Lorenz Burg
Lea Weissenrieder

Erweiterung der Analysis — Ksenia Fedosova, Nadine Große
WS 22/23

Übungsblatt 4

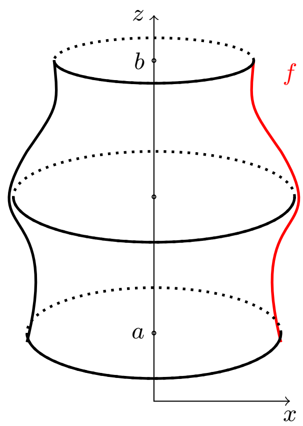
Aufgabe 10 (2.5+2.5)**.** (Volumen von Rotationskörpern)

(i) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{>0}$ eine stetige Funktion. Betrachten wir im $\mathbb{R}^3$ in der (x,z)-Ebene den Funktionsgraphen von $x = f(z)$ und drehen diesen um die z-Achse. Dabei entsteht eine Rotationsfläche, vgl. Abbildung.

Diese schliesst zwischen den Ebenen $z = a$ und $z = b$ eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein. Geben Sie Ω in der Form $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ldots\}$ an und zeigen Sie, dass

$$\operatorname{vol}\Omega = \int_a^b \pi f(z)^2 dz$$

ist.



(ii) Berechnen Sie mittels (i) das Volumen einer Kugel mit Radius r.

Aufgabe 11. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f\colon Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar und $g\colon Q \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch $fg\colon Q \to \mathbb{R}$ integrierbar ist.

Hinweis: Schätzen Sie $S^k(fg) - S_k(fg)$ ab unter Verwendung, dass g automatisch gleichmäßig stetig sein muss, da Q kompakt ist.

Aufgabe 12 (2.5+2.5)**.**

(i) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ist das Innere, was durch die Menge $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ beschränkt wird. Skizzieren Sie Ω und berechnen Sie das Volumen von Ω.

(ii) Berechnen Sie $\int_\Omega z\mathrm{dvol}$ für $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$.

Abgabe bis Mittwoch 23.11.22 8:00 Uhr online oder in den Briefkasten im Untergeschoss

Lorenz Burg
Lea Weissenrieder

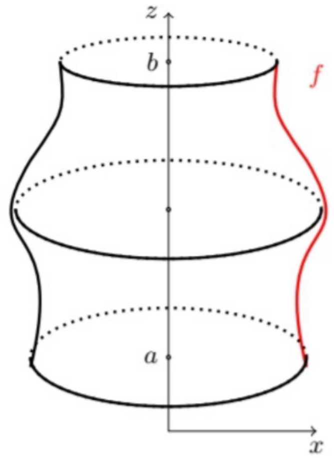
Aufgabe 10 (2.5+2.5). (Volumen von Rotationskörpern)

(i) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{>0}$ eine stetige Funktion. Betrachten wir im $\mathbb{R}^3$ in der (x,z)-Ebene den Funktionsgraphen von $x = f(z)$ und drehen diesen um die z-Achse. Dabei entsteht eine Rotationsfläche, vgl. Abbildung.

Diese schliesst zwischen den Ebenen $z = a$ und $z = b$ eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein. Geben Sie Ω in der Form $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \dots\}$ an und zeigen Sie, dass

$$\operatorname{vol}\Omega = \int_a^b \pi f(z)^2 dz$$

ist.



(ii) Berechnen Sie mittels (i) das Volumen einer Kugel mit Radius r.

i) Z: 1) Ω als Menge

2) $\operatorname{vol}\Omega = \int_a^b \pi f(z)^2 dz$

Bew: 1) $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b \wedge x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}$

2) um das Volumen von Ω zu bestimmen, schneiden wir den Rotationskörper in gleichhohe Scheiben. Teilt man den Körper in k Scheiben, so hat jede dieser scheiben die Höhe $\frac{b-a}{k}$.

Jede Scheibe hat den Radius $f(z)$ und somit die Grundfläche $\pi \cdot f(z)^2$.

$\Rightarrow$ das Volumen der i-ten Schibe ist gegeben durch

$$V_i = \frac{b-a}{k} \cdot \pi \cdot f(z_i)^2$$

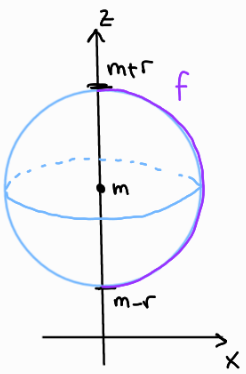
$$\Rightarrow \operatorname{vol}\Omega = \sum_{i=1}^{k} V_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{b-a}{k} \cdot \pi f(z_i)^2 = \frac{b-a}{k} \sum_{i=1}^{k} \pi f(z_i)^2$$

geht $k \to \infty$ wird die Unterteilung immer feiner und wir erhalten das Integral

$$\operatorname{vol}\Omega = \int_a^b \pi \cdot f(z)^2 \, dz$$

ii) Z: Volumen einer Kugel K mit Radius r. $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$

Bew:



Sei der Mittelpunkt der Kugel an der Stelle $z = m$

Die Funktion f ist gegeben durch $f(z) = \sqrt{r^2 - (z-m)^2}$

$$\overset{i)}{\Rightarrow} \operatorname{vol} K = \int_{m-r}^{m+r} \pi \left(\sqrt{r^2 - (z-m)^2}\right)^2 dz = \pi \int_{m-r}^{m+r} r^2 - (z-m)^2 \, dz = \pi \left[r^2 z - \frac{1}{3}(z-m)^3 \right]_{m-r}^{m+r}$$

$$= \pi \left(\left((m+r) r^2 - \frac{1}{3} (\cancel{m} + r - \cancel{m})^3 \right) - \left((m-r) r^2 - \frac{1}{3} (\cancel{m} - r - \cancel{m})^3 \right) \right)$$

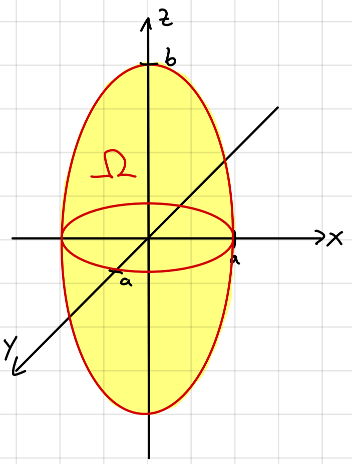
$$= \pi \left(\cancel{mr^2} + r^3 - \frac{1}{3} r^3 - \cancel{mr^2} + r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right) = \pi \left(2r^3 - \frac{2}{3} r^3 \right) = \underline{\underline{\pi \cdot \frac{4}{3} r^3}}$$

$\blacksquare$

Lorenz Burg
Lea Weissenrieder

Aufgabe 12 (2.5+2.5).

(i) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ist das Innere, was durch die Menge $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ beschränkt wird. Skizzieren Sie Ω und berechnen Sie das Volumen von Ω.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{a^2} = 1-\frac{z^2}{b^2}$$

$$\int_\Omega dvol = \int_{-b}^{b} vol\ Kreis_z\ dz \overset{(i)}{=} \int_{-b}^{b} \pi f^2(z)\, dz$$

$$= \pi\int_{-b}^{b} a^2\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)dz = \pi \int_{-b}^{b} a^2 - \frac{a^2z^2}{b^2}\, dz$$

$$= \pi\left[a^2 z - \frac{a^2z^3}{3b^2}\right]_{-b}^{b}$$

$$= \pi\cdot\left[a^2b - \frac{a^2b^3}{3b^2} - \left(-a^2b + \frac{a^2b^3}{3b^2}\right)\right]$$

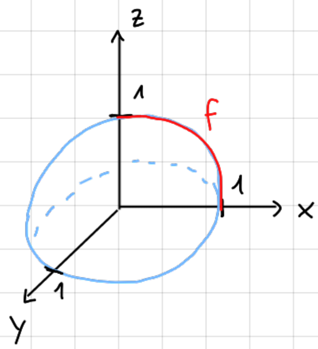
$$= \pi\left[a^2b - \frac{a^2b}{3} + a^2b - \frac{a^2b}{3}\right]$$

$$= \pi\left[\frac{6a^2b}{3} - \frac{2a^2b}{3}\right] = \pi\cdot\frac{4}{3}\cdot a^2 b.$$

(ii) Berechnen Sie $\int_\Omega z\mathrm{dvol}$ für $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1, z \ge 0\}$.

Bew:

Ω ist die obere Hälfte der Einheitskugel



Es ist $\Omega_z = \Omega \cap \{z\}$ und $f(z) = x = \sqrt{1-z^2}$

$$\int_\Omega z\, dvol = \int_{\mathbb{R}} z\, vol_2\, \Omega_z\, dz = \int_0^1 z\left(\pi\cdot f(z)^2\right) dz$$

$$= \int_0^1 z\cdot\pi\cdot(1-z^2)\, dz = \pi\int_0^1 z - z^3\, dz$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4}z^4\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{4}\pi}}$$

Aufgabe 11. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f\colon Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar und $g\colon Q \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch $fg\colon Q \to \mathbb{R}$ integrierbar ist.

Hinweis: Schätzen Sie $S^k(fg) - S_k(fg)$ ab unter Verwendung, dass g automatisch gleichmäßig stetig sein muss, da Q kompakt ist.

Lorenz Burg
Lea Weissenrieder

Bew: stetige Funktionen sind integrierbar $\Rightarrow$ g ist integrierbar.

Betrachte $S^k(fg) = \frac{\mathrm{vol}\, Q}{k^n} \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{k} \sup_{x \in Q^k_{i_1\dots i_n}} (f\cdot g)(x) \leq \frac{\mathrm{vol}\, Q}{k^n} \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{k} \sup_{x \in Q^k_{i_1\dots i_n}} (f)(x) \cdot \sup_{x \in Q^k_{i_1\dots i_n}} (g)(x)$

$\Rightarrow \quad S^k(f\cdot g) \leq S^k(f) \cdot S^k(g)$

analog gilt $\quad S_k(fg) \geq S_k(f) \cdot S_k(g)$

Wenn $f \cdot g$ int.bar ist muss gelten $\quad S^k(fg) - S_k(fg) \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

Wir schätzen ab:

$$S^k(fg) - S_k(fg) \leq S^k(f)\cdot S^k(g) - S_k(fg) \leq S^k(f)\cdot S^k(g) - S_k(f)\cdot S_k(g)$$

$$= S^k(f)\, S^k(g) - S^k(f)\, S_k(g) + S^k(f)\, S_k(g) - S_k(f)\, S_k(g)$$

$$= S^k(f) \underbrace{\left(S^k(g) - S_k(g)\right)}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0, \text{ da } g \text{ int.bar}} + S_k(g) \underbrace{\left(S^k(f) - S_k(f)\right)}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0, \text{ da } f \text{ int.bar}}$$

da f beschränkt, ist $S^k(f)$ endlich,

somit $\quad S^k(f) \underbrace{\left(S^k(g) - S_k(g)\right)}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Bleibt also z.z., dass $\quad S_k(g) \left(S^k(f) - S_k(f) \right) \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad \dots$

(dafür müsste auch $S_k(g)$ endlich sein ...)