基础解系怎么求?

定义：若齐次方程组的有限个解$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$，满足：

(i) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$线性无关；

(ii) 方程组的任一解都可由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$线性表示；

则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$是齐次方程组的一个基础解系。

基础解系的求法

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

设 $r(A)=r<n$,且不妨设A 中最左上角的 r 阶子式不为零。则经有限次行初等变换，矩阵 A 化为：

$$I_{m\times n}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1(n-r)} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2(n-r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r(n-r)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

行最简形

显然：$A\cong I$

$AX=O$与

$IX=O$同解。

$IX=O$ 为:

$$\begin{cases} x_1+b_{11}x_{r+1}+\cdots+b_{1(n-r)}x_n=0, \\ x_2+b_{21}x_{r+1}+\cdots+b_{2(n-r)}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r+b_{r1}x_{r+1}+\cdots+b_{r(n-r)}x_n=0, \end{cases}$$

$x_1,x_2,\cdots,x_r$ ———— 真未知量

$x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ ———— 自由未知量

$$\begin{cases} x_1=-(b_{11}x_{r+1}+\cdots+b_{1(n-r)}x_n), \\ x_2=-(b_{21}x_{r+1}+\cdots+b_{2(n-r)}x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=-(b_{r1}x_{r+1}+\cdots+b_{r(n-r)}x_n). \end{cases}$$

$x_1,x_2,\cdots,x_r$ 由自由未知量 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 惟一确定

$V=\{(x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n)\}$ 构成向量空间 R^{n-r},其基含有 $n-r$ 个向量,

最简单的一组基为:

$$e_1,e_2,\cdots,e_{n-r}.$$

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ -b_{21} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ -b_{22} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1(n-r)} \\ -b_{2(n-r)} \\ \vdots \\ -b_{r(n-r)} \end{pmatrix}.$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(-b_{11}, -b_{21}, \cdots, -b_{r1}, \quad 1, 0, \cdots, 0\right)^T, \quad \cdots,$$

$\boxed{(i)\ \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}\text{线性无关;}}$

$\boxed{(ii)\text{任一解都可由}\ \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}\text{线性表示。}}$

$$\xi_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(-b_{1(n-r)}, -b_{2(n-r)}, \cdots, -b_{r(n-r)}, \quad 0, 0, \cdots, 1\right)^T.$$

$\therefore \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$是解空间的一组基础解系。

从推导过程可以看出：基础解系不惟一，但所含向量个数相等，都等于 ***n* - *r*(*A*).**

综上有：

定理：若齐次线性方程组的系数矩阵A的秩$r(A)=r<n$，则它有基础解系，且基础解系所含解向量的个数为$n-r$。

必须牢记：**基础解系所含向量的个数为**

未知数个数减系数矩阵的秩。

必须牢记：基础解系所含向量的个数为

未知数个数减系数矩阵的秩。

推论1：对齐次线性方程组，有

若 $r(A)=n$ 则方程组有惟一零解;

若 $r(A)=r<n$ ，则方程组有无数多解，其通解为

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}.$$

$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是解空间的一组基础解系。

例1：求方程组的通解 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3=0, \\ 4x_1+7x_2-x_3=0. \end{cases}$

解：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-2r_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1=-5x_3, \\ x_2=3x_3. \end{cases}$ $x_3=1, \Rightarrow$ $\begin{cases} x_1=-5, \\ x_2=3. \end{cases}$

基础解系为 $\xi=(-5,3,1)^T$. 通解为 $k\xi=k(-5,3,1)^T$.

步骤：

(1) 写出系数矩阵 A 并对其作初等行变换化为行最简形式（同时得到 $r(A)$，这样也就可以确定基础解系所含解向量的个数）；

(2) 由行最简形式确定真未知量和自由未知量并写出与原方程组同解的方程组；

(3) 对自由未知量赋值，求出基础解系（有几个自由未知量，就应赋几组值，将其视为向量组，它们是线性无关的）.

例2：求方程组的通解 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4, \\ x_3 = 2x_4. \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

基础解系为：$\xi_1 = (1,1,0,0)^T$, $\xi_2 = (1,0,2,1)^T$. 通解为$k_1\xi_1 + k_2\xi_2$.

练习 求方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 15x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = 0. \end{cases}$$

例3: 设A, B为n阶方阵且$AB=O$, 证明$r(A)+r(B)\le n.$

证: $\because AB=O$, 设$B=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$,

则$A\beta_i=O, i=1,2,\cdots,n.$

$\Rightarrow \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$都是$AX=O$的解向量,

$\Rightarrow r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)\le n-r(A)$ $\therefore r(A)+r(B)\le n$

练习

设A为n阶方阵且$A^2=A$, 证明$r(A)+r(A-E)=n.$

$A(A-E)=O.$ $r(A)+r(A-E)=r(A)+r(E-A)\ge r(E)=n.$

推论2：n 元齐次线性方程组有非零解的充要条件是其系数行列式为零。

n 元齐次线性方程组有非零解即有基础解系。。。