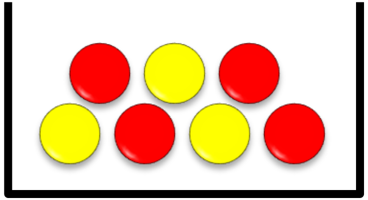
哈爾濱工業大學

第10讲 事件的独立性

两事件的独立性



例1 盒中有4红3黄共7个球，有放回地取两次每次取一个，

记 A=“第一次取到红球”，

B= “第二次取到红球”，

$P(B)=4/7$，$P(B|A)= 4/7$

这里 $P(B)=P(B|A)$

表明A的发生并不影响B发生可能性的大小，

这时称事件A、B独立.

$P(AB)=P(B)P(A|B)$

由$P(B)=P(B|A)$ $\Longrightarrow$ $P(AB)=P(A)P(B)$.

两事件的独立性

- **定义** 设A，B是两个事件，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称A与B相互独立.

> ➢ 这样定义比用
>
> $$P(A|B)=P(A) \text{ 或 } P(B|A)=P(B)$$
>
> 定义更好, 它不受$P(B)>0$或$P(A)>0$的制约.

两事件的独立性

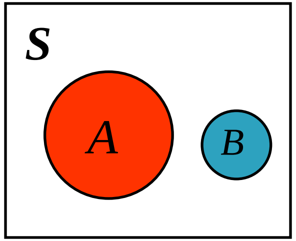
- 当$P(A)>0$，当$P(B)>0$时，

$$P(AB)=P(A)P(B) \Longleftrightarrow P(A|B)=P(A)$$
$$\Longleftrightarrow P(B|A)=P(B)$$

定理 A与B相互独立 $\Leftrightarrow$ A与$\bar{B}$相互独立 $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$与B相互独立 $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$与$\bar{B}$相互独立.

证明 $P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)$

例2 设$P(A)>0$，$P(B)>0$. 证明：**A, B相互独立与A, B互不相容不能同时成立.**



证明 若A, B互不相容，则 $AB=\varnothing$,

$$P(AB)=0\neq P(A)P(B)>0,$$

所以A, B不相互独立.

若A, B相互独立，则

$$P(AB)=P(A)P(B)>0, \Rightarrow AB\neq\varnothing,$$

即，A, B不是互不相容.

三个事件的独立性

定义 设三个事件A、B、C，若

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(BC)=P(B)P(C) \end{array}\right\} \begin{array}{c} A,B,C \\ \text{两两独立} \end{array} \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{array}\right\} \begin{array}{c} A,B,C \\ \text{相互独立} \end{array}$$

相互独立 $\longrightarrow$ 两两独立

相互独立 $\overset{?}{\longleftarrow}$ 两两独立

n个事件独立

- **定义** 设$A_1,A_2,\ldots,A_n$是n个事件，如果对任意$k(1<k\le n)$,任意$1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n$, 具有等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}) \qquad (1)$$

称$A_1,A_2,\ldots,A_n$相互独立.

(1)式代表的等式个数为

$$(a+b)^n=\sum_{i=1}^{n}C_n^i a^i b^{n-i}$$

$$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=(1+1)^n-C_n^1-C_n^0=2^n-n-1.$$

n个事件独立

n 个事件相互独立 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ n个事件两两独立

实际应用中，常常不用定义去验证独立，而是通过实际意义判断.

n个事件独立

定理 若事件$A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$相互独立，则事件$\hat{A}_1$, $\hat{A}_2, \cdots \hat{A}_n$也相互独立，其中$\hat{A}_i = A_i$或$\hat{A}_i = \bar{A}_i$.

证明

只需证$\bar{A}_1, A_2, \cdots\cdots A_n$相互独立，反复用此结论，即可得证. 对任意的$1 < i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n$有

$$P(\bar{A}_1 A_{i_1} \cdots A_{i_m}) = P(A_{i_1} \cdots A_{i_m}) - P(A_1 A_{i_1} \cdots A_{i_m})$$

$$= P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_m}) - P(A_1) P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_m})$$

$$= [1 - P(A_1)] P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_m})$$

$$= P(\bar{A}_1) P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_m}).$$

例3 三人独立地去破译一份密码，他们能译出的概率分别为1/5，1/3，1/4，求他们将此密码译出的概率.

解 设A_i=“第i个人译出密码” （i=1,2,3）

A=“将密码译出”所求概率为 $P(A)$.

已知 $P(A_1)=1/5$, $P(A_2)=1/3$, $P(A_3)=1/4$.

$$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup A_n)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_n}).$$

$$\underline{P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3})$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3)$$

$$= \underline{1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) P(\bar{A}_3)}$$

$$= 1 - [1 - P(A_1)][1 - P(A_2)][1 - P(A_3)]$$

$$= 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5} = 0.6.$$

例4 某种型号的高射炮发一发击中目标的概率是0.6，现若干门高射炮同时发射，（每门发一发)，问欲以99%以上把握击中飞机，至少要配置几门高射炮？

解 设至少要配n门炮，才能使飞机被击中的概率≥0.99，

令A="飞机被击中"，A_i="第i门炮击中飞机"，（i=1, 2, …, n） 则$P(A_i)=0.6, (i=1,\cdots,n)$

$$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n, i=1,2,\cdots n.$$

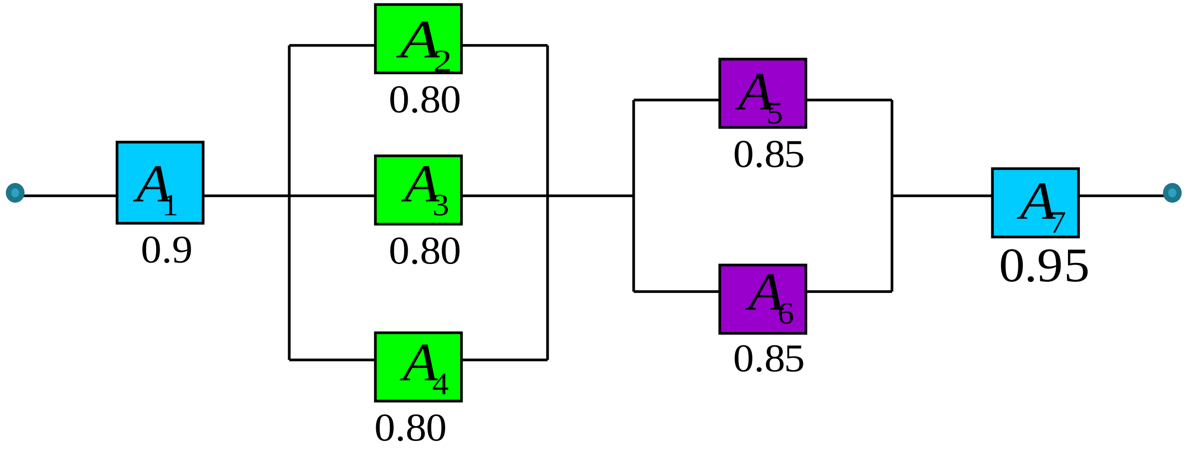
$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n})$$

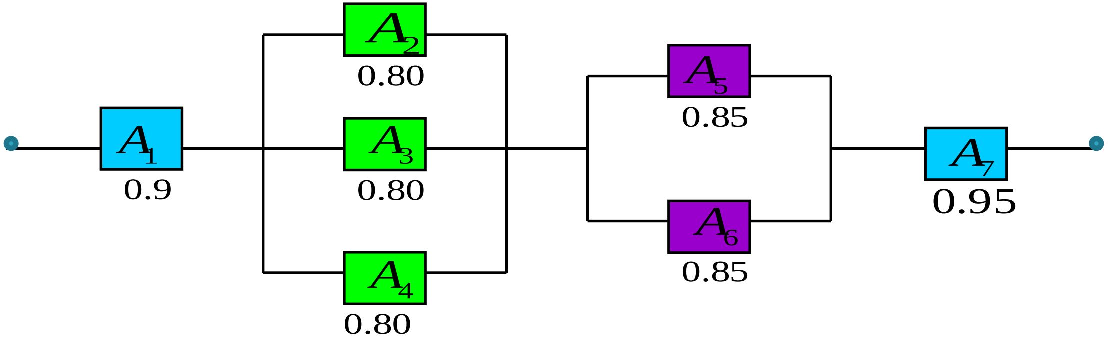
$$=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)=1-(0.4)^n \geq 0.99$$

$$(0.4)^n\leq 0.01,$$

$$n\geq\frac{\lg 0.01}{\lg 0.4}=5.026.$$ 至少6门炮.

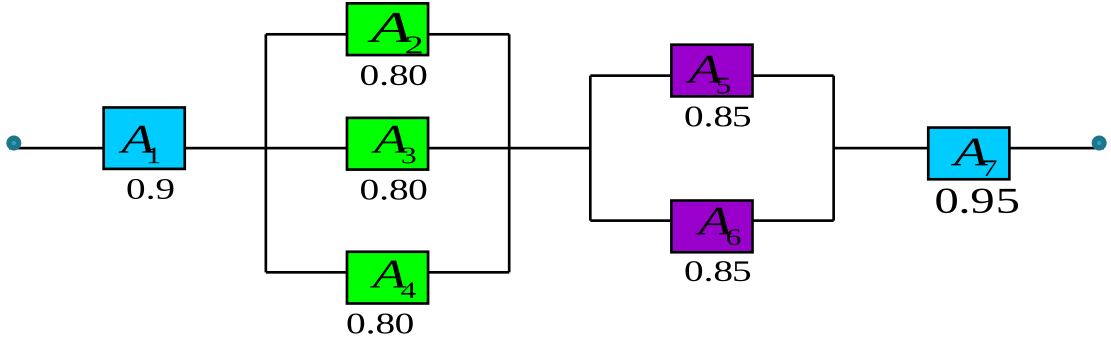
例5 下面是由独立元件A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7构成的系统. 它们下方的数是它们各自正常工作的概率. 求系统正常工作的概率.





解 设A=“系统正常工作”，A_i=“第i个元件正常工作”，则

$$A = A_1 \cap (A_2 \cup A_3 \cup A_4) \cap (A_5 \cup A_6) \cap A_7$$

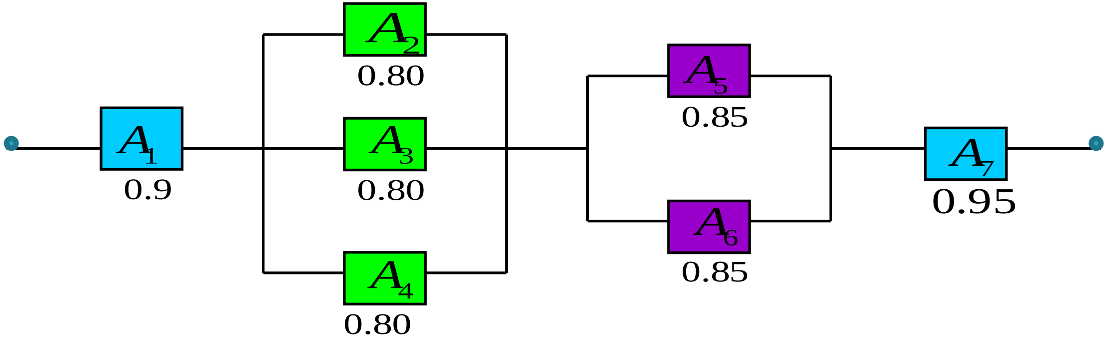


解 由独立性

$$P(A)=P(A_1)P(A_2\cup A_3\cup A_4)P(A_5\cup A_6)P(A_7)$$

$$P(A_2\cup A_3\cup A_4)=1-P(\overline{A_2\cup A_3\cup A_4})$$

$$=1-P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4)=0.992.$$



解： 由独立性

$$P(A_5 \cup A_6) = 1 - P(\overline{A_5 \cup A_6}) = 1 - P(\bar{A}_5)P(\bar{A}_6)$$

$$= 0.9775,$$

$$P(A) = P(A_1)P(A_2 \cup A_3 \cup A_4)P(A_5 \cup A_6)P(A_7)$$

$$= 0.9 \cdot 0.992 \cdot 0.9775 \cdot 0.95 = 0.829.$$

谢　　谢！