前面我们学习了行列式和矩阵，主要研究了：

行列式的计算，包括：

2，3阶行列式的计算，n阶行列式的计算，

4阶行列式的计算。

关于矩阵，主要包括：

矩阵的线性运算，矩阵的乘法运算，

矩阵的转置运算，矩阵的秩，

矩阵可逆的条件及逆阵的求法，

分块矩阵及矩阵方程。

初等变换-----最重要和最经常使用的工具。

梯形阵，初等矩阵。

n 维向量

n 维向量及其线性运算

一、n 维向量的概念

1.定义1: 由数$a_1, a_2, \cdots a_n$组成的有序数组，称为n维向量，简称为向量。

向量通常用斜体希腊字母α, β, γ 等表示。

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

行向量

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$$

列向量

a_i

第i个分量

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$$

$$i=1,2,\cdots m.$$

矩阵 *A*的行向量

矩阵 *A*的列向量

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^T$$

$$j=1,2,\cdots,n$$

$$\mathbf{0}=(0,0,\cdots;0)$$

零向量

$$-\alpha=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$$

负向量

$$\alpha=\beta\Leftrightarrow\begin{cases}\text{维数相同，即同型。}\\ a_i=b_i, i=1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

2.定义2: $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,数值$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$

称为向量α的长度或范数或模,记为$\|\alpha\|$.

$\|\alpha\|=0\Leftrightarrow\alpha=0$ $\qquad$ $\alpha\neq0\Rightarrow\|\alpha\|>0$

$\|\alpha\|=1$称α为单位向量。

$$\alpha=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),\beta=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}),\gamma=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}).$$

$$\boxed{e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1).}$$

$$\boxed{e_1=(1,0,\cdots,0),e_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1).}$$

二、n 维向量的线性运算　　设向量

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad \beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n),$$

1.加法: $\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$

2.减法: $\alpha-\beta=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n)$

3.数乘: $k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$

线性运算满足8条运算规律.

$\alpha+\beta=\beta+\alpha,$　　$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta,$

$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma),$　　$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha,$

$\alpha+0=\alpha=0+\alpha,$　　$k(l\alpha)=(kl)\alpha,$

$\alpha-\alpha=0.$　　$1\alpha=\alpha.$

4 .线性组合

定义: 设向量$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，若存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$使

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

则称向量β可由向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，

或称向量β是向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的线性组合。

$$\alpha = (a_1,a_2,\cdots,a_n) = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$$

例1：设$\alpha_1=(1,2,-1),\alpha_2=(2,-3,1),\alpha_3=(4,1,-1),$

证明：α_3是α_1,α_2的线性组合。

证明：设$\alpha_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，即：

$$(4,1,-1)=k_1(1,2,-1)+k_2(2,-3,1),$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4=k_1+2k_2,\\1=2k_1-3k_2,\\-1=-k_1+k_2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=2,\\k_2=1.\end{cases}$$

故$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$.

向量组的等价

1.定义1：设有两个 n 维向量组 $(I):\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$

$(II):\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$

若向量组（I）中每个向量都可由向量组（II）线性表示，则称向量组（I）可由向量组（II）线性表示；

若向量组（I）与向量组（II）可以互相线性表示，则称向量组（I）与向量组（II）等价。

向量组的等价关系具有自反性、对称性、传递性。

练习

设$\alpha_1=(1,2,-1),\alpha_2=(2,-3,1),\alpha_3=(4,1,-1)$,

证明:$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$与$\{\alpha_1,\alpha_2\}$等价。

α_3可由α_1,α_2线性表示。

例2：设 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，若$e_1,e_2,\cdots,e_n$可由它们线性表示，证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与 $e_1,e_2,\cdots,e_n$等价。

证：$\because\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$显然可由$e_1,e_2,\cdots,e_n$线性表示，

又由题设$e_1,e_2,\cdots,e_n$可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，

$\therefore\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$e_1,e_2,\cdots,e_n$等价。