# Stochastik Blatt 04

Luis Jaschke, Lorenz Brung

## Aufgabe 01.

Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

OBdA gelte $x_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$ sonst gibt es $X_i, x_i$ mit $P_\lambda(X_i = x_i) = 0$ für alle $\lambda > 0$ da $X_i > 0$ für alle $\lambda > 0$ gilt

$\Rightarrow P_\lambda(X = x) \overset{\text{iid.}}{=} \prod_{i=1}^{n} P_\lambda(X_i = x_i) = 0$ unabhängig von $\lambda$

somit gilt dann unter Verwendung von Beispiel 5.5

$l(\lambda, x) = \sum_{i=1}^{n} \ln(\lambda e^{-\lambda x_i})$

$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln(\lambda e^{-\lambda x_i}) = \frac{1}{\lambda e^{-\lambda x_i}} \left( e^{-\lambda x_i} + \lambda e^{-\lambda x_i} \cdot (-x_i) \right) =$

$\frac{1}{\lambda}(1 - \lambda x_i) = \frac{1}{\lambda} - x_i$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda} l(\lambda, x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} - x_i$ und somit

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} - x_i = 0 \iff \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

$\Rightarrow \frac{n}{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} x_i \iff \lambda = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^{-1}$

Betrachte noch die zweite Ableitung

$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} l(\lambda, x) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{\lambda^2} = \frac{-n}{\lambda^2} < 0$

$\Rightarrow \lambda = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^{-1}$ ist MLS

## Aufgabe 02

Die $X_i$ sind iid. nach Voraussetzung und da $X_i \sim Exp(\vartheta)$ gilt somit $Var(X_i) = \frac{1}{\vartheta^2} < \infty$, nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt somit $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow E[X_1]$ f.s.

$\Rightarrow \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right)^{-1} \longrightarrow \frac{1}{E[X_1]}$ f.s und somit folgt die Aussage da

$\frac{1}{E[X_1]} = \frac{1}{\frac{1}{\vartheta}} = \vartheta$

Aufgabe 03

i) $Y = X_1 - X_2$ da $X_1(x), X_2(x) \in \{0,1\}$

kann $Y$ die Werte $-1, 0, 1$ annehmen

$\Rightarrow P(Y=-1) \overset{*}{=} (1-p)q = q - pq$

$P(Y=0) \overset{*}{=} (1-p)(1-q) + pq = 1-p-q+2pq$

$P(Y=1) \overset{*}{=} p(1-q) = p - pq$

$$\Rightarrow P(Y \leq x) = \begin{cases} q - pq & x \in [-1,0) \\ 1-p+pq & x = [0,1) \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad 0 \text{ sonst}$$

ii) $Z = X_1 \cdot X_2$, $Z$ nimmt die Werte $0,1$ an

$\Rightarrow P(Z=0) \overset{*}{=} (1-p)(1-q) + p(1-q) + q(1-p) =$

$1-p-q+pq+p-pq+q-pq = 1-pq$

$P(Z=1) \overset{*}{=} pq$

$$\Rightarrow P(Z \leq x) = \begin{cases} 1-pq & x \in [0,1) \\ 1 & x \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

* $X_1, X_2$ Unabhängig

Aufgabe 04

2. Die Aussage gilt nicht!

Sei $\Omega = \{0,1\}$ und für $\omega \in \Omega$ $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$

Sei $A = \{0\}$, $B = \{1\}$

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 = P(\emptyset) = P(A^c \cap B^c)$

$\Rightarrow P(B|A) + P(B^c|A^c) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(A^c)} =$

$\frac{0}{P(A)} + \frac{0}{P(A^c)} = 0 \neq 1$

1. Die Aussage gilt

Beachte $E[\frac{S_n}{n}] = \frac{1}{n} E[S_n] = \frac{1}{n} \cdot np = p$

Setze nun $\frac{S_n}{n} = X$ dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} P(|X - E[X]| > \varepsilon) \underset{\uparrow}{\leq}$$

Tschebyscheff

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{Var\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2} Var(S_n)}{\varepsilon^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{p(1-p)}{n\,\varepsilon^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$$

3. Sein $X_1, X_2$ gegeben wie in Aufgabe 3 mit $Z = X_1 \cdot X_2$ und Beachte dass für $X_1$ gilt

$P(X_1^2 = 0) \Leftrightarrow P(X_1 = 0) = 1-p$

$P(X_1^2 = 1) \Leftrightarrow P(X_1 = 1) = p$

$$\Rightarrow P(X_1^2 \leq x = \begin{cases} 1-p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow F_{X_1^2}(x) \neq F_{X_1 X_2}(x)$ vergleiche Aufgabe 3

$\Rightarrow$ Die Aussage gilt nicht