相似对角形

特征值与特征向量

一般矩阵的相似对角化

实对称矩阵的相似对角化

实对称矩阵的相似对角化

性质1：实对称矩阵的特征值都是实数。

性质2：实对称矩阵的相异特征值所对应的特征向量必定正交。

性质3：实对称矩阵A的k重特征值所对应的线性无关的特征向量恰有k个。

定理1：实对称矩阵A一定与对角矩阵相似。

定理2：实对称矩阵A一定与对角矩阵正交相似。

例：设$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$，求正交阵$Q$，使$Q^{-1}AQ$为对角阵。

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^2(\lambda+7)$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=-7.$$

$\xi_1=(-2,1,0)^T,\xi_2=(2,0,1)^T$ 为属于特征值2的线性无关的特征向量.

将$\xi_1=(-2,1,0)^T,\xi_2=(2,0,1)^T$ 正交化，得：

$$\beta_1=\xi_1=(-2,1,0)^T,\quad \beta_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\frac{1}{5}(2,4,5)^T$$

再单位化，得：

$$\eta_1=(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0)^T,\quad \eta_2=(\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}})^T.$$

η_1，η_2仍旧是属于特征值2的特征向量。

$\lambda_3 = -7$的特征向量为$\xi_3 = (1,2,-2)^T$.

将$\xi_3 = (1,2,-2)^T$单位化，得：$\eta_3 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})^T$.

$$Q = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow Q^{-1}AQ = \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -7 \end{pmatrix}.$$

用正交阵将实对称矩阵A化为对角阵的步骤：

(i) 求出A的所有相异的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$;

(ii) 对每一个重特征值λ_i，求出对应的r_i个线性无关的特征向量$\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{ir_i}; (i = 1,2,\cdots,m)$，由性质知$\sum_{i=1}^{m} r_i = n.$

(iii) 用施密特正交化方法将每一个重特征值λ_i所对应的r_i个线性无关的特征向量$\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{ir_i} (i = 1, 2, \cdots, m)$先正交化再单位化为$\eta_{i1}, \eta_{i2}, \cdots, \eta_{ir_i} (i = 1, 2, \cdots, m)$;
它们仍为属于λ_i的特征向量。

(iv) 将上面求得的正交单位向量作为列向量，排成一个n阶方阵Q，则Q即为所求的正交方阵。此时

$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \Lambda$为对角阵。

练习

设$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$，特征值为$-2,1,4$，

求正交阵Q，使$Q^{-1}AQ$为对角阵。

$$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

练习

设$A=\begin{pmatrix}1&k&1\\k&1&l\\1&l&1\end{pmatrix}$正交相似于$\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&a\end{pmatrix}$,

求k,l,a及正交阵Q，使$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&a\end{pmatrix}$.

$$\because |A|=0, \therefore k=l. \quad \because |A-E|=0, \therefore k=l=0.$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}. \qquad \therefore a=2. \qquad Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$