Elementargeometrie
Übungsblatt 0

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
Dr. Lukas Braun

Keine Abgabe, Präsenzübungsblatt! Besprechung in den Tutorien in der zweiten Vorlesungswoche (28. und 30.04.21). Vorbereitung erwünscht!

Da wir momentan keine reguläre Vorlesung anbieten können, möchten wir an dieser Stelle auf den Verein Rock Your Life! Freiburg (https://freiburg.rockyourlife.de/) hinweisen, der sich für mehr Bildungsgerechtigkeit einsetzt, indem er Mentoringbeziehungen zwischen Studierenden und Schülerinnen und Schülern herstellt.

Im Vorstellungsvideo (https://www.youtube.com/watch?v=P9xKH7sKAE4) erfahren Sie mehr über die Aktivitäten des Vereins .

Definition 1 *Sei $M \neq \emptyset$ Menge. Eine zweistellige Relation $\sim$ auf M wird* Äquivalenzrelation *genannt, wenn Sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

a) Reflexivität. Für alle $m \in M$ gilt: $m \sim m$.

b) Symmetrie. Für alle $m, n \in M$ gilt: $m \sim n \Leftrightarrow n \sim m$.

c) Transitivität. Für alle $m, n, o \in M$ gilt: aus $m \sim n$ und $n \sim o$) folgt $m \sim o$.

Für $x \in M$ heißt die Teilmenge $[x] := \{y \in M | x \sim y\} \subseteq M$ die Äquivalenzklasse *von x. Zwei Äquivalenzklassen sind entweder gleich oder disjunkt (Beweis?).*

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für die folgenden Relationen, ob es Äquivalenzrelationen sind. Überprüfen Sie insbesondere, welche Eigenschaften geg. verletzt sind.

a) Definiere für $x, y \in \mathbb{R}$
$$x \sim_{\text{sgn}} y \Leftrightarrow \text{sgn}(x) = \text{sgn}(y),$$
wobei $\text{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{+1, -1, 0\}$ die Vorzeichenfunktion bezeichnet.

b) Definiere für $x, y \in \mathbb{R}$
$$x \sim_{-\text{sgn}} y \Leftrightarrow -\text{sgn}(x) = \text{sgn}(y).$$

c) Definiere für $x, y \in \mathbb{Z}$
$$x \sim_3 y \Leftrightarrow 3|(x - y),$$
d.h. x und y stehen in Relation, falls 3 die Differenz $x - y$ teilt.

d) Definiere für $x, y \in \mathbb{Z}$
$$x \sim_T y \Leftrightarrow x|y,$$
d.h. x und y stehen in Relation, falls x die Zahl y teilt.

e) Definiere für $x, y \in \mathbb{Z}$
$$x \sim_{(2,3)} y \Leftrightarrow (2|(x - y) \vee 3|(x - y)),$$
d.h. x und y stehen in Relation, falls 2 die Differenz $x - y$ teilt oder 3 die Differenz $x - y$ teilt.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie *alle* Inzidenzgeometrien (X, G) mit $|X| = n$ Punkten für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ - bis auf Reihenfolge der Punkte. Sie können diese z.B. auch gut grafisch darstellen. Sie sollten insbesondere beweisen, dass es nicht mehr als die von Ihnen gefundenen Inzidenzgeometrien geben kann. Geben Sie außerdem jeweils die Zahl der Dreiecke an.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie, welche der Inzidenzgeometrien aus Aufgabe 2 von der Form (A, G) sind, wobei A ein affiner Raum mit affinen Geraden G ist, über einem (notwendigerweise endlichen) Körper k. Bestimmen Sie jeweils die Dimension.

Aufgabe 4

Denken Sie darüber nach, wie Sie den Begriff der Ebene definieren würden. Welchen Ebenendefinitionen sind Sie bisher begegnet? Waren diese widerspruchsfrei, eindeutig, oder ergaben sich Probleme aus der Definition?

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für die folgenden Relationen, ob es Äquivalenzrelationen sind. Überprüfen Sie insbesondere, welche Eigenschaften geg. verletzt sind.

a) Definiere für $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \sim_{\text{sgn}} y \Leftrightarrow \text{sgn}(x) = \text{sgn}(y),$$

wobei sgn: $\mathbb{R} \to \{+1, -1, 0\}$ die Vorzeichenfunktion bezeichnet.

(1) Reflexiv: $x \sim_{sgn} x \Leftrightarrow sgn(x) = sgn(x)$ ✓

(2) Symmetrisch: $x \sim_{sgn} y \Leftrightarrow sgn(x) = sgn(y)$

$\Leftrightarrow sgn(y) = sgn(x) \Leftrightarrow y \sim_{sgn} x$ ✓

(3) Transitiv: $x \sim_{sgn} y \wedge y \sim_{sgn} z \Rightarrow sgn(x) = sgn(y) \wedge sgn(y) = sgn(z)$

$\Rightarrow sgn(x) = sgn(z) \Rightarrow x \sim_{sgn} z$ ✓

$\Rightarrow$ Äquivalenzrelation.

b) Definiere für $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \sim_{-\text{sgn}} y \Leftrightarrow -\text{sgn}(x) = \text{sgn}(y).$$

(1) Reflexiv: $x \sim_{-sgn} x \Leftrightarrow -sgn(x) = sgn(x)$

Nur wenn $sgn(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow$ gilt nicht für alle $x \in \mathbb{R}$!

(2) symmetrisch: $x \sim_{-sgn} y \Leftrightarrow -sgn(x) = sgn(y)$

$\Leftrightarrow sgn(x) = -sgn(y) \Leftrightarrow -sgn(y) = sgn(x)$

$\Leftrightarrow y \sim_{-sgn} x$ ✓

(3) transitiv: $x \sim_{-sgn} y \wedge y \sim_{-sgn} z \Rightarrow -sgn(x) = sgn(y)$

$\wedge -sgn(y) = sgn(z) \Rightarrow -sgn(x) = sgn(y) \wedge sgn(y) = -sgn(z)$

$\Rightarrow -sgn(x) = -sgn(z) \Rightarrow sgn(x) = sgn(z)$

$\Rightarrow x \not\sim_{-sgn} z$

$x \sim_{-sgn} z$ wenn $x = y = z = 0$, aber nicht für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) Definiere für $x, y \in \mathbb{Z}$

$$x \sim_3 y \Leftrightarrow 3|(x-y),$$

d.h. x und y stehen in Relation, falls 3 die Differenz $x - y$ teilt.

(1) Reflexiv: $x \sim_3 x \Leftrightarrow 3 | (x-x) \Leftrightarrow 3|0$ ✓

(2) symmetrisch: $x \sim_3 y \Leftrightarrow 3 | (x-y) \Leftrightarrow 3|(y-x) \Leftrightarrow y \sim_3 x$ ✓

(3) transitiv: $x \sim_3 y \wedge y \sim_3 z \Rightarrow 3|(x-y) \wedge 3|(y-z)$

$\Rightarrow 3|(x-y)+(y-z) \Rightarrow 3|(x-z) \Rightarrow x \sim_3 z$ ✓

d) Definiere für $x, y \in \mathbb{Z}$

$$x \sim_T y \Leftrightarrow x|y,$$

d.h. x und y stehen in Relation, falls x die Zahl y teilt.

(1) Reflexiv: $x \sim_T x \Leftrightarrow x | x$ ✓

(2) symmetrisch: $x \sim_T y \Leftrightarrow x|y \not\Leftrightarrow y|x \Leftrightarrow y \sim_T x$ ✗

(3) transitiv: $x \sim_T y \wedge y \sim_T z \Rightarrow x|y \wedge y|z \Rightarrow x|z \Rightarrow x \sim_T z$ ✓

e) Definiere für $x, y \in \mathbb{Z}$

$$x \sim_{(2,3)} y \Leftrightarrow (2|(x-y) \vee 3|(x-y)),$$

d.h. x und y stehen in Relation, falls 2 die Differenz $x - y$ teilt oder 3 die Differenz $x - y$ teilt.

(1) Reflexiv: $x \sim_{(2,3)} x \Leftrightarrow (2|(x-x) \vee 3|(x-x))$

$\Leftrightarrow (2|0 \vee 3|0)$ ✓

(2) symmetrisch: $x \sim_{(2,3)} y \Leftrightarrow (2|(x-y) \vee 3|(x-y))$