逆阵的性质

$(i)A$可逆$\Rightarrow \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$;

$(ii)A$可逆$\Rightarrow A^{-1}$可逆,$(A^{-1})^{-1} = A$;

$(iii)AB = E(or\ BA = E) \Rightarrow B = A^{-1}$;

$(iv)(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;

$(v)(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

$(vi)(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1},(k \neq 0, A$可逆$)$.

$(v) \because (AB)(B^{-1}A^{-1}) = E \quad \therefore \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

背过这些公式！

例　证明初等矩阵都是可逆的，且有：

$$E^{-1}(i,j)=E(i,j);\qquad E^{-1}(i(k))=E(i(\frac{1}{k}));$$

$$E^{-1}(i,j(k))=E(i,j(-k)).$$

证： $\because E(i,j)E(i,j)=E,$

$$\therefore E^{-1}(i,j)=E(i,j).$$

同理证其它两式。

这说明初等矩阵的逆阵仍为同类型的初等矩阵。
——这是初等矩阵的第三个性质。

逆阵的求法

方法一：用A^*求。 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$

方法二：**初等变换法。**

A可逆$\Rightarrow A^{-1}$可逆， $\Rightarrow A^{-1}=P_1P_2\cdots P_s$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow P_1P_2\cdots P_sA=E \\ \quad P_1P_2\cdots P_sE=A^{-1}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$(A\vdots E)\xrightarrow{\text{行变换}}\cdots\rightarrow(E\vdots A^{-1})$$

例3. 求下列矩阵的逆。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a^{n-1} & a^{n-2} & a^{n-3} & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \vdots E) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \vdots & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \vdots & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \vdots & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(B \vdots E) = \cdots \xrightarrow{\text{行变换}} \cdots$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

练习

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}, A^{-1}=?$$

练习答案

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-8 & 29 & -11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

结果是否正确，可通过验证下列等式是否成立获知。

$$\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-8 & 29 & -11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}\overset{?}{=}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-\frac{2}{3}r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3+\frac{8}{3} & 1-\frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{3}{3} & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\cdots\cdots$$