КР по рядам, 3 семестр

Лопатенко Георгий М32021

1 а)

9.205. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\frac{n+1}{n}}{\ln^{\alpha}(n+1)}$

Начнём рассматривать выражение $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln^{\alpha}(n+1)}$. Очевидно, что логарифмическая функция монотонно возрастает, тогда при всех положительных значениях параметра α отношение в пределе обнуляется т.к. $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n}$

$\to \sum a_n(x-x_0)^{fn}$, тогда $a_n=\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln^{\alpha}(n+1)}$ при $x_0=0$ и $f=0$, тогда по теореме Коши-Адамара радиус сходимости

найдём из $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\ln^{\alpha}(n+2)}{\ln^{\alpha}(n+1)\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)}$

тогда следует обратить особое внимание на $\alpha\in[0;1]$ и $\alpha>1$: при $\alpha>1$ $R=\text{const}$, т.е. есть абсолют. сходимость

Заметим, что при $\alpha\in[0;1]$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln^{\alpha}(n+1)}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\alpha}n}\longrightarrow\int_1^{\infty}\frac{dn}{n\ln^{\alpha}n}=\int_0^{\infty}\frac{dz}{z^{\alpha}}$ и сходимость лишь при $\alpha>1$

Ответ: ряд сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$

1 б)

9.234. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{\pi}{n}-\operatorname{arctg}\frac{\pi}{n+1}\right)\sqrt{n}$

Заметим, что аргументы арктангенсов положительны, тогда $\operatorname{arctg}\frac{\pi}{n}-\operatorname{arctg}\frac{\pi}{n+1}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n+1}}{1+\frac{\pi^2}{n(n+1)}}$

$\to\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{\pi}{n^2+n+\pi^2}\right)\sqrt{n}$, рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\operatorname{arctg}\left(\underset{\to 0}{\frac{\pi}{n^2+n+\pi^2}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{\pi}{n^2+n+\pi^2}=0$

Очевидно, что можно использовать признаки сравнения $\lim\limits_{n\to 0}\frac{\sqrt{n}\cdot\frac{\pi}{n^2+n+\pi^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}}=\pi$, т.е. характер сходимости одинаковый; $\frac{1}{n^{3/2}}\to$ сход

Ответ: сходится на $\mathbb{R}$

2

10.74. $\sin\frac{1+nx}{2n}$ на $\mathbb{R}$

Необходимо исследовать последовательность $\left\{\sin\frac{1+nx}{2n}\right\}$, $x\in\mathbb{R}$ на равномерную сходимость

$\to\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1+nx}{2n}\right)$, однако из этого выражения судить о равномерной сходимости рано, однако члены ряда на бесконечности $\longrightarrow\sin\frac{x}{2}$ семейство синусов действительно входит в класс непрерывных функций

тогда по критерию Коши $\forall\varepsilon>0\ \exists N:\forall n,m>N\ \forall x\in\mathbb{R}\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

$\alpha_n=\sup\limits_{\forall x\in\mathbb{R}}\left|\sin\left(\frac{1+nx}{2n}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|\xrightarrow{?}0$ т.е. $\sup\left|2\underbrace{\sin\frac{1}{2n}}_{\sim\frac{1}{2n}}\underbrace{\cos\frac{1+2nx}{2n}}_{\text{ограничена}}\right|\xrightarrow[\forall x\in\mathbb{R}]{n\to 0}0$, тогда существует равномерная сходимость последовательности на $x\in\mathbb{R}$.

3

10.132. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sin nx}$

Найти область сходимости

$\to\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sin nx}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sin(x+nx)}$

Заметим, что стоит оценивать по признаку Лейбница:

1) имеем знакочередующийся ряд
2) отмечаем монотонную сходимость модулей к 0: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sin nx}\right|=0$, тогда признак выполнен

Ответ: условная сходимость на $\mathbb{R}$

4

10.542. $f(x)=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, $f^{(100)}(0)$

Заметим, что $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{1-x}}+\frac{2}{\sqrt{1-x}}=-\sqrt{1-x}+\frac{2}{\sqrt{1-x}}$, а в этой форме можно использовать на отрезке $|x|<1$

т.е. $f(x)=-\left(1-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n\right)+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}x^n+\ldots x^0$

тогда $f^{(100)}(0)=\frac{(197)!!}{2^{100}\cdot\cancel{100!}}\cdot\cancel{100!}\cdot(-1)^{101}+2\cdot\frac{197!!\,2\cdot 100}{2^{100}\cdot\cancel{100!}}\cdot\cancel{100!}=\frac{399\cdot 197!!}{2^{100}}$

Заметим, что степени старше x^{100} обнулятся при подстановке $x=0$, а младшие обнулятся при взятии производной старшего порядка

Ответ: $\frac{399\cdot 197!!}{2^{100}}$

5

Показать, что данный ряд допускает почленное интегрирование на заданном отрезке, и найти полученный при этом числовой ряд (10.342—10.346).

10.343°. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$ на $[-1;2]$

Заметим, что исходный ряд представим степенным и $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\x=-1}}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}\to 0$ и $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\x=-1}}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}\to 0$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 9^n}$ сходится

Тогда искомый ряд равномерно сходится на $[-1;2]$, т.е. допускает почленное интегрирование, тогда полученный почленным интегрированием $\displaystyle\int_{-1}^{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 9^n}\cdot(x-1)^{2n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left.\frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)n\cdot 9^n}\right|_{-1}^{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-2)^{2n+1}}{(2n+1)n\cdot 9^n}$

Ответ: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-2)^{2n+1}}{(2n+1)n\cdot 9^n}$

6

T10.14. Привести пример последовательности $\{f_n(x)\}$, удовлетворяющей условиям:

1) все функции $f_n(x)$ непрерывны на $(0;1)$;
2) для любого $x_0\in(0;1)$ последовательность $\{f_n(x_0)\}$ монотонна;
3) последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к непрерывной на $(0;1)$ функции $f(x)$ неравномерно на $(0;1)$.

Объяснить кажущееся противоречие с теоремой Дини.

$\exists\ f_n(x)=x^n \not\rightrightarrows 0$

Так как по основному критерию сходимости $\alpha_n=\sup\limits_{x\in[0;1)}|x^n-0|=1\not\to 0$

и $x\in[0;1]$ $u(x)=\begin{cases}0 & \forall x\in[0;1)\\ 1 & x=1\end{cases}$

и равномерной сходимости нет.