Numerik 1

Blatt 1 – 18.10.2021

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 und 2. Abgabe: 29.10.2021, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws21/num`

Hinweis: Der Übungsbetrieb findet in den ungeraden Semesterwochen statt und beginnt am 1.11. Die Anmeldung zu den Übungsgruppen über HISinOne beginnt am Mittwoch, den 20.10. um 12 Uhr.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass folgende Probleme gut konditioniert sind:
(i) Die Addition zweier nichtnegativer oder nichtpositiver Zahlen.
(ii) Die Inversion einer von Null verschiedenen Zahl.

Aufgabe 2. Wie lassen sich Auslöschungseffekte bei der praktischen Berechnung der Ausdrücke

$$\frac{1-2x}{1+2x} - \frac{1}{1+x}, \quad \frac{e^x - 1}{x}$$

für $x \neq 0$ mit $|x| \ll 1$ vermeiden?

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Größenordnung des Aufwands für die Matrix-Vektor-Multiplikation, die Matrix-Matrix-Multiplikation sowie die Bestimmung der Determinante einer Matrix mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz. Matrizen seien dabei quadratisch.

Aufgabe 4. Zu fixierten Normen $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ und auf $\mathbb{R}^m$ bezeichne $\|\cdot\|_{op}$ die induzierte Operatornorm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
(i) Die Operatornorm $\|\cdot\|_{op}$ definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$.
(ii) Es gilt

$$\|A\|_{op} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \inf\{c \geq 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \|Ax\| \leq c\|x\|\}$$

und das Supremum und das Infimum werden angenommen.
(iii) Im Fall $A \neq 0$ folgt für $x \in \mathbb{R}^m$ mit $\|x\| \leq 1$ und $\|Ax\| = \|A\|_{op}$ bereits $\|x\| = 1$.

Numerik I Blatt 1

Lorenz Bung

lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Charlotte Rothhaar

Matr.-Nr. 4315016

charlotte.rothhaar97@gmail.com

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass folgende Probleme gut konditioniert sind:
(i) Die Addition zweier nichtnegativer oder nichtpositiver Zahlen.
(ii) Die Inversion einer von Null verschiedenen Zahl.

(i) <u>z.z.:</u> Die Addition zweier nichtnegativer oder nichtpositiver Zahlen ist gut konditioniert.

<u>Bew.:</u> Sei $\phi(x,y) = x + y$, $x, y \in \mathbb{R}_{<0}$ oder $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\varepsilon_x = \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|} \quad \text{und} \quad \varepsilon_y = \frac{|\tilde{y} - y|}{|y|}.$$

Dann ist

$$\varepsilon_\phi = \frac{|\phi(\tilde{x}, \tilde{y}) - \phi(x,y)|}{|\phi(x,y)|} = \frac{|\tilde{x} + \tilde{y} - (x+y)|}{|x+y|}$$

$$= \frac{|\tilde{x} - x + \tilde{y} - y|}{|x+y|} \leq \frac{|\tilde{x} - x| + |\tilde{y} - y|}{|x+y|} = \frac{|\tilde{x} - x|}{|x+y|} + \frac{|\tilde{y} - y|}{|x+y|}$$

$$\leq \frac{|\tilde{x} - x|}{|x| + |y|} + \frac{|\tilde{y} - y|}{|x| + |y|} < \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|} + \frac{|\tilde{y} - y|}{|y|} = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

und ϕ ist damit gut konditioniert. $\square$

(ii) <u>z.z.:</u> Die Inversion einer von 0 verschiedenen Zahl ist gut konditioniert.

<u>Bew.:</u> Sei $\phi(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Es ist

$$\varepsilon_\phi = \frac{|\phi(\tilde{x}) - \phi(x)|}{|\phi(x)|} = \frac{\left|\frac{1}{\tilde{x}} - \frac{1}{x}\right|}{\left|\frac{1}{x}\right|} = \frac{\left|\frac{x}{\tilde{x}x} - \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}x}\right|}{\left|\frac{1}{x}\right|}$$

$$= \frac{\left|\frac{x - \tilde{x}}{\tilde{x}x}\right|}{\frac{1}{|x|}} = \left|\frac{x - \tilde{x}}{\tilde{x}x}\right| |x| = \frac{|x - \tilde{x}|}{|\tilde{x}| \cdot |x|} \cdot |x| = \frac{|\tilde{x} - x|}{|\tilde{x}|} = \varepsilon_{\tilde{x}}.$$

Damit ist ϕ gut konditioniert. $\square$

Aufgabe 2. Wie lassen sich Auslöschungseffekte bei der praktischen Berechnung der Ausdrücke

$$\frac{1-2x}{1+2x} - \frac{1}{1+x}, \qquad \frac{e^x - 1}{x}$$

für $x \neq 0$ mit $|x| \ll 1$ vermeiden?

$$\frac{1-2x}{1+2x} - \frac{1}{1+x} = \frac{(1-2x)(1+x)}{(1+2x)(1+x)} - \frac{1+2x}{(1+2x)(1+x)} = \frac{1+x-2x-2x^2-1-2x}{(1+2x)(1+x)}$$

$$= \frac{-(2x^2+3x)}{(1+2x)(1+x)}.$$

Dies ist gut konditioniert, da (i) Die Addition zweier nichtnegativer oder nichtpositiver Zahlen nach Bem. 1.1 bzw. Aufgabe 1.(i) gut konditioniert ist, und

(ii) die Multiplikation $\phi(x,y) = xy$ nach Satz 1.1 gut konditioniert ist.

Das Problem der Auslöschung kam durch die Subtraktion zweier nahezu gleich großer Zahlen zustande. Solch eine Subtraktion findet in diesem Term jedoch nicht mehr statt.

Über die Definition von e^x als Potenzreihe mit $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ erhalten wir

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) - 1}{x} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!},$$

was als Summe über positive Summanden keine Auslöschungseffekte bildet.

Auf einem Rechner müsste die Potenzreihe natürlich endlich implementiert werden.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Größenordnung des Aufwands für die Matrix-Vektor-Multiplikation, die Matrix-Matrix-Multiplikation sowie die Bestimmung der Determinante einer Matrix mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz. Matrizen seien dabei quadratisch.

Seien $A, B \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$.

(i)

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \right)_i$$

n Operationen n Einträge

$$\Rightarrow Ax = \mathcal{O}(n^2).$$

(ii)

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \right)_{ij}$$

n Operationen n^2 Einträge

$$\Rightarrow AB = \mathcal{O}(n^3)$$

(iii)

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \underbrace{\det A_{ij}}_{\sum_{i=1}^{n-1} \cdots}$$

n Operationen , also rekursiv $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Operationen

$$\Rightarrow \det A = \mathcal{O}(n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1) = \mathcal{O}(n!).$$

Aufgabe 4. Zu fixierten Normen $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ und auf $\mathbb{R}^m$ bezeichne $\|\cdot\|_{op}$ die induzierte Operatornorm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
(i) Die Operatornorm $\|\cdot\|_{op}$ definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$.

<u>Z.z.:</u> $\|\cdot\|_{op}$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$.

<u>Bew.:</u> $\|\cdot\|_{op}$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$, wenn

(i) $\|x\|_{op} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{m\times n}$

(ii) $\|x+y\|_{op} \leq \|x\|_{op} + \|y\|_{op} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{m\times n}$

(iii) $\|\lambda x\|_{op} = |\lambda|\,\|x\|_{op} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{m\times n}, \lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Es ist $\|A\|_{op} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_{\mathbb{R}^n}=1} \|Ax\|_{\mathbb{R}^m}$.

$$\|A\|_{op} = 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_{\mathbb{R}^n}=1} \|Ax\|_{\mathbb{R}^m} = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A = 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

$\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ ist Norm

$x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, da $\|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1$ war

(ii) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

$$\|A+B\|_{op} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_{\mathbb{R}^n}=1} \|(A+B)x\|_{\mathbb{R}^m} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_{\mathbb{R}^n}=1} \|Ax + Bx\|_{\mathbb{R}^m}$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_{\mathbb{R}^n}=1} \|Ax\|_{\mathbb{R}^m} + \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_{\mathbb{R}^n}=1} \|Bx\|_{\mathbb{R}^m} = \|A\|_{op} + \|B\|_{op}.$$

$\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ Norm

(iii) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\|\lambda A\|_{op} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_{\mathbb{R}^n}=1} \|\lambda Ax\|_{\mathbb{R}^m} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_{\mathbb{R}^n}=1} |\lambda|\,\|Ax\|_{\mathbb{R}^m}$$

$\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ Norm

$$= |\lambda| \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_{\mathbb{R}^n}=1} \|Ax\|_{\mathbb{R}^m} = |\lambda|\,\|A\|_{op}.$$

$\square$

(ii) Es gilt

$$\|A\|_{op} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \inf\{c \geq 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \|Ax\| \leq c\|x\|\}$$

und das Supremum und das Infimum werden angenommen.

Beweis: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ mit $b = \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^n}=1} \|Ax\|_{\mathbb{R}^m}$.

Es ist

$$\inf\{c \geq 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \ \|Ax\| \leq c\|x\|\}$$
$$= \inf\{c \geq 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq c\}$$
$$= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

(weiter sind wir leider nicht gekommen)

(iii) Im Fall $A \neq 0$ folgt für $x \in \mathbb{R}^m$ mit $\|x\| \leq 1$ und $\|Ax\| = \|A\|_{op}$ bereits $\|x\| = 1$.