Übungsblatt 2

Aufgabe 5 (2+ 1.5 +1.5). (i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der folgenden Funktionen (in allen Punkten, in denen sie partiell differenzierbar sind):

$$f(x,y,z) = e^{xy} + \sin^2 z, \quad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} - z \\ xy + \ln(1+z^2) \end{pmatrix}$$

(ii) Sei $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{|f(x)|^2}$, stetig differenzierbar ist und bestimmen Sie $D_x g$.

(iii) Sei $M_{\mathbb{R}}(n,n)$ die Menge der reellen $n \times n$-Matrizen. Dann ist $M_{\mathbb{R}}(n,n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ (isomorph als Vektorräume). Wir betrachten $f\colon M_{\mathbb{R}}(n,n) \to M_{\mathbb{R}}(n,n)$, $A \mapsto AA^T$. Seien $A, H \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$. Berechnen Sie die Richtungsableitungen $D_A f(H)$.

Aufgabe 6. (Bsp: Alle Richtungsableitungen existieren, aber die Funktion ist nicht stetig) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = 0$. Zeigen Sie, dass in $p = (0,0)$ alle Richtungsableitungen existieren, also für alle $v \in \mathbb{R}^2$ der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+hv) - f(p)}{h}$$

existiert. Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ nicht stetig (und damit nicht differenzierbar) ist. Kann man auch schon direkt an den berechneten Richtungsableitungen sehen, dass diese nicht von einer totalen Ableitung kommen können? Wenn ja, wie?

Aufgabe 7. Seien $f, g\colon U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ in $p \in U$ differenzierbar Funktionen mit $g(q) \neq 0$ für alle $q \in U$. Zeigen Sie, dass dann $\frac{f}{g}\colon U \to \mathbb{R}$ in p differenzierbar ist mit

$$D_p \frac{f}{g} = \frac{1}{g(p)^2} \left(g(p) D_p f - f(p) D_p g \right).$$

Aufgabe 8. Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung:
Sei $f\colon U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ eine Funktion und $p \in U$. Dann ist f genau dann in p differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $A_p\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ und eine Funktion $r\colon U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$, welche in p stetig ist, gibt mit $r(p) = 0$ und

$$f(x) = f(p) + A_p(x-p) + |x-p| r(x)$$

Insbesondere ist dann $A_p = D_p f$.

Bonusaufgabe (3*). Stetig differenzierbar haben wir definiert als differenzierbar und mit stetigen partiellen Ableitungen. In Analysis 1 hieß stetig differenzierbar, dass $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und die Ableitung wieder stetig ist. Da in diesem Fall f' einfach die einzige partielle Ableitung ist, ist der 'stetig differenzierbar'-Begriff in mehreren Variablen auch wirklich eine Verallgemeinerung.

Ist nun $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ differenzierbar, dann kann man aber auch die Ableitungen in jedem Punkt zu einer Abbildung $Dg\colon \mathbb{R}^k \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^\ell)$, $p \mapsto D_p g$, zusammenfassen. Hier soll $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^\ell)$ die Menge der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^k$ nach $\mathbb{R}^\ell$ sein. Das heißt statt der Definition von stetig differenzierbar von oben, kann man auch alternativ fordern, dass Dg stetig ist (in geeignetem Sinne – d.h. für eine geeignete Abstandsfunktion auf $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^\ell)$).

Wählen Sie eine geeignete Abstandsfunktion auf $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^\ell)$ und zeigen Sie damit: g ist genau dann stetig differenzierbar (Definition wie in der Vorlesung), wenn g differenzierbar ist und Dg stetig ist.

Abgabe am Mittwoch 05.05.21 bis 14 Uhr

Analysis II Blatt 2

Laura Stimpfle laura.stimpfle@t-online.de

Matr.-Nr. 4906027

Lorenz Bung lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Aufgabe 5 (2+ 1.5 +1.5). (i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der folgenden Funktionen (in allen Punkten, in denen sie partiell differenzierbar sind):

$$f(x,y,z) = e^{xy} + \sin^2 z, \quad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} - z \\ xy + \ln(1+z^2) \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = e^{xy} + \sin^2 z$$

Jacobi-Matrix $Df = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} & 2\sin z \cos z \end{pmatrix}$

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} - z \\ xy + \ln(1+z^2 \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix $Dg = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & -1 \\ y & x & \frac{2z}{1+z^2} \end{pmatrix}$

(iii) Sei $M_{\mathbb{R}}(n,n)$ die Menge der reellen $n \times n$-Matrizen. Dann ist $M_{\mathbb{R}}(n,n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ (isomorph als Vektorräume). Wir betrachten $f\colon M_{\mathbb{R}}(n,n) \to M_{\mathbb{R}}(n,n)$, $A \mapsto AA^T$. Seien $A, H \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$. Berechnen Sie die Richtungsableitungen $D_A f(H)$.

Da $M_{\mathbb{R}}(n,n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, können wir f betrachten als $f\colon \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ und $A, H \in \mathbb{R}^{n^2}$.
Damit lässt sich A schreiben als Vektor $(A_1, A_2, \dots, A_{n^2-1}, A_{n^2})^T$.

Für die Richtungsableitungen $D_A f(H)$ erhalten wir damit

$$D_A f(H) = D_{(A_1,\dots,A_{n^2})^T} f\left((H_1,\dots,H_{n^2})^T\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_{H_1} f(A_1) & \cdots & \partial_{H_{n^2}} f(A_1) \\ \partial_{H_1} f(A_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ \partial_{H_1} f(A_{n^2}) & \cdots & \partial_{H_{n^2}} f(A_{n^2}) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6. (Bsp: Alle Richtungsableitungen existieren, aber die Funktion ist nicht stetig) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = 0$. Zeigen Sie, dass in $p = (0,0)$ alle Richtungsableitungen existieren, also für alle $v \in \mathbb{R}^2$ der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p+hv) - f(p)}{h}$$

existiert. Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ nicht stetig (und damit nicht differenzierbar) ist. Kann man auch schon direkt an den berechneten Richtungsableitungen sehen, dass diese nicht von einer totalen Ableitung kommen können? Wenn ja, wie?

<u>Aufgabe 6</u> Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ für $(x,y) \neq 0$, $f(0,0) = 0$.

<u>z</u>: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+hv)-f(p)}{h}$ existiert für alle $v \in \mathbb{R}^2$ und $p = (0,0)$.

<u>Bew</u>: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+hv)-f(p)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h\cdot(x,y)) - f(0,0)}{h}$ für $v = (x,y)$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h\cdot(x,y)) - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h\cdot f(x,y)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} f(x,y) = f(x,y)$

existiert für alle $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

<u>z</u>: f ist in $p = (0,0)$ nicht stetig. Widerspruchsbeweis:

<u>Bew</u>: Wenn f in $p = (0,0)$ stetig ist, dann müssen die Funktionswerte jeder Folge, die gegen p konvergiert, auch gegen $f(p)$ konvergieren, also sei a_n eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $a_n \to \overset{=(0,0)}{p}$ für $n \to \infty$, dann muss $f(a_n) \to f(p) = (0,0)$ konvergieren für $n \to \infty$.

Sei $a_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)$. $\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0) = p$ für $n \to \infty$.

aber: $f(a_n) = f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{n^4}\cdot\frac{n^4}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0) = f(p)$. ↯

Damit ist f in $(0,0)$ nicht (folgen-)stetig und also nicht differenzierbar.

Aufgabe 7. Seien $f, g\colon U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ in $p \in U$ differenzierbar Funktionen mit $g(q) \neq 0$ für alle $q \in U$. Zeigen Sie, dass dann $\frac{f}{g}\colon U \to \mathbb{R}$ in p differenzierbar ist mit

$$D_p \frac{f}{g} = \frac{1}{g(p)^2}\left(g(p) D_p f - f(p) D_p g\right).$$

Zu zeigen: $\frac{f}{g}: U \to \mathbb{R}$ ist in $p \in U$ differenzierbar mit

$$D_p \frac{f}{g} = \frac{1}{g(p)^2} \left(g(p) D_p f - f(p) D_p g\right).$$

Beweis: Die Kettenregel $(*)$ haben wir in Satz 1.2.8. bereits bewiesen:

$$D_p (g \circ f) = D_{f(p)} g \cdot D_p f. \qquad (*)$$

Wir definieren zwei Funktionen

$$u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \longmapsto \frac{x_1}{x_2} \quad \text{und}$$

$$v: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^2, \quad x \longmapsto (f(x), g(x))^T.$$

Dann ist $(u \circ v)(x) = u(v(x)) = \frac{f(x)}{g(x)}$

und $D_{(x_1, x_2)} u = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2} \\ -\frac{x_1}{x_2^2} \end{pmatrix}.$

Damit haben wir insgesamt

$$D_p \frac{f}{g} = D_p (u \circ v) \overset{(*)}{=} D_{v(p)} u \cdot D_p v$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{g(p)} \\ -\frac{f(p)}{g(p)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_p f \\ D_p g \end{pmatrix}$$

$$= \frac{D_p f}{g(p)} - \frac{f(p) D_p g}{g(p)^2}$$

$$= \frac{1}{g(p)^2} \cdot \left(g(p) D_p f - f(p) D_p g\right). \qquad \square$$