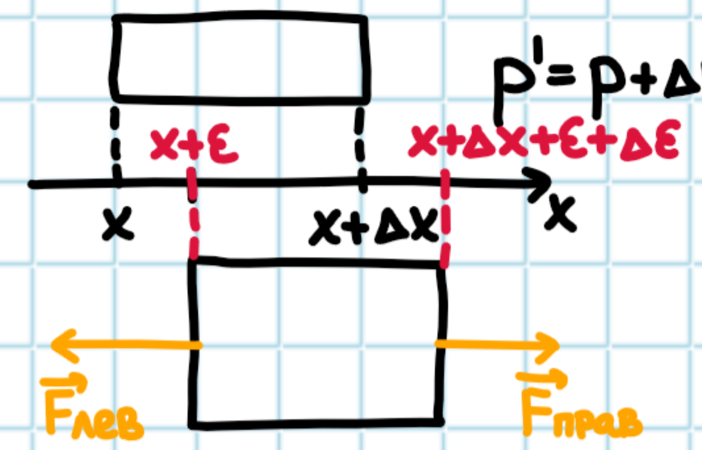
Контрольная работа №3

Лопатенко Георгий М32021

1. Рассчитайте смещение молекул воздуха от положения равновесия в звуковой волне, интенсивность которой равна порогу слышимости ($I_0 = 10^{-12}$ Вт/м²). Частота звука 1000 Гц ($=\nu$), плотность воздуха при нормальных условиях 1,29 кг/м³ ($=\rho$), скорость звука при 0^oC примерно равна 330 м/с. $=u$



Попробуем вывести волновое уравнение самостоятельно: при возникновении волнового движения объём газа деформируется на $\Delta x + \varepsilon$, сила давления газа на стенки выбранного нами объёма $\vec f = \vec F_{прав} + \vec F_{лев}$; $-p'(x+\Delta x+\varepsilon+\Delta\varepsilon)S + p'(x+\varepsilon)S = f = -\dfrac{p'(x+\Delta x+\varepsilon+\Delta\varepsilon) - p'(x+\varepsilon)}{\Delta x + \Delta\varepsilon}\cdot(\Delta x + \Delta\varepsilon)S$

и пусть $\Delta\varepsilon \ll \Delta x$, т.е. под действием волны частицы смещаются достаточно мало относительно начального положения $\rightarrow f = -\dfrac{\partial p'}{\partial x} S\partial x$

далее запишем второй закон Ньютона: $\underbrace{\rho S\partial x}_{m} \underbrace{\dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}}_{a} = -\dfrac{\partial p'}{\partial x} S\partial x \Rightarrow \rho\dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial p'}{\partial x}$ и из уравнения адиабаты

$p(\underbrace{S\Delta x}_{V_0})^\gamma = p'(S(\Delta x + \Delta\varepsilon))^\gamma$

$pS^\gamma\Delta x^\gamma = p'S^\gamma\Delta x^\gamma\left(1 + \dfrac{\Delta\varepsilon}{\Delta x}\right)^\gamma$

$\rightarrow p' = p\left(1 - \gamma\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right)$ *

* $\Delta p = p' - p = -\gamma p\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x} \Rightarrow (\Delta p)' = -p\gamma\dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}$

$\rightarrow \dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} = \gamma\dfrac{p}{\rho}\dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2} = u^2\dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2} \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0\cos(\omega t - \vec k\vec r)$ плоская гармоническая волна

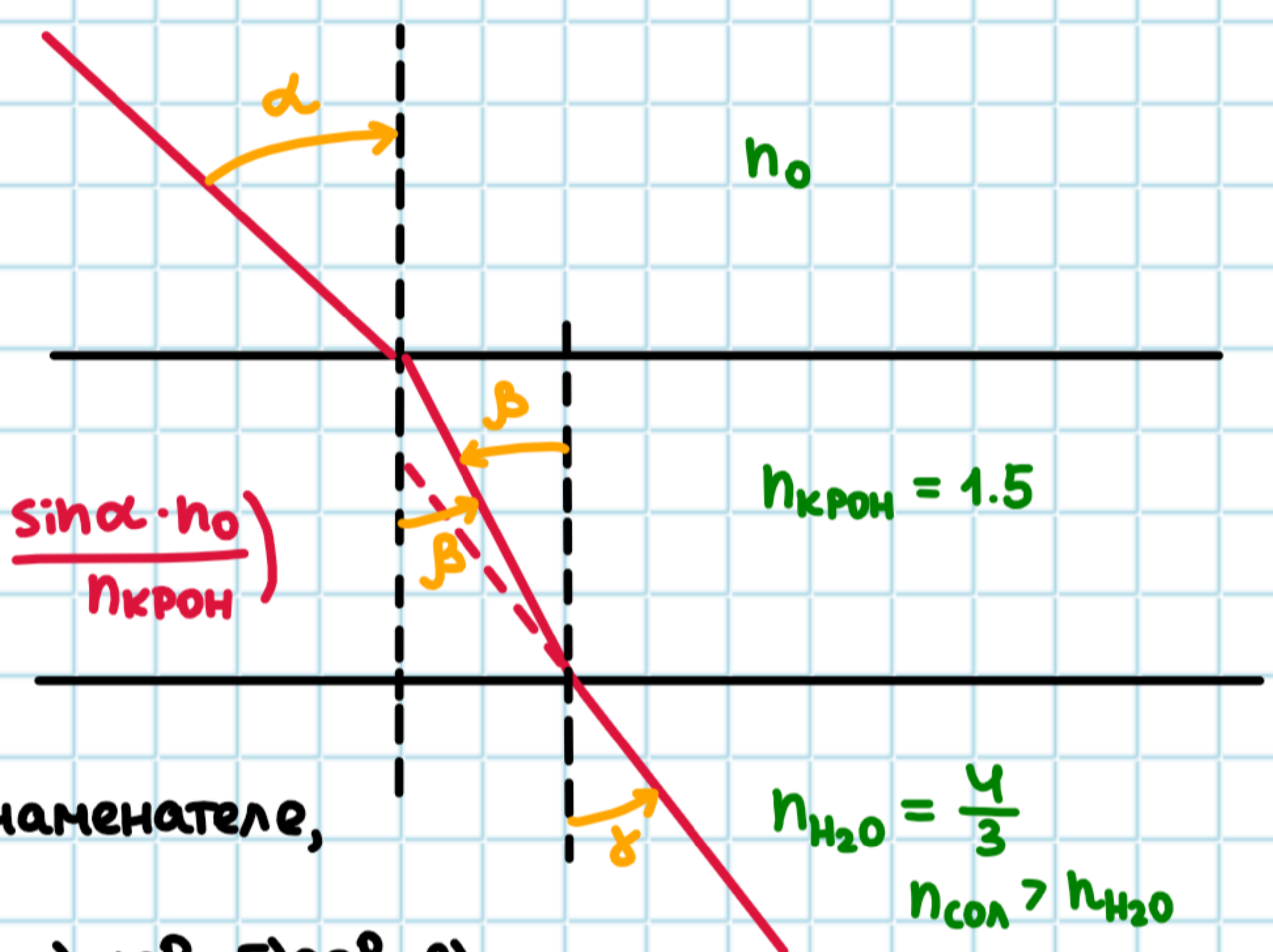
из известной нам скорости распространения и частоты, имеем: $\lambda = \dfrac{u}{\nu}$; $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi\nu}{u}$, интенсивность тоже дана и выражается $\langle I\rangle = \dfrac{\rho\omega^2\varepsilon_0^2 u}{2}$

отсюда $\varepsilon_0 = \sqrt{\dfrac{2I_0}{\rho u}}\cdot\dfrac{1}{2\pi\nu}$; $\varepsilon_0 = \sqrt{\dfrac{2\cdot10^{-12}\frac{Вт}{м^2}}{1.29\frac{кг}{м^3}\cdot330\frac{м}{с}}}\cdot\dfrac{1}{2\pi\cdot10^3 Гц} = 1{,}0909\cdot10^{-11}$ м $\approx 10^{-11}$ м

Ответ: 10^{-11} м

---

2. Аквариум, изготовленный из стекла сорта "крон наполнен пресной водой, (а) Каков угол преломления, когда свет проходит из воздуха и попадает в стекло под углом падения 30,0°? (б) Определите угол преломления, когда свет покидает и попадает в воду, (в) Если аквариум заполнен соленой водой, будет ли угол преломления больше или меньше, чем угол преломления для пресной воды?



а) Запишем закон Снеллиуса для границы сред воздух-крон: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{n_{крон}}{n_0} \longrightarrow \beta = \arcsin\left(\dfrac{\sin\alpha\cdot n_0}{n_{крон}}\right)$

б) закон Снеллиуса для границы крон-пресная вода: $\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \dfrac{n_{H_2O}}{n_{крон}} \rightarrow \sin\gamma = \dfrac{\sin\beta\cdot n_{крон}}{n_{H_2O}} = \dfrac{\sin\alpha\cdot n_0}{n_{H_2O}}$

в) показатель преломления солёной воды больше, чем пресной, однако в формуле для значения синуса показатель преломления водной среды стоит в знаменателе, поэтому для острых углов угол преломления в пресной воде будет больше, чем в солёной

$\beta = \arcsin\left(\dfrac{\sin30^\circ\cdot1}{1.5}\right) = \arcsin\dfrac{2}{7} \approx 19^\circ$; $\gamma = \arcsin\left(\dfrac{\sin30^\circ\cdot1}{4/3}\right) \approx 22^\circ$

Ответ: а) 19°; б) 22°; в) нет

---

4. Свет падает нормально на прозрачную дифракционную решетку ширины $l = 6{,}5$ см, имеющую 200 штрихов ($\leftarrow n$) на миллиметр. Исследуемый спектр содержит спектральную линию с λ=670,8 нм, которая состоит из двух компонент, отличающихся на $\delta\lambda$=0,015 нм. Найти: а) в каком порядке спектра эти компоненты будут разрешены; б) наименьшую разность длин волн, которую может разрешить эта решетка в области λ= 670 нм.

а) запишем критерий Релея: $R = \dfrac{\min(\lambda_1, \lambda_2)}{\delta\lambda} = mN$

тогда порядок, при котором компоненты будут разрешены $m = \dfrac{\lambda}{\delta\lambda\, l n} = \dfrac{670{,}8}{0{,}015\cdot6.5\cdot10^{-2}\cdot2\cdot10^5} = 3{,}44$, т.е. с $m = 4$

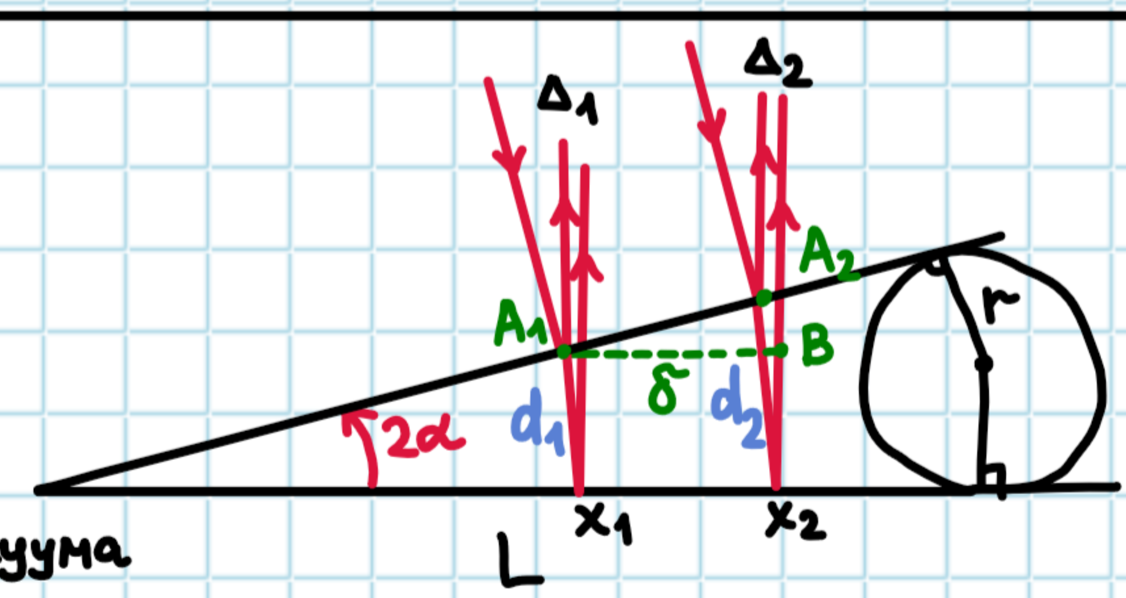
б) при $\lambda = 670$ нм $R_{max} = \dfrac{\lambda}{\delta\lambda_{min}} = m_{max}N = \dfrac{d\max(\sin\varphi)}{\lambda}N$

тогда $\delta\lambda_{min} = \dfrac{\lambda^2}{dN} = \dfrac{\lambda^2}{d\cdot\frac{l}{d}} = \dfrac{\lambda^2}{l} = \dfrac{670^2\cdot10^{-18}}{6{,}5\cdot10^{-2}} \approx 6{,}9\cdot10^{-12}$ м

Ответ: а) 4; б) $6{,}9\cdot10^{-12}$ м

---

3. Между краями двух хорошо отшлифованных плоских пластинок помещена тонкая проволочка диаметром 0,05 мм; противоположные концы пластинок плотно прижаты друг к другу. Пластинки освещаются нормально к поверхности. На пластинке длиной 10 см наблюдатель видит интерференционные полосы, расстояние между которыми равно 0,6 мм. Определить длину волны.



Будем считать, что показатель преломления равен показателю преломления вакуума

Пусть на рисунке обозначены две соседние интерференционные полосы, т.е. разности хода отличаются на λ: $\Delta_2 - \Delta_1 = \lambda$

Обозначим d_1 и d_2 толщину пластины в области рассматриваемых лучей, тогда разности хода: $\Delta_i = 2d_i n - \dfrac{\lambda}{2}$

на отражении от верхней пластины теряем $\dfrac{\lambda}{2}$. Расстояние между максимуми и есть ширина интерфер. полосы $x_2 - x_1$.

Тогда $\left(2d_2n - \dfrac{\lambda}{2}\right) - \left(2d_1n - \dfrac{\lambda}{2}\right) = \lambda = 2n(d_2 - d_1)$ (1) (и замечание о потере $\dfrac{\lambda}{2}$ не вносит изменения, однако при заполнении клина более опт. плотной средой это замечание критично)

Необходимо выразить $|A_1B|$ ($|A_2B| = d_2 - d_1$; $B\widehat{A_1}A_2 = \alpha$) $\Rightarrow \dfrac{|BA_2|}{|A_1B|} = \dfrac{d_2 - d_1}{\delta} = \text{tg}2\alpha$, при этом $\text{tg}\alpha = \dfrac{r}{L} = \dfrac{d}{2L}$

тогда $\dfrac{d_2 - d_1}{\delta} = \dfrac{2\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha} = \dfrac{d/L}{1 - \frac{d^2}{4L^2}} = \dfrac{4dL}{(4L^2 - d^2)} \xrightarrow{\text{в (1)}} \lambda = 2n\delta\cdot\dfrac{4dL}{4L^2 - d^2}$

$\lambda = 2\cdot0.6\cdot10^{-3}\cdot\dfrac{4\cdot5\cdot10^{-5}\cdot10\cdot10^{-2}}{4\cdot10^{-2} - 25\cdot10^{-10}} \approx 6\cdot10^{-7}$ м

Ответ: 600 нм.