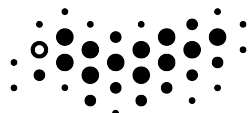


Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский университет ИТМО"



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Математический анализ
Расчетно-графическая работа №2
"Числовые и функциональные ряды. ФКП"
Вариант 2

Выполнили:
Жуйков А. С.
Лопатенко Г. В.

Преподаватель:
Возианова А. В.

Декабрь, 2022

Содержание

| | | |
|-----|---|----|
| 1 | Ряд Тейлора | 2 |
| 1.1 | Аналитическое разложение | 2 |
| 1.2 | Область сходимости ряда | 3 |
| 1.3 | Построение и исследование полиномов Тейлора | 3 |
| 2 | Приложение рядов (варианты 9 и 14) | 4 |
| 2.1 | Приближенное значение функции в точке | 4 |
| 2.2 | Приближенное вычисление интеграла | 5 |
| 2.3 | Решение дифференциального уравнения | 6 |
| 3 | Ряд Фурье | 8 |
| 3.1 | Аналитическое разложение | 8 |
| 3.2 | Построение и анализ графиков | 9 |
| 3.3 | Выражение дополнительного числового ряда | 10 |
| 4 | Конформные отображения | 11 |
| 4.1 | Первичный анализ | 11 |
| 4.2 | Графическая интерпретация отображения | 12 |
| 4.3 | Обратное преобразование | 14 |
| 4.4 | Расчет профиля показателя преломления | 15 |

1 Ряд Тейлора

Исследовать ряд Тейлора функции $f(x) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$ в точке $x_0 = 2$ и изобразить несколько различных частичных сумм и график исходной функции. Исследовать результаты.

- 1) разложить функцию в ряд Тейлора в заданной точке аналитически;
 - 2) найти область сходимости полученного ряда к функции;
 - 3) построить полиномы Тейлора (графики частичных сумм);
 - 4) исследовать поведение полиномов Тейлора при увеличении порядка n .
-

1.1 Аналитическое разложение

Заметим, что по общей формуле разложения функции в ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Также для упрощения дальнейших рассуждений стоит отметить, что функция удовлетворяет условию четности относительно точки x_0 :

$$\begin{cases} f(2+x) = \ln(-(2+x)^2 + 4(2+x) - 3) \\ f(2-x) = \ln(-(2-x)^2 + 4(2-x) - 3) \end{cases}$$

$$f(2+x) = \ln(-x^2 + 1) = f(2-x)$$

Тогда становится ясно, что разложение для функции $f(x)$ в точке x_0 будет содержать полиномы исключительно четных порядков:

$$f^{(2)}(x | x = x_0) = \frac{-2x^2 + 8x - 10}{(-x^2 + 4x - 3)^2} \Big|_{x_0} = -\frac{2 \cdot 2!}{2}$$

$$f^{(4)}(x | x = x_0) = \frac{-12(x^4 - 8x^3 + 30x^2 - 56x + 41)}{(-x^2 + 4x - 3)^4} \Big|_{x_0} = -\frac{2 \cdot 4!}{4}$$

$$f^{(n)}(x | x = x_0) = -\frac{2 \cdot n!}{n}$$

Очевидно, как получают значения производных в контрольной точке. Тогда разложение искомой функции можно обобщить:

$$f(x) = \ln(-x^2 + 4x - 3) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2k}}{k}$$

1.2 Область сходимости ряда

Очевидно, что ряд сходится к функции на ее области определения. И действительно, необходимое условие равномерной сходимости полученного функционального выражения:

$$|x - 2| < 1 \Rightarrow x \in (1, 3)$$

1.3 Построение и исследование полиномов Тейлора

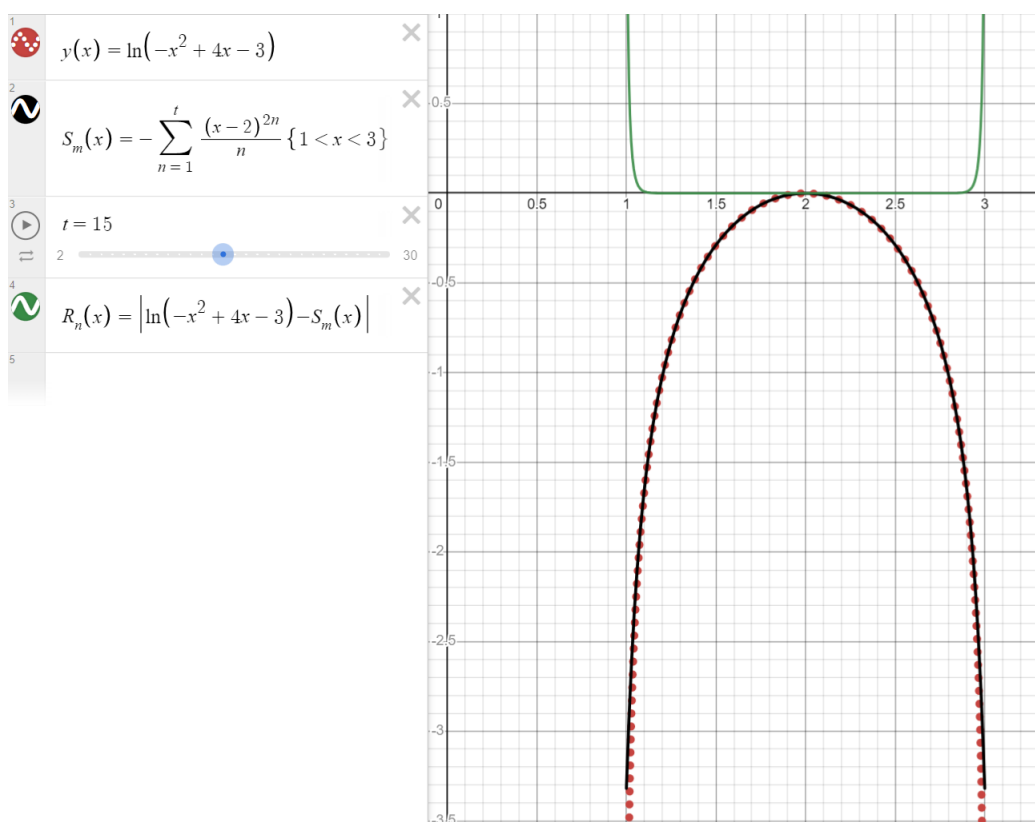


Рис. 1: График функции и разложение в ряд Тейлора

С увеличением параметра t разложение все больше и больше стремится огибать искомую кривую, в этом и заключается понятие **равномерной сходимости** ряда. График остаточного члена обозначен зеленым и стремится к 0 на области сильной сходимости. Очевидно, что ряд всего лишь оценивает начальную функцию, при этом полностью совпадает лишь при допущении бесконечной суммы, именно поэтому в окрестностях критических точек $x = 1$ и $x = 3$ можно заметить резкое возрастание значений остатков Тейлора.

2 Приложение рядов (варианты 9 и 14)

2.1 Приближенное значение функции в точке

Вычислить приближенно значение функции с точностью 0.0001:

$$a) f(x) = \cos(x), \quad x = 36^\circ = \frac{\pi}{5}$$

$$b) g(x) = e^x, \quad x = -\frac{3}{5}$$

Сделаем разложение функций в числовые ряды:

$$f(x) = \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$g(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

И подставим значения исследуемых точек:

$$f\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \frac{\pi^2}{5^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{5^4 \cdot 4!} - \frac{\pi^6}{5^6 \cdot 6!} \approx \textcolor{red}{0.809016} \quad \Delta = 0.000001$$

$$g\left(-\frac{3}{5}\right) = 1 - \frac{3}{5} + \frac{9}{50} - \frac{27}{750} + \frac{81}{15000} = \frac{2747}{5000} \approx \textcolor{red}{0.5494} \quad \Delta = 0.0005$$

Заметим, что для первого примера с представлением точки в радианах есть небольшая логическая ошибка: как мы можем подсчитать значение, если значение числа π вообще-то представимо тоже с определенной точностью?

Тогда пусть наша функция $\phi(x) = \operatorname{arctg} x$. Известно, что в степенной ряд она раскладывается тоже относительно просто:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

Известно, что $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, тогда с определенной точностью вычислим:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \Rightarrow \pi \approx \dots$$

2.2 Приближенное вычисление интеграла

Разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точность 0.0001:

$$a) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x^6)}{x^6} dx$$

$$b) \int_0^1 x^5 \sin(x^2) dx$$

a)

Запишем разложение для логарифма в ряд Тейлора:

$$\ln(1+\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \alpha^{n+1}}{n+1} = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} + \dots$$

Тогда искомое подынтегральное выражение можно переписать в виде:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{6n+6}}{n+1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{6n}}{n+1} dx$$

Такое выражение гораздо легче можно проинтегрировать:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^n \cdot x^{6n}}{n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{6n+1}}{(6n+1)(n+1)} \Big|_0^{0.5}$$

И остается лишь посмотреть на первые несколько членов ряда:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x^6)}{x^6} dx = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{128 \cdot 7 \cdot 2} + \frac{1}{8192 \cdot 13 \cdot 3} - \dots \right] \approx 0.49447$$

b)

Запишем разложение для синуса в ряд Тейлора:

$$\sin \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots$$

Тогда искомое подынтегральное выражение можно переписать в виде:

$$\int_0^1 x^5 \sin(x^2) dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^5 \cdot \frac{(-1)^n \cdot x^{4n+2}}{(2n+1)!} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{4n+7}}{(2n+1)!} dx$$

Проинтегрируем это выражение, пользуясь линейностью:

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{4n+7}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{4n+8}}{(4n+8) \cdot (2n+1)!} \Big|_0^1$$

И остается лишь посмотреть на первые несколько членов ряда:

$$\int_0^1 x^5 \sin(x^2) dx = \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{72} + \frac{1}{1920} - \frac{1}{100800} \right] \approx 0.111622$$

2.3 Решение дифференциального уравнения

Найти в виде степенного ряда решению дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Ограничиться четырьмя членами ряда.

$$a) y' = x \cos y + x^2; \quad y(2) = \frac{\pi}{2}$$

$$b) y' = \sin y + 2x; \quad y(3) = \frac{\pi}{2}$$

a)

Решение дифференциального уравнения можно записать в виде:

$$y(x) = y(2) + \frac{y'(2)}{1!}(x-2) + \frac{y''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{y^{(3)}(2)}{3!}(x-2)^3 + \dots$$

Будем последовательно брать производные и считать значения:

$$y'(x_0) = \left(x_0 \cos(y(x_0)) + x_0^2 \right) \Big|_{x_0=2} = 4$$

$$y''(x_0) = \left(\cos(y(x_0)) - x_0 y'(x_0) \sin(y(x_0)) + 2x_0 \right) \Big|_{x_0=2} = -4$$

$$y^{(3)}(x_0) = \left(-2y'(x_0) \sin(y(x_0)) - x_0 y''(x_0) \sin(y(x_0)) - x_0 y'^2(x_0) \cos(y(x_0)) + 2 \right) \Big|_{x_0=2} = 2$$

Тогда искомая функция может быть выписана в виде:

$$y(x) = \frac{\pi}{2} + 4(x-2) - 2(x-2)^2 + \frac{1}{3}(x-2)^3 + \dots$$

b)

Аналогично поступим и с записью этого дифференциального уравнения, ведь функция представима по ряду Тейлора в виде:

$$y(x) = y(3) + \frac{y'(3)}{1!}(x-3) + \frac{y''(3)}{2!}(x-3)^2 + \frac{y^{(3)}(3)}{3!}(x-3)^3 + \dots$$

Тогда снова будем выписывать производные поочередно:

$$y'(x_0) = \left(\sin(y(x_0)) + 2x_0 \right) \Big|_{x_0=3} = 7$$

$$y''(x_0) = \left(y'(x_0)\cos(y(x_0)) + 2 \right) \Big|_{x_0=3} = 2$$

$$y^{(3)}(x_0) = \left(-y'^2(x_0)\sin(y(x_0)) + y''(x_0)\cos(y(x_0)) \right) \Big|_{x_0=3} = -49$$

Запишем приближенное решение дифференциального уравнения:

$$y(x) = \frac{\pi}{2} + 7(x-3) + \frac{2}{2}(x-3)^2 - \frac{49}{6}(x-3)^3 + \dots$$

3 Ряд Фурье

Найти сумму ряда с помощью разложения в ряд Фурье функции $f(x)$ на отрезке $x \in [-\pi; \pi]$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^2}, \quad f(x) = 1 + |x|$$

- 1) представить функцию рядом Фурье и определить область разложения;
 - 2) изобразить функцию и ее ряд Фурье графически;
 - 3) зафиксировать значение x так, чтобы ряд Фурье содержал искомую сумму ряда и выразить ее из равенства функции и ряда.
-

3.1 Аналитическое разложение

Заметим, что функция на рассматриваемом отрезке представима:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in [-\pi; 0] \\ 1 + x, & x \in [0; \pi] \end{cases}$$

Также стоит отметить, что функция **регулярна и четна на отрезке**, тогда в разложение не будут входить нечетные гармоники синусов:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$f(x) = 1 + |x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Из теории известно, как находить коэффициенты при гармониках:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

Тогда заметим следующее, опираясь на четность функций:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + |x|) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 + x) dx = \frac{\pi^2 + 2\pi}{\pi} = \pi + 2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + |x|) \cdot \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 + x) \cdot \cos nx dx$$

Будем брать по частям:

$$a_n = \left| \begin{array}{ll} u = 1 + x & du = dx \\ dv = \cos nx \, dx & v = \frac{1}{n} \cdot \sin nx \end{array} \right| = \frac{2}{\pi} \left[\frac{(1+x) \cdot \sin nx}{n} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin nx}{n} dx \right]$$

И наконец:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos nx}{n^2} \Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

Тогда осталось собрать все вместе:

$$f(x) = 1 + |x| = 1 + \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cdot \cos nx, \quad T = 2\pi$$

Заметим, что ряд Фурье равномерно сходится на \mathbb{R} .

3.2 Построение и анализ графиков

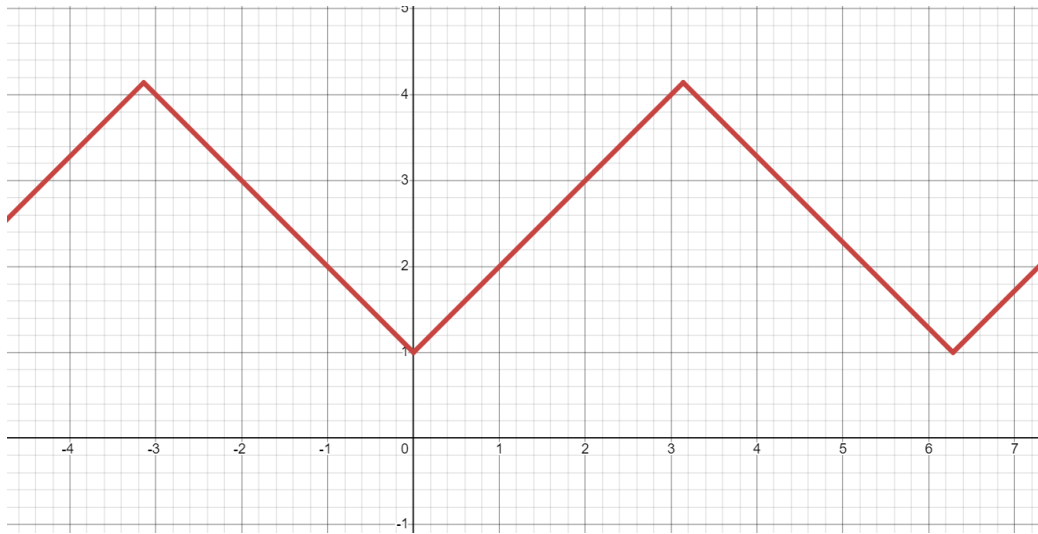


Рис. 2: График функции с периодичностью

Важными свойствами искомой функции являются регулярность и четность: первое гарантирует непрерывность функции и упрощение относительно задания через ряд Фурье, а второе позволяет упростить размышления и выкладки для записи ряда.

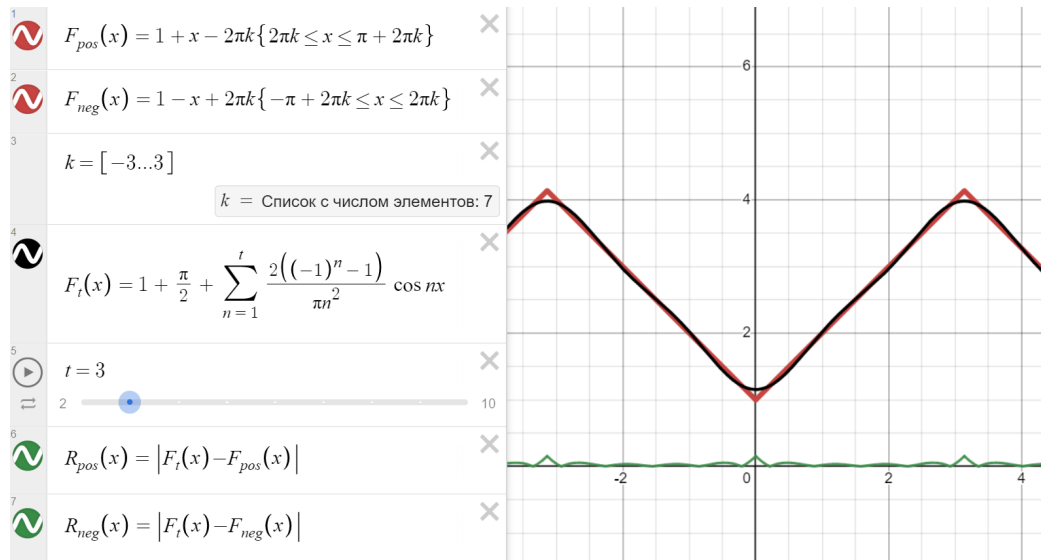


Рис. 3: График функции и разложение в ряд Фурье

Заметим, что из регулярности функции следует разложение в ряд Фурье на всей числовой оси без добавочных склеек, при этом остаточный член стремится к тождественному нулю при увеличении параметра t суммирования.

3.3 Выражение дополнительного числового ряда

Проанализируем, что из себя представляет требуемый ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

То есть ряд представляет из себя сумму обратных нечетных квадратов. А теперь для получившегося ряда Фурье положим $x = 0$:

$$f(0) = 1 = 1 + \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}$$

Очевидно, что при четных значениях n выражение, стоящее под знаком суммы обнуляется, а при нечетных – перерастает в требуемый ряд с точностью до домножения на -2 из выражения $(-1)^n - 1$.

Однако необходимо еще учесть портящий тождество член при $n = 1$:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{-2 \cdot 2}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + 1 \right) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2 - 8}{8}$$

4 Конформные отображения

4.1 Первичный анализ

Рассмотреть конформное отображение и указать особенные точки.

$$w(z) = z^2$$

Запишем отображение в разделенном виде:

$$w(x, y) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

Теперь в тригонометрической форме:

$$w = \rho^2(\cos 2\phi + i \sin 2\phi) = \rho^2 \cos 2\phi + i \rho^2 \sin 2\phi$$

Отображение достаточно простое, поэтому заметим, что алгебраически никакие особенности не выявлены. Можно заключить, что отображение конформно на всей комплексной плоскости $(\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C})^*$.

*Однако стоит понимать свойство **неоднолистности** отображения, ведь двум точкам z и $-z$, аргументы которых отличаются на π , а модули одинаковы, соответствует одно значение $w = z^2$. Искомое отображение однолистно по отдельности в верхней и нижней полуплоскостях, то есть граница (или раздел) будет лежать вдоль положительной части вещественной оси.

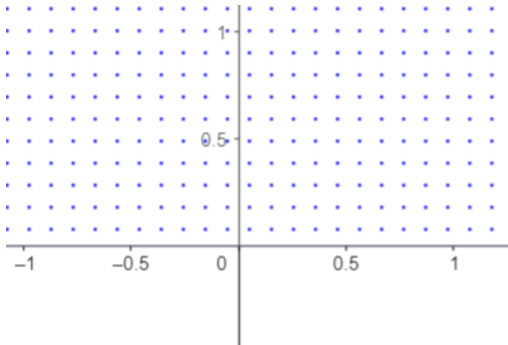


Рис. 4: $\arg z \in [0, \pi]$



Рис. 5: Образ $\arg z \in [0, \pi]$

4.2 Графическая интерпретация отображения

Отображение преобразует Декартову прямоугольную сетку виртуального пространства в искривленную координатную сетку физического пространства. Тогда рассмотрим:

$$\operatorname{Re}(w) = x^2 - y^2 = C_1 \quad \operatorname{Im}(w) = 2xy = C_2$$

За C_1 и C_2 будем брать константы, моделируя прямоугольную сетку.

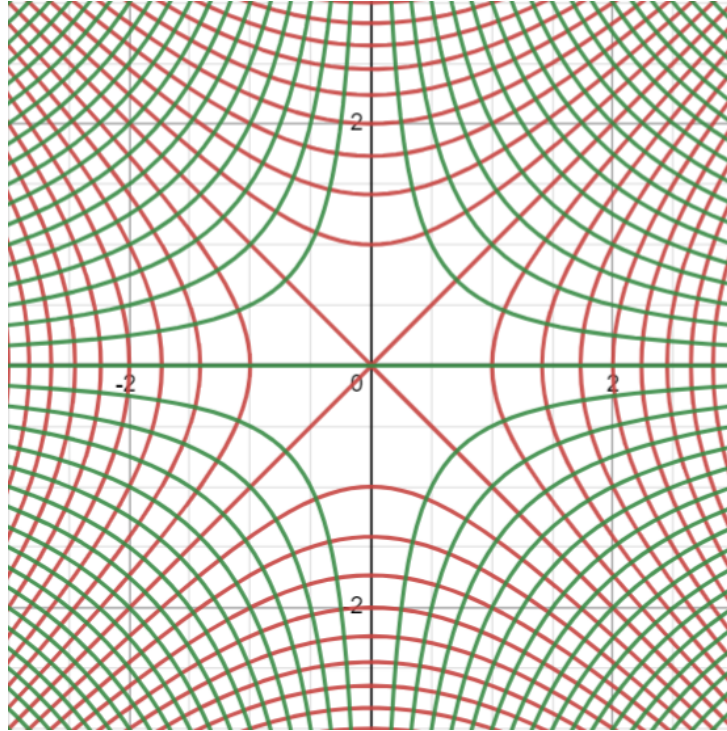


Рис. 6: Физическое пространство отображения $w = z^2$

Теперь посмотрим влияние отображения на некоторые функциональные зависимости и на их образы в виртуальном пространстве

1. Возьмем семейство прямых, параллельных оси ординат $x = a$. Тогда в виртуальном пространстве отображения функции будут заданы:

$$\operatorname{Re}(z) = x = a \longrightarrow \operatorname{Re}(w) = a^2 - y^2; \quad \operatorname{Im}(w) = 2ay$$

Получили параметрическое задание функции $\operatorname{Im}(\operatorname{Re})$.

$$\operatorname{Re}(w) = a^2 - \left(\frac{\operatorname{Im}(w)}{2a} \right)^2 \longrightarrow \operatorname{Im}^2(w) = -4a^2(\operatorname{Re}(w) - a^2)$$

Прямые вида $x = -a$ отображаются эквивалентно $x = a$.

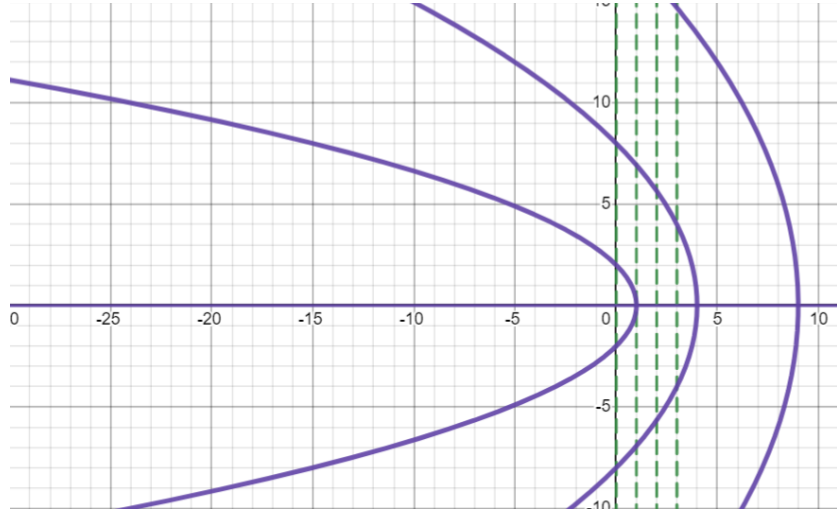


Рис. 7: Образы семейства прямых вида $x = \text{const}$

2. Рассмотрим семейство прямых, параллельных оси абсцисс физического пространства $y = b$. В виртуальном пространстве:

$$\text{Im}(z) = y = b \longrightarrow \text{Re}(w) = x^2 - b^2; \quad \text{Im}(w) = 2xb$$

Получили параметрическое задание функции $\text{Im}(\text{Re})$.

$$\text{Re}(w) = \left(\frac{\text{Im}(w)}{2b} \right)^2 - b^2 \longrightarrow \text{Im}^2(w) = 4b^2(\text{Re}(w) + b^2)$$

Прямые вида $y = -b$ отображаются эквивалентно $y = b$.

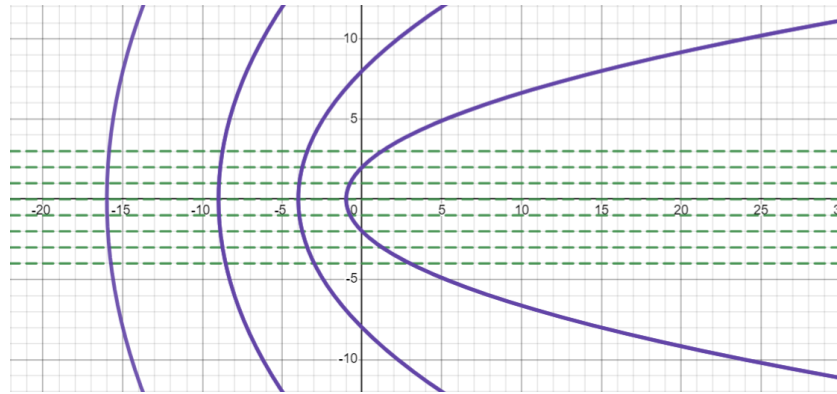


Рис. 8: Образы семейства прямых вида $y = \text{const}$

3. Возьмем окружности вида $z = \rho e^{i\phi}$. Очевидно, что в виртуальном пространстве они примут вид:

$$w(z) = z^2 = \rho^2 e^{i2\phi}, \quad \phi \in [0, \pi)$$

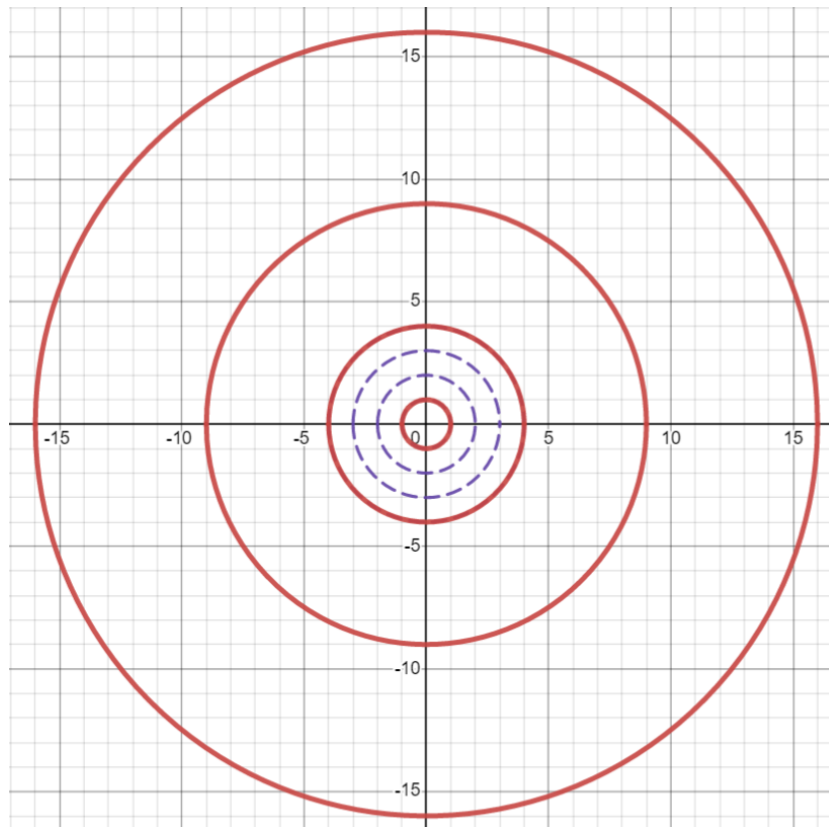


Рис. 9: Образы окружностей $z = \rho e^{i\phi}$

4.3 Обратное преобразование

Обратное преобразование к искомому представимо сюръекцией:

$$z = \pm \sqrt{w}$$

Фактически это говорит о наличии двух Римановых листов, границей для которых является прямая вдоль положительной части вещественной оси значений.

4.4 Расчет профиля показателя преломления

Рассчитать профиль показателя преломления, для конформного отображения $w(z) = z^2$.

Заметим, что для однолистного отображения (например, на верхней полуплоскости) выполняются все теоремы о допустимости дифференцирования функции комплексного переменного, то есть:

$$n_z = \left| \frac{dw}{dz} \right| n_w = |2z| \cdot n_w = 2 \sqrt{x^2 + y^2} \cdot n_w$$

Получилась коническая поверхность с сужением в начале координат:

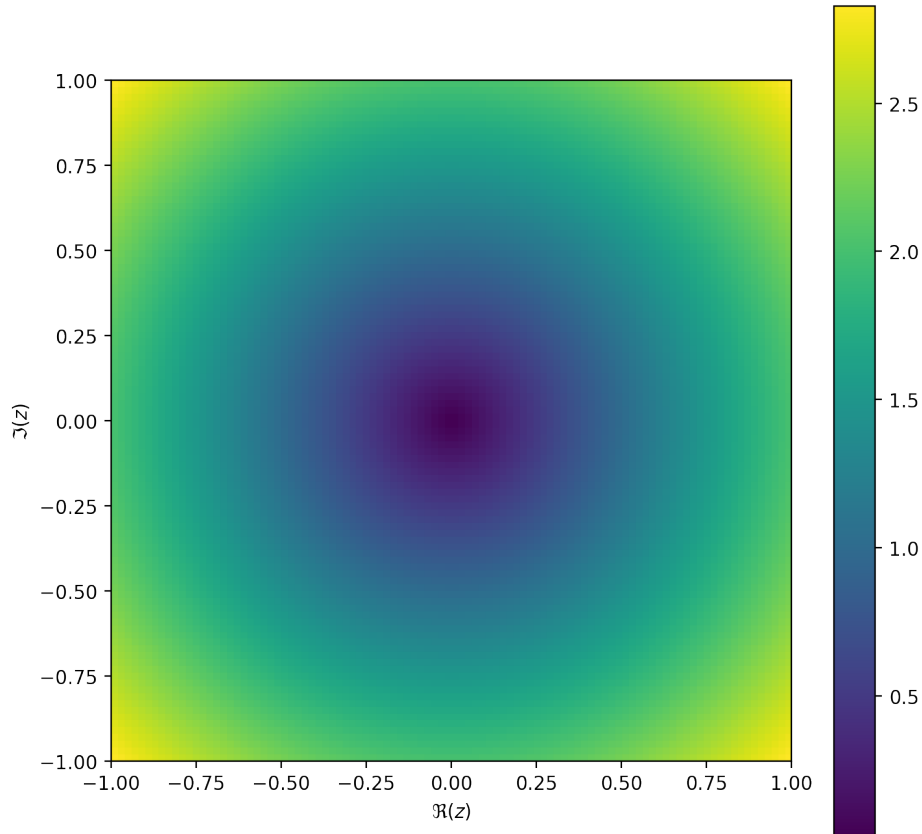


Рис. 10: Профиль показателя преломления, соответствующий $w(z) = z^2$