矩阵的秩

1.k阶子式：在$A_{m\times n}$中任取k行k列，位于这些行、列相交处的k^2个元素，按原次序组成的k阶行列式，称为矩阵A的k阶子式.

一般地：

$$\boxed{m\times n\text{矩阵}A\text{的}k\text{阶子式有}C_m^k C_n^k\text{个。}}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

共有**4**个**3**阶子式。

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 2 & 12 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 12 & 12 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 2 & -2 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -3 & 8 & 2 \\ 12 & -2 & 12 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

计算知，这**4**个**3**阶子式全为零。

矩阵的秩

2.秩的定义:矩阵 A 的所有不等于零的子式的最高阶数称为矩阵 A 的秩.记作 $r(A)$.

显然:$r(O)=0$;只要A不是零矩阵, 就有 $r(A)>0$.并且:

(i) $r(A_{m\times n})\le \min\{m,n\}$;

(ii) 若有一个r阶子式不为零，则$r(A)\ge r$;

若所有的r阶子式全为零，则$r(A)<r$.

(iii) $r(A^T)=r(A)$.

(iv) 设$A_{n\times n}$, 若$|A|\ne 0$, 则$r(A)=n$; 若$|A|=0$, 则$r(A)<n$.

例1:求矩阵的秩:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

有不为零的**2**阶子式 $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}=24+6=30.$

$\Rightarrow r(A)\geq 2.$

共有**4**个**3**阶子式:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 2 & 12 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 12 & 12 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 2 & -2 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -3 & 8 & 2 \\ 12 & -2 & 12 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

计算知，这**4**个**3**阶子式全为零。 $\Rightarrow r(A)=2.$

例2:求矩阵A的秩.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$(a_{11}a_{22}\cdots a_{rr}\neq 0)$$

显然 $r(A)=r.$

受到什么启示?

任意一个矩阵都可经初等变换化为梯形阵.

梯形阵的秩等于其非零行的行数.

只需考虑矩阵经初等变换后其秩是否不变?

回答是肯定的，我们有：

定理:矩阵经初等变换后其秩不变.

回忆初等变换

(i) 对换矩阵中第$i,\ j$两行(列)的位置，记作

$r_{ij}\,(c_{ij}\,)$或$r_i \leftrightarrow r_j\,(c_i \leftrightarrow c_j\,)$

(ii) 用非零常数k乘第i行(列),记作$kr_i\,(kc_i\,)$.

(iii) 将矩阵的第j行(列)乘以常数k后加到第i行（列）对应元素上去,记作$r_i + kr_j\,(c_i + kc_j\,)$.

自己完成定理的证明。

秩的求法：初等变换法。

例3:求下面矩阵的秩:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

秩的求法：初等变换法。

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 8 & 2\\ 2 & 12 & -2 & 12\\ 1 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1\to r_3]{}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 4\\ 2 & 12 & -2 & 12\\ 2 & -3 & 8 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 4\\ 0 & 6 & -4 & 4\\ 0 & -9 & 6 & -6\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 4\\ 0 & 6 & -4 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow r(A)=2$$

$$B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\1&2&0&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-2&-2&-2\\0&-7&-10&-12\\0&0&-3&-9\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&1\\0&-7&-10&-12\\0&0&-3&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&1\\0&0&-3&-5\\0&0&-3&-9\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&1\\0&0&-3&-5\\0&0&0&-4\end{pmatrix}\quad\Rightarrow r(B)=4$$

例4:

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 4 & t & 3 & 12\\ 3 & -1 & 1 & 9\end{pmatrix}，t\text{为何值时，}r(C)<3?$$

$$C\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & t-8 & 11 & 0\\ 0 & -7 & 7 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & t-8 & 11 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & t+3 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow t=-3\text{时},\ r(C)<3.$$

练习

设$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$，若$r(A)=3$，求$a$.

解：因为$r(A)=3$，所以$|A|=0$，即

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+3)(a-1)^3=0.$$

当$a=1$时，$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$r(A)=1$;

当 $a=-3$ 时，$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$,

由于 A 的 3 阶子式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$,

$r(A)=3$, 故 $a=-3$.

思考

为什么不用初等变换做？

矩阵的秩是矩阵的一个重要的数字特征。

显然，若两个矩阵有相同的秩，则这两个矩阵有相同的标准形，从而等价；反之，若两个矩阵等价，则它们的秩相同。

即有：

定理：矩阵A与B等价的充要条件是$r(A)=r(B)$.

满秩矩阵

定义：若方阵A的秩与其阶数相等，则称A为满秩矩阵；否则称为降秩矩阵。

定理：设A为满秩阵,则A的标准形为同阶单位阵 E .即

$$A \cong E$$

定义：若方阵A的行列式$|A| \neq 0$，则称A为非奇异矩阵；若$|A|=0$，则称为A为奇异矩阵。

满秩$\Leftrightarrow$非奇异　　降秩$\Leftrightarrow$奇异