Abgabe bis Freitag, 02.07.2021. Besprechung in den Übungsgruppen am 07. und 09.07.2021.

Aufgabe 1 Verschiebungen und Nichtverschiebungen, (4 Punkte)

Wir betrachten die kartesische Ebene $X = \mathbb{R}^2$. Sei $g \subseteq X$ eine Gerade sowie v ein Richtungsvektor von g und $x \in g$. Sei $s \in K$ die Spiegelung am Lot auf g durch x. Bestimmen Sie rechnerisch und grafisch (in einer konkreten Zeichnung) die Kongruenz $\psi \in K$, für die gilt, dass $\psi \circ s$ die Verschiebung um v entlang g ist.

Aufgabe 2 Selbstinverse Kongruenzen, (4 Punkte)

Wir betrachten die kartesische Ebene $X = \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie alle Kongruenzen $s\colon X \to X$, für die $s^2 = \mathrm{id}$ gilt.

Aufgabe 3 Mittelsenkrechte, (3 Punkte)

Sei (X, G, Z, K) eine fast-euklidische Geometrie und $x \neq y$ zwei Punkte in X. Beweisen Sie mithilfe der Axiome und Aussagen aus der Vorlesung die Existenz einer Mittelsenkrechten zu x und y.

Aufgabe 4 Achilles und die Schildkröte, (6 Punkte)

Betrachten Sie folgende Version des *Paradoxons von Achilles und der Schildkröte* (*Zenon v. Elea*, 5. Jhdt. v. Chr., siehe auch Aufgabe mit Schulbezug):

Sei (X, G, Z, K) eine fast-euklidische Geometrie und $g \in G$ eine Gerade. Seien $A_0 \neq S_0$ zwei Punkte auf g, auf denen Achilles und die Schildkröte zu Anfang stehen. Wir wählen eine verträgliche Anordnung, sodass $A_0 < S_0$. Die Schildkröte ist halb so schnell wie Achilles. Wir betrachten zwei Folgen von Punkten A_n und S_n, die wir rekursiv definieren wie folgt:

$$A_n := \tau_{n-1}^2(A_{n-1}), \qquad S_n := \tau_{n-1}(S_{n-1}),$$

wobei τ_{n-1}^2 die Verschiebung entlang g ist, die A_{n-1} auf S_{n-1} abbildet.

Zeigen Sie, dass $\sup A_n = \sup S_n$ und drücken Sie dieses gemeinsame Supremum durch A_0, S_0 und Verschiebungen entlang g aus.

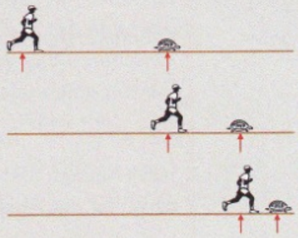
Aufgabe 5 Aufgabe mit Schulbezug: Achilles und die Schildkröte zum Zweiten, (2 Bonuspunkte)

Schauen Sie sich die beigefügte Aufgabe “Achilles und die Schildkröte” aus dem Schulbuch *Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien. Analysis* (2010, S. 165) an.

1 *Ein berühmtes Paradoxon mit dem Unendlichen* *Aufgaben*

Achilles und die Schildkröte

Achilles ist ein mutiger Wettläufer. Sich seines Sieges sicher, tritt er einen Wettlauf gegen eine Schildkröte an. Er gewährt ihr einen Vorsprung und sie läuft los.
Der griechische Philosoph Zenon von Elea (495–430 v. Chr.) behauptet, dass Achilles das Rennen nicht gewinnen kann, er könne die Schildkröte gar nicht einholen.
Er argumentiert so:
„Wenn Achilles losläuft, ist die Schildkröte wegen ihres Vorsprungs ein paar Schritte voraus. Bis Achilles diesen Vorsprung aufgeholt hat, ist die Schildkröte wiederum ein Stück weiter, auch wenn der Vorsprung nun kleiner ist. Bis Achilles diesen neuen Vorsprung aufgeholt hat, ist die Schildkröte wiederum ein kleines Stück weiter. Auch dieses Stück holt Achilles in kurzer Zeit auf, aber dann ist die Schildkröte wiederum ein Stück weiter. Dieses Spiel setzt sich unendlich fort. Der Vorsprung der Schildkröte wird zwar immer kleiner, aber trotzdem bleibt die Schildkröte vorne. Also wird Achilles die Schildkröte nie einholen.“



Was halten Sie von dieser Argumentation? Worin besteht das „Paradoxe“?
Bei der Aufarbeitung helfen konkrete Angaben.
Wir nehmen einmal an, dass Achilles zehnmal schneller ist als die Schildkröte, er läuft mit einer Geschwindigkeit $v_A = 10\,\frac{m}{s}$, die Schildkröte mit $v_K = 1\,\frac{m}{s}$. **Konkretisierung**
Der Anfangsvorsprung sei $s_0 = 100$ m.

a) Erklären Sie: worin besteht das Paradoxe?

b) Das Schulbuch schlägt vor, den Schülerinnen und Schülern das Paradoxon durch eine Konkretisierung zugänglich zu machen. Das bedeutet, dass man die Situation mit konkreten Zahlenwerten durchdenkt (nebenbei: wie realistisch sind die vorgeschlagenen Zahlenwerte?):

- Zeichnen Sie für die angegebenen Werte in ein Weg-Zeit-Diagramm die Graphen für die zurückgelegten Strecken von Achilles und der Schildkröte. Markieren Sie den Überholpunkt im Diagramm.
- Erstellen Sie eine Wertetabelle der Aufholschritte in folgender Form:

Zeit t in s	0	10	11	...	...	...	...
Zurückgelegter Weg von Achilles in m	0	100	110	...	...	...	...
Zurückgelegter Weg der Schildkröte in m	100	110	...	...	...	...	...

- Stellen Sie die Aufholschritte auch zeichnerisch im Weg-Zeit-Diagramm dar.

Elementargeometrie

Blatt 9

Mascha Reber mascha.reber@neptun.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 4734963

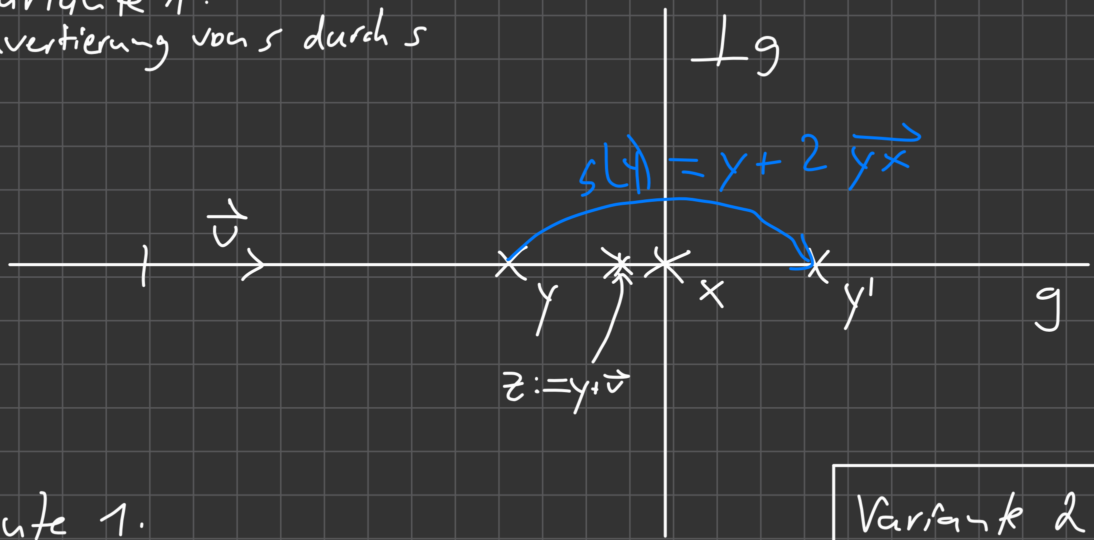
Lorenz Bung lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Aufgabe 1 Verschiebungen und Nichtverschiebungen, (4 Punkte)

Wir betrachten die kartesische Ebene $X = \mathbb{R}^2$. Sei $g \subseteq X$ eine Gerade sowie v ein Richtungsvektor von g und $x \in g$. Sei $s \in K$ die Spiegelung am Lot auf g durch x. Bestimmen Sie rechnerisch und grafisch (in einer konkreten Zeichnung) die Kongruenz $\psi \in K$, für die gilt, dass $\psi \circ s$ die Verschiebung um v entlang g ist.

Variante 1:
Invertierung von s durch s

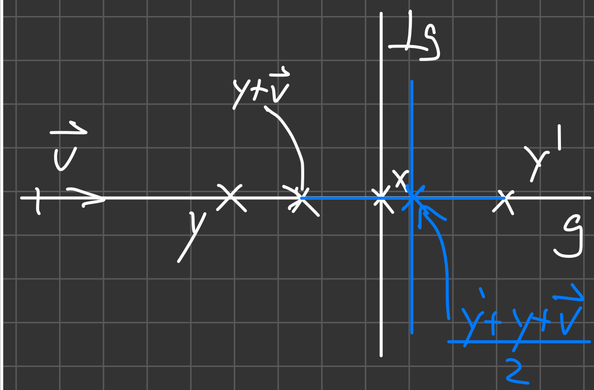


Variante 1.

$$\psi(s(y)) = z = y + \vec{v} = y + 2\overrightarrow{yx} - 2\overrightarrow{yx} + \vec{v}$$
$$= s(y) - 2\overrightarrow{yx} + \vec{v}$$
$$= s(y) + 2\overrightarrow{y'x} + \vec{v}$$
$$= s(y) + 2\overrightarrow{s(y)x} + \vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad s(y) = y + 2\overrightarrow{yx}$$
$$\psi(y) = y + 2\overrightarrow{yx} + \vec{v}$$

Variante 2:
2. Spiegelung



2. Variante:
Spiegelung am Punkt $\frac{y' + y + \vec{v}}{2} = \frac{y + 2\overrightarrow{yx} + y + \vec{v}}{2}$

$$= \frac{2y + 2\overrightarrow{yx} + \vec{v}}{2} = y + \overrightarrow{yx} + \frac{\vec{v}}{2} = x + \frac{\vec{v}}{2}$$

Dann ist $\psi(y') = y' + 2\overrightarrow{y'\left(x + \frac{\vec{v}}{2}\right)} = y' + 2\cdot\left(x + \frac{\vec{v}}{2} - y'\right)$

$$= y' - 2y' + 2x + 2\frac{\vec{v}}{2} = -y' + 2x + \vec{v}$$
$$= -(y + 2\overrightarrow{yx}) + 2x + \vec{v} = -y + 2x - 2\overrightarrow{yx} + \vec{v}$$
$$= -y + 2(x + \overrightarrow{xy}) + \vec{v} = -y + 2y + \vec{v} = y + \vec{v}.$$

Aufgabe 2 Selbstinverse Kongruenzen

Wir betrachten die kartesische Ebene $X = \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie alle Kongruenzen $s: X \to X$ für die $s^2 = id$ gilt

Die kartesische Ebene ist eine euklidische Ebene

<u>Korrolar 4.23</u> Sei (X, G, Z, K) eine euklidische Ebene. Dann ist (X, G) ein affiner Raum zu $\vec{X}$ und alle Elemente von K sind affine Bewegungen

<u>Korrolar 2.8</u> Jede affine Bewegung (ϕ, f) von $\vec{X}$ mit $x_0 \in \vec{X}$ kann eindeutig geschrieben werden als $\tau_{\overrightarrow{x_0\phi(x_0)}} \phi_{x_0,f} = s$

- Verschiebung $x \mapsto x + v$
- Drehung $x + v \mapsto x + f(v)$ ~ Drehmatrix

(Kap 2.1)

Betrachte die Abbildungsmatrix $\begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — Translation

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ "einbetten in $\mathbb{R}^3$"

Bestimme $s: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sodass $s^2 = id \Rightarrow \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Betrachte $\begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} M^2 & Mv + v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

Betrachte • $Mv + v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ cv_1 + dv_2 \end{pmatrix}} = -\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow v$ ist Eigenvektor von M zu EW -1

• $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow ab + bd = b(a+d) = 0$ ①

$\rightarrow ac + cd = c(a+d) = 0$ ②

$\left.\begin{array}{l} \rightarrow a^2 + bc = 1 \\ \rightarrow bc + d^2 = 1 \end{array}\right\}$ da $bc = bc \rightarrow a^2 = d^2$ ③

Sei $b=0$

1. Fall $(a+d)\neq 0$

~~1.1 $a=d=0 \overset{②}{\Rightarrow} c\cdot 0=0$ $c\in\mathbb{R}$ bel~~

~~$\overset{③}{\Rightarrow} a^2+bc\neq 1$ ↯~~

1.2 $a=d,\ a,d\neq 0 \overset{②}{\Rightarrow} c=0$ damit $c(\overset{\neq 0}{a+d})=0$

$\overset{③}{\Rightarrow} a^2=d^2=1$

Erhalte: $M_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \Rightarrow v=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ mit $Mv=-v$

$M_2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix} \to v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ mit $v_1,v_2\in\mathbb{R}$

2. Fall $(a+d)=0 \to a\neq d$

2.1 $a+d=0 \overset{②}{\Rightarrow} c\cdot 0=0$ $c\in\mathbb{R}$ bel

$\overset{③}{\Rightarrow} a^2=d^2=1$, wobei $a\neq d$

Erhalte $M_3=\begin{pmatrix}1&0\\c&-1\end{pmatrix} \to v=\begin{pmatrix}0\\v_2\end{pmatrix}$ mit $v_2=-(c\overset{0}{v_1}-v_2)$

$v_2=v_2\in\mathbb{R}$

$M_4=\begin{pmatrix}-1&0\\c&1\end{pmatrix} \to v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ mit $v_1\in\mathbb{R}$

und $v_2=-(cv_1+v_2)$

$v_2=-\frac{cv_1}{2}$

~~2.2 $a+d\neq 0 \overset{②}{\Rightarrow} c=0$~~

~~$\overset{③}{\Rightarrow} a^2=d^2=1$, wobei $a\neq d$~~

~~Setze in M_3, M_4 $c=0\in\mathbb{R}$~~

Analog für $b\neq 0$, $a=-d$

für $c=0$, $a\neq d$ erhalte $M_5=\begin{pmatrix}1&b\\0&-1\end{pmatrix} \to v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ mit $v_2\in\mathbb{R}$

$v_1=-\frac{bv_2}{2}$

$M_6=\begin{pmatrix}-1&b\\0&1\end{pmatrix} \to v=\begin{pmatrix}v_1\\0\end{pmatrix}$ mit $v_1\in\mathbb{R}$

für $c\neq 0 \overset{②}{\Rightarrow} a=-d$

$\overset{③}{\Rightarrow} bc\overset{!}{=}1 \to b=c=\pm 1$

Aufgabe 3 Mittelsenkrechte, (3 Punkte)

Sei (X, G, Z, K) eine fast-euklidische Geometrie und $x \neq y$ zwei Punkte in X. Beweisen Sie mithilfe der Axiome und Aussagen aus der Vorlesung die Existenz einer Mittelsenkrechten zu x und y.

Sei $\tau = \overrightarrow{xy} \neq \vec{0}$ (da $x \neq y$).

Nach Satz 4.17.(ii) gibt es eine Abbildung τ' mit $(\tau' \circ \tau')(x) = \tau(x)$.

Dann ist $\tau'(x)$ der Mittelpunkt von x und $\tau(x) = y$.

Sei g die Gerade durch x und y (also $g: \vec{x} + t \cdot \overrightarrow{xy}$, $t \in \mathbb{R}$).

Dann gibt es nach Satz 4.7.(iii) genau eine Gerade, die durch den Mittelpunkt von x und y geht und senkrecht auf g steht. Damit ist h unsere gesuchte Mittelsenkrechte.

$\square$

Aufgabe 4 Achilles und die Schildkröte, (6 Punkte)

Betrachten Sie folgende Version des *Paradoxons von Achilles und der Schildkröte* (*Zenon v. Elea*, 5. Jhdt. v. Chr., siehe auch Aufgabe mit Schulbezug):

Sei (X, G, Z, K) eine fast-euklidische Geometrie und $g \in G$ eine Gerade. Seien $A_0 \neq S_0$ zwei Punkte auf g, auf denen Achilles und die Schildkröte zu Anfang stehen. Wir wählen eine verträgliche Anordnung, sodass $A_0 < S_0$. Die Schildkröte ist halb so schnell wie Achilles. Wir betrachten zwei Folgen von Punkten A_n und S_n, die wir rekursiv definieren wie folgt:

$$A_n := \tau_{n-1}^2(A_{n-1}), \qquad S_n := \tau_{n-1}(S_{n-1}),$$

wobei τ_{n-1}^2 die Verschiebung entlang g ist, die A_{n-1} auf S_{n-1} abbildet.

Zeigen Sie, dass $\sup A_n = \sup S_n$ und drücken Sie dieses gemeinsame Supremum durch A_0, S_0 und Verschiebungen entlang g aus.

<u>Behauptung:</u> $\sup A_n = \sup S_n = \tau_0^4(A_0) = \tau_0^2(S_0)$.

<u>z.z.:</u> $\tau_{n+1}^2 = \tau_n$.

<u>Bew.:</u> $\tau_n^2 = \overrightarrow{A_n S_n} \Rightarrow \tau_n^2(A_n) = S_n, \quad A_{n+1} = \tau_n^2(A_n), \quad S_{n+1} = \tau_n(S_n)$

$$\tau_{n+1}^2 = \overrightarrow{A_{n+1} S_{n+1}} = \overrightarrow{\tau_n^2(A_n)\, \tau_n(S_n)} = \underbrace{\overrightarrow{\tau_n(A_n)\, S_n}}_{(*)} = \underbrace{\overrightarrow{A_n\, \tau_n^{-1}(S_n)}}_{(\#)}.$$

$$\Rightarrow \tau_{n+1}^4(A_n) = \tau_{n+1}^2(\tau_{n+1}^2(A_n)) \overset{(\#)}{=} \tau_{n+1}^2(\tau_n^{-1}(S_n)) = \tau_{n+1}^2(\tau_n(A_n)) \overset{(*)}{=} S_n$$

$\tau_n(\tau_n(A_n)) = S_n$
$\Rightarrow \tau_n^{-1}(S_n = \tau_n(A_n)$

$$\Rightarrow \tau_{n+1}^4 = \tau_n^2 \Rightarrow \tau_{n+1}^2 = \tau_n.$$

$\square$

<u>z.z.:</u> $\sup A_n = \tau_0^4(A_0)$.

<u>Bew.:</u> Es ist $A_0 < \tau_0^4(A_4)$.

Sei g die Gerade durch A_0 und $\tau_0^4(A_0)$.

A_n $(n \geq 1)$ ist immer der Mittelpunkt von $[A_{n-1}, \tau_0^4(A_0)]$ (folgt induktiv):

(IA) $(n=1)$: $A_1 = \tau_0^2(A_0)$ ist eindeutig Mittelpunkt von $[A_0, \tau_0^4(A_0)]$ (durch $\tau_1 = \tau_0^2$).

(IV): Sei die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr.

(IS): $A_{n+1} = \tau_n^2(A_n) = \tau_{n-1}(A_n)$.

A_n ist der Mittelpunkt von $[A_{n-1}, \tau_0^4(A_0)]$ (nach IV).

Weiterhin ist $A_n = \tau_{n-1}^2(A_{n-1})$ und $\tau_0^4(A_0) = \tau_{n-1}^4(A_{n-1})$.

Damit ist $\tau_n^4(A_n) = \tau_n^4(\tau_{n-1}^2(A_{n-1})) = \tau_{n-1}^2(\tau_{n-1}^2(A_{n-1})) = \tau_{n-1}^4(A_{n-1})$

$\tau_n^4 = \tau_{n-1}^2$

$= \tau_0^4(A_0)$.

Mithilfe von Lemma 4.18. erhalten wir $\sup A_n = \tau_0^4(A_0)$.

$\square$

z.Z.: $\sup S_n = \tau_0^2(S_0)$.

Bew.: Es ist $S_0 < \tau_0^2(S_0)$.

Sei g die Gerade durch S_0 und $\tau_0^2(S_0)$.

S_n $(n \geq 1)$ ist immer der Mittelpunkt von $[S_{n-1}, \tau_0^2(S_0)]$ (folgt induktiv):

(IA) $(n=1)$: $S_1 = \tau_0(S_0)$ ist eindeutig der Mittelpunkt von $[S_0, \tau_0^2(S_0)]$ (durch τ_0).

(IV): Sei die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr.

(IS): $S_{n+1} = \tau_n(S_n)$.

S_n ist der Mittelpunkt von $[S_{n-1}, \tau_0^2(S_0)]$ (nach IV).

Weiterhin ist $S_n = \tau_{n-1}(S_{n-1})$ und $\tau_0^2(S_0) = \tau_{n-1}^2(S_{n-1})$.

Damit ist $\tau_n^2(S_n) = \tau_n^2(\tau_{n-1}(S_{n-1})) \underset{\tau_n^2 = \tau_{n-1}}{=} \tau_{n-1}(\tau_{n-1}(S_{n-1})) = \tau_{n-1}^2(S_{n-1}) = \tau_0^2(S_0)$.

Mithilfe von Lemma 4.18. erhalten wir $\sup S_n = \tau_0^2(S_0)$.

$\square$

Es bleibt zu zeigen, dass $\sup A_n = \sup S_n$:

$\sup A_n = \tau_0^4(A_0) = \tau_0^2(\tau_0^2(A_0)) \underset{\tau_0^2 \text{ bildet gerade } A_0 \text{ auf } S_0 \text{ ab}}{=} \tau_0^2(S_0) = \sup S_0$.

$\square$

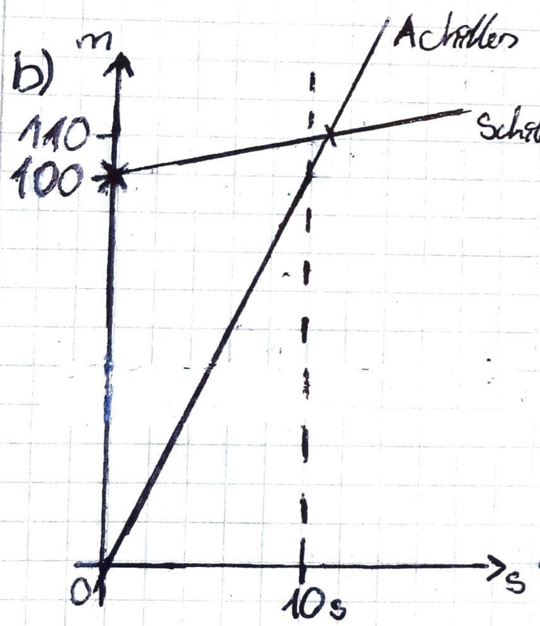
Aufgabe 5 Schulbezug: Achilles und die Schildkröte

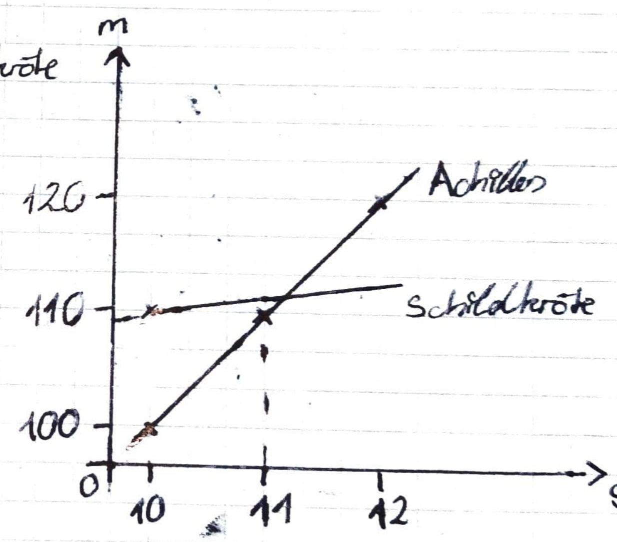
a) Worin besteht das Paradoxe? (für Oberstufe)

Um den Vorsprung zur Schildkröte einzuholen braucht Achilles immer weniger Zeit, da die Strecke kürzer wird. Betrachtet man den Vorsprung so geht dieser ins unendlich Kleine, so dass man nicht zum Punkt kommt, an dem Achilles die Schildkröte überholt.

Betrachtet man stattdessen die gleichen Zeitabschnitte, so wird Achilles die Schildkröte überholen, da Achilles eine größere Strecke zurücklegt als die Schildkröte

b)





Zeit t in s	0	10	11	11,1
Zurückg. Weg von Achilles in m	0	100	110	111
" der Schildkröte in m	100	110	111	111,1