Übungsblatt 7

Aufgabe 25. Welches der folgenden Vektorfelder ist ein Gradientenvektorfeld?

$$(a) \quad V(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^2 + 1 \\ 2x^2y + 1 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad V(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^2 + x \\ 2x^2y + x \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie für die Vektorfelder die Gradientenvektorfelder sind, das Potential und berechnen Sie $\int_\gamma V \cdot ds$ für $\gamma\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2 + \cos t, t^4 + (1-t)\sin t)^T$.

Aufgabe 26. Sei $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Parametrisieren Sie den Rand des Quadrates $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ explizit mittels einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve γ, die den Rand entgegen den Uhrzeigersinn durchläuft, und zeigen Sie, dass dann

$$\int_Q \operatorname{rot} V \mathrm{dvol} = \int_\gamma V \cdot ds$$

gilt.

Hinweis: Eine 'einfache Wahl' von γ verringert den Rechenaufwand. Dazu hilft es erst einmal die linke Seite teilweise auszurechnen.

Aufgabe 27 (1+2+2). (i) Berechnen Sie $\int_{[0,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\pi]} \sin(x+y)\mathrm{dvol}$.

(ii) Bestimmen und skizzieren Sie $\Omega \subset [0,a] \times [0,a] \subset \mathbb{R}^2$, $a > 1$, so dass 1_Ω integrierbar ist (begründen Sie dann auch, warum es integrierbar ist) und das Anwenden von Fubini

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_0^a \left(\int_0^x dy \right) dx$$

ergibt. Wenden Sie auf dieses Ω Fubini mit vertauschter Integrationsreihenfolge an und bestimmen Sie damit die Integrationsgrenzen in

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_?^? \left(\int_?^? dx \right) dy.$$

(iii) Lösen Sie (ii) noch einmal für

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_0^a \left(\int_{a-x}^{a^2-x^2} dy \right) dx$$

mit $\Omega \subset [0,a] \times [0,a^2]$ für $a > 1$.

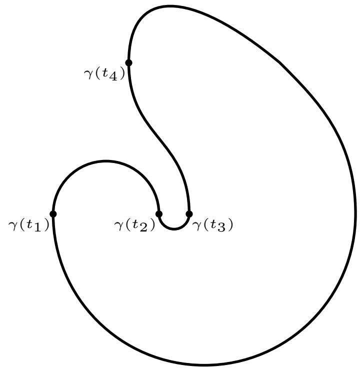


Abbildung 1: Beispiel einer Kurve γ. Wenn man annimmt, dass $|\gamma'(t)| = 1$ für alle t ist, sind hier die ersten vier der t_i aus (ii) eingezeichnet.

Aufgabe 28. Sei $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y)^T \mapsto (-y,x)^T$. Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene C^1-Kurve mit $|\gamma'(t)| \neq 0$ für alle t.[1]

Zeigen Sie, dass $\int_\gamma V \cdot ds$ gleich dem Doppelten des Flächeninhalts in der Kurve ist.

Sie können dabei wie folgt vorgehen:

(i) Überlegen Sie sich zunächst folgendes: Für eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$ sei $\gamma\colon [c,d] \to \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung, d.h. $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, wobei $y(t) = f(x(t))$ ist. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b f(x)dx = \pm \int_c^d x'(t)y(t)dt$$

gilt. Wann steht da ein + und wann ein -?

(ii) Der Einfachheit halber nehmen wir erst einmal an, dass $x'(t)$ nur für endlich viele t verschwindet: $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Zeigen Sie, dass dann ist $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$ ein Funktionsgraph über der x-Achse ist.

(iii) O.B.d.A. sei $y(t) \geq 0$. Warum kann man das annehmen? Berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt unter den Kurvenstücken aus (ii) über und unter der x-Achse und setzen Sie daraus den gesamten Flächeninhalt zusammen. (Zeichnen Sie ins Bild am besten mal alle $\gamma(t_i)$ ein, um zu sehen, was die Bedingung $x'(t_i) = 0$ anschaulich bedeutet).

(iv) Vergleichen Sie das Ergebnis mit $\int_\gamma V \cdot ds$.

(v*) Was ändert sich in der Argumentation, wenn Sie in (ii) nicht annehmen, dass $x'(t)$ nur für endlich viele t verschwindet?

Abgabe am Mittwoch 16.06.21 bis 14 Uhr

[1] Nehmen Sie an, dass klar ist, das γ ein Inneres und ein Äußeres hat (Das ist eigentlich das Jordan Kurventheorem).

Analysis II Blatt 7

Lorenz Bung

lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Vincent Wilhelms

Matr.-Nr. 4909980

vincent.wilhelms@gmail.com

Aufgabe 25. Welches der folgenden Vektorfelder ist ein Gradientenvektorfeld?

$$(a)\quad V(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^2+1 \\ 2x^2y+1 \end{pmatrix} \qquad (b)\quad V(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^2+x \\ 2x^2y+x \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie für die Vektorfelder die Gradientenvektorfelder sind, das Potential und berechnen Sie $\int_\gamma V\cdot ds$ für $\gamma\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2+\cos t, t^4+(1-t)\sin t)^T$.

$V(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^2+1 \\ 2x^2y+1 \end{pmatrix}$

$g_1 = \int V_x \quad \underline{x^2y^2+a}$ $\qquad g_1 = \int V_y \quad \frac{1}{3}y^3 2x + b$ $\qquad$ ist ein Gradientenvektorfeld

$g_2 = \int V_x \quad \frac{2}{3}x^3y + c$ $\qquad g_2 = \int V_y \quad \underline{x^2y^2+d}$

$V(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^2+x \\ 2x^2y+x \end{pmatrix}$

$g_1 = \int V_x \quad x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2 + a$ $\qquad g_1 = \int V_y \quad \frac{1}{3}y^3 2x + x + b$

$g_2 = \int V_x \quad \frac{2}{3}x^3y + \frac{1}{2}x^2 + c$ $\qquad g_2 = \int V_y \quad \frac{1}{2}y^2 2x^2 + x + d$

Die Komponenten a und d lassen sich nicht frei wählen.

Die B ist kein Gradientenvektorfeld.

Potenz von der (a):

$\vec{V} = \begin{pmatrix} 2xy^2+1 \\ 2x^2y+1 \end{pmatrix}$

$\int f_x = x^2y^2 + x + c_1(y) \quad f_y = yx^2 + c_y(y) = 2x^2y+1$

Potenz: $x^2y^2+x+y+c$

$\int_y V\cdot ds = \int_0^\pi \langle V(t^2+\cos t, t^4+(1-t)\sin t),$

$(2t-\sin t, 4t^3-\sin(t)-t\cos(t)+\cos(t))\rangle ds$

$V = \begin{pmatrix} 2(t^2+\cos t)(t^4+(1-t)\sin t)^2+1 \\ 2(t^2+\cos t)^2(t^4+(1-t)\sin t)+1 \end{pmatrix}$

$\int_0^\pi ((2(t+\cos(t))(t^4+(1-t)\sin(t))^2+1)(2t-\sin(t)) +$

$(2(t^2+\cos(t))^2(t^4+(1-t)\sin(t))+1)(4t^3-\sin(t) -$

$+\cos(t)+\cos(t))\,dt = 746567$

Aufgabe 26. Sei $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Parametrisieren Sie den Rand des Quadrates $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ explizit mittels einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve γ, die den Rand entgegen den Uhrzeigersinn durchläuft, und zeigen Sie, dass dann

$$\int_Q \operatorname{rot} V \,\mathrm{dvol} = \int_\gamma V \cdot ds$$

gilt.

Quadrat:

$G = \{(x,y) : \lambda \le x \le \lambda', \; r \le y - r'\}$

Parametrisierung von G

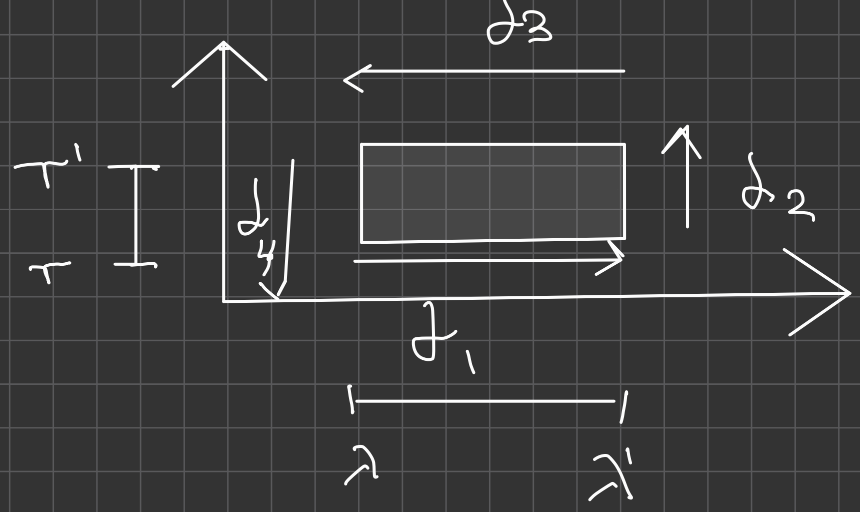
$\gamma_1(t) = (t, r)$ für $\lambda \le t \le \lambda'$

$\gamma_2(t) = (\lambda', r + t(r' - r))$ für $0 \le t \le 1$

$\gamma_3(t) = (t, r')$ für $\lambda \le t \le \lambda'$

$\gamma_4(t) = (\lambda, r + t(r' - r))$ für $0 \le t \le 1$

Skizze:



$$\int_Q \operatorname{rot} V \,\mathrm{dvol} = \int_\gamma V \cdot ds$$

Fall 1: $V_x = 0$

Sei $P(x,y) = \int_{\gamma}^{\gamma_1} V_y(x,g)\,ds \quad (x,y) \in G$

$$\partial_x P(x,y) = \int_{\gamma}^{\gamma'} \partial_x V_y(x,s)\,ds \quad \wedge$$

$$\partial y(x,y) = V_y(x,y)$$

$$\Rightarrow \partial_x V_y = \partial y\, 2x \quad P(x,y)$$

γ ist geschlossen $\Rightarrow \int_\gamma \partial_x p\,dx +$

$$\partial_y p\,dy = \int_\gamma (\nabla p)\cdot dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_y \partial_x p\,d_x = -\int_\gamma \partial_y p\,dy = -\int_\gamma V_y\,dy$$

Fall 2:

$$V_y = 0$$

$$\int_Q (\partial_x V_y - \partial_y V_x) = -\int_Q \partial_y V_x(x,y)\,d\mathrm{vol}$$

$$= -\int_{\delta}^{\delta'} \left(\int_{T}^{T'} \partial_y V_x(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= - \int_{\lambda}^{\lambda'} (v_x(x, r') - V_x(x, r)) \, dx$$

$$\gamma_2'(t) = (0, r' - r)$$

$$\gamma_1'(t) = (0, r' - r)$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} V \cdot dx = \int_0^1 V_x(\gamma_2(t)) \cdot 0 \, dt = 0$$

analog $\int_{\gamma_4} V \, dx = 0$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} V \cdot dx = \int_{\gamma_1} V \cdot dx - \int_{\gamma_3} V \cdot dx$$

$$= \int_{\lambda}^{\lambda'} V_x(t, r) \, dt - \int_{\lambda}^{\lambda'} V_x(t, r') \, dt$$

$$= - \int_{\lambda}^{\lambda'} (v_x(x, r') - V_x(x, \lambda)) \, dx$$

ingesamt folgt:

$$\int_Q (\partial_x V_y - \partial_y V_x) \, dvol = \int_{\gamma} \partial_x V_y(x, y) \, dvo$$

$$= \int_p dy \, 2x \, v \, dvol$$

$$= -\int_\gamma (\partial_x p, 0)\,dx = -\int_\gamma 2x\,p\,dx$$

$$= \int_\gamma V_y\,dy = \int_\gamma V \cdot dx \qquad \square$$

Aufgabe 27 (1+2+2). (i) Berechnen Sie $\int_{[0,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\pi]} \sin(x+y)\mathrm{dvol}$.

$$\int_{[0,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\pi]} \sin(x+y)\,dvol \overset{(*)}{=} \int_0^{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x+y)\,dx\right)dy = \int_0^{\pi}\left[-\cos(x+y)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} dy$$

$$= \int_0^{\pi} -\cos(\pi+y) + \cos\left(-\tfrac{\pi}{2}+y\right) dy = \left[-\sin(\pi+y) + \sin\left(-\tfrac{\pi}{2}+y\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\sin(2\pi) + \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \left(\sin(\pi) + \sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = 0 + 1 - (0-1) = 2.$$

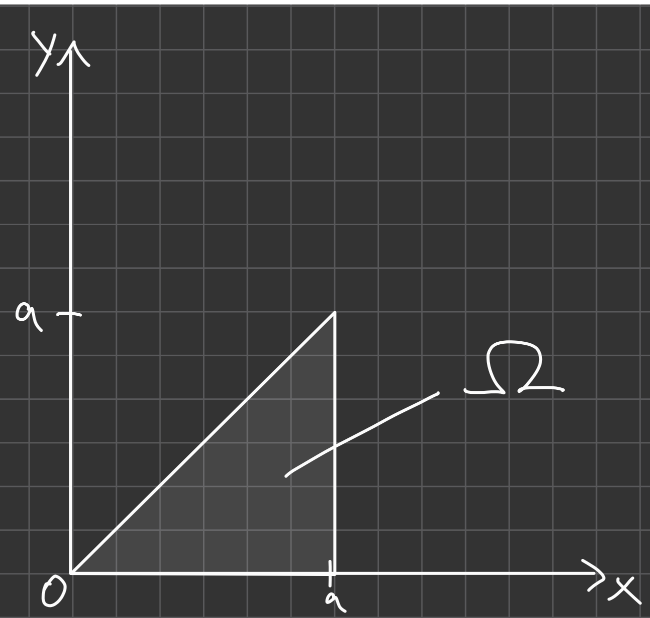
(*) Satz 2.4.5. (Fubini für Quader)

(ii) Bestimmen und skizzieren Sie $\Omega \subset [0,a]\times[0,a] \subset \mathbb{R}^2$, $a > 1$, so dass 1_Ω integrierbar ist (begründen Sie dann auch, warum es integrierbar ist) und das Anwenden von Fubini

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_0^a \left(\int_0^x dy\right) dx$$

ergibt. Wenden Sie auf dieses Ω Fubini mit vertauschter Integrationsreihenfolge an und bestimmen Sie damit die Integrationsgrenzen in

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_?^? \left(\int_?^? dx\right) dy.$$



$$\Omega = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le x \le a\}$$

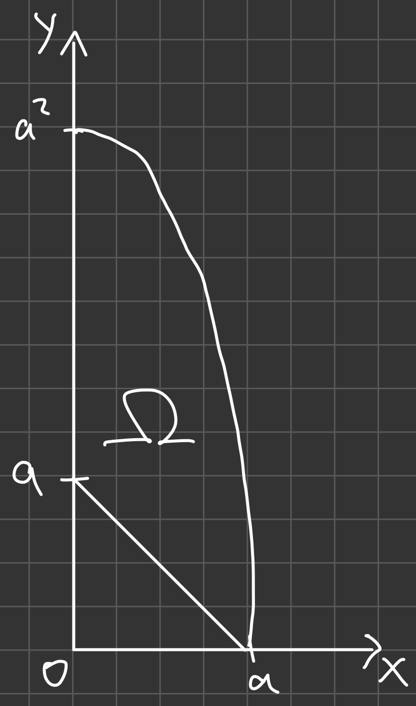
$$\int 1_\Omega \,dvol = \int_0^a \int_0^x dy\,dx = \int_0^a \int_0^{a-y} dx\,dy$$

Integrierbar, da $f(x) = x$ stetig und damit automatisch integrierbar ist (Ana 1).

(iii) Lösen Sie (ii) noch einmal für

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_0^a \left(\int_{a-x}^{a^2-x^2} dy \right) dx$$

mit $\Omega \subset [0,a] \times [0,a^2]$ für $a > 1$.



$$\Omega = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le x^2\}$$
$$\setminus \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a-x\}$$

$$\int 1_\Omega \,\mathrm{dvol} = \int_a^{a^2} \int_0^{\sqrt{y}} dy\,dx + \int_0^a \int_{y-a}^{\sqrt{y}} dy\,dx$$

Integrierbar, da $f_1(x) = a^2 - x^2$ und $f_2(x) = a - x$ stetig und damit automatisch integrierbar sind.