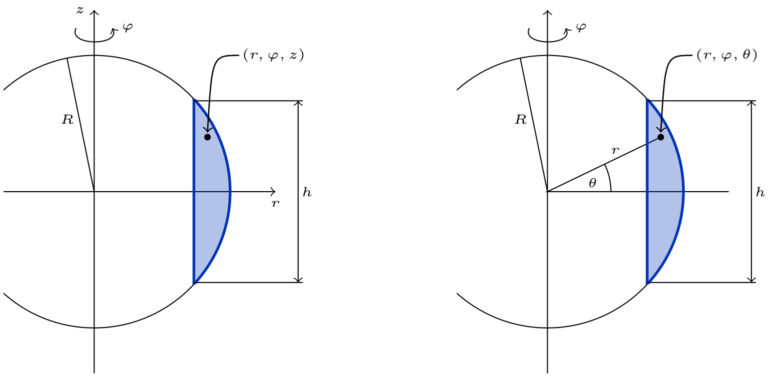
Übungsblatt 9

Aufgabe 25. Wir betrachten noch einmal das Serviettenring-Problem aus Aufgabe 9. Dieses Mal wollen wir das Volumen des Serviettenringes anders ausrechnen und zwar mit der Transformationsformel.

Benutzen Sie einmal Zylinderkoordinaten (wie links im Bild) und einmal Kugelkoordinaten (wie rechts im Bild), um jeweils das Volumen des Serviettenrings der Höhe h entstanden aus einer Kugel vom Radius R zu berechnen.



Aufgabe 26 (2.5+2.5)**.** (i) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Rotationsellipsoids – der Körper, der durch $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ begrenzt wird, bei Rotation um die z-Achse.

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Körper mit Masseverteilung $\rho\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Der Schwerpunkt von Ω sei in $0 \in \mathbb{R}^3$. Sei J_1 das Trägheitsmoment um die z-Achse und J_2 das Trägheitsmoment bei Rotation um die Achse, die durch den Punkt $a = (a_1, a_2, 0)^T \in \mathbb{R}^3$ geht und zur z-Achse parallel ist. Sei m die Masse von Ω.

Zeigen Sie, dass $J_2 = J_1 + m|a|^2$ gilt.

Aufgabe 27 (2.5+2.5)**.** (i) Sei $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}_{>0}$ eine glatte Funktion und S die Menge, welche durch Rotation der Kurve $\{(f(z), 0, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z \in (a, b)\}$ um die z-Achse entsteht. Dann ist

$$S = \{(f(z)\cos ?, f(z)?, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z \in (a, b), \phi \in \mathbb{R}\}.$$

(Was muss bei den Fragezeichen stehen?) Finden Sie geeignete Parametrisierungen, um zu zeigen, dass S eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ ist.

(ii) (Oberfläche von Rotationskörpern) Sei $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}_{>0}$ und S wie in (i). Zeigen Sie, dass die Oberfläche von S sich durch

$$2\pi \int_a^b f(z)\sqrt{f'(z)^2 + 1}dz$$

berechnet.

Abgabe bis Mittwoch 11.01.23 8:00 Uhr online oder in den Briefkasten im Untergeschoss

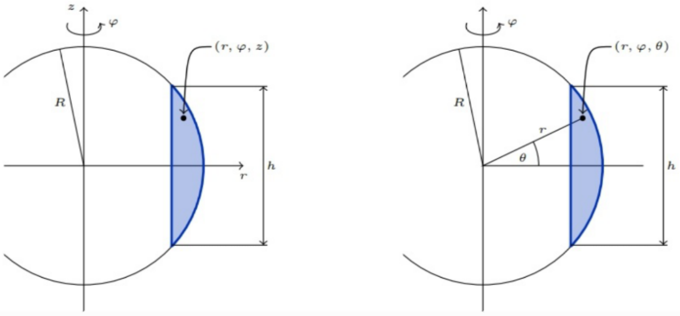
Blatt 9

Lorenz Bung

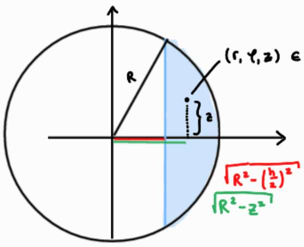
Lea Weissenrieder

Aufgabe 25. Wir betrachten noch einmal das Serviettenring-Problem aus Aufgabe 9. Dieses Mal wollen wir das Volumen des Serviettenringes anders ausrechnen und zwar mit der Transformationsformel.

Benutzen Sie einmal Zylinderkoordinaten (wie links im Bild) und einmal Kugelkoordinaten (wie rechts im Bild), um jeweils das Volumen des Serviettenrings der Höhe h entstanden aus einer Kugel vom Radius R zu berechnen.



i) Serviettenring mit Zylinderkoordinaten



$(r, \varphi, z) \in (0, R) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})$

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\sqrt{R^2-(\frac{h}{2})^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} \int_0^{2\pi} r \, d\varphi \, dr \, dz = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\sqrt{R^2-(\frac{h}{2})^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} 2\pi r \, dr \, dz = 2\pi \int_{-h/2}^{-h/2} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_{\sqrt{R^2-(\frac{h}{2})^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} dz = \pi \int_{-h/2}^{-h/2} \left[r^2\right]_{\sqrt{R^2-(\frac{h}{2})^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} dz$$

$$= \pi \int_{-h/2}^{h/2} R^2 - z^2 - \left(R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2\right) dz = \pi \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2 \, dz = \pi \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 z - \frac{1}{3} z^3\right]_{-h/2}^{h/2}$$

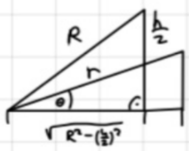
$$= \pi \left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{h}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 \left(-\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(-\frac{h}{2}\right)^3\right)\right) = \underline{\underline{\pi \frac{4}{3} \left(\frac{h}{2}\right)^3}}$$

ii) Ansatz zu den Kugelkoordinaten

$$\int_{\mathrm{asin}(-\frac{h}{2})}^{\mathrm{asin}(\frac{h}{2})} \int_{\frac{\sqrt{R^2-(\frac{h}{2})^2}}{\cos\theta}}^{R} \int_0^{2\pi} r^2 \cos\theta \, d\varphi \, dr \, d\theta = 2\pi \int_{\mathrm{asin}(-\frac{h}{2})}^{\mathrm{asin}(\frac{h}{2})} \cos\theta \int_{\frac{\sqrt{R^2-(\frac{h}{2})^2}}{\cos\theta}}^{R} r^2 \, dr \, d\theta = 2\pi \int_{\mathrm{asin}(\frac{h}{2})}^{\mathrm{asin}(\frac{h}{2})} \cos\theta \cdot \frac{1}{3} \left(R^3 - \left(\frac{\sqrt{R^2-(\frac{h}{2})^2}}{\cos\theta}\right)^3 \right) d\theta = \frac{2\pi}{3} \int_{\mathrm{asin}(-\frac{h}{2})}^{\mathrm{asin}(\frac{h}{2})} R^3 \cos\theta - \frac{\sqrt{R^2-(\frac{h}{2})^2}^3}{\cos^2\theta} \, d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left[R^3 \sin\theta - \tan\theta \cdot \sqrt{R^2-(\tfrac{h}{2})^2}^3 \right]_{\mathrm{asin}(-\frac{h}{2})}^{\mathrm{asin}(\frac{h}{2})} = \frac{2\pi}{3} \left[R^3 \cdot \frac{h}{2} - \frac{\frac{h}{2}}{\cos(\mathrm{asin}(\frac{h}{2}))} \underbrace{\sqrt{R^2-(\tfrac{h}{2})^2}^3}_{=:t} - \left(-R^3 \cdot \frac{h}{2} - \frac{-\frac{h}{2}}{\cos(\mathrm{asin}(-\frac{h}{2}))} \sqrt{R^2-(\tfrac{h}{2})^2}^3 \right) \right]$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left[h \cdot R^3 - \frac{h}{2\sqrt{1-(\frac{h}{2})^2}} \cdot t - \frac{h}{2\sqrt{1-(\frac{h}{2})^2}} \cdot t \right] = \frac{2\pi}{3} h \left(R^3 - \frac{t}{\sqrt{1-(\frac{h}{2})^2}} \right)$$



$\cos\theta = \frac{\sqrt{R^2-}}{r}$

$r = \sqrt{R^2-(\frac{h}{2})^2} / \cos\theta$

$$\int_{\mathrm{asin}(-\frac{h}{2})}^{\mathrm{asin}(\frac{h}{2})} \int_{\frac{\sqrt{R^2-(\frac{h}{2})^2}}{\cos\theta}}^{R} \int_0^{2\pi} r^2 \cos\theta \, d\varphi \, dr \, d\theta$$

Lorenz Bung
Lea Weissenrieder

Aufgabe 26 (2.5+2.5). (i) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Rotationsellipsoids – der Körper, der durch $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ begrenzt wird, bei Rotation um die z-Achse.

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Körper mit Masseverteilung $\rho \colon \Omega \to \mathbb{R}$. Der Schwerpunkt von Ω sei in $0 \in \mathbb{R}^3$. Sei J_1 das Trägheitsmoment um die z-Achse und J_2 das Trägheitsmoment bei Rotation um die Achse, die durch den Punkt $a = (a_1, a_2, 0)^T \in \mathbb{R}^3$ geht und zur z-Achse parallel ist. Sei m die Masse von Ω.

Zeigen Sie, dass $J_2 = J_1 + m|a|^2$ gilt.

(i) Die Punkte des Ellipsoids haben die Koordinaten $(a \sin\theta\cos\varphi,\ a\sin\theta\sin\varphi,\ b\cos\theta)$. Der Abstand r zur z-Achse beträgt damit $\sqrt{(a\sin\theta\cos\varphi)^2 + (a\sin\theta\sin\varphi)^2} = \sqrt{a^2\sin^2\theta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \sqrt{a^2\sin^2\theta}$.

Transformation in Kugelkoordinaten: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x' = \frac{x}{a},\ y' = \frac{y}{a},\ z' = \frac{z}{b}$

$\Phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (r,\theta,\varphi) \mapsto (ar\sin\theta\cos\varphi,\ ar\sin\theta\sin\varphi,\ br\cos\theta)$.

$$|\det D\Phi| = \left|\det\begin{pmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & ar\cos\theta\cos\varphi & -ar\sin\theta\sin\varphi \\ a\sin\theta\sin\varphi & ar\cos\theta\sin\varphi & ar\sin\theta\cos\varphi \\ b\cos\theta & -br\sin\theta & 0\end{pmatrix}\right|$$

$$= b\cos\theta\Big(\underbrace{(a^2r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi) + a^2r^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi}_{=a^2r^2\sin\theta\cos\theta}\Big) + br\sin\theta\Big(\underbrace{a^2r\sin^2\theta\cos^2\varphi + a^2r\sin^2\theta\sin^2\varphi}_{=a^2r\sin^2\theta\,(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1})}\Big)$$

$$= a^2br^2\sin\theta\cos^2\theta + a^2br^2\sin\theta\sin^2\theta = (\underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{=1})\,a^2br^2\sin\theta = a^2br^2\sin\theta.$$

Das Trägheitsmoment ist definiert durch $J := \int_\Omega r^2\rho\,d\mathrm{vol}$. Mithilfe der Transformation $x' = \frac{x}{a},\ y' = \frac{y}{a},\ z' = \frac{z}{b}$ erhalten wir $x' = r\sin\theta\cos\varphi,\ y' = r\sin\theta\sin\varphi,\ z' = r\cos\theta$ und für das Trägheitsmoment somit

$$J = \int_\Omega r^2\rho\,d\mathrm{vol} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \underbrace{a^2(x'^2+y'^2)}_{=x^2+y^2=r^2}\ \underbrace{a^2br^2\sin\theta}_{=|\det\Phi|}\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$\overset{R=1}{=} a^4b\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\,\Big(\underbrace{r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}_{=r^2\sin^2\theta\,(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1})}\Big)\,d\varphi\,d\theta\,dr = a^4b\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^4\sin^3\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr$$

$$= a^4b\int_0^1\int_0^\pi r^4\sin^3\theta\int_0^{2\pi}1\,d\varphi\,d\theta\,dr = a^4b\int_0^1\int_0^\pi r^4\sin^3\theta\,2\pi\,d\theta\,dr = a^4b\,2\pi\int_0^1 r^4\int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta\,dr$$

$$\overset{(*)}{=} a^4b\,2\pi\int_0^1 r^4\cdot\tfrac{4}{3}\,dr = a^4b\,\tfrac{8}{3}\pi\Big[\tfrac{1}{5}r^5\Big]_0^1 = a^4b\,\tfrac{8}{3}\pi\,\tfrac{1}{5} = a^4b\,\tfrac{8}{15}\pi.$$

$(*)$: $\int\sin^3\theta\,d\theta = \int\sin^2\theta\cdot\sin\theta\,d\theta = \int\sin\theta\,(1-\cos^2\theta)\,d\theta = \int\sin\theta - \cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$.

Subst.: $u = \cos\theta$. $\frac{du}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta \Rightarrow d\theta = du\left(-\frac{1}{\sin\theta}\right)$

$$\Rightarrow \int\sin\theta - \cos^2\theta\sin\theta\,d\theta = \int\sin\theta - u^2\sin\theta\,d\theta = -\int\frac{\sin\theta}{\sin\theta}(1-u^2)\,du = \int u^2-1\,du = \tfrac{1}{3}u^3 - u$$

$$= \tfrac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta.$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi\sin^3\theta\,d\theta = \Big[\tfrac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\Big]_0^\pi = -\tfrac{1}{3}+1-\left(\tfrac{1}{3}-1\right) = \tfrac{2}{3}-\left(-\tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{4}{3}.$$

Lorenz Bung
Lea Weissenrieder

(ii) <u>z.z.:</u> $J_2 = J_1 + m|a|^2$.

<u>Bew.:</u> $J_2 = \int_\Omega r^2 \rho \, dvol = \int_\Omega \rho \left((x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 \right) dvol = \int_\Omega \rho \left(x^2 - 2a_1 x + a_1^2 + y^2 - 2a_2 y + a_2^2 \right) dvol$

$= \int_\Omega \rho \left((x^2+y^2) - 2a_1 x - 2a_2 y + (a_1^2 + a_2^2) \right) dvol = \int_\Omega \rho \, (x^2+y^2) \, dvol \underbrace{- 2a_1 \int_\Omega \rho x \, dvol}_{=0} \underbrace{- 2a_2 \int_\Omega \rho y \, dvol}_{=0}$

$+ \int_\Omega \rho \, (a_1^2 + a_2^2) \, dvol$

denn der Schwerpunkt ist $0 \in \mathbb{R}^3$

$= \int_\Omega \rho \, (x^2+y^2) \, dvol + \int_\Omega \rho \, (a_1^2 + a_2^2) \, dvol = J_1 + (a_1^2 + a_2^2) \int_\Omega \rho \, dvol = J_1 + |a|^2 \cdot m.$

$\square$

Lorenz Bung
Lea Weissenrieder

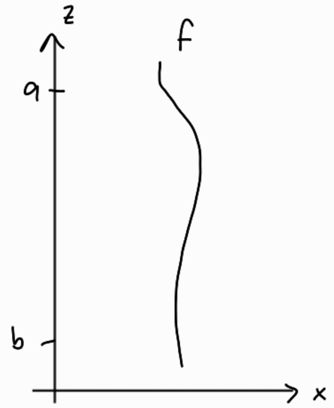
Aufgabe 27 (2.5+2.5). (i) Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}_{>0}$ eine glatte Funktion und S die Menge, welche durch Rotation der Kurve $\{(f(z),0,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z \in (a,b)\}$. Dann ist $S = \{(f(z)\cos ?, f(z)?, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z \in (a,b), \phi \in \mathbb{R}\}$ (Was muss bei den Fragezeichen stehen?). Finden Sie geeignete Parametrisierungen, um zu zeigen, dass S eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ ist.

(ii) (Oberfläche von Rotationskörpern) Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}_{>0}$ und S wie in (i). Zeigen Sie, dass die Oberfläche von S sich durch

$$2\pi \int_a^b f(z)\sqrt{f'(z)^2+1}dz$$

i) $S = \{(f(z)\cos(\varphi), f(z)\sin(\varphi), z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z \in (a,b), \phi \in \mathbb{R}\}$

ii)



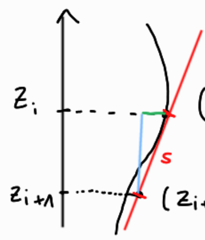
Z: Oberfl. S $= 2\pi \int_a^b f(z)\sqrt{f'(z)^2+1}\,dz$

Bew: Wir schneiden den Rotationskörper in k gleichhohe Scheiben, diese haben jeweils Höhe $\frac{a-b}{k}$.

Wir betrachten nun eine dieser Scheiben näher:

(diese liegt zwischen $z_i, z_{i+1} \in (a,b)$ mit $z_{i+1} = z_i - \frac{a-b}{k}$) $(*)$

Betrachte die Tangente an $f(z_i)$



$(z_i, f'(z_i)\cdot z_i)$ (wenn von z-Achse aus betrachtet wird)

$(z_{i+1}, f'(z_i) z_{i+1})$

Die Mantelfläche der Scheibe kann näherungsweise bestimmt werden durch den "Kreisradius" bei z_i und der Länge der Außenseite $(=s)$ des Rotationskörpers. Der Kreisradius ergibt sich durch $2\pi f(z_i)$. Die Außenseite lässt sich mit dem Pythagoras bestimmen:

$$s = \sqrt{(z_i - z_{i+1})^2 + (f'(z_i)(z_i - z_{i+1}))^2} = \sqrt{(f'(z_i)^2+1)(z_i - z_{i+1})^2}$$

$$= \sqrt{f'(z_i)^2+1}\,(z_i - z_{i+1})$$

Um die gesamte Oberfläche zu erhalten, summieren wir all diese Scheibenmäntel auf:

$$\sum_{i=1}^{k} 2\pi f(z_i)\sqrt{f'(z_i)^2+1}\,\underbrace{(z_i - z_{i+1})}_{\overset{(*)}{=}\, z_i - (z_i - \frac{a-b}{k}) = \frac{a-b}{k}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a-b}{k}\, 2\pi \cdot f(z_i)\sqrt{f'(z_i)^2+1}$$

Wählen wir nun eine immer feinere Zerlegung, geht $k \to \infty$ und wir erhalten das Integral

$$\int_a^b 2\pi f(z)\sqrt{f'(z)^2+1}\,dz = 2\pi \int_a^b f(z)\sqrt{f'(z)^2+1}\,dz \quad \blacksquare$$