正交变化法化二次型为标准型

定义2： 只含平方项的二次型，即形如

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$$

称为二次型的**标准形**（或**法式**）。

$$\Lambda=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$$

问题1： 标准形的矩阵 = ？

问题2： 将二次型化为标准形实际上是什么问题？

$\boxed{\text{找可逆阵}C,\text{使}C^TAC=\Lambda\text{为对角阵.}}$

问题3： 二次型能否化为标准形？

$\boxed{\text{能！因为任意实对称阵都与对角阵正交合同。}}$

定理2 对实二次型 $f = X^T AX$, 总有正交变换 $X = QY$, 使

$$f = X^T AX = (QY)^T A(QY) = Y^T (Q^T AQ)Y = Y^T \Lambda Y$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$ $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 f 的矩阵 A 的特征值。

正交变换法将二次型化为标准形的一般步骤：

(i) 写出二次型的矩阵 A;

(ii) 求出A的所有相异的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$;

(iii) 对每一个重特征值λ_i，求出对应的r_i个线性无关的特征向量

$\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ir_i}\ (i=1,2,\cdots,m)$,由性质知$\sum_{i=1}^{m} r_i = n.$

(iv) 用施密特正交化方法将每一个重特征值λ_i所对应的r_i个线性无关的特征向量$\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ir_i}\ (i=1,2,\cdots,m)$先正交化再单位化为$\eta_{i1},\eta_{i2},\cdots,\eta_{ir_i}\ (i=1,2,\cdots,m)$，它们仍为属于$\lambda_i$的特征向量。

(v) 将上面求得的正交单位向量作为列向量，排成一个 n 阶方阵Q，则Q即为所求的正交方阵。此时 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda$为对角阵。

(vi) 作正交变换 $X=QY$, 即可将二次型化为标准形

$$f=X^TAX=(QY)^TA(QY)=Y^T(Q^TAQ)Y=Y^T\Lambda Y.$$

例　用正交变换法将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2$ $-4x_2x_3$ 化为标准形，并求出所用的正交变换矩阵.

二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$,

由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)$,

得 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=-2$;

其对应的特征向量为 $\alpha_1=(-2,\ -1,\ 2)^T,\alpha_2=(2,\ -2,\ 1)^T,\alpha_3=(1,\ 2,\ 2)^T$,

因为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 互异，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两正交，将它们单位化，得

$$\eta_1=\frac{1}{3}\alpha_1,\eta_2=\frac{1}{3}\alpha_2,\eta_3=\frac{1}{3}\alpha_3.$$

于是所求正交变换的矩阵为$Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$,

令 $X=QY$，则二次型化为标准形 $y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$.

练习

用正交变换法将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$$

化为标准形，并求出所用的正交变换矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}.$$

求正交阵Q，使

$Q^{-1}AQ$为对角阵。

$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-7.$

$$Q=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

令 $X=QY$，则二次型化为标准形 $2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$.

正交变换法将二次型化为标准形的一般步骤：

(i) 写出二次型的矩阵 A;

(ii) 求出A的所有相异的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$;

(iii) 对每一个重特征值λ_i，求出对应的r_i个线性无关的特征向量

$\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{ir_i}$ $(i=1,2,\cdots,m)$,由性质知$\sum_{i=1}^{m} r_i = n.$

(iv) 用施密特正交化方法将每一个重特征值λ_i所对应的 r_i个线性无关的特征向量$\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{ir_i}$ $(i=1,2,\cdots,m)$先正交化再单位化为

$\eta_{i1}, \eta_{i2}, \cdots, \eta_{ir_i}$ $(i=1,2,\cdots,m)$，它们仍为属于λ_i的特征向量。

(v) 将上面求得的正交单位向量作为列向量，排成一个 n 阶方阵 Q，则Q即为所求的正交方阵。此时 $Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \Lambda$为对角阵。

(vi) 作正交变换 $X = QY$, 即可将二次型化为标准形

$$f = X^T AX = (QY)^T A(QY) = Y^T (Q^T AQ)Y = Y^T \Lambda Y.$$