# Numerik 1

Blatt 5 – 13.12.2021

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 bis 6. Abgabe: 7.1.2022, 10:00 Uhr

---

**Homepage zur Vorlesung:**

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws21/num`

**Aufgabe 1.** Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \\ -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $A^+$ mit Hilfe der Singulärwertzerlegung sowie mittels der Identität $A^+ = (A^\top A)^{-1}A^\top$. Verwenden Sie $A^+$, um das durch $A$ und $b = [4,1,2,3]^\top$ definierte Ausgleichsproblem zu lösen.

**Aufgabe 2.** (i) Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum und $V^\perp$ sein orthogonales Komplement. Zeigen Sie, dass eine eindeutig bestimmte Matrix $P_V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert mit $P_V v = v$ für alle $v \in V$ und $P_V w = 0$ für alle $w \in V^\perp$.
(ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeigen Sie, dass $A^+A = P_{(\ker A)^\perp}$ und $AA^+ = P_{\operatorname{Im} A}$.

**Aufgabe 3.** Seien $(\lambda_i, v_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $i = 1,\dots,n$, Eigenwerte und zugehörige linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass $A$ die Darstellung $A = VDV^{-1}$ mit $V = [v_1,\dots,v_n]$ und $D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ besitzt.

**Aufgabe 4.** Entscheiden Sie für jede der nachfolgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Sie sollten Ihre Antwort begründen können.

(1) Ein stabiler Algorithmus impliziert eine gute Konditionierung.
(2) Für $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ gilt $\|A\|_\infty = 6$ und $\|A\|_1 = 9$.
(3) Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ gilt $\ker AB = \ker A$.
(4) Besitzt $A$ eine $LU$-Zerlegung und ist $A$ symmetrisch, so folgt $U = L^\top$.
(5) Das Gaußsche Eliminationsverfahren ist durchführbar für Matrizen, die eine Cholesky-Zerlegung besitzen.
(6) Permutationsmatrizen erhält man durch Zeilenvertauschungen in der Einheitsmatrix.
(7) Durch $I_n - 2(v^\top v)^{-1}vv^\top$ wird eine Householder-Transformation definiert, sofern $v \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.
(8) Für jede Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$, jede orthogonale Matrix $Q \in O(n)$ und jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|Qx\| = \|x\|$.

# Numerik I Blatt 5

Lorenz Bung

lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Charlotte Rothhaar

Matr.-Nr. 4315016

charlotte.rothhaar97@gmail.com

**Aufgabe 1.** Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \\ -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $A^+$ mit Hilfe der Singulärwertzerlegung sowie mittels der Identität $A^+ = (A^\top A)^{-1} A^\top$. Verwenden Sie $A^+$, um das durch $A$ und $b = [4, 1, 2, 3]^\top$ definierte Ausgleichsproblem zu lösen.

https://www.matheretter.de/wiki/singularwertzerlegung

## Berechnung von $A^+$ mit Singulärwertzerlegung

Berechnung der $\sigma_i$ von $A^TA$:

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \\ -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow A^TA = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} =: B$$

$$\det(B - \lambda\, Id_2) = \det\begin{bmatrix} \frac{5}{4}-\lambda & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4}-\lambda \end{bmatrix} = \left(\frac{5}{4}-\lambda\right)^2 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 2\cdot\frac{5}{4}\cdot\lambda + \lambda^2 - \frac{9}{16} = \lambda^2 - \frac{10}{4}\lambda + 1$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{\frac{10}{4} \pm \sqrt{\frac{100}{16} - 4}}{2} = \frac{\frac{10}{4} \pm \sqrt{\frac{36}{16}}}{2} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{8}{4} = 2, \quad \lambda_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{2}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 2}.$$

Berechnung der Eigenvektoren:

$$(B - \lambda_1 Id_2)v_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} v_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} v_1 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$(B - \lambda_2 Id_2)v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} v_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$u_i = \lambda_i^{-\frac{1}{2}} \cdot A \cdot v_i, \quad i = 1, 2.$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \sqrt{2}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ergänze $\{u_1, u_2\}$ um $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $u_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$.

$$\Rightarrow U = [u_1\ u_2\ u_3\ u_4] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad V = \frac{1}{2}[v_1\ v_2] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Mit $\Sigma^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ erhalten wir nun

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

<u>Berechnung von $A^+$ mit der Identität $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$</u>

$A^T A =: B = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$ Invertierung mit Gauß-Verfahren:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & -3 & 4 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & \frac{16}{5} & \frac{12}{5} & 4 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow (A^T A)^{-1} = B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

<u>Lösung des Ausgleichproblems</u>

$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1} b$. Mit der Pseudoinversen $A^+$ erhalten wir

$$x = A^+ b = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Aufgabe 4.** Entscheiden Sie für jede der nachfolgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Sie sollten Ihre Antwort begründen können.

(1) Ein stabiler Algorithmus impliziert eine gute Konditionierung.
(2) Für $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ gilt $\|A\|_\infty = 6$ und $\|A\|_1 = 9$.
(3) Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ gilt $\ker AB = \ker A$.
(4) Besitzt $A$ eine $LU$-Zerlegung und ist $A$ symmetrisch, so folgt $U = L^\top$.
(5) Das Gaußsche Eliminationsverfahren ist durchführbar für Matrizen, die eine Cholesky-Zerlegung besitzen.
(6) Permutationsmatrizen erhält man durch Zeilenvertauschungen in der Einheitsmatrix.
(7) Durch $I_n - 2(v^\top v)^{-1} vv^\top$ wird eine Householder-Transformation definiert, sofern $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.
(8) Für jede Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$, jede orthogonale Matrix $Q \in O(n)$ und jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|Qx\| = \|x\|$.

(1) wahr. Wenn ein Rechenschritt schlecht konditioniert ist, verursachen bereits kleine Änderungen in den Daten große Fehler im Ergebnis, welche das Ergebnis der darauffolgenden Rechenschritte wiederum stark verändern.

(2) wahr: $\|A\|_\infty = \max\{|a_{11}| + |a_{12}|, |a_{21}| + |a_{22}|\} = \max\{6, 5\} = 6$

$\|A\|_1 = \max\{|a_{11}| + |a_{21}|, |a_{12}| + |a_{22}|\} = \max\{2, 9\} = 9$

(3) falsch: Sei $m = n = p = 2$, $A = Id_2$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dann ist

$\ker AB = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{R}^2 \neq \{0 \in \mathbb{R}^2\} = \ker A$.

(4) falsch: Gegenbeispiel ist die symmetrische Matrix $AA^\top$ aus Aufgabe 1.

(5) wahr. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Cholesky-zerlegbar $\Rightarrow$ $A$ positiv definit $\Rightarrow$ nur pos. Eigenwerte $\Rightarrow$ $A$ invertierbar. Also keine Probleme bei der Pivotisierung.

(6) wahr. Die Matrix lässt sich schreiben als $P = \begin{bmatrix} e_{\pi(1)} \\ \vdots \\ e_{\pi(n)} \end{bmatrix}$, wobei $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ die Permutationsabbildung ist. Somit werden der $i$-te und der $\pi(i)$-te Einheitsvektor in der Matrix vertauscht.

(7) wahr: Die Householder-Transformation ist definiert als $Id_n - 2vv^\top$ für $\|v\| = 1$. Der Faktor $(v^\top v)^{-1} = \|v\|^{-1}$ normiert den beliebigen Vektor $v$ in diesem Fall.

(8) falsch: Angenommen die Aussage ist wahr. Dann gilt $\|Qx\| = \|x\|$

$\Rightarrow \|QQx\| = \|Qx\| = \|x\|$. Betrachte $Q = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in O(2)$, dann ist

$\left\| \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x \right\| = \left\| 4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\| \underset{\text{Vektornorm homogen}}{=} 4\|x\| \neq \|x\|$ für $x \neq 0$.