运筹学第二次作业
第四章　整数规划

蒋文馨　16342067

June 6, 2020

目录

1　工厂制造数学模型

解： 设工厂制造 A,B,C 三种容器的数量分别为 x_1, x_2, x_3 只, 记总利润为 f, 则所研究问题可写成

$$\max f = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leqslant 500 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leqslant 300 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 1000 \\ x_i \geqslant 0, \text{且为整数}, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

2　篮球联赛出场阵容数学模型

解： 首先, 记 $c_i, i = 1, 2, \cdots, 8$ 为号码为 i 的队员的身高. 平均身高为 f.

引进变量 $x_i, i = 1, 2, \cdots, 8$, 规定

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{当号码为 i 的队员上场时} \\ 0, & \text{当号码为 i 的队员不上场时} \end{cases}$$

问题的数学形式可以写成:

$$\max f=\frac{\sum_{i=1}^{8}c_ix_i}{\sum_{i=1}^{8}x_i}$$

$$\begin{cases}x_1+x_2=1\\ x_6+x_7+x_8\geqslant 1\\ x_1+x_4+x_6\leqslant 0\\ x_2+x_6=1\\ x_i=0\text{ 或}1,\quad i=1,2,\ldots,8\end{cases}$$

3 分支定界法

$$\min f=-5x_1+x_2-2x_3+5$$

$$\begin{cases}-2x_1+x_2-x_3+x_4=7/2 & (*)\\ 2x_1+x_2+x_3+x_5=2 & (**)\\ x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,5\\ x_3,x_4\text{ 为整数}\end{cases}$$

解: 由 (**) 知 x_3 可取值为 0,1,2.

(1) 当 $x_3=2$ 时, 由 (**) 知 $x_1=x_2=x_5=0$, 故由 (*) 知 $x_4=9/2$ 不是整数, 不符合题意.

(2) 当 $x_3=1$ 时, 原问题可以化为

$$\min f=-5x_1+x_2+3$$

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_4=9/2\\ 2x_1+x_2+x_5=1\\ x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,4,5\\ x_4\text{ 为整数}\end{cases}$$

进一步,

$$\min f=-3x_1-x_4+15/2$$

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_4=9/2\\ -4x_1+x_4-x_5=7/2\\ 2x_1+x_2+x_5=1\\ x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,4,5\\ x_4\text{ 为整数}\end{cases}$$

由此，

$$\min f = -3x_1 - x_4 + 15/2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_4 \leqslant 9/2 \\ -4x_1 + x_4 \geqslant 7/2 \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 1 \\ x_4 \text{ 为正整数} \end{cases}$$

对于上述问题的松弛问题, 利用图解法求出可行域, 如图1所示. 其中, 紫色区域为松弛问题可行域, 点 A 为满足约束条件的最优解. 此时 $\mathbf{x} = (3/8, 1/4, 1, 5, 0)$, $f_{min} = 11/8$.

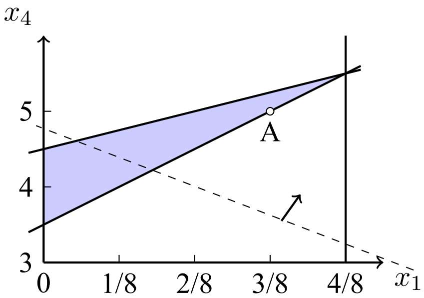

Figure 1: $x_3 = 1$ 时可行域示意图

(3) 当 $x_3 = 0$ 时, 同理可得

$$\min f = -3x_1 - x_4 + 17/2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_4 \leqslant 7/2 \\ -4x_1 + x_4 \geqslant 3/2 \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 1 \\ x_4 \text{ 为正整数} \end{cases}$$

对于上述问题的松弛问题, 利用图解法求出可行域, 如图2所示. 其中, 紫色区域为松弛问题可行域, 点 A 为满足约束条件的最优解. 此时 $\mathbf{x} = (7/8, 1/4, 0, 5, 0)$, $f_{min} = 7/8$.

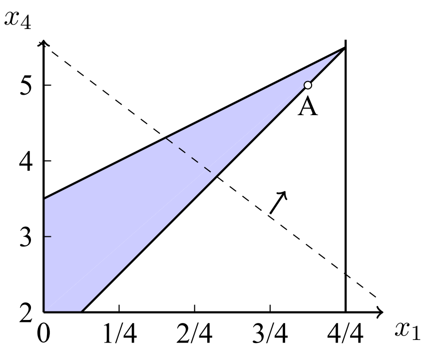

Figure 2: $x_3 = 0$ 时可行域示意图

综上, 最优解为 $\mathbf{x} = (7/8, 1/4, 0, 5, 0)$, 最优值为 $f_{min} = 7/8$.

4 割平面法

(1)

$$\max f = 2x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ x_1 - 4x_2 \leqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \text{且全为整数} \end{cases}$$

解: 首先, 引入松弛变量, 化为标准形式:

$$\min f' = -2x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \text{且全为整数} \\ x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

利用单纯形法求得最优基为 $\mathbf{B} = (\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2})$, 对应的单纯形表为表1.

Table 1: 第四题 (1) 单纯形表 1

		x_1	x_2	x_3	x_4
f'	-56/5	0	0	-9/5	-1/5
x_2	4/5	0	1	1/5	-1/5
x_1	26/5	1	0	4/5	1/5

则割平面为:

以 f 为源行: $\frac{1}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 \geqslant \frac{4}{5}$

以 x_1 为源行: $\frac{1}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 \geqslant \frac{4}{5}$

以 x_2 为源行: $\frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \geqslant \frac{1}{5}$

前两个割平面完全相同, 割平面等价于:

$$\begin{cases} x_1 \leqslant 5 \\ x_1 - 3x_2 \leqslant 2 \end{cases}$$

引入松弛变量 $s_1, s_2 \geqslant 0$, 得到单纯形表2. 进一步可得单纯形表3.

至此, 得 $x_1 = 5, x_2 = 1, f'_{min} = -11$. 故原问题最优解 $x_1 = 5, x_2 = 1, f_{max} = 11$.

Table 2: 第四题 (1) 单纯形表 2

		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2
f'	-56/5	0	0	-9/5	-1/5	0	0
x_2	4/5	0	1	1/5	-1/5	0	0
x_1	26/5	1	0	4/5	1/5	0	0
s_1	5	1	0	0	0	1	0
s_2	2	1	-3	0	0	0	1

Table 3: 第四题 (1) 单纯形表 3

		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2
f	-11	0	0	-7/4	0	0	-1/4
x_2	1	0	1	1/4	0	0	-1/4
x_1	5	1	0	3/4	0	0	1/4
s_1	0	0	0	3/4	0	1	-1/4
s_2	1	0	0	1/4	1	0	-5/4

(2)

$$\max f = 4x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \\ x_1 + 4x_2 \leqslant 11 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \text{且全为整数} \end{cases}$$

解: 首先, 引入松弛变量, 化为标准形式:

$$\min f' = -4x_1 - 5x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 11 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \text{且全为整数} \\ x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

利用单纯形法求得最优基为 $\mathbf{B} = (\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2})$, 对应的单纯形表为表1. 则割平面为:

Table 4: 第四题 (2) 单纯形表 1

		x_1	x_2	x_3	x_4
f'	-187/10	0	0	-11/10	-7/10
x_1	9/5	1	0	2/5	-1/5
x_2	23/10	0	1	-1/10	3/10

以 f 为源行: $3x_3 + x_4 \geqslant 1$

以 x_1 为源行: $x_3 + 2x_4 \geqslant 2$

以 x_2 为源行: $3x_3 + x_4 \geqslant 1$.

第 3 个式子和第 1 个等价, 割平面等价于:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \end{cases}$$

引入松弛变量 $s_1, s_2 \geqslant 0$, 得到单纯形表5.

Table 5: 第四题 (2) 单纯形表 2

		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2
f'	-187/10	0	0	-11/10	-7/10	0	0
x_1	9/5	1	0	2/5	-1/5	0	0
x_2	23/10	0	1	-1/10	3/10	0	0
s_1	4	1	1	0	0	1	0
s_2	6	1	2	0	0	0	1

Table 6: 第四题 (2) 单纯形表 3

		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2
f'	-18	0	0	-3/4	0	0	-7/4
x_1	2	1	0	1/2	0	0	-1/2
x_2	2	0	1	-1/4	0	0	3/4
s_1	0	0	0	-1/4	0	1	-1/4
x_4	1	0	0	1/2	1	0	-5/2

进一步可得单纯形表6. 至此, 得 $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 1, f'_{min} = -18$. 故原问题最优解 $x_1 = 2, x_2 = 2, f_{max} = 18$.