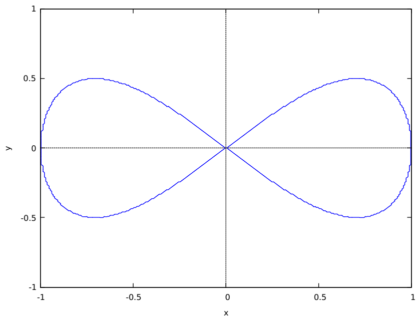
**Analysis II** Ksenia Fedosova, Nadine Große
SS 21

# Übungsblatt 5

**Aufgabe 17.** Wir betrachten $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 - x^2 + y^2$. Die Lösungsmenge von $f(x,y) = 0$ ist eine *Lemniskate/ figure-eight Kurve.*




Bestimmen Sie alle $(x,y) \in f^{-1}(0)$, so dass Sie den Satz über implizite Funktionen anwenden können, um zu sehen, dass $f(x,y) = 0$ a) nach $y = y(x)$ und b) nach $x = x(y)$ auflösbar ist. Bestimmen Sie in diesen Punkten a) $y'(x)$ und b) $x'(y)$.

Argumentieren Sie mit Hilfe des Bildes, dass für alle verbleibenden Punkte mit $f(x,y) = 0$ wirklich nicht nach der betreffenden Variable auflösbar sein kann.

**Aufgabe 18** (2.5+2.5)**.** Wir betrachten das folgende Gleichungssystem im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} -e^x + y + x + z - 1 &= 0 \\ ye^{-z} - e^{-1} &= 0. \end{aligned}$$

(i) Sei $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ eine Lösung des Gleichungssystems. Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung $U$ von $x_0$ in $\mathbb{R}$ und stetig differenzierbare Funtkionen $g, h\colon U \to \mathbb{R}$ mit $g(x_0) = y_0$, $h(x_0) = z_0$ und $(x, g(x), h(x))$ löst für alle $x \in U$ das Gleichungssystem.

(ii) Sei $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1)$ und $g, h$ wie in (i). Berechnen Sie $g'(0)$ und $h'(0)$.

**Aufgabe 19** (2.5+2.5)**.** (i) Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und sei $f\colon u = (u_1, \ldots, u_m)^T \in U \mapsto f(u) = f(u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^k$ $k$-mal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass der Funktionsgraph $M = \{(u, f(u)) \in \mathbb{R}^{n=m+k} \mid u \in U\}$ eine $C^k$-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

(ii) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - 3ax - y^2$. Finden Sie alle Werte $b$, so dass $f^{-1}(b)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist. Skizzieren Sie $f^{-1}(b)$ für einige Werte $a$ und $b$, so dass qualitativ alle 'Typen' von Mengen $f^{-1}(b)$ abgebildet werden.

**Aufgabe 20** (3+2)**.** Sei $S^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = r\}$. Zeigen Sie, dass $S^n(r)$ für $r > 0$ eine $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, indem Sie

(i) genügend lokale Parametrisierungen explizit angeben und die Definition überprüfen.

(ii) das Kriterium vom regulären Wert verwenden.

---

**Abgabe am Mittwoch 02.06.21 bis 14 Uhr**

# Analysis II Blatt 5

Lorenz Bung

lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

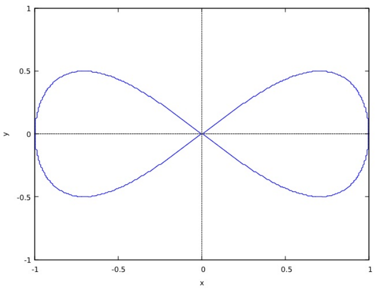
Matr.-Nr. 5113060

Vincent Wilhelms

Matr.-Nr. 4909980

vincent.wilhelms@gmail.com

**Aufgabe 17.** Wir betrachten $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 - x^2 + y^2$. Die Lösungsmenge von $f(x,y) = 0$ ist eine *Lemniskate/ figure-eight Kurve.*




Bestimmen Sie alle $(x,y) \in f^{-1}(0)$, so dass Sie den Satz über implizite Funktionen anwenden können, um zu sehen, dass $f(x,y) = 0$ a) nach $y = y(x)$ und b) nach $x = x(y)$ auflösbar ist. Bestimmen Sie in diesen Punkten a) $y'(x)$ und b) $x'(y)$.

Argumentieren Sie mit Hilfe des Bildes, dass für alle verbleibenden Punkte mit $f(x,y) = 0$ wirklich nicht nach der betreffenden Variable auflösbar sein kann.

$$x^4 - x^2 + y^2 = 0$$

<u>Auflösen nach y:</u>

$$y^2 = -x^4 + x^2 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 - x^4}.$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$, also $y \neq 0$ (da f sonst nicht lok. inv.)

Mithilfe der Kettenregel erhalten wir

$$2 \cdot y \cdot y' = \cancel{2 \cdot (x^2 - x^4)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\cancel{2(x^2 - x^4)^{\frac{1}{2}}}} \cdot (2x - 4x^3)$$

$$= 2x - 4x^3.$$

Für $x \neq 0$ ist $2x - 4x^3 \neq 0$ und damit invertierbar.

<u>Auflösen nach x:</u>

$$x^4 - x^2 + y^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 2x$$

Hier bekommen wir mit der Kettenregel

$$x^4 - x^2 = -y^2$$

lokal nach x auflösen

$$4x^3 \cdot x' - 2x \cdot x' = -2y$$

$$x' \cdot (4x^3 - 2x) = -2y$$

$$x' = \frac{-2y}{(4x^3 - 2x)} = \frac{-2y}{2x(2x^2 - 1)}$$

Nicht auflösbar für $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Das ergibt Sinn, denn in $x_1 = 0$ finden wir keine Umgebung, in der die Funktion invertierbar ist (denn wir finden keine entsprechende Immersion), während in $x_2 / x_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ die Steigung 0 ist und die Inverse damit unendliche Steigung hätte.

**Aufgabe 18** (2.5+2.5)**.** Wir betrachten das folgende Gleichungssystem im $\mathbb{R}^3$:

$$-e^x + y + x + z - 1 = 0$$
$$ye^{-z} - e^{-1} = 0.$$

(i) Sei $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ eine Lösung des Gleichungssystems. Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung $U$ von $x_0$ in $\mathbb{R}$ und stetig differenzierbare Funtkionen $g, h \colon U \to \mathbb{R}$ mit $g(x_0) = y_0$, $h(x_0) = z_0$ und $(x, g(x), h(x))$ löst für alle $x \in U$ das Gleichungssystem.

Wir definieren

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} e^x + y + x + z - 1 \\ ye^{-z} - e^{-1} \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Jacobimatrix

$$D_{(x,y,z)} f = \begin{pmatrix} e^x + 1 & 1 & -1 \\ 0 & e^{-z} & -ye^{-z} \end{pmatrix}.$$

Weil $e^x + 1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist $\partial_x f$ invertierbar.

Mit dem Satz 1.7.18 über implizite Funktionen gibt es damit eine offene Umgebung $U$ von $x$, $W$ von $y$ und $V$ von $z$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g: U \to W$ mit $\{(x,y) \in U \times W \mid f(x,y) = 0\} = \{(x, g(x)) \mid x \in U\}$ und $h: U \to V$ mit $\{(x,z) \in U \times V \mid f(x,z) = 0\} = \{(x, h(x)) \mid x \in U\}$.

Weiterhin ist $g(x) = y$ und $h(x) = z$.

(ii) Sei $(x_0, y_0, z_0) = (0,1,1)$ und $g, h$ wie in (i). Berechnen Sie $g'(0)$ und $h'(0)$.

Für die Jacobimatrix erhalten wir

$$D_{(0,1,1)} f = \begin{pmatrix} e^0+1 & 1 & -1 \\ 0 & e^{-1} & -e^{-1} \end{pmatrix}.$$

Damit ist nach Satz 1.7.18

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) = -\left(\partial_y f(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))$$
$$= -\begin{pmatrix} 1 \\ e^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^x+1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x) = -\left(\partial_z f(x, h(x))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x))$$
$$= -\begin{pmatrix} -1 \\ -e^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^x+1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 19** (2.5+2.5). (i) Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und sei $f\colon u = (u_1, \ldots, u_m)^T \in U \mapsto f(u) = f(u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^k$ $k$-mal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass der Funktionsgraph $M = \{(u, f(u)) \in \mathbb{R}^{n=m+k} \mid u \in U\}$ eine $C^k$-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

Wir definieren die Funktion $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ als Komponentenfunktionen $(f_1, \ldots, f_{m-k})$:

$$f_1(u_1, \ldots, u_m) = g_1(u_1, \ldots, u_k) + x_{k+1} + 0 \cdot x_{k+2} + \ldots + 0 \cdot x_m$$

$$f_2(u_1, \ldots, u_m) = g_2(u_1, \ldots, u_k) + 0 \cdot x_{k+1} + x_{k+2} + 0 \cdot x_{k+3} + \ldots + 0 \cdot x_m$$

$$\vdots$$

$$f_{m-k}(u_1, \ldots, u_m) = g_{m-k}(u_1, \ldots, u_k) + 0 \cdot x_{k+1} + \ldots + 0 \cdot x_{m-1} + x_m.$$

Dann ist die Jacobimatrix

$$D_u f = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_k} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \frac{\partial g_{m-k}}{\partial u_k} & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{m-k}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial u_k}{} & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

und hat damit vollen Rang.

Weiterhin ist $M \cap \mathbb{R}^{n=m+k} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$.

Da $f$ $k$-mal stetig differenzierbar war, ist $M$ nach Def. 1.8.1. eine $C^k$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n=m+k}$.

$\square$

(ii) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - 3ax - y^2$. Finden Sie alle Werte $b$, so dass $f^{-1}(b)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist. Skizzieren Sie $f^{-1}(b)$ für einige Werte $a$ und $b$, so dass qualitativ alle 'Typen' von Mengen $f^{-1}(b)$ abgebildet werden.

Wir bilden zunächst die Jacobimatrix:

$$D_{(x,y)}f = \left(3x^2 - 3a \,,\; -2y\right).$$

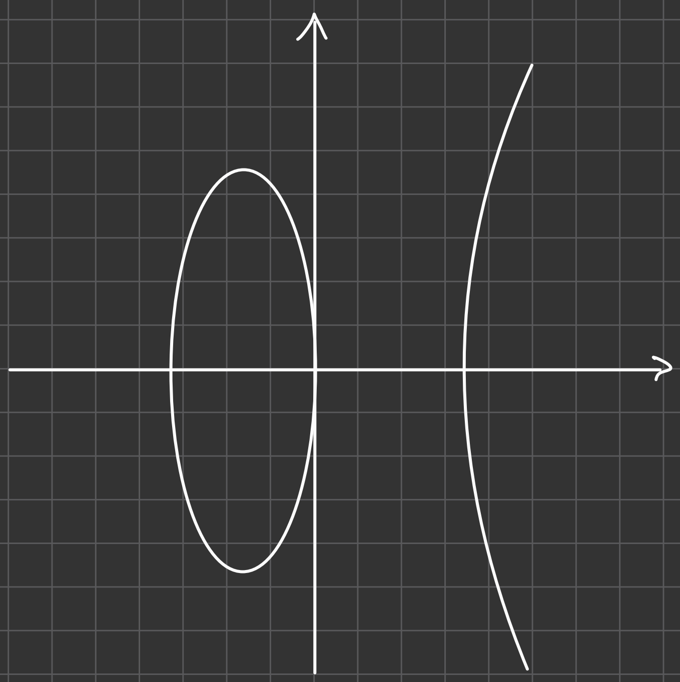
Damit erhalten wir das Gleichungssystem

$$3x^2 - 3a = 0 \quad \text{und} \quad -2y = 0$$
$$\Rightarrow x^2 = a \quad \text{und} \quad y = 0$$
$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{a} \quad \text{und} \quad y = 0$$

$$f(\sqrt{a}, 0) = \sqrt{a}^3 - 3a \cdot \sqrt{a} - 0^2 = -2\sqrt{a}^3$$
$$f(-\sqrt{a}, 0) = -\sqrt{a}^3 + 3a\sqrt{a} - 0^2 = 2\sqrt{a}^3$$

Also ist $f^{-1}(b)$ eine Untermannigfaltigkeit, wenn $b \in \{2\sqrt{a}^3, -2\sqrt{a}^3, 0\}$.

<u>Skizze:</u>



**Aufgabe 20** (3+2). Sei $S^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = r\}$. Zeigen Sie, dass $S^n(r)$ für $r > 0$ eine $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, indem Sie

(i) genügend lokale Parametrisierungen explizit angeben und die Definition überprüfen.

Zu Zeigen: $S^n(r)$ ist $r>0$ eine $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beweis:

Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$ und

$V_i := \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i > 0\}$, $i \in \{1, \dots, n+1\}$.

Wir definieren

$F_i : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V_i \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$$
$$\Downarrow$$
$$(x_1, \dots, x_{i-1}, \underbrace{\sqrt{r^2 - x_1^2 - \dots - x_{i-1}^2 - x_{i+1}^2 - \dots - x_{n+1}^2}}_{=:r}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}).$$

Dann ist die Jacobimatrix eine $(n \times (n+1))$-Matrix:

$$D_x F_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\frac{x_1}{r} & \cdots & \cdots & -\frac{x_{n+1}}{r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Zeile } i$$

und hat vollen Rang $(\mathrm{rg}(D_x F_i) = n)$.

$F_i(U) = S^n(r) \cap V_i$

$F_i : U \longrightarrow S^n(r) \cap V_i = F_i(U)$ ist ein Homöomorphismus.

Damit ist $S^n(r)$ nach Def. 1.8.1. eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$. $\square$

(ii) das Kriterium vom regulären Wert verwenden.

Wähle $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = |x|^2$

Dann ist $D_{(x_1,\dots,x_{n+1})} f = (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_{n+1})$.
Für $x = (x_1, \dots, x_{n+1})^T \neq (0, \dots, 0)^T$ ist
$\operatorname{rg}(D_x f) = 1$ und damit maximal.
Für $x = 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist $f(x) = 0$ und damit kritischer Punkt.
Alle anderen $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ sind reguläre Werte, da dann $|x|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 > 0$ ist.

Also insbesondere auch alle $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $f(x) = r^2$:
Dann gilt nach dem Kriterium des regulären Werts (Satz 1.8.5.c), dass $f^{-1}(r^2)$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.
Dies sind aber gerade die Punkte, die auf der Sphäre mit Radius $r$ liegen:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = r^2.$$

Damit ist $f^{-1}(r^2) = S^n(r)$ und damit $S^n(r)$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$.

$\square$