



哈爾濱工業大學

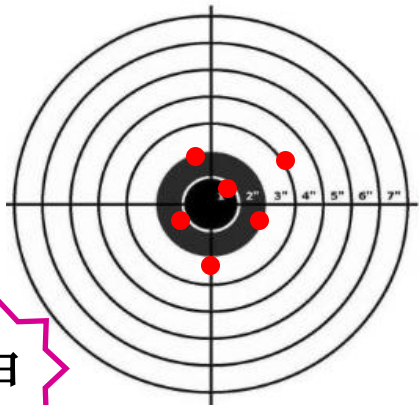
随机变量的方差



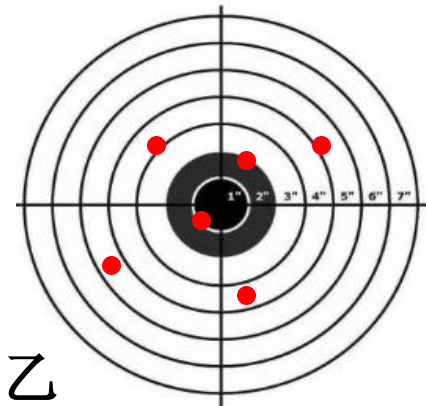
方差



◆ 甲、乙两人同时向靶心射击6枪，其落点距靶心的位置如图



甲



乙

你认为甲、乙谁打的好？

因为甲的弹着点较集中在中心附近。

方差



🤔 用什么来衡量弹着点 X 与中心 $E(X)$ 平均
偏离程度？

用 $E(X-E(X))=0$, 不行

用 $E[X-E(X)]$ 难算

用 $E[X-E(X)]^2$ 可行

↑
方差

方差



■ **定义** 设 X 是一个随机变量，若 $E[X-E(X)]^2$ 存在，则称 $E[X-E(X)]^2$ 是 X 的方差，记作 $D(X)$ ，即

$$D(X) = E[X-E(X)]^2$$

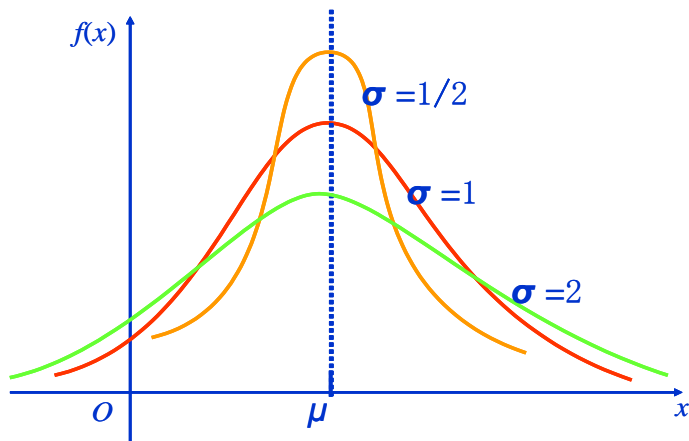
称 $\sqrt{D(X)}$ 是 X 的标准差或均方差，记为 σ_X ，即

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)}.$$

方差刻画了随机变量的取值对于其数学期望的离散程度.

方差

- ◆ 若 $D(X)$ 较小, 则 X 的取值比较集中;
- ◆ 若 $D(X)$ 较大, 则 X 的取值比较分散.



方差



◆ 方差是随机变量 X 的函数 $g(X)=[X-E(X)]^2$ 的数学期望.

✚ 离散型的情况, 若 X 的分布列

$$P(X = x_i) = p_i (i = 1, 2, \dots)$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} [x_i - E(X)]^2 p_i,$$

✚ 连续型的情况, 若 X 的概率密度为 $f(x)$,

则

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx.$$

方差

✚ 计算方差的一个简化公式

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

证 $D(X) = E[X - E(X)]^2$

$$= E\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\}$$

$$= E(X^2) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) \geq [E(X)]^2$$

泊松分布的方差



例1 设 $X \sim P(\lambda)$, 求 DX .

解 X 的分布列为

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, \dots, \lambda > 0;$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda,$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

泊松分布的方差



例1 设 $X \sim P(\lambda)$, 求 DX .

解 $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda,$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - k) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \lambda \\ &= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

$$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

均匀分布的方差



例2 设 $X \sim U[a, b]$ 求 DX

解 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2},$$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{dx}{b-a} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3},$$

$$\begin{aligned} D(X) &= E(X^2) - (EX)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

正态分布的方差



例3 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $D(X)$.

解 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in R.$

$$E(X) = \mu,$$

$$D(X) = E[X - E(X)]^2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\underline{\underline{t = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sigma^2.}}$$

期望、方差的应用



例4 小王有一笔资金，可投资甲、乙两个项目，通过调研，两项目的收益 X 与 Y (万元)的分布列分别为

X	5	2	-1
P	0.6	0.3	0.1

Y	6	-2
P	0.7	0.3

问小王应该投资哪个项目？

解 先算两项目各自的平均收益

$$E(X)=5 \times 0.6+2 \times 0.3+(-1) \times 0.1=3.5(\text{万}),$$

$$E(Y)=6 \times 0.7+(-2) \times 0.3=3.6(\text{万}) > E(X)$$

期望、方差的应用



✚ 再来计算两项目收益各自的方差和标准差.

$$D(X)=(1.5)^2 \times 0.6 + (-1.5)^2 \times 0.3 + (-4.5)^2 \times 0.1 = 4.05,$$

$$D(Y)=(2.4)^2 \times 0.7 + (-5.6)^2 \times 0.3 = 13.44,$$

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)} \approx 2.012, \quad \sigma_Y = \sqrt{D(Y)} \approx 3.666.$$

乙项目的收益虽然比甲项目收益多0.1万元，但投资的风险比投资甲项目大将近一倍，因此，综合权衡收益和风险，小王投资甲项目更好些.

方差的性质



1. 设 C 是常数,则 $D(C)=0$;
2. 若 C 是常数,则 $D(CX)=C^2 D(X)$;
3. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$;
若 X 与 Y 独立, 则

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y);$$

推广: 若 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 则

$$D\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n D(X_i),$$

$$D\left[C_0 + \sum_{i=1}^n C_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n C_i^2 D(X_i).$$

方差的性质



4. 若 X 与 Y 独立, 则

$$D(XY) = D(X)D(Y) + D(X)[E(Y)]^2 + D(Y)[E(X)]^2;$$

5. $D(X)=0 \Leftrightarrow P(X=C)=1$, 且 $C=E(X)$.

证 1. $D(C) = E[C - E(C)]^2 = E(C - C)^2 = 0$.

$$\begin{aligned} 2. D(CX) &= E[(CX)^2] - [E(CX)]^2 \\ &= C^2 E(X^2) - C^2 [E(X)]^2 \\ &= C^2 \{E(X^2) - [E(X)]^2\} \\ &= C^2 D(X). \end{aligned}$$

方差的性质



证 3. $D(X+Y) = E[(X+Y) - E(X+Y)]^2$
 $= E\{[X - E(X)] + [Y - E(Y)]\}^2$
 $= E[X - E(X)]^2 + E[Y - E(Y)]^2$
 $+ 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}.$

$E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$
 $= E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)]$
 $= E(XY) - E(X)E(Y).$

方差的性质



$$\begin{aligned} E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\ = E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

当 X 与 Y 独立时, $E(XY) = E(X)E(Y)$.

$$E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = 0$$

所以 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

4, 5的证明略.

二项分布的方差



例5 设 $X \sim B(n, p)$, 求 $D(X)$.

解 设 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第} i \text{次试验成功,} \\ 0, & \text{第} i \text{次试验失败.} \end{cases} (i = 1, 2, \dots, n).$

则 X_1, \dots, X_n 独立同分布于参数为 p 的(0-1)分布,

$$D(X_i) = p(1-p), (i = 1, 2, \dots, n),$$

且 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$,

$$\begin{aligned} \text{故 } D(X) &= D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\ &= \sum_{i=1}^n D(X_i) = np(1-p). \end{aligned}$$

几何分布的方差



例6 设 X 服从几何分布, 分布列为

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,\dots$$

其中 $0<p<1$, 求 $D(X)$.

解 记 $q=1-p$,

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k p q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = p \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)' = p \left(\frac{q}{1-q} \right)' = \frac{1}{p}.$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p q^{k-1} = p \left[\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) q^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} \right] \\ &= q p \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)'' + E(X) = q p \left(\frac{q}{1-q} \right)'' + \frac{1}{p} = q p \frac{2}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} \end{aligned}$$

几何分布的方差



例6 设 X 服从几何分布，分布列为

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,\dots, n$$

其中 $0<p<1$,求 $D(X)$.

解 记 $q=1-p$, $E(X)=\frac{1}{p}$.

$$E(X^2)=qp\frac{2}{(1-q)^3}+\frac{1}{p}=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}=\frac{2-p}{p^2}.$$

$$\text{故 } D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}.$$



例7 设随机变量 X 和 Y 相互独立且 $X \sim N(1, 2)$,
 $Y \sim N(0, 1)$. 求 $Z = 2X - Y + 3$ 的概率密度.

解 由独立正态变量的线性组合仍为正态分布,
有 $Z = 2X - Y + 3 \sim N(E(Z), D(Z))$.

$$E(Z) = 2E(X) - E(Y) + 3 = 2 + 3 = 5,$$

$$D(Z) = 4D(X) + D(Y) = 8 + 1 = 9.$$

即 $Z \sim N(5, 3^2)$.

故 Z 的概率密度是 $f_Z(z) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}, z \in R$.

常用分布的期望和方差



若 $X \sim B(1, p)$, 则 $E(X) = p, D(X) = p(1 - p)$,

若 $X \sim B(n, p)$, 则 $E(X) = np, D(X) = np(1 - p)$,

若 $X \sim P(\lambda)$, 则 $E(X) = D(X) = \lambda, (\lambda > 0)$,

若 $X \sim G(p)$, 则 $E(X) = 1 / p, D(X) = (1 - p) / p^2$,

若 $X \sim U(a, b)$, 则 $E(X) = (a + b) / 2$,

$$D(X) = (b - a)^2 / 12,$$

若 $X \sim E(\lambda)$, 则 $E(X) = 1 / \lambda, D(X) = 1 / \lambda^2, (\lambda > 0)$,

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2, (\sigma > 0)$.



谢 谢！