

特征值与特征向量的性质

性质1: n 阶矩阵 A 的相异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 所对应的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ 线性无关。

定理: 对任意 n 阶方阵 A , 属于不同特征值的特征向量线性无关。

最一般的证法: 数学归纳法。

证：用数学归纳法。

1°. $m = 1$, λ_1 的特征向量 $\xi_1 \neq O$, $\therefore \xi_1$ 线性无关;

2°. 假设 $m - 1$ 时结论成立, 即

A 的相异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}$ 所对应的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}$ 线性无关。下面证明 m 时成立。

即证明 A 的相异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 所对应的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ 线性无关。

回忆线性无关的证明方法!

$$\text{设 } k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_m\xi_m = O \quad (1)$$

设 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_m\xi_m = O$ (1) 左乘A

$$A(k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_m\xi_m) = O \quad (\because A\xi_i = \lambda_i\xi_i)$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1\xi_1 + k_2\lambda_2\xi_2 + \cdots + k_m\lambda_m\xi_m = O \quad (2)$$

$$(1) \text{ 左乘 } \lambda_m \Rightarrow k_1\lambda_m\xi_1 + k_2\lambda_m\xi_2 + \cdots + k_m\lambda_m\xi_m = O \quad (3)$$

(2) 减 (3) 得:

$$k_1(\lambda_1 - \lambda_m)\xi_1 + k_2(\lambda_2 - \lambda_m)\xi_2 + \cdots + k_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)\xi_{m-1} = O$$

由归纳假设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{m-1}$ 线性无关 $\Rightarrow k_i(\lambda_i - \lambda_m) = 0$

$\because \lambda_i - \lambda_m \neq 0 \therefore k_i = 0, i = 1, 2, \cdots, m-1$. 代回 (1) 得: $k_m = 0$

由归纳原理特征向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ 线性无关。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -7$$

$\xi_1 = (-2, 1, 0)^T, \xi_2 = (2, 0, 1)^T$ 为属于特征值2的线性无关的特征向量;

$\xi_3 = (1, 2, -2)^T$ 为 $\lambda_3 = -7$ 的特征向量.

$\xi_1 = (-2, 1, 0)^T, \xi_2 = (2, 0, 1)^T, \xi_3 = (1, 2, -2)^T$ 线性无关。

$$|\xi_1, \xi_2, \xi_3| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 9.$$

推论:

n 阶矩阵 A 的相异特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{ir_i}$ 是特征值 λ_i 所对应的线性无关的特征向量, 则 $\sum_{i=1}^m r_i$ 个特征向量 $\xi_{11}, \xi_{12}, \dots, \xi_{1r_1}, \xi_{21}, \xi_{22}, \dots, \xi_{2r_2}, \dots, \xi_{m1}, \xi_{m2}, \dots, \xi_{mr_m}$ 线性无关。

例 设矩阵 A 的两个互异的特征值为 λ_1 与 λ_2 , 即 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是属于 λ_1 的线性无关的特征向量; 向量 β_1, β_2 是属于 λ_2 的线性无关的特征向量。证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 线性无关。

证 设有常数 k_1, k_2, k_3, l_1, l_2 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + l_1\beta_1 + l_2\beta_2 = 0, \quad (1)$$

用 A 左乘(1)式, 并将 $A\alpha_i = \lambda_1\alpha_i, i = 1, 2, 3; A\beta_j = \lambda_2\beta_j, j = 1, 2$ 代入, 得:

$$k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_2 + k_3\lambda_1\alpha_3 + l_1\lambda_2\beta_1 + l_2\lambda_2\beta_2 = 0, \quad (2)$$

用 λ_1 乘(1)式得

$$k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_2 + k_3\lambda_1\alpha_3 + l_1\lambda_1\beta_1 + l_2\lambda_1\beta_2 = 0, \quad (3)$$

(2)式 - (3)式得

$$l_1(\lambda_2 - \lambda_1)\beta_1 + l_2(\lambda_2 - \lambda_1)\beta_2 = 0,$$

因为 β_1, β_2 线性无关, 所以

$$\begin{cases} l_1(\lambda_2 - \lambda_1) = 0, \\ l_2(\lambda_2 - \lambda_1) = 0. \end{cases}$$

又由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 故必有 $l_1 = l_2 = 0$. 代回到(1)式得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0.$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关得 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 从而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 线性无关。

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + l_1\beta_1 + l_2\beta_2 = 0, \quad (1)$$

性质2: 相似矩阵有相同的特征值。

$$A \sim B \Rightarrow |A - \lambda E| = |B - \lambda E|$$

证明矩阵
有相同特
征值的一
种方法。

注: 属于同一特征值的特征向量的非零线性组合仍是属于这一特征值的特征向量; 但属于不同特征值的特征向量的非零线性组合一般就不是特征向量了。

特征值的求法公式： 设 λ 为 A 的特征值，则

- (i) $k\lambda$ 为 kA 的特征值；
 - (ii) λ^m 为 A^m 的特征值；
 - (iii) $f(\lambda)$ 为 $f(A)$ 的特征值；
 - (iv) λ^{-1} 为 A^{-1} 的特征值；
 - (v) $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A^* 的特征值；
 - (vi) λ 为 A^T 的特征值。
- } A 可逆。

非常重要的公式

4.特征值与矩阵的关系公式： $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的特征值，则

(i) $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$; —————在求行列式时特别有用。

(ii) $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

练习

设三阶方阵 A 的特征值为 $1, -2, -3$, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$.

A^{-1} 的特征值为 $\underline{\hspace{2cm}}$, A^* 的特征值为 $\underline{\hspace{2cm}}$,

$A^2 + 2A + E$ 的特征值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

$$|A| = 6, \quad A^{-1} \text{的特征值: } 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3};$$

$$A^* \text{的特征值: } 6, -3, -2; \quad A^2 + 2A + E \text{的特征值: } 4, 1, 4.$$

练习

设三阶方阵 A 的特征值为 $1, -1, 2$, $|A + 3E| = \underline{\hspace{2cm}}$. 40

$A + 3E$ 的特征值为 $4, 2, 5$.