矩阵的特征值与特征向量

1.定义2: 设A是n阶矩阵，λ为一个数，若存在非零向量α，使$A\alpha=\lambda\alpha$，则称数λ为矩阵A的特征值，非零向量α为矩阵A的对应于特征值λ的特征向量。

特征向量为非零向量！

2.矩阵的特征值与特征向量的求法：

$A\alpha=\lambda\alpha,\alpha\neq O.$

$$\left.\begin{array}{l} A\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow(A-\lambda E)\alpha=O, \\ \Rightarrow\alpha\text{是方程组}(A-\lambda E)X=O\text{的非零解}, \end{array}\right\}\Rightarrow|A-\lambda E|=0.$$

$\therefore$ 满足$|A-\lambda E|=0$的数λ为特征值；

方程组$(A-\lambda E)X=O$的非零解为特征向量。(或基础解系)

例1：求矩阵A的特征 值与特征向量。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

解：

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&2\\-2&-2-\lambda&4\\2&4&-2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)(2+\lambda)^2-16-16+4(2+\lambda)-16(1-\lambda)+4(2+\lambda)$$

$$=(1-\lambda)(4+4\lambda+\lambda^2)+24\lambda-32$$

$$=-\lambda^3-3\lambda^2+24\lambda-28.$$

经试根知，2是一个根。故

上式$=-(\lambda-2)(\lambda^2+5\lambda-14)=-(\lambda-2)(\lambda+7)(\lambda-2)$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-7$$

对$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, (解$(A-2E)X = O$)

$$A-2E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -2x_2 + 2x_3$$

$$\therefore \xi_1 = (-2,1,0)^T, \xi_2 = (2,0,1)^T$$

为属于特征值2的线性无关的特征向量；其全部特征向量为

$k_1\xi_1 + k_2\xi_2$,（k_1, k_2不全为零）。

同理可求$\lambda_3 = -7$的特征向量为$\xi_3 = (1,2,-2)^T$.

其全部特征向量为$k\xi_3 (k \neq 0)$.

$\xi_1 = (-2,1,0)^T, \xi_3 = (1,2,-2)^T$线性无关，

$\xi_2 = (2,0,1)^T, \xi_3 = (1,2,-2)^T$线性无关。

求特征值与特征向量的步骤:

1.解$|A-\lambda E|=0$求出λ的值；即得到特征值；

2.对每一个λ，求方程组$(A-\lambda E)X=O$的基础解系；
即得到属于这个特征值的全部线性无关的特征向量。

练习

$$C=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & a \end{pmatrix}, r(C)=2, a=\_\_\_\_\_\_?$$

$a=3.$

λ=0是C的特征值吗？为什么？

例2：求矩阵B的特征 值与特征向量。 $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 4 & -3 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-1, \lambda_3=-2.$

对$\lambda_1=\lambda_2=-1,$

$$B+E=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \Rightarrow \xi_1=(1,2,-1)^T.$$

线性无关的特征向量只有一个

对$\lambda_3=-2,$

$$B+2E=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 4 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 4 & -1 & 0\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_1=0, x_2=0, x_3$任意。$\Rightarrow \xi_3=(0,0,1)^T.$

$\xi_1=(1,2,-1)^T$，$\xi_3=(0,0,1)^T$线性无关.

求特征值与特征向量的步骤:

1.解$\left|A-\lambda E\right|=0$求出$\lambda$的值；即得到特征值；

2.对每一个λ，求方程组$(A-\lambda E)X=O$的基础解系；
即得到属于这个特征值的线性无关的特征向量。

问题

矩阵的k重特征值是否一定有k个线性无关的特征向量?