Abteilung für
Angewandte Mathematik

SoSe 2022
Prof. Dr. Sören Bartels, Jakob Keck

Numerik 2

Blatt 2 – 23.5.2022

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 bis 12. Abgabe: 10.6.2022, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss22/num`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** (i) Zeigen Sie, dass es zu jedem Intervall $[a_0, a_1] \subset \mathbb{R}$ eindeutig bestimmte Polynome $q_{0,0}, q_{0,1}, q_{1,0}, q_{1,1} \in \mathcal{P}_3$ gibt, sodass $q_{j,k}^{(\ell)}(a_m) = \delta_{jm}\delta_{k\ell}$ für $j, k, \ell, m = 0, 1$ gilt. Zeichnen Sie die Polynome für das Intervall $[0, 1]$.
(ii) Folgern Sie, dass auf jeder Partitionierung $\mathcal{T}_n$ mit Gitterpunkten $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zu gegebenen Werten $y_0, y_1, \dots, y_n$ und $r_0, r_1, \dots, r_n$ ein eindeutig definierter Spline $s \in \mathcal{S}^{3,1}(\mathcal{T}_n)$ mit $s(x_i) = y_i$ und $s'(x_i) = r_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, existiert und geben Sie eine Darstellung an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Es sei $\mathcal{T}_n$ eine Partitionierung des Intervalls $[a, b]$ und es seien $s \in \mathcal{S}^{1,0}(\mathcal{T}_n)$ und $g \in C^1([a, b])$, sodass $s(x_i) = g(x_i)$ für $i = 0, 1, \dots, n$ gilt. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |s'|^2 \,\mathrm{d}x \le \int_a^b |g'|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Es sei $\mathcal{T}_n$ eine Partitionierung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ und $s \in \mathcal{S}^{3,2}(\mathcal{T}_n)$ der interpolierende kubische Spline der Funktionswerte $y_0 = 1$ und $y_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ mit natürlichen Randbedingungen. Zeigen Sie, dass s auf jedem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, nur endlich viele Nullstellen besitzt und geben Sie eine möglichst genaue obere Abschätzung an. Skizzieren Sie die Funktion s.

Aufgabe 4 (Essay, 4 Punkte)**.** Schreiben Sie eine kurze Abhandlung von etwa ein bis zwei Seiten, in der Sie diverse Aspekte der numerischen Approximation von Funktionen durch Polynome diskutieren. Dabei soll z.B. eine Anwendung im Vordergrund stehen, die Sie frei wählen können.

Aufgabe 1:

zz.: Zu jedem Intervall $[a_0, a_1] \subset \mathbb{R}$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome

$q_{0,0}, q_{0,1}, q_{1,0}, q_{1,1} \in \mathcal{P}_3$, s.d. $q_{j,k}^{(l)}(a_m) = \delta_{jm}\delta_{kl}$ für $j,k,l,m = 0,1$ gilt.

Beweis:

Nach Voraussetzung gilt für die Polynome: $q_{0,0}(a_0) = \delta_{00}\delta_{00} = 1, q_{0,0}(a_1) = 0, q_{0,0}'(a_0) = 0, q_{0,0}'(a_1) = 0$

$q_{1,0}(a_0) = 0, q_{1,0}(a_1) = 1, q_{1,0}'(a_0) = 0, q_{1,0}'(a_1) = 0$

$q_{0,1}(a_0) = 0, q_{0,1}(a_1) = 0, q_{0,1}'(a_1) = 1, q_{0,1}'(a_1) = 0$

$q_{1,1}(a_0) = 0, q_{1,1}(a_1) = 0, q_{1,1}'(a_0) = 0, q_{1,1}'(a_1) = 1$

zz.: $q_{0,0}$ ist eindeutig bestimmt.

Ein Polynom in $\mathcal{P}_3$ ist der Form: $q(x) = p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0$ für $p_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, \dots, 3\}$

Also gilt für $q_{0,0}(a_0) = p_3a_0^3 + \dots + p_0 = 1$ $\qquad q_{0,0}'(a_0) = 3p_3a_0^2 + 2p_2a_0 + p_1 = 0$

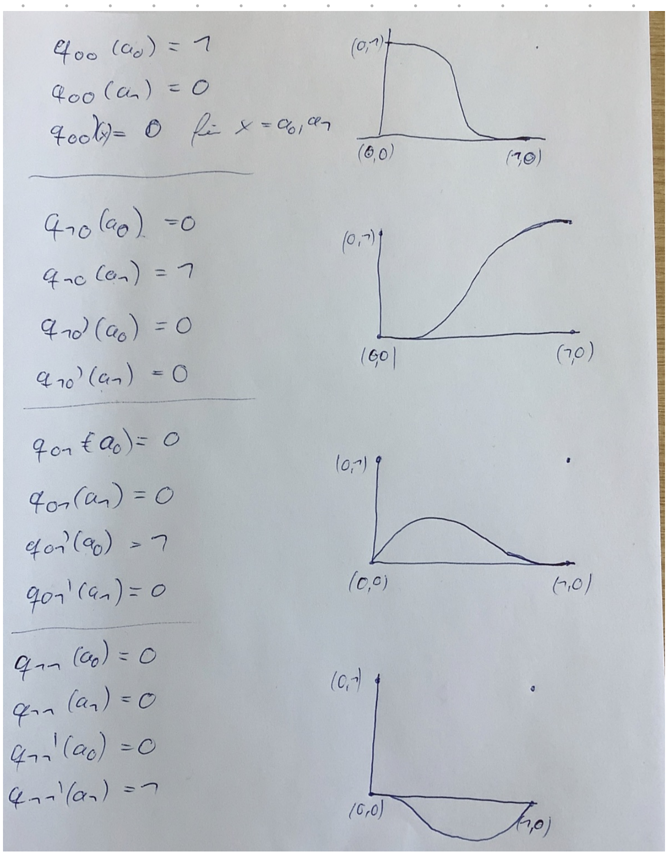
$q_{0,0}(a_1) = p_3a_1^3 + \dots + p_0 = 0$ $\qquad q_{0,0}'(a_1) = 3p_3a_1 + 2p_2a_1 + p_1 = 0$

Es folgt das Gleichungssystem für $(p_3, \dots, p_0)^T \in \mathbb{R}^4$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_0^3 & a_0^2 & a_0 & 1 & 1 \\ a_1^3 & a_1^2 & a_1 & 1 & 0 \\ 3a_0^2 & 2a_0 & 1 & 0 & 0 \\ 3a_1^2 & 2a_1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Da die Matrix regulär ist, existiert eine eindeutige Lösung.
$\Rightarrow (p_3, \dots, p_0)^T$ ist eindeutig bestimmt und somit auch $q_{00} \in \mathcal{P}_3$.

Analog dazu für $q_{0,1}, q_{1,0}, q_{1,1}$. $\square$



ii) zz.: Es existiert ein eindeutig definierter Spline $s \in S^3(\mathcal{T}_n)$ mit $s(x_i) = y_i$ und $s'(x_i) = r_i$

Wir betrachten s lokal auf jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$. s_i, $i \in 0, \dots, n-1$, ist ein Polynom 3. Grades

$$\overset{i)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} x_i^3 & x_i^2 & x_i & 1 & y_i \\ x_{i+1}^3 & x_{i+1}^2 & x_{i+1} & 1 & y_{i+1} \\ 3x_i^2 & 2x_i & 1 & 0 & r_i \\ 3x_{i+1}^2 & 2x_{i+1} & 1 & 0 & r_{i+1} \end{array}\right)$$

wieder reguläre Matrix $\Rightarrow$ LGS eindeutig lösbar

$\Rightarrow$ Koeffizienten von s_i eindeutig bestimmt als $(p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, p_{i4})^T \in \mathbb{R}^4$

$\xRightarrow{\text{Eindeutigkeit der } s_i}$ Eindeutigkeit von s, welche durch

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) & \text{für } x \in [x_0, x_1] \\ s_1(x) & \text{für } x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ s_{n-1}(x) & \text{für } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

gegeben ist, wobei

$s_i(x) = p_{i1}x^3 + p_{i2}x^2 + p_{i3}x + p_{i4}$ und die p_{ij}'s als Einträge der Lösung des LGS gegeben sind, mit $i \in \{0, \dots, n-1\}$ und $j \in \{1, \dots, 4\}$. $\square$

Aufgabe 2:

zz.: $\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |s'|^2 dx \leq \int_b^a |g'|^2 dx$ $\quad s \in S^1(\mathcal{T}_n)$ $\quad g \in C^1([a,b])$ $\quad s(x_i) = g(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

Beweis:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |s'(g-s)'| dx \overset{PI}{=} [|s'(g-s)|]_{x_{i-1}}^{x_i} - \underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} |s''(g-s)| dx}_{=0, \text{ da } s(x) \in \mathcal{P}_1 \text{ für } x \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow s'' = 0}$$

N.V. gilt $\forall x_i$: $g(x_i) - s(x_i) = 0 = (g-s)(x_i)$

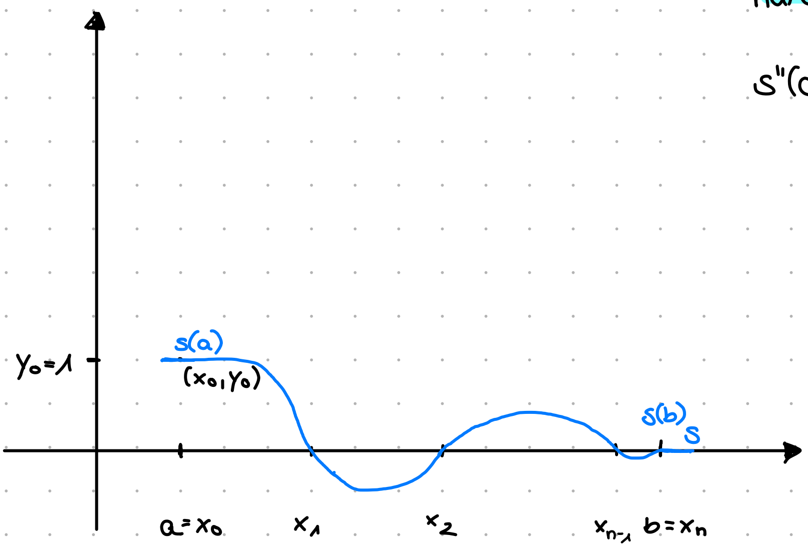
$$\overset{s''=0}{\Longrightarrow} \int_b^a |g'|^2 dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g'|^2 dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g' + (g-s)'|^2 dx = \sum_{i=1}^{n} \Big(\int_{x_{i-1}}^{x_i} |g'|^2 dx + \underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} (g-s)'|^2 dx}_{\geq 0, \text{ da } |(g-s)'|^2 \geq 0} + \underbrace{2\int_{x_{i-1}}^{x_i} |g'(g-s)'| dx}_{=0} \geq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g'|^2 dx \quad \square$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Es sei $\mathcal{T}_n$ eine Partitionierung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n =$ (und $s \in \mathcal{S}^{3,2}(\mathcal{T}_n)$ der interpolierende kubische Spline der Funktionswerte $y_0 = 1$ und $y_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ mit natürlichen Randbedingungen. Zeigen Sie, dass s auf jedem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, nur endlich viele Nullstellen besitzt und geben Sie eine möglichst genaue obere Abschätzung an. Skizzieren Sie die Funktion s.

natürliche Randbedingungen:

$s''(a)=0$, $s'(b)=0$



Es gibt in jedem Intervall endlich viele Nullstellen, da wir in jedem Intervall Polynome 3. Grades haben

$\circledast$ $\Rightarrow \leq 3$ Nst.

$\circledast$ Fundamentalsatz d. Algebra

obere Abschätzung : 2 NST.

Aufgabe 4 (Essay, 4 Punkte)**.** Schreiben Sie eine kurze Abhandlung von etwa ein bis zwei Seiten, in der Sie diverse Aspekte der numerischen Approximation von Funktionen durch Polynome diskutieren. Dabei soll z.B. eine Anwendung im Vordergrund stehen, die Sie frei wählen können.

Polynome kommen in den verschiedensten Anwendungsgebieten vor – beispielsweise in der Physik, Mechanik oder Informatik. Ein interessanter Bereich ist unter Anderem die Robotik – quasi ein Schnittbereich der drei eben genannten Disziplinen. Die Robotik ist dabei besonders relevant – sehr viele Bereiche in der Industrie, z.B. bei der Fertigung von Autos und Maschinen werden heute automatisiert mit entsprechenden Robotern und dadurch nicht nur kostengünstiger und effizienter, sondern auch häufig mit höherer Präzision als menschenmöglich.

Ein Bereich in der Robotik ist die Bahnplanung – die Verknüpfung eines Start- und Zielpunktes durch eine entsprechende Bewegung des Roboterarms und zusätzlich die Übersetzung in konkrete Befehle an die einzelnen Servomotoren im Arm.
Hier spielen Polynome eine wichtige Rolle: Soll ein Roboterarm beispielsweise eine Bewegung durch drei Punkte durchführen (Startposition, Bearbeiten eines Bauteils und Endposition) lässt sich dies gut durch einen Polygonzug beschreiben. In diesem Fallbeispiel wäre eine Approximation mit der Lagrange-Methode beispielsweise gut möglich, da der Grad des Polynoms nicht sehr hoch sein müsste und die Punkte sehr „natürlich" miteinander verknüpft werden können.

Dies ist jedoch nicht immer der Fall. Betrachtet man beispielsweise einen anderen Roboter, der von einem Raum in einen anderen fahren soll: Hier müssen viele Punkte miteinander verknüpft werden, z.B. Startpunkt, ein Punkt im Raum, ein Punkt vor der Türe, ein Punkt nach der Türe ein weiterer im zweiten Raum und schlussendlich der Zielpunkt.

Eine Interpolation mit dem Lagrange-Verfahren würde in diesem Fall zu einem Polygon hohen Grades führen, was aller Wahrscheinlichkeit nach stark oszilliert und den optimalen Weg nur schlecht beschreibt. In einem solchen Fall wäre eine Interpolation mithilfe von kubischen Splines deutlich sinnvoller, da die Limitierung auf Polygonzüge 3. Grades die genannten Oszillationen vermeidet.

Ein weiteres Anwendungsgebiet wäre die digitale Speicherung von Vektorgrafiken (wie z.B. diese Schrift), die sich als Kombination kubischer Splines darstellen ließe.