ANALIZA I

Metrički prostori

usm

- Metrika (rastojanje) na skupu $X \neq \emptyset$ je svako preslikavanje $d: X^2 \to \mathbb{R}$ za koje važi:
  1) $d(x,y) \geq 0 \to d$ je nenegativan realan broj
  2) $d(x,y) = d(y,x) \to$ simetrija
  3) $d(x,y) = 0 \iff x = y$
  4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \to$ nejednakost trougla

- Metrički prostor - uređen par (X,d) gde je X skup nosač prostora
- Potprostor (Y,d) prostora $(X,d) \to Y \subset X,\ Y \neq \emptyset$

usm

$$d_1(x,y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + \ldots + |y_n - x_n|$$

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \to \text{euklidska metrika} \Big\} (\mathbb{R}^n, d) \to \text{euklidski n-dimenzionalni prostor}$$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} \quad (X,d) \to \text{diskretan metrički prostor}$$

- Ograničen skup $A \subset X \to \{d(a,b) : a,b \in A\}$ je ograničen u $\mathbb{R}$ skupu
- Dijametar skupa $A \to d(A) = \sup\{d(a,b) : a,b \in A\} \to$ Ako je A ograničen skup u X

usm

- Otvorena lopta $\to L(\overset{\text{centar}}{a}, \underset{\text{poluprečnik}}{r}) = \{x \in X : d(a,x) < r\}$

- Zatvorena lopta $\to L(a,r) = \{x \in X : d(a,x) \leq r\}$
- Otvoren skup $\emptyset \neq A \subset X \to (\forall a \in A)(\exists r \in \mathbb{R}^+) L(a,r) \subset A$
- Zatvoren skup $\to C_X(A)$
- Neprazan otvoren skup u metričkom prostoru (X,d) je unija neke familije otvorenih lopti iz (X,d)
- Topologija $(X,d) \to$ familija svih otvorenih skupova iz (X,d)

- Skup V je okolina tačke a u X ako $(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+) L(a,\varepsilon) \subset V \subset X$
- Svake 2 tačke u m.p. se mogu odvojiti disjunktivnim okolinama
- X je okolina svake svoje tačke u prostoru X
- U je otvoren skup akko je okolina svake svoje tačke

usm

- Klasifikacija tačaka:

I Unutrašnja tačka → $(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+) L(a,\varepsilon) \subset A$

→ $\mathring{A}$ - skup svih unutrašnjih tačaka skupa A

→ najveći otvoren skup u A

II Adherentna tačka → $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) L(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

→ $\bar{A}$ - adherencija, zatvorenje skupa

→ najmanji zatvoren nadskup skupa A

→ $\bar{A} = A \cup A'$

III Tačka nagomilavanja → $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) L(a,\varepsilon) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$

svaka ε-okolina tačke a ima neprazan presek sa A izuzev te tačke a

→ A' - skup svih tačaka nagomilavanja skup A

IV Izolovana tačka → $(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+) L(a,\varepsilon) \cap A = \{a\}$

→ nikad nije tačka nagomilavanja

→ $i(A)$ - skup izolovanih tačaka skupa A

V Rubna tačka → $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(L(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge L(a,\varepsilon) \cap C_x(A) \neq 0)$

→ A^* - skup svih rubnih tačaka skupa A

VI Spoljašnja tačka → $(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+) L(a,\varepsilon) \cap A = \emptyset$

Konvergencija nizova

- Realni niz - preslikavanje $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
- Gornje ograničenje niza $\to G \in \mathbb{R}$ $a_n \leq G$ (G je broj), za svako $n \in \mathbb{N}$
- Donje ograničenje niza $\to g \in \mathbb{R}$ $a_n \geq g$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- Ako postoje g i G onda je niz ograničen

ism
- Niz $\{a_n\} \subset X$ ima graničnu vrednost a ako:

  $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to a_n \in L(a, \varepsilon))$ → topološka definicija

  $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to d(a_n, a) < \varepsilon)$ → metrička definicija

  tj. počev od n_0 svi članovi niza se nalaze u ε-okolini tačke a

  ~ $a \in \mathbb{R}$

  $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon)$

  ~ $z \in \mathbb{C}$

  $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \to |z_n - z| < \varepsilon)$

- Za $x \in X$ kažemo da je g.v. niza x_n akko se van proizvoljne okoline tačke x nalazi konačno mnogo članova niza (a unutar beskonačno mnogo)
- Ako niz ima graničnu vrednost, on je konvergentan
- Ako je niz ograničen i ima jednu tačku nagomilavanja, on je konvergentan i ta tačka nagomilavanja je njegova granična vrednost
- Konvergentan niz u (X, d) je ograničen, i njegova g.v. je jednoznačno određena

- Stacionaran niz $\to (\forall n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_1)(a_n = a)$ $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ je konačan skup $\to d(a_n, a) = 0$
- Konstantan niz $\to a_n = a$ za $\forall n \in \mathbb{N}$

ism
- Tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$:

  $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(n \geq m \wedge a_n \in L(a, \varepsilon))$
- U okolini tačke nagomilavanja se nalazi beskonačno mnogo članova niza, a van neodređen broj
- Za svaku V okolinu tačke nagomilavanja a niza $\{a_n\}$ postoji beskonačan skup $M \subset \mathbb{N}$ tako da je $(\forall m \in M)$ $a_m \in V$

usm
- Ako niz ima graničnu vrednost u metričkom prostoru X, onda je ta granična vrednost jedina tačka nagomilavanja tog niza

- Tačka a je tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ akko postoji podniz niza $\{a_n\}$ koji konvergira ka a

usm
- Skup svih tačaka nagomilavanja niza $\{a_n\} \subset X$ je zatvoren u (X,d):
  * limes superior ($\overline{\lim}\, a_n / \limsup a_n$) $\rightarrow$ najveća tačka nagomilavanja niza
  * limes inferior ($\underline{\lim}\, a_n / \liminf a_n$) $\rightarrow$ najmanja tačka nagomilavanja niza

- Ako niz konvergira ka a, svaki njegov podniz konvergira ka a

- Ako niz nema g.v. on divergira:
  * u užem smislu $\rightarrow (\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow a_n > K) \rightarrow a_n \rightarrow \infty$
  $(n \to \infty)$ $\rightarrow (\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \rightarrow a_n < K) \rightarrow a_n \rightarrow -\infty$
  * u širem smislu (ako ne divergira u užem

usm
- Osobine konvergentnih nizova:
  * $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ * $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

  * za nizove $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, $a_n \leq b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow a \leq b$

  * $a_n \leq b_n \leq c_n \wedge \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ (teorema o ukliještenju)
  * Ako je $\{b_n\}$ niz prirodnih brojeva i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ onda je i $\lim\limits_{n\to\infty} a_{b_n} = a$

- Princip monotonije: Svaki monotono neopadajući (rastući) niz koji je ograničen sa gornje strane konvergira svom supremumu, a svaki monotono nerastući (opadajući) niz konvergira svom infimumu

- Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$ $\boxed{\lim\limits_{n\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$ $\boxed{\lim\limits_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}} = e}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$

- Ako niz $\{a_n\}$ $(a_n>0)$ konvergira ka a $(a>0)$, tada i niz $\{\ln a_n\}$ konvergira ka broju $\ln a$
- Ako niz $\{a_n\}$ konvergira ka a, tada niz $\{e^{a_n}\}$ konvergira ka e^a
- Ako niz $\{a_n\}$ $(a_n\geq 0)$ konvergira ka a, niz $\{\sqrt[k]{a_n}\}$ $(k\in\mathbb{N})$ konvergira ka $\sqrt[k]{a}$

* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ * $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=\begin{cases}0, & |q|<1\\ 1, & q=1\\ \infty, & q>1\end{cases}$ ($q\leq -1\to$ nema g.v.) * $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$

* $a>0\to\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ * $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ * $\alpha\in\mathbb{R}, a>1\to\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{a^n}=0$

* $const<\ln n<n^\alpha<a^n<n!<n^n$ (brzina kojom teže)
* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to$ rastući niz
  $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\to$ opadajući niz

- Niz umetnutih intervala:

* To je niz zatvorenih intervala $\{[a_n,b_n]\}$ za koji važi:
  1) Svaki sledeći se nalazi u prethodnom intervalu
     $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots\supset[a_n,b_n]\supset\ldots$
  2) Dužina intervala teži ka nuli
     $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

* Ako za niz zatvorenih intervala važi:
  1) $\to\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x\leq b\}$ gde je $a=\sup\{a_n: n\in\mathbb{N}\}$, $b=\inf\{b_n: n\in\mathbb{N}\}$
  1), 2) $\to$ tada postoji samo 1 broj koji pripada svim intervalima

usm

- Bolcano-Vajerštrasova teorema:
  Svaki ograničen niz ima bar jednu tačku nagomilavanja

- Iz svakog ograničenog niza se može izdvojiti konvergentan podniz

Kompletni metrički prostori

usm
- Niz je Košijev u metričkom prostoru ako:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow d(a_{n+p}, a_n) < \varepsilon)$$

- Ako je niz konvergentan u metričkom prostoru, on je u tom prostoru i Košijev
- Svaki Košijev niz u (X,d) je ograničen u tom prostoru (obrnuto ne mora da važi)
- Ako neki podniz Košijevog niza konvergira ka a, tada i taj niz konvergira ka a

- Metrički prostor je kompletan ako svaki Košijev niz u njemu konvergira (skupovi $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$)
- Zatvoren potprostor kompletnog prostora je kompletan
- Potprostor kompletnog prostora ne mora biti kompletan (skupovi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$)

usm
- Ako je $f: X \to X$, tada je tačka $x \in X$ fiksna (nepokretna) tačka za f, ako važi $f(x) = x$

usm
- Za preslikavanje $f: X \to Y$ metričkog prostora (X, d_1) u metrizabilni prostor (Y, d_2) kažemo da vrši kontrakciju ako postoji realan broj $\lambda \in (0,1)$ (↳ koeficijent kontrakcije) tako da za svako $x_1, x_2 \in X$ važi:

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda \, d_1(x_1, x_2)$$

usm
- Banahova teorema: Ako je (X,d) kompletan metrički prostor i $f: X \to X$ kontrakcija sa koeficijentom λ, tada postoji isključivo jedna fiksna tačka $a \in X$ preslikavanja f

* Metrizabilni prostor → metrički prostor sa loptama

Granična vrednost funkcije

usm

- A je <u>granična vrednost funkcije</u> u tački a ako
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(f(L(a,\delta) \cap (D \setminus \{a\})) \subset L(A,\varepsilon))$

USM

* δ zavisi od ε

pot.n. skupa D

tj. za svaku ε okolinu tačke A, postoji δ-okolina tačke a koja se cela, izuzev tačke a, preslikava u ε okolinu

- Funkcija <u>ne mora da bude definisana u tački a</u>, i A ne mora da bude $f(a)$
  * primer: $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ → ima g.v. u nuli, a nije definisana u nuli

- Jednostrane g.v.: * leva gr.vrednost → $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = A$ $\quad E = (-\infty, a)$
  * desna gr.vrednost → $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A$ $\quad E = (a, +\infty)$

usm

- Ako f-ja ima g.v. u tački a:
  1) ima <u>bar jednu jednostranu g.v.</u> koja je jednaka A
  2) <u>ima obe jednostrane g.v. i važi</u> $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

- Funkcija $f: D \to \mathbb{R}$ divergira: * kada $x \to a$ akko
  $(\forall K \in \mathbb{R}^{\pm})(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \setminus \{a\})(x \in L(a,\delta) \Rightarrow f(x) \gtrless K)$
  * kada $x \to \pm\infty$
  $(\forall K \in \mathbb{R}^{\pm})(\exists \Delta \in \mathbb{R}^{\pm})(\forall x \in D)(x \gtrless \Delta \Rightarrow f(x) \gtrless K)$

- Funkcija ima g.v. kada $x \to \pm\infty$ ($\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = A$) ako:
  $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^{\pm})(\forall x \in D)(x \gtrless \Delta \Rightarrow f(x) \in L(A,\varepsilon))$

usm

- <u>Hajneova teorema</u>: Ako imamo f-ju $f: D \to Y$, $D \subset X$, onda $f(x) \to A \in Y$, $x \to a \in X$ ~~akko~~ akko za svaki niz $\{x_n\} \subset D \setminus \{a\}$ koji konvergira ka a, sledi da niz $\{f(x_n)\}$ konvergira ka A

- Beskonačno velika veličina: * $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

  * $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \rightarrow$ g je BVV višeg reda od f

  * $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = C \rightarrow$ BVV istog reda

    ↳ $C = 1 \rightarrow$ ekvivalentne BVV

- Beskonačno mala veličina: * $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

  * $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \rightarrow$ f je BMV višeg reda od g

  * $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = C \rightarrow$ BMV istog reda

    ↳ $C = 1 \rightarrow$ ekvivalentne BMV

Neprekidnost funkcije

usm

- Funkcija je neprekidna u tački $a \in D$ ako
$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in L(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in L(f(a),\varepsilon))$

- Ako je $a \in D$ izolovana tačka, funkcija je neprekidna u njoj, ali u njoj nema graničnu vrednost
- Ako je f-ja neprekidna u a, ne mora da postoji g.v. u a → USM

- Da bi funkcija bila neprekidna u a, mora da bude definisana u a

- G.V./Neprekidnost:
1) za graničnu vrednost važi da je a tačka nagomilavanja za D, a za neprekidnost važi da je funkcija definisana u $a \in D$
2) kod granične vrednosti f preslikava loptu $L(a,\delta)$ bez centra u $L(A,\varepsilon)$, a kod neprekidnosti f preslikava loptu $L(a,\delta)$ u $L(f(a),\varepsilon)$

- Ako je a tačka nagomilavanja za D, i f-ja je definisana u a, onda mora da važi $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ da bi ta funkcija bila neprekidna u a

- Ako f-ja ima jednostranu graničnu vrednost u a, neprekidna je u a sa jedne strane ukoliko je ta g.v. jednaka sa $f(a)$
- Funkcija je neprekidna u a akko je neprekidna u njoj i sa leve i sa desne strane

- Funkcija je neprekidna nad $[a,b]$ akko je:
  * neprekidna u svakoj tački (a,b)
  * u tački a neprekidna sa desne strane
  * u tački b neprekidna sa leve strane

- Realni niz $(\mathbb{N} \to \mathbb{R})$ je neprekidna funkcija

- Vrste prekida:

I → Prividan prekid → $\lim_{x\to a} f(x)$ postoji (i uglavnom nije jednak sa $f(a)$)

→ Skok → postoje leva i desna g.v. ali nisu jednake

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a^-) \neq f(a^+) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

II svi prekidi koji nisu prve vrste su prekidi druge vrste

- Ako je g neprekidna u a, a f neprekidna u $g(a)$, onda je $h = f\circ g$ neprekidna u a
- Ako su f i g neprekidne, i $h = f\circ g$ je neprekidna f-ja
- Ako je $\lim_{x\to a} g(x) = \alpha$ i ako je f neprekidna u α → $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(\alpha)$

- Ako je $f(a) > c$, a f je neprekidna f-ja, onda postoji okolina δ tačke za čiju svaku tačku x važi $f(x) > c$

- Skup A je kompaktan u (X, d) ako: za svaki niz $\{x_n\} \subset A$ postoji t.n. $a \in A$ (kompaktan skup u $\mathbb{R}$ je zatvoren i ograničen)
- Ako je f-ja $f: [a,b] \to Y$ neprekidna nad $[a,b]$ ona je nad $[a,b]$ i ograničena
- Ako je $f: D \to Y$, $D \subset X$ neprekidna funkcija i ako je D kompaktan u (X, d_X), tada je f ograničena f-ja ((X,d_X), (Y,d_Y) su metrički prostori)
- Ako je $f: D \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija nad kompaktnim skupom D, tada $f(x)$ dostiže najmanju i najveću vrednost nad D

- Ako je $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna nad $[a,b]$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$ (puta), tada u (a,b) postoji bar jedna nula funkcije f
- Ako je $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna nad $[a,b]$ i ako je $f(a) \neq f(b)$, onda ona u tom intervalu uzima sve vrednosti između $f(a)$ i $f(b)$
- Ako je $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna, tada ili važi $x \in [a,b], f(x) = c$ (za $\forall x$), ili $f([a,b]) = [c,d]$
- Ako je $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ neprekidna, strogo monotona f-ja nad (a,b), tada je $f((a,b))$ otvoren interval

- Elementarne funkcije su neprekidne u oblasti definisanosti

usm

- Uniformna neprekidnost:

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x_1, x_2 \in E)(d_x(x_1,x_2) < \delta \Rightarrow d_y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon)$

tj. za svaku okolinu ε postoji okolina δ koja zavisi od ε ali ne i od x

* ako je f-ja uniformno neprekidna nad nekim skupom, ona je nad njim i neprekidna

* ako je f-ja neprekidna nad $[a,b]$, ona je nad njim i uniformno neprekidna (zatvoren interval)

Šabloni:

1. Tačke: $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{I}$ nemaju unutrašnje tačke, $\bar{A}$ im je $\mathbb{R}$ (ili ako je interval (a,b), $\bar{A}$ će biti $[a,b]$ nad $\mathbb{R}$), kao i A', i A^* → nemaju izolovane tačke

2. Kontrakcija: - Ako imamo 2 sabirka npr. $x_1 + \sqrt{x_1+1}$, metrika se zapiše kao $d(f(x_1), f(x_2)) = |(x_1+\sqrt{x_1+1}) - (x_2+\sqrt{x_2+1})|$ i podeli se na 2 dela $|x_1 - x_2| + |\sqrt{x_1+1} - \sqrt{x_2+1}|$, pa se racionališe izraz, i onda se ubaci ~~umes~~ umesto x_1 i x_2 prvi broj iz intervala, i dobije se λ pomoću formule $d(f(x_1), f(x_2)) \leq d(x_1, x_2) \cdot \lambda$

- Ako imamo samo 1 izraz, racionališemo pa ubacimo broj umesto x_1 i x_2

Praktikum

str. 3

① a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n - n + 2\cdot n!}{3^n + n^2 - 3\cdot n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}\left(\frac{5^n}{n!} - \frac{n}{n!} + 2\right)}{\cancel{n!}\left(\frac{3^n}{n!} + \frac{n^2}{n!} - 3\right)} = -\frac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\left[(x^2+5x+6)\,\mathrm{ctg}(x+2)\right] = \lim\limits_{x\to -2}\left[(x+3)(x+2)\frac{\cos(x+2)}{\sin(x+2)}\right]$

$= \lim\limits_{x\to -2} \frac{x+2}{\sin(x+2)} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{1}{\frac{\sin(x+2)}{x+2}} = 1$

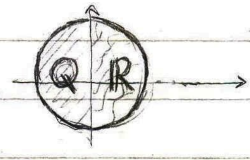
c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x^4)}{\sin(x^2)} \cdot \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{x^2+x^4}{x^2+x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^2+x^4} \cdot \frac{x^2+x^4}{x^2} = 1 + 0 = 1$

② $a_n = \underbrace{\frac{1+(-1)^n}{n}}_{T.N.=0} - \underbrace{\frac{n^2}{2^n}}_{T.N.=0}$ $\quad \inf\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\} = -\frac{9}{8}$ $\quad \sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\} = \frac{101}{768}$

$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

③ $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1, x>0\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{Q}^2 \mid x^2+y^2\le 1, x<0\} \cup \{(0,\frac{n+1}{n}) \mid n\in\mathbb{N}\}$

$\bar{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\} \cup \{(0,\frac{n+1}{n}) \mid n\in\mathbb{N}\}$



$A' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$

$A^\circ = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1, x>0\}$

$A^* = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1, x\le 0\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1, x>0\} \cup \cancel{\{(0,\frac{n+1}{n}) \mid n\in\mathbb{N}\}}$

④ $\boxed{+}$ Ako je realan niz monoton i ograničen, on je Košijev.

⑤ a) $\boxed{+}$ b) $\boxed{+}$ c) $\boxed{-}$ d) $\boxed{+}$ → jer je neprekidna

un=>n ↳ima nad [2,4]

⑥ $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2}$, $\quad [4,5] \to [\sqrt{5}+2, \sqrt{6}+\frac{5}{2}]$

$|f(x)-f(y)| \le \lambda |x-y|$ $\quad \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}$

$d(f(x),f(y)) = |(\sqrt{x+1}+\frac{x}{2}) - (\sqrt{y+1}+\frac{y}{2})| \le |\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}| + |\frac{x}{2}-\frac{y}{2}|$

$= \frac{|x-y|}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}} + \frac{|x-y|}{2} = \frac{|x-y|}{\sqrt{4+1}+\sqrt{4+1}} + \frac{|x-y|}{2} \le \lambda|x-y| \;/ : |x-y| \to \frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} = \lambda$

(zatvoren interval) $\quad \lambda \in (\frac{\sqrt{5}+5}{10}, 1)$

J-na ima rešenje nad [4,5] jer je to kompletan potprostor prostora $\mathbb{R}$

⑦ F-je $f(x) = \sqrt[3]{x+x^\alpha}$ i $g(x) = x^\beta \mathrm{arctg}x$ su BMV kada $x\to 0$ ako je $\alpha\in \mathbb{R}^+$ i $\beta \in (0,\infty)$ i to istog reda ako je $\alpha>1, \beta = -2/3$; $\alpha\in(0,1), \beta = \frac{\alpha-3}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+x^\alpha}}{x^\beta \mathrm{arctg}x}\cdot\frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+x^\alpha}}{x^{\beta+1}}$

str. 24

PI

① a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+10^{n+1}}{3^n+10^{n+2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{10^n((\frac{2}{10})^n+10)}{10^n((\frac{3}{10})^n+100)} = \frac{1}{10}$ b) $\lim\limits_{x\to-7} \frac{\sin(x+7)}{2x+14} = \lim\limits_{x\to-7} \frac{\sin(x+7)}{2(x+7)} = \frac{1}{2}$

② $a_n = \frac{n^2+n+1}{2n^2+2n} + \alpha(-1)^n$

a) ⊞ t.n. su $\frac{3}{2}$ i $-\frac{1}{2}$ $\to \inf a_n = -\frac{1}{2}$, $\sup a_n = \frac{3}{2}$

b) ⊟ ne mora da znači, ima 2 tačke nagomilavanja, pa nije konvergentan

c) ⊞ $\alpha=0$ i granična vrednost niza je 1/2

③ $f: [1,4] \cup \{6,7,8\} \to \mathbb{R}$, $g: [4,8] \to \mathbb{R}$

a) ⊟ ne može, jer je 4 izolovana tačka domena f-je f-g, pa nije t.n.

b) ⊞ f-ja je uvek neprekidna u izolovanoj tački

c) može se definisati jer $\sqrt{3}$ pripada domenu f-je

I

① a) $A = (1,2)_I \cup \{3\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $A^\circ = \emptyset$, $\bar{A} = [1,2] \cup \{3\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

⊟ sve tačke skupa B su i adherentne tačke

? b) ⊞ konvergentnost i ograničenost ne uslovljavaju monotonost

c) $a_n = \sin\frac{n\pi}{4} + \frac{2n+(-1)^n}{4n-(-1)^n}$

$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm 1$ $n=1 \to \frac{1}{5}$ $n=3 \to 5/13$ $n=2 \to 5/7$ $n=4 \to 9/15$

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, -1$

2) ⊟ ne, nije konvergentan (možda ni ograničen ?)

d) ⊞ definicija

e) ⊞ $\mathbb{R}$ (kompletan prostor → svaki K. konvergira) ⊟ $\mathbb{Q}$ nije kompletan

⊟ mora

② a) $f: [2,8] \to \mathbb{R}$ je neprekidna nad $(2,8)$, $f(5)=-1$, $f(6)=666$

1) ⊞ jer je zat. interval 2) ⊞ $f(4)\cdot f(7)<0$ 3) ⊞ da je $[2,8]$ onda bi moralo

b) $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$, ⊞ elementarne f-je su neprekidne u D_f, ⊟ ne može ($f(0)=\infty$)

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 3$ ⊟ neprekidna za $x=0$, ne mora jer ne znamo da li je i $f(0)=3$

⊞ ako $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq 3$ → onda nema graničnu vr.

str.40

P1

① a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n+1}{3n^2+2n+5} \begin{matrix} :n^2 \\ :n^2 \end{matrix} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}} = \frac{1}{3}$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-4x^2+2x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2-3x-1)} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$

c) $\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{x}{1-\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{x(1+\cos x)}{\sin x}} = e^2$

②

a) ⊟ nije svaki K.niz konvergentan ; ⊞ definicija ; ⊟ nije povezano ; ⊞ Bolcano - Vajerštrasova t.

X = ℝ : ⊞ kompletan prostor ; ⊞ definicija ; ⊟ nije povezano ; ⊞ Bolcano - Vajerštrasova t.

b) $f : [3,5] \cup \{0,1,2\} \to \mathbb{R}$, $g : [5,8] \to \mathbb{R}$

i) ⊞ zavisi od f-je   ii) ⊞ uvek je neprekidna u izolovanoj

I

① $A = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$ $A^\circ = \emptyset$; $\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$; $A^* = \bar{A}$ (ovde)

② ⊞ definicija

③ ⊟ ne mora da znači

④ $a_n = tg(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}) - (1+\frac{1}{2n})^n$ a) $\inf = -1-\sqrt{e}$, $\sup = -9/16$

± 1 $\sqrt{e}$ b) $\lim_{n\to\infty} \inf a_n = -1-\sqrt{e}$, $\lim_{n\to\infty} \sup a_n = 1-\sqrt{e}$

⑤ i) ⊞ ii) ⊟ monotonost nije definisana za ℂ brojeve iii) ⊞

⑥ a) ⊞ mora da ima okolinu b) ⊟ ne mora c) ⊞ d) ⊞

⑦ ⊞ zatvoren je skup

⊞ $f(x) = \sqrt[3]{2+x}$ nad $[1,2]$

⊞ kompletan prostor + kontrakcija

⑧ $f : [0,7] \to \mathbb{R}$ neprekidna nad $(0,7)$, $f(2) = 2$, $f(6) = -6$

a) ⊞ jer je neprekidna nad zatvorenim intervalom $[2,6]$

b) ⊞ jer $f(2)\cdot f(6) < 0$

str. 81

① a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^5-1}{x^7-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^4+x^3+x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}=\frac{5}{7}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+12n!}{3n^2-4n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n!}(5\frac{n}{n!}+12)}{\cancel{n!}(3\frac{n^2}{n!}-4)}=-3$, $\frac{n}{n!}\to0$, $\frac{n^2}{n!}\to0$

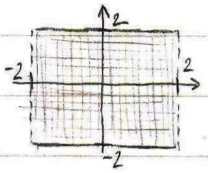
c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+2}\right)^{2n+3}=\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{3}}\right)^{\frac{n+2}{3}}}_{\to e}{}^{\frac{2n+3}{n+2}\cdot3}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+9}{n+2}}=e^6$

d) $\lim\limits_{x\to3}\frac{tg(x-3)}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to3}\frac{\frac{\sin(x-3)}{\cos(x-3)}}{(x-3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{\overbrace{\sin(x-3)}^{\to1}}{(x-3)\cos(x-3)\cdot(x-2)}=\frac{1}{\cos(0)\cdot1}=1$

② $a_n=\underbrace{\frac{n^2}{2^n}}_{TN=0}-\underbrace{tg\frac{2n\pi}{3}}_{TN=\pm\sqrt3,0}$ $\lim\sup=\sqrt3$ $\sup=1+\sqrt3$

$\lim\inf=-\sqrt3$ $\inf=-\sqrt3$

③ $A=\{(x,y)\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})^2 \mid |x|<2, |y|\le2\}$



$A'=\bar{A}=\{(x,y)\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})^2 \mid |x|\le2, |y|\le2\}$

$A^\circ=\{(x,y)\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})^2 \mid |x|<2, |y|\le2\}$

$A^*=\{|x|=\{0,1,2\}, |y|=\{0,1,2\}\}$

$i(A)=\emptyset$

④ ⊞ u svakoj okolini svake tačke iz skupa vrednosti niza postoji član niza

⑤ $f(x)=\sqrt[5]{x^5+x^\alpha}$ i $g(x)=x\sin x^\beta$ su BMV kada $x\to0$ ako je $\alpha\in\mathbb{R}^+$ i $\beta\in\mathbb{R}$ i to istog reda ako je X ne postoji

⑥ a) ⊟ svaki ograničen niz ima bar jednu tačku nagomilavanja

b) ⊟ svaki niz koji ima t.n. ima konvergentan podniz

c) ⊞ nije monoton (višedimenzionalan) pa ne znamo da li je

d) ⊞ ako je ceo ograničen, i njegovi koordinatni nizovi su ograničeni

⑦ i) ⊞ const f-je

ii) ⊞ ako je I kompaktan skup, onda mora

iii) ⊞ važi za sve striktne monotone

⑧

$u(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^ny}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ je neprekidna za sve $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $n\in\mathbb{N}$ ako je

$n=1$ ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}=$

$n>1$ ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^ny}{x^2+y^2}=$

str. 94

①

a) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim\limits_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\cancel{\sqrt{x}-2}} = 2+2=4$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+6n!}{n!-4^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n!}(\frac{5n^2}{n!}+6)}{\cancel{n!}(1-\frac{4^n}{n!})} = 6$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5n+3}{n^2+2n+1}\right)^{3n+5} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+2n+1}{3n+2}}\right)^{\frac{n^2+2n+1}{3n+2}\cdot\frac{(3n+5)(3n+2)}{n^2+2n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9n^2+21n+10}{n^2+2n+1}} = e^9$

d) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-(-\cos x+1)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\cdot\frac{2x}{2x}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to0}-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{x}{2}} = e^{\lim\limits_{x\to0}-\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{x}{2}} = e^{\lim\limits_{x\to0}-\frac{x}{2}} = e^0 = 1$

② $a_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{T.N.=0} + \underbrace{\left(\sin\frac{n\pi}{4}\right)^n}_{T.N.=0,1,\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\inf = a_5 = -\frac{1}{5}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\inf = 0+0=0$

$\sup = 3/2 = a_2$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\sup = 0+1=1$

③ $A = \{y\in\mathbb{R} \mid y=\operatorname{tg}x, \underbrace{x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}]}_{y\in(1,\sqrt{3}]}\}\cup(2,3)_{\mathbb{Q}}$

$\bar{A} = [1,\sqrt{3}]\cup[2,3]$ $\quad A^\circ = (1,\sqrt{3})$

$A' = [1,\sqrt{3}]\cup[2,3]$ $\quad A^* = [2,3]\cup\{1,\sqrt{3}\}$

④ ⊞ da, jer u svakoj okolini imaju član skupa tj niza

⑤ $f(x) = \sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ $\quad [4,5]\to[\sqrt{5}+2,\sqrt{6}+\sqrt{5}]$

$|f(x)-f(y)|\leq\lambda|x-y|$

$d(f(x),f(y)) = |\sqrt{x+1}+\sqrt{x}|-|\sqrt{y+1}+\sqrt{y}|$

$= |\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}|+|\sqrt{x}-\sqrt{y}|$

$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}$ $\quad \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$d(f(x),f(y)) = \frac{|x+\cancel{1}-y-\cancel{1}|}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}+\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leq\lambda|x-y|$

$\cancel{|x-y|}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\leq\lambda\cancel{|x-y|}$

$\lambda\geq\frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}+\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{1}{4}\Rightarrow\lambda\in\left(\frac{2\sqrt{5}+5}{20},1\right)$

J-na ima rešenje nad $[4,5]$ zato što je to kompletan potprostor prostora $\mathbb{R}$

⑥ $f(x)=\frac{\sin^\alpha x}{x}$ i $g(x)=\frac{e^x-1}{x^\beta}$ su BMV, $x\to0$ ako $\alpha\in(1,\infty)$, $\beta\in(-\infty,1)$ i to istog reda ako $\alpha=1$, $\beta=1$

⑦ a) ⊞ b) ⊟ ne mora da znači c) ⊟ ne znamo d) ⊟ ne mora da znači

⑧ ⊞ ograničena je nad $[0,5]$ pa onda i nad $(1,4)$

⑨

$u = \begin{cases}(x^2+a^2y^2)\cos\frac{1}{x^2+a^2y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ je neprekidna za sve $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $a\in\mathbb{R}$

□

Izvod

USM

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

$\Delta x \to$ priraštaj argumenta f-je

$\Delta y \to$ priraštaj funkcije u tački x

- Ako f-ja ima izvod u tački x, ona je u toj tački neprekidna (obrnuto ne mora da važi)

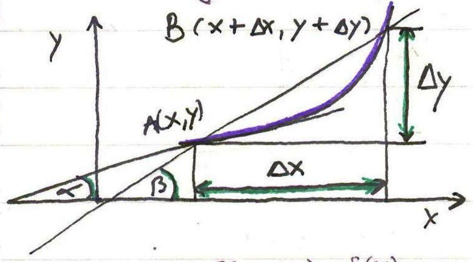
- Levi izvod $\to f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, $x + \Delta x \in (x - \delta, x)$

- Desni izvod $\to f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, $x + \Delta x \in (x, x + \delta)$

- Funkcija ima izvod u tački x akko postoje $f'_-(x)$ i $f'_+(x)$ u tački x, i pritom su jednaki

- Funkcija ima izvod nad intervalom $[a,b)$ ako ima izvod u svakoj tački (a,b) i desni izvod u tački a ($f'_+(a) = f'(a)$)

- Geometrijska interpretacija izvoda:



$A(x,y)$, $B(x+\Delta x, y+\Delta y)$
- neprekidna f-ja
- AB je sečica krive $f(x)$
- Kako B teži ka A menja se nagib sečice - granični položaj je tangenta funkcije u tački A, što je izvod

$$tg\beta = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = f'(x)$$

- Jednačina tangente u tački $A(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

- Jednačina normale u tački $A(a, f(a))$:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

- Osobine izvoda:

* za f-je $u(x)$ i $v(x)$ koje imaju izvode u x važi

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (u \cdot v)' = u'v + uv' \qquad (c \cdot u)' = c \cdot u'$$

USM

* izvod složene f-je → $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
* izvod inverzne f-je → $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$ tj. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$, $y'_x = \frac{1}{x'_y}$

$$x''_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_x \cdot \frac{1}{y'_x} = -\frac{y''_x}{(y'_x)^3}$$

* izvod parametarski zadate f-je → $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$

$$f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad f''(x) = \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)' = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^2} \cdot \frac{1}{x'_t}$$

$$f''(x) = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3}$$

USM

- Izvodi elementarnih funkcija:

* $c' = 0$
* $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
* $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
* $(a^x)' = a^x \ln a$
* $(e^x)' = e^x$
* $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
* $(\sin x)' = \cos x$
* $(\cos x)' = -\sin x$
* $(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
* $(ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
* $(sh x)' = ch x$
* $(ch x)' = sh x$
* $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
* $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
* $(arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$
* $(arcctg x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

- Logaritamski izvod → $y = (f(x))^{g(x)} / \cdot \ln$ → $\ln y = g(x) \ln f(x) /'$

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \quad / \cdot y$$

$$y' = y\left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

Diferencijabilnost

- Funkcija je diferencijabilna u x ako se Δy može napisati u obliku

$$\Delta y = \underbrace{D\Delta x}_{\substack{\text{linearni deo} \\ \text{priraštaja f-je} \\ \text{(diferencijal f-je)}}} + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad \alpha \to 0, \Delta x \to 0$$

D ne zavisi od Δx

- $\boxed{dy = df(x) = D\Delta x = f'(x)\Delta x}$
- Funkcija je diferencijabilna u tački x ako u njoj ima izvod
- Ako je f-ja diferencijabilna u svakoj tački skupa A, kaže se da je f-ja diferencijabilna nad skupom A

- Invarijantnost oblika → diferencijal ima isti oblik i kada je $u = g(x)$ i kada je u samo nezavisna promenljiva

$$dy = d(f(g(x))) = f'(u) \cdot g'(x)dx = f'(u)du$$

- Lajbnicova formula za izvod: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ n-ti izvod f-je $(y = u \cdot v)$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} \quad (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$$

- Izvod složene f-je: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

- Izvod inverzne f-je: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

- Viši izvodi i diferencijali: $d^{(n)}y = f^{(n)}(x)dx^{(n)}$ → n-ti diferencijal

$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ → n-ti izvod, f-ja je n-puta diferencijabilna

- viši diferencijali ne poseduju invarijantnost oblika

Osnovne teoreme

I Rolova teorema (USM)

- Ako je f-ja $f: D \to \mathbb{R}$ neprekidna nad $[a,b] \subset D$, ima izvod nad (a,b), i ako je $f(a)=f(b)$, tada postoji bar jedna tačka $\varepsilon \in (a,b)$ gde je $f'(\varepsilon)=0$

II Lagranžova teorema (USM)

- Ako je f-ja $f: D \to \mathbb{R}$ neprekidna nad $[a,b] \subset D$ i ima izvod nad (a,b), tada postoji bar jedna tačka $\varepsilon \in (a,b)$ takva da je

$$\boxed{f'(\varepsilon) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

*teorema o srednjoj vrednosti

USM

* Posledice Rolove i Lagranžove teoreme:

1. Ako je f-ja neprekidna nad $[a,b]$ i ima izvod nad (a,b) različit od nule, i važi $f(a)\cdot f(b)<0$, tada postoji samo jedna nula f-je nad (a,b)
2. Ako je f-ja diferencijabilna nad (a,b) i ako su $c_1, c_2 \in (a,b)$ dve uzastopne nule prvog izvoda, tada f-ja ima najviše jednu nulu nad (c_1,c_2)
3. Ako je f-ja neprekidna nad $[a,b]$ i diferencijabilna nad (a,b), gde je izvod jednak nuli, $f(x)$ je konstantna f-ja nad $[a,b]$
4. Ako dve f-je imaju jednake izvode, tada se one razlikuju za konstantu
5. Ako je f-ja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna nad $[a,b]$ i diferencijabilna nad (a,b), i ako postoji $\lim_{x\to a^+} f'(x)$, onda postoji i $f'_+(a)$, i oni su jednaki
6. Ako f-ja $f: I \to \mathbb{R}$ ima izvod nad I, tada $f'(x)$ ne može da ima prekid prve vrste

III Košijeva teorema (USM)

- Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne nad $[a,b]$, imaju izvode nad (a,b) i za $\forall x \in (a,b)$ važi $g'(x) \neq 0$, tada postoji bar 1 tačka $\varepsilon \in (a,b)$ gde je

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}}$$

IV Darbuova teorema

- Ako funkcija $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ima izvod nad $[a,b]$ i ako je $f'(a) \neq f'(b)$, onda $f'(x)$ uzima sve vrednosti između $f'(a)$ i $f'(b)$

USM

V Tejlorova teorema

- Ako su f-ja i svi njeni izvodi do (n-1)-og reda neprekidni nad [A, B] i f ima n-ti izvod nad (A,B), a,b∈[A,B], a je proizvoljna tačka, za svako b postoji bar jedna tačka $\varepsilon \in (a,b)$ gde je

$$\underbrace{f(b)=\sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(a)\frac{(b-a)^i}{i!}}_{\text{Tejlorov polinom}} + \underbrace{\frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\varepsilon)}_{R_n \to \text{ostatak}}$$

USM

VI Maklorenova teorema

- Tejlorova teorema gde je $a=0$

$$\underbrace{f(x)=\sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(0)\frac{x^i}{i!}}_{\text{Maklorenov polinom}} + \underbrace{f^{(n)}(\vartheta x)\frac{x^n}{n!}}_{R_n}, \quad \vartheta \in (0,1)$$

* Lopitalova pravila:

~ „$\frac{0}{0}$", „$\frac{\infty}{\infty}$" $\to \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

$\to \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

~ „$0\cdot\infty$" $\to \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ => svodi se na „$\frac{0}{0}$" ili na „$\frac{\infty}{\infty}$"

~ „$\infty-\infty$" $\to \lim\limits_{x\to a} [f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\left[1-\frac{g(x)}{f(x)}\right]$ => svodi se na „$\frac{0}{0}$" ili „$\frac{\infty}{\infty}$"

~ „0^0", „∞^0", „1^∞" => logaritamski izvod

* $e^{+\infty} = +\infty$

  $e^{-\infty} = 0$

Ispitivanje funkcija

- Monotonost:

* f-ja je → rastuća $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $f'(x) \geq 0$
  → opadajuća $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ $f'(x) \leq 0$ } stroga monotonost
  → nerastuća $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ $f'(x) \leq 0$
  → neopadajuća $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ $f'(x) \geq 0$

* ako funkcija ima izvod nad nekim intervalom/tačkom/u okolini tačke, i:
  ↳ onda i $f'(x)$ mora da bude neprekidan u a
  ~ $f'(x)/f'(a) > 0$ → f-ja je rastuća
  ~ $f'(x)/f'(a) < 0$ → f-ja je opadajuća

- Ekstremi:

USM

* Ako je f-ja definisana u nekoj okolini tačke a, funkcija ima:
  ~ lokalni minimum u a, ako $\exists \delta > 0$ gde $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) > f(a)$
  ~ lokalni maksimum u a, ako $\exists \delta > 0$ gde $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) < f(a)$

* Ako f-ja ima lok. min/max u a, onda je u a to najmanja/najveća vrednost f-je
* Ako f-ja ima ekstrem u a, i ako postoji $f'(a)$, onda je $f'(a) = 0$
* Stacionarne tačke - tačke u kojima je prvi izvod nula ($f'(x) = 0$)
* Funkcija u tački a može da ima ekstrem, a da ne postoji $f'(a)$

* Ako je $f(x)$ neprekidna u a, i ako prvi izvod menja znak prolazeći kroz tačku a, onda funkcija ima ekstrem u a

* Za $n \geq 2$, $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$, ako je n:
  a) paran broj → $f(x)$ ima ekstrem u a
  $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow$ MAKSIMUM
  $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow$ MINIMUM

  b) neparan broj → $f(x)$ nema ekstrem u a
  $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f(x)$ je opadajuća u a
  $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f(x)$ je rastuća u a

- Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:

* Ako je funkcija definisana nad I, $(x_1, x_2, x \in I)$, ona je:

~ konveksna, ukoliko važi $f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$

~ konkavna, ukoliko važi $f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1)$

USM

* Tačka $P(a, f(a))$ je prevojna tačka f-je ako postoji okolina takva da je f-ja nad $(a-\delta, a)$ konveksna, a nad $(a, a+\delta)$ konkavna, ili obrnuto
* Funkcija je konveksna/konkavna nad I ako je $f'(x)$ monotono rastuća/opadajuća f-ja nad I

* $f''(x) > 0 \longrightarrow$ konveksna
  $f''(x) < 0 \longrightarrow$ konkavna
* konveksna $\longrightarrow f''(x) \geq 0$
  konkavna $\longrightarrow f''(x) \leq 0$

USM

* Ako je $P(a, f(a))$ prevojna tačka f-je $f(x)$, i postoji $f''(a)$, onda je $f''(a) = 0$. Obrnuto ne mora da važi
* $P(a, f(a))$ može da bude prevojna tačka f-je iako ne postoji $f''(a)$
* Ako postoji $\delta > 0$ takvo da je u $(a-\delta, a)$ f-ja ispod tangente $f(x)$ u $A(a, f(a))$, a u $(a, a+\delta)$ iznad tangente (ili obrnuto), onda je A prevojna tačka te f-je

* Ako je $f''(a) = f'''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ i $f^{(n)}(a) \neq 0$, onda za:

  ~ n je neparan broj $\Rightarrow P(a, f(a))$ je prevojna tačka $f(x)$

  ~ n je paran broj $\Rightarrow$ 1° konveksna f-ja ako $f^{n}(a) > 0$

  2° konkavna f-ja ako $f^{n}(a) < 0$

- Asimptote:

* $\phi(x)$ je asimptota f-je $f(x)$ kada $x \to \infty$ ako je $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-\phi(x)]=0$
* Kriva se približava svojoj asimptoti

$k=\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ \pm}} \frac{f(x)}{x}$ $n=\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ \pm}}[f(x)-kx]$ → zasebno se gleda kad teže u $+\infty$ i $-\infty$

* Kosa asimptota $(k\neq 0) \to y=kx+n$
* Horizontalna asimptota $(k=0) \to y=n=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
* Vertikalna asimptota $\to \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \to \pm\infty$ ili $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \to \pm\infty$ (f-ja nije definisana u a)

(dovoljno sa 1 strane)

ne mora da bude

- Domen funkcije:

* Racionalna f-ja → imenilac $\neq 0$
* Koren → $\sqrt[n]{R(x)}$ - n paran broj ⇒ $R(x)\geq 0$; n neparan broj ⇒ svuda definisana
* Logaritam → $\ln(T(x))$ ⇒ $T(x)>0$
* tgx ⇒ definisana za $x\neq \frac{k\pi}{2}$; $ctgx$ ⇒ definisana za $x\neq k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$
* $\arcsin x, \arccos x$ ⇒ $x\in[-1,1]$
* Svuda definisane $(\mathbb{R}) \to e^x, \sin x, \cos x, arctgx, arcctgx$

- Parnost:

* Parna f-ja ⇒ $f(-x)=f(x)$ - grafik simetričan u odnosu na y-osu
* Neparna f-ja ⇒ $f(-x)=-f(x)$ - grafik simetričan u odnosu na $(0,0)$
* ni-ni → ni parna ni neparna

- Nule f-je:

$f(x)=0$ → grafik f-je seče osu u nulama

- Tangente f-je u tačkama gde ne postoji prvi izvod:

$x_0 \geq 0^+$!!!

$tg(\alpha)=y'(x_0)=\ldots \to \alpha =$ nešto } prava

$=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=\ldots \Rightarrow \alpha=\ldots$ } neprava → f-ja nije definisana u x_0

Parcijalni izvodi i diferencijabilnost

- Totalni priraštaj f-je $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ u M:

$$\Delta z = f(N) - f(M) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- Parcijalni priraštaj po promenljivoj x_i f-je z u tački M:

$$\Delta_{x_i} z = f(M_{x_i + \Delta x_i}) - f(M)$$
$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

USM
- Parcijalni izvod po promenljivoj x_i f-je z u tački M:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{\Delta x_i}$$

- Funkcija ima parcijalni izvod u tački M ako ima i levi i desni parcijalni izvod u M i ako su oni jednaki
- Kod f-ja više promenljivih, parcijalni izvodi mogu da postoje u nekoj tački, a da f-ja u toj tački ima prekid

- Funkcija je diferencijabilna u M ako se njen totalni priraštaj može napisati u obliku:

$$\Delta z = \underbrace{D_1 \Delta x_1 + D_2 \Delta x_2 + \ldots + D_n \Delta x_n}_{dz \text{ (ne zavisi od } \Delta x)} + \alpha_1 \Delta x_1 + \ldots \alpha_n \Delta x_n$$

$$\lim_{(x_1 \ldots x_n) \to 0} \alpha_1 = \lim_{\ldots} \alpha_2 = \ldots = \lim_{\ldots} \alpha_n = 0$$

USM
totalni diferencijal f-je z
u tački M

- Ne važi da je f-ja diferencijabilna ako ima prvi izvod, a i može da bude diferencijabilna ako f-ja nema prvi izvod u toj tački

- Ako je funkcija z diferencijabilna u M, onda je neprekidna u M i postoje parcijalni izvodi po svakoj promenljivoj i važi $D_n = \frac{\partial z}{\partial x_n}(M) \; \forall n$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n$$

- Ako f-ja z ima parcijalne izvode u nekoj δ-okolini M, i ako su oni neprekidni u M, funkcija je diferencijabilna u M

- Neprekidnost parcijalnih izvoda funkcije $\rightarrow$ neprekidnost funkcije

- Izvod složene f-je:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_n} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial x_1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_m} = \frac{\partial z}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_m} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_n} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial x_m}$$

* u_n imaju parc. izvode po svim promenljivama u M
* $u_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_m)$
  $z = f(u_1, \dots, u_n)$

* $z = f(x,y)$, $y = \varphi(x) \Rightarrow z = f(x, \varphi(x)) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$

* Regularna tačka $P(x,y,z) \rightarrow \exists$ sva 3 parcijalna izvoda u okolini P $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$, koja su neprekidna u P i različita od nule

* Regularna tačka $\neq$ singularna tačka
* Jednačina tangentne ravni površi S u regularnoj tački P:

$F(x,y,z) = 0$
$P(x_p, y_p, z_p)$
$F(x,y,z) = f(x,y) - z$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)(x - x_p) + \frac{\partial F}{\partial y}(P)(y - y_p) + \frac{\partial F}{\partial z}(P)(z - z_p) = 0$$

$$\left(z - z_p = \frac{\partial f}{\partial x}(x_p, y_p)(x - x_p) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_p, y_p)(y - y_p) \right)$$

* normala n površi F:

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(P), \frac{\partial F}{\partial y}(P), \frac{\partial F}{\partial z}(P) \right)$$

$$\frac{x - x_p}{\frac{\partial F}{\partial x}(P)} = \frac{y - y_p}{\frac{\partial F}{\partial y}(P)} = \frac{z - z_p}{\frac{\partial F}{\partial z}(P)}$$

$$\frac{x - x_p}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_p, y_p)} = \frac{y - y_p}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_p, y_p)} = \frac{z - z_p}{-1}$$

Parcijalni izvodi i diferencijali višeg reda

- Drugi parcijalni izvod f-je z po promenljivama x_i i x_j:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}(M)$$ * mešoviti izvod

- Ako postoje drugi mešoviti izvodi $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$ i $\frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i}$ i ako su neprekidni u okolini tačke M, onda su oni jednaki u M

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i}$$

- Drugi parcijalni izvod f-je z po promenljivoj x_i:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}(M)$$

- Totalni diferencijal drugog reda:

otvorena oblast $\longrightarrow$ $$d^2 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n\right)^2$$ * n-tog reda → umesto 2 → n

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}dx_1^2 + \ldots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}dx_n^2 + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + \ldots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}\partial x_n}dx_{n-1}dx_n\right)$$

Ekstremi

- Lokalni ekstremi:

  * $f(x) < f(A) \rightarrow$ Lokalni maksimum u A
  * $f(x) > f(A) \rightarrow$ Lokalni minimum u A

  $\forall x \in L(A, \varepsilon) \setminus \{A\}$

  * f-ja je definisana u okolini A

- Ako f-ja u tački A ima sve parcijalne izvode prvog reda i ima lokalni ekstrem u A, onda je svaki parcijalni izvod u A jednak nuli

- $\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)$ * priraštaj f-je u A

  $\Delta z > 0 \rightarrow$ lokalni minimum

  $\Delta z < 0 \rightarrow$ lokalni maksimum

- Stacionarne tačke $\rightarrow$ Unutrašnje tačke domena f-je z u kojima su svi parcijalni izvodi prvog reda jednaki nuli

- $A \in D$ (otvorena oblast) je stacionarna tačka f-je $z = f(x_1, \ldots, x_n)$:

  a) $d^2 f(A) < 0 \rightarrow$ MAX u A

  b) $d^2 f(A) > 0 \rightarrow$ MIN u A

  c) $d^2 f(A)$ menja znak $\rightarrow$ nema lokalnog ekstrema

- Ako je D otvorena oblast, a $A(a,b) \in D$ * stacionarna tačka

  $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)$

  a) $r > 0 \wedge rt - s^2 > 0 \Rightarrow$ MIN

  b) $r < 0 \wedge rt - s^2 > 0 \Rightarrow$ MAX

  c) $rt - s^2 < 0 \Rightarrow$ nema lok. ekstrem u A

  d) $rt - s^2 = 0 \Rightarrow$ potrebno dalje ispitivanje

USM

1° Tražimo stacionarnu tačku

2° Ako f-ja ima 2 promenljive radimo po RST, ako ima više, tražimo totalni diferencijal drugog reda u stac. tački

- Uslovni ekstremi:

* $A(x,y)$ je tačka nagomilavanja skupa B, $A \in B$
* f-ja $z = f(x,y)$ u tački A ima uslovni ekstrem pri uslovu $\overbrace{\varphi(x,y)=0}^{\text{j-na veze}}$

ako $(\exists \varepsilon > 0)(\forall X \in B \cap (L(A,\varepsilon) \setminus \{A\})) \sim f(X) < f(A) \to MAX$

$\sim f(X) > f(A) \to MIN$

USM

- Lagranžov metod:

1° Formiramo Lagranžovu f-ju:

$$F(x,y,\lambda) = \underbrace{f(x,y)}_{\text{poč. f-ja}} + \lambda(\overbrace{\varphi(x,y)}^{\text{uslov}})$$

2° Parcijalne izvode prvog reda izjednačimo sa nulom, r. dobijemo stacionarne tačke

3° Ukoliko je potrebno, diferenciramo uslov (zavisnost diferencijala)

4° Tražimo totalni diferencijal drugog reda u stac. tačkama, tj gledamo znak diferencijala višeg reda

$d^2F(A) > 0 \Rightarrow MIN$ $\qquad$ $d^2F(A) < 0 \Rightarrow MAX$

$$d^2F(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dxdy \cdot 2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 \Rightarrow \text{u stac. tački}$$

Praktikum str. 5

$\ln(2\cdot3)=\ln2+\ln3$

P1

① $\lim_{x\to1}\frac{3\cdot2^x+2\cdot3^x-2\cdot6^x}{\cos\frac{\pi x}{2}} \overset{LP}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to1}\frac{3\cdot2^x\ln2+2\cdot3^x\cdot\ln3-2\cdot6^x\ln6}{-\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{3\cdot\cancel{2}\ln2+\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\ln3-2\cdot6\ln6}{-\sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{6(\ln2+\ln3-2\ln6)}{-1\cdot\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{6(\cancel{\ln2}+\cancel{\ln3}-\cancel{2}\ln2-\cancel{2}\ln3)}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{-6\ln6}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{12\ln6}{\pi}$

② $((\operatorname{arctg}\sqrt{x})^{\cos x})' = y \;/\cdot\ln \longrightarrow \ln y=\cos x\ln(\operatorname{arctg}\sqrt{x})\;/'$

$\frac{y'}{y}=(\cos x)'\ln(\operatorname{arctg}\sqrt{x})+\cos x(\ln(\operatorname{arctg}\sqrt{x}))'$

$=-\sin x\cdot\ln(\operatorname{arctg}\sqrt{x})+\cos x\cdot\frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y'=y\cdot -\|- \rightarrow y'=(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^{\cos x}\left[\frac{\cos x}{(\operatorname{arctg}\sqrt{x})(1+x)\cdot2\sqrt{x}}-\sin x\cdot\ln(\operatorname{arctg}\sqrt{x})\right]$

③ $y=\ln\frac{x+1}{3-x} \rightarrow \left.\begin{matrix}x+1>0 \Rightarrow x>-1\\ 3-x>0\Rightarrow x<3\end{matrix}\right\} D=(-1,3)$ $\quad A(1,0)$ $\quad y'=\frac{\cancel{3-x}}{x+1}\cdot\frac{3-x+x+1}{(3-x)^{\cancel{2}}}=\frac{4}{(x+1)(3-x)}$

$t:\; y-y_A=y'_A(x-x_A)$ $\quad n:\; y-y_A=\frac{-1}{y'_A}(x-x_A)$

$dy=f'(x)dx=\frac{4dx}{(x+1)(3-x)}$ $\quad t_A:\; y=1\cdot(x-1)$ $\quad n_A:\; y=-1(x-1)$

④ $x=\arcsin(t^2-t),\; y=\arccos(t^2-t)$ $\quad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{(2t-1)\cancel{\sqrt{1-(t^2-t)^2}}}{-(2t-1)\cancel{\sqrt{1-(t^2-t)^2}}}=-1$

$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=(y')'=(-1)'=0$

⑤ $f(x)=\begin{cases}2x^3+4x^2+1, & x\le-1\\ ax^2+b, & x>-1\end{cases}$ dif. za $\forall x$ ako je $\underline{a=1}$, $\underline{b=2}$

I

① $\boxed{+}$ definicija ② $f(x)=69-666x-x^{13}=0$ $\boxed{+}$ 1 rešenje u intervalu $(0,1)$

Posledica 1. R.L teoreme $\boxed{+}$ 1 rešenje u skupu $\mathbb{R}$

③ $\boxed{-}$ funkcija može da ima ekstrem u tački u kojoj nema izvod

④ $\boxed{+}$ $f(x)=\begin{cases}xe^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0\\ 3, & x=0\end{cases}$ $\quad \lim_{x\to0}xe^{-\frac{1}{x^2}}=0$, $f(x)<f(0)$

$x=0 \Rightarrow \max$

⑤ $(f'(0),f''(0),f'''(0),f^{IV}(0))=(a,b,c,-1)$

a) f-ja može da ima maksimum ako je $\underline{a=b=c=0 \text{ ili } a=0, b<0}$

b) $P(0,f(0))$ je prevojna tačka f-je ako je $\underline{b=0 (i\; c=0)}$

⑥

$p_2(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$

$R_2(x)=\frac{f'''(\mathcal{E})}{3!}(x-x_0)^3$ $\quad \mathcal{E}=\theta x_0+(1-\theta)x,\; \theta\in(0,1)$

str. 6

PI

① $z=y-3x+4xy+5$ $dz=(4y-3)dx+(1+4x)dy$ $d^2z=8dxdy$

$O(0,0,5)$ t.r. : $z-5=-3(x-0)+1(y-0) \to z-5=-3x+y$

$$n: \frac{x-0}{-3}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-5}{-1}$$

② $u=-x^2-3y^2-z^2$ $\underline{A\left(\frac{11}{4},-\frac{1}{8},\frac{41}{8}\right)}$ $\underline{\text{minimum}}$ $\leftarrow d^2F(A)<0$

$x-2y=3,\ z+y=5$

$$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=-x^2-3y^2-z^2+\lambda_1(x-2y-3)+\lambda_2(z+y-5)$$

$\frac{\partial F}{\partial x}=-2x+\lambda_1$ $\frac{\partial F}{\partial y}=-6y-2\lambda_1+\lambda_2$ $\frac{\partial F}{\partial z}=-2z+\lambda_2$ $\frac{\partial F}{\lambda_1}=x-2y-3$ $\frac{\partial F}{\lambda_2}=z+y-5$

kada izjednačimo parc. izvode sa nulom, dobijemo sistem i odatle $A(x,y,z)$

③ $\vec{r}=\vec{r}(t_1,t_2;t_3)$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial t_3}(1,-2,3)=\lim\limits_{\Delta t_3\to 0}\frac{\vec{r}(1,-2,3+\Delta t_3)-\vec{r}(1,-2,3)}{\Delta t_3}$

$\vec{r}=(\ln(3t_1+t_3^{t_2}),\cos(t_1-4t_2),\sqrt{\sin(t_3t_2^2)})$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial t_2}=\left(\frac{t_3^{t_2}\ln t_3}{3t_1+t_3^{t_2}},4\sin(t_1-4t_2),\frac{t_2\cos(t_3t_2^2)}{\sqrt{\sin(t_3t_2^2)}}\right)$

I

① a) ⊟ mora!

b) ⊞

c) i) $\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\sqrt2}{2},\sqrt2\right)=\frac{3}{2}\sqrt{4-4x^2-y^2}\cdot(-8x)=\frac32\sqrt{4-4\cdot\frac{2}{4}-2}\left(-8\frac{\sqrt2}{2}\right)=\frac32\sqrt{0}\,(-4\sqrt2)=0$

ii) $\frac{\partial z}{\partial y}(1,0)=\frac32\sqrt{4-4x^2-y^2}\cdot(-2y)=\frac32\sqrt{4-4-0}\cdot 0=0$

② $z=f(\mathrm{ch}\,y^x+x\sin(x-y),\mathrm{sh}(xy^2))$, $u'_x=\mathrm{sh}\,y^x\cdot y^x\ln y+\sin(x-y)+x\cos(x-y)$

$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_u(u,v)\cdot u'_x+f'_v(u,v)\cdot v'_x$ $u'_y=\mathrm{sh}\,y^x\cdot xy^{x-1}+x\cos(x-y)(-1)$

$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_u(u,v)\cdot u'_y+f'_v(u,v)\cdot v'_y$ $v'_x=\mathrm{ch}(xy^2)\cdot 2xy$, $v'_y=\mathrm{ch}(xy^2)2xy$

③
$$z(x,y)=\begin{cases}(x^2+(y-1)^2)\sin\frac{1}{x^2+(y-1)^2}, & (x,y)\neq(0,1)\\ 0, & (x,y)=(0,1)\end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin\frac{1}{x^2+(y-1)^2}+(x^2+(y-1)^2)\cos\frac{1}{x^2+(y-1)^2}\cdot\frac{-2x}{(x^2+(y-1)^2)^2}$$

$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1)=\lim\limits_{h\to0}\left(h^{\cancel{2}}\cdot\sin\frac{1}{h^2+0}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{h}}=\lim\limits_{h\to0}h\cdot\sin\frac{1}{h^2}=0$

$\frac{\partial z}{\partial y}(0,1)=\lim\limits_{h\to0}\left(h^2\cdot\sin\frac{1}{h^2}\right)\frac1h=0$

$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}\to0\\ \alpha_2&=\Delta y\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}\to0\end{aligned}\right\}$ diferenc. je

⊞ $\Delta z=z(\Delta x+0,\Delta y+1)-z(0,1)$

$=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}-0=0\Delta x+0\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y$

str. 26

P1

① $f(x)=\log x+2^x$ $A(1,\underline{2})$

$f'(x)=\frac{1}{x\ln 10}+2^x\ln 2$

$f'(1)=\frac{1}{\ln 10}+2\ln 2$

$=\frac{1}{\ln 10}+\ln 4$

$t: y-2=\frac{1+\ln 4\cdot\ln 10}{\ln 10}(x-1)$

$n: y-2=-\frac{\ln 10}{1+\ln 4\cdot\ln 10}(x-1)$

② $f(x)=\frac{(x-4)^3}{(x+3)^2}$ $k=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{(x-4)^3}{(x+3)^2}\cdot\frac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-12x^2+48x-64}{x^3+6x^2+9x}\right]\begin{matrix}:x^3\\:x^3\end{matrix}=1$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-12x^2+48x-64}{x^2+6x+9}-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{\cancel{x^3}-12x^2+48x-64-(\cancel{x^3}+6x^2+9x)}{x^2+6x+9}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{-18x^2+39x-64}{x^2+6x+9}\right]\begin{matrix}:x^2\\:x^2\end{matrix}$

$n=-18$ $\boxed{KA: y=x-18}$

③ a) i) ⊞ Ako ima izvod, diferencijabilna je ii) ⊞ ako ima izvod, neprekidna je

iii) ⊞ ako je diferencijabilna, monotona je

b) ⊟ mora ⊟ ne može jer ima izvod u $f(-1)\neq 0$ ⊞ može

c) ⊞ $f''(-3)$ je paran izvod različit od nule

I ① a) ⊟ $f(x)$ je monotono rastuća, a ne $f'(x)$

b) $f''(x)\boxed{\leq}0$

c) ⊞ ako su svi pre njega jednaki nuli, onda jeste

d) ⊞
e) ⊞ } definicije
f) ⊞

g) $f(x)=|x^2-2x|$, $x\in\mathbb{R}$ 1) ⊟ $f(-1)\cdot f(3)>0$ 2) ⊟

② a) 1) ⊞

2) ⊞ ako se misli na $f'(13)$, ne mora da postoji

b) ⊞ definicija

⊟ ne mora, a može

c) ⊞ $f''(a)=0, f'''(a)\neq 0$

str. 27

PI

① $z = x^2 + xy - y^3 + 2$ i) [+] $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x - 3y^2$ ima oba parc. izvoda

$A(0,0,2)$ ii) $t: z - 2 = 0 \cdot (x-0) + 0(y-0) \Rightarrow z - 2 = 0$

$n: \; x = y = 0$

② $z = x^2 + xy + 7$, $\varphi: x - 2y = 0$

$\boxed{A(0,0)}$

1. $F(x,y,\lambda) = x^2 + xy + 7 + \lambda(x - 2y)$

2. $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y + \lambda = 0 \Rightarrow 4y + 2y = 0 \rightarrow y = 0$, $\lambda = 0$, $x = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} = x - 2\lambda = 0 \rightarrow x = 2\lambda$

$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x - 2y = 0 \rightarrow x = 2y$

$\Big\} \lambda = y$

3. $x - 2y = 0 \Rightarrow dx = 2dy$

4.

$d^2F = 2dx^2 + 1 \cdot dx dy \cdot 2 + 0 \cdot dy^2$

$= 2dx^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} dx^2 = 3dx^2 > 0 \Rightarrow \boxed{MIN}$

③ $u = f(x,y,z)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,2,3) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(1, 2+\Delta y, 3) - f(1,2,3)}{\Delta y}$$

④ a) [+] diferencijabilna f-ja UVEK ima parcijalne izvode

b) [+] f-ja mora biti neprekidna, izvodi ne (mogu imati prekid II vrste)

c) [+]

I

① a) [+] definicija

b) [-] uvek postoje ali ne moraju biti neprekidni

c) $z(x,y) = \begin{cases} \frac{4x}{x^2+y^2} + x^2 - 5y & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1) $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{4h}{h^2+0^2} + h^2 - 5 \cdot 0\right]$

$= h = 0$

2) [-] F-ja je diferencijabilna u $O(0,0)$

$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{4 \cdot 0}{0^2+h^2} + 0^2 - 5 \cdot h\right] = -5$

$$\Delta z = z(\Delta x, \Delta y) - z(0,0) = 0 \cdot \Delta x + (-5) \cdot \Delta y + \omega\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0,0} \omega = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0,0} \frac{4\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \Rightarrow \Delta x = \Delta y \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x}{\sqrt{2}\,\Delta x} = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow$$ nije diferencijalna

d)

1) $z = f(x^2y^3 + 4xe^{-y})$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x^2y^3 + 4xe^{-y})\right) \cdot (3y^2x + 4xe^{-y})$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial y \partial x} f^2(x^2y^3 + 4xe^{-y})\right)(3y^2x - 4xe^{-y}) + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x^2y^3+4xe^{-y})\right) \cdot (3y^2 - 4e^{-y})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y \partial x} f^2(x^2y^3 + 4xe^{-y}) \cdot \overbrace{(2xy^3 + 4e^{-y})(3y^2x - 4xe^{-y})}^{\dots} + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x^2y^3 + 4xe^{-y})\right)(3y^2 - 4e^{-y})$$

2) $\boxed{+}$ $d z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$

2) a) $\vec{r} = \vec{r}(t_1, t_2)$ $\qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial t_2} = \lim_{\Delta t_2 \to 0} \frac{\vec{r}(t_1, t_2 + \Delta t_2) - \vec{r}(t_1, t_2)}{\Delta t_2}$

b) $\vec{r} = \vec{r}(t_1, t_2) = (\underset{x}{e^{t_1} - t_2^8}, \underset{y}{\sin t_1 + \cos t_2}, \underset{z}{\operatorname{tg} t_1 + \operatorname{ctg} t_2})$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t_1} = \frac{\partial x}{\partial t_1}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial t_1}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial t_1}\vec{k} = \frac{\partial(e^{t_1} - t_2^8)}{\partial t_1}\vec{i} + \frac{\partial(\sin t_1 + \cos t_2)}{\partial t_1}\vec{j} + \frac{\partial(\operatorname{tg} t_1 + \operatorname{ctg} t_2)}{\partial t_1}\vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t_1} = e^{t_1}\vec{i} + \cos t_1 \vec{j} + \frac{1}{\cos^2 t_1}\vec{k} = \underline{\left(e^{t_1}, \cos t_1, \frac{1}{\cos^2 t_1}\right)}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t_2} = \frac{\partial x}{\partial t_2}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial t_2}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial t_2}\vec{k} = -8t_2^7\vec{i} - \sin t_2 \vec{j} - \frac{1}{\sin^2 t_2}\vec{k} = \underline{\left(-8t_2^7, -\sin t_2, -\frac{1}{\sin^2 t_2}\right)}$$

3) a) $\boxed{+}$ ako je $r > 0$ onda ima, ako je $r < 0$ onda maksimum

b) $\Delta z = f(x_1 + \Delta x, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n)$

$\Delta z > 0 \rightarrow$ lokalni minimum

$\Delta z < 0 \rightarrow$ lokalni maksimum

Neodređeni integral

- Primitivna funkcija $F(x)$ funkcije $f(x)$ nad I → ima izvod $F'(x)$ nad intervalom I
  → važi $F'(x) = f(x)$ nad I
- Dve primitivne f-je iste funkcije nad I razlikuju se samo za konstantu C
- Neodređeni integral funkcije $f(x)$ nad I je skup svih primitivnih funkcija te funkcije $f(x)$ nad intervalom I

USM $\int f(x)dx = F(x) + C$

- Ako je funkcija neprekidna nad I ⇒ postoji primitivna funkcija nad I
  (tj. neodređeni integral)
- Ako f-ja ima prekid prve vrste u nekoj tački intervala I, ona nema neodređeni integral nad I

* $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

USM

- Tablica neodređenih integrala:

* $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
* $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
* $\int e^x dx = e^x + C$
* $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
* $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
* $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
* $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$
* $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C$
* $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx \overset{\frac{1}{a}\cdot}{=} \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \underset{\frac{1}{a}\cdot}{=} -\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C$
* $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \overset{\frac{1}{a}}{=} \arcsin\frac{x}{a} + C \underset{\frac{1}{a}}{=} -\arccos\frac{x}{a} + C$
  ↳ $x \in (-1, 1)$
* $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm k^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm k^2}\right| + C \rightarrow k \neq 0$
* $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \rightarrow a \neq 0,\ |x| \neq |a|$
* $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$
* $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$
* $\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+A}\right| + C$

- Svođenje integrala na tablični:

USM

* **Smena promenljive:** $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

sm: $x = \varphi(t)$
$dx = \varphi'(t)dt$

~ $\varphi: I_1 \to I \subseteq \mathbb{R}$ ima neprekidan izvod nad I_1
~ f-ja ima neodređen integral nad I

USM

* **Parcijalna integracija:** $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

~ $u(x)$ i $v(x)$ imaju prve izvode nad I i postoji primitivna f-ja f-je $u'v$ nad I

~ v je obično jednostavnija f-ja

~ $e^{ax}dx$ i $\sin ax\,dx \Rightarrow dv$
~ $\ln^m x \Rightarrow u$

- Harmonici:

$\int sh\,dx = chx + C$ $\quad \int thx\,dx = \ln chx + C$ $\quad \int \frac{1}{ch^2x}dx = thx + C$

$\int ch\,dx = shx + C$ $\quad \int cthx\,dx = \ln|shx| + C$ $\quad \int \frac{1}{sh^2x}dx = -cthx + C$

- Kvadratni trinom:

$(ax-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$\frac{2ab}{a^2} \Rightarrow (bx-a)^2$

a) $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$

$\to m=0$: $\int \frac{n}{ax^2+bx+c}dx = \frac{n}{a}\int \frac{dx}{(x+k)^2+L}$ $\quad \left(ax^2+bx+c = a[(x+k)^2+L]\right)$

$\to m\neq 0$: $\int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+n-\frac{mb}{2a}}{ax^2+bx+c}dx = \frac{m}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \int \frac{n-\frac{mb}{2a}}{ax^2+bx+c}dx$

sm: $(ax^2+bx+c) = t$
$(2ax+b)dx = dt$

b) $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx \to$ svode se na integrale oblika $\int\sqrt{A^2-x^2}\,dx$ i $\int\sqrt{x^2+A}\,dx$

Integrali nekih funkcija

- Integrali racionalnih funkcija:

* Svaki polinom n-tog stepena $(n \geq 1)$ ima n korena ($\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$)
* Razlaganje racionalne funkcije:

a) $\dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{A}{(x-1)} + \dfrac{B}{(x-1)^2}$

množenjem jednačine sa imeniocem $R(x) \rightarrow$ u ovom slučaju sa $(x-1)^2$ dobijaju se polinomi, ubacivanjem brojeva umesto x dobijaju se A, B i C (ili jednačenjem po stepenima)

b) $1 = A(x-1) + B$

$A = 0$
$B = 1$

c) integrisanje prostih razlomaka

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^i}\,dx = \frac{-A}{(i-1)(x-a)^{i-1}} + C$$

$\cancel{\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} = \int \frac{A}{(x-1)}dx + \int \frac{B}{(x-1)^2}dx}$

$\cancel{\int \frac{1}{(x-1)^2}dx =}$

- Integrali iracionalnih funkcija:

USM

I Ojlerove smene $\rightarrow \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

~ $a > 0 \Rightarrow$ Prva Ojlerova smena

$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$ * kompleksni koreni

~ $c > 0 \Rightarrow$ Druga Ojlerova smena

$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$

~ ax^2+bx+c ima realne i različite korene $\Rightarrow$ Treća Ojlerova smena

$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$

II $I = \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ (Metod Ostrogradskog)

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

1. Izvod $\Rightarrow \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q'_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{(2ax+b)Q_{n-1}(x)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

2. $/\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} \Rightarrow P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}(2ax+b)Q_{n-1}(x) + \lambda$

3. rešavanje sistema od n-1 nepoznatih => jednačenje po stepenu

III $I = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$

* svodi se na II uvođenjem smene : $\boxed{x-\alpha = \frac{1}{t}} \Rightarrow \boxed{dx = -\frac{dt}{t^2}}$

IV $I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{px+q}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{px+q}\right)^{r_k}\right)dx$

* smena $\boxed{\sqrt[s]{\frac{ax+b}{px+q}} = t}$ tj. $\boxed{\frac{ax+b}{px+q} = t^s}$ → najmanji zajednički sadržalac

V $I = \int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ → Binomni diferencijal (m,n,p su racionalni brojevi)

1. smena $\boxed{t = x^n}$, svodi se na $\frac{1}{n}\int t^q(a+bt)^p\,dt$

2. a) $p \in \mathbb{Z}$, $q = \frac{r}{s} \Rightarrow$ smena $t = z^s$
   b) $q \in \mathbb{Z}$, $p = \frac{r}{s} \Rightarrow$ smena $a+bt = z^s$
   c) $p+q \in \mathbb{Z}$, $p = \frac{r}{s} \Rightarrow$ smena $\frac{a+bt}{t} = z^s$

- Integrali trigonometrijskih funkcija:

I $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

smena: $t = tg\frac{x}{2}$ → $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, → $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

a) $\int R(\sin x, -\cos x)dx \Rightarrow$ smena: $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$

b) $\int R(-\sin x, \cos x)dx \Rightarrow$ smena: $\cos x = t$, $-\sin x dx = dt$

c) $\int R(-\sin x, -\cos x)dx \Rightarrow$ smena: $tg x = t$, $(1+t^2)dx = dt$

II $I = \int \sin^m x \cos^n x \, dx$

a) $m, n \in \mathbb{Q}$ $\rightarrow$ smenom $t = \sin x$ ($t = \cos x$) se svodi na binomni diferencijal

b) $m, n \in \mathbb{Z}$

~ bar jedan je neparan:

njega razdvojimo (npr $\cos^n x = \cos^{n-1} x \cdot \cos x$) i taj parni deo izrazimo preko $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, i onda uradimo smenu $t = \sin x / t = \cos x$, tj. onaj koji nije prvog stepena

~ parni su i nenegativni:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

* ako su im stepeni jednaki koristimo i $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

~ parni su i bar jedan je negativan:

smena: $\operatorname{tg} x = t$, $dt = \frac{dx}{1+t^2}$

III $I_1 = \int \sin(mx) \sin(nx) \, dx$, $I_2 = \int \sin(mx) \cos(nx) \, dx$, $I_3 = \int \cos(mx) \cos(nx) \, dx$

* Redom identiteti:

1. $\sin(mx) \sin(nx) = \frac{1}{2}(-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$
2. $\sin(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)$
3. $\cos(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$

IV $\int (\sin(\alpha x))^m (\cos(\beta x))^n \, dx$, $m, n \in \mathbb{N}$

* Ojlerove formule:

$$\sin(\alpha x) = \frac{e^{\alpha x i} - e^{-\alpha x i}}{2i}$$

$$\cos(\beta x) = \frac{e^{\beta x i} + e^{-\beta x i}}{2}$$

- rešavamo njima integrale tako što uradimo smene i onda stepenujemo, dok ne dobijemo simetrične eksponente u integralu (npr. $e^{2xi} + e^{-2xi}$), pa ih ovim smenama vraćamo nazad u oblik $\sin(\alpha x)$ i $\cos(\beta x)$ i rešimo integrale.

- Integrali eksponencijalnih funkcija:

I $I=\int R(e^x)dx$

smena: $e^x=t$, $e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$

II $I=\int (P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x)\,dx$

* Identitet $\rightarrow I = R_k(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x) + T_k(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$

$k=\max\{m,n\}$

* diferenciramo j-nu i onda radimo jednakost po stepenima i tako dobijemo koeficijente polinoma R i T
* Ubacimo sve u identitet na kraju i to je to

Određeni integrali

- Ako je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ i podela sa izabranom tačkom intervala $[a,b]$ označena kao $(P,\mathcal{E})$, onda je zbir $I(f,P,\mathcal{E})=\sum_{i=1}^{n} f(\mathcal{E}_i)\Delta x_i$ poznat kao Rimanova (integralna) suma

- Broj I je Rimanov (određeni) integral f-je $f(x)$ nad $[a,b]$ ako
$(\forall \mathcal{E}>0)(\exists \delta>0)\,|I(f,P,\mathcal{E})-I|<\mathcal{E}$ $\quad$ *važi $\lambda(P)<\delta$

$I=\lim_{\lambda(P)\to 0} I(f,P,\mathcal{E}) \longrightarrow$ ako postoji f-ja je integrabilna u Rimanovom smislu nad $[a,b]$

$I=\int_a^b f(x)\,dx$

- Potreban uslov za integrabilnost → ograničenost
- Darbuove sume:

USM

$m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $m=\inf_{x\in[a,b]} f(x)$

$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $M=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$

Ekvidistalna podela $\Delta x=\frac{b-a}{n}$

Podela $P=\{x_0,\dots,x_i\}$

~ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je integrabilna akko važi $I^*=I_*$

*Donja Darbuova suma za $f(x)$ nad $[a,b]$

$s=s(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$

*Gornja Darbuova suma za $f(x)$ nad $[a,b]$

$S=S(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$

*Donji Darbuov integral za $f(x)$ nad $[a,b]$

$I_*=\sup_{P\in P^*} s(f,P)$

*Gornji Darbuov integral za $f(x)$ nad $[a,b]$

$I^*=\inf_{P\in P^*} S(f,P)$

* $\int_a^a f(x)\,dx=0$
* $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

- Integrabilnost f-ja:

* Ako je f-ja neprekidna nad zatvorenim intervalom, onda je i integrabilna nad njim
* Ako je f-ja ograničena nad zatvorenim intervalom i ima konačan broj prekida nad njim, onda je ona nad tim intervalom i integrabilna
* Ako je f-ja monotona nad zatvorenim intervalom, ona je nad tim intervalom i integrabilna

- Veza između određenog i neodređenog integrala:

* Ako je f(x) integrabilna nad [a,b] i ima primitivnu f-ju F(x) nad [a,b], onda je

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)} \Big\} \text{ Njutn-Lajbnicova formula}$$

- Osobine određenog integrala:

* Ako je f(x) integrabilna nad zatvorenim intervalom, ona je integr. nad svakim njegovim zatvorenim podintervalom
* Ako je f(x) integrabilna nad [a,b] i ako se razlikuje u konačnom broju tačaka od g(x) nad [a,b] → onda je g(x) integr. nad [a,b] i važi da su im integrali jednaki

* Monotonost → f(x) je integrabilna nad [a,b], $a<b$, i $f(x)\geq 0$ za $x\in[a,b]$, onda je $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
* $f(x)\leq g(x)$, $x\in[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

* Ograničena f-ja može da ima beskonačan broj prekida, a da bude integrabilna (Teorema Lebega)

- Teorema o srednjoj vrednosti:

$f, g \in \mathcal{R}[a,b], a<b \qquad m = \inf f(x), \; M = \sup f(x), \; x \in [a,b]$

$g(x) \geq 0 \; (g(x) \leq 0), x \in [a,b] \Rightarrow \exists \; m \leq \eta \leq M$ tako da važi

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \eta \int_a^b g(x)dx \quad \left(i \int_a^b f(x)dx = \eta(b-a)\right)$$

- Određeni integral kao f-ja granice:

- $f(x)$ je integrabilna nad $[A,B]$, $a \in [A,B]$ je ~~proizvoljna~~ proizvoljna tačka. Za $x \in [A,B]$:

* $I(x) = \int_a^x f(t)dt \rightarrow$ integral sa promenljivom gornjom granicom

* $I_1(x) = \int_x^a f(t)dt \rightarrow$ integral sa promenljivom donjom granicom $\boxed{I_1 = -I}$

~ $I(x)$ i $I_1(x)$ su neprekidne nad $[A,B]$

~ Ako je $f(x)$ neprekidna f-ja nad $[A,B]$ tada f-ja $I(x)$ ima izvod nad $[A,B]$ i važi $\boxed{I'(x) = f(x)}$, $x \in [A,B]$

- Parcijalna integracija:

*ako f-je u i v imaju neprekidne izvode nad $[a,b]$ važi:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

- Smena promenljive:

* $f:[A,B] \to \mathbb{R}$ je neprekidna, $\varphi:[\alpha_0, \beta_0] \to [A,B]$ ima neprekidan izvod $\alpha, \beta \in [\alpha_0, \beta_0]$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ i važi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

USM

Primena određenog integrala

- Površina ravnih likova:

* pravougle koordinate ~ iznad x-ose: $P=\int_a^b f(x)dx$

~ ispod x-ose: $P=-\int_a^b f(x)dx$

~ $f(x)$ ispod $g(x)$: $P=\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx$

* polarni koordinatni sistem

$(\rho=\rho(\varphi),\ \alpha\le\varphi\le\beta,\ |\beta-\alpha|\le 2\pi)$ $\quad P=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$

↳ neprekidna f-ja

* parametarski oblik $\quad P=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt=\int_\alpha^\beta y\cdot x'(t)dt$

$(x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in[\alpha,\beta])$

- Dužina luka ravne krive:

* pravougle koordinate $\quad l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

* polarni koordinatni sistem $\quad l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'(\varphi)^2}d\varphi$

* parametarski oblik $\quad l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\psi'(t))^2+(\varphi'(t))^2}dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$

- Obrtna tela:

* pravougle koordinate: $V=\int_a^b\pi f^2(x)dx$, $P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

* polarni koordinatni sistem $V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta\rho^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi$, $P=2\pi\int_\alpha^\beta\rho(\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\sin\varphi d\varphi$

* parametarski oblik $V=\pi\int_\alpha^\beta\underbrace{\psi^2(t)\varphi'(t)dt}_{y^2x'dt}$, $P=2\pi\int_\alpha^\beta\underbrace{\psi(t)\sqrt{(\psi'(t))^2+(\varphi'(t))^2}dt}_{y\sqrt{(y')^2+(x')^2}dt}$

$(x=\varphi(t),\ y=\psi(t))$

- Kardioida: $\rho=a(1+\cos\varphi)$ $(a>0)$

- cikloida: $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$

- Elipsa: $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$

Nesvojstveni integral

USM

I vrste

* $f(x)$ je definisana nad $[a,\infty)$ i integrabilna nad svakim intervalom $[a,T]\subset[a,\infty)$
* nesvojstveni integral f-je $f(x)$ nad $[a,\infty)$, u oznaci $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx$ je funkcija

$$F(T)=\int_a^T f(x)dx,\ T\geq a \qquad \boxed{[a,\infty)}$$

* ako postoji $A=\lim\limits_{T\to\infty} F(T) \Rightarrow$ nesvojstveni integral konvergira ka A

* $f(x)$ je definisana nad $(-\infty,a]$, integrabilna nad $[T,a]\subset(-\infty,a]$
* nesvojstveni integral f-je $f(x)$ nad $(-\infty,a]$, u oznaci $\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)dx$ je funkcija $F(T)$

$$F(T)=\int_T^a f(x)dx,\ T\leq a \qquad \boxed{(-\infty,a]}$$

* ako postoji $B=\lim\limits_{T\to-\infty} F(T) \Rightarrow$ nesvojstveni integral konvergira ka B

* $f(x)$ je definisana nad $(-\infty,\infty)$, integrabilna nad $[M,N]\subset(-\infty,\infty)$
* nesvojstveni integral f-je $f(x)$ nad $(-\infty,\infty)$ je uređen par

$$\left(\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)dx,\ \int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx\right)$$ gde je a proizvoljan realan broj $\boxed{(-\infty,\infty)}$

* Ako oba nesvojstvena integrala konvergiraju tada konvergira i $\int\limits_{(-\infty,\infty)} f(x)dx$ i važi $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_a^{\infty} f(x)dx$

* svodimo na oblik $\int_a^T \frac{1}{x^\alpha}dx \begin{cases} \alpha>1 \to \text{konvergira} \\ \alpha\leq 1 \to \text{divergira}\end{cases}$

USM

II vrste

* $f(x)$ definisana nad $[a,b)$ i integrabilna nad $[a,b-\varepsilon]\subset[a,b)$
* nad $[a,b)$ u oznaci $\int\limits_{[a,b)} f(x)dx$ je f-ja $F(\varepsilon)$

$$F(\varepsilon)=\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad a<b-\varepsilon<b \qquad \boxed{[a,b)}$$

* ako postoji $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+} F(\varepsilon)=A \Rightarrow$ integral konvergira ka A

* f-ja definisana nad $(a,b]$ i integrabilna nad $[a+\varepsilon, b] \subset (a,b]$
* nad $(a,b]$ u oznaci $\int_{(a,b]} f(x)\,dx$ je f-ja $F(\varepsilon)$

$$F(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \quad , \quad a < a+\varepsilon < b \qquad \boxed{(a,b]}$$

* ako postoji $\lim_{\varepsilon \to 0^+} F(\varepsilon) = B \Rightarrow$ integral konvergira ka B

* f-ja definisana nad (a,b) i integrabilna nad $[m,M] \subset (a,b)$
* definisan nad (a,b) u oznaci $\int_{(a,b)} f(x)\,dx$, integral je uređen par

$\left(\int_{(a,c]} f(x)\,dx, \int_{[c,b)} f(x)\,dx \right)$ gde je c proizvoljan realan broj $\boxed{(a,b)}$

* ako svaki od tih integrala konvergira, onda konvergira i $\int_{(a,b)} f(x)\,dx$
i važi $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

* ako je f-ja definisana u svim tačkama iz (a,b) sem u $c \in (a,b)$, i ako su definisani integrali $\int_{(a,c)} f(x)\,dx$ i $\int_{(c,b)} f(x)\,dx$ tada je integral uređen par $\left(\int_{(a,c)} f(x)\,dx, \int_{(c,b)} f(x)\,dx \right)$

* $\int \frac{1}{x^\beta}\,dx \begin{cases} \beta < a & \text{konvergira} \\ \beta \geq a & \text{divergira} \end{cases}$

III vrste

* (a,∞)

* $\int_{(a,\infty)} f(x)\,dx = \underbrace{\left(\int_a^c f(x)\,dx, \int_c^\infty f(x)\,dx \right)}_{\text{moraju oba da konvergiraju}}, \; c \in (a,\infty)$

* $$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$$

$\int_{(0,1]} \frac{dt}{t^\alpha}$ $\alpha \geq 1$ divergira

$\alpha < 1$ konvergira

USM

- Gama f-ja:

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ $\Gamma(n) = (n-1)$ $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ po definiciji

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

*nije definisana za $x \leq 0$

USM

- Beta f-ja:

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Diferencijalne jednačine prvog reda

USM

- Opšti oblik: $G(x,y,y')=0$
- Normalni oblik: $y'=F(x,y)$
- Lipšicov uslov po y → $\exists K>0$ tako da u zatvorenoj oblasti G važi $|F(x,y_2)-F(x,y_1)| \le K|y_2-y_1|$

$G \begin{cases} a \le x \le b \\ \alpha \le y \le \beta \end{cases}$

($F(x,y)$ je neprekidna u G)

→ onda postoji jedinstveno rešenje početnog problema

$$y'=F(x,y), \quad y(x_0)=y_0 \quad (x_0,y_0)\in G$$

- Ojlerove poligonalne linije:
  - ~~*po~~ * podeljen interval
  - * početni problem (diferencijalna jednačina), $y(x_0)=y_0$ nad nekim intervalom
  - * ubacujemo x_0, y_0, y_0' u $y=y_0+y_0'(x-x_0)$ i dobijamo j-nu prave
  - * u j-nu prave ubacujemo x iz susednog intervala i dobijamo y iz tog sledećeg intervala, i ponavljamo kroz ceo interval

- Klase dif. j-na prvog reda:

I Jednačina koja razdvaja promenljive

normalni oblik: $\boxed{y'=f(x)g(y)}$

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx \,/\int \implies \text{opšte rešenje: } \boxed{\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C}$$

II Homogena jednačina

normalni oblik: $\boxed{y'=f\left(\frac{y}{x}\right)} \xRightarrow{\text{sm: } u=\frac{y}{x},\ u=u(x)}$ svodi se na j-nu I vrste

$$u=\frac{y}{x}$$

$$y=ux, \quad y'=u'x+u$$

III Jednačine koje se svode na homogenu

n.o.: $\boxed{y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)}$ - uradi se determinanta $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

$D=0 \rightarrow$ smena $t =$ imenilac ili $t =$ brojilac
$t = t(x)$
$\rightarrow$ svodi se na I tip j-ne

$D \neq 0 \rightarrow$ smena $x = X + \alpha$
$y = Y + \beta$
$\rightarrow \alpha, \beta$ jedinstvena rešenja sistema
$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$
$a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0$
$\rightarrow$ svodi se na II tip j-ne

IV Linearna jednačina

$$\boxed{y' + f(x)y = g(x)}$$

1° smena: $y = uv$ $\quad u = u(x)$, $v = v(x)$
$y' = u'v + uv'$

2° $u'v + uv' + f \cdot uv = g \Rightarrow u'v + u(\underbrace{v' + fv}_{0}) = g$

3° $v' + fv = 0$
$v' = -fv$
$\frac{dv}{dx} = -f(x)v$
$\frac{dv}{v} = -f(x)dx \, / \int$
$v = F(x) \rightarrow$ bez $+C$

4° $u'F(x) = g(x)$
$\frac{du}{dx} = \frac{g(x)}{F(x)}$
$du = \frac{g(x)}{F(x)} dx \, / \int$
$u = G(x) + C$

5° $y = uv \Rightarrow \boxed{y = (G(x)+C) \cdot F(x)}$
opšte rešenje

V Bernulijeva jednačina

$$\boxed{y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}$$

1° smena: $y = uv$, $u = u(x)$, $v = v(x)$

$y' = u'v + uv'$

2° $u'v + uv' + f(x)uv = gu^{\alpha}v^{\alpha}$

$u'v + u\underbrace{(v' + f(x)v)}_{0} = gu^{\alpha}v^{\alpha}$

3° $v' + fv = 0$

$v' = -fv$

$\frac{dv}{dx} = -fv$

$\frac{dv}{v} = -f(x)dx \,/\int$

$v = F(x)$

4° $u'F = gu^{\alpha}F^{\alpha}$

$u = G(x) + C$

$y = u \cdot v$

$\boxed{y = (G(x) + C) \cdot F(x)}$ opšte rešenje

*preko inverzne

$y' = \frac{1}{x'}$

$x = uv$

VI Jednačina totalnog diferencijala

$$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0}$$

$+$ mora biti $+$

da bi bila JTD mora da važi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

a za $F(x,y)$ važi:

$dF = Pdx + Qdy$

$\frac{\partial F}{\partial x} = P \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$

1° dobijamo $F(x,y)$

$P = \frac{\partial F}{\partial x} \,/\int dx$

$F(x,y) = p(x,y) + \varphi(y)$

2° Ubacujemo F u formulu sa Q

$Q = \frac{\partial F}{\partial y} \Rightarrow Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(p(x,y) + \varphi(y))$

$Q = \frac{\partial p(x,y)}{\partial y} + \varphi'(y)$

kada dobijemo $\varphi(y) = \ldots + C_1$ ubacujemo u formulu F

3° $F(x,y) = C$

$\boxed{p(x,y) + \varphi(y) = C}$ opšte rešenje

*može da se uradi i analogno $\left(Q = \frac{\partial F}{\partial y}, q(x,y) + \varphi(x)\right)$

VII Integracioni množitelj

* kada nije ispunjen uslov za JTD (VI) tj. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, postoji f-ja $h(x,y) \neq 0$ takva da jednačina

$$\boxed{\underbrace{h(x,y)P(x,y)}_{P_1(x,y)}dx + \underbrace{h(x,y)Q(x,y)}_{Q_1(x,y)}dy = 0}$$

bude jednačina totalnog diferencijala $\rightarrow \frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}$ važi

$h(x,y) \rightarrow$ integracioni množitelj

$\downarrow$ preko ove jednakosti dobijamo h $\left(h' = \frac{dh}{dt}\right)$

$h = h(t)$

* kada dobyemo h, rešavamo jednačinu kao JTD

VIII Kleroova jednačina

$$\boxed{y = xy' + f(y')}$$

smena: $y' = p$, $p = p(x)$

$\Downarrow$ $\rightarrow$ nije promenljiva

$y = xp + f(p) \quad /'$

$\cancel{y'} = \cancel{p} + xp' + f'(p) \cdot p'$

$p'(x + f'(p)) = 0$

$\swarrow$ $\searrow$

$p' = 0$

$p = C$

$$\boxed{y = x \cdot C + f(C)}$$

opšte rešenje

$x + f'(p) = 0$

$x = -f'(p)$

$\Downarrow$

$p = g(x)$

$$\boxed{y = xg(x) + f[g(x)]}$$

singularno rešenje

IX Lagranžova jednačina

$\boxed{y = xf(y') + g(y')}$ 1° smena: $y' = p$, $p = p(x)$

$$\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = p\,dx$$

2° $y = xf(p) + g(p) \,/'$

$$y' = f(p) + xf'(p)\cdot p' + g'(p)\cdot p'$$

$$\frac{dy}{dx} = f(p) + xf'(p)\frac{dp}{dx} + g'(p)\frac{dp}{dx} \,/\cdot dx$$

$$dy = f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp$$

$$p\,dx - f(p)dx = xf'(p)dp + g'(p)dp$$

$$(p - f(p))dx = (xf'(p) + g'(p))dp$$

$\underline{p - f(p) \neq 0}$

$$\underbrace{\frac{dx}{dp}}_{x'} = \underbrace{\frac{f'(p)}{pf(p)}}_{F(p)}x + \underbrace{\frac{g'(p)}{pf(p)}}_{G(p)}$$

$\boxed{x' = F(p)x + G(p)} \rightarrow$ linearna j-na

$\underline{p - f(p) = 0}$

$p = p_1$

$\boxed{y = xf(p_1) + g(p_1)}$

singularno rešenje

I j-na koja razdvaja promenljive	$y' = f(x)g(y)$
II homogena j-na	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$
III j-na koja se svodi na homogenu	$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$
IV linearna j-na	$y' + f(x)y = g(x)$
V Bernulijeva j-na	$y' + f(x)y = g(x)y^\alpha$
VI jednačina totalnog diferencijala	$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$
VII integracioni množitelj	$h(x,y)P(x,y)dx + h(x,y)Q(x,y)dy = 0$
VIII Kleroova j-na	$y = xy' + f(y')$
IX Lagranžova j-na	$y = xf(y') + g(y')$

Diferencijalne jednačine višeg reda USM

I Snižavanje reda diferencijalne j-ne

a) Direktna integracija

$$y^{(n)}(x) = f(x)$$

$$y^{(n-1)}(x) = \int f(x)dx = f_1(x) + C_1$$

$$y^{(n-2)}(x) = \int (f_1(x) + C_1)dx = f_2(x) + C_1 x + C_2$$

$$y(x) = f_n(x) + \frac{C_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{C_{n-1} x}{1!} + C_n$$ → koliki red toliko konstanti

b) J-na koja ne sadrži y

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

smena: $y^{(k)} = z$, $z = z(x) \Rightarrow F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$

c) J-na koja ne sadrži x

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

smena: $y' = z$, $z = z(y)$

$$y'' = z' \cdot y' = z'z$$

$$y''' = z''z \cdot z + z' \cdot z' \cdot z = z^2 z'' + z(z')^2$$

II Homogena linearna dif. j-na višeg reda

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = 0$$

$a_n(x) \neq 0$ → neprekidne f-je

$\neq 0$ → nehomogena linearna j-na

- Operator $L_n[\ ]$ je linearan $\Rightarrow L_n[y_1 + y_2] = L_n[y_1] + L_n[y_2]$, $L_n[cy] = cL_n[y]$

- Princip superpozicije - Ako su $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$ rešenja homogene lin. dif. j-ne tada je rešenje i $y(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i(x)$, c_i su proizvoljne konstante

- Linearno zavisne f-je → ako postoje c_i koji nisu svi jednaki nuli i važi

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)=0$$

→ linearno nezavisne - za $\forall i$ važi $c_i=0$

- Opšte rešenje → $m=n$, c_i se mogu izabrati tako da se zadovolji početni uslov
- Partikularno rešenje → izborom konstanti c_i $(i=1,\dots,n)$

USM

- Determinanta Vronskog:

$$W(x)=W(y_1,y_2,y_3)(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

↳ $y_n^{(n-1)}$

$=0$ → zavisne f-je

$\neq 0$ → nezavisne f-je

↳ ne mora za $\forall x \in I$ da važi $W(x)\neq 0$

* ako je y_1, y_2, y_3 skup rešenja homogene, za $\forall x$ $W=0$ → moraju biti zavisna rešenja

USM

- Fundamentalni skup rešenja - svaki skup linearno nezavisnih r-nja ($W \neq 0$) (x_0)

- Formula Ljuvila-Abela:

Neka je $x_0 \in I$ proizvoljna tačka, a $\{y_1(x),\dots,y_n(x)\}$ fundamentalni skup rešenja homogene linearne jednačine $L_n[y]=0$, tada za $\forall x \in I$ važi

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}$$

- Rešenja homogene lin. dif j-ne $L_n[y]=0$ su linearno nezavisna nad I ako je $W(x_0)\neq 0$ za neku tačku $x_0 \in I$

- $L_n[y]=0$ → broj lin. nezavisnih $\leq n$

→ broj lin. zavisnih može biti bilo šta

III Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

$$L_n[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_0 y = 0$$

$y = y_h + y_p$ } opšte rešenje nehomogene linearne j-ne

homogena j-na (rešenja) → y_h; partikularna rešenja → y_p

smena: $\boxed{y^{(i)} = r^i}$ (izvod → (i), stepen → i)

njena karakteristična j-na: $r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$

polinom n-tog stepena, ima n korena $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$

~~- Fundamentalni skup rešenja:~~
~~a) Realni i različiti koreni~~

- Koreni:

1. Realni i različiti (e^{rx})

$$\Phi = \{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}\}$$ → fundamentalni skup rešenja

opšte rešenje → $y = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{r_i x}$

2. Realni i višestruki

m-višestrukost

$$e^{rx}, xe^{rx}, x^2 e^{rx}, \ldots, x^{m-1} e^{rx}$$

3. Kompleksni i različiti

$r = \alpha + i\beta$ $\quad y(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + e^{\alpha x}\sin\beta x$

4. Kompleksni i višestruki

$r = \alpha + i\beta$

$$y(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + e^{\alpha x}\sin\beta x + xe^{\alpha x}\cos\beta x + xe^{\alpha x}\sin\beta x + \ldots + x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x + x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

IV Metod varijacije konstanti

- Rešavamo homogeni deo j-ne, a partikularni metodom varijacije konstanti

$$y = y_h + y_p$$

$$\boxed{y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n}$$, a $C_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

dobijamo iz sistema jednačina

$$\begin{aligned}
&C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0 \\
&C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0 \\
&\vdots \\
&C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{n-1} = f(x)
\end{aligned}$$

- Ako se ne doda konstanta kod. neodređenog integrala

$C_i(x) = \int C_i'(x)dx = \int g(x)dx$ onda se dobija partikularno rešenje

Npr: $y_h = C_1e^x + C_2xe^x \rightarrow y_p = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$

$$\begin{aligned}
&C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^x \cdot x = 0 \\
&C_1'(x)e^x + C_2'(x)(x+1)e^x = f(x) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

rešavanjem dobijemo p.r.
(integraljujemo konstante)

V Ojlerova diferencijalna jednačina

$$(ax+b)^n y^{(n)} + A_{n-1}(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + A_1(ax+b)y' + A_0\overbrace{(ax+b)^0}^{1} y = f(x)$$

$a, b, A_i \rightarrow$ konstante

- 4 slučaja:

* $ax+b>0,\ a\neq 0 \longrightarrow$ smena $ax+b=e^t$, $t=\ln(ax+b)$, $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{a}e^t$

$$\left.\begin{aligned} \rightarrow y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \\ y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \\ y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \end{aligned}\right\}$$
svodimo j-nu na j-nu sa konstantnim koeficijentima

* $ax+b<0,\ a\neq 0 \rightarrow$ smena $ax+b=-e^t$
  $\rightarrow$ svodi se na j-nu sa konstantnim koeficijent.

* $a=0,\ b\neq 0 \rightarrow$ ovo je j-na sa konstantnim koeficijentima
* $a=0,\ b=0 \rightarrow A_0 y = f(x)$, nije diferencijalna j-na

VI Metod jednakih koeficijenata

$f(x) \neq 0 \rightarrow y = y_h + y_p$

- Ako je $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x)$, j-na ima 1 partikularno rešenje
  $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$$y_p = x^r e^{\alpha x}(T_k(x)\cos\beta x + R_k(x)\sin\beta x)$$

$k = max\{m, n\}$

r – višestrukost korena $\alpha + \beta i$ karakteristične j-ne

- $r = 0$ ako nema korena $\alpha + \beta i$

* $\beta = 0$ $(\cos 0 = 1, \sin 0 = 0) \rightarrow$ uzimamo da je $n = 0, m = k$

- Računamo onoliko izvoda y_p ~~koj~~ kojeg je dif. j-na reda i ubacujemo ih u originalnu jednačinu da bismo dobili koeficijente polinoma

Praktikum str. 9

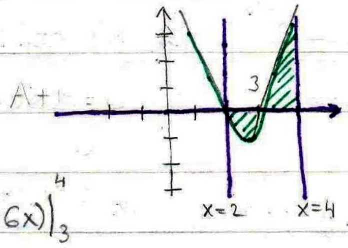
P1 ①

a) $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\cancel{(1+t^2)}\,2dt}{2t\cancel{(1+t^2)}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$

sm: $t = tg\frac{x}{2}$; $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

b) $\int \sqrt{x^2+4x+5}\,dx \Rightarrow$ sm: $\sqrt{x^2+4x+5} = xt \pm \sqrt{5}$; $\sqrt{x^2+4x+5} = t \pm \sqrt{1}\,x = t \pm x$

c) $y = f(x) = x^2 - 5x + 6$, $x=2$, $x=4$, O_x



$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$ → $x_1 = 3$, → $x_2 = 2$; $+\ 2\ -\ 3\ +$

$P = -\int_2^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx = -\left(\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 6x\right)\Big|_2^3 + \left(\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 6x\right)\Big|_3^4$

$\boxed{P = 1}$

② $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+6x+10}}dx = \overbrace{P(x)}^{A}\sqrt{x^2+6x+10} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}$ $/'$

$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+6x+10}} = \cancel{0\cdot\sqrt{x^2+6x+10}}^{\,0} + \frac{(2x+6)\cdot A}{2\sqrt{x^2+6x+10}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+6x+10}}$ $/\cdot\sqrt{x^2+6x+10}$

$x - 1 = (x+3)A + \lambda \Rightarrow$ po stepenima x : $1 = A \Rightarrow \underline{P(x) = 1}$ $\quad dg(P) = \underline{0}$

$\underline{\lambda = -4}$

① 1.

a) i) ⊞ nisu povezani ii) ⊞ (mora? otvoren interval?) iii) ⊞ ne sme samo prekid prve urste

b) i) ⊟ ne mora ii) ⊟ mora

② $f(x) = 2x - x^2$, $P = \{0,1,4,6\}$, $[0,6]$, $\mathcal{E} \in \{0.5, 3, 5\}$ → mora poz.

a) $I(f,P,\mathcal{E}) = \underline{f(0.5)\cdot 1 + f(3)\cdot 3 + f(5)\cdot 2 = 0{,}75 - 9 - 30 = 38{,}25}$

$s(f,P) = \underline{0\cdot 1 + (-8)\cdot 3 + (-24)\cdot 2 = -24 - 48 = -72}$ → gledaš $f(P)$

$S(f,P) = \underline{1\cdot 1 + 1\cdot 3 - 8\cdot 2 = -12}$

b) $\rho = \cos^3\varphi$, $\varphi \in [0, \pi/2] \Rightarrow P = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^6(\varphi)d\varphi$

greška - brisala sam integrale nad konstant

$P = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^4(\varphi)(1-\sin^2(\varphi))d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^4(\varphi)d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^4(\varphi)\sin^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2(\varphi)(1-\sin^2(\varphi))d\varphi$

$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}(1+\cos(2\varphi))\right)^2\left(\frac{1}{2}(1-\cos(2\varphi))\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos(2\varphi))d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)d\varphi$

$-\frac{1}{16}\int_0^{\pi/2}(1+\cos(2\varphi))(1^2 - \cos^2(2\varphi))d\varphi = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos(2\varphi)d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}\sin^2(2\varphi)d\varphi - \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\int_0^{\pi/2}\cos^2(2\varphi)d\varphi$

$-\frac{1}{16}\int_0^{\pi/2}\cos(2\varphi)d\varphi + \frac{1}{16}\int_0^{\pi/2}\cos^3(2\varphi)d\varphi = \frac{3}{16} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos(2\varphi)d\varphi - \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos(4\varphi))d\varphi + \frac{1}{16}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos(4\varphi))d\varphi$

$-\frac{1}{16}\int_0^{\pi/2}\cos(2\varphi)d\varphi + \frac{1}{16}\int_0^{\pi/2}\cos(2\varphi)\cdot(1-\sin^2(2\varphi))d\varphi$

$= \frac{3}{16} + \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt - \frac{1}{16} + \frac{1}{64}\int_0^{\pi/2}\cos z\,dz + \frac{1}{32} + \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos z\,dz \cancel{- \frac{1}{32}\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt + \frac{1}{32}\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt}$

$-\frac{1}{16}\int_0^{\pi/2}(\cos(2\varphi)\cdot(1-\cos(4\varphi))\cdot\frac{1}{2}d\varphi = \frac{5}{32} + \frac{1}{8}(\sin\frac{\pi}{2} - \cancel{\sin 0}) + \cancel{\frac{1}{64}(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0)} + \frac{1}{128}(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0)$

$\cancel{-\frac{1}{64}(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0)} + \frac{1}{32}\int_0^{\pi/2}\cos(2\varphi)\cos(4\varphi)d\varphi = \frac{37}{128} + \frac{1}{32}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(\cos(6\varphi) + \cos(2\varphi))d\varphi$

$= \frac{37}{128} + \frac{1}{64}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{6}\cos k\,dk + \frac{1}{64}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt = \frac{37}{128} + \frac{1}{384} + \frac{1}{128} = \frac{114}{384} = \frac{19}{64}$

$2\varphi = t$ $\quad$ $4\varphi = z$

$2d\varphi = dt$ $\quad$ $4d\varphi = dz$

③ a) $\boxed{+}$ i) $I_1=\int_{(0,1]}\frac{dt}{\sqrt[5]{t}}$ $\alpha=\frac{1}{5}<1 \to$ konvergira $\quad I_1=\int_0^1 t^{-\frac{1}{5}}dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{5}{4}(\cancel{\varepsilon^{4/5}}^{\,0}-1)=5/4$

$\boxed{+}$ ii) $I_2=\int_{[1,\infty)}\frac{dt}{\sqrt[5]{t}}$ $\alpha<1 \to$ divergira

b) $\boxed{+}$ i) $I_1=\int_{(0,1]}\frac{\cos t}{\sqrt[5]{t}}\,dt \overset{0}{\sim}\int\frac{1}{\sqrt[5]{t}}\,dt \to \frac{1}{5}<1 \to$ konvergira

$\boxed{-}$ ii) $I_2=\int_{[1,\infty)}\frac{10^t}{\sqrt[5]{t}}$ $\left|\frac{10^t}{\sqrt[5]{t}}\right|\geq\frac{1}{\sqrt[5]{t}} \to$ divergira

c) $B(\frac{7}{2},\frac{5}{2})=\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}dx$

$$B(\tfrac{7}{2},\tfrac{5}{2})=\frac{\Gamma(\frac{7}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2}+\frac{5}{2})}=\frac{\frac{5}{2}\Gamma(\frac{5}{2})\cdot\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}{\frac{10}{2}\Gamma(\frac{10}{2})}=\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{10}{2}\cdot\frac{8}{2}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{4}{2}\Gamma(\frac{4}{2})}$$

$$=\frac{\cancel{\frac{15}{4}}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\frac{3}{4}\Gamma(\frac{1}{2})}{\cancel{5}\cdot 4\cdot\cancel{3}\cdot 2\cdot(2-1)}=\frac{\frac{1}{8}\sqrt{\pi}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}{8}=\frac{3\pi}{256}$$

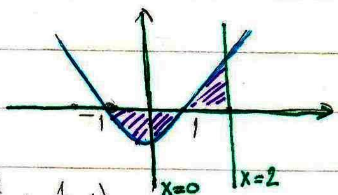
str. 28

P1

① a) $\sin x=t \vee \cos x=t$ b) $[-6,2]$ $x\neq\pm\sqrt{12}$

c) $y=x^2-1$, $x=0$, $x=2$, Ox

$x=\pm 1$



$P=\int_1^2 y\,dx-\int_{-1}^1 y\,dx$

$P=(\frac{x^3}{3}-x)\Big|_1^2-(\frac{x^3}{3}-x)\Big|_{-1}^1=(\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1)-(\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}-1)$
$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\boxed{\frac{8}{3}}$

② a) $\boxed{-}$ $F(x)$ mora imati izvod, $f(x)$ ne mora

b) $\boxed{+}$ ne znamo, van intervala $(1,10)$ je

c) $\boxed{+}$ isto

d) $\boxed{-}$ ne mora da znači

možda pogrešno napisan zad.

da je $(1,10)$ a ne $(-1,2)$
a) $\boxed{-}$
b) $\boxed{-}$ d) $\boxed{-}$
c) $\boxed{-}$

1

odreden?

① a) $f(x)=\begin{cases} 2^x, & x<0 \\ 3x+1, & 0\leq x\leq 1 \\ 4, & x>1 \end{cases}$ $\quad I=\int_{-1}^{0} 2^x dx+\int_{0}^{1}(3x+1)dx+\int_{1}^{2} 4\,dx$

b) $f(x)=\begin{cases} 2, & x\leq 0 \\ 3x+4, & 0<x\leq 3 \\ 5, & 3<x\leq 6 \\ \ln(x-6), & x>6 \end{cases}$

1) $\boxed{-}$ Prekid I vrste

2) $\boxed{+}$

3) $\boxed{-}$ nije ograničena

4) $\boxed{-}$ Prekid I vrste

c) i) $\boxed{-}$ mora da bude

ii) $\boxed{-}$ može, a ne mora

iii) $\boxed{-}$ ne mora

diskusija oko parametara a i b

② a) $I_a(x)=\int_1^x \frac{e^t+a}{at^2+1}dt\ (a\in\mathbb{R})$, $\lim_{x\to\infty}\frac{I_a(x)}{I_b(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{I'_a(x)}{I'_b(x)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{e^x+a}{ax^2+1}}{\frac{e^x+b}{bx^2+1}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^x+a)(bx^2+1)}{(ax^2+1)(e^x+b)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x bx^2+e^x+abx^2+a \quad :abx^2}{e^x ax^2+e^x+abx^2+b \quad :abx^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x}{a}+\frac{e^x}{abx^2}+1+\frac{1}{bx^2}}{\frac{e^x}{b}+\frac{e^x}{abx^2}+1+\frac{1}{ax^2}}$

b) $P=?\quad \rho=\sin\varphi,\ \varphi\in[0,\pi]\quad P=\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^\pi\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)d\varphi$

$P=\frac{1}{4}\int_0^\pi d\varphi+\frac{1}{4}\int_0^\pi\cos 2\varphi\, d\varphi=(\pi-0)\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{8}(\cancel{\sin\pi}-\cancel{\sin 0})=\frac{\pi}{4}+0=\pi/4$

③ a) $I_n=\int_{[1,\infty]}\frac{x^n}{\sqrt{x^9+4}}dx$ konvergira za i) $\boxed{-}$ $n=4$ ii) $\boxed{-}$ $n=3$

$n=4\Rightarrow \lim_{T\to\infty}\int_1^T\frac{x^4}{\sqrt{x^9+4}}dx\approx\lim_{T\to\infty}\int_1^T x^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{T\to\infty}\frac{2}{3}(T^{3/2}-1)=\infty$

$n=3\Rightarrow\int_{[1,\infty]}\frac{x^3}{\sqrt{x^9}+4}dx\approx\int_{[1,\infty}x^{-3/2}dx=\lim_{T\to\infty}\int_1^T x^{-3/2}dx=\lim_{T\to\infty}\frac{2}{5}(T^{5/2}-1)=\infty$

b) $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\qquad I=\int_0^\infty e^{-t}t^{2,5}dt=\Gamma(\alpha)\Rightarrow \alpha=3,5=\frac{7}{2}$

$I=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$

$2,5=x-1\Rightarrow x=3,5$

c) $B(\frac{5}{2},\frac{3}{2})=\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})+\Gamma(\frac{3}{2})}=\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\cancel{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cancel{\sqrt{\pi}}+\cancel{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}}=\frac{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2}+1}=\frac{2\cdot\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}{\frac{5}{2}}=\frac{3\sqrt{\pi}}{10}$

str. 10

PI

① $k_1=k_2=4-i$, $k_3=k_4=k_5=4$, $k_6=-2$ $L_n[y]=0$

a) min n = 8

$y = C_1e^{4x}\cos x + C_2e^{4x}\sin x + xC_3e^{4x}\cos x + xC_4e^{4x}\sin x + C_5e^{4x} + xC_6e^{4x} + x^2C_7e^{4x} + C_8e^{-2x}$

b) $L_n[y] = e^{4x}\sin x = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x] \to \alpha=4, \beta=1, m=0, n=0$

$y_p = x^2e^{4x}[A\cos x + B\sin x]$ $\alpha+i\beta = 4+i \Rightarrow r=2$

c) $L_n[y] = e^{4x} - 3e^{2x} = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x]$ $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$

$y_p = ax^3e^{4x} + be^{2x}\cdot x$

$\alpha_1 = 4, \beta_1 = 0 \Rightarrow r=3, n=0, m=0$

$\alpha_2 = 2, \beta_2 = 0 \Rightarrow r=1, n=0, m=0$

d) $L_n[y] = x^4 = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x] \to \alpha=0, \beta=0, r=0, m=4$

$y_p = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$

②

a) $y' = \arcsin(\cos(x+3y))$, $A(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$ linijski element: $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4})$

x_0 y_0 y_0'

t: $y - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4}(x - \frac{\pi}{4})$

n: $y - \frac{\pi}{6} = \frac{4}{\pi}(x - \frac{\pi}{4})$

b) $y = P_3(x)$, $y''' - 2xy'' + 5y' = x^2 + 2x - 4$ j-na koja ne sadrži y sm: $y' = z$, $z = z(x)$

$z'' - 2xz' + 5z = x^2 + 2x - 4$

$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{6}{5}x + d, \ d \in \mathbb{R}$

I

① a) $y' = -xy^2 + y^3$, $y(-1) = 1$, $[-1,2]$, $\{-1,0,1,2\}$

$$y(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \in [-1,0] \\ 27x+3, & x \in [0,1] \\ 26100x - 26070, & x \in [1,2] \end{cases}$$

$y'(-1,1) = 2 \to y - 1 = 2(x+1) \to \boxed{y = 2x+3}$

$y(0) = 2\cdot 0 + 3 = 3 \to y - 3 = 27(x-0)$

$y'(0,3) = 27$ $\boxed{y = 27x+3}$

$y(1) = 30$, $y'(1,30) = -900 + 27000 = 26100$

$y - 30 = 26100(x-1) \to y = 26100x - 26070$

b) $h(u) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q - P} du}$, $u = x+y$

c) $y' - 3xy = xy^5 \ /: y^5$

$\frac{y'}{y^5} - \frac{3x}{y^4} = x \to$ sm: $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{y^4} = z(x) \\ -4\frac{y'}{y^5} = z'(x) \end{array}\right\}$ $-\frac{1}{4}z' - 3xz = x \ /\cdot(-4)$

$z' + 12xz + 4x = 0$

② a) $y^{(k)}=z$, $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\dots,y^{(n)})=0$

$y''-y'=4e^{-x} \Rightarrow y'=z \rightarrow z'=z+4e^{-x}$ 1° $z=u\cdot v$

$z'=u'v+uv'$

2° $u'v+\cancel{uv'-uv}^{0}=4e^{-x}$ 3° $v'-v=0$ $\frac{dv}{v}=dx \,/\int$

$u'v=4e^{-x}$ $v'=v$

$y=2e^{-x}+ce^{x}+d$ $\boxed{v=x}$

4° $u'x=4e^{-x} \rightarrow du=4\frac{e^{-x}}{x}dx\,/\int dx$

b) smenom $x+3=t\ e^t$ (Ojlerova j-na) se svodi na linearnu j-nu

$$\frac{d^3y}{dt^3}-4\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=e^{2t}-7e^t+12$$

c) $A=\{x^{2^2}, 2^{x^2}, 2^{2^x}\}$ je linearno nezavisan $\alpha x^4+\beta\cdot 2^{x^2}+\gamma\cdot 2^{2^x}=0 \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$

$B=\{a^x, b^x, a^x b^x\}$ je linearno nezavisan $\alpha a^x+\beta b^x+\gamma a^x b^x=0 \rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$

$\boxed{-}$

$$W(x)=\begin{vmatrix} x^4 & 2^{x^2} & 2^{2^x} \\ 4x^3 & 2^{x^2}\ln 2\cdot 2x & 2^{2^x}\ln 2\cdot 2^x\ln 2 \\ 12x^2 & 2\ln 2(2^{x^2}\ln 2\cdot 2x^2+2^{x^2}) & \ln^2 2(2^{2^x}\ln 2\cdot 2^x\ln 2+2^{2^x}\cdot 2^x\ln 2 \end{vmatrix}$$

$W(0)=0$

str. 29

P1

① 1) $k_1=k_2=k_3=1$, $k_4=1-i$, $k_5=2+i$, $k_6=1i$, $k_7=1$ $n=10$

$y=c_1e^x+xc_2e^x+x^2c_3e^x+c_4e^x\cos x+c_5e^x\sin x+c_6e^{2x}\cos x+c_7e^{2x}\sin x+c_8\cos x$
$+c_9\sin x+c_{10}e^x$

2) $L_n[y]=x\sin x-\cos x$ $e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x]$

$y_p = x((Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x)+E\cos x+F\sin x$ $1\rightarrow \alpha=0 \rightarrow r=1, m=n=1, \beta=1$

$2\rightarrow \alpha=0, \beta=0 \rightarrow r=0, m=0$

3) $L_n[y]=x^3e^x$ $y_p=(Ax^3+Bx^2+Cx+D)x^3e^x$ $\underset{\alpha=1,\beta=0}{r=3}$ $e^x[x^3\cos 0+\cancel{Q_n(x)\sin 0}^{0}]$

4) $L_n[y]=e^x\sin x$ $y_p=xe^x(A\sin x+B\cos x)$ $\alpha=1, \beta=1, r=1, m=n=0$

② a) $y'=\sin 3x\cos(x-y)$, $A(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3})$, $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},-\frac{\sqrt3}{2})$

t: $y-\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt3}{2}(x-\frac{\pi}{2})$

n: $y-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{\sqrt3}(x-\frac{\pi}{2})$

b) $(ax+a^3y+5)dx + (ax+a^2y+3)dy = 0 \overset{JTD}{\Longrightarrow} \frac{\partial}{\partial y}(ax+a^3y+5) = \frac{\partial}{\partial x}(ax+a^2y+3)$

$a^3 = a$

$\underline{a \in \{-1,+1\}}$ $\qquad a^2 = 1 \longrightarrow a = \pm 1$

① ① a) $\boxplus$ 5 $\quad\boxplus$ 8 $\quad\boxminus$ 9 } nezavisna ≤ 8

b) $L_2[\sin x] = 2^x$ $\qquad L_2[y] = 2^x$ smenom ____________

$L_2[\cos x] = 2^x$

c) $\boxminus$ ne ~~može~~ biti više od 4 nezavisna rešenja

d) $y' = y\sin\frac{1}{x} + \sqrt[4]{y}\cos x$ $\qquad$ 1) $\square$ $y(1) = -1$

2) $\square$ $y(1) = 2$

3) $\square$ $y(0) = 1$

e) $\{x, e^x\}$ 1) $\boxplus$ $\qquad W(x) = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = xe^x - e^x = e^x(x-1)$ $\quad W(-1)=0$, $W(0) = -1$, $W(1)=0$, $W(2) = e^2$ $\neq 0$

2) $\boxplus$

g) $\boxplus$ $(ax+a^3y+5)dx + (ax+a^2y+3)dy = 0$

$y' = -\frac{ax+a^3y+5}{ax+a^2y+3}$ $\qquad D = \begin{vmatrix} a & a^3 \\ a & a^2 \end{vmatrix} = a^3 - a^4 = a^3(1-a) = 0$

smenom $\underline{t = ax+a^3y+5}$ $\qquad \underline{a \in \{1, 0\}}$

ili $\underline{t = ax+a^2y+3}$

②

a) $y''' - 3xy'' + 2y' = ax^2 + bx + c$ ____________

$y = x^3$

b) $y''' + xy' - x^2y = 0$, $\quad W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 7 \\ 0 & 0 \\ a & 0 \end{matrix} = 0 + 7a + 0 - 0 - 0 - 0 = 7a$

$\neq 0$ ako $a \neq 0$

1) $\boxplus$ $\underline{a = \mathbb{R}\setminus\{0\}}$ $\qquad$ 3) $\boxminus$

2) $\boxplus$

③ $y' = 2x - y$, $y(1) = 2$, $[0,3]$ $\qquad y'(1,2) = 2\cdot 1 - 2 = 0$

$[1,2] \rightarrow y - 2 = 0(x-1) \longrightarrow y = 2$ $\quad$?

$y'(0,2) = -2 \rightarrow y - 2 = -2x$

$y(x) = \begin{cases} -2x+2 & , x \in [0,1] \\ 2 & , x \in [1,2] \\ 2x-2 & , x \in [2,3] \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} y - 2 = 2(x-2) \rightarrow y = 2x-2 \\ y'(2,2) = 4 - 2 = 2 \end{cases}$

Razno
I
str. 14

$$\frac{\frac{1-2^{2n+1}}{1-2}}{\frac{1-4^{n+1}}{1-4}} = \frac{-3(1-2^{2n}\cdot 2)}{-1(1-4^n\cdot 4)} = 3\,\frac{1-4^n\cdot 2}{1-4^n\cdot 4}$$

① a) $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+2+2^2+\dots+2^{2n}}{1+4+4^2+\dots+4^n}\left(\frac{n+7}{n+2}\right)^{5n+3}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[3\,\frac{1-2\cdot 4^n}{1-4\cdot 4^n}\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{5}}\right)^{5n+3\,\frac{n+2}{5}\cdot\frac{5}{n+2}}\right]$$

e

$$= \lim_{n\to\infty}\left[3\cdot\frac{2}{4}\cdot e^{\frac{25n+15}{n+2}}\right] = \frac{3}{2}e^{25}$$

b) $$\lim_{x\to -3}\left[(x^2+5x+6)\,\mathrm{ctg}(x+3)\right] = \lim_{x\to -3}\left[(x+2)(x+3)\frac{\cos(x+3)}{\sin(x+3)}\right] = -1$$

$-1 \quad 1 \quad 1$

② $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n} + \sqrt[n]{5}$ $\qquad \lim\inf = 1 \qquad \lim\sup = 1$

$\quad \llcorner TN=0 \qquad \llcorner TN=1 \qquad \inf = 1 \qquad \sup = 5 = a_1$

③ $A = \{1+\sin x \mid x\in \underbrace{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6})}_{(0,3/2)}\}\cup\{5\}\cup(6,7)$

$\bar{A} = [0,\frac{3}{2}]\cup\{5\}\cup[6,7]$

$A' = [0,3/2]\cup[6,7]$

$A^{o} = (0,3/2)$

$A^{*} = \{0,\frac{3}{2},5\}\cup[6,7]$

④ ⊟ I nije kompletan prostor

⑤ a) ⊞ može, a ne mora

b) ⊟ mora

⑥ ⊟ ne mora da važi $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

⑦ ⊞ Ako Košijev podniz konvergira, konvergira i niz (i svi podnizovi)

⑧ ⊞ niz divergira → podniz divergira

⑨ ⊞ ne moraju rubne tačke? (nez)

⑩ $f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt{x} \qquad [4,6] \longrightarrow [2+\sqrt{7},\, 3+\sqrt{6}]$

$$d(f(x_1),f(x_2)) = \left|(\sqrt{x_1+3}+\sqrt{x_1}) - (\sqrt{x_2+3}+\sqrt{x_2})\right| = \left|(\sqrt{x_1+3}-\sqrt{x_2+3})\cdot\frac{\sqrt{x_1+3}+\sqrt{x_2+3}}{\sqrt{x_1+3}+\sqrt{x_2+3}}\right|$$

$$+\left|(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})\cdot\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\right| = \frac{x_1+\cancel{3}-x_2-\cancel{3}}{\sqrt{x_1+3}+\sqrt{x_2+3}} + \frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$$

$$\frac{|x_1-x_2|}{2\sqrt{7}} + \frac{\cancel{|x_1-x_2|}}{4} \le |\cancel{(x_1-x_2)}|\cdot\lambda \implies \lambda\in\left[\frac{2\sqrt{7}+7}{28},\,1\right)$$

str.45

P1

1 a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{x^2+x}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\operatorname{tg}x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x(x+1)\cos x}\right)} = e^1$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{(x-2)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)(x^2+4)}{\cancel{(x-2)}(x+1)} = \frac{32}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{2n+5} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2\cdot\frac{2n+5}{n+2}} = e^2$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+2}{x^2+x+1}\begin{matrix}:x^2\\:x^2\end{matrix} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 2$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+n^2}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n!}\left(\frac{2^n}{n!}+\frac{n^2}{n!}\right)}{\cancel{n!}} = 0$

2 a) $\boxed{=}$ mora (ograničen je)
b) $\boxed{=}$ mora (jer je ograničen) } Bolcano-Vajerštrasova
c) $\boxed{+}$ ne zna se koliko ima t.n.
d) $\boxed{+}$ monotonost nije definisana za kompleksne nizove

3
i) $\boxed{+}$ može i u jednu tačku
ii) $\boxed{+}$
iii) $\boxed{+}$ strogo rastuća → mora ( ) → ( )

I

1 a) $A = \mathbb{Q}_- \cup \mathbb{N}$ $\quad \bar{A} = \mathbb{R}$, $A^\circ = \emptyset$, $i(A) = [1,\infty)$

$A^* = (-\infty, 0)$, $A' = (-\infty, 0]$, $\text{ext}A = \emptyset$

II

str. 95

P1

① $((\cos\sqrt{x})^{ctg^2 x})' \rightarrow y=(\cos\sqrt{x})^{ctg^2 x} /\ln \rightarrow \ln y = ctg^2 x \ln(\cos\sqrt{x}) /'$

$$\frac{y'}{y} = 2ctgx\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\cdot\ln(\cos\sqrt{x}) + ctg^2 x(-\sin\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = (\cos\sqrt{x})^{ctg^2 x}\cdot\left[\frac{-2ctgx\cdot\ln(\cos\sqrt{x})}{\sin^2 x} - \frac{ctg^2 x\cdot\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right]$$

② $y = arctg\sqrt{x}$, $A(3, \frac{\pi}{3})$ $\qquad y_A = arctg\sqrt{3} \rightarrow tg\, y_A = \sqrt{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sin y_A}{\cos y_A}$

$t: y - \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{24}(x-3)$ $\qquad = \pi/3$

$n: y - \frac{\pi}{3} = -\frac{24}{\sqrt{3}}(x-3)$ $\qquad y' = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow y'(A) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{24}$

③ $f(x) = (x^2+x)e^{-x}$

$$p_2(x) = 1\cdot\frac{1}{1} + ((2x+1)e^{-x} + (x^2+x)e^{-x}(-1))\cdot\frac{x}{1} + (2e^{-x} + (2x+1)e^{-x}(-1) + (2x+1)e^{-x} + (x^2+x)e^{-x}(-1))\frac{x^2}{2}$$

$R_2(x) = f'''(\theta x)\frac{x^3}{6}$, $\theta\in(0,1)$

①

④ $x = sh(t-\ln t)$, $y = arcctg(\sqrt{t}-1)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-1}{1+(\sqrt{t}-1)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{ch(t-\ln t)\cdot(1-\frac{1}{t})} =$$

⑤ $f(x) = x^3 + arctgx - 4 = 0$ $\qquad f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{1+x^2} > 0$ $\qquad \boxed{+}$

$f(-1) = -\frac{\pi}{4}$ $\quad f(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow f(-1)\cdot f(\sqrt{3}) < 0$ $\qquad \boxed{+}$

⑥ $\boxed{-}$ ne mora

$\boxed{-}$ ako postoji, mora da bude 0

⑦ $$\lim_{x\to 0}\frac{ctgax}{ctgbx} \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\sin^2 ax}\cdot a}{-\frac{1}{\sin^2 bx}\cdot b} = \lim_{x\to 0}\frac{a\sin^2 bx}{b\sin^2 ax} \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2a}\sin bx\cdot\cos bx\cdot\cancel{b}}{\cancel{2b}\sin ax\cdot\cos ax\cdot\cancel{a}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin bx\cdot\cos bx}{\sin ax\cdot\cos ax} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin 2bx}{\frac{1}{2}\sin 2ax} \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cos 2bx\cdot 2b}{\cancel{\frac{1}{2}}\cos 2ax\cdot 2a} = \frac{b}{a}$$

⑧ $y'(x)\neq 0$, $y = y(x)$

$x'(y) = \frac{1}{y'_x}$ $\qquad x''(y) = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_x\cdot\frac{1}{y'_x}$

III str.43.

P1 ①

a) $\int \sin^2x\cos^3x\,dx = \int\left(\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\right)^2\cdot\left(\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right)^3dx$

$$= \int \frac{e^{2xi}-2e^{xi}e^{-xi}+e^{-2xi}}{-4}\cdot\frac{e^{3xi}+3e^{2xi}\cdot e^{-xi}+3e^{xi}\cdot e^{-2xi}+e^{-3xi}}{8}\,dx$$

$$= -\frac{1}{32}\int(e^{2xi}-2e^{0}+e^{-2xi})(e^{3xi}+3e^{xi}+3e^{-xi}+e^{-3xi})\,dx$$

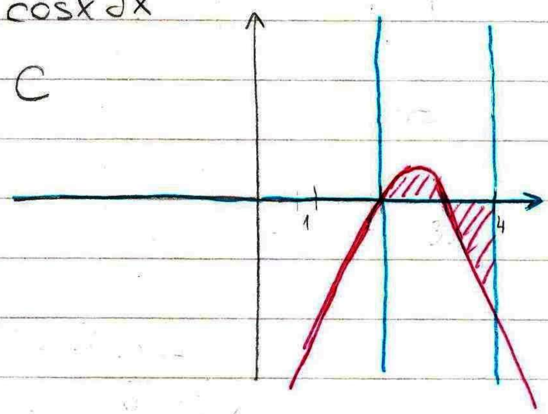
$$= -\frac{1}{32}\int(e^{5xi}+3e^{3xi}+3e^{xi}+e^{-xi}-2e^{3xi}-6e^{xi}-6e^{-xi}-2e^{-3xi}+e^{xi}+3e^{-xi}+3e^{-3xi}+e^{-5xi})\,dx$$

$$= -\frac{1}{32}\int(e^{5xi}+e^{3xi}-2e^{xi}-2e^{-xi}+e^{-3xi}+e^{-5xi})\,dx$$

$$= -\frac{1}{16}\int\frac{e^{5xi}+e^{-5xi}}{2}\,dx-\frac{1}{16}\int\frac{(e^{3xi}+e^{-3xi})\,dx}{2}+\frac{1}{16}\int\frac{2e^{xi}+2e^{-xi}}{2}\,dx$$ uf

$$= -\frac{1}{16}\int\cos5x\,dx-\frac{1}{16}\int\cos3x\,dx+\frac{1}{16}\int\cos x\,dx$$

$$= -\frac{1}{30}\sin5x-\frac{1}{48}\sin3x+\frac{1}{16}\sin x+C$$



b) $y=-x^2+5x-6 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{-2}$

$x=2,\ x=4,\ O_x$ $\quad x_1=2 \quad x_2=3$ $+$

$$P=\int_2^3 f(x)\,dx-\int_3^4 f(x)\,dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-6x\right)\Big|_2^3 - \left(-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}-6x\right)\Big|_3^4$$

$$P=\left(\left(-9+\frac{45}{2}-18\right)-\left(-\frac{8}{3}+10-12\right)\right)-\left(\left(-\frac{64}{3}+40-24\right)-\left(-9+\frac{45}{2}-18\right)\right)$$

$$=\left(-27+\frac{45}{2}+\frac{8}{3}+2\right)-\left(-\frac{64}{3}+16+27-\frac{45}{2}\right)=-68+45+24=1$$

② a) $\boxed{-}$ ne mora da znači

b) $\boxed{+}$ nije isključeno

c) $\boxed{+}$ ne mora jer $(-1,2)$ nije podskup

d) $\boxed{+}$ ne mora biti neprekidna

(1) $x \in (-9,7)$

(1) a) $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-4x-3}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+2)^2}} = \arcsin(x+2)+C$

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{-x^2-4x-3}}dx = p(x)\sqrt{-x^2-4x-3} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x-3}} \quad /' \qquad dg(p)=0$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{-x^2-4x-3}} = 0 + \frac{A(-2x-4)}{2\sqrt{-x^2-4x-3}} + \frac{\lambda}{\sqrt{-x^2-4x-3}} \quad / \cdot \sqrt{-x^2-4x-3}$$

$$x-1 = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}A(-x-2)+\lambda \longrightarrow x-1 = -xA-2A+\lambda$$

$$1=-A \longrightarrow A=-1=p(x)$$

$$-1=-2A+\lambda \Longrightarrow \lambda=-3$$

b) i) $\boxed{=}$ mora

ii) $\boxed{\pm}$ mora jer je integrabilna

iii) $\boxed{=}$ ne mora

iv) $\boxed{=}$ ne mora da znači

(2) $f(x)=1-x^2 \quad P=\{0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\}, \ [0,2]$

$$s(f,P) = f(\tfrac{1}{2})\cdot\tfrac{1}{2}+f(1)\tfrac{1}{2}+f(\tfrac{3}{2})\tfrac{1}{2}+f(2)\cdot\tfrac{1}{2} = \frac{3}{8}+0-\frac{5}{8}-\frac{3}{2} = -\frac{7}{4}$$

$$S(f,P) = f(0)\cdot\tfrac{1}{2}+f(\tfrac{1}{2})\cdot\tfrac{1}{2}+f(1)\cdot\tfrac{1}{2}+f(\tfrac{3}{2})\cdot\tfrac{1}{2} = \frac{1}{2}+\frac{3}{8}+0-\frac{5}{8} = \frac{1}{4}$$