Lineare Algebra I

Blatt 5

Lorenz Bung (5113060): lorenz.bung@students.uni-freiburg.de
Tobias Remde (5100067): tobias.remde@gmx.de

Aufgabe 3

<u>Behauptung:</u> Die Vektoren

$u_1 = (1, 4, 0, -5, 1)$, $u_2 = (1, 3, 0, -4, 0)$ und $u_3 = (0, 4, 1, 1, 4)$

sind im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^5$ linear unabhängig.

<u>Beweis:</u>

u_1, u_2 und u_3 sind linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$$

nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ hat.

Wir erhalten das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

was nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ hat.

Somit sind u_1, u_2 und u_3 linear unabhängig.

$\square$

Aufgabe 3

Behauptung: Die Vektoren $u_4 = (0,1,0,0,0)$ und $u_5 = (0,0,0,1,0)$ ergänzen $\{u_1, u_2, u_3\}$ zu einer Basis.

Beweis: Die Ergänzung $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ ist eine Basis, wenn

(a) sie linear unabhängig ist und

(b) ein Erzeugendensystem ist.

(a) Beh.: $\{u_1, \dots, u_5\}$ ist linear unabhängig.

Bew.: $\{u_1, \dots, u_5\}$ ist lin. unabh., wenn die Gleichung

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 + \lambda_5 u_5 = 0$$

nur die Lösung $\lambda_1 = \dots = \lambda_5 = 0$ hat.

Wir erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$ welches nur die Lösung $\lambda_1 = \dots \lambda_5 = 0$ hat.

Somit ist $\{u_1, \dots, u_5\}$ lin. unabh.

Aufgabe 3

(b) Behauptung: $\{u_1, \dots, u_5\}$ ist ein Erzeugendensystem.

Beweis: $\{u_1, \dots, u_5\}$ ist ein Erzeugendensystem, wenn sich jeder Vektor $(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5$ als Linearkombination von $u_1, \dots, u_5$ darstellen lässt, also:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten ein lineares Gleichungssystem, welches wir nach $\lambda_1, \dots \lambda_5$ lösen können.

Somit erhalten wir

$$\lambda_1 = x_5 - 4x_3$$
$$\lambda_2 = x_1 - x_5 + 4x_3$$
$$\lambda_3 = x_3$$
$$\lambda_4 = -3x_1 + x_2 - x_5$$
$$\lambda_5 = 4x_1 - 5x_3 + x_4 + x_5$$

und damit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = (x_5 - 4x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + (x_1 - x_5 + 4x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + (-3x_1 + x_2 - x_5) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$+ (4x_1 - 5x_3 + x_4 + x_5) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist jeder Vektor $(x_1, \dots, x_5)$ als Linearkombination von $u_1, \dots, u_5$ darstellbar und $\{u_1, \dots, u_5\}$ somit ein Erzeugendensystem.

Insgesamt ist $\{u_1, \dots, u_5\}$ ein Erzeugendensystem und linear unabhängig und damit eine Basis. $\square$

Aufgabe 2 (b)

Behauptung: $\{v_1, v_2, v_5\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Beweis: $\{v_1, v_2, v_5\}$ ist eine Basis, wenn es ein Erzeugendensystem ist und linear unabhängig ist.

lin. unabh.:

v_1, v_2, v_5 sind lin. unabh., wenn die Gleichung $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_5 = 0$ nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ hat. Wir erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 16 \\ 4 & 3 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

welches nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ hat. Somit sind v_1, v_2 und v_5 linear unabhängig.

Erzeugendensystem:

v_1, v_2, v_5 sind ein Erzeugendensystem, wenn sich jeder Vektor $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ als Linearkombination von v_1, v_2 und v_5 darstellen lässt, also:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten ein LGS, welches wir nach λ_1, λ_2 und λ_3 lösen können.
Somit erhalten wir

$\lambda_1 = 17x_1 - 4x_2 + x_3$, $\lambda_2 = -x_1 + x_2 - x_3$, $\lambda_3 = -5x_1 + x_2$

und damit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (17x_1 - 4x_2 + x_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + (-x_1 + x_2 - x_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + (-5x_1 + x_2)\begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (b)

Damit ist jeder Vektor $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ als Linearkombination von v_1, v_2 und v_5 darstellbar und $\{v_1, v_2, v_5\}$ somit ein Erzeugendensystem.

Insgesamt ist $\{v_1, v_2, v_5\}$ linear unabhängig und ein Erzeugendensystem und damit eine Basis von $\mathbb{R}^3$. $\square$

Aufgabe 2 (a)

Behauptung: $\{v_1, \dots, v_5\}$ ist ein Erzeugendensystem.

Beweis: In Teilaufgabe (b) haben wir bereits gezeigt, dass $\{v_1, v_2, v_5\}$ eine Basis ist.

Nach Prop. 2.7. (b) ist $\{v_1, v_2, v_5\}$ damit auch ein minimales Erzeugendensystem. Damit muss jede Vereinigung mit $\{v_1, v_2, v_5\}$ auch ein Erzeugendensystem sein. Somit ist auch $\{v_1, \dots, v_5\}$ ein Erzeugendensystem. $\square$

Behauptung: $\{v_1, \dots, v_5\}$ ist nicht linear unabhängig.

Beweis: Wir haben in Teilaufgabe (b) bereits gezeigt, dass $\{v_1, v_2, v_5\}$ eine Basis ist.
Nach Prop. 2.7. (c) ist jede Familie $\{v_1, v_2, v_5\} \cup \{v\}$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig, und damit auch die Familie $\{v_1, \dots, v_5\} = \{v_1, v_2, v_5\} \cup \{v_3, v_4\}$. $\square$

Aufgabe 1

a) **Behauptung:**

Die Familie $((T-r)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist linear unabhängig.

Dann gilt:

$$p = \sum_{k=0}^{D} a_k (T-r)^k = 0$$

und

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \sum_{k=1}^{D} a_k \cdot k \cdot (T-r)^{k-1} = 0$$

Beweis

Dadurch kann man ein LGS bilden.

$$\text{I}: \sum_{k=0}^{D} a_k (T-r)^k = 0$$

$$\text{II}: \sum_{k=1}^{D} k \cdot a_k (T-r)^{k-1} = 0$$

$$\text{III}: \sum_{k=2}^{D} k \cdot (k-1) a_k (T-r)^{k-2} = 0$$

$\vdots$

$n-1$: $n!\ a_{n-1}(T-r) + n!\ a_n (T-r)^0 = 0$

n: $n!\ a_n (T-r)^0 = 0$

$\Rightarrow$ Aus $n! > 0$ und $(T-r)^n > 0$, folgt dass $a_n, \dots a_0 = 0$. Somit ist $((T-r)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ linear unabhängig.

$\square$