
Группа	<u>М32021</u>	К работе допущен	<u></u>
Студент	<u>Лопатенко</u>	Работа выполнена	<u>15.05.2023</u>
Преподаватель	<u>Тимофеева Э.О.</u>	Отчет принят	<u></u>

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №5.IBM.m

Квантовые алгоритмы

1. Цель работы:

Получить навыки разработки квантовых алгоритмов в системе IBM Quantum.

2. Задачи, решаемые при выполнении работы:

- Изучить и реализовать алгоритм квантовой телепортации от Алисы к Бобу кубита в состоянии суперпозиции ($\sqrt{0.55}|\emptyset\rangle + \sqrt{0.45}|1\rangle$);
- Реализовать функцию $f = 49 \bmod 15$, выполнить симуляцию и обосновать.

3. Объект исследования:

Квантовый компьютер, распределение вероятности многокубитных цепей.

4. Метод экспериментального исследования:

Реализация алгоритмов на квантовых цепочках, проведение моделирований.

5. Выполнение упражнения №1:

Реализовать алгоритм квантовой телепортации от *A* к *B* кубита ($\sqrt{0.55}|0\rangle + \sqrt{0.45}|1\rangle$)
 Постановка задачи достаточно проста: у носителя информации **Алисы** есть дорогая ее сердцу система из одного кубита в состоянии суперпозиции ($\sqrt{0.55}|0\rangle + \sqrt{0.45}|1\rangle$), а для получателя информации **Боба** важно воспроизвести то же распределение вероятности между ортогональными состояниями подконтрольного кубита.

Для осуществления передачи у **Алисы** остается **подконтрольный кубит** $|\psi_A\rangle: (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$, введем еще два кубита в запутанном (entanglement) состоянии $|\psi_{AB}\rangle: \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$.

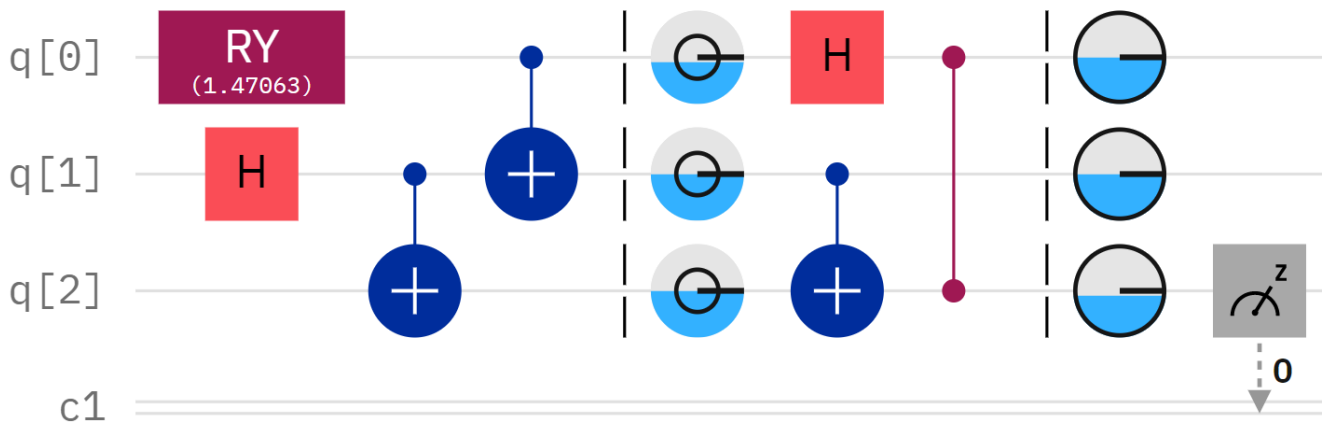
Далее алгоритм описывается следующим образом: **Алиса** совершает операцию контролируемой инверсии (контролирующим кубитом будет выступать искомый кубит) то есть система из состояния $|\psi_{AAB}\rangle: \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle + \beta|111\rangle)$ перешла в состояние $X|\psi_{AAB}\rangle: \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|110\rangle + \beta|101\rangle)$.

Затем на **подконтрольном кубите** применяется оператор Адамара, то есть состояние системы: $HX|\psi_{AAB}\rangle: \frac{1}{2}(\alpha|000\rangle + \alpha|100\rangle + \alpha|011\rangle + \alpha|111\rangle + \beta|010\rangle - \beta|110\rangle + \beta|001\rangle - \beta|101\rangle)$.

Для ясности можно оставить лишь кубит **Боба**:

$$\frac{1}{2}(|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle))$$

Тогда становится понятно, что под действием контролируемых гейтов *X* и *Z* можно выделить на кубите получателя искомый кубит носителя информации.



	Frequency (quantity)		Frequency (out of 1)	
Shots	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
2048	911	1137	0.4458	0.5552

Результаты симуляции подтверждают факт телепортации кубита: так, измерения на кубите получателя дают то же распределение вероятности по ортогональным состояниям, что и сконфигурированное на кубите носителя.

6. Выполнение задания №2:

Реализовать функцию $f = 49 \bmod 15$ и выполнить симуляцию с анализом результатов.

Квантовый алгоритм факторизации Шора использует квантовое преобразование Фурье.

В нашем случае факторизация проводится для $N = 15$, тогда из теории чисел найдем

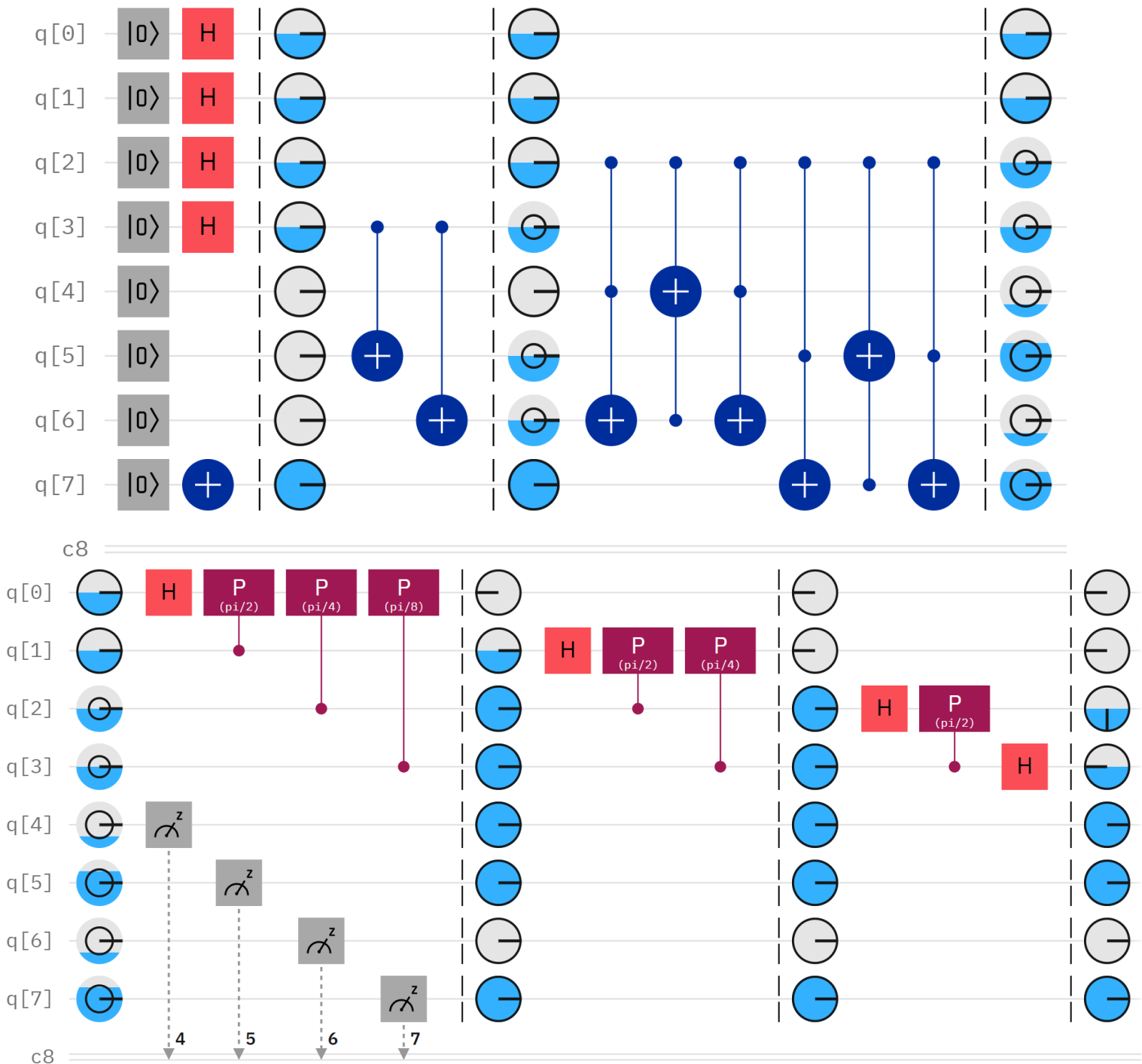
функцию Эйлера $\Phi(15) = (5 - 1)(3 - 1) = 8$, то есть $f(x) = 7^x \bmod 15$

Однако функцию можно записать в виде: $f(x) = (7^8)^{x_3} \cdot (7^4)^{x_2} \cdot (7^2)^{x_1} \cdot (7^1)^{x_0} \bmod 15$

Поскольку $(7^8)^{x_3} \bmod 15 = (7^4)^{x_2} \bmod 15 = 1$ и $(7^2)^{x_1} \bmod 15 = 4^{x_1} \bmod 15$

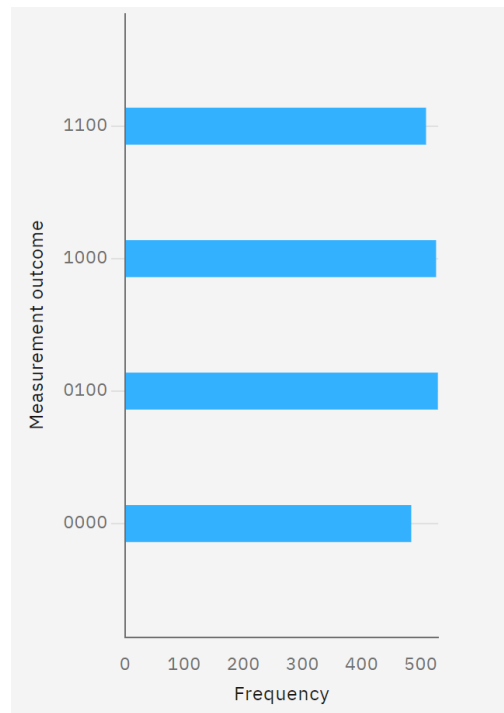
искомая функция $f(x) = 4^{x_1} \cdot 7^{x_0} \bmod 15$.

Посмотрим на реализацию алгоритма Шора, где всю цепочку можно условно разделить на три блока по двум четырех-разрядным регистрам: умножение регистра на 7, умножение регистра на 4 и квантовое преобразование Фурье.



На системе подготовленных регистров ($q_0 q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6 q_7 = x_4 x_3 x_2 x_1 y_4 y_3 y_2 y_1$) необходимо осуществить умножение на 7 (между первой и второй цепочкой фазовых дисков) а после умножение на 4 (между второй и третьей цепочкой дисков). Затем осуществляется квантовое преобразование Фурье.

Результаты проведенной симуляции:



Можно обратить внимание на распределение вероятности по состояниям, соответствующим спектру $\sigma_n = \{0; 4; 8; 12\}$. Тогда заметим, что для всех

значений из спектра $\frac{jM}{r} \rightarrow \frac{j2^m}{r} = n$, подробнее:

$$j = 1 \rightarrow \frac{2^4}{r} = 4 \text{ то есть период } r = 4$$

$$j = 2 \rightarrow \frac{2 \cdot 2^4}{r} = 8 \text{ то есть период } r = 4$$

$$j = 3 \rightarrow \frac{3 \cdot 2^4}{r} = 12 \text{ то есть период } r = 4$$

Поэтому результатам симуляции не стоит удивляться, то есть теперь при известном периоде факторизация проводится вручную:

$$GCD(7^{r/2} + 1; 15) = GCD(50; 15) = 5$$

$$GCD(7^{r/2} - 1; 15) = GCD(48; 15) = 3$$

факторизация завершена.

Представим также более компактную схему с меньшим количеством блоков умножений и другой реализацией квантового преобразования Фурье:

