

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt

Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 4

Abgabe: Freitag, 17.12.2021, 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Zeigen Sie für eine Zufallsvariable X :

1. Nimmt X Werte in \mathbb{N}_0 an, so ist $E[X] = \sum_{k \geq 0} P(X > k)$.
2. Falls $X \geq 0$, gilt im stetigen Fall $E[X] = \int_0^\infty P(X > x)dx$.
3. Falls $E[|X|] < \infty$, gilt im stetigen Fall

$$E[X] = \int_0^\infty P(X > x)dx - \int_{-\infty}^0 P(X < x)dx.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Berechnen Sie $E[X]$ und $\text{Var}[X]$, falls $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ bzw. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ für $\lambda > 0$ und $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in \mathcal{A} . Es sei

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &\subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \\ P(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\lambda > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei X_n eine Poisson-verteilte Zufallsvariable zum Parameter λ . Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Borel-Cantelli, dass

$$P \left[\text{Für unendliche viele } n \text{ gilt } X_n > n \right] = 0.$$

Stochastik I Blatt 4

Lorenz Bung

lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr. - Nr. S113060

Luis Jaschke

luis.jaschke.99@gmail.com

Matr. - Nr. S105153

Aufgabe 1 (4 Punkte). Zeigen Sie für eine Zufallsvariable X :

1. Nimmt X Werte in \mathbb{N}_0 an, so ist $E[X] = \sum_{k \geq 0} P(X > k)$.

Es gilt (2.5) im Skript

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X > k) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} P(X = n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P(X = n)$$

$$\stackrel{(2.12) \text{ im Skript}}{=} E[X].$$

□

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\lambda > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei X_n eine Poisson-verteilte Zufallsvariable zum Parameter λ . Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Borel-Cantelli, dass

$$P \left[\text{Für unendliche viele } n \text{ gilt } X_n > n \right] = 0.$$

Beweis:

Um das Lemma von Borel-Cantelli anwenden zu können, reicht es zu zeigen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$.

Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X_n = k) \\ &\stackrel{\substack{\text{alle} \\ \text{Summanden} \\ \text{positiv}}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k-1} P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k-1} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &\leq e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda < \infty. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung nach Lemma 3.7.(i). □

Aufgabe 02

a) $X \sim \text{Exn}(\lambda)$

$$* x(-e^{-\lambda x}) \Big|_0^\infty = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{x}{e^{\lambda x}} \right) - 0 \cdot (-e^{-\lambda \cdot 0}) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{x}{e^{\lambda x}} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} \rightarrow 0$$

\mathcal{L}' Hospital

parallel Integrieren

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x) dx = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

B 3.75

$$\underbrace{x(-e^{-\lambda x}) \Big|_0^\infty}_{\stackrel{x=0}{=}} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty =$$

$$\underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} \right)}_{\stackrel{*}{\Rightarrow} 0} - \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \cdot 0} \right) = \frac{1}{\lambda} e^0 = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$\underbrace{x^2(-e^{-\lambda x}) \Big|_0^\infty}_{\stackrel{x=0 \text{ da}}{=}} - \int_0^{\infty} 2x(-e^{-\lambda x}) dx = \int_0^{\infty} 2x e^{-\lambda x} dx =$$

$$2 \underbrace{\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx}_{E[X]} = \frac{2 E[X]}{\lambda} = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$E[X]$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

b) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\text{Sei } Y \sim N(0, 1) \Rightarrow f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\Rightarrow E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_Y(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 0$$

d.h. für $\varrho(x) = x e^{-\frac{1}{2}x^2}$ gilt $\varrho(x) = -\varrho(-x)$

und $\varrho(0) = 0 \Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} \varrho(x) dx = 0 \quad \forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}} = \text{IRV} \geq 0$

$$\Rightarrow E[Y] = 0 \quad \text{B 3.20}$$

$$\Rightarrow \sigma Y + \mu = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = f_X(x)$$

$$\Rightarrow E[X] = E[\sigma Y + \mu] = \sigma E[Y] + \mu = \mu$$

Bemerkung 3.22:

$$E[Y^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\underbrace{\left[x \cdot (-e^{-\frac{1}{2}x^2}) \right]_{-\infty}^{\infty}}_{0-0 \text{ mit } 1' \text{ Hospital}} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(x) dx \stackrel{1}{=} 1$$

Definition 3.74

Supposem gill eine Zufallsvariable Z

$$\text{Var}(aZ + b) = E[(aZ + b)^2] - (E[aZ + b])^2 =$$

$$E[a^2Z^2 + 2abZ + b^2] - (aE[Z] + b)(aE[Z] + b) =$$

$$a^2 E[Z^2] + 2ab E[Z] + b^2 - a^2 (E[Z])^2 - 2ab E[Z] - b^2 =$$

$$a^2 E[Z^2] - a^2 (E[Z])^2 = a^2 (E[Z^2] - (E[Z])^2) = a^2 \text{Var}(Z)$$

$$\Rightarrow \text{Var}(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 1 - 0^2 = 1$$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = \text{Var}(aY + b) = a^2 \text{Var}(Y) = a^2$$

Aufgabe 03

a) $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$

Beweis: Sei $x \in \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \text{ so dass } x \in \bigcap_{i=m}^{\infty} A_i \text{ gilt}$$

$$\Rightarrow x \in A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, \dots$$

$$\Rightarrow \text{für } l \in \mathbb{N} \text{ und } l \leq m \text{ gilt } x \in \bigcup_{i=l}^{\infty} A_i \text{ da}$$
$$x \in A_m \subseteq \bigcup_{i=l}^{\infty} A_i$$

außerdem gilt für $l > m$ auch $x \in \bigcup_{i=l}^{\infty} A_i$ da

$$x \in A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, \dots$$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{h=1}^{\infty} \bigcup_{k=h}^{\infty} A_k = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$$

$$\Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$$

□

b) $\underline{P}(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq \overline{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)$

Beweis: Hier zeigen wird $P(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$

* $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt klarweise $\bigcap_{k \geq n} A_k \subseteq A_n$ und somit

$$P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right) \leq P(A_n)$$

Ana?

$$\Rightarrow P(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right) =$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Da $P(A_n)$ eine Zahlenfolge ist gilt nach Ana?

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \text{ da nach Definition}$$

$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ der kleinste Raumungsmaß von $P(A_n)$

ist und $\limsup_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ der größte

noch zu zeigen $\limsup_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)$

$$\star \star \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right)^c =$$

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)^c = (\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)^c$$

2.6

$$\Rightarrow 1 - \limsup_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (1 - P(A_n)) =$$

Aber?

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(A_n^c) \geq P\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c\right) \stackrel{2.6}{=} \star \star$$

$$1 - P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \limsup_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \geq 1 - P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right)$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right)$$

10