



哈爾濱工業大學

二维离散型随机变量



二维离散型随机变量



■ **定义1** 若二维随机变量 (X, Y) 所有可能取值是有限对或可列无限多对, 则称 (X, Y) 为二维离散型随机变量.

■ **定义2** 设 (X, Y) 的所有可能取值为 (x_i, y_j) , $(i, j = 1, 2, \dots)$, 称

$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, (i, j = 1, 2, \dots),$
为 (X, Y) 的分布列或 X 和 Y 的联合分布列.

二维离散型随机变量



(X,Y) 的分布列也可用列表法表示:

$\begin{array}{c} Y \\ \diagdown \\ X \end{array}$	y_1	y_2	\cdots	y_j	\cdots
x_1	p_{11}	p_{12}	\cdots	p_{1j}	\cdots
x_2	p_{21}	p_{22}	\cdots	p_{2j}	\cdots
\vdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots
x_i	p_{i1}	p_{i2}	\cdots	p_{ij}	\cdots
\vdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots

➤ (X,Y) 分布列的性质:

(1) $p_{ij} \geq 0 (i, j = 1, 2, \cdots);$

(2) $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1;$

(3) $P\{(X,Y) \in G\} = \sum_{(x_i, y_j) \in G} P(X = x_i, Y = y_j)$

$= \sum_{(x_i, y_j) \in G} p_{ij}$



例1 一盒中有4个球，分别标有数字1, 2, 2, 3, 现无放回地取两次，每次取一个，以 X, Y 分别表示第一次和第二次取出的球的标号，求 (X, Y) 的分布列和 $P(X \geq 3, Y \geq 2)$.

解 X, Y 的可能取值均为1, 2, 3,

由**乘法定理** $P(AB) = P(A)P(B|A)$ 得

$$P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1 | X = 1) = 0;$$

$$\text{同理 } P(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6},$$

$$P(X = 1, Y = 3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}, \quad P(X = 2, Y = 1) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$



例1 一盒中有4个球，分别标有数字1, 2, 2, 3, 现无放回地取两次，每次取一个，以 X, Y 分别表示第一次和第二次取出的球的标号，求 (X, Y) 的分布列和 $P(X \geq 3, Y \geq 2)$.

解 $P(X = 2, Y = 2) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$

$$P(X = 2, Y = 3) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$P(X = 3, Y = 1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12},$$

$$P(X = 3, Y = 2) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6},$$

$$P(X = 3, Y = 3) = 0.$$

$\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}$	1	2	3
1	0	1/6	1/12
2	1/6	1/6	1/6
3	1/12	1/6	0

$$P(X \geq 3, Y \geq 2)$$

$$= 1/6 + 0 = 1/6.$$

X, Y 的边缘分布列



设离散型随机变量 (X, Y) 的分布列为

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \cdots),$$

■ X 的边缘分布列为

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} \stackrel{\Delta}{=} p_{i\cdot}$$

■ Y 的边缘分布列为

$$(i = 1, 2, \cdots),$$

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij} \stackrel{\Delta}{=} p_{\cdot j}$$
$$(j = 1, 2, \cdots).$$

X, Y 的边缘分布列



$X \backslash Y$	y_1	y_2	\cdots	y_j	\cdots	$P(X = x_i)$
x_1	p_{11}	p_{12}	\cdots	p_{1j}	\cdots	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	\cdots	p_{2j}	\cdots	$p_{2\cdot}$
\vdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\vdots
x_i	p_{i1}	p_{i2}	\cdots	p_{ij}	\cdots	$p_{i\cdot}$
\vdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\vdots
$P(Y = y_j)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	\cdots	$p_{\cdot j}$	\cdots	1

联合分布



边缘分布



例2 某箱装有100件产品，其中一、二和三等品分别为80、10和10件，现在从中随机抽取一件，记

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{抽到}i\text{等品,} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3).$$

求(1) $P(X_1=1|X_3=0)$;

(2) (X_1, X_2) 的分布列及边缘分布列;

(3) $P(X_1=X_2)$, $P(X_1+X_2=1)$, $P(X_1+X_2<1)$.

解 (1) $P(X_1=1|X_3=0)=80/90=8/9$,



例2 某箱装有100件产品，其中一、二和三等品分别为80、10和10件，现在从中随机抽取一件，记

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{抽到} i \text{等品,} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3).$$

求(2) (X_1, X_2) 的分布列及边缘分布列;

解 (2) X_1, X_2 的取值均为 0, 1.

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P(X_3 = 1) = 0.1,$$

$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(X_2 = 1) = 0.1,$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(X_1 = 1) = 0.8,$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = 0.$$

X_1 X_2	0	1	$p_{\cdot j}$
0	0.1	0.8	0.9
1	0.1	0	0.1
$p_{i \cdot}$	0.2	0.8	1



例2 某箱装有100件产品，其中一、二和三等品分别为80、10和10件，现在从中随机抽取一件，记

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{抽到} i \text{等品,} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3).$$

求 (3) $P(X_1=X_2)$, $P(X_1+X_2=1)$, $P(X_1+X_2<1)$;

解 (3) $P(X_1 = X_2) = P(X_1 = X_2 = 0)$
 $+ P(X_1 = X_2 = 1) = 0.1,$

X_1 X_2	0	1	$p_{\cdot j}$
0	0.1	0.8	0.9
1	0.1	0	0.1
$p_{i \cdot}$	0.2	0.8	1

$P(X_1 + X_2 = 1) = P(X_1 = 0, X_2 = 1)$
 $+ P(X_1 = 1, X_2 = 0) = 0.1 + 0.8 = 0.9,$

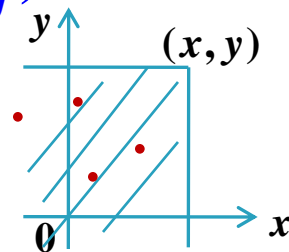
$P(X_1 + X_2 < 1) = P(X_1 = X_2 = 0) = 0.1.$

■ 二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布函数

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$$= \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$= \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}$$



和式是对所有满足 $x_i \leq x, y_j \leq y$ 的 i, j 求和.



谢 谢！