Numerik 1

Blatt 3 – 15.11.2021

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 bis 4. Abgabe: 26.11.2021, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws21/num`

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv definite Matrix, das heißt es gelte $x^\top Ax > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
(i) Zeigen Sie, dass A regulär ist.
(ii) Zeigen Sie, dass für alle $1 \le k \le n$ die $k \times k$-Untermatrix $A_k = (a_{ij})_{1\le i,j\le k}$ ebenfalls positiv definit ist.
(iii) Zeigen Sie, dass alle reellen Eigenwerte von A positiv sind.

Aufgabe 2. Konstruieren Sie eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, sodass die Matrix PA eine normalisierte LU-Zerlegung besitzt, wobei

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \\ -1 & 10 & -5 & 17 \end{bmatrix}.$$

Lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = [17, -23, -13, 51]^\top$.

Aufgabe 3. Sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die zur Bijektion $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ gehörende Permutationsmatrix. Zeigen Sie, dass $P^\top = P^{-1}$ und

$$P^{-1} = [e_{\pi^{-1}(1)}, e_{\pi^{-1}(2)}, \dots, e_{\pi^{-1}(n)}].$$

Aufgabe 4. Wie groß ist der Aufwand des Gaußschen Eliminationsverfahrens mit Spalten-Pivotsuche im Gegensatz zu dem mit totaler Pivotsuche?

8

Numerik I Blatt 3

Lorenz Bung

lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Charlotte Rothhaar

Matr.-Nr. 4315016

charlotte.rothhaar97@gmail.com

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv definite Matrix, das heißt es gelte $x^\top Ax > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
(i) Zeigen Sie, dass A regulär ist.

Beweis durch Widerspruch:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nicht reguläre Matrix. Dann besteht der Kern von A nicht ausschließlich aus dem Nullelement und $Ax=0$ für $x \neq 0$.

Wenn $Ax=0 \Rightarrow x^T Ax = 0$ ↯ pos. Definitheit.

Somit muss A regulär sein.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $1 \leq k \leq n$ die $k \times k$-Untermatrix $A_k = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ ebenfalls positiv definit ist.

Sei A positiv definit, also $x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Wähle nun x so, dass $x_n = 0$.

Dann ist $$x^T A x = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} x_j \right)_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \cdot \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} x_j > 0,$$

was aber bereits $y^T A_{n-1} y$ für $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit $y_i = x_i$ für $1 \leq i \leq n-1$ ist, wobei x_i für $i \neq n$ beliebig war.

Induktiv folgt also, dass $A_k = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ positiv definit ist.

$\square$

Basierend auf
https://www.matheboard.de/archive/562984/thread.html
Keine Ahnung ob ich das richtig interpretiert habe und ob es so stimmt
(das mit $x_n = 0$ hat er im Video so erwähnt)

(iii) Zeigen Sie, dass alle reellen Eigenwerte von A positiv sind.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit.

$\lambda \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert von A, wenn $Ax = \lambda x \; \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Da A positiv definit ist, gilt $x^T A x > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Insgesamt ist also $0 < x^T A x = x^T \lambda x = \lambda x^T x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Da $x^T x > 0$ ist, folgt $0 < \lambda$.

Also sind alle reellen Eigenwerte von A positiv.

$\square$

Aufgabe 2. Konstruieren Sie eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{4\times4}$, sodass die Matrix PA eine normalisierte LU-Zerlegung besitzt, wobei

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \\ -1 & 10 & -5 & 17 \end{bmatrix}.$$

Lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = [17, -23, -13, 51]^\top$.

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \Rightarrow PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \\ -1 & 10 & -5 & 17 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & -2 & -5 \\ -1 & 10 & -5 & 17 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

PA ist regulär (da $\det(PA) \neq 0$, sowie $\det((PA)_k) \neq 0$ für $1 \leq k \leq n$) wie auch alle Untermatrizen $(PA)_k = (pa_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$.

$\Rightarrow$ Es existiert eine eindeutige, normalisierte LU-Zerlegung von PA. (nach Satz 3.1)

Lösung des LGS $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & -2 & -5 \\ -1 & 10 & -5 & 17 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -23 \\ -13 \\ 51 \end{bmatrix}$ durch

Gauß-Eliminationsverfahren liefert $x = \begin{bmatrix} -272 \\ 21 \\ -54 \\ -45 \end{bmatrix}$

Aufgabe 3. Sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die zur Bijektion $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ gehörende Permutationsmatrix. Zeigen Sie, dass $P^\top = P^{-1}$ und

$$P^{-1} = [e_{\pi^{-1}(1)}, e_{\pi^{-1}(2)}, \ldots, e_{\pi^{-1}(n)}].$$

P wird erzeugt von den Matrizen $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(k)}$, aber $P = P^{(k)} \cdot P^{(k-1)} \cdot \ldots \cdot P^{(1)}$, wobei $P^{(i)}$ Permutationsmatrix ist, welche zwei Zeilen vertauscht. $\Rightarrow P^{(i)}$ entsteht durch Vertauschen 2 zu vertauschenden Zeilen der Einheitsmatrix (Bsp 4.2). Wenn $P^{(i)}$ die i-te und j-te Zeile vertauscht sind die Diagonalelemente von $P^{(i)}$ alle 1 außer in der i-ten und j-ten Zeile, hier sind gerade die Einträge (j,i) bzw. (i,j) gleich 1. Außerdem hat $P^{(i)}$ nur Nulleinträge $\Rightarrow P^{(i)} = P^{(i)T} \Rightarrow P^T = (P^{(k)} \cdot \ldots \cdot P^{(1)})^T = P^{(1)T} \cdot \ldots \cdot P^{(k)T} = P^{(1)} \cdot \ldots \cdot P^{(k)}$

Insbesondere sind somit $P \cdot P^T = (P^{(k)} \cdot \ldots \cdot P^{(1)}) \cdot (P^{(1)} \cdot \ldots \cdot P^{(k)}) = (P^{(k)} \cdot \ldots \cdot P^{(2)})\underbrace{(P^{(1)} \cdot P^{(1)})}_{Id_n}(P^{(2)} \cdot \ldots \cdot P^{(k)})$

$$= (P^{(k)} \cdot \ldots \cdot P^{(3)}) \cdot \underbrace{(P^{(2)} \cdot P^{(2)})}_{Id_n}(P^{(3)} \cdot \ldots \cdot P^{(k)}) = \ldots = P^{(k)} \cdot P^{(k)} = Id_n$$

$\Rightarrow P^T = P^{-1}$

Da π Bijektion ist, existiert π^{-1}. Insbesondere wird die Darstellungsmatrix bzgl. der Standardbasis von π^{-1} gegeben durch P^{-1}. ∎

Aufgabe 4. Wie groß ist der Aufwand des Gaußschen Eliminationsverfahrens mit Spalten-Pivotsuche im Gegensatz zu dem mit totaler Pivotsuche?

Aufwand LU-Zerlegung...

... mit Spaltenpivotsuche:	... mit totaler Pivotsuche:
Suche nach dem betragsmäßig größten Element im k-ten Schritt:	
in einer Spalte: $(n-k)$ viele Vergleiche	$(n-k)^2$ viele Vergleiche
Anschließende Vertauschung der Elemente	
$(n-k+1)$ viele Vertauschungen	$2(n-k+1)$ viele Vertauschungen
Gesamte Operationen für diesen Teilschritt	
$\sum_{k=1}^{n-1}((n-k)+(n-k+1)) = n^2-n$	$\sum_{k=1}^{n-1}((n-k)^2+2(n-k+1)) = \frac{1}{6}(2n^3+3n^2+7n-12)$
Für den restlichen Algorithmus sind $O(n^3)$ Operationen notwendig, daher ist der Aufwand für große n vernachlässigbar	Insgesamt benötigt man etwa n^3 Operationen
Vergleich mit Aufwand des Gaußschen Eliminationsverfahren	
In etwa gleich viel Aufwand.	Mehr Aufwand