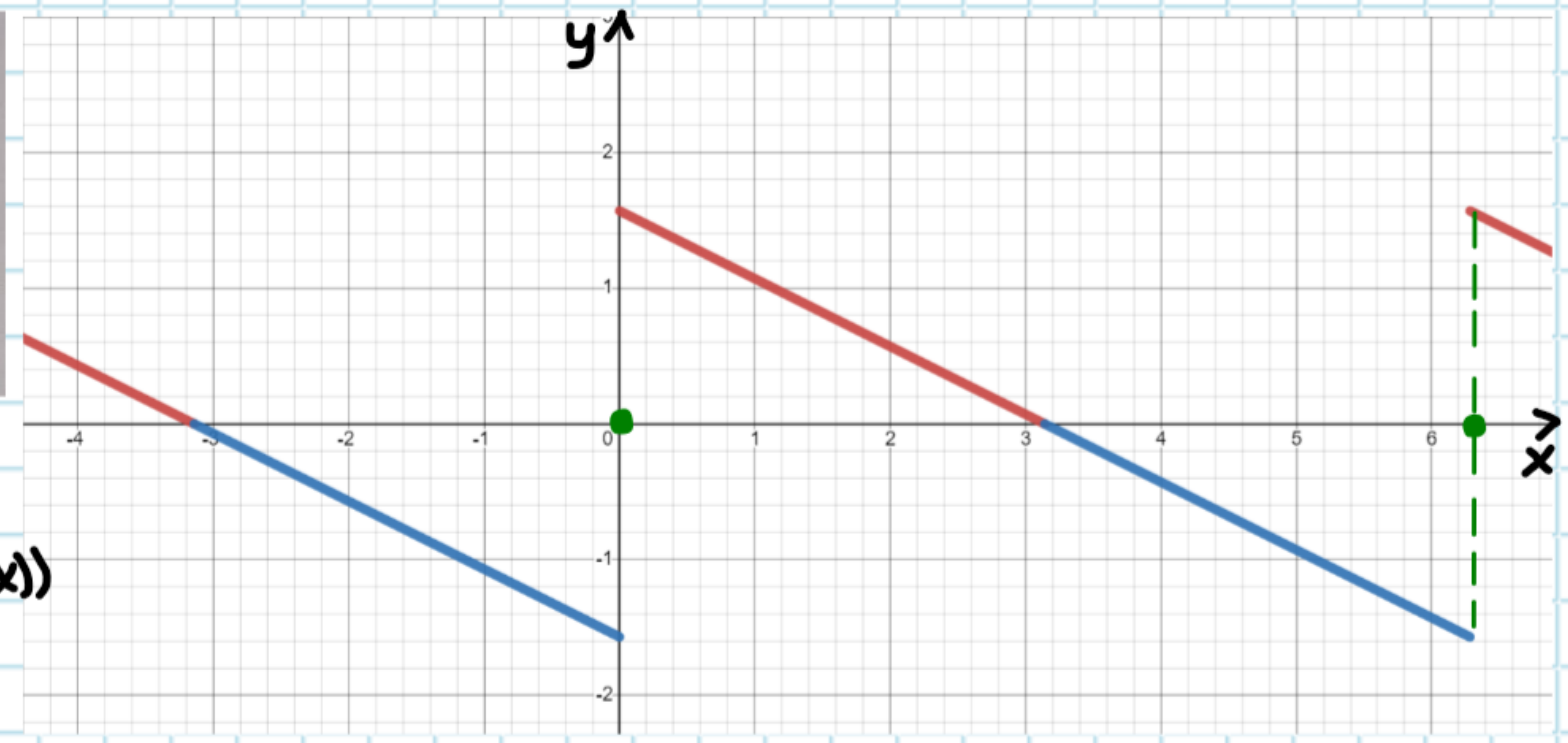
КР по Фурье

Вариант 3

Лопатенко Георгий М32021

① Разложить функцию в ряд Фурье на интервале $(-\pi;\pi)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi-x}{2}, & 0<x<\pi,\\ -\dfrac{\pi+x}{2}, & -\pi<x<0,\end{cases}$$



• заметим, что функция должна быть регулярной, т.е. в любой точке области определения необходимо выполнение критерия регулярности. Более формально, $\forall x_0\in\mathcal{D}_f$ $f(x_0)=\frac{1}{2}(\lim_{x\to x_0-}f(x)+\lim_{x\to x_0+}f(x))$
Очевидно, что в нашем случае необходимо доопределить исконную функцию в точках $x=2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$

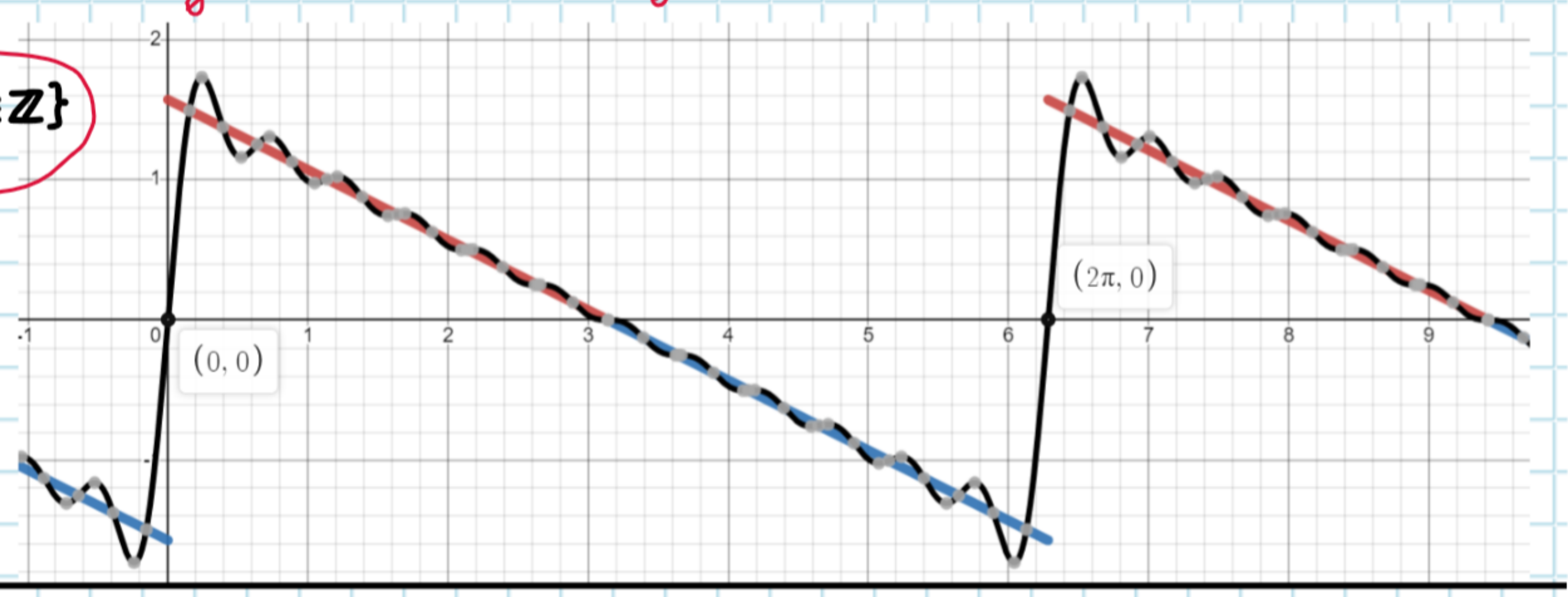
$$f(x|x=2\pi k, k\in\mathbb{Z})=\frac{1}{2}\Big(\lim_{x\to 0-}\Big(-\frac{\pi+x}{2}\Big)+\lim_{x\to 0+}\frac{\pi-x}{2}\Big)=0$$

Теперь перейдём к разложению в ряд Фурье и сразу облегчим себе работу, заметив нечётность функции на окне разложения. Таким образом остаётся честно посчитать только коэффициенты при синусах: из теории известно $b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{nx\pi}{\ell}dx$, тогда

$$b_n=\frac{1}{\pi}\Big[-\int_{-\pi}^{0}\frac{\pi+x}{2}\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx\Big]=\Big[-\frac{(\pi+x)}{2}\cdot\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{-\pi}+\underbrace{\cancel{\frac{\sin nx}{2n^2}\Big|_0^{-\pi}}}_{0}-\frac{(\pi-x)}{2}\cdot\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\underbrace{\cancel{\frac{\sin nx}{2n^2}\Big|_0^{\pi}}}_{0}\Big]\cdot\frac{1}{\pi}=\frac{1}{n}$$

тогда Ответ:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx & \text{при } x\in\mathbb{R}\setminus\{2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}\end{cases}$$

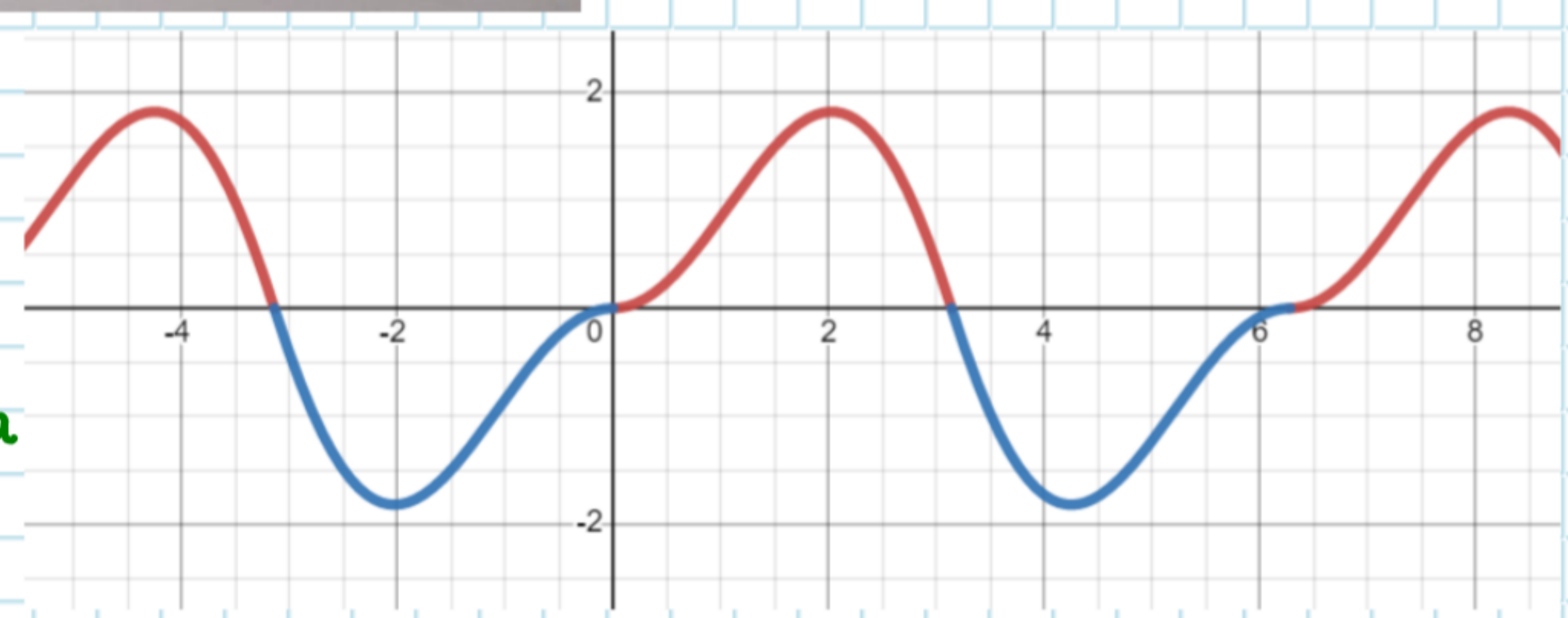


② Разложить в ряд Фурье на интервале $(0;\pi)$ по синусам функцию $f(x)=x\sin x$

• функция задана на $[0;\pi]$, однако в условии оговорено, что разложить требуется по синусам, т.е. необходимо отобразить нечётно на $x\in[-\pi;0]$ и раскладывать с периодом $T=2\pi$.
тогда

$$f(x)=\begin{cases}x\sin x & \text{при } x\in[0;\pi]\\ -x\sin x & \text{при } x\in[-\pi;0)\end{cases}$$

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=0$ → функция регулярна



тогда из нечётности и регулярности функции следует её полное нечётное разложение:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi}x\sin x\sin nx\,dx-\int_{-\pi}^{0}x\sin x\sin nx\,dx\Big]=$$

$$=\frac{2}{2\pi}\Big[\int_0^{\pi}(x\cos((n-1)x)-x\cos((n+1)x))dx\Big]=\frac{1}{2\pi}\Big[\underbrace{\cancel{x\cdot\frac{\sin((n-1)x)}{n-1}\Big|_0^{\pi}}}_{0}+\overbrace{\frac{\cos((n-1)x)}{(n-1)^2}\Big|_0^{\pi}}^{\frac{(-1)^{n-1}-1}{(n-1)^2}}-\underbrace{\cancel{x\cdot\frac{\sin((n+1)x)}{n+1}\Big|_0^{\pi}}}_{0}-\overbrace{\frac{\cos((n+1)x)}{(n+1)^2}\Big|_0^{\pi}}^{-\frac{(-1)^{n+1}-1}{(n+1)^2}}\Big]=\frac{(-1)^{n-1}-1}{\pi(n-1)^2}+\frac{(-1)^n+1}{\pi(n+1)^2}=-\frac{4n}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n+1}{(n^2-1)^2}$$

$$\lim_{n\to 1}\frac{4n(\cos(n\pi)+1)}{\pi(n-1)^2(n+1)^2}=\lim_{n\to 0}\frac{\cos(\pi(n+1))+1}{\pi n^2}=\lim_{n\to 0}\frac{-\pi\sin(\pi(n+1))}{2n\pi}=\lim_{n\to 0}\frac{-\pi^2\cos(\pi(n+1))}{2\pi}=\frac{\pi}{2}=b_1$$

т.е. Ответ: $f(x)=x\sin x=\frac{\pi}{2}\sin x-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4n(1+(-1)^n)}{(n^2-1)^2}\sin nx$, $T=2\pi$