向量组的极大无关组

定义1：设 向量组 T 的部分向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 满足

(i) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关;

(ii) T 中向量均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示。

或 T 中任一向量 α. $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关。

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 T 的一个极大线性无关组，简称极大无关组。

极大无关组的含义有两层：1无关性; 2.极大性。

注:1.线性无关向量组的极大无关组就是其本身;

2.向量组与其极大无关组等价;

3.同一个向量组的极大无关组不惟一,但它们之间是等价的.

例1:求向量组的极大无关组.

$$\alpha_1=(1,2,-1),\alpha_2=(2,-3,1),\alpha_3=(4,1,-1).$$

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-3&1\\4&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-7&3\\0&-7&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-7&3\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$\therefore r(A)=2<3\Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关。

但α_1,α_2线性无关,$\therefore\alpha_1,\alpha_2$是一个极大无关组;

α_1,α_3也线性无关,$\therefore\alpha_1,\alpha_3$也是一个极大无关组。

问题

极大无关组是不唯一的，所含个数是否相同?

极大无关组的性质

定理1： 设有两个n维向量组

$$(I)\quad \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\quad (II)\quad \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s,$$

若向量组(I)线性无关，且可由向量组(II)线性表示，则$r \le s$.

证：设

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn}\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn}\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_s\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_r\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_s\\ O\\ O\\ \vdots\\ O\end{pmatrix}.$$

$$\therefore r=r(A)\le r(C)\le s.$$

推论1： 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，且$r>s$,则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关。

推论2：任意两个线性无关的等价向量组所含向量的个数相等。

定理2：一个向量组的任意两个极大无关组所含向量的个数相等。

向量组的秩

定义：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的极大无关组所含向量的个数，称为**向量组的秩**，记为$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$.

注：（1）线性无关的向量组的秩=向量的个数。

（2）向量组线性无关$\Leftrightarrow$秩=向量个数。

定理3：若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，则

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\le r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$$

复习

向量组的等价

1.定义1：设有两个 n 维向量组 $(I):\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$

$(II):\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$

若向量组（I）中每个向量都可由向量组（II）线性表示，则称向量组（I）可由向量组（II）线性表示；

若向量组（I）与向量组（II）可以互相线性表示，则称向量组（I）与向量组（II）等价。

推论：等价的向量组有相同的秩。

你能举一个反例吗？

必须注意：有相同秩的两个向量组不一定等价。

推论：等价的向量组有相同的秩。反之不对。

即：有相同秩的两个向量组不一定等价。

$$\alpha_1=(1,0,0,0),\quad \beta_1=(0,0,1,0),\quad r(\alpha_1,\alpha_2)=2=r(\beta_1,\beta_2).$$

$$\alpha_2=(0,1,0,0).\quad \beta_2=(0,0,0,1).\quad \text{但}\{\alpha_1,\alpha_2\}\text{与}\{\beta_1,\beta_2\}\text{不等价。}$$

向量组的等价 $\Rightarrow$ 向量组的等秩

向量组的等价 $\cancel{\Leftarrow}$ 向量组的等秩

问题

向量组的等价 = 向量组的等秩 + ?

例2：设向量组$e_1,e_2,\cdots,e_n$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，

求$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$. $=n$

例3：设有两个n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$，若

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关且

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix} \quad K=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss}\end{pmatrix}$$

证明：若$r(K)=s$，则$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关。

$r(K)=s\Rightarrow K$可逆，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$表示，

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$等价。