二次型的分类

1.定义： $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 是一个实二次型，若对于任何非零的向量 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T$，恒有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)>0(<0)$，则称$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是正定(负定)二次型，而其对应的矩阵A称为正定（负定）矩阵；

矩阵的正定与负定是怎样定义的？

若恒有$f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\geq 0(\leq 0)$，则称二次型是准正(负)定二次型，其对应的矩阵$A$称为准正(负)定二次型；

若$f(c_1,c_2,\cdots,c_n)$有大于零，也有小于零，则称二次型是不定二次型，其对应的矩阵称为不定二次型。

2.二次型正定的判别法:

判别法 *I*: 用定义。

例1: 设A, B均为n阶正定阵, 证明$A+B$也为n阶正定阵.

$\because A, B$为n阶正定阵, $\therefore \forall X_{n\times 1} \neq O, \Rightarrow X^T AX > 0, X^T BX > 0.$

$\therefore X^T(A+B)X > 0 \Rightarrow A+B$为$n$阶正定阵。

判别法 *II*: 用标准形 。

定理1: 实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

正定的充要条件为$d_i (i = 1,2,\cdots, n)$都是正数。

显然。

定理2: 可逆线性变换不改变二次型的正定性。

定理3： 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$正定的充要条件为$f$ 的标准形中n个系数全为正数。

推论1：二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$正定的充要条件为矩阵$A$的全部特征值都是正数。

推论2：若A正定，则$|A|>0$.

推论3：若A正定，则A与单位阵合同，即有可逆阵C，使

$$C^TAC=E.$$

推论3: 若A正定, 则A与单位阵合同, 即有可逆阵C, 使

$$C^T AC = E.$$

证： 由推论2及A正定,存在正交矩阵 Q， 使

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda.$$

$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$为矩阵$A$的特征值, 且都为正数。

令$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}$, $\Rightarrow C_1^T \Lambda C_1 = C_1 \Lambda C_1 = E.$

$$\Rightarrow C_1^T (Q^T AQ) C_1 = (QC_1)^T A(QC_1) = E.$$

判别法 *III*：用特征值 。

例2：设A为正定阵，证明A^{-1}, A^{*}都是正定阵.

$\because A$为正定阵，$\Rightarrow A$的特征值全大于零，

$\therefore A^{-1}, A^{*}$的特征值全大于零，

$\therefore A^{-1}, A^{*}$都是正定阵.

判别法 *IV*：用顺序主子式。

定义： 位于矩阵A的最左上角的$1,2,\cdots,n$阶子式，称为矩阵A的$1,2,\cdots,n$阶**顺序主子式**。

Δ_i表示第i阶顺序主子式.

定理4: 二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$正定的充要条件为矩阵$A$的各阶顺序主子式都大于零, 即$\Delta_i>0$.

例3: t为何值时, 二次型正定?

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3.$$

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & t\end{pmatrix},\quad \Delta_1=5>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1>0,$$

$$\Delta_3=|A|=\begin{vmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & t\end{vmatrix}=t-2.\ \Rightarrow t>2\text{时}, \Delta_3>0.$$

$\therefore t>2$时, 二次型正定.

请记住，这类题就这样做！

练习

$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$

是正定的，则t的取值范围是________________。

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & t/2\\ 0 & t/2 & 1\end{pmatrix},$$

$$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}.$$

$$|A|=1-\frac{t^2}{2}.$$