

Stochastik Blatt 04

Luis Jarrell, Yannick Baum $\sum_{13}^{11} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{4}$

Aufgabe 07.

Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

OB d.h. gelte $x_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$ sonst gilt

dass $X_i | x_i$ mit $P_\lambda(X_i = x_i) = 0$ für alle $\lambda > 0$

dass $X_i > 0$ für alle $\lambda > 0$ gilt

$\Rightarrow P_\lambda(X = x) = \prod_{i=1}^n P_\lambda(X_i = x_i) = 0$ unabhängig von λ

somit gilt dann unter Verwendung von Beispiel 55

$$l(\lambda, x) = \sum_{i=1}^n \ln(\lambda e^{-\lambda x_i})$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln(\lambda e^{-\lambda x_i}) = \frac{1}{\lambda e^{-\lambda x_i}} (e^{-\lambda x_i} + \lambda e^{-\lambda x_i} \cdot (-x_i)) =$$

$$\frac{1}{\lambda} (\lambda - \lambda x_i) = \frac{1}{\lambda} - x_i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda} l(\lambda, x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda} - x_i \text{ und somit}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda} - x_i = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\lambda} = \sum_{i=1}^n x_i \Leftrightarrow \lambda = \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} \right)^{-1}$$

Betrachte noch die zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} l(\lambda, x) = \sum_{i=1}^n -\frac{1}{\lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} \right)^{-1} \text{ ist MLS} \quad \checkmark \quad \frac{y}{y}$$

Aufgabe 02

Die X_i sind i.i.d. nach Voraussetzung und

dass $X_i \sim \text{Exp}(\vartheta)$ gilt somit $\text{Var}(X_i) = \frac{1}{\vartheta^2} < \infty$,

nach dem starken Gesetz der Großen Zahlen gilt

somit $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow E[X_i]$ f.o.s.

$\Rightarrow \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^{-1} \rightarrow \frac{1}{E[X_i]}$ f.o.s und somit

$$\frac{1}{E[X_i]} = \frac{1}{\frac{1}{\vartheta}} = \vartheta$$

\checkmark

folgt die Aussage da

Aufgabe 03

i) $Y = X_1 - X_2$ da $X_1(x), X_2(x) \in \{0, 1\}$

dann y die Werte $-1, 0, 1$ annehmen

$$\Rightarrow P(Y = -1) = (1-p)q = q - pq$$

$$P(Y = 0) = (1-p)(1-q) + pq = 1 - p - q + 2pq$$

$$P(Y = 1) = p(1-q) = p - pq$$

\Rightarrow

$$P(Y \leq x) = \begin{cases} q - pq & x \in [-1, 0] \\ 1 - p + pq & x = [0, 1] \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{O sonst}$$

ii) $Z = X_1 \cdot X_2$, Z nimmt also Werte $0, 1$ an

$$\Rightarrow P(Z = 0) = (1-p)(1-q) + p(1-q) + q(1-p) = 1 - p - q + pq + p - pq + q - pq = 1 - pq$$

$$P(Z = 1) = pq$$

$$\Rightarrow P(Z \leq x) = \begin{cases} 1 - pq & x \in [0, 1] \\ 1 & x \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

* X_1, X_2 unabhängig

✓

↳ 4

Aufgabe 04

1. Die Aussage gilt nicht!

Sei $\Omega = \{0, 1\}$ und für $w \in \Omega$ $P(w) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$

Sei $A = \{0\}$, $B = \{1\}$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 = P(\emptyset) = P(A^c \cap B^c)$$

$$\Rightarrow P(B|A) + P(B^c|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(A^c)} =$$

$$\frac{0}{P(A)} + \frac{0}{P(A^c)} = 0 \neq 1 \quad \checkmark$$

2. Die Aussage gilt

Rechne $E\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n} E[S_n] = \frac{1}{n} \cdot np = p$

Setze nun $\frac{S_n}{n} = x$ dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(|X - E[X]| > \varepsilon\right) \leq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} \text{Var}(S_n)}{\varepsilon^2} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{np(1-p)}{n^2 \varepsilon^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(1-p)}{n \varepsilon^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$$

✓

3. Wenn X_1, X_2 gleichverteilt sind wie in Aufgabe 3 mit $Z = X_1 \cdot X_2$ und Beachte dass für X_1 gilt

$$P(X_1^2 = 0) \Leftrightarrow P(X_1 = 0) = 1 - p$$

$$P(X_1^2 = 1) \Leftrightarrow P(X_1 = 1) = p$$

$$\Rightarrow P(X_1^2 \leq x) = \begin{cases} 1 - p & \cancel{x=0} 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_{X_1^2}(x) \neq F_{X_1, X_2}(x) \text{ vergleiche Aufgabe 3}$$

\Rightarrow Die Aussage gilt nicht

✓

$$\frac{n}{4}$$