Übungsblatt 10

Aufgabe 37 (2+3)**.** Finden Sie alle Lösungen (mit Rechenweg und Begründungen) der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen ($x \in I$ mit I ein Intervall, was den Anfangswert enthält):

(i) $y'(x) = 3x^2 e^{-y(x)}$ mit $y(0) = 1$

(ii) $y'(x) = y^2(x) \sin x$ mit $y(x_0) = y_0$
Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $y_0 \neq 0$.

Aufgabe 38 (2+1.5+1.5)**.** (i) Lösen Sie $y'(x) + \frac{3y}{x} = \frac{e^x}{x^3}$ durch Finden eines geeigneten integrierenden Faktors.

(ii) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Seien $p\colon D \subset I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $q\colon D \subset I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten $p(x, y(x)) + q(x, y(x))y'(x) = 0$. Bestimmen Sie, wann $\mu(x + y)$ für ein $\mu\colon J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein integrierender Faktor für diese Differentialgleichung ist?

(iii) Lösen Sie $y'(x) = (x + y)^2$ mit einem integrierenden Faktor der Form $\mu(x + y)$.

Aufgabe 39. Finden Sie die Lösungen von $xy'(x) - y(x) = x^2 e^x$ mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

Aufgabe 40. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Seien $a, b\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0.$$

Sei eine Lösung davon $y_0\colon I \to \mathbb{R}$ und habe y_0 keine Nullstellen. Finden Sie eine weitere Lösung der Differentialgleichung, indem Sie den Ansatz $y(x) = v(x)y_0(x)$ für $v\colon I \to \mathbb{R}$ nutzen.
Hinweis: In der dann entstehenden Differentialgleichung setzen Sie $z(x) = v'(x)$ und lösen zunächst für $z(x)$.

Abgabe am Mittwoch 06.07.21 bis 14 Uhr

Analysis II Blatt 10

Lorenz Bung

lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Vincent Wilhelms

Matr.-Nr. 4909980

vincent.wilhelms@gmail.com

Aufgabe 37 (2+3)**.** Finden Sie alle Lösungen (mit Rechenweg und Begründungen) der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen ($x \in I$ mit I ein Intervall, was den Anfangswert enthält):

(i) $y'(x) = 3x^2 e^{-y(x)}$ mit $y(0) = 1$

$y'(x) = 3x^2 e^{-y(x)}$, wobei $e^{-y(x)} > 0 \ \forall y(x)$

$\Rightarrow \ 3x^2 = \frac{y'(x)}{e^{-y(x)}} = y'(x)e^{y(x)}$

Mit Trennung der Variablen ergibt sich

$$x^3 = \int_{x_0=0}^{x} y'(s)e^{y(s)}\,ds \overset{\text{Subst. } y(s)=t}{=} \int_{y(0)}^{y(x)} 1\cdot e^t\,dt = \left[e^t\right]_1^{y(x)} = e^{y(x)} - e^1$$

$\Rightarrow x^3 + e^1 = e^{y(x)} \Rightarrow y(x) = \ln(x^3+e)$.

(ii) $y'(x) = y^2(x)\sin x$ mit $y(x_0) = y_0$
Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $y_0 \neq 0$.

Falls $y(x_0) = y_0 \neq 0$, dann ist $\sin x = \frac{y'(x)}{y^2(x)}$.

Durch Trennung der Variablen ergibt sich

$$\int_{x_0}^{x} \sin s\,ds = \int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{y^2(s)}\,ds \overset{\text{Subst. } y(s)=t}{=} \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{u^2}\,du = \left[-\frac{1}{u}\right]_{y_0}^{y(x)} = -\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{y_0}$$

$$\parallel$$

$$\left[-\cos s\right]_{x_0}^{x} = -\cos x + \cos x_0$$

$\Rightarrow -\cos x + \cos x_0 = -\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{y_0}$

$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{\cos x - \cos x_0 + \frac{1}{y_0}} = \frac{y_0}{y_0(\cos x - \cos x_0)+1}$.

Falls $y_0 = 0$ ist damit $y(x) = \frac{y_0}{y_0(\cos x - \cos x_0)+1} = \frac{0}{0+1} = 0$, die Differenzial-gleichung ist also erfüllt.

Aufgabe 38 (2+1.5+1.5). (i) Lösen Sie $y'(x) + \frac{3y}{x} = \frac{e^x}{x^3}$ durch Finden eines geeigneten integrierenden Faktors.

(i) $y'(x) + \frac{3y}{x} = \frac{e^x}{x^3}$

Wir wollen diese Gleichung durch Finden eines geeigneten integrierenden Faktors lösen

Es gilt: $y'(x) + \frac{3y}{x} = \frac{e^x}{x^3} \iff y'(x) + \frac{3x^2y - e^x}{x^3} = 0 \iff \underbrace{x^3}_{:=q(x,y)} y'(x) + \underbrace{3x^2y - e^x}_{:=p(x,y)} = 0$

Das ist eine exakte Differentialgleichung, da $\partial_y p = 3x^2 = \partial_x q$

Wir wollen nun das Potential berechnen.

Es muss gelten: $\partial_y \Phi = q$, also $\Phi(x,y) = x^3y + f(x)$

$\partial_x \Phi = p$, also $\Phi(x,y) = x^3y - e^x$

Damit erhalten wir z.B: $\Phi(x,y) = x^3y - e^x$

Lösungen von $y'(x) + \frac{3y}{x} = \frac{e^x}{x^3}$ erfüllen $x^3y - e^x = c \in \mathbb{R}$ also durch $y(x) = \frac{c+e^x}{x^3}$

(ii) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall

Seien $p: D \subset I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $q: D \subset I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig

Wir betrachten $p(x, y(x)) + q(x, y(x))\, y'(x) = 0$

ZZ: Wann ist $\mu(x+y)$ für ein $\mu: J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein integrierender Faktor für diese Differentialgleichung?

Bew: Es muss gelten: $\partial_y(\mu p) = \partial_x(\mu q)$

$\iff \partial_y \mu \cdot p + \mu \partial_y p - \partial_x \mu \cdot q - \mu \partial_x q$

$\iff \mu' \cdot p + \mu \partial_y p = \mu' \cdot q - \mu \cdot \partial_x q$

$\iff \mu' \cdot p - \mu' \cdot q = \mu \partial_x q - \mu \partial_y p$

$\iff \mu'(p-q) = \mu(\partial_x q - \partial_y p)$

$\iff \mu' = \frac{\mu(\partial_x q - \partial_y p)}{p-q} = \mu \frac{-(\partial_y p - \partial_x q)}{p-q}$ Also wäre $\mu'(x+y) = -\mu(x+y) \cdot \frac{\partial_y p - \partial_x q}{p-q}$

Das kann aber nur dann eine Lösung für μ haben, wenn $\frac{\partial_y p - \partial_x q}{p-q}$ eine Funktion von $x+y$ ist

Wenn das aber der Fall ist, kann man wieder Trennung der Variabeln machen.

(iii) $y'(x) = (x+y)^2$

Wir wollen diese Gleichung mit einem integrierenden Faktor der Form $\mu(x+y)$ lösen

Es gilt: $y'(x) = (x+y)^2$

$\iff 0 = \underbrace{(x+y)^2}_{:=p} \underbrace{-1}_{:=q} \cdot y'(x)$

$$\frac{\partial_y p - \partial_x q}{p - q} = \frac{2(x+y)}{(x+y)^2+1}$$ das ist eine Funktion von $x+y$, also ist $\mu(x+y)$ ein integierender Faktor

Dann ist $\frac{\mu'(x+y)}{\mu(x+y)} = -\frac{2(x+y)}{(x+y)^2+1}$

Eine Lösung wäre $\mu(x-y) = \frac{1}{(x+y)^2+1}$

Denn es gilt: $\mu'(x+y) = -\frac{2(x+y)}{((x+y)^2+1)^2}$ und $\frac{\mu'(x+y)}{\mu(x+y)} = \frac{\frac{-2(x+y)}{((x+y)^2+1)^2}}{\frac{1}{(x+y)^2+1}} = -\frac{2(x+y)}{(x+y)^2+1}$

Multiplikation mit der Differentialgleichung liefert:

$$\mu(x+y)p(x,y(x)) + \mu(x+y)q(x,y(x))y'(x) = \underbrace{\frac{(x+y)^2}{(x+y)^2+1}}_{:=p} - \underbrace{\frac{1}{(x+y)^2+1}}_{:=q} y'(x) = 0$$

Diese ist exakt, da $\partial_y \tilde{p} = \partial_x \tilde{q}$

Wir wollen nun das Potential bestimmen:

Es muss gelten: $\partial_x \Phi = \tilde{p}$ und $\partial_y \Phi = \tilde{q}$

$\square$

Aufgabe 39. Finden Sie die Lösungen von $xy'(x) - y(x) = x^2e^x$ mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

Setze $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \Rightarrow y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k x^{k-1}$ Weiterhin ist $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Dann ist $xy'(x) - y(x) = x^2 e^x = 0 \Leftrightarrow x \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = x^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k \cdot x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k!} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k \cdot x^k - a_k x^k - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{(k-2)!} = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (k-1) a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k-2)!} = 0 \Leftrightarrow (0-1) a_0 x^0 + (1-1) a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) a_k x^k - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{(k-2)!} = 0$

$\Leftrightarrow -a_0 + \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) a_k x^k - \frac{x^k}{(k-2)!} = 0 \Leftrightarrow -a_0 + \sum_{k=2}^{\infty} x_k \left((k-1) a_k - \frac{1}{(k-2)!} \right) = 0.$

Also $a_0 = 0$ und für $k \geq 2$ $(k-1) a_k - \frac{1}{(k-2)!} = 0 \Leftrightarrow (k-1) a_k = \frac{1}{(k-2)!} \Leftrightarrow a_k = \frac{1}{(k-2)!(k-1)}$
$= \frac{1}{(k-1)!}$.

Damit ist dann $y(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!} = -x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!} = -x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k!}$
$= -x + x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = -x + xe^x = x(e^x - 1).$

Aufgabe 40

Betrachte zunächst

$$y = v \cdot y_0 \Rightarrow y' = v' y_0 + v y_0' \Rightarrow y'' = v'' y_0 + 2v' y_0' + v y_0''.$$

Einsetzen in die Differenzialgleichung ergibt

$$0 = v'' y_0 + 2v' y_0' + v y_0'' + a(v' y_0 + v y_0') + b v y_0$$

$$= v'' y_0 + 2v' y_0' + v \underbrace{(y_0'' + a y_0' + b y_0)}_{=0,\text{ denn } y_0 \text{ löst die DGL}} + a v' y_0$$

$$= v'' y_0 + 2v' y_0' + a v' y_0$$

$$= v'(2y_0' + a y_0) + v'' y_0$$

$$\Rightarrow \frac{v''}{-v'} = \frac{2y_0' + a y_0}{y_0}.$$

Mit Trennung der Variablen erhalten wir

$$\int \frac{2y_0' + a y_0}{y_0} = \int \frac{v''}{-v'} dx \underset{\text{Subst. } v' = u}{=} \int \frac{1}{-u} du = \ln(-v') + c$$

$$\| $$

$$2\ln(y_0) + \int a(x)dx + d$$

$$\Rightarrow 2\ln(y_0) + \int a(x)dx + d = \ln(-v') + c$$

$$\Rightarrow 2\ln(y_0) + \int a(x)dx + \underbrace{(d-c)}_{=:e} = \ln(-v')$$

$$\Rightarrow v' = -e^{\int a(x)dx} \cdot e^c \cdot y_0^2.$$

Für $v(x)$ bekommen wir damit

$$v(x) = \int v'(x)dx = \int -y_0^2 \cdot e^{\int a(x)dx} \cdot e^c dx.$$

$v'(x)$ löst

$$0 = v'(2y_0' + a y_0) + v'' y_0$$

und $y_0(x)$ den restlichen Teil der Differenzialgleichung.
Damit ist

$$y(x) = v(x) \cdot y_0(x) = \int -y_0^2 \cdot e^{\int a(x)dx} \cdot e^c dx \cdot y_0(x)$$

eine Lösung der Differenzialgleichung.

Da war leider der Stift vom Tablet leer.

A. Wie würdest du die Analysis-Vorlesung beschreiben?

B: Grenzwertig.