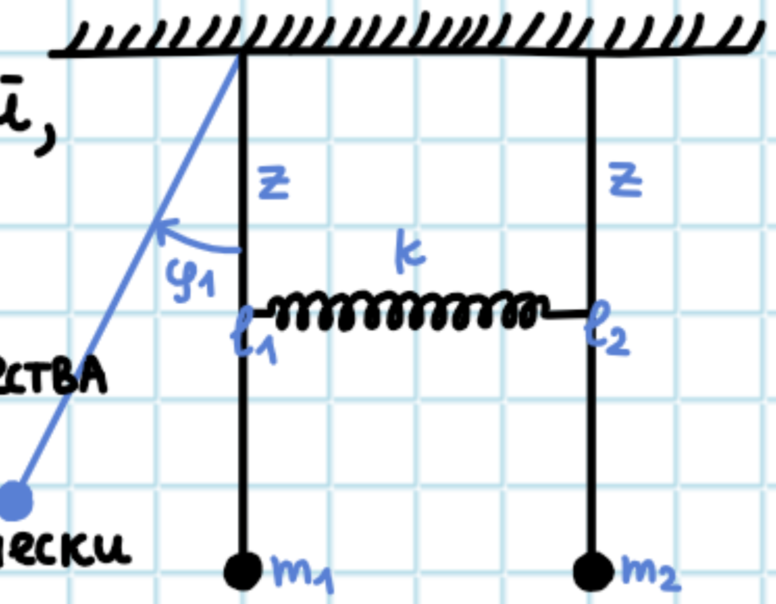
Лопатенко Георгий M32021

1. Доказать формулу (Q – добротность). $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$

Добротность – безразмерная величина для определения характера затухающих колебаний. Заметим, что по сути эта величина показывает отношение энергии системы к её убыли за один период колебательного движения: тогда $Q = 2\pi \cdot \frac{E(t)}{E(t)-E(t+T)}$ и ещё нам известно, что $E(t) \sim A^2(t)$, где $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$, тогда $\frac{1}{Q} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{A_0 e^{-2\beta t} - A_0 e^{-2\beta(t+T)}}{A_0 e^{-2\beta t}} = \frac{1-e^{-2\beta T}}{2\pi}$

отсюда (при $\gamma = \ln\left(\frac{A(t)}{A(t+T)}\right) = \ln\left(\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}}\right) = \beta T$), т.е. $\frac{1}{Q} = \frac{1-e^{-2\gamma}}{2\pi} = \frac{1-(1-2\gamma)}{2\pi} = \frac{\gamma}{\pi} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$, где $\Delta\omega$ – полоса резонансных частот
$\omega_0 = 2\pi f_0$ – резонансная частота

2. Что называют собственными частотами в связанных колебательных системах? Как найти собственные частоты двух одинаковых маятников, связанных между собой пружиной. Приведите примеры связанных колебаний.



Будем рассматривать общий случай, тогда маятники из себя представляют абстракцию: колебания в таком случае есть ни что иное, как суперпозиция множества нормальных колебаний. Стоит ещё отметить, что происходит обмен энергией между составляющими – именно поэтому характер колебаний системы выгодно описывать по колебат. характеристикам нормальных мод (логично называть собственными параметрически и рекуррентно заданные частоты каждого объекта в системе). Тогда кинемся в рассуждения, по основному тождеству вращательного движения:

$$I\vec{\varepsilon} = \underset{-mgr\varphi}{\vec{M}_{mg}} + \underset{-k\Delta x d}{\vec{M}_{упр}} \Rightarrow \begin{array}{l} 1)\ m_1\ell_1^2\ddot{\varphi}_1 = -m_1 g \ell_1\varphi_1 + kz^2(\varphi_2-\varphi_1) \xrightarrow{\exists \varphi_2 = 0} \omega_1^2 = \frac{g}{\ell_1} + \frac{kz^2}{m_1\ell_1^2} \\ 2)\ m_2\ell_2^2\ddot{\varphi}_2 = -m_2 g\ell_2\varphi_2 - kz^2(\varphi_2-\varphi_1) \xrightarrow{\exists \varphi_1 = 0} \omega_2^2 = \frac{g}{\ell_2} + \frac{kz^2}{m_2\ell_2^2} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\varphi}_1 + \omega_1^2\varphi_1 - \frac{kz^2}{m_1\ell_1^2}\cdot\varphi_2 = 0 \\ \ddot{\varphi}_2 + \omega_2^2\varphi_2 - \frac{kz^2}{m_2\ell_2^2}\cdot\varphi_1 = 0 \end{cases}$$

и φ_1, φ_2 имеют экспоненциал. вид

→ тогда при переходе к Крамеровской системе

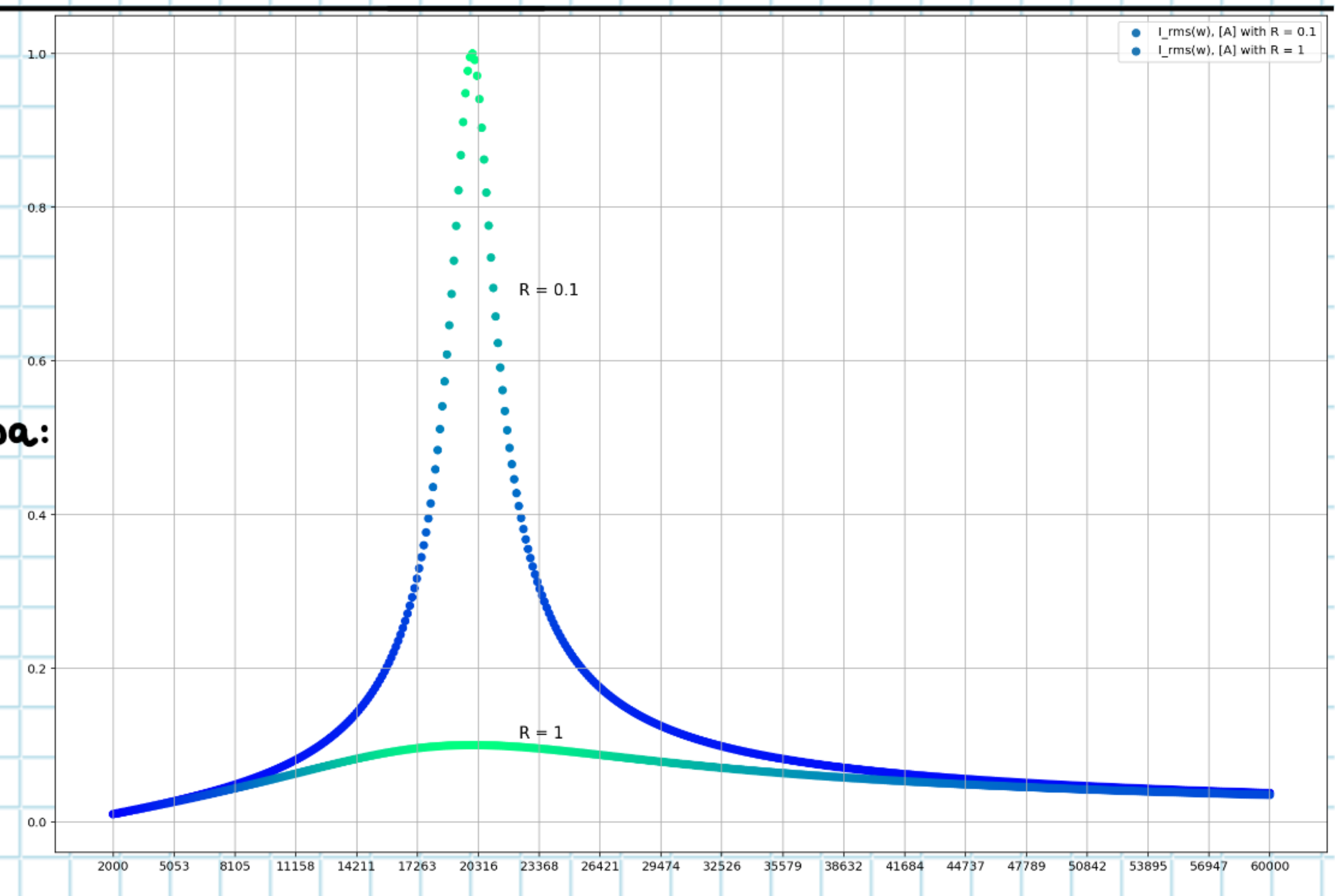
$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - \omega_0^2 & -\frac{kz^2}{m_1\ell_1^2} \\ -\frac{kz^2}{m_2\ell_2^2} & \omega_2^2-\omega_0^2 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \omega_0^4 - (\omega_1^2+\omega_2^2)\omega_0^2 + \omega_1^2\omega_2^2 - \frac{k^2z^4}{m_1m_2\ell_1^2\ell_2^2} = 0$$

$$\omega_{0_{1,2}}^2 = \frac{\omega_1^2+\omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2 + 4\frac{k^2z^4}{m_1m_2\ell_1^2\ell_2^2}}}{2}$$

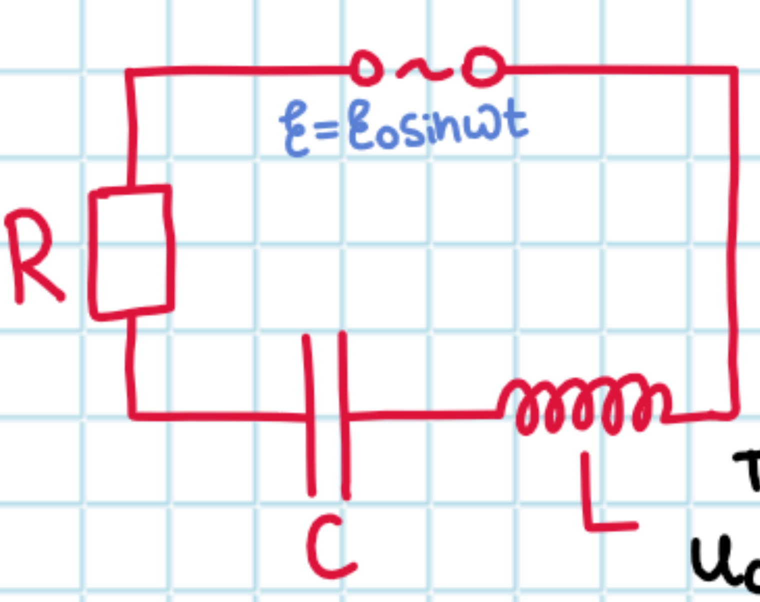
– и это и есть собственные частоты. Заметим, что эти величины не зависят от характеристик рассматриваемых частей системы.

Если необходимо найти эти значения для определённой конфигурации маятников, несложными методами пристального взгляда требуемое достигается. Можно также почитать содержание теоремы Вигнера Фон Неймана о несовпадении ω_1, ω_2 и модал. $\omega_{0_1}, \omega_{0_2}$
Примерами связанных колебаний служат системы с квазиупругой связью составляющих (например, в нашем случае вместо пружины могла быть нерастяжимая нить с утяжелителем).

(III) Write a computer program or use a spreadsheet program to plot I_{rms} for an ac LRC circuit with a sinusoidal voltage source (Fig. 30–19) with $V_{rms} = 0.100$ V. For $L = 50\,\mu$H and $C = 50\,\mu$F, plot the I_{rms} graph for (*a*) $R = 0.10\,\Omega$, and (*b*) $R = 1.0\,\Omega$ from $\omega = 0.1\omega_0$ to $\omega = 3.0\omega_0$ on the same graph.



Flashback к последнему ДЗ, только колебания вынужденные, поэтому по II з. Кирхгофа:



$\mathcal{E} + \mathcal{E}_i = U_R + U_C \rightarrow \mathcal{E}_0 \sin\omega t - L\frac{di}{dt} = iR + \frac{q}{C}$

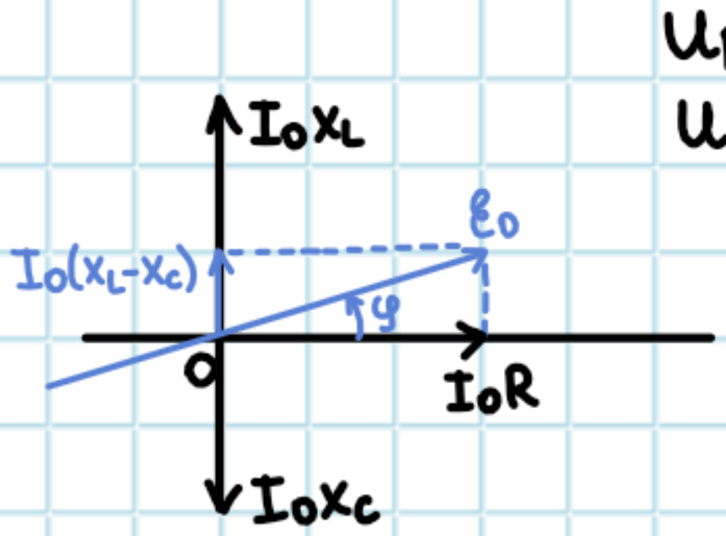
т.е. $\ddot{q} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\beta}\dot{q} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} q = \frac{\mathcal{E}_0}{L}\sin\omega t$

тогда $\exists\, i = i_R = i_C = i_L = I_0 \sin\omega t$

$U_C = I_0 \frac{1}{\omega C}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = I_0 x_C \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$

$U_R = I_0 R \sin\omega t$

$U_L = I_0 \underbrace{\omega L}_{x_L} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$



тогда $I_0^2(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 + I_0^2 R^2 = \mathcal{E}_0^2$ по Гюйгенсу

$\Rightarrow I_{Rms} = \frac{V_{Rms}}{\underbrace{\sqrt{(x_L - x_C)^2 + R^2}}_{\text{импеданс цепи}}}$

NB: конденсатор проводит ток только при перезарядке