Stochastik

Wintersemester 2021/22

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 5

Abgabe: Freitag, 14.01.2022, 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen mit $P(X_n = 1) = P(X_n = 0) = \frac{1}{2}$. Sei $a \in \{0,1\}^k$ für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$, d.h. eine beliebige Sequenz aus 0 und 1. Definiere $A_n = \{(X_n, \ldots, X_{n+k-1}) = a\}$. Zeigen Sie, dass $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen mit $P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = 0) = \frac{1}{n}$. Untersuchen Sie die Folge auf stochastische und fast sichere Konvergenz gegen 0.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$ paarweise unkorrelierte Zufallsvariablen mit endlicher Varianz (also nicht notwendig identisch verteilt) und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}[X_i^{(n)}] = 0.$$

Zeigen Sie, dass die $X_i^{(n)}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügen, d.h. beweisen Sie

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i^{(n)} - \mathrm{E}[X_i^{(n)}] \right) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \quad n \to \infty.$$

Es sei $(X_n)_{n\geq 2}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$\mathrm{P}(X_n = n) = \frac{1}{n \log n} \quad \text{und} \quad \mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \log n}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügt, in dem Sinne, dass

$$\frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} (X_i - \mathrm{E}[X_i]) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

Zeigen Sie weiter, dass die obige folge nicht fast sicher konvergiert und sie somit nicht dem Gesetz der großen Zahlen genügt.

Stochastik I Blatt 5

Lorenz Bung

lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Luis Jaschke

luis.jaschke.99@gmail.com

Matr.-Nr. 5105153

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen mit $P(X_n = 1) = P(X_n = 0) = \frac{1}{2}$. Sei $a \in \{0,1\}^k$ für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$, d.h. eine beliebige Sequenz aus 0 und 1. Definiere $A_n = \{(X_n, \ldots, X_{n+k-1}) = a\}$. Zeigen Sie, dass $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 1.

zz: $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$

Beweis:

$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$

Mit dem Lemma von Borel-Cantelli

reicht es zu zeige das gilt $\sum_{n\geq 1} P(A_k) = \infty$

Sei $(a_1, a_2, \ldots, a_k) = a$ die einzelne Einträge von a

$\Rightarrow P(A_n) = P(X_n = a_1) \cdot P(X_{n+1} = a_2) \cdot \ldots \cdot P(X_{n+k-1} = a_k)$

Da die $a_i = 0,1$ sind gilt somit

$P(A_n) = (\frac{1}{2})^k$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} P(A_k) = \sum_{n\geq 1} (\frac{1}{2})^k = \infty$

$\Rightarrow P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = 1$

$\square$

Das ergebniss lässt sich so interpretiere das wenn wir eine unendliche Abfolge von 0 und 1 haben es für jede endliche Abfolge von 0 und 1 einen Abschnitt in der unendliche Folge gibt der gleich dem endlichen ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen mit $P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = 0) = \frac{1}{n}$. Untersuchen Sie die Folge auf stochastische und fast sichere Konvergenz gegen 0.

Die Folge ist stochastisch gegen 0 konvergent, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Es ist $\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$,

$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$,

sowie $\mathbb{P}(X_n = k) = 0$ für $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Betrachte nun das gewählte ε:

Fall 1: $\varepsilon \geq 1$. Dann ist $|X_n| > \varepsilon \geq 1$, also $X_n = k$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Weiterhin ist damit $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = 0$.

Es ergibt sich $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.

Fall 2: $\varepsilon \in (0, 1)$. Dann ist $1 \geq |X_n| > \varepsilon > 0$.

Falls $|X_n| \neq 1$ sind wir wieder im Fall $X_n = k$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ und damit $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = 0$.

Es bleibt der Fall $X_n = 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Insgesamt ist also $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = 0 \ \forall \varepsilon > 0$ und damit ist die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch konvergent.