10.157 $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin nx}{1+nx}$, $x\in[0;\pi] \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{1+nx}=0$ $(x\in(0;\pi])$ так как гармоническая функция ограничена и при $x=0$ значение предела тоже обнуляется (выполнено необходимое усл. равномерной сходимости)

однако по признаку Коши: $\exists\varepsilon>0:\ \forall N\ \exists p,n\ (n>N) \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\sin kx_n}{1+kx_n}\geqslant\varepsilon$ $(n<k\leqslant n+p)$, $x_n\in[0;\pi]$

$\to x_n=\frac{\pi}{6n}$

$\hookrightarrow \sin kx_n\geqslant\frac{1}{2}$ $(k\in(n;5n])$ $\Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{5n}\frac{\sin kx_n}{1+kx_n}\right|\geqslant\frac{1}{2}\left|\sum_{n+1}^{5n}\frac{1}{1+kx_n}\right|>\frac{1}{2}\cdot 4n\cdot\frac{1}{1+\frac{5\pi}{6}}=\varepsilon$ т.е. сходимость неравномерная

или $0\leqslant f_n(x)=\frac{\sin nx}{1+nx}\cdot\frac{n}{n}\leqslant\frac{n}{(1+nx)n}\leqslant\frac{1}{n}$ и для выполнения $f_n(x)<\varepsilon$ достаточно $n>\frac{1}{\varepsilon}$ $\forall x$

10.160 $\sum_{n=1}^{\infty}(2x^n-x^{2n})$, $x\in[0;1)$

$\to \lim_{n\to\infty}f_n(0)=0$ и $\lim_{n\to\infty}f_n(1)=\lim_{\substack{n\to\infty\\x=1}}2x^n-\lim_{\substack{n\to\infty\\x=1}}x^{2n}=1\neq0 \longrightarrow \{f_n(1)\}$ не сходится (метод граничной точки) т.е. сходимость ряда неравномерная

10.162 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ на $x\in(-1;1)$

$\to \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{1+1^{2n}}\neq0$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{1^n}{1+1^{2n}}\neq0$ равномерной сходимости нет (на $(-1;1)$ сходимость поточечная)

10.170 $\sum_{n=1}^{\infty}xe^{-n^2x^2}$ на $(0;+\infty)$ сход. неравномерно по критерию Коши, если $\exists\varepsilon>0\ \forall N:\exists n>N\ \exists p\in\mathbb{N}\ \exists x_n\in E$ $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}x_ne^{-k^2x_n^2}\right|>\varepsilon$

$u(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{e^{n^2x^2}}$ $\to x_n=\frac{1}{n}$, $p=2n$ $\left|\sum_{k=n+1}^{3n}\frac{x_n}{e^{x_n^2k^2}}\right|\geqslant\frac{1}{en}\cdot 2n=\frac{2}{e}=\varepsilon$ $n<k\leqslant n+p$, $p=2n$

10.174 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}}$ на $[-1;1]$ сход. равномерно по Вейерштрассу: $\left|\frac{x^n}{n\sqrt{n}}\right|\leqslant\frac{1}{n\sqrt{n}}$ на $[-1;1]$ и $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ сходится

10.179 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$ на $(-2;+\infty)$ по Вейерштрассу: $\left|\frac{(-1)^n}{x+2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^n}$ на $[0;+\infty)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $x\in(-2;0)$ требует формальностей по Коши

10.195 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n}}{2n-1}$, $x\in[-1;1]$; $R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{2n-1}}}=\infty$ (абсолют.сх. по т. Коши-Адамара)

последовательность $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}$ монотонно сход. к нулю $(n\to\infty)$, и $\left\{\sum_{k=1}^{n}x^k\right\}$ равномерно ограничена $x\in[-1;1]$ тогда признак Дирихле выполнен. $\hookrightarrow$ равномерн. сход.

10.196 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n+x}$, $x\in[1;+\infty)$

10.204 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$, $x\in[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}]$ $u(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{\substack{n\to\infty\\x\in[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}]}}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}=0$ $R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n\cdot 2^n}}}=\infty$ (абс.сход. по т. Коши-Адамара)

применим критерий равномер. сходимости: $\alpha_n=\sup_{|x|\leqslant\frac{3}{2}}\left|\frac{x^n}{n\cdot 2^n}-0\right|=\frac{3^n}{n\cdot 2^{2n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

10.208 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{1+n^2}$, $x\in\mathbb{R}$

$u(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{1+n^2}=0$ $\to \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}}_{\text{сход.}}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{1+n^2}$ по признаку Вейерштрасса показывается равномер. сход.

Коши: $\forall\varepsilon>0\ \exists M(\varepsilon):\forall n>N$ $f_n(x)\in U_\varepsilon(u_n(x))$ $u(x)=0=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{1}^{n}u_n(x)\right)$

$f_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$

$\forall i: |u_i|\leqslant\frac{1}{1+n^2}$

10.219 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x}{n+x}$ а) $x\in[0;1]$ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot x}{n+x}\right|=0$

и по критерию равн.сход.: $\alpha_n=\sup_{x\in[0;1]}\left|\frac{x}{n+x}-0\right|=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ т.е. сходится равномерно на $[0;1]$

б) $x\in(1;+\infty)$

Коши: $\exists\varepsilon>0\ \forall N\ \exists x_n\in E\ \exists n>N\ \exists p\in\mathbb{N}$ $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{x_n}{k+x_n}\right|>\varepsilon$, $\exists x_n=n$, $p=6n$ $\Rightarrow\left|\sum_{k=n+1}^{7n}\frac{n}{k+n}\right|\geqslant 6n\cdot\frac{n}{7n+8n}=\varepsilon$