$\boxed{9.279}$ $a_1=\frac{1}{2},\ a_{n+1}=\frac{na_n}{n+2};\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}$ по Гауссовым коэффициентам n^0: $2-0>1 \Rightarrow$ сходится

9.1 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

9.2 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

9.4 $$\sum_{n=0}^{\infty}\ln^{2n}2=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(\ln 2)^{2n}}{1-\ln^2 2}=\frac{1}{1-\ln^2 2}$$

9.12 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}=\sum_{n=1}\left(\frac{1/6}{2n-1}-\frac{1/6}{2n+5}\right)=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\ldots\right)=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{23}{90}$$

9.26 $$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{2^n}\cos\frac{3}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\Big(\sin\left(\frac{4}{2^n}\right)+\underbrace{\sin\left(-\frac{2}{2^n}\right)}_{-\sin\left(\frac{2}{2^n}\right)}\Big)\to\frac{1}{2}\left(\sin 2+\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\ldots-\sin 1-\sin\frac{1}{2}-\ldots\right)=\frac{1}{2}\sin 2$$

9.53 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}\to\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(2n+1)!!}{(n+1)!\,(2n-1)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!}{(n+1)\cdot O((2n+1)!!)}=\infty\to$$ по признаку Д'Аламбера расходится

9.54 $$\sum_{1}^{\infty}\frac{n!\,(2n+1)!}{(3n)!}\to\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,(2n+3)!\,(3n)!}{(3n+3)!\cdot n!\cdot(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+2)(2n+3)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=1\to$$ сходимость

9.56 $$\sum_{1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{n\cdot 2^{n+1}}\to\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+2}}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{\overbrace{2^n\cdot n!}^{(2n)!!}}{\underbrace{2^{n+1}\cdot(n+1)!}_{1/(2n+2)!!}}\cdot\underbrace{\frac{(2n+1)!}{2^n\cdot n!}}_{(2n+1)!!}\cdot\underbrace{\frac{2^{n-1}\cdot(n-1)!}{(2n-2)!}}_{\frac{1}{(2n-1)!!}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^3}\cdot\frac{2n(2n+1)}{n\cdot(n+1)}\cdot(2n-1)\to$$ расходится

9.57 $$\sum_{1}^{\infty}\frac{n^n}{n!\cdot 3^n}\to\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot 3^n\cdot(n+1)^{n+1}}{n^n\cdot 3^{n+1}\cdot(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3\cdot n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{3n^n}=\frac{1}{3}\to$$ сходится

9.61 $$\sum_{1}^{\infty}2^{(-1)^n+n}\to\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{(-1)^n+n}}=2>1$$ по радикальному признаку Коши расходится

9.63 $$\sum_{1}^{\infty}\frac{(5-(-1)^n)^n}{n^2\cdot 4^n}\to\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(5-(-1)^n)^n}{n^2\cdot 4^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-(-1)^n}{\sqrt[n]{n^2}\cdot 4}\overset{?}{\to}\begin{cases}1\\ 3/2\end{cases}$$

9.65 $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}\to\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n-1}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot(n-1)\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-2(n-1)}{n+1}\right)}=e^{-2}<1\to$$ сход.

9.68 $$\sum_{1}^{\infty}n^n\ln^n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\to\lim_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$ (сходится)

9.71 $$\sum_{1}^{\infty}\frac{n}{(n+2)\cdot 2^n}\vee\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot 2^n}{(n+2)\cdot 2^n}\right)=1;\quad\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+2)\cdot 2^n}-\frac{1}{2^n}\right)=0$$ т.е. $\sum_{1}^{\infty}\frac{n}{(n+2)\cdot 2^n}$ сходится

9.77 $$\sum_{1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{3n^3-1}{n^4+1}\right)\xrightarrow{\frac{1}{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{n(3n^3-1)}{n^4+1}=3$$ в пределе с гармоническим (т.е. тоже расходится)

9.80 $$\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{\pi n}{n^2\sqrt{n}+n+1}\to\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n}{(n^2\sqrt{n}+n+1)\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}}}=1\to$$ сходится
$$\frac{\pi n}{n^2\sqrt{n}+O(n)}\to 0$$

9.81 $$\sum_{1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{n+1}{\sqrt[3]{6n^7+3n^3+1}}\xrightarrow{6\neq 0}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot n^{\ldots}}{\sqrt[3]{6n^7+O(n^3)}}\to$$ сход.
$\operatorname{arctg}(\alpha)\to 0$

$6=0$: $$\sum_{1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{n+1}{\sqrt[3]{3n^3+1}}\to$$ расходится

т.е. при $6\neq 0$ сходится, при $6=0$ расходится

9.114 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^{10}}{3^n+n^2}\to\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2^n+n^{10}}}{\sqrt[n]{3^n+n^{10}}}<1\to$$ сходится

9.115 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n^2}\to\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3^n-n^2}}<1\to$$ сходится

9.120 $$\sum_{1}^{\infty}\sqrt[n]{555}\overset{?}{\to}$$ расходится

9.127 $$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}}\overset{?}{\to}$$ расходится

9.131 $$\sum_{1}^{\infty}\frac{(2n)!}{e^n}\to\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!\cdot e^n}{(2n)!\cdot e^{n+1}}=\infty>1\to$$ расход

9.134 $$\sum_{1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(n!)^2}\to\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[n]{(n!)^2}}=0\overset{?}{\to}$$ сход

9.174 $$\sum_{1}^{\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n\xrightarrow{\sqrt[n]{}}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)=1$$ по Д'Аламберу
$$\to\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n\underset{[1^\infty]}{=}e^{\lim\limits_{n\to\infty}(-\ln n)}=0$$

9.221 $$\sum_{1}^{\infty}\ln\frac{n\cdot e^{1/n}}{1+\sqrt{n^2+1}}\to\lim a_n=0$$ $n\to\infty$ (Лопиталь)

9.178 $$\sum_{1}^{\infty}\left(\sin\frac{2\pi n}{3n+1}\right)^n\to\lim_{n\to\infty}\sin\frac{2\pi n}{3n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\to$$ сходит.

9.278 $a_1=1;\ a_{n+1}=\frac{a_n}{n};\ \sum\limits_{1}^{\infty}a_n$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\to$$ сходится
$a_1=1;\ a_2=1;\ a_3=1/2;\ a_4=1/6;\ a_5=1/24\ldots$