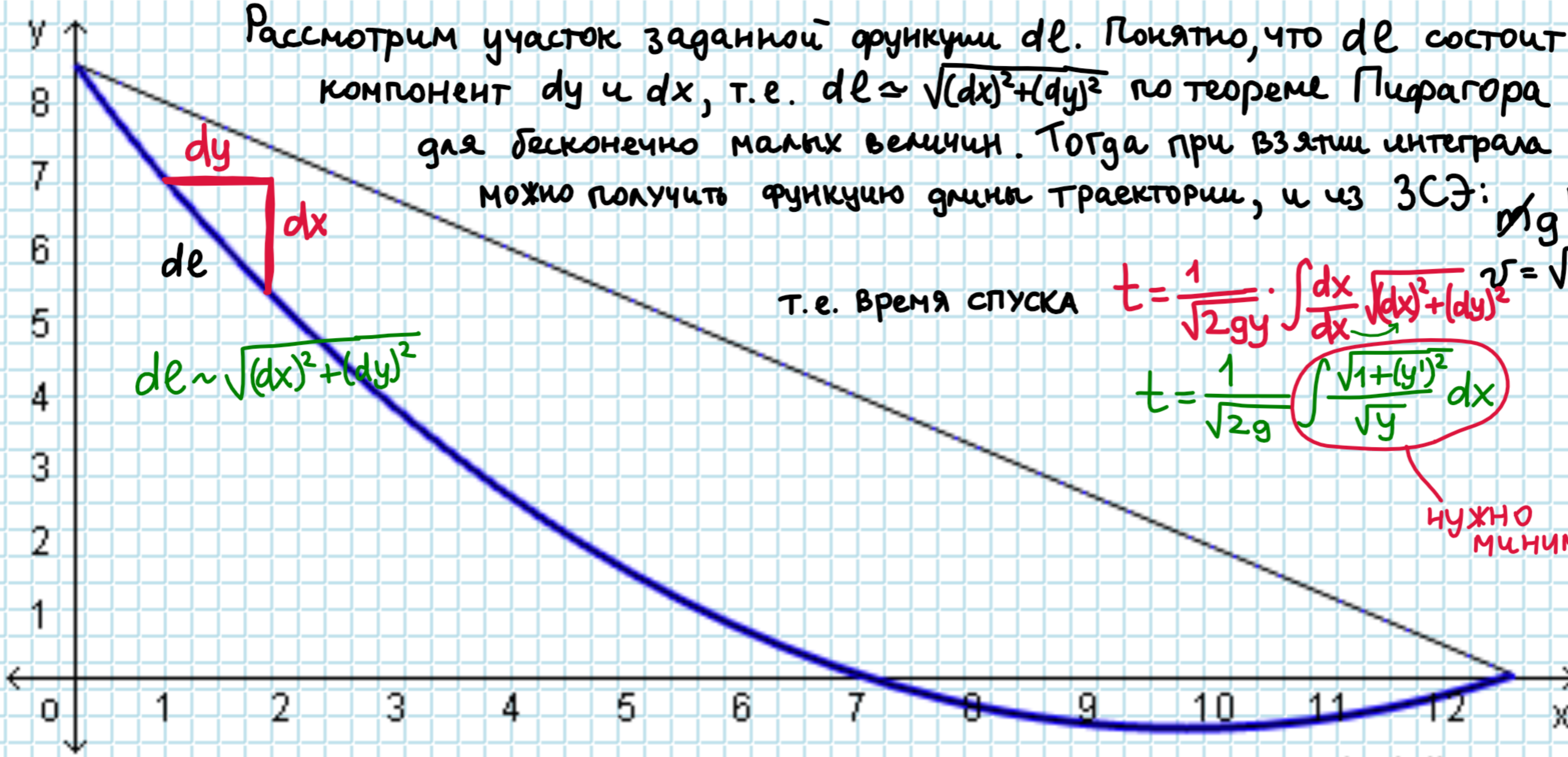
Лопатенко Георгий М3102

Задача о брахистохроне.



Рассмотрим участок заданной функции dl. Понятно, что dl состоит из компонент dy и dx, т.е. $dl \simeq \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ по теореме Пифагора для бесконечно малых величин. Тогда при взятии интеграла $\int_0^L dl = L$ можно получить функцию длины траектории, и из ЗСЭ: $\cancel{m}gh = \frac{\cancel{m}v^2}{2}$

$de \sim \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

$v = \sqrt{2gh}$

т.е. время спуска $t = \frac{1}{\sqrt{2gy}} \cdot \int \frac{dx}{dx} \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}\, dx$$

нужно минимизировать

тогда пусть $y(1+y'^2) = C$, по минимизации (уравнения Эйлера-Лагранжа)

отсюда $y' = \sqrt{\frac{C-y}{y}}$ и $\exists\ y = C\sin^2\frac{t}{2}$, $t \in \mathbb{R} \longrightarrow y' = C \cdot \cancel{2} \sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \cdot t' = \sqrt{\frac{C-y}{y}}$, где $t' = \frac{dt}{dx}$

$$y' = C\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} \cdot \frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{C - C\sin^2\frac{t}{2}}{C\sin^2\frac{t}{2}}} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}}$$

$$y' = C\sin\frac{t}{2}\cancel{\cos\frac{t}{2}}\frac{dt}{dx} = \frac{\cancel{\cos\frac{t}{2}}}{\sin\frac{t}{2}} \Rightarrow dx = C\sin^2\frac{t}{2}\,dt$$

тогда $x = \int dx = \frac{C}{2}(t - \sin t) + C_1$

и $y = C\sin^2\frac{t}{2} = \frac{C}{2}(1-\cos t)$

а это и есть общий вид циклоиды (брахистохроны)