Übungsblatt 10

Sei $0 < r < R$. Sei $\mathbb{T}^2_{r,R} := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$.

Aufgabe 28. Zeigen Sie, dass $\mathbb{T}^2_{r,R}$ (Definition oben) eine Untermannigfaltigkeit ist, skizzieren Sie diese und bestimmen Sie das Volumen von $A := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 29. Sei

$$\begin{aligned} F\colon U := (0,2\pi) \times (0,2\pi) &\to \mathbb{R}^3 \\ (\phi,\theta) &\mapsto \begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)\cos\theta \\ (R + r\cos\phi)\sin\theta \\ r\sin\phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Überprüfen Sie, dass F eine lokale Parametrisierung von $\mathbb{T}^2_{r,R}$ (Definition oben) ist. Bestimmen Sie $\mathbb{T}^2_{r,R} \setminus F(U)$ und das Volumen der Untermannigfaltigkeit $F(U) \subset \mathbb{T}^2_{r,R}$. Argumentieren Sie, dass $\mathbb{T}^2_{r,R} \setminus F(U) \subset \mathbb{T}^2_{r,R}$ als Teilmenge der Untermannigfaltigkeit $\mathbb{T}^2_{r,R}$ Volumen Null hat.[1]

Aufgabe 30 (2+1+2)**.** Berechnen Sie folgende Integrale

(i) $\int_M x \mathrm{dvol}$, wobei M der Teil der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ist, welcher im ersten Oktanten liegt.

(ii) $\int_M y \mathrm{dvol}$, wobei M die obere Hemnisphäre der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ist.

(iii) $\int_M \frac{1}{\sigma^2} \mathrm{dvol}$, wobei M der Teil des Zylinders $x^2 + y^2 = R^2$ zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = H$ ist und σ die Funktion auf M ist, welche in jedem Punkt den Abstand zum Ursprung misst.

Abgabe bis Mittwoch 18.01.23 8:00 Uhr online oder in den Briefkasten im Untergeschoss

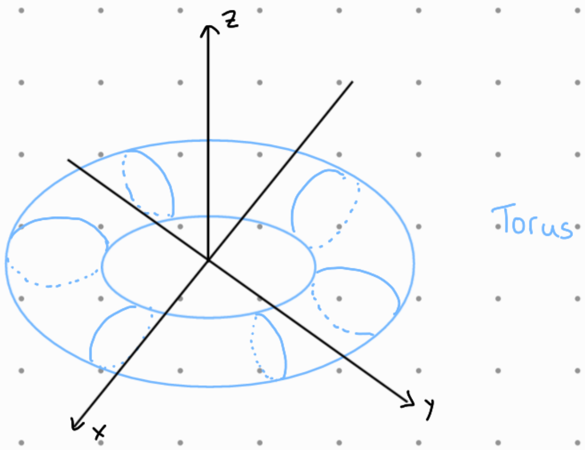
[1] Es geht also um das Integral $\int_{\mathbb{T}^2_{r,R}} 1_{\mathbb{T}^2_{r,R} \setminus F(U)} \mathrm{dvol}$ für die charakteristische Funktion $1_{\mathbb{T}^2_{r,R} \setminus F(U)} \colon \mathbb{T}^2_{r,R} \to \mathbb{R}$.

Lorenz Bung
Lea Weissenrieder

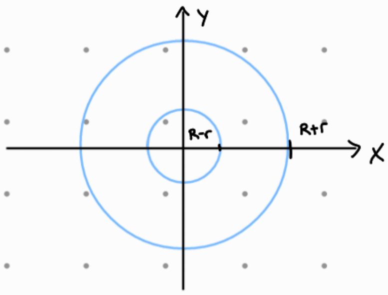
Sei $0 < r < R$. Sei $\mathbb{T}^2_{r,R} := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$.

Aufgabe 28. Zeigen Sie, dass $\mathbb{T}^2_{r,R}$ (Definition oben) eine Untermannigfaltigkeit ist, skizzieren Sie diese und bestimmen Sie das Volumen von $A := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \le r^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Bew: Skizze:



Blick "von oben" auf xy-Ebene



- Z: $\mathbb{T}^2_{r,R}$ ist 2-dim. Untermannigfaltigkeit

Bew: Wir definieren eine Abb. $f: \underbrace{\mathbb{R}^3}_{m+k=2+1} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^1}_{k}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 - r^2$$

Dann gilt $f^{-1}(0) = \mathbb{T}^2_{r,R}$ (da dann $0 = (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 - r^2 \iff (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2$ was gerade für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ erfüllt wird, die $\mathbb{T}^2_{r,R}$ bilden)

Wir bilden nun die Jacobi-Matrix von f:

$$D_{(x,y,z)^T} f = \begin{pmatrix} 2x - \frac{2xR}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2y - \frac{2yR}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2z \end{pmatrix}$$, diese hat für alle $(x,y,z)^T \in \mathbb{T}^2_{r,R}$ vollen Rang

$\Rightarrow 0^{\in \mathbb{R}}$ ist ein regulärer Wert von f und $f^{-1}(0) = \mathbb{T}^2_{r,R}$

$\overset{\text{Satz 1.3.4}}{\Rightarrow}$ $\mathbb{T}^2_{r,R}$ ist eine 2-dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

- Z: Volumen von $A := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \le r^2\} \subset \mathbb{R}^3$

Bew: Wir parametrisieren A (dass dies eine Parametrisierung ist, wird in Aufgabe 29 gezeigt)

$$\Phi: (r, \varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} (R + r\cos(\theta))\cos(\varphi) \\ (R + r\cos(\theta))\sin(\varphi) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$D_{(r,\varphi,\theta)} \Phi = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -(R + r\cos(\theta))\sin(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) & (R + r\cos(\theta))\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta) & 0 & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \Rightarrow |\det D_{(r,\varphi,\theta)} \Phi| = |rR + r^2\cos(\theta)|$$

$$\operatorname{vol}(A) = \int_A d\operatorname{vol} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} rR + r^2\cos(\theta)\, dr\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\tfrac{1}{2}Rr^2 + \tfrac{1}{3}\cos(\theta) r^3\right]_0^r = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}Rr^2 + \tfrac{1}{3}\cos(\theta) r^3\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{Rr^2}{2}\theta + \frac{r^3}{3}\sin(\theta)\right]_0^{2\pi} d\varphi = \int_0^{2\pi} Rr^2\pi\, d\varphi = \left[Rr^2\pi\varphi\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{2\pi^2 Rr^2}}$$

Aufgabe 29. Sei

$$F\colon U := (0,2\pi)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$$
$$(\phi,\theta) \mapsto \begin{pmatrix} (R+r\cos\phi)\cos\theta \\ (R+r\cos\phi)\sin\theta \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie, dass F eine lokale Parametrisierung von $\mathbb{T}^2_{r,R}$ (Definition oben) ist. Bestimmen Sie $\mathbb{T}^2_{r,R}\setminus F(U)$ und das Volumen der Untermannigfaltigkeit $F(U) \subset \mathbb{T}^2_{r,R}$. Argumentieren Sie, dass $\mathbb{T}^2_{r,R}\setminus F(U) \subset \mathbb{T}^2_{r,R}$ als Teilmenge der Untermannigfaltigkeit $\mathbb{T}^2_{r,R}$ Volumen Null hat.[1]

Lorenz Bung
Lea Weissenrieder

- Mit $x = (R + r\cos(\Phi))\cos(\theta)$, $y = (R+r\cos(\Phi))\sin(\theta)$ und $z = r\sin(\Phi)$

folgt $x^2+y^2 = (R+r\cos(\Phi))^2\cos(\theta)^2 + (R+r\cos(\Phi))^2\sin(\theta)^2 = (R+r\cos(\Phi))^2$

$$\Rightarrow (\sqrt{x^2+y^2}-R)^2 = (R+r\cos(\Phi)-R)^2 = r^2\cos(\Phi)^2 = r^2(1-\sin(\Phi)^2) = r^2 - r^2\sin(\Phi) = r^2 - z^2$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+y^2}-R)^2 + z^2 = r^2$$

Es gilt zudem $F(U) = \underset{\mathbb{T}^2_{r,R}}{\overset{\shortparallel}{M\cap V}}$ und $F: U \to M\cap V$ ist Homöom. (da sin, cos stetig sind)

Und $D_uF = \begin{pmatrix} -r\cos(\theta)\sin(\Phi) & -(R+r\cos(\Phi))\sin(\theta) \\ -r\sin(\theta)\sin(\Phi) & (R+r\cos(\Phi))\cos(\theta) \\ r\cos(\Phi) & 0 \end{pmatrix}$ hat Rang 2 (für alle $u\in U$)

$\overset{\text{Satz 1.3.4}}{\Longrightarrow}$ Φ ist eine lokale Parametrisierung von $\mathbb{T}^2_{r,R}$.

- Mit Aufgabe 27(ii) können wir die Oberfläche $\underset{F(U)\subset\mathbb{T}^2_{r,R}}{\shortparallel}$ „einfach" berechnen:

$$f_a(z) = +\sqrt{r^2-z^2}+R = (r^2-z^2)^{\frac{1}{2}}+R$$
$$f_a'(z) = \tfrac{1}{2}(r^2-z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2z) = -\frac{z}{\sqrt{r^2-z^2}}$$

$$2\pi\int_{-r}^{r} f_a(z)\sqrt{f_a'(z)^2+1}\,dz = 2\pi\int_{-r}^{r}(\sqrt{r^2-z^2}+R)\sqrt{\frac{z^2}{r^2-z^2}+1}\,dz$$
$$= 2\pi\int_{-r}^{r}(\sqrt{r^2-z^2}+R)\sqrt{\frac{z^2+(r^2-z^2)}{r^2-z^2}}\,dz$$
$$= 2\pi\int_{-r}^{r}(\sqrt{r^2-z^2}+R)\sqrt{\frac{r^2}{r^2-z^2}}\,dz$$
$$= 2\pi\int_{-r}^{r}(\sqrt{r^2-z^2}+R)\frac{r}{\sqrt{r^2-z^2}}\,dz = 2\pi\int_{-r}^{r} r + \frac{Rr}{\sqrt{r^2-z^2}}\,dz$$
$$= 2\pi r\int_{-r}^{r} 1\,dz + 2\pi rR\int_{-r}^{r}(r^2-z^2)^{-\frac{1}{2}}\,dz$$
$$= 2\pi r\cdot 2r + 2\pi rR\left[\arcsin\left(\tfrac{z}{r}\right)\right]_{-r}^{r}$$
$$= 4\pi r^2 + 2\pi^2 rR \quad \leftarrow \text{äußerer Teil der Oberfläche vom Torus}$$

Für die „innere Hälfte" bekommen wir $f_i(z) = R - \sqrt{r^2-z^2}$ und damit

$$2\pi\int_{-r}^{r} f_i(z)\sqrt{f_i'(z)^2+1}\,dz = 2\pi^2 Rr - 4\pi r^2.$$

Insgesamt erhalten wir $\int_{\mathbb{T}^2_{r,R}} F(U)\,dvol = 4\pi r^2 + 2\pi^2 Rr + 2\pi^2 Rr - 4\pi r^2 = \underline{4\pi^2 Rr}.$

- Es ist $\mathbb{T}^2_{r,R}\setminus F(U) = \{(R+r,0,0)^T\}$, besteht also nur aus einem einzigen Punkt.

Damit ist $\int_{\mathbb{T}^2_{r,R}} \mathbb{1}_{\mathbb{T}^2_{r,R}\setminus F(U)}\,dvol = 0.$

Lorenz Bung
Lea Weissenrieder

Aufgabe 30 (2+1+2). Berechnen Sie folgende Integrale

(i) $\int_M x\mathrm{dvol}$, wobei M der Teil der Sphäre $x^2+y^2+z^2=R^2$ ist, welcher im ersten Oktanten liegt.

(ii) $\int_M y\mathrm{dvol}$, wobei M die obere Hemnisphäre der Sphäre $x^2+y^2+z^2=R^2$ ist.

(iii) $\int_M \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{dvol}$, wobei M der Teil des Zylinders $x^2+y^2=R^2$ zwischen den Ebenen $z=0$ und $z=H$ ist und σ die Funktion auf M ist, welche in jedem Punkt den Abstand zum Ursprung misst.

(i) Wir arbeiten mit den Kugelkoordinaten $\Phi: (r,\varphi,\theta) \in (0,R)\times(0,2\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$

$$\int_M x\,\mathrm{dvol} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^R x\cdot \underbrace{|r^2\cos(\theta)|}_{|\det D\Phi|}\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^R r\cos(\varphi)\cos(\theta)\,r^2\cos(\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^R r^3\cos(\varphi)\cos(\theta)^2\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\left[\cos(\varphi)\cos(\theta)^2\tfrac{1}{4}r^4\right]_0^R d\theta\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{4}R^4\int_0^{\pi/2}\cos(\varphi)\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)^2\,d\theta\,d\varphi \overset{*}{=} \frac{1}{4}R^4\int_0^{\pi/2}\cos(\varphi)\left[\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)+\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}d\varphi$$

$$= \frac{1}{4}R^4\cdot\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2}\cos(\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{16}R^4\left[\sin(\varphi)\right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{16}R^4}}$$

* NR zur Stammfkt.

$$\int\cos(\theta)\cos(\theta)\,d\theta \overset{\text{P.I.}}{=} \sin(\theta)\cos(\theta) - \int\sin(\theta)(-\sin(\theta))\,d\theta$$

$$= \sin(\theta)\cos(\theta) + \int\sin(\theta)^2 = \sin(\theta)\cos(\theta) + \int(1-\cos(\theta)^2)$$

$$= \sin(\theta)\cos(\theta) + \int 1\,d\theta - \int\cos(\theta)^2\,d\theta$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\int\cos(\theta)^2\,d\theta = \sin(\theta)\cos(\theta)+\theta$$

(ii) $$\int_M y\,\mathrm{dvol} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^R y\,\underbrace{r^2\cos\theta}_{\text{Funk.-Det.}}\,dr\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^R r\sin\varphi\cos\theta\,r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3\sin\varphi\cos^2\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}R^4\sin\varphi\cos^2\theta\,d\varphi\,d\theta = \frac{1}{4}R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\left[-\cos\varphi\right]_0^{2\pi}d\theta$$

$$= \frac{1}{4}R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\cdot 0\,d\theta = 0.$$

mit Zylinderkoordinaten

Subst. $u := r^2+z^2$

(iii) $$\int_M\frac{1}{\sigma^2}\,\mathrm{dvol} = \int_0^H\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot r\,dr\,d\varphi\,dz = \int_0^H\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{1}{r^2+z^2}\,r\,dr\,d\varphi\,dz = \int_0^H\int_0^{2\pi}\int_{z^2}^{R^2+z^2}\frac{1}{2u}\,du\,d\varphi\,dz = \int_0^H\int_0^{2\pi}\left[\frac{\ln(u)}{2}\right]_{z^2}^{R^2+z^2}d\varphi\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^H\int_0^{2\pi}\ln(R^2+z^2)-\ln(z^2)\,d\varphi\,dz = \frac{1}{2}\int_0^H\int_0^{2\pi}\ln(R^2+z^2)-\ln(z^2)\,d\varphi\,dz = \pi\int_0^H\ln(R^2+z^2)-\ln(z^2)\,dz$$

$$= \pi\left[z\left(\ln(z^2+r^2)-2\right)+2r\tan^{-1}\left(\frac{z}{r}\right)-z\left(\ln(z^2)-2\right)\right]_0^H = \pi\cdot\left[z\ln(z^2+r^2)-\cancel{2z}+2r\tan^{-1}\left(\frac{z}{r}\right)+\cancel{2z}-z\ln(z^2)\right]_0^H$$

$$= \pi\cdot\left(H\cdot\ln(H^2+r^2)+2r\tan^{-1}\left(\frac{H}{r}\right)-H\ln(H^2)\right).$$