Analysis II Ksenia Fedosova, Nadine Große
SS 21

Übungsblatt 6

Aufgabe 21. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z)^T \mapsto x^2+y^2+z$. Sei $M = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2+y^2 = 5, y = z\}$. Zeigen Sie, dass M eine C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, skizzieren Sie M und bestimmen Sie alle lokalen Maxima/Minima und Sattelpunkte von $f|_M$.

Aufgabe 22 (1.5+2+1.5)**.** Sei A eine symmetrische reelle $n \times n$-Matrix. Wir betrachten $q\colon v \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle v, Av\rangle$.

(i) Bestimmen Sie alle lokalen Minima/Maxima/Sattelpunkte von q (in Abhängigkeit der 'Definitheit' von A).

(ii) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von q unter der Nebenbedingung $|v|^2 = 1$.

(iii) Welche der stationären Punkte sind lokale Minima/Maxima/Sattelpunkte?

Hinweis: Für die Sattelpunkte betrachten Sie geeignete v nahe dem Sattelpunktskandidaten in Richtung eines Vektors zu einem kleineren/größeren Eigenwert. Setzen Sie als bekannt voraus, dass eine symmetrische reelle Matrix eine Basis aus Eigenvektoren besitzt, alle Eigenwerte reell sind und dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenvektoren orthogonal sind.

Aufgabe 23 (2.5+2.5)**.** (i) Bestimmen Sie $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$, indem Sie das Parameterintegral

$$F(\lambda) = \int_0^1 \frac{\ln(1+\lambda^2 x)}{1+x^2}dx$$

untersuchen.

(ii) Sei $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass $\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x}dx = \ln(1+\alpha)$ gilt.

Hinweis: Überprüfen Sie zuerst, dass $(\alpha, x) \in (0,\infty) \times (0,1) \mapsto \frac{x^\alpha-1}{\ln x} \in \mathbb{R}$ auf $(0,\infty)\times[0,1]$ stetig fortsetzbar ist und damit insbesondere das Integral sogar eigentlich existiert.

Aufgabe 24 (1+1.5+1.5+1)**.** Berechnen Sie

(i) $\int_\gamma f ds$ für $f(x,y) = xy^2$ für eine Kurve γ die einmal den Kreis um den Ursprung vom Radius 2 umrundet.

(ii) $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x,y) = \binom{2y}{1-x}$ entlang $\gamma\colon t \in [-1,2] \mapsto (t, 1-t^3)^T \in \mathbb{R}^2$

(iii) $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x,y,z) = (0, x^2, -yz)^T$ entlang einer Kurve γ, die geradlinig von $(4,-1,2)^T$ nach $(1,7,-1)^T$ verläuft.

(iv) die Länge des Funktionsgraphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Bonusaufgabe. Wir wollen $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ berechnen. In Analysis 1 haben wir uns in Bsp. 4.5.33 überlegt, dass $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ existiert und endlich ist. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ existiert auch, da $\frac{\sin x}{x}$ in $x = 0$ stetig fortsetzbar ist (l'Hopital). Also ist $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ wirklich endlich. Aber wir konnten den Wert noch nicht berechnen. Das können wir nun ändern, indem wir

$$F\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ \lambda \mapsto \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x} dx$$

betrachten. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Zeigen Sie, dass $e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x}$ und $\partial_\lambda \left(e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x}\right)$ auf allen kompakten Intervallen $[a,b] \subset (0,\infty)$ gleichmäßig konvergiert.

(ii) Berechnen Sie $F'(\lambda)$ und integrieren Sie den entstandenen Ausdruck explizit. Finden Sie durch Integration dann $F(\lambda)$.

(iii) Bestimmen Sie $\lim_{\lambda\to\infty} F(\lambda)$ und damit die Integrationskonstante aus (ii)

(iv) Es bleibt zu zeigen, dass $\lim_{\lambda\to 0} F(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$, also dass $\lim_{\lambda\to 0} \int_0^\infty \left(e^{-\lambda x} - 1\right) \frac{\sin x}{x} dx = 0$ ist.[1]

Hinweis Beschränken Sie dazu zunächst $\int_m^\infty \left(e^{-\lambda x} - 1\right) \frac{\sin x}{x} dx$, indem Sie $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left(e^{-\lambda x} - 1\right) \frac{\sin x}{x} dx$ für $k \in \mathbb{N}$ einzeln und unabhängig von $\lambda \in [0,1]$ abschätzen.

Abgabe am Mittwoch 09.06.21 bis 14 Uhr

[1] Das ist der schwierige Teil, da das Integral nicht absolut konvergiert, also $\int_0^\infty \left|e^{-\lambda x} - 1\right| \frac{|\sin x|}{x} dx$ nicht endlich ist. (Deshalb haben wir die gleichmäßige Konvergenz vom Integranden von F auch nur auf kompakten Intervallen von $(0,\infty)$ und nicht auf ganz $(0,\infty)$.)

Analysis II Blatt 6

Lorenz Bung

lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Vincent Wilhelms

Matr.-Nr. 4909980

vincent.wilhelms@gmail.com

Aufgabe 21. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z)^T \mapsto x^2+y^2+z$. Sei $M = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2+y^2=5, y=z\}$. Zeigen Sie, dass M eine C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, skizzieren Sie M und bestimmen Sie alle lokalen Maxima/Minima und Sattelpunkte von $f|_M$.

z.z.: M ist eine C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

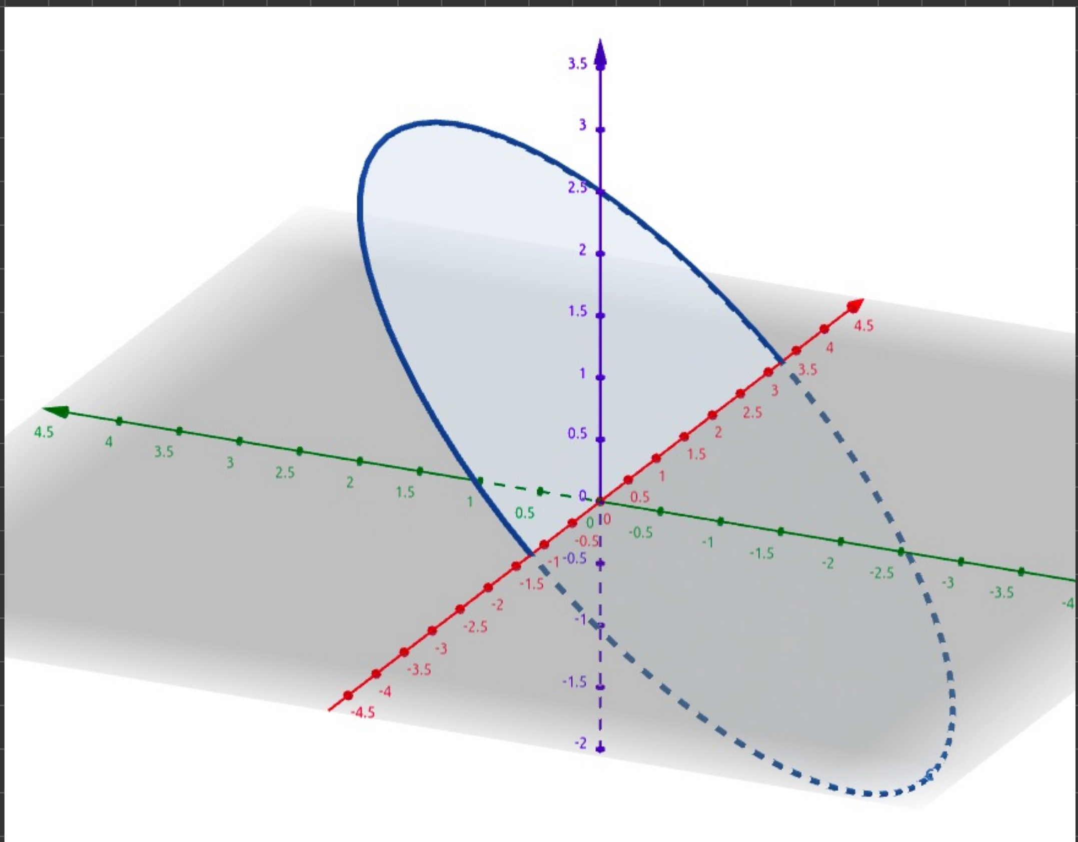
Beweis: Wähle $m\colon (x,y,z)^T \mapsto \begin{pmatrix} (x-1)^2+y^2-5 \\ y-z \end{pmatrix}$.

Dann ist $D_{(x,y,z)^T} m = \begin{pmatrix} 2x-2 & 2y & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ und hat für $(x,y,z)^T \neq (1,0,z)^T$ (z beliebig) vollen Rang.

Es ist aber $(1,0,z) \notin m^{-1}(0)$ $\forall z \in \mathbb{R}$.

Da es sich um eine Verkettung stetig diff'barer Funktionen handelt, ist M damit nach Satz 1.8.5. eine C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

Skizze von M (in GeoGebra):



Wir suchen nun die Extremstellen und Sattelpunkte von $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$ für die Nebenbedingungen

$$g_1(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 - 5 = 0 \quad \text{bzw.}$$
$$g_2(x,y,z) = y - z = 0.$$

Wir erhalten mit Satz 1.9.3. die Darstellung

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= x^2 + y^2 + z + \lambda_1\left((x-1)^2 + y^2 - 5\right) + \lambda_2(y-z) \\ &= x^2 + y^2 + z + \lambda_1 (x-1)^2 + \lambda_1 y^2 - 5\lambda_1 + \lambda_2 y - \lambda_2 z. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen müssen nun 0 werden, was uns folgendes LGS liefert:

$$\begin{aligned} 2x + 2\lambda_1(x-1) &= 0 & &\xrightarrow{\cdot y} 2xy + 2\lambda_1 y(x-1) = 0 \quad \text{(a)} \\ 2y + 2\lambda_1 y + \lambda_2 &= 0 & &\xrightarrow{\cdot (x-1)} 2(x-1)y + 2\lambda_1 y(x-1) + \lambda_2(x-1) = 0 \quad \text{(b)} \\ 1 - \lambda_2 &= 0 & &\xrightarrow{+\lambda_2} 1 = \lambda_2 \quad \text{(c)} \\ (x-1)^2 + y^2 - 5 &= 0 \quad \text{(d)} & & \\ y - z &= 0 & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} - \text{(b)}: \quad & 2xy - 2(x-1)y - \lambda_2(x-1) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \cancel{2xy} - \cancel{2xy} + 2y - \lambda_2 x + \lambda_2 = 0 \\ \overset{\text{(c)}}{\Longleftrightarrow} \quad & 2y - x + 1 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & x = 2y + 1 \quad \text{(e)} \end{aligned}$$

(e) in (d):

$$(x-1)^2 + y^2 - 5 = 0 \Longleftrightarrow (2y+1-1)^2 + y^2 - 5 = 0$$
$$\Longleftrightarrow 4y^2 + y^2 - 5 = 0 \Longleftrightarrow 5y^2 = 5 \Longleftrightarrow y = \pm 1.$$
$$\Rightarrow x_1 = 3, \ x_2 = -1.$$

Wir bekommen also die Punkte $P_1(3/1/1)$ und $P_2(-1/-1/-1)$ mit

$$f(P_1) = f(3,1,1) = 3^2 + 1^2 + 1 = 11$$ und

$$f(P_2) = f(-1,-1,-1) = (-1)^2 + (-1)^2 + (-1) = 1.$$

Da M kompakt ist (da abgeschlossen und beschränkt), nimmt f diese Werte nach dem Satz vom Minimum und Maximum auch tatsächlich an (da f stetig ist).

Also ist P_1 Minimum und P_2 Maxsumum von f.

Aufgabe 22 (1.5+2+1.5). Sei A eine symmetrische reelle $n \times n$-Matrix. Wir betrachten $q\colon v \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle v, Av\rangle$.

(i) Bestimmen Sie alle lokalen Minima/Maxima/Sattelpunkte von q (in Abhängigkeit der 'Definitheit' von A).

<u>Ableitung von q in V (nach Bsp. 1.2.9.(iv)):</u>

$$q(v+h) - q(v) = \langle v+h, Av+h\rangle - \langle v, Av\rangle$$
$$= 2\langle v, Av\rangle + \langle h, Ah\rangle$$

$$\frac{|\langle h, Ah\rangle|}{|h|} \leq |Ah| \xrightarrow{h \to 0} 0$$, da die Matrixmult. stetig ist

$$\Rightarrow q(h) = \langle h, Ah\rangle = o(|h|)$$
$$\Rightarrow D_v f(h) = 2\langle v, Ah\rangle$$
$$q(v) = \langle v, Av\rangle = \sum_{i,j} v_i A_{ij} v_j$$
$$\frac{\partial q}{\partial v_k} = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial v_k}(v_i A_{ij} v_j) = \sum_{i,j} \partial_{ik} A_{ij} v_j + v_i A_{ij} \partial_{jk}$$
$$= \sum_j A_{kj} v_j + \sum_i v_i A_{ik} = (Av)_k + (A^T v)_k = 2(Av)_k$$

A symm. $n \times n$-Matrix

$$\Rightarrow Dq(v) = 2v^T A = 0 \Rightarrow v \in \ker(A)$$

$\Rightarrow$ Alle stationären Punkte sind Element des Kerns von A.

<u>2. Ableitung:</u>

Nach Bsp. 1.2.3.(i):

- A positiv definit $\Rightarrow$ Alle v im Kern sind lok. Minima
- $-A$ positiv definit $\Rightarrow$ Alle v in Kern sind lok. Maxima
- A indefinit $\Rightarrow$ Alle v im Kern sind Sattelpunkte
- A pos. oder neg. semidefinit $\Rightarrow$ keine Aussage für $v \neq 0$.

Für $v=0$ gilt:

A pos. semidefinit $\Rightarrow q(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0=v\}$,
$q(0)=0 \Rightarrow v$ lok. Maximum

$-A$ pos. semidefinit $\Rightarrow q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0=v\}$,
$q(0)=0 \Rightarrow v$ lok. Minimum.

(ii) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von q unter der Nebenbedingung $|v|^2 = 1$.

Nach Satz 1.9.3. ist p genau dann stationärer Punkt von q (unter der Nebenbedingung $|v|^2=1$), falls es $\lambda_1, \dots, \lambda_i \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{grad} q(p) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \operatorname{grad} Q_i(p) = 0$$

gibt.

Aufgabe 23 (2.5+2.5). (i) Bestimmen Sie $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$, indem Sie das Parameterintegral

$$F(\lambda) = \int_0^1 \frac{\ln(1+\lambda^2 x)}{1+x^2} dx$$

untersuchen.

$$F(\lambda) = \int_0^1 \frac{\ln(1+\lambda^2 x)}{1+x^2} dx$$

Substitution von $\lambda^2 =: a \geq 0$:

$$F(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2} dx$$

$$F'(a) = \int_0^1 \frac{x}{(1+ax)(1+x^2)} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x+a}{(a^2+1)(x^2+1)} - \frac{a}{(a^2+1)(ax+1)} dx$$

Partialbruchzerlegung

$$= \frac{1}{a^2+1} \int_0^1 \frac{x+a}{x^2+1} dx - \frac{a}{a^2+1} \int_0^1 \frac{1}{ax+1} dx$$

$u := ax+1$

$$\stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{a^2+1} \left(\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx + a \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx \right)$$

$$- \frac{a}{a^2+1} \left(\frac{1}{a} \int_0^1 \frac{1}{u} du \right)$$

$V := x^2+1$

$$\stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{a^2+1} \left(\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{v} dv + a \left[\arctan(x)\right]_0^1 \right)$$

$$- \frac{a}{a^2+1} \cdot \left(\frac{1}{a} \left[\ln(ax+1)\right]_0^1 \right)$$

$$= \frac{1}{a^2+1} \left(\left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1)\right]_0^1 + a \left[\arctan(x)\right]_0^1 \right)$$

$$- \frac{1}{a^2+1} \left[\ln(ax+1)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2(a^2+1)} \left[\ln(|x^2+1|)\right]_0^1 + \frac{a}{a^2+1} \left[\arctan(x)\right]_0^1$$

$$- \frac{1}{a^2+1} \left[\ln(|ax+1|)\right]_0^1$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\ln(2) + a\cdot\arctan(1) - \ln(a+1)}{a^2+1}$$

$$= \frac{\pi\cdot a + 2\ln(2)}{4(a^2+1)} - \frac{\ln(a+1)}{a^2+1}$$

Setze $a := 1$:

$$F'(1) = \frac{\pi}{8} + \frac{\ln(2)}{4} - \frac{\ln(2)}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln(2)}{4}$$

$$= \frac{\pi - 2\ln(2)}{8}$$

$F'(1)$ aufleiten nach $a=1$:

$$F(1) = \frac{\pi - 2\ln(2)}{8}\, a = \frac{\pi - 2\ln(2)}{8}$$

Aufgabe 24 (1+1.5+1.5+1)**.** Berechnen Sie

(i) $\int_\gamma f ds$ für $f(x,y) = xy^2$ für eine Kurve γ die einmal den Kreis um den Ursprung vom Radius 2 umrundet.

$$\int_\gamma f\,ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)|\,dt$$

$$\gamma : t \longmapsto (2\cdot\cos(t),\ 2\cdot\sin(t))$$

$$(2\cos(t))' = 2\sin(t)$$
$$(2\sin(t))' = -2\cos(t)$$
$$\Rightarrow |\gamma'(t)| = \sqrt{(2\sin(t))^2 + (-2\cos(t))^2}$$
$$= \sqrt{4(\sin^2(t) + \cos^2(t))} = \sqrt{4\cdot 1} = 2.$$

Also ist

$$\int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} 2f(\gamma(t))\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} 2\cdot f(2\cos(t), 2\sin(t))\,dt$$
$$= 2\int_0^{2\pi} 2\cos(t)\cdot(2\sin(t))^2\,dt$$
$$= 2\cdot\left[\frac{8\sin^3(t)}{3}\right]_0^{2\pi} = 2\cdot\left(\frac{8\sin^3(2\pi)}{3} - \frac{8\sin^3(0)}{3}\right)$$
$$= 0.$$

(ii) $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x,y) = \binom{2y}{1-x}$ entlang $\gamma\colon t \in [-1,2] \mapsto (t, 1-t^3)^T \in \mathbb{R}^2$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3t^2 \end{pmatrix}$$

$$\int_\gamma V ds := \int_{-1}^{2} < V(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt$$

$$= \int_{-1}^{2} < V(t, 1-t^3)^T, (1, -3t^2)^T > dt$$

$$= \int_{-1}^{2} < (2-2t^3, 1-t)^T, (1, -3t^2)^T > dt$$

$$= \int_{-1}^{2} (2-2t^3) \cdot 1 + (1-t)(-3t^2) \, dt$$

$$= \int_{-1}^{2} 2 - 2t^3 - 3t^2 + 3t^3 \, dt$$

$$= \int_{-1}^{2} t^3 - 3t^2 + 2 \, dt = \left[\frac{1}{4} t^4 - t^3 + 2t \right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{1}{4} \cdot 2^2 - 2^3 + 2 \cdot 2\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - (-1)^3 + 2 \cdot (-1)\right)$$

$$= 1 - 8 + 4 - \left(\frac{1}{4} + 1 - 2\right) = -2{,}25.$$

(iii) $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x,y,z) = (0, x^2, -yz)^T$ entlang einer Kurve γ, die geradlinig von $(4,-1,2)^T$ nach $(1,7,-1)^T$ verläuft.

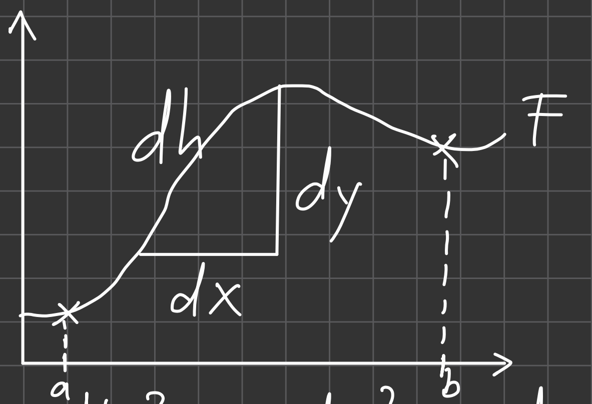
Wir können eine Geradengleichung mit Richtungsvektor $(1,7,-1)^T - (4,-1,2)^T = (1-4, 7+1, -1-2)^T$ aufstellen:

$$\gamma(t) = (4,-1,2)^T + t\cdot(-3,8,-3)^T$$
$$= (4-3t, -1+8t, 2-3t)^T.$$

$$\Rightarrow \gamma'(t) = (-3,8,-3)^T$$

$$\int_\gamma V ds := \int \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt$$
$$= \int \langle V(4-3t, -1+8t, 2-3t), (-3,8,-3)^T\rangle dt$$
$$= \int \langle (0, (4-3t)^2, -(-1+8t)(2-3t))^T, (-3,8,-3)^T\rangle dt$$
$$= \int \langle (0, 16-24t+9t^2, 2-19t+24t^2)^T, (-3,8,-3)^T\rangle dt$$
$$= \int \left(0\cdot(-3) + (16-24t+9t^2)\cdot 8 + (2-19t+24t^2)\cdot(-3)\right) dt$$
$$= \int 122 - 135t \, dt = 122t - 67{,}5t^2 + c.$$

(iv) die Länge des Funktionsgraphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$.



$$dh^2 = dx^2 + dy^2 = \left(\frac{(dx)^2}{(dx)^2} + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right) \cdot (dx)^2$$

$$\Rightarrow dh = \sqrt{\frac{(dx)^2}{(dx)^2} + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}} \cdot \sqrt{(dx)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

$\Rightarrow$ Länge von F zwischen a und b ist $\sum^n dh$ für $\lim\limits_{n\to\infty} \sum^n dh$ (Zahl der Dreiecke geht gegen ∞, bzw dx geht gegen 0).

Also ist die Länge

$$H_F(x) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + F'(x)^2}\, dx.$$

Bonusaufgabe. Wir wollen $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ berechnen. In Analysis 1 haben wir uns in Bsp. 4.5.33 überlegt, dass $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ existiert und endlich ist. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ existiert auch, da $\frac{\sin x}{x}$ in $x = 0$ stetig fortsetzbar ist (l'Hopital). Also ist $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ wirklich endlich. Aber wir konnten den Wert noch nicht berechnen. Das können wir nun ändern, indem wir

$$F\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ \lambda \mapsto \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x} dx$$

betrachten. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Zeigen Sie, dass $e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x}$ und $\partial_\lambda \left(e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x}\right)$ auf allen kompakten Intervallen $[a, b] \subset (0, \infty)$ gleichmäßig konvergiert.

Die Funktion $f_\lambda : x \longmapsto e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x}$ konvergiert gleichmäßig, wenn

$$|f_\lambda(x) - f(x)| \leq a_n$$

$$\left| e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x} - e^{-x} \frac{\sin x}{x} \right| \leq a_n$$

$$\left| (e^{-x})^\lambda \frac{\sin x}{x} - e^{-x} \frac{\sin x}{x} \right| \leq a_n$$

$$\left| \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{0 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1} \cdot \underbrace{\left((e^{-x})^\lambda - e^{-x} \right)}_{\neq 0} \right| \leq a_n$$

Für alle kompakten Intervalle $[a, b] \subset (0, \infty)$ konvergiert die Gleichung gleichmäßig. $\square$

(ii) Berechnen Sie $F'(\lambda)$ und integrieren Sie den entstandenen Ausdruck explizit. Finden Sie durch Integration dann $F(\lambda)$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\overbrace{e^{-\lambda x}\sin x}^{u_1}}{\underbrace{x}_{v_1}}\right) = \frac{v_1 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x} - u_1 \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x}}{v_1^2}$$

$$= \frac{x\left(\frac{\partial}{\partial x} \underbrace{e^{-\lambda x}}_{u_2} \underbrace{\sin x}_{v_2}\right) - e^{-\lambda x}\sin x}{x^2}$$

$$= \frac{x\left(v_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x}\right) - e^{-\lambda x}\sin x}{x^2}$$

$$= \frac{x\left(\sin x \cdot \left(-\lambda e^{-\lambda x}\right) + e^{-\lambda x}\cos x\right) - e^{-\lambda x}\sin x}{x^2}$$

$$= \frac{-\lambda e^{-\lambda x} \cdot x \cdot \sin x + e^{-\lambda x} \cdot x \cdot \cos x - e^{-\lambda x}\sin x}{x^2}$$

$$= -\lambda e^{-\lambda} \frac{x \sin x + x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$= -\lambda e^{-\lambda}\left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right).$$

(iii) Bestimmen Sie $\lim_{\lambda \to \infty} F(\lambda)$ und damit die Integrationskonstante aus (ii)

$$\lim_{\lambda \to 0} F(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} \Big(\underbrace{e^{-\lambda x}}_{\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{0 < \frac{\sin x}{x} \leq 1} \Big) = 0.$$