性质2: 互换两行，行列式变号。

推论：若行列式中有两行元素完全相同，则行列式为零。

性质3: 用数k乘行列式某一行中所有元素，等于用k乘此行列式。

推论：某一行的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面。

性质4：行列式某一行元素加上另一行对应元素的k倍，行列式的值不变。

例1: 计算$D=\begin{vmatrix}3&2&2&2\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{vmatrix}.$

分析:各行元素之和为一定数, 故将第2、3、4行全加到第1行, 然后将公因子提出来。

解:

$$D=\begin{vmatrix}9&9&9&9\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{vmatrix}=9\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{vmatrix}=9\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}$$

$=9$

一般地，可以计算

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

请牢记这种方法，这类题就这种做法。

$$[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

练习

1. 设$\alpha+\beta+\gamma=0$,求行列式$D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}$的值.

$$D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}\overset{r_1+r_2+r_3}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}\alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}=0.$$

练习

$$2.\ \text{求} D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

$$1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

$$例2.D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-8&0&4&-6\\2&0&1&-1\\16&0&-2&7\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}-8&4&-6\\2&1&-1\\16&-2&7\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-16&0&-2\\2&1&-1\\20&0&5\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}-16&-2\\20&5\end{vmatrix}=40$$

$$=-2\begin{vmatrix}-4&2&-3\\1&1&-1\\8&-2&7\end{vmatrix}$$

$$=-4\begin{vmatrix}-2&2&-3\\1&1&-1\\8&-2&7\end{vmatrix}=40$$

练习

3. 求$D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$.

$$\xlongequal[r_4-ar_2]{r_3-r_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & c-b \\ 0 & b & c-a & d-ab \end{vmatrix} \xlongequal{按c_1展开} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & c-b \\ b & c-a & d-ab \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-r_1,\ r_3-br_1} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & c-a-b \\ 0 & c-a-b & d-2ab \end{vmatrix} \xlongequal{按c_1展开} -\begin{vmatrix} -2 & c-a-b \\ c-a-b & d-2ab \end{vmatrix}$$

$$= 2(d-2ab)+(c-a-b)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc+2d.$$

问题

四阶行列式有没有类似于三阶行列式的对角线法则？

四阶行列式怎么求？

一般的做题步骤是什么？

问题

我们介绍了几种n阶行列式？

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & y & 0 & & & \\ 0 & x & y & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \\ \vdots & & \ddots & x & y & 0 \\ 0 & & & 0 & x & y \\ y & & \cdots & & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & ⋰ & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & ⋰ & & & \ddots & & \\ & c & & & & & d & \\ c & & & & & & & d \end{vmatrix}.$$