哈爾濱工業大學

第7讲 条件概率、乘法定理

条件概率

例1 两台车床加工同一种零件共100个，结果如下表

	合格品数	次品数	总计
第一台车床加工数	35	5	40
第二台车床加工数	50	10	60
总计	85	15	100

设 A= “从100个零件中任取一个是合格品”，

B= “从100个零件中任取一个是第一台车床加工的”．

条件概率

	合格品数	次品数	总计
第一台车床加工数	35	5	40
第二台车床加工数	50	10	60
总计	85	15	100

解　A= “从100个零件中任取一个是合格品”，

B= “从100个零件中任取一个是第一台车床加工的”．

$$P(A)=\frac{85}{100}=0.85,\ P(B)=\frac{40}{100}=0.4,\ P(AB)=\frac{35}{100}=0.35.$$

条件概率

	合格品数	次品数	总计
第一台车床加工数	35	5	40
第二台车床加工数	50	10	60
总计	85	15	100

解　A= “从100个零件中任取一个是合格品”，

B= “从100个零件中任取一个是第一台车床加工的”.

已知取出的一个零件是第一台车床加工的，则它是合格品的概率为

$$P(A|B)=\frac{35}{40}=0.875,$$

$P(A|B)$ 表示B发生的条件下，A发生的条件概率.

条件概率

	合格品数	次品数	总计
第一台车床加工数	35	5	40
第二台车床加工数	50	10	60
总计	85	15	100

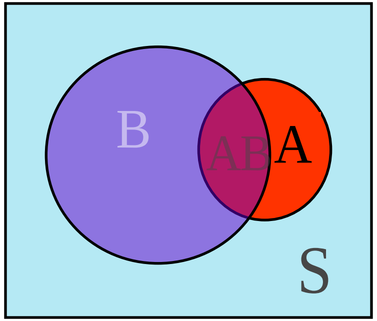
解 A= “从100个零件中任取一个是合格品”，

B= “从100个零件中任取一个是第一台车床加工的”

$$P(A)=\frac{85}{100}=0.85,\qquad P(A|B)=\frac{35}{40}=0.875,$$

★ $P(A)\neq P(A|B).$

条件概率



不难发现

$$P(A|B)=\frac{35}{40}=\frac{P(AB)}{P(B)},$$

可以理解为***A***在***B***中所占的比列.

条件概率

■ 定义 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B)>0.$

■ 性质 设 $P(B)>0.$

（1）非负性： $P(A|B)\geq 0;$

（2）规范性： $P(S|B)=1;$

（3）可列可加性：设$A_1, A_2, \cdots$互不相容，则

$$P((A_1+A_2+\cdots)|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)+\cdots$$

条件概率

■ 性质：

（4） $P(\bar{A}|B)=1-P(A|B);$

（5） $P(\varnothing|B)=0;$

（6） $P((A_1-A_2)|B)=P(A_1|B)-P(A_1A_2|B);$

$$A_1\supset A_2\Rightarrow P(A_1|B)\geq P(A_2|B);$$

（7） $P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$

$$-P(A_1A_2|B).$$

条件概率具有概率的所有性质.

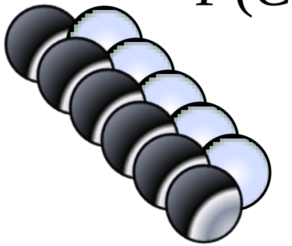
条件概率

例2 袋中有5只白球6只黑球，从袋中一次取3个球，发现都是同一颜色，求这颜色是黑色的概率.

解 设A=“球是同颜色的”，B=“全是白球”，C=“全是黑球”，则$A=B\cup C$, 所求概率为

$$P(C\mid A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{P(C)}{P(B)+P(C)}$$

$$=\frac{C_6^3/C_{11}^3}{C_5^3/C_{11}^3+C_6^3/C_{11}^3}=\frac{2}{3}.$$



乘法定理

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB)=P(B)P(A|B),\quad P(B)>0.$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow P(AB)=P(A)P(B|A),\quad P(A)>0.$$

乘法定理

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B).$$

$$P(A)>0,\ \ P(B)>0.$$

乘法定理

- 推广

$$P(ABC)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB).$$

$$P(AB)>0$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0.$$

乘法定理用于计算多个事件同时发生的概率.

乘法定理

注意$P(AB)$与$P(A \mid B)$的区别！

B发生，
在$P(AB)$中作为结果；
在$P(A|B)$中作为条件.

例3 $P(A)=P(B)=1/3, P(A|B)=1/6,$

求 $P(B|A\cup\bar{B})$.

解

$$P(B|A\cup\bar{B})=\frac{P(B(A\cup\bar{B}))}{P(A\cup\bar{B})}=\frac{P(AB)}{P(A\cup\bar{B})}.$$

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)=1/18,$$

$$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=5/18,$$

$$P(A\cup\bar{B})=P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})=13/18,$$

$$P(B|A\cup\bar{B})=\frac{P(AB)}{P(A\cup\bar{B})}=\frac{1/18}{13/18}=\frac{1}{13}.$$

Polya 模型

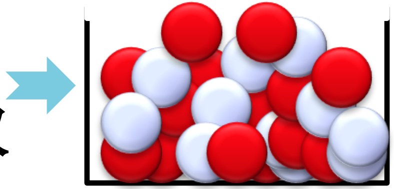
例4 设盒子中有b个白球，r个红球，任意取出一只，观察其颜色后放回，并再放入c只与所取之球颜色相同的球. 若从盒中连续取球4次, 求第1，2次取得白球、第3，4次取得红球的概率.

解 设A_i=“第i次取得白球”，i=1, 2, 3, 4.

则所求概率为 $P(A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4)$

Polya 模型

例4 任意取出一只，观察其颜色后放回，并再放入c只与所取之球颜色相同的球.



b个白球，r 个红球

解 由乘法定理

$$P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(\overline{A}_3\mid A_1A_2)\cdot P(\overline{A}_4\mid A_1A_2\overline{A}_3)$$

$$=\frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+c}{b+r+c}\cdot\frac{r}{b+r+2c}\cdot\frac{r+c}{b+r+3c}.$$

Polya 模型

这个模型是由美籍匈牙利数学家乔治.波利亚（George Polya，1887-1985）1932年提出，适用于描述群体增值和传染病的传播等现象，在概率论的发展中占有十分重要的地位.

例5 猎手在距猎物10米处开枪，击中的概率为0.6．若未中，猎物已逃至30米远处，此时击中概率为0.25，若又未中，猎物已逃至50米远处，此时击中概率为0.1．求猎手三枪内击中猎物的概率．

解1 设A=“猎物被击中”, A_i=“第i枪击中猎物”, $i=1,2,3$, 则 $P(A_1)=0.6, P(A_2\mid\bar{A}_1)=0.25,$ $P(A_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)=0.1.$

$$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3})$$

$$=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)P(\bar{A}_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$=1-(1-0.6)(1-0.25)(1-0.1)=0.73.$$

解2　已知 $P(A_1)=0.6, P(A_2\mid\overline{A}_1)=0.25,$

$P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)=0.1.$

$$A=A_1+\overline{A}_1A_2+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)\\&\qquad+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)\\&=0.6+0.4\cdot0.25+0.4\cdot0.75\cdot0.1\\&=0.73.\end{aligned}$$

谢　　谢！