Mitschrieb Elementare Geometrie

Jens Ochsenmeier

14. Dezember 2017

1 Übungen

1.1 2017-10-27

Aufgabe (1). *Zeigen Sie:* $(\mathbb{R}^2, d)$ *mit* $d(x,y) = |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)|$ *ist pseudometrischer Raum.*

- **Positivität**. Zu zeigen: $\forall x \in \mathbb{R}^2 : d(x,x) = 0$.
  $d(x,x) = |(x_1 - x_1) + (x_2 - x_2)| = |0| = 0$.
- **Symmetrie**. Zu zeigen: $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 : d(x,y) = d(y,x)$.
  $d(x,y) = |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)| = |(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2)| = d(y,x)$.
- **Dreiecksungleichung**. Zu zeigen: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2 : d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$.
  $d(x,y) + d(y,z) = |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)| + |(y_1 - z_1) + (y_2 - z_2)| \ge |(x_1 - z_1) + (x_2 - z_2)| = d(x,z)$.

Aufgabe (2). Gegeben:

- $||x||_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$,
- $||x||_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$,
- $||x||_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$.

Wir zeigen, dass alle drei Normen sind. Dafür ist zu zeigen:

1. **Positivität**: $||x|| \ge 0 \forall x, x = 0 \iff ||x|| = 0$.
2. **Sublinearität**: $\forall x, y \in V : ||x + y|| \le ||x|| + ||y||$
3. **Homogenität**: $\forall x \in V \forall \lambda \in \mathbb{R} : ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.

Positivität ist klar für alle drei. Homogenität ist auch arg simpel.

Sublinearität:

1. $$\begin{aligned} \|x+y\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i| \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \|x+y\|_2^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle - \langle y,y\rangle \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \\ &\Rightarrow \|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \|x+y\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,n} |x_i + y_i| \leq \max_{i=1,\dots,n} (|x_i| + |y_i|) \\ &\leq \max_{i=1,\dots,n} \max_{j=1,\dots,n} (|x_i| + |y_j|) = (\max_i |x_i|) + (\max_j |y_j|) \\ &= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \end{aligned}$$

Aufgabe (3). Sei (X,d) ein metrischer Raum, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$.

1. Beweise:
   1. Falls $d(x,y) \geq r_1 + r_2$, dann sind $B_{r_1}(x)$, $B_{r_2}(y)$ disjunkt.
      Beweis: Angenommen, $\exists\, z \in B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(y)$.
      Dann ist $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < r_1 + r_2 \quad ↯$
   2. Falls $d(x,y) \leq r_1 - r_2$, so ist $B_{r_2}(y) \subseteq B_{r_1}(x)$.
      Beweis: Angenommen, $\exists\, z \in B_{r_2}(y) \setminus B_{r_1}(x)$. Dann ist
      $$\begin{aligned} d(x,z) &\geq r_1 = (r_1 - r_2) + r_2 \\ &> d(x,y) + d(z,y) \quad ↯ \end{aligned}$$
2. Finde je ein Gegenbeispiel für die Rückrichtung:
   1. Sei $X = \{0,1\}$ und d Metrik auf X mit $d(0,1) = 1$.
      Idee: Wir nehmen zwei Bälle, die sich in der Theorie überschneiden, weil die Summe der Radien kleiner ist als der Abstand, aber in der Schnittmenge liegen

keine Elemente.

Wir wählen $r_1 = r_2 = \frac{2}{3}$, $x = 0$, $y = 1$. Wir haben $B_{r_1}(0) = \{0\}$, $B_{r_2}(1) = \{1\}$, aber $r_1 + r_2 = \frac{4}{3} > d(0,1)$.

2. Metrik wie in erstem Gegenbeispiel, $r_1 = r_2 = 100$, $x = 0$, $y = 1$.
   Dann ist $B_{r_1}(0) = \{0,1\}$, $B_{r_2}(1) = \{0,1\}$, aber $d(0,1) > 100 - 100$.

Aufgabe (4). 1. *Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, d_1)$ und $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ isometrisch sind.*

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.

Behauptung: $f : (\mathbb{R}^2, d_1) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ ist Isometrie.

f ist linear mit Rang 2, also bijektiv.

Seien $p = (x_1, y_1)$, $q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Zu zeigen:

$$d_\infty(f(p), f(q)) = d_1(p,q).$$

Es ist

$$\begin{aligned} d_1(p,q) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= \max\{|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)|,\ |(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)|\} \\ &= \max\{|(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)|, |(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)|\} \\ &= \text{(undeutlich)} = d_\infty(f(p), f(q)). \end{aligned}$$

2. *Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^n, d_1)$ und $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ **nicht** isometrisch sind für $n > 2$.*

Angenommen, es gibt eine Isometrie $\varphi^1 : (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ nach $(\mathbb{R}^n, d_1)$. Die Abbildung $\varphi^2 : (\mathbb{R}^n, d_1) \to (\mathbb{R}^n, d_1)$, $x \mapsto x - \varphi^1(0)$ ist eine Translation, also eine Isometrie.

Wähle $\varphi := \varphi^2 \circ \varphi^1$. φ ist Isometrie mit $\varphi(0) = 0$.

Die Menge $\{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \{-1, 1\}\} =: A$ hat folgende Eigenschaft: Für alle $p, q \in A$ mit $p \neq q$ gilt $d_\infty(p,q) = 2$ und $d_\infty(p, 0) = 1$.

Sei $B = \varphi(A)$. Für alle $p, q \in B$ mit $p \neq q$ gilt $d_1(p,q) = 2$ und $d_1(p, 0) = 1$. Da φ injektiv ist, gilt $|B| = |A| = 2^n > 2n$ (weil $n \geq 3$). Da jedes $x \in B$ mindestens eine Koordinate $\neq 0$ hat, gibt es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $p, q, r \in B$ mit $p_i, q_i, r_i \neq 0$.

Dann gibt es oBdA verschiedene $p, q \in B$ mit $p_i, q_i > 0$ (bzw haben selbes Vorzeichen, da es nur zwei mögliche Vorzeichen gibt).

Es gilt $d_1(p,q) = \sum_{j=1}^n |p_j - q_j| \underset{\text{da beide} > 0}{<} \sum_{j=1}^n |p_j| + |q_j| = d_1(p, 0) + d_1(0, q) = 2$ ↯

1.2 2017-11-03

Nachtragen

1.3 2017-11-10

Aufgabe (1). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zu zeigen: Die Menge O aller d-offenen[1] Teilmengen von X ist Topologie. Wir zeigen die Eigenschaften einer Topologie.

1. $\emptyset \in O, X \in O \quad \checkmark$
2. Zu zeigen: beliebige Vereinigungen von d-offenen Mengen sind wieder d-offen.
   Sei $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Familie von d-offenen Mengen. Zu zeigen: $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ ist d-offen.
   Beweis: Sei $x \in A$ beliebig. Dann $\exists\, i \in I$ mit $x \in A_i$. Da A_i d-offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq A_i \subseteq A$.
   Damit ist A d-offen.
3. Zu zeigen: endliche Durchschnitte d-offener Mengen sind wieder d-offen.[2]
   Seien A, B d-offen. Zu zeigen: $A \cap B$ ist wieder d-offen.
   Sei $x \in A \cap B$. Da A und B d-offen sind, gibt es $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, sodass $B_\varepsilon(x) \subseteq A$ und $B_{\varepsilon'}(x) \subseteq B$. Wähle $\varepsilon'' = \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}$. Dann ist $B_{\varepsilon''}(x) = B_\varepsilon(x) \cap B_{\varepsilon'}(x) \subseteq A \cap B$ und $A \cap B$ ist d-offen.

Aufgabe (2). Seien X, Y_1, Y_2 topologische Räume, seien

$$
\begin{aligned}
p_i : Y_1 \times Y_2 &\to Y_i \\
(y_1, y_2) &\mapsto y_i \quad (\text{für } i = 1, 2).
\end{aligned}
$$

1. Zu zeigen: f ist stetig $\Longleftrightarrow$ $f_1 := p_1 \circ f$, $f_2 := p_2 \circ f$ stetig.
   Beweis:
   - $\Longrightarrow$. Sei f stetig. Zu zeigen (oBdA): f_1 ist stetig, i.e. die Urbilder offener Mengen sind wieder offen.
     Sei $U \subseteq Y_1$. Zu zeigen: $f_1^{-1}(U)$ offen.
     Es gilt[3]:

[1] $d-$ **offen**: $U \subset X$ heißt d-offen, falls $\forall x \in U \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U$.

[2] Es ist immer nur der Schnitt zweier Mengen zu zeigen, da $A_1 \cap \cdots \cap A_n = (((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \cdots)$. Also ist sukzessive der gesamte Schnitt offen.

[3] $p_1^{-1}(U) = U \times Y_2$

$$f_1^{-1}(U) = f^{-1}(p_1^{-1}(U)) = f^{-1}(U \times Y_2).$$

Diese Menge ist offen, da f stetig ist.

- $\Leftarrow$. Seien f_1, f_2 stetig. Zu zeigen: f ist stetig. Wir zeigen wieder, dass die Urbilder offener Mengen wieder offen sind.
  Sei $U \in Y_1 \times Y_2$ offen. Zu zeigen: $f^{-1}(U)$ ist wieder offen.
  Sei $x \in f^{-1}(U)$. Zu zeigen: Es gibt eine offene Menge $U' \subseteq f^{-1}(U)$ sodass $x \in U'$.
  Es ist $f(x) \in U$. Da U offen ist in $Y_1 \times Y_2$ gibt es offene $V_1 \subseteq Y_1, V_2 \subseteq Y_2$, sodass $f(x) \in V_1 \times V_2 \subseteq U$.
  Jetzt sei $U_1 := f_1^{-1}(U_1), U_2 := f_2^{-1}(U_2)$. Da f_1, f_2 stetig sind, sind U_1 und U_2 offen, also auch $U_1 \cap U_2 =: U'$ offen.
  Da $f(x) \in V_1 \times V_2$, ist $f_1(x) = p_1(f(x)) \in V_1$, $f_2(x) = p_2(f(x)) \in V_2$, also $x \in U_1 \cap U_2 = U'$.

2. *Sind p_1, p_2 immer offen?*[4]
   Ja — sei $U \subseteq Y_1 \times Y_2$ offen. Dann ist

   $$U = \bigcup \{V_1 \times V_2 : V_1 \subseteq Y_1 \text{ offen}, V_2 \subseteq Y_2 \text{ offen}, V_1 \times V_2 \subseteq U\}.$$

   Dann ist $p_1(U) = \bigcup \{V_1 : \text{analog zu } U, V_2 \neq \varnothing\}$ eine Vereinigung offener Mengen, also wieder offen — p_2 analog.
3. *Sind p_1, p_2 immer abgeschlossen?*
   Nein — sei

   $$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 1\right\}.$$

   Das ist eine klassische Hyperbel. M ist abgeschlossen, aber $p_1(M) = \mathbb{R} \setminus 0$ nicht, auch nicht $p_2(M) = \mathbb{R} \setminus 0$.

Aufgabe (3). Seien X, Y Hausdorffräume, $f, g : X \to Y$ stetig. Zu zeigen: $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ ist abgeschlossen.
Da Y Hausforffraum ist

$$\Delta_y := \{(y,y) : y \in Y\}$$

in Y^2 abgeschlossen. $(\star)$

[4] **Offene + geschlossene Abbildungen**: $f : X \to Y$ heißt *offen*, wenn für alle offenen $U \subseteq X$ auch $f(U)$ offen ist; $f : X \to Y$ heißt *abgeschlossen*, wenn für alle abgeschlossenen $U \subseteq X$ auch $f(U)$ abgeschlossen ist.

Beweis (★). Zu zeigen: $\{(y,y') \in Y^2 : y \neq y'\} =: \Delta_y^c$ ist offen.
Sei $(y,y') \in \Delta_y^c$. Da Y hausdorffsch ist, gibt es offene Räume U_y und $U_{y'}$, sodass $y \in U_y$, $y' \in U_{y'}, U_y \cap U_{y'} = \varnothing$. Dann ist $(y,y') \in U_y \times U_{y'} \subseteq \Delta_y^c$.

Die Funktion

$$\begin{aligned} h : X &\to Y, \\ x &\mapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

ist stetig, denn $p_1 \circ h = f$ und $p_2 \circ h = g$ sind stetig nach Voraussetzung, also können wir den ersten Teil der Aufgabe 2 anwenden.
Da Δ_y abgeschlossen ist, ist $h^{-1}(\Delta_y) = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ ebenfalls abgeschlossen.

Aufgabe (4). Sei X topologischer Raum und $\sim$ Äquivalenzrelation auf X. Die kanonische Abbildung $\pi : X \to X/_\sim$ sei offen.

1. Zu zeigen: Falls X eine abzählbare Basis hat, dann auch $X/_\sim$.
   Sei B eine beliebige Basis von X. Sei $U \in X/_\sim$ offen. Dann ist $\pi^{-1}(U)$ nach Definition der Quotiententopologie offen, also existiert $A \subseteq B$ mit $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{M \in A} M$. Dann ist
   $$U = \pi(\pi^{-1}(U)) = \pi\left(\bigcup_{M \in A} M\right) = \bigcup_{M \in A} \pi(M).$$
   Damit ist $\pi(B) := \{\pi(M) : M \in B\}$ eine Basis von $X/_\sim$ und wenn B abzählbar ist, so ist auch $\pi(B)$ abzählbar.
2. Zu zeigen: Ist $A := \left\{(x,y) \in X^2 : x \sim y\right\}$ abgeschlossen, so ist $X/_\sim$ hausdorffsch.
   Beweis: Sei A abgeschlossen. Seien $p_1, p_2 \in X/_\sim, p_1 \neq p_2$. Wir wollen zeigen, dass p_1 und p_2 durch offene Mengen getrennt werden können.
   Seien $x_1 \in \pi^{-1}(p_1)$, $x_2 \in \pi^{-1}(p_2)$ (x_1 und x_2 existieren, weil die kanonische Abbildung surjektiv ist). Da $[x_1]_\sim = p_1 \neq p_2 = [x_2]_\sim$ ist $x_1 \not\sim x_2$, also $(x_1, x_2) \in A^c$.
   Da A_c in der Produkttopologie auf X^2 offen ist, gibt es $U_1, U_2 \subseteq X$ offen, sodass $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subseteq A^c$.
   Sei nun $V_1 = \pi(U_1)$, $V_2 = \pi(U_2)$. Es gilt $p_1 \in V_1, p_2 \in V_2$. V_1 und V_2 sind offen, da die kanonische Abbildung nach Voraussetzung offen ist.
   Es bleibt zu zeigen, dass $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Sei $q_1 \in V_1$, $q_2 \in V_2$, $x_1 \in q_1$,

$x_2 \in q_2$. Dann ist $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subseteq A_c$, also ist $x_1 \not\sim x_2$ und demnach $q_1 = [x_1]_\sim \neq [x_2]_\sim = q_2$.

1.4 2017-11-17 - Übungsblatt 4

Aufgabe (1). Sei $A \subseteq X$ zusammenhängend. Zu zeigen: $\bar{A}$ ist abgeschlossen.
Sei $B \subseteq \bar{A}$ offen und abgeschlossen in $\bar{A}$.
OBdA sei $B \cap A \neq \varnothing$, ansonsten setze $B' = \bar{A} \setminus B$. Da $B \cap A$ offen, abgeschlossen und nichtleer in A ist, folgt aus A zusammenhängend, dass $B \cap A = A$ also $A \subseteq B$.
Damit ist $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ und da B abgeschlossen ist, ist $\bar{A} \subseteq B$
und $B \subseteq \bar{A} \Rightarrow\rightarrow \bar{A} = B$
Folglich ist auch $\bar{A}$ abgeschlossen.

Aufgabe (1b). Seien $A, B \subseteq X$ zusammenhängend und $A \cap B = \varnothing$.
Zu zeigen: $A \cup B$ zusammenhängend. **Beweis**: Sei $C \subseteq A \cup B$ nichtleer, offen udn abgeschlossen in $A \cup B$.
Sei $x \in C$, dann ist $x \in A$ (oBdA, sonst wähle B)
Da $C \cap A$ abgeschlossen, offen und nichtleer in A und da A zusammenhängend, ist $C \cap A = A$ also $A \subseteq C$. Damit ist $\varnothing \neq A \cap B \subseteq C \cap B$. Weiter ist $C \cap B$ abgeschlossen, offen und nichtleer in B. Da B zusammenhängend ist, ist $C \cap B = B$ und $B \subseteq C$. Damit ist $C \subseteq A \cup B \subseteq C$.
Also $C = A \cup B \Rightarrow A \cup B$ ist zusammenhängend, da $A \cup B$ und $\varnothing$ die einzigen gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen sind.

Aufgabe (1c). Sei $\{A_i\}_{i \in I}$ eine zusammenhängende Familie (Familie zusammenhängender Mengen), sodass $A_i \cap A_j \neq \varnothing$.
Zu zeigen: $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ ist zusammenhängend.
Sei $B \subseteq A$ offen, abgeschlossen und nichtleer. Sei weiter $x \in B$. Dann existiert $i \in I$ mit $x \in A_i$. Sei $y \in A$ beliebig.
Behauptung: $y \in B$ **Beweis**: Sei $j \in I$, sodass $y \in A_j$ nach Aufgabenteil b) ist dann $A_j \cup A_i$ zusammenhängend. Damit ist $B \cap (A_i \cup A_j) = A_j \cup A_i$, weil alle A_i zusammenhängend. Weiter ist $y \in A_i \cup A_j$ und $y \in B$.
Daraus folgt: $A \subseteq B$ und $B \subseteq A \Rightarrow A = B$.

Aufgabe (2a). Zu zeigen: B ist die Basis einer Topologie O_p auf P.

1. Zeige: $P \in O_p$, wobei $O_p = \{\bigcup_{U \in A} U | A \subseteq B\}$.
   $P = U_\varnothing(0, 0, \dots) \in B$ also $P \in O_p$
2. Für $V_1, V_2 \in O_p$ gilt $V_1 \cap V_2 \in O_p$.
   Sei $V_1 = \bigcup_{U \in A_1} U, V_2 = \bigcup_{U \in A_2} U$.
   Behauptung: Für alle $U, U' \in B : U \cap U' \in B$ oder $U \cap U' = \varnothing$.
   Dann ist
   $$V_1 \cap V_2 = \bigcup_{U \in A_1} \bigcup_{U' \in A_2} (U \cap U') \text{ also } V_1 \cap V_2 \in O_p$$
   Beweis: Seien $U = U_\mu(a) \in B, U' = U_{\mu'}(a') \in B$. Falls $U \cap U' \neq \varnothing$ existiert $a'' \in U \cap U'$. Dann gilt $U = U_\mu(a''), U' = U_{\mu'}(a'')$. Also:
   $U \cap U' = U_{\mu \cup \mu'}(a'')$
3. O_P ist bezüglich Vereinigung abgeschlossen, denn O_p besteht aus Vereinigungen von Elementen aus B.

Insgesamt folgt damit: O_p ist Topologie!

Aufgabe (2b). Ist (P, O_p) zusammenhängend, unzusammenhängend oder total unzusammenhängend?
Behauptung:: (P, O_p) ist total unzusammenhängend!
Beweis: Seien $a, b \in P$ Zeige: Es gibt offene, abgeschlossene Mengen U_a, U_b mit $U_a \cup U_b = P, U_a \cap U_b = \varnothing$ und weiter $a \in U_a, b \in U_b$.
Seien $a \neq b \Rightarrow \exists i \in \mathbb{N}$ sodass $a_i \neq b_i$. Setze $U_a = U_{\{i\}}(a)$und $U_b = U_{\{i\}}(b)$.
U_a und U_b sind in O_p offen. Nach Wahl von i ist $U_a \cap U_b = \varnothing$ und $U_a \cup U_b = P$.
Angenommen es gibt ein zusammenhängendes $V \subseteq P mit |V| \geq 2$.
Wähle $a, b \in V$ mit $a \neq b$ und konstruiere U_a, U_b wie oben. Dann ist $V = (V \cap U_a) \cup (V \cap U_b)$ eine offene disjunkte Zerlegung von V. **Widerspruch!**

Aufgabe (3a). Es reicht zu zeigen, dass alle p_i stetig sind.
"$\Rightarrow$": Die Mengen $p_i^{-1}(\varnothing) = \varnothing$
$p_i^{-1}(\{0, 1\}) = P$
$p_i^{-1}(\{1\}) = U_{\{i\}}(1, \dots)$
$p_i^{-1}(\{0\}) = U_{\{i\}}(0, \dots)$
sind alle offen.
"$\Leftarrow$": Sei $U \subseteq P$ offen. Dann ist $U = \bigcup_{U' \in A} U'$ für $A \subseteq B$ also $f^{-1}(U) = \bigcup_{U \in A} f^{-1}(U')$.

Fallse alle $f^{-1}(U')$ offen sind, dann auch $f^{-1}(U)$. Damit können wir uns für U auf Basiselemente beschränken. Sei also $U = U_\mu(a) \in B$.
Sei weiter $M = \{i_1, \dots, i_n\}$. Dann ist:

$$U = U_{i_1}(a) \cap \cdots \cap U_{i_n}(a) = p_i^{-1}(\{a_{i_1}\}) \cap \cdots \cap p_i^{-1}(\{a_{i_n}\})$$

Also ist: $f^{-1}(U) = f_i^{-1}(\{a_{i_1}\}) \cap \cdots \cap f_i^{-1}(\{a_{i_n}\})$.
Diese Menge ist endlicher Schnitt offener Mengen, weil alle f_i stetig sind.

Aufgabe (3b). Zu zeigen: $f : X \to (P, \mathcal{P}(P))$ ist nicht genau dann stetig, wenn alle $f_i : X \to \{0,1\}$ stetig sind.
Beispiel: $X = (P, O_P), f : (P, O_p) \to (P, \mathcal{P}(P)), a \mapsto a$.
Sei $A \in \mathcal{P}(P) \setminus O_p$ beliebig, dann ist A offen in $\mathcal{P}(P)$ aber $f^{-1}(A) = A$ ist in (P, O_P) nicht offen, also ist f nicht stetig.

1.5 2017-11-24 - Übungsblatt 5

Aufgabe (1a). Sei $Y \subseteq \mathcal{R}^n$ heißt konvex, falls für $p, q \in Y$ auch die Verbindungsgerade $\bar{pq}$ in Y .
Zeigen sie: Jede konvexe Teilemenge von $\mathcal{R}^n$ ist zusammenhängend.
Behauptung: $Y konvex \Rightarrow Y wegzusammenhngend$,
Seien $p, q \in Y$, Sei $c : [0,1] \to Y, t \mapsto (1-t)p + tq$ Die Verbindungsstrecke. Dann ist $c(0) = p, c(1) = q, c([0,1]) \subseteq Y$ wegen Konvexität.
Da p, q bel. waren, ist Y wegzusammenhänged.

Aufgabe (2). vgl. Aufgabentext..
Zu zeigen: X ist kompakt $\Longleftrightarrow$ für alle Familien $(A_i)_{i \in I}$ **abgeschlossen** Teilmengen von X mit endlicher Schnitteigenschaft gilt: $\bigcap_{i \in I} \neq \emptyset$.
Sei $(A_i)_{,}$, Familie und $\forall i \in I$ sei $B_i := X \setminus A_i = A_i^C$.
Dann gelten: $(A_i)_{i \in I}$ ist Familie von offenen Mengen $\Longleftrightarrow$ (B_i) besteht aus abg. Mengen.

$$\bigcap_{i \in M} A_i \neq \emptyset \Leftrightarrow X \setminus \bigcap_{i \in M} A_i \neq X \setminus \emptyset \Leftrightarrow \bigcup_{i \in M} (X \setminus A_i) \neq X \Longleftrightarrow (B_i)_{i \in M}$$

ist keine Überdeckung von X. **Beweis:** Alle Familien abgeschlossener Teilmengen von X mit endl. Schnitteigenschaft haben nichtleeren Schnitt. $\Leftrightarrow$ Alle Familien mit abge-

schlossenen Teilmengen von X mit leerem Schnitt besitzen eine undendliche Teilfamilie mit leerem Schnitt.
$\Leftrightarrow$ Alle Familien offener Teilmengen von X, die X überdecken, besitzen eine endliche Teilfamilie, die X überdeckt. $\Longleftrightarrow$x ist kompakt

Aufgabe (3). Sei X kompakt, $f : X \to \mathcal{R}$ stetig.
Zeigen Sie: f nimmt auf $\mathcal{R}$ ein endliches Minimum und endliches Maximum an.
Beweis: Da stetige Bilder kompakter Mengen wieder kompakt sind, ist $f(X)$ kompakt in $\mathcal{R}$.
Nach dem Satz von Heine-Borel sind die kompakten Mengen in $\mathcal{R}$ genau die abgeschlossenen, beschränkten Mengen. Damit ist $f(X)$ also abgeschlossen und beschränkt, außerdem nichtleer.
Zeige ausführlich (statt mit Ana I.): $f(X)$ hat Maximum, Minimum.
Sei $s := supf(X)$. Da $f(X)$ nichtleer ist, ist $s > -\infty$.
Da $f(X)$ nach oben beschränkt ist, ist $s < \infty$. Für alle $n \in \mathcal{N}$ gibt es ein $x_n \in f(X)$ sodass $s - \frac{1}{n} < x_n \leq s$, weil $s - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von $f(X)$ ist.
Damit ist $\lim_{n\to\infty} x_n = s$. Damit ist $s \in f(X)$ und somit Maximum von f.

Aufgabe (4a). Sind Mannigfaltigkeiten stückweise wegzusammenhängend?
Behauptung: Ja!
Beweis: Sei $x \in M$, M sei $n - dim$ Mannigfaltigkeit.
Dann gibt es eine Karte (φ, U) von M, $\varphi : U \to \mathcal{R}^n$, $x \in U$.
Damit ist $\varphi(x)$ innerer Punk von $\varphi(U)$, also gibt es einen offenen Ball
$B := B_\varepsilon(\varphi(x)) \subseteq \varphi(U)$.
B ist wegzusammenhängend, also auch $\varphi^{-1}(B) \subseteq U$ wegzusammenhängend und $\varphi^{-1}(B)$ ist **offene** Umgebung von $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$, wie gesucht.

Aufgabe (4b). Sind zusammenhängede Mannigfalitgkeiten immer wegzusammenhängend?
Behauptung: Ja!
Beweis: Für alle $x \in X$ ist $W(x)$ offen.
Zu zeigen: Für alle $y \in W(x)$ gibt es eine in X offene Umgebung von y in $W(x)$.
Sei $y \in W(x)$. Dann ist $W(x) = W(y)$. Sei U eine offene, wegzusammenhängende Umgebung von y.
Dann ist $U \subseteq W(y) = W(x)$ die gesuchte Umgebung.

Angenommen, X ist nicht wegzusammenhängend. Dann gibt es $x, y \in X$ mit $x \in W(x), y \notin W(x)$.
Nun ist $W(x)$ offen (siehe oben), und $W(x)$ ist abgeschlossen, denn

$$X \setminus W(x) = \bigcup_{z \notin W(x)} W(z)$$

ist auch offen. Damit ist $W(x)$ Zeuge, dass X nicht zusammenhängend ist. Damit folgt die Behauptung.

1.6 2017-12-01 - Übungsblatt 6

Aufgabe (1a). Zu zeigen: **Stereographische Projektion** an p_+ und p_- ist genau die Umkehrabbildung φ^{-1}.
$\psi_\pm : S^2 \setminus \{p_\pm\} \to \mathcal{R}^\in, (x, y, z) \mapsto (\frac{x}{1 \pm z}, \frac{y}{1 \pm z}$.
zz: $\psi_+ \circ \varphi_+ = id$.
Nachrechnen... : $\psi_+(\varphi_+(x, y)) = \cdots = (x, y)$
zz: $\varphi_+ \circ \psi_+ = id$.
: Nachrechnen... : $\varphi_+(\psi_+(x, y, z)) = \cdots = (x, y, z)$

Aufgabe (1b). Zeige: Der *Kartenwechsel* $\psi_+ \circ \psi_-^{-1} = \varphi_+^{-1} \circ \varphi_-$ ist C^∞.
Sei $f : \psi_-(S^2 \setminus \{p_+, p_-\}) \to \psi_+(S^2 \setminus \{p_+, p_-\})$.
$f(x, y) = \cdots = \frac{1}{x^2+y^2}(x, y)$ ist C^∞.
Seien dafür: $g(x, y) = (\frac{p(x,y)}{(x^2+y^2)^n}, \frac{q(x,y)}{(x^2+y^2)^n})$ für $p, q \in \mathbb{R}[x, y]$.
Behauptung: Es gibt $N \in \mathbb{N}, P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$ sodass:

$$g_x(x, y) = \left(\frac{P(x, y)}{(x^2 + y^2)^n}, \frac{Q(x, y)}{(x^2 + y^2)^n} \right)$$

Mit dieser Behauptung folgt, dass alle partiellen Ableitungen von f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ existieren.
Beweis:

$$\frac{d}{dx} g(x, y) = ((x^2 + y^2)p_x(x, y) - 2xp(x, y),$$
$$(x^2 + y^2)q_x(x, y) - 2xq(x, y)) \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2)^n + 1} = Q(x, y)$$

Aufgabe (2a). Der Tangentialraum T_pF von F in p sei definiert als $T_pF := Bild(d\varphi(\varphi^{-1}(p)))$, wobei $\varphi : V \to F, V \subseteq \mathbb{R}^2$, eine Parametrisierung von F um den Punkt $p \in F$ ist.
Zeige: Diese Definition ist unabhängig von φ.
Ansatz: Wähle zwei Parametrisierungen und zeige, dass das Bild das selbe ist.
Beweis: Seien φ, ψ Parametrisierungen von F um p. Sei $q = \varphi^{-1}(p), r = \psi^{-1}(p)$,
Zu Zeigen:

$$Bild(d\varphi(q)) = Bild(d\psi(r))$$

Es gilt $\psi = \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)$ wobei $f := (\varphi^{-1} \circ \psi)$.
also: $d\psi(r) = d(\varphi \circ f(r)) = d\varphi(f(r)) \cdot df(r) = d\varphi(q) \cdot df(r)$, also:
$Bild(d\psi(r)) \subseteq Bild(d\varphi(q))$.
Durch Vertauschung von ψ, φ erhalten wir auch $Bild(d\varphi(q)) \subseteq Bild(d\psi(r))$ also:

$$Bild(d\varphi(q)) = Bild(d\psi(r))$$

Aufgabe (2b). Vgl. Aufgabenstellung...
Beweis:
Sei $p = (p_x, p_y, p_z)$. Sei oBdA $p_z > 0$.
Sei $\varphi : B_1(0) \to S^2, (x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$.
Dann ist:

$$d\varphi(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-p_x}{p_z} & \frac{-p_y}{p_z} \end{pmatrix}$$

Also:

$$T_pS^2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-p_x}{p_z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-p_y}{p_z} \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} p_z \\ 0 \\ -p_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ p_z \\ -P_y \end{pmatrix}\right]$$

Jetzt ist: $p \cdot t_1 = p_x p_z - p_z p_x = 0$ und $p \cdot t_2 = p_y p_z - p_z p_y = 0$ also
$\{p\} \perp \{t_1, t_2\}$ und $[p] \perp [t_1, t_2] = T_pS$, also auch $T_pS = [p]^\perp$.

Aufgabe (3a). Sei

$$U_i := \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \in P^n\mathbb{R} | x_i \neq 0\}$$

und

$$\varphi_i([x_1, \dots, x_n]) = \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_{n+1})$$

Zeige: (U_i, φ_i) bilden einen differenzierbaren Atlas von $P^n\mathbb{R}$.
Behauptung: Es gilt:

$$\varphi_i^{-1}(u_1, \dots, u_n) = [u_1, \dots, u_{i-1}, 1, u_i, \dots, u_n]$$

Zeige: $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ ist differenzierbar für $i, j = 1, \dots, n+1, i < j$.

$$\begin{aligned}\varphi_i(\varphi_j^{-1}(u_1, \dots, u_n)) &= \varphi_i([u_1, \dots, u_{i-1}, 1, u_i, \dots, u_n]) \\ &= \left(\frac{u_1}{u_i}, \dots \frac{u_{i-1}}{u_i}, \frac{u_{i+1}}{u_i}, \dots, \frac{u_{j-1}}{u_i}, \frac{1}{u_i}, \frac{u_j}{u_i}, \dots, \frac{u_n}{u_i}\right)\end{aligned}$$

ist C^∞ von $\{u \in \mathbb{R}^n : u_i \neq 0\}$ nach $\{u \in \mathbb{R}^n : u_{j-1} \neq 0\}$.
Noch zz: $U_1 \cup \dots \cup U_{n+1} = P^n\mathbb{R}$.
Für $[x_1, \dots, x_{n+1}] \in P^n\mathbb{R}$ gibt es mindestens ein i mit $x_i \neq 0$ damit ist $[x_1, \dots, x_{n+1}]$ in U_i. Damit gilt $U_1 \cup \dots \cup U_{n+1} = P^n\mathbb{R}$.

Aufgabe (3b). **Behauptung:** $P^n\mathbb{R}$ ist hausdorffsch mit abzählbarer Basis.
Wir wissen aus der VL, dass $P^n\mathbb{R} = S^n / \sim$ wobei $x \sim y :\Leftrightarrow x = \pm y$,.
(Vgl. Abbildung).
Seien $\pm x, \pm y \in S^2 / \sim$.
Seien $U_x := B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(-x)$ und
$U_y := B_\varepsilon(y) \cup B_\varepsilon(-y)$.
Zu jedem $z \in U_x$ ist auch $-z \in U_x$.
Zu jedem $z \in U_y$ ist auch $-z \in U_y$.
Also ist $\pi^{-1}(\pi(U_x)) = U_x$ also $\pi(U_x)$ auch offen in $S^n / \sim \cong P^n\mathbb{R}$.
Da U_x, U_y disjunkt gilt: $\pi(U_x) \cap \pi(U_y) = \emptyset$. Also sind $\pi(U_y), \pi(U_x)$ disjunkte offene Umgebungen von $\pm x$, $\pm y$ und damit ist $S^n / \sim = P^n\mathbb{R}$ hausdorffsch.
Zur abzählbaren Basis:
Seien $B_1, \dots, B_{n+1}$ abzählbare Basis von $U_1, \dots U_n + 1$. Dann ist $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{n+1}$ eine abzählbare Basis von ??? $P^n\mathbb{R}$??? -> Weiß nicht was hier hin sollte

1.7 2017-12-08 - Übungsblatt 7

Abbildungen müssen nachgetragen werden!

Aufgabe (1a). Vgl. Aufgabenstellung.
Zu zeigen: $S := f^{-1}(0)$ ist reguläre Fläche. Wobei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und für alle Punkte $p \in S$ gelte $f(0) \neq 0$.
Beweis: Sei $p \in S$. Dann gilt nach Vor.

$$f(p) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p)\right) \neq 0$$

Sei oBdA $\frac{\partial}{\partial z}P(p) \neq 0$. Nach dem Satz pber implizit definierte Funktion gibt es $U \subseteq \mathbb{R}^2, V \subseteq \mathbb{R}, g : U \to V, p \in U \times V$, sodass gilt $g(x,y) = z \iff f(x,y,z) = 0 \forall (x,y) \in U, z \in V$.
g ist stetig differenzierbar. Dann ist g ein Homöomorphismus von U auf $(U \times V) \cap S$, denn $\varphi^{-1} : (x,y,z) \to (x,y)$ ist eine stetige Umkehrabbildung.
Also ist φ Parametrisierung von S um p.

$$\varphi : U \to (U \times V) \cap S, (x,y) \mapsto (x,y,g(x,y))$$

Dann ist S eine reguläre Fläche. Die Jacobimatrix von φ ist
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ g_x & g_y \end{pmatrix}$ und hat immer Rang 2.

Aufgabe (1b). Benutze hier $\triangle$ statt des Nabla-Symbols (vorerst).
Zu Zeigen: $T_pS = Kern(\triangle f(p))$.
Beweis: Sei $\varphi : U \to S$ irgendeine Parametrisierung um einen Punkt $p \in S$.
Jetzt ist $f \circ \varphi = 0$. Ableiten ergibt
$0 = \partial_q 0 = \partial_q (f \circ \varphi) = \partial_{\varphi(q)} f \cdot \partial_q \varphi = \triangle_p f \cdot \partial_q \varphi$.
Damit ist $T_pS = Bild(\partial_q \varphi) \subseteq Kern(\triangle_p f)$.
Da $\triangle_p f \neq 0$ ist, ist $dimKern \triangle_p f = 2, dimT_pS = 2$.
Also ist $Kern(\triangle_p f) = T_pS$.

Aufgabe (2a). K_n ist ein vollständiger Graph mit n Ecken, d.h. die Ecken von K_n sind paarweise durch eine Kante verbunden.
Zu zeigen: Für $n \leq 4$ ist K_n planar.

Zeige, indem einzelne Einbettungen für alle $n \leq 4$ gezeichnet werden.

Aufgabe (2b). **Behauptung:** Für $n \geq 5$ ist K_n nicht planar.
Beweis: Angenommen es gibt eien Einbettung von K_n in eine Ebene. Betrachte vier Ecken von K_n:
Eine weitere Ecke von K_n muss dann in a, b, c, d liegen, aber man kann sie dann nicht, mit A, B, C, D verbinden.

Aufgabe (3). Sei G ein Graph mit Ecken $p_1, \ldots, p_n$.
Für $i, j = 1, \ldots, n$ sei

$$A := ((a_{i,j}))_{i,j=1,\ldots,n} \qquad a_{i,j} := \begin{cases} 0, \text{ wenn keine Kante } p_i p_j \text{ in G} \\ 1, \text{ wenn Kante } p_i p_j \text{ in G existiert} \end{cases}$$

Die Matrix A heißt Adjazenzmatrix von G. **Zu zeigen:** Sei $G = K_n$ dann ist $n - 1$ der größte Eigenwert von A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{\text{1-Matrix}} - \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}^{\text{Einheitsmatrix}}$$

Die Eigenräume von $\mathbf{1}_n$ sind:

$$E_0 = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}]$$

Jeder Eigenwert λ von A mit zugehörigem eigenvektor von v erfüllt
$\mathbf{1}_n \cdot v = (A + I_n) \cdot v = Av + v = \lambda v + v = (\lambda + 1)v$, also ist $\lambda + 1$ EW von $\mathbf{1}_n$.
Damit sind die Eigenvektoren von A höchstens -1 oder $n - 1$, und da

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ n-1 \\ \vdots \\ n-1 \end{pmatrix}$$

Ist $n-1$ der größte EW von A.

Aufgabe (3b). **Zeige:** Für allgemeines G sind die Eigenvektoren von A nicht größer als $n-1$.
Beweis: Sei $x = (x_1 \dots x_n)^T$ Eigenvektor von G mit EW λ.
Sei weiter $i \in \{1, \dots, n\}$ sodass $|x_i| \geq |x_j|$ für alle j.
Sei oBdA $x_i > 0$, also $x_i \geq |x_j|$ für alle j. Aus $Ax = \lambda x$ folgt $(Ax)_i = \lambda x_i$:

$$\lambda x_i = (Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \leq (n-1) x_i,$$

Damit folgt $\lambda \leq n-1$.

Aufgabe (4). **Zu zeigen:** G ist Baum $\Longleftrightarrow$ G ist zusammenhängend aber besitzt keinen Kreis.
"$\Longrightarrow$": Sei G ein Baum. Dann ist G zusammenhängend.
Angenommen, G besitzt einen Kreis. Wenn man eine einzige Kante dieses Kreise entfernt, so bleibt der entstehende Graph zusammenhängend., denn jeden verbindenden Pfad in G, der durch diese Kante geht, können wir um den Kreis umleiten.

Formaler: Sei $p_0 \dots p_n = p_0$ ein Kreis.
Zwischen je zwei Ecken in G gibt es einen Weg $q = q_0 \dots q_n = q'$ in G. Ersetzen wir in diesem Weg jedes Vorkommen von $p_0 p_{n-1}$ durch $p_0 p_1 \dots p_{n-1}$ und $p_{n-1} p_0$ durch $p_{n-1} \dots p_0$ so finden wir einen Kantenzug in $G \setminus \{\overline{p_0 p_{n-1}}\}$ der q, q' verbindet.
Damit ist $G \setminus \{p_0 p_{n-1}\}$ zusammenhängend, also ist G kein Baun. Widerspruch!
"$\Longleftarrow$": Sei G zusammenhängend und besitze keinen Kreis.
Angenommen G ist *kein* Baum, also dass es eine Kante pp' gibt, nach deren Entfernung G noch zusammenhägend ist. Also $G \setminus \{\overline{pp'}\}$ zusammenhängend.
Dann gibt es einen Weg $p = p_0 \dots p_n = p'$ in $G \setminus \{\overline{pp'}\}$. Damit ist $p_0, \dots, p_n, p_0$ ein Kreis. Widerspruch.