دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی برق- گروه مهندسی کنترل

عنوان

نمونه سوال

سیستم‌های فاری

نگارش

محمدجواد احمدی

استاد درس

دکتر مهدی علیاری شوره‌دلی

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

پاسخ سوالات

سوال ۲-۱۱

حلّ دستی:

در قسمت اول قصد داریم سیستم فازی $f(x)$ را با استفاده از کران مرتبهٔ اول طراحی کنیم. فرض می‌کنیم که تابع $g(x_1, x_2)$ روی مجموعهٔ $U = [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$ تعریف شود. ما می‌خواهیم سیستم فازی $f(x)$ را طوری طراحی کنیم که تابع $g(x)$ را با دقت ϵ تقریب بزند. بیان ریاضیاتی این موضوع به شرح رابطهٔ ۴ است.

$$\|g - f\|_\infty = \sup_{x \in U} |g(x) - f(x)| \le \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_\infty h_1 + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_\infty h_2 \le \epsilon \tag{1}$$

حال برای طراحی سیستم فازی به‌صورت گام‌به‌گام پیش می‌رویم:

گام اول: در این مثال، تعداد N_i $(i = 1,2)$ مجموعهٔ فازی در بازهٔ $U = [\alpha_i, \beta_i] = [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$ به‌صورت $A^1, \ldots, A_i^N$ و با توابع تعلق مثلثیِ $\mu_{A_i^1}\left(x_i; a_i^1, b_i^1, c_i^1\right), \ldots, \mu_{A_i}^{N_i}\left(x_i; a_i^{N_i}, b_i^{N_i}, c_i^{N_i}\right)$ تعریف می‌کنیم. هم‌چنین در نظر داریم که: $A_i^1 < A_i^2 < \cdots < A_i^{N_i}$ $b_i^{N_i} = \beta_i = 1, b_i^1 = \alpha_i = -1,$. از سوی دیگر، اگر مرکز مجموعهٔ فازی A_i^1 را با e_i^1 نشان دهیم، خواهیم داشت: $e_i^1 = \alpha_i = -1$. هم‌چنین اگر مرکز مجموعهٔ فازی $A_i^{N_i}$ را با $e_i^{N_i}$ نشان دهیم خواهیم داشت: $e_i^{N_i} = \beta_i = 1$. بقیهٔ مراکز را هم به‌صورت $e_i^j = \alpha_i + h_i(j-1)$ در نظر می‌گیریم. هم‌چنین از آن‌جا که نقطهٔ شروع تابع بعدی، مرکز تابع قبلی است، فرض می‌کنیم که: $a_i^{k+1} = b_i^k$.

گام دوم: در ادامه، $M = N_1 \times N_2$ قاعدهٔ اگر–آنگاه فازی را به‌صورت «اگر x_1، $A_1^{i_1}$ و x_2، $A_2^{i_2}$ باشد؛ آن‌گاه y، $B^{i_1 i_2}$ است.» می‌سازیم. لازم به ذکر است که $i_q = 1, 2, \ldots, N_q (q = 1,2)$ بوده و مراکز مجموعه‌های فازی $B^{i_1 i_2}$ را با $\bar{y}^{i_1 i_2} = g\left(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}\right)$ نشان می‌دهیم. این مراکز با توجه به روابط اصلی مطرح‌شده در صورت

مسأله به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{y}^{i_1 i_2} = g\left(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}\right) = \frac{1}{1 + \left(e_1^{i_1}\right)^2 + \left(e_2^{i_2}\right)^2} \tag{2}$$

گام سوم: سیستم فازی $f(x)$ را از قواعد گام دوم و با بهره‌گیری از موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز منفرد و غیرفازی‌ساز میانگین مراکز تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \bar{y}^{i_1 i_2} \left[\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\, \mu_{A_2^{i_2}}(x_2)\right]}{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \left[\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\, \mu_{A_2^{i_2}}(x_2)\right]} = \frac{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} g\left(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}\right) \left[\mu_{A_1}(x_1)\, \mu_{A_2}^{i_2}(x_2)\right]}{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \left[\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\, \mu_{A_2^{i_2}}(x_2)\right]} \tag{3}$$

دقت تقریب سیستم فازی بواسطهٔ همان قضیهٔ مطرح‌شده در قسمت‌های قبلی تعیین می‌شود و داریم:

$$\|g-f\|_\infty = \sup_{x\in U} |g(x)-f(x)| \le \left\|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right\|_\infty h_1 + \left\|\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\|_\infty h_2 \le \epsilon, \begin{cases} \|\frac{\partial g}{\partial x_1}\|\,|_\infty = \sup_{x\in U} \left|\frac{\partial g}{\partial x_i}\right| \\ h_i = \max_{1\le j\le N_{i-1}} \left|e_i^{j+1} - e_i^j\right| \end{cases} \tag{4}$$

با توجه به فرض دقت $\epsilon = 0/1$ برای تقریب سیستم فازی و هم‌چنین فرض $h_1 = h_2 = h$ داریم:

$$\varepsilon > h\left(\left\|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right\|_\infty + \left\|\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\|_\infty\right) \to h < \frac{\varepsilon}{\left\|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right\|_\infty + \left\|\frac{\partial g}{\partial x_2}\right\|_\infty} \tag{5}$$

بنابراین، برای محاسبهٔ h کافیست بنویسیم:

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right\|_\infty = \sup_{x\in U}\left|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right| = \sup_{x\in U}\left|\frac{-2x_1}{\left(1 + x_1^2 + x_2^2\right)^2}\right| \tag{6}$$

برای پیداکردن $x \in U = [-1, 1]$ به گونه‌ای که $\left|\frac{-2x_1}{\left(1+x_1^2+x_2^2\right)^2}\right|$ را بیشینه کند می‌نویسیم:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = \frac{-2\left(1 + x_1^2 + x_2^2\right)^2 + 8x_1^2\left(1 + x_1^2 + x_2^2\right)}{\left(1 + x_1^2 + x_2^2\right)^4} = \frac{2\left(-1 + 3x_1^2 - x_2^2\right)}{\left(1 + x_1^2 + x_2^2\right)^3} = 0 \tag{7}$$

برای معادل صفر شدنِ $\frac{\partial^۲ g}{\partial x_۱^۲}$ می‌بایست عبارتِ $-۱ + ۳x_۱^۲ - x_۲^۲$ هم‌سنگ با صفر شود و از آن‌جا که عبارت $x_۲^۲$ در مخرجِ رابطهٔ ۶ وجود دارد، به‌ازای $x_۲^۲ = ۰$ عبارتِ $\left|\frac{-۲x_۱}{(۱+x_۱^۲+x_۲^۲)^۲}\right|$ به‌ازای مقادیری از $x_۱$ بیشینه می‌شود. درنتیجه، می‌نویسیم:

$$\left(-۱ + ۳x_۱^۲ - x_۲^۲\right) = ۰ \rightarrow -۱ + ۳x_۱^۲ = ۰ \rightarrow x_۱ = \pm\frac{۱}{\sqrt{۳}} = \pm ۰/۵۷۷ \tag{۸}$$

و:

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial x_۱}\right\|_\infty = \sup_{x\in U}\left|\frac{-۲x_۱}{\left(۱ + x_۱^۲ + x_۲^۲\right)^۲}\right| = \left|\frac{-۲(\pm ۰/۵۷۷)}{\left(۱ + (\pm ۰/۵۷۷)^۲\right)^۲}\right| = ۰/۶۴۹۵ \tag{۹}$$

همین فرآیند محاسباتی را ادامه می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$\|\frac{\partial g}{\partial x_۲}\|_\infty = \sup_{x\in U}\left|\frac{\partial g}{\partial x_۲}\right| = \sup_{x\in U}\left|\frac{-۲x_۲}{\left(۱ + x_۱^۲ + x_۲^۲\right)^۲}\right| = ۰/۶۴۹۵ \tag{۱۰}$$

در این حالت $\sup_{x\in U}\left|\frac{-۲x_۲}{(۱+x_۱^۲+x_۲^۲)^۲}\right|$ در $x = (۰, \pm ۰/۵۷۷)$ رخ می‌دهد و بنابه رابطهٔ ۹ و رابطهٔ ۱۰ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} h_۱ = h_۲ = h &< \frac{۰/۱}{\left\|\frac{\partial g}{\partial x_۱}\right\|_\infty + \left\|\frac{\partial g}{\partial x_۲}\right\|_\infty} = \frac{۰/۱}{۰/۶۴۹۵ + ۰/۶۴۹۵} \\ h &< ۰/۰۷۷ \end{aligned} \tag{۱۱}$$

حال با محاسبهٔ حدود h برای صحیح به‌دست‌آمدن n آن را معادل ۰/۰۵ در نظر می‌گیریم، و تعداد توابع تعلق را محاسبه خواهیم کرد. بنابراین داریم:

$$h = \frac{\beta - \alpha}{n} = \frac{۱ - (-۱)}{n} = \frac{۲}{n} = ۰/۰۵ \rightarrow n = ۴۰ \tag{۱۲}$$

n تعداد تقسیمات بازه‌های $[\alpha_۱, \beta_۱] = [\alpha_۲, \beta_۲] = [-۱, ۱]$ بوده و در نتیجه $N_۱ = N_۲ = N = n + ۱ = ۴۱$ تابع تعلق روی متغیرهای X تعریف می‌شود. درواقع ما در نهایت ۴۱ مجموعهٔ فازی با توابع تعلق مثلثی

زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{A^1}(x)=\mu_{A^1}(x;a_1,b_1,c_1)=\mu_{A^1}(x;-1,-1,-1+h)$$

$$\mu_{A^j}(x)=\mu_{A^j}(x;a_j,b_j,c_j)=\mu_{A^j}\left(x;e^{j-1},e^j,e^{j+1}\right),\qquad \begin{cases} j=2,\dots,40\\ e^j=\alpha+h(j-1)=-1+0.05(j-1)\end{cases}$$

$$\mu_{A^{41}}(x)=\mu_{A^{41}}(x;a_{41},b_{41},c_{41})=\mu_{A^{41}}(x;1-h,1,1)$$

(۱۳)

در مجموع $N_1\times N_2=41\times 41=1681$ قاعدهٔ اگر-آنگاه فازی خواهیم داشت و درنهایت سیستم فازی $f(x)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$f(x)=\frac{\sum_{i_1=1}^{41}\sum_{i_2=1}^{41} g\left(e_1^{i_1},e_2^{i_2}\right)\left[\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\,\mu_{A_2^{i_2}}(x_2)\right]}{\sum_{i_1=1}^{41}\sum_{i_2=1}^{41}\left[\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\,\mu_{A_2^{i_2}}(x_2)\right]} \tag{۱۴}$$

در ادامه ضمن حفظ گام‌های طراحی مشترک، دقت تقریب سیستم فازی را بوسیلهٔ قضیهٔ مربوط به **کران مرتبه دوم** تعیین می‌کنیم. این قضیه این‌گونه بیان می‌دارد که اگر فرض کنیم $f(x)$ یک سیستم فازی مطابق رابطهٔ ۳ باشد و $g(x)$ روی بازهٔ $U=[\alpha_1,\beta_1]\times[\alpha_2,\beta_2]$ تا دو مرتبه به‌صورت پیوسته مشتق‌پذیر باشد؛ آن‌گاه داریم:

$$\|g(x)-f(x)\|_\infty\le\frac{1}{8}\left[\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\right\|_\infty h_1^2+\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}\right\|_\infty h_2^2\right]\le\epsilon,\qquad \begin{cases}\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}\right\|_\infty=\sup_{x\in U}\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}\right|\\ h_i=\max_{1\le j\le N_{i-1}}\left|e_i^{j+1}-e_i^j\right|\,(i=1,2)\end{cases}$$

(۱۵)

از آن‌جا که دقت تقریب $\epsilon=0.1$ ذکر شده و فرض شده که $h_1=h_2=h$ می‌نویسیم:

$$h^2<\frac{8\varepsilon}{\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\right\|_\infty+\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}\right\|_\infty}\rightarrow h<\sqrt{\frac{8\varepsilon}{\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\right\|_\infty+\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}\right\|_\infty}} \tag{۱۶}$$

بنابراین، برای محاسبهٔ h کافیست بنویسیم:

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right\|_\infty &= \sup_{x\in U} \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right| = \sup_{x\in U} \left| \frac{2\left(-1+3x_1^2-x_2^2\right)}{\left(1+x_1^2+x_2^2\right)^3} \right| = \left| \frac{2(-1)}{(1)^3} \right| = 2 \\
\left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right\|_\infty &= \sup_{x\in U} \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right| = \sup_{x\in U} \left| \frac{2\left(-1+3x_2^2-x_1^2\right)}{\left(1+x_1^2+x_2^2\right)^3} \right| = \left| \frac{2(-1)}{(1)^3} \right| = 2
\end{aligned}
\tag{17}
$$

از رابطهٔ ۱۷ چنین فهم می‌شود که بیشینهٔ عبارات $\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\right\|_\infty$ و $\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}\right\|_\infty$ در نقطهٔ مبدأ $(0,0)$ رخ می‌دهد. بنابراین داریم:

$$
h < \sqrt{\frac{8\varepsilon}{\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\right\|_\infty + \left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}\right\|_\infty}} = \sqrt{\frac{8\times 0.1}{2+2}} = 0.4472 \tag{18}
$$

حال با محاسبهٔ حدود h برای صحیح به‌دست‌آمدن n آن را معادل ۰٫۲۵ در نظر می‌گیریم، و تعداد توابع تعلق را محاسبه خواهیم کرد. بنابراین داریم:

$$
h = \frac{\beta-\alpha}{n} = \frac{1-(-1)}{n} = \frac{2}{n} = 0.25 \rightarrow n = 8 \tag{19}
$$

n تعداد تقسیمات بازه‌های $[\alpha_1,\beta_1] = [\alpha_2,\beta_2] = [-1,1]$ بوده و در نتیجه $N_1 = N_2 = N = n+1 = 9$ تابع تعلق روی متغیرهای X تعریف می‌شود. درواقع ما در نهایت ۹ مجموعهٔ فازی با توابع تعلق مثلثی زیر تعریف می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\mu_{A^1}(x) = \mu_{A^1}\left(x; a_1, b_1, c_1\right) = \mu_{A^1}(x; -1, -1, -1+h) \\
&\mu_{A^j}(x) = \mu_{A}j\left(x; a_j, b_j, c_j\right) = \mu_A^j\left(x; e^{j-1}, e^j, e^{j+1}\right), \qquad \begin{cases} j = 2, \dots, 40 \\ e^j = \alpha + h(j-1) = -1 + 0.25(j-1) \end{cases} \\
&\mu_{A^9}(x) = \mu_{A^9}\left(x; a_9, b_9, c_9\right) = \mu_{A^9}(x; 1-h, 1, 1)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

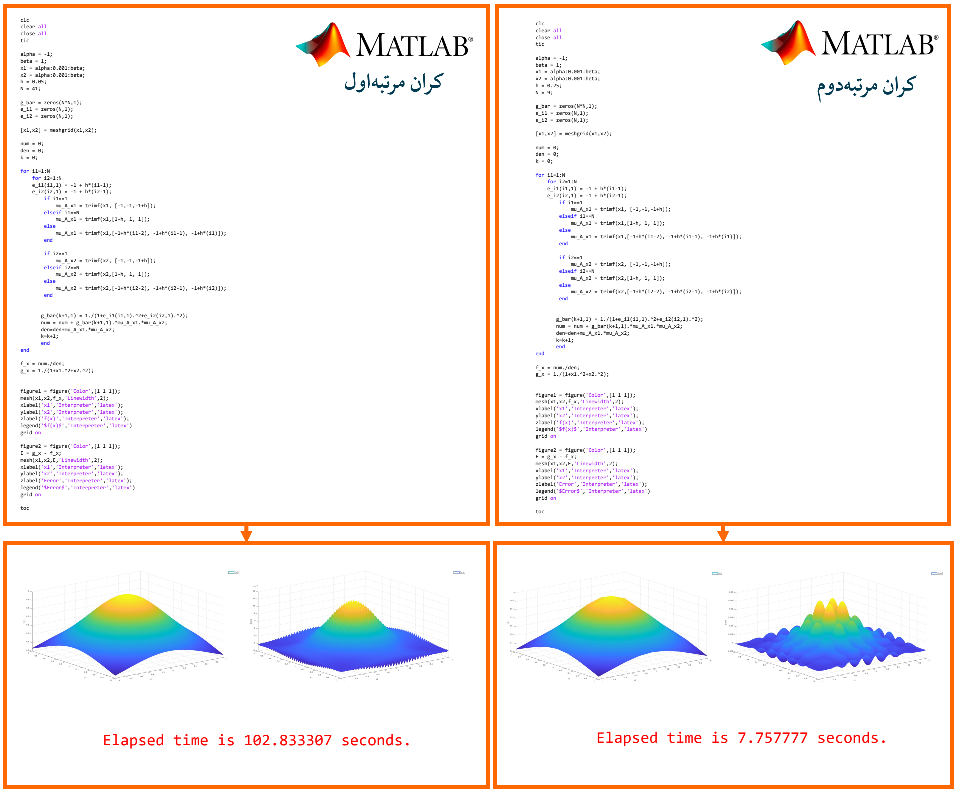
در مجموع $N_1 \times N_2 = 9 \times 9 = 81$ قاعدهٔ اگر-آنگاه فازی خواهیم داشت و درنهایت سیستم فازی $f(x)$

به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$f(x) = \frac{\sum_{i_1=1}^{9} \sum_{i_2=1}^{9} g\left(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}\right)\left[\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\,\mu_{A_2^{i_2}}(x_2)\right]}{\sum_{i_1=1}^{9} \sum_{i_2=1}^{9}\left[\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\,\mu_{A_2^{i_2}}(x_2)\right]} \qquad (21)$$

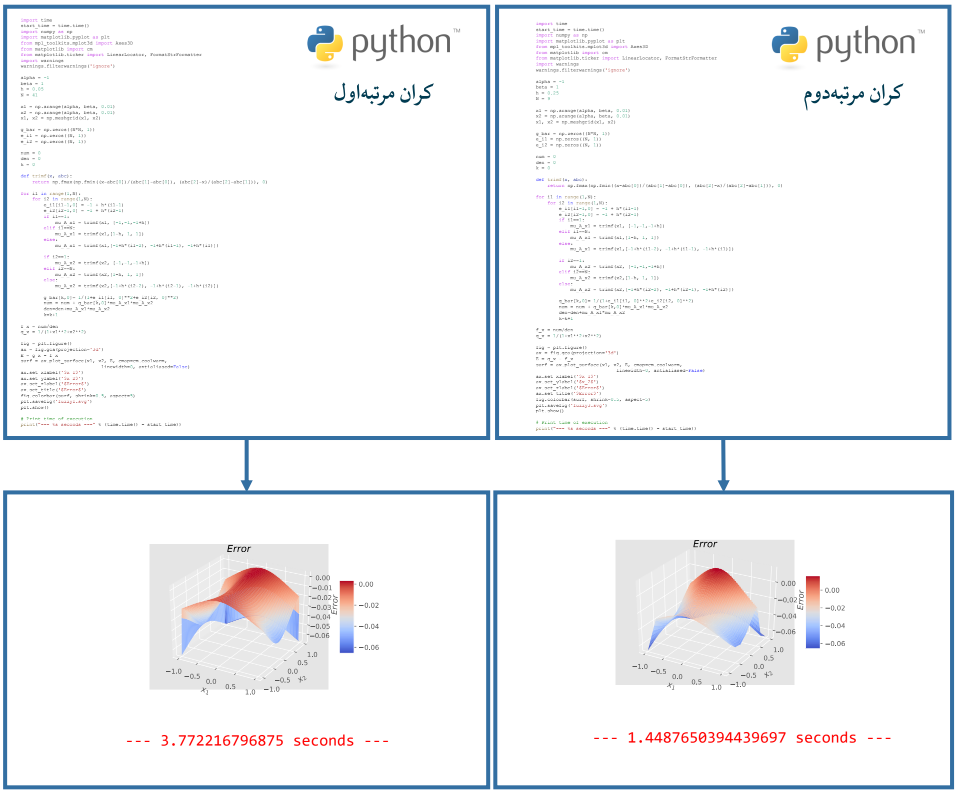
شبیه‌سازی:

دستوراتی را برای بررسی تقریب فازی سیستم $g(x)$ و بررسی میزان خطای آن در محیط‌های **متلب و پایتون** نوشته‌ایم. نمایی از دستورات متلب و پایتون مربوط به حالات کران مرتبهٔ اول و دوم به‌همراه نتایج آن‌ها به‌ترتیب در شکل ۱ و شکل ۲ آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، کران موردنظر برای خطا کاملاً رعایت شده است. دستورات پایتون مربوط به این سوال، علاوه بر پوشه‌های موجود در فایل فشرده در این پیوند نیز قابل دسترسی است. حال اگر تابع تعلق را به‌جای مثلثی گاوسی در نظر بگیریم دستورات



شکل ۱: دستورات متلب سوال ۲-۱۱ و نتایج آن‌ها.

و نتایج مرتبط با آن به‌صورتی می‌شود که در شکل ۳ نشان داده شده است. علاوه بر این شبیه‌سازی‌ها، در یکی از شبیه‌سازی‌هایی که برای این سوال در محیط اینترنت پیدا شده است به طریقه‌ای دیگر عمل شده و



شکل ۲: دستورات پایتون سوال ۲-۱۱ و نتایج آن‌ها.

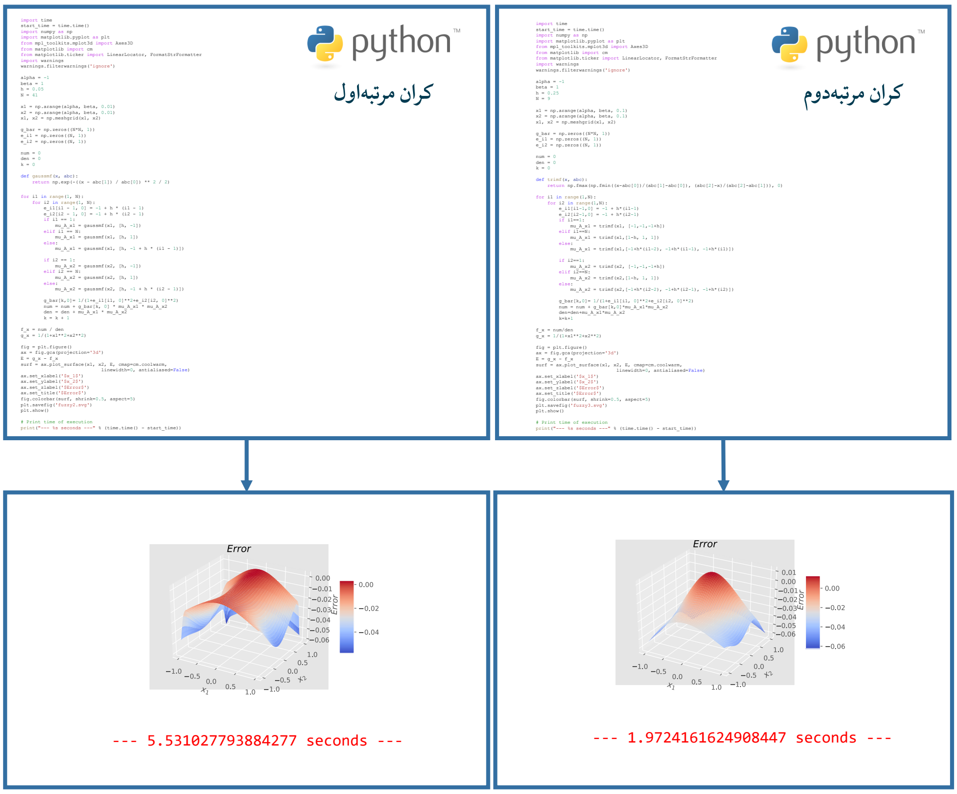
پارامترها (از جمله h) کمی متفاوت از محاسبات بالاتر در نظر گرفته شده است که به نظر می‌رسد اشتباه باشد. با این وجود، به‌دلیل تفاوت و جالبی نحوهٔ نگارش کد این شبیه‌سازی، آن را در پوشهٔ Q1_Others آورده‌ایم و نتایج آن با استفاده از پارامترهایی که بالاتر محاسبه شده‌اند به صورتی است که در شکل ۴ و شکل ۵ آورده شده است.

توضیح پوشهٔ کدها

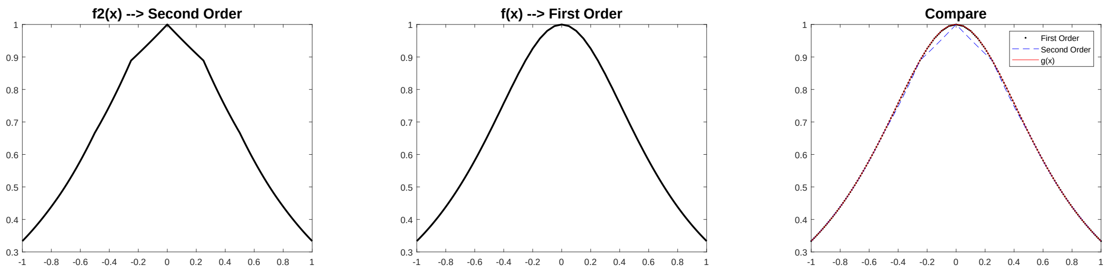
در پوشهٔ اصلی این سوال (Q1)، فایل‌های متلب و پایتون مربوط به این سوال قرار گرفته‌اند. دستورات پایتون مربوط به این سوال، علاوه بر پوشه‌های موجود در فایل فشرده در این پیوند نیز قابل دسترسی است.

جمع‌بندی

در هردو حالت کرات مرتبه‌اول و کران مرتبه‌دوم دقت مورنظر؛ یعنی، $\epsilon = 0/1$ رعایت شده و در عین حال روش کران مرتبه‌دوم از قواعد فازی به مراتب کم‌تری استفاده می‌کند که این مسأله حجم محاسبات و زمان پیاده‌سازی را به‌صورت قابل توجهی کاهش داده است.



شکل ۳: دستورات پایتون سوال ۲-۱۱ و نتایج آن‌ها (تابع تعلق گاوسی).



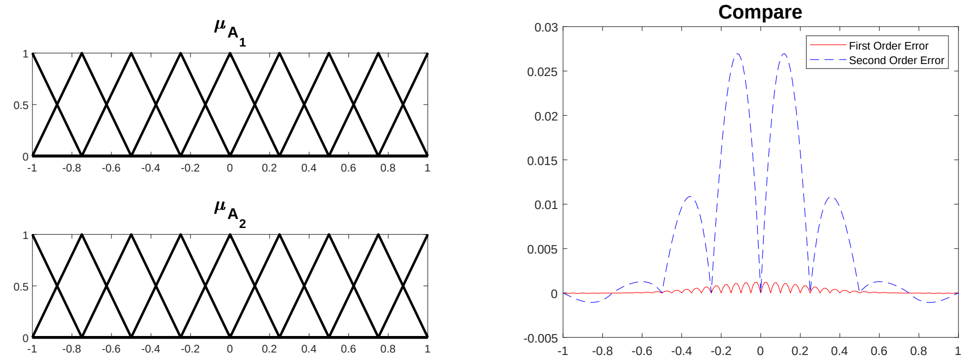
(ج) کران مرتبه‌دوم (ب) کران مرتبه‌اول (آ) مقایسه

شکل ۴: نتایج یک شبیه‌سازی دیگر.

سوال ۵-۱۱

در این سوال، سیستم فازی $f(x)$ را با حالت مربوط به کران مرتبه‌دوم به‌صورت گام‌به‌گام طراحی می‌کنیم.

گام اول: در این مثال، تعداد N_i $(i = ۱, \cdots, ۲)$ مجموعهٔ فازی در بازهٔ $U = [\alpha_i, \beta_i]$ به‌صورت $A^۱, \ldots, A_i^N$



(آ) نتایج خطا (ب) توابع تعلق

شکل ۵: نتایج یک شبیه‌سازی دیگر.

و با توابع تعلق مثلثیِ زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\mu_{A_i^1}(x_i) = \mu_{A_i^1}\left(x_i; e_i^1, e_i^1, e_i^2\right)\\
&\mu_{A_i^j}(x_i) = \mu_{A_i^j}\left(x_i; e_i^{j-1}, e_i^j, e_i^{j+1}\right), \qquad \begin{cases} j = 2, \cdots, N_i - 1 \\ \alpha_i = e_i^1 < e_i^2 < \cdots < e_i^{N_i} = \beta_i \end{cases}\\
&\mu_{A_iN_i}(x_i) = \mu_{A_iN_i}\left(x_i; e_i^{N_i-1}, e_i^{N_i}, e_i^{N_i}\right)
\end{aligned} \tag{22}$$

گام دوم: در ادامه، $M = N_1 \times \cdots \times N_N$ قاعدهٔ اگر–آنگاه فازی را به‌صورت «اگر x_1، $A_1^{i_1}, \cdots$ و x_n، $A_n^{i_n}$ باشد؛ آن‌گاه y، $B^{i_1\cdots i_n}$ است.» می‌سازیم. لازم به ذکر است که $i_q = 1, 2, \ldots, N_q (q = 1, \cdots, n)$ بوده و مراکز مجموعه‌های فازی $B^{i_1\cdots i_n}$ را با $\bar{y}^{i_1 i_2 \ldots i_n} = g\left(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}, \ldots, e_n^{i_n}\right)$ نشان می‌دهیم.

گام سوم: سیستم فازی $f(x)$ را از قواعد گام دوم و با بهره‌گیری از موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز منفرد و غیرفازی‌ساز میانگین مراکز تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n} \bar{y}^{i_1 i_2 \cdots i_n}\left[\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\,\mu_{A_2^{i_2}}(x_2)\cdots\mu_{A_n^{i_n}}(x_n)\right]}{\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n}\left[\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\,\mu_{A_2^{i_2}}(x_2)\cdots\mu_{A_n^{i_n}}(x_n)\right]}\\
&= \frac{\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n} g\left(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}, \ldots, e_n^{i_n}\right)\left[\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\,\mu_{A_2^{i_2}}(x_2)\cdots\mu_{A_n^{i_n}}(x_n)\right]}{\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n}\left[\mu_{A_1^{i_1}}(x_1)\,\mu_{A_2^{i_2}}(x_2)\cdots\mu_{A_n^{i_n}}(x_n)\right]}
\end{aligned} \tag{23}$$

در ادامه دقت تقریب مرتبه‌دوم سیستم فازی را با یک قضیه تعیین می‌کنیم. یک سیستم فازی مطابق ؟؟ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $g(x)$ روی U تا دو مرتبه به‌صورت پیوسته مشتق‌پذیر باشد؛ آن‌گاه می‌نویسیم:

$$\|g(x)-f(x)\|_\infty \le \frac{۱}{۸}\left[\sum_{i=۱}^{n}\left\|\frac{\partial^۲ g}{\partial x_i^۲}\right\|_\infty h_i^۲\right], \qquad \begin{cases} \left\|\frac{\partial^۲ g}{\partial x_i^۲}\right\|_\infty = \sup_{x\in U}\left|\frac{\partial^۲ g}{\partial x_i^۲}\right| \\ h_i = \max_{۱\le j\le N_{i-۱}}\left|e_i^{j+۱}-e_i^j\right|, (i = ۱,۲,\ldots,n) \end{cases} \tag{۲۴}$$

برای اثبات قضیه فرض می‌کنیم که $U^{i_۱ i_۲\ldots i_n} = \left[e_۱^{i_۱}, e_۱^{i_۱+۱}\right]\times\left[e_۲^{i_۲}, e_۲^{i_۲+۱}\right]\times\ldots\times\left[e_n^{i_n}, e_n^{i_n+۱}\right]$ باشد که در آن $i_q = ۱,۲,\ldots,N_q (q = ۱,\cdots,n)$ است. حال از آن‌جا که:

$$[\alpha_i,\beta_i] = \left[e_i^۱, e_i^۲\right]\cup\left[e_i^۲, e_i^۳\right]\cup\ldots\cup\left[e_i^{N_i-۱}, e_i^{N_i}\right] \tag{۲۵}$$

بازهٔ U را به این صورت تقسیم‌بندی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} U &= [\alpha_۱,\beta_۱]\times[\alpha_۲,\beta_۲]\times\ldots\times[\alpha_n,\beta_n] \\ &= \cup_{i_۱=۱}^{N_۱-۱}\cup_{i_۲=۱}^{N_۲-۱}\ldots\cup_{i_n=۱}^{N_n-۱} U^{i_۱ i_۲\ldots i_n} \end{aligned} \tag{۲۶}$$

در نتیجه برای هر U یک $U^{i_۱\cdots i_n}$ وجود دارد که x متعلق به آن باشد:

$$x_۱\in\left[e_۱^{i_۱}, e_۱^{i_۱+۱}\right], x_۲\in\left[e_۲^{i_۲}, e_۲^{i_۲+۱}\right], \ldots, x_n\in\left[e_n^{N_n-۱}, e_n^{N_n}\right] \tag{۲۷}$$

به‌دلیلِ طبیعی، سازگار و کامل‌بودن مجموعه‌های فازی $A^۱,\ldots,A_i^N$، بین یک تا دو $\mu_{A_q}^{j_q}(x_q)$ غیر صفر برای $j_۱ = ۱,۲,\ldots,N_۱$ وجود دارد. بر مبنای تعریف $e_۱^{j_۱}$، این دو توابع غیرصفر ممکن، $\mu_{A_q^{q_۱}}(x_q), \mu_{A_q^{i_q+۱}}(x_q)$

هستند. درنهایت، سیستم فازی به صورت زیر ساده می‌شود:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\cdots\sum_{j_n=i_n}^{i_n+1} g\left(e_1^{j_1}, e_2^{j_2}, \ldots, e_n^{j_n}\right)\left[\mu_{A_1^{j_1}}(x_1)\,\mu_{A_2^{j_2}}(x_2)\cdots\mu_{A_n^{\prime n}}(x_n)\right]}{\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\cdots\sum_{j_n=i_n}^{i_n+1}\left[\mu_{A_1^{j_1}}(x_1)\,\mu_{A_2}^{j_2}(x_2)\cdots\mu_{A_n^{\prime\prime}}(x_n)\right]} \\
&= \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\cdots\sum_{j_n=i_n}^{i_n+1}\left[\frac{\mu_{A_1^{\prime}}(x_1)\,\mu_{A_2^{\prime 2}}(x_2)\cdots\mu_{A_n^{\prime n}}(x_n)}{\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\cdots\sum_{j_n=i_n}^{i_n^{+1}}\left[\mu_{A_1^{j_1}}(x_1)\,\mu_{A_2^{\prime}}(x_2)\cdots\mu_{A_n^{\prime n}}(x_n)\right]}\right] g\left(e_1^{j_1}, e_2^{j_2}, \ldots, e_n^{j_n}\right)
\end{aligned}
$$

(۲۸)

حال با توجه به توابع مثلثی تعریف‌شده در رابطهٔ ۲۲، می‌نویسیم:

$$
\begin{aligned}
&\mu_{A_i^{i_1}}(x_i) + \mu_{A_i^{i_1+1}}(x_i) = 1 \\
&\mu_{A_i^{i_2}}(x_i) + \mu_{A_i^{i_2+1}}(x_i) = 1 \\
&\mu_{A_i^{i_n}}(x_i) + \mu_{A_i^{i_n+1}}(x_i) = 1
\end{aligned}
$$

(۲۹)

بنابراین داریم:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\ldots\sum_{j_n=i_n}^{i_n+1}\left[\mu_{A_1^{j_1}}(x_1)\,\mu_{A_2^{j_2}}(x_2)\cdots\mu_{A_n^{j_n}}(x_n)\right] \\
&= \left[\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\mu_{A_1^{j_1}}(x_1)\right]\left[\sum_{j_2=i_2}^{i_n=l_n}\mu_{A_2}(x_2)\right]\ldots\left[\sum_{j_n=i_n}^{i_n+1}\mu_{A_n^{\prime}}(x_n)\right] \\
&= 1 \times 1 \times \ldots \times 1 = 1
\end{aligned}
$$

(۳۰)

حال رابطهٔ ۲۸ را با توجه به رابطهٔ ۳۰ به‌صورت زیر ساده‌سازی می‌کنیم:

$$
f(x) = \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\ldots\sum_{j_n=i_n}^{i_n+1}\left[\mu_{A_1^{j_1}}(x_1)\,\mu_{A_2^{j_2}}(x_2)\cdots\mu_{A_n^{j_n}}(x_n)\right] g\left(e_1^{j_1}, e_2^{j_2}, \ldots, e_n^{j_n}\right) \qquad (۳۱)
$$

حال فرض می‌کنیم که $C^n\left(U^{i_1 i_2 \cdots i_n}\right)$ فضای تمام توابع به‌صورت پیوسته مشتق‌پذیر روی $U^{i_1 i_2 \cdots i_n}$ باشد، و عمل‌گرهای خطی روی آن به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\begin{aligned}
(L_1 g)(x) &= \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \left(\mu_{A_1^{j_1}}(x_1)\right) g\left(e_1^{j_1}, x_2, \cdots, x_n\right) \\
(L_2 g)(x) &= \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} \left(\mu_{A_2^{j_2}}(x_2)\right) g\left(x_1, e_2^{j_2}, \cdots, x_n\right) \\
(L_k g)(x) &= \sum_{j_k=i_k}^{i_k+1} \left(\mu_{A_k}^{j_k}(x_k)\right) g\left(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, e_k^{j_k}, \ldots, x_n\right), \qquad k = 1, \cdots, n
\end{aligned} \tag{۳۲}$$

از آن‌جایی که توابعِ $\mu_{A_1^{j_1}}(x_1), \mu_{A_2^{j_2}}(x_2), \ldots, \mu_{A_k^{j_k}}(x_k)$ در $U^{i_1 i_2 \cdots i_n}$ خطی و به‌صورت پیوسته مشتق‌پذیر هستند، $g \in C^n\left(U^{i_1 i_2 \cdots i_n}\right)$ نتیجه می‌دهد: $L_1 g \in C^n\left(U^{i_1 i_2 \cdots i_n}\right), L_2 g \in C^n\left(U^{i_1 i_2 \cdots i_n}\right), \ldots, L_k g \in C^n\left(U^{i_1 i_2 \cdots i_n}\right)$. حال با توجه به رابطهٔ ۳۰ و رابطهٔ ۳۲ می‌نویسیم:

$$\|L_1 g\|_\infty \le \|g\|_\infty \left|\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \mu_{A_1^{j_1}}(x_1)\right| = \|g\|_\infty \tag{۳۳}$$

با ترکیب رابطهٔ ۳۲ و رابطهٔ ۳۳ می‌نویسیم:

$$\|L_1 L_2 g\|_\infty \le \|g\|_\infty \left|\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \mu_{A_1^{j_1}}(x_1)\right| \left|\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} \left(\mu_{A_2^{j_2}}(x_2)\right) g\left(e_1^{j_1}, e_2^{j_2}\right)\right| \le \|g\|_\infty \tag{۳۴}$$

حال اگر این فرآیند را ادامه دهیم داریم:

$$\|L_1 L_2 \ldots L_n g\|_\infty \le \|g\|_\infty \left|\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \mu_{A_1}^{j_1}(x_1)\right| \ldots \left|\sum_{j_n=i_n}^{i_n+1} \left(\mu_{A_n^{j_n}}(x_n)\right) g\left(e_1^{j_1}, e_2^{j_2}, \cdots, e_n^{j_n}\right)\right| \le \|g\|_\infty \tag{۳۵}$$

با ترکیب روابط موجود در رابطهٔ ۳۲ و مقایسه با رابطهٔ ۳۱ می‌نویسیم:

$$(L_1 L_2 \ldots L_n g)(x) = \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \mu_{A_1'}(x_1) \left[\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} \left(\mu_{A_2^{j_2}}(x_2)\right)\right] \cdots \left[\sum_{j_n=i_n}^{i_n+1} \left(\mu_{A_n^{m}}(x_n)\right) g\left(e_1^{j_1}, e_2^{j_2}, \cdots, e_n^{j_n}\right)\right] = f(x) \tag{۳۶}$$

درنتیجه با توجه به $g(x) - f(x) = g(x) - (L_1 L_2 \ldots L_n g)(x)$ می‌نویسیم:

$$g(x) - L_1 L_2 \ldots L_n g = (g - L_1 g) + (L_1 g - L_1 L_2 g) + \cdots + (L_1 L_2 \ldots L_{n-1} g - L_1 L_2 \ldots L_n g) \tag{۳۷}$$

به‌دلیلِ خطی‌بودن L_{i-1}؛ می‌دانیم که: $L_{i-1}(g - L_i g) = L_{i-1} g - L_{i-1} L_i g$. هم‌چنین برمبنای خطی‌بودن L_{i-2} داریم:

$$L_{i-2} L_{i-1}(g - L_i g) = L_{i-2}(L_{i-1} g - L_{i-1} L_i g) = L_{i-2} L_{i-1} g - L_{i-2} L_{i-1} L_i \tag{۳۸}$$

با تکرار این فرآیند می‌نویسیم:

$$L_1 L_2 \ldots L_{i-1}(g - L_i g) = L_1 L_2 \ldots L_{i-1} g - L_1 L_2 \ldots L_i g, i = 2, \ldots, n \tag{۳۹}$$

حال با توجه به رابطهٔ ۳۵ و رابطهٔ ۳۷ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\|g - f\|_\infty &= \|g - L_1 L_2 \ldots L_n g\|_\infty \le \|g - L_1 g\|_\infty + \|(L_1(g - L_2 g))\|_\infty + \cdots + \|L_1 L_2 \ldots L_{n-1}(g - L_n g)\|_\infty \\ &\le \|g - L_1 g\|_\infty + \|g - L_2 g\|_\infty + \cdots + \|g - L_n g\|_\infty\end{aligned} \tag{۴۰}$$

اگر تابع $g(x)$ روی U تا دو مرتبه به‌صورت پیوسته مشتق‌پذیر باشد، بر اساس $x \in U^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \left[e_1^{i_1}, e_1^{i_1+1}\right] \times \left[e_2^{i_2}, e_2^{i_2+1}\right] \times \ldots \times \left[e_n^{i_n}, e_n^{i_n+1}\right]$ و با استفاده از میان‌یابی خطی تک‌متغیره می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\|g - L_1 g\|_\infty &= \|\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \mu_{A_1^{j_1}}(x_1)\left[g(x_1, x_2, \cdots, x_n) - g\left(e_1^{j_1}, x_2, \cdots, x_n\right)\right]\|_\infty \\ &\le \|g(x_1, x_2, \cdots, x_n) - g\left(e_1^{j_1}, x_2, \cdots, x_n\right)\|_\infty \\ &\le \frac{1}{8}\left(e_1^{i_1+1} - e_1^{i_1}\right)^2 \left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\right\|_\infty\end{aligned} \tag{۴۱}$$

$$\begin{aligned}
\|g - L_2 g\|_\infty &= \left\| \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} \left(\mu_{A_2}(x_2)\right)\left[g(x_1, x_2, \cdots, x_n) - g\left(x_1, e_2^{j_2}, \cdots, x_n\right)\right]\right\|_\infty \\
&\le \left\| g(x_1, x_2, \cdots, x_n) - g\left(x_1, e_2^{j_2}, \cdots, x_n\right)\right\|_\infty \\
&\le \frac{1}{8}\left(e_2^{i_2+1} - e_2^{i_2}\right)^2 \left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}\right\|_\infty
\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
&\|g - L_n g\|_\infty = \| \sum_{i_n=i_n}^{i_n+1} \mu_{A_n'^n}(x_n)\left[g(x_1, x_2, \cdots, x_n) - g\left(x_1, x_2, \cdots, e_n^{j_n}\right)\right] \|_\infty \\
&\le \left\| g(x_1, x_2, \cdots, x_n) - g\left(x_1, x_2, \cdots, e_n^{j_n}\right)\right\|_\infty \\
&\le \frac{1}{8}\left(e_n^{i_n+1} - e_n^{i_n}\right)^2 \left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2}\right\|_\infty
\end{aligned} \tag{43}$$

با توجه به این روابط و جای‌گذاری در رابطهٔ ۴۰ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\|g - f\|_\infty &\le \|g - L_1 g\|_\infty + \|g - L_2 g\|_\infty + \cdots + \|g - L_n g\|_\infty \\
&\le \frac{1}{8}\left(e_1^{i_1+1} - e_1^{i_1}\right)^2 \left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\right\|_\infty + \frac{1}{8}\left(e_2^{i_2+1} - e_2^{i_2}\right)^2 \left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}\right\|_\infty + \cdots + \frac{1}{8}\left(e_n^{i_n+1} - e_n^{i_n}\right)^2 \left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2}\right\|_\infty
\end{aligned} \tag{44}$$

$$\|g - f\|_\infty \le \frac{1}{8}\left[\sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}\right\|_\infty h_i^2\right] \tag{45}$$

سوال سوم - شبیه‌سازی شکل ۱۱.۲ از مثال‌های کتاب

حلّ دستی:

مثال ۱۱.۱ کتاب مرجع که قصد شبیه‌سازی شکل ۱۱.۲ آن را داریم، از کران تعریف‌شده در رابطهٔ ۴۸ استفاده می‌کند. حال از آن‌جایی که $\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_2}\right\|_\infty = 1$ است، از رابطهٔ ۴۸ می‌بینیم که اگر $h = 1$ انتخاب شود، داریم:

$\varepsilon > \frac{۱}{۸} \geq \|g-f\|_\infty$.

$$\|g-f\|_\infty \leq \frac{۱}{۸}\left[\left\|\frac{\partial^۲ \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}_۱^۲}\right\|_\infty \mathrm{h}_۱^۲ + \left\|\frac{\partial^۲ \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}_۲^۲}\right\|_\infty \mathrm{h}_۲^۲ + \cdots \left\|\frac{\partial^۲ \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{n}^۲}\right\|_\infty \mathrm{h}_\mathrm{n}^۲\right]$$

$$\begin{aligned} & g(x)=\sin(x) \\ & \frac{\partial g}{\partial x}=\cos(x) \\ & \frac{\partial^۲ \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}^۲}=-\sin(\mathrm{x}) \\ & \left\|\frac{\partial^۲ \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}^۲}\right\|_\infty = ۱ \end{aligned} \tag{۴۶}$$

$$\frac{۱}{۸}\left(۱\times h^۲\right) \leq ۰/۲ \rightarrow ۰/۲ \geq \frac{۱}{۸} h^۲ \rightarrow h=۱ \tag{۴۷}$$

$$\begin{aligned} \|g-L_۱ g\|_\infty &= \| \sum_{j_۱=i_۱}^{i_۱+۱} A_۱^{j_۱}(x_۱)\, g(x_۱,x_۲) - g\left(e_۱^{j_۱}, x_۲\right)\Big]\|_\infty \\ &\leq \left\|g(x_۱,x_۲)-g\left(e_۱^{j_۱},x_۲\right)\right\|_\infty \leq \frac{۱}{۸}\left(e_۱^{i_۱+۱}-e_۱^{i_۱}\right)\left\|\frac{\partial^۲ g}{\partial x_۱^۲}\right\|_\infty \end{aligned} \tag{۴۸}$$

بنابراین هفت مجموعهٔ فازی به‌صورت رابطهٔ ۴۹ و با $e^j = -۳ + (j-۱)$ $(j = ۱, ۲, \ldots, ۷)$ خواهیم داشت.

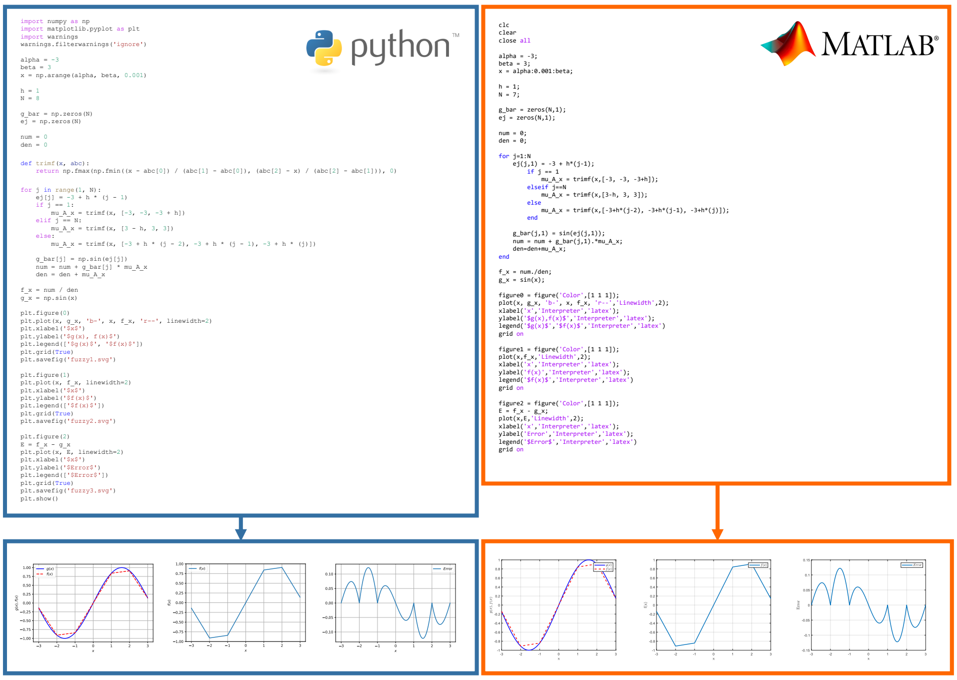
$$\begin{aligned} & \mu_{A_i^۱}(x_i) = \mu_{A_i^۱}\left(x_i; e_i^۱, e_i^۱, e_i^۲\right) \\ & \mu_{A_i^j}(x_i) = \mu_{A_i^j}\left(x_i; e_i^{j-۱}, e_i^j, e_i^{j+۱}\right) \\ & \mu_{A_i}^{N_i}(x_i) = \mu_{A_i}^{N_i}\left(x_i; e_i^{N_i-۱}, e_i^{N_i}, e_i^{N_i}\right) \end{aligned} \tag{۴۹}$$

سیستم فازی طراحی‌شده نیز به این صورت خواهد بود:

$$f(x)=\frac{\sum_{j=۱}^{۷} \sin\left(e^i\right)\mu_{A^j}(x)}{\sum_{j=۱}^{۷} A^j(x)} \tag{۵۰}$$

شبیه‌سازی:

دستوراتی را برای بررسی تقریب فازی سیستم $g(x)$ و بررسی میزان خطای آن در محیط‌های **متلب و پایتون** نوشته‌ایم. نمایی از دستورات متلب و پایتون به‌همراه نتایج در شکل ۶ آورده شده است که مشاهده می‌گردد شکل‌های شبیه‌سازی‌شده با شکل‌های کتاب یکسان هستند (شکل ۸). دستورات پایتون مربوط به این سوال، علاوه بر پوشه‌های موجود در فایل فشرده در این پیوند نیز قابل دسترسی است. حال اگر از تابع تعلق گاوسی استفاده کنیم نتایج به‌صورتی که در شکل ۷ آورده شده است خواهد بود. حال اگر تعداد توابع تعلق

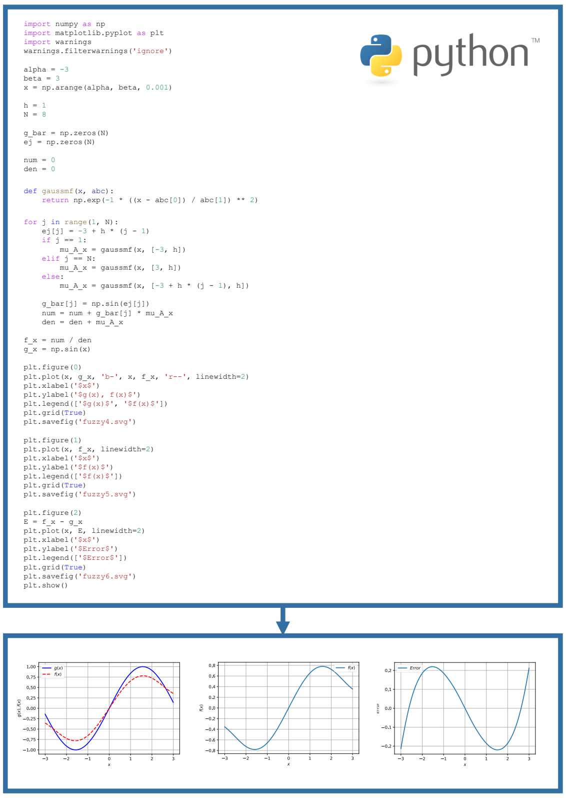


شکل ۶: دستورات متلب مثال شکل ۲-۱۱ و نتایج آن‌ها.

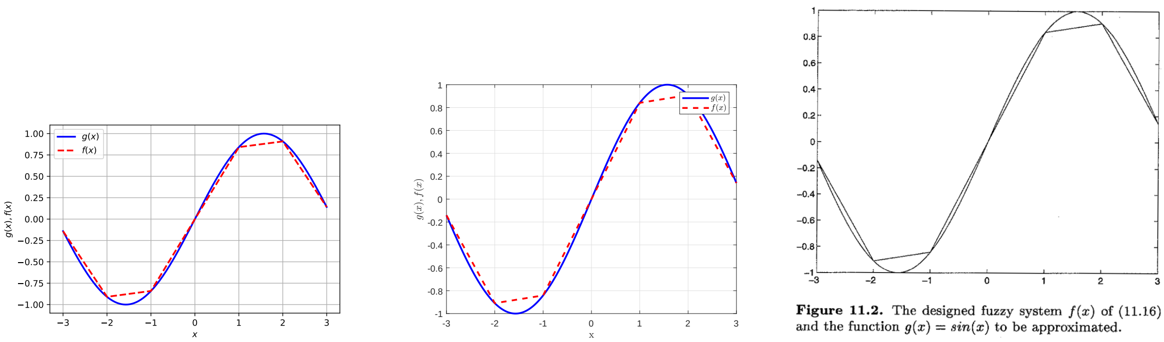
را بیش‌تر و سعی در تقریبی دقیق‌تر داشته باشیم نتایج به‌صورتی خواهد بود که در شکل ۹ آورده شده است. مشابه سوال اول علاوه بر این شبیه‌سازی‌ها، شبیه‌سازی دیگری برای این سوال در محیط اینترنت پیدا شده است که به‌دلیل تفاوت و جالبی نحوهٔ نگارش کد این شبیه‌سازی، آن را در پوشهٔ `Q3_Others` آورده‌ایم و نتایج آن به صورتی است که در شکل ۱۰ آورده شده است.

توضیح پوشهٔ کدها

در پوشهٔ اصلی این سوال (`Q3`)، فایل‌های متلب و پایتون مربوط به این سوال قرار گرفته‌اند. دستورات پایتون مربوط به این سوال، علاوه بر پوشه‌های موجود در فایل فشرده در این پیوند نیز قابل دسترسی است.

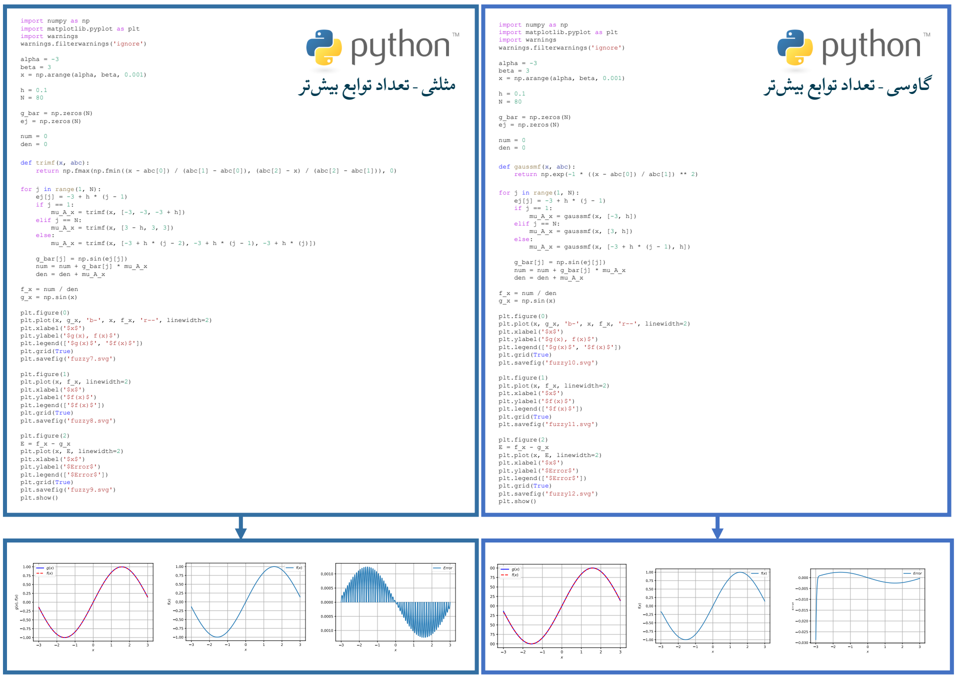


شکل ۷: دستورات پایتون مثال شکل ۲-۱۱ و نتایج آن‌ها (تابع تعلق گاوسی).

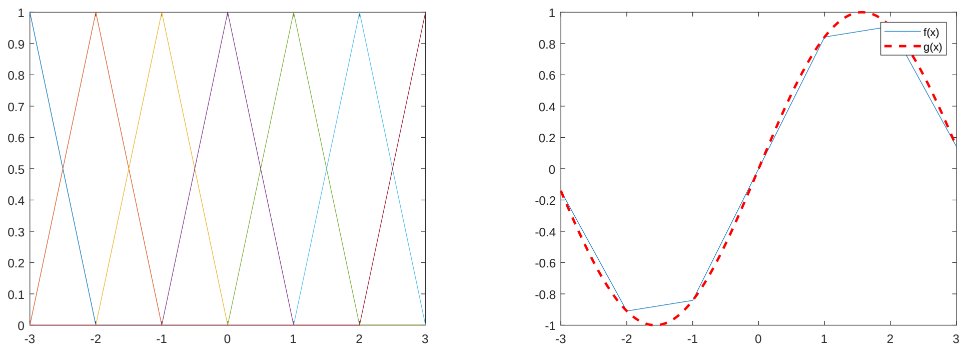


(آ) شکل ۲-۱۱ کتاب مرجع
(ب) نتیجهٔ متلب
(ج) نتیجهٔ پایتون

شکل ۸: مقایسهٔ شکل ۲-۱۱ کتاب مرجع با شماری از نتایج شبیه‌سازی.



شکل ۹: دستورات پایتون مثال شکل ۲-۱۱ (تعداد توابع بیش‌تر).



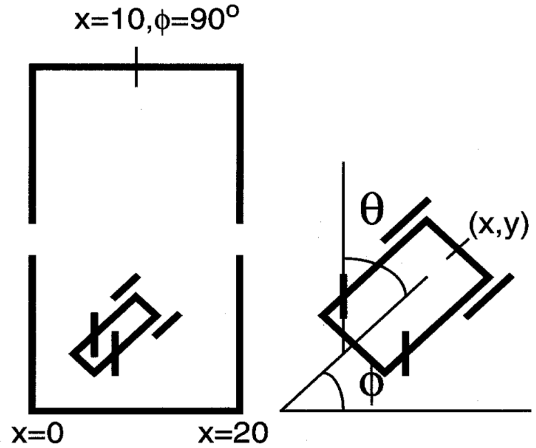
(آ) مقایسه (ب) توابع تعلق

شکل ۱۰: نتایج یک شبیه‌سازی دیگر.

سوال چهارم – شبیه‌سازی مثال کامیون

هدف ما در این قسمت طراحی کنترل‌کننده‌ای است که رفتار راننده را در حرکت رو به عقب کامیون شبیه‌سازی کند. مکان کامیون توسط سه متغیر حالت x، ϕ و y تعیین می‌شود که همان‌طوری که در شکل ۱۱ آورده شده است، زاویهٔ ϕ، زاویهٔ کامیون نسبت به محور افق بوده و کنترل کامیون با استفاده

از زاویهٔ فرمان یا متغیر θ صورت می‌گیرد. علامت زاویهٔ فرمان با توجه به شکل ۱۱ و حرکت با دندهٔ عقب و به‌شکل ساعتگرد، مثبت تعیین شده است و اگر کامیون با دندهٔ عقب و به‌شکل پادساعتگرد حرکت کند، منفی در نظر گرفته می‌شود هم‌چنین برای سادگی فرض می‌نماییم که فضای بین کامیون و محل بارگیری کافی است و نیازی به درنظرگرفتن y به‌عنوان یک متغیر حالت نیست. بنابراین، هدف غایی ما طراحی کنترل‌کننده‌ای با ورودی (x,ϕ) و خروجی θ است. فضای ورودی و خروجی را به‌ترتیب به‌صورت $U=[x]\times[\phi]=[۰,۲۰]\times[-۹۰,۲۷۰]$ و $V=[\theta]=[-۴۰,۴۰]$ در نظر می‌گیریم. حال برای تولید داده،



شکل ۱۱: تصویری از مسأله در کتاب مرجع.

N جفت دادهٔ ورودی–خروجی را به‌صورت $(x_k,\phi_k,\theta_k), k=۱,\cdots N$ تعریف می‌کنیم و فرض می‌کنیم که نقطهٔ شروع کامیون از $(x_۰,\phi_۰)=(۱,۰)$ بوده است و نقطهٔ هدف (نهایی) که قرار است یک رانندهٔ باتجربه با تنظیم متناسب θ به آن برسد، $(x_f,\phi_f)=(۱۰,۹۰)$ است. با توجه به جدول آزمایش اول کتاب که در شکل ۱۲ آورده شده است، در آزمایش اول هجده نقطه‌داده داریم. هم‌چنین در این جدول دیده می‌شود که زاویهٔ فرمان از ابتدا تا انتها تغییر علامت نمی‌دهد. حال فرض کنیم در آزمایش دوم از راننده خواسته شود که از نقطهٔ $(x_۰,\phi_۰)=(۱,۹۰)$ شروع به حرکت کند و به نقطهٔ هدف (نهایی) $(x_f,\phi_f)=(۱۰,۹۰)$ برسد. جدول آزمایش دوم با بیست و چهار نقطه‌داده در جدول ۱ آورده شده است. باید توجه داشت که جداول مربوط به آزمایش اول (شکل ۱۲) و آزمایش دوم (صفحه ۲۰) به‌ترتیب معرّف ۱۸ و ۲۴ زوج ورودی–خروجی هستند و در حلّ این سوال و برای طراحی سیستم فازی به همین دو آزمایش بسنده می‌شود و تمامی ۴۲ زوج ورودی–خروجی در یک مجموعهٔ جامع در نظر گرفته می‌شوند. بدیهی است که با انجام آزمایش‌های بیش‌تر دقت شبیه‌سازی‌ها بالاتر خواهد رفت.

در گام مهم بعدی، با طبقه‌بندی فضای ورودی و خروجی به‌صورت فازی، مجموعه‌هایی فازی برای پوشش‌دادنِ زوج‌های ورودی–خروجی تعریف می‌کنیم. مجموعه‌های فازی را با توابع تعلق مثلثی و ذوزنقه‌ای

جدول ۱: جدول مربوط به آزمایش دوم

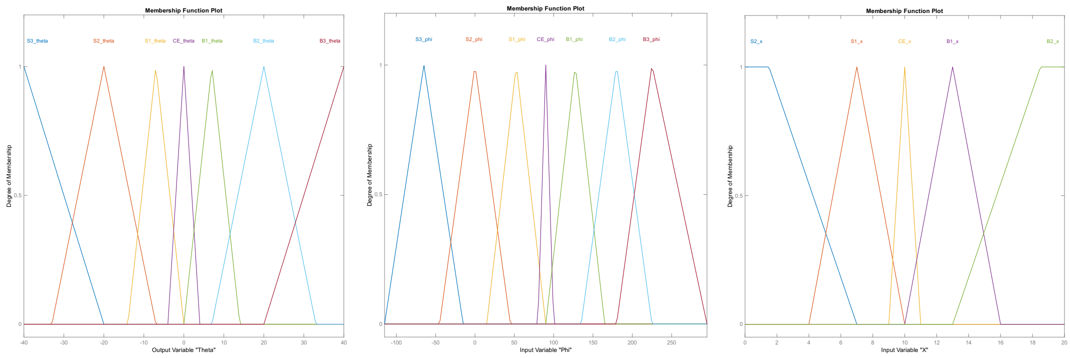
t	x_t	φ_t	θ_t
۰	۱٫۰۰	۹۰٫۰۰	۱۱٫۵
۱	۱٫۱۰	۷۹٫۰۸	۹٫۴۰
۲	۱٫۲۹	۷۴٫۴	۸٫۳۵
۳	۱٫۵۶	۷۰٫۲۴	۷٫۳۰
۴	۱٫۹۰	۶۶٫۶۰	۶٫۲۵
۵	۲٫۲۹	۶۳٫۴۸	۵٫۲۰
۶	۲٫۷۳	۶۰٫۸۸	۴٫۱۵
۷	۳٫۲۲	۵۸٫۸۱	۳٫۱۰
۸	۳٫۷۴	۵۷٫۲۶	۲٫۰۵
۹	۴٫۸۴	۵۵٫۷۴	−۰٫۰۵
۱۰	۵٫۹۶	۵۶٫۳۱	−۲٫۱۵
۱۱	۶٫۵۱	۵۷٫۳۸	−۳٫۲۰
۱۲	۷٫۰۵	۵۸٫۹۸	−۴٫۲۵
۱۳	۷٫۵۶	۶۱٫۱۰	−۵٫۳۰
۱۴	۸٫۰۴	۶۳٫۷۵	−۶٫۳۵
۱۵	۸٫۴۸	۶۶٫۹۲	−۷٫۴۰
۱۶	۸٫۸۷	۷۰٫۶۱	−۸٫۴۵
۱۷	۹٫۲۰	۷۴٫۸۲	−۷٫۴۰
۱۸	۹٫۴۶	۷۸٫۵۱	−۶٫۳۵
۱۹	۹٫۶۶	۸۱٫۶۸	−۵٫۳۰
۲۰	۹٫۸۰	۸۴٫۳۳	−۴٫۲۵
۲۱	۹٫۹۰	۸۶٫۴۵	−۳٫۲۰
۲۲	۹٫۹۶	۸۸٫۰۵	−۲٫۱۵
۲۳	۱۰٫۰۱	۸۹٫۶۷	۰٫۰۰

Table 12.1. Ideal trajectory (x_t, ϕ_t^o) and the corresponding control θ_t^o starting from $(x_0, \phi_0) = (1, 0^o)$.

t	x_t	ϕ_t^o	θ_t^o
0	1.00	0.00	-19.00
1	1.95	9.37	-17.95
2	2.88	18.23	-16.90
3	3.79	26.57	-15.85
4	4.65	34.44	-14.80
5	5.45	41.78	-13.75
6	6.18	48.60	-12.70
7	7.48	54.91	-11.65
8	7.99	60.71	-10.60
9	8.72	65.99	-9.55
10	9.01	70.75	-8.50
11	9.28	74.98	-7.45
12	9.46	78.70	-6.40
13	9.59	81.90	-5.34
14	9.72	84.57	-4.30
15	9.81	86.72	-3.25
16	9.88	88.34	-2.20
17	9.91	89.44	0.00

شکل ۱۲: جدول مربوط به آزمایش اول در کتاب مرجع.

انتخاب و تعریف می‌کنیم. علاوه بر پیاده‌سازی این توابع در محیط متلب دستوراتی در این دستورات برای نمایش این توابع نوشته شده است. نمایی از این توابع تعلق در شکل ۱۳ آورده شده است. یکی از نکات خیلی مهم در تعریف مجموعه‌های فازی آن است که به‌ازای هر ورودی اندازهٔ تابع تعلق غیرصفر باشد (یعنی مجموعه‌های فازی کامل باشند). تعداد این توابع تعلق به دست مسئول سیستم بوده و نه باید آنقدر کم باشد که عمل‌کرد ضعیف و خطا زیاد باشد و نه باید زیاد باشد که طراحی سیستم را گران سازد. در این مسأله به منظور طراحی بهتر، توابع تعلق نزدیک به محل بارگیری)نقطهٔ نهایی)، باریک‌تر از مجموعه‌های فازی دورتر از این نقطه در نظر گرفته شده‌اند. در ادامه قصد داریم تا قواعد را از روی زوج‌های



(آ) تابع تعلق x (ب) تابع تعلق ϕ (ج) تابع تعلق θ

شکل ۱۳: توابع تعلقی که برای شبیه‌سازی مسألهٔ چهارم در نظر گرفته شده اند.

ورودی-خروجی به‌دست آوریم. برای این منظور، ابتدا تابع تعلق ورودی و خروجی را در مجموعه‌های

فازی تعریف‌شده در شکل ۱۳ تعیین می‌کنیم. آن‌گاه برای متغیرهای ورودی، مجموعه‌های فازی‌ای که متغیرهای ورودی بیش‌ترین میزان تعلق را به آن‌ها دارند تعیین می‌کنیم. با انجام این کار، برای هر زوج‌دادهٔ ورودی–خروجی یک قاعدهٔ اگر–آنگاه به دست می‌آید. برای مثال و با در نظر گرفتن زوج‌دادهٔ ورودی–خروجی اول، یعنی $(x_۱, \phi_۱, \theta_۱) = (۱, ۰, -۱۹)$ مشاهده می‌کنیم که $x_۱$ دارای مقدار تعلق یک در مجموعهٔ فازی $S_۲$ است، $\phi_۱$ دارای مقدار تعلق یک در مجموعهٔ فازی $S_۲$ است، و $\theta_۱$ دارای مقدار تعلق ۰٫۹۲۳۱ در مجموعهٔ فازی $S_۲$ است. با این شرح، قواعد اگر–آنگاه برای این جفت ورودی–خروجی به این صورت نوشته می‌شود: "اگر x، $S_۲$ و ϕ، $S_۲$ باشد؛ آن‌گاه θ، $S_۲$ است". برای زوج‌دادهٔ ورودی–خروجی دوم، یعنی $(x_۲, \phi_۲, \theta_۲) = (۱٫۹۵, ۹٫۳۷, -۱۷٫۹۵)$ مشاهده می‌کنیم که $x_۲$ دارای مقدار تعلق ۰٫۹۱۸۲ در مجموعهٔ فازی $S_۲$ است، $\phi_۲$ دارای مقدار تعلق ۰٫۷۹۱۸ در مجموعهٔ فازی $S_۲$ است، و $\theta_۲$ دارای مقدار تعلق ۰٫۸۴۲۳ در مجموعهٔ فازی $S_۲$ است. با این شرح، قواعد اگر–آنگاه برای این جفت ورودی–خروجی به این صورت نوشته می‌شود: "اگر x، $S_۲$ و ϕ، $S_۲$ باشد؛ آن‌گاه θ، $S_۲$ است". برای زوج‌دادهٔ ورودی–خروجی دوم، یعنی $(x_۳, \phi_۳, \theta_۳) = (۲٫۸۸, ۱۸٫۲۳, -۱۶٫۹۰)$ مشاهده می‌کنیم که $x_۳$ دارای مقدار تعلق ۰٫۷۴۹۱ در مجموعهٔ فازی $S_۲$ است، $\phi_۲$ دارای مقدار تعلق ۰٫۰۸۶۱ در مجموعهٔ فازی $S_۱$ و ۰٫۵۹۴۹ در مجموعهٔ فازی $S_۲$ است (از بین این دو مقدار، مقدار بیش‌تر را انتخاب می‌کنیم)، و $\theta_۳$ دارای مقدار تعلق ۰٫۷۶۱۵ در مجموعهٔ فازی $S_۲$ است. با این شرح، قواعد اگر–آنگاه برای این جفت ورودی–خروجی به این صورت نوشته می‌شود: "اگر x، $S_۲$ و ϕ، $S_۲$ باشد؛ آن‌گاه θ، $S_۲$ است". همین روند را برای تمامی ۴۲ جفت ورودی–خروجی ادامه می‌دهیم تا جدول قواعد به دست آید. به دلیل زیادبودن زوج‌های ورودی–خروجی برای آزمایش‌های مختلف احتمال وجود قواعد مشابه یا متداخل دور از انتظار نیست. برای حلّ این مشکل کافی است به هر قاعدهٔ تولیدشده یک درجه اهمیت نسبت دهیم و از میان قوانین یکسان و متضاد، قاعده‌های مهم‌تر را حفظ کنیم. یک راهکار برای به‌دست آوردن این مقدار اهمیت، از حاصل‌ضرب مقدار توابع تعلق ورودی‌ها و خروجی‌ها به‌ازای هر زوج دادهٔ ورودی–خروجی استفاده می‌کنیم. برای مثال با انجام این کار، درجهٔ اهمیت قاعدهٔ تولیدشده به‌ازای زوج ورودی–خروجی اول به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{درجهٔ اهمیت قاعدهٔ اول} = \mu_{S_۲}(x_۱)\,\mu_{S_۲}(\varphi_۱)\,\mu_{S_۲}(\theta_۱) = ۱ \times ۱ \times ۰٫۹۲۳۱ = ۰٫۹۲۳۱ \qquad (۵۱)$$

با انجام همین فرآیند برای قاعدهٔ تولیدشده به‌ازای زوج دوم و سوم به‌ترتیب خواهیم داشت:

$$\text{درجهٔ اهمیت قاعدهٔ دوم} = \mu_{S_۲}(x_۲)\,\mu_{S_۲}(\varphi_۲)\,\mu_{S_۲}(\theta_۲) = ۰٫۹۱۸۲ \times ۰٫۷۹۱۸ \times ۰٫۸۴۲۳ = ۰٫۶۱۲۴$$

$$\text{درجهٔ اهمیت قاعدهٔ سوم} = \mu_{S_۲}(x_۳)\,\mu_{S_۲}(\varphi_۳)\,\mu_{S_۲}(\theta_۳) = ۰٫۷۴۹۱ \times ۰٫۵۹۴۹ \times ۰٫۷۶۱۵ = ۰٫۳۳۹۴$$

(۵۲)

قواعد به‌دست آمده به همراه درجهٔ اهمیتشان در جدول ۲ آورده شده است. بر اساس این جدول، از میان قواعد ۱ تا ۴ که بخش اگر و آن‌گاه یکسانی دارند، قاعدهٔ شمارهٔ یک به‌دلیل درجهٔ اهمیت بزرگ‌تر انتخاب می‌شود و بقیه حذف می‌شوند. از مینا قواعد ۶ تا ۸ هم، قاعدهٔ شمارهٔ هفت یه‌دلیل درجهٔ اهمیت بزرگ‌تر باقی می‌ماند. از میان قواعد ۹، ۱۰، ۱۱، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵ و ۳۶ هم قاعدهٔ شمارهٔ سی‌و‌یک انتخاب می‌گردد. قاعدهٔ سی‌وهفت هم به‌دلیل درجهٔ اهمیت بزرگ‌تر به‌عنوان نمایندهٔ قواعد ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۳۷ و ۳۸ باقی می‌ماند. از میان مجموعه قواعد (۴۰ – ۳۹ – ۱۶ – ۱۵)، (۴۲ – ۴۱ – ۱۸ – ۱۷)، (۲۰تا۲۶) و (۲۸ – ۲۷) هم که از قواعد یکسان؛ یعنی دارای بخش اگر و آنگاه یکسان، محسوب می‌شوند، به‌ترتیب قاعده‌های ۴۰، ۴۲، ۲۳ و ۲۸ در نظر گرفته می‌شوند. در خصوص قواعد متضاد؛ یعنی قواعد دارای بخش اگر یکسان و بخش آن‌گاه متفاوت، هم همین روند را طی می‌کنیم و با این کار از میان مجموعه‌قواعد (۲۸ – ۲۳ – ۵)، (۳۱ – ۲۹ – ۷) و (۴۲ – ۴۰) به‌ترتیب قاعده‌های ۲۳، ۳۱ و ۴۲ در نظر گرفته می‌شوند. با حذف قواعد دارای درجهٔ اهمیت پایین‌تر در نهایت تنها شش قاعدهٔ فازی باقی می‌مانند که در جدول ۳ آورده شده است.

با طی‌شدن این مراحل می‌توانیم پایگاه قواعد فازی را در حالتی دووردی به‌صورت جدول جستجوی آورده‌شده در شکل ۱۴ نشان دهیم. همان‌طور که در این جدول جستجو مشاهده می‌شود، تنها شش خانه تکمیل شده که نتیجهٔ ۴۳ آزمایش انجام‌شده بوده است. برای تکمیل این حدول می‌توانیم آزمایش‌های بیش‌تری انجام دهیم و داده‌های بیش‌تری با شرایط اولیهٔ متفاوت در نظر بگیریم. بدیهی است که با افزایش تعداد آزمایش‌ها ممکن است همین شش خانه هم به‌دلیل قواعد متضاد تولیدشده تغییر کنند. روند دستی تولید قواعد بسیار دشوار بوده و برای حلّ این مشکل دستوراتی در متلب نوشته‌ایم که جلوتر معرفی می‌شود. در گام آخر، سیستم فازی مبتنی بر پایگاه قواعد فازی را می‌سازیم. برای این منظور، برنامه‌ی متلبی را

S_3					
S_2	S_2				
S_1	B_1	S_1	S_1		
CE	B_1		CE		
B_1					
B_2					
B_3					
	S_2	S_1	CE	B_1	B_2

شکل ۱۴: جدول جستجو برای پایگاه قواعد.

در نظر گرفته‌ایم که بر مبنای آزمایش‌های معرفی‌شده طراحی شده است. مطابق این دستورات داده‌های آزمایش‌های اول و دوم را در مجموعه‌هایی با نام dataset_1 و dataset_2 ذخیره می‌کنیم و درنهایت این دو مجموعه‌داده را با نام dataset ذخیره می‌کنیم. در ادامه، در اولین حلقه‌ی برنامه برای هر ردیف از داده‌های ورودی–خروجیِ مجموعه‌داده‌ی نهایی، یک قانون فازی تخصیص می‌دهیم و با محاسبه‌ی وزن این ردیف‌ها، نتیجه را در متغیر Rules ذخیره می‌کنیم. در مرحلهٔ بعدی، در دومین و سومین حلقهٔ تکرار برنامه که به‌صورت تودرتو نوشته شده، قواعد یکسان و متضاد حذف می‌گردند و قواعد نهایی در متغیری با نام Final_Rules ذخیره می‌شود. همان‌گونه که از حلّ دستی نیز به‌دست آمد در نهایت شش قاعدهٔ فازی باقی می‌ماند که با اجرای برنامه به‌صورت زیر است:

```
Final_Rules =

    1.0000    2.0000    2.0000    0.9231
    1.0000    3.0000    5.0000    0.5166
    2.0000    3.0000    3.0000    0.4939
    3.0000    3.0000    3.0000    0.1279
    3.0000    4.0000    4.0000    0.9573
    1.0000    4.0000    5.0000    0.3571
```

که در آن ستون اول تا سوم به‌ترتیب بیانگر شمارهٔ تابع تعلق درنظرگرفته‌شده برای x، ϕ و θ است و ستون چهارم هم نشان‌گر میزان اهمیت آن قاعده. در ادامه، با کمک متلب و جعبه‌ابزار فازی آن یک سیستم فازی با

جدول ۲: قواعد تولیدشده و درجهٔ اهمیت آن‌ها.

شماره	اگر (x)	اگر (ϕ)	آنگاه (θ)	درجهٔ اهمیت
۱	S_2	S_2	S_2	۰٫۹۲۳۱
۲	S_2	S_2	S_2	۰٫۶۱۲۴
۳	S_2	S_2	S_2	۰٫۳۳۹۴
۴	S_2	S_2	S_2	۰٫۱۶۲۷
۵	S_2	S_1	S_2	۰٫۱۳۲۹
۶	S_1	S_1	S_2	۰٫۱۷۹۲
۷	S_1	S_1	S_2	۰٫۲۸۵۵
۸	S_1	S_1	S_2	۰٫۲۸۱۲
۹	S_1	S_1	S_1	۰٫۲۵۴۲
۱۰	S_1	S_1	S_1	۰٫۱۷۳۷
۱۱	S_1	S_1	S_1	۰٫۱۳۳۱
۱۲	CE	S_1	S_1	۰٫۱۰۴۹
۱۳	CE	S_1	S_1	۰٫۱۲۶۷
۱۴	CE	S_1	S_1	۰٫۰۹۷۲
۱۵	CE	CE	S_1	۰٫۲۰۲۱
۱۶	CE	CE	S_1	۰٫۲۵۲۷
۱۷	CE	CE	CE	۰٫۳۳۰۳
۱۸	CE	CE	CE	۰٫۸۵۹۰
۱۹	S_2	CE	B_1	۰٫۳۵۷۱
۲۰	S_2	S_1	B_1	۰٫۱۹۱۴
۲۱	S_2	S_1	B_1	۰٫۳۳۵۸
۲۲	S_2	S_1	B_1	۰٫۴۹۸۸
۲۳	S_2	S_1	B_1	۰٫۵۱۶۶
۲۴	S_2	S_1	B_1	۰٫۴۴۹۹
۲۵	S_2	S_1	B_1	۰٫۳۵۷۴
۲۶	S_2	S_1	B_1	۰٫۲۵۳۱
۲۷	S_2	S_1	CE	۰٫۲۵۲۳
۲۸	S_2	S_1	CE	۰٫۳۵۴۳
۲۹	S_1	S_1	CE	۰٫۲۷۱۵
۳۰	S_1	S_1	S_1	۰٫۳۳۲۷
۳۱	S_1	S_1	S_1	۰٫۴۹۳۹
۳۲	S_1	S_1	S_1	۰٫۴۷۴۶
۳۳	S_1	S_1	S_1	۰٫۴۱۴۹
۳۴	S_1	S_1	S_1	۰٫۲۹۴۰
۳۵	S_1	S_1	S_1	۰٫۱۵۴۴
۳۶	S_1	S_1	S_1	۰٫۱۰۱۸
۳۷	CE	S_1	S_1	۰٫۱۲۷۹
۳۸	CE	S	S_1	۰٫۱۱۰۹
۳۹	CE	CE	S_1	۰٫۲۱۰۳
۴۰	CE	CE	S_1	۰٫۲۶۵۴
۴۱	CE	CE	CE	۰٫۳۵۷۴
۴۲	CE	CE	CE	۰٫۹۵۷۳

جدول ۳: قواعد باقی‌مانده و نهایی و درجهٔ اهمیت آن‌ها.

شماره	اگر (x)	اگر (ϕ)	آنگاه (θ)	درجهٔ اهمیت
۱	S_2	S_2	S_2	۰٫۹۲۳۱
۱۹	S_2	CE	B_1	۰٫۳۵۷۱
۲۳	S_2	S_1	B_1	۰٫۵۱۶۶
۳۱	S_1	S_1	S_1	۰٫۴۹۳۹
۳۷	CE	S_1	S_1	۰٫۱۲۷۹
۴۲	CE	CE	CE	۰٫۹۵۷۳

موتور استنتاج ضرب ممدانی و غیرفازی‌ساز مرکز ثقل ایجاد کرده و متغیرهای ورودی-خروجی، توابع تعلق و قواعد فازی را در ساختاری با نام `fis` ذخیره می‌کنیم. با ایجاد کنترل‌کنندهٔ فازی بر مبنای مجموعه‌داده‌های این دو آزمایش، این کنترلر را به کامیون اِعمال می‌کنیم به صورتی که عمل‌کرد کنترل کامیون را با شروع از نقاط اولیهٔ جدید مشاهده کنیم. برای این منظور حلقهٔ تکرار آخر برنامه را نوشته‌ایم و از مدل تقریبی کامیون که در کتاب مرجع درس آورده شده است (رابطهٔ ۵۳) استفاده کردیم که در آن تمامی زوایا برحسب رادیان بیان می‌گردند و برای تبدیل آن‌ها به درجه در برنامه از ضربِ آن‌ها در $\pi/180$ استفاده شده است. هم‌چنین در این رابطه، b طول کامیون می‌باشد.

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) + \cos[\phi(t)+\theta(t)] + \sin[\theta(t)]\sin[\phi(t)] \\ y(t+1) &= y(t) + \sin[\phi(t)+\theta(t)] - \sin[\theta(t)]\cos[\phi(t)] \\ \phi(t+1) &= \phi(t) - \sin^{-1}\left[\frac{2\sin(\theta(t))}{b}\right] \end{aligned} \tag{۵۳}$$

در نهایت برنامه را به‌صورت یکپارچه در زیر (برنامهٔ ۱) می‌آوریم و خروجی سیستم فازی برحسب متغیرهای ورودی در شکل ۱۵ نمایش داده می‌شود.

```
clc;
clear;
close all
%% Generating Data
% First Dataset
dataset_1 = [0      1       0       -19.00;...
             1      1.95    9.37    -17.95;...
             2      2.88    18.23   -16.90;...
             3      3.79    26.57   -15.85;...
             4      4.65    34.44   -14.80;...
```

```
               5       5.45     41.78    -13.75;...
               6       6.18     48.60    -12.70;...
               7       7.48     54.91    -11.65;...
               8       7.99     60.71    -10.60;...
               9       8.72     65.99    -9.55;...
               10      9.01     70.75    -8.50;...
               11      9.28     74.98    -7.45;...
               12      9.46     78.70    -6.40;...
               13      9.59     81.90    -5.34;...
               14      9.72     84.57    -4.30;...
               15      9.81     86.72    -3.25;...
               16      9.88     88.34    -2.20;...
               17      9.91     89.44    0];

% Second Dataset
dataset_2 = [0         1        90        11.5;...
               1       1.10     79.08     9.40;...
               2       1.29     74.40     8.35;...
               3       1.56     70.24     7.30;...
               4       1.90     66.60     6.25;...
               5       2.29     63.48     5.20;...
               6       2.73     60.88     4.15;...
               7       3.22     58.81     3.10;...
               8       3.74     57.26     2.05;...
               9       4.84     55.74    -0.05;...
               10      5.96     56.31    -2.15;...
               11      6.51     57.38    -3.20;...
               12      7.05     58.98    -4.25;...
               13      7.56     61.10    -5.30;...
               14      8.04     63.75    -6.35;...
               15      8.48     66.92    -7.40;...
               16      8.87     70.61    -8.45;...
               17      9.20     74.82    -7.40;...
               18      9.46     78.51    -6.35;...
               19      9.66     81.68    -5.30;...
```

```
             20      9.80     84.33    -4.25;...
             21      9.90     86.45    -3.20;...
             22      9.96     88.05    -2.15;...
             23      10.01    89.67     0];

[n1,~] = size(dataset_1);
[n2,~] = size(dataset_2);

n = n1 + n2;

dataset = zeros(n,5);
dataset(1:n1,2:4) = dataset_1(:,2:4);
dataset(n1+1:n,2:4) = dataset_2(:,2:4);

%% Asssign Degree to Each Rule
% Five Membership Functions for Iput x
N_Rule_x = 5;
S2_x = [0 0 1.5 7];
S1_x = [4 7 10];
CE_x = [9 10 11];
B1_x = [10 13 16];
B2_x = [13 18.5 20 20];

% Seven Membership Functions for Iput phi
N_Rule_phi = 7;
S3_phi = [-115 -65 -15];
S2_phi = [-45 0 45];
S1_phi = [15 52.5 90];
CE_phi = [80 90 100];
B1_phi = [90 127.5 165];
B2_phi = [135 180 225];
B3_phi = [180 225 295];

% Seven Membership Functions for Iput theta
N_Rule_theta = 7;
```

```
S3_theta = [-60 -40 -20];
S2_theta = [-33 -20 -7];
S1_theta = [-14 -7 0];
CE_theta = [-4 0 4];
B1_theta = [0 7 14];
B2_theta = [7 20 33];
B3_theta = [20 40 60];

%% Prealloctions

Rules = zeros(n,4);
Rules_Total = zeros(n,4);
vec_x = zeros(1,N_Rule_x);
vec_phi = zeros(1,N_Rule_phi);
vec_theta = zeros(1,N_Rule_theta);

for k=1:n
    dataset(k,1) = k;
    x_k = dataset(k,2);
    vec_x = [trapmf(x_k,S2_x) trimf(x_k,S1_x) trimf(x_k,CE_x) trimf(x_k,B1_x)
    trapmf(x_k,B2_x)];
    phi_k = dataset(k,3);
    vec_phi = [trimf(phi_k,S3_phi) trimf(phi_k,S2_phi) trimf(phi_k,S1_phi)
    trimf(phi_k,CE_phi) trimf(phi_k,B1_phi) trimf(phi_k,B2_phi) trimf(phi_k,
    B3_phi)];
    theta_k = dataset(k,4);
    vec_theta = [trimf(theta_k,S3_theta) trimf(theta_k,S2_theta) trimf(theta_k,
    S1_theta) trimf(theta_k,CE_theta) trimf(theta_k,B1_theta) trimf(theta_k,
    B2_theta) trimf(theta_k,B3_theta)];
    [value_x,column_x] = max(vec_x);
    [value_phi,column_phi] = max(vec_phi);
    [value_theta,column_theta] = max(vec_theta);

    vec = [max(vec_x) max(vec_phi) max(vec_theta)];
    dataset(k,5) = prod(vec);
```

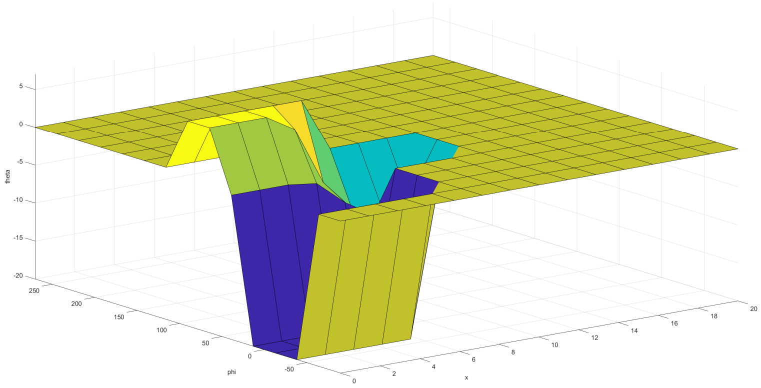
```

    Rules(k,1:4) = [column_x column_phi column_theta prod(vec)];
end

%% Delete Extra Rules

Rules_Total(1,1:4) = Rules(1,1:4);
i=1;
for t=2:n
    m = zeros(1,i);
    for j=1:i
        m(1,j) = isequal(Rules(t,1:2),Rules_Total(j,1:2));
            if m(1,j)==1 && Rules(t,4)>=Rules_Total(j,4)
                Rules_Total(j,1:4) = Rules(t,1:4);
            end
    end
            if sum(m) == 0
                Rules_Total(i+1,1:4) = Rules(t,1:4);
                i = i+1;
            end
end

Final_Rules = Rules_Total(1:i,:)

%% Create Fuzzy Inference System

Fisname = 'Controller';
Fistype = 'mamdani';
Andmethod='prod';
Ormethod='max';
Impmethod='prod';
Aggmethod='max';
Defuzzmethod='centroid';

fis = newfis(Fisname,Fistype,Andmethod,Ormethod,Impmethod,Aggmethod,
```

```
    Defuzzmethod);

%% Add Variables

fis = addvar(fis,'input','x',[0 20]);
fis = addvar(fis,'input','phi',[-90 270]);
fis = addvar(fis,'output','theta',[-40 40]);

%% Add Membership Function

fis = addmf(fis,'input',1,'S2','trapmf',S2_x);
fis = addmf(fis,'input',1,'S1','trimf',S1_x);
fis = addmf(fis,'input',1,'CE','trimf',CE_x);
fis = addmf(fis,'input',1,'B1','trimf',B1_x);
fis = addmf(fis,'input',1,'B2','trapmf',B2_x);

fis = addmf(fis,'input',2,'S3','trimf',S3_phi);
fis = addmf(fis,'input',2,'S2','trimf',S2_phi);
fis = addmf(fis,'input',2,'S1','trimf',S1_phi);
fis = addmf(fis,'input',2,'CE','trimf',CE_phi);
fis = addmf(fis,'input',2,'B1','trimf',B1_phi);
fis = addmf(fis,'input',2,'B2','trimf',B2_phi);
fis = addmf(fis,'input',2,'B3','trimf',B3_phi);

fis = addmf(fis,'output',1,'S3','trimf',S3_theta);
fis = addmf(fis,'output',1,'S2','trimf',S2_theta);
fis = addmf(fis,'output',1,'S1','trimf',S1_theta);
fis = addmf(fis,'output',1,'CE','trimf',CE_theta);
fis = addmf(fis,'output',1,'B1','trimf',B1_theta);
fis = addmf(fis,'output',1,'B2','trimf',B2_theta);
fis = addmf(fis,'output',1,'B3','trimf',B3_theta);

%% Add Rules
fis_Rules = ones(i,5);
fis_Rules(1:i,1:3) = Rules_Total(1:i,1:3);
```

```
fis = addrule(fis,fis_Rules);

%% Plot & Analysis

% Plot Membership Function
figure(1)
plotmf(fis,'input',1)
figure(2)
plotmf(fis,'input',2)
figure(3)
plotmf(fis,'output',1)
figure(4)
gensurf(fis)

% Controlling the Truck from an Arbitrary Initial Point (x0,phi0)

% Truck Parameter
b = 4;
Data_Table = zeros(n,4);

x = zeros(1,n);
phi = zeros(1,n);
y = zeros(1,n);
y(1,1) = 2;

x(1,1) = input('Enter Initial Point for x(0<x<20) & Press Enter Key: ');
phi(1,1) = input('Enter Initial Point for phi(-90<phi<270 degree) and then
    Press Enter Key: ');

for t=1:n
    theta = evalfis([x(1,t);phi(1,t)],fis);
    Data_Table(t,:) = [t,x(1,t),phi(1,t),theta];
    x(1,t+1) = x(1,t)+cos((phi(1,t)+theta).*pi/180)+sin(theta*pi/180)*sin(phi
    (1,t).*pi/180); ...
    phi(1,t+1) = phi(1,t) - (asin(2*sin(theta*pi/180)/b))*180/pi;
```

```
    y(1,t+1) = y(1,t)+sin((phi(1,t)+theta)*pi/180)-sin(theta*pi/180)*cos(phi(1,
    t)*pi/180);
end

disp('_____________________________')
disp(['x_Final = ',num2str(x(end))])
disp(['phi_Final = ',num2str(phi(end))])
disp('_____________________________')

figure(5) = figure('Color', [1 1 1]);
plot(x,y,'Linewidth',2)
xlabel('x')
ylabel('y');
axis([0 20 -10 50])
grid on
```

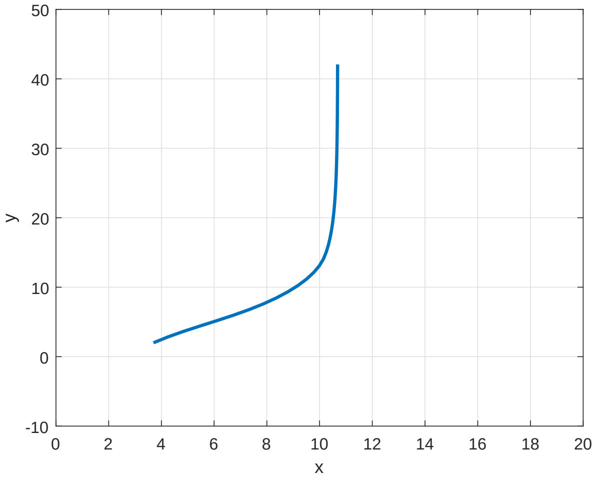
Listing 1: MATLAB Code 1



شکل ۱۵: خروجی سیستم فازی برحسب متغیرهای ورودی.

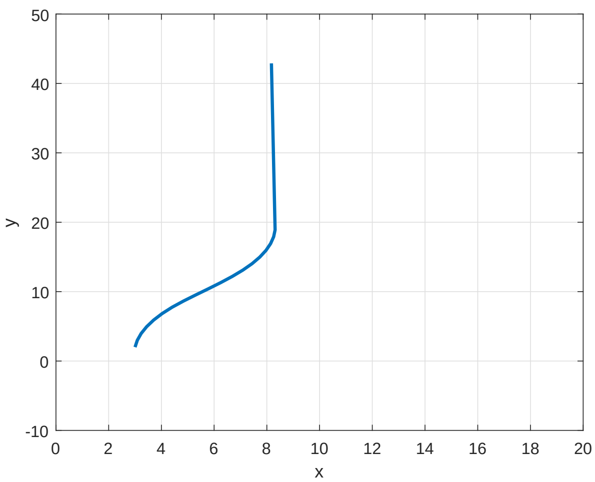
هم‌چنین این برنامه به صورتی نوشته شده است که مقادیر اولیهٔ ورودی‌های x و ϕ را در بازه‌های مجاز از کاربر بگیرد و مسیر حرکتی و موقعیت نهایی کامیون را برای کاربر نشان دهد. برای بررسی عملکرد کنترل‌کننده دو حالتِ اولیهٔ نزدیک به شرایط اولیهٔ آزمایش و دور از آن را در نظر می‌گیریم. برای حالتی که نزدیک شرایط اولیهٔ آزمایش‌ها هستیم مقدار $(x_۰,\phi_۰) =$ (۳٫۷, ۵۷) را در نظر می‌گیریم و مشاهده می‌کنیم نقطهٔ نهایی‌ای که کامیون به آن رسیده $(x_{final},\phi_{final}) =$ (۱۰٫۶۸۴۱, ۸۹٫۹۶۶۴) است، که این نشان می‌دهد کامیون بسیار نزدیک به نقطهٔ نهایی مطلوب خود یعنی (۱۰, ۹۰) شده است. هم‌چنین مسیر

حرکتی در شکل ۱۶ نشان داده شده است. حال برای حالتی که دورتر از شرایط اولیهٔ آزمایش‌ها هستیم



شکل ۱۶: مسیر حرکتی کامیون در حالت اول و از شرایط اولیهٔ نزدیک.

مقدار $(۳,۸۵) = (x_۰, \phi_۰{}_۰)$ را در نظر می‌گیریم و مشاهده می‌کنیم نقطهٔ نهایی‌ای که کامیون به آن رسیده است، $(۸/۱۷۳۸, ۹۰/۳۳۲۹) = (x_{final}, \phi_{final})$ که این نشان می‌دهد کامیون چندان به نقطهٔ نهایی مطلوب خود یعنی $(۱۰, ۹۰)$ نرسیده است. هم‌چنین مسیر حرکتی در شکل ۱۷ نشان داده شده است. مشاهده



شکل ۱۷: مسیر حرکتی کامیون در حالت اول و از شرایط اولیهٔ دور.

می‌شود که عمل‌کرد کنترل‌کننده جای بهبود دارد. برای بهبود عمل‌کرد کنترل‌کننده، باید داده‌برداری از کامیون با شرایط اولیهٔ بیش‌تری انجام پذیرد و تعداد آزمایش‌ها بیش‌تر گردد. برای مثال در مقاله‌ای[1] برای

[1] L.-X. Wang and J. M. Mendel, "Generating fuzzy rules by learning from examples," IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, vol. 22, no. 6. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), pp. 1414–1427, 1992. doi: 10.1109/21.199466.

جدول ۴: قواعد تولیدشدهٔ تکمیلی.

شماره	اگر (x)	اگر (ϕ)	آنگاه (θ)
۱	S_2	S_3	S_2
۲	S_2	S_2	S_2
۳	S_2	S_1	B_1
۴	S_2	CE	B_2
۵	S_2	B_1	B_2
۶	S_1	S_3	S_3
۷	S_1	S_2	S_3
۸	S_1	S_1	S_1
۹	S_1	CE	B_2
۱۰	S_1	B_1	B_3
۱۱	S_1	B_2	B_3
۱۲	CE_2	S_2	S_3
۱۳	CE	S_1	S_2
۱۴	CE	CE	CE
۱۵	CE	B_1	B_3
۱۶	CE	B_2	S_3
۱۷	B_1	S_2	S_3
۱۸	B_1	S_1	S_2
۱۹	B_1	CE	S_2
۲۰	B_1	B_1	B_1
۲۱	B_1	B_2	B_3
۲۲	B_1	B_3	B_3
۲۳	B_2	S_1	S_2
۲۴	B_2	CE	S_2
۲۵	B_2	B_1	S_1
۲۶	B_2	B_2	B_2
۲۷	B_2	B_3	B_2

تولید ورودی-خروجی مطلوب، از ۱۴ حالت اولیه به شرح زیر استفاده شده است:

$$\begin{aligned}(x_0,\varphi_0) = &(1,0),(1,90),(1,270),(7,0),(7,90),(7,180),(7,270),(13,0),\\ &(13,90),(13,180),(13,270),(19,90),(19,180),(19,270)\end{aligned} \tag{۵۴}$$

با در نظرگرفتن این شرایط، از میان حدود ۲۵۰ زوج‌دادهٔ ورودی-خروجی، یک پایگاه قواعد فازی مطابق جدول ۴ به دست می‌آید. در نتیجهٔ این پایگاه قواعد جدول جستجو به صورتی که در شکل ۱۸ آورده شده به‌روز می‌شود و با مقایسهٔ آن با جدول آورده‌شده در شکل ۱۴ مشاهده می‌شود که سیستم فازی برآمده از پایگاه جدید دقت بیش‌تری خواهد داشت. در نهایت برنامهٔ حالت توسعه‌داده‌شده را به‌صورت یکپارچه در

S_3	S_2	S_3			
S_2	S_2	S_3	S_3	S_3	
S_1	B_1	S_1	S_2	S_3	S_2
CE	B_2	B_2	CE	S_2	S_2
B_1	B_2	B_3	B_2	B_1	S_1
B_2		B_3	B_3	B_3	B_2
B_3				B_3	B_2
	S_2	S_1	CE	B_1	B_2

شکل ۱۸: جدول جستجو برای پایگاه قواعد.

زیر (برنامهٔ ۲) می‌آوریم:

```
clc;
clear;
close all

%% Create Fuzzy Inference System

Fisname = 'Controller';
Fistype = 'mamdani';
Andmethod='prod';
Ormethod='max';
Impmethod='prod';
Aggmethod='max';
Defuzzmethod='centroid';
fis = newfis(Fisname,Fistype,Andmethod,Ormethod,Impmethod,Aggmethod,
    Defuzzmethod);

%% Add Variables

fis = addvar(fis,'input','x',[0 20]);
fis = addvar(fis,'input','phi',[-90 270]);
fis = addvar(fis,'output','theta',[-40 40]);

%% Add Membership Function

fis = addmf(fis,'input',1,'S2','trapmf',[0 0 1.5 7]);
fis = addmf(fis,'input',1,'S1','trimf',[4 7 10]);
fis = addmf(fis,'input',1,'CE','trimf',[9 10 11]);
fis = addmf(fis,'input',1,'B1','trimf',[10 13 16]);
```

```
fis = addmf(fis,'input',1,'B2','trapmf',[13 18.5 20 20]);

fis = addmf(fis,'input',2,'S3','trimf',[-115 -65 -15]);
fis = addmf(fis,'input',2,'S2','trimf',[-45 0 45]);
fis = addmf(fis,'input',2,'S1','trimf',[15 52.5 90]);
fis = addmf(fis,'input',2,'CE','trimf',[80 90 100]);
fis = addmf(fis,'input',2,'B1','trimf',[90 127.5 165]);
fis = addmf(fis,'input',2,'B2','trimf',[135 180 225]);
fis = addmf(fis,'input',2,'B3','trimf',[180 225 295]);

fis = addmf(fis,'output',1,'S3','trimf',[-60 -40 -20]);
fis = addmf(fis,'output',1,'S2','trimf',[-33 -20 -7]);
fis = addmf(fis,'output',1,'S1','trimf',[-14 -7 0]);
fis = addmf(fis,'output',1,'CE','trimf',[-4 0 4]);
fis = addmf(fis,'output',1,'B1','trimf',[0 7 14]);
fis = addmf(fis,'output',1,'B2','trimf',[7 20 33]);
fis = addmf(fis,'output',1,'B3','trimf',[20 40 60]);

%% Add Rules
Rules = [1 1 2 1 1;...
         1 2 2 1 1;...
         1 3 5 1 1;...
         1 4 6 1 1;...
         1 5 6 1 1;...
         2 1 1 1 1;...
         2 2 1 1 1;...
         2 3 3 1 1;...
         2 4 6 1 1;...
         2 5 7 1 1;...
         2 6 7 1 1;...
         3 2 1 1 1;...
         3 3 2 1 1;...
         3 4 4 1 1;...
         3 5 6 1 1;...
         3 6 7 1 1;...
```

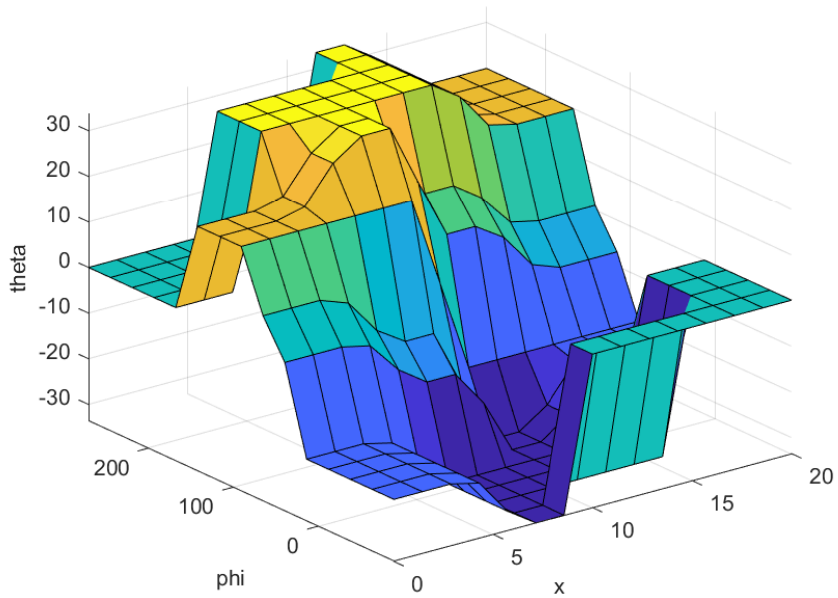
```
         4 2 1 1 1;...
         4 3 1 1 1;...
         4 4 2 1 1;...
         4 5 5 1 1;...
         4 6 7 1 1;...
         4 7 7 1 1;...
         5 3 2 1 1;...
         5 4 2 1 1;...
         5 5 3 1 1;...
         5 6 6 1 1;...
         5 7 6 1 1]
fis = addrule(fis,Rules);

%% Plot & Analysis

% Plot Membership Function
figure(1)
plotmf(fis,'input',1)
figure(2)
plotmf(fis,'input',2)
figure(3)
plotmf(fis,'output',1)
figure(4)
gensurf(fis)

% Controlling the Truck from an Arbitrary Initial Point (x0,phi0)

% Truck Parameter
b = 4;
n = 250;
Data_Table = zeros(n,5);

x = zeros(1,n);
phi = zeros(1,n);
y = zeros(1,n);
```

```
y(1,1) = 2;

x(1,1) = input('Enter Initial Point for x(0<x<20) & Press Enter Key: ');
phi(1,1) = input('Enter Initial Point for phi(-90<phi<270 degree) and then
    Press Enter Key: ');

x_desired = 10;
phi_desired = 90;

% Cost Function
J = norm([x_desired-x(1,1) phi_desired-phi(1,1)])

t=1;
while(J>=0.01)
    theta = evalfis([x(1,t);phi(1,t)],fis);
    Data_Table(t,:) = [t-1,x(1,t),y(1,t),phi(1,t),theta];
    x(1,t+1) = x(1,t)+cos((phi(1,t)+theta).*pi/180)+sin(theta*pi/180)*sin(phi
    (1,t).*pi/180); ...
    phi(1,t+1) = phi(1,t) - (asin(2*sin(theta*pi/180)/b))*180/pi;
    y(1,t+1) = y(1,t)+sin((phi(1,t)+theta)*pi/180)-sin(theta*pi/180)*cos(phi(1,
    t)*pi/180);

    J = norm([x_desired-x(1,t+1) ...
        phi_desired - phi(1,t+1)]);
    t = t+1
end

x_truck(1,:) = x(1,1:t);
phi_truck(1,:) = phi(1,1:t);
y_truck(1,:) = y(1,1:t);

disp('_____________________________')
disp(['x_Final = ',num2str(x_truck(end))])
disp(['phi_Final = ',num2str(phi_truck(end))])
disp(['y_Final = ',num2str(y_truck(end))])
```

```
disp('____________________________')

figure(5) = figure('Color', [1 1 1]);
plot(x_truck,y_truck,'Linewidth',2)
xlabel('x')
ylabel('y');
axis([0 20 -10 50])
grid on
```

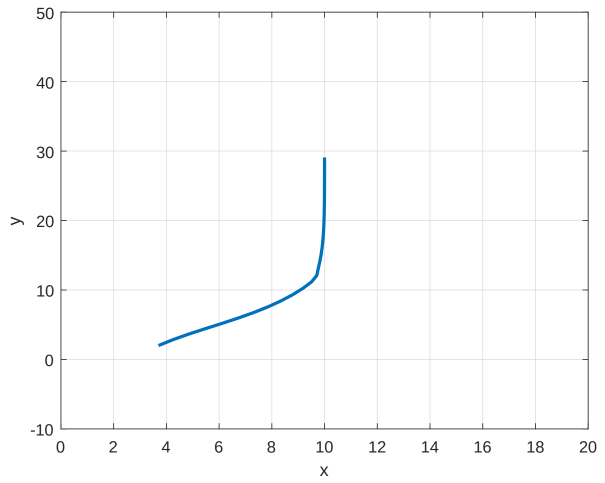
Listing 2: MATLAB Code 2

خروجی سیستم فازی برحسب متغیرهای ورودی در شکل ۱۹ نمایش داده می‌شود. هم‌چنین این برنامه



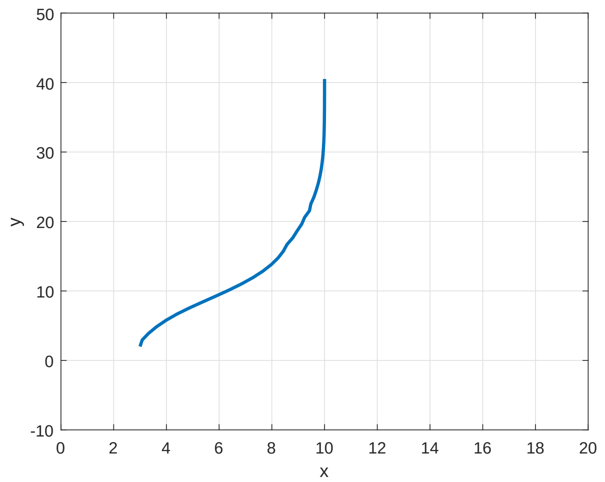
شکل ۱۹: خروجی سیستم فازی برحسب متغیرهای ورودی.

به صورتی نوشته شده است که مقادیر اولیهٔ ورودی‌های x و ϕ را در بازه‌های مجاز از کاربر بگیرد و مسیر حرکتی و موقعیت نهایی کامیون را برای کاربر نشان دهد. برای بررسی عمل‌کرد کنترل‌کننده دو حالتِ اولیهٔ نزدیک به شرایط اولیهٔ آزمایش و دور از آن را در نظر می‌گیریم. برای حالتی که نزدیک شرایط اولیهٔ آزمایش‌ها هستیم مقدار $(x_{\circ}, \phi_{\circ\circ}) = (۳/۷, ۵۷)$ را در نظر می‌گیریم و مشاهده می‌کنیم نقطهٔ نهایی‌ای که کامیون به آن رسیده $(x_{final}, \phi_{final}) = (۹/۹۹۹۷, ۸۹/۹۹۳۷)$ است، که این نشان می‌دهد کامیون بسیار نزدیک به نقطهٔ نهایی مطلوب خود یعنی $(۱۰, ۹۰)$ شده است. هم‌چنین مسیر حرکتی در شکل ۲۰ نشان داده شده است. حال برای حالتی که دورتر از شرایط اولیهٔ آزمایش‌ها هستیم مقدار $(x_{\circ}, \phi_{\circ\circ}) = (۳, ۸۵)$ را در نظر



شکل ۲۰: مسیر حرکتی کامیون در حالت اول و از شرایط اولیهٔ نزدیک.

می‌گیریم و مشاهده می‌کنیم نقطهٔ نهایی‌ای که کامیون به آن رسیده $(x_{final}, \phi_{final}) = (۹٫۹۹۹۶, ۸۹٫۹۹۰۱)$ است، که این نشان می‌دهد کامیون در این حالت هم به نقطهٔ نهایی مطلوب خود یعنی $(۱۰, ۹۰)$ رسیده است. همچنین مسیر حرکتی در شکل ۲۱ نشان داده شده است. در واقع، مشاهده می‌شود که عمل‌کرد



شکل ۲۱: مسیر حرکتی کامیون در حالت اول و از شرایط اولیهٔ دور.

کنترل‌کننده بهبود به‌سزایی پیدا کرده است. در این سوال هم مشابه سوال‌های اول و سوم، یک شبیه‌سازی جالب در محیط اینترنت یافت شده است که آن را در در پوشهٔ `Q4_Others` آورده‌ایم.