向量空间

一、向量空间及其子空间

1.定义1（运算的封闭性）设V是n维向量的非空集合，

称V对于向量加法及数乘两种运算封闭，如果

$$\forall \alpha, \beta \in V, k \in R, \Rightarrow \alpha + \beta \in V, k\alpha \in V$$

成立。

定义2： 设V是n维向量的非空集合，如果V对于向量加法及数乘两种运算封闭，则称集合V为n**维向量空间**,简称为**向量空间**。

例如：

$$R^3=\{\alpha=(a_1,a_2,a_3)|a_1,a_2,a_3\in R\}$$

$$R^n=\{\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)|a_1,a_2,\cdots,a_n\in R\}$$

$$V_1=\{\alpha=(0,a_2,\cdots,a_n)|a_2,\cdots,a_n\in R\}$$

$$V_2=\{\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m|k_1,k_2,\cdots,k_m\in R\}$$

$$=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$$

$$V_3=\{\alpha=(1,a_2,\cdots,a_n)|a_2,\cdots,a_n\in R\}$$

2.子空间：

设W、V为 向量空间，若$W\subset V$，则 称 W 是V的**子空间**。

练习

$$V_1=\left\{\alpha=(0,a_2,\cdots,a_n)\middle|a_2,\cdots,a_n\in R\right\}$$

是谁的子空间？

$V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 是 R^n 的子空间吗？

例1: $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$, $V_2=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$,

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$等价，证明:$V_1=V_2$.

只需证明$V_1\subset V_2$且$V_1\supset V_2$

二、向量空间的基与维数

定义3： 若n维向量空间V中的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$满足

(i) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关；

(ii) V中向量均可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示。

则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为$V$的一个基。

定义4： 基中所含向量个数r称为向量空间的维数。

思考　有什么联想吗？学习过类似的定义吗？

向量组的极大无关组和秩。

若将向量空间视作向量组，则基就是向量组的极大线性无关组，维数就是向量组的秩。

因此，基与维数的求法类似于向量组的极大无关组与秩的求法。

R^n的维数为n；基为$e_1, e_2, \cdots, e_n$.

练习

$V_1 = \{ \alpha = (0, a_2, \cdots, a_n) \mid a_2, \cdots, a_n \in R \}$的

维数=(   ), 基为(   ).

维数为$n-1$；基为$e_2, \cdots, e_n$.

结论

$V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$的维数为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的秩$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$.基为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的极大无关组。

若向量空间的基为$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r \quad \Rightarrow$

$$V = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r).$$

三、向量在基下的坐标

定义4： 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$是向量空间V的基,$\alpha\in V$,且

$$\alpha=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_r\varepsilon_r,$$

则称系数$k_1,k_2,\cdots,k_r$为α在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$下的坐标。

注：

1.向量在一组确定的基下的坐标是惟一的。（为什么？）

2.向量空间的基不惟一。因此,向量在不同基下的坐标也不一样。

3.向量在一组基下的坐标如何求？

一般有两种求法：待定系数法与矩阵方程法。

例2：设 $\alpha_1=(1,1,0,-1)$，$\alpha_2=(2,1,1,-1)$，$\alpha_3=(0,1,1,-1)$，求 $V=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的一组基及维数.

$$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\0&1&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1,r_4+r_1}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&1\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+r_2,r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，从而向量空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的维数为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一组基.

例3:求向量 $\alpha=(1,\ 2,\ 1)$ 在基 $\varepsilon_1=(1,\ 1,\ 1),\varepsilon_2=(1,\ 1,-1),$
$\varepsilon_3=(1,\ -1,\ -1)$ 下的坐标.

解I　设α在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的坐标为$(x_1,x_2,x_3)$，则有

$$x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3=\alpha.$$

记 $A=\left(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\right)$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, 则上式化为$AX=\alpha.$

矩阵方程

$\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$为基, 故$A=\left(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\right)$可逆。

$$
(A \vdots \alpha)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 1 & -1 & -1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1,r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & -2 & -2 & \vdots & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3,r_2\cdot(-\frac{1}{2}),r_3\cdot(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2,r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},
$$

故 $X=\left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, 即 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标为 $\left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

解II　设$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3$，则有

$$\begin{cases} 1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ 2 = x_1 + x_2 - x_3, \\ 1 = x_1 - x_2 - x_3. \end{cases}$$

解之得$x_1 = 1, x_2 = \dfrac{1}{2}, x_3 = -\dfrac{1}{2}.$

这就是α在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$下的坐标.

解法I是借助于求解矩阵方程求出坐标. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为一组基，α 为一已知向量，令 $A=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n\end{pmatrix}$,

$$\left(A\vdots\alpha\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(E\vdots X\right),$$

则 X 即为 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标.

解法II是用方程组的方法来求的，将向量方程

$$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$$

转化为线性方程组并求出 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 即可.