UNI FREIBURG

Stochastik II

Sommersemester 2022

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 3

Abgabe: Freitag, 17.06.2022, um 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Untersuchen Sie, ob die Familie der

1. Geometrischen Verteilungen mit Erfolgswahrscheinlichkeit in $(0, 1)$
2. Uniformverteilungen auf den offenen Intervallen

eine Exponentialfamilie ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Die Verteilungsfunktion der *Gumbel*-Verteilung mit Parametern $\beta > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$F_{(\beta,\mu)}(x) = \exp\Big(- \exp\big(- \tfrac{1}{\beta}(x - \mu)\big)\Big).$$

Untersuchen Sie für die Familie der zugehörigen Produktmaße

1. $\{\mathrm{P}_\beta^{\otimes n} : \beta > 0\}$ bei bekanntem μ,
2. $\{\mathrm{P}_\mu^{\otimes n} : \mu \in \mathbb{R}\}$ bei bekanntem β und
3. $\{\mathrm{P}_{(\beta,\mu)}^{\otimes n} : (\beta, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\}$

bei festem $n \in \mathbb{N}$, ob es sich um eine Exponentialfamilie handelt.

Hinweis: Die Dichte der Produktmaße ist jeweils durch das Produkt der Dichten gegeben, d.h.

$$f_{(\beta,\mu)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{(\beta,\mu)}(x_i)$$

.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Für $n \geq 2$ sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ ein Vektor unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}[X_1^2] < \infty$, $\overline{X} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ sowie $\hat{\sigma}^2(X) := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{E}[\hat{\sigma}^2(X)] = \mathrm{Var}[X_1].$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Die gemeinsame Verteilung zweier Zufallsvariablen X und Y wird durch die (gemeinsame) Dichte $f(x, y)$ beschrieben:

1. $f(x, y) = \frac{1}{16} \cdot \mathbb{1}_{(-2,2)^2}(x, y)$
2. $f(x, y) = \frac{1}{8}\left(\mathbb{1}_{(-2,0)^2}(x, y) + \mathbb{1}_{[0,2)^2}(x, y)\right)$
3. $f(x, y) = (1 + xy) \cdot \mathbb{1}_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^2}(x, y)$

Wie sind in diesen drei Fällen X und Y selbst verteilt? In welchem Fall (und warum) sind X und Y stochastisch unabhängig?

Aufgabe 5 (Bonus 4 Punkte)**.** Die Verteilungsfunktion der Pareto-Verteilung $\mathrm{Par}(\alpha)$ zum Parameter $\alpha > 0$ ist gegeben durch

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha}, & \text{für } x \geq 1, \\ 0, & \text{für } x < 1. \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass die Dichte f_α von F_α gegeben ist durch

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}, & \text{für } x \geq 1, \\ 0, & \text{für } x < 1. \end{cases}$$

2. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und Pareto-verteilt zum Parameter $\alpha > 0$. Berechnen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\alpha}_n$ für α.

3. Zeigen Sie, dass $\log X_1$ Exponential-verteilt zum Parameter α ist und folgern Sie damit, dass für alle $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(\left|\tfrac{1}{\hat{\alpha}_n} - \tfrac{1}{\alpha}\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

   Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\log X_1, \log X_2, \ldots$ *unabhängig sind.*

Aufgabe 07

1) Behauptung: Die Familie der geometrischen Verteilungen mit $\theta \in (0,1)$ ist eine Exponentialfamilie

Beweis: $\Theta = (0,1)$ und für $x \in \{1,2,3 \ldots\}$ gilt somit $p(x,\theta) = P_\theta(X=x) = \theta(1-\theta)^{x-1}$

wähle die Funktionen $c, d : \Theta \to \mathbb{R}$ und $T, S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie die Menge $A \subset \mathbb{R}$ aus Definition 34 folgendermaßen

$c(\theta) = \ln(1-\theta)$ wohldefiniert da $\theta < 1$

$d(\theta) = \ln(\theta)$ wohldefiniert da $\theta > 0$

$S(x) = 0$, $T(x) = x - 1$, $A = \{1, 2, \ldots\}$

$$\Rightarrow \mathbb{1}_{\{x \in A\}} \cdot \exp\left(c(\theta) \cdot T(x) + d(\theta) + S(x)\right) =$$

$$\mathbb{1}_{\{x \in A\}} \cdot e^{c(\theta)T(x)} e^{d(\theta)+S(x)} =$$

$$\mathbb{1}_{\{x \in A\}} \cdot e^{\ln(1-\theta)\cdot(x-1)} e^{\ln(\theta)+0} =$$

$$\mathbb{1}_{\{x \in A\}} \cdot e^{\ln((1-\theta)^{(x-1)})} e^{\ln(\theta)} =$$

$$\mathbb{1}_{\{x \in A\}} \, \theta(1-\theta)^{x-1} = p(x,\theta)$$

$\Rightarrow$ Die Familie ist eine Exponentialfamilie

$\boxtimes$

2) Die Uniformverteilung auf offenen Intervallen bildet keine Exponentialfamilie da für $\theta \in \Theta = \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta_1 < \theta_2\}$ die Dichte $p(x,\theta)$ gegeben ist durch $\mathbb{1}_{\{x \in (\theta_1, \theta_2)\}} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}$ und somit müsste die Menge A aus Definition 34 von θ abhängen.

Aufgabe 04

Es gilt für zwei ZV X, Y mit Dichte $f(x), f(y)$ und Verteilungsfunktion $F(x), F(y)$

$$F(x) = P(X \leq x) = P((X \leq x) \wedge (Y \leq \infty)) = \lim_{y \to \infty} F(x,y)$$

wobei $F(x,y)$ die gemeinsame Verteilungsfunktion von X und Y ist

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = F(x) = \lim_{y \to \infty} F(x,y) = \lim_{y \to \infty} \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

1) $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ x \in (-2,2)}}{=} \int_{-2}^{2} \frac{1}{16}\,dy = \frac{1}{16} y \Big|_{-2}^{2} = \frac{2}{16} - \left(-\frac{2}{16}\right) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow f(x) = \mathbb{1}_{(-2,2)}(x) \cdot \frac{1}{4}$ also $X \sim U(-2,2)$

$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ y \in (-2,2)}}{=} \int_{-2}^{2} \frac{1}{16}\,dx = \frac{1}{16} x \Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow f(y) = \mathbb{1}_{(-2,2)}(y) \cdot \frac{1}{4}$ also $Y \sim U(-2,2)$

offensichtlich gilt $f(x) \cdot f(y) = f(x,y)$ und somit sind X, Y unabhängig

2) $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ x \in (-2,0) \text{ oder } x \in [0,2)}}{=} \frac{1}{8}\int_{-2}^{0} 1\,dy + \frac{1}{8}\int_{0}^{2} 1\,dy =$

$\frac{1}{8}\left(y \Big|_{-2}^{0} + y \Big|_{0}^{2} \right) = \frac{1}{8}(2+2) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_{(-2,0)}(x) + \mathbb{1}_{[0,2)}(x)\right)$

$\Rightarrow f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \ldots = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(y) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_{(-2,0)}(y) + \mathbb{1}_{[0,2)}(y)\right)$

$\Rightarrow$ Es gilt $f(x) \cdot f(y) \neq f(x,y)$ also sind X, Y abhängig voneinander

3) $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 + xy\,dy =$

$y + \frac{1}{2}xy^2 \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 x\right) - \left(-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 x\right) =$

$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 x - \left(\frac{1}{2}\right)^3 x = 1$

$\Rightarrow f(x) = \mathbb{1}_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x)$ also $X \sim U(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$\Rightarrow f(y) = \ldots = 1$

$\Rightarrow f(y) = \mathbb{1}_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(y)$ also $Y \sim U(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Es gilt weiterhin $f(y) \cdot f(x) \neq f(x,y)$

also X, Y abhängig voneinander

Aufgabe 5

1) $f_\alpha(x)$ ist gegeben durch $\frac{\partial}{\partial x} F_\alpha(x)$ somit gilt schonmal für $x < 1$ $f_\alpha(x) = 0$

für $x \geq 1$ betrachte

$f_\alpha(x) = \frac{\partial}{\partial x} F_\alpha(x) = -\left(-\frac{1}{(x^\alpha)^2} \cdot \alpha x^{\alpha-1}\right) =$

$\alpha x^{\alpha-1} x^{-2\alpha} = \alpha x^{-\alpha-1} = \alpha x^{-(\alpha+1)} = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$

$\Rightarrow f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{für } x \geq 1 \\ 0 & \text{für } x < 1 \end{cases}$

2) Es gilt $L(\theta, x) = P_\theta(X = x) = P_\theta(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) \underset{\substack{\uparrow \\ X_i \text{ unabhängig}}}{=}$

$\prod_{i=1}^n f_\theta(x_i)$, OBdA gelte $x_i \geq 1 \; \forall i = 1, \ldots, n$ sonst ist das Produkt immer null $\alpha_n = \theta \in \mathbb{R}^+$ frei wählbar. mit Beispiel 55 folgt somit

$l(\theta, x) = \sum_{i=1}^n \ln(f_\theta(x_i)) = \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{\theta}{x^{\theta+1}}\right)$

Es gilt weiterhin $\frac{\partial}{\partial \theta} \underset{\substack{\uparrow \\ \ln(\ \ldots\ )}}{lf_\theta}(x_i) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln\left(\frac{\theta}{x_i^{\theta+1}}\right) =$

$\frac{x_i^{\theta+1}}{\theta} \cdot \left(\frac{x_i^{\theta+1} - \ln(x)\theta x_i^{\theta+1}}{x_i^{2(\theta+1)}}\right) = \frac{1}{\theta} - \ln(x_i)$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta} l(\theta,x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\theta} - \ln(x_i)\right) = \frac{1}{\theta} n - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$

Setze nun $\frac{\partial}{\partial\theta} l(\theta,x) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\theta} n - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = \frac{1}{\theta}$

$\Rightarrow \theta = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)\right)^{-1}$

Überprüfe noch die zweite Ableitung von $l(\theta,x)$

$\frac{\partial}{\partial\theta\partial\theta} l(\theta,x) = -\frac{1}{\theta^2} n < 0$ für alle $\theta > 0, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \hat{\alpha}_n = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)\right)^{-1}$