Elementargeometrie
Übungsblatt 2

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
StR Dr. Katharina Böcherer-Linder
Dr. Lukas Braun

Abgabe bis Freitag, 07.05.2021. Besprechung in den Übungsgruppen am 12. und 14.05.2021.

Aufgabe 1 Gruppenoperationen, (4 Punkte)

Sei $\mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen und

$$\mathrm{SO}(2) := \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid \forall u, v \in \mathbb{R}^2 : \langle Mu, Mv\rangle = \langle u, v\rangle\},$$

wobei $\langle *, *\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned} \mu\colon \mathrm{SO}(2) \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (M, v) &\mapsto Mv \end{aligned}$$

eine Gruppenoperation von $\mathrm{SO}(2)$ auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird.

b) Bestimmen Sie die Bahnen und die Standgruppen dieser Operation.

Aufgabe 2 Schnittverhalten im projektiven Raum, (6 Punkte)

Sei k ein Körper, V ein 4-dimensionaler Vektorraum über k, und $\mathbb{P}(V)$ der projektive (3-dimensionale) Raum über V. Untersuchen Sie das Schnittverhalten von Geraden und Ebenen (also 1- und 2-dimensionalen projektiven Unterräumen) in $\mathbb{P}(V)$ folgendermaßen:

a) Seien $g_1, g_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ zwei verschiedene projektive Geraden. Zeigen Sie, dass sich g_1 und g_2 in $\mathbb{P}(V)$ in einem Punkt schneiden oder disjunkt sind. Geben sie jeweils das entsprechende Schnittverhalten der zugehörigen Untervektorräume von V an.

b) Seien $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ zwei verschiedene projektive Ebenen. Zeigen Sie, dass sich E_1 und E_2 in einer projektiven Geraden schneiden.

c) Sei nun $E \subseteq \mathbb{P}(V)$ eine projektive Ebene und $g \subseteq \mathbb{P}(V)$ eine projektive Gerade. Zeigen Sie, dass sich g und E entweder in einem Punkt schneiden oder $g \subseteq E$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Beweisen Sie die Bemerkung nach Satz 1.19: Sei S^2 die 2-Sphäre und $\sim$ die Äquivalenzrelation gegeben durch $x \sim x' \Leftrightarrow x = \pm x'$. Dann gibt es eine Bijektion zwischen $S^2/\sim$ und $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, die zusätzlich die Menge der Großkreise bijektiv auf die Menge der projektiven Geraden abbildet.

Aufgabe 4 Hyperbolische Geometrie, (6 Punkte)

a) Gegeben seien die drei hyperbolischen Punkte

$$(0, 2), (0, 1), (1, 1) \in \mathbb{H}^2 \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Zeichnen Sie das hyperbolische Dreieck mit den obigen Eckpunkten. Beweisen Sie die Korrektheit entweder mithilfe der geometrischen Konstruktion oder rechnerisch.

b) Geben Sie eine naive Idee einer Definition von Schnittwinkeln von hyperbolischen Geraden und bestimmen Sie damit die Winkelsumme in dem Dreieck aus Teil a).

Aufgabe 5 Bonusaufgabe: Axiomatische projektive Ebenen, (4 Bonuspunkte)

Wir haben in Satz 1.15 im Skript gesehen, dass je zwei Geraden in der projektiven Ebene genau einen Schnittpunkt haben. Wir können so eine *axiomatische projektive Ebene* als eine Inzidenzgeometrie (X, G) definieren, sodass für alle $g_1 \neq g_2 \in G$ gilt, dass es genau ein $x \in X$ gibt mit $g_1 \ni x \in g_2$.

a) Bestimmen Sie für die Inzidenzgeometrien (X, G) mit $|X| = 1, 2, 3, 4, 5$ von Blatt 0, ob sie axiomatische projektive Ebenen in diesem Sinn sind.

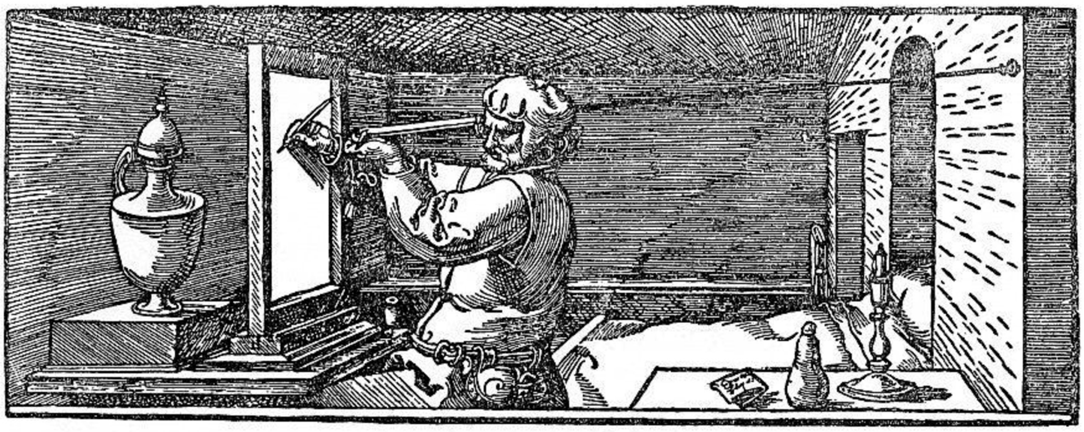
b) Bestimmen Sie, welche dieser axiomatischen projektiven Ebenen mit $|X| = 1, 2, 3, 4, 5$ auch von der Form $\mathbb{P}(V)$ sind, für V ein k-Vektorraum, k ein endlicher Körper.

Aufgabe 6 Aufgabe mit Schulbezug, (4 Bonuspunkte)

Als Projektion des 3-dimensionalen Raumes auf eine 2-dimensionale Ebene lernen die Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht die Parallelprojektion und im Kunstunterricht die Zentralperspektive kennen. Von Albrecht Dürer stammen die folgenden Holzschnitte mit dem Titel 'Perspektivmaschine' (1525).

a) Erläutern Sie jeweils die beiden dargestellten Verfahren.

b) Stellen Sie eine Beziehung her zwischen den beiden Verfahren von Albrecht Dürer und der Definition des projektiven Raumes aus der Vorlesung.



Elementargeometrie

Blatt 2

Mascha Reber mascha.reber@neptun.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 4734963

Lorenz Bung lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Aufgabe 1 Gruppenoperationen, (4 Punkte)

Sei $\mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen und

$$\mathrm{SO}(2) := \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid \forall u, v \in \mathbb{R}^2 : \langle Mu, Mv\rangle = \langle u, v\rangle\},$$

wobei $\langle *, *\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned}\mu\colon \mathrm{SO}(2) \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2\\ (M, v) &\mapsto Mv\end{aligned}$$

eine Gruppenoperation von $\mathrm{SO}(2)$ auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird.

z.z.: μ definiert eine Gruppenoperation von $SO(2)$ auf $\mathbb{R}^2$.

Beweis: $\mu: SO(2) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine Gruppenoperation, wenn

(i) $\mu(e, m) = m$ für alle $m \in \mathbb{R}^2$,

(ii) $\mu(g, \mu(h, m)) = \mu(gh, m)$ für alle $m \in \mathbb{R}^2$; $g, h \in SO(2)$.

(i) $\mu(e,m) = em = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}m_1\\ m_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot m_1 + 0\cdot m_2\\ 0\cdot m_1 + 1\cdot m_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}m_1\\ m_2\end{pmatrix} = m.$

(ii) $\mu(g, \mu(h,m)) = g\mu(h,m) = g(hm) = \begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1\\ m_2\end{pmatrix}\right)$

$= \begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_{11}m_1 + h_{12}m_2\\ h_{21}m_1 + h_{22}m_2\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}g_{11}(h_{11}m_1 + h_{12}m_2) + g_{12}(h_{21}m_1 + h_{22}m_2)\\ g_{21}(h_{11}m_1 + h_{12}m_2) + g_{22}(h_{21}m_1 + h_{22}m_2)\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}g_{11}h_{11}m_1 + g_{11}h_{12}m_2 + g_{12}h_{21}m_1 + g_{12}h_{22}m_2\\ g_{21}h_{11}m_1 + g_{21}h_{12}m_2 + g_{22}h_{21}m_1 + g_{22}h_{22}m_2\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}(g_{11}h_{11} + g_{12}h_{21})m_1 + (g_{11}h_{12} + g_{12}h_{22})m_2\\ (g_{21}h_{11} + g_{22}h_{21})m_1 + (g_{21}h_{12} + g_{22}h_{22})m_2\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} g_{11}h_{11} + g_{12}h_{21} & g_{11}h_{12} + g_{12}h_{22} \\ g_{21}h_{11} + g_{22}h_{21} & g_{21}h_{12} + g_{22}h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = ghm = \mu(gh, m).$$

$\square$

b) Bestimmen Sie die Bahnen und die Standgruppen dieser Operation.

Standgruppe von $m \in \mathbb{R}^2$ auf μ:

$SO(2)_m = \{g \in SO(2) \mid gm = m\} = \{Id_2\}$

(Denn nur $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$)

Bahn von $m \in \mathbb{R}^2$ auf μ:

$SO(2)m = \{gm \mid g \in SO(2)\}$

Die Matrizen aus $SO(2)$ beschreiben bei der Multiplikation mit einem Vektor $m \in \mathbb{R}^2$ die Rotation dieses Vektors um einen bestimmten Winkel um den Ursprung.

Die Bahn von $m \in \mathbb{R}^2$ auf μ sind also alle möglichen Rotationen dieses Vektors um den Ursprung – also ein Kreis um den Ursprung mit Radius $|m|$.

Aufgabe 2 Schnittverhalten im projektiven Raum, (6 Punkte)

Sei k ein Körper, V ein 4-dimensionaler Vektorraum über k, und $\mathbb{P}(V)$ der projektive (3-dimensionale) Raum über V. Untersuchen Sie das Schnittverhalten von Geraden und Ebenen (also 1- und 2-dimensionalen projektiven Unterräumen) in $\mathbb{P}(V)$ folgendermaßen:

a) Seien $g_1, g_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ zwei verschiedene projektive Geraden. Zeigen Sie, dass sich g_1 und g_2 in $\mathbb{P}(V)$ in einem Punkt schneiden oder disjunkt sind. Geben sie jeweils das entsprechende Schnittverhalten der zugehörigen Untervektorräume von V an.

Zu zeigen: $g_1, g_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$, $g_1 \neq g_2$. g_1 und g_2 schneiden sich in $\mathbb{P}(V)$ in einem Punkt oder sind disjunkt.

Beweis:

Wenn g_1 und g_2 in einer projektiven Ebene liegen, haben sie nach Satz 1.15. genau einen Schnittpunkt.

Seien g_1, g_2 also nicht in einer projektiven Ebene und seien $g_1 = \mathbb{P}(U_1)$, $g_2 = \mathbb{P}(U_2)$, wobei U_1, U_2 2-dimensionale Untervektorräume von V sind.

Da $g_1 \neq g_2$ und g_1 und g_2 nicht in einer projektiven Ebene liegen, ist $\dim(U_1 + U_2) = 4$.

Damit gilt nach Dimensionsformel

$$\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 + U_2) = 2 + 2 - 4 = 0,$$

es existieren also keine Schnittpunkte und die Geraden sind disjunkt.

$\square$

b) Seien $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ zwei verschiedene projektive Ebenen. Zeigen Sie, dass sich E_1 und E_2 in einer projektiven Geraden schneiden.

Zu zeigen: E_1 und E_2 schneiden sich in einer projektiven Geraden.

Beweis:

Seien $E_1 = \mathbb{P}(U_1)$, $E_2 = \mathbb{P}(U_2)$, wobei U_1 und U_2 Unterräume von V sind mit $\dim(U_1) = \dim(U_2) = 3$.

Mit der Dimensionsformel erhalten wir für den Schnitt $U_1 \cap U_2$ der Ebenen

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) = 6.$$

Da U_1 und U_2 Untervektorräume von V waren, ist $\dim(U_1 + U_2) \leq 4$ und damit $\dim(U_1 \cap U_2) \geq 2$.

Es gibt also eine projektive Schnittgerade.

$\square$

c) Sei nun $E \subseteq \mathbb{P}(V)$ eine projektive Ebene und $g \subseteq \mathbb{P}(V)$ eine projektive Gerade. Zeigen Sie, dass sich g und E entweder in einem Punkt schneiden oder $g \subseteq E$.

Zu zeigen: E und g schneiden sich entweder in einem Punkt, oder $g \subseteq E$.

Beweis:

Seien $E = \mathbb{P}(U_1)$ und $g = \mathbb{P}(U_2)$ mit $\dim(U_1) = 3$ und $\dim(U_2) = 2$, wobei U_1 und U_2 Unterräume von V sind.

Mit der Dimensionsformel erhalten wir

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) = 5.$$

Da $3 = \dim(U_2) \leq \dim(U_1 + U_2) \leq \dim(V) = 4$, ist $2 \geq \dim(U_1 \cap U_2) \geq 1$.

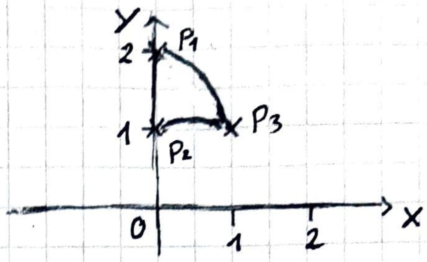
Wenn $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, haben die Ebene E und die Gerade g einen Schnittpunkt.

Falls $\dim(U_1 \cap U_2) = 2$, ist $U_1 \subset U_2$ und damit gilt $g \subseteq E$. Die Gerade g ist die Schnittgerade.

$\square$

Aufgabe 4

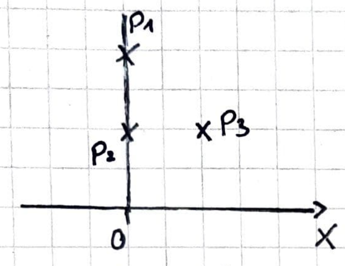
(a) Gegeben seien die drei hyperbolischen Punkte $(0,2),(0,1),(1,1) \in \mathbb{H}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$
Zeichnen Sie das hyperbolische Dreieck mit den obigen Eckpunkten
Beweisen Sie die Korrektheit

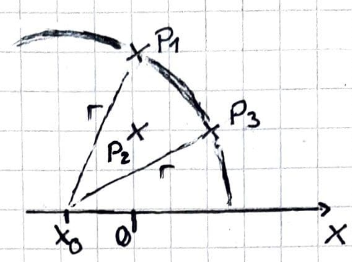


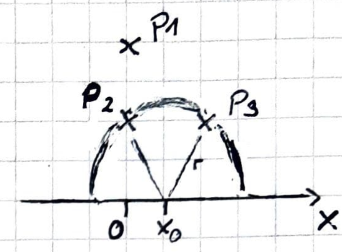
$$\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0} \cong \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

$P_1 = (0,2) \quad P_2 = (0,1) \quad P_3 = (1,1)$

zz Dreieck: Menge von 3 nicht kollinearen Punkten (auf einer Geraden)







$L_0 \{(0,y) \mid y>0\}$ und $P_3 \notin L_0$

Seien $p_1, p_3 \in h_{(x_0,r)}$ dann $p_2 \notin h_{(x_0,r)}$

Seien $p_2, p_3 \in h_{(x_0,r)}$ dann $p_1 \notin h_{(x_0,r)}$

also p_1, p_2, p_3 nicht auf einer Geraden → kollinear

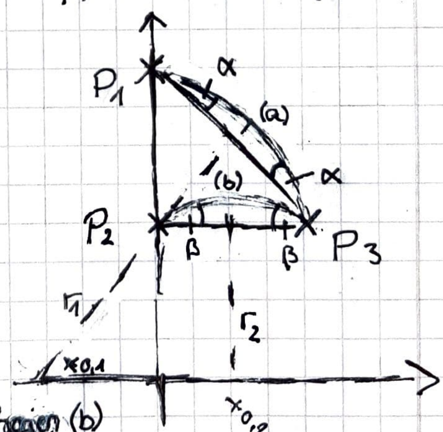
(b) Idee einer Definition von Schnittwinkeln von hyperbolischen Geraden

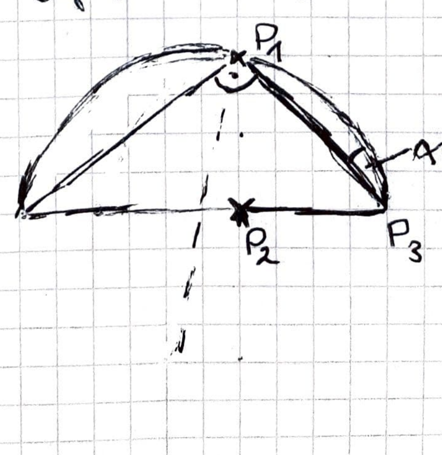
$$\angle P_1P_2P_3 \leq 180°$$

$$\angle P_1P_2P_3 = 180° - 2\beta + 2\alpha$$

(Winkelsumme Dreieck im euklidischen Raum)

wobei $\alpha < \beta$, da $r_1 > r_2$, also der Bogen (a) weniger steil als Bogen (b)





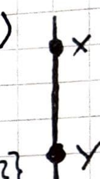
Aufgabe 5

Betrachte Satz 1.15: 2 Geraden in der proj. Ebene haben genau einen Schnittp.
Definiere axiomatische projektive Ebene als eine Inzidenzgeometrie (X, G) sodass für alle $g_1 \neq g_2 \in G$ gilt, dass es genau ein $x \in X$ mit $g_1 \ni x \in g_2$.

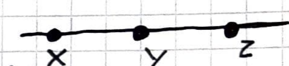
) Bestimme für die Inzidenzgeometrien (X, G) mit $|X| = 1, 2, 3, 4, 5$ (Blatt 0), ob sie axiomatisch projektive Ebenen sind ~~ob sie auch von Form P(V) sind~~

- $|X|=1 \rightarrow \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, X\} \rightarrow$ Inzidenzgeometrie $(X, \emptyset)$
  - keine Gerade $\rightarrow$ axiom. proj. Ebene

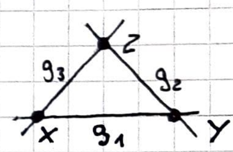
- $|X|=2 \rightarrow \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}\} \rightarrow$ Inzidenzgeometrie (X, G) wobei $G = \{x, y\}$
  - nur eine Gerade $\rightarrow$ axiom proj Ebene



- $|X|=3 \rightarrow \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{x,z\}, \{x,y\}, \{x,y,z\}\}$
  - $G_1 = \{\{x,y,z\}\}$ • nur eine Gerade $\rightarrow$ axiom. proj. Ebene



  - $G_2 = \{\underset{g_1}{\{x,y\}}, \underset{g_3}{\{x,z\}}, \underset{g_2}{\{y,z\}}\}$



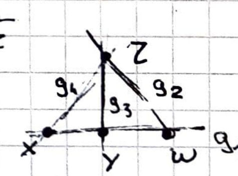
↳ Inzidenzgeometrie (X, G_2) ist axiomatisch pr. Ebene

für $g_1 \neq g_2$ $\quad g_1 \ni y \in g_2$ $\qquad$ für $g_2 \neq g_3$ $\quad g_2 \ni z \in g_3$

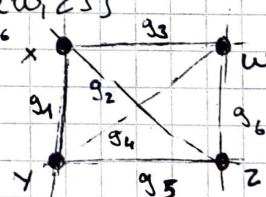
für $g_1 \neq g_3$ $\quad g_1 \ni x \in g_3$

- $|X|=4 \rightarrow$
  - $G_1 = \{\{x,y,w,z\}\}$ • nur eine Gerade $\rightarrow$ axiom. proj. Ebene

  - $G_2 = \{\overset{g_1}{\{x,y,w\}}, \overset{g_2}{\{w,z\}}, \overset{g_3}{\{y,z\}}, \overset{g_4}{\{x,z\}}\}$



  - $G_3 = \{\underset{g_1}{\{x,y\}}, \underset{g_2}{\{x,z\}}, \underset{g_3}{\{x,w\}}, \underset{g_4}{\{y,w\}}, \underset{g_5}{\{y,z\}}, \underset{g_6}{\{w,z\}}\}$



↳ (X, G_3) keine axiomatisch projektive Ebene, da $g_1 \neq g_6 \in G_3$, aber es existiert kein $x \in X$ mit $\underset{\{x,y\}}{g_1} \ni x \in \underset{\{w,z\}}{g_6}$

↳ (X, G_2) ist axiomatisch projektive Ebene

für $g_1 \neq g_2$ $\quad g_1 \ni w \in g_2$ $\qquad$ für $g_2 \neq g_3$ $\quad g_2 \ni z \in g_3$

für $g_1 \neq g_3$ $\quad g_1 \ni y \in g_3$ $\qquad$ für $g_2 \neq g_4$ $\quad g_2 \ni z \in g_4$

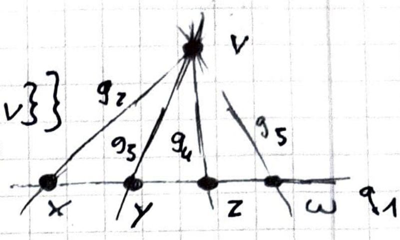
für $g_1 \neq g_4$ $\quad g_1 \ni x \in g_4$ $\qquad$ für $g_3 \neq g_4$ $\quad g_3 \ni z \in g_4$

• $|X| = 5$

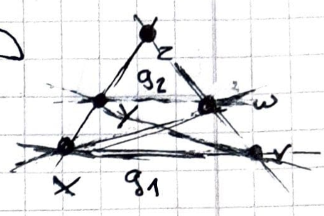
- $\mathcal{G}_1 = \{\{x, y, z, w, v\}\}$

  • nur eine Gerade → axiom. proj. Ebene

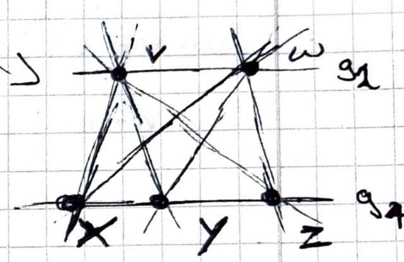
- $\mathcal{G}_2 = \{\underbrace{\{x, y, z, w\}}_{g_1}, \underbrace{\{x, v\}}_{g_2}, \underbrace{\{y, v\}}_{g_3}, \underbrace{\{z, v\}}_{g_4}, \underbrace{\{w, v\}}_{g_5}\}$



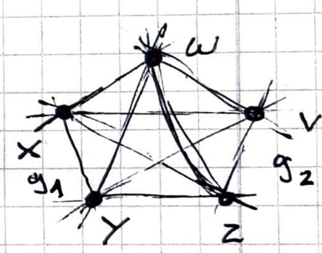
- $\mathcal{G}_3 = \{\{x, y, z\}, \{z, v, w\}, \underbrace{\{v, x\}}_{g_1}, \{v, w\}, \{y, v\}, \underbrace{\{y, w\}}_{g_2}\}$



- $\mathcal{G}_4 = \{\overbrace{\{x, y, z\}}^{g_1}, \overbrace{\{v, w\}}^{g_2}, \{v, x\}, \{v, y\}, \{v, z\}, \{w, x\}, \{w, y\}, \{w, z\}\}$



- $\mathcal{G}_5 = \{\overbrace{\{x, y\}}^{g_1}, \{x, z\}, \{x, w\}, \{x, v\}, \{y, z\}, \{y, w\}, \{y, v\}, \{z, w\}, \underbrace{\{z, v\}}_{g_2}, \{v, w\}\}$



↳ $(X, \mathcal{G}_2)$ axiomatisch projektive Ebene

für $g_1 \neq g_2$ $\quad g_1 \ni x \in g_2$	für $g_2 \neq g_3$ $\quad g_2 \ni v \in g_3$
für $g_1 \neq g_3$ $\quad g_1 \ni y \in g_3$	für $g_2 \neq g_4$ $\quad g_2 \ni v \in g_4$
für $g_1 \neq g_4$ $\quad g_1 \ni z \in g_4$	für $g_2 \neq g_5$ $\quad g_2 \ni v \in g_5$
für $g_1 \neq g_5$ $\quad g_1 \ni w \in g_5$	für $g_3 \neq g_4$ $\quad g_3 \ni v \in g_4$
	für $g_3 \neq g_5$ $\quad g_3 \ni v \in g_5$
	für $g_4 \neq g_5$ $\quad g_4 \ni v \in g_5$

↳ $(X, \mathcal{G}_3)$ keine axiomatisch projektive Ebene

da $g_1 \neq g_2 \in \mathcal{G}_3$, aber es existiert kein $x \in X$ mit $\underbrace{g_1}_{\{v,x\}} \ni x \in \underbrace{g_2}_{\{y,w\}}$

↳ $(X, \mathcal{G}_4)$ keine axiomatisch projektive Ebene

da $g_1 \neq g_2 \in \mathcal{G}_4$, aber es existiert kein $x \in X$ mit $\underbrace{g_1}_{\{x,y,z\}} \ni x \in \underbrace{g_2}_{\{v,w\}}$

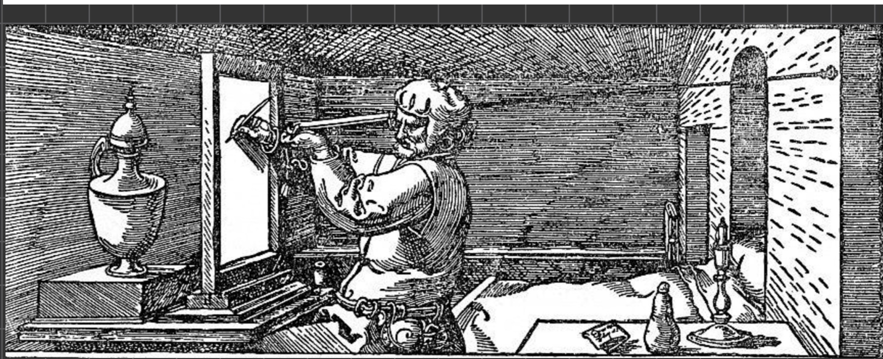
↳ $(X, \mathcal{G}_5)$ keine axiomatisch projektive Ebene

da $g_1 \neq g_2 \in \mathcal{G}_5$, aber es existiert kein $x \in X$ mit $\underbrace{g_1}_{\{x,y\}} \ni x \in \underbrace{g_2}_{\{z,v\}}$

Aufgabe 6 Aufgabe mit Schulbezug, (4 Bonuspunkte)

Als Projektion des 3-dimensionalen Raumes auf eine 2-dimensionale Ebene lernen die Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht die Parallelprojektion und im Kunstunterricht die Zentralperspektive kennen. Von Albrecht Dürer stammen die folgenden Holzschnitte mit dem Titel 'Perspektivmaschine' (1525).

a) Erläutern Sie jeweils die beiden dargestellten Verfahren.



Hier nutzt der Künstler ein Seil, das an der Wand befestigt ist. Die Bildebene befindet sich zwischen der Befestigung und dem Objekt. Dadurch lassen sich Proportionen am (3-dimensionalen) Zeichenobjekt auf die zweidimensionale Zeichenebene projezieren.
Das dargestellte Zeichenverfahren nutzt dafür die Zentralperspektive.

Der Rahmen zwischen dem Augpunkt und dem Objekt stellt hier die Bildebene dar. Der Maler macht sich das Raster zunutze, um Proportionen des Objekts so realistisch wie möglich auf seine Zeichnung übertragen zu können. Das funktioniert, da sich der Augpunkt nicht ändert – der Maler platziert sein Auge immer an der Spitze des Stabes.

b) Stellen Sie eine Beziehung her zwischen den beiden Verfahren von Albrecht Dürer und der Definition des projektiven Raumes aus der Vorlesung.

Der 3-dimensionale Raum der realen Welt wird durch die Zeichenverfahren in einer zweidimensionale Zeichnung dargestellt.

In Bezug auf die Definition des projektiven Raumes bedeutet dies, dass die Zeichnung einen projektiven Raum über der realen Welt darstellt:

$$\underbrace{\mathbb{P}(V)}_{\text{Zeichnung}} \text{ über } \underbrace{V}_{\text{Welt}} \quad \text{mit } \underbrace{\dim(\mathbb{P}(V))}_{=2} = \underbrace{\dim(V)}_{=3} - 1$$