Sommersemester 2018
Albert-Ludwigs-Universität
Prof. Dr. S. Bartels

Name: ______________________________

Matrikel-Nr.: ______________________

Id.-Code (nur LSF): ________________

Numerik-Klausur am 26.7.2018

Von den nachfolgenden Aufgaben sind

Aufgabe 1 aus Teil A

sowie

2 Aufgaben aus Teil B und **1 Aufgabe aus Teil C**

zu bearbeiten. Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erzielt werden, bei mehreren bearbeiteten Aufgaben in Teil B oder C werden die besten zwei aus Teil B sowie die bessere Aufgabe aus Teil C gewertet. Bitte legen Sie Ihren Studentenausweis auf den Tisch und verwenden Sie das bereitgestellte Papier. Schreiben Sie Ihren Namen und (nur bei Anmeldung über LSF) die Ihnen ausgehändigte Identifikationsnummer auf das Aufgabenblatt und auf die Lösungszettel. Die Klausur wird nur begutachtet, wenn Sie die für die Teilnahme erforderlichen Leistungen nachweislich erbracht haben. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Teil A

Aufgabe A1. Beurteilen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch ist und kennzeichnen Sie dies durch den Buchstaben **W** beziehungsweise **F**.

(1)	Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ gilt $\ker AB = \ker A$.	
(2)	Permutationsmatrizen erhält man durch Zeilenvertauschungen in der Einheitsmatrix.	
(3)	Ist $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, so gilt $\|Px\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und jede Vektornorm $\|\cdot\|$.	
(4)	Ist A symmetrisch und invertierbar, so ist A positiv definit.	
(5)	Der Spektralradius definiert eine Operatornorm auf dem Raum der symmetrischen $n \times n$-Matrizen.	
(6)	Die Trapezregel approximiert das Integral einer Funktion $f \in C([-1,1])$ auf dem Intervall $[-1,1]$ durch den Ausdruck $\big(f(-1)+f(1)\big)/2$.	
(7)	Die Lagrange-Basispolynome $(L_i)_{i=0,1,\dots,n}$ zu Knoten $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ sind eindeutig durch die Bedingungen $L_i \in P_n$ und $L_i(x_j) = \delta_{ij}$, $0 \le i,j \le n$.	
(8)	Die diskrete Fourier-Transformation lässt sich mit dem Aufwand $\mathcal{O}(n)$ realisieren.	
(9)	Die Gauß-Quadratur bezüglich der Gewichtsfunktion $\omega = 1$ mit $m+1$ Knoten ist definiert durch die Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms $T_m \in P_m$.	
(10)	Das CG-Verfahren liefert in $\mathcal{O}(n^3)$ Rechenschritten die exakte Lösung eines Gleichungssystems $Ax = b$ mit symmetrischer, positiv definiter Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.	

A.1	B.1	B.2	B.3	C.1	C.2	Σ	Note

Teil B

Aufgabe B1. Eine Householder-Matrix $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ist für $v \in \mathbb{R}^m$ mit $\|v\|_2 = 1$ definiert durch $P = I_m - 2vv^T$.
(i) Zeigen Sie, dass $P = P^T$ und $P^{-1} = P$ gelten.
(ii) Zeigen Sie, dass eine reelle $m \times m$ Householder-Matrix $m-1$ Eigenwerte mit dem Wert 1 und einen Eigenwert -1 hat.
(iii) Konstruieren Sie mit Hilfe geometrischer Überlegungen für $m = 2, 3$ eine Householder-Matrix, die einen gegebenen Vektor $x \in \mathbb{R}^m$ auf ein Vielfaches von $e_1 \in \mathbb{R}^m$ abbildet.

Aufgabe B2. (i) Zeigen Sie, dass für $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und hinreichend kleine Zahlen $h \in \mathbb{R}$ die Matrix $I + hE$ regulär ist mit

$$(I + hE)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k h^k E^k.$$

(ii) Für $k = 1, 2, \dots, n-1$ sei $L^{(k)} = I_n - \ell_k e_k^T$ mit Vektoren $\ell_k = [0, \dots, 0, \ell_{k+1,k}, \dots, \ell_{n,k}]^T$ für $k = 1, 2, \dots, n-1$ und es sei $\widetilde{L} = L^{(n-1)}L^{(n-2)} \dots L^{(1)}$. Zeigen Sie, dass

$$\widetilde{L}^{-1} = I_n + \sum_{k=1}^{n-1} \ell_k e_k^T.$$

Aufgabe B3. (i) Leiten Sie mit der Hilfsfunktion $F(y) := (f(x) - p(x))w(y) - (f(y) - p(y))w(x)$ die Darstellung des Fehlers der Lagrange-Interpolation mit $p \in \mathcal{P}_n$ her, d.h.

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x - x_j).$$

Hierbei bezeichnet $w(y) = \prod_{j=0}^{n}(y - x_j)$ das Stützstellenpolynom.
(ii) Beweisen Sie mit der Identität aus (i), dass für die Trapezregel gilt:

$$|I(f) - Q_{Trap}(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_{C^0([a,b])}.$$

(iii) Es sei $f \in C([a, b])$ und für eine Zerlegungsfeinheit $h = (b - a)/N$ sei $T(h)$ der Wert der summierten Trapezregel, das heißt

$$T(h) = \frac{h}{2}\Big[f(a) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(a + ih) + f(b)\Big].$$

Zeigen Sie, dass die Extrapolation $T^*(h) = (T(h) - 2^\gamma T(h/2))/(1 - 2^\gamma)$ der Werte $T(h)$ und $T(h/2)$ mit einem geeigneten Parameter γ auf die summierte Simpson-Regel führt.

Teil C

Aufgabe C1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine strikt diagonaldominante Matrix, das heißt es gelte

$$\sum_{j=1,\dots,n, j\neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Teilmatrizen $A_k = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ für $k = 1, 2, \dots, n$ strikt diagonaldominant sind.
(ii) Zeigen Sie, dass für eine geeignete Norm auf $\mathbb{R}^n$ die Abschätzung $\|Ax\| > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.
(iii) Folgern Sie aus (ii), dass A injektiv ist, und zeigen Sie, dass die Matrix A regulär ist.

Aufgabe C2. Das Verfahren von Heron approximiert die Quadratwurzel $a^{1/2}$ einer Zahl $a \geq 0$ durch die Iteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ mit der Funktion $\Phi(x) = (x + a/x)/2$.
(i) Zeigen Sie, dass Φ eine Kontraktion im Intervall $((a/2)^{1/2}, \infty)$ ist.
(ii) Formulieren Sie das Newton-Verfahren und nennen Sie hinreichende Bedingungen für lokale quadratische Konvergenz.
(iii) Zeigen Sie, dass das Verfahren von Heron mit dem Newton-Verfahren für die Funktion $x \mapsto x^2 - a$ übereinstimmt und überprüfen Sie die Bedingungen aus (ii).