非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

系数矩阵

未知向量

常数向量

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

方程组的代数形式

$$AX = B$$

方程组的矩阵形式

$$AX = O$$

非齐次方程组的导出组

引进向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

方程组的向量方程形式

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 = 3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 = 3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$$

并非所有的非齐次线性方程组都有解，有解时，解的情况也不一样。

首要问题就是

非齐次线性方程组的有解判定

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta \qquad （1）$$

方程组（1）有解 $\Leftrightarrow \beta$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示

$\Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 与 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta\}$ 等价。

$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta).$

$\Leftrightarrow \overline{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta), \underline{r(A) = r(\overline{A})}$

$\overline{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta)$ 称为方程组(1)的增广矩阵.

非齐次线性方程组的解法

1.非齐次线性方程组的解的性质

性质1：非齐次方程组（1）的两个解的差是它的导出组的解。

$$A\eta_1 = B, A\eta_2 = B \;\Rightarrow A(\eta_1 - \eta_2) = O.$$

性质2：非齐次方程组（1）的一个解与其导出组的一个解的和是非齐次方程组（1）的解。

$$A\eta = B, A\xi = O \;\Rightarrow A(\eta + \xi) = B.$$

2.非齐次线性方程组的通解

定理： 设η^*是非齐次方程组的一个特解，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$是其导出组的基础解系，则非齐次方程组（1）的通解为

$$\eta^* + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r},$$

$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$为任意常数，$r = r(A)$.

设η_1为$AX=B$的任意一个解，则$\eta_1-\eta^*$为$AX=O$的解,即$A(\eta_1-\eta^*)=O$,

$$\therefore \eta_1-\eta^*=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},$$

$$\Rightarrow \eta_1=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}.$$

即非齐次方程组（1）的通解为 $\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}.$

推论： (i) $r(\bar{A})=r(A)=n$时，方程组（1）有惟一解;

(ii) $r(\bar{A})=r(A)<n$时，方程组（1）有无穷多解，其通解为$\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$

(iii) $r(\bar{A})\neq r(A)$时，方程组（1）无解。

例1：求解方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1, \\ 2x_1+3x_2+x_3=0, \\ 4x_1+7x_2-x_3=2. \end{cases}$

$r(\overline{A})=r(A)$ 有解

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ 同解方程组为 $\begin{cases} x_1=-5x_3-3, \\ x_2=3x_3+2. \end{cases}$ $x_3=0, \Rightarrow \begin{cases} x_1=-3, \\ x_2=2, \end{cases}$

$\therefore$ 特解为 $\eta^*=(-3,2,0)^T$.

$\begin{cases} x_1=-5x_3, \\ x_2=3x_3, \end{cases}$ $x_3=1, \Rightarrow \begin{cases} x_1=-5, \\ x_2=3, \end{cases}$ 所以 基础解系为 $\xi=(-5,3,1)^T$.

通解为 $\eta^*+k\xi$.

练习

求方程组的通解 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2. \end{cases}$

$r(\overline{A}) = r(A)$ 有解

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ 同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2, \\ x_3 = 2x_4 + 1/2. \end{cases}$

$x_2 = x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3 = 1/2$, 特解为 $\eta^* = (1/2,\ 0, 1/2, 0)^T$.

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4, \\ x_3 = 2x_4. \end{cases} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

基础解系为: $\xi_1 = (1,1,0,0)^T$, $\xi_2 = (1,0,2,1)^T$. 通解为 $\eta^* + k_1\xi_1 + k_2\xi_2$.

非齐次方程组的求解步骤

1.写出$\overline{A}$，并将$\overline{A}$化为梯形阵；从而求出$r(A)$与$r(\overline{A})$以判断是否有解；

如何确定？

2.在有解时，进一步将$\overline{A}$化为行最简形，确定真未知量与自由未知量，并写出同解方程组；

3.先令自由未知量为零，求出真未知量的值，从而求出特解η^*；再给自由未知量取值，以求出基础解系；并写出通解。

注意什么？

练习

求方程组的通解:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 15x_4 = 3, \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4, \\ x_1 + x_3 - x_4 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -11, \\ 57x_1 + x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -23. \end{cases}$$