02.05.2022 Лопатенко Георгий М3102

Контрольная работа

① Вычислить интегралы:

а) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} \overset{u=e^x}{\underset{du=e^x dx}{=}} \int\limits_{\dots}^{\dots} \frac{du}{1+u^2} = arctg(u)\Big|_{\dots}^{\dots} = arctg(e^x)\Big|_0^1$

подстановка валидна, так как заменяемая функция непрерывна и дифференцируема на отрезке интегрирования $[0;1]$.

т.е. выражение $arctg(e^x)\Big|_0^1 = arctg\, e - \frac{\pi}{4}$

Ответ: $arctg\, e - \frac{\pi}{4}$.

б) $\int_0^{\pi/4} tg^3 x\, dx$

для тригонометрических функций существует формула рекуррентной зависимости для вычисления интеграла, так $\int tg^n x\, dx = \frac{1}{n-1} \cdot tg^{n-1} x - \int tg^{n-2} x\, dx$

то есть $\int tg^3 x\, dx = \frac{1}{2} \cdot tg^2 x - \int tg x\, dx$

но $\int tg x\, dx \overset{t=\cos x}{\underset{\substack{\text{~~t \dots~~} \\ t \text{ непрерывна} \\ dt=-\sin x\, dx}}{=}} \int -\frac{1}{t} dt = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|\cos x| + C$

тогда $\int_0^{\pi/4} tg^3 x\, dx = \frac{tg^2 x}{2}\Big|_0^{\pi/4} + \ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/4} =$

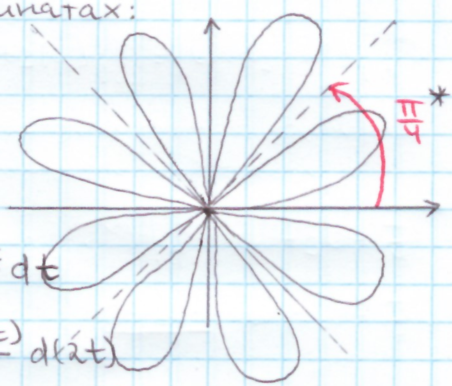
$= \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \ln(1)$

Ответ: $\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

③ Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$r = a\sin 4\varphi$$

Работаем в полярных координатах:



и формула для подсчёта площади такой ромашки:

$$S = 8\cdot\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2\sin^2 4\varphi\, d\varphi\right) =$$

$$= 4a^2\int_{\dots} \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= 4a^2\cdot\frac{1}{4}\int_{\dots}\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\cos 2t)}{2}\,d(2t)$$

$$= 4a^2\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 8\varphi}{16}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = 4a^2\cdot\frac{\pi}{8}$$

* $r_{max} = a$ (при $\varphi = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$)

тогда один лепесток лежит в $\varphi\in[0; \frac{\pi}{4}]$

Ответ: $\frac{\pi}{2}a^2$

---

④ Вычислить длину дуги кривой $y = 1 - \ln(\cos x)$ от $x_1 = 0$ до $x_2 = \frac{\pi}{6}$

Заметим, что длина дуги кривой в декартах выражается $L = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$ при непрерывной функции отрезка $[0; \frac{\pi}{6}]$ в значения $y(x_0)$, где $x_0 \in [0; \frac{\pi}{6}]$

$$L = \lim_{\max(\Delta l_i)\to 0}\sum^{n}\Delta l_i, \quad \Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

тогда и приходим к формуле для L.

$$L = \int_0^{\pi/6}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/6}\frac{\cos x}{\cos x\cdot\cos x}\,dx = \int_0^{\pi/6}\frac{du}{1-u^2} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|$$

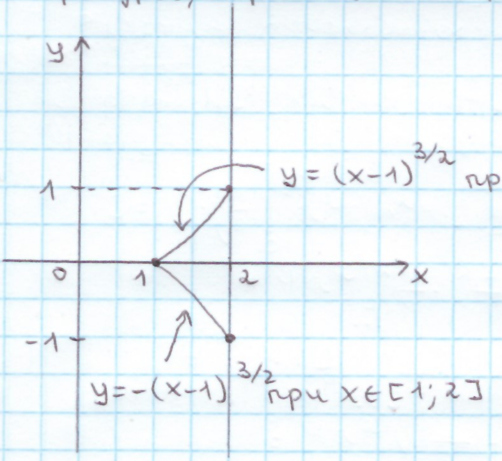
$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|\Bigg|_0^{\pi/6} = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln 3$$

Ответ: $\frac{\ln 3}{2}$

КР

Лопатенко Георгий
М3102

(5) Определить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривыми $y^2=(x-1)^3$ и $x=2$ вокруг оси OX.



нас просят найти объём тела, образованного вращением вокруг оси OX:

$$|V^{OX}|=\int_1^2 \pi y^2(x)\,dx$$ через цилиндры

то есть $|V^{OX}|=\int_1^2 \pi(x-1)^3dx=\pi\cdot\frac{(x-1)^4}{4}\Big|_1^2=\frac{\pi}{4}.$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$

---

(2) Выразить пределы через определённый интеграл и вычисл.:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^{1/n}}{n+1}+\frac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$$

перепишем выражение:

$$\int_a^b f(x)dx \underset{\substack{\text{при}\\ a_n\to 0\\ n\to\infty}}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum^{n}a_i\right)$$

$\exists\ a_i=f(\xi_i)\Delta x_i$ при дроблении $[a;b]$ на n одинаковых частей $\Delta x_i=\frac{|b-a|}{n}\longrightarrow 0$ (при $n\to\infty$), тогда если $\xi_i\in$ $\in[x_i,x_{i+1}]$, то $\xi_i=x_i=i\cdot\frac{|b-a|}{n}+a$ (для простоты)

тогда $\underbrace{\left(\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}\cdot\frac{n}{|b-a|}\right)}_{f(\xi_k)}\cdot\frac{b-a}{n}\underset{\exists a=0}{=}$ … начну сначала $\longrightarrow$

продолжение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k/n}\cdot k}{k+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k/n}\cdot k}{k}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{nk}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{k/n}\cdot\Big(1\underbrace{-\frac{1}{nk}+O\big(\big(\tfrac{1}{nk}\big)^2\big)}_{O\left(\frac{1}{n}\right)}\Big)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}2^{k/n}+\sum_{k=1}^{n}O\big(\tfrac{1}{n}\big)\Big)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{k/n}=$$

$$=\int_0^1 2^x\,dx=\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1=\frac{1}{\ln 2}$$

Ответ: $\frac{1}{\ln 2}$

ох, боже

последняя

страница 4/4