Numerik 1

Blatt 2 – 1.11.2021

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 bis 3. Abgabe: 12.11.2021, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws21/num`

Aufgabe 1. Für $1 \leq p < \infty$ wird auf $\mathbb{R}^\ell$ durch $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\ell} |x_j|^p\right)^{1/p}$ eine Norm definiert. Die induzierte Operatornorm sei ebenfalls mit $\|\cdot\|_p$ bezeichnet.
(i) Zeigen Sie, dass $\|A\|_1 = \max_{k=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{m} |a_{jk}|$ für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt.
(ii) Für die symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei

$$\rho(B) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } B\}.$$

Zeigen Sie, dass $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^\top A)}$ für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt.

Aufgabe 2. Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass $\det A \neq 0$ gilt. Bestimmen Sie $\mathrm{cond}_1(A)$, $\mathrm{cond}_2(A)$ und $\mathrm{cond}_\infty(A)$ und diskutieren Sie, für welche Verhältnisse von a, b und c zugehörige lineare Gleichungssysteme schlecht konditioniert sind.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die invertierbaren (normalisierten) unteren Dreiecksmatrizen eine Gruppe bilden, das heißt sind $L, L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (normalisierte) untere Dreiecksmatrizen und gilt $\det L \neq 0$, so sind L^{-1} und $L_1 L_2$ ebenfalls (normalisierte) untere Dreiecksmatrizen.

Aufgabe 4. (i) Zeigen Sie, dass $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ keine normalisierte LU-Zerlegung und $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ keine Cholesky-Zerlegung besitzt.
(ii) Berechnen Sie die normalisierte LU-Zerlegung von A_3 und die Cholesky-Zerlegung von A_4 mit

$$A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 10 & 8 & 8 \\ 15 & 11 & 10 \end{bmatrix}, \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 9 \\ 12 & 41 & 22 \\ 9 & 22 & 38 \end{bmatrix},$$

sofern diese existieren.

Blatt 2

Lorenz Burg, Charlotte Rothhaar

Aufgabe 1:

(i) zz.: $\|A\|_1 = \max_{k=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{m} |a_{jk}| \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Beweis:

Sei $A=(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann gilt:

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{m} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n}|x_j| \cdot \sum_{i=1}^{m}|a_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{n}|x_j| \cdot \max_{l=1,\dots,n}\sum_{i=1}^{m}|a_{il}| = \|x\|_1 \cdot \max\sum_{i=1}^{m}|a_{il}|$$

Dann folgt:

$$\|A\|_1 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \max_{l=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{il}|. \quad *$$

Sei nun l_0 ein Index, sd. $\sum_{i=1}^{m}|a_{il_0}| = \max \sum_{i=1}^{m}|a_{il}|$. Dann gilt für $\tilde{x} := e_{l_0}$ (l_0-te Einheitsvektor):

$\|\tilde{x}\|_1 = 1$ und $\|A\tilde{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j\right| = \sum_{i=1}^{m}|a_{il_0}| = \max_{l=1,\dots,n}\sum_{i=1}^{m}|a_{il}|$

Also $$\|A\|_1 = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \geq \frac{\|A\tilde{x}\|_1}{\|\tilde{x}\|_1} = \max_{l=1,\dots,n}\sum_{i=1}^{m}|a_{il}|. \quad *$$

Aus * folgt die Behauptung. ∎

(ii) Sei $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit $\rho(B) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist EW von } B\}$

zz.: $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} \quad \forall A\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

Beweis:

Seien x_i, $i=1,\dots,n$ Eigenvektoren d. Orthonormalbasis von A^TA bzgl. der Eigenwerte λ_i, $i=1,\dots,n$.

Dann gilt:

$$\|A\|_2^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^TAx, x\rangle$$
$$= \langle \sum_{i=1}^{n}\langle x,x_i\rangle A^TAx_i, \sum_{i=1}^{n}\langle x,x_i\rangle x_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \langle x,x_i\rangle^2 \leq \lambda_{max}(A^TA)\|x\|^2.$$

Also: $\|A\|_2 \leq \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$

Sei nun x_{i_0} normierter Eigenvektor zu $\lambda_{max}(A^TA)$. Dafür gilt $\|x_{i_0}\|_2 = 1$ und $\|Ax_{i_0}\|_2^2 = \lambda_{max}(A^TA)$.

Daraus folgt, dass $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$ $\forall A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ gilt. ∎

Aufgabe 2:

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, sd. $\det(A) \neq 0$.

zz.: $\text{cond}_1(A)$:

$$\text{cond}_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = \left\|\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right\|_1 \cdot \left\|\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^{-1}\right\|_1 = \left\|\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right\|_1 \cdot \left\|\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\right\|_1$$

$$\overset{\det(A)\neq 0}{=} \max\{|a|+|b|, |b|+|c|\} \cdot \max\left\{\left|\frac{c}{\det A}\right| + \left|\frac{-b}{\det A}\right|, \left|\frac{-b}{\det A}\right| + \left|\frac{a}{\det A}\right|\right\}$$

$$= \max\{|a|+|b|, |b|+|c|\} \cdot \max\left\{\frac{|b|+|c|}{|\det A|}, \frac{|a|+|b|}{|\det A|}\right\}$$

$$= \max\{|a|+|b|, |b|+|c|\} \cdot \max\{|a|+|b|, |b|+|c|\} \cdot \frac{1}{|\det A|}$$

$$= \frac{\max\{(|a|+|b|)^2, (|b|+|c|)^2\}}{|\det A|}$$

zz.: $\text{cond}_\infty(A)$

$$\text{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right\|_\infty \left\|\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^{-1}\right\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right\|_\infty \left\|\frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\right\|_\infty$$

$$= \max\{|a|+|b|\}, |b|+|c|\} \max\left\{\left|\frac{c}{\det A}\right| + \left|\frac{-b}{\det A}\right|, \left|\frac{-b}{\det A}\right| + \left|\frac{a}{\det A}\right|\right\}$$

$$= \max\{|a|+|b|\}, |b|+|c|\} \max\left\{\frac{|c|+|b|}{|\det A|}, \frac{|b|+|a|}{|\det A|}\right\}$$

$$= \max\{|a|+|b|\}, |b|+|c|\} \max\{|a|+|b|, |b|+|c|\} \frac{1}{|\det A|}$$

$$= \frac{\max\{(|a|+|b|)^2, (|b|+|c|)^2\}}{|\det A|}$$

Für $a = -c$ ist $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ orthogonal und damit $A^{-1} = A^T$

$$\text{cond}_1(A) = \text{round}_\infty(A) = \frac{\max\{(|a|+|b|)^2, (|b|+|-a|)^2\}}{|a \cdot (-a) - b \cdot b|} = \frac{(|a|+|b|)^2}{|a^2+b^2|}$$

$$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right\|_2 \left\|\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^{-1}\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right\|_2 \left\|\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\right\|_2$$

$$= \sqrt{\rho\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right)} \cdot \sqrt{\rho\left(\frac{1}{\det(A)^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\right)}$$

$$= \sqrt{\rho\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{pmatrix}} \cdot \sqrt{\rho\left(\frac{1}{\det(A)^2} \cdot \begin{pmatrix} c^2+b^2 & -(ab+bc) \\ -(ab+bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}\right)}$$

$$= \sqrt{\rho\left(\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{pmatrix}\right) \cdot \rho\left(\frac{1}{\det(A)^2}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -(ab+bc) \\ -(ab+bc) & a^2+b^2 \end{pmatrix}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\det(A)^2} \cdot \rho(A^TA) \cdot \rho((A^TA)^{-1})} = \sqrt{\frac{1}{\det(A)^2} \cdot \rho(A^TA) \cdot (\rho(A^TA))} = \sqrt{\frac{1}{\det(A)^2} \rho^2(A^TA)}$$

Aufgabe 3:

zz.: invertierbare (normalisierte) untere Dreiecksmatrizen bilden eine Gruppe.

Beweis:

Seien $L, L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ normalisierte untere Dreiecksmatrizen und $\det L \neq 0$.

Sei $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$ und $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$. Dann ist $L_1 L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}$ wieder eine norm. untere Dreiecksmatrix.

Wir zeigen induktiv, dass L^{-1} norm. untere Dreiecksmatrix ist.

IA: $n=1$ gilt $L = (1)_{1\times 1} = L(1)^{-1}_{1\times 1} = 1$.

IV: $n>1$: $\begin{pmatrix} L[1:n,1:n] & O_n \\ L[n+1,1:n] & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L[1:n,1:n]^{-1} & O_n \\ l^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n^T & 1 \end{pmatrix}$

mit $l \in \mathbb{R}^n$ folgt $l^T = -L[n+1,1:n]L[1:n,1:n]^{-1}$. Also besitzt $L[1:n+1,1:n+1]$ eine Inverse. Wenn $L[1:n,1:n]^{-1}$ norm. untere Dreiecksmatrix ist, dann ist damit auch $L[1:n+1,1:n+1]^{-1}$ norm. untere Dreiecksmatrix. ■

Aufgabe 4:

(i) z.z.: $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt keine normalisierte LU-Zerlegung.

Beweis:

Nach Satz 3.1 im Skript gilt: Eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt genau dann eine eindeutig bestimmte normalisierte LU-Zerlegung, wenn alle Untermatrizen $A_K = (a_{ij})_{1 \le i,j \le k} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ regulär sind.

Da $\det(A_1) = |a_{11}| = 0 \Rightarrow (a_{11})$ ist nicht regulär und somit ex. keine LU-Zerlegung von A_1. ■

(ii) z.z.: $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt keine Cholesky-Zerlegung.

Beweis:

Nach Satz 3.2 im Skript existiert eine Cholesky-Zerlegung, wenn eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit ist.

A_2 ist symmetrisch, daher müssen wir zeigen, dass A_2 nicht positiv definit ist.

z.z.: Es gibt einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von A_2 mit $\lambda \le 0$.

$A_2 \cdot v = \lambda \cdot v$ mit v = Vektoren aus dem Vektorraum

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} w = \lambda \cdot v \\ v = \lambda \cdot w \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{matrix} -\lambda v + w = 0 \\ v - \lambda w = 0 \end{matrix}$$

$$\chi_{A_2}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1 < 0$

Somit gibt es einen Eigenwert $\lambda_2 = -1$, welcher kleiner 0 ist. Damit ist A_2 nicht positiv definit und es existiert keine Cholesky-Zerlegung. ■

(ii)

$A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 10 & 8 & 8 \\ 15 & 11 & 10 \end{pmatrix}$ $\quad A_{11} = \det\begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 11 & 10 \end{vmatrix} = 80-88 \neq 0$, $A_{22} = \det\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 15 & 10 \end{vmatrix} = 50-15 \neq 0$, $A_{33} = \det\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 45-30 \neq 0$

$\Rightarrow$ Somit ex. eine LU-Zerlegung, da alle Hauptuntermatrizen regulär sind.

<u>LU-Zerlegung:</u>

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 10 & 8 & 8 \\ 15 & 11 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II - 2 \cdot I \\ III - 3 \cdot I \end{matrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{:=L} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{:=U} \; III - II$$

$A_4 = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 9 \\ 12 & 41 & 22 \\ 9 & 22 & 38 \end{pmatrix}$ ist symmetrisch.

Es bleibt zu zeigen, dass A_4 positiv definit ist, also alle Hauptminoren positiv definit sind.

$A_{4_1} = \det(9) = 9 > 0$, $A_{4_2} = \det\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 41 \end{pmatrix} = 9 \cdot 41 - 12 \cdot 12 = 369 - 144 > 0$, $A_{4_3} = \det\begin{pmatrix} 9 & 12 & 9 \\ 12 & 41 & 22 \\ 9 & 22 & 38 \end{pmatrix} = 18774 - 13149 > 0$

$\Rightarrow$ Somit existiert eine Cholesky-Zerlegung, da A_4 symmetrisch und pos. definit ist.

<u>Cholesky-Zerlegung:</u>

$$A_4 = L \cdot L^T = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{11} l_{21} & l_{11} l_{31} \\ * & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21} l_{31} + l_{22} l_{32} \\ * & * & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ * & a_{22} & a_{23} \\ * & * & a_{33} \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich folgende Gleichungen: | eingesetzt: (mit pos. Wurzeln)

1) $l_{11}^2 = a_{11} \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$ | $l_{11} = \sqrt{9} = 3$

2) $l_{11} l_{21} = a_{12} \overset{1)}{\Rightarrow} l_{21} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}$ | $l_{21} = \frac{12}{3} = 4$

3) $l_{31} l_{11} = a_{13} \overset{1)}{\Rightarrow} l_{31} = \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}}$ | $l_{31} = \frac{9}{3} = 3$

4) $l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22} \Rightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$ | $l_{22} = \sqrt{41 - 4^2} = \sqrt{25} = 5$

5) $l_{21} l_{31} + l_{22} l_{32} = a_{23} \Rightarrow l_{32} = \frac{a_{23} - l_{21} l_{31}}{l_{22}}$ | $l_{32} = \frac{22 - 4 \cdot 3}{5} = 2$

6) $l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = a_{33} \Rightarrow l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}$ | $l_{33} = \sqrt{38 - 9 - 4} = \sqrt{25} = 5$

Somit ergibt sich $L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ und $L^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Also: $\underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 12 & 9 \\ 12 & 41 & 22 \\ 9 & 22 & 38 \end{pmatrix}}_{A_4} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{L^T}$