Elementargeometrie
Übungsblatt 10

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
StR Dr. Katharina Böcherer-Linder
Dr. Lukas Braun

Abgabe bis Freitag, 09.07.2021. Besprechung in den Übungsgruppen am 14. und 16.07.2021.

Aufgabe 1 Parallelprojektion und Verschiebungen, (6 Punkte)

Wir betrachten die kartesische Ebene $X = \mathbb{R}^2$. Seien $g, h \subseteq X$ zwei nicht parallele Geraden. Die *Parallelprojektion* entlang h auf g ist eine Abbildung $\Phi\colon X \to g$, die wir folgendermaßen definieren. Das Bild von $x \in X$ ist der Schnittpunkt der zu h parallelen Geraden durch x mit der Geraden g.

a) Bestimmen Sie eine konkrete Abbildungsvorschrift für Φ in Koordinaten.

b) Bestimmen Sie alle Teilmengen $Y \subseteq X$, für die $\Phi|_Y$ die Einschränkung $\Psi_Y|_Y$ einer Verschiebung $\Psi_Y \in K$ ist.

Aufgabe 2 Binärdarstellungen von Brüchen, (3 Punkte + 2 Bonuspunkte)

Wir betrachten die reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Die Binärdarstellung einer Zahl $0 \leq r \in \mathbb{R}$ ist die (möglicherweise unendliche) Folge von Koeffizienten $a_z \in \{0, 1\}$, sodass

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}} a_z 2^z = r,$$

wobei ein $n \in \mathbb{Z}$ (abhängig von r) existiert mit $a_z = 0$ für $z > n$. Wir schreiben diese Folge dann (analog zur Dezimaldarstellung von reellen Zahlen) als

$$a_n a_{n-1} \ldots a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots .$$

Beispielsweise ist für die Zahl 10,5 die Binärdarstellung gegeben durch $1010, 1$ wegen

$$10{,}5 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}.$$

a) Interpretieren Sie die Binärdarstellung einer Zahl $0 \leq r \in \mathbb{R}$ als Supremum.

b) Bestimmen Sie die Binärdarstellung von $1/3$.

c) (Bonus) Untersuchen Sie die Binärdarstellung auf Eindeutigkeit.

Aufgabe 3 Entscheidungsfragen zur Vorlesung, (10 Punkte)

Beantworten Sie die Fragen auf der nächsten Seite jeweils im Kästchen rechts davon mit 'Ja' oder 'Nein' und geben Sie darunter eine kurze Begründung.

In einer fast-euklidischen Ebene ist keine Verschiebung eine Spiegelung.	
Jeder Isomorphismus von Inzidenzgeometrien bildet parallele Geraden auf parallele Geraden ab.	
Zwei beliebige affine Bewegungen der Form τ_v bzw. $\phi_{x,f}$ eines affinen Raums kommutieren.	
Zwei Geraden einer projektiven Ebene $\mathbb{P}^2(k)$ schneiden sich immer.	
Zu einer hyperbolischen Gerade $g \in \mathbb{H}^2$ existieren unendlich viele Parallelen durch jeden Punkt $x \notin g$.	
Die hyperbolischen Bewegungen sind genau die durch $M \in \mathrm{PGl}_2^+(\mathbb{R})$ definierten Möbiustransformationen.	
Die Spiegelung an einer Geraden hat Ordnung 2.	
In einer fast-euklidischen Geometrie seien g, h orthogonale Geraden, τ eine Verschiebung entlang g. Dann sind g und $\tau(h)$ orthogonal.	
Die Gruppe der Kongruenzen einer Inzidenzgeometrie operiert vierfach transitiv auf der Menge der Geraden.	
Seien x, y, z drei nicht kollineare Punkte in einer Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation, g eine Gerade. Dann schneidet g genau zwei Seiten des Dreiecks x, y, z.	

Aufgabe 4 Aufgabe mit Schulbezug, Axiomatik, (2 Bonuspunkte)

Das Arbeitsblatt "Lass Krummes mal Gerade sein" ist dem Schülerarbeitsheft MatheWelt entnommen, das 2017 in der Zeitschrift Mathematik lehren veröffentlicht wurde.

a) Bearbeiten Sie alle Aufgaben und Fragen des Schülerarbeitsblattes.

b) Erklären Sie, was mit folgendem Satz gemeint ist: "Axiomensysteme werden durch Modelle interpretiert".

    1. In Bezug auf das Schülerarbeitsblatt "Lass Krummes mal Gerade sein".

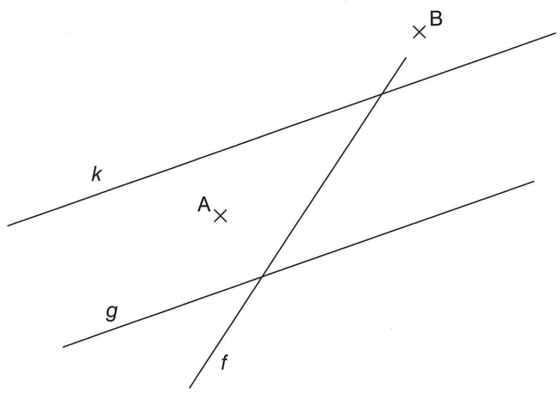
    2. In Bezug auf die Vorlesung "Elementargeometrie".

Lass Krummes mal Gerade sein

Bei geometrischen Argumentationen geht es häufig darum, ob Punkte auf bestimmten Geraden liegen oder ob Geraden sich schneiden. Den Sachverhalt, ob ein solches „Daraufliegen“ oder „Punkte gemeinsam haben“ zutrifft, nennt man in der Mathematik Inzidenz.

24

Überprüfe, ob in den folgenden Beispielen Inzidenz vorliegt. Kreuze an.



Liegt der Punkt A auf der Geraden *g*?
☐ ja ☐ nein ☐ kann man nicht sagen

Schneidet die Gerade *g* die Gerade *f*?
☐ ja ☐ nein ☐ kann man nicht sagen

Schneidet die Gerade *g* die Gerade *k*?
☐ ja ☐ nein ☐ kann man nicht sagen

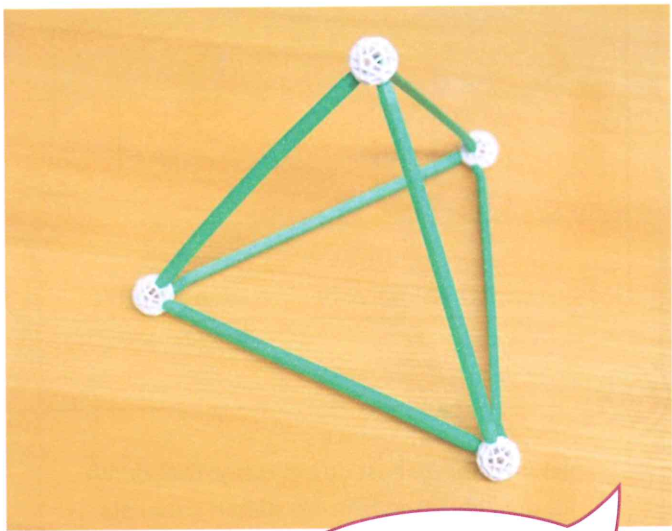
Liegt der Punkt B auf der Geraden *f*?
☐ ja ☐ nein ☐ kann man nicht sagen

In der ebenen Geometrie verstehen wir unter „Geraden“ in beide Richtungen unendlich lange gerade Linien (auch wenn sie wie hier nur zum Teil gezeichnet sind). „Punkte“ stellen wir uns als unendlich klein vor, sie haben keine Ausdehnung.
Aber man könnte „Geraden“ und „Punkte“ auch ganz anders definieren. Wichtig ist, dass sie gewisse Regeln befolgen, die ihre Lagebeziehungen beschreiben. Solche Regeln nennt man **Axiome**.

Die folgenden drei **Axiome** sollte jede Geometrie erfüllen:

1. *Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte.*
2. *Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es stets genau eine Gerade, auf der die beiden Punkte liegen.*
3. *Es gibt mindestens drei Punkte, die nicht alle auf derselben Geraden liegen.*

Eine schöne übersichtliche Geometrie erhält man mit einem Tetraeder. Die „Punkte“ sind die Eckpunkte des Tetraeders, seine Kanten sind die „Geraden“. Damit hat diese Geometrie genau 4 „Punkte“ sowie 6 „Geraden“.



Überprüfe, ob die drei genannten Axiome hier erfüllt sind.

Lange Zeit war den Geometern nicht klar, ob ein von Euklid formuliertes weiteres Axiom ergänzt werden muss oder ob man es aus anderen ableiten kann.
Antwort: Man kann es nicht.
Es handelt sich dabei um das sogenannte *Parallelenaxiom:*

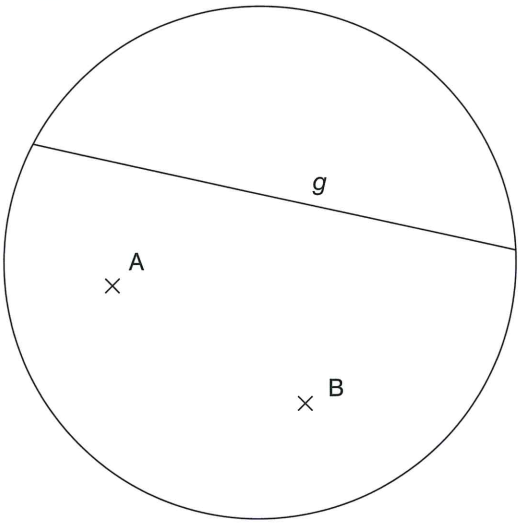
***Parallelenaxiom:** Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf der Geraden liegenden Punkt A gibt es höchstens eine Gerade, die durch den Punkt A verläuft und die mit der Geraden g keinen Punkt gemeinsam hat.*

25

Überprüfe, ob das Parallelenaxiom in der Tetraeder-Geometrie erfüllt ist.

Eine Geometrie, in der (neben den weiteren Axiomen) das Parallelenaxiom gilt, nennt man **euklidische Geometrie**.
Gilt das Parallelenaxiom nicht, kann man von einer **nicht-euklidischen Geometrie** sprechen.

Ein Beispiel für eine nicht-euklidische Geometrie ist die vom Mathematiker Felix Klein vorgeschlagene Kreisscheibe:



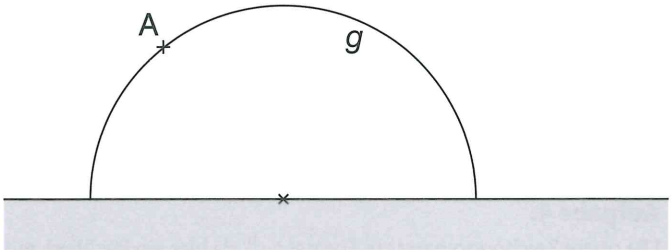
„Punkte" sind hier alle üblichen Punkte im Innern der Kreisscheibe (das heißt, der Rand zählt nicht dazu).
„Geraden" sind hier alle Sehnen des Kreises (auch wieder ohne die Punkte der Kreislinie).

26

Begründe, weshalb bei dieser Geometrie das Parallelenaxiom nicht erfüllt ist.

Sind eigentlich die ersten drei Axiome erfüllt?

Jetzt wird's knifflig: Dass „Geraden" nicht unbedingt gerade sein müssen, sieht man an der folgenden Geometrie: Betrachte eine Halbebene, z. B. im Koordinatensystem den Bereich oberhalb der x-Achse.
„Punkte" sind jetzt alle üblichen Punkte oberhalb der x-Achse (ohne die Achse selbst).
„Geraden" sind jetzt alle Halbkreise in der Halbebene, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen (auch hier zählen die Punkte der Achse nicht dazu).



27

Zeichne eine weitere „Gerade" f durch den „Punkt" A ein.
Prüfe nach, ob die ersten drei Axiome für diese Geometrie erfüllt werden.
Trifft das auch für das Parallelenaxiom zu?

Wie findest du zu zwei „Punkten" die passende „Gerade", die durch diese beiden Punkte geht? Begründe, dass es nur eine solche geben kann.

Elementargeometrie

Blatt 10

Mascha Reber mascha.reber@neptun.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 4734963

Lorenz Bung lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060