



哈爾濱工業大學

两个正态总体参数的显著性检验



t 检验



➤ 设 X_1, \dots, X_{n_1} 来自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本,

➤ Y_1, \dots, Y_{n_2} 来自总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本,

两个样本相互独立;

\bar{X}, S_1^2 和 \bar{Y}, S_2^2 分别为样本均值和样本方差.

1. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知, 考虑 μ_1, μ_2 的三类检验问题

(1). $H_0: \mu_1 = \mu_2,$

(2). $H_0: \mu_1 \leq \mu_2,$

(3). $H_0: \mu_1 \geq \mu_2.$

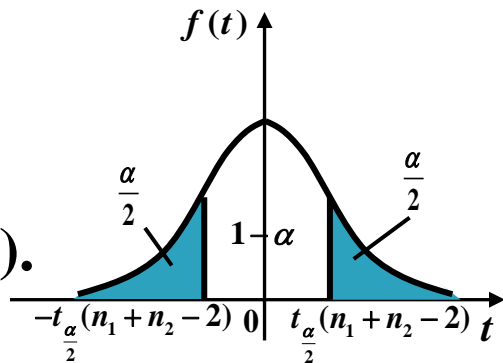
t 检验



(1). 检验 $H_0: \mu_1 = \mu_2$

选检验统计量

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \stackrel{H_0}{\sim} t(n_1 + n_2 - 2).$$



$S_W^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}$ 是 σ^2 的无偏估计量.

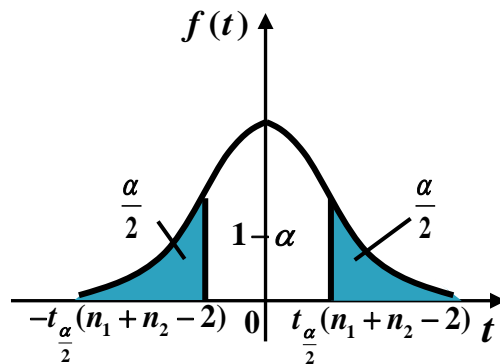
t 检验

对给定的 α , 查临界值 $t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 1)$, 使得

$$P\left(|t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)\right) = \alpha,$$

检验的拒绝域为

$$W = \left(|t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)\right).$$



t 检验



p值: $p = P(|t| \geq |t_0|) = 2P(t(n_1 + n_2 - 2) \geq |t_0|),$

其中,
$$t_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} .$$

当 $p \leq \alpha$ 时, 拒绝 H_0 , 当 $p > \alpha$ 时, 接受 H_0 .

双侧检验.

t 检验



(2). 检验 $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$

选检验统计量

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad S_W = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}}$$

检验的拒绝域为 $W = (t \geq t_\alpha(n_1 + n_2 - 2))$.

p值: $p = P(t(n_1 + n_2 - 2) \geq t_0)$,

当 $p \leq \alpha$ 时, 拒绝 H_0 , 当 $p > \alpha$ 时, 接受 H_0 .

t 检验



在假设检验中

$$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$$

$$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2, H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2, H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

以上3种检验的检验法则与检验效果是一致的.

t 检验



(3). 检验 $H_0: \mu_1 \geq \mu_2$

选检验统计量

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad S_W = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}}$$

检验的拒绝域为 $W = (t \leq -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2))$.

p值: $p = P(t(n_1 + n_2 - 2) \leq t_0)$,

当 $p \leq \alpha$ 时, 拒绝 H_0 , 当 $p > \alpha$ 时, 接受 H_0 .

t 检验



在假设检验中

$$H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$$

$$H_0 : \mu_1 \geq \mu_2, H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2, H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

以上3种检验的检验法则与检验效果是一致的.



例1 为了研究一种新化肥对种植小麦的效力，
选13块条件相同面积相等的土地进行试验，
各块产量(kg)如下：
施肥的： 34, 35, 30, 33, 34, 32.
未施肥的： 29, 27, 32, 28, 32, 31, 31.
问这种化肥对小麦产量是否有显著影响？



解 用 X 与 Y 分别表示在一块土地上施肥与不施肥下小麦的产量, 设

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

若已知 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$,

检验: $H_0: \mu_1 = \mu_2 (\alpha = 0.05)$.

已知 $n_1 = 6, n_2 = 7, \bar{x} = 33, (n_1 - 1)s_1^2 = 16,$

$\bar{y} = 30, (n_2 - 1)s_2^2 = 24,$



查表得: $t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0.025}(11) = 2.201$,

拒绝域 $W = (|t| \geq t_{0.025}(11) = 2.201)$.

$$t = \frac{33 - 30}{\sqrt{\frac{16 + 24}{6 + 7 - 2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right)}} = 2.828 > 2.201,$$

拒绝 H_0 , 新化肥对小麦产量的影响是显著的.

p值: $p = 2P(t(11) \geq 2.828) = 0.018 < 0.05$,

同样拒绝原假设 H_0 .

成对数据 t 检验



2. σ_1^2, σ_2^2 未知, $n_1 = n_2 = n$, 检验 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

配对的 t 检验法

令 $Z = X_i - Y_i (i = 1, 2, \dots, n)$,

则 Z_1, \dots, Z_n 独立同分布于 $N(d, \sigma^2)$,

其中 $d = \mu_1 - \mu_2$, $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

检验 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Leftrightarrow H_0 : d = 0$. (σ 未知)

成对数据 t 检验



选检验统计量 $t = \frac{\bar{Z}}{S} \sqrt{n} \stackrel{H_0}{\sim} t(n-1)$,

其中 $Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i, S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2}$,

拒绝域为 $W = \{|t| \geq t_{\alpha/2}(n-1)\}$.

p值: $p = P(|t| \geq |t_0|) = 2P(t(n-1) \geq |t_0|)$,

其中 $t_0 = \frac{\bar{z}}{s} \sqrt{n}$,

当 $p \leq \alpha$ 时, 拒绝 H_0 , 当 $p > \alpha$ 时, 接受 H_0 .



类似方法可得 $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$

$$H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$$

的检验法则.



例2 为判断两种工艺方法对产品的某性能指标有无显著差异，将9批材料用两种工艺方法进行生产，得到该指标的9对数据(下表).
问：由数据，能否说明在两种不同工艺方法下产品的该性能指标有显著性差异($\alpha = 0.05$)?

x_i	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_i	0.1	0.21	0.52	0.32	0.78	0.59	0.68	0.77	0.89

解 检验 $H_0 : d = 0 (\sigma \text{未知})$

将9对数据作差 $z_i = x_i - y_i$, 计算 $\bar{z} = 0.06$,

$s^2 = 0.015$, 故
$$t_0 = \frac{\bar{z}}{s} \sqrt{n} = 1.467,$$

拒绝域为 $W = \{ |t| \geq t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.306 \}$

$t_0 = 1.467 < 2.306$, 接受 H_0 ,

p值: $p = 2P(t(8) \geq 1.467) = 0.18 > 0.05$, 接受 H_0 ,
两种方法无差异.

F检验



➤ 设 X_1, \dots, X_{n_1} 来自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本,

➤ Y_1, \dots, Y_{n_2} 来自总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本,

两个样本相互独立;

\bar{X}, S_1^2 和 \bar{Y}, S_2^2 分别为样本均值和样本方差.

μ_1, μ_2 未知, 考虑 σ_1^2, σ_2^2 的三类检验问题

(1). $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2,$

(2). $H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2,$

(3). $H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2.$

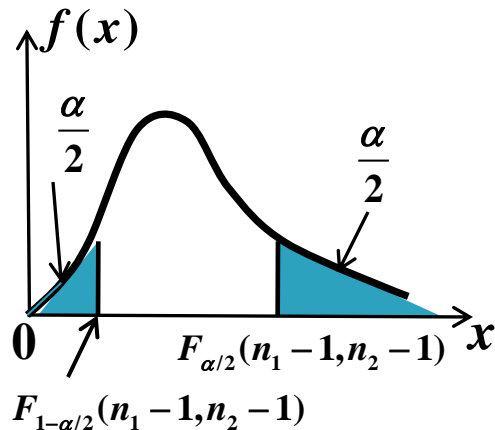
F检验

(1). 检验 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

选检验统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \stackrel{H_0}{\sim} F(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

检验的拒绝域为



$$W = \left(F \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) \text{ 或 } F \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) \right).$$

F检验

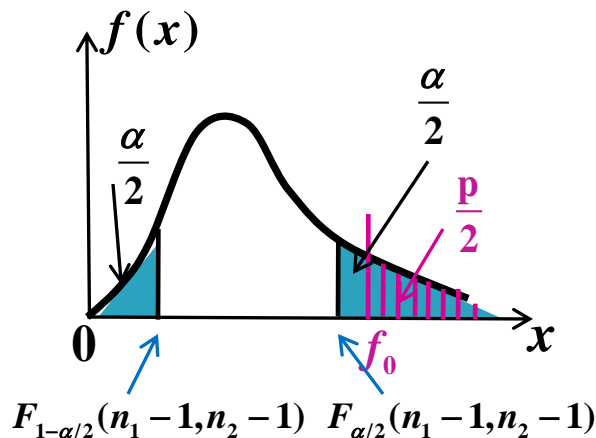
p值: $p = 2\min P(F \geq f_0, F \leq f_0)$

其中, $f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$.

当 $p \leq \alpha$ 时, 拒绝 H_0 ,

当 $p > \alpha$ 时, 接受 H_0 .

双侧检验.



当 $p < \alpha$ 时, 拒绝 H_0 .

F检验



(2). 检验 $H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$

选检验统计量 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2},$

检验的拒绝域为

$$W = (F \geq F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)).$$

p值: $p = P(F(n_1 - 1, n_2 - 1) \geq f_0),$

其中, $f_0 = s_1^2 / s_2^2.$

当 $p \leq \alpha$ 时, 拒绝 H_0 , 当 $p > \alpha$ 时, 接受 H_0 .

F检验



在假设检验中

$$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$$

$$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2, H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

以上3种检验的检验法则与检验效果是一致的.

F检验



(2). 检验 $H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$

选检验统计量 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2},$

检验的拒绝域为

$$W = (F \leq F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)).$$

p值: $p = P(F(n_1 - 1, n_2 - 1) \leq f_0),$

其中, $f_0 = s_1^2 / s_2^2.$

当 $p \leq \alpha$ 时, 拒绝 H_0 , 当 $p > \alpha$ 时, 接受 H_0 .

F检验



在假设检验中

$$H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$$

$$H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2, H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

$$H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2, H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

以上3种检验的检验法则与检验效果是一致的.



例1 为了研究一种新化肥对种植小麦的效力，
选13块条件相同面积相等的土地进行试验，
各块产量(kg)如下：
施肥的： 34, 35, 30, 33, 34, 32.
未施肥的： 29, 27, 32, 28, 32, 31, 31.
问这种化肥对小麦产量是否有显著影响？



解 用 X 与 Y 分别表示在一块土地上施肥与不施肥下小麦的产量, 设

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

检验: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 (\alpha = 0.05)$.

已知 $n_1 = 6, n_2 = 7, s_1^2 = 16/5, s_2^2 = 24/6$,



查表得: $F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.025}(5, 6) = 5.99$,

$$F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.975}(5, 6) = \frac{1}{F_{0.025}(6, 5)} = 0.143,$$

拒绝域 $W = (F \geq 5.99 \text{ 或 } F \leq 0.143)$.

$$0.143 < f_0 = \frac{16/5}{24/6} = 0.8 < 5.99, \text{ 接受 } H_0.$$

p值: $p = 2P(F(5, 6) \leq 0.8) \approx 0.7 > 0.05$,

同样接受 H_0 .



谢 谢！