Analysis II Ksenia Fedosova, Nadine Große
SS 21

Übungsblatt 4

Aufgabe 13. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$, $D_0 f = 0$ und $\mathrm{Hess}_0(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Außerdem sei $\left| \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}(p) \right| < \frac{3}{8\sqrt{2}}$ für alle $p \in \overline{B_2(0)} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 2\}$ und $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ mit $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$. Zeigen Sie, dass es ein $q \in \overline{B_2(0)}$ mit $f(q) < -1$ gibt.

Aufgabe 14 (2+2+1)**.** (i) Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn es ein $c > 0$ mit $|Ax| \geq c|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gibt.

Hinweis: Es gibt verschiedene Möglichkeiten das zu beweisen (eher lin.Alg. oder eher Analysis) - ein analytischer Beweis funktioniert ähnlich, wie der Beweis von Lemma 1.6.4.

(ii) Sei $f\colon K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so dass $D_p f$ für alle $p \in K$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass es dann ein $c > 0$ gibt, so dass $|D_p f(v)| \geq c|v|$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und alle $p \in K$ gilt.

(iii) Gilt (ii) auch, wenn K nicht unbedingt kompakt sein muss? Begründen Sie.

Aufgabe 15. Sei[1]

$$f\colon U := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 |\ x > 0\} \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y)^T \mapsto (\cosh x \, \cos y, \sinh x \, \sin y)^T.$$

Zeigen Sie, dass $f|_{U_1}\colon U_1 \to f(U_1)$ mit $U_1 := \{(x,y)^T \mid x > 0, 0 < y < 2\pi\}$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist und bestimmen Sie $f(U_1)$.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass es für alle $p \in U$ eine offene Umgebung $\hat{U}$ gibt, so dass $f\colon \hat{U} \to f(\hat{U})$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist. Allerdings kann $f : U \to f(U)$ selbst kein Diffeomorphismus sein (Warum nicht?). Um zu sehen, dass $f\colon U_1 \to f(U_1)$ ein Diffeomorphismus ist, überlegen Sie sich zunächst die Injektivität. Dazu hilft es die Bilder von $t \mapsto f(x,t)$ und $t \mapsto f(t,y)$ für verschiedene x und y Werte zu skizzieren (Diese Kurven sollten ineinandergeschachtelte Ellipsen und Hyperbeln sein – s.nächste Seite zum Kurzüberblick zu Ellipsen und Hyperbeln.).

Aufgabe 16 (Laplace-Operator in Polarkoordinaten)**.** Sei

$$g\colon (r,\phi) \in (0,\infty) \times (0, 2\pi) \mapsto (x,y)^T = (r\cos\phi, r\sin\phi)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)^T \mid x \geq 0\}.$$

Das ist ein Diffeomorphismus, vgl. Bsp. 1.7.15. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Berechnen Sie $D_p(f \circ g)$ und die zweiten partiellen Ableitungen von $f \circ g$. Folgern Sie, dass Δ auf Funktionen h, die in Polarkoordinaten gegeben sind, wirkt als[2]

$$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2}.$$

Abgabe am Mittwoch 19.05.21 bis 14 Uhr

[1] Es gilt $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ und $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Definition von sinh und cosh in ÜA 22 in Ana 1. Man rechnet direkt nach, dass $(\cosh x)' = \sinh x$ und $(\sinh x)' = \cosh x$ gilt.
[2] $\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial r}$

Analysis II Blatt 4

Lorenz Bung

lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Vincent Wilhelms

Matr.-Nr. 4909980

Aufgabe 13. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion mit $f(0)=0$, $D_0 f = 0$ und $\operatorname{Hess}_0(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Außerdem sei $\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}(p)\right| < \frac{3}{8\sqrt{2}}$ für alle $p \in \overline{B_2(0)} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 2\}$ und $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ mit $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$. Zeigen Sie, dass es ein $q \in \overline{B_2(0)}$ mit $f(q) < -1$ gibt.

Wir bilden das Taylorpolynom 3. Grades um den Entwicklungspunkt $(0,0)$:

$$T_{f,3}(0,0) = f(0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-0)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-0)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x-0)(y-0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-0)^2\right)$$
$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x-0)^3 + 3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x-0)^2(y-0) + 3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x-0)(y-0)^2\right.$$
$$\left. + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(y-0)^3\right) + R(x) \in$$
$$< 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2}\cdot\left(1\cdot x^2 + 2\cdot 2xy + 1y^2\right)$$
$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{3}{8\sqrt{2}}\cdot 8\right)$$
$$= \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Dann ist $f(q) < -1$ für $q := (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \in B_2(0)$:

$$T_{f,3}(0,0)(q) = \frac{\sqrt{2}^2}{2} + 2\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2}) + \frac{(-\sqrt{2})^2}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$
$$= \frac{2}{2} + 2\cdot(-2) + \frac{2}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$
$$= 2 - 4 + \frac{1}{2\sqrt{2}} = -2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} < -2 + \frac{1}{2} = -1{,}5.$$

Aufgabe 14 i)

- $\Leftarrow$ Sei $c>0$, s.d $|Ax| \geq c|x| \;\forall x \in \mathbb{R}^n$

A kann nicht den Eigenwert 0 haben, sonst wäre
$Ax = 0x \;\forall x \in V_0 \Rightarrow |Ax| = |0x| = 0 \geq c|x|$
und $c>0$ ein Widerspruch.
ist 0 kein Eigenvektor von A, dann ist A invertierbar.

- $\chi_A(0) = \det(0-A) = \det(-A) = -\det(A) = 0$

also $\det(A) = 0$

$\Rightarrow$ Sei A invertierbar
Es existiert ein inverses, so dass
$A \cdot A^{-1} = Id_n$
Setze $y = Ax \Rightarrow x = A^{-1}y$
Dreiecksungleichung $|A^{-1}y| \leq |A^{-1}|\,|y|$

- $\Rightarrow \quad |y| \geq \frac{1}{|A^{-1}|}|x|$

Setze $c = \frac{1}{|A^{-1}|} > 0 \Rightarrow |Ax| \geq c|x| \;\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\square$

iii) K muss kompakt sein, sonst existiert keine Teilfolge für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und $p \in K$ mit einem Grenzwert.

ii) Sei $f: K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig diff'

K ist kompakt, so dass

D_pf $\forall p \in K$ invertierbar ist.

$\exists c > 0$ $|D_pf(v)| \geq c|v|$ $\forall v \in \mathbb{R}^n \wedge \forall p \in K$

D_pf ist eine $n \times n$-Matrix, wo $\forall p \in K$ invertierbar ist.

$\exists c > 0: |D_pf(v)| \geq c(v)$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$ und $\forall p \in K$

Beweis durch Widerspruch

Falls so ein c nicht existiert, dann eine Folge $v_i \in K \setminus \{0\}$ mit $\frac{1}{|v_i|} |D_pf(v_i)| \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$

Sei $p_i = \frac{v_i}{|v_i|}$

K ist kompakt, also existiert eine konvergente Teilfolge p_{ij}

Da f stetig diff' ist, ist die Ableitsabbildung auch stetig.

Deshalb muss $\frac{1}{|v_{ij}|} |D_pf(v_{ij}) = |D_pf(p_{ij})$

$\Rightarrow$ $|D_pf(p_{ij})| = 0$ geht nicht da

$w = 0_{\mathbb{R}^n}$ und D_pf invertierbar sein muss. $\square$

Aufgabe 15. Sei[1]

$$f: U := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 | \; x > 0\} \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y)^T \mapsto (\cosh x \, \cos y, \sinh x \, \sin y)^T.$$

Zeigen Sie, dass $f|_{U_1}: U_1 \to f(U_1)$ mit $U_1 := \{(x,y)^T \mid x > 0, 0 < y < 2\pi\}$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist und bestimmen Sie $f(U_1)$.

$f|_{U_1}$ ist ein C^∞-Diffeomorphismus, wenn f bijektiv ist und f und f^{-1} stetig diffbar sind.

Zu zeigen: Für $p \in U$ ist $D_p f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ invertierbar.

Beweis: Sei $p = (x,y)^T \in U$. Dann ist

$$D_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} \sinh x & \sin y \\ \cosh x & \cos y \end{pmatrix}$$ mit

$$(\cosh(x))' = \sinh(x) \text{ und } (\sinh(x))' = \cosh(x).$$

Die Inverse einer 2×2-Matrix ist gegeben durch die Formel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Wir erhalten also

$$\left(D_{(x,y)} f\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \sinh x & \sin y \\ \cosh x & \cos y \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sinh(x)\cos(y) - \cosh(x)\sin(y)} \cdot \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ -\cosh x & \sinh x \end{pmatrix}.$$

$\square$

Aufgabe 16 (Laplace-Operator in Polarkoordinaten)**.** Sei

$$g\colon (r,\phi) \in (0,\infty) \times (0,2\pi) \mapsto (x,y)^T = (r\cos\phi, r\sin\phi)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)^T \mid x \geq 0\}.$$

Das ist ein Diffeomorphismus, vgl. Bsp. 1.7.15. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Berechnen Sie $D_p(f \circ g)$ und die zweiten partiellen Ableitungen von $f \circ g$. Folgern Sie, dass Δ auf Funktionen h, die in Polarkoordinaten gegeben sind, wirkt als[2]

$$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2}.$$

Wir bringen g in kartesische Koordinaten durch $x := r\cos\phi$, $y := r\sin\phi$, wobei $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Dann lässt sich die totale Ableitung von x berechnen mit $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial \phi}$

und $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial y}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial \phi}$.

Damit ist

$$\Delta f \circ g = \nabla^2 f \circ g = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial y}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^2$$

$$= \left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\sin\phi\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\cos\phi\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^2$$

$$= \left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + 2\cdot\cos\phi\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}\sin\phi\frac{\partial}{\partial \phi} + \left(\frac{1}{r}\sin\phi\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^2$$
$$+ \left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + 2\cdot\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}\cdot\left(-\frac{1}{r}\cos\phi\frac{\partial}{\partial \phi}\right) + \left(-\frac{1}{r}\cos\phi\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^2$$

$$= \underbrace{(\sin^2\phi + \cos^2\phi)}_{=1}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\underbrace{(\sin^2\phi + \cos^2\phi)}_{=1}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$
$$+ \frac{2}{r}\cos\phi\frac{\partial}{\partial r}\sin\phi\frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{2}{r}\cos\phi\frac{\partial}{\partial \phi}\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r}\underbrace{\left(2\cos\phi\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \phi} - 2\cos\phi\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)}_{=0?}$$

Anmerkung: Da sollte natürlich $\frac{\partial}{\partial r}$ für die Klammer rauskommen. Evtl. irgendwo oben ein Rechenfehler oder so...

Für $h = f \circ g$ bekommen wir damit

$$\Delta h = \Delta f \circ g = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}.$$

$\square$