



哈爾濱工業大學

多维随机变量及其分布 函数、边缘分布函数



多维随机变量

➤ 在打靶时, 命中点的位置需要用命中点的横坐标 X 和纵坐标 Y 两个随机变量来确定的.



➤ 研究天气的变化, 涉及更多的随机变量, 如气温 X 、气压 Y 、风速 Z 等随机变量.



多维随机变量



■ **定义** 若 $X_1(e), X_2(e), \dots, X_n(e)$ 定义在同一样本空间 S 上的 n 个随机变量, 称 $(X_1(e), \dots, X_n(e))$ 为 **n 维随机变量**或 **n 维随机向量**, 简记为 (X_1, \dots, X_n) .

下面着重讨论二维随机变量 (X, Y) ,
多维随机变量可类推.

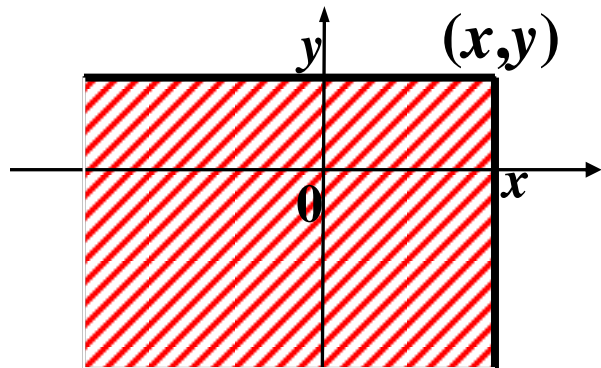
二维随机变量 (X, Y) 的分布函数

二维随机变量 (X, Y)

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$$-\infty < x, y < \infty$$

为 X 和 Y 的联合分布函数



一维随机变量 X

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$-\infty < x < \infty$$

为 X 的分布函数

$(X \leq x) \cap (Y \leq y)$
两事件同时发生

分布函数的性质



(1) 对任意实数 x, y 有 $0 \leq F(x, y) \leq 1$;

(2) $F(x_1, y) \leq F(x_2, y), x_1 < x_2, y$ 任意;

$F(x, y_1) \leq F(x, y_2), y_1 < y_2, x$ 任意.

即 $F(x, y)$ 对每个自变量都是单调不减的;

(3) 对任意 x, y 有 $F(-\infty, y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$,

$$F(x, -\infty) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0,$$

$$F(-\infty, -\infty) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} F(x, y) = 0,$$

$$F(+\infty, +\infty) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F(x, y) = 1;$$

分布函数的性质

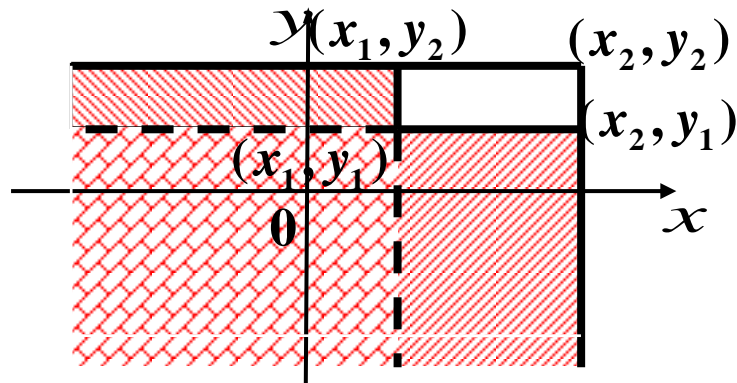
(4) $F(x, y) = F(x^+, y), F(x, y) = F(x, y^+)$;

(5) 对任意实数 $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$, 有

$$\underline{F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0.}$$

因为

$$\underline{P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2)}$$



边缘分布函数



■ 设二维随机变量 (X, Y) 的分布函数 $F(x, y)$, 称 X 与 Y 各自的分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 为 $F(x, y)$ 的边缘分布函数或 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布函数.即

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(X \leq x, Y < +\infty) \\ &= F(x, +\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y), \end{aligned}$$

同理, $F_Y(y) = F(+\infty, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y).$



思考:

对 (X, Y) , 已知 X 与 Y 各自的分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 可以求联合分布函数 $F(x, y)$?

例如, $X \sim N(1, 2), Y \sim N(3, 4)$

→ $F(x, y)$

一般地, 由联合分布函数可以确定边缘分布函数;

但由边缘分布函数不能确定联合分布函数.



例1 设 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} c - e^{-0.5x} - e^{-0.5y} + e^{-0.5(x+y)}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 (1) c ; (2) Y 的边缘分布 $F_Y(y)$;

(3) $P(Y > 1)$; (4) $P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1)$.

解 (1) $1 = F(+\infty, +\infty) = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} F(x, y)$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (c - e^{-0.5x} - e^{-0.5y} + e^{-0.5(x+y)}) = c.$$



$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5x} - e^{-0.5y} + e^{-0.5(x+y)}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

解 (2) $F_Y(y) = F(+\infty, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y)$

$$= \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^{-0.5x} - e^{-0.5y} + e^{-0.5(x+y)}), & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 - e^{-0.5y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

(3) $P(Y > 1) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - F_Y(1) = 1 - (1 - e^{-0.5})$

$$= e^{-0.5}.$$



$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5x} - e^{-0.5y} + e^{-0.5(x+y)}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

解 (4) $P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1)$

$$= F(1, 1) - F(1, 0) - F(0, 1) + F(0, 0)$$

$$= (1 - e^{-0.5} - e^{-0.5} + e^{-1}) - 2(1 - e^{-0.5} - 1 + e^{-0.5}) + 0$$

$$= 1 - 2e^{-0.5} + e^{-1}.$$



谢 谢！