Stochastik 2 Blatt 02

Luis Juschke, Lorenz Bung

Σ	1	2	3	4
13	4	1	4	4

Aufgabe 01:

- Ein nicht identifizierbares aber reguläres Modell
  $\mathcal{P}_1 = \{ \mathcal{N}(\theta_1 + \theta_2, 1) \mid (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 = \Theta \}$
  $\Rightarrow$ für $\theta = (0,0)^T$, $\theta' = (-1,1)^T$ gilt
  $\mathcal{N}(\theta, 1) = \mathcal{N}(0,1) = \mathcal{N}(\theta', 1)$ und $\theta \neq \theta'$
  $\mathcal{P}_1$ ist regulär da die Normalverteilung eine Dichte hat ✓
- Ein nicht reguläres aber identifizierbares Modell
  $\mathcal{P}_2 = \{ U(0,\theta) + \delta_{\frac{1}{2}\theta} \mid \theta \in [1,2] = \Theta \}$
  $\mathcal{P}_2$ ist klarerweise identifizierbar da für $\theta_1 \neq \theta_2$ gilt $U(0,\theta_1) + \delta_{\frac{1}{2}\theta_1} \neq U(0,\theta_2) + \delta_{\frac{1}{2}\theta_2}$
  Außerdem ist $\mathcal{P}_2$ nicht regulär da weder diskret noch stetig ✓

Aufgabe 02:

Fasst man schwarze Zahlen und die grüne 0 bzw. rote Zahlen und die grüne 0 zusammen so sind X_1, X_2 binomialverteilt, für $k+l \leq 1000$

$$\Rightarrow P(X_2 = k \mid X_1 = l) = \frac{P(X_2 = k, X_1 = l)}{P(X_1 = l)} = f$$

$$\frac{\binom{1000}{k+l} \binom{k+l}{l} \left(\frac{18}{37}\right)^{k+l} \left(\frac{1}{37}\right)^{1000-l-k}}{\binom{1000}{l} \left(\frac{18}{37}\right)^{l} \left(\frac{19}{37}\right)^{1000-l}} =$$

$$\binom{1000-l}{k} \left(\frac{18}{37}\right)^{k} \left(\frac{1}{37}\right)^{1000-l-k} \left(\frac{37}{19}\right)^{1000-l} =$$

$$\binom{1000-l}{k} \left(\frac{18}{37}\right)^{k} \left(\frac{1}{19}\right)^{1000-l} \cdot \left(\frac{1}{37}\right)^{-k} =$$

$$\binom{1000-l}{k} \cdot \frac{18^k}{19^{1000-l}}$$

$\frac{1}{4}$

Aufgabe 03

- ohne Faktorisierungssatz

$X_i \sim Ber(\theta) \quad \forall i = 1, \dots, n \quad ; X = (X_1, \dots, X_n)$

$\Rightarrow T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n, \theta)$

$$\Rightarrow P(X \mid T(x)) = \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n, T(x) = t)}{P(T(x) = t)} \overset{*}{=}$$

$$\frac{P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{P(T(x) = t)} \overset{X_i \text{ unabhängig}}{=} \frac{P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \dots P(X_n = x_n)}{P(T(x) = t)} =$$

$$\frac{\theta^{x_1}(1-\theta)^{1-x_1} \cdot \theta^{x_2}(1-\theta)^{1-x_2} \cdot \dots \cdot \theta^{x_n}(1-\theta)^{1-x_n}}{\binom{n}{t} \theta^t \cdot (1-\theta)^{n-t}} \underset{\sum_{i=1}^{n} x_i = t}{=}$$

$$\frac{\cancel{\theta^t \cdot (1-\theta)^{n-t}}}{\binom{n}{t} \cancel{\theta^t (1-\theta)^{n-t}}} = \frac{1}{\binom{n}{t}} = \binom{n}{t}^{-1}$$

✓

- mit Faktorisierungssatz

wähle $g(T(x), \theta) = P_\theta(T(x) = t) = \binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t}$

$h(x) = P_\theta(X = x \mid T(x) = t) = \binom{n}{t}^{-1}$

dann gilt

$p(x, \theta) = \theta^{T(x)} (1-\theta)^{n - T(x)} = g(T(x), \theta) \cdot h(x)$

✓

Aufgabe 04

Sei $T = X_1 + X_2$, $X = (X_1, X_2)$

$$P_\theta(X \mid T(x)=t) = \frac{P_\theta(X_1 = x_1, X_2 = x_2, T(x) = t)}{P_\theta(T(x)=t)} =$$

$$\frac{P_\theta(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_1 + X_2 = t)}{P_\theta(X_1 + X_2 = t)} =$$

$t = x_1 + x_2$ sonst im Zähler Warscheinlichkeit 0

$$\frac{P_\theta(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{P_\theta(X_1 + X_2 = t)} \overset{X_1, X_2 \text{ unabhängig}}{=} \frac{P_\theta(X_1 = x_1)\, P_\theta(X_2 = x_2)}{P_\theta(X_1 + X_2 = t)} =$$

$$\frac{\theta^2 (1-\theta)^{x_1+x_2-2}}{\binom{t-1}{1} \theta^2 (1-\theta)^{t-2}} \overset{x_1+x_2=t}{=} \frac{\theta^2(1-\theta)^{t-2}}{(t-1)\theta^2(1-\theta)^{t-2}} = \frac{1}{t-1}$$

$\Rightarrow T = X_1 + X_2$ ist eine suffiziente Statistik