

Группа М3102 К работе допущен \_\_\_\_\_  
Студент Лопатенко Георгий Валентинович Работа выполнена \_\_\_\_\_  
Преподаватель Тимофеева Э.О. Отчет принят \_\_\_\_\_

## Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №1.04

Равноускоренное вращательное движение. Маятник Обербека

### 1. Цель работы:

Изучить равноускоренное вращательное движение.

### 2. Задачи, решаемые при выполнении работы:

1. Получить данные измерений (построить экспериментальную выборку);
2. Проверить зависимость момента инерции от положения масс относительно оси вращения;
3. Экспериментально проверить основной закон динамики вращения, связывающего угловое ускорение вращающегося тела с моментами действующих сил.

### 3. Объект исследования:

Маятник Обербека: крестовина с перемещаемыми по спицам грузами-утяжелителями и груз, создающий натяжение нити и раскручивающий крестовину.

### 4. Метод экспериментального исследования:

Условные прямые измерения времени падения груза, раскручивающего крестовину.

### 5. Рабочие формулы и исходные данные:

- 1) Основной закон динамики вращения:  $I\varepsilon = M - M_{\text{тр}}$ , где  $I$  — момент инерции крестовины,  $\varepsilon$  — угловое ускорение крестовины,  $M$  и  $M_{\text{тр}}$  — моменты сил натяжения нити и трения на крестовине

- 2) Зависимость пройденного пути от времени при равноускоренном движении:

$$h = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2h}{t^2}$$

- 3) Связь между угловым ускорением и линейным ускорением груза:  $\varepsilon = \frac{2a}{d} = \frac{4h}{t^2 d}$ ,  
 $d$  — диаметр ступицы

- 4) Момент силы натяжения нити:  $M = \frac{md}{2} \left( g - \frac{2h}{t^2} \right)$

- 5) Момент инерции крестовины по т.Штейнера:  $I = I_0 + 4m_{\text{ут}} R^2$

- 6) Момент инерции крестовины с утяжелителями по МНК: 
$$I = \frac{\sum_{i=1}^N (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})(M_i - \bar{M})}{\sum_{i=1}^N (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2}$$

7) Расстояние от оси крестовины до грузов-утяжелителей:  $R = l_1 + (n - 1)l_0 + \frac{b}{2}$

8) Абсолютная погрешность с учетом погрешности приборов:  $\Delta x = \sqrt{(\overline{\Delta x})^2 + \left(\frac{2}{3}\Delta_{ux}\right)^2}$

9) Погрешность косвенного значения:  $\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2}$ ;  $z = f(x_1, x_2)$

$\Delta_{ux}$  – погрешность прибора,  $\overline{\Delta x}$  – случайная погрешность (доверительный интервал)

10) Относительная погрешность:  $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%$

11) Момент инерции крестовины по т.Штейнера:  $I_0 = \bar{I} - 4m_{yt} \bar{R}^2$ ,  $m_{yt} = \frac{\sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})(I_i - \bar{I})}{4 \sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})^2}$

12)  $\Delta m_{yt} = \frac{2 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (I_i - (I_0 + 4m_{yt} R_i^2))^2}{(N-2) \sum_{i=1}^N (R_i^2 - \bar{R}^2)^2}}}{4}$ ;  $\Delta I_0 = 2 \sqrt{\left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{R}^2}{\sum_{i=1}^N (R_i^2 - \bar{R}^2)}\right) \cdot \frac{\sum_{i=1}^N (I_i - (I_0 + 4m_{yt} R_i^2))^2}{N-2}}$

## 6. Измерительные приборы:

№	Наименование	Измерение	Используемый диапазон	$\Delta_{\text{п}}$
1	Секундомер	промежутка времени	[0, 11] с	0.005 с
2	Линейка	начальной высоты тела, длин спиц и диаметра ступицы	[0, 0.7] м	0.0005 м

## 7. Схема установки:

Груз подвешен на нерастяжимой невесомой нити, которая перекинута через неподвижный блок и намотана на ступицу крестовины. В ступице закреплены четыре спицы, на каждой из которых размещен груз-утяжелитель (грузы идентичны и находятся на одинаковом расстоянии от оси вращения крестовины). Момент инерции системы крестовина-утяжелители искусственно изменяется при выставлении расстояния от грузов до ступицы.

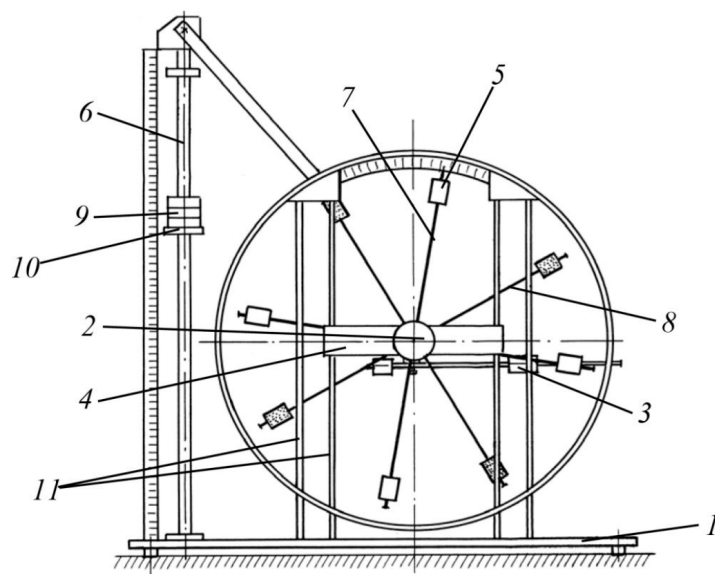


Рис. 2. Стенд лаборатории механики (общий вид):

1 – основание; 2 – рукоятка сцепления крестовин; 3 – устройство принудительного трения; 4 – поперечина; 5 – груз крестовины; 6 – трубка направляющая; 7 – передняя крестовина; 8 – задняя крестовина; 9 – шайбы каретки; 10 – каретка; 11 – система передних стоек.

## 8. Результаты прямых измерений и их обработки:

Таблица 1. Время падения для различных значений расстояний, масс раскручивающего груза

	Положение утяжелителей отн. оси вращения (риски), м					
Масса груза	0.057(1)	0.082(2)	0.107(3)	0.132(4)	0.157(5)	0.182(6)
	Время $t_{\text{падения}}$ , с					
$m_1$ 0.267 кг (1 шайба)	4,87	5,80	6,51	7,81	9,69	10,88
	4,71	5,84	6,95	7,93	9,88	10,52
	4,90	5,90	6,83	7,88	9,93	10,90
	4,83±0,25	5,85±0,13	6,76±0,57	7,87±0,15	9,83±0,31	10,77±0,53
$m_2$ 0.487 кг (2 шайбы)	3,54	4,25	4,85	6,10	7,16	7,54
	3,58	4,22	4,82	6,37	7,08	7,77
	3,64	4,26	4,82	6,13	6,90	7,86
	3,59±0,13	4,24±0,05	4,83±0,04	6,20±0,37	7,05±0,33	7,72±0,41
$m_3$ 0.707 кг (3 шайбы)	2,95	3,40	4,05	4,90	5,44	6,30
	3,00	3,33	4,64	4,82	5,18	6,30
	2,97	3,58	4,20	5,07	5,65	6,44
	2,97±0,06	3,44±0,32	4,29±0,76	4,93±0,32	5,42±0,58	6,35±0,21
$m_4$ 0.927 кг (4 шайбы)	2,53	2,90	3,89	4,31	4,76	5,33
	2,61	2,88	3,99	4,21	4,85	5,48
	2,66	3,00	4,12	4,30	4,65	5,52
	2,60±0,16	2,93±0,16	4,00±0,29	4,27±0,14	4,75±0,25	5,44±0,25

## 9. Результаты косвенных измерений:

Таблица 2. Ускорение раскручивающего груза при разных условиях

	Положение утяжелителей отн. оси вращения (риски), м					
Масса груза	0.057(1)	0.082(2)	0.107(3)	0.132(4)	0.157(5)	0.182(6)
	Ускорение $a$ , $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$					
$m_1$	0,0600 ±0,0062	0,0409 ±0,0018	0,0306 ±0,0052	0,0226 ±0,0009	0,0145 ±0,0009	0,0121 ±0,0012
$m_2$	0,1086 ±0,0079	0,0779 ±0,0018	0,0600 ±0,0009	0,0364 ±0,0043	0,0282 ±0,0026	0,0235 ±0,0025
$m_3$	0,1587 ±0,0064	0,1183 ±0,0220	0,0761 ±0,0269	0,0578 ±0,0075	0,0477 ±0,0102	0,0347 ±0,0023
$m_4$	0,2071 ±0,0255	0,1631 ±0,0178	0,0875 ±0,0129	0,0768 ±0,0050	0,0620 ±0,0065	0,0473 ±0,0043

Таблица 3. Угловое ускорение крестовины при разных условиях

	Положение утяжелителей отн. оси вращения (риски), м					
Масса груза	0.057(1)	0.082(2)	0.107(3)	0.132(4)	0.157(5)	0.182(6)
	Угловое ускорение $\varepsilon$ , рад $\cdot$ с <sup>-1</sup>					
$m_1$	2,6092 $\pm 0,2716$	1,7786 $\pm 0,0814$	1,3320 $\pm 0,2251$	0,9828 $\pm 0,0389$	0,6299 $\pm 0,0403$	0,5248 $\pm 0,0519$
$m_2$	4,7229 $\pm 0,3459$	3,3859 $\pm 0,0879$	2,6092 $\pm 0,0517$	1,5835 $\pm 0,1898$	1,2247 $\pm 0,1154$	1,0213 $\pm 0,1090$
$m_3$	6,9006 $\pm 0,2888$	5,1438 $\pm 0,9586$	3,3074 $\pm 1,1724$	2,5044 $\pm 0,3263$	2,0721 $\pm 0,4440$	1,5096 $\pm 0,1012$
$m_4$	9,0444 $\pm 1,1126$	7,0903 $\pm 0,7782$	3,8043 $\pm 0,5532$	3,3384 $\pm 0,2219$	2,6978 $\pm 0,2855$	2,0568 $\pm 0,1904$

Таблица 4. Момент силы натяжения нити при разных условиях

	Положение утяжелителей отн. оси вращения (риски), м					
Масса груза	0.057(1)	0.082(2)	0.107(3)	0.132(4)	0.157(5)	0.182(6)
	Момент силы натяжения $M$ , Н $\cdot$ м					
$m_1$	0,0599 $\pm$ 0,0007	0,0599	0,0601	0,0601	0,0601	0,0602
$m_2$	0,1087	0,1090	0,1092	0,1095	0,1096	0,1096
$m_3$	0,1569	0,1576	0,1583	0,1586	0,1587	0,1589
$m_4$	0,2047	0,2057	0,2073	0,2075	0,2078	0,2082

Таблица 5. Момент инерции крестовины при разных условиях

Положение утяжелителей отн. оси вращения (риски), м					
0.057(1)	0.082(2)	0.107(3)	0.132(4)	0.157(5)	0.182(6)
Момент инерции крестовины $I$ , кг $\cdot$ м <sup>2</sup>					
0,0225	0,0274	0,0577	0,0611	0,0695	0,0969
Момент силы трения $M_{тр} = M - I\varepsilon$ , Н $\cdot$ м					
0,0016	0,0139	-0,0257	0,0055	0,0189	0,0104
Расстояние от оси до утяжелителя в квадрате $R^2$ , м <sup>2</sup>					
0,0059	0,0104	0,0161	0,0231	0,0313	0,0408

## Расчет по МНК значений $m_{\text{ут}}$ и $I_0$ :

$$m_{\text{ут}} = \frac{\sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})(I_i - \bar{I})}{\sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})^2} = 0,4946 \text{ кг}; \text{ тогда сумма моментов инерции стержней крестовины, момента}$$

инерции ступицы и собственных центральных моментов инерции утяжелителей будет равна:

$$I_0 = \bar{I} - 4m_{\text{ут}}\bar{R}^2 = 0,01427 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \quad \Delta I_0 = 0,00076 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

## 10. Расчет погрешностей измерений:

Расчет погрешности для прямых измерений времени к таблице 1:

$$\Delta t_{\text{cp}} = \sqrt{\frac{t_{\alpha, n}^2}{N \cdot (N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - \bar{t})^2 + \left(\frac{2}{3} \Delta_{\text{ух}}\right)^2} \quad (t_{\alpha, n} = 4.30265, \alpha = 0.95); \quad \Delta t_1 = 0.25396 \text{ с}$$

Расчет погрешности косвенного значения ускорения груза к таблице 2:

$$\Delta a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial h} \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial t} \Delta t\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2} \Delta h\right)^2 + \left(\frac{4h}{t^3} \Delta t\right)^2}; \quad a = \frac{2h}{t^2}; \quad \Delta a_1 = 0,0062 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Расчет погрешности косвенного значения углового ускорения крестовины к таблице 3:

$$\Delta \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial h} \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \Delta t\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial d} \Delta d\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{t^2 d} \Delta h\right)^2 + \left(\frac{8h}{t^3 d} \Delta t\right)^2 + \left(\frac{4h}{t^2 d^2} \Delta d\right)^2}; \quad \varepsilon = \frac{4h}{t^2 d}; \quad \Delta \varepsilon_1 = 0,2716 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

Расчет погрешности косвенного значения момента силы натяжения нити к таблице 4:

$$\Delta M = \sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial h} \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial t} \Delta t\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial d} \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial m} \Delta m\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{md}{t^2} \Delta h\right)^2 + \left(\frac{2mdh}{t^3} \Delta t\right)^2 + \left(\frac{m(gt^2-2h)}{2t^2} \Delta d\right)^2 + \left(\frac{d(gt^2-2h)}{2t^2} \Delta m\right)^2}; \quad \Delta M_1 = 0,00066 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$\Delta m_{\text{ут}} = 0,0045 \text{ кг}$$

## 11. Графики:

График 1. Зависимость  $M(\varepsilon)$ . Аппроксимирующие прямые для каждой риски.

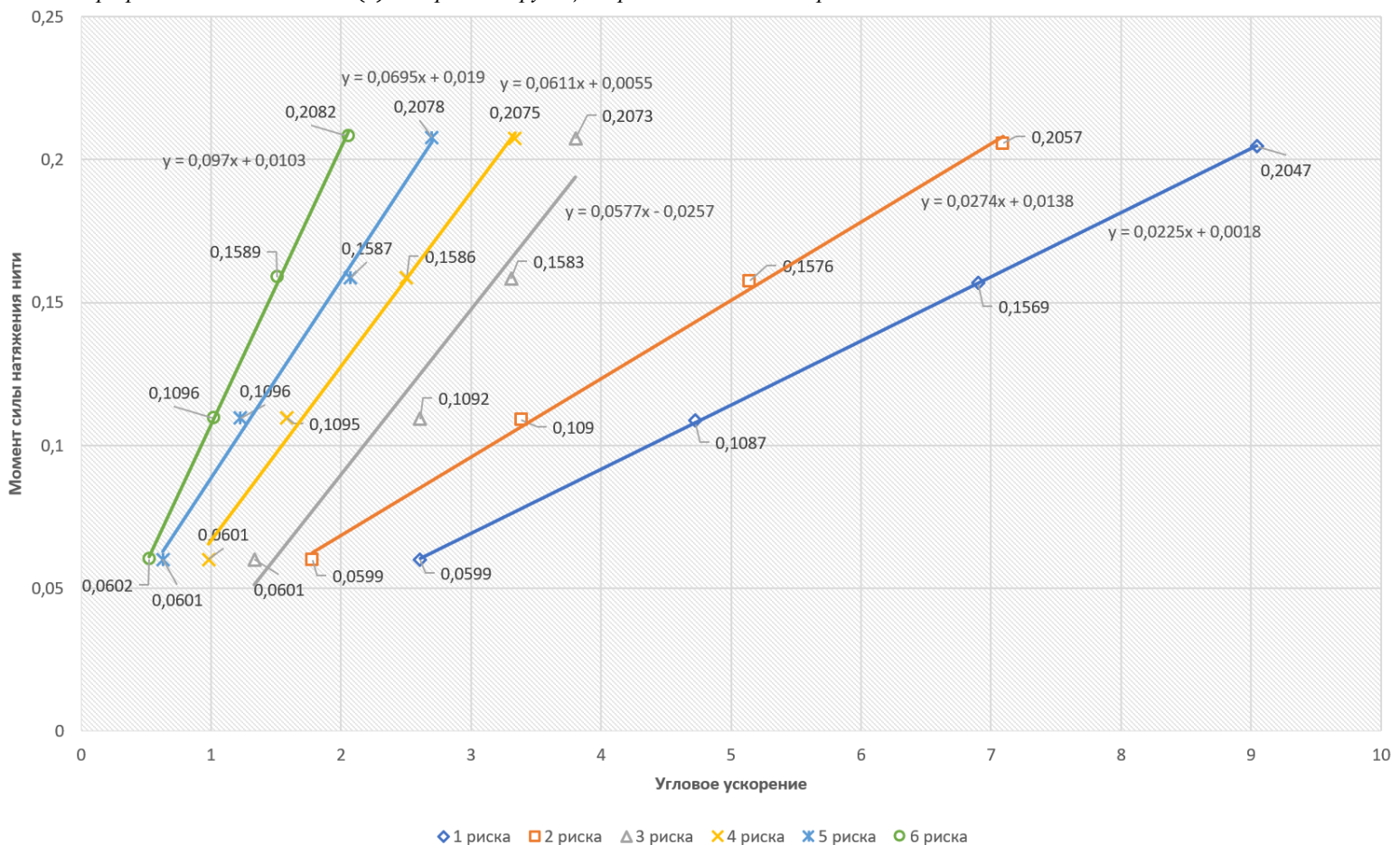
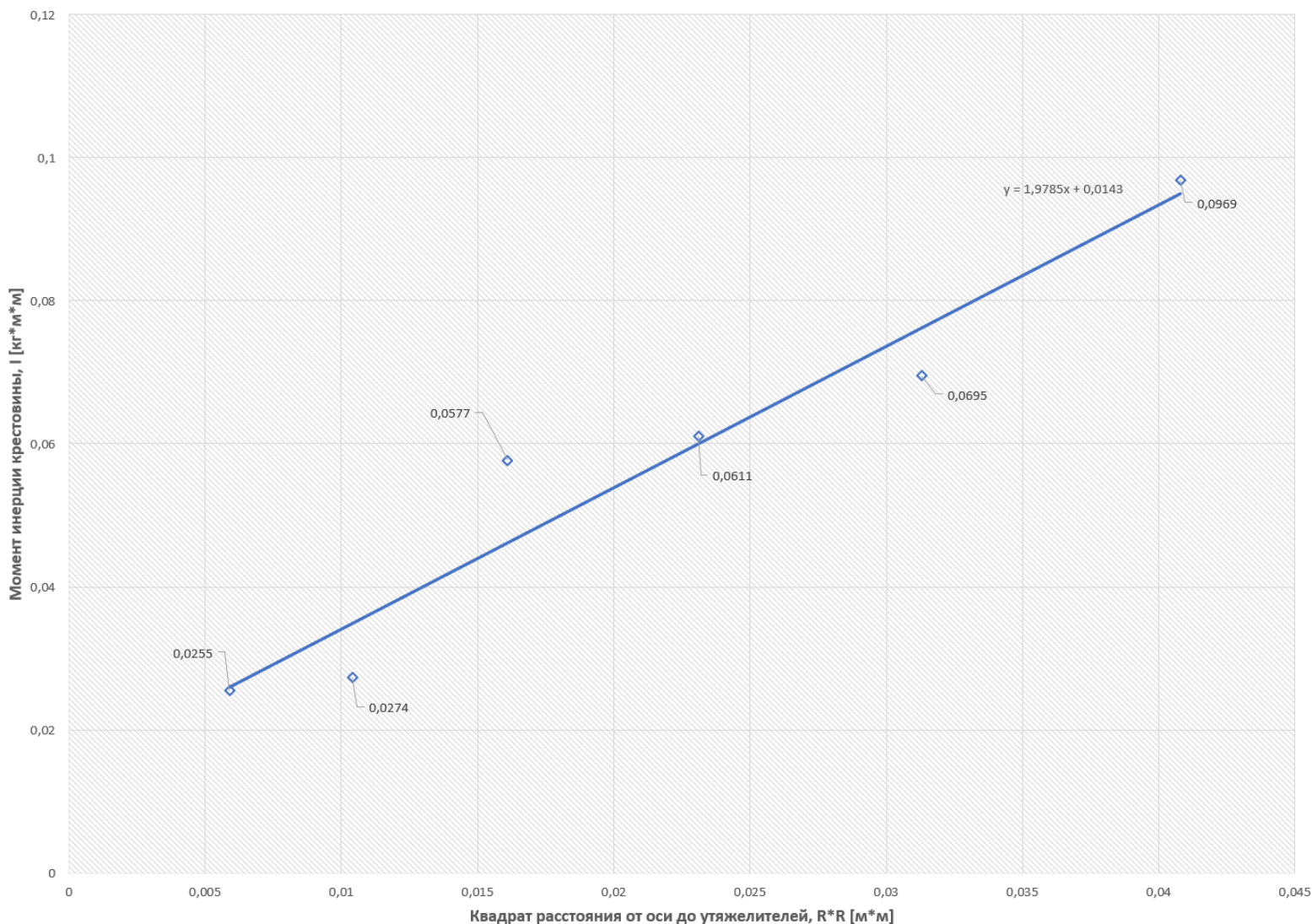


График 2. Зависимость  $I(R^2)$ . Аппроксимирующая прямая и аналитически полученная зависимость.



## 12. Окончательные результаты:

Доверительные интервалы первых значений к ускорению груза:

$$a = (0.0600 \pm 0.0062) \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \quad \varepsilon_a = 10.3\% \quad \alpha = 0.95$$

к угловому ускорению:

$$\varepsilon = (2.6092 \pm 0.2716) \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \quad \varepsilon_\varepsilon = 10.4\% \quad \alpha = 0.95$$

и к моменту силы натяжения нити:

$$M = (0.0599 \pm 0.0007) \text{ Н} \cdot \text{м} \quad \varepsilon_M = 1.1\% \quad \alpha = 0.95$$

Значения  $m_{\text{ут}}$  и  $I_0$  с погрешностями:

$$m_{\text{ут}} = (0.4946 \pm 0.0045) \text{ кг} \quad \varepsilon_{m_{\text{ут}}} = 0.9\% \quad \alpha = 0.95$$

$$I_0 = (0.0143 \pm 0.0008) \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \quad \varepsilon_{I_0} = 5.6\% \quad \alpha = 0.95$$

## 13. Выводы и анализ результатов работы:

После построения экспериментальной выборки были рассчитаны необходимые параметры и значения для проверки зависимости момента инерции от масс грузов-утяжелителей на спицах вращающейся крестовины. Также экспериментально подтверждена теория динамики вращения - был проверен основной закон, связывающий угловое ускорение с моментами сил трения и натяжения нити. Были получены доверительные интервалы для некоторых характеристик динамики вращения, построены соответствующие графики.



# Измерения:

Лопатенко Георгий М3102  
Ермолаева Анастасия М3102

Измерения по лабораторной работе №1.04.

	Положение утяжелителей					
Масса груза, г	1 риска	2 риска	3 риска	4 риска	5 риска	6 риска
$m_1$	4,87	5,80	6,51	7,81	9,69	10,88
$m_1$	4,71	5,84	6,95	7,93	9,88	10,52
$m_1$	4,90	5,90	6,83	7,88	9,93	10,90
$m_1$	4,83	5,85	6,76	7,87	9,83	10,77
$m_2$	3,54	4,25	4,85	6,10	7,16	7,54
$m_2$	3,58	4,22	4,82	6,37	7,08	7,77
$m_2$	3,64	4,26	4,82	6,13	6,90	7,86
$m_2$	3,59	4,24	4,83	6,20	7,05	7,72
$m_3$	2,95	3,40	4,05	4,90	5,44	6,30
$m_3$	3,00	3,33	4,64	4,82	5,18	6,30
$m_3$	2,97	3,58	4,20	5,07	5,65	6,44
$m_3$	2,97	3,44	4,29	4,93	5,42	6,35
$m_4$	2,53	2,90	3,89	4,31	4,76	5,33
$m_4$	2,61	2,88	3,99	4,21	4,85	5,48
$m_4$	2,66	3,00	4,12	4,30	4,65	5,52
$m_4$	2,60	2,93	4,00	4,27	4,75	5,44

Масса каретки:  $47,0 \pm 0,5$  г  
 Масса шайбы:  $220,0 \pm 0,5$  г  
 Масса грузов на крестовине:  $408,0 \pm 0,5$  г  
 Расстояние первой риски от оси:  $57,0 \pm 0,5$  мм  
 Расстояние между рисками:  $25 \pm 0,2$  мм  
 Диаметр ступицы:  $46,0 \pm 0,5$  мм  
 Диаметр груза на крестовине:  $40,0 \pm 0,5$  мм  
 Высота груза на крестовине:  $40,0 \pm 0,5$  мм

Инженер:

03.03.22  
