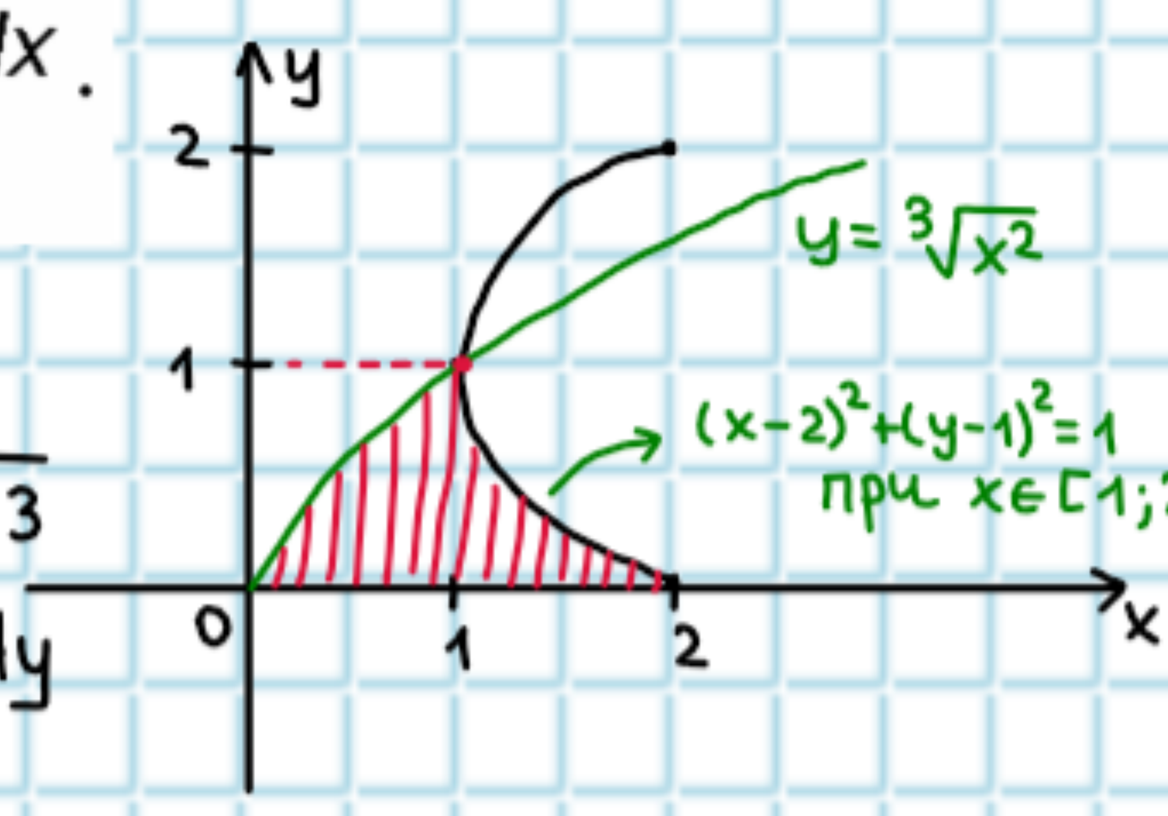
Лопатенко М3102

1. Изменить порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y^3}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$.

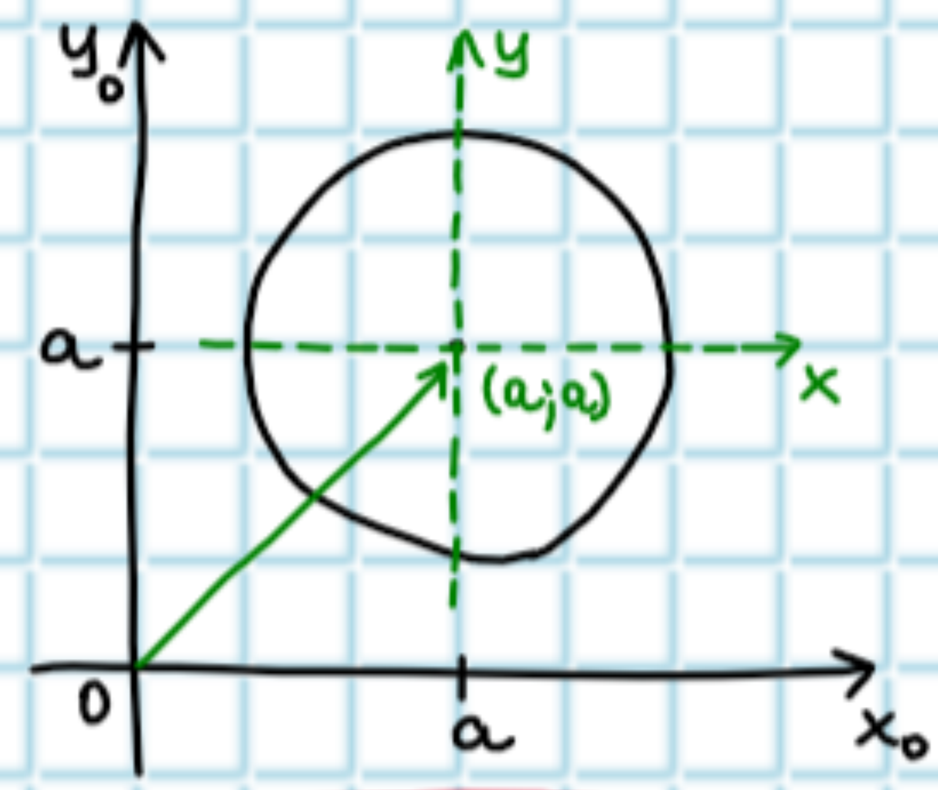


тогда при изменении порядка интегрирования будет следующий результат

Ответ: $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt[3]{x^2}} f(x,y)\,dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)\,dy$

---

2. Найти $\iint\limits_D \sqrt{\dfrac{2xy}{x^2+y^2}}dxdy$, $D:\ (x-a)^2+(y-a)^2\le R^2$, $(a>0)$



Воспользуемся теоремой о переходе к повторному интегралу по области и будем транслировать координатные оси $\begin{cases}x_0=x+a\\ y_0=y+a\end{cases}$ и $\binom{x_0}{y_0}$ – старые координаты,

Якобиан единичный

тогда $D:\ x^2+y^2\le R^2$, тогда здесь же перейдём в полярные координаты, т.е.

$$\iint\limits_D\sqrt{\frac{2(x+a)(y+a)}{x^2+y^2+a^2+2xa+2ya}}\,dxdy=\boxed{\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\rho\sqrt{\frac{2(\rho\cos\varphi+a)(\rho\sin\varphi+a)}{\rho^2+a^2+2a\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)}}\,d\rho}$$

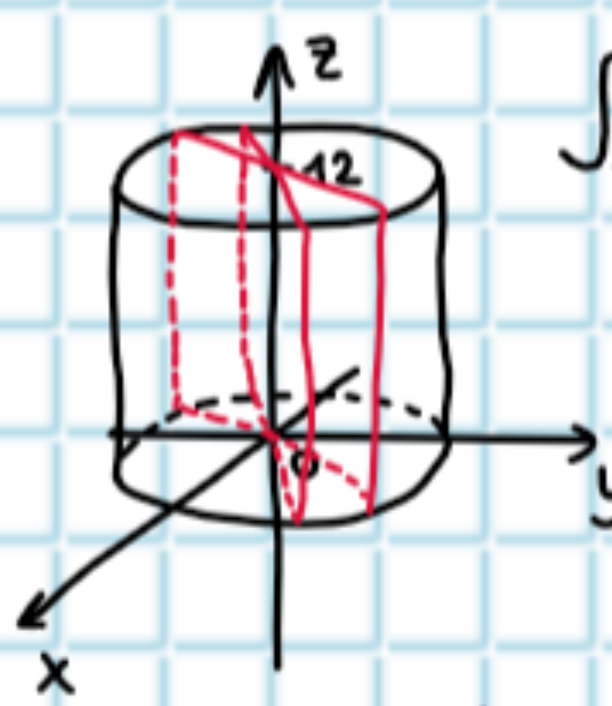
$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}$; $D\left(\frac{x,y}{\rho,\varphi}\right)=\rho$

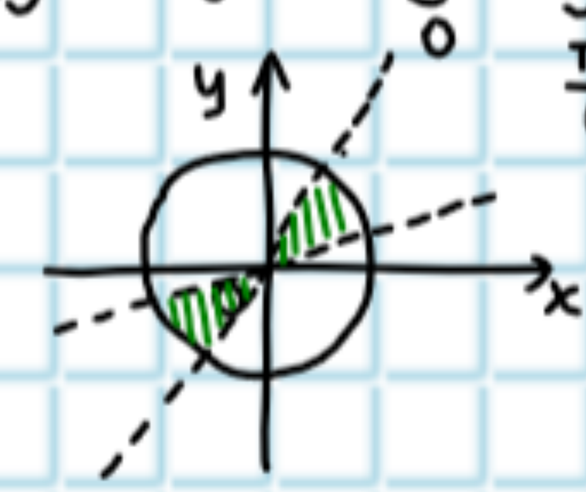
ответ.

---

3. Найти объем тела, ограниченного цилиндром $x^2+y^2=R^2$ и плоскостями $z=0, z=12$, $y=\sqrt{3}x$, $x=\sqrt{3}y$.

$$\iiint dxdydz=2\int\limits_0^{12}dz\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}d\varphi\int\limits_0^R\rho\,d\rho=\frac{R^2}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\cdot2\cdot12=2\pi R^2$$





$y=\sqrt{3}x\ \longrightarrow\ \rho\sin\varphi=\sqrt{3}\cos\varphi$

$x=\sqrt{3}y\ \longrightarrow\ \rho\cos\varphi=\sqrt{3}\sin\varphi$

Переход в цилиндрические:

$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi & \varphi\in[0;2\pi)\\ y=\rho\sin\varphi & R\in(0;R]\\ z=z & D=\rho\end{cases}$

и действительно, объём полного цилиндра $\pi R^2\cdot12$, четверти – $3\pi R^2$ и $\frac{2}{3}$ от этой четверти (объём зелёного тела $2\pi R^2$) понятно, что объём оставшейся части по разбиению цилиндра по условию $\pi R^2\cdot12-2\pi R^2=10\pi R^2$

Ответ: $2\pi R^2$

---

4. Найти $\int\limits_L(x-4y)dl$, где L–окружность $x^2+y^2=2ax$.

$y=\sqrt{2ax-x^2}$

$$dL=\sqrt{1+\left(\frac{2a-2x}{2\sqrt{2ax-x^2}}\right)^2}dx=\frac{a}{\sqrt{2ax-x^2}}dx \quad x\in[0;2a]$$

$$2\int\limits_0^{2a}(x-4\sqrt{2ax-x^2})\cdot\frac{a}{\sqrt{2ax-x^2}}dx=$$

$$=2\int\limits_0^{2a}\frac{xa}{\sqrt{2ax-x^2}}dx-2\int\limits_0^{2a}4a\,dx=$$

$$=-2a\sqrt{2ax-x^2}+2a^2\arcsin\frac{x-a}{a}\Big|_0^{2a}-$$

$$-2\cdot4a\cdot2a=2\pi a^2-16a$$

Ответ: $2\pi a^2-16a$

5. Вычислить $\int\limits_L xydx+(x^2+y^2)dy$, где L–дуга окружности $x^2+y^2=R^2$ от точки $A(R;0)$ до точки $B(0;R)$.

• используем формулу Грина для правого контура

$$\int\limits_L xy\,dx+(x^2+y^2)dy=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\left(\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}-\frac{\partial(xy)}{\partial y}\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}x\,dxdy=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^R\rho\cdot\rho\cos\varphi\,d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\cdot\frac{R^3}{3}d\varphi=\frac{R^3}{3}$$

Ответ: $\frac{R^3}{3}$