逆阵的求法

方法一：用A^*求。 $$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

方法二：**初等变换法。**

$$A\text{可逆}\Rightarrow A^{-1}\text{可逆},\quad \Rightarrow A^{-1}=P_1P_2\cdots P_s$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow P_1P_2\cdots P_sA=E\\ P_1P_2\cdots P_sE=A^{-1}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$(A\vdots E)\xrightarrow{\text{行变换}}\cdots\rightarrow(E\vdots A^{-1})$$

方法三：用定义求。

定义：对n阶方阵A，若有n阶矩阵B，使

$$AB=BA=E,$$

则称B为A的逆矩阵，称A为可逆的。

性质(iii)　$AB = E(or\ BA = E) \Rightarrow B = A^{-1}.$

对n阶方阵A，只需找到一个n阶矩阵B，使

$AB=E$或者$BA=E$就行了。

例4. $A=\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}, a_1\cdots a_n \neq 0.$ 求 A^{-1}.

$\boxed{\text{猜:}}$

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$$

$B=A^{-1}$ 对否?

只须验证 $AB=E$.

解：$\because$ $$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$$

例5: 设A_n满足$A^2 - A - 2E = O$，求证A可逆并求A^{-1}.

$$\because A^2 - A = 2E \quad \therefore A(A-E) = 2E$$

$$\Rightarrow A\frac{A-E}{2} = E \quad \therefore A^{-1} = \frac{A-E}{2}$$

练习 已知 n 阶方阵 A 满足 $2A(A-E)=A^3$，求 $(E-A)^{-1}$.

解　由 $2A(A-E)=A^3$，得

$$A^3-2A^2+2A=0,$$

所以

$$(A^3-E)-(2A^2-2A)=-E,$$

从而有

$$(E-A)(A^2-A+E)=E.$$

即

$$(E-A)^{-1}=A^2-A+E.$$

方法四：用定义证明B为A的逆。

这类问题是指：对给定的n阶方阵A和B，要证明B为A的逆矩阵，也就是证明等式$AB=E$成立或者$BA=E$成立。

例6.设$A^k=O$,(为正整数),证明:

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$$

$$\because (E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$$
$$=(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})-(A+A^2+\cdots+A^{k-1}+A^k)$$
$$=E-A^k=E$$

练习 设 A，B 为 n 阶方阵，且 $E-AB$ 与 $E-BA$ 均可逆，证明 $(E-BA)^{-1}=E+B(E-AB)^{-1}A.$

证 因为

$$(E-BA)\left(E+B(E-AB)^{-1}A\right)$$

$$=E-BA+(E-BA)B(E-AB)^{-1}A$$

$$=E-BA+(B-BAB)(E-AB)^{-1}A$$

$$=E-BA+B(E-AB)(E-AB)^{-1}A$$

$$=E-BA+BA=E$$

故 $$(E-BA)^{-1}=E+B(E-AB)^{-1}A.$$

逆阵的求法

方法一：用A^*求。 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

方法二：初等变换法。

$$(A \vdots E) \xrightarrow{\text{行变换}} \cdots \rightarrow (E \vdots A^{-1})$$

方法三：用定义求。

对***n***阶方阵***A***，只需找到一个***n***阶矩阵***B***，使

AB=E或者***BA=E***就行了。

方法四：用定义证明***B***为***A***的逆。

也就是证明等式***AB=E***成立或者***BA=E***成立。