Abgabe bis Freitag, 14.05.2021. Besprechung in den Übungsgruppen am 19. und 21.05.2021.

Aufgabe 1 Affine Bewegungen, (6 Punkte)

Betrachten Sie den affinen Raum $A = V = \mathbb{R}^2$. Sei $x_1 := (1,3) \in A$, $x_2 := (4,2) \in A$ sowie $f_1 \in \mathrm{SO}(2)$ die Drehung um den Ursprung im Uhrzeigersinn um 180° und $f_2 \in \mathrm{SO}(2)$ die Drehung um den Ursprung gegen den Uhrzeigersinn um 90°. Wir definieren (vgl. Beispiel (ii) im Skript auf Seite 15) die affinen Bewegungen

$$\phi_1 := \phi_{x_1,f_1}, \qquad \phi_2 := \phi_{x_2,f_2}.$$

a) Machen Sie eine Skizze, die illustriert, wie ϕ_1 und ϕ_2 auf A operieren.

b) Stellen Sie ϕ auf *zwei Arten* in der Form

$$\tau_{\overrightarrow{x_0\phi(x_0)}} \circ \phi_{x_0,f}$$

dar (vgl. Korollar 2.8), einmal für $x_0 := x_1$ und einmal für $x_0 := x_2$.

c) Machen Sie eine weitere Skizze, die illustriert, wie ϕ auf die zwei verschiedenen Arten dargestellt werden kann.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Sei k ein Körper und V, V' Vektorräume über k. Seien A und A' affine Räume über V bzw. V'. Beweisen Sie den ersten Teil der Bemerkung nach Definition 2.4 im Skript: Sei (ϕ, f) eine affine Abbildung von A nach A'. Dann gilt für alle $x, y \in A$:

$$f(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{\phi(x)\phi(y)}.$$

Aufgabe 3 Affine Bewegungen als semidirektes Produkt, (6 Punkte)

Sei k ein Körper, V ein k-Vektorraum und A ein affiner Raum über V. Sei $x_0 \in A$.

a) Zeigen Sie, dass die Schreibweise $\phi = \tau_v \phi_{x_0,f}$ mit $v \in V, f \in \mathrm{Aut}(V)$ für affine Bewegungen $\phi \in \mathrm{Aut}(A)$ eine *Bijektion von Mengen*

$$\varphi\colon \mathrm{Aut}(A) \to V \times \mathrm{Aut}(V)$$

induziert.

b) Wir definieren auf der Menge $V \times \mathrm{Aut}(V)$ eine Operation $\star$ mittels

$$(v_1, f_1) \star (v_2, f_2) := (v_1 + f_1(v_2), f_1 \circ f_2).$$

Zeigen Sie, dass $(V \times \mathrm{Aut}(V), \star)$ eine Gruppe ist (wir nennen eine solche Gruppenstruktur auf dem mengentheoretischen Produkt von zwei Gruppen ein *semidirektes Produkt*).

c) Zeigen Sie, dass durch φ aus Teil a) sogar ein Gruppenisomorphismus zwischen $(\mathrm{Aut}(A), \circ)$ und $(V \times \mathrm{Aut}(V), \star)$ definiert wird.

Aufgabe 4 Affine Ebenen über starren Körpern, (4 Punkte)

Sei k ein *starrer Körper*, d.h. die Automorphismengruppe bestehe nur aus der Identität: $\mathrm{Aut}(k) = \{\mathrm{id}\}$. Zeigen Sie, dass jeder Automorphismus von Inzidenzgeometrien $\phi\colon k^2 \to k^2$ eine affine Bewegung ist.

Aufgabe 5 Aufgabe mit Schulbezug, (2 Bonuspunkte)

Schon in der Grundschule werden Parkettierungen genutzt, um das Erkennen von Mustern und Strukturen zu fördern (Parkette legen, Parkette weiterzeichnen, Parkette selbst erfinden,...). Die Regelmäßigkeiten, die solchen Mustern zu Grunde liegen, lassen sich mathematisch mit Hilfe von Invarianzabbildungen beschreiben.

Frage: Welche Abbildungen lassen das untenstehende Parkett invariant? Beschreiben Sie diese (unendlich vielen) Abbildungen möglichst systematisch.

Elementargeometrie

Blatt 3

Mascha Reber mascha.reber@neptun.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 4734963

Lorenz Bung lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

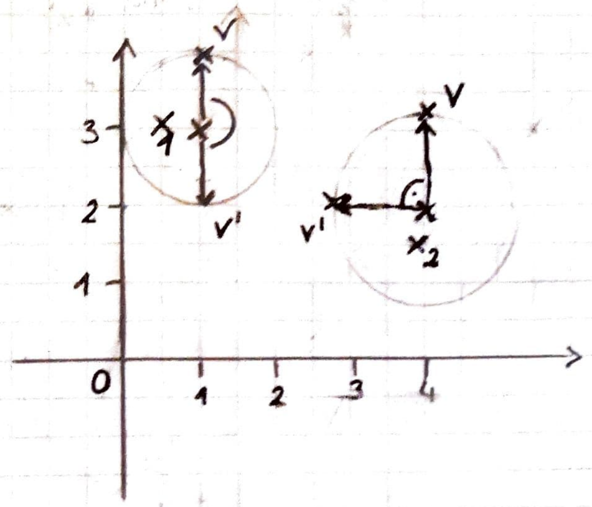
Elementargeometrie - Blatt 3

Aufgabe 1 Affine Bewegungen

Betrachten Sie den affinen Raum $A = V = \mathbb{R}^2$. Sei $x_1 := (1,3) \in A$, $x_2 := (4,2) \in A$ sowie $f_1 \in SO(2)$ Drehung um Ursprung im Uhrzeigersinn um 180°
und $f_2 \in SO(2)$ " " gegen " um 90°

Wir definieren die affinen Bewegungen $\phi_1 = \phi_{x_1, f_1}$ $\phi_2 := \phi_{x_2 f_2}$

(a) Machen Sie eine Skizze, die illustriert, wie ϕ_1 und ϕ_2 auf A operieren



$\phi_{x_1, f_1}: A \to A,\ x_1 + v \mapsto x_1 + f(v)$

↳ Drehung um x_1

$\phi_{x_2, f_2}: A \to A,\ x_2 + v \mapsto x_2 + f(v)$

↳ Drehung um x_2

(b) Stellen Sie ϕ auf zwei Arten in der Form $T_{\overrightarrow{x_0 \phi(x_0)}} \circ \phi_{x_0, f}$ dar, einmal für $x_0 := x_1$ und einmal für $x_0 := x_2$

$\phi_{x_0, f}: A \to A,\ x_0 + v \mapsto x_0 + f(v)$

$T_v: A \to A,\ x \mapsto x + v = \mu(v, x)$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

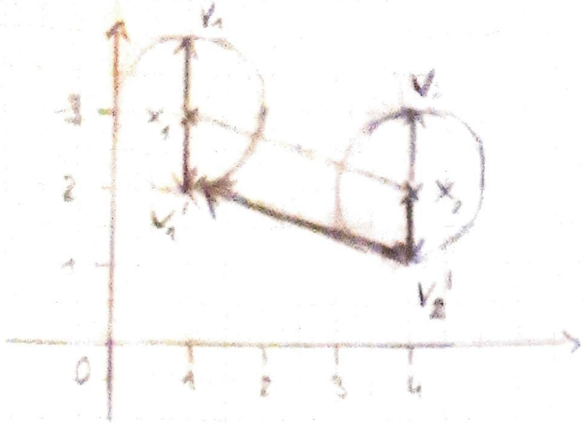
① $\phi_{x_1, f_1} = T_{\overrightarrow{x_1 \phi(x_1)}} \circ \phi_{x_1, f_1}$ wobei ϕ_{x_1, f_1} Drehung um x_1 um 180°
$= \phi_{x_1, f_1}$ und $T_{\overrightarrow{x_1 \phi(x_1)}}$ Verschiebung ~~um~~ 1

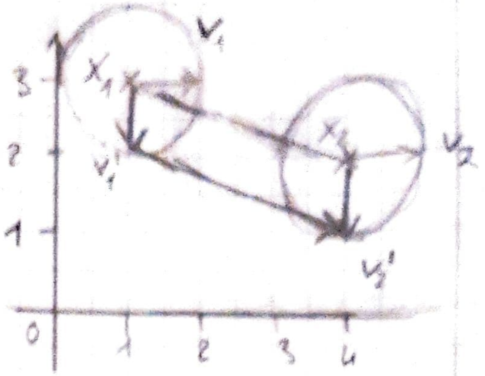
② $\phi_{x_1, f_1} = T_{\overrightarrow{x_2 \phi(x_2)}} \circ \phi_{x_2, f_1}$ wobei ϕ_{x_2, f_1} Drehung um x_2 um 180°
$= T_{\phi}$ und $T_{\overrightarrow{x_2 \phi(x_2)}} = (3, -1) = \overrightarrow{x_1 x_2}$

③ $\phi_{x_2, f_2} = T_{\overrightarrow{x_2 \phi(x_2)}} \circ \phi_{x_2, f_2}$ wobei ϕ_{x_2, f_2} Drehung um x_2 um 90° g Uhr
und $T_{\overrightarrow{x_2 \phi(x_2)}}$ Verschiebung = 1

④ $\phi_{x_2, f_2} = T_{\overrightarrow{x_1 \phi(x_1)}} \circ \phi_{x_1, f_2}$ wobei ϕ_{x_1, f_2} Drehung um x_1 um 90° g Uhr
und $T_{\overrightarrow{x_1 \phi(x_1)}} = (-3, 1) = \overrightarrow{x_2 x_1}$

c)





ϕ_{x_1, f_1} $\quad x_0 = x_1 = (1,3)$ $\quad \phi_{x_2, f_2}$

als Drehung um x_2 und anschließende Translation ($v_2' \to v_1'$)

als Drehung um x_1 und anschließende Translation

$v_1 \to v_1' \to v_2'$

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Sei k ein Körper und V, V' Vektorräume über k. Seien A und A' affine Räume über V bzw. V'. Beweisen Sie den ersten Teil der Bemerkung nach Definition 2.4 im Skript: Sei (ϕ, f) eine affine Abbildung von A nach A'. Dann gilt für alle $x, y \in A$:

$$f(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{\phi(x)\phi(y)}.$$

Zu zeigen: $f(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{\phi(x)\phi(y)}$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\phi(x)\phi(y)} &= \phi(y) - \phi(x) \\
&= \phi(x + \overrightarrow{xy}) - \phi(x + 0) \\
&= \phi(x) + f(\overrightarrow{xy}) - \phi(x) + f(0) \\
&= \phi(x) - \phi(x) + f(\overrightarrow{xy}) \\
&= f(\overrightarrow{xy}).
\end{aligned}$$

Def. 1.5.

Operationsbedingung

$\square$

Aufgabe 3 Affine Bewegungen als semidirektes Produkt, (6 Punkte)

Sei k ein Körper, V ein k-Vektorraum und A ein affiner Raum über V. Sei $x_0 \in A$.

a) Zeigen Sie, dass die Schreibweise $\phi = \tau_v \phi_{x_0,f}$ mit $v \in V, f \in \mathrm{Aut}(V)$ für affine Bewegungen $\phi \in \mathrm{Aut}(A)$ eine *Bijektion von Mengen*

$$\varphi\colon \mathrm{Aut}(A) \to V \times \mathrm{Aut}(V)$$

induziert.

zu zeigen: Die Schreibweise $\phi : \tau_v \phi_{x_0,f}$ induziert eine Bijektion von Mengen $\varphi : \mathrm{Aut}(A) \to V \times \mathrm{Aut}(V)$.

Beweis:

Wir definieren die Abbildung φ als

$$\varphi : \mathrm{Aut}(A) \to V \times \mathrm{Aut}(V), \ (\phi, f) \mapsto (v, f).$$

Diese Abbildung ist bijektiv:

1. Injektivität:

Wähle zwei Elemente (ϕ_1, f_1) und (ϕ_2, f_2) aus $\mathrm{Aut}(A)$, so dass $\varphi((\phi_1, f_1)) \neq \varphi((\phi_2, f_2))$.
Sei $\varphi((\phi_1, f_1)) = (v_1, f_1)$ und $\varphi((\phi_2, f_2)) = (v_2, f_2)$.
Da $(v_1, f_1) = \varphi((\phi_1, f_1)) \neq \varphi((\phi_2, f_2)) = (v_2, f_2)$, ist $v_1 \neq v_2$ oder $f_1 \neq f_2$ (oder beides).
Wenn $v_1 \neq v_2$, kann $\overrightarrow{x_0 \phi_1(x_0)}$ nicht gleich $\overrightarrow{x_0 \phi_2(x_0)}$ sein und damit $\phi_1 \neq \phi_2$, also auch $(\phi_1, f_1) \neq (\phi_2, f_2)$.
Falls schon $f_1 \neq f_2$ war, kann jedoch direkt auch (ϕ_1, f_1) nicht mehr (ϕ_2, f_2) sein.

Damit ist φ injektiv.

2. Surjektivität:

Wir wählen ein Element (v, f) aus dem Bildbereich.

Wähle nun ein ϕ so aus $Aut(A)$, dass $\phi(x_0) = x_0 + v$.

Dann ist $\varphi((\phi, f)) = (\overrightarrow{x_0 \phi(x_0)}, f) = (x_0 + v - x_0, f) = (v, f)$.

Damit ist φ surjektiv.

Insgesamt ist φ injektiv und surjektiv und damit eine bijektive Abbildung.

$\square$

b) Wir definieren auf der Menge $V \times \mathrm{Aut}(V)$ eine Operation $\star$ mittels

$$(v_1, f_1) \star (v_2, f_2) := (v_1 + f_1(v_2), f_1 \circ f_2).$$

Zeigen Sie, dass $(V \times \mathrm{Aut}(V), \star)$ eine Gruppe ist (wir nennen eine solche Gruppenstruktur auf dem mengentheoretischen Produkt von zwei Gruppen ein *semidirektes Produkt*).

Z.z.: $(V \times \mathrm{Aut}(V), *)$ ist eine Gruppe.

Beweis:

$(V \times \mathrm{Aut}(V), *)$ ist eine Gruppe, wenn gilt:

(1) Assoziativität:

$$((v_1, f_1) * (v_2, f_2)) * (v_3, f_3) = (v_1, f_1) * ((v_2, f_2) * (v_3, f_3))$$
$$\forall (v_1, f_1), (v_2, f_2), (v_3, f_3) \in V \times \mathrm{Aut}(V).$$

(2) Existenz eines neutralen Elements:

$$\exists (e_v, e_f) \in V \times \mathrm{Aut}(V) : (v_1, f_1) * (e_v, e_f) = (e_v, e_f) * (v_1, f_1) = (v_1, f_1)$$
$$\forall (v_1, f_1) \in V \times \mathrm{Aut}(V)$$

(3) Existenz des Inversen:

$$\forall (v_1, f_1) \in V \times \mathrm{Aut}(V) \ \exists (v_1, f_1)^{-1} \in V \times \mathrm{Aut}(V):$$
$$(v_1, f_1) * (v_1, f_1)^{-1} = (v_1, f_1)^{-1} * (v_1, f_1) = (e_v, e_f).$$

Seien $(v_1, f_1), (v_2, f_2), (v_3, f_3) \in V \times \mathrm{Aut}(V)$.

(1)
$$\begin{aligned}
&((v_1, f_1) * (v_2, f_2)) * (v_3, f_3) \\
&= (v_1 + f_1(v_2), f_1 \circ f_2) * (v_3, f_3) \\
&= (v_1 + f_1(v_2) + f_1 \circ f_2(v_3), f_1 \circ f_2 \circ f_3) \\
&= (v_1 + f_1(v_2) + f_1(f_2(v_3)), f_1 \circ f_2 \circ f_3) \\
&\overset{(*)}{=} (v_1 + f_1(v_2 + f_2(v_3)), f_1 \circ f_2 \circ f_3) \\
&= (v_1, f_1) * (v_2 + f_2(v_3), f_2 \circ f_3) \\
&= (v_1, f_1) * ((v_2, f_2) * (v_3, f_3)).
\end{aligned}$$

(*) $f_1 \in \mathrm{Aut}(V)$ und damit f_1 linear

(2) Für $(e_V, e_f) := (0_V, \mathrm{Id}_V)$ gilt

$$\begin{aligned}
&(e_V, e_f) * (v_1, f_1) \\
&= (e_V + e_f(v_1), e_f \circ f_1) \\
&= (0_V + \mathrm{Id}_V(v_1), \mathrm{Id}_V \circ f_1) \\
&= (v_1, f_1) \\
&= (v_1 + f_1(0_V), f_1 \circ \mathrm{Id}_V) \\
&= (v_1 + f_1(e_V), f_1 \circ e_f) \\
&= (v_1, f_1) * (e_V, e_f).
\end{aligned}$$

(3) Zum Element (v_1, f_1) existiert das Inverse (v_2, f_2) mit $v_2 = f_1^{-1}(-v_1)$, $f_2 = f_1^{-1}$ (existieren beide, da f_1 Automorph. ist):

$$\begin{aligned}
&(v_1, f_1) * (v_2, f_2) \\
&= (v_1 + f_1(v_2), f_1 \circ f_2) \\
&= (v_1 - v_1, f_1 \circ f_1^{-1}) \\
&= (0_V, \mathrm{Id}_V) \\
&= (e_V, e_f).
\end{aligned}$$

$\square$

c) Zeigen Sie, dass durch φ aus Teil a) sogar ein Gruppenisomorphismus zwischen $(\mathrm{Aut}(A), \circ)$ und $(V \times \mathrm{Aut}(V), \star)$ definiert wird.

Zu Zeigen:

Für $(\phi_1, f_1), (\phi_2, f_2) \in \mathrm{Aut}(A)$ gilt

Operation aus b)

$$\varphi((\phi_1, f_1) \circ (\phi_2, f_2)) = \varphi((\phi_1, f_1)) \ast \varphi((\phi_2, f_2)).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\varphi((\phi_1, f_1) \circ (\phi_2, f_2)) \\
&= \varphi((\phi_1 \circ \phi_2, f_1 \circ f_2)) \\
&= \left(\overrightarrow{x_0\, \phi_1(\phi_2(x_0))}, f_1 \circ f_2\right) \\
&= \left(\overrightarrow{x_0\, \phi_1(x_0)} + f_1\left(\overrightarrow{x_0\, \phi_2(x_0)}\right), f_1 \circ f_2\right) \\
&= \left(\overrightarrow{x_0\, \phi_1(x_0)}, f_1\right) \ast \left(\overrightarrow{x_0\, \phi_2(x_0)}, f_2\right) \\
&= \varphi((\phi_1, f_1)) \ast \varphi((\phi_2, f_2)).
\end{aligned}$$

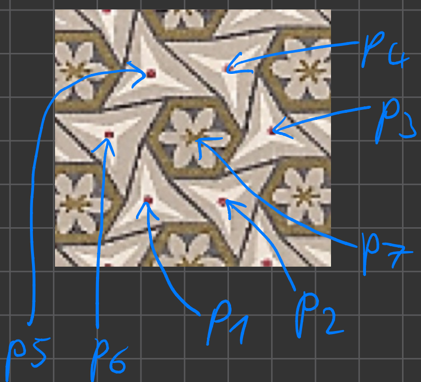
$\square$

Aufgabe 5 Aufgabe mit Schulbezug, (2 Bonuspunkte)

Schon in der Grundschule werden Parkettierungen genutzt, um das Erkennen von Mustern und Strukturen zu fördern (Parkette legen, Parkette weiterzeichnen, Parkette selbst erfinden,...). Die Regelmäßigkeiten, die solchen Mustern zu Grunde liegen, lassen sich mathematisch mit Hilfe von Invarianzabbildungen beschreiben.

Frage: Welche Abbildungen lassen das untenstehende Parkett invariant? Beschreiben Sie diese (unendlich vielen) Abbildungen möglichst systematisch.

Wir bezeichnen der Einfachheit halber bestimmte Punkte im Parkett folgendermaßen:



Es gibt Translationen und Rotationen, die das Parkett invariant lassen.

Translationen:

$$T := \{ \tau_{\overrightarrow{p_1 p_3}}, \tau_{\overrightarrow{p_3 p_5}}, \tau_{\overrightarrow{p_5 p_1}}, \tau_{\overrightarrow{p_2 p_4}}, \tau_{\overrightarrow{p_4 p_6}}, \tau_{\overrightarrow{p_6 p_2}} \}$$

Sowie k-Fache der Vektoren, $k \in \mathbb{Z}$.

Rotationen:

Rotationen um p_7 sind invariant, wenn sie um ein ganzzahliges Vielfaches von $60°$ stattfinden.
Rotationen um die Punkte $\{p_1, \dots, p_6\}$ sind invariant, wenn sie um ein ganzzahliges Vielfaches von $120°$ geschehen.

Wir erhalten für Rotationen um p_7 die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(k \cdot 60°) & -\sin(k \cdot 60°) \\ \sin(k \cdot 60°) & \cos(k \cdot 60°) \end{pmatrix}$$

und für Rotationen um $\{p_1, \ldots, p_6\}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(k \cdot 120°) & -\sin(k \cdot 120°) \\ \sin(k \cdot 120°) & \cos(k \cdot 120°) \end{pmatrix},$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$.

Damit haben wir die Abbildungen

$$\Phi_{p_7,k}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad p_7 + \vec{v} \longmapsto p_7 + k \cdot \begin{pmatrix} \cos(60°) & -\sin(60°) \\ \sin(60°) & \cos(60°) \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$$

und

$$\Phi_{p_i,k}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad p_i + \vec{v} \longmapsto p_i + k \cdot \begin{pmatrix} \cos(120°) & -\sin(120°) \\ \sin(120°) & \cos(120°) \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$$

für $i \in \{1, \ldots, 6\}$ und $k \in \mathbb{Z}$.

Die Gesamtmenge unserer Abbildungen, die das Parkett invariant lassen, ist also

$$T \cup \{ \Phi_{p_7,k}, \Phi_{p_i,k} \}.$$