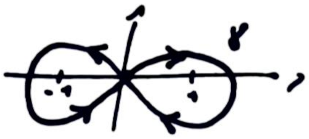
Aufg. 1 | Berechne die folgenden Integrale:

a) $$\int_{\partial B_1(i)} \frac{\sin(z)}{(z^2+1)^2}\, dz$$

b) $$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2-1}\, dz$$ für γ die Lemniskate:



(nur einmal rum)

Aufg. 2 | Berechne die folgenden Wegintegrale für γ diese Kurve:

a) $$\int_\gamma \sin z \, dz$$

b) $$\int_\gamma \bar{z}\, dz$$

c) $$\int_\gamma \frac{1}{z-\frac{i}{2}-\frac{1}{2}}\, dz$$

d) $$\int_\gamma \frac{\sin z}{\left(z^2-\frac{1}{2}(i+1)\right)^3}\, dz$$

Aufg. 3 | Sind $\cosh(z)$ und $\sinh(z)$ holomorphe Fkt?

Aufg. 4 | Ist für ($f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph) auch $g(z) = \mathrm{Im}(f) + i\,\mathrm{Re}(f)$ holomorph? Überlege dir was g anschaulich macht und wie das mit deiner Antwort zusammenpasst.

Aufg. 5 | Berechne das Wegintegral 2. Art für γ dieser Weg:

und $V(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$

- $\int_\gamma V \, ds$

Aufg. 6 | Berechne das Oberflächenintegral von $V(x,y,z) = (z\sin(y), xz^3, y\cos x)$ auf der Sphäre S^2:

- $\int_{S^2} \langle V, N \rangle \, d\mathrm{vol}_2$

einheits-normalen-vektor

Aufg. 7 | a) ~~Ist~~ Begründe, dass die Menge gegeben durch

$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y^2 = -z^3\}$

eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ~~&~~ ist

b) ~~Welche für~~ Welche Dimension?

c) gib (eine) lokale Parametrisierung(en) an.

d) Bestimme die Funktionaldeterminante von F und berechne damit den Flächeninhalt von $M \cap (\mathbb{R} \times [0,1] \times [0,1])$.

Aufg. 8 | Gegeben ist die lokale Parametrisierung

$$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \longmapsto (u, v, u \cdot v)$$

~~Berechne für das Volumen der Fläche~~

~~[illegible]~~ .

Berechne für $f(x,y,z) = z \cdot \sqrt{1+x^2+y^2}$

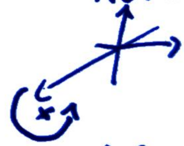
das Integral über die Fläche

~~[illegible]~~. $F\big((0,1) \times (0,2)\big)$

Aufg. 9 | Berechne für $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x,y,z \geq 0\}$
(wie sieht die Menge aus?)

und die Dichtefunktion $\rho(x,y,z) = y$

- die Masse.
- das Trägheitsmoment bzgl. der Rotation um die x-Achse



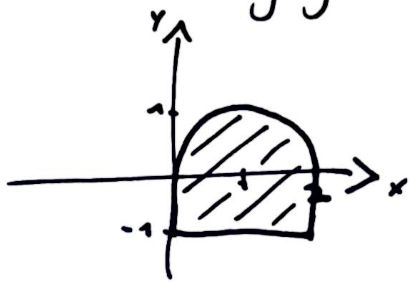
- die x-Koordinate des Schwerpunkts.

Aufg. 10 | Berechne:

a) über $B_R(0)$ die Funktion $f(x,y,z) = |x+y|$

b) über den Zylinder von $z=0$ bis $z=\frac{\pi}{2}$ die Funktion $f(x,y,z) = |zx|$

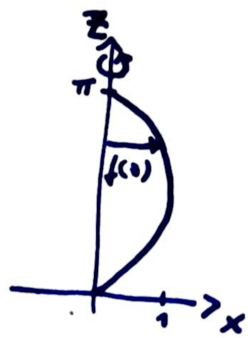
Aufg. 11 | Berechne den Schwerpunkt der angegebenen Figur:



mit $\rho(x,y) = |xy|$

Aufg. 12 | Berechne das Volumen des Rotationskörpers mit

$f(z) = \sin(z)$ von $z=0$ bis $z=\pi$



Aufg. 13 | Berechne für $\gamma(t) = (r\cos t,\ r\sin(t),\ t)$, $t \in [0, 2\pi)$ und $f(x,y,z) = x \cdot z$ das Wegintegral 1. Art:

$$\int_\gamma f \, ds.$$

Wie sieht γ aus?

Aufgabe 14 | zeige mit der Definition des Integrals (Ober-/Untersumme), dass

a) $\mathbb{1}_{\partial[0,1]^2} : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$

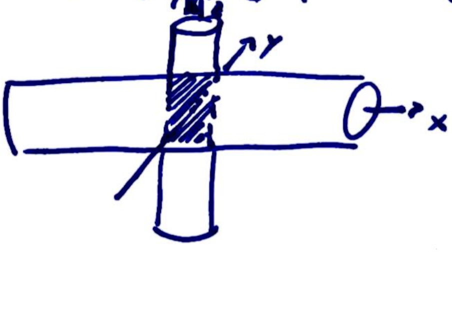
b) $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x \cdot y$

integrierbar sind.

Aufgabe 15 | Integriere $f(x,y) = xy(1-x-y)$ über das Dreieck $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$.

Aufgabe 16 | Bestimme das Volumen des Schnitts der Vollzylinder mit:

$x^2 + y^2 \leq 1$ und $y^2 + z^2 \leq 1$



Aufg 1

a) Veralg. CIF (aber erst „in Form" bringen):

$$\int_{\partial B_1(i)} \frac{\sin z}{(z^2+1)^2}\,dz = \int \frac{\sin z \,\frac{1}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}$$

$$= 2\pi i \cdot \left(\sin(z)\cdot \frac{1}{(z+i)^2}\right)'(i)$$

$$= 2\pi i \cdot \left(\cos(i)\cdot \frac{1}{(i+i)^2} + \sin(i)\cdot\frac{-2}{(i+i)^3}\right)$$

$$= 2\pi i \cdot \left(-\cos(i)\,\frac{1}{4} + \sin(i)\cdot\frac{1}{4i}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\pi i \cos(i) + \frac{1}{2}\pi \sin(i)$$

b) zerlege γ in zwei Kurven: γ_1  und γ_2  :

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2-1}\,dz = \int_{\gamma_1}\frac{e^z}{z^2-1}\,dz + \int_{\gamma_2}\frac{e^z}{z^2-1}\,dz$$

Wir lassen nur die Singularität „innerhalb" der Kurve im Nenner stehen

$$= \int_{\gamma_1}\frac{e^z\cdot\frac{1}{z-1}}{z+1}\,dz + \int_{\gamma_2}\frac{e^z\cdot\frac{1}{z+1}}{z-1}\,dz$$

$$\overset{CIF}{=} 2\pi i\cdot e^{-1}\,\frac{1}{-2} \cancel{+} 2\pi i\cdot e^{1}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= -\pi i(e^{1} + e^{-1})$$

Minus weil der Drehsinn von gamma_2 negativ ist

Aufg. 2

a) $\int_\gamma \sin z \, dz \overset{\text{CIS}}{=} 0$ weil $\sin(z)$ überall holomorph ist

b) $\int_\gamma \bar{z} \, dz = \int_0^1 -it \cdot i \, dt$

$\gamma_1 : t \mapsto it \quad [0,1]$

$\gamma_2 : t \mapsto \sin t + i\cos t \quad [0, \pi/2]$

$\gamma_3 : t \mapsto 1 - t \quad [0,1]$

$+ \int_0^{\pi/2} (\sin t - i\cos t) \cdot (\cos t - i \sin t) \, dt$

$+ \int_0^1 (1-t) \cdot (-1) \, dt$

Wurzel einer komplexen Zahl hat den halben Winkel zur x-Achse und die Länge ist die Wurzel der ursprünglichen Länge (sieht man sofort mit z=r*e^(i*phi) -> wurzel z= wurzel(r)* e^(iphi/2) deshalb liegt das immernoch im inneren der Kurve, auch nach Wurzelziehen

länge wird länger weil Wurzel von Zahl mit Betrag <1 wird größer als ursprüngliche Zahl selbst...

$= \frac{1}{2} + \int_0^{\pi/2} \underbrace{-i*(\sin^2(t)+\cos^2(t))}_{=1} \, dt - \frac{1}{2} = \boxed{0} - \frac{i\pi}{2}$

c) $\int_\gamma \frac{1}{z - \left(\frac{i}{2} + \frac{1}{2}\right)} \, dz \overset{\text{CIF}}{=} 2\pi i$

z^2-a = (z-Wurzel(a))*(z+Wurzel(a))

Aber Wurzel(1/2(i+1)) liegt immernoch im Inneren der Kurve Gamma

d) $\int_\gamma \frac{\sin z}{\left(z^2 - \frac{1}{2}(i+1)\right)^3} \, dz = \int_\gamma \frac{\sin(z) \cdot \frac{1}{\left(z + \sqrt{\frac{1}{2}(i+1)}\right)^3}}{\left(z - \sqrt{\frac{1}{2}(i+1)}\right)^3} \, dz$

$\overset{\text{verallg. CIF}}{=} \frac{2\pi i}{2!} \cdot \left(\sin(z) \frac{1}{\left(z + \sqrt{\frac{1}{2}(i+1)}\right)^3} \right)'' \left(\sqrt{\frac{1}{2}(i+1)} \right)$

$= \ldots$ ok, das ist blöd abzuleiten ... in der Klausur sind die Fkt. schöner :)

Aufg. 3

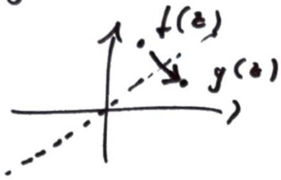
cosh(z)=(e^z+e^-z)/2
sinh(z)=(e^z-e^-z)/2

und die exp. Funktion ist überall holomorph --> cosh und sinh sind holomorph

Aufg. 4 / Nein: $g(z) = \underbrace{\mathrm{Im} f}_{:=a} + i\,\underbrace{\mathrm{Re} f}_{:=b}$ mit $f = u + iv$

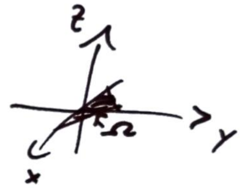
$$\partial_x a = \partial_x v = -\partial_y u \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bzw. nicht} \\ \text{zwangsläufig}}}{\neq} \partial_y b \overset{!}{=} \partial_x a \quad ↯$$

g spiegelt an de Geraden $\{(1+i)\cdot t \mid t \in \mathbb{R}\}$:



damit ist die reelle Ableitung von g keine Drehstreckung mehr.

Aufg. 5 / Mit Satz von Stokes:



$$\int_\gamma V\,ds = \int_\Omega \underbrace{\langle \mathrm{rot}\,V, N\rangle}_{\substack{=0 \text{ weil} \\ \mathrm{rot}\,V = 0}} d\mathrm{vol}_2 = 0$$

Aufg. 6 / Mit Satz von Gauss:

$$\int_{S^2} \langle V, N\rangle\, d\mathrm{vol}_2 = \int_\Omega \underbrace{\mathrm{div}\,V}_{=0}\, d\mathrm{vol}_3 = 0$$

Aufg. 7 / a) Mit Satz vom reg. Wert:

$f(x,y,z) = x + y^2 + z^3$, $M = f^{-1}(0)$

und $Df = (1, 2y, 3z^2)$ hat vollen Rang

b) $3 - 1 = 2$

c) $x = -y^2 - z^3$, deshalb $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(y,z) \mapsto \begin{pmatrix} -y^2 - z^3 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

d) $\det(DF^T DF) = (1 + 4y^2)(1 + 3z^4) - 6yz^2$

$\mathrm{vol}(M \cap \ldots) = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{(1+4y^2)(1+9z^4) - 36y^2z^4}\; dy\, dz$

Aufg. 8 | $\sqrt{\det(DF^T DF)} = \sqrt{1+u^2+v^2}$

$$\int_{F((0,1)\times(0,2))} f\, d\mathrm{vol} = \int_0^1 \int_0^2 \underbrace{u\cdot v \sqrt{1+u^2+v^2}}_{f(F(u,v))} \cdot \overbrace{\sqrt{1+u^2+v^2}}\, dv\, du$$

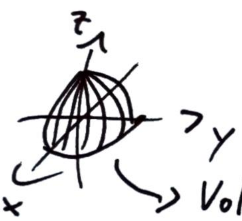
$$= \int_0^1 \int_0^2 u\cdot v\cdot(1+u^2+v^2)\, dv\, du$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 uv + u^3 v + uv^3 \, dv\, du$$

$$= \int_0^1 2u + 2\cdot u^3 + 4\cdot u \, du$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + 2 = 3{,}5$$

Aufg. 9 |



Vollkugelteil im 1. Oktanten

a) Masse: $m = \int \rho\, d\mathrm{vol}_3 = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r \sin\varphi \sin\theta \; r^2 \boxed{\sin}\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$

da hab ich die Koordinaten mit theta von oben und theta von der x-y-Ebene startend durcheinandergebracht

$$= \frac{1}{4}\cdot 1 \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin\theta \, \cancel{\cos}\,\sin\,\theta\, d\theta}_{=\frac{1}{2}} = \boxed{\text{pi/16}}$$

b) TM: $= \int \underbrace{r_x^2}_{y^2+z^2} \rho\, d\mathrm{vol}_3 = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left((r\sin\varphi\sin\theta)^2 + (r\cos\theta)^2\right)\cdot(r\sin\varphi\sin\theta) \cdot r^2\cos\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

$= \dots$

$= \dots$: Rechnung zu Aufwendig für Klausur

c) SP$_x$: $S_x = \frac{1}{M}\int x\cdot\rho\, d\mathrm{vol}_3 = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r\cos\varphi\sin\theta \cdot r\sin\varphi\sin\theta \cdot r^2\cos\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

$= \dots$

Aufg. 10/

a) $$\int_{B_R(0)} f \, dvol = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/4}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^R \overbrace{(r\cos\varphi\sin\theta + r\sin\varphi\sin\theta)}^{x+y}\, r^2\cos\theta \, dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$+ \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\int_0^R \overbrace{-(r\cos\varphi\sin\theta + r\sin\varphi\sin\theta)}^{=-(x+y)}\, r^2\cos\theta \, dr\,d\varphi\,d\theta$$

$= \dots$ (Rechnung zu aufwendig für Klausur)

b) wegen symmetrie:

$$4 \cdot \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} z\cdot(r\cos\varphi)\cdot r \cdot d\varphi \, dz$$

$$= 4\cdot r^2 \cdot \underbrace{\frac{\pi^2}{8}}_{[\frac{1}{2}z^2]_0^{\pi/2}} \cdot 1 = \frac{r^2\pi^2}{2}$$

Aufg. 11/

$$M\cdot x_s = \int_0^2\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} x \cdot xy \, dy\,dx + \int_{-1}^0\int_0^2 x\cdot(-xy)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x\,(1-(x-1)^2)\,dx + \int_{-1}^0 -\frac{1}{3}\,8y\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \cancel{x^2} - x^4 + 2x^3 - \cancel{x^2}\,dx + \frac{4}{3}$$

$$= \frac{4}{5} + \cancel{\frac{3}{4}}\,\frac{4}{3} = \boxed{32/15}$$

Dann muss man noch durch M teilen, was man noch ausrechnen müsste....

und das gleiche nochmal mit $s_y = \dots$

Aufg. 12

$$\int_0^{\pi} \pi f(z)^2\, dz = \int_0^{\pi} \pi \sin(z)^2\, dz = \pi \cdot \left[\tfrac{1}{2}(\underbrace{x}_{=\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\cos x \sin x}_{=0})\right]_0^{\pi}$$

$$= \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

Aufg. 13

$$\int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} r \cdot \cos t \cdot t \cdot \sqrt{1+r^2}\, dt$$

$$\overset{\boxed{\text{z.B. part. Int.}}}{=} \sqrt{r^2+r^4} \cdot \left[t \sin t + \cos t \right]_0^{2\pi}$$

$$= \sqrt{r^2+r^4} \cdot 0 = 0$$

Aufg 14

a)  $S_k(\mathbb{1}_{\partial[0,1]^2}) = 0$

$$\hookrightarrow S^k(\mathbb{1}_{\partial[0,1]^2}) = \frac{\text{vol}\, Q}{k^2} \cdot 4 \cdot (k-1) \xrightarrow{k \to \infty} 0 \quad \checkmark$$

b) $$S^k(f) = \frac{\text{vol}\, Q}{k^2} \cdot \sum_{i_1, i_2 = 1}^{k} \underbrace{\sup_{w \in Q^k_{i_1 i_2}} f(w)}_{= \frac{i_1}{k} \cdot \frac{i_2}{k}}$$

$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$

$$= \frac{\text{vol}\, Q}{k^2} \cdot \frac{k \cdot (k+1)}{2} \cdot \frac{k \cdot (k+1)}{2} \xrightarrow{k \to \infty} \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$S_k(f) = \frac{\text{vol}\, Q}{k^2} \sum_{i_1, i_2 = 1}^{k} \underbrace{\inf_{w \in \ldots} f(w)}_{= \frac{i_1 - 1}{k} \cdot \frac{i_2 - 1}{k}}$$

$$= \frac{\text{vol}\, Q}{k^2} \cdot \frac{k \cdot (k-1)}{2} \cdot \frac{k \cdot (k-1)}{2} \xrightarrow{k \to \infty} \boxed{\frac{1}{4}}$$

Aufg 15|

$y \leq 1 - x$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} x y (1 - x - y) \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy - x^2 y - x y^2 \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{2} x \cdot (1-x)^2 - \frac{1}{2} x^2 (1-x)^2} - \frac{1}{3} x (1-x)^3 \, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} x \cdot (1-x)^3 - \frac{1}{3} x (1-x)^3 \, dx$$

$$\overset{p.I.}{=} \frac{1}{6} \left(\underbrace{\left[-x \cdot \frac{1}{4} (1-x)^4 \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \left(-\frac{1}{4} (1-x)^4 \right) dx \right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{120}$$

Aufg. 16|

$y^2 \leq 1 - x^2$ (zylinda 1) und $y^2 \leq 1 - z^2$ (zylinda 2)

Wegen Symmetrie auf ersten Oktanten:

$$8 \cdot \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} 1 \, dx \, dy \, dz$$

$$= 8 \cdot \int_0^1 1 - y^2 \, dy$$

$$= 8 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{3}$$