配方法化二次型为标准形

例1: 用配方法化二次型为标准形,并求可逆变换矩阵。

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3.$$

解: $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3$

$$=(x_1^2+2x_1x_2)+2x_2^2+5x_3^2+4x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2)^2+x_2^2+5x_3^2+4x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2)^2+(x_2+2x_3)^2+x_3^2$$

$$=y_1^2+y_2^2+y_3^2$$

$$\begin{cases} y_1=x_1+x_2, \\ y_2=x_2+2x_3, \\ y_3=x_3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=y_1-y_2+2y_3, \\ x_2=y_2-2y_3, \\ x_3=y_3. \end{cases} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例2：设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+8x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$,

1.求一可逆变换将该二次型化为标准形;

2. $f(x_1,x_2,x_3)=1$是什么曲面?

1. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+8x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$

$$=(x_1+2x_3)^2+(x_2+2x_3)^2=y_1^2+y_2^2.$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_1=x_1+2x_3,} \\ \boldsymbol{y_2=x_2+2x_3,} \\ y_3=x_3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=y_1-2y_3, \\ x_2=y_2-2y_3, \\ x_3=y_3. \end{cases} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. 由$|A-\lambda E|=0\Rightarrow A$的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=9$.

$\therefore$在正交变换下，可将$f=1$化为$y_2^2+9y_3^2=1$. 为椭圆柱面。

正交变换保持向量长度不变,只有在正交变换下将二次型化为标准形，才能确定它所表示的曲面类型。

注：设 $Y=QX$，Q为正交矩阵，则有

$$\|Y\|^2=Y^TY=(QX)^T(QX)=X^TQ^TQX=X^TX=\|X\|^2.$$

注：配方法化二次型为标准形一般有两种情形：

情形1　二次型中含有平方项，如含有 x_1^2，此时先集中含有 x_1 的项，对 x_1 配成完全平方，再集中含有 x_2 的项，对 x_2 配成完全平方，如此继续下去，直到化为标准形。

情形2　二次型中不含平方项，只含有 $x_i x_j$ 的项，此时先作可逆线性变换

$$\boxed{\begin{cases} x_i = y_i + y_j, \\ x_j = y_i - y_j, \\ x_k = y_k, \quad k \neq i, j. \end{cases}}$$

将二次型化为含平方项的二次型，再按情形1中介绍的方法做。