Mitschrieb Elementare Geometrie

Jens Ochsenmeier

25. November 2017

1 Übungen

1.1 2017-10-27

Aufgabe (1). *Zeigen Sie:* $(\mathbb{R}^2, d)$ *mit* $d(x,y) = |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)|$ *ist pseudometrischer Raum.*

- **Positivität**. Zu zeigen: $\forall x \in \mathbb{R}^2 : d(x,x) = 0$.
  $d(x,x) = |(x_1 - x_1) + (x_2 - x_2)| = |0| = 0$.
- **Symmetrie**. Zu zeigen: $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 : d(x,y) = d(y,x)$.
  $d(x,y) = |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)| = |(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2)| = d(y,x)$.
- **Dreiecksungleichung**. Zu zeigen: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2 : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.
  $d(x,y) + d(y,z) = |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)| + |(y_1 - z_1) + (y_2 - z_2)| \geq |(x_1 - z_1) + (x_2 - z_2)| = d(x,z)$.

Aufgabe (2). Gegeben:

- $||x||_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$,
- $||x||_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$,
- $||x||_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

Wir zeigen, dass alle drei Normen sind. Dafür ist zu zeigen:

1. **Positivität**: $||x|| \geq 0 \forall x, x = 0 \iff ||x|| = 0$.
2. **Sublinearität**: $\forall x, y \in V : ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$
3. **Homogenität**: $\forall x \in V \forall \lambda \in \mathbb{R} : ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.

Positivität ist klar für alle drei. Homogenität ist auch arg simpel.

Sublinearität:

1.

$$\begin{aligned}\|x+y\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i| \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\|x+y\|_2^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle - \langle y,y\rangle \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \\ &\Rightarrow \|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\|x+y\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,n} |x_i + y_i| \leq \max_{i=1,\dots,n} (|x_i| + |y_i|) \\ &\leq \max_{i=1,\dots,n} \max_{j=1,\dots,n} (|x_i| + |y_j|) = (\max_i |x_i|) + (\max_j |y_j|) \\ &= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty\end{aligned}$$

Aufgabe (3). Sei (X, d) ein metrischer Raum, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$.

1. Beweise:
   1. Falls $d(x,y) \geq r_1 + r_2$, dann sind $B_{r_1}(x)$, $B_{r_2}(y)$ disjunkt.
      <u>Beweis</u>: Angenommen, $\exists\, z \in B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(y)$.
      Dann ist $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < r_1 + r_2$ ↯

   2. Falls $d(x,y) \leq r_1 - r_2$, so ist $B_{r_2}(y) \subseteq B_{r_1}(x)$.
      <u>Beweis</u>: Angenommen, $\exists\, z \in B_{r_2}(y) \setminus B_{r_1}(x)$. Dann ist

      $$\begin{aligned}d(x,z) &\geq r_1 = (r_1 - r_2) + r_2 \\ &> d(x,y) + d(z,y) \quad \lightning\end{aligned}$$

2. Finde je ein Gegenbeispiel für die Rückrichtung:
   1. Sei $X = \{0,1\}$ und d Metrik auf X mit $d(0,1) = 1$.
      Idee: Wir nehmen zwei Bälle, die sich in der Theorie überschneiden, weil die Summe der Radien kleiner ist als der Abstand, aber in der Schnittmenge liegen

keine Elemente.

Wir wählen $r_1 = r_2 = \frac{2}{3}$, $x = 0$, $y = 1$. Wir haben
$B_{r_1}(0) = \{0\}$, $B_{r_2}(1) = \{1\}$, aber $r_1 + r_2 = \frac{4}{3} > d(0,1)$.

2. Metrik wie in erstem Gegenbeispiel, $r_1 = r_2 = 100$, $x = 0$, $y = 1$.
   Dann ist $B_{r_1}(0) = \{0,1\}$, $B_{r_2}(1) = \{0,1\}$, aber $d(0,1) > 100 - 100$.

Aufgabe (4). 1. *Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, d_1)$ und $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ isometrisch sind.*

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$.
Behauptung: $f : (\mathbb{R}^2, d_1) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ ist Isometrie.
f ist linear mit Rang 2, also bijektiv.
Seien $p = (x_1, y_1)$, $q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Zu zeigen:

$$d_\infty(f(p), f(q)) = d_1(p,q).$$

Es ist

$$\begin{aligned} d_1(p,q) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= \max\{|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)|,\ |(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)|\} \\ &= \max\{|(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)|, |(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)|\} \\ &= \text{(undeutlich)} = d_\infty(f(p), f(q)). \end{aligned}$$

2. *Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^n, d_1)$ und $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ **nicht** isometrisch sind für $n > 2$.*

Angenommen, es gibt eine Isometrie $\varphi^1 : (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ nach $(\mathbb{R}^n, d_1)$. Die Abbildung $\varphi^2 : (\mathbb{R}^n, d_1) \to (\mathbb{R}^n, d_1)$, $x \mapsto x - \varphi^1(0)$ ist eine Translation, also eine Isometrie.
Wähle $\varphi := \varphi^2 \circ \varphi^1$. φ ist Isometrie mit $\varphi(0) = 0$.
Die Menge $\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{-1, 1\}\} =: A$ hat folgende Eigenschaft: Für alle $p, q \in A$ mit $p \neq q$ gilt $d_\infty(p,q) = 2$ und $d_\infty(p, 0) = 1$.
Sei $B = \varphi(A)$. Für alle $p, q \in B$ mit $p \neq q$ gilt $d_1(p,q) = 2$ und $d_1(p,0) = 1$.
Da φ injektiv ist, gilt $|B| = |A| = 2^n > 2n$ (weil $n \geq 3$). Da jedes $x \in B$ mindestens eine Koordinate $\neq 0$ hat, gibt es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ und $p, q, r \in B$ mit $p_i, q_i, r_i \neq 0$.
Dann gibt es oBdA verschiedene $p, q \in B$ mit $p_i, q_i > 0$ (bzw haben selbes Vorzeichen, da es nur zwei mögliche Vorzeichen gibt).
Es gilt $d_1(p,q) = \sum_{j=1}^n |p_j - q_j| \underset{\text{da beide} > 0}{<} \sum_{j=1}^n |p_j| + |q_j| = d_1(p,0) + d_1(0,q) = 2$ ↯

1.2 2017-11-03

Nachtragen

1.3 2017-11-10

Aufgabe (1). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zu zeigen: Die Menge O aller d-offenen[1] Teilmengen von X ist Topologie. Wir zeigen die Eigenschaften einer Topologie.

1. $\varnothing \in O, X \in O \quad \checkmark$
2. Zu zeigen: beliebige Vereinigungen von d-offenen Mengen sind wieder d-offen.
   Sei $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Familie von d-offenen Mengen. Zu zeigen: $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ ist d-offen.
   Beweis: Sei $x \in A$ beliebig. Dann $\exists\, i \in I$ mit $x \in A_i$. Da A_i d-offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq A_i \subseteq A$.
   Damit ist A d-offen.
3. Zu zeigen: endliche Durchschnitte d-offener Mengen sind wieder d-offen.[2]
   Seien A, B d-offen. Zu zeigen: $A \cap B$ ist wieder d-offen.
   Sei $x \in A \cap B$. Da A und B d-offen sind, gibt es $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, sodass $B_\varepsilon(x) \subseteq A$ und $B_{\varepsilon'}(x) \subseteq B$. Wähle $\varepsilon'' = \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}$. Dann ist $B_{\varepsilon''}(x) = B_\varepsilon(x) \cap B_{\varepsilon'}(x) \subseteq A \cap B$ und $A \cap B$ ist d-offen.

Aufgabe (2). Seien X, Y_1, Y_2 topologische Räume, seien

$$\begin{aligned} p_i : Y_1 \times Y_2 &\to Y_i \\ (y_1, y_2) &\mapsto y_i \quad (\text{für } i = 1, 2). \end{aligned}$$

1. Zu zeigen: f ist stetig $\Longleftrightarrow$ $f_1 := p_1 \circ f, f_2 := p_2 \circ f$ stetig.
   Beweis:
   - $\Longrightarrow$. Sei f stetig. Zu zeigen (oBdA): f_1 ist stetig, i.e. die Urbilder offener Mengen sind wieder offen.
     Sei $U \subseteq Y_1$. Zu zeigen: $f_1^{-1}(U)$ offen.
     Es gilt[3]:

[1] $d-$ **offen**: $U \subset X$ heißt d-offen, falls $\forall x \in U \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U$.

[2] Es ist immer nur der Schnitt zweier Mengen zu zeigen, da $A_1 \cap \cdots \cap A_n = (((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \cdots)$. Also ist sukzessive der gesamte Schnitt offen.

[3] $p_1^{-1}(U) = U \times Y_2$

$$f_1^{-1}(U) = f^{-1}(p_1^{-1}(U)) = f^{-1}(U \times Y_2).$$

Diese Menge ist offen, da f stetig ist.

- $\Leftarrow$. Seien f_1, f_2 stetig. Zu zeigen: f ist stetig. Wir zeigen wieder, dass die Urbilder offener Mengen wieder offen sind.
  Sei $U \in Y_1 \times Y_2$ offen. Zu zeigen: $f^{-1}(U)$ ist wieder offen.
  Sei $x \in f^{-1}(U)$. Zu zeigen: Es gibt eine offene Menge $U' \subseteq f^{-1}(U)$ sodass $x \in U'$.
  Es ist $f(x) \in U$. Da U offen ist in $Y_1 \times Y_2$ gibt es offene $V_1 \subseteq Y_1$, $V_2 \subseteq Y_2$, sodass $f(x) \in V_1 \times V_2 \subseteq U$.
  Jetzt sei $U_1 \coloneqq f_1^{-1}(U_1)$, $U_2 \coloneqq f_2^{-1}(U_2)$. Da f_1, f_2 stetig sind, sind U_1 und U_2 offen, also auch $U_1 \cap U_2 \eqqcolon U'$ offen.
  Da $f(x) \in V_1 \times V_2$, ist $f_1(x) = p_1(f(x)) \in V_1$, $f_2(x) = p_2(f(x)) \in V_2$, also $x \in U_1 \cap U_2 = U'$.

2. *Sind p_1, p_2 immer offen?*[4]
   Ja — sei $U \subseteq Y_1 \times Y_2$ offen. Dann ist

   $$U = \bigcup \{V_1 \times V_2 : V_1 \subseteq Y_1 \text{ offen}, V_2 \subseteq Y_2 \text{ offen}, V_1 \times V_2 \subseteq U\}.$$

   Dann ist $p_1(U) = \bigcup \{V_1 : \text{analog zu } U, V_2 \neq \varnothing\}$ eine Vereinigung offener Mengen, also wieder offen — p_2 analog.
3. *Sind p_1, p_2 immer abgeschlossen?*
   Nein — sei

   $$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 1\right\}.$$

   Das ist eine klassische Hyperbel. M ist abgeschlossen, aber $p_1(M) = \mathbb{R} \setminus 0$ nicht, auch nicht $p_2(M) = \mathbb{R} \setminus 0$.

Aufgabe (3). Seien X, Y Hausdorffräume, $f, g : X \to Y$ stetig. Zu zeigen: $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ ist abgeschlossen.
Da Y Hausforffraum ist

$$\Delta_y \coloneqq \{(y, y) : y \in Y\}$$

in Y^2 abgeschlossen. ($\star$)

[4] **Offene + geschlossene Abbildungen**: $f : X \to Y$ heißt *offen*, wenn für alle offenen $U \subseteq X$ auch $f(U)$ offen ist; $f : X \to Y$ heißt *abgeschlossen*, wenn für alle abgeschlossenen $U \subseteq X$ auch $f(U)$ abgeschlossen ist.

Beweis (★). Zu zeigen: $\{(y, y') \in Y^2 : y \neq y'\} =: \Delta_y^c$ ist offen.
Sei $(y, y') \in \Delta_y^c$. Da Y hausdorffsch ist, gibt es offene Räume U_y und $U_{y'}$, sodass $y \in U_y$, $y' \in U_{y'}$, $U_y \cap U_{y'} = \varnothing$. Dann ist $(y, y') \in U_y \times U_{y'} \subseteq \Delta_y^c$.

Die Funktion

$$\begin{aligned} h : X &\to Y, \\ x &\mapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

ist stetig, denn $p_1 \circ h = f$ und $p_2 \circ h = g$ sind stetig nach Voraussetzung, also können wir den ersten Teil der Aufgabe 2 anwenden.
Da Δ_y abgeschlossen ist, ist $h^{-1}(\Delta_y) = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ ebenfalls abgeschlossen.

Aufgabe (4). Sei X topologischer Raum und $\sim$ Äquivalenzrelation auf X. Die kanonische Abbildung $\pi : X \to X/_\sim$ sei offen.

1. Zu zeigen: Falls X eine abzählbare Basis hat, dann auch $X/_\sim$.
   Sei B eine beliebige Basis von X. Sei $U \in X/_\sim$ offen. Dann ist $\pi^{-1}(U)$ nach Definition der Quotiententopologie offen, also existiert $A \subseteq B$ mit $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{M \in A} M$. Dann ist
   $$U = \pi(\pi^{-1}(U)) = \pi\left(\bigcup_{M \in A} M\right) = \bigcup_{M \in A} \pi(M).$$
   Damit ist $\pi(B) := \{\pi(M) : M \in B\}$ eine Basis von $X/_\sim$ und wenn B abzählbar ist, so ist auch $\pi(B)$ abzählbar.
2. Zu zeigen: Ist $A := \left\{(x, y) \in X^2 : x \sim y\right\}$ abgeschlossen, so ist $X/_\sim$ hausdorffsch.
   Beweis: Sei A abgeschlossen. Seien $p_1, p_2 \in X/_\sim, p_1 \neq p_2$. Wir wollen zeigen, dass p_1 und p_2 durch offene Mengen getrennt werden können.
   Seien $x_1 \in \pi^{-1}(p_1)$, $x_2 \in \pi^{-1}(p_2)$ (x_1 und x_2 existieren, weil die kanonische Abbildung surjektiv ist). Da $[x_1]_\sim = p_1 \neq p_2 = [x_2]_\sim$ ist $x_1 \not\sim x_2$, also $(x_1, x_2) \in A^c$.
   Da A_c in der Produkttopologie auf X^2 offen ist, gibt es $U_1, U_2 \subseteq X$ offen, sodass $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subseteq A^c$.
   Sei nun $V_1 = \pi(U_1)$, $V_2 = \pi(U_2)$. Es gilt $p_1 \in V_1, p_2 \in V_2$. V_1 und V_2 sind offen, da die kanonische Abbildung nach Voraussetzung offen ist.
   Es bleibt zu zeigen, dass $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Sei $q_1 \in V_1$, $q_2 \in V_2$, $x_1 \in q_1$,

$x_2 \in q_2$. Dann ist $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subseteq A_c$, also ist $x_1 \not\sim x_2$ und demnach $q_1 = [x_1]_\sim \neq [x_2]_\sim = q_2$.

1.4 2017-11-17 - Übungsblatt 4

Aufgabe (1). Sei $A \subseteq X$ zusammenhängend. Zu zeigen: $\bar{A}$ ist abgeschlossen.
Sei $B \subseteq \bar{A}$ offen und abgeschlossen in $\bar{A}$.
OBdA sei $B \cap A \neq \emptyset$, ansonsten setze $B' = \bar{A} \setminus B$. Da $B \cap A$ offen, abgeschlossen und nichtleer in A ist, folgt aus A zusammenhängend, dass $B \cap A = A$ also $A \subseteq B$.
Damit ist $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ und da B abgeschlossen ist, ist $\bar{A} \subseteq B$
und $B \subseteq \bar{A} \Rightarrow\rightarrow \bar{A} = B$
Folglich ist auch $\bar{A}$ abgeschlossen.

Aufgabe (1b). Seien $A, B \subseteq X$ zusammenhängend und $A \cap B = \emptyset$.
Zu zeigen: $A \cup B$ zusammenhängend. **Beweis**: Sei $C \subseteq A \cup B$ nichtleer, offen udn abgeschlossen in $A \cup B$.
Sei $x \in C$, dann ist $x \in A$ (oBdA, sonst wähle B)
Da $C \cap A$ abgeschlossen, offen und nichtleer in A und da A zusammenhängend, ist $C \cap A = A$ also $A \subseteq C$. Damit ist $\emptyset \neq A \cap B \subseteq C \cap B$. Weiter ist $C \cap B$ abgeschlossen, offen und nichtleer in B. Da B zusammenhängend ist, ist $C \cap B = B$ und $B \subseteq C$. Damit ist $C \subseteq A \cup B \subseteq C$.
Also $C = A \cup B \Rightarrow A \cup B$ ist zusammenhängend, da $A \cup B$ und $\emptyset$ die einzigen gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen sind.

Aufgabe (1c). Sei $\{A_i\}_{i \in I}$ eine zusammenhängende Familie (Familie zusammenhängender Mengen), sodass $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.
Zu zeigen: $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ ist zusammenhängend.
Sei $B \subseteq A$ offen, abgeschlossen und nichtleer. Sei weiter $x \in B$. Dann existiert $i \in I$ mit $x \in A_i$. Sei $y \in A$ beliebig.
Behauptung: $y \in B$ **Beweis**: Sei $j \in I$, sodass $y \in A_j$ nach Aufgabenteil b) ist dann $A_j \cup A_i$ zusammenhängend. Damit ist $B \cap (A_i \cup A_j) = A_j \cup A_i$, weil alle A_i zusammenhängend. Weiter ist $y \in A_i \cup A_j$ und $y \in B$.
Daraus folgt: $A \subseteq B$ und $B \subseteq A \Rightarrow A = B$.

Aufgabe (2a). Zu zeigen: B ist die Basis einer Topologie O_p auf P.

1. Zeige: $P \in O_p$, wobei $O_p = \{\bigcup_{U \in A} U | A \subseteq B\}$.
   $P = U_{\varnothing}(0, 0, \dots) \in B$ also $P \in O_p$
2. Für $V_1, V_2 \in O_p$ gilt $V_1 \cap V_2 \in O_p$.
   Sei $V_1 = \bigcup_{U \in A_1} U$, $V_2 = \bigcup_{U \in A_2} U$.
   Behauptung: Für alle $U, U' \in B : U \cap U' \in B$ oder $U \cap U' = \varnothing$.
   Dann ist
   $$V_1 \cap V_2 = \bigcup_{U \in A_1} \bigcup_{U' \in A_2} (U \cap U') \text{ also } V_1 \cap V_2 \in O_p$$
   Beweis: Seien $U = U_\mu(a) \in B, U' = U_{\mu'}(a') \in B$. Falls $U \cap U' \neq \varnothing$ existiert $a'' \in U \cap U'$. Dann gilt $U = U_\mu(a''), U' = U_{\mu'}(a'')$. Also:
   $U \cap U' = U_{\mu \cup \mu'}(a'')$
3. O_P ist bezüglich Vereinigung abgeschlossen, denn O_p besteht aus Vereinigungen von Elementen aus B.

Insgesamt folgt damit: O_p ist Topologie!

Aufgabe (2b). Ist (P, O_p) zusammenhängend, unzusammenhängend oder total unzusammenhängend?
Behauptung:: (P, O_p) ist total unzusammenhängend!
Beweis: Seien $a, b \in P$ Zeige: Es gibt offene, abgeschlossene Mengen U_a, U_b mit $U_a \cup U_b = P, U_a \cap U_b = \varnothing$ und weiter $a \in U_a, b \in U_b$.
Seien $a \neq b \Rightarrow \exists i \in \mathbb{N}$ sodass $a_i \neq b_i$. Setze $U_a = U_{\{i\}}(a)$und $U_b = U_{\{i\}}(b)$.
U_a und U_b sind in O_p offen. Nach Wahl von i ist $U_a \cap U_b = \varnothing$ und $U_a \cup U_b = P$.
Angenommen es gibt ein zusammenhängendes $V \subseteq P mit |V| \geq 2$.
Wähle $a, b \in V$ mit $a \neq b$ und konstruiere U_a, U_b wie oben. Dann ist $V = (V \cap U_a) \cup (V \cap U_b)$ eine offene disjunkte Zerlegung von V. **Widerspruch!**

Aufgabe (3a). Es reicht zu zeigen, dass alle p_i stetig sind.
"$\Rightarrow$": Die Mengen $p_i^{-1}(\varnothing) = \varnothing$
$p_i^{-1}(\{0, 1\}) = P$
$p_i^{-1}(\{1\}) = U_{\{i\}}(1, \dots)$
$p_i^{-1}(\{0\}) = U_{\{i\}}(0, \dots)$
sind alle offen.
"$\Leftarrow$": Sei $U \subseteq P$ offen. Dann ist $U = \bigcup_{U' \in A} U'$ für $A \subseteq B$ also $f^{-1}(U) = \bigcup_{U \in A} f^{-1}(U')$.

Fallse alle $f^{-1}(U')$ offen sind, dann auch $f^{-1}(U)$. Damit können wir uns für U auf Basiselemente beschränken. Sei also $U = U_\mu(a) \in B$.
Sei weiter $M = \{i_1, \ldots, i_n\}$. Dann ist:

$$U = U_{i_1}(a) \cap \cdots \cap U_{i_n}(a) = p_i^{-1}(\{a_{i_1}\}) \cap \cdots \cap p_i^{-1}(\{a_{i_n}\})$$

Also ist: $f^{-1}(U) = f_i^{-1}(\{a_{i_1}\}) \cap \cdots \cap f_i^{-1}(\{a_{i_n}\})$.
Diese Menge ist endlicher Schnitt offener Mengen, weil alle f_i stetig sind.

Aufgabe (3b). Zu zeigen: $f : X \to (P, \mathcal{P}(P))$ ist nicht genau dann stetig, wenn alle $f_i : X \to \{0, 1\}$ stetig sind.
Beispiel: $X = (P, O_P), f : (P, O_p) \to (P, \mathcal{P}(P)), a \mapsto a$.
Sei $A \in \mathcal{P}(P) \setminus O_p$ beliebig, dann ist A offen in $\mathcal{P}(P)$ aber $f^{-1}(A) = A$ ist in (P, O_P) nicht offen, also ist f nicht stetig.

1.5 2017-11-24 - Übungsblatt 5

Aufgabe (1a). Sei $Y \subseteq \mathcal{R}^n$ heißt konvex, falls für $p, q \in Y$ auch die Verbindungsgerade $\bar{pq}$ in Y .
Zeigen sie: Jede konvexe Teilemenge von $\mathcal{R}^n$ ist zusammenhängend.
Behauptung: $Y konvex \Rightarrow Y wegzusammenhngend$,
Seien $p, q \in Y$, Sei $c : [0, 1] \to Y, t \mapsto (1 - t)p + tq$ Die Verbindungsstrecke. Dann ist $c(0) = p, c(1) = q, c([0, 1]) \subseteq Y$ wegen Konvexität.
Da p, q bel. waren, ist Y wegzusammenhänged.

Aufgabe (2). vgl. Aufgabentext..
Zu zeigen: X ist kompakt $\Longleftrightarrow$ für alle Familien $(A_i)_{i\in I}$ **abgeschlossen** Teilmengen von X mit endlicher Schnitteigenschaft gilt: $\bigcap_{i\in I} \neq \emptyset$.
Sei (A_i),, Familie und $\forall i \in I$ sei $B_i := X \setminus A_i = A_i^C$.
Dann gelten: $(A_i)_{i\in I}$ ist Familie von offenen Mengen $\Longleftrightarrow$ (B_i) besteht aus abg. Mengen.

$$\bigcap_{i\in M} A_i \neq \emptyset \Leftrightarrow X \setminus \bigcap_{i\in M} A_i \neq X \setminus \emptyset \Leftrightarrow \bigcup_{i\in M} (X \setminus A_i) \neq X \Longleftrightarrow (B_i)_{i\in M}$$

ist keine Überdeckung von X. **Beweis:** Alle Familien abgeschlossener Teilmengen von X mit endl. Schnitteigenschaft haben nichtleeren Schnitt. $\Leftrightarrow$ Alle Familien mit abge-

schlossenen Teilmengen von X mit leerem Schnitt besitzen eine undendliche Teilfamilie mit leerem Schnitt.
$\Leftrightarrow$ Alle Familien offener Teilmengen von X, die X überdecken, besitzen eine endliche Teilfamilie, die X überdeckt. $\Longleftrightarrow$x ist kompakt

Aufgabe (3). Sei X kompakt, $f : X \to \mathcal{R}$ stetig.
Zeigen Sie: f nimmt auf $\mathcal{R}$ ein endliches Minimum und endliches Maximum an.
Beweis: Da stetige Bilder kompakter Mengen wieder kompakt sind, ist $f(X)$ kompakt in $\mathcal{R}$.
Nach dem Satz von Heine-Borel sind die kompakten Mengen in $\mathcal{R}$ genau die abgeschlossenen, beschränkten Mengen. Damit ist $f(X)$ also abgeschlossen und beschränkt, außerdem nichtleer.
Zeige ausführlich (statt mit Ana I.): $f(X)$ hat Maximum, Minimum.
Sei $s := supf(X)$. Da $f(X)$ nichtleer ist, ist $s > -\infty$.
Da $f(X)$ nach oben beschränkt ist, ist $s < \infty$. Für alle $n \in \mathcal{N}$ gibt es ein $x_n \in f(X)$ sodass $s - \frac{1}{n} < x_n \leq s$, weil $s - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von $f(X)$ ist.
Damit ist $\lim_{n\to\infty} x_n = s$. Damit ist $s \in f(X)$ und somit Maximum von f.

Aufgabe (4a). Sind Mannigfaltigkeiten stückweise wegzusammenhängend?
Behauptung: Ja!
Beweis: Sei $x \in M$, M sei $n - dim$ Mannigfaltigkeit.
Dann gibt es eine Karte (φ, U) von M, $\varphi : U \to \mathcal{R}^n, x \in U$.
Damit ist $\varphi(x)$ innerer Punk von $\varphi(U)$, also gibt es einen offenen Ball
$B := B_\varepsilon(\varphi(x)) \subseteq \varphi(U)$.
B ist wegzusammenhängend, also auch $\varphi^{-1}(B) \subseteq U$ wegzusammenhängend und $\varphi^{-1}(B)$ ist **offene** Umgebung von $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$, wie gesucht.

Aufgabe (4b). Sind zusammenhängede Mannigfalitgkeiten immer wegzusammenhängend?
Behauptung: Ja!
Beweis: Für alle $x \in X$ ist $W(x)$ offen.
Zu zeigen: Für alle $y \in W(x)$ gibt es eine in X offene Umgebung von y in $W(x)$.
Sei $y \in W(x)$. Dann ist $W(x) = W(y)$. Sei U eine offene, wegzusammenhängende Umgebung von y.
Dann ist $U \subseteq W(y) = W(x)$ die gesuchte Umgebung.

Angenommen, X ist nicht wegzusammenhängend. Dann gibt es $x, y \in X$ mit $x \in W(x), y \notin W(x)$.
Nun ist $W(x)$ offen (siehe oben), und $W(x)$ ist abgeschlossen, denn

$$X \setminus W(x) = \bigcup_{z \notin W(x)} W(z)$$

ist auch offen. Damit ist $W(x)$ Zeuge, dass X nicht zusammenhängend ist. Damit folgt die Behauptung.