Übungsblatt 9

Seien $0 < r < R$. Sei $\mathbb{T}^2_{r,R} := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$.

Aufgabe 33. Zeigen Sie, dass $\mathbb{T}^2_{r,R}$ (Definition oben) eine Untermannigfaltigkeit ist, skizzieren Sie diese und bestimmen Sie das Volumen von $A := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 34. Sei

$$\begin{aligned} F\colon U := (0,2\pi) \times (0,2\pi) &\to \mathbb{R}^3 \\ (\phi,\theta) &\mapsto \begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)\cos\theta \\ (R + r\cos\phi)\sin\theta \\ r\sin\phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Überprüfen Sie, dass F eine lokale Parametrisierung von $\mathbb{T}^2_{r,R}$ (Definition oben) ist. Bestimmen Sie $\mathbb{T}^2_{r,R} \setminus F(U)$ und das Volumen der Untermannigfaltigkeit $F(U) \subset \mathbb{T}^2_{r,R}$. Argumentieren Sie, dass $\mathbb{T}^2_{r,R} \setminus F(U) \subset \mathbb{T}^2_{r,R}$ als Teilmenge der Untermannigfaltigkeit $\mathbb{T}^2_{r,R}$ Volumen Null hat.[1]

Aufgabe 35. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit. Sei $F\colon U \to V$ eine lokale Parametrisierung von M um ein $p \in M$. Sei $n(q = F(x,y)) := \frac{\partial_x F(x,y) \times \partial_y F(x,y)}{|\partial_x F(x,y) \times \partial_y F(x,y)|}$.

Warum gilt $n(q) \perp T_qM$ für alle $q \in F(U)$? Rechnen Sie $\det (D_{(x,y)^T}F)^T (D_{(x,y)^T}F) = |\partial_x F(x,y) \times \partial_y F(x,y)|^2$ nach.

Folgern Sie, dass somit für ein Vektorfeld $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt

$$\int_{F(U)\subset M} \langle V, n\rangle \mathrm{dvol} = \int_{U\subset\mathbb{R}^2} \langle V(F(x,y)), \partial_x F(x,y) \times \partial_y F(x,y)\rangle \mathrm{dvol}.$$

Aufgabe 36. Sei $R, h > 0$. Wir betrachten $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2, z \in [0,h]\}$, siehe Rückseite. Der Rand von Ω ist keine C^1-Untermannigfaltigkeit ('Problemmenge' – die beiden Kreise, wo die Mantelfläche des Zylinders an Boden und Deckel stösst.). D.h. die Voraussetzungen unseres Divergenzsatzes sind dafür nicht erfüllt. Jedoch gilt der Divergenzsatz auch allgemeiner und für dieses Ω rechnen wir das für das Vektorfeld $V(x,y,z) = (x,y,0)^T$ mal direkt nach:

Berechnen Sie jeweils $\int_\Omega \operatorname{div} V \mathrm{dvol}$ und $\int_{\partial\Omega\setminus S} \langle V, n\rangle \mathrm{dvol}$, wobei S die 'Problemmenge' von oben ist ($\partial\Omega \setminus S$ ist nun eine C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$). Außerdem ist n wieder der äußere Einheitsnormalenvektor an $\partial\Omega \setminus S$.

Bonusaufgabe. [2] Sei $0 < r < R$. Wir ändern $\partial\Omega$ aus Aufgabe 35, indem wir unten am den Boden den Teil von $\mathbb{T}^2_{r,R-r}$ mit $z \leq 0$ und $x^2 + y^2 \geq (R-r)^2$ ankleben und das dann so auffüllen, dass der neue flache Teil des Boden ein Kreis mit Radius $R - r$ bei $z = -r$ ist. Analog beim Deckel, vgl. Bild. Dadurch entsteht eine neue kompakte Teilmenge $K_r \subset \mathbb{R}^3$ mit $\Omega \subset K_r$ und ∂K_r ist nun eine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ (müssen Sie nicht beweisen). Sei $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

Wenden Sie auf K_r den Divergenzsatz an und zeigen Sie, dass für $r \to 0$ im Limes der Divergenzsatz für Ω, also

$$\int_\Omega \operatorname{div} V \mathrm{dvol} = \int_{\partial\Omega\setminus S} \langle V, n\rangle \mathrm{dvol}$$

mit S wie in Aufgabe 36 entsteht.

---

[1] Es geht also um das Integral $\int_{\mathbb{T}^2_{r,R}} 1_{\mathbb{T}^2_{r,R}\setminus F(U)} \mathrm{dvol}$ für die charakteristische Funktion $1_{\mathbb{T}^2_{r,R}\setminus F(U)}\colon \mathbb{T}^2_{r,R} \to \mathbb{R}$.

[2] Nicht so schwer - Aber am besten einige der Rechnungen von oben benutzen.

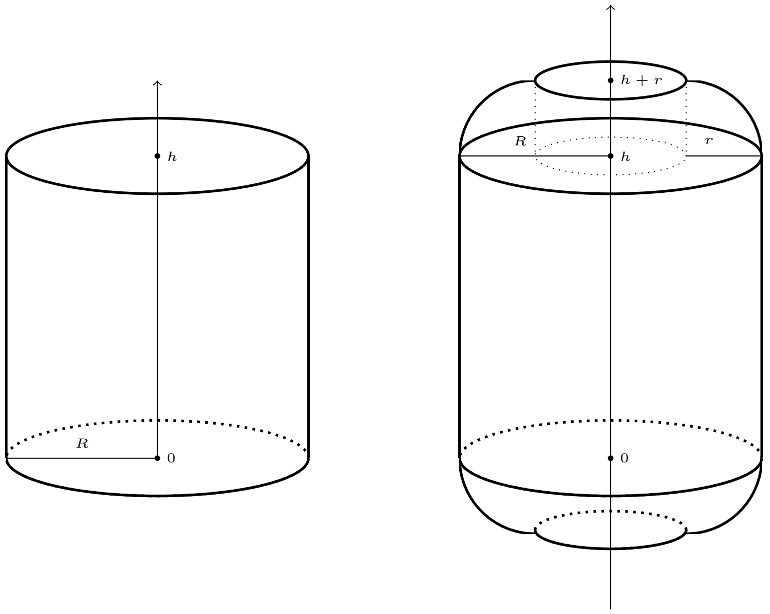


Abbildung 1: Links: Ω aus Aufgabe 36
Rechts: K_r aus der Bonusaufgabe

Abgabe am Mittwoch 30.06.21 bis 14 Uhr

Analysis II Blatt 9

Lorenz Bung

lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Vincent Wilhelms

Matr.-Nr. 4909980

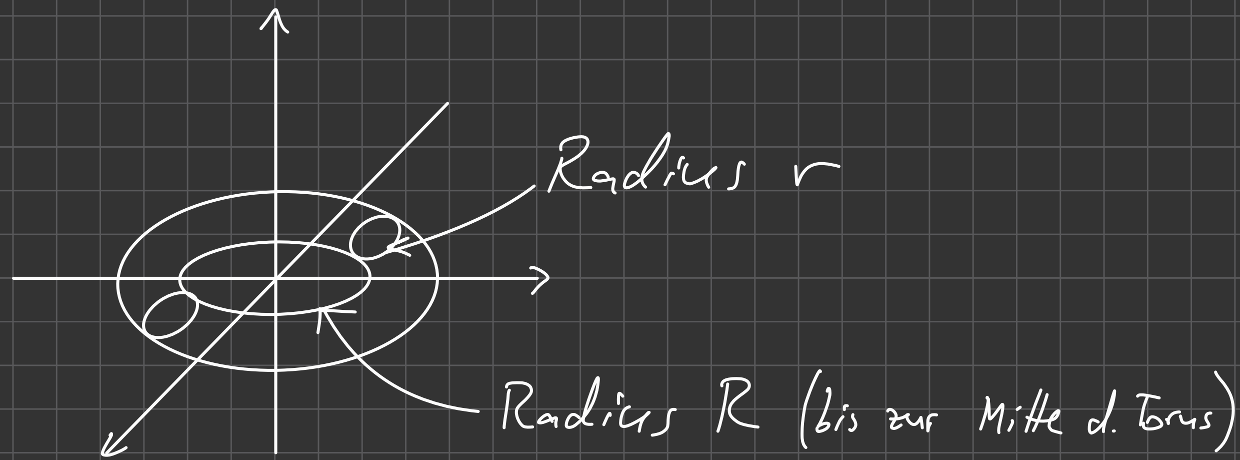
vincent.wilhelms@gmail.com

Seien $0 < r < R$. Sei $\mathbb{T}^2_{r,R} := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$.

Aufgabe 33. Zeigen Sie, dass $\mathbb{T}^2_{r,R}$ (Definition oben) eine Untermannigfaltigkeit ist, skizzieren Sie diese und bestimmen Sie das Volumen von $A := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \le r^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Es handelt sich bei $\mathbb{T}^2_{r,R}$ um einen Torus.

Skizze:



Setze $x = (R + r\cos\varphi)\cos\theta$, $y = (R + r\cos\varphi)\sin\theta$, $z = r\sin\varphi$.

Damit erhalten wir die Toruskoordinaten (r, φ, θ).

Die Funktionaldeterminante lautet damit

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta(R + r\cos\varphi) \\ \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & \cos\theta(R + r\cos\varphi) \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -r\sin\varphi\cos\theta \cdot \cos\theta(R + r\cos\varphi) \cdot \sin\varphi - \sin\theta(R + r\cos\varphi) \cdot \cos\varphi\sin\theta \cdot r\cos\varphi$$

$$- \sin\varphi \cdot (-r\sin\varphi\sin\theta) \cdot (-\sin\theta(R + r\cos\varphi)) - r\cos\varphi \cdot \cos\theta(R + r\cos\varphi) \cdot \cos\varphi\cos\theta$$

$$= (R + r\cos\varphi) \cdot (-r\sin\varphi\cos\theta \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi) + (R + r\cos\varphi)(-\sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot r\cos\varphi)$$

$$+ (R + r\cos\varphi)(-\sin\varphi \cdot (-r\sin\varphi) \cdot \sin\theta \cdot (-\sin\theta)) + (R + r\cos\varphi)(-r\cos\varphi \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta)$$

$$= (R + r\cos\varphi) \cdot r \cdot (-\sin^2\varphi \cdot \cos^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \sin^2\theta - \cos^2\varphi\cos^2\theta)$$

$$= (R + r\cos\varphi) \cdot r$$

und damit

$$\int_A 1_A \, dvol = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} r(R + r\cos\varphi)\, dr\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\tfrac{1}{2}Rr^2 + \tfrac{1}{3}r^3\cos\varphi\right]_0^r d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}Rr^2 + \tfrac{1}{3}r^3\cos\varphi\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{1}{2}Rr^2\varphi + \tfrac{1}{3}r^3\sin\varphi\right]_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R r^2 2\pi + \frac{1}{3} r^3 \sin(2\pi) \, d\theta = \int_0^{2\pi} 2\pi r^2 R \, d\theta = \left[\theta 2\pi r^2 R \right]_0^{2\pi}$$

$$= 4\pi^2 r^2 R.$$

<u>z.z.:</u> $\mathbb{T}^2_{r,R}$ ist Untermannigfaltigkeit.

<u>Bew.:</u> Es ist $\frac{\partial}{\partial x} = 2x - \frac{2Rx}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial}{\partial y} = 2y - \frac{2Ry}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial}{\partial z} = 2z$

und damit $\nabla f = \left(2x - \frac{2Rx}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2y - \frac{2Ry}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2z \right)^T$.

Da $R^2 > r^2$, kann $(0,0,0)^T \notin \mathbb{T}^2_{r,R}$ sein.

Nach dem Satz vom regulären Wert ist $\mathbb{T}^2_{r,R}$ damit eine Untermannigfaltigkeit.

$\square$

Aufgabe 34. Sei

$$F: U := (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$$
$$(\phi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)\cos\theta \\ (R + r\cos\phi)\sin\theta \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie, dass F eine lokale Parametrisierung von $\mathbb{T}^2_{r,R}$ (Definition oben) ist. Bestimmen Sie $\mathbb{T}^2_{r,R} \setminus F(U)$ und das Volumen der Untermannigfaltigkeit $F(U) \subset \mathbb{T}^2_{r,R}$. Argumentieren Sie, dass $\mathbb{T}^2_{r,R} \setminus F(U) \subset \mathbb{T}^2_{r,R}$ als Teilmenge der Untermannigfaltigkeit $\mathbb{T}^2_{r,R}$ Volumen Null hat.[1]

Man kann sich den Torus vorstellen als die Menge aller Punkte, welche von einem Kreis mit Radius R den Abstand r haben.

Damit erhalten wir die Toruskoordinaten:

$R \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt die Rotation im Kreis mit Radius R um den Winkel θ durch die x- und y-Koordinate.

$r \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$ ergibt die anschließende Rotation um den Kreis mit Radius r um den Winkel ϕ.

Insgesamt erhalten wir die Parametrisierung des Torus durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)\cos\theta \\ (R + r\cos\phi)\sin\theta \\ r\sin\phi \end{pmatrix}.$$

Das Volumen der Untermannigfaltigkeit $F(U) \subset \mathbb{T}^2_{r,R}$ beschreibt also die Oberfläche des Torus:

Funktionaldet. aus Aufgabe 33

$$\int_{F(U)} d\mathrm{vol} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} r(R + r\cos\phi)\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\phi r R + r^2 \sin\phi\right]_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\pi r R \, d\theta = \left[\theta 2\pi r R\right]_0^{2\pi} = 4\pi^2 r R.$$

Aufgabe 35. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit. Sei $F: U \to V$ eine lokale Parametrisierung von M um ein $p \in M$. Sei $n(q = F(x,y)) := \frac{\partial_x F(x,y) \times \partial_y F(x,y)}{|\partial_x F(x,y) \times \partial_y F(x,y)|}$.

Warum gilt $n(q) \perp T_q M$ für alle $q \in F(U)$? Rechnen Sie $\det (D_{(x,y)^T} F)^T (D_{(x,y)^T} F) = |\partial_x F(x,y) \times \partial_y F(x,y)|^2$ nach.

Folgern Sie, dass somit für ein Vektorfeld $V: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt

$$\int_{F(U) \subset M} \langle V, n \rangle \mathrm{dvol} = \int_{U \subset \mathbb{R}^2} \langle V(F(x,y)), \partial_x F(x,y) \times \partial_y F(x,y) \rangle \mathrm{dvol}.$$

$T_q M = D_{(x,y)^T} F(\mathbb{R}^2) = (\delta_x F(x,y) \;\; \delta_y F(x,y)) \cdot v \qquad v \subseteq \mathbb{R}^2$

$T_q M$ wird als UR des $\mathbb{R}^2$ von den beiden Vektoren, $\delta_x F(x,y)$ und $\delta_y F(x,y)$ aufgespannt.

Kreuzprodukt $\delta_x F(x,y) \cdot \delta_y F(x,y)$

$\delta_x F(x,y) \perp \delta_x F(x,y) \cdot \delta_y F(x,y)$

$\wedge \; \delta_y F(x,y) \perp \delta_x F(x,y) \cdot \delta_y F(x,y)$

$-$ $n(q) \perp T_q M$ (Bilinearität)

$\det DF^T DF = (\det(\delta_x F(x,y) \;\; \delta_y F(x,y)] \; n(q)))^2 = (\langle \delta_x F(x,y) \times \delta_y F(x,y) \,, \; n(q) \rangle)^2$

$= \left(\frac{|\delta_x F \cdot \delta_y F|^2}{|\delta_x F \cdot \delta_y F|} \right)^2 = |\delta_x F(x,y) \cdot \delta_y F(x,y)|^2$

$\int_{F(U) \subset M} \langle v, n \rangle \mathrm{dvol} = \int_U \langle v \circ F, n \circ F \rangle \mathrm{dvol}$

$= \int_U \langle v(F(x,y)), \frac{\delta_x F \times \delta_y F}{|\delta_x F \times \delta_y F|} \rangle \sqrt{|\det(DF^T DF)|} \,\mathrm{dvol} = \int_{U \subset \mathbb{R}^2} \langle v(F(x,y)), \frac{\delta_x F \times \delta_y F}{|\delta_x F \times \delta_y F|} \rangle \cdot$

$|\delta_x F \cdot \delta_y F| \,\mathrm{dvol} = \int_{U \subset \mathbb{R}^2} \langle v F(x,y), \partial_x F_x, \partial_y F_y \rangle \,\mathrm{dvol}$

$\square$

Aufgabe 36. Sei $R, h > 0$. Wir betrachten $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2, z \in [0, h]\}$, siehe Rückseite. Der Rand von Ω ist keine C^1-Untermannigfaltigkeit ('Problemmenge' – die beiden Kreise, wo die Mantelfläche des Zylinders an Boden und Deckel stösst.). D.h. die Voraussetzungen unseres Divergenzsatzes sind dafür nicht erfüllt. Jedoch gilt der Divergenzsatz auch allgemeiner und für dieses Ω rechnen wir das für das Vektorfeld $V(x, y, z) = (x, y, 0)^T$ mal direkt nach:

Berechnen Sie jeweils $\int_\Omega \operatorname{div} V \mathrm{dvol}$ und $\int_{\partial\Omega \setminus S} \langle V, n\rangle \mathrm{dvol}$, wobei S die 'Problemmenge' von oben ist ($\partial\Omega \setminus S$ ist nun eine C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$). Außerdem ist n wieder der äußere Einheitsnormalenvektor an $\partial\Omega \setminus S$.

$$\operatorname{div} V = \partial_x x + \partial_y y + \partial_z 0 = 2$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \operatorname{div} V \, dvol = 2 \cdot \int_\Omega 1_\Omega \, dvol \overset{(*)}{=} 2 \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h r \, dz \, d\varphi \, dr = 4\pi \cdot h \cdot R^2$$

Einheitsnormalenvektor:

Deckel ist $n(d) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Boden ist $n(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Mantelfläche $\tilde{n}(m) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

Parametisierung des Mantels durch ϕ:

$$D_{(\varphi,z)}\phi = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi & 0 \\ R\cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sqrt{\det\left(D_{(\varphi,z)}\phi\right)^T\left(D_{\varphi z}\phi\right)}$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left| \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right| = R$$

$$\int_{\text{Mantel}} R(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \cdot R \, dvol = \int_0^h \int_0^{2\pi} R \cdot R \, dvol = 2\pi h R^2$$

Da $V(x,y,z) = (x,y,0)^T$ und die beiden Einheitsnormalvektoren $n(b)$ und $n(d)$ nur in z-Richtung zeigen, ist das Skalarprodukt in beiden Fällen 0 und damit auch das Integral

$\int_{\text{Boden}} \langle v,n\rangle \, dvol$ und $\int_{\text{Deckel}} \langle v,n\rangle \, dvol$, somit müssen wir uns keine Gedanken mehr über Parametrisierung von Deckel und Boden machen.

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega / S} \langle v,n\rangle \, dvol = \int_{\text{Mantel}} \langle v,n\rangle \, dvol + \int_{\text{Boden}} \langle v,n\rangle \, dvol + \int_{\text{Deckel}} \langle v,n\rangle \, dvol = \int_\Omega \operatorname{div} V \, dvol$$

$\square$