VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1. Vežbe II.2

1.1. Diferencijalni račun

1.1.1. Izvod inverzne funkcije

Neka je $f(x)$ neprekidna strogo monotona funkcija definisana nad intervalom (a,b), a $f^{-1}(x)$ njena inverzna funkcija. Ako funkcija $f(x)$ ima izvod $f'(x)$ u tački $x \in (a,b)$, pri čemu je $f'(x) \neq 0$, tada funkcija $f^{-1}(x)$ ima izvod u tački $y = f(x)$ i važi

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)},} \text{ tj. } \boxed{y'_x = \frac{1}{x'_y}.} \tag{1.1}$$

U nastavku koristićemo Lajbnicovu oznaku za izvod $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, gde je dy diferencijal funkcije i dx diferencijal nezavisne promenljive.
Drugi izvod inverzne funkcije

$$y''_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x'_y}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{x'_y}\right) \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'_x = \frac{1}{x'_y}} = -\frac{x''_y}{(x'_y)^2} \cdot \frac{1}{x'_y} = -\frac{x''_y}{(x'_y)^3}, \tag{1.2}$$

Treći izvod inverzne funkcije

$$\begin{aligned} y'''_x &= \frac{dy''_x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x''_y}{(x'_y)^3}\right) = \frac{d}{dy}\left(-\frac{x''_y}{(x'_y)^3}\right) \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= -\frac{x'''_y (x'_y)^3 - x''_y \cdot 3(x'_y)^2 x''_y}{(x'_y)^6} \cdot \frac{1}{x'_y} \\ &= \frac{3(x''_y)^2 - x'''_y \cdot x'_y}{(x'_y)^5}. \end{aligned}$$

Izvodi reda većeg od tri izvode se na sličan način.

Zadatak 1.1. Naći y'' za $y = \operatorname{tg}(x+y)$.
Rešenje. Iz izraza $y = \operatorname{tg}(x+y)$ možemo x izraziti na sledeći način

$$\operatorname{arctg} y = x + y \Rightarrow x = \operatorname{arctg} y - y$$

Izračunaćemo prvo x'_y i y'_x

$$\begin{aligned} x'_y &= \frac{1}{1+y^2} - 1 = -\frac{y^2}{1+y^2}; \\ y'_x &= \frac{1}{x'_y} = -\frac{1+y^2}{y^2} = -\frac{1}{y^2} - 1. \end{aligned}$$

Dakle, primenom (1.2) dobijamo da je

$$y''_x = (y'_x)'_y \cdot y'_x = \left(-\frac{1}{y^2} - 1\right)'_y \cdot \left(-\frac{1}{y^2} - 1\right) = \frac{2}{y^3}\left(-\frac{1}{y^2} - 1\right) = -\frac{2}{y^5} - \frac{2}{y^3}.$$

1.1.2. Izvodi funkcije zadate u parametarskom obliku

Neka su nad intervalom $I \subset \mathbb{R}$ definisane dve realne funkcije $x = \varphi(t)$ i $y = \psi(t)$, $t \in I$ i neka za funkciju $\varphi(t)$ postoji inverzna funkcija $t = \varphi^{-1}(x)$. Tada je složena funkcija $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$, definisana nad skupom vrednosti $\{\ \varphi(t) : t \in I\ \}$ funkcije $\varphi(t)$. Kažemo da je sa $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I$, funkcija $f(x)$ zadata u parametarskom obliku pri čemu ćemo pomoćnu promenljivu t nazvati parametrom.
Neka je data funkcija $y = f(x)$ u parametarskom obliku $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (a, b)$. Ako neprekidne funkcije $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ imaju izvode u tački $t \in (a, b)$, i ukoliko je $\varphi'(t) \neq 0$, tada funkcija $y = f(x)$ ima izvod u tački t i važi

$$\boxed{f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},} \text{ tj. } \boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.} \tag{1.3}$$

Drugi izvod funkcije zadate u parametarskom obliku

$$y''_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{dy'_x}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \tag{1.4}$$

$$\left(y''_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^2} \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^3} \right)$$

Treći izvod funkcije zadate u parametarskom obliku

$$y'''_x = \frac{dy''_x}{dx} = \frac{dy''_x}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (y''_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t}. \tag{1.5}$$

Izvodi reda većeg od tri izvode se na sličan način.

Zadatak 1.2. Naći y'' za $x = \ln t$ i $y = t + \frac{1}{t}$.
Rešenje. Funkcija je zadata u parametarskom obliku.

$$y'_t = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2};$$
$$x'_t = \frac{1}{t}.$$

Sada primenimo (1.3) dobijamo da je

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{t^2-1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t^2 - 1}{t} = t - \frac{1}{t}.$$

Traženi drugi izvod funkcije dobijamo primenom (1.4)

$$(y'_x)'_t = 1 + \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 + 1}{t^2}$$
$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{t^2+1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t^2 + 1}{t} = t + \frac{1}{t}.$$

1.1.3. Izvod funkcije zadate implicitno

Ako je funkcija $y = f(x)$ zadata implicitno sa $F(x, y) = 0$, prvo se odredi izvod leve i desne strane jednakosti po x, vodeći računa da je y funkcija koja zavisi od x. Dakle, izvod y' kada se izračuna je takođe u implicitnom obliku. Drugi izvod funkcije se prema tome izračunava kao izvod implicitno zadate funkcije.

Zadatak 1.3. Naći y'' za $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.
Rešenje. Izračunaćemo izvod leve i desne strane jednakosti.

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2} \;\Big/'$$

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y'x-y}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (2x+2yy')$$

Sređivanjem izraza dobijamo

$$\frac{y'x-y}{\frac{x^2+y^2}{x^2}\cdot x^2} = \frac{x+yy'}{x^2+y^2}$$

$$y'x - y = x + yy' \Rightarrow y'x - yy' = x + y \Rightarrow y'(x-y) = x+y \Rightarrow y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Drugi izvod računamo na sledeći način

$$\begin{aligned} y'' = (y')' = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)' &= \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2} \\ &= \frac{x-y+xy'-yy'-(x-xy'+y-yy')}{(x-y)^2} \\ &= \frac{2xy'-2y}{(x-y)^2} = \frac{2x\cdot\frac{x+y}{x-y}-2y}{(x-y)^2} = \frac{2x^2+2xy-2xy+2y^2}{(x-y)^3} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}. \end{aligned}$$

1.2. Lopitalovo pravilo

Neodređen izraz oblika "$\frac{0}{0}$" i "$\frac{\infty}{\infty}$"

Količnik $\frac{f(x)}{g(x)}$ ima neodređeni oblik "$\frac{0}{0}$" kada $x \to a$, ako važi da je

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

odnosno neodređeni oblik "$\frac{\infty}{\infty}$" ako $f(x) \to \pm\infty$ i $g(x) \to \pm\infty$ kada $x \to a$.
Za nalaženje granične vrednosti neodređenog oblika "$\frac{0}{0}$" i "$\frac{\infty}{\infty}$" treba proveriti da li granična vrednost $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ postoji ili ne. Za nalaženje granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, često su korisna tzv. Lopitalova pravila.

Neka su funkcije $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ i $g : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ diferencijabilne nad otvorenim intervalom (a, b) i pri tom je $g'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$ i neka je:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0.$$

Ako postoji $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ tada postoji i $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ i važi jednakost:

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.}$$

Ako $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \pm\infty$, kada $x \to a^+$, tada i $\frac{f(x)}{g(x)} \to \pm\infty$, kada $x \to a^+$.

Zadatak 1.4. Naći $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{-\operatorname{tg} x} - 2x}{2x^3}$.

Rešenje. Ako pustimo da $x \to 0$ dobijamo izraz "$\frac{0}{0}$" i primenjujemo Lopitalovo pravilo. Lopitalovo pravilo primenjujemo uzastopno 3 puta.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{-\operatorname{tg} x} - 2x}{2x^3} \overset{''\frac{0}{0}''}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - e^{-\operatorname{tg} x} \cdot (-\frac{1}{\cos^2 x}) - 2}{6x^2} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} + e^{-\operatorname{tg} x} - 2\cos^2 x}{x^2} \\
&\overset{''\frac{0}{0}''}{=} \frac{1}{6} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + e^{-\operatorname{tg} x}(-\frac{1}{\cos^2 x}) - 2 \cdot 2\cos x(-\sin x)}{2x} \\
&= \frac{1}{12} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{-\operatorname{tg} x} + 4\sin x \cdot \cos^3 x}{x \cdot \cos^2 x} \\
&= \frac{1}{12} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{-\operatorname{tg} x} + 4\sin x \cdot \cos^3 x}{x} \\
&\overset{''\frac{0}{0}''}{=} \frac{1}{12} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - e^{-\operatorname{tg} x} \cdot \left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right) + 4\cos^4 x - 12\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{1} \\
&= \frac{1}{12} \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} + \frac{e^{-\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} + 4\cos^4 x - 12\sin^2 x \cdot \cos^2 x \right) \\
&= \frac{1}{12}(1 + 1 + 4) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.5. Naći $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^{ax}}$, $a > 0$, $n > 0$.

Rešenje. Ako pustimo da $x \to \infty$ dobijamo izraz "$\frac{\infty}{\infty}$" i primenjujemo Lopitalovo pravilo. Lopitalovo pravilo primenjujemo uzastopno n puta.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} \overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{n\cdot x^{n-1}}{a\cdot e^{ax}} = \frac{n}{a}\cdot \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n-1}}{e^{ax}} \overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} \frac{n}{a}\cdot \lim_{x\to\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{a\cdot e^{ax}}$$
$$= \frac{n(n-1)}{a^2}\cdot \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n-2}}{e^{ax}} \overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} \cdots \overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} \frac{n!}{a^n}\cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{ax}} = 0.$$

Zadatak 1.6. Naći $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

Rešenje.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{-100}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-100\cdot x^{-101}}{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot(-\frac{2}{x^3})}$$
$$= 50\cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^{-98}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} 50\cdot \lim_{x\to 0} \frac{-98\cdot x^{-99}}{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot(-\frac{2}{x^3})}$$
$$= 50\cdot 49\cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^{-96}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \cdots \overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} 50!\cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^{-2}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$$
$$\overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} 50!\cdot \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot(-\frac{2}{x^3})} = 50!\cdot \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Zadatak 1.7. Naći $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{\cos x\cdot \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$.

Rešenje.

$$\lim_{x\to a^+} \frac{\cos x\cdot \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)} = \cos a\cdot \lim_{x\to a^+} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)} \overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} \cos a\cdot \lim_{x\to a^+} \frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{e^x}{e^x-e^a}}$$
$$= \cos a\cdot \lim_{x\to a^+} \frac{e^x - e^a}{e^x(x-a)} = \frac{\cos a}{e^a} \lim_{x\to a^+} \frac{e^x-e^a}{x-a}$$
$$\overset{''\frac{0}{0}''}{=} \frac{\cos a}{e^a} \lim_{x\to a^+} e^x = \frac{\cos a}{e^a}\cdot e^a = \cos a.$$

Zadatak 1.8. Naći $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x}$.

Rešenje. Neka je $f(x) = x + \sin x$, a $g(x) = x$. Ovde ne možemo da primenimo Lopitalovo pravilo jer $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (1+\cos x)$ ne postoji.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

jer je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

I ostali neodređeni izrazi oblika"$0 \cdot \infty$", "$\infty - \infty$", "0^0", "∞^0" i "1^∞" mogu se određivati koristeći Lopitalova pravila (ukoliko su zadovoljeni uslovi za njegovu primenu).

Neodređen izraz "$0 \cdot \infty$"

Ako je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ i $g(x) \to \pm\infty$ kada $x \to a$, tada je
$\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, a to je neodređeni izraz oblika "$\frac{0}{0}$", ili
$\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, a to je neodređeni izraz oblika "$\frac{\infty}{\infty}$".

Zadatak 1.9. Naći $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x-1) \cdot \ln x$.

Rešenje. Ako pustimo da $x \to 1^+$ dobijamo izraz "$-\infty \cdot 0$". Da bismo primenili Lopitalovo pravilo potrebno je da zadatoj funkciji promenimo oblik tako da je sada $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}$. Ako sada pustimo da $x \to 1^+$ dobijamo neodređen izraz oblika "$\frac{\infty}{\infty}$" i možemo da primenimo Lopitalovo pravilo.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 1^+} \ln(x-1) \cdot \ln x \overset{''-\infty \cdot 0''}{=} & \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} \\
\overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} & \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}} \\
= & -\lim_{x \to 1^+} \frac{x \cdot \ln^2 x}{x-1} \\
\overset{''\frac{0}{0}''}{=} & -\lim_{x \to 1^+} \frac{\ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{1} \\
= & -\lim_{x \to 1^+} (\ln^2 x + 2 \ln x) \\
= & \ 0.
\end{aligned}
$$

Neodređen izraz "$\infty - \infty$"

Neodređen izraz "$\infty - \infty$" dobijamo ako $f(x) \to \pm\infty$ kada $x \to a$ i $g(x) \to \pm\infty$ kada $x \to a$. Dakle, dobijamo

$$\lim_{x\to a} [\, f(x) - g(x)\,] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \left[\, 1 - \frac{g(x)}{f(x)}\, \right]$$

- Ako je $\lim\limits_{x\to a} \left[\, 1 - \frac{g(x)}{f(x)}\, \right] = 0$ slučaj se svodi na prethodni.
- Ako je $\lim\limits_{x\to a} \left[\, 1 - \frac{g(x)}{f(x)}\, \right] \neq 0$, to $f(x) - g(x) \to \pm\infty$, kada $x \to a$.

Zadatak 1.10. Naći $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} \right)$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &\overset{''\infty-\infty''}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x}{\sin x} - 1 \right) \\
&\overset{''\infty\cdot 0''}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\sin x} - 1}{x} \\
&\overset{''\frac{0}{0}''}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} \\
&\overset{''\frac{0}{0}''}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{2 \sin x \cos x} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Neodređen izraz oblika "1^∞", "0^0" i "∞^0"

Neka je $\phi(x) = f(x)^{g(x)}$, $f(x) > 0$ (u nekoj okolini tačke a). Ako je $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ neodređen izraz oblika

- "0^0" ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$),
- "∞^0" ($f(x) \to \infty$ kada $x \to a$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$) ili
- "1^∞" ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ i $g(x) \to \pm\infty$ kada $x \to a$)

tada je

$$\lim_{x\to a} \ln \phi(x) = \lim_{x\to a} g(x) \ln f(x)$$

neodređen izraz oblika "$0 \cdot \infty$".

Zadatak 1.11. Naći $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}}$.

Rešenje. Primetimo da je $f(x) > 0$ u nekoj okolini tačke 0. Logaritmujemo levu i desnu stranu jednakosti zadate funkcije $\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}}$ i nakon toga računamo graničnu vrednost.

$$y = \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}} \Big/^{\ln} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} = \frac{1}{x} \cdot \left[\frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) - 1 \right]$$

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \left[\frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) - 1 \right] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \overset{''\frac{0}{0}''}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x}$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-1-x}{1+x}}{x} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\cdot(1+x)} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = -\frac{1}{2}.$$

Dakle, dobijamo da je

$$\lim_{x\to 0} \ln y = -\frac{1}{2} \Rightarrow \ln \lim_{x\to 0} y = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} y = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Zadatak 1.12. Naći $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

Rešenje. Ako je $y = x^{\frac{3}{4+\ln x}}$ onda sledi da je

$$\ln y = \frac{3}{4+\ln x} \cdot \ln x.$$

U nastavku računamo graničnu vrednost leve i desne strane jednakosti

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{3\ln x}{4+\ln x} \overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{3\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 3$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = 3 \Rightarrow \ln \lim_{x\to 0^+} y = 3 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = e^3.$$

Zadatak 1.13. Naći $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Rešenje. Ako je $y = (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$ onda sledi da je

$$\ln y = \frac{1}{\ln x} \cdot \ln(\operatorname{ctg} x).$$

U nastavku računamo graničnu vrednost leve i desne strane jednakosti

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{ctg} x)}{\ln x} \overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}} \\
= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \sin^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{\frac{\sin x}{x}} = -1
\end{aligned}$$

Dakle, dobijamo da je

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = -1 \Rightarrow \ln \lim_{x\to 0^+} y = -1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = e^{-1}.$$

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.