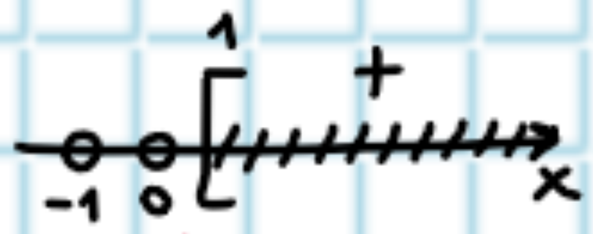
Лопатенко Георгий
M3102

① Исследовать на сходимость:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}\,dx \longrightarrow$ сходится: $\to \frac{1}{x^2} > \frac{x}{x^3+1}$; $\frac{x^5+x^2-x^3}{x^2(x^3+1)} > 0$



$\frac{1}{x^2}$ ← сходится $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left(-\frac{1}{x}+C\right)\Big|_1^{+\infty} = \lim\limits_{B\to+\infty}\left(-\frac{1}{B}+C\right)+1-C = 1$

2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx \longrightarrow$ расходится:

$\frac{1}{2x} < \frac{\ln(x^2+1)}{x}$ на $[1;+\infty)$; $\frac{2\ln(x^2+1)-1}{2x} > 0$ $\quad (2\ln(x^2+1)-1)\in C[1;+\infty)$ и возрастает

$\frac{1}{2x}$ ← расх. на $[1;+\infty)$ $\quad$ и корень числителя: $x = \pm\sqrt{\sqrt{e}-1} \le 1$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\,dx = \underbrace{\int\limits_0^1 (\ldots)\,dx}_{\text{сходится}} + \int\limits_1^{+\infty} (\ldots)\,dx \longrightarrow$ расх. $\quad \frac{1}{\pi x} < \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{1+x^4}}$ на $[1;+\infty)$; $\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi x^2\left(x-\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}\right)}{\sqrt[3]{1+x^4}}}_{= +\infty}$

$\frac{1}{\pi x}$ ← расх. на $[1;+\infty)$

4) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^1 = \lim\limits_{x\to 1-} \arcsin x - 0 = \frac{\pi}{2}$ – сходится

5) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x} \longrightarrow$ расходится: $\to \lim\limits_{x\to 1+} \frac{\left(\frac{1}{x\ln x}\right)}{\left(\frac{1}{x-1}\right)} = \lim\limits_{x\to 1+} \frac{x-1}{x\ln x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim\limits_{x\to 1+} \frac{1}{1+\ln x} = 1 > 0$

по т. Лопиталя

обе функции терпят неустранимый разрыв в $x=1$

т.е. из расходимости $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x-1}$ следует расх. искомого $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$

6) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left(2\sqrt{\ln x}+C\right)\Big|_1^e = 2 - 2\cancel{\lim\limits_{x\to 1+}\sqrt{\ln x}}_{0} = 2 \longrightarrow$ сходится

7) $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}} = \left(2\sqrt{x-1} + \frac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3} + C\right)\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \cancel{\lim\limits_{x\to 1+}(\ldots)}_{1} \longrightarrow$ сходится

8) $\int\limits_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx \longrightarrow$ сходится: $\to f(x) = \frac{e^{1/x}}{x^3}$ на $x\in[-1;0)$ $\quad \lim\limits_{x\to 0-} \frac{e^{1/x}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{e^{-\infty}}{-0} = -$б.м.; $\quad f'(x) = \frac{e^{1/x}\cdot(-x) - e^{1/x}\,3x^2}{x^6} = 0$

$\mathrm{sign} f'(x)$: $-$ $\;$ $+$

$f(x)$: $-1 \searrow -\frac{1}{3} \nearrow 0$

$f(-1) = -\frac{1}{e}$

т.е. график функции выглядит так:

9) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1} \longrightarrow$ сходится: $\to \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{e^{\sin x}\cdot\cos x} = 1 \longrightarrow$ из сходимости $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

по Лопиталю

следует сходимость $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1}$

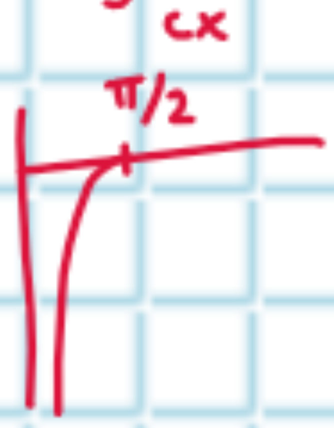
10) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\underbrace{e^x-\cos x}_{\in[-1;1]}} \longrightarrow$ расходится: $\to \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{e^x-\cos x}}{\frac{1}{e^x-1}} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{e^x-\sin x}{e^x} = 1 \longrightarrow$ из расходимости $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-1}$

по т. Лопиталя

следует расходимость $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$

$f(x)\in\left[\frac{1}{e^x+1};\ \underbrace{\frac{1}{e^x-1}}_{x=0+}\right]$ $\qquad \int\limits_{cx} F(x) < \int\limits_0^{\pi/2} G(x) \ \Big|\ \frac{C}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ cx

11) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx \longrightarrow$ сходится:

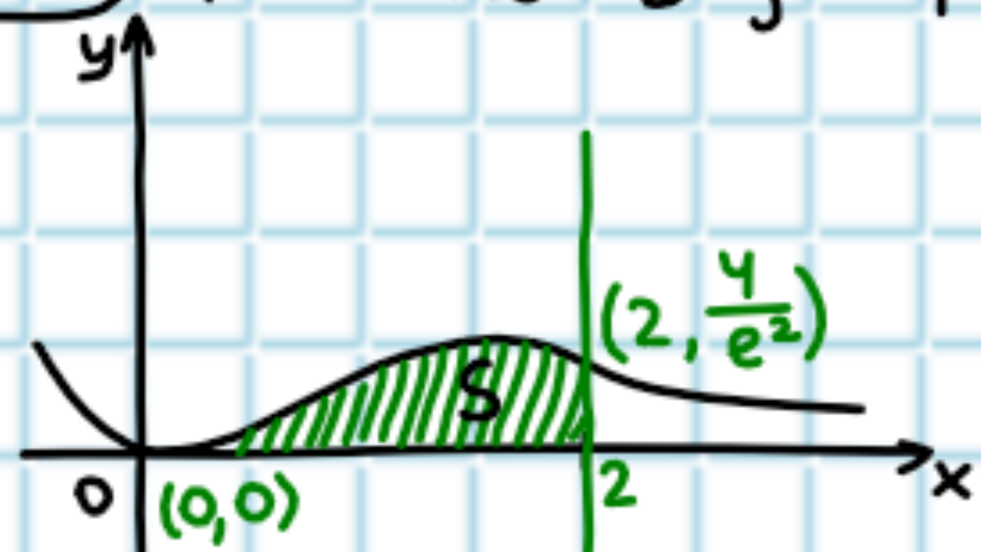


2. Найти площадь фигуры:

7.54 Работаем в декартах: $y=x^2e^{-x}$, $y=0$, $x=2$:

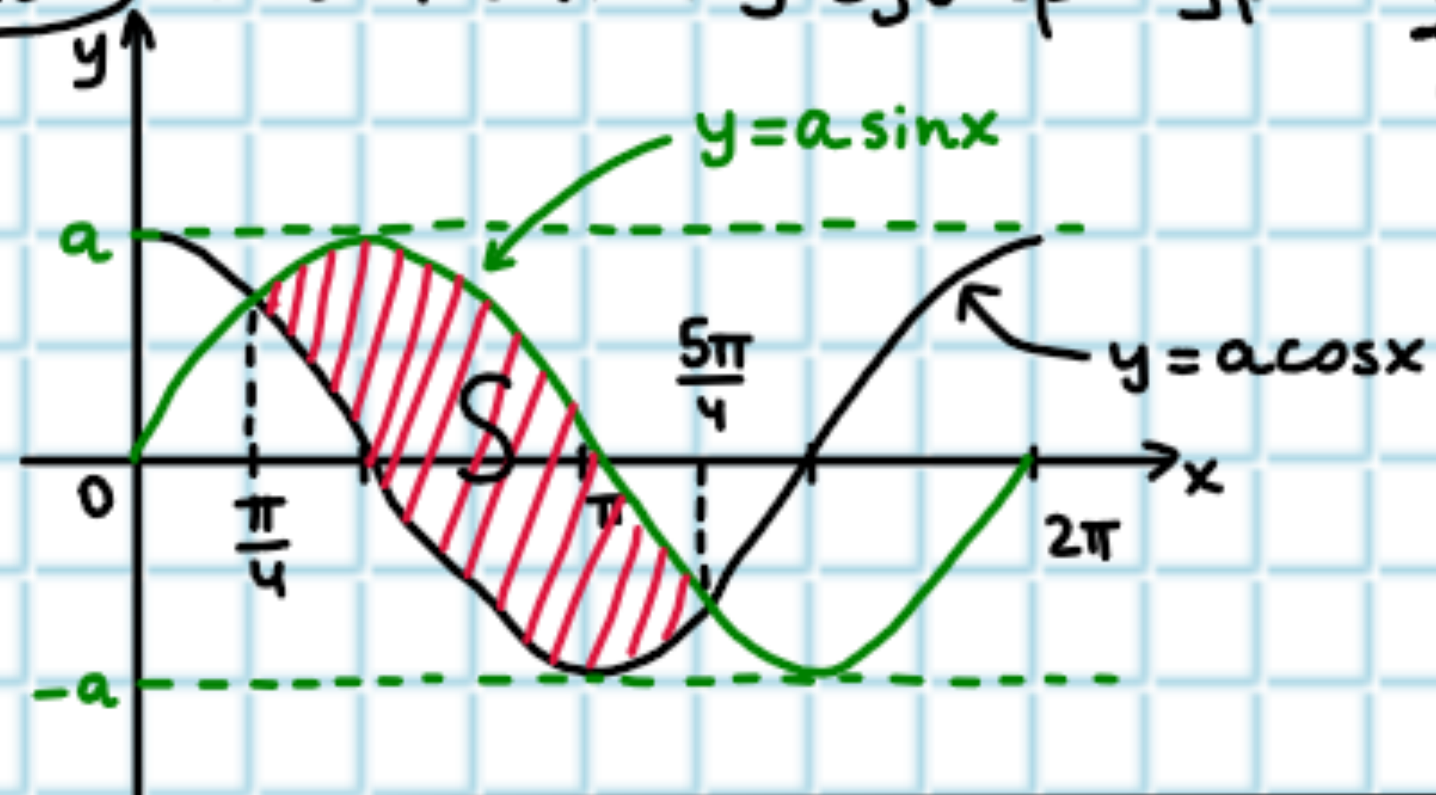
$$S=\int_0^2 \frac{x^2}{e^x}dx=\left[\begin{matrix} u=x^2 & du=2x\,dx \\ dv=\frac{dx}{e^x} & v=-\frac{1}{e^x}\end{matrix}\right]=$$

$$=-\frac{x^2}{e^x}\Big|_0^2+\int_0^2\frac{2x}{e^x}dx=-\frac{4}{e^2}-\frac{2x}{e^x}\Big|_0^2+\int_0^2\frac{2\,dx}{e^x}=-\frac{4}{e^2}-\frac{4}{e^2}-\frac{2}{e^2}+2$$



Ответ: $2-\frac{10}{e^2}$

7.55 Найти площадь фигуры $\begin{cases} y=a\sin x, \\ y=a\cos x, \end{cases}$ $x\in[0;2\pi]$



$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(a\sin x-a\cos x)dx=-a\sqrt{2}\sin(x+\tfrac{\pi}{4})\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}=2\sqrt{2}a$$

Ответ: $2\sqrt{2}a$

7.56 $\begin{cases} y=x\ln^2x \\ y=x\ln x \end{cases}$

$$S=\int_0^1(x\ln^2x-x\ln x)dx+\int_1^e(x\ln x-x\ln^2x)dx=\frac{x^2\ln^2x-2x^2\ln x+x^2}{2}\Big|_0^1+$$

$$-\frac{x^2\ln^2x-2x^2\ln x+x^2}{2}\Big|_1^e=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

$\int x\underbrace{\ln x}_{u}dx=\ln x\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{4}+C$; $\int x\underbrace{\ln^2x}_{u}dx=\ln^2x\cdot\frac{x^2}{2}-\int x\ln x\,dx$

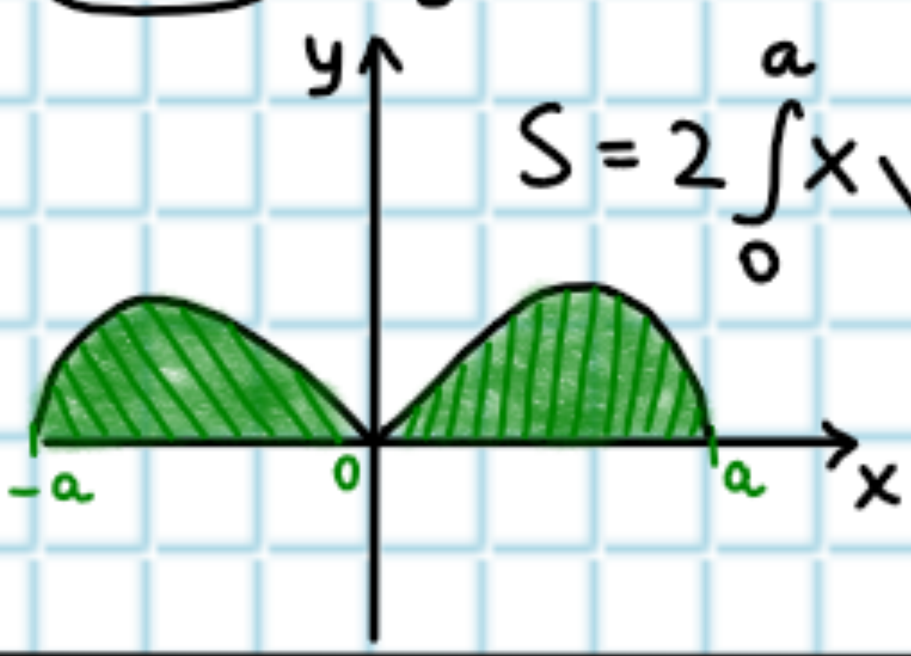
$\int x\ln^2x\,dx=\frac{x^2\ln^2x-x^2\ln x}{2}+\frac{x^2}{4}+C,\ C\in\mathbb{R}$

Ответ: 1

7.62 $a^2y^4=x^4(a^2-x^2)$;

$-2\cdot\frac{a^2}{2}\int\sqrt[4]{u}\,du=-a^2\cdot\frac{4}{5}\cdot u^{5/4}$

$$S=2\int_0^a x\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx=-\frac{8a^2}{5}\sqrt[4]{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^5}\Big|_0^a=\frac{8a^2}{5}$$



Ответ: $\frac{8a^2}{5}$

7.63 $y=\pm x$; $2x^2-y^2=1$

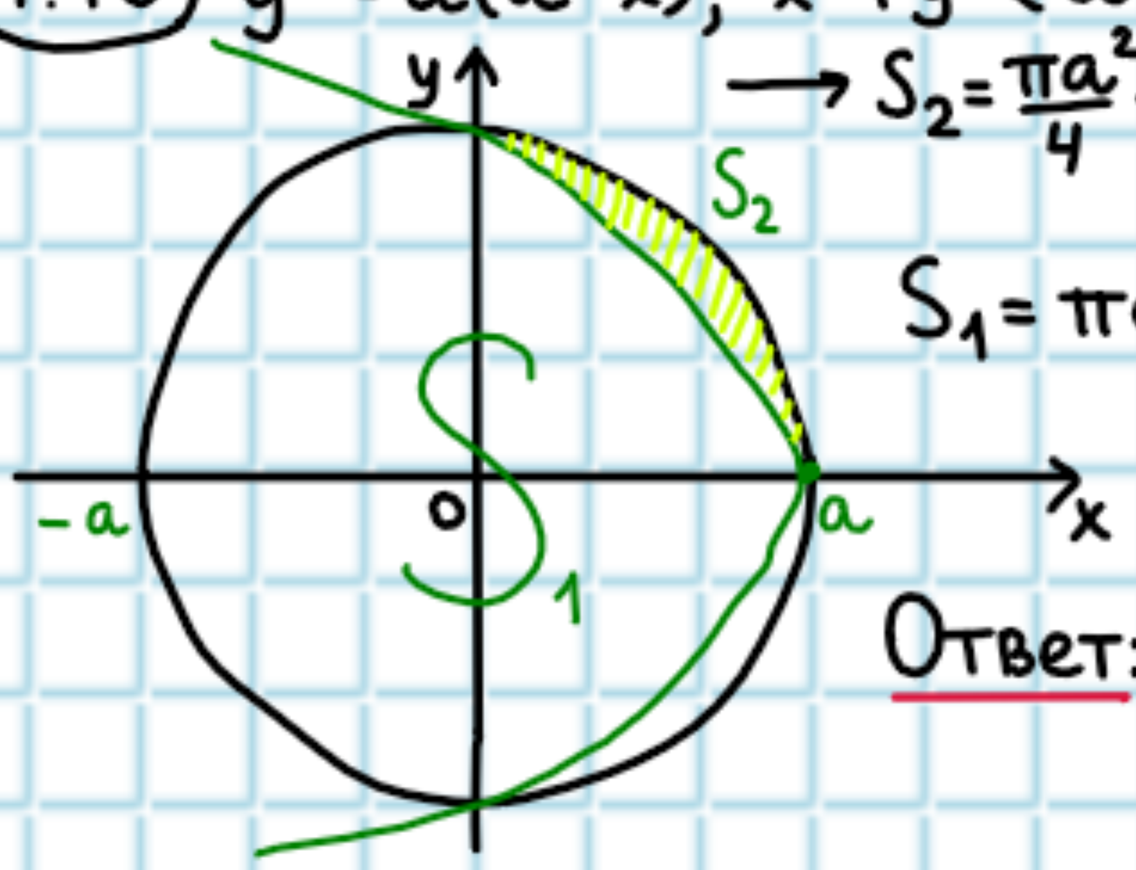
$$S=4\left(\int_0^1 x\,dx-\int_{1/\sqrt{2}}^1\sqrt{2x^2-1}\,dx\right)=$$

$$=4\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-\left(\frac{2x}{4}\sqrt{2x^2-1}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(2x+\sqrt{2x^2-1})\right)\Big|_{1/\sqrt{2}}^1\right)$$

Ответ: $\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$

7.70 $y^2=a(a-x)$; $x^2+y^2\leqslant a^2$ $\quad\left(-\frac{2\sqrt{a}}{3}\sqrt{(a-x)^3}\right)\Big|_0^a$



$\to S_2=\frac{\pi a^2}{4}-\int_0^a\sqrt{a^2-ax}\,dx=\frac{\pi a^2}{4}-\frac{2}{3}a^2$

$S_1=\pi a^2+\frac{4}{3}a^2$

Ответ: $\frac{\pi a^2}{4}-\frac{2a^2}{3}$ и $\pi a^2+\frac{4a^2}{3}$

7.76 кривая Лиссажу $\begin{cases} x=a\sin t \\ y=a\sin 2t \end{cases}$

$$\frac{1}{2}S=\int_{T_0}^{T_1}y(t)x'(t)dt=a^2\int_{\dots}\sin 2t\cos t\,dt=$$

$$=2a^2\int_{\dots}\cos^2t\,d(\cos t)=2a^2\cdot\frac{\cos^3t}{3}\Big|_0^{\pi}$$

Ответ: $\frac{8a^2}{3}$

7.85 $r=a\sin 4\varphi$

$$S=\frac{1}{2}\int_{\dots}a^2\cdot\frac{1}{8}\left(\frac{1-\cos 8\varphi}{2}\right)d(8\varphi)=a^2\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\sin 8\varphi}{16}\right)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{\pi a^2}{4}$$

7.86 $r=a(1-\sin\varphi)$

$$S=\frac{1}{2}\int_{\dots}a^2\left(1-2\sin\varphi+\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi+2\cos\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{3\pi a^2}{2}$$

7.93 Найти площадь фигуры, ограниченной кривой а) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ внутри $r \le \frac{a}{\sqrt{2}}$

$S_\infty = \frac{4a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \cdot \frac{1}{2} d(2\varphi) = a^2$;

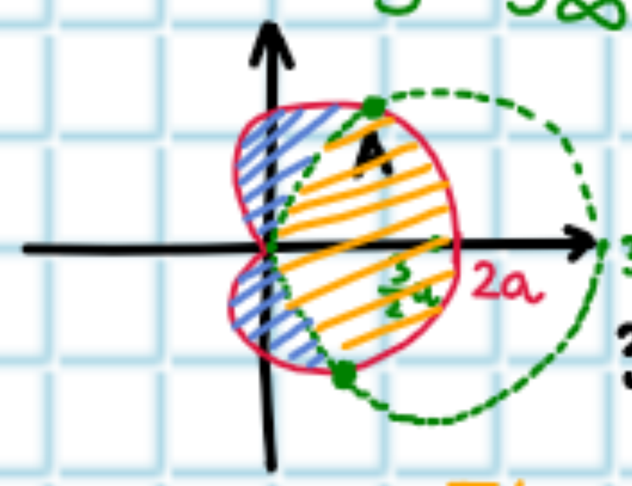
$r = a\sqrt{\cos 2\varphi} \Rightarrow$ $\min(r) = 0 \to \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \ldots$; $\max(r) = a \to \varphi = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\frac{a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{\cos 2\varphi} \longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $\varphi = \frac{5\pi}{6} + \pi k$

$S = S_\infty - \frac{4a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/6} (\cos 2\varphi - \frac{1}{2}) d\varphi = (1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}) a^2$

Ответ: а) $(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}) a^2$.

б) $r = a(1+\cos\varphi)$ и вне $r = 3a\cos\varphi$



$S_{\heartsuit} = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi}{2} a^2$

$S_O = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} 9\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{9\pi}{2} a^2$

$3a\cos\varphi = a(1+\cos\varphi) \longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $\varphi = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$

$S = 2 \cdot \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/3} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi - 9\cos^2\varphi) d\varphi = \pi a^2$

$S = S_{\heartsuit} - S = \frac{\pi}{2} a^2$

7.95 Найти S фигуры $x^4 + y^4 = a^2 xy \xrightarrow[y = r\sin\varphi]{x = r\cos\varphi} r^2(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) = a^2\cos\varphi\sin\varphi$

$S = \frac{2a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi} d\varphi = \frac{\pi a^2}{4}$

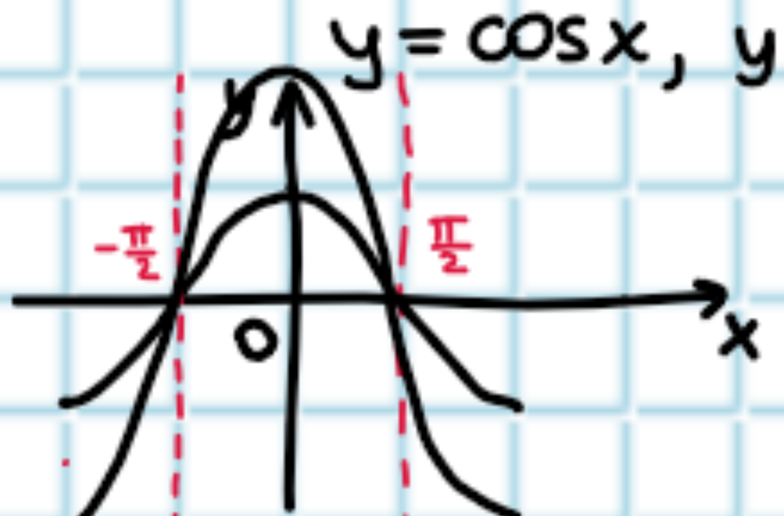
Ответ: $\frac{\pi}{4} a^2$

7.96 $S - ?$: $x^4 + y^4 = a^2 x^2 \xrightarrow[y = r\sin\varphi]{x = r\cos\varphi} r^2 = \frac{a^2\cos^2\varphi}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}$; $S = \frac{4a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2} r^2 d\varphi = \frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$

Ответ: $\frac{\pi}{\sqrt{2}} a^2$

7.107 Найти объёмы тел, образованных вращением фигур, огранич. линиями:

$y = \cos x$, $y = 2\cos x$, $x = \pm\frac{\pi}{2}$



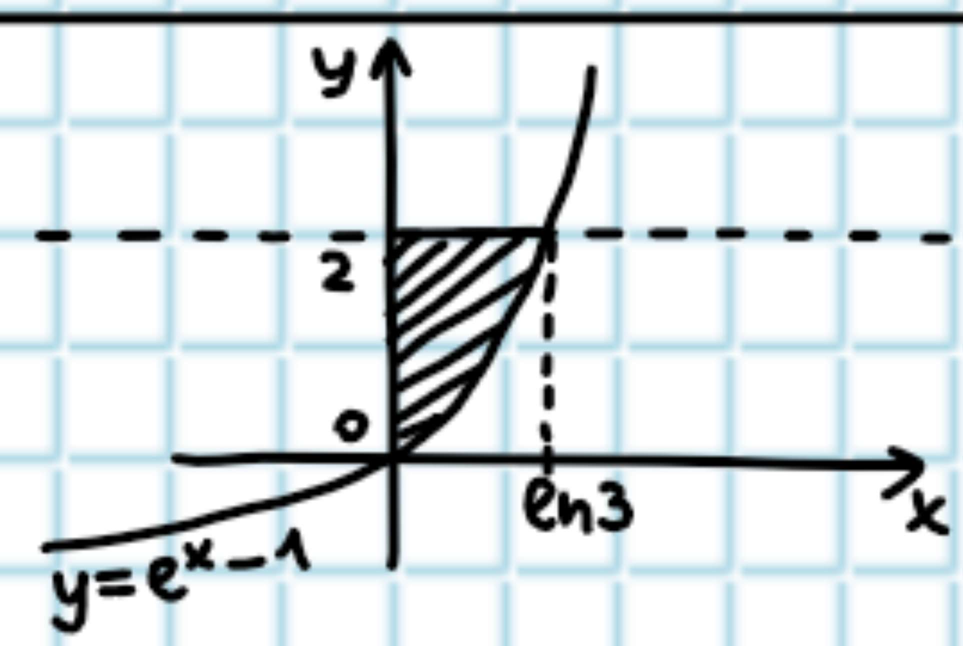
а) вокруг оси OX: $2\pi\int\limits_0^{\pi/2} (4\cos^2 x - \cos^2 x) dx = 6\pi(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi^2}{2}$

б) вокруг оси OY: $2\pi\int\limits_0^{\pi/2} x(2\cos x - \cos x) dx = 2\pi(x\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi^2 - 2\pi$

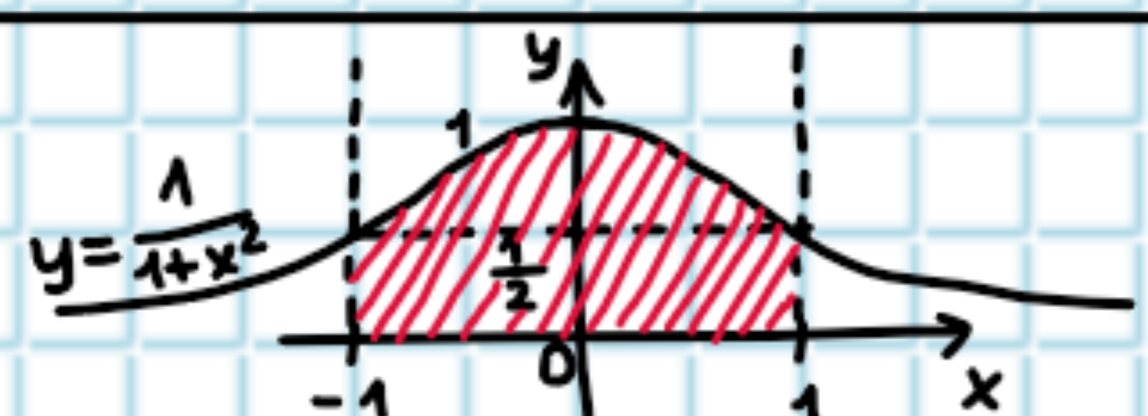
7.108 $y = e^x - 1$, $y = 2$, $x = 0$

а) Вращение вокруг оси OX: $|V^{OX}| = \pi\int\limits_0^{\ln 3} (4 - e^{2x} + 2e^x - 1) dx = \pi(3x + 2e^x - \frac{e^{2x}}{2})\Big|_0^{\ln 3} = 3\pi\ln 3$

б) вокруг прямой $y = 2$: $|V^{Ol}| = \pi\int\limits_0^{\ln 3} (e^x - 3)^2 dx = 9\pi\ln 3 - 8\pi$



7.109 $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = 0$, $x = \pm 1$

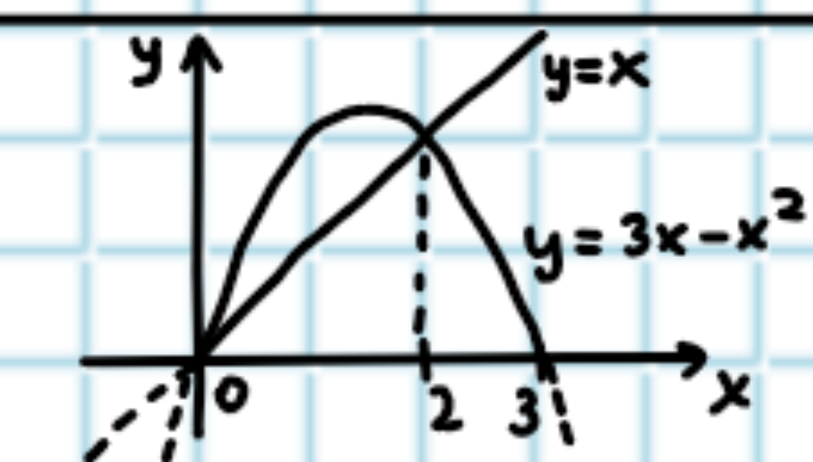


а) вокруг оси OX: $2 \cdot [\pi\int\limits_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx] = 2\pi(\frac{x}{1+x^2} + \text{arctg}\, x)\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}$

б) вокруг оси симм. OY: $2\pi\int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \pi\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \ldots = \pi\ln 2$

в) вокруг прямой $y = 1$: $2\pi\int\limits_0^1 (\frac{1}{1+x^2} - 1)^2 dx = \frac{5\pi}{2} - \frac{3\pi^2}{4}$

7.115 $y = 3x - x^2$, $y = x$



а) вокруг оси OX: $\pi\int\limits_0^2 ((3x - x^2)^2 - x^2) dx = \frac{56}{15}\pi$

б) вокруг оси OY: $2\pi\int\limits_0^2 x(2x - x^2) dx = \frac{8\pi}{3}$

в) вокруг $y = x$: $\frac{8\sqrt{2}\pi}{15}$

7.149 Найти длину дуги кривой, заданной параметрически $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \int_{\dots} \sqrt{(3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\, dt = 4\int_0^{\pi/2} 3a\cos t\sin t = 6a$$

$9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1})$ $\quad t \in [0; 2\pi]$

7.151 $x = 2a\sin^2 t$, $y = 2a\cos t \longrightarrow L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(4a\sin t\cos t)^2 + (2a\sin t)^2}\, dt = (2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5}))a.$

7.150 $x = a\cos^5 t$, $y = a\sin^5 t$ $\longrightarrow L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(5a\cos^4 t\sin t)^2 + (5a\sin^4 t\cos t)^2} = \dots = \frac{5}{4}\left(1 + \frac{\ln(2+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}\right)a.$

$t \in [0; \frac{\pi}{2}]$

7.153 $\begin{cases} x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$ $\longrightarrow L = \int_0^1 \sqrt{(\cancel{2t\sin t} + (t^2-2)\cos t + 2\cos t - \cancel{2t\sin t})^2 + (-2t\cos t + (t^2-2)\sin t + 2\sin t + 2t\cos t)^2}\, dt$

$t \in [0; 1]$

$$L = \int_0^1 \sqrt{t^4\cos^2 t + t^4\sin^2 t}\, dt = \frac{1}{3}$$

7.165 $\rho = a\cos^4 \frac{\varphi}{4}$

$$\longrightarrow L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^8 \frac{\varphi}{4} + \frac{a^2}{16}\left(4\cos^3 \frac{\varphi}{4} \cdot \sin \frac{\varphi}{4}\right)^2}\, d\varphi = \frac{16}{3}a$$