**Abgabe bis Freitag, 25.06.2021. Besprechung in den Übungsgruppen am 30.06. und 02.07.2021.**

## Aufgabe 1 Kongruenzen der kartesischen Ebene, (4 Punkte)

Wir betrachten die kartesische Ebene $X = \mathbb{R}^2$. Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$ sind *orthogonal*, wenn $\langle x, y\rangle = 0$, wobei $\langle\ ,\ \rangle$ das Standardskalarprodukt ist.

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ - mit $(a, b) \neq (0, 0)$ - und $g \subseteq X$ eine Gerade gegeben durch die Gleichung

$$ax_1 + bx_2 + c = 0.$$

Bestimmen Sie einen Richtungsvektor von $g$ und einen zu $g$ orthogonalen Vektor. Bestimmen Sie alle Kongruenzen von $X$, die eine Halbgerade in $g$ bijektiv auf sich selbst abbilden.

## Aufgabe 2 Orthogonalität, (6 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnen in der kartesischen Ebene $X = \mathbb{R}^2$:

a) (Kompatibilität von Definition 4.6) Zwei Geraden $g, h \subseteq X$ haben orthogonale Richtungsvektoren genau dann, wenn $g \neq h$ und $s_g(h) = h$, wobei $s_g$ die *Spiegelung an g* ist.

b) (Satz 4.7 (ii)) Zwei Geraden $g, h \subseteq X$ haben orthogonale Richtungsvektoren genau dann, wenn die Spiegelungen kommutieren, also $s_g s_h = s_h s_g$.

## Aufgabe 3 Lot durch Punkt auf Gerade, (4 Punkte)

Wir betrachten die kartesische Ebene $X = \mathbb{R}^2$, $g \subseteq X$ eine Gerade. Konstruieren Sie 'mit Zirkel und Lineal' das Lot auf $g$ durch einen Punkt

a) $p \in g$.

b) $q \notin g$.

Beschreiben Sie jeweils die Konstruktionsschritte. Begründen Sie insbesondere, warum die für die Konstruktion benötigten Schnittpunkte existieren. Sie dürfen die Konstruktion gerne mit dem Programm 'Geogebra' durchführen (https://www.geogebra.org/calculator).

## Aufgabe 4 Moultonebene, (4 Punkte + 2 Bonuspunkte)

Wir definieren die *Moultonebene* wie folgt. Sei $X = \mathbb{R}^2$. Sei $G = \{g_{m,b} \mid m \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, b \in \mathbb{R}\}$, wobei $g_{m,b}$ folgendermaßen definiert ist:

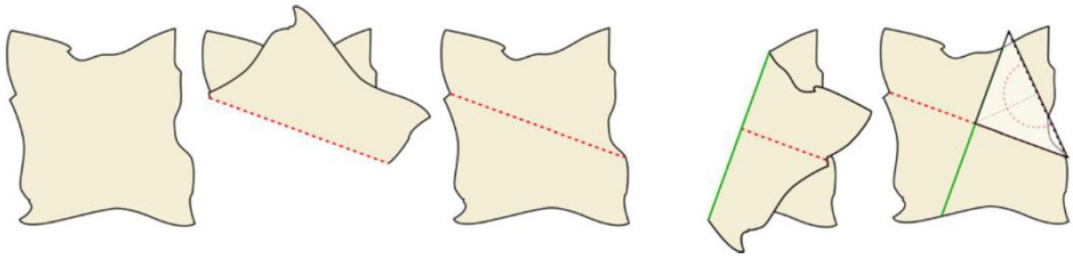
- $g_{m,b} := \{(x, y) \in X \mid x = b\}$ falls $m = \infty$.
- $g_{m,b} := \{(x, y) \in X \mid y = mx + b\}$ falls $m \geq 0$.
- $g_{m,b} := \left\{(x, y) \in X \mid \begin{cases} y = mx + b & \text{für } x \geq 0, \\ y = 2mx + b & \text{für } x < 0 \end{cases}\right\}$ falls $m < 0$.

Zeichnen Sie jeweils zwei Geraden jedes Typs. Zeigen Sie, dass $(X, G)$ eine Inzidenzgeometrie ist, in der das starke Parallelenaxiom gilt.

Bonus: Definieren Sie eine sinnvolle Zwischenrelation auf der Moultonebene und verifizieren Sie die einzelnen Punkte aus Definition 3.2 im Skript dafür.

## **Aufgabe 5** Aufgabe mit Schulbezug, (2 Bonuspunkte)

In der Schule wird das Senkrechtstehen zweier Geraden häufig durch doppeltes Falten eingeführt:



Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen der mathematischen Definition von 'senkrecht' aus der Vorlesung und der dargestellten Papierfaltung.

# Elementargeometrie

## Blatt 8

Mascha Reber mascha.reber@neptun.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 4734963

Lorenz Bung lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

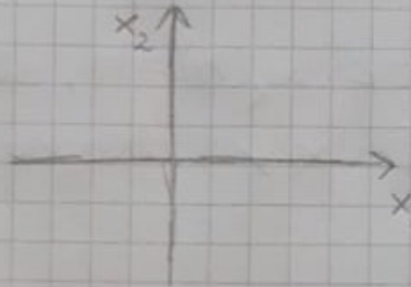
Matr.-Nr. 5113060

Aufgabe 1

Wir betrachten die kartesische Ebene $X = \mathbb{R}^2$. Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$ sind orthogonal, wenn $\langle x, y \rangle = 0$, wobei $\langle \, , \rangle$ das Standardskalarprodukt ist. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ - $(a, b) \neq (0,0)$ und $g \subseteq X$ eine Gerade gegeben durch die Gleichung

$$a x_1 + b x_2 + c = 0$$

Bestimmen Sie einen Richtungsvektor von $g$ und einen zu $g$ orthogonalen Vektor. Bestimmen Sie alle Kongruenzen von $X$, die eine Halbgerade in $g$ bijektiv auf sich selbst abbildet




Geradengleichung: $x_2 = -\left(\frac{a}{b} x_1 + \frac{c}{b}\right)$

$$x_1 = -\left(\frac{b}{a} x_2 + \frac{c}{a}\right)$$

Def 4.12

Wir schreiben $\overrightarrow{xy}$ für die eindeutige Verschiebung entlang der Gerade durch $x$ und $y$, die $x$ auf $y$ abbildet

Seien zwei Punkte $x$ und $y$ auf der Gerade $g$, gegeben durch $x = (x_1, x_2)$ und $y = (x_1', x_2')$

Der Richtungsvektor von $g$ ist ~~mit~~ $G_g = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_1 - x_1' \\ x_2 - x_2' \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{xy} = \begin{pmatrix} x_1 - x_1' \\ x_2 - x_2' \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{xy} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Zu $g$ orthogonaler Vektor, dh $\langle \overrightarrow{xy}, v \rangle \stackrel{!}{=} 0$

$0 = \langle \overrightarrow{xy}, v \rangle = a v_1 + b v_2$ wobei $(a, b) \neq (0,0)$

Setze $v_1 = \frac{1}{a}$, $v_2 = -\frac{1}{b}$, dann erhalte

$\langle \overrightarrow{xy}, v \rangle = a \frac{1}{a} - b \frac{1}{b} = 1 - 1 = 0$ ✓ $\rightarrow v = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ -\frac{1}{b} \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Zeigen Sie durch Rechnen in der kartesischen Ebene $X=\mathbb{R}^2$

a) Zwei Geraden $g,h \subseteq X$ haben orthogonale Richtungsvektoren genau dann, wenn $g \neq h$ und $s_g(h)=h$ ($s_g$ = Spiegelung an $g$)

Aus

① Zwei Vektoren $x,y \in \mathbb{R}^2$ sind orthogonal, wenn $\langle x,y \rangle = 0$ Standardskalarprodukt

Sei $x$ der Richtungsvektor von $g$, $y$ Richtungsvektor von $h$.

$\Rightarrow$ | Seien $g,h \subseteq X$ mit $x \perp y$, dh $\langle x,y \rangle = 0$

zz $g \neq h$

Direkt klar, da $x \neq y$, da $x,y$ orthogonal

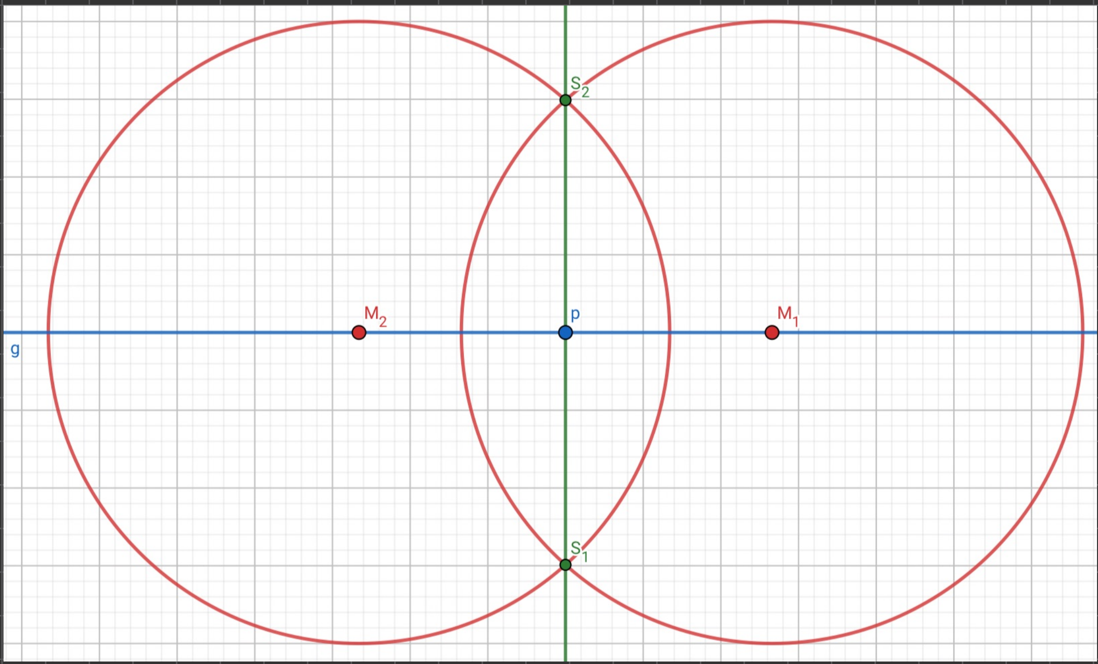
zz $s_g(h)=h$, also zz Spiegelung an $g$ bildet $h$ auf sich selbst ab

Da $x,y$ orthogonal, besitzen $g$ und $h$ einen Schnittpunkt $z$

**Aufgabe 3** Lot durch Punkt auf Gerade, (4 Punkte)

Wir betrachten die kartesische Ebene $X = \mathbb{R}^2$, $g \subseteq X$ eine Gerade. Konstruieren Sie 'mit Zirkel und Lineal' das Lot auf $g$ durch einen Punkt

a) $p \in g$.



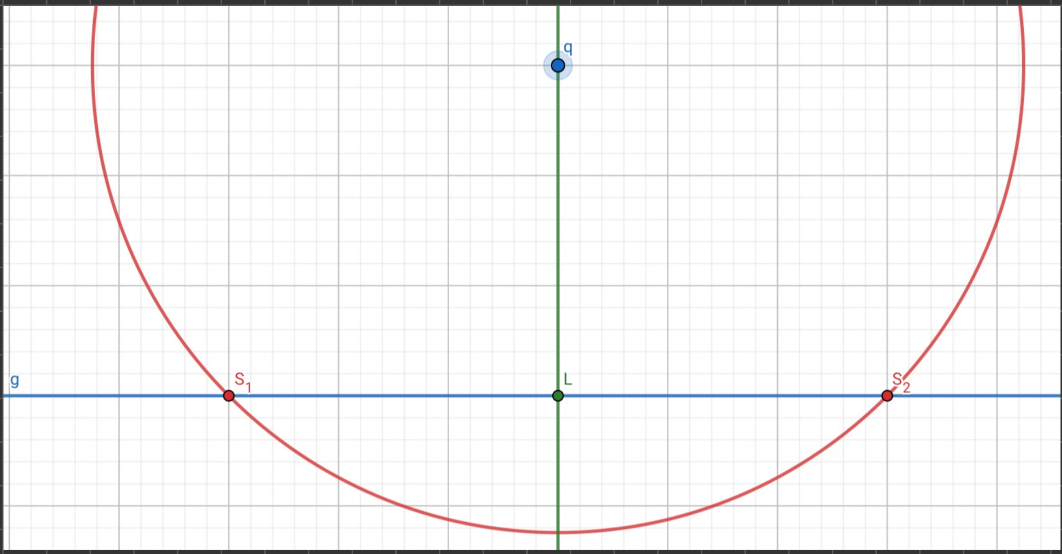

Vorgehen: 1. Wähle $M_1 \in g$, $M_1 \neq p$ und $M_2 \in g$, $M_2 = M_1 + 2\,\overrightarrow{M_1 p}$.

Da $M_1 \neq p$ ist $\overrightarrow{M_1 p} \neq \vec{0}$ und damit $M_2 \neq M_1 \neq p$.

2. Ziehe zwei Kreise $c_1$ und $c_2$ um $M_1$ bzw. $M_2$ mit demselben Radius $r$, wobei $r > |\overrightarrow{M_1 p}| = |\overrightarrow{M_2 p}|$.

3. Die Gerade durch die Schnittpunkte $S_1$ und $S_2$ der beiden Kreise $c_1$ und $c_2$ steht senkrecht auf $g$.

b) $q \notin g$.




Vorgehen:

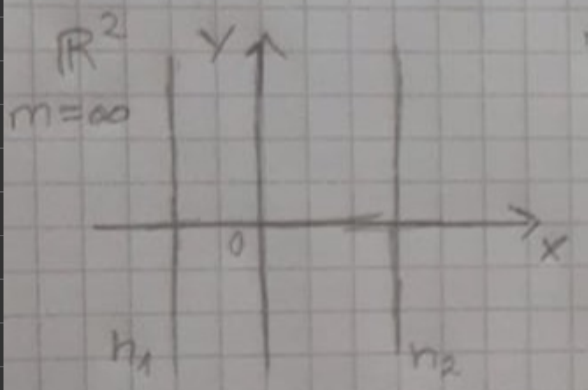
1. Wähle $S_1 \in g$ beliebig.
2. Konstruiere Kreis um q mit Radius $|\overline{PS_1}|$, sodass $S_1$ Schnittpunkt von g mit dem Kreis wird.
3. O.B.d.A. haben g und der Kreis 2 Schnittpunkte, da die Gerade durch $S_1$ und q sonst senkrecht auf g steht.
4. Konstruiere den Mittelpunkt L von den beiden Schnittpunkten $S_1$ und $S_2$ des Kreises mit g (mithilfe des Lineals)
5. Die Gerade durch L und q steht senkrecht auf g.

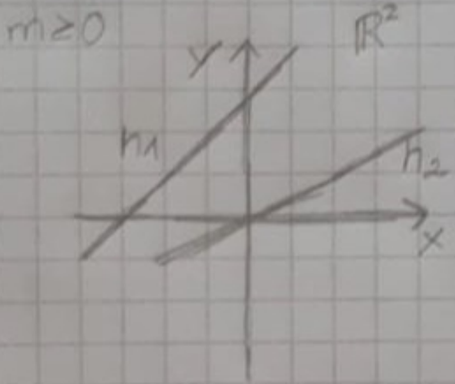
# Aufgabe 4

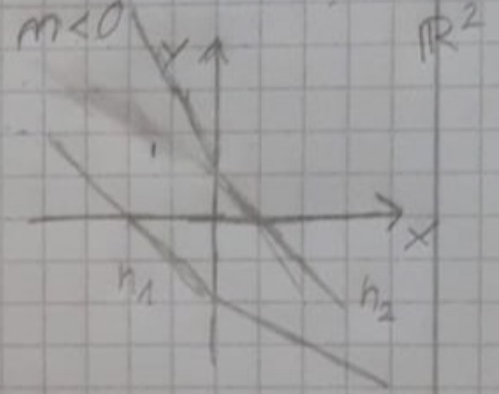
Wir definieren die Moultonebene wie folgt. Sei $X=\mathbb{R}^2$.
Sei $G=\{g_{m,b} \mid m\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}, b\in\mathbb{R}\}$, wobei $g_{m,b}$ folgendermaßen definiert ist

- $g_{m,b}=\{(x,y)\in X \mid x=b\}$ falls $m=\infty$
- $g_{m,b}=\{(x,y)\in X \mid y=mx+b\}$ falls $m\geq 0$
- $g_{m,b}=\left\{(x,y\in X \,\middle|\, \begin{cases} y=mx+b & \text{für } x\geq 0 \\ y=2mx+b & \text{für } x<0 \end{cases}\right\}$ falls

Zeichnen Sie jeweils zwei Geraden jedes Types. Zeigen Sie, dass $(X,G)$ eine Inzidenzgeometrie ist, in der das starke Parallelenaxiom gilt



Aufgabe 5

In der Schule wird das Senkrechtstehen zweier Geraden häufig durch doppeltes Falten eingeführt. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen der mathematischen Definition von 'senkrecht' aus der Vorlesung und der Papierfaltung

Def 4.6

Seien g, h Geraden in einer Inzidenzgeometrie mit ZwR und K. Die Gerade g steht senkrecht auf h gdw $g \neq h$ und $s_g(h) = h$.

Betrachte Bild 3: Es existiert eine beliebige Gerade h

Schritt zu Bild 4: Die Gerade h wird durch die Faltung auf sich selbst abgebildet. Die Faltlinie ist eine neue Gerade g

Betrachte Bild 5: Die Geraden g und h stehen senkrecht aufeinander

mathematischer Zusammenhang

Die Faltung an der Gerade g entspricht der Spiegelung $s_g$ an der Gerade g. Diese wird so gewählt, dass die Gerade h auf sich abgebildet wird bzw die Halbgerade nach rechts auf die Halbgerade nach links abgebildet und der Schnittpunkt x von g und h festgehalten wird. Damit gilt $s_g(h) = h$

Da h nach Konstruktion auch nicht g ist

steht g senkrecht auf h