哈爾濱工業大學

第3讲 古典概率

概率

- **概率**——表示事件A发生可能性大小的数值，称为事件A的概率，记为$P(A)$.

注意：概率是随机事件的函数.

古典概率的定义

- 若试验的样本空间*S*满足：

$$\begin{cases} \text{只有有限个样本点}—\text{有限性}, \\ \text{每个样本点发生的可能性相等}—\text{等可能性}. \end{cases}$$

称此试验为古典概型试验.

古典概率的计算公式

- 在古典概型下，事件A的概率定义为：

$$P(A)=\frac{A\text{所含样本点数}}{S\text{含样本点总数}}$$

- 这里计算样本点数的主要工具是排列、组合.

排列与组合

加法原理

设完成一件事有m种方式，

第一种方式有n_1种方法，
第二种方式有n_2种方法，
……
第m种方式有n_m种方法，

则完成这件事总共有
$n_1 + n_2 + \ldots + n_m$
种方法．

排列与组合

- 例如

甲地

飞机有3班

火车有4班

乙地

3+4=7种

排列与组合

➢ 乘法原理

设完成一件事必须经过r个步骤，

第一个步骤有n_1种方法，

第二个步骤有n_2种方法，

第三个步骤有n_3种方法，

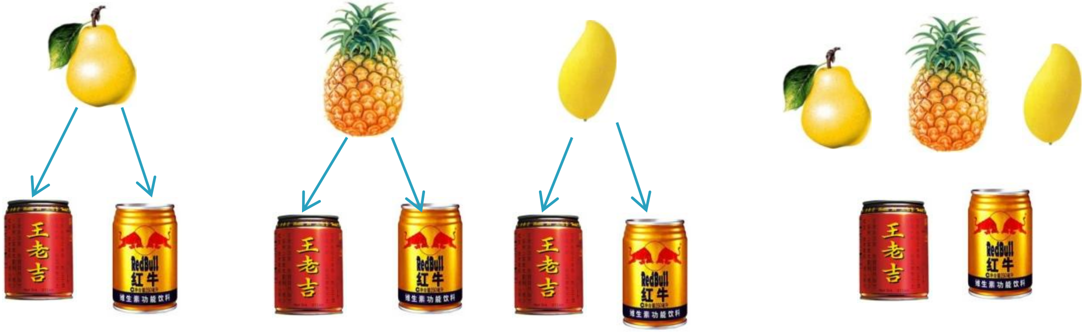
……

第 r 个步骤有n_r种方法.

则完成这件事总共有$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_r$种方法．

乘法原理

- 例如，小王要从三种不同水果和两种不同饮料中各选一个，他有多少种不同选法?



可以有3×2中选法.

排列和组合的区别

- 顺序不同是不同排列

- 组合不管顺序

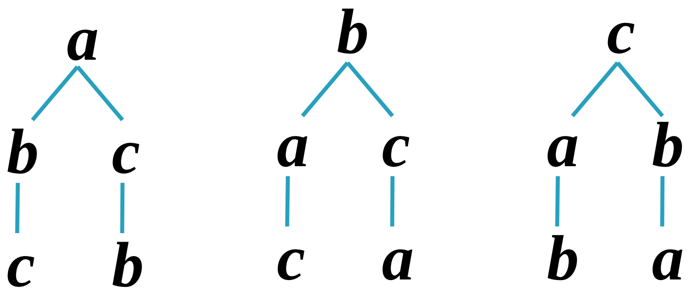
元素无重复排列

(1) 将n个不同元素按照一定次序排成一列，称为全排列, 全排列的个数为

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1.$$

例1 3个不同字母a, b, c的全排列个数为

$$3! = 3\times 2\times 1 = 6.$$



元素无重复排列

从3个不同的球中取出2个的排列有?种，

$$A_3^2 = 3\times 2=6.$$

元素无重复排列

(2) 从$\boldsymbol{n}$个不同元素中任取 $\boldsymbol{k}$个($\mathbf{1} \le \boldsymbol{k} \le \boldsymbol{n}$)元素排成一列，不同的排列总数为

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{n}$时，则为全排列

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

元素无重复排列

例2 5个小孩排成一排的方式有多少种?

解 $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$.

例3 将10本书任意放在书架上，求其指定的3本书靠在一起的排法有多少种?

解 $8!\times3!=241920$

元素允许重复的排列

(3) 从n个不同元素中取k个$(1 \le k \le n)$排成一列，

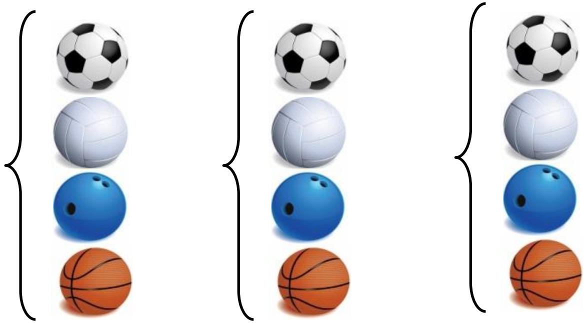
(元素允许重复) 不同排列的总数为

$$n \cdot n \cdots n = n^k$$

例如：从盒中有放回地取3个球

$n=4, k=3$

第1个　　第2个　　第3个



共有

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$

种可能取法.

组合

(1)组合:从n个不同元素中取 k（$1 \le k \le n$）个元素组成一组,(无次序)称为一个组合,所有组合的个数为

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^{n-k},$$

C_n^k常记作$\binom{n}{k}$，称为组合数.

$$\boxed{A_n^k = C_n^k \cdot k!}$$

组合

从3个不同的球中取出2个的组合有?种,

(无次序)

$$C_3^2=\frac{A_3^2}{2!}=\frac{3\times2}{2\times1}=3.$$

(2) n个不同元素分为k个$(1 \le k \le n)$不同组，每组元素个数分别为$r_1,r_2,\cdots,r_k$个的分法总数为

$$C_n^{r_1} \cdot C_{n-r_1}^{r_2} \cdots C_{r_k}^{r_k} = \frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$$

其中 $r_1 + r_2 + \cdots r_k = n.$

例4 将7个学生安排到一个三人间和两个双人间中住宿，问有多少种不同的住法？

解 问题转化为将7人分为3组，第1组有3人，第2组有2人，第3组有2人，不同住法总数为：

$$C_7^3 \cdot C_{7-3}^2 C_2^2 = \frac{7!}{3!2!2!} = 210.$$

古典概率的计算公式

- 在古典概型下，事件A的概率定义为：

$$P(A)=\frac{A\text{所含样本点数}}{S\text{含样本点总数}}.$$

古典概率的计算

例1 一批产品中有10个正品和2个次品，任意抽取两次，每次抽出一个，抽出后不放回，求第二次抽到次品的概率？

解 设 **A**=“第二次抽到次品”，则

$$P(A)=\frac{A_{10}^{1}A_{2}^{1}+A_{2}^{2}}{A_{12}^{2}}=\frac{10\times 2+2\times 1}{12\times 11}=\frac{1}{6}.$$

古典概率的计算

例2 将r个人随机地分配到n个房间里，设A_1= “某指定r个房间中各有一人”，A_2= “恰有r个房间中各有一人”，A_3= “某指定房间恰有k个人”，$k \le r$. 求 A_1，A_2，A_3的概率.

解

$$P(A_1)=\frac{r!}{n^r} \qquad P(A_2)=\frac{c_n^r r!}{n^r}$$

$$P(A_3)=\frac{c_r^k (n-1)^{r-k}}{n^r}$$

古典概率的计算

例3 袋中有a个黑球，b个白球，若随机地(不放回)把球一个接一个地摸出来，求A=“第k次摸出的球是黑球”的概率($k\leq a+b$).

解1 把$a+b$个球编号为1, 2, ⋯$a+b$，前a号球是黑球. 把$a+b$个球的一种排列作为一个样本点，则

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{(a+b)}$$

与k无关

古典概率的计算

解2　把第k次摸到的球号作为一个样本点，由等可能性

$$P(A)=\frac{a}{(a+b)}$$

与k无关

结论说明抽签与次序无关.

古典概率的性质

(1) $0 \le P(A) \le 1$;

(2) $P(S)=1$;

(3) 若事件A、B互斥，则

$P(A+B)=P(A)+P(B)$;

$$P(A)=\frac{A\text{所含样本点数}}{S\text{含样本点总数}}.$$

推广：若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互斥，则：

$$P(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n)$$

$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots\cdots P(A_n).$$

这是概率的加法公式或概率的有限可加性.

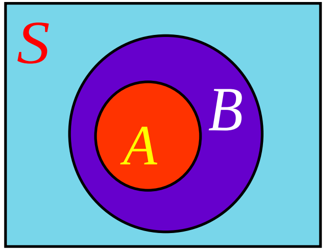
古典概率的性质

(4) $P(\bar{A})=1-P(A);$

(5) $P(\varnothing)=0;$

(6)若$A\subset B$,则 $P(A)\le P(B)$ (*)

且 $P(B-A)=P(B)-P(A)$ (**)



$A\cap(B-A)=\varnothing$

证明: $P(B)=P(A\cup(B-A))$

$$=P(A)+P(B-A)$$

移项得(**), 再由 $P(B-A)\ge 0$ 得（*）.

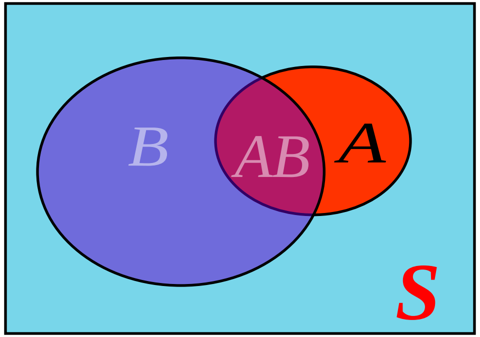
古典概率的性质

推广：$P(A-B)=P(A)-P(AB)$

(7)（一般概率加法公式）

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

证明



$$P(A\cup B)=P(A\cup(B-AB))$$

$$=P(A)+P(B-AB)$$

$$=P(A)+P(B)-P(AB).$$

$$A\cap(B-AB)=\varnothing$$

古典概率的性质

- 推广：

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$-P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

- 一般情形

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j)$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

例4 有r个人，设每个人的生日是365天的任何一天是等可能的，求事件“至少有两人生日相同”的概率.

解 设A=“至少有两人生日相同”，则

$\overline{A}$=“r 个人的生日都不相同”

$$P(\overline{A})=\frac{A_{365}^{r}}{(365)^{r}} \quad \boldsymbol{P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{A_{365}^{r}}{(365)^{r}}}$$

当$r=22$时，$P(A)=0.476$，$r=23$时，$P(A)=0.507$，

$r=50$时，$P(A)=0.97$.

谢 谢！