向量组的秩的求法

行秩： 矩阵行向量组的秩；**列秩：** 矩阵列向量组的秩。

定理4： 矩阵的行秩与列秩相等，为矩阵的秩。

推论： 向量组的秩与该向量组所构成的矩阵的秩相等。

这实际上给出了一个求向量组秩的方法：先将向量组构成一个矩阵，然后求矩阵的秩，这个秩就是向量组的秩。

例1：求向量组的秩。

$$\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),\alpha_3=(3,0,7,14),\alpha_4=(1,-2,2,0).$$

解：

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2&4\\0&3&1&2\\3&0&7&14\\1&-2&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&4\\0&3&1&2\\0&3&1&2\\0&-1&0&-4\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = r(A) = 3$$

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 14 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

极大无关组的求法

列摆行变换法。（记录法与逐个考察法就不介绍了。）

例2：求向量组的秩及极大无关组。

$$\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),\alpha_3=(3,0,7,14),\alpha_4=(1,-2,2,0).$$

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&3&1\\-1&3&0&-2\\2&1&7&2\\4&2&14&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_1]{}\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&3&3&-1\\0&1&1&0\\0&2&2&-4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&3&3&-1\\0&2&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r(A)=3,\quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$是一个极大无关组。

列摆行变换将矩阵化为梯形阵后，秩即求出来了。这时，只要在每一高度上取一个向量，相同高度取左，即可得到极大无关组。

如上例，

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$也是一个极大无关组。

练习

λ为何值时，向量组$\alpha_1=$（1,1,1,1,2），$\alpha_2=$（2,1,3,2,3），$\alpha_3=$（2,3,2,2,5），$\alpha_4=$（1,3,−1,1, λ）线性相关？并求秩及一个极大无关组。

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\1&1&3&3\\1&3&2&-1\\1&2&2&1\\2&3&5&\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{行变换}]{}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&\lambda-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow\lambda=4$时，$r(A)=3<4,\quad\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关。

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是一个极大无关组。

但，行摆行变换不行！

反例： $\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(1,1,0).$

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-r_3]{}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_1]{}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+r_3]{}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$\therefore \alpha_2,\alpha_3$是一个极大无关组。

矛盾

例3：a取何值时向量组线性相关，并求秩及极大无关组。

$$\alpha_1=(1,0,0,3),\alpha_2=(1,1,-1,2),\alpha_3=(1,2,a-3,a),\alpha_4=(0,1,a,-2).$$

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&1\\0&-1&a-3&a\\3&2&a&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&1\\0&0&a-1&a+1\\0&-1&a-3&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&1\\0&0&a-1&a+1\\0&0&a-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&1\\0&0&a-1&-1\\0&0&0&a+2\end{pmatrix}\xrightarrow[a=1]{}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&3\end{pmatrix},$$

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$,

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为极大无关组。

$a=-2$,

$$A\xrightarrow[a=-2]{}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&1\\0&0&-3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3,$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为极大无关组。

我们已经看到：用矩阵可以解决向量组的问题，实际上，用向量组也可以解决矩阵的问题。一个最典型的例子是：

$$\boxed{r(A_{m\times s}B_{s\times n})\le \min\{r(A),r(B)\}}$$

这是一个非常重要的关于秩的不等式！

$A_{m\times s}B_{s\times n}=C$, $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s),C=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$,

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}.$$

$$(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)=C=AB=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}=\cdots,$$

$\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n\}$可由$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$线性表示，故有

$$r(C)=r(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)\le r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(A).$$

$$A_{m\times s}B_{s\times n}=C,$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_m \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_m \end{pmatrix}=C=AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix}=\cdots$$

$$r(C)=r(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m)\le r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=r(B).$$

$$A_{m\times s}B_{s\times n}=C,\quad \Rightarrow r(C)=r(AB)\le r(A).$$

$$B^T_{s\times n}A^T_{m\times s}=C^T,\quad \Rightarrow r(C)=r(C^T)=r(B^TA^T)\le r(B^T)=r(B).$$

$$\boxed{r(A_{m\times s}B_{s\times n}) \le \min\{r(A), r(B)\}}$$

设有n两个维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$, 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关且

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss}\end{pmatrix}.$$

则$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关$\Leftrightarrow r(K)=s.$

则$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性相关$\Leftrightarrow r(K)<s.$

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关$\Rightarrow r(K)=s:$

$$B = KA, \Rightarrow s = r(B) = r(KA) \le r(K) \le s, \Rightarrow r(K) = s.$$

$$\boxed{r(A_{m\times s}B_{s\times n})\le \min\{r(A), r(B)\}}$$

练习

设$A_{n\times m}B_{m\times n}=E_n$，证明：$B$的列向量组线性无关