Stochastik II

Sommersemester 2022

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Anwesenheitsblatt 1

Abgabe: Freitag, 13.05.2021, um 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie das Schwache Gesetz der großen Zahl: Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig und identisch verteilt mit $Var(X_i) < \infty$. Dann gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} E[X_1].$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Installieren Sie JupyterLab oder verwenden Sie Google Colab und erzeugen und plotten Sie Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen als Histogramm zu verschiedenen Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.** Erzeugen Sie wie in Aufgabe 2 Zufallsvariablen $(X_i)_{i \leq n}$ und berechnen Sie $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Erzeugen Sie nun die Zufallsvariablen $(X_{i,k})_{i \leq n_1, k \leq n_2}$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Erstellen Sie für $k = 1, \dots, n_2$ ein Histogramm von Y_k mit

$$Y_k \coloneqq \frac{1}{\sqrt{Var[X_0] n_1}} \sum_{i=1}^{n_1} \Big(X_{i,k} - E[X_0] \Big).$$

Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

Stochastik Blatt 07

Luis Jaschke

Lorenz Bung

Aufgabe 07:

setze $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ dann gilt für Y_n

$$E[Y_n] = E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i] \underset{\uparrow \text{ Linearität}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[X_i] \underset{\uparrow X_i \text{ identisch verteilt}}{=}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[X_1] = E[X_1]$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - E[X_1]\right| > \varepsilon\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - E[Y_n]| > \varepsilon) \underset{\uparrow \text{ Tschebyscheff}}{=}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{Var(Y_n)}{\varepsilon^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)}{\varepsilon^2}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(\frac{1}{n})^2 Var(\sum_{i=1}^n X_i)}{\varepsilon^2}\right) \underset{\uparrow X_i \text{ unabhängig}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^n Var(X_i)}{\varepsilon^2 n^2}\right) \leq$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{K}{n^2\varepsilon^2}\right) \longrightarrow 0 \quad \text{für } K = \max_{i=1,2,\dots}(Var(X_i)) < \infty$$

$\blacksquare$