二次型

一、二次型

定义1：含有n个变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 &+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
&+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
&+ a_{33}x_3^2 + \cdots + 2a_{3n}x_3x_n \\
&+ \cdots + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

称为n元二次型，简称为二次型。

定义2： 只含平方项的二次型，即形如

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$$

称为二次型的**标准形**（或**法式**）。

二、二次型的矩阵表示法

设$a_{ij}=a_{ji}$，则

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&\ a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+\cdots+a_{1n}x_1x_n \\
&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+\cdots+a_{2n}x_2x_n \\
&+\cdots\cdots \\
&+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+a_{n3}x_nx_3+\cdots+a_{nn}x_n^2 \\
=&\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix} \\
=&\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
=&\ X^T AX
\end{aligned}
$$

二次型的矩阵表示式

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

二次型的矩阵（显然这是实对称阵）

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

定义3： 设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$，则称对称矩阵 A 的秩为**二次型 f 的秩**。

三、二次型经可逆变换后的矩阵:

定义4: 若线性变换

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n, \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n. \end{cases}$$

的矩阵

$$C_{n\times n} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

可逆,则称线性变换为可逆**线性变换;**

正交,则称线性变换为**正交变换。**

定义5：设A，B为两个n阶矩阵，若有n阶可逆阵P，使得$P^T AP = B$，则称矩阵A与B合同，记为$A \underset{-}{\sim} B$.

合同矩阵具有自反性、对称性、传递性。

等价、相似、合同的关系：

$$A \cong B \Leftarrow A \sim B \qquad A \cong B \Leftarrow A \underset{-}{\sim} B$$

但反之均不成立。 一般 而言，相似与合同 没有关系。

但，正交相似与合同一致。

定理： 实对称矩阵一定与对角阵合同。

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$$

$$\underset{\text{作可逆变换}X=CY}{=}(CY)^TA(CY)=Y^T(C^TAC)Y$$

$B=C^TAC \quad \Rightarrow B^T=B, Y^TBY$为二次型且$A$与$B$合同,

$r(A)=r(B).$ 由上讨论可得:

定理1 二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$经可逆线性变换

$X=CY$变成新变元的二次型$f=Y^TBY$,它的矩

阵$B=C^TAC$且$r(A)=r(B)$.

例1:写出二次型的矩阵,并求其秩。

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3.$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&5\end{pmatrix}.$$

秩为3。

练习

二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩 为______.

例2.设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+cx_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$的秩为2。

1.求参数c;

2.写出二次型的矩阵。

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\2&2&c\end{pmatrix},$$

由$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+cx_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$的秩为2

$\Rightarrow$系数矩阵A的秩为2, $\Rightarrow c=8$