# 向量组的线性相关性

## 一、线性相关性

**1.定义:** 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，若存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0},$$

则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关。否则，称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关。

设$\alpha_1=(1,2,-1),\alpha_2=(2,-3,1),\alpha_3=(4,1,-1)$，证明:

$\alpha_3$是$\alpha_1$, $\alpha_2$的线性组合。

$$\Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{是线性相关的。}$$

**注** **(1) 当向量组只含一个向量时,**

**若该向量是零向量,则它线性相关;** $\mathbf{1 \cdot 0 = 0}$.

**若该向量是非零向量,则它线性无关.**

$$k\alpha = 0, \alpha \neq 0, \Rightarrow k = 0.$$

**(2) 两个向量线性相关的充要条件是其对应分量成比例.**

$k_1\alpha + k_2\beta = 0, \Rightarrow k_1\alpha = -k_2\beta.$ 若$k_1 \neq 0, \Rightarrow \alpha = -\dfrac{k_2}{k_1}\beta.$

$$\alpha = -\frac{k_2}{k_1}\beta = k\beta.$$

设$\alpha_1 = (1,2,-1), \alpha_2 = (2,-3,1), \alpha_3 = (4,1,-1)$， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

中任两个向量线性无关。

(1) 当向量组只含一个向量时,若该向量是零向量,则它线性相关;若该向量是非零向量,则它线性无关.

(2) 两个向量线性相关的充要条件是其对应分量成比例.

(3) 任一含有零向量的向量组线性相关.

3.讨论向量组的相关性:

例1：讨论$\alpha_1=(1,2,-1),\alpha_2=(2,-3,1),\alpha_3=(4,1,-1)$的相关性。

解：设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

$$\Rightarrow k_1+2k_2+4k_3=0,$$

$$2k_1-3k_2+k_3=0,$$ 系数行列式为

$$-k_1+k_2-k_3=0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=3-2+8-12+4-1=0.$$

故 方程组有非零解，即有非零的数 $k_1,k_2,k_3$ 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0.$$

$\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关。

例2：设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$，讨论向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的相关性。

解：设$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，即

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0.$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} k_1+k_3&=0,\\ k_1+k_2&=0,\\ k_2+k_3&=0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$，$\Rightarrow\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关。

## 练习

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，且

$$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m,$$

证明向量组 $\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\ \beta-\alpha_m$ 线性无关 $(m>1)$.

证：设 $k_1(\beta-\alpha_1)+k_2(\beta-\alpha_2)+\cdots+k_m(\beta-\alpha_m)=0$

由 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m \Rightarrow$

$$k_1(\alpha_2+\cdots+\alpha_m)+k_2(\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_m)+k_m(\alpha_1+\cdots+\alpha_{m-1})=0.$$

即：$(k_2+\cdots+k_m)\alpha_1+(k_1+k_3+\cdots+k_m)\alpha_2+(k_1+\cdots+k_{m-1})\alpha_m=0.$

$$\begin{cases} k_2+\cdots+k_m=0, \\ k_1+k_3+\cdots+k_m=0, \\ \quad\vdots \\ k_1+\cdots+k_{m-1}=0. \end{cases}$$

系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(m-1)(-1)^{m-1}\neq 0.$$

$(m>1)$

$\therefore$ 向量组 $\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\ \beta-\alpha_m$ 线性无关。