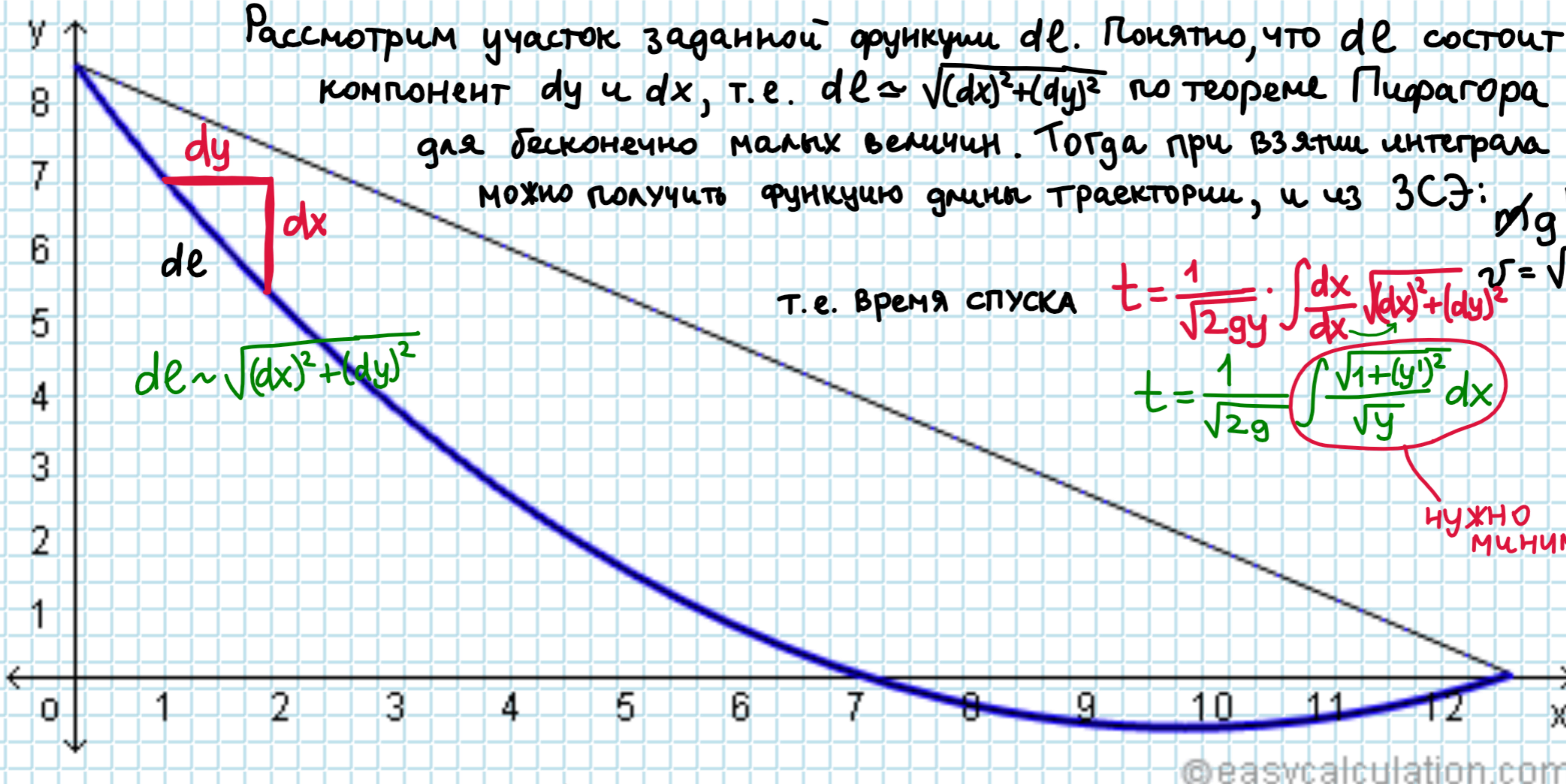
Лопатенко Георгий М3102

Задача о брахистохроне.



Рассмотрим участок заданной функции dl. Понятно, что dl состоит из компонент dy и dx, т.е. $dl \simeq \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ по теореме Пифагора для бесконечно малых величин. Тогда при взятии интеграла $\int_0^L dl = L$ можно получить функцию длины траектории, и из ЗСЭ: $\cancel{m}gh = \frac{\cancel{m}v^2}{2}$, $v=\sqrt{2gh}$

т.е. время спуска $t = \frac{1}{\sqrt{2gy}} \cdot \int \frac{dx}{dx}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}\,dx$$

нужно минимизировать

Тогда пусть $y(1+y'^2)=C$, по минимизации (уравнения Эйлера–Лагранжа)

отсюда $y' = \sqrt{\frac{C-y}{y}}$ и $\exists\, y = C\sin^2\frac{t}{2},\ t\in\mathbb{R} \longrightarrow y' = C\cdot\cancel{2}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot t' = \sqrt{\frac{C-y}{y}}$, где $t' = \frac{dt}{dx}$

$$y' = C\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\cdot\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{C-C\sin^2\frac{t}{2}}{C\sin^2\frac{t}{2}}} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}}$$

$$y' = C\sin\frac{t}{2}\cancel{\cos\frac{t}{2}}\frac{dt}{dx} = \frac{\cancel{\cos\frac{t}{2}}}{\sin\frac{t}{2}} \Rightarrow dx = C\sin^2\frac{t}{2}\,dt$$

тогда $x = \int dx = \frac{C}{2}(t-\sin t)+C_1$

и $y = C\sin^2\frac{t}{2} = \frac{C}{2}(1-\cos t)$

а это и есть общий вид циклоиды (брахистохроны)

Лопатенко Георгий М3102

(III) Air resistance acting on a falling body can be taken into account by the approximate relation for the acceleration:

$$a = \frac{dv}{dt} = g - kv,$$

where k is a constant. (*a*) Derive a formula for the velocity of the body as a function of time assuming it starts from rest ($v = 0$ at $t = 0$). [*Hint*: Change variables by setting $u = g - kv$.] (*b*) Determine an expression for the terminal velocity, which is the maximum value the velocity reaches.

a) $\exists\ u = g - kv$, тогда

$dv = u\,dt$; $\frac{du}{dv} = -k$

$dv = \frac{du}{-k}$

т.е.

$$\int dt = \int \frac{du}{-ku}$$

тогда $t + C_1 = \frac{-1}{k}\ln|u| + C_2$

(1) $t = -\frac{1}{k}\ln|u| + C$, $C = C_2 - C_1 \in \mathbb{R}$

начальное условие: $\frac{1}{k}\ln|g - k\cdot 0| = C$

т.е. $C = \frac{\ln g}{k}$

подставим константу в (1):

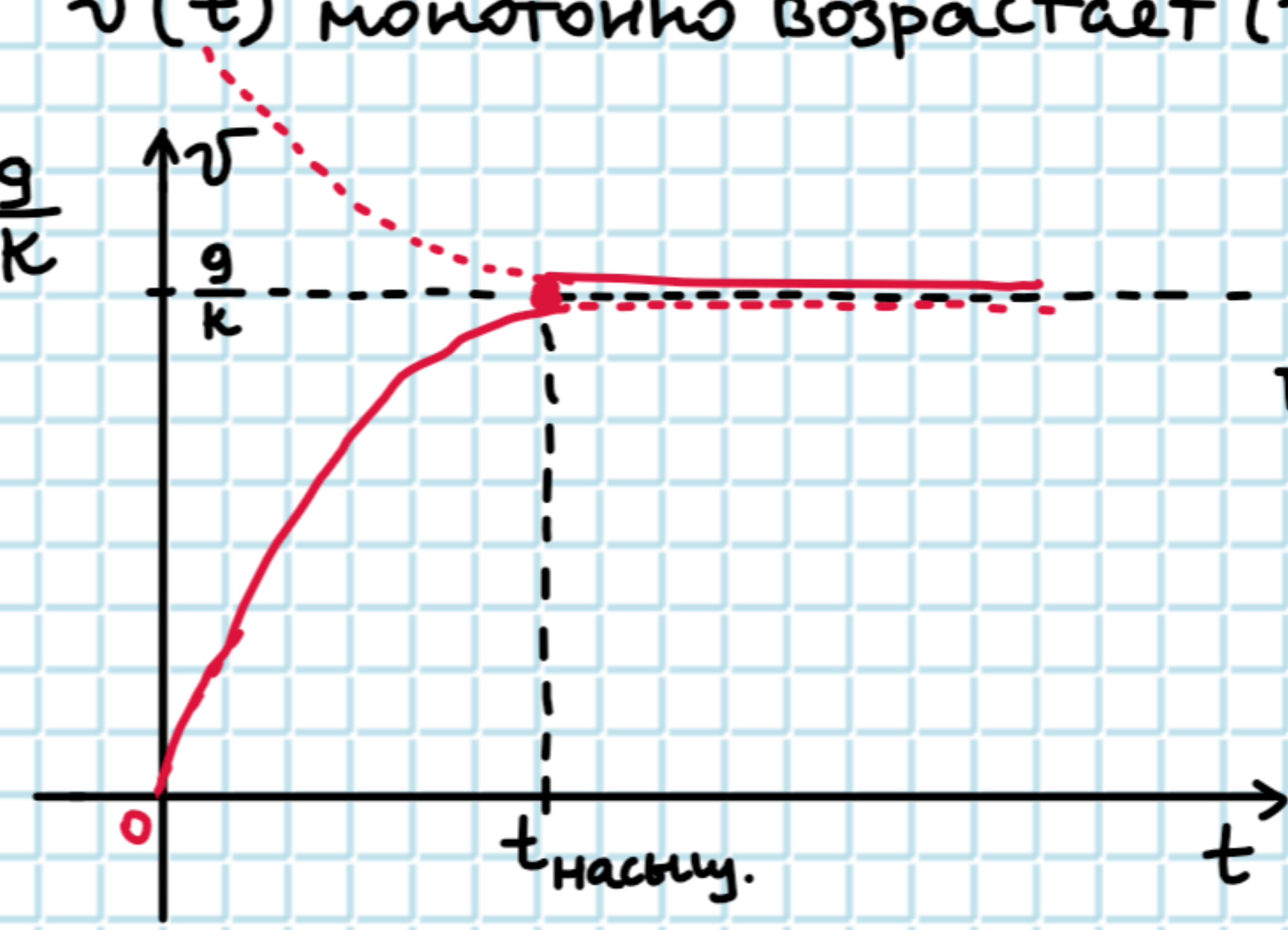
$\rightarrow t = -\frac{1}{k}\ln|g-kv| + \frac{\ln|g|}{k} = \frac{\ln\left|\frac{g}{g-kv}\right|}{k}$

т.е. $e^{kt} = \left|\frac{g}{g-kv}\right| \longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{ll} v < \frac{g}{k}: & v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}) \\ v > \frac{g}{k}: & v = \frac{g}{k}(1 + e^{-kt}) \end{array}}$ – ОТВЕТ.

в) просят найти v_{max} или значение в момент насыщения

заметим, что график функции $v(t)$ монотонно возрастает (часть склейки $v < \frac{g}{k}$)

нарисуем график вблизи $v = \frac{g}{k}$



т.е. $\boxed{v_{max} = \frac{g}{k}}$ – ОТВЕТ.