行列式的性质

设$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 则转置行列式为

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质1: $D = D^T$

由行列式的定义即可证明这条性质。

在行列式中，行和列的位置是对称的，

对行成立的，对列也成立。

因此下面只介绍关于行列式的行的性质。

性质2：互换两行，行列式变号。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{array}{l} a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32} \\ -a_{11}a_{22}a_{33}-a_{13}a_{21}a_{32}-a_{12}a_{23}a_{31} \end{array}$$

$$=-a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

推论：若行列式中有两行元素完全相同，则行列式为零。

设A_{ij}为元素a_{ij}的代数余子式，则有：

$$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=0 \quad (i\neq j)$$

$$a_{1j}A_{1i}+a_{2j}A_{2i}+\cdots+a_{nj}A_{ni}=0 \quad (i\neq j)$$

怎么证明呢？ 我们考虑下面的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

两行相同行列式的值为**0.**

将行列式按第j行展开.

$$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=\begin{cases}D, & (i=j).\\ 0, & (i\neq j).\end{cases}$$

$$a_{1j}A_{1i}+a_{2j}A_{2i}+\cdots+a_{nj}A_{ni}=\begin{cases}D, & (i=j).\\ 0, & (i\neq j).\end{cases}$$

这是非常有用的两个公式，应该记住。

性质3：用数k乘行列式某一行中所有元素，等于用k乘此行列式。即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论：某一行的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面。

$$\begin{vmatrix} -8 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 4\begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 8 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

性质4：行列式某一行元素加上另一行对应元素的k倍，行列式的值不变。即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \cdots & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \cdots & \vdots \\
a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \cdots & \vdots \\
ka_{j1} & \cdots & ka_{jn} \\
\vdots & \cdots & \vdots \\
a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

问题

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+b_1 & \cdots & a_{in}+b_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质5：若行列式某一行的元素是两数之和，则行列式可拆成两个行列式的和。

推论：若行列式某一行的元素都是m个元素的和，则行列式可以写成m个行列式的和。

练习

写出行列式的性质。

证明你写出的行列式的性质。

性质2：互换两行，行列式变号。

性质3：用数k乘行列式某一行中所有元素，等于用k乘此行列式。

性质4：行列式某一行元素加上另一行对应元素的k倍，行列式的值不变。

最重要的三个性质。