Abteilung für
Angewandte Mathematik

SoSe 2022
Prof. Dr. Sören Bartels, Jakob Keck

Numerik 2

Blatt 5 – 27.6.2022

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 bis 14. Abgabe: 8.7.2022, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss22/num`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $Q : C^0([a,b] \to \mathbb{R}$ eine Quadraturformel mit $n+1$ Gewichten und Quadraturpunkten $(x_i, w_i)_{i=0,\dots,n}$, die exakt vom Grad n ist.
(i) Zeigen Sie, dass

$$w_i = \int_a^b L_i(x)\,\mathrm{d}x$$

für $i = 0, 1, \dots, n$ mit den durch die Stützstellen $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ definierten Lagrange-Basispolynomen $(L_i)_{i=0,\dots,n}$.
(ii) Zeigen Sie, dass im Fall der Exaktheit vom Grad $2n$ gilt, dass $w_i > 0$ für $i = 0, 1, \dots, n$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** (i) Approximieren Sie das Integral

$$I := \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

durch die Trapezregel und die Simpsonregel. Berechnen Sie die Approximationsfehler.
(ii) Approximieren Sie das Integral I durch die zugehörigen summierten Quadraturformeln mit den Teilintervallen $[a_{\ell-1}, a_\ell]$ für $\ell = 1, 2$ und Knoten $a_\ell = 1 + \ell(2-1)/2$ für $\ell = 0, 1, 2$. Berechnen Sie die Approximationsfehler und vergleichen Sie diese mit denen aus Teil (i).

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** (i) Es sei $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ ein Skalarprodukt auf dem Raum $C^0([a,b])$. Zeigen Sie, dass mit den Initialisierungen $p_0(x) = 1$ und $p_1(x) = x - \beta_0$ sowie der Rekursionsvorschrift

$$p_{j+1}(x) = (x - \beta_j)p_j(x) - \gamma_j p_{j-1}(x)$$

mit den Koeffizienten $\beta_j = \langle xp_j, p_j\rangle / \langle p_j, p_j\rangle$ und $\gamma_j = \langle p_j, p_j\rangle / \langle p_{j-1}, p_{j-1}\rangle$ eine Folge von paarweise orthogonalen Polynomen $p_j \in \mathcal{P}_j$ definiert wird.
(ii) Es sei $\omega : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Gewichtsfunktion, sodass

$$\langle f, g\rangle_\omega = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt auf $C^0([a,b])$ definiert. Durch Anwenden von (i) mit diesem Skalarprodukt ist ein Orthogonalsystem mit Polynomen $\pi_j \in \mathcal{P}_j$ für $j \in \mathbb{N}_0$ definiert. Zeigen

Sie, dass π_j ein Polynom mit j Nullstellen ist.
Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst mit $\omega \equiv 1$ und verallgemeinern Sie ihre Argumente dann für eine beliebige Gewichtsfunktion mit den gewünschten Eigenschaften.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $Q : C^0([a,b] \to \mathbb{R}$ eine Quadraturformel mit $n+1$ Gewichten und Quadraturpunkten $(x_i, w_i)_{i=0,\dots,n}$, die exakt vom Grad n ist.
(i) Zeigen Sie, dass

$$w_i = \int_a^b L_i(x)\,\mathrm{d}x$$

für $i = 0, 1, \dots, n$ mit den durch die Stützstellen $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ definierten Lagrange-Basispolynomen $(L_i)_{i=0,\dots,n}$.

<u>Beweis:</u> Es gilt

$$\int_a^b L_i(x)\,dx \overset{\text{Q exakt vom Grad } n}{=} Q(L_i(x)) = \sum_{j=0}^{n} w_j L_i(x_j)$$

$$\overset{\text{Bemerkung 11.2.}}{=} \sum_{j=0}^{n} w_j \delta_{ij} = w_i.$$

$\square$

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** (i) Approximieren Sie das Integral

$$I := \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

durch die Trapezregel und die Simpsonregel. Berechnen Sie die Approximationsfehler.

Trapezregel:

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx \approx \frac{2-1}{2}\left(f(1) + f(2)\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4} = \frac{5}{8} = 0{,}625.$$

Fehler: $\left|I - \frac{5}{8}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\right| = \frac{1}{8} = 0{,}125.$

Simpson-Regel:

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx \approx \frac{2-1}{6}\left(f(1) + 4\cdot f\left(\frac{1+2}{2}\right) + f(2)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left(1 + 4\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{109}{36} = \frac{109}{216} = 0{,}504\overline{629}.$$

Fehler: $\left|I - \frac{109}{216}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{109}{216}\right| = 0{,}004\overline{629}.$

(ii) Approximieren Sie das Integral I durch die zugehörigen summierten Quadraturformeln mit den Teilintervallen $[a_{\ell-1}, a_\ell]$ für $\ell = 1, 2$ und Knoten $a_\ell = 1 + \ell(2-1)/2$ für $\ell = 0, 1, 2$. Berechnen Sie die Approximationsfehler und vergleichen Sie diese mit denen aus Teil (i).

Teilintervalle $[a_0, a_1]$ und $[a_1, a_2]$

$a_0 = 1$

$a_1 = 1 + (2-1)/2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$a_2 = 1 + 2 \cdot (2-1)/2 = 1 + 1 = 2$

$$I = \int_{a_0}^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx = (*)$$

Trapez-regel

$$\approx \frac{a_1 - a_0}{2}\Big(f(a_0) + f(a_1)\Big) + \frac{a_2 - a_1}{2}\Big(f(a_1) + f(a_2)\Big)$$

$$= \frac{\frac{3}{2} - 1}{2}\left(1 + \frac{4}{9}\right) + \frac{2 - \frac{3}{2}}{2}\left(\frac{4}{9} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{13}{9} + \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{36}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{52}{36} + \frac{25}{36}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{77}{36} = \frac{77}{144} = 0{,}5347\overline{2}.$$

Fehler: $\left|\frac{1}{2} - \frac{77}{144}\right| = \left|\frac{72}{144} - \frac{77}{144}\right| = \frac{5}{144} = 0{,}0347\overline{2} < \overbrace{0{,}125 = \frac{1}{8}}^{\text{Fehler aus (i)}}$

Simpson-Regel:

$$(*) \approx \frac{a_1 - a_0}{6}\left(f(a_0) + 4f\left(\frac{a_0 + a_1}{2}\right) + f(a_1)\right) + \frac{a_2 - a_1}{6}\left(f(a_1) + 4f\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) + f(a_2)\right)$$

$$= \frac{\frac{3}{2} - 1}{6}\left(1 + 4 \cdot \frac{16}{25} + \frac{4}{9}\right) + \frac{2 - \frac{3}{2}}{6}\left(\frac{4}{9} + 4 \cdot \frac{16}{49} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{12}\left(1 + \frac{64}{25} + \frac{4}{9}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{4}{9} + \frac{64}{49} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \left(1 + \frac{64}{25} + \frac{8}{9} + \frac{64}{49} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{264\,821}{529\,200} \approx 0{,}500418$$

Fehler: $\left|\frac{1}{2} - \frac{264\,821}{529\,200}\right| \approx 0{,}000\,418 < \overbrace{0{,}004\overline{629}}^{\text{Fehler aus (i)}}.$

Die Fehler der summierten Quadraturformeln sind deutlich kleiner als die Fehler aus Aufgabenteil (i).

Dies ergibt Sinn, denn je mehr Teilintervalle wir haben, desto besser wird die gesamte Approximation.