Analysis I Gruppe 11

Übungsblatt 8 Lorenz Bung: lorenz.bung@googlemail.com

Matrikelnummer: 511 3060

Charlotte Rothhaar: C.Rothhaar97@gmail.com

Matrikelnummer: 4310516

Aufgabe 29:

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{8x^3+2x+1}{2x^3+7x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{8+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{7}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{8+2\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2+7\frac{1}{x^2}}$

konvergieren für $x\to\infty$ gegen 0

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{8}{2} = \lim\limits_{x\to\infty} 4 = \underline{4}$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x})}{(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x})} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-(x^2-2x)}{(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x})}$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-x^2+2x}{(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x})} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4\cancel{x}}{\cancel{\sqrt{x^2}}\cdot(\underbrace{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}_{\to 1}+\underbrace{\sqrt{1-\frac{2}{x}}}_{\to 1})}$

$\frac{2}{x}$ geht für $x\to\infty$ gegen 0, also bleibt $\sqrt{1}=1$ stehen

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{1+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{2} = \underline{2}$

iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{\ln(x)}}{e^{\ln(\ln(x))}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln(x) - \ln(\ln(x))}$

Wir wissen, dass $e^x \to \infty$ für $x \to \infty$.

Daher untersuchen wir folgenden Ausdruck:

$\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) - \ln(\ln(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln(\ln(x))} - \ln(\ln(x))$

Wir setzen $\ln(\ln(x)) = y$

Dann folgt:

$\lim\limits_{x\to\infty} e^y - y$ Da die Exponentialfunktion e^y „stärker" ist und wir wissen, dass $e^x \to \infty$ für $x \to \infty$ geht folgt:

$\lim\limits_{x\to\infty} e^y = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\underbrace{\ln(\ln(x))}_{\to\infty}} = \infty$

Aufgabe 30:

(i) $\tan: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$

$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

$f'(x) \overset{QR}{=} \frac{(\sin x)' \cdot \cos - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$

$= \frac{\cancel{\cos^2 x}(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x})}{\cancel{\cos^2 x}} = \underline{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$

(ii) $$\left((x^3+2x+1)\,e^{x^2}\right)' \overset{PR}{=} (x^3+2x+1)'\cdot e^{x^2} + (x^3+2x+1)\cdot(e^{x^2})'$$

$$= (3x^2+2)\cdot e^{x^2} + (x^3+2x+1)\cdot \underbrace{(2x\cdot e^{x^2})}_{\text{Kettenregel}}$$

$$= e^{x^2}\cdot\left((3x^2+2)+(2x^4+4x^2+2x)\right)$$

$$= \underline{e^{x^2}\cdot(2x^4+7x^2+2x+2)}$$

(iii) $$\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' \overset{KR}{=} \left(\frac{1-x}{1+x}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'\right) \overset{QR}{=} \frac{\cancel{(1-x)}\,\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^{\cancel{2}}}}{1+x} = \frac{\frac{1-x+1+x}{1-x}}{1+x} = \frac{2}{(1-x)\cdot(1+x)} = \underline{\frac{2}{1-x^2}}$$

Aufgabe 31:

i) Sei $f(x) := x^2\, g(x)$, mit g beschränkt auf $[-1,1]$.

zz.: f ist an der Stelle 0 differenzierbar

Zunächst zeigen wir, dass $g(x)$ stetig auf dem Intervall $[-1,1]$ ist.

Beweis:

Sei $g(x)$ eine beschränkte Funktion auf $[-1;1]$.

Sei $x_0 \in [-1,1]$ und sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta = \frac{\varepsilon}{L} > 0$.

Dann gilt $\forall\, x \in [-1,1]$ mit $|x-x_0| < \delta$, dass

$$|g(x)-g(x_0)| \leq L|x-x_0| < L\delta = \varepsilon$$

ist. Also ist g nach Lemma 4.1.11 stetig. ✓

Es bleibt zu zeigen, dass $f(x)$ differenzierbar:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2 \cdot g(x) - 0^2 \cdot g(0)}{x} = x^2 \cdot g(x)$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 \cdot g(x) = \lim_{x \to 0} 0^2 \cdot \lim_{x \to 0} g(0) = 0 \cdot g(0) = 0 = f'(0).$$

$\Rightarrow$ Somit ist f an der Stelle 0 diff'bar.

ii) Sei $f: I = (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

zz.: f ist in x_0 diff'bar $\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

Beweis:

Da f diff'bar ist können wir den Differenzenquotienten von f bilden:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Wir setzen $h := x - x_0$, wobei h den Abstand von $|x-x_0|$ beschreibt

Daraus folgt, wenn $x \to x_0$ „läuft", geht h gegen 0.

Wir setzen h in den Differenzenquotienten ein:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ Wir nähern uns von x aus nach rechts an.

Analog dazu von x aus nach links:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

Bildet man nun den Mittelwert folgt:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}}{2} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

„⇐" Beweis durch Gegenbeispiel:

Betragsfunktion: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto |x|$

Dann existiert der zentrale Differenzenquotient:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$, wir setzen $x_0 = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} \leftarrow \text{da } |-h| = |h| \quad = \lim_{h \to 0} \frac{|h| - |h|}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{2h} = 0$$

Jedoch wissen wir bereits, dass die Betragsfunktion nicht differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$ ist. ↯ □

Aufgabe 32:

(i) $\cos(x) = Re(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2} = \frac{1}{2}\left((e^{i\pi})^{\frac{1}{4}} + (e^{i\pi})^{-\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{2}\left((-1)^{\frac{1}{4}} + (-1)^{-\frac{1}{4}}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(i^{\frac{1}{2}} + i^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\frac{i+1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(i+1)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{i^2+2i+1}{i}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2i}{i}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

ii) $A = \{\cos^2\phi\, e^{i\phi} \mid \phi \in [0, 2\pi)\} \subset \mathbb{C}$

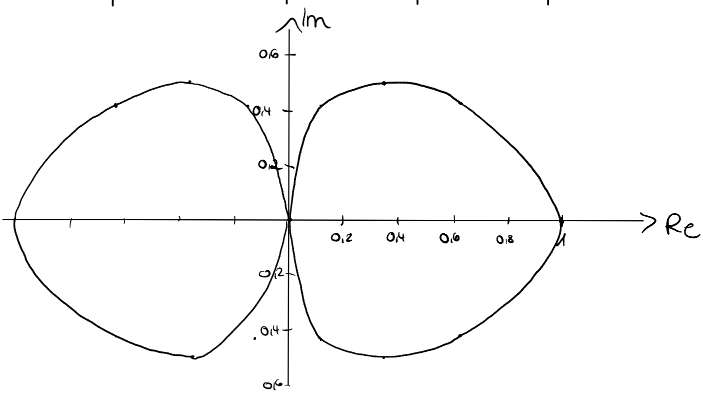
Es gilt $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ (*)

In die Gleichung eingesetzt, folgt:

$\cos^2\varphi \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = \underbrace{\cos^3\varphi}_{\text{Realteil}} + \underbrace{\cos\varphi \cdot i \cdot \sin\varphi}_{\text{Imaginärteil}}$

Wir setzen nun Werte für φ ein:

0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$1+i\cdot 0$	$0{,}65+i\cdot 0{,}43$	$0{,}35+i\,\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}+i\,0{,}43$	$0+i\cdot 0$



$$B = \{2(1+\cos\phi)\, e^{i\phi} \mid \phi \in [0, 2\pi)\} \subset \mathbb{C}.$$

Wir setzen (*) ein:

$$2(1+\cos\varphi)\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) = (1+\cos\varphi)\cdot(2\cos\varphi + 2i\cdot\sin\varphi)$$

$$= 2\cos\varphi + 2i\cdot\sin\varphi + 2\cos^2\varphi + 2i\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi$$

$$= \underbrace{(2\cos\varphi)\cdot(1+\cos\varphi)}_{\text{Realteil}} + \underbrace{(2i\sin\varphi)\cdot(1+\cos\varphi)}_{\text{Imaginärteil}}$$

0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$4+i\cdot 0$	$3{,}23+i\,1{,}87$	$2{,}41+i\,2{,}41$	$1{,}5+i\,2{,}60$	$0+i\,2$