

相关性的判定及有关重要结论

1. 线性相关与线性组合的关系定理

定理1: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 向量线性表示。

证: " \Rightarrow " 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$ 线性相关, 则一定存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_m , 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

不妨设 $k_1 \neq 0$, 于是有:

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \dots - \frac{k_m}{k_1}\alpha_m$$

" \Leftarrow " 不妨设

$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$$

$$\Rightarrow -\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

即向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$ 线性相关。

★ 定理2: 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 而向量组 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示且表示式惟一。

证: \because 向量组 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 则一定存在一组不全为零的数 k, k_1, k_2, \dots, k_m , 使

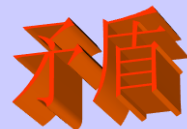
$$k\beta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

这里必有 $k \neq 0$, 否则, 有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关知:

$$k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$$



故 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示。

下面证明表示式惟一。

$$\left. \begin{aligned} \text{设 } \beta &= k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m \\ \beta &= l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$(k_1 - l_1)\alpha_1 + (k_2 - l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_m - l_m)\alpha_m = 0.$$

由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关知:

$$k_i = l_i, i = 1, 2, \cdots, m.$$

所以表示式惟一。

2.相关性的判定定理

定理3: 在一个向量组中, 若有一个部分向量组线性相关, 则整个向量组也必定线性相关。

你能举个反例吗?

反之不对。

$$\alpha_1 = (1, 2, -1), \alpha_2 = (2, -3, 1), \alpha_3 = (4, 1, -1).$$

推论: 一个线性无关的向量组的任何非空的部分向量组都线性无关。

2.相关性的判定定理

定理4: m 个 n 维向量 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ ($i = 1, 2, \dots, m$)线性相关的充要条件是由 α_i ($i = 1, 2, \dots, m$)构成的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的秩 $r(A) < m$.

例3: 讨论 $\alpha_1 = (1, 2, -1), \alpha_2 = (2, -3, 1), \alpha_3 = (4, 1, -1)$ 的相关性。
解:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\therefore r(A) = 2 < 3,$$

$\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关。

例3: 讨论 $\alpha_1 = (1, 2, -1), \alpha_2 = (2, -3, 1), \alpha_3 = (4, 1, -1)$ 的相关性。

我们已经用三种方法作过这个题目了，

- 1.求组合式；
- 2.定义证明，组合系数不全为零。
- 3.将向量组排成矩阵，由矩阵的秩确定。

你认为哪一种方法简单？

练习

λ 为何值时，向量组 $\alpha_1 = (1,1,1,1,2)$ ， $\alpha_2 = (2,1,3,2,3)$ ， $\alpha_3 = (2,3,2,2,5)$ ， $\alpha_4 = (1,3,-1,1,\lambda)$ 线性相关？

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda = 4$ 时， $r(A) = 3 < 4$ ， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关。

推论1: 当 $m > n$ 时, m 个 n 维向量线性相关。

推论2: 任意 m 个 n 维向量线性无关的充要条件是由它们构成的矩阵 $A = A_{m \times n}$ 的秩 $r(A) = m$ 。

推论3: 任意 n 个 n 维向量线性无关的充要条件是由它们构成的方阵 A 的行列式不等于零。或 $r(A) = n$ 。

推论4: 任意 n 个 n 维向量线性相关的充要条件是由它们构成的方阵 A 的行列式等于零。或 $r(A) < n$ 。

定理5: 若 m 个 r 维向量

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir}) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

线性无关, 则对应的 m 个 $r+1$ 维向量

$$\beta_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir}, a_{i,r+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

也线性无关。

用语言叙述为:

线性无关的向量组, 添加分量后仍旧线性无关。

推论: r 维线性无关的向量, 添加 $n-r$ 个相应分量组成的 n 维向量组仍旧线性无关。

课后练习

叙述相关性判定的5个定理。

证明定理4与定理5。