Numerik 2

Blatt 4 – 13.6.2022

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 bis 14. Abgabe: 24.6.2022, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss22/num`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** (i) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\ell \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}\ell k 2\pi/n} = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ Teiler von } \ell \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(ii) Folgern Sie, dass die Fourier-Basis $(\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{n-1}) \subset \mathbb{C}^n$ definiert durch $\omega^k = [\omega_n^{0k}, \omega_n^{1k}, \dots, \omega_n^{(n-1)k}]^\top$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, mit der n-ten Einheitswurzel $\omega_n = e^{\mathrm{i}2\pi/n}$ die Eigenschaft $\omega^k \cdot \omega^\ell = n\delta_{k\ell}$ besitzt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Seien $w_0, w_1, \dots, w_{n-1} \in \mathbb{C}$ und $n = 2m$. Konstruieren Sie Zahlen $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{C}$, sodass mit den Koeffizienten $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1} \in \mathbb{C}$ der Lösung der zugehörigen komplexen trigonometrischen Interpolationsaufgabe und der Funktion

$$q(x) = \sum_{k=-m}^{m-1} \beta_{k+m} e^{\mathrm{i}kx}$$

die Interpolationseigenschaft $q(x_j) = w_j$ für $j = 0, 1, \dots, n-1$ und $x_j = 2\pi j/n$ erfüllt ist.
(*Hinweis*: Dies ist nützlich für Blatt 3, Projekt 2 der praktischen Übungen.)

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie ohne Verwendung von Matrix-Vektor-Multiplikationen die Fourier-Synthese $y = T_8\beta$ des Vektors

$$\beta = [0, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2}]^\top.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Die Quadraturformel $Q : C^0([a, b]) \to \mathbb{R}$ sei exakt vom Grad $2q$ und die zugehörigen Gewichte $(w_i)_{i=0,\dots,n}$ und Knoten $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ seien symmetrisch bezüglich dem Intervallmittelpunkt $(a + b)/2$ angeordnet. Zeigen Sie, dass Q exakt vom Grad $2q + 1$ ist.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** (i) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\ell \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}\ell k 2\pi/n} = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ Teiler von } \ell \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Fall 1: n ist Teiler von l, also $n \cdot z = l$, $z \in \mathbb{Z}$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{ilk2\pi/n} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{inzk2\pi/n} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\underline{izk2\pi}} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

Fall 2: n ist kein Teiler von l.

Es ist $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ falls $q \neq 1$ ist.

Damit folgt

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{ilk2\pi/n} = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\underbrace{e^{il2\pi/n}}_{=:q\neq 1}\Big)^k = \frac{1-\left(e^{il2\pi/n}\right)^n}{1-e^{il2\pi/n}}$$

$$= \frac{1-\overbrace{e^{il2\pi}}^{=1}}{1-\underbrace{e^{il2\pi/n}}_{\neq 1}} = \frac{1-1}{1-e^{il2\pi/n}} = 0. \qquad \square$$

(ii) Folgern Sie, dass die Fourier-Basis $(\omega^0, \omega^1, \ldots, \omega^{n-1}) \subset \mathbb{C}^n$ definiert durch $\omega^k = [\omega_n^{0k}, \omega_n^{1k}, \ldots, \omega_n^{(n-1)k}]^\top$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, mit der n-ten Einheitswurzel $\omega_n = e^{\mathrm{i}2\pi/n}$ die Eigenschaft $\omega^k \cdot \omega^\ell = n\delta_{k\ell}$ besitzt.

Mit der Definition des komplexen Skalarprodukts $\left(a \cdot b = \sum_{k=0}^{j} a_k \overline{b_k}\right)$ folgt

$$\omega^k \omega^l = \sum_{p=0}^{n-1} \omega_n^{pk} \cdot \overline{\omega_n}^{pl} = \sum_{p=0}^{n-1} \left(e^{i2\pi/n}\right)^{pk} \left(e^{-i2\pi/n}\right)^{pl}$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} e^{i2\pi p(k-l)/n} \underset{\text{Teilaufgabe a)}}{=} \begin{cases} \sum_{p=0}^{n-1} e^0 = n & \text{für } k = l \\ 0 & \text{sonst, da } k \neq l \Rightarrow n \nmid (k-l). \end{cases}$$

$\square$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Seien $w_0, w_1, \dots, w_{n-1} \in \mathbb{C}$ und $n = 2m$. Konstruieren Sie Zahlen $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{C}$, sodass mit den Koeffizienten $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1} \in \mathbb{C}$ der Lösung der zugehörigen komplexen trigonometrischen Interpolationsaufgabe und der Funktion

$$q(x) = \sum_{k=-m}^{m-1} \beta_{k+m} e^{ikx}$$

die Interpolationseigenschaft $q(x_j) = w_j$ für $j = 0, 1, \dots, n-1$ und $x_j = 2\pi j/n$ erfüllt ist.
(*Hinweis*: Dies ist nützlich für Blatt 3, Projekt 2 der praktischen Übungen.)

Mit $n=2m$ und der Formel der trig. Interpolationsaufgabe folgt

$$y_j = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k e^{ikx_j} = \sum_{k=0}^{2m-1} \beta_k e^{ikx_j}$$

$$\underset{\text{Indexshift}}{=} \sum_{k=-m}^{m-1} \beta_{k+m} e^{i(k+m)x_j} = \underbrace{\sum_{k=-m}^{m-1} \beta_{k+m} e^{ikx_j}}_{=:\, w_j} e^{imx_j}$$

$$= w_j e^{imx_j}.$$

Damit gilt für $x_j = 2\pi j/n$

$$m x_j = \frac{m 2\pi j}{n} = \frac{m 2\pi j}{2m} = \pi j,$$

also $\quad y_j = w_j e^{i\pi j}.$

$\square$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Die Quadraturformel $Q : C^0([a,b]) \to \mathbb{R}$ sei exakt vom Grad $2q$ und die zugehörigen Gewichte $(w_i)_{i=0,\dots,n}$ und Knoten $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ seien symmetrisch bezüglich dem Intervallmittelpunkt $(a+b)/2$ angeordnet. Zeigen Sie, dass Q exakt vom Grad $2q+1$ ist.

Sei $p \in \mathcal{P}_{2q+1}$. Dann ist

$$p(x) = a_{2q+1} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2q+1} + r(x),$$

wobei $a_{2q+1} \in \mathbb{R}$ ist und $r \in \mathcal{P}_{2q}$.

$$Q(p) \underset{\text{Linearität}}{=} a_{2q+1}\, Q\left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2q+1}\right) + Q(r) \qquad \text{(gilt analog für } I(p))$$

$$\underset{r \in \mathcal{P}_{2q}}{=} a_{2q+1}\, Q\left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2q+1}\right) + I(r).$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $Q\left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2q+1}\right) = I\left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2q+1}\right)$.

$$I\left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2q+1}\right) = \left[\frac{1}{2q+2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2q+2}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{2q+2}\left(\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^{2q+2} - \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^{2q+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2q+2}\left(\left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)^{2q+2} - \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right)^{2q+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2q+2}\left(\left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)^{2q+2} - \underbrace{(-1)^{2q+2}}_{=1} \cdot \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)^{2q+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2q+2}\left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2} - \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)\right)^{2q+2}$$

$$= \frac{1}{2q+2} \cdot 0^{2q+2} = 0.$$

$$Q\left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2q+1}\right) = \sum_{i=0}^{n} w_i \underbrace{\left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)}_{=:\, y_i}{}^{2q+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} w_i\, y_i^{2q+1} = 0$$

Die x_i sind symmetrisch bezüglich $\frac{a+b}{2}$, also sind die y_i symmetrisch bez. 0.

Damit heben sich die y_i^{2q+1} gegenseitig auf, da $2q+1$ ungerade ist und die w_i's auch symmetrisch sind.

Also gilt $Q(p) = I(p)$ für $p \in \mathcal{P}_{2q+1}$ beliebig.

$\square$