Lorenz Bung
Lea Weissenrieder

Aufgabe 4 (1+1.5+1.5+1)**.** Berechnen Sie

(i) $\int_\gamma f ds$ für $f(x,y) = xy^2$ für eine Kurve γ die einmal den Kreis um den Ursprung vom Radius 2 umrundet.

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto (2\cos(t), 2\sin(t))^T$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\int_\gamma f ds = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\, |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} 2\cos(t) \cdot (2\sin(t))^2 \cdot \sqrt{(-2\sin(t))^2 + (2\cos(t))^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\cos(t) \cdot 4\sin^2(t) \cdot \sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)}\, dt = 8 \int_0^{2\pi} \cos(t)\sin^2(t) \underbrace{\sqrt{4(\sin^2(t) + \cos^2(t))}}_{\sqrt{4} = 2}\, dt$$

$$= 16 \int_0^{2\pi} \cos(t)\sin^2(t)\, dt$$

$$= 16 \int_{\sin(0)}^{\sin(2\pi)} x^2\, dx$$

$$= 16 \cdot \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^0 = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Mit Substitutionsregel:} \\ \displaystyle\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx \\ \text{hier: } f(x) = x^2, \quad \varphi(t) = \sin(t) \end{array}}$$

(ii) $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x,y) = \binom{2y}{1-x}$ entlang $\gamma \colon t \in [-1,2] \mapsto (t, 1-t^3)^T \in \mathbb{R}^2$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3t^2 \end{pmatrix}$$

$$\int_\gamma V \cdot ds = \int_{-1}^{2} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle\, dt = \int_{-1}^{2} \left\langle \begin{pmatrix} 2-2t^3 \\ 1-t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3t^2 \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_{-1}^{2} (2-2t^3) + (1-t)(-3t^2)\, dt = \int_{-1}^{2} 2 - 2t^3 - 3t^2 + 3t^3\, dt = \int_{-1}^{2} t^3 - 3t^2 + 2\, dt$$

$$= \left[\tfrac{1}{4}t^4 - t^3 + 2t\right]_{-1}^{2} = \left(\tfrac{1}{4} \cdot 2^4 - 2^3 + 2 \cdot 2\right) - \left(\tfrac{1}{4}(-1)^4 - (-1)^3 + 2 \cdot (-1)\right)$$

$$= (4 - 8 + 4) - \left(\tfrac{1}{4} + 1 - 2\right) = 0 - \tfrac{1}{4} + 1 = \underline{\underline{\tfrac{3}{4}}}$$

(iii) $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x,y,z) = (0, x^2, -yz)^T$ entlang einer Kurve γ, die geradlinig von $(4,-1,2)^T$ nach $(1,7,-1)^T$ verläuft.

Bestimme γ:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$$
$$t \mapsto \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\int_\gamma V \cdot ds = \int_0^1 \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ (4-3t)^2 \\ -(-1+8t)(2-3t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 16-24t+9t^2 \\ 2-19t+24t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 0 + 8 \cdot (16-24t+9t^2) - 3(2-19t+24t^2) \, dt$$

$$= \int_0^1 128 - 192t + \cancel{72t^2} - 6 + 57t - \cancel{72t^2} \, dt = \int_0^1 122 - 135t \, dt = \left[122t - \frac{135}{2} t^2\right]_0^1$$

$$= 122 - \frac{135}{2} = \underline{\underline{54{,}5}}$$

(iv) die Länge des Funktionsgraphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

$$L(f) = \int_a^b |f'(t)| \, dt = \left[|f(t)| \right]_b^a = |f(a)| - |f(b)|$$

Aufgabe 5. Sei $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ eine parametrisierte Kurve. Wir können g als Vektorfeld $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (\operatorname{Re} g(x+iy), \operatorname{Im} g(x+iy))^T$ auffassen. Vergleichen Sie das Kurvenintegral zweiter Art $\int_\gamma V \cdot ds$ mit dem komplexen Kurvenintegral $\int_\gamma g\,dz$. Im Spezialfall, dass g nur reelle Werte annimmt, vergleichen Sie diese Integrale zusätzlich mit dem Kurvenintegral $\int_\gamma g ds$ erster Art.

Bew.: $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto \operatorname{Re}(\gamma(t)) + i \operatorname{Im}(\gamma(t)) \cong \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\gamma(t)) \\ \operatorname{Im}(\gamma(t)) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\gamma(t))' \\ \operatorname{Im}(\gamma(t))' \end{pmatrix}$$

$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wird aufgefasst als Vektorfeld $V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(g(x+iy)) \\ \operatorname{Im}(g(x+iy)) \end{pmatrix}$$

Wir betrachten nun die verschiedenen Integrale:

- Kurvenintegral 2. Art:

$$\int_\gamma V \cdot ds = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\overbrace{g(\operatorname{Re}(\gamma(t)) + i \operatorname{Im}(\gamma(t)))}^{g(\gamma(t)) :=}) \\ \operatorname{Im}(g(\operatorname{Re}(\gamma(t)) + i \operatorname{Im}(\gamma(t)))) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\gamma(t))' \\ \operatorname{Im}(\gamma(t))' \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_a^b \operatorname{Re}(g(\gamma(t)) \cdot \operatorname{Re}(\gamma(t))' + \operatorname{Im}(g(\gamma(t)) \cdot \operatorname{Im}(\gamma(t))' \, dt$$

- komplexes Kurvenintegral

$$\int_\gamma g \, dz = \int_a^b g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = \int_a^b (\operatorname{Re}(g(\gamma(t))) + i \operatorname{Im}(g(\gamma(t))) \cdot (\operatorname{Re}(\gamma'(t)) + i \operatorname{Im}(\gamma'(t)) \, dt$$

$$= \int_a^b \operatorname{Re}(g(\gamma(t)) \cdot \operatorname{Re}(\gamma'(t)) + \operatorname{Re}(g(\gamma(t))) \cdot i \operatorname{Im}(\gamma'(t)) + i \operatorname{Im}(g(\gamma(t))) \cdot \operatorname{Re}(\gamma'(t)) - \operatorname{Im}(g(\gamma(t)) \cdot \operatorname{Im}(\gamma'(t)) \, dt$$

$$= \int_a^b \operatorname{Re}(g(\gamma(t))) \cdot \operatorname{Re}(\gamma'(t)) - \operatorname{Im}(g(\gamma(t)) \cdot \operatorname{Im}(\gamma'(t)) + i \left(\operatorname{Re}(g(\gamma(t))) \cdot \operatorname{Im}(\gamma'(t)) + \operatorname{Im}(g(\gamma(t))) \cdot \operatorname{Re}(\gamma'(t)) \right) dt$$

Das Kurvenintegral 2. Art ist reell, wohingegen das komplexe Kurvenintegral komplex ist (realer Teil und Imaginär-Teil).

Da über verschiedene Dinge integriert wird, sind die Integrale verschieden.
(unterschiedliche Vorzeichen bei den realen Teilen der Integrale und kein Imaginärteil beim Integral 2. Art)

Spezialfall: g nimmt nur reelle Werte an

- Integral 2. Art

$$\int_\gamma V \cdot ds = \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} Re(g(\gamma(t)) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Re(\gamma(t))' \\ Im(\gamma(t))' \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_a^b Re(g(\gamma(t)) \cdot Re(\gamma(t))' \, dt$$

- komplexes Kurvenintegral

$$\int_\gamma g \, dz = \int_a^b Re(g(\gamma(t))) \cdot (Re(\gamma'(t)) + i \, Im(\gamma'(t))) \, dt$$

$$= \int_a^b Re(g(\gamma(t))) \cdot Re(\gamma'(t)) + i \, Re(g(\gamma(t))) \cdot Im(\gamma'(t)) \, dt$$

- Kurvenintegral 1. Art

$$\int_\gamma g \, ds = \int_a^b g(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| \, dt = \int_a^b Re(g(\gamma(t))) \cdot \sqrt{(Re(\gamma'(t)))^2 + (i \, Im(\gamma'(t)))^2} \, dt$$

$$= \int_a^b Re(g(\gamma(t))) \cdot \sqrt{(Re(\gamma'(t)))^2 - (Im(\gamma'(t)))^2} \, dt$$

Auch in diesem Fall sind die Kurvenintegrale verschieden. Während der Realteil von $g(\gamma(t))$ beim KI 2. Art mit dem Realteil von $\gamma'(t)$ multipliziert wird, wird er beim KI 1. Art mit $|\gamma'(t)|$ multipliziert. Beide Integrale sind reell.

Beim komplexen KI bleibt ein Imaginäteil vorhanden (wenn γ nach wie vor komplexe Werte annimmt). Dieses Integral ist somit komplex.

⑥ $f: \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig

$\gamma_R: [0,\pi] \to \mathbb{C} \qquad R>0$

$\theta \mapsto Re^{i\theta} = R(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

$a>0, \quad g(z) = e^{iaz} f(z), \quad M_R := \max_{z \in \operatorname{Im}(\gamma_R)} |g(z)|$

$\underline{\text{Z}}$: $\lim_{R\to\infty} M_R = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} g(z)\,dz = 0$

$\underline{\text{Bew:}}$ Wir wollen zunächst $\int_{\gamma_R} g(z)\,dz$ abschätzen:

Dafür beachte $\gamma_R'(\theta) = R(-\sin(\theta) + i\cos(\theta))$ und $g(\gamma_R(\theta)) = g(Re^{i\theta}) = e^{iaRe^{i\theta}} \cdot f(Re^{i\theta})$

$= e^{iaR(\cos(\theta)+i\sin(\theta))} \cdot f(Re^{i\theta})$

$$\left|\int_{\gamma_R} g(z)\,dz\right| = \left|\int_0^\pi g(\gamma_R(\theta))\,\gamma_R'(\theta)\,d\theta\right|$$

$$= \left|\int_0^\pi e^{iaR\cos(\theta) + iaRi\sin(\theta)} f(Re^{i\theta})\,|R(-\sin(\theta)+i\cos(\theta))|\,d\theta\right|$$

$$\overset{i)}{=} \left|\int_0^\pi e^{iaR\cos(\theta)} \cdot e^{iaRi\sin(\theta)} f(Re^{i\theta}) \cdot R\,d\theta\right|$$

$$= \left|\int_0^\pi e^{iaR\cos(\theta)} \cdot e^{-aR\sin(\theta)} f(Re^{i\theta}) \cdot |\gamma_R'(\theta)|\,d\theta\right|$$

Dreiecks-ungl.

$$\leq \int_0^\pi \underbrace{|e^{iaR\cos(\theta)}|}_{=1 \text{ (siehe ii))}} \cdot |e^{-aR\sin(\theta)}| \cdot |f(Re^{i\theta})| \cdot R\,d\theta$$

$$= R\int_0^\pi |f(\underbrace{Re^{i\theta}}_{\in \operatorname{Im}(\gamma_R)})| \cdot |e^{-aR\sin(\theta)}|\,d\theta$$

$$\leq R \cdot \max_{z\in\operatorname{Im}(\gamma_R)} |f(z)| \cdot \int_0^\pi e^{-aR\sin(\theta)}\,d\theta$$

$$\overset{iii)}{\leq} 2\cdot R \cdot \max_{z\in\operatorname{Im}(\gamma_R)} |f(z)| \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} e^{-aR\frac{2}{\pi}\theta}\,d\theta}_{iv)}$$

$$= \cancel{2R} \cdot \max_{z\in\operatorname{Im}(\gamma_R)} |f(z)| \cdot \frac{\pi}{\cancel{2aR}}(1-e^{-aR}) = \frac{\pi}{a}(1-\overset{>0}{e^{-aR}}) \cdot \max_{z\in\operatorname{Im}(\gamma_R)} |f(z)|$$

$$\leq \max_{z\in\operatorname{Im}(\gamma_R)} |f(z)|$$

Nach Voraussetzung gilt $\lim_{R\to\infty} \max_{z\in\operatorname{Im}(\gamma_R)} |g(z)| = \lim_{R\to\infty} \max_{z\in\operatorname{Im}(\gamma_R)} |e^{iaz} \cdot f(z)| = 0$

Da $e^{iaz} \neq 0$ muss gelten $\lim_{R\to\infty} \max_{z\in\operatorname{Im}(\gamma_R)} |f(z)| = 0$

$\underline{\text{NR:}}$

i) $|R(-\overset{i^2\cdot\sin(\theta)}{\sin(\theta)} + i\cos(\theta))| = |iR(\cos(\theta)+i\sin(\theta))|$

$= |iR\sqrt{\underset{1}{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}}| = |iR| = |i|\cdot|R|$

$= |R| = R$ (da $R>0$)

ii) $|e^{iaR\cos(\theta)}| = \sqrt{e^{iaR\cos(\theta)} \cdot e^{-iaR\cos(\theta)}}$

$= \sqrt{e^0} = \sqrt{1} = 1$

iii) $\int_0^\pi e^{-aR\sin(\theta)}\,d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin(\theta)}\,d\theta + \int_{\pi/2}^\pi e^{-aR\sin(\theta)}\,d\theta$

$\overset{\text{sin symm.}}{=} 2\cdot\int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta}\,d\theta$ $\qquad \theta \in [0,\frac{\pi}{2}] \Rightarrow \sin(\theta) \geq \frac{2}{\pi}\theta$

$\leq 2\cdot\int_0^{\pi/2} e^{-aR\frac{2}{\pi}\theta}\,d\theta$

iv) $\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2aR}{\pi}\theta}\,d\theta = \left[-\frac{\pi}{2aR} e^{-\frac{2aR}{\pi}\theta}\right]_0^{\pi/2}$

$= \left(-\frac{\pi}{2aR}e^{-aR}\right) - \left(-\frac{\pi}{2aR}\right) = -\frac{\pi}{2aR}e^{-aR} + \frac{\pi}{2aR}$

$= \frac{\pi}{2aR}(1-e^{-aR})$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \left| \int_{\gamma_R} g(z)\,dz \right| \leq \lim_{R\to\infty} \max_{z\in \operatorname{Im}(\gamma_R)} |f(z)| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} g(z)\,dz = 0 \qquad \blacksquare$$