

Analysis II

Universität Freiburg, SS 21
Nadine Große

Skript - Version vom 19. Juli 2021

Wenn Sie (Tipp-)Fehler finden, bin ich dankbar, wenn Sie mir diese
mitteilen.

Inhaltsverzeichnis

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n	1
1.1. Stetigkeit	2
1.2. Linearisierung und totale Ableitung	9
1.3. Höhere partielle Ableitungen	19
1.4. Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace	23
1.4.1. Gradient	23
1.4.2. Divergenz	25
1.4.3. Rotation	27
1.5. Komplexe Funktionen	29
1.6. Extremwertprobleme	31
1.6.1. Quadratische Formen	32
1.6.2. Hinreichende Bedingung	36
1.7. Umkehrabbildungen und implizite Funktionen	39
1.7.1. Umkehrabbildungen	39
1.7.2. Banachscher Fixpunktsatz	41
1.7.3. Satz über inverse Funktionen	42
1.7.4. Implizite Funktionen	47
1.8. Untermannigfaltigkeiten	52
1.8.1. Tangentialraum	60
1.9. Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen	61
2. Etwas Integration	65
2.1. Parameterintegrale	65
2.2. Kurvenintegrale	68
2.2.1. Wiederholung: Länge einer Kurve.	68
2.2.2. Kurvenintegral erster Art	69
2.2.3. Kurvenintegral zweiter Art	70
2.3. Noch ein bisschen Topologie	75
2.4. Mehrfachintegrale	78
2.4.1. Integrale über Quader	78
2.4.2. Integration in anderen Koordinaten	85
2.4.3. Beispiele zur Volumenberechnung	90
2.4.4. Integration auf Untermannigfaltigkeiten	92
2.4.5. Divergenz- und Rotationssatz	96
3. Gewöhnliche Differentialgleichungen	103
3.1. Erste Beispiele	104

Inhaltsverzeichnis

3.2. Erste Ad-Hoc Lösungsmethoden	105
3.2.1. Trennung der Variablen	106
3.2.2. Integrierender Faktor	108
3.2.3. Potenzreihenansatz	110
3.3. Existenz- und Eindeutigkeit – Picard-Lindelöf	111
3.4. Systeme erster Ordnung	115
3.4.1. Lineare Systeme	116
3.4.2. Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	123
3.4.3. Lineare GDL der Ordnung n	126
3.5. Stetige Abhängigkeiten von Lösungen	128
3.6. Autonome DGL	132
3.6.1. Stabilität in autonomen linearen Systemen	134
3.6.2. Stabilität von Ruhelagen nicht-linearer autonomer Systeme . . .	135
3.7. Regulär singuläre GDGL zweiter Ordnung	140
A. Kurzzusammenfassung LinAlg zu Eigenwerten	147
Literatur	149

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

Woche 1

Warum beschäftigen wir uns überhaupt mit Funktionen in mehreren Variablen? Sie tauchen unvermeidbar fast überall auf: Wind ist zum Beispiel eine Funktion des Ortes und hängt damit von drei Koordinaten ab und hat als Werte Vektoren im \mathbb{R}^3 . Andere Beispiele sind die Temperatur des Raumes oder auch fast alle anderen physikalischen Größen, z.B. elektrische und magnetische Felder.

In Analysis 1 haben wir reellwertige Funktionen auf \mathbb{R} betrachtet und uns insbesondere damit beschäftigt, wann und wie wir die Funktion durch Polynome approximieren können. Dies hat uns auf die Begriffe von Ableitungen und Taylorpolynome gebracht.

Hat man eine Funktion von \mathbb{R} mit Werten in \mathbb{R}^m kann man im Prinzip ähnlich vorgehen, in dem man die Komponentenfunktionen einzeln bestimmt, vgl. auch [2, Def. 4.1.21].

Wir wollen nun als nächsten Schritt Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ approximieren - auch mit Polynomen. Was soll Polynom hier heißen? Jede Komponentenfunktionen $f^i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ soll durch ein Polynom in den Koordinaten von \mathbb{R}^n approximiert werden.

Ein *Polynom* in den n -Variablen (hier die Koordinaten $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ von \mathbb{R}^n) hat die Form

$$\sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n, i_1 + \dots + i_n \leq d} a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}$$

mit Koeffizienten $a_{i_1 \dots i_n} \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{N}$. Gibt es ein Tupel $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $a_{i_1 \dots i_n} \neq 0$ und $i_1 + \dots + i_n = d$, dann heißt d *Grad* des Polynoms.

Konkrete Beispiele für $n = 3$: Ein Polynom ersten Grades hat dann die Form $p_1(x, y, z) = a_{100}x + a_{010}y + a_{001}z + a_{000}$ und eines zweiten Grades die Form $p_2(x, y, z) = p_1(x, y, z) + a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{002}z^2 + a_{110}xy + a_{011}yz + a_{101}xz$.

Die wichtigsten Approximationen werden für die meisten Anwendungen wie in Analysis 1 wieder die 0.te Ordnung (Stetigkeit) und die 1.te Ordnung (lineare Approximation, Ableitung) sein.

Was sind Probleme, in denen Differentialrechnung im \mathbb{R}^n eine Rolle spielt? Sehr viele Gleichungen in der Physik sind Gleichungen in Ableitungen der physikalischen Größen. Z.B. Bewegungsgleichungen, Gleichungen zur Bestimmung mechanischer Belastungen, Wärmeverteilungen, aber auch in der Beschreibung chemischer Reaktionen. Beschreibungen von Tönen, die aus Musikinstrumenten kommen, sind Differentialgleichungen.

Aber auch innermathematisch spielen Differentialgleichungen eine große Rolle, um Informationen über andere mathematische Sachverhalte zu erlangen. Z.B. ist eine

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

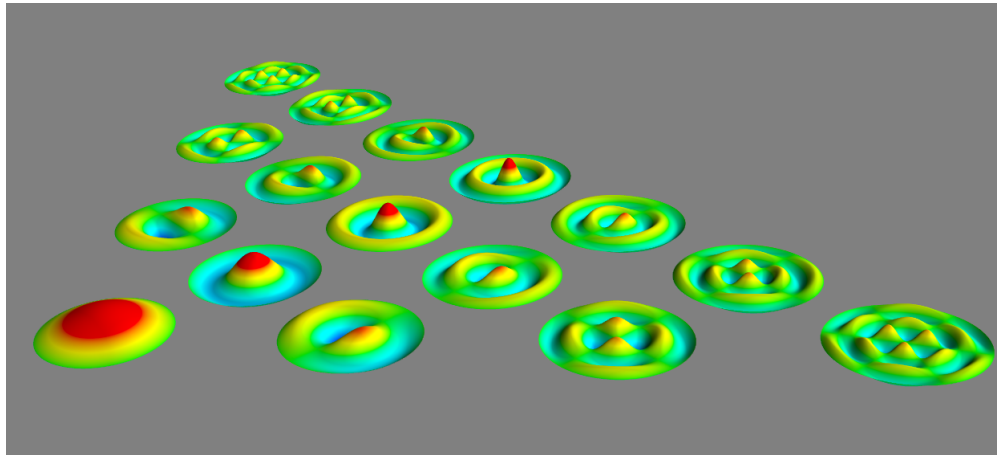


Abbildung 1.1.: Das sind die Auslenkungen einer runden Trommel, die dem Grundton (vorne links) oder den ersten Obertönen entsprechen.

klassische Frage innerhalb der Mathematik: Can you hear the shape of a drum? Was heißt das? Wenn man auf eine Trommel schlägt, erzeugt das Töne - i.A. einer Überlagerung von Grund- und Obertönen, vgl. Abbildung 1.1. Töne werden durch Eigenwerte von Differentialoperatoren (Abbildungen, die Ableitungen enthalten) beschrieben. Nun kann eine Trommel eine beliebige Form haben und sie wird immer noch Töne von sich geben, aber i.A. andere. Die Frage 'can you hear the shape a drum' ist die Frage nach: Falls ich alle Töne kenne, die eine Trommel von sich geben kann, weiß ich dann welche Form die Trommel hat?

Wir werden nach Analysis 2 nicht die meisten dieser Probleme gar nicht lösen können. Für viele davon braucht man mehr Wissen und Methoden - zum Beispiel aus 'Partielle Differentialgleichungen'. Aber wir werden die Gleichungen insbesondere zumindest überhaupt erst mal hinschreiben und verstehen können.

1.1. Stetigkeit

In Analysis 1 haben wir Stetigkeit mit dem $\epsilon - \delta$ -Kriterium (bzw. alternativ aber äquivalent die Folgenstetigkeit) eingeführt.

Stetigkeit in x_0 bedeutet in Worten: Egal wie beliebig 'nah' wie wir an $f(x_0)$ sein wollen (spezifiziert durch das ϵ), ist f stetig in x_0 , können wir, dass immer mit x -Werten erreicht, die 'nah genug' an x_0 sind (spezifiziert durch das δ), vgl. auch Abbildung 1.2.

Wir sehen: Um dass für Funktionen in anderen Räumen zu formulieren, z.B. für $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, brauchen wir also ein Möglichkeit 'nah genug' auszudrücken, was in \mathbb{R} mittels des euklidischen Betrages gemacht wird. Da wir auch im \mathbb{R}^n einen euklidischen Abstand haben, sehen wir, dass wir das direkt anpassen können, in dem wir im Bild 1.2

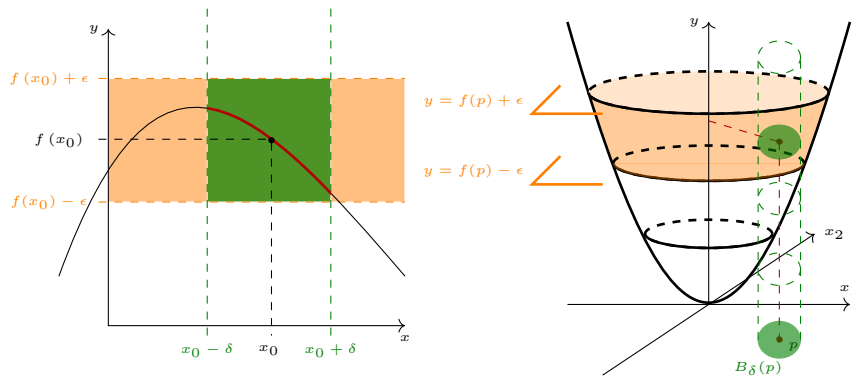


Abbildung 1.2.: Links: Für jedes $\epsilon > 0$ muss das $\delta > 0$ so gewählt werden, dass der rote Abschnitt der Kurve, also $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = f(B_\delta(x_0))$, vollständig im grünen Bereich liegt.

Rechts: Das analoge Bild für die Stetigkeitsdefinition für ein $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in $p \in \mathbb{R}^2$. Der ϵ -Ball um $f(p)$ ist noch immer ein offenes Intervall, da der Wertebereich \mathbb{R} ist. Alle Punkte des Graphen mit Funktionswert in diesem Intervall sind in dem orange gefärbten Annulus. Der δ -Ball um p ist nun eine Teilmenge des \mathbb{R}^2 - in grün.

aus Analysis 1, die Intervalle jeweils durch alle Punkte mit jeweils Abstand ϵ bzw. δ zu $f(x_0)$ bzw. x_0 ersetzen – so waren Bälle definiert:

$$B_\delta(x_0 \in \mathbb{R}^n) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < \delta\}.$$

Die Stetigkeitsdefinition für eine Funktion $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sieht also ganz analog wie in Analysis 1: f heißt in $x_0 \in A$ stetig, wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in A$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

gilt. Der Unterschied ist so kaum ersichtlich – der euklidische Abstand $|\cdot|$ ist hier diesmal nicht auf \mathbb{R} sondern auf \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{R}^m .

Wie würde das analoge 'Stetigkeitsbild' dann für Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ aussehen? Wir geben hier als Anschauung nur das Beispiel für Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, da wir höhere Dimensionen nicht so gut zeichnen können, vgl. Abbildung 1.2 rechts.

Was wir schon an der Verallgemeinerung von Analysis 1 auf den \mathbb{R}^n sehen, ist: Eigentlich braucht man nur irgendeine Abstandsfunktion auf Definitions- und Wertebereich der Funktion, um das ϵ - δ -Definition von Stetigkeit zu formulieren. Wir könnten also direkt auf metrische Räume verallgemeinern. Solche möglichen Verallgemeinerung sind eine Stärke der Mathematik, da man dann wie hier später einmal etwas für alle metrischen Räume zeigt und das nicht für jeden metrischen Raum extra machen muss. Aber man sollte Verallgemeinerungen auf abstraktere/allgemeiner Strukturen (wie hier von \mathbb{R}^n zu

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

allgemeinen metrischen Räumen) nicht aus Langeweile machen, sondern sich immer fragen, warum. Welche (relevanten) Fragen könnte man dann beantworten?

Man könnte zum Beispiel beantworten: Hängt Integration einer stetigen Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, also die Bildung von $\int_a^b f(x)dx$ stetig von f ab? D.h. im Prinzip wenn ich f nur 'wenig ändere' (was das heißt, wird von einem Abstandsbegriff abhängen, den ich für stetige Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ benutze), ändert sich dann auch $\int_a^b f(x)dx$ nur 'wenig'. Abgesehen, dass wir die Frage im Moment noch nicht rigoros formuliert haben, da der zuständige Abstandsbegriff noch nicht gewählt ist, sollte man sich fragen: Warum wäre das eine relevante Frage? Denkt man z.B. an numerische Integration, dann wird dort die zu integrierende Funktion i.A. approximiert (z.B. durch stückweise linear Funktionen) und von den Approximationen das Integral berechnet. Wäre Integration jetzt nicht (in einem geeigneten Sinne) stetig, dann könnte man sich das ganze sparen, da das Integral der Approximation halt nicht 'nahe' am Wert des gesuchten Integrals ist.

Da die Diskussion von Stetigkeit im \mathbb{R}^n und in metrischen Räumen fast identisch ist, und man durch diese Verallgemeinerung auf metrische Räume auch keinerlei zusätzliche Informationen über stetige Funktionen im \mathbb{R}^n außen vorlässt, wollen wir für Stetigkeit direkt in metrischen Räumen arbeiten und dadurch auch obige Frage beantworten.

Dazu wiederholen wir kurz die Definition von metrischen Räumen:

Definition. [2, Def. 4.1.21] Eine Menge X zusammen mit einer Funktion $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *metrischer Raum*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) (Definitheit) $d(p, q) \geq 0$ für alle $p, q \in X$ und falls $d(p, q) = 0$ genau dann gilt, wenn $p = q$ ist.
- (ii) (Symmetrie) $d(p, q) = d(q, p)$ für alle $p, q \in X$
- (iii) (Dreiecksungleichung) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$ für alle $p, q, r \in X$.

Wir schreiben dann (X, d) für den metrischen Raum und nennen d eine *Abstandsfunktion* auf X .

Beispiel 1.1.1.

- (i) Sei $I \subset \mathbb{R}$. Für Funktionen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir

$$C^0(I, \mathbb{R}) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig und } \sup_I |f| < \infty\}$$

sowie $d(f, g) = \sup_I |f - g| (= \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|)$. Das macht $C^0(I, \mathbb{R})^*$ zu einem metrischen Raum, vgl. [2, Bsp. 4.1.22].

Ist $I = [a, b]$, dann nimmt eine stetige Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ihr Maximum und Minimum an und somit ist $\sup_I |f|$ automatisch endlich, vgl. [2, Bsp. 4.1.34].[†]

* C steht für 'continuous' (engl. für stetig)

[†]Die Notation $C^0(I, \mathbb{R})$ wird nicht ganz einheitlich verwendet. Oft bedeutet es nur die Menge der stetigen Funktionen von I nach \mathbb{R} ohne die Einschränkung an das Supremum (Später $C^k(U \subset \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ist es ähnlich, dass bedeutet je nach Kontext entweder nur k -mal stetig differenzierbar Funktionen von U nach \mathbb{R}^n oder dies plus eine geeignete Norm ist endlich.).

1.1. Stetigkeit

Bei unserem motivierendes Beispiel von oben soll es dann, um die Frage der Stetigkeit der Abbildung

$$F: C^0([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f(x) dx$$

gehen.

- (ii) Für Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir

$$A := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ stetig differenzierbar}\}.$$

Das ist eine Teilmenge von $C^0([a, b], \mathbb{R})$. Wir können also A mit der Abstandsfunktion aus (i) versehen und so A zu einem metrischen Raum machen. Je nach Fragestellung wird jedoch oft

$$d(f, g) = \sup_{\Omega} |f' - g'| + \sup_{\Omega} |f - g|$$

die bessere Abstandsfunktion (Übungsaufgabe 2) sein. Den metrischen Raum A mit dieser Abstandsfunktion bezeichnen wir mit $C^1([a, b], \mathbb{R})$.*

- (iii) Auch wenn wir i.A. auf \mathbb{R}^n den euklidischen Abstand verwenden, gibt es noch unendlich viele andere Abstandsfunktionen auf \mathbb{R}^n , z.B.: Sei $n = n_1 + n_2$. Dann ist

$$d(x = (a \in \mathbb{R}^{n_1}, b \in \mathbb{R}^{n_2}), y = (c \in \mathbb{R}^{n_1}, d \in \mathbb{R}^{n_2})) := |a - c| + |b - d|$$

eine Abstandsfunktion auf \mathbb{R}^n , siehe Übungsaufgabe 4.

Wir können nun den Begriff der Stetigkeit und Folgenstetigkeit direkt für Funktionen zwischen metrischen Räumen einführen:

Definition 1.1.2 (Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen). Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume.

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Dann *konvergiert* x_n *gegen ein* $x \in X$ (geschrieben $x_n \rightarrow x$), falls es für alle $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $d_X(x, x_n) < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Eine Funktion $f: A \subset X \rightarrow Y$ heißt *in* $x_0 \in A$ *stetig*, wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in A$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

gilt. Die Funktion f heißt *stetig*, wenn f in allen $x \in A$ stetig ist.

Eine Funktion $f: A \subset X \rightarrow Y$ heißt *in* $x_0 \in A$ *folgenstetig*, wenn für alle Folgen $(x_n)_n$ in A mit $x_n \rightarrow x_0$ gilt, dass $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ ist. Die Funktion f heißt *folgenstetig*, wenn $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ in allen $x \in A$ folgenstetig ist.

* $C^i([a, b], \mathbb{R})$, $i = 0, 1$, sind mit der Addition und Skalierung von Funktionen Vektorräume und die Abstandsfunktionen hier kommen von geeigneten Normen $\|\cdot\|$ auf diesen Vektorräumen, d.h. $d(f, g) = \|f - g\|$.

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

Die Frage der Stetigkeit hängt i.A. davon ab, welche Abstandsfunktion man jeweils auf den Definitions- und Wertebereichen der Funktion benutzt, auch wenn man das in der Notation $f: X \rightarrow Y$ erst einmal nicht sieht. Wenn man die Abstandsfunktion hervorheben will oder Missverständnisse vermeiden will, schreibt man $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$.

Ebenso sieht man der Notation in der Definition der Konvergenz und der Folgenstetigkeit erst einmal nicht an, welche Abstandsfunktion verwendet wird. Um dies (wenn nötig) hervorzuheben, kann man z.B. $x \xrightarrow{d_X} x_0$ schreiben. Eindeutigkeit des Grenzwertes von konvergenten Folgen in metrischen Räumen folgt auch ganz analog wie in Analysis 1.

Achtung: Cauchyfolgen kann man in metrischen Räumen ganz analog definieren und jede konvergente Folge ist noch immer eine Cauchyfolge. Aber nicht in allen metrischen Räumen konvergieren Cauchyfolgen immer (z.B. \mathbb{Q} mit dem euklidischen Abstand) - im \mathbb{R}^n allerdings schon, vgl. [2, Abschnitt 3.9.1].

Beispiel 1.1.3.

(i) Die Abbildung

$$F: C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; f \mapsto \int_a^b f(x) dx$$

ist stetig.

Sei $f \in C([a, b])$ und $\epsilon > 0$. Wähle $\delta = \frac{\epsilon}{b-a}$

Dann gilt für alle $g \in C([a, b])$ mit $\sup_{[a, b]} |f - g| < \delta$

$$\begin{aligned} |F(g) - F(f)| &= \left| \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |g(x) - f(x)| dx \\ &\leq (b-a) \sup_{[a, b]} |f - g| < (b-a)\delta = \epsilon \end{aligned}$$

(ii) Betrachten wir nun einmal die Abbildung

$$F: \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig differenzierbar}\} \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}), f \mapsto f'$$

und wir fragen uns, ob diese stetig ist. Die Frage nach Stetigkeit ist davon abhängig, ob mit welcher Abstandsfunktion man die jeweiligen Räume versteht. Auf $C([a, b], \mathbb{R})$ wollen wir wie in Beispiel 1.1.1 $d_1(f, g) := \sup_{[a, b]} |f - g|$ verwenden. Aus X einmal auch d_1 und einmal $d_2(f, g) := \sup_{[a, b]} |f - g| + \sup_{[a, b]} |f' - g'|$. Dann ist $F: (X, d_2) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R})$ stetig, da $|F(g) - F(f)| = |g' - f'| \leq d_2(g, f)$ ist und wir somit $\delta = \epsilon$ wählen können. Aber $F: (X, d_1) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R})$ ist nicht stetig. Das werden wir überprüfen nachdem wir als nächstes sehen werden, dass auch in metrischen Räumen Stetigkeit gleich Folgenstetigkeit* ist.

*Es gibt Verallgemeinerung von Stetigkeit zwischen bestimmten Mengen, die noch nicht einmal mehr metrische Räume sind (sondern nur topologische Räume (man sagt dort im Prinzip was offene Mengen sind)). Dort muss i.A. Stetigkeit nicht mehr Folgenstetigkeit sein.

Lemma 1.1.4 (Stetigkeit = Folgenstetigkeit für Funktionen in metrischen Räumen). Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Sei $f: A \subset X \rightarrow Y$ eine Funktion und $x_0 \in A$. Dann ist die Funktion f genau dann in x_0 stetig, wenn sie in x_0 folgenstetig ist.

Wenn man etwas beweisen will, was man in einem spezielleren Kontext schon einmal bewiesen hat, lohnt es sich fast immer in den alten Beweis zu schauen und zu versuchen, in wie weit man den direkt anpassen an die allgemeinere Situation anpassen kann. Wir haben hier Glück, da dies hier direkt durch geht und keine zusätzliche Arbeit erfordert – Änderungen zum Beweis für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind in blau.

Beweis. Sei f zunächst in x_0 stetig, und sei $(x_n)_n$ eine Folge in A mit $x_n \rightarrow x_0$. Wir wollen zeigen, dass $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ für $n \rightarrow \infty$:

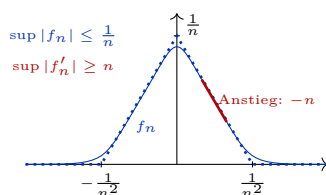
Sei $\epsilon > 0$. Aus der Stetigkeit folgt, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ für alle x mit $d_X(x, x_0) < \delta$ gilt.

Aus $x_n \rightarrow x_0$ folgt, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d_X(x_n, x_0) < \delta$ für alle $n \geq n_0$ gibt. Zusammen gilt also $d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ und somit $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ für $n \rightarrow \infty$.

Sei nun f folgenstetig in x_0 . Wir zeigen durch Beweis durch Widerspruch, dass f in x_0 stetig ist: Ist f in x_0 nicht stetig, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass es für alle $\delta > 0$ ein x mit $d_X(x, x_0) < \delta$ und $d_Y(f(x), f(x_0)) > \epsilon$ gibt. Für $\delta = \frac{1}{n}$ heiße ein solches x x_n . Dann gilt $d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ und somit geht $x_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$ während $d_Y(f(x_n), f(x_0)) > \epsilon$ gilt. Aber aus der Folgenstetigkeit folgt $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ für $n \rightarrow \infty$, was den Widerspruch gibt.* \square

Hätten wir 'nur' auf $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ hätte man die Anpassungen im Beweis gar nicht gemerkt, da die Notation für den euklidischen Abstand unabhängig der Dimension ist.

Weiter mit Beispiel 1.1.3(ii). Wir wollen zeigen, dass $f \mapsto f'$ nicht folgenstetig ist, wenn man auf dem Definitionsbereich die Abstandsfunktion von $C^0([a, b], \mathbb{R})$ nimmt. Dazu konstruieren wir eine Folge stetig differenzierbarer $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die in $C^0([a, b], \mathbb{R})$ gegen die Nullfunktion konvergiert, also $\sup_{[a, b]} |f_n| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, aber für die $\sup_{[a, b]} |f'_n| \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ gilt. O.B.d.A sei $[a, b] = [-1, 1]$.



Die erste Idee ist die blau-gepunktete Funktion als f_n . Das Supremum wäre dann $\frac{1}{n}$ und der Anstieg der Schrägen wäre im Betrag n . Allerdings ist f_n an den 'Knickstellen' nicht differenzierbar. Deshalb glätten wir diese Funktion in einer sehr kleinen Umgebung der Knickstelle, so dass immer noch ein Teil der Schrägen mit Anstieg n übrigbleibt.

*Verallgemeinerungen von Beweisen ist nicht immer ganz so einfach. Oft muss man schon mehr arbeiten (aber die Grundidee bleibt) und im Extremfall braucht man eine ganz neue Beweisstrategie.

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

Genau so wie für reellwertige Funktionen auf \mathbb{R} zeigt man für stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen, dass auch Hintereinanderausführungen stetiger Funktionen (mit geeigneten Definitionsbereichen) wieder stetig sind. Für stetige Funktionen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m sind auch Addition und Skalierung wieder stetig und im Spezialfall $m = 1$ auch Produkte und Quotienten (falls der Nenner nicht verschwindet) wieder stetig.*

Ganz analog wie in Analysis 1 gibt es für reellwertige stetige Funktionen auch einen Satz vom Maximum:

Satz 1.1.5 (Satz vom Maximum). *Sei $f: K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann nimmt f ihr Supremum und ihr Infimum an.*

Der Beweis ist (bis auf einige Anpassungen) identisch wie in der Version von Analysis 1, vgl. Übungsaufgabe.

Stetige Abbildungen lassen sich auch wie folgt charakterisieren:

Lemma 1.1.6. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge von Y eine offene Menge in X ist.[†]*

Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d_X) heißt offen, vgl. [2, Def. 4.1.23], wenn jeder Punkt ein innerer Punkt ist, also wenn es für jedes $p \in A$ ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon^X(p) := \{x \in X \mid d_X(x, p) < \epsilon\} \subset A$ gibt.

Beweis. Sei f stetig. Sei $B \subset Y$ offen. Wir wollen zeigen, dass $f^{-1}(B)$ eine offene Teilmenge von X ist. Dafür müssen wir zeigen, dass jeder Punkt aus $f^{-1}(B)$ ein innerer Punkt ist. Sei dazu $p \in f^{-1}(B)$, also $f(p) \in B$. Da B offen in Y ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon^Y(f(p)) \subset B$, d.h. $q \in B$ für alle $q \in Y$ mit $d_Y(q, f(p)) < \epsilon$. Da f in p stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$ mit $d_X(x, p) < \delta$ (also $x \in B_\delta^X(p)$) gilt: $d_Y(f(x), f(p)) < \epsilon$. Also gilt $f(B_\delta^X(p)) \subset B_\epsilon^Y(f(p))$ und somit $B_\delta^X(p) \subset f^{-1}(B_\epsilon^Y(f(p))) \subset f^{-1}(B)$. Damit ist p ein innerer Punkt von $f^{-1}(B)$ und somit $f^{-1}(B)$ offen in X .

Seien nun Urbilder offener Mengen wieder offen. Wir wollen zeigen, dass f stetig ist. Sei $p \in X$ und $\epsilon > 0$. Dann ist $B_\epsilon^Y(f(p)) \subset Y$ offen, vgl. [2, Bsp. 4.1.24], und somit muss das Urbild $f^{-1}(B_\epsilon^Y(f(p)))$ offen in X sein. D.h. $p \in f^{-1}(B_\epsilon^Y(f(p)))$ muss ein innerer Punkt und somit muss es ein $\delta > 0$ geben, so dass $B_\delta^X(p) \subset f^{-1}(B_\epsilon^Y(f(p)))$ gilt. Dann ist $f(B_\delta^X(p)) \subset B_\epsilon^Y(f(p))$ – das ist genau die Bedingung für Stetigkeit, denn ausgeschrieben bedeutet das: Für alle $x \in X$ mit $d_X(x, p) < \delta$ gilt $d_Y(f(x), f(p)) < \epsilon$. \square

Beispiel 1.1.7. Die Menge $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| - |y| < 1\}$ ist offen: Die Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto |x| - |y|$, ist stetig. Es gilt $A = f^{-1}((-\infty, 1))$. Da $(-\infty, 1)$ offen in \mathbb{R} ist und f stetig ist, ist A offen in \mathbb{R}^2 .

*Warum die Einschränkungen? Warum gelten nicht alle diese Aussagen auch für Funktionen auf allgemeinen metrischen Räumen? Weil man schon um diese Aussagen vernünftig formulieren zu können, mehr Struktur auf den metrischen Räumen braucht. Z.B. für die Addition von Funktionen braucht man eine Addition auf dem Wertebereich der Funktionen. Für \mathbb{R}^m haben wir das. Produkte dagegen haben wir im \mathbb{R}^m auch i.A. nicht, deshalb wollen wir da $m = 1$.

[†]In der Topologie wird das die Definition der Stetigkeit für Funktionen zwischen topologischen Räumen sein.

1.2. Linearisierung und totale Ableitung

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x - p|} = 0 \quad (\text{d.h. } |f(x) - g(x)| = o(|x - p|) \text{ f\"ur } x \rightarrow p). \quad (1.1)$$

Zum Vergleich f\"ur $k = \ell = 1$ hatten wir in Analysis 1 die gleiche Bedingung, vgl. [2, Satz 4.2.4 und darunter]. F\"ur $k = \ell = 1$ muss man nicht unbedingt um alles Betragsstriche setzen – im \mathbb{R}^k schon, sonst kann man den Quotienten gar nicht bilden. Das nach Setzen der Betragsstriche noch immer die gew\"unschte Bedingung abgebildet wird, benutzt: $z_n \rightarrow 0$ in \mathbb{R}^k genau dann, wenn $|z_n| \rightarrow 0$ in \mathbb{R} f\"ur $n \rightarrow \infty$ gilt.

Nehmen wir nun erst einmal an, dass solch ein g f\"ur gegebenes $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $p \in U$ existiert. Was k\"onnen wir dann \"uber g sagen?

Damit $\lim_{x \rightarrow p} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x - p|} = 0$ gilt, muss insbesondere $\lim_{x \rightarrow p} |f(x) - g(x)| = 0$ sein und somit, da g stetig ist, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = g(p)$. Aus Analysis 1 wissen wir, dass f\"ur $k = \ell = 1$ die Funktion f in p stetig sein muss, wenn es ein solches g gibt. Stimmt das auch hier allgemeiner? Wenn wir $f(p) = g(p)$ fordern, dann ja. Denn dann ist $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = g(p) = f(p)$.

Dann folgt, dass, wenn g existiert, es die Form $g(x) = A_p(x - p) + f(p)$ f\"ur eine $\ell \times k$ -Matrix A_p haben muss. Um auch $A_p = (a_{ij})_{ij}$ zu untersuchen, schauen wir uns den Limes in (1.1) genauer an. Sei dazu $p = (p_1, \dots, p_k)^T$. Damit der Limes gleich Null, muss der Ausdruck f\"ur alle Teilmengen von x mit $x \rightarrow p$ gegen Null gehen. Wir w\"ahlen $x = (p_1 + h, \dots, p_k)^T = p + he_1$ f\"ur $h \rightarrow 0$ (Hier ist e_1 der erste Standard-Basisvektor von \mathbb{R}^k). Dann folgt aus (1.1), dass

$$\frac{|f(p + he_1) - f(p) - A_p(h, 0, \dots, 0)^T|}{|h|} \rightarrow 0 \quad \text{f\"ur alle } h \rightarrow 0.$$

Mit $A_p(h, 0, \dots, 0)^T = h(a_{11}, \dots, a_{\ell 1})^T$ und $f = (f^1, \dots, f^\ell)^T$ die Komponentenfunktionen von f folgt

$$\frac{|f^i(p + he_1) - f^i(p) - a_{i1}h|}{|h|} \rightarrow 0 \quad \text{f\"ur alle } h \rightarrow 0,$$

also

$$a_{i1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^i(p + he_1) - f^i(p)}{h}.$$

Analog erh\"alt man alle a_{ij} . Betrachten wir die $f^i(p + he_1)$ als neue Funktion $\tilde{f}(h)$, also als reellwertige Funktion in einer Variablen, sehen wir das a_{i1} einfach die normale Ableitung ist. Dies f\"uhrt zum Begriff der partiellen Ableitung:

Definition 1.2.1 (Partielle Ableitungen). Sei $f: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ eine Funktion und sei $p \in U$. Seien e_j die Standard-Basisvektoren des \mathbb{R}^n .^{*} Die *partielle Ableitung* von f bzgl. der j -ten Koordinate in p ist gegeben durch

$$\partial_j f(p) := \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(p + he_j) - f(p)).$$

^{*} $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^k$ mit der 1 an j -ter Position des k -Tupels.

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

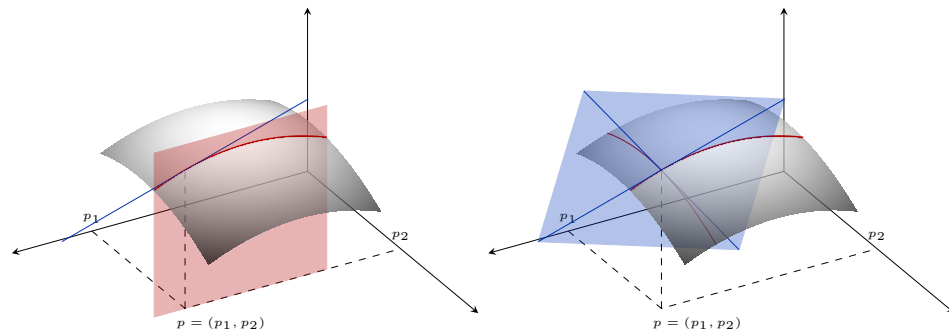


Abbildung 1.3.: Graph einer Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Links: Partielle Ableitung in Richtung der ersten Koordinate. Die Funktion wird nur als Funktion der ersten Koordinate aufgefasst, die zweite Koordinate bleibt konstant p_2 . Das ergibt den roten Funktionsgraph. Dessen Ableitung ist die partielle Ableitung in erster Koordinatenrichtung in p .

Rechts: Die blaue Ebene (Tangentialebene) ist der Graph von $x \mapsto f(p) + D_p f(x - p)$.

Existieren alle partiellen Ableitungen in p nennen wir f in p *partiell differenzierbar*.

Der Limes hier ist ein Limes in \mathbb{R}^ℓ , da $f(p + he_j) - f(p) \in \mathbb{R}^\ell$. Aus Analysis 1 wissen wir, dass dann $(\partial_j f(p))^i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f^i(p + he_j) - f^i(p)) = \partial_j f^i(p)$ ist. Oben haben wir uns überlegt, dass wenn es ein g wie in (1.1) gibt, dass dann $A_p = (\partial_j f^i(p))_{ij}$ gilt.

Beim Berechnen der partiellen Ableitungen in Richtung der i -ten Koordinate tun wir so, als ob f nur eine Funktion der i -ten Koordinate ist und alle anderen Koordinate fest gelassen werden und wir bilden dann die Ableitung (im Sinne der Analysis 1) dieser neuen Funktion, vgl. Abbildung 1.3 links.

Definieren wir nun noch formal, wann eine Funktion in mehreren Variablen differenzierbar ist und setzen alles zusammen:

Definition 1.2.2 (Totale Ableitung). Eine Funktion $f: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ heißt in $p \in U$ (total) differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $D_p f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ mit

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p) - D_p f(x - p)}{|x - p|} = 0$$

gibt. $D_p f$ heißt dann (totale) Ableitung von f in p .

Differenzierbarkeit ist also äquivalent zu Existenz einer affinen Abbildung g mit (1.1) – dann ist $g(x) = f(p) + D_p f(x - p)$, siehe Abbildung 1.3 rechts. Von unseren Vorüberlegungen wissen wir, dass ein $f: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$, welches in $p \in U$ differenzierbar ist, dort auch stetig sein muss.

1.2. Linearisierung und totale Ableitung

Stellt man $D_p f$ bzgl. der Standardbasen auf \mathbb{R}^k und \mathbb{R}^ℓ dar, ist $D_p f = A_p = (\partial_j f^i(p))_{ij}$ – Diese Matrix heißt *Jacobimatrix*. Für $k = \ell = 1$ ist $D_p f = f'(p)$, wobei hier dann $f'(p) \in \mathbb{R}$ als lineare Abbildung (' 1×1 -Matrix') $D_p f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(p)x$ aufgefasst wird.

Wir wollen nun mal $D_p f(v \in \mathbb{R}^k)$ bestimmen. Dazu setzen wir $x = p + hv$ in der Definition von $D_p f$ und erhalten für $v \neq 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + hv) - f(p) - D_p f(hv)}{|hv|} = 0$$

und da $D_p f$ linear ist, folgt somit

$$D_p f(v) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(p + hv) - f(p)).$$

Dieses $D_p f(v)$ wird *Richtungsableitung* von f in p in Richtung von $v \in \mathbb{R}^k$ genannt. Partielle Ableitungen sind also einfach nur ein Spezialfall von Richtungsableitungen: $D_p f(e_i) = \partial_i f(p)$. Der Vorteil von Richtungsableitungen gegenüber partielle Ableitungen wird später sein, dass man diese auch in unendlich dimensionalen normierten Vektorräumen formulieren kann, wo man halt keine Koordinaten mehr hat.

Beispiel 1.2.3.

- (i) Sei $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ eine lineare Abbildung. In Standardkoordinaten hat f die Form $f(x) = Bx$ für eine $\ell \times k$ -Matrix B . Dann gilt $D_p f = B$ für alle $p \in \mathbb{R}^k$, da

$$\frac{f(x) - f(p) - B(x - p)}{|x - p|} = \frac{Bx - Bp - B(x - p)}{|x - p|} = 0$$

ist.

- (ii) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $p = (x, y, z)^T \mapsto (x^3 + yz, z)^T$. Wir wollen mal ganz konkret nachrechnen, dass f in $0 = (0, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^3$ differenzierbar ist: Um die Definition nachzurechnen brauchen wir einen Kandidaten für die Ableitung $D_0 f$. Diese müsste dann durch die partiellen Ableitungen gebildet sein:

$$D_0 f = \begin{pmatrix} 3x^2 & z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big|_{x=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um zu sehen, dass dies wirklich die Ableitung ist, berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{f(p) - f(0) - D_0 f(p - 0)}{|p|} &= \frac{1}{|p|} \left(\begin{pmatrix} x^3 + yz \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{|p|} \begin{pmatrix} x^3 + yz \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

und haben somit

$$\left| \frac{f(p) - f(0) - D_0 f(p - 0)}{|p - 0|} \right| \leq \frac{|x|^3 + |y||z|}{|p|} \leq \frac{|p|^3 + |p|^2}{|p|} = |p|^2 + |p| \rightarrow 0$$

für $p \rightarrow 0$.

- (iii) Ist eine Funktion total differenzierbar in p , besteht die Matrixdarstellung der Ableitung aus den partiellen Ableitungen in p . Insbesondere ist also f dann auch partiell differenzierbar in p . Man könnte also hoffen, dass auch die Umkehrung gilt. Wenn ja, dann hätten wir in (ii) nach der Berechnung von $D_0 f$ direkt aufhören können. Leider stimmt das nicht: Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist im Ursprung partiell differenzierbar (Es ist $\partial_1 f(0, 0) = 0$ und wegen Symmetrie auch $\partial_2 f(0, 0) = 0$). Aber f ist in $(0, 0)$ nicht stetig, da $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{n^2}{4} \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ gilt. Da aber f nicht stetig ist, kann es auch nicht differenzierbar sein.

Wie in Analysis 1 haben wir (Beweis Übungsaufgabe 7)

Satz 1.2.4 (Ableitung und lineare Approximation). Sei $f: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ eine Funktion und $p \in U$. Dann ist f genau dann in p differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $A_p: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ und eine Funktion $r: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$, welche in p stetig ist, gibt mit $r(p) = 0$ und

$$f(x) = f(p) + A_p(x - p) + |x - p|r(x)$$

Insbesondere ist dann $A_p = D_p f$.

In Beispiel 1.2.3 haben wir ja festgestellt, dass um herauszufinden, ob eine Funktion differenzierbar ist, wir zwar mittels partieller Ableitungen den einzig möglichen Kandidaten für die totale Ableitung erhalten, aber daraus noch nicht unbedingt die Existenz der Ableitung, also die Differenzierbarkeit, folgt. In diesem Beispiel hatten wir dann noch mal mit dem Kandidaten explizit die Definition der Differenzierbarkeit nachgerechnet. Im Folgenden werden wir ein Differenzierbarkeitskriterium kennenlernen, was das in vielen Fällen vereinfacht. Dazu zunächst noch eine Aufgabe.

Definition 1.2.5. Wir nennen eine Funktion $f: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ stetig partiell differenzierbar, wenn sie partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen stetig sind. Die Funktion f heißt stetig differenzierbar, wenn sie differenzierbar und stetig partiell differenzierbar ist.*

Satz 1.2.6 (Differenzierbarkeitskriterium). Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ eine Funktion. Dann ist f genau dann stetig differenzierbar, wenn f stetig partiell differenzierbar ist.

*vgl. Bonusübungsaufgabe auf Blatt 2

1.2. Linearisierung und totale Ableitung

Lässt man das 'stetig' vor dem (partiell) differenzierbar weg, dann stimmt diese Aussage nicht mehr als 'genau dann, wenn'-Aussage. Aus partiell differenzierbar muss nicht differenzierbar folgen – s. Beispiel 1.2.3.iii.

Beweis. \implies klar nach Definition

\Leftarrow Wir zeigen die Aussage für $\ell = 1$. Der allgemeine Fall folgt dann direkt, da Konvergenz im \mathbb{R}^ℓ äquivalent zu Konvergenz in jeder Komponente ist. Sei $p \in U$. Der Kandidat für die Ableitung in p ist $A_p: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $A_p = (\partial_j f(p))_j$ (als $1 \times k$ -Matrix). Da f stetig partiell differenzierbar ist, ist $p \mapsto \partial_j f(p)$ stetig. Es bleibt zu überprüfen, dass A_p auch die Ableitung von f ist, also das gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p) - A_p h}{|h|} = 0,$$

(hier ist $h \in \mathbb{R}^k$). Wir wissen, dass f partiell differenzierbar ist. Um dies zu nutzen, zerlegen wir $h = (h_1, \dots, h_k)^T = \sum_{i=1}^k h_i e_i$ und setzen $p_n = p + \sum_{i=1}^n h_i e_i$ für $n = 0, \dots, k$. Es ist $p_0 = p$ und $p_k = p + h$. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz aus Analysis 1 ein $s_n \in [0, 1]$ mit

$$f(p_n) - f(p_{n-1}) = f(p_{n-1} + h_n e_n) - f(p_{n-1}) = \partial_n f(p_{n-1} + s_n h_n e_n) h_n.$$

Damit haben wir mit $A_p h = \sum_{i=1}^k \partial_i f(p) h_i$

$$\begin{aligned} \frac{f(p+h) - f(p) - A_p h}{|h|} &= \frac{1}{|h|} \left| \sum_{i=1}^k (f(p_i) - f(p_{i-1}) - \partial_i f(p) h_i) \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \sum_{i=1}^k (\partial_i f(p_{i-1} + s_i h_i e_i) - \partial_i f(p)) h_i \right| \leq \sum_{i=1}^k \left| \partial_i f \left(p + \sum_{j=1}^{i-1} h_j e_j + s_i h_i e_i \right) - \partial_i f(p) \right|. \end{aligned}$$

Für $h \rightarrow 0$ geht $p + \sum_{j=1}^{i-1} h_j e_j + s_i h_i e_i \rightarrow p$, da dann die $h_i \rightarrow 0$ gehen und die s_i zwar von h abhängen aber beschränkt sind. Da die partiellen Ableitungen stetig sind, geht die rechte Seite für $h \rightarrow 0$ gegen 0. \square

Wie wir schon in Analysis 1 gesehen haben, ist stetig differenzierbar eine stärkere Forderung als 'nur' differenzierbar. Aber es zeigt uns, dass wenn wir eine Funktion haben, deren partielle Ableitungen stetig ist, dann ist sie schon f differenzierbar. So hatten wir an der Matrix mit den partiellen Ableitungen in Beispiel 1.2.3.ii schon sehen können, dass die Einträge alle stetig sind und somit das f dort auf ganz \mathbb{R}^3 (stetig) differenzierbar ist.

Um in konkreten Fällen wieder besser rechnen zu können, kommen wir nun zu Ableitungsregeln, die uns wieder helfen werden zusammengesetzte Funktionen abzuleiten:

Woche 2

Satz 1.2.7 (Ableitungsregeln). Seien $f, g: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ differenzierbar in $p \in U$.

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

(i) Linear: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ in p differenzierbar mit

$$D_p(\alpha f + \beta g) = \alpha D_p f + \beta D_p g.$$

(ii) Für $\ell = 1$ gilt die Produktregel: fg ist in p differenzierbar mit

$$D_p(fg) = g(p)D_p f + f(p)D_p g.$$

(iii) Für $\ell = 1$ und $g(p) \neq 0$ gilt die Quotientenregel: $\frac{f}{g}$ ist auf einer Umgebung von p definiert und es gilt

$$D_p \frac{f}{g} = \frac{1}{g(p)^2} (g(p)D_p f - f(p)D_p g).$$

Beweis. (i)

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha f + \beta g)(p+h) - (\alpha f + \beta g)(p) - (\alpha D_p f + \beta D_p g)(h)}{|h|} \\ &= \alpha \frac{f(p+h) - f(p) - D_p f(h)}{|h|} + \beta \frac{g(p+h) - g(p) - D_p g(h)}{|h|} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $h \rightarrow 0$.

(ii) und (iii) geht auch ähnlich wie in Analysis 1* – wir beschränken uns hier auf die Produktregel. Die Quotientenregel ist Übungsaufgabe 7. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung (und Addition von Null) erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(fg)(p+h) - (fg)(p) - (g(p)D_p f + f(p)D_p g)(h)}{|h|} \right| \\ & \leq \left| g(p) \frac{f(p+h) - f(p) - D_p f(h)}{|h|} \right| + \left| f(p+h) \frac{g(p+h) - g(p) - D_p g(h)}{|h|} \right| \\ & \quad + \left| \frac{f(p) - f(p+h) - D_p f(h)}{|h|} \right| |D_p g(h)| + \frac{|D_p f(h)| |D_p g(h)|}{|h|} \end{aligned}$$

Da f insbesondere auch stetig ist und nach Übungsaufgabe 1 gilt $|D_p f(h)| \leq \|D_p f\| |h|$, geht die rechte Seite für $h \rightarrow 0$ auch gegen Null. \square

Satz 1.2.8 (Kettenregel). Seien $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^r$ mit U, V offen und $f(U) \subset V$. Sei f in p und g in $f(p)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ in p differenzierbar und es gilt

$$D_p(g \circ f) = D_{f(p)} g \circ D_p f.$$

*Nur hatten wir in Analysis 1 bei der Berechnung des Grenzwertes oft nur $\frac{1}{h}(f(p+h) - f(p))$ für $h \rightarrow 0$ betrachtet. Das ging dort, weil $f'(p)$ eine reelle Zahl ist – sich in $\frac{D_p f(h)}{|h|}$ also das h , da reell, rauskürzt. Das funktioniert in mehreren Dimensionen nicht mehr, deshalb betrachten wir dort $\frac{1}{h}(f(p+h) - f(p) - D_p f(h))$

1.2. Linearisierung und totale Ableitung

Auf dem Level der Jacobimatrizen:

$$\partial_{x_k}(g \circ f)^i(p) = \sum_{j=1}^m \partial_{y_j} g^i(f(p)) \partial_{x_k} f^j(p).$$

Bevor den Satz beweisen, schauen wir erst einmal, ob im Fall $n = m = r = 1$ dies mit der Kettenregel aus Analysis 1 übereinstimmt: Dann ist $D_p(g \circ f) = (g \circ f)'(p) = g'(f(p))f'(p) = D_{f(p)}g \circ D_p f$.

Beweis. Wir kürzen ab: $A = D_p f$ und $B = D_{f(p)}g$. Dann ist nach Satz 1.2.4

$$f(x) = f(p) + A(x - p) + |x - p|r(x), \quad g(y) = g(f(p)) + B(y - f(p)) + |y - f(p)|s(y)$$

für Funktionen $r: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $s: V \rightarrow \mathbb{R}^r$, die in p bzw. $f(p)$ stetig sind und $r(p) = 0$ sowie $s(f(p)) = 0$ erfüllen. Somit haben wir für $x \neq p$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(f(p)) + B(f(x) - f(p)) + |f(x) - f(p)|s(f(x)) \\ &= (g \circ f)(p) + B(A(x - p) + |x - p|r(x)) + |A(x - p) + |x - p|r(x)||s(f(x)) \\ &= (g \circ f)(p) + BA(x - p) + |x - p|\left(Br(x) + \left|A\left(\frac{x - p}{|x - p|}\right) + r(x)\right|s(f(x))\right). \end{aligned}$$

Wir setzen $t: U \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^r$, $t(x) := Br(x) + \left|A\left(\frac{x - p}{|x - p|}\right) + r(x)\right|s(f(x))$. Um Satz 1.2.4 anzuwenden, bleibt es zu zeigen, dass t in p durch Null stetig fortsetzbar ist: Das folgt, da $r(p) = 0$, $s(f(p)) = 0$, Multiplikation mit B stetig ist und nach Übungsaufgabe 1 $A\left(\frac{x - p}{|x - p|}\right)$ beschränkt ist.

Somit folgt nach Satz 1.2.4 $BA = D_p(g \circ f)$. Die Identität auf dem Level der Jacobimatrizen erhält man einfach direkt durch Matrixmultiplikation. \square

Beispiel 1.2.9.

- (i) Sei $r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T \mapsto |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ die euklidische Abstandsfunktion zum Ursprung. Für $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ existieren die partiellen Ableitungen

$$\partial_i r(x) = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_i}{|x|} = \frac{x_i}{r(x)}.$$

Da diese partiellen Ableitungen für $x \neq 0$ stetig sind, ist r auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ differenzierbar nach dem Differenzierbarkeitskriterium. In $x = 0$ ist r nicht Richtung der i .te Koordinaten partiell differenzierbar, da $r(0 + he_i) = |h|$ nicht in $h = 0$ differenzierbar ist.

- (ii) Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y)^T \mapsto (x^2 + y^2, x, xy)^T$ und $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z)^T \mapsto (xy, yz)^T$. Beide Funktionen sind differenzierbar. Wir wollen mal sehr explizit die Kettenregel anwenden: Es ist

$$D_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \quad D_{(x,y,z)}g = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \end{pmatrix}$$

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

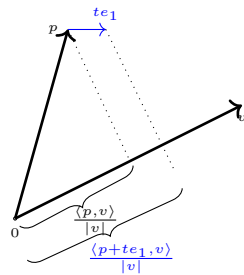
und somit

$$\begin{aligned} D_{(p,q)}(g \circ f) &= D_{(p^2+q^2, p, pq)}g \circ D_{(p,q)}f = \begin{pmatrix} p & p^2+q^2 & 0 \\ 0 & pq & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2p & 2q \\ 1 & 0 \\ q & p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2p^2+p^2+q^2 & 2qp \\ 2pq & p^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man kann das natürlich auch für $g(f((x,y)^T)) = ((x^2+y^2)x, x^2y)^T$ direkt nachrechnen.

- (iii) Sei $v \in \mathbb{R}^2$ und $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto \langle p, v \rangle$. Wir suchen $\partial_1 f$: Sei $v = (v_1, v_2)^T$. Dann ist

$$\partial_1 f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+te_1) - f(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle p+te_1, v \rangle - \langle p, v \rangle}{t} = \langle e_1, v \rangle = v_1$$



Die partiellen Ableitungen sind konstant und damit insbesondere stetig. Damit ist $D_p f = (v_1, v_2)$. (Aus Symmetriegründen ist dann $\partial_2 f(p) = v_2$.) *

- (iv) Sei $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform (Das heißt in Koordinaten: Es gibt eine symmetrische Matrix $B = (b_{ij} := b(e_i, e_j))_{ij}$ mit $b(x, y) = x^T B y = \langle x, B y \rangle$). Die zugehörige *quadratische Form* sei definiert als

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto b(x, x).$$

Wir suchen die Ableitung von f in x . Man könnte alles in Koordinaten schreiben und dann die (stetigen) partiellen Ableitungen bestimmen. Wir machen es aber direkt mit der Definition:

$$f(x+h) - f(x) = b(x+h, x+h) - b(x, x) \stackrel{\text{bilin.} + \text{symm}}{=} 2b(x, h) + b(h, h).$$

Hier ist $b(x, h)$ linear in h (da b bilinear) und weiterhin gilt

$$\frac{|b(h, h)|}{|h|} = \frac{|\langle h, B h \rangle|}{|h|} \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} |B h| \rightarrow 0$$

für $h \rightarrow 0$ wegen Stetigkeit der Matrixmultiplikation, vgl. Beispiel 1.2.3.i oder alternativ kann man Übungsaufgabe 1 verwenden. Also ist $b(h, h) = o(|h|)$ und somit ist $D_x f(h) = 2b(x, h)$.

*Die partiellen Ableitungen könnte man hier auch ausrechnen, in dem man die Abbildung direkt in Koordinaten hinschreibt. Es wird aber später auch Beispiele geben, wo das nicht so einfach ist, da wird diese Vorgehensweise zur Bestimmung der totalen Ableitung manchmal besser sein.

1.2. Linearisierung und totale Ableitung

- (v) **(Ableitung entlang einer Kurve)** Sei $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ eine differenzierbare Funktion. Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist $f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ eine differenzierbare Funktion (nun in einer Variablen) und es gilt nach Kettenregel

$$(f \circ \gamma)'(t) \stackrel{1D}{=} D_t(f \circ \gamma) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} D_{\gamma(t)}f \circ D_t\gamma = D_{\gamma(t)}f(\gamma'(t)).$$

Kommen wir nun zur mehrdimensionalen Version von: Für $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ folgt $f' = 0$ folgt, dass f konstant ist.

Lemma 1.2.10. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und wegzusammenhängend, d.h. für je zwei Punkte $p, q \in U$ gibt es eine stetige Funktion $c: [0, 1] \rightarrow U$ mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$. Sei $f: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ differenzierbar mit $Df = 0$. Dann ist f konstant.

Wegzusammenhängend ist hier nötig, denn wäre U diese nicht, also z.B. $U = B_1(0) \cup B_1(2e_1)$, dann könnte f auf jedem dieser Bälle noch konstant, aber die Konstanten könnten verschieden sein. In Analysis 1 hatten wir diesen Problem dadurch gelöst, dass wir diese Aussage nur für Funktionen auf Intervallen formuliert haben und diese sind wegzusammenhängend.

Beweis von Lemma 1.2.10. Wir zeigen zuerst, dass f lokal konstant ist, d.h. für jedes $p \in U$ gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $f|_{B_\epsilon(p) \cap U}$ ist konstant (Dafür braucht man noch nicht wegzusammenhängend): Da U offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(p) \subset U$. Sei $q \in B_\epsilon(p)$. Dann ist $\gamma: [0, 1] \rightarrow B_\epsilon(p)$, $t \mapsto p + t(q - p)$ differenzierbar. Wir betrachten $f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^\ell$. Es gilt $(f \circ \gamma)'(t) = D_t(f \circ \gamma) = D_{\gamma(t)}f(\gamma'(t)) = 0$. Aus Analysis 1 folgt $f \circ \gamma$ ist konstant, also gilt $f(p) = f(q)$ für alle $q \in B_\epsilon(p)$.

Sei nun $p, q \in U$. Nehmen wir an, es gibt eine stetige stückweise lineare Kurve $c: [0, 1] \rightarrow U$ mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$, d.h. c ist stetig und es gibt $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$, so dass $c|_{[t_i, t_{i+1}]}(s) = c(t_i) + \frac{s-t_i}{t_{i+1}-t_i}(c(t_{i+1}) - c(t_i))$ für $i = 0, \dots, n-1$ gilt. Dann folgt wie oben $f(p) = f(c(t_0)) = f(c(t_1)) = \dots = f(c(t_{n-1})) = f(c(t_n)) = f(q)$. Es bleibt zu zeigen, dass für U wegzusammenhängend und U offen, je zwei Punkte immer durch eine solche stetige stückweise lineare Kurve verbunden werden können. Das stimmt. Den Beweis lagern wir in das folgende Lemma 1.2.11 aus. \square

Bevor wir zum noch fehlenden Lemma für den letzten Beweis kommen: Die Methode Aussagen für Funktionen f in mehreren Variablen zu zeigen, in dem man sich Kurven γ im Definitionsbereich anschaut und dann $f \circ \gamma$ mit Hilfe der Aussagen aus Analysis 1 behandelt, ist recht hilfreich und taucht oft auf.

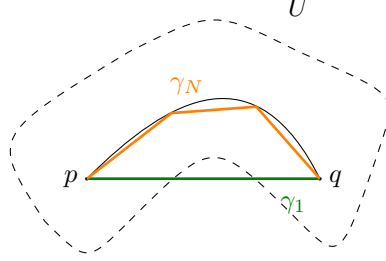
Lemma 1.2.11. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend. Dann gibt es eine stetige stückweise lineare Kurve $c: [0, 1] \rightarrow U$ mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$, d.h. c ist stetig und es gibt $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = 1$, so dass $c|_{[t_i, t_{i+1}]}(s) = c(t_i) + \frac{s-t_i}{t_{i+1}-t_i}(c(t_{i+1}) - c(t_i))$ für $i = 0, \dots, N-1$ gilt.

Das klingt, als ob es klar wäre, aber man muss sich in Erinnerung rufen, dass man sich meist nur 'schöne/glatte' Kurven vorstellt. Stetig Kurven können aber sehr unintuitiv sein, z.B. können stetige Kurven ein Quadrat vollständig ausfüllen.*

*s. https://en.wikipedia.org/wiki/Space-filling_curve

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

Beweis. Seien $p, q \in U$. Da U wegzusammenhängend ist, gibt es eine stetige Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$. Die Idee um einen stetige stückweise lineare Kurve von p nach q zu erhalten, ist nun γ durch einen geeigneten Polygonzug anzunähern.



Da U offen ist, erwarten wir, dass, wenn die Aufteilung des Polygonzugs fein genug ist, dieser vollständig in U liegt und uns das gewünschte c liefert. Das ist nun zu zeigen: Für $N \in \mathbb{N}$ sei $\gamma_N: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ die stückweise lineare Kurve mit $\gamma_N(\frac{k}{N}) = c(\frac{k}{N})$ für $k = 0, \dots, N$. Also (wenn wir $t_k = \frac{k}{N}$ setzen)

$$\gamma_N|_{[t_k, t_{k+1}]}(t) = \gamma(t_k) + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}(\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)).$$

Wir zeigen zuerst, dass γ_N für $N \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen γ konvergiert, also dass gilt $\sup_{t \in [0, 1]} |\gamma_N(t) - \gamma(t)| \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$ gilt:

Da γ eine stetige Funktion auf einem abgeschlossen Intervall ist, ist jede Komponentenfunktion gleichmäßig stetig [2, Satz 4.5.10] und damit ist auch γ selbst gleichmäßig stetig, d.h.: Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $s, t \in [0, 1]$ mit $|s - t| < \delta$

$$|\gamma(t) - \gamma(s)| < \epsilon$$

gilt. Sei nun $N > \frac{1}{\delta}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\gamma_N(t) - \gamma(t)| &\leq \sup_{\substack{k=0, \dots, N \\ t \in [t_k, t_{k+1}]}} \left| \gamma(t_k) + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}(\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)) - \gamma(t) \right| \\ &\leq \sup_{\substack{k=0, \dots, N \\ t \in [t_k, t_{k+1}]}} (|\gamma(t_k) - \gamma(t)| + |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)|) < 2\epsilon \end{aligned}$$

Also konvergiert γ_N für $N \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen γ . Es bleibt nun zu zeigen, dass das Bild von γ zu allen Punkten außerhalb von U einen Mindestabstand haben muss, d.h. dass es ein $a > 0$ mit $|x - \gamma(t)| > a$ für alle $t \in [0, 1]$ und $x \in \mathbb{R}^k \setminus U$. Dann dann folgt mit der gleichmäßigen Konvergenz von oben, dass für N groß genug das Bild von γ_N vollständig in U liegt, was zu zeigen war:

Angenommen, dass wäre falsch. Dann gibt es Folgen $t_i \in [0, 1]$ und $x_i \in \mathbb{R}^n \setminus U$ mit $|x_i - \gamma(t_i)| \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$. Da $[0, 1]$ kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $t_{i_j} \rightarrow T \in [0, 1]$ für $j \rightarrow \infty$ und somit wäre

$$|x_{i_j} - \gamma(T)| \leq |x_{i_j} - \gamma(t_{i_j})| + |\gamma(t_{i_j}) - \gamma(T)| \rightarrow 0$$

für $j \rightarrow \infty$. Also $x_{i_j} \rightarrow \gamma(T) \in U$. Da aber $\mathbb{R}^n \setminus U$ abgeschlossen ist, würde daraus $\gamma(T) \in \mathbb{R}^n \setminus U$ folgen, was den Widerspruch gibt. \square

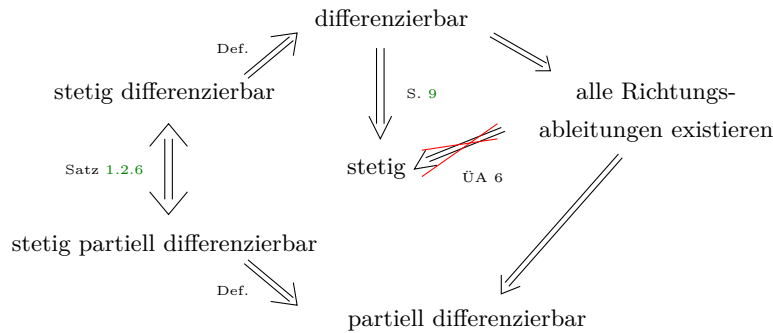


Abbildung 1.4.: Übersicht über die verschiedenen Differenzierbarkeitsbegriffe in mehreren Variablen

1.3. Höhere partielle Ableitungen

Wir würden nun gerne auch höhere Ableitungen bilden können: Ist $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ eine partiell differenzierbare Funktion, dann ist für alle $j = 1, \dots, k$ die partielle Ableitung $\partial_j f$ wieder eine Abbildung von \mathbb{R}^k nach \mathbb{R}^ℓ . Von diesen partiellen Ableitungen können wir wieder fragen, ob diese partiell differenzierbar sind. Falls ja erhalten wir so partielle Ableitungen höherer Ordnung.

Beispiel 1.3.1. Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^3 + xy$. Dann ist $\partial_x f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x + y$ auch wieder differenzierbar und wir haben $\partial_x \partial_x f(x, y) = 2$, $\partial_y \partial_x f(x, y) = 1$. Analog gilt dies auch für $\partial_y f$ mit $\partial_y f(x, y) = 3y^2 + x$ und $\partial_x \partial_y f(x, y) = 1$, $\partial_y \partial_1 f(x, y) = 6y$.

Notation. Wir schreiben

$$\frac{\partial^\ell}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_\ell}} f := \partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_\ell} f = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_\ell}} f.$$

In Analogie zu stetig differenzierbar definieren wir:

Definition 1.3.2. Eine Funktion $f: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$, $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, heißt n -mal stetig differenzierbar falls alle partiellen Ableitungen von f bis zur n -ten Ordnung existieren und stetig sind.

Im letzten Beispiel galt $\partial_y \partial_x f(x, y) = \partial_x \partial_y f(x, y)$. Das war kein Zufall:

Satz 1.3.3 (Satz von Schwarz). Sei $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zweimal stetig differenzierbar. Dann vertauschen die zweiten partiellen Ableitungen, d.h.

$$\partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f$$

für alle $1 \leq k, j \leq n$.

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

Beweis. Für die bessere Übersichtlichkeit benutzen wir im Folgenden die Bezeichnung

$$(\Delta_t^i g)(x) := \frac{1}{t} (g(x + te_i) - g(x)).$$

Da f zweimal partiell differenzierbar ist, haben wir

$$\lim_{s \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} (\Delta_s^i (\Delta_t^j f))(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta_s^i (\lim_{t \rightarrow 0} (\Delta_t^j f))(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta_s^i (\partial_j f)(x) = \partial_i \partial_j f(x)$$

Das erste Gleichheitszeichen benutzt die Rechenregeln für konvergente Folgen – sieht man direkt, wenn man Δ_t^i ausschreibt.

Wir wollen nun $(\Delta_s^i (\Delta_t^j f))(x)$ auf andere Weise ausrechnen. Dazu benutzen wir: Ist g in x in i -ter Richtung partiell differenzierbar, dann folgt aus dem Mittelwertsatz in einer Variablen, dass es ein $\alpha \in (0, 1)$ mit

$$(\Delta_t^i g)(x) = \partial_i g(x + \alpha te_i)$$

gibt.

Damit gilt für ein $\beta = \beta(t, s) \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} (\Delta_s^i (\Delta_t^j f))(x) &= \partial_i (\Delta_t^j f)(x + \beta se_i) = \frac{1}{t} \partial_i (f(x + \beta se_i + te_j) - f(x + \beta se_i)) \\ &= \Delta_t^j (\partial_i f)(x + \beta se_i). \end{aligned}$$

Da $\partial_i f$ noch immer partiell differenzierbar ist, können wir noch einmal den Mittelwertsatz anwenden und erhalten ein $\alpha = \alpha(t, s) \in (0, 1)$ mit

$$(\Delta_s^i (\Delta_t^j f))(x) = \partial_j \partial_i f(x + \beta se_i + \alpha te_j).$$

Da $\partial_j \partial_i f$ stetig ist und α, β beschränkt in t, s sind, folgt

$$\lim_{s \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} (\Delta_s^i (\Delta_t^j f))(x) = \partial_j \partial_i f(x). \quad \square$$

Für die Bildung der zweiten partiellen Ableitungen muss die Funktion nur zweimal partiell differenzierbar sein, aber nicht unbedingt zweimal stetig partiell differenzierbar. D.h. man könnte sich fragen, ob der Satz von Schwarz nicht auch schon für zweimal partiell differenzierbare Funktionen gilt – die Antwort ist nein: Ein Beispiel ist hier

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Man kann nachrechnen, dass $\partial_y \partial_x f(0, 0) = -1$ und $\partial_x \partial_y f(0, 0) = 1$ ist.

Beispiel 1.3.4. Sei $f: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ eine r -mal stetig differenzierbare Abbildung. Sei $p \in U$ und $q \in \mathbb{R}^k$. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $c(t) := p + tq \in U$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Wir betrachten $g: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = f(c(t))$. Dann ist g r -mal stetig differenzierbar und wir wollen die Ableitungen berechnen:

1.3. Höhere partielle Ableitungen

Zuerst bemerken wir, dass $c(0) = p$, $c'(t) = q$ und $c^{(\ell)}(t) = 0$ für $\ell > 1$ gilt. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} g'(t) &= D_{c(t)} f(c'(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c(t)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(c(t)) \right) \cdot q = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(c(t)) q_i \\ g''(t) &= \sum_{i=1}^k q_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(c(t)) \right)' = \sum_{i=1}^k q_i \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} f(c(t)) q_j \\ &= \sum_{i_1=1}^k \sum_{i_2=1}^k q_{i_1} q_{i_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} f(c(t)) \\ &\vdots \\ g^{(\ell)}(t) &= \sum_{i_1, \dots, i_\ell=1}^k q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_\ell} \frac{\partial^\ell f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_\ell}} f(c(t)). \end{aligned}$$

Satz 1.3.5 (Taylor in mehreren Dimensionen). *Sei $f: \Omega \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. Sei f $n+1$ -mal stetig differenzierbar. Sei $x \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^k$, so dass $x+th \in \Omega$ für alle $t \in [0, 1]$ ist. Dann gilt*

$$f(x+h) = f(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i + \dots + \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^k \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(x) h_{i_1} \dots h_{i_n}}_{\text{Taylorpolynom}} + \underbrace{R_n(h)}_{\text{Restglied}}$$

mit $R_n(h) = o(|h|^n)$. Insbesondere gibt es wieder eine Lagrangesche Restglieddarstellung, d.h. es gibt ein $\theta \in [0, 1]$ mit

$$R_n(h) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{n+1}=1}^k \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{n+1}}}(x + \theta h) h_{i_1} \dots h_{i_{n+1}}.$$

Beweis. Wir setzen $c(t) = x + th$ für $t \in [0, 1]$ und $g(t) = f(c(t))$. Wenden wir nun den Satz von Taylor aus Analysis 1 [2, Satz 4.3.4] an, erhalten wir für alle $n < r$ ein $\theta \in [0, 1]$ mit

$$g(t) = \sum_{j=1}^n \frac{t^j}{j!} g^{(j)}(0) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\theta t).$$

Einsetzen der Formeln des letzten Beispiels und setzen von $t = 1$ liefert die Behauptung. \square

$$* \sum_{i_1, \dots, i_\ell=1}^k = \sum_{i_1=1}^k \dots \sum_{i_\ell=1}^k$$

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

Multiindexnotation Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^k$, $h = (h_1, \dots, h_k)^T \in \mathbb{R}^k$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^k$ und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^\ell$. Dann sei

$$\begin{aligned}\alpha! &:= \alpha_1! \cdots \alpha_n! \\ |\alpha| &:= \alpha_1 + \dots + \alpha_n \\ h^\alpha &= h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n} \\ \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(p) &:= \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\underbrace{\partial x_1 \dots \partial x_1}_{\alpha_1\text{-mal}} \dots \underbrace{\partial x_n \dots \partial x_n}_{\alpha_n\text{-mal}}}(p)\end{aligned}$$

Man fordert hier mindestens, dass f $|\alpha|$ -mal stetig differenzierbar ist, denn dann existieren alle diese partiellen Ableitungen und die Reihenfolge der partiellen Ableitungen spielt keine Rolle.

Man nennt α dann einen *Multiindex* und $|\alpha|$ die *Ordnung* von α .

Folgerung 1.3.6 (Taylor in Multiindexnotation). *Unter den gleichen Voraussetzungen wie im letzten Satz gilt: Es gibt ein $\theta \in [0, 1]$ mit*

$$f(x+h) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^k, |\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(x) h^\alpha + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^k, |\alpha| = n+1} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(x+\theta h) h^\alpha$$

Beweis. Da f oft genug stetig differenzierbar ist, kann man nach dem Satz von Schwarz die partiellen Ableitungen vertauschen. Vergleicht man diese Formel mit der Version ohne Multiindizes, dann sieht man die Terme schon die gleichen sind. Man muss allerdings nachzählen, ob diese jeweils in der gleichen Häufigkeit vorkommen:

Sei $\alpha \in \mathbb{N}^k$ mit $|\alpha| = j$. Dann wird die zugehörige partielle Ableitung in dem letzten Satz durch alle Tupel (i_1, \dots, i_j) gebildet, in denen jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ genau α_i mal vorkommt. Wie oft ist das? Dann muss man α_1 Stellen des j -Tupel auswählen, die man 1 setzt. Dann aus den restlichen $(j - \alpha_1)$ -Stellen noch α_2 -Stellen auswähle n, die man auf 2 setzt, usw. Insgesamt hat man also

$$\begin{aligned}& \binom{j}{\alpha_1} \cdot \binom{j - \alpha_1}{\alpha_2} \cdots \binom{j - \alpha_1 - \dots - \alpha_{j-1}}{\alpha_j} \\ &= \frac{j!}{\alpha_1! (j - \alpha_1)!} \frac{(j - \alpha_1)!}{\alpha_2! (j - \alpha_1 - \alpha_2)!} \cdots \frac{(j - \alpha_1 - \dots - \alpha_{j-1})!}{\alpha_j! 0!} = \frac{j!}{\alpha!}\end{aligned}$$

Das erklärt, warum aus den $\frac{1}{j!}$ -Faktoren im Satz von Taylor in der Multiindexnotation ein $\frac{1}{\alpha!}$ wird. \square

Beispiel 1.3.7. Rechnen wir mal explizit das Taylorpolynom der Funktion $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + y$ aus. Die Funktion ist schon ein Polynom zweiten Grades, d.h. das Taylorpolynom zweiten Grades um $(0, 0)$ sollte sowieso schon f sein. Wir machen es trotzdem, um die Multiindexnotation noch mal zu sehen, d.h. wir brauchen

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{k=2} \\ |\alpha| \leq n=2}} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(0, 0) h^\alpha = f(0, 0) + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^2 \\ |\alpha|=1}} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(0, 0) h^\alpha + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^2 \\ |\alpha|=2}} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(0, 0) h^\alpha.$$

1.4. Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace

Für $\alpha \in \mathbb{N}^2$ mit $|\alpha| = 1$ gibt es die Möglichkeiten $(1, 0)$ und $(0, 1)$ und für $\alpha \in \mathbb{N}^2$ mit $|\alpha| = 2$ die Möglichkeiten $(2, 0)$, $(1, 1)$ und $(0, 2)$. Damit haben wir für das zweite Taylorpolynom:

$$\begin{aligned} f(0, 0) + \partial_x f(0, 0)h_1 + \partial_y f(0, 0)h_2 + \frac{1}{2}\partial_x \partial_x f(0, 0)h_1^2 + \partial_x \partial_y f(0, 0)h_1 h_2 + \frac{1}{2}\partial_y \partial_y f(0, 0)h_2^2 \\ = 0 + (2x + y)|_{x=y=0}h_1 + (x + 2y + 1)|_{x=y=0}h_2 + h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2 \\ = f(h). \end{aligned}$$

1.4. Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace

Wir wollen nun ein paar erste sehr oft vorkommende Differentialoperatoren (die kann man sich erst mal grob vorstellen als Operationen, die aus verschiedenen partiellen Ableitungen zusammengesetzt sind) kennenlernen.

1.4.1. Gradient

Sei $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Sei $p \in \Omega$. Dann ist $D_p f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dieser linearen Abbildung ordnen wir ihren dualen Vektor (dual bzgl. des euklidischen Skalarprodukts zu) – diesen Vektor nennen wir *Gradient von f in p* und schreiben $\nabla f(p)$. D.h. $\nabla f(p)$ erfüllt

$$\underbrace{D_p f(v)}_{\in \mathbb{R}} = \langle \nabla f(p), v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Diese Gleichung bestimmt $\nabla f(p)$ eindeutig. Der 'abstrakte lineare Algebra'-Grund ist, dass das Skalarprodukt nicht-entartet ist. Man kann das aber auch einfach mal direkt in Koordinaten hinschreiben. Dann ist $D_p f$ eine $1 \times n$ -Matrix und das euklidische Skalarprodukt ist $\langle x, y \rangle = x^T y$. Also

$$(D_p f - (\nabla f(p))^T)v = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Setzt man nun für v alle Einheitsvektoren ein, sieht man, dass $(D_p f = \nabla f(p))^T$ sein muss (das ist genau die Nicht-Entartetheit hier). Also haben wir

$$\nabla f(p) = (D_p f)^T = (\partial_{x_1} f(p), \dots, \partial_{x_n} f(p))^T \in \mathbb{R}^n.$$

Was misst der Gradient?

- Der Gradient zeigt in die Richtung des steilsten Anstieges:

Schauen wir uns die Richtungsableitungen von f in p an – $D_p f(v)$ für $v \in \mathbb{R}^n$ mit Betrag $|v| = 1$. Die Richtungsableitung ist die Ableitung von $\tilde{f}_v(t) := f(p + tv)$ in $t = 0$. D.h. $D_p f(v)$ ist im Betrag um so größer, je steiler \tilde{f}_v in $t = 0$ ist. Skaliert man v , skaliert sich $D_p f(v)$ (da linear). Das entspricht aber nur der Änderung der

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

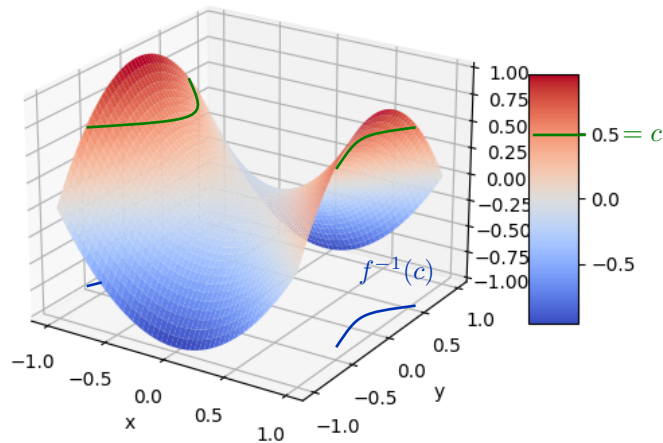


Abbildung 1.5.: Graph der Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$. In blau die Niveaumenge $f^{-1}(c)$ der Gradient in den Punkten der Niveaumenge steht senkrecht auf dieser Niveaumenge.

Skala/Einheiten für t . Damit wir das für verschiedene Richtungen vergleichen können, wählen wir $|v| = 1$. Wegen $D_p f(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle$ ist dieser Betrag am größten, wenn $v \parallel \nabla f(p)$ gilt. Also für $v = \pm \frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|}$ falls $\nabla f(p) \neq 0$ und damit ist v insbesondere bis auf das Vorzeichen eindeutig.

- Der Gradient steht senkrecht auf Niveaumengen:

Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann nennen wir $f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^n$ eine *Niveaumenge** von f . Sei nun $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve mit $f(\gamma(t)) = c$. Somit haben wir für $p = \gamma(0)$:

$$\langle \gamma'(0), \nabla f(p) \rangle = D_p f(\gamma'(0)) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} (f \circ \gamma)'(0) \stackrel{f \circ \gamma = \text{konst}}{=} 0,$$

also steht der Gradient senkrecht auf allen differenzierbaren Kurven, die innerhalb einer Niveaumenge verlaufen, vgl. Abbildung 1.5. Wir sagen kurz: Der Gradient steht senkrecht auf Niveaumengen.

*Englisch: level sets

1.4. Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace

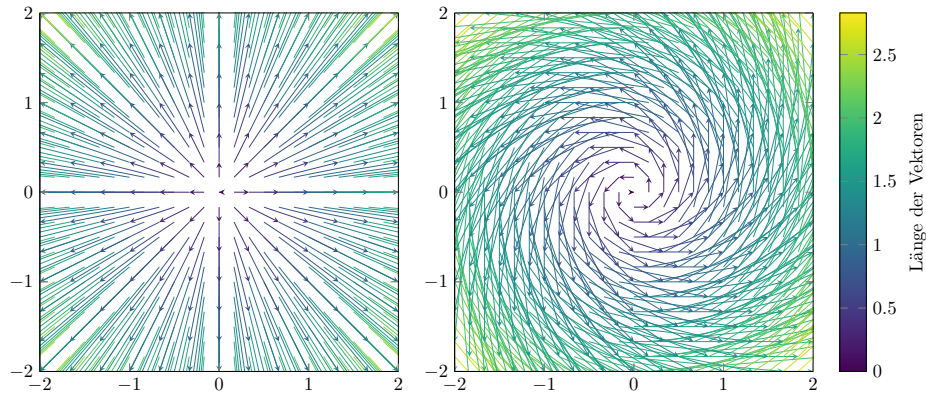


Abbildung 1.6.: Links: Das Vektorfeld $V(x, y) = (x, y)^T$, $\operatorname{div} V = 2$, $\operatorname{rot} V = 0$.
Rechts: Vektorfeld $V(x, y) = (-y, x)^T$, $\operatorname{div} V = 0$, $\operatorname{rot} V = 2$.

Wo kommt der Gradient vor?

- Viele Kraftfelder $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ in der Physik (da i.A. $k = 3$) lassen sich als Gradient eines Potentialfeldes $V: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ beschreiben (sogenannte *konservative Kräfte*): Das Bild/die Interpretation kommt aus der Mechanik. Wenn wir uns als das Potential eine Berglandschaft vorstellen $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und wir setzen in den Punkt $(x, y, V(x, y))$ eine Kugel. Dann bewegt die sich in Richtung des steilsten Abstieg, also in Richtung des Gradienten.
- Oft sind Ströme Gradienten, z.B. ist der Wärmestrom proportional zum Gradienten der Temperatur.

1.4.2. Divergenz

Funktionen $V: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ werden oft als *Vektorfelder* interpretiert, vgl. Abbildung 1.6.

Woche 3

Sei V partiell differenzierbar. Die *Divergenz eines Vektorfeldes* $V = (V_1, \dots, V_n)^T$ in $p \in \Omega$ ist definiert als

$$\operatorname{div} V(p) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(p).$$

Dann ist $\operatorname{div} V: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Was misst die Divergenz?

Die Divergenz misst die Netto-Quellen/Senkendichte des Vektorfeldes. Was soll das heißen? Integriert man die Divergenz eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes über ein Gebiet, z.B. einen Quader, dann ist das Ergebnis gleich dem Integral über den

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

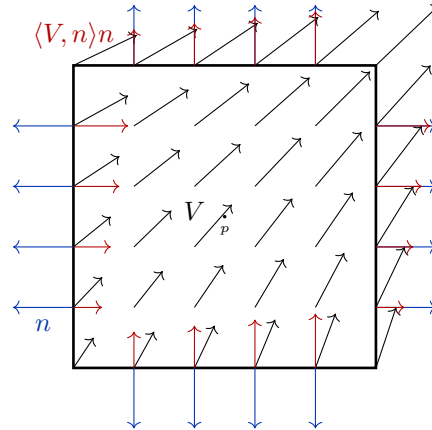


Abbildung 1.7.: Die blauen Vektoren sind äußere Einheitsnormalenvektoren auf dem Rand des Quadrates. Die roten Vektoren repräsentieren $\langle V, n \rangle n$, D.h. der Betrag von $\langle V, n \rangle$ ist die Länge der Projektion von V auf n und das zugehörige Vorzeichen gibt an, ob der Vektor $\langle V, n \rangle n$ in die gleiche oder entgegengesetzte Richtung wie n zeigt. $\int_{\text{Rand}} \langle V, n \rangle$ misst also, ob in der Summe mehr ins Quadrat hinfließt als rausfließt. Wenn ja, gibt es innerhalb des Quadrats eine Senke. Falls es umgekehrt ist, dass gibt es eine Quelle.

Rand des Gebietes des Anteils des Vektorfeldes, der senkrecht zum Rand steht, vgl. Abbildung 1.7.

$$\int_{\text{Quader } [-a,a]^n} \text{div } V = \int_{\text{Rand des Quaders } [-a,a]^n} \langle V, n \rangle$$

Hier ist n der äußere Einheitsnormalenvektor auf dem Quader.

Wir haben zwar noch nicht definiert wie man Integrale in mehreren Dimensionen definiert, aber für Quadrate, Quader etc. ist es einfach, als ob man erst in x -Richtung integriert und die weiteren Koordinaten festlässt, dann das Ergebnis in y -Richtung etc. Das ist hier erst einmal gut genug - mehr später.

Nimmt man dies aber erst einmal als gegeben an, erhält man im Limes

$$\text{div} V(0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Volumen Quader } (= (2a)^n)} \int_{\text{Rand des Quaders } [-a,a]^n} \langle V, n \rangle.$$

Noch mal zu Abbildung 1.6: Für das Vektorfeld $V(x, y) = (x, y)^T$ ist die Divergenz konstant positiv – jeder Punkt ist Netto eine Quelle. Das sieht man am Bild sehr gut in der Null, weil dort V selbst Null ist. In jedem anderen Punkt (x_0, y_0) würde man genau das gleiche Bild, wenn man von V das konstante Vektorfeld $(x_0, y_0)^T$ abzieht, was nichts an der Divergenz ändert.

1.4. Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace

Das Vektorfeld $V(x, y) = (-y, x)^T$ ist divergenzfrei, hat also keine Quellen und Senken. Im Ursprung sieht man das wieder sehr gut, da sich das Vektorfeld um den Ursprung dreht. In jedem anderen Punkt (x_0, y_0) erhält man wieder das gleiche Bild, wenn man wieder von V das konstante Vektorfeld $(-y_0, x_0)^T$ abzieht.

Setzen wir Gradient und Divergenz zusammen, erhalten wir einen sehr oft vorkommenden Differentialoperator:

Definition 1.4.1. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Der *Laplace-Operator* ist definiert durch

$$\Delta f := \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}.$$

Wo kommt z.B. der Laplaceoperator vor?

- Zur Beschreibung des Gleichgewichtszustand in Diffusionsprozessen, z.B. für stationäre Wärmeverteilung.
- In der Darstellung gemittelter Größen
- Bei der Beschreibung von Zuständen, die Energien minimieren.

1.4.3. Rotation

Den Begriff der Rotation gibt es für Vektorfelder in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 . Wir beginnen mit \mathbb{R}^2 . Sei $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar. Seien (x, y) die Koordinaten im \mathbb{R}^2 . Die *Rotation* von $V = (V_x, V_y)^T$ in p ist definiert als

$$\operatorname{rot} V(p) = \partial_x V_y(p) - \partial_y V_x(p).$$

Vgl. Abbildung 1.6.

Was misst die Rotation in 2D?

Sei V stetig differenzierbar. Wird der Rand des Quadrates mittels einer Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ beschrieben, dann ist

$$\int_{\text{Quadrat } [-a, a]^2} \operatorname{rot} V = \int_0^1 \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt,$$

kommt später. Aber was sagt uns das? Hier misst $\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$ den Anteil von V in Richtung des Randes und das Integral mittelt, d.h. wir messen, ob im Mittel sich das Vektorfeld um den Rand dreht, vgl. Abbildung 1.8.

Kommen wir nun zum dreidimensionalen Fall:

Sei $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ partiell differenzierbar. Seien (x, y, z) die Koordinaten im \mathbb{R}^3 . Die *Rotation* von $V = (V_x, V_y, V_z)^T$ in p ist definiert als

$$\operatorname{rot} V(p) = \begin{pmatrix} \partial_y V_z - \partial_z V_y \\ \partial_z V_x - \partial_x V_z \\ \partial_x V_y - \partial_y V_x \end{pmatrix}.$$

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

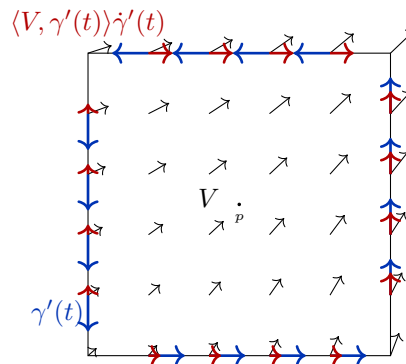


Abbildung 1.8.: γ parametrisiere den Rand des Quadrates in mathematisch positiver Drehrichtung. Dann misst $\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$ den Anteil von V in Richtung des Randes. Das Integral darüber misst, ob sich in der Summe V um das Quadrat dreht.

Was misst die Rotation in 3D?

Die 1. Komponente der Rotation misst inwieweit sich das Vektorfeld in der y, z -Ebene um den betrachteten Punkt dreht – also inwieweit sich das Vektorfeld um die x -Achse durch diesen Punkt dreht. Analog für die anderen Komponenten. Insgesamt ist $\text{rot}V(p)$ ein Vektor, dessen Länge und Richtung die Stärke und Achse der maximalen Rotation abbildet.

Es gilt (Übungsaufgabe 9.ii):

Lemma 1.4.2. Seien $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\text{div rot}V = 0 \quad \text{und} \quad \text{rot grad}f = 0$$

Wo kommt die Rotation z.B. vor?

- (i) Rotation in zwei Dimensionen wird oft in der Meteorologie verwendet – für die Rotation von Luftbewegungen. Zwar ist Wind in Wirklichkeit ein dreidimensionales Vektorfeld. Aber für viele Fragen ist nur die Ebene parallel zur Erdoberfläche relevant.
- (ii) Die Maxwell-Gleichungen sind die grundlegenden Gleichungen der Elektrodynamik. Sie beschreiben die Wirkung eines elektromagnetischen Feldes auf elektrische Ladungen und die Wechselwirkung zwischen dem elektrischen Feld E und dem Magnetfeld B . Das elektrische Feld E , das Magnetfeld B ist definiert auf einem (nicht notwendigerweise beschränktem) Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Beide Größen sind zeitabhängig, d.h. $E: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $B: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Weiterhin wird die elektrische Ladung durch eine zeitabhängige Dichtefunktion $\rho: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und die Stromverteilung durch den zeitabhängigen Stromdichtevektor $j: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschrieben. c ist

die Lichtgeschwindigkeit. Es gelten die Maxwellgleichungen (hier sind μ_0 und ϵ_0 Naturkonstanten):

Gauß'sches Gesetz	$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Ladungen sind Quellen des elektrischen Feldes
Gauß'sches Gesetz für Magnetfelder	$\operatorname{div} B = 0$	Das Magnetfeld ist quellenfrei. = keine magnetischen Monopole
Induktionsgesetz (Faraday Gesetz)	$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	Änderungen der magnetischen Flussdichte erzeugen ein elektrisches Wirbelfeld*
Ampèresches Gesetz	$\operatorname{rot} B = \mu_0(j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t})$	Elektrische Ströme und zeitl. Änderungen des elektr. Feldes (= Verschiebungsströme) ergeben ein magn. Wirbelfeld.

1.5. Komplexe Funktionen

Eine Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ kann auch immer als Funktion von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 begriffen werden. Zum Beispiel

$$\begin{aligned} f_1: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z = x + iy) &= z^2 & (x, y)^T &\mapsto (x^2 - y^2, 2xy)^T \\ f_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) &= \bar{z} & (x, y)^T &\mapsto (x, -y)^T. \end{aligned}$$

Als Funktionen von $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sind beide Funktionen differenzierbar (man sagt $f_i: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist *reell differenzierbar*) mit

$$D_{(x,y)} f_1 = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}, \quad D_{(x,y)} f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hier sind $D_{(x,y)} f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, wie immer, \mathbb{R} -lineare Abbildungen.

Andererseits kann man den Differenzierbarkeitsbegriff von Analysis 1 auch anders auf komplexe Funktionen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ verallgemeinern, in dem man in der Definition aus Analysis 1 'einfach jedes \mathbb{R} durch ein \mathbb{C} ersetzt'.

*Für das Minuszeichen siehe Lenzsche Regel – https://de.wikipedia.org/wiki/Lenzsche_Regel.

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

Definition 1.5.1. Eine Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist in $z_0 \in \mathbb{C}$ *komplex differenzierbar*, wenn es ein $a \in \mathbb{C}$ mit

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a.$$

Dann ist $f'(z_0) = a$ die *komplexe Ableitung* von f in z_0 .

Das funktioniert, da \mathbb{C} ein Körper ist, und wir somit dort eine Multiplikation haben. Beim \mathbb{R}^n ginge das nicht.

Ganz analog wie in Analysis 1 erhalten wir die lineare Approximationseigenschaft, also, dass f in z_0 genau dann komplex differenzierbar ist, wenn

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + ah + o(|h|) \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Hierbei bedeutet für $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ wieder $g(z) = o(|z|)$ gilt, falls $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(z)}{|z|} = 0$ gilt – also wie in Analysis 1 nur dieses Mal mit Limes in den komplexen Zahlen.

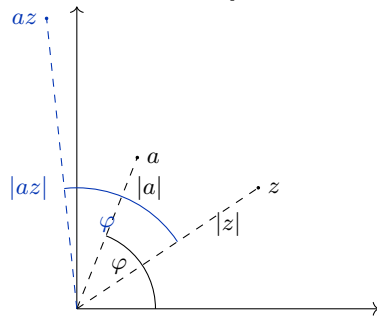
Die naheliegende Frage ist nun: **Ist für eine Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und reell differenzierbar das gleiche?**

Dazu halten wir erst einmal fest: In Analogie zu Differenzierbarkeit in \mathbb{R}^n können wir $f'(z_0): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto az$ wieder als lineare Abbildung auffassen – jedoch dieses mal als \mathbb{C} -lineare Abbildung. Damit entspricht unsere Frage der Frage, ob man jede (\mathbb{R} -)lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (hier das Differential $D_{z_0}f$) als (\mathbb{C} -)lineare Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (hier Multiplikation mit $f'(z_0)$) auffassen kann und umgekehrt.

Die Antwort ist nein:

Jede \mathbb{C} -lineare Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, also jede Multiplikation mit einer komplexen Zahl a , lässt sich als Multiplikation mit einer reellen 2×2 -Matrix schreiben – also als \mathbb{R} -lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

Sei $a = |a|e^{i\varphi}$ die Darstellung von a in Polarkoordinaten. Dann entspricht Multiplikation von $z \in \mathbb{C}$ mit a der Streckung mit r und einer Drehung um den Winkel φ – also einer *Drehstreckung*, vgl. [2, Abschnitt 3.9.2]:



Sei $z = x + iy = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$. Dann ist

$$a \cdot z = |a| \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

D.h. jede komplex differenzierbare Funktion ist auch reell differenzierbar und aus $a = f'(z_0)$ erhält man mittels obiger Gleichheit $D_{z_0}f = |a| \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$.

Andererseits sehen wir somit auch, dass eine reelle 2×2 -Matrix $A = (a_{ij})$ dann nur dann zu einer Drehstreckung gehört und damit der Multiplikation mit einer komplexen Zahl entspricht, wenn gilt: $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = -a_{21}$ gilt. Auf dem Level der Jacobimatrix müssen also die Gleichungen

$$\partial_x f^1 = \partial_y f^2, \quad \partial_x f^2 = -\partial_y f^1$$

– die *Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen* – gelten, wobei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y)^T \mapsto (f^1(x, y), f^2(x, y))^T$ ist.

Also ist nicht jedes $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, welches reell differenzierbar ist auch komplex differenzierbar. Von unseren zwei Beispielen vom Anfang ist $f_1(z) = z^2$ komplex differenzierbar, $f_2(z) = \bar{z}$ hingegen nicht.

Komplexe Differenzierbarkeit ist also eine stärkere Forderung als reell differenzierbar. Es lohnt sich komplexe Differenzierbarkeit anzuschauen, weil der Fakt, dass \mathbb{C} ein Körper ist, zu besseren Eigenschaften und mehr Möglichkeiten führt. Als einfaches Beispiel sieht man mit dem gleichen Beispiel wie in Analysis 1, dass für Funktionen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die Produkt- und Quotientenregel gilt. Die Funktionentheorie beschäftigt sich ausführlicher mit komplexer Differenzierbarkeit.

1.6. Extremwertprobleme

Haben wir eine reellwertige Funktion $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ können wir ganz analog zu Analysis 1 die Frage nach lokalen Maxima oder Minima stellen. Wie in Analysis 1 ist ein $p \in \Omega$ ein *lokales Maximum* (bzw. *lokales Minimum*), wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt mit $f(q) \leq f(p)$ (bzw. $f(p) \leq f(q)$) für alle $q \in \Omega \cap B_\epsilon(p)$.

In Analysis 1 hatten wir gesehen, dass für differenzierbare Funktionen die Funktion nur dann in p ein lokales Maximum/Minimum haben kann, wenn dort ihre Ableitung verschwindet. Das gilt auch in mehreren Variablen:

Lemma 1.6.1 (Notwendige Bedingung). *Sei $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $p \in U$ ein lokales Maximum oder Minimum. Dann gilt $D_p f = 0$.*

Beweis. Sei $p \in U$ ein lokales Maximum (Fürs Minimum folgt es ganz analog). Dann hat $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(p + te_i)$, für $i = 1, \dots, n$, in $t = 0$ ebenfalls ein lokales Maximum. Damit gilt nach Analysis 1, dass $0 = \tilde{f}'(0) = \partial_i f(p)$ ist. Somit ist $D_p f = 0$. \square

Gilt $D_p f = 0$, aber p ist kein lokales Maximum oder Minimum, nennen wir p wieder *Sattelpunkt* von f .

Für Funktionen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Variable kennen wir auch ein hinreichendes Kriterium, dafür dass p ein lokales Minimum ist: $g'(p) = 0$ und $g''(p) > 0$. Was war dort das Argument - in kurz:

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

Für g zweimal stetig differenzierbar ist

$$g(p+t) \stackrel{g'(p)=0}{=} g(p) + \underbrace{g''(p+\theta t)}_{>c>0 \text{ für } t \text{ klein genug}} \frac{t^2}{2} \quad \text{für ein } \theta = \theta(t) \in [0, 1]$$

$$\geq g(p) + t^2 \frac{c}{2} \geq g(p).$$

Versuchen wir also einfach den ähnlichen Ansatz für zweimal differenzierbare $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: Sei Ω offen, $p \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n$ und $\epsilon > 0$ derart, dass $p + th \in \Omega$ für alle $|t| < \epsilon$ gilt. So ein ϵ existiert, da Ω offen ist. Dann ist

$$f(p+th) \stackrel{D_p f=0}{=} f(p) + \underbrace{\frac{t^2}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p+\theta th) h_i h_j}_{\text{?wann positiv oder zumindest nicht negativ?}} \quad (1.2)$$

Um diese Frage zu beantworten, wollen wir diesen quadratische Term als quadratischen Form interpretieren.

1.6.1. Quadratische Formen

Sei $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Dann nennen wir $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $v \mapsto b(v, v)$, die zugehörige *quadratische Form*.

Beispiel 1.6.2. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und sei $p \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die $n \times n$ -Matrix

$$\text{Hess}_p(f) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{ij}$$

nach dem Satz von Schwarz symmetrisch – die *Hessische von f in p* . Somit ist der Term

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p+\theta th) h_i h_j = \langle h, \text{Hess}_{p+\theta th}(f) h \rangle,$$

der uns für die Extremwertbestimmung interessiert eine quadratische Form.

Allgemeiner definiert jede symmetrische Matrix $B \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n)$ definiert eine symmetrische Bilinearform durch $b(v, w) := \langle v, Bw \rangle = v^T Bw$. Andersherum kann jede symmetrische Bilinearform derart dargestellt werden: $B = (b(e_i, e_j))_{ij}$.

Definition 1.6.3. Die symmetrische Bilinearform $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- *positiv definit* falls $b(v, v) > 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.
- *positiv semi-definit* falls $b(v, v) \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt.
- *indefinit*, falls weder b noch $-b$ positiv semi-definit ist.

1.6. Extremwertprobleme

Ist B eine reelle symmetrische $n \times n$ -Matrix, dann nennen wir B *positiv (semi-)definit/indefinit*, falls die zugehörige Bilinearform $\langle \cdot, B \cdot \rangle$ positiv (semi-)definit/indefinit ist.

Lemma 1.6.4. *Sei $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine positiv definite Bilinearform. Dann existiert ein $c > 0$, so dass $b(v, v) \geq c|v|^2$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt.*

Für die Aussage gibt es auch einen linear-Algebra-Beweis. Wir machen hier einen analytischen.

Beweis. Angenommen es gäbe kein solches c . Dann muss es eine Folge $v_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\frac{1}{|v_i|^2} b(v_i, v_i) \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$ geben. Setzen wir $w_i := \frac{v_i}{|v_i|}$. Dann haben wir eine Folge w_i auf der Einheitssphäre $S_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ des \mathbb{R}^n . Diese Einheitssphäre ist kompakt (nach Heine-Borel, da abgeschlossen und beschränkt). Also muss es eine konvergente Teilfolge $w_{i_j} \rightarrow w \in S_1(0)$ geben. Da die Abbildung $v \in \mathbb{R}^n \mapsto b(v, v) \in \mathbb{R}$ stetig ist (sogar differenzierbar, vgl. Beispiel 1.2.9.v), muss $\frac{1}{|v_{i_j}|^2} b(v_{i_j}, v_{i_j}) \stackrel{\text{bilin.}}{=} b(w_{i_j}, w_{i_j}) \rightarrow b(w, w)$ konvergieren. Also wäre $b(w, w) = 0$. Da $w \neq 0$ und b positiv definit war, gibt das den gesuchten Widerspruch. \square

Beispiel 1.6.5 (Symmetrische Bilinearformen für $n = 2$). Sei $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$. Dann ist

$$v = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mapsto \langle v, Bv \rangle = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2.$$

Hier kann man recht direkt herausfinden, wann diese Form positiv definit ist: Setzt man $y = 0$, folgt $b_{11} > 0$. Analog folgt aus $x = 0$, dass $b_{22} > 0$. Für $x \neq 0$ können wir schreiben:

$$x^2 \left(b_{11} + 2b_{12} \frac{y}{x} + b_{22} \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right)$$

Dies ist genau dann positiv, wenn die quadratische Funktion in $\frac{y}{x}$ keine reellen Nullstellen hat, also genau wenn $0 > \frac{b_{12}^2}{b_{11}^2} - \frac{b_{11}}{b_{22}} = \frac{b_{12}^2 - b_{11}b_{22}}{b_{22}^2}$ ist.

Zusammenfassend ist B genau dann positiv definit, wenn $b_{11} > 0$ und $\det B = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$ ist (daraus folgt dann auch $b_{22} > 0$). Analog sieht man, dass B genau dann positiv semi-definit, wenn $b_{11} \geq 0$, $b_{22} \geq 0$ und $\det B \geq 0$ gilt.

Ein analoges Kriterium für positive Definitheit gibt es auch für $n \geq 2$. Das benötigt den Begriff von Hauptminoren.

Sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$ -Matrix. Dann sind die *führenden Hauptminoren* von A alle oberen linken quadratischen Teilmatrizen $A_k = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$, vgl. rechts.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	\dots	a_{1n}	A_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	\dots	a_{2n}	A_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	\dots	a_{3n}	A_3
\vdots				\vdots	
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	\dots	a_{nn}	A_n

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

Satz 1.6.6 (Hurwitz-Kriterium). *Sei A eine reelle symmetrische Matrix. Dann ist A genau dann positiv definit, wenn alle führenden Hauptminoren positive Determinante besitzen.*

Beweis. [4, S. 559] □

Für 2×2 -Matrizen gibt das Hurwitz-Kriterium genau die Bedingungen aus Beispiel 1.6.5 wieder.

Bemerkung 1.6.7.

- (i) Man könnte jetzt glauben, dass es um positiv semi-definit zu überprüfen vielleicht ausreicht, dass alle führenden Hauptminoren nichtnegative Determinante besitzen. Das stimmt nicht – haben wir eigentlich schon in Beispiel 1.6.5 gesehen. Äquivalent zu positiv semi-definit ist, dass die Determinante aller Hauptminoren, das sind $A_{k < \ell} = (a_{ij})_{i,j=k,k+1,\dots,\ell}$, nichtnegativ ist.
- (ii) !! $-A$ ist positiv definit genau dann, wenn $(-1)^k \det A_k > 0$ für alle $k = 1, \dots, n$ gilt. (Liegt an der Multilinearität der Determinante).

Bezug zur linearen Algebra. Jede symmetrische Matrix B hat ausschließlich reelle Eigenwerte λ_i und ist diagonalisierbar, d.h. es gibt eine Basis v_1, \dots, v_n von \mathbb{R}^n bzgl. dieser B die Form

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

annimmt. Die Basis kann immer als positiv orientierte Orthonormalbasis gewählt werden, also $(v_1, \dots, v_n) \in SO(n)$, was wir ab sofort annehmen.

Dann gilt für $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$

$$b(v, v) = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2.$$

Daraus folgt direkt:

Lemma 1.6.8. *Sei $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform mit zugehöriger symmetrischer Matrix B . Seien $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ die Eigenwerte von B . Dann gilt*

$$\lambda_1 |v|^2 \leq b(v, v) \leq \lambda_n |v|^2.$$

Insbesondere, ist b positiv definit/positiv semi-definit, wenn B nur positive/nicht-negative Eigenwerte besitzt. Sie ist indefinit, falls B sowohl positive als auch negative Eigenwerte besitzt.

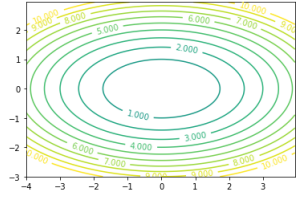
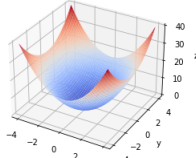
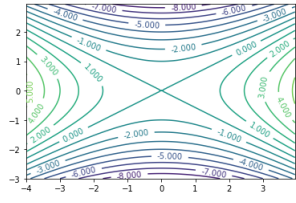
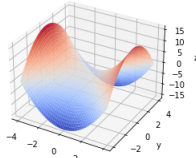
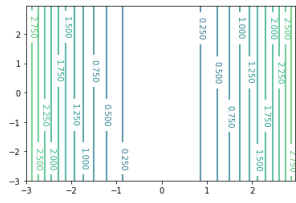
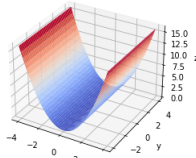
Normalform $f(x, y)$	Höhenlinienplot*	Graph
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ <p>positiv definit</p>		
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ <p>indefinit</p>		
$\frac{x^2}{a^2}$ <p>semi-definit</p>		

Tabelle 1.1.: Bis aufs globale Vorzeichen sind dies alle Fälle von Normalformen, die für $n = 2$ auftreten können. Am Höhenlinienplot sieht man gut die Bedeutung der Eigenvektoren. Im ersten Fall zeigen die Eigenvektoren in Richtung der Hauptachsen der Ellipsen, im zweiten Fall in Richtung der Verbindung der Brennpunkte der Hyperbeln einer Niveaumenge.

Beweis. Sei (v_1, \dots, v_n) eine Orthonormal-Eigenbasis von B zu den Eigenwerten

*Höhenlinienplot: Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Statt f als Graph in \mathbb{R}^3 darzustellen, kann man einen Niveaumengenplot/Höhenlinienplot machen. D.h. man zeichnet $f^{-1}(c)$ für verschiedene $c \dots$ wie Höhenlinien auf einer Landkarte .. und beschriftet die Linien mit dem jeweiligen c .

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann folgt für $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$

$$\min_j \lambda_j \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2}_{=|v|^2} \leq b(v, v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \leq \max_j \lambda_j \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2}_{=|v|^2},$$

was die Behauptung ist. \square

Das ist insbesondere ein 'Lineare-Algebra'-Beweis von Lemma 1.6.4. Insbesondere ist also B positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte positiv sind. Die Eigenwertberechnung kann allerdings schwierig sein – Determinantenberechnung wie im Hurwitz-Kriterium ist einfacher.

Was man aber an der Eigenwertdiskussion sieht, ist folgendes: Sei (v_1, \dots, v_n) eine positiv orientierte Orthonormalbasis von Eigenvektoren von B . Betrachten wir unsere symmetrische Bilinearform bzgl. des Koordinatensystems was durch diese Basis gebildet wird, dann hat $v \mapsto b(v, v)$ die Form

$$(x_1, \dots, x_n)^T \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

Da $(v_1, \dots, v_n) \in SO(n)$ gilt, geht dieses neue Koordinatensystem aus unserem Standardkoordinatensystem des \mathbb{R}^n durch Rotation hervor. Für $n = 2$ treten also modulo Rotation des Koordinatensystems nur die Fälle aus Tabelle 1.1 auf.

1.6.2. Hinreichende Bedingung

Kommen wir zurück zum Extremwertproblem.

Lemma 1.6.9 (Notwendig für lokales Maximum/Minimum). *Sei $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $p \in \Omega$. Sei p lokales Minimum bzw. Maximum. Dann muss $\text{Hess}_p(f)$ bzw. $-\text{Hess}_p(f)$ positiv semi-definit sein.*

Beweis. Sei p ein lokales Minimum (Maximum geht analog). Dann gilt (1.2)

$$f(p + th) = f(p) + \frac{t^2}{2} h^T \text{Hess}_{p+th}(f) h.$$

Nehmen wir an, Hess_p sei nicht positiv semi-definit. Dann gibt es ein $h \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i,j=1}^n \text{Hess}_p(f) h_i h_j = a < 0$. O.B.d.A. sei $|h| = 1$. Da f zweimal stetig differenzierbar ist, sind alle zweiten partiellen Ableitungen, also alle Einträge in der Hessischen stetig. Also folgt mit $\theta = \theta(t) \in [0, 1]$, dass $h^T \text{Hess}_{p+th}(f) h \rightarrow h^T \text{Hess}_p(f) h = a$ gilt für $t \rightarrow 0$. Damit gibt es ein t_0 derart, dass $h^T \text{Hess}_{p+th}(f) h < \frac{a}{2}$ für alle $t \in [0, t_0]$.

Damit haben wir

$$f(p + th) - f(p) = \frac{t^2}{2} h^T \text{Hess}_{p+th}(f) h \leq \frac{t^2}{2} \frac{a}{2}$$

für $t \rightarrow 0$ und $t \in [0, t_0]$. Dann kann aber p kein lokales Minimum sein. \square

Mit letztem Lemma erhalten wir sogar direkt eine hinreichende Bedingung für Sattelpunkte:

Folgerung 1.6.10. *Sei $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $p \in \Omega$ mit $D_p f = 0$ und $\text{Hess}_p(f)$ indefinit. Dann ist p ein Sattelpunkt von f .*

Allerdings zeigt uns das nächste Beispiel, dass für einen Sattelpunkt nicht notwendigerweise die Hessische indefinit sein muss.

Beispiel 1.6.11. Für $f(x, y) = x^3$ ist $D_{(x,y)} f = (3x^2, 0) = 0$ genau dann, wenn $(x, y) = (0, y)$ für $y \in \mathbb{R}$ ist. Es ist $\text{Hess}_{(0,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ positiv semi-definit. Trotzdem ist $(0, y)$ nie ein lokales Maximum oder Minimum und damit ein Sattelpunkt.

Ein lokales Maximum p von $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *isoliert*, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass es in $B_\epsilon(p) \cap \Omega$ keine weiteren lokalen Maxima gibt, also $f(q) < f(p)$ für alle $q \in (B_\epsilon(p) \setminus \{p\}) \cap \Omega$ gilt (analog für isolierte lokale Minima).

Satz 1.6.12 (Hinreichende Bedingung für lokale Maxima/Minima). *Sei $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $p \in U$. Sei $D_p f = 0$ und sei $\text{Hess}_p(f)$ (bzw. $-\text{Hess}_p(f)$) positiv definit. Dann hat f in p ein isoliertes lokales Minimum (bzw. isoliertes lokales Maximum).*

Beweis. Da $D_p f = 0$ ist, gilt wieder

$$f(p + th) = f(p) + \frac{t^2}{2} h^T \text{Hess}_{p+th}(f) h.$$

für $\theta \in [0, 1]$, s. (1.2). Da $\text{Hess}_p(f)$ positiv definit ist, gibt es nach Lemma 1.6.4 ein $c > 0$ mit $h^T \text{Hess}_p(f) h \geq c$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| = 1$. Da f zweimal stetig differenzierbar ist, sind alle zweiten partiellen Ableitungen, also alle Einträge in der Hessischen stetig, also gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $h^T \text{Hess}_q(f) h \geq \frac{c}{2}$ für alle $q \in \Omega \cap B_\epsilon(p)$. Also insbesondere für alle $q = p + t\theta h$ mit $|h| = 1$, $|t| < \epsilon$ und $\theta \in [0, 1]$. Damit haben wir

$$f(p + th) - f(p) = \frac{t^2}{2} h^T \text{Hess}_{p+t\theta h}(f) h \geq \frac{t^2}{2} \frac{c}{2} \geq 0$$

für $t \in [0, t_0]$. Damit ist p ein lokales Minimum und sogar ein isoliertes, da Gleichheit nur für $t = 0$ (also $q = p$) auftritt. \square

Beispiel 1.6.13.

- (i) Sei $f(x, y) = \cos x + \sin y$, vgl. Abbildung 1.9. Hier ist $D_{(x,y)} f = (-\sin x, \cos y)$. D.h. wir haben lokale Extremstellen in $(k\pi, \frac{\pi}{2} + \pi\ell)^T =: p_{k\ell}$ für alle $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Hess}_{p_{k\ell}}(f) = \begin{pmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -\sin y \end{pmatrix} \Big|_{(x,y)^T = p_{k\ell}} = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{\ell+1} \end{pmatrix}$$

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

Für k und ℓ gerade ist $-\text{Hess}_{p_{k\ell}}(f)$ positiv definit und somit $p_{k\ell}$ ein lokales Maximum. Für k und ℓ ungerade ist $\text{Hess}_{p_{k\ell}}(f)$ positiv definit und somit $p_{k\ell}$ ein lokales Minimum. Für eins gerade und das andere ungerade ist $\text{Hess}_{p_{k\ell}}(f)$ indefinit und somit $p_{k\ell}$ ein Sattelpunkt.

- (ii) Sei $f(x, y) = x^3 + x^2y + y^2 + 2y$. Dann ist $D_{(x,y)}f = (3x^2 + 2xy, x^2 + 2y + 2)$. Damit diese verschwindet muss also gelten:

$$(1) \quad 3x^2 + 2xy = 0$$

$$(2) \quad x^2 + 2y + 2 = 0$$

$$\text{folgt aus (2)} \quad y = -1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$\text{einsetzen in (1)} \quad 0 = 3x^2 - 2x - x^3$$

Die Lösungen für x sind 0, 1 und 2. Dazu gehören die y -Werte -1 , $-3/2$ und -3 . Die Hessische

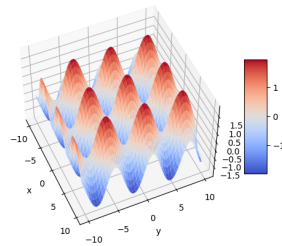
$$\text{Hess}_{(x,y)}(f) = \begin{pmatrix} 6x + 2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$$

ist in $(0, -1)$ und $(2, -3)$ indefinit (das sind also Sattelpunkte) und in $(1, -3/2)$ positiv definit (das ist also ein isoliertes lokales Minimum).

Vergleichen wir noch mal die Bedingungen für Extremwertbestimmung im \mathbb{R}^n mit dem Spezialfall $n = 1$:

Dim	notw. f. Extr.	hinr. f. lok. Max/Min	hinr. f. SP	2. Abl. reichen nicht
1	$f'(p) = 0$	$\pm f''(p) > 0$	–	$f''(p) = 0$
n	$D_p f = 0$	$\pm \text{Hess}_p(f)$ pos. def.	$\text{Hess}_p(f)$ indef.	$\pm \text{Hess}_p(f)$ pos. semi-def.

Tabelle 1.2.: Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Extrema sind in höheren Dimensionen ganz analog. Was man aber sieht, dass in höheren Dimensionen noch neue Effekte sichtbar werden. In einer Variablen muss für einen Sattelpunkt die zweite Ableitung gleich Null sein und es gibt keine Möglichkeit schon daran abzulesen, ob man in p wirklich einen Sattelpunkt hat. Für $n > 1$ gibt es allerdings ein hinreichendes Kriterium für einen Sattelpunkt nur aus den zweiten Ableitung in p – nämlich wenn die Hessische in p indefinit ist (Das kann in einer Dimension nicht passieren).

Abbildung 1.9.: $f(x, y) = \cos x + \sin y$

1.7. Umkehrabbildungen und implizite Funktionen

1.7.1. Umkehrabbildungen

Woche 4

Wir wollen uns nun einmal anschauen, was für bijektive differenzierbare Funktionen über die Ableitung der Umkehrfunktion aussagen können, sofern diese existiert. Zur Frage der Existenz kommen wir später.

Definition 1.7.1. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine Abbildung $f: U \rightarrow V$ heißt C^k -Diffeomorphismus, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} k -mal stetig differenzierbar ist. Für $k = \infty$ sagen wir auch kurz nur Diffeomorphismus.

Beispiel 1.7.2. Aus [2, Satz 4.1.14 und 4.2.8] folgt: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und f' habe keine Nullstelle. Dann ist $f: I \rightarrow f(I)$ bijektiv, f^{-1} ist differenzierbar. Wir werden bald sehen, dass, wenn f zusätzlich schon stetig differenzierbar war, dann f^{-1} automatisch auch stetig differenzierbar ist und damit f ein C^1 -Diffeomorphismus ist.

Lemma 1.7.3 (Ableitung der Umkehrfunktion). Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen. Sei $f: U \rightarrow V$ bijektiv. Sei f in $x_0 \in U$ und f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $n = m$ und $D_{x_0}f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist invertierbar mit*

$$D_{y_0}f^{-1} = (D_{x_0}f)^{-1}.$$

Bevor wir das beweisen, wollen wir noch kurz kommentieren, warum wir nicht schon angenommen haben, dass $n = m$ ist. Man könnte ja vielleicht kurz glauben, dass aus f bijektiv, dies sowieso schon folgt. Das ist aber falsch, es gibt z.B. (wie schon früher erwähnt) stetige Kurven, die ein Quadrat vollständig ausfüllen. Da sieht man auch gleich dran, dass f bijektiv und stetig noch nicht reicht. Was reichen würde, ist: f bijektiv stetig und die Umkehrfunktion auch stetig. Dann folgt $m = n$. Das benötigt aber Methoden, die wir einfach noch nicht kennen und gehört in die Richtung algebraischer

*Hier wieder mit den \cdot^{-1} aufpassen: Links meint es die Umkehrfunktion von f , rechts die Umkehrfunktion von $D_{x_0}f$ (bzw. als Jacobimatrix betrachtet die inverse Matrix zu $D_{x_0}f$).

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

Topologie. In unserem Fall ist f allerdings in x_0 differenzierbar mit invertierbarer Ableitung und da ist es ganz einfach:

Beweis von Lemma 1.7.3. Da f in x_0 und f^{-1} in y_0 differenzierbar ist, folgt mit der Kettenregel angewendet auf $f^{-1} \circ f = \text{Id}$ und $f \circ f^{-1} = \text{Id}$, dass

$$D_{y_0=f(x_0)}f^{-1} \circ D_{x_0}f = \text{Id} \quad \text{und} \quad D_{x_0=f^{-1}(y_0)}f \circ D_{y_0}f^{-1} = \text{Id}$$

gilt. Also muss $D_{x_0}f$ invertierbar sein mit $D_{y_0}f^{-1} = (D_{x_0}f)^{-1}$. Da die lineare Abbildung $D_{x_0}f$ invertierbar ist, muss $n = m$ gelten. \square

Bemerkung 1.7.4 (Zu invertierbaren Abbildungen/Matrizen). Sei A eine reelle $n \times n$ -Matrix. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $\det A \neq 0$ ist. Die Abbildung $\det: \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig*, dass sieht man, da $\det(a_{ij})$ einfach nur ein Polynom in den Einträgen a_{ij} ist.

Auch die Abbildung $\text{GL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid \det A \neq 0\}^{\dagger} \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$, $A \mapsto A^{-1}$ ist stetig: Das sieht man, da gilt:

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det A} M_{ji}(A),$$

wobei $M_{ji}(A)$ die Determinante der $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix, welche aus A durch Streichen der j -ten Zeile und i -ten Spalte entsteht. Also ist $(A^{-1})_{ij}$ nur eine rationale Funktion in den Einträgen von A und somit ist $A \mapsto A^{-1}$ stetig.

Außerdem ist $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ genau dann invertierbar, wenn es ein $c > 0$ mit $|Ax| \geq c|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gibt (Übungsaufgabe 14).

Was bringt das für uns?

Sei f stetig differenzierbar. Dann hängt $D_p f$ stetig von p ab. Sei nun $D_p f$ für ein p invertierbar, also $\det D_p f \neq 0$. Dann folgt zusammen mit der Stetigkeit der Determinante, dass $q \mapsto \det D_q f$ stetig ist und damit $D_q f$ für alle q nahe genug an p auch invertierbar sein wird, vgl. auch folgendes Lemma.

Zuvor noch folgende Beobachtung: Sei f stetig differenzierbar mit $D_p f$ invertierbar für $p \in U$ für ein $U \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann gibt es ein $c > 0$, so dass $|D_p f(x)| \geq c|x|$ für alle $p \in U$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ (Übungsaufgabe 14).

Lemma 1.7.5. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Sei $f: U \rightarrow V$ bijektiv und k -mal stetig differenzierbar. Sei f^{-1} differenzierbar. Dann ist f^{-1} schon k -mal stetig differenzierbar, also f ein C^k -Diffeomorphismus.

Insbesondere sagt diese Lemma für $k = 1$, dass aus f stetig differenzierbar, bijektiv und f^{-1} differenzierbar schon folgt, dass f^{-1} stetig differenzierbar ist.

*Dazu muss man $\text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ als metrischen Raum betrachten. Wir identifizieren $\text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ (isomorph als Vektorräume) und benutzen den euklidischen Abstand.

$\dagger \text{GL}(n, \mathbb{R})$ – general linear group

1.7. Umkehrabbildungen und implizite Funktionen

Beweis. Wir setzen $g := f^{-1}$. Dann gilt $D_p g = (D_{g(p)} f)^{-1}$, also

$$\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(p = f(q)) = \frac{(-1)^{i+j}}{\det D_q f} M_{ji}(D_q f).$$

Da Df stetig in q ist und f^{-1} stetig ist, ist $\frac{\partial g_i}{\partial y_j}$ stetig in p und somit f ein C^1 -Diffeomorphismus. Da $\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(p)$ eine rationale Funktion in $\frac{\partial f_\ell}{\partial x_k}(f^{-1}(p))$ ist, folgt aus f k -mal stetig differenzierbar und $f^{-1} = g$ $k - 1$ -mal stetig differenzierbar, dass auch g k -mal stetig differenzierbar ist. Also folgt induktiv, dass f ein C^k -Diffeomorphismus ist. \square

1.7.2. Banachscher Fixpunktsatz

In Analysis 1 hatten wir schon einige Fragen durch das Finden von Fixpunkten von Abbildung gelöst – Für eine Abbildung $F: X \rightarrow X$ heißt $x \in X$ ein *Fixpunkt*, wenn $F(x) = x$ gilt.

In Übungsaufgabe 11 aus Analysis 1 haben wir gesehen, dass jede Kontraktion $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow [a, b] \subset \mathbb{R}$ genau einen Fixpunkt besitzt. Geht man, den Beweis dort noch einmal durch, sieht man, dass sich die Idee auf metrische Räume verallgemeinern lässt, solange man weiß, dass jede Cauchyfolge konvergiert. So werden wir dann bald den Banachschen Fixpunktsatz erhalten.

Dazu brauchen wir noch ein paar Vorbereitungen: Mit dem analogen Beweis zu Analysis 1, [2, Lem. 4.1.11] haben wir

Lemma 1.7.6. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Sei $f: X \rightarrow Y$ Lipschitz, d.h. es gibt ein $L > 0$ mit*

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)$$

für alle $x, y \in X$. Dann ist f stetig.

Ist $L < 1$, dann hieß f eine *Kontraktion*.

Definition 1.7.7. Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Beispiel 1.7.8.

- (i) $C^0([a, b])$ mit $d(f, g) = \sup_{[a, b]} |f - g|$ und $C^1([a, b])$ mit $d(f, g) = \sup_{[a, b]} |f - g| + \sup_{[a, b]} |f' - g'|$ sind vollständig, vgl. Übungsaufgabe 2.
- (ii) \mathbb{R}^n mit euklidischem Abstand ist vollständig [2, Folg. 3.9.8].
- (iii) Abgeschlossene Teilmengen vom \mathbb{R}^n (mit euklidischem Abstand) sind vollständig, da jede Cauchyfolge in \mathbb{R}^n konvergiert und aus der Abgeschlossenheit der Teilmengen folgt, dass der Grenzwert wirklich in der Teilmenge liegt.

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

Andererseits gilt: Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Abstand vollständig, dann muss A abgeschlossen sein: Nach [2, Lem. 4.1.25] ist A genau dann abgeschlossen, wenn jeder ihrer Häufungspunkte schon in A liegt. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von A , dann gibt es eine Folge x_n in A mit $x_n \rightarrow x$. Damit ist x_n insbesondere eine Cauchyfolge. Da A vollständig, muss x damit schon in A liegen, also ist A abgeschlossen.

Satz 1.7.9 (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei (X, d) ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum. Sei $f: X \rightarrow X$ eine Kontraktion. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $x_0 \in X$ und $x_{n+1} = f(x_n)$. Falls x_n in X gegen ein x konvergiert, dann gilt, da f nach Lemma 1.7.6 stetig ist, dass $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x$. Also ist x ein Fixpunkt von f . Es kann auch keinen weiteren geben, da aus $f(y) = y$ folgt:

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y),$$

was wegen $\lambda < 1$ dann $d(x, y) = 0$ und somit $x = y$ impliziert.

Es bleibt also zu zeigen, dass x_n in X konvergiert. Dazu überprüfen wir, dass x_n eine Cauchyfolge in X ist: Da f eine Kontraktion für eine Konstante $\lambda < 1$ ist, folgt

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n) \leq \dots \leq \lambda^n d(x_0, x_1)$$

und damit für $n \leq m$ mit Dreiecksungleichung

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n+1}^m d(x_{i-1}, x_i) \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=n+1}^m \lambda^{i-1} \leq d(x_0, x_1) \frac{\lambda^n}{1-\lambda}.$$

Somit ist x_n eine Cauchyfolge. Da X vollständig ist, gibt es ein $x \in X$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. \square

Beispiel 1.7.10. Das Heron-Verfahren zur Bestimmung der Quadratwurzel von $c > 0$, [2, Def. 2.6.2 und ÜA 12], $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{c}{x_n} \right)$, $x_0 = 1$, kann als Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes interpretiert werden. O.B.d.A. für $c \geq 1$. Dann zeigen die Abschätzungen aus [2, ÜA 12] für die Funktion $f: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, $x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{c}{x} \right)$, dass wir darauf den Banachschen Fixpunktsatz anwenden könnten.

Es gibt viele Anwendungen vom Banachschen Fixpunktsatz. Wir werden ihn gleich in der Konstruktion lokaler Umkehrfunktionen verwenden und später für die Konstruktion von Lösungen für gewöhnliche Differentialgleichungen.

1.7.3. Satz über inverse Funktionen

In Analysis 1 hatten wir gesehen, dass eine stetig differenzierbare Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ immer invertierbar ist. Wir wollen uns nun anschauen, ob es davon eine Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen gibt. Die erste Frage wird sein, wodurch denn die Bedingung $f'(x) \neq 0$ wohl ersetzt werden wird,

1.7. Umkehrabbildungen und implizite Funktionen

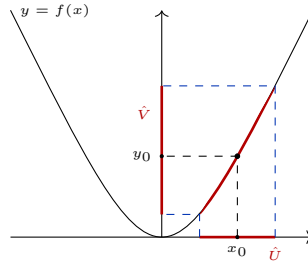


Abbildung 1.10.: In einer Umgebung \hat{U} von x_0 besitzt f eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion. Die Bedingung $D_{x_0}f$ ist invertierbar, bedeutet im Falle $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dass $f'(x_0) \neq 0$ sein muss.

haben wir in Abschnitt 1.7.1 im Prinzip schon beantwortet: $D_p f$ sollte invertierbar sein. Aber das alleine wird am Ende nicht für globale Invertierbarkeit reichen - aber uns die Invertierbarkeit liefern, also in der Umgebung eines gegebenen Punktes.

Zuerst führen wir noch einen Begriff ein:

Definition 1.7.11. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $p \in X$. Eine offene Teilmenge $A \subset X$ mit $p \in A$ nennen wir *offene Umgebung von p* .

Oft steht in Theoremen/Argumenten dann 'es gibt eine offene Umgebung um p , so dass gilt ...'. Das kann man immer auch einfach ersetzen durch 'es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass für $B_\epsilon(p)$ gilt ...'. Der Vorteil vom ersten ist, dass man nicht so viele Konstanten (hier ϵ) spezifizieren muss.

Satz 1.7.12. [Satz über inverse Funktionen] Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $x_0 \in U$ und $D_{x_0}f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ invertierbar. Dann gibt es eine offene Umgebung \hat{U} um x_0 , so dass

- $\hat{V} := f(\hat{U})$ eine offene Umgebung von $y_0 := f(x_0)$ ist.
- $f: \hat{U} \rightarrow \hat{V}$ ein C^1 -Diffeomorphismus ist.

Im Beweis dieses Satzes werden wir das folgende Lemma benötigen:

Lemma 1.7.13 (Schrankensatz). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar. Seien $p, q \in U$ derart, dass die Verbindungsstrecke in U liegt, also $p + t(q - p) \in U$ für $t \in [0, 1]$. Sei $L := \max_{t \in [0, 1]} \|D_{p+t(q-p)}f\|_{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k}$. Dann gilt

$$|f(p) - f(q)| \leq L|p - q|.$$

Beweis. Sei $h = q - p$. Setze $\tilde{f}(t) := f(p + th)$ für $t \in [0, 1]$. Dann ist \tilde{f} stetig differenzierbar mit $\tilde{f}(0) = f(p)$ und $\tilde{f}(1) = f(q)$. Mit dem Hauptsatz der Differential- und

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

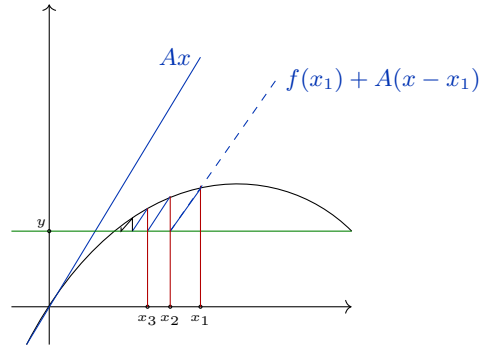


Abbildung 1.11.: Fixpunktproblem zum Lösen von $y = f(x)$ bei gegebenem Integral. Hier sei $A := D_0 f$. Die blauen Geraden sind alle parallel. x_{n+1} wird bestimmt durch die Forderung $y = f(x_n) + A(x_{n+1} - x_n)$.

Integralrechnung [2, Satz 4.5.47] und der Kettenregel folgt

$$f(q) - f(p) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) = \int_0^1 \tilde{f}'(t) dt = \int_0^1 D_{p+th} f(h) dt$$

und somit

$$|f(q) - f(p)| \leq \int_0^1 |D_{p+th} f(h)| dt \leq \int_0^1 \|D_{p+th} f\| |h| dt \leq |q - p| \sup_t \|D_{p+th} f\|.$$

Dieses Supremum ist endlich: Da f stetig differenzierbar ist, hängen die partiellen Ableitung stetig vom Punkt ab und damit ist $t \mapsto \|D_{p+th} f\|$ ebenfalls stetig. Da $t \in [0, 1]$ ist, folgt mit dem Satz von Maximum, dass das Supremum angenommen wird und damit insbesondere endlich ist. \square

Beweis von Satz 1.7.12. Wir betrachten den Fall $x_0 = y_0 = 0$.^{*} Alle anderen Fälle können darauf zurückgeführt werden, in dem man

$$\tilde{f}: \tilde{U} := \{z \in \mathbb{R}^n \mid x_0 + z \in U\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad z \mapsto f(x_0 + z) - f(x_0)$$

betrachtet.

Idee ist die Lösung von $y = f(x)$ für gegebenes y (und damit die Umkehrfunktion) mittels eines Fixpunktproblems zu finden. Aus den Beispielen wissen wir schon, dass das nur lokal funktionieren kann.

Sei $F_y: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (D_0 f)^{-1}(y - f(x) + D_0 f(x))$. Dann gilt $f(x) = y$ genau dann, wenn $F_y(x) = x$ ist, also wenn F_y in x einen Fixpunkt hat, vgl. Abbildung 1.11.

^{*}Das ändert den Beweis nicht oder macht ihn mathematisch einfacher – aber es macht es übersichtlicher.

1.7. Umkehrabbildungen und implizite Funktionen

Wenn F_y nun eine selbstabbildende (d.h. Definitions- gleich Wertebereich) Kontraktion auf einem vollständigen metrischen Raum wäre, könnten wir den Banachschen Fixpunktsatz anwenden. Wir erwarten das nicht für beliebige y sondern nur welche nah genug an $y_0 = 0$. Deshalb suchen wir $\delta, \epsilon > 0$, so dass für alle $y \in B_\epsilon(0)$ die Abbildung F_y die abgeschlossene Menge $\overline{B_\delta(0)} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq \delta\}$ in sich selbst abbildet und dort eine Kontraktion ist:

Sei $r(x) := f(x) - D_0 f(x)$. Es ist r stetig differenzierbar mit $r(0) = 0$ und $D_0 r = 0$. Also gibt es ein $\delta > 0$ mit $\|D_p(r)\| \leq \frac{1}{2\|(D_0 f)^{-1}\|}$ für alle $p \in \overline{B_\delta(0)}$. Also folgt für alle $x_1, x_2 \in \overline{B_\delta(0)}$

$$\begin{aligned} |F_y(x_1) - F_y(x_2)| &= |(D_0 f)^{-1}(r(x_2) - r(x_1))| \leq \|(D_0 f)^{-1}\| |r(x_2) - r(x_1)| \\ &\stackrel{\text{Schränkensatz}}{\leq} \|(D_0 f)^{-1}\| \frac{1}{2\|(D_0 f)^{-1}\|} |x_2 - x_1| = \frac{1}{2} |x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Also ist $F_y|_{\overline{B_\delta(0)}}$ schon einmal eine Kontraktion. Es bleibt zu sehen, dass für geeignete y das Bild auch in $\overline{B_\delta(0)}$ liegt: Sei $y \in B_\epsilon(0)$ für $\epsilon = \frac{\delta}{4\|(D_0 f)^{-1}\|}$. Dann ist für $x \in \overline{B_\delta(0)}$

$$\begin{aligned} |F_y(x)| &\leq |(D_0 f)^{-1}(y - r(x))| \leq \|(D_0 f)^{-1}\| (\epsilon + |r(x) - r(0)|) \\ &\stackrel{\text{Schränkensatz}}{\leq} \|(D_0 f)^{-1}\| \left(\epsilon + \frac{1}{2\|(D_0 f)^{-1}\|} |x| \right) < \|(D_0 f)^{-1}\| \epsilon + \frac{1}{2} \delta < \delta, \end{aligned}$$

also sogar $F_y(\overline{B_\delta(0)}) \subset B_\delta(0)$.

Somit bildet $F_y|_{\overline{B_\delta(0)}}$ auf sich selbst ab und ist dort eine Kontraktion. Da $\overline{B_\delta(0)}$ abgeschlossen ist, ist es mit dem euklidischen Abstand vollständig. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es nun zu jedem $y \in B_\epsilon(0)$ ein $x \in \overline{B_\delta(0)}$ mit $F_y(x) = x$, also $f(x) = y$. Wegen $F_y(\overline{B_\delta(0)}) \subset B_\delta(0)$ gilt sogar $x \in B_\delta(0)$. Damit ist $f: \hat{U} := f^{-1}(B_\epsilon(0)) \cap B_\delta(0) \rightarrow \hat{V} := B_\epsilon(0)$ bijektiv. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(B_\epsilon(0))$ und damit auch \hat{U} offen. Außerdem ist $0 \in \hat{U}$.

Das einzige was wir jetzt noch überprüfen müssen, ist, dass $f^{-1}: \hat{V} \rightarrow \hat{U}$ auch stetig differenzierbar ist. Es reicht zu zeigen, dass f^{-1} differenzierbar ist, dann folgt stetig differenzierbar mit Lemma 1.7.5.

Sei $\bar{y} \in B_\epsilon(0)$. Der Kandidat für $D_{\bar{y}} f^{-1}$ ist $(D_{\bar{x} := f^{-1}(\bar{y})} f)^{-1}$. Dann gilt für $\hat{y} = f(\hat{x})$ und $\bar{y} = f(\bar{x})$:

$$\frac{f^{-1}(\hat{y}) - f^{-1}(\bar{y}) - (D_{\bar{x}} f)^{-1}(\hat{y} - \bar{y})}{|\hat{y} - \bar{y}|} = \frac{-|\hat{x} - \bar{x}|}{|f(\hat{x}) - f(\bar{x})|} (D_{\bar{x}} f)^{-1} \frac{f(\hat{x}) - f(\bar{x}) - D_{\bar{x}} f(\hat{x} - \bar{x})}{|\hat{x} - \bar{x}|}$$

Für $\hat{y} \rightarrow \bar{y}$ geht $\hat{x} \rightarrow \bar{x}$, da:

$$|\hat{x} - \bar{x} + (D_0 f)^{-1}(\bar{y} - \hat{y})| = |F_y(\hat{x}) - F_y(\bar{x})| \leq \frac{1}{2} |\hat{x} - \bar{x}|$$

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

und somit

$$|\hat{x} - \bar{x}| \leq 2|(D_0 f)^{-1}(\bar{y} - \hat{y})| \leq 2\|(D_0 f)^{-1}\| |\bar{y} - \hat{y}|.$$

Damit geht $\frac{f(\hat{x}) - f(\bar{x}) - D_{\bar{x}} f(\hat{x} - \bar{x})}{|\hat{x} - \bar{x}|}$ gegen 0, da f differenzierbar ist. Wenn wir jetzt noch zeigen, dass $\frac{|\hat{x} - \bar{x}|}{|f(\hat{x}) - f(\bar{x})|}$ beschränkt ist für x nahe genug an \bar{x} , folgt

$$\lim_{\hat{y} \rightarrow \bar{y}} \frac{f^{-1}(\hat{y}) - f^{-1}(\bar{y}) - (D_{\bar{x}} f)^{-1}(\hat{y} - \bar{y})}{|\hat{y} - \bar{y}|} = 0$$

und somit wäre f^{-1} differenzierbar:

Es ist

$$\frac{|f(\hat{x}) - f(\bar{x})|}{|\hat{x} - \bar{x}|} \geq \frac{|D_{\bar{x}} f(\hat{x} - \bar{x})|}{|\hat{x} - \bar{x}|} - \frac{|f(\hat{x}) - f(\bar{x}) - D_{\bar{x}} f(\hat{x} - \bar{x})|}{|\hat{x} - \bar{x}|}.$$

Hier ist $\frac{|D_{\bar{x}} f(\hat{x} - \bar{x})|}{|\hat{x} - \bar{x}|} \geq c$ für ein $c > 0$, da $D_{\bar{x}} f$ invertierbar ist und stetig von \bar{x} abhängt, vgl Übungsaufgabe 14. Der zweite Summand rechts geht gegen Null für $x \rightarrow \bar{x}$. Also gilt $\frac{|f(x) - f(\bar{x})|}{|x - \bar{x}|} \geq \frac{c}{2}$ und somit $\frac{|x - \bar{x}|}{|f(x) - f(\bar{x})|} \leq \frac{2}{c}$ für x nahe \bar{x} . \square

Folgerung 1.7.14. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $D_x f$ für alle $x \in U$ invertierbar. Dann ist $f(U)$ in \mathbb{R}^n offen.

Beweis. Das folgt direkt aus dem Satz über inverse Funktionen, da jedes $y \in f(U)$ eine offene Umgebung haben muss, auf welcher f invertierbar ist. \square

Beispiel 1.7.15. Angenommen $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig differenzierbar mit $D_p f$ invertierbar für alle $p \in U$. Dann gibt uns der Satz über inverse Funktionen lokal um alle p eine Inverse. Aber $f: U \rightarrow f(U)$ muss nicht global eine Inverse haben – zum Beispiel Polarkoordinaten:

$$f: (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T$$

Hier ist $D_{(r, \varphi)} f = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$ immer invertierbar. Also gibt es für alle $(x, y)^T = f(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine offene Umgebung V und eine offene Umgebung U von (r, φ) , so dass $f: U \rightarrow V$ invertierbar ist. Aber das globale f hat keine Inverse, da f nicht injektiv ist.

Wenn wir allerdings den Definitionsbereich und Wertebereich einschränken auf

$$\tilde{f} = f|_{(0, \infty) \times (0, 2\pi)}: (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)^T \mid x \geq 0\}, (r, \varphi)^T \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T,$$

dann ist \tilde{f} bijektiv. Da die Umkehrfunktion eindeutig ist, stimmt sie natürlich lokal mit denen überein, die wir lokal aus dem Satz über inverse Funktionen erhalten haben. Also ist \tilde{f}^{-1} differenzierbar. Da \tilde{f} sogar unendlich oft differenzierbar ist, erhalten wir zusammen mit Lemma 1.7.5, dass \tilde{f} ein C^∞ -Diffeomorphismus ist.

Beispiel 1.7.16. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$xe^y = a \quad \cos x + \sin y - 1 = b.$$

Das bei gegebenen a, b nach x, y aufzulösen wird praktisch nicht gehen. Aber wir können uns fragen, ob wir x, y überhaupt theoretisch als Funktion von a, b darstellen können. Da hilft uns, zumindest lokal, der Satz über inverse Funktionen: Wir betrachten $f(x, y) = (xe^y, \cos x + \sin y - 1)^T$. Dann ist

$$D_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ -\sin x & \cos y \end{pmatrix}$$

Um den Satz über inverse Funktionen brauchen wir mindestens eine spezielle Lösung, in deren Umgebung wir dann eine Inverse suchen. Hier ist eine spezielle Lösung $x = y = a = b = 0$. Dort ist $D_{(0,0)}f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – also invertierbar. Darauf den Satz angewendet liefert uns

- Für jedes (a, b) nahe genug an $(0, 0)$ gibt es genau eine Lösung $f(x, y) = (a, b)$, die selbst nahe an $(0, 0)$ liegt. Der Satz liefert es einmal eine reine Existenzaussage der Umgebung – also des 'nah genug'. In Wirklichkeit gab uns der Beweis aber zumindest eine Schranke daran, wie nahe (a, b) an $(0, 0)$ liegen darf – das ϵ im Beweis).
- Da wir auch die Ableitung der Umkehrfunktion kennen, können wir zumindest eine Näherung der Umkehrfunktion durch ein Taylorpolynom ersten Grades immer direkt hinschreiben. Hier:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + o\left(\left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + o\left(\left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|\right).$$

1.7.4. Implizite Funktionen

Sei $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung mit $n \geq m$. Wir wollen die Frage untersuchen, ob sich die Gleichung $f(z) = c$ für gegebenes c nach einigen der Variablen auflösen lassen. Wozu ist das gut? Wir werden Aussagen erhalten zu(m)

- Auflösen von implizit* gegebenen Gleichungen/Gleichungssysteme
- Niveaumengen von Funktionen
- Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen

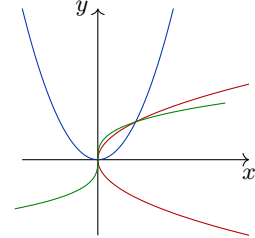
Schauen wir uns aber zuerst einmal an, was überhaupt erwartbar ist:

*Gleichungen für y in Abhängigkeit von x können *explizit*, $y = f(x)$, oder *implizit* $f(x, y) = 0$ gegeben sein.

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

Beispiel 1.7.17.

- (i) $f(x, y) = y - x^2$: Hier ist $f(x, y) = 0$ nach y auflösbar:
 $y = x^2$ und f^{-1} ist ein Funktionsgraph.
- (ii) $f(x, y) = x - y^2$: $f(x, y) = 0$ ist nicht nach y auflösbar.
 $f^{-1}(0)$ ist kein Funktionsgraph als Funktion von x .
Aber: lokal (d.h. in der genügend kleinen Umgebung
 U eines Punktes $(x_0, y_0) \in f^{-1}(0)$) ist $f^{-1}(0) \cap U$ ein
Funktionsgraph, solange $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ ist.
- (iii) $f(x, y) = y^3 - x$: Hier ist $f^{-1}(0)$ Graph der Funktion
 $y = \sqrt[3]{x}$ (mit Vorzeichen verstanden also für x negativ,
soll das gleich $-\sqrt[3]{-x}$ sein), aber diese ist in 0 nicht
differenzierbar.



Was sagen uns diese einfachen Beispiele: Wir erwarten im Allgemeinen keine Auflösbarkeit global, also für den ganzen Definitionsbereich, sondern höchstens lokal, also nahe einem gegebenen Punkt. Aber auch das kann schief gehen. Im eindimensionalen Fall kann das passieren, wenn die Tangente an diesem Punkt vertikal ist, wie z.B. in (ii). Allerdings zeigt uns (iii), dass dann die Menge $f^{-1}(0)$ nicht notwendigerweise lokal kein Funktionsgraph sein muss, aber dass Sie dann dort nicht differenzierbar sein kann, denn die Ableitung müsste dann dort unendlich sein.

Wir führen zuvor noch eine abkürzende Bezeichnung ein: Für $f: (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}^k$ differenzierbar ist $D_p f$ eine $k \times (k + m)$, welche wir gelegentlich in die Ableitungen in die ersten m Richtungen und in die letzten k Richtungen zerlegen wollen. Dafür schreiben wir

$$D_p f = \left(\underbrace{\partial_x f(p)}_{k \times m\text{-Matrix}}, \underbrace{\partial_y f(p)}_{k \times k\text{-Matrix}} \right).$$

Das ist ein bisschen 'abuse of notation', da $\partial_x f(p)$ bis jetzt eher dafür stand, dass x selbst eine Koordinate war und das dann die partielle Ableitung in x -Richtung ist. Das ist etwas ungünstig, aber aus dem Kontext sollte ja immer klar sein, ob x nur eine Koordinate oder ein Punkt im \mathbb{R}^m ist. Im letzteren Fall ist $\partial_x f(p)$ die totale Ableitung von f , wenn man f nur als Funktion von x betrachtet und y als festen Parameter ansieht. Im Spezialfall $m = 1$ ist es dann genau die partielle Ableitung in x -Richtung.

Satz 1.7.18 (Satz über implizite Funktionen). Sei $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ offen. Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar. Sei $(x_0, y_0) \in U$ ($x_0 \in \mathbb{R}^m$, $y_0 \in \mathbb{R}^k$) und $f(x_0, y_0) = z_0$. Sei $\partial_y f(x_0, y_0): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ invertierbar. Dann gibt es offene Umgebungen V von x_0 und W von y_0 und eine stetig differenzierbare Funktion $g: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow W \subset \mathbb{R}^k$ mit

$$\{(x, y) \in V \times W \mid f(x, y) = z_0\} = \{(x, g(x)) \mid x \in V\}.$$

Insbesondere ist dann $g(x_0) = y_0$ und es gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = -(\partial_y f(x, g(x)))^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, g(x)).$$

1.7. Umkehrabbildungen und implizite Funktionen

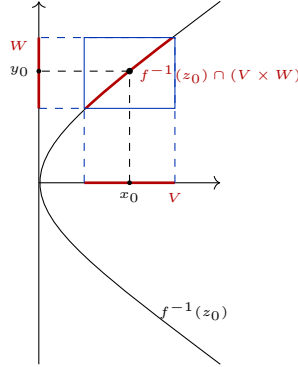


Abbildung 1.12.: Bild zum Satz über implizite Funktionen

Auflösen für explizite Gleichungen haben wir schon im Satz über inverse Funktionen behandelt. Wir versuchen den Fall von impliziten Funktionen darauf zurückzuführen:

Beweis. Sei $F: U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$, $(x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^k) \mapsto (x, f(x, y))^T \in \mathbb{R}^{m+k}$. Dann ist (geschrieben als Blockmatrix)

$$D_{(x,y)}F = \begin{pmatrix} \text{Id}_m & 0_{m \times k} \\ * & \partial_y f(x, y) \end{pmatrix}$$

(hier ist Id_m die $m \times m$ -Identitätsmatrix, $0_{m \times k}$ die $m \times k$ -Nullmatrix und $*$ steht für eine $(m-k) \times k$ -Matrix, die uns nicht wichtig ist.) und wir sehen, dass $D_{(x,y)}F$ genau dann invertierbar ist, wenn $\partial_y f(x, y)$ invertierbar ist. Nach dem Satz über inverse Funktionen gibt es also offene Umgebungen \hat{U} von (x_0, y_0) , \hat{V} von $F(x_0, y_0) = (x_0, z_0)$ und einen stetig differenzierbare Inverse $G := F^{-1}: \hat{V} \rightarrow \hat{U}$. Sei $G = (G_1: \hat{V} \rightarrow \mathbb{R}^m, G_2: \hat{V} \rightarrow \mathbb{R}^k)^T$. Sei $(x, y) \in \hat{U}$ und $(a, b) \in \hat{V}$. Dann gilt $(x, f(x, y)) = (a, b)$ genau dann, wenn $x = G_1(a, b)$ und $y = G_2(a, b)$ ist. Wir setzen $g(x) = G_2(x, z_0)$. Dieses g ist stetig differenzierbar, da G stetig differenzierbar ist und es gilt

$$f(x, y) = z_0 \Leftrightarrow F(x, y) = (x, z_0)^T \Leftrightarrow (x, y)^T = G(x, z_0) \Leftrightarrow y = G_2(x, z_0) = g(x).$$

Insbesondere ist $g(x_0) = y_0$. Wählt man nun V offene Umgebung um x_0 und W offene Umgebung um y_0 mit $V \times W \subset \hat{U}$ (immer möglich da \hat{U} offen ist), folgen alle Aussagen des Satzes bis auf die letzte zur Ableitung. Dazu kommen wir nun.

Nach Konstruktion von g gilt $f(x, g(x)) = z_0$. Partielle Ableitung nach x_i liefert mit Kettenregel

$$0 = \partial_{x_i} f(x, g(x)) + \sum_{j=1}^k \partial_{y_j} f(x, g(x)) \partial_{x_i} g_j(x) = \partial_{x_i} f(x, g(x)) + \partial_y f(x, g(x)) \partial_{x_i} g(x)$$

und somit

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = -(\partial_y f(x, g(x)))^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, g(x)).$$

□

Woche 5 Schauen wir uns verschiedene erste Anwendungen des Satzes für implizite Funktionen an. Als erstes Auflösbarkeit vom Gleichungssystemen:

Beispiel 1.7.19. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - u^2 - 5v &= 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3u^2 + 4v^2 &= 1. \end{aligned}$$

Eine Lösung ist $(x, y, u, v) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$. Wir wollen nun sehen, ob in der Nähe dieser Lösung, das Gleichungssystem nach (u, v) aufgelöst werden kann?

Dazu betrachten wir $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$(x, y, u, v) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 - u^2 - 5v \\ x^2 + 2y^2 + 3u^2 + 4v^2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$D_{(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)} f = \begin{pmatrix} 2x & -2y & -2u & -5 \\ 2x & 4y & 6u & 8v \end{pmatrix} \Big|_{(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der blaue Teil der Matrix ist $\partial_{(u,v)} f(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$ und invertierbar.

Damit folgt aus dem Satz für implizite Funktionen, dass wir f nahe $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$ nach (u, v) auflösen können. Sei diese Auflösung $(u, v) = g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Dann gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -(\partial_{(u,v)} f(x, y, g(x, y)))^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y)) = \begin{pmatrix} -2u(x, y) & -5 \\ 6u(x, y) & 8v(x, y) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x \\ 2x \end{pmatrix}$$

und analog für die partielle Ableitung in y -Richtung.

Der Satz über implizite Funktionen hilft auch, wenn man Lösungen in Abhängigkeit von Parametern untersuchen will, z.B.:

Beispiel 1.7.20. Sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, a) \mapsto f(x, a)$ ein Polynom in x mit Koeffizienten, welche Funktionen sind, die von a abhängen. Sei f stetig differenzierbar. (z.B. $f(x, b, c) = x^2 + bx + c$). Sei $f(x_0, a_0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, a_0)$ invertierbar (d.h. x_0 ist für das Polynom $f(x, a_0)$ eine einfache Nullstelle*). Dann ist in einer Umgebung von (x_0, a_0) die Funktion f nach x auflösbar, also $x = x(a)$.

*Hat ein Polynom $p(x)$ in x_0 eine Nullstelle der Ordnung ≥ 2 , dann gibt es ein Polynom q mit $p(x) = (x - x_0)^2 q(x)$ und dann ist $p'(x) = 2(x - x_0)q(x) + (x - x_0)^2 q'(x)$ und somit $p'(x_0) = 0$.

1.7. Umkehrabbildungen und implizite Funktionen

In unserem Beispiel wäre $\partial_x f(x_0, b_0, c_0) = 2x_0 + b_0$. Also muss für die Auflösbarkeit $x_0 \neq -\frac{b_0}{2}$ sein. Das entspricht dem, was wir erwarten würden, da die Nullstellen von f sind $x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ für $b^2 \geq 4c$ und sonst gibt es keine reellen Lösungen.

Insbesondere sagt uns die obige Diskussion: Sind a einfach die Koeffizienten eines Polynoms $p(x, a)$ in x und x_0 sei eine einfache Nullstelle von $p(x, a_0)$. Dann hat für alle a nahe genug an a_0 das Polynom $p(x, a)$ auch eine einfache Nullstelle nahe x_0 .

Beispiel 1.7.21.

- (i) Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir betrachten $f(x, y) = c$ für ein c , so dass sowohl $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ als auch $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ nicht verschwinden. Dann können wir nach dem Satz für implizite Funktionen diese Gleichung zumindest lokal sowohl nach $x = g(y)$ als auch nach $y = h(x)$ auflösen. Es gilt dann

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(y), y)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(g(y), y)$$

Analog ist

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x))$$

und somit

$$\frac{\partial g}{\partial y}(h(x)) \frac{\partial h}{\partial x}(x) = 1.$$

Oft schreibt man verkürzt $x = x(y)$ und $y = y(x)$ und hat mit dieser Notation dann

$$\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 1.$$

Das sieht im ersten Moment so aus, also ob man eine Kürzungsregel für partielle Ableitungen hat. Das stimmt so nicht, siehe nächstes Beispiel.

- (ii) Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir betrachten $f(x, y, z) = c$, so dass $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$ und $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$ jeweils nirgends verschwinden. Dann können wir diese Gleichung zumindest lokal nach jeder Variablen auflösen $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$ und $z = z(x, y)$ und wir haben

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial y}(y, z) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(y, z), y, z)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x(y, z), y, z) \\ \frac{\partial y}{\partial z}(x, z) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x, z), z)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y(x, z), z) \\ \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z(x, y))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z(x, y)) \end{aligned}$$

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

und somit

$$\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

Wirkt vielleicht am Anfang etwas überraschend, kann man aber am Beispiel $xyz = 1$ einfach mal direkt nachrechnen.

Oft sieht man diese Gleichung auch in der Form

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x},$$

wobei wir hier $\frac{\partial y}{\partial x}(x, z) = \left(\frac{\partial x}{\partial y}(y, z) \right)^{-1}$ aus (i) (für z festen Parameter) genutzt haben.*

Z.B. taucht diese Gleichung in der Thermodynamik auf: Zustandsgleichungen für Gase sind (ggf. implizit) gegeben als $f(p, V, T) = 0$. Hier ist p der Druck, V das Volumen und T die Temperatur. Diese Gleichungen sind jeweils nach einer Variable auflösbar, also $p = p(V, T)$, $V = V(p, T)$ und $T = T(p, V)$. Nach obigen Überlegungen ist

$$\frac{\partial p}{\partial T} = - \frac{\partial p}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T}$$

Der Physiker schreibt meistens

$$\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V = - \left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_T \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p$$

um zu sagen, welche Größe beim Ableiten gerade fest gehalten wird.

Für die Zustandsgleichung des idealen Gases $pV = nRT^\dagger$ kann man sich das abstrakte hier sparen, weil man das ganz einfach direkt nach allen Variablen auflösen kann. Aber bei der Van-der-Waals-Gleichung $RT = \left(p + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - b)$ ist das explizite Auflösen nach V schon schwieriger (Polynom dritten Grades in V)[‡].

1.8. Untermannigfaltigkeiten

Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z)^T \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Dann ist $f^{-1}(0) = S^2$ die Sphäre vom Radius 1. Es ist $D_{(x_0, y_0, z_0)} f = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$. Für $z_0 \neq 0$ ist $\partial_z f(x_0, y_0, z_0) = 2z_0 \neq 0$. Also gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen in einer offenen Umgebung von

*Diese Gleichung darf man nicht mit der Kettenregel verwechseln! Wäre $y = y(z(x))$, dann könnten wir die Kettenregel anwenden und würde eine ähnliche Formel aber mit einem + erhalten. Doch wir haben $y = y(x, z)$!

[†] n Stoffmenge des Gases, R Universelle Gaskonstante

[‡] a, b sind hier Van-der-Waals-Konstanten des betreffenden Gases

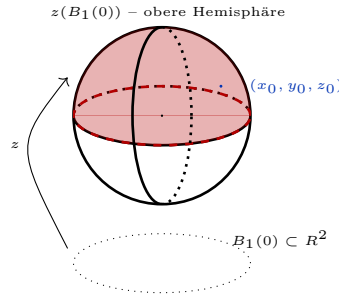


Abbildung 1.13.: Für $(x_0, y_0, z_0) \in S^2$ mit $z_0 > 0$ kann die definierende Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nach $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ mit Definitionsbereich $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ aufgelöst werden. Der Graph $(x, y, z(x, y))$ ist dann die obere Hemisphäre.

(x_0, y_0, z_0) eine Auflösung von $f(x, y, z) = 0$ nach z , also $z = z(x, y)$. Hier brauchen wir natürlich diesen abstrakten Satz nicht, sondern können direkt ausrechnen: $z(x, y) = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, wobei \pm das Vorzeichen von z_0 ist. Der maximale Definitionsbereich ist hier gegeben durch $z: B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Man kann z nun als eine Karte der Sphäre/Erdoberfläche verstehen – so wie wir sie in Atlanten finden.

In einer offenen Umgebung von Punkten mit $z_0 = 0$ können wir aber entweder nach x oder nach y auflösen, da x_0, y_0, z_0 nicht gleichzeitig Null sein können, das sie einen Punkt auf der Sphäre ergeben.

Wir haben also insgesamt gesehen, dass für den Fall der Sphäre, es um jeden Punkt (x_0, y_0, z_0) eine offene Umgebung gibt, so dass f nach mindestens einer Variable auflösbar ist und so eine Karte um jeden Punkt der Sphäre finden – also einen Atlas für die gesamte Erde finden. Diese Interpretation wird im Begriff der Untermannigfaltigkeit zusammengefasst:

Definition 1.8.1. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $m \leq n$. Dann heißt M *m-dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit* von \mathbb{R}^n , falls es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von p , eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^m$ und eine k -mal stetig differenzierbare Abbildung $F: U \rightarrow V$ gibt, so dass gilt:

- (i) $F(U) = M \cap V$ und $F: U \rightarrow M \cap V$ ist ein Homöomorphismus* .

*Homöomorphismus = stetige Abbildung, die eine stetige Umkehrabbildung besitzt.

Die Umkehrabbildung $F^{-1}: M \cap V \rightarrow U$ ist hier eine Abbildung von $M \cap V$, was als Teilmenge von \mathbb{R}^n selbst wieder ein metrischer Raum ist. D.h. wir wissen, was hier Stetigkeit bedeutet.

Allerdings ist es i.A. leichter, dass in konkreten Situation wie folgt zu überprüfen: F^{-1} ist stetig, falls es eine stetige Abbildung $G: V \rightarrow U \times \mathbb{R}^{n-m}$ mit $G|_{M \cap V} = F$ gibt. Oder in dem man schon direkt F fortsetzt zu einem Homöomorphismus $\tilde{F}: W \subset U \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow f(W) \subset \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{F}|_{U \times \{0\}} = F$, denn dann ist $F: U \rightarrow F(U)$ automatisch auch ein Homöomorphismus.

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

(ii) Die Jacobimatrix

$$D_u F = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial F}{\partial u_m}(u) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1}(u) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1}(u) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial u_m}(u) \end{pmatrix} \quad (n \times m - \text{Matrix})$$

hat für alle $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in U$ maximalen Rang, also Rang m (wobei $F(u) = (F_1(u), \dots, F_n(u))^T$).

Die Abbildung F heißt *lokale Parametrisierung* von M . Man nennt $n - m$ die *Kodimension* der C^k -Untermannigfaltigkeit und $u = (u_1, \dots, u_m)^T$ *lokale Koordinaten* von M . Ist $k = \infty$, nennen wir M einfach nur *Untermannigfaltigkeit*.

Wozu Bedingung (ii) gut ist und gefordert wird, werden wir nachher gleich noch sehen.

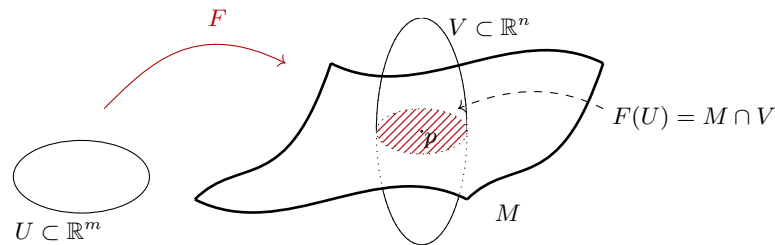


Abbildung 1.14.: lokale Parametrisierung

Bemerkung 1.8.2. (LinAlg-Wdh) Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist die Jacobimatrix $D_u f$ eine $m \times n$ -Matrix, bzw. eine lineare Abbildung $D_u f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Ist $D_u f$ injektiv (bzw. surjektiv), dann ist der Rang von $D_u f$ gleich n (bzw. m).

Im Falle von Definition 1.8.1 ist $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $m \leq n$. Damit bedeutet: $D_u F$ habe maximalen Rang, dass $D_u F$ injektiv sein muss. Man sagt, dass F eine *Immersion* in u ist.

Beispiel 1.8.3. (Beispiele für Untermannigfaltigkeiten)

- (i) **Ebene H im \mathbb{R}^3 :** Die Ebene H gehe durch den Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ und werde durch die linear unabhängigen Vektoren X_1, X_2 aufgespannt:

$$H = \{p + u_1 X_1 + u_2 X_2 \mid u_i \in \mathbb{R}\}.$$

Hier reicht eine lokale Parametrisierung

$$F: U = \mathbb{R}^2 \rightarrow V = \mathbb{R}^3, \quad u = (u_1, u_2) \mapsto p + u_1 X_1 + u_2 X_2.$$

1.8. Untermannigfaltigkeiten

Dabei ist F offensichtlich glatt (=unendlich oft differenzierbar) und als Abbildung $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow F(\mathbb{R}^2) = H$ ein Homöomorphismus (kann man direkt überprüfen). Weiterhin hat

$$D_u F = (X_1, X_2)$$

Rang 2, da die Vektoren linear unabhängig sind.

- (ii) $S^1 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$: Wir geben hier nur lokale Parametrisierungen um $(0, 1)^T$ an, um alle jeweils fehlenden Punkte findet man analog eine lokale Parametrisierung. Natürlich reicht es eine lokale Parametrisierung um jeden Punkt von S^1 zu finden, aber wir wollen hier sehen, wie unterschiedlich solche Parametrisierungen aussehen können:

- (a) (Mittels Winkeln)

$$F: U = (-\pi, \pi) \rightarrow S^1 \cap \underbrace{(\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0)^T\})}_{=V}, \quad \alpha \mapsto (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$$

($D_\alpha F = (-\sin \alpha, \cos \alpha)^T$ hat Rang 1) Hier ist F sogar für alle $p \in S^1 \setminus \{(-1, 0)^T\}$ eine lokale Parametrisierung (unendlich oft differenzierbar, bijektiv, Umkehrabbildung stetig*, max. Rang der Ableitung). Um $\{(-1, 0)^T\}$ kann man ganz analog eine Parametrisierung bauen. Also ist S^1 eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 .

- (b) (Mittels Auflösung) Das ist wie bei der Sphäre vom Anfang.

$$F: (-1, 1) \rightarrow S^1 \cap \{(x, y) \mid y > 0\}, \quad x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2})^T$$

($D_x F = (1, \partial_x \sqrt{1-x^2} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}})^T$ hat Rang 1) Analog erhält man mittels $F: U = (-1, 1) \rightarrow S^1 \cap \underbrace{\{(x, y)^T \mid y < 0\}}_{=V}, \quad x \mapsto (x, -\sqrt{1-x^2})^T$. Damit hat

man schon um alle Punkte in $S^1 \setminus \{(-1, 0)^T, (1, 0)^T\}$ eine lokale Parametrisierung. Auflösen nach y (statt x wie bisher) liefert dann ganz analog lokale Parametrisierungen für die verbleibenden Punkte.

- (iii) Sei M eine m -dimensionale C^ℓ -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n . Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $W \cap M$ eine m -dimensionale C^ℓ -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n : Sieht man direkt durch Einschränken des Definitionsbereiches einer lokalen Parametrisierung $F: U \rightarrow V$ um $p \in M \cap W$ auf $F: U \cap F^{-1}(W) \rightarrow V \cap W$.
- (iv) Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und sei $f: u = (u_1, \dots, u_m) \in U \rightarrow f(u) = f(u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^k$ ℓ -mal stetig differenzierbar. Dann ist der Funktionsgraph $M = \{(u, f(u)) \in \mathbb{R}^{n=m+k} \mid u \in U\}$ eine C^ℓ -Untermannigfaltigkeit, vgl. Übungsaufgabe 19(i).

*Um zu sehen, dass F^{-1} stetig ist, betrachten wir $\tilde{F}: W := (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \tilde{F}(W) \subset \mathbb{R}^2, (r, \varphi) \mapsto (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$. Dies ist sogar ein Diffeomorphismus und somit ist insbesondere \tilde{F}^{-1} und damit F stetig.

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n



Abbildung 1.15.: Beide Bilder seien das Bild einer stetig differenzierbare Kurve $c: I = (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Links ist c nicht injektiv. Rechts ist c injektiv, aber $p = c(t_0) = \lim_{t \rightarrow b} c(t)$ für ein $t_0 \in (a, b)$. Dann ist jedoch die Umkehrabbildung $p = c(t) \in c(I) \mapsto t$ nicht stetig. Denn $c(b - \frac{1}{n}) \rightarrow p = c(t_0)$ für $n \rightarrow \infty$, aber $b - \frac{1}{n}$ konvergiert zu b und nicht zu t_0 .

- (v) Sei $c: I = (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve. Sei $D_t c = c'(t) \neq 0 = (0, 0)^T$ für alle $t \in (a, b)$. Dann hat $D_t c$ maximalen Rang. Trotzdem muss das Bild von c keine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 sein. Was kann passieren? c kann nicht injektiv sein, vgl. Abbildung 1.15 links. Aber auch Injektivität muss nicht ausreichen: Dann ist zwar $c: I \rightarrow c(I)$ automatisch eine bijektive stetige Abbildung und wäre damit Kandidat für die lokale Parametrisierung. Aber die Umkehrabbildung muss nicht stetig sein, vgl. Abbildung 1.15 rechts.*

Um herauszufinden, ob eine Menge eine Untermannigfaltigkeit ist, gibt es verschiedene äquivalente Kriterien. Zum Beispiel muss eine Untermannigfaltigkeit in einer genügend kleinen Umgebung eines Punktes immer als Funktionsgraph, vgl. Beispiel 1.8.3(iib), oder als Nullstellenmenge einer geeigneten Funktion geschrieben werden können. Dies zeigt der folgende Satz. Zuvor benötigen wir noch den Begriff des regulären Wertes:

Definition 1.8.4. $0 \in \mathbb{R}^k$ ist *regulärer Wert* einer differenzierbaren Funktion $f: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $k \leq n$, falls für jeden Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$ mit $f(x) = 0$ die Ableitung $D_x f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ (eine $k \times n$ -Matrix) maximalen Rang hat.

In der obigen Situation ist $D_x f$ surjektiv. Man sagt, dass f eine *Surjektion* in x ist.

Satz 1.8.5. Die folgenden Aussagen sind äquivalent

- (a) (' M ist lokal eine Immersion') $M^m \subset \mathbb{R}^n$ ist eine m -dimensionale C^ℓ -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n .
- (b) (' M ist lokal ein Funktionsgraph') Für jedes $p \in M$ existiert (ggf. nach Vertauschen der Koordinatenreihenfolge) eine offene Umgebung $\hat{V} \times \hat{W} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$ von p und eine ℓ -mal stetig differenzierbare Abbildung $g: \hat{V} \rightarrow \hat{W}$ so dass

$$\forall (u, w) \in \hat{V} \times \hat{W}: (u, w) \in M \iff g(u) = w, \quad (1.3)$$

anders formuliert

$$M \cap (\hat{V} \times \hat{W}) = \text{graph}(g).$$

*Eigentlich haben wir hier nur gezeigt, dass c in diesen Fällen keine lokale Parametrisierung sein kann. Das heißt, es könnte sein, dass nur unsere Wahl von c schlecht ist. Dem ist aber nicht so, da man sich leicht überlegen kann, dass man um den Schnittpunkt p im Bild, wirklich keine solche lokale Parametrisierung finden kann.

- (c) (*'M ist lokal eine Nullstellenmenge*) Für jeden Punkt $p \in M^n$ gibt es eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^{n=m+k}$ und eine ℓ -mal stetig differenzierbare Funktion $f: V \rightarrow \mathbb{R}^k$, so dass $0 \in \mathbb{R}^k$ regulärer Wert von f ist und $f^{-1}(0) = V \cap M$.

Das Kriterium vom regulären Wert (Satz 1.8.5.c) liefert schnell viele Beispiele für Untermannigfaltigkeiten. Bevor wir dann Satz 1.8.5 vollständig beweisen, schauen wir uns einige Beispiele für die Verwendung von (c) an.

Beispiel 1.8.6. (Beispiele für die Anwendung von Satz 1.8.5.c)

- (i) $S^1 = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$: Wir wissen schon, dass S^1 eine Untermannigfaltigkeit ist. Mit dem Kriterium vom regulären Wert kann man dies auch sehen: Wähle $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Dann ist $D_{(x,y)}f = (2x, 2y)$. Der Rang ist 1 für alle $(x, y) \neq (0, 0)$. Da aber $(0, 0) \notin f^{-1}(0)$, folgt mit Satz 1.8.5, dass S^1 eine Untermannigfaltigkeit ist.

- (ii) Noch mal S^1 : Wählt man aber

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y)^T \mapsto (x^2 + y^2 - 1)^2,$$

dann ist zwar $f^{-1}(0) = S^1$, aber

$$D_{(x,y)^T}f = (4x(x^2 + y^2 - 1), 4y(x^2 + y^2 - 1))$$

ist die Nullmatrix für $(x, y)^T \in S^1$. Für dieses f ist also 0 kein regulärer Wert und unsere Rechnung hier sagt nichts darüber aus, ob S^1 nun eine Untermannigfaltigkeit ist oder nicht. Daran sieht man sehr schon, dass das Kriterium zwar sehr gut, dazu geeignet ist, zu zeigen, dass etwas eine Untermannigfaltigkeit ist – doch muss man ggf. das f richtig 'raten'.

- (iii) Bis jetzt haben wir nur Beispiele von *Hyperflächen* (= Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n der Dimension $n-1$ = Kodimension-1-Untermannigfaltigkeiten) betrachtet. Als nächstes kommt ein Beispiel mit höherer Kodimension:

$$M = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1\}$$

(Das ist eine Ellipse.) Wir setzen

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z)^T \mapsto (x^2 + y^2 - 1, x + y + z - 1)^T$$

Denn f ist glatt und

$$D_{(x,y,z)}f = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hat Rang 2 für alle $(x, y) \neq (0, 0)$, also insbesondere für alle $(x, y, z)^T \in M$.

Man kann auch Objekte, die aus ganz anderen Kontexten bekannt sind, als Untermannigfaltigkeiten auffassen.

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

(v) Die orthogonale Gruppe $\mathbb{O}(n)^*$ ist

$$\mathbb{O}(n) = \{ A \in M_{\mathbb{R}}(n, n) \mid AA^T = \text{Id}_n \}.$$

Wir werden zeigen, dass die Gruppe $\mathbb{O}(n)$ eine Untermannigfaltigkeit des $\text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ der Dimension $\frac{n}{2}(n-1)$ ist.

Beweis. Wir betrachten

$$f : M_{\mathbb{R}}(n, n) \rightarrow \text{Sym}(n), \quad A \mapsto f(A) = AA^T - \text{Id}_n,$$

wobei $\text{Sym}(n) = \{ A \in M_{\mathbb{R}}(n, n) \mid A = A^T \} \cong \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ die symmetrische Matrizen sind. Dann ist $\mathbb{O}(n) = f^{-1}(0)$. Die Abbildung f ist auch glatt, da es ein Polynom in den Einträgen von A ist. Außerdem rechnet man direkt nach, dass $AA^T - \text{Id}_n$ wirklich symmetrisch ist. Wir müssen also noch zeigen, dass $0 \in \text{Sym}(n)$ ein regulärer Wert ist. Dazu berechnen wir

$$D_A f(H) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(A + sH) - f(A)}{s} \stackrel{\text{ÜA 5(iii)}}{=} HA^T + AH^T.$$

und müssen nun noch zeigen, dass $D_A f : M_{\mathbb{R}}(n, n) \rightarrow \text{Sym}(n)$ surjektiv ist und damit maximalen Rang hat: Sei $A \in \mathbb{O}(n)$, $S \in \text{Sym}(n)$. Wir wählen $H = \frac{1}{2}SA$. Dann ist

$$\begin{aligned} D_A f(H) &= \frac{1}{2} D_A f(SA) = \frac{1}{2} (SAA^T + A(SA)^T) \\ &= \frac{1}{2} (S \underbrace{AA^T}_{\text{Id}_n} + \underbrace{AA^T}_{\text{Id}_n} S^T) = S. \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{O}(n)$ eine Untermannigfaltigkeit von $M_{\mathbb{R}}(n, n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ mit

$$\dim \mathbb{O}(n) = \dim M_{\mathbb{R}}(n, n) - \dim \text{Sym}(n) = n^2 - \frac{n}{2}. \quad \square$$

Beweis von Satz 1.8.5. '(b) \implies (c)': Sei $g : \hat{V} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \hat{W} \subset \mathbb{R}^k$ und $p \in \hat{V} \times \hat{W}$ wie in (b). Wir definieren $f : V := \hat{V} \times \hat{W} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ durch

$$f(v, w) := w - g(v).$$

Dann ist $f^{-1}(0) = \text{graph}(g) = M \cap (\hat{V} \times \hat{W})$. Außerdem ist

$$\underbrace{D_{(u,w)} f}_{k \times n\text{-Matrix}} = \left(- \underbrace{D_u g}_{k \times m}, \underbrace{\text{Id}_k}_{k \times k} \right)$$

*enthält alle längenerhaltenden linearen Abbildungen im \mathbb{R}^n , also alle Drehungen um den Ursprung, alle Spiegelungen an Hyperebenen (=Untervektorraum der Dimension $n-1$, z.B. Ursprungsgeraden im \mathbb{R}^2 und Ursprungsebenen im \mathbb{R}^3) durch den Ursprung und Hintereinanderausführungen davon.

Also ist $\text{Rang}(D_{(u,w)}F) = k$, und damit ist 0 regulärer Wert von f .

'(c) \implies (b)' Da $0 \in \mathbb{R}^k$ regulärer Wert von f ist, hat $D_p f$ Rang k . Nach Umordnen der Koordinatenreihenfolge, können wir annehmen, dass die letzten k -Spalten linear unabhängig sind. Sei $p = (p_1 \in \mathbb{R}^m, p_2 \in \mathbb{R}^k)$. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es eine offene Umgebung \hat{V} von p_1 , eine offene Umgebung \hat{W} von p_2 und eine ℓ -mal stetig differenzierbare Abbildung $g: \hat{V} \rightarrow \hat{W}$ mit $f(u, g(u)) = 0$, $g(p_1) = p_2$ und

$$\text{graph}(g) = f^{-1}(0) \cap (\hat{V} \times \hat{W}) = M \cap (\hat{V} \times \hat{W}).$$

'(b) \implies (a)' Beispiel 1.8.3/Übungsaufgabe 19(i)

'(a) \implies (b)' Sei pr_m (bzw. pr^m): $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Projektion auf die ersten (bzw. letzten) m Koordinaten ($n \geq m$), also $\text{pr}_m(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)^T$ und $\text{pr}^m(x_1, \dots, x_n) = (x_{n-m+1}, \dots, x_n)^T$.

Sei $p \in M$ beliebig und $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n=m+k}$ eine lokale Parametrisierung. O.B.d.A. habe V die Form $V_1 \times V_2$ mit $V_1 \subset \mathbb{R}^m$ und $V_2 \subset \mathbb{R}^k$ (Das kann durch Verkleinern von U immer erreicht werden.).

Setze $u := F^{-1}(p)$. Da der Rang von $D_u F$ gleich m ist, es also m linear unabhängige Spalten geben muss, können wir o.B.d.A. (durch Umordnung der Koordinaten direkt am Anfang) annehmen, dass $D_u(\text{pr}_m \circ F)$ Rang F hat. Wir wenden nun den Satz über inverse Funktionen $\hat{F} := \text{pr}_m \circ F = (F_1, \dots, F_m)$ an. Dann existiert eine offene Umgebung $U' \subset U$ von u und $V'_1 \subset V_1$ von $\text{pr}_m(p) \in V_1$, so dass die Einschränkung $\hat{F}: U' \rightarrow V'_1$ ein C^ℓ -Diffeomorphismus ist. Wir bezeichnen das Inverse mit $\varphi: V'_1 \rightarrow U'$ und definieren $G := F \circ \varphi: V'_1 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow F(U') \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle $v \in V'_1$

$$\begin{aligned} G(v) &= (F \circ \varphi)(v) = (\text{pr}_m(F(\varphi(v))), \text{pr}^k(F(\varphi(v)))) \\ &= (\hat{F}(\varphi(v)), \text{pr}^k(G(v))) = (v, \underbrace{(\text{pr}^k \circ G)(v)}_{=: g}). \end{aligned}$$

Die Abbildung $g: \hat{V} := V'_1 \rightarrow \text{pr}^k(F(U')) =: \hat{W} \subset \mathbb{R}^k$ erfüllt (1.3): Sei $(v, w) \in \text{graph } g = \{(v, w) \in \hat{V} \times \hat{W} \mid g(v) = w\}$. Dann gilt

$$(v, w) = (v, g(v)) = G(v) = F(\varphi(v)) \in F(U') \subset F(U) = M \cap V \subset M.$$

Sei andererseits $(v, w) \in M \cap (\hat{V} \times \hat{W})$. Da $\hat{F}: U' \rightarrow V'_1 = \hat{V}$ und damit $F: U' \rightarrow M \cap (\hat{V} \times \hat{W})$ bijektiv ist, existiert genau ein $u' \in U'$ mit $(v, w) = F(u')$. Also ist $v = \hat{F}(u')$ und $\varphi(v) = u'$. Damit gilt

$$(v, w) = F(u') = F(\varphi(v)) = G(v) = (v, g(v)),$$

also $g(v) = w$. □

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

1.8.1. Tangentialraum

Die Bedingung (ii) in der Definition der Untermannigfaltigkeit haben wir im letzten Satz verwendet, um den Satz über inverse Funktionen anzuwenden und die Untermannigfaltigkeit lokal als Funktionsgraph zu verstehen. Was bedeutet $D_u F$ hat maximalen Rang noch anschaulich?

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar. Betrachten wir den Funktionsgraph

$$\text{graph } f = \{(x, y) \in U \times \mathbb{R}^k \mid y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n:=m+k}.$$

Dann ist $M := \text{graph } f$ eine m -dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n . Für $u \in U$ ist der Graph von $x \in \mathbb{R}^m \mapsto f(u) + D_u f(x - u)$ ist eine m -dimensionale Ebene, vgl. Abbildung 1.3 rechts. Sei $T_{p=(u, f(u))} M$ der m -dimensionale Untervektorraum von \mathbb{R}^n , so dass $p + T_p M = \{p + v \mid v \in T_p M\}$ dieser Graph ist. Wir nennen $T_p M$ den *Tangentialraum von M in p* . Im Falle des Funktionsgraphen sieht man leicht, dass $T_p M$ auch wie folgt beschrieben werden kann, was wir in Zukunft direkt als Definition für den Tangentialraum einer C^1 -Untermannigfaltigkeit nehmen:

Definition 1.8.7. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Der *Tangentialraum von M in p* ist

$$T_p M := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \epsilon > 0 \text{ und } c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ stetig differenzierbar mit Bild } c \subset M, \\ c(0) = p, c'(0) = v\}$$

Wir werden gleich sehen, dass $T_p M$ immer wirklich ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n ist. Allerdings zeichnen wir $T_p M$ immer nicht als Untervektorraum, sondern heften ihn immer an p an – in Wirklichkeit stellt man also immer $p + T_p M$. Das hat den Vorteil, dass wir immer sehen, zu welchem $p \in M$ der Tangentialraum gehört.

Lemma 1.8.8. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Sei $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n=m+k}$ eine stetig differenzierbare lokale Parametrisierung von M um $p = F(u_0)$. Sei $g: W \subset \mathbb{R}^{n=m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $M \cap W = g^{-1}(0)$ und $p \in W$ und $0 \in \mathbb{R}^k$ ist regulärer Wert von g . Dann gilt

$$D_{u_0} F(\mathbb{R}^m) = T_p M = (\text{span}\{\text{grad } g_i(p) \mid i = 1, \dots, k\})^\perp.$$

Beweis. Für $w \in \mathbb{R}^m$ sei $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ stetig differenzierbar mit $\gamma(0) = u_0$ und $\gamma'(0) = w$. Dann gilt für $c := F \circ \gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, dass c stetig differenzierbar ist, $\text{Bild}(c) \subset F(U) \subset M$, $c(0) = F(u_0) = p$ und $c'(0) = D_{u_0=\gamma(0)} F(\gamma'(0)) = D_{u_0} F(w)$. Also ist $D_{u_0} F(\mathbb{R}^m) \subset T_p M$.

Es ist $M \cap W = g^{-1}(0) = g_1^{-1}(0) \cap \dots \cap g_k^{-1}(0)$. Sei $v \in T_p M$. Dann gibt es ein $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie in der Definition von $T_p M$ beschrieben. O.B.d.A. sei ϵ klein genug, dass $\text{Bild}(c) \subset M \cap W$ ist. Also muss $\text{Bild}(c) \subset g_i^{-1}(0)$ für alle $i = 1, \dots, k$ sein. Also ist $v = c'(0) \perp \text{grad } g_i(p)$ und damit muss $T_p M \subset (\text{span}\{\text{grad } g_i(p) \mid i = 1, \dots, k\})^\perp$ gelten.

Also ist

$$D_{u_0}F(\mathbb{R}^m) \subset T_p M \subset (\text{span}\{\text{grad}g_i(u_1) \mid i = 1, \dots, k\})^\perp.$$

Nun ist jedoch $D_{u_0}F(\mathbb{R}^m)$ ein m -dimensionaler Untervektorraum von \mathbb{R}^n , da $D_{u_0}F$ maximalen Rang hat. Der Untervektorraum $\text{span}\{\text{grad}g_i(u_1) \mid i = 1, \dots, k\}$ hat Dimension k , da $0 \in \mathbb{R}^k$ regulärer Wert von g ist. Also ist $(\text{span}\{\text{grad}g_i(u_1) \mid i = 1, \dots, k\})^\perp$ ein m -dimensionaler Untervektorraum von \mathbb{R}^n . In der obigen \subset -Kette muss also schon Gleichheit gelten. \square

Beispiel 1.8.9. Wir hatten gesehen, dass $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$, 0 als regulären Wert hat und $f^{-1}(0) = S^1$ damit eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 ist. Es ist $\text{grad}f(x, y) = (2x, 2y)^T$. Also ist für $(x, y) \in f^{-1}(0)$

$$T_{(x,y)}S^1 = \{(2xa, 2ya)^T \mid a \in \mathbb{R}\}^T = \text{span}(-y, x)^T.$$

1.9. Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

Wir wollen nun Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen studieren. Der letzte Abschnitt mit Untermannigfaltigkeiten und deren Tangentialräume wird uns vor allem helfen zu verstehen, was anschaulich passiert.

Woche 6

Definition 1.9.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Sei $F: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ stetig. Wir sagen, dass f in p ein *lokales Minimum unter der Nebenbedingung* $F(q) = 0$ hat, falls $F(p) = 0$ und $f(q) \geq f(p)$ für alle q in einer offenen Umgebung von p mit $F(q) = 0$ gilt.

Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine n -dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeit. Wir sagen, dass $f|_M$ in $p \in M$ ein *lokales Minimum* hat, falls es eine offene Umgebung \hat{U} von p in \mathbb{R}^n gibt mit $f(q) \geq f(p)$ für alle $q \in M \cap \hat{U}$.

Zusammenhang der beiden Definitionen: Sei $F: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ derart, dass $F^{-1}(0) = M \cap U$. Dann ist $p \in M$ lokales Minimum von $f|_M$ genau dann, wenn f in p ein lokales Minimum unter der Nebenbedingungen $F(q) = 0$ ist. Für jede C^1 -Untermannigfaltigkeit M gibt es lokal ein solches F .

Wir suchen nun als ersten wieder ein notwendiges Kriterium für solche lokalen Maxima/Minima unter Nebenbedingungen (oft auch *Zwangsbedingungen* genannt):

Lemma 1.9.2. Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine n -dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeit. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $M \subset U$ und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

Sei $p \in M$ lokales Minimum oder Maximum von $f|_M$. Dann ist $D_p f|_{T_p M} = 0$.

Von der Grundidee wie der Beweis für 'normale Extremstellen' – wir führen das auf den Analysis 1 Fall durch Verwendung geeigneter Kurven zurück:

Beweis. Sei $v \in T_p M$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine stetig differenzierbare Kurve $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\text{Bild}(c) \subset M$, $c(0) = p$ und $c'(0) = v$. Somit ist $f \circ c$ stetig differenzierbar mit $f \circ c(0) = f(p)$. Da p ein lokales Minimum/Maximum von $f|_M$ ist, ist 0 eines von $f \circ c$ (da $c(0) = p$ war). Also gilt $0 = D_p f(c'(0)) = D_p f(v)$. \square

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

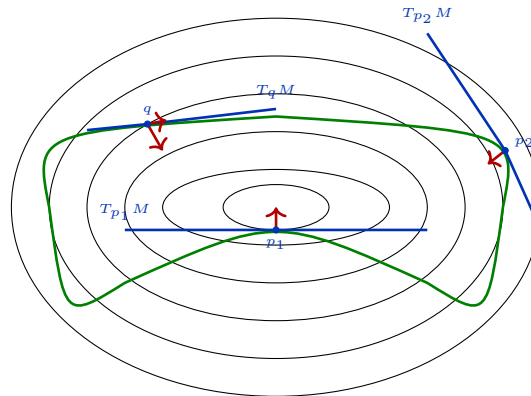


Abbildung 1.16.: Höhenlinienplot eines $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – 'Berg' in der Mitte. M sei die grüne Kurve. In rot die Gradienten von f .

Wir nennen alle $p \in M$ mit $D_p f|_{T_p M} = 0$ einen *stationären/kritischen Punkt* von $f|_M$.

Schauen wir uns noch einmal im Bild an, was das bedeutet, vgl. Abbildung 1.16, indem wir uns für die Anschauung auf eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^2$ beschränken. Ist in einem Punkt $q \in M$, $T_q M$ nicht senkrecht auf $\text{grad } f$, dann kann q kein lokales Maximum oder Minimum sein. Diese Beobachtung gilt allgemeiner:

Satz 1.9.3 (Satz über Lagrange-Multiplikatoren). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $F: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar. Sei $p \in F^{-1}(0)$ und $\text{Rang } D_p F = k$.*

Dann ist p genau dann ein stationärer Punkt von $f|_{F^{-1}(0)}$, wenn es $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit

$$\text{grad } f(p) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{grad } F_i(p) = 0$$

gibt.

Die Zahlen λ_i nennt man Lagrange-Multiplikatoren.

Beweis. Es gilt nach Lemma 1.8.8 $\mathbb{R}^n = T_p M \oplus \text{span}\{\text{grad } F_i(p) \mid i = 1, \dots, k\}$ und diese Summe ist orthogonal.

Sei p stationärer Punkt von $f|_{F^{-1}(0)}$. Dann ist $D_p f|_{T_p M} = 0$ und somit $\text{grad } f(p) \perp T_p M$. Es muss also $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mit

$$\text{grad } f(p) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{grad } F_i(p) = 0$$

geben.

1.9. Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

Gelte andererseits obige Gleichung folgt direkt aus $\text{grad}F_i(p) \perp T_p M$, dass $D_p f|_{T_p M} = 0$ ist. \square

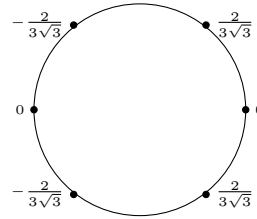
Beispiel 1.9.4. Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) = xy^2$. Sei $M = S^1$. Wir suchen die stationären Punkte von $f|_M$. Es ist $F^{-1}(0)$ mit $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Für einen stationären Punkt $p = (x, y)$ muss also gelten:

$$\begin{aligned} 0 &= \text{grad}f(p) + \lambda \text{grad}F(p) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \\ 0 &= x^2 + y^2 - 1. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Komponente der ersten Zeile folgt: $y = 0$ oder $\lambda = -2x$. Sei zunächst $y = 0$. Dann muss $x = \pm 1$ und $\lambda = 0$ sein. Im Fall $\lambda = -2x$ muss $y = \pm\sqrt{2}x$ und damit $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Die stationären Punkte sind also $(\pm 1, 0)$, $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$ und $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$. Wir wissen aber noch nicht, um welche Art von stationären Punkten es sich dabei handelt. Hier können wir es aber fast direkt ablesen, vgl. Abbildung – dort sind die jeweiligen Funktionswerte eingetragen.

Die Menge $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ ist eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge und damit kompakt. Also nimmt die stetige Funktion f auf S^1 nach Satz 1.1.5 sowohl ihr Maximum als auch Minimum an.

Damit muss $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$ jeweils ein globale Maximum und $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$ jeweils ein globales Minimum sein. Da S^1 eindimensional ist, muss zwischen zwei Maxima ein lokales Minima liegen – also ist $(1, 0)$ ein lokales Minimum und analog $(-1, 0)$ ein lokales Maximum.



Hier konnten wir noch relativ leicht herausfinden, um was für stationäre Punkte es sich handelte, da S^1 eindimensional und kompakt ist. Im Allgemeinen ist das schwieriger. Allerdings haben wir

Lemma 1.9.5. Sei $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $p \in U$. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^2 -Untermannigfaltigkeit. Sei $p \in M$ und sei $g: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ zweimal stetig differenzierbar mit 0 als regulären Wert und $g^{-1}(0) = M \cap V$. Sei die notwendige Bedingung für stationäre Punkte $\text{grad} f(p) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{grad} g_i(p) = 0$ für geeignete $\lambda_i \in \mathbb{R}$ erfüllt. Sei

$$L = \text{Hess}_p(f) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{Hess}_p(g_i).$$

Sei p lokales Minimum bzw. Maximum von $f|_M$. Dann muss $L|_{T_p M \times T_p M}$ bzw. das Negative davon positiv semi-definit sein.

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

Ist andererseits $L|_{T_p M \times T_p M}$ positiv definit/indefinit, dann ist p ein lokales Minimum/ein Sattelpunkt.

Hier meint $L|_{T_p M \times T_p M}$ die quadratische Form

$$v \in T_p M \mapsto \langle v, Lv \rangle.$$

Der Beweis ist von der Idee her wie im Fall ohne Nebenbedingung, man muss nur mit Kurven statt der direkten Verbindung von p nach q arbeiten, vgl. auch [1, Abschnitt 1.4]. Verzichten wir hier darauf.

Beispiel 1.9.6. In unserem letzten Beispiel 1.9.4 ist

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dann ist die quadratische Form eingeschränkt auf $T_p S^1 = \text{span}(-y, x)^T$ gegeben durch

$$\begin{aligned} v = (-ay, ax)^T \in T_p M &\mapsto (-ay, ax) \begin{pmatrix} 2\lambda & 2y \\ 2y & 2(x+\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ay \\ ax \end{pmatrix} \\ &= 2a^2(x^3 - 2y^2x + \lambda(y^2 + x^2)) = 2a^2(x^3 - 2y^2x + \lambda). \end{aligned}$$

Das ist positiv für $p = (1, 0)^T$ (dort $\lambda = 0$) und $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$ (dort $\lambda = \frac{2}{\sqrt{3}}$) (also dort lokale Minima) und negativ in den anderen stationären Punkten (also dort lokale Maxima).

Man sieht schon, dass das Überprüfen der (In-)definitheit mit der Einschränkung der Hessischen eher aufwändiger zu überprüfen ist. Manchmal ist es da einfacher sich direkt die Umgebung der stationären Punkte anzuschauen.

Beispiel 1.9.7. (Übungsaufgabe 22) Sei A eine symmetrische reelle $n \times n$ -Matrix. Wir betrachten $q: v \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle v, Av \rangle$ unter der Nebenbedingung $|v|^2 = 1$. Dann sind Werte von q der stationären Punkte von q unter der Nebenbedingung genau die Eigenwerte von A . Der niedrigste Eigenwert ist das globale Minimum, der höchste das globale Maximum. Alle Eigenwerte dazwischen gehören zu Sattelpunkten.

2. Etwas Integration

2.1. Parameterintegrale

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I = [a, b]$ und $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}$. Wir denken an f als Funktion auf I mit Parameter aus U . Sei $y \mapsto f(x, y)$ für alle $x \in U$ integrierbar. Wir definieren

$$\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_I f(x, y) dy := \int_a^b f(x, y) dy.$$

Dieses Φ ist das *Parameterintegral* von f .

Satz 2.1.1 (Stetigkeit von Parameterintegralen). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I = [a, b]$ und $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist*

$$\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_I f(x, y) dy$$

stetig.

Beweis. Da f stetig ist, ist auch $y \mapsto f(x, y)$ für alle $x \in U$ stetig und damit integrierbar. Seien $x \in U$. Da U offen ist, gibt es ein $R > 0$ mit $\overline{B_R(x)} := \{z \in \mathbb{R}^n \mid |z - x| \leq R\} \subset U$. Dann ist f auf der kompakten Menge $\overline{B_R(x)} \times I$ gleichmäßig stetig. D.h. für alle $\epsilon > 0$ gibt es $\delta \in (0, R)$, so dass $|f(x', y') - f(x, y)| < \epsilon$ für alle $|(x', y') - (x, y)| < \delta$ gilt. Damit ist insbesondere für $x' \in \overline{B_\delta(x)}$

$$|\Phi(x') - \Phi(x)| \leq \int_I |f(x', y) - f(x, y)| dy \leq |I| \sup_I |f(x', y) - f(x, y)| < |I|\epsilon.$$

Also ist Φ stetig. □

Satz 2.1.2 (Differentiation von Parameterintegralen). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I = [a, b]$ und $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $y \mapsto f(x, y)$ für alle $x \in U$ integrierbar. Es existiere $\frac{\partial f}{\partial x_j}: U \times I \rightarrow \mathbb{R}$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$ und sei stetig auf $U \times I$. Dann existiert $\Phi: x \in U \mapsto \int_I f(x, y) dy$ die partielle Ableitung in x_j -Richtung und es gilt*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) dy.$$

Existieren die partiellen Ableitungen für alle $j = 1, \dots, n$ und sind stetig auf $U \times I$, dann ist Φ auf U stetig differenzierbar.

2. Etwas Integration

Beweis. Wir schätzen für $x \in U$ fest ab: Mit dem Mittelwertsatz in einer Variablen haben wir

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi(x + he_j) - \Phi(x)}{h} - \int_I \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) dy \right| &= \left| \int_I \left(\frac{f(x + he_j, y) - f(x, y)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) \right) dy \right| \\ &= \left| \int_I \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x + she_j, y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) \right) dy \right| \end{aligned}$$

für ein $s = s(h) \in [0, 1]$. Nun ist $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ stetig auf $U \times I$ und damit gleichmäßig stetig auf der kompakten Menge $\overline{B_R(x)} \times I \subset U \times I$ für ein $R > 0$. Also gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $h > 0$, so dass

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + she_j, y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) \right| < \epsilon$$

für alle $y \in I$ und $s \in [0, 1]$ gilt.

Damit folgt

$$\left| \frac{\Phi(x + he_j) - \Phi(x)}{h} - \int_I \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) dy \right| \leq |I| \epsilon,$$

also ist $\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) dy$. Diese partielle Ableitung ist nach letztem Satz wieder stetig. Damit folgt aus der Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen von f in x_j für alle $j = 1, \dots, n$, dass Φ schon stetig differenzierbar ist. \square

Wir werden Parameterintegrale später nutzen, um Aussagen über Integrale in mehreren Variablen zu erhalten oder auch für Integraltransformation, die uns z.B. bei gewöhnlichen Differentialgleichungen helfen werden (dann allerdings oft für $I = (0, \infty)$, was wir hier noch nicht abgedeckt haben).

Möchte man auch uneigentliche Integrale zulassen, kann man zum Beispiel zeigen:

Satz 2.1.3 (Differentiation von uneigentlichen Parameterintegralen). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I = [a, b)$ ein Intervall und $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und in alle Richtungen von U stetig partiell differenzierbar. Die $\Phi(x) := \int_I f(x, y) dy$ und $\int_I \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) dy$ für alle $j = 1, \dots, n$ existieren uneigentlich und sind auf allen kompakten Teilmengen von U gleichmäßig konvergent.*

Dann ist Φ stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) dy.$$

Definition 2.1.4. Sei $f: U \times [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x, y) dy$ (uneigentlich für b , d.h. $y \in [a, c] \mapsto \int_a^c f(x, y) dy$ ist (eigentlich) integrierbar für $x \in U$) heißt *gleichmäßig konvergent auf $A \subset U$* , falls es für alle $\epsilon > 0$ ein $C \geq a$ gibt mit

$$\left| \int_r^b f(x, y) dy \right| < \epsilon \quad \forall x \in A \text{ und } r \in [C, b).$$

Beweis. Beweis von der Idee her wie im 'eigentlichen' Fall, nur wird

$$\left| \int_I \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x + she_j, y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) \right) dy \right|$$

mittels der gleichmäßigen Konvergenz abgeschätzt – [3, S.337]. \square

Für Parameterintegrale gibt es ein einfaches Kriterium, wie man die gleichmäßige Konvergenz nachprüfen kann:

Lemma 2.1.5 (Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz). *Sei $f: S \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine uneigentlich integrierbare Funktion mit $|f(x, y)| \leq g(y)$ für alle $(x, y) \in S \times I$. Dann konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x, y) dy$ gleichmäßig auf S .*

Beweis. Folgt direkt mit $\left| \int_a^b f(x, y) dy \right| \leq \int_a^b |f(x, y)| dy \leq \int_a^b g(y) dy$. \square

Man kann Parameterintegrale zum Beispiel aber auch dazu nutzen, um einige Werte von Integralen von Funktionen $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zu berechnen. Das sind dann eher Tricks und nichts, auf das man mal so einfach kommt, ist aber lustig.

Beispiel 2.1.6. Wir wollen $F(\lambda) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x} dx$ für $\lambda \in (0, \infty)$ berechnen und dafür Satz 2.1.3 nutzen.

Angenommen alle Voraussetzungen für den Satz sind erfüllt – überprüfen wir gleich – dann ist

$$F'(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

und somit $F(\lambda) = \ln \lambda + \text{const.}$ Um die Integrationskonstante zu bestimmen setzen wir $\lambda = 1$ und erhalten $F(1) = 0$ also muss $F(\lambda) = \ln \lambda$ gelten.

Es bleibt also die Voraussetzungen von Satz 2.1.3 zu überprüfen: Dazu sei $\lambda \in [a, b] \subset (0, \infty)$. Wir brauchen eine λ -unabhängige integrierbare Majorante für den Integranden von F und F' . Dazu bemerken wir erst einmal, dass $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-e^{-x} + \lambda e^{-\lambda x}) = \lambda - 1$ ist. Somit gibt es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ (welche nur von a und b abhängen) mit

$$\left| \frac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x} \right| \leq \min\{C, e^{-c_2 x}\}$$

$$|e^{-\lambda x}| \leq e^{-ax}.$$

Beide rechten Seiten sind auf $(0, \infty)$ uneigentlich integrierbar und damit können wir das Majorantenkriterium anwenden, um gleichmäßige Konvergenz der Integrale für $\lambda \in [a, b]$ zu folgern.

2. Etwas Integration

Beispiel 2.1.7. Sei $f: (x, t) \in [a, b] \times [c, d] \mapsto f(x, t) \in \mathbb{R}$ stetig und sei $\frac{\partial f}{\partial t}$ stetig. Seien $\alpha, \beta: [c, d] \rightarrow [a, b]$ differenzierbar. Wir betrachten

$$F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx$$

und wollen $F'(t)$ berechnen:

Dazu hilft es sich $F(t) = G(\alpha(t), \beta(t), t)$ mit $G(y, z, t) = \int_y^z f(x, t) dx$ vorzustellen. Dann gibt die Kettenregel, der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung [2, Satz 4.5.16] und Satz 2.1.2:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \partial_y G(\alpha(t), \beta(t), t) \alpha'(t) + \partial_z G(\alpha(t), \beta(t), t) \beta'(t) + \partial_t G(\alpha(t), \beta(t), t) \cdot 1 \\ &= -f(\alpha(t), t) \alpha'(t) + f(\beta(t), t) \beta'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx. \end{aligned}$$

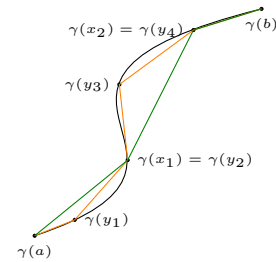
2.2. Kurvenintegrale

2.2.1. Wiederholung: Länge einer Kurve.

Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann hatten wir in [2, Lem. 4.5.51] gesehen, dass γ rektifizierbar ist (d.h. die Länge annähernder Polygonzüge konvergiert) und somit die Länge von γ :

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

An der Anschauung mit dem Polygonzug zeigt schon, dass die Länge von γ nur von der Spur Bild (γ) abhängen kann, sofern jeder Punkt von Bild (γ) nur einmal durchlaufen wird. Schauen wir uns das noch einmal formal an:



Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig Kurve. Sei $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ ein Homöomorphismus. Dann nennen wir φ eine *Umparametrisierung*. Die Kurve $\gamma \circ \varphi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat dann die gleiche Spur wie γ . Gilt $\varphi(c) = a$ so nennen wir die Umparametrisierung *orientierungserhaltend* sonst *orientierungsumkehrend*.

Zum Beispiel: Sei $\gamma: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Kurve und $\varphi(t) = -t$. Dann ist φ orientierungsumkehrend und die Kurve $\gamma \circ \varphi$ wird in der Zeit t in die andere Richtung durchlaufen als γ .

Wir wollen der Vollständigkeit halber, wollen wir die Unabhängigkeit der Länge einer Kurve von der Parametrisierung nachrechnen. Dazu sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve und $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Dann gilt

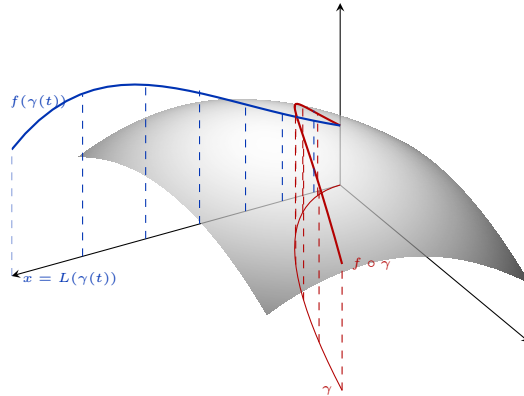


Abbildung 2.1.: Den Weg γ haben wir auf die x -Achse und $f \circ \gamma$ auf die $x - z$ -Ebene.

$$L(\gamma \circ \varphi) = \int_c^d |\gamma'(\varphi(s))| |\varphi'(s)| ds \stackrel{t=\varphi(s)}{=} \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} |\gamma'(t)| \operatorname{sign} \varphi'(\varphi^{-1}(t)) dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Da φ bijektiv ist, kann φ' das Vorzeichen nicht wechseln und es ist φ' positiv für φ orientierungserhaltend und sonst negativ.

Alles obere gilt auch für stückweise stetig differenzierbare Kurve.

Definition 2.2.1. Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann heißt γ *stückweise stetig differenzierbar* bzw. *stückweise- C^1* , falls es ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ gibt, so dass $\gamma|_{[x_i, x_{i+1}]}$ für alle $i = 0, \dots, n-1$ stetig differenzierbar ist.

Auch solche stückweise- C^1 -Kurven sind mit genau dem gleichen Beweis wie in [2, Lem. 4.5.51] rektifizierbar und wir können noch immer $\int_a^b |\gamma'(t)| dt$ bilden, da $\gamma'(t)$ auf (x_i, x_{i+1}) jeweils stetig ist und jeweils auf $[x_i, x_{i+1}]$ stetig erweiterbar ist: Also

$$\int_a^b |\gamma'(t)| dt := \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\gamma'(t)| dt.$$

Definition 2.2.2. Eine Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt. Die Kurve γ heißt *einfach geschlossen*, wenn sie geschlossen ist und $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ entweder $t_1 = t_2$ oder $\{t_1, t_2\} = \{a, b\}$ folgt.

2.2.2. Kurvenintegral erster Art

Definition 2.2.3. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $\gamma: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist das *Kurvenintegral erster Art von f über γ*

2. Etwas Integration

gleich

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Wo kommt die Definition her? Wir stellen uns $f \circ \gamma$ in eine Ebene abgerollt vor, vgl. Abbildung 2.1. Dort ist dann die Funktion parametrisiert gegeben durch

$$\begin{aligned} x(t) &= L(\gamma(t)) := \int_a^t |\gamma'(s)| ds \\ y(t) &= f(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Nach der Substitutionsregel ist wegen $x'(t) = |\gamma'(t)|$

$$\int_0^{L(\gamma)} y(x) dx = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$$

– also genau unsere Definition. Da die linke Seite nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängt, hängt auch $\int_{\gamma} f ds$ nicht von der Parametrisierung der Kurve ab.

2.2.3. Kurvenintegral zweiter Art

Definition 2.2.4. Sei $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Sei $\gamma: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist das *Kurvenintegral zweiter Art von V über γ* gleich

$$\int_{\gamma} V \cdot ds = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

Das \cdot in $V \cdot ds$ deutet auf die Verwendung des Skalarproduktes hin. Für die Anschauung: Entlang γ wird das Vektorfeld V auf γ projiziert derart, dass die Länge des projizierten Vektors gleich $\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$ ist. (Diese Projektion ist nur dann orthogonal, wenn $|\gamma'(t)| = 1$ ist.)

Lemma 2.2.5. Sei V und γ wie oben. Sei $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Dann ist

$$\int_{\gamma} V \cdot ds = \pm \int_{\gamma \circ \varphi} V \cdot ds,$$

wobei dort ein $+$ steht, wenn φ orientierungserhaltend ist, und sonst ein $-$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \varphi} V \cdot ds &= \int_c^d \langle V(\gamma(\varphi(s))), (\gamma \circ \varphi)'(s) \rangle ds \\ &= \int_c^d \langle V(\gamma(\varphi(s))), \gamma'(\varphi(s)) \rangle \varphi'(s) ds \\ &= \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \pm \int_{\gamma} V \cdot ds \end{aligned}$$

(Für φ orientierungsumkehrend ist, $\int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} = \int_b^a = -\int_a^b$) \square

Beispiel 2.2.6.

- (i) Wir betrachten das Vektorfeld $V(x, y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})^T$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sei $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)^T$ (parametrisiert den Einheitskreis entgegen des Uhrzeigersinns).

Dann ist wegen $|\gamma(t)| = 1$

$$\int_{\gamma} V \cdot ds = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt = 2\pi.$$

- (ii) Sei $V(x, y) = (-y, x)^T$. Dann ist

$$\int_{\gamma} V \cdot ds = \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} -\gamma_2(t) \\ \gamma_1(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_a^b (\gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_2(t)\gamma_1'(t)) dt.$$

In einer Übungsaufgabe rechnen wir nach, dass für eine einfach geschlossene stückweise- C^1 -Funktion die Hälfte des Betrags des obigen Kurvenintegrals den Flächeninhalt in dieser Kurve berechnet. Hierbei heißt *einfach geschlossen*, dass γ geschlossen ist und aus $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ entweder $t_1 = t_2$ oder $\{t_1, t_2\} = \{0, 2\pi\}$ folgt (Es gibt also keine Selbstschnitte).

Definition 2.2.7. Ein Vektorfeld $V: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Gradienten(vektor)feld bzw. konservativ*, falls es eine differenzierbare Funktion $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $V = \text{grad } \varphi$ gibt. Man nennt φ ein Potential zu V .

In der Physik kommen öfter Kräfte vor, die konservativ sind. Z.B. ist das Negative des Gradienten der potentiellen Energie die 'rücktreibende Kraft'. Das Gravitationsfeld $g: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto -\frac{x}{|x|^3}$ (Übungsaufgabe 9(iii)) ist ein Gradientenfeld: Es gilt $g(x) = \text{grad } \frac{1}{|x|}$ (Das Negative davon ist die Gravitationskraft).

Die Frage ist natürlich nun, wie sehe ich einem Vektorfeld V an, ob/das es ein Gradientenvektorfeld ist und wie finde ich ggf. φ . Dazu finden wir erst einmal ein paar Eigenschaften von Gradientenfeldern:

Satz 2.2.8 (Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals zweiter Art für Gradientenfelder). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend. Sei $V: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) V ist ein Gradientenvektorfeld.
- (ii) Für jede geschlossene stückweise- C^1 -Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ gilt $\int_{\gamma} V \cdot ds = 0$.
- (iii) Für je zwei stückweise- C^1 -Kurve $\gamma_i: [a, b] \rightarrow U$, $i = 1, 2$, mit $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ und $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ gilt

$$\int_{\gamma_1} V \cdot ds = \int_{\gamma_2} V \cdot ds.$$

2. Etwas Integration



Abbildung 2.2.: Links: Eine neue Kurve γ entsteht durch Hintereinanderkleben zweier Kurven: Erst wird γ_1 durchlaufen und dann γ_2 mit umgekehrter Orientierung, siehe Def. von γ im Beweis von Satz 2.2.8. Rechts: Das Aneinandersetzen von γ_{x+he_j} dann c_h in umgekehrter Orientierung und dann γ_x in umgekehrter Orientierung gibt eine geschlossene stückweise- C^1 -Kurve.

Beweis. '(i) \implies (ii)' Sei nun $V = \text{grad } \varphi$ und γ wie in (ii). Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} V \cdot ds &= \int_a^b \langle \text{grad } \varphi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b D_{\gamma(t)} \varphi(\gamma'(t)) dt = \int_a^b (\varphi \circ \gamma)'(t) dt \\ &= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) \stackrel{\gamma \text{ geschl.}}{=} 0. \end{aligned}$$

'(ii) \implies (iii)' Seien γ_1 und γ_2 zwei Kurven wie in (iii). O.B.d.A. sei $[a, b] = [0, 1]$. Wir definieren $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2-2t) & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dann ist γ eine Kurve wie in (ii), s. Abbildung 2.2, und es folgt (iii) mit

$$0 = \int_{\gamma} V \cdot s = \int_{\gamma_1} V \cdot s - \int_{\gamma_2} V \cdot s.$$

Hier haben wir Lemma 2.2.5 verwendet und das Minus in der Summe kommt daher, dass γ_2 in umgekehrter Orientierung durchläuft, vgl. Lemma 2.2.5.

'(iii) \implies (i)' Sei $x_0 \in U$ fest. Da U wegzusammenhängend ist, gibt es für alle $x \in U$ eine stetige Kurve γ_x von x_0 nach x . Nach Lemma 1.2.11 kann γ_x stückweise linear (und damit stückweise- C^1) gewählt werden. Wir setzen

$$\Phi(x) = \int_{\gamma_x} V \cdot ds$$

Nach (ii) hängt Φ nicht von der Wahl der γ_x ab. Wir müssen noch zeigen, dass $\text{grad } \varphi = V$ gilt: Sei $c_h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x + the_j$. Für h klein genug, ist $\text{Bild}(c_h) \subset U$, da U offen. Dann folgt aus (ii) und Lemma 2.2.5, vgl. Abbildung 2.2 rechts:

$$\frac{\Phi(x + he_j) - \Phi(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_{c_h} V \cdot ds = \int_0^1 \langle V(x + the_j), e_j \rangle dt = \int_0^1 V_j(x + the_j) dx \rightarrow V_j(x)$$

für $h \rightarrow 0$. □

Nach Lemma 1.4.2 ist $\operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0$ ist. Eine naheliegende Frage ist nun, ob denn alle Vektorfelder $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot} V = 0$ von einem Gradientenvektorfeld kommen. Wir werden sehen, dass zumindest lokal dies immer richtig ist.

Lemma 2.2.9 (Rotationsfreiheit impliziert lokal Gradientenvektorfeld). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $V: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\partial_i V_j = \partial_j V_i$ für $1 \leq i, j \leq n$. Dann gibt es um jedes $x \in U$ eine offene Umgebung Ω und eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $V|_{\Omega} = \operatorname{grad} \varphi$.*

In Dimension $n = 2, 3$ ist $\partial_i V_j = \partial_j V_i$ für $1 \leq i, j \leq n$ genau die Forderung $\operatorname{rot} V = 0$. Deshalb nennt man auch in höheren Dimensionen V *rotationsfrei*, wenn diese Bedingung erfüllt ist.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$, so dass $\Omega := B_{\epsilon}(\hat{x}) \subset U$ ist. Aus letztem Beweis wissen wir, was ein Ansatz für ein mögliches Potential ist: Für $x \in B_{\epsilon}(\hat{x})$ wir setzen

$$\varphi(x) = \int_0^1 \langle \underbrace{V(\hat{x} + t(x - \hat{x}))}_{=: \gamma(t)}, \underbrace{x - \hat{x}}_{=: \gamma'(t)} \rangle dt = \sum_{j=1}^n \int_0^1 V_j(\gamma(t)) (x_j - \hat{x}_j) dt.$$

Wir müssen nun überprüfen, dass $\operatorname{grad} \varphi = V$ gilt:

Wir können unterm Integral differenzieren (Satz 2.1.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 \partial_{x_k} (V_j(\gamma(t)) (x_j - \hat{x}_j)) dt \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 (\partial_{y_k} V_j)(\gamma(t)) \cdot t(x_j - \hat{x}_j) dt + \int_0^1 V_k(\gamma(t)) dt \\ &= \int_0^1 \partial_t (t V_k(\gamma(t))) dt = t V_k(\gamma(t))|_0^1 = V_k(x). \end{aligned} \quad \square$$

Gilt das immer auch global? Nein!

Beispiel 2.2.10. Das Vektorfeld $(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})^T$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ aus Beispiel 2.2.6 kann nach Satz 2.2.8 kein Gradientenfeld sein, da das Kurvenintegral entlang der Kreislinie nicht verschwindet, aber man rechnet schnell nach dass die Rotation verschwindet. Was geht hier schief – man könnte ja denken, es gibt doch lokal immer ein Potential (was bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist wegen Lemma 1.2.10). Überlappen sich also zwei solcher Bälle aus dem letztem Beweis, kann diese Konstante einfach auf beiden Bällen gleich wählen und hätten dann auf der Vereinigung beider Bälle ein gemeinsames Potential für V . Das Problem tritt erst auf, wenn sich so eine Kette solcher Bälle 'hinten wieder beißt', vgl. Abbildung 2.3 links.

Der Beweis von Lemma 2.2.9 funktioniert genau so, solange man alle Punkte der Menge Ω der Geraden von einem Punkte $x_0 \in \Omega$ erreichen kann. Solche Mengen nennt man *sternförmig*. Also sind auf allen sternförmigen Menge rotationsfreie Vektorfelder Gradientenvektorfelder.

2. Etwas Integration

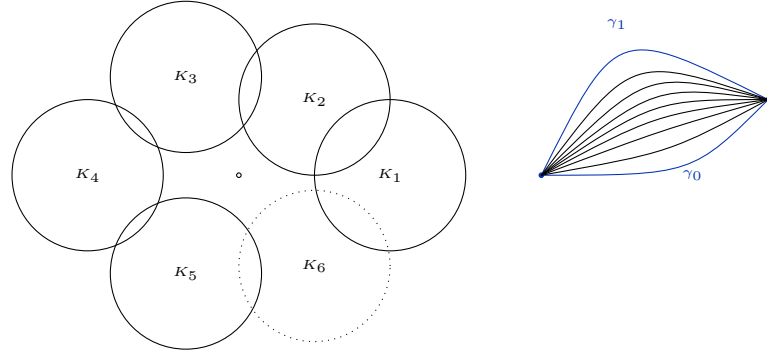


Abbildung 2.3.: Links: Ein rotationsfreies Vektorfeld hat auf K_1 ein Potential φ_1 (eindeutig bestimmt bis auf eine Konstante) Gleiches gilt auf allen anderen K_i – Potential φ_i . Wir können nun die Konstante so wählen, dass das Potential auf $K_1 \cap K_2$ übereinstimmt und dass so bis K_5 weiterführen und erhalten so ein Potential φ auf $K_1 \cup \dots \cup K_5$. Dann ist aber der Schnitt von K_6 mit $K_1 \cap \dots \cap K_5$ nicht mehr zusammenhängend und aus $\text{grad}(\varphi - \varphi_6) = 0$ auf diesem Schnitt folgt nicht mehr, dass die Differenz konstant ist.

Rechts: $s \in [0, 1] \mapsto \gamma_s$ ist eine stetige Deformation von γ_0 nach γ_1 .

Allgemeiner lässt sich diese Aussage auch für einfach zusammenhängende Mengen zeigen:

Definition 2.2.11. Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn es zu je zwei stetigen Kurven $\gamma_i: [0, 1] \rightarrow U$, $i = 0, 1$, mit $\gamma_1(0) = \gamma_0(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_0(1)$ eine stetige Funktion

$$\gamma: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$$

mit $\gamma_1(t) = \gamma(1, t)$, $\gamma_0(t) = \gamma(0, t)$, $\gamma(s, 0) = \gamma_0(0)$ und $\gamma(s, 1) = \gamma_0(1)$ gibt. Ein solches $\gamma: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ nennt man *Homotopie von γ_0 und γ_1 mit festen Endpunkten*.

Einfach zusammenhängend bedeutet anschaulich, dass man je zwei stetige Kurven mit gleichen Endpunkten stetig ineinander deformieren kann, vgl. Abbildung 2.3 rechts.

Lemma 2.2.12. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist U genau dann einfach zusammenhängend, wenn die Definition für alle zweimal stetig differenzierbare Kurven γ_i erfüllt und es eine dazu gehörige Homotopie gibt, die auch zweimal differenzierbar ist.

Beweis. Von der Idee her wie Lemma 1.2.11 – nur dass die stückweise lineare Kurven an den Ecken noch 'geglättet' wird wie im Bild von Seite 70. Führen wir hier nicht aus. \square

Satz 2.2.13. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und einfach zusammenhängend. Sei $V: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\partial_i V_j = \partial_j V_i$ für $1 \leq i, j \leq n$. Dann ist V ein Gradientenvektorfeld.

2.3. Noch ein bisschen Topologie

Beweis. Um zu zeigen, dass V ein Gradientenvektorfeld ist, wollen wir Satz 2.2.8(iii)-(i) verwenden. Der Beweis von Satz 2.2.8 ist ganz analog, wenn wir (iii) nur für zweimal stetig differenzierbare Kurven fordern.

Wir müssen also die Wegunabhängigkeit der Kurvenintegrale beweisen. Dazu seien $c_0, c_1: [0, 1] \rightarrow U$ zwei zweimal stetig differenzierbare Kurven mit den gleichen Start- und Endpunkten. Sei $c: (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ eine zweimal stetig differenzierbare Homotopie von c_0 und c_1 mit festen Endpunkten. Wir setzen

$$F(s) = \int_0^1 \langle V(c(s, t)), \frac{\partial c}{\partial t}(s, t) \rangle dt$$

Wir wollen zeigen, dass $F(s)$ konstant ist. Dazu berechnen wir die Ableitung

$$\begin{aligned} F'(s) &\stackrel{\text{Satz 2.1.2}}{=} \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(\langle V(c(s, t)), \frac{\partial c}{\partial t}(s, t) \rangle \right) dt \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 \left(\partial_j V_i(c(s, t)) \frac{\partial c_i}{\partial s}(s, t) \frac{\partial c_j}{\partial t}(s, t) + V_j(c(s, t)) \frac{\partial^2 c_j}{\partial s \partial t}(s, t) \right) dt \\ &\stackrel{\text{rot.frei+Schwarz}}{=} \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 \left(\partial_j V_i(c(s, t)) \frac{\partial c_i}{\partial s}(s, t) \frac{\partial c_j}{\partial t}(s, t) + V_j(c(s, t)) \frac{\partial^2 c_j}{\partial t \partial s}(s, t) \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(V_i(c(s, t)) \frac{\partial c_i}{\partial s}(s, t) \right) dt \\ &= \langle V(c(s, t)), \frac{\partial c}{\partial s}(s, t) \rangle \Big|_0^1 = 0. \end{aligned}$$

Also ist F konstant und damit ist das Kurvenintegral wegunabhängig. \square

Ein Beispiel für letzten Satz haben wir im Gravitationsfeld $g: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto -\frac{x}{|x|^3}$, gesehen. Das hat Rotation Null (Übungsaufgabe 9(iii)), $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist einfach zusammenhängend und ist ein Gradientenfeld ($g(x) = \text{grad } \frac{1}{|x|}$).

Wir haben also gesehen: Gradientenvektorfelder haben wegunabhängige Kurvenintegrale zweiter Art und sind rotationsfrei. Umgekehrt ist jedes rotationsfreie Vektorfeld zumindest lokal ein Gradientenvektorfeld. Hat man noch andere Bedingungen an die unterliegende Menge, z.B. einfach zusammenhängend, ist es sogar global ein Gradientenvektorfeld.

2.3. Noch ein bisschen Topologie

In [2, Abschnitt 4.1.4] haben wir schon einige topologische Grundbegriffe in metrischen Räumen kennengelernt wie offen, abgeschlossen, Häufungspunkt und innerer Punkt. Nun sollen noch ein paar dazukommen.

Definition 2.3.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$.

2. Etwas Integration

- Das *Innere* $\text{Inn}(A)$ von A ist Menge aller inneren Punkt von A , also aller $y \in A$, für die es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(y) \subset A$ gibt.
- Ein Punkt $x \in X$ heißt *Randpunkt* von A , wenn er weder innerer Punkt von A noch von $X \setminus A$ ist.
- Der *Rand* ∂A von A ist die Menge aller Randpunkte von A .
- Der *Abschluss* von A in X ist $\bar{A} := A \cup \partial A$.
- Eine *offene Überdeckung* von A ist eine Menge von offenen Teilmengen $U_i \subset X$, $i \in I$, mit $A \subset \cup_{i \in I} U_i := \{x \in X \mid \exists i \in I : x \in U_i\}$. Hierbei ist I eine beliebige Menge – *Indexmenge* genannt.

In Übungsaufgabe 32 werden wir uns überlegen, dass der Abschluss einer Teilmenge, wie der Name schon suggeriert, wirklich abgeschlossen ist.

Beispiel 2.3.2. Für eine offene Teilmenge A eines metrischen Raumes gilt immer $\text{Inn}(A) = A$ und $\partial A \cap A = \emptyset$.

Auch wenn man es der Notation nicht ansieht, hängt der Abschluss und der Rand von A und die Frage immer von dem metrischen Raum ab (also auch von der Menge und nicht nur der Abstandsfunktion, in der man A als Teilmenge betrachtet: Sei $X = \mathbb{R}^2$ mit euklidischem Abstand und $A = B_1(0)$. Dann ist der Abschluss von $B_1(0)$ in \mathbb{R}^2 die Menge $\overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$ und $\partial B_1(0) = S_1(0)$. Betrachtet man aber A als Teilmenge in A selbst (auch mit der euklidischen Abstandsfunktion), dann ist $\bar{A} = A$ und $\partial A = \emptyset$.

Wir werden noch eine Eigenschaft kompakter Teilmengen brauchen:

Satz 2.3.3. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von K hat eine endliche Teilüberdeckung, d.h. es gibt eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit $K \subset \cup_{i \in J} U_i$

Wir haben Kompaktheit einer Teilmenge K eines metrischen Raumes in [2, Def. 4.1.28] definiert als: Jede Folge in K besitzt eine konvergente Teilfolge. Diese Definition nennt man in einem allgemeineren Rahmen *folgenkompakt*. Die Eigenschaft von K , dass es für jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung gibt, nennt man auch *überdeckungskompakt*. Der letzte Satz gibt uns, dass in metrischen Räumen folgenkompakt und überdeckungskompakt das Gleiche ist.

Beweis. Beweisen wir hier nicht. □

Der letzte Satz wird oft verwendet, um ein Problem zu zerlegen, in dem man sich auf endlich viele 'einfachere' Mengen zurückziehen kann. Dazu hilft dann auch häufig folgender Satz (der nicht mehr reine Topologie ist, da wir hier gleich glatte Abbildungen verlangen. Deshalb auch nur für Teilmengen des \mathbb{R}^n):

2.3. Noch ein bisschen Topologie

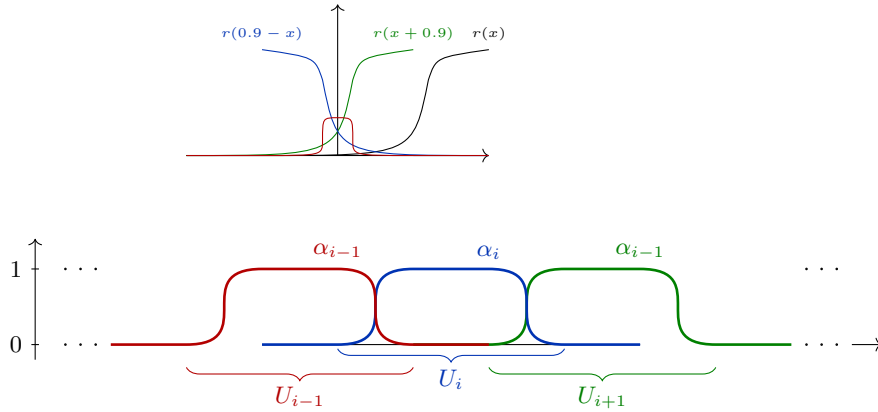


Abbildung 2.4.: Zum Beispiel einer Zerlegung der Eins der offenen Überdeckung $(U_i = (i - 1, i + 1))_{i \in \mathbb{Z}}$ von \mathbb{R} .

Satz 2.3.4 (Zerlegung der Eins). *Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung eines metrischen Raumes $(X, d) \subset (\mathbb{R}^n, |\cdot|)$. Dann gibt es glatte* Funktionen $\alpha_i: X \rightarrow [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:*

- Die Träger[†] $\text{supp} \alpha_i := \overline{\{x \in X \mid \alpha_i(x) \neq 0\}} \subset U_i$.
- für alle $x \in X$ gibt es nur endlich viele $i \in I$ mit $x \in U_i$ und $\alpha_i(x) \neq 0$
- $\sum_{i \in I} \alpha_i(x) = 1$ für alle $x \in X$.

Diese α_i nennt man dann eine (U_i) untergeordnete Zerlegung der Eins.

Die zweite Eigenschaft ist vor allem dazu gut, dass die dritte Eigenschaft überhaupt sinnvoll ist: Die Indexmenge I kann beliebig groß, z.B. sogar überabzählbar, sein. Dann ist eigentlich gar nicht klar, was $\sum_{i \in I}$ sein soll. Aber die zweite Bedingung gibt uns, dass für $x \in X$ fest nur endlich viele dieser Summanden ungleich Null sind. Wir haben also in Wirklichkeit dort eine endliche Summe und können fragen, ob da 1 rauskommt.

Beweisen wir hier auch nicht, vgl. [?, Satz 7.14], sondern wir schauen uns das nur mal explizit an zwei einfachen Beispielen an. Benutzen werden wir das auch später erst einmal nur für den Fall, wo unser Raum durch U_i überdeckt wird, die das Innere von Quadern sind.

Beispiel 2.3.5. Sei $X = \mathbb{R}$ und $U_i = (i - 1, i + 1)$ für $i \in \mathbb{Z}$. Dann ist $(U_i)_i$ eine offene Überdeckung von \mathbb{R} . Sei

*Zerlegung der Eins gibt es auch allgemeiner für metrische Räume, aber wir wollen hier zusätzlich, dass die Funktionen glatt sind. Deshalb hier nur für Teilmengen des \mathbb{R}^n

[†]supp kommt von support (Träger) und der Abschluss wird hier in X ausgeführt. Also z.B. ist $X = (0, 1)$. Dann ist der Abschluss von $(0, 0.5)$ gleich $(0, 0.5]$.

2. Etwas Integration

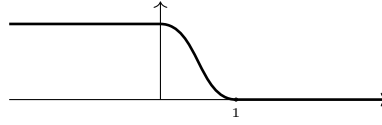


Abbildung 2.5.: Man kann sich auch eine glatte Funktion $\psi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ $x \mapsto r(1 - x)(1 + r(x))$ bauen, die gleich 1 für $x \leq 0$ und 0 für $x \geq 1$ ist.

$$r(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad \varphi(x) = r(x + 0.9)r(0.9 - x) \quad \alpha_i(x) = \frac{\varphi(x - i)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x - k)}.$$

Dann sind die r, φ, α_i glatt, $\text{supp } \alpha_i = [i - 0.9, i + 0.9] \subset U_i$ und $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i(x) = 1$ – also eine Zerlegung der Eins zu $(U_i)_i$, vgl. Abbildung 2.4.

Betrachtet man als $X = [0, \infty)$ und $U_i = (i - 1, i + 1)$ für $i \geq 1$ und $U_0 = [0, 1)$. Dann ist $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von X . Setzen wir $\tilde{\alpha}_0 = \psi(x/0.9)$ mit ψ wie in Abbildung 2.5, $\tilde{\alpha}_i = \varphi(x - i)$ für $i \geq 1$ mit φ wie oben und $\alpha_i = \frac{\tilde{\alpha}_i}{\sum_{j \in \mathbb{N}} \tilde{\alpha}_j}$. Dann ist α_i eine zu $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ untergeordnete Zerlegung der Eins.

Man kann Produkte obiger Funktionen auch nutzen, um sich eine Zerlegung der Eins für U_i 's zu bauen, die das Innere von Quadern sind.

2.4. Mehrfachintegrale

2.4.1. Integrale über Quader

Bis jetzt haben wir eigentlich immer nur Funktionen in einer Variablen integriert: In Analysis 1 für Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und auch jetzt in Analysis 2 waren die Kurvenintegrale am Ende auch nur Integrale in einer Variablen – dem Parameter der Kurve.

Nun wollen wir auch einige Funktionen $f: Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrieren. Dazu verallgemeinern wir das Konzept der Ober- und Untersumme aus Analysis 1.

Definition 2.4.1. Sei $I_j = [a_j, b_j]$. Sei $Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n := \prod_{j=1}^n I_j \subset \mathbb{R}^n$. Eine *Zerlegung \mathcal{Z} der Ordnung k* sei die Menge der Quader $Q_{i_1 \dots i_n}^k = \prod_{j=1}^n [a_j + \frac{i_j-1}{k}(b_j - a_j), a_j + \frac{i_j}{k}(b_j - a_j)]$ mit $i_j \in \{1, \dots, k\}$. Wir setzen $\text{vol}(Q) = \prod_{j=1}^n |b_j - a_j|$. Sei $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

Wir nennen

$$S_k(f) := \frac{\text{vol } Q}{k^n} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^k \inf_{x \in Q_{i_1 \dots i_n}^k} f(x)$$

die k -te Untersumme von f

$$S^k(f) := \frac{\text{vol } Q}{k^n} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^k \sup_{x \in Q_{i_1 \dots i_n}^k} f(x)$$

die k -te Obersumme von f .

Eine Funktion $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *unterhalb/oberhalb integrierbar*, falls

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(f) \text{ bzw. } \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{S_k(f)}$$

existiert. In diesem Fall setzen wir

$$\int_Q f \, d\text{vol} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(f) \text{ bzw. } \overline{\int_Q f \, d\text{vol}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{S_k(f)}.$$

Die Funktion $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *integrierbar*, falls sie sowohl unterhalb als auch oberhalb integrierbar ist und beide Integrale übereinstimmen. In diesem Fall setzen wir

$$\int_Q f \, d\text{vol} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(f).$$

Die Folgen $(S_k(f))_k$ und $(\overline{S_k(f)})_k$ sind beide monoton und, da f beschränkt ist, auch beschränkt. Damit existiert hier in unserer Situation das untere und obere Integral immer, aber sie müssen i.A. nicht übereinstimmen, vgl. Übungsaufgabe 29.

Beispiel 2.4.2. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $1_Q: Q \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$. Dann gilt $S_k(f) = \frac{\text{vol } Q}{k^n} \sum_{i_1 \dots i_n=1}^k 1 = \text{vol } Q$. Analog $\overline{S_k(f)} = \text{vol } Q$. Als 1_Q insbesondere integrierbar.

Allgemeiner definieren wir:

Definition 2.4.3. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $\Omega \subset Q$. Die Funktion

$$1_\Omega: Q \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto \begin{cases} 1 & z \in \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt *charakteristische Funktion von Ω* . Ist 1_Ω integrierbar, dann nennen wir

$$\text{vol } \Omega := \int_Q 1_\Omega \, d\text{vol}$$

das *Volumen von Ω* .

Solange der Quader von Q groß genug, um Ω zu enthalten, hängt das Integral $\int_Q 1_\Omega \, d\text{vol}$ (sofern es existiert) nicht von Q ab. Wir packen Ω aber immer in einen Quader, damit wir endliche Summen bei den Ober-/Untersummen haben.

2. Etwas Integration

Satz 2.4.4. Die Menge $\mathcal{R}_Q := \{\text{Integrierbare Funktionen } Q \rightarrow \mathbb{R}\}$ bildet (mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation von Funktionen) einen Vektorraum. Die Abbildung

$$\int_Q : \{\text{Integrierbare Funktionen } Q \rightarrow \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_Q f(x) d\text{vol}$$

erfüllt: Für alle $f, g \in \mathcal{R}_Q$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

- *Linearität:* $\alpha f + g \in \mathcal{R}_Q$ und $\int_Q (\alpha f + g) d\text{vol} = \alpha \int_Q f d\text{vol} + \int_Q g d\text{vol}$.
- *Monotonie:* Aus $f \leq g$ folgt $\int_Q f d\text{vol} \leq \int_Q g d\text{vol}$.
- *Beschränktheit:* Ist f beschränkt, dann gilt $\left| \int_Q f d\text{vol} \right| \leq \text{vol } Q \sup_Q |f|$.

Analoge Aussagen gelten für unterhalb/oberhalb integrierbare Funktionen.

Stetige Funktionen $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ sind integrierbar.

Beweis. Alles genau wie in Ana 1, vgl. [2, Satz 4.5.8 und 4.5.9] (Dort ist alles für allgemeine Treppenfunktionen gemacht. Hier sind die Treppenfunktionen nur die Ober- und Untersummen.) \square

Um das Integral $\int_Q f d\text{vol}$ einer integrierbaren Funktion f auch wirklich ausrechnen zu können hilft uns der folgende Satz:

Satz 2.4.5 (Fubini für Quader). Seien $I_j = [a_j, b_j]$ für $j = 1, \dots, n$ und $n = m + k$. Sei $Q_1 = I_1 \times \dots \times I_m$, $Q_2 = I_{m+1} \times \dots \times I_n$, $Q = Q_1 \times Q_2$. Sei $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_Q f d\text{vol} &= \int_{Q_1} \left(\int_{Q_2} f(x, y) d\text{vol}_y \right) d\text{vol}_x = \int_{Q_1} \left(\overline{\int_{Q_2} f(x, y) d\text{vol}_y} \right) d\text{vol}_x \\ &= \int_{Q_2} \left(\int_{Q_1} f(x, y) d\text{vol}_x \right) d\text{vol}_y = \int_{Q_2} \left(\overline{\int_{Q_1} f(x, y) d\text{vol}_x} \right) d\text{vol}_y. \end{aligned}$$

Insbesondere existieren dann alle Integrale der rechten Seite. Hier haben wir an $d\text{vol}$ einen Index geschrieben, um zu verdeutlichen bzgl. welcher Koordinaten integriert wird.

Beweis. Es gilt $Q_{i_1 \dots i_n}^\ell = (Q_1)_{i_1 \dots i_m}^\ell \times (Q_2)_{i_{m+1} \dots i_n}^\ell$. Damit haben wir

$$\begin{aligned}
 S_\ell(f: Q \rightarrow \mathbb{R}) &= \frac{\text{vol } Q}{\ell^n} \sum_{i_1, \dots, i_n} \inf_{(x,y) \in Q_{i_1 \dots i_n}^\ell} f(x, y) \\
 &\leq \frac{\text{vol } Q}{\ell^n} \sum_{i_1, \dots, i_n} \inf_{x \in (Q_1)_{i_1 \dots i_m}^\ell} \left(\inf_{y \in (Q_2)_{i_{m+1} \dots i_n}^\ell} f(x, y) \right) \\
 &\leq \frac{\text{vol } Q_1}{\ell^m} \sum_{i_1, \dots, i_m} \inf_{x \in (Q_1)_{i_1 \dots i_m}^\ell} \left(\frac{\text{vol } Q_2}{\ell^k} \sum_{i_{m+1}, \dots, i_n} \inf_{y \in (Q_2)_{i_{m+1} \dots i_n}^\ell} f(x, y) \right) \\
 &= S_\ell(x \in Q_1 \mapsto S_\ell(f(x, \cdot): Q_2 \rightarrow \mathbb{R})) \leq S_\ell(x \in Q_1 \mapsto \int_{\underline{Q_2}} f(x, y) d\text{vol}_y) \\
 &\leq S^\ell(x \in Q_1 \mapsto \int_{\underline{Q_2}} f(x, y) d\text{vol}_y) \leq S^\ell(x \in Q_1 \mapsto \overline{\int_{Q_2}} f(x, y) d\text{vol}_y) \\
 &\leq S^\ell(x \mapsto S^\ell(f(x, \cdot): Q_2 \rightarrow \mathbb{R})) \\
 &= \frac{\text{vol } Q_1}{\ell^m} \sum_{i_1, \dots, i_m} \sup_{y \in (Q_2)_{i_{m+1} \dots i_n}^\ell} \left(\frac{\text{vol } Q_2}{\ell^k} \sum_{i_{m+1}, \dots, i_n} \sup_{x \in (Q_1)_{i_{m+1} \dots i_n}^\ell} f(x, y) \right) \\
 &\leq \frac{\text{vol } Q}{\ell^n} \sum_{i_1, \dots, i_n} \sup_{y \in (Q_2)_{i_{m+1} \dots i_n}^\ell} \left(\sup_{x \in (Q_1)_{i_{m+1} \dots i_n}^\ell} f(x, y) \right) \\
 &\leq \frac{\text{vol } Q}{\ell^n} \sum_{i_1, \dots, i_n} \sup_{(x,y) \in Q_{i_1 \dots i_n}^\ell} f(x, y) = S^\ell(f: Q \rightarrow \mathbb{R}).
 \end{aligned}$$

Führt man den Limes $\ell \rightarrow \infty$ aus und benutzt die Integrierbarkeit von f erhält man hier dann eine Kette von Gleichungen, in der uns die blauen Terme interessieren, was uns gibt:

$$\lim_Q f d\text{vol} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} S_\ell \left(\int_{\underline{Q_2}} f(\cdot, y) d\text{vol}_y \right) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} S^\ell \left(\int_{\underline{Q_2}} f(\cdot, y) d\text{vol}_y \right).$$

So erhalten wir die erste Gleichung der Behauptung und damit insbesondere das die zugehörigen Integrale existieren. Die zweite Zeile erhält man analog, da man in der obigen Kette im dritten blauen Ausdruck auch durch S_ℓ vom oberen Integral über Q_2 ersetzen kann. Die zweite Zeile der Gleichung erhält man analog, indem man die Rollen von x und y vertauscht. \square

Beispiel 2.4.6. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$ stetig und sei $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq f(x)\}$ die Menge, die die Funktion mit der x -Achse einschliesst. Sei $c > \max f$. Wir betrachten $1_\Omega: Q = [a \times b] \times [0, c] \rightarrow \mathbb{R}$. Wir könnten durch direktes Abschätzen der Ober- und Untersumme abschätzen, dass 1_Ω integrierbar ist. Das verschieben wir auf später und nehmen das hier mal direkt an.

2. Etwas Integration

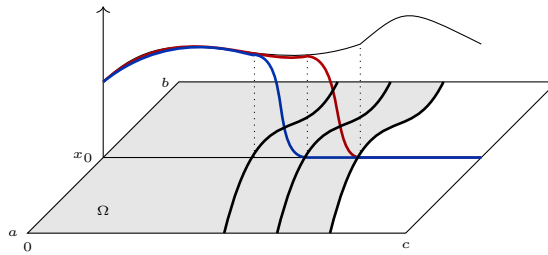


Abbildung 2.6.: Zum Beweis von Lemma 2.4.7: Für $Q_1 = [a, b]$ und $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g \geq 0$, und $f: \Omega := \{(x, y) \in Q := Q_1 \times [0, \sup g] \mid y \leq g(x)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$, stetig ist der Schnitt $f(x_0, \cdot)$ und $f_\epsilon(x_0, \cdot)$ für zwei verschiedene ϵ dargestellt.

Da die Funktion integrierbar ist, können wir Fubini anwenden und erhalten

$$\text{vol } \Omega = \int_Q \text{dvol} = \int_{[a,b]} \left(\int_{[0,c]} 1_{\Omega}(x,y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} dy \right) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Unser Begriff von Volumen hier, ist also mit dem Flächeninhaltsbegriff aus Analysis 1 unter einer Funktion kompatibel.

Als nächstes sehen wir, dass 1_Ω mit dem Ω des letzten Beispiels wirklich integrierbar ist. Allgemeiner gilt sogar

Lemma 2.4.7. *Sei $Q_1 \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $g: Q_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g \geq 0$ stetig. Sei $c > \sup g$. Sei $\Omega_g := \{(x, y) \in Q := Q_1 \times [0, c] \mid y \leq g(x)\}$. Sei $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $\tilde{f} = 1_{\Omega_g} f$ – also*

$$\tilde{f}: Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist \tilde{f} integrierbar.

Wir nennen dann auch $f: \Omega_q \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und setzen

$$\int_{\Omega_g} f \, \mathrm{dvol} := \int_Q \tilde{f} \, \mathrm{dvol}.$$

\tilde{f} ist die Fortsetzung von f durch Null auf $Q \setminus \Omega_g$ und damit i.A. nicht mehr stetig. Deshalb müssen wir die Integrierbarkeit hier erst noch zeigen. Außerdem hängt $\int_{\Omega} f \, d\text{vol}$ nicht von der Wahl von Q ab.

Beweis. Wir nehmen zunächst $f \geq 0$ an: Sei $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ glatt mit $\varphi(z) = 1$ für $z \leq 0$, monoton und $\varphi(z) = 0$ für $z \geq 1$. Wir setzen $f_\epsilon: Q \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \in Q_1 \times [0, c] \mapsto f(x)\varphi(\frac{y-g(x)+\epsilon}{\epsilon})$, vgl. Abbildung 2.6. Wegen $f \geq 0$ folgt $f \geq f_{\epsilon_1} \geq f_{\epsilon_2}$ für $\epsilon_1 < \epsilon_2$. Außerdem ist f_ϵ stetig und damit integrierbar mit $\int_Q f_{\epsilon_1} \mathrm{dvol} \geq \int_Q f_{\epsilon_2} \mathrm{dvol}$. Wegen f beschränkt, ist $\int_Q f_\epsilon \mathrm{dvol} \leq \sup_Q f \cdot \mathrm{vol} Q$ beschränkt und somit existiert $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_Q f_\epsilon \mathrm{dvol}$.

Wir wollen als nächstes zeigen, dass dieser Limes unser gesuchtes Integral von $\tilde{f}: Q \rightarrow \mathbb{R}$ ist: Für $\epsilon > \frac{c}{k}$ (also für k groß genug) gilt:

$$|S_k(\tilde{f}) - S_k(f_\epsilon)| = |S_k(\tilde{f} - f_\epsilon)| \leq \text{vol } Q_1 2 \frac{c}{k} \sup_{\Omega} |\tilde{f} - f_\epsilon| \leq \text{vol } Q_1 2\epsilon \sup_{\Omega} f$$

Dabei folgt das erste \leq , da $\tilde{f} - f_\epsilon$ nur auf $\Omega_g \setminus \Omega_{g-\epsilon}$ überhaupt ungleich Null sein kann und dieser Bereich wegen $\epsilon > \frac{c}{k}$ durch höchstens $2\text{vol } Q_1$ Teilquader überdeckt wird.

Analog für die Obersummen. Somit ist

$$S_k(f_\epsilon) \leq S_k(\tilde{f}) + 2\text{vol } Q_1 \epsilon \sup_{\Omega} f \leq S^k(\tilde{f}) + 2\text{vol } Q_1 \epsilon \sup_{\Omega} f \leq S^k(f_\epsilon) + 4\text{vol } Q_1 \epsilon \sup_{\Omega} f.$$

Lässt man nun erst $k \rightarrow \infty$ gehen, benutzt das f_ϵ integrierbar ist und lässt dann $\epsilon \rightarrow 0$ gehen, erhält man

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_Q f_\epsilon d\text{vol} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} S^k(f).$$

Also ist \tilde{f} integrierbar.

Es bleibt nun f zu betrachten, die auch das Vorzeichen wechseln dürfen: Dazu setzen wir $f_{\pm}: Q \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \max\{0, \pm f(x)\}$. Die f_{\pm} sind stetig und damit existieren nach obigen Überlegungen $\int_{\Omega} \tilde{f}_{\pm} d\text{vol}$. Nach der Linearität des Integrals existiert somit auch das Integral von $\tilde{f} = \tilde{f}_+ - \tilde{f}_-$. \square

Beispiel 2.4.8. Aus dem letzten Lemma folgt wegen Linearität auch, dass stetige Funktionen auf dem Bereich zwischen den Funktionsgraphen stetiger Funktionen $g_1, g_2: Q_1 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g_1 \geq g_2$ – also $\Omega := \{(x, y) \in Q \times [c = \inf g_2, d = \sup g_1] \mid g_2(x) \leq y \leq g_1(x)\}$ – integrierbar sind. Denn dann ist $f|_{\Omega} = f|_{\Omega_1} - f|_{\Omega_2}$. Mit Fubini erhalten wir dann

$$\int_{\Omega} f d\text{vol} = \int_{Q_1} \int_c^d f(x, y) 1_{\Omega}(x, y) dy d\text{vol}_x = \int_{Q_1} \int_{g_2(x)}^{g_1(x)} f(x, y) dy d\text{vol}_x.$$

Berechnen wir uns den Flächeninhalt eines Kreises mit Radius r . Dann können wir $g_{1/2}: x \in [-r, r] \rightarrow \pm\sqrt{r^2 - x^2} \in \mathbb{R}$ benutzen und erhalten

$$\text{vol } B_1(r) = \int_{\Omega} d\text{vol} \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy dx = \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2} dx = \pi r^2$$

vgl. [2, Bsp 4.5.22] für die Berechnung des letzten Integrals, wo wir den Flächeninhalt des Kreises mit den Mitteln von Analysis 1 berechnet hatten.

Mittels der Zerlegung der Eins können wir aus letztem Lemma folgenden Satz folgern:

Satz 2.4.9. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und derart, dass $\partial\Omega$ eine $n-1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist. Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar.

2. Etwas Integration

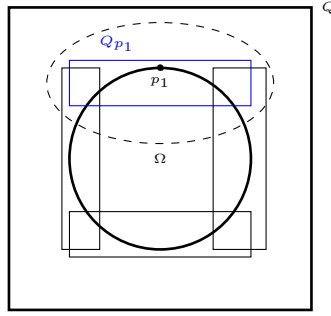


Abbildung 2.7.: Abbildung zum Beweis von Satz 2.4.9

Beweis. Da Ω kompakt ist, gibt es einen Quader Q mit $\Omega \subset \text{Inn } Q$ und ist auch $\partial\Omega$ kompakt (Übungsaufgabe 32). Nach Satz 1.8.5 gibt es für jedes $p \in \partial\Omega$ eine offene Umgebung V_p , so dass $\partial\Omega \cap V_p$ ein Funktionsgraph über $n-1$ der n Koordinaten ist. Sei $Q_p \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $p \in Q_p$ und $Q_p \subset V_p$. Damit ist $(\text{Inn}(Q_p))_{p \in \partial\Omega}$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge $\partial\Omega$. Nach Satz 2.3.3 gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(U_i := \text{Inn}(Q_{p_i}))_{i=1}^k$.

Wir betrachten nun die endliche offene Teilüberdeckung $\{U_i = \text{Inn}(Q_{p_i})\}_{i=1}^k \cup \{U_{k+1} = \text{Inn}(\Omega), U_{k+2} = Q \setminus \Omega\}$ von Q^* – vgl. Abbildung 2.7. Sei $\alpha_i: X \rightarrow [0, 1]$, $i = 1, \dots, k+2$ eine $(U_i)_{i=1}^{k+2}$ untergeordnete Zerlegung der Eins.

Dann ist $f_i = \alpha_i f$ eine Funktion stetige Funktion auf Q mit $\text{supp } f_i \subset U_i$ und es gilt $f|_{\Omega} = \sum_{i=1}^{k+1} f_i|_{\Omega}$. Nach Lemma 2.4.7 $f_i: Q_{p_i} \cap \Omega$ für $i = 1, \dots, k$ damit integrierbar. Auch $f_{k+2}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar, da der Träger von f_{k+2} im Inneren von Ω liegt und somit sich f_{k+2} durch Null zu einer stetigen Funktion auf Q fortsetzbar ist. Somit ist auch $f|_{\Omega}$ integrierbar. \square

Analog können wir in Dimension 2 sogar sagen:

Satz 2.4.10. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und derart, dass $\partial\Omega$ das Bild einer stückweise- C^1 -Kurve ist. Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar.*

Beweis. Geht sehr analog zum letzten Beweis. \square

Mit dem Satz von Fubini können nun auch die Interpretation der Divergenz und Rotation aus Abschnitt 1.4.2 und 1.4.3 beweisen:

Hierzu sei $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ ein Quader. Wir setzen

$$RQ = \bigcup_{j=1}^n ((Q \cap \{x_i = a_i\}) \cup (Q \cap \{x_j = b_j\}))$$

*Man beachte, dass $Q \setminus \Omega$ im metrischen Raum Q mit euklidischer Abstandsfunktion wirklich offen ist.

– das ist die disjunkte Vereinigung der Randquader des Quaders.* Dann soll \int_{RQ} die Summe über die Integrale der einzelnen Randquader sein. Sei $n: RQ \rightarrow \mathbb{R}^n$ der äußere Einheitsnormalenvektor des Quaders – n auf $Q \cap \{x_i = b_i\}$ ist e_i der i -te Einheitsvektor und $-e_i$ auf $Q \cap \{x_i = a_i\}$, vgl. Abbildung 1.7.

Lemma 2.4.11 (Divergenzsatz auf Quadern). *Sei $V: Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_Q \operatorname{div} V \, d\operatorname{vol} = \int_{RQ} \langle V, n \rangle d\operatorname{vol}.$$

Beweis. Wir benutzen Fubini und rechnen mittels Hauptsatz aus Analysis 1 direkt nach (wir lassen die dx_i für die Kürze weg und ein \checkmark über einem Ausdruck bedeutet, dass dieser Term nicht vorkommt):

$$\begin{aligned} \int_{RQ} \langle V, n \rangle &= \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_i}^{\checkmark b_i} \dots \int_{a_n}^{b_n} V_i(x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_i}^{\checkmark b_i} \dots \int_{a_n}^{b_n} V_i(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_i}^{\checkmark b_i} \dots \int_{a_n}^{b_n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} \operatorname{div} V \, dx_n \dots dx_1 \quad \square \end{aligned}$$

In Übungsaufgabe 26 rechnen wir nach, vgl. Abbildung 1.8

Lemma 2.4.12. *Sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck und $V: Q \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Wird der Rand des Rechtecks mittels einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ entgegen des Uhrzeigersinns durchlaufen, dann ist*

$$\int_Q \operatorname{rot} V \, d\operatorname{vol} = \int_{\gamma} V \cdot ds.$$

2.4.2. Integration in anderen Koordinaten

Wir können nun zwar z.B. den Flächeninhalt des Buchstabens C in Abbildung 2.8 berechnen, in dem wir die Fläche so zerlegen, dass wir C stückweise als Funktionsgraph betrachten können und dann Lemma 2.4.7 verwenden können. Geht, ist aber etwas anstrengend[†].

Was können wir stattdessen tun? Betrachten wir die Menge in Polarkoordinaten wie in der Abbildung. Dann wird aus dem C einfach ein Quader. Aber natürlich ist der

*Eigentlich wollen wir hier über ∂Q integrieren. Wir haben nur nie gesagt, was das sein soll. Deshalb zerlegen wir den Rand in die einzelnen Randquader und betrachten davon die disjunkte Vereinigung. Einfach nur, damit wir uns keine Gedanken machen müssen zu welchem Integral die Punkte im Schnitt zweier Randquader gehören sollen (machen am Ende sowieso keinen Beitrag zum Integral).

[†]Alternativ können wir natürlich auch benutzen, dass wir schon wissen, was der Flächeninhalt eines Kreises ist.

2. Etwas Integration

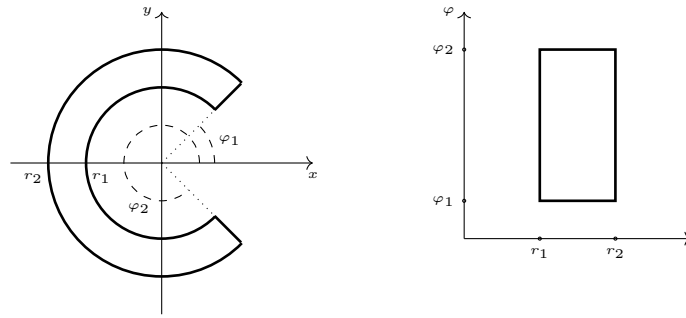


Abbildung 2.8.: Das C links im Bild verwandelt sich in Polarkoordinaten zu einem Rechteck. Will man den Flächeninhalt von C mit Hilfe der Polarkoordinaten berechnen, muss man berücksichtigen, wie sehr das Volumen durch die Abbildung verzerrt wird.

Flächeninhalt vom C nicht einfach der des Quaders. Sondern durch den Diffeomorphismus/Koordinatenwechsel werden Volumen verzerrt.

Das wird in folgender Formel berücksichtigt. Zur Anschauung des 'Verzerrungsfaktors' siehe Abbildung 2.9.

Satz 2.4.13 (Transformationsformel). *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei Q ein Quader mit $Q \subset U$. Sei $\varphi: V \rightarrow U$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Ist $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, dann gilt*

$$\int_Q f \, d\text{vol} = \int_{\varphi^{-1}(Q)} (f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi| \, d\text{vol}.$$

Den Faktor $|\det D\varphi|$ nennt man *Funktionaldeterminante* von φ .

Dazu brauchen wir folgendes Lemma, welches wir als Übungsaufgabe 30 auslagern:

Lemma 2.4.14. *Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $g: Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $fg: Q \rightarrow \mathbb{R}$ auch integrierbar.*

Beweis von Satz 2.4.13. • Für $n = 1$ ist dies einfach die Substitutionsregel für $Q = [a, b]$:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\varphi^{-1}([a, b])} (f \circ \varphi)(x) |\varphi'(x)| \, dx$$

Der Betrag bei $|\varphi'(x)|$ taucht in der Substitutionsregel so nicht auf, dort sind eventuelle Vorzeichen in der Reihenfolge der Integrationsgrenzen versteckt.

- Vertauschen wir die Koordinatenreihenfolge ändert sich die rechte Seite nicht. In der linken Seite führt das maximal zu einem anderen Vorzeichen von $\det(D\varphi)$ (Multilinearität der Determinante), aber der Betrag ändert sich nicht.

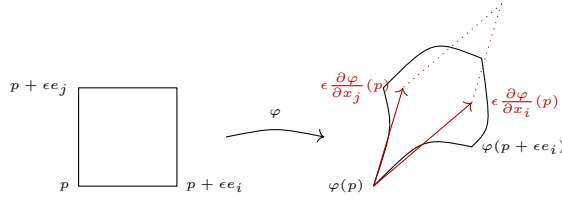


Abbildung 2.9.: Für ϵ klein genug kann das Bild des Quadrates $Q_\epsilon = [0, \epsilon]^2$ ungefähr durch das Bild unter $D_{(0,0)}\varphi$ beschrieben werden (lineare Approximationseigenschaft) – bzw. in höheren Dimensionen von $[0, \epsilon]^n$. Damit ist der Flächeninhalt von $\varphi(Q_\epsilon)$ ungefähr der des Parallelogramms (bzw. Parallelepipeds), welches von den $\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ in $\varphi(0,0)$ aufgespannt wird. Der Quotient der Volumina von Parallelepipeds zu Quader ist also $\left| \det \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right) \right| = |\det(D\varphi)|$. Dieses 'ungefähr' gleich groß kann man präzisieren und auch so dann die Transformationsformel beweisen, wir werden aber einen Zugang über Induktion wählen.

- Stimmt die Formel für Diffeomorphismen $\varphi: V \rightarrow U$, $\psi: W \rightarrow V$, dann auch für die Hintereinanderausführung $\varphi \circ \psi: W \rightarrow U$: Das folgt direkt aus der Kettenregel $D(\varphi \circ \psi) = D\varphi \circ D\psi$ und der Multiplikationsregel für Determinanten.

Die Idee zum Beweis der Transformationsformel ist nun lokal Induktion zu verwenden und dann alles mit der Zerlegung der Eins zusammenzulegen:

Nehmen wir zunächst an, dass es bei gegebenem φ zu jedem Punkt p eine offene Umgebung $U_p \subset U$ mit einem Quader $Q_p \subset U_p$ gibt, so dass für die Einschränkung $\varphi: V_p = \varphi^{-1}(U_p) \rightarrow U_p$ und Q_p die Transformationsformel gilt.

Dann ist $(U_p)_{p \in Q}$ eine offene Überdeckung von Q . Da Q kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(U_{p_i})_{i=1, \dots, m}$, vgl. Satz 2.3.3. Sei α_i eine zu $(U_{p_i})_i$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Dann ist $f_i := f \alpha_i|_Q$ nach letztem Lemma integrierbar und es gilt $f = \sum_{i=1}^m f_i$. Gilt die Transformationsformel nun für alle f_i (jeweils Träger in U_{p_i}). Dann gilt die Formel auch für die Summe.

Es bleibt also die Existenz der U_p zu zeigen. Dies machen wir per vollständige Induktion über die Dimension n . Der Induktionsanfang ist $n = 1$ - dort gilt der Satz nach der Transformationsformel. Nehmen wir also an der zu zeigende Satz gilt für alle Dimension $m < n$.

Da φ ein Diffeomorphismus ist, muss es mindestens einen Eintrag in $D_p\varphi$ geben, der nicht Null ist. O.B.d.A. sei dies $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(p)$. Wir definieren

$$\psi(x_1, \dots, x_n) := (\varphi_1(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n).$$

Wegen $D_p\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(p) & *_{1 \times (n-1)} \\ 0_{(n-1) \times 1} & \text{Id}_{n-1} \end{pmatrix}$ ist $\det D_p\psi = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(p) \neq 0$. Damit gibt es nach dem Satz über inverse Funktionen eine offene Umgebung V_p von p , so dass

2. Etwas Integration

$\psi|_{V_p} : V_p \rightarrow \psi(V_p)$ ein Diffeomorphismus ist. Dann gilt $\varphi|_{V_p} = (\varphi\psi^{-1}) \circ \psi|_{V_p}$ sowie $(\varphi\psi^{-1})(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \kappa(y_1, \dots, y_n))$. Dann ist $\tilde{\kappa}_{y_1}(y_2, \dots, y_n) = \kappa(y_1, \dots, y_n)$ für alle $y_1 \in J_1$ auch diffeomorph. Insbesondere gilt

$$D_{(y_1, \dots, y_n)}(\varphi \circ \psi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1 \times (n-1)} \\ *_{(n-1) \times 1} & D\tilde{\kappa}_{y_1} \end{pmatrix}$$

und somit $\det D_{(y_1, \dots, y_n)}(\varphi \circ \psi^{-1}) = \det D\tilde{\kappa}_{y_1}$. Durch Verkleinern von V_p können wir immer erreichen, dass $\varphi(V_p)$ das Innere eines Quaders $Q_p = J_1 \times \dots \times J_n$ ist. Sei nun f auf Q_p integrierbar.

$$\begin{aligned} \int_{Q_p} f \, d\text{vol} &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{J_1} \int_{J_2 \times \dots \times J_n} f(y_1, \dots, y_n) dy_n \dots dy_1 \\ &\stackrel{\text{Ind.vor}}{=} \int_{J_1} \left(\int_{\tilde{\kappa}_{y_1}^{-1}(J_2 \times \dots \times J_n)} f(y_1, \kappa(y_1, x_2, \dots, x_n)) |\det D\tilde{\kappa}_{y_1}| dx_n \dots dx_2 \right) dy_1 \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{(\varphi \circ \psi^{-1})^{-1}(Q_p)} (f \circ \varphi \circ \psi^{-1})(y_1, x_2, \dots, x_n) |\det D\tilde{\kappa}_{y_1}| dy_1 dx_n \dots dx_2 \\ &\stackrel{n=1}{=} \int_{\varphi^{-1}(Q_p)} (f \circ \varphi) \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right| |\det D\tilde{\kappa}_{y_1}| dx_1 dx_n \dots dx_2 \\ &= \int_{\varphi^{-1}(Q_p)} (f \circ \varphi) |\det D(\varphi \circ \psi^{-1})| |\det D\psi| d\text{vol} \\ &= \int_{\varphi^{-1}(Q_p)} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| d\text{vol}. \end{aligned} \quad \square$$

Hier verwenden wir im vierten Schritt die Transformationsformel für $n = 1$ angewendet auf $x_1 \mapsto \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bei festem x_2, \dots, x_n im inneren Integral über J_1 .

Beispiel 2.4.15. Wir wollen nun den Flächeninhalt vom $C = C(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2)$ aus Abbildung 2.8 in Polarkoordinaten berechnen. Es ist

$$\Phi: (\varphi, r) \in (0, 2\pi) \times (0, \infty) \mapsto (x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, \infty)\}$$

ein Diffeomorphismus, vgl. Beispiel 1.7.15. Dann ist $D_{(\varphi, r)}\Phi = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi & \cos \varphi \\ r \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix}$ und somit $|\det D_{(\varphi, r)}\Phi| = r$.

$$\int_C d\text{vol} = \int_{[r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]} r dr d\varphi \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} r dr d\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2).$$

Um den Flächeninhalt von $\overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^2$ nun auch mit der Transformationsformel zu berechnen, können wir die Transformationsformel erst einmal (so wie wir sie formuliert haben) nicht direkt anwenden, da Φ^{-1} nicht auf ganz $\overline{B_r(0)}$ definiert ist, sondern auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$. Aber am Ende ist das kein Problem, denn wir haben:

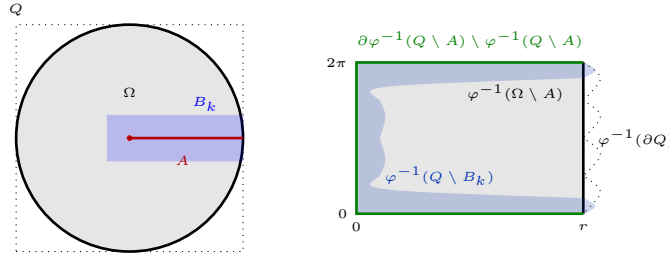


Abbildung 2.10.: Da A Volumen Null hat, geht das Volumen der B_k für k gegen Null. Auf $\Omega \setminus B_k$ kann nun die Transformationsformel angewendet werden. Dann erhält man aber nicht ganz $\varphi^{-1}(\Omega \setminus A)$. Die Bedingung an das Volumen $\varphi^{-1}(V \setminus B_k)$ sichert aber, dass der verbleibende Teil im Limes $k \rightarrow \infty$ keine Rolle spielt. Diese Bedingung ist automatisch erfüllt, wenn $\varphi^{-1}(Q \setminus A) \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist und $\partial(\varphi^{-1}(Q \setminus A)) \setminus \varphi^{-1}(Q \setminus A) \subset \mathbb{R}^n$ Volumen Null hat (das ist in Anwendungen eigentlich immer der Fall - sonst hat man die falschen/seltsame Koordinaten gewählt).

Lemma 2.4.16. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und sei $A \subset \Omega \subset Q$ derart, dass 1_Ω und 1_A beide integrierbar sind und sei $\varphi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus mit $Q \setminus A \subset V$. Es sei $|\det D\varphi|$ auf U beschränkt.

Seien $B_k = \cup_{A \cap Q_{i_1 \dots i_n}^k \neq \emptyset} Q_{i_1 \dots i_n}^k$ für $Q_{i_1 \dots i_n}^k$ die Teilquader der Zerlegung der Ordnung k von Q . Es gelte $\text{vol } \varphi^{-1}(B_k \setminus A) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist

$$\int_{\Omega} f \, d\text{vol} = \int_{\varphi^{-1}(\Omega \setminus A)} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| \, d\text{vol}$$

und insbesondere existiert das Integral auf der rechten Seite.

Das Lemma ist etwas 'unförmig' (und auch nicht bestmöglich - aber für unsere Beispiele gut genug). In konkreten Situation ist normalerweise immer klar, ob es anwendbar ist. Vgl. Abbildung 2.10 auch für die Bedeutung der Voraussetzungen. Z.B. gibt uns diese Lemma gibt uns mit den Vorüberlegungen dann insbesondere, dass wir den Flächeninhalt von $\overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^2$ durch

$$\int_{\overline{B_r(0)}} d\text{vol} = \int_{\overline{B_r(0)} \setminus \{(s,0) \mid s \in [0,r]\}} d\text{vol} = \int_0^{2\pi} \int_0^r r \, dr \, d\varphi = 2\pi \frac{1}{2} r^2 = \pi r^2$$

berechnen können: Hier ist $A = [0, r] \times \{0\}$ (hat als Teilmenge von \mathbb{R}^2 Volumen Null, vgl. Übungsaufgabe 29 und auch Abbildung 2.10).

2. Etwas Integration

Beweis von Lemma 2.4.16.

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} f \, d\text{vol} &= \int_{\Omega \setminus B_k} f \, d\text{vol} + \int_{B_k \cap \Omega} f \, d\text{vol} \\
 &\stackrel{\text{s.u.}}{=} \int_{\varphi^{-1}(\Omega \setminus B_k)} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| \, d\text{vol} + \int_{B_k \cap \Omega} f \, d\text{vol} \\
 &= \int_{\varphi^{-1}(\Omega \setminus A)} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| \, d\text{vol} - \int_{\varphi^{-1}(B_k \setminus A)} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| \, d\text{vol} + \int_{B_k \cap \Omega} f \, d\text{vol}
 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit ist die Summe aus dem Anwenden der Transformationsformel auf die einzelnen Teilquader.

Wegen Beschränktheit der Integranden (durch eine Konstante C) gilt

$$\left| \int_{B_k \cap \Omega} f \, d\text{vol} - \int_{\varphi^{-1}(B_k \setminus A)} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| \, d\text{vol} \right| \leq C (\text{vol } B_k + \text{vol } \varphi^{-1}(B_k \setminus A)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

und es folgt die Behauptung. \square

Beispiel 2.4.17. Sei

$$\Phi: (r, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi) \mapsto (ar \cos \varphi, br \sin \varphi)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}.$$

Man sich analog zu Polarkoordinaten überlegen, vgl. Beispiel 1.7.15, dass dies ein Diffeomorphismus ist.

In diesen Koordinaten ist die Menge $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ (Das Innere und der Rand einer Ellipse) bis auf eine Menge von Volumen Null (nämlich $\{(x, 0) \mid x \in [0, a]\}$) gegeben durch $\{(r, \varphi) \mid r \in (0, 1] \times (0, 2\pi)\}$.

Wir haben $D\Phi = \begin{pmatrix} a \cos \varphi & -ar \sin \varphi \\ b \sin \varphi & br \cos \varphi \end{pmatrix}$ und damit $\det |D\varphi| = abr$. Somit ist der Flächeninhalt der Ellipse gleich $\int_0^1 \int_0^{2\pi} abrd\varphi dr = \pi ab$.

2.4.3. Beispiele zur Volumenberechnung

Neben Polarkoordinaten gibt es noch andere öfter vorkommende Koordinatensysteme. Welches Koordinatensystem verwendet wird, orientiert sich normalerweise an der Symmetrie des Problems – also hier an der Symmetrie des Integrationsgebietes.

Zylinderkoordinaten.

$$\Phi: (r, \varphi, z) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, x \geq 0\}$$

ist ein Diffeomorphismus. Dessen Jacobimatrix ist

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und damit } \det D\Phi = r.$$

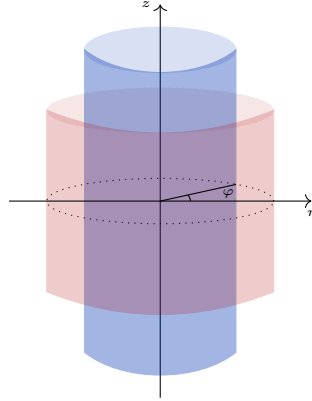


Abbildung 2.11.: Zylinderkoordinaten: In der $x-y$ -Ebene nehmen wir Polarkoordinaten und die z -Koordinate bleibt wie im Euklidischen. Der Name kommt daher, dass für fester r die restlichen Koordinaten einen Zylinder beschreiben.

Beispiel 2.4.18 (Volumen von Rotationskörpern). Sei $R: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig. Dann beschreibt

$$\Omega := \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi \in [0, 2\pi], 0 \leq r \leq R(z)\}$$

einen Körper, der rotationssymmetrisch bei Drehung um die z -Achse ist.

Es ist dann nach Transformationsformel und Lemma 2.4.16

$$\text{vol } \Omega = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{R(z)} r dr d\varphi dz = \pi \int_a^b R^2(z) dz.$$

Sphärische Koordinaten/Kugelkoordinaten.

$$\Phi: (r, \varphi, \theta) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$$

ist ein Diffeomorphismus, vgl. Abbildung 2.12, mit

$$D_{(r, \varphi, \theta)} \Phi = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix} \text{ und } \det D_{(r, \varphi, \theta)} \Phi = r^2 \cos \theta$$

Beispiel 2.4.19 (Volumen von einer Kugel im \mathbb{R}^3 mit Radius R). Auch wenn die Kugel durch sphärische Koordinaten nicht vollständig abgedeckt wird, können wir mit analoger Argumentation wie beim Flächeninhalt des Kreises wieder rechnen:

$$\text{vol } \overline{B_R(0)} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \theta d\theta d\varphi dr = 2\pi \sin \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

2. Etwas Integration

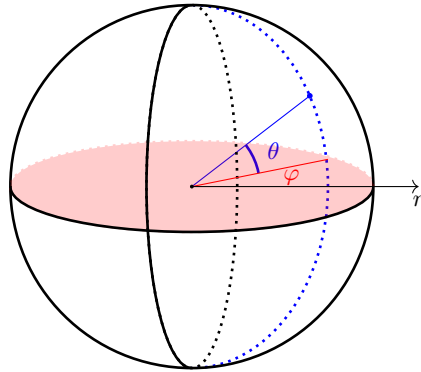


Abbildung 2.12.:

Pyramide/Kegel Sei $A \subset Q \times [0, h] \subset \mathbb{R}^3$ eine Pyramide (oder ein Kegel) mit Grundfläche $G \subset Q$ und Höhe h . Dann ist nach Fubini

$$\text{vol } A = \int_0^h \int_Q 1_A \, d\text{vol}$$

Für $z \in [0, h]$ ist nach Strahlensatz $A \cap (Q \times \{z\})$ eine Menge die bis auf Translation der Menge $(h - z)G := \{(h - z)x \in \mathbb{R}^2 \mid x \in G\}$ entspricht.

Das stellt die Frage, wie sich **Volumina unter Skalierung** verhalten: Für $\lambda > 0$ sei $\varphi_\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \lambda x$. Dies ist ein Diffeomorphismus mit $\lambda^{-1}\Omega = \varphi^{-1}(\Omega)$ und $D\varphi_\lambda = \lambda \text{Id}_n$. Damit gibt die Transformationsformel

$$\text{vol}(\lambda\Omega) = \int_\Omega \lambda^n \, d\text{vol} = \lambda^n \text{vol } \Omega.$$

Für unser Problem oben ergibt das

$$\text{vol } A = \int_0^h \left(\int_Q 1_{(z-h)G} \, d\text{vol}_Q \right) dz = \int_0^h (z - h)^2 \text{vol } G \, dz = \text{vol } Q \frac{1}{3} (h - z)^3 \Big|_0^h = \frac{1}{3} \text{vol } G h^3.$$

(!Das Volumen von G ist jetzt hier das 2-dimensionale Volumen, da $G \subset \mathbb{R}^2$ ist.)

Wir sehen, dass für die Berechnung es völlig unerheblich war, wo genau sich die Spitze der Pyramide /des Kegels befindet. Da für festes z nach Strahlensatz die Schnittmengen $A \cap (Q \times \{z\})$ bis auf Translation immer übereinstimmen und somit gleiches Volumen haben. Das nennt man auch *Prinzip des Cavalieri*.

2.4.4. Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Wir wollen nun auch gerne Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten integrieren und damit insbesondere auch das Volumen von Untermannigfaltigkeiten bestimmen können (und damit z.B. die Oberfläche einer Kugel).

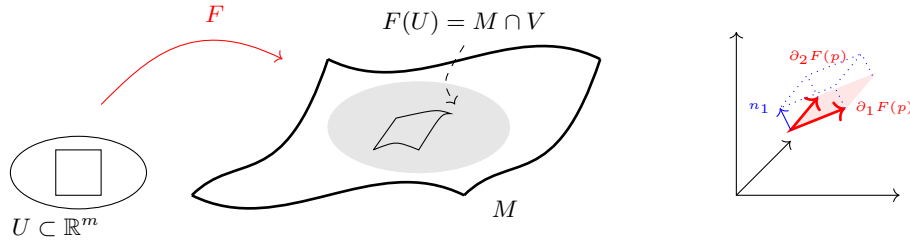


Abbildung 2.13.: Links: Unter der lokalen Parametrisierung wird ein Quader Q in U wieder verzerrt. Wenn der Quader klein genug ist, kann man das Bild durch das m -dimensionale Parallelepiped in \mathbb{R}^n annähern, welches das Bild $D_u F(Q)$ ist ($u \in Q$).

Rechts: Um das m -dimensionale Volumen des Parallelepipeds $D_u F(Q)$ zu bestimmen, machen wir daraus mittels einer Orthonormalbasis n_i von $(T_{F(u)}M)^\perp$ ein n -dimensionales Parallelepiped.

Die Grundidee ist dabei ähnlich wie bei Transformationsformel. Wir würden gerne über Gebiete integrieren, die einfacher sind. Hier: Statt über die Untermannigfaltigkeit M zu integrieren, wollen wir lokale Parametrisierungen $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ nutzen, um jedenfalls statt über $F(U) = M \cap V$ über U zu integrieren. Dabei müssen wir natürlich wieder berücksichtigen, dass dabei kleine Teilquader in U in $F(U)$ verzerrt werden.

Der Verzerrungsfaktor entspricht für Quader klein genug wieder ungefähr dem m -dimensionalen Volumen des von $\frac{\partial F}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x^m}$ Parallelepipeds. Der Unterschied zur Transformationsformel ist nun, dass dies Vektoren im \mathbb{R}^n und somit schon die Determinante von DF (für $m \neq n$) gar nicht definiert ist.

Stattdessen können wir wie folgt vorgehen: Die Vektoren $\partial_1 F(u), \dots, \partial_m F(u)$ spannen den m -dimensionalen Tangentialraum $T_{F(u)}M$ auf. Seien $n_1, \dots, n_{k=n-m}$ für festes $u \in U$ eine Orthonormalbasis von $(T_{F(u)}M)^\perp \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $|\det(B := (D_u F, n_1, \dots, n_k))|$ gleich dem Volumen des Parallelepipeds, welches von $\partial_i F$, $i = 1, \dots, m$, und n_1, \dots, n_k aufgespannt wird, vgl. Abbildung 2.13 rechts. Da die n_i senkrecht auf $T_{F(u)}M$ sind, Länge 1 haben und paarweise orthogonal sind, ist dies gleich dem (m -dimensionalen) Volumen des Parallelepipeds in $T_{F(u)}M \cong \mathbb{R}^m$, welches von $\partial_i F$, $i = 1, \dots, m$ gebildet wird.

Andererseits ist (da $\partial_i F(u) \perp n_j$)

$$B^T B = \begin{pmatrix} (D_u F)^T D_u F & 0_{m \times k} \\ 0_{k \times m} & \text{Id}_{k \times k} \end{pmatrix}$$

und damit ist das Volumen des Parallelepipeds gleich

$$|\det B| = \sqrt{|\det(B^T B)|} = \sqrt{|\det(D_u F)^T D_u F|}.$$

Dies motiviert die folgende Definition:

2. Etwas Integration

Definition 2.4.20. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m -dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeit für die es eine stetig differenzierbare Parametrisierung $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ mit $M = F(U)$ gibt. Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $Q \subset U$ ein Quader. Dann nennen wir $f: F(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, wenn das Integral

$$\int_{F(Q)} f \, d\text{vol} := \int_Q (f \circ F) \sqrt{|\det((DF)^T(DF))|} \, d\text{vol}$$

existiert.

Diese Definition suggeriert durch die Wahl der Begriffe, dass dieses Integral etwas mit den zuvor definierten zu tun hat. Das wollen wir gleich noch sehen. Zuvor jedoch:

Unabhängigkeit von $\int_M f \, d\text{vol}$ vom gewählten F ? Seien $F_1: U_1 \rightarrow V_1$ und $F_2: U_2 \rightarrow V_2$ zwei Parametrisierungen (stetig differenzierbar) mit $M = F_1(U_1) = F_1(U_2)$. Dann ist $\varphi = F_2^{-1} \circ F_1: U_1 \rightarrow U_2$ ein Homöomorphismus – sogar ein C^1 -Diffeomorphismus, siehe Begründung unten. Sei $Q \subset U_2$ ein Quader. Dann ist nach der Transformationsformel:

$$\begin{aligned} & \int_Q (f \circ F_2)(u) \sqrt{|\det((D_u F_2)^T(D_u F_2))|} \, d\text{vol}_u \\ &= \int_{\varphi^{-1}(Q)} (f \circ F_2 \circ \varphi)(v) \sqrt{|\det((D_{\varphi(v)} F_2)^T(D_{\varphi(v)} F_2))|} |\det D_v \varphi| \, d\text{vol}_v \\ &\stackrel{\text{s.u.}}{=} \int_{\varphi^{-1}(Q)} (f \circ F_2 \circ \varphi) \sqrt{|\det((DF_2 \circ D\varphi)^T(DF_2 \circ D\varphi))|} \, d\text{vol} \\ &= \int_{\varphi^{-1}(Q)} (f \circ F_1) \sqrt{|\det(DF_1)^T(DF_1)|} \, d\text{vol}. \end{aligned}$$

Dabei benutzt die zweite Gleichheit:

$$\det(A^T A)(\det C)^2 = \det(C^T A^T A C) = \det((AC)^T AC).$$

Es bleibt noch zu argumentieren, dass $\varphi = F_2^{-1} \circ F_1 \circ U_1 \rightarrow U_2$ ein C^1 -Diffeomorphismus: Der wichtige Punkt ist hierbei zu argumentieren, dass diese Abbildung glatt ist, dann folgt der Rest aus der Rang-Bedingung für die Jacobimatrizen der Parametrisierungen und dem Satz über inverse Funktionen. Die Idee um zu zeigen, dass φ glatt in $u \in U_1$ ist, ist es F_2 nahe $\varphi(u)$ zu einer glatten Abbildung $\tilde{F}_2: U_2 \times \mathbb{R}^{k=n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ fortzusetzen (also $\tilde{F}_2(v, 0) = F_2(v)$ für alle $v \in U_2$), die nahe $(\varphi(u), 0)$ ein C^1 -Diffeomorphismus ist. Damit ist dort (wo \tilde{F}_2 ein C^1 -Diffeo ist) \tilde{F}_2^{-1} auch glatt. Wegen $\tilde{F}_2^{-1} \circ F_1 = F_2^{-1} \circ F_1 = \varphi$ ist dann φ in u glatt.

Es bleibt \tilde{F}_2 zu konstruieren: Da die $n \times m$ -Matrix $D_u F_2$ maximalen Rang hat, können wir o.B.d.A. annehmen, dass die ersten m Zeilen linear unabhängig sind. Wir setzen

$$\tilde{F}_2: U_2 \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (v, t) \mapsto F_2(v) + (0, t).$$

Dann ist $\tilde{F}_2(v, 0) = F_2(v)$ und $D_{(u,0)} \tilde{F}_2 = \begin{pmatrix} D_u F_2 & 0_{m \times k} \\ 0 & \text{Id}_k \end{pmatrix}$ hat vollen Rang. Also ist \tilde{F}_2 nach dem Satz über inverse Funktionen nahe $(u, 0)$ ein C^1 -Diffeomorphismus.

Konsistenz mit früheren Definitionen?

- $m = 1$: Dann ist $M = \text{Bild } \gamma$ einer stetig differenzierbaren Kurve $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma'(t) \neq 0$ für alle t . Dann können wir als lokale Parametrisierung $F = \gamma$ wählen. Sei $Q = [a, b] \subset I$. Dann $D_t F = \gamma'(t)$ und damit $\sqrt{|\det((DF)^T(DF))|} = |\gamma'(t)|$. Somit gilt

$$\int_{\gamma([a,b])} f \, d\text{vol} = \int_a^b (f \circ \gamma) |\gamma'(t)| dt = \int_{\gamma|_{[a,b]}} f \, ds.$$

- $m = n$: Dann ist M eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n und F entspricht einem Koordinatenwechsel: Da $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F(U) \subset M \subset \mathbb{R}^n$ ist Homöomorphismus, stetig differenzierbar ist und DF maximalen Rang hat, ist nach dem Satz über inverse Funktionen und Lemma 1.7.5 dann auch F^{-1} stetig differenzierbar und F somit ein C^1 -Diffeomorphismus. Dann ist $\det(DF)^T DF = (\det DF)^2$ und wir haben wieder die Transformationsformel.

Für Mannigfaltigkeiten, die nicht mit nur einer Parametrisierung beschrieben werden können? Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Untermannigfaltigkeit. Seien $(F_i: U_i \rightarrow V_i)_{i \in I}$ endlich viele* lokale Parametrisierungen von M mit $M \subset \cup_{i \in I} F(U_i)$. Sei $\alpha_i: \cup_{i \in I} V_i \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(V_i)_{i \in I}$ untergeordnete Zerlegung der Eins†. Dann setzen wir für $f: M \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_M f \, d\text{vol} = \sum_{i \in I} \int_{M \cap V_i} \alpha_i f \, d\text{vol}$$

und nennen f *integrierbar*, wenn die rechte Seite existiert.

Ist $1_M: M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, so setzen wir wieder

$$\text{vol } M = \int_M 1_M \, d\text{vol}.$$

und nennen diese Zahl *Volumen* von M .

Beispiel 2.4.21 (Oberfläche einer Kugel). Sei $M = S^2(R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. Wir wollen mit Parametrisierungen mittels Kugelkoordinaten (eingeschränkt auf $r = R$) arbeiten

$$F: (\varphi, \theta) \in (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \mapsto \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \theta \\ R \sin \varphi \cos \theta \\ R \sin \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geq 0\}.$$

Es gilt

$$DF = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \theta & -R \cos \varphi \sin \theta \\ R \cos \varphi \cos \theta & -R \sin \varphi \cos \theta \\ 0 & R \cos \theta \end{pmatrix} \quad (DF)^T DF = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}.$$

*Zumindest wenn M kompakt ist, kommt man nach Satz 2.3.3 immer mit endlich vielen Parametrisierungen aus.

†Wir wenden hier die Zerlegung der Eins auf $(V_i)_{i \in I}$ und nicht auf $(F(U_i))_{i \in I}$ an, weil wir für den Satz in unserer Version eine offene Überdeckung einer Teilmenge im \mathbb{R}^n brauchen.

2. Etwas Integration

Das ist eine Parametrisierung der Kugel ohne $\{(x, 0, z) \mid x^2 + z^2 = R^2, x \geq 0\}$. Ähnlich wie bei der Volumenberechnung von $\overline{B_R(0)} \subset \mathbb{R}^2$ kann man wieder überlegen, dass die fehlende Menge Volumen Null hat (s.u.) und wir haben

$$\text{vol } S^2(R) = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos \theta d\theta d\varphi = 4\pi R^2.$$

Dass $k = \{(x, 0, z) \mid x^2 + z^2 = R^2, x \geq 0\} \subset M$ Volumen Null hat (also $\int_M 1_k d\text{vol} = 0$ ist), hat den gleichen Grund warum $[0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ Volumen Null hat. Formal sieht man das z.B., wenn man als lokale Parametrisierung Kugelkoordinaten mit 'gedrehtem φ verwendet' $\tilde{F}(\varphi, \theta) := F(\varphi + \pi, \theta)$. Dann liegt zumindest der Halbkreis k ohne $(0, 0, \pm R)$ im Bild von \tilde{F} und hat als Urbild die Strecke $\theta \mapsto (-\pi, \theta)$. Somit ist $\text{vol}(k \setminus (0, 0, \pm R) \subset M) = \int_M 1_{k \setminus (0, 0, \pm R)} d\text{vol} = \int_{\{-\pi\} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subset \mathbb{R}^2} d\text{vol} = 0$ und analog kann man auch die Punkte $(0, 0, \pm R)$ betrachten, in dem man z.B. θ verschiebt oder in einer Umgebung davon $S^2(R)$ als Funktionsgraph betrachtet.

2.4.5. Divergenz- und Rotationssatz

Woche 9 Wir haben in Abschnitt 2.13 den Divergenzatz auf Quadern bewiesen. Ähnliches wollen wir nun für offene und beschränkte Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ deren Rand eine Hyperfläche ($= (n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n) ist. Bevor wir den formulieren, definieren wir zunächst, was im allgemeinen der äußere Einheitsnormalenvektorfeld $n: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf $M = \partial\Omega$ ist.

Um dem Namen gerecht zu werden, verlangen wir: $|n(p)|^2 = 1$ und $n(p) \perp T_p M$ für alle $p \in M$. Dann wäre n ein Einheitsnormalenvektorfeld. Davon gibt es in jedem p noch zwei Vektoren, die das erfüllen. Wir wollen zusätzlich noch, dass n nach $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ zeigt. Das kann man formalisieren, in dem man fordert, dass für alle $t > 0$ klein genug $p + tn(p) \notin \Omega$ ist.

Satz 2.4.22 (Divergenzatz=Gauß'scher Integralsatz). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so dass $\partial\Omega$ eine $(n-1)$ -dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist. Sei n das äußere Einheitsnormalenvektorfeld auf $\partial\Omega$. Sei $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_{\Omega} \text{div } V d\text{vol} = \int_{\partial\Omega} \langle V, n \rangle d\text{vol}.$$

Die Grundidee des Beweises ist es wieder, analog wie in Satz 2.4.9, mittels einer Unterlegung in kleinere Teile und einer Zerlegung in kleinere Teile, den Satz auf den Fall eines Gebietes, was der Bereich unter einem Funktionsgraphen $g: Q \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ ist, zurückzuführen. Dort können wir die Behauptung explizit nachrechnen:

Lemma 2.4.23. *Sei $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Quader. Sei $g: Q \rightarrow \mathbb{R}$, $g \geq 0$, stetig differenzierbar. Sei $\Omega_g = \{(x, y) \in Q \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq g(x)\}$ und $M = \text{graph } g$. Sei n das äußere Einheitsnormalenvektorfeld auf M . Sei $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares*

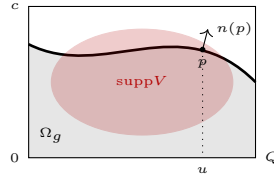


Abbildung 2.14.: Abbildung zu Lemma 2.4.23.

Vektorfeld mit Träger in $\text{Inn}(Q \times [0, c])$, wobei $c > \sup |g|$ ist, vgl. Abbildung 2.14. Dann gilt

$$\int_{\Omega_g} \text{div } V \, \text{dvol} = \int_M \langle V, n \rangle \, \text{dvol}.$$

Für g konstant, folgt ist das direkt aus dem Divergenzsatz auf Quadern (nur das hier im Lemma V nur Träger auf einem Randquader hat nämlich auf $\text{grad } g$). Die Grundidee zum Beweis diesen Lemma ist wieder Fubini – man muss nur ein bisschen mehr machen:

Beweis. Wir bestimmen zunächst n : Da $F(u) = (u, g(u))$ eine Parametrisierung von $\text{graph } g$ ist, wird $T_p M$ für $p = F(u)$ durch $\left(e_i \in \mathbb{R}^{n-1}, \frac{\partial g}{\partial x_i}(u)\right)^T \in \mathbb{R}^n$ aufgespannt. Der Vektor $\tilde{n}(u) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x_1}(u), \dots, -\frac{\partial g}{\partial x_{n-1}}(u), 1\right)$ ist senkrecht auf allen diesen Basisvektoren und damit auf $T_p M$. Diesen Vektor müssen wir noch normalisieren, also $n(p = F(u)) = \frac{\tilde{n}(u)}{|\tilde{n}(u)|}$ setzen. Dieses n ist dann ein Einheitsnormalenvektor und da er von Ω_g wegzeigt (da letzte Koordinate positiv ist), der gesuchte äußere Einheitsnormalenvektor in $p = F(u)$.

Für die rechte Seite der Gleichung gilt somit

$$\int_M \langle V, n \rangle \, \text{dvol} = \int_Q \left(\sum_{i=1}^{n-1} -V_i(u, g(u)) \frac{\partial g}{\partial x_i}(u) + V_n(u, g(u)) \right) \frac{\sqrt{|\det((DF)^T(DF))|}}{|\tilde{n}(u)|} \, \text{dvol}$$

Wir werden nun noch sehen, dass $\sqrt{|\det((DF)^T(DF))|} = |\tilde{n}(u)|$ gilt: Es ist $|\tilde{n}(u)|^2 = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} |\partial_i g(u)|^2$. Da $\tilde{n}(u) \perp \frac{\partial F}{\partial x_i}(u)$ ist, vgl. Seite 93,

$$|\det(D_u F, \tilde{n}(u))| = \sqrt{|\det((DF)^T(DF))|} |\tilde{n}(u)|$$

Außerdem ist

$$\det(D_u F, \tilde{n}(u)) = \begin{pmatrix} \text{Id}_{n-1} & -(D_u g)^T \\ D_u g & 1 \end{pmatrix}$$

Zum Bestimmen der Determinante multiplizieren wir die letzte Zeile der Matrix um in 'letzte Zeile $-\sum_{i=1}^{n-1} -\partial_i g(u) \cdot (i.\text{te Zeile})$ ' und erhalten dann für die letzte Zeile

2. Etwas Integration

alles Nullen, nur der letzte Eintrag ist dann $|\tilde{n}(u)|^2$. Somit ist $\det(D_u F, \tilde{n}(u)) = |\tilde{n}(u)|^2$ und somit $\sqrt{|\det((DF)^T(DF))|} = |\tilde{n}(u)|$.

Um die linke Seite der Behauptung zu berechnen betrachten wir die einzelnen Summanden der Divergenz einzeln. Hierbei sei $(u, x_n = z) \in Q \times [0, c]$ und x_1, \dots, x_{n-1} seien die Koordinaten von u . Dann gilt

$$\int_{\Omega} \frac{\partial V_n}{\partial z} d\text{vol} = \int_Q \left(\int_0^{g(u)} \frac{\partial V_n}{\partial z}(u, z) dz \right) d\text{vol}_u = \int_Q (V_n(u, g(u)) - \underbrace{V_n(u, 0)}_{=0}) d\text{vol}_u$$

Für $i = 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} d\text{vol} &= \int_Q \left(\int_0^{g(u)} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(u, z) dz \right) d\text{vol}_u \\ &= \int_Q \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^{g(u)} V_i(u, z) dz - V_i(u, g(u)) \frac{\partial g}{\partial x_i}(u) \right) d\text{vol}_u \\ &\stackrel{\text{Bsp. 2.1.7}}{=} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_0^{g(u)} V_i(u, z) dz \right) d\text{vol}_u - \int_Q V_i(u, g(u)) \frac{\partial g}{\partial x_i}(u) d\text{vol}_u \end{aligned}$$

Hierbei ist $\int_Q \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_0^{g(u)} V_i(u, z) dz \right) d\text{vol}_u = 0$, da V Träger im Inneren des Quaders $Q \times [0, c]$ hat und damit $u \in Q \mapsto \int_0^{g(u)} V_i(u, z) dz$ Träger im Inneren von Q . Damit liefert Integration nach x_i (die wir nach Fubini auch als erstes ausführen können – sei $Q = \prod_{i=1}^{n-1} [a_i, b_i]$.) Sei $\hat{u}_a = (u_1, \dots, u_{i-1}, a_i, u_{i+1}, \dots, u_{n-1})$ und analog \hat{u}_b . Dann ist $\hat{u}_a, \hat{u}_b \in \partial Q$ und somit

$$\int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_0^{g(u)} V_i(u, z) dz \right) = \int_0^{g(\hat{u}_b)} V_i(\hat{u}_a, z) dz - \int_0^{g(\hat{u}_a)} V_i(\hat{u}_a, z) dz = 0.$$

Somit haben wir insgesamt

$$\int_{\Omega} \text{div } V d\text{vol} = \int_Q \langle V(u, g(u)), n(u) \rangle d\text{vol}_u = \int_M \langle V, n \rangle d\text{vol}. \quad \square$$

Beweis vom Divergenzsatz 2.4.22. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $\Omega \subset Q$ (existiert, da Ω beschränkt ist). Wir verwenden $U_i = \text{Inn } Q_{p_i}$, $i = 1, \dots, k$, $U_{k+1} = \Omega$ und $U_{k+2} = Q \setminus \bar{\Omega}$ wie im Beweis von Satz 2.4.9, vgl. auch Abbildung 2.7 (hier ist im Gegensatz zum alten Beweis Ω jetzt offen) und benutzen eine untergeordnete Zerlegung der Eins α_i . Dann gilt für $V_i = \alpha_i V$, $i = 1, \dots, k$, das letzte Lemma, da dann $\text{supp } V_i \subset U_i \cap \bar{\Omega}$ und $U_i \cap \bar{\Omega}$ die Form Ω_{g_i} aus dem letzten Lemma für geeignetes g_i hat. Für $V_{k+1} = \alpha_{k+1} V$ können wir einfach den Divergenzsatz auf den Quader Q , da V_{k+2} auf $\partial \Omega$ Null ist:

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{\Omega}} \operatorname{div} V \, d\operatorname{vol} &= \sum_{i=1}^{k+1} \int_{U_i \cap \bar{\Omega}} \operatorname{div} V_i \, d\operatorname{vol} \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} \int_{\Omega_{g_i}} \operatorname{div} V_i \, d\operatorname{vol} + \int_Q \operatorname{div} V_{k+2} \, d\operatorname{vol} \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{U_i \cap \partial\Omega} \langle V_i, n \rangle \, d\operatorname{vol} + \underbrace{\int_{\partial Q} \langle V_{k+1}, n \rangle \, d\operatorname{vol}}_{=0 \quad \text{da } V_{k+1}|_{\partial Q} = 0} \\
&= \int_{\partial\Omega} \left\langle \sum_{i=1}^k V_i, n \right\rangle \, d\operatorname{vol} = \int_{\partial\Omega} \langle V, n \rangle \, d\operatorname{vol}
\end{aligned}$$

Da sowohl der Integrand mit der linken und rechten Seite die Summe der jeweiligen Integrale für die V_i sind, ergibt sich die Behauptung. \square

Beispiel 2.4.24. Sei $V(x) = x$ ein Vektorfeld im \mathbb{R}^n . Dann ist $\operatorname{div} V = n$. Sei $\Omega = B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $\partial\Omega = S_r(0)$ mit äußerem Normalenvektor $n(x \in S_r(0)) = \frac{x}{r}$.

Wir kann man diesen Normalenvektor finden? $M = S_r(0)$ ist implizit als Nullstellenmenge von $f(x) = |x|^2 - r^2$ gegeben. Dann ist nach Lemma 1.8.8 $T_x M = (\operatorname{grad} f(x))^\perp$. Somit ist $\operatorname{grad} f(x) = 2x$ ein Normalenvektor, den wir nur noch normalisieren müssen und dann Überprüfen müssen, ob er nach außen zeigt.

Der Divergenzsatz liefert dann

$$\operatorname{vol} B_r(0) = \frac{1}{n} \int_{B_r(0)} \operatorname{div} V \, d\operatorname{vol} = \frac{1}{n} \int_{S_r(0)} \left\langle x, \frac{x}{r} \right\rangle \, d\operatorname{vol} = \frac{r}{n} \operatorname{vol} S_r(0).$$

Für $n = 3$ erhalten wir so zum Beispiel noch einmal die Oberfläche der Kugel mit Radius r als $\frac{3}{r} \operatorname{vol} B_r(0) = 4\pi r^2$.

Satz 2.4.25 (Satz von Stokes). Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale C^2 -Untermannigfaltigkeit. Sei $F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$ eine lokale Parametrisierung um $p \in M$. Sei $K \subset U$ kompakt, so dass ∂K das Bild einer einfach geschlossenen C^1 -Kurve $\alpha: [0, 1] \rightarrow U$ ist, die ∂K entgegen des Uhrzeigersinns durchläuft.

Sei $\Omega = F(K)$ und $\gamma = F \circ \alpha$. Sei ein Einheitsnormalenvektorfeld $n: F(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch* $n(F(x, y)) = \frac{\partial_x F \times \partial_y F}{|\partial_x F \times \partial_y F|}$.

Sei $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \langle \operatorname{rot} V, n \rangle \, d\operatorname{vol} = \int_0^1 \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt.$$

*Für $a, b \in \mathbb{R}^3$ ($a = (a_1, a_2, a_3)^T$, $b = (b_1, b_2, b_3)^T$) ist das Kreuzprodukt $a \times b$ der Vektor $(a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)^T$. Direktes Nachrechnen zeigt, $a \times b \perp a$ und $a \times b \perp b$. Deshalb gilt $n(F(x, y)) \perp \operatorname{span}\{\partial_x F(x, y), \partial_y F(x, y)\} = T_{F(x, y)} M$.

2. Etwas Integration

Beweis. Vorgehen: Übertragen der Integrale auf K bzw. α , vgl. Abbildung 2.15. Dort kann man dann den Divergenzsatz auf ein geeignetes Vektorfeld anwenden, um die Gleichheit zu zeigen:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \langle \operatorname{rot} V, n \rangle d\operatorname{vol} &= \int_K \langle (\operatorname{rot} V) \circ F, n \circ F \rangle \sqrt{|\det (DF)^T (DF)|} d\operatorname{vol} \\ &= \int_K \langle (\operatorname{rot} V) \circ F, \partial_x F \times \partial_y F \rangle d\operatorname{vol}\end{aligned}$$

Die Identität $\det (DF)^T (DF) = |\partial_x F \times \partial_y F|^2$ für die letzte Gleichheit rechnet man direkt nach, vgl. Übungsaufgabe. Wir formen nun den Integranden um*

$$\begin{aligned}\langle (\operatorname{rot} V) \circ F, \partial_x F \times \partial_y F \rangle &= \det((\operatorname{rot} V) \circ F, \partial_x F, \partial_y F) = \sum_{i,j} (\partial_i V_j - \partial_j V_i) \circ \varphi \partial_x F_i \partial_y F_j \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \sum_j \partial_x (V_j \circ F) \partial_y F_j - \sum_i \partial_y (V_i \circ F) \partial_x F_i \\ &= \langle \partial_x (V \circ F), \partial_y F \rangle - \langle \partial_y (V \circ F), \partial_x F \rangle \\ &= \partial_x \langle (V \circ F), \partial_y F \rangle - \partial_y \langle (V \circ F), \partial_x F \rangle \\ &\quad - \langle (V \circ F), \partial_x \partial_y F \rangle + \langle (V \circ F), \partial_y \partial_x F \rangle \\ &\stackrel{\text{s.u.}}{=} \operatorname{div} \underbrace{(\langle (V \circ F), \partial_y F \rangle, -\langle (V \circ F), \partial_x F \rangle)}_{=: W}\end{aligned}$$

Hier haben wir insbesondere benutzt, dass F zweimal stetig differenzierbar ist, somit $\partial_y \partial_x F = \partial_x \partial_y F$ gilt und damit die drittletzte Zeile Null ist.

Auf $K \subset \mathbb{R}^2$ können wir den Divergenzsatz anwenden und erhalten

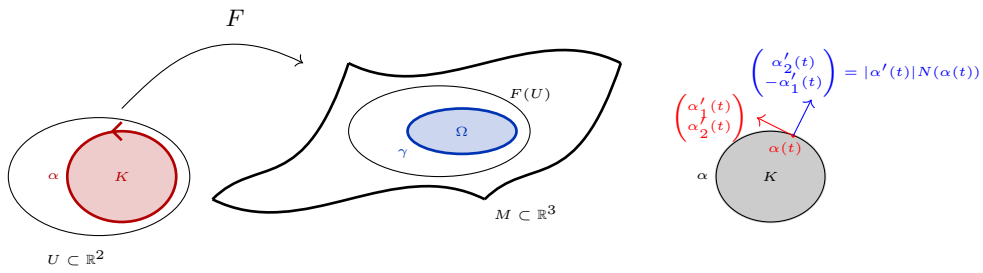
$$\int_{\Omega} \langle \operatorname{rot} V, n \rangle d\operatorname{vol} = \int_K \operatorname{div} W d\operatorname{vol} = \int_{\alpha} \langle W, N \rangle d\operatorname{vol} = \int_0^1 \langle W(\alpha(t)), N(\alpha(t)) \rangle |\alpha'(t)| dt$$

wobei $|\alpha'(t)| N(\alpha(t)) = (\alpha'_2(t), -\alpha'_1(t))$ ist, vgl. Abbildung 2.15 rechts. Der Rest folgt mit

$$\begin{aligned}|\alpha'(t)| \langle W(\alpha(t)), N(\alpha(t)) \rangle &= \langle (V \circ F)(\alpha(t)), \partial_y F(\alpha(t)) \rangle \alpha'_2(t) \\ &\quad + \langle (V \circ F)(\alpha(t)), \partial_x F(\alpha(t)) \rangle \alpha'_1(t) \\ &= \langle (V \circ F)(\alpha(t)), D_{\alpha(t)} F(\alpha'(t)) \rangle = \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \quad \square\end{aligned}$$

Beispiel 2.4.26. Mit Hilfe des Divergenz- und Rotationssatz können wir aus den Maxwell-Gleichungen, s. Seite 28 Integralgleichungen machen. Z.B. folgt aus dem

*Hier benutzen wir: $\det(a, b, c) = \langle a, b \times c \rangle$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ (sieht man durch Hinschreiben in den Einträgen direkt).

Abbildung 2.15.: Abbildung zum Satz von Stokes links und rechts zu $N(\alpha(t))$

Gauß'schen Gesetz $\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (E das elektrische Feld, ρ die Ladungsdichte, ϵ_0 Dielektrizitätskonstante) mit dem Divergenzsatz für geeignetes Ω , dass

$$\int_{\partial\Omega} \langle E, n \rangle d\operatorname{vol} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho d\operatorname{vol} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q$$

mit Q die Gesamtladung in Ω ist.

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine *gewöhnliche Differentialgleichung (GDGL)* hat die Form

$$f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x)) = 0 \quad (3.1)$$

für $x \in I \subset \mathbb{R}$ und ein $f: D \subset I \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{m\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wir nennen m die *Ordnung* der GDGL. Das 'gewöhnlich' bezieht sich darauf, dass es nur Ableitungen in einer Variablen (hier x genannt) gibt.

Eine m -mal differenzierbare Funktion $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Lösung von (3.1), falls für alle $x \in I$ $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x)) \in D$ ist und (3.1) für alle $x \in I$ gilt.

Ist die Differentialgleichung in der Form $y^{(m)} = g(x, y, y', \dots, y^{(m-1)})$ gegeben (das ist der Spezialfall $f(x, y, y', \dots, y^{(m)}) = y^{(m)} - g(x, y, y', \dots, y^{(m-1)})$), dann nennen wir diese *explizit* (sonst *implizit*).

Für Differentialgleichung stellen sich als grundlegende Fragen:

- Wie findet man (in bestimmten Situationen) explizit Lösungen?
- Existenz von Lösungen?
- Eindeutigkeit von Lösungen?
- Qualitatives Verhalten von Lösungen?

Die allereinfachste Form der gewöhnlichen Differentialgleichung ist

$$y'(x) = f(x)$$

für eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $x_0 \in I$. Dann ist $y(x) = \int_{x_0}^x f(s)ds + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. D.h. schon hieran sieht man, dass die Lösungen normalerweise nicht eindeutig sein werden. Um eine Chance auf Eindeutigkeit zu haben, betrachtet man oft *Anfangswertprobleme (AWP)*:

Für $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$, wie oben ist

$$f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x)) = 0, \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(m-1)}(x_0) = y_{m-1}. \quad (3.2)$$

Warum man gerade diese 'Anzahl' von Anfangsbedingungen erwartet, werden wir später sehen.

Bei unserem Beispiel $y'(x) = f(x)$ bestimmt $y(x_0) = y_0$ die Integrationskonstante $c = y_0$.

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

3.1. Erste Beispiele

In Analysis 1 [2, Abschnitt 4.4.6] haben wir schon erste Beispiele mit Lösungen gesehen:

- **(Exponentielle Prozesse)** $u'(t) = \alpha u(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$: Alle Lösungen haben die Form $u(t) = ce^{\alpha t}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Die Konstante c kann durch einen Anfangswert eindeutig bestimmt werden: Ist $u(t_0) = u_0$, dann ist $c = u_0 e^{-\alpha t_0}$.
- **(Exponentielle Prozesse mit konstanter Zufuhr von außen/konstantem Abfluss nach außen)** $u'(t) = \alpha u(t) + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: Alle Lösungen haben die Form $u(t) = -\frac{\beta}{\alpha} + ce^{\alpha t}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Ist $u(t_0) = u_0$, dann ist $c = \left(u_0 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{-\alpha t_0}$.
- **(Autokatalytische Prozesse)** $\dot{u} = \alpha u(A - u) = \alpha Au - \alpha u^2$: Hier ist $u(t) = \left(-\frac{1}{A} + ce^{-\alpha At}\right)^{-1}$.
- **(Schwingungsgleichung)** $u''(t) + \omega^2 u(t) = 0$: Alle Lösungen haben die Form $u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$. Die Konstanten können durch Anfangswerte $u(t_0) = u_0$ und $u'(t_0) = v_0$ bestimmt werden.

Mehr Beispiele:

1. **Räuber-Beute-Modell (Lotka-Volterra)**. Zur Zeit t sei $x(t)$ die Größe der Population der Beute und $y(t)$ die der Räuber. Da

$$\begin{aligned}x'(t) &= ax - bxy \\ y'(t) &= -cy + dxy\end{aligned}$$

für $a, b, c, d > 0$. Das a entspricht hier der Reproduktionsrate der Beute (wenn es keine Räuber aber genügend Nahrung gibt), c der Sterberate der Räuber (wenn es keine Beute gibt). xy entspricht den Treffen einer Beute und eines Räuber. Diese Treffen führen mit gewissen Wahrscheinlichkeiten zum Tod der Beute und damit Abnahme von x ($-bxy$) und mehr Nahrung für den Räuber und damit dem Wachstum von y (dxy).

Die Lotka-Volterra-Gleichungen ist eine explizite GDGL erster Ordnung für $(x(t), y(t))^T$.

2. Das **SIR-Modell** ist ein Modell in der Epidemiologie: Dabei sei $s(t)$ der Anteil der Bevölkerung, die zum Zeitpunkt t potentiell anfällig für eine Infektion ist, $i(t)$ der Anteil, der infiziert und in diesem Modell auch sofort infektiös ist, und $r(t)$ der Anteil, der entweder nach Krankheit immunisiert oder tot ist (S=suszeptibel=anfällig, I=infektiös, R=removed=entfernt). Dann wird die zeitliche Entwicklung modelliert durch:

$$\begin{aligned}s'(t) &= -\beta s(t)i(t) + \mu(i(t) + r(t)) \\ i'(t) &= \beta s(t)i(t) - \gamma i(t) - \mu i(t) \\ r'(t) &= \gamma i(t) - \mu r(t).\end{aligned}$$

3.2. Erste Ad-Hoc Lösungsmethoden

Hierbei ist μ die allgemeine Sterblichkeitsrate (Annahme hier: μ ist auch gleich der Geburtenrate, Gesamtbevölkerung ändert sich also nicht, und Neugeborene nur in $s(t)$ reingeboren werden. γ ist die Rate mit der infizierte Personen pro Zeit wieder genesen oder sterben. β die Rate mit der eine infizierte Person bei Treffen mit einer anfälligen Person diese infiziert.

Dies ist explizite Differentialgleichung erster Ordnung für $(s(t), i(t), r(t))^T$.

Es ist natürlich eine Frage der Krankheit, ob das ein gutes Modell ist.

Viele andere Probleme in den Anwendungen führen zu Differentialgleichungen in denen Ableitungen nicht nur bzgl. einer Variablen sondern bzgl. mehrerer Variablen vorkommen. Diese Gleichungen nennen wir dann *partielle Differentialgleichungen* (und nicht mehr 'gewöhnlich'). Nicht das bei gewöhnlichen Differentialgleichungen alles einfach und bekannt ist, aber partielle DGLs sind noch weit schwieriger. In Situationen mit genügend Symmetrie kann man Probleme aber oft auf das Studium von GDGLs zurückführen. Als ein Beispiel betrachten wir den Laplaceoperator Δ auf \mathbb{R}^2 und das 'Eigenwertproblem' $\Delta u = \lambda u$ für geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$. In Polarkoordinaten haben wir den Laplace in einer Übungsaufgabe berechnet:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

ist.

Nehmen wir mal an, eine Lösung habe die Form $u(r, \dots) = f(r) \cos(\nu \varphi)$ für $\nu \in \mathbb{Z}$ (denn dann ist u als Funktion in den euklidischen Koordinaten auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, solange f stetig ist. Dann löst dieses u genau dann $\Delta u = \mu u$, wenn

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{\nu^2}{r^2} f(r) = \lambda f(r)$$

gilt. Diese GDGL ist die Bessel-Differentialgleichung. Falls diese GDGL eine Lösung hat, dann ist u eine Lösung von $\Delta u = \lambda u$. Auf diese Art kann man im Prinzip sogar alle Lösungen von dieser partiellen DGL erhalten – wollen und können wir in der Allgemeinheit nicht machen. Das soll hier nur als Beispiel zeigen, dass auch partielle Differentialgleichungen in Situation mit genügend Symmetrie zu Fragen von gewöhnlichen Differentialgleichungen führen.

3.2. Erste Ad-Hoc Lösungsmethoden

Bevor wir etwas allgemeine Existenztheorie machen, wollen wir ein paar ad-hoc Lösungsmethoden für spezielle GDGL erster Ordnung mit $y(t)$ reell-wertig kennenlernen.

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

3.2.1. Trennung der Variablen

Sei

$$y'(t) = ty(t), \quad y(0) = 1$$

Wie können wir das lösen? Solange $y(t) \neq 0$ ist, muss gelten:

$$t = \frac{y'(t)}{y(t)}$$

$$\frac{1}{2}t^2 = \int_0^t s ds = \int_0^t \frac{y'(s)}{y(s)} ds = \int_1^{y(t)} \frac{1}{u} du = \ln |y(t)|$$

Also $y(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$ (das Vorzeichen ergibt sich, da $y(0) = 1$ sein soll). Durch Einsetzen sieht man, dass dies wirklich eine Lösung ist.

Diese Methode nennt man *Trennung der Variablen*.

Sie funktioniert allgemein in Situationen der folgenden Form:

$$y'(t) = f(t)g(y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

Ist g ungleich Null nahe y_0 , folgt

$$\int_{t_0}^t f(s) ds = \int_{t_0}^t \frac{y'(s)}{g(y(s))} ds \stackrel{\text{Subst. } u=y(s)}{=} \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(u)} du.$$

Das müsste man ausrechnen und nach $y(t)$ auflösen, so dass $y(t_0) = y_0$ ist.

Geht das Auflösen immer? Theoretisch zumindest in einer Umgebung von t_0 , denn: Sei $F(z) = \int_{y_0}^z \frac{1}{g(u)} du$. Dann gilt $F'(y_0) = \frac{1}{g(y_0)} \neq 0$ und somit gibt es eine Umkehrfunktion $z = G(u)$ nahe y_0 (also $z = F(G(z))$).

Was wir bis jetzt herausgefunden haben, ist, dass eine Lösung zum obigen Anfangswertproblem die Form $y(t) = G(\int_{t_0}^t f(s) ds)$ haben muss.

Das ausgerechnete $y(t)$ ist dann auch wirklich Lösung. Es ist $y(t_0) = G(0) = y_0$ (da $F(y_0) = 0$ ist) und

$$y'(t) = G'(\int_{t_0}^t f(s) ds) \cdot f(t) = \frac{1}{F'(G(\int_{t_0}^t f(s) ds))} f(t) = \frac{1}{F'(y(t))} f(t) = g(y(t))f(t).$$

Beispiel 3.2.1. (i) $xy'(x) + y(x) = 0$ mit $y(x_0) = y_0$. Da $y'(x) = -\frac{y(x)}{x}$ ist, sind wir für $x_0, y_0 \neq 0$ in obiger Situation und wir erhalten:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{1}{x} \implies \int_{x_0}^x \frac{y'(x)}{y(x)} dx = -\int_{x_0}^x \frac{1}{x} dx.$$

Also $\ln |y(x)| - \ln |y_0| = -\ln |x| + \ln |x_0|$ und somit $\ln \left| \frac{y(x)}{y_0} \right| = \ln \left| \frac{x_0}{x} \right|$, also $y(x) = y_0 \frac{x_0}{x}$ (damit auch $y(x_0) = y_0$ gilt).

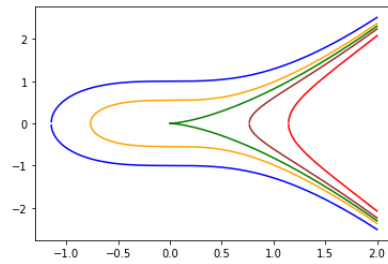


Abbildung 3.1.: Das sind die Mengen mit $y^2 = a + \frac{2}{3}x^3$ (blau: $a=1$, gelb: $a=0.2$, grün: $a=0$ (die rötlichen Kurven entsprechen einem negativen a , was somit nicht gleich y_0^2 sein kann und nicht von $y'y = x^2$ mit einem Anfangswert $y(0) = y_0$ kommen kann.))

(ii) $y'(x)y(x) = x^2$, $y(0) = 1$ liefert

$$\frac{1}{2} (y(x)^2 - 1) = \int_0^x y'(s)y(s)ds = \int_0^x s^2 ds = \frac{1}{3}x^3$$

und damit $y(x) = \pm\sqrt{1 + \frac{2}{3}x^3}$. Da $y(0) = 1$ sein soll, müssen wir die Lösung mit $+$ nehmen.

Schauen wir uns dieses Beispiel noch mal mit einem anderen Anfangswert an: $y(0) = 0$. Dann sind wir nicht mehr genau der obigen Situation für Trennung der Variablen sind, da für $y'(x) = \frac{x^2}{y(x)}$ dann $g(y) = \frac{1}{y}$ bei $y = 0$ gar nicht definiert ist. Aber natürlich können wir wie eben verfahren und erhalten $y(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3}$. Da wir hier nicht apriori wissen, dass wir so eine Lösung erhalten, müssen wir hier immer die Probe machen (im Gegensatz zum Standardfall der Trennung der Variablen von oben, wo wir das allgemein nachgerechnet haben)*. Wir haben in diesem Beispiel also immer noch eine Lösung, aber die ist hier jetzt nicht eindeutig (und auch nicht in einer offenen Umgebung unseres Anfangswertes definiert, sondern nur für $x \geq 0$). Vgl. Abbildung 3.1.

Auch wenn die Standardsituation der Trennung der Variablen eher speziell wird, kann man öfter auch durch geeignete Substitution eine gewöhnliche Differentialgleichung in diese Form bringen:

Beispiel 3.2.2. (i) Sei $y'(x) = f(\frac{y}{x})$ für eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, z.B. $f(z) = \sin z$. Dann können wir die Variablen erst einmal nicht direkt trennen. Substituieren wir $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, dann erhalten wir

$$f(z(x)) = y'(x) = (z(x)x)' = z(x) + z'(x)x$$

*Aber Probe ist immer eine gute Idee, um zu sehen, ob man sich nicht doch verrechnet hat...

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

und somit

$$z'(x) = \frac{f(z(x)) - z(x)}{x} \quad \text{für } x \neq 0,$$

worauf wir nun die Variablen trennen können.

Z.B. betrachten wir $xy' = y(\ln x - \ln y)$ für $y(1) = 4$ und $x > 0$: Dann ist $y'(x) = \frac{y}{x} \ln \frac{x}{y}$. Hier wäre also $f(z) = -z \ln z$ und somit $z'(x) = -\frac{z(1+\ln z)}{x}$. Trennung der Variablen liefert

$$\begin{aligned} \ln x \stackrel{x \geq 0}{=} \int_1^x \frac{1}{s} ds &= \int_1^x -\frac{z'(s)}{z(s)(1+\ln z(s))} ds = \int_4^{z(x)} -\frac{1}{u(1+\ln u)} du \\ &\stackrel{v=\ln u}{=} -\int_{\ln 4}^{\ln z(x)} \frac{1}{1+v} dv = -\ln |1+v| \Big|_{\ln 4}^{\ln z(x)} \\ &= -\ln |1+\ln z(x)| + \ln(1+\ln 4) \\ x &= \left| \frac{1+\ln 4}{1+\ln z(x)} \right| \\ z(x) &= e^{(1+\ln 4)\frac{1}{x}-1} \implies y(x) = xe^{(1+\ln 4)\frac{1}{x}-1}. \end{aligned}$$

- (ii) Sei $y'(x) = g(ax + by(x))$ für eine Funktion $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Wir substituieren $z(x) = ax + by(x)$. Dann ist $z'(x) = a + bg(z(x))$ und können, dort wo die rechte Seite der Gleichung nicht Null ist, wieder Trennung der Variablen anwenden.

3.2.2. Integrierender Faktor

Woche 10 Definition 3.2.3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Seien $p: D \subset I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $q: D \subset I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Eine *exakte* Differentialgleichung ist eine GDGL der Form

$$p(x, y(x)) + q(x, y(x))y'(x) = 0$$

für die eine stetig differenzierbare Funktion $\Phi: D \subset I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $z = (x \in I, y \in \mathbb{R}) \in D$

$$\partial_x \Phi(z) = p(z) \quad \text{und} \quad \partial_y \Phi(z) = q(z)$$

gilt. Man nennt Φ dann auch *erstes Integral*.

Ist die GDGL exakt, dann ist jedes $y(x)$ mit $\Phi(x, y(x)) = c$ für alle $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung, da

$$0 = \partial_x (\Phi(x, y(x))) = (\partial_x \Phi)(x, y(x)) + (\partial_y \Phi)(x, y(x))y'(x) = p(x, y(x)) + q(x, y(x))y'(x).$$

Das c bestimmt sich durch Anfangswerte $y(x_0) = y_0$ durch $c = \Phi(x_0, y_0)$.

Wie erkennt man, ob die GDGL exakt ist? Falls exakt, ist Φ ein Potential zum Vektorfeld $z \in D \mapsto (p(z), q(z)) \in I \subset \mathbb{R}^n$, also dieses Vektorfeld ist ein Gradientenvektorfeld. Damit muss als notwendige Bedingung auf alle Fälle $\partial_y p = \partial_x q$ gelten. Diese Bedingung wird dann auch *Integrabilitätsbedingung* genannt. In Satz 2.2.13 haben wir gesehen, dass, wenn diese Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, es zumindest lokal immer ein solches erstes Integral/Potential gibt.

Beispiel 3.2.4. Sei $4x^3 - 2x + 2y(x)y'(x) = 0$ mit $y(1) = 0$. Dann ist $p(x, y) = 4x^3 - 2x$ und $q(x, y) = 2y$. Dies eine exakte Differentialgleichung, da $\partial_y p = 0 = \partial_x q$. Um das Potential auszurechnen: Es muss $\partial_x \Phi = p$ gelten, also $\Phi(x, y) = x^4 - x^2 + f(y)$ für ein $f(y)$. Mittels $2y = q = \partial_y \Phi = f'(y)$ erhalten wir z.B. $f(y) = y^2$, also $\Phi(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$. Der Anfangswert gibt, dass die Lösung $y(x)$ die Gleichung $x^4 - x^2 + y(x)^2 = 0$ erfüllen muss. Das ist die Lemniskate aus Übungsaufgabe 17. Wir erhalten zwei Lösungen $y(x) = \pm \sqrt{x^4 - x^2}$ für $x > 0$ (Das ist nicht der maximal mögliche Definitionsbereich für y . Man kann die Lösung jeweils auf $[-1, 0]$ noch fortsetzen, da wäre es dann $\mp \sqrt{x^4 - x^2}$.)

Hat man nun jedoch $p(x, y(x)) + q(x, y(x))y'(x) = 0$, die nicht exakt ist, kann man manchmal durch Multiplikation mit einem *integrierenden Faktor* $\mu(x, y)$ (μ sollte punktweise nicht Null sein), also $\mu(x, y)p(x, y) + \mu(x, y)q(x, y)y'(x) = 0$, erreichen, dass die entstandene Gleichung exakt ist.

Im Allgemeinen ist es schwer zu sehen, ob es ein solches μ überhaupt gibt und wie man es erhält (raten...). Aber man kann mal testen, wann man mit spezielleren μ durchkommt.

Beispiel 3.2.5. Wann ist z.B. $\mu(x)$ ein integrierender Faktor? Es muss gelten

$$\partial_y(\mu p) = \partial_x(\mu q) \implies \mu \partial_y p = \mu' q + \mu \partial_x q$$

und somit $\mu'(x) = \mu(x) \frac{\partial_y p - \partial_x q}{q}$. Das kann natürlich nur dann eine Lösung für μ haben, wenn $\frac{\partial_y p - \partial_x q}{q}$ auch nur noch eine Funktion von x ist. Wenn das aber der Fall ist, kann man wieder Trennung der Variablen durchführen.

Als Beispiel nehmen wir $y + x(2xy - 1)y' = 0$ (also $p(x, y) = y$ und $q(x, y) = x(2xy - 1)$). Hier ist $\frac{\partial_y p - \partial_x q}{q} = -\frac{2}{x}$ und wir sind in obiger Situation. Also $\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2}{x}$. Eine Lösung wäre $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$. Multiplikation mit der Differentialgleichung liefert dann

$$\frac{y}{x^2} + \frac{2xy - 1}{x} y' = 0,$$

die nun exakt ist. Ein Potential wäre nun $\Phi(x, y) = y^2 - \frac{y}{x}$, d.h. Lösungen von $y + x(2xy - 1)y' = 0$ erfüllt $y^2 - \frac{y}{x} = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ (je nach Anfangswert). Die Lösung ist so nur explizit gegeben, man kann dann noch überprüfen, ob man in der Nähe eines eventuell gegebenen Anfangswertes eindeutig nach y auflösen kann (entweder explizit (funktioniert hier) oder mittels des Satz über implizite Funktionen).

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

3.2.3. Potenzreihenansatz

Manchmal kann man Lösungen finden, in dem man für die gesuchte Funktion eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ einsetzt, ggf. auch für die vorkommenden Funktionen in x noch in Potenzreihen entwickelt, und dadurch Rekursionsgleichungen für die Koeffizienten erhält. In [2, Bsp. 4.4.9 und 4.4.12] haben wir das für die Schwingungsgleichung schon mal explizit durchgeführt. Wir geben hier noch zwei Beispiele. Dabei machen wir uns keine Gedanken darüber, wann diese Methode funktioniert. Wir gehen einfach rein mit der Annahme, dass wir eine Lösung haben mit gleichmäßig konvergiert, wir deshalb nach [2, Satz 4.3.11] einfach summandenweise differenzieren können und schauen, ob wir damit durch kommen:

Beispiel 3.2.6. $y' = xy$ mit $y(0) = 1$. Das kann man mit Trennung der Variablen natürlich direkt lösen, aber wir wollen den Potenzreihenansatz ausprobieren.

Ansatz: $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Damit der Anfangswert erfüllt ist, muss $a_0 = 1$ sein. Dann haben wir

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} \\ y'(x) - xy &= \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k \\ &= a_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} ((k+1) a_{k+1} - a_{k-1}) x^k \end{aligned}$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen [2, Folgerung 4.3.15] ist letzte Gleichung gleich Null $a_1 = 0$ und $(k+1) a_{k+1} = a_{k-1}$ für alle $k \geq 1$. Damit haben wir $a_{2\ell+1} = 0$ für alle $\ell \geq 0$ sowie

$$a_2 = \frac{1}{2} a_0, \quad a_4 = \frac{1}{4} a_2 = \frac{1}{4 \cdot 2} a_0 \quad \dots \quad a_{2\ell} = \frac{1}{2^\ell \ell!} a_0.$$

Also gilt $y(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2^\ell \ell!} a_0 x^{2\ell} = a_0 e^{\frac{x^2}{2}}$. Für unseren Anfangswert muss noch $a_0 = 1$ gesetzt werden.

Beispiel 3.2.7 (Hermiteische DGL). $y'' - xy' + \lambda y = 0$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Ansatz ist wieder $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Dann ist

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} & xy'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k \\ y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k \\ y'' - xy' + \lambda y &= \sum_{k=0}^{\infty} ((k+1)(k+2) a_{k+2} - k a_k + \lambda a_k) x^k \end{aligned}$$

3.3. Existenz- und Eindeutigkeit – Picard-Lindelöf

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen [2, Folgerung 4.3.15] ist somit $y'' - xy' + \lambda y = 0$ genau dann, wenn

$$a_{k+2} = \frac{k - \lambda}{(k+1)(k+2)} a_k$$

für alle $k \geq 0$ gilt. Hier berechnen sich nun wieder alle $a_{2\ell}$ rekursiv aus a_0 und alle $a_{2\ell+1}$ aus a_1 :

$$a_{2\ell} = \frac{a_0}{(2\ell)!} \prod_{k=0}^{\ell} (2k - \lambda), \quad a_{2\ell+1} = \frac{a_1}{(2\ell+1)!} \prod_{k=0}^{\ell} (2k + 1 - \lambda)$$

Im Spezialfall: $y(0) = 1$ (also $a_0 = 1$) und $y'(0) = 0$ (also $a_1 = 0$) und $\lambda = 2n$ bricht die Potenzreihe ab und die Lösung ist ein Polynom. Analog für $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ und $\lambda = 2n + 1$.

3.3. Existenz- und Eindeutigkeit – Picard-Lindelöf

Wir wollen nun einen Satz zur lokalen Existenz- und Eindeutigkeit für explizite GDGL erster Ordnung kennenlernen. Dazu brauchen wir zunächst noch einige Begriffe:

Definition 3.3.1. Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $|\cdot|: V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Norm auf V* , falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind

- (i) (Positiv definit) $|x| \geq 0$ für alle $x \in V$ und es gilt genau dann $|x| = 0$, wenn $x = 0$ ist.
- (ii) (Positiv homogen) $|\lambda x| = |\lambda| |x|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in V$
- (iii) (Dreiecksungleichung) $|x + y| \leq |x| + |y|$ für alle $x, y \in V$.

Dann nennen wir $(V, |\cdot|)$ einen normierten (Vektor-)Raum.

Für jeden normierten Raum definiert $d(x, y) := |x - y|$ eine Metrik (die *durch die Norm induzierte Metrik*).

Definition 3.3.2. Ein *Banachraum* ist ein vollständig* normierter Vektorraum.

Beispiel 3.3.3. Bei den meisten der metrischen Räume, die wir kennen gelernt haben, entstand die Metrik aus einer Norm, z.B.:

Auf $C^0([a, b], \mathbb{R}^n) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ stetig}\}$ ist $\|f\|_{C^0} := \|f\|_{\infty} := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ eine Norm ($\|\cdot\|_{\infty}$ wird auch *Supremumsnorm* genannt). Auf $C^1([a, b], \mathbb{R}^n) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ stetig differenzierbar}\}$ ist dann $\|f\|_{C^1} := \sup_{x \in [a, b]} (|f(x)| + |f'(x)|)$ eine Norm. Als metrische Räume jeweils mit der durch diese Normen induzierten Metrik hatten wir schon in Beispiel 1.1.1 betrachtet (dort für $n = 1$). Diese beiden Beispiele sind insbesondere Banachräume: Das haben wir für $n = 1$ in Übungsaufgabe 2 gesehen. Für allgemeines n : Ist $f_i \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ eine Cauchyfolge, dann bilden die Folge aus

*vollständig als metrischer Raum mit der Abstandsfunktion $d(x, y) = |x - y|$

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

den 1.ten Komponentenfunktionen $((f_i)_1)_i$ eine Cauchyfolge in $C^0([a, b], \mathbb{R})$ und besitzt somit eine konvergente Teilfolge $((f_{i_j})_1)_{j \in \mathbb{N}}$. Nun ist jedoch auch $((f_{i_j})_2)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $C^0([a, b], \mathbb{R})$ und besitzt eine konvergente Teilfolge. So erhalten wir am Ende eine Teilfolge $(f_{j_\ell})_\ell$ von $(f_i)_i$, so dass die zugehörigen Folgen von Komponentenfunktionen $((f_{j_\ell})_k)_\ell$ für alle $1 \leq k \leq n$ gegen ein $g_k \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ konvergieren. Dann konvergiert $f_{j_\ell} \rightarrow (g_1, \dots, g_n)^T \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$. Analog geht die Argumentation mit $C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$.*

Die Eisenbahnmetrik aus [2, Beispiel 4.1.22] kommt nicht von einer Norm: Angenommen sie käme von einer Norm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{R}^2 . Dann wäre $\|x - y\| = d(x, y)$ (für d die Eisenbahnmetrik). Setzen wir $y = 0$, folgt $\|x\| = |x|$ die euklidische Norm. Doch die euklidische Norm induziert auf \mathbb{R}^2 die euklidische Abstandsfunktion und nicht die Eisenbahnmetrik.

Beispiel 3.3.4. Sei $R > 0$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Wir betrachten $E = \{f: [a, a + \alpha] \rightarrow \overline{B_R(y_0)} \subset \mathbb{R}^n \text{ stetig}, f(a) = y_0\}$ zusammen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Dies ist als Teilmenge von $C^0([a, a + \alpha], \mathbb{R}^n)$ ein Untervektorraum, ein metrischer Raum und auch selbst wieder vollständig (und damit ein Banachraum), da: Aus $f_i \in E$ Cauchyfolge folgt, dass f_i auch in $C^0([a, a + \alpha], \mathbb{R}^n)$ Cauchyfolge ist und damit dort konvergiert gegen eine $f \in C^0([a, a + \alpha], \mathbb{R}^n)$. Die Konvergenz in $C^0([a, a + \alpha], \mathbb{R}^n)$ impliziert insbesondere auch punktweise Konvergenz und damit $\text{Bild}(f) \subset \overline{B_R(y_0)}$ und $f(a) = y_0$.

Nun können wir zur lokalen Existenz- und Eindeutigkeit für explizite GDGL erster Ordnung kommen:

Satz 3.3.5. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ und $[a, b] \times \overline{B_R(y_0)} \subset G$. Sei $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente, d.h. es gibt eine Konstante $L > 0$, so dass für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in G$ gilt

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Sei

$$M := \max\{|f(x, y)| \mid (x, y) \in [a, b] \times \overline{B_R(y_0)}\} \quad \alpha := \min\left\{|b - a|, \frac{R}{M}\right\}.$$

Dann existiert genau eine Lösung $y: [a, a + \alpha] \rightarrow \overline{B_R(y_0)}$ des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad y(a) = y_0.$$

Der Satz gilt analog (mit analogem Beweis) auch linksseitig (also falls $b < a$ ist, dann existiert die Lösung auf $[a - \alpha, a]$).

Das Tolle an dem Satz ist, dass der Beweis mit einer Konstruktion von Approximationen der Lösung kommt (der Picard-Iteration), wie wir gleich sehen werden:

*Ganz analog ist $C^k([a, b], \mathbb{R}^n) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}$ mit $\|f\|_{C^k} := \sum_{i=0}^k \sup_{x \in [a, b]} |f^{(i)}(x)|$ ein Banachraum.

3.3. Existenz- und Eindeutigkeit – Picard-Lindelöf

Die Idee ist aus der Differentialgleichung eine Integralgleichung zu machen:

$$\int_a^x y'(s)ds = \int_a^x f(s, y(s))ds \quad \text{also} \quad y(x) = y_0 + \int_a^x f(s, y(s))ds$$

und diese mittels eines Fixpunktproblems zu lösen: Wir setzen

$$y_0(x) := y_0, \quad y_{k+1}(x) := y_0 + \int_a^x f(s, y_k(s))ds$$

und bauen uns daraus eine Abbildung auf einem geeigneten Banachraum, so dass wir den Banachschen Fixpunktsatz anwenden können, der uns dann die Existenz der Lösung geben soll:

Beweis. Wir nehmen als Banachraum $E = \{y: [a, a + \alpha] \rightarrow \overline{B_R(y_0)} \text{ stetig}, y(x_0) = y_0\}$ mit der Supremumsnorm, vgl. Beispiel 3.3.4.

Als Abbildung wollen wir

$$T: E \rightarrow E, \quad u \mapsto \left(x \mapsto y_0 + \int_a^x f(s, u(s))ds \right)$$

benutzen, da eine Lösung davon genau unserem gesuchten Fixpunkt entspricht.*

Zunächst überprüfen wir, dass T die Menge E wirklich wieder nach E abbildet: Es ist $(Tu)(a) = y_0$ und $|Tu(x) - y_0| = \left| \int_a^x f(s, u(s))ds \right| \leq |x - a|M \leq \alpha M \leq R$. Also ist $\text{Bild}(Tu) \subset \overline{B_R(y_0)}$.

Für alle $u, v \in E$ gilt

$$\begin{aligned} |Tu(x) - Tv(x)| &= \left| \int_a^x (f(s, u(s)) - f(s, v(s)))ds \right| \leq (x - a) \sup_{s \in [a, x]} |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| \\ &\leq L(x - a)\|u - v\|_\infty \end{aligned}$$

Ist $\alpha L < 1$, ist schon T direkt eine Kontraktion. Sonst betrachten wir Potenzen von T^\dagger :

$$\begin{aligned} |T^2u(x) - T^2v(x)| &= \left| \int_a^x (f(s, Tu(s)) - f(s, Tv(s)))ds \right| \leq L \int_a^x |Tu(s) - Tv(s)|ds \\ &\leq L^2\|u - v\|_\infty \int_a^x (x - a)ds = \frac{1}{2}(x - a)^2 L^2\|u - v\|_\infty \end{aligned}$$

Führen wir das induktiv fort, erhalten wir

$$|T^k u(x) - T^k v(x)| \leq \frac{1}{k!} (x - a)^k L^k \|u - v\|_\infty$$

*Es ist vielleicht etwas verwunderlich, dass wir in E gar nicht fordern, dass die Elemente differenzierbar sind, obwohl wir am Ende eine GDGL lösen wollen. Aber da wir die Gleichung in eine Integralgleichung umgeformt haben, reicht uns Stetigkeit um zu integrieren und die Differenzierbarkeit folgt am Ende automatisch aus der Fixpunktgleichung.

[†]also Hintereinanderausführungen von T mit sich selbst: $T^k = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{k\text{-mal}}$

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Es ist $x - a \leq \alpha$. Also ist für k groß genug $\frac{1}{k!} \alpha^k L^k < 1$ und damit T^k eine Kontraktion. Demnach folgt nach dem Banachschen Fixpunktsatz 1.7.9 die eindeutige Existenz eines Fixpunktes u von T^k . Wegen $Tu = T(T^k u) = T^k(Tu)$ ist dann aber auch Tu ein Fixpunkt von T^k . Da dieser aber eindeutig ist, muss schon $Tu = u$ gelten. \square

Beispiel 3.3.6. Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, sei $x_0 \in I$. Seien $A: I \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ und $b: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann hat $y'(x) = A(x)y(x) + b(x)$ mit $y(x_0) = y_0$ auf ganz I eine Lösung: Wir wenden Picard-Lindelöf an erst einmal für ein abgeschlossenes Intervall $J = [c, d] \subset I$ mit $x_0 \in J$ und für $f: (x, y) \in J \times \mathbb{R}^n \rightarrow A(x)y + b(x) \in \mathbb{R}^n$ an. Dann ist $R = \infty$ und $M < \infty$. Außerdem ist f auf $J \times \mathbb{R}^n$ Lipschitz in der zweiten Komponente, da

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |A(x)(y_1 - y_2)| \stackrel{\text{ÜA 1}}{\leq} \|A(x)\| |y_1 - y_2| \leq C |y_1 - y_2|,$$

wo wir in der letzten Abschätzung verwendet haben, dass $x \mapsto \|A(x)\|$ stetig ist, da A und $\|\cdot\|$ stetig ist und damit auf dem abgeschlossenen Intervall J ihr Maximum annimmt (hier C). Also gibt uns Picard Lindelöf eine eindeutige Lösung auf J .

Ist I schon selbst abgeschlossen, kann man $J = I$ wählen. Sei nun $I = [c, d]$. Dann betrachten wir $J_i = [c, d - \frac{1}{i}]$ und erhalten eine eindeutige Lösung $y_i: J_i \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wegen Eindeutigkeit ist aber $y_i|_{J_i} = y_{i+1}|_{J_i}$ und somit können wir alle diese Lösungen zu einer eindeutigen Lösung $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ zusammenfassen. Analog können wir bei $I = (c, d]$ oder $I = (c, d)$ vorgehen mit. Für $I = (-\infty, d]$ etc. können wir das gleiche mit $J_i = (-i, d)$ machen etc. Somit gibt es eine eindeutige Lösung auf ganz I .

Beispiel 3.3.7. Die Lipschitzstetigkeit in der zweiten Komponente ist nötig: Betrachten wir $y'(x) = \sqrt[3]{y(x)}$ mit $y(x_0) = y_0$ (wobei hier $\sqrt[3]{a} = -\sqrt[3]{|a|}$ für $a < 0$ sein soll). Für $y_0 \neq 0$ können wir Trennung der Variablen durchführen und erhalten $y(x) = \pm (\frac{2}{3}x - C)^{\frac{3}{2}}$ mit \pm je nach Vorzeichen von y_0 und $C = \frac{2}{3}x_0 - |y_0|^{\frac{2}{3}}$. Nach unseren Überlegungen für Trennung der Variablen ist das die eindeutige Lösung für $x > \frac{3}{2}C$.

Andererseits ist $y(x_0) = 0$ eine Lösung für $y(x_0) = 0$. Hier können wir aber noch mehr Lösungen für diesen Anfangswert finden: Für alle $t_0 \geq x_0$ ist

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x \leq t_0 \\ \pm (\frac{2}{3}(x - t_0))^{\frac{3}{2}} & x > t_0 \end{cases}$$

eine Lösung (Das y die GDGL erfüllt, ist klar für $x < t_0$ und $x > t_0$. In $x = t_0$ muss man noch explizit nachrechnen, dass y dort differenzierbar ist.)

Wir haben hier für den Anfangswert $y(x_0) = 0$ sogar überabzählbar viele Lösungen und zwar egal wie klein ich das Intervall $[x_0, a]$ wähle, auf dem ich nach Lösungen suche.

Wir wollen nun die Picard-Iteration einmal explizit anwenden:

Beispiel 3.3.8. Sei $y' = 3(y + 1)$ mit $y(a = 0) = 0$. Dann ist $f(x, y) = 3(y + 1)$. Nach Beispiel 3.3.6 gibt uns Picard-Lindelöf, dass es auf ganz \mathbb{R} eine Lösung gibt und diese eindeutig ist.

Mit der Picard-Iteration können wir diese berechnen:*

$$\begin{aligned}
 y_0(x) &= 0 \\
 y_1(x) &= 0 + \int_{a=0}^x 3(0+1)ds = 3x \\
 y_2(x) &= 0 + \int_0^x 3(3s+1)ds = \frac{1}{2}(3x)^2 + 3x \\
 y_3(x) &= 0 + \int_0^x 3\left(\frac{1}{2}(3s)^2 + 3s + 1\right)ds = \frac{1}{2 \cdot 3}(3x)^3 + \frac{1}{2}(3x)^2 + 3x \\
 &\dots \\
 y_n(x) &= 3x + \frac{1}{2}(3x)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}(3x)^3 + \dots + \frac{1}{n!}(3x)^n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}(3x)^k
 \end{aligned}$$

y_n rät man aus ersten Berechnungen und kann dann induktiv nachrechnen, dass wenn y_n diese Form hat auch y_{n+1} diese Form hat.

Dann ist $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(3x)^k = e^{3x} - 1$.

3.4. Systeme erster Ordnung

Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann nennen wir

$$y'(x) = F(x, y(x)) \quad \text{kurz } y' = F(x, y)$$

ein *System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung*.

Die Beispiele der Lotka-Volterra-Gleichungen und des SIR-Modells von Seite 104 sind Systeme erster Ordnung.

Bemerkung 3.4.1. Eine explizite gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung, also der Form $y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$, für $y: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich durch einführen neuer Funktionen immer in ein System erster Ordnung überführen:

Sei $u_1(x) = y(x), u_2(x) = y'(x), u_3(x) = y''(x), \dots, u_n(x) = y^{(n-1)}(x)$. Dann ist $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ äquivalent zu

$$\begin{aligned}
 u_1'(x) &= u_2(x) \\
 u_2'(x) &= u_3(x) \\
 &\vdots \\
 u_{n-1}'(x) &= u_n(x) \\
 u_n'(x) &= f(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))
 \end{aligned}$$

D.h. zwar sieht der Fall von Systemen von GDGL erster Ordnung erst einmal speziell aus, aber mit dieser Methode lässt sich jede explizite GDGL in ein solches System umwandeln.

*Natürlich geht hier auch Trennung der Variablen. Wollen wir aber gerade nicht.

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

3.4.1. Lineare Systeme

Es sei $t \in I \subset \mathbb{R}$ Intervall und $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann nennen wir

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$$

mit $A: I \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ und $b: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig ein *lineares System von GDGL erster Ordnung*.

Ist $b = 0$, so nennt man das System *homogen*, sonst *inhomogen*. Wir nennen $A(t)$ die *Koeffizientenmatrix* und $b(t)$ die *Inhomogenität*.

Beispiel 3.4.2. Für $t \in (0, \infty)$ betrachten wir

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \frac{1}{t}u_1(t) + 2tu_2(t) + e^t \\ u_2'(t) &= \frac{1}{t}u_2(t) + t \end{aligned}$$

Das ist ein lineares inhomogenes System GDGL erster Ordnung: $y(t) = (u_1(t), u_2(t))^T$

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 2t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

In Beispiel 3.3.6 haben wir gesehen, dass, wenn A und b stetig sind, eine Lösung zu gegebenem Anfangswert dann auf ganz I existiert und eindeutig ist. Wollen wir insgesamt nun mehr über die Lösungsmenge herausfinden:

Lemma 3.4.3 (Superpositionsprinzip). *Sind $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $z: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ jeweils Lösungen zu $y'(t) = A(t)y(t) + \alpha(t)$ und $z'(t) = A(t)z(t) + \beta(t)$. Dann ist $w := y + \lambda z$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Lösung von $w'(t) = A(t)w(t) + \alpha(t) + \lambda\beta(t)$.*

Insbesondere bilden die Lösungen zu homogenen linearen GDGL einen Vektorraum.

Beweis. Einsetzen und nachrechnen:

$$w' = y' + \lambda z' = Ay + \alpha + \lambda Az + \lambda\beta = Aw + \alpha + \lambda\beta$$

□

Definition 3.4.4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Seien $y_1, \dots, y_n: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Funktionen. Wir setzen $Y = (y_1, \dots, y_n)$ und bezeichnen

$$W(t) := \det Y(t)$$

als *Wronski-Determinante* von y_1, \dots, y_n .

Lemma 3.4.5 (Liouville-Formel). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A: I \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ stetig. Seien y_1, \dots, y_n n Lösungen des homogenen Systems $y'(t) = A(t)y(t)$. Sei $W(t) = \det(y_1(t), \dots, y_n(t))$ die zugehörige Wronski-Determinante. Dann gilt für alle $t, t_0 \in I$*

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{Tr } A(s) ds}.$$

Hier ist Tr die Spur der Matrix. Die Wronski-Determinante ist also genau dann konstant Null (und damit die y_i linear abhängig), wenn sie in irgendeinem t_0 gleich Null ist (und damit die $y_i(t_0)$ als Vektoren im \mathbb{R}^n linear unabhängig sind).

Beweis. Wir überlegen uns zunächst – Ist $W(t_0) = 0$ (also $y_1(t_0), \dots, y_n(t_0)$ linear abhängig), dann ist $W(t) = 0$ für alle t : Es gibt dann $a_i \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^n a_i y_i(t_0) = 0$. Also löst $y(t) = \sum_{i=1}^n a_i y_i(t)$ nach dem Superpositionsprinzip $y' = Ay$ mit $y(t_0) = 0$. Wegen Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems nach Beispiel 3.3.6 muss $y(t) = 0$ sein und somit sind die $y_i(t)$ für alle t linear abhängig.

Seien die $y_i(t)$ nun für alle t linear unabhängig. Dann ist $Y(t)$ also invertierbar. Es gilt (vgl. nächstes Lemma)

$$W'(t) = \frac{d}{dt} \det Y(t) = \det Y(t) \text{Tr} (Y'(t)Y(t)^{-1})$$

Da y_i Lösungen sind, gilt $Y'(t) = A(t)Y(t)$ und somit

$$W'(t) = W(t) \text{Tr} A(t).$$

Dies können wir mit Trennung der Variablen lösen und erhalten die Behauptung. \square

Lemma 3.4.6. Sei $B: I \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ differenzierbar und sei $B(t)$ für alle t invertierbar.* Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \det B(t) = \det B(t) \text{Tr} (B'(t)B(t)^{-1})$$

Beweis. Um die Ableitung zu bestimmen rechnen wir die lineare Approximationseigenschaft nach. Wir benutzen dazu im ersten Schritt, dass $B(t)$ selbst differenzierbar und damit in jeder Komponente dort die lineare Approximationseigenschaft erfüllt.

$$\begin{aligned} \det B(t + \epsilon) &= \det (B(t) + \epsilon B'(t) + o(\epsilon) \text{Id}_n) \\ &= \det B(t) \det (\text{Id}_n + \epsilon (B'(t) + o(1) \text{Id}_n) B(t)^{-1}) \\ &= \det B(t) (1 + \epsilon \text{Tr} ((B'(t) + o(1) \text{Id}_n) B(t)^{-1})) + o(\epsilon) \\ &= \det B(t) + \epsilon \det B(t) \text{Tr} (B'(t)B(t)^{-1}) + o(\epsilon) \end{aligned} \quad \square$$

Satz 3.4.7. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Seien $A: I \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ und $b: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig.

Dann ist die Menge V der Lösungen der homogenen DGL $y'(t) = A(t)y(t)$ ein Vektorraum der Dimension n .

Sei $y_p(t)$ eine Lösung der inhomogenen DGL $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$. Dann ist die Menge der Lösungen dieser inhomogenen DGL gleich $y_p(t) + V := \{y_p(t) + y_h(t) \mid y_h \in V\}$.

$y_p(t)$ nennt man dann *partikuläre oder spezielle Lösung des inhomogenen Problems*.

*das hieß, dass alle $b_{ij}: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar sind mit $B = (b_{ij})_{ij}$.

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Beweis. Wir beginnen mit dem homogenen Problem: Dass V ein Vektorraum ist, wissen wir aus dem Superpositionsprinzip. Sei nun $t_0 \in I$ und y_i die eindeutige Lösung von $y' = Ay$ mit $y(t_0) = e_i$ (Existiert nach Picard-Lindelöf, vgl. Beispiel 3.3.6). Damit sind y_1, \dots, y_n in t_0 linear unabhängig. Damit sind sie als Funktionen $y_i: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ auch automatisch linear unabhängig und diese y_i spannen somit einen n -dimensionalen Vektorraum W auf. Wir wollen zeigen, dass $W = V$ ist ($W \subset V$ ist klar): Sei nun $u \in V$. Dann ist $u(t_0) = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ für geeignete $u_i \in \mathbb{R}$. Wegen Eindeutigkeit der Lösung muss nun $u(t) = \sum_{i=1}^n u_i y_i(t)$ sein. Damit ist $u \in W$.

Seien nun u, v Lösungen von $y' = Ay + b$. Dann ist $u - v$ eine Lösung von $y' = Ay$. Es gibt also ein $y_h \in V$ mit $u = v + y_h$, also folgt die Behauptung. \square

Beispiel 3.4.8. Für die homogene Differentialgleichung zu Beispiel 3.3

$$y'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 2t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} y(t)$$

auf $I = (0, \infty)$ können wir die Lösungen $y_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ und $y_2(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix}$ raten. Die zugehörige Wronski-Determinante ist

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} t & t^3 \\ 0 & t \end{pmatrix} = t^2 \neq 0, \quad t \in (0, \infty).$$

Also bilden $y_1(t), y_2(t)$ eine Basis des Lösungsvektorraums dieser homogenen Gleichung. Eine allgemeine Lösung hat also die Form

$$y(t) = \begin{pmatrix} at + bt^3 \\ bt \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Woche 11 **Definition 3.4.9.** Sind y_1, \dots, y_n linear unabhängige Lösungen von $y'(t) = A(t)y(t)$, dann nennen wir $Y = (y_1, \dots, y_n): I \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ eine Fundamentalmatrix zu $y' = Ay$.

Dann gilt $Y'(t) = A(t)Y(t)$.

Lemma 3.4.10. Ist $Y(t)$ für $t \in I$ eine Fundamentalmatrix zu $y' = Ay$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$, dann ist $Y(t)Y(t_0)^{-1}y_0$ Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$ mit $y(t_0) = y_0$.

Beweis. Ist $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ eine Fundamentalmatrix, dann hat eine allgemeine Lösung die Form $y(t) = \sum_{i=1}^n a_i y_i(t) = Y(t)a$ mit $a = (a_1, \dots, a_n)^T$. Soll jetzt $y_0 = y(t_0) = Y(t_0)a$ sein, folgt $a = Y(t_0)^{-1}y_0$ und damit die Behauptung. Hier haben wir benutzt, dass die y_i linear unabhängig sind und damit die $y_i(t)$ für ein t und damit nach Lemma 3.4.5 für alle t linear unabhängig sind. \square

Das zeigt die Lösbarkeit des Anfangswertproblems für homogene lineare Systeme. In Beispielen benutzt man nicht diese allgemeine Form sondern setzt die allgemeine Form einfach gleich dem Anfangswert und löst das Gleichungssystem (das ist linear in den

Koeffizienten der allgemeinen Lösung. Z.B. war in Beispiel 3.4.8 die allgemeine Lösung $y(t) = \begin{pmatrix} at+bt^3 \\ bt \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Setzen von $y(t_0) = y_0$ gibt ein lineares Gleichungssystem in a und b .

Es bleibt nun inhomogene Systeme zu betrachten. Nach Satz 3.4.7 reicht es eine spezielle Lösung der inhomogenen GDGL zu finden und wir erhalten durch Addition der Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung alle Lösungen (Wir nehmen an, der homogene Fall sei schon gelöst). Der Ansatz eine spezielle Lösung zu finden ist *Variation der Konstanten* – das bedeutet:

Die allgemeine Lösung des homogenen linearen Systems sei $c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t)$ für $c_i \in \mathbb{R}$. Der Ansatz für eine spezielle Lösung sei nun $c_1(t) y_1(t) + \dots + c_n(t) y_n(t)$ für Funktionen $c_i: I \rightarrow \mathbb{R}$. Geschrieben in Matrixschreibweise für $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$, $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))^T$ lautet der Ansatz $y_p(t) = Y(t)c(t)$.

Dann gilt

$$y_p'(t) = Y'(t)c(t) + Y(t)c'(t) = A(t)Y(t)c(t) + Y(t)c'(t).$$

Also gilt $y_p'(t) = A(t)y_p(t) + b(t)$ genau dann, wenn $c'(t) = Y(t)^{-1}b(t)$ gilt. Eine Lösung ist $c(t) = \int_{t_0}^t Y(s)^{-1}b(s)ds$.*

Wir haben also folgendes hergeleitet:

Satz 3.4.11 (Variation der Konstanten). *Sei $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$. Sei $Y: I \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ eine Fundamentalmatrix des zugehörigen homogenen Problems. Dann sind die Lösungen des inhomogenen Problems alle Funktionen der Form*

$$y(t) = Y(t) \left(\int_{t_0}^t Y(s)^{-1}b(s)ds + c \right)$$

für $c \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Die Funktionen sind wirklich Lösung

$$\begin{aligned} y'(t) &= Y'(t) \left(\int_{t_0}^t Y(s)^{-1}b(s)ds + c \right) + Y(t)Y(t)^{-1}b(t) \\ &= A(t)Y(t) \left(\int_{t_0}^t Y(s)^{-1}b(s)ds + c \right) + b(t) = A(t)y(t) + b(t) \end{aligned}$$

Wegen Satz 3.4.7 sind dies automatisch alle Lösungen. □

Beispiel 3.4.12. Betrachten wir noch mal .

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 2t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}.$$

*Hierbei ist das Integral über eine vektorwertige Funktion – also die komponentenweise Integration, vgl. [2, Def. 4.5.42].

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Für die zugehörige homogene Differentialgleichung kennen wir die allgemeine Lösung:

$$c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}}_{=y_1(t)} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix}}_{=y_2(t)}.$$

Der Ansatz der Variation der Konstanten ist also

$$y_p(t) = c_1(t) \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix}.$$

Einsetzen liefert:

$$c_1'(t) \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + c_1(t) y_1'(t) + c_2'(t) \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix} + c_2(t) y_2'(t) \stackrel{!}{=} A(t) \left(c_1(t) \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}.$$

Benutzen wir, dass die y_i die homogene Gleichung löst, muss gelten:

$$\begin{pmatrix} t & t^3 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = c_1'(t) \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + c_2'(t) \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} t & -t^3 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^t}{t} - t^2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Lösung wäre $c_2(t) = t$ und $c_1(t) = \int_1^t \frac{e^s}{s} ds - \frac{1}{3}t^3$ (das Integral über $\frac{e^t}{t}$ ist leider nicht über uns bekannte Funktionen darstellbar) und somit

$$y_p(t) = \begin{pmatrix} t \int_1^t \frac{e^s}{s} ds + \frac{2}{3}t^4 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Probe machen und man sieht, wir haben uns nicht verrechnet.

Bevor zum Spezialfall der linearen Systeme kommen bei denen die Koeffizientenmatrix A konstant ist, schauen wir uns noch ein paar Beispiele an:

Beispiel 3.4.13.

$$y' + x^2 y = x^2, y(0) = 2$$

- *Lösen der homogenen Gleichung $y' + x^2 y = 0$:* Eine Lösung ist $y(x) = 0$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung bei gegebenem Anfangswert nach Beispiel 3.3.6, ist eine Lösung irgendwo Null, dann muss sie schon konstant Null sein. Es bleibt also der Fall einer Lösung, die nirgends verschwindet. Dann können wir Trennung der Variablen durchführen: $\frac{y'}{y} = -x^2$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx &= - \int x^2 dx \\ \ln |y(x)| &= -\frac{1}{3}x^3 + c \\ y(x) &= \pm e^{c - \frac{1}{3}x^3} = a e^{-\frac{1}{3}x^3} \end{aligned}$$

3.4. Systeme erster Ordnung

für $c \in \mathbb{R}$. Im letzten Schritt haben wir $a = \pm e^c$ gesetzt – ist c beliebig, kann $a \in \mathbb{R}$ alle Werte außer Null annehmen. Zusammen mit der Nulllösung $y = 0$ von oben, erhalten wir als allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$\{ae^{-\frac{1}{3}x^3} \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

- *Finden einer speziellen inhomogenen Lösung:* Hier ist raten am einfachsten – man sieht $y(x) = 1$ löst die inhomogene Gleichung. Nehmen wir aber mal an, wir haben das nicht gesehen, dann können wir Variation der Konstanten anwenden. Ansatz: $y(x) = a(x)e^{-\frac{1}{3}x^3}$. Einsetzen liefert:

$$a'(x)e^{-\frac{1}{3}x^3} = x^2, \quad \text{also } a'(x) = x^2 e^{\frac{1}{3}x^3}$$

und somit

$$a(x) = \int x^2 e^{\frac{1}{3}x^3} dx \stackrel{z=\frac{1}{3}x^3}{=} \int e^z dz = e^z = e^{\frac{1}{3}x^3}.$$

Also ist eine spezielle Lösung: $y(x) = a(x)e^{-\frac{1}{3}x^3} = 1$ und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$\{1 + ae^{-\frac{1}{3}x^3} \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

- *Lösen des Anfangswertproblems:* Es soll $y(0) = 2$ und damit $1 + ae^{-\frac{1}{3}0^3} = 2$, also $a = 1$ sein. Somit haben wir als Lösung $y(x) = 1 + e^{-\frac{1}{3}x^3}$.

Lösen der homogenen Gleichung ist i.A. bei A nicht konstant für Ordnungen größer 1 oder für GDGL in \mathbb{R}^n mit $n > 1$ nicht so klar. Manchmal hilft raten oder spezielle Ansätze. Muss natürlich drauf kommen – ist im Allgemeinen sehr schwer und braucht Erfahrung... Wenn man aber für die homogene Gleichung irgendwie die allgemeine Lösung gefunden hat, kann man mittels Variation der Konstanten die Inhomogenität angehen.

Wir schauen uns einfach mal ein paar Beispiele an, was z.B. möglich ist:

Beispiel 3.4.14.

$$y_1' = y_2, y_2' = -4x^2 y_1 + \frac{1}{x} y_2$$

Wir überführen dieses System in eine GDGL zweiter Ordnung, in dem wir y_2 durch y_1' ersetzen:

$$y_1'' = -4x^2 y_1 + \frac{1}{x} y_1'$$

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Versuchen wir einen Potenzreihenansatz $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} y_1'' + 4x^2 y_1 - \frac{1}{x} y_1' &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^{n+2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 4a_{n-2} x^n - \sum_{n=-1}^{\infty} (n+2) a_{n+2} x^n \\ &= \frac{a_1}{x} + 2a_2 - 2a_2 + 6a_3 x - 3a_3 x \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n+2} (n+2)(n+1) + 4a_{n-2} - (n+2) a_{n+2}) x^n \\ &= -\frac{a_1}{x} + 3a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n+2} (n+2)n + 4a_{n-2}) x^n \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Also ist $a_1 = a_3 = 0$ und $a_{n+2} = -\frac{4}{n(n+2)} a_{n-2}$ für alle $n \geq 2$. Damit erhalten wir $a_{4\ell+1} = a_{4\ell+3} = 0$ für alle $\ell \geq 0$ und

$$a_{2k+2} = -\frac{1}{k(k+1)} a_{2k-2},$$

also $a_{4\ell} = (-1)^\ell \frac{1}{(2\ell)!} a_0$ und $a_{4\ell+2} = (-1)^\ell \frac{1}{(2\ell+1)!} a_2$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{1}{(2\ell)!} x^{4\ell} + a_2 \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{1}{(2\ell+1)!} x^{4\ell+2} \\ &= a_0 \cos x^2 + a_2 \sin x^2 \end{aligned}$$

$$y_2(x) = -2a_0 x \sin x^2 + 2a_2 x \cos x^2.$$

Also bilden

$$\begin{pmatrix} \cos x^2 \\ -2x \sin x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin x^2 \\ 2x \cos x^2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Lösungsraumes.

Beispiel 3.4.15.

$$xy_1' = 6y_1 - 3y_2, xy_2' = 2y_1 + y_2$$

Substitution $x = e^t$ (für $x \in (0, \infty)$) gibt für $z_i(t) = y_i(x)$:

$$\begin{aligned} xz_1'(t) \frac{1}{x} &= 6z_1(t) - 3z_2(t), \quad xz_2'(t) \frac{1}{x} = 2z_1(t) + z_2(t), \text{ also} \\ z_1'(t) &= 6z_1(t) - 3z_2(t), \quad z_2'(t) = 2z_1(t) + z_2(t) \end{aligned}$$

ein lineares System für z_i mit konstanten Koeffizienten.

Für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten gibt es eine systematische Methode die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung zu finden. Das machen wir im folgenden Abschnitt.

3.4.2. Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Sei nun $y'(t) = Ay(t) + b$ für eine $n \times n$ -Matrix A und $b \in \mathbb{R}^n$ – die Einträge in A und b sollen also konstant in der Zeit sein. Wir wollen nun Lösungen dafür finden. Wegen Satz 3.4.7 reicht es sich um die homogenen Systeme $y'(t) = Ay(t)$ zu kümmern. Eine spezielle Lösung zur inhomogenen Gleichung können wir dann mittels Variation der Konstanten finden.

Als erstes betrachten wir $n = 1$, also $y' = ay$ für $a \in \mathbb{R}$. Das haben wir schon in Analysis 1 betrachtet (bzw. lässt sich für $y \neq 0$ auch direkt durch Trennung der Variablen lösen) – die Lösung ist $y(t) = ce^{at}$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Schauen wir uns zunächst den Spezialfall $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ an: Schreibt man $y' = Ay$ mal aus für $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$, erhält man $y_i'(t) = \lambda_i y_i(t)$. D.h. in jeder Gleichung kommt nur y_i vor – man sagt: die Gleichungen *entkoppeln sich*. Dann sind $e^{\lambda_i t} e_i$ Lösungen (e_i ist der i -te Standardbasisvektor im \mathbb{R}^n). Die zugehörige Wronski-Determinante ist $e^{(\sum_{i=1}^n \lambda_i)t} \neq 0$. Also bilden die $e^{\lambda_i t} e_i$ eine Basis der Lösungsmenge.

Nehmen wir als zweiten Fall, dass A diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten ist, vgl. Appendix 3.7 $A = QDQ^{-1}$ für $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und $Q \in \text{Gl}(n, \mathbb{C})$. Dann ist $y'(t) = QDQ^{-1}y(t)$ und damit $(Q^{-1}y(t))' = D(Q^{-1}y(t))$. Also ist $z(t) = Q^{-1}y(t)$ genau dann eine Lösung von $z'(t) = Dz(t)$, wenn $y'(t) = Ay(t)$ ist. Mit obigen Überlegungen ist somit $y_i(t) = e^{\lambda_i t} Q e_i$ eine Basis der Lösungsmenge.

Jetzt kann zwar A diagonalisierbar sein, doch nicht alle Eigenwerte sind reell. Dann wäre $e^{\lambda_i t} e_i$ noch immer eine Lösung (nur nicht reell sondern komplex) von $z'(t) = Dz(t)$ und der Rest geht analog. Allerdings wissen wir ja nach Beispiel 3.3.6, dass es reelle Lösungen für alle Anfangswerte geben müssen – wie passt das zusammen? Ist $\lambda_i \notin \mathbb{R}$ Eigenwert, dann auch $\bar{\lambda}_i$, da A reelle Matrix ist. O.B.d.A. Sei $\lambda_1 = \lambda_2$ und $Q_{j1} = Q_{j2}$ (Die ersten beiden Spalten von Q sollen also zueinander konjugierte Eigenvektoren sein). Dann sind $e^{\lambda_1 t} e_1$ und $e^{\lambda_1 t} e_2$ zwei Lösungen für z und somit $e^{\lambda_1 t} Q e_1$ und $e^{\lambda_1 t} Q e_2 = e^{\lambda_1 t} \overline{Q e_1}$ zwei Lösungen für y . Dann ist

$$\text{span}_{\mathbb{C}} \{e^{\lambda_1 t} Q e_1, e^{\bar{\lambda}_1 t} Q e_2\} = \text{span}_{\mathbb{C}} \{\text{Re}(e^{\lambda_1 t} Q e_1), \text{Im}(e^{\lambda_1 t} Q e_1)\}$$

Also gibt $\text{Re}(e^{\lambda_1 t} Q e_1), \text{Im}(e^{\lambda_1 t} Q e_1)$ eine reelle Basis dieses Spans.

Konkretes Beispiel für diesen Fall:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda \text{Id}_2) = (\lambda - 1)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1 + i)(\lambda - 1 - i)$, also $\lambda_1 = 1 + i$ und $\lambda_2 = 1 - i$.

Zugehörige Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \overline{v_2}$ und damit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} Q^{-1}, \quad \text{mit } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Also ist $e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ i \cos t - \sin t \end{pmatrix}$ und $e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ eine (komplexe) Basis der Lösungen zu $y' = Ay$. Eine reelle Basis der Lösungen haben wir dann mit $e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ und $e^t \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$.

Nun sind aber nicht alle Matrizen diagonalisierbar (auch nicht, wenn man komplexe Eigenwerte zulässt). Aber auch diese lassen sich mittels eines Basiswechsels $Q \in \text{Gl}(n)$ in eine 'einfachere Gestalt' bringen – die Jordansche Normalform.

Schauen wir uns da mal ein einfaches Beispiel an:

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

Ausmultipliziert ist das

$$u_1'(t) = \lambda u_1(t) + u_2(t), \quad u_2'(t) = \lambda u_2(t).$$

Die zweite Gleichung hängt nicht von u_1 ab und wir kennen dort die Lösungen $u_2(t) = ce^{\lambda t}$ für $c \in \mathbb{R}$. Setzen wir das in die erste Gleichung ein erhalten wir

$$u_1'(t) = \lambda u_1(t) + ce^{\lambda t}.$$

Eine spezielle Lösung dieser inhomogenen Gleichung raten wir: $cte^{\lambda t}$. Damit ist allgemein $u_1(t) = ae^{\lambda t} + cte^{\lambda t}$ für $a \in \mathbb{R}$.

Damit haben wir als allgemeine Lösung: $a, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Diese Vorgehensweise funktioniert auch für

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ \vdots \\ u_k'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_k(t) \end{pmatrix}$$

Wir lösen erst $u_k(t)$ (wieder $ae^{\lambda t}$), dann darüber einsetzen und lösen. Gibt als spezielle Lösung für $u_{k-1}(t)$ dann $te^{\lambda t}$. Nun in $u_{k-2}(t)$ eingesetzt gibt $u_{k-2}'(t) = \lambda u_{k-2}(t) + te^{\lambda t}$, was als spezielle Lösung $t^2e^{\lambda t}$ hat usw. Führt man das alles aus erhält man

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ \vdots \\ u_k'(t) \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} t^2e^{\lambda t} \\ te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_k \begin{pmatrix} t^{k-1}e^{\lambda t} \\ t^{k-2}e^{\lambda t} \\ t^{k-3}e^{\lambda t} \\ \vdots \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Man überprüft direkt, dass jeder einzelne der Vektoren rechts auch wirklich eine Lösung ist. Die zugehörige Matrix zur Berechnung der Wronskideterminante hat obere

Dreiecksgestalt und damit Determinante $e^{k\lambda t} \neq 0$. Also sind diese Lösungen linear unabhängig und wir haben oben wirklich die allgemeine Lösung.

Hat man eine Matrix in allgemeiner Jordanscher Normalform, dann hat macht man das obige für jeden Jordanblock.

Für allgemeines A findet man nun zunächst ein $Q \in \text{Gl}(n, \mathbb{C})$, so dass $J := Q^{-1}AQ$ Jordansche Normalform hat. Löst dann $z' = Jz$ und erhält mit Qz Lösungen für $y' = Ay$.

So findet man theoretisch immer die allgemeine Lösung zum homogenen linearen System mit konstanten Koeffizienten. Allerdings ist schon die Nullstellenberechnung für größere n schwierig und auch sonst nimmt die Komplexität der Berechnung für wachsendes n zu.

Wir schauen uns einfach noch ein nicht so kompliziertes Beispiel ein:

Beispiel 3.4.16. Für Beispiel 3.4.15 müssen wir noch

$$z'(t) = Az(t) \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

lösen.

- Eigenwerte: $\det(A - \lambda \text{Id}_2) = (6 - \lambda)(1 - \lambda) + 6 = \lambda^2 - 7\lambda + 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 4)$, also $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 4$ (Da diese verschieden sind, muss A diagonalisierbar sein).
- Eigenvektoren zu λ_1 :

$$(A - 3 \cdot \text{Id}_2)v_1 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} v_1 = 0 \quad \implies \quad v_1 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$$

Eigenvektoren zu λ_2 :

$$(A - 4 \cdot \text{Id}_2)v_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} v_2 = 0 \quad \implies \quad v_2 = b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}$$

- Also ist $A = Q \text{diag}(3, 4) Q^{-1}$ mit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Da $e^{3t}e_1$ und $e^{4t}e_2$, eine Basis der Lösungsmenge von $w'(t) = \text{diag}(3, 4)w(t)$ ist, ist

$$\begin{aligned} e^{3t}Qe_1 &= e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ e^{4t}Qe_2 &= e^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine Basis unserer gesuchten Lösungsmenge.

Für das Problem aus Beispiel 3.4.15 haben wir somit eine Basis der Lösungsmenge durch $e^{3 \ln x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $e^{4 \ln x} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = x^4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Beispiel 3.4.17.

$$z'(t) = Az(t) \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 25 & -9 \end{pmatrix}$$

- Eigenwerte: $\det(A - \lambda \text{Id}_2) = (11 - \lambda)(-9 - \lambda) + 100 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$
- Eigenraum zu $\lambda = 1$: $(A - \text{Id}_2)v = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 25 & -10 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow v = a \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$.

Der Eigenraum ist also eindimensional. Also ist A nicht diagonalisierbar. Jordansche Normalform wird $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sein.

- Bestimmung von $Q = (v_1, v_2)$: Für v_2 können wir jeden Vektor aus $\mathbb{R}^2 \setminus \{a \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}$ wählen, z.B. $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $(A - \text{Id}_2)v_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \end{pmatrix}$ (Muss hier ein Eigenvektor sein ✓). Dann ist $A = QJQ^{-1}$ mit $Q = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 25 & 0 \end{pmatrix}$.
- Basis der Lösungsmenge $Q \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \end{pmatrix}$ und $Q \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 10t+1 \\ 25t \end{pmatrix}$

3.4.3. Lineare GDL der Ordnung n

Sei $(Lu)(t) := u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t)$ für $a_i: I \rightarrow \mathbb{R}$. Wie in Bemerkung 3.4.1 können wir $(Lu)(t) = b(t)$ für $b: I \rightarrow \mathbb{R}$ äquivalent in ein System erster Ordnung überführen:

Es ist $(Lu)(t) = b(t)$ für $b: I \rightarrow \mathbb{R}$ äquivalent zu $y'(t) = A(t)y(t) + \tilde{b}(t)$ für $y(t) = (u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t))^T$ und

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0_{(n-1) \times 1} & \text{Id}_{n-1} \\ -a_0(t) & -a_1(t), \dots, -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad \tilde{b}(t) = (0, \dots, 0, b(t))^T,$$

also zu einem linearen System erster Ordnung. Wie bei linearen Systemen wollen wir uns zunächst um die homogene Gleichung $Lu(t) = 0$ kümmern und dafür das verwenden, was wir über $y' = Ay$ wissen:

Die Lösungsmenge zu $(Lu)(t) = 0$ ist ein Vektorraum – Superpositionsprinzip. Rechnet man direkt nach und folgt aus der Linearität der Ableitung ($(u(t) + \alpha v(t))^{(k)} = u^{(k)}(t) + \alpha v^{(k)}(t)$).

Dimension der Lösungsmenge zu $(Lu)(t) = 0$? Sei nun y_1, \dots, y_n eine Basis des Lösungsraumes zu $y'(t) = A(t)y(t)$. Sei $u_i = (y_i)_1$ – also jeweils die ersten Komponentenfunktionen. Aufgrund der Form von A muss gelten: $y_i(t) = (u_i(t), u'_i(t), \dots, u_i^{(n-1)}(t))^T$. Wären also die u_i linear abhängig, dann wegen dieser speziellen Form der y_i auch die y_i (denn aus $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0$ folgt $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i^{(k)} = 0$ und somit $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0$.) D.h. die u_i bilden einen n -dimensionalen Vektorraum. Wir wollen nun zeigen, dass dies die gesamte Lösungsmenge ist. Annahme $u(t)$ ist Lösung zu $Lu = 0$, die nicht in diesem

Vektorraum liegt. Dann ist $y(t) = (u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t))^T$ eine Lösung von $y' = Ay$. Dies muss nun eine Linearkombination der y_i sein. Das geht nicht, da sonst auch die erste Komponente, also u , eine Linearkombination der $(y_1)_1, \dots, (y_n)_1$ sein müsste. Das gibt den Widerspruch. Also ist der Lösungsraum n -dimensional.

Angenommen man hat n Lösungen u_1, \dots, u_n von $Lu = 0$. Basis?

Dann sind $y_i = (u_i, u'_i, \dots, u_i^{(n-1)})^T$ Lösungen zu $y' = Ay$. Wie in der letzten Argumentation sind diese genau dann linear unabhängig als Abbildungen nach \mathbb{R}^n , wenn die u_i linear unabhängig als Abbildungen nach \mathbb{R} sind. D.h. die u_i bilden genau dann eine Basis, wenn die Wronskideterminante

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ u'_1 & \dots & u'_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \neq 0$$

nicht verschwindet.

Beispiel 3.4.18. Schauen wir uns $x^2 y'' - xy' + x^2 y = 0$ an. Das ist die *sphärische Besseldifferentialgleichung* für $n = 0$ *

Dann sind $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$ und $y_2(x) = \frac{\cos x}{x}$ Lösungen für $x \in (0, \infty)$ (Kann man einsetzen und nachrechnen – wir sagen später noch was dazu mit welchem Ansatz man darauf kommen kann). Sind diese eine Basis der Lösungsmenge? Da wir schon wissen, dass der Vektorraum der Lösungen zweidimensional sein muss, stellt sich nur die Frage nach der linearen Unabhängigkeit.

Das kann man entweder direkt überprüfen oder mit der Wronskideterminante.

Direkt: Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \frac{\sin x}{x} + b \frac{\cos x}{x} = 0$. Einsetzen von $x = \pi$ liefert $b = 0$, einsetzen von $x = \frac{\pi}{2}$ liefert $a = 0$. Also haben wir lineare Unabhängigkeit.

Alternativ Wronskideterminante

$$\det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\sin x}{x} & \frac{\cos x}{x} \\ \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} & -\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{x^2} \neq 0$$

Konstante Koeffizienten a_i ? Da kann man prinzipiell so vorgehen wie im letzten Abschnitt für das zugehörige System $y' = Ay$:

Für $n = 1$ ergibt sich als Determinante $-a_0 - \lambda$ und für $n > 1$

$$\det(A - \lambda \text{Id}_n) = -\lambda \det \left(\begin{pmatrix} 0_{(n-1) \times 1} & \text{Id}_{n-1} \\ -a_0 & -a_1, \dots, -a_n \end{pmatrix} - \lambda \text{Id}_{n-1} \right) + (-1)^n a_0$$

*Sphärische Besselfunktion: $x^2 y'' - xy' + (x^2 - n(n+1))y = 0$. Sie entsteht analog zur Besseldifferentialgleichung von Seite 105, wenn man den Laplace im \mathbb{R}^3 in Kugelkoordinaten betrachtet.

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

wo wir den Laplaceschen Entwicklungssatz in der ersten Spalte angewendet haben. Das kann man induktiv auf den ersten Summanden anwenden und erhält am Ende

$$\det(A - \lambda \text{Id}_n) = (-1)^n (\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} a_{n-1} + \dots + a_0).$$

Also (modulo Vorzeichen) genau unsere GDGL mit $u^{(i)}$ ersetzt durch λ^i . D.h. wir können die Eigenwerte ohne Übergang zum System so direkt aus der GDGL bestimmen.

Sei nun

$$\det(A - \lambda \text{Id}_n) = \pm(\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k}.$$

Übersetzt man die Basis des Lösungsraumes des Systems (bestimmt so wie im letzten Abschnitt, hier ist dann jeder Eigenraum eindimensional) wieder zurück auf unsere GDGL, erhält man als Basis

$$e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{\nu_1-1} e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, t e^{\lambda_2 t}, \dots, t^{\nu_2-1} e^{\lambda_2 t}.$$

Wir rechnen das hier nicht vor, sondern machen lieber ein Beispiel.

Beispiel 3.4.19. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$

Wir brauchen die Lösungen des zugehörigen charakteristischen Polynoms

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1),$$

also $\lambda_1 = 1$ mit Vielfachheit 1 und $\lambda_2 = 2$ mit Vielfachheit 2. Eine Basis des Lösungsraums ist also e^x , e^{2x} und $x e^{2x}$.

3.5. Stetige Abhängigkeiten von Lösungen

Woche 12 Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, inwieweit denn Lösungen einer GDGL vom Anfangswert und von eventuell auftauchenden Parametern abhängen.

Zuvor brauchen wir noch ein Lemma, was uns das Wachstum von Lösungen abschätzt:

Lemma 3.5.1 (Gronwall-Lemma). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$, $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ und $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit

$$0 \leq y(t) \leq \alpha + \beta \left| \int_{t_0}^t y(s) ds \right| \quad \text{für alle } t \in I.$$

Dann gilt für alle $t \in I$

$$y(t) \leq \alpha e^{\beta|t-t_0|}.$$

Was hat das mit Lösungen von GDGL zu tun? Diese Integralungleichung ist äquivalent zu $y'(t) \leq \beta y(t)$ mit $y(t_0) \leq \alpha$ und $y(t) \geq 0$ auf I .

3.5. Stetige Abhängigkeiten von Lösungen

Beweis. Sei zunächst $t \geq t_0$. Wir betrachten

$$h: [t_0, t] \rightarrow [0, \infty), \quad h(s) := \beta e^{\beta(t_0-s)} \int_{t_0}^s y(u) du.$$

Dann gilt

$$h'(s) = -\beta^2 e^{\beta(t_0-s)} \int_{t_0}^s y(u) du + \beta e^{\beta(t_0-s)} y(s) \leq \alpha \beta e^{\beta(t_0-s)} = -\alpha \frac{d}{ds} e^{\beta(t_0-s)}$$

Integration $\int_{t_0}^t \dots ds$ gibt wegen Monotonie des Integrals

$$h(t) - h(t_0) \leq -\alpha(e^{\beta(t_0-t)} - 1).$$

Da $h(t_0) = 0$ ist, folgt somit

$$y(t) \leq \alpha + e^{-\beta(t_0-t)} h(t) \leq \alpha e^{\beta(t_0-t)}.$$

Der Fall $t \leq t_0$ folgt analog mit $h(s) := \beta e^{\beta(s-t_0)} \int_{t_0}^s y(u) du$ (man muss nur beachten, dass dann $\int_{t_0}^t y(u) du$ negativ ist (wegen Reihenfolge der Integrationsgrenzen)). \square

Satz 3.5.2 (Stetige Abhängigkeit). *Seien $f: (x, y, \lambda) \in [x_0, x_0 + \alpha] \times \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $y^0: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Sei f Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente, also in y , mit Lipschitzkonstante L_1 und Lipschitz-stetig in der dritten Komponente, also in λ , mit Lipschitzkonstante L_2 . Sei $y_\lambda: [x_0, x_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösung von*

$$y'(x) = f(x, y(x), \lambda), \quad y(x_0) = y^0(\lambda).$$

Dann gilt

$$|y_{\lambda_1}(x) - y_{\lambda_2}(x)| \leq |y^0(\lambda_1) - y^0(\lambda_2)| e^{L_1|x-x_0|} + \frac{L_2}{L_1} |\lambda_1 - \lambda_2| (e^{L_1|x-x_0|} - 1)$$

für alle $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$. Insbesondere ist $(x, \lambda) \in [x_0, x_0 + \alpha] \times \Omega_2 \mapsto y_\lambda(x) \in \mathbb{R}^n$ stetig.

Das analoge Resultat gilt für $[x_0 - \alpha, x_0]$ bzw. $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Beweis. Wir machen aus den Anfangswertproblemen jeweils Integralgleichungen (wie in Picard-Lindelöf):

$$\begin{aligned} |y_{\lambda_1}(x) - y_{\lambda_2}(x)| &= \left| y^0(\lambda_1) + \int_{x_0}^x f(s, y_{\lambda_1}(s), \lambda_1) ds - y^0(\lambda_2) - \int_{x_0}^x f(s, y_{\lambda_2}(s), \lambda_2) ds \right| \\ &\leq |y^0(\lambda_1) - y^0(\lambda_2)| + \int_{x_0}^x |f(s, y_{\lambda_1}(s), \lambda_1) - f(s, y_{\lambda_2}(s), \lambda_2)| ds \\ &\leq |y^0(\lambda_1) - y^0(\lambda_2)| + \int_{x_0}^x |f(s, y_{\lambda_1}(s), \lambda_1) - f(s, y_{\lambda_1}(s), \lambda_2)| \\ &\quad + |f(s, y_{\lambda_1}(s), \lambda_2) - f(s, y_{\lambda_2}(s), \lambda_2)| ds \\ &\leq |y^0(\lambda_1) - y^0(\lambda_2)| + \int_{x_0}^x L_2 |\lambda_1 - \lambda_2| + L_1 |y_{\lambda_1}(s) - y_{\lambda_2}(s)| ds. \end{aligned}$$

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Setzen wir $u(x) = L_2 |\lambda_1 - \lambda_2| + L_1 |y_{\lambda_1}(x) - y_{\lambda_2}(x)|$. Dann gilt

$$0 \leq u(x) \leq L_1 |y^0(\lambda_1) - y^0(\lambda_2)| + L_2 |\lambda_1 - \lambda_2| + L_1 \int_{x_0}^x u(s) ds.$$

Mit dem Gronwall-Lemma folgt:

$$u(x) \leq (L_1 |y^0(\lambda_1) - y^0(\lambda_2)| + L_2 |\lambda_1 - \lambda_2|) e^{L_1 |x - x_0|}$$

und somit

$$|y_{\lambda_1}(x) - y_{\lambda_2}(x)| \leq |y^0(\lambda_1) - y_{\lambda_2}(x)| e^{L_1 |x - x_0|} + \frac{L_2}{L_1} |\lambda_1 - \lambda_2| (e^{L_1 |x - x_0|} - 1)$$

□

Spezialfall: f hängt nicht von λ ab. D.h. wir variieren nur den Anfangswert. Dann ist $L_2 = 0$ und somit

$$|y_{\lambda_1}(x) - y_{\lambda_2}(x)| \leq |y^0(\lambda_1) - y^0(\lambda_2)| e^{L_1 |x - x_0|}.$$

Lösungen zu verschiedenen Anfangswerten separieren also maximal exponentiell schnell. Aber das kann auch wirklich auftreten.

Diese stetige Abhängigkeit bedeutet aber nicht, dass Lösungen zu nahe genügenden Anfangswerten sich auch gleich verhalten müssen. Es gibt den sogenannten 'Schmetterlingseffekt', der besagt, dass beliebig kleine Änderungen der Anfangswerte sich langfristig auf die Lösung auswirken können ('sensitives Verhalten'). Als Beispiel schauen wir uns die Lorenz-Differentialgleichung an, die von dem Meteorologen Lorenz zur Modellierung eines hydrodynamischen Systems betrachtet wurden.

Beispiel 3.5.3 (Lorenz Differentialgleichung – Schmetterlingseffekt).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

Für die Parameterwahl $r = 28$, $\sigma = 10$ und $b = \frac{8}{3}$ hat dieses nichtlineare autonome System ein solches sensitives Verhalten, vgl. Abbildung 3.2.

Ein anderes Beispiel für ein System mit sensitivem Verhalten bei Veränderung der Anfangswerte ist das Doppelpendel.*

*<https://de.wikipedia.org/wiki/Doppelpendel>

3.5. Stetige Abhängigkeiten von Lösungen

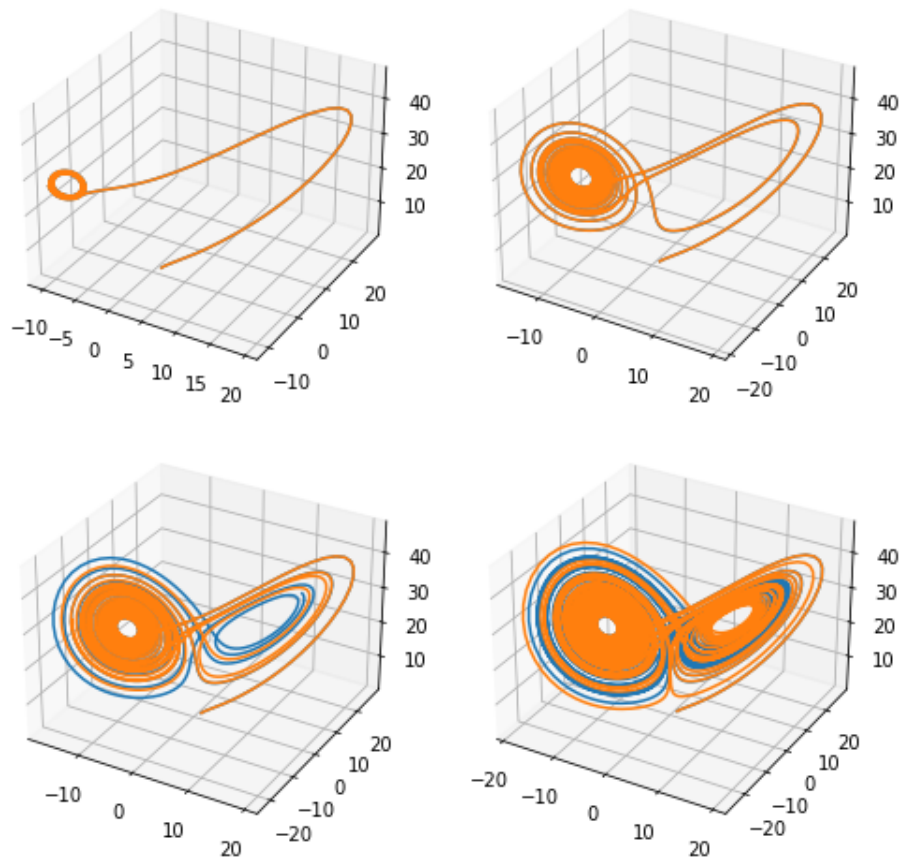


Abbildung 3.2.: Lösung der Lorenz-DGI für die Anfangswerte $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ in orange und für $(x, y, z) = (1.01, 1, 1)$ in blau. Die Bilder sind die Spuren der Lösungen jeweils bis $t = 5, 15, 20, 40$ und wir sehen, dass wir die beiden Lösungen lange nicht unterscheiden können, doch langfristig sehen wir den Unterschied.

3.6. Autonome DGL

Wir betrachten die GDGL

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}y = f(y) \quad (3.4)$$

für $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Hier hängt f also nur über y von der Variablen x ab, nicht noch einmal explizit. Eine solche GDGL heißt *autonom*.

Annahmen für diesen Abschnitt: Von jetzt an nehmen wir an, dass $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, f Lipschitz-stetig ist und die GDGL $\dot{y} = f(y)$ mit $y(0) = y_0$ habe für alle $y_0 \in U$ eine Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$ hat. Aus Picard-Lindelöf folgt die Existenz auf einer Lösung nahe y_0 . Die Lösungen sind eindeutig.

(Hat $\dot{y} = f(y)$ für $y(0) = y_0$ eine Lösung u , dann ist $y(t) = u(t - t_0)$ eine Lösung von $\dot{y} = f(y)$ mit $y(t_0) = y_0$.)

Im Fall $n = 1$ lässt dich die Gleichung für Anfangswerte weg von der Ruhelage (dann ist $f(y)$ nicht Null) mit Trennung der Variablen direkt lösen

$$t - t_0 = \int_{t_0}^t 1 ds = \int_{t_0}^t \frac{\dot{y}(s)}{f(y(s))} ds = \int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{1}{f(u)} du.$$

Im Fall $n = 2$ können wir das Problem graphisch darstellen: f interpretieren wir als Vektorfeld auf $U \subset \mathbb{R}^2$. Dann ist eine Lösung zu (3.4) eine Kurve, für die das Vektorfeld in jedem Punkt der Kurve ein tangentialer Vektor ist, vgl. Abbildung 3.3. Das zeigt, dass man Lösungen auch versuchen kann graphisch zu finden, in dem man Kurven sucht, die diese Eigenschaften haben. (Das stimmt auch für andere Dimensionen n , können wir nur nicht so gut zeichnen.) Die möglichen Werte von f nennt man *Phasenraum* und die graphische Darstellung *Phasenraumportrait*. Diese Kurven nennt man *Integralkurven* des Vektorfeldes und führen zum Begriff des Flusses:

Definition 3.6.1. Eine Abbildung $\varphi: (y, t) \in U \times \mathbb{R} \rightarrow U$ heißt *Fluss* von (3.4), falls $y(t) = \varphi(y_0, t)$ für alle $y_0 \in U$ eine Lösung von $\dot{y} = f(y)$ mit $y(0) = y_0$ ist.

Oft schreiben wir $\varphi_t(y) = \varphi(t, y)$ und erhalten somit für alle $t \in \mathbb{R}$ Abbildungen $\varphi_t: U \rightarrow U$. Dass φ_t für alle t definiert ist, stand in unseren Annahmen. Das ist nicht automatisch. Selbst nicht, wenn $U = \mathbb{R}^n$ ist.

Lemma 3.6.2. (i) $\varphi_t: U \rightarrow U$ ist ein Homöomorphismus mit $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$.

(ii) $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$ und $\varphi_0 = \text{id}$.

Man kann sogar noch zeigen: Ist f k -mal stetig differenzierbar, dann ist φ_t ein C^k -Diffeomorphismus. Dazu braucht man aber nicht nur den Satz über die stetige Abhängigkeit von Parametern, sondern eine Version für Ableitungen bzgl. des Parameters. Machen wir hier aber nicht.

Beweis. Die Stetigkeit von φ_t folgt aus der stetigen Abhängigkeit der Lösung von $y' = f(y)$ vom Anfangswert, Satz 3.5.2.

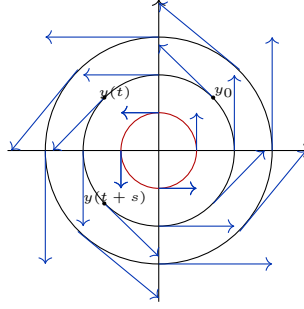


Abbildung 3.3.: Links: $f(y_1, y_2) = (-y_2, y_1)^T$, Die Integralkurven im Bild sind die Spuren der Lösungen $y(t)$ von $y' = f(y)$. Die rote Kurve soll dabei die Lösung zu $y' = f(y)$ mit $y(0) = y_0$ sein. Es ist $y(t) = \varphi_t(y_0)$ und $y(t+s) = \varphi_{t+s}(y_0)$. Wegen Eindeutigkeit der Lösung ist aber $\tilde{y}(s) = y(t+s)$ Lösung zum Anfangswert $\tilde{y}(0) = y(t) = \varphi_t(y_0)$. Also ist $\varphi_{t+s}(y_0) = \varphi_s(\varphi_t(y_0))$.

Es sei $y(t) = \varphi_t(y_0)$ und $y(t+s) = \varphi_{t+s}(y_0)$. Wegen Eindeutigkeit der Lösung ist aber $\tilde{y}(s) = y(t+s)$ Lösung zum Anfangswert $\tilde{y}(0) = y(t) = \varphi_t(y_0)$. Also ist $\varphi_{t+s}(y_0) = \varphi_s(\varphi_t(y_0))$, vgl. Abbildung 3.3. Damit ist $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ und somit insbesondere $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_0 = \text{id}$. Also $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$ und damit ist φ_t wirklich ein Homöomorphismus. \square

Definition 3.6.3. Sei $y(t, t_0, y_0)$ die Lösung von (3.4) für $y(t_0) = y_0$. Dann nennen wir $t \mapsto (y(t, t_0, y_0), t)$ die *Trajektorie* der Lösung. Der *Orbit* von $t \mapsto y(t, t_0, y_0)$ ist das Bild dieser Kurve.

Ein Punkt y_0 heißt *Ruhelage/Gleichgewichtslage*, wenn der Orbit zur Lösung $y(t, 0, y_0)$ nur aus einem Punkt besteht. Jeder Punkt, der keine Ruhelage ist, heißt *regulär*.

Eine Ruhelage y_0 heißt (*Ljapunov*-)stabil, wenn es für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ und für jedes offene Umgebung V von y_0 eine offene Umgebung W von y_0 gibt, so dass gilt: Für alle $z_0 \in W$ bleibt die Lösung von $y' = f(y)$, $y(t_0) = z_0$, für alle $t \in [t_0, \infty)$ in V .

Eine Ruhelage y_0 heißt *attraktiv*, wenn es zu jedem $t_0 \in \mathbb{R}$ eine offene Umgebung V von x_0 gibt, so dass gilt: Für alle $z_0 \in V$ gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0$ für die Lösung von $y' = f(y)$, $y(t_0) = z_0$.

Eine Ruhelage y_0 heißt *asymptotisch stabil*, wenn sie attraktiv und Ljapunov-stabil ist.

Da das Anfangswertproblem immer eindeutig lösbar ist, liegt jedes Paar $(y_0, t_0) \in U \times \mathbb{R}$ auf genau einer Trajektorien. Das impliziert insbesondere ist y_0 Ruhelage, dann besteht der Orbit von $y(t, t_0, y_0)$ für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ nur aus y_0 .

Ruhelagen sind die Nullstellen von f . Sei y_0 eine Ruhelage. Ljapunov-stabil bedeutet, dass für jede gegebene offene Umgebung von y_0 Lösungen zu Anfangswerten genügend nahe an y_0 im weiteren Zeitverlauf diese Umgebung nicht verlassen. Attraktiv bedeutet,

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

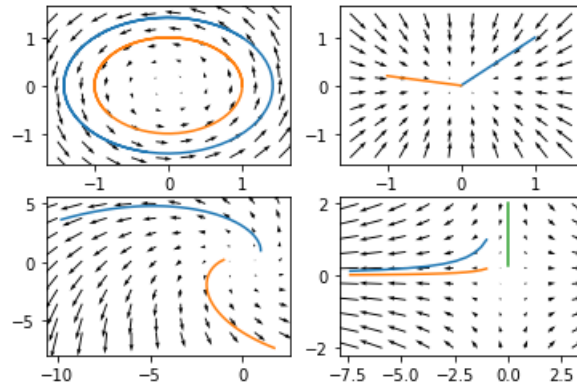


Abbildung 3.4.: f Vektorfeld und ein paar Integralkurven für die zugehörige autonome GDGL $\dot{y} = f(y)$

Oben links $f(y_1, y_2) = (-y_2, y_1)^T$, Oben rechts $f(y_1, y_2) = (-y_1, -y_2)^T$, Unten links $f(y_1, y_2) = (y_1 - y_2, y_1 + y_2)^T$, Unten rechts $f(y_1, y_2) = (y_1, -y_2)^T$

dass für Anfangswerte in einer genügend kleinen offenen Umgebung von f alle Lösungen für $t \rightarrow \infty$ nach y_0 streben.

In Abbildung 3.4 sind die Vektorfelder verschiedener autonomer Systeme ($n = 2$) gezeichnet mit Beispielen von Integralkurven. In allen vier Bildern ist $(0, 0)^T$ eine Ruhelage (dort verschwindet das Vektorfeld). Oben links ist die Ruhelage Ljapunov-stabil, aber nicht attraktiv. Oben rechts ist sie asymptotisch stabil. Unten links und rechts ist sie Ljapunov-instabil.

3.6.1. Stabilität in autonomen linearen Systemen

Sei

$$y' = Ay + b$$

für $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

Die Ruhelagen sind dann genau die Lösungen von $Ay = -b$. Die Menge der Ruhelagen ist also ein affiner Unterraum von \mathbb{R}^n (im Falle von $b = 0$ sogar ein Untervektorraum).

Satz 3.6.4. Sei $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ die verschiedenen Eigenwerte von A mit zugehörigen Multiplizitäten ν_1, \dots, ν_k . Seien $E_{\lambda_i} \subset \mathbb{C}^n$ die zugehörigen Eigenräume. Habe $Ay = -b$ mindestens eine Lösung. Dann gilt

- (i) Eine/jede Ruhelage von $y' = Ay + b$ ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\text{Re } \lambda_i < 0$ für alle i gilt.
- (ii) Eine/jede Ruhelage von $y' = Ay + b$ ist genau dann Ljapunov-stabil, wenn $\text{Re } \lambda_i < 0$ oder $\text{Re } \lambda_i = 0$, $\dim_{\mathbb{C}} E_{\lambda_i} = \nu_i$ für alle i gilt.

Es fällt auf, dass die Stabilität der Ruhelagen nur von A aber nicht von b abhängt. Der Grund ist, dass jede Lösung y von $y' = Ay + b$ nahe einer Ruhelage y_0 einer Lösung $\tilde{y} = y - y_0$ von $\tilde{y}' = A\tilde{y}$ nahe der Ruhelage 0 entspricht.

Beweis. Nach obigen Überlegungen reicht es, den Fall $b = 0$ zu betrachten. Aus Abschnitt 3.4.2 kennen wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung es ist eine Linearkombination aus Lösungen, deren Einträge die Form $t^j e^{\lambda_i t}$ haben. Falls $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ ist, folgt $\lim_{t \rightarrow \infty} |t^j e^{\lambda_i t}| = \lim_{t \rightarrow \infty} t^j e^{\operatorname{Re} \lambda_i t} = 0$. Falls $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ und $\nu_i = \dim_{\mathbb{C}}$ ist, kommt $t^j e^{\lambda_i t}$ nur für $j = 0$ vor und somit ist $|e^{\lambda_i t}| = 1$. Für alle anderen Fälle konvergiert $|t^j e^{\lambda_i t}|$ gegen unendlich. Daraus folgt direkt die Behauptung. \square

Die Systeme in Abbildung 3.4 sind alles lineare autonome Systeme der Form $\dot{y} = Ay$. Alle haben $(0, 0)^T$ als Ruhelage. Oben links sind die Eigenwerte $\pm i$ jeweils mit Multiplizität 1 - wir sind im Fall (ii) des Satzes. Oben rechts ist -1 Eigenwert mit doppelter Vielfachheit, also sind wir im Fall (i). Unten links und rechts haben mindestens einen Eigenwert mit positivem Realteil, damit muss die Ruhelage dort Ljapunov-instabil sein.

3.6.2. Stabilität von Ruhelagen nicht-linearer autonomer Systeme

Um die Stabilität von Ruhelagen nicht-linearer autonomer Systeme zu untersuchen, führen wir einen Hilfsbegriff ein:

Definition 3.6.5. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine stetig differenzierbare Funktion $L: U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Ljapunov-Funktion eines Vektorfeldes* $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ bzw. *der autonomen GDGL* $y' = f(y)$, wenn die Richtungsableitung von L entlang des Vektorfeldes L nicht positiv ist, d.h. $D_u L(f(u)) \leq 0$ für alle $u \in U$.

Für die Ruhelage y_0 gilt $f(y_0) = 0$ und damit $D_{y_0} L(f(y_0)) = 0$.

Ist L Ljapunovfunktion, dann auch $L + c$ für jede Konstant $c \in \mathbb{R}$.

Es ist $\frac{d}{dt} L(y(t)) = D_{y(t)} L(\dot{y}(t)) = D_{y(t)} L(f(y(t))) = \langle \operatorname{grad} L(y(t)), f(y(t)) \rangle$. D.h. ist L Ljapunovfunktion, dann ist $t \mapsto L(y(t))$ nicht-wachsend.

Satz 3.6.6. Sei $y' = f(y)$ mit $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig. Sei $y_0 \in U$ eine Ruhelage und L eine Ljapunovfunktion zu f . Dann gilt

- (i) Ist y_0 isoliertes lokales Minimum von L , dann ist y_0 Ljapunov-stabil.
- (ii) Ist y_0 isoliertes lokales Minimum von L und gibt es eine offene Umgebung V von y_0 mit $D_u L(f(u)) < 0$ für alle $u \in V \setminus \{y_0\}$, dann ist y_0 asymptotisch stabil.
- (iii) Ist y_0 isoliertes lokales Minimum von L und ist L auf Lösungen von $y' = f(y)$ konstant, dann ist y_0 nicht asymptotisch stabil.
- (iv) Ist y_0 kein lokales Minimum von L und gibt es eine offene Umgebung V von y_0 mit $D_u L(f(u)) < 0$ für alle $u \in V \setminus \{y_0\}$, dann ist y_0 Ljapunov-instabil (= nicht Ljapunov-stabil).

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Jede konstante L ist automatisch eine Ljapunovfunktion. Bringt nur nichts, da diese keine strengen lokalen Minima hat, aber alle Punkte lokale Minima sind. Das Hauptproblem liegt also im Finden einer geeigneten Ljapunovfunktion.

Beweis. zu (i): Sei y_0 isoliertes lokales Minimum von L und o.B.d.A. sei $L(y_0) = 0$. Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ und sei V eine offene Umgebung von y_0 . Seien V_1, W offene Umgebungen von y_0 mit $W \subset \bar{V}_1 \subset V$, so dass $\beta = \min_{\partial V_1} L > 0$ und $L|_W \leq \frac{1}{2}\beta$ ist (muss es geben, da y_0 isoliertes lokales Minimum ist).

Da f Lipschitz-stetig ist, folgt aus Picard-Lindelöf, dass für alle $w \in W$ das Anfangswertproblem $y' = f(y)$ mit $y(t_0) = w$ eine eindeutige Lösung y auf einem maximalen Existenzintervall (a, b) besitzt. Da L auf Lösungen nicht wachsend ist und $L(w) \leq \frac{1}{2}\beta$ ist, kann diese Lösung V_1 nicht verlassen. Damit muss $\lim_{t \rightarrow b} |y(t)| < \infty$. Wäre $b < \infty$ muss dann $(y(b - \frac{1}{i}))_i$ eine konvergente Teilfolge haben mit Grenzwert $y_1 \in \bar{V}_1$ haben und das Anfangswertproblem hätte für $y(b) = y_1$ eine Lösung in einem Intervall um b . Wegen Eindeutigkeit muss diese Lösung für $t < b$ mit der alten Lösung übereinstimmen. D.h. (a, b) war nicht das maximale Existenzintervall. Also muss $b = \infty$ sein. Also gilt $y([t_0, \infty) \subset V_1 \subset V$. Somit ist y_0 Ljapunov-stabil.

zu (ii): Sei y_0 isoliertes lokales Minimum von L . Ljapunov-stabil folgt aus (i). Es bleibt also attraktiv zu zeigen. Durch Verkleinern von V können wir o.B.d.A. annehmen, dass $D_u L(f(u)) < 0$ für alle $u \in \bar{V} \setminus \{y_0\}$ gilt, \bar{V} kompakt ist und es ein W wie in (i) gibt. Dann bleibt jede Lösung von $y' = f(y)$ mit $y(t_0) = y_0 \in W$ für alle $t \in [t_0, \infty)$ in V . Da $L(y)$ auf $[t_0, \infty)$ nicht wachsend und von unten beschränkt ist, gibt es eine Folge $(t_i)_i$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$ und $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{d}{dt}|_{t=t_i} L(y(t)) = 0$. Da $y(t_i) \in \bar{V}$ können wir durch Übergang auf eine Teilfolge annehmen, dass o.B.d.A. $y_\infty := \lim_{i \rightarrow \infty} y(t_i)$ gilt. Wegen $\frac{d}{dt} L(y(t)) = D_{y(t)} L(f(y(t)))$ muss $\lim_{i \rightarrow \infty} D_{y(t_i)} L(f(y(t_i))) = 0$ und damit $D_{y_\infty} L(f(y_\infty)) = 0$ gelten. Da y_0 aber einziges Minimum auf \bar{V} ist, muss $y_\infty = y_0$ sein. Damit ist zunächst $\lim_{i \rightarrow \infty} L(y(t_i)) = L(y_0)$ und wegen Monotonie von L sogar $\lim_{t \rightarrow \infty} L(y(t)) = L(y_0)$. Daraus folgt $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0$, da y_0 isoliertes Minimum von L auf V . Damit ist y_0 asymptotisch stabil.

zu (iii): Da L auf Lösungen konstant ist und y_0 ein isoliertes lokales Minimum ist. Ist für eine Lösung $y' = f(y)$ mit $y(t_0)$ nahe y_0 aber ungleich y_0 , $L(y(t)) = \text{konstant} > L(y_0)$. Deshalb kann nicht $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0$ gelten und damit ist y_0 nicht attraktiv.

zu (iv): O.B.d.A. sei $L(y_0) = 0$. Durch Verkleinern von V können wir o.B.d.A. annehmen, dass $D_u L(f(u)) < 0$ für alle $u \in \bar{V} \setminus \{y_0\}$ gilt und V beschränkt ist. Da y_0 kein lokales Minimum ist, gibt es ein $v \in V$ mit $L(v) < 0$. Für die Instabilität von y_0 reicht es zu zeigen, dass die Lösung u von $y' = f(y)$ mit $y(0) = v$ die Menge V verlässt (da es ein solches v beliebig nahe an y_0 geben muss): Sei $W \subset V$ die Menge aller w mit $L(w) > L(v)$. Da L stetig ist und $D_u L(f(u)) < 0$ für alle $u \in V \setminus \{y_0\}$ gilt, ist W offene Umgebung von y_0 . Da L auf Lösungen nicht wachsend ist, ist $L(u(t)) \leq L(u(0)) = L(v)$ und somit $u(t) \notin W$ für alle $t \in [0, \infty)$. Aber auf $\bar{V} \setminus W$ ist $D_u L(f(u)) \leq -c$ für ein $c > 0$ (da y_0 einzige Nullstelle von DL in V ist). Angenommen u bleibt für alle $t \in [0, \infty)$ in V , dann muss also $\lim_{t \rightarrow \infty} L(u(t)) = -\infty$ gelten. Das ist ein Widerspruch, da L auf dem Kompaktum \bar{V} von unten beschränkt sein muss. Also ist y_0 Ljapunov-instabil. \square

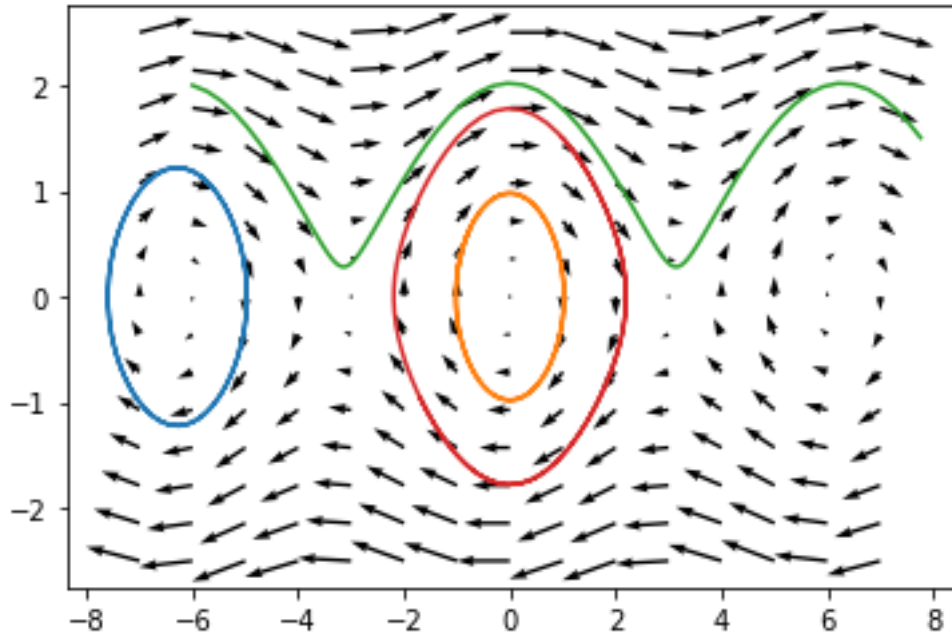


Abbildung 3.5.: Das ist das Phasenraumportrait des mathematischen Pendels mit einigen Integralkurven. In orange, rot, blau periodische Lösungen und in grün eine Lösungen, wo das Pendel immer wieder überschlägt.

Wie erhält man geeignete Ljapunovfunktionen? Allgemein schwierig. Für GDGL, die aus der Physik kommen, ist $L(y(t))$ oft die Energie des Zustandes y .

Beispiel 3.6.7. In [2, Abschnitt 4.4.4] hatten wir uns die Differentialgleichung für die Auslenkung φ eines Pendels mit (masselosen) Stab der Länge ℓ und Punktmasse m :

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \sin \varphi = 0.$$

Machen wir daraus ein System erster Ordnung. Mathematisch abstrakt würden wir als neue Funktion $u = \dot{\varphi}$ einführen. Aber gerade, wenn die Größen eine Bedeutung haben, ist es oft besser, die neuen Größen multipliziert mit geeigneten Konstanten einzuführen, so dass auch die neuen Größen direkt wieder eine Bedeutung haben. Hier setzen wir $v = \ell \dot{\varphi}$, denn dann ist v die Geschwindigkeit. Dann ist

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = f(\varphi, v) \quad f(\varphi, v) = \begin{pmatrix} \ell^{-1} v \\ -g \sin \varphi \end{pmatrix},$$

vgl. Abbildung 3.5.

Die Ruhelagen des System sind $(k\pi, 0)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Wegen der Periodizität des Winkels sind in Wirklichkeit nur $(0, 0)^T$ und $(\pi, 0)^T$ verschieden. Rein von der

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Anschaung der Bewegungen des Pendels erwarten wir, dass $(0, 0)^T$ Ljapunov-stabil, aber nicht attraktiv, ist und $(\pi, 0)^T$ Ljapunov-instabil ist.

Wie sehen wir das mit einer Ljapunovfunktion?

Wir wählen die Summe der kinetischen und potentiellen Energie (Hamiltonfunktion):

$$L(\varphi, v) := \frac{1}{2}mv^2 - mgl \cos \varphi$$

Dann ist

$$\frac{d}{dt}L(\varphi, v) = D_{\varphi, v}L(f(\varphi, v)) = (mgl \sin \varphi \quad mv) \begin{pmatrix} \ell^{-1}v \\ -g \sin \varphi \end{pmatrix} = 0$$

(das ist nicht überraschend, das ist einfach die Energieerhaltung (hätten wir also aus der Physik vorher wissen können)). Somit ist $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Ljapunovfunktion für das System der GDGL. Wegen $DL = (mgl \sin \varphi \quad mv)$ und $\text{Hess } L = \begin{pmatrix} mgl \cos \varphi & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ ist die Ruhelage $(0, 0)^T$ (und alle $(2k\pi, 0)^T$ für $k \in \mathbb{Z}$) isoliertes lokales Minimum (vgl. Satz 1.6.12). Zusammen mit L konstant auf Lösungen, folgt nach letztem Satz, dass $(0, 0)^T$ nicht asymptotisch stabil ist.

Es fehlt jetzt noch die 'obere' Ruhelage $(\pi, 0)$. Da lässt sich der letzte Satz nicht auf L anwenden, um die Instabilität zu zeigen (da $\frac{d}{dt}L(\varphi, v) = 0$ ist). Aber wir können eine andere Ljapunovfunktion verwenden $\tilde{L}(\varphi, v) = v \sin \varphi$. Hier ist $D\tilde{L} = (v \cos \varphi \quad \sin \varphi)$ und damit

$$D_{(\varphi, v)}\tilde{L}(f(\varphi, v)) = \ell^{-1}v^2 \cos \varphi - g(\sin \varphi)^2$$

Es ist $D_{(\pi, 0)}\tilde{L}(f(\pi, 0)) = 0$. Für $(\varphi, v) \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \times \mathbb{R} \setminus \{(\pi, 0)^T\}$ ist dies negativ, da $\cos \varphi$ dort negativ ist und für $v = 0$ der Sinus nur in $\varphi = \pi$ eine Nullstelle hat. Damit ist \tilde{L} nahe unserer Ruhelage wirklich eine Ljapunovfunktion und wir haben schon den zweiten Teil der Voraussetzungen in (iv) des letzten Satzes überprüft. Es bleibt noch zu sehen, dass diese Ruhelage gar kein lokales Minimum von \tilde{L} ist: Es ist $(\pi, 0)$ ein Sattelpunkt von \tilde{L} , da $v \rightarrow \tilde{L}(\pi - |v|, v)$ um $v = 0$ herum das Vorzeichen wechselt. Also ist $(\pi, 0)^T$ Ljapunov-instabil.

Woche 13 Eine andere Möglichkeit Stabilität zu untersuchen, ist es die GDGL nahe den Ruhelagen zu linearisieren und dann unser Wissen für lineare autonome Systeme zu nutzen:

Satz 3.6.8. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und sei y_0 eine Ruhelage von $\dot{y} = f(y)$. Haben alle Eigenwerte von $D_{y_0}f$ einen negativen Realteil, dann ist y_0 asymptotisch stabil.*

Für lineare autonome Systeme, vgl. Satz 3.6.4, gab es eine Aussage für Ljapunov-Stabilität für Eigenwerte mit Realteil Null. Für nichtlineare Systeme können wir diese Aussage nicht treffen, da in diesem Fall die Stabilität nicht nur vom Erste-Ordnungsverhalten von f abhängt.

3.6. Autonome DGL

Beweis. Es sei $A := D_{y_0}f$. Da y_0 Ruhelage ist, ist $f(y_0) = 0$ und damit $f(y_0 + h) = Ah + |h|r(h)$ mit $r(h) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$. Damit gibt es für alle $\epsilon > 0$ eine offene und beschränkte Umgebung V von y_0 mit $|f(y) - A(y - y_0)| < \epsilon|y - y_0|$ für alle $y \in V$. O.B.d.A. sei $y_0 = 0$.

Sei $y_a(t)$ die eindeutige Lösung von $\dot{y} = Ay$ mit $y(0) = a \in \mathbb{R}^n$. Haben alle Eigenwerten von A negativen Realteil, dann konvergiert $|y_a(t)| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Für $|a| \leq 1$ gibt es ein $\alpha > 0$ und ein $M > 0$ mit $|y_a(t)| \leq Me^{-\alpha t}$ für alle $t \in [0, \infty)$. Wir wählen, dass V von oben für $\epsilon = \frac{\alpha}{2M}$.

Sei $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix zu $\dot{y} = Ay$, so dass die Spalten $y_a(t)$ für $|a| \leq 1$ sind, also die obige Abschätzung auch für Y gilt. Außerdem ist $Y(t+s) = Y(t)Y(s)$, da es ein autonomes System ist, vgl. den Fluss des Vektorfeldes und Lemma 3.6.2.

Sei u , definiert auf (α, β) , die maximale Lösung des Anfangswertproblems $\dot{u} = f(u)$ mit $u(t_0) = x_0$. Wir schreiben dies als $\dot{u} = Au + (f(u) - Au)$. Verstehen wir $f(u) - Au$ hier als Inhomogenität, dann folgt aus Satz 3.4.11: Somit ist

$$u(t) = Y(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^t Y(t - s)(f(u(s)) - Au(s))ds \quad (3.5)$$

Wir wollen damit nun die Lösung $u(t)$ abschätzen: Da die Spalten von $Y(t)$ die Form $y_a(t)$ haben, folgt

$$|u(t)| \leq Me^{-\alpha t}|x_0| + \frac{\alpha}{2} \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}|u(s)|ds.$$

Setzen wir $\varphi(t) = e^{\alpha t}|u(t)|$ erhalten wir

$$\varphi(t) \leq M|x_0| + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \varphi(s)ds.$$

Mit dem Gronwall-Lemma ergibt sich

$$\varphi(t) \leq e^{\frac{\alpha}{2}t}M|x_0|$$

und damit

$$|u(t)| \leq e^{-\frac{\alpha}{2}t}M|x_0|$$

Falls u für $t \in [t_0, \beta)$ nicht in V bleibt, sei β_0 , die kleinste Zahl $\geq t_0$ mit $u(\beta_0) \notin V$. Falls u ganz in V verbleibt, folgt wie im Beweis von Satz 3.6.6(i), dass $\beta = \infty$ ist.

Sei nun U eine offene Umgebung von $y_0 = 0$ mit $U \subset V$ derart, dass $\{sy \mid s \in [0, M), y \in U\} \subset V$. Für $x_0 \in U$ gilt nun: Falls $\beta_0 < \infty$ ist, folgt aus der Abschätzung $|u(t)| \leq e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)}M|x_0|$, dass $u(\beta_0) \in V$ ist, was zum Widerspruch der Annahme an β_0 ist. Also ist $\beta_0 = \infty$ und die Lösung bleibt für alle Zeiten in V . Somit ist y_0 Ljapunov-stabil. Mit der Abschätzung an u folgt auch $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = 0$. \square

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Beispiel 3.6.9. Schauen wir uns das mathematische Pendel mal mit einem Reibungsterm (viskose Reibung) an (für Reibung gleich Null wird uns der letzte Satz nichts geben, da die untere Ruhelage nicht asymptotisch stabil ist).

$$\varphi'' + \frac{\rho}{\ell}\varphi' + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0$$

mit $\rho > 0$. Sei $v = \ell^{-1}\varphi'$. Dann ist das zugehörige lineare System:

$$\begin{pmatrix} \varphi' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell v \\ -\rho v - \frac{g}{\ell}\sin\varphi \end{pmatrix} = f(\varphi, v)$$

ist.

Hier ist $(\varphi, v) = (0, 0)$ noch immer eine Ruhelage und es gilt

$$D_{(0,0)}f = \begin{pmatrix} 0 & \ell \\ -\frac{g}{\ell} & -\rho \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte sind

$$-\frac{\rho}{2} \pm \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - g}.$$

Da $g \geq 0$ und $\rho > 0$ haben beide Eigenwerte negativen Realteil. Also ist die Ruhelage $(0, 0)$ asymptotisch stabil. Das ist auch das, was man erwarten würde: Lenkt man das Pendel aus der unteren Ruhelage etwas aus, dann bewegt es sich um diese Ruhelage herum. Ohne Reibung periodisch, aber mit Reibung wird die Auslenkung immer kleiner und für $t \rightarrow \infty$ kommt das Pendel in die Ruhelage.

3.7. Regulär singuläre GDGL zweiter Ordnung

Das Ziel dieses Abschnitts ist es eine spezielle Klasse zweiter Ordnung Differentialgleichungen zu betrachten:

$$y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y = 0$$

Falls $p(x)$ und $q(x)$ Potenzreihen (um $x = 0$) sind und $p(0) \neq 0$ und $q(0) \neq 0$ gilt, nennt man die GDGL regulär singulär in $x = 0$. Diese GDGL ist für $x = 0$ erstmal nicht definiert, trotzdem wird es Lösungen geben, die sich in $x = 0$ stetig fortsetzen lassen.

Solche Differentialgleichungen treten öfter auf, z.B. ist die Bessel-Differentialgleichung aus Seite 105 dieser Form.

Wir werden uns hier in diesem Abschnitt keine Gedanken um Konvergenz der Potenzreihen machen. Sondern machen hier in Wirklichkeit nur Aussagen über die Taylorreihen der Funktionen ohne uns Gedanken zu machen, ob diese zumindest nahe Null gegen die jeweilige Funktion konvergiert. Allerdings kann man das dann jeweils noch nachtragen.

Schauen wir uns zunächst einen Spezialfall an:

3.7. Regulär singuläre GDGL zweiter Ordnung

Beispiel 3.7.1 (Euler-GDGL).

$$y'' + \frac{p_0}{x}y' + \frac{q_0}{x^2}y = 0$$

Substitution: $u = \ln x$ liefert für $v(u) = y(e^u)$

$$\begin{aligned} v'(u) &= e^u y'(e^u) \\ v''(u) &= e^u y'(e^u) + e^{2u} y''(e^u) \\ v''(u) + (p_0 - 1)v'(u) + q_0 v(u) &= e^u y'(e^u) + e^{2u} y''(e^u) + (p_0 - 1)e^u y'(e^u) + q_0 y(e^u) \\ &= e^{2u} \left(y''(e^u) + \frac{p_0}{e^u} y'(e^u) + \frac{q_0}{e^{2u}} y(e^u) \right) = 0 \end{aligned}$$

Das ist nun eine lineare GDGL mit konstanten Koeffizienten. Das können wir lösen wie in Abschnitt 3.4.2:

$$\lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + q_0 = 0$$

und hat als Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \frac{1-p_0 \pm \sqrt{(p_0-1)^2 - 4q_0}}{2}$. Hier verstehen wir \sqrt{x} für $x < 0$ als $\sqrt{|x|}i$.

1. Fall: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann ist $e^{\lambda_1 u}$ und $e^{\lambda_2 u}$ eine (ggf. komplexe) Basis des Lösungsraumes der GDGL von v .

1.1. Fall: Die λ_i sind reell. Dann ist

$$y_1(x) = x^{\lambda_1}, \quad y_2(x) = x^{\lambda_2}$$

eine Basis der Lösungen der Euler-GDGL.

1.2. Fall: Die λ_i sind nicht reell. Eigentlich wollen wir trotzdem gerne direkt x^{λ_i} schreiben. Das hat aber das Problem, dass wir nicht allgemeine Potenzen mit komplexen Exponenten bilden können. Das ist ein bisschen subtil und wird in der Funktionentheorie behandelt - ist aber möglich. Deshalb müssen wir hier aber noch auf eine reelle Basis ausweichen: Sei $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist $e^{\alpha u} \cos(\beta u)$ und $e^{\alpha u} \sin(\beta u)$ eine reelle Basis der GDGL für v und damit

$$y_1(x) = x^\alpha \cos(\beta \ln x), \quad y_2(x) = x^\alpha \sin(\beta \ln x)$$

eine Basis der Lösungen der Euler-GDGL.

2. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$. Dann ist $e^{\lambda u}$ und $ue^{\lambda u}$ eine Basis der Lösungen zu v und damit

$$y_1(x) = x^\lambda, \quad y_2(x) = x^\lambda \ln x$$

Basis der Lösungen der Euler-GDL.

Bevor wir zum allgemeineren Fall kommen, schauen wir uns das analoge Problem für GDGL erster Ordnung an:

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Lemma 3.7.2. Sei $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Potenzreihe. Dann hat die lineare GDGL erster Ordnung

$$y' + \frac{p(x)}{x}y = 0$$

eine Lösung der Form

$$y(x) = x^\alpha h(x) \quad \text{mit} \quad h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x^k, h_0 = 1$$

mit $\alpha = -p(0)$.

Beweis. Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$. Trennung der Variablen liefert

$$y(x) = e^{-\int \frac{p(s)}{s} ds} = e^{-p_0 \ln x + c - p_1 x - \dots} = x^{-p_0} e^{c - p_1 x - \dots}.$$

Dann gilt für $h(x) = e^{c - p_1 x - \dots}$, dass $h(0) = e^c \neq 0$ ist. Wir können somit $h(0) = 1$ immer durch Skalieren der Lösung erreichen. \square

Nachdem wir nun den Spezialfall der Euler-DGL und den erste Ordnungsfall betrachtet haben.

Verallgemeinerter Potenzreihenansatz/Frobenius-Methode.

Ansatz: $y(x) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} h_k x^k$ (Für uns wird nur $\alpha \in \mathbb{R}$ in Frage kommen, weil wir noch nicht allgemeine Potenzen mit komplexen Exponenten bilden können. Geht aber auch in diesem Fall sonst analog.).

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $h_0 = 1$ ist: Ist $h_0 = \dots = h_k = 0$ und $h_{k+1} \neq 0$, kann man statt α dann $\alpha + k + 1$ betrachten und die Lösung, so skalieren, dass $h_{k+1} = 1$ ist.

Es soll $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ und $q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{q(x)}{x^2} y(x) &= \frac{x^\alpha}{x^2} \sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j \sum_{k=0}^{\infty} h_k x^k \stackrel{[2,3.12.29] - \text{Cauchy-Produkt}}{=} x^{\alpha-2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k q_j h_{k-j} x^k \\ \frac{p(x)}{x} y'(x) &= \frac{1}{x} \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha + k) h_k x^{\alpha+k-1} \\ &= x^{\alpha-2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k (\alpha + k - j) p_j h_{k-j} x^k \\ y''(x) &= x^{\alpha-2} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha + k)(\alpha + k - 1) h_k x^k \end{aligned}$$

3.7. Regulär singuläre GDGL zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}
y''(x) + \frac{p(x)}{x} y'(x) + \frac{q(x)}{x^2} y(x) \\
= x^{\alpha-2} \sum_{k=0}^{\infty} \left((\alpha+k)(\alpha+k-1)h_k + \sum_{j=0}^k ((\alpha+k-j)p_j + q_j) h_{k-j} \right) x^k \\
= x^{\alpha-2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(((\alpha+k)^2 + (p_0-1)(\alpha+k) + q_0) h_k + \sum_{j=1}^k ((\alpha+k-j)p_j + q_j) h_{k-j} \right) x^k
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$((\alpha+k)^2 + (p_0-1)(\alpha+k) + q_0) h_k + \sum_{j=1}^k ((\alpha+k-j)p_j + q_j) h_{k-j} = 0.$$

Für $k=0$ liefert das mit $h_0=1$:

$$\alpha^2 + (p_0-1)\alpha + q_0 = 0$$

Diese Gleichung nennt man *charakteristische Gleichung* – es ist genau die Gleichung, die wir beim Lösen der Euler-GDGL erhalten haben. Die Lösungen

$$\alpha_{\pm} = \frac{1-p_0 \pm \sqrt{(p_0-1)^2 - 4q_0}}{2}$$

nennt man *charakteristische Exponenten*.

!!Wir beschränken uns hier auf den Fall, dass beide Lösungen reell sind!! (Sonst geht es eigentlich analog, aber man braucht allgemein Potenzen mit komplexen Exponenten (macht man in Funktionentheorie) oder man rechnet das ähnlich wie bei der Eulergleichung noch mit \cos , \sin um.

Sei zunächst $\alpha = \alpha_+$. Dann ist (mit $\beta = \sqrt{(p_0-1)^2 - 4q_0}$) für $k > 0$

$$h_k = \frac{1}{(\beta+k)k} \sum_{j=1}^k ((\alpha+k-j)p_j + q_j) h_{k-j}$$

Das ist immer wohldefiniert, da $\operatorname{Re} \beta \geq 0$ ist und wir deshalb nicht durch Null teilen. Für $\alpha = \alpha_-$ erhalten wir analog

$$h_k = \frac{1}{(-\beta+k)k} \sum_{j=1}^k ((\alpha+k-j)p_j + q_j) h_{k-j}$$

Was wohldefiniert ist, solange $\beta \notin \mathbb{N}_{>0}$ ist.

D.h. solange $\beta \notin \mathbb{N}_{>0}$ erhalten wir so zwei Lösungen der Form $y(x) = x^{\alpha_{\pm}} h_{\pm}(x)$. Im Fall $\beta = 0$ sind diese Lösungen aber identisch. Falls $\beta \notin \mathbb{N}$ ist, sind diese beiden Lösungen

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

linear unabhängig. Das sieht man, da aus $a, b \in \mathbb{R}$ mit $ax^{\alpha_+}h_+(x) = bx^{\alpha_-}h_-(x)$, also $ax^{\alpha_+ - \alpha_-}h_+(x) = bh_-(x)$. Einsetzen von $x = 0$ liefert $b = 0$ und damit $a = 0$.

Betrachten wir nun den Fall $\beta \notin \mathbb{N}$: Eine Lösung $y(x) = x^{\alpha_+}h(x)$ haben wir für oben. Um eine zweite Lösung zu erhalten, machen wir den Ansatz

$$y(x) = c(x)x^{\alpha_+}h_+(x)$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} c''(x)x^{\alpha_+}h_+(x) + c'(x)(2\alpha_+x^{\alpha_+-1}h_+(x) + 2x^{\alpha_+}h'_+(x) + \frac{p(x)}{x}x^{\alpha_+}h_+(x)) &= 0 \\ c''(x) + c'(x)(2\frac{\alpha_+}{x} + \frac{p(x)}{x} + 2\frac{h'_+(x)}{h_+(x)}) &= 0 \end{aligned}$$

Da

$$2\frac{\alpha_+}{x} + \frac{p(x)}{x} + 2\frac{h'_+(x)}{h_+(x)} = \frac{2\alpha_+ + p_0}{x} + h'_1(0) + p_1 + o(x)$$

können wir Lemma 3.7.2 nutzen und dies als GDGL für c' erster Ordnung auffassen und erhalten eine Lösung für $c'(x) = x^{-2\alpha_+ - p_0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = x^{\alpha_- - \alpha_+ - 1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Damit haben wir

$$c(x) = x^{\alpha_- - \alpha_+} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\alpha_- - \alpha_+ + k} x^k$$

falls $\alpha_+ - \alpha_- \notin \mathbb{N}$ und sonst

$$c(x) = x^{\alpha_- - \alpha_+} \sum_{k=0, k \neq m}^{\infty} \frac{c_k}{\alpha_- - \alpha_+ + k} x^k + c_m \ln x$$

falls $\alpha_+ - \alpha_- = m \in \mathbb{N}$. Im letzten Fall kann c_m auch Null sein, außer für $m = 0$.

Dieser Unterschied der Fälle $\alpha_+ - \alpha_-$ eine natürliche Zahl, ja oder nein, kommt daher, dass $\int x^a dx = \frac{1}{a} x^{a+1}$ falls $a \neq -1$ und sonst gleich $\ln |x|$ ist.

Zusammenfassend haben wir nachgerechnet (bis auf die Frage der Konvergenz, die wir hier weglassen):

Satz 3.7.3. Sei $y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y = 0$ und p, q seien konvergente Potenzreihen. Seien α_{\pm} die charakteristischen Exponenten. Seien $\alpha_{\pm} \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_+ \geq \alpha_-$ *. Dann gilt

(i) Falls $\alpha_+ - \alpha_- \notin \mathbb{N}$ ist, dann gibt es eine Basis von Lösungen der Form $y_{\pm}(x) = x^{\alpha_{\pm}}h_{\pm}(x)$ mit $h_{\pm}(0) = 1$ und h_{\pm} ist eine konvergente Potenzreihe nahe $x = 0$.

(ii) Falls $\alpha_+ - \alpha_- = m \in \mathbb{N}$ ist, dann gibt es eine Basis von Lösungen der Form

$$\begin{aligned} y_+(x) &= x^{\alpha_+}h_+(x) \\ y_-(x) &= x^{\alpha_-}h_-(x) + c \ln(x)y_+(x) \end{aligned}$$

mit $h_{\pm}(0) = 1$ und $c \in \mathbb{R}$. Für $m = 0$ ist $c \neq 0$.

* Auch für $\alpha_{\pm} \notin \mathbb{R}$ gilt der Satz. Dann muss $\alpha_{\pm} \geq \alpha_-$ durch $\operatorname{Re} \alpha_{\pm} \geq \operatorname{Re} \alpha_-$ ersetzt werden.

3.7. Regulär singuläre GDGL zweiter Ordnung

Gibt man sich für das letzte Theorem mehr Mühe, dann kann man zeigen, dass die Potenzreihen für h_{\pm} einen Konvergenzradius haben, der größer gleich dem Minimum der Konvergenzradien von p und q ist.

Beispiel 3.7.4 (Bessel-GDGL). Für $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu \geq 0$,

$$y'' + \frac{y'}{x} + \frac{x^2 - \nu^2}{x^2} y = 0$$

Hier ist $p(x) = p_0 = 1$ und $q(x) = x^2 - \nu^2$. Also $q_0 = -\nu^2$. Damit sind die charakteristischen Exponenten $\pm \mu$ und wir haben eine Lösung

$$y_1(x) = x^{\nu} h_{1,k} x^k \quad \text{mit } h_{1,0} = 1$$

und (Da alle p_j , q_j außer $p_0 = 1$, $q_0 = -\nu^2$, $q_2 = 1$ gleich Null sind.)

$$h_{1,1} = 0, h_{1,k} = \frac{-1}{(j+2\nu)j} h_{1,k-2} \quad \text{für alle } k \geq 2.$$

Dann ist

$$h_{1,2j+1} = 0, \quad h_{1,2j} = \frac{(-1)^j}{4^j j! (\nu+1)_j},$$

wobei

$$(x)_0 := 1, \quad (x)_j := x(x+1) \dots (x+j-1).$$

Die $(x)_j$ heißen *Pochhammersymbole*.

Man kann zeigen, dass $(x)_j = \frac{\Gamma(x+j)}{\Gamma(x)}$ gilt, wobei

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

die *Gammafunktion*. Es ist $\Gamma(1) = 1$ und mit partieller Integration sieht man $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, woraus die obige Formel folgt.

Damit haben wir nach Division durch $2^{\nu}\Gamma(\nu+1)$ als Lösung der Bessel-GDGL die *Besselfunktion*

$$J_{\nu}(x) = \frac{y_1(x)}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(\nu+j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\nu}$$

Für $2\nu \notin \mathbb{N}$ ist $J_{-\nu}(x)$ von $J_{\nu}(x)$ linear unabhängig und somit ist dann $J_{\nu}(x)$, $J_{-\nu}(x)$ eine Basis der Lösung der Bessel-GDGL.

Bleibt $2\nu \in \mathbb{N}$: Falls $2\nu = 2k+1$ ist für ein $k \in \mathbb{N}$ ist. Dann sind $(-\nu+1)_j \neq 0$ für alle j und somit haben wir hier als zweite und linear unabhängige Lösung noch immer $J_{-\nu}(x)$. Erst für $\nu \in \mathbb{N}$ treten im obigen Ansatz Probleme auf und wir würden beim Berechnen von h mal durch Null dividieren.

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Das heißt in diesem Fall muss man etwas anderes machen, z.B. den Ansatz

$$x^{-\nu} h_-(x) + c \ln x J_\nu(x)$$

folgen. Das führt dann auch zum Ziel, rechnen wir hier nicht vor.

Das ist meist nicht, was man als zweite Lösung in der Literatur findet. Sondern oft wird mit den *Hankelfunktionen* gearbeitet.

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\pi\nu)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}$$

Diese ist für alle $\nu \notin \mathbb{N}$ definiert und eine zu $J_\nu(x)$ linear unabhängige Lösung der Besseldifferentialgleichung.

Man kann zeigen, dass $\lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x)$ existiert und eine zu $J_n(x)$ linear unabhängige Lösung der Besseldifferentialgleichung zu $\nu = n$ ist.

A. Kurzzusammenfassung LinAlg zu Eigenwerten

A eine reelle $n \times n$ -Matrix

$Av = \lambda v$ mit $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ (*Eigenvektor*) $\lambda \in \mathbb{C}$ (*Eigenwert*)

Eigenraum zu λ : $E_\lambda := \{v \in \mathbb{C}^n \mid Av = \lambda v\}$

- Anzahl der Eigenwerte = n (gezählt mit Vielfachheit)
- 'Echt komplexe' Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ kommen immer in Paaren $(\lambda, \bar{\lambda})$:

$$Av = \lambda v \text{ genau dann, wenn } A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}.$$

- $\sum_{\lambda \text{ Eigenwert}} \dim_{\mathbb{C}} E_\lambda \leq n$ (vgl. 'algebraische vs. geometrische Vielfachheit der Eigenwerte' in Lineare Algebra)

•

$$\sum_{\lambda \text{ Eigenwert}} \dim_{\mathbb{C}} E_\lambda = n$$

$$\stackrel{\text{Def}}{\iff} A \text{ ist diagonalisierbar}$$

$$\iff \mathbb{C}^n \text{ besitzt eine Basis aus Eigenvektoren von } A$$

$$\iff \exists Q \in \text{Gl}(n, \mathbb{C}) : A = QDQ^{-1} \text{ mit } D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

- Wenn nicht diagonalisierbar? 'Nächst-Besseres' *Jordan-Normalform*:

D.h. es gibt ein $Q \in \text{Gl}(n, \mathbb{C})$, so dass $Q^{-1}AQ$ Blockgestalt und jeder Block (*Jordanblock*) die folgende Form für λ Eigenwert hat:

$$\begin{pmatrix} B_{\lambda_1, k_1} & & & & \\ & B_{\lambda_2, k_2} & \dots & & \\ & \vdots & & & \\ & & & B_{\lambda_r, k_r} & \end{pmatrix} \text{ mit } B_{\lambda_i, k_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}}_{k_i \times k_i \text{-Matrix}}$$

A. Kurzzusammenfassung LinAlg zu Eigenwerten

(Die λ_i sind nicht unbedingt verschieden. $\sum_{i=1}^r k_i = n$. Hat A schon die Form einer Jordan-Normalform, dann ist es auch schon seine eigene Jordan-Normalform. Die Jordan-Normalform ist eindeutig bis auf vertauschen der Jordanblöcke. Ist A diagonalisierbar, dann hat die Jordan-Normalform Diagonalgestalt.)

- Sind alle Eigenwerte reell, können die Eigenvektoren und Q reell gewählt werden und alles von oben gilt auch für jeweiligen reellen Eigenräume (also als reelle Vektorräume).

Wie rechnet man das alles aus?

1. Eigenwerte = Nullstellen des charakteristischen Polynoms* $\det(A - \lambda \text{Id}_n)$.
2. Eigenraum E_λ : Lineares Gleichungssystem $(A - \lambda \text{Id}_n)v = 0$ lösen.
3. Diagonalisierbar? Ja, wenn $\sum_{\lambda \text{ Eigenwert}} \dim_{\mathbb{C}} E_\lambda = n$.

Sei $v_{i,1}, \dots, v_{i,d_i}$ eine Basis des Eigenraums zu λ_i . Setze

$$Q = (v_{1,1}, \dots, v_{1,d_1}, v_{2,1}, \dots, v_{2,d_2}, \dots, v_{\ell,1}, \dots, v_{\ell,d_\ell}).$$

Dann ist $Q^{-1}AQ = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{d_1\text{-mal}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{d_2\text{-mal}}, \dots, \underbrace{\lambda_\ell, \dots, \lambda_\ell}_{d_\ell\text{-mal}})$

4. Sonst: Jordan-Normalform

- Für jeden Eigenwert λ : Bestimme kleinstes k mit $(A - \lambda \text{Id})^k = 0$.
- Berechne die Kerne von $(A - \lambda \text{Id})^\ell$ für $\ell \leq k - 1$.
- $d_\ell := \dim \ker(A - \lambda \text{Id})^\ell - \dim \ker(A - \lambda \text{Id})^{\ell-1}$
- $v_{1,k}, \dots, v_{d_k,k}$ Basis[†] von $(A - \lambda \text{Id})^k / (A - \lambda \text{Id})^{k-1}$ (*Hauptvektoren m.ter Stufe*)
- Für $j = k$ bis $j = 2$:
 - Sei $v_{i,j-1} := (A - \lambda \text{Id})v_{i,j}$ für $1 \leq i \leq d_j$.
 - Falls $d_{j-1} > d_j$, ergänze $v_{1,j-1}, \dots, v_{d_j,j-1}$ zu einer Basis von $\ker(A - \lambda \text{Id})^{j-1} / \ker(A - \lambda \text{Id})^{j-2}$.
($v_{1,j-1}, \dots, v_{d_{j-1},j-1}$ *Hauptvektoren j-1.ter Stufe.*)
- Setze $Q_\lambda = (v_{1,1}, \dots, v_{1,k}, v_{2,1}, \dots, v_{2,*}, v_{3,1}, \dots)$ mit $* \leq k^\ddagger$ und $Q = (Q_{\lambda_1}, \dots, Q_{\lambda_r})$. Dann hat $Q^{-1}AQ$ Jordannormalform.

*Das ist ein Polynom n -ten Grades in λ .

†Streng formuliert ist $v_{i,k} + \ker(A - \lambda \text{Id})^{k-1}$ eigentlich eine Basis dieses Quotientenraumes. Wir wählen hier Repräsentanten dieser Äquivalenzklassen.

‡Hier ist jeweils $v_{i,1}$ ein Eigenvektor zu λ und $v_{1,\ell}$ der zu $v_{1,1}$ gehörige Hauptvektor j -ter Stufe.

Literaturverzeichnis

- [1] BERTSEKAS, D. P. Constrained optimization and Lagrange multiplier methods. Computer Science and Applied Mathematics. New York - London etc.: Academic Press. A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. XIII, 395 p. (1982)., 1982.
- [2] GROSSE, N. Analysis I, Skript, WS 2020/21, Uni Freiburg. https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisI/Analysis1_WS-2021_Skript.pdf.
- [3] LANG, S. *Undergraduate analysis. (Rev. version of "Analysis I". Addison-Wesley, 1968).* Springer, Cham, 1983.
- [4] MEYER, C. D. *Matrix analysis and applied linear algebra (incl. CD-ROM and solutions manual).* Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2000.