Übungsblatt 8

Aufgabe 29 (2+2+1)**.** (i) Sei $\Omega = [a,b] \times \{0\} \subset Q = [a,b] \times [-1,1]$. Zeigen Sie, dass $1_\Omega \colon Q \to \mathbb{R}$ integrierbar ist und berechnen Sie das Integral.

(ii) Sei $\Omega = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subset Q = [0,1]$. Zeigen Sie, dass $1_\Omega \colon Q \to \mathbb{R}$ nicht integrierbar ist.

(iii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, so dass 1_Ω integrierbar ist und $\operatorname{vol}\Omega = 0$. Sei $A \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass dann auch 1_A integrierbar ist und $\operatorname{vol} A = 0$ gilt.

Aufgabe 30. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f \colon Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar und $g \colon Q \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch $fg \colon Q \to \mathbb{R}$ integrierbar ist.
Hinweis: Schätzen Sie $S^k(fg) - S_k(fg)$ ab unter Verwendung, dass g automatisch gleichmäßig stetig sein muss.

Aufgabe 31 (1.5+1.5+2)**.** Berechnen Sie

(i) $\int_{\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, \mathrm{dvol}$

(ii) das Volumen des Inneren des Rotationsellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$

(iii) $\int_\Omega z\, \mathrm{dvol}$ mit $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$.

Aufgabe 32 (1.5+1.5+2)**.** Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie:

(i) Ist A abgeschlossen, dann ist $\bar{A} = A$.

(ii) Ist A kompakt, dann ist auch ∂A kompakt.

(iii) ∂A und $\bar{A}$ sind abgeschlossen.

Abgabe am Mittwoch 23.06.21 bis 14 Uhr

Analysis II Blatt 8

Lorenz Bung

lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Vincent Wilhelms

Matr.-Nr. 4909980

vincent.wilhelms@gmail.com

Aufgabe 29 (2+2+1). (i) Sei $\Omega = [a,b] \times \{0\} \subset Q = [a,b] \times [-1,1]$. Zeigen Sie, dass $1_\Omega \colon Q \to \mathbb{R}$ integrierbar ist und berechnen Sie das Integral.

z.z.: $1_\Omega : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar

Bew.: $1_\Omega : Q \to \mathbb{R}, \quad z \longmapsto \begin{cases} 1, & z \in \Omega \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$S^k(1_\Omega) = \frac{2(b-a)}{k^2} \left(\sum_{i_1,i_2}^{k} \sup_{x \in Q^k_{i_1,i_2}} 1_\Omega(x) \right) \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$$S_k(1_\Omega) = \frac{2(b-a)}{k^2} \left(\sum_{i_1,i_2}^{k} \inf_{x \in Q^k_{i_1,i_2}} 1_\Omega(x) \right) = \frac{2(b-a)}{k^2} \cdot 0 \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$\Rightarrow 1_\Omega$ ist integrierbar, da $\lim\limits_{k\to\infty} S^k(1_\Omega) = \lim\limits_{k\to\infty} S_k(1_\Omega)$.

$$\operatorname{vol} \Omega = \int_Q 1_\Omega \, d\operatorname{vol} = 0.$$

$\square$

(iii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, so dass 1_Ω integrierbar ist und $\operatorname{vol}\Omega = 0$. Sei $A \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass dann auch 1_A integrierbar ist und $\operatorname{vol} A = 0$ gilt.

z.z.: $\operatorname{vol} A = 0$

Bew.: $A \subset \Omega \Rightarrow \exists x \in \Omega : x \notin A$ und $\forall x \in A : x \in \Omega$

$$\Rightarrow 1_A \leq 1_\Omega \overset{\text{Monotonie}}{\Longrightarrow} \int_Q 1_A \leq \int_Q 1_\Omega = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{vol} A = \int_Q 1_A \, d\operatorname{vol} = 0, \text{ da } \int_Q 1_\Omega \geq 0 \text{ ist.}$$

$\square$

z.z.: 1_A integrierbar.

Bew.: $A \subset \Omega \Rightarrow A$ beschränkt (da Ω beschränkt) durch Ω

$$S^k(1_A) = \frac{\operatorname{vol}\Omega}{k^n} \left(\sum_{i_1 \dots i_n}^{k} \sup_{x \in \Omega^k_{i_1 \dots i_n}} (1_A)(x) \right)$$

$$= \frac{0}{k^n} \cdot \left(\sum_{i_1 \dots i_n}^{k} \sup_{x \in \Omega^k_{i_1 \dots i_n}} (1_A)(x) \right) = 0$$

$$S_k(1_A) = \frac{\operatorname{vol}\Omega}{k^n} \left(\sum_{i_1 \dots i_n}^{k} \inf_{x \in Q^k_{i_1 \dots i_n}} (1_A)(x) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} S^k(1_A) = 0 = \lim_{k\to\infty} S_k(1_\Omega)$$

$\Rightarrow 1_A$ ist integrierbar

$\square$

Aufgabe 31 (1.5+1.5+2)**.** Berechnen Sie

(i) $\int_{B_1(0)\subset\mathbb{R}^2} \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{dvol}$

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2}$$

$$= \sqrt{1-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi} = \sqrt{1-r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}$$

$$= \sqrt{1-r^2}.$$

$$|\det D_\varphi| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| = r.$$

$$\Rightarrow \int_{B_1(0)\subset\mathbb{R}^2} \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{dvol} = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \sqrt{1-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi$$

$$= \left[\varphi\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot r\,dr\right]_0^{2\pi} = 2\pi\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot r\,dr$$

$$= 2\pi\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 0 + 2\pi\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{2\pi}{3}.$$

(ii) das Volumen des Inneren des Rotationsellipsoids $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ $=: R$

$$x = a\rho\sin\theta\cos\phi \qquad y = a\rho\sin\theta\cos\phi \qquad z = b\rho\cos\theta$$

$$\Rightarrow \mathrm{vol}\,R = \int_{\rho=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{1} a^2 b\rho^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,d\rho$$

$$= a^2 b\int_0^1 \rho^2\,d\rho\cdot\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\cdot\int_0^{2\pi} d\phi = a^2 b\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1\cdot\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\cdot 2\pi$$

$$= a^2 b\cdot\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

(iii) $\int_\Omega z \,\mathrm{dvol}$ mit $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\}$.

$$\Phi : (0,1] \times (0,\pi) \times (0,\tfrac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) \mid x \geq 0, z \geq 0\}$$

$$\Phi : (r,\varphi,\sigma) \longmapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\sigma \\ r\sin\varphi\cos\sigma \\ r\sin\sigma \end{pmatrix}$$

ist ein Diffeomorphismus

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\sigma & -r\sin\varphi\cos\sigma & -r\cos\varphi\sin\sigma \\ \sin\varphi\cos\sigma & r\cos\varphi\cos\sigma & -r\sin\varphi\sin\sigma \\ \sin\sigma & 0 & r\cos\sigma \end{pmatrix}$$

$$|\det D\Phi| = r^2\cos\sigma > 0 \quad \Rightarrow \Phi^{-1} \text{ ist Diffeomorphismus}$$

da $\sigma \in (0,\frac{\pi}{2})$

$$\int_\Omega z \,\mathrm{dvol} = \int_{\Phi^{-1}(\Omega)} (z\circ\Phi)(r,\varphi,\sigma)\,|\det D\Phi|\,\mathrm{dvol}$$

$$= \int_{\Phi^{-1}(\Omega)} r\sin\sigma\, r^2\cos\sigma \,\mathrm{dvol} \overset{r=1}{=} \int_{\Phi^{-1}(\Omega)} \sin\sigma\cos\sigma\,\mathrm{dvol}$$

$$= \int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\sigma=0}^{2\pi} \sin\sigma\cos\sigma \,d\sigma\, d\varphi\, dr = \int_0^1\int_0^\pi \left[\tfrac{1}{2}\sin^2\sigma\right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, dr$$

$$= \int_0^1\int_0^\pi \tfrac{1}{2}\, d\varphi\, dr = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}\varphi\right]_0^\pi dr = \int_0^1 \tfrac{1}{2}\pi\, dr = \left[\tfrac{1}{2}\pi r\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 32 (1.5+1.5+2). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie:

(i) Ist A abgeschlossen, dann ist $\bar{A} = A$.

z.z.: A abgeschlossen $\Rightarrow \bar{A} = A$.

Bew.: A abgeschlossen $\Leftrightarrow A^c$ offen $\Leftrightarrow A^c = \operatorname{Inn}(A^c) \Leftrightarrow A^c = \bar{A}^c$

$\Leftrightarrow A = \bar{A}$.

(ii) Ist A kompakt, dann ist auch ∂A kompakt.

z.z.: A kompakt $\Rightarrow \partial A$ kompakt.

Bew.: A kompakt $\Leftrightarrow A$ abgeschlossen und beschränkt

$\partial A \subset A \Rightarrow \partial A$ beschränkt, da Teilmengen beschränkter Mengen auch beschränkt sind.

$\overline{\partial A} = \partial A \cup \partial(\partial A) = \partial A \cup \partial A = \partial A$

$\Rightarrow \partial A$ ist abgeschlossen

$\Rightarrow \partial A$ insgesamt abgeschlossen und beschränkt und damit kompakt.

(iii) ∂A und $\bar{A}$ sind abgeschlossen.

z.z.: ∂A ist abgeschlossen.

Bew.: $(\partial A)^c = (A \cup A^c) \setminus \partial A = (A \setminus \partial A) \cup (A^c \setminus \partial A)$

$= \operatorname{Inn}(A) \cup (A^c \setminus \partial(A^c)) = \underbrace{\operatorname{Inn}(A)}_{\text{offen}} \cup \underbrace{\operatorname{Inn}(A^c)}_{\text{offen}}.$

$\Rightarrow (\partial A)^c$ offen $\Rightarrow \partial A$ abgeschlossen.

z.z.: $\bar{A} := A \cup \partial A$ ist abgeschlossen.

Bew.: $(\bar{A})^c := (A \cup \partial A)^c = A^c \setminus \partial A = A^c \setminus \partial(A^c)$

$= \underbrace{\operatorname{Inn}(A^c)}_{\text{offen}} \Rightarrow \bar{A}$ abgeschlossen.

Wir haben unsere Lösungen so kompakt wie möglich aufgeschrieben und das Übungsblatt erfolgreich abgeschlossen! Wenn noch irgendwelche Fragen offen sind, schreibe sie einfach an den Rand :)