



哈爾濱工業大學

第16讲 正态分布



正态分布(Normal)



■ 定义 若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

μ, σ 为常数, 且 $\sigma > 0$, 称 X 服从参数为 μ, σ 的**正态分布**或**高斯(Gauss)分布**, 也称 X 为**正态变量**, 记作 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

可以验证: $f(x) \geq 0$,

概率密度的性质



下证: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$ 令 $t = \frac{x - \mu}{\sigma}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$\text{记 } I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right)$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2+u^2}{2}} dt du \quad \text{令} \begin{cases} t = r \cos \theta, \\ u = r \sin \theta. \end{cases}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = 2\pi. \Rightarrow I = \sqrt{2\pi} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

正态分布密度曲线特征



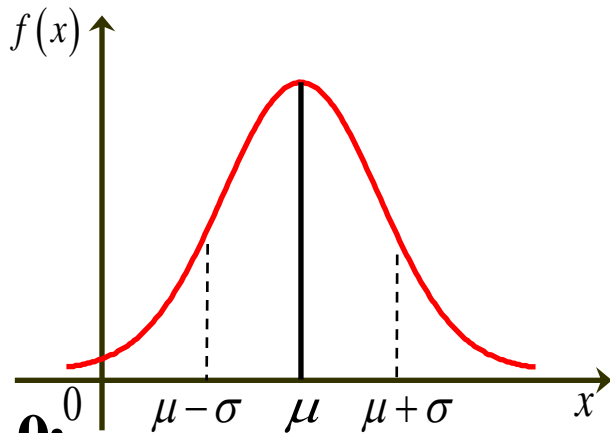
(1) 关于 $x = \mu$ 对称;

(2) 当 $x = \mu$ 时, $f(x)$ 取得

最大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$;

(3) 当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$;

(4) 曲线在 $x = \mu \pm \sigma$ 处有拐点;

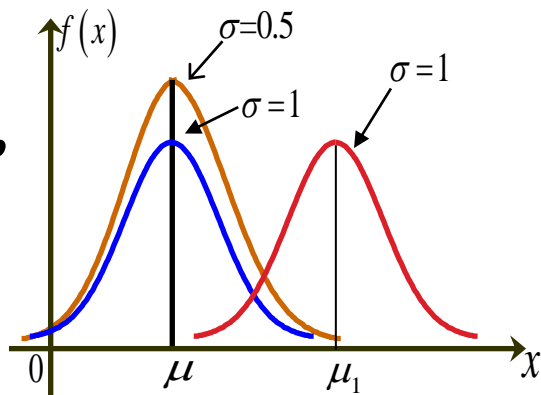


两个参数的含义



(5) μ 决定对称轴的位置.

当固定 σ 值, 改变 μ 值时, $f(x)$ 的形状不变, 只是沿着 x 轴平移;



(6) σ 决定离散程度.

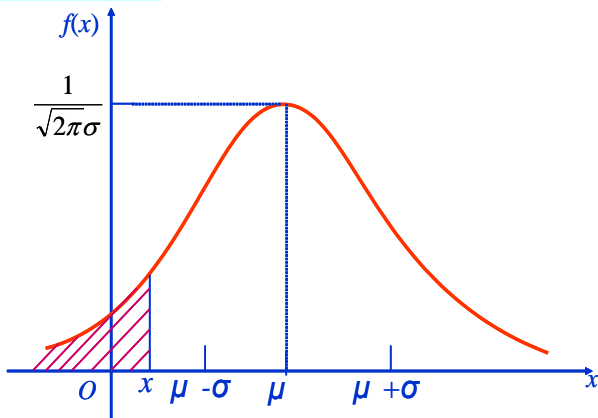
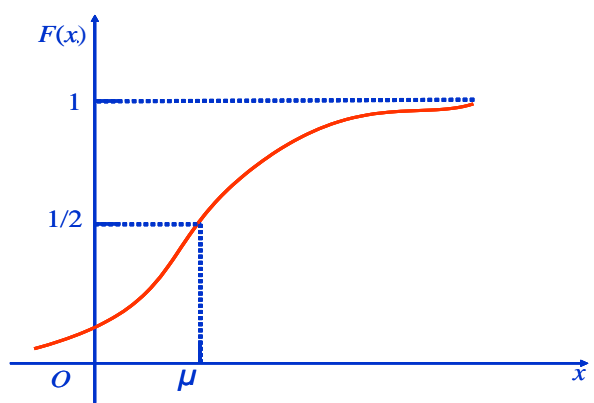
当固定 μ 值, 改变 σ 值时, $f(x)$ 的对称轴不变, 但形状改变. σ 越大, 图形越矮越胖, σ 越小, 图形越高越瘦.



■ 正态变量 X 的分布函数

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

$$-\infty < x < +\infty$$



标准正态分布定义

■ 若 $X \sim N(0,1)$ ，称 X 服从标准正态分布。

■ 概率密度为

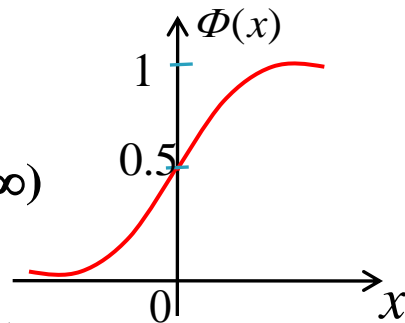
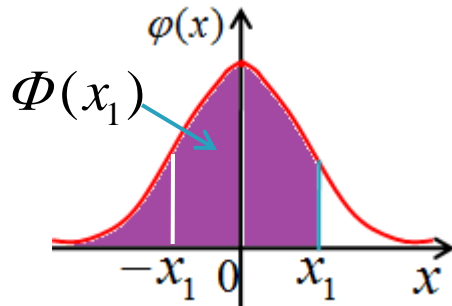
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

■ 分布函数为

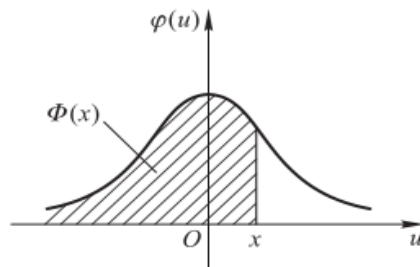
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (-\infty < x < +\infty)$$

■ 性质

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$



附表 2 标准正态分布函数值表



$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^x \varphi(u) du$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.500 0	0.504 0	0.508 0	0.512 0	0.516 0	0.519 9	0.523 9	0.527 9	0.531 9	0.535 9
0.1	0.539 8	0.543 8	0.547 8	0.551 7	0.555 7	0.559 6	0.563 6	0.567 5	0.571 4	0.575 3
0.2	0.579 3	0.583 2	0.587 1	0.591 0	0.594 8	0.598 7	0.602 6	0.606 4	0.610 3	0.614 1
0.3	0.617 9	0.621 7	0.625 5	0.629 3	0.633 1	0.636 8	0.640 6	0.644 3	0.648 0	0.651 7
0.4	0.655 4	0.659 1	0.662 8	0.666 4	0.670 0	0.673 6	0.677 2	0.680 8	0.684 4	0.687 9
0.5	0.691 5	0.695 0	0.698 5	0.701 9	0.705 4	0.708 8	0.712 3	0.715 7	0.719 0	0.722 4
0.6	0.725 7	0.729 1	0.732 4	0.735 7	0.738 9	0.742 2	0.745 4	0.748 6	0.751 7	0.754 9
0.7	0.758 0	0.761 1	0.764 2	0.767 3	0.770 3	0.773 4	<u>0.776 4</u>	0.779 4	0.782 3	0.785 2

$$\Phi(0.76) = 0.7764$$





一般的正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的分布函数 $F(x)$ 与标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 间的关系为

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

证明

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad \text{令 } v = \frac{t - \mu}{\sigma} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

即, 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2), \forall a < b$ 有

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

例1 某种电池的寿命 (h) $X \sim N(160, 20^2)$, 分别求寿命小于120h和寿命大于200h的概率.

解 $P(X < 120) = F(120) = \underset{\text{查表}}{\Phi\left(\frac{120 - 160}{20}\right)} = \Phi(-2).$
 $= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228.$

$$P(X > 200) = 1 - F(200) = 1 - \underset{\text{查表}}{\Phi\left(\frac{200 - 160}{20}\right)} \\ = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228.$$



例2 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $P\{|X - \mu| < \sigma\}$,

$P\{|X - \mu| < 2\sigma\}$, $P\{|X - \mu| < 3\sigma\}$.

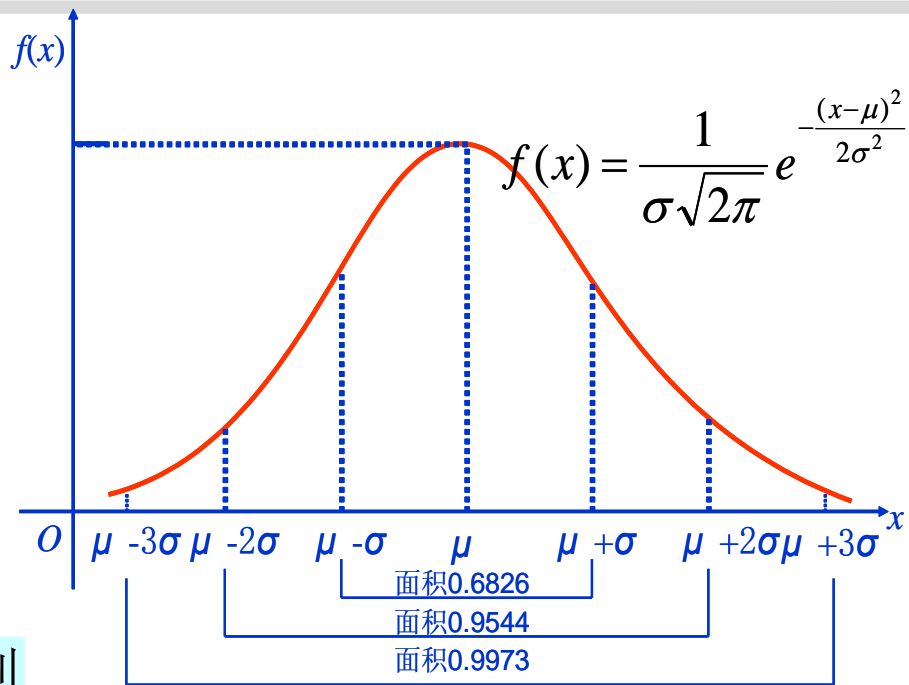
解

$$\begin{aligned} P\{|X - \mu| < \sigma\} &= P\{\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\} \\ &= \Phi\left(\frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826. \end{aligned}$$

同理有 $P\{|X - \mu| < 2\sigma\} = 0.9544$,

$$P\{|X - \mu| < 3\sigma\} = 0.9973.$$

X 几乎总是落在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之中.



3 σ 准则

正态分布的应用



在实际中，许多随机变量都服从或近似地服从这种“中间大，两头小”的正态分布.

例如，

- ✓测量一个零件长度的测量误差，
- ✓向一中心点射击的横向偏差或纵向偏差，
- ✓电子管中的噪声电流或电压，
- ✓飞机材料的疲劳应力等等.



谢 谢！