10.157 $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{\sin nx}{1+nx}$, $x\in[0;\pi] \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{1+nx}=0$ $(x\in(0;\pi])$ так как гармоническая функция ограничена и при $x=0$ значение предела тоже обнуляется (выполнено необходимое усл. равномерной сходимости)

однако по признаку Коши: $\exists\varepsilon>0:\ \forall N\ \exists p,n\ (n>N) \Rightarrow \sum\limits_{\substack{k=n+1 \\ x_n\in[0;\pi]}}^{n+p}\frac{\sin kx_n}{1+kx_n}\geqslant\varepsilon\ (n<k\leqslant n+p)$

$\to x_n=\frac{\pi}{6n}$

$\hookrightarrow \underset{(k\in(n;5n])}{\sin kx_n\geqslant\frac{1}{2}} \Rightarrow \left|\sum\limits_{k=n+1}^{5n}\frac{\sin kx_n}{1+kx_n}\right|\geqslant\frac{1}{2}\left|\sum\limits_{n+1}^{5n}\frac{1}{1+kx_n}\right|>\frac{1}{2}\cdot 4n\cdot\frac{1}{1+\frac{5\pi}{6}}=\varepsilon$ т.е. сходимость неравномерная

или $0\leqslant f_n(x)=\frac{\sin nx}{1+nx}\cdot\frac{n}{n}\leqslant\frac{n}{(1+nx)n}\leqslant\frac{1}{n}$ и для выполнения $f_n(x)<\varepsilon$ достаточно $n>\frac{1}{\varepsilon}$ $\forall x$

10.160 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2x^n-x^{2n})$, $x\in[0;1)$

$\to \lim\limits_{n\to\infty}f_n(0)=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(1)=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\x=1}}2x^n-\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\x=1}}x^{2n}=1\neq0 \longrightarrow \{f_n(1)\}$ не сходится (метод граничной точки) т.е. сходимость ряда неравномерная

10.162 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ на $x\in(-1;1)$

$\to \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{1+1^{2n}}\neq0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^n}{1+1^{2n}}\neq0$ равномерной сходимости нет (на $(-1;1)$ сходимость поточечная)

10.170 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}xe^{-n^2x^2}$ на $(0;+\infty)$ сход. неравномерно по критерию Коши, если $\exists\varepsilon>0\ \forall N:\exists n>N\ \exists p\in\mathbb{N}\ \exists x_n\in E$ $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}x_ne^{-k^2x_n^2}\right|>\varepsilon$

$u(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{e^{n^2x^2}}$ $\quad \to \underset{p=2n}{x_n=\frac{1}{n}}$ $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{3n}\frac{x_n}{e^{x_n^2k^2}}\right|\geqslant\frac{1}{en}\cdot 2n=\frac{2}{e}=\varepsilon$ $\quad n<k\leqslant n+p$, $p=2n$

10.174 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}}$ на $[-1;1]$

сход. равномерно по Вейерштрассу: $\left|\frac{x^n}{n\sqrt{n}}\right|\leqslant\frac{1}{n\sqrt{n}}$ на $[-1;1]$ и $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ сходится

10.179 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$ на $(-2;+\infty)$ по Вейерштрассу: $\left|\frac{(-1)^n}{x+2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^n}$ на $[0;+\infty)$ и $\sum\limits_{\substack{n=1\\x\in(-2;0)}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$ требует формальностей по Коши

10.195 $\sum\limits_{\substack{n=1\\x\in[-1;1]}}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n}}{2n-1}$; $R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{2n-1}}}=\infty$ (абсолют. сх. по т. Коши-Адамара)

последовательность $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}$ монотонно сход. к нулю $(n\to\infty)$, и $\left\{\sum\limits_{\substack{k=1\\x\in[-1;1]}}^{n}x^k\right\}$ равномерно ограничена тогда признак Дирихле выполнен. $\hookrightarrow$ равномерн. сход.

10.196 $\sum\limits_{\substack{n=1\\x\in[1;+\infty)}}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n+x}$

10.204 $\sum\limits_{\substack{n=1\\x\in[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}]}}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot2^n}$ $u(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\x\in[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}]}}\frac{x^n}{n\cdot2^n}=0$ $\quad R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n\cdot2^n}}}=\infty$ (абс. сход. по т. Коши-Адамара)

применим критерий равномер. сходимости: $\alpha_n=\sup\limits_{|x|\leqslant\frac{3}{2}}\left|\frac{x^n}{n\cdot2^n}-0\right|=\frac{3^n}{n\cdot2^{2n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

10.208 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{1+n^2}$, $x\in\mathbb{R}$

$u(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{1+n^2}=0$ $\quad \to \underbrace{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}}_{\text{сход.}}\geqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{1+n^2}$ по признаку Вейерштрасса показывается равномер. сход.

Коши: $\forall\varepsilon>0\ \exists M(\varepsilon):\ \forall n>N$ $f_n(x)\in U_\varepsilon(u_n(x))$ $\quad u(x)=0=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{1}^{n}u_n(x)\right)$

$f_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$

$\forall i:\ |u_i|\leqslant\frac{1}{1+n^2}$

10.219 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x}{n+x}$ а) $x\in[0;1]$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot x}{n+x}\right|=0$

и по критерию равн. сход.: $\alpha_n=\sup\limits_{x\in[0;1]}\left|\frac{x}{n+x}-0\right|=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ $\Big\}$ т.е. сходится равномерно на $[0;1]$

б) $x\in(1;+\infty)$

Коши: $\exists\varepsilon>0\ \forall N\ \exists x_n\in E\ \exists n>N\ \exists p\in\mathbb{N}$ $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{x_n}{k+x_n}\right|>\varepsilon$, $\exists x_n=n$, $p=6n$ $\Rightarrow\left|\sum\limits_{k=n+1}^{7n}\frac{n}{k+n}\right|\geqslant 6n\cdot\frac{n}{7n+8n}=\varepsilon$

10.247 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) \longrightarrow R_1=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}}=\left[e^{\lim_{n\to\infty} n\ln(n)}=e^0\right]=1$; $R_2=\dots$ т.е. множество сходимости $|x|\leq 1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\sim\frac{1}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty;\,|x|\leq 1} f_n=0$ и формально линейная комбинация равномерно сходящихся ф. рядов

10.260 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n^x} \longrightarrow$ показательное выражение растёт быстрее степенного, т.е. область сходимости $x\in\mathbb{R}$

$\hookrightarrow x\in[0;+\infty)$

неравномерная сходимость по критерию Коши: $\exists\varepsilon>0\ \forall N\ \exists x_n\in E\ \exists p\in\mathbb{N}\ \exists n>N\ \left|\sum_{k>n}^{n+p}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{k^{x_n}}\right|>\varepsilon$

$\exists p=3n=x_n \longrightarrow \dots\geq\frac{3n}{6n^{3n}}=\varepsilon$

10.353 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \longrightarrow R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}=1$; $x_0=0\Rightarrow|x|<1$; $\left\{\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^n\,\middle|\,x=1\right\}$ – расход.

на $|x|<1$ равномерная сходимость по Коши

10.354 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}x)^n \longrightarrow R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\sqrt{n})^n}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}}=0$ точечная сходимость при $x\equiv 0$, нулевой радиус сходимости

10.355 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \longrightarrow R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}}=1$; $\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\,\middle|\,x=1\right\}\sim\left\{\frac{1}{n}\right\}$

$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\,\middle|\,x=-1\right\}\sim\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}=\ln 2$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^n$

$\hookrightarrow \int_0^x\frac{dk}{1+k}=\int_0^x(1-k+k^2\dots)dk$

$x\in[-1;1)$

10.356 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n\ln^2 n} \longrightarrow R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n\ln^2 n}}}=1$; $\left\{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}<\left\{\frac{1}{n^2}\right\}\right\}$ и по Лейбницу для $x=-1$ $\Big\}$ $|x|\leq 1$ равномерная сходимость по признаку Дирихле

$n\left(n-1-\frac{(n+1)^2}{2}+\frac{(n+1)^3}{3}\dots\right)^2$

10.357 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n!}\,x^n \longrightarrow R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt{n!}}}=0$ $\longrightarrow \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n!}\,x^n\,\middle|\,x=0\right\}\sim 0$

10.638 $y(0)=1$, $x_0=0$

$y'=y^2-x\,\big|_{x=x_0}=(y(0))^2-0=1$

$y\simeq y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$

тогда будем почленно дифференцировать: $y''=2y\cdot y'-1\,\big|_{x=x_0}=1$; $y'''=y'\cdot 2y'+2yy''=4$; $y^{IV}=4y''y'+2y''y'+2yy'''=14$

в этом случае: $y=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{12}x^4+O(x^5)$

10.639 $x_0=0$; $y(0)=1$; $y'=x^2-y^2\,\big|_{x=x_0}=-1$; $y''=2x-2yy'\,\big|_{x=x_0}=2$; $y'''=2-2yy''-2y'y'=-4$; $y^{IV}=-2y''y-2y'y''-4y'y''=20$

тогда $y=1-x+x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{6}x^4+O(x^5)$

10.640 $x_0=0$; $y(x_0)=1$

$y'(x_0)=x^3+y^2\,\big|_{x_0}=1$; $y''(x_0)=3x^2+2yy'\,\big|_{x=x_0}=2$; $y'''(x_0)=6x+2yy''+2y'y'\,\big|_{x=x_0}=6$; $y^{IV}(x_0)=6+2yy'''+2y'y''+4y'y''=30$

$y=1+x+x^2+x^3+\frac{5}{4}x^4+O(x^5)$

10.662 $x_0=0$; $y''+xy'+y=0$

$\exists\, y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\Rightarrow y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$; $y''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$ и при подстановке в искомый диффур:

$\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=0$; тогда из метода неопр. коэфф

при x^0: $2a_2=0$ при x^2: $12a_4+3a_2=0$

при x^1: $6a_3+2a_1=0$ при x^3: $20a_5+4a_3=0$

...

$$y=C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$$

10.779 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$; $\longrightarrow R=+\infty$

$\exists\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=S(x)$, тогда $S(0)=1$; $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$; $S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$; $S'''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!}=S(x)$

$S'(0)=0$ $S''(0)=0$

то есть сумма исходного ряда удовлетворяет диффуру:

$S'''(x)=S(x)$ $\longrightarrow$ $S(x)=C_1e^x+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-C_3\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$; $S(0)=C_1-C_3=1$

$S'(x)=C_1e^x-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x-C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$; $S'(0)=C_1+\frac{1}{2}C_3+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2=0$

$S''(x)=C_1e^x+\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x-C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{3}{4}C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{4}C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$; $S''(0)=C_1+\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)C_2+\frac{3}{4}C_3$