含参数的方程组

形如$\begin{cases}2x_1+ax_2-\ x_3=1,\\ ax_1-\ x_2+\ \ x_3=2,\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$的方程组称为含参数的方程组。

在求解方程组之前，要先确定参数值。——这是准则。

而参数值的确定，要依据有解的条件即： $r(\bar{A})=r(A).$

一般而言，有两种方法确定参数值。

一种是行列式法， 另一种是初等变换法。

例1　a 为何值时，方程组 $\begin{cases} 2x_1 + ax_2 - x_3 = 1, \\ ax_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$ 无解、有惟一解、有无穷多解？并在有解时求其解.

解　方程组的系数行列式 $\begin{vmatrix} 2 & a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = (a-1)(5a+4),$

故当 $a \neq 1$ 且 $a \neq -\dfrac{4}{5}$ 时，方程组有惟一解.

当 $a = 1$ 时，原方程组为

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$$

当 $a = -\dfrac{4}{5}$ 时，原方程组为

$$\begin{cases} 10x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 5, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -10, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$$

当 $a=1$ 时 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$

对其增广矩阵施行初等行变换化为：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 4 & 5 & -5 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix},$$

因此，当 $a=1$ 时，原方程组有无穷多组解，其通解为

$(1,-1,0)^T + k(0,1,1)^T$（k 为任意实数）.

当 $a=-\dfrac{4}{5}$ 时 $\begin{cases} 10x_1-4x_2-5x_3=5, \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-10, \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1. \end{cases}$

对其增广矩阵施行初等行变换化为：

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & -5 & \vdots & 5 \\ 4 & 5 & -5 & \vdots & 10 \\ 4 & 5 & -5 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10 & -4 & -5 & \vdots & 5 \\ 4 & 5 & -5 & \vdots & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 9 \end{pmatrix},$$

由此可知当 $a=-\dfrac{4}{5}$ 时，原方程组无解.

也可直接指出第2和第3个方程式不可能同时成立的，故无解。

练习

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0. \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

当 a 取何值时，该方程组有非零解？

方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}1+a & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n & n & \cdots & n+a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+r_2+\cdots+r_n}(1+2+\cdots+n+a)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & \cdots & n+a\end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}+a\right]\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a\end{vmatrix}=a^{n-1}\left[\frac{n(n+1)}{2}+a\right].$$

故当$a=0$或$a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$时方程组有非零解.

当$a=0$时: $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}-1\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$.

当$a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$时: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\\vdots\\n\end{pmatrix}$.

例2 λ 为何值时，方程组$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2 \end{cases}$

有解？并在有解时求其通解.

解 $$\bar{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & \vdots & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & \lambda \\ 1 & 1 & -2 & \vdots & \lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2+r_3,\, r_3-r_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda^2+\lambda-2 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & \lambda \\ 0 & 3 & -3 & \vdots & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & \dfrac{\lambda^2-\lambda}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix},$$

当$\lambda^2+\lambda-2=0$即$\lambda=1$或$\lambda=-2$时，方程组有解.

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{\lambda^2-\lambda}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-2 \end{array}\right),$$

$\lambda=1$时，$\bar{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$

故通解为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k\in C.$

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & \vdots & -2\\ 1 & -2 & 1 & \vdots & \lambda\\ 1 & 1 & -2 & \vdots & \lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \vdots & \lambda\\ 0 & 1 & -1 & \vdots & \dfrac{\lambda^2-\lambda}{3}\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda^2+\lambda-2\end{pmatrix},$$

$\lambda=-2$时，$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \vdots & -2\\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \vdots & 2\\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix},$

故通解为 $\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},k\in C.$

问题

例2能用行列式法做吗？为什么？

例2 λ 为何值时，方程组 $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2 \end{cases}$

有解？并在有解时求其通解.

练习

参数 a,b 为何值时，方程组
$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3, \\ 3x_1-x_2+ax_3+15x_4=3, \\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4=b \end{cases}$$
有惟一解、无解、有无穷多解？

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & a & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & a-6 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 9 & b-1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & b+5 \end{array}\right).$$

故当$a \neq -2$时方程组有惟一解.

当$a=-2$时,

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 3 & \vdots & 1\\ 1 & 3 & 6 & 1 & \vdots & 3\\ 3 & -1 & a & 15 & \vdots & 3\\ 1 & -5 & -10 & 12 & \vdots & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & a+2 & 2 & \vdots & 4\\ 0 & 0 & 0 & 3 & \vdots & b+5\end{pmatrix}.$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & \vdots & 4\\ 0 & 0 & 0 & 3 & \vdots & b+5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b-1\end{pmatrix},$$

故当$b\neq1$时方程组无解；当$b=1$时，方程组有无穷多组解.

综上所述，当 $a\neq-2$ 时方程组有惟一解.

当 $a=-2,b\neq1$ 时，方程组无解；

当 $a=-2,b=1$ 时，方程组有无穷多组解.