Лабораторная работа № 1.14

Изучение колебаний струны

Содержание

Цели работы

1. Наблюдение поперечных стоячих волн на тонкой натянутой струне.
2. Экспериментальное определение зависимости собственных частот поперечных колебаний от номера гармоники и силы натяжения струны.

Задачи

1. Измерить значения резонансных частот колебаний струны в режиме формирования стоячих волн. Рассчитать значения скорости волны и погонной плотности струны при известной силе ее натяжения.

2. Провести прямое измерение массы и длины струны, непосредственно определить ее погонную плотность. Сравнить полученные значений погонных плотностей ρ_ℓ.

Введение

Под струной в рамках данной лабораторной работы будем понимать тонкую однородную упругую нить. Примерами струн могут являться стальной трос, резиновый жгут, струны гитары, скрипки и других подобных музыкальных инструментов. Как известно, одно из свойств струн — их гибкость, то есть механическое напряжение в струне направлено преимущественно вдоль ее оси, что позволяет не учитывать при расчете динамики ее движения изгибные напряжения, которые могли бы возникать при поперечных деформациях (как, например, в упругих стержнях).

Смещение струны в поперечном направление может быть вызвано изменением формы (статическое воздействие) или кратковременной передачей локального импульса ее элементам (удар). В обоих случаях натяжение играет роль возвращающей силы, которая стремится вернуть струну в начальное прямолинейное положение, приводя к взаимному перемещению ее элементов. Возникшие отклонения от равновесного состояния могут распространяться вдоль струны — и таким образом возникает волновой процесс.

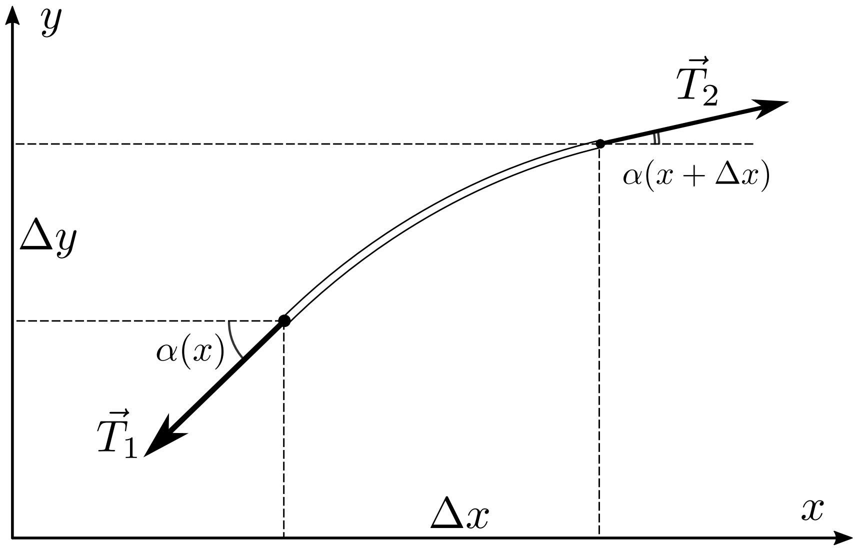

Рис. 1. К выводу волнового уравнения

Скорость распространения поперечной бегущей волны u малой амплитуды в натянутой струне зависит от массы единицы ее длины ρ_ℓ (данная величина называется погонной или линейной плотностью) и силы натяжения $\vec{T}$ и определяется как:

$$u = \sqrt{\frac{T}{\rho_\ell}} \tag{1}$$

Это выражение для скорости напрямую следует из вида дифференциального уравнения для процессов упругой деформации, происходящих в струнах. Данное уравнение, называемое *волно-*

вым можно получить из второго закона Ньютона, записанного для любого достаточно малого элемента струны (см. рис.1). Это уравнение играет крайне важную роль в физике и, кроме волн в струне, может описывать волновые процессы в самых разных системах, в том числе волны в сплошных однородных упругих средах и даже электромагнитные волны.

Направим ось Ox вдоль струны в положении ее равновесия. Форму струны будем описывать функцией $y = y(x,t)$, определяющей её вертикальное смещение в точке x в момент времени t. Угол наклона касательной к струне в точке x относительно оси Ox обозначим как α. В любой момент этот угол совпадает с углом наклона касательной к графику функции $y(x)$, то есть $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$.

Рассмотрим силы, приложенные к малому участку предварительно натянутой струны, начинающемуся в точке с горизонтальной координатой x, имеющему длину Δx и массу $\Delta m = \rho_\ell \Delta x$, где ρ_ℓ — линейная плотность. При небольшом отклонении от положения равновесия на выделенный элемент действуют силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, направленные по касательной к струне. Модули этих сил будут очень мало отличатся от их значений в отсутствии деформации ($T_1 = T_2 = T$), так как длина малого элемента струны в смещенном состоянии практически равна его длине в положении равновесия, поэтому добавочным напряжением вследствие удлинения струны при ее деформации можно пренебречь, но возникшая вертикальная составляющая равнодействующей силы будет стремиться вернуть рассматриваемый участок струны к положению равновесия, придавая ему определенное вертикальное ускорение $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Заметим, что угол α зависит от координаты x вдоль струны и различен в точках приложения сил $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$. Таким образом, второй закон Ньютона в проекции на ось Oy будет иметь вид:

$$\Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_2 \sin\left(\alpha\left(x+\Delta x\right)\right) - T_1 \sin\left(\alpha\left(x\right)\right) \tag{2}$$

Ввиду малости рассматриваемых смещений можно положить $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ и записать уравнение (2) в виде:

$$\Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}\right) \tag{3}$$

Разделив обе части последнего соотношения на Δx и далее устремив Δx к нулю получим окончательный вид волнового уравнения для струны:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho_\ell} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{4}$$

Несложно показать, что введенная выше величина $u = \sqrt{\frac{T}{\rho_\ell}}$ является скоростью распространения любых (не только гармонических возмущений) на натянутой струне. Рассмотрим любую *произвольную* функцию вида $y = y(\xi)$, где $\xi = x \pm ut$. Подставляя её в уравнение (4), убеждаемся, что она является его решением при произвольном виде функции y:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Если аргумент функции $y = y(\xi)$ считать постоянной величиной $\xi = x \pm ut = Const$ и произвести его дифференцирование по времени, то получим

$$dx \pm u dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \mp u \tag{5}$$

Таким образом, функция $y(\xi)$ описывает возмущение произвольного профиля, распространяющееся по струне с постоянной скоростью u с сохранением своей формы, причем функция вида $y^+ = y(x-ut)$ соответствует волне, движущейся в положительном, а вида $y^- = y(x+ut)$ - в отрицательном направлении оси Ox. Общее решение волнового уравнения (4) представляет собой линейную комбинацию двух волновых процессов, распространяющихся в противоположных направлениях. Конкретный вид функций y^+ и y^- определяется способом возбуждения колебаний и граничными условиями их распространения.

Особый интерес представляет случай *гармонических* волн:

$$y(x,t) = y_m \cos\left[2\pi\left(ft \pm \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right], \qquad (6)$$

где y_m - амплитуда волны (максимальное отклонение элементов колеблющегося объекта от положения равновесия), f - частота волны, а λ - длина волны (расстояние, проходимое фронтом волны за один период колебаний), φ_0 - начальная фаза колебаний. Несложно заметить, что скорость распространения волны в этом случае можно найти следующим образом: $u = \lambda \cdot f$.

Гораздо более компактный вид уравнению (5) можно придать если ввести следующие переобозначения: $\omega = 2\pi f$ - *циклическая* или *круговая* частота колебаний, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - т.н. *волновое* число:

$$y(x,t) = y_m \cos\left(\omega t - kx + \varphi_0\right). \qquad (7)$$

Однако в струне (как впрочем, и в любой иной упругой среде) могут существовать периодические возмущения не только в виде *бегущих* волн. Рассмотрим вид решения волнового уравнения для струны длиной ℓ, оба конца которой жестко закреплены и не испытывают смещения, т.е. $y(0,t) = y(\ell,t) = 0$. Будем искать решение волнового уравнения в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной из переменных (x,t):

$$y\,(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{8}$$

После подстановки (8) в волновое уравнение и деления его на $y\,(x,t)$ получим соотношение вида $\dfrac{1}{X}\dfrac{d^2X}{dx^2} = \dfrac{1}{u^2}\cdot\dfrac{1}{T}\dfrac{d^2T}{dt^2}$, которое является верным равенством только при условии, что каждая из его сторон является некоторой постоянной величиной, не зависящей ни от x, ни от t. Это приводит нас к двум независимым уравнениям:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k^2; \quad \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = -\omega^2,$$

в общих решениях которых

$$X\,(x) = A_x \cdot \sin kx + B_x \cdot \cos kx$$

$$T\,(t) = A_t \cdot \sin \omega t + B_t \cdot \cos \omega t$$

константы $(A_x,\, B_x)$ определяются исходя из граничных, а $(A_t,\, B_t)$ - из начальных условий конкретной задачи, причем соответствующим выбором начала отсчета времени можно сделать любой из параметров $(A_t,\, B_t)$ равным нулю. С учетом «нулевых» $y(0,t) = y(\ell,t) = 0$ граничных условий в общем решении $B_x = 0$, а на волновое число накладывается условие $\sin k\ell = 0$. Решение этого уравнения определяет допустимые значения волнового числа, а, следовательно, и спектр резонансных частот струны: $k_n\ell = \pi n$ - где n - это любое целое число. Резонансные частоты равны:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{k_n u}{2\pi} = \frac{un}{2\ell}. \tag{9}$$

Если частота колебаний, возбуждаемых в струне, приближается к одной из этих частот, наступает резонанс - амплитуда колебаний резко возрастает. Форма отклонения струны от равновесного положения в этом случае будет описываться функцией

$$y(x,t) = A\sin(\omega t)\sin(kx) = A\sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right)\sin\left(\frac{u\pi n}{\ell}t\right). \tag{10}$$

Уравнение (10) описывает *стоячую* волну, которая изменяется по гармоническому закону $\sin\omega t$ с амплитудой $A(x) = |A\sin kx|$. Точки, в которых амплитуда колебаний струны максимальна, называются пучностями стоячей волны, а точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю, называются узлами.

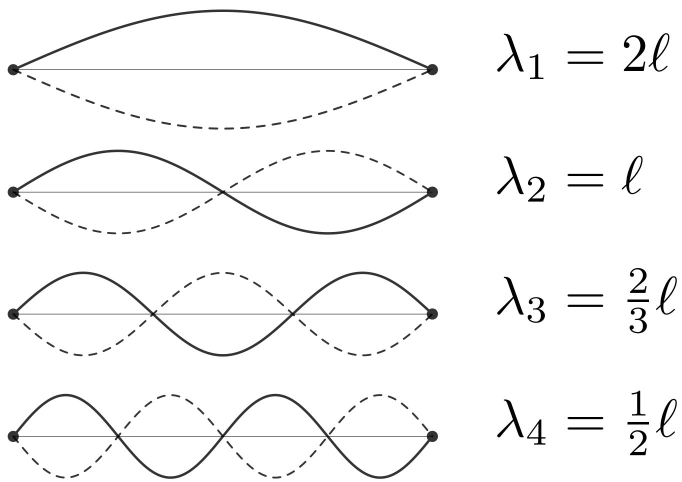

Рис. 2. Конфигурации стоячих волн на закреплённой струне

Отметим, что колебания струны в режиме возбуждения стоячей волны можно рассматривать как результат сложения (суперпозиции) двух бегущих волн $y^+(x,t)$ и $y^-(x,t)$, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$y^{+}(x,t) = \frac{A}{2}\cos(\omega t - kx), \quad y^{-}(x,t) = -\frac{A}{2}\cos(\omega t + kx),$$
$$y(x,t) = \frac{A}{2}\left[\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)\right] = A\sin(kx)\sin(\omega t).$$

Появление в общем решении слагаемого $y^{-}(x,t)$, которое соответствует волне распространяющейся к источнику, можно интерпретировать как наличие в струне волны, *отраженной* от дальнего закрепленного конца. Отдельным образом разберем причину появления знака «$-$» в форме ее записи, рассмотрев в качестве примера возмущения струны уединенный бегущий импульс «треугольной» формы (см. рис. 3).

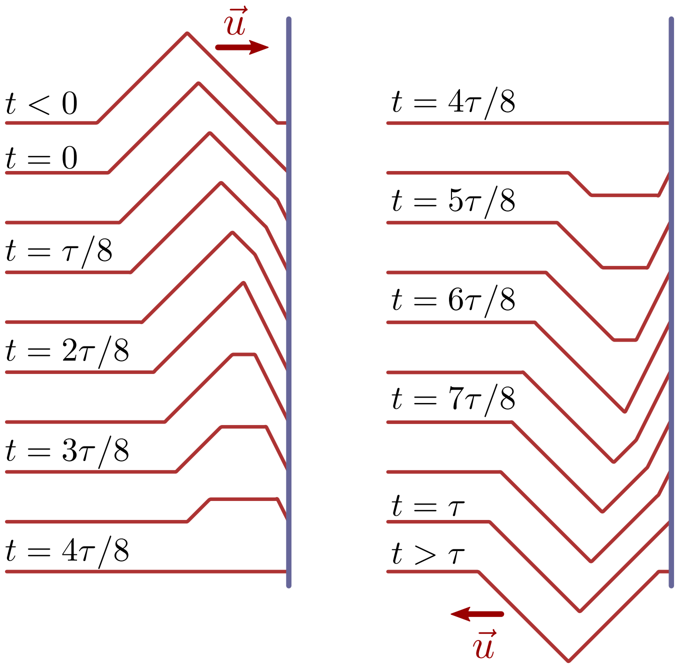

Рис. 3. Отражение импульса с обращением фазы на π

Если длительность импульса равна τ, то его протяженность вдоль струны равна $u\tau$. Пусть в момент времени $t = 0$ импульс достигает закрепленного конца струны. В последующие моменты времени струна будет воздействовать на точку крепления с переменной силой, перпендикулярной направлению движения импульса. Эта сила в момент времени $t > 0$ имеет положительную вертикальную проекцию, т.е. тянет точку крепления вверх. В течении времени $0 < t < \tau/2$ она остается постоянной, а в момент времени $t = \tau/2$ обращается в ноль. По третьему закону Ньютона с такой же силой точка крепления действует вниз на конец струны. В момент времени $t = \tau/2$ струна становится прямой. Однако ее часть длиной $u\tau/2$ продолжает двигаться вниз по инерции. При $t > \tau/2$ конец струны действует на точку крепления силой направленной вниз, и это действие прекращается при $t = \tau$. Соответственно, точка крепления воздействует на конец струны с силой, направленной вверх, тормозя движение ее элементов вниз. Окончательно поперечное взаимодействие прекратится при $t > \tau$, когда сформируется отраженный импульс, имеющий противоположную по отношению к падающему полярность.

Аналогично, если по струне распространяется гармоническая волна, то по достижении закрепленного конца возникает обращенная отраженная волна. Чтобы учесть изменение ее полярности, можно либо в явном виде вписать знак «$-$» в форму ее представления, либо в аргумент гармонической функции добавить фазовый сдвиг $\Delta\varphi = \pi$. Поэтому говорят, что в этом случае при отражении фаза волны скачком меняется на π или происходит «потеря полуволны».

Экспериментальная установка

Рис. 4. Элементы лабораторной установки

На рисунке 4 показан комплект оборудования, входящий в состав лабораторной установки:

1. Механический вибратор
2. Генератор гармонических сигналов
3. Рулетка
4. Эластичная (белая) и неэластичная (зеленая) струны
5. Набор грузов и держателей для них
6. Струбцины для крепления вибратора и опорного блока
7. Опорный блок
8. Стержень для крепления вибратора

Проведение измерений

Часть 1: Определение линейной плотности струны

1. Определите с помощью лабораторных весов (рис. 5) массу обеих струн, а рулеткой измерьте их длину. Внесите полученные значения с их приборными погрешностями в протокол проведения измерений.

Рис. 5. Лабораторные весы

2. Соберите лабораторную установку. Для этого необходимо закрепить на краях стола фиксаторы штативов, крепко затянув штативы с помощью винтов. Расстояние между ними должно быть ≈ 115 *см*.

3. Надежно привяжите конец эластичной струны к подвижной части вибратора (виброножу) - для этого в нем есть специальное отверстие. К свободной части струны с помощью L-образного держателя прикрепите груз массой $m = 50$ *г* и перекиньте ее через опорный блок.

4. Измерьте рулеткой длину ℓ колеблющейся части струны - она равна расстоянию от узла на виброноже до верхней части подвижного блока и внесите ее значение в протокол измерений.

5. Подключите сигнальный генератор к вибратору. Установите ручку регулировки амплитуды в среднее положение. Включите генератор сигналов тумблером на его боковой панели, переведя его в положение **ON**.

6. Регуляторами грубой и плавной настройки подберите частоту сигнала так, чтобы струна колебалась в 4 сегментах (при этом должны отчетливо наблюдаться четыре пучности и пять узлов). Обратите внимание на то, чтобы в картине колебаний присутствовал узел непосредственно на краю виброножа (если этого не происходит или узел меняет свое положение в процессе работы струнного вибратора, то рекомендуется закрепить нить еще раз).

7. Уменьшая амплитуду возбуждения, подстройте частоту таким образом, чтобы получить стоячую волну максимально возможной амплитуды с полностью неподвижными узлами. Также при приближении к резонансу следует незамедлительно уменьшать амплитуду сигнала, если вибратор или опорный блок начинают издавать значительный шум.

8. Значения резонансной частоты и массы подвешенного груза вместе с его держателем внесите в Таблицу 1 протокола измерений.

9. Уменьшите амплитуду сигнала генератора до нуля. К подвешенному грузу добавьте груз массой $\Delta m = 50$ *г*, повторите измерения резонансной частоты.

10. Поэтапно с шагом $\Delta m = 50$ *г* доводя суммарную массу подвешенного груза до 250 *г*, определите значения резонансных частот для пяти различных сил натяжения струны.

Часть 2: Определение скорости волны

1. Установите на держателе нагрузку общей массой 120 *г*.

2. Регуляторами грубой и плавной настройки частоты добейтесь получения устойчивой картины стоячих волн для нормальных мод колебаний с номерами от $n_1 = 1$ до $n_5 = 5$ (количество пучностей, формирующихся на струне, равно номеру нормальной моды колебаний).

3. Внесите значения резонансных частот f_n для каждого номера n в Таблицу 2.

4. Повторите измерения частот f_n для значений нагрузочной массы $m_i = 150, 180, 210, 240, 270$ *г*.

Проведите аналогичные измерения для неэластичной нити, заполнив второй экземпляр Таблицы 2

После завершения измерений следует вернуть все грузы на свои места, а генератор сигналов выключить тумблером на его боковой панели, переведя его в положение **OFF**.

Обработка результатов

Расчеты производятся для каждой струны, графики однотипных зависимостей изображаются в одном графическом поле.

Часть 1: Определение линейной плотности струны

1.1 Используя результаты прямых измерений масс и длин струн, найдите их фактическую линейную плотность ρ_ℓ с учетом приборной погрешности.

1.2 Постройте график зависимости квадрата резонансной частоты f^2 от силы натяжения струны $T = mg$, где m - масса подвешенного груза, $g = 9{,}82$ *м/с*^{2} - ускорение свободного падения.

1.3 Качественно оцените степень линейности построенной зависимости. Найдите с помощью метода наименьших квадратов ее угловой коэффициент $\alpha = \frac{4}{\ell^2 \rho_\ell}$ и его погрешность $\Delta\alpha$.

1.4 Найдите линейную плотность $\rho_\ell = \frac{4}{\alpha \ell^2}$ струны и ее погрешность:

$$\Delta\rho_\ell = \rho_\ell \sqrt{\left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)^2}$$

.

Часть 2: Определение скорости волны

2.1 Для каждого значения величины силы натяжения T из Таблицы 2 постройте графики зависимости резонансных частот f_n от их номера n.

2.2 По угловым коэффициентам полученных зависимостей с помощью формулы (9) определите скорость u волны в струне как функцию силы натяжения. Аппроксимацию проводите методом наименьших квадратов с оценкой величины погрешности.

2.3 Постройте график зависимости квадрата фазовой скорости u^2 от силы натяжения T. По угловому коэффициенту графика $u^2 = u^2(T)$ с помощью формулы (1) определите линейную плотность струны ρ_ℓ. Оцените погрешность полученного результата.

2.4 Сравните полученные значения линейной плотности из первой и второй части работы с результатом прямых измерений из п. 1.1.

Контрольные вопросы

1. Как связаны между собой частота, длина волны и скорость распространения бегущей волны?

2. Используя метод размерности, покажите, что скорость распространения поперечных волн по струне имеет вид $u \sim T^{1/2}\rho_\ell^{-1/2}$.

3. Как образуется стоячая волна?

4. Как происходит отражение бегущей волны от жестко закрепленного конца струны и от конца, который может свободно двигаться в направлении, перпендикулярном к направлению натяжения струны? Как изменяется фаза волны при отражении от закрепленного и свободного конца?

5. Дайте определение пучности и узла стоячей волны. Как определить частоты, на которых возможны собственные колебания струны, закреплённой на концах?

6. Во сколько раз необходимо увеличить натяжение струны, чтобы частота её собственных колебаний удвоилась?

7. Как изменяется фаза колебаний в стоячей волне? Изобразите распределение фазы колебаний в стоячей волне на закреплённой с двух сторон струне, если на ее длине укладывается $n = 1{,}2{,}3$ полуволны.

Приложение

Таблица 1: Определение линейной плотности струны

Струна №1				Струна №2			
m, *г*	f, *Гц*	f^2, *Гц*^{2}	T, *Н*	m, *г*	f, *Гц*	f^2, *Гц*^{2}	T, *Н*
$\rho_\ell \pm \Delta\rho_\ell = \ldots$				$\rho_\ell \pm \Delta\rho_\ell = \ldots$			

Таблица 2: Определение скорости волны

	$m_1 = \ldots$ $T_1 = \ldots$	$m_2 = \ldots$ $T_2 = \ldots$	$m_3 = \ldots$ $T_3 = \ldots$	$m_4 = \ldots$ $T_4 = \ldots$	$m_5 = \ldots$ $T_5 = \ldots$	$m_6 = \ldots$ $T_6 = \ldots$
n	f_1, *Гц*	f_2, *Гц*	f_3, *Гц*	f_4, *Гц*	f_5, *Гц*	f_6, *Гц*
1						
2						
3						
4						
5						
	$u_1 = \ldots$	$u_2 = \ldots$	$u_3 = \ldots$	$u_4 = \ldots$	$u_5 = \ldots$	$u_6 = \ldots$