimes B) = \det(A)^p \det(B)^n$$

3.1.4 Démontrer que le volume d'un tétraèdre de sommets A, B, C et D, vaut :

$$\left| \frac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})}{6} \right|$$

3.1.5 Calculer les déterminants suivants :

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & n & \dots & \dots & 2 \\ 2 & 1 & & & 3 \\ \vdots & 2 & & & \vdots \\ n-1 & \vdots & & & n \\ n & n-1 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

(b) $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

(c) $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ \vdots & \iddots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

(d) $(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_0 & \vdots & \cos n\,\theta_0 \\ 1 & \cos\theta_1 & \vdots & \cos n\,\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \vdots & \cos n\,\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & \vdots & \cos n\,\theta_n \end{vmatrix}$$

(e)

$$\left|\binom{n+p-j+1}{n-i+1}\right|_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2}$$

(f) Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, $p \in \{1, \ldots, n-1\}$, calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{p-1} & \cdots & a_n^{p-1} \\ a_1^{p+1} & \cdots & a_n^{p+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

3.1.6 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, démontrer que :

$$\operatorname{trace}(A) = 0 \iff \exists (X, Y) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2,\ A = X \centerdot Y - Y \centerdot X.$$

3.1.7 Soit $(A, B, C, D) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})^4$ telles que

$$C \centerdot {}^tD + D \centerdot {}^tC = 0$$

(a) On suppose D inversible ; démontrer que

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \det(A \centerdot {}^tD + B \centerdot {}^tC)$$

Démontrer par un exemple que ce n'est pas toujours vrai si D est non inversible.

(b) Démontrer que pour D quelconque,

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]^2 = \det(A \centerdot {}^tD + B \centerdot {}^tC)^2$$

(c) Calculer, dans le cas général $\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$

3.1.8 On appelle décomposition LU d'une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, la donnée de deux matrices L et U de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

— $A = L \centerdot U$;

— L est triangulaire inférieure (*lower*), avec des 1 sur la diagonale ;

— U est triangulaire supérieure (*upper*).

(a) Démontrer si une décomposition LU existe, alors elle est unique.

(b) Démontrer que A possède une décomposition LU si, et seulement si, tous ses mineurs principaux m_1, ... m_n sont non nuls, définis par :

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ m_k = \det\left([a_{i,j}]_{(i,j) \in [\![1,k]\!]^2}\right)$$

3.1.9 (a) Démontrer que si A, B, C et D sont dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et que $A \centerdot C = C \centerdot A$, alors :

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \det(A \centerdot D - C \centerdot B)$$

(b) Démontrer que c'est faux, en général, lorsqu'il n'y a plus commutation.

3.1.10 Soit A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que :

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array}\right] \geq 0$$

3.1.11 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$. Démontrer que :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rang}(A) = n & \Longleftrightarrow & \mathrm{rang}\,(\mathrm{Com}(A)) = n \\ \mathrm{rang}(A) = n-1 & \Longleftrightarrow & \mathrm{rang}\,(\mathrm{Com}(A)) = 1 \\ \mathrm{rang}(A) \leq n-2 & \Longleftrightarrow & \mathrm{Com}(A) = 0_n \end{array}$$

3.1.12 Démontrer que :

$$\forall (A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \mathrm{Com}(A \centerdot B) = \mathrm{Com}(A) \centerdot \mathrm{Com}(B)$$

3.1.13 Soit A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre les équations suivantes d'inconnues $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$:

(a) $X = \mathrm{trace}(X).A + B$

(b) $X + {}^tX = \mathrm{trace}(X).A$

3.1.14 À quelle(s) condition(s), connaissant les affixes des milieux des côtés d'un polygone fermé à n côtés, existe-t-il un tel polygone ? Préciser dans tous les cas le procédé de construction du ou des polygone(s) solution(s). Que signifie géométriquement la condition de compatibilité obtenue ?

3.1.15 Déterminer les ensembles de quatre points du plan tels que la somme des distances d'un point au trois autres est constante.

Chapitre 4

Espaces euclidiens

4.1 Produit scalaire et norme

Définition 4.1 – Espace vectoriel préhilbertien réel

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (sans contrainte de dimension). Une application ϕ définie sur $E \times E$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite *produit scalaire* sur E, si elle vérifie :

1. ϕ est *bilinéaire*. C'est-à-dire que les fonctions :
$$\forall x \in E,\ \phi(x, \bullet)\ :\ y \mapsto \phi(x, y) \text{ sont linéaires (linéarité à droite),}$$
et
$$\forall y \in E,\ \phi(\bullet, y)\ :\ x \mapsto \phi(x, y) \text{ sont linéaires (linéarité à gauche).}$$
2. ϕ est *symétrique* :
$$\forall (x, y) \in E^2,\ \phi(x, y) = \phi(y, x).$$
3. ϕ est *positive* :
$$\forall x \in E,\ \phi(x, x) \geq 0.$$
4. ϕ est *définie* :
$$\forall x \in E,\ \phi(x, x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0_E.$$

E est alors dit *espace préhilbertien réel*. S'il est de dimension finie, il est dit *euclidien*.

Remarque 4.1

Si ϕ est symétrique et linéaire à droite, elle est linéaire à gauche, donc bilinéaire.

Remarque 4.2

Pour dire que ϕ est un produit scalaire sur E, nous écrirons souvent, pour x et y dans E :
$$\phi(x, y) \overset{\text{Not}}{=} \langle x, y \rangle.$$

Exemple 4.1 – Espaces préhilbertiens réels

1. $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel (dit *canonique*) est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

2. $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit :

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, \omega(t)\, \mathrm{d}t,$$

où ω est définie, continue par morceaux, strictement positive sur $[a,b]$ est un espace préhilbertien réel de dimension infinie.

3. L'espace vectoriel des suites réelles bornées muni du produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k\, v_k}{2^k},$$

est un espace préhilbertien réel.

Remarque 4.3

Il arrive souvent que l'on se limite aux fonctions continues par morceaux, en ce cas, le produit scalaire perd son caractère *défini*. Certaines propriétés que nous verrons seront encore valables.

Proposition 4.1 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel, ϕ son produit scalaire, alors :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ |\phi(x,y)|^2 \leq \phi(x,x)\, \phi(y,y).$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, les vecteurs x et y sont liés.

Démonstration

Il suffit d'écrire que :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \phi(x+\lambda.y, x+\lambda.y) \geq 0.$$

Remarque 4.4

1. L'inégalité est liée à la positivité, elle reste donc valable si l'on perd le caractère défini.
2. En revanche, le caractère défini permet de préciser le cas d'égalité. Si l'on perd le caractère défini, les cas d'égalités changent...

Proposition 4.2 – Norme euclidienne

Si E est un espace préhilbertien réel, muni du produit scalaire ϕ, alors[a] *:*

$$\begin{cases} E \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{\phi(x,x)} \end{cases} \quad \text{est une norme sur } E.$$

On parle alors de norme euclidienne.

a. Une norme $\| \, \|$ sur E vérifie les axiomes suivants :

1. $\| \, \|$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (positivité).
2. $\forall x \in E, \|x\| = 0 \iff x = 0_E$ (caractère défini).
3. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda.x\| = |\lambda| \, \|x\|$ (homogénéité).
4. $\forall (x,y) \in E^2, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire dite de Minkowski).

Remarque 4.5

Lorsque l'on perd le caractère défini, on parle de *semi-norme*.

Remarque 4.6

Il est souvent intéressant de calculer le produit scalaire à l'aide de la norme, cela se nomme *polarisation* et ϕ est dite la *forme polaire* de la norme.
Il vient :

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2, \; \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\phi(x,y)}.$$

Proposition 4.3 – Identité de la médiane

Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel, alors :

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).}$$

Cette identité s'appelle l'identité de la médiane ou du parallélogramme.
Réciproquement, toute norme vérifiant cette identité est une norme euclidienne.

Démonstration

- ($\Rightarrow$) Il suffit de développer avec la formule de polarisation.
- ($\Leftarrow$) Le point difficile est de montrer que :

$$y \mapsto \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

est une application linéaire quelque soit $x \in E$ fixé.

Définition 4.2 – Famille orthonormale

Soit E un espace préhilbertien réel.

- Un vecteur $x \in E$ est dit *unitaire*, si $\|x\| = 1$.
- Deux vecteurs $(x,y) \in E^2$ sont dits *orthogonaux* si $\phi(x,y) = 0$.
- Une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est dite orthogonale (resp. orthonormale) si les vecteurs sont 2 à 2 orthogonaux (resp. 2 à 2 orthogonaux et tous unitaires).

Remarque 4.7

1. Toute famille orthonormale est libre.
2. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille orthonormale, alors, si $x \in \mathrm{Vect}(\{x_i,\ i \in I\})$:
   (a) l'ensemble :
   $$\{j \in I,\ \langle x_j, x\rangle \neq 0\} \text{ est fini,}$$

(b) et

$$\boxed{x = \sum_{i\in I,\ \langle x_i, x\rangle \neq 0} \langle x_i, x\rangle .x_i}$$

Théorème 4.1 – de Pythagore

Soit E un espace préhilbertien réel, (x, y) deux vecteurs de E, alors :

$$(x, y) \text{ orthogonaux} \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

On note alors $x \perp y$.

Démonstration

Utiliser la formule de polarisation.

Théorème 4.2 – Principe d'orthonormalisation de Schmidt

Soit $I = \mathbb{N}$ ou de la forme $\{0, \dots, N\}$ et soit $(x_n)_{n\in I}$ une famille libre de vecteurs d'un espace préhilbertien réel E, alors il existe une famille orthonormale $(y_i)_{i\in I}$ qui vérifie :

$$\forall n \in I,\ \text{Vect}(x_0, \dots, x_n) = \text{Vect}(y_0, \dots, y_n).$$

Démonstration

On procède par récurrence sur $k \in I$.

1. (*Initialisation*) : On doit avoir $\text{Vect}(\{x_0\}) = \text{Vect}(\{y_0\})$, donc y_0 (s'il existe) est colinéaire à x_0, soit :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ y_0 = \lambda.x_0.$$

   La condition $\|y_0\| = 1$ nous impose $|\lambda| = \frac{1}{\|x_0\|}$, soit deux valeurs possibles de λ : $\pm\frac{1}{\|x_0\|}$.
2. (*Hérédité*) : Supposons construits $(y_0, \dots, y_p)$, famille orthonormale, tels que :

$$\forall k \in [\![0, p]\!],\ \text{Vect}(\{y_0, \dots, y_k\}) = \text{Vect}(\{x_0, \dots, x_k\}).$$

   — Si $I = [\![0, p]\!]$. C'est fini.

— Sinon, cherchons y_{p+1}.
(*Analyse*) Si y_{p+1} existe, alors il vérifie :

$$x_{p+1} \in \mathrm{Vect}(\{y_0, \dots, y_{p+1}\}) \setminus \mathrm{Vect}(\{y_0, \dots, y_p\}),$$

donc, comme :

$$x_{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} \langle y_k, x_{p+1} \rangle .y_k \text{ et } \langle y_{p+1}, x_{p+1} \rangle \neq 0,$$

donc :

$$y_{p+1} = \frac{1}{\langle y_{p+1}, x_{p+1} \rangle}.\left(x_{p+1} - \sum_{k=0}^{p} \langle y_k, x_{p+1} \rangle .y_k \right),$$

(*Synthèse*) Le vecteur

$$x_{p+1} - \sum_{k=0}^{p} \langle y_k, x_{p+1} \rangle .y_k \text{ est non nul,}$$

car $x_{p+1} \notin \mathrm{Vect}(\{x_0, \dots, x_p\})$ donc :

$$y_{p+1} = \pm \frac{1}{\left\| x_{p+1} - \sum_{k=0}^{p} \langle y_k, x_{p+1} \rangle .y_k \right\|}.\left(x_{p+1} - \sum_{k=0}^{p} \langle y_k, x_{p+1} \rangle .y_k \right) \text{ convient.}$$

Propriété 4.1

Les y_i sont définis aux signes près, leurs directions sont uniques.

Propriété 4.2 – Existence de bases orthonormée

Tout espace euclidien (i.e. de dimension finie) possède une base orthonormée. *Il est essentiel de travailler le plus souvent possible dans des bases orthonormées !*
De même, un espace préhilbertien réel qui possède une base dénombrable, possède une base orthonormée, par exemple :

$$E = \mathrm{Vect}\left(\{x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}\}\right),$$

muni du produit scalaire [a] :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{\min(\deg(f), \deg(g))} \frac{f^{(k)}(0)\, g^{(k)}(0)}{k!^2}$$

a. On notant $\deg(f)$ la puissance la plus grande intervenant dans l'écriture de $f \in E$.

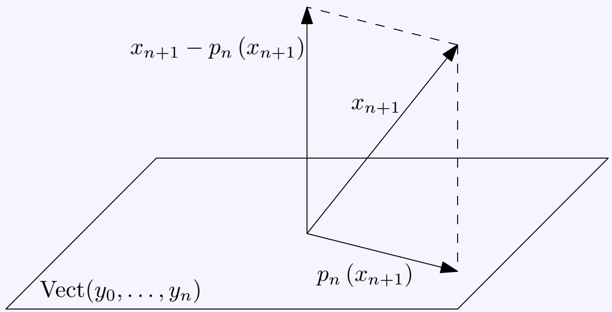
Propriété 4.3

Si $(y_0, \ldots, y_n)$ sont construits alors, en notant p_n la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(x_0, \ldots, x_n)$, on a :

$$\boxed{\forall x \in E,\ p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \langle y_k, x\rangle . y_k.}$$

et en particulier :

$$\boxed{\boxed{y_{n+1} \text{ proportionnel à } x_{n+1} - p_n\left(x_{n+1}\right).}}$$



Exercice(s) 4.1

4.1.1 Orthonormaliser la famille $x_1 = (1, -2, 2)$, $x_2 = (-1, 0, -1)$, $x_3 = (5, -3, 7)$.

4.1.2 Soit $E = \mathrm{Vect}(\{x \mapsto x^k,\ k \in [\![0, n]\!]\})$, $a \in \mathbb{R}$ et

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)\, Q^{(k)}(a)}{(k!)^2},$$

pour $P, Q \in E$.

(a) Montrer que E est un espace euclidien.

(b) Déterminer une base orthonormée obtenue à partir de la base canonique de E par le procédé de Schmidt.

4.1.3 Soit E un espace euclidien et x, y deux vecteurs distincts de norme inférieure ou égale à 1. Montrer que

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1.$$

4.1.4 Soit $E = \mathrm{Vect}(\{x \mapsto x^k,\ k \in [\![0,n]\!]\})$, $a_0, \dots, a_n$ des nombres réels. Pour P et Q dans E, on pose

$$\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)\, Q^{(k)}(a_k).$$

(a) Montrer que φ est un produit scalaire.

(b) Montrer qu'il existe une base orthonormée de E, $(P_0, \dots, P_n)$ telle que $\forall k$, $d^o P_k = k$. Calculer alors $P_k^{(j)}(a_j)$.

(c) Trouver une telle base lorsque $a_0 = \cdots = a_n = 0$.

4.1.5 Soit E un espace euclidien de dimension n, $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs de norme 1, tels que, pour $1 \leq i < j \leq n$, on ait

$$\|u_i - u_j\| = 1.$$

(a) Établir que $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E.

(b) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de $(u_1, \dots, u_n)$; montrer qu'il existe des nombres réels $b_1, \dots, b_{n-1}$, $a_1, \dots, a_n$ tels que, pour tout $j \in [1, n]$,

$$u_j = \left(\sum_{1 \leq i \leq j-1} b_i.e_i\right) + a_j.e_j$$

et les calculer.

4.1.6 Montrer que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$x^2 + 2\,y^2 + 3\,z^2 \leq 1 \Rightarrow |x+y+z| \leq \sqrt{\frac{11}{6}}$$

Cas d'égalité ? Interprétation géométrique ?

4.1.7 Comparer les dimensions de $\mathrm{Vect}(\{x_1, \dots, x_n\})$ et $\mathrm{Vect}(\{y_1, \dots, y_n\})$ dans un espace préhilbertien réel où pour tout i, j, $\langle x_i, x_j\rangle = \langle y_i, y_j\rangle$?

4.1.8 Soit E un espace préhilbertien réel, déterminer l'ensemble :

$$\mathcal{E} = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^+,\ \forall (x,y) \in E^2, \|x\| + \|y\| \leq \lambda \max\left(\|x+y\|, \|x-y\|\right)\right\}.$$

4.1.9 Soit E un espace euclidien et $f \in \mathscr{F}(E,E)$, telle que :

$$f(0_E) = 0_E \text{ et } \forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

(a) Montrer que :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

(b) Montrer que f est linéaire.

(c) Montrer que f est un automorphisme.

4.1.10 Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, montrer que la norme définie par :

$$\forall f \in E,\ \|f\| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \text{ n'est pas euclidienne.}$$

4.2 Orthogonalité

4.2.1 Généralités

Définition 4.3 – Orthogonal

Soit E un espace préhilbertien réel, soit $A \subset E$, on appelle *orthogonal* de A, et on note :

$$A^{\perp\cdot} = \{x \in E,\ \forall a \in A,\ \langle a, x\rangle = 0\}.$$

Propriété 4.4

$\forall A \subset E$, $A^{\perp\cdot}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 4.5

On a :

$$\forall A \subset E,\ A \cap A^{\perp_\cdot} \subset \{0_E\},$$

avec égalité si, et seulement si, $0_E \in A$.

$$\{0\}^{\perp_\cdot} = E \text{ et } E^{\perp_\cdot} = \{0_E\}$$

Propriété 4.6

Si A et $B \subset E$, alors :

$$A \subset B \;\Rightarrow\; A^{\perp_\cdot} \supset B^{\perp_\cdot}.$$

Propriété 4.7

Si $A \subset E$, alors :

$$A^{\perp_\cdot} = (\mathrm{Vect}(A))^{\perp_\cdot}.$$

Dans les propriétés qui suivent, E_1 est un sous-espace de E.

Propriété 4.8

On a toujours :

$$E_1 \oplus E_1^{\perp_\cdot}$$

Si, de plus, E_1 est de dimension finie (ce qui se produit notamment, lorsque E est de dimension finie), alors :

$$E = E_1 \oplus E_1^{\perp_\cdot}$$

On a donc, quand E est de dimension finie :

$$\dim(E_1) + \dim\left(E_1^{\perp_\cdot}\right) = \dim(E).$$

Propriété 4.9

On a :

$$\left(E_1^{\perp\cdot}\right)^{\perp\cdot} \supset E_1,$$

avec égalité en dimension finie ou si $E_1 \oplus E_1^{\perp\cdot} = E$.

Propriété 4.10

Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors :

$$(E_1 + E_2)^{\perp\cdot} = E_1^{\perp\cdot} \cap E_2^{\perp\cdot}.$$

De plus,

$$(E_1 \cap E_2)^{\perp\cdot} \supset E_1^{\perp\cdot} + E_2^{\perp\cdot},$$

avec égalité en dimension finie.

Exemple 4.2

Si $E = \mathrm{Vect}(\{x \mapsto x^k,\ k \in \mathbb{N}\})$, muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \sum a_i\, b_i$, alors l'hyperplan [a] :

$$H = \{P \in E,\ P(1) = 0\},\ \text{vérifie } H^{\perp\cdot} = \{0_E\}.$$

Donc, si D est une droite vectorielle de E, telle que $D \oplus H = E$, on a :

$$\left(H^{\perp\cdot}\right)^{\perp\cdot} \neq H,\ (D \cap H)^{\perp\cdot} \neq D^{\perp\cdot} + H^{\perp\cdot}$$

[a]. On appelle *hyperplan* d'un espace vectoriel E, tous sous-espace qui admet une droite comme supplémentaire. Si E est de dimension finie n, alors les hyperplans de E sont les espaces de dimension $n-1$.

Remarque 4.8

1. Lorsque $E = E_1 \oplus E_1^{\perp\cdot}$, la projection sur E_1 parallèlement à $E_1^{\perp\cdot}$ s'appelle *projection orthogonale sur* E_1 et se note p_{E_1}.

Si p est un projecteur de E tel que :

$$\forall x \in \operatorname{Ker}(p),\ \forall y \in \operatorname{Im}(p),\ \langle x, y \rangle = 0,$$

alors :

$$\operatorname{Ker}(p)^{\perp\cdot} = \operatorname{Im}(p) \text{ et } \operatorname{Im}(p)^{\perp\cdot} = \operatorname{Ker}(p),$$

et on dit que p est un *projecteur orthogonal.*

On a de plus :

$$\forall x \in E,\ x = \underbrace{p_{E_1}(x)}_{\in E_1} + \underbrace{\big(x - p_{E_1}(x)\big)}_{\in E_1^{\perp\cdot}},$$

et donc :

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \left\|p_{E_1}(x)\right\|^2 + \left\|x - p_{E_1}(x)\right\|^2.$$

Si $x_1 \in E_1$, alors :

$$\forall x \in E,\ \|x - x_1\|^2 = \left\|p_{E_1}(x) - x_1\right\|^2 + \left\|x - p_{E_1}(x)\right\|^2 \geq \left\|x - p_{E_1}(x)\right\|^2,$$

donc $p_{E_1}(x)$ réalise le minimum de $\|x - x_1\|$ lorsque x_1 parcourt E_1.

Exemple 4.3 – Projections orthogonales

1. Projection sur une droite $\mathbb{R}.a$:

$$\boxed{p_{\mathbb{R}.a}(x) = \frac{\langle a, x \rangle}{\|a\|^2}.a}$$

2. Projection sur l'hyperplan H orthogonal à $\mathbb{R}.a$:

$$p_H(x) = x - p_{\mathbb{R}.a}(x).$$

3. Projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie E_1, de base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$.

$$\boxed{p_{E_1}(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle.e_k}$$

Définition 4.4 – Somme directe orthogonale

Soit E un espace préhilbertien réel et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.

Sous-espaces vectoriels orthogonaux

Si i et j sont dans I, on dit que E_i et E_j sont *orthogonaux* si :

$$\forall (x_i, x_j) \in E_i \times E_j,\ \langle x_i, x_j \rangle = 0.$$

On écrit alors

$$E_i \perp E_j.$$

Décomposition en somme directe orthogonale

On dit que la famille $(E_i)_{i\in I}$ est une *décomposition en somme directe orthogonale de* E, si

$$E = \bigoplus_{i\in I} E_i \text{ et } \forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow E_i \perp E_j.$$

On écrit alors :

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{i\in I}} E_i.$$

Exemple 4.4 – Décomposition en somme directe orthogonale

Si p est un projecteur orthogonal, on a une décomposition en somme directe orthogonale sous la forme :

$$E = \mathrm{Ker}(p) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(p).$$

Exercice(s) 4.2

4.2.1 Soit E un espace préhilbertien réel, $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E, tels que

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2.$$

(a) Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée.

(b) Le montrer si l'on ne sait plus que les vecteurs sont unitaires, mais seulement le fait qu'ils sont non nuls et que la dimension de E est $\geq n$.

(c) Trouver un contre-exemple, lorsque la dimension de E est $< n$.

4.2.2 Soit E un espace euclidien de dimension n. Montrer qu'il n'existe pas $n+2$ vecteurs $u_1, \dots, u_{n+2}$ tels que pour tous i, j distincts, $\langle u_i, u_j \rangle < 0$.

4.2.3 Soit E un espace euclidien de dimension n, montrer que l'on peut trouver $n+1$ vecteurs unitaires $x_1, \cdots, x_{n+1}$ de E tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n+1\}^2, \qquad i \neq j \quad \Rightarrow \quad \langle x_i, x_j \rangle = -\frac{1}{n}.$$

4.2.4 Soit E un espace préhilbertien réel et p un projecteur de E. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) p est un projecteur orthogonal.

(b) $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$.

(c) $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

4.2.5 Soit E un espace préhilbertien réel, $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E. On pose :

$$f \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \langle e_k, x \rangle . e_k \end{cases}$$

(a) Montrer que f est linéaire.

(b) Calculer l'image et le noyau de f.

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un projecteur orthogonal.

4.2.6 Soit $E = \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, muni du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{+1} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t.$$

On pose :

$$F = \{f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ f(x) = 0\}.$$

(a) Calculer $F^{\perp}$.

(b) Que vaut $F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$?

4.2.7 Soit E un espace préhilbertien réel, f et g deux éléments de $\mathscr{F}(E,E)$, tels que :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle.$$

Montrer que f et g sont linéaires.

4.2.2 Cas de la dimension finie

On suppose ici que E est un espace euclidien, c'est donc un espace préhilbertien réel de dimension finie n.

Propriété 4.11 – Existence d'une base orthormée

E possède une base orthonormée.

Propriété 4.12 – Expression des coordonnées

Dans cette base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$, les coordonnées des vecteurs et leur norme se calculent facilement :

$$\boxed{\forall x \in E,\ x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle . e_k \text{ et } \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle^2}.}$$

On a de même :

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle \langle e_k, y\rangle.}$$

Propriété 4.13 – Expression matricielle

Si $\mathscr{E}$ est une base orthonormée de E, alors :

$$\forall x \in E,\ \mathrm{Matrice}(x,\mathscr{E}) = [\langle e_i, x\rangle]_{i\in[\![1,p]\!]} = \begin{bmatrix} \langle e_1, x\rangle \\ \vdots \\ \langle e_p, x\rangle \end{bmatrix},$$

et :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x,y\rangle = {}^t\mathrm{Matrice}(x,\mathscr{E}) \boldsymbol{.}\ \mathrm{Matrice}(y,\mathscr{E}).$$

Propriété 4.14

Toute famille orthonormée se complète en une base orthonormée.

Propriété 4.15 – Cas particulier des changements de bases orthonormées

Soit E euclidien et $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B}$ deux bases orthonormées de E, alors :

$$\boxed{P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{E}} = \left(P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} = {}^tP_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}}$$

Démonstration

On a immédiatement :

$$P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}} = [\langle e_i, b_j\rangle]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \text{ et } P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{E}} = [\langle b_i, e_j\rangle]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}.$$

Propriété 4.16

Si E_1 est un sous-espace vectoriel de E, alors :

$$E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_1^{\perp}.$$

Propriété 4.17

Si E et E' sont deux espaces vectoriels euclidiens, si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée de E et $(e'_1, \ldots, e'_n)$ une base orthonormée de E' et si $f \in \mathscr{L}(E, E')$ alors :

$$\forall x \in E,\ f(x) = \sum_{j=1}^{p} \langle e_j, x\rangle.f(e_j) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} \langle e_j, x\rangle \langle e'_i, f(e_j)\rangle.e'_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} \langle e'_i, f(e_j)\rangle \langle e_j, x\rangle\right).e'_i$$

Propriété 4.18 – Expression matricielle

Si E et E' sont deux espaces vectoriels euclidiens, si $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée de E et $\mathscr{E}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une base orthonormée de E' et si $f \in \mathscr{L}(E, E')$ alors :

$$\mathrm{Matrice}(f, \mathscr{E}, \mathscr{E}') = [\langle e'_i, f(e_j)\rangle]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = \begin{bmatrix} \langle e'_1, f(e_1)\rangle & \cdots & \langle e'_1, f(e_p)\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e'_n, f(e_1)\rangle & \cdots & \langle e'_n, f(e_p)\rangle \end{bmatrix}.$$

Théorème 4.3 – de représentation d'une forme linéaire [cas euclidien]

Soit E un espace vectoriel euclidien, alors :

$$\boxed{\forall \varphi \in E^{\star},\ \exists! a \in E,\ \forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle a, x\rangle.}$$

Démonstration

- Si $\varphi = 0_{E^*}$ alors $a = 0_E$ convient.
- Sinon, posons

$$H = \operatorname{Ker}(\varphi), \text{ alors } H \overset{\perp}{\oplus} H^{\perp\cdot}$$

et $H^{\perp\cdot}$ est un espace vectoriel de dimension 1, soit b une base orthonormée de $H^{\perp\cdot}$. On a alors, pour $x \in E$,

$$x = \underbrace{\langle b, x\rangle .b}_{\in H^{\perp\cdot}} + \underbrace{x - \langle b, x\rangle .b}_{\in H},$$

donc

$$\varphi(x) = \langle b, x\rangle \, \varphi(b) = \left\langle \underbrace{\varphi(b).b}_{a}, x \right\rangle .$$

L'existence est obtenue. L'unicité est claire car

$$E^{\perp\cdot} = \{0_E\} .$$

Remarque 4.9

1. On retrouve la notion de vecteur normal à un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, que l'on a rencontré dans le cas $n = 2$ et $n = 3$.
2. L'application :

$$\varphi \mapsto a \text{ est un isomorphisme.}$$

   Donc, la notion de dual n'est pas très utile pour les espaces euclidiens...
3. La démonstration fonctionnera encore pour les hyperplans H tels que $H \overset{\perp}{\oplus} H^{\perp\cdot}$.

Définition 4.5 – Écarts angulaires

Soit E un espace vectoriel euclidien. En s'inspirant de ce que l'on a fait dans $\mathbb{R}^n$, on peut définir les notions de :

1. *écart angulaire entre deux vecteurs x et y non nuls* :

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \, \|y\|}\right) \in [0, \pi],$$

2. *écart angulaire entre deux droites* $\mathbb{R}.x$ *et* $\mathbb{R}.y$ *(ou deux hyperplans* $(\mathbb{R}.x)^{\perp\cdot}$ *et* $(\mathbb{R}.y)^{\perp\cdot}$*) :*

$$\theta = \arccos\left(\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

3. *écart angulaire entre une droite* $\mathbb{R}.x$ *et un hyperplan* $(\mathbb{R}.y)^{\perp\cdot}$ *:*

$$\theta = \arcsin\left(\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Exercice(s) 4.3

4.3.1 Soit $E = \mathrm{Vect}(\{x \mapsto x^k,\ k \in [\![0, 2]\!]\})$, on prend le produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que c'est un produit scalaire.

(b) En orthonormalisant la base $(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$, montrer qu'il existe une base orthonormée (P_0, P_1, P_2) telle que le degré de P_k est k. Montrer qu'elle devient unique, si l'on impose au coefficient du terme de plus haut degré d'être > 0. La calculer.

(c) Calculer l'orthogonal de :

$$\mathrm{Vect}(\{x \mapsto x, x \mapsto x^2\}).$$

4.3.2 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base quelconque [a], soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, montrer que :

$$\exists! x \in E,\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \langle e_k, x\rangle = a_k.$$

4.3.3 Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ euclidien, l'ensemble des points vérifiant l'équation

$$2\,x^2 + 2\,y^2 - z^2 + 5\,x\,y - y\,z + x\,z = 0,$$

est la réunion de deux plans d'angle $\pi/3$.

a. Pas nécessairement orthonormée !

4.3 Endomorphismes particuliers d'un espace euclidien

4.3.1 Adjoint d'un endomorphisme

Proposition 4.4 – Adjoint d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$, alors, il existe un unique endomorphisme de E, $f^\star$ vérifiant :

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x, f(y) \rangle = \langle f^\star(x), y \rangle}$$

Cet endomorphisme s'appelle l'adjoint de f.

Démonstration

1. (*Première démonstration*) Soit $x \in E$ fixé, l'application $y \mapsto \langle x, f(y) \rangle$ est une forme linéaire sur E. D'après le théorème de représentation, il existe un unique $a \in E$, tel que :

$$\forall y \in E,\ \langle x, f(y) \rangle = \langle a, y \rangle.$$

On pose donc naturellement, $a = f^\star(x)$. Il reste à montrer que $f^\star$ est linéaire. Or c'est la composée de deux applications linéaires :

$$\begin{cases} E \to E^\star \\ x \mapsto (y \mapsto \langle x, f(y) \rangle) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} E^\star \to E \\ \varphi \mapsto a, \quad \forall y \in E,\ \varphi(y) = \langle a, y \rangle \end{cases}$$

2. (*Deuxième démonstration*) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, alors, pour définir $f^\star$, il suffit de définir la famille $(f^\star(e_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$, et pour définir chaque $f^\star(e_i)$, il suffit de connaître son produit scalaire avec e_j. Il vient alors immédiatement :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \langle f^\star(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, f(e_j) \rangle.$$

Il reste alors à vérifier que l'application construite convient, soit que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x, f(y) \rangle = \langle f^\star(x), y \rangle.$$

Propriété 4.19

— On a immédiatement, pour f et g dans $\mathscr{L}(E)$ et λ dans $\mathbb{R}$:

$$(f+g)^\star = f^\star + g^\star,\ (\lambda.f)^\star = \lambda.f^\star \text{ et } (f^\star)^\star = f.$$

— De même :

$$\left(0_{\mathscr{L}(E)}\right)^\star = 0_{\mathscr{L}(E)} \text{ et } (\mathrm{id}_E)^\star = \mathrm{id}_E,$$

et, pour f et g dans $\mathscr{L}(E)$:

$$(f\circ g)^\star = g^\star \circ f^\star,$$

et, enfin, pour $f \in \mathscr{GL}(E)$:

$$f^\star \in \mathscr{GL}(E) \text{ et } \left(f^{-1}\right)^\star = (f^\star)^{-1}.$$

— On a aussi, pour $f \in \mathscr{L}(E)$:

$$\mathrm{Ker}\,(f^\star) = (\mathrm{Im}(f))^{\perp.} \text{ et } \mathrm{Im}\,(f^\star) = (\mathrm{Ker}(f))^{\perp.}$$

Proposition 4.5

Soit E un espace vectoriel euclidien, soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit E_1 un sous-espace vectoriel de E, alors :

$$\boxed{E_1 \text{ stable par } f \iff E_1^{\perp.} \text{ stable par } f^\star.}$$

Démonstration

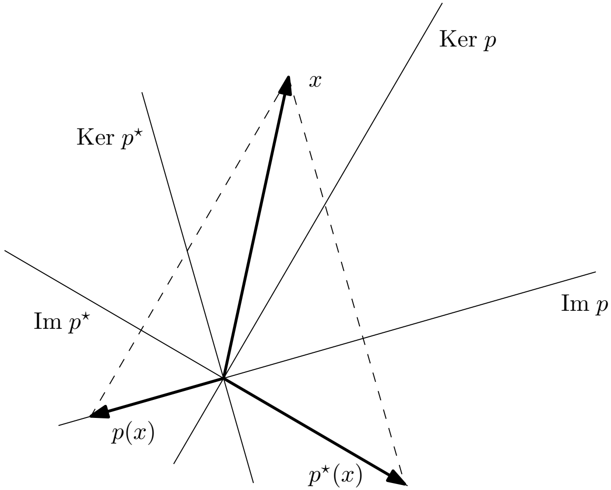
Il suffit de l'écrire...

Exemple 4.5 – Adjoint d'un endomorphisme

1. On a vu en exercice que, si p est un projecteur de E, alors :

$$p \text{ projecteur orthogonal } \iff p^\star = p.$$

2. Plus généralement, il est facile de calculer l'adjoint d'un projecteur quelconque, comme indiqué sur le dessin suivant :



Exercice(s) 4.4

4.4.1 Soit le produit scalaire sur $E = \mathrm{Vect}(\{x \mapsto x^k,\ k \in [\![1, n]\!]\})$ défini par :

$$\forall (P, Q) \in E^2,\ \langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)\, Q^{(k)}(0).$$

(a) Montrer que c'est un produit scalaire sur E.

(b) En orthonormalisant la base canonique de E, donner une base orthonormée de E.

(c) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ définie par :

$$P \mapsto P'' = f(P).$$

Quel est l'adjoint de f ?

4.4.2 Soit E un espace vectoriel euclidien, et a, b, x_0 trois vecteurs de E. Montrer que :

$$\left[\exists f \in \mathscr{L}(E),\ f(x_0) = a \text{ et } f^\star(x_0) = b\right] \iff \langle a, x_0\rangle = \langle b, x_0\rangle.$$

4.4.3 Soit E un espace vectoriel euclidien, soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de E, calculer la dimension du sous-espace vectoriel de E :
$$\mathscr{F} = \{f \in \mathscr{L}(E),\ \forall i \in [\![1, p]\!]\ ,\ f(x_i) = f^\star(x_i)\}\ .$$

4.4.4 Soit E un espace vectoriel euclidien et
$$A = \{f \in \mathscr{L}(E),\ f \circ f^* \circ f = f\}.$$

(a) Montrer que $f \in A \iff f^* \circ f$ est un projecteur orthogonal.

(b) Montrer que $f \in A \iff \forall x \in (\mathrm{Ker}\ f)^\perp,\ \|f(x)\| = \|x\|$.

(c) Soit $f \in A$, montrer que
$$(\mathrm{Ker}(f))^{\perp \cdot} = \{x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|\}.$$

4.4.5 Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :
$$\forall x \in E,\ \|f(x)\| \leq \|x\|.$$

(a) Montrer que :
$$\forall x \in E,\ \|f^\star(x)\| \leq \|x\|.$$

(b) Montrer que :
$$E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{_E}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_{_E}).$$

(c) Calculer pour $x \in E$:
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} . \left(x + f(x) + \cdots + f^n(x)\right),\ \text{où } f^1 = f \text{ et } f^{k+1} = f \circ f^k,\ \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

4.3.2 Endomorphismes auto-adjoints

Définition 4.6 – Endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f \in \mathscr{L}(E)$, on dit que f *est auto-adjoint ou symétrique* si $f^\star = f$. On a donc :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle.$$

On note :

$$\mathscr{S}(E) = \{f \in \mathscr{L}(E),\ f^\star = f\}.$$

C'est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

Exemple 4.6 – Endomorphismes autoadjoints

1. Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs auto-adjoints. Dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ adaptée à la somme directe orthogonale :

$$E = \mathrm{Ker}(f) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(f),$$

en notant $p = \dim \mathrm{Ker}(f)$, on a :

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ f(e_k) = 0_E \text{ et } \forall k \in [\![p+1, n]\!],\ f(e_k) = e_k.$$

2. Plus généralement, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base *orthonormée* de E et s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, tels que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ f(e_k) = \lambda_k . e_k$$

alors f est auto-adjoint.

Théorème 4.4 – de réduction des endomorphismes auto-adjoints

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathscr{S}(E)$, alors il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E et il existe des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, tels que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ f(e_k) = \lambda_k . e_k.$$

On dit que f se diagonalise en base orthonormée. *Les vecteurs* e_k *s'appellent* des vecteurs propres de f *et les réels* λ_k *s'appellent* des valeurs propres de f.

Démonstration

(*Plan*) La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de E.

1. On trouve un vecteur unitaire e_1 et un scalaire λ_1 tel que $f(e_1) = \lambda_1.e_1$.
2. On décompose E sous la forme
$$E = \mathbb{R}.e_1 \overset{\perp}{\oplus} \underbrace{(\mathbb{R}.e_1)^{\perp}}_{=E_1}.$$
et on montre que l'on peut appliquer la récurrence à l'espace vectoriel E_1 et à l'endomorphisme :
$$f_1 = f\Big|_{E_1}^{E_1}.$$

(*Récurrence*)

— (*Initialisation*) Le résultat est clairement vrai pour $n = \dim(E) = 1$, car, si $\{e\}$ est une base orthonormée de E de dimension 1, tout endomorphisme vérifie :
$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ f(e) = \lambda.e$$

— (*Hérédité*) Supposons le résultat connu pour tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace vectoriel euclidien de dimension p, et soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $p+1$, et $f \in \mathscr{S}(E)$.

1. Cherchons un vecteur unitaire e_1 et un scalaire λ_1 tels que : $f(e_1) = \lambda_1.e_1$.

►► (*Analyse*) Si la base orthonormée $(e_1, \dots, e_{p+1})$ existe, on a :
$$\langle x, f(x)\rangle = \sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k \langle e_k, x\rangle^2,$$
en supposant de plus les valeurs propres ordonnées $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{p+1}$, il vient :
$$\langle x, f(x)\rangle \leq \lambda_1 \left(\sum_{k=1}^{p+1} \langle e_k, x\rangle^2\right) = \lambda_1 \|x\|^2.$$
De plus, il y a égalité si $x = e_1$. Cette étape s'appelle *caractérisation géométrique de* (e_1, λ_1).

►► (*Synthèse*) Posons :
$$S = \{x \in E,\ \|x\| = 1\} \text{ (la sphère unité).}$$
Et considérons l'application :
$$\varphi\ :\begin{cases} S \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle x, f(x)\rangle \end{cases}$$
Nous allons montrer successivement que :

(a) φ est bornée et les bornes sont atteintes.

(b) La borne supérieure est la plus grande valeur propre λ_1 cherchée.

- (φ *est bornée*) En effet :
$$|\varphi(x)| \leq \|x\| \, \|f(x)\|, \text{ d'après Cauchy-Schwarz.}$$
Ici, $\|x\| = 1$, mais que peut-on dire de $\|f(x)\|$? Soit $(b_1, \ldots, b_{p+1})$ une base orthonormée quelconque de E, alors
$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{p+1} \langle b_k, x\rangle.b_k\right) = \sum_{k=1}^{p+1} \langle b_k, x\rangle.f(b_k),$$
donc
$$\|f(x)\| \leq \sum_{k=1}^{p+1} \underbrace{|\langle b_k, x\rangle|}_{\leq \|x\|=1} \|f(b_k)\| \leq \sum_{k=1}^{p+1} \|f(b_k)\|.$$

- (*Les bornes sont atteintes*) Posons :
$$\lambda_1 = \sup_{x \in S} \varphi(x).$$
Par discrétisation, on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ telle que :
$$\varphi(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda_1.$$
On a alors :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|x_n\| = 1 \text{ et } x_n = \sum_{k=1}^{p+1} \langle b_k, x_n\rangle.b_k.$$
De la suite $(\langle b_1, x_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée on peut extraire une suite $(\langle b_1, x_{\psi_1(n)}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers α_1, puis de la suite $(\langle b_2, x_{\psi_1(n)}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, on peut extraire une sous-suite $(\langle b_2, x_{\psi_2(n)}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers α_2, etc. jusqu'à $(\langle b_{p+1}, x_{\psi_{p+1}(n)}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers α_{p+1}. Finalement, [a]
$$x_{\psi_{p+1}(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underbrace{\sum_{k=1}^{p+1} \alpha_k.b_k}_{e_1 \text{ tel que } \|e_1\|=1} \quad \text{et } \varphi(e_1) = \lambda_1.$$

- (*On a bien trouvé un vecteur propre de f de valeur propre λ_1.*) De plus, on a :
$$\forall x \in E,\ \langle x, f(x)\rangle \leq \lambda_1 \|x\|^2.$$
Soit $x \in E$ et $\mu \in \mathbb{R}$, on a alors :
$$\forall \mu \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ \varphi(e_1 + \mu.x) = \langle e_1 + \mu.x, f(e_1) + \mu.f(x)\rangle \leq \lambda_1 \|e_1 + \mu.x\|^2.$$
C'est une équation du second degré en μ qui garde un signe ≥ 0, donc :
$$\forall x \in E,\ \langle f(e_1) - \lambda_1.e_1, x\rangle = 0,$$
soit, finalement :
$$f(e_1) = \lambda_1.e_1.$$

2. On écrit alors :

$$E = \mathbb{R}.e_1 \overset{\perp}{\oplus} \underbrace{(\mathbb{R}.e_1)^{\perp}}_{E_1}\cdot,$$

et on a :

$$f(E_1) = f^{\star}(E_1) \subset E_1.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à l'espace vectoriel E_1 (toujours euclidien, avec le même produit scalaire) et l'endomorphisme $f\Big|_{E_1}^{E_1}$ (toujours auto-adjoint), on en déduit le résultat cherché.

---

a. Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $l \in E$, sont tels que :

$$\|y_n - l\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \text{ on écrira } y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

Remarque 4.10

Plusieurs aspects de cette démonstration sont intéressants à noter :

1. La récurrence sur n qui permet de diminuer la dimension de l'espace euclidien concerné. Si E est un espace euclidien, de produit scalaire ϕ, alors, si E_1 est un sous-espace vectoriel de E, $\phi\Big|_{E_1\times E_1}$ est un produit scalaire sur E_1.
2. On a utilisé la proposition 4.5, page 286, qui est simple, mais très importante. On part de $\mathbb{R}.e_1$ stable, par f, donc E_1 est stable par $f^{\star} = f$. Et $f\Big|_{E_1}^{E_1}$ est dans $\mathscr{S}(E)$.
3. La *caractérisation géométrique* de la plus grande valeur propre comme une valeur extrémale (la plus petite peut aussi être caractérisée d'une manière semblable).

$$\lambda_1 = \max_{x\in S}\langle x, f(x)\rangle = \max_{x\neq 0_E} \frac{\langle x, f(x)\rangle}{\|x\|^2}.$$

4. Dans S, on a pu extraire une sous-suite convergente, en utilisant une succession d'extractions coordonnées par coordonnées. Plus généralement, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite *bornée* (c'est-à-dire que $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée), on peut extraire une sous-suite convergente.
5. La technique utilisée pour montrer que e_1 est un vecteur propre de f (associé à la valeur propre λ_1) s'appelle *la méthode de dédoublement des termes*. Elle fonctionne ainsi :
   — Si on a une propriété d'égalité sur des normes (ou quelque chose qui y ressemble), on peut passer au produit scalaire en l'appliquant à $x + y$.

— Si on a une propriété d'inégalité sur des normes (ou quelque chose qui y ressemble), on peut passer au produit scalaire en l'appliquant à $x + \mu.y$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Exemple 4.7 – Dédoublement

(a) Supposons que $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie :

$$\forall x \in E,\ \langle x, f(x) \rangle = 0,$$

alors, en l'appliquant à $x + y$ quelconques de E, il vient :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \underbrace{\langle x, f(y) \rangle}_{=\langle f^\star(x), y \rangle} + \langle f(x), y \rangle = 0 \text{ donc } f^\star = -f.$$

(b) Supposons que $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie :

$$\forall x \in E,\ \langle x, f(x) \rangle \geq 0,$$

alors, en l'appliquant à $x + \mu.y$, (x et y quelconques dans E et μ dans $\mathbb{R}$), il vient :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \left\langle x, \frac{f + f^\star}{2}(y) \right\rangle^2 \leq \langle x, f(x) \rangle \ \langle y, f(y) \rangle ,$$

qui peut nous rappeler une inégalité de Cauchy-Schwarz... N'est-ce pas avec ce type de méthode que nous avions obtenu l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?

Propriété 4.20

$\mathscr{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ de dimension

$$\frac{n\,(n+1)}{2} \text{ où } n = \dim(E).$$

Démonstration

Connaître f revient à connaître les $f(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ où $(e_1,\dots,e_n)$ est une base *orthonormée de* E, et donc, connaître les $(\langle e_i, f(e_j)\rangle)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. Or, on a :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle e_i, f(e_j)\rangle = \underbrace{\langle f(e_i), e_j\rangle}_{\text{car } f \text{ est auto-adjoint}} = \underbrace{\langle e_j, f(e_i)\rangle}_{\text{par symétrie du produit scalaire}}.$$

Propriété 4.21

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$, on dit que f est *un endomorphisme auto-adjoint positif* s'il vérifie de plus :

$$\forall x \in E,\ \langle x, f(x)\rangle \geq 0,$$

ou, si l'on connaît une base de vecteurs propres $(e_1,\dots,e_n)$ associée à des valeurs propres $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, alors :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \lambda_k \in \mathbb{R}_+.$$

On note $\mathscr{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs. *Ce n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{L}(E)$. C'est un cône positif de $\mathscr{L}(E)$.

Démonstration

— ($\Rightarrow$) On prend la base $(e_1,\dots,e_n)$ de vecteurs propres de f, il vient, pour $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\lambda_k = \langle e_k, f(e_k)\rangle \geq 0.$$

— ($\Leftarrow$) Soit $x \in E$, alors :

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle . e_k,\ \text{ donc } f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle\, \lambda_k . e_k,$$

et, finalement :

$$\langle x, f(x)\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \,\langle e_k, x\rangle^2 \geq 0.$$

Propriété 4.22

De même, on définit les *endomorphismes définis positifs* par :

$$f \in \mathscr{S}(E) \text{ et } \underbrace{\forall x \in E,\ x \neq 0_E \ \Rightarrow\ \langle x, f(x)\rangle > 0}_{\iff \forall k \in [\![1,n]\!],\ \lambda_k > 0}.$$

On note $\mathscr{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs. C'est toujours un cône positif.

Remarque 4.11

Si $f \in \mathscr{S}^{+}(E)$ et si $\epsilon > 0$, alors :

$$f + \epsilon.\,\mathrm{id}_E \in \mathscr{S}^{++}(E).$$

Démonstration

Soit $x \in E$, on a :

$$\langle x, (f + \epsilon.\,\mathrm{id}_E)(x)\rangle = \underbrace{\langle x, f(x)\rangle}_{\geq 0} + \epsilon \|x\|^2.$$

Propriété 4.23

On a :

$$\forall f \in \mathscr{L}(E),\ f^\star \circ f \in \mathscr{S}^{+}(E) \text{ et, de même } f \circ f^\star \in \mathscr{S}^{+}(E).$$

De même, on a :

$$\forall f \in \mathscr{L}(E),\ f^\star \circ f \in \mathscr{S}^{++}(E) \iff f \in \mathscr{GL}(E).$$

(Même chose avec $f \circ f^\star$).
On a de plus :

$$\forall f \in \mathscr{L}(E),\ \mathrm{Ker}(f^\star \circ f) = \mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f^\star \circ f) = \mathrm{Im}(f^\star) = (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}.$$

Propriété 4.24

Soit $f \in \mathscr{S}^+(E)$, alors il existe un *unique endomorphisme* $g \in \mathscr{S}^+(E)$ tel que [a] :

$$f = g \circ g.$$

[a]. C'est une sorte de « racine carrée » de f.

Démonstration

— (*Existence*) Si $f \in \mathscr{S}^+(E)$, alors on sait qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres, et il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ des réels ≥ 0, tels que :
$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ f(e_k) = \lambda_k . e_k .$$
Si on définit l'endomorphisme g par :
$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ g(e_k) = \sqrt{\lambda_k} . e_k .$$
Alors g est un endomorphisme auto-adjoint (il possède une base orthonormée de vecteurs propres), positif car les $\sqrt{\lambda_k}$ sont positifs. Et, clairement, $f = g \circ g$.

— (*Unicité*) Soit $g \in \mathscr{S}^+(E)$ tel que $f = g \circ g$, alors,
$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ f(g(e_k)) = g(f(e_k)) = g(\lambda_k . e_k) = \lambda_k . g(e_k),$$
donc $g(e_k) \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_k . \operatorname{id}_E)$. Malheureusement, cet espace peut-être très grand, cela ne nous assure pas que $g(e_k)$ soit colinéaire à e_k. Mais, si l'on pose $E_1 = \operatorname{Ker}(f - \lambda_k . \operatorname{id}_E)$, on a par le même raisonnement :
$$g(E_1) \subset E_1 \text{ et } g_1 = g\Big|_{E_1}^{E_1} \in \mathscr{S}^+(E_1).$$
Or g_1 se diagonalise dans une base orthonormée $(b_1, \dots, b_p)$ de vecteurs propres de E_1, et il existe des réels positifs $(\mu_1, \dots, \mu_p)$ tels que :
$$\forall k \in [\![1, p]\!]\,,\ g(b_k) = \mu_k . b_k .$$
N'oublions cependant pas que $f = g \circ g$, donc :
$$\forall x \in E_1,\ f(x) = \lambda_k . x = \lambda_k . \left(\sum_{j=1}^{p} \langle b_j, x \rangle . b_j \right),$$
et
$$g(g(x)) = \sum_{j=1}^{p} \mu_j^2 \, \langle b_j, x \rangle . b_j .$$
Donc :
$$\boxed{\forall j \in [\![1, p]\!]\,,\ \mu_j^2 = \lambda_k .}$$

Or, les μ_j sont ≥ 0, il n'y a qu'une possibilité $\mu_j = \sqrt{\lambda_k}$, qui est indépendant de j. Finalement :

$$g_1 = \sqrt{\lambda_k}.\,\mathrm{id}_{E_1} \text{ et, donc } g(e_k) = \sqrt{\lambda_k}.e_k.$$

Notation 4.1

Nous noterons :

1. $S_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des *matrices symétriques* (vérifiant $M = {}^tM$), si nous sommes en *base orthonormée*, elles représentent les endomorphismes auto-adjoints.
2. Nous noterons donc aussi $S_p^+(\mathbb{R})$ pour les matrices symétriques M vérifiant de plus :
$$\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX \centerdot M \centerdot X \geq 0$$
ces matrices sont dites *symétriques positives*, elles représentent *en base orthonormée* les endomorphismes auto-adjoints positifs.
3. Et de même $S_p^{++}(\mathbb{R})$...

Remarque 4.12

On peut traduire les résultats sur les matrices symétriques en termes matriciels. Par exemple :

1. Le Théorème spectral :
$$\forall M \in S_p(\mathbb{R}),\ \exists P \in O_p(\mathbb{R}),\ \underbrace{P^{-1}}_{={}^tP} \centerdot M \centerdot P \in D_p(\mathbb{R})$$
2. Ou encore :
$$\forall M \in S_p^+(\mathbb{R}),\ \exists! N \in S_p^+(\mathbb{R}), M = N\dot{N}.$$

Exercice(s) 4.5

4.5.1 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$, $a \in E$, $\|a\| = 1$ et $k \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. On considère l'endomorphisme f de E défini par :
$$x \mapsto x + k\,\langle a, x\rangle.a$$

(a) Montrer que f est auto-adjoint.

(b) Montrer que f est un automorphisme.

(c) Préciser les vecteurs propres et les valeurs propres de f.

4.5.2 Soit E un espace vectoriel euclidien. Trouver les $f \in \mathscr{L}(E)$ tels que : $f^\star \circ f = f$.

4.5.3 Soit E un espace vectoriel euclidien et $(e_1, \dots, e_n)$ une base quelconque de E. Montrer que l'endomorphisme défini par :

$$x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle . e_k \text{ est auto-adjoint.}$$

4.5.4 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.

(a) Soit $(u, v) \in \mathscr{S}(E)^2$, montrer que :

$$\Big[u \circ v = v \circ u \Big] \iff \Big[\exists (e_1, \dots, e_n) \text{ base orthonormée de vecteurs propres de } u \text{ et } v \Big].$$

(b) Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathscr{S}(E)^I$, montrer que :

$$\Big[\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \ \Rightarrow \ u_i \circ u_j = u_j \circ u_i \Big] \iff$$

$$\Big[\exists (e_1, \dots, e_n) \text{ base orthonormée de vecteurs propres communs à tous les } u_i \Big].$$

4.5.5 Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$, montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \ \Rightarrow \ \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = 0.$$

4.5.6 Soit u un endomorphisme auto-adjoint, défini positif d'un espace vectoriel euclidien E.

(a) Montrer que u est un automorphisme.

(b) Soit $y \in E$, montrer que :

$$\sup_{x \in E} \left(\langle x, y \rangle - \frac{1}{2} \langle u(x), x \rangle \right) = \frac{1}{2} \langle u^{-1}(y), y \rangle.$$

4.5.7 Dans $\mathscr{S}(E)$, on dit que $f \leq g$ si $g - f \in \mathscr{S}^+(E)$. Montrer que toute suite $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ croissante $(\forall p,\ f_p \leq f_{p+1})$, majorée $(\exists \phi \in \mathscr{S}(E),\ \forall p \in \mathbb{N},\ f_p \leq \phi)$ a une limite $f \in \mathscr{S}(E)$ $(\forall x \in E,\ \|f_p(x) - f(x)\| \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0)$.

4.5.8 Soit E un espace vectoriel euclidien et p_1 et p_2 deux projecteurs orthogonaux de E.

(a) Montrer que $p_1 + p_2$ est auto-adjoint.

(b) À quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $p_1 \circ p_2 \in \mathscr{S}(E)$?

(c) Montrer que l'on peut décomposer E sous la forme :

$$E = \overset{p}{\underset{k=1}{\overset{\perp}{\bigoplus}}} E_k, \text{ où } \forall k \in [\![1, p]\!], \begin{cases} \dim(E_k) \in \{1, 2\} \\ p_1(E_k) \subset E_k \\ p_2(E_k) \subset E_k \end{cases}$$

(d) Montrer que l'on peut trouver une base $(e_1, \ldots, e_n)$ non nécessairement orthonormée, adaptée à la décomposition en somme directe précédente, telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ \exists \lambda_k \in \mathbb{R}, \ p_1 \circ p_2(e_k) = \lambda_k . e_k.$$

4.5.9 Soit E un espace vectoriel euclidien, et soit $f \in \mathbb{S}(E)$. On suppose que ses valeurs propres sont ordonnées sous la forme $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$, associés aux vecteurs propres $(e_1, \ldots, e_n)$ (donc $f(e_k) = \lambda_k . e_k$).

(a) Montrer que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ \lambda_k = \max_{\substack{x \in \mathrm{Vect}(\{e_1, \ldots, e_k\}), \\ x \neq 0_E}} \frac{\langle x, f(x) \rangle}{\|x\|^2} = \min_{\substack{x \in (\mathrm{Vect}(\{e_1, \ldots, e_{k-1}\}))^{\perp.}, \\ x \neq 0_E}} \frac{\langle x, f(x) \rangle}{\|x\|^2}.$$

(b) Soit, pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$M_k = \{F \text{ sous-espace vectoriel de } E, \ \dim(F) = k\}.$$

Montrer que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ \lambda_k = \min_{F \in M_k} \max_{x \in F \setminus \{0_E\}} \frac{\langle x, f(x) \rangle}{\|x\|^2} = \max_{F \in M_{k-1}} \min_{x \in F \setminus \{0_E\}} \frac{\langle x, f(x) \rangle}{\|x\|^2}.$$

4.3.3 Automorphismes orthogonaux

Définition 4.7 – Automorphisme orthogonal d'un espace euclidien

Soit E un espace vectoriel euclidien, on appelle *automorphisme orthogonal* tout automorphisme $f \in \mathscr{GL}(E)$ qui vérifie :

$$f^\star \circ f = f \circ f^\star = \mathrm{id}_E .$$

On note $\mathscr{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux, on l'appelle *groupe orthogonal de E*.

Remarque 4.13

$\mathscr{O}(E)$ *n'est pas stable par* $+$ *et* ., mais, en revanche, il est stable par $(f, g) \mapsto f \circ g$ et par $f \mapsto f^{-1}$. Nous dirons plus tard que c'est un sous-groupe de $(\mathscr{GL}(E), \circ)$.

Exemple 4.8

1. Les projecteurs orthogonaux *ne sont pas des automorphismes (sauf* id_E *!)*, et donc pas des automorphismes orthogonaux.
2. Quand on a un projecteur orthogonal p, on peut lui associer une *symétrie orthogonale* (symétrie par rapport à $\mathrm{Im}(p)$) sous la forme :

$s = 2.p - \mathrm{id}_E$, en ce cas, s est à la fois
— un automorphisme orthogonal,
— un endomorphisme auto-adjoint.

Démonstration

On a :

$$E = \mathrm{Ker}(p) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(p) \text{ qui traduit } \forall x \in E,\ x = (x - p(x)) + p(x).$$

Calculons $s^\star$. On a :

$$s^\star = (2.p - \mathrm{id}_E)^\star = 2.p^\star - \mathrm{id}_E^\star = 2.p - \mathrm{id}_E\ .$$

Car, p est auto-adjoint (projecteur *orthogonal*). Donc $s^\star = s$, $s \in \mathscr{S}(E)$. Calculons maintenant [a] :

$$s^\star \circ s = s \circ s^\star = s \circ s = \mathrm{id}_E,\ \text{car } p^2 = p.$$

Donc $s \in \mathscr{O}(E)$.

---

a. Toutes les symétries s orthogonales ou non, vérifient bien sûr $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

Remarque 4.14

Réciproquement, soit $f \in \mathscr{S}(E) \cap \mathscr{O}(E)$, alors f est une symétrie orthogonale. En effet, posons :

$$p = \frac{1}{2}.(f + \mathrm{id}_E),\ \text{alors on a } p \circ p = p \text{ et } p^\star = p.$$

Définition 4.8 – Symétrie orthogonale

Soit E un espace vectoriel euclidien, on appelle *symétrie orthogonale* tout élément de $s \in \mathscr{S}(E) \cap \mathscr{O}(E)$, son projecteur associé ($s = 2.p - \mathrm{id}_E$) est un projecteur orthogonal.
Lorsque le projecteur est une projection orthogonale sur un hyperplan, on dit que s est *une réflexion de* E.

Pourquoi les automorphismes orthogonaux sont-ils intéressants ? La réponse est dans la proposition suivante :

Proposition 4.6 – Caractérisation des automorphismes orthogonaux

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $f \in \mathscr{O}(E)$.
2. $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$ *(conservation de la norme).*

3. *$\forall (x,y) \in E$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ (conservation du produit scalaire).*
4. *Quelle que soit la base orthonormée de E $(e_1, \dots, e_n)$*

$$(f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ est encore une base orthonormée.}$$

5. *Il existe une base orthonormée de E $(e_1, \dots, e_n)$ telle que :*

$$(f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ soit encore une base orthonormée.}$$

Démonstration

— ($1 \Rightarrow 2$) Soit $x \in E$,
$$\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x)\rangle = \langle f^\star \circ f(x), x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2.$$
— ($2 \Rightarrow 3$) *Dédoublement des termes dans le cas d'une égalité.* Soit $(x,y) \in E^2$,
$$\underbrace{\|f(x+y)\|^2}_{=\|x+y\|^2} = \underbrace{\|f(x)\|^2}_{=\|x\|^2} + 2\langle f(x), f(y)\rangle + \underbrace{\|f(y)\|^2}_{=\|y\|^2},$$
d'où, en développant le terme de gauche et en simplifiant :
$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$
— ($3 \Rightarrow 4$) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, alors :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}.$$
— ($4 \Rightarrow 5$) Évident.
— ($5 \Rightarrow 1$) On a :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \delta_{i,j} = \langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle f^\star \circ f(e_i), e_j\rangle,$$
donc $f^\star \circ f(e_i) = e_i$. Ce qui montrer (par linéarité) que $f^\star \circ f = \mathrm{id}_E$ (et donc, $f \circ f^\star = \mathrm{id}_E$ aussi).

Propriété 4.25 – Décomposition polaire

Soit E un espace vectoriel euclidien, alors :

$$\forall f \in \mathscr{GL}(E),\ \exists! (\rho, \theta) \in \mathscr{S}^{++}(E) \times \mathscr{O}(E),\ f = \rho \circ \theta.$$

Démonstration

— (*Existence*).

1. (*Analyse*). Si ρ et θ existent, alors on a :
$$f = \rho \circ \theta \text{ et, donc } f^\star = \theta^\star \circ \rho^\star,\ \text{d'où } \rho^2 = f \circ f^\star.$$
2. (*Synthèse*). $f \circ f^\star \in \mathscr{S}^{++}(E)$, donc, on sait qu'il existe un endomorphisme (unique) $\rho \in \mathscr{S}^{++}(E)$, tel que : $\rho^2 = f \circ f^\star$, posons alors :
$$\theta = \rho^{-1} \circ f,\ \text{alors } \theta^\star = f^\star \circ \rho^{-1\star} = f^\star \circ \rho^{-1}.$$
Donc
$$\theta \circ \theta^\star = \rho^{-1} \circ f \circ f^\star \circ \rho^{-1} = \mathrm{id}_E\,.$$

Théorème 4.5 – Décomposition d'un automorphisme orthogonal en un produit de réflexions

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f \in \mathscr{O}(E)$, alors si $p = \operatorname{codim}(\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E))$, on peut trouver p réflexions $(s_1, \ldots, s_p)$ telles que :
$$f = s_1 \circ \cdots \circ s_p.$$
De plus, p est le nombre minimal de réflexions utiles pour une telle décomposition.

Démonstration

1. (*Existence*). Par récurrence sur la dimension de E.
   — (*Initialisation*). Si E est de dimension 1, $\mathscr{O}(E)$ contient deux éléments :
$$x \mapsto x \text{ (0 réflexion), et } x \mapsto -x \text{ (1 réflexion).}$$
   — (*Hérédité*). Supposons le résultat connu lorsque E est de dimension p, et prenons un espace vectoriel euclidien E de dimension $p+1$ et $f \in \mathscr{O}(E)$. On a alors plusieurs cas :
   - *Il existe un vecteur $e \neq 0_E$ tel que $f(e) = e$*, on peut alors poser $E_1 = (\mathbb{R}.e)^{\perp\cdot}$, puis écrire :
$$E = \mathbb{R}.e \overset{\perp}{\oplus} E_1,$$
observer que $f(E_1) = E_1$ et appliquer l'hypothèse de récurrence à E_1, où l'on considère l'automorphisme
$$f_1 = f\Big|_{E_1}^{E_1} \in \mathscr{O}(E_1).$$
On a donc, par hypothèse de récurrence, l'existence de $p_1 = \operatorname{codim}\Big(\operatorname{Ker}(f_1 - \mathrm{id}_{E_1})\Big)$ réflexions de E_1, notées $s_1, \ldots, s_{p_1}$ réflexions de E_1 telles que :
$$f_1 = s_1 \circ \cdots \circ s_{p_1}.$$

On peut alors construire des réflexions de E par :

$$\forall k \in [\![1, p_1]\!],\ \tau_k\ : \begin{cases} E \to E \\ x = \lambda.e + \underbrace{x_1}_{\in E_1} \mapsto \lambda.e + s_k(x_1) \end{cases}$$

et on a :

$$f = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{p_1} \text{ et } p_1 = p.$$

- *Il n'existe pas de vecteur $e \neq 0_E$ tel que $f(e) = e$, mais il existe un vecteur $e \neq 0_E$ tel que $f(e) = -e$*, alors, en posant s_0 la réflexion par rapport à $(\mathbb{R}.e)^{\perp\cdot}$, $s_0 \circ f(e) = e$, on peut donc lui appliquer le cas précédent.
- *Il n'existe pas de vecteur $e \neq 0_E$ tel que $f(e) = \pm e$.* Prenons un vecteur unitaire e et posons s_0 la réflexion par rapport $(e - f(e))^{\perp\cdot}$. On $e + f(e) \in (e - f(e))^{\perp\cdot}$. D'où

$$s_0 \circ f(e) = s_0 \left(\frac{1}{2}.(e + f(e) - \frac{1}{2}.(e - f(e)) \right) = e.$$

On peut donc appliquer le premier cas à $s_0 \circ f$.

2. (*Nombre minimal*). Si $f = s_1 \circ \cdots \circ s_q$, alors l'espace

$$\bigcap_{k=1}^{q} \underbrace{\mathrm{Ker}\,(s_k - \mathrm{id}_E)}_{\text{hyperplan}} \text{ est invariant par } f, \text{ donc il est inclus dans } \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E).$$

Or, sa codimension est $\leq q$ (théorème du cours de dualité), sa dimension est donc $\geq (n - q)$, donc

$$\dim\,(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)) \geq n - q \text{ soit } \mathrm{codim}\,(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)) \leq q.$$

Exemple 4.9

Prenons $E = \mathbb{R}^2$ euclidien et représentons les vecteurs (x, y) par leurs affixes $x + i\,y$. Et prenons une rotation d'angle θ représentée par : $\varphi : z \mapsto e^{i\,\theta}\,z$.

— Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ (0 réflexion).

— Si $\theta \in \pi\mathbb{Z} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\varphi = -\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ qui est la composée des deux réflexions (par exemple), $s_1 \circ s_2$ où $s_1 : z \mapsto i\,\overline{z}$ et $s_2 : z \mapsto -i\,\overline{z}$.

— Sinon, φ est la composée (par exemple) de $s_1 : z \mapsto e^{i\,\theta/2}\,\overline{z}$ et $s_2 : z \mapsto e^{-i\,\theta/2}\,\overline{z}$. ($\varphi = s_1 \circ s_2$).

Théorème 4.6 – Forme canonique des automorphismes orthogonaux

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathscr{O}(E)$, alors E peut se décomposer en une somme directe orthogonale de la forme :

$$E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_{-1} \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\bigoplus_{k=1}^{q}} V_k \right),$$

où :

$$E_1 = \{x \in E,\ f(x) = x\},\ E_{-1} = \{x \in E,\ f(x) = -x\}$$

et où les V_k sont des plans stables par f $(f(V_k) \subset V_k)$ tels que :

$$f\Big|_{V_k}^{V_k} \text{ soit une rotation du plan d'angle } \theta_k \in \mathbb{R} \setminus \pi.\mathbb{Z}.$$

Démonstration

Par récurrence sur la dimension de E.

— (*Initialisation*) :

▶ Si $\dim(E) = 1$, alors $f = \pm \mathrm{id}_E$, on a donc :

$$E = \begin{cases} E_1 & \text{si } f = \mathrm{id}_E \\ E_{-1} & \text{si } f = -\mathrm{id}_E \end{cases}.$$

▶ Si $\dim(E) = 2$, alors [a] :

— f transforme une base orthonormée (e_1, e_2) en une base orthonormée. $f(e_1)$ s'écrit donc sous la forme $\alpha.e_1 + \beta.e_2$, avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, donc sous la forme $\cos(\theta).e_1 + \sin(\theta).e_2$, pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. De même, $f(e_2) = \cos(\varphi).e_1 + \sin(\varphi).e_2$. L'orthogonalité des deux vecteurs nous donne ensuite :

$$\cos(\theta)\ \cos(\varphi) + \sin(\theta)\ \sin(\varphi) = \cos(\theta - \varphi) = 0.$$

— Si $\varphi = \theta + \pi/2$, alors :

$$f(e_1) = \cos(\theta).e_1 + \sin(\theta).e_2 \text{ et } f(e_2) = -\sin(\theta).e_1 + \cos(\theta).e_2,$$

on a une rotation d'angle θ, avec deux cas particuliers $\theta \in 2\pi.\mathbb{Z}$, alors $f = \mathrm{id}_E$ (et $E = E_1$) et $\theta \in \pi.\mathbb{Z} \setminus 2\pi.\mathbb{Z}$, alors $f = -\mathrm{id}_E$ (et $E = E_{-1}$). Dans le cas général, on a donc :

$$E_1 = \{0_E\},\ E_{-1} = \{0_E\} \text{ et } V_1 = E.$$

— Si $\varphi = \theta - \pi/2$, alors :

$$f(e_1) = \cos(\theta).e_1 + \sin(\theta).e_2 \text{ et } f(e_2) = \sin(\theta).e_1 - \cos(\theta).e_2,$$

on a une symétrie par rapport à la droite dirigée par le vecteur $(\cos(\theta/2), \sin(\theta)/2)$. On a donc :

$$E_1 = \mathrm{Vect}\left(\left\{\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right\}\right) \text{ et } E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\left\{\left(-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right\}\right).$$

— (*Hérédité*) :

▶ L'endomorphisme $(f + f^\star)/2$ est auto-adjoint, on peut donc trouver un vecteur propre e, unitaire, associé à une valeur propre λ. L'espace vectoriel engendré par $(e, f(e))$ est donc stable par f.

— *S'il est de dimension* 1, alors e est un vecteur propre de f, et $\lambda = \pm 1$ (conservation de la norme par les automorphismes orthogonaux). De plus,

$$F = (\mathbb{R}.e)^{\perp\cdot} \text{ est stable par } f,$$

on peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence au couple $\left(F, f\Big|_F^F\right)$.

— *S'il est de dimension* 2, alors c'est un plan P, et

$$f\Big|_P^P \in \mathscr{O}(P),$$

on peut donc appliquer la propriété en dimension 2 à $\left(P, f\Big|_P^P\right)$. On pose ensuite :

$$F = P^{\perp\cdot}, \text{ et on applique l'hypothèse de récurrence au couple } \left(F, f\Big|_F^F\right).$$

---

a. Pourquoi faut-il initialiser par 1 et 2 ? Parce que, lors de la récurrence principale, on aura des cas où la dimension diminue de 1 et d'autres où la dimension diminue de 2 !

Exemple 4.10

Soit E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathscr{O}(E)$ et $x \in E$, alors :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^k(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} p_{E_1}(x).$$

Propriété 4.26

Nous noterons :

1. $O_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des *matrices orthogonales* (vérifiant $M \in GL_p(\mathbb{R})$ et $M^{-1} = {}^tM$), elles représentent *en base orthonormée* les automorphismes orthogonaux.

   Les matrices de $O_p(\mathbb{R})$ sont de déterminants 1 ou -1 (l'inverse est faux).

2. $SO_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des *matrices orthogonales et de déterminant* 1, elles représentent *en base orthonormée* les automorphismes orthogonaux préservant l'orientation (si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée directe de E alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est encore une base orthonormée directe).

   Les rotations du plan sont des automorphismes orthogonaux directs, les symétries non (on dit qu'elles sont indirectes).

Exercice(s) 4.6

4.6.1 Soit E un espace vectoriel euclidien, u et v deux vecteurs unitaires de E, $\lambda \in \mathbb{R}$, à quelles conditions nécessaires et suffisantes a-t-on :

$$x \mapsto x + \lambda \langle u, x \rangle .v \text{ automorphisme orthogonal ?}$$

4.6.2 Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathscr{O}(E)$, montrer que :

$$f^2 = -\operatorname{id}_E \iff \Big[\forall x \in E,\ \langle x, f(x) \rangle = 0\Big].$$

4.6.3 Soit E un espace vectoriel euclidien, trouver :

$$\{f \in \mathscr{O}(E),\ \forall g \in \mathscr{O}(E),\ f \circ g = g \circ f\}.$$

4.6.4 Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$, on considère s_1, s_2 et s_3 des réflexions. À quelle condition nécessaire et suffisante $s_1 \circ s_2 \circ s_3$ est-elle une réflexion ?

4.6.5 Soit E est un espace vectoriel euclidien, soit $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$, montrer que :

$$f^\star \circ f = g^\star \circ g \iff \Big[\exists \omega \in \mathscr{O}(E),\ f = \omega \circ g\Big].$$

4.6.6 Soit E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0.$$

Montrer que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists \omega \in \mathscr{O}(E),\ f = \lambda.\omega.$$

4.6.7 Déterminer toutes les matrices de $O_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\mathbb{Z}$.

4.6.8 Soit $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in M_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

4.6.9 Soit $\omega \in \mathbb{R}^3$.

(a) Écrire la matrice de l'application $x \mapsto \omega \wedge x$ dans la base canonique.

(b) En déduire les éléments géométriques des rotations de matrices suivantes :

$$A_1 = -\frac{1}{7}.\begin{bmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \text{ et } A_2 = -\frac{1}{9}.\begin{bmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix}.$$

(c) Donner dans la base canonique la matrice de la rotation d'axe dirigé par $(1,-2,1)$ et d'angle $\pi/3$.

4.3.4 Endomorphismes antisymétriques

Définition 4.9 – Endomorphisme anti-symétrique d'un espace euclidien

Soit E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathscr{L}(E)$, on dit que f *est anti-symétrique* s'il vérifie :

$$f^\star = -f.$$

On note $\mathscr{A}(E)$ le sous-espace vectoriel des endomorphismes anti-symétriques de E.

Propriété 4.27

On a la décomposition en somme directe :

$$\mathscr{L}(E) = \mathscr{S}(E) \oplus \mathscr{A}(E),$$

car

$$\forall f \in \mathscr{L}(E),\ f = \underbrace{\frac{f + f^\star}{2}}_{\in \mathscr{S}(E)} + \underbrace{\frac{f - f^\star}{2}}_{\in \mathscr{A}(E)}.$$

Donc

$$\dim\left(\mathscr{A}(E)\right) = \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

Propriété 4.28

On a la propriété suivante :

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{L}(E),\ \Big[f \in \mathscr{A}(E)\Big] \iff \Big[\forall x \in E,\ \langle x, f(x)\rangle = 0\Big].}$$

Exemple 4.11

1. Soit $E = \mathbb{R}^2$ euclidien, alors :
$$f \in \mathscr{O}(E) \cap \mathscr{A}(E) \iff f \text{ rotation d'angle } \pm\frac{\pi}{2}.$$
2. Soit E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors, deux des trois propriétés suivantes impliquent la troisième :
   (a) $f \circ f = -\operatorname{id}_E$.
   (b) $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$.
   (c) $\forall x \in E,\ \langle x, f(x)\rangle = 0$.

Théorème 4.7 – Forme canonique d'un endomorphisme anti-symétrique

Soit E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathscr{A}(E)$, alors E peut se décomposer en une somme directe orthogonale de la forme :

$$E = \mathrm{Ker}(f) \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\bigoplus_{k=1}^{p}} V_k \right),$$

où les V_k sont des plans stables de E, dans lesquels il existe une base orthonormée $(e_{k,1}, e_{k,2})$ et un réel $\alpha_k \neq 0$, tels que :

$$f(e_{k,1}) = \alpha_k.e_{k,2} \text{ et } f(e_{k,2}) = -\alpha_k.e_{k,1}.$$

Démonstration

On peut procéder par récurrence sur la dimension de E.

— *(Initialisation)*
- Si $\dim(E) = 1$, alors $f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
- Si $\dim(E) = 2$, alors, ou bien f est nulle, ou bien, il existe un vecteur e_1 unitaire, tel que $f(e_1) \neq 0_E$. En ce cas, $\langle e_1, f(e_1)\rangle = 0$, on peut poser :
$$e_2 = \frac{1}{\|f(e_1)\|}.f(e_1),$$
(e_1, e_2) est une base orthonormée de E et alors :
$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^*,\ f(e_1) = \alpha.e_2.$$
Calculons alors $f(e_2)$:
$$f(e_2) = \langle e_1, f(e_2)\rangle.e_1 + \langle e_2, f(e_2)\rangle.e_2 = \langle -f(e_1), e_2\rangle.e_1 = -\alpha.e_1.$$

— *(Hérédité)*

— L'endomorphisme $f^\star \circ f = -f^2$ est auto-adjoint, il possède donc un vecteur propre e, que l'on peut supposer unitaire et de valeur propre λ. L'ensemble $P = \mathrm{Vect}(\{e, f(e)\})$ est donc stable par f.
  — Si $\dim(P) = 1$, alors l'initialisation dans le cas de la dimension 1 nous donne que $f(e) = 0_E$. Posons :
  $$V = P^{\perp\cdot},\ \text{alors } f(V) \subset V,$$
  on peut donc appliquer la récurrence au couple $\left(V, f\Big|_V^V\right)$.
  — Si $\dim(P) = 2$, alors l'initialisation dans le cas de la dimension 2 nous donne une base orthonormée de P qui convient, il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence au couple
  $$\left(V, f\Big|_V^V\right) \text{ où } V = P^{\perp\cdot}.$$

Propriété 4.29

Si $f \in \mathscr{A}(E)$, alors $\operatorname{rang}(f) \in 2.\mathbb{N}$.

Propriété 4.30

Si $E = \mathbb{R}^3$ et soit $\overrightarrow{w} \in E \setminus \{0_E\}$, alors l'endomorphisme défini par :

$$\overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{x}$$

est anti-symétrique et on peut trouver une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ telle que :

$$f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{0_E},\ f(\overrightarrow{e_2}) = \|\overrightarrow{w}\|.\overrightarrow{e_3} \text{ et } f(\overrightarrow{e_3}) = -\|\overrightarrow{w}\|.\overrightarrow{e_2}.$$

Notation 4.2

Nous noterons $A_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des *matrices anti-symétriques* (vérifiant ${}^tM = -M$), elles représentent *en base orthonormée* les endomorphismes anti-symétriques.

Exercice(s) 4.7

4.7.1 Dans $E = \mathbb{R}^3$, soit r la rotation d'angle θ et d'axe dirigé par $\overrightarrow{w}$, quelle est la partie symétrique de r ? La caractériser géométriquement. Quelle est la partie anti-symétrique de r ?

4.7.2 Soit E un espace euclidien et $f \in \mathscr{A}(E)$.

(a) Montrer que

$$\mathrm{id}_E + f \in \mathscr{GL}(E).$$

(b) On considère l'application :

$$\phi : \begin{cases} \mathscr{A}(E) \to \mathscr{L}(E) \\ f \mapsto (\mathrm{id}_E - f) \circ (\mathrm{id}_E + f)^{-1}. \end{cases}$$

Calculer l'image de ϕ.

4.7.3 Soit E un espace euclidien, $f \in \mathscr{A}(E)$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de réduction de f.

(a) Calculer :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \lim_{N \to +\infty} \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!}.f^j(e_k).$$

(b) Montrer que l'application linéaire définie par :

$$\forall x \in E,\ u(x) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!}.f^j(x)$$

est un automorphisme orthogonal de E.

(c) À quelle condition nécessaire et suffisante, un automorphisme orthogonal u peut-il s'écrire de cette manière ?

4.4 Bilan et compléments matriciels

4.4.1 Bilan

Cas euclidien E est un espace vectoriel euclidien de dimension p, $\mathscr{E}_o = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{B}_o$ sont deux *bases orthonormées de E*, et $\mathscr{E}$ est une base quelconque de E. Nous noterons le produit scalaire :

$$\phi\ ;\ (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

Aspect vectoriel	Aspect matriciel
$x \in E$	$\text{Matrice}(x, \mathscr{E}_o) = [\langle e_i, x \rangle]_{i \in [\![1,p]\!]} \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ $\text{Matrice}(x, \mathscr{B}_o) = {}^tP_{\mathscr{E}_o}^{\mathscr{B}_o} \centerdot \text{Matrice}(x, \mathscr{E}_0)$ car $\left(P_{\mathscr{E}_o}^{\mathscr{B}_o}\right)^{-1} = {}^tP_{\mathscr{E}_o}^{\mathscr{B}_o}$
$u \in \mathscr{L}(E)$	$\text{Matrice}(u, \mathscr{E}_o) = [\langle e_i, u(e_j) \rangle]_{(i,j) \in [\![1,p]\!]^2}$ $\text{Matrice}(u, \mathscr{B}_o) = {}^tP_{\mathscr{E}_o}^{\mathscr{B}_o} \centerdot \text{Matrice}(u, \mathscr{E}_o) \centerdot P_{\mathscr{E}_o}^{\mathscr{B}_o}$

Aspect vectoriel	Aspect matriciel
$u \in \mathscr{L}(E)$	$\boxed{\text{Matrice}(u^\star, \mathscr{E}_o) = {}^t\text{Matrice}(u, \mathscr{E}_o)}$
$u \in \mathscr{S}(E)$	$\text{Matrice}(u, \mathscr{E}_o) = {}^t\text{Matrice}(u, \mathscr{E}_o)$ On dit que $\text{Matrice}(u, \mathscr{E}_o)$ est symétrique.
$u \in \mathscr{O}(E)$	$(\text{Matrice}(u, \mathscr{E}_o))^{-1} = {}^t\text{Matrice}(u, \mathscr{E}_o)$ On dit que $\text{Matrice}(u, \mathscr{E}_o)$ est orthogonale.
$u \in \mathscr{A}(E)$	$\text{Matrice}(u, \mathscr{E}_o) = -{}^t\text{Matrice}(u, \mathscr{E}_o)$ on dit que $\text{Matrice}(u, \mathscr{E}_o)$ est antisymétrique.
$\phi \in \mathscr{L}_2(E; \mathbb{R})$	$\text{Matrice}(\phi, \mathscr{E}_o) = [\langle e_i, e_j \rangle]_{(i,j) \in [\![1,p]\!]^2} = I_p$ $\text{Matrice}(\phi, \mathscr{B}_o) = \text{Matrice}(\phi, \mathscr{E}_o) = I_p$ $\text{Matrice}(\phi, \mathscr{E}) = {}^tP_{\mathscr{E}_o}^{\mathscr{E}} \centerdot P_{\mathscr{E}_o}^{\mathscr{E}} = {}^t\text{Matrice}(\phi, \mathscr{E})$
$(x, y) \in E^2$	$\langle x, y \rangle = {}^t\text{Matrice}(x, \mathscr{E}_o).\,\text{Matrice}(y, \mathscr{E}_o)$ $\langle x, y \rangle = {}^t\text{Matrice}(x, \mathscr{E}) \centerdot \text{Matrice}(\phi, \mathscr{E}) \centerdot \text{Matrice}(y, \mathscr{E})$
$u \in \mathscr{L}(E)$	$\text{Matrice}(u^\star, \mathscr{E}) = (\text{Matrice}(\phi, \mathscr{E}))^{-1} \centerdot {}^t\text{Matrice}(u, \mathscr{E}) \centerdot \text{Matrice}(\phi, \mathscr{E})$ Les propriétés matricielles de l'adjoint n'apparaissent qu'en base *orthonormée* !

4.4.2 Quelques décompositions matricielles

Proposition 4.7 – Décomposition de Cholesky

Soit $A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$, *alors il existe une* unique *matrice* $T \in T_p^{+}(\mathbb{R}) \cap GL_p(\mathbb{R})$ *à coefficients diagonaux* > 0, *telle que :*

$$A = {}^tT \centerdot T$$

Cette décomposition de A *s'appelle la* décomposition de Cholesky de A.

Démonstration - Version géométrique de l'existence

Si $\mathscr{E}_o$ est une base orthonormée d'un espace euclidien de dimension p (par exemple, la base canonique de $\mathbb{R}^p$), alors on peut considérer A comme la matrice d'un endomorphisme auto-adjoint, défini, positif u.

- *Analyse* Si T est la matrice d'une endomorphisme w dans la base $\mathscr{E}_o$, alors $u = w^\star \circ w$. Or, on sait que :
  - u admet une « racine carrée ».
  - Pour obtenir une matrice triangulaire, il est conseillé d'envisager le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.
- *Synthèse* Soit $v \in \mathscr{S}^{++}(E)$, tel que $u = v \circ v$, V sa matrice dans la base orthonormée $\mathscr{E}_o = (e_1, \dots, e_p)$. On a alors :

  $$A = V^2 = {}^tV \centerdot V \text{ car } V \text{ est symétrique.}$$

  La famille $(v(e_1), \dots, v(e_p))$ s'orthonormalise en $\mathscr{B}_o = (b_1, \dots, b_p)$ base orthonormée, et la matrice de passage

  $$T = P_{\mathscr{B}_o}^{v(\mathscr{E}_o)} = [\langle b_i, v(e_j)\rangle]_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} \in T_p^{+}(\mathbb{R}).$$

  Finalement :

  $${}^tT \centerdot T = \left[\sum_{k=1}^{p} \langle b_k, v(e_i)\rangle \, \langle b_k, v(e_j)\rangle\right]_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} = [\langle v(e_i), v(e_j)\rangle]_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} = A.$$

Démonstration - Version algorithmique

- *Unicité* Si on en a deux matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux > 0 qui conviennent, notées T_1 et T_2, alors :

  $${}^tT_1 \centerdot T_1 = {}^tT_2 \centerdot T_2 \text{ donc } \underbrace{{}^tT_2^{-1} \centerdot {}^tT_1}_{\in T_p^{-}(\mathbb{R}} = \underbrace{T_2 \centerdot T_1^{-1}}_{\in T_p^{+}(\mathbb{R})},$$

  la valeur commune est donc une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ et :

  $$T_2 = D \centerdot T_1.$$

  En reportant dans $A = {}^tT_k \centerdot T_k$ et en tenant compte des coefficients diagonaux > 0, on trouve $D = I_p$.

- *Existence* On va procéder par récurrence.
  - *Initialisation* Si $p = 1$, alors $A = [a]$ et $a > 0$, on prend $T = [\sqrt{a}]$.
  - *Hérédité* Supposons le résultat vrai pour p et prenons $A \in S_{p+1}^{++}(\mathbb{R})$, cherchons T.
    1. *Analyse* Si T existe, on peut l'écrire sous la forme blocs :

$$T = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & L \\ \hline 0 & T_1 \end{array}\right], \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ L \in M_{1,p}(\mathbb{R}) \text{ et } T_1 \in T_p^+(\mathbb{R}).$$

Si $A = {}^tT \bullet T$, on obtient :

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \alpha^2 & \alpha.L \\ \hline \alpha.{}^tL & {}^tL \bullet L + {}^tT_1 \bullet T_1 \end{array}\right].$$

Si on écrit A sous la forme :

$$A = \left[\begin{array}{c|c} a & L_1 \\ \hline {}^tL_1 & A_1 \end{array}\right] \text{ où } a \in \mathbb{R},\ L_1 \in M_{1,p}(\mathbb{K}) \text{ et } A_1 \in S_p(\mathbb{R}),$$

il suffit de résoudre le système :

$$\alpha^2 = a,\ \alpha.L = L_1 \text{ et } {}^tL \bullet L + {}^tT_1 \bullet T_1 = A_1.$$

La récurrence pourra s'appliquer si on arrive à montrer que :

$$a > 0 \text{ et } A_1 - \frac{1}{a}.{}^tL_1 \bullet L_1 \in S_p^{++}(\mathbb{R}).$$

    2. *Synthèse*

► *Montrons que* $a > 0$. Cela vient du fait que $A \in S_{p+1}^{++}(\mathbb{R})$. Si on prend $X = [\delta_{i,1}]_{i \in [\![1,p+1]\!]}$, on a :

$$a = {}^tX \bullet A \bullet X > 0.$$

► *Montrons que* $A_1 - \frac{1}{a}.{}^tL_1 \bullet L_1 \in S_p^{++}(\mathbb{R})$. Soit $Y \in M_{p,1}(\mathbb{R})$, on a alors :

$${}^tY \bullet \left(A_1 - \frac{1}{a}.{}^tL_1 \bullet L_1\right) \bullet Y = {}^t\left[\begin{array}{c} -\frac{1}{a}.L_1 \bullet Y \\ \hline Y \end{array}\right] \bullet A \bullet \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{a}.L_1 \bullet Y \\ \hline Y \end{array}\right] > 0 \text{ si } Y \neq 0_{M_p(\mathbb{R})}.$$

La suite est faite dans l'analyse...

Exemple 4.12 – Décomposition de Cholesky

En `Wxmaxima` :

Session Wxmaxima 4.1 – Décomposition de Cholesky

```
(%i1) A : genmatrix(lambda([i,j],gcd(i,j)),10,10);
```

(%o1)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 6 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 8 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 5 & 2 & 1 & 2 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

```
(%i2) cholesky(A);
```

(%o2)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Remarquons que `Wxmaxima` nous donne une matrice triangulaire inférieure, c'est donc ${}^tT$.

```
(%i3) zeromatrixp(%.transpose(%)-A);
```

(%o3) *true*

Proposition 4.8 – Décomposition QR

Soit $A \in GL_p(\mathbb{R})$, alors il existe un unique *couple $(O,T) \in O_p(\mathbb{R}) \times T_p^+(\mathbb{R})$, T ayant tous ses termes diagonaux > 0, telles que :*

$$A = O \bullet T$$

Cette décomposition s'appelle décomposition QR*.*

Démonstration

— *Analyse/unicité* Si $A = O \bullet T$, alors ${}^tA = {}^tT \bullet {}^tO$, donc :

$${}^tT \bullet T = {}^tA \bullet A$$

La décomposition de Cholesky nous assure alors l'unicité de T si ${}^tA \bullet A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$. Puis, $O = A \bullet T^{-1}$ est unique.

— *Synthèse/existence* Remarquons que, puisque A est inversible, alors ${}^tA \bullet A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$, car :

$$\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX \bullet {}^tA \bullet A \bullet X = {}^t(A \bullet X) \bullet (A \bullet X) \geq 0.$$

De plus, on reconnaît un produit scalaire, donc ce terme est nul si, et seulement si, $A \bullet X = 0_{M_p(\mathbb{R})}$, comme A est inversible, on trouve $X = 0_{M_p(\mathbb{R})}$.
D'après la décomposition de Cholesky, T existe vérifiant :

$${}^tT \bullet T = {}^tA \bullet A$$

Il reste à vérifier que $O = A \bullet T^{-1} \in O_p(\mathbb{R})$, ce qui vient de :

$${}^tO \bullet O = {}^tT^{-1} \bullet \underbrace{{}^tA \bullet A}_{={}^tT \bullet T} \bullet T = I_p.$$

Définition 4.10 – Matrice de Gram

Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel et $\mathscr{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle *matrice de Gram de $\mathscr{X}$* et on note :

$$G_{\mathscr{X}} = [\langle x_i, x_j \rangle]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Propriété 4.31

On a :

$$\mathscr{X} \text{ libre} \iff G_{\mathscr{X}} \text{ inversible.}$$

Démonstration

Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de $G_{\mathscr{X}}$.

— ($\Rightarrow$). Supposons $\mathscr{X}$ libre, dire que $G_{\mathscr{X}}$ est inversible revient à dire (puisque la dimension de l'espace de départ est égale à la dimension de l'espace d'arrivée) que $G_{\mathscr{X}}$ est surjective, c'est-à-dire que ses colonnes sont indépendantes. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k . C_k = 0_{M_{n,1}(\mathbb{K})}, \text{ alors } \left[\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle x_i, x_k \rangle = 0\right].$$

Le vecteur $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k . x_k$ est donc orthogonal à tous les x_i, il est donc dans

$$\mathrm{Vect}(\{x_k,\ k \in [\![1, n]\!]\}) \cup \mathrm{Vect}(\{x_k,\ k \in [\![1, n]\!]\})^{\perp\cdot} = \{0_E\}.$$

Comme $\mathscr{X}$ est libre, on a $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

— ($\Leftarrow$). Le même raisonnement nous permet d'obtenir que si $\mathscr{X}$ est liée, alors $G_{\mathscr{X}}$ n'est pas surjective (donc pas inversible).

Propriété 4.32

Plus précisément :

$$\mathrm{rang}(\mathscr{X}) = \mathrm{rang}(G_{\mathscr{X}}).$$

Démonstration

— Le même raisonnement que ci-dessus nous permet de dire que, si $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ est une sous-famille libre de $\mathscr{X}$, alors les colonnes correspondantes $(C_{i_1}, \ldots, C_{i_r})$ sont libres. Donc :

$$\mathrm{rang}(\mathscr{X}) \leq \mathrm{rang}(G_{\mathscr{X}}).$$

— Si $\mathrm{rang}(G_{\mathscr{X}} > \mathrm{rang}(\mathscr{X}) = r$, alors on peut trouver $r+1$ colonnes indépendantes d'indices $(j_1, \ldots, j_{r+1})$, mais les vecteurs $(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{r+1}})$ sont alors liés, et par conséquence les colonnes de $G_{\mathscr{X}}$ aussi... Donc

$$\mathrm{rang}(\mathscr{X}) = \mathrm{rang}(G_{\mathscr{X}}).$$

Remarque 4.15

À quoi cela sert-il ? Au départ les vecteurs sont dans un espace pré-hilbertien (donc peut-être de dimension finie), on a cependant ramené les calculs dans un univers matriciel.

Exercice(s) 4.8

4.8.1 Montrer, sans utiliser la décomposition de Cholesky, l'existence et l'unicité de la décomposition QR. Redémontrer Cholesky à partir de la décomposition QR.

4.8.2 Soit E un espace pré-hilbertien, $\mathscr{X} = (x_1, \dots, x_n)$ des vecteurs de E, $\mathscr{X}_1 = (x_1, \dots, x_p)$ $(p < n)$ et $\mathscr{X}_2 = (x_{p+1}, \dots, x_n)$. Montrer que :

$$\det G_{\mathscr{X}} \leq \det G_{\mathscr{X}_1} \det G_{\mathscr{X}_2}.$$

4.8.3 Soit $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que :

$$0 < \det A \leq \prod_{k=1}^{n} a_{k,k}.$$

Étudier le cas d'égalité. Soit A une matrice anti-symétrique réelle.

(a) Montrer que

$$\det(A + I_n) \geq 1.$$

(b) Soit S une matrice symétrique positive, montrer que :

$$\det(A + S) \geq \det S.$$

4.8.4 Soit E un espace pré-hilbertien, $\mathscr{X} = (x_1, \dots, x_n)$ des vecteurs de E.

(a) Montrer que :

$$0 \leq \det G_{\mathscr{X}} \leq \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|^2,$$

avec égalité si, et seulement si, $\mathscr{X}$ est orthogonale ou si l'un des vecteurs de $\mathscr{X}$ est nul.

(b) Si $\mathscr{X}$ est libre, et si $y \notin \mathrm{Vect}(\mathscr{X})$, alors, en notant $\mathscr{Y} = (x_1, \dots, x_n, y)$, on a :

$$d(y, \mathrm{Vect}(\mathscr{X}))^2 = \frac{\det(G_{\mathscr{Y}})}{\det(G_{\mathscr{X}})}.$$

4.8.5 E est l'ensemble des matrices réelles symétriques définies positives, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$.

(a) Soit $A \in E$, $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, $B = [\gamma_i\, \gamma_j\, a_{ij}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. Montrer que $B \in E$.

(b) Montrer que $\sqrt[n]{\det A} \leq \frac{1}{n}\,\mathrm{trace}(A)$. En déduire que $\det A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$. (Indication : choisir convenablement les (γ_i)).

4.8.6 Soit E un espace euclidien, (u, v) deux endomorphismes symétriques positifs de E, alors :

$$\det(u+v) \geq \det(u) + \det(v).$$

4.8.7 Soit E un espace euclidien, (u, v) deux endomorphismes symétriques positifs de E, alors :

$$\forall x \in E,\ q_u(x) \leq q_v(x) \;\Rightarrow\; \det(u) \leq \det(v).$$

4.8.8 Soit $u \in S(E)$, alors, si $A = \mathrm{Matrice}(u, \mathscr{B}_o)$, où $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormée de E, on a :

$$u \in S^{++}(E) \iff \text{tous les mineurs principaux de } A \text{ sont } > 0.$$

4.5 Espaces hermitiens

Définition 4.11 – Espace vectoriel préhilbertien complexe

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, on dit que $\phi : E \times E \to \mathbb{C}$ est un *produit scalaire hermitien sur* E s'il est

1. (*linéaire à droite*)
$$\forall x \in E,\ \phi(x, \bullet)\ :\ y \mapsto \phi(x,y) \text{ est linéaire}\,;$$

2. (*hermitien*)
$$\forall (x,y) \in E,\ \phi(y,x) = \overline{\phi(x,y)}\ ;$$

3. (*positif*)
$$\forall x \in E,\ \phi(x,x) \in \mathbb{R}_+\ ;$$

4. (*défini*)
$$\forall x \in E,\ \phi(x,x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0_{_E}.$$

Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien est appelé *espace vectoriel préhilbertien complexe*. Si, de plus, il est de dimension finie, on dit que c'est un *espace hermitien*.

Remarque 4.16

Une telle application, linéaire à droite et hermitienne, vérifie donc :

$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2,\ \phi(\lambda.x + \mu.y, z) = \overline{\lambda}\,\phi(x,z) + \overline{\mu}\,\phi(y,z).$$

On dit que ϕ est *semi-linéaire à gauche*. Lorsqu'une fonction est semi-linéaire à gauche et linéaire à droite, elle est dite *sesqui-linéaire*.

Exemple 4.13 – Espaces préhilbertiens complexes

1. $\mathbb{C}^n$, muni de :

$$\phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k}\, y_k,$$

   est un espace hermitien.
2. $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{C})$, muni du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b \overline{f(t)}\, g(t)\ \mathrm{d}t,$$

   est un espace préhilbertien complexe.

Propriété 4.33 – Propriétés des espaces préhilbertiens complexes

Quelles sont les propriétés des espaces préhilbertiens réels qui sont encore vraies, quelles sont celles qui ont changé ?

— L'inégalité de Cauchy-Schwarz est toujours vraie, ainsi que son cas d'égalité.
— On a toujours une norme (dite *norme hermitienne*) définie sur E par :

$$x \mapsto \sqrt{\phi(x,x)}.$$

— La formule de polarisation change et devient [a] :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re\left(\phi(x,y)\right) + \|y\|^2 .$$

— L'identité de la médiane est toujours valide, mais ce n'est plus une condition suffisante pour avoir une norme hermitienne.

— On peut toujours définir des vecteurs orthogonaux, et on a toujours, si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille orthonormée, alors :

$$\forall x \in E,\ x = \sum_{\substack{i\in I\\ \langle x_i, x\rangle \neq 0}} \langle x_i, x\rangle . x_i .$$

— Le théorème de Pythagore est toujours valide, mais ce n'est plus une condition suffisante.

— Le principe d'orthonormalisation de Schmidt est toujours valide, mais les y_i sont définis à un complexe de module 1 près.

— La projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(\{e_1, \ldots, e_n\})$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthonormée est toujours :

$$\forall x \in E,\ p(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle . e_k .$$

⚠ Bien mettre le x à droite pour avoir une application linéaire !

— Tout espace vectoriel préhilbertien complexe de dimension dénombrable possède une base orthonormée.

— Rien ne change pour l'orthogonalité.

a. Prendre $y = i\,x$, pour observer ce qui change...

Propriété 4.34 – Propriétés des espaces hermitiens

Nous supposons ici que l'espace E est hermitien (donc de dimension finie).

— On a toujours, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E :

$$\forall x \in E,\ \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\langle e_k, x\rangle|^2}$$

et

$$\forall (x,y) \in E,\ \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle e_k, x\rangle}\, \langle e_k, y\rangle.$$

— Le théorème de représentation des formes linéaires est toujours vrai :

$$\forall \varphi \in E^\star,\ \exists! a \in E,\ \forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle a, x\rangle.$$

Bien mettre le x à droite pour avoir une application linéaire.
Mais l'application $\varphi \mapsto a$ n'est plus linéaire, elle est seulement semi-linéaire.

— On a toujours la notion d'adjoint. Mais, on a :

$$\forall f \in \mathscr{L}(E),\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ (\lambda.f)^\star = \overline{\lambda}.f^\star.$$

— Les endomorphismes auto-adjoints sont aussi appelés *endomorphismes hermitiens*, il se diagonalisent en base orthonormée et *les valeurs propres sont toutes réelles.*

— Les automorphismes tels que $f^\star = f^{-1}$ sont appelés *automorphismes unitaires*. Ils se diagonalisent en base orthonormée et les valeurs propres sont des complexes de module 1.

Formulation matricielle

Propriété 4.35 – Cas hermitien

Si E est un espace hermitien et $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de E :

1. si x et y sont deux vecteurs de E et $X = \text{Matrice}(x; \mathscr{E})$, $Y = \text{Matrice}(y, \mathscr{E})$, alors :

$$\langle x, y\rangle = {}^t\overline{X} \centerdot Y$$

2. si $\mathscr{B}$ est une autre base orthonormée de E, on a :

$$\boxed{P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{E}} = \left(P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} = {}^t\overline{P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}}}$$

3. si B est une forme sesquilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$, on notant :

$$M = \text{Matrice}(B, \mathscr{E}) \overset{\text{Def}}{=} [B(e_i, e_j)]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = \begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & \cdots & B(e_1, e_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_p, e_1) & \cdots & B(e_p, e_p) \end{bmatrix},$$

alors

$$B(x, y) = {}^t\overline{X} \centerdot M \centerdot Y$$

Bilan matriciel : E est un espace vectoriel hermitien de dimension p, $\mathscr{E}_o = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathscr{B}_o$ sont deux *bases orthonormées de* E, et $\mathscr{E}$ est une base quelconque de E. Nous noterons le produit scalaire :

$$\phi \; ; \; (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

Aspect vectoriel	Aspect matriciel
$x \in E$	$\text{Matrice}(x, \mathscr{E}_o) = [\langle e_i, x \rangle]_{i\in[\![1,p]\!]} \in M_{p,1}(\mathbb{C})$ $\text{Matrice}(x, \mathscr{B}_o) = {}^t\overline{P_{\mathscr{E}_o}^{\mathscr{B}_o}} \centerdot \text{Matrice}(x, \mathscr{E}_0)$ car $\left(P_{\mathscr{E}_o}^{\mathscr{B}_o}\right)^{-1} = {}^t\overline{P_{\mathscr{E}_o}^{\mathscr{B}_o}}$
$u \in \mathscr{L}(E)$	$\text{Matrice}(u, \mathscr{E}_o) = [\langle e_i, u(e_j) \rangle]_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$ $\text{Matrice}(u, \mathscr{B}_o) = {}^t\overline{P_{\mathscr{E}_o}^{\mathscr{B}_o}} \centerdot \text{Matrice}(u, \mathscr{E}_o) \centerdot P_{\mathscr{E}_o}^{\mathscr{B}_o}$
$u \in \mathscr{L}(E)$	$\boxed{\text{Matrice}(u^\star, \mathscr{E}_o) = {}^t\overline{\text{Matrice}(u, \mathscr{E}_o)}}$
$u \in \mathscr{H}(E)$	$\text{Matrice}(u, \mathscr{E}_o) = {}^t\overline{\text{Matrice}(u, \mathscr{E}_o)}$ on dit que $\text{Matrice}(u, \mathscr{E}_o) \in H_p(\mathbb{C})$
$u \in \mathscr{U}(E)$	$(\text{Matrice}(u, \mathscr{E}_o))^{-1} = {}^t\overline{\text{Matrice}(u, \mathscr{E}_o)}$ on dit que $\text{Matrice}(u, \mathscr{E}_o) \in U_p(\mathbb{C})$
ϕ sesquilinéaire	$\text{Matrice}(\phi, \mathscr{E}_o) = [\langle e_i, e_j \rangle]_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} = I_p$

Aspect vectoriel	Aspect matriciel
	$\text{Matrice}(\phi, \mathscr{B}_o) = \text{Matrice}(\phi, \mathscr{E}_o) = I_p$ $\text{Matrice}(\phi, \mathscr{E}) = {}^t\overline{P_{\mathscr{E}_o}^{\mathscr{E}}} \centerdot P_{\mathscr{E}_o}^{\mathscr{E}} = {}^t\overline{\text{Matrice}(\phi, \mathscr{E})}$
$(x, y) \in E^2$	$\langle x, y \rangle = {}^t\overline{\text{Matrice}(x, \mathscr{E}_o)} \centerdot \text{Matrice}(y, \mathscr{E}_o)$ $\langle x, y \rangle = {}^t\overline{\text{Matrice}(x, \mathscr{E})} \centerdot \text{Matrice}(\phi, \mathscr{E}) \centerdot \text{Matrice}(y, \mathscr{E})$
$u \in \mathscr{L}(E)$	$\text{Matrice}(u^\star, \mathscr{E}) = (\text{Matrice}(\phi, \mathscr{E}))^{-1} \centerdot {}^t\overline{\text{Matrice}(u, \mathscr{E})} \centerdot \text{Matrice}(\phi, \mathscr{E})$ Les propriétés matricielles de l'adjoint n'apparaissent qu'en base *orthonormée* !

Notation 4.3

Nous noterons :

1. $H_p(\mathbb{C})$ l'ensemble des *matrices hermitiennes* (vérifiant $M = {}^t\overline{M}$), si nous sommes en *base orthonormée*, elles représentent les endomorphismes auto-adjoints.

   Nous noterons donc aussi $H_p^+(\mathbb{C})$ pour les matrices hermitiennes M vérifiant de plus :

   $$\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{C}),\ {}^t\overline{X} \centerdot M \centerdot X \geq 0$$

   ces matrices sont dites *hermitiennes positives*, elles représentent *en base orthonormée* les endomorphismes auto-adjoints positifs.

   Et de même $H_p^{++}(\mathbb{C})$...

2. $U_p(\mathbb{C})$ l'ensemble des *matrices unitaires* (vérifiant $M \in GL_p(\mathbb{C})$ et $M^{-1} = {}^t\overline{M}$), elles représentent *en base orthonormée* les automorphismes unitaires.

Remarque 4.17

Nous pouvons aussi traduire en termes matriciels les propriétés des espaces hermitiens, par exemple :

1. Pour les matrices hermitiennes :

$$\forall M \in H_p(\mathbb{C}),\ \exists P \in U_p(\mathbb{C}),\ {}^t\overline{P} \centerdot M \centerdot P \in D_p(\mathbb{R}).$$

2. Pour les matrices unitaires :

$$\forall M \in U_p(\mathbb{C}),\ \exists P \in U_p(\mathbb{C}),\ {}^t\overline{P} \centerdot M \centerdot P \in D_p(\mathbb{U}).$$

Exercice(s) 4.9

4.9.1 Soit E un espace préhilbertien complexe de produit scalaire ϕ et de norme $\|\ \|$. Exprimer ϕ en fonction de la norme.

4.9.2 Soit E un espace hermitien, et $f \in \mathscr{L}(E)$, montrer que :

$$\left[f^\star \circ f = f \circ f^\star\right] \iff \left[f \text{ se diagonalise en base orthonormée}\right].$$

4.9.3 Soit E un espace hermitien, soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) u est unitaire ;

(b) u conserve la norme :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|\ ;$$

(c) u conserve le produit scalaire :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle\ ;$$

(d) si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E, alors $(u(e_1) \dots, u(e_n))$ est encore une base orthonormée de E.

4.9.4 Montrer le théorème de réduction pour les endomorphismes hermitiens (ils se diagonalisent en base orthonormée et les valeurs propres sont réelles).

4.9.5 Montrer le théorème de réduction pour les automorphismes unitaires (ils se diagonalisent en base orthonormée et les valeurs propres sont dans $\mathbb{U}$).

4.6 Méthodes numériques

4.6.1 Itération

1. *Principe* : Soit [1] $f \in \mathscr{S}^+(\mathbb{R}^n)$, (souvent n est très grand !). Posons $E = \mathbb{R}^n$. On veut évaluer la plus grande valeur propre $\lambda > 0$ (et un vecteur propre associé). Bien sûr, on ne connaît pas les vecteurs propres. On sait cependant que :

$$E = \operatorname{Ker}(f - \lambda.\operatorname{id}_E) \overset{\perp}{\oplus} (\operatorname{Ker}(f - \lambda.\operatorname{id}_E))^{\perp.}.$$

On prend un $x \in E$ (tel que $x \notin (\operatorname{Ker}(f - \lambda.\operatorname{id}_E))^{\perp.}$) et on calcule les itérés de x par f. Comme x s'écrit $x_1 + x_2$, avec :

$$x_1 \in \operatorname{Ker}(f - \lambda.\operatorname{id}_E) \text{ et } x_2 \in (\operatorname{Ker}(f - \lambda.\operatorname{id}_E))^{\perp.},$$

on a :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ f^p(x) = \lambda^p.x_1 + f^p(x_2) \text{ et } \|f^p(x)\|^2 = \lambda^{2p}\,\|x_1\|^2 + \|f^p(x_2)\|^2.$$

En ce cas,

$$\frac{1}{\|f^p(x)\|}.f^p(x) \xrightarrow[p\to+\infty]{} e = \frac{1}{\|x_1\|}.x_1.$$

Une fois trouvé e_1, il est facile de trouver λ, on peut par exemple regarder une composante de $f^p(x)$ (prendre la plus grande) et la comparer à la même composante de $f^{p+1}(x)$. On peut aussi utiliser le quotient de Rayleigh, et évaluer :

$$\langle e_1, f(e_1)\rangle = \lambda \text{ ou } \|f(e_1)\| = \lambda.$$

2. *Algorithme* :
   - On prend un vecteur $\widetilde{e_0} = x$ « au hasard » dans E de norme 1 ;
   - supposons calculé $\widetilde{e_k}$ de norme 1, on calcule $f(\widetilde{e_k})$;
   - si la condition d'arrêt (voir plus loin) est satisfaite, on produit λ_k et $\widetilde{e_k}$, approximations respectives de λ et e ;
   - sinon, on pose :

$$\widetilde{e_{k+1}} = \frac{1}{\|f(\widetilde{e_k})\|}.f(\widetilde{e_k}).$$

3. *Erreur de méthode* : on trouve dans les livres la condition d'arrêt :

$$\|\widetilde{e_{k+1}} - \widetilde{e_k}\| \leq \epsilon.$$

Cette condition ne fonctionne pas, et ne nous donne pas clairement l'erreur de méthode lorsque l'on évalue λ et e par λ_k et $\widetilde{e_k}$...

4. *Code* :

1. Ce n'est pas restrictif de supposer f auto-adjoint positif, car il sera souvent de la forme : $g^\star \circ g$, pour un certain endomorphisme g de E.

Session `Python` 4.1 – Calcul de la plus grande valeur propre par itération

Cette méthode ne suppose pas explicitement que f soit un endomorphisme auto-adjoint...

`In[1]` – Itération

```
import numpy as np

def iteration(f,u0,epsilon):
    u=u0
    v=f(u)
    n=np.linalg.norm(v)
    while np.linalg.norm(v/n-u)>=epsilon:
        u=v/n
        v=f(u)
        n=np.linalg.norm(v)
    return (n,v)
```

4.6.2 Méthode de quadrature de Gauss

1. *Principe* : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^k$, (k assez grand). On veut calculer :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'idée de la méthode de Gauss est la suivante :

(a) On se ramène d'abord à l'intervalle $[-1,1]$, en posant :

$$g(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + t\,\frac{b-a}{2}\right).$$

On aura alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{+1} g(t)\,\mathrm{d}t.}$$

(b) On remarque que toutes les formules de quadrature approchée que nous avons trouvées sont de la forme :

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n}\, g(t_{k,n}).$$

(c) On cherche ensuite les « meilleurs points » du segment $[-1,+1]$, $-1 \leq t_{1,n} < \cdots < t_{n,n} \leq +1$ qui permettent d'estimer l'intégrale en ne calculant que les $g(t_{k,n})_{k \in [\![1,n]\!]}$. Il reste alors à chercher les coefficients $\alpha_{1,n}, \ldots\ \alpha_{n,n}$.

- Que sont ces meilleurs points ? Comme pour la formule des trapèzes (et celle de Simpson), on veut que la formule soit exacte pour les fonctions polynomiales de degré le plus élevé. Comme on a $2n$ inconnues (les $t_{k,n}$ et les $\alpha_{k,n}$), on peut espérer que la formule sera exacte pour les fonctions polynomiales de degré $\leq 2n-1$. Pour les trouver, il suffit de résoudre le système :

$$(\mathscr{S}) \qquad \forall k \in [\![0, 2n-1]\!]\,,\ \int_{-1}^{+1} t^k\, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_{t=-1}^{t=+1} = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,n}\, {t_{j,n}}^k.$$

Ce système est un peu délicat à résoudre, car il n'est pas linéaire. On peut cependant utiliser nos compétences en espaces euclidiens. La base canonique de l'espace vectoriel E des fonctions polynomiales de degré $\leq 2n-1$ est :

$$\left(x \mapsto x^k\right)_{k \in [\![0,2n-1]\!]},$$

que l'on munit du produit scalaire :

$$\forall (f,g) \in E^2,\ \langle f, g\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Cette base canonique s'orthonormalise par le procédé de Schmidt en $(P_0, \ldots, P_{2n-1})$ où :

$$\forall k \in [\![0, 2n-1]\!]\,,\ \mathrm{Vect}\left(\left\{x \mapsto x^j,\ j \in [\![0,k]\!]\right\}\right) = \mathrm{Vect}\left(\{P_j,\ j \in [\![0,k]\!]\}\right).$$

Ce sont les *polynômes de Legendre.*

- On a, en particulier :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ \langle (x \mapsto x^k), P_n\rangle = 0.$$

Si la formule de quadrature est exacte pour les fonctions polynomiales de degré $\leq 2n-1$, elle l'est pour les fonctions polynomiales de la forme $x \mapsto x^k\, P_n(x)$, $k \in [\![0, n-1]\!]$, de degrés $\leq 2n-1$. Il vient :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,n}\, {t_{j,n}}^k\, P_n(t_{j,n}) = 0,$$

qui est clairement satisfait lorsque l'on prend [2] :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (t_{1,n}, \ldots, t_{n,n}) \text{ sont les racines de } P_n.}$$

Pour trouver les $\alpha_{k,n}$, il suffit alors de prendre les n premières lignes de $(\mathscr{S})$. [3]

Session `Wxmaxima` 4.2 – Méthode de quadrature de Gauss

Le polynôme suivant est un multiple non nul du polynôme de Legendre P_n.

```
(%i1)  P(n) := diff((x^2-1)^n,x,n);
```

(%o1) $\mathrm{P}(n) := \mathrm{diff}\left(\left(x^2-1\right)^n, x, n\right)$

On définit les coefficients $t_{i,n}$ comme étant les racines de P_n :

```
(%i2)  realroots(P(6)),numer;
```

(%o2) $[x = -0.93246951699257, x = -0.66120937466621, x = -0.23861917853355, x = 0.23861917853355, x = 0.66120937466621, x = 0.93246951699257]$

```
(%i3)  t(i,n) := rhs(ev(realroots(P(n)),numer)[i]);
```

(%o3) $\mathrm{t}(i,n) := \mathrm{rhs}\left(\left(\mathrm{ev}\left(\mathrm{realroots}\left(\mathrm{P}(n)\right), numer\right)\right)_i\right)$

```
(%i4)  t(3,6);
```

(%o4) -0.23861917853355

Les n premières lignes de $(\mathscr{S})$ nous permettent alors de trouver les coefficients $\alpha_{k,n}$:

2. Il est facile de montrer que P_n a toutes ses racines distinctes dans $]-1,1[$, en effet, si

$$\Delta = \{x \in]-1,1[,\ P_n(x) = 0 \text{ et change de signe en } x\}$$

n'est pas de cardinal n, alors, si l'on pose :

$$f\ :\ t \mapsto \prod_{x\in\Delta} (t-x) \text{ on a } \langle f, P_n \rangle = 0$$

ce qui contredit son signe constant.

3. Nous montrerons dans le cours suivant que ce système, dit de Vandermonde, admet bien une solution.

(%i5)
```
Systeme(n) := cons(sum(alpha[i],i,1,n)=2,
makelist(sum(alpha[i]*t(i,n)^k,i,1,n)=((1-(-1)^(k+1))/(k+1)),k,1,n-1));
```

(%o5) $\mathrm{Systeme}\,(n) := \mathrm{cons}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 2, \mathrm{makelist}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\mathrm{t}\,(i,n)^k = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}, k, 1, n-1\right)\right)$

(%i6)
```
Systeme(6);
```

(%o6) $[\alpha_6 + \alpha_5 + \alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 = 2, 0.93246951699257\,\alpha_6 + 0.66120937466621\,\alpha_5 + 0.23861917853355\,\alpha_4 - 0.23861917853355\,\alpha_3 - 0.66120937466621\,\alpha_2 - 0.93246951699257\,\alpha_1 = 0, 0.86949940012035\,\alpha_6 + 0.43719783714649\,\alpha_5 + 0.056939112364028\,\alpha_4 + 0.056939112364028\,\alpha_3 + 0.43719783714649\,\alpha_2 + 0.86949940012035\,\alpha_1 = \frac{2}{3}, 0.81078168565556\,\alpha_6 + 0.28907930850505\,\alpha_5 + 0.013586764218734\,\alpha_4 - 0.013586764218734\,\alpha_3 - 0.28907930850505\,\alpha_2 - 0.81078168565556\,\alpha_1 = 0, 0.75602920680966\,\alpha_6 + 0.19114194880557\,\alpha_5 + 0.0032420625168034\,\alpha_4 + 0.0032420625168034\,\alpha_3 + 0.19114194880557\,\alpha_2 + 0.75602920680966\,\alpha_1 = \frac{2}{5}, 0.70497418930608\,\alpha_6 + 0.12638484844221\,\alpha_5 + 7.7361829451405985\,10^{-4}\,\alpha_4 - 7.7361829451405985\,10^{-4}\,\alpha_3 - 0.12638484844221\,\alpha_2 - 0.70497418930608\,\alpha_1 = 0]$

(%i7)
```
if numer#false then numer:false else numer:true;
```

(%o7) $true$

(%i8)
```
Alpha(n) := solve(Systeme(n),makelist(alpha[i],i,1,n));
```

(%o8) $A\,(n) := \mathrm{solve}\,(\mathrm{Systeme}\,(n)\,, \mathrm{makelist}\,(\alpha_i, i, 1, n))$

(%i9)
```
Alpha(2);
```

(%o9) $[[\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1]]$

(%i10)
```
Alpha(3);
```

(%o10) $[[\alpha_1 = 0.55555556690514, \alpha_2 = 0.55555556690514, \alpha_3 = 0.88888886618972]]$

(%i11)
```
Alpha(6);
```

(%o11) $[[\alpha_1 = 0.17132448845974, \alpha_2 = 0.3607616046472, \alpha_3 = 0.46791390689306, \alpha_4 = 0.46791390689306, \alpha_5 = 0.3607616046472, \alpha_6 = 0.17132448845974]]$

Remarque 4.18

Tous ces calculs sont dans la pratique inutiles, les valeurs sont données une fois pour toutes... Pour les petites valeurs de n, on peut même avoir des valeurs exactes des paramètres. [a]

Session Wxmaxima 4.3 – Calcul des coefficients

(%i1) `P(n) := diff((x^2-1)^n,x,n);`

(%o1) $\mathrm{P}(n) := \mathrm{diff}\left(\left(x^2-1\right)^n, x, n\right)$

(%i2) `solve(P(3),x);`

(%o2) $[x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, x = 0]$

(%i3) `solve([a+b+c=2,-a*sqrt(3/5)+c*sqrt(3/5)=0,a*3/5+c*3/5=2/3],[a,b,c]);`

(%o3) $[[a = \frac{5}{9}, c = \frac{5}{9}, b = \frac{8}{9}]]$

Ce qui donne alors la valeur approchée :

$$\int_{-1}^{+1} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ est évaluée par } \frac{1}{9}\left[5g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8g(0) + 5g\left(+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right].$$

Un peu plus généralement, il est possible de trouver les racines exactes des polynômes de Legendre jusqu'au rang 5, et de trouver les coefficients associés.

Session Wxmaxima 4.4 – Calcul des coefficients (suite)

```
(%i1) P(n) := diff((x^2-1)^n,x,n);
```

(%o1) $\mathrm{P}(n) := \mathrm{diff}\left(\left(x^2-1\right)^n, x, n\right)$

```
(%i2) factor(P(5));
```

(%o2) $480\,x\,\left(63\,x^4-70\,x^2+15\right)$

```
(%i3) t(k,n) := rhs(solve(P(n),x)[k]);
```

(%o3) $\mathrm{t}(k,n) := \mathrm{rhs}\left(\left(\mathrm{solve}\left(\mathrm{P}(n), x\right)\right)_k\right)$

```
(%i4) t(3,5);
```

(%o4) $-\dfrac{\sqrt{35-2\sqrt{70}}}{3\sqrt{7}}$

```
(%i5) Systeme(n) := cons(sum(alpha[k],k,1,n)=2,
      makelist(sum(alpha[k]*t(k,n)^j,k,1,n-1)=(1-(-1)^(j+1))/(j+1),j,1,n-1));
```

(%o5) $\mathrm{Systeme}(n) := \mathrm{cons}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = 2, \mathrm{makelist}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\,\mathrm{t}(k,n)^j = \dfrac{1-(-1)^{j+1}}{j+1}, j, 1, n-1\right)\right)$

```
(%i6) Systeme(3);
```

(%o6) $[\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1 = 2, \dfrac{\sqrt{3}\,\alpha_2}{\sqrt{5}} - \dfrac{\sqrt{3}\,\alpha_1}{\sqrt{5}} = 0, \dfrac{3\,\alpha_2}{5} + \dfrac{3\,\alpha_1}{5} = \dfrac{2}{3}]$

```
(%i7) Coefficients(n) := map(ratsimp,subst(
      solve(Systeme(n),makelist(alpha[k],k,1,n)),
      makelist([alpha[k],t(k,n)],k,1,n)))$
(%i8) Coefficients(2);
```

(%o8) $[[0, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}], [2, \dfrac{1}{\sqrt{3}}]]$

```
(%i9) Coefficients(3);
```

(%o9) $[[\dfrac{5}{9}, -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}], [\dfrac{5}{9}, \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}], [\dfrac{8}{9}, 0]]$

```
(%i10) Coefficients(4);
```

(%o10) [[$2\sqrt{30}-15$ … $\sqrt{2\sqrt{30}+15}$], [$2\sqrt{30}-15$ … $\sqrt{2\sqrt{30}+15}$], [… $\sqrt{15-2\sqrt{30}}$] …

a. On peut même avoir des valeurs exactes jusqu'à $n = 6$.

Remarque 4.19

Il est aussi possible de subdiviser l'intervalle afin d'appliquer l'algorithme de quadrature de Gauss sur chaque subdivision.

2. *Algorithme* :
   — On choisit n, et on trouve les valeurs de $t_{j,n}$ et des $\alpha_{j,n}$;
   — on calcule les
   $$f\left(\frac{a+b}{2} + t_{j,n}\,\frac{b-a}{2}\right),$$
   ce qui permet d'évaluer l'intégrale demandée avec :
   $$\widetilde{I}_n = \frac{b-a}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,n}\, f\left(\frac{b+a}{2} + t_{j,n}\,\frac{b-a}{2}\right)\right].$$
3. *Erreur de méthode* : La littérature donne (nous admettrons cette formule, qui n'est pas simple à obtenir) :
   $$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \widetilde{I}_n\right| \leq \frac{(b-a)^{2n+1}\,(n!)^4}{(2n+1)\,[(2n)!]^3}\,\underbrace{\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(2n)}(x)\right|}_{\overset{\text{Not}}{=} M_{2n}}.$$

Si l'on coupe en p intervalles réguliers pour utiliser la formule donnée ci-dessus où $n = 3$ (on calcule donc $3p$ valeurs de $f(x)$), alors :
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \widehat{I}_p\right| \leq \frac{(b-a)^7}{2016000\,p^6}\,M_6,$$
où, si on note $a_k = a + k\,(b-a)/p$, pour $k \in [\![0,p]\!]$:
$$\widehat{I}_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{b-a}{18p}\left[5f\left(\frac{a_{k-1}+a_k}{2} - \sqrt{\frac{3}{5}}\,\frac{b-a}{2p}\right) + 8f\left(\frac{a_{k-1}+a_k}{2}\right) + 5f\left(\frac{a_{k-1}+a_k}{2} + \sqrt{\frac{3}{5}}\,\frac{b-a}{2p}\right)\right].$$

4. *Code* :

Session **Python** 4.2 – Méthode de quadrature de Gauss

Exemple d'implantation pour $n = 3$

In[1] – Méthode de quadrature de Gauss

```
import numpy as np

def quadratureGauss(f,a,b,epsilon,M6):
    p=1+np.floor(np.exp(1/6*np.log(M6*(b-a)**7/(2016000*epsilon))))
    res=0
    for k in range(p-1):
        res+=(b-a)/(18*p)*(5*f(a+(k-1/2)*(b-a)/p-np.sqrt(3/5)*(b-a)/(2*p))+\
                               8*f(a+(k-1/2)*(b-a)/p)+\
                               5*f(a+(k-1/2)*(b-a)/p+np.sqrt(3/5)*(b-a)/(2*p)))
    return res
```

Exercice(s) 4.10

4.10.1 Soit la fonction $x \mapsto e^{x^2}$, comparer le nombre de valeurs à calculer pour évaluer

$$\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t \text{ lorsque}$$

(a) on utilise la méthode des rectangles ;

(b) on utilise la méthode de Simpson ;

(c) on utilise la méthode de Gauss sur n points ;

(d) on utilise la méthode de Gauss sur 3 points et p subdivisions.

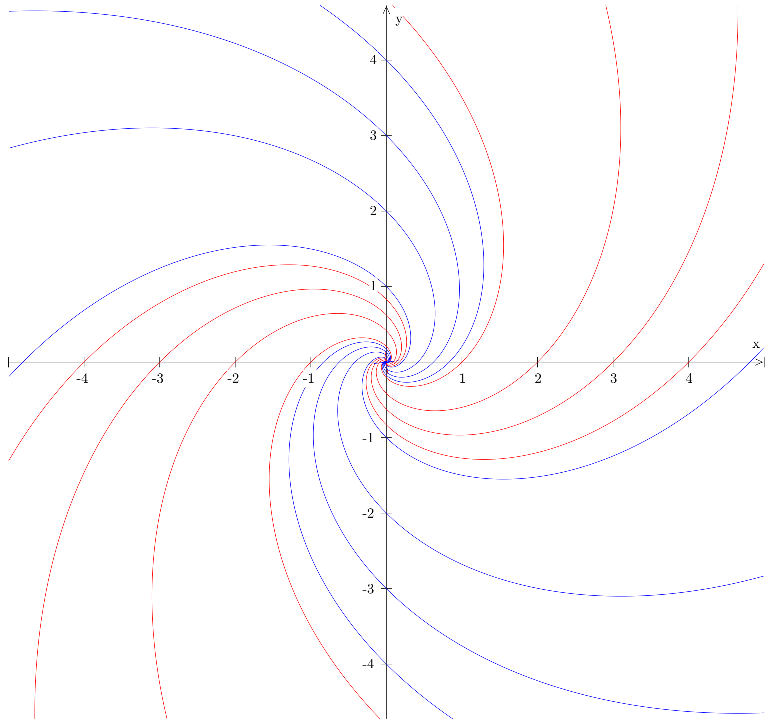
Quelle vous semble être la meilleure méthode ?

Définitions

Théorèmes

Commandes `Wxmaxima`

Figure 4.1 – Similitude



Trajectoires du système : $$X' = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \bullet X$$