特殊行列式 的计算

例1. $$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(未写出的为0)

这个行列式称为对角行列式。

例2. $\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$

(未写出的为0)

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

分别称为下三角行列式和上三角行列式。

统称为三角行列式。

练习

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ & \udots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & \\ \vdots & \udots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

(未写出的为0)

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}$$

统称为斜三角行列式。

例3.计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & y & 0 & & & \\ 0 & x & y & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \\ \vdots & & \ddots & x & y & 0 \\ 0 & & & 0 & x & y \\ y & & \cdots & & 0 & x \end{vmatrix}$$

(未写出的为0)

按第一列展开：

$$D=\begin{vmatrix} x & y & 0 & & & \\ 0 & x & y & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \\ \vdots & & \ddots & x & y & 0 \\ 0 & & & 0 & x & y \\ y & & \cdots & & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & & & \\ 0 & x & y & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \\ \vdots & & \ddots & x & y & 0 \\ 0 & & & 0 & x & y \\ y & & \cdots & & 0 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & y & & & \\ & x & y & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x & y \\ & & & & x \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & & & & \\ x & y & & & \\ & x & \ddots & & \\ & & \ddots & y & \\ & & & x & y \end{vmatrix}$$

$$= x^n + (-1)^{n+1} y^n$$

$$\text{例4.求}D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c & & & & & d & \\ c & & & & & & & d \end{vmatrix}.$$

(未写出的为0)

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & c & d & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & c & \cdots & 0 & 0 & \cdots & d & 0 \\ c & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d \end{vmatrix}$$

按第1行展开，有

$$D_{2n}=a\begin{vmatrix} a & & & & & b & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a & b & & & \\ & & c & d & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c & & & & & d & \\ 0 & & & & & & d \end{vmatrix}+(-1)^{2n+1}b\begin{vmatrix} 0 & a & & & & & b \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a & b & & \\ & & & c & d & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ & c & & & & & d \\ c & & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

第1个按r_{2n-1}展开，第2个按c_1展开 $adD_{2n-2}-bcD_{2n-2}$

$$=(ad-bc)D_{2n-2}$$

$$=(ad-bc)(ad-bc)D_{2n-4}=(ad-bc)^2D_{2(n-2)}$$

$$=\cdots=(ad-bc)^{n-1}D_{2(n-(n-1))}$$

$$=(ad-bc)^{n-1}D_2.$$

$$D_2=ad-bc,$$

$$D_{2n}=(ad-bc)^n.$$