Übungsblatt 3

Aufgabe 7 (2+1+2). (i) Sei $\Omega = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subset Q = [0,1]$. Zeigen Sie, dass 1_Ω nicht integrierbar ist.

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, so dass 1_Ω integrierbar ist und $\operatorname{vol} \Omega = 0$. Sei $A \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass dann auch 1_A integrierbar ist und $\operatorname{vol} A = 0$ gilt.

(iii) Sei $\Omega \subset [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ das rechtwinklige, gleichschenklige Dreieck mit Kantenlänge 1, so dass die beiden Katheten jeweils auf der x- bzw. y-Achse liegen. Bestimmen Sie $S_k(1_\Omega)$ und $S_k(1_\Omega)$ und damit dann (unter Verwendung der Definition der Integrierbarkeit) $\int_{[0,1]^2} 1_\Omega \mathrm{dvol}$.

Aufgabe 8 (1+2+2). (i) Berechnen Sie $\int_{[0,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\pi]} \sin(x+y)\mathrm{dvol}$.

(ii) Bestimmen und skizzieren Sie $\Omega \subset [0,a] \times [0,a] \subset \mathbb{R}^2$, $a > 1$, so dass 1_Ω integrierbar ist (begründen Sie dann auch, warum es integrierbar ist) und das Anwenden von Fubini

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_0^a \left(\int_0^x dy \right) dx$$

ergibt. Wenden Sie auf dieses Ω Fubini mit vertauschter Integrationsreihenfolge an und bestimmen Sie damit die Integrationsgrenzen in

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_?^? \left(\int_?^? dx \right) dy.$$

(iii) Lösen Sie (ii) noch einmal für

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_0^a \left(\int_{a-x}^{a^2-x^2} dy \right) dx$$

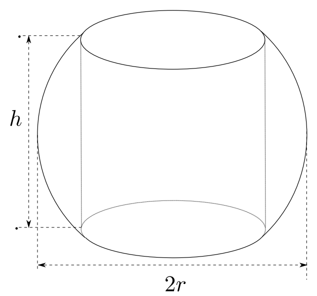
mit $\Omega \subset [0,a] \times [0,a^2]$ für $a > 1$.

Aufgabe 9 (2.5+2.5). (Prinzip des Cavalieri)

(i) Seien $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1,2$, beschränkt und so dass $1_{\Omega_i} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar sind. Für $h \in \mathbb{R}$ fassen wir $\Omega_{i,h} := \Omega_i \cap \{x_n = h\} \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{x_n = h\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$. Sei nun für alle $h \in \mathbb{R}$ die Funktion $1_{\Omega_{i,h}} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ integrierbar. Sei $\operatorname{vol}_{n-1} \Omega_{i,h} := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 1_{\Omega_{i,h}} \mathrm{dvol}$ (vgl. Bemerkung 1.2.4). Sei $\operatorname{vol}_{n-1} \Omega_{1,h} = \operatorname{vol}_{n-1} \Omega_{2,h}$ für alle $h \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $\operatorname{vol} \Omega_1 = \operatorname{vol} \Omega_2$ gilt.

(ii) (Serviettenring-Problem)

Sie haben eine Kugel von Radius r und stechen mittels eines Zylinders, dessen Achse durch den Mittelpunkt der Kugel geht, ein Teil der Kugel aus. Dann bleibt (wenn der Radius des Zylinders kleiner r war) ein Rest übrig. Dieser Rest habe Höhe h. Zeigen Sie, dass das Volumen dieses Restes nicht vom Radius der ursprüngliches Kugel abhängt.



Abgabe am Dienstag 15.11.22 bis 18 Uhr

Blatt 3

Lorenz Bung
Lea Weissenrieder

(7)

i) Sei $\Omega = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subset Q = [0,1]$

<u>z:</u> 1_Ω ist nicht integrierbar

<u>Bew:</u> aus ANA I wissen wir, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt $\Rightarrow$ in jedem endl. Teilintervall von $[0,1]$ liegen rationale und irrationale Zahlen

$$1_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \inf(1_\Omega) = 0 \\ \sup(1_\Omega) = 1 \end{matrix}$$

vol $Q = |1-0| = 1$

$$S_k(1_\Omega) = \frac{\text{vol } Q}{k} \sum_{k=1}^{n} \inf_{x \in Q^k} (1_\Omega) = \frac{1}{k} \cdot 0 = 0$$

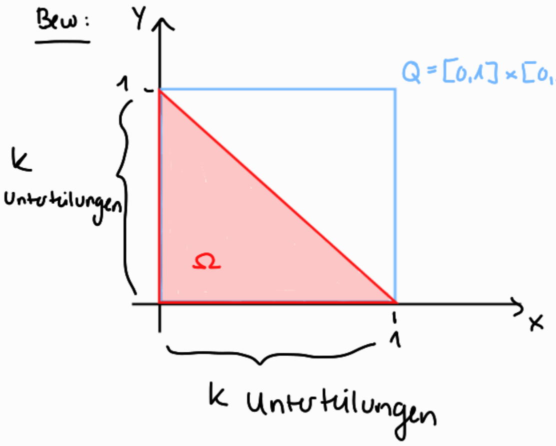
$$S^k(1_\Omega) = \frac{1}{k} \sum_{k=1}^{n} \sup_{x \in Q^k} (1_\Omega) = \frac{1}{k} \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{k} \cdot k = 1$$

$\Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} S_k(1_\Omega) \neq \lim\limits_{k \to \infty} S^k(1_\Omega)$ und damit ist 1_Ω nicht integrierbar.

iii) $\Omega \subset \underset{Q}{\underset{\shortparallel}{[0,1]^2}} \subset \mathbb{R}^2$ sei das rechtwinklige, gleichschenklige Dreieck mit Kantenlänge 1, s.d. die Katheten auf den Koordinatenachsen liegen.

<u>z:</u> $S_k(1_\Omega)$, $S^k(1_\Omega)$ und $\int_{[0,1]^2} 1_\Omega \, d\text{vol}$

<u>Bew:</u>



$$\text{vol } Q = \prod_{j=1}^{2} |b_j - a_j| = |b_1 - a_1| \cdot |b_2 - a_2| = 1 \cdot 1 = 1$$

$$S_k(1_\Omega) = \frac{\text{vol } Q}{k^2} \sum_{i_1, i_2 = 1}^{k} \inf_{x \in Q^k_{i_1 i_2}} 1_\Omega(x)$$

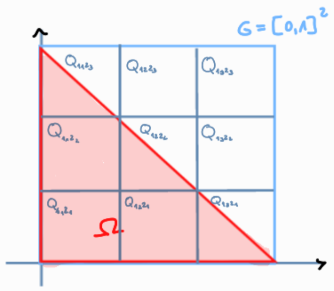
— für die $Q_{i_1 i_2}$ die unterhalb der "Diagonale" des Dreiecks liegen wird der Wert 1, für die anderen 0, die Anzahl wird ermittelt durch $k^2 - \frac{(k-1)k}{2}$ (k^2: Anzahl aller Quadrate) ($\frac{(k-1)k}{2}$: abgeleitet von der Dreieckszahl)

$$= \frac{1}{k^2}\left(k^2 - \frac{(k-1)k}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{k^2}\left(k^2 - \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2}\right)$$

$$= \frac{k^2}{k^2} - \frac{k^2}{2k^2} - \frac{k}{2k^2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$$

für $k = 3$:



$$S^k(1_\Omega) = \frac{\text{vol } Q}{k^2} \sum_{i_1, i_2 = 1}^{k} \sup_{x \in Q^k_{i_1 i_2}} 1_\Omega(x)$$

für die $Q_{i_1 i_2}$ die gänzlich oberhalb der "Diagonale" des Dreiecks liegen wird der Wert 0, für die anderen 1, die Anzahl wird ermittelt durch $k^2 - \frac{(k-2)(k-1)}{2}$ (k^2: Anzahl aller Quadrate) ($\frac{(k-2)(k-1)}{2}$: abgeleitet von der Dreieckszahl)

$$= \frac{1}{k^2}\left(k^2 - \frac{(k-2)(k-1)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{k^2}\left(k^2 - \frac{k^2 - 3k + 1}{2}\right)$$

$$= \frac{k^2}{k^2} - \frac{k^2}{2k^2} - \frac{3k}{2k^2} + \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2k} + \frac{1}{2k^2}$$

$$\int_Q 1_\Omega \, d\text{vol} = \lim_{k \to \infty} S_k(1_\Omega) = \lim_{k \to \infty}\left(\frac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{2k}}_{\to 0}\right) = \frac{1}{2}$$

$$" \lim_{k \to \infty} S^k(1_\Omega) = \lim_{k \to \infty}\left(\frac{1}{2} - \underbrace{\frac{3}{2k}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{2k^2}}_{\to 0}\right) = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 8 (1+2+2). (i) Berechnen Sie $\int_{[0,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\pi]} \sin(x+y)\mathrm{dvol}$.

$$\int_{[0,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\pi]} \sin(x+y)\,dvol = \int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^\pi \left[-\cos(x+y)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx = \int_0^\pi -\cos(x+\pi)+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^\pi \cos(x)+\sin(x)\,dx = \left[\sin(x)-\cos(x)\right]_0^\pi$$

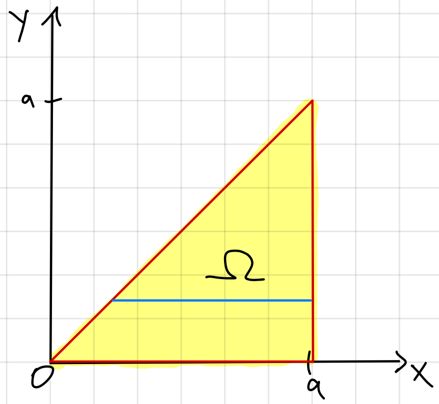
$$= 0-(-1)-(0-1) = 2.$$

(ii) Bestimmen und skizzieren Sie $\Omega \subset [0,a]\times[0,a] \subset \mathbb{R}^2$, $a>1$, so dass 1_Ω integrierbar ist (begründen Sie dann auch, warum es integrierbar ist) und das Anwenden von Fubini

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_0^a \left(\int_0^x dy\right) dx$$

ergibt. Wenden Sie auf dieses Ω Fubini mit vertauschter Integrationsreihenfolge an und bestimmen Sie damit die Integrationsgrenzen in

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_?^? \left(\int_?^? dx\right) dy.$$



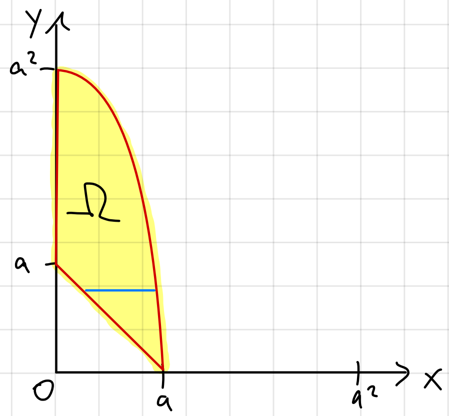
$$\int_\Omega dvol = \int_0^a \left(\int_0^x dy\right) dx$$
$$= \int_0^a \left(\int_y^a dx\right) dy$$

Betrachtet man den blauen Streifen, integrieren wir von y bis a in x-Richtung. Dies tun wir für alle y in $[0,a]$, weswegen die Integrationsgrenzen zustande kommen.

(iii) Lösen Sie (ii) noch einmal für

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_0^a \left(\int_{a-x}^{a^2-x^2} dy\right) dx$$

mit $\Omega \subset [0,a]\times[0,a^2]$ für $a>1$.



$$\int_\Omega dvol = \int_0^a \left(\int_{a-x}^{a^2-x^2} dy\right) dx$$

$$= \int_0^{a^2} \left(\int_{\max\{0,a-y\}}^{\sqrt{-y+a^2}} dx\right) dy$$

Auch hier kann man den blauen Streifen beachten: wir starten bei $\max\{0,a-y\}$ und integrieren bis zur „Parabel" – also bis $\sqrt{-y+a^2}$. Das tun wir für alle y von 0 bis a^2. Die Integrationsgrenzen sind entsprechend gewählt.

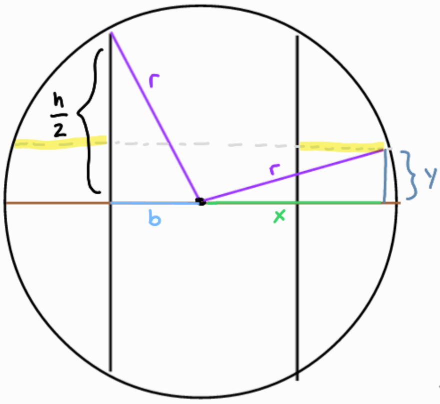
Zu (ii) und (iii): Die Indikatorfunktionen 1_Ω sind jeweils integrierbar, da die Menge Ω als abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ jeweils kompakt ist.

9

ii) z.z.: Das Volumen des Serviettenrings hängt nicht vom Radius r der Kugel ab

Bew.: Sei r der Radius der Kugel, h die Höhe des Zylinders, der ausgestochen wird.

Seitenansicht

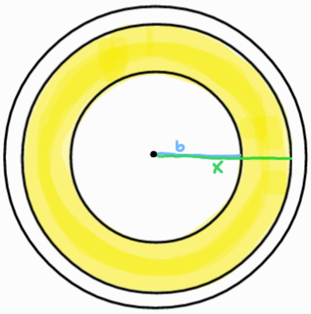


Mit dem Satz des Pythagoras ermitteln wir den Radius b des Zylinders:

$$b = \sqrt{r^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

Wir betrachten nun die obere Hälfte des Serviettenrings (die Hälfte sei bei der breitesten Stelle der urspr. Kugel)

von oben:



Bei der Höhe y schneiden wir den Serviettenring horizontal. Wir wollen nun die Schnittfläche A_y bestimmen. Dafür benötigen wir den Radius x des entstehenden Kreis, den wir erneut mit dem Satz des Pythagoras bestimmen können:

$$x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

Wir können nun die Querschnittsfläche A_y (in Abhängigkeit zu einer Höhe y) bestimmen:

$$A_y = \pi \cdot x^2 - \pi \cdot b^2 = \pi\left(x^2 - b^2\right) = \pi\left(r^2 - y^2 - \left(r^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2\right)\right)$$

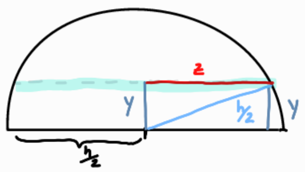
$$= \pi\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right).$$

Wir sehen, dass die Querschnittsfläche unabhängig vom Radius der ursprünglichen Kugel ist (solange $y \leq \frac{h}{2} \leq r$).

Das Volumen der Kugel ist die Summe all dieser Querschnittsflächen zu Höhe y $\left(V_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} A_y \, dy\right)$

Wir betrachten nun eine Kugel mit Radius $\frac{h}{2}$ (sie hat somit die selbe Höhe wie der Serviettenring), und machen auch hier einen Querschnitt bei der Höhe y oberhalb der Hälfte der Kugel. Auch hier wollen wir die Querschnittsfläche A'_y bestimmen:

obere Hälfte der Kugel mit Radius $\frac{h}{2}$



$$A'_y = \pi \cdot z^2 = \pi \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2}\right)^2 = \pi \cdot \left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right)$$

(hier h)

Wir sehen nun, dass $A_y = A'_y$ (für alle $y \leq h/2$).

Wenden wir nun das Prinzip des Cavalieri an, das besagt, dass Körper gleicher Höhe, wenn sie in jeweils gleicher Höhe flächengleiche Querschnitte haben volumengleich sind, können wir schließen, dass der Serviettenring dasselbe Volumen wie eine Kugel mit Radius $h/2$ hat.

$$\Rightarrow V_s = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\cdot\pi\,\frac{h^3}{8} = \frac{\pi h^3}{6}$$

, was nicht vom Radius r, der ursprünglichen Kugel abhängt. $\blacksquare$