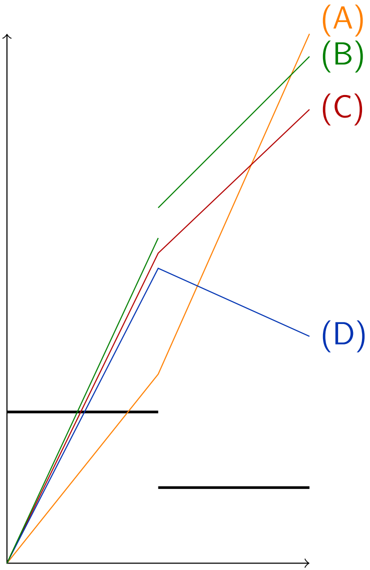
QQ 1



f sei die Treppenfunktion (schwarz) und sei

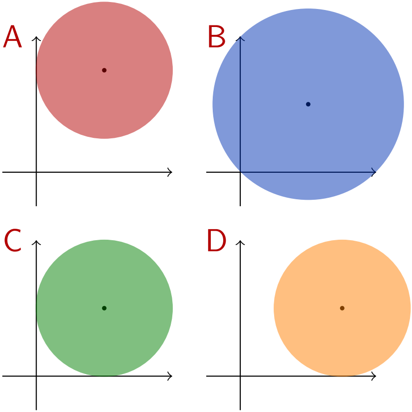
$$F(x) := \int_0^x f(x)dx$$

Was kann der Graph von F sein?

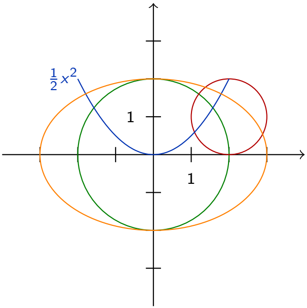
QQ 2

Welches der Bilder kann die folgende Menge darstellen?

$$B_1\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left| z - \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \right| < 1 \right\}$$



QQ 3



Finden Sie vier parametrisierte Kurven, die als Bild die Kurven links im Bild ergeben.

QQ 4

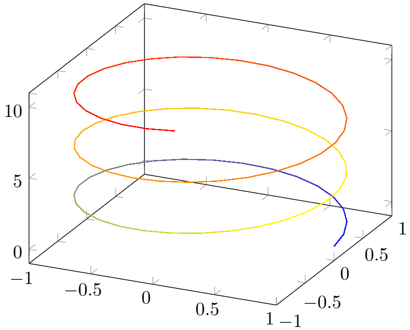
Welche der folgenden Kurven gehört zum Bild?

A $(t \cos t, t \sin t, t)^T$

B $(\cos t, \sin t, t)^T$

C $(\cos t, t, \sin t)^T$

D $(\cos^2 t, \sin^2 t, t^2)^T$



QQ 5

Sei $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))^T$. Das Bild von γ ist der Einheitskreis. Die Länge von γ ist $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = 4\pi$, also nicht der Umfang des Kreises. Falsch oder gar kein Problem?

A Das Integral wurde falsch berechnet.

B Da γ nicht injektiv ist, ist die Formel für die Länge der Kurve dann nicht gültig.

C Die Rechnung stimmt. Die Länge von γ muss doppelt so lang sein wie der Umfang des Kreises.

D Die Länge der Kurve γ hat mit dem Umfang des Kreises sowieso nichts zu tun.

QQ 6

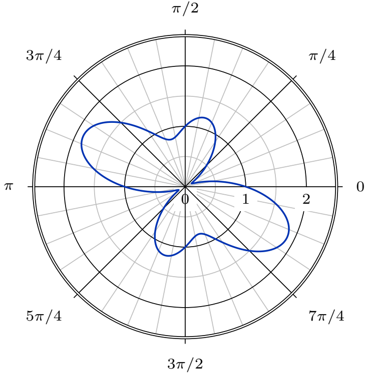
Welche der folgenden Funktionen gehört zum Bild?

A $r(\theta) = 1 - \sin\theta \sin(3\theta)$

B $r(\theta) = 1 - \cos\theta \cos(3\theta)$

C $r(\theta) = 1 - \cos\theta \sin(3\theta)$

D $r(\theta) = 1 - \sin\theta \cos(3\theta)$



Wie sieht die zugehörige Kurve $\gamma(t)$ in euklidischen Koordinaten aus?

QQ 7

Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve und $f(x) = 1$. Dann ist $\int_\gamma f ds$

A immer gleich Null.

B immer gleich Eins.

C immer gleich der Länge von γ.

D Nichts von den dreien.

QQ 8

Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ eine *geschlossene* stetig differenzierbare Kurve und $f(z) = 1$. Dann ist $\int_\gamma f dz$

A immer gleich Null.

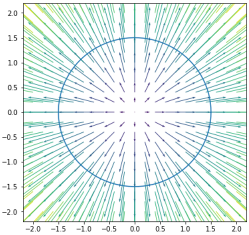
B immer gleich Eins.

C immer gleich der Länge von γ.

D Nichts von den dreien.

QQ 9

Sei $V(x,y) = (x,y)$ das radiale Vektorfeld im Bild. Sei γ eine glatte Kurve, deren Bild der blaue Kreis ist. Dann ist $\int_\gamma V \cdot ds$



A 0, da V bei Rotation um den Ursprung gleich bleibt.

B 0, da V senkrecht auf dem Kreis steht.

C 2π, da V bei Rotation um den Ursprung gleich bleibt.

D 2π, da V senkrecht auf dem Kreis steht.

QQ 10

Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset Q \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und Q ein achsenparalleler Quader. Was stimmt nicht?

A $\Omega_1 \cup \Omega_2$ ist Jordan-messbar mit $\mathrm{vol}_n (\Omega_1 \cup \Omega_2) = \mathrm{vol}_n \Omega_1 + \mathrm{vol}_n \Omega_2$

B $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^{2n}$ ist Jordan-messbar mit $\mathrm{vol}_{2n} (\Omega_1 \times \Omega_2) = \mathrm{vol}_n \Omega_1 \cdot \mathrm{vol}_n \Omega_2$

C $Q \setminus \Omega_1$ ist Jordan-messbar mit $\mathrm{vol}_n\ Q \setminus \Omega_1 = \mathrm{vol}_n\ Q - \mathrm{vol}_n\ \Omega_1$

D Ist $\Omega_1 \subset \Omega_2$, dann ist $\mathrm{vol}_n\ \Omega_1 \leq \mathrm{vol}_n\ \Omega_2$.

QQ 11

Sei $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Wie viele der folgenden Integrale kann man ausrechnen, um den Flächeninhalt von A zu erhalten?

(i) $\int_A \mathrm{dvol}$

(ii) $\int_{[-1,1]^2} 1_A \mathrm{dvol}$

(iii) $\int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx$

(iv) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} dx$

A 1　　B 2　　C 3　　D 4

QQ 12

Was stimmt nicht für das folgende Vektorfeld:

$$V(x, y) = (\sin x \cosh y, -\cos x \sinh y)$$

A rot $V = 0$

B div $V = 0$

C Es ist ein Gradientenvektorfeld, d.h. es gibt ein $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit grad $f = V$.

D Das Vektorfeld hat nur in $(0, 0)$ eine Nullstelle.

QQ 13

Seien $A \subsetneq B \subset Q \subset \mathbb{R}^n$, Q ein Quader. Seien $1_A, 1_B \colon Q \to \mathbb{R}$ integrierbar. Sei $f \colon Q \to \mathbb{R}$ stetig mit $f > 0$. Was ist die stärkste Folgerung?

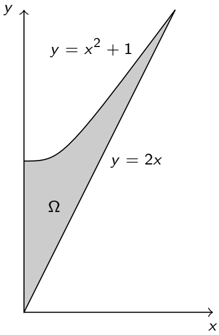
A $\int_A f \,\mathrm{dvol} \leq \int_B f \,\mathrm{dvol}$

B $\int_A f \,\mathrm{dvol} < \int_B f \,\mathrm{dvol}$

C nichts davon, da $f|_A$ und $f|_B$ nicht integrierbar sein müssen.

QQ 14

Welche Integrale berechnen den Flächeninhalt von Ω?



A $\int_0^1 \left(\int_{2x}^{x^2+1} dy \right) dx$ und
$\int_0^2 \left(\int_0^{\frac{1}{2}y} dx + \int_{\sqrt{y-1}}^{\frac{1}{2}x} dx \right) dy$

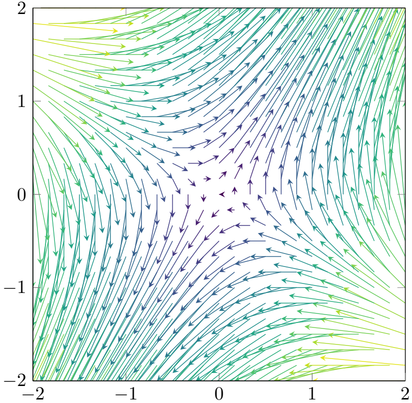
B $\int_0^1 \left(\int_{2x}^{x^2+1} dy \right) dx$ und
$\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1}{2}y} dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_{\sqrt{y-1}}^{\frac{1}{2}y} dx \right) dy$

C $\int_0^1 \left(\int_{2x}^{x^2+1} dy \right) dx$ und $\int_0^1 \left(\int_{2x}^{x^2+1} dx \right) dy$

D $\int_0^2 \left(\int_{2x}^{x^2+1} dy \right) dx$ und
$\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1}{2}y} dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_{\sqrt{y-1}}^{\frac{1}{2}y} dx \right) dy$

QQ 15

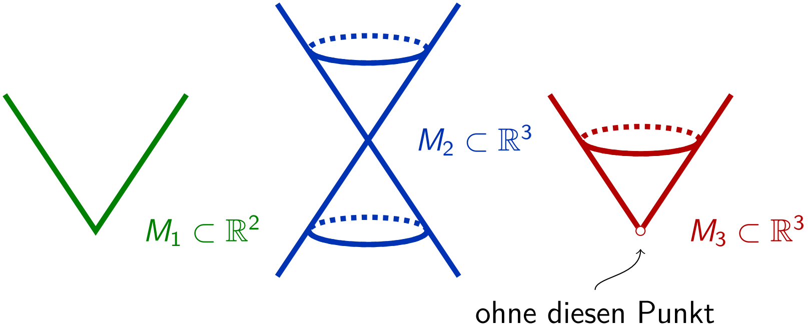
Was kann man über die Divergenz und Rotation dieses Vektorfeldes sagen?



QQ 16

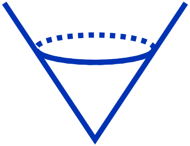
Welche der folgenden Mengen sind Untermannigfaltigkeiten (also sind lokal Funktionsgraph einer glatten Funktion)?

(rein vom Bild her - ohne Beweis)



QQ 17

Welche Gleichung gehört zum Bild?



A $z = x^2 + y^2$

B $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$

C $z = |x| + |y|$

D keine davon

QQ 18

Sei $M = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0\}$.

Mit dem Kriterium vom regulärem Wert kann man von welchen Punkten $p \in M$ zeigen, dass M lokal um p eine Untermannigfaltigkeit ist?

- A Für kein p, da M keine Untermannigfaltigkeit ist.
- B Für alle p.
- C Für alle p außer der Spitze.
- D Keine dieser drei Antworten ist richtig.

QQ 19

Die Ebene durch $p \in \mathbb{R}^3$, die durch die linear unabhängigen Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt wird, ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit.

Was ist die Parameterdarstellung der Ebene? Ist das eine lokale Parametrisierung?

QQ 20

Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist durch die Ebenengleichung
$ax + by + cz = d$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ bestimmt.

Gibt das Kriterium vom regulären Wert hier, dass es sich um eine Untermannigfaltigkeit handelt?

QQ 21

Finden Sie eine lokale Parametrisierung für den Kegel
$z^2 = x^2 + y^2$, $z > 0$.

QQ 22 – Bewegungsinvarianz

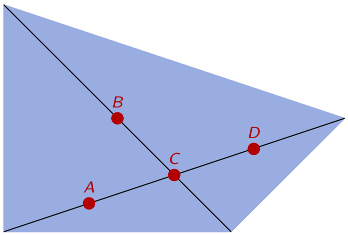
Isometrien des euklidischen Räumen:
$\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax + b$, für $A \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$

Sei $f\colon Q(= \text{Quader im } \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ integrierbar.

Was ist dann $\int_{\phi^{-1}(Q)} (f \circ \phi) \mathrm{dvol}$? (einmal mit Anschauung und einmal mit Transformationssatz).

QQ 23

Welcher Punkt ist (ungefähr) der Schwerpunkt von der Menge im Bild?



QQ 24

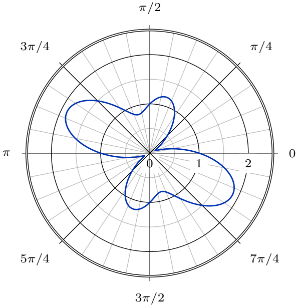
Der Flächeninhalt des Inneren der blauen Kurve $r(\theta) = 1 - \cos\theta \sin(3\theta)$ wird berechnet durch:

A $\int_0^{r(\theta)} \left(\int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta \sin(3\theta)) d\theta \right) dr$

B $\int_0^{r(\theta)} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) rdr$

C $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{r(\theta)} rdr \right) d\theta$

D $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{r(\theta)} (1 - \cos\theta \sin(3\theta)) dr \right) d\theta$



QQ 25 – Wie skalieren die Größen?

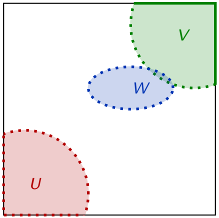
Was ist die Abhängigkeit folgender Größen von $a > 0$?

A $\mathrm{vol}(B_a(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < a\})$

B $\mathrm{vol}(S_a(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = a\})$

QQ 26 – Offene Mengen von Teilmengen

Wir betrachten $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ als metrischen Raum zusammen mit der euklidischen Metrik. Welche der folgenden Mengen sind offen als Teilmenge von $[0,1]^2$, welche als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$? ('Teile des Randes', die farblich hervorgehoben sind, ist Teil der Menge, ansonsten ist es gepunktet.)



QQ 27

Sei $A = [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$. Welche Ausssage stimmt <u>nicht</u>?

A $\mathrm{Innere}\, A = \varnothing$

B $\overline{A} = [0,1]^2$

C $\partial A = [0,1]^2$

D A ist kompakt

QQ 28

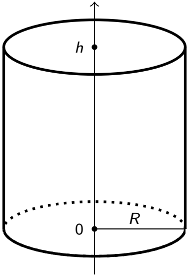
Skizzieren Sie Ω_1 und Ω_2 in:

$$\int_{\Omega_1} \ldots \mathrm{dvol} \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{2}x}^{\sin x} \ldots dydx$$

$$\int_{\Omega_2} \ldots \mathrm{dvol} \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{2}y}^{\sin y} \ldots dxdy$$

QQ 29

Ω sei der abgebildete Vollzylinder.



Was ist für jedes $p \in \partial\Omega$ der äußere Einheitsnormalenvektor (wenn dort existent)?
Was ist eine lokale Parametrisierung der Mantelfläche?

QQ 30

Sei $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1, z \geq 0\}$.

Skizzieren Sie M und geben Sie eine lokale Parametrisierung von M an.

QQ 31

Ein glattes Vektorfeld habe die Form $V = (V_1, V_2, 0)^T$.

Was kann man über rot V sagen?

QQ 32

Sei $F\colon (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u, v, uv) \in \mathbb{R}^3$.

Wie sieht $F(\mathbb{R}^2)$ aus?

Ist F eine lokale Parametrisierung?

QQ 33

Sei $F\colon (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u,v,uv) \in \mathbb{R}^3$.

$$\int_{F([0,1]^2)} \mathrm{dvol} = \int_0^1 \int_0^1 f(u,v)\,du\,dv$$

Wie lautet der Volumenverzerrungsfaktor $f(u,v)$?

QQ 34

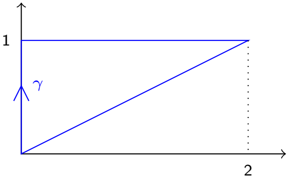
Welche der folgenden Darstellungen definieren immer Mengen im $\mathbb{R}^3$, die rotationssymmetrisch bzgl. der z-Achse sind? Welche zumindest manchmal, wenn die Funktion(en) 'gut' gewählt werden?

I $x^2 + y^2 = f(z)^2$

II $F(u, v) = (g(u)\cos v, g(u)\sin v, h(u))^T$

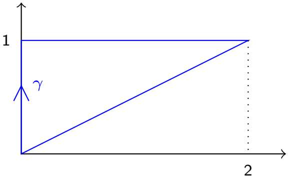
III $F(u, v) = (u, v, j(u, v))^T$

QQ 35



Gesucht ist $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x, y) = (x, 0)^T$.

QQ 36



Gesucht ist $\int_\gamma f(z)dz$ für $f(z) = \mathrm{Re}\, z$.

QQ 37

Wo kann man den Cauchy-Integralsatz direkt anwenden? Wo nicht?

A $\int_{\partial B_1(0)} e^{z^2} dz$

B $\int_{\partial B_1(0)} \bar{z}^2 dz$

C $\int_{\partial [0,1]^2} \sin z dz$

D $\int_{\partial [0,1]^2} \frac{1}{z-0.5} dz$

QQ 38

Die Kurven γ_1 und γ_2 haben die gleiche Spur, nur die Art diese Spur zu durchlaufen ist anders.

Mit welchem Kurvenintegral kann man $\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz$ darstellen?

QQ 39

Kann es eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ geben, die auf der x-Achse der Funktion $|x|$ entspricht?