哈爾濱工業大學

第17讲 随机变量函数的分布

问题 若已知分子运动的速率X的分布，如何求分子运动的动能 $Y=\frac{1}{2}mX^2$（m为分子的质量）分布？

对随机变量的函数$Y=g(X)$,
已知随机变量X的分布，
如何求随机变量Y的分布？

离散型随机变量函数的分布

例1 已知X的分布列为

X	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.3	0.4

求$Y = X^2$ 的分布列.

解

P	0.1	0.2	0.3	0.4
X	-1	0	1	2
Y	1	0	1	4

$Y=X^2$	0	1	4
P	0.2	0.4	0.4

连续型随机变量函数的分布

例2 设$X \sim U(0,3)$, 求$Y = 2X+3$ 的概率密度.

解
$$f_X(x)=\begin{cases}1/3, & 0<x<3, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \Rightarrow P(0<X<3)=1. \quad \text{从而} P(3<Y<9)=1.$$

当$y \le 3$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=0 \Rightarrow f_Y(y)=F_Y'(y)=0;$

当$y \ge 9$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=1 \Rightarrow f_Y(y)=F_Y'(y)=0;$

当$3<y<9$时，Y的分布函数为

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X+3\le y)=P(X\le (y-3)/2)$$
$$=F_X((y-3)/2)$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X\left(\frac{y-3}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

$$\boxed{f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{6}, & 3<y<9, \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}}$$

连续型随机变量函数概率密度的两种求法

分布函数法

已知X的概率密度$f_X(x)$,分布函数$F_X(x)$,$Y=g(X)$,

求Y概率密度$f_Y(y)$,分两步：

(1)先求Y的分布函数$F_Y(y)$

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\{g(X)\le y\}\xrightarrow{\text{解出}X}$ 表示成X的分布函数；

(2)求导数：$f_Y(y)=F_Y'(y)$.

例3 设随机变量X的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2/2, -1<x<1,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$ 求$Y=X^2$的概率密度.

解 由已知$P(-1<X<1)=1$，得$P(0<Y<1)=1.$

当$y\le 0$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=0 \Rightarrow f_Y(y)=F_Y'(y)=0;$

当$y\ge 1$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=1 \Rightarrow f_Y(y)=F_Y'(y)=0;$

当$0<y<1$时，Y的分布函数为（解法1）

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$$
$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}),$$
$$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}+f_X(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{3}{2}\sqrt{y}.$$

当$0 < y < 1$时，Y的分布函数为（解法2）

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y})$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{3}{2}x^2 dx = \left(\frac{1}{2}x^3\right)\Bigg|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = y^{3/2}.$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = y^{3/2} = \frac{3}{2}\sqrt{y}.$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2/2, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\sqrt{y}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}}$$

连续型随机变量函数概率密度的两种求法

- 公式法

- 定理 设X的概率密度$f_X(x)$, $y=g(x)$为(a,b)上严格单调可微函数$(-\infty \le a < b \le +\infty)$,则$Y=g(X)$的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))\,|h'(y)|, & A<y<B, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中$h(y)$为$g(x)$的反函数且$A=\min\{g(a),g(b)\}$,

$B=\max\{g(a),g(b)\}$.

例4 设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求$Y = aX + b$（a,b是常数，$a \neq 0$）的概率密度.

解 $y = ax + b,(a \neq 0)$在$(-\infty, +\infty)$严格单调可微，

反函数为$x = h(y) = (y-b)/a, h'(y) = 1/a.$

$$f_Y(y) = f_X(h(y))|h'(y)| = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}$$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{((y-b)/a-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{|a|} = \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2a^2\sigma^2}}.$$

即，$Y \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2).$

结论 若$X \sim N(\mu,\sigma^2), a \neq 0$,则

$$Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

例如，$X \sim N(1,2)$,则$Y = 3X - 4 \sim N(-1,18)$.

$$a\mu + b = 3 \cdot 1 + (-4) = -1$$

$$a^2\sigma^2 = 3^2 \cdot 2 = 18$$

谢　　谢！