Klausur Erweiterung der Analysis WS 22/23

21.02.2023, Bearbeitungszeit: 3h

Aufgabe 1 (5=1.5+2+1.5)**.**

(i) Berechnen Sie die Länge der Kurve $\gamma\colon t \in [0, 2\pi] \mapsto (3\sin(3t), 3\cos(3t))^T \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Berechnen Sie $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x, y) = (-xy, x^2)^T$, wobei γ den Rand von $B_R(0)$ im mathematisch positiven Drehsinne durchläuft.

(iii) Definieren Sie die Divergenz und die Rotation im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2 (5=2+3)**.** (i) Sei $f\colon Q = [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Definieren Sie die k.te Obersumme $S^k(f)$ von f.

(ii) Sei $\Omega = \{(x, x) \mid x \in [0, 1]\} \subset Q = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition des Integrals, dass die charakteristische Funktion $1|_\Omega\colon Q \to \mathbb{R}$ integrierbar ist.

Aufgabe 3 (5=1.5+1.5+2)**.** Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \sin y$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar. Die Verwendung von Fubini ergebe

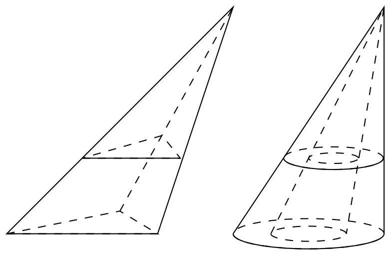
$$\int_\Omega f \mathrm{dvol} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{2x}^{\pi} f(x, y) dy dx.$$

(i) Berechnen Sie das Integral.

(ii) Skizzieren Sie Ω.

(iii) Verwenden Sie Fubini für $\int_\Omega f \mathrm{dvol}$ aber so, dass ein Integral der Form $\int_?^? \int_?^? f(x, y) dx dy$ entsteht.

Aufgabe 4 (3)**.** Vergleichen Sie die Volumina dieser zwei Körper miteinander. Begründen Sie.



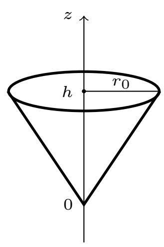
Höhe:	h	h
Grundfläche:	gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit Kathete $2a$	Kreisring mit Außenradius a und Innenradius $\frac{a}{2}$

Aufgabe 5 (9=4.5+4.5)**.**

(i)

Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Kegels im Bild bei Rotation um die z-Achse.

Hinweis: Z.B. mit Zylinderkoordinaten.



(ii) Die Funktion $\phi\colon (x,y) \in A := (0,1)^2 \mapsto (x, yx^2) \in \phi(A) \subset \mathbb{R}^2$ ist ein Diffeomorphismus (muss nicht überprüft werden). Skizzieren Sie $\phi(A)$. Berechnen Sie mit Hilfe der Transformationsformel für ϕ den Flächeninhalt von $\phi(A)$.

Aufgabe 6 (10=1+2+1.5+4.5+1)**.** Sei M die Menge aller Punkte $(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $x^2+y^2-z^2=1$. Sei $V(x,y,z) = (x,y,z)^T$. Sei

$$\begin{aligned} K =& \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2 \leq 1, z \in [-1,1]\} \\ \Omega =& \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2 = 1, z \in (-1,1)\}. \end{aligned}$$

(i) Skizzieren Sie K.

(ii) Berechnen Sie $\int_K \operatorname{div} V \,\mathrm{dvol}$.

(iii) Rechnen Sie mit dem Kriterium vom regulären Wert nach, dass M eine Untermannigfaltigkeit ist.

(iv) Die Abbildung

$$F\colon U := (0,2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (\phi, v) \mapsto (\cosh v \cos\phi, \cosh v \sin\phi, \sinh v)^T$$

ist ein Diffeomorphismus aufs Bild $F(U) \subset M$ (muss nicht gezeigt werden). Geben Sie $M \setminus F(U)$ an. Zeigen Sie, dass F eine lokale Parametrisierung von M ist. Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_\Omega \langle V, N\rangle \mathrm{dvol}$.

(v) Welchem Integral/welchen Integralen (muss nur hingeschrieben und nicht ausgerechnet werden) entspricht nach dem Divergenzsatz der Term $\int_K \operatorname{div} V \,\mathrm{dvol} - \int_\Omega \langle V, N\rangle \mathrm{dvol}$?

Aufgabe 7 (5=2+1+1+1)**.** (i) Definieren Sie 'komplex differenzierbar' und geben Sie die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an.

(ii) Was ist der Zusammenhang zwischen komplex differenzierbar und den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen?

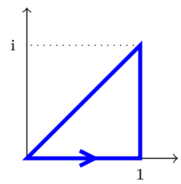
(iii) Rechnen Sie explizit mit der Definition der komplexen Differenzierbarkeit nach, dass $f\colon z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.

(iv) Rechnen Sie für die Funktion aus (iii) explizit die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen nach.

Aufgabe 8 (8=3.5+4.5)**.**

(i)

Berechnen Sie $\int_\gamma \bar{z} dz$, wobei γ die Kurve im Bild einmal (in angezeigter Durchlaufrichtung) durchläuft.



(ii) Bestimmen Sie (mit Begründung) $\int_{\partial B_1(0)} \frac{\sin z}{z-3} dz$ und $\int_{\partial B_2(0)} \frac{z^2+2z+1}{(z-1)^2} dz$ und $\int_{\partial B_3(0)} \frac{\cos z}{z-2} dz$.

1.

(i) $\gamma(t) = (3\sin(3t), 3\cos(3t))$

$\dot\gamma(t) = (9\cos(3t), -9\sin(3t))$ $+\frac{1}{2}$

1.5 $|\dot\gamma(t)| = 9$

$L(\gamma) = \underbrace{\int_0^{2\pi} |\dot\gamma(t)|\, dt}_{+\frac{1}{2}} = 2\pi \cdot 9 = 18\pi$ $+\frac{1}{2}$

(ii) $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ $+\frac{1}{2}$

$\int_\gamma V \cdot ds = \int_0^{2\pi} \langle V(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle\, dt$ $+\frac{1}{2}$

$= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -(R\cos t)(R\sin t) \\ (R\cos t)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt$ $+\frac{1}{2}$

2 $= \int_0^{2\pi} R^3 (\cos t \sin^2 t + \cos^3 t)\, dt = R^3 \int_0^{2\pi} \cos t\, dt$

$= R^3 \sin t \Big|_0^{2\pi} = 0$ $+\frac{1}{2}$

(iii) Sei $V: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein ~~stetig~~ partiell diff'bares Vektorfeld.

Dann ist die Divergenz $\operatorname{div} V: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert

durch $\operatorname{div} V(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(x)$ $+\frac{1}{2}$, wobei $V = (V_1, V_2, V_3)^T$

ist. Die Rotation $\operatorname{rot} V: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist definiert

1.5 also

$$\operatorname{rot} V(x) = \begin{pmatrix} \partial_y V_z - \partial_z V_y \\ \partial_z V_x - \partial_x V_z \\ \partial_x V_y - \partial_y V_x \end{pmatrix}(x)$$ $+1$ mit

$V = (V_x, V_y, V_z)^T$

Total 5

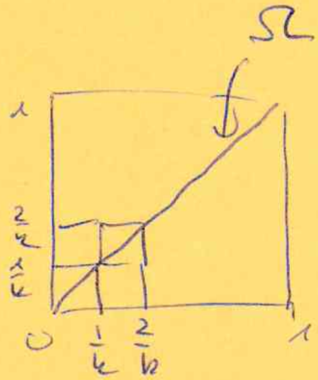
2. $f: Q = [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$

4.0

(i) $S^k(f) = \frac{1}{k^2} \sum_{i_1, i_2 = 1}^{k} \sup_{x \in [\frac{i_1-1}{k}, \frac{i_1}{k}] \times [\frac{i_2-1}{k}, \frac{i_2}{k}]} f(x)$ +1/2 +1/2 +1/2 +1/2

(ii) $\Omega = \{(x,x) \mid x \in [0,1]\} \subset [0,1]^2$

$f = \chi_\Omega$



3.0

$S_k(f) \equiv 0$ +1/2, da es in allen Teilquadraten einen Punkt gibt, der nicht auf Ω liegt. +1/2

$S^k(f) \equiv k \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k}$ +1/2, da nur die Teilquadrate mit $i_1 = i_2$ Punkte von Ω enthalten und es davon genau k gibt. +1/2

Also ist $\lim_{k\to\infty} S_k(f) = 0$, $\lim_{k\to\infty} S^k(f) = 0$ +1/2 und damit gleich.

Also ist $f = \chi_Q$ integrierbar mit $\int_Q f \, d\mathrm{vol} = 0$. +1/2

Total: 5

3. $\int_\Omega \rho \, d\mathrm{vol} = \int_{1/2}^{\pi/2} \int_{2x}^{\pi} \rho(x,y)\, dy\, dx \qquad \rho(x,y) = \sin y$

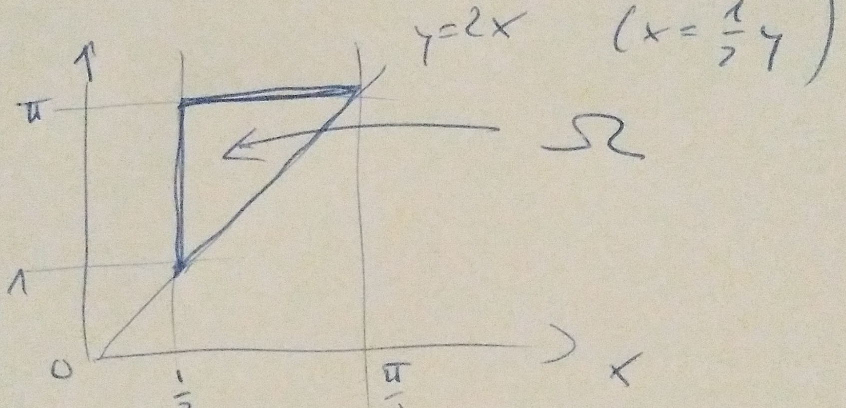
(i) $\int_{1/2}^{\pi/2} \int_{2x}^{\pi} \sin y \, dy \, dx = \int_{1/2}^{\pi/2} (-\cos y)\Big|_{2x}^{\pi} dx$ +1/2

$= \int_{1/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2x)\, dx = x + \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_{1/2}^{\pi/2}$ +1/2

$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 1$ +1/2

1.5

(ii)



1.5

(iii) $\int_\Omega d\mathrm{vol} = \int_{1}^{\pi} \int_{1/2}^{y/2} \rho(x,y)\, dx\, dy$

2

je 0.5

(Bild in (ii) falsch aber (iii) passt zu Bild (ohne signifikant das Problem zu verein-fachen – auch ok.)

Total: 5

4.

Grundfläche links: $A_L = \frac{(2a)^2}{2} = 2a^2$

Grundfläche rechts: $A_R = \pi a^2 - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi a^2$ +2

Also $A_L < A_R$

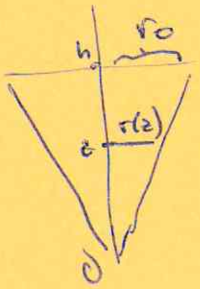
Total 3

Wegen Strahlensatz ist dann in jeder Höhe die Schnittfläche links immer noch kleiner als rechts. +0,5

Nach Fubini folgt damit, dass der linke Körper kleineres Volumen hat als der rechte. +0,5

5.

(i)



$$\frac{r(z)}{z} = \frac{r_0}{h}$$ +1/2 (Strahlensatz)

Trägheitsmoment um z-Achse $= \int_{\text{Kegel}} (x^2+y^2)\, d\mathrm{vol}$ +1/2

+1.5

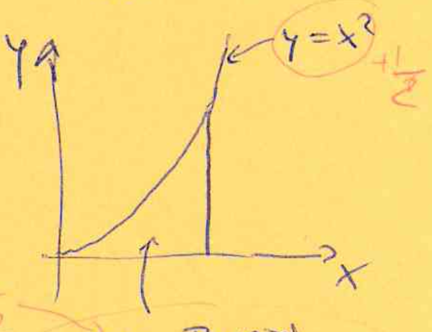
4,5

Zylinderkoord. $= \int_0^{2\pi}\int_0^{h}\int_0^{r(z)} r^2 \; r\,dr\,dz\,d\varphi$ +1/2 +1/2

$$= 2\pi \int_0^h \int_0^{\frac{r_0}{h}z} r^3\,dr\,dz = 2\pi \int_0^h \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^{\frac{r_0}{h}z} dz$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{r_0^4}{h^4}\int_0^h z^4\,dz = \frac{\pi}{2}\frac{r_0^4}{h^4}\frac{1}{5}h^5 = \frac{\pi}{10} r_0^4 h$$ +1

(ii) $\phi(x,y) = (x, yx^2)$ $\qquad \phi([0,1]^2)$ =



+1/2 dieser Bereich (ohne Rand) ist $\phi([0,1]^2)$ +1/2

$$D\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}$$ +1/2

$|\det D\phi| = x^2$ +1/2

4,5

$$\mathrm{vol}(\phi(A)) = \int_{\phi(A)} d\mathrm{vol} \overset{\text{Trafo-formel}}{=} \int_A |\det D\phi|\, d\mathrm{vol}$$ +1/2 +1/2

$$= \int_0^1\int_0^1 x^2\,dx\,dy = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$ +1/2 +1/2

Total: 9

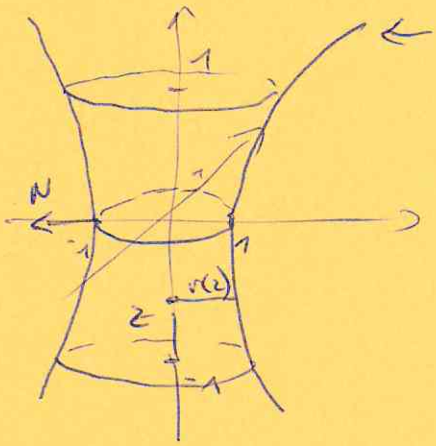
6. $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2 = 1\}$

$V(x,y,z) = (x,y,z)$

$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2 \le 1,\ z \in [-1,1]\}$

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2 = 1,\ z \in (-1,1)\}$

(i)



← M ist einschaliges Hyperboloid

1

K ist der innere Bereich des einschaligen Hyperboloids der zwischen ~~ZZ~~ $z=-1$ und $z=1$ liegt (einschließlich des Randes) +1

(ii) $\int_K \operatorname{div} V \, d\mathrm{vol}$ $\qquad \operatorname{div} V = 3$ $+\frac{1}{2}$

$= 3\,\mathrm{vol}(K) = 3\int_{-1}^{1}$ (Flächeninhalt der Schnittfläche zu Höhe z) dz

$\uparrow$

Kreis mit Radius $r(z)^2 = x^2+y^2 = 1+z^2$

also $r(z) = \sqrt{1+z^2}$ $+\frac{1}{2}$

2

$\int_K \operatorname{div} V \, d\mathrm{vol} = 3\int_{-1}^{1} \pi(1+z^2)\,dz = 3\pi\left(z+\frac{1}{3}z^3\right)\Big|_{-1}^{1}$ $+\frac{1}{2}$

$= 6\pi\left(1+\frac{1}{3}\right) = 8\pi$ $+\frac{1}{2}$

(iii) $f(x,y,z) := x^2+y^2-z^2-1$ Dann ist f glatt mit $f^{-1}(0) = M$. $+\frac{1}{2}$

1.5

$D_{(x,y,z)} f = (2x, 2y, -2z)$ $+\frac{1}{2}$ hat Rang 1 außer für $x=y=z=0$, was kein Punkt auf M ist. $+\frac{1}{2}$ Also ist M nach dem Kriterium von regulären Wert eine Untermannigfaltigkeit.

(iv) $F(\phi, v) = (\cosh v \cos\phi, \cancel{\cosh} \, v_\phi \sin\phi, \sinh v)^T \in \mathbb{R}^3$

$\underset{(0,2\pi)}{\overset{\cap}{\phi}}$ $\underset{\mathbb{R}}{\overset{\cap}{v}}$

- $M \setminus F(U)$ ist $\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 1, x > 0\}$ $+\frac{1}{2}$

Lokale Parametrisierung?

- Da wir wissen, dass F ein Diffeo aufs Bild ist und $F(U) \subset M$ ist, muss noch überprüft werden, dass die Jacobimatrix auf ganz U maximalen Rang hat:

$$D_{(\phi,v)}F = \begin{pmatrix} -\cosh v \sin\phi & \sinh v \cos\phi \\ \cosh v \cos\phi & +\sinh v \sin\phi \\ 0 & \cosh v \end{pmatrix} \quad +\frac{1}{2}$$

Da $\cosh v > 0$ ist, und $\sin\phi / \cos\phi$ nicht gleichzeitig Null werden, ist der Rang immer 2 und damit maximal. Also ist F eine lokale Parametrisierung. $+\frac{1}{2}$

- $\int_\Omega \langle V, N \rangle d\mathrm{vol}$:

$$N \text{ ist } \frac{\partial_\phi F \times \partial_v F}{|\partial_\phi F \times \partial_v F|} \overset{+\frac{1}{2}}{=} \begin{pmatrix} \cosh^2 v \cos\phi \\ -\cosh^2 v \sin\phi \\ \sinh v \cosh v \end{pmatrix} \frac{1}{|\partial_\phi F \times \partial_v F|} \quad +\frac{1}{2}$$

eventuell bis aufs Vorzeichen.

Da wir den äußeren Normalenvektor suchen, muss dieser in $\phi = \pi, v = 0$ negative x-Komponente haben (vgl. Bild). Da $\cos\pi = -1$ ist, ist $N = \dfrac{\partial_v F \times \partial_\phi F}{|\partial_\phi F \times \partial_v F|}$. $+\frac{1}{2}$

Also gilt

$$\int_\Omega \langle V, N \rangle d\mathrm{vol} \underset{\substack{\text{da } M \setminus F(U) \\ \text{Nullmenge} \cap \Omega}}{=} \int_{\tilde{U}} \langle V \circ F, \partial_v F \times \partial_\phi F \rangle \, d\phi \, dv \quad +\frac{1}{2}$$

mit $\tilde{U} \subset U$ und

$F(\tilde{U}) = \Omega \setminus (M \setminus F(U))$

$$\int_\Omega \langle V, N\rangle \, dvol = \int_{-v_0}^{v_0}\int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \cosh v \cos\phi \\ \cosh v \sin\phi \\ \sinh v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cosh^2 v \cos\phi \\ \cosh^2 v \sin\phi \\ -\sinh v \cosh v \end{pmatrix} \right\rangle d\phi \, dv$$

mit $\sinh v_0 = 1$ (also $z = 1$) (und damit $\sinh v_0 = -1$) ($z = -1$) $+\frac{1}{2}$

4.5

$$\int_\Omega \langle V, N\rangle \, dvol = \int_{-v_0}^{v_0}\int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\cosh^3 v - \sinh^2 v \cosh v\right)}_{= \cosh v} d\phi \, du$$

$$= 2\pi \sinh v \Big|_{-v_0}^{v_0} = 4\pi \sinh v_0 = 4\pi \quad +\frac{1}{2}$$

(v) Divergenzsatz:

$$\int_K \operatorname{div} V \, dvol = \int_{\partial K} \langle V, N\rangle \, dvol \quad +\frac{1}{2}$$

1

∂K besteht aus Ω und den ~~[illegible]~~ Kreisscheiben mit Radius $\sqrt{2}$ in den Ebenen $z = 1$ und $z = -1$ („die beiden Deckel" von K)

Also ist

$$\int_K \operatorname{div} V \, dvol - \int_\Omega \langle V, N\rangle \, dvol = \int_{\text{die beiden Deckel von } K} \langle V, N\rangle \, dvol \quad +\frac{1}{2}$$

$$\left(= \int_{B_{\sqrt{2}}(0) \subset \{z=1\text{-Ebene}\}} \left\langle V, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle dvol + \int_{B_{\sqrt{2}}(0) \subset \{z=-1\text{-Ebene}\}} \left\langle V, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle dvol \right)$$

Total: 10

(7)

(i) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist in $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wenn der Grenzwert von $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ $+\frac{1}{2}$ für $z \to z_0$ existiert. $+\frac{1}{2}$

($f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist komplex differenzierbar, wenn sie für alle $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.)

2

Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$(u = \mathrm{Re}\, f\,,\ v = \mathrm{Im}\, f)$ $\qquad z = x + iy$

$$\partial_x u = \partial_y v \ {+\tfrac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \partial_y u = -\partial_x v \ {+\tfrac{1}{2}}$$

(ii) Ist f komplex-differenzierbar, dann gelten für f die Cauchy-Riemann-Dgl. $+\frac{1}{2}$ Gelten für f die Cauchy-Riemann-Dgl und ist f als Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ reell differenzierbar, dann ist f komplex differenzierbar. $+\frac{1}{2}$

1

(iii) $f(z) = \frac{1}{z}$ $\qquad (z \neq 0)$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}}{z - z_0} = -\frac{1}{z z_0} \xrightarrow[z \to z_0]{} -\frac{1}{z_0^2} \qquad +1$$

1

Also ist f komplex diff'bar.

(iv) $$f(z = x + iy) = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{=: u} + i\, \underbrace{\frac{-y}{x^2 + y^2}}_{=: v} \qquad +\frac{1}{2}$$

$$\partial_x u = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

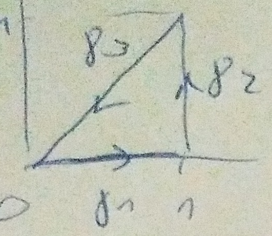
Wegen Symmetrie damit $\partial_y v = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \partial_x u$ $\qquad +\frac{1}{2}$

$$\partial_y u = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \partial_x v\,.$$

1

8

(i)



$\gamma_1(t\in[0,1]) = t$

$\gamma_2(t\in[0,1]) = 1+it$

$\gamma_3(t\in[0,1]) = 1+i-t(1+i)$ $+\frac{1}{2}$

$$\int_\gamma \bar z\,dz = \int_{\gamma_1} \bar z\,dz + \int_{\gamma_2} \bar z\,dz + \int_{\gamma_3} \bar z\,dz \quad +\tfrac{1}{2}$$

3.5

$$= \int_0^1 \underbrace{t}_{\overline{\gamma_1(t)}} \cdot \underbrace{1}_{\gamma_1'(t)}\,dt + \int_0^1 (1-it)\,i + \int_0^1 -(1-i-t(1-i))(1+i)\,dt$$

$$= \frac{1}{2} + i + \frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 - 2\int_0^1 (1-t)\,dt \quad +1.5$$

$$= 1+i-2\left(t-\tfrac{1}{2}t^2\right)_0^1 = i$$

(ii) $\frac{\sin z}{z-3}$ holomorph, außer in $z=3$ $+\frac{1}{2}$. Da $3\notin\overline{B_1(0)}$ ist, folgt nach Cauchy-Integralsatz: $+\frac{1}{2}$ $\int_{\partial B_1(0)} \frac{\sin z}{z-3}\,dz = 0$ $+\frac{1}{2}$

$\frac{z^2+2z+1}{(z-1)^2}$ holomorph, außer in $z=1$ $+\frac{1}{2}$. Da $1\in\overline{B_2(0)}$, folgt mit verallgemeinerter Cauchy-Integralformel $+\frac{1}{2}$

4.5

$$\int_{\partial B_2(0)} \frac{z^2+2z+1}{(z-1)^2}\,dz = 2\pi i\,(z^2+2z+1)'\Big|_{z=1} \; +\tfrac{1}{2} \; = 2\pi i\,(2z+2)\Big|_{z=1}$$

$$= 8\pi i \quad +\tfrac{1}{2}$$

$\frac{\cos z}{z-2}$ holomorph, außer in $z=2$ $+\frac{1}{2}$. Da $2\in\overline{B_3(0)}$, folgt mit Cauchy-Integralformel:

$$\int_{\partial B_3(0)} \frac{\cos z}{z-2}\,dz = 2\pi i\,\cos 2 \quad +\tfrac{1}{2}$$

Total: 8