Elementargeometrie
Übungsblatt 4

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
StR Dr. KatharinaBöcherer-Linder
Dr. Lukas Braun

Abgabe bis Freitag, 21.05.2021. Besprechung in den Übungsgruppen am 02. und 04.06.2021.

Aufgabe 1 Projektivitäten, (4 Punkte)

Beweisen Sie die Behauptung im Beispiel auf Seite 18 des Skripts: Sei k ein Körper und $n \geq 2$. Wir definieren die *projektive lineare Gruppe vom Rang* n als Quotienten $\mathrm{PGl}_n(k) := \mathrm{Gl}_n(k)/\sim$ der allgemeinen linearen Gruppe nach der Äquivalenzrelation

$$A \sim B \Leftrightarrow A = \lambda B \text{ für ein } \lambda \in k^*.$$

Zeigen Sie, dass die Gruppe der Projektivitäten von $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ genau die projektive lineare Gruppe vom Rang n ist.

Aufgabe 2 Affine Abbildungen und Projektivitäten, (6 Punkte + 2 Bonuspunkte)

Wir haben in der Vorlesung gesehen, wie wir affine Bewegungen von k^2 als lineare Abbildungen des k^3 ansehen können. Nach Satz 2.9 ist die Abbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathrm{Aff}(k^2) & \to & \mathrm{Gl}_3(k) \\ \tau_v \phi_{(0,0),M} & \mapsto & \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

a) Zeigen Sie, dass φ sogar einen injektiven Gruppenhomorphismus $\psi\colon \mathrm{Aff}(k^2) \to \mathrm{PGl}_3(k)$ induziert.

b) Wir identifizieren $\mathrm{Aff}(k^2)$ mit dem Bild unter ψ. Sei $g := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(k) \mid z = 0\}$ die *unendlich ferne Gerade*. Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathrm{Aff}(k^2) = \{A \in \mathrm{PGl}_3(k) \mid Ag \subseteq g\}.$$

c) (Bonusaufgabe) Bestimmen Sie die Untergruppe von $\mathrm{Aff}(k^2)$, die die Gerade g sogar *punktweise* fixiert. Welchen affinen Bewegungen des k^2 entspricht diese Untergruppe?

Aufgabe 3 Möbiustransformationen 1, (4 Punkte)

Sei $k = \mathbb{C}$. Wir betrachten die Möbiustransformation

$$\phi\colon x \mapsto \frac{-2x+2}{3x+2i+6}.$$

Stellen Sie ϕ als Hintereinanderausführung von Möbiustransformationen der Form $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto \alpha x$, $x \mapsto x + \beta$ mit geeigneten $\alpha \in k^*$, $\beta \in k$ dar. Berechnen Sie das Bild von $-\frac{5+2i}{4}$ unter ϕ und skizzieren Sie, wie es durch die obigen 'elementaren' Möbiustransformationen - also Invertierung, Streckung und Verschiebung - aus $-\frac{5+2i}{4}$ hervorgeht.

Aufgabe 4 Möbiustransformationen 2, (4 Punkte)

Wir betrachten eine allgemeine Möbiustransformation

$$\phi\colon \begin{cases} \mathbb{C}\cup\{\infty\} & \to & \mathbb{C}\cup\{\infty\} \\ x & \mapsto & \frac{ax+b}{cx+d} \end{cases}$$

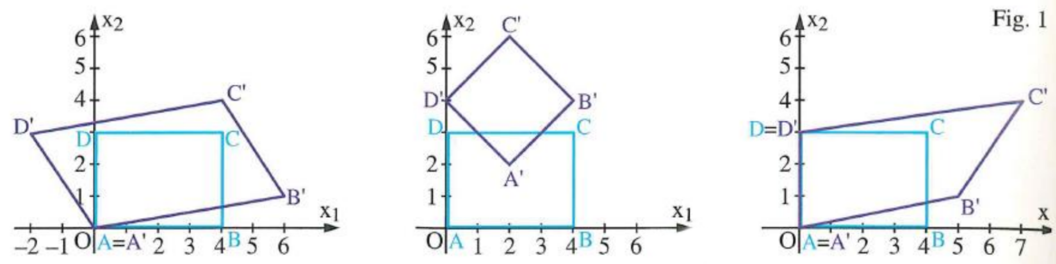
wobei $ad - bc \neq 0$.

a) Berechnen Sie die Fixpunkte (aus $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$) von ϕ in Abhängigkeit von $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

b) Geben Sie die Fixpunkte der 'elementaren' Möbiustransformationen der Form $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto \alpha x$, $x \mapsto x + \beta$ an.

Aufgabe 5 Aufgabe mit Schulbezug, (2 Bonuspunkte)

Bearbeiten Sie folgende Schulbuchaufgabe (Lambacher Schweizer (Gesamtband Oberstufe), 2007, S. 368). Bei Aufgabe 2 a) können Sie anschaulich mit Hilfe der Eigenschaften von affinen Abbildungen argumentieren. Bei Aufgabe 2 b) müssen, falls möglich, Abbildungsmatrix und Verschiebungsvektor berechnet werden.



2 Fig. 1 zeigt die Bilder des Rechtecks mit den Eckpunkten A(0|0), B(4|0), C(4|3), D(0|3) bei geometrischen Abbildungen.
a) Bei welchen Abbildungen kann es sich um affine Abbildungen handeln? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.
b) Geben Sie in den Fällen, bei denen es sich um affine Abbildungen handelt, Abbildungsgleichungen an.

Elementargeometrie

Blatt 4

Mascha Reber mascha.reber@neptun.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 4734963

Lorenz Bung lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Aufgabe 1 Projektivitäten

Beweisen Sie: Sei k ein Körper und $n \geq 2$. Wir definieren die projektive lineare Gruppe vom Rang n als Quotient $PGl_n(k) := Gl_n(k)/\sim$ der allgemeinen linearen Gruppe nach der Äquivalenzrelation $A \sim B \Leftrightarrow A = \lambda B$ für ein $\lambda \in k^*$

Zeigen Sie, dass die Gruppe der Projektivitäten von $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ genau die projektive lineare Gruppe vom Rang n ist

Gruppe der Projektivitäten von $\mathbb{P}^{n-1}(k) = \mathbb{P}(k^n)$, $n \geq 2$

zz $PGl_n(k) := Gl_n(k)/\sim$ ~~ist~~ $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ für $A \sim B \Leftrightarrow A = \lambda B$ $\lambda \in k^*$

inv Matrix vom Rang n

$\mathbb{P}(k^n)$ kann definiert werden als $k^n \setminus \{0\} / \sim$ wobei $v \sim v'$ genau dann, wenn es $\lambda \in k^*$ gibt mit $v = \lambda v'$

mit homogenen Koordinaten $[x_0 : \ldots : x_{n-1}]$

Projektivität von $\mathbb{P}(k^n)$ ist bijektive Abbildung

$\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(k^n) \setminus \mathbb{P}(Ker(f)) \to \mathbb{P}(k^n)$ für ein Abb $f : k^n \to k^n$

Wie operiert $M \in Gl_n(k)$ auf $\mathbb{P}(k^n)$?

Für M invertierbar, da $\mathbb{P}(k^n)$ Projektivität, also $f : k^n \to k^n$ bijektiv gilt: $[v] \mapsto [Mv]$

Im projektiven Raum gilt für $A = \lambda B$ für ein $\lambda \in k^*$

$$[Av] = [\lambda B v] = [Bv]$$

Drehstreckung

Aufgabe 2 Affine Abbildungen und Projektivitäten, (6 Punkte + 2 Bonuspunkte)

Wir haben in der Vorlesung gesehen, wie wir affine Bewegungen von k^2 als lineare Abbildungen des k^3 ansehen können. Nach Satz 2.9 ist die Abbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathrm{Aff}(k^2) & \to & \mathrm{Gl}_3(k) \\ \tau_v\phi_{(0,0),M} & \mapsto & \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

a) Zeigen Sie, dass φ sogar einen injektiven Gruppenhomorphismus $\psi\colon \mathrm{Aff}(k^2) \to \mathrm{PGl}_3(k)$ induziert.

<u>Behauptung:</u> Die von φ induzierte Abbildung $\psi : \mathrm{Aff}(k^2) \longrightarrow \mathrm{PGl}_3(k)$,

$$\tau_v\, \phi_{(0,0),M} \longmapsto \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}' := \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in k \setminus \{0_k\} \right\}.$$

ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

<u>Beweis:</u>

Zunächst einmal lässt sich nach Kor. 2.8. jede affine Bewegung eindeutig schreiben als $\tau_{\overrightarrow{x_0\phi(x_0)}}\, \phi_{x_0,f}$ und unsere Abbildung ψ ist damit wohldef.

Es bleibt also die Injektivität von ψ zu zeigen.

Seien nun $\tau_{v_1}\phi_{(0,0),M_1} \in \mathrm{Aff}(k^2)$ und $\tau_{v_2}\phi_{(0,0),M_2} \in \mathrm{Aff}(k^2)$, so dass $\psi(\tau_{v_1}\phi_{(0,0),M_1}) = \begin{pmatrix} M_1 & v_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}'$ und $\psi(\tau_{v_2}\phi_{(0,0),M_2}) = \begin{pmatrix} M_2 & v_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}'$, wobei $\begin{pmatrix} M_1 & v_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}' \neq \begin{pmatrix} M_2 & v_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}'$.

Dann ist nach Def. von ψ

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} M_1 & v_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & v_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}' \neq \begin{pmatrix} M_2 & v_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}' = \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} M_2 & v_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in k \setminus 0_k$ und damit $\begin{pmatrix} M_1 & v_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} M_2 & v_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dies ist der Fall, wenn $M_1 \neq M_2$ oder $v_1 \neq v_2$ (oder beides). Da die Darstellung der Abb. φ nach Kor. 2.8. jedoch eindeutig war, ist in beiden Fällen $\tau_{v_1}\phi_{(0,0),M_1} \neq \tau_{v_2}\phi_{(0,0),M_2}$ und ψ damit injektiv. $\square$

b) Wir identifizieren $\mathrm{Aff}(k^2)$ mit dem Bild unter ψ. Sei $g := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(k) \mid z = 0\}$ die *unendlich ferne Gerade*. Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathrm{Aff}(k^2) = \{A \in \mathrm{PGl}_3(k) \mid Ag \subseteq g\}.$$

Zu zeigen: $\mathrm{Aff}(k^2) \subseteq \{A \in PGl_3(k) \mid Ag \subseteq g\}$ und $\mathrm{Aff}(k^2) \supseteq \{A \in PGl_3(k) \mid Ag \subseteq g\}$.

Beweis:

$\subseteq$: Sei $\begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}' \in \psi(\mathrm{Aff}(k^2)) = \mathrm{Aff}(k^2)$, $[x:y:0] \in g$.

Dann ist für $\begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}' = \lambda \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in k \setminus \{0_k\}$:

$$\begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}' \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & v_1 \\ M_{21} & M_{22} & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda M_{11} x + \lambda M_{12} y \\ \lambda M_{21} x + \lambda M_{22} y \\ 0 \end{pmatrix} \in g.$$

Also ist $\begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}' = \lambda \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \{A \in PGl_3(k) \mid Ag \subseteq g\}$.

$\supseteq$: Sei $B' = \lambda \cdot B$, $\lambda \in k \setminus \{0_k\}$, $B \in \{A \in PGl_3(k) \mid Ag \subseteq g\}$ sowie $h = [x:y:0] \in g$.

Dann ist

$$B' \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} =: \lambda \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda b_{11} x + \lambda b_{12} y \\ \lambda b_{21} x + \lambda b_{22} y \\ \lambda b_{31} x + \lambda b_{32} y \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit $b_{31} x + b_{32} y = \frac{0}{\lambda} = 0$.

Da x, y beliebig waren, muss $b_{31} = b_{32} = 0$ sein und damit

$$B' = \lambda \cdot B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}.$$

$b_{33} \neq 0$, da $B' \in Gl_3(k)$ (und B' sonst nicht inv. wäre).

O.B.d.A. ist $b_{33} = 1$, da wir sonst die gesamte Matrix mit $\frac{1}{b_{33}}$ multiplizieren können und $\lambda' = \frac{\lambda}{b_{33}}$ erhalten.

Damit hat B die Form $\begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit

$M = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \end{pmatrix}$.

Somit ist $B' = \lambda B \in \Psi(Aff(k^2)) = Aff(k^2)$.

$\square$

c) (Bonusaufgabe) Bestimmen Sie die Untergruppe von $\mathrm{Aff}(k^2)$, die die Gerade g sogar *punktweise* fixiert. Welchen affinen Bewegungen des k^2 entspricht diese Untergruppe?

Wir suchen die Menge aller Abbildungen $A' \in Aff(k^2)$, so dass $A' h = h$ für alle $h \in g$.

Das sind alle Abbildungen mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto [a x_1 : a x_2 : 0] = [x_1 : x_2 : 0] \in g.$$

Sei $A' = \lambda \cdot A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in k \setminus \{0_k\}$

Dann ist

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \\ a_{31}x + a_{32}y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ 0 \end{pmatrix},$$

also $a_{11} = a_{22} =: a$, $a_{21} = a_{12} = a_{31} = a_{32} = 0$.

Wie bei b) ist a_{33} O.B.d.A. 1, da wir sonst unser λ anpassen. Wir erhalten also Matrizen der Form

$A' = \lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Das sind genau Streckungen um den Faktor $a \in k \setminus \{0_k\}$.

Aufgabe 3

Sei $k = \mathbb{C}$ und Möbiustransformation $\phi: x \mapsto \dfrac{-2x+2}{3x+2i+6}$

Stellen Sie ϕ als Hintereinanderausführung von MT der Form $x \mapsto \alpha x$, $x \mapsto x+\beta$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ mit geeigneten $\alpha \in k^*, \beta \in k$ dar

Berechnen Sie das Bild von $-\frac{5+2i}{4}$ unter ϕ und skizzieren Sie, wie es durch die 'elementaren' Möbiustransformation hervorgeht

- $\phi: x \mapsto \dfrac{-2x+2}{3x+2i+6}$ Betrachte: $\dfrac{-2x+2}{3x+2i+6} = \dfrac{\overset{=1}{3}(-2x+2)}{3(3x+2i+6)}$

$$= \frac{-6x+6\overbrace{-4i-12+4i+12}^{=0}}{3(3x+2i+6)}$$

$$= \frac{-2(3x+2i+6)}{3(3x+2i+6)} + \frac{6+4i+12}{3(3x+2i+6)}$$

$$= \frac{-2}{3} + \frac{18+4i}{3(3x+2i+6)} \quad (*)$$

$\phi_1: x \mapsto 3x \qquad x \mapsto \alpha x,\ \alpha = 3$

$\phi_2: 3x \mapsto 3x+2i+6 \qquad x \mapsto x+\beta,\ \beta = 2i+6$

$\phi_3: 3x+2i+6 \mapsto 3(3x+2i+6) \qquad x \mapsto \alpha x,\ \alpha = 3$

$\phi_4: 3(3x+2i+6) \mapsto \dfrac{1}{3(3x+2i+6)} \qquad x \mapsto \dfrac{1}{x}$

$\phi_5: \dfrac{1}{3(3x+2i+6)} \mapsto \dfrac{18+4i}{3(3x+2i+6)} \qquad x \mapsto \alpha x,\ \alpha = 18+4i$

$\phi_6: \dfrac{18+4i}{3(3x+2i+6)} \mapsto -\dfrac{2}{3} + \dfrac{18+4i}{3(3x+2i+6)} \overset{(*)}{=} \dfrac{-2x+2}{3x+2i+6} \qquad x \mapsto x+\beta,\ \beta = -\frac{2}{3}$

Damit ist $\phi = \phi_6 \circ \phi_5 \circ \phi_4 \circ \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1$

- $\phi\left(-\dfrac{5+2i}{4}\right) = \dfrac{-2\left(-\frac{5}{4}-\frac{1}{2}i\right)+2}{3\left(-\frac{5}{4}-\frac{1}{2}i\right)+2i+6} = \dfrac{\frac{10}{4}+i+2}{-\frac{15}{4}-\frac{3}{2}i+2i+6}$

$$= \frac{4{,}5+i}{2{,}25+0{,}5i} = \underline{2} = p_6$$

$\phi_1\Big(\overbrace{-\tfrac{5}{4}-\tfrac{1}{2}i}^{p}\Big) = -\dfrac{15}{4} - \dfrac{3}{2}i = p_1 \ \rightarrow\ \phi_2(p_1) = -\dfrac{15}{4} - \dfrac{3}{2}i + 2i + 6 = \overbrace{2{,}25+\tfrac{1}{2}i}^{=p_2}$

$\phi_3(p_2) = 6{,}75 + \dfrac{3}{2}i = p_3 \ \rightarrow\ \phi_4(p_3) = \dfrac{1}{6{,}75+\frac{3}{2}i} \cdot \dfrac{\left(6{,}75-\frac{3}{2}i\right)}{6{,}75-\frac{3}{2}i} = \underbrace{0{,}14 - 0{,}03}_{=p_4}$

$45{,}5625 + 2{,}25 = 47{,}8125$

$$\Phi_5(p_4) = (18+4i)(0{,}14-0{,}03i) = 2{,}54+0{,}56i-0{,}56i+0{,}12$$
$$= 2{,}66 = p_5$$

$$\Phi_6(p_5) = 2{,}66 - \frac{2}{3} = \underline{\underline{2}} = p_6$$

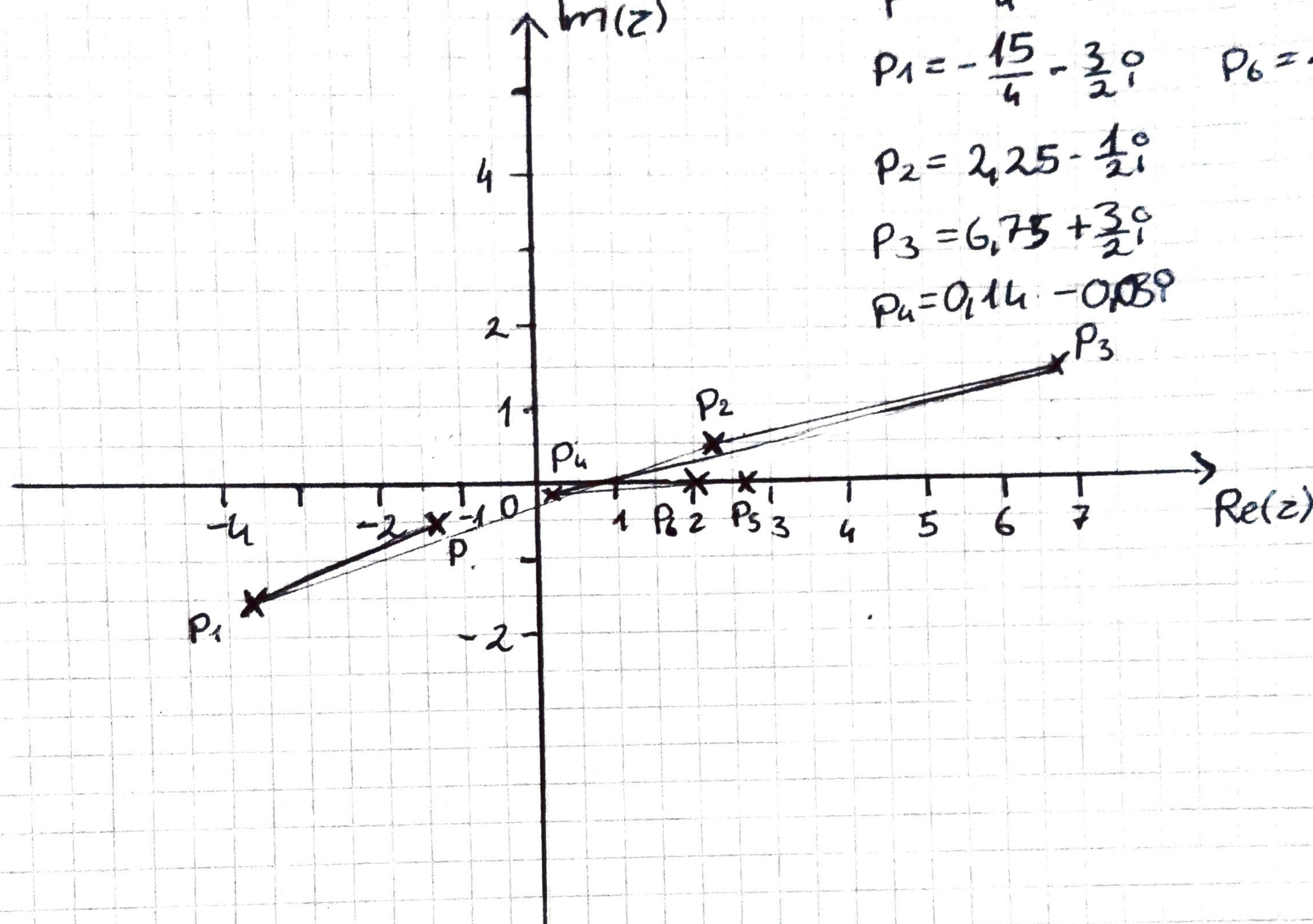
$p = -\frac{5}{4} - \frac{1}{2}i$ $\quad p_5 = 2{,}66$

$p_1 = -\frac{15}{4} - \frac{3}{2}i$ $\quad p_6 = 2$

$p_2 = 2{,}25 - \frac{1}{2}i$

$p_3 = 6{,}75 + \frac{3}{2}i$

$p_4 = 0{,}14 - 0{,}03i$



Aufgabe 4 Möbiustransformationen II

Wir betrachten eine allgemeine Möbiustransformation $\phi: \begin{cases} \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \end{cases}$

wobei $ad - bc \neq 0$

a) Berechnen Sie die Fixpunkte (aus $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) von ϕ in Abhängigkeit von $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

Ein Punkt $x \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt Fixpunkt, falls $\phi(x) = x$,

also $\frac{ax+b}{cx+d} = x \iff ax + b = (cx+d)x$

$$\iff b = cx^2 + dx - ax$$

$$\iff 0 = cx^2 + (d-a)x - b$$

$$\iff x_{1/2} = \frac{-(d-a) \pm \sqrt{(d-a)^2 - 4c(-b)}}{2(-c)}$$

2 Lösungen / 2 Fixpunkte: $x_{1/2} = \frac{a-d \pm \sqrt{d^2 - 2ad + a^2 + 4cb}}{-2c}$

b) Geben Sie die Fixpunkte der elementaren Möbiustransformationen der Form $\underset{①}{x \mapsto \frac{1}{x}}$, $\underset{②}{x \mapsto \alpha x}$, $\underset{③}{x \mapsto x + \beta}$

① $\phi(x) = \frac{1}{x} \overset{\text{FixpDef}}{\Rightarrow} \frac{1}{x} = x \iff 1 = x^2 \iff x = \pm\sqrt{1} = \underline{\underline{\pm 1}}$

② $\phi(x) = \alpha x \overset{\text{FixpDef}}{\Rightarrow} \alpha x = x \iff 0 = x - \alpha x \iff 0 = (1-\alpha)x$

Da $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ist $(1-\alpha) \neq 1$. Für $\alpha = 1$ ist $\phi(x) = x$ für alle x.
↳ dh alle x Fixpunkte

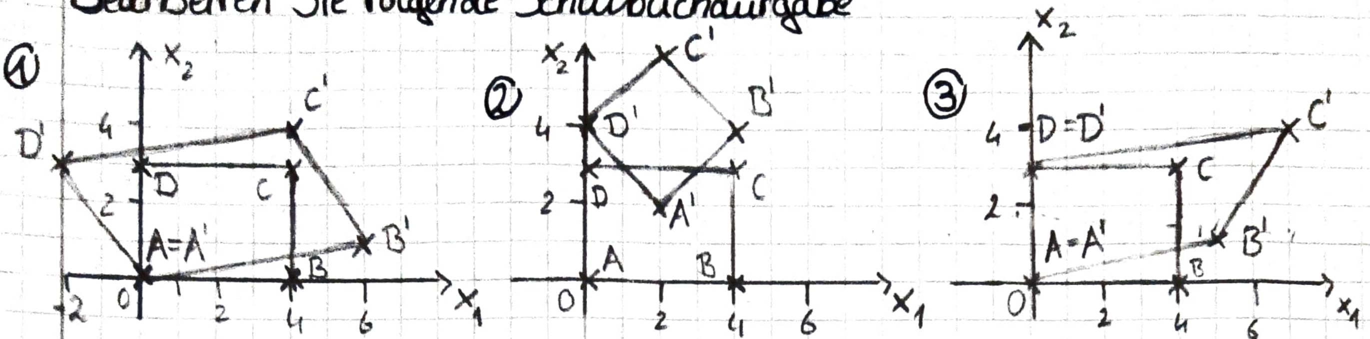
Für $\alpha \neq 1$ gilt: $0 = \overset{\neq 0}{\widetilde{(1-\alpha)}}\, x \iff \underline{x = 0}$

③ $\phi(x) = x + \beta \overset{\text{FixpDef}}{\Rightarrow} x + \beta = x \iff \beta = 0$

$\beta \in \mathbb{R}$ Für $\beta = 0$ gilt $\phi(x) = x$ für alle x. Für $\beta \neq 0$ gibt es keine Fixpunkte
↳ dh alle x Fixpunkte

Aufgabe 5

Bearbeiten Sie folgende Schulbuchaufgabe



Bilder des Rechtecks mit den Eckpunkten $A(0|0), B(4|0), C(4|3), D(0|3)$ bei geometrischen Abbildungen

a) Bei welchen Abbildungen kann es sich um affine Abbildungen handeln?

b) Falls möglich, berechnen Sie Abbildungsmatrix und Verschiebungsvektor

Def 2.4 Affine Abbildung (Φ, f) von A (über V) nach A' (über V') bestehend aus lin. Abb $f: V \to V'$ und $\Phi: A \to A'$ und für alle $v \in V$, $x \in A$ gilt $\Phi(x+v) = \Phi(x) + f(v)$

↳ Φ ist affin, wenn zugehöriges f wohldefiniert und linear

Kor 2.8 Jede aff. Abb. kann eindeutig geschrieben werden als $\tau_{x_0\Phi(x_0)} \circ \Phi_{x_0,f}$
↳ Drehung, anschließend Verschiebung

a) Abbildung 1 und 2 können durch Drehung und Verschiebung erreicht werden, können also aff. Abbildungen sein

Abbildung 3 geht nicht, da weder Drehung noch Verschiebung
↳ da 2 Fixpunkte

b) Abbildung ① $\Phi(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Phi(B) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\Phi(C) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\Phi(D) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
→ keine Verschiebung

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ → $4a + 0b = 6$ → $a = \frac{6}{4}$
$4c + 0d = 1$ → $c = \frac{1}{4}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ → $4 \frac{6}{4} + 3b = 4$ → $b = -\frac{2}{3}$
→ $4 \frac{1}{4} + 3d = 4$ → $d = 1$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ → $0 \frac{6}{4} + 3\left(-\frac{2}{3}\right) = -2$ ✓
→ $0 \frac{1}{4} + 3 \cdot 1 = 3$ ✓

↳ $M_{\Phi_1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{4} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$ Drehmatrix eindeutig nach Kor 2.8

Abbildung ② $\Phi(A)=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \Phi(B)=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}, \Phi(C)=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}, \Phi(D)=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

Damit man von $A=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ nach $A'=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ kommt, muss man Verschiebungsvektor bestimmen. $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+v=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \to v=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

Dann ist

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} \begin{array}{l}\to 4a+0b+2=4 \to a=\frac{1}{2}\\ \to 4c+0d+2=4 \to c=\frac{1}{2}\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} \begin{array}{l}\to 4(\frac{1}{2})+3b+2=2 \to b=-\frac{2}{3}\\ \to 4(\frac{1}{2})+3c+2=6 \to c=\frac{2}{3}\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} \begin{array}{l}\to 0(\frac{1}{2})+3(-\frac{2}{3})+2=0 \checkmark\\ \to 0(\frac{1}{2})+3(\frac{2}{3})+2=4 \checkmark\end{array}$$

$$\Rightarrow M_{\Phi_2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\end{pmatrix} \text{ und } v=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

Drehmatrix und Verschiebung eindeutig nach Kor 28

Abbildung ③ $\Phi(A)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \Phi(B)=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}, \Phi(C)=\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}, \Phi(D)=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$

$\to$ keine Verschiebung

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} \begin{array}{l}\to 4a+0b=5 \to a=\frac{5}{4}\\ \to 4c+0d=1 \to c=\frac{1}{4}\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix} \begin{array}{l}\to 4(\frac{5}{4})+3b=7 \to b=\frac{2}{3}\\ \to 4(\frac{1}{4})+3d=4 \to d=1\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \to 3d=3 \to d=1$$

$$\Rightarrow M_{\Phi_3}=\begin{pmatrix}\frac{5}{4} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{4} & 1\end{pmatrix}$$

Drehmatrix, aber 2 Fixpunkte A und D

$\Rightarrow$ keine affine Abbildung