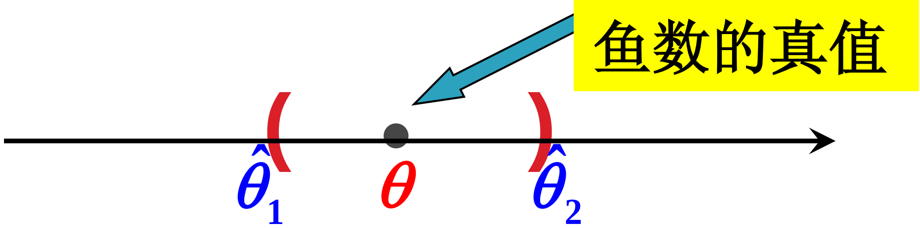
哈爾濱工業大學

区间估计

点估计是利用样本观测值算得的一个值去估计未知参数. 它没有反映出估计的误差范围，使用起来把握不大.

区间估计正好弥补了点估计的这个缺陷(可直接给出误差限).

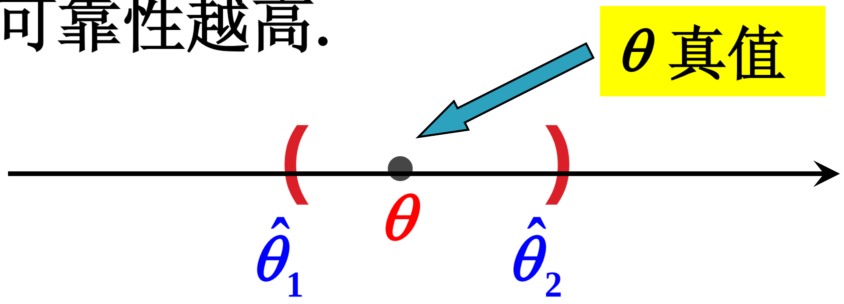
例如，用最大似然估计估计湖中的鱼数为10000条，这10000条与鱼数的真值误差有多大，点估计没有告诉我们.



若能给出一个区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$，使其有很大的可靠性(概率)包含未知参数 θ 的真值，这样对鱼数的估计就有把握多了.

区间估计

☺ 区间估计就是利用样本 $X_1,\ldots,X_n$ 构造两个统计量 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\ldots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\ldots,X_n)$, 使随机区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 以尽可能大的概率包含未知参数 θ. 即概率 $P(\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2)$ 越大, 估计的可靠性越高.



区间估计

定义1 设总体X的分布函数为$F(x,\theta)$,θ是未知参数，对给定$\alpha(0<\alpha<1)$，由样本$X_1,\dots,X_n$确定两个统计量

$$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\dots,X_n)\text{和}\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\dots,X_n)$$

使得

$$P(\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2)\geq 1-\alpha$$

称 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 为θ置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间，

$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$分别称为置信下限和置信上限.

例1 $X_1,\cdots,X_8$来自总体$N(\mu,2)$的一个样本, 样本均值$\bar{X}\sim N(\mu,1/4)\Rightarrow 2(\bar{X}-\mu)\sim N(0,1)$, 则

$$P(\bar{X}-1<\mu<\bar{X}+1)=P(|2(\bar{X}-\mu)|<2)$$
$$=2\Phi(2)-1=0.954,$$

$(\bar{X}-1,\bar{X}+1)$ 是μ 的置信度为0. 954的置信区间.

例1 若$\mu=1$, 当$\bar{x}=1$时，置信区间为

$(\bar{X}-1, \bar{X}+1)=(0, 2)$包含$\mu$.

若$\mu=1$, 当$\bar{x}=3$时，置信区间为

$(\bar{X}-1, \bar{X}+1)=(2, 4)$不含$\mu$.

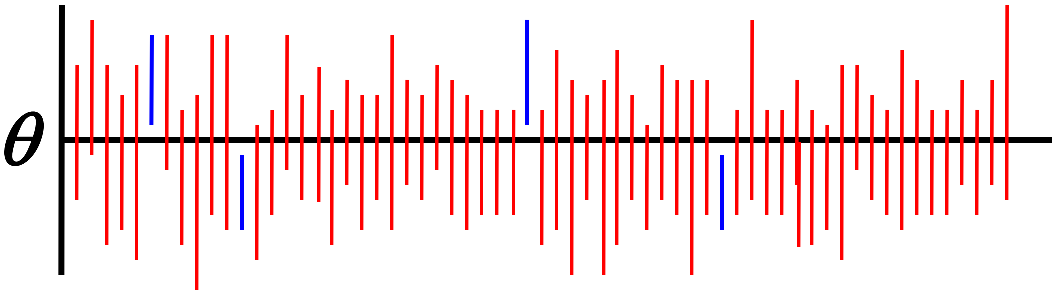
结论：对一个具体的区间，要么包含真值 μ, 要么不包含真值 μ, 无概率可言.

定义式的含义

$$P(\hat{\theta}_1(X_1,\ldots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_2(X_1,\ldots,X_n))=1-\alpha$$

☺ 置信度 $1-\alpha$ 的意义是什么呢?

若取1000个容量为n的样本值，可以得到1000个置信区间, 那么大约有$(1-\alpha)\%$个是包含θ的.



区间估计

定义2 设总体X的分布函数为$F(x,\theta)$,θ是未知参数，对给定$\alpha(0<\alpha<1)$, 由样本$X_1,\ldots,X_n$确定的统计量 $\hat{\theta}_L=\hat{\theta}_L(X_1,\ldots,X_n)$ 满足

$$P(\theta>\hat{\theta}_L)\geq 1-\alpha$$

称$\hat{\theta}_L$为 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限.

若由样本确定的统计量$\hat{\theta}_U=\hat{\theta}_U(X_1,\ldots,X_n)$

满足

$$P(\theta<\hat{\theta}_U)\geq 1-\alpha$$

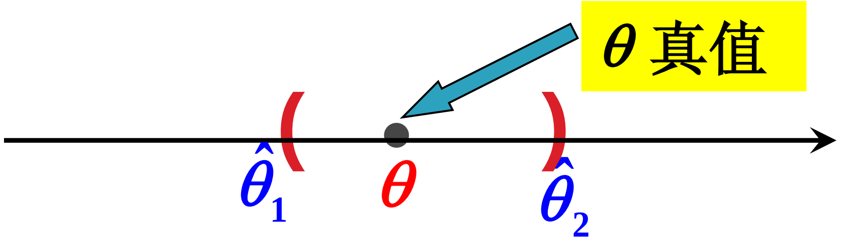
称$\hat{\theta}_U$为 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限.

区间估计的两个要素：精度和可靠度

1. 置信度越大越好，估计的可靠性越高.

2. 随机区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 的平均长度 $E(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1)$ 越短越好，平均长度越短表示区间估计的精度越高.

当样本容量给定时，置信度和精度是相互制约的，置信度高，精度就低，反之亦然.



☺ 置信度不同 ⟶ 置信区间不同，

选置信度高的

☺ 置信度相同 ⟶ 置信区间不同，

如何选择呢？

Neyman准则：在保证置信度达到指定要求的条件下，选精度高的置信区间.

在例1中，$(\bar{X}-1,\bar{X}+1)$是μ的置信度为0.95的置信区间. 区间长度为2.

$(\bar{X}-1.165,\bar{X}+0.875)$是$\mu$的置信度为0.95的置信区间. 区间长度为2.04.

由Neyman准则，同等置信度下，选区间长度短的精度高，选$(\bar{X}-1,\bar{X}+1)$更好.

如何求总体中未知参数 θ 的置信区间呢？

构造置信区间的一般办法

(1) 从 θ 的一个点估计 $\hat{\theta}$ 出发，构造 $\hat{\theta}$ 与 θ 的一个函数 $G(\hat{\theta},\theta)$，使得 G 的分布已知且与 θ 无关. 通常称函数 $G(\hat{\theta},\theta)$ 为**枢轴量**.

(2) 对给定的 α，根据 G 的分布找两个临界值 c 和 d, 使得 $P(c < G(\hat{\theta},\theta) < d) \geq 1-\alpha$

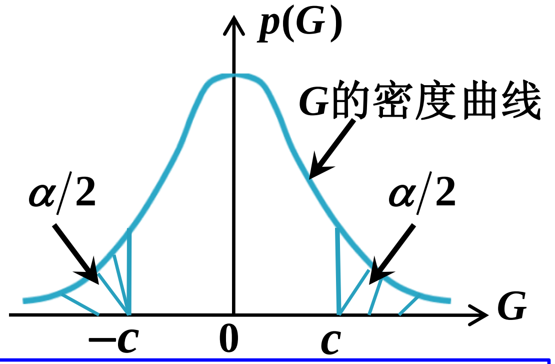
(3) 从 $c < G(\hat{\theta},\theta) < d$ 解出 $\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2$.

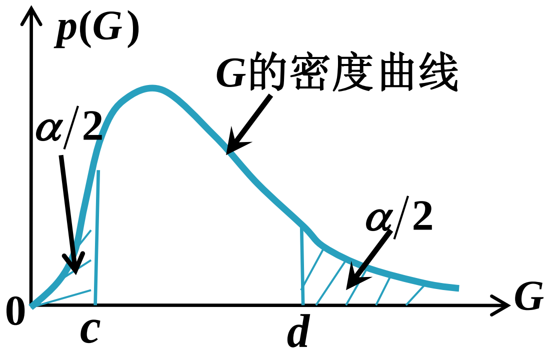
$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 为置信度为 $1-\alpha$ 的**置信区间**.

对连续型总体，常选c和d使得

$$P(c < G(\hat{\theta},\theta) < d) = 1-\alpha$$

满足上式的c，d不唯一，如何选取好？





G有单峰对称分布时，对称选取$d=-c$, 区间最短.

G有单峰非对称分布时，选取c, d 使左右两个尾部的概率均为 $\alpha/2$.

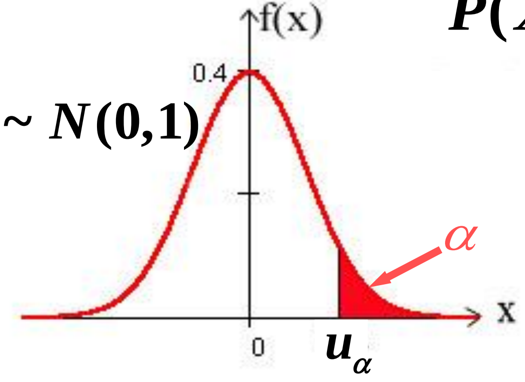
标准正态分布的上侧 α 分位数或临界值

设 $X \sim N(0,1)$,给定$\alpha(0<\alpha<1)$,称满足等式

$$P(X \geq u_\alpha) = \alpha$$

的点u_α为$N(0,1)$分布的上侧α分位数或临界值. u_α的值可查标准正态分布表获得.

$X \sim N(0,1)$



$$P(X \geq u_\alpha) = 1 - \Phi(u_\alpha) = \alpha.$$

$$\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha.$$

$$u_{0.05} = 1.645$$

$$u_{0.025} = 1.96$$

单个正态总体参数的区间估计

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$为总体X的样本, $\bar{X}$, S^2分别为样本均值,样本方差, 置信度为$1-\alpha$.

1. σ已知，求μ的置信区间

$\bar{X}$是μ的最大似然估计量,

$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，取枢轴量 $u = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

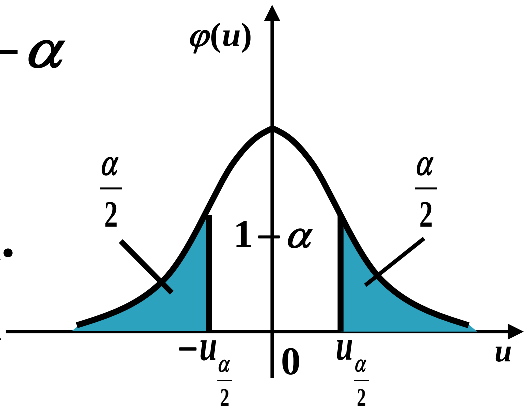
求c和d满足：$P(c \le u \le d) = 1-\alpha$

由于$N(0,1)$对称分布，

故$c=-d$时，区间长度最短.

对给定的α，查表得临界值

$u_{\frac{\alpha}{2}}$，取$c=-u_{\frac{\alpha}{2}}$，$d=u_{\frac{\alpha}{2}}$



即 $$P\left(-u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

解得:

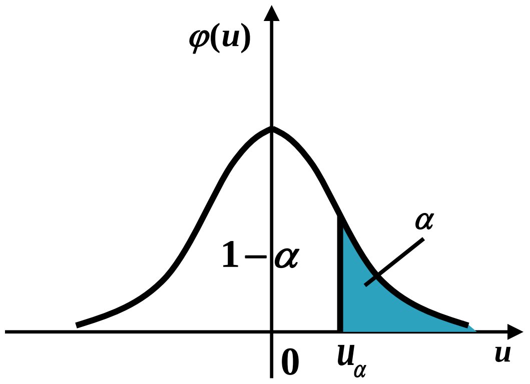
$$P\left(\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间:

$$\left(\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

若 $P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<u_\alpha\right)=1-\alpha$

则 $P\left(\mu>\bar{X}-u_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$



μ置信度为$1-\alpha$单侧置信下限 $\bar{X}-u_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

μ置信度为$1-\alpha$单侧置信上限 $\bar{X}+u_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

例1 从某一鱼塘中捕获的鱼, 其含汞量X是随机变量. 已知$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中$\sigma=0.32$, μ未知. 设样本$X_1,\ldots,X_4$观测值为1.2, 3.4, 0.6, 5.6, 求μ的置信度为0.95的置信区间.

解 样本均值 $\bar{x}=\dfrac{1}{4}(1.2+3.4+0.6+5.6)=2.7$

$\sigma=0.32$, $n=4$, $\alpha=0.05$, $\alpha/2=0.025$

查表得 $u_{0.025}=1.96$

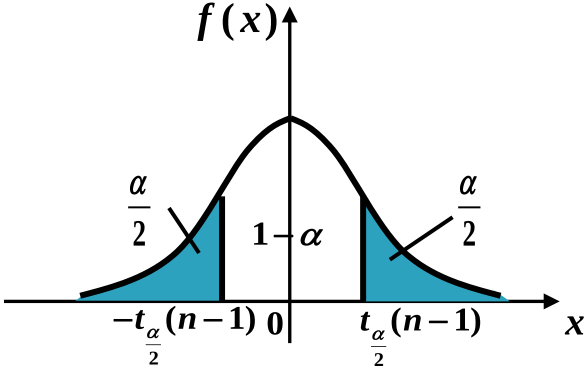
μ置信水平0. 95的置信区间:

$$\left(\bar{x}-u_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+u_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(2.387,3.014)$$

2. σ未知，求μ的置信区间

用S^2估计σ^2得枢轴量

$$t=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$



对给定的α，查表得

临界值$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，使得

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<t<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=1-\alpha$$

即 $P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=1-\alpha$

解得

$$P\left(\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间:

$$\left(\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

μ置信度为$1-\alpha$的单侧置信下限

$$\bar{X}-t_{\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

μ置信度为$1-\alpha$的单侧置信上限

$$\bar{X}+t_{\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

例2 设有一批胡椒粉，每袋净重X(单位:g)服从$N(\mu,\sigma^2)$分布.今任取8袋测得净重是12.1，11.9，12.4，12.3，11.9，12.1，12.4，12.1. 求μ的置信区间(α=0.01).

解 $n=8,\ \alpha=0.01,$ 计算得 $\bar{x}=12.15,\ s=0.2,$

查表得$t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.005}(7)=3.4995,$

$$\bar{x}\pm t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=12.15\pm 3.4995\times\frac{0.2}{\sqrt{8}}$$

$=12.15\pm 0.25$ μ的置信区间为(11.9, 12.4).

例3 某种清漆的9个样品的干燥时间(小时)分别为6, 5.7, 5.8, 6.5, 7, 6.3, 5.6, 6.1, 5, 该干燥时间服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$,求μ的0.95单侧置信上限.

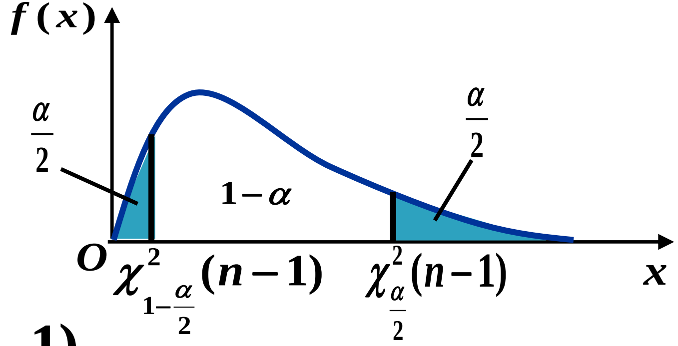
解 $n=9,\ \alpha=0.05,$ 计算得 $\bar{x}=6,\ s=0.5745,$

查表得$t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(8)=1.86,$

μ的0.95单侧置信上限为

$$\bar{x}+t_\alpha(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=6+1.86\times\frac{0.5745}{\sqrt{9}}=6.356.$$

3. 求 σ^2 的置信区间



用 σ^2 的无偏估计 S^2

构造枢轴量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

对给定的 α，查表得临界值 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 与 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，

使 $$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

即 $P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=1-\alpha$

解得

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}<\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)=1-\alpha$$

σ^2置信度为$1-\alpha$的置信区间:

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

σ置信度为$1-\alpha$的置信区间：

$$\left(S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\ S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$$

σ^2置信度为$1-\alpha$单侧置信下限 $\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$

σ^2置信度为$1-\alpha$单侧置信上限 $\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$

例4 设有一批胡椒粉，每袋净重X(单位:g)服从$N(\mu,\sigma^2)$分布.今任取8袋测得净重是12.1，11.9，12.4，12.3，11.9，12.1，12.4，12.1. 求σ^2的置信区间和单侧置信下限(α=0.01).

解 $n=8$, $\alpha=0.01$, 计算得 $s^2=0.04$,

查表得$\chi^2_{0.005}(7)=20.278$，$\chi^2_{0.995}(7)=0.989$，

$\chi^2_{0.99}(7)=1.239$.

σ^2置信度为0.99的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) = （0.014, 0.283）$$

σ^2置信度为0.99的置信下限为

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)} = 0.226$$

两个正态总体参数的区间估计

实际问题中，经常需要比较两个或以上产品质量、技术水平，项目收益率高低、风险大小等. 归纳为两个正态总体均值差、方差比的估计.

设$X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$为总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$为总体$N(\mu_2, \sigma_2^2)$的样本, 两个样本相互独立. 样本均值分别为$\bar{X}, \bar{Y}$, 样本方差分别为$S_1^2, S_2^2$, 置信水平为$1-\alpha$.

两个正态总体均值差的置信区间

1. $\mu_1-\mu_2$的置信区间

(1) σ_1^2,σ_2^2均为已知

由$\bar{X}\sim N(\mu_1,\dfrac{\sigma_1^2}{n_1})$, $\bar{Y}\sim N(\mu_2,\dfrac{\sigma_2^2}{n_2})$ 且$\bar{X}$, $\bar{Y}$独立.

因此 $\bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2})$

得枢轴量：$$u=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

对给定的α，查表得临界值$u_{\frac{\alpha}{2}}$，使得

$$P\left(-u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

得$\mu_1-\mu_2$置信度为$1-\alpha$的置信区间：

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \bar{X}-\bar{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

(2) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, 但$\sigma^2$未知

用$S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{(n_1+n_2-2)}$代替$\sigma^2$得枢轴量

$$t=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

对给定的α，查表得临界值$t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$, 使得

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)<t<t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right)=1-\alpha$$

得$\mu_1-\mu_2$置信度为$1-\alpha$的置信区间：

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\right.$$

$$\left.\bar{X}-\bar{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

两个正态总体方差比的置信区间

2. $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间(μ_1,μ_2未知)

选枢轴量$F=\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

对给定的α，查表得临界值$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$与

$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$,

使$P\left(F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\le \dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\le F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\right)=1-\alpha$

得$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$置信度为$1-\alpha$的置信区间:

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

例1 测得A班和B班中各5位学生的身高(cm)如下:

A班:162.6 170.2 172.7 165.1 157.5

B班:175.3 177.8 167.6 180.3 182.9. 设两个班学生的身高分别为X和Y, 且$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,两样本独立,置信度为0.9.

(1) $\sigma_1 = 6, \sigma_2 = 5.4$,求 $\mu_1 - \mu_2$的置信区间;

(2) $\sigma_1 = \sigma_2$且未知,求 $\mu_1 - \mu_2$的置信区间;

(3) μ_1, μ_2未知,求 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间;

解 : $n_1 = n_2 = 5,\ 1-\alpha = 0.9,\ \alpha=0.1,$

计算得 $\bar{x} = 165.62,\ \ s_1 = 6.05,\ \ \bar{y} = 176.78,$

$s_2 = 5.86,$ 且两样本相互独立

(1) $\sigma_1 = 6, \sigma_2 = 5.4, u_{0.05} = 1.645,$

则 $\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.9的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \ \bar{X} - \bar{Y} + u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$$

$$= (-17.0984,\ \ -5.2216)$$

(2) $\sigma_1=\sigma_2$且未知，$t_{0.05}(5+5-2)=t_{0.05}(8)=1.8595$,

$$S_w^2=\frac{(5\text{-}1)*6.05^2+(5\text{-}1)*5.86^2}{5+5-2}=\frac{4(6.05^2+5.86^2)}{8}=5.96^2$$

$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.9置信区间：

$$(\bar{x}-\bar{y}\pm t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}})$$

$$=(-11.16\pm1.8596*5.96*\sqrt{\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{5}})$$

$$=(-11.16\pm7.01)\Rightarrow(-18.17,-4.15).$$

(3) μ_1, μ_2未知， $S_1 = 6.05,\ S_2 = 5.86,\ \dfrac{S_1^2}{S_2^2} = 1.066$

$$F_{0.05}(4,4) = 6.39, F_{0.95} = \frac{1}{F_{0.05}(4,4)} = \frac{1}{6.39}$$

则 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为0.9的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \right)$$

$$= (0.1668,\ 6.8117)$$

谢　　谢！