

## Часть 4. Упражнения

### Упражнение №1

#### Основы работы в системе IBM Quantum

**1. Цель работы:** знакомство с системой *IBM Quantum*.

#### 2. Реализация квантовых схем в системе IBM Quantum

Все реализации квантовых алгоритмов в лабораторных работах будет осуществляться с использованием системы *IBM Quantum*. Для начала работы вам необходима регистрация на сайте <https://quantum-computing.ibm.com/>.

После прохождения процедуры регистрации страница сайта системы *IBM Quantum* будет иметь следующий вид (рис. 4.1):

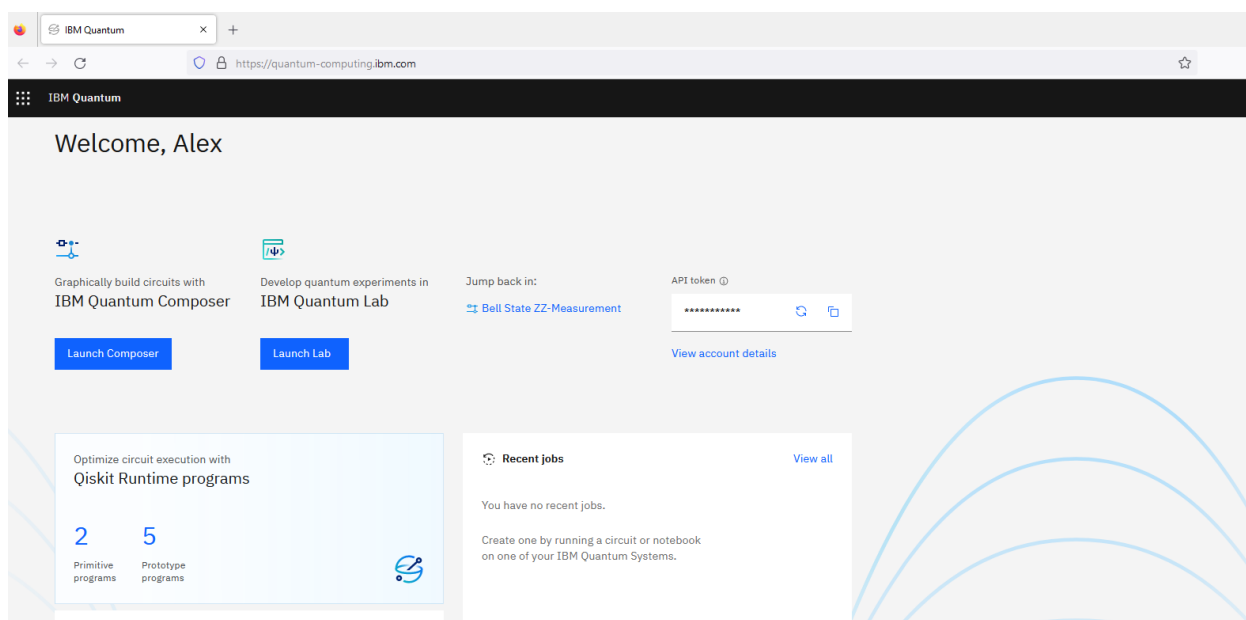


Рис. 4.1. Интерфейс страницы в системе *IBM Quantum*

Для разработки схемы квантового алгоритма и проведения моделирования его работы необходимо переключиться на страницу «*IBM Quantum Composer*». Переход осуществляется посредством соответствующей кнопки «Launch Composer» (рис. 4.1). Окно страницы «*IBM Quantum Composer*» представлено на рис. 4.2.

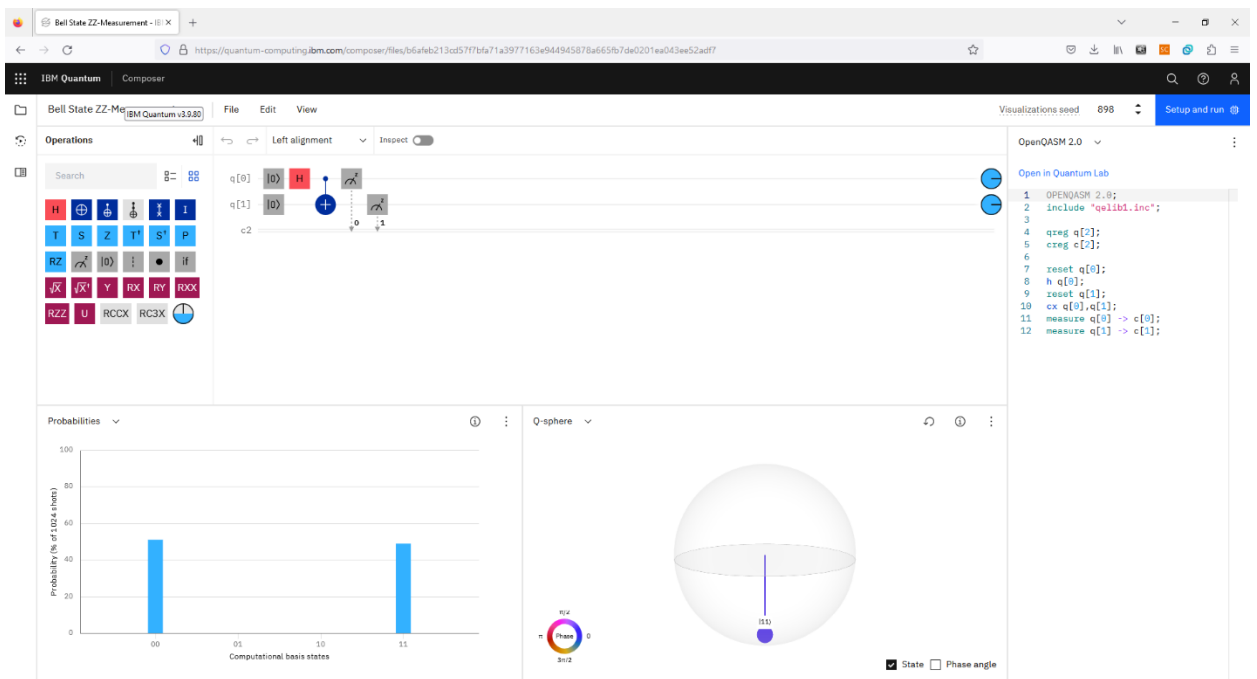


Рис. 4.2. Интерфейс страницы «Quantum Composer» в системе IBM Quantum

Разработка схемы квантового алгоритма осуществляется посредством выбора нужной последовательности гейтов из предлагаемого системой *IBM Quantum* набора (рис. 4.3). Вы можете использовать только гейты, реализованные в системе *IBM Quantum*.

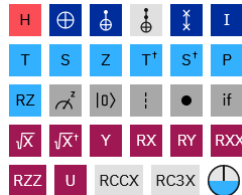


Рис. 4.3. Набор квантовых гейтов в системе IBM Quantum

На рис. 4.4 представлены фрагменты области, в которой производится сборка элементов, выполняющих квантовый алгоритм. Система *IBM Quantum* позволяет добавлять и удалять кубиты, меняя тем самым количество кубитов, которое используется в текущей задаче. Для увеличения или уменьшения числа используемых кубитов нажмите на любой из символов кубитов ( $q_0$ ,  $q_1$  на рис. 4.4) и в выпавшем меню выберите знак «+» («Add qubit after») (рис. 4.4), или знак мусорной урны («Delete qubit»).



Рис. 4.4. Область сборки квантовой схемы в системе IBM Quantum Experience

Знак «...» в выпадающем меню предоставляет доступ к дополнительным возможностям по размещению новых кубитов и управлению их начальным состоянием.

Разработка квантовой схемы осуществляется посредством перемещения необходимых гейтов в область схемы и подключением их к соответствующим **кубитам**. На рис. 4.5 представлены примеры включения в схему различных гейтов.

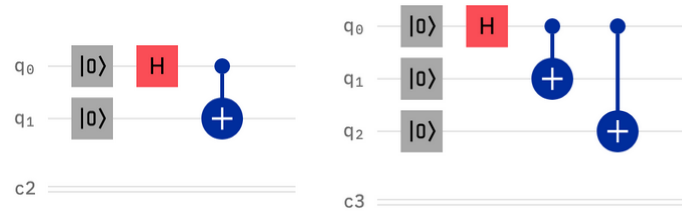


Рис. 4.5. Примеры установки гейтов в системе IBM Quantum

При нажатии на установленный в схеме гейт можно его удалить или внести изменения в его параметры и конфигурацию см. рис. 4.6. Изменение конфигурации необходимо при смене управляемого и управляющего **кубитов** для управляемых гейтов. Для удаления гейта необходимо выбрать иконку «урны» в выпадающем меню.

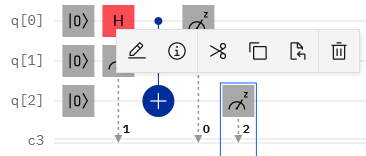


Рис. 4.6. Пример настройки гейтов в системе IBM Quantum

Для некоторых гейтов в системе IBM Quantum предусмотрена возможность редактирования их параметров. В частности, можно изменять углы в гейтах поворота **Rx**, **Ry**, **Rz** и гейтах **U1**, **U2**, **U3**, а также в соответствующих им управляемых гейтах. Пример изменения параметров показан на рис. 4.7.

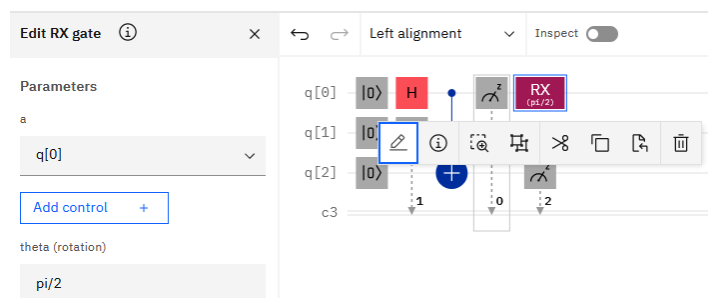
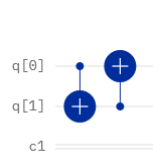
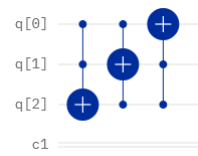


Рис. 4.7. Пример управляемого гейта в системе IBM Quantum

В случае использования в схеме управляемых гейтов система предполагает возможность выбора контролирующего и контролируемого **кубита** (рис. 4.8). Изменение можно выполнить также в области редактирования.



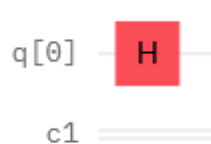
а



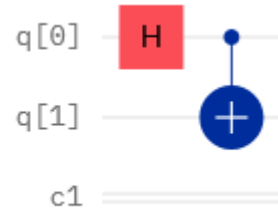
б

Рис. 4.8. Примеры выбора контролирующего и контролируемого кубита в системе *IBM Quantum*. Примеры гейтов с одним управляемым одним управляемым и одним управляющим кубитами (а) и примеры гейтов с одним управляемым одним управляемым и двумя управляющими кубитами (б). Управляемый кубит отмечен символом «+»

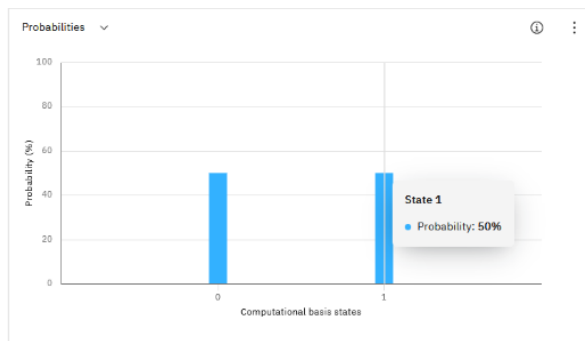
При разработке схемы квантового алгоритма система *IBM Quantum* в режиме реального времени показывает расчетные (теоретические) значения вероятностей всех состояний кубитов квантовой системы, состояние векторов и их положение на сфере Блоха (рис. 4.9).



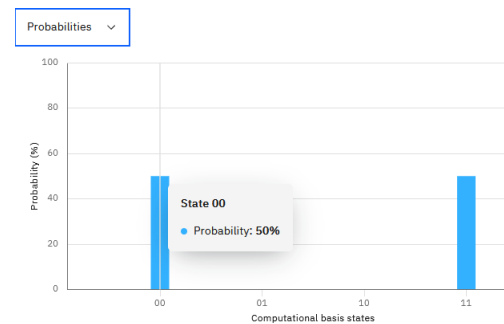
а



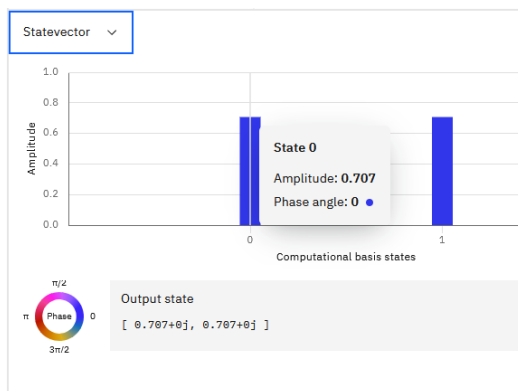
б



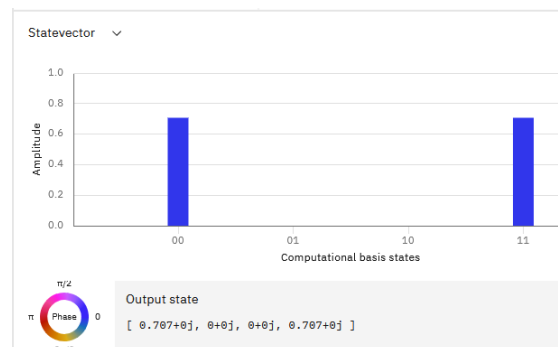
в



г



д



е

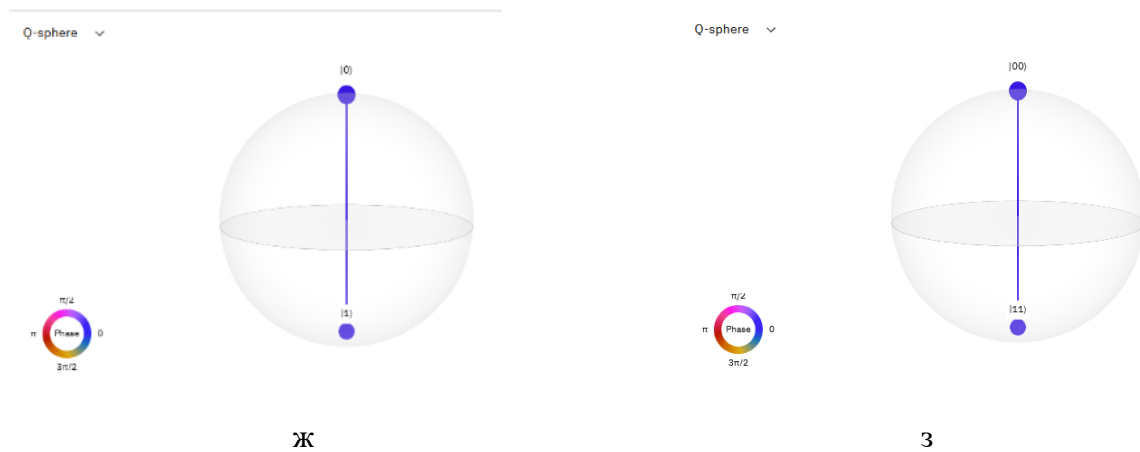


Рис. 4.9. Демонстрация процесса отображения амплитуд ( $\delta, \epsilon$ ), вероятностей ( $\nu, \zeta$ ) и положений векторов на сфере Блоха (ж,з) в системе IBM Quantum

Помимо теоретических расчетов состояний квантовой системы, в *IBM Quantum* предусмотрена возможность реализации квантового алгоритма с использованием реальных квантовых компьютеров и режима симуляции, в том числе, возможен выбор количества измерений. Настройка запуска симуляции осуществляется в панели «Setup and run», расположенной в правом верхнем углу рабочего окна (см. рис. 4.2). Окно настройки процесса симуляции приведено на рис 4.10.

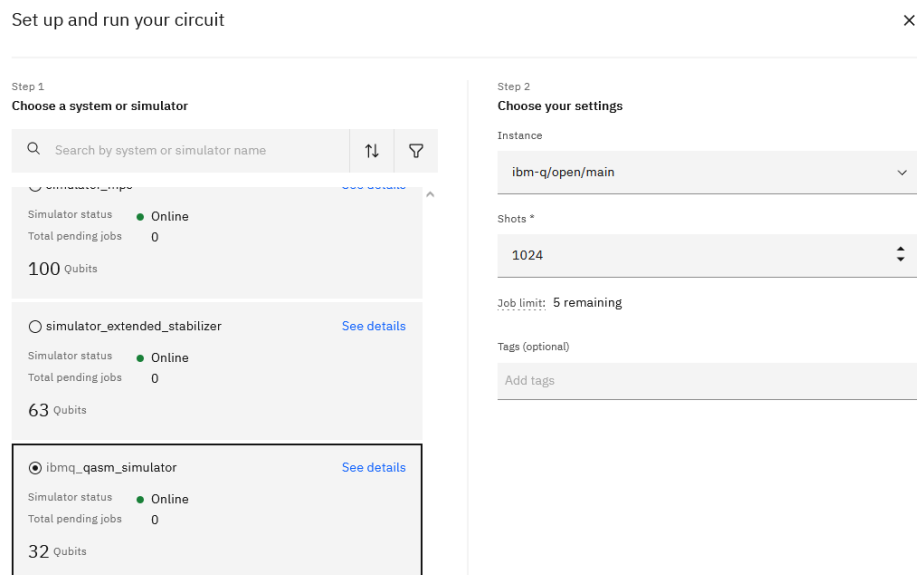


Рис. 4.10. Область настройки процесса симуляции в системе IBM Quantum

Следует отметить, что при запуске схемы в режиме симуляции или на каком-либо квантовом компьютере, полученные вероятности нахождения системы в том или ином состоянии будут отличаться от теоретических.

Также отметим, что с увеличением числа измерений полученные вероятности будут стремиться к теоретическим значениям. Рассмотрим пример запуска симуляции однокубитовой системы, представленной на рис. 4.11,а. В данном случае на кубит находящейся в состоянии 0 воздействуем гейтом Адамара, при этом мы получаем кубит в состоянии суперпозиции  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , т.е. теоретически данный кубит при измерении с вероятностью 50% принимает значение 0 или 1 (рис.4.11,б). На рис. 4.11,в показаны вероятности нахождения квантовой системы при выполнении 64-х измерений, а на рис. 4.11,г – при выполнении 1024 измерений.

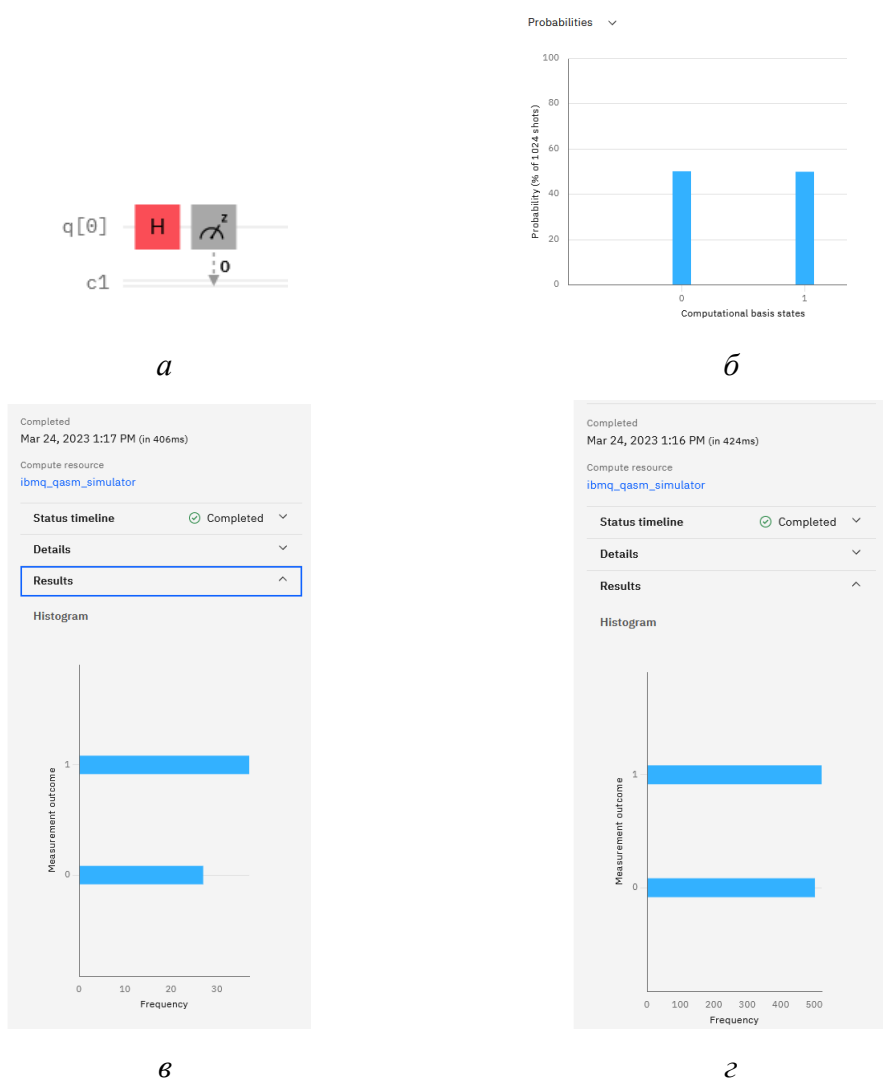


Рис. 4.11. Пример симуляции в системе IBM Quantum: а) схема; б) теоретическое распределение вероятностей; в) распределение вероятностей для случая 64-х преобразований; г) распределение вероятностей для случая 1024-х преобразований

Выполнение измерений состояний **кубитов** в системе *IBM Quantum* осуществляется с помощью инструмента «*Measurement*» графическое обозначение которого представлено на рис. 4.12,а. Система будет выполнять измерение состояния только тех **кубитов** к которым подключен данный инструмент (рис. 4.12б).

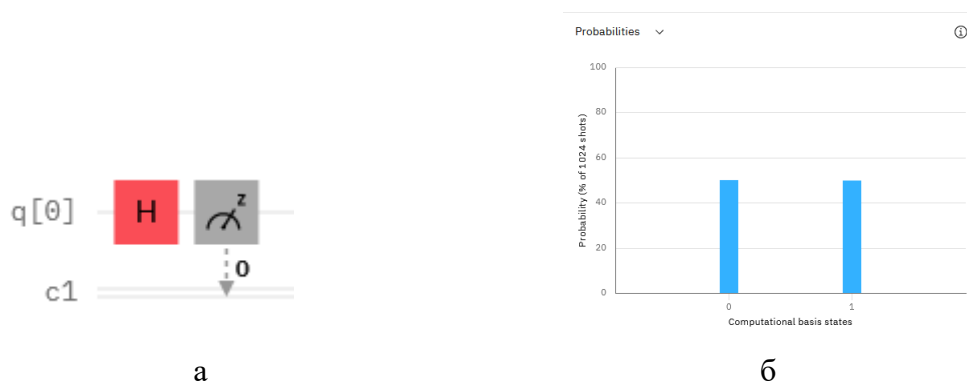


Рис. 4.12. Пример измерения состояния системы

При измерении будут перечислены все возможные варианты состояния системы, а в случае если инструмент «*Measurement*» не подключен к какому-то из **кубитов**, то его состояние всегда будет иметь нулевое значение.

### 3. Задание для упражнения 1

Выполните следующие задания:

1. Выполните регистрацию в системе *IBM Quantum*.
2. В «*IBM Quantum Composer*» создайте схему из двух кубитов: один кубит должен иметь состояние  $|0\rangle$ , а второй кубит состояние  $|1\rangle$ .

Состояние  $|1\rangle$  можно получить с использованием гейта  $X$ . Примените операцию измерения для данных кубитов и выполните симуляцию.

3. В «*IBM Quantum Composer*» создайте схему из одного кубита находящегося в состоянии  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ . Примените операцию измерения к данному кубиту. Выполните симуляцию с различным количеством измерений: 1, 2, 8, 32, 64, 128, 512, 1024, 8192.

Проанализируйте результаты измерений и сделайте выводы.

4. В «*IBM Quantum Composer*» создайте схемы, представленные на рис. 4.13.

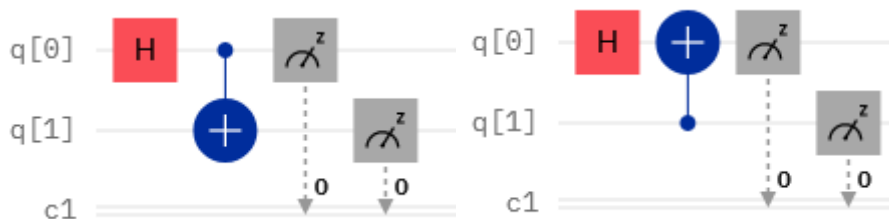


Рис. 4.13. Квантовые схемы для задания №4

Выполните симуляцию данных схем с числом измерений – 1024. Проанализируйте результаты симуляции и сделайте выводы.

5. В «Circuit Composer» создайте схемы, представленные на рис. 4.14.

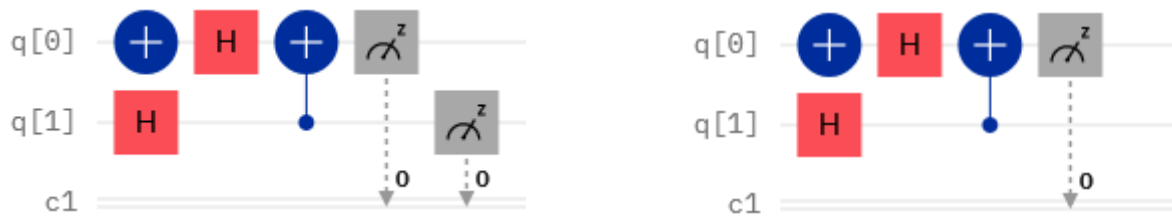


Рис. 4.14. Квантовые схемы для задания №5

Выполните симуляцию данных схем с числом измерений – 1024. Проанализируйте результаты симуляции и сделайте выводы.

6. В «Circuit Composer» создайте схемы, представленные на рис. 4.15.

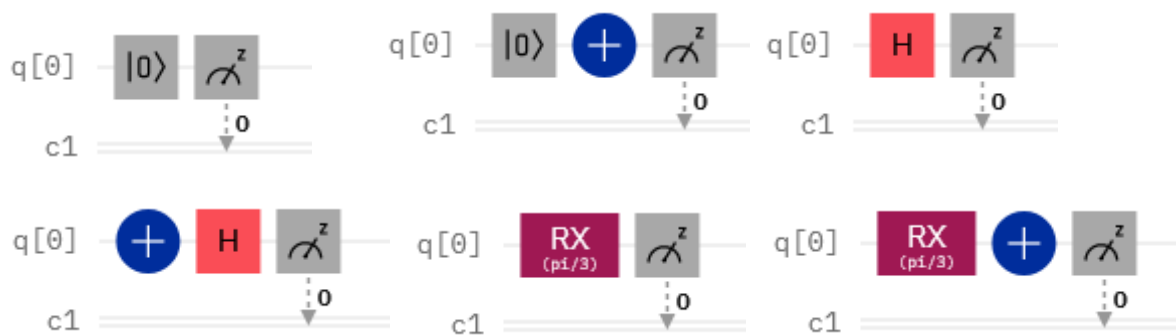


Рис. 4.15. Квантовые схемы для задания №6

Выполните симуляцию данных схем с числом измерений – 1024. Проанализируйте результаты симуляции и положение векторов на сфере Блоха. Сделайте выводы.

7. Оформите отчет. Отчет должен включать в себя изображения всех схем и результаты симуляции алгоритма, а также выводы.



## Упражнение №2

### Однокубитные гейты

**1. Цель работы:** получение навыков применения однокубитных гейтов и реализация различных состояний суперпозиции кубита.

#### 2. Однокубитные гейты в системе *IBM Quantum*

В системе *IBM Quantum* возможно использовать следующие однокубитные гейты:

1. Гейт Адамара.
2. Гейты X, Y, Z, S, T.
3. S и T сопряженные гейты
4. Гейты RX, RY, RZ
5. Гейты U и P

Выполните следующие задания:

1. Получите кубит в состоянии суперпозиции  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ .
2. Двумя способами получите кубит в состоянии суперпозиции  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$
3. Получите кубит в состоянии суперпозиции  $\frac{1}{\sqrt{2}}(-|0\rangle + |1\rangle)$
4. С помощью однокубитного гейта **Rx** получите кубит в состоянии суперпозиции  $a|0\rangle + b|1\rangle$  в соответствии с вариантом, представленном в таблице 4.1. Получите математическое обоснование результата.

Таблица 4.1. Варианты заданий

Вариант	Вероятность состояния $ 0\rangle$	Вероятность состояния $ 1\rangle$
1	5	95
2	10	90
3	15	85
4	20	80
5	25	75
6	30	70
7	35	65
8	40	60
9	45	55
10	55	45
11	60	40

12	65	35
13	70	30
14	75	25
15	80	20
16	85	15
17	90	10
18	95	5

5. С помощью однокубитного гейта ***Ry*** получите кубит в состоянии суперпозиции  $a|0\rangle + b|1\rangle$  в соответствии с вариантом, представленном в таблице 4.1. Выполните симуляцию. Получите математическое обоснование результата.
6. С помощью однокубитного гейта ***U*** получите кубит в состоянии суперпозиции  $a|0\rangle + b|1\rangle$  в соответствии с вариантом, представленном в таблице 4.1. Выполните симуляцию. Получите математическое обоснование результата.
7. С помощью однокубитного гейта ***RX*** получите кубит в состоянии суперпозиции  $a|0\rangle - b|1\rangle$  в соответствии с вариантом, представленном в таблице 4.1. Выполните симуляцию. Получите математическое обоснование результата.
8. С помощью однокубитного гейта ***RY*** получите кубит в состоянии суперпозиции  $a|0\rangle - b|1\rangle$  в соответствии с вариантом, представленном в таблице 4.1. Выполните симуляцию. Получите математическое обоснование результата.
9. С помощью однокубитного гейта ***U*** получите кубит в состоянии суперпозиции  $-a|0\rangle + b|1\rangle$  в соответствии с вариантом, представленном в таблице 4.1. Выполните симуляцию. Получите математическое обоснование результата.
10. С помощью однокубитных гейтов ***RX***, ***RY***, ***U*** получите кубит в состоянии суперпозиции  $a|0\rangle + b|1\rangle$  в соответствии с вариантом, представленном в таблице 4.1. Выполните симуляцию. Выполните их математическое обоснование результата.
11. Экспериментально покажите унитарность гейта Адамара. Получите математическое обоснование результата.
12. С помощью однокубитного гейта ***RX*** получите кубит в состоянии суперпозиции  $a|0\rangle + b|1\rangle$  в соответствии с вариантом, представленном в таблице 4.1. Далее составьте схему, представленную на рис. 4.16. Выполните симуляцию. Получив результаты симуляции, выполните их математическое обоснование.

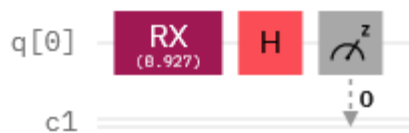


Рис. 4.16. Квантовая схема к заданию №12

3. С помощью однокубитного гейта **Rx** получите кубит в состоянии суперпозиции  $a|0\rangle + b|1\rangle$  в соответствии с вариантом, представленном в таблице 4.1. Далее составьте схему, представленную на рис. 4.17. Выполните симуляцию. Получив результаты симуляции, выполните их математическое обоснование.



Рис. 4.17. Квантовая схема к заданию №13

14. Реализуйте симуляцию схем, представленных на рис. 4.18. Проанализируйте результаты, выполните их математическое обоснование и поясните различие.

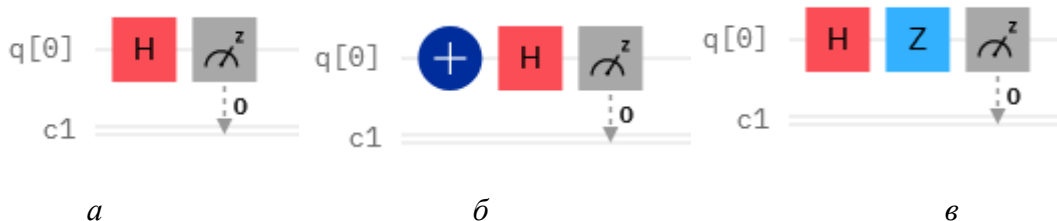


Рис. 4.18. Квантовые схемы к заданию №14

15. Реализуйте симуляцию схем, представленных на рис. 4.19. Проанализируйте результаты, выполните их математическое обоснование и поясните различие.

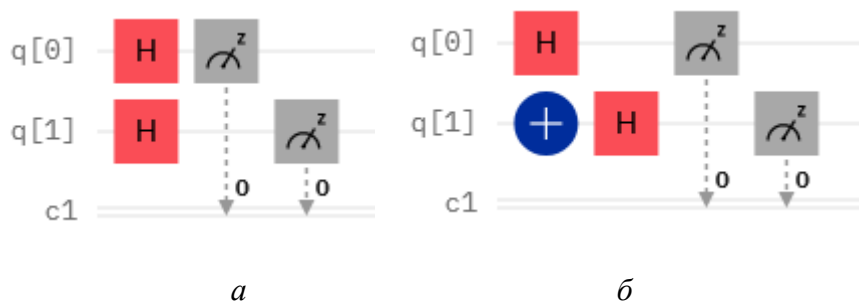


Рис. 4.19. Квантовые схемы к заданию №15

16. Реализуйте трехкубитовую систему, к показано на рис. 4.20. В данной системы кубиты должны находиться в состояниях суперпозиции согласно варианту в таблице 4.2. Выполните симуляцию и проанализируйте результаты.

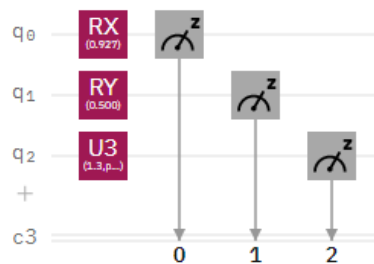


Рис. 4.20. Квантовая схема к заданию №16

Таблица 4.2. Варианты заданий

Вариант	Вероятность состояния $ 0\rangle$ первого кубита	Вероятность состояния $ 0\rangle$ второго кубита	Вероятность состояния $ 0\rangle$ третьего кубита
1	5	10	20
2	10	20	15
3	20	35	85
4	30	70	55
5	40	60	65
6	55	45	45
7	60	40	25
8	70	30	10
9	80	20	5
10	90	10	35
11	95	5	80

17. Оформите отчет по лабораторной работе. Отчет включает в себя скриншоты всех схем и результатов симуляции по программе работы, выводы.

### Упражнение №3

#### Управляемые гейты

**1. Цель работы:** получение навыков применения управляемых 2-х и 3-х кубитных гейтов и реализации квантовых алгоритмов на их основе.

1. Реализуйте схему получения запутанного состояния двух кубитов согласно вашему варианту в таблице 4.3. Выполните симуляцию и обоснование результатов симуляции.

Таблица 4.3. Варианты заданий

Вариант	Состояние	вероятность	вероятность
1	$a 00\rangle + b 11\rangle$	5	95
2		10	90
3		20	80
4		30	70
5		80	20
6		90	10
7		95	5
8		40	60
9		55	45
10	$a 01\rangle + b 10\rangle$	5	95
11		10	90
12		20	80
13		30	70
14		80	20
15		90	10
16		95	5
17		40	60
18		55	45

15. Реализуйте схему получения запутанного состояния трех кубитов  $a|001\rangle + b|111\rangle$  вероятностями согласно таблице 4.3. Выполните симуляцию и обоснование результатов симуляции.

16. Реализуйте схему получения запутанного состояния трех кубитов  $a|001\rangle - b|111\rangle$  вероятностями согласно таблице 4.3. Выполните симуляцию и обоснование результатов симуляции.

17. Реализуйте схему получения запутанного состояния трех кубитов  $a|010\rangle + b|111\rangle$  вероятностями согласно таблице 4.3. Выполните симуляцию и обоснование результатов симуляции.

18. Оформите отчет по лабораторной работе. Отчет включает в себя скриншоты всех схем и результатов симуляции по программе работы, выводы.

## Упражнение №4

### Квантовые алгоритмы

**Цель работы:** получение навыков разработки квантовых алгоритмов в системе *IBM Quantum*.

#### Задание 1

Реализуйте алгоритм квантовой телепортации от Алисы к Бобу кубита в состоянии суперпозиции. Состояние кубита должно соответствовать варианту в таблице 4.1.

#### Задание 2

В соответствии с вашим вариантом выполните одно из следующих заданий:

1. Реализуйте функцию  $f = 7 \bmod 15$ . Выполните симуляцию и обоснование полученных результатов.
2. Реализуйте функцию  $f = 6 \bmod 15$ . Выполните симуляцию и обоснование полученных результатов.
3. Реализуйте функцию  $f = 36 \bmod 15$ . Выполните симуляцию и обоснование полученных результатов.
4. Реализуйте функцию  $f = 49 \bmod 15$ . Выполните симуляцию и обоснование полученных результатов.
5. Реализуйте алгоритм Дойча для функций  $f_1(x)=0$ ,  $f_2(x)=1$ ,  $f_3(x)=x$  и  $f_4(x)=NOT(X)$ .  
Выполните симуляцию для каждой функции и обоснуйте полученные результаты.
6. Реализуйте функцию  $f(x_1, x_2) = x_1 \text{ XOR } x_2$ . Выполните симуляцию и обоснование полученных результатов.
7. Реализуйте функцию  $f(x_1, x_2) = NOT(x_1 \text{ XOR } x_2)$ . Выполните симуляцию и убедитесь в корректности работы.
8. Реализуйте функцию  $f(x_1, x_2) = x_1 \text{ OR } x_2$ . Выполните симуляцию и обоснование полученных результатов.
9. Реализуйте функцию  $f(x_1, x_2) = NOT(x_1 \text{ OR } x_2)$ . Выполните симуляцию и убедитесь в корректности работы.
10. Реализуйте функцию  $f(x_1, x_2) = x_1 \text{ AND } x_2$ . Выполните симуляцию и обоснование полученных результатов.
11. Реализуйте функцию  $f(x_1, x_2) = NOT(x_1 \text{ AND } x_2)$ . Выполните симуляцию и убедитесь в корректности работы.
12. Реализуйте алгоритм Гровера для поиска числа 5. Выполните симуляцию и убедитесь в корректности работы.
13. Реализуйте алгоритм Гровера для поиска числа 6. Выполните симуляцию и убедитесь в корректности работы.

14. Реализуйте алгоритм Гровера для поиска числа 4. Выполните симуляцию и убедитесь в корректности работы.
15. Реализуйте алгоритм Гровера для поиска числа 7. Выполните симуляцию и убедитесь в корректности работы.
16. Реализуйте функцию алгоритм Шора для факторизации числа 15. Выполните симуляцию и обоснование полученных результатов.
17. Реализуйте алгоритм полного сумматора. Выполните симуляцию и обоснование полученных результатов.
18. Реализуйте алгоритм умножения на 4. Выполните симуляцию и обоснование полученных результатов.
19. Реализуйте алгоритм умножения на 5. Выполните симуляцию и обоснование полученных результатов.
20. Реализуйте алгоритм умножения на 6. Выполните симуляцию и обоснование полученных результатов.

**Задание 3.** Оформите отчет по лабораторной работе. Отчет включает в себя изображения всех схем и результатов симуляции по программе работы, а также выводы.