矩阵的初等变换

矩阵的初等变换是线性代数中一个重要的工具.

以下三种变换分别称为矩阵的第一、第二、第三种初等变换：

(i) 对换矩阵中第i, j两行(列)的位置，记作

$r_{ij}(c_{ij})$或$r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$

(ii) 用非零常数k乘第i行(列),记作$kr_i(kc_i)$.

(iii) 将矩阵的第j行(列)乘以常数k后加到第i行（列）对应元素上去,记作$r_i + kr_j (c_i + kc_j)$.

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为初等变换。

问题

矩阵的初等变换有几种？是什么？

矩阵的初等变换有什么作用？

初等变换可以简化矩阵，如将矩阵化为梯形阵。

例如：

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 8 & 2\\ 2 & 12 & -2 & 12\\ 1 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_3]{}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 4\\ 2 & 12 & -2 & 12\\ 2 & -3 & 8 & 2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-2r_1}}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 4\\ 0 & 6 & -4 & 4\\ 0 & -9 & 6 & -6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 4\\ 0 & 3 & -2 & 2\\ 0 & -3 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 4\\ 0 & 3 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

特别注意

利用初等变换将A化为B，A与B之间用记号$\rightarrow$或$\cong$连接。

练习

用初等变换将下列矩阵化为梯形阵。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 3 & 12 \\ 3 & -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

练习

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

练习

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 4 & -3 & 3 & 12\\ 3 & -1 & 1 & 9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & -11 & 11 & 0\\ 0 & -7 & 7 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

化梯形阵的问题

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-\frac{2}{3}r_1} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -3+\dfrac{8}{3} & 1-\dfrac{10}{3} \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{7}{3} \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}0 & 1 & -4 & 8\\ 2 & -3 & 2 & 1\\ 5 & -8 & 7 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -4 & 8\\ 5 & -8 & 7 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -4 & 8\\ 0 & -8+\dfrac{15}{2} & 7-5 & 1-\dfrac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -4 & 8\\ 0 & -\dfrac{1}{2} & 2 & -\dfrac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -4 & 8\\ 0 & -1 & 4 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -4 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

矩阵的等价

对矩阵A实行有限次初等变换得到矩阵B，则称矩阵A与B等价，记作 A ≅ B.

等价矩阵具有自反性、对称性、传递性。即：

$$A \cong A;\quad A \cong B \Rightarrow B \cong A;\quad A \cong B\,, B \cong C \Rightarrow A \cong C$$

$$A \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = I_{m \times n}$$

A的等价标准形

定理：任何一个矩阵都有等价标准形。

练习

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 2 & 0\\-1 & 0 & 3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

练习

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 4 & -3 & 3 & 12\\ 3 & -1 & 1 & 9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & -11 & 11 & 0\\ 0 & -7 & 7 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

求下面矩阵的等价标准形

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -8 & 8\\ -4 & 5 & 9 & -9\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -8 & 8\\ 0 & -3 & 13 & -9\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 4\\ 0 & -3 & 13 & -9\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-\frac{2}{3}r_1}\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 0 & -3+\dfrac{8}{3} & 1-\dfrac{10}{3}\\ 0 & -1 & -6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 0 & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{7}{3}\\ 0 & -1 & -6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & -1 & -6\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = I_{m\times n}$$

思考

等价标准形中1的个数与什么因素有关？