Лопатенко Георгий M3102

Задания к 24.02.2022

1. Точность измерений:

1.1 Почему в задачах часто указывают данные в таком виде: m = 2.00 кг (не 2 кг). Что это означает?

Потому что так можно указать, с какой точностью необходимо записывать результаты вычислений. Или в другом случае, если задача подразумевает вычисление погрешности, то количество нулей после значения помогает верно указать погрешность (с округлением).

1.2 Для малых углов численные значения синуса и тангенса практически совпадают. Определите максимальный угол, при котором синус и тангенс совпадают пределах 2 значащих цифр.

Если расписать $sin(x)$ и $tg(x)$ по ряду Макларена:

$$sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + O(x^{10})$$

$$tg(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + O(x^{10})$$

тогда $sin(x) - tg(x) = \frac{2}{3!}x^3 + O(x^5)$ и если нужно , чтобы значения расходились только в третьей значащей цифре, то необходимо решить уравнение $sin(x) - tg(x) = 0.005 = \frac{2}{3!}x^3 + O(x^5)$

$x \approx 0.247$, а дальше будем находить значение разности и проверку соответствия с шагом 0.1 - 0.01 - 0.001 и так далее, на каждой итерации сдвигая границу. Конечно, точность будет зависеть от усидчивости студента, но решение можно запустить циклом, задав при этом предел точности.

```
import math
i = 0.3
while i > 0.24:
    if str(math.sin(i))[:4] == str(math.tan(i))[:4]:
        print(i)
        break
    i -= 0.00000001
```

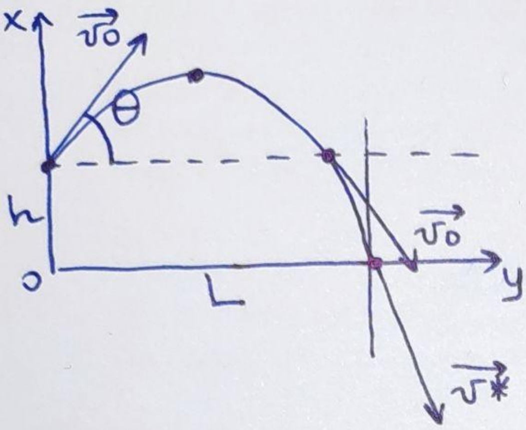
```
IDLE Shell 3.9.6
File  Edit  Shell  Debug  Options  Window  Help
0.2637118300191005
>>>
```

А это примерно 15 градусов 6 минут и 34 секунды. Понятно, что точнее вычислять не имеет смысла. При этом при расчетах по формулам INT(sin(i)*100) - INT(tan(i)*100) = 0 при шаге в 0.001 можно получить значение на отрезке 0.252-0.254, а при меньшем шаге подобраться к 0.26371 радиан.

2. Тело, брошенное под углом к горизонту

Лопатенко Георгий
М3102

Баскетболист бросает мяч с начальной скоростью $v_0 = 13,5$ м/с с высоты $h = 2.1$ м.



• пусть в самом конце броска мяч имел скорость v^* и „вошёл" в землю под углом Ω.

тогда сначала запишем ЗСЭ:

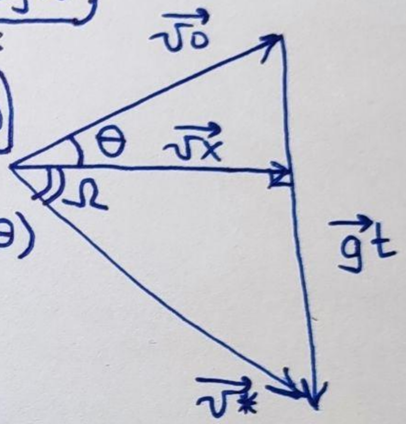
момент времени $t_0 = 0$ с $\qquad t = t^*$

$$mgh + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^{*2}}{2} \quad (1)$$

из (1) формулы понятно, что

$$\boxed{v^* = \sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

тогда построим треугольник скоростей:



Заметим, что $\boxed{\vec{v_x} = \vec{v_0}\cos\theta = \vec{v^*}\cos\Omega \ (2)}$

так, мы можем найти площадь этого треугольника: $\frac{1}{2}|\vec{v_0}|\cdot|\vec{v^*}|\cdot\sin(\Omega+\theta)$

с другой стороны: $\frac{1}{2}|\vec{v_x}|\cdot gt$

и $|\vec{v_x}|t = L$

тогда:

$$L = \frac{v_0 v^* \sin(\theta+\Omega)}{g} \quad (3)$$

Вернёмся к (2): $\cos\Omega = \frac{v_0\cos\theta}{\sqrt{v_0^2+2gh}}$; $\sin\Omega = \sqrt{\frac{2gh + v_0^2\sin^2\theta}{v_0^2+2gh}}$

запишем ещё раз (3): с подстановкой (1) $L = \frac{v_0\sqrt{v_0^2+2gh}\left(\sin\theta\cdot\frac{v_0\cos\theta}{\sqrt{v_0^2+2gh}} + \cos\theta\sin\Omega\right)}{g}$

$$L = \frac{v_0}{g}\left(v_0\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sqrt{2gh+v_0^2\sin^2\theta}\right)$$

~~При поиске производной~~

Заметим, что первое слагаемое $l_1 = \frac{v_0^2\sin2\theta}{2g}$ – „известная" формула в баллистике.

$$L = \frac{v_0^2\sin2\theta}{2g} + \frac{v_0\cos\theta}{g}\sqrt{2gh+v_0^2\sin^2\theta}.$$

Второй способ решения:

координаты x и y при таком броске меняются согласно законам:
$$\begin{cases} x = v_0 \cos\theta \, t \\ y = h + v_0 \sin\theta \, t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \quad (5)$$

тогда пусть $y = 0$ (в самом конце):
$$0 = h + v_0 \sin\theta \, t - \frac{gt^2}{2}$$
$$\Rightarrow \quad t = \frac{v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2hg}}{g} \quad (4)$$

(второй корень не подходит, т.к. $\sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2hg} \geq v_0 \sin\theta$)

тогда, если подставить t (4) в (5):
$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g} + \frac{v_0 \cos\theta}{g} \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2hg},$$

maximize		
	function	$13.5 \times 13.5 \times \dfrac{\sin(2x)}{2 \times 9.8} + \left(13.5 \times \dfrac{\cos(x)}{9.8}\right)\sqrt{2 \times 2.1 \times 9.8 + 13.5 \times 13.5 \sin^2(x)}$
	domain	$0 \leq x \leq \pi \, 2^{-1}$

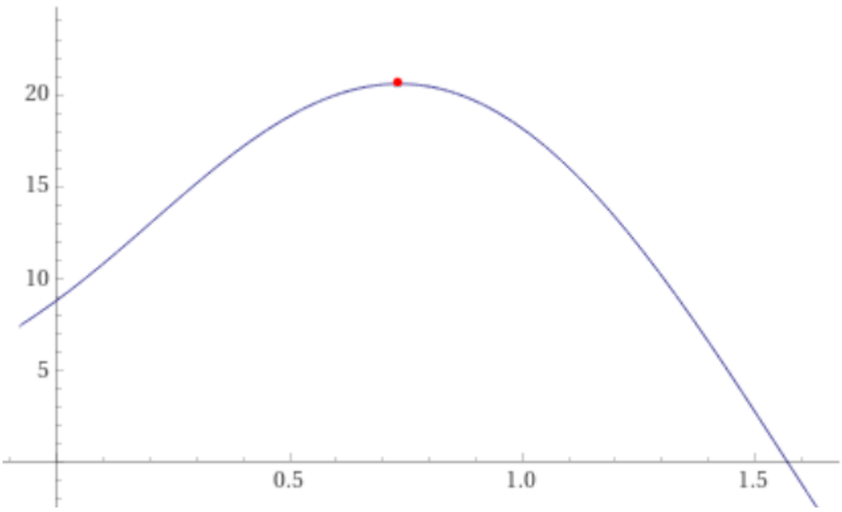
Global maximum

Enlarge | Data | Customize | Plain Text

$$\max\left\{\frac{13.5 \times 13.5 \sin(2x)}{2 \times 9.8} + \frac{(13.5\cos(x))\sqrt{2 \times 2.1 \times 9.8 + 13.5 \times 13.5 \sin^2(x)}}{9.8} \;\middle|\; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\} = \frac{27\sqrt{22341}}{196} \text{ at } x = 2\cot^{-1}\left(\sqrt{\frac{20969}{6075} + \frac{2\sqrt{100698334}}{6075}}\right)$$

$\cot^{-1}(x)$ is the inverse cotangent function

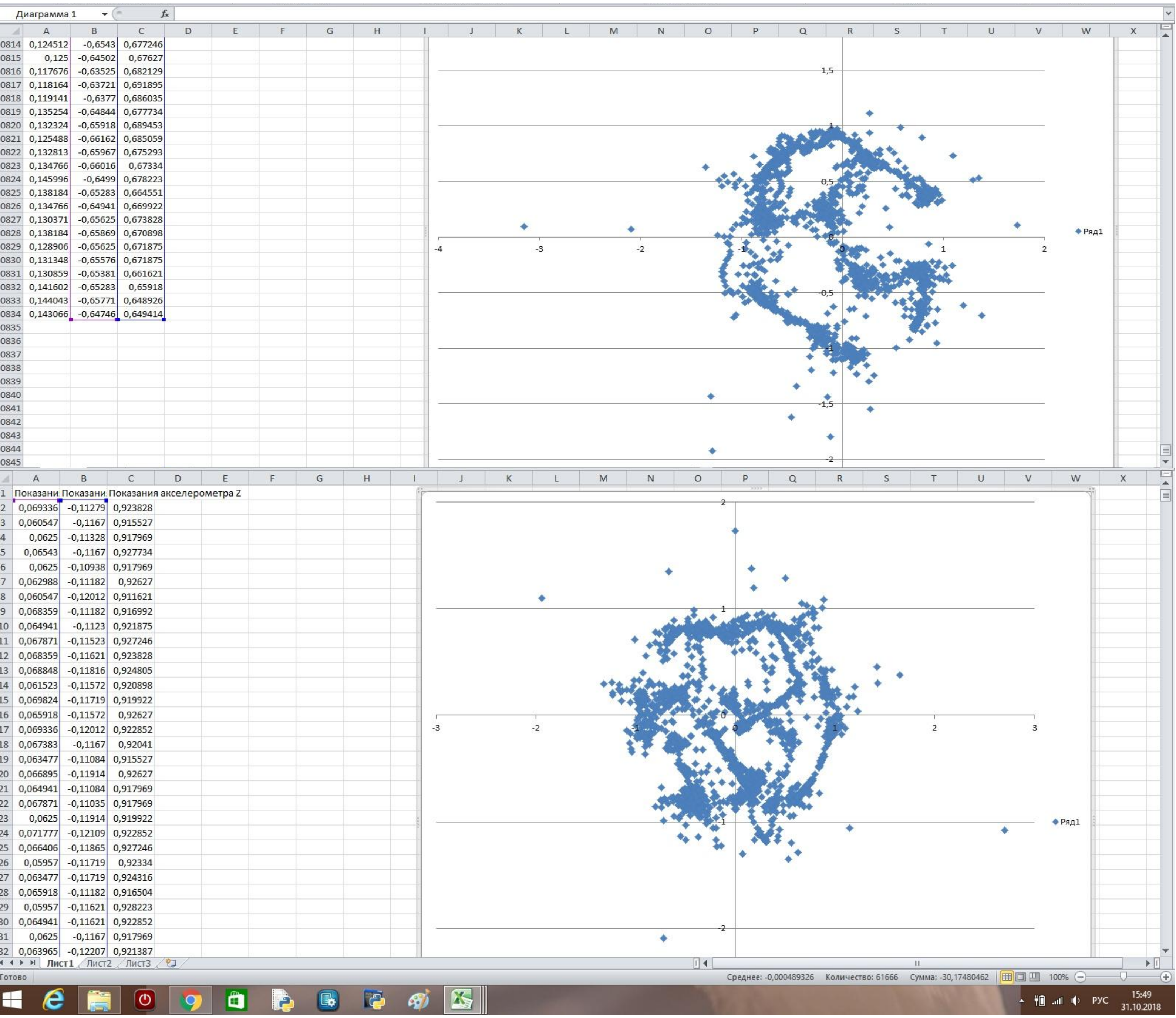
Plot



(x from −0.08 to 1.6)

3. Принцип работы тележки

Установка выглядит простой по механике: направляющий рельс с регулировкой высоты и мат.маятником для определения наклона и тележка. Логично было бы предположить, что внутри стоят датчики, которые передают информацию по Bluetooth, как в смартфонах. Наверное, это цифровой гироскоп или трехканальный акселерометр. У меня был кейс по поиску дефектов в показаниях акселерометров на I Международном турнире по мат.моделированию (г. Москва, 2018), получались такие кластеры точек (в силу того, что устройство представляет из себя три акселерометра по ортогональным осям чувствительности). Задача сводилась к правильной обработке данных, чистке статистического шума и построению мат.модели. Для поиска неисправности акселерометра его приклеивают к сферическому объекту (к глобусу, например) и снимают множество показаний. После этого по выборке ищут центр “глобуса” (по методу k-средних) и отсеивают значения точек, которые оказались на большем или меньшем расстоянии, чем радиус этой сферы.



	A	B	C
0814	0,124512	-0,6543	0,677246
0815	0,125	-0,64502	0,67627
0816	0,117676	-0,63525	0,682129
0817	0,118164	-0,63721	0,691895
0818	0,119141	-0,6377	0,686035
0819	0,135254	-0,64844	0,677734
0820	0,132324	-0,65918	0,689453
0821	0,125488	-0,66162	0,685059
0822	0,132813	-0,65967	0,675293
0823	0,134766	-0,66016	0,67334
0824	0,145996	-0,6499	0,678223
0825	0,138184	-0,65283	0,664551
0826	0,134766	-0,64941	0,669922
0827	0,130371	-0,65625	0,673828
0828	0,138184	-0,65869	0,670898
0829	0,128906	-0,65625	0,671875
0830	0,131348	-0,65576	0,671875
0831	0,130859	-0,65381	0,661621
0832	0,141602	-0,65283	0,65918
0833	0,144043	-0,65771	0,648926
0834	0,143066	-0,64746	0,649414

	A	B	C
1	Показани	Показани	Показания акселерометра Z
2	0,069336	-0,11279	0,923828
3	0,060547	-0,1167	0,915527
4	0,0625	-0,11328	0,917969
5	0,06543	-0,1167	0,927734
6	0,0625	-0,10938	0,917969
7	0,062988	-0,11182	0,92627
8	0,060547	-0,12012	0,911621
9	0,068359	-0,11182	0,916992
10	0,064941	-0,1123	0,921875
11	0,067871	-0,11523	0,927246
12	0,068359	-0,11621	0,923828
13	0,068848	-0,11816	0,924805
14	0,061523	-0,11572	0,920898
15	0,069824	-0,11719	0,919922
16	0,065918	-0,11572	0,92627
17	0,069336	-0,12012	0,922852
18	0,067383	-0,1167	0,92041
19	0,063477	-0,11084	0,915527
20	0,066895	-0,11914	0,92627
21	0,064941	-0,11084	0,917969
22	0,067871	-0,11035	0,917969
23	0,0625	-0,11914	0,919922
24	0,071777	-0,12109	0,922852
25	0,066406	-0,11865	0,927246
26	0,05957	-0,11719	0,92334
27	0,063477	-0,11719	0,924316
28	0,065918	-0,11182	0,916504
29	0,05957	-0,11621	0,928223
30	0,064941	-0,11621	0,922852
31	0,0625	-0,1167	0,917969
32	0,063965	-0,12207	0,921387