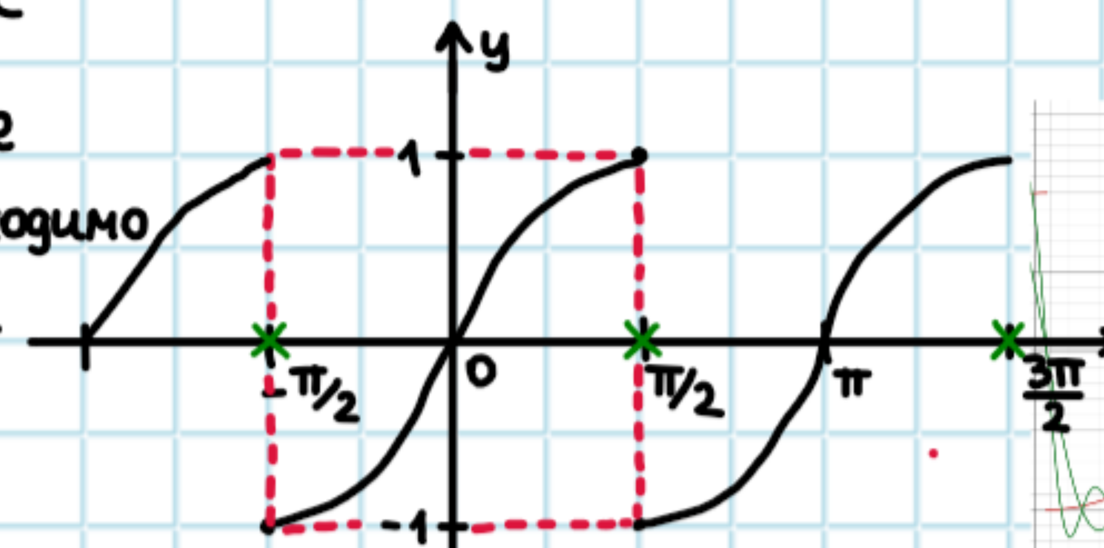
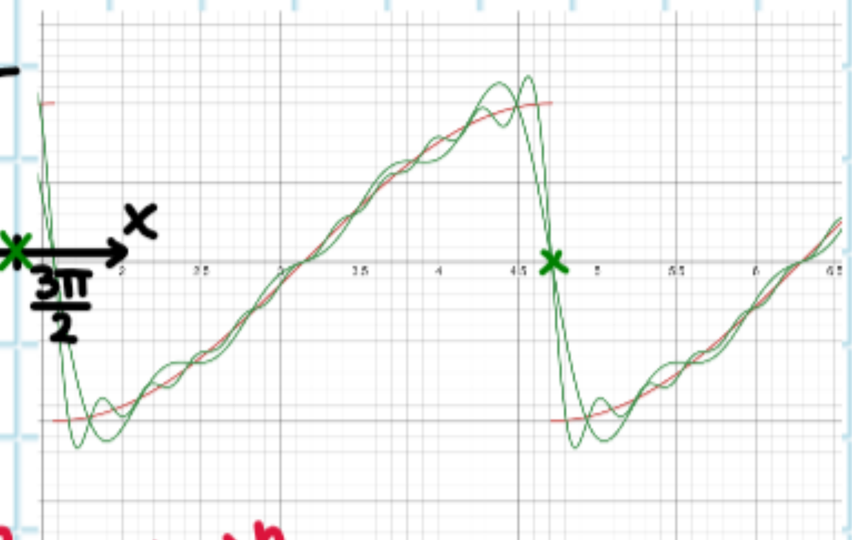
Лопатенко Георгий M32021

① Разложить функцию $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на заданном отрезке:
а) $f(x)=\sin x$ на $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$; б) $f(x)=\cos x$ на $[0;\pi]$; в) $f(x)=\begin{cases}-1 & -c\le x\le 0\\ 1 & 0<x\le c\end{cases}$ на $[-c;c]$

• а) Начнём с того, что функция нечётна и при этом задана на симметричном отрезке.
Это наблюдение гарантирует точки разрыва II рода в местах склейки, тогда необходимо доопределить функцию $f(x)$ для её регулярности $f(x=\frac{\pi}{2}+\pi k)=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}f(x)+\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}f(x)\right)=0$. $k\in\mathbb{Z}$



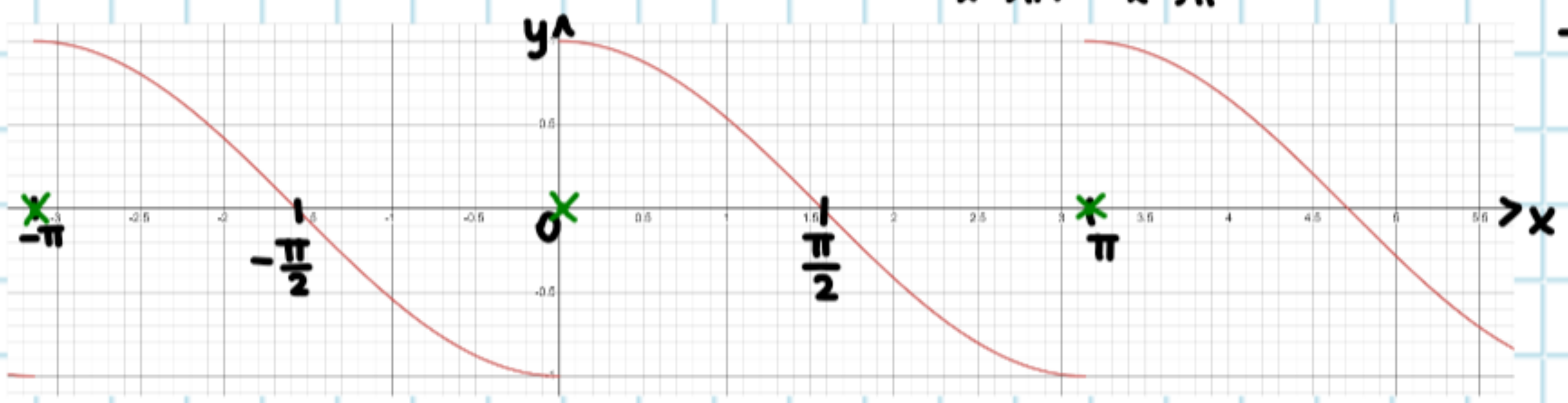


$\to \forall x,\ x\ne\frac{\pi}{2}+\pi k$: $a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=0$ и т.к. $f(x)=-f(-x)$ $\quad b_i=0\ \forall i\in\mathbb{N}$ — обнуление коэффициентов при $\cos nx$ ввиду нечётности $f(x)$

$\to a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin x\cdot\sin 2nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos((2n-1)x)\,dx-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos((2n+1)x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{8n\cos\pi n}{\pi(1-4n^2)}$

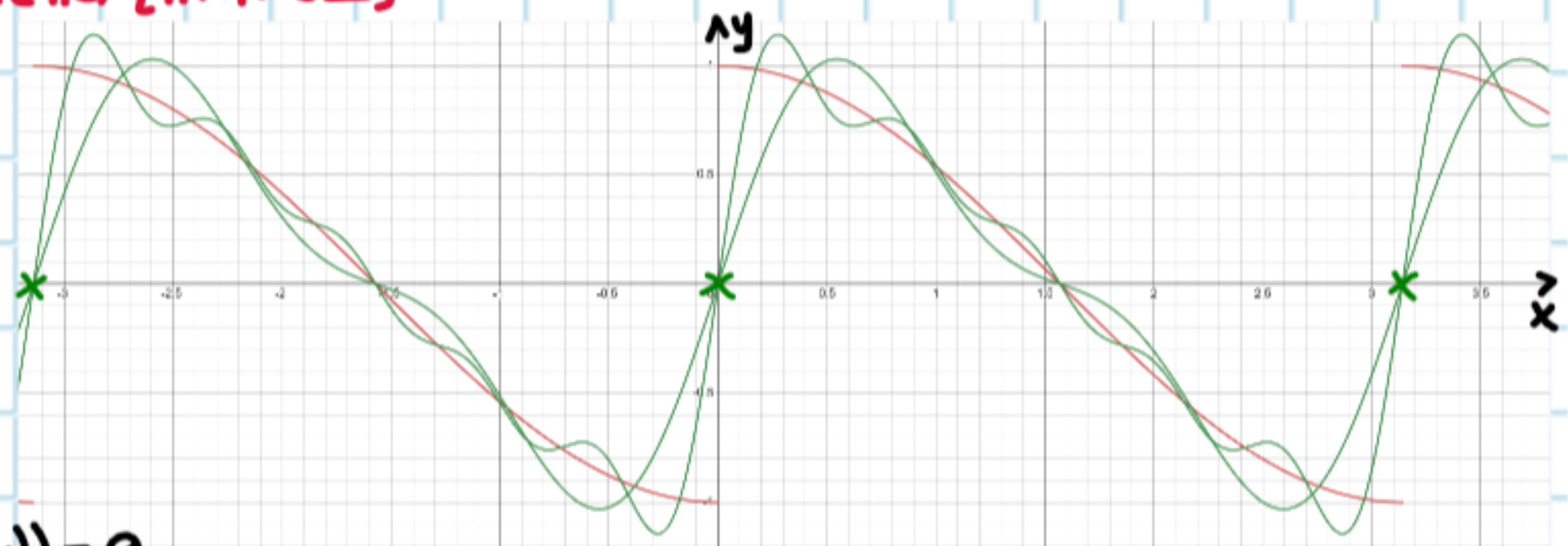
$$\to f(x)=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8n(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}\sin 2nx & \text{при } x\in\mathbb{R}/\{\frac{\pi}{2}+\pi k\},\ k\in\mathbb{Z}\\ 0 & \text{при } x\in\{\frac{\pi}{2}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\}\end{cases}$$

• б) Заметим, что дана чётная функция $f(x)=\cos x$ и отрезок $x\in[0;\pi]$, не обладающий симметрией, тогда отобразим нечётно на $[-\pi;0]$, тогда $T=2\pi$ и для регулярности $f(x=\pi k\mid k\in\mathbb{Z})=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to\pi+}f(x)+\lim\limits_{x\to\pi-}f(x)\right)=0$ и $a_i=0\ \forall i\in\mathbb{N}$ (склейка базового элемента нечётна) при $x\in[-\pi;\pi]$

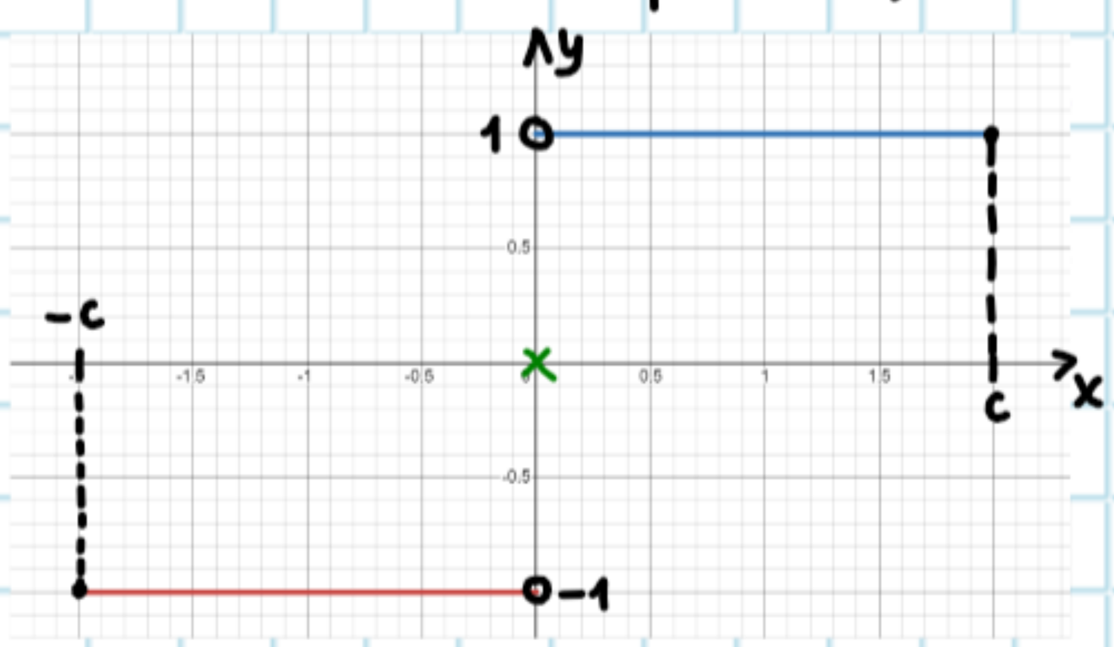


$\to b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(\sin((n+1)x)-\sin((1-n)x))\,dx$

$$\to f(x)=\begin{cases}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2n((-1)^n+1)}{\pi(n^2-1)}\sin nx & \text{при } x\in\mathbb{R}/\{\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\}\\ 0 & \text{при } x\in\{\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\}\end{cases}$$



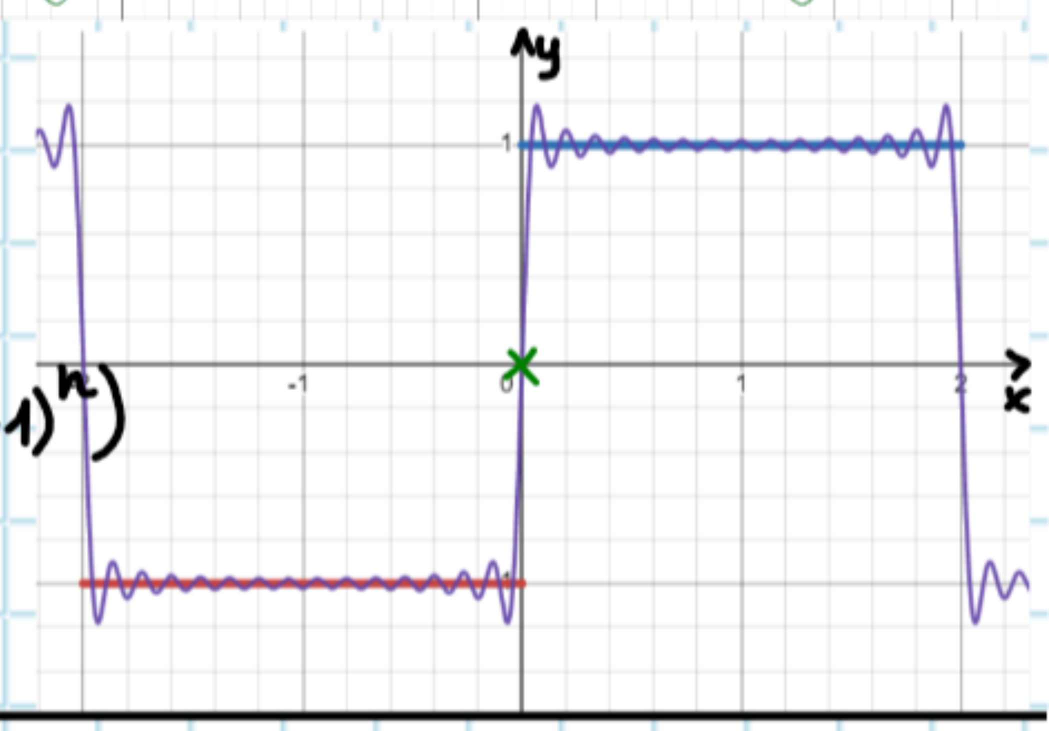
в) $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{при } x\in[-c;0)\\ 1 & \text{при } x\in(0;c]\end{cases}$ на $[-c;c]$ $\longrightarrow$ снова отметим, что необходима регуляризация в точке склейки, т.е. при $x=cn, n\in\mathbb{Z}$ $f(x)=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to0+}f(x)+\lim\limits_{x\to0-}f(x)\right)=0$



Заметим, что функция нечётна, тогда $a_i=0\ \forall i\in\mathbb{N}$

$\to b_n=\frac{1}{c}\left[\int\limits_{-c}^{0}-1\cdot\sin\frac{nx\pi}{c}\,dx+\int\limits_{0}^{c}1\cdot\sin\frac{nx\pi}{c}\,dx\right]=\frac{1}{n\pi}\left[\cos\frac{nx\pi}{c}\Big|_{-c}^{0}-\cos\frac{nx\pi}{c}\Big|_{0}^{c}\right]=$
$=\frac{1}{n\pi}\left[2-2\cos n\pi\right]=\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)$

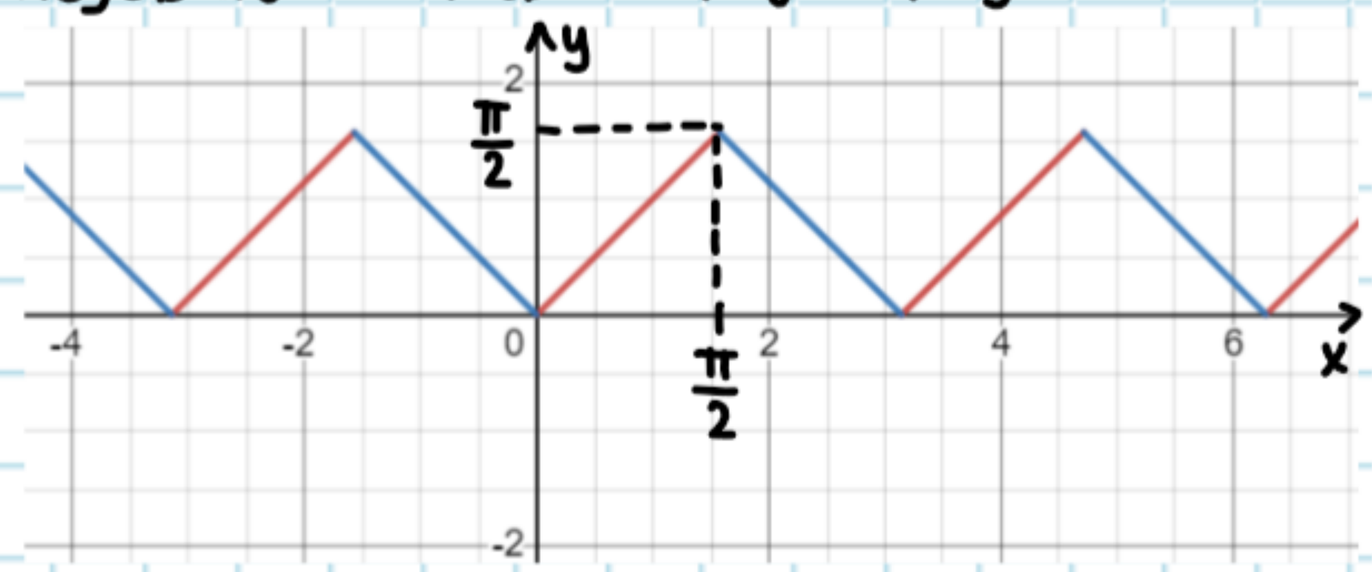
тогда $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x=ck,\ k\in\mathbb{Z}\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{c} & \text{при } x\in\mathbb{R}\setminus\{ck\mid k\in\mathbb{Z}\}\end{cases}$



---

② Составить тригонометрический ряд Фурье на отрезке $x\in[0;\pi]$ для функции $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ \pi-x, & \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$ и исследовать на равномерную сходимость.

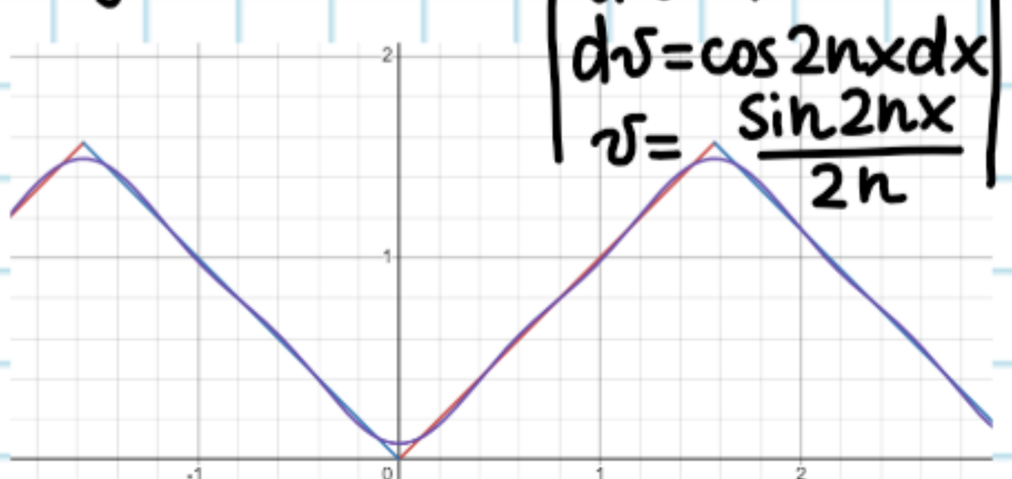
тогда для удобства вычислений отобразим симметрично на $x\in[-\pi;0]$ $f(x)=\begin{cases}-x & \text{при } x\in[-\frac{\pi}{2};0]\\ x & \text{при } x\in[0;\frac{\pi}{2}]\end{cases}$
и так как функция на $x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ симметрична $b_i=0\ \forall i\in\mathbb{Z}$



$\to a_0=\frac{1}{\pi/2}\left[-\int\limits_{-\pi/2}^{0}x\,dx+\int\limits_{0}^{\pi/2}x\,dx\right]=\frac{1}{\pi/2}\cdot2\cdot\frac{\pi^2/4}{2}=\frac{\pi}{2}$; $a_n=\frac{2}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi/2}^{0}-x\cos 2nx\,dx+\int\limits_{0}^{\pi/2}x\cos 2nx\,dx\right]=\frac{2}{\pi}\left[-\cancel{\frac{x\sin 2nx}{2n}}\Big|_{-\pi/2}^{0}+\cancel{\frac{x\sin 2nx}{2n}}\Big|_{0}^{\pi/2}-\frac{\cos 2nx}{4n^2}\Big|_{-\pi/2}^{0}+\frac{\cos 2nx}{4n^2}\Big|_{0}^{\pi/2}\right]=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{2}{4n^2}+2\cdot\frac{(-1)^n}{4n^2}\right]=\frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2}$

$(-1)^n = \cos\pi n$

• $\int x\cos 2nx\,dx=\left|\begin{array}{l}u=x\\ du=dx\\ dv=\cos 2nx\,dx\\ v=\frac{\sin 2nx}{2n}\end{array}\right|=x\cdot\frac{\sin 2nx}{2n}+\frac{\cos 2nx}{4n^2}+C$



$$f(x)=\underbrace{\frac{\pi}{4}}_{\frac{a_0}{2}}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2}\cos 2nx \text{ на } x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$$