

向量组的极大无关组

定义1: 设 向量组 T 的部分向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 满足

- (i) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关;
- (ii) T 中向量均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示。

或 T 中任一向量 α . $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关。

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量组 T 的一个 极大线性无关组, 简称 极大无关组。

极大无关组的含义有两层: 1. 无关性; 2. 极大性。

注: 1. 线性无关向量组的极大无关组就是其本身;

2. 向量组与其极大无关组等价;

3. 同一个向量组的极大无关组不惟一, 但它们之间是等价的。

例1:求向量组的极大无关组.

$$\alpha_1 = (1, 2, -1), \alpha_2 = (2, -3, 1), \alpha_3 = (4, 1, -1).$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\therefore r(A) = 2 < 3 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关。

但 α_1, α_2 线性无关, $\therefore \alpha_1, \alpha_2$ 是一个极大无关组;

α_1, α_3 也线性无关, $\therefore \alpha_1, \alpha_3$ 也是一个极大无关组。

问题

极大无关组是不唯一的, 所含个数是否相同?

极大无关组的性质

定理1: 设有两个 n 维向量组

$$(I) \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \quad (II) \quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s,$$

若向量组(I)线性无关, 且可由向量组(II)线性表示, 则 $r \leq s$.

证: 设

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \\ O \\ O \\ \vdots \\ O \end{pmatrix}.$$

$$\therefore r = r(A) \leq r(C) \leq s.$$

推论1: 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 且 $r > s$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关。

推论2: 任意两个线性无关的等价向量组所含向量的个数相等。

定理2: 一个向量组的任意两个极大无关组所含向量的个数相等。

向量组的秩

定义： 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的极大无关组所含向量的个数，称为向量组的秩，记为 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$.

注： (1) 线性无关的向量组的秩=向量的个数。
(2) 向量组线性无关 \Leftrightarrow 秩=向量个数。

定理3： 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示，则

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \leq r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$$

复习

向量组的等价

1.定义1: 设有两个 n 维向量组 $(I): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$

$(II): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$

若向量组 (I) 中每个向量都可由向量组 (II) 线性表示, 则称向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表示;

若向量组 (I) 与向量组 (II) 可以互相线性表示, 则称向量组 (I) 与向量组 (II) 等价。

推论: 等价的向量组有相同的秩。

你能举一个反例吗?

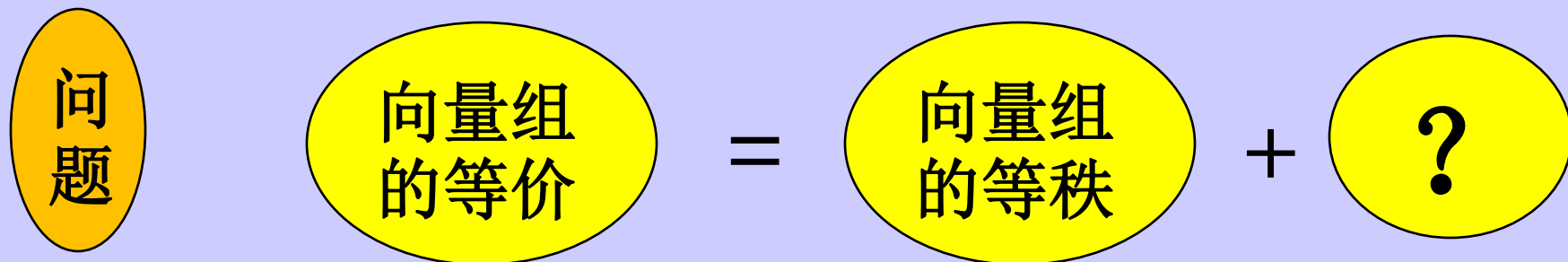
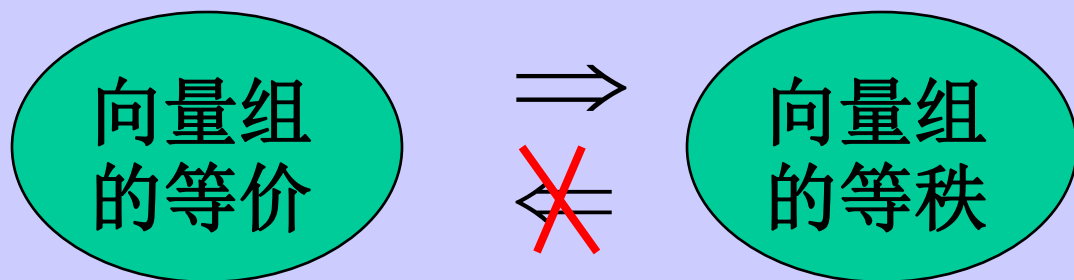
必须注意: 有相同秩的两个向量组不一定等价。

推论：等价的向量组有相同的秩。反之不对。

即：有相同秩的两个向量组不一定等价。

$$\alpha_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \beta_1 = (0, 0, 1, 0), \quad r(\alpha_1, \alpha_2) = 2 = r(\beta_1, \beta_2).$$

$$\alpha_2 = (0, 1, 0, 0), \quad \beta_2 = (0, 0, 0, 1). \quad \text{但}\{\alpha_1, \alpha_2\}\text{与}\{\beta_1, \beta_2\}\text{不等价。}$$



例2: 设向量组 e_1, e_2, \dots, e_n 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示,
求 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. $= n$

例3: 设有两个 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关且

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix}$$

证明: 若 $r(K) = s$, 则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关。

$r(K) = s \Rightarrow K$ 可逆, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 表示,

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 等价。