Analysis II — Ksenia Fedosova, Nadine Große, SS 21

Übungsblatt 0

Dieses Blatt wird nicht abgegeben, sondern nur in der Übung der zweiten Vorlesungswoche besprochen.

Aufgabe. Konvergieren die Folgen? Wenn ja wohin? Existieren die Grenzwerte, wenn ja wie lauten sie?

(i) $(\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n})^T \in \mathbb{R}^2$

(ii) $(\frac{1}{n}, (-1)^n, 0)^T \in \mathbb{R}^3$

(iii) $\lim_{x=(x_1,x_2)\to(0,0)}(|x_1|^2+x_2, 5x_1+2, 3)^T$

(iv) $\lim_{x=(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2}$

(v) $\lim_{x=(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2+x_2^2}$

Aufgabe. Sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass dann

$$\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1,\ldots,x_n)^T \mapsto f(x_1)$$

automatisch stetig ist. Nutzen Sie dies, um mit ihrem sonstigen Wissen über stetige Funktionen zu folgern, dass $g(x_1,x_2) = |x_1| - |x_2|$ und Polynome in mehreren Variablen stetig sind.

Aufgabe. Wir wollen den Satz vom Maximum für stetige Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ beweisen. Dieser lautet:

Sei $f\colon K\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ und sei $K\subset\mathbb{R}^n$ kompakt. Dann nimmt f ihr Supremum an.

Dazu nehmen wir uns den Beweis für $K=[a,b]$ und $n=1$ aus Analysis 1:

Beweis der Ana1-Version. Sei $s := \sup\{f(x)\in\mathbb{R} \mid x\in[a,b]\}$, falls das Supremum existiert, sonst $s:=\infty$. Dann gilt in jedem Fall $f(x)\le s$ für alle $x\in[a,b]$. Es bleibt zu zeigen, dass s wirklich das Supremum ist und angenommen wird.

Sei $x_n\in[a,b]$ eine Folge mit $f(x_n)\to s$ für $n\to\infty$. Eine solche Folge muss es geben, da s sonst nicht das Supremum von $\{f(x)\in\mathbb{R}\mid x\in[a,b]\}$ wäre. Da x_n eine beschränkte Folge ist, gibt es nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_j$. Der Grenzwert sei M. Dann ist $M\in[a,b]$. Aus der Stetigkeit von f folgt dann $f(x_{n_j})\to f(M)$. Also ist $s=f(M)$ (und s ist damit insbesondere endlich). $\square$

Passen Sie den Beweis an, so dass er für allgemeines $K\subset\mathbb{R}^n$ kompakt funktioniert. Für die Anpassung des unterstrichenen Satzes müssen Sie noch ein Zusatzargument geben. Achten Sie darauf, wo Sie eigentlich verwenden, dass K kompakt ist.

Gibt es auch einen Satz vom Maximum für Funktionen $f\colon K\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$? → Nein: Was wäre denn ein solches Maximum?
Ist $(0,1,0)^T \in \mathbb{R}^3 < (0,0,1)^T \in \mathbb{R}^3$?
$\mathbb{R}^m$ muss kein angeordneter Körper sein!

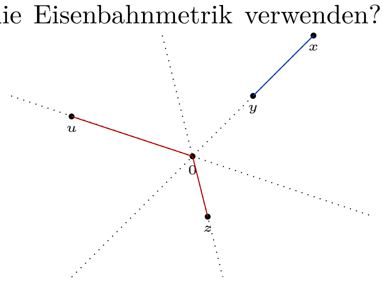
Aufgabe. Sei $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$(x,y)\mapsto\begin{cases}2(x^2+y^2) & \frac{x}{y}\in\mathbb{Q} \text{ oder } \frac{y}{x}\in\mathbb{Q}\\ x^2+y^2 & \text{sonst}\end{cases}$$

In welchen Punkten ist f stetig (Wenn nichts dazu gesagt wird, ist $\mathbb{R}^n$ immer mit dem euklidischen Abstand gemeint)? In welchen Punkten ist f stetig, wenn wir auf $\mathbb{R}^2$ die Eisenbahnmetrik verwenden?

Eisenbahnmetrik:

$$d(x,y)=\begin{cases}|x-y| & \text{falls } x,\ y \text{ auf einer Ursprungsgeraden liegen}\\ |x|+|y| & \text{sonst}\end{cases}$$



Aufgabe

$=: x$

(i) $(\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n})^T \in \mathbb{R}^2$ konvergiert gegen $x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: |x - x_n| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$ mit

$|x - x_n|$ dem eukl. Abstand im $\mathbb{R}^2$, also

$$|x - x_n| = \sqrt{(x_1 - \tfrac{1}{n})^2 + (x_2 - (2 + \tfrac{1}{n}))^2} < \varepsilon.$$

<u>Beh.:</u> $(\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n})^T \in \mathbb{R}^2$ konv. gegen $(0,2)^T \in \mathbb{R}^2$.

<u>Bew.:</u>

$$\sqrt{(x_1 - \tfrac{1}{n})^2 + (x_2 - (2+\tfrac{1}{n}))^2} = \sqrt{(0 - \tfrac{1}{n})^2 + (2 - 2 - \tfrac{1}{n})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{2}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n} \leq \frac{\sqrt{2}}{n_0}.$$

Wähle $n_0 := \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon}$, dann ist

$$\frac{\sqrt{2}}{n_0} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \varepsilon}{2\sqrt{2}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Also konvergiert $(\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n})^T \in \mathbb{R}^2$ gegen $(0,2)^T \in \mathbb{R}^2$. ∎

(ii) $(\frac{1}{n}, (-1)^n, 0)^T \in \mathbb{R}^3$

<u>Beh.:</u> $(\frac{1}{n}, (-1)^n, 0)^T \in \mathbb{R}^3$ divergiert.

<u>Bew.:</u> Angenommen, es gäbe einen solchen GW $a := (a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Nach GW-Def. gäbe es damit für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\sqrt{(\frac{1}{n} - a_1)^2 + ((-1)^n - a_2)^2 + a_3^2} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, (-1)^n, 0\right)^T = \Big(\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{\to 0}, \underbrace{\lim_{n\to\infty} (-1)^n}_{\text{konv. nicht}}, 0\Big)^T$$

Angenommen, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n = a$, dann müssten alle Teilfolgen von $(-1)^n$ gegen a konvergieren. Widerspruch, denn $\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n+1} \neq \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n}$.

(iii) $\lim_{x=(x_1,x_2)\to(0,0)}(|x_1|^2+x_2, 5x_1+2, 3)^T$

Beh: $\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} (|x_1|^2+x_2, 5x_1+2, 3)^T = (0,2,3)^T$

Bew.: $\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} (|x_1|^2+x_2, 5x_1+2, 3)^T =$

$$\left(\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} |x_1|^2+x_2, \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} 5x_1+2, 3\right)^T$$

$$= (0+0, 5\cdot 0+2, 3)^T = (0,2,3)^T.$$

(iv) $\lim_{x=(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2}$

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2} =$$

$D_{(0,0)} f(x)$

$(2x_1 \;\; 2x_2)$

$2x_1+2x_2$

Aufgabe. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass dann

$$\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1, \dots, x_n)^T \mapsto f(x_1)$$

automatisch stetig ist. Nutzen Sie dies, um mit ihrem sonstigen Wissen über stetige Funktionen zu folgern, dass $g(x_1, x_2) = |x_1| - |x_2|$ und Polynome in mehreren Variablen stetig sind.

$\tilde{f}$ ist in $p \in \mathbb{R}^n$ stetig, wenn

Für alle $\varepsilon > 0$ ex. ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x - p| < \delta$ gilt, dass $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(p)| < \varepsilon$.

Es ist

$$\delta > |x - p| = \sqrt{\underbrace{(x_1 - p_1)^2}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{(x_n - p_n)^2}_{\geq 0}}$$

$$\geq \sqrt{(x_1 - p_1)^2} = |x_1 - p_1|.$$

Da f stetig ist und $|x_1 - p_1| < \delta$,

ist
$$|f(x_1) - f(p_1)| = |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(p)| < \varepsilon.$$