哈爾濱工業大學

单个正态总体参数的显著性检验

u 检验

设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,σ^2已知,

$X_1,\ldots,X_n$为样本，$\bar{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差，$x_1,\ldots,x_n$是样本值，μ_0为已知数.

考虑μ的三类检验问题

1. H_0: $\mu=\mu_0$,

2. H_0: $\mu \le \mu_0$,

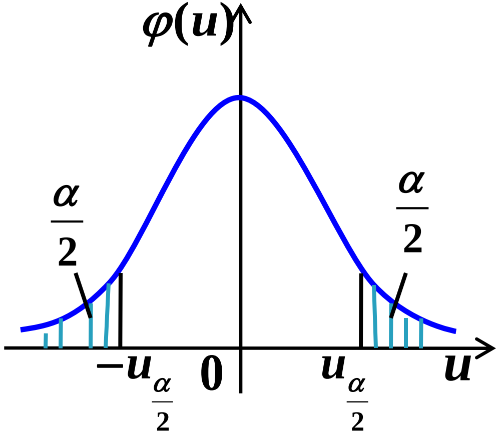
3. H_0: $\mu \ge \mu_0$.

u 检验（临界值法）

1. 检验 H_0：$\mu=\mu_0$

$\bar{X}$是μ的无偏估计量，

$$\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$$



选检验统计量

$$u=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\overset{H_0}{\sim}N(0,1)$$

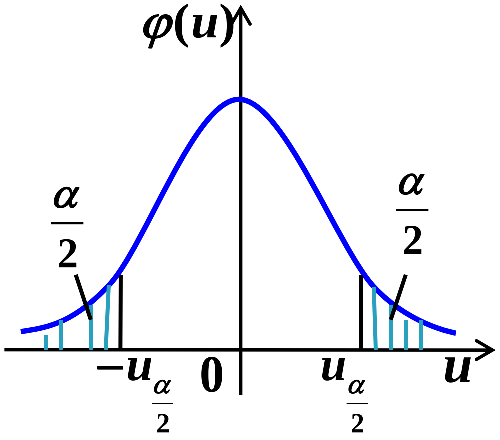
它能衡量差异$|\bar{X}-\mu_0|$的大小，且分布已知.

u 检验（临界值法）

对给定的显著性水平α,

查临界值$u_{\frac{\alpha}{2}}$，使得

$$P\left(|u| \geq u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \alpha,$$

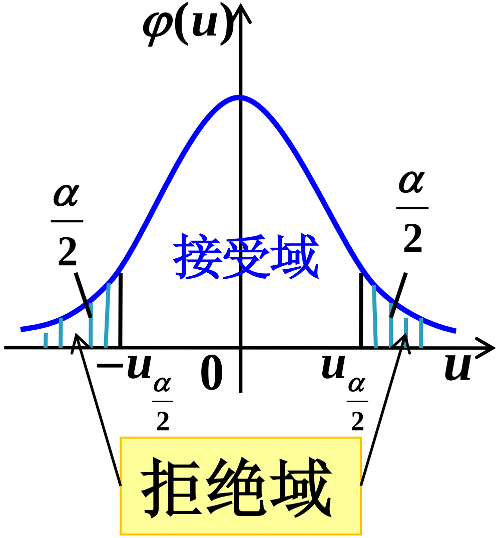


$$A = \left(|u| \geq u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$是小概率事件.

u 检验（临界值法）

故检验的拒绝域为：

$$W=\left\{|u|=\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right|\geq u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}.$$

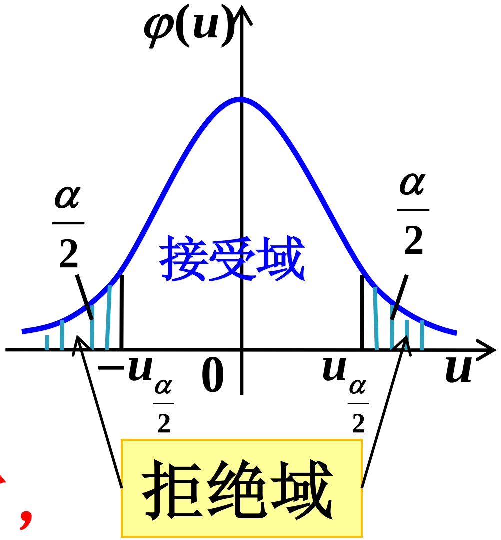


若由样本值算得检验统计量的值落入区域W，则拒绝H_0；否则，接受H_0.

拒绝域在双侧称为双侧检验.

u 检验（临界值法）

推断依据： 若H_0 是对的，那么衡量差异大小的检验统计量落入拒绝域W是小概率事件. 若该统计量的实测值落入W，说明H_0成立下的小概率事件发生了，那么就认为H_0不可信而拒绝它. 否则就接受H_0.



u 检验（p值法）

p值法是用p值代替拒绝域作判断.

p值:当原假设成立时，检验统计量取样本观察结果或更极端结果的概率.

1. 检验 H_0: $\mu=\mu_0$

选检验统计量

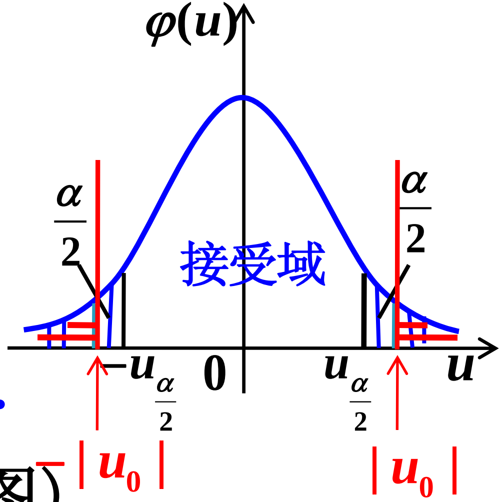
$$u=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$$

u 检验（p值法）

计算p值，对给定的样本值 $x_1,\dots,x_n$ 代入检验统计量得

$$u_0=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

$$p=P(|u|\geq|u_0|)$$
$$=2P(u\geq|u_0|)=2(1-\Phi(|u_0|)).$$



p值=红色区域面积

α=蓝色区域面积

当 $p\leq\alpha$时，拒绝原假设(图)

当 $p>\alpha$时，接受原假设.

例1 某测距仪在500m范围内，测距精度 $\sigma = 10\text{m}$. 今对距离500m的目标，测量9次，得到平均距离 $\bar{x} = 510\text{m}$. 问该测距仪是否存在系统误差$(\alpha = 0.05)$?

解(1)用X表示测距仪对目标一次测量得到的距离，设 $X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma = 10.$

检验 $H_0 : \mu = 500.$

（2） $n=9, \bar{x}=510, \mu_0=500, \sigma=10$ 计算检验统计量的值

$$u=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}=\frac{510-500}{10}\sqrt{9}=3;$$

(3) 对给定 $\alpha=0.05$, 查临界值 $u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96;$

得拒绝域 $W=(|u|\geq u_{0.025}=1.96)$

(4) 作结论 $|u|=3>1.96$，所以拒绝 H_0，认为测距仪存在系统误差.

利用p值检验：(1), (2)步同上

(3)计算p值,

(2)中统计量的值$u=3=u_0$,

$$\mathrm{p}=P(|u|\geq|u_0|)=2(1-\Phi(|u_0|))$$

$$=2(1-\Phi(|3|))=0.0026,$$

(4)作结论：

$$\mathrm{p}=0.0026<\alpha=0.05,$$

拒绝H_0，认为测距仪存在系统误差.

假设检验具体步骤（临界值法）

(1) 根据实际问题提出统计假设;

(2) 选择检验统计量，并从样本值计算出统计量的值u;

(3) 对给定的显著性水平α，查临界值，获得拒绝域;

(4) 根据实际样本观测值作出判断.

假设检验具体步骤（p值法）

(1) 根据实际问题提出统计假设;

(2) 选择检验统计量，并从样本值计算出统计量的值u_0;

(3) 由拒绝域的形式计算p值，当$p \le \alpha$时，拒绝原假设；当$p > \alpha$时，接受原假设.

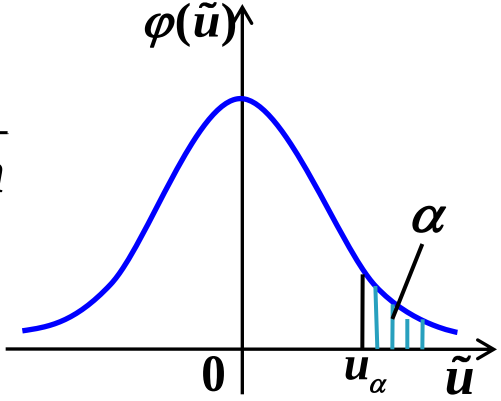
(4) 根据实际样本观测值作出判断.

u 检验

2. 检验 H_0: $\mu \le \mu_0$

选检验统计量$u = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$

令 $\tilde{u} = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$



对给定的显著性水平α，查临界值u_α，使得

$$P(\tilde{u} \ge u_\alpha) = \alpha.$$

由$u \le \tilde{u} \Rightarrow P(u \ge u_\alpha) \le P(\tilde{u} \ge u_\alpha) = \alpha,$

u 检验

检验的拒绝域为

$$W=\left\{u=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\geq u_\alpha\right\}.$$

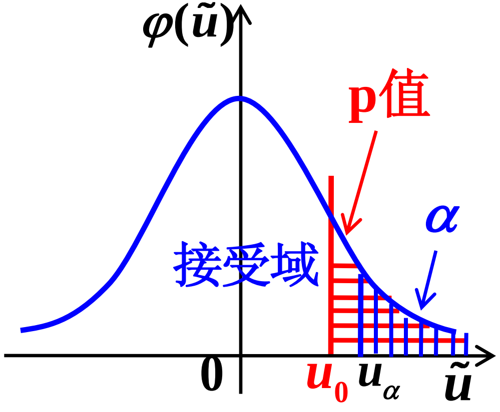
p值

$$\mathrm{p}=P(u\geq u_0)=1-\Phi(u_0).$$

其中

$$u_0=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}.$$

右侧检验.



$\boxed{\text{p值}>\alpha,\text{接受}H_0.}$

u 检验

在假设检验中

$$H_0: \mu \le \mu_0$$

$$H_0: \mu \le \mu_0, \quad H_1: \mu > \mu_0$$

$$H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu > \mu_0$$

以上3种检验的检验法则与检验效果是一致的.

例2 某厂生产一种灯管，其寿命(单位:h) $X \sim N(\mu, 200^2)$, 由过去的经验看，$\mu \le 1500$.今采用新工艺生产后，再从产品中随机抽25只进行测试，得到寿命的平均值为1675，问采用新工艺后，灯管质量是否有显著提高？$(\alpha = 0.05)$.

解 (1)检验 $H_0: \mu \le 1500$;

(2) 检验统计量

$$u=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}=\frac{1675-1500}{200}\sqrt{25}=4.375;$$

(3) 查得临界值 $u_{0.05}=1.65,$

得拒绝域$W=(u\geq 1.65);$

(4) 4.375>1.65，故拒绝H_0，认为采用新工艺后，灯管质量提高了.

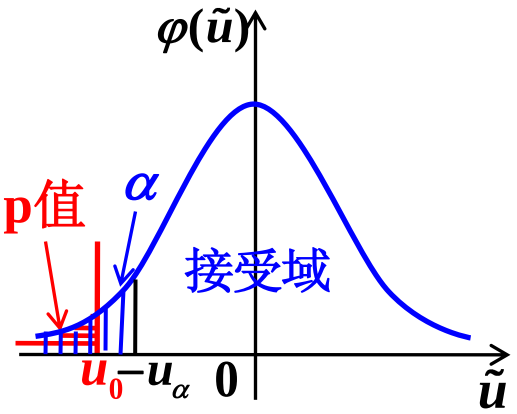
或计算p值 $\mathrm{p}=P(u\geq u_0)=1-\Phi(4.375)\approx 0.$

$\mathrm{p}<\alpha=0.05$，拒绝H_0.

u 检验

3. 检验 H_0： $\mu \geq \mu_0$

选检验统计量 $u = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$



$\boxed{\text{p值} < \alpha\text{,拒绝} H_0.}$

检验的拒绝域为

$$W = \left\{ u = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \leq -u_\alpha \right\}.$$

p值： $\mathrm{p} = P(u \leq u_0) = \Phi(u_0).$

其中 $u_0 = \dfrac{\bar{x} - u_0}{\sigma}\sqrt{n}.$ 这是左侧检验.

u 检验

在假设检验中

$$H_0: \mu \geq \mu_0$$

$$H_0: \mu \geq \mu_0, \quad H_1: \mu < \mu_0$$

$$H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu < \mu_0$$

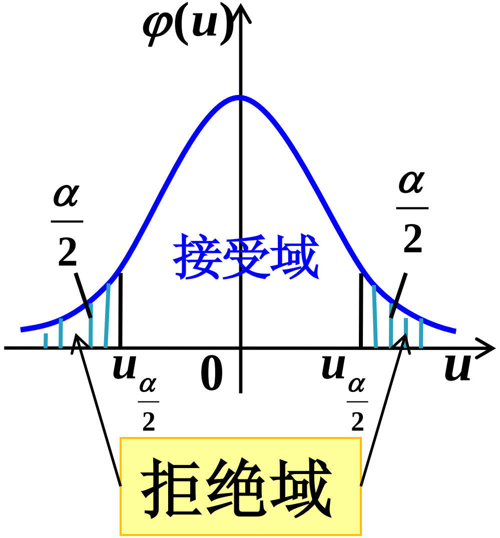
以上3种检验的检验法则与检验效果是一致的.

假设检验与置信区间的对偶关系

设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2已知，检验 H_0：$\mu=\mu_0$

检验统计量

$$u=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\overset{H_0}{\sim}N(0,1)$$



假设检验与置信区间的对偶关系

设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2已知，检验 H_0: $\mu=\mu_0$

显著性水平为 α 的拒绝域为

$$W=\left\{|u|=\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right|\ge u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}.$$

接受域为 $\bar{W}=\left\{|u|=\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right|<u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}.$

$$=\left\{\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu_0<\bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}.$$

用μ替换μ_0即为μ的置信区间.

置信区间包含μ_0接受H_0，否则拒绝H_0.

t 检验

设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,σ^2未知，

$X_1,\ldots,X_n$为样本，$\bar{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差，$x_1,\ldots,x_n$是样本值，μ_0为已知数.

考虑μ的三类检验问题

1. H_0: $\mu=\mu_0$,

2. H_0: $\mu \le \mu_0$,

3. H_0: $\mu \ge \mu_0$.

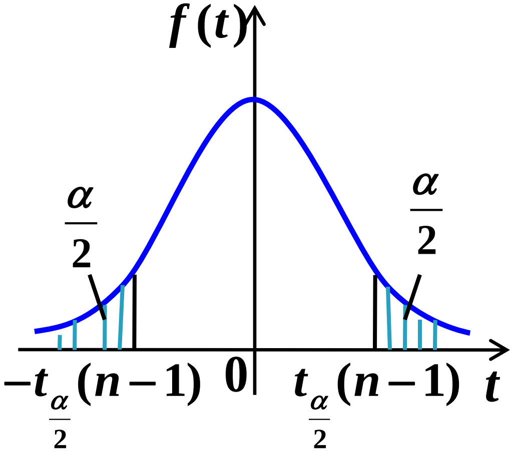
t 检验（临界值法）

1. 检验 H_0：$\mu = \mu_0$

用S代替σ,

选检验统计量

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n} \overset{H_0}{\sim} t(n-1)$$



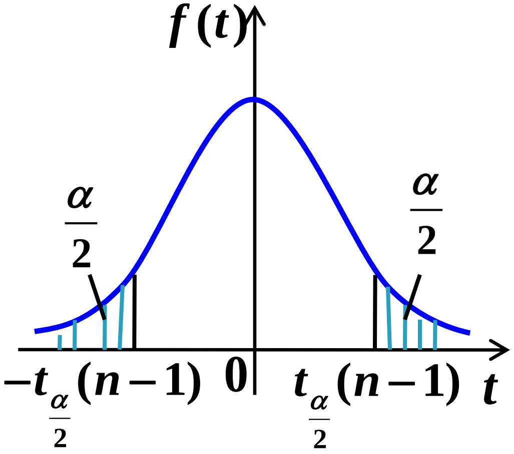
它能衡量差异$|\bar{X} - \mu_0|$的大小，且分布已知.

t 检验（临界值法）

对给定的显著性水平α，

查临界值$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，使得

$$P\left(|t|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=\alpha,$$



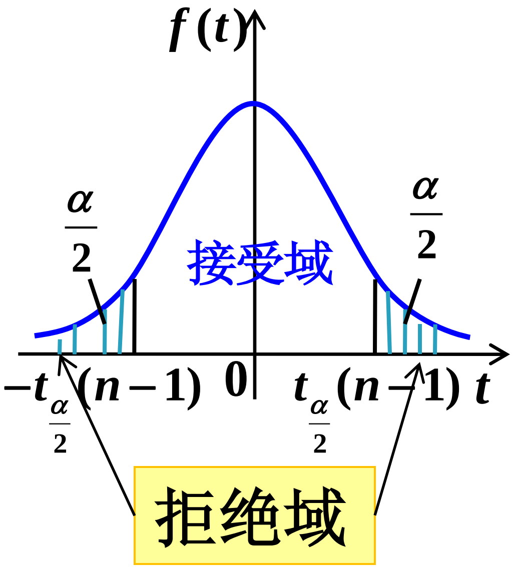
$$A=\left(|t|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$是小概率事件.

t 检验（临界值法）

故检验的拒绝域为：

$$W = \left\{ |t| = \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} \right| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}.$$

双侧检验.



t 检验（p值法）

计算p值，对给定的样本值 $x_1,\ldots,x_n$ 代入检验统计量得

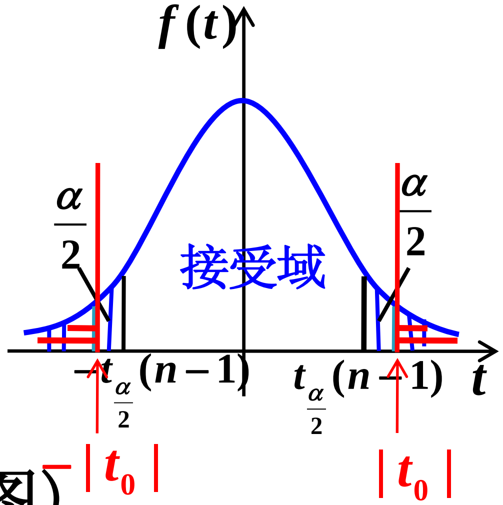
$$t_0=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s}\sqrt{n}$$

$$\mathrm{p}=P(|t|\geq|t_0|)$$

$$=2P\{t(n-1)\geq|t_0|\}.$$

当 $\mathrm{p}\leq\alpha$ 时，拒绝原假设(图)

当 $\mathrm{p}>\alpha$ 时，接受原假设.



p值=红色区域面积

α=蓝色区域面积

例1 某药厂生产一种抗生素，已知在正常生产条件下，每瓶抗生素的某项主要指标服从均值为23.0的正态分布.某日开工后，测得5瓶的数据如下：22.3，21.5，22，21.8，21.4，问该日生产是否正常？$(\alpha=0.05)$

解 (1) 用X表示每瓶抗生素的某项主要指标，设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, σ未知.

检验 $H_0:\mu=23.$

（2）$n=5,\ \bar{x}=21.8,\ s^2=0.135,$ 计算检验统计量的值

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s}\sqrt{n}=\frac{21.8-23}{\sqrt{0.135}}\sqrt{5}=-7.3;$$

(3) 对给定 $\alpha=0.05,$ 查临界值

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(4)=2.7764;$$

得拒绝域 $W=(|t|\geq t_{0.025}(4)=2.7764).$

（4）作结论 $|t|=7.3>2.7764$，所以拒绝 H_0，认为该日生产不正常.

利用p值检验：(1), (2) 步同上

(3) 计算p值,

(2) 中统计量的值$t=-7.3=t_0$,

$$p=P(|t|\geq|t_0|)=2P\{t(4)\geq|-7.3|\}$$

$$\approx 0.01,$$

(4) 作结论：

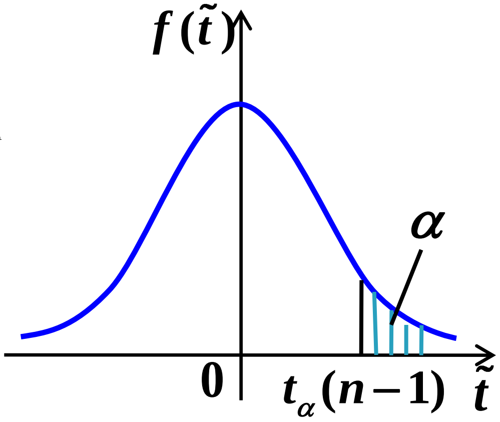
$$p=0.01<\alpha=0.05,$$

拒绝H_0，认为该日生产不正常.

t 检验

2. 检验 H_0： $\mu \le \mu_0$

选检验统计量$t = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$



令 $\tilde{t} = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \overset{H_0}{\sim} t(n-1)$

对给定的显著性水平α，查临界值$t_\alpha(n-1)$,

使得 $P(\tilde{t} \ge t_\alpha(n-1)) = \alpha$.

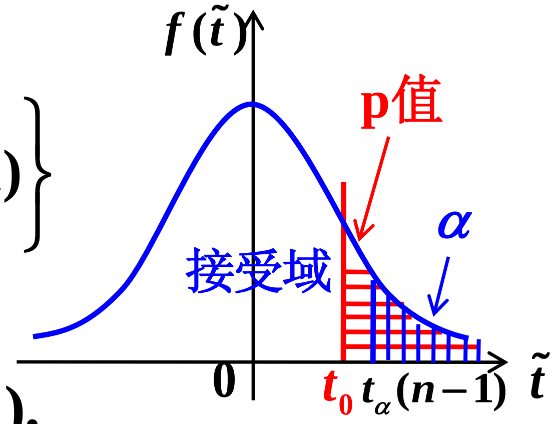
由$t \le \tilde{t} \Rightarrow$

$$P(\underline{t \ge t_\alpha(n-1)}) \le P(\tilde{t} \ge t_\alpha(n-1)) = \alpha,$$

t 检验

检验的拒绝域为

$$W=\left\{t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}\geq t_\alpha(n-1)\right\}$$



$\boxed{\text{p值} > \alpha\text{，接受}H_0.}$

p值

$$\mathrm{p}=P(t\geq t_0)=P(t(n-1)\geq t_0).$$

其中

$$t_0=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s}\sqrt{n}.$$

右侧检验.

t 检验

在假设检验中

$$H_0: \mu \le \mu_0$$

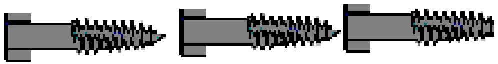
$$H_0: \mu \le \mu_0, \quad H_1: \mu > \mu_0$$

$$H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu > \mu_0$$

以上3种检验的检验法则与检验效果是一致的.

例2 某厂生产一种螺钉，标准要求长度不超过3cm. 现从该厂生产的一批产品中随机抽取20件, 测得其平准长度为3. 2cm, 标准差为0. 3811， 已知螺钉长度X服从正态分布，在显著性水平 $\alpha = 0.05$下判定这批产品是否合格？

解 (1) 检验 $H_0: \mu \le 3;$



(2) $n = 20, \alpha = 0.05, t_{0.05}(19) = 1.7291,$

拒绝域$W = (t \ge t_\alpha(n-1)) = (t \ge 1.7291),$

(3) 检验统计量的值

$$t_0=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}=\frac{3.2-3}{0.3811}\sqrt{20}=2.347>1.7291$$

(4) t_0落入拒绝域，故拒绝H_0，说明这批产品不合格.

或计算p值

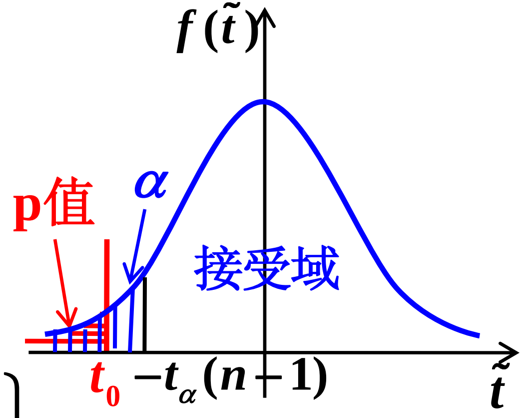
$$\mathrm{p}=P(t\geq t_0)=1-P(t<2.347)=0.018$$

$\mathrm{p}<\alpha=0.05$，拒绝H_0. 这批产品不合格.

t 检验

3. 检验 H_0: $\mu \geq \mu_0$

选检验统计量$t = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$



检验的拒绝域为

$$W = \left\{ t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n} \leq -t_\alpha(n-1) \right\}.$$

$\boxed{\text{p值} < \alpha, \text{拒绝} H_0.}$

p值: $\mathrm{p} = P(t(n-1) \leq t_0)$.

其中 $t_0 = \dfrac{\bar{x} - u_0}{s}\sqrt{n}.$ 这是左侧检验.

t 检验

在假设检验中

$$H_0: \mu \geq \mu_0$$

$$H_0: \mu \geq \mu_0, \quad H_1: \mu < \mu_0$$

$$H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu < \mu_0$$

以上3种检验的检验法则与检验效果是一致的.

χ^2检验

设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ, σ^2未知，

$X_1,\ldots,X_n$为样本，$\bar{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差，$x_1,\ldots,x_n$是样本值，σ_0为已知数.

考虑σ^2的三类检验问题

1. H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2$,

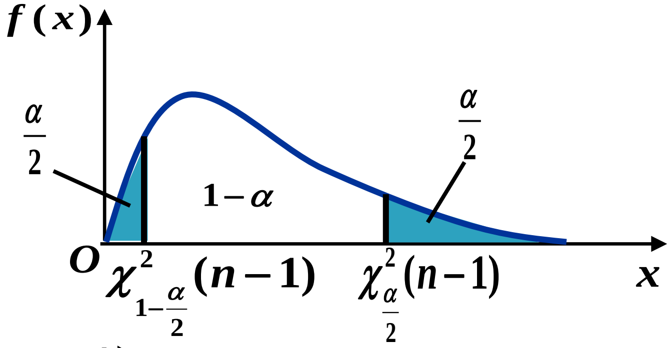
2. H_0: $\sigma^2 \le \sigma_0^2$,

3. H_0: $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$.

χ^2检验（临界值法）

1. 检验 H_0：$\sigma^2=\sigma_0^2$

S^2是σ^2的无偏估计量，



选检验统计量

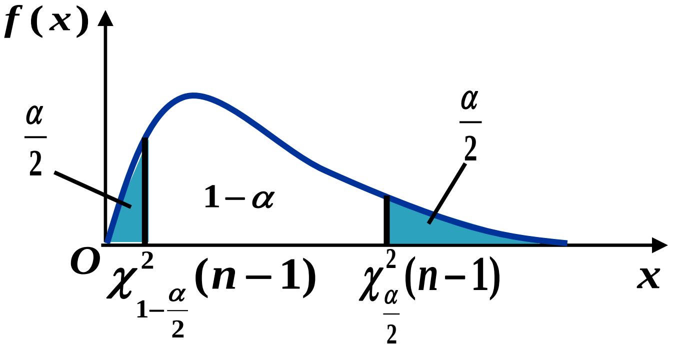
$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\overset{H_0}{\sim}\chi^2(n-1).$$

对给定的显著性水平α，查临界值$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$与$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，使得

χ^2检验（临界值法）

$$P\left(\chi^2 \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = \frac{\alpha}{2},$$

$$P\left(\chi^2 \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = \frac{\alpha}{2},$$

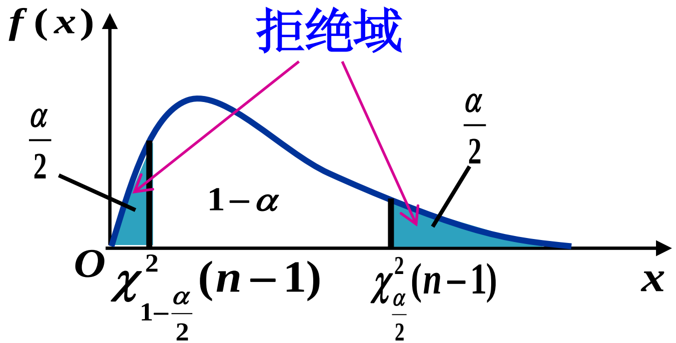


$$A = \left(\chi^2 \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) \cup \left(\chi^2 \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right),$$

A是小概率事件. 这里用两侧尾部概率相等来选取临界值, 是为计算上的方便.

χ^2 检验（临界值法）

故检验的拒绝域为：



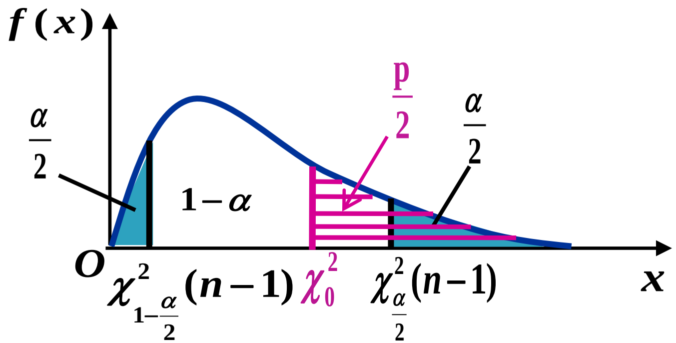
$$W=\left(\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)\text{或}\left(\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right).$$

双侧检验.

χ^2检验（p值法）

计算p值，对给定的样本值$x_1,\ldots,x_n$代入检验统计量得

$$\chi_0^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$



$\boxed{p>\alpha,\text{接受}H_0}$

$$p=2\min(P(\chi^2(n-1)\le\chi_0^2),P(\chi^2(n-1)\ge\chi_0^2))$$

当$p\le\alpha$时，拒绝原假设,

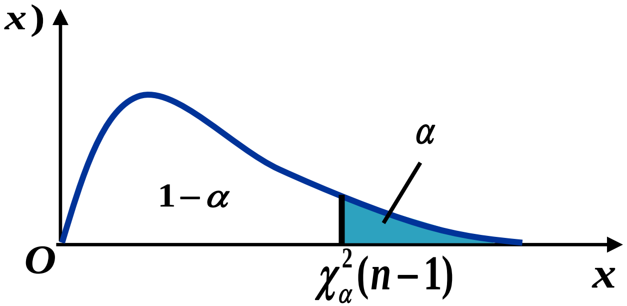
当$p>\alpha$时，接受原假设.

χ^2检验

2. 检验 H_0: $\sigma^2 \le \sigma_0^2$

选检验统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$



令 $\tilde{\chi}^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \overset{H_0}{\sim} \chi^2(n-1)$

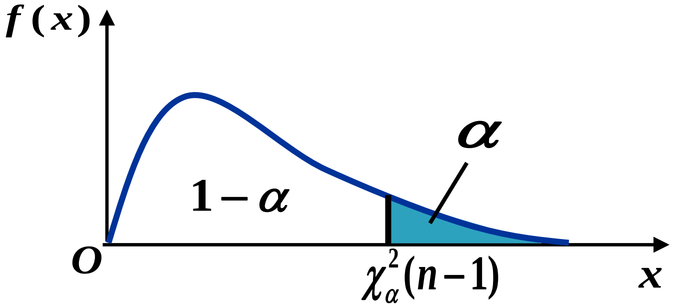
对给定的显著性水平α，查临界值$\chi^2_\alpha(n-1)$，

使得 $P(\tilde{\chi}^2 \ge \chi^2_\alpha(n-1)) = \alpha$.

χ^2检验

在H_0成立下有

$$\chi^2 \le \tilde{\chi}^2,$$



故

$$P(\chi^2 \ge \chi^2_\alpha(n-1)) \le P(\tilde{\chi}^2 \ge \chi^2_\alpha(n-1)) = \alpha,$$

检验的拒绝域为

$$W = \{\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_\alpha(n-1)\}.$$

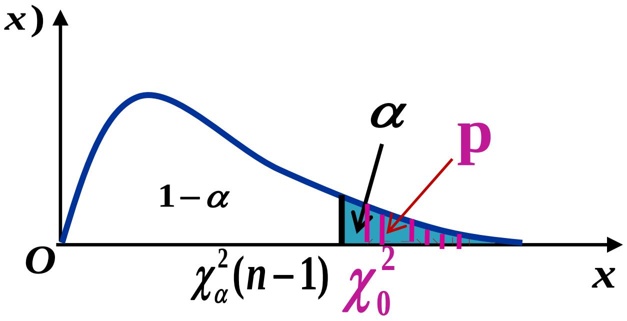
χ^2检验

p值

$$p = P(\chi^2(n-1) \geq \chi_0^2),$$

其中

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$



$\boxed{p < \alpha, 拒绝H_0}$

当$p \leq \alpha$时，拒绝原假设,

当$p > \alpha$时，接受原假设.

右侧检验.

χ^2检验

在假设检验中

$$H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2$$

$$H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2,\ H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2,\ H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

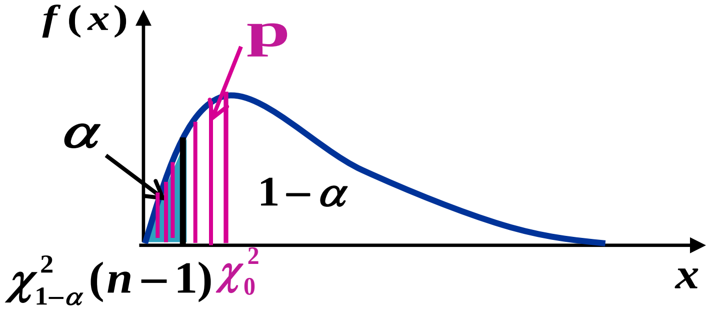
以上3种检验的检验法则与检验效果是一致的.

χ^2检验

3. 检验 H_0: $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$

选检验统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$



$\boxed{\mathrm{p} > \alpha, 接受H_0}$

检验的拒绝域为

$$W = \{\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\}.$$ 左侧检验

p值：$\mathrm{p} = P(\chi^2(n-1) \le \chi_0^2)$. $\chi_0^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$

当$\mathrm{p} \le \alpha$时，拒绝H_0,当$\mathrm{p} > \alpha$时，接受H_0.

χ^2检验

在假设检验中

$$H_0: \sigma^2 \ge \sigma_0^2$$

$$H_0: \sigma^2 \ge \sigma_0^2, \quad H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$$

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, \quad H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$$

以上3种检验的检验法则与检验效果是一致的.

例1 某种导线的电阻服从 $N(\mu,\sigma^2)$, μ未知，要求电阻的标准差不得大于0. 005. 现从中抽取9根导线测其电阻，测得样本标准差 s=0. 0066, 问在 $\alpha=0.05$ 水平上，这批导线的电阻是否合格?

解 检验 $H_0:\sigma^2\le 0.005^2$，$H_1:\sigma^2>0.005^2$

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{(9-1)0.0066^2}{0.005^2}=13.94$$

查表得：$\chi^2_{0.05}(8)=15.507$，

拒绝域 $W=(\chi^2 \geq \chi^2_{0.05}(8)=15.507)$,

$\chi^2=13.94<15.507$, 不能拒绝原假设,

这批导线的电阻是合格的.

p值：$\mathrm{p}=P(\chi^2(8)\geq 13.94)=0.0818>0.05$,

同样接受原假设.

谢　谢！