逆阵的应用——求解矩阵方程

1. $AX = B, A$可逆。

2. $XA = B, A$可逆。

3. $AXC = B, A, C$可逆。

$1. AX = B, A$可逆。

解法$I: X = A^{-1}B$

解法II:（初等变换法）$A^{-1} = P_1 P_2 \cdots P_s$

$$\left.\begin{aligned} P_1 P_2 \cdots P_s A &= E \\ P_1 P_2 \cdots P_s B &= X \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{(A \vdots B) \xrightarrow[\text{行变换}]{} (E \vdots X)}$$

2.$XA=B, A$可逆。

解法$I: X=BA^{-1}$

解法II:（初等列变换法）$A^{-1}=P_1P_2\cdots P_s$

$$\left.\begin{aligned} AP_1P_2\cdots P_s &= E \\ BP_1P_2\cdots P_s &= X \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}]{} \begin{pmatrix} E \\ X \end{pmatrix}}$$

解法III:（初等行变换法）

$$XA=B \Rightarrow A^T X^T = B^T$$

$$\boxed{(A^T \vdots B^T) \xrightarrow[\text{行变换}]{} (E \vdots X^T)}$$

$3.AXC = B, A, C$可逆。

解法$I: X = A^{-1}BC^{-1}$

解法$II: AX = BC^{-1}$

$$XC = A^{-1}B$$

求解矩阵方程时，一定要记住：
先化简方程，再求解。

例1 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，且 $AX=A+3X$，求 X.

解 由 $AX=A+3X$，得 $(A-3E)X=A$.

$$(A-3E \vdots A)=\begin{pmatrix}-2&0&1&\vdots&1&0&1\\0&-1&0&\vdots&0&2&0\\1&0&-2&\vdots&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3,\, r_2 \cdot (-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 + r_3 \cdot (-\frac{2}{3}),\, r_3 \cdot (-\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

故$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

练习 设 $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，

且 $A(E-C^{-1}B)^T C^T=B$，求 A.

由于 $A(E-C^{-1}B)^T C^T=A(C-CC^{-1}B)^T=A(C-B)^T$，

故 $A(C-B)^T=B$.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -3 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$