

Mitschrieb Elementare Geometrie

Jens Ochsenmeier

27. Dezember 2017

1

Übungen

1.1 2017-10-27

Aufgabe (1). Zeigen Sie: (\mathbb{R}^2, d) mit $d(x, y) = |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)|$ ist pseudometrischer Raum.

- **Positivität.** Zu zeigen: $\forall x \in \mathbb{R}^2 : d(x, x) = 0$.
$$d(x, x) = |(x_1 - x_1) + (x_2 - x_2)| = |0| = 0.$$
- **Symmetrie.** Zu zeigen: $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) = d(y, x)$.
$$d(x, y) = |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)| = |(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2)| = d(y, x).$$
- **Dreiecksungleichung.** Zu zeigen: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2 : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.
$$d(x, y) + d(y, z) = |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)| + |(y_1 - z_1) + (y_2 - z_2)| \geq |(x_1 - z_1) + (x_2 - z_2)| = d(x, z).$$

Aufgabe (2). Gegeben:

- $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|,$
- $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$
- $\|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$

Wir zeigen, dass alle drei Normen sind. Dafür ist zu zeigen:

1. **Positivität:** $\|x\| \geq 0 \forall x, x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0.$
2. **Sublinearität:** $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. **Homogenität:** $\forall x \in V \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$

Positivität ist klar für alle drei. Homogenität ist auch arg simpel.

Sublinearität:

1.

$$\begin{aligned}\|x + y\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + |y_i| \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\|x + y\|_2^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \\ \Rightarrow \|x + y\|_2 &\leq \|x\|_2 + \|y\|_2\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\|x + y\|_\infty &= \max_{i=1, \dots, n} |x_i + y_i| \leq \max_{i=1, \dots, n} (|x_i| + |y_i|) \\ &\leq \max_{i=1, \dots, n} \max_{j=1, \dots, n} (|x_i| + |y_j|) = (\max_i |x_i|) + (\max_j |y_j|) \\ &= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty\end{aligned}$$

Aufgabe (3). Sei (X, d) ein metrischer Raum, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$.

1. Beweise:

1. Falls $d(x, y) \geq r_1 + r_2$, dann sind $B_{r_1}(x), B_{r_2}(y)$ disjunkt.

Beweis: Angenommen, $\exists z \in B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(y)$.

Dann ist $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r_1 + r_2 \quad \text{!}$

2. Falls $d(x, y) \leq r_1 - r_2$, so ist $B_{r_2}(y) \subseteq B_{r_1}(x)$.

Beweis: Angenommen, $\exists z \in B_{r_2}(y) \setminus B_{r_1}(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned}d(x, z) &\geq r_1 = (r_1 - r_2) + r_2 \\ &> d(x, y) + d(z, y) \quad \text{!}\end{aligned}$$

2. Finde je ein Gegenbeispiel für die Rückrichtung:

1. Sei $X = \{0, 1\}$ und d Metrik auf X mit $d(0, 1) = 1$.

Idee: Wir nehmen zwei Bälle, die sich in der Theorie überschneiden, weil die Summe der Radien kleiner ist als der Abstand, aber in der Schnittmenge liegen

keine Elemente.

Wir wählen $r_1 = r_2 = \frac{2}{3}$, $x = 0$, $y = 1$. Wir haben

$B_{r_1}(0) = \{0\}$, $B_{r_2}(1) = \{1\}$, aber $r_1 + r_2 = \frac{4}{3} > d(0, 1)$.

2. Metrik wie in erstem Gegenbeispiel, $r_1 = r_2 = 100$, $x = 0$, $y = 1$.

Dann ist $B_{r_1}(0) = \{0, 1\}$, $B_{r_2}(1) = \{0, 1\}$, aber $d(0, 1) > 100 - 100$.

Aufgabe (4). 1. Zeigen Sie, dass (\mathbb{R}^2, d_1) und (\mathbb{R}^2, d_∞) isometrisch sind.

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.

Behauptung: $f: (\mathbb{R}^2, d_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ ist Isometrie.

f ist linear mit Rang 2, also bijektiv.

Seien $p = (x_1, y_1)$, $q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Zu zeigen:

$$d_\infty(f(p), f(q)) = d_1(p, q).$$

Es ist

$$\begin{aligned} d_1(p, q) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= \max\{|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)|, |(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)|\} \\ &= \max\{|(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)|, |(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)|\} \\ &= (\text{undeutlich}) = d_\infty(f(p), f(q)). \end{aligned}$$

2. Zeigen Sie, dass (\mathbb{R}^n, d_1) und (\mathbb{R}^n, d_∞) **nicht** isometrisch sind für $n > 2$.

Angenommen, es gibt eine Isometrie $\varphi^1: (\mathbb{R}^n, d_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d_1)$. Die Abbildung $\varphi^2: (\mathbb{R}^n, d_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d_1)$, $x \mapsto x - \varphi^1(0)$ ist eine Translation, also eine Isometrie.

Wähle $\varphi := \varphi^2 \circ \varphi^1$. φ ist Isometrie mit $\varphi(0) = 0$.

Die Menge $\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{-1, 1\}\} =: A$ hat folgende Eigenschaft: Für alle $p, q \in A$ mit $p \neq q$ gilt $d_\infty(p, q) = 2$ und $d_\infty(p, 0) = 1$.

Sei $B = \varphi(A)$. Für alle $p, q \in B$ mit $p \neq q$ gilt $d_1(p, q) = 2$ und $d_1(p, 0) = 1$. Da φ injektiv ist, gilt $|B| = |A| = 2^n > 2n$ (weil $n \geq 3$). Da jedes $x \in B$ mindestens eine Koordinate $\neq 0$ hat, gibt es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ und $p, q, r \in B$ mit $p_i, q_i, r_i \neq 0$.

Dann gibt es oBdA verschiedene $p, q \in B$ mit $p_i, q_i > 0$ (bzw haben selbes Vorzeichen, da es nur zwei mögliche Vorzeichen gibt).

Es gilt $d_1(p, q) = \sum_{j=1}^n |p_j - q_j| \underset{\text{da beide } > 0}{<} \sum_{j=1}^n |p_j| + |q_j| = d_1(p, 0) + d_1(0, q) = 2 \nmid$

1.2 2017-11-03

Nachtragen

1.3 2017-11-10

Aufgabe (1). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zu zeigen: Die Menge \mathcal{O} aller d -offenen¹ Teilmengen von X ist Topologie. Wir zeigen die Eigenschaften einer Topologie.

1. $\emptyset \in \mathcal{O}, X \in \mathcal{O}$ ✓

2. Zu zeigen: beliebige Vereinigungen von d -offenen Mengen sind wieder d -offen.

Sei $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Familie von d -offenen Mengen. Zu zeigen: $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ ist d -offen.

Beweis: Sei $x \in A$ beliebig. Dann $\exists i \in I$ mit $x \in A_i$. Da A_i d -offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq A_i \subseteq A$.

Damit ist A d -offen.

3. Zu zeigen: endliche Durchschnitte d -offener Mengen sind wieder d -offen.²

Seien A, B d -offen. Zu zeigen: $A \cap B$ ist wieder d -offen.

Sei $x \in A \cap B$. Da A und B d -offen sind, gibt es $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, sodass $B_\varepsilon(x) \subseteq A$ und $B_{\varepsilon'}(x) \subseteq B$. Wähle $\varepsilon'' = \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}$. Dann ist $B_{\varepsilon''}(x) = B_\varepsilon(x) \cap B_{\varepsilon'}(x) \subseteq A \cap B$ und $A \cap B$ ist d -offen.

Aufgabe (2). Seien X, Y_1, Y_2 topologische Räume, seien

$$p_i : Y_1 \times Y_2 \rightarrow Y_i$$

$$(y_1, y_2) \mapsto y_i \quad (\text{für } i = 1, 2).$$

1. Zu zeigen: f ist stetig $\Leftrightarrow f_1 := p_1 \circ f, f_2 := p_2 \circ f$ stetig.

Beweis:

- \Rightarrow . Sei f stetig. Zu zeigen (oBdA): f_1 ist stetig, i.e. die Urbilder offener Mengen sind wieder offen.

Sei $U \subseteq Y_1$. Zu zeigen: $f_1^{-1}(U)$ offen.

Es gilt³:

¹ d -**offen**: $U \subset X$ heißt d -offen, falls $\forall x \in U \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U$.

² Es ist immer nur der Schnitt zweier Mengen zu zeigen, da $A_1 \cap \dots \cap A_n = (((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \dots)$.

Also ist sukzessive der gesamte Schnitt offen.

³ $p_1^{-1}(U) = U \times Y_2$

$$f_1^{-1}(U) = f^{-1}(p_1^{-1}(U)) = f^{-1}(U \times Y_2).$$

Diese Menge ist offen, da f stetig ist.

- \Leftarrow . Seien f_1, f_2 stetig. Zu zeigen: f ist stetig. Wir zeigen wieder, dass die Urbilder offener Mengen wieder offen sind.

Sei $U \in Y_1 \times Y_2$ offen. Zu zeigen: $f^{-1}(U)$ ist wieder offen.

Sei $x \in f^{-1}(U)$. Zu zeigen: Es gibt eine offene Menge $U' \subseteq f^{-1}(U)$ sodass $x \in U'$.

Es ist $f(x) \in U$. Da U offen ist in $Y_1 \times Y_2$ gibt es offene $V_1 \subseteq Y_1, V_2 \subseteq Y_2$, sodass $f(x) \in V_1 \times V_2 \subseteq U$.

Jetzt sei $U_1 := f_1^{-1}(V_1), U_2 := f_2^{-1}(V_2)$. Da f_1, f_2 stetig sind, sind U_1 und U_2 offen, also auch $U_1 \cap U_2 =: U'$ offen.

Da $f(x) \in V_1 \times V_2$, ist $f_1(x) = p_1(f(x)) \in V_1, f_2(x) = p_2(f(x)) \in V_2$, also $x \in U_1 \cap U_2 = U'$.

2. Sind p_1, p_2 immer offen?⁴

Ja — sei $U \subseteq Y_1 \times Y_2$ offen. Dann ist

$$U = \bigcup \{V_1 \times V_2 : V_1 \subseteq Y_1 \text{ offen}, V_2 \subseteq Y_2 \text{ offen}, V_1 \times V_2 \subseteq U\}.$$

Dann ist $p_1(U) = \bigcup \{V_1 : \text{analog zu } U, V_2 \neq \emptyset\}$ eine Vereinigung offener Mengen, also wieder offen — p_2 analog.

3. Sind p_1, p_2 immer abgeschlossen?

Nein — sei

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 1\}.$$

Das ist eine klassische Hyperbel. M ist abgeschlossen, aber $p_1(M) = \mathbb{R} \setminus 0$ nicht, auch nicht $p_2(M) = \mathbb{R} \setminus 0$.

Aufgabe (3). Seien X, Y Hausdorffräume, $f, g : X \rightarrow Y$ stetig. Zu zeigen: $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ ist abgeschlossen.

Da Y Hausdorffraum ist

$$\Delta_Y := \{(y, y) : y \in Y\}$$

in Y^2 abgeschlossen. (★)

⁴ **Offene + geschlossene Abbildungen:** $f : X \rightarrow Y$ heißt *offen*, wenn für alle offenen $U \subseteq X$ auch $f(U)$ offen ist; $f : X \rightarrow Y$ heißt *abgeschlossen*, wenn für alle abgeschlossenen $U \subseteq X$ auch $f(U)$ abgeschlossen ist.

1 Übungen

Beweis (★). Zu zeigen: $\{(y, y') \in Y^2 : y \neq y'\} =: \Delta_y^c$ ist offen.

Sei $(y, y') \in \Delta_y^c$. Da Y hausdorffsch ist, gibt es offene Räume U_y und $U_{y'}$, sodass $y \in U_y$, $y' \in U_{y'}$, $U_y \cap U_{y'} = \emptyset$. Dann ist $(y, y') \in U_y \times U_{y'} \subseteq \Delta_y^c$.

Die Funktion

$$\begin{aligned} h : X &\rightarrow Y, \\ x &\mapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

ist stetig, denn $p_1 \circ h = f$ und $p_2 \circ h = g$ sind stetig nach Voraussetzung, also können wir den ersten Teil der Aufgabe 2 anwenden.

Da Δ_y abgeschlossen ist, ist $h^{-1}(\Delta_y) = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ ebenfalls abgeschlossen.

Aufgabe (4). Sei X topologischer Raum und \sim Äquivalenzrelation auf X . Die kanonische Abbildung $\pi : X \rightarrow X/\sim$ sei offen.

1. Zu zeigen: Falls X eine abzählbare Basis hat, dann auch X/\sim .

Sei B eine beliebige Basis von X . Sei $U \in X/\sim$ offen. Dann ist $\pi^{-1}(U)$ nach Definition der Quotiententopologie offen, also existiert $A \subseteq B$ mit $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{M \in A} M$. Dann ist

$$U = \pi(\pi^{-1}(U)) = \pi\left(\bigcup_{M \in A} M\right) = \bigcup_{M \in A} \pi(M).$$

Damit ist $\pi(B) := \{\pi(M) : M \in B\}$ eine Basis von X/\sim und wenn B abzählbar ist, so ist auch $\pi(B)$ abzählbar.

2. Zu zeigen: Ist $A := \{(x, y) \in X^2 : x \sim y\}$ abgeschlossen, so ist X/\sim hausdorffsch.

Beweis: Sei A abgeschlossen. Seien $p_1, p_2 \in X/\sim$, $p_1 \neq p_2$. Wir wollen zeigen, dass p_1 und p_2 durch offene Mengen getrennt werden können.

Seien $x_1 \in \pi^{-1}(p_1)$, $x_2 \in \pi^{-1}(p_2)$ (x_1 und x_2 existieren, weil die kanonische Abbildung surjektiv ist). Da $[x_1]_\sim = p_1 \neq p_2 = [x_2]_\sim$ ist $x_1 \not\sim x_2$, also $(x_1, x_2) \in A^c$.

Da A^c in der Produkttopologie auf X^2 offen ist, gibt es $U_1, U_2 \subseteq X$ offen, sodass $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subseteq A^c$.

Sei nun $V_1 = \pi(U_1)$, $V_2 = \pi(U_2)$. Es gilt $p_1 \in V_1$, $p_2 \in V_2$. V_1 und V_2 sind offen, da die kanonische Abbildung nach Voraussetzung offen ist.

Es bleibt zu zeigen, dass $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Sei $q_1 \in V_1$, $q_2 \in V_2$, $x_1 \in q_1$,

$x_2 \in q_2$. Dann ist $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subseteq A_c$, also ist $x_1 \notin x_2$ und demnach $q_1 = [x_1]_{\sim} \neq [x_2]_{\sim} = q_2$.

1.4 2017-11-17 - Übungsblatt 4

Aufgabe (1). Sei $A \subseteq X$ zusammenhängend. Zu zeigen: \bar{A} ist abgeschlossen.

Sei $B \subseteq \bar{A}$ offen und abgeschlossen in \bar{A} .

OBdA sei $B \cap A \neq \emptyset$, ansonsten setze $B' = \bar{A} \setminus B$. Da $B \cap A$ offen, abgeschlossen und nichtleer in A ist, folgt aus A zusammenhängend, dass $B \cap A = A$ also $A \subseteq B$.

Damit ist $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ und da B abgeschlossen ist, ist $\bar{A} \subseteq B$

und $B \subseteq \bar{A} \Rightarrow \bar{A} = B$

Folglich ist auch \bar{A} abgeschlossen.

Aufgabe (1b). Seien $A, B \subseteq X$ zusammenhängend und $A \cap B = \emptyset$.

Zu zeigen: $A \cup B$ zusammenhängend. **Beweis:** Sei $C \subseteq A \cup B$ nichtleer, offen und abgeschlossen in $A \cup B$.

Sei $x \in C$, dann ist $x \in A$ (obdA, sonst wähle B)

Da $C \cap A$ abgeschlossen, offen und nichtleer in A und da A zusammenhängend, ist $C \cap A = A$ also $A \subseteq C$. Damit ist $\emptyset \neq A \cap B \subseteq C \cap B$. Weiter ist $C \cap B$ abgeschlossen, offen und nichtleer in B . Da B zusammenhängend ist, ist $C \cap B = B$ und $B \subseteq C$. Damit ist $C \subseteq A \cup B \subseteq C$.

Also $C = A \cup B \Rightarrow A \cup B$ ist zusammenhängend, da $A \cup B$ und \emptyset die einzigen gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen sind.

Aufgabe (1c). Sei $\{A_i\}_{i \in I}$ eine zusammenhängende Familie (Familie zusammenhängender Mengen), sodass $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.

Zu zeigen: $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ ist zusammenhängend.

Sei $B \subseteq A$ offen, abgeschlossen und nichtleer. Sei weiter $x \in B$. Dann existiert $i \in I$ mit $x \in A_i$. Sei $y \in A$ beliebig.

Behauptung: $y \in B$ **Beweis:** Sei $j \in I$, sodass $y \in A_j$ nach Aufgabenteil b) ist dann $A_j \cup A_i$ zusammenhängend. Damit ist $B \cap (A_i \cup A_j) = A_j \cup A_i$, weil alle A_i zusammenhängend. Weiter ist $y \in A_i \cup A_j$ und $y \in B$.

Daraus folgt: $A \subseteq B$ und $B \subseteq A \Rightarrow A = B$.

Aufgabe (2a). Zu zeigen: B ist die Basis einer Topologie O_p auf P .

1 Übungen

1. Zeige: $P \in O_p$, wobei $O_p = \{\bigcup_{U \in A} U \mid A \subseteq B\}$.

$P = U_\emptyset(0, 0, \dots) \in B$ also $P \in O_p$

2. Für $V_1, V_2 \in O_p$ gilt $V_1 \cap V_2 \in O_p$.

Sei $V_1 = \bigcup_{U \in A_1} U, V_2 = \bigcup_{U \in A_2} U$.

Behauptung: Für alle $U, U' \in B : U \cap U' \in B$ oder $U \cap U' = \emptyset$.

Dann ist

$$V_1 \cap V_2 = \bigcup_{U \in A_1} \bigcup_{U' \in A_2} (U \cap U') \text{ also } V_1 \cap V_2 \in O_p$$

Beweis: Seien $U = U_\mu(a) \in B, U' = U_{\mu'}(a') \in B$. Falls $U \cap U' \neq \emptyset$ existiert $a'' \in U \cap U'$. Dann gilt $U = U_\mu(a''), U' = U_{\mu'}(a'')$. Also:

$$U \cap U' = U_{\mu \cup \mu'}(a'')$$

3. O_P ist bezüglich Vereinigung abgeschlossen, denn O_p besteht aus Vereinigungen von Elementen aus B .

Insgesamt folgt damit: O_p ist Topologie!

Aufgabe (2b). Ist (P, O_p) zusammenhängend, unzusammenhängend oder total unzusammenhängend?

Behauptung: (P, O_p) ist total unzusammenhängend!

Beweis: Seien $a, b \in P$ Zeige: Es gibt offene, abgeschlossene Mengen U_a, U_b mit $U_a \cup U_b = P, U_a \cap U_b = \emptyset$ und weiter $a \in U_a, b \in U_b$.

Seien $a \neq b \Rightarrow \exists i \in \mathbb{N}$ sodass $a_i \neq b_i$. Setze $U_a = U_{\{i\}}(a)$ und $U_b = U_{\{i\}}(b)$.

U_a und U_b sind in O_p offen. Nach Wahl von i ist $U_a \cap U_b = \emptyset$ und $U_a \cup U_b = P$.

Angenommen es gibt ein zusammenhängendes $V \subseteq P$ mit $|V| \geq 2$.

Wähle $a, b \in V$ mit $a \neq b$ und konstruiere U_a, U_b wie oben. Dann ist $V = (V \cap U_a) \cup (V \cap U_b)$ eine offene disjunkte Zerlegung von V . **Widerspruch!**

Aufgabe (3a). Es reicht zu zeigen, dass alle p_i stetig sind.

" \Rightarrow ": Die Mengen $p_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

$$p_i^{-1}(\{0, 1\}) = P$$

$$p_i^{-1}(\{1\}) = U_{\{i\}}(1, \dots)$$

$$p_i^{-1}(\{0\}) = U_{\{i\}}(0, \dots)$$

sind alle offen.

" \Leftarrow ": Sei $U \subseteq P$ offen. Dann ist $U = \bigcup_{U' \in A} U'$ für $A \subseteq B$ also $f^{-1}(U) = \bigcup_{U \in A} f^{-1}(U')$.

Fallse alle $f^{-1}(U')$ offen sind, dann auch $f^{-1}(U)$. Damit können wir uns für U auf Basiselemente beschränken. Sei also $U = U_\mu(a) \in B$.

Sei weiter $M = \{i_1, \dots, i_n\}$. Dann ist:

$$U = U_{i_1}(a) \cap \dots \cap U_{i_n}(a) = p_i^{-1}(\{a_{i_1}\}) \cap \dots \cap p_i^{-1}(\{a_{i_n}\})$$

Also ist: $f^{-1}(U) = f_i^{-1}(\{a_{i_1}\}) \cap \dots \cap f_i^{-1}(\{a_{i_n}\})$.

Diese Menge ist endlicher Schnitt offener Mengen, weil alle f_i stetig sind.

Aufgabe (3b). Zu zeigen: $f : X \rightarrow (P, \mathcal{P}(P))$ ist nicht genau dann stetig, wenn alle $f_i : X \rightarrow \{0, 1\}$ stetig sind.

Beispiel: $X = (P, O_P)$, $f : (P, O_P) \rightarrow (P, \mathcal{P}(P))$, $a \mapsto a$.

Sei $A \in \mathcal{P}(P) \setminus O_P$ beliebig, dann ist A offen in $\mathcal{P}(P)$ aber $f^{-1}(A) = A$ ist in (P, O_P) nicht offen, also ist f nicht stetig.

1.5 2017-11-24 - Übungsblatt 5

Aufgabe (1a). Sei $Y \subseteq \mathcal{R}^n$ heißt konvex, falls für $p, q \in Y$ auch die Verbindungsgerade \bar{pq} in Y .

Zeigen sie: Jede konvexe Teilmenge von \mathcal{R}^n ist zusammenhängend.

Behauptung: $Y \text{ konvex} \Rightarrow Y \text{ wegzusammenhängend}$,

Seien $p, q \in Y$, Sei $c : [0, 1] \rightarrow Y$, $t \mapsto (1-t)p + tq$ Die Verbindungsstrecke. Dann ist $c(0) = p$, $c(1) = q$, $c([0, 1]) \subseteq Y$ wegen Konvexität.

Da p, q bel. waren, ist Y wegzusammenhängend.

Aufgabe (2). vgl. Aufgabentext..

Zu zeigen: X ist kompakt \iff für alle Familien $(A_i)_{i \in I}$ **abgeschlossen** Teilmengen von X mit endlicher Schnitteigenschaft gilt: $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

Sei (A_i) , Familie und $\forall i \in I$ sei $B_i := X \setminus A_i = A_i^C$.

Dann gelten: $(A_i)_{i \in I}$ ist Familie von offenen Mengen $\iff (B_i)$ besteht aus abg. Mengen.

$$\bigcap_{i \in M} A_i \neq \emptyset \iff X \setminus \bigcap_{i \in M} A_i \neq X \setminus \emptyset \iff \bigcup_{i \in M} (X \setminus A_i) \neq X \iff (B_i)_{i \in M}$$

ist keine Überdeckung von X . **Beweis:** Alle Familien abgeschlossener Teilmengen von X mit endl. Schnitteigenschaft haben nichtleeren Schnitt. \iff Alle Familien mit abge-

geschlossenen Teilmengen von X mit leerem Schnitt besitzen eine unendliche Teilfamilie mit leerem Schnitt.

\Leftrightarrow Alle Familien offener Teilmengen von X , die X überdecken, besitzen eine endliche Teilfamilie, die X überdeckt. $\Leftrightarrow X$ ist kompakt

Aufgabe (3). Sei X kompakt, $f : X \rightarrow \mathcal{R}$ stetig.

Zeigen Sie: f nimmt auf \mathcal{R} ein endliches Minimum und endliches Maximum an.

Beweis: Da stetige Bilder kompakter Mengen wieder kompakt sind, ist $f(X)$ kompakt in \mathcal{R} .

Nach dem Satz von Heine-Borel sind die kompakten Mengen in \mathcal{R} genau die abgeschlossenen, beschränkten Mengen. Damit ist $f(X)$ also abgeschlossen und beschränkt, außerdem nichtleer.

Zeige ausführlich (statt mit Ana I.): $f(X)$ hat Maximum, Minimum.

Sei $s := \sup f(X)$. Da $f(X)$ nichtleer ist, ist $s > -\infty$.

Da $f(X)$ nach oben beschränkt ist, ist $s < \infty$. Für alle $n \in \mathcal{N}$ gibt es ein $x_n \in f(X)$ sodass $s - \frac{1}{n} < x_n \leq s$, weil $s - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von $f(X)$ ist.

Damit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$. Damit ist $s \in f(X)$ und somit Maximum von f .

Aufgabe (4a). Sind Mannigfaltigkeiten stückweise wegzusammenhängend?

Behauptung: Ja!

Beweis: Sei $x \in M$, M sei $n - \dim$ Mannigfaltigkeit.

Dann gibt es eine Karte (φ, U) von M , $\varphi : U \rightarrow \mathcal{R}^n$, $x \in U$.

Damit ist $\varphi(x)$ innerer Punkt von $\varphi(U)$, also gibt es einen offenen Ball

$B := B_\varepsilon(\varphi(x)) \subseteq \varphi(U)$.

B ist wegzusammenhängend, also auch $\varphi^{-1}(B) \subseteq U$ wegzusammenhängend und $\varphi^{-1}(B)$ ist **offene** Umgebung von $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$, wie gesucht.

Aufgabe (4b). Sind zusammenhängende Mannigfaltigkeiten immer wegzusammenhängend?

Behauptung: Ja!

Beweis: Für alle $x \in X$ ist $W(x)$ offen.

Zu zeigen: Für alle $y \in W(x)$ gibt es eine in X offene Umgebung von y in $W(x)$.

Sei $y \in W(x)$. Dann ist $W(x) = W(y)$. Sei U eine offene, wegzusammenhängende Umgebung von y .

Dann ist $U \subseteq W(y) = W(x)$ die gesuchte Umgebung.

Angenommen, X ist nicht wegzusammenhängend. Dann gibt es $x, y \in X$ mit $x \in W(x), y \notin W(x)$.

Nun ist $W(x)$ offen (siehe oben), und $W(x)$ ist abgeschlossen, denn

$$X \setminus W(x) = \bigcup_{z \notin W(x)} W(z)$$

ist auch offen. Damit ist $W(x)$ Zeuge, dass X nicht zusammenhängend ist. Damit folgt die Behauptung.

1.6 2017-12-01 - Übungsblatt 6

Aufgabe (1a). Zu zeigen: **Stereographische Projektion** an p_+ und p_- ist genau die Umkehrabbildung φ^{-1} .

$$\psi_{\pm} : S^2 \setminus \{p_{\pm}\} \rightarrow \mathcal{R}^{\infty}, (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1 \pm z}, \frac{y}{1 \pm z} \right).$$

$$\text{zz: } \psi_+ \circ \varphi_+ = \text{id}.$$

$$\text{Nachrechnen...: } \psi_+(\varphi_+(x, y)) = \dots = (x, y)$$

$$\text{zz: } \varphi_+ \circ \psi_+ = \text{id}.$$

$$\text{: Nachrechnen...: } \varphi_+(\psi_+(x, y, z)) = \dots = (x, y, z)$$

Aufgabe (1b). Zeige: Der Kartenwechsel $\psi_+ \circ \psi_-^{-1} = \varphi_+^{-1} \circ \varphi_-$ ist C^{∞} .

Sei $f : \psi_-(S^2 \setminus \{p_+, p_-\}) \rightarrow \psi_+(S^2 \setminus \{p_+, p_-\})$.

$$f(x, y) = \dots = \frac{1}{x^2 + y^2}(x, y) \text{ ist } C^{\infty}.$$

Seien dafür: $g(x, y) = \left(\frac{p(x, y)}{(x^2 + y^2)^n}, \frac{q(x, y)}{(x^2 + y^2)^n} \right)$ für $p, q \in \mathbb{R}[x, y]$.

Behauptung: Es gibt $N \in \mathbb{N}, P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$ sodass:

$$g_x(x, y) = \left(\frac{P(x, y)}{(x^2 + y^2)^n}, \frac{Q(x, y)}{(x^2 + y^2)^n} \right)$$

Mit dieser Behauptung folgt, dass alle partiellen Ableitungen von f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ existieren.

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} g(x, y) &= ((x^2 + y^2)p_x(x, y) - 2xp(x, y), \\ (x^2 + y^2)q_x(x, y) - 2xq(x, y)) &\cdot \frac{1}{(x^2 + y^2)^n + 1} = Q(x, y) \end{aligned}$$

Aufgabe (2a). Der Tangentialraum $T_p F$ von F in p sei definiert als $T_p F := \text{Bild}(d\varphi(\varphi^{-1}(p)))$, wobei $\varphi : V \rightarrow F, V \subseteq \mathbb{R}^2$, eine Parametrisierung von F um den Punkt $p \in F$ ist.

Zeige: Diese Definition ist unabhängig von φ .

Ansatz: Wähle zwei Parametrisierungen und zeige, dass das Bild das selbe ist.

Beweis: Seien φ, ψ Parametrisierungen von F um p . Sei $q = \varphi^{-1}(p), r = \psi^{-1}(p)$,

Zu Zeigen:

$$\text{Bild}(d\varphi(q)) = \text{Bild}(d\psi(r))$$

Es gilt $\psi = \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)$ wobei $f := (\varphi^{-1} \circ \psi)$.

also: $d\psi(r) = d(\varphi \circ f(r)) = d\varphi(f(r)) \cdot df(r) = d\varphi(q) \cdot df(r)$, also:

$$\text{Bild}(d\psi(r)) \subseteq \text{Bild}(d\varphi(q)).$$

Durch Vertauschung von ψ, φ erhalten wir auch $\text{Bild}(d\varphi(q)) \subseteq \text{Bild}(d\psi(r))$ also:

$$\text{Bild}(d\varphi(q)) = \text{Bild}(d\psi(r))$$

Aufgabe (2b). Vgl. Aufgabenstellung...

Beweis:

Sei $p = (p_x, p_y, p_z)$. Sei oBdA $p_z > 0$.

Sei $\varphi : B_1(0) \rightarrow S^2, (x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$.

Dann ist:

$$d\varphi(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} (p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-p_x}{p_z} & \frac{-p_y}{p_z} \end{pmatrix}$$

Also:

$$T_p S^2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-p_x}{p_z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-p_y}{p_z} \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} p_z \\ 0 \\ -p_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ p_z \\ -p_y \end{pmatrix} \right]$$

Jetzt ist: $p \cdot t_1 = p_x p_z - p_z p_x = 0$ und $p \cdot t_2 = p_y p_z - p_z p_y = 0$ also

$\{p\} \perp \{t_1, t_2\}$ und $[p] \perp [t_1, t_2] = T_p S$, also auch $T_p S = [p]^\perp$.

Aufgabe (3a). Sei

$$U_i := \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \in P^n \mathbb{R} \mid x_i \neq 0\}$$

und

$$\varphi_i([x_1, \dots, x_n]) = \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$$

Zeige: (U_i, φ_i) bilden einen differenzierbaren Atlas von $P^n \mathbb{R}$.

Behauptung: Es gilt:

$$\varphi_i^{-1}(u_1, \dots, u_n) = [u_1, \dots, u_{i-1}, 1, u_i, \dots, u_n]$$

1 Übungen

Zeige: $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ ist differenzierbar für $i, j = 1, \dots, n+1, i < j$.

$$\begin{aligned}\varphi_i(\varphi_j^{-1}(u_1, \dots, u_n)) &= \varphi_i([u_1, \dots, u_{i-1}, 1, u_i, \dots, u_n]) \\ &= \left(\frac{u_1}{u_i}, \dots, \frac{u_{i-1}}{u_i}, \frac{u_{i+1}}{u_i}, \dots, \frac{u_{j-1}}{u_i}, \frac{1}{u_i}, \frac{u_j}{u_i}, \dots, \frac{u_n}{u_i} \right)\end{aligned}$$

ist C^∞ von $\{u \in \mathbb{R}^n : u_i \neq 0\}$ nach $\{u \in \mathbb{R}^n : u_{j-1} \neq 0\}$.

Noch zz: $U_1 \cup \dots \cup U_{n+1} = P^n \mathbb{R}$.

Für $[x_1, \dots, x_{n+1}] \in P^n \mathbb{R}$ gibt es mindestens ein i mit $x_i \neq 0$ damit ist $[x_1, \dots, x_{n+1}]$ in U_i . Damit gilt $U_1 \cup \dots \cup U_{n+1} = P^n \mathbb{R}$.

Aufgabe (3b). Behauptung: $P^n \mathbb{R}$ ist hausdorffsch mit abzählbarer Basis.

Wir wissen aus der VL, dass $P^n \mathbb{R} = S^n / \sim$ wobei $x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$.

(Vgl. Abbildung).

Seien $\pm x, \pm y \in S^2 / \sim$.

Seien $U_x := B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(-x)$ und

$U_y := B_\varepsilon(y) \cup B_\varepsilon(-y)$.

Zu jedem $z \in U_x$ ist auch $-z \in U_x$.

Zu jedem $z \in U_y$ ist auch $-z \in U_y$.

Also ist $\pi^{-1}(\pi(U_x)) = U_x$ also $\pi(U_x)$ auch offen in $S^n / \sim \cong P^n \mathbb{R}$.

Da U_x, U_y disjunkt gilt: $\pi(U_x) \cap \pi(U_y) = \emptyset$. Also sind $\pi(U_y), \pi(U_x)$ disjunkte offene Umgebungen von $\pm x, \pm y$ und damit ist $S^n / \sim = P^n \mathbb{R}$ hausdorffsch.

Zur abzählbaren Basis:

Seien B_1, \dots, B_{n+1} abzählbare Basis von U_1, \dots, U_{n+1} . Dann ist $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{n+1}$ eine abzählbare Basis von $P^n \mathbb{R}$??? -> Weiß nicht was hier hin sollte

1.7 2017-12-08 - Übungsblatt 7

Abbildungen müssen nachgetragen werden!

Aufgabe (1a). Vgl. Aufgabenstellung.

Zu zeigen: $S := f^{-1}(0)$ ist reguläre Fläche. Wobei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und für alle Punkte $p \in S$ gelte $f'(p) \neq 0$.

Beweis: Sei $p \in S$. Dann gilt nach Vor.

$$f'(p) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right) \neq 0$$

Sei oBdA $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$. Nach dem Satz über implizit definierte Funktion gibt es $U \subseteq \mathbb{R}^2, V \subseteq \mathbb{R}, g : U \rightarrow V, p \in U \times V$, sodass gilt $g(x, y) = z \iff f(x, y, z) = 0 \forall (x, y) \in U, z \in V$.

g ist stetig differenzierbar. Dann ist g ein Homöomorphismus von U auf $(U \times V) \cap S$, denn $\varphi^{-1} : (x, y, z) \rightarrow (x, y)$ ist eine stetige Umkehrabbildung.

Also ist φ Parametrisierung von S um p .

$$\varphi : U \rightarrow (U \times V) \cap S, (x, y) \mapsto (x, y, g(x, y))$$

Dann ist S eine reguläre Fläche. Die Jacobimatrix von φ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \text{ und hat immer Rang 2.}$$

Aufgabe (1b). Benutze hier Δ statt des Nabla-Symbols (vorerst).

Zu Zeigen: $T_p S = \text{Kern}(\Delta f(p))$.

Beweis: Sei $\varphi : U \rightarrow S$ irgendeine Parametrisierung um einen Punkt $p \in S$.

Jetzt ist $f \circ \varphi = 0$. Ableiten ergibt

$$0 = \partial_q 0 = \partial_q (f \circ \varphi) = \partial_{\varphi(q)} f \cdot \partial_q \varphi = \Delta_p f \cdot \partial_q \varphi.$$

Damit ist $T_p S = \text{Bild}(\partial_q \varphi) \subseteq \text{Kern}(\Delta_p f)$.

Da $\Delta_p f \neq 0$ ist, ist $\dim \text{Kern} \Delta_p f = 2, \dim T_p S = 2$.

Also ist $\text{Kern}(\Delta_p f) = T_p S$.

Aufgabe (2a). K_n ist ein vollständiger Graph mit n Ecken, d.h. die Ecken von K_n sind paarweise durch eine Kante verbunden.

Zu zeigen: Für $n \leq 4$ ist K_n planar.

Zeige, indem einzelne Einbettungen für alle $n \leq 4$ gezeichnet werden.

Aufgabe (2b). Behauptung: Für $n \geq 5$ ist K_n nicht planar.

Beweis: Angenommen es gibt eine Einbettung von K_n in eine Ebene. Betrachte vier Ecken von K_n :

Eine weitere Ecke von K_n muss dann in a, b, c, d liegen, aber man kann sie dann nicht, mit A, B, C, D verbinden.

Aufgabe (3). Sei G ein Graph mit Ecken p_1, \dots, p_n .

Für $i, j = 1, \dots, n$ sei

$$A := ((a_{i,j}))_{i,j=1,\dots,n} \quad a_{i,j} := \begin{cases} 0, & \text{wenn keine Kante } p_i p_j \text{ in } G \\ 1, & \text{wenn Kante } p_i p_j \text{ in } G \text{ existiert} \end{cases}$$

Die Matrix A heißt Adjazenzmatrix von G . **Zu zeigen:** Sei $G = K_n$ dann ist $n - 1$ der größte Eigenwert von A .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{1\text{-Matrix}} - \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}^{\text{Einheitsmatrix}}$$

Die Eigenräume von $\mathbf{1}_n$ sind:

$$E_0 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

Jeder Eigenwert λ von A mit zugehörigem Eigenvektor v erfüllt

$\mathbf{1}_n \cdot v = (A + I_n) \cdot v = Av + v = \lambda v + v = (\lambda + 1)v$, also ist $\lambda + 1$ EW von $\mathbf{1}_n$.

Damit sind die Eigenvektoren von A höchstens -1 oder $n - 1$, und da

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ n-1 \\ \vdots \\ n-1 \end{pmatrix}$$

Ist $n-1$ der größte EW von A .

Aufgabe (3b). Zeige: Für allgemeines G sind die Eigenvektoren von A nicht größer als $n-1$.

Beweis: Sei $x = (x_1 \dots x_n)^T$ Eigenvektor von G mit EW λ .

Sei weiter $i \in \{1, \dots, n\}$ sodass $|x_i| \geq |x_j|$ für alle j .

Sei oBdA $x_i > 0$, also $x_i \geq |x_j|$ für alle j . Aus $Ax = \lambda x$ folgt $(Ax)_i = \lambda x_i$:

$$\lambda x_i = (Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i \leq (n-1)x_i,$$

Damit folgt $\lambda \leq n-1$.

Aufgabe (4). Zu zeigen: G ist Baum $\iff G$ ist zusammenhängend aber besitzt keinen Kreis.

" \implies ": Sei G ein Baum. Dann ist G zusammenhängend.

Angenommen, G besitzt einen Kreis. Wenn man eine einzige Kante dieses Kreises entfernt, so bleibt der entstehende Graph zusammenhängend, denn jeden verbindenden Pfad in G , der durch diese Kante geht, können wir um den Kreis umleiten.

Formaler: Sei $p_0 \dots p_n = p_0$ ein Kreis.

Zwischen je zwei Ecken in G gibt es einen Weg $q = q_0 \dots q_n = q'$ in G . Ersetzen wir in diesem Weg jedes Vorkommen von $p_0 p_{n-1}$ durch $p_0 p_1 \dots p_{n-1}$ und $p_{n-1} p_0$ durch $p_{n-1} \dots p_0$ so finden wir einen Kantenzug in $G \setminus \{\overline{p_0 p_{n-1}}\}$ der q, q' verbindet.

Damit ist $G \setminus \{p_0 p_{n-1}\}$ zusammenhängend, also ist G kein Baum. Widerspruch!

" \impliedby ": Sei G zusammenhängend und besitze keinen Kreis.

Angenommen G ist kein Baum, also dass es eine Kante pp' gibt, nach deren Entfernung G noch zusammenhängend ist. Also $G \setminus \{\overline{pp'}\}$ zusammenhängend.

Dann gibt es einen Weg $p = p_0 \dots p_n = p'$ in $G \setminus \{\overline{pp'}\}$. Damit ist p_0, \dots, p_n, p_0 ein Kreis. Widerspruch.

1.8 2017-12-15 - Übungsblatt 8

Aufgabe (1a). Sei $n \geq 3$, sei G ein planarer Graph mit $k(G) \geq n$, so dass alle Kreise in G min. Länge n haben.

Zu zeigen: $k(G) \leq \frac{n}{n-2}(e(G) - 2)$.

Sei oBdA G eben. Sei K die Menge der Kanten von G , sei S die Menge der Flächenstücke von G .

Sei $W = \{(k, s) \in K \times S : k \text{ liegt auf dem Rand von } s\}$.

Für alle $k \in K$ gibt es höchstens zwei $s \in S$ mit $(k, s) \in W$, damit gilt $|W| \leq 2|K|$.

Für alle $s \in S$ gibt es mindestens n Kanten $k \in K$, sodass $(k, s) \in W$, denn falls s beschränkt ist, der äußere Rand von s besteht aus einem Kreis, der min n Kanten hat.

Wenn s unbeschränkt:

- **Fall 1:** G ist Baum. Dann ist s das einzige Flächenstück und alle Kanten berühren s . ($k(G) \geq n$).
- **Fall 2:** G ist kein Baum, dann schließt s andere Flächenstücke ein, der Rand dieser Einschlüsse besteht aus einem oder mehreren Kreisen. Alle $\geq n$ Kanten dieser Kreise berühren s .

Also erhalten wir $|W| \geq n|S|$. Wir erhalten $n \cdot s(G) = n|S| \leq |W| \leq 2|K| = 2k(G)$.

Nach Eulerformel gilt:

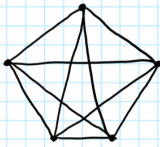
$s(G) = k(G) - e(G) + 2$, also $\frac{2}{n}k(G) \geq \frac{n}{n}s(G) = k(G) - e(G) + 2$.

$$\Rightarrow \frac{2-n}{n}k(G) \geq -e(G) + 2$$

$$\Rightarrow \frac{n-2}{n}k(G) \leq e(G) - 2$$

$$\Rightarrow k(G) \leq \frac{n}{n-2}(e(G) - 2)$$

Aufgabe (1b). Vgl. Zeichnungen:



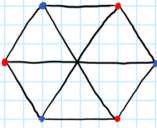
=: G

$$k(G) = 10$$

$$e(G) = 5$$

$$n = 3$$

$$10 > \frac{3}{3-2} \cdot (5-2) \Rightarrow G \text{ ist nicht planar}$$



=: G'

$$k(G') = 9$$

$$e(G') = 6$$

$$n = 4$$

G' enthält keine Dreiecke

$$9 > \frac{4}{4-2} (6-2) \Rightarrow G' \text{ ist nicht planar}$$

Aufgabe (3). Für einen platonischen Körper $P \subseteq \mathbb{R}^3$ mit Zentrum 0 ist:

$$\text{Sym}(P) := \{f \in O(3) : f(P) = P\}$$

$$\text{Sym}(P) := \{f \in SO(3) : f(P) = P\}$$

Sei P Würfel.

Zu zeigen:

- $\text{Sym}(P) = S_4 \times \{1, -1\}$
- $\text{Sym}_0(P) = S_4$

Behauptung: $|\text{Sym}(P)| \leq 48, |\text{Sym}_0(P)| \leq 24$.

Beweis: Sei E eine Ecke von P und seien F, G, H die zu E benachbarten Ecken. Da φ Ecken von P auf Ecken von P abbildet, gibt es nur 8 mögliche Werte von $\varphi(E)$. Da φ benachbarte Ecken auf benachbarte Ecken von P abbildet, sind $\varphi(G), \varphi(H), \varphi(F)$ in einer von 6 Reihenfolgen die Nachbarn von $\varphi(E)$. Jetzt ist aber φ vollständig durch $\varphi|_{\{E, F, G, H\}}$ bestimmt, da E, F, G, H ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^3 ist.

Damit ist $|\text{Sym}(P)| \leq 6 \cdot 8 = 48$.

$\text{Sym}_0(P)$ ist Untergruppe von $\text{Sym}(P)$. Nach dem Satz von Lagrange ist $\frac{|\text{Sym}(P)|}{|\text{Sym}_0(P)|} \in \mathbb{N}(\cdot)$.

Da $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Sym}(P)$, aber $\det(-I) = (-1)^3 = -1$, ist $I \in \text{Sym}(P) \setminus$

$\text{Sym}_0(P)$, also ist $|\text{Sym}(P)| > |\text{Sym}_0(P)|$.

Wegen (\cdot) folgt

$$\frac{|Sym(P)|}{|Sym_0(P)|} \geq 2 \Rightarrow |Sym_0(P)| \leq \frac{1}{2} |Sym(P)| \leq 24,$$

Sei D die Menge der Hauptdiagonalen von P . Dann ist

$$h : Sym_0(P) \rightarrow B_{ij}(D) \cong S_4, h(\varphi) := (d \mapsto \varphi(d))$$

Gruppenhomomorphismus.

Behauptung: h ist surjektiv.

Da $B_{ij}(D)$ von Transpositionen erzeugt wird reicht es zu zeigen, dass $Bild(h)$ jede Transposition enthält. Sei also (d_1, d_2) eine beliebige Transposition in $B_{ij}(D)$.

Gesucht: $\varphi \in Sym_0(P)$ mit $h(\varphi) = (d_1, d_2)$,

Wähle φ als Rotation um 180° um die gestrichelte Achse (vgl. Abb.), dann ist $\varphi(P) = P$, $\det(\varphi) = 1$, $\varphi(RL) = BL$, $\varphi(BL) = RL$, $\varphi(GL) = GL$, $\varphi(YL) = YL$.
Wobei GL = Grüne Linie, etc.

Damit ist $h(\varphi) = (d_1, d_2)$,

Wir haben einen surjektiven Hom. $h : Sym_0(P) \rightarrow B_{ij}(D)$. Aus $|Sym_0(P)| \leq 24 = |S_4| = |B_{ij}(D)|$ folgt sofort, dass $|Sym_0(P)| = |B_{ij}(D)|$ ist und dass h bijektiv ist:

$$Sym_0(P) \cong B_{ij}(D) \cong S_4,$$

Behauptung: $Sym(P) \cong Sym_0(P) \times \{-1, 1\}$,

Beweis: Seien:

$$g : Sym(P) \rightarrow Sym_0(P) \times \{-1, 1\}, \psi \mapsto (\det(\psi) \cdot \psi, \det(\psi))$$

$$k : Sym_0(P) \times \{-1, 1\} \rightarrow Sym(P), (\varphi, \varepsilon) \mapsto \varepsilon\varphi,$$

Behauptung: k, g sind zueinander Invers.

Bew:

$$g(k(\varphi, \varepsilon)) = g(\varepsilon\varphi) = (\varepsilon^3 \cdot \varepsilon\varphi, \varepsilon) = (\varphi, \varepsilon)$$

$$k(g(\psi)) = k(\det(\psi) \cdot \psi, \det(\psi)) = \det(\psi)^2 \cdot \psi = \psi$$

Behauptung: k ist Hom.

Beweis:

$$k((\varphi, \varepsilon) \cdot (\varphi', \varepsilon')) = k(\varphi, \varepsilon) \cdot k(\varphi', \varepsilon'),$$

Damit folgt Behauptung. Also ist

$$\operatorname{Sym}(P) \cong \operatorname{Sym}_0(P) \times \{-1, 1\} \cong S_4 \times \{-1, 1\},$$