LA Blatt 7

Lorenz Bung (lorenz.bung@students.unifreiburg.de)
Matr.-Nr. 5113060
Tobias Remde (tobias.remde@gmx.de)
Matr.-Nr. 5100067

A 3 $v_1 = (1, -3, 3), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, -4, 7)$

(a) $A := \{v_1, v_2, v_3\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^3$, wenn:

- A ist Erzeugendensystem
- A ist lin. unabh.

Bew.:

z.z.: A ist lin. unabh., wenn

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Wir erhalten das LGS

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right).$$

Durch (Zeilen-)Umformungen erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right).$$

Wir erhalten $\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$.

Damit sind $\{v_1, v_2, v_3\}$ lin. unabh.

A3 | (a) z.z.: $A=\{v_1, v_2, v_3\}$ ist Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

A ist Erz.-sys., wenn sich jeder Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ als LK von $\{v_1, v_2, v_3\}$ darstellen lässt, also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 7 & 1 \end{array}\right)$$ und durch Äquivalenzumformungen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & 4 \end{array}\right).$$

Damit haben wir

$$\lambda_3 = \frac{1}{3} x_3, \quad \lambda_2 = 2x_2 - 3\lambda_3 = 2x_2 - x_3,$$

$$\lambda_1 = x_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = x_1 - (2x_2 - x_3) - \left(\frac{1}{3} x_3\right)$$

$$= x_1 - 2x_2 + \frac{2}{3} x_3.$$

Damit lässt sich $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ als LK der Vektoren $\{v_1, v_2, v_3\}$ darstellen und A ist somit ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

$\square$

A3 (b) Wir berechnen zunächst die Übergangsmatrix S von der kanonischen Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ nach der Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$:

Wir haben $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ und $\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-4\\7\end{pmatrix}\right\}$,

$$\cancel{S \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}$$

$S = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-3 & 1 & -4\\3 & 0 & 7\end{pmatrix}$ ist die Übergangsmatrix, denn

$$S \cdot e_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-3 & 1 & -4\\3 & 0 & 7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix} = v_1,$$

$$S \cdot e_2 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-3 & 1 & -4\\3 & 0 & 7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = v_2,$$

$$S \cdot e_3 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-3 & 1 & -4\\3 & 0 & 7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-4\\7\end{pmatrix} = v_3.$$

Die Abbildung $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $(x, y, z) \mapsto (x+y+z,\ y-z,\ 3z-x+2y)$ wird (bzgl. der kanonischen Basis) durch eine Matrix B charakterisiert, mit

$$B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & -1\\-1 & 2 & 3\end{pmatrix}:$$

$$B \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & -1\\-1 & 2 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y+z\\y-z\\3z-x+2y\end{pmatrix}.$$

Nach Kor. 2.64. hat F damit bzg. der Basen $\{v_1, v_2, v_3\}$ und $\{v_1, v_2, v_3\}$ (im Def.- bzw. Bildbereich) die Darstellungsmatrix

$$A = S^{-1} \cdot B \cdot S.$$

A3 (b) S^{-1} erhalten wir durch:

$$S^{-1} \cdot S = Id_3 = S \cdot S^{-1}, \text{ also}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{31} & \cdots & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir für

S^{-1} die Matrix $\begin{pmatrix} \frac{7}{13} & -\frac{7}{13} & -\frac{5}{13} \\ \frac{9}{13} & \frac{4}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{3}{13} & \frac{3}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix}$, denn

$$S^{-1} \cdot S = \begin{pmatrix} \frac{7}{13} & -\frac{7}{13} & -\frac{5}{13} \\ \frac{9}{13} & \frac{4}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{3}{13} & \frac{3}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{13} - 3\left(-\frac{7}{13}\right) + 3\left(-\frac{5}{13}\right) & \cdots \\ \vdots & \ddots \\ & -\frac{3}{13} - 4\left(\frac{3}{13}\right) + 7\left(\frac{4}{13}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_3.$$

Damit erhalten wir

$$A = S^{-1} \cdot B \cdot S = \begin{pmatrix} \frac{7}{13} & -\frac{7}{13} & -\frac{5}{13} \\ \frac{9}{13} & \frac{4}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{3}{13} & \frac{3}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & \frac{2}{13} & \frac{45}{13} \\ -1 & \frac{23}{13} & \frac{4}{13} \\ -1 & \frac{1}{13} & \frac{3}{13} \end{pmatrix}}}.$$

A3 (c) In Teilaufgabe (b) hatten wir die Matrix A errechnet durch $A = S^{-1} \cdot B \cdot S$.

Nach Def. 2.59. ist das Produkt invertierbarer bzw. regulärer Matrizen wieder regulär.

Über S bzw. S^{-1} wissen wir bereits, dass diese Matrizen regulär sind, denn $S \cdot S^{-1} = Id_3 = S^{-1} \cdot S$.

Es bleibt also zu zeigen, dass B regulär ist.

<u>Beh.:</u> Es gibt eine Matrix B^{-1} mit $B \cdot B^{-1} = Id_3 = B^{-1} \cdot B$.

<u>Bew.:</u> Wir wählen $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$. Dann ist

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} + \frac{4}{7} - \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} - \frac{1}{7} & \frac{4}{7} + \frac{3}{7} & \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \\ -\frac{5}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} & \frac{1}{7} + \frac{8}{7} - \frac{9}{7} & \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$= Id_3.$$

Also ist B regulär.

Insgesamt sind S^{-1}, B und S regulär und damit auch A.

$\blacksquare$

A1 (a) Wir haben die Abbildung $F: \mathbb{K}[T]_{\leq 2} \to \mathbb{K}[T]_{\leq 3}$

mit $P \mapsto T \cdot \frac{\partial P}{\partial T} - 2P + 2P(0)$.

P ist ein Polynom vom Grad ≤ 2, also insbes.

$$a_2 T^2 + a_1 T + a_0 \mapsto T(2a_2 T + a_1) - 2(a_2 T^2 + a_1 T + a_0) + 2a_0.$$

Also

$$a_2 T^2 + a_1 T + a_0 \mapsto \cancel{2a_2 T^2} + a_1 T \cancel{- 2a_2 T^2} - 2a_1 T \cancel{- 2a_0} \cancel{+ 2a_0}$$

und damit

$$a_2 T^2 + a_1 T + a_0 \longmapsto -a_1 T.$$

Z.z.: F ist wohldefiniert.

Bew.: Angenommen F wäre nicht wohldef. ~~Dann gäbe~~ es ~~zwei Polynome~~ $\cancel{P_1 := a_2 T^2 + a_1 T + a_0}$ ~~und~~ $\cancel{P_2 := b_2 T^2 + b_1 T + b_0}$ ~~mit~~ $\cancel{F(P_1) = F(P_2)}$, ~~aber~~ $\cancel{P_1 \neq P_2}$.

~~Dann ist~~

$$\cancel{F(P_1) = F(a_2 T^2 + a_1 T + a_0) =}$$

Dann gäbe es zu einem Polynom $P := a_2 T^2 + a_1 T + a_0$ mehrere Elemente $F(P)$ im Bildbereich.

Wir haben jedoch

$$F(P) = F(a_2 T^2 + a_1 T + a_0) = -a_1 T,$$

was eindeutig ist.

Damit ist F wohldefiniert. $\blacksquare$

A1 (a) Z.z.: F ist linear.

Bew.: F ist linear, wenn für $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, $P_1, P_2 \in K[T]_{\leq 2}$ gilt, dass $F(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 F(P_1) + \lambda_2 F(P_2)$.

Seien $P_1 := a_2 T^2 + a_1 T + a_0$ und

$P_2 := b_2 T^2 + b_1 T + b_0$.

Dann ist

$$F(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = F\left(\lambda_1 (a_2 T^2 + a_1 T + a_0) + \lambda_2 (b_2 T^2 + b_1 T + b_0)\right)$$
$$= F(\lambda_1 a_2 T^2 + \lambda_1 a_1 T + \lambda_1 a_0 + \lambda_2 b_2 T^2 + \lambda_2 b_1 T + \lambda_2 b_0)$$
$$= F\left((\lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2) T^2 + (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1) T + \lambda_1 a_0 + \lambda_2 b_0\right)$$
$$= -(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1) T$$
$$= \lambda_1 \cdot (-a_1 T) + \lambda_2 (-b_1 T)$$
$$= \lambda_1 \cdot F(a_2 T^2 + a_1 T + a_0) + \lambda_2 F(b_2 T^2 + b_1 T + b_0)$$
$$= \lambda_1 F(P_1) + \lambda_2 F(P_2).$$

Damit ist F linear. ■

(b) Die Darstellungsmatrix von F bzgl. der Basen $\{1, T, T^2\}$ und $\{1, T, T^2, T^3\}$ ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

denn für das Polynom $P := a_2 T^2 + a_1 T + a_0$ ergibt sich

$$F(P) = A \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also $F(P) = F(a_2 T^2 + a_1 T + a_0) = -a_1 T$. ■

A1 (c) Nach Bem. 2.66. (bzw. Bem. 2.50.) ist $Rg(F) = Rg(A)$.
Der Rang von A ist jedoch die Zahl der nicht-trivialen Zeilen, also 1.
Damit ist $Rg(F) = Rg(A) = 1$.

(d) Beh.: $\{1, T^2\}$ ist eine Basis des Kerns von F.
Bew.: $\{1, T^2\}$ ist eine Basis des Kerns von F, wenn
1. $\{1, T^2\}$ lin. unabh. ist
2. $\{1, T^2\}$ ein Erzeugendensystem des Kerns von F ist.

Die lineare Unabhängigkeit von $\{1, T^2\}$ folgt sofort, da die Gleichung $\lambda_2 \cdot T^2 + \lambda_0 \cdot 1 = 0$ nur die Lösung $\lambda_2 = \lambda_0 = 0$ hat.

Betrachten wir den Kern von F: Er enthält alle Polynome P aus $\mathbb{K}[T]_{\leq 2}$ mit $F(P) = 0$.
Dies ist genau dann der Fall, wenn $a_1 = 0$ für $P = a_2 T^2 + a_1 T + a_0$.
Wir haben also $Ker(F) = \{P \in \mathbb{K}[T]_{\leq 2}$ mit $P = a_2 T^2 + a_0\}$.
Diese Polynome sind jedoch Linearkombinationen von $\{1, T^2\}$.
Also ist $\{1, T^2\}$ lin. unabh. und ein Erzeugendensystem und damit insgesamt eine Basis.

$\blacksquare$