哈爾濱工業大學

第6讲 概率的公理化定义

概率的公理化定义

柯尔莫哥洛夫，A. H.

1933年，前苏联数学家柯尔莫哥洛夫给出了概率的公理化定义.

通过规定概率应具备的基本性质来定义概率.

概率的公理化定义

- 设随机试验的样本空间为S，对每个事件A，定义$P(A)$，且满足：

公理1 $P(A)\geq 0$ —— 非负性；

公理2 $P(S)=1$ —— 规范性；

公理3 若事件$A_1, A_2, \ldots$互不相容，则

$$P(A_1+A_2+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

——可列可加性；

称$P(A)$为事件A的概率.

推论： (1) $P(\varnothing)=0$;

(2) $P(\bar{A})=1-P(A)$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$ 互不相容，则：

$$P(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n)$$

$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots\cdots P(A_n);$$

推论：（4）若$A \subset B$，则$P(A) \leq P(B)$，

且$P(B-A)=P(B)-P(A)$;

（5）$P(A-B)=P(A)-P(AB)$;

（6）（一般概率加法公式）

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

$$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

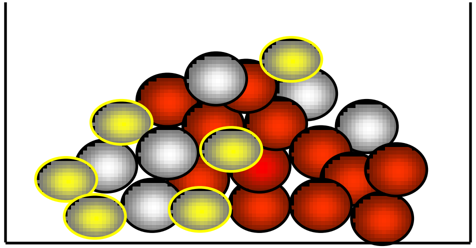
- 一般情形

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)$$

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n)$$

古典概率、几何概率、统计概率都是公理化概率的特殊情况，而公理化概率是它们的数学抽象.

例1 设盒中装有12个红球，6个白球，6个黄球，从盒中任取4个球，求所取球中至少有1个红球同时至少有1个白球的概率.

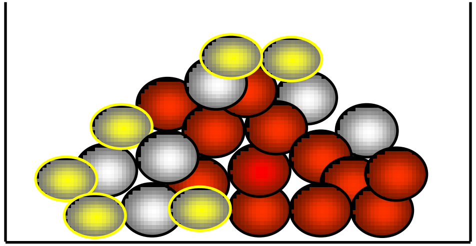


12个红球，6个白球，6个黄球

解： 设A=“所取球中至少有1个红球”

B=“所取球中至少有1个白球”

所求概率为$P(AB)$



12个红球，6个白球,
6个黄球

$$P(AB)=1-P(\overline{AB})$$

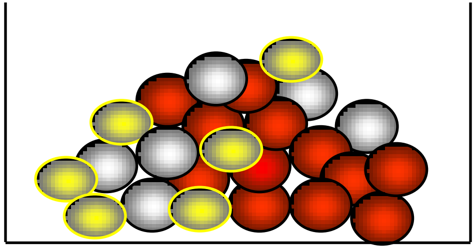
$$=1-P(\bar{A}\cup\bar{B})$$

$$=1-[P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\bar{B})]$$

解 $P(AB)=1-[P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\,\bar{B})]$

$$P(\bar{A})=\frac{C_{12}^{4}}{C_{24}^{4}}\quad P(\bar{B})=\frac{C_{18}^{4}}{C_{24}^{4}}$$

$$P(\bar{A}\bar{B})=\frac{C_{6}^{4}}{C_{24}^{4}}$$



12个红球，6个白球,
6个黄球

$$P(AB)=1-\frac{C_{12}^{4}+C_{18}^{4}-C_{6}^{4}}{C_{24}^{4}}=\frac{1181}{1771}\approx 0.67$$

谢　　谢！