齐次线性方程组

一、齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

称为齐次线性方程组。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

系数矩阵

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

未知向量

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

方程组的代数形式

$$AX = O$$

方程组的矩阵形式

引进向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = O.$$

方程组的向量方程形式

齐次线性方程组解的性质

$$O=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=(0,0,\cdots,0)^T$$ 显然是方程组的解；称为零解。

若非零向量$\xi=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$

是方程组的解，则称为非零解，也称为非零解向量。

问题 你会关心哪一种解？ **非零解**

齐次线性方程组解的性质

性质1：齐次方程组的两个解的**和**仍是方程组的解。即：

ξ_1,ξ_2是解向量，则$\xi_1+\xi_2$也是解向量。

$$A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2.$$

性质2：ξ是解向量，则$k\xi$也是解向量。

$$A(k\xi)=kA\xi.$$

令$V=\{\xi \mid A\xi=O\}$，则V构成一个向量空间。

称为方程组的**解空间**。

如何确定一个向量空间？

若齐次线性方程组的解空间存在一组基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$, 则方程组的全部解就是 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$, 这称为方程组的**通解**。

由此可见，要求方程组的全部解，只需求出其基。

定义：若齐次方程组的有限个解 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$,满足：

(i) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$线性无关；

(ii) 方程组的任一解都可由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$线性表示；

则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$是齐次方程组的一个基础解系。

也就是说，我们将解空间的基称为基础解系，此时，通解就是基础解系的线性组合，即为：

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s.$$

基础解系怎么求?

定义：若齐次方程组的有限个解$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$，满足：

(i) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$线性无关;

(ii) 方程组的任一解都可由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$线性表示;

则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$是齐次方程组的一个<u>基础解系</u>。

行最简形矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

设 $r(A)=r<n$,且不妨设 A 中最左上角的 r 阶子式不为零。则经有限次行初等变换，矩阵 A 化为:

$$I_{m\times n}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1(n-r)} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2(n-r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r(n-r)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

显然: $A\cong I$

$AX=O$ 与

$IX=O$ 同解。

行最简形

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&3&1\\4&7&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-2r_1]{}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&3\\0&-1&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&5\\0&-1&3\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&5\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -3\\ 1 & -1 & -2 & 3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -4\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

例1：求解方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3=0, \\ 4x_1+7x_2-x_3=0. \end{cases}$

解：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-2r_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad IX=O \text{为} \begin{cases} x_1+5x_3=0, \\ x_2-3x_3=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-5x_3, \\ x_2=3x_3. \end{cases}$$

自由未知量

真未知量

同解方程组

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x_3 \\ 3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_3, \quad x_3 \in R.$$

令 $\xi=(-5,3,1)^T$，则通解为 $k\xi=k(-5,3,1)^T$.

例2：求方程组的通解 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4, \\ x_3 = 2x_4. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_4 \\ x_2 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_4 \\ 0 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_4. \quad x_2, x_4 \in R.$$

$\xi_1 = (1,1,0,0)^T$, $\xi_2 = (1,0,2,1)^T$. 通解为$k_1\xi_1 + k_2\xi_2$.

练习　求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 15x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = 0. \end{cases}$$

思考

基础解系的求法?