

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی  
دانشکده مهندسی برق - کروده مهندسی کنترل

عنوان

نمونه سوال

سیستم‌های فاری

نگارش

محمد جواد احمدی

استاد درس

دکتر مهدی علیاری شوره‌دلی

# فهرست مطالب

ب

## فهرست شکل‌ها

	پاسخ سوالات
۱	سوال ۹-۶ .....
۱	حل دستی - قسمت اول
۱	شبيه‌سازی - قسمت اول
۴	حل دستی - قسمت دوم
۷	شبيه‌سازی - قسمت دوم
۱۰	سوال ۱۰-۲ .....
۱۲	حل دستی .....
۱۵	شبيه‌سازی .....
۱۸	سوال ۱۰-۵ .....
۲۱	سوال ۱۰-۷ .....
۲۱	حل دستی .....
۲۳	شبيه‌سازی .....

# فهرست شکل‌ها

۱	محیط جدید فازی متلب .....	۱
۲	رسم توابع تعلق در سوال ۹-۶ .....	۲
۶	تنظیمات جعبه‌ابزار فازی برای قسمت اول سوال ۹-۶ .....	۳
۷	نتایج جعبه‌ابزار فازی برای قسمت اول سوال ۹-۶ .....	۴
۷	نتایج جعبه‌ابزار جدید فازی برای قسمت اول سوال ۹-۶ .....	۵
۸	امکانات تبدیلی جعبه‌ابزار جدید فازی برای قسمت اول سوال ۹-۶ .....	۶
۸	دستورات متلب و پایتون سوال ۹-۶ و نتایج آن‌ها .....	۷
۱۱	تنظیمات و نتایج جعبه‌ابزار فازی برای قسمت دوم سوال ۹-۶ .....	۸
۱۱	تنظیمات و نتایج جعبه‌ابزار جدید فازی برای قسمت دوم سوال ۹-۶ .....	۹
۱۶	دستورات متلب و پایتون سوال ۱۰-۲ و نتایج آن‌ها .....	۱۰
۱۶	دستورات متلب و پایتون سوال ۱۰-۲ و نتایج آن‌ها (تابع تعلق گاوی) .....	۱۱
۱۷	دستورات پایتون و نتایج پیاده‌سازی سوال ۱۰-۲ با توابع تعلق کمتر .....	۱۲
۲۴	دستورات متلب و پایتون سوال ۱۰-۷ و نتایج آن‌ها .....	۱۳
۲۴	دستورات پایتون سوال ۱۰-۷ و نتایج آن‌ها (تابع تعلق گاوی) .....	۱۴

# پاسخ سوالات

## نکات قابل ذکر

نرم افزار متلب در آخرین نسخه خود، محیطی جدید و با امکانات متنوع، برای منطق فازی باز طراحی کرده است که شرح آن در شکل ۱ آورده شده است. این محیط امکان پیاده سازی و تبدیل سیستم های استنتاج ممداňی و سوگنو و همچنین فازی نوع يک و دو را به کاربر می دهد.

### Version History

Introduced in R2014b

✓ **R2022b:** Redesigned Fuzzy Logic Designer App 

The redesigned app streamlines workflows for interactively building fuzzy inference systems. Using the updated app, you can:

- Design both Mamdani and Sugeno fuzzy inference systems
- Design fuzzy inference systems with either type-1 or type-2 membership functions

```
>> fuzzy
Warning: fuzzy will be removed in a future release. Use the fuzzyLogicDesigner instead.
> In fuzzy \(line 599\)
>> fuzzyLogicDesigner
```

شکل ۱: محیط جدید فازی متلب.

## سوال ۹-۶

### حلّ دستی - قسمت اول:

سیستمی فازی و دوورودی-تک خروجی را با دو قاعدة اگر-آنگاه زیر در نظر می‌گیریم:

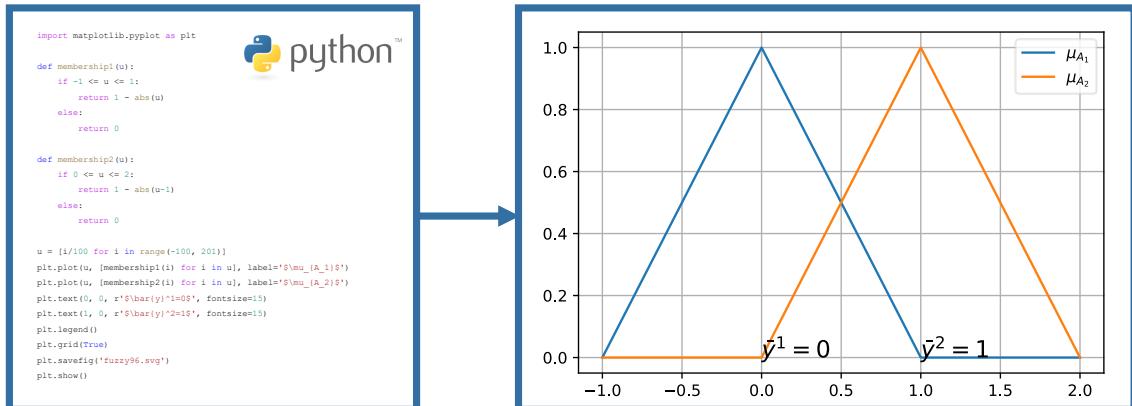
- اگر  $x_1$  و  $A_2$  باشد؛ آنگاه  $y$ ،  $A_1$  است.

- اگر  $x_1$ ,  $x_2$  و  $A_1$ ,  $A_2$  باشد؛ آنگاه  $y$ ,  $A_2$  است.

که با توجه به روابط آورده شده ذیل پایگاه قواعد بالا در فصل هشتم کتاب، مراکز مجموعه های فازی  $A_1$  و  $A_2$  را به صورت  $\bar{y}^1 = 1$ ,  $\bar{y}^2 = 1$  در نظر می گیریم و تابع تعلقشان به صورت تعريف می کنیم. با استفاده از دستورات آورده شده در شکل ۲ تابع تعلق را رسم می کنیم و در همان شکل ۲ نشان می دهیم.

$$\mu_{A_1}(u) = \begin{cases} 1 - |u| & -1 \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

$$\mu_{A_2}(u) = \begin{cases} 1 - |u - 1| & 0 \leq u \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



شکل ۲: دستورات پایتون برای رسم تابع تعلق در سوال ۹-۶ و نتایج آنها.

از طرف دیگر، موتور استنتاج حاصل ضرب از رابطه ۲ محاسبه می شود ( $M$  تعداد قواعد و  $n$  تعداد متغیرهای فازی ورودی به موتور استنتاج است). این رابطه به این معناست که با داشتن مجموعه فازی  $A'$  در  $U$ ، موتور استنتاج مجموعه فازی  $B'$  را در  $V$  می دهد.

$$\mu_{B'}(y) = \max_{i=1}^M \left[ \sup_{x \in U} \left( \mu_{A'}(x) \prod_{l=1}^n \mu_{A'_i}(x_i) \mu_{B'}(y) \right) \right] \quad (2)$$

در صورتی که مجموعه فازی  $A'$  یک مجموعه فازی منفرد با تابع تعلق موجود در رابطه ۳ زیر تعريف شود که در آن  $x^*$  یک نقطه در  $[-1, 2] \times [-1, 2] = U$  باشد، موتور استنتاج حاصل ضرب به شکلی که در رابطه ۴

آورده شده است، ساده می‌شود.

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 1 & x = x^* \\ 0 & x \neq x^* \end{cases} \quad (3)$$

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1}^M \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i^*) \mu_{B^l}(y) \right] \quad (4)$$

غیرفازی‌ساز ماکزیمم هم به صورت نقطه‌ای در  $B' = hgt(B')$  تعریف می‌شود که در آن  $hgt(B')$  مجموعه تمام نقاطی از مجموعه  $V$  است که در آن‌ها  $\mu_{B'}(y)$  به بیشینه مقدارش می‌رسد:

$$hgt(B') = \left\{ y \in V \mid \mu_{B'}(y) = \sup_{y \in V} \mu_{B'}(y) \right\} \quad (5)$$

این غیرفازی‌ساز، نقطه  $y^*$  را به صورت عضوی دلخواه از  $B'$  تعریف می‌کند. در ادامه می‌نویسیم:

$$\sup_{y \in V} \mu_{B'}(y) = \sup_{y \in V} \max_{l=1}^M \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i^*) \mu_{B^l}(y) \right] \quad (6)$$

بر مبنای طبیعی بودن  $B^l$  و قابل تعویض بودن  $\max_{l=1}^M$  و  $\sup_{y \in V}$  می‌نویسیم (پایگاه قواعد فازی دو قانون دارد؛ پس  $M = 1, 2$  و  $l^* \in \{1, 2\}$  دارد):

$$\begin{aligned} \sup_{y \in V} \mu'_{B'}(y) &= \max_{l=1}^M \left[ \sup_{y \in V} \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i^*) \mu_B^l(y) \right] \\ &= \max_{l=1}^M \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i^*) \right] = \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l^*}}(x_i^*) \end{aligned} \quad (7)$$

در این مسئله به ازای ورودی‌های مختلف از  $x_i^*$  پارامتر  $l^*$  بین یکی از مقادیر یک و دو تغییر می‌کند. می‌نویسیم:

$$\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^*}(x_i^*) \geq \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^1}(x_i^*) \quad (8)$$

$$\mu_{B'}(\bar{y}^{l^*}) = \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{r^*}}(x_i^*) \quad (9)$$

مشاهده می‌شود که  $\sup_{y \in V} \mu_{B'}(y) = \bar{y}^{l^*}$  در نقطه  $y = \bar{y}^{l^*}$  به دست می‌آید و با بهره‌گیری از غیرفازی‌ساز ماکزیمم سیستم فازی  $f_1(x) = \bar{y}^{l^*}$  به صورت  $f_1(x) = \bar{y}^{l^*}$  خواهد بود. بنابراین، سیستم‌های فازی به صورت توابع تکه‌ای ثابت هستند و مقادیر ثابت، مراکز توابع تعلق در بخش «آنگاه» پایگاه قواعد فازی هستند.

### شبیه‌سازی - قسمت اول:

در ادامه برای به وجود آمدن درکی بهتر و امکان شبیه‌سازی کارآمد فرض می‌کنیم ورودی سیستم فازی همان ورودی آورده شده در مثال ۲-۸؛ یعنی،  $(x_1^*, x_2^*) = (0.3, 0.6)$  باشد. درنتیجه، داریم:

$$\begin{aligned} \sup_{y \in V} \mu_{B'}(y) &= \max_{l=1}^M \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i^*) \right] \\ &= \max \left[ \mu_{A_1^1}(x_1^*) \mu_{A_2^1}(x_2^*), \mu_{A_1^2}(x_1^*) \mu_{A_2^2}(x_2^*) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

طبق رابطه ۱، داریم:

$$\begin{aligned} \mu_{A_1^1}(x_1^*) &= \mu_{A_1}(0.3) = 0.7 \\ \mu_{A_2^1}(x_2^*) &= \mu_{A_2}(0.6) = 0.8 \\ \mu_{A_1^2}(x_1^*) &= \mu_{A_1}(0.3) = 0.7 \\ \mu_{A_2^2}(x_2^*) &= \mu_{A_2}(0.6) = 0.8 \end{aligned} \quad (11)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sup_{y \in V} \mu_{B'}(y) &= \max \left[ \mu_{A_1^1}(x_1^*) \mu_{A_2^1}(x_2^*), \mu_{A_1^2}(x_1^*) \mu_{A_2^2}(x_2^*) \right] \\ &= \max [0.7 \times 0.8, 0.7 \times 0.8] = 0.7 \times 0.8 = 0.56 \end{aligned} \quad (12)$$

از رابطه ۱۲ نتیجه می شود که  $\sup_{y \in V} \mu_{B'}(y) = \mu_{A'_1}(x_1^*) \mu_{A'_2}(x_2^*)$  باعتراف می شود و بنابراین:  $l' = 1$ . در نتیجه سیستم فازی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$f_1(x) = \bar{y}^{l^*} = \bar{y}^1 = \circ \quad (13)$$

حال اگر فرض کنیم ورودی سیستم فازی  $(x_1^*, x_2^*) = (1/2, -0/3)$  باشد، داریم:

$$\begin{aligned} \sup_{y \in V} \mu_{B'}(y) &= \max_{l=1}^M \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i^*) \right] \\ &= \max \left[ \mu_{A'_1}(x_1^*) \mu_{A'_2}(x_2^*), \mu_{A'_2}(x_1^*) \mu_{A'_1}(x_2^*) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

طبق رابطه ۱، داریم:

$$\begin{aligned} \mu_{A'_1}(x_1^*) &= \mu_{A_1}(1/2) = \circ \\ \mu_{A'_2}(x_1^*) &= \mu_{A_2}(-0/3) = \circ \\ \mu_{A'_1}(x_2^*) &= \mu_{A_1}(1/2) = \circ \wedge \\ \mu_{A'_2}(x_2^*) &= \mu_{A_2}(-0/3) = \circ \vee \end{aligned} \quad (15)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sup_{y \in V} \mu_{B'}(y) &= \max \left[ \mu_{A'_1}(x_1^*) \mu_{A'_2}(x_2^*), \mu_{A'_2}(x_1^*) \mu_{A'_1}(x_2^*) \right] \\ &= \max [\circ \times \circ, \circ \wedge \times \circ \vee] = \circ \wedge \times \circ \vee = \circ .56 \end{aligned} \quad (16)$$

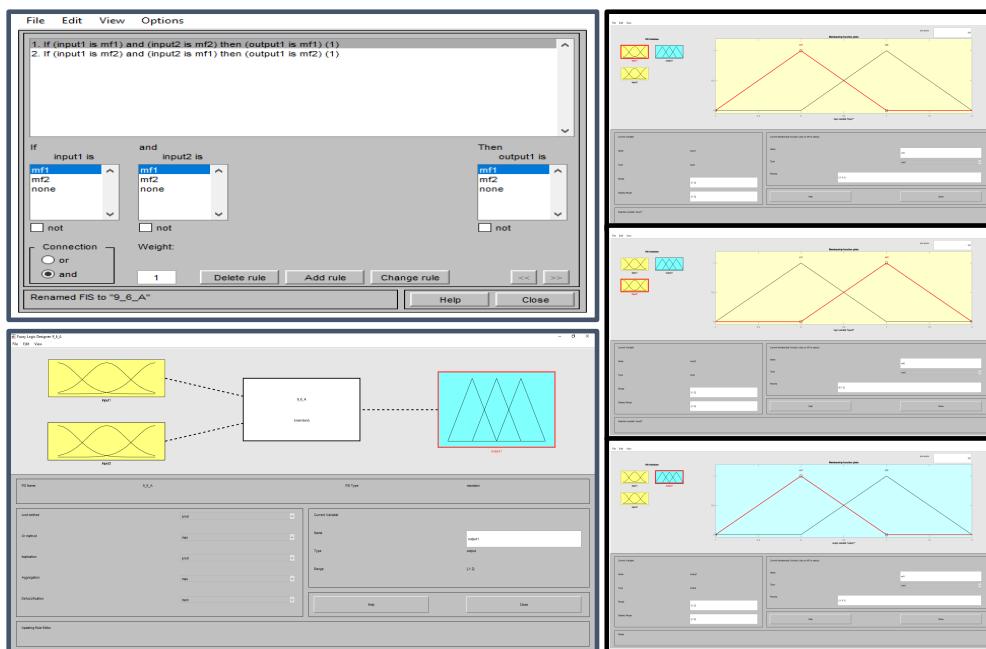
از رابطه ۱۲ نتیجه می شود که  $\sup_{y \in V} \mu_{B'}(y) = \mu_{A'_1}(x_1^*) \mu_{A'_2}(x_2^*)$  باعتراف می شود و بنابراین:  $l' = 2$ . در نتیجه سیستم فازی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$f_1(x) = \bar{y}^{l^*} = \bar{y}^2 = 1 \quad (17)$$

بنابراین، همان طور که نشان داده شد، خروجی سیستم فازی با تغییر  $\{1, 2\} \in l^*$  از مقداری به مقدار دیگر، فقط بین مقداری صفر و یک و به صورت گسسته تغییر می کند.

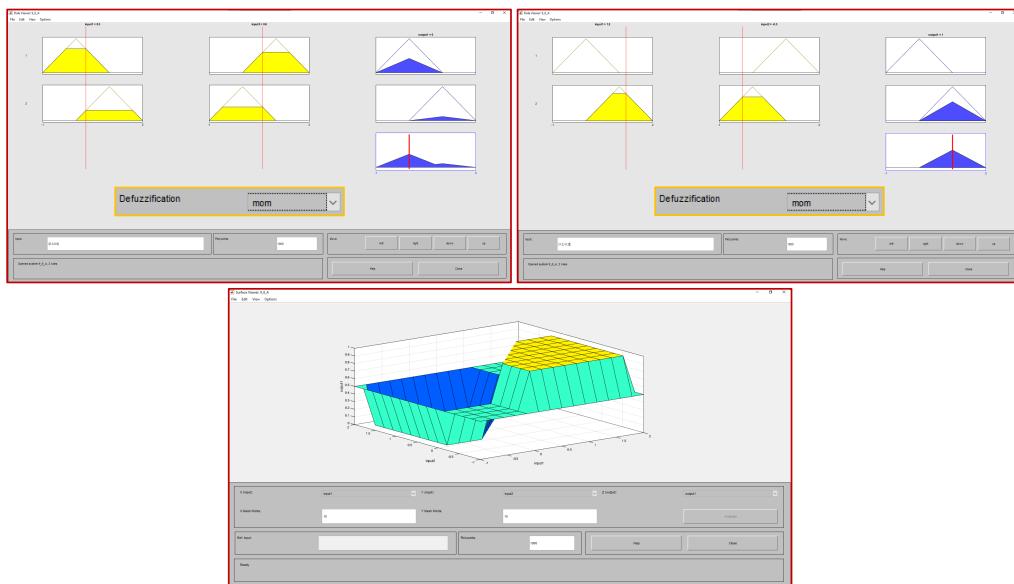
در ادامه، برای بررسی صحت محاسبات، یک پیاده سازی با استفاده از جعبه ابزار فازی متلب انجام

دادیم که با نام 9\_6\_A.fis در پوشۀ مربوط به این سوال قابل دسترسی است. قوانین، توابع تعلق و موتور استنتاج تنظیم شده برای شبیه‌سازی این سوال در شکل ۳ و نتایج آن برای دو ورودی بروزی شده در بالا در شکل ۴ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که نتایج به دست آمده در شبیه‌سازی بر نتایج محاسبه شده به صورت دستی منطبق است. با توجه به هشدار متلب مبنی بر حذف دستور مربوط به این جعبه‌ابزار در نسخه آینده متلب (شکل ۱)، از پیشنهاد جدید متلب استفاده کرده و همین پیاده‌سازی را در محیطی دیگر نیز انجام می‌دهیم. نتیجه مربوط به این پیاده‌سازی در 9\_6\_f1.fis آورده شده و در شکل ۵ نشان داده شده است. این جعبه‌ابزار قابلیت‌هایی از قبیل تبدیل سریع موتورهای استنتاج به یکدیگر و تبدیل فازی نوع اول به نوع دوم و غیره را دارد که نمونه‌ای از عمل کرد این بخش‌های هم در شکل ۶ نشان داده شده است.

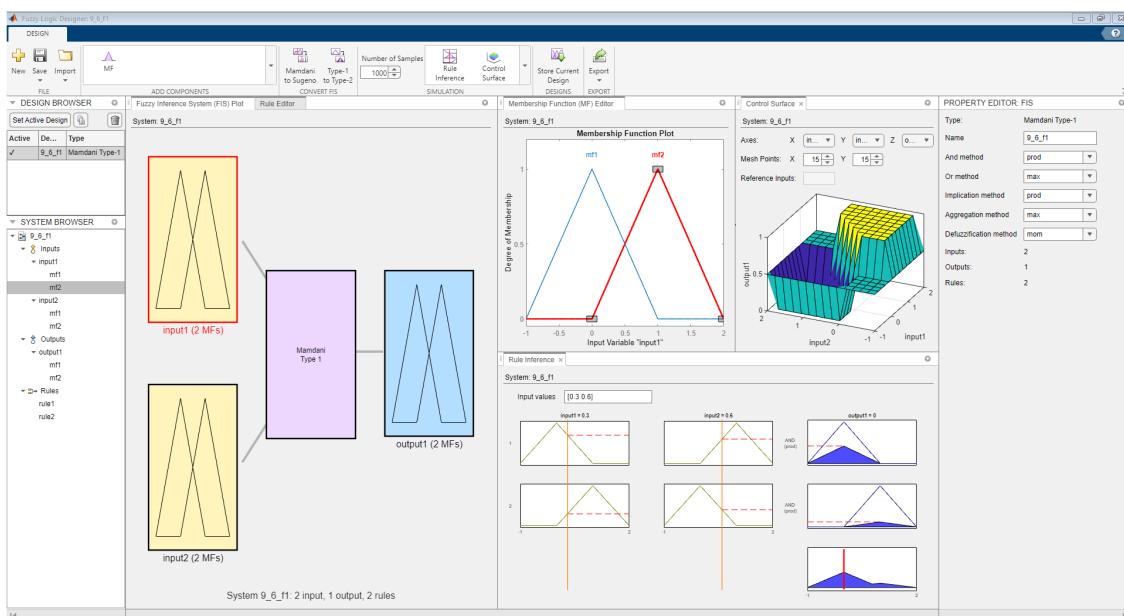


شکل ۳: تنظیمات جعبه‌ابزار فازی برای قسمت اول سوال ۹-۶.

علاوه بر این‌ها اسکریپت‌هایی را برای ترسیم سیستم فازی در این قسمت نوشته‌ایم. نمایی از این دستورات در شکل ۷ آورده شده است و دستورات پایتون مربوط به این سوال، علاوه بر پوشۀ‌های موجود در فایل فشرده در [این پیوند](#) نیز قابل دسترسی است.



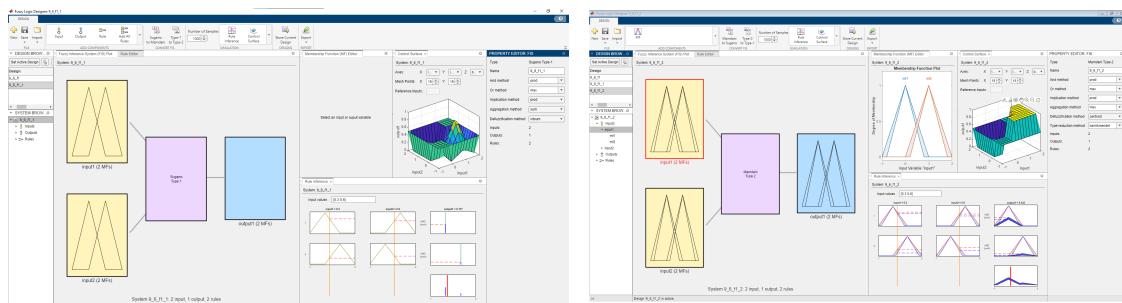
شکل ۴: نتایج جعبه‌ابزار فازی برای قسمت اول سوال ۹-۶



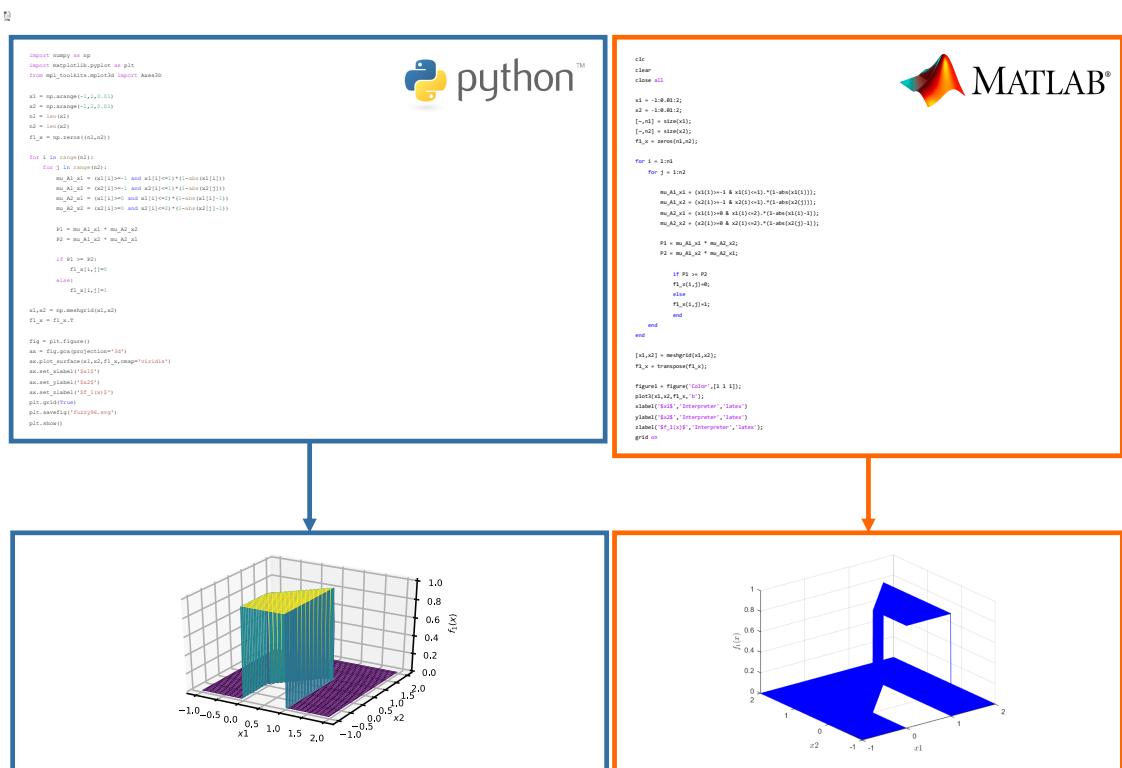
شکل ۵: نتایج جعبه‌ابزار جدید فازی برای قسمت اول سوال ۹-۶

## حل دستی - قسمت دوم:

حال در ادامه می‌دانیم که سیستم‌های فاری  $f_1(x)$  و  $f_2(x)$  مشابه یکدیگر هستند، با این تفاوت که در بخش غیرفازی‌ساز به جای ماکریزم از میانگین مرکز با رابطه  $y^* = \frac{\sum_{l=1}^M y_l w_l}{\sum_{l=1}^M w_l}$  استفاده می‌شود که در آن  $y^l$  مرکز مجموعه فازی  $w_l$  و  $w_l$  میزان ارتفاع آن است. با در نظر گرفتن فازی‌ساز منفرد، موتور استنتاج حاصل ضرب



شکل ۶: امکانات تبدیلی جعبه‌ابزار جدید فازی برای قسمت اول سوال ۹-۶.



شكل ٧: دستورات متلب و پایتون سوال ٦-٩ و نتایج آنها.

به صورت زیر خواهد بود:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1}^M \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i^*) \mu_{B^l}(y) \right] \quad (\text{18})$$

ہم چنین می دانیم:

$$w_l = \mu_{B'}(\bar{y}^l) = \max_{l=1}^M \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i^*) \mu_{B^l}(\bar{y}^l) \right] = \max_{l=1}^M \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i^*) \right] \quad (19)$$

در نهایت سیستم فازی را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$f_{\gamma}(x) = y^* = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i^*) \right]}{\sum_{l=1}^M \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i^*) \right]} \quad (20)$$

حال اگر ورودی سیستم فازی  $(x_1^*, x_2^*) = (0.6, 0.3)$  باشد؛ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f_{\gamma}(x) = y^* &= \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i^*) \right]}{\sum_{l=1}^M \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i^*) \right]} \\ &= \frac{\bar{y}^1 \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^1}(x_i^*) \right] + \bar{y}^2 \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^2}(x_i^*) \right]}{\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^1}(x_i^*) + \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^2}(x_i^*)} \end{aligned} \quad (21)$$

با توجه به  $\bar{y}^1 = 1, \bar{y}^2 = 0$  می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} f_{\gamma}(x) = y^* &= \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^1}(x_i^*)}{\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^1}(x_i^*) + \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^2}(x_i^*)} \\ &= \frac{\mu_{A_1^1}(x_1^*) \mu_{A_2^1}(x_2^*)}{\mu_{A_1^1}(x_1^*) \mu_{A_2^1}(x_2^*) + \mu_{A_1^2}(x_1^*) \mu_{A_2^2}(x_2^*)} \end{aligned} \quad (22)$$

طبق رابطه ۱، داریم:

$$\begin{aligned} \mu_{A_1^1}(x_1^*) &= \mu_{A_1}(0.3) = 0.7 \\ \mu_{A_2^1}(x_2^*) &= \mu_{A_2}(0.6) = 0.8 \\ \mu_{A_1^2}(x_1^*) &= \mu_{A_1}(0.3) = 0.7 \\ \mu_{A_2^2}(x_2^*) &= \mu_{A_2}(0.6) = 0.8 \end{aligned} \quad (23)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f_{\gamma}(x) = y^* &= \frac{\mu_{A_1^1}(x_1^*) \mu_{A_2^1}(x_2^*)}{\mu_{A_1^1}(x_1^*) \mu_{A_2^1}(x_2^*) + \mu_{A_1^2}(x_1^*) \mu_{A_2^2}(x_2^*)} \\ &= \frac{0.7 \times 0.8}{0.7 \times 0.8 + 0.7 \times 0.8} = 0.5 \end{aligned} \quad (24)$$

حال اگر ورودی سیستم فازی  $(x_1^*, x_2^*) = (0.7, 0.7)$  باشد؛ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f_2(x) = y^* &= \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i^*) \right]}{\sum_{l=1}^M \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i^*) \right]} \\ &= \frac{\bar{y}^1 \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^1}(x_i^*) \right] + \bar{y}^2 \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^2}(x_i^*) \right]}{\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^1}(x_i^*) + \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^2}(x_i^*)} \end{aligned} \quad (25)$$

با توجه به  $\bar{y}^1 = 1, \bar{y}^2 = 0$  می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} f_2(x) = y^* &= \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^2}(x_i^*)}{\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^1}(x_i^*) + \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^2}(x_i^*)} \\ &= \frac{\mu_{A_1^2}(x_1^*) \mu_{A_2^2}(x_2^*)}{\mu_{A_1^1}(x_1^*) \mu_{A_2^1}(x_1^*) + \mu_{A_1^2}(x_1^*) \mu_{A_2^2}(x_2^*)} \end{aligned} \quad (26)$$

طبق رابطه ۱، داریم:

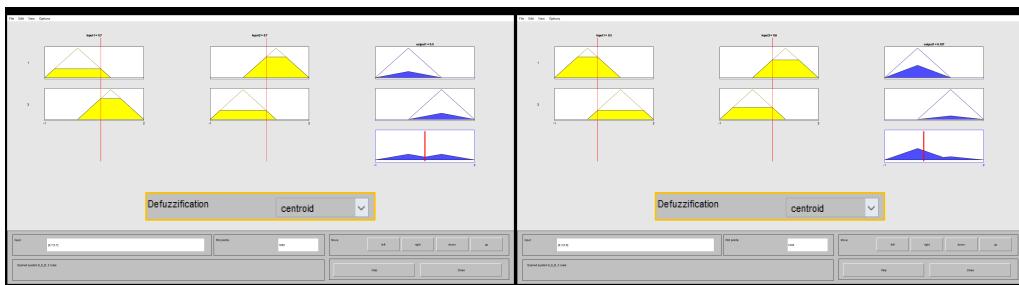
$$\begin{aligned} \mu_{A_1^1}(x_1^*) &= \mu_{A_1}(0.7) = 0.3 \\ \mu_{A_2^1}(x_2^*) &= \mu_{A_2}(0.7) = 0.7 \end{aligned} \quad (27)$$

بنابراین خواهیم داشت:

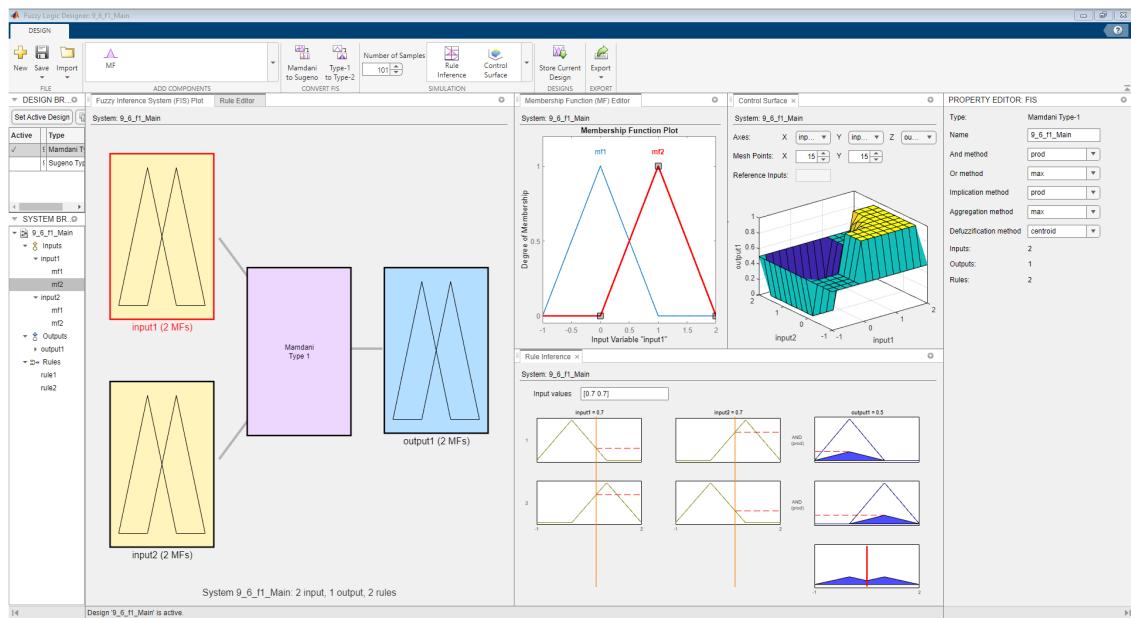
$$\begin{aligned} f_2(x) = y^* &= \frac{\mu_{A_1^2}(x_1^*) \mu_{A_2^2}(x_2^*)}{\mu_{A_1^1}(x_1^*) \mu_{A_2^1}(x_2^*) + \mu_{A_1^2}(x_1^*) \mu_{A_2^2}(x_2^*)} \\ &= \frac{0.3 \times 0.7}{0.3 \times 0.7 + 0.3 \times 0.7} = 0.5 \end{aligned} \quad (28)$$

## شبیه‌سازی - قسمت دوم:

برای بررسی صحت محاسبات، یک پیاده‌سازی با استفاده از جعبه‌ابزار فازی متلب انجام دادیم که با نام 9\_B.fis در پوشهٔ مربوط به این سوال قابل دسترسی است. قوانین، توابع تعلق و موتور استنتاج تنظیم شده برای شبیه‌سازی این سوال در شکل ۸ و نتایج آن برای دو ورودی بررسی شده در بالا در شکل ۸ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که نتایج به دست آمده در شبیه‌سازی بر نتایج محاسبه شده به صورت دستی منطبق است. در ادامه، از پیشنهاد جدید متلب استفاده کرد و همین پیاده‌سازی را در محیطی دیگر نیز انجام می‌دهیم. نتیجهٔ مربوط به این پیاده‌سازی در 9\_f2.fis آورده شده و در شکل ۹ نشان داده شده است.



شکل ۸: تنظیمات و نتایج جعبه‌ابزار فازی برای قسمت دوم سوال ۹-۶.



شکل ۹: تنظیمات و نتایج جعبه‌ابزار جدید فازی برای قسمت دوم سوال ۹-۶.

### توضیح پوشۀ کدها

دو زیرپوشۀ در پوشۀ اصلی این سوال (Q1\_9\_6) درنظر گرفته شده است. پوشۀ 2\_Script حاوی کدهای متلب و پایتون مربوط به رسم توابع فازی است. پوشۀ 1\_Toolbox حاوی خروجی جعبه‌ابزارهای قدیمی و جدید فازی است. نمادهای A و f1 در نامگذاری فایل‌ها به ترتیب به پیاده‌سازی قسمت اول سوال در محیط‌های قدیمی و جدید، و نمادهای B و f2 در نامگذاری فایل‌ها به ترتیب به پیاده‌سازی قسمت دوم سوال در محیط‌های قدیمی و جدید بازمی‌گردد.

سوال ۱۰-۲

## حل دستی:

فرض می‌کنیم که تابع  $(x)g$  روی مجموعهٔ بستهٔ  $\mathbb{R} = [\alpha, \beta] = [-1, 1]$  تعریف شود. ما می‌خواهیم سیستم فازی  $(x)f$  را طوری طراحی کنیم که تابع  $(x)g$  را با دقت  $1/\epsilon = 0^\circ$  تقریب بزند. بیان ریاضیاتی این موضوع به شرح رابطهٔ ۲۹ است.

$$\|g(x) - f(x)\|_\infty = \sup_{x \in U} |g(x) - f(x)| \leq \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_\infty h_1 + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_r} \right\|_\infty h_r \leq \epsilon \quad (\text{49})$$

حال برای طراحی سیستم فازی به صورت گام به گام پیش می‌رویم:  
**گام اول:** در این مثال، تعداد  $N$  مجموعهٔ فازی در بازهٔ  $\mathbb{R} \subset [-1, 1]$  به صورت  $A^1, \dots, A^N$  داریم که در نظر می‌گیریم به شکلی که: و با توابع تعلق مثلثی ( $\mu_{A^1}(x; a_1, b_1, c_1), \dots, \mu_{A^N}(x; a_N, b_N, c_N)$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} A^1 < A^2 < \dots < A^N \\ a_1 = b_1 = \alpha = -1 \\ b_N = c_N = \beta = 1 \end{array} \right. \quad (\text{P}_0)$$

اگر مرکز مجموعه فازی  $A^1$ ,  $e^1$  باشد داریم:  $\alpha = -1$  و اگر مرکز مجموعه فازی  $A^N$ ,  $e^N$  باشد داریم:  $\beta = 1$ . بقیه مراکز برای  $1 \leq j \leq N-1$  به صورت  $e^j = \alpha + h(j-1)$  خواهد بود. همچنین برای  $1 \leq k \leq N-1$  فرض می‌کنیم که  $a^{k+1} = b^k$  باشد.

گام دوم: حال قواعد اگر-آنگاه فازی را به صورت «اگر  $x$ ,  $A^i$  باشد آنگاه،  $y$ ,  $B^i$  است.» را به صورتی تشکیل می‌دهیم که در آن  $\#$  شماره قانون باشد. همچنین مرکز مجموعه‌های فازی  $B^i$  که به صورت  $\bar{y}^i$  نام‌گذاری می‌گردد از رابطه ۳۱ انتخاب می‌گردد.

$$\bar{y}^i = g(e^i) = \sin(e^i\pi) + \cos(e^i\pi) + \sin(e^i\pi)\cos(e^i\pi), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (31)$$

**گام سوم:** سیستم فازی  $(x, f)$  را با  $N$  قاعده آورده شده در رابطه ۳۱، موتور استنتاج ضرب، فازی ساز منفرد

و غیرفازی‌ساز میانگین مراکز تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^N \bar{y}^i [\mu_{A^i}(x)]}{\sum_{i=1}^N [\mu_{A^i}(x)]} \quad (32)$$

برای تعیین دقت تقریب سیستم فازی از این قضیه کمک می‌گیریم که اگر فرض کنیم  $f(x)$  سیستم فازی مطابق رابطه ۳۲ باشد و  $g(x)$  روی  $U = [\alpha, \beta]$  پیوسته و مشتق‌پذیر باشد؛ آنگاه داریم:

$$\|g(x) - f(x)\|_\infty = \sup_{x \in U} |g(x) - f(x)| \leq \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_\infty h \quad (33)$$

حال با توجه به رابطه ۲۹ می‌نویسیم:

$$\|g(x) - f(x)\|_\infty = \sup_{x \in U} |g(x) - f(x)| \leq \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_\infty h \leq \epsilon, \quad h = \max_{1 \leq j \leq N} |e^{j+1} - e^j| \quad (34)$$

با نظر به این که دقت تقریب  $\epsilon = 10^{-1}$  ذکر شده داریم:

$$h < \frac{\epsilon = 10^{-1}}{\left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_\infty} \quad (35)$$

در نتیجه، برای محاسبه  $h$ ،  $\left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_\infty$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_\infty = \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| = \sup_{x \in U} |\pi \cos(x\pi) - \pi \sin(x\pi) + \pi \cos(2x\pi)| \quad (36)$$

حال نیاز است تا  $x \in U = [-1, 1]$  را به گونه‌ای بیاییم که عبارت  $|\pi \cos(x\pi) - \pi \sin(x\pi) + \pi \cos(2x\pi)|$  را بیشینه کند. بنابراین، می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= -\pi^2 \sin(x\pi) - \pi^2 \cos(x\pi) - 2\pi^2 \sin(2x\pi) = \overset{\circ}{\xrightarrow{\div(-\pi^2)}} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \sin(x\pi) + \cos(x\pi) + 2 \sin(2x\pi) = \circ \end{aligned} \quad (37)$$

از روابط مثلثاتی داریم:

$$\sin(x\pi) + \cos(x\pi) = \sqrt{2} \sin\left(x\pi + \frac{\pi}{4}\right) \quad (38)$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \sqrt{2} \sin\left(x\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \sin(2x\pi) = 0 \\ \rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x\pi + \frac{\pi}{4}\right) &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(2x\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ \rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x\pi + \frac{\pi}{4}\right) &= 2 \cos\left(2x\pi + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (39)$$

با در نظر گرفتن رابطه مثلثاتی  $s = x\pi + \frac{\pi}{4}$  و تغییر متغیر  $s = x\pi + \frac{\pi}{4}$ ، معادله مرتبه دومی به شکل زیر به دست می آوریم:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 4 \sin^2(s) + \sqrt{2} \sin(s) - 2 = 0 \quad (40)$$

ریشه های رابطه ۴۰ را با استفاده از مطلب یا دستورات موجود در [این پیوند](#) محاسبه می کنیم. با اجرای دستورات نوشته شده و با توجه به بازه موجود، جواب های  $-1133^\circ$  و  $58^\circ$  برای  $s$  به دست می آیند. در نتیجه، برای  $x$  داریم:

$$x_1 = \frac{s_1 - \frac{\pi}{4}}{\pi} = -0.654, x_2 = \frac{s_2 - \frac{\pi}{4}}{\pi} = 0.6106 \quad (41)$$

از میان دو نقطه به دست آمده برای  $x$ ، بیشینه عبارت  $|\pi \cos(x\pi) - \pi \sin(x\pi) + \pi \cos(2x\pi)|$  در نقطه  $x = -0.654 \in [-1, 1]$  رخ می دهد:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right|_\infty &= \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| = \sup_{x \in U} \\ &\left| \pi \cos(-0.654\pi) - \pi \sin(-0.654\pi) + \pi \cos(2(-0.654)\pi) \right| = 6.596 \end{aligned} \quad (42)$$

بنابراین، با توجه به رابطه ۳۵ داریم:

$$\begin{aligned} h < \frac{\varepsilon}{\left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_\infty} &= \frac{0.1}{6.596} \\ h < 0.015 \end{aligned} \quad (43)$$

بنابراین، می توان  $h$  را معادل  $1^\circ$  در نظر گرفت. باید توجه داشت که هدف از به دست آوردن فاصله مرکزی

تابع تعلق ( $h$ )، تعیین تعداد توابع تعلق یا همان  $N$  است. حال با انتخاب  $1^{\circ} = h$  (با توجه به نتیجه رابطه ۴۳) داریم:

$$h = \frac{\beta - \alpha}{n} = \frac{1 - (-1)}{n} = \frac{2}{n} = 0^{\circ} 1 \rightarrow n = 200 \quad (44)$$

با توجه به این که  $200$  تقسیم در بازه  $[-1, 1]$  نیاز است ( $n = 200$ )،  $1^{\circ}$  تابع تعلق در بازه  $[-1, 1]$  خواهیم داشت ( $N = n + 1 = 201$ ). با توجه به این توضیحات،  $20$  مجموعه فازی با توابع تعلق مثلثی زیر تعریف می‌کنیم:

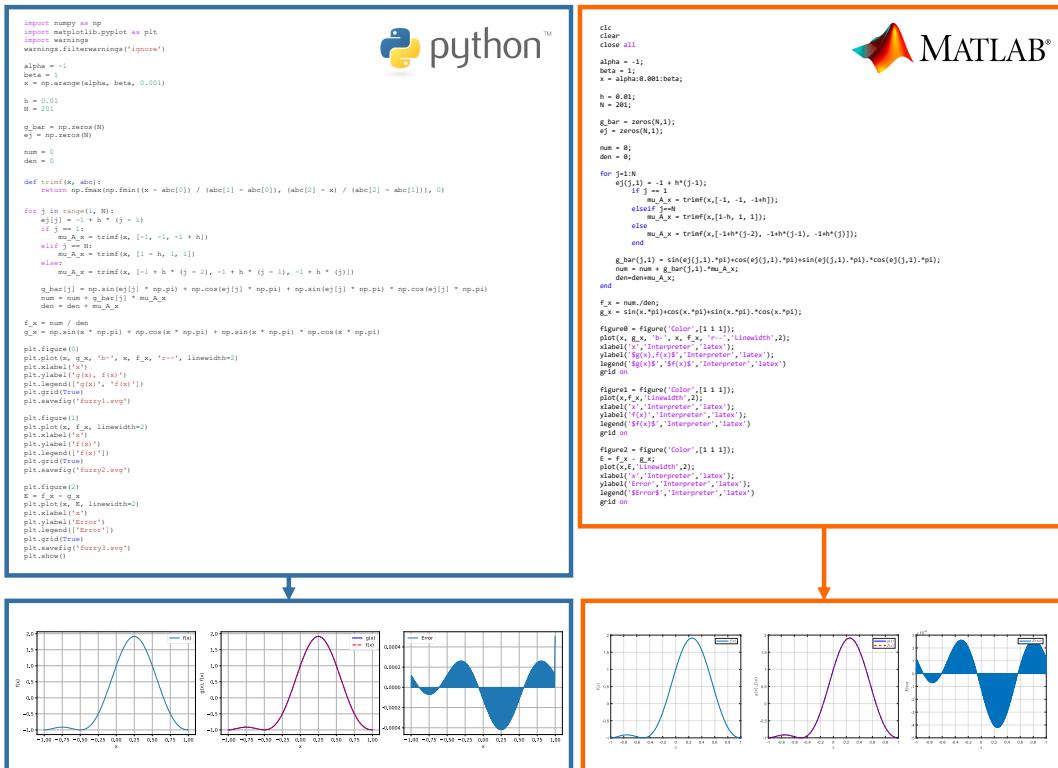
$$\begin{aligned} \mu_{A^1}(x) &= \mu_{A^1}(x; a_1, b_1, c_1) = \mu_{A^1}(x; -1, -1, -1 + h) \\ \mu_{A^j}(x) &= \mu_{A^j}(x; a_j, b_j, c_j) = \mu_{A^j}(x; e^{j-1}, e^j, e^{j+1}), \quad \begin{cases} j = 2, \dots, 200 \\ e^j = \alpha + h(j - 1) = -1 + 0^{\circ} 1(j - 1) \end{cases} \\ \mu_{A^{201}}(x) &= \mu_{A^{201}}(x; a_{201}, b_{201}, c_{201}) = \mu_{A^{201}}(x; 1 - h, 1, 1) \end{aligned} \quad (45)$$

حال سیستم فازی  $f(x)$  از روی  $1^{\circ}$  قاعده اگر-آنگاه فازی ساخته شده و به این صورت محاسبه می‌شود:

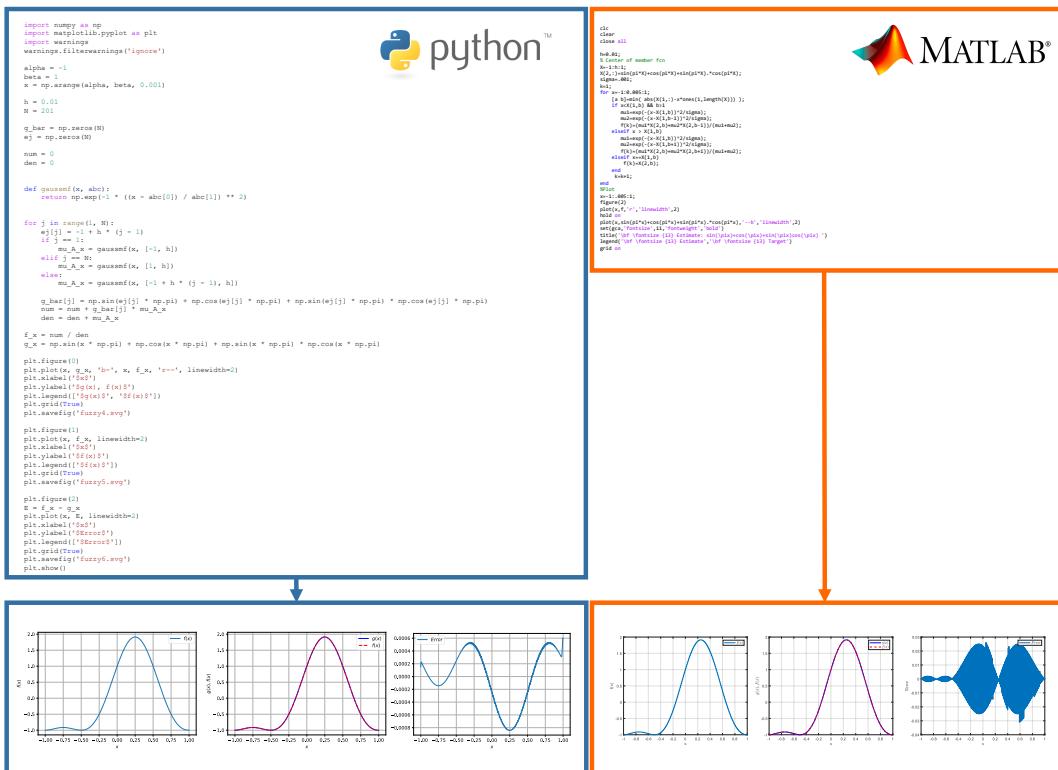
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sum_{i=1}^N \bar{y}^i [\mu_{A^i}(x)]}{\sum_{i=1}^N [\mu_{A^i}(x)]} = \frac{\sum_{i=1}^{201} g(e^i) [\mu_{A^i}(x)]}{\sum_{i=1}^{201} [\mu_{A^i}(x)]} \\ &= \frac{g(e^1) \mu_{A^1}(x) + g(e^2) \mu_{A^2}(x) + \dots + g(e^{201}) \mu_{A^{201}}(x)}{\mu_{A^1}(x) + \mu_{A^2}(x) + \dots + \mu_{A^{201}}(x)} \end{aligned} \quad (46)$$

شبیه‌سازی:

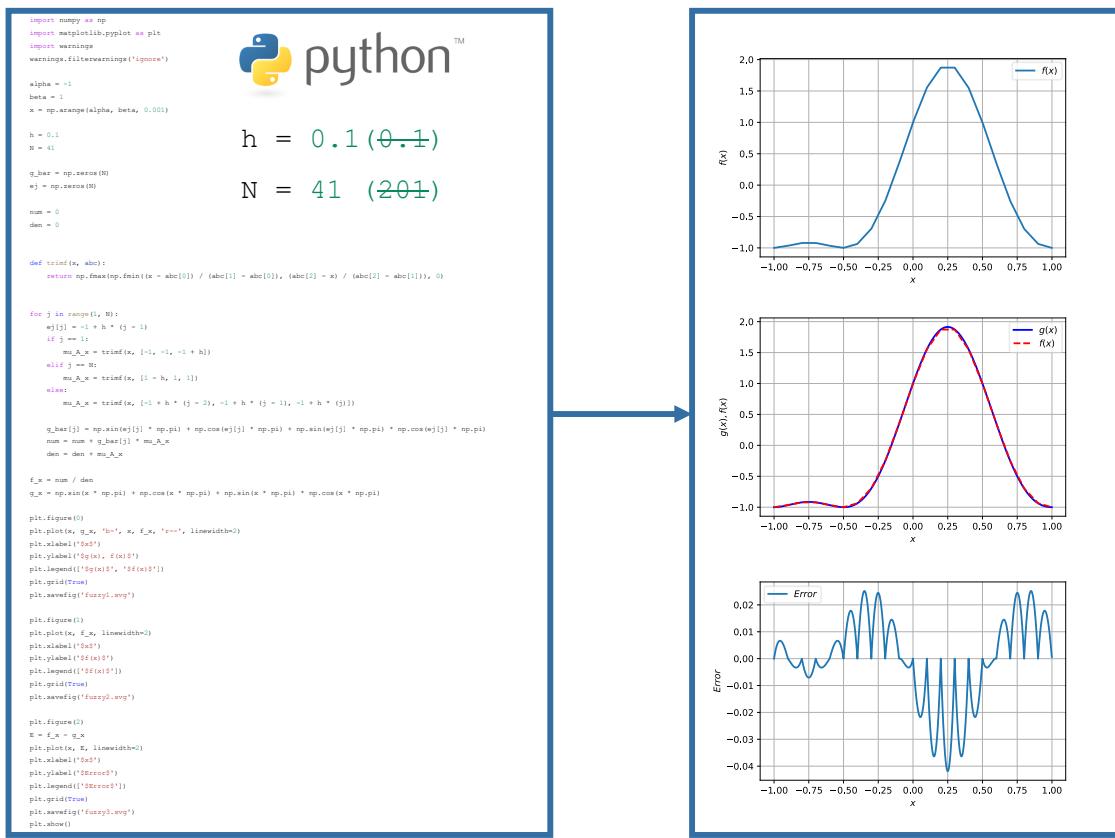
حال با توجه به محاسبات صورت گرفته، دستوراتی را برای بررسی تقریب فازی سیستم  $f(x)$  و بررسی میزان خطای آن در محیط‌های متلب و پایتون نوشتیم. نمایی از این دستورات در شکل ۱۰ آورده شده است و دستورات پایتون مربوط به این سوال، علاوه بر پوشش‌های موجود در فایل فشرده در [این پیوند](#) نیز قابل دسترسی است. همچنین اگر تابع تعلق را به جای مثلثی را به صورت گاوسی در نظر بگیریم دستورات و نتایج مرتبط با آن به صورتی می‌شود که در شکل ۱۱ نشان داده شده است. بررسی اثر کاهش تعداد توابع تعلق بر نتایج، در شکل ۱۲ و [این پیوند](#) آورده شده است. از مقایسه شکل ۱۰ و شکل ۱۲ مشاهده می‌گردد که با کاستن تعداد توابع تعلق مثلثی تا میزان یک‌پنجم، خطای حدوداً ده برابر شده است.



شكل ۱۰: دستورات متلب و پایتون سوال ۱۰-۲ و نتایج آنها.



شكل ۱۱: دستورات متلب و پایتون سوال ۱۰-۲ و نتایج آنها (تابع تعلق گاوی).



شکل ۱۲: دستورات پایتون و نتایج پیاده‌سازی سوال ۱۰-۲ با توابع تعلق کمتر.

### توضیح پوشۀ کدها

در پوشۀ اصلی این سوال (Q2\_10\_2)، فایل‌های متلب و پایتون مربوط به این سوال قرار گرفته‌اند. با توجه به تغییر نوع توابع تعلق در قسمت شبیه‌سازی دو نوع  $m$ -فایل متلب برای این پیاده‌سازی آورده شده است. پیاده‌سازی‌های مثلثی و گاوی با استفاده از پایتون نیز به صورت یکجا در فایل کدهای مربوط به پایتون آورده شده است.

## سوال ۱۰-۵

با توجه به شرط  $k_1 + k_2 + k_3 > 0$  و این که  $k_i$  ها صفر یا یک هستند، نتیجه می‌گیریم در هر حالت ممکن حداقل یکی از  $k_i$  ها برابر یک است. بدین ترتیب، حالت‌های ممکن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$k_1 = 1, k_2 = 0, k_3 = 0$$

$$k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = 0$$

$$k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 1$$

$$k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 0$$

$$k_1 = 1, k_2 = 0, k_3 = 1$$

$$k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = 1$$

$$k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1$$

با توجه به این هفت حالت ممکن، تابع  $(x)g$  به صورت رابطه ۴۸ تعریف می‌گردد.

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, x_3) &= 1 + \sum_{k_1 k_2 k_3 \in k} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \\ &= 1 + x_1^0 x_2^0 x_3^0 \\ &= 1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 \end{aligned} \quad (48)$$

از تعریف مسئله داریم که  $(x)g$  تابعی روی مجموعه بسته  $U = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^3$  است. می‌خواهیم سیستم فازی  $(x)f$  را طوی تعریف کنیم که تابع  $(x)g$  را با دقت  $\epsilon$  به شکلی یکنواخت تقریب بزند:

$$\|g - f\|_\infty = \sup_{x \in U} |g(x) - f(x)| \leq \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_\infty h_1 + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_\infty h_2 \leq \epsilon \quad (49)$$

حال برای طراحی سیستم فازی به صورت گام به گام پیش می‌رویم:

**گام اول:** در این مثال، تعداد  $N_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) مجموعه فازی در بازه  $U = [\alpha_i, \beta_i] = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  تعریف به صورت  $A_i^1, A_i^2, \dots, A_i^{N_i}$  و با توابع تعلق مثلثی  $\mu_{A_i^j}(x_i; a_i^j, b_i^j, c_i^j)$  ( $j = 1, 2, \dots, N_i$ ) می‌کنیم. همچنین در نظر داریم که:  $b_i^{N_i} = \beta_i = 1, b_i^1 = \alpha_i = 0, A_i^1 < A_i^2 < \dots < A_i^{N_i}$ . از سوی دیگر، اگر

مرکز مجموعه فازی  $A_i^j = e_i^j = \alpha_i = \beta_i = h_i(j - 1)$  را با  $e_i^{N_i} = \alpha_i + h_i$  نشان دهیم، خواهیم داشت: در نظر می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم که:

گام دوم: در ادامه، آنگاه فازی را به صورت «اگر  $A_1^{i_1}, A_2^{i_2}, A_3^{i_3}$  و  $M = N_1 \times N_2 \times N_3$  باشد؛ آن‌گاه  $y = g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}, e_3^{i_3})$  است. لازم به ذکر است که  $i_q = 1, 2, \dots, N_q$  ( $q = 1, 2, 3$ ) بوده و مراکز مجموعه‌های فازی  $\bar{y} = g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}, e_3^{i_3})$  را با  $B^{i_1 i_2 i_3} = g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}, e_3^{i_3})$  نشان می‌دهیم. این مراکز با توجه به روابط مسأله به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \bar{y}^{i_1 i_2 i_3} &= g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}, e_3^{i_3}) \\ &= 1 + e_1^{i_1} + e_2^{i_2} + e_3^{i_3} + e_1^{i_1} e_2^{i_2} + e_1^{i_1} e_3^{i_3} + e_2^{i_2} e_3^{i_3} + e_1^{i_1} e_2^{i_2} e_3^{i_3} \end{aligned} \quad (50)$$

گام سوم: سیستم فازی  $f(x)$  را از قواعد گام دوم و با بهره‌گیری از موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز منفرد و غیرفازی‌ساز مبانگین مراکز تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \sum_{i_3=1}^{N_3} \bar{y}^{i_1 i_2 i_3} \left[ \mu_{A_1^{i_1}}(x_1) \mu_{A_2^{i_2}}(x_2) \mu_{A_3^{i_3}}(x_3) \right]}{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \sum_{i_3=1}^{N_3} \left[ \mu_{A_1^{i_1}}(x_1) \mu_{A_2^{i_2}}(x_2) \mu_{A_3^{i_3}}(x_3) \right]} \\ &= \frac{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \sum_{i_3=1}^{N_3} g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}, e_3^{i_3}) \left[ \mu_{A_1^{i_1}}(x_1) \mu_{A_2^{i_2}}(x_2) \mu_{A_3^{i_3}}(x_3) \right]}{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \sum_{i_3=1}^{N_3} \left[ \mu_{A_1}(x_1) \mu_{A_2}(x_2) \mu_{A_3}(x_3) \right]} \end{aligned} \quad (51)$$

برای تعیین دقیق تقریب سیستم فازی از این قضیه استفاده می‌کنیم که با فرض  $f(x)$  به عنوان سیستم فازی و  $g(x)$  به صورت پیوسته و مشتق‌پذیر روی  $U = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times [\alpha_3, \beta_3]$  خواهیم داشت:

$$\|g(x) - f(x)\|_\infty \leq \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_\infty h_1 + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_\infty h_2 + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_3} \right\|_\infty h_3 \leq \epsilon, \quad \begin{cases} \left\| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\|_\infty = \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| \\ h_i = \max_{1 \leq j \leq N_{i-1}} |e_i^{j+1} - e_i^j| \end{cases} \quad (52)$$

برای هر سه متغیر  $x_1, x_2$  و  $x_3$  فرض می‌کنیم که  $h_1 = h_2 = h_3 = h$  و در نتیجه داریم:

$$\epsilon > h \left( \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_3} \right\|_\infty \right) \rightarrow h < \frac{\epsilon}{\left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_3} \right\|_\infty} \quad (53)$$

برای محاسبه  $h$  می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{\infty} &= \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right| = \sup_{x \in U} |1 + x_2 + x_3 + x_2 x_3| = 4 \\ \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_{\infty} &= \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| = \sup_{x \in U} |1 + x_1 + x_3 + x_1 x_3| = 4 \\ \left\| \frac{\partial g}{\partial x_3} \right\|_{\infty} &= \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial g}{\partial x_3} \right| = \sup_{x \in U} |1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2| = 4 \end{aligned} \quad (54)$$

بنابراین داریم:

$$h < \frac{0.05}{\left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_3} \right\|_{\infty}} = \frac{0.05}{4 + 4 + 4} = 0.00416 \quad (55)$$

حال با محاسبه  $h$  تعداد توابع تعلق یا تعداد تقسیمات بازه‌های  $[0, 1] = [\alpha_1, \beta_1] = [\alpha_2, \beta_2] = [\alpha_3, \beta_3]$  را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$h = \frac{\beta - \alpha}{n} = \frac{1 - 0}{n} = \frac{1}{n} = 0.004 \rightarrow n = 250 \quad (56)$$

$n$  تعداد تقسیمات بازه‌های  $[0, 1] = [\alpha_1, \beta_1] = [\alpha_2, \beta_2] = [\alpha_3, \beta_3]$  بوده و در نتیجه  $N = n + 1 = 251$  تابع تعلق روی متغیرهای  $X$  تعریف می‌شود و با توجه به گام دوم تعداد  $N_1 \times N_2 \times N_3 = 251 \times 251 \times 251 = 15813251$  قانون اگر-آنگاه فازی خواهیم داشت. درواقع در این سیستم فازی بیش از ۱۵ میلیون قانون داریم که عددی بسیار بزرگ است. لازم به ذکر است که این موضوع در چالش بیش اشعالی فضای RAM در این کد پیاده‌سازی خود را نشان می‌دهد. درنهایت سیستم فازی  $f(x)$  به صورت

زیر محاسبه می‌گردد:

$$f(x) = \frac{\sum_{i_1=1}^{251} \sum_{i_2=1}^{251} \sum_{i_3=1}^{251} g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}, e_3^{i_3}) \left[ \mu_{A_1^{i_1}}(x_1) \mu_{A_2^{i_2}}(x_2) \mu_{A_3^{i_3}}(x_3) \right]}{\sum_{i_1=1}^{251} \sum_{i_2=1}^{251} \sum_{i_3=1}^{251} \left[ \mu_{A_1^{i_1}}(x_1) \mu_{A_2^{i_2}}(x_2) \mu_{A_3^{i_3}}(x_3) \right]} \quad (57)$$

## سوال ۱۰-۷

حلّ دستی:

فرض می‌کنیم که تابع  $(x)g$  روی مجموعه  $U = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$  تعریف شود. ما می‌خواهیم سیستم فازی  $(x)f$  را طوری طراحی کنیم که تابع  $(x)g$  را با دقت  $\epsilon$  تقریب بزند. بیان ریاضیاتی این موضوع به شرح رابطه ۶۱ است.

$$\|g - f\|_\infty = \sup_{x \in U} |g(x) - f(x)| \leq \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_\infty h_1 + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_\infty h_2 \leq \epsilon \quad (58)$$

حال برای طراحی سیستم فازی به صورت گام‌به‌گام پیش می‌رویم:

**گام اول:** در این مثال، تعداد  $N_i = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2$ ) مجموعه فازی در بازه  $A_i^1, \dots, A_i^{N_i}$  تعریف به صورت  $\mu_{A_i^1}(x_i; a_i^1, b_i^1, c_i^1), \dots, \mu_{A_i^{N_i}}(x_i; a_i^{N_i}, b_i^{N_i}, c_i^{N_i})$  و با توابع تعلق مثلثی  $e_i^{N_i} = \alpha_i = -1, b_i^1 = \beta_i = 1, A_i^1 < A_i^2 < \dots < A_i^{N_i}$  از سوی می‌کنیم. همچنین در نظر داریم که:  $e_i^1 = \alpha_i = -1, e_i^{N_i} = \beta_i = 1$ . همچنین اگر دیگر، اگر مرکز مجموعه فازی  $A_i^j$  را با  $e_i^j$  نشان دهیم، خواهیم داشت:  $e_i^j = \alpha_i = -1$ . همچنین اگر مرکز مجموعه فازی  $A_i^j$  را با  $e_i^{N_i}$  نشان دهیم خواهیم داشت:  $e_i^{N_i} = \beta_i = 1$ . بقیه مراکز را هم به صورت مرکز مجموعه فازی  $A_i^j$  در نظر می‌گیریم. همچنین از آن‌جا که نقطه شروعتابع بعدی، مرکز تابع قبلی است،  $e_i^j = \alpha_i + h_i$  در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که:  $a_i^{k+1} = b_i^k$

**گام دوم:** در ادامه،  $M = N_1 \times N_2$  قاعده اگر-آنگاه فازی را به صورت «اگر  $x_1, x_2, A_1^{i_1}, A_2^{i_2}$  باشد؛ آن‌گاه  $y, B^{i_1 i_2}$  است.» می‌سازیم. لازم به ذکر است که  $i_q (q = 1, 2, \dots, N_q)$  بوده و مراکز مجموعه‌های فازی  $B^{i_1 i_2}$  را با  $y = g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2})$  نشان می‌دهیم. این مراکز با توجه به روابط اصلی مطرح شده در صورت مسأله به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{y}^{i_1 i_2} = g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}) = 0.52 + 0.1e_1^{i_1} + 0.28e_2^{i_2} - 0.06e_1^{i_1}e_2^{i_2} \quad (59)$$

**گام سوم:** سیستم فازی  $(x)f$  را از قواعد گام دوم و با بهره‌گیری از موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز منفرد

و غیرفازی‌ساز میانگین مراکز تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \bar{y}^{i_1 i_2} \left[ \mu_{A_1^{i_1}}(x_1) \mu_{A_2}(x_2) \right]}{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \left[ \mu_{A_1}(x_1) \mu_{A_2}(x_2) \right]} \\ &= \frac{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}) \left[ \mu_{A_1}(x_1) \mu_{A_2}^{i_2}(x_2) \right]}{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \left[ \mu_{A_1}(x_1) \mu_{A_2}^{i_2}(x_2) \right]} \end{aligned} \quad (60)$$

دقت تقریب سیستم فازی بواسطه همان قضیه مطرح شده در قسمت‌های قبلی تعیین می‌شود و داریم:

$$\|g - f\|_\infty = \sup_{x \in U} |g(x) - f(x)| \leq \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_\infty h_1 + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_\infty h_2 \leq \epsilon, \begin{cases} \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_\infty = \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| \\ h_i = \max_{1 \leq j \leq N_{i-1}} |e_i^{j+1} - e_i^j| \end{cases} \quad (61)$$

با توجه به فرض دقت  $\epsilon = 0.1$  برای تقریب سیستم فازی و همچنین فرض  $h_1 = h_2 = h$  داریم:

$$\epsilon > h \left( \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_\infty \right) \rightarrow h < \frac{\epsilon}{\left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_\infty} \quad (62)$$

بنابراین، برای محاسبه  $h$  کافیست بنویسیم:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_\infty &= \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right| = \sup_{x \in U} |0.1 - 0.06x_2| \\ &= |0.1 - (0.06 \times -1)| = 0.16 \\ \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_\infty &= \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| = \sup_{x \in U} |0.28 - 0.06x_1| \\ &= |0.28 - (0.06 \times -1)| = 0.34 \end{aligned} \quad (63)$$

بنابراین:

$$h < \frac{0.1}{\left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_\infty} = \frac{0.1}{0.16 + 0.34} = 0.2 \quad (64)$$

حال با محاسبه  $h$ , تعداد توابع تعلق را محاسبه خواهیم کرد. بنابراین داریم:

$$h = \frac{\beta - \alpha}{n} = \frac{1 - (-1)}{n} = \frac{2}{n} = 0.2 \quad (65)$$

$N_1 = N_2 = N = n + 1 = 11$  بوده و در نتیجه  $[\alpha_1, \beta_1] = [-1, 1]$   $[\alpha_2, \beta_2] = [0, 2]$  تعداد تقسیمات بازه‌های  $X$  تعریف می‌شود. درواقع ما در نهایت ۱۱ مجموعه فازی با تابع تعلق مثالی زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mu_{A^1}(x) &= \mu_{A^1}(x; a_1, b_1, c_1) = \mu_{A^1}(x; -1, -1, 0) \\ \mu_{j1}(x) &= \mu_{A^j}(x; a_j, b_j, c_j) = \mu_{A^j}(x; e^{j-1}, e^j, e^{j+1}), \quad \begin{cases} j = 2, \dots, 10 \\ e^j = \alpha + h(j-1) = -1 + 0.2(j-1) \end{cases} \\ \mu_{A^{11}}(x) &= \mu_{A^{11}}(x; a_{11}, b_{11}, c_{11}) = \mu_{A^{11}}(x; 0, 1, 1) \end{aligned} \quad (66)$$

در مجموع  $121 = 11 \times 11 = N_1 \times N_2$  قاعدة اگر-آنگاه فازی خواهیم داشت و درنهایت سیستم فازی  $f(x)$  به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$f(x) = \frac{\sum_{i_1=1}^{11} \sum_{i_2=1}^{11} g\left(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}\right) \left[ \mu_{A_1^{i_1}}(x_1) \mu_{A_2^{i_2}}(x_2) \right]}{\sum_{i_1=1}^{11} \sum_{i_2=1}^{11} \left[ \mu_{A_1^{i_1}}(x_1) \mu_{A_2^{i_2}}(x_2) \right]} \quad (67)$$

شبیه‌سازی:

دستوراتی را برای بررسی تقریب فازی سیستم  $(x)$  و بررسی میزان خطای آن در محیط‌های مختلف و پایتون نوشته‌ایم. نمایی از این دستورات در شکل ۱۳ آورده شده است و دستورات پایتون مربوط به این سوال، علاوه بر پوشش‌های موجود در فایل فشرده در [این پیوند](#) نیز قابل دسترسی است. حال اگر تابع تعلق را به جای مثالی گاوی در نظر بگیریم دستورات و نتایج مرتبط با آن به صورتی می‌شود که در شکل ۱۴ نشان داده شده است.

شكل ١٣: دستورات متلب و پایتون سوال ٧-١٠ و نتایج آن‌ها.

The figure consists of three 3D surface plots. The top plot shows the full surface of the function  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ , which is a paraboloid opening upwards with its minimum at the origin (0,0). The middle plot is a zoomed-in view of the same surface near the origin, highlighting the minimum point. The bottom plot is another zoomed-in view, showing a distorted grid where the surface appears to have a saddle point or a different curvature than the original paraboloid.

شكل ١٤: دستورات پایتون سوال ٧-١٠ و نتایج آنها (تابع تعلق گاوی).

**توضیح پوشۀ کدها**

در پوشۀ اصلی این سوال (Q4\_10\_7)، فایل‌های مطلب و پایتون مربوط به این سوال قرار گرفته‌اند.