



哈爾濱工業大學

# 随机变量的独立性



# 随机变量的独立性



两事件 $A, B$ 独立的定义是:

若 $P(AB)=P(A)P(B)$

则称事件 $A, B$ 独立.

设 $X, Y$ 是两个随机变量, 若对任意的实数 $x, y$ ,

令 $A = (X \leq x), B = (Y \leq y)$ , 则

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y),$$



$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$

# 随机变量的独立性



- **定义** 设 $F(x, y), F_X(x), F_Y(y)$ 依次为 $(X, Y)$ ,  $X, Y$ 的分布函数. 若对任意实数 $x, y$ 成立

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y),$$

称 $X$ 与 $Y$ 相互独立.

# 随机变量的独立性



$X, Y$ 为连续型随机变量时

$X$ 与 $Y$ 独立的充要条件是

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y),$$

这里 $f(x, y), f_X(x),$

$f_Y(y)$ 分别是 $(X, Y),$

$X, Y$ 的概率密度.

$X, Y$ 为离散型随机变量时

$X$ 与 $Y$ 独立的充要条件是

$$P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$= P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

$$\text{即 } p_{ij} = p_{i \cdot} \cdot p_{\cdot j},$$

这里 $p_{ij}, p_{i \cdot}, p_{\cdot j}$ 分别是

$(X, Y), X, Y$ 的分布列.

例1 已知 $(X,Y)$ 的分布列,  $\rightarrow$

问 $X$ 与 $Y$ 是否独立?

解 逐点检验下式是否成立

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	2	5	$P(Y=j)$
0	1/3	1/3	2/3
3	1/6	1/6	1/3
$P(X=i)$	1/2	1/2	

$$P(X=i, Y=j) = P(X=i)P(Y=j).$$

$$\begin{aligned} P(X=2, Y=0) &= 1/3 = P(X=2)P(Y=0). \\ P(X=2, Y=3) &= 1/6 = P(X=2)P(Y=3). \\ P(X=5, Y=0) &= 1/3 = P(X=5)P(Y=0). \\ P(X=5, Y=3) &= 1/6 = P(X=5)P(Y=3). \end{aligned}$$

需要检验所有等式成立, 才能判定为独立.

$X$ 与 $Y$ 是相互独立的.



例2 已知 $(X,Y)$ 的分布列,  $\rightarrow$

问 $X$ 与 $Y$ 是否独立?

解 逐点检验下式是否成立

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	2	5	$P(Y=j)$
0	1/6	1/3	1/2
3	1/3	1/6	1/2
$P(X=i)$	1/2	1/2	

$$P(X=i, Y=j) = P(X=i)P(Y=j).$$

$$P(X=2, Y=0) = 1/6,$$

$$P(X=2)P(Y=0) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4.$$

$$P(X=2, Y=0) \neq P(X=2)P(Y=0).$$

只要有一个  
等式不成立,  
就能判定为  
不独立.



**例3** 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 独立，下面是 $(X,Y)$ 的分布列及边缘分布列，请将所缺数值补上.

**解**

$X \backslash Y$	3	4	5	$P(X = x_i)$
1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P(Y = y_j)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1



例4 设二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

问 $X$ 与 $Y$ 是否独立?

解

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)} dy = e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)} dx = e^{-y}, & y \geq 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

因为 $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ , 所以 $X$ 与 $Y$ 独立.

结论: 对连续型随机变量, 若 $X$ 与 $Y$ 独立, 则  
 $f(x,y) = f(x)g(y)$ .



例5 设二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq x < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

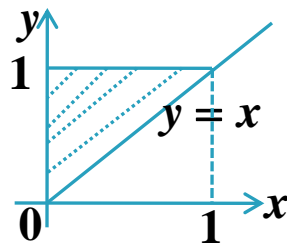
问 $X$ 与 $Y$ 是否独立?

解

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_x^1 8xydy = 4x(1-x^2), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_0^y 8xydx = 4y^3, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

因为 $f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ , 所以 $X$ 与 $Y$ 不独立.





例6 设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ , 则

$X$ 与 $Y$ 相互独立的充要条件是 $\rho=0$ .

证明  $\Leftarrow$  设 $\rho=0$ , 则

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \right. \\ &\quad \left. \left[ \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[ \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} \end{aligned}$$



例6 设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ , 则

$X$ 与 $Y$ 相互独立的充要条件是 $\rho=0$ .

证明  $\Leftarrow$  设 $\rho=0$ , 则

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \left\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\} \\ &= f_X(x)f_Y(y). \end{aligned}$$

从而 $X, Y$ 相互独立.



例6 设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ , 则

$X$ 与 $Y$ 相互独立的充要条件是 $\rho=0$ .

证明  $\Rightarrow$  设 $X$ 与 $Y$ 相互独立, 由于 $f(x, y), f_X(x), f_Y(y)$ 均连续, 故对任意实数 $x, y$ , 有

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y),$$

特别有 $f(\mu_1, \mu_2) = f_X(\mu_1)f_Y(\mu_2)$ ,

即  $\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} = 1$ , 从而 $\rho=0$ .



**例7** 设 $X \sim U[0,1]$ ,  $Y \sim E(1)$ 且 $X$ 与 $Y$ 相互独立,  
求 $P(X+Y \leq 1)$ .

**解** 由 $X \sim U[0,1]$ ,  $Y \sim E(1)$ 有

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

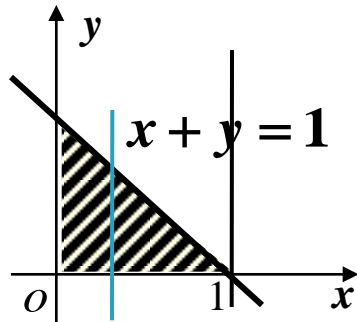
由于 $X$ 与 $Y$ 相互独立,有

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 \leq x \leq 1, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



**例7** 设 $X \sim U[0,1]$ ,  $Y \sim E(1)$ 且 $X$ 与 $Y$ 相互独立,  
求 $P(X+Y \leq 1)$ .

**解**  $f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 \leq x \leq 1, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$



$$\begin{aligned} P(X + Y \leq 1) &= \iint_{x+y \leq 1} f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} e^{-y} dy = \int_0^1 (1 - e^{-1+x}) dx \\ &= x \Big|_0^1 - (e^{-1+x}) \Big|_0^1 = 1 - (e^0 - e^{-1}) = e^{-1} \end{aligned}$$

# $n$ 维随机变量的一些概念



## ✚ $n$ 维随机变量的分布函数

设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为 $n$ 维随机变量,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为任意实数, 则 $n$ 元函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$$

称为 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的分布函数.

## $n$ 维随机变量的概率密度



设 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 $n$ 维随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的分布函数. 若存在非负函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 对任意实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \cdots dt_n,$$

称 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为连续型随机变量,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 $n$ 维随机变量的概率密度.



# $n$ 维随机变量的相互独立



设 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 $n$ 维随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的分布函数. 若对任意实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n),$$

则称 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是相互独立的.

对连续型随机变量, 则 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立的充要条件是

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n).$$

思考: 离散型时  $X_1, \dots, X_n$  独立的充要条件如何表示?

谢 谢！