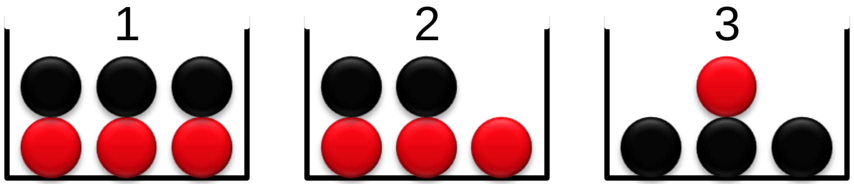
哈爾濱工業大學

第9讲 贝叶斯公式

贝叶斯公式(Bayes)

例3 如图，



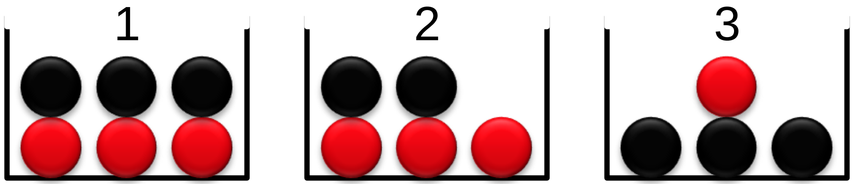
从任一箱中任意摸出一球，发现是红球，求该球取自1号箱的概率.

解 设A_i = “球取自i号箱”， $i = 1,2,3.$

B = “取到红球”， 求$P(A_1|B)$

贝叶斯公式(Bayes)

例3 如图，



解 设A_i = “球取自i号箱”， $i = 1,2,3.$

B = “取到红球”， 则所求概率为

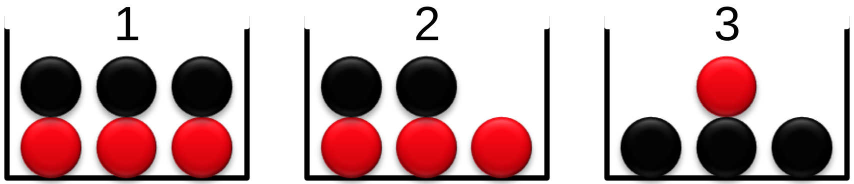
$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1B)}{P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)}$$

$$= \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{\sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(B \mid A_k)}$$

运用全概率公式计算$P(B)$

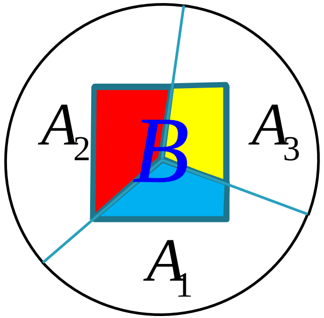
贝叶斯公式(Bayes)

例3 如图，



解 设 A_i = “球取自 i 号箱”， $i = 1,2,3.$

B = “取到红球”， 则所求概率为



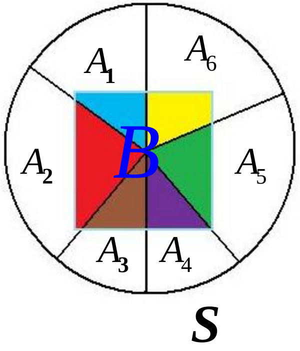
$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(B|A_k)}$$

$$=\frac{1/3\cdot 1/2}{1/3(1/2+3/5+1/4)}=\frac{10}{27}.$$

贝叶斯公式(Bayes)

定理 设$A_1,A_2,\dots,A_n$是两两互斥的事件, 且$P(A_i)>0$,（$i=1,2,\dots,n$）若对任一事件B，有$(A_1+A_2+\dots+A_n)\supset B$，且$P(B)>0$，则

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)},\quad (i=1,\cdots,n)$$



$$P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_iB)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_jB)}$$

贝叶斯公式(Bayes)

定理 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$是两两互斥的事件, 且$P(A_i)>0$, ($i=1,2,\ldots,n$)若对任一事件B，有$(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) \supset B$，且$P(B) > 0$，则

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)}, \quad (i=1,\cdots,n)$$

贝叶斯公式是英国数学家Bayes于1763首先提出的. 由此思想形成了后来的“Bayes方法”.

贝叶斯公式(Bayes)

例4 对以往试验数据表明，当机器调整良好时，产品的合格率为90%；而当机器发生故障时，其合格率为30%．每天早晨开工时，机器调整良好的概率为75%，求某日早晨第一件产品是合格品时，机器调整良好的概率．

解 设A=“机器调整良好”，B=“产品是合格品”，所求概率为 $P(A|B)$.

贝叶斯公式(Bayes)

例4 对以往试验数据表明，当机器调整良好时，产品的合格率为90%； 而当机器发生故障时，其合格率为30%. 每天早晨开工时，机器调整良好的概率为75%，求某日早晨第一件产品是合格品时，机器调整良好的概率.

解 设A=“机器调整良好”，B=“产品是合格品”，

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(AB)}{P(AB)+P(\bar{A}B)}$$

$$=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

贝叶斯公式(Bayes)

例4 对以往试验数据表明，当机器调整良好时，产品的合格率为90%； 而当机器发生故障时，其合格率为30%. 每天早晨开工时，机器调整良好的概率为75%，求某日早晨第一件产品是合格品时，机器调整良好的概率.

解 设A=“机器调整良好”，B=“产品是合格品”，

$$P(A)=0.75,\quad P(B\mid A)=0.9,\quad P(B\mid \bar{A})=0.3,$$

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})}$$

$$=\frac{0.75\times 0.9}{0.75\times 0.9+0.25\times 0.3}=0.9.$$

贝叶斯公式(Bayes)

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}.$$

$P(A_i)$和$P(A_i \mid B)$分别称为原因的**验前概率**和**验后概率**.

谢 谢！