Физические основы IT и компьютерных технологий. Конспект лекций.

Я.Б. Музыченко

ИТМО

Оглавление

Глава 1 Лекция 1. Дисперсия света

содержание лекции

- Классическая теория дисперсии света.
- Нормальная и аномальная дисперсия.
-
- Дисперсия вдали от поглощения.
- Волновой пакет.
- Фазовая и групповая скорости.
- Дисперсия в волноводах.
- Пример разложения волнового пакета в спектр.

1.1 Теория

Для понимания механизмов передачи сигналов по оптоволоконным линиям необходимо рассмотреть физические основы генерации и распространения электромагнитных волн. Кроме изученных ранее уравнений Максвелла и волновой теории света, необходимо будет более подробно изучить волновые пакеты и их дисперсионные характеристики. В материал данной лекции включены базовые сведения о дисперсии света, описаны два типа дисперсии, понятия фазовой и групповой скорости, приводится классическая теория дисперсии. В конце лекции приведены примеры распространения волн в волнводах различного типа.

Определение 1.1

Дисперсией называют явления, обусловленные зависимостью показателя преломления вещества n от длины/частоты световой волны. Такую зависимость можно охарактеризовать как $n = f(\lambda_0)$, где λ_0 - длина волны в вакууме. ♣

Все среды за исключением абсолютного вакуума обладают дисперсией. Наилучшим приближением к абсолютному вакууму является межпланетное и межзвездное пространство. Явление дисперсии в оптическом диапазоне можно наблюдать при явлении радуги или разложения белого света в спектр (рис. 1.1)

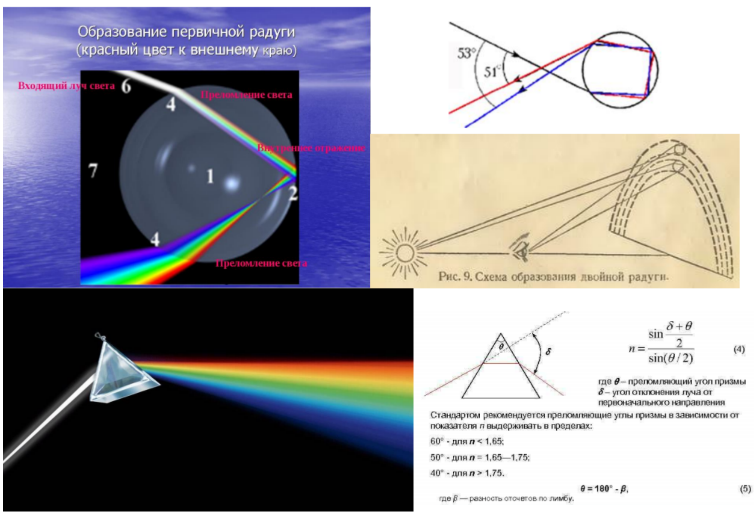

Рис. 1.1: Примеры дисперсии: формирование радуги, разложение белого света в спектр с помощью призмы
.

1.1.1 Классическая теория дисперсии

Дисперсию можно объяснить с помощью электромагнитной теории и электронного строения вещества. Движение электронов в атоме подчиняется законам квантовой механики, но для качественного понимания многих оптических явлений можно ограничиться гипотезой, что электроны в атомах связаны между собой квазиупруго и совершают вынужденные колебания под действием электромагнитных волн, падающих на вещество. Под действием волн элетроны сами начинают излучать, в результате чего в веществе распространяется уже не одна волна, а результирующая всех вторичных волн. Такая модель называется классической теорией дисперсии Лорентца. Использование классической теории в данном случае оправдано тем, что квантовые представления приводят к практически тем же результатам. Электрон можно рассматривать как гармонический осциллятор, совершающий затухающие колебания, описываемые уравнением:

$$\ddot{r} + 2\gamma\dot{r} + \omega_0^2 r = \frac{e}{m}E_0\cos(\omega t - kx) \tag{1.1}$$

Амплитуда и фаза таких колебаний электрона (см. Вынужденные колебания):

$$r_m = \frac{eE_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \tag{1.2}$$

$$\tan\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{1.3}$$

Для упрощения вычислений пренебрежем затуханием:

$$r_m = \frac{eE_0/m}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{1.4}$$

Под действием силы электрон совершает колебания:

$$r(t) = \frac{eE_0/m}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(\omega t - kx) = \frac{eE(t)/m}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{1.5}$$

В результате смещения молекула приобретает дипольный момент:

$$p(t) = er(t) = \frac{e^2E(t)/m}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{1.6}$$

Домножив дипольный момент на число молекул в единице объема N, получим значение вектора поляризации:

$$P(t) = Np(t) = Ner(t) = \frac{Ne^2E(t)/m}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{1.7}$$

Представим диэлектрическую проницаемость ε вещества как:

$$\varepsilon = n^2 = 1 + \chi = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E} = 1 + \frac{Ne^2/m}{\varepsilon_0(\omega_0^2-\omega^2)} \tag{1.8}$$

Это уравнение называется уравнением Зельмейера. Удивительно, что квантовомеханический расчет дает тот же самый результат, что и классическая теория Лорентца.

1.1.2 Нормальная и аномальная дисперсия

Проанализируем уравнение: при значениях частоты ω, заметно отличающихся от собственных частот ω_0 $n^2 \sim 1$. Вблизи собственной частоты функция терпит разрыв, это обусловлено тем, что мы пренебрегли затуханием. Сплошной линией показан график зависимости $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, пунктирной линией показана зависимость показателя преломления $n = n(\omega)$, также на графике показана величина χ - коэффициент затухания волны. Эти выводы являются формальными, так как вблизи собственной частоты формула 1.8 не применима. На самом деле, величины n, ε, κ меняются непрерывно, нигде не обращаясь в бесконечность. Типичный вид кивых представлен на рис. 1.3. Там, где поглощение не велико, показатель преломления возрастает с ростом частоты, такую дисперсию называют нормальной. В области сильного поглощения показатель преломления уменьшается с частотой, такую дисперсию называют аномальной. Ее трудно наблюдать из-за сильного поглощения.

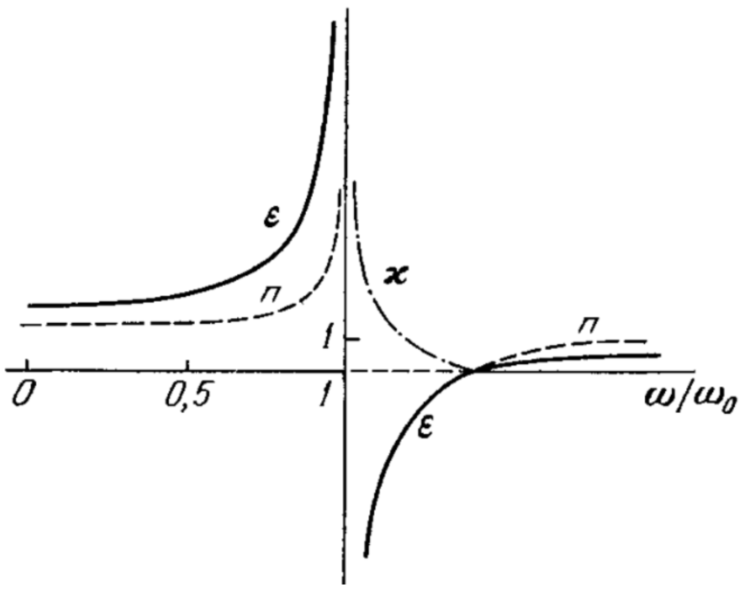

Рис. 1.2: Зависимости показателя преломления, диэлектрической проницаемости среды и показателя затухания от частоты.

.

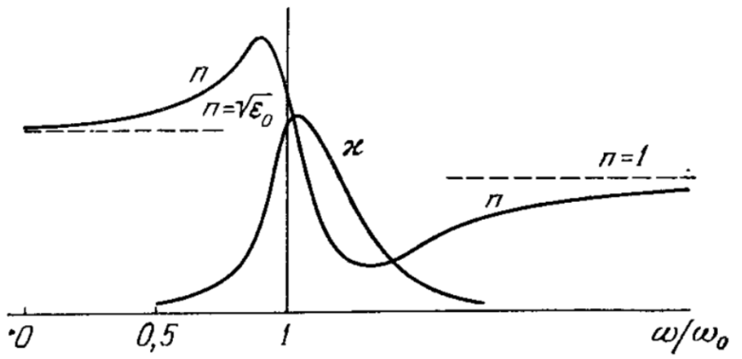

Рис. 1.3: Зависимость показателя преломления и затухания от частоты

.

Если в в формуле 1.1 напряженность электрического поля E записать в комплексном виде $E = E_0 \exp{(-i\omega t)}$ и учесть затухание, то формула 1.8 примет вид:

$$\varepsilon = 1 + \frac{Ne^2/m}{\varepsilon_0((\omega_0^2 - \omega^2) + 2\beta\omega i)} \tag{1.9}$$

Иногда для упрощения вводят константу ${\omega_p}^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$, называемую плазменной частотой. Тогда формулу можно переписать как:

$$\varepsilon = 1 + \frac{{\omega_p}^2}{((\omega_0^2 - \omega^2) + 2\beta\omega i)} \tag{1.10}$$

То есть в общем случае диэлектрическая проницаемость также является комплексной величиной (это объясняется затуханием). Выделяя мнимую и вещественную часть, можно получить выражение для показателя преломления n и показателя затухания $\varkappa$ в зависимости от частоты:

$$\sqrt{\varepsilon} = n - i\varkappa \tag{1.11}$$

Действительная часть комплексного показателя преломления определяет преломляющие (рефракционные) свойства среды. Мнимая часть описывает поглощение (абсорбционные свойства). Оказывается, что бе части не являются независимыми: они связаны некоторыми общими интегральными соотношениями Крамерса-Кронига.

1.1.3 Дисперсия вдали от поглощения.

Рассмотрим некоторые случаи дисперсии вдали от линий поглощения:

1. Затухания нет, $\omega^2 - \omega^2 \gg \omega_0$, мнимой частью можно пренебречь:

$$\varepsilon = 1 - \frac{{\omega_p}^2}{\omega^2} \tag{1.12}$$

Для высокочастотного излучения, например, рентгена, вакуум является оптически более плотной средой, чем вещество ($\varepsilon < 1$). Фазовая скорость в среде больше скорости в вакууме. Вещества прозрачны для рентгена.

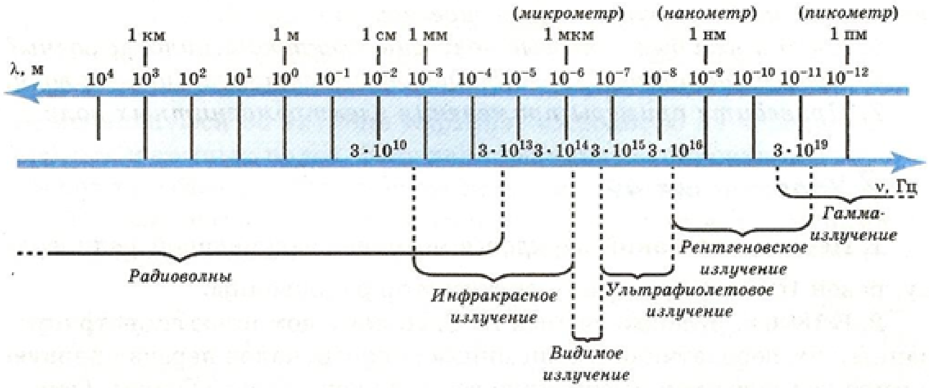

Рис. 1.4: Шкала электромагнитных волн.

.

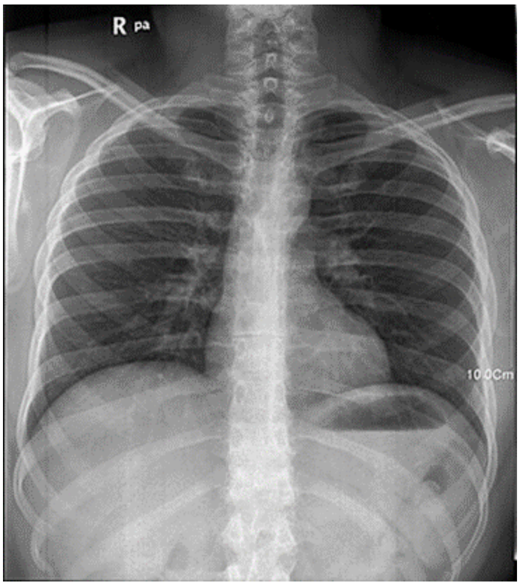

Рис. 1.5: Рентгеновский снимок грудной клетки

.

2. Дисперсия в плазме, затухания нет, отсутствует возвращающая сила ($\omega_0 = 0$)

$$\varepsilon = 1 - \frac{{\omega_p}^2}{\omega^2} \tag{1.13}$$

При $\frac{\omega_p}{\omega} > 1$ $\varepsilon < 0$, показатель преломления n - мнимый. То есть для любых частот меньших плазменной будет наблюдаться волное отражение. Это свойство используется при дальней радиосвязи и передаче информации на дальние расстояния (происходит отражение от плазмы).

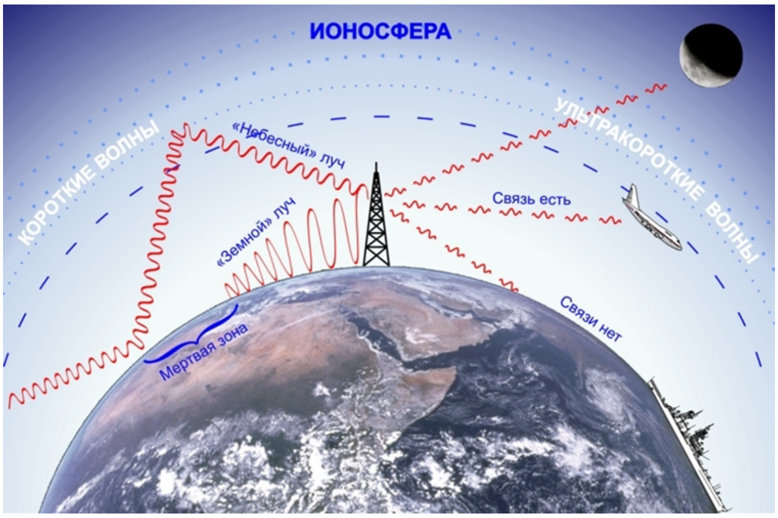

Рис. 1.6: Передача информации на дальние расстояния

.

Опыт показывает, что в любом веществе электрон характеризуется не одной частотой собственных колебаний, а набором частот ω_{oi}, поэтому закон дисперсии записывается с учетом суммирования всех частот. Точные измерения показывают расхождения с опытом в 2-3 %.

1.1.4 Волновой пакет

Определение 1.2

Волновой пакет - суперпозиция двух и большего числа волн с различными частотами. Часто под волновым пакетом понимают образование из волн, ограниченное в пространстве. ♣

Волновой пакет, распространяющийся вдоль оси x, может быть записан как:

$$E(x,t) = \int\limits_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} E(\omega)\cos(\omega t - k_\omega x)d\omega \tag{1.14}$$

Рассмотрим простейший пример волнового пакета - суперпозиции двух волн с близкими частотами - биения. Результат сложения двух волн с близкими частотами можно представить в виде (см. прошлый семестр, сложение колебание: биения):

$$E = 2E_0\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t - \frac{k_1+k_2}{2}x\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t - \frac{k_1-k_2}{2}x\right) \tag{1.15}$$

где k и ω связаны соотношением $v = \frac{\omega}{k}$, где v - фазовая скорость волны. Напомним, что фазовая скорость монохроматической фолны определяется как скорость волнового фронта, то есть скорость поверхности равной фазы. При распространении в вакууме фазовые скорости v_1 и v_2 одинаковы, но если в среде есть дисперсия, то фазовые скорости будут различны. Под дисперсией часто понимают зависимость фазовой скорости от частоты.

1.1.5 Фазовая и групповая скорости

Амплитуда биений меняется от $2E_0$ до $-2E_0$ с частотой $(\omega_2-\omega_1)/2$. Если дисперсии нет, то огибающая амплитуд волнового пакета движется со скоростью света. Если дисперсия есть, то фазовые скорости волн различны. Найдем групповую скорость в случае биений.

Определение 1.3

Групповая скорость - скорость движения максимума амплитуды огибающей группы волн или волнового пакета. ♣

Для нахождения групповой скорости волнового пакета воспользуемся условием постоянства фазы огибающей амплитуды:

$$\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t - \frac{1}{2}(k_1 - k_2) = const \tag{1.16}$$

Продифференцируем и найдем групповую скорость:

$$\upsilon_g = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \tag{1.17}$$

Если дисперсии нет, то $\upsilon_g = c$. При наличии дисперсии групповая скорость отличается от фазовой. Огибающая волн и слагаемые движутся с разными скоростями, что приводит к изменению формы волнового пакета при его распространении. Для двух волн с близкими частотами групповая скорость может быть выражена как

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{1.18}$$

Эта формула также справедлива для бесконечно большого количества волн с близкими частотами. Фазовая и групповая скорости могут быть найдены как тангенсы наклона секущей и касательной в точке на графике зависимости $\omega(k)$, называемой также дисперсионной зависимостью (1.7).

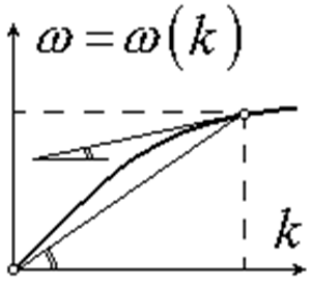

Рис. 1.7: Геометрический смысл фазовой и групповой скорости

.

Найдем связь между групповой и фазовой скоростью:

$$\upsilon_g = \frac{d(\upsilon k)}{dk} = \upsilon + \frac{kd\upsilon}{dk} \tag{1.19}$$

Подставим $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ и $dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda$, тогда 1.19 примет вид:

$$\upsilon_g = \upsilon - \lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda} \tag{1.20}$$

Это уравнение называется формулой Рэлея, в зависимости от знака $\frac{d\upsilon}{d\lambda}$ групповая скорость может быть как меньше, так и больше фазовой. В среде, в которой отсутствует дисперсия эти скорости равны. Отметим, что монохроматическая волна не может переносить информацию, поэтому теория относительности не накладывает ограничений на фазовую скорость и возможны среды, в которых $\upsilon > c$, а $n < 1$. Из 1.20 может получится, что $\upsilon_g > c$, то есть групповая скорость больше скорости света в вакууме. Очевидно, что данный результат противоречит теории относительности, в соответствии с которой скорость света в вакууме есть предельная скорость передачи информации. Причиной неприменимости формулы Рэлея в данном случае является деформация световых импульсов в условиях сильного затухания. При нормальной дисперсии максимум огибающей отстает от переднего фронта, при аномальной сдвигается вперед. Максимум интенсивности/энергии, которую переносит волна, приходится на максимум огибающей, поэтому скорость переноса энергии или скорость переноса информации равна групповой скорости волны. В первом приближении можно считать, что максимум и огибающая движутся с одной скоростью - групповой, но если в пакете присутствуют волны разных частот, то групповые скорости соседних частот разные. Это приводит к изменению формы огибающей пакета. В среде с дисперсией пакет может расплываться, изменять форму, что в итоге приводит к потере информации. На 1.8 изображено искажение фолнового пакета при распространении в среде для двух типов дисперсии.

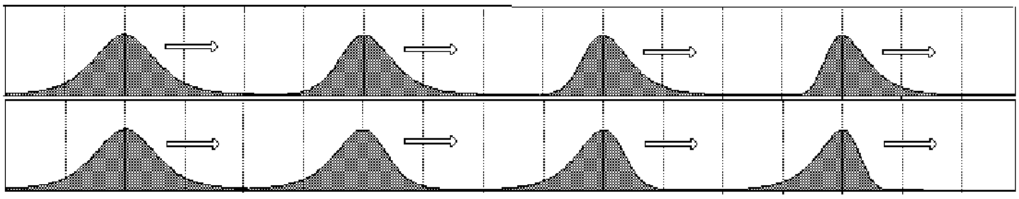

Рис. 1.8: Деформация светового импульса в среде с дисперсией: сверху - нормальная дисперсия, снизу - аномальная

.

1.1.6 Дисперсия в волноводах

В настоящее время оптические волноводы считаются самой совершенной физической средой для передачи больших потоков информации на значительные расстояния. Информация, передаваемая по оптическим линиям связи, представляет собой последовательность импульсов. При движении по волноводу эти импульсы могут искажаться и затухать. Изменение длительности световых импульсов при их распространении по волноводу характеризуется дисперсией. На практике дисперсия определяет скорость передачи данных по волноводу и передаваемую полосу частот. Выделяют четыре вида дисперсии: межмодовую, материальную, волноводную, поляризационную. Любой короткий импульс состоит из набора волн (мод), которые распространяются вдоль оси волновода по различным траекториям. Таким образом, если на входе в волновод основная и более высокая моды распространяются одновременно, то на выходе из него эти моды окажутся разделенными во времени на некоторый интервал. Такое уширение импульса называют межмодовой дисперсией. Если входные импульсы расположены близко друг к другу, то импульсы на выходе начнут перекрываться, вызывая в приемнике интерференцию символов, что затрудняет различение импульсов и создает ошибки считывания информации. Межмодовая дисперсия — главный фактор, ограничивающий скорость передачи данных в многомодовых волноводах. Например, для стеклянного волоконного волновода без оболочки с показателем преломления $n = 1,5$ межмодовая дисперсия составляет 2,5 нс/м.

Материальная дисперсия — это зависимость показателя преломления среды n от длины волны света λ. Поскольку в среде скоростьраспространения световых волн с различной частотой различна, в волноводе происходит уширение светового импульса. Для монохроматического источника света этот вид дисперсии должен отсутствовать, однако на практике все источники имеют спектр излучения конечной ширины. Например, характерная ширина спектра излучения светодиодов на основе кристалла GaAs составляет $\Delta\lambda = 30$ нм при средней длине волны 850 нм. Удельное уширение импульса в кварцевом волокне составит около 2,5 нс/км Более подробно про волноводы:здесь.

1.1.7 Пример разложения волнового пакета в спектр

Рассмотриv важный пример разложения волнового пакета в спектр. В качестве примера - синусоида, ограниченная временным интервалом. Запишем зависимость напряженности от времени как:

$$E(t) = E_0 \sin(\omega_0 t) \tag{1.21}$$

Спектр такого сигнала может быть записан через интегральное преобразование Фурье:

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} E(t) \exp{(i\omega t)} dt = \frac{E_0}{2\pi} \int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} \sin{(\omega_0 t)} \exp{(i\omega t)} dt \tag{1.22}$$

1.2 Вопросы

Вопросы(для самостоятельного ответа) 1.1

1. Что называют дисперсией?
2. Какие силы действуют на электроны согласно классической теории дисперсии?
3. Что называют нормальной и аномальной дисперсией?
4. Какая дисперсия наблюдается в области сильного поглощения?
5. Назовите диапазон характерных частот ω_0. Приведите примеры высокочастотного и низкочастотного излучения.
6. С чем связана комплексная запись показателя преломления? Приведите примеры.
7. Можно ли, зная коэффициент преломления, найти коэффициент поглощения?
8. Почему для рентгеновского излучения вещества "прозрачны"?
9. Что называют плазменной частотой?
10. Что называют волновым пакетом? Как можно получить волновой пакет?
11. Может ли монохроматическая волна переносить информацию?
12. Волновой пакет сформирован из двух гармонических волн с близкими частотами $\omega_1 = 440$ Гц и $\omega_2 = 442$ Гц. Найти частоту биений.
13. Как графически определить фазовую и групповую скорости волны.
14. Как графически определить фазовую и групповую скорости волны.
15. Поясните причины расплывания волнового пакета при распространении в среде с дисперсией.

1.3 Задачи

Цели семинара:

- Отработать и закрепить понятие волнового пакета, как суперпозицию гармонических волн.
- Закрепить понятия фазовой и групповой скорости.
- Изучить режимы распространения волнового пакета в среде без дисперсии групповой скорости, с дисперсией групповой скорости в линейном режиме и с учётом квадратичной дисперсии волновой скорости.
- Связать распространение волнового пакета и передачу информации.

1. Показатель преломления сероуглерода для длины волны $\lambda_1 = 656$ нм равен $n_1 = 1,620$, а для $\lambda_2 = 580$ нм равен $n_2 = 1,629$. Найдите во сколько раз отличаются фазовая и групповая скорости света в сероуглероде в желтой области спектра $\lambda = 620$ нм.
2. Найти концентрацию свободных электронов ионосферы, если для радиоволн с частотой $\nu = 100$ Мгц показатель преломления $n = 0,9$.
3. Насколько отличается от единицы показатель преломления графита для рентгеновских лучей с длиной волны в вакууме $\lambda = 50$ пм. Считать электроны вещества в случае жестких рентгеновских лучей свободными.
4. Показать, что отрезок, отсекаемый касательной в некоторой точке λ_0 к дисперсионной кривой $v = v(\lambda)$ по оси ординат v равен групповой скорости для длины волны λ_0.
5. Рассмотреть простейший случай, когда волновой пакет содержит две близкие по частотам гармоники. Определить фазовую и групповую скорости этого пакета.
6. Используя любое ПО сформировать волновой пакет из 2-х монохроматических волн с различными частотами, параметризуя амплитуды и сдвиги фаз волн. Частоты волн взять близкими с шагом $\Delta\omega$ сотых долей от центральной частоты (подобрать n и $\Delta\omega$, для получения огибающих, близких к одиночному прямоугольному импульсу, последовательности прямоугольных импульсов, Гауссовому импульсу).
7. Исследовать дисперсию волн в одномерной цепочке. Получить дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$ и построить соответствующий график зависимости частоты ω от волнового числа k. По дисперсионному соотношению найти полосу прозрачности для волн в цепочке и определить границы этой полосы на оси частот. Получить выражения для фазовой и групповой скоростей в полосе прозрачности. Изобразить для некоторого момента времени смещения масс для волн, частоты которых лежат в полосе прозрачности и вне этой полосы.
8. Рассмотреть последовательность прямоугольных импульсов с несущей частотой ω_0 длительности τ_0, частота повторения которых $\nu = \frac{1}{0{,}5\tau_0}$. Найти показатель преломления среды, при котором передача информации невозможна.
9. Плоский световой импульс распространяется в среде, где фазовая скорость линейно зависит от длины волны как $v = a + b\lambda$, где a и b - положительные постоянные. Показать, что в такой среде форма произвольного светового импульса восстанавливается через промежуток времени $\tau = 1/b$.
10. В процессе прохождения одномерного волнового пакета, движущегося вдоль оси z в однородной среде с дисперсией $\omega = \omega_0 + v_g(k - k_0)$, в плоскости $z = 0$ был зарегистрирован частотный спектр поля:
$$\begin{cases} a, \Delta\omega \le |\omega - \omega_0| \\ 0, \Delta\omega \ > |\omega - \omega_0| \end{cases}$$
Найти поле $E(z, t)$ в произвольный момент времени.

Список литературы

[1] Сивухин Д.В. - "Общий курс физики. Том 4. Оптика"

[2] Матвеев А.Н. - "Оптика"

[3] авторы 3 - "название 3"