**Stochastik** **Wintersemester 2021/22**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

# Übungsblatt 7

**Abgabe: Keine Abgabe.**

**Aufgabe 1** (Binomial Modell)**.** Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, sodass $\Omega = \{\omega_u, \omega_d\}$, $\mathscr{F} = 2^\Omega$ and $P(\{\omega_u\}) = p = 1 - P(\{\omega_d\})$ mit $p \in (0,1)$. Sei $s_0 > 0, r > -1$ und

$$S_0^0 \equiv 1, \quad S_1^0 \equiv 1+r, \quad S_0^1 \equiv s_0, \quad S_1^1(\omega_u) = s_0(1+u), \quad S_1^1(\omega_d) = s_0(1+d). \tag{1}$$

i) Sei $d < r < u$. Zeigen Sie, dass es ein Maß $Q$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$ mit $Q(\{\omega_u\}), Q(\{\omega_d\}) \in (0,1)$ gibt, sodass folgende Eigenschaft gilt:

$$E_Q[S_1^1/S_1^0] = S_0^1/S_0^0.$$

Ein solches Maß wird äquivalentes Martingal Maß genannt. Zeigen Sie die Eindeutigkeit.

ii) Sei $p = 0.7$, $s_0 = 100$, $r = 0$, $1+d = 0.8$ und $1+u = 1.2$. Was ist das zugehörige äquivalente Martingalmaß? Zeigen Sie, dass $E_P[(S_1 - 100)^+]$ kein arbitrage-freier Preis für die Option $H = (S_1^1 - 100)^+ := \max(0, S_1^1 - 100)$ (Call Option mit Strike $K = 100$) ist.

iii) Wie müssen Sie handeln um die Option $H$ zu replizieren, dh. finden Sie $(\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}^2$, sodass

$$\xi_0 S_1^0(\omega) + \xi_1 S_1^1(\omega) = H(\omega) \text{ für alle } \omega \in \Omega.$$

Wie viel Startkapital benötigen Sie hierfür? Berechnen Sie $E_Q[H/S_1^0]$. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

**Aufgabe 2.** Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für $\lambda$.

**Aufgabe 3.** Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_0)$, $\mu \in \mathbb{R}$ und festes und bekanntes $\sigma_0 > 0$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für $\mu$.