Erweiterung der Analysis Ksenia Fedosova, Nadine Große

WS 22/23

Übungsblatt 3

Aufgabe 7 (2+1+2). (i) Sei $\Omega = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subset Q = [0,1]$. Zeigen Sie, dass 1_Ω nicht integrierbar ist.

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, so dass 1_Ω integrierbar ist und $\operatorname{vol}\Omega = 0$. Sei $A \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass dann auch 1_A integrierbar ist und $\operatorname{vol} A = 0$ gilt.

(iii) Sei $\Omega \subset [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ das rechtwinklige, gleichschenklige Dreieck mit Kantenlänge 1, so dass die beiden Katheten jeweils auf der x- bzw. y-Achse liegen. Bestimmen Sie $S_k(1_\Omega)$ und $S^k(1_\Omega)$ und damit dann (unter Verwendung der Definition der Integrierbarkeit) $\int_{[0,1]^2} 1_\Omega \mathrm{dvol}$.

Aufgabe 8 (1+2+2). (i) Berechnen Sie $\int_{[0,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\pi]} \sin(x+y)\mathrm{dvol}$.

(ii) Bestimmen und skizzieren Sie $\Omega \subset [0,a] \times [0,a] \subset \mathbb{R}^2$, $a > 1$, so dass 1_Ω integrierbar ist (begründen Sie dann auch, warum es integrierbar ist) und das Anwenden von Fubini

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_0^a \left(\int_0^x dy \right) dx$$

ergibt. Wenden Sie auf dieses Ω Fubini mit vertauschter Integrationsreihenfolge an und bestimmen Sie damit die Integrationsgrenzen in

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_?^? \left(\int_?^? dx \right) dy.$$

(iii) Lösen Sie (ii) noch einmal für

$$\int_\Omega \mathrm{dvol} = \int_0^a \left(\int_{a-x}^{a^2-x^2} dy \right) dx$$

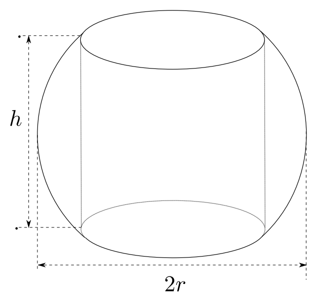
mit $\Omega \subset [0,a] \times [0,a^2]$ für $a > 1$.

Aufgabe 9 (2.5+2.5). (Prinzip des Cavalieri)

(i) Seien $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1,2$, beschränkt und so dass $1_{\Omega_i} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar sind. Für $h \in \mathbb{R}$ fassen wir $\Omega_{i,h} := \Omega_i \cap \{x_n = h\} \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{x_n = h\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$. Sei nun für alle $h \in \mathbb{R}$ die Funktion $1_{\Omega_{i,h}} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ integrierbar. Sei $\operatorname{vol}_{n-1}\Omega_{i,h} := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 1_{\Omega_{i,h}} \mathrm{dvol}$ (vgl. Bemerkung 1.2.4). Sei $\operatorname{vol}_{n-1}\Omega_{1,h} = \operatorname{vol}_{n-1}\Omega_{2,h}$ für alle $h \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $\operatorname{vol}\Omega_1 = \operatorname{vol}\Omega_2$ gilt.

(ii) (Serviettenring-Problem)

Sie haben eine Kugel von Radius r und stechen mittels eines Zylinders, dessen Achse durch den Mittelpunkt der Kugel geht, ein Teil der Kugel aus. Dann bleibt (wenn der Radius des Zylinders kleiner r war) ein Rest übrig. Dieser Rest habe Höhe h. Zeigen Sie, dass das Volumen dieses Restes nicht vom Radius der ursprüngliches Kugel abhängt.



Abgabe am Dienstag 15.11.22 bis 18 Uhr