Elementargeometrie
Übungsblatt 5

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
StR Dr. Katharina Böcherer-Linder
Dr. Lukas Braun

Abgabe bis Freitag, 04.06.2021. Besprechung in den Übungsgruppen am 09. und 11.06.2021.
Hinweis zu den Konstruktionen/Skizzen: Sie können diese auch gerne mit dem Programm Geogebra (https://www.geogebra.org/calculator) erstellen!

Schöne Pfingstferien!

Aufgabe 1 Spiegelung am Einheitskreis, (4 Punkte)

Betrachten Sie die *Spiegelung am Einheitskreis* $z \mapsto \overline{z}^{-1}$. Nach Lemma 2.19 ist dies ein Automorphismus der hyperbolischen Ebene als Inzidenzgeometrie. Geben Sie geometrische Beweise für die folgenden Eigenschaften der Spiegelung am Einheitskreis:

a) Eine Gerade durch 0 wird in eine Gerade durch 0 abgebildet.

b) Eine Gerade, die nicht durch 0 geht, wird in einen Kreis, der durch 0 geht, abgebildet.

c) Ein Kreis durch 0 wird in eine Gerade, die nicht durch 0 geht, abgebildet.

d) Ein Kreis, der nicht durch 0 geht, wird in einen Kreis, der ebenfalls nicht durch 0 geht, abgebildet.

Aufgabe 2 Spiegelung an Einheitskreis und reeller Achse, (2 Punkte)

Sei $\phi : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ die Abbildung aus dem Beispiel auf S. 20 im Skript, welche die reelle Achse auf den Einheitskreis abbildet. Sei $\psi \colon z \mapsto \overline{z}^{-1}$ die Spiegelung am Einheitskreis und $\tau \colon z \mapsto \overline{z}$ die Spiegelung an der reellen Achse. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\psi = \phi \circ \tau \circ \phi^{-1}.$$

Aufgabe 3 Allgemeine Geradengleichung, (4 Punkte)

Sei $u \in \mathbb{C}$ sowie $a, b \in \mathbb{R}$ mit $u\overline{u} - ab > 0$. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge der Gleichung

$$az\overline{z} + u\overline{z} + \overline{u}z + b = 0$$

für $z \in \mathbb{C}$ in Abhängigkeit von u, a, b entweder ein Kreis oder eine Gerade ist. Geben Sie Mittelpunkt und Radius bzw. eine Geradengleichung in der 'üblichen' Form (mit reellen Kordinaten) an.

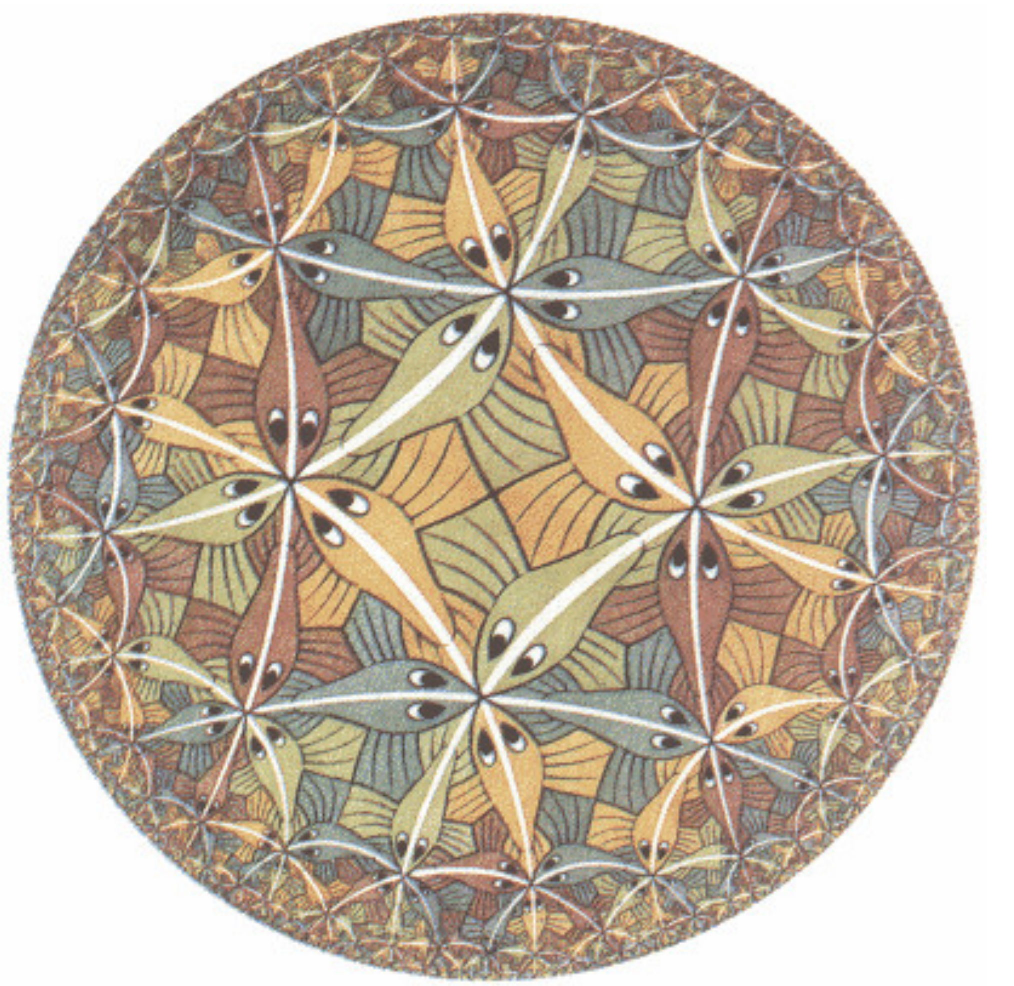
Aufgabe 4 Hyperbolische Parkettierungen, (4 Punkte)

Betrachten Sie die Möbiustransformationen $\phi\colon z \mapsto -\frac{1}{z}$ und $\psi\colon z \mapsto z+1$ sowie die drei hyperbolischen Geraden gegeben durch

$$g_1 := \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\}, \quad g_2 := \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}\}, \quad g_3 := \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| = 1\}.$$

Berechnen Sie die Bilder der Geraden unter ϕ, ψ, ψ^{-1}, $\phi \circ \psi$, sowie $\phi \circ \psi^{-1}$. Zeichnen Sie das Muster, was sich aus den Geraden durch Verkettungen von ϕ, ψ und ψ^{-1} ergibt.

Bemerkung: Sie erhalten so eine Parkettierung der hyperbolischen Ebene durch Dreiecke - nämlich jene, deren Seiten durch die Geraden g_1, g_2, g_3 und deren Bilder beschrieben werden. Im Bild unten sehen Sie eine Parkettierung der hyperbolischen Ebene im Kreisscheibenmodell durch Drei- und Vierecke (M. C. Escher, Kreislimit III, 1959).



Aufgabe 5 Aufgabe mit Schulbezug, (4 Bonuspunkte)

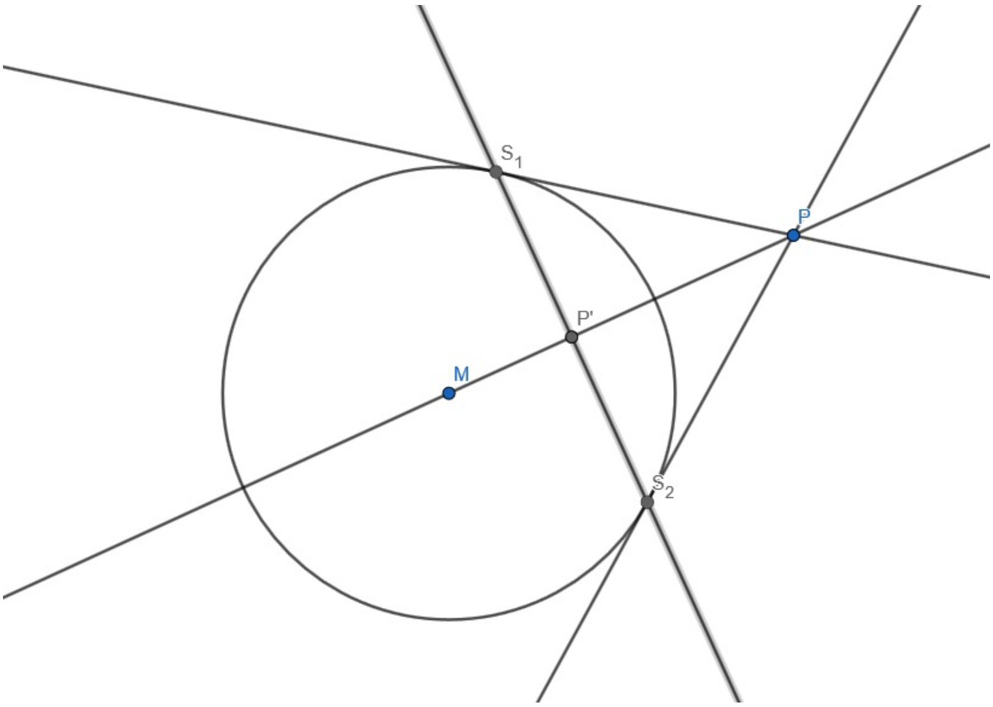
Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal spielen in der Schule eine große Rolle. Dabei geht es auch darum, die mathematischen Zusammenhänge zu verstehen, die für die Konstruktion genutzt werden.

a) Lösen Sie folgende typische Konstruktionsaufgabe aus der Schule (Lambacher Schweizer (2016). Mathematik für Gymnasien, Klasse 7, S. 137):

   'Zeichne einen Kreis um M mit Radius von $3,5$ cm und einen Punkt P mit $|MP| = 8$ cm. Konstruiere die Tangenten an den Kreis durch den Punkt P.'

   Welchen Satz aus der (Schul-)Geometrie haben Sie hier verwendet?

b) Eine Konstruktion von Tangenten wie in a) ist Grundlage für die Konstruktion der Kreisspiegelung. Bei der Spiegelung eines Punktes P an einem Kreis mit Radius R und Mittelpunkt M gilt für den Bildpunkt P' folgende Bedingung: $|MP'| = \frac{R^2}{|MP|}$.



1. Zeigen Sie mit Hilfe eines Satzes aus der (Schul-)Geometrie, dass die Punkte P und P' aus der obigen Skizze die genannte Bedingung erfüllen.
2. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal die Kreisspiegelung eines Punktes P an einem Kreis, für P innerhalb und für P außerhalb des Kreises. Formulieren Sie jeweils eine Konstruktionsbeschreibung.

Elementargeometrie

Blatt 5

Mascha Reber mascha.reber@neptun.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 4734963

Lorenz Bung lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Aufgabe 2 Spiegelung an Einheitskreis und reeller Achse, (2 Punkte)

Sei $\phi : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ die Abbildung aus dem Beispiel auf S. 20 im Skript, welche die reelle Achse auf den Einheitskreis abbildet. Sei $\psi\colon z \mapsto \overline{z}^{-1}$ die Spiegelung am Einheitskreis und $\tau\colon z \mapsto \overline{z}$ die Spiegelung an der reellen Achse. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\psi = \phi \circ \tau \circ \phi^{-1}.$$

<u>z.z.:</u> $\psi = \phi \circ \tau \circ \phi^{-1}$.

<u>Beweis:</u> Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$(\phi \circ \tau \circ \phi^{-1})(z) = \phi(\tau(\phi^{-1}(z)))$$

$$\phi\left(\tau\left(i \cdot \frac{1+z}{1-z}\right)\right) = \phi\left(-i \cdot \frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}\right)$$

$$= \frac{-\cancel{i}\,\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} - \cancel{i}}{-\cancel{i} \cdot \frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} + \cancel{i}} = \frac{-\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} - 1}{-\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} + 1} = \frac{\frac{-1-\overline{z}}{1-\overline{z}} - \frac{1-\overline{z}}{1-\overline{z}}}{\frac{-1-\overline{z}}{1-\overline{z}} + \frac{1-\overline{z}}{1-\overline{z}}}$$

$$= \frac{-1-\cancel{\overline{z}} - 1 + \cancel{\overline{z}}}{\cancel{1-\overline{z}}} \cdot \frac{\cancel{1-\overline{z}}}{\cancel{-1} - \overline{z} \cancel{+1} - \overline{z}}$$

$$= \frac{\cancel{-2}}{\cancel{-2}\,\overline{z}} = \overline{z}^{-1} = \psi(z).$$

$\square$

Aufgabe 3 Allgemeine Geradengleichung, (4 Punkte)

Sei $u \in \mathbb{C}$ sowie $a, b \in \mathbb{R}$ mit $u\overline{u} - ab > 0$. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge der Gleichung

$$az\overline{z} + u\overline{z} + \overline{u}z + b = 0$$

für $z \in \mathbb{C}$ in Abhängigkeit von u, a, b entweder ein Kreis oder eine Gerade ist. Geben Sie Mittelpunkt und Radius bzw. eine Geradengleichung in der 'üblichen' Form (mit reellen Kordinaten) an.

<u>z.z.:</u> Die Gleichung $az\overline{z} + u\overline{z} + \overline{u}z + b = 0$ hat für $z \in \mathbb{C}$ in Abhängigkeit von $u \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$ eine Lösungsmenge, die für $u\overline{u} - ab > 0$ entweder ein Kreis oder eine Gerade ist.

<u>Beweis:</u>

$$az\overline{z} + u\overline{z} + \overline{u}z + b = 0$$

$$\Rightarrow a \cdot (Re(z) + i \cdot Im(z)) \cdot (Re(z) - i \cdot Im(z)) + u\overline{z} + \overline{u}z + b = 0$$

3. bin.

$$\Rightarrow a \cdot (Re(z)^2 + Im(z)^2) + u\overline{z} + \overline{u}z + b = 0$$

$$\Rightarrow u\overline{z} + \overline{u}z + (\underbrace{a \cdot |z|^2 + b}_{\in \mathbb{R},\ \text{wähle } c := \frac{a \cdot |z|^2 + b}{2}}) = 0$$

$$\Rightarrow (Re(u) + i\,Im(u)) \cdot \overline{z} + (Re(u) - i \cdot Im(u))\, z + 2c = 0$$

$$\Rightarrow Re(u)\overline{z} + i\,Im(u)\overline{z} + Re(u)z - i\,Im(u)z + 2c = 0$$

$$\Rightarrow Re(u)(\overline{z} + z) + i \cdot Im(u)(\overline{z} - z) + 2c = 0$$

$$\Rightarrow Re(u)(Re(z) \cancel{- i\,Im(z)} + Re(z) \cancel{+ i\,Im(z)})$$
$$+ i\,Im(u)(\cancel{Re(z)} - i\,Im(z) \cancel{- Re(z)} - i\,Im(z)) + 2c = 0$$

$$\Rightarrow Re(u) \cdot 2 \cdot Re(z) + Im(u) \cdot 2 \cdot Im(z) + 2c = 0 \quad | : 2$$

$$\Rightarrow Re(u) \cdot Re(z) + Im(u) \cdot Im(z) + c = 0$$

Fall 1: $\quad \mathrm{Re}(u) \neq 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathrm{Im}(z)}_{y} \underset{=}{=} -\frac{\mathrm{Re}(u)\,\mathrm{Re}(z)+c}{\mathrm{Im}(u)} = \underbrace{-\frac{\mathrm{Re}(u)}{\mathrm{Im}(u)}}_{m} \cdot \underbrace{\mathrm{Re}(z)}_{x} + \underbrace{\frac{c}{\mathrm{Im}(u)}}_{e}$$

$y = m \cdot x + e$ ← Geradengleichung

Fall 2: $\mathrm{Im}(u) = 0$ und $\mathrm{Re}(u) \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = -\frac{c}{\mathrm{Re}(u)}$$

Form $x = d$, senkrechte Gerade

Fall 3: $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Re}(u) = 0$ (also $u = 0$)

$$\Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a|z|^2+b}{2} = 0$$

$$\Rightarrow a|z|^2 + b = 0$$

$$\Rightarrow a|z|^2 = -b$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = -\frac{b}{a}$$

Kreis um die 0 mit Radius $\sqrt{-\frac{b}{a}}$.

$\square$

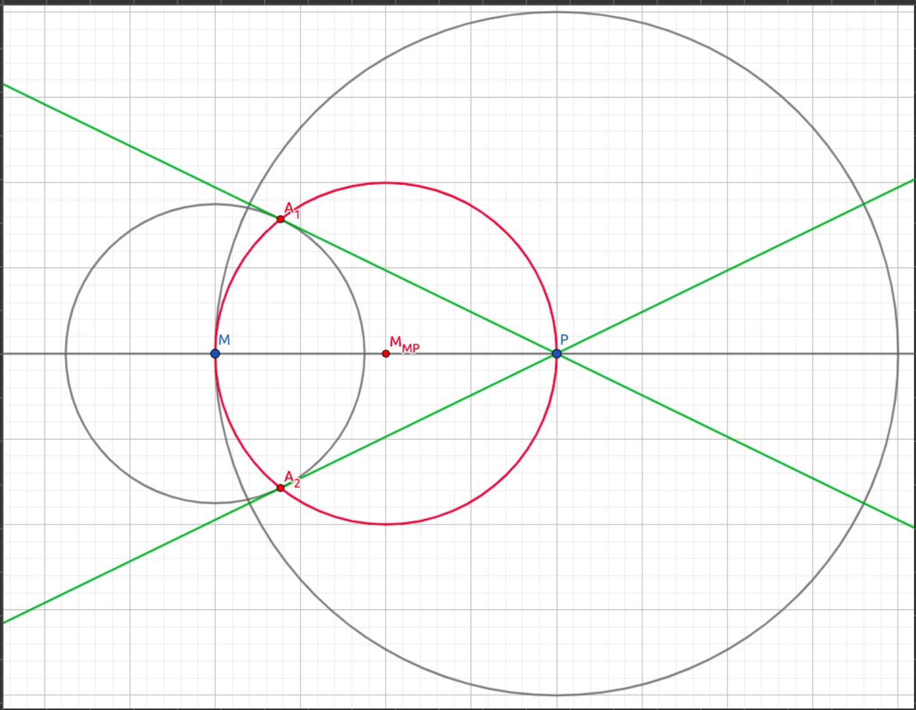
Aufgabe 5 Aufgabe mit Schulbezug, (4 Bonuspunkte)

Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal spielen in der Schule eine große Rolle. Dabei geht es auch darum, die mathematischen Zusammenhänge zu verstehen, die für die Konstruktion genutzt werden.

a) Lösen Sie folgende typische Konstruktionsaufgabe aus der Schule (Lambacher Schweizer (2016). Mathematik für Gymnasien, Klasse 7, S. 137):

'Zeichne einen Kreis um M mit Radius von $3,5$ cm und einen Punkt P mit $|MP| = 8$ cm. Konstruiere die Tangenten an den Kreis durch den Punkt P.'

Welchen Satz aus der (Schul-)Geometrie haben Sie hier verwendet?

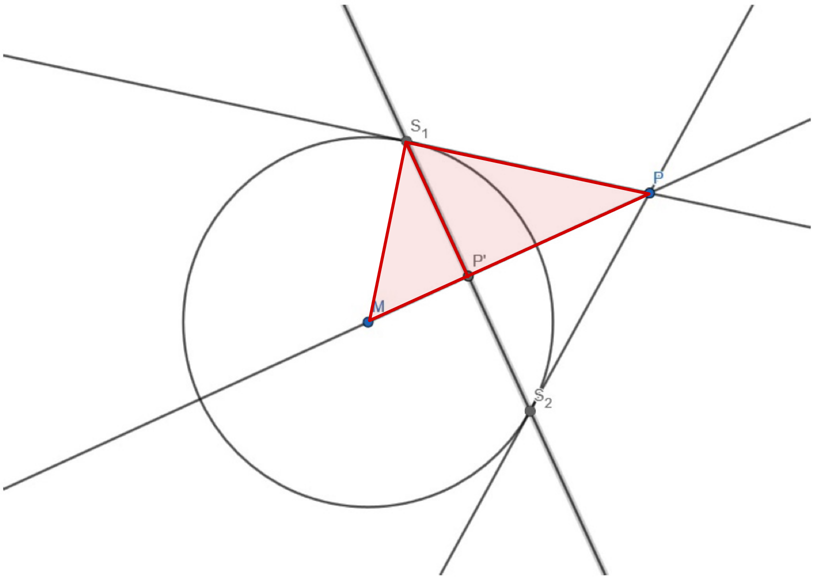


Vorgehen:

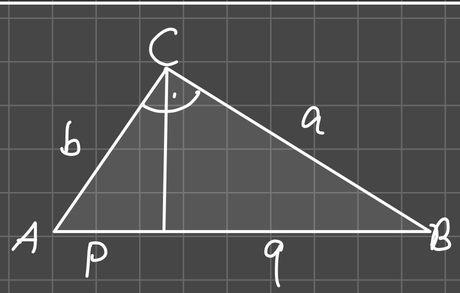
1. $M_{MP} := \frac{M+P}{2}$
2. Kreis um M_{MP} mit M (bzw. P) auf dem Kreis
3. Schnittp. dieses Hilfskreises mit dem urspr. Kreis berechnen
4. Die Tangenten als Gerade durch A_1 und P bzw. A_2 und P bilden

Wir nutzen hier den Satz des Thales aus der Schule: Alle Dreiecke MPA_1 bzw MA_2P haben bei A_1 bzw. einen rechten Winkel. Damit steht die Gerade durch A_1 und P (bzw. A_2 und P) senkrecht auf $\overline{MA_1}$ bzw. $\overline{MA_2}$ und ist damit eine Tangente des Kreises.

b) Eine Konstruktion von Tangenten wie in a) ist Grundlage für die Konstruktion der Kreisspiegelung. Bei der Spiegelung eines Punktes P an einem Kreis mit Radius R und Mittelpunkt M gilt für den Bildpunkt P' folgende Bedingung: $|MP'| = \frac{R^2}{|MP|}$.



1. Zeigen Sie mit Hilfe eines Satzes aus der (Schul-)Geometrie, dass die Punkte P und P' aus der obigen Skizze die genannte Bedingung erfüllen.



$c = p + q$

Kathetensatz:

$b^2 = p \cdot c$

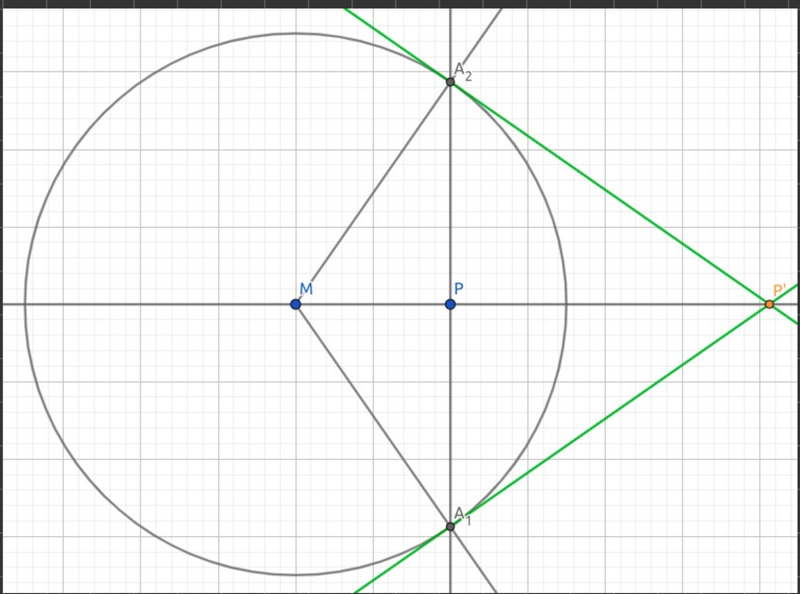
Betrachtet man das rot eingezeichnete Dreieck, so erhält man mit dem Kathetensatz des Euklid:

$|\overline{MS_1}|^2 = R^2 = |MP'| \cdot |MP|$, also

$|MP'| = \frac{R^2}{|MP|}$. $\square$

2. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal die Kreisspiegelung eines Punktes P an einem Kreis, für P innerhalb und für P außerhalb des Kreises. Formulieren Sie jeweils eine Konstruktionsbeschreibung.

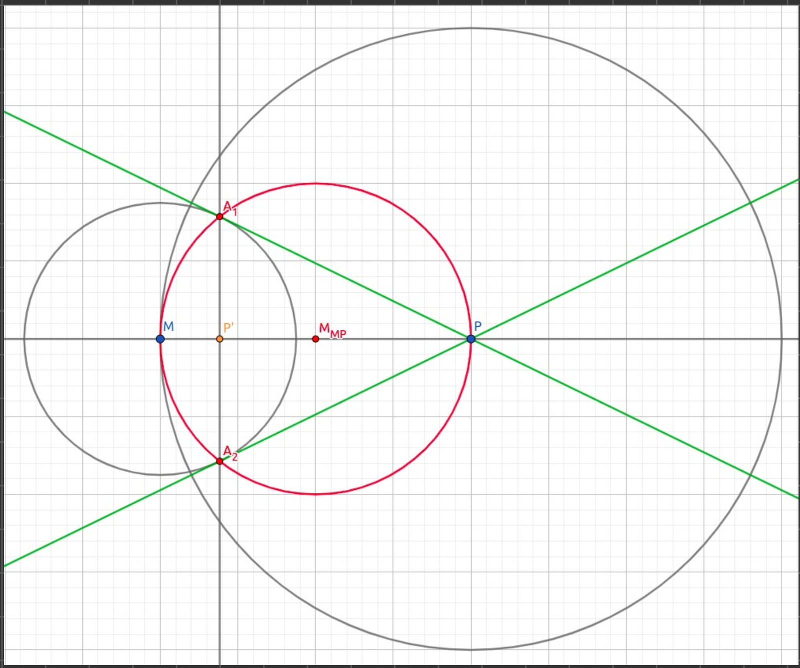
P innerhalb des Kreises:



Vorgehen:

1. $f :=$ Gerade durch M und P
2. $g :=$ Senkrechte in P auf f
3. $A_1, A_2 :=$ SP von g mit Kreis
4. $t_1, t_2 :=$ Senkrechte in A_1 bzw. A_2 auf $\overline{MA_1}$ bzw. $\overline{MA_2}$
5. $P' :=$ SP von t_1 und t_2 (oder t_1 und f, oder t_2 und f).

P außerhalb des Kreises:



Vorgehen:

1. A_1 und A_2 können wie in a) konstruiert werden.
2. $g :=$ Gerade durch A_1 und A_2
3. $P' :=$ SP von f und g.