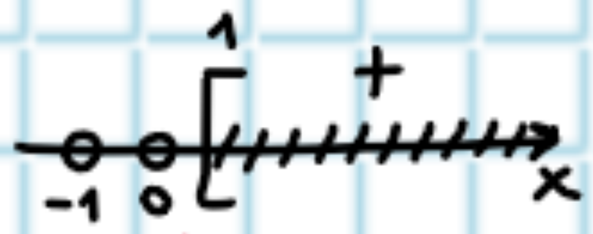
Лопатенко Георгий
М3102

1) Исследовать на сходимость:

1) $\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^3+1}dx \longrightarrow$ сходится: $\to \frac{1}{x^2} > \frac{x}{x^3+1}$; $\frac{x^5+x^2-x^3}{x^2(x^3+1)} > 0$



сходится $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \left(-\frac{1}{x}+C\right)\Big|_1^{+\infty} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+C\right)+1-C = 1$

2) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}dx \longrightarrow$ расходится:

$\frac{1}{2x} < \frac{\ln(x^2+1)}{x}$ на $[1;+\infty)$; $\frac{2\ln(x^2+1)-1}{2x} > 0$ $(2\ln(x^2+1)-1)\in C[1;+\infty)$ и возрастает и корень числителя: $x = \pm\sqrt{\sqrt{e}-1} < 1$

расх. на $[1;+\infty)$

3) $\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx = \underbrace{\int_0^1(\ldots)dx}_{\text{сходится}} + \int_1^{+\infty}(\ldots)dx \longrightarrow$ расх. $\frac{1}{\pi x} < \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{1+x^4}}$; $\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi x^2\left(x-\frac{x^3}{5}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}\right)}{\sqrt[3]{1+x^4}}}_{= +\infty}$

на $[1;+\infty)$
расх. на $[1;+\infty)$

4) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^1 = \lim_{x\to1-}\arcsin x - 0 = \frac{\pi}{2}$ - сходится

5) $\int_1^2\frac{dx}{x\ln x} \longrightarrow$ расходится: $\to \lim_{x\to1+}\frac{\left(\frac{1}{x\ln x}\right)}{\left(\frac{1}{x-1}\right)} = \lim_{x\to1+}\frac{x-1}{x\ln x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to1+}\frac{1}{1+\ln x} = 1 > 0$

по т. Лопиталя

обе функции терпят неустранимый разрыв в $x=1$

т.е. из расходимости $\int_1^2\frac{dx}{x-1}$ следует расх. искомого $\int_1^2\frac{dx}{x\ln x}$

6) $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = (2\sqrt{\ln x}+C)\Big|_1^e = 2 - \underbrace{\cancel{2\lim_{x\to1+}\sqrt{\ln x}}}_{0} = 2 \longrightarrow$ сходится

7) $\int_1^2\frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}} = \left(2\sqrt{x-1}+\frac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3}+C\right)\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \underbrace{\cancel{\lim_{x\to1+}(\ldots)}}_{1} \longrightarrow$ сходится

8) $\int_{-1}^0\frac{e^{1/x}}{x^3}dx \longrightarrow$ сходится: $\to f(x) = \frac{e^{1/x}}{x^3}$ на $x\in[-1;0)$ $\lim_{x\to0-}\frac{e^{1/x}}{x^3} = \lim_{x\to0-}\frac{e^{-\infty}}{-0} = -$б.м.; $f'(x) = \frac{e^{1/x}\cdot(-x) - e^{1/x}3x^2}{x^6} = 0$

sign $f'(x)$: $-$ $+$

$f(x)$: $-1 \searrow -\frac{1}{3} \nearrow 0$

$f(-1) = -\frac{1}{e}$

т.е. график функции выглядит так:

9) $\int_0^1\frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1} \longrightarrow$ сходится: $\to \lim_{x\to0+}\frac{\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to0+}\frac{1}{e^{\sin x}\cdot\cos x} = 1 \longrightarrow$ из сходимости $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

по Лопиталю

следует сходимость $\int_0^1\frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1}$

10) $\int_0^1\frac{dx}{\underbrace{e^x-\cos x}_{\in[-1;1]}} \longrightarrow$ расходится: $\to \lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{e^x-\cos x}}{\frac{1}{e^x-1}} = \lim_{x\to0+}\frac{e^x-\sin x}{e^x} = 1 \longrightarrow$ из расходимости $\int_0^1\frac{dx}{e^x-1}$

по т. Лопиталя

следует расходимость $\int_0^1\frac{dx}{e^x-\cos x}$

$f(x)\in\left[\frac{1}{e^x+1};\underbrace{\frac{1}{e^x-1}}_{x=0+}\right]$ $\int F(x)\,cx < \int_0^{\pi/2}G(x)\,cx \;\Big|\; \frac{c}{\sqrt{x}}$

11) $\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx \longrightarrow$ сходится: