Abteilung für
Angewandte Mathematik

SoSe 2022
Prof. Dr. Sören Bartels, Jakob Keck

Numerik 2

Blatt 2 – 9.5.2022

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 bis 12. Abgabe: 20.5.2022, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss22/num`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $f(x) = \sin(\pi x)$ für $x \in [0,1]$, $x_0 = 0$ sowie $x_i = i/n$, $i = 0,1,\dots,n$ sofern $n > 0$ gilt. Berechnen und skizzieren Sie das Interpolationspolynom von f für $n = 0,1,\dots,4$. Benutzen Sie zur Berechnung das Neville-Schema.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie folgende Eigenschaften der für $t \in [-1,1]$ durch $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ definierten Funktionen:
(i) Es gilt $|T_n(t)| \le 1$ für alle $t \in [-1,1]$.
(ii) Mit $T_0(t) = 1$ und $T_1(t) = t$ gilt

$$T_{n+1}(t) = 2t\,T_n(t) - T_{n-1}(t)$$

für alle $t \in [-1,1]$. Insbesondere gilt $T_n \in \mathcal{P}_n|_{[-1,1]}$ und für $n \ge 1$ folgt $T_n(t) = 2^{n-1}t^n + q_{n-1}$ mit $q_{n-1} \in \mathcal{P}_n|_{[-1,1]}$.
(iii) Für $n \ge 1$ hat T_n die Nullstellen $t_j = \cos((j+1/2)\pi/n)$, $j = 0,1,\dots,n-1$, und die $n+1$ Extremstellen $s_j = \cos(j\pi/n)$, $j = 0,1,\dots,n$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** (i) Geben Sie ein ausschließlich auf arithmetischen Grundoperationen basierendes Verfahren mit möglichst wenigen Operationen zur Auswertung des Polynoms $(x+3)^{16}$ an.
(ii) Vergleichen Sie den Aufwand der direkten Auswertung des Polynoms $p(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$ mit dem unter Verwendung der äquivalenten Darstellung

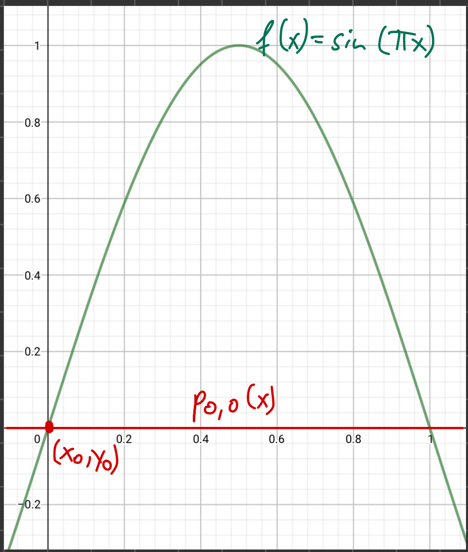
$$p(x) = a_0 + x\big(a_1 + x\big(a_2 + \dots x\big(a_{n-2} + x\big(a_{n-1} + xa_n\big)\big)\dots\big)\big).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Für die durch die Punkte $x_i = (i/n)^4$, $i = 0,1,\dots,n$, definierte Partitionierung von $[0,1]$ sei $f_n \in \mathcal{S}^{1,0}(\mathcal{T}_n)$ die interpolierende Spline-Funktion von $f(x) = x^{1/2}$. Zeigen Sie, dass $\max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \le cn^{-2}$ mit einer von n unabhängigen Konstanten $c > 0$ gilt. Skizzieren Sie f_n für $n = 2,4,8$.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $f(x) = \sin(\pi x)$ für $x \in [0,1]$, $x_0 = 0$ sowie $x_i = i/n$, $i = 0, 1, \ldots, n$ sofern $n > 0$ gilt. Berechnen und skizzieren Sie das Interpolationspolynom von f für $n = 0, 1, \ldots, 4$. Benutzen Sie zur Berechnung das Neville-Schema.

$\underline{n=0:}$ $\quad x_0 = 0, \; f(x_0) = \sin(0) = 0.$

$$p_{0,0}(x) = y_0 = 0$$

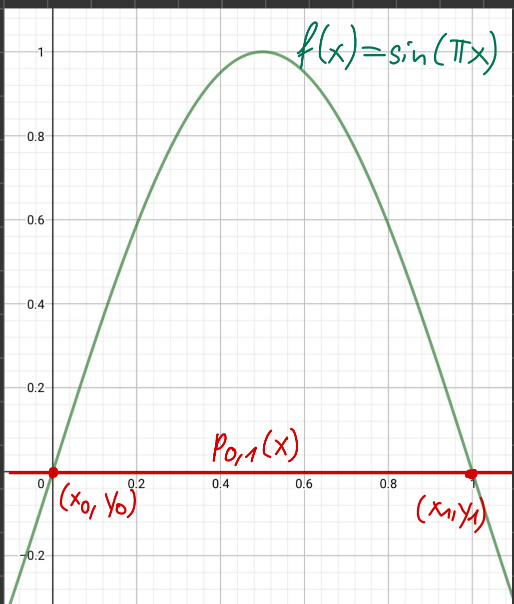


$\underline{n=1:}$ $\quad x_0 = 0, \; f(x_0) = \sin(0) = 0$

$$x_1 = 1, \; f(x_1) = \sin(\pi) = 0$$

$$\begin{matrix} p_{0,0}(x) = y_0 = 0 \\ p_{1,0}(x) = y_1 = 0 \end{matrix} \longrightarrow p_{0,1}(x) = \frac{(x-x_0)\,p_{1,0}(x) - (x-x_1)\,p_{0,0}(x)}{x_1 - x_0}$$

$$= \frac{(x-0)\cdot 0 - (x-1)\cdot 0}{1-0} = 0.$$



$\underline{n=2:}$ $x_0 = 0,\ f(x_0) = \sin(0) = 0$

$x_1 = \frac{1}{2},\ f(x_1) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1$

$x_2 = 1,\ f(x_2) = \sin(\pi) = 0$

$$\begin{array}{ccccc}
p_{0,0}(x) = y_0 = 0 & \longrightarrow & p_{0,1}(x) & \longrightarrow & p_{0,2}(x) \\
 & \nearrow & & \nearrow & \\
p_{1,0}(x) = y_1 = 1 & \longrightarrow & p_{1,1}(x) & & \\
 & \nearrow & & & \\
p_{2,0}(x) = y_2 = 0 & & & &
\end{array}$$

$$p_{0,1}(x) = \frac{(x-x_0)\cdot p_{1,0}(x) - (x-x_1)\cdot p_{0,0}(x)}{x_1 - x_0} = \frac{(x-0)\cdot 1 - (x-\frac{1}{2})\cdot 0}{\frac{1}{2} - 0}$$

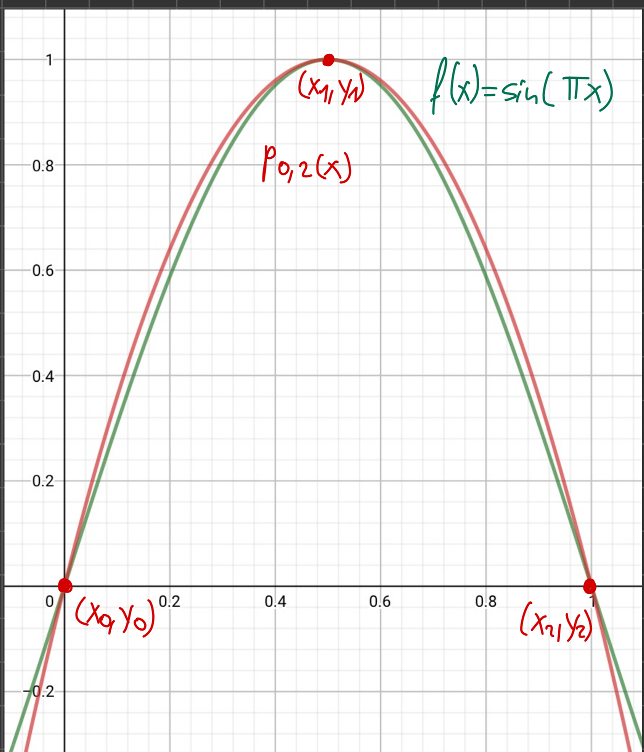
$$= \frac{x-0}{\frac{1}{2}} = 2x.$$

$$p_{1,1}(x) = \frac{(x-x_1)\cdot p_{2,0}(x) - (x-x_2)\cdot p_{1,0}(x)}{x_2 - x_1} = \frac{(x-\frac{1}{2})\cdot 0 - (x-1)\cdot 1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-x+1}{\frac{1}{2}} = -2x+2$$

$$p_{0,2}(x) = \frac{(x-x_0)\,p_{1,1}(x) - (x-x_2)\,p_{0,1}(x)}{x_2 - x_0} = \frac{(x-0)\cdot(-2x+2) - (x-1)\cdot 2x}{1-0}$$

$$= \frac{-2x^2+2x-2x^2+2x}{1} = -4x^2+4x.$$



$\underline{n=3:}$ $x_0 = 0,\ f(x_0) = \sin(0) = 0$

$x_1 = \frac{1}{3},\ f(x_1) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_2 = \frac{2}{3},\ f(x_2) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_3 = 1,\ f(x_3) = \sin(\pi) = 0$

$$
\begin{tikzcd}
p_{0,0}(x) = y_0 = 0 \arrow[r] & p_{0,1}(x) \arrow[r] & p_{0,2}(x) \arrow[r] & p_{0,3}(x) \\
p_{1,0}(x) = y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \arrow[r] \arrow[ur] & p_{1,1}(x) \arrow[r] \arrow[ur] & p_{1,2}(x) \arrow[ur] & \\
p_{2,0}(x) = y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \arrow[r] \arrow[ur] & p_{2,1}(x) \arrow[ur] & & \\
p_{3,0}(x) = y_3 = 0 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

$$p_{0,1}(x) = \frac{(x-x_0)\cdot p_{1,0}(x) - (x-x_1)\cdot p_{0,0}(x)}{x_1 - x_0} = \frac{(x-0)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot 0}{\frac{1}{3} - 0}$$

$$= 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

$$p_{1,1}(x) = \frac{(x-x_1)\cdot p_{2,0}(x) - (x-x_2)\cdot p_{1,0}(x)}{x_2 - x_1} = \frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}$$

$$= 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{1}{3}-x+\frac{2}{3}\right) = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$p_{2,1}(x) = \frac{(x-x_2)\cdot p_{3,0}(x) - (x-x_3)p_{2,0}(x)}{x_3 - x_2} = \frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot 0 - (x-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= -3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(x-1).$$

$$p_{0,2}(x) = \frac{(x-x_0)\,p_{1,1}(x) - (x-x_2)\,p_{0,1}(x)}{x_2 - x_0} = \frac{(x-0)\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(x-\frac{2}{3}\right)3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x}{\frac{2}{3}-0}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - 3\frac{\sqrt{3}}{2}x\left(x-\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x\cdot\left(1-3x+2\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4}x\,(-3x+3) = \frac{9\sqrt{3}}{4}\left(-x^2+x\right)$$

$$p_{1,2}(x) = \frac{(x-x_1)\,p_{2,1}(x) - (x-x_3)\,p_{1,1}(x)}{x_3 - x_1} = \frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}(x-1)\right) - (x-1)\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}(x-1)x + \frac{\sqrt{3}}{2}(x-1) - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

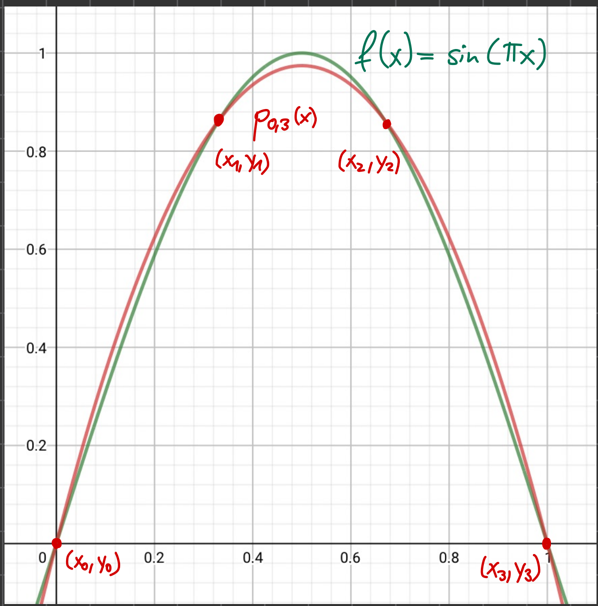
$$= -\frac{9\sqrt{3}}{4}\left(x^2-x\right) + \cancel{\frac{3\sqrt{3}}{4}x} - \cancel{\frac{3\sqrt{3}}{4}} - \cancel{\frac{3\sqrt{3}}{4}x} + \cancel{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

$$p_{0,3}(x) = \frac{(x-x_0)\,p_{1,2}(x) - (x-x_3)\,p_{0,2}(x)}{x_3 - x_0} = \frac{(x-0)\left(-\frac{9\sqrt{3}}{4}(x^2-x)\right) - (x-1)\frac{9\sqrt{3}}{4}(-x^2+x)}{1-0}$$

$$= -\frac{9\sqrt{3}}{4}(x^2-x)x - x\frac{9\sqrt{3}}{4}(-x^2+x) + \frac{9\sqrt{3}}{4}(-x^2+x)$$

$$= \cancel{\frac{9\sqrt{3}}{4}(-x^2+x)}x - \cancel{\frac{9\sqrt{3}}{4}(-x^2+x)}x + \frac{9\sqrt{3}}{4}(-x^2+x)$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{4}(-x^2+x).$$



<u>n=4:</u>

$x_0 = 0,\ f(x_0) = \sin(0) = 0$

$x_1 = \frac{1}{4},\ f(x_1) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\ f(x_2) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1$

$x_3 = \frac{3}{4},\ f(x_3) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x_4 = 1,\ f(x_4) = \sin(\pi) = 0$

$$\begin{array}{lllll}
p_{0,0}(x) = y_0 = 0 & \to\ p_{0,1}(x) & \to\ p_{0,2}(x) & \to\ p_{0,3}(x) & \to\ p_{0,4}(x) \\
p_{1,0}(x) = y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} & \nearrow \to\ p_{1,1}(x) & \nearrow \to\ p_{1,2}(x) & \nearrow \to\ p_{1,3}(x) & \nearrow \\
p_{2,0}(x) = y_2 = 1 & \nearrow \to\ p_{2,1}(x) & \nearrow \to\ p_{2,2}(x) & \nearrow & \\
p_{3,0}(x) = y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} & \nearrow \to\ p_{3,1}(x) & \nearrow & & \\
p_{4,0}(x) = y_4 = 0 & \nearrow & & &
\end{array}$$

$$p_{0,1}(x) = \frac{(x-x_0)\cdot p_{1,0}(x) - (x-x_1)\cdot p_{0,0}(x)}{x_1 - x_0} = \frac{(x-0)\frac{1}{\sqrt{2}} - (x-\frac{1}{4})\cdot 0}{\frac{1}{4} - 0}$$

$$= 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}x = \frac{4\sqrt{2}}{2}x = 2\sqrt{2}x.$$

$$p_{1,1}(x) = \frac{(x-x_1)\cdot p_{2,0}(x) - (x-x_2)\cdot p_{1,0}(x)}{x_2 - x_1} = \frac{(x-\frac{1}{4})\cdot 1 - (x-\frac{1}{2})\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{4} - \frac{1}{4}}$$

$$= 4\cdot\left(x - \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 4\cdot\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}x - \frac{1-\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= (4-2\sqrt{2})x - 1 + \sqrt{2}.$$

$$p_{2,1}(x) = \frac{(x-x_2)\cdot p_{3,0}(x) - (x-x_3)p_{2,0}(x)}{x_3 - x_2} = \frac{(x-\frac{1}{2})\frac{1}{\sqrt{2}} - (x-\frac{3}{4})\cdot 1}{\frac{3}{4} - \frac{2}{4}}$$

$$= 4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4} - x + \frac{3}{4}\right) = 4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}-2}{2}x + \frac{3-\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= (2\sqrt{2}-4)x + 3 - \sqrt{2}.$$

$$p_{3,1}(x) = \frac{(x-x_3)\cdot p_{4,0}(x) - (x-x_4)p_{3,0}(x)}{x_4 - x_3} = \frac{(x-\frac{3}{4})\cdot 0 - (x-1)\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{4}{4} - \frac{3}{4}}$$

$$= 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(1-x) = -2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}.$$

$$p_{0,2}(x) = \frac{(x-x_0)p_{1,1}(x) - (x-x_2)p_{0,1}(x)}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{(x-0)\left((4-2\sqrt{2})x - 1 + \sqrt{2}\right) - (x-\frac{1}{2})2\sqrt{2}x}{\frac{1}{2} - 0}$$

$$= 2\cdot\left((4-2\sqrt{2})x^2 - (1-\sqrt{2})x - 2\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x\right)$$

$$= 2\left((4-2\sqrt{2}-2\sqrt{2})x^2 + (\sqrt{2}-1+\sqrt{2})x\right)$$

$$= (8-8\sqrt{2})x^2 + (4\sqrt{2}-2)x.$$

$$p_{1,2}(x) = \frac{(x-x_1)p_{2,1}(x) - (x-x_3)p_{1,1}(x)}{x_3 - x_1}$$

$$= \frac{(x-\frac{1}{4})\left((2\sqrt{2}-4)x + 3 - \sqrt{2}\right) - (x-\frac{3}{4})\left((4-2\sqrt{2})x - 1 + \sqrt{2}\right)}{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}}$$

$$= 2\cdot\left(\left(2\sqrt{2}-4\right)x^2+\left(3-\sqrt{2}\right)x-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)x-\frac{3-\sqrt{2}}{4}-x\left(\left(4-2\sqrt{2}\right)x-1+\sqrt{2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{3}{4}\left(\left(4-2\sqrt{2}\right)x-1+\sqrt{2}\right)\right)$$

$$=2\left(\left(2\sqrt{2}-4\right)x^2+\left(3-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)x-\frac{3-\sqrt{2}}{4}-\left(4-2\sqrt{2}\right)x^2-\left(-1+\sqrt{2}\right)x\right.$$
$$\left.+\left(3-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)x-\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$=2\left(\left(2\sqrt{2}-4-4+2\sqrt{2}\right)x^2+\left(3-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+1+1-\sqrt{2}+3-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)x\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{3-\sqrt{2}}{4}+\frac{3\sqrt{2}}{4}-\frac{3}{4}\right)\right)$$

$$=2\left(\left(-8+4\sqrt{2}\right)x^2+\left(8-4\sqrt{2}\right)x+\left(\frac{-6+2\sqrt{2}}{4}\right)\right)$$

$$=\left(-16+8\sqrt{2}\right)x^2+\left(16-8\sqrt{2}\right)x+\left(\sqrt{2}-3\right).$$

$$p_{2,2}(x)=\frac{(x-x_2)\,p_{3,1}(x)-(x-x_4)\,p_{2,1}(x)}{x_4-x_2}$$

$$=\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}\right)-(x-1)\left(\left(2\sqrt{2}-4\right)x+3-\sqrt{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=2\cdot\left(\left(-2\sqrt{2}\right)x^2+2\sqrt{2}x+\sqrt{2}x-\sqrt{2}+\left(-x+1\right)\left(\left(2\sqrt{2}-4\right)x+3-\sqrt{2}\right)\right)$$

$$=2\cdot\left(\left(-2\sqrt{2}\right)x^2+3\sqrt{2}x-\sqrt{2}-\left(2\sqrt{2}-4\right)x^2-3x+\sqrt{2}x+\left(2\sqrt{2}-4\right)x+3-\sqrt{2}\right)$$

$$=2\left(\left(-4\sqrt{2}+4\right)x^2+\left(6\sqrt{2}-7\right)x+3-2\sqrt{2}\right)$$

$$=\left(8-8\sqrt{2}\right)x^2+\left(12\sqrt{2}-14\right)x+6-4\sqrt{2}.$$

$$p_{0,3}(x) = \frac{(x-x_0)\,p_{1,2}(x) - (x-x_3)\,p_{0,2}(x)}{x_3 - x_0}$$

$$= \frac{(x-0)\left((-16+8\sqrt{2})x^2 + (16-8\sqrt{2})x + (\sqrt{2}-3)\right) - \left(x-\frac{3}{4}\right)\left((8-8\sqrt{2})x^2 + (4\sqrt{2}-2)x\right)}{\frac{3}{4} - 0}$$

$$= \frac{4}{3}\left((-16+8\sqrt{2})x^3 + (16-8\sqrt{2})x^2 + (\sqrt{2}-3)x + \left(-x+\frac{3}{4}\right)\left((8-8\sqrt{2})x^2 + (4\sqrt{2}-2)x\right)\right)$$

$$= \frac{4}{3}\left((-16+8\sqrt{2})x^3 + (16-8\sqrt{2})x^2 + (\sqrt{2}-3)x - (8-8\sqrt{2})x^3 - (4\sqrt{2}-2)x^2 + \frac{3}{4}(8-8\sqrt{2})x^2 + \frac{3}{4}(4\sqrt{2}-2)x\right)$$

$$= \frac{4}{3}\left((-24+16\sqrt{2})x^3 + (18-12\sqrt{2})x^2 + (\sqrt{2}-3)x + (6-6\sqrt{2})x^2 + \left(3\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)x\right)$$

$$= \frac{4}{3}\left((-24+16\sqrt{2})x^3 + (24-18\sqrt{2})x^2 + \left(4\sqrt{2}-\frac{9}{2}\right)x\right)$$

$$= \left(-32+\frac{64\sqrt{2}}{3}\right)x^3 + (32-24\sqrt{2})x^2 + \left(\frac{16\sqrt{2}}{3}-6\right)x.$$

$$p_{1,3}(x) = \frac{(x-x_1)\,p_{2,2}(x) - (x-x_4)\,p_{1,2}(x)}{x_4 - x_1}$$

$$= \frac{\left(x-\frac{1}{4}\right)\left((8-8\sqrt{2})x^2 + (12\sqrt{2}-14)x + 6-4\sqrt{2}\right) - (x-1)\left((-16+8\sqrt{2})x^2 + (16-8\sqrt{2})x + (\sqrt{2}-3)\right)}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\left((8-8\sqrt{2})x^3 + (12\sqrt{2}-14)x^2 + (6-4\sqrt{2})x - (2-2\sqrt{2})x^2 - \left(3\sqrt{2}-\frac{14}{4}\right)x - \frac{3}{2} + \sqrt{2} + (-x+1)\left((-16+8\sqrt{2})x^2 + (16-8\sqrt{2})x + (\sqrt{2}-3)\right)\right)$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\left((8-8\sqrt{2})x^3 + (14\sqrt{2}-16)x^2 + \left(-7\sqrt{2}+\frac{19}{2}\right)x - \frac{3}{2} + \sqrt{2} - (-16+8\sqrt{2})x^3 - (16-8\sqrt{2})x^2 - (\sqrt{2}-3)x + (-16+8\sqrt{2})x^2 + (16-8\sqrt{2})x + (\sqrt{2}-3)\right)$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\left((24-16\sqrt{2})x^3 + (-48+30\sqrt{2})x^2 + \left(\frac{57}{2}-16\sqrt{2}\right)x - \frac{9}{2} + 2\sqrt{2}\right)$$

$$= \left(32-\frac{64\sqrt{2}}{3}\right)x^3 + (40\sqrt{2}-64)x^2 + \left(38-\frac{64\sqrt{2}}{3}\right)x - 6 + \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

$$p_{0,4}(x) = \frac{(x-x_0)\,p_{1,3}(x) - (x-x_4)\,p_{0,3}(x)}{x_4 - x_0}$$

$$= \frac{(x-0)\left(\left(32-\frac{64\sqrt{2}}{3}\right)x^3 + \left(40\sqrt{2}-64\right)x^2 + \left(38-\frac{64\sqrt{2}}{3}\right)x - 6 + \frac{8\sqrt{2}}{3}\right)}{1-0}$$

$$- \frac{(x-1)\left(\left(-32+\frac{64\sqrt{2}}{3}\right)x^3 + \left(32-24\sqrt{2}\right)x^2 + \left(\frac{16\sqrt{2}}{3}-6\right)x\right)}{1-0}$$

$$= \left(32-\frac{64\sqrt{2}}{3}\right)x^4 + \left(40\sqrt{2}-64\right)x^3 + \left(38-\frac{64\sqrt{2}}{3}\right)x^2 + \left(\frac{8\sqrt{2}}{3}-6\right)x$$
$$+ (-x+1)\left(\left(-32+\frac{64\sqrt{2}}{3}\right)x^3 + \left(32-24\sqrt{2}\right)x^2 + \left(\frac{16\sqrt{2}}{3}-6\right)x\right)$$

$$= \left(32-\frac{64\sqrt{2}}{3}\right)x^4 + \left(40\sqrt{2}-64\right)x^3 + \left(38-\frac{64\sqrt{2}}{3}\right)x^2 + \left(\frac{8\sqrt{2}}{3}-6\right)x$$
$$- \left(-32+\frac{64\sqrt{2}}{3}\right)x^4 - \left(32-24\sqrt{2}\right)x^3 - \left(\frac{16\sqrt{2}}{3}-6\right)x^2$$
$$+ \left(-32+\frac{64\sqrt{2}}{3}\right)x^3 + \left(32-24\sqrt{2}\right)x^2 + \left(\frac{16\sqrt{2}}{3}-6\right)x$$

$$= \left(64-\frac{128\sqrt{2}}{3}\right)x^4 + \left(\frac{256\sqrt{2}}{3}-128\right)x^3 + \left(76-\frac{152\sqrt{2}}{3}\right)x^2 + \left(8\sqrt{2}-12\right)x.$$

$\uparrow$

Das stimmt leider nicht, da haben wir irgendwo wohl einen (oder mehrere) Rechenfehler gemacht.

Der Sinn der Aufgabe mit $n=4$ hat sich uns aber auch nicht ganz erschlossen. Verstanden haben wir das Verfahren, solche Rechnungen sind aber natürlich sehr fehleranfällig von Hand...

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie folgende Eigenschaften der für $t \in [-1,1]$ durch $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ definierten Funktionen:
(i) Es gilt $|T_n(t)| \leq 1$ für alle $t \in [-1,1]$.

Es ist $-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (und cos ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert).

$\Rightarrow \quad -1 \leq T_n(t) \leq 1 \iff |T_n(t)| \leq 1.$

(ii) Mit $T_0(t) = 1$ und $T_1(t) = t$ gilt

$$T_{n+1}(t) = 2t\,T_n(t) - T_{n-1}(t)$$

für alle $t \in [-1,1]$. Insbesondere gilt $T_n \in \mathcal{P}_n|_{[-1,1]}$ und für $n \geq 1$ folgt $T_n(t) = 2^{n-1}t^n + q_{n-1}$ mit $q_{n-1} \in \mathcal{P}_n|_{[-1,1]}$.

Schreibe $T_n(t) = \cos(n \arccos(t)) =: \cos(n f(t))$.

Mit den Additionstheoremen folgt

$$\cos(nx + x) + \cos(nx - x)$$

$$= \cos(nx)\cos(x) - \sin(nx)\sin(x) + \cos(nx)\cos(x) + \sin(nx)\sin(x)$$

$$= 2 \cdot \cos(nx)\cos(x).$$

Setzen wir nun $\arccos(t)$ für x ein, erhalten wir

$$T_{n+1}(t) + T_{n-1}(t)$$

$$= \cos((n+1)\arccos(t)) + \cos((n-1)\arccos(t))$$

$$= 2 \cdot \cos(n \arccos(t))\cos(\arccos(t))$$

$$= 2t\, T_n(t)$$

$$\iff T_{n+1}(t) = 2t\, T_n(t) - T_{n-1}(t). \qquad (*)$$

Dass $T_n \in \mathcal{P}_n|_{[-1,1]}$ folgt induktiv:

Für $n=0$ bzw. $n=1$ ist $T_n(t)$ konstant und damit ein Polynom.

Seien T_n und T_{n-1} also $\in \mathcal{P}_n|_{[-1,1]}$. Dann ist T_{n+1} rekursiv definiert und als Summe von Polynomen wieder ein Polynom (diesmal vom Grad $n+1$).

Die zweite Folgerung folgt aus $(*)$ ebenso induktiv.

(iii) Für $n \geq 1$ hat T_n die Nullstellen $t_j = \cos((j+1/2)\pi/n)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, und die $n+1$ Extremstellen $s_j = \cos(j\pi/n)$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Es ist
$$
\begin{aligned}
T_n(t_j) &= \cos(n \cdot \arccos(t_j)) \\
&= \cos\left(n \cdot \arccos\left(\cos\left(\left(j+\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{\pi}{n}\right)\right)\right) \\
&= \cos\left(n \cdot \left(j+\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{\pi}{n}\right) \\
&= \cos\left(\left(j+\tfrac{1}{2}\right)\pi\right),
\end{aligned}
$$
was genau die Nullstellen des cos sind.

Für die Extremstellen s_j gilt ebenso
$$
\begin{aligned}
T_n(s_j) &= \cos(n \cdot \arccos(s_j)) \\
&= \cos\left(n \cdot \arccos\left(\cos\left(j\tfrac{\pi}{n}\right)\right)\right) \\
&= \cos\left(n \cdot j \cdot \tfrac{\pi}{n}\right) \\
&= \cos(j\pi),
\end{aligned}
$$
also die Extremstellen des cos.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** (i) Geben Sie ein ausschließlich auf arithmetischen Grundoperationen basierendes Verfahren mit möglichst wenigen Operationen zur Auswertung des Polynoms $(x+3)^{16}$ an.
(ii) Vergleichen Sie den Aufwand der direkten Auswertung des Polynoms $p(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$ mit dem unter Verwendung der äquivalenten Darstellung

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \ldots x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n)) \ldots)).$$

(i)

1. Berechne $x+3$	$(x+3)$	x speichern
2. Berechne $x \cdot x$	$(x+3)^2$	x speichern
3. Berechne $x\,x$	$(x+3)^4$	x speichern
4. Berechne $x \cdot x$	$(x+3)^8$	x speichern
5. Berechne $x \cdot x$	$(x+3)^{16}$	

5 arithmetische Operationen

(ii)

n Additionen

$$p(x) = a_0 + \underbrace{a_1 x^1}_{1\text{ Mult}} + \underbrace{a_2 x^2}_{2\text{ Mult.}} + \ldots + \underbrace{a_n x^n}_{n\text{ Multiplikationen}}$$

$$\Rightarrow n \text{ Additionen} + \sum_{i=1}^{n} i \text{ Multiplikationen}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n^2+3n}{2} \text{ Operationen}$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}(n^2).$$

n Multiplikationen

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \ldots x(a_{n-1} + xa_n)\ldots)$$

n Additionen

$$\Rightarrow n \text{ Multiplikationen} + n \text{ Additionen}$$

$$\Rightarrow 2n \text{ Operationen}$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}(n).$$

Die Berechnung des Polynoms nach der 2. Methode ist also deutlich schneller und erfolgt mit linearem statt quadratischem Aufwand.

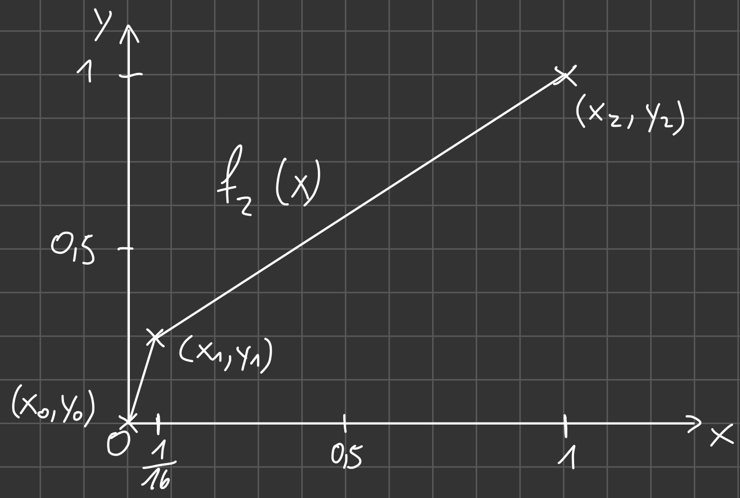
Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Für die durch die Punkte $x_i = (i/n)^4$, $i = 0, 1, \ldots, n$, definierte Partitionierung von $[0, 1]$ sei $f_n \in \mathcal{S}^{1,0}(\mathcal{T}_n)$ die interpolierende Spline-Funktion von $f(x) = x^{1/2}$. Zeigen Sie, dass $\max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq cn^{-2}$ mit einer von n unabhängigen Konstanten $c > 0$ gilt. Skizzieren Sie f_n für $n = 2, 4, 8$.

$\underline{n=2:}$

$x_0 = \left(\frac{0}{2}\right)^4 = 0 \qquad y_0 = 0$

$x_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \qquad y_1 = \frac{1}{4}$

$x_2 = 1^4 = 1 \qquad y_2 = 1$



$\underline{n=4:}$

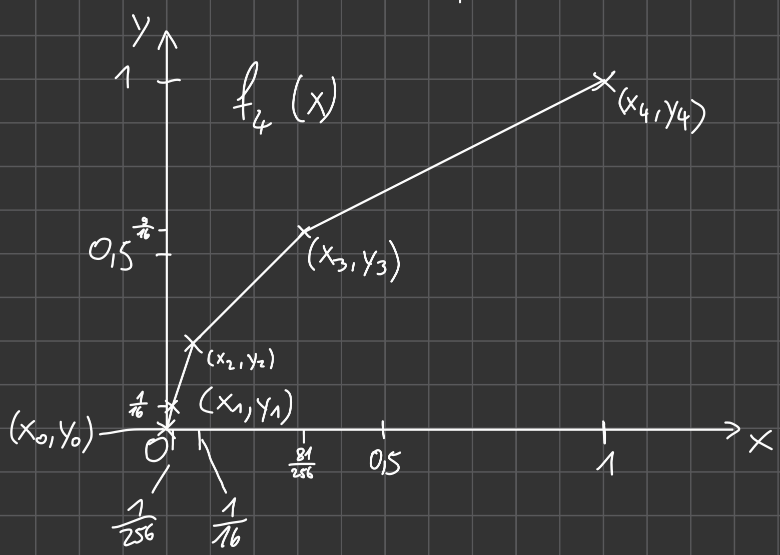
$x_0 = \left(\frac{0}{4}\right)^4 = 0 \qquad y_0 = 0$

$x_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256} \qquad y_1 = \frac{1}{16}$

$x_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \qquad y_2 = \frac{1}{4}$

$x_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256} \qquad y_3 = \frac{9}{16}$

$x_4 = 1^4 = 1 \qquad y_4 = 1$



$\underline{n=8:}$

$x_0 = 0$ $\qquad y_0 = 0$

$x_1 = \left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{1}{4096}$ $\qquad y_1 = \frac{1}{64}$

$x_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$ $\qquad y_2 = \frac{1}{16}$

$x_3 = \left(\frac{3}{8}\right)^4 = \frac{81}{4096}$ $\qquad y_3 = \frac{9}{64}$

$x_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ $\qquad y_4 = \frac{1}{4}$

$x_5 = \left(\frac{5}{8}\right)^4 = \frac{625}{4096}$ $\qquad y_5 = \frac{25}{64}$

$x_6 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$ $\qquad y_6 = \frac{9}{64}$

$x_7 = \left(\frac{7}{8}\right)^4 = \frac{2401}{4096}$ $\qquad y_7 = \frac{49}{64}$

$x_8 = 1$ $\qquad y_8 = 1$