Stochastik **Wintersemester 2021/22**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 2

Abgabe: Freitag, 19.11.2021, 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Wir betrachten folgendes Spiel:
Sie setzen einen gewissen Betrag K€ ein und dürfen dafür eine faire Münze so lange werfen, bis zum ersten Mal "Kopf" fällt. Sei n die Anzahl der Würfe bei denen Sie zuvor "Zahl" geworfen haben. Ihre Auszahlung beträgt 2^n€.

1. Was wäre ein fairer Spieleinsatz? Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.
2. Das Spiel folgendermaßen abgewandelt: Ihr Höchstgewinn wird auf 2^{20}€ $= 1048576$€ begrenzt. Was ist unter diesen Voraussetzungen nun ein fairer Spieleinsatz?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie Lemma 2.27: Für $a > 0$ und $b \geq -a$ ist

$$P(T_{-a} \leq n, S_n = b) = P(S_n = -2a - b)$$

Hinweis: Finden Sie eine geeignete Bijektion der Menge $\{T_{-a} \leq n, S_n = b\}$ auf die Menge $\{S_n = -2a - b\}$ und folgern Sie damit die Behauptung. Hierbei verwenden wir für eine Zufallsvariable X auf Ω und $k \in \mathbb{N}$ die in der Stochastik übliche Definition $\{X \leq k\} := \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq k\}$ (analog für " $=$ " und " $\leq$ ").

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie Satz 2.32: Seien $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{A}$ mit $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$. Dann ist

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Aufgabe 4. Gegeben sei ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

Für beliebige Ereignisse $A, B, C \subseteq \Omega$ mit $\mathrm{P}(A) > 0$ und $0 < \mathrm{P}(B) < 1$ gilt:

1. $\mathrm{P}(B|A) > \mathrm{P}(B)$ und $\mathrm{P}(C|B) > \mathrm{P}(C) \Rightarrow \mathrm{P}(C|A) > \mathrm{P}(C)$
2. $\mathrm{P}(A|B) > \mathrm{P}(C)$ und $\mathrm{P}(A|B^c) > \mathrm{P}(C) \Rightarrow \mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(C)$
3. $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) \Leftrightarrow \mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A|B^c)$

Aufgabe 1)

a) Betrachte den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = \{ x^n = (x_1, \dots, x_n) \mid$
$x_i =$ „Zahl" $\forall 1 \leq i \leq n-1$ und $x_n =$ „Kopf" für $n \in \mathbb{N} \}$
$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(x^n) = 2^{-n}$ da die Wahrscheinlichkeit Kopf oder Zahl zu werfen unabhängig von der Würfe zuvor stets $\frac{1}{2}$ beträgt.

Den Gewinn des beschriebenen Spiels bestimmt eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X(x^n) = 2^{n-1}$

$\Rightarrow E[X] = \sum_{x \in \Omega} X(x) \mathbb{P}(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} \cdot 2^{-i} =$

$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$

$\Rightarrow$ der zu erwartende Gewinn in diesem Spiel ist somit unendlich hoch

$\Rightarrow$ Jeder endliche Betrag von K€ sollte sich theoretisch lohnen zu setzen, erst durch einen unendlichen Betrag K€ würde das Spiel kein wert, dies ist aber natürlich praktisch nicht möglich

b) Gleicher Wahrscheinlichkeitsraum wie in a) mit der zusätzlichen Bedingung für $x^n \in \Omega$ gilt $n \leq 21$

$\Rightarrow X(x^n) \leq 2^{21-1} = 2^{20}$ also der Gewinn auf 2^{20}€ begrenzt

$$\Rightarrow E[X] = \sum_{x \in \Omega} X(x)\,\mathbb{P}(x) = \sum_{n=1}^{21} 2^{n-1} \cdot 2^{-n} =$$

$$\sum_{n=1}^{21} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 21 = 10{,}5$$

$\Rightarrow$ Der zu erwartende Gewinn mit beschränkter Gewinnausschüttung beträgt also 10,5 €

$\Rightarrow$ Damit das Spiel also fair wäre müsste man eine Teilnehmergebühr von $K = 10{,}5$ € verlangen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie Lemma 2.27: Für $a > 0$ und $b \geq -a$ ist

$$P(T_{-a} \leq n, S_n = b) = P(S_n = -2a - b)$$

Hinweis: Finden Sie eine geeignete Bijektion der Menge $\{T_{-a} \leq n, S_n = b\}$ auf die Menge $\{S_n = -2a - b\}$ und folgern Sie damit die Behauptung. Hierbei verwenden wir für eine Zufallsvariable X auf Ω und $k \in \mathbb{N}$ die in der Stochastik übliche Definition $\{X \leq k\} := \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq k\}$ (analog für " = " und " ≤ ").

Es ist $T_{-a}(\omega) = \min\{n > 0 : S_n(\omega) = -a\}$.

Sei n_0 dieses minimale n.

Dann ist $\sum_{i=1}^{n_0} X_i = S_{n_0} = -a$ und aufgrund von

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = b$ bekommen wir $\sum_{i=(n_0+1)}^{n} X_i = S_n - S_{n_0} = b - (-a)$

$= b + a$.

Betrachten wir unsere Zufallsvariable als n-Tupel $X = (X_1, \dots, X_n)$, können wir nun eine Bijektion aufstellen:

$$f : \Omega \to \Omega, \quad f(X_i) \longmapsto \begin{cases} X_i & \text{für } i \leq n_0 \\ -X_i & \text{für } i > n_0 \end{cases}$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\sum_{i=1}^{n} f(X_i) = \sum_{i=1}^{n_0} f(X_i) + \sum_{i=(n_0+1)}^{n} f(X_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_0} X_i + \sum_{i=(n_0+1)}^{n} -X_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n_0} X_i - \sum_{i=(n_0+1)}^{n} X_i$$

$$= S_{n_0} - (S_n - S_{n_0})$$

$$= -a - (b+a) = -2a - b.$$

$\square$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie Satz 2.32: Seien $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{A}$ mit $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$. Dann ist

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Beweis: Es ist

$$\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \subset \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i \subset \dots \subset A_2 \cap A_1 \subset A_1$$

und damit

$$0 < \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\Big) \leq \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\Big) \leq \dots \leq \mathbb{P}(A_2 \cap A_1) \leq \mathbb{P}(A_1).$$

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten auf der rechten Seite der Gleichung sind also definiert und wir bekommen

$$\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

$$= \cancel{\mathbb{P}(A_1)} \cdot \frac{\cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}}{\cancel{\mathbb{P}(A_1)}} \cdot \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}} \cdot \dots \cdot \frac{\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)}{\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)}$$

$$= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big).$$

$\square$

Aufgabe 4)

a) Wir zeigen Aussage 1. gilt nicht

Sei $\Omega = \{1, \dots, 6\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und für

$x \in \Omega$ sei $\mathbb{P}(x) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$. Sei Außerdem

$A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{3, 4\}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{|B \cap A|}{|\Omega|} \cdot \left(\frac{|A|}{|\Omega|}\right)^{-1} =$$

$$\frac{2}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^{-1} = 1 > \frac{2}{3} = \frac{|B|}{|\Omega|} = \mathbb{P}(B)$$

Außerdem gilt auch wie in 4.1

$$\mathbb{P}(C|B) = \frac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{|C \cap B|}{|\Omega|} \cdot \left(\frac{|B|}{|\Omega|}\right)^{-1} =$$

$$\frac{2}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{-1} = \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{4} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \frac{|C|}{|\Omega|} = \mathbb{P}(C)$$

Also gilt wie in 4.1 dass

$\mathbb{P}(B|A) > \mathbb{P}(B)$ und $\mathbb{P}(C|B) > \mathbb{P}(C)$ aber es gilt

$$\mathbb{P}(C|A) = \frac{\mathbb{P}(C \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{|C \cap A|}{|\Omega|} \cdot \left(\frac{|A|}{|\Omega|}\right)^{-1} =$$

$$\frac{|\emptyset|}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^{-1} = \frac{0}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^{-1} = 0 < \frac{1}{3} = \mathbb{P}(C)$$

$\Rightarrow$ Die Aussage von 4.1 ist im Allgemeinen nicht gültig

b) Es gelte $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(C)$ und $\mathbb{P}(A|B^c) > \mathbb{P}(C)$

zz: ~~P(C|A~~ $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(C)$

Beweis: aus $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ folgt auch

$0 < \mathbb{P}(B^c) < 1$ Außerdem gilt klarerweise

dass Ω eine disjunkte Vereinigung von B, B^c ist

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) \underset{\text{Satz 2.31}}{=} \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\,\mathbb{P}(B^c) >$$

$\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}(C)\cdot(\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(B^c)) =$
$\mathbb{P}(C)$ $\boxtimes$

c) zz $P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A|B^c)$

Beweis:

$\Rightarrow$ Gelte $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ $*$

$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A \setminus (A \cap B))}{P(B^c)} =$$

$$\frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(B^c)} \overset{*}{=} \frac{P(A) - P(A)P(B)}{P(B^c)} =$$

$$\frac{P(A)(1 - P(B))}{P(B^c)} = \frac{P(A)P(B^c)}{P(B^c)} = P(A) =$$

$$\frac{P(A)\,P(B)}{P(B)} \overset{*}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B)$$

$\Leftarrow$ Gelte $P(A|B) = P(A|B^c)$

$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(B^c)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P(A)P(B) - P(A \cap B)P(B) = P(A \cap B)P(B^c)$$

$$\Rightarrow P(A)P(B) = P(A \cap B)(P(B) + P(B^c))$$

$$\Rightarrow P(A)P(B) = P(A \cap B)$$

$\boxtimes$