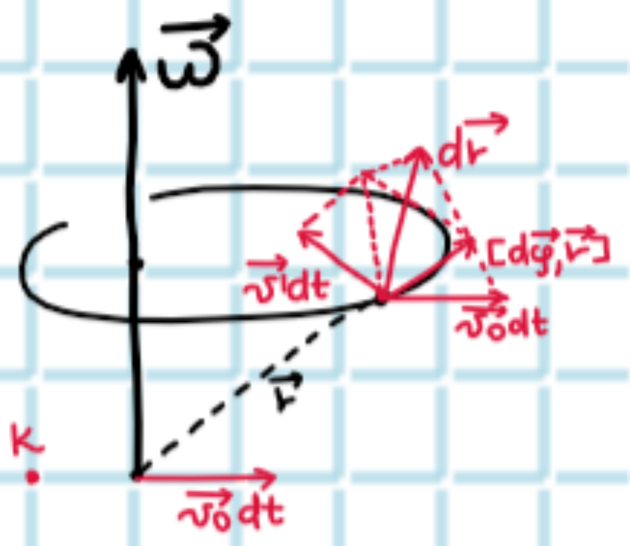
Лопатенко Георгий М3102

1. Вывести формулу для ускорения при переходе к вращающейся системе отсчета.

(!) $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2[\vec{\omega}, \vec{v}] - \omega^2 \vec{p}$

Пусть есть СО K', которая вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно оси, движущейся поступательно со скоростью $\vec{v}_0$ и ускорением $\vec{a}_0$ по отношению к K:



тогда преобразование Галилея для скоростей выглядит:

$$d\vec{r} = (\vec{v}_0 + \vec{v}')dt + [d\vec{\varphi}, \vec{r}] \xrightarrow[:dt]{} \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

тогда $d\vec{v} = (\vec{a}' + \vec{a}_0)dt + [d\vec{\varphi}, \vec{v}'] + [\vec{\omega}, d\vec{r}]$ $(:dt)$ по св-ву линейности

тогда $\vec{a} = \vec{a}' + 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}, \vec{r}]] + \vec{a}_0$

$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 + 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] - \omega^2 \vec{p}$, где $\vec{p}$ – радиус-вектор, перпендикуляр. оси вращения

это задание было у меня на моделировании:

▶ Начнем с **классической теории тяготения**:

Напряженность гравитационного поля - это векторная величина, характеризующая это поле в фиксированной точке и численно равная отношению гравитационной силы F, действующей на неподвижную пробную частицу эталонной массы m_0 в этой точке. Тогда выражение для напряженности гравитационного поля выглядит:

$$\Gamma = \frac{F}{m_0}$$

В классической теории тяготения значение гравитационной силы может быть записано в упрощенной форме, если полагать, что источником гравитационного поля является однородное тело сферической формы массой $M_З$ и радиусом $R_З$, то есть:

$$\Gamma = \frac{-\frac{Gm_0 M_З}{(R_З + r)^2}}{m_0} = -\frac{GM_З}{(R_З + r)^2}, \quad r \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

Заметим, что зависимость $\Gamma(R)$ валидна для точек за границей моделируемой сферы Земли.

Например, потенциал точки за сферой равен $\psi = -\frac{GM_З}{R_З + r}$, тогда:

$$\vec{\Gamma} \xrightarrow[-\nabla\psi]{} -\frac{GM_З}{(R_З + r)^3} \cdot \overrightarrow{(R_З + r)}$$

Или, что эквивалентно через принцип эквивалентности инерциальной и гравитационной масс:

$$\vec{F} = m_0 \vec{g} = -\frac{Gm_0 M_З}{(R_З + r)^3} \cdot \overrightarrow{(R_З + r)} \Rightarrow \vec{g} \equiv \vec{\Gamma} = -\frac{GM_З}{(R_З + r)^3} \cdot \overrightarrow{(R_З + r)}$$

Заметим, что внутри сферы (геоида Земли) потенциал постоянен, то есть напряженность линейно растет до значения $\left[-\frac{GM_З}{R_З^2}\right]$.

То есть описание функции зависимости напряженности гравитационного поля от радиус-вектора до фиксированной точки можно дать следующим образом:

$$\Gamma = \begin{cases} -\frac{GM_З}{R_З^3} \cdot r, & r \in [0; R_З] \\ -\frac{GM_З}{r^2}, & r > R_З \end{cases}$$

$\Gamma\left(\frac{R}{2}\right) \approx 4{,}91 \frac{м}{с^2}$

$\Gamma\left(\frac{3R}{2}\right) \approx 4{,}36 \frac{м}{с^2}$

Теперь относительно потенциала гравитационного поля, которое создается нашим однородным шаром - **Землей**:

- Снаружи потенциал равен $\psi = -\frac{GM_З}{r}, \ r \in (R_З, +\infty)$
- Внутри шара необходимо рассматривать шаровой слой переменной массы, тогда для этого случая выражение силы тяготения записывается $|F| = \frac{Gm_0 M_{layer}}{r^2} = Gm_0 \cdot \left(\frac{4\rho\pi}{3}\right) \cdot r$, а выражение для потенциала: $\psi = G \cdot \frac{2\pi\rho}{3} \cdot r^2 - 2\pi\rho R_З^2, \ r \in [0, R_З]$

$$\psi = \begin{cases} \frac{GM_З r^2}{2R_З^3} - \frac{3GM_З}{2R_З}, & r \in [0; R_З] \\ -\frac{GM_З}{r}, & r > R_З \end{cases}$$

$\Psi\left(\frac{R}{2}\right) \approx -8{,}6 \cdot 10^7 \frac{м^2}{с^2}$

$\Psi\left(\frac{3R}{2}\right) \approx -4{,}16 \cdot 10^7 \frac{м^2}{с^2}$

Заметим еще, что потенциальная энергия для единичной массы будет по графику сопадать с потенциалом с точностью до размерностей, из разностей потенциальных энергий понятно, что на поверхности Земли потенциальная энергия равна работе силы тяжести mgh.