*n*阶行列式

一、全排列与逆序数

1.全排列

*n*个不同的元素排成一列，称为*n*个元素的全排列。如：**12345678**，**76532184**，等等均为**8**个元素的全排列。

*n*个元素的全排列共有*n*！个。

- **2.逆序与逆序数**
- 全排列123 ⋯n称为标准排列,此时元素之间的顺序称为标准顺序。在任一排列中，若某两个元素的顺序与标准顺序不同，就称这两个元素构成了一个逆序。

213中，2与1就构成了一个逆序。321中，1与2，2与3，1与3都构成逆序。

- 在一个排列中，逆序的总和称为逆序数。如213的逆序数为1，321的逆序数为3。
- 逆序数怎样求???
- *从第一个元素起，*该元素前有几个数比它大，这个元素的逆序就是几。将所有元素的逆序相加，即得到排列的逆序数。

例1.求全排列135 ···(2n-1)24 ···(2n)逆序数。

解: 1,3,5, ···(2n-1)不构成逆序.

2前面有n-1个数比它大,故有n-1个逆序.

4前面有n-2个数比它大,故有n-2个逆序.

依次下去, 2n前面没有数比它大,故没有逆序.

将所有元素的逆序相加,得逆序数:

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=$$

$$n(n-1)/2$$

- 逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数
- 在3个元素
  312为偶排
- 132，213，
  1，1，3.
- 3.对换
- 在一个排列中，调两个元素，其余元素不变，即得到一个新排列，这样一种变换称为对换。

<u>对换有两个性质:</u>

1.任意一个排列经一次对换后改变奇偶性**.**

2.在n个元素的全排列中**,**奇偶排列各占一半**,**为$n!/2$**.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

由三阶行列式可得如下结论

(1) $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$

N为 $j_1j_2j_3$ 的逆序数

（2）$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{\text{对1,2,3的全} \\ \text{排列求和}}} (-1)^N a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

n^2个数排成的一个n行n列的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中N为全排列$j_1 j_2 \cdots j_n$的逆序数.有时简记为$D = \left| a_{ij} \right|_{n \times n}$

例1. $$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$N(12 \cdots n) = 0$$

例2. $$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$N(12 \cdots n) = 0$$

例3.
$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ & \iddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}$$

$$N(n \cdots 21) = \frac{n(n-1)}{2}$$