



哈爾濱工業大學

## 二维随机变量函数的分布





对二维随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ ,  
已知二维随机变量 $(X,Y)$ 的分布,  
如何求 $Z=g(X,Y)$ 的分布?

# 离散型随机变量函数的分布



设二维离散型随机变量 $(X, Y)$ 的分布列为

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}, \quad i, j=1, 2, \dots$$

则 $Z=g(X, Y)$ 是一维离散型随机变量，用

$z_k=g(x_i, y_j) (k=1, 2, \dots)$ 表示 $Z$ 的取值，则 $Z$ 的分布列

$$P(Z=z_k)=P\{g(X, Y)=z_k\}=\sum_{g(X, Y)=z_k} P(X=x_i, Y=y_j), \\ k=1, 2, \dots$$



**例1** 设 $X$ 与 $Y$ 的联合分布列为  
 $Z=X+Y, W=XY$ , 求 $Z, W$ 的分布列.

$Y \backslash X$	1	-2
-1	0.1	0.2
2	0.3	0.4

**解**  $Z$ 的所有取值为-3, 0, 3

$$P(Z = -3) = P(X + Y = -3) = P(X = -2, Y = -1) = 0.2,$$

$$P(Z = 0) = P(X + Y = 0) = P(X = 1, Y = -1)$$

$$= P(X = -2, Y = 2) = 0.5,$$

$$P(Z = 3) = P(X + Y = 3) = P(X = 1, Y = 2) = 0.3,$$

$Z$	-3	0	3
$P$	0.2	0.5	0.3

$W$	-4	-1	2
$P$	0.4	0.5	0.1



**例2** 设 $X$ 与 $Y$ 的联合分布列为  
 $U=\max(X, Y)$ ,  $V=\min(X, Y)$ ,  
求 $U$ 与  $V$ 的联合分布列.

$Y \backslash X$	1	-2
-1	0.1	0.2
2	0.3	0.4

**解**  $U$ 的所有取值为-1, 1, 2,

$V$ 的所有取值为-2, -1, 1 .

$$P(U = -1, V = -2) = P(X = -2, Y = -1) = 0.2,$$

$$P(U = -1, V = -1) = 0, P(U = -1, V = 1) = 0,$$

$$P(U = 1, V = -2) = 0, P(U = V = 1) = 0,$$

$$P(U = 1, V = -1) = P(X = 1, Y = -1) = 0.1,$$

$$P(U = 2, V = -2) = P(X = -2, Y = 2) = 0.4, P(U = 2, V = -1) = 0,$$

$$P(U = 2, V = 1) = P(X = 1, Y = 2) = 0.3.$$

$V \backslash U$	-1	1	2
-2	0.2	0	0.4
-1	0	0.1	0
1	0	0	0.3



例3 设随机变量  $Z \sim U[-2, 2]$ , 随机变量

$$X = \begin{cases} -1, & Z \leq -1, \\ 1, & Z > -1, \end{cases} \quad Y = \begin{cases} -1, & Z \leq 1, \\ 1, & Z > 1. \end{cases}$$

求  $(X, Y)$  的分布列.

解  $Z \sim U[-2, 2]$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1/4, & -2 \leq z \leq 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$Y \backslash X$	-1	1
-1	1/4	1/2
1	0	1/4

$$P(X = Y = -1) = P(Z \leq -1, Z \leq 1) = P(Z \leq -1) = \int_{-2}^{-1} 1/4 dz = 1/4,$$

$$P(X = -1, Y = 1) = P(Z \leq -1, Z > 1) = 0,$$

$$P(X = 1, Y = -1) = P(-1 < Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = \int_{-1}^1 1/4 dz = 1/2,$$

$$P(X = Y = 1) = P(Z > -1, Z > 1) = P(Z > 1) = \int_1^2 1/4 dz = 1/4.$$



**例4** 若 $X$ 和 $Y$ 相互独立, 它们分别服从参数为  $\lambda_1, \lambda_2$  的泊松分布, 证明 $Z=X+Y$ 服从参数为  $\lambda_1 + \lambda_2$  的泊松分布.

**证明** 由 $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$ 得

$$P(X = i) = \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$P(X = j) = \frac{\lambda_1^j}{j!} e^{-\lambda_1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$



**例4** 若 $X$ 和 $Y$ 相互独立, 它们分别服从参数为  $\lambda_1, \lambda_2$  的泊松分布, 证明 $Z=X+Y$ 服从参数为  $\lambda_1 + \lambda_2$  的泊松分布.

$$\begin{aligned}\text{证明 } P(Z=k) &= P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^k P(X=i, Y=k-i) \\ &= \sum_{i=0}^k P(X=i)P(Y=k-i) = \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{(k-i)}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2} \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{(k-i)}}{i!(k-i)!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda_1^i \lambda_2^{(k-i)} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^k C_k^i \lambda_1^i \lambda_2^{(k-i)} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \quad (k=0,1,\cdots)\end{aligned}$$





## ✚ 结论

1.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立且  $X_i \sim P(\lambda_i) (i = 1, 2, \dots, n)$  则

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim P(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n).$$

2.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立且均服  $B(1, p)$ , 则

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim B(n, p).$$

3.  $X_1, X_2, \dots, X_k$  独立且  $X_i \sim B(n_i, p) (i = 1, 2, \dots, k)$  则

$$X_1 + X_2 + \dots + X_k \sim B(n_1 + n_2 + \dots + n_k, p).$$

# 连续型随机变量函数的分布



✚ 设  $(X, Y)$  是二维连续型随机变量，其概率密度为  $f(x, y)$ ,  $Z=g(X, Y)$ , 求  $Z$  的概率密度  $f_Z(z)$  或分布函数  $F_Z(z)$ ?

## 分布函数法

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\{g(X, Y) \leq z\}$$

$$= \iint_{g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy$$

$$f_Z(z) = F'_Z(z).$$

例5 二维随机变量 $(X, Y)$ 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ .

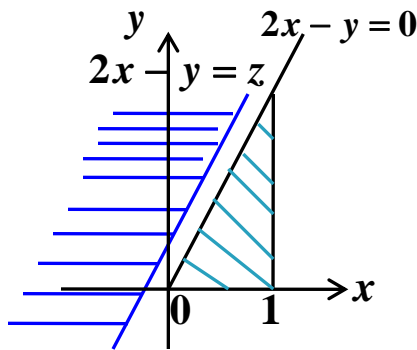
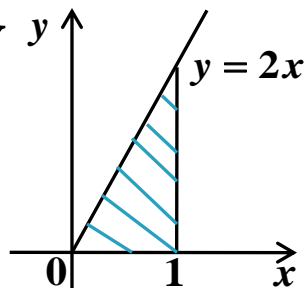
解  $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(2X - Y \leq z)$ .

$$= \iint_{2x - y \leq z} f(x, y) dx dy$$

当 $z \leq 0$ 时, 画 $2x - y \leq z$  的区域图,

与 $f(x, y)$ 的非零区域无交集,

$f(x, y) = 0$ , 从而 $F_Z(z) = 0$ .



例5 二维随机变量 $(X, Y)$ 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

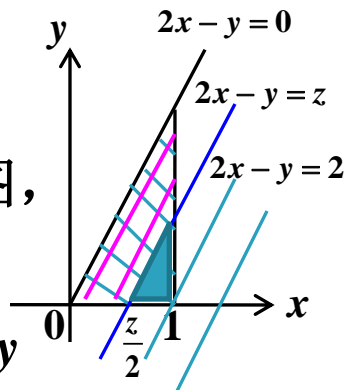
求 $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ .

解 当 $0 < z < 2$ 时, 画 $2x - y \leq z$ 的区域图,

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(2X - Y \leq z).$$

$$\begin{aligned} &= \iint_{2x-y \leq z} f(x, y) dx dy = 1 - \iint_{2x-y > z} f(x, y) dx dy \\ &= 1 - \int_{z/2}^1 dx \int_0^{2x-z} 1 dy = 1 - (1 - z/2)^2 = z - z^2/4. \end{aligned}$$

当 $z \geq 2$ 时,  $F_Z(z) = 1$ .





例5 二维随机变量 $(X, Y)$ 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ .

解

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ z - z^2 / 4, & 0 < z < 2, \\ 1, & z \geq 2. \end{cases}$$

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 1 - z / 2, & 0 < z < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

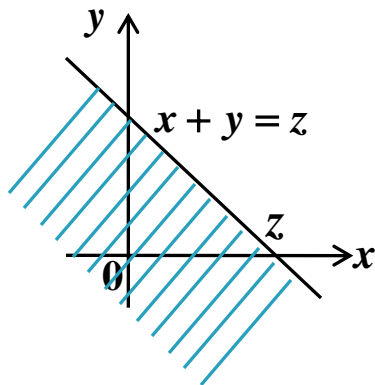
# 连续型随机变量 $Z=X+Y$ 的分布

➤ 设 $X$ 和 $Y$ 的联合密度为  $f(x,y)$ , 则 $Z=X+Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = \iint_{x+y \leq z} f(x,y) dx dy$$

固定 $z, x$ ,  
令 $y = u - x$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y) dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^z f(x, u-x) du \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^z \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, u-x) dx \right) du \\ &= \int_{-\infty}^z f_Z(u) du. \end{aligned}$$





故 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx.$$

由 $X$ 和 $Y$ 的对称性,  $f_Z(z)$ 又可写成

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx.$$

**卷积公式** 当 $X$ 与 $Y$ 独立时, 称 $Z=X+Y$ 的概率

密度公式为**卷积公式**, 即

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx,$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy.$$



**例6** 设  $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$ , 且  $X$  和  $Y$  独立,  
则  $Z = X + Y \sim N(0,2)$ .

**证明** 由卷积公式有  $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2} dx$$

$x - \frac{z}{2} = \frac{t}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} dt = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2}} e^{-\frac{(z-0)^2}{2(\sqrt{2})^2}}.$$

即  $Z = X + Y \sim N(0,2)$ .





✚ **推广** 设  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 且  $X$  和  $Y$  独立,  
则  $Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ .

✚ **一般结论**  $n$  个独立正态变量的线性组合  
仍为正态分布, 即

设  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 且他们独立, 则其  
线性组合  $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n + a_0 \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

其中  $\mu = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \dots + a_n \mu_n + a_0$ ,

$$\sigma^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2.$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$  是不全为零的常数.

例7 设 $X$ 与 $Y$ 独立, $X, Y$ 的概率密度分别为

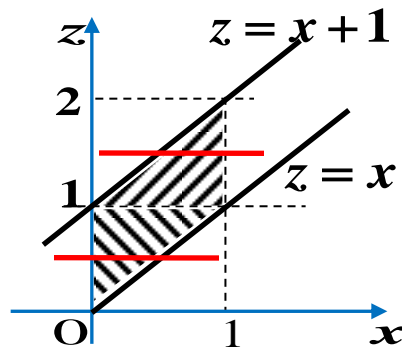
$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ .

解1 由卷积公式  $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$

$$f_X(x)f_Y(z-x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z-x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z 2x dx = z^2, & 0 \leq z < 1, \\ \int_{z-1}^1 2x dx = 2z - z^2, & 1 \leq z < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



例7 设 $X$ 与 $Y$ 独立, $X, Y$ 的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ .

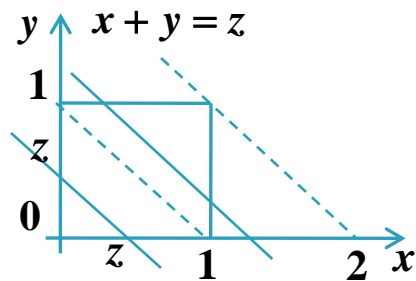
解2 分布函数法

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z)$$

$$= \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy$$

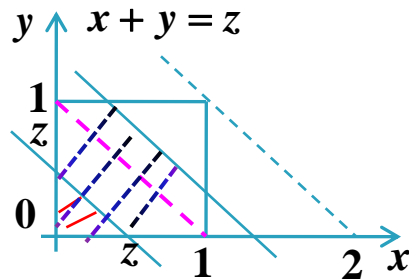
$$= \iint_{x+y \leq z} f_X(x) f_Y(y) dx dy$$

$$f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



## 解2 分布函数法

$$f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



$$F_Z(z) = \iint_{x+y \leq z} f_X(x)f_Y(y) dx dy$$

当  $z < 0$  时,  $F_Z(z) = 0$ ;

$$\text{当 } 0 \leq z < 1 \text{ 时, } F_Z(z) = \int_0^z 2x dx \int_0^{z-x} dy = \frac{z^3}{3},$$

$$\text{当 } 1 \leq z < 2 \text{ 时, } F_Z(z) = 1 - \int_{z-1}^1 dy \int_{z-y}^1 2x dx = z^2 - \frac{z^3}{3} - \frac{1}{3},$$

当  $z \geq 2$  时,  $F_Z(z) = 1$ .



$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{z^3}{3}, & 0 \leq z < 1, \\ z^2 - \frac{z^3}{3} - \frac{1}{3}, & 1 \leq z < 2, \\ 1, & z \geq 2. \end{cases}$$

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} z^2, & 0 \leq z < 1, \\ 2z - z^2, & 1 \leq z < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



**例8** 设 $P(X=1)=0.3, P(X=2)=0.7$ ,  $Y$ 的概率密度为 $f_Y(y)$ ,  $X$ 与 $Y$ 独立, 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

**解**

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) \\ &= P(X = 1, X + Y \leq z) + P(X = 2, X + Y \leq z) \\ &= P(X = 1, Y \leq z - 1) + P(X = 2, Y \leq z - 2) \\ &= P(X = 1)P(Y \leq z - 1 | X = 1) \\ &\quad + P(X = 2)P(Y \leq z - 2 | X = 2) \\ &= 0.3P(Y \leq z - 1) + 0.7P(Y \leq z - 2) \\ &= 0.3F_Y(z - 1) + 0.7F_Y(z - 2) \\ f_Z(z) &= F'_Z(z) = 0.3f_Y(z - 1) + 0.7f_Y(z - 2). \end{aligned}$$

# 瑞利分布



例9 设 $X$ 与 $Y$ 独立，且服从同一正态分布 $N(0, \sigma^2)$ ，求  
 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的分布.

解  $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\sqrt{X^2 + Y^2} \leq z)$

当 $z \leq 0$ 时， $F_Z(z) = 0$ ,

当 $z > 0$ 时， $F_Z(z) = \iint_{\sqrt{x^2 + y^2} \leq z} f(x, y) dx dy$

$$= \iint_{\sqrt{x^2 + y^2} \leq z} f_X(x) f_Y(y) dx dy = \iint_{\sqrt{x^2 + y^2} \leq z} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) dx dy$$

$$\stackrel{\substack{x=r \cos \theta \\ y=r \sin \theta}}{=} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) r dr = 1 - \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right).$$



$$\therefore F_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$
$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

- 此分布称为瑞利分布.



## Max(X,Y)及min(X,Y)的分布



✚ 设 $X, Y$ 是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ ，求 $M=\max(X, Y)$ 及 $N=\min(X, Y)$ 的分布函数 $F_M(z)$ 和 $F_N(z)$ 。

$M=\max(X, Y)$ 分布函数为

$$\begin{aligned} F_M(z) &= P(M \leq z) = P(\max(X, Y) \leq z) \\ &= P(X \leq z, Y \leq z) \stackrel{\text{独立}}{=} P(X \leq z)P(Y \leq z), \end{aligned}$$

$$\boxed{F_M(z) = F_X(z)F_Y(z).}$$



✚  $N=\min(X,Y)$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_N(z) &= P(N \leq z) = P(\min(X, Y) \leq z) \\&= 1 - P(\min(X, Y) > z) \\&= 1 - P(X > z, Y > z) \\&\stackrel{\text{独立}}{=} 1 - P(X > z)P(Y > z),\end{aligned}$$

$$F_N(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)].$$

# $n$ 个独立随机变量的最值分布



✚ 设 $X_1, \dots, X_n$ 是 $n$ 个相互独立的随机变量, 它们的分布函数分别为  $F_{X_i}(x_i), i = 1, 2, \dots, n$ .

$M = \max(X_1, \dots, X_n)$ 和 $N = \min(X_1, \dots, X_n)$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)] \cdots [1 - F_{X_n}(z)].$$

若 $X_1, \dots, X_n$ 独立同分布于相同的分布函数 $F(z)$ , 则

$$F_{\max}(z) = [F(z)]^n,$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n.$$

$$f_{\max}(z) = n[F(z)]^{n-1}f(z),$$

$$f_{\min}(z) = n[1 - F(z)]^{n-1}f(z).$$

$X_i$ 是连续随机变量且有相同概率密度 $f(z)$



**例10** 设电子仪器由两个相互独立的电子装置 $L_1, L_2$ 组成, 组成方式有两种(1)  $L_1$ 与 $L_2$ 串联; (2)  $L_1$ 与 $L_2$ 并联. 已知 $L_1$ 与 $L_2$ 的寿命分别为 $X$ 与 $Y$ , 其分布函数分别为

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

其中  $\alpha > 0, \beta > 0$ . 在两种联结方式下, 分别求仪器寿命 $Z$ 的概率密度.



解 (1)  $L_1$ 与 $L_2$ 串联: 

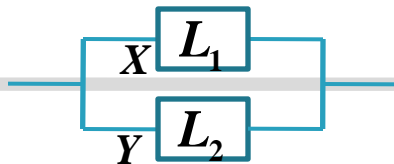
当 $L_1$ 与 $L_2$ 有一个损坏时, 仪器就停止工作, 所以  
仪器寿命为  $Z=\min(X,Y)$ . 已知 $X,Y$ 的分布函数

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

则 $Z$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)] = \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$



(2)  $L_1$ 与 $L_2$ 并联.

当 $L_1$ 与 $L_2$ 都损坏时, 仪器才停止工作, 所以  
仪器寿命为  $Z=\max(X,Y)$ . 已知 $X,Y$ 的分布函数

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

则 $Z$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z) = \begin{cases} (1 - e^{-\alpha z})(1 - e^{-\beta z}), & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$
$$f_Z(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha + \beta)e^{-(\alpha + \beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$



谢 谢！