



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени
Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

ОТЧЕТ

по Лабораторной работе №2
по курсу «Анализ Алгоритмов»
на тему: «Алгоритмы умножения матриц»

Студент ИУ7-56Б
(Группа)

Преподаватели

Мансуров В. М.
(Фамилия И. О.)

Волкова Л. Л., Строганов Ю. В.
(Фамилия И. О.)

Москва — 2022 г.

Содержание

Введение	3
1 Аналитическая часть	4
1.1 Матрица	4
1.2 Классический алгоритм	5
1.3 Алгоритм Винограда	5
1.4 Оптимизированный алгоритм Винограда	7
2 Конструкторская часть	8
2.1 Функциональные требования	8
2.2 Разработка алгоритмов	8
2.3 Описание используемых типов данных	14
2.4 Модель вычислений для проведения оценки трудоемкости . . .	14
2.5 Трудоемкость алгоритмов	15
2.5.1 Классический алгоритм	15
2.5.2 Алгоритм Винограда	16
2.5.3 Оптимизированный алгоритм Винограда	17
3 Технологическая часть	19
3.1 Требования к программному обеспечению	19
3.2 Средства реализации	19
3.3 Сведения о модулях программы	20
3.4 Функциональные тесты	26
4 Исследовательская часть	28
4.1 Технические характеристики	28
4.2 Демонстрация работы программы	29
4.3 Временные характеристики	30
4.4 Вывод	32
Заключение	33
Список использованных источников	34

Введение

В данной лабораторной работе будет рассмотрено алгоритмы умножения матриц. В программировании, как и в математике, часто приходится прибегать к использованию матриц. Существует огромное количество областей их применения в этих сферах. Матрицы активно используются при выводе различных формул в физике, таких, как:

- градиент;
- дивергенция;
- ротор.

Нельзя обойти стороной и различные операции над матрицами – сложение, возведение в степень, умножение. При различных задачах размеры матрицы могут достигать больших значений, поэтому оптимизация операций работы над матрицами является важной задачей в программировании. В данной лабораторной работе пойдёт речь об оптимизациях операции умножения матриц.

Целью данной лабораторной работы является описание, реализация и исследование алгоритмов умножения матриц.

Для поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи.

- 1) Описать два алгоритмы умножения матриц.
- 2) Создать программное обеспечение, реализующее следующие алгоритмы:
 - классический алгоритм умножения матриц;
 - алгоритм Винограда;
 - оптимизированный алгоритм Винограда.
- 3) Оценить трудоемкости сортировок.
- 4) Провести анализ затрат работы программы по времени, выяснить влияющие на них характеристики.
- 5) Провести сравнительный анализ между алгоритмами.

1 Аналитическая часть

В этом разделе будут рассмотрены классический алгоритм умножения матриц и алгоритм Винограда, а также его оптимизированная версия.

1.1 Матрица

Матрицей [1] называют таблицу чисел a_{ik} вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

состоящую из m строк и n столбцов. Числа a_{ik} называются её *элементами*.

Пусть A – матрица, тогда $A_{i,j}$ – элемент этой матрицы, который находится на i -ой строке и j -ом столбце.

Можно выделить следующие операции над матрицами:

- 1) сложение матриц одинакового размера;
- 2) вычитание матриц одинакового размера;
- 3) умножение матриц в случае, если количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы. В итоговой матрице количество строк будет, как у первой матрицы, а столбцов – как у второй.

Замечание: операция умножения матриц не коммутативна – если A и B – квадратные матрицы, а C – результат их перемножения, то произведение AB и BA дадут разный результат C .

1.2 Классический алгоритм

Пусть даны две матрицы

$$A_{lm} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lm} \end{pmatrix}, \quad B_{mn} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

тогда матрица C

$$C_{ln} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \dots & c_{ln} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

где

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir} b_{rj} \quad (i = \overline{1, l}; j = \overline{1, n}) \quad (1.4)$$

будет называться произведением матриц A и B [1].

Классический алгоритм реализует данную формулу 1.4.

1.3 Алгоритм Винограда

Алгоритм Винограда [2] – алгоритм умножения квадратных матриц. В 1987 году Дон Копперсмит и Виноград опубликовали метод, содержащий асимптотическую сложность $O(n^{2,3755})$ и улучшили его в 2011 до $O(n^{2,373})$, где n – размер сторон матрицы. После доработки он стал обладать лучшей асимптотикой среди всех алгоритмов умножения матриц.

Рассмотрим пример, пусть есть два вектора $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ и $W = (w_1, w_2, w_3, w_4)$. Их скалярное произведение равно: $U \cdot W = u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 + u_4 w_4$, что эквивалентно 1.5:

$$U \cdot W = (u_1 + w_2)(u_2 + w_1) + (u_3 + w_4)(u_4 + w_3) - u_1 u_2 - u_3 u_4 - w_1 w_2 - w_3 w_4 \quad (1.5)$$

Пусть матрицы A, B, C , ранее определенных размеров. Упомянутое скалярное произведение, по замыслу Винограда, можно произвести иначе в формуле 1.6:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{q/2} (a_{i,2k-1} + b_{2k,j})(a_{i,2k} + b_{2k-1,j}) - \sum_{k=1}^{q/2} a_{i,2k-1}a_{i,2k} - \sum_{k=1}^{q/2} b_{2k-1,j}b_{2k,j} \quad (1.6)$$

Казалось бы, это только увеличит количество арифметических операций по сравнению с классическим методом, однако Виноград предложил находить второе и третье слагаемые в Формуле 1.6 предварительном этапе вычислений, заранее для каждой строки матрицы A и столбца B соответственно. Так, вычислив единожды для строки i матрицы A значение выражения $\sum_{k=1}^{q/2} a_{i,2k-1}a_{i,2k}$ его можно далее использовать m раз при нахождении элементов i -ой строчки матрицы C . Аналогично, вычислив единожды для столбца j матрицы B значение выражения $\sum_{k=1}^{q/2} b_{2k-1,j}b_{2k,j}$ его можно далее использовать n раз при нахождении элементов j -ого столбца матрицы C . [2]

За счёт предварительной обработки данных можно получить прирост производительности: несмотря на то, что полученное выражение требует большего количества операций, чем стандартное умножение матриц, выражение в правой части равенства можно вычислить заранее и запомнить для каждой строки первой матрицы и каждого столбца второй матрицы. Это позволит выполнить лишь два умножения и пять сложений, при учёте, что потом будет сложено только с двумя предварительно посчитанными суммами соседних элементов текущих строк и столбцов. Операция сложения выполняется быстрее, поэтому на практике алгоритм должен работать быстрее обычного алгоритма перемножения матриц.

Стоит упомянуть, что при нечётном значении размера матрицы нужно дополнительно добавить произведения крайних элементов соответствующих строк и столбцов.

1.4 Оптимизированный алгоритм Винограда

При программной реализации рассмотренного выше алгоритма Винограда можно сделать следующие оптимизации:

- 1) значение $\frac{N}{2}$, используемое как ограничения цикла подсчёта предварительных данных, можно кэшировать;
- 2) операцию умножения на 2 программно эффективнее реализовывать как побитовый сдвиг влево на 1;
- 3) операции сложения и вычитания с присваиванием следует реализовывать при помощи соответствующего оператора $+=$ или $-=$ (при наличии данных операторов в выбранном языке программирования).

Вывод

В данном разделе были рассмотрены алгоритмы умножения матриц – классического и Винограда, который имеет большую эффективность за счёт предварительных вычислений. Также были рассмотрены оптимизации, которые можно учесть при программной реализации алгоритма Винограда.

Алгоритмы будут получать на вход две матрицы, причём количество столбцов одной матрицы должно совпадать с количеством строк второй матрицы. При вводе пустой матрицы будет выведено сообщение об ошибке. Требуется реализовать программное обеспечение, которое даёт возможность выбрать один из алгоритмов или все сразу, ввести две матрицы и вывести результат их перемножения. Также необходимо провести замеры времени работы реализаций алгоритмов для чётных и нечётных размеров матриц и сравнить результаты, используя графическое представление.

2 Конструкторская часть

В этом разделе будут представлены описания используемых типов данных, а также схемы алгоритмов перемножения матриц – стандартного, Винограда и оптимизации алгоритма Винограда

2.1 Функциональные требования

К программе предъявлены ряд функциональных требований: входные данные – размеры матрицы, целые числа и матрица, двумерный массив целых чисел, выходные данные – матрица.

2.2 Разработка алгоритмов

На рисунке 2.1 представлена схема алгоритма для стандартного умножения матриц. На рисунках 2.2 и 2.3 схема алгоритма Винограда умножения матриц, а на 2.4 и 2.5 — схема оптимизированного алгоритма Винограда.

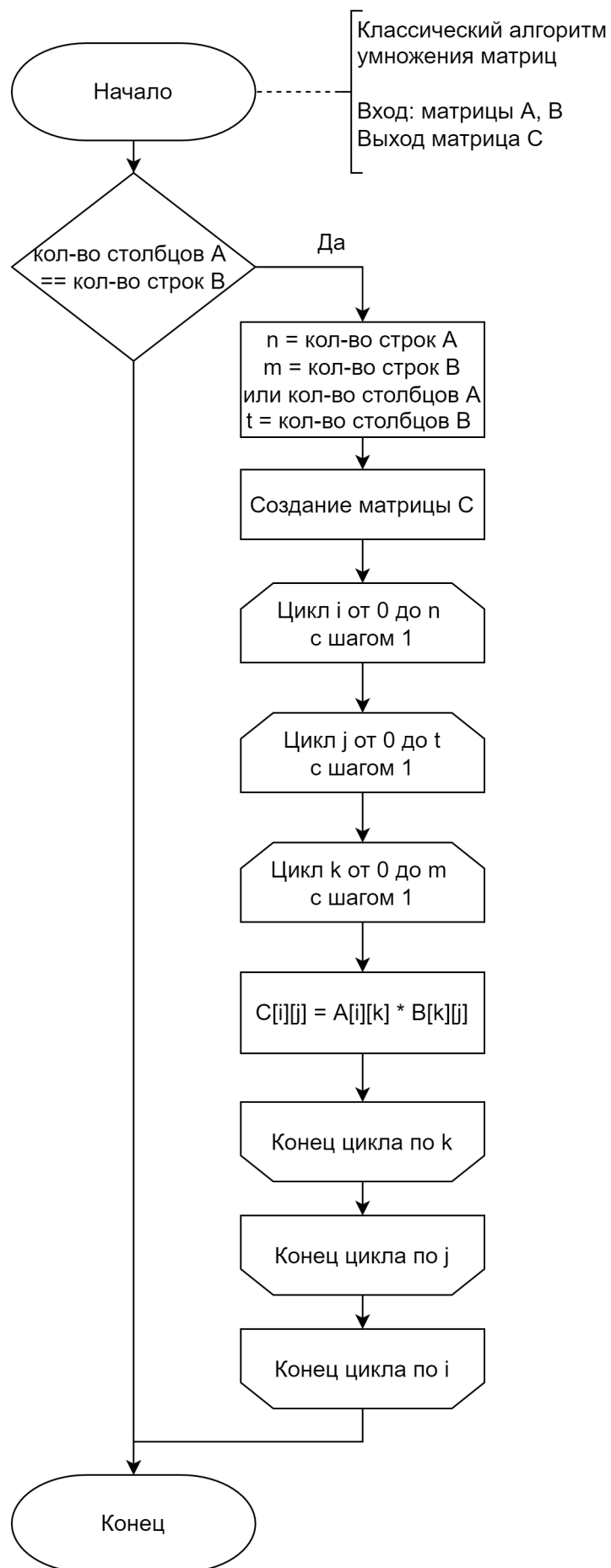


Рисунок 2.1 – Схема стандартного алгоритма умножения матриц

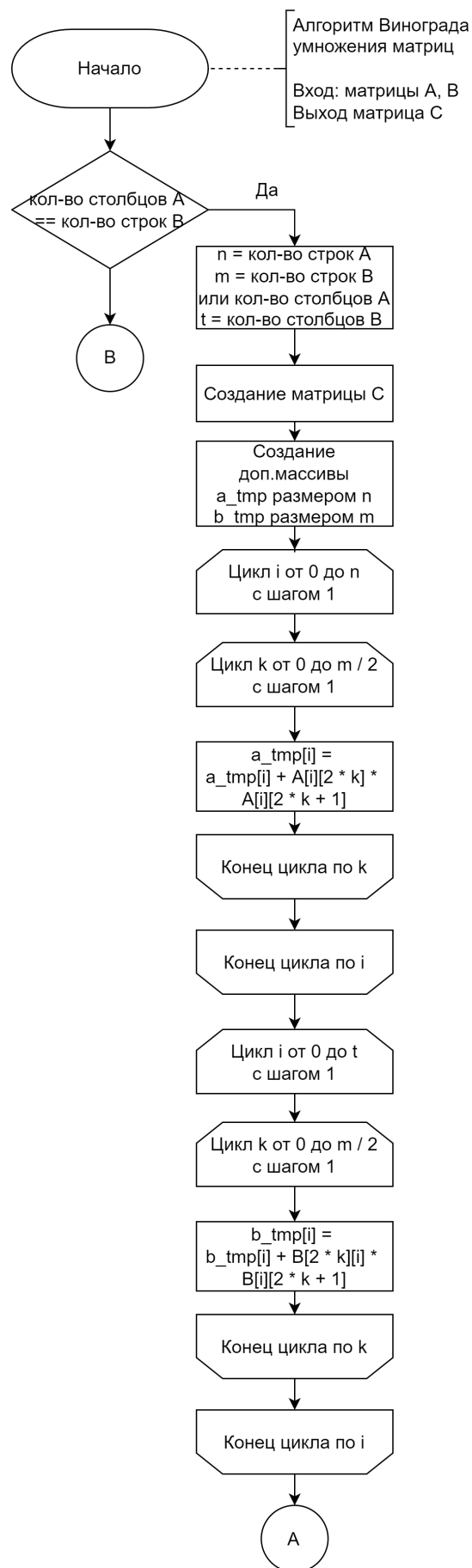


Рисунок 2.2 – Схема умножения матриц по алгоритму Винограда (Часть 1)

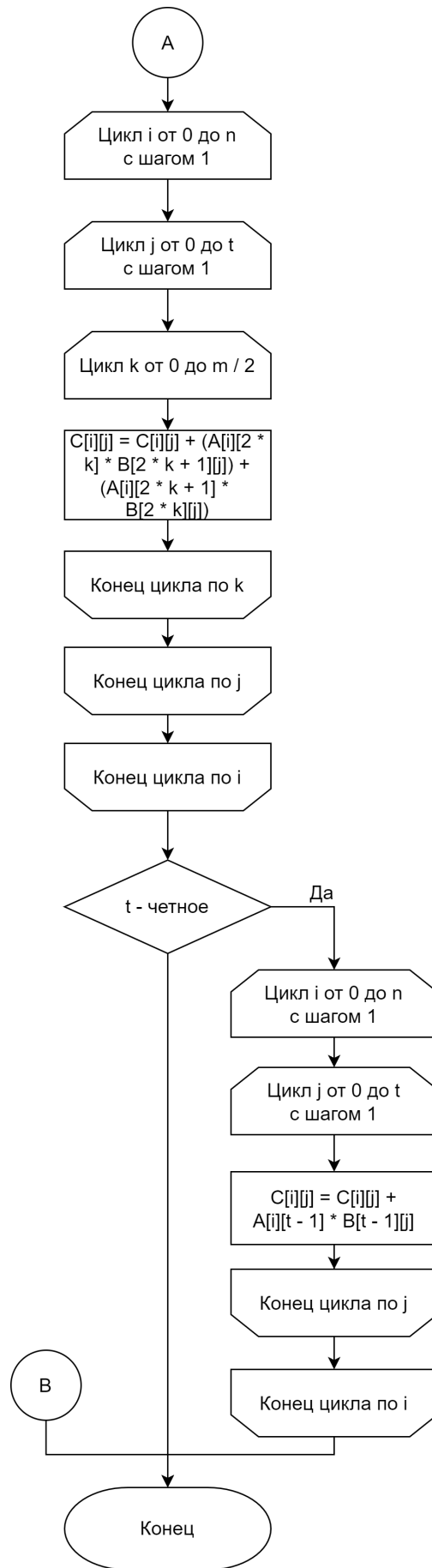


Рисунок 2.3 – Схема умножения матриц по алгоритму Винограда (Часть 2)

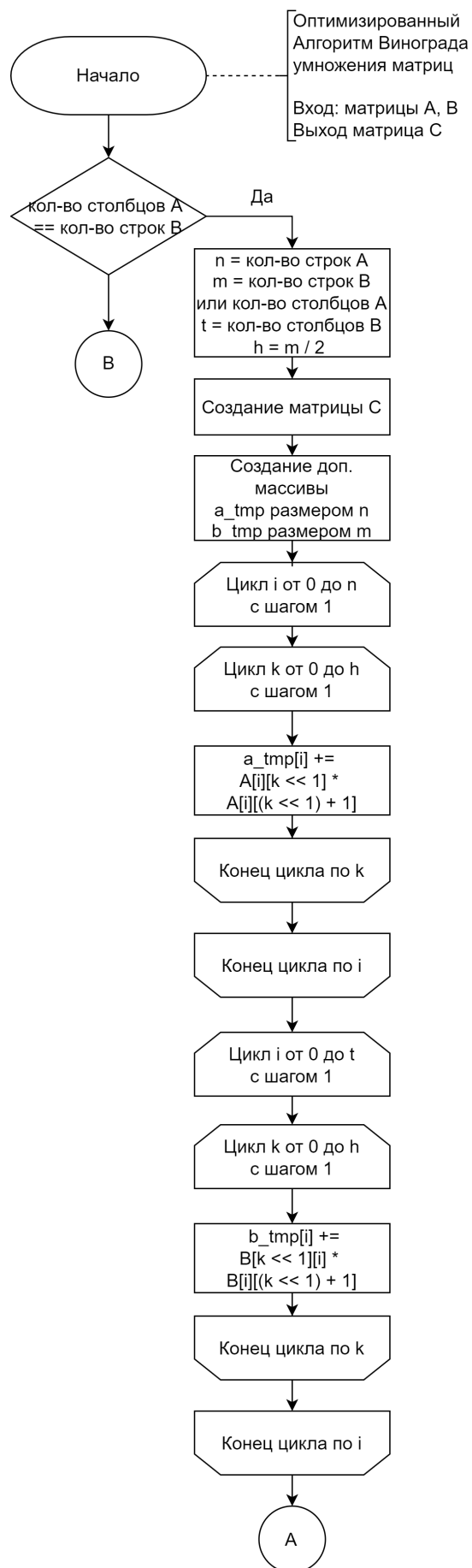


Рисунок 2.4 – Схема умножения матриц по оптимизированному алгоритму Винограда (Часть 1)

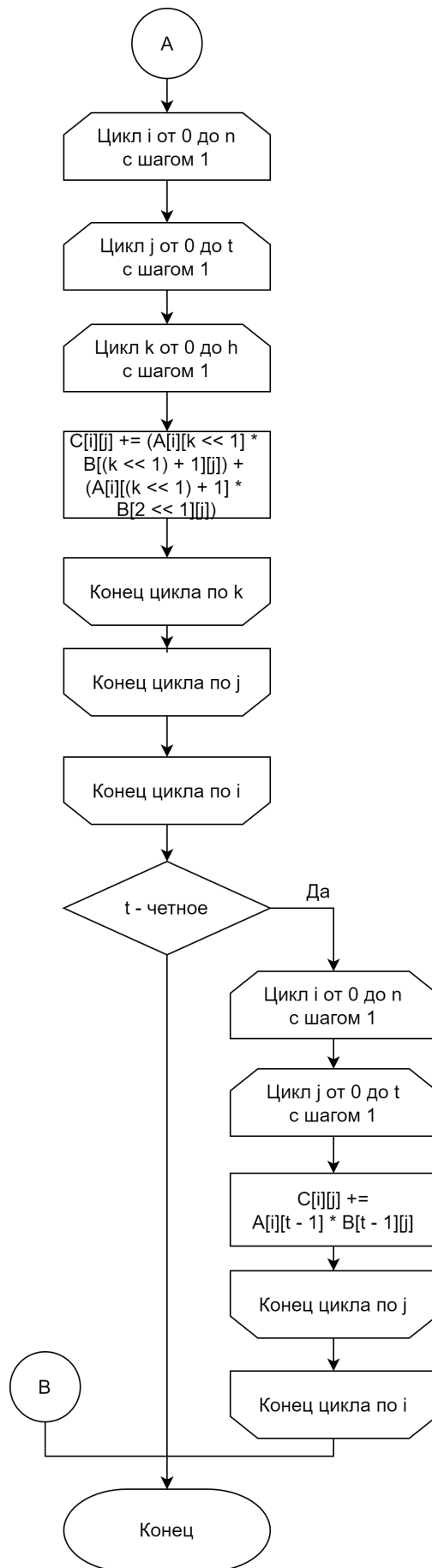


Рисунок 2.5 – Схема умножения матриц по оптимизированному алгоритму Винограда (Часть 2)

2.3 Описание используемых типов данных

При реализации алгоритмов будут использованы следующие структуры данных:

- количество строк – целое число;
- количество столбцов – целое число;
- матрица – двумерный список целых чисел

2.4 Модель вычислений для проведения оценки трудоемкости

Введем модель вычислений, которая потребуется для определения трудоемкости каждого отдельного взятого алгоритма сортировки.

1) Трудоемкость базовых операций имеет:

- равную 1:

$$\begin{aligned} +, -, =, + =, - =, ==, !=, <, >, <=, >=, [], ++, --, \\ \&\&, >>, <<, ||, \&, | \end{aligned} \quad (2.1)$$

- равную 2:

$$*, /, \%, * =, / =, \% = \quad (2.2)$$

2) Трудоемкость условного оператора:

$$f_{if} = f_{\text{условия}} + \begin{cases} \min(f_1, f_2), & \text{лучший случай} \\ \max(f_1, f_2), & \text{худший случай} \end{cases} \quad (2.3)$$

3) Трудоемкость цикла:

$$\begin{aligned} f_{for} = f_{\text{инициализация}} + f_{\text{сравнения}} + M_{\text{итераций}} \cdot (f_{\text{тело}} + \\ + f_{\text{инкремент}} + f_{\text{сравнения}}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

- 4) Трудоемкость передачи параметра в функции и возврат из функции равны 0.

2.5 Трудоемкость алгоритмов

Была рассчитана трудоемкость алгоритмов умножения матриц.

2.5.1 Классический алгоритм

Для стандартного алгоритма умножения матриц трудоемкость будет складываться из:

- внешнего цикла по $i \in [1 \dots N]$, трудоёмкость которого: $f = 2 + N \cdot (2 + f_{body})$;
- цикла по $j \in [1 \dots T]$, трудоёмкость которого: $f = 2 + 2 + T \cdot (2 + f_{body})$;
- цикла по $k \in [1 \dots M]$, трудоёмкость которого: $f = 2 + 2 + 14M$;

Поскольку трудоемкость стандартного алгоритма равна трудоемкости внешнего цикла, то:

$$\begin{aligned} f_{standart} &= 2 + N \cdot (2 + 2 + T \cdot (2 + 2 + M \cdot (2 + 8 + 1 + 1 + 2))) = \\ &= 2 + 4N + 4NT + 14NMT \approx 14NMT = O(N^3) \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.5.2 Алгоритм Винограда

Чтобы вычислить трудоемкость алгоритма Винограда, нужно учесть следующее:

- создания и инициализации массивов a_{tmp} и b_{tmp} , трудоёмкость которых указана в формуле (2.6);

$$f_{init} = N + M \quad (2.6)$$

- заполнения массива a_{tmp} , трудоёмкость которого указана в формуле (2.7);

$$\begin{aligned} f_{atmp} &= 2 + N \cdot \left(4 + \frac{M}{2} \cdot (4 + 6 + 1 + 2 + 3 \cdot 2)\right) = \\ &= 2 + 4N + \frac{19NM}{2} = 2 + 4N + 9,5NM \end{aligned} \quad (2.7)$$

- заполнения массива b_{tmp} , трудоёмкость которого указана в формуле (2.8);

$$\begin{aligned} f_{btmp} &= 2 + T \cdot \left(4 + \frac{M}{2} \cdot (4 + 6 + 1 + 2 + 3 \cdot 2)\right) = \\ &= 2 + 4T + \frac{19TM}{2} = 2 + 4T + 9,5TM \end{aligned} \quad (2.8)$$

- цикла заполнения для чётных размеров, трудоёмкость которого указана в формуле (2.9);

$$\begin{aligned} f_{cycle} &= 2 + N \cdot \left(4 + T \cdot \left(2 + 7 + 4 + \frac{M}{2} \cdot (4 + 28)\right)\right) = \\ &= 2 + 4N + 13NT + \frac{32NTM}{2} = 2 + 4N + 13NT + 16NTM \end{aligned} \quad (2.9)$$

- цикла, который дополнительно нужен для подсчёта значений при нечётном размере матрицы, трудоемкость которого указана в формуле (2.10);

$$f_{check} = 3 + \begin{cases} 0, & \text{чётная} \\ 2 + N \cdot (4 + T \cdot (2 + 14)), & \text{иначе} \end{cases} \quad (2.10)$$

Тогда для худшего случая (нечётный общий размер матриц) имеем:

$$f_{worst} = f_{init} + f_{atmp} + f_{btmp} + f_{cycle} + f_{check} \approx 16NMT = O(N^3) \quad (2.11)$$

Для лучшего случая (чётный общий размер матриц) имеем:

$$f_{best} = f_{init} + f_{atmp} + f_{btmp} + f_{cycle} + f_{check} \approx 16NMT = O(N^3) \quad (2.12)$$

2.5.3 Оптимизированный алгоритм Винограда

Трудоёмкость оптимизированного алгоритма Винограда состоит из:

- кэширования значения $\frac{M}{2}$ в циклах, которое равно 3;
- создания и инициализации массивов a_{tmp} и b_{tmp} (2.6);
- заполнения массива a_{tmp} , трудоёмкость которого (2.7);
- заполнения массива b_{tmp} , трудоёмкость которого (2.8);
- цикла заполнения для чётных размеров, трудоёмкость которого указана в формуле (2.13);

$$\begin{aligned} f_{cycle} &= 2 + N \cdot (4 + T \cdot (4 + 7 + \frac{M}{2} \cdot (2 + 10 + 5 + 2 + 4))) = \\ &= 2 + 4N + 11NT + \frac{23NTM}{2} = 2 + 4N + 11NT + 11,5 \cdot NTM \end{aligned} \quad (2.13)$$

- условие, которое нужно для дополнительных вычислений при нечётном размере матрицы, трудоёмкость которого указана в формуле (2.14);

$$f_{check} = 3 + \begin{cases} 0, & \text{чётная} \\ 2 + N \cdot (4 + T \cdot (2 + 10)), & \text{иначе} \end{cases} \quad (2.14)$$

Тогда для худшего случая (нечётный общий размер матриц) имеем:

$$f_{worst} = 3 + f_{init} + f_{atmp} + f_{btmp} + f_{cycle} + f_{check} \approx 11NMT = O(N^3) \quad (2.15)$$

Для лучшего случая (чётный общий размер матриц) имеем:

$$f_{best} = 3 + f_{init} + f_{atmp} + f_{btmp} + f_{cycle} + f_{check} \approx 11NMT = O(N^3) \quad (2.16)$$

Вывод

В данном разделе были построены схемы алгоритмов умножения матриц, рассматриваемых в лабораторной работе, были описаны классы эквивалентности для функционального тестирования и модули программы. Проведённая теоретическая оценка трудоемкости алгоритмов показала, что в трудоемкость выполнения алгоритма Винограда в случае оптимизации в 1.2 раза меньше, чем у простого алгоритма Винограда.

3 Технологическая часть

В данном разделе будут приведены требования к программному обеспечению, средства реализации, листинг кода и функциональные тесты.

3.1 Требования к программному обеспечению

К программе предъявлены ряд требований:

- наличие интерфейса для выбора действий;
- наличие стандартной реализации вектора с динамическим выделением памяти;
- наличие функциональности замера процессорное время алгоритмов умножения матриц.

3.2 Средства реализации

Для реализации данной лабораторной работы был выбран язык *C++* [3]. Данный выбор обусловлен наличием у языка встроенной библиотекой измерения процессорного времени и соответствием с выдвинутыми техническими требованиями.

В качестве измерения время использовалось функция *clock()* из модуля *ctime* [4].

3.3 Сведения о модулях программы

Данная программа разбита на следующие модули:

- `main.cpp` – файл, содержащий точку входа в программу. В нем происходит общение с пользователем и вызов алгоритмов;
- `multy_mtr.cpp` – файл содержит алгоритмы умножения матриц.
- `print_mtr.cpp` – файл содержит функцию вывода матрицы.
- `read_mtr.cpp` – файл содержит функции чтения матрицы.
- `cpu_time.cpp` – файл содержит функции, измеряющие процессорное время алгоритмов умножения матриц.

В листингах 3.1 – 3.3 реализованы алгоритмы умножения матриц – классический, алгоритм Винограда и оптимизированный алгоритм Винограда. В листингах 3.4 и 3.5 реализовано чтение и вывод матриц, данные которых имеют целочисленный тип.

Листинг 3.1 – Функция классического алгоритма умножения матриц

```
1 matrix_v standart_multy(const matrix_v &mtr1, const matrix_v &mtr2)
2 {
3     if (mtr1[0].size() != mtr2.size())
4         return empty_matrix();
5
6     size_t n = mtr1.size();
7     size_t m = mtr2.size();
8     size_t t = mtr2[0].size();
9
10    matrix_v res;
11
12    array_v row;
13    row.resize(t, 0);
14    res.resize(n, row);
15
16    for (size_t i = 0; i < n; i++)
17        for (size_t j = 0; j < t; j++)
18            for (size_t k = 0; k < m; k++)
19                res[i][j] += mtr1[i][k] * mtr2[k][j];
20
21    return res;
22 }
```

Листинг 3.2 – Функция умножения матриц по алгоритму Винограда

```

1 matrix_v vinograd_alg(const matrix_v &mtr1, const matrix_v &mtr2)
2 {
3     if (mtr1[0].size() != mtr2.size())
4         return empty_matrix();
5
6     size_t n = mtr1.size();
7     size_t m = mtr2.size();
8     size_t t = mtr2[0].size();
9     matrix_v res;
10    array_v rowSum, colSum;
11    rowSum.resize(n, 0);
12    colSum.resize(m, 0);
13    res.resize(n, rowSum);
14
15    for (size_t i = 0; i < n; i++)
16        for (size_t j = 0; j < m / 2; j++)
17            rowSum[i] = rowSum[i] + mtr1[i][2 * j] * mtr1[i][2 * j
18                + 1];
19
20    for (size_t i = 0; i < t; i++)
21        for (size_t j = 0; j < m / 2; j++)
22            colSum[i] = colSum[i] + mtr2[2 * j][i] * mtr2[2 * j +
23                1][i];
24
25    for (size_t i = 0; i < n; i++)
26        for (size_t j = 0; j < t; j++) {
27            res[i][j] = -rowSum[i] - colSum[j];
28            for (size_t k = 0; k < m / 2; k++)
29                res[i][j] = res[i][j] + (mtr1[i][2 * k + 1] +
30                    mtr2[2 * k][j]) * (mtr1[i][2 * k] + mtr2[2 * k +
31                        1][j]);
32        }
33
34    if (m % 2 == 1)
35        for (size_t i = 0; i < n; i++)
36            for (size_t j = 0; j < t; j++)
37                res[i][j] = res[i][j] + mtr1[i][m - 1] * mtr2[m -
38                    1][j];
39
40    return res;
41 }

```

Листинг 3.3 – Функция умножения матриц по оптимизированному алгоритму Винограда

```
1 matrix_v opt_vinograd_alg(const matrix_v &mtr1, const matrix_v
  &mtr2)
2 {
3     if (mtr1[0].size() != mtr2.size())
4         return empty_matrix();
5
6     size_t n = mtr1.size();
7     size_t m = mtr2.size();
8     size_t t = mtr2[0].size();
9     size_t halfm = m / 2;
10    matrix_v res;
11    array_v rowSum, colSum;
12    rowSum.resize(n, 0);
13    colSum.resize(m, 0);
14    res.resize(n, rowSum);
15
16    for (size_t i = 0; i < n; i++)
17        for (size_t j = 0; j < halfm; j++)
18            rowSum[i] += mtr1[i][j << 1] * mtr1[i][(j << 1) + 1];
19
20    for (size_t i = 0; i < t; i++)
21        for (size_t j = 0; j < halfm; j++)
22            colSum[i] += mtr2[(j << 1)][i] * mtr2[(j << 1) + 1][i];
23
24    for (size_t i = 0; i < n; i++)
25        for (size_t j = 0; j < t; j++) {
26            res[i][j] = -rowSum[i] - colSum[j];
27            for (size_t k = 0; k < halfm; k++)
28                res[i][j] += (mtr1[i][(k << 1) + 1] + mtr2[k <<
                    1][j]) * (mtr1[i][k << 1] + mtr2[(k << 1) +
                    1][j]);
29        }
30
31    if (m % 2 == 1)
32        for (size_t i = 0; i < n; i++)
33            for (size_t j = 0; j < t; j++)
34                res[i][j] += mtr1[i][m - 1] * mtr2[m - 1][j];
35    return res;
36 }
```

Листинг 3.4 – Функции ввода матрицы

```
1 int read_size(int &n)
2 {
3     if (!(std::cin >> n) || n <= 0)
4         return 1;
5     return 0;
6 }
7
8 int read_mtr(matrix_v &mtr, std::string mode)
9 {
10     int n, m;
11     std::cout << "Ввод_размер_матрицы:_";
12     if (read_size(n)) {
13         std::cout << "Ошибка!_Размер_N_введен_неверно!" <<
14             std::endl;
15         return 1;
16     }
17     if (mode == "square")
18         m = n;
19     else
20         if (read_size(m)) {
21             std::cout << "Ошибка!_Размер_M_введен_неверно!" <<
22                 std::endl;
23             return 1;
24         }
25
26     array_v row;
27     row.resize(m, 0);
28     mtr.resize(n, row);
29
30     int rc = 0;
31     std::cout << "Ввод_элементов_матрицы:\n";
32     for (size_t i = 0; !rc && i < n; i++)
33         for (size_t j = 0; !rc && j < m; j++)
34             if (!(std::cin >> mtr[i][j])) {
35                 std::cout << "Ошибка!_Элемент_матрицы_введен_неверно"
36                     << std::endl;
37                 rc = 1;
38             }
39     return rc;
40 }
```


Листинг 3.5 – Функция вывода матрицы

```
1 void print_mtr(matrix_v mtr)
2 {
3     size_t n = mtr.size();
4     if (n == 0)
5         std::cout << "[]" << std::endl;
6     else {
7         size_t m = mtr[0].size();
8         if (m == 0) {
9             std::cout << "[";
10            for (size_t i = 0; i < n; i++)
11                if (i == n - 1)
12                    std::cout << "[]";
13            else
14                std::cout << "[],";
15            std::cout << "]" << std::endl;
16        }
17        for (size_t i = 0; i < n; i++) {
18            for (size_t j = 0; j < m; j++) {
19                std::cout << mtr[i][j] << " ";
20            }
21            std::cout << std::endl;
22        }
23    }
24 }
```

3.4 Функциональные тесты

В таблице 3.1 и 3.2 приведены функциональные тесты для разработанных алгоритмов сортировки. Все тесты пройдены успешно.

Таблица 3.1 – Функциональные тесты для классического алгоритма умножения матриц

Входные данные		Результат для классического алгоритма	
Матрица 1	Матрица 2	Ожидаемый результат	Фактический результат
$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$	(\quad)	Сообщение об ошибке	Сообщение об ошибке
$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	Сообщение об ошибке	Сообщение об ошибке
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 23 & 31 & 39 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 23 & 31 & 39 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$
(10)	(35)	(350)	(350)

Таблица 3.2 – Функциональные тесты для умножения матриц по алгоритму Винограда

Входные данные		Результат для алгоритма Винограда	
Матрица 1	Матрица 2	Ожидаемый результат	Фактический результат
$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$	(\quad)	Сообщение об ошибке	Сообщение об ошибке
$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	Сообщение об ошибке	Сообщение об ошибке
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	Сообщение об ошибке	Сообщение об ошибке
(10)	(35)	(350)	(350)

Вывод

Были представлены листинги реализаций всех алгоритмов умножения матриц – стандартного, Винограда и оптимизированного алгоритма Винограда. Также в данном разделе была приведена информации о выбранных средствах для разработки алгоритмов

4 Исследовательская часть

4.1 Технические характеристики

Технические характеристики устройства, на котором выполнялись замеры по времени представлены далее.

- Процессор: Intel(R) Core(TM) i5-10300H CPU 2.50 ГГц [5].
- Оперативная память: 16 ГБайт.
- Операционная система: Windows 11 Pro 64-разрядная система версией 22H2 [6].

При замерах времени ноутбук был включен в сеть электропитания и был нагружен только системными приложениями.

4.2 Демонстрация работы программы

На рисунке 4.1 представлена демонстрация работы консольное меню, разработанного приложения для работы с алгоритмами умножения матриц и для измерения работы алгоритмов умножения матриц, на примере умножения матриц на классическом алгоритме.

```
----- Menu -----
1 - Классический алгоритм умножения матриц
2 - Алгоритм Винограда
3 - Оптимизированный алгоритм Винограда
4 - Все алгоритмы вместе
5 - Замерить время
0 - Выход
Выбор: 1
Ввод матрицы A:
Ввод размер матрицы: 2 2
Ввод элементов матрицы:
1 2
3 4
Ввод матрицы B:
Ввод размер матрицы: 2 3
Ввод элементов матрицы:
1 2 3
4 5 6
Результат:
9 12 15
19 26 33
----- Menu -----
```

Рисунок 4.1 – Демонстрация работы программы

4.3 Временные характеристики

Результаты эксперимента замеров по времени приведены в таблицах 4.1, 4.2.

В таблице 4.1 приведены результаты замеров по времени алгоритмов умножения матриц при четных размерах квадратных матриц от 10 до 100 с шагом 10 на различных входных данных.

Таблица 4.1 – Результаты замеров времени (чётные размеры матриц)

Размер матрицы	Время, мс		
	Классический	Винограда	(опт.) Винограда
10	0.02004	0	0.0501
20	0.02104	0.1503	0.07014
30	0.30261	0.2515	0.24248
40	0.61924	0.69539	0.53908
50	1.28958	1.20441	1.1232
60	2.10621	2.02906	1.7244
70	3.29259	3.17034	2.8377
80	4.93487	4.4499	3.9028
90	6.9018	6.49098	5.7926
100	9.38477	9.03607	7.7635

По таблице 4.1 был построен график 4.2. Исходя из этих данных можно понять, что лучшего всего работает оптимизированный алгоритм Винограда, а классический алгоритм работает в 1,5 раз хуже, чем алгоритм Винограда.

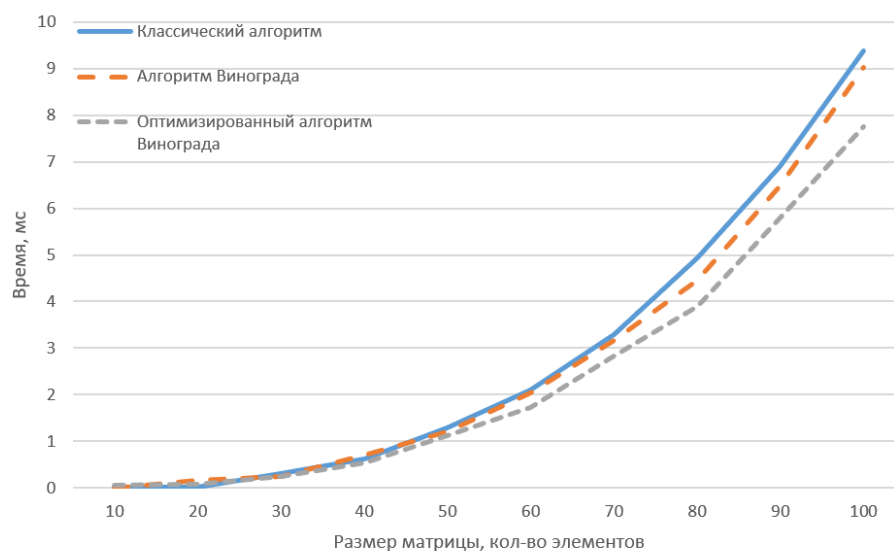


Рисунок 4.2 – Сравнение по времени алгоритмов умножения матриц на чётных размерах матриц

В таблице 4.2 приведены результаты замеров по времени алгоритмов умножения матриц при нечетных размерах квадратных матриц, размеров от 11 до 101 с шагом 10 на различных данных.

Таблица 4.2 – Результаты замеров времени (нечётные размеры матриц)

Размер матрицы	Время, мс		
	Классический	Винограда	(опт.) Винограда
11	0.06012	0.07014	0.11022
21	0.18938	0.19238	0.22044
31	0.39379	0.43788	0.36072
41	0.73146	0.7515	0.61122
51	1.24048	1.31463	1.0421
61	2.80762	2.62425	2.4329
71	3.97094	3.98898	3.4449
81	5.37876	5.2495	4.7435
91	7.30261	7.10321	6.1172
101	9.58918	9.4499	8.1513

По таблице 4.2 был построен график 4.3. Исходя из этих данных можно понять, что лучшего всего работает оптимизированный алгоритм Винограда, а классический алгоритм работает в 1,1 раз хуже, чем алгоритм Винограда.

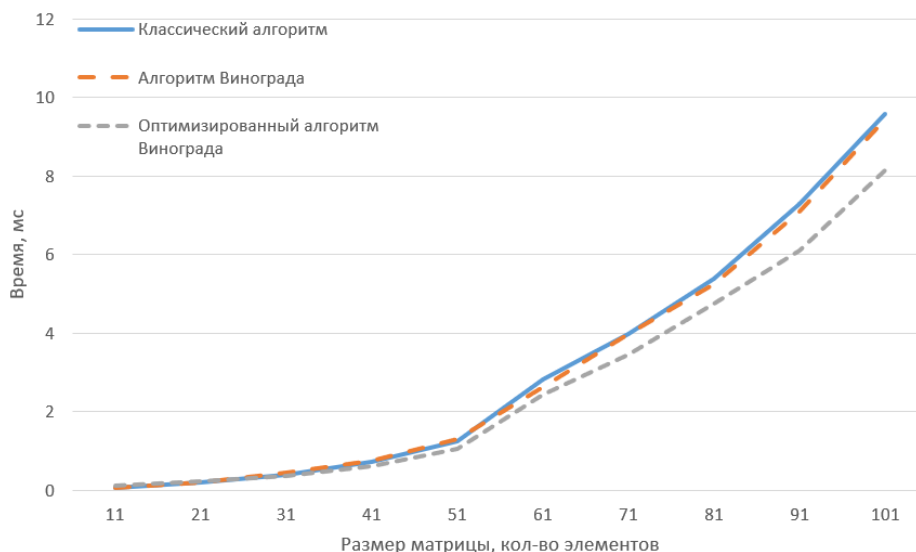


Рисунок 4.3 – Сравнение по времени алгоритмов умножения матриц на нечётных размерах матриц

4.4 Вывод

В результате эксперимента было получено, что при больших размерах матриц (свыше 10), алгоритм Винограда быстрее стандартного алгоритма более, чем в 1.1 раза, а оптимизированный алгоритм Винограда быстрее стандартного алгоритма в 1.5 раза. В итоге, можно сказать, что при таких данных следует использовать оптимизированный алгоритм Винограда.

Также при проведении эксперимента было выявлено, что на чётных размерах реализация алгоритма Винограда в 1.1 раза быстрее, чем на нечётных размерах матриц, что обусловлено необходимостью проводить дополнительные вычисления для крайних строк и столбцов. Следовательно, стоит использовать алгоритм Винограда для матриц, которые имеют чётные размеры.

Заключение

В результате исследования было определено, что стандартный алгоритм умножения матриц проигрывает по времени алгоритму Винограда примерно в 1.1 раза из-за того, что в алгоритме Винограда часть вычислений происходит заранее, а также сокращается часть сложных операций – операций умножения, поэтому предпочтение следует отдавать алгоритму Винограда. Но лучшие показатели по времени выдает оптимизированный алгоритм Винограда – он примерно в 1.5 раза быстрее алгоритма Винограда на размерах матриц свыше 10 из-за замены операций равно и плюс на операцию плюс-равно, а также за счёт замены операции умножения операцией сдвига, что дает проводить часть вычислений быстрее. Поэтому при выборе самого быстрого алгоритма предпочтение стоит отдавать оптимизированному алгоритму Винограда. Также стоит упомянуть, что алгоритм Винограда работает на чётных размерах матриц примерно в 1.1 раза быстрее, чем на нечётных, что связано с тем, что нужно произвести часть дополнительных вычислений для крайних строк и столбцов матриц, поэтому алгоритм Винограда лучше работает чётных размерах матриц.

Цель, которая была поставлена в начале лабораторной работы была достигнута, а также в ходе выполнения лабораторной работы были решены следующие задачи.

- 1) Описаны два алгоритмы умножения матриц;
- 2) Создано программное обеспечение, реализующее следующие алгоритмы:
 - классический алгоритм умножения матриц;
 - алгоритм Винограда;
 - оптимизированный алгоритм Винограда.
- 3) Оценены трудоемкости сортировок;
- 4) Проведен анализ затрат работы программы по времени, выяснить влияющие на них характеристики.
- 5) Проведен сравнительный анализ между алгоритмами.

Список использованных источников

- [1] Баварин И. И. Высшая математика: учебник по естественно-научным направлениям и специальностям. — М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2003. с. 45–49.
- [2] Головашкин Д. Л. Векторные алгоритмы вычислительной линейной алгебры: учеб. пособие. — Самара: Изд-во Самарского университета, 2019. С. 28–35.
- [3] Документация по Microsoft C++ [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://learn.microsoft.com/ru-ru/cpp/?view=msvc-170&viewFallbackFrom=vs-2017> (дата обращения: 25.09.2022).
- [4] C library function clock() [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://www.tutorialspoint.com/c_standard_library/c_function_clock.htm (дата обращения: 20.10.2022).
- [5] Intel [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://ark.intel.com/content/www/ru/ru/ark/products/201839/intel-core-i510300h-processor-8m-cache-up-to-4-50-ghz.html> (дата обращения: 20.10.2022).
- [6] Windows 11 Pro 2H21 64-bit [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.microsoft.com/ru-ru/software-download/windows11> (дата обращения: 20.10.2022).