初等矩阵

定义：对单位阵进行一次初等变换后得到的矩阵称为初等矩阵。

三种初等行变换得到的初等矩阵分别为：

$$E(i,j)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$E(i, j(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

对单位阵作一次列变换得到的矩阵也包括在上面的三类矩阵之中。

初等矩阵的性质

1.

$$E(i,j)^T = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = E(i,j)$$

$$\boxed{E^T(i,j) = E(i,j)}$$

$$E(i(k))^T = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{E^T(i(k)) = E(i(k))}$$

$$= E(i(k))$$

$$E(i,j(k))^T = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & k & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = E(j,i(k))$$

$$\boxed{E^T(i,j(k)) = E(j,i(k))}$$

初等矩阵的转置仍为同类型的初等矩阵.

2. $\left|E(i,j)\right| = -1$ $\left|E(i(k))\right| = k$ $\left|E(i,j(k))\right| = 1$

初等矩阵都是非奇异的.

初等矩阵与初等变换的关系

先看一个例子

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad E(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E(1,2)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$AE(1,2)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

行变换相当于左乘初等矩阵;

列变换相当于右乘初等矩阵.

问题

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} B, \text{有：} B = PA. \quad P = ?$$

$$A \xrightarrow{\text{初等列变换}} B, \text{有：} B = AQ. \quad Q = ?$$

$$T_{\text{行}}(A_{m\times n}) = T_{\text{行}}(E_{m\times m})A_{m\times n}$$

$$T_{\text{列}}(A_{m\times n}) = A_{m\times n}T_{\text{列}}(E_{n\times n})$$

例1:求矩阵的标准形并用初等矩阵表示初等变换。

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

$$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=P_1$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

$$E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad P_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

可以验证

$$\boxed{P_3P_2P_1A=I}$$

例2:单选题

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$$

$$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $AP_1P_2=B$

(2) $AP_2P_1=B$

(3) $P_1P_2A=B$

(4) $P_2P_1A=B$

练习

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 3 & 0 & 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -19 & 8 & 2 \\ 2 & 16 & -2 & 12 \\ 3 & -18 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

满秩矩阵

定义：若方阵A的秩与其阶数相等，则称A为满秩矩阵；
否则称为降秩矩阵。

定理：设A为满秩阵,则A的标准形为同阶单位阵 E .即

$$A \cong E$$

推论1：以下命题等价：

(i) A满秩；(ii) $A \cong E$； (iii) A非奇异；

(iv) $A = P_1 P_2 \cdots P_m$;(其中P_i为初等矩阵。)

只需证明(*i*)与(*iv*)等价。

(i) A满秩；(iv) $A=P_1P_2\cdots P_m$;(其中P_i为初等矩阵。)

(i) A满秩 $\Rightarrow A\cong E$, $\therefore\exists$初等矩阵

$P_1,P_2,\cdots,P_l,\ \ P_{l+1},\cdots,P_m$,使

$$A=P_1P_2\cdots P_lEP_{l+1}\cdots P_m=P_1P_2\cdots P_lP_{l+1}\cdots P_m$$

反之, 由于$A=P_1P_2\cdots P_m$

$$=P_1P_2\cdots P_mE$$

$\therefore A\cong E \quad \Rightarrow A$满秩.

推论2：矩阵A与B等价的充要条件为存在m阶及n阶满秩阵P、Q，使 $A_{m\times n}=P_m B_{m\times n} Q_n$

由此还可得到：若P、Q为满秩阵，则

$$\boxed{r(A)=r(PA)=r(PAQ)=r(AQ)}$$

练习

设 $r(A_{4\times 3})=2, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，求$r(AB)$.

$\because r(B)=3, \therefore B$满秩，　$\therefore r(AB)=r(A)=2$