相似对角形

特征值与特征向量

一般矩阵的相似对角化

实对称矩阵的相似对角化

矩阵的相似

一、矩阵的相似：

1.定义1: 设A与B都是n阶矩阵，若存在一个n阶可逆阵P，使

$B=P^{-1}AP$，则称矩阵A与B相似，记作 $A\sim B$

可逆阵P称为相似变换矩阵。

(1) 相似矩阵具有自反性、对称性、传递性。

(2) $A\sim B\Rightarrow A\cong B$,反之不对。 相似与等价的关系。

2.相似矩阵的简单性质：

$B = P^{-1}AP$

$(i)\ A \sim B \Rightarrow r(A) = r(B).$

$(ii)\ A \sim B \Rightarrow |A| = |B|.$

$(iii)\ A \sim B \Rightarrow A$与$B$同时可逆或同时不可逆，且当可逆时$A^{-1} \sim B^{-1}.$

$(iv)\ A \sim B \Rightarrow f(A) \sim f(B),\quad f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$

$$f(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

$$f(B) = a_m B^m + a_{m-1}B^{m-1} + \cdots + a_1 B + a_0 E.$$

$$A \sim B \Rightarrow B = P^{-1}AP \Rightarrow$$

$$B^m = (P^{-1}AP)^m = P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP \cdots P^{-1}AP$$

$$= P^{-1}A^m P,\ \text{因此,}$$

$$f(B) = a_m B^m + a_{m-1}B^{m-1} + \cdots + a_1 B + a_0 E$$

$$= a_m(P^{-1}AP)^m + a_{m-1}(P^{-1}AP)^{m-1} + \cdots + a_1(P^{-1}AP) + a_0 E$$

$$= a_m P^{-1}A^m P + a_{m-1}P^{-1}A^{m-1}P + \cdots + a_1 P^{-1}AP + a_0 P^{-1}EP$$

$$= P^{-1}(a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E)P$$

$$= P^{-1}f(A)P.$$

3.相似矩阵的简单应用:

例: $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -5\end{pmatrix}.$

验证$\Lambda=P^{-1}AP$并求A^k.

为验证$\Lambda=P^{-1}AP$，只需计算AP和$P\Lambda$.

$$A=P\Lambda P^{-1}\Rightarrow A^k=(P\Lambda P^{-1})^k=P\Lambda^k P^{-1},$$

$$\Lambda^k=\begin{pmatrix}4^k & 0\\ 0 & (-2)^k\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

$$\boxed{\Rightarrow A^k=}\boxed{\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5\cdot 4^k+(-2)^k & 4^k-(-2)^k\\ 5\cdot 4^k-5\cdot(-2)^k & 4^k+5\cdot(-2)^k\end{pmatrix}}.$$

(1) A满足什么条件时能与对角阵Λ相似？

(2) A与对角阵Λ相似时，可逆阵P及对角阵Λ怎样求？

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -5\end{pmatrix}.\ \Lambda=P^{-1}AP.$$

$$A\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}1\\ -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -5\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\ -5\end{pmatrix}.$$

$$A\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix}\neq k\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}.$$

问题

你会关心哪一种情形？

二、矩阵的特征值与特征向量：

1.定义2： 设A是n阶矩阵，λ为一个数，若存在非零向量α，使$A\alpha=\lambda\alpha$，则称数λ为矩阵A的特征值，非零向量α为矩阵A的对应于特征值λ的特征向量。

特征向量为非零向量！

思考题

矩阵的特征值与特征向量怎么求？

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ -2 & 6 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad \alpha=\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$$

问 α 是否为 A的特征向量?

$$A\alpha=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ -2 & 6 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 2\end{pmatrix}\overset{?}{=}\lambda\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 2\end{pmatrix}=\lambda\alpha.$$

$$A\alpha=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ -2 & 6 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 2\\ -4\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 2\end{pmatrix}.$$

练习

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix},\ \lambda=2\text{是否为}A\text{的特征值？}$$

$$|A-2E|=\begin{vmatrix}1-2&-2&2\\-2&-2-2&4\\2&4&-2-2\end{vmatrix}=0?\qquad=\begin{vmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{vmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\4&-3&0\\-1&0&-2\end{pmatrix},\ \lambda=-2\text{是否为}B\text{的特征值？}$$

是的。

思考题

矩阵的特征值与特征向量怎么求？