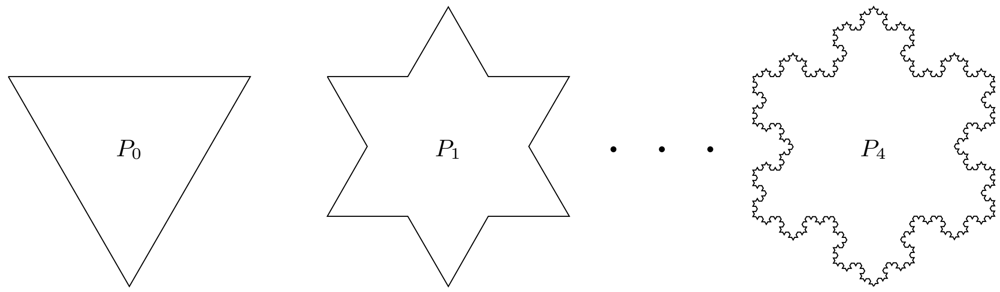
Lorenz Bung (lorenz.bung@googlemail.com)
Lea Weissenrieder (leawei502@gmail.com)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Sei P_0 das gleichseitige Dreieck mit Seitenlänge 1. Wir definieren die Polygone P_n rekursiv wie folgt: P_{n+1} entsteht aus P_n, indem jede Kante des Polygons gedrittelt wird, auf dem mitteleren Drittel ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge gleich dem mittleren Drittel gesetzt wird und dann dieses mittlere Drittel gelöscht wird.



Sei ℓ_n der Umfang des Polygons P_n und A_n der Flächeninhalt des Polygons P_n.

(a) Bestimmen Sie ℓ_n und zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \ell_n = \infty$ gilt.

(b) Bestimmen Sie $A_n - A_{n-1}$. Zeigen Sie, dass A_n für $n \to \infty$ konvergiert.

Aufgabe 2 (1+2.5+1.5)**.** Sei $\gamma\colon t \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto (\cos^2(t), 2\sin^2(t))^T$.

(i) Skizzieren Sie γ.

(ii) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$, das ist die Länge der Kurve γ auf dem Intervall $[0, t]$ (Also $s(0) = 0$ und $s(\frac{\pi}{2}) = L(\gamma)$).

(iii) Die Funktion der Bogenlänge $s\colon [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, L(\gamma)]$ ist ein Homöomorphismus. Warum? Ist es auch ein C^1-Diffeomorphismus Begründen Sie?

Aufgabe 3 (2.5+2.5)**.** Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Variation $V(f)$ von f ist definiert als

$$V(f) := \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|,$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen $\mathcal{Z} = (x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b)$ des Intervalls $[a, b]$ geht.

(i) Beweisen Sie: Sei $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve; $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))^T$ für $\gamma_i\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann ist γ genau dann rektifizierbar, falls alle γ_i beschränkte Variation haben, d.h. falls $V(\gamma_i) < \infty$ für alle $1 \le i \le n$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$

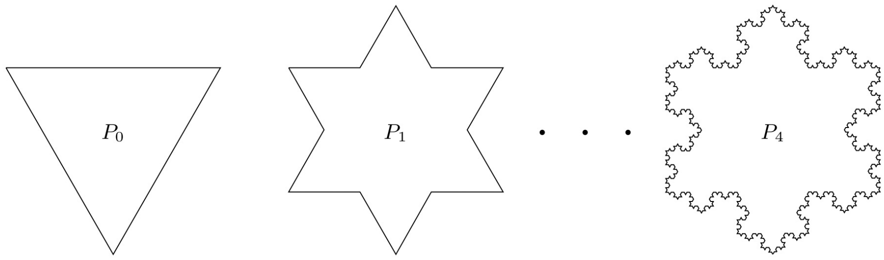
$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{x}{n} & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

unbeschränkte Variation hat.

Nach (i) ist dann somit die Kurve $\gamma(t) = (t, f(t))^T$ mit f aus (ii) und $t \in [0, 1]$ nicht rektifizierbar.

Abgabe am Donnerstag 27.10.22 bis 14 Uhr

Aufgabe 1. Sei P_0 das gleichseitige Dreieck mit Seitenlänge 1. Wir definieren die Polygone P_n rekursiv wie folgt: P_{n+1} entsteht aus P_n, indem jede Kante des Polygons gedrittelt wird, auf dem mitteleren Drittel ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge gleich dem mittleren Drittel gesetzt wird und dann dieses mittlere Drittel gelöscht wird.



Sei ℓ_n der Umfang des Polygons P_n und A_n der Flächeninhalt des Polygons P_n.

(a) Bestimmen Sie ℓ_n und zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \ell_n = \infty$ gilt.

Im 0. Schritt beträgt der Umfang $l_0 = 3 \cdot 1 = 0$. Nun wird in jedem Iterationsschritt ein Streckenabschnitt durch neue Teilstrecken ersetzt, die insgesamt $\frac{4}{3}$-mal so lang sind.

Für den n-ten Iterationsschritt erhalten wir also den Umfang $l_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = \lim\limits_{n\to\infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n = 3 \cdot \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n}_{\to 0 \text{ (geom. Folge)}}}$, und damit $3 \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

(b) Bestimmen Sie $A_n - A_{n-1}$. Zeigen Sie, dass A_n für $n \to \infty$ konvergiert.

Der Flächeninhalt des ersten hinzugefügten Dreiecks beträgt $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}$.

Im ersten Schritt handelt es sich um 3 Dreiecke, im 2. Schritt um $3 \cdot 4 = 12$ Dreiecke und im n-ten Schritt um $3 \cdot 4^n$ Dreiecke (also eine Vervierfachung in jedem Schritt).

Der Flächeninhalt der hinzugefügten Dreiecke wird in jedem Schritt um $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ kleiner. Insgesamt wird der Inhalt also um $4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$ kleiner, was zum Inhalt von

$a_n = \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{36}$ führt.

Der gesamte Flächeninhalt A_n im n-ten Schritt ist damit

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^i \cdot \frac{\sqrt{3}}{36} \underset{\substack{\nearrow \\ \text{geom.} \\ \text{Reihe}}}{=} \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{9}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{36} = \left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{20}.$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\underbrace{\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}_{\to 0}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{20}$.

Es ist $A_n - A_{n-1} = \left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{20} - \left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{20}$

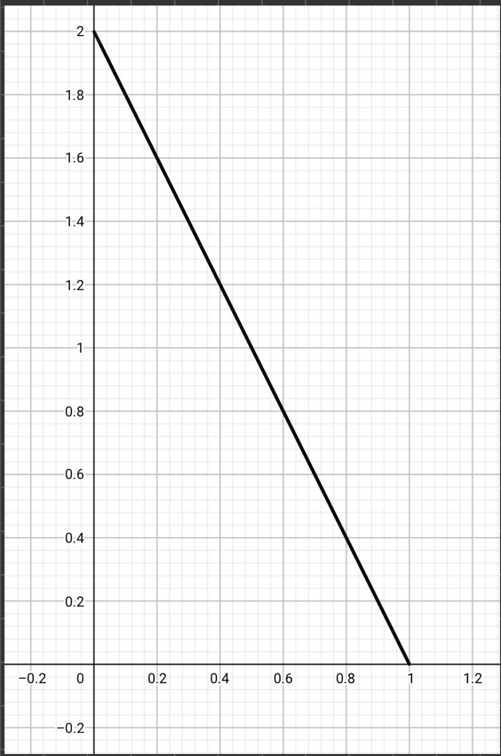
$$= \frac{\sqrt{3}}{20} \cdot \left(\cancel{1} - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} \cancel{-1} + \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = \frac{\sqrt{3}}{20} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot \left(1-\frac{4}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{20}4} \cdot \frac{\cancel{5}}{9} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{36} \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

$\square$

Aufgabe 2 (1+2.5+1.5). Sei $\gamma\colon t \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto (\cos^2(t), 2\sin^2(t))^T$.

(i) Skizzieren Sie γ.



(ii) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$, das ist die Länge der Kurve γ auf dem Intervall $[0, t]$ (Also $s(0) = 0$ und $s(\frac{\pi}{2}) = L(\gamma)$).

$s(t)$ ist (stückweise) stetig differenzierbar, also können wir Lemma 1.1.3 verwenden:

$$s(t) = L(\gamma|_{[0,t]}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |(\gamma|_{[0,t]})'(x)|\, dx = \int_0^t |\gamma'(x)|\, dx \quad \text{für } t \leq \tfrac{\pi}{2}$$

$$= \int_0^t |(-2\sin(x)\cos(x), 4\sin(x)\cos(x))^T|\, dx$$

$$= \int_0^t \left((-2\sin(x)\cos(x))^2 + (4\sin(x)\cos(x))^2\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \int_0^t \left(4\sin^2(x)\cos^2(x) + 16\sin^2(x)\cos^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \int_0^t \left(20\sin^2(x)\cos^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^t \sqrt{20}\, \sin(x)\cos(x)\, dx$$

$$= \sqrt{20} \int_0^t \sin(x)\cos(x)\, dx = \sqrt{20} \cdot \left[-\tfrac{1}{2}\cos^2(x)\right]_0^t$$

$$= \sqrt{20} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\cos^2(t) - \left(-\tfrac{1}{2}\cos^2(0)\right)\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{20}}{2}\cos^2(t) + \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2}\left(1 - \cos^2(t)\right) = \frac{2\sqrt{5}}{2}\left(1 - \cos^2(t)\right) = \sqrt{5}\left(1 - \cos^2(t)\right).$$

(iii) Die Funktion der Bogenlänge $s\colon [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, L(\gamma)]$ ist ein Homöomorphismus. Warum? Ist es auch ein C^1-Diffeomorphismus Begründen Sie?

Bew:

$$s : [0, \tfrac{\pi}{2}] \to [0, L(\gamma)]$$
$$t \mapsto \sqrt{5}\,(1 - \cos^2(t))$$

Beh.: Die Funktion

$$u : [0, L(\gamma) = \sqrt{5}] \to [0, \tfrac{\pi}{2}]$$
$$t \mapsto \arccos\left(\sqrt{\frac{-t}{\sqrt{5}} + 1}\right)$$

Dafür muss gelten $u(s(t)) = t$:

$$u(s(t)) = \arccos\left(\sqrt{\frac{-(\cancel{\sqrt{5}})(1-\cos^2(t))}{\cancel{\sqrt{5}}} + 1}\right) = \arccos\left(\sqrt{\cancel{-1} - \cos^2(t) \cancel{+1}}\right)$$

$$= \arccos\left(\sqrt{\cos^2(t)}\right) = \arccos(\cos(t)) = t \quad \checkmark$$

s ist stetig, da cos stetig ist und die Verschiebungen/Vorfaktoren daran nichts ändern. Dasselbe gilt für u und den arcos.

$\Rightarrow$ s ist Homöomorphismus.

- Ist s ein C^1-Diffeomorphismus?

Nein, betrachte $u'(t) = -\dfrac{1}{\sqrt{\frac{t}{\sqrt{5}}}}$. Da $t \in [0, \sqrt{5}]$, kann $t = 0$ sein

$\Rightarrow$ u ist in 0 nicht differenzierbar $\Rightarrow$ s ist kein C^1-Diffeomorphismus.

$\blacksquare$

Aufgabe 3 (2.5+2.5)**.** Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Variation $V(f)$ von f ist definiert als

$$V(f) := \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|,$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen $\mathcal{Z} = (x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b)$ des Intervalls $[a,b]$ geht.

(i) Beweisen Sie: Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve; $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))^T$ für $\gamma_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist γ genau dann rektifizierbar, falls alle γ_i beschränkte Variation haben, d.h. falls $V(\gamma_i) < \infty$ für alle $1 \le i \le n$ gilt.

Bew: "$\Rightarrow$" Sei $\gamma(t)$ rektifizierbar, d.h. $\sup_Z \mathcal{L}(Z,\gamma_i) < \infty \ \forall i: i \in \{1,..,n\}$

$$\Rightarrow \sup \mathcal{L}(Z,\gamma_i) \overset{\text{Def. 1.1.1}}{=} \sup \sum_{j=1}^{n} |\gamma_i(x_j) - \gamma_i(x_{j-1})| = \operatorname{Var}(\gamma_i)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var}(\gamma_i) < \infty \quad \forall i: i \in \{1,..,n\}$$

"$\Leftarrow$" Sei die Varianz aller γ_i beschränkt, d.h.

$$\sup_Z \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |\gamma_i(x_j) - \gamma_i(x_{j-1})|}_{\overset{\text{Def. 1.1.1}}{=} \mathcal{L}(Z,\gamma_i)} < \infty \quad \forall i: i \in \{1,\ldots,n\}$$

$$\Rightarrow \sup_Z \mathcal{L}(Z,\gamma_i) < \infty \quad \forall i: i \in \{1,..,n\}$$

$\Rightarrow \gamma_i$ ist rektifizierbar $\forall i: i \in \{1,\ldots,n\}$ $\Rightarrow \gamma$ ist rektifizierbar ∎

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

unbeschränkte Variation hat.

Bew: Sei Z eine Zerlegung mit $x_k = \frac{1}{k}$

$$\Rightarrow f(x_k) = \frac{1}{k}\cos(\pi k) \quad \Rightarrow f(x_k) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{für } k \text{ gerade (dann ist } \cos(\pi k) = 1) \\ -\frac{1}{k} & \text{für } k \text{ ungerade (dann ist } \cos(\pi k) = -1) \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_{2n}) - f(x_{2n-1})| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

$$\Rightarrow V(f) = \sup_Z \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| = \infty$$

∎