Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2021/22
Prof. Dr. Sören Bartels, Jakob Keck

Numerik 1

Blatt 4 – 29.11.2021

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 bis 5. Abgabe: 10.12.2021, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws21/num`

Aufgabe 1. Seien $A \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ und $b \in \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie zeichnerisch mit Hilfe eines Geodreiecks die Lösung des Ausgleichsproblems, indem Sie b orthogonal in Vektoren v, w mit $v \in \operatorname{Im} A$ und $w \in \ker A^\top$ zerlegen.

Aufgabe 2. Eine Householder-Matrix $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ist für $v \in \mathbb{R}^m$ mit $\|v\|_2 = 1$ definiert durch $P = I_m - 2vv^\top$.
(i) Zeigen Sie, dass $P = P^\top$ und $P^{-1} = P$ gelten.
(ii) Zeigen Sie, dass eine reelle $m \times m$ Householder-Matrix $m-1$ Eigenwerte mit dem Wert 1 und einen Eigenwert -1 hat.
(iii) Konstruieren Sie mithilfe geometrischer Überlegungen für $m = 2, 3$ eine Householder-Matrix, die einen gegebenen Vektor $x \in \mathbb{R}^m$ auf ein Vielfaches von $e_1 \in \mathbb{R}^m$ abbildet.

Aufgabe 3. Berechnen Sie mit Hilfe des Householder-Verfahrens eine QR-Zerlegung für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2} & 5/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

und lösen Sie damit die Gleichung $Ax = b$ für $b = [3\sqrt{2}, -1, 7]^\top$.

Aufgabe 4. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix mit den Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ und $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ sei die daraus durch das Gram–Schmidt-Verfahren gewonnene Orthonormalbasis, das heißt

$$\tilde{q}_j = a_j - \sum_{k=1}^{j-1} (a_j \cdot q_k) q_k, \quad q_j = \frac{\tilde{q}_j}{\|\tilde{q}_j\|_2}$$

für $j = 1, 2, \dots, n$.
(i) Zeigen Sie, dass für $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert durch $r_{kj} = a_j \cdot q_k$ für $k < j$, $r_{kj} = 0$ für $k > j$, $r_{jj} = \|\tilde{q}_j\|_2$ für $j = 1, .., n$, folgt $A = QR$.
(ii) Berechnen Sie Q und R für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Numerik I - Blatt 4

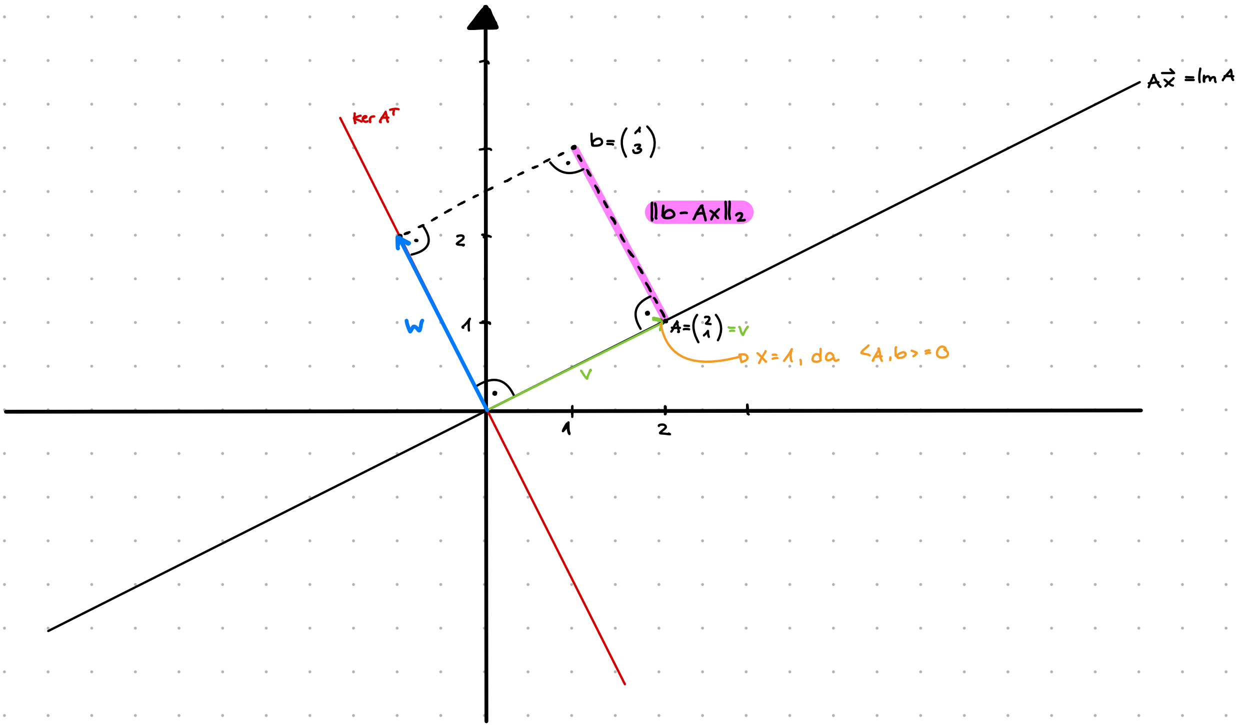
Lorenz.Bung@students.uni-freiburg.de

Charlotte.Rothhaar97@gmail.com

Aufgabe 1. Seien $A \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ und $b \in \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie zeichnerisch mit Hilfe eines Geodreiecks die Lösung des Ausgleichsproblems, indem Sie b orthogonal in Vektoren v, w mit $v \in \operatorname{Im} A$ und $w \in \ker A^\top$ zerlegen.



1. Zerlegung d. Vektors b in orthogonale Vektoren $v \in \operatorname{Im} A$ und $w \in \ker A^T$
   - $b = \binom{1}{3}$ und $\operatorname{Im} A = A \cdot x$ eingezeichnet
   - Aus Beweis von Satz 5.1 im Skript $\Rightarrow$ $\ker A^T$ und $\operatorname{Im} A$ sind orthogonal zueinander

     $\hookrightarrow$ Somit konnten wir $\ker A^T$ als Gerade, welche im rechten Winkel zu $\operatorname{Im} A$ liegt und durch den Ursprung läuft einzeichnen.

   $\Rightarrow v = \binom{2}{1}$ und $w = \binom{-1}{2}$, da $v \cdot w = 0$ und $v + w = b$

2. Lösung d. Ausgleichsproblems
   - Minimiere $\|Ax - b\|_2^2$, also wählen wir $x = 1$, sodass der Abstand zwischen A und b so gering wie möglich ($\hat{=}$ Lot).

Aufgabe 2. Eine Householder-Matrix $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ist für $v \in \mathbb{R}^m$ mit $\|v\|_2 = 1$ definiert durch $P = I_m - 2vv^\top$.

(i) Zeigen Sie, dass $P = P^\top$ und $P^{-1} = P$ gelten.

Beweis:

$$P^T \underset{\text{Lemma 5.4}}{=} (I_m - 2vv^T)^T = I_m{}^T - (2vv^T)^T \underset{\substack{I_m^T = I_m \\ (AB)^T = B^T A^T}}{=} I_m - 2(v^T)^T \cdot v^T = I_m - 2vv^T = P$$

Also ist $P = P^T$ $\square$

$$P \cdot P^T \underset{P=P^T}{=} (I_m - 2vv^T)(I_m - 2vv^T) = I_m - 4vv^T + 4v\underbrace{v^Tv}_{=1,\text{ da Selbstinvers}}v^T = I_m - 4vv^T + 4vv^T = I_m$$

$\Rightarrow P = P^T = P^{-1}$ $\square$

(ii) Zeigen Sie, dass eine reelle $m \times m$ Householder-Matrix $m-1$ Eigenwerte mit dem Wert 1 und einen Eigenwert -1 hat.

Beweis:

Sei $v \in \mathbb{R}^m$ mit $\|v\|_2 = 1$ und $P = I_m - 2vv^T$ die dazugehörige Householdermatrix.

Dann gilt: $Pv = (I_m - 2vv^T) \cdot v = v - 2v\underbrace{v^Tv}_{=1} = v - 2v = -1 \cdot v$

D.h. -1 ist Eigenwert von P und $\mu \cdot v$ $\forall \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein zugehöriger Eigenvektor.

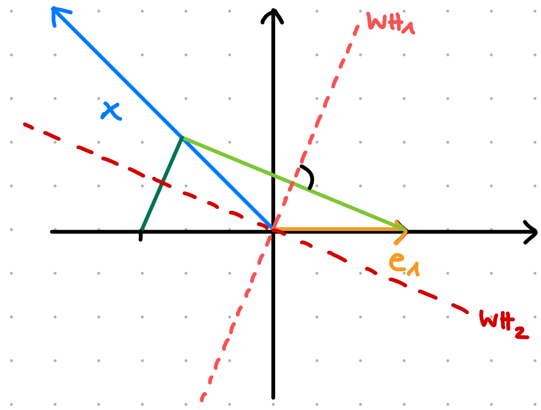
Für $w \in v^\perp$, d.h. $w^Tv = 0$, gilt: $Pw = (I_m - 2vv^T) \cdot w = w - 2v\underbrace{v^Tw}_{=0} = w - 2v \cdot 0 = w$

D.h. 1 ist Eigenvektor von P und für jedes $w \in \mathbb{R}^m$, $w \neq 0$ und $w^Tv = 0$, ist Eigenvektor.

Durch Zerlegung von $P_v w = w - 2vv^Tw = w - 2\langle v, w\rangle v = (w - \langle v, w\rangle v) - \langle v, w\rangle v$ in seine Projektion auf auf span$\{v\}$ und einen senkrechten Anteil sieht man, dass es keine weiteren Eigenvektoren von P gibt. P besitzt also die Eigenwerte 1 mit Eigenraum $E(1) = \{w \in \mathbb{R}^m : w^Tv = 0\}$ und -1 mit Eigenraum $E(-1) = \{\mu v : \mu \in \mathbb{R}\}$ $\square$

(iii) Konstruieren Sie mithilfe geometrischer Überlegungen für $m = 2, 3$ eine Householder-Matrix, die einen gegebenen Vektor $x \in \mathbb{R}^m$ auf ein Vielfaches von $e_1 \in \mathbb{R}^m$ abbildet.

<u>$m=2$:</u> $e_1 \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ Es soll gelten: $P_v x = \lambda \cdot e_1$ mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Gesucht ist ein Vektor $v \in \mathbb{R}^2$, der die Richtung einer d. zwei Winkelhalbierenden der Geraden in Richtung x und e ist. Die <u>Winkelhalbierende</u> ergibt sich, indem man auf beiden Geraden Punkte mit dem selben Abstand zum Ursprung wählt, diese verbindet, den Mittelpunkt auf der Verbindungsstrecke konstruiert und die Gerade durch den Ursprung und Mittelpunkt zeichnet. Diese Gerade hat die gesuchte Richtung v. Zweite WH konstruiert man genauso mit x und $-e_1$. Da e_1 normiert ist, also $\|e_1\| = 1$, muss wegen der Orthogonalität der Spiegelung, $\lambda = \pm \|x\|$ gelten.

Aufgabe 3. Berechnen Sie mit Hilfe des Householder-Verfahrens eine QR-Zerlegung für

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2} & 5/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ \quad x \qquad\; y \qquad\; z \end{array}$$

und lösen Sie damit die Gleichung $Ax = b$ für $b = [3\sqrt{2}, -1, 7]^\top$.

$x \in \operatorname{span}\{e_1\}$. Somit ist nach Lemma 5.4 $x = v$.

$$P_v x = (I_3 - 2 \cdot x x^T)\, x = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $y \notin \operatorname{span}\{e_1\}$. $\sigma = \operatorname{sign}(y_1)$. Es gilt:

$$w = \frac{y + \sigma \|y\|_2 \cdot e_1}{\|y + \sigma \|y\|_2 \cdot e_1\|_2} = \frac{\overset{:= \bar{y}}{\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{5} \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}}}{3{,}8042} = \begin{pmatrix} 0{,}8057 \\ 0{,}3718 \\ -0{,}3718 \end{pmatrix}$$

NR: $\|y\|_2 = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{5}$

$\|\bar{y}\|_2 = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2 + (-\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}^2} = 3{,}8042$

$$w \cdot w^T = \begin{pmatrix} 0{,}6492 & 0{,}2996 & -0{,}2996 \\ 0{,}2996 & 0{,}1382 & -0{,}1382 \\ -0{,}2996 & -0{,}1382 & 0{,}1382 \end{pmatrix}$$

$$P_w y = (I_3 - 2 \cdot w w^T)\, y$$

$$= \left(I_3 - \begin{pmatrix} 1{,}2984 & 0{,}5992 & -0{,}5992 \\ 0{,}5992 & 0{,}2764 & -0{,}2764 \\ -0{,}5992 & -0{,}2764 & 0{,}2764 \end{pmatrix} \right) \cdot y$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}2984 & -0{,}5992 & 0{,}5992 \\ -0{,}5992 & 0{,}7236 & 0{,}2764 \\ 0{,}5992 & 0{,}2764 & 0{,}7236 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}3963 \\ -1{,}2314 \\ 1{,}2314 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4:

(ii)
$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \;x & \;\;y & \;\;z \end{matrix} \end{array} \quad , \quad \det A \neq 0$$

Gram Schmidt Verfahren:

$$\tilde{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tilde{q}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{1} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad q_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{1} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} - \frac{0}{1} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad q_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich
$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/6 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$$

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \sqrt{6}/3 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} \quad \square$$