范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

按升幂排列,幂指数成等差数列.

结果可正可负可为零.

$$\begin{aligned}&=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\\ &\qquad(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2)\\ &\qquad\qquad\cdots(a_n-a_{n-1})\end{aligned}$$

共***n*(*n*-1)/2**项的乘积.

归纳法证明。

$$当k=2时, D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}=a_2-a_1=\prod_{1\le j<i\le 2}(a_i-a_j)$$

设$k=n-1$时公式成立, 即:

$$D_{n-1}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1^{\,n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n-1}(a_i-a_j)$$

下证$k=n$时成立.

第$i-1$行乘以$-a_1$加到第i行上,从最后一行开始,

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_2^{n-2}-a_1a_2^{n-3} & \cdots & a_n^{n-2}-a_1a_n^{n-3} \\ 0 & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \cdots & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\prod_{2\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

$$=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

对于范德蒙行列式,我们的任务就是利用它计算行列式,因此要牢记范德蒙行列式的形式和结果.

问题： 你能识别出范德蒙行列式吗？

你会用范德蒙行列式的结果做题吗？

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&1&3&4\\4&1&9&16\\8&1&27&64\end{vmatrix}\qquad D=\begin{vmatrix}1&2&4&8\\1&1&1&1\\1&3&9&27\\1&4&16&64\end{vmatrix}=?\quad -12$$

$$=(1-2)(3-2)(4-2)(3-1)(4-1)(4-3)\quad =-12$$

$$D=\begin{vmatrix}(a-1)^3&(a-2)^3&(a-3)^3&(a-4)^3\\(a-1)^2&(a-2)^2&(a-3)^2&(a-4)^2\\a-1&a-2&a-3&a-4\\1&1&1&1\end{vmatrix}=?$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a-1 & a-2 & a-3 & a-4 \\ (a-1)^2 & (a-2)^2 & (a-3)^2 & (a-4)^2 \\ (a-1)^3 & (a-2)^3 & (a-3)^3 & (a-4)^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a-4 & a-3 & a-2 & a-1 \\ (a-4)^2 & (a-3)^2 & (a-2)^2 & (a-1)^2 \\ (a-4)^3 & (a-3)^3 & (a-2)^3 & (a-1)^3 \end{vmatrix}$$

$$= 3!2!1! = 12$$

练习

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=?$$