Stochastik

Wintersemester 2021/22

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 4

Abgabe: Freitag, 17.12.2021, 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie für eine Zufallsvariable X:

1. Nimmt X Werte in $\mathbb{N}_0$ an, so ist $\mathrm{E}[X] = \sum_{k\geq 0} \mathrm{P}(X > k)$.
2. Falls $X \geq 0$, gilt im stetigen Fall $\quad \mathrm{E}[X] = \int_0^\infty \mathrm{P}(X > x)dx$.
3. Falls $\mathrm{E}[|X|] < \infty$, gilt im stetigen Fall

$$\mathrm{E}[X] = \int_0^\infty \mathrm{P}(X > x)dx - \int_{-\infty}^0 \mathrm{P}(X < x)dx.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie $\mathrm{E}[X]$ und $\mathrm{Var}[X]$, falls $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ bzw. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ für $\lambda > 0$ und $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathscr{A}$. Es sei

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k=n}^\infty A_k \ , \quad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{k=n}^\infty A_k.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$$

$$P(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} P(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \leq P(\limsup_{n\to\infty} A_n)$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\lambda > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei X_n eine Poisson-verteilte Zufallsvariable zum Parameter λ. Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Borel-Cantelli, dass

$$P\Big[\text{ Für unendliche viele } n \text{ gilt } X_n > n \Big] = 0.$$

Stochastik I Blatt 4

Lorenz Bung

lorenz.bung@students.uni-freiburg.de

Matr.-Nr. 5113060

Luis Jaschke

luis.jaschke.99@gmail.com

Matr.-Nr. 5105153

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie für eine Zufallsvariable X:

1. Nimmt X Werte in $\mathbb{N}_0$ an, so ist $\mathrm{E}[X] = \sum_{k\geq 0} \mathrm{P}(X > k)$.

Es gilt

(2.5) im Skript

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X>k) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} P(X=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P(X=n)$$

$$= E[X].$$

(2.12) im Skript

$\square$

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\lambda > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei X_n eine Poisson-verteilte Zufallsvariable zum Parameter λ. Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Borel-Cantelli, dass

$$P\Big[\text{Für unendliche viele } n \text{ gilt } X_n > n\Big] = 0.$$

<u>Beweis:</u>

Um das Lemma von Borel-Cantelli anwenden zu können, reicht es zu zeigen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$.

Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X_n = k) \\
\text{alle Summanden positiv} \quad &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k-1} P(X_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k-1} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&\leq e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda < \infty.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung nach Lemma 3.7.(i).

$\square$

Aufgabe 02

a) $X \sim Exp(\lambda)$

$* \quad x(-e^{-\lambda x})\Big|_0^\infty = \left(\lim_{x\to\infty} -\frac{x}{e^{\lambda x}}\right) - 0\cdot(-e^{-\lambda\cdot 0}) =$

$\lim_{x\to\infty} -\frac{x}{e^{\lambda x}} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} \to 0$

L'Hospital

partielle Integration

$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx =$

B 3.15

$\underbrace{x(-e^{-\lambda x})\Big|_0^\infty}_{\overset{*}{=}0} + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty =$

$\underbrace{\left(\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{\lambda e^{\lambda x}}\right)}_{\overset{*}{\Rightarrow} 0} - \left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\cdot 0}\right) = \frac{1}{\lambda}e^0 = \frac{1}{\lambda}$

$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx =$

$\underbrace{x^2(-e^{-\lambda x})\Big|_0^\infty}_{=0 \text{ da } 2\times \text{ L'Hospital}} - \int_0^\infty 2x(-e^{-\lambda x})\,dx = \int_0^\infty 2x e^{-\lambda x}\,dx =$

$\frac{2}{\lambda}\underbrace{\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx}_{E[X]} = \frac{2E[X]}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$

$\Rightarrow Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

b) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Sei $Y \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$\Rightarrow E[Y] = \int_{-\infty}^\infty x\, f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty x e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = 0$

da für $h(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ gilt $h(x) = -h(-x)$

und $h(0) = 0 \Rightarrow \int_{-a}^{a} h(x)\,dx = 0 \quad \forall a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \pm\infty$

$\Rightarrow E[Y] = 0$

B 3.20

$\Rightarrow \sigma Y + \mu \underset{\downarrow}{\sim} \frac{1}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} = f_X(x)$

$\Rightarrow E[X] = E[\sigma Y + \mu] \underset{\uparrow}{=} \sigma E[Y] + \mu = \mu$

Bemerkung 3.22i

$$E[Y^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\underbrace{\left[x \left(-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right) \right]_{-\infty}^{\infty}}_{\substack{0-0 \text{ mit} \\ \text{L'Hospital}}} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \Big) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(x)\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition 3.74}}}{=} 1$$

Außerdem gilt eine Zufallsvariable Z

$$Var(aZ + b) = E[(aZ+b)^2] - (E[aZ+b])^2 =$$

$$E[a^2 Z^2 + 2abZ + b^2] - (aE[Z] + b)(aE[Z] + b) =$$

$$a^2 E[Z^2] + 2ab E[Z] + b^2 - a^2 (E[Z])^2 - 2ab E[Z] - b^2 =$$

$$a^2 E[Z^2] - a^2 (E[Z])^2 = a^2 (E[Z^2] - (E[Z])^2) = a^2 Var(Z)$$

$$\Rightarrow Var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 1 - 0^2 = 1$$

$$\Rightarrow Var(X) = Var(\sigma Y + \mu) = \sigma^2 Var(Y) = \sigma^2$$

Aufgabe 03

a) ZZ: $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$

Beweis: Sei $x \in \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ so dass $x \in \bigcap\limits_{i=m}^{\infty} A_i$ gilt

$\Rightarrow x \in A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, \dots$

$\Rightarrow$ für $l \in \mathbb{N}$ und $l \leq m$ gilt $x \in \bigcup\limits_{i=l}^{\infty} A_i$ da

$x \in A_m \subseteq \bigcup\limits_{i=l}^{\infty} A_i$

Außerdem gilt für $l > m$ auch $x \in \bigcup\limits_{i=l}^{\infty} A_i$ da

$x \in A_m, A_{m+1}, A_{m+1}, \dots$

$\Rightarrow x \in \bigcup\limits_{i=k}^{\infty} A_i$ für alle $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$

$\Rightarrow \liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$

$\boxtimes$

b) ZZ: $P(\liminf\limits_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} P(A_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} P(A_n) \leq P(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n)$

Beweis: Wir zeigen zuerst $P(\liminf\limits_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} P(A_n)$

* $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt klarerweise $\bigcap\limits_{k\geq n} A_k \subseteq A_n$ und somit

$P(\bigcap\limits_{k\geq n} A_k) \underset{\substack{\uparrow \\ 2.9}}{\leq} P(A_n)$

Ana 1

$\Rightarrow P(\liminf\limits_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\bigcap\limits_{k\geq n} A_k) =$

$\liminf\limits_{n\to\infty} P(\bigcap\limits_{k\geq n} A_k) \underset{*}{\leq} \liminf\limits_{n\to\infty} P(A_n)$

Da $P(A_n)$ eine Zahlenfolge ist gilt nach Ana 1

$\liminf\limits_{n\to\infty} P(A_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} P(A_n)$ da nach Definition

$\liminf\limits_{n\to\infty} P(A_n)$ der kleinste Häufungspunkt von $P(A_n)$

ist und $\limsup\limits_{n\to\infty} P(A_n)$ der größte noch zu zeigen $\limsup_{n\to\infty} P(A_n) \leq P(\limsup_{n\to\infty} A_n)$

$*$ $\liminf_{n\to\infty} A_n^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)^c =$

$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)^c = \left(\limsup_{n\to\infty} A_k \right)^c$

$\Rightarrow 1 - \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \underset{\text{Ana 1}}{=} \liminf_{n\to\infty} (1 - P(A_n)) \overset{2.6}{=}$

$\liminf_{n\to\infty} P(A_n^c) \geq P(\liminf_{n\to\infty} A_n^c) \underset{**}{\overset{2.6}{=}}$

$1 - P(\limsup_{n\to\infty} A_n)$

$\Rightarrow 1 - \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \geq 1 - P(\limsup_{n\to\infty} A_n)$

$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \leq P(\limsup_{n\to\infty} A_n)$

$\boxtimes$