Elementargeometrie
Übungsblatt 6

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
StR Dr. Katharina Böcherer-Linder
Dr. Lukas Braun

Abgabe bis Freitag, 11.06.2021. Besprechung in den Übungsgruppen am 16. und 18.06.2021.

Aufgabe 1 Seiten von Geraden im Affinen, (4 Punkte)

Wir betrachten den Körper $\mathbb{R}$ und den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ als affinen Raum über sich selbst. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, wobei $(a, b) \neq (0, 0)$, und die Gerade $g \subseteq \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$ax + by + c = 0.$$

Zeigen Sie, dass die zwei Seiten von g (im Sinne von Definition 3.4 und bis auf Vertauschung) gegeben sind durch

$$S_1 := \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c > 0\} \text{ und } S_2 := \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c < 0\}.$$

Aufgabe 2 Seiten des Einheitskreises, (4 Punkte)

Wir betrachten den Körper $\mathbb{R}$ und den Vektorraum $\mathbb{R}^2$, sowie den Einheitskreis

$$S^1 := \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Für zwei Punkte $p, q \in \mathbb{R}^2 \setminus S^1$ sagen wir: *p und q liegen auf derselben Seite des Einheitskreises*, wenn die Verbindungsstrecke von p und q den Einheitskreis entweder gar nicht schneidet, zwei mal schneidet, oder tangential berührt. Zeigen Sie:

a) *Auf derselben Seite des Kreises* zu sein, ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2 \setminus S^1$ mit genau zwei Äquivalenzklassen, das *Kreisinnere* bzw. das *Kreisäußere*, gegeben durch

$$S^1_1 := \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \text{ und } S^1_2 := \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}.$$

b) Die Spiegelung am Einheitskreis bildet das Kreisinnere auf das Kreisäußere ab und umgekehrt.

Aufgabe 3 Total geordnete Körper, (5 Punkte + 1 Bonuspunkt)

a) Suchen Sie die Definition eines *total geordneten Körpers* in der Literatur. Geben Sie Ihre Quelle an (1 Bonuspunkt, wenn es ein Buch oder eine wissenschaftliche Originalarbeit ist, und nicht z.B. Wikipedia oder ein online verfügbares Skript).

b) Sei k ein total geordneter Körper. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $1 > 0$.
2. Für alle $0 \neq x \in k$ ist $x^2 > 0$.
3. Falls $0 < x \in k$, so gilt $x^{-1} > 0$ und $-x < 0$.
4. Es gilt $\mathrm{char}(k) = 0$.

Aufgabe 4 Nicht-archimedische Körper, (4 Punkte)

Sei k der Körper der rationalen Funktionen über $\mathbb{R}$. Die Elemente von k sind also Brüche $\frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p, q \in \mathbb{R}[x]$ Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ sind, und $q \neq 0$ gilt. Insbesondere identifizieren wir, wie bei der Konstruktion der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ aus den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, zwei Brüche $\frac{p(x)}{q(x)}$ und $\frac{r(x)}{s(x)}$, falls $p(x) \cdot s(x) = q(x) \cdot r(x)$.

a) Wir definieren nun eine Relation

$$\frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0} < 0 :\Leftrightarrow \frac{a_n}{b_m} < 0, \quad f_1 \leq f_2 :\Leftrightarrow f_1 - f_2 < 0 \ \vee \ f_1 = f_2.$$

Zeigen Sie, dass $\leq$ auf k eine totale Ordnung definiert.

b) Zeigen Sie, dass die Identität $f(x) = x$ bezgl. der Ordnung $\leq$ größer ist als jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \subseteq k$.

Bemerkung: Körper mit dieser Eigenschaft werden nicht-archimedische Körper *genannt, da sie das archimedische Axiom verletzen, vgl. Skript, S. 61.*

Elementargeometrie

Blatt 6

Mascha Reber mascha.reber@neptun.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 4734963

Lorenz Bung lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Aufgabe 2 Seiten des Einheitskreises, (4 Punkte)

Wir betrachten den Körper $\mathbb{R}$ und den Vektorraum $\mathbb{R}^2$, sowie den Einheitskreis

$$S^1 := \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Für zwei Punkte $p, q \in \mathbb{R}^2 \setminus S^1$ sagen wir: *p und q liegen auf derselben Seite des Einheitskreises*, wenn die Verbindungsstrecke von p und q den Einheitskreis entweder gar nicht schneidet, zwei mal schneidet, oder tangential berührt. Zeigen Sie:

b) Die Spiegelung am Einheitskreis bildet das Kreisinnere auf das Kreisäußere ab und umgekehrt.

Die Spiegelung am Einheitskreis lässt sich schreiben als $\psi : z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z}^{-1}$.

Sei $x =: (a,b) \in S^1_1$, also $a^2 + b^2 = |x|^2 < 1$.

Dann ist $\psi(x) = \frac{1}{\bar{x}} = \left(\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}\right)$ mit

$|\psi(x)|^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

Aufgabe 3 Total geordnete Körper, (5 Punkte + 1 Bonuspunkt)

a) Suchen Sie die Definition eines *total geordneten Körpers* in der Literatur. Geben Sie Ihre Quelle an (1 Bonuspunkt, wenn es ein Buch oder eine wissenschaftliche Originalarbeit ist, und nicht z.B. Wikipedia oder ein online verfügbares Skript).

Quelle: Analysis und Lineare Algebra I+II, Lutz Angermann und Bernd Mulansky, S. 37

<u>Def:</u> Ein Körper $K = (K, +, \cdot)$ heißt <u>geordneter Körper</u>, wenn eine Totalordnung (reflexiv, antisymm., total) „$<$" erklärt ist, welche den folgenden Ordnungsaxiomen genügt:

<u>(0.1):</u> $\forall x, y \in K: x < y \Rightarrow x + z < y + z$ (Monotoniegesetz d. Addition)

<u>(0.2):</u> $\forall x, y, z \in K: x < y \wedge 0 < z \Rightarrow xz < yz$ (Monotoniegesetz d. Multipl.)

b) Sei k ein total geordneter Körper. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $1 > 0$.
2. Für alle $0 \neq x \in k$ ist $x^2 > 0$.
3. Falls $0 < x \in k$, so gilt $x^{-1} > 0$ und $-x < 0$.
4. Es gilt $\operatorname{char}(k) = 0$.

(1) <u>z.z.:</u> $1 > 0$.

<u>Bew.:</u> $1 \neq 0 \overset{(0.2)}{\Rightarrow} 0 < 1^2 = 1$.

(2) <u>z.z.:</u> $0 < x^2$ für $x \neq 0$.

<u>Bew.:</u> Falls $0 < x$: Dann gilt mit (0.2) $0 < x \wedge 0 < x \Rightarrow 0x = 0 < x \cdot x = x^2$.

Falls $x < 0$: Mit (3) ist dann $0 < -x$. Nach obigem Fall ist $0 < (-x)^2 = x^2$.

(3) <u>z.z.:</u> $0 < x \Rightarrow \underbrace{0 < x^{-1}}_{a)} \wedge \underbrace{-x < 0}_{b)}$.

<u>Bew.:</u> b) $0 < x \overset{(0.1)}{\Rightarrow} 0 + (-x) < x + (-x) \Leftrightarrow -x < 0$.

a) Angenommen $\frac{1}{x} = x^{-1} < 0$. $x^{-1} < 0 \wedge 0 < x \overset{(0.2)}{\Rightarrow} x^{-1} \cdot x < 0 \cdot x \Leftrightarrow 1 < 0$. ↯ wegen (1)

(4) Z.z.: $\mathrm{char}(k)=0$.

Bew.: Angenommen $\mathrm{char}(k)=n>0$. Nach Definition der Charakteristik wäre dann $\sum_{i=1}^{n} 1 = 0$.

Es ist mit (1) aber $0<1 \overset{(0.1)}{\Rightarrow} 0+1<1+1 \overset{(0.1)}{\Rightarrow} 1+1<1+1+1$, usw. bis $\sum_{i=1}^{n-1} 1 < \sum_{i=1}^{n} 1 = 0$. Das ist ein Widerspruch, denn es war ja $0<1$. Also ist $\mathrm{char}(k)=0$.

$\square$

Aufgabe 4 Nicht-archimedische Körper, (4 Punkte)

Sei k der Körper der rationalen Funktionen über $\mathbb{R}$. Die Elemente von k sind also Brüche $\frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p, q \in \mathbb{R}[x]$ Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ sind, und $q \neq 0$ gilt. Insbesondere identifizieren wir, wie bei der Konstruktion der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ aus den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, zwei Brüche $\frac{p(x)}{q(x)}$ und $\frac{r(x)}{s(x)}$, falls $p(x) \cdot s(x) = q(x) \cdot r(x)$.

a) Wir definieren nun eine Relation

$$\frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0} < 0 :\Leftrightarrow \frac{a_n}{b_m} < 0, \quad f_1 \leq f_2 :\Leftrightarrow f_1 - f_2 < 0 \ \vee \ f_1 = f_2.$$

Zeigen Sie, dass $\leq$ auf k eine totale Ordnung definiert.

Z.z.: „$\leq$" definiert eine totale Ordnung, also „$\leq$" ist reflexiv, transitiv antisymmetrisch und total.

Bew.: 1. Reflexivität. $f_1 \leq f_1 :\Leftrightarrow f_1 - f_1 < 0 \vee f_1 = f_1$. (wahr, da $f_1 = f_1$).

2. Transitivität. Seien $f_1, f_2, f_3 \in k$ mit $f_1 \leq f_2$ und $f_2 \leq f_3$.

$f_1 \leq f_2 \Rightarrow f_1 - f_2 < 0 \vee f_1 = f_2$.

Falls $f_1 = f_2 \Rightarrow f_1 = f_2 \leq f_3$ und wir sind fertig.

Betrachte $f_1 - f_2 < 0$.

$f_2 \leq f_3 \Rightarrow f_2 - f_3 < 0$. Analog, falls $f_2 = f_3$ folgt $f_1 \leq f_2 = f_3$ und wir sind fertig. Betrachte also $f_2 - f_3 < 0$.

Sei $f_1 - f_2 := \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0}$ und $f_2 - f_3 := \dfrac{c_i x^i + \ldots + c_0}{d_j x^j + \ldots + d_0}$.

Dann ist $f_1 - f_3 = (f_1 - f_2) + (f_2 - f_3) = \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0} + \dfrac{c_i x^i + \ldots + c_0}{d_j x^j + \ldots + d_0}$

$$= \frac{(a_n x^n + \ldots + a_0)(d_j x^j + \ldots + d_0) + (c_i x^i + \ldots + c_0)(b_m x^m + \ldots + b_0)}{(b_m x^m + \ldots + b_0)(d_j x^j + \ldots + d_0)}$$

$$= \frac{(a_n x^n + \ldots + a_0)\cancel{(d_j x^j + \ldots + d_0)}}{(b_m x^m + \ldots + b_0)\cancel{(d_j x^j + \ldots + d_0)}} + \frac{(c_i x^i + \ldots + c_0)\cancel{(b_m x^m + \ldots + b_0)}}{\cancel{(b_m x^m + \ldots + b_0)}(d_j x^j + \ldots + d_0)}$$

Weiterhin ist dann $f_1 - f_3 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0} + \dfrac{c_i x^i + \ldots + c_0}{d_j x^j + \ldots + d_0} < 0$

$$\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{\frac{a_n}{b_m}}_{<0, \text{ da } f_1 - f_2 < 0} + \underbrace{\frac{c_i}{d_j}}_{<0, \text{ da } f_2 - f_3 < 0} < 0.$$

Also ist $f_1 - f_3 < 0$ und damit $f_1 \leq f_3$.

3. Antisymmetrie. Sei $f_1 \leq f_2$ und $f_2 \leq f_1$.

$f_1 \leq f_2 \Rightarrow f_1 - f_2 < 0 \vee f_1 = f_2$.

$f_2 \leq f_1 \Rightarrow f_2 - f_1 < 0 \vee f_2 = f_1$.

Angenommen, es wäre nicht schon $f_1 = f_2$.

Dann wäre $f_1 - f_2 < 0$ und $f_2 - f_1 = -(f_1 - f_2) < 0$.

Das ist ein Widerspruch, also muss bereits $f_1 = f_2$ sein.

4. Total. Seien $f_1, f_2 \in k$ mit $f_1 - f_2 := \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0}$.

Falls $f_1 = f_2$, dann ist bereits nach Definition $f_1 \leq f_2$.

Betrachte $f_1 \neq f_2$, dann ist $f_1 - f_2 \neq 0$.

D.h. $\frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0} \neq 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_m} \neq 0$

Also $\frac{a_n}{b_m} > 0$ und damit $f_1 - f_2 > 0 \Rightarrow f_2 \leq f_1$,

oder $\frac{a_n}{b_m} < 0$ und damit $f_1 - f_2 < 0 \Rightarrow f_1 \leq f_2$.

$\square$

b) Zeigen Sie, dass die Identität $f(x) = x$ bezgl. der Ordnung $\leq$ größer ist als jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \subseteq k$.

z.z.: Für alle $f, g \in k$ mit $f(x) = x$, $g(x) = n \in \mathbb{R}$ gilt $g \leq f$.

Bew.: Seien also $f, g \in k$ mit $f(x) = x$ (also $a_n, \ldots, a_2 = 0$, $a_1 = 1$, $a_0 = 0$ und $b_m, \ldots, b_1 = 0$, $b_0 = 1$ bei der Darstellung $f(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0}$)

und $g(x) = n \in \mathbb{R}$ (also $c_i, \ldots, c_1 = 0$, $c_0 = n$ und $d_j, \ldots, d_1 = 0$, $d_0 = 1$ bei der Darstellung $g(x) = \frac{c_i x^i + \ldots + c_0}{d_j x^j + \ldots + d_0}$).

$g \leq f \Leftrightarrow g - f \leq 0 \Leftrightarrow \frac{n}{1} - \frac{x}{1} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-1 \cdot x + n}{1} \leq 0 \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \frac{-1}{1} = -1 \leq 0$.

Das ist eine wahre Aussage, also gilt $g \leq f$.

$\square$