Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $\mathscr{B} = (B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbar disjunkte Vereinigung von Ω und X eine Zufallsvariable auf Ω. Zeigen Sie, dass der bedingte Erwartungswert von X gegeben $\mathscr{B}$ definiert durch

$$E[X|\mathscr{B}] \coloneqq \sum_{i\in\mathbb{N}, P(B_i)>0} E[X|B_i]\mathbb{1}_{B_i}$$

die Eigenschaft $E[X] = E[E[X|\mathscr{B}]]$ erfüllt.

Es ist $E[X] := \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\, P(\omega)$ und

$$E[E[X|B]] := \sum_{\omega\in\Omega} \left(\sum_{\substack{i\in\mathbb{N},\\ P(B_i)>0}} E[X|B_i]\mathbb{1}_{B_i} \right) P(\omega).$$

Wir wollen also zeigen, dass $\sum_{\substack{i\in\mathbb{N},\\ P(B_i)>0}} E[X|B_i]\mathbb{1}_{B_i} = X(\omega)$

für $\omega\in\Omega$.

Sei $\omega\in B_i$. Da B eine disjunkte Vereinigung ist, ist also $\omega\notin B_j$ für $j\in\mathbb{N}\setminus\{i\}$. Damit ist $\mathbb{1}_{B_j}(\omega) = 0$.

Wir erhalten

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{N},\\ P(B_k)>0}} E[X|B_k]\mathbb{1}_{B_k} = E[X|B_i] =$$

Def. bedingter Erwartungswert

$$= \frac{E[X\mathbb{1}_{B_i}]}{P(B_i)} = \frac{\sum_{\omega\in\Omega} X\mathbb{1}_{B_i}(\omega)\, P(\omega)}{P(B_i)}$$

$$= \frac{\sum_{\omega\in B_i} X(\omega)P(\omega)}{P(B_i)} = \sum_{\omega\in B_i} X(\omega).$$

Aufgabe 3

Sei $\Omega = \{(x,y) \mid x,y \in \{1,\dots,6\}\}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

und P die Gleichverteilung auf Ω

$A = \{(x,y) \in \Omega \mid x \in \{2,4,6\}, y \in \{1,\dots,6\}\}$

$\Rightarrow |A| = 18 \Rightarrow P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$B = \{(x,y) \in \Omega \mid x,y \text{ gerade} \vee x,y \text{ ungerade}\}$

$\Rightarrow |B| = 18 \Rightarrow P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$C = \{(x,y) \in \Omega \mid x \in \{1,\dots,6\}, y \in \{2,3,5\}\}$

$\Rightarrow |C| = 18 \Rightarrow P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$D = \{(1,1),(1,3),(3,1),(5,3)\}$

$\Rightarrow |D| = 4 \Rightarrow P(D) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

Somit gilt für die Schnitte der Paare

$\{A \cap B\} = \{(x,y) \in \Omega \mid x,y \in \{2,4,6\}\}$

$\Rightarrow |\{A \cap B\}| = 9 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B)$ also A,B unabhängig

$\{A \cap C\} = \{(x,y) \in \Omega \mid x \in \{2,4,6\}, y \in \{2,3,5\}\}$

$\Rightarrow |\{A \cap C\}| = 9 = P(A \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$ also A,C unabhängig

$\{A \cap D\} = \emptyset \Rightarrow P(A \cap D) = 0$

$\Rightarrow P(A \cap D) = 0 \neq \frac{1}{18} = P(A)P(D)$ also A,D abhängig

$\{B \cap C\} = \{(x,y) \in \Omega \mid x \in \{1,3,5\}, y \in \{3,5\} \text{ oder } x \in \{2,4,6\}, y = 2\}$

$\Rightarrow |\{B \cap C\}| = 9 \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B)P(C)$ also B,C unabhängig

$\{B \cap D\} = D \Rightarrow P(B \cap D) = P(D) = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow P(B \cap D) = \frac{1}{9} \neq \frac{1}{18} = P(B)P(D)$ also B,D abhängig

$C \cap D = \{(1,3),(5,3)\} \Rightarrow |C \cap D| = 2 \Rightarrow P(C \cap D) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

$\Rightarrow P(C \cap D) = \frac{1}{18} = P(C)P(D)$ also C,D unabhängig

Für die Schnitte von 3 Mengen gilt

$A \cap D \cap B = A \cap D \cap C = \emptyset$ da $A \cap D = \emptyset$

$A \cap B \cap C = \{(2,2),(4,2),(6,2)\} \Rightarrow P(A \cap B \cap D) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

$\Rightarrow A, B, C$ abhängig da $P(A)P(B)P(C) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$B \cap C \cap D = \{(1,3),(5,3)\} \Rightarrow P(B \cap C \cap D) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

$\Rightarrow B, C, D$ abhängig da $P(B)P(C)P(D) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$A \cap B \cap C \cap D = \emptyset$ da $A \cap D = \emptyset$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A, B, C, D \\ A, D, B \\ A, D, C \end{array}\right\}$ abhängig da $P(A) \neq 0$, $P(C) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, $P(D) \neq 0$

Aufgabe 4

$$P(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = l) \overset{\text{Definition 2.29}}{=} \frac{P(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = l - k\})}{P(X_2 = l\}} \overset{X_1, X_2 \text{ unabhängig}}{=}$$

$$\frac{P(X_1 = k)\,P(X_2 = l - k)}{P(X_2 = l)} \underset{\text{Lemma 2.45}}{=} \frac{e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{l-k}}{(l-k)!}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^l}{l!}} =$$

$$\frac{1}{(l-k)!\,k!} \cdot \cancel{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}} \cdot \lambda_1^k \cdot \lambda_2^{l-k} \cdot \frac{l!}{\cancel{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}} \cdot (\lambda_1+\lambda_2)^l} =$$

$$\frac{l!}{(l-k)!\,k!} \cdot \frac{\lambda_1^k \cdot \lambda_2^{l-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^l} \cdot \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^{-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^{-k}} =$$

$$\binom{l}{k} \frac{\lambda_1^k}{(\lambda_1+\lambda_2)^k} \cdot \frac{\lambda_2^{l-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^{l-k}} = \binom{l}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{l-k} =$$

$$\binom{l}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{l-k} = \binom{l}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{l-k}$$

$\blacksquare$