Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2021/22
Prof. Dr. Sören Bartels, Jakob Keck

Numerik 1

Blatt 6 – 10.1.2022

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 bis 8. Abgabe: 21.1.2022, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws21/num`

Aufgabe 1. Seien $A = [4, 2, 1]$, $b = 4$ und $c = [1, 1, 1]^\top$.
(i) Bestimmen Sie die Ecken der Menge $\{x \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, Ax = b\}$ und untersuchen Sie, ob diese entartet sind.
(ii) Führen Sie das Simplex-Verfahren zur Minimierung von $f(x) = c^\top x$ unter der Nebenbedingung $Ax = b$ und $x \geq 0$ mit der Startecke $x^0 = [0, 0, 4]^\top$ durch.

Aufgabe 2. Konstruieren Sie Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und Vektoren $b \in \mathbb{R}^2$, sodass die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = b,\ x \geq 0\}$
i) leer
ii) unbeschränkt
iii) beschränkt und nichtleer
ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ der $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

gegeben ist durch $p(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)$.

Aufgabe 4. (i) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ und sei $v_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1. Zeigen Sie, dass

$$\lambda_2 = \max\left\{\frac{x^\top Ax}{\|x\|_2^2} : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x \cdot v_1 = 0\right\}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass der Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ genau dann ein Eigenvektor der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist, wenn $\nabla r(x^*) = 0$ gilt mit der Funktion

$$r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^\top Ax}{\|x\|_2^2}.$$

Numerik I Blatt 6

Lorenz Bung

lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Charlotte Rothhaar

Matr.-Nr. 4315016

charlotte.rothhaar97@gmail.com

Aufgabe 2. Konstruieren Sie Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und Vektoren $b \in \mathbb{R}^2$, sodass die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = b,\, x \geq 0\}$
i) leer
ii) unbeschränkt
iii) beschränkt und nichtleer
ist.

i) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ii) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$b_2 = 0 \overset{x \geq 0}{\Rightarrow} x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, also $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ als eindeutige Lösung.