Übungsblatt 1

Aufgabe 1. (2.5+2.5) Sei $A = (a_{ij})_{ij}$ eine reelle $\ell \times k$-Matrix.

(i) Wir setzen $\|A\| := \sqrt{\sum_{j=1}^k |Ae_j|^2}$, wobei e_j der j-te Standardeinheitsvektor im $\mathbb{R}^k$ ist. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^k$

$$|Ax| \leq \|A\||x|$$

gilt. Ist die Ungleichung scharf, d.h. gibt es immer ein $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ mit $|Ax| = \|A\||x|$?

(ii) Sei nun $\|A\|_1 := \max_{ij} |a_{ij}|$. Finden Sie ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^k$ die Ungleichung

$$|Ax| \leq c\|A\|_1|x|$$

gilt. Können Sie ein c finden, so dass diese Ungleichung scharf wird?

Aufgabe 2 (2.5+2.5+2*)**.** (i) Zeigen Sie, dass

$$C^1([a,b],\mathbb{R}) = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig differenzierbar}\}$$

zusammen mit $d_1(f,g) = \sup_{[a,b]} |f' - g'| + \sup_{[a,b]} |f - g|$ ein metrischer Raum ist.

(ii) Zeigen Sie, dass in $(C^1([a,b],\mathbb{R}), d_1)$ jede Cauchyfolge konvergiert. Man sagt $(C^1([a,b],\mathbb{R}), d_1)$ ist *vollständig*.

Hinweis: Sei f_n eine Cauchyfolge in $(C^1([a,b],\mathbb{R}), d_1)$. Zeigen Sie zunächst, dass f_n und f_n' jeweils punktweise gegen eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ bzw. $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie dann, dass $f_n \to f$ bzgl. d_2 aus (iii) und damit gleichmäßig konvergiert. Gleiches für $f_n' \to g$. Folgern Sie, dass dann $f' = g$ und f stetig differenzierbar ist und $f_n \to f$ in d_1 gilt.

(iii)* $C^1([a,b],\mathbb{R})$ ist auch zusammen mit $d_2(f,g) = \sup_{[a,b]} |f - g|$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass $(C^1([a,b],\mathbb{R}), d_2)$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 3. Sei X eine Menge. Seien $d_i\colon X \times X \to \mathbb{R}$, $i = 1,2$, so dass (X, d_i) jeweils ein metrischer Raum ist. Wir nennen die beiden Abstandsfunktionen *äquivalent*, wenn es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$

$$c_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq c_2 d_1(x,y)$$

gilt.[1]

Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Seien d_i^X bzw. d_i^Y Abstandsfunktionen auf X bzw. Y, die X bzw. Y jeweils zu einem metrischen Raum machen. Seien d_1^X und d_2^X äquivalent und auch d_1^Y und d_2^Y äquivalent. Zeigen Sie: $f\colon (X, d_1^X) \to (Y, d_1^Y)$ ist genau dann stetig, wenn auch $f\colon (X, d_2^X) \to (Y, d_2^Y)$ stetig ist.

Diese Aufgabe zusammen mit der letzten von Blatt 0 sagt uns, dass im $\mathbb{R}^2$ die euklidische Abstandsfunktion und die Eisenbahnmetrik nicht äquivalent sein können.[2] *Das Beispiel 1.1.3 aus der Vorlesung zeigt, dass d_1 und d_2 aus Aufgabe 2 auf $C^1([a,b],\mathbb{R})$ keine äquivalenten Abstandsfunktionen sein können.*[3]

[1] Man kann zeigen, dass dies auf den Abstandsfunktionen von X eine Äquivalenzrelation ergibt.

[2] Auf der anderen Seite kann man zeigen, dass auf einem endlich dimensionalen Vektorraum (also z.B. $\mathbb{R}^n$) alle Abstandsfunktionen, die von einer Norm $\|.\|$ kommt, d.h. $d(f,g) = \|f - g\|$, zueinander äquivalent sind. Die Eisenbahnmetrik kommt allerdings nicht von einer Norm.

[3] Diese beiden Abstandsfunktionen kommen zwar von einer Norm auf dem Vektorraum $C^1([a,b],\mathbb{R})$, aber dieser ist unendlich dimensional.

Warum ist es gut, sich mal mit äquivalenten Abstandsfunktionen auseinanderzusetzen? Betrachten wir folgendes Problem: Sei f Funktion in zwei Variablen, die erst einmal nichts miteinander zu tun haben. Zum Beispiel seien die zwei Variablen die Seitenlängen eines Rechtecks, und f bestimmt den Flächeninhalt. Dann würde man kleine Änderungen in den Seitenlängen vielleicht naheliegender mit der Summe des Betrages der Änderungen in den einzelnen Seitenlängen kodieren, also mit der Summe der euklidischen Abstände für die einzelnen Variablen, statt die beiden Seitenlängen zusammen als Punkt im $\mathbb{R}^2$ aufzufassen und darauf den euklidischen Abstand zu verwenden. In den Definitionen der folgenden Aufgabe wäre der erste Fall das Verwenden der Abstandsfunktion d_2 (für $n_1 = n_2 = 1$) und im zweiten Fall d_1. Wenn wir uns jetzt fragen, ob der Flächeninhalt des Rechtecks stetig von den Seitenlängen abhängt, müssen wir natürlich dazu sagen, bzgl. welcher Abstandsfunktion wir das untersuchen wollen. Dies sollte dem Problem angepasst sein, damit am Ende auch das gemessen wird, was wir wollen. Nach der Diskussion von eben klingt eigentlich d_2 nach der besseren Wahl. Aber ohne die Diskussion würden wir wahrscheinlich alle einfach den euklidischen Abstand nehmen. Macht das einen Unterschied? Hier nicht, da beide Abstandsfunktionen äquivalent sind (Aufgabe 4) und dann nach Aufgabe 3 die Abbildung bzgl. beider Abstandsfunktionen stetig ist. Glück gehabt[4].

Aufgabe 4. Seien $d_i \colon \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= |x-y| \\ d_2(x = (a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m), y = (c \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}^m)) &= |a-c| + |b-d|. \end{aligned}$$

(i) Überprüfen Sie, dass d_2 eine Abstandsfunktion auf $\mathbb{R}^{n+m}$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass d_1 und d_2 äquivalent sind.

Abgabe am Mittwoch 28.04.21 bis 14 Uhr

[4] In Aufgabe 4 kommen die Abstandsfunktionen beide von einer Norm. Damit wären Sie, wenn man die Fußnote der letzten Seite schon gezeigt hätte, automatisch äquivalent. Wir zeigen es hier direkt - geht auch sehr schnell.

Analysis II Blatt 1

Laura Stimpfle laura.stimpfle@t-online.de

Matr.-Nr. 4906027

Lorenz Bung lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Aufgabe 1. (2.5+2.5) Sei $A = (a_{ij})_{ij}$ eine reelle $\ell \times k$-Matrix.

(i) Wir setzen $\|A\| := \sqrt{\sum_{j=1}^k |Ae_j|^2}$, wobei e_j der j-te Standardeinheitsvektor im $\mathbb{R}^k$ ist. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^k$

$$|Ax| \le \|A\||x|$$

gilt. Ist die Ungleichung scharf, d.h. gibt es immer ein $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ mit $|Ax| = \|A\||x|$?

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |Ae_j|^2} = \sqrt{(a_{11} + a_{21} + \dots + a_{\ell 1})^2 + \dots + (a_{1k} + \dots + a_{\ell k})^2}$$

$$\|A\||x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |Ae_j|^2} \cdot |x|$$

$$= \sqrt{(a_{11} + \dots + a_{\ell 1})^2 + \dots + (a_{1k} + \dots + a_{\ell k})^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2}$$

$$= \sqrt{\left((a_{11} + \dots + a_{\ell 1})^2 + \dots + (a_{1k} + \dots + a_{\ell k})^2\right) \cdot (x_1^2 + \dots + x_k^2)}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{\ell} a_{ij}\right)^2 \cdot \sum_{s=1}^{k} x_s^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(\left(\sum_{j=1}^{\ell} a_{ij}^2\right) \cdot x_i^2\right)}$$

Cauchy-Schwarz (*)

$$\ge \sqrt{\sum_{i=1}^{\ell} \left(\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j\right)^2} \qquad (*): \left(\sum x_i \cdot y_i\right)^2 \le \left(\sum x_i^2\right) \cdot \left(\sum y_i^2\right)$$

$$= \sqrt{(a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k)^2 + \dots + (a_{\ell 1}x_1 + \dots + a_{\ell k}x_k)^2}$$

$$= \left|(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k, \dots, a_{\ell 1}x_1 + \dots + a_{\ell k}x_k)^T\right|$$

$$= |Ax|.$$

Die Ungleichung ist nicht scharf:
Bei Cauchy-Schwarz gilt Gleichheit genau dann, wenn die beiden Vektoren linear abhängig sind.

$\square$

(ii) Sei nun $\|A\|_1 := \max_{ij} |a_{ij}|$. Finden Sie ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^k$ die Ungleichung

$$|Ax| \leq c\|A\|_1|x|$$

gilt. Können Sie ein c finden, so dass die Ungleichung scharf wird?

Wähle $c = \sqrt{l}$: Dann ist

$$|Ax| = |(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k, \dots, a_{l1}x_1 + \dots + a_{lk}x_k)^T|$$

$$= \sqrt{(a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k)^2 + \dots + (a_{l1}x_1 + \dots + a_{lk}x_k)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j\right)^2} \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l} a_{ij}^2\right)x_i^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l} a_{ij}^2\right)} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}$$

$$\leq \max_{i,j} \sqrt{l \cdot a_{ij}^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2}$$

$$= \sqrt{l} \cdot \max_{i,j} \sqrt{a_{ij}^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2}$$

$$= \sqrt{l} \cdot \max_{i,j} |a_{ij}| \cdot \sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2}$$

$$= c\|A\|_1 |x|.$$

Die obige Ungleichung ist ebenfalls nicht scharf, aus denselben Grund wie bei (i).

$\square$

Aufgabe 2

(i) z: $C^1([a,b],\mathbb{R})$ mit $d_1(f,g) = \sup_{[a,b]}|f'-g'| + \sup_{[a,b]}|f-g|$ ist metrischer Raum.

<u>Definitheit</u> $d_1(f,g) \geq 0 \quad \forall f,g \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ ist durch die Definition von $d_1(f,g)$ gegeben, es gibt nur Summanden ≥ 0.

z: $d_1(f,g) = 0 \iff f = g$

„$\Rightarrow$" Sei $d_1(f,g) = 0$. Dann ist $\sup_{[a,b]}|f'-g'| + \sup_{[a,b]}|f-g| = 0$

$$\Rightarrow \sup_{[a,b]}|f'-g'| = 0 \quad \wedge \quad \sup_{[a,b]}|f-g| = 0$$

$$\Rightarrow |f-g| = 0 \quad \Rightarrow f-g=0 \quad \Rightarrow f=g$$

„$\Leftarrow$" Sei $f=g$. Dann ist $\sup_{[a,b]}|f'-g'| + \sup_{[a,b]}|f-g|$

$$= \sup_{[a,b]}|f'-f'| + \sup_{[a,b]}|f-f| = 0$$

<u>Symmetrie</u> $d_1(f,g) = d_1(g,f)$ ist gegeben, denn

$|f'-g'| = |g'-f'|$ und $|f-g| = |g-f|$ und damit

$$\sup_{[a,b]}|f'-g'| + \sup_{[a,b]}|f-g| = \sup_{[a,b]}|g'-f'| + \sup_{[a,b]}|g-f| \quad \forall f,g \in C^1([a,b],\mathbb{R})$$

<u>Dreiecksungleichung</u>

mit der Dreiecksungleichung für reelle Zahlen gilt $\forall x \in [a,b]$:

$$\sup|f(x)-g(x)| = \sup\left(|(f(x)-h(x)) + h(x) - g(x))|\right)$$

$$\leq \sup\left(|f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)|\right) \leq \sup|f(x)-h(x)| + \sup|h(x)-g(x)|$$

und $\sup|f'(x)-g'(x)| \leq \sup\left(|f'(x)-h'(x)| + |h'(x)-g'(x)|\right)$

$$\leq \sup|f'(x)-h'(x)| + \sup|h'(x)-g'(x)|.$$

also ist $\underbrace{\sup|f'-g'| + \sup|f-g|}_{= d_1(f,g)} \leq \sup|f'(x)-h'(x)| + \sup|f(x)-h(x)|$

$$+ \sup|h'(x)-g'(x)| + \sup|h(x)-g(x)| = d_1(f,h) + d_1(h,g).$$

jedes Supremum auf dem Intervall $[a,b]$.

(ii) Sei f_n eine Cauchyfolge in $((C^1([a,b],\mathbb{R}),d_1)$.

Also gilt $\forall \varepsilon>0: \exists n_0\in\mathbb{N}:$ $d_1(f_n,f_m)<\varepsilon \quad \forall n,m\ge n_0$.

Sei nun für $m\to\infty$ $f_m(x)=f(x)$. $|f_n(x)-f_m(x)|\le d_1(f_n,f_m)<\varepsilon$.

Dann ist (in $\mathbb{R}$) auch $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. $f_n(x)$ konvergiert also pktweise gegen $f(x)$.

~~$|f_n(x)-f(x)|\le d_1(f_n,f)<$~~

Genauso mit f_n'. Sei f_n' eine Cauchyfolge in $(C^1([a,b],\mathbb{R}),d_1)$.

Also: $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}: d_1(f_n',f_m')<\varepsilon \quad \forall n,m\ge n_0$. $|f_n'(x)-f_m'(x)|\le d_1(f_n',f_m')<\varepsilon$.

Sei wieder für $m\to\infty$ $f_m'(x)=g(x)$. Dann ist in $\mathbb{R}$ auch $|f_n'(x)-g(x)|<\varepsilon$.

f_n' konvergiert also pktweise gegen g.

~~Also gilt~~ Da f_n und f_n' auch gleichmäßig konvergieren und $g=f'$,

gilt also $\underbrace{\sup|f_n-f|}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty}+\underbrace{\sup|f_n'-f'|}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty}\to 0$ für $n\to\infty$, also $f_n\to f$ in d_1.

Aufgabe 3. Sei X eine Menge. Seien $d_i\colon X \times X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, so dass (X, d_i) jeweils ein metrischer Raum ist. Wir nennen die beiden Abstandsfunktionen *äquivalent*, wenn es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$

$$c_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq c_2 d_1(x,y)$$

gilt.[1]

Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Seien d_i^X bzw. d_i^Y Abstandsfunktionen auf X bzw. Y, die X bzw. Y jeweils zu einem metrischen Raum machen. Seien d_1^X und d_2^X äquivalent und auch d_1^Y und d_2^Y äquivalent. Zeigen Sie: $f\colon (X, d_1^X) \to (Y, d_1^Y)$ ist genau dann stetig, wenn auch $f\colon (X, d_2^X) \to (Y, d_2^Y)$ stetig ist.

"$\Rightarrow$": Sei $f: (X, d_1^X) \to (Y, d_1^Y)$ stetig.

Dann gilt in allen $x_0 \in X$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X \text{ mit } d_1^X(x, x_0) < \delta : d_1^Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Da d_1^X und d_2^X sowie d_1^Y und d_2^Y äquivalent sind, existieren für alle $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ Konstanten $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$, sodass

$$c_1 d_1^X(x_1, x_2) \leq d_2^X(x_1, x_2) \leq c_2 d_1^X(x_1, x_2)$$

und $$c_3 d_1^Y(y_1, y_2) \leq d_2^Y(y_1, y_2) \leq c_4 d_1^Y(y_1, y_2).$$

Mit der obigen Stetigkeitsdefinition erhalten wir

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X \text{ mit } \frac{1}{c_2} d_2^X(x, x_0) \leq d_1^X(x, x_0) < \delta :$$

$$\frac{1}{c_4} d_2^Y(f(x), f(x_0)) \leq d_1^Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

"$\Leftarrow$": Analog, wir nehmen einfach die andere Konstante in der Definition der äquivalenten Distanzfunktionen.

$\square$

Aufgabe 4. Seien $d_i\colon \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= |x-y| \\ d_2(x=(a\in\mathbb{R}^n, b\in\mathbb{R}^m), y=(c\in\mathbb{R}^n, d\in\mathbb{R}^m)) &= |a-c|+|b-d|. \end{aligned}$$

(i) Überprüfen Sie, dass d_2 eine Abstandsfunktion auf $\mathbb{R}^{n+m}$ ist.

d_2 ist Abstandsfkt. auf $\mathbb{R}^{n+m}$, wenn:

(1) $d_2(p,q) \geq 0 \quad \forall p,q \in \mathbb{R}^{n+m}$, $\quad d(p,q)=0 \Leftrightarrow p=q$

(2) $d_2(p,q) = d_2(q,p) \quad \forall p,q \in \mathbb{R}^{n+m}$

(3) $d_2(p,q) \leq d_2(p,r) + d_2(r,q) \quad \forall p,q,r \in \mathbb{R}^{n+m}$.

Bew.:

(1) $d_2(x,y) = \underbrace{|a-c|}_{\geq 0} + \underbrace{|b-d|}_{\geq 0} \geq 0.$

"$\Leftarrow$": $x=y \Rightarrow d_2(x,y) = d_2(x,x) = |a-a|+|b-b| = 0.$

"$\Rightarrow$": $d_2(x,y)=0 \Rightarrow |a-c|+|b-d|=0 \Rightarrow |a-c|=|b-d|=0$

$\Rightarrow a=c \wedge b=d \Rightarrow x=y.$

(2) $d_2(x,y) = |a-c|+|b-d| = |c-a|+|d-b| = d_2(y,x).$

(3) Seien $x,y,z \in \mathbb{R}^{n+m}$ mit $x := (a\in\mathbb{R}^n, b\in\mathbb{R}^m)$,

$y := (c\in\mathbb{R}^n, d\in\mathbb{R}^m)$, $z := (e\in\mathbb{R}^n, f\in\mathbb{R}^m)$.

$d_2(x,y) + d_2(y,z) = |a-c|+|b-d|+|c-e|+|d-f|$

$= |a-c|+|c-e|+|b-d|+|d-f| \geq |a-e|+|b-f|$

$= d_2(x,z)$ $\square$

(ii) Zeigen Sie, dass d_1 und d_2 äquivalent sind.

$$c_1 d_1(x,y) = c_1|x-y| = c_1 \cdot |(a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m) - (c \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}^m)|$$
$$= c_1 \cdot |((a-c) \in \mathbb{R}^n, (b-d) \in \mathbb{R}^m)|$$

$$d_2(x,y) = |a-c| + |b-d|$$

$$c_2 d_1(x,y) = c_2|x,y| = c_2 \cdot |((a-c) \in \mathbb{R}^n, (b-d) \in \mathbb{R}^m)|$$

Seien $x, y \in \mathbb{R}^{n+m}$ mit $x := (a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m)$ und $y := (c \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}^m)$.

$$c_1 d_1(x,y) = c_1 \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2 + \ldots + (x_{n+m}-y_{n+m})^2}$$
$$= \sqrt{c_1^2 (x_1-y_1)^2 + \ldots +}$$
$$= \sqrt{(c_1 x_1 - c_1 y_1)^2 + \ldots}$$

$$|a-c| + |b-d| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$$
$$+ \sqrt{(x_{n+1}-y_{n+1})^2 + \ldots + (x_{n+m}-y_{n+m})^2}$$