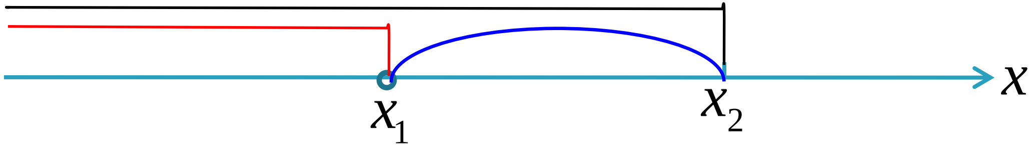
哈爾濱工業大學

第14讲 随机变量的分布函数

分布函数的引入

- 对任意实数$x_1 < x_2$有

$$(X \le x_2) = (X \le x_1) + (x_1 < X \le x_2)$$



$$\underline{P(x_1 < X \le x_2)} = P(X \le x_2) - P(X \le x_1),$$

$$\longrightarrow P(X \le x), \forall x \in R.$$

$$\|$$

$$F(x)$$

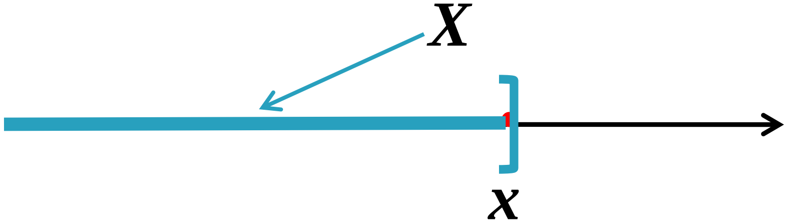
分布函数

- 定义 设X为一随机变量，称

$$F(x)=P(X\le x)\quad -\infty<x<+\infty.$$

为X的分布函数，记为$F(x)$或$F_X(x)$.

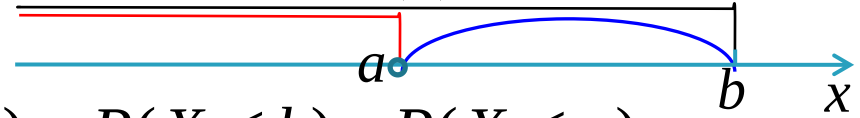
- 随机变量都有分布函数.
- 分布函数的几何意义



$$F(x)=P(X\le x)=P(x\in(-\infty,x)).$$

利用分布函数计算概率

设随机变量*X*的分布函数为*F*(*x*), *a*<*b*, *a*, *b*为任意实数，则



$$P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$$

$$= F(b) - F(a),$$

$$P(a < X < b) = P(a < X \le b) - P(X = b)$$

$$= F(b) - F(a) - P(X = b),$$

$$P(X = a) = P(X \le a) - P(X < a) = F(a) - F(a^-),$$

$$P(X > b) = 1 - P(X \le b) = 1 - F(b),$$

$$P(X \ge b) = 1 - P(X < b) = 1 - F(b^-).$$

例1 设随机变量X的分布列为

X	-1	2	3
P	1/2	1/3	1/6

求$P(X\le 2)$及X的分布函数.

解 $P(X\le 2)=P(X=-1)+P(X=2)$

$$=1/2+1/3=5/6.$$

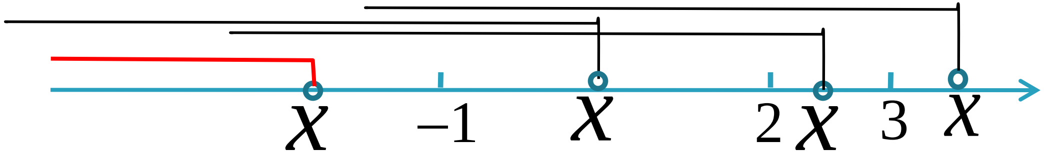
例1

X	-1	2	3
P	1/2	1/3	1/6

求X的分布函数.

解 $F(x) = P(X \le x)$

$$= \begin{cases} 0, & x < -1, \\ P(X = -1) = 1/2, & -1 \le x < 2, \\ P(X = -1) + P(X = 2) = 5/6, & 2 \le x < 3, \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$$



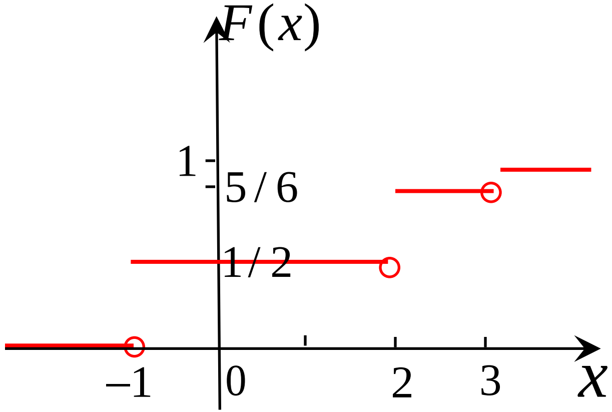
例1

X	-1	2	3
P	$1/2$	$1/3$	$1/6$

求X的分布函数.

解

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 1/2, & -1\le x<2,\\ 5/6, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$



离散型随机变量的分布函数是阶梯函数.

在$x=-1, 2, 3$处, 分别有跳跃值$1/2, 1/3, 1/6$.

□ 设离散型随机变量X的分布列

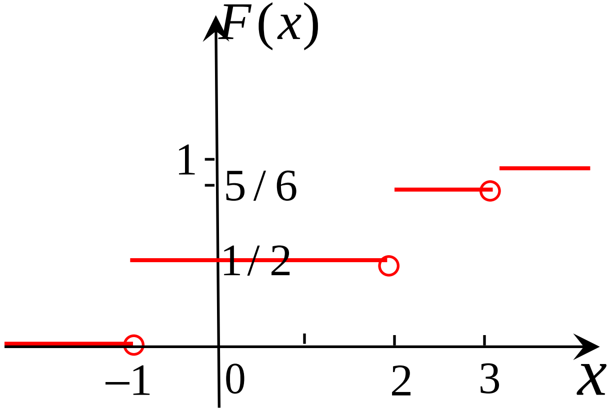
则 $$P(X=x_i)=p_i\ (i=1,2,\cdots),$$

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{x_i\le x}P(X=x_i),$$

$F(x)$在$x=x_i\,(i=1,2,\cdots)$处有跳跃值p_i.

例2 设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 1/2, & -1\le x<2,\\ 5/6, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$



求X的分布列.

解

X	−1	2	3
P	1/2	1/3	1/6

分布函数的性质

$$\boxed{F(x)=P(X\le x)}$$

(i) $0 \le F(x) \le 1 \ (-\infty < x < +\infty)$;

(ii) $F(x_1) \le F(x_2),\ x_1 < x_2$, 即$F(x)$是单调非减的;

(iii) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0, F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$;

(iv) $F(x^+) = F(x)$, 即$F(x)$是右连续的.

例3 设随机变量X的分布函数

$$F(x)=\begin{cases} A+\dfrac{B}{2}e^{-3x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

求(1)常数A, B;

(2)$P(2<X\le 3)$.

解 (1) 由$F(x)$性质,

$$\begin{cases} F(+\infty)=1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(A+\dfrac{B}{2}e^{-3x}\right),\\ F(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(A+\dfrac{B}{2}e^{-3x}\right)=F(0)=0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1,\\ A+\dfrac{B}{2}=0.\end{cases}$$

例3 设随机变量X的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}A+\dfrac{B}{2}\mathrm{e}^{-3x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

求(1)常数A, B;

(2)$P(2<X\le 3)$.

解 $\begin{cases}A=1,\\ A+\dfrac{B}{2}=0.\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{cases}A=1,\\ B=-2.\end{cases}}$ $\Rightarrow$ $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-3x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

例3 设随机变量X的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-3x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

求(1)常数A, B;

(2)$P(2<X\le 3)$.

解 (2) $P(2<X\le 3)=F(3)-F(2)$

$$=(1-\mathrm{e}^{-9})-(1-\mathrm{e}^{-6})$$

$$=\mathrm{e}^{-6}-\mathrm{e}^{-9}.$$

谢 谢！