Analysis 1 $\boxed{\text{Gruppe 11}}$

Charlotte.Rothhaar97@gmail.com Matr.-nummer: 4310516

lorenz.bung@googlemail.com Matr.-nummer: 5113060

Übungsblatt 6

Aufgabe 21

Gegeben: $a^z = \exp(z \cdot \ln a)$ mit $a \in \mathbb{R}, a > 0, z \in \mathbb{C}$

zz.: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ für $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0, r, s \in \mathbb{C}$

Da der natürliche Logarithmus $\ln(x)$ die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist, muss für ein $a, b \in \mathbb{R}$ und $a, b > 0$ gelten:

$$b = \ln(a) \quad \text{und} \quad a = \exp(b)$$

Einsetzen von in die Gleichung $a = \exp(b)$ ergibt:

$$a = \exp(\ln(a))$$

und umgekehrt

$$b = \ln(\exp(b)).$$

$\Rightarrow$ $\ln(a)$ für $a > 0$ ist die Zahl, die die Gleichung

$$a = \exp(x)$$

auflöst.

Aus der Multiplikativität der Exponentialfunktion (Satz 3.12.30) ergibt sich nun:

$$a_1 = \exp(b_1),\ a_2 = \exp(b_2),\ a = \exp(b_1 + b_2) \Rightarrow a = a_1 a_2$$

Mittels Umkehrfunktion

$$\ln(a) = b_1 + b_2 = \ln(a_1) + \ln(a_2)$$

und Multiplikativität:

$$\boxed{\ln(a_1 a_2) = \ln(a_1) + \ln(a_2)}$$

$\square$

zz.: $(a^r)^s = a^{rs}$

$$(a^r)^s \underset{\text{n. Def}}{=} (\exp(r \cdot \ln(a)))^s \underset{\text{n. Def.}}{=} \exp(s \cdot \cancel{\ln}(\cancel{\exp}(r \cdot \ln(a))))$$

$$= \exp(s \cdot r \cdot \ln(a))$$

$$= \underline{a^{s \cdot r}}$$

$\square$

zz.: $a^r a^s = a^{r+s}$

Wir wissen: $^*\ a^z = \exp(z \cdot \ln(a))$ mit $a \in \mathbb{R}, a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$

Daraus folgt: $a^r \cdot a^s \underset{*}{=} \exp(r \cdot \ln(a)) \exp(s \cdot \ln(a)) \underset{\text{Satz 3.12.30 (i)}}{=} \exp((r+s)\ln(a)) = \underline{a^{r+s}}$

$\square$

$\text{Zz.}: a^r b^r = (ab)^r$

$$a^r b^r \overset{*}{=} \exp(r \cdot \ln(a)) \exp(r \cdot \ln(b))$$

$$\underset{\text{Satz 3.12.30}}{=} \exp(r \cdot \ln(a) + (r \cdot \ln(b)))$$

$$= \exp(r \cdot (\ln(a) + \ln(b)))$$

$$\underset{\text{Satz 3.12.33 (iv)}}{=} \exp(r \cdot (\ln(ab))$$

$$\overset{*}{=} (ab)^r \qquad \square$$

Aufgabe 22:

a) Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Reihe mit Konvergenzradius R_a und

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ eine Reihe mit Konvergenzradius R_b.

zz.: ① $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) x^n$ konvergiert absolut $\forall$ x mit $|x|<\min\{R_a, R_b\}$

② $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

Beweis:

zu ②: Da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ nach Voraussetzung und Satz 3.12.24 absolut konvergent sind, $\exists$ $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b$, falls $x \in R_a$ oder $x \in R_b$.

Nach Lemma 3.12.19 gilt somit:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n + b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) x^n = a+b = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

zu ①: o.B.d.A sei $R_a < R_b$. Dann ist laut Satz 3.12.24 $\underbrace{|x|<R_a<R_b}_{*}$.

* muss gelten, da n.V. $|x|<\min\{R_a, R_b\}$

Da $|x|<R_a \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a$ ist absolut konvergent

analog dazu: $|x|<R_b \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b$ ist absolut konvergent.

Wegen ② gilt also:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = a+b.$$

Damit konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) x^n$ absolut $\forall$ x mit

$|x| \overset{*}{<} \min\{R_a, R_b\}$

b) Kosinus hyperbolicus: Sinus hyperbolicus

$\cosh: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $\sinh: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

zz.: cosh und sinh in Potenzreihendarstellung

Definition 3.12.20. Eine *Potenzreihe* ist eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}$, wobei hier für $x = 0$ immer $0^0 = 1$ gesetzt wird, also ist die Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$.

Setzen wir dom $f := \{x \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert $\}$, dann ist

$$f\colon \operatorname{dom} f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine Funktion.

(1.) $\cosh(x) \underset{\text{laut Def.}}{=} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \overset{*}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right)$

*Da $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right)$$

*Wir ziehen $(-1)^n$ aus $\frac{(-x)^n}{n!}$, da wir nicht nur (-1) rausziehen können, da der Quotient dann unabhängig vom Exponenten immer negativ werden würde.

Da exp(x) konvergiert wenden wir die Rechenregeln für konvergente Reihen an.

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(1 + (-1)^n)}_{\text{vor die Klammer}} \cdot \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1 + (-1)^n) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= \underbrace{\frac{(1 + (-1)^n)}{2}}_{*} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$* \begin{cases} 1 \text{ für } n \text{ gerade, da } \frac{2}{2} = 1 \\ 0 \text{ für } n \text{ ungerade, da } \frac{0}{2} = 0 \end{cases}$

$$= \underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}}$$

, da für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$ die Partialsummen $= 0$ sind betrachten wir die Reihe nur für gerade Zahlen aus $\mathbb{N}$.

② Analog dazu folgt:

$$\sinh(x) \underset{\text{n. Def.}}{=} \frac{1}{2}\cdot(e^{x}-e^{-x}) \underset{\text{Def. exp(x)}}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(1-(-1)^n)\cdot\frac{x^n}{n!}$$

$$= \underbrace{\frac{1-(-1)^n}{2}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \overset{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(* $= 0$ für ungerade $n \in \mathbb{N}$
$= 1$ für gerade $n \in \mathbb{N}$)

$\square$

Aufgabe 23:

(i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 5(x-3)^2-1$

1. Folgenstetigkeit überprüfen

Zunächst formen wir das Polynom um:

$$f(x) = 5(x^2-3x-3x+9)-1 = 5x^2-30x+44$$

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) = 5x^2-30x+44$.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(5x_n^2-30x_n+44)$$

$\downarrow$ $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n+c_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} c_n$

$$= 5\cdot\lim_{n\to\infty}(x_n^2) - 30\lim_{n\to\infty}(x_n) + 44$$

$$= 5\cdot(\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} x_n) - 30\cdot(\lim_{n\to\infty} x_n) + 44$$

$$= 5x_0^2 - 30x_0 + 44 = f(x_0) \checkmark$$

n.V. $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0$

$\Rightarrow$ Somit ist f folgenstetig.

2. Stetigkeit überprüfen mittels Epsilon-Delta-Kriterium

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 5(x-3)^2 - 1$, ist stetig in allen $x_0 \in \mathbb{R}$:

Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{10|x_0|+11}\}$ Dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x-x_0| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| = |(5(x-3)^2-1) - (5\cdot(x_0-3)^2-1)|$$

$$= |(5x^2-30x+44) - (5x_0^2-30x_0+44)|$$

$$= |5x^2-30x+44-5x_0^2+30x_0-44|$$

$$= |5x^2-30x-5x_0^2+30x_0|$$

$$= 5|x^2-6x-x_0^2+6x_0|$$

$$\underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} 5\cdot|x^2-x_0^2| + |-6x+6x_0|$$

$$\underset{*}{=} 5\cdot|x+x_0|\cdot|x-x_0| + 6|x-x_0|$$

$$\underset{*}{<} 5|x+x_0|\cdot\delta + 6|x-x_0|$$

$$\underset{*}{=} 5|x-x_0+x_0+x_0|\cdot\delta + 6|x-x_0|$$

$$\leq 5(|x-x_0|+|2x_0|)\cdot\delta + 6|x-x_0|$$

$$\underset{*}{<} 5(\delta+2|x_0|)\cdot\delta + |-6x+6x_0|$$

$$\underset{*}{<} 5(\delta+2|x_0|)\cdot\delta + 6\cdot\delta$$

$$= 5\delta(2|x_0|+\delta)+6\delta$$

$$\underset{*}{\leq} 5\delta\cdot(2|x_0|+1)+6\delta$$

$$= 10|x_0|\delta + 11\delta$$

* Binomische Formel
* $|x-x_0| < \delta$
* Einfügen einer 0

* Wir schätzen δ ab, wie in der VL vorgemacht?

$$= 10|x_0|\delta + 11\delta$$

$$\boxed{NR: 10|x_0|\delta + 11\delta = \varepsilon \quad \delta = \frac{\varepsilon}{10|x_0|+11}}$$

$$\overset{NR}{=} 10|x_0| \cdot \frac{\varepsilon}{10|x_0|+11} + 11 \cdot \frac{\varepsilon}{10|x_0|+11}$$

$$= \frac{\varepsilon}{\cancel{10|x_0|+11}} \cdot \left(\cancel{10|x_0|+11}\right) = \underline{\varepsilon}$$

$\Rightarrow$ Damit ist f stetig an der Stelle x_0 und da x_0 beliebig gewählt wurde, ist f stetig. $\square$

ii) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$

Sei $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ und sei x_0 gegeben. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $\lim x_n = x_0$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_0} = f(x_0)$$

2. Stetigkeit überprüfen mittels Epsilon-Delta-Kriterium

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$, ist stetig in allen $x_0 \in \mathbb{R}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann wähle $\delta = \min\left\{\frac{x_0}{2}; \frac{\varepsilon |x_0|^2}{2}\right\}$. Dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $*|x - x_0| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x - x_0}{x \cdot x_0} \right|$$

$$= \frac{|x - x_0|}{|x| \cdot |x_0|} = \frac{1}{|x| \cdot |x_0|} \cdot |x - x_0|$$

$$\underset{*}{\leq} \frac{1 \cdot 2}{|x_0||x_0|} \cdot |x - x_0| = \frac{2}{|x_0|^2} \cdot \underbrace{|x - x_0|}_{*}$$

$$< \frac{2\delta}{|x_0|^2} \underset{NR}{=} \frac{2}{|x_0|^2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot |x_0|^2}{2} = \underline{\varepsilon}$$

*Wir schätzen $|x| \leq \frac{|x_0|}{2}$ ab
$\Rightarrow \frac{1}{|x|} \leq \frac{2}{|x_0|}$

NR: $\frac{2}{|x_0|^2} \cdot \delta = \varepsilon$ n. Def.
$\delta = \frac{|x_0|^2 \cdot \varepsilon}{2}$

$\Rightarrow$ Damit ist f stetig an der Stelle x_0 und da x_0 beliebig gewählt wurde, ist f stetig. $\square$

Aufgabe 24:

Sei $x \in \mathbb{R}$. $\quad 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) = \sin(2x)$

(i) zz. mit Hilfe der Eulerformel

Eulersche Formel: $\forall x \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\left(e^{ix} = \cos(x) + i\cdot\sin(x)\right)^{*}}$$

Ersetzt man in der $\overset{*}{\text{1. Gleichung}}$ (x) durch $(-x)$, so erhält man:

$$2.\ \underline{e^{-ix} = \cos(x) - i\cdot\sin(x)} \quad \text{(s. Vorlesung)}$$

Addieren wir nun 1. und 2. erhalten wir:

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cdot\cos(x) \quad \text{Daraus folgt:} \quad \boxed{\cos(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)} \ \mathrm{I}$$

Analog dazu subtrahieren wir 1. und 2. erhalten:

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2\cdot i\cdot\sin(x) \quad \text{Daraus folgt:} \quad \boxed{\sin(x) = \frac{1}{2i}\cdot\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)} \ \mathrm{II}$$

Beweis: $2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) = \sin(2x)$

Wir beginnen mit der rechten Seite der Gleichung:

$$\sin(2x) \overset{\mathrm{II}}{=} \frac{1}{2i}\cdot\left(e^{i(2x)} - e^{-i(2x)}\right)$$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{2}i\cdot\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \qquad \text{da } a^{m\cdot n} = (a^m)^n$$

$$\overset{*}{=} \frac{(e^{ix} - e^{ix})\cdot(e^{ix} + e^{-ix})}{2i} \qquad \text{da } (e^{ix})^2 = e^{ix}\cdot e^{ix}$$

$$= \frac{e^{ix} - e^{ix}}{2i}\cdot\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

$$= \frac{e^{ix} - e^{ix}}{2i}\cdot\frac{2\cdot(e^{ix} + e^{-ix})}{2}$$

$$= 2\cdot\underbrace{\frac{e^{ix} - e^{ix}}{2i}}_{\mathrm{II}}\cdot\underbrace{\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}_{\mathrm{I}} = \underline{2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)} \ \checkmark$$

(ii) zz.: $2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = \sin(2x)$ mit Hilfe des Cauchyprodukts

*

Satz 3.12.29 (Cauchy-Produkt). *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei absolut konvergente Reihen. Sei $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right)$$

Wir wissen: $\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Beweis:

$$2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\overset{*}{=} 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot (-1)^{n+1-k} \frac{x^{2n-2k}}{(2n-2k)!}$$

$$= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1} \cdot x^{2n-2k}}{(2k+1)!(2n-2k)!}$$

$(-1)^k \cdot (-1)^{n-k} = (-1)^{n-k+k}$

$$= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{\cancel{2k+1}} \cdot x^{2n+1-\cancel{(2k+1)}}}{(2k+1)!\,(2n+1-(2k+1))!}$$

$$= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+1)! \cdot x^{2n+1}}{(2k+1)!\,(2n+1-(2k+1))! \cdot (2n+1)!}$$

$$= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Wir sind uns bewusst, dass hier keine Gleichheit gilt.

$$\overset{?}{=} 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot 2^{2n+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Leider waren wir hier aber am Ende mit unserm Latein. ˙˙

$$\overset{?}{=} 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot 2^{2n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} \cdot 2 \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(2x)$$