Elementargeometrie
Übungsblatt 11

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
StR Dr. Katharina Böcherer-Linder
Dr. Lukas Braun

Abgabe bis Freitag, 16.07.2021. Besprechung in den Übungsgruppen am 21. und 23.07.2021.

Aufgabe 1 Hyperbolische Lote, (4 Punkte)

Wir betrachten die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}^2$. Sei $g \subset \mathbb{H}^2$ eine hyperbolische Gerade mit einem Endpunkt $x_1 \in \mathbb{R}$ und einem Endpunkt $x_2 = \infty$. Sei $x \in g$.

Beweisen Sie die Behauptung aus der Vorlesung, dass das *Lot* (def. durch Def. 4.6 und Satz 4.7 (iii)) auf g durch x gerade der Halbkreis mit Mittelpunkt x_1 durch x ist.

Aufgabe 2 Gemeinsame Lote, (4 Punkte)

Wir betrachten die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}^2$. Seien $g \parallel g' \subset \mathbb{H}^2$ zwei verschiedene parallele hyperbolische Geraden. Ein *gemeinsames Lot* ist eine hyperbolische Gerade $h \subset \mathbb{H}^2$, mit $g \perp h$ und $g' \perp h$. Zeigen Sie:

a) Haben g, g' ein gemeinsames Ende, so existiert kein gemeinsames Lot.

b) Haben g, g' kein gemeinsames Ende, so existiert genau ein gemeinsames Lot.

Aufgabe 3 Hyperbolische Verschiebungen, (6 Punkte)

Wir betrachten die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}^2$. Sei $g \subset \mathbb{H}^2$ eine hyperbolische Gerade mit Endpunkten $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

a) Berechnen Sie die Gruppe der Verschiebungen entlang g konkret als Teilmenge der Möbiustransformationen in Abhängigkeit von x_1, x_2.

b) Sei $g \neq h \subset \mathbb{H}^2$ eine weitere hyperbolische Gerade. Bestimmen Sie rechnerisch, welche Paare von Verschiebungen (τ_g, τ_h) kommutieren - wann also $\tau_g \circ \tau_h = \tau_h \circ \tau_g$ gilt - wobei τ_g eine Verschiebung entlang g und τ_h eine Verschiebung entlang h ist.

Aufgabe 4 Doppelverhältnis, (3 Punkte)

Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{H}^2$ paarweise verschieden. Das *Doppelverhältnis* $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ der vier Punkte ist definiert als

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] := \frac{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}.$$

Zeigen Sie, dass das Doppelverhältnis invariant ist unter Möbiustransformationen.

Aufgabe 5 Bonusaufgabe, (4 Bonuspunkte)

Zeigen Sie, dass paarweise verschiedene $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{H}^2$ genau dann auf einem Kreis liegen, wenn $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6 Aufgabe mit Schulbezug, (3 Bonuspunkte)

Nächste Woche werden in der Vorlesung die Kongruenzsätze für Dreiecke behandelt. Als kleiner Vorgriff die folgende Aufgabe: Finden Sie jeweils eine Dreieckskonstruktionsaufgabe, die auf der Angabe von drei Größen (Seitenlängen, Winkelgrößen) basiert, die

a) nicht lösbar ist,

b) die unendlich viele nicht kongruente Dreiecke als Lösung hat,

c) die bis auf Kongruenz genau zwei Dreiecke als Lösung hat,

d) die bis auf Kongruenz genau drei Dreiecke als Lösung hat.