

# Metamateriales

## XVIII Escuela de Verano en Física

Instituto de Ciencias Físicas

Wolf Luis Mochán Backal

### Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Electrodinámica . . . . .	5
<b>2. Teoría</b>	<b>6</b>
<b>3. Implementación</b>	<b>10</b>
<b>4. Resultados</b>	<b>10</b>

## 1. Introducción

Un meta-material es un material diseñado artificialmente con dos o más materiales, con propiedades determinadas por la geometría de las componentes y los periodos de disposición de los materiales en el arreglo. Los meta-materiales se definen como “*Un arreglo de elementos estructurales artificiales, diseñados para alcanzar propiedades electromagnéticas ventajosas e inusuales*”[1], esta definición es la adoptada en el *Virtual Institute for Artificial Electromagnetic Materials and Meta-materials*.

Análogo a los materiales usuales, las propiedades electromagnéticas de meta-materiales son determinadas por sus elementos constituyentes básicos, a los que se le denomina como meta-átomos, los cuales son objetos hechos de materiales usuales. Las propiedades de los meta-materiales pueden ser muy distintas a las de los materiales que los conforman y pueden llegar a ser muy exóticas y pueden ser especificadas escogiendo las formas, estructuras internas, tamaños, orientaciones mutuas, etc., de sus meta-átomos. Incluso sus repuestas individuales pueden ser controladas por señales externas e internas y por microprocesadores programables.[2]

Por ejemplo, si un meta-material tiene componentes metálicos, estos pueden presentar resonancias debidas a un movimiento oscilatorio colectivo de sus electrones de conducción, denominadas de acuerdo a sus características como plasmones de bulto, plasmones de superficie o plasmones localizados. La frecuencia de dichas oscilaciones se denomina como frecuencia de plasma  $\omega_p$ . Para estimar esta frecuencia, considere el modelo más simple de un conductor, un gas de electrones de densidad de número  $n_0$ , moviéndose libremente en un entorno positivamente cargado. Si debido

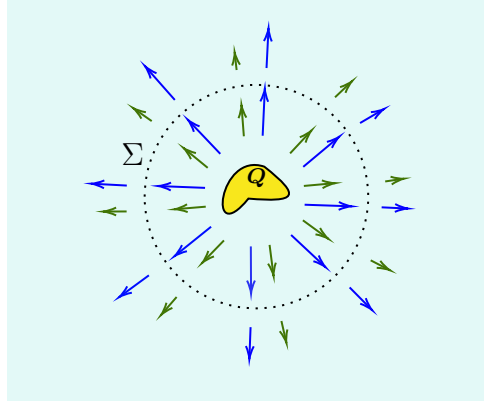


Figura 1: Representación de la acumulación de carga en una región  $\mathcal{R}$  específica dentro de un conductor homogéneo, rodeada por una superficie  $\Sigma$  ficticia sobre la cual se aplica la ley de Gauss al campo producido por  $Q$ , campo que produce una densidad de corriente que fluye a través de  $\Sigma$ . El flujo de carga modifica  $Q$  en el tiempo  $t$  produciendo las llamadas oscilaciones de plasma.

a algún efecto como una compresión o rarefacción del gas de electrones se produce una acumulación de carga  $Q$ , localizada en alguna región  $\mathcal{R}$ , esta producirá un campo eléctrico de Coulomb  $\vec{E}(\vec{r}) = Q\vec{r}/r^3$  ilustrado en la figura 1. De acuerdo a la segunda ley de Newton, los electrones obtienen una aceleración  $d\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -e\vec{E}(\vec{r}, t)$ , donde  $m$  y  $-e$  son la masa y la carga eléctrica del electrón acelerado. La aceleración de los electrones resulta en una corriente eléctrica dada por  $\frac{\partial \vec{j}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{n_0 e^2}{m} \vec{E}(\vec{r}, t)$ , como  $\vec{j}(\vec{r}, t) = -n_0 e \frac{d\vec{r}}{dt}$ . Integrando la ecuación diferencial de la corriente sobre una superficie que rodee completamente la carga y usando la ecuación de continuidad y la Ley de Gauss para el campo eléctrico obtenemos una ecuación diferencial para la carga,

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{4\pi n e^2}{m} Q, \quad (1)$$

la cual es una ecuación diferencial idéntica a la ecuación de un oscilador armónico simple como el que se ilustra en la imagen ??, cuya derivación se muestra en seguida,

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -k\vec{r} \\ m\vec{a} &= \vec{F} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -ky, \\ y(t) &= y_0 \cos(\omega t), \\ \omega^2 &= k/m, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\omega^2 y, \end{aligned} \quad (2)$$

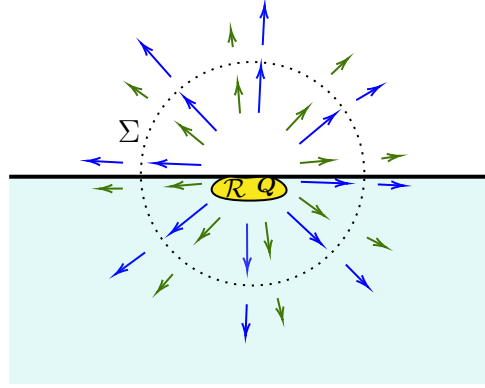


Figura 3: Region  $\mathcal{R}$  cargada en la superficie de un conductor semi-infinito. La carga  $Q$  produce un campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  (líneas azules) y esta una densidad de corriente (líneas verdes) la cual es inducida únicamente en el conductor.

con lo que se obtiene la frecuencia de plasma como,

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi ne^2}{m}. \quad (3)$$

Con un análisis análogo podemos obtener la frecuencia de un plasmón de superficie, considerando al cumulo de carga  $Q$  en una región  $R$  en la interfaz de un conductor semi-infinito como ilustra la imagen 3, la cual produce un campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  que induce corrientes en el conductor.

Usando la ecuación dinámica de la densidad de corriente podemos escribir la ecuación dinámica de la carga como para el plasmón de bulto, con la diferencia que la densidad de corriente en este caso atraviesa la mitad de la superficie  $\Sigma$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}Q &= - \int_{\Sigma} d\vec{a} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}, \\ &= ne \int_{\Sigma/2} d\vec{a} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}, \\ &= \frac{ne^2}{m} \int_{\Sigma} d\vec{a} \cdot \vec{E}, \\ &= - \frac{2\pi ne^2}{m} Q, \end{aligned} \quad (4)$$

obteniendo que la frecuencia de una plasmón de superficie es,

$$\omega_{sp}^2 = \frac{2\pi ne^2}{m} = \frac{\omega_p^2}{m}. \quad (5)$$

Como último ejemplo de la misma respuesta en las cargas eléctricas de un sistema, considérese una esfera metálica la cual es perturbada al desplazar todos sus electrones en la dirección  $\vec{\zeta}$  lo cual induce una polarización  $\vec{\mathcal{P}}$  en la misma y un campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , como ilustra la siguiente figura,

El efecto del desplazamiento de los electrones hacia uno de los hemisferios de la esfera y la deficiencia en el otro, es la polarización del sistema que se define

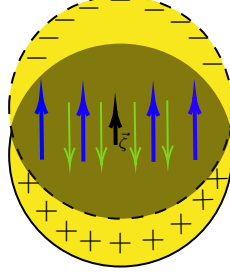


Figura 4: Esfera metálica cuyos electrones han sido desplazados en la dirección de  $\vec{\zeta}$  (flecha negra), dejando una ausencia de carga en la dirección opuesta induciendo polarización en el sistema  $\vec{\mathcal{P}}$  (flechas verdes) y una carga superficial la cual produce un campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ .

como el momento dipolar por unidad de volumen,  $\vec{\mathcal{P}} = -ne\vec{\zeta}$  y la inducción de densidad de carga superficial igual a  $\sigma = \vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{n}$  la cual produce un campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\left(\frac{4\pi}{3}\vec{\mathcal{P}}\right)$ . El campo acelera las cargas de acuerdo a  $m\frac{d^2\vec{\zeta}}{dt^2} = -e\vec{E}(\vec{r}, t)$ , donde al campo lo podemos reescribir como  $\vec{E} = -\frac{4\pi e^2}{3m}\vec{\zeta}$ , sustituyéndolo en la ecuación diferencial de  $\vec{\zeta}$  de convierte en,

$$\frac{d^2\vec{\zeta}}{dt^2} = -\frac{4\pi e^2}{3m}\vec{\zeta} \quad (6)$$

de la cual obtenemos la frecuencia de las oscilaciones de carga en una esfera, a las que se les denominan como pasmón polaritón, igual a

$$\omega_d^2 = \frac{4\pi ne^2}{3m} = \frac{\omega_p}{3}. \quad (7)$$

Un ejemplo excepcional de las propiedades que emergen al generar *metamateriales* es la copa de Lycurgo, una copa de cristal tallada en la época romana tardía, decorada con un friso que muestra escenas del mito del Rey Lycurgo. La copa que data del siglo IV, D.C., se produjo a partir de una pieza en bruto de vidrio soplado de unos 15mm de espesor, las figuras se cortaron y rectificaron y se unieron a la pared del recipiente mediante pequeños puentes de vidrio. A parte del trabajo artístico realizado en la decoración, la copa es de gran interés por las propiedades ópticas que muestra. El vidrio aparece de un rojo-vino profundo cuando la luz lo atraviesa y de un verde opaco cuando la luz que llega a nuestros ojos es reflejada por la superficie de la copa, como muestra la imagen 5. A este fenómeno se le denomina *dicroísmo*, y de los artefactos de vidrio romano encontrado, la copa es la que muestra dicho efecto más intensamente. [5] Estudios de la composición del vidrio dan lugar a la conclusión de que tales propiedades son causadas por la presencia de finas partículas de oro dispersadas, probablemente una aleación con plata. Con estudios de microscopía de transmisión de electrones, TEM, por sus siglas en inglés, se pudieron determinar tamaños de las partículas de  $\approx 10nm$ . Actualmente se ha encontrado que contiene partículas de diferentes metales y de materiales no metálicos.



Figura 5: La copa de Licurgo, copa fabricada en la Roma tardía del siglo IV D.C., cuya fabricación resultante muestra propiedades ópticas excepcionales. Taza para beber de vidrio verde y rojo cubierto con varias escenas que representan la muerte del rey Licurgo; borde montado con una banda de adorno de hoja plateada dorada, más pie plateado dorado con hojas de parra caladas. © The Trustees of the British Museum.

### 1.1. Electrodinámica

La descripción de los fenómenos electromagnéticos es provista por las ecuaciones de Maxwell las cuales describen la propagación de los campos electromagnéticos en el vacío y en la materia, su interacción con las cargas eléctricas de los materiales, y la interacción entre las mismas cargas, las ecuaciones en forma diferencial son,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho_{ex}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{ex} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (8)$$

donde  $\mathbf{J}_{ex}$  y  $\rho_{ex}$  son la densidad de corriente y densidad de carga externas, respectivamente. Por ejemplo, el siguiente sistema que consiste de circuitos de alambre a los que se aplica un campo magnético a lo largo de la dirección perpendicular al plano en el que está el circuito y un campo eléctrico que reside en el mismo plano y cuyo efecto sobre los circuitos es el movimiento de sus cargas eléctricas, como ilustra la figura ??.

Los efectos en la materia por perturbaciones externas es descrito por sus propiedades intrínsecas tales como la permitividad  $\epsilon(\vec{k}, \omega)$ , la cual describe cuánto es afectado un material al aplicar un campo eléctrico y la permeabilidad  $\mu(\vec{k}, \omega)$ , que describe el efecto cuando se aplican campos magnéticos. A estas cantidades se les denomina funciones respuesta del sistema y pueden o no depender de  $\vec{k}$  el vector de onda la cual es y  $\omega$  la frecuencia de la perturbación, en el espacio real estas dependencias son espacial y temporal respectivamente. Las diferentes formas de estas funciones dan pie a la clasificación de la materia, por ejemplo, un medio con permitividad constante  $\epsilon$  en todas las direcciones es un medio isotrópico homogéneo, los

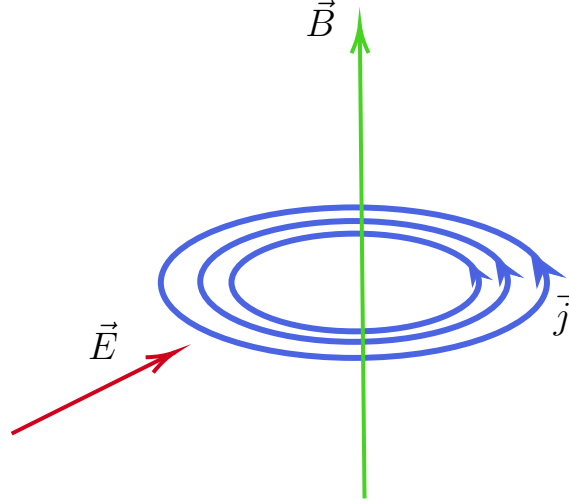


Figura 6: Circuitos de lazos de metal bajo la aplicación de un campo magnético  $\vec{B}$  en la dirección perpendicular a al plano del circuito y de un campo eléctrico  $\vec{E}$  que reside en el plano del circuito. El efecto de la aplicación de los campos sobre los alambres de metal es el movimiento de cargas eléctricas, la densidad de corriente  $\vec{j}$ .

medios cuyas funciones respuesta dependen de la dirección y/o del punto en que se realiza la medición, se les clasifica como anisotrópicos inhomogéneos.

La propagación de ondas electromagnéticas en los medios es descrita por estas funciones respuesta, por ejemplo, consideremos un medio homogéneo con permitividad constante  $\epsilon$ , la propagación de la onda está dada por la relación entre el vector de onda y la frecuencia, la relación de dispersión de la onda al propagarse en el medio como se ilustra en la imagen 7, la cual es amplificada por el factor  $\sqrt{\epsilon}$  con respecto a la relación de dispersión en el vacío.

## 2. Teoría

Las propiedades ópticas de estos materiales están determinadas por su composición y geometría. Propiedades como las relaciones de dispersión de los modos electromagnéticos que se propagan a través del material en un sistema semi-infinito, las amplitudes de reflexión y transmisión, y relaciones de dispersión de modos electromagnéticos en la superficie de un sistema bordeado pueden ser expresadas en términos del operador dieléctrico macroscópico a través de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell en dicho material.

Las ecuaciones de Maxwell con las cuales se asume una descripción macroscópica de los campos en un medio son

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho_{ex}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{ex} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (9)$$

donde  $\mathbf{J}_{ex}$  y  $\rho_{ex}$  son la densidad de corriente y densidad de carga externas, respectivamente. Y para calcular respuestas ópticas de un sistema se define al operador

$\zeta$

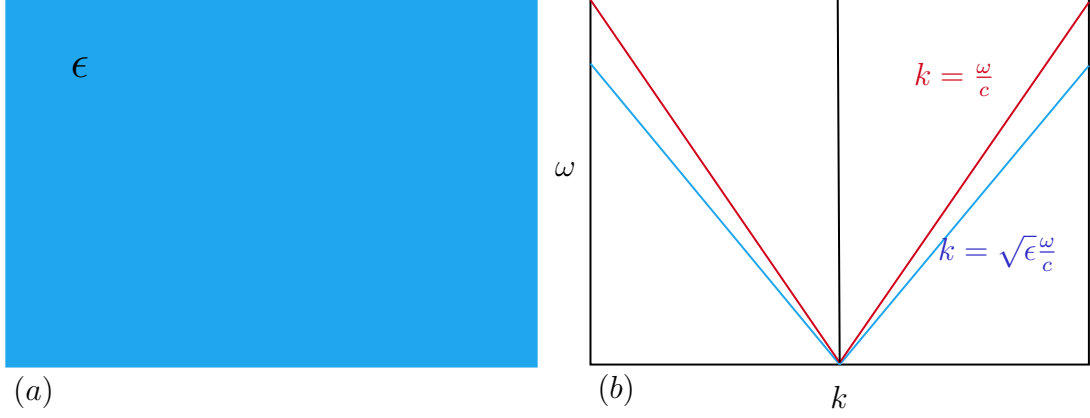


Figura 7: (a) Medio homogéneo con permitividad constante  $\epsilon$ , (b) relaciones de dispersión de la propagación de la onda, línea roja propagación en el vacío, línea azul propagación dentro del material.

dieléctrico  $\hat{\epsilon}_M$  a través de la relación

$$\mathbf{D}_a = \hat{\epsilon}_M \mathbf{E}_a \quad (10)$$

donde  $\mathbf{D}_a$  y  $\mathbf{E}_a$  representan los promedios macroscópicos del campo desplazamiento y eléctrico, respectivamente.

Sin embargo es posible definir  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{H}$  para incluir fluctuaciones microscópicas y que sigan obedeciendo las ecuaciones de Maxwell (9).

Para poder describir la respuesta óptica de un sistema que incluye fluctuaciones locales de los campos inducidas por inhomogeneidades del sistema, consideramos primero una respuesta dieléctrica,  $\hat{\epsilon}$ , microscópica

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E}, \quad (11)$$

la cual acopla las fluctuaciones locales de los campos  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  totales y a la cual se le aplica un procedimiento de promediación para relacionar  $\hat{\epsilon}$  con  $\hat{\epsilon}_M$ , de tal manera que las fluctuaciones microscópicas sean incorporadas en la respuesta macroscópica. Para tal proposito seguimos el procedimiento descrito en [3], por Mochán et al.

Formalmente se definen los operadores

$$\hat{P}_a, \quad \hat{P}_f = \hat{1} - \hat{P}_a, \quad (12)$$

los cuales extraen la componente promedio  $F_a = \hat{P}_a F$  y fluctuante  $F_f = \hat{P}_f F$  de una función  $F = F_a + F_f$  arbitraria. Tales operadores son idempotentes

$$\hat{P}_a^2 = \hat{P}_a, \quad \hat{P}_f^2 = \hat{P}_f, \quad (13)$$

$$\hat{P}_a \hat{P}_f = \hat{P}_f \hat{P}_a = 0, \quad (14)$$

lo cual significa que son operadores de proyección.

Consideremos un campo eléctrico consistente de una parte promedio y una parte fluctuante

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_a \\ \mathbf{E}_f \end{pmatrix}, \quad (15)$$

representado como en la siguiente imagen reescribiendo (11) proyectada en los subespacios  $a$  y  $f$ ,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_a \\ \mathbf{D}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_{aa} & \hat{\epsilon}_{af} \\ \hat{\epsilon}_{fa} & \hat{\epsilon}_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_a \\ \mathbf{E}_f \end{pmatrix}, \quad (16)$$

donde se ha definido

$$\hat{O}_{\alpha\beta} \equiv \hat{P}_\alpha \hat{O} \hat{P}_\beta, \quad \alpha, \beta = a, f, \quad (17)$$

para cualquier operador.

Para calcular la respuesta macroscópica del sistema desacoplamos  $\mathbf{D}_a$  y  $\mathbf{E}_f$  de la ecuación de campos completos (16). Usando las ecuaciones de Maxwell para los campos microscópicos se encuentra una relación entre  $\mathbf{E}_a$  y  $\mathbf{E}_f$ ,

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \frac{4\pi i\omega}{c^2} \mathbf{j}_{ex} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D} \\ \left[ \hat{\epsilon}_{ff} - \frac{c^2}{\omega^2} (\nabla \times \nabla \times)_{ff} \right] \mathbf{E}_f &= \frac{4\pi}{i\omega} \mathbf{j}_f^{ex} - \hat{\epsilon}_{fa} \mathbf{E}_a \end{aligned} \quad (18)$$

asumiendo que  $\mathbf{j}_f^{ex} = 0$ , sustituimos  $\mathbf{E}_f$  en la ecuación (16),

$$\mathbf{D}_a = \left( \hat{\epsilon}_{aa} - (\hat{\epsilon}_{af} (\hat{\epsilon}_{ff} - \frac{c^2}{\omega^2} (\nabla \times \nabla)_{ff})^{-1} \hat{\epsilon}_{fa}) \right) \mathbf{E}_a, \quad (19)$$

comparando con la ecuación de campos macroscópicos obtenemos que

$$\hat{\epsilon}_M = \hat{\epsilon}_{aa} - \hat{\epsilon}_{af} \left[ (\hat{\epsilon}_{ff} - \frac{c^2}{\omega^2} (\nabla \times \nabla)_{ff}) \right]^{-1} \hat{\epsilon}_{fa}, \quad (20)$$

la respuesta macroscópica de un sistema está dada por el promedio de su respuesta microscópica, más una corrección debida al acoplamiento entre las componentes fluctuante y promedio de los campos, éste resultado se presume exacto.

Para analizar el resultado de (20) nos restringimos a una longitud de escala característica de las fluctuaciones mucho menor a la longitud de onda. Convenientemente se definen los operadores de proyección longitudinal

$$\hat{P}^L = \hat{\nabla} \hat{\nabla}^{-2} \hat{\nabla} \times, \quad (21)$$

y transversal

$$\hat{P}^T = -\hat{\nabla} \times \hat{\nabla}^{-2} \hat{\nabla} \times, \quad (22)$$

tales que extraen las partes irrotacional  $\mathbf{F}^L = \hat{P}^L \mathbf{F}$  y solenoidal  $\mathbf{F}^T = \hat{P}^T \mathbf{F}$  de un campo vectorial arbitrario. Estos operadores cumplen las siguiente propiedades

$$\begin{aligned} \hat{P}^T \hat{P}^T &= \hat{P}^T, & \hat{P}^L \hat{P}^L &= \hat{P}^L, \\ \hat{P}^T \hat{P}^L &= \hat{P}^L \hat{P}^T = 0, & \hat{P}^T + \hat{P}^L &= \hat{1}, \end{aligned} \quad (23)$$



y communtan con  $\hat{P}_f$  y  $\hat{P}_a$ .

Al proyectar  $\hat{\mathcal{W}}^{-1} = \left[ (\hat{\epsilon}_{ff} - \frac{c^2}{\omega^2} (\nabla \times \nabla \times)_{ff}) \right]^{-1}$  en los subespacios longitudina y transversal

$$\hat{\mathcal{W}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_{LL} & \mathcal{W}_{LT} \\ \mathcal{W}_{TL} & \mathcal{W}_{TT} \end{bmatrix}^{-1},$$

y reescribiendo el termino de operadores nabla como,  $(\nabla \times \nabla \times)_{ff} = \nabla^2 \hat{P}^T \hat{P}_f$ , tenemos

$$\left[ (\hat{\epsilon}_{ff} - \frac{c^2}{\omega^2} (\nabla \times \nabla \times)_{ff}) \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\epsilon}_{ff}^{LL} & \hat{\epsilon}_{ff}^{LT} \\ \hat{\epsilon}_{ff}^{TL} & \hat{\epsilon}_{ff}^{TT} + \frac{c^2}{\omega^2} \nabla^2 \hat{P}^T \hat{P}_f \end{bmatrix}^{-1}. \quad (24)$$

La manera en que obtenemos las componentes de la matriz es la siguiente, definimos una matriz y su inversa

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix},$$

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix} = \hat{M}^{-1},$$

la cuales deben cumplir con las ecuaciones

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{a} + \hat{B}\hat{c} &= 1, \\ \hat{A}\hat{b} + \hat{B}\hat{d} &= 0, \\ \hat{C}\hat{a} + \hat{D}\hat{c} &= 0, \\ \hat{C}\hat{b} + \hat{D}\hat{d} &= 1, \end{aligned} \quad (25)$$

de las cuales uno despeja

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \hat{A}^{-1}(1 - \hat{B}\hat{D}^{-1}\hat{C}\hat{A}^{-1})^{-1}, \\ \hat{b} &= \hat{C}^{-1}(1 - \hat{D}\hat{B}^{-1}\hat{A}\hat{C}^{-1})^{-1}, \\ \hat{c} &= -\hat{D}^{-1}\hat{C}\hat{A}^{-1}(1 - \hat{B}\hat{D}^{-1}\hat{C}\hat{A}^{-1})^{-1}, \\ \hat{d} &= -\hat{B}^{-1}\hat{A}\hat{C}^{-1}(1 - \hat{D}\hat{B}^{-1}\hat{A}\hat{C}^{-1})^{-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Para usar este desarrollo definimos  $\hat{M} = \hat{\mathcal{W}}$  por lo que los elementos respectivos son

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{\epsilon}_{ff}^{LL}, \\ \hat{B} &= \hat{\epsilon}_{ff}^{LT}, \\ \hat{C} &= \hat{\epsilon}_{ff}^{TL}, \\ \hat{D} &= \hat{\epsilon}_{ff}^{TT} + \frac{c^2}{\omega^2} \nabla^2 \hat{P}^T \hat{P}_f, \end{aligned}$$

y asumiendo que  $\lambda^2/l^2 \gg ||\hat{\epsilon}||$  donde  $l$  es la longitud de escala de las fluctuaciones, y que  $||(\omega^2/c^2)\hat{\nabla}^{-2}\hat{P}_f|| \approx l^2/\lambda^2$ , entonces el segundo termino del elemento  $\hat{D}$  es mucho mayor que el primero. Para hacer el cálculo más explícito lo reescribimos como

$$\frac{c^2}{\omega^2} \nabla^2 \hat{P}^T \hat{P}_f (1 + \frac{\omega^2}{c^2} \nabla^{-2} \hat{P}^T \hat{P}_f \hat{\epsilon}_{ff}^{TT})$$

y al sustituir en las ecuaciones (26), obtenemos

$$\begin{aligned} \left[ (\hat{\epsilon}_{ff} - \frac{c^2}{\omega^2} (\nabla \times \nabla \times)_{ff}) \right]^{-1} &= \begin{bmatrix} (\hat{\epsilon}_{ff}^{LL})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ + \frac{\omega^2}{c^2} &\begin{bmatrix} (\hat{\epsilon}_{ff}^{LL})^{-1} (\hat{\epsilon}_{ff}^{LT}) \hat{\nabla}^{-2} (\hat{\epsilon}_{ff}^{TL}) (\hat{\epsilon}_{ff}^{LL})^{-1} & -(\hat{\epsilon}_{ff}^{LL})^{-1} (\hat{\epsilon}_{ff}^{LT}) \hat{\nabla}^{-2} \\ -\hat{\nabla}^{-2} (\hat{\epsilon}_{ff}^{TL}) (\hat{\epsilon}_{ff}^{LL})^{-1} & \nabla^{-2} \hat{P}^T \hat{P}_f \end{bmatrix} + \dots, \end{aligned} \quad (27)$$

en los casos en que  $l \ll \lambda$ , solo nos quedamos con el primer termino de la expansión y sustituyéndolo en (20) la reescribimos como

$$\hat{\epsilon}_M = \hat{\epsilon}_{aa} - \hat{\epsilon}_{af} (\hat{\epsilon}_{ff}^{LL})^{-1} \hat{\epsilon}_{fa}. \quad (28)$$

### 3. Implementación

### 4. Resultados

### Referencias

- [1] Virtual Institute for Artificial Electromagnetic Materials and Meta-materials. <https://www.metamorphose-vi.org/>
- [2] An introduction to metamaterials and nanophotonics / Constantin Simovski and Sergei Tretyakov, Department of Electronics and Nanoengineering, School of Electrical Engineering, Aalto University, Finland. <http://www.cambridge.org/9781108492645>
- [3] Electromagnetic response of systems with spatial fluctuations. I. General formalism. W. Luis Mochán and Rubén G. Barrera. Phys. Rev. B 32, 4984 – Published 15 October 1985
- [4] Mochán W.L., Plasmons. In: Saleem Hashmi (editor-in-chief), Reference Module in Materials Science and Materials. Engineering. Oxford: Elsevier; 2016. pp. 1-13. ISBN: 978-0-12-803581-8. Copyright © 2016 Elsevier Inc. unless otherwise stated. All rights reserved.
- [5] Barber DJ, Freestone IC (1990) An investigation of the origin of the color of the Lycurgus cup by analytical transmission electron-microscopy. Archaeometry 32:33–45