Stochastik **Wintersemester 2021/22**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 1

Abgabe: Freitag, 05.11.2021, 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Wie wahrscheinlich ist es, beim Lotto (6 aus 49) so zu ziehen, dass mindestens ein benachbartes Zahlenpaar dabei ist, also dass bei einer Ziehung $z = (z_1, z_2, \dots, z_6)$ ein $i \in \{1, \dots, 5\}$ existiert, sodass $z_{i+1} = z_i + 1$?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** 77 gleichartige Kugeln werden nacheinander zufällig in 999 durchnumerierte Schachteln gelegt, dabei wird bei der Wahl der Schachtel für eine Kugel keine der Schachteln bevorzugt. Wie wahrscheinlich ist es, dass in den Schachteln 1–11 zusammen 7 Kugeln liegen, wenn

1. in jede Schachtel beliebig viele Kugeln passen bzw.
2. in jede Schachtel nur eine Kugel passt?

Hinweis. Formalisieren Sie die Ereignisse als Teilmengen entsprechender Grundräume.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sie haben drei faire 6-seitige Würfel W_1, W_2, W_3, deren Seiten unbeschriftet sind. Gibt es eine Möglichkeit die Würfel derart mit natürlichen Zahlen zu beschriften, dass für ihre jeweiligen Würfelergebnisse $X_1, \dots, X_3$ gilt

$$\mathrm{P}(X_1 > X_2) > 1/2, \qquad \mathrm{P}(X_2 > X_3) > 1/2 \text{ und } \mathrm{P}(X_3 > X_1) > 1/2?$$

Liefern Sie ein Beispiel oder einen Gegenbeweis.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Wie wahrscheinlich ist es, dass sich folgende zufällig auf einem Schachbrett platzierte Figuren schlagen können?

1. Zwei Türme
2. Zwei Läufer
3. Zwei Damen

Geben Sie einen geeigneten Grundraum Ω an und formalisieren Sie die Ereignisse als Teilmengen.

Stochastik I Blatt 1

Lorenz Bung

lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Luis Jaschke

luis.jaschke.99@gmail.com

Matr.-Nr. 5105153

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Wie wahrscheinlich ist es, beim Lotto (6 aus 49) so zu ziehen, dass mindestens ein benachbartes Zahlenpaar dabei ist, also dass bei einer Ziehung $z = (z_1, z_2, \ldots, z_6)$ ein $i \in \{1, \ldots, 5\}$ existiert, sodass $z_{i+1} = z_i + 1$?

Aufgabe 1

Sei $X = \{x \in \mathbb{N}^6 \mid 1 \leq x_i \leq 49, x_i + 1 \neq x_{i+1}, x_i < x_j \text{ für } i < j\}$
und $Y = \{x \in \mathbb{N}^6 \mid 1 \leq x_i \leq 44, x_i < x_j \text{ für } i < j\}$
Damit entspricht X der Menge aller Lottoziehungen 6 aus 49 ohne benachbarte Zahlen und Y der Menge aller Lottoziehungen 6 aus 44.
Wir zeigen nun $|X| = |Y|$ indem wir zeigen es gibt eine bijektive Abbildung $f: X \to Y$
Sei $f: X \to Y, (x_1, \ldots, x_6) \mapsto (x_1, x_2 - 1, x_3 - 2, \ldots, x_6 - 5)$
zz: f ist wohldefiniert und Bijektiv.
Wohldefiniertheit: für $x \in X$ ist $f(x)$ ein element aus $\mathbb{N}^6$ wenn für $f(x) = y$ alle $y_i \geq 1$ sind
Wir zeigen nun noch für $f(x) = y$ das gilt $1 \leq y_i \leq 44$. Die kleinstmöglichen y_i können wir offensichtlich erhalten wenn alle x_i kleinstmöglich waren also $x = (1, 3, 5, 7, 9, 11)$
$\Rightarrow f(x) = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ also $y_i \geq 1$
Die größtmöglichen y_i erhalten wir offensichtlich wenn die x_i schon größtmöglich waren
also $x = (39, 41, 43, 45, 47, 49)$
$\Rightarrow f(x) = (39, 40, 41, 42, 43, 44)$ also $y_i \leq 44$
noch zu zeigen $y_i < y_j$ für $i < j$
Der kleinstmöglich Abstand zwischen den y_i erhält man offensichtlich wenn der Abstand der x_i minimal ist also wenn
$x = (x_1, x_1 + 2, x_1 + 4, x_1 + 6, x_1 + 8, x_1 + 10)$ für
$1 \leq x_1 \leq 39$
$\Rightarrow f(x) = (x_1, x_1 + 1, x_1 + 2, x_1 + 3, x_1 + 4, x_1 + 5)$ also
$y_i < y_j$ für $i < j$

$\Rightarrow \forall x \in X$ ist $f(x) \in Y$ also f ist wohldefiniert

<u>Bijektivität</u>: Definiere die Abbildung

$g: Y \to X, (x_1, x_2, \dots, x_6) \mapsto (x_1, x_2+1, x_3+2, \dots, x_6+5)$

dann ist für $x \in X$

$g(f(x)) = g(x_1, x_2-1, x_3-2, \dots, x_6-5) =$

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_6) = x$ also

$g \circ f$ ist die Identität auf X. Außerdem ist für $x \in Y$

$f(g(x)) = f(x_1, x_2+1, x_3+2, \dots, x_6+5) =$

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_6) = x$ also ist

$f \circ g$ die Identität auf Y

Die Wohldefiniertheit von g folgt analog wie die von f und aus der Wohldefiniertheit von f. Also ist $g = f^{-1}$ und somit f bijektiv also $|X| = |Y|$

Sei nun $\Omega = \{x \in \mathbb{N}^6 \mid 1 \leq x_i \leq 49,\ x_i < x_j \text{ für } i<j\}$

dann ist $A = \{x \in \Omega \mid \text{es gibt } i \in \{1, \dots, 5\} \text{ derart dass } x_i + 1 = x_{i+1}\}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$

$\mathbb{P}(A^c) = \frac{|X|}{\binom{49}{6}} = \frac{\binom{44}{6}}{\binom{49}{6}}$ also

$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{\binom{44}{6}}{\binom{49}{6}}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A) \approx 1 - 0{,}505 = 0{,}495$

$\square$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** 77 gleichartige Kugeln werden nacheinander zufällig in 999 durchnumerierte Schachteln gelegt, dabei wird bei der Wahl der Schachtel für eine Kugel keine der Schachteln bevorzugt. Wie wahrscheinlich ist es, dass in den Schachteln 1–11 zusammen 7 Kugeln liegen, wenn

1. in jede Schachtel beliebig viele Kugeln passen bzw.

Wir betrachten eine 77-fache Ziehung aus den Schachteln mit Zurücklegen.
Unser Grundraum lautet also

$$\Omega = \{x \in \mathbb{N}^{77} \mid 1 \leq x_i \leq 999 \text{ für } 1 \leq i \leq 77\}.$$

Insgesamt handelt sich um ein Urnenmodell mit Zurücklegen, wir erhalten also mit der Binomialverteilung (Gleichung 2.22):

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{mit } p = \frac{K}{N}.$$

In unserem Fall haben wir $k=7$, $n=77$, $K=11$, $N=999$ und damit $p = \frac{K}{N} = \frac{11}{999}$.

Insgesamt erhalten wir

$$P(X=7) = \binom{77}{7} \cdot \left(\frac{11}{999}\right)^7 \cdot \left(\frac{988}{999}\right)^{70} \approx 2{,}17407 \cdot 10^{-3}\ \%.$$

2. in jede Schachtel nur eine Kugel passt?

Hier handelt es sich jetzt um ein Urnenmodell ohne Zurücklegen.
Mit Gleichung 2.23 (hypergeometrische Verteilung) erhalten wir nun

$$P(X=k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \text{also in unserem Fall}$$

$$P(X=7) = \frac{\binom{11}{7} \cdot \binom{988}{70}}{\binom{999}{77}} \approx 3{,}0683 \cdot 10^{-4}\ \%.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sie haben drei faire 6-seitige Würfel W_1, W_2, W_3, deren Seiten unbeschriftet sind. Gibt es eine Möglichkeit die Würfel derart mit natürlichen Zahlen zu beschriften, dass für ihre jeweiligen Würfelergebnisse $X_1, \dots, X_3$ gilt

$$P(X_1 > X_2) > 1/2, \qquad P(X_2 > X_3) > 1/2 \text{ und } P(X_3 > X_1) > 1/2?$$

Liefern Sie ein Beispiel oder einen Gegenbeweis.

Aufgabe 3

Sei $\Omega = \{(X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{N}^3\}$ und sei

$A_1 = \{x \in \Omega \mid x_1 > x_2\}$

$A_2 = \{x \in \Omega \mid x_2 > x_3\}$

$A_3 = \{x \in \Omega \mid x_3 > x_1\}$

dann gilt nach den gegebenen Informationen

$P(A_1) = P(x_1 > x_2) > \frac{1}{2}$

$P(A_2) = P(x_2 > x_3) > \frac{1}{2}$

$P(A_3) = P(x_3 > x_1) > \frac{1}{2}$

Dann gilt somit nach 2.7 im Skript

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

$\Rightarrow P((A_1 \cup A_2) \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3)$

Da $A_1 \cap A_2 \subset A_1$ und $A_1 \cap A_2 \subset A_2$ folgt nach Skript 2.9 $P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1)$

Außerdem gilt $A_1 \cup A_2 = \{x \in \Omega \mid x_1 > x_2 > x_3\}$

$\Rightarrow (A_1 \cup A_2) \cap A_3 = \emptyset$

$\Rightarrow P((A_1 \cup A_2) \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(\emptyset) \geq$
$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1) = P(A_2) + P(A_3) > 1$

Dies ist ein Widerspruch da für ein beliebiges Ereignis A gilt $P(A) \leq 1$

$\Rightarrow$ Die Angenommenen Wahrscheinlichkeiten können so nicht existiere

$\boxtimes$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Wie wahrscheinlich ist es, dass sich folgende zufällig auf einem Schachbrett platzierte Figuren schlagen können?

1. Zwei Türme

Aufgabe 4

4.1) Sei der Grundraum Ω_1 gegeben durch

$$\Omega_1 = \{((a,b),(x,y)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq a,b,x,y \leq 8 \text{ und } a \neq x \vee b \neq y\}$$

Dann ist das Ereignis A_1 dass sich zwei beliebig platzierte Türme schlagen können gegeben durch

$$A_1 = \{((a,b),(x,y)) \in \Omega_1 \mid a = x \vee b = y\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{14}{63} = \frac{2}{9}$$

2. Zwei Läufer

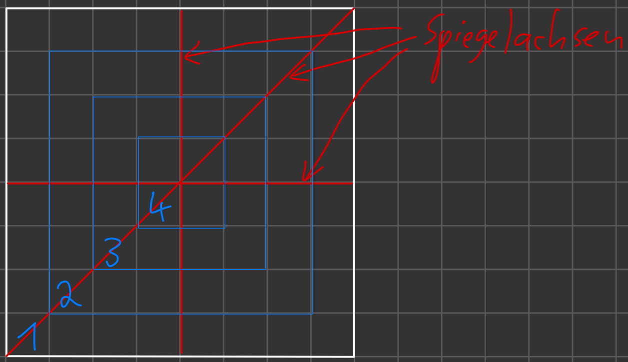
Da es sich immer noch um das Schachspiel handelt, ist der Grundraum Ω derselbe wie in Teilaufgabe 1.

Zwei Läufer können einander schlagen, wenn sie auf derselben Diagonale auf dem Brett stehen.

Für unser Ereignis A_2 bekommen wir damit

$$A_2 = \{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in \Omega \mid x_1+y_1 = x_2+y_2 \text{ und } x_1-y_1 = x_2-y_2\}.$$

Berücksichtigt man Symmetrien auf dem Schachbrett, lässt sich dieses Ereignis in vier Fälle aufteilen:



Fall 1: Der erste Läufer steht auf einem Randfeld. Dann gibt es 7 Felder, auf denen der 2. Läufer geschlagen werden könnte. Es gibt 28 solche Randfelder.

Fall 2: Der erste Läufer steht ein Feld vom Rand entfernt. Dann gibt es 9 Felder, auf denen der 2. Läufer geschlagen werden könnte. Es gibt 20 Felder, auf denen dieser Fall eintritt.

Fall 3: Der erste Läufer steht zwei Felder vom Rand entfernt. Dann gibt es 11 Felder, auf denen der 2. Läufer geschlagen werden könnte. Es gibt 12 Felder, auf denen dieser Fall eintritt.

Fall 4: Der erste Läufer steht drei Felder vom Rand entfernt bzw. auf einem der mittleren Felder. Dann gibt es 13 Felder, auf denen der 2. Läufer geschlagen werden könnte. Es gibt 4 solche Felder im Zentrum.

Insgesamt haben wir also

$$P(A_2) = \frac{28}{64} \cdot P(\text{Fall } 1) + \frac{20}{64} \cdot P(\text{Fall } 2) + \frac{12}{64} \cdot P(\text{Fall } 3) + \frac{4}{64} \cdot P(\text{Fall } 4)$$
$$= \frac{28}{64} \cdot \frac{7}{63} + \frac{20}{64} \cdot \frac{9}{63} + \frac{12}{64} \cdot \frac{11}{63} + \frac{4}{64} \cdot \frac{13}{63}$$
$$\approx 13{,}9\,\%.$$

3. Zwei Damen

Die Dame kann sich sowohl wie ein Turm als auch wie ein Läufer bewegen. Wir erhalten also für unser Ereignis

$$A_3 = A_1 \cup A_2.$$

Nach Rechenregel 2.7 ist damit

$$P(A_3) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(\underbrace{A_1 \cap A_2}_{=\emptyset})$$
$$= P(A_1) + P(A_2) \approx 36{,}1\,\%.$$