实对称矩阵的特征值与特征向量的性质

性质1： 实对称矩阵的特征值都是实数。

设$\lambda_{\circ}$是n阶实对称矩阵A的特征值，$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$

是对应的特征向量，即$A\alpha=\lambda_{\circ}\alpha$，两边取共轭，得：

$$\overline{A}\,\overline{\alpha}=\overline{\lambda_{\circ}}\,\overline{\alpha} \qquad (1)$$

$\overline{A}=(\overline{a}_{ij})_{n\times n}=A,\overline{\alpha}=(\overline{a}_1,\overline{a}_2,\cdots,\overline{a}_n)^T$，由于$A$为实对称阵，故$\overline{A}^T=A^T=A$,

（1）两端取转置，得：

$$\overline{\alpha}^T A^T=\overline{\lambda_{\circ}}\,\overline{\alpha}^T \Rightarrow \overline{\alpha}^T A=\overline{\lambda_{\circ}}\,\overline{\alpha}^T$$

两端同时右乘α $\Rightarrow \overline{\alpha}^T A\alpha=\overline{\lambda_{\circ}}\,\overline{\alpha}^T\alpha \Rightarrow \lambda_{\circ}\overline{\alpha}^T\alpha=\overline{\lambda_{\circ}}\,\overline{\alpha}^T\alpha$

$\Rightarrow(\lambda_{\circ}-\overline{\lambda_{\circ}})\overline{\alpha}^T\alpha=0 \quad \because \overline{\alpha}^T\alpha=\|\alpha\|^2\neq 0, \ \therefore \lambda_{\circ}=\overline{\lambda_{\circ}}$

练习

设 A 是 n 阶实对称阵且 $A^3-3A^2+5A-3E=0$，求A 的特征值。

设 λ 为 A 的任一特征值，由 $A^3-3A^2+5A-3E=0$ 知

$\lambda^3-3\lambda^2+5\lambda-3=0.$

从而 $\lambda=1$ 或 $\lambda=1+\sqrt{2}i$ 或 $\lambda=1-\sqrt{2}i.$

因为 A 为 n 阶实对称阵，所以 $\lambda=1$，即 A 的特征值全部为 **1.**

性质2： 实对称矩阵的相异特征值所对应的特征向量必定正交。

对一般矩阵，只能保证相异特征值所对应的特征向量线性无关。

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1,\ \ A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2. \qquad (\alpha_1, \alpha_2) \overset{?}{=} 0$$

$$(A\alpha_1)^T = \lambda_1\alpha_1^T \Rightarrow \alpha_1^T A = \lambda_1\alpha_1^T. \quad \Rightarrow \alpha_1^T A\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1^T\alpha_2.$$

$$\Rightarrow \lambda_2\alpha_1^T\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1^T\alpha_2. \quad \Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)\alpha_1^T\alpha_2 = 0.$$

$$\Rightarrow \alpha_1^T\alpha_2 = 0.$$

例：设$1,1,-1$是三阶实对称方阵A的3个特征值，

$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(2,2,1)^T$是$A$的属于特征值1的特征向量，求$A$的属于特征值$-1$的特征向量。

设A的属于特征值-1的特征向量为$\alpha_3=(x_1, x_2, x_3)^T$，

$\because \alpha_3$与α_1,α_2正交，$\therefore (\alpha_3,\alpha_1)=(\alpha_3,\alpha_2)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3=0 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-x_2 \\ x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_3=(1,-1,0)^T$$

性质3： 实对称矩阵A的k重特征值所对应的线性无关的特征向量恰有k个。

由此推出：实对称矩阵A一定与对角矩阵相似。

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 4 & -3 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=-2.$$

对$\lambda_1=\lambda_2=-1,$

$$B+E=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\Rightarrow \xi_1=(1,2,-1)^T.$$

线性无关的特征向量只有一个

例：设$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$，求可逆阵$P$，使$P^{-1}AP$为对角阵。

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 2\\ -2 & -2-\lambda & 4\\ 2 & 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda+7)$$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=-7.$

$\xi_1=(-2,1,0)^T, \xi_2=(2,0,1)^T$为属于特征值2的线性无关的特征向量.

$\lambda_3=-7$的特征向量为$\xi_3=(1,2,-2)^T$.

$$P=\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}, \Rightarrow P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & -7\end{pmatrix}.$$