Контрольная по ТФКП
Вариант 1

Лопатенко Георгий М32021

① Найти вещественную и мнимую части функций а) $f(z)=iz^2-\bar{z}$, б) $f(z)=\sin(iz-1)$

• **а)** Начнём записывать представление комплексных значений в виде $z=x+iy$, тогда запись выражения комплекснозначной функции представима в виде $f(z)=i(x+iy)^2-(x-iy)=-x-2xy+i(x^2-y^2+y)$, здесь вещественная часть $\operatorname{Re} f(z)\equiv u(x,y)=-x-2xy$ и мнимая $\operatorname{Im} f(z)=v(x,y)=x^2-y^2+y$

б) $f(z)=\sin(iz-1)=\sin(-1-y+xi)$ и здесь воспользуемся записью $\sin k=\dfrac{e^{ik}-e^{-ik}}{2i}$

тогда $f(x,y)=\sin(-1-y+xi)=\left[\dfrac{e^{-x+i(-1-y)}-e^{x+i(1+y)}}{2i}\right]=\dfrac{e^{-x}(\cos(1+y)-i\sin(1+y))-e^{x}(\cos(1+y)+i\sin(1+y))}{2}\cdot(-i)=-\dfrac{i\cos(y+1)}{2}(e^{-x}-e^{x})-\dfrac{\sin(y+1)}{2}(e^{-x}+e^{x})$

по формуле Муавра и обратим внимание на чётность функций

тогда перепишем функцию:

$$f(z)\equiv f(x,y)=\underbrace{-\sin(y+1)\operatorname{ch}(x)}_{u(x,y)}-\underbrace{\cos(y+1)\operatorname{sh}(x)}_{v(x,y)}\,i$$

Ответ: а) $u(x,y)=-x-2xy$, $v(x,y)=x^2-y^2+y$
б) $u(x,y)=-\sin(y+1)\operatorname{ch}(x)$, $v(x,y)=-\cos(y+1)\operatorname{sh}(x)$

---

② Найти образ единичной окружности $|z|=1$ при отображении $f(z)=z^2$

• очевидно, что отображение в данном случае не поменяет характеристик плоского объекта, проще всего это проиллюстрировать при записи в экспоненциальной форме, так как единичная окружность записывается $|z|=1=\rho e^{i\varphi}$; $\rho=1$, $\varphi\in[0;2\pi)$. Заметим, что при домножении любого значения из этого ГМТ на себя образ будет лежать в том же замкнутом ГМТ. Тогда образом служит $|z|=1$ ($z=e^{i\varphi}$, $\varphi\in[0;4\pi)$)

---

③ Вычислить значение $e^{-2+\frac{\pi}{3}i}$ записать его модуль, вещественную и мнимую части.

• $e^{-2+\frac{\pi}{3}i}=e^{-2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\omega$

Ответ: $\operatorname{Re}\omega=\dfrac{e^{-2}}{2}$; $\operatorname{Im}\omega=\dfrac{\sqrt{3}e^{-2}}{2}$; $|\omega|=e^{-2}$

---

④ Восстановить функцию $f(z)$, если а) $u(x,y)=x\dfrac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2}$, $v=\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}$ б) $v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ $(x>0)$ $f(1)=0$

а) Задание выполняется очевидно, но сначала вспомним несколько фактов: $f(z:x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$; $\left.\begin{array}{l} z=x+yi \\ \bar{z}=x-yi\end{array}\right\}\longrightarrow x=\dfrac{z+\bar{z}}{2};\ y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

тогда $f(z)=u\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2}\right)+iv\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2}\right)$ и теперь главное — ничего не потерять при подстановке. и $z\bar{z}=|z|^2$: $(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$

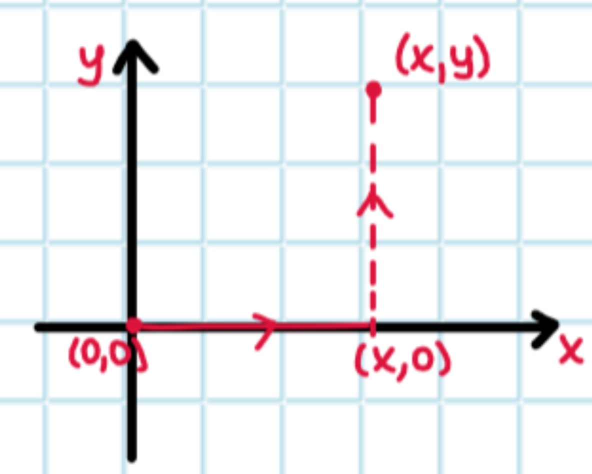
$f(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}\left(1+\dfrac{1}{z\bar{z}}\right)+i\left(1-\dfrac{1}{z\bar{z}}\right)$, и красивее выражения уже получать не хочется. Однако заметим, что должно выполняться условие Коши-Римана.

б) теперь воспользуемся другим замечанием $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ по условию Коши-Римана

$$u=\int\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=\int\frac{\partial v}{\partial y}dx-\frac{\partial v}{\partial x}dy=\int_0^x\frac{x}{x^2+y^2}dx+\int_0^y\frac{y}{x^2+y^2}dy =$$

$\hookrightarrow \int_0^x\frac{1}{2(x^2+y^2)}d(x^2)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_0^x$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\frac{1}{2}\ln y^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\frac{1}{2}\ln x^2=\frac{\ln(x^2+y^2)}{2}+C$$



тогда $f(x,y)=\dfrac{\ln(x^2+y^2)}{2}+C+i\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)$; $f(1,0)=0=C+i\cdot 0\Rightarrow C=0$

$\longrightarrow f(z)=\frac{1}{2}\ln(z\bar{z})+i\arg z$

Ответ: а) $f(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}\left(1+\dfrac{1}{z\bar{z}}\right)+i\left(1-\dfrac{1}{z\bar{z}}\right)$
б) $f(x,y)=\frac{1}{2}\ln(z\bar{z})+i\arg z$

---

⑤ Найти модуль и главное значение аргумента $w=\cos z$ в точке $z_0=\frac{\pi}{2}+i\ln 2$

• $\omega=\cos\left(\frac{\pi}{2}+i\ln 2\right)=-\sin(\ln 2\cdot i)=\dfrac{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}}{2i}=i\left(\dfrac{e^{-\ln 2}-e^{\ln 2}}{2}\right)$

тогда модуль такого чуда $|\omega|=\operatorname{sh}(\ln 2)$

главное значение аргумента $-\frac{\pi}{2}$, т.к. $\omega=|\omega|\left(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2}\right)$

Ответ: $\operatorname{sh}(\ln 2)$; $-\frac{\pi}{2}$

---

⑥ Вычислить значение ф-ии в точке: а) $\sin\pi i$, б) $\operatorname{Ln}\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

а) $\sin\pi i=\dfrac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2i}=i\dfrac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}=i\operatorname{sh}(\pi)$

б) $\operatorname{Ln}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=\ln\left(1\cdot e^{i(\frac{\pi}{4}+2\pi k)}\right)=\dfrac{i(\pi+8\pi k)}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$

---

⑦ Используя условия Коши-Римана найти множество точек в которых ф-ия будет голоморфной: а) $w=z^2\bar{z}$, б) $w=e^{z^2}$

а) $\omega=z^2\bar{z}\equiv(x^2-y^2+2xyi)(x-yi)=\underbrace{x^3-xy^2+2xy^2}_{u(x,y)}+i(\underbrace{-x^2y+y^3+2x^2y}_{v(x,y)})$

тогда условие Коши-Римана: $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2+y^2=x^2+3y^2=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=2xy=-(2xy)=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\longrightarrow x=y=0$

то есть функция голоморфна только в точке $z=0$.

б) $\omega=e^{z^2}=e^{x^2-y^2}(\cos 2xy+i\sin 2xy)$ и будем заниматься бесполезным дифференцированием

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy-e^{x^2-y^2}\sin 2xy\cdot 2y=\dfrac{\partial v}{\partial y}=-2ye^{x^2-y^2}\sin 2xy+e^{x^2-y^2}\cos 2xy\cdot 2x\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy-e^{x^2-y^2}\sin 2xy\cdot 2x=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-2xe^{x^2-y^2}\sin 2xy-e^{x^2-y^2}\cos 2xy\cdot 2y\end{cases}\longrightarrow \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Ответ: а) $x=y=0$ б) $\forall x,y$

⑧ Проверить является ли ф-ия гармонической: $f(z)=2e^x\cos y$

• проверим условие Лапласа: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

тогда $\frac{\partial f}{\partial x}=2e^x\cos y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2e^x\cos y$ и $\frac{\partial f}{\partial y}=-e^x\sin y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-e^x\cos y$

тогда условие Лапласа выполнено и функция действительно гармоническая

---

⑨ Определить будут ли заданные функции вещественной или мнимой частью аналитической ф-ии
а) $u(x,y)=x^2$, б) $v(x,y)=\ln(x^2+y^2)$

• заметим, что мнимая и вещественная части аналитической функции должны иметь непрерывные частные производные любого порядка на области и должны быть гармоническими. Это следует из условия Коши-Римана

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \xrightarrow{\frac{\partial(\dots)}{\partial x}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \xrightarrow[\frac{\partial(\dots)}{\partial y}]{} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} \end{cases}$$

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\overset{?}{=}0$; $2+0\neq0 \longrightarrow$ не годится

б) $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\overset{?}{=}0$; $\frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2}=0$, т.е. $\forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Ответ: а) $\varnothing$
б) при $\forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

---

⑪ Вычислить интеграл, используя интегральную формулу Коши:
а) $\oint\limits_{|z-2|=1}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$ б) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{\sin z\cdot\sin(z-1)}{z^2-z}dz$

а) $\oint\limits_{|z-2|=1}\frac{e^{z^2}}{z(z-6)}dz$ Заметим, что мы не работаем в области простых полюсов $z=0$ и $z=6$, так как банально область обхода их не включает, поэтому сколько бы мы не считали сумму вычетов, ответ: $\varnothing$

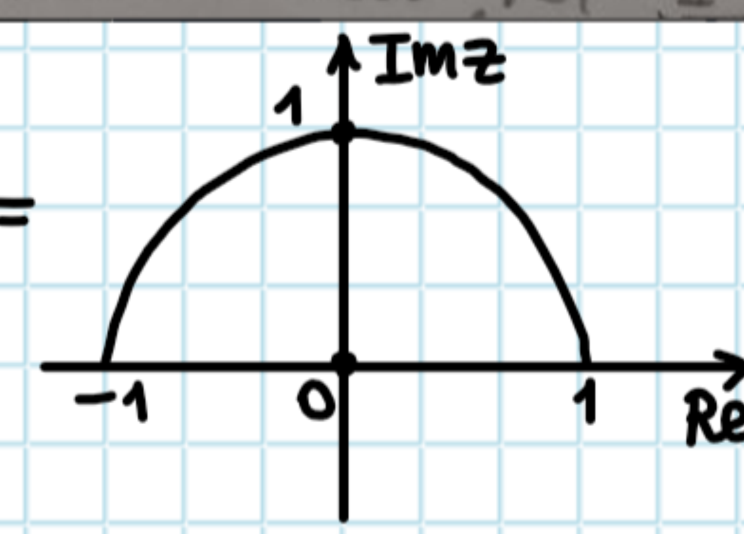
б) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{\sin z\sin(z-1)}{z(z-1)}dz$ если рассматривать особенности, то их характер очевиден (устранимый), тогда вычеты равны по нулям $\longrightarrow$ Ответ: 0

---

⑩ Вычислить интеграл: $\int\limits_C\frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}$, C: верхняя половина $|z|=1$

• $\int\limits_C z^{-\frac34}dz=\int\limits_0^\pi e^{-\frac{3i\varphi}{4}}ie^{i\varphi}d\varphi=$

$=4e^{\frac{i\varphi}{4}}\Big|_0^\pi=4\sqrt[4]{-1}-4$



однако требуется узнать главное значение, но так как задание вместилось не полностью, предположим, что $k=0$. Тогда $\sqrt[4]{-1}=\cos\frac{\pi+0}{4}+i\sin\frac{\pi+0}{4}=\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i$

Ответ: $2\sqrt2-4+2\sqrt2 i$

---

⑫ Определить вид особой точки функции
$f(z)=\frac{z^2\sin^2\frac1z}{(z-1)(z-2)}$

• сразу заметны три значения, подозрительные на особенности:

1) при $z=1$ $\lim\limits_{z\to1}\frac{z^2\sin^2(\frac1z)}{(z-1)(z-2)}=\infty \Rightarrow z=1$ простой полюс

2) при $z=2$ $\lim\limits_{z\to2}\frac{z^2\sin^2(\frac1z)}{(z-1)(z-2)}=\infty \Rightarrow z=2$ простой полюс

3) при $z=0$ $\lim\limits_{z\to0}\frac{z^2(\frac1z+o(|z^{-1}|))^2}{(z-1)(z-2)}=0$, так как синус ограничен

$z=0$ устранимая особенность

---

⑬ Разложить функцию в ряд Лорана по степеням z (в т. $z_0=0$)
$f(z)=z^3e^{\frac1z}$

• $f(z)=z^3e^{\frac1z}=z^3\left(1+\frac1z+\frac1{2!z^2}+\dots+\frac{1}{(n+3)!\,z^{n+3}}+\dots\right)=$

$=z^3+z^2+\frac z2+\frac16+\frac1{4!z}+\frac1{5!z^2}+\dots+\frac1{(n+3)!z^n}+\dots=z^3+z^2+\frac z2+\frac16+\sum\limits_{k=-\infty}^{-1}\frac{z^k}{(3-k)!}$

---

⑭ Найти вычеты функции в особых точках и вычет на ∞
$f(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z-2)^2}$

• $\operatorname{res}_1 f(z)=\lim\limits_{z\to1}\frac{1}{(1-1)!}\left(\frac{z^2\cancel{(z-1)}}{\cancel{(z-1)}(z-2)^2}\right)^{(1-1)}=1$

$\operatorname{res}_2 f(z)=\lim\limits_{z\to2}\frac{1}{(2-1)!}\left(\frac{z^2\cancel{(z-2)^2}}{(z-1)\cancel{(z-2)^2}}\right)^{(2-1)}=\lim\limits_{z\to2}\frac{2z(z-1)-z^2}{(z-1)^2}=0$

тогда $\operatorname{res}_\infty f(z)=-(\operatorname{res}_1 f(z)+\operatorname{res}_2 f(z))=-1$

Ответ: $\operatorname{res}_1 f(z)=1$
$\operatorname{res}_2 f(z)=0$
$\operatorname{res}_\infty f(z)=-1$

---

⑮ а) Решить диф. уравнение, используя преобразование Лапласа
$x''+2x'-3x=e^{-t}$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$
б) используя теорему о дифференцировании оригинала найти изображение
$f(t)=\cos^2 t$

а) пусть $x(t)\risingdotseq F(p)$,
тогда $x'(t)\risingdotseq pF(p)-\cancel{x(0)}$
$x''(t)\risingdotseq p^2F(p)-px(0)-\cancel{x'(0)}$
т.е. $x''(t)\risingdotseq p^2F(p)-1$
и заметим, что $e^{-t}\risingdotseq\frac1{p+1}$
тогда перепишем диф. уравнение

$\longrightarrow p^2F(p)+2pF(p)-3F(p)-1=\frac1{p+1}$

$F(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p^2+2p-3)}=\frac{p+2}{(p+1)(p-1)(p+3)}=\frac{-\frac14}{p+1}+\frac{\frac38}{p-1}+\frac{-\frac18}{p+3}$

таким образом $F(p)\risingdotseq x(t)=-\frac14e^{-t}+\frac38e^t-\frac18e^{-3t}$

б) $f(t)=\cos^2t=\frac{1+\cos2t}{2}$
(!) $g'(t)\risingdotseq pF(p)-g(0) \longrightarrow g(t)=\frac{\sin2t}{4}+\frac t2\risingdotseq\frac{2}{4(p^2+4)}+\frac1{2p^2}$

тогда $f(t)=\cos^2t=g'(t)\risingdotseq p\cdot\frac{p^2+2}{p^2(p^2+4)}-0=\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}\risingdotseq\cos^2t$