Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский университет ИТМО"

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Дополнительные главы физики

Задание после лекции 13.03.2023

"Потенциальные ямы и барьеры"

Выполнил:
Лопатенко Г. В., M32021

Преподаватель:
Музыченко Я. Б.

Март, 2023

Содержание

1 Гармонический осциллятор и барьеры

Вывести выражения для энергии гармонического осциллятора. Вывести значение коэффициента прозрачности для ступенчатого потенциального барьера.

1.1 Энергия гармонического осциллятора

В квантовой механике нет классического понятия квазиупругой силы, поэтому гармонический осциллятор следует определить как частицу с потенциальной энергией $U(x)$.
Как было сказано на лекции, стоит начать с пояснения, что для физической модели выполняется условие симметрии, тогда на бесконечных значениях разного знака тождество $U(\infty) = U(-\infty)$ тоже сохранится, что с успехом характеризует одномерную потенциальную яму.
Запишем тогда стационарное уравнение Шрёдингера:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + \left(E - \frac{kx^2}{2}\right)\Psi = 0$$

Заметим, что $\Delta = \nabla^2$, перепишем:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{kx^2\psi}{2} = E\psi$$

И при введении безразмерных величин:

$$\lambda = \frac{2E}{m} \quad \text{и} \quad \xi = x\sqrt{\frac{k}{\hbar\omega}}$$

уравнение принимает вид:

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \xi^2\psi = \lambda\xi$$

которому при определенном параметре λ соответствует решение $\psi = e^{\alpha\xi^2}$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = 2\alpha\xi e^{a\alpha\xi^2} = 2\alpha\xi\psi$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} = 2\alpha\psi + 2\alpha\xi\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = \left(4\alpha^2\xi^2 + 2\alpha\right)\psi$$

Тогда при подстановке в искомое уравнение:

$$\forall \xi : \quad \left(1 - 4\alpha^2\right)\xi^2 - 2\alpha = \lambda \quad \longrightarrow \quad \alpha = \pm 1/2, \ \lambda = -2\alpha$$

Решению $\psi = e^{-\xi^2/2}$ соответствует энергия нулевых колебаний $E_0 = \hbar\omega/2$. В стационарном состоянии с энергией E_n решение должно иметь n узлов:

$$\psi = P_n(\xi)\, e^{-\xi^2/2}$$

Повторяя процедуру поэтапного дифференцирования и подставляя выражения в искомое стационарное уравнение можно прийти к результату:

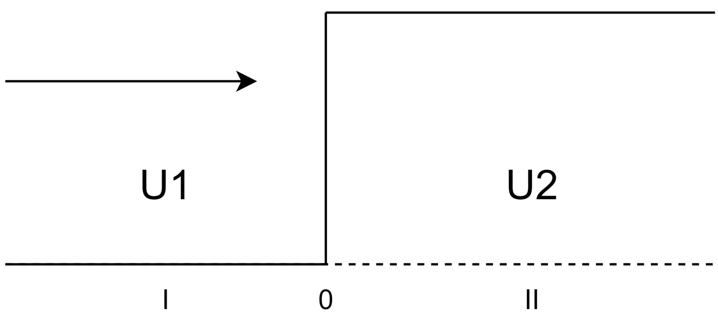
$$-P_n''(\xi) + P_n'(\xi) = (\lambda - 1)P_n(\xi)$$

Здесь стоит заметить, что решениями будут полиномы Чебышева-Эрмита. А из последнего тождества видно (по сравнению коэффициентов при старших членах), что уравнение разрешимо при $\lambda = 1 + 2n$. Наконец и получили значения для эквидистантных энергетических уровней:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \ \ n \geq 0$$

1.2 Пропускаемость ступенчатого потенциального барьера

К барьеру!



Традиционно ступенчатым считается потенциальный барьер, где потенциальная функция скачком изменяется при переходе в соседнюю область. Пусть поток частиц налетает на одну из таких границ, при этом $U_2 > U_1$. Логично было бы предположить, что частицы, обладающие достаточным уровнем запасенной энергии, могут пройти границу областей с уменьшением кинетической энергии, а в противном случае абсолютно упруго отразятся. Но как было замечено, в квантовой механике логика специфична: например, волновое поведение, описываемое в уравнении Шрёдингера, при переходе к движению частиц (по волновым функциям) имеет вероятностный характер наличия частицы в определенной области. Запишем тогда спасительное стационарное уравнение Шрёдингера:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0$$

Введем дополнительные обозначения:

$$\alpha_i = \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_i), \quad i \in \{1, 2\}$$

И представим монохроматическую волну по волновой функции:

$$\psi_1 = e^{i(\alpha_1 x - \omega t)}$$

Также существующие отраженная и проходящая волны:

$$\psi_1' = re^{-i(\alpha_1 x + \omega t)} \quad \text{и} \quad \psi_2 = de^{i(\alpha_2 x - \omega t)}$$

Остается лишь подтвердить непрерывность волновой функции и ее производной на границе двух областей, отсюда условия:

$$1 + r = d \quad \text{и} \quad \alpha_1 - \alpha_1 r = \alpha_2 d$$

Нам необходимо рассмотреть амплитудный коэффициент пропускания:

$$d = \frac{2\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

Коэффициент прозрачности определяется по плотности (вероятностни):

$$D = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot d^2 = \frac{4\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}$$

1. Сивухин, Атомная и ядерная физика. П23: Гармонический осциллятор

2. Сивухин, Атомная и ядерная физика. П28: Потенциальные барьеры

2 Туннельный эффект

Приведите примеры использования туннельного эффекта

Туннельный эффект хорошо ложится в восприятие, если рассуждать с точки зрения вероятности нахождения частицы в определенной области. Интересно, что классическая физика просто не допускает преодоление потенциального барьера, поэтому и речи о вероятностях там нет. Например, знакомое со школьной физики явление альфа-распада является на самом деле строго квантовым процессом, так как альфа-частица в виде $^{4}_{2}\boldsymbol{He}$ испытывает именно туннельный переход через потенциальный барьер, создаваемый сильным (ядерным) взаимодействием. А принцип альфа-распада заложен в теоретико-технический комплекс лучевой терапии (разрушение раковых клеток). Также альфа-распад (или в этом контексте уже квантовый туннельный эффект) можно встретить и в техническом оснащении удаленных (космическое или водное пространство) лабораторий и станций: например, металлы в составе источников питания.

Далее речь пойдет о сканирующем туннельном микроскопе, поэтому не привести этот пример было бы глупо. Между рассматриваемой поверхностью и иглой (щупом) устройства можно установить относительно малое напряжение, тогда при движении иглы над топологически неровным ландшафтом изделия можно регистрировать туннельный ток. Есть преимущественно два подхода в построении принципов работы таких микроскопов: либо поддерживать постоянные значения по току, либо по настройке иглы, – поэтому измерять приходится либо конфигурацию щупа, либо картину изменений тока соответствено.

3 Щуп сканирующего туннельного микроскопа

By how much does the tunneling current through the tip of an STM change if the tip rises $h_0 = 0.02\,nm$ from some initial height above a sodium surface with a work function $W_0 = 2.28\,eV$?

Допустим некоторое упрощение: пусть работа по выходу электронов с поверхности натрия пойдет только преодоление потенциального барьера, тогда вспомним из первого задания про потенциальные барьеры.
Необходимо заметить, что изменение туннельного тока представимо:

$$\frac{I_T}{I_{T0}} = exp\left(-2h\frac{\sqrt{2m\,(E-U_0)}}{\hbar}\right)$$

В нашем случае работа выхода $W_0 = E - U_0$.
В задаче необходимо дать ответ, на сколько значение туннельного тока изменилось, поэтому нас будет интересовать величина:

$$\sigma_{rel} = \left|1 - exp\left(-2h_0\frac{\sqrt{2m\,(W_0)}}{\hbar}\right)\right| \cdot 100\%$$

Посчитаем:

$$\sigma_{rel} = \left(1 - exp\left(-2 \cdot 2 \cdot 10^{-11}\,\frac{\sqrt{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}\,(2.28 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19})}}{6.63 \cdot 10^{-34}/2\pi}\right)\right) \cdot 100\% = 26.57\%$$

Положительное значение соответсвует спаду туннельного тока на 26.57%.

1. Сканирующая туннельная микроскопия. Методичка СПБПУ