Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
StR Dr. Katharina Böcherer-Linder
Dr. Lukas Braun

Abgabe am Freitag, 30.04.21. Besprechung in den Tutorien in der dritten Vorlesungswoche (05. und 07.05.21).

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei W ein Vektorraum über einem Körper k, $A \subseteq W$ ein affiner Teilraum zum Untervektorraum $V \subseteq W$, und $x, y, z \in A$. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für Richtungsvektoren:

a) $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$,

b) $\overrightarrow{xx} = 0$,

c) $\overrightarrow{xy} = -\overrightarrow{yx}$,

d) $x + \overrightarrow{xy} = y$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien k ein Körper, W ein Vektorraum über k und $w_0 \in W$. Seien $U \subseteq V \subseteq W$ Untervektorräume und $A = w_0 + V$ ein affiner Teilraum von W.

a) Zeigen Sie, dass für $x, y \in A$ durch $x \sim y \Leftrightarrow \overrightarrow{xy} \in U$ eine Äquivalenzrelation auf A definiert wird.

b) Für $x \in A$ wird durch $U_x := \{x + u | u \in U\} \subseteq A$ die *Nebenklasse von x* definiert. Zeigen Sie, dass U_x wiederum ein affiner Teilraum von W ist. Zeigen Sie, dass zwei Nebenklassen U_x und U_y genau dann gleich sind, wenn sie ein gemeinsames Element haben.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien k ein Körper, W ein Vektorraum über k und $A \subseteq W$ ein affiner Teilraum. Wir bezeichnen die Menge der Geraden von A mit G.

a) Für $g, g' \in G$ bezeichne $g||g'$ Parallelität (im Sinne affiner Räume) von g und g'. Zeigen Sie, dass $g \sim g' \Leftrightarrow g||g'$ eine Äquivalenzrelation auf G definiert.

b) Sei nun $k := \mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen. Betrachten Sie die affine Ebene (A, G), wobei $A := (\mathbb{F}_2)^2$. Geben sie die Liste der Äquivalenzklassen für die in a) definierte Äquivalenzrelation an. Stellen Sie die Situation bildlich dar.

Aufgabe 4 (Dimensionsformel für affine Teilräume, 6 Punkte + 3 Bonuspunkte)

Seien k ein Körper, W ein Vektorraum über k und $A, B \subseteq W$ zwei affine Teilräume. Wir bezeichnen mit $A+B \subseteq W$ den von A und B aufgespannten affinen Teilraum, also den kleinsten affinen Teilraum, der sowohl A als auch B enthält.

a) Es sei $A \cap B \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass $A \cap B \subseteq W$ ein affiner Teilraum ist.

b) Es sei $A \cap B \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\dim(A + B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B).$$

c) Es seien A und B nun zwei windschiefe Geraden (also $A \cap B = \emptyset$ und $A \nparallel B$) im dreidimensionalen Vektorraum k^3. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\dim(A + B) = 3 \neq \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B).$$

d) (Bonusaufgabe, 3 Bonuspunkte). Wir betrachten wieder den allgemeinen Fall - also $\dim(W)$, $\dim(A)$, $\dim(B)$ beliebig. Es bezeichnen $V \subseteq W$ bzw. $U \subseteq W$ die Räume der Richtungsvektoren von A bzw. B. Zeigen Sie, dass im Fall $A \cap B = \emptyset$ gilt:

$$\dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(V \cap U) + 1.$$

Aufgabe 5 (Aufgabe mit Schulbezug, 3 Bonuspunkte)

In Aufgabe 1 auf diesem Übungsblatt haben Sie die Rechenregeln für Richtungsvektoren bewiesen. In dieser Aufgabe geht es nun um die Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern mit dem Vektorbegriff, insbesondere um Fehlvorstellungen zu Richtungsvektoren.

a) Lesen Sie den Text von Günther Malle (2005) 'Schwierigkeiten mit Vektoren' und beschreiben Sie, welche Schwierigkeiten im Umgang mit dem Vektorbegriff bei Schülerinnen und Schülern beobachtet wurden und welche Gründe dafür genannt werden. Sie finden den Text als pdf-Datei zu Blatt 1 auf Ilias.

b) In dem Text ist von 'Pfeilklassen' die Rede. Charakterisieren Sie den Begriff der 'Pfeilklasse' mit Hilfe einer passenden Äquivalenzrelation.

Elementargeometrie

Blatt 1

Mascha Reber mascha.reber@neptun.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 4734963

Lorenz Bung lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei W ein Vektorraum über einem Körper k, $A \subseteq W$ ein affiner Teilraum zum Untervektorraum $V \subseteq W$, und $x, y, z \in A$. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für Richtungsvektoren:

a) $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$,

b) $\overrightarrow{xx} = 0$,

c) $\overrightarrow{xy} = -\overrightarrow{yx}$,

d) $x + \overrightarrow{xy} = y$.

a) $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} \overset{\text{Def. 1.5.}}{=} (y-x)+(z-y) = z-x \overset{\text{Def. 1.5.}}{=} \overrightarrow{xz}$.

b) $\overrightarrow{xx} \overset{\text{Def. 1.5.}}{=} x-x = 0$.

c) $\overrightarrow{xy} \overset{\text{Def. 1.5.}}{=} y-x = -(-y+x) = -(x-y) \overset{\text{Def. 1.5.}}{=} -\overrightarrow{yx}$.

d) $x + \overrightarrow{xy} \overset{\text{Def. 1.5.}}{=} x+(y-x) = x-x+y = y$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien k ein Körper, W ein Vektorraum über k und $w_0 \in W$. Seien $U \subseteq V \subseteq W$ Untervektorräume und $A = w_0 + V$ ein affiner Teilraum von W.

a) Zeigen Sie, dass für $x, y \in A$ durch $x \sim y \Leftrightarrow \overrightarrow{xy} \in U$ eine Äquivalenzrelation auf A definiert wird.

a) Seien $x, y, z \in A$. $x \sim y \Leftrightarrow \overrightarrow{xy} \in U$ ist eine Äquivalenzrelation auf A, wenn gilt:

(1) Reflexivität:

$x \sim x \Leftrightarrow \overrightarrow{xx} \in U \overset{\text{Def. 1.5.}}{\Leftrightarrow} (x-x) \in U \Leftrightarrow 0 \in U$

Wahr, da U ein Untervektorraum von V bzw. W ist und damit den Nullvektor enthalten muss.

(2) Symmetrie:

$x \sim y \Leftrightarrow \overrightarrow{xy} \in U \overset{\text{Def. 1.5}}{\Leftrightarrow} (y-x) \in U \overset{U \text{ UVR des } k\text{-VR } W,\ k \text{ Körper}}{\Leftrightarrow} -(y-x) \in U$

$\Leftrightarrow (x-y) \in U \overset{\text{Def. 1.5.}}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{yx} \in U \Leftrightarrow y \sim x$.

(3) Transitivität:

$$x \sim y \wedge y \sim z \Leftrightarrow \overrightarrow{xy} \in U \wedge \overrightarrow{yz} \in U$$

Def. 1.5

$$\Leftrightarrow (y-x) \in U \wedge (z-y) \in U \Leftrightarrow ((y-x)+(z-y)) \in U$$

$$\Leftrightarrow (z-x) \in U \overset{\text{Def. 1.5}}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{xz} \in U \Leftrightarrow x \sim z.$$

$\square$

b) Für $x \in A$ wird durch $U_x := \{x + u | u \in U\} \subseteq A$ die *Nebenklasse von* x definiert. Zeigen Sie, dass U_x wiederum ein affiner Teilraum von W ist. Zeigen Sie, dass zwei Nebenklassen U_x und U_y genau dann gleich sind, wenn sie ein gemeinsames Element haben.

Beh.: U_x ist affiner Teilraum von W.

Bew.: $U_x := \{x+u \mid u \in U\}$ ist affiner Teilraum von W, wenn:

(1) $U \subseteq W$

(2) $x \in W$.

(1) gilt bereits nach Voraussetzung, da $U \subseteq V \subseteq W$.

Da $x \in A$, lässt sich x schreiben als $x = w_0 + v$, $v \in V$. Da $w_0 \in W$ und $V \subseteq W$, muss auch $x = w_0 + v \in W$ sein.

Beh.: Zwei Nebenklassen U_x und U_y sind genau dann gleich, wenn sie ein gemeinsames Element haben.

Bew.: "$\Rightarrow$": $U_x = U_y \Rightarrow \{x+u \mid u \in U\} = \{y+u \mid u \in U\}$

$\Rightarrow x = y \Rightarrow x = y \in U_x \wedge x = y \in U_y$.

"$\Leftarrow$": U_x und U_y haben ein gemeinsames Element, d.h. $x + \langle u \rangle = y \in U_y \Rightarrow x = y - \langle u \rangle \in U_x$.

Da diese Darstellung möglich ist, müssen U_x und U_y denselben Raum der Richtungsvektoren besitzen. Zusätzlich sind sie nicht disjunkt $\Rightarrow U_x = U_y$.

$\square$

Aufgabe 3

Seien k ein Körper, W ein Vektorraum über k und $A \subseteq W$ ein affiner Teilraum. Wir bezeichnen die Menge der Geraden von A mit G

a) Für $g, g' \in G$ bezeichne $g \parallel g'$ Parallelität (im Sinne affiner Räume) von g und g'. Zeigen Sie, dass $g \sim g' \Leftrightarrow g \parallel g'$ eine Äquivalenzrelation auf G definiert

zz (i) Reflexivität: Für alle $m \in M$ gilt: $m \sim m$

Wähle $g \in G$ beliebig: $g \parallel g$

da gleich nach Satz 1.9 parallel

zz (ii) Symetrie: Für alle $m, n \in M$ gilt: $m \sim n \Leftrightarrow n \sim m$

Wähle $g, g' \in G$ bel: $g \parallel g' \Leftrightarrow g' \parallel g$ $\quad g = x_1 + \langle v \rangle \quad g' = x_2 + \langle v \rangle$

g parallel zu $g' \xrightarrow[\text{Kor 1.7}]{} g$ und g' gleich oder disjunkt $\xrightarrow[1.9]{} g'$ parallel zu g

zz (iii) Transitivität: Für alle $m, n, o \in M$ gilt: aus ($m \sim n$ und $n \sim o$) folgt $m \sim o$

Wähle $g, g', h \in G$ bel: $g \parallel g' \rightarrow g = x_1 + \langle v \rangle,\ g' = x_2 + \langle v \rangle$

Da Parallel derselbe Raum der Richtungsvektoren $\rightarrow g' \parallel h \rightarrow h = x_3 + \langle v \rangle$

Da g und h " " haben gilt $g \parallel h$

b) Sei nun $k = \mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen. Betrachten Sie die affine Ebene (A, G), wobei $A := (\mathbb{F}_2)^2$. Geben Sie die Liste der Äquivalenzklasse für die in a) definierte Äquivalenzrelation an

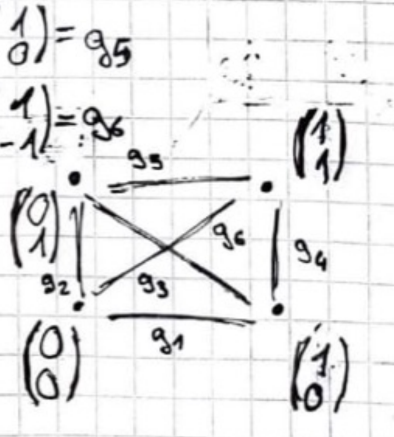
Für $x \in M$ heißt Teilmenge $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ Äquivalenzklasse von x

$$A = (\mathbb{F}_2)^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

↳ Geraden $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{F}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = g_1 \ \Big|\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{F}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = g_4$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{F}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = g_2 \ \Big|\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{F}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = g_5$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{F}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = g_3 \ \Big|\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{F}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = g_6$



Äquivalenzklassen:

$[g_1] = \{g_5\} \Leftrightarrow g_1 \parallel g_5$

$[g_2] = \{g_4\} \Leftrightarrow g_2 \parallel g_4$

Aufgabe 4

Seien k ein Körper, W ein Vektorraum über k und $A, B \subseteq W$ zwei affine Teilräume. Wir bezeichnen mit $A+B \subseteq W$ den von A aufgespannten affinen Teilraum, der sowohl A als auch B enthält, den kleinsten affinen Teilraum

a) Es sei $A \cap B \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass $A \cap B \subseteq W$ ein affiner Teilraum ist

Seien $U, V \subset W$ Untervektorräume.

zz $A \cap B \subset W$, folgt aus Vorraussetzung, da $A, B \subseteq W$ und $A \cap B \neq \emptyset$

zz $w_0 \in W$: $\exists x \in A \cap B \rightarrow x \in A \wedge x \in B$, da affine Teilräume gilt: $x \in A = w_0 + U$ und $x \in B = w_1 + V$ Damit ist

$x = w_0 + u_0 = w_1 + v_0 \rightarrow$ ObdA $\underbrace{w_0 = x - u_0}_{\in W}$, da $x \in A$ folgt $x, u_0 \in W$ also $w_0 \in W$ □

b) Es sei $A \cap B \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass gilt: $\dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$

Für $A = w_0 + U = \{w_0 + u \mid u \in U\}$ ist $\dim A = \dim U$

analog: $B = w_1 + V = \{w_1 + v \mid v \in V\}$ ist $\dim B = \dim V$

LAI: Da $U, V \subset W$ Untervektorräume von W, gibt es Basen B_u von U, B_v von V und $B_{u \cap v}$ derart, dass $B_{u \cap v} = B_u \cap B_v$ und $B_u \cap B_v$ eine Basis von $U + V = \mathrm{Lin}(U \cup V)$. Für alle VR endlich dimensional, gilt $\dim_K(U+V) + \dim_K U \cap W = \dim_K U + \dim_K V$

Damit gilt $\dim(A+B) = \dim A + \dim B - \dim A \cap B$

c) Es seien A und B nun zwei windschiefe Geraden im dreidim. Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\dim(A+B)=3 \neq \dim(A)+\dim(B)-\dim(A\cap B)$$

• windschiefe Geraden: - $A\cap B=\emptyset$

- $A \nparallel B$

Da A,B Geraden, gilt $\dim V = \dim_{\mathbb{R}} A = \dim_{\mathbb{R}} B = 1$

Da $A\cap B=\emptyset$ ist $\dim_{\mathbb{R}}(A\cap B)=0$, also insgesamt

$$3\neq 2 = \dim(A)+\dim(B)-\dim(A\cap B)$$

zz $\dim(A+B)=3$

Da $A\nparallel B$ folgt $A=w_0+\langle u\rangle$, $B=w_1+\langle v\rangle$ wobei $w_0\neq w_1$

Wäre $\dim(A+B)=2$, hätten A und B einen eindeutigen Schnittpunkt, da $A\nparallel B$ (Satz 1.9). Dies wiederspricht $A\cap B=\emptyset$.

Deshalb $\dim(A+B)=3$

□

d) allgemeiner Fall: $\dim(W)$, $\dim(A)$, $\dim(B)$ beliebig

$V\subseteq W$ bzw $U\subseteq W$ seien Räume der Richtungsvektoren von A bzw B

Zeigen Sie, dass im Fall $A\cap B=\emptyset$ gilt:

$$\dim(A+B)=\dim(A)+\dim(B)-\dim(V\cap U)+1$$

$A=w_0+U=\{w_0+u \mid u\in U\}$, $B=w_1+V=\{w_1+v \mid v\in V\}$

Aufgabe 5 (Aufgabe mit Schulbezug, 3 Bonuspunkte)

In Aufgabe 1 auf diesem Übungsblatt haben Sie die Rechenregeln für Richtungsvektoren bewiesen. In dieser Aufgabe geht es nun um die Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern mit dem Vektorbegriff, insbesondere um Fehlvorstellungen zu Richtungsvektoren.

a) Lesen Sie den Text von Günther Malle (2005) 'Schwierigkeiten mit Vektoren' und beschreiben Sie, welche Schwierigkeiten im Umgang mit dem Vektorbegriff bei Schülerinnen und Schülern beobachtet wurden und welche Gründe dafür genannt werden. Sie finden den Text als pdf-Datei zu Blatt 1 auf Ilias.

Der Begriff des „Vektors" wird in der Schule auf zwei unterschiedliche Arten eingeführt: Einerseits mit einer geometrischen Bedeutung bzw. als „Pfeil, der einen Punkt in einen anderen verschiebt", aber andererseits als algebraische Struktur bzw. Zahlentupel/-tripel/...
Eine häufige Schwierigkeit bei Schülern und Schülerinnen ist der Wechsel zwischen diesen beiden unterschiedlichen Definitionen. Oftmals fällt es z.B. schwer, in einer Geradengleichung $g: \vec{x} + \lambda \cdot \vec{v}$ die Bedeutung des Richtungsvektors zu beschreiben und festzustellen, dass sowohl der Stützvektor (Interpretation als Punkt im Raum) als auch der Richtungsvektor der Gerade (Interpretation als Pfeil, der Punkte verschiebt) eigentlich beides Vektoren sind und damit in beiden Vorstellungen repräsentiert werden können.

b) In dem Text ist von 'Pfeilklassen' die Rede. Charakterisieren Sie den Begriff der 'Pfeilklasse' mit Hilfe einer passenden Äquivalenzrelation.

Seien $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ Vektoren.

Die Relation $\sim$ mit

$$\vec{u} \sim \vec{v} \Leftrightarrow |\vec{u}| = |\vec{v}| \wedge \vec{u} \parallel \vec{v} \wedge \vec{u} \neq -\vec{v}$$

ist eine Äquivalenzrelation:

(1) <u>Reflexivität:</u>

$$\vec{u} \sim \vec{u} \Leftrightarrow |\vec{u}| = |\vec{u}| \wedge \vec{u} \parallel \vec{u} \wedge \vec{u} \neq -\vec{u} \quad \checkmark$$

(2) <u>Symmetrie:</u>

$$\vec{u} \sim \vec{v} \Rightarrow |\vec{u}| = |\vec{v}| \wedge \vec{u} \parallel \vec{v} \wedge \vec{u} \neq -\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow |\vec{v}| = |\vec{u}| \wedge \vec{v} \parallel \vec{u} \wedge \vec{v} \neq -\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v} \sim \vec{u} \quad \checkmark$$

(3) <u>Transitivität:</u>

$$\vec{u} \sim \vec{v} \wedge \vec{v} \sim \vec{w}$$

$$\Rightarrow \left(|\vec{u}| = |\vec{v}| \wedge \vec{u} \parallel \vec{v} \wedge \vec{u} \neq -\vec{v}\right) \wedge \left(|\vec{v}| = |\vec{w}| \wedge \vec{v} \parallel \vec{w} \wedge \vec{v} \neq -\vec{w}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(|\vec{u}| = |\vec{v}| \wedge |\vec{v}| = |\vec{w}|\right) \wedge \left(\vec{u} \parallel \vec{v} \wedge \vec{v} \parallel \vec{w}\right) \wedge \left(\vec{u} \neq -\vec{v} \wedge \vec{v} \neq -\vec{w}\right)$$

$$\Rightarrow |\vec{u}| = |\vec{w}| \wedge \vec{u} \parallel \vec{w} \wedge \vec{u} \neq -\vec{w}$$

$$\Rightarrow \vec{u} \sim \vec{w}. \quad \checkmark$$