Лопатенко Георгий M3102

1. Точность измерений:

1.1 Почему в задачах часто указывают данные в таком виде: m = 2.00 кг (не 2 кг). Что это означает?

Потому что так можно указать, с какой точностью необходимо записывать результаты вычислений. Или в другом случае, если задача подразумевает вычисление погрешности, то количество нулей после значения помогает верно указать погрешность (с округлением).

1.2 Для малых углов численные значения синуса и тангенса практически совпадают. Определите максимальный угол, при котором синус и тангенс совпадают пределах 2 значащих цифр.

Если расписать $sin(x)$ и $tg(x)$ по ряду Макларена:

$$sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + O(x^{10})$$

$$tg(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + O(x^{10})$$

тогда $sin(x) - tg(x) = \frac{2}{3!}x^3 + O(x^5)$ и если нужно , чтобы значения расходились только в третьей значащей цифре, то необходимо решить уравнение $sin(x) - tg(x) = 0.005 = \frac{2}{3!}x^3 + O(x^5)$

$x \approx 0.247$, а дальше будем находить значение разности с шагом 0.1 - 0.01 - 0.001 и так далее, на каждой итерации сдвигая границу. Конечно, точность будет зависеть от усидчивости студента, но решение можно запустить циклом, задав при этом предел точности.

rad	sin() - tg()
0,1	-0,0005012554386
0,11	-0,0006675237449
0,12	-0,0008671299224
0,13	-0,001103175385
0,14	-0,001378780354
0,15	-0,001697085585
0,16	-0,002061254121
0,17	-0,002474473103
0,18	-0,002939955614
0,19	-0,003460942579
0,2	-0,004040704714
0,21	-0,004682544537
0,22	-0,005389798438
0,23	-0,006165838816
0,24	-0,007014076287
0,25	-0,007937961967
0,26	-0,008940989834
0,27	-0,01002669919
0,28	-0,01119867718
0,29	-0,01246056146
0,3	-0,01381604295
0,31	-0,01526886863
0,32	-0,01682284461
0,33	-0,01848183914
0,34	-0,0202497859
0,35	-0,02213068737

rad	sin() - tg()
0,26	-0,00894098983
0,261	-0,00904578129
0,262	-0,00915140310
0,263	-0,00925785881
0,264	-0,00936515201
0,265	-0,00947328628
0,266	-0,00958226519
0,267	-0,00969209234
0,268	-0,00980277132
0,269	-0,00991430573
0,27	-0,01002669919
0,271	-0,01013995528
0,272	-0,01025407763
0,273	-0,01036906986
0,274	-0,0104849356
0,275	-0,01060167846
0,276	-0,0107193021
0,277	-0,01083781014
0,278	-0,01095720623
0,279	-0,01107749402
0,28	-0,01119867718

rad	sin() - tg()
0,269	-0,00991430573
0,2691	-0,00992550636
0,2692	-0,00993671558
0,2693	-0,00994793340
0,2694	-0,00995915983
0,2695	-0,00997039485
0,2696	-0,00998163849
0,2697	-0,00999289073
0,2698	-0,0100041516
0,2699	-0,01001542108
0,27	-0,01002669919

rad	sin() - tg()
0,26976	-0,00999964622
0,269761	-0,00999975883
0,269762	-0,00999987145
0,269763	-0,00999998407
0,269764	-0,0100000967
0,269765	-0,01000020932
0,269766	-0,01000032194
0,269767	-0,01000043456
0,269768	-0,01000054719
0,269769	-0,01000065981
0,26977	-0,01000077244

примерное значение
0,2697631

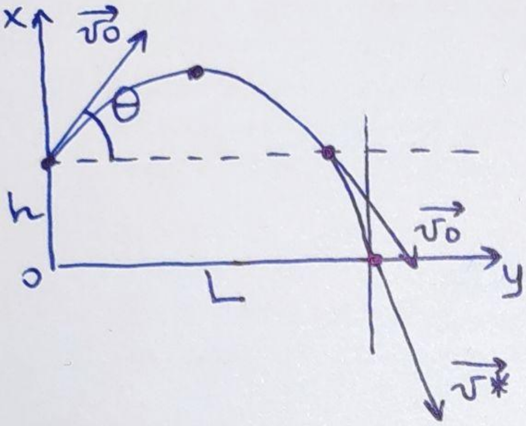
rad	sin() - tg()
0,2697	-0,00999289073
0,26971	-0,00999401643
0,26972	-0,00999514222
0,26973	-0,00999626809
0,26974	-0,00999739404
0,26975	-0,00999852009
0,26976	-0,00999964622
0,26977	-0,01000077244
0,26978	-0,01000189874
0,26979	-0,01000302513
0,2698	-0,0100041516

rad	sin() - tg()
0,269763	-0,00999998407
0,2697631	-0,00999999533
0,2697632	-0,0100000066
0,2697633	-0,01000001786
0,2697634	-0,01000002912
0,2697635	-0,01000004039
0,2697636	-0,01000005165
0,2697637	-0,01000006291
0,2697638	-0,01000007417
0,2697639	-0,01000008544
0,269764	-0,0100000967

2. Тело, брошенное под углом к горизонту

Лопатенко Георгий
M3102

Баскетболист бросает мяч с начальной скоростью $v_0 = 13,5$ м/с с высоты $h = 2.1$ м.



• пусть в самом конце броска мяч имел скорость v^* и „вошёл" в землю под углом Ω.

тогда сначала запишем ЗСЭ:

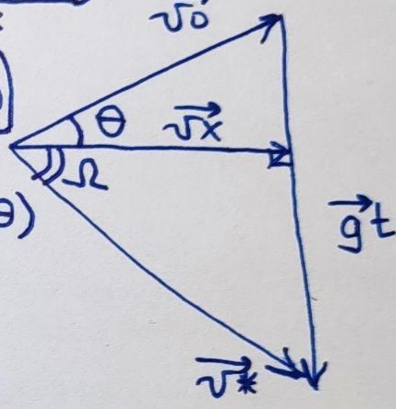
момент времени $t_0 = 0$с $\qquad t = t^*$

$$mgh + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^{*2}}{2} \quad (1)$$

из (1) формулы понятно, что

$$\boxed{v^* = \sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

тогда построим треугольник скоростей:



Заметим, что $\boxed{\vec{v_x} = \vec{v_0}\cos\theta = \vec{v^*}\cos\Omega \ (2)}$

так, мы можем найти площадь этого треугольника: $\frac{1}{2}|\vec{v_0}|\cdot|\vec{v^*}|\cdot\sin(\Omega+\theta)$

с другой стороны: $\frac{1}{2}|\vec{v_x}|\cdot gt$

и $|\vec{v_x}|t = L$

тогда:

$$L = \frac{v_0 v^* \sin(\theta+\Omega)}{g} \quad (3)$$

Вернёмся к (2): $\cos\Omega = \dfrac{v_0\cos\theta}{\sqrt{v_0^2+2gh}}$; $\sin\Omega = \sqrt{\dfrac{2gh + v_0^2\sin^2\theta}{v_0^2+2gh}}$

запишем ещё раз (3): с подстановкой (1)

$$L = \frac{v_0\sqrt{v_0^2+2gh}\left(\sin\theta\cdot\frac{v_0\cos\theta}{\sqrt{v_0^2+2gh}} + \cos\theta\sin\Omega\right)}{g}$$

$$L = \frac{v_0}{g}\left(v_0\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sqrt{2gh + v_0^2\sin^2\theta}\right)$$

~~При поиске производной~~

Заметим, что первое слагаемое $l_1 = \dfrac{v_0^2\sin 2\theta}{2g}$ – „известная" формула в баллистике.

$$L = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{2g} + \frac{v_0\cos\theta}{g}\sqrt{2gh + v_0^2\sin^2\theta}.$$

Input interpretation

maximize	function	$13.5\times 13.5\times\frac{\sin(2x)}{2\times 9.8}+\left(13.5\times\frac{\cos(x)}{9.8}\right)\sqrt{2\times 2.1\times 9.8+13.5\times 13.5\sin^2(x)}$
	domain	$0\le x\le \pi\, 2^{-1}$

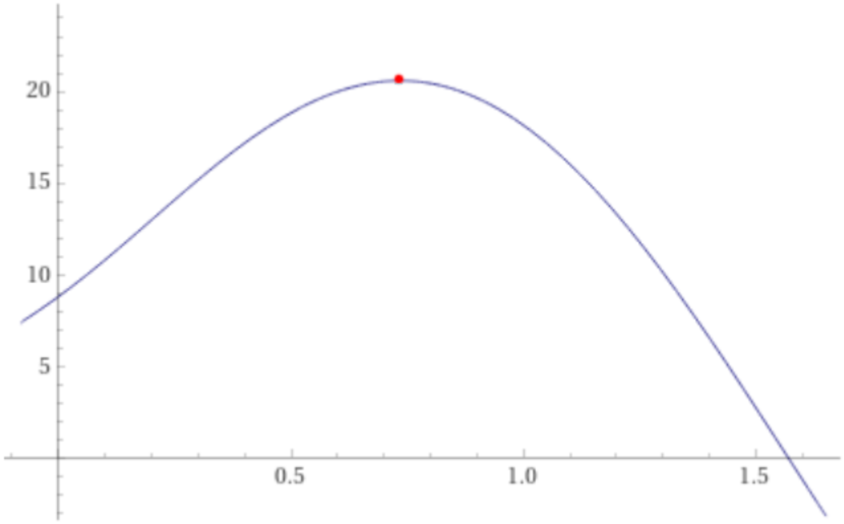
Global maximum

Enlarge | Data | Customize | Plain Text

$$\max\left\{\frac{13.5\times 13.5\sin(2x)}{2\times 9.8}+\frac{(13.5\cos(x))\sqrt{2\times 2.1\times 9.8+13.5\times 13.5\sin^2(x)}}{9.8}\;\middle|\; 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right\}=\frac{27\sqrt{22341}}{196}\ \text{at}\ x=2\cot^{-1}\left(\sqrt{\frac{20969}{6075}+\frac{2\sqrt{100698334}}{6075}}\right)$$

$\cot^{-1}(x)$ is the inverse cotangent function

Plot



(x from −0.08 to 1.6)

3. Принцип работы тележки

Установка выглядит простой по механике: направляющий рельс с регулировкой высоты и мат.маятником для определения наклона и тележка. Логично было бы предположить, что внутри стоят датчики, которые передают информацию по Bluetooth, как в смартфонах. Наверное, это цифровой гироскоп или трехканальный акселерометр. У меня был кейс по поиску дефектов в показаниях акселерометров на I Международном турнире по мат.моделированию (г. Москва, 2018), получались такие кластеры точек (в силу того, что устройство представляет из себя три акселерометра по ортогональным осям чувствительности). Задача сводилась к правильной обработке данных, чистке статистического шума и построению мат.модели. Для поиска неисправности акселерометра его приклеивают к сферическому объекту (к глобусу, например) и снимают множество показаний. После этого по выборке ищут центр “глобуса” (по методу k-средних) и отсеивают значения точек, которые оказались на большем или меньшем расстоянии, чем радиус этой сферы.