



哈爾濱工業大學

$\chi^2$ 分布、 $t$ 分布和  $F$ 分布



# 数理统计的三大分布



## 一、 $\chi^2$ 分布

$\chi^2$ 分布是由正态分布派生出来的一种分布.

**定义** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 都服从标准正态分布  $N(0,1)$ , 则称随机变量

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

服从自由度为  $n$  的  $\chi^2$  分布, 记为  $Y \sim \chi^2(n)$ .

自由度是指  $Y$  右端包含独立变量的个数.

# $\chi^2$ 分布的概率密度函数



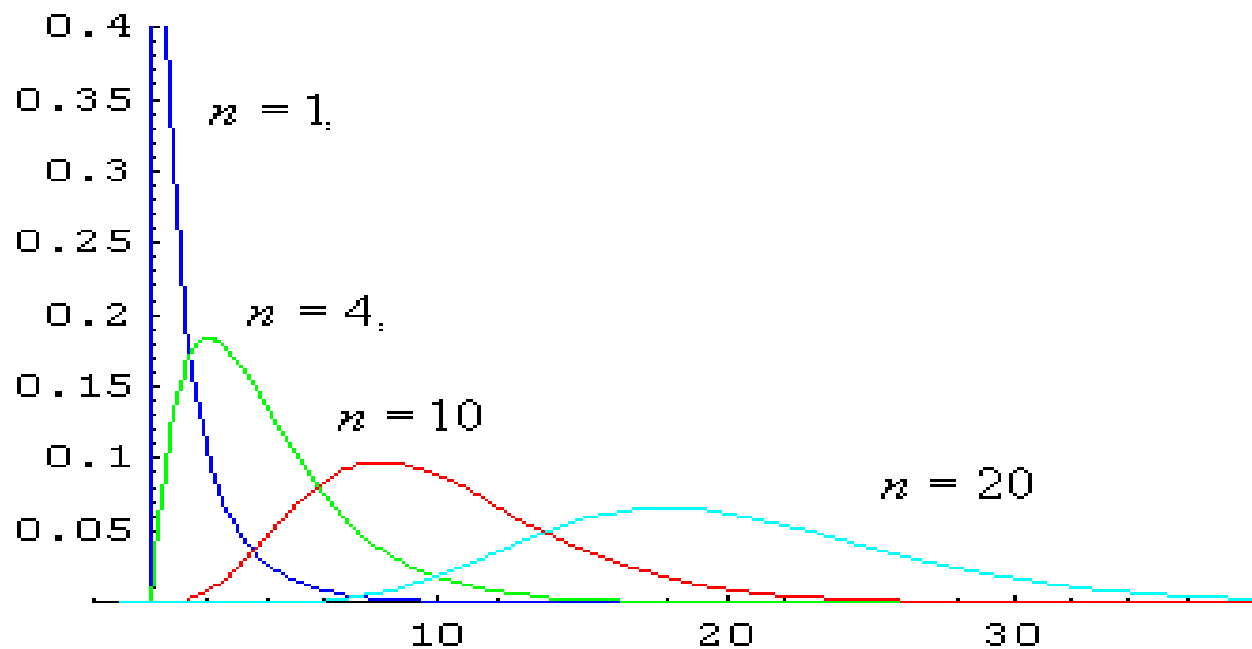
$$f(x;n) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

其中

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt, \quad (s > 0).$$

由阿贝 (Abbe) 于1863年首先给出, 后来由海尔墨特 (Hermert) 和皮尔逊 (Pearson) 分别于1875年和1900年推导出来.

# $\chi^2$ 分布的概率密度曲线



# $\chi^2$ 分布的性质



1. 设  $X \sim \chi^2(n)$ , 则  $E(X) = n, D(X) = 2n$ .

证 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立, 都服从  $N(0,1)$ . 则

$Y = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$ , 故  $X$  与  $Y$  同分布, 可得

$$E(X) = E(Y) = \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = \sum_{i=1}^n D(X_i) = n,$$

$$\begin{aligned} D(X) = D(Y) &= \sum_{i=1}^n D(X_i^2) = \sum_{i=1}^n \{E(X_i^4) - [E(X_i^2)]^2\} \\ &= n \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - 1 \right] = 2n. \end{aligned}$$

## $\chi^2$ 分布的可加性



2. 设  $X \sim \chi^2(m)$ ,  $Y \sim \chi^2(n)$ , 且  $X$  与  $Y$  独立, 则

$$X + Y \sim \chi^2(m + n).$$

推广

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立, 且  $X_i \sim \chi^2(n_i)$ , 则

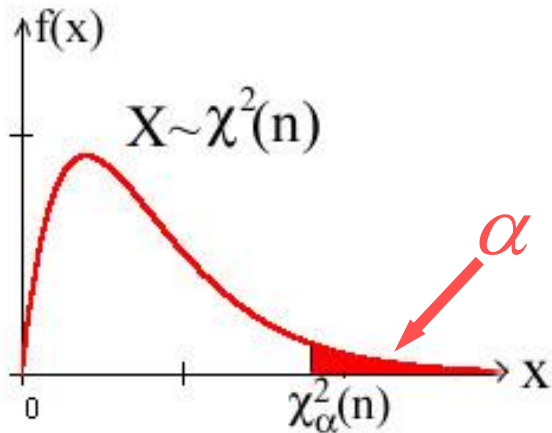
$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^n n_i\right).$$

# $\chi^2$ 分布的上侧 $\alpha$ 分位数或临界值

设 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ , 称满足等式

$$P(X \geq \chi_{\alpha}^2(n)) = \alpha$$

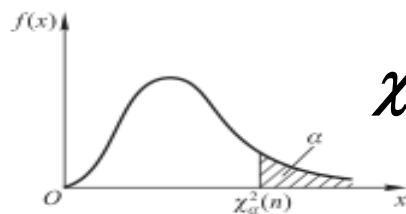
的点  $\chi_{\alpha}^2(n)$  为  $\chi^2(n)$  分布的上侧 $\alpha$ 分位数或临界值.  $\chi_{\alpha}^2(n)$  的值可查  $\chi^2$  分布表获得.



$$P(X \geq \chi_{\alpha}^2(n))$$

$$= \int_{\chi_{\alpha}^2(n)}^{+\infty} f(x, n) dx = \alpha$$

$$\chi_{0.025}^2(3) = 9.348,$$

附表3  $\chi^2$  分布表

$$\chi^2_{0.975}(3) = 0.216.$$

$$P(\chi^2(n) > \chi^2_{\alpha}(n)) = \alpha$$

$n$	$\alpha = 0.995$	0.99	0.975	0.95	0.90	0.75
1	—	—	0.001	0.004	0.016	0.102
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575
3	0.072	0.115	<u>0.216</u>	0.352	0.584	1.213
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.455
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438





**例1** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 都服从正态分布

$$N(\mu, \sigma^2), \text{ 则 } \chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n).$$

**证** 由  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2) (i = 1, \dots, n)$ , 则

$$Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1), \text{ 且 } Y_1, Y_2, \dots, Y_n \text{ 独立, 从而}$$

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n Y_i^2 \sim \chi^2(n). \end{aligned}$$

## $t$ 分布

- **定义** 设 $X, Y$ 相互独立, 且  
 $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n)$ ,  
则称随机变量

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

服从自由度为 $n$ 的 $t$ 分布, 记为  
 $T \sim t(n)$ . 也称为学生氏分布.



**William Gosset**  
1908提出了t分布.



## $t$ 分布的概率密度函数



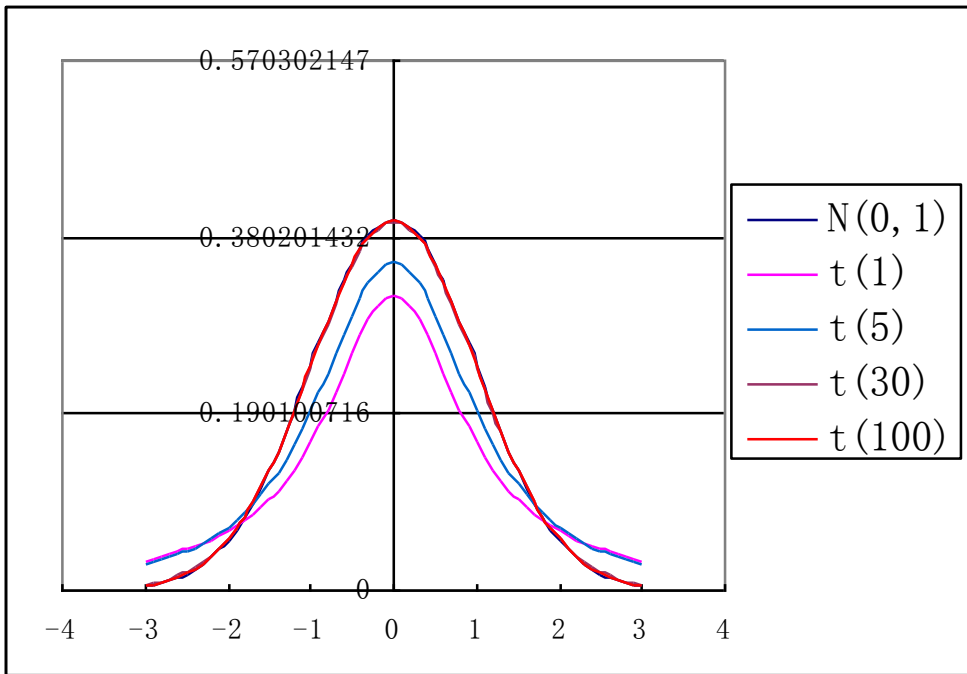
$$f(x; n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$n=1 \text{ 时, } f(x; 1) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$t$  分布就是柯西分布.

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $t$  分布的极限分布是  $N(0, 1)$ .

# $t$ 分布的概率密度曲线



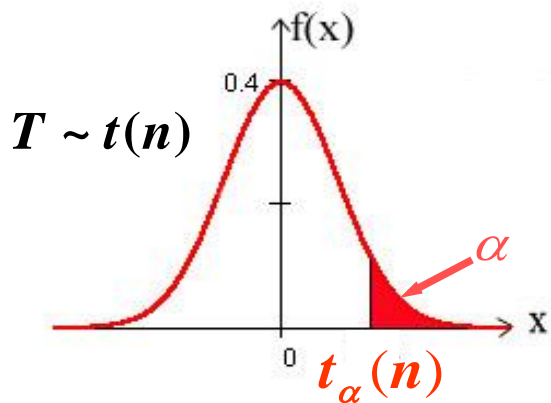
# $t$ 分布的上侧 $\alpha$ 分位数或临界值



设  $\alpha(0 < \alpha < 1)$ , 称满足等式

$$P(T \geq t_{\alpha}(n)) = \alpha$$

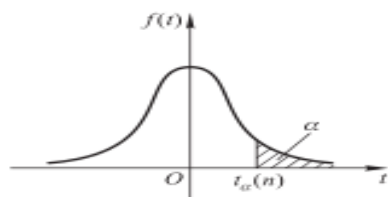
的点  $t_{\alpha}(n)$  为  $t(n)$  分布的上侧 $\alpha$ 分位数或临界值.  $t_{\alpha}(n)$  的值可查  $t$  分布表获得.



$$P(T \geq t_{\alpha}(n))$$

$$= \int_{t_{\alpha}(n)}^{+\infty} f(x, n) dx = \alpha.$$

$$t_{0.025}(12) = 2.1788$$

附表4  $t$  分布表

$$t_{0.05}(9) = 1.8331,$$

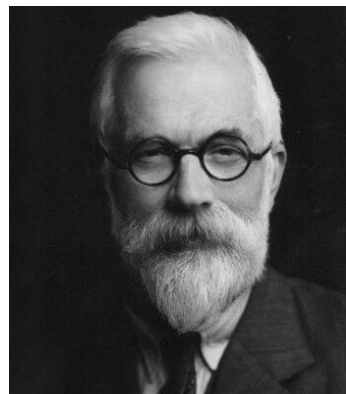
$$P\{|t(n)| > t_{\alpha}(n)\} = \alpha$$

$n$	$\alpha = 0.25$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.000 0	3.077 7	6.313 8	12.706 2	31.820 7	63.657 4
2	0.816 5	1.885 6	2.920 0	4.302 7	6.964 6	9.924 8
3	0.764 9	1.637 7	2.353 4	3.182 4	4.540 7	5.840 9
4	0.740 7	1.533 2	2.131 8	2.776 4	3.746 9	4.604 1
5	0.726 7	1.475 9	2.015 0	2.570 6	3.364 9	4.032 2
6	0.717 6	1.439 8	1.943 2	2.446 9	3.142 7	3.707 4
7	0.711 1	1.414 9	1.894 6	2.364 6	2.998 0	3.499 5
8	0.706 4	1.396 8	1.859 5	2.306 0	2.896 5	3.355 4
9	0.702 7	1.383 0	<u>1.833 1</u>	2.262 2	2.821 4	3.249 8
10	0.699 8	1.372 2	1.812 5	2.228 1	2.763 8	3.169 3
11	0.697 4	1.363 4	1.795 9	2.201 0	2.718 1	3.105 8
12	0.695 5	1.356 2	1.782 3	2.178 8	2.681 0	3.054 5
13	0.693 8	1.350 2	1.770 9	2.160 4	2.650 3	3.012 3

# F分布

- 定义 设 $X, Y$ 相互独立, 且  
 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$ ,  
则称随机变量

$$F = \frac{X / n_1}{Y / n_2} = \frac{n_2}{n_1} \frac{X}{Y}$$



Ronald Fisher

服从第一自由度为 $n_1$ , 第二自由度为 $n_2$ 的 $F$ 分布, 记为 $F \sim F(n_1, n_2)$ .

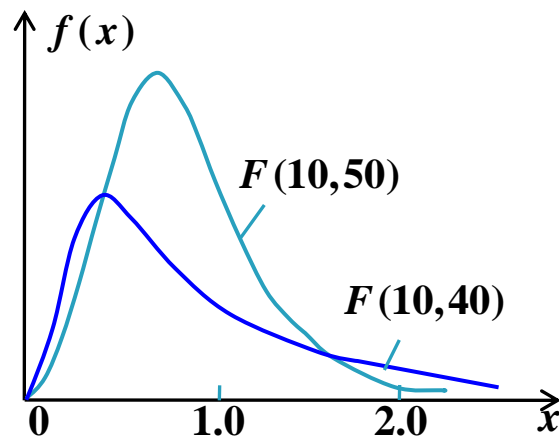
- 若 $F \sim F(n_1, n_2)$ , 则  $\frac{1}{F} = \frac{Y / n_2}{X / n_1} \sim F(n_2, n_1)$ .



# $F$ 分布的概率密度函数



$$f(x; n_1, n_2) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2})} n_1^{\frac{n_1}{2}-1} n_2^{\frac{n_2}{2}-1} x^{\frac{n_1}{2}-1} (n_1 x + n_2)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$





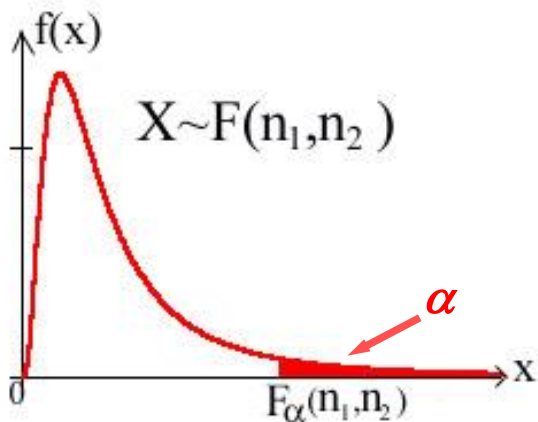
# F分布的上侧 $\alpha$ 分位数或临界值



设  $\alpha(0 < \alpha < 1)$ , 称满足等式

$$P(F \geq F_{\alpha}(n_1, n_2)) = \alpha$$

的点  $F_{\alpha}(n_1, n_2)$  为  $F(n_1, n_2)$  分布的上侧 $\alpha$ 分位数或临界值.  $F_{\alpha}(n_1, n_2)$  的值可查  $F$  分布表获得.

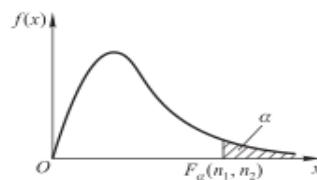


$$P(F \geq F_{\alpha}(n_1, n_2)) = \int_{F_{\alpha}(n_1, n_2)}^{+\infty} f(x, n) dx = \alpha.$$

$$F_{0.05}(9, 12) = 2.8.$$

$\alpha = 0.05$ 

附表5 F 分布表



$$P\{F(n_1, n_2) > F_{\alpha}(n_1, n_2)\} = \alpha$$

$$\alpha = 0.10$$

$$F_{0.05}(9, 12) = 2.8.$$

$$F_{0.95}(12, 9) = ?$$

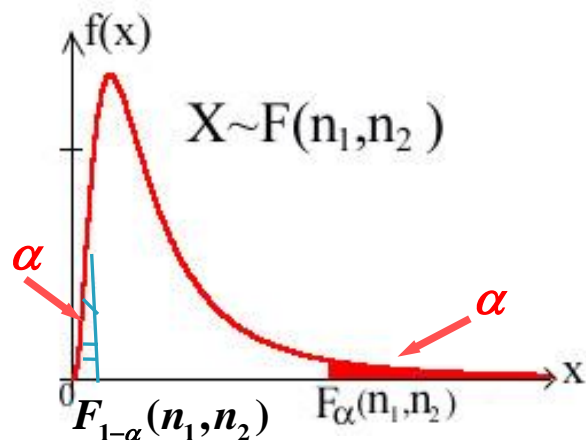
$n_2$	$n_1$											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31

# F分布的上侧 $\alpha$ 分位数或临界值



◆ 性质

$$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{\alpha}(n_2, n_1)}.$$



$$F_{0.05}(9, 12) = 2.8.$$

$$\begin{aligned} F_{0.95}(12, 9) &= \frac{1}{F_{0.05}(9, 12)} \\ &= \frac{1}{2.8}. \end{aligned}$$




**例1** 设总体 $X \sim N(0,4)$ , 而 $X_1, X_2, X_3, X_4$ 是总体 $X$ 的样本, 求下列随机变量的分布

$$(1) T_1 = (X_1^2 + X_2^2)/4; \quad (2) T_2 = \frac{\sqrt{2}X_3}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}};$$
$$(3) T_3 = \frac{2X_3^2}{X_1^2 + X_2^2};$$

**解** (1)  $X_1 \sim N(0,4) \Rightarrow \frac{X_1}{2} \sim N(0,1),$

同理  $\frac{X_2}{2} \sim N(0,1)$ , 且二者相互独立,


$$\text{故 } T_1 = \left(\frac{X_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{2}\right)^2 = \frac{X_1^2 + X_2^2}{4} \sim \chi^2(2).$$

$$(2) \frac{X_3}{2} \sim N(0,1), \frac{X_1^2 + X_2^2}{4} \sim \chi^2(2)$$

且二者相互独立，故

$$T_2 = \frac{X_3/2}{\sqrt{\frac{X_1^2 + X_2^2}{4}}/2} = \frac{\sqrt{2}X_3}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \sim t(2).$$



$$(3) \quad \frac{X_3}{2} \sim N(0,1) \Rightarrow \left( \frac{X_3}{2} \right)^2 \sim \chi^2(1),$$

$$\frac{X_1^2 + X_2^2}{4} \sim \chi^2(2)$$

二者相互独立，故

$$T_3 = \frac{\left( \frac{X_3}{2} \right)^2 / 1}{\frac{X_1^2 + X_2^2}{4} / 2} = \frac{2X_3^2}{X_1^2 + X_2^2} \sim F(1,2).$$

## $t$ 分布与 $F$ 分布的关系



例2 若随机变量 $X \sim t(n)$ , 则 $X^2 \sim F(1, n)$ .

解

因为  $X \sim t(n)$ , 所有  $X = U / \sqrt{\frac{V}{n}}$ ,

这里  $U \sim N(0,1)$ ,  $V \sim \chi^2(n)$ , 且  $U$  与  $V$  独立,

$$\text{故 } X^2 = \left( \frac{U}{\sqrt{V/n}} \right)^2 = \frac{U^2/1}{V/n} \sim F(1, n).$$

同理, 若 $X \sim t(n)$ , 则 $1/X^2 \sim F(n, 1)$ .



谢 谢！