哈爾濱工業大學

二维连续型随机变量

二维连续型随机变量

二维连续型随机变量

X和Y 的联合概率密度

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$$

$$f(x,y)\geq 0;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1.$$

一维连续型随机变量

X 的概率密度

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$f(x)\geq 0;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$$

二维连续型随机变量

- **定义** 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$，若存在非负函数$f(x,y)$,使得对任意实数x, y有

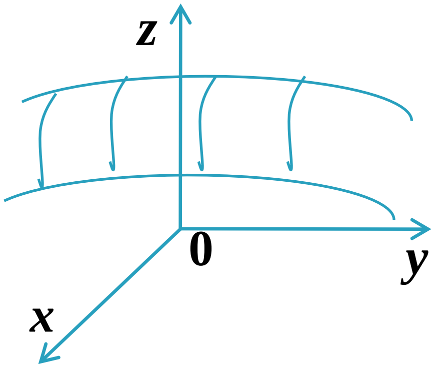
$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$$

称(X,Y)为二维连续型随机变量，称$f(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的概率密度，或称为X与Y的联合概率密度.

概率密度的性质

(1) $f(x,y) \geq 0;$

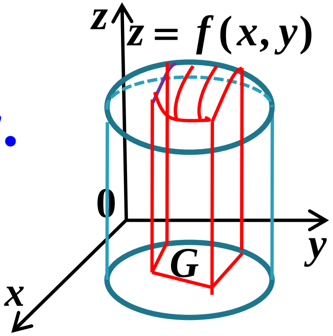
(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = F(+\infty,+\infty) = 1;$



概率密度的性质

（3）设G是xOy平面上的一个区域，则点(X,Y)落在G中的概率为

$$P((X,Y)\in G)=\iint_G f(x,y)dxdy.$$



（4）在$f(x,y)$的连续点有，

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

例1 设(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} ce^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

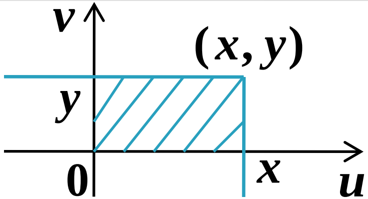
求(1)常数c; (2)分布函数$F(x,y)$;

(3) $P(X+Y<1)$.

解 (1)$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} ce^{-(3x+4y)}dxdy$

$$=c\int_{0}^{+\infty} e^{-3x}dx\int_{0}^{+\infty} e^{-4y}dy=\frac{c}{12}, \quad \Rightarrow c=12.$$

$$f(x,y)=\begin{cases}12e^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



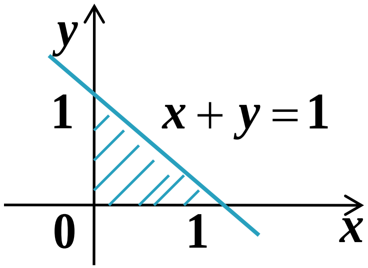
(2) $$F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$$

$$=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y 12e^{-(3u+4v)}dudv, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}12\int_0^x e^{-3u}du\int_0^y e^{-4v}dv, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1-e^{-3x})(1-e^{-4y}), & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}12e^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$



$$(3)\ P(X+Y<1)=\iint\limits_{x+y<1} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} 12e^{-(3x+4y)}dy=\int_0^1 3e^{-3x}dx\int_0^{1-x} 4e^{-4y}dy$$

$$=\int_0^1 3e^{-3x}(1-e^{-4(1-x)})dx=\int_0^1 (3e^{-3x}-3e^{x-4})dx$$

$$=-e^{-3x}\Big|_0^1-3e^{-4}\cdot e^{x}\Big|_0^1=1-4e^{-3}+3e^{-4}.$$

边缘概率密度

- 设二维连续型随机变量(X,Y)的密度函数为 $f(x,y)$,称

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy,$$

和

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

为二维随机变量(X,Y)的边缘概率密度.

推导:

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv\right)du$$

$$=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du.$$

例2 设(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} ky(2-x), 0\le x\le 1, 0\le y\le x, \\ 0, \qquad\qquad 其他. \end{cases}$$

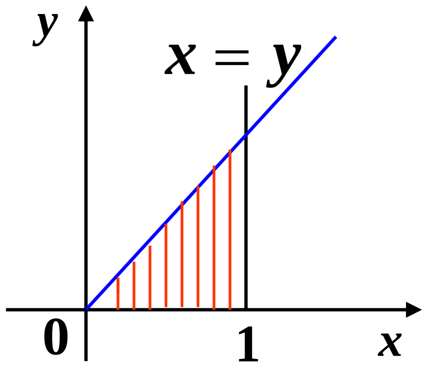
求(1) k ;(2)边缘概率密度$f_X(x)$, $f_Y(y)$.

解 (1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$

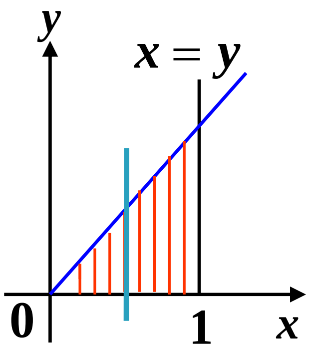
$$=\int_0^1 dx\int_0^x ky(2-x)dy$$

$$=k\int_0^1 [x^2(2-x)/2]dx$$

$$=5k/24 \Rightarrow k=24/5.$$



$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{24}{5}y(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=$$

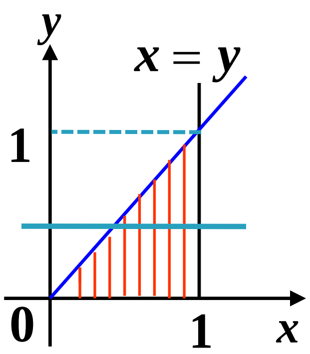
$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x\frac{24}{5}y(2-x)dy=\frac{12}{5}x^2(2-x), & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{24}{5}y(2-x), 0\le x\le 1, 0\le y\le x,\\ 0, \quad\quad\quad 其他.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_y^1\frac{24}{5}y(2-x)dx, 0\le y\le 1,\\ 0, \quad\quad\quad 其他.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{24}{5}y(\frac{3}{2}-2y+\frac{y^2}{2}), 0\le y\le 1,\\ 0, \quad\quad\quad 其他.\end{cases}$$



二维均匀分布

- 设G是平面上的有界区域，其面积为$S(G)$. 若二维随机变量(X,Y)具有概率密度

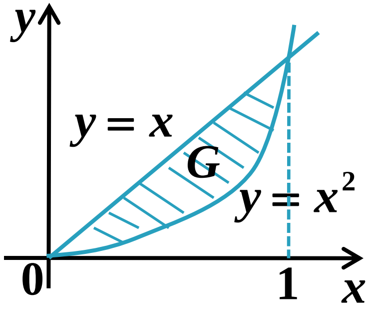
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S(G)}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则称(X,Y)在G上服从均匀分布.

$f(x,y)\geq 0$,且$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{G}\dfrac{1}{S(G)}dxdy=1.$

满足概率密度的两个基本性质.

例3 设(X,Y)在区域G上服从均匀分布，G为$y=x$及$y=x^2$所围成的区域，求(X,Y)的概率密度及边缘概率密度.

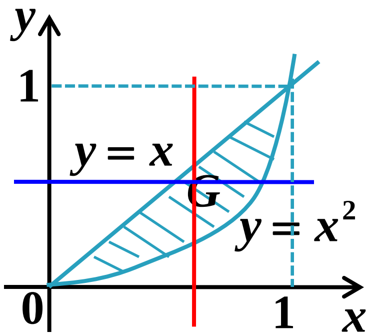


解 区域G的面积

$$S(G)=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy = 1/6.$$

$$f(x,y)=\begin{cases} 6, & (x,y)\in G, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_{x^2}^{x} 6dy = 6(x-x^2), & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}} 6dx = 6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

二维正态分布

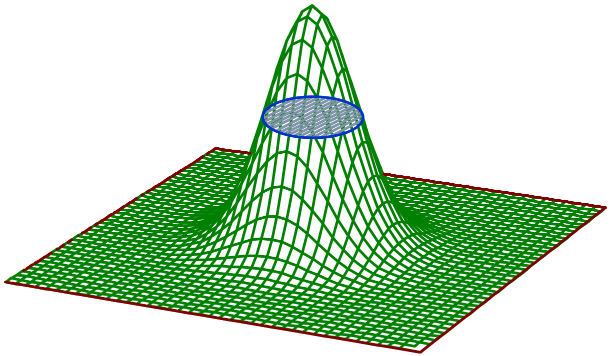
- 设二维随机变量(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

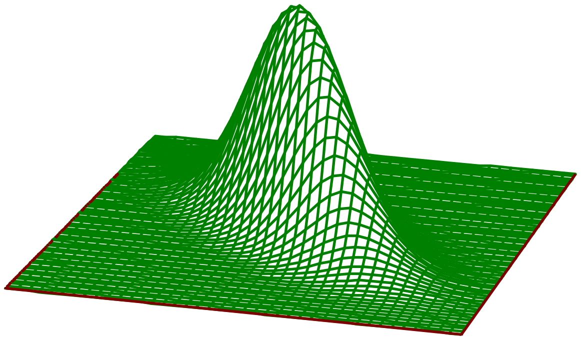
$$(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty),$$

其中μ_1，μ_2，$\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1,$都是常数，称$(X,Y)$服从参数为$\mu_1$，$\mu_2$，$\sigma_1^2$，$\sigma_2^2$，$\rho$的二维正态分布，记为$(X,Y)\sim N(\mu_1,\ \mu_2;\sigma_1^2,\ \sigma_2^2;\rho)$.

二维正态分布曲面



$(X,Y)\sim N(0,0;1,1;0)$



$(X,Y)\sim N(0,0;2,4;-0.75)$

例4 求二维正态随机变量的边缘概率密度.

解 令$(x-\mu_1)/\sigma_1 = u,\quad (y-\mu_2)/\sigma_2 = v$,则

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[u^2 - 2\rho uv + v^2\right]\right\}dv$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\right.$$

$$\left.\left[(v-\rho u)^2 + (1-\rho^2)u^2\right]\right\}dv$$

例4 求二维正态随机变量的边缘概率密度.

解 令$(x-\mu_1)/\sigma_1 = u, \quad (y-\mu_2)/\sigma_2 = v$,则

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dv$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu_1)^2/2\sigma_1^2} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

同理可得

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-(y-\mu_2)^2/2\sigma_2^2} \quad (-\infty < y < +\infty).$$

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，即

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),\ Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

谢　　谢！