逆矩阵

$\forall a \neq 0,\ \exists a^{-1},\ $使$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$

$\forall$矩阵$A \neq O, ?\exists$矩阵$B,$使

$$AB = BA = E.$$

例如

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\text{假如有}B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\text{使得}$$

$$AB=BA=E.$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0=1$$

这是不可能的。

并非所有的非零方阵都有矩阵B，使得

$$AB=BA=E.$$

因此有两种情形，问题 你会研究哪种情形？

定义：对n阶方阵A，若有n阶矩阵B，使

$$AB=BA=E,$$

则称B为A的逆矩阵，称A为可逆的。

（1）逆阵惟一。A的逆记为：A^{-1}

设B,C都是A的逆，则

$$B=EB=(CA)B=C(AB)=CE=C$$

（2）并非每个方阵都可逆。

要解决的问题：

1.方阵满足什么条件时可逆?

2.可逆时，逆阵怎样求？

复习：伴随矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$

A_{ij}为a_{ij}的代数余子式

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

伴随矩阵

关于A^*的公式？

$$\boxed{AA^{*}=A^{*}A=|A|E}$$

$$\boxed{AA^* = A^*A = |A|E}$$

要解决的问题：

1.方阵满足什么条件时可逆?

2.可逆时，逆阵怎样求？

你能推测一个结果出来吗？

$$\boxed{AA^* = A^*A = |A|E}$$

定理:*n*阶方阵*A*可逆的充要条件是 $|A| \neq 0.$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

1.方阵满足什么条件时可逆? 条件是?

2.可逆时，逆阵怎样求? 公式是?

牢记这个定理

证:

"$\Rightarrow$" 由A可逆知 $AA^{-1} = E$, 两边取行列式,

$$\left|AA^{-1}\right| = |A|\left|A^{-1}\right| = |E| = 1$$

$\Rightarrow |A| \neq 0$ $\qquad\qquad$ $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$

"$\Leftarrow$" 由$|A| \neq 0$, $AA^{*} = A^{*}A = |A|E$

$$\Rightarrow A\left(\frac{1}{|A|}A^{*}\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^{*}\right)A = E$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^{*}$$

A可逆 $\Leftrightarrow$ A非奇异 $\Leftrightarrow$ A满秩

例1.

求 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$的逆。$(ad-bc\neq 0)$

解： $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

练习1

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\underline{\qquad\qquad\qquad},$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\underline{\qquad\qquad\qquad},$$

$$C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix},C^{-1}=\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

练习2

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}, A^{-1}=\underline{\qquad\qquad\qquad},$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}, B^{-1}=\underline{\qquad\qquad\qquad},$$

$$C=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, C^{-1}=\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

练习1答案

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1&2\\-3&1\end{pmatrix},\quad C^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}4&3\\-1&2\end{pmatrix}.$$

练习2答案

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\end{pmatrix},B^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix},C^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}.$$

? ?
?

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 的逆怎样求？

还用公式吗？

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a^{n-1} & a^{n-2} & a^{n-3} & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}$$

的逆怎样求？