相似对角形

特征值与特征向量

一般矩阵的相似对角化

实对称矩阵的相似对角化

一般矩阵的相似对角化

一、矩阵与对角阵相似的条件：

设A与对角阵Λ相似，$\Rightarrow$ 存在一个n阶可逆阵P，使$\Lambda = P^{-1}AP$

设$P=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$，$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow AP = P\Lambda \Rightarrow$$

$$AP=(AP_1,AP_2,\cdots,AP_n) = (P_1,P_2,\cdots,P_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2, \cdots, \lambda_n P_n)$$

$\Rightarrow AP_i = \lambda_i P_i, i=1,2,\cdots,n.$

（P_i是否为特征向量？）

$\because |P| \neq 0 \therefore P_1, P_2, \cdots, P_n$为非零向量。（且线性无关。）

$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是特征值； $\Rightarrow P_1, P_2, \cdots, P_n$是特征向量。

反之设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$A$的特征值,对应的特征向量为$P_1, P_2, \cdots, P_n$.

设$P = (P_1, P_2, \cdots, P_n)$, $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$,则有:

$$AP = (AP_1, AP_2, \cdots, AP_n) = (\lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2, \cdots, \lambda_n P_n)$$

$$= (P_1, P_2, \cdots, P_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= P\Lambda$$

由此可得什么结论?

$\boxed{A \sim \Lambda \Leftrightarrow P\text{可逆} \Leftrightarrow P_1, P_2, \cdots, P_n\text{线性无关。}}$

定理1： n阶矩阵A与对角阵相似的充要条件为A有n个线性无关的特征向量。

推论： 若A有n个互异的特征值，则A与对角阵相似；但反之不对。

思考： 矩阵能否与对角阵相似，取决于矩阵能否有n个线性无关的特征向量。

若矩阵A的特征值互异，则矩阵能与对角阵相似，问题已经解决；若矩阵A有重特征值，则不能马上断言。这时要看特征向量了。

实际上，只要k重特征值对应k个线性无关的特征向量就行了。

设λ为k重特征值，只要$r(A-\lambda E)=n-k$,则$(A-\lambda E)X=O$就有k个线性无关的解向量，即A有k个线性无关的特征向量。

定理2：设A的相异特征值为λ_1，$\lambda_2,\cdots$，λ_m，其重数分别为

$$r_1, r_2, \cdots, r_m, \quad \sum_{i=1}^{m} r_i = n, \quad 则\ A \sim \Lambda \Leftrightarrow r(A-\lambda_i E) = n - r_i.$$

练习

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$能否与对角阵相似?

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3 \Rightarrow A \sim \Lambda$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$能否与对角阵相似? $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6.$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 时

$$B-2E=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

二、矩阵相似对角化的方法：

例：判断$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$能否与对角阵相似，并在相似时求可逆阵$P$，使$P^{-1}AP=\Lambda$为对角阵。

解：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 1 & 3-\lambda & -1\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3 \Rightarrow A\sim\Lambda$$

对$\lambda_1=1$，求得特征向量为$\xi_1=(0,1,2)^T$，

对$\lambda_2=2$，求得特征向量为$\xi_2=(1,0,1)^T$

对$\lambda_3=3$，求得特征向量为$\xi_3=(0,1,0)^T$.

$$P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\therefore P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

矩阵相似对角化的步骤:

(i) 求出A的所有特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,

若$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$互异，则$A$与对角阵相似；

若$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$中互异的为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,每个$\lambda_i$的重数为$r_i$，当$r(A-\lambda_i E)=n-r_i$时$(i=1,2,\cdots,m)$,

A一定与对角阵相似；否则A不与对角阵相似。

(ii) 当A与对角阵相似时，求出A的n个线性无关的特征向量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，并令$P=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，则有

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

练习

$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$能否与对角阵相似？并在相似时求可逆阵$P$，使$P^{-1}BP=\Lambda$为对角阵。

思考

仅用矩阵的特征值就可以判定矩阵能否与对角阵相似，为什么？怎么做？