Abgabe bis Freitag, 18.06.2021. Besprechung in den Übungsgruppen am 23. und 25.06.2021.

Aufgabe 1 Kongruenzabbildungen als Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, (4 Punkte)

Wir identifizieren die kartesische Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mittels $(x, y)^t \mapsto x+iy$. Zeigen Sie, dass unter dieser Identifikation die Kongruenzabbildungen der kartesischen Ebene gerade den Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form

$$z \mapsto az + b \quad \text{und} \quad z \mapsto a\overline{z} + b$$

mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $|a| = 1$ entsprechen.

Aufgabe 2 Supremumsaxiom in der reellen Ebene, (2 Punkte)

Sei A eine affine Ebene über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass A das Supremumsaxiom erfüllt.

Aufgabe 3 Kongruenzabbildungen als Produkte von Spiegelungen, (4 Punkte)

Sei A eine affine Ebene über $\mathbb{R}$. Sei $K\colon A \to A$ eine Kongruenzabbildung. Zeigen Sie, dass K ein Produkt von höchstens drei Spiegelungen an (möglicherweise verschiedenen) Geraden $g \subseteq A$ ist.

Bemerkung: Die Aussage gilt allgemeiner: ist $K\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Kongruenzabbildung, so ist K Produkt von höchstens $n + 1$ Spiegelungen.

Aufgabe 4 Affine Abbildungen als Isomorphismen von Inzidenzgeometrien mit Kongruenz, (4 Punkte)

Seien A, A' affine Ebenen über $\mathbb{R}$ zu den Vektorräumen V, V', jeweils mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ bzw. $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V'}$. Sei (ϕ, f) eine affine Abbildung von A nach A', sodass die induzierte lineare Abbildung $f\colon V \to V'$ ein $\mathbb{R}^*$-Vielfaches einer orthogonalen Abbildung ist. Zeigen Sie, dass $\phi\colon A \to A'$ ein Isomorphismus von Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation und Kongruenzen ist.

Aufgabe 5 Bonusaufgabe, (4 Bonuspunkte)

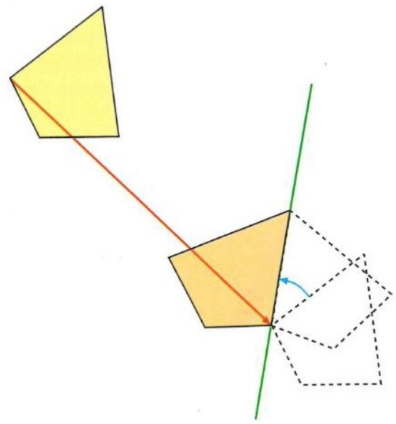
Zeigen Sie die Umkehrung der Aussage aus Aufgabe 4: Seien A, A' affine Ebenen über $\mathbb{R}$ zu den Vektorräumen V, V', jeweils mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ bzw. $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V'}$. Sei (ϕ, f) eine affine Abbildung von A nach A', die ein Isomorphismus von Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation und Kongruenzen ist. Zeigen Sie, dass die zugehörige lineare Abbildung $f\colon V \to V'$ ein $\mathbb{R}^*$-Vielfaches einer orthogonalen Abbildung ist.

Aufgabe 6 Aufgabe mit Schulbezug, (4 Bonuspunkte)

Folgende Definition und Beispiel sind dem Schulbuch Lambacher Schweizer (1995), Klasse 8, S. 50 entnommen:

Definition: Figuren F und G heißen **kongruent**, wenn man sie mit einer Kongruenzabbildung aufeinander abbilden kann. Man schreibt dann $F \cong G$ (lies: F kongruent G).

Beispiel 1: (Nachweis einer Kongruenz)
Bei dem gelben und braunen Viereck sind entsprechende Seiten und Winkel gleich groß. Zum Nachweis der Kongruenz überlegt man zunächst, welche Ecken einander entsprechen und stellt fest, daß der Umlaufsinn beider Figuren verschieden ist. Durch die eingezeichnete Verschiebung wird schon eine Ecke auf die entsprechende Ecke abgebildet. Da entsprechende Seiten und Winkel gleich groß sind, kann man diese Bildfigur durch eine Drehung und anschließende Geradenspiegelung auf die braune Figur abbilden. Damit ist insgesamt gezeigt, daß man die gelbe Figur durch eine Kongruenzabbildung auf die braune Figur abbilden kann; die Figuren sind also kongruent zueinander.



a) Wir haben schon in der Einführung von Kapitel 1 die Definition eines Dreiecks in einer Inzidenzgeometrie gegeben. Zeigen Sie mithilfe von Kongruenzen, dass in der kartesischen Ebene der folgende Satz gilt:

Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, dann sind sie kongruent.

Konstruieren Sie nun die entsprechende Kongruenzabbildung an einem konkreten Beispiel ähnlich wie in obigem Beispiel aus dem Schulbuch.

b) Nehmen Sie kritisch Stellung zu folgendem Schulbuchauszug aus Neue Wege (2006), Klasse 7, S. 147.

Figuren, die nach Größe und Form vollständig übereinstimmen, lassen sich durch Verschieben, Drehen und Spiegeln genau zur Deckung bringen. Man nennt sie **deckungsgleich** oder **kongruent**. In der Praxis stellt man kongruente Figuren z. B. mithilfe von Gussformen oder Schablonen her. In der Geometrie kann man sie mithilfe einiger gegebener Größen eindeutig konstruieren. Bei Dreiecken genügt hierfür die Angabe von drei geeigneten Größen.

Basiswissen

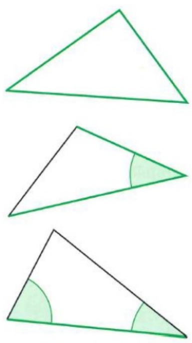
Kongruenzsätze

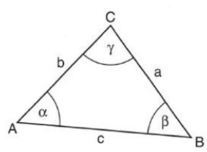
Ein Dreieck ABC ist eindeutig konstruierbar, wenn

SSS die drei Seitenlängen gegeben sind.

SWS zwei Seitenlängen und das Maß des eingeschlossenen Winkels gegeben sind.

WSW eine Seitenlänge und die Größe der beiden anliegenden Winkel gegeben sind.





In der Mathematik erfolgen die Bezeichnungen entgegen dem Uhrzeigersinn.

Elementargeometrie

Blatt 7

Mascha Reber mascha.reber@neptun.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 4734963

Lorenz Bung lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Aufgabe 1 Kongruenzabbildung als Abb $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Wir identifizieren die kartesische Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mittels $(a,b)^t \mapsto a+ib$. Zeigen Sie, dass unter dieser Identifikation die Kongruenzabbildungen der kartesischen Ebene gerade den Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form $z \mapsto az+b$ und $z \mapsto a\bar{z}+b$ mit $a,b \in \mathbb{C}$ und $|a|=1$ entsprechen.

Def 3.17 / Def 3.14

Kartesische Ebene ist Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenz auf $X = \mathbb{R}^2$ mit der Gruppe der Kongruenzabbildungen: K Untergruppe der Gruppe der Automorphismen von (X, G, Z) sodass es für je zwei Halbgeraden genau zwei Elemente gibt, die die eine in die andere überführen

Nach 3.15 - Verschiebung $Id: V \to V$ mit $\tau_v: x \mapsto x+v$

- Abbildungen orthogonal $F: V \to V$ mit $\Phi_{F,x_0}: x_0+w \to x_0+f(w)$

Drehung

Identifiziere $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$

$$(a,b)^t \mapsto a+ib = z$$

Betrachte $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(a,b)^t \mapsto (a+v, b+v)^t \qquad v \in \mathbb{R}$$

in $\mathbb{C}$ $\quad \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z = a+ib \mapsto (a+v)+i(b+v) \qquad c,d \in \mathbb{C}$$

$$= a+v+ib+iv = \underbrace{a+ib}_{z} + \underbrace{v+iv}_{d}$$

$$= z+d$$

$$= cz+d$$

wobei $|c|=1$ ✓

Betrachte $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(a+\omega, b+\omega)^t \mapsto (a+f(\omega), b+f(\omega))^t$ $\omega \in \mathbb{R}$

in $\mathbb{C}$

$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z = (a+\omega)+i(b+\omega) \mapsto (a+f(\omega))+i(b+f(\omega))$ $d \in \mathbb{R}$

$(a+ib)+\underbrace{(\omega+i\omega)}_{d}$ $= a+f(\omega)+ib+if(\omega)$

$= \underbrace{a+ib}_{} + \underbrace{f(\omega)+if(\omega)}_{}$

$= z + f(d)$

$\Leftrightarrow$ Drehung um z

Sonderfall $\to 180° \to z+\underbrace{f(d)}_{e} = \bar{z}$

$= cz+e$

$c, e \in \mathbb{R}$

mit $|c| = 1$

Aufgabe 2 Supremumsaxiom in der reellen Ebene
Sei A eine affine Ebene über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass A das Supremumsaxiom erfüllt

Def 3.13
Sei (X, G, Z) eine Inzidenzgeometrie mit Dreieck und Zwischenrelation. Wir sagen (X, G, Z) erfüllt das Supremumsaxiom wenn es für jede Teilmenge $A \subset [x, y] \subset g$ einer Strecke einen Punkt gibt, so dass $A \subset [x_0, y]$ und für alle Punkte $x' \in g$ auf der anderen Seite von x_0 als x gilt $A \not\subset [x', y]$

Sei $A = V = \mathbb{R}^2$. Sei $G \subset \mathcal{P}(A)$ die Menge der affinen Geraden
Dann ist (A, G) eine Inzidenzgeometrie (Def 1.6)

Seien drei nicht kollineare Punkte in A, dann ist (A, G) eine Inzidenzgeometrie mit Dreieck (Def 3.1)

Definiere Zwischenrelation $(z, y, x) \in Z \subset A^3$
als $y = \lambda x + \mu z$ mit $0 < \lambda, \mu < 1$ $\lambda + \mu = 1$
bzw (Def 3.10) verträgliche Ordnung von g
Wir haben nun (A, G, Z) Inzidenzgeometrie mit Dreieck und Zwischenrelation. Sei g eine Strecke und sei $S \subset [x, y] \subset g$ sowie ein Punkt $x_0 \in g$. Sei $\overset{\text{oBdA}}{} x < x_0 < y$. $\left(\substack{\text{Existenz} \\ \text{Lemma 3.3}}\right)$
Sei $S \subset [x_0, y]$ und sei $x' \in g$ auf der anderen Seite von x_0 als x.
Dann gilt $x < x_0 < x'$ Da x
Wähle x_0 so dass für alle $x_0 < x'$ gilt, dass $A \not\subset [x', y]$

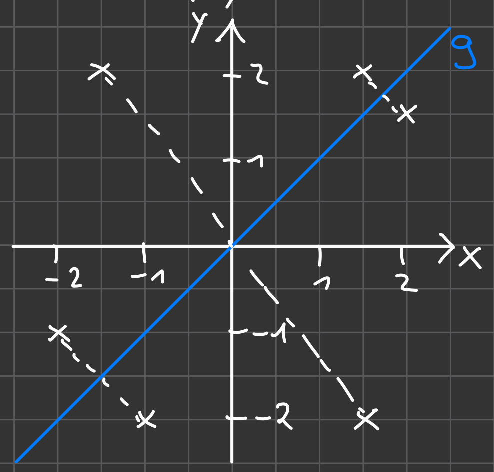
Aufgabe 3 Kongruenzabbildungen als Produkte von Spiegelungen, (4 Punkte)

Sei A eine affine Ebene über $\mathbb{R}$. Sei $K\colon A \to A$ eine Kongruenzabbildung. Zeigen Sie, dass K ein Produkt von höchstens drei Spiegelungen an (möglicherweise verschiedenen) Geraden $g \subseteq A$ ist.

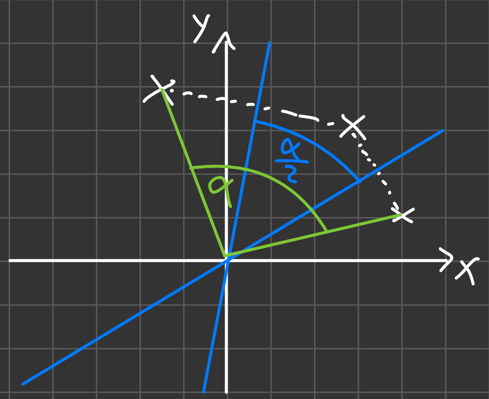
Bemerkung: Die Aussage gilt allgemeiner: ist $K\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Kongruenzabbildung, so ist K Produkt von höchstens $n+1$ Spiegelungen.

In der affinen Ebene lässt sich eine Kongruenzabbildung als orthogonale Matrix der Form $M = D_\alpha S^\varepsilon$ darstellen. Dabei stellt die Matrix D_α eine Rotation um den Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ dar und $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die Vertauschungsmatrix (wobei $\varepsilon \in \{0,1\}$.

Für $A = \mathbb{R}^2$ entspricht die Vertauschung einer Spiegelung an der Ursprungsgeraden $g: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$:



Die Rotation um den Winkel α lässt sich als Spiegelung an zwei Geraden darstellen, die sich mit dem Winkel $\frac{\alpha}{2}$ schneiden:



Insgesamt lässt sich die Kongruenzabbildung damit als drei hintereinander ausgeführte Spiegelungen an Geraden darstellen.

(vgl. Dreispiegelungssatz

Aufgabe 4 Affine Abbildungen als Isomorphismen von Inzidenzgeometrien mit Kongruenz, (4 Punkte)

Seien A, A' affine Ebenen über $\mathbb{R}$ zu den Vektorräumen V, V', jeweils mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ bzw. $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V'}$. Sei (ϕ, f) eine affine Abbildung von A nach A', sodass die induzierte lineare Abbildung $f: V \to V'$ ein $\mathbb{R}^*$-Vielfaches einer orthogonalen Abbildung ist. Zeigen Sie, dass $\phi: A \to A'$ ein Isomorphismus von Inzidenzgeometrien mit Zwischenrelation und Kongruenzen ist.

$f: V \to V'$ $\mathbb{R}^*$-Vielfaches einer orthogonalen Abb. g, $f = k \cdot g$, $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(ϕ, f) affine Abbildung: $\forall v \in V, x \in A: \ \phi(x+v) = \phi(x) + f(v)$

$\phi: A \to A'$ $\qquad A = w_0 + V, \quad A' = w_0' + V'$

<u>ϕ Abbildung von Inzidenzgeometrien</u>

<u>z.z.:</u> $\forall g \in G: \phi(g) \in G'$.

<u>Bew.:</u> Sei g eine Gerade in A, d.h. $g = \{w_0 + kv \mid k \in \mathbb{R}\}$ für ein $v \in V$.

$$\phi(g) = \phi(\{w_0 + kv \mid k \in \mathbb{R}\}) = \{\phi(w_0) + f(kv) \mid k \in \mathbb{R}\}$$

g orthogonal
$\Rightarrow g$ linear
$\Rightarrow f$ linear

$$= \{\underbrace{\phi(w_0)}_{\in A'} + \underbrace{k \cdot f(v)}_{\in V'} \mid k \in \mathbb{R}\}$$

$\phi(w_0) \in A'$
$\Rightarrow \phi(w_0) = w_0' + v'$,
$v' \in V'$

$$= \{w_0' + v' + k \cdot f(v) \mid k \in \mathbb{R}\}$$

Das ist eine Gerade in A'. ✓

<u>ϕ Isomorphismus</u>

Injektivität: Seien $a = w_0 + v_a$, $b = w_0 + v_b \in A$, $a \neq b$ (also $v_a \neq v_b$).

$f = kg$. g ist orthogonal und damit injektiv. Also ist auch f injektiv.

$\phi(a) = \phi(w_0) + f(v_a) \neq \phi(w_0) + f(v_b) = \phi(b) \Rightarrow \phi$ ist injektiv

f ist injektiv
und $v_a \neq v_b$

Surjektivität: $f: V \to V'$ injektiv, $\dim(V) = \dim(V') \Rightarrow f$ surjektiv.

$\Rightarrow \phi$ surjektiv.

Zwischenrelation

A und A' sind affine Ebenen über $\mathbb{R}$, daher werden die Zwischenrelationen durch „$<$" induziert. Sei y zwischen x und z, $x,y,z \in A$. Dann sind x,y,z kollinear und $x<y<z$. Da es sich um eine Inzidenzgeometrie handelt, werden Geraden auf Geraden abgebildet und somit sind auch $\phi(x), \phi(y)$ und $\phi(z)$ kollinear.

z.z.: $\phi(x) < \phi(y) < \phi(z)$ (oder anders herum)

Bew.: $x<y<z \Rightarrow \exists \lambda \in (0,1): y = \lambda x + (1-\lambda) z$

Schreibe $x = w_0 + v_x$, $y = w_0 + v_y$, $z = w_0 + v_z$.

$\Rightarrow \phi(x) = \phi(w_0) + f(v_x)$, $\phi(y) = \phi(w_0) + f(v_y)$, $\phi(z) = \phi(w_0) + f(v_z)$.

$$\begin{aligned}
y = \lambda x + (1-\lambda) z \Rightarrow \phi(y) &= \phi(\lambda(w_0 + v_x) + (1-\lambda)(w_0 + v_z)) \\
&= \phi(\lambda w_0 + (1-\lambda) w_0 + \lambda v_x + (1-\lambda) v_z) \\
&= \phi(w_0 + \lambda v_x + (1-\lambda) v_z) \\
&= \phi(w_0) + f(\lambda v_x + (1-\lambda) v_z) \\
&= \phi(w_0) + \lambda f(v_x) + (1-\lambda) f(v_z) \\
&= \lambda(\phi(w_0) + f(v_x)) + (1-\lambda)(\phi(w_0) + f(v_z)) \\
&= \lambda \phi(x) + (1-\lambda) \phi(z).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \phi(y)$ zwischen $\phi(x)$ und $\phi(z)$.

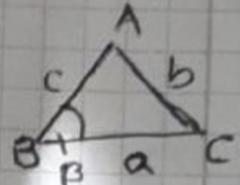
Aufgabe 6

Betrachte Definition und Beispiel

a) Wir haben die Definition eines Dreiecks in einer Inzidenzgeometrie

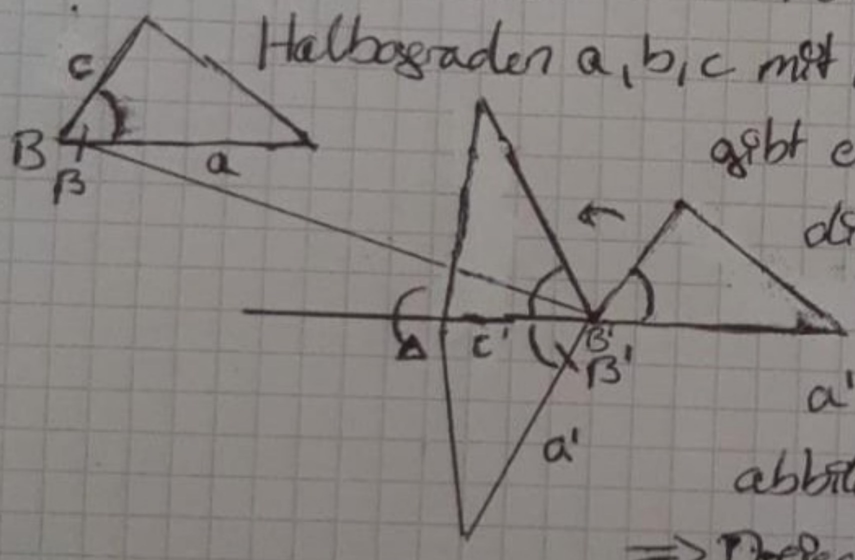
- Zeigen Sie mithilfe von Kongruenzen, dass in der kartesischen Ebene gilt:
  Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, dann sind sie kongruent
- Konstruieren Sie die entsprechende Kongruenzabbildung

Ein Dreieck ist eine Menge 3 kollineare Punkte



Seien a, c Geraden mit dem Schnittpunkt B und den Winkel β (eingeschlossen zw a, c)

Durch diese sind die Punkte $A, B, C \in X$ eindeutig gegeben. Nach Def 3.15 erhält eine Kongruenzabbildung die Längen der Strecken (da $f: V \to V$ orthogonal( ). Wähle Halbgeraden a, b, c mit Ecken A, B, C. Dann gibt es eine Kongruenzabbildung die diese Halbgeraden in die Halbgeraden a', b', c' mit Ecken A', B', C' abbildet.



$\Rightarrow$ Dreiecke kongruent