向量组的正交性

一、向量的内积：

1.定义1：设有向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n),$

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

称为向量α与β的内积, 记为（α,β）.

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

(i) $(\alpha,\beta)=\alpha\beta^T$,　　(ii) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$,

(iii) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)=(\alpha,k\beta)$,

(iv) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$,

(v) $(\alpha,\alpha)=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\|\alpha\|^2$.

2.向量的单位化

$$\left\|\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha\right\| = \frac{1}{\|\alpha\|}\|\alpha\| = 1. \quad \frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$$为单位向量。

$$\alpha = (1,1,1), \ \|\alpha\| = \sqrt{3}, \ \frac{1}{\|\alpha\|}\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

二、向量的夹角：略。

三、向量的正交性：

1.定义2: 若（α，β）$=0,$ 则称向量α与β正交。

2.定义3: 如果m个n维非零向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$两两正交，即满足（$\alpha_i$，$\alpha_j$）$=0,(i\neq j)$ 则称向量组

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为正交向量组，简称为正交组。

$$\boxed{e_1=(1,0,\cdots,0),e_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)}$$

为正交向量组。也称为单位正交组或标准正交组。

3.正交向量组的性质

定理: 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为正交向量组,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关。

回忆

如何证明一组向量线性无关?

证: 设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=O.$

$$\Rightarrow(\alpha_i,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m)=(\alpha_i,O)=0.$$

$$\Rightarrow k_1(\alpha_i,\alpha_1)+k_2(\alpha_i,\alpha_2)+\cdots+k_m(\alpha_i,\alpha_m)=0.$$

$\because\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为正交向量组, $\Rightarrow(\alpha_i,\alpha_j)=0,(i\neq j)$

$$\therefore k_i(\alpha_i,\alpha_i)=0.$$

由于$\alpha_i\neq O$,即$(\alpha_i,\alpha_i)\neq 0\Rightarrow k_i=0.(i=1,2,\cdots,m)$

$\therefore\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为线性无关向量组。

问题 线性无关的向量组是否为正交组? 不是！

反例：$\alpha_1 = (1,0,1), \alpha_2 = (0,0,1)$

问题 线性无关的向量组可否化为正交组?

四、向量组的正交规范化：

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为线性无关向量组，令

$$\beta_1=\alpha_1,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\ \beta_2)}{(\beta_2,\ \beta_2)}\beta_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_m=\alpha_m-\frac{(\alpha_m,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_m,\ \beta_2)}{(\beta_2,\ \beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_m,\ \beta_{m-1})}{(\beta_{m-1},\ \beta_{m-1})}\beta_{m-1}.$$

看出规律来了吗？

(i)　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$等价；

(ii)　$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$为正交组。

再将$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$为单位化，即得到单位正交向量组。

五、正交矩阵：

1.定义4： 若n阶方阵A满足$A^T A = E$，则称A为n阶正交矩阵。

2.性质： (i)若A为n阶正交矩阵$\Rightarrow |A| = \pm 1.$

(ii)若A为n阶正交矩阵$\Rightarrow A^T$与A^{-1}也是正交矩阵。

(iii)若A, B为n阶正交矩阵$\Rightarrow AB$与BA也是正交矩阵。

3.正交矩阵的判定:

定理：矩阵$A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$为正交矩阵$\Leftrightarrow A$的行（列）向量组为单位正交向量组。

仅证列向量组的情形。

$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，　A为正交矩阵$\Leftrightarrow A^T A = E.$

$$A^TA=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}$$

$$=E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow(\alpha_i,\alpha_i)=1,(\alpha_i,\alpha_j)=0,(i\neq j).$$

即$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为单位正交向量组。

方法一、用定理。

方法二、用定义。

练习

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}, A\text{正交吗？}$$

不正交。

$$A=\begin{pmatrix} 1/9 & -8/9 & -4/9 \\ -8/9 & 1/9 & -4/9 \\ -4/9 & -4/9 & 7/9 \end{pmatrix}, A\text{正交吗？}$$

正交。

$$A=\begin{pmatrix} 1/9 & -8/9 & -4/9 \\ -8/9 & 1/9 & -4/9 \\ -4/9 & -4/9 & 7/9 \end{pmatrix}, A^{-1}=?$$

$$A^T$$