Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Национальный исследовательский университет ИТМО"

Специальные разделы физики

Задание после лекции 21.11.2022

"Закон Снелла и оптические системы"

Выполнил:

Лопатенко Г. В., M32021

Преподаватель:

Музыченко Я. Б.

Ноябрь, 2022

Содержание

1 Закон Снелла

Доказать закон преломления светового луча на границе сред.

а) с помощью граничных условий;
б) с помощью принципа Ферма.

1.1 Граничные условия

На лекции подробно граничные условия не разбирались, поэтому не будем вводить новые понятия, однако постараемся не запутаться.
Свет — это электро-магнитная волна, опираясь на корпускулярно-волновой дуализм, поэтому для луча можно рассмотреть значения вектора напряженности:

$$E(r,t) = E_0 e^{i(wt-kr)}$$

Световой луч разделяется на границе на преломленный (1) и отраженный (2), поэтому запишем напряженности:

$$E_1(r,t) = E_{0_1} e^{i(w_1 t - k_1 r + \delta_1)} \tag{1}$$

$$E_2(r,t) = E_{0_2} e^{i(w_2 t - k_2 r + \delta_2)} \tag{2}$$

Сразу скажем, что векторы k, k', k'' находятся в одной плоскости и запишем граничное условие:

$$E_\tau - E_{\tau 1} + E_{\tau 2} = 0$$

Для выполнения этого условия частоты должны быть равны:

$$w = w_1 = w_2, \;\; k_i = \frac{w_i \cdot n_i}{v_{light}} \Rightarrow k = k_2, \;\; \frac{k}{n} = \frac{k_1}{n_1}$$

И так как рассматривался плоский случай:

$$k \cdot sin\alpha = k\frac{n_1}{n} \cdot sin\alpha_1 \Rightarrow \frac{sin\alpha}{sin\alpha_1} = \frac{n_1}{n}$$

что и требовалось доказать...

1.2 Принцип Ферма

Из теории геометрической оптики скажем, что световой луч распространяется из точки A в точку B таким образом, чтобы оптический путь был минимальным, а значит, минимальным должно быть и время распространения, ведь скорости распространения в средах определяются характеристиками среды, то есть являются константами.

Обратим внимание на рисунок (построен с помощью *draw.io*):

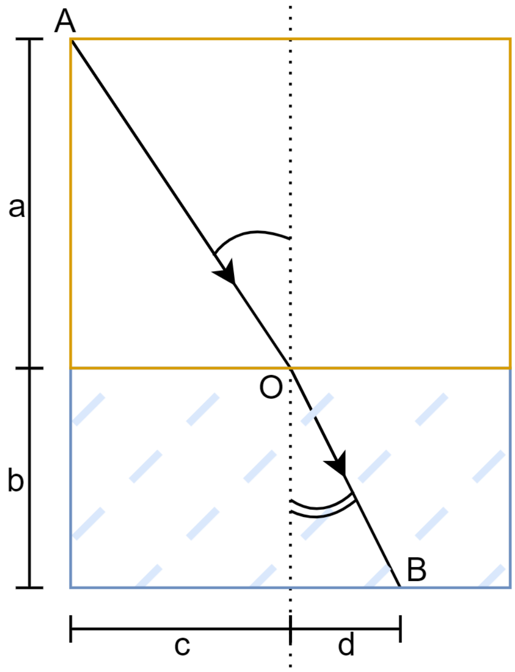

Рис. 1: Иллюстрация к закону преломления

Обозначим $c + d = l$, а поймем, для чего мы это сделали, позже.

Тогда время, потраченное на путешествие из точки A в B:

$$t = \frac{AO}{v_{yellow}} + \frac{OB}{v_{blue}} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (l - c)^2}}{v_2}$$

Так как нам необходимо минимизировать это значение, возьмем производную по c, хотя могли бы выбрать любой другой параметр:

$$\frac{\partial t}{\partial c} = \frac{c}{v_1 \cdot \sqrt{a^2 + c^2}} - \frac{l - c}{v_2 \cdot \sqrt{b^2 + (l - c)^2}} = \frac{sin(\alpha_{yellow})}{v_{yellow}} - \frac{sin(\alpha_{blue})}{v_{blue}} = 0$$

И еще согласны-узнаем с фактом:

$$v_i = \frac{v_{light}}{n_i} \Rightarrow \frac{sin(\alpha_{yellow})}{sin(\alpha_{blue}} = \frac{n_{blue}}{n_{yellow}}$$

2 Интерференция в оптических системах

Найти максимальное число полос, видимых на экране при интерференционной картине от оптических систем.

2.1 Зеркала Френеля

Для начала опишем установку: есть источник света S, его мнимые изображения S_1 и S_2 показаны на рисунке (вновь воспользовался *draw.io*) и представляеют собой два когерентных источника. Тогда опыт можно свести к модели Юнга интерференционной картины.
Пусть:
L — расстояние от точки O до экрана,
l — расстояние от точки O до источника S,
ϕ — угол отклонения зеркала (угол между лучом NO и отрезком MO).
Расстояние между источниками:

$$S_1S_2 = d = 2 \cdot \frac{OS_1 \cdot S_1S_x}{OS_1} = 2lsin\phi \approx 2l\phi \ \{\phi \longrightarrow 0\}$$

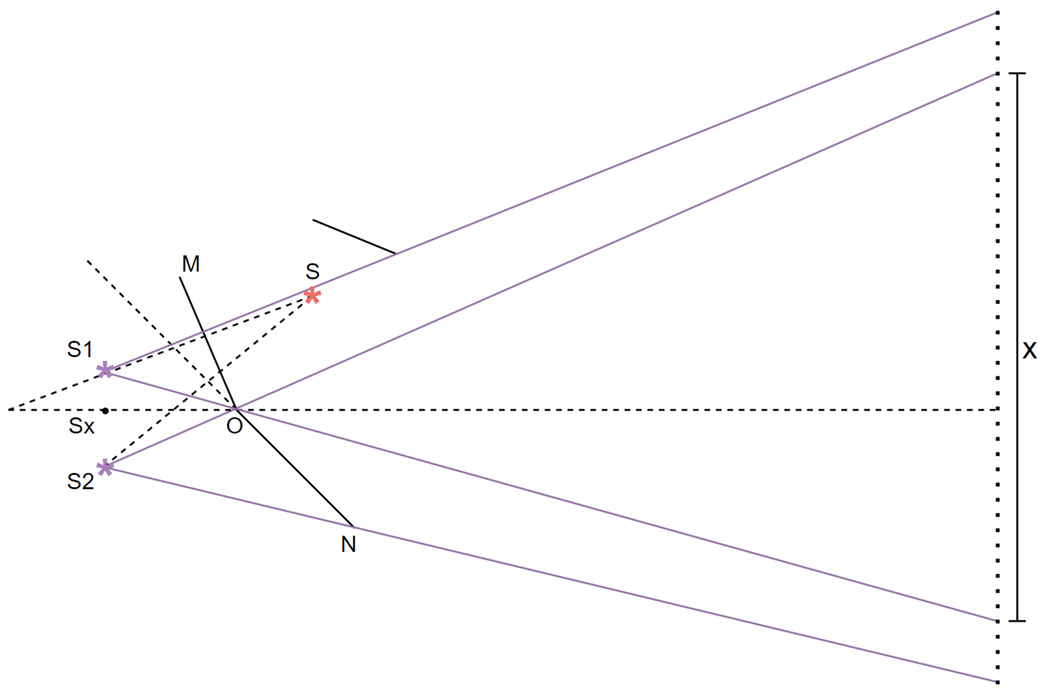

Рис. 2: Иллюстрация к зеркалам Френеля

Подставим найденное в формулу ширины полосы опыта Юнга:

$$\Delta x = \frac{L + OS_x}{d} \cdot \lambda = \frac{L + l}{2l\phi} \cdot \lambda$$

Тогда число полос равно:

$$N = \frac{D_{max}}{\Delta x} = \frac{2Ltg\phi}{\frac{L+l}{2l\phi} \cdot \lambda} = \frac{4Ll\phi}{(L+l)\lambda}$$

2.2 Билинза Бийе

Для собирающей линзы известно выражение для силы линзы:

$$D = \frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow b = \frac{aF}{a - F}$$

$$S_1 S_2 = d = \frac{l(a+b)}{a} \Rightarrow \Delta x = \frac{b + L - \frac{Fa}{a-F}}{l(1 + \frac{F}{a-F})} \cdot \lambda$$

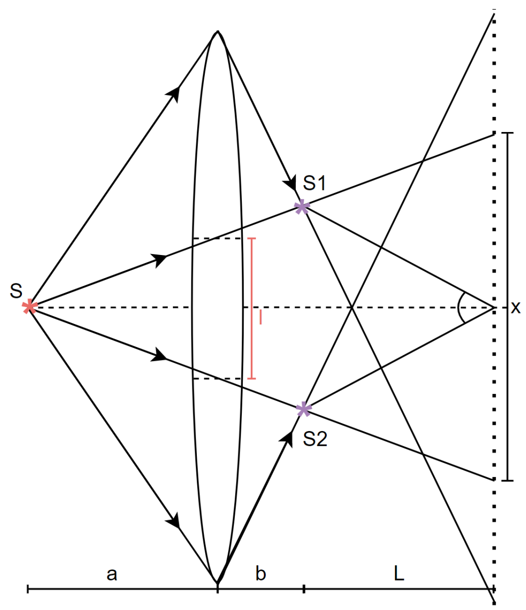

Рис. 3: Иллюстрация к билинзе Бийе

$$N = \frac{x}{\Delta x} = \frac{l(a+b)}{a \cdot \Delta x} = \frac{l^2(a+b)}{\lambda((b+L)(a-F) - Fa)}$$

3 Michelson interferometer

A Michelson interferometer can be used to determine the index of refraction of a glass plate. A glass plate (thickness t) is placed on a platform that can rotate and in the light's path between the beam splitter and either the fixed or movable mirror, so that its thickness is in the direction of the laser beam. The platform is rotated to various angles, and the number of fringes shifted is counted. It can be shown that if N is the number of fringes shifted when the angle of rotation changes by θ, the index of refraction is

$$n = \frac{(2t - N\lambda)(1 - cos\theta)}{2t(1 - cos\theta) - N\lambda}$$

The accompanying Table shows the data collected by a student in determining the index of refraction of a transparent plate by a Michelson interferometer.

N	25	50	75	100	125	150
$\theta\,(degree)$	5.5	6.9	8.6	10.0	11.3	12.5

In the experiment $\lambda = 632.8$ nm and $t = 4.0$ mm.
Determine n for each θ and find the average n.

```python
import math
def get_n(Ns : list , thetas : list):
    t = 4 * 10 ** -3
    lam = 632.8 * 10 ** -9
    ns = []
    thetas = [theta * math.pi / 180 for theta in thetas]
    for N, theta in zip(Ns, thetas):
        ns.append((2 * t - N * lam) * (1 - math.cos(theta)) /
            (2 * t * (1 - math.cos(theta)) - N * lam))
    return ns, sum(ns) / len(ns)

Ns = [25, 50, 75, 100 , 125, 150]
thetas = [5.5, 6.9, 8.6, 10.0, 11.3, 12.5]
print(get_n(Ns, thetas))
```

```
    >>> ([1.7494934921685534, 2.194271181208567,
        2.1044371783942935, 2.069701335231488,
        2.0208453661776, 1.9784406698969828],
        2.019531537179581)
```