Analysis II Ksenia Fedosova, Nadine Große
SS 21

Übungsblatt 3

Aufgabe 9 (1.5+1.5+2)**.** (i) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y)^T \mapsto |xy|$. Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ (dort wo der Gradient existiert). Skizzieren Sie den Höhenlinienplot von f zusammen mit dem Vektorfeld $\operatorname{grad} f$.

(ii) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jeweils zweimal stetig differenzierbar. Rechnen Sie nach, dass $\operatorname{div}\operatorname{rot} V = 0$ und $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$ gilt.

(iii) (Gravitationsfeld) Sei $g\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto -\frac{x}{|x|^3}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{div} g = 0$ und $\operatorname{rot} g = 0$ gilt (Das Gravitationsfeld ist weg vom Ursprung quellen- und wirbelfrei.).

Aufgabe 10. Sei $f\colon \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{1+z}$. Schreiben Sie f als Funktion von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)^T\}$ nach $\mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie die totale Ableitung. Sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt? Wenn ja, welcher komplexen Multiplikation entspricht die totale Ableitung. Überprüfen Sie ihr Ergebnis, in dem Sie direkt die komplexe Ableitung von f berechnen.

Aufgabe 11. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und sei $f\colon U \to \mathbb{R}^\ell$ partiell differenzierbar. Seien die partiellen Ableitungen von f beschränkt, d.h. für alle $i = 1, \ldots, k$ ist $\sup_{x\in U} |\partial_i f(x)| < \infty$. Zeigen Sie, dass dann f stetig ist.

Aufgabe 12 (2.5+2.5)**.** (i) Bestimmen Sie alle lokalen Maxima/Minima und Sattelpunkte von

$$f\colon (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{x^4}{2} + 2y^2 - 2xy - 2yz + z^2.$$

(ii) (Lineare Regression) Gegeben seien N Punkte $(x_i, y_i)^T \in \mathbb{R}^2$. Wir suchen die Gerade $g\colon x \mapsto mx + n$ ($m, n \in \mathbb{R}$), so dass die Summe der Abstandsquadrate $y_i - g(x_i)$ minimal ist. D.h. wir wollen $F(m,n) := \sum_{i=1}^N |y_i - g(x_i)|^2$ minimieren. Bestimmen Sie g derart, dass diese Summe minimal wird. Begründen Sie, dass es sich dabei wirklich um ein Minimum handelt.

Zur linearen Regression[1] - das ist wichtig und wird sehr oft verwendet! Das ist die Grundidee für das Standardverfahren zur Schätzung des (linearen) funktionalen Zusammenhangs $y = f(x)$ bei gegebener Menge von Meßwerten.

Abgabe am Mittwoch 12.05.21 bis 14 Uhr

[1] Wir rechnen hier nur die lineare Einfachregression – https://de.wikipedia.org/wiki/Lineare_Einfachregression

Analysis II Blatt 3

Lorenz Bung

Matr.-Nr. 5113060

lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Vincent Wilhelms

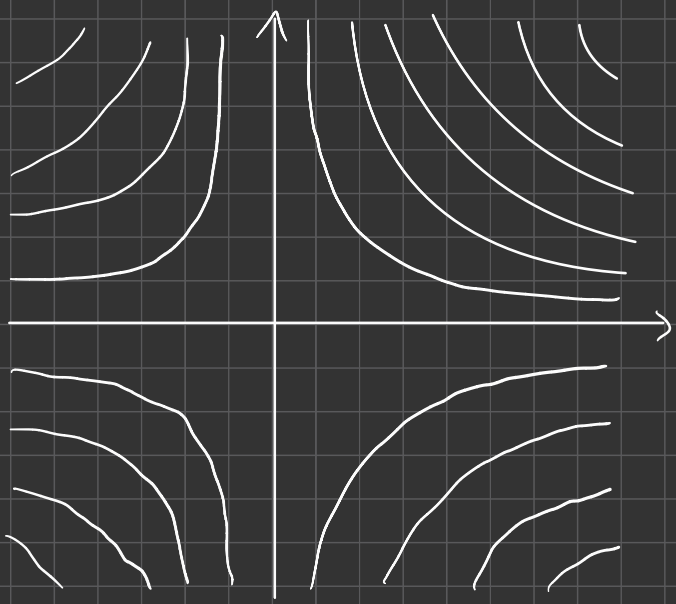
Matr.-Nr. 4909980

Aufgabe 9 (1.5+1.5+2). (i) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y)^T \mapsto |xy|$. Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$. Skizzieren Sie den Höhenlinienplot von f zusammen mit dem Vektorfeld $\operatorname{grad} f$.

(f ist in $(0,0)^T \in \mathbb{R}^2$ nicht diff'bar – betrachte daher $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$)

$$\operatorname{grad}(f) = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |y| \\ |x| \end{pmatrix}$$

Skizze zu f



(ii) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jeweils zweimal stetig differenzierbar. Rechnen Sie nach, dass $\operatorname{div}\operatorname{rot} V = 0$ und $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$ gilt.

<u>Zu zeigen:</u> $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(V)) = 0$.

<u>Beweis:</u>

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(V)) = \operatorname{div}\left((\partial_y V_z - \partial_z V_y, \partial_z V_x - \partial_x V_z, \partial_x V_y - \partial_y V_x)^T\right)$$
$$= \partial_x(\partial_y V_z - \partial_z V_y) + \partial_y(\partial_z V_x - \partial_x V_z) + \partial_z(\partial_x V_y - \partial_y V_x)$$
$$= \partial_x \partial_y V_z - \partial_x \partial_z V_y + \partial_y \partial_z V_x - \partial_y \partial_x V_z + \partial_z \partial_x V_y - \partial_z \partial_y V_x$$
$$= \partial_x \partial_y V_z \underline{- \partial_y \partial_x V_z} + \partial_y \partial_z V_x \underline{- \partial_z \partial_y V_x} + \partial_z \partial_x V_y \underline{- \partial_x \partial_z V_y}$$

(Satz 1.3.3)

$$= \partial_x \partial_y V_z \underline{- \partial_x \partial_y V_z} + \partial_y \partial_z V_x \underline{- \partial_y \partial_z V_x} + \partial_z \partial_x V_y \underline{- \partial_z \partial_x V_y} = 0.$$

<u>zu zeigen:</u> $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0.$

<u>Beweis:</u>

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = \operatorname{rot}(\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)$$

$$= (\partial_y \partial_z f - \underline{\partial_z \partial_y f}, \ \partial_z \partial_x f - \underline{\partial_x \partial_z f}, \ \partial_x \partial_y f - \underline{\partial_y \partial_x f})^T$$

(Satz 1.3.3.)

$$= (\partial_y \partial_z f - \underline{\partial_y \partial_z f}, \ \partial_z \partial_x f - \underline{\partial_z \partial_x f}, \ \partial_x \partial_y f - \underline{\partial_x \partial_y f})^T$$

$$= (0, 0, 0)^T.$$

$\square$

(iii) (Gravitationsfeld) Sei $g\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto -\frac{x}{|x|^3}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{div} g = 0$ und $\operatorname{rot} g = 0$ gilt (Das Gravitationsfeld ist weg vom Ursprung quellen- und wirbelfrei.).

$$g\colon (x,y,z)^T \longmapsto -\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,-3} \cdot (x,y,z)^T$$

$$D_{(x,y,z)^T} g = \begin{pmatrix} \frac{2x^2-y^2-z^2}{|(x,y,z)^T|^5} & \frac{3xy}{|(x,y,z)^T|^5} & \frac{3xz}{|(x,y,z)^T|^5} \\ \frac{3xy}{|(x,y,z)^T|^5} & \frac{-x^2+2y^2-z^2}{|(x,y,z)^T|^5} & \frac{3yz}{|(x,y,z)^T|^5} \\ \frac{3xz}{|(x,y,z)^T|^5} & \frac{3yz}{|(x,y,z)^T|^5} & \frac{-x^2-y^2+2z^2}{|(x,y,z)^T|^5} \end{pmatrix}$$

<u>zu zeigen:</u> $\operatorname{div}(g) = 0.$

<u>Beweis:</u> $\operatorname{div}(g) = \frac{\partial g_x}{\partial_x} + \frac{\partial g_y}{\partial_y} + \frac{\partial g_z}{\partial_z}$

$$= \frac{2x^2-y^2-z^2}{|(x,y,z)^T|^5} + \frac{-x^2+2y^2-z^2}{|(x,y,z)^T|^5} + \frac{-x^2-y^2+2z^2}{|(x,y,z)^T|^5}$$

$$= \frac{2x^2-y^2-z^2-x^2+2y^2-z^2-x^2-y^2+2z^2}{|(x,y,z)^T|^5} = 0.$$

$\square$

Zu zeigen: $\operatorname{rot}(g) = 0$.

Beweis: $\operatorname{rot}(g) = (\partial_y g_z - \partial_z g_y, \partial_z g_x - \partial_x g_z, \partial_x g_y - \partial_y g_x)^T$

$$= \left(\frac{3yz}{|(x,y,z)^T|^5} - \frac{3yz}{|(x,y,z)^T|^5}, \frac{3xz}{|(x,y,z)^T|^5} - \frac{3xz}{|(x,y,z)^T|^5}, \frac{3xy}{|(x,y,z)^T|^5} - \frac{3xy}{|(x,y,z)^T|^5} \right)^T$$

$$= (0, 0, 0)^T.$$

$\square$

Aufgabe 10. Sei $f\colon \mathbb{C}\setminus\{-1\}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto\frac{1}{1+z}$. Schreiben Sie f als Funktion von $\mathbb{R}^2\setminus\{(-1,0)^T\}$ nach $\mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie die totale Ableitung. Sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt? Wenn ja, welcher komplexen Multiplikation entspricht die totale Ableitung. Überprüfen Sie ihr Ergebnis, in dem Sie direkt die komplexe Ableitung von f berechnen.

$$f: z := a+ib \longmapsto \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+a+ib}$$

$$= \frac{1}{(a+1)+ib}\cdot\frac{(a+1)-ib}{(a+1)-ib} = \frac{(a+1)-ib}{(a+1)^2+abi+ib-abi-ib+b^2}$$

$$= \frac{(a+1)-ib}{(a+1)^2+b^2} = \frac{a+1}{a^2+2a+1+b^2} - i\cdot\frac{b}{a^2+2a+1+b^2}$$

Die zugehörige Funktion $g: \mathbb{R}^2\setminus\{(-1,0)^T\}\to\mathbb{R}^2$ lautet also

$$g: (x,y)^T \longmapsto \left(\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}, \frac{-y}{(x+1)^2+y^2}\right)^T.$$

$$D_p g = \begin{pmatrix} \partial_x g_x & \partial_x g_y \\ \partial_y g_x & \partial_y g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-x^2-2x+y^2-1}{(x^2+2x+y^2+1)^2} & \frac{2(x+1)y}{((x+1)^2+y^2)^2} \\ \frac{-2(x+1)y}{((x+1)^2+y^2)^2} & \frac{-x^2-2x+y^2-1}{(x^2+2x+y^2+1)^2} \end{pmatrix}.$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind erfüllt, denn es gilt:

(1) $$\partial_x g_x = \frac{-x^2-2x+y^2-1}{(x^2+2x+y^2+1)^2} = \partial_y g_y$$

(2) $$\partial_y g_x = \frac{-2(x+1)y}{((x+1)^2+y^2)^2} = -\left(\frac{2(x+1)y}{((x+1)^2+y^2)^2}\right) = -\partial_x g_y.$$

Aufgabe 11

$U \subset \mathbb{R}^k$ offen $f: U \to \mathbb{R}^n$ partiell diff'bar

Die partielle Ableitungen von f sind beschränkt. $\forall i = 1, \dots, k$: $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\partial_i f(x)| < \infty$

zu zeigen: f ist stetig

<u>**Bew:**</u> Sei $p = (p_1, \dots, p_k)^T \in U$ und $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in U$

$|f(x) - f(p)| \leq f(x) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, p_k)|$

$+ |f(x_1, \dots, x_{k-1}, p_k) - f(x_1, \dots, x_{k-2}, p_{k-1}, p_k)| + \dots$

$\dots + |f(x_1, p_2, \dots, p_k) - f(p)|$

Sei $g(x_k) - g(p_k) := f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k)$

$- f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$

f ist partiell diffbar $\Rightarrow$ g diff'bar

$\Rightarrow \exists\, \xi_k \in (x_k, p_k) : g(x_k) - g(p_k)$

$= g'(\xi_k)(x_k - p_k)$

$\Rightarrow |f(x) - f(p)| \leq |\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_{k-1}, \xi_k)(x_k - p_k)$

$+ |\frac{\partial f}{x_{k-1}}(x_1, \dots, x_{k-2}, \xi_{k-1}, p_k)(x_{k-1} - p_{k-1})|$

$\dots + |\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, p_2, \dots, p_k)(x_1 - p_1)|$

partielle Ableitungen sind beschränkt

$\Rightarrow |f(x) - f(p)| \leq c_1 |x_1 - p_1| + \dots + c_k |x_k - p_k|$

$\xrightarrow{p \to x} 0$

f ist stetig in p, und p würde beliebig gewählt. $\square$

Aufgabe 12 (2.5+2.5). (i) Bestimmen Sie alle lokalen Maxima/Minima und Sattelpunkte von

$$f\colon (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{x^4}{2} + 2y^2 - 2xy - 2yz + z^2.$$

Lemma 1.6.1 liefert uns alle möglichen Kandidaten für Extremwerte und Sattelpunkte:

$$D_{(x,y,z)^T} f = \left(2x^3 - 2y,\ 4y - 2x - 2z,\ 2z - 2y\right)$$

wird 0, wenn

$$\begin{aligned} 2x^3 - 2y &= 0 \quad \Rightarrow \quad y = x^3 \\ -2x + 4y - 2z &= 0 \\ -2y + 2z &= 0 \quad \Rightarrow \quad z = y \end{aligned}$$

und damit $-2x + 4x^3 - 2x^3 = -2x + 2x^3 = -2x(1-x^2) = 0$.

Die möglichen Kanditaten sind also $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = -1$, bzw. im $\mathbb{R}^3$ die Punkte

$$p_1 = (0,0,0)^T,\ p_2 = (1,1,1)^T,\ p_3 = (-1,-1,-1)^T.$$

Diese Kandidaten überprüfen wir nun mit der in Satz 1.6.12. gegebenen hinreichenden Bedingung für lokale Minima/Maxima:

$$\mathrm{Hess}_{(x,y,z)^T}(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left((x,y,z)^T\right)\right)_{ij} = \begin{pmatrix} 6x & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 1.6.6. ist die oben berechnete Hessische genau dann positiv definit, wenn alle führenden Hauptminoren positive Determinante haben:

$$\det(6x) = 6x \qquad \det\begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 24x - 4$$

$$\det\begin{pmatrix} 6x & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 48x - 24x - 8 = 24x - 8$$

Für $p_1 = (0,0,0)^T$ erhalten wir die Determinanten
$6 \cdot 0 = 0$, $24 \cdot 0 - 4 = -4$, $24 \cdot 0 - 8 = -8$.
Also ist $-\mathrm{Hess}_{p_1}(f)$ positiv semidefinit. Hier können wir also keine Aussage treffen (vgl. Tabelle 1.2 im Skript).

Für $p_2 = (1,1,1)^T$ erhalten wir die Determinanten
$6 \cdot 1 = 6$, $24 \cdot 1 - 4 = 24 - 4 = 20$, $24 \cdot 1 - 8 = 24 - 8 = 16$.
Also ist $\mathrm{Hess}_{p_2}(f)$ positiv definit und p_2 damit nach Satz 1.6.12 ein isoliertes lokales Minimum.

Für $p_3 = (-1,-1,-1)^T$ erhalten wir die Determinanten
$6 \cdot (-1) = -6$, $24 \cdot (-1) - 4 = -24 - 4 = -28$, $24 \cdot (-1) - 8 = -24 - 8 = -32$.
Also ist $-\mathrm{Hess}_{p_3}(f)$ positiv definit und p_3 damit nach Satz 1.6.12 ein isoliertes lokales Maximum.

(ii) (Lineare Regression) Gegeben seien N Punkte $(x_i, y_i)^T \in \mathbb{R}^2$. Wir suchen die Gerade $g\colon x \mapsto mx + n$ ($m, n \in \mathbb{R}$), so dass die Summe der Abstandsquadrate $y_i - g(x_i)$ minimal ist. D.h. wir wollen $F(m, m) := \sum_{i=1}^N |y_i - g(x_i)|^2$ minimieren. Bestimmen Sie g derart, dass diese Summe minimal wird. Begründen Sie, dass es sich dabei wirklich um ein Minimum handelt.

Wir wollen die Summe der Abstandsquadrate minimieren, also das Minimum von $\sum_{i=1}^N |y_i - g(x_i)|^2 = \sum_{i=1}^N |y_i - (mx_i + n)|^2$ finden.

Nach Lemma 1.6.1 muss $D_{(m,n)} F = 0$ sein:

$$D_{(m,n)} F = \begin{pmatrix} \partial_m F \\ \partial_n F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_m \sum_{i=1}^N |y_i - mx_i - n|^2 \\ \partial_n \sum_{i=1}^N |y_i - mx_i - n|^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \partial_m (y_i - mx_i - n)^2 \\ \sum_{i=1}^N \partial_n (y_i - mx_i - n)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N 2(y_i - mx_i - n) \cdot (-x_i) \\ \sum_{i=1}^N 2(y_i - mx_i - n) \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \sum_{i=1}^N (y_i - mx_i - n) \cdot x_i \\ -2 \sum_{i=1}^N (y_i - mx_i - n) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -2 \sum_{i=1}^N (y_i - mx_i - n) \cdot x_i = 0, \quad -2 \sum_{i=1}^N (y_i - mx_i - n) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N y_i x_i - m \sum_{i=1}^N x_i^2 - n \sum_{i=1}^N x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N y_i - m \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N n = 0$$

$$\Rightarrow m \sum_{i=1}^N x_i^2 + n \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N y_i x_i, \quad m \sum_{i=1}^N x_i + N \cdot n = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$\Rightarrow n = \frac{\sum_{i=1}^N y_i - m \cdot \sum_{i=0}^N x_i}{N} =: \overline{y} - m \cdot \overline{x} \qquad \left(\overline{y} := \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}, \overline{x} \text{ analog}\right)$$

$$\Rightarrow m = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \overline{x})^2}.$$

Die Kandidaten überprüfen wir nun mit der Hessischen, wie uns Satz 1.6.12 gibt:

$$\mathrm{Hess}_{(m,n)} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial m \partial m} & \frac{\partial^2 F}{\partial m \partial n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial n \partial m} & \frac{\partial^2 F}{\partial n \partial n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot \sum_{i=1}^{N} (-x_i \cdot x_i) & -2 \sum_{i=1}^{N} (-1) \cdot x_i \\ -2 \cdot \sum_{i=1}^{N} -x_i & -2 \cdot (-n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \sum_{i=1}^{N} (x_i)^2 & 2 \sum_{i=1}^{N} x_i \\ 2 \sum_{i=1}^{N} x_i & 2n \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathrm{Hess}_{(m,n)} F) = 2 \sum_{i=1}^{N} (x_i)^2 \cdot 2n - \left(2 \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot 2 \sum_{i=1}^{N} x_i\right)$$

$$= 4n \sum_{i=1}^{N} (x_i)^2 - 4 \sum_{i=1}^{N} (x_i)^2 = (n-1) \cdot 4 \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i)^2 > 0$$

Die erste führende Hauptminore von $\mathrm{Hess}_{(m,n)} F$ hat auch positive Determinante:

$$\det\left(2 \sum_{i=1}^{N} (x_i)^2\right) = 2 \sum_{i=1}^{N} (x_i)^2 > 0.$$

Damit ist $\mathrm{Hess}_{(m,n)} F$ positiv definit und (m,n) wirklich Minimum der Abstandsfunktion F.

Die Geradengleichung von g lautet also

$$g(x) = mx + n = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2} \cdot x + \overline{y} - m\overline{x}.$$