

# Mitschrieb Elementare Geometrie

Jens Ochsenmeier

29. Dezember 2017



# 1

## Übungen

### 1.1 2017-10-27

**Aufgabe (1).** Zeigen Sie:  $(\mathbb{R}^2, d)$  mit  $d(x, y) = |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)|$  ist pseudometrischer Raum.

- **Positivität.** Zu zeigen:  $\forall x \in \mathbb{R}^2 : d(x, x) = 0$ .  
$$d(x, x) = |(x_1 - x_1) + (x_2 - x_2)| = |0| = 0.$$
- **Symmetrie.** Zu zeigen:  $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) = d(y, x)$ .  
$$d(x, y) = |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)| = |(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2)| = d(y, x).$$
- **Dreiecksungleichung.** Zu zeigen:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2 : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .  
$$d(x, y) + d(y, z) = |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)| + |(y_1 - z_1) + (y_2 - z_2)| \geq |(x_1 - z_1) + (x_2 - z_2)| = d(x, z).$$

**Aufgabe (2).** Gegeben:

- $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|,$
- $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$
- $\|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$

Wir zeigen, dass alle drei Normen sind. Dafür ist zu zeigen:

1. **Positivität:**  $\|x\| \geq 0 \forall x, x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0.$
2. **Sublinearität:**  $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. **Homogenität:**  $\forall x \in V \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$

Positivität ist klar für alle drei. Homogenität ist auch arg simpel.

**Sublinearität:**

1.

$$\begin{aligned}\|x + y\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + |y_i| \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\|x + y\|_2^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \\ \Rightarrow \|x + y\|_2 &\leq \|x\|_2 + \|y\|_2\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\|x + y\|_\infty &= \max_{i=1, \dots, n} |x_i + y_i| \leq \max_{i=1, \dots, n} (|x_i| + |y_i|) \\ &\leq \max_{i=1, \dots, n} \max_{j=1, \dots, n} (|x_i| + |y_j|) = (\max_i |x_i|) + (\max_j |y_j|) \\ &= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty\end{aligned}$$

**Aufgabe (3).** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ .

1. Beweise:

1. Falls  $d(x, y) \geq r_1 + r_2$ , dann sind  $B_{r_1}(x), B_{r_2}(y)$  disjunkt.

Beweis: Angenommen,  $\exists z \in B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(y)$ .

Dann ist  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r_1 + r_2 \quad \text{!}$

2. Falls  $d(x, y) \leq r_1 - r_2$ , so ist  $B_{r_2}(y) \subseteq B_{r_1}(x)$ .

Beweis: Angenommen,  $\exists z \in B_{r_2}(y) \setminus B_{r_1}(x)$ . Dann ist

$$\begin{aligned}d(x, z) &\geq r_1 = (r_1 - r_2) + r_2 \\ &> d(x, y) + d(z, y) \quad \text{!}\end{aligned}$$

2. Finde je ein Gegenbeispiel für die Rückrichtung:

1. Sei  $X = \{0, 1\}$  und  $d$  Metrik auf  $X$  mit  $d(0, 1) = 1$ .

**Idee:** Wir nehmen zwei Bälle, die sich in der Theorie überschneiden, weil die Summe der Radien kleiner ist als der Abstand, aber in der Schnittmenge liegen

keine Elemente.

Wir wählen  $r_1 = r_2 = \frac{2}{3}$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1$ . Wir haben

$B_{r_1}(0) = \{0\}$ ,  $B_{r_2}(1) = \{1\}$ , aber  $r_1 + r_2 = \frac{4}{3} > d(0, 1)$ .

2. Metrik wie in erstem Gegenbeispiel,  $r_1 = r_2 = 100$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1$ .

Dann ist  $B_{r_1}(0) = \{0, 1\}$ ,  $B_{r_2}(1) = \{0, 1\}$ , aber  $d(0, 1) > 100 - 100$ .

**Aufgabe (4).** 1. Zeigen Sie, dass  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  und  $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$  isometrisch sind.

Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ .

**Behauptung:**  $f: (\mathbb{R}^2, d_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$  ist Isometrie.

$f$  ist linear mit Rang 2, also bijektiv.

Seien  $p = (x_1, y_1)$ ,  $q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ . Zu zeigen:

$$d_\infty(f(p), f(q)) = d_1(p, q).$$

Es ist

$$\begin{aligned} d_1(p, q) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= \max\{|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)|, |(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)|\} \\ &= \max\{|(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)|, |(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)|\} \\ &= (\text{undeutlich}) = d_\infty(f(p), f(q)). \end{aligned}$$

2. Zeigen Sie, dass  $(\mathbb{R}^n, d_1)$  und  $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$  **nicht** isometrisch sind für  $n > 2$ .

Angenommen, es gibt eine Isometrie  $\varphi^1: (\mathbb{R}^n, d_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d_1)$ . Die Abbildung  $\varphi^2: (\mathbb{R}^n, d_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d_1)$ ,  $x \mapsto x - \varphi^1(0)$  ist eine Translation, also eine Isometrie.

Wähle  $\varphi := \varphi^2 \circ \varphi^1$ .  $\varphi$  ist Isometrie mit  $\varphi(0) = 0$ .

Die Menge  $\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{-1, 1\}\} =: A$  hat folgende Eigenschaft: Für alle  $p, q \in A$  mit  $p \neq q$  gilt  $d_\infty(p, q) = 2$  und  $d_\infty(p, 0) = 1$ .

Sei  $B = \varphi(A)$ . Für alle  $p, q \in B$  mit  $p \neq q$  gilt  $d_1(p, q) = 2$  und  $d_1(p, 0) = 1$ . Da  $\varphi$  injektiv ist, gilt  $|B| = |A| = 2^n > 2n$  (weil  $n \geq 3$ ). Da jedes  $x \in B$  mindestens eine Koordinate  $\neq 0$  hat, gibt es ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $p, q, r \in B$  mit  $p_i, q_i, r_i \neq 0$ .

Dann gibt es oBdA verschiedene  $p, q \in B$  mit  $p_i, q_i > 0$  (bzw haben selbes Vorzeichen, da es nur zwei mögliche Vorzeichen gibt).

Es gilt  $d_1(p, q) = \sum_{j=1}^n |p_j - q_j| \underset{\text{da beide } > 0}{<} \sum_{j=1}^n |p_j| + |q_j| = d_1(p, 0) + d_1(0, q) = 2 \nmid$

## 1.2 2017-11-03 - Übungsblatt 2

**Aufgabe (1a).** Es reicht zu zeigen, dass zu je zwei Punkten  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$  eine Isometrie  $\varphi_{p_1, p_2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  existiert mit  $\varphi_{p_1, p_2}(0, 0) = p_1$  und  $\varphi_{p_1, p_2}(0, l) = p_2$ , wobei  $:= d_e(p_1, p_2)$ .

Dann gibt es für  $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}^2$  mit  $d_e(p_1, p_2) = l = d_e(q_1, q_2)$  eine Isometrie  $\varphi := \varphi_{q_1, q_2} \circ \varphi_{p_1, p_2}^{-1}$ , die das gewünschte Liefert.

Sei  $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2)$ . Für  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  wähle

$$\varphi_{p_1 p_2} := \begin{pmatrix} y_2 - y_1 & x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 & y_2 - y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Dann ist  $\varphi_{p_1 p_2}$  die gewünschte Isometrie.

Zeige, indem man  $(0, 0)$  und  $(0, l)$  einsetzt.

**Aufgabe (1b).** Analog zu a).

Sei  $X = (S^2, d_s)$ . Gesucht  $\psi_{p_1 p_2} : S^2 \rightarrow S^2$  eine Isometrie mit:

$$\psi_{p_1 p_2} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = p_1 \quad \psi_{p_1 p_2} \left( \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right) = p_2 \quad (1.1)$$

wobei

$$a = \cos(d_s(p_1, p_2)) = \langle p_1, p_2 \rangle$$

$$b = \sin(d_s(p_1, p_2)) = \|p_1 \times p_2\|$$

*Bemerkung:*  $d_s(p, q) = \cos^{-1} \langle p, q \rangle$ .

Seien  $p_1, p_2 \in S^2$  wähle:

$$\psi_{p_1 p_2} \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) := x \cdot p_1 + \frac{y}{b}(p_2 - ap_1) + \frac{z}{b}(p_1 \times p_2)$$

Damit gilt wie gefordert:

$$\psi_{p_1 p_2} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = p_1$$

$$\psi_{p_1 p_2} \left( \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right) = p_2$$

*Nachrechnen!*

eine Isometrie von  $\mathbb{R}^3$  nach  $\mathbb{R}^3$ , die den Ursprung fest lässt, erzeugt eine Isometrie auf  $S = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid d_e(0, p) = 1\}$  mit der euklidischen Metrik  $d_e$ .

**Zu zeigen:**  $\psi_{p_1 p_2}$  ist lineare Isometrie auf  $\mathbb{R}^3$ .

Es reicht zu zeigen, dass  $\{p_1, \frac{1}{b}(p_2 - ap_1), \frac{1}{b}(p_1 \times p_2)\}$  eine Orthonormalbasis ist.

Hier sind die Eigenschaften der ONB über die Skalarprodukte  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  nachzurechnen!

Speziell:

$\langle \frac{1}{b}(p_2 - ap_1), \frac{1}{b}(p_1 \times p_2) \rangle = 0$ , weil lineare Kombinationen von  $p_1, p_2$  immer orthogonal zu  $p_1 \times p_2$  stehen.

Für  $p, q \in S^2$  ist

$$\begin{aligned} d_e(p, q) &= \sqrt{\langle p - q, p - q \rangle} = \sqrt{\langle p, p \rangle - 2\langle p, q \rangle + \langle q, q \rangle} \\ &= \sqrt{2 - 2\langle p, q \rangle} \end{aligned}$$

und  $d_s(p, q) = \cos^{-1}(\langle p, q \rangle) = \cos^{-1}(1 - \frac{1}{2}d_e(p, q)^2)$ .

Sei  $f(x) = \cos^{-1}(1 - \frac{1}{2}x^2)$ . Dann ist  $d_s(p, q) = f(d_e(p, q))$ .

### 1.3 2017-11-10 - Übungsblatt 3

**Aufgabe** (1). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Zu zeigen: Die Menge  $\mathcal{O}$  aller  $d$ -offenen<sup>1</sup> Teilmengen von  $X$  ist Topologie. Wir zeigen die Eigenschaften einer Topologie.

1.  $\emptyset \in \mathcal{O}, X \in \mathcal{O}$  ✓

2. Zu zeigen: beliebige Vereinigungen von  $d$ -offenen Mengen sind wieder  $d$ -offen.

Sei  $\{A_i\}_{i \in I}$  eine Familie von  $d$ -offenen Mengen. Zu zeigen:  $A := \bigcup_{i \in I} A_i$  ist  $d$ -offen.

**Beweis:** Sei  $x \in A$  beliebig. Dann  $\exists i \in I$  mit  $x \in A_i$ . Da  $A_i$   $d$ -offen ist, gibt es

<sup>1</sup>  $d$ -offen:  $U \subset X$  heißt  $d$ -offen, falls  $\forall x \in U \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U$ .

## 1 Übungen

ein  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(x) \subseteq A_i \subseteq A$ .

Damit ist  $A$   $d$ -offen.

3. Zu zeigen: endliche Durchschnitte  $d$ -offener Mengen sind wieder  $d$ -offen.<sup>2</sup>

Seien  $A, B$   $d$ -offen. Zu zeigen:  $A \cap B$  ist wieder  $d$ -offen.

Sei  $x \in A \cap B$ . Da  $A$  und  $B$   $d$ -offen sind, gibt es  $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ , sodass  $B_\varepsilon(x) \subseteq A$  und  $B_{\varepsilon'}(x) \subseteq B$ . Wähle  $\varepsilon'' = \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}$ . Dann ist  $B_{\varepsilon''}(x) = B_\varepsilon(x) \cap B_{\varepsilon'}(x) \subseteq A \cap B$  und  $A \cap B$  ist  $d$ -offen.

**Aufgabe (2).** Seien  $X, Y_1, Y_2$  topologische Räume, seien

$$p_i : Y_1 \times Y_2 \rightarrow Y_i$$

$$(y_1, y_2) \mapsto y_i \quad (\text{für } i = 1, 2).$$

1. Zu zeigen:  $f$  ist stetig  $\Leftrightarrow f_1 := p_1 \circ f, f_2 := p_2 \circ f$  stetig.

**Beweis:**

- $\Rightarrow$ . Sei  $f$  stetig. Zu zeigen (oBdA):  $f_1$  ist stetig, i.e. die Urbilder offener Mengen sind wieder offen.

Sei  $U \subseteq Y_1$ . Zu zeigen:  $f_1^{-1}(U)$  offen.

Es gilt<sup>3</sup>:

$$f_1^{-1}(U) = f^{-1}(p_1^{-1}(U)) = f^{-1}(U \times Y_2).$$

Diese Menge ist offen, da  $f$  stetig ist.

- $\Leftarrow$ . Seien  $f_1, f_2$  stetig. Zu zeigen:  $f$  ist stetig. Wir zeigen wieder, dass die Urbilder offener Mengen wieder offen sind.

Sei  $U \subseteq Y_1 \times Y_2$  offen. Zu zeigen:  $f^{-1}(U)$  ist wieder offen.

Sei  $x \in f^{-1}(U)$ . Zu zeigen: Es gibt eine offene Menge  $U' \subseteq f^{-1}(U)$  sodass  $x \in U'$ .

Es ist  $f(x) \in U$ . Da  $U$  offen ist in  $Y_1 \times Y_2$  gibt es offene  $V_1 \subseteq Y_1, V_2 \subseteq Y_2$ , sodass  $f(x) \in V_1 \times V_2 \subseteq U$ .

Jetzt sei  $U_1 := f_1^{-1}(V_1), U_2 := f_2^{-1}(V_2)$ . Da  $f_1, f_2$  stetig sind, sind  $U_1$  und  $U_2$  offen, also auch  $U_1 \cap U_2 =: U'$  offen.

Da  $f(x) \in V_1 \times V_2$ , ist  $f_1(x) = p_1(f(x)) \in V_1, f_2(x) = p_2(f(x)) \in V_2$ , also  $x \in U_1 \cap U_2 = U'$ .

---

<sup>2</sup> Es ist immer nur der Schnitt zweier Mengen zu zeigen, da  $A_1 \cap \dots \cap A_n = (((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \dots)$ . Also ist sukzessive der gesamte Schnitt offen.

<sup>3</sup>  $p_1^{-1}(U) = U \times Y_2$



2. Sind  $p_1, p_2$  immer offen?<sup>4</sup>

Ja — sei  $U \subseteq Y_1 \times Y_2$  offen. Dann ist

$$U = \bigcup \{V_1 \times V_2 : V_1 \subseteq Y_1 \text{ offen}, V_2 \subseteq Y_2 \text{ offen}, V_1 \times V_2 \subseteq U\}.$$

Dann ist  $p_1(U) = \bigcup \{V_1 : \text{analog zu } U, V_2 \neq \emptyset\}$  eine Vereinigung offener Mengen, also wieder offen —  $p_2$  analog.

3. Sind  $p_1, p_2$  immer abgeschlossen?

Nein — sei

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 1\}.$$

Das ist eine klassische Hyperbel.  $M$  ist abgeschlossen, aber  $p_1(M) = \mathbb{R} \setminus 0$  nicht, auch nicht  $p_2(M) = \mathbb{R} \setminus 0$ .

**Aufgabe (3).** Seien  $X, Y$  Hausdorffräume,  $f, g : X \rightarrow Y$  stetig. Zu zeigen:  $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$  ist abgeschlossen.

Da  $Y$  Hausdorffraum ist

$$\Delta_y := \{(y, y) : y \in Y\}$$

in  $Y^2$  abgeschlossen. (★)

*Beweis (★).* Zu zeigen:  $\{(y, y') \in Y^2 : y \neq y'\} =: \Delta_y^c$  ist offen.

Sei  $(y, y') \in \Delta_y^c$ . Da  $Y$  hausdorffsch ist, gibt es offene Räume  $U_y$  und  $U_{y'}$ , sodass  $y \in U_y$ ,  $y' \in U_{y'}$ ,  $U_y \cap U_{y'} = \emptyset$ . Dann ist  $(y, y') \in U_y \times U_{y'} \subseteq \Delta_y^c$ .

Die Funktion

$$\begin{aligned} h : X &\rightarrow Y, \\ x &\mapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

ist stetig, denn  $p_1 \circ h = f$  und  $p_2 \circ h = g$  sind stetig nach Voraussetzung, also können wir den ersten Teil der Aufgabe 2 anwenden.

Da  $\Delta_y$  abgeschlossen ist, ist  $h^{-1}(\Delta_y) = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$  ebenfalls abgeschlossen.

---

<sup>4</sup> **Offene + geschlossene Abbildungen:**  $f : X \rightarrow Y$  heißt *offen*, wenn für alle offenen  $U \subseteq X$  auch  $f(U)$  offen ist;  $f : X \rightarrow Y$  heißt *abgeschlossen*, wenn für alle abgeschlossenen  $U \subseteq X$  auch  $f(U)$  abgeschlossen ist.

**Aufgabe (4).** Sei  $X$  topologischer Raum und  $\sim$  Äquivalenzrelation auf  $X$ . Die kanonische Abbildung  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  sei offen.

1. Zu zeigen: Falls  $X$  eine abzählbare Basis hat, dann auch  $X/\sim$ .

Sei  $B$  eine beliebige Basis von  $X$ . Sei  $U \in X/\sim$  offen. Dann ist  $\pi^{-1}(U)$  nach Definition der Quotiententopologie offen, also existiert  $A \subseteq B$  mit  $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{M \in A} M$ . Dann ist

$$U = \pi(\pi^{-1}(U)) = \pi\left(\bigcup_{M \in A} M\right) = \bigcup_{M \in A} \pi(M).$$

Damit ist  $\pi(B) := \{\pi(M) : M \in B\}$  eine Basis von  $X/\sim$  und wenn  $B$  abzählbar ist, so ist auch  $\pi(B)$  abzählbar.

2. Zu zeigen: Ist  $A := \{(x, y) \in X^2 : x \sim y\}$  abgeschlossen, so ist  $X/\sim$  hausdorffsch.

**Beweis:** Sei  $A$  abgeschlossen. Seien  $p_1, p_2 \in X/\sim, p_1 \neq p_2$ . Wir wollen zeigen, dass  $p_1$  und  $p_2$  durch offene Mengen getrennt werden können.

Seien  $x_1 \in \pi^{-1}(p_1), x_2 \in \pi^{-1}(p_2)$  ( $x_1$  und  $x_2$  existieren, weil die kanonische Abbildung surjektiv ist). Da  $[x_1]_\sim = p_1 \neq p_2 = [x_2]_\sim$  ist  $x_1 \not\sim x_2$ , also  $(x_1, x_2) \in A^c$ .

Da  $A^c$  in der Produkttopologie auf  $X^2$  offen ist, gibt es  $U_1, U_2 \subseteq X$  offen, sodass  $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subseteq A^c$ .

Sei nun  $V_1 = \pi(U_1), V_2 = \pi(U_2)$ . Es gilt  $p_1 \in V_1, p_2 \in V_2$ .  $V_1$  und  $V_2$  sind offen, da die kanonische Abbildung nach Voraussetzung offen ist.

Es bleibt zu zeigen, dass  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Sei  $q_1 \in V_1, q_2 \in V_2, x_1 \in q_1, x_2 \in q_2$ . Dann ist  $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subseteq A^c$ , also ist  $x_1 \not\sim x_2$  und demnach  $q_1 = [x_1]_\sim \neq [x_2]_\sim = q_2$ .

## 1.4 2017-11-17 - Übungsblatt 4

**Aufgabe (1).** Sei  $A \subseteq X$  zusammenhängend. Zu zeigen:  $\bar{A}$  ist abgeschlossen.

Sei  $B \subseteq \bar{A}$  offen und abgeschlossen in  $\bar{A}$ .

OBdA sei  $B \cap A \neq \emptyset$ , ansonsten setze  $B' = \bar{A} \setminus B$ . Da  $B \cap A$  offen, abgeschlossen und nichtleer in  $A$  ist, folgt aus  $A$  zusammenhängend, dass  $B \cap A = A$  also  $A \subseteq B$ .

Damit ist  $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$  und da  $B$  abgeschlossen ist, ist  $\bar{A} \subseteq B$

und  $B \subseteq \bar{A} \Rightarrow \bar{A} = B$

Folglich ist auch  $\bar{A}$  abgeschlossen.

**Aufgabe (1b).** Seien  $A, B \subseteq X$  zusammenhängend und  $A \cap B = \emptyset$ .

Zu zeigen:  $A \cup B$  zusammenhängend. **Beweis:** Sei  $C \subseteq A \cup B$  nichtleer, offen und abgeschlossen in  $A \cup B$ .

Sei  $x \in C$ , dann ist  $x \in A$  (oBdA, sonst wähle  $B$ )

Da  $C \cap A$  abgeschlossen, offen und nichtleer in  $A$  und da  $A$  zusammenhängend, ist  $C \cap A = A$  also  $A \subseteq C$ . Damit ist  $\emptyset \neq A \cap B \subseteq C \cap B$ . Weiter ist  $C \cap B$  abgeschlossen, offen und nichtleer in  $B$ . Da  $B$  zusammenhängend ist, ist  $C \cap B = B$  und  $B \subseteq C$ . Damit ist  $C \subseteq A \cup B \subseteq C$ .

Also  $C = A \cup B \Rightarrow A \cup B$  ist zusammenhängend, da  $A \cup B$  und  $\emptyset$  die einzigen gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen sind.

**Aufgabe (1c).** Sei  $\{A_i\}_{i \in I}$  eine zusammenhängende Familie (Familie zusammenhängender Mengen), sodass  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ .

Zu zeigen:  $A := \bigcup_{i \in I} A_i$  ist zusammenhängend.

Sei  $B \subseteq A$  offen, abgeschlossen und nichtleer. Sei weiter  $x \in B$ . Dann existiert  $i \in I$  mit  $x \in A_i$ . Sei  $y \in A$  beliebig.

**Behauptung:**  $y \in B$  **Beweis:** Sei  $j \in I$ , sodass  $y \in A_j$  nach Aufgabenteil b) ist dann  $A_j \cup A_i$  zusammenhängend. Damit ist  $B \cap (A_i \cup A_j) = A_j \cup A_i$ , weil alle  $A_i$  zusammenhängend. Weiter ist  $y \in A_i \cup A_j$  und  $y \in B$ .

Daraus folgt:  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A \Rightarrow A = B$ .

**Aufgabe (2a).** Zu zeigen:  $B$  ist die Basis einer Topologie  $O_p$  auf  $P$ .

1. Zeige:  $P \in O_p$ , wobei  $O_p = \{\bigcup_{U \in A} U \mid A \subseteq B\}$ .

$P = U_\emptyset(0, 0, \dots) \in B$  also  $P \in O_p$

2. Für  $V_1, V_2 \in O_p$  gilt  $V_1 \cap V_2 \in O_p$ .

Sei  $V_1 = \bigcup_{U \in A_1} U$ ,  $V_2 = \bigcup_{U \in A_2} U$ .

**Behauptung:** Für alle  $U, U' \in B : U \cap U' \in B$  oder  $U \cap U' = \emptyset$ .

Dann ist

$$V_1 \cap V_2 = \bigcup_{U \in A_1} \bigcup_{U' \in A_2} (U \cap U') \text{ also } V_1 \cap V_2 \in O_p$$

**Beweis:** Seien  $U = U_\mu(a) \in B$ ,  $U' = U_{\mu'}(a') \in B$ . Falls  $U \cap U' \neq \emptyset$  existiert  $a'' \in U \cap U'$ . Dann gilt  $U = U_\mu(a'')$ ,  $U' = U_{\mu'}(a'')$ . Also:

$$U \cap U' = U_{\mu \cup \mu'}(a'')$$

3.  $O_p$  ist bezüglich Vereinigung abgeschlossen, denn  $O_p$  besteht aus Vereinigungen

von Elementen aus  $B$ .

Insgesamt folgt damit:  $O_p$  ist Topologie!

**Aufgabe (2b).** Ist  $(P, O_p)$  zusammenhängend, unzusammenhängend oder total unzusammenhängend?

**Behauptung:**  $(P, O_p)$  ist total unzusammenhängend!

**Beweis:** Seien  $a, b \in P$ . Zeige: Es gibt offene, abgeschlossene Mengen  $U_a, U_b$  mit  $U_a \cup U_b = P, U_a \cap U_b = \emptyset$  und weiter  $a \in U_a, b \in U_b$ .

Seien  $a \neq b \Rightarrow \exists i \in \mathbb{N}$  sodass  $a_i \neq b_i$ . Setze  $U_a = U_{\{i\}}(a)$  und  $U_b = U_{\{i\}}(b)$ .

$U_a$  und  $U_b$  sind in  $O_p$  offen. Nach Wahl von  $i$  ist  $U_a \cap U_b = \emptyset$  und  $U_a \cup U_b = P$ .

Angenommen es gibt ein zusammenhängendes  $V \subseteq P$  mit  $|V| \geq 2$ .

Wähle  $a, b \in V$  mit  $a \neq b$  und konstruiere  $U_a, U_b$  wie oben. Dann ist  $V = (V \cap U_a) \cup (V \cap U_b)$  eine offene disjunkte Zerlegung von  $V$ . **Widerspruch!**

**Aufgabe (3a).** Es reicht zu zeigen, dass alle  $p_i$  stetig sind.

" $\Rightarrow$ ": Die Mengen  $p_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

$$p_i^{-1}(\{0, 1\}) = P$$

$$p_i^{-1}(\{1\}) = U_{\{i\}}(1, \dots)$$

$$p_i^{-1}(\{0\}) = U_{\{i\}}(0, \dots)$$

sind alle offen.

" $\Leftarrow$ ": Sei  $U \subseteq P$  offen. Dann ist  $U = \bigcup_{U' \in A} U'$  für  $A \subseteq B$  also  $f^{-1}(U) = \bigcup_{U' \in A} f^{-1}(U')$ .

Fallse alle  $f^{-1}(U')$  offen sind, dann auch  $f^{-1}(U)$ . Damit können wir uns für  $U$  auf Basiselemente beschränken. Sei also  $U = U_\mu(a) \in B$ .

Sei weiter  $M = \{i_1, \dots, i_n\}$ . Dann ist:

$$U = U_{i_1}(a) \cap \dots \cap U_{i_n}(a) = p_i^{-1}(\{a_{i_1}\}) \cap \dots \cap p_i^{-1}(\{a_{i_n}\})$$

Also ist:  $f^{-1}(U) = f_i^{-1}(\{a_{i_1}\}) \cap \dots \cap f_i^{-1}(\{a_{i_n}\})$ .

Diese Menge ist endlicher Schnitt offener Mengen, weil alle  $f_i$  stetig sind.

**Aufgabe (3b).** Zu zeigen:  $f : X \rightarrow (P, \mathcal{P}(P))$  ist nicht genau dann stetig, wenn alle  $f_i : X \rightarrow \{0, 1\}$  stetig sind.

**Beispiel:**  $X = (P, O_P), f : (P, O_P) \rightarrow (P, \mathcal{P}(P)), a \mapsto a$ .

Sei  $A \in \mathcal{P}(P) \setminus \mathcal{O}_p$  beliebig, dann ist  $A$  offen in  $\mathcal{P}(P)$  aber  $f^{-1}(A) = A$  ist in  $(P, \mathcal{O}_P)$  nicht offen, also ist  $f$  nicht stetig.

## 1.5 2017-11-24 - Übungsblatt 5

**Aufgabe (1a).** Sei  $Y \subseteq \mathcal{R}^n$  heißt konvex, falls für  $p, q \in Y$  auch die Verbindungsgerade  $\bar{pq}$  in  $Y$ .

Zeigen sie: Jede konvexe Teilmenge von  $\mathcal{R}^n$  ist zusammenhängend.

**Behauptung:**  $Y \text{ konvex} \Rightarrow Y \text{ wegzusammenhängend}$ ,

Seien  $p, q \in Y$ , Sei  $c : [0, 1] \rightarrow Y, t \mapsto (1-t)p + tq$  Die Verbindungsstrecke. Dann ist  $c(0) = p, c(1) = q, c([0, 1]) \subseteq Y$  wegen Konvexität.

Da  $p, q$  bel. waren, ist  $Y$  wegzusammenhängend.

**Aufgabe (2).** vgl. Aufgabentext..

Zu zeigen:  $X$  ist kompakt  $\iff$  für alle Familien  $(A_i)_{i \in I}$  **abgeschlossen** Teilmengen von  $X$  mit endlicher Schnitteigenschaft gilt:  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ .

Sei  $(A_i)_{i \in I}$ , Familie und  $\forall i \in I$  sei  $B_i := X \setminus A_i = A_i^C$ .

Dann gelten:  $(A_i)_{i \in I}$  ist Familie von offenen Mengen  $\iff (B_i)_{i \in I}$  besteht aus abg. Mengen.

$$\bigcap_{i \in M} A_i \neq \emptyset \iff X \setminus \bigcap_{i \in M} A_i \neq X \setminus \emptyset \iff \bigcup_{i \in M} (X \setminus A_i) \neq X \iff (B_i)_{i \in M}$$

ist keine Überdeckung von  $X$ . **Beweis:** Alle Familien abgeschlossener Teilmengen von  $X$  mit endl. Schnitteigenschaft haben nichtleeren Schnitt.  $\iff$  Alle Familien mit abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  mit leerem Schnitt besitzen eine unendliche Teilfamilie mit leerem Schnitt.

$\iff$  Alle Familien offener Teilmengen von  $X$ , die  $X$  überdecken, besitzen eine endliche Teilfamilie, die  $X$  überdeckt.  $\iff X$  ist kompakt

**Aufgabe (3).** Sei  $X$  kompakt,  $f : X \rightarrow \mathcal{R}$  stetig.

Zeigen Sie:  $f$  nimmt auf  $\mathcal{R}$  ein endliches Minimum und endliches Maximum an.

**Beweis:** Da stetige Bilder kompakter Mengen wieder kompakt sind, ist  $f(X)$  kompakt in  $\mathcal{R}$ .

Nach dem Satz von Heine-Borel sind die kompakten Mengen in  $\mathcal{R}$  genau die abgeschlossenen, beschränkten Mengen. Damit ist  $f(X)$  also abgeschlossen und be-

schränkt, außerdem nichtleer.

Zeige ausführlich (statt mit Ana I):  $f(X)$  hat Maximum, Minimum.

Sei  $s := \sup f(X)$ . Da  $f(X)$  nichtleer ist, ist  $s > -\infty$ .

Da  $f(X)$  nach oben beschränkt ist, ist  $s < \infty$ . Für alle  $n \in \mathcal{N}$  gibt es ein  $x_n \in f(X)$

sodass  $s - \frac{1}{n} < x_n \leq s$ , weil  $s - \frac{1}{n}$  keine obere Schranke von  $f(X)$  ist.

Damit ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$ . Damit ist  $s \in f(X)$  und somit Maximum von  $f$ .

**Aufgabe (4a).** Sind Mannigfaltigkeiten stückweise wegzusammenhängend?

**Behauptung:** Ja!

**Beweis:** Sei  $x \in M$ ,  $M$  sei  $n - \dim$  Mannigfaltigkeit.

Dann gibt es eine Karte  $(\varphi, U)$  von  $M$ ,  $\varphi : U \rightarrow \mathcal{R}^n$ ,  $x \in U$ .

Damit ist  $\varphi(x)$  innerer Punkt von  $\varphi(U)$ , also gibt es einen offenen Ball

$B := B_\varepsilon(\varphi(x)) \subseteq \varphi(U)$ .

$B$  ist wegzusammenhängend, also auch  $\varphi^{-1}(B) \subseteq U$  wegzusammenhängend und  $\varphi^{-1}(B)$  ist **offene** Umgebung von  $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$ , wie gesucht.

**Aufgabe (4b).** Sind zusammenhängende Mannigfaltigkeiten immer wegzusammenhängend?

**Behauptung:** Ja!

**Beweis:** Für alle  $x \in X$  ist  $W(x)$  offen.

Zu zeigen: Für alle  $y \in W(x)$  gibt es eine in  $X$  offene Umgebung von  $y$  in  $W(x)$ .

Sei  $y \in W(x)$ . Dann ist  $W(x) = W(y)$ . Sei  $U$  eine offene, wegzusammenhängende Umgebung von  $y$ .

Dann ist  $U \subseteq W(y) = W(x)$  die gesuchte Umgebung.

Angenommen,  $X$  ist nicht wegzusammenhängend. Dann gibt es  $x, y \in X$  mit  $x \in W(x)$ ,  $y \notin W(x)$ .

Nun ist  $W(x)$  offen (siehe oben), und  $W(x)$  ist abgeschlossen, denn

$$X \setminus W(x) = \bigcup_{z \notin W(x)} W(z)$$

ist auch offen. Damit ist  $W(x)$  Zeuge, dass  $X$  nicht zusammenhängend ist. Damit folgt die Behauptung.

## 1.6 2017-12-01 - Übungsblatt 6

**Aufgabe (1a).** Zu zeigen: **Stereographische Projektion** an  $p_+$  und  $p_-$  ist genau die Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$ .

$$\psi_{\pm} : S^2 \setminus \{p_{\pm}\} \rightarrow \mathcal{R}^{\infty}, (x, y, z) \mapsto \left( \frac{x}{1 \pm z}, \frac{y}{1 \pm z} \right).$$

$$\text{zz: } \psi_+ \circ \varphi_+ = id.$$

$$\text{Nachrechnen...: } \psi_+(\varphi_+(x, y)) = \dots = (x, y)$$

$$\text{zz: } \varphi_+ \circ \psi_+ = id.$$

$$\text{: Nachrechnen...: } \varphi_+(\psi_+(x, y, z)) = \dots = (x, y, z)$$

**Aufgabe (1b).** Zeige: Der Kartenwechsel  $\psi_+ \circ \psi_-^{-1} = \varphi_+^{-1} \circ \varphi_-$  ist  $C^{\infty}$ .

Sei  $f : \psi_-(S^2 \setminus \{p_+, p_-\}) \rightarrow \psi_+(S^2 \setminus \{p_+, p_-\})$ .

$$f(x, y) = \dots = \frac{1}{x^2 + y^2}(x, y) \text{ ist } C^{\infty}.$$

Seien dafür:  $g(x, y) = \left( \frac{p(x, y)}{(x^2 + y^2)^n}, \frac{q(x, y)}{(x^2 + y^2)^n} \right)$  für  $p, q \in \mathbb{R}[x, y]$ .

**Behauptung:** Es gibt  $N \in \mathbb{N}, P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$  sodass:

$$g_x(x, y) = \left( \frac{P(x, y)}{(x^2 + y^2)^n}, \frac{Q(x, y)}{(x^2 + y^2)^n} \right)$$

Mit dieser Behauptung folgt, dass alle partiellen Ableitungen von  $f$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  existieren.

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} g(x, y) &= ((x^2 + y^2)p_x(x, y) - 2xp(x, y), \\ (x^2 + y^2)q_x(x, y) - 2xq(x, y)) &\cdot \frac{1}{(x^2 + y^2)^n + 1} = Q(x, y) \end{aligned}$$

**Aufgabe (2a).** Der Tangentialraum  $T_p F$  von  $F$  in  $p$  sei definiert als  $T_p F := \text{Bild}(d\varphi(\varphi^{-1}(p)))$ , wobei  $\varphi : V \rightarrow F, V \subseteq \mathbb{R}^2$ , eine Parametrisierung von  $F$  um den Punkt  $p \in F$  ist.

Zeige: Diese Definition ist unabhängig von  $\varphi$ .

Ansatz: Wähle zwei Parametrisierungen und zeige, dass das Bild das selbe ist.

**Beweis:** Seien  $\varphi, \psi$  Parametrisierungen von  $F$  um  $p$ . Sei  $q = \varphi^{-1}(p), r = \psi^{-1}(p)$ ,

Zu Zeigen:

$$\text{Bild}(d\varphi(q)) = \text{Bild}(d\psi(r))$$

## 1 Übungen

Es gilt  $\psi = \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)$  wobei  $f := (\varphi^{-1} \circ \psi)$ .

also:  $d\psi(r) = d(\varphi \circ f(r)) = d\varphi(f(r)) \cdot df(r) = d\varphi(q) \cdot df(r)$ , also:

$$\text{Bild}(d\psi(r)) \subseteq \text{Bild}(d\varphi(q)).$$

Durch Vertauschung von  $\psi, \varphi$  erhalten wir auch  $\text{Bild}(d\varphi(q)) \subseteq \text{Bild}(d\psi(r))$  also:

$$\text{Bild}(d\varphi(q)) = \text{Bild}(d\psi(r))$$

**Aufgabe (2b).** Vgl. Aufgabenstellung...

**Beweis:**

Sei  $p = (p_x, p_y, p_z)$ . Sei oBdA  $p_z > 0$ .

Sei  $\varphi : B_1(0) \rightarrow S^2, (x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$ .

Dann ist:

$$d\varphi(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} (p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-p_x}{p_z} & \frac{-p_y}{p_z} \end{pmatrix}$$

Also:

$$T_p S^2 = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-p_x}{p_z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-p_y}{p_z} \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} p_z \\ 0 \\ -p_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ p_z \\ -p_y \end{pmatrix} \right]$$

Jetzt ist:  $p \cdot t_1 = p_x p_z - p_z p_x = 0$  und  $p \cdot t_2 = p_y p_z - p_z p_y = 0$  also  $\{p\} \perp \{t_1, t_2\}$  und  $[p] \perp [t_1, t_2] = T_p S$ , also auch  $T_p S = [p]^\perp$ .

**Aufgabe (3a).** Sei

$$U_i := \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \in P^n \mathbb{R} \mid x_i \neq 0\}$$

und

$$\varphi_i([x_1, \dots, x_n]) = \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$$

**Zeige:**  $(U_i, \varphi_i)$  bilden einen differenzierbaren Atlas von  $P^n \mathbb{R}$ .

**Behauptung:** Es gilt:

$$\varphi_i^{-1}(u_1, \dots, u_n) = [u_1, \dots, u_{i-1}, 1, u_i, \dots, u_n]$$



**Zeige:**  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  ist differenzierbar für  $i, j = 1, \dots, n+1, i < j$ .

$$\begin{aligned}\varphi_i(\varphi_j^{-1}(u_1, \dots, u_n)) &= \varphi_i([u_1, \dots, u_{i-1}, 1, u_i, \dots, u_n]) \\ &= \left( \frac{u_1}{u_i}, \dots, \frac{u_{i-1}}{u_i}, \frac{u_{i+1}}{u_i}, \dots, \frac{u_{j-1}}{u_i}, \frac{1}{u_i}, \frac{u_j}{u_i}, \dots, \frac{u_n}{u_i} \right)\end{aligned}$$

ist  $C^\infty$  von  $\{u \in \mathbb{R}^n : u_i \neq 0\}$  nach  $\{u \in \mathbb{R}^n : u_{j-1} \neq 0\}$ .

Noch zz:  $U_1 \cup \dots \cup U_{n+1} = P^n \mathbb{R}$ .

Für  $[x_1, \dots, x_{n+1}] \in P^n \mathbb{R}$  gibt es mindestens ein  $i$  mit  $x_i \neq 0$  damit ist  $[x_1, \dots, x_{n+1}]$  in  $U_i$ . Damit gilt  $U_1 \cup \dots \cup U_{n+1} = P^n \mathbb{R}$ .

**Aufgabe (3b). Behauptung:**  $P^n \mathbb{R}$  ist hausdorffsch mit abzählbarer Basis.

Wir wissen aus der VL, dass  $P^n \mathbb{R} = S^n / \sim$  wobei  $x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$ .

(Vgl. Abbildung).

Seien  $\pm x, \pm y \in S^2 / \sim$ .

Seien  $U_x := B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(-x)$  und

$U_y := B_\varepsilon(y) \cup B_\varepsilon(-y)$ .

Zu jedem  $z \in U_x$  ist auch  $-z \in U_x$ .

Zu jedem  $z \in U_y$  ist auch  $-z \in U_y$ .

Also ist  $\pi^{-1}(\pi(U_x)) = U_x$  also  $\pi(U_x)$  auch offen in  $S^n / \sim \cong P^n \mathbb{R}$ .

Da  $U_x, U_y$  disjunkt gilt:  $\pi(U_x) \cap \pi(U_y) = \emptyset$ . Also sind  $\pi(U_y), \pi(U_x)$  disjunkte offene Umgebungen von  $\pm x, \pm y$  und damit ist  $S^n / \sim = P^n \mathbb{R}$  hausdorffsch.

Zur abzählbaren Basis:

Seien  $B_1, \dots, B_{n+1}$  abzählbare Basis von  $U_1, \dots, U_{n+1}$ . Dann ist  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{n+1}$  eine abzählbare Basis von  $P^n \mathbb{R}$  ??? -> Weiß nicht was hier hin sollte

## 1.7 2017-12-08 - Übungsblatt 7

**Abbildungen müssen nachgetragen werden!**

**Aufgabe** (1a). Vgl. Aufgabenstellung.

Zu zeigen:  $S := f^{-1}(0)$  ist reguläre Fläche. Wobei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und für alle Punkte  $p \in S$  gelte  $f'(p) \neq 0$ .

**Beweis:** Sei  $p \in S$ . Dann gilt nach Vor.

$$f'(p) := \left( \frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right) \neq 0$$

Sei oBdA  $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ . Nach dem Satz über implizit definierte Funktion gibt es  $U \subseteq \mathbb{R}^2, V \subseteq \mathbb{R}, g : U \rightarrow V, p \in U \times V$ , sodass gilt  $g(x, y) = z \iff f(x, y, z) = 0 \forall (x, y) \in U, z \in V$ .

$g$  ist stetig differenzierbar. Dann ist  $g$  ein Homöomorphismus von  $U$  auf  $(U \times V) \cap S$ , denn  $\varphi^{-1} : (x, y, z) \rightarrow (x, y)$  ist eine stetige Umkehrabbildung.

Also ist  $\varphi$  Parametrisierung von  $S$  um  $p$ .

$$\varphi : U \rightarrow (U \times V) \cap S, (x, y) \mapsto (x, y, g(x, y))$$

Dann ist  $S$  eine reguläre Fläche. Die Jacobimatrix von  $\varphi$  ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \text{ und hat immer Rang 2.}$$

**Aufgabe** (1b). Benutze hier  $\Delta$  statt des Nabla-Symbols (vorerst).

**Zu Zeigen:**  $T_p S = \text{Kern}(\Delta f(p))$ .

**Beweis:** Sei  $\varphi : U \rightarrow S$  irgendeine Parametrisierung um einen Punkt  $p \in S$ .

Jetzt ist  $f \circ \varphi = 0$ . Ableiten ergibt

$$0 = \partial_q 0 = \partial_q (f \circ \varphi) = \partial_{\varphi(q)} f \cdot \partial_q \varphi = \Delta_p f \cdot \partial_q \varphi.$$

Damit ist  $T_p S = \text{Bild}(\partial_q \varphi) \subseteq \text{Kern}(\Delta_p f)$ .

Da  $\Delta_p f \neq 0$  ist, ist  $\dim \text{Kern} \Delta_p f = 2, \dim T_p S = 2$ .

Also ist  $\text{Kern}(\Delta_p f) = T_p S$ .

**Aufgabe** (2a).  $K_n$  ist ein vollständiger Graph mit  $n$  Ecken, d.h. die Ecken von  $K_n$  sind paarweise durch eine Kante verbunden.

**Zu zeigen:** Für  $n \leq 4$  ist  $K_n$  planar.

Zeige, indem einzelne Einbettungen für alle  $n \leq 4$  gezeichnet werden.

**Aufgabe (2b). Behauptung:** Für  $n \geq 5$  ist  $K_n$  nicht planar.

**Beweis:** Angenommen es gibt eine Einbettung von  $K_n$  in eine Ebene. Betrachte vier Ecken von  $K_n$ :

Eine weitere Ecke von  $K_n$  muss dann in  $a, b, c, d$  liegen, aber man kann sie dann nicht, mit  $A, B, C, D$  verbinden.

**Aufgabe (3).** Sei  $G$  ein Graph mit Ecken  $p_1, \dots, p_n$ .

Für  $i, j = 1, \dots, n$  sei

$$A := ((a_{i,j}))_{i,j=1,\dots,n} \quad a_{i,j} := \begin{cases} 0, & \text{wenn keine Kante } p_i p_j \text{ in } G \\ 1, & \text{wenn Kante } p_i p_j \text{ in } G \text{ existiert} \end{cases}$$

Die Matrix  $A$  heißt Adjazenzmatrix von  $G$ . **Zu zeigen:** Sei  $G = K_n$  dann ist  $n - 1$  der größte Eigenwert von  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{1\text{-Matrix}} - \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}^{\text{Einheitsmatrix}}$$

Die Eigenräume von  $\mathbf{1}_n$  sind:

$$E_0 = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

Jeder Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  mit zugehörigem Eigenvektor  $v$  erfüllt

$\mathbf{1}_n \cdot v = (A + I_n) \cdot v = Av + v = \lambda v + v = (\lambda + 1)v$ , also ist  $\lambda + 1$  EW von  $\mathbf{1}_n$ .

Damit sind die Eigenvektoren von  $A$  höchstens  $-1$  oder  $n - 1$ , und da

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ n-1 \\ \vdots \\ n-1 \end{pmatrix}$$

Ist  $n-1$  der größte EW von  $A$ .

**Aufgabe (3b). Zeige:** Für allgemeines  $G$  sind die Eigenvektoren von  $A$  nicht größer als  $n-1$ .

**Beweis:** Sei  $x = (x_1 \dots x_n)^T$  Eigenvektor von  $G$  mit EW  $\lambda$ .

Sei weiter  $i \in \{1, \dots, n\}$  sodass  $|x_i| \geq |x_j|$  für alle  $j$ .

Sei oBdA  $x_i > 0$ , also  $x_i \geq |x_j|$  für alle  $j$ . Aus  $Ax = \lambda x$  folgt  $(Ax)_i = \lambda x_i$ :

$$\lambda x_i = (Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i \leq (n-1)x_i,$$

Damit folgt  $\lambda \leq n-1$ .

**Aufgabe (4). Zu zeigen:**  $G$  ist Baum  $\iff G$  ist zusammenhängend aber besitzt keinen Kreis.

" $\implies$ ": Sei  $G$  ein Baum. Dann ist  $G$  zusammenhängend.

Angenommen,  $G$  besitzt einen Kreis. Wenn man eine einzige Kante dieses Kreise entfernt, so bleibt der entstehende Graph zusammenhängend., denn jeden verbindenden Pfad in  $G$ , der durch diese Kante geht, können wir um den Kreis umleiten.

**Formaler:** Sei  $p_0 \dots p_n = p_0$  ein Kreis.

Zwischen je zwei Ecken in  $G$  gibt es einen Weg  $q = q_0 \dots q_n = q'$  in  $G$ . Ersetzen wir in diesem Weg jedes Vorkommen von  $p_0 p_{n-1}$  durch  $p_0 p_1 \dots p_{n-1}$  und  $p_{n-1} p_0$  durch  $p_{n-1} \dots p_0$  so finden wir einen Kantenzug in  $G \setminus \{\overline{p_0 p_{n-1}}\}$  der  $q, q'$  verbindet.

Damit ist  $G \setminus \{p_0 p_{n-1}\}$  zusammenhängend, also ist  $G$  kein Baun. Widerspruch!

" $\impliedby$ ": Sei  $G$  zusammenhängend und besitze keinen Kreis.

Angenommen  $G$  ist kein Baum, also dass es eine Kante  $pp'$  gibt, nach deren Entfernung  $G$  noch zusammenhängend ist. Also  $G \setminus \{\overline{pp'}\}$  zusammenhängend.

Dann gibt es einen Weg  $p = p_0 \dots p_n = p'$  in  $G \setminus \{\overline{pp'}\}$ . Damit ist  $p_0, \dots, p_n, p_0$  ein Kreis. Widerspruch.

## 1.8 2017-12-15 - Übungsblatt 8

**Aufgabe (1a).** Sei  $n \geq 3$ , sei  $G$  ein planarer Graph mit  $k(G) \geq n$ , so dass alle Kreise in  $G$  min. Länge  $n$  haben.

**Zu zeigen:**  $k(G) \leq \frac{n}{n-2}(e(G) - 2)$ .

Sei oBdA  $G$  eben. Sei  $K$  die Menge der Kanten von  $G$ , sei  $S$  die Menge der Flächenstücke von  $G$ .

Sei  $W = \{(k, s) \in K \times S : k \text{ liegt auf dem Rand von } s\}$ .

Für alle  $k \in K$  gibt es höchstens zwei  $s \in S$  mit  $(k, s) \in W$ , damit gilt  $|W| \leq 2|K|$ .

Für alle  $s \in S$  gibt es mindestens  $n$  Kanten  $k \in K$ , sodass  $(k, s) \in W$ , denn falls  $s$  beschränkt ist, besteht der äußere Rand von  $s$  aus einem Kreis, der min  $n$  Kanten hat (Vor.). Wenn  $s$  unbeschränkt:

- **Fall 1:**  $G$  ist Baum. Dann ist  $s$  das einzige Flächenstück und alle Kanten berühren  $s$ . ( $k(G) \geq n$ ).
- **Fall 2:**  $G$  ist kein Baum, dann schließt  $s$  andere Flächenstücke ein, der Rand dieser Einschlüsse besteht aus einem oder mehreren Kreisen. Alle  $\geq n$  Kanten dieser Kreise berühren  $s$ .

Also erhalten wir  $|W| \geq n|S|$ . Wir erhalten  $n \cdot s(G) = n|S| \leq |W| \leq 2|K| = 2k(G)$ .

Nach Eulerformel gilt:

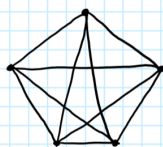
$s(G) = k(G) - e(G) + 2$ , also  $\frac{2}{n}k(G) \geq \frac{n}{n} s(G) = k(G) - e(G) + 2$ .

$$\Rightarrow \frac{2-n}{n}k(G) \geq -e(G) + 2$$

$$\Rightarrow \frac{n-2}{n}k(G) \leq e(G) - 2$$

$$\Rightarrow k(G) \leq \frac{n}{n-2}(e(G) - 2)$$

**Aufgabe (1b).** Vgl. Zeichnungen:



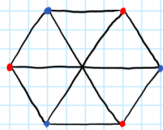
=: G

$$k(G) = 10$$

$$e(G) = 5$$

$$n = 3$$

$$10 > \frac{3}{3-2} \cdot (5-2) \Rightarrow G \text{ ist nicht planar}$$



=: G'

$$k(G') = 9$$

$$e(G') = 6$$

$$n = 4$$

G' enthält keine Dreiecke

$$9 > \frac{4}{4-2} (6-2) \Rightarrow G' \text{ ist nicht planar}$$

**Aufgabe (3).** Für einen platonischen Körper  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  mit Zentrum 0 ist:

$$\text{Sym}(P) := \{f \in O(3) : f(P) = P\}$$

$$\text{Sym}_0(P) := \{f \in SO(3) : f(P) = P\}$$

Sei  $P$  Würfel.

**Zu zeigen:**

$$\bullet \text{Sym}(P) = S_4 \times \{1, -1\}$$

$$\bullet \text{Sym}_0(P) = S_4$$

**Behauptung:**  $|\text{Sym}(P)| \leq 48, |\text{Sym}_0(P)| \leq 24.$

**Beweis:** Sei  $S$  eine Ecke von  $P$  und seien  $F, G, H$  die zu  $E$  benachbarten Ecken. Da  $\varphi$  Ecken von  $P$  auf Ecken von  $P$  abbilden, gibt es nur 8 mögliche Werte von  $\varphi(E)$ . Da  $\varphi$  benachbarte Ecken auf benachbarte Ecken von  $P$  abbildet, sind  $\varphi(G), \varphi(H), \varphi(F)$  in einer von 6 Reihenfolgen die Nachbarn von  $\varphi(E)$ . Jetzt ist aber  $\varphi$  vollständig durch  $\varphi|_{\{E, F, G, H\}}$  bestimmt, da  $E, F, G, H$  ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^3$  ist.

Damit ist  $|\text{Sym}(P)| \leq 6 \cdot 8 = 48.$

$\text{Sym}_0(P)$  ist Untergruppe von  $\text{Sym}(P).$

Nach dem Satz von Lagrange ist  $\frac{|\text{Sym}(P)|}{|\text{Sym}_0(P)|} \in \mathbb{N}(\star).$

$$\text{Da } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Sym}(P), \text{ aber } \det(-I) = (-1)^3 = -1,$$

ist  $I \in \text{Sym}(P) \setminus \text{Sym}_0(P)$ , also ist  $|\text{Sym}(P)| > |\text{Sym}_0(P)|.$

Wegen  $(\star)$  folgt

$$\frac{|Sym(P)|}{|Sym_0(P)|} \geq 2 \Rightarrow |Sym_0(P)| \leq \frac{1}{2}|Sym(P)| \leq 24,$$

Sei  $D$  die Menge der Hauptdiagonalen von  $P$ . Dann ist

$$h : Sym_0(P) \rightarrow B_{ij}(D) \cong S_4, h(\varphi) := (d \mapsto \varphi(d))$$

Gruppenhomomorphismus.

**Behauptung:**  $h$  ist surjektiv.

Da  $B_{ij}(D)$  von Transpositionen erzeugt wird reicht es zu zeigen, dass  $Bild(h)$  jede Transposition enthält. Sei also  $(d_1, d_2)$  eine beliebige Transposition in  $B_{ij}(D)$ .

Gesucht:  $\varphi \in Sym_0(P)$  mit  $h(\varphi) = (d_1, d_2)$ ,

Wähle  $\varphi$  als Rotation um  $180^\circ$  um die gestrichelte Achse (vgl. Abb.), dann ist  $\varphi(P) = P$ ,  $\det(\varphi) = 1$ ,  $\varphi(RL) = BL$ ,  $\varphi(BL) = RL$ ,  $\varphi(GL) = GL$ ,  $\varphi(YL) = YL$ .  
Wobei  $GL$  = Grüne Linie, etc.

Damit ist  $h(\varphi) = (d_1, d_2)$ ,

Wir haben einen surjektiven Hom.  $h : Sym_0(P) \rightarrow B_{ij}(D)$ . Aus  $|Sym_0(P)| \leq 24 = |S_4| = |B_{ij}(D)|$  folgt sofort, dass  $|Sym_0(P)| = |B_{ij}(D)|$  ist und dass  $h$  bijektiv ist:

$$Sym_0(P) \cong B_{ij}(D) \cong S_4,$$

**Behauptung:**  $Sym(P) \cong Sym_0(P) \times \{-1, 1\}$ ,

**Beweis:** Seien:

$$g : Sym(P) \rightarrow Sym_0(P) \times \{-1, 1\}, \psi \mapsto (\det(\psi) \cdot \psi, \det(\psi))$$

$$k : Sym_0(P) \times \{-1, 1\} \rightarrow Sym(P), (\varphi, \varepsilon) \mapsto \varepsilon\varphi,$$

**Behauptung:**  $k, g$  sind zueinander Invers.

**Bew:**

$$g(k(\varphi, \varepsilon)) = g(\varepsilon\varphi) = (\varepsilon^3 \cdot \varepsilon\varphi, \varepsilon) = (\varphi, \varepsilon)$$

$$k(g(\psi)) = k(\det(\psi) \cdot \psi, \det(\psi)) = \det(\psi)^2 \cdot \psi = \psi$$

**Behauptung:**  $k$  ist Hom.

**Beweis:**

$$k((\varphi, \varepsilon) \cdot (\varphi', \varepsilon')) = k(\varphi, \varepsilon) \cdot k(\varphi', \varepsilon'),$$

Damit folgt Behauptung. Also ist

$$\operatorname{Sym}(P) \cong \operatorname{Sym}_0(P) \times \{-1, 1\} \cong S_4 \times \{-1, 1\},$$