VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1. Vežbe III.2

1.1. Integrali racionalnih funkcija

Svaku nepravu racionalnu funkciju $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (stepen polinoma $P(x)$ je veći ili jednak od stepena polinoma $Q(x)$) možemo napisati u obliku $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \dfrac{R_1(x)}{Q(x)}$, gde je $T(x)$ polinom, a $\dfrac{R_1(x)}{Q(x)}$ racionalna funkcija kod koje je stepen polinoma $R_1(x)$ manji od stepena polinoma $Q(x)$ ($\dfrac{R_1(x)}{Q(x)}$ se naziva pravi razlomak ili prava racionalna funkcija).

Posmatrajmo sada pravu racionalnu funkciju, neka je $P(x)$ polinom stepena manjeg od n, a $Q(x)$ polinom oblika

$$Q(x) = c_n(x-a_1)^{k_1}...(x-a_p)^{k_p}(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}...(x^2+b_qx+c_q)^{l_q},$$

gde je $k_1 + k_2 + ... + k_p + 2(l_1 + l_2 + ... + l_q) = n$, n je stepen polinoma $Q(x)$, c_n je vodeći koeficijent polinoma $Q(x)$, a_i, b_j i c_j su realni brojevi za koje važi $b_j^2 - 4c_j < 0$, $i = 1,\ 2, ..., p$, $j = 1,\ 2, ..., q$ (drugim rečima polinom $Q(x)$ je faktorisan nad poljem $\mathbb{R}$).

Tada se $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ može napisati u obliku

$$\begin{aligned}
R(x) = &\left(\frac{A_{11}}{x-a_1} + ... + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}\right) + ... + \left(\frac{A_{p1}}{x-a_p} + ... + \frac{A_{pk_p}}{(x-a_p)^{k_p}}\right)\\
&+ \left(\frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+b_1x+c_1} + ... + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2+b_1x+c)^{l_1}}\right)\\
&+ ... + \left(\frac{B_{q1}x + C_{q1}}{x^2+b_qx+c_q} + ... + \frac{B_{ql_q}x + C_{ql_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{l_q}}\right).
\end{aligned}$$

Koeficijente A_{ij}, B_{ij} i C_{ij} dobijamo metodom neodređenih (nepoznatih) koeficijenata. Ova metoda se sastoji u sledećem: za datu funkciju $R(x)$ pretpostavi se da važi data jednakost u kojoj su A_{ij}, B_{ij} i C_{ij} neodređeni koeficijenti. Množenjem te jednakosti sa $Q(x)$, dobijaju se na levoj i desnoj strani polinomi; kako su dva polinoma identički jednaka ako i samo ako su im jednaki koeficijenti uz iste stepene od x, to se izjednačavanjem ovih koeficijenata dobija sistem jednačina za određivanje A_{ij}, B_{ij} i C_{ij}.

Razlomci oblika $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ i $\dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^l}$ nazivaju se prosti ili parcijalni razlomci.

Zadatak 1.1. Izračunati $I = \int \frac{x^2}{(x^2-3x+2)^2}dx.$

Rešenje.

Podintegralna funkcija je prava racionalna funkcija. Međutim za rastavljanje na sumu parcijalnih razlomaka prvo je potrebno faktorisati polinom u imeniocu, tj. pronaći korene kvadratne jednačine

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}.$$

Prema tome, pravu racionalnu funkciju

$$\frac{x^2}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

treba rastaviti na sumu parcijalnih razlomaka

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2}.$$

Nakon množenja cele jednakosti sa $(x-1)^2(x-2)^2$ sledi

$$\begin{aligned} x^2 &= A(x-1)(x-2)^2 + B(x-2)^2 + C(x-1)^2(x-2) + D(x-1)^2 \\ x^2 &= x^3(A+C) + x^2(-5A+B-4C+D) + x(8A-4B+5C-2D) \\ &\quad + (-4A+4B-2C+D). \end{aligned}$$

Metodom neodređenih koeficijenata dobija se sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} A & & & + & C & & & = & 0 \\ -5A & + & B & - & 4C & + & D & = & 1 \\ 8A & - & 4B & + & 5C & - & 2D & = & 0 \\ -4A & + & 4B & - & 2C & + & D & = & 0 \end{array}$$

Rešavanjem sistema dobija se $A = 4$, $B = 1$, $C = -4$ i $D = 4$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2}{(x^3-3x+2)^2}dx = \int \left(\frac{4}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-4}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \right) dx \\ &= 4\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} - 4\int \frac{dx}{x-2} + 4\int \frac{dx}{(x-2)^2} \\ &= \left[\begin{array}{l} x-1 = t \Rightarrow dx = dt \\ x-2 = t_1 \Rightarrow dx = dt_1 \end{array} \right] = 4\int \frac{dt}{t} + \int t^{-2}dt - 4\int \frac{dt_1}{t_1} + 4\int {t_1}^{-2}dt_1 \\ &= 4\ln|t| + \frac{t^{-1}}{-1} - 4\ln|t_1| + 4\frac{{t_1}^{-1}}{-1} + c = 4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| - \frac{1}{x-1} - 4\frac{1}{x-2} + c \\ &= \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^4 - \frac{5x-6}{x^2-3x+2} + c. \end{aligned}$$

1.2. Integrali iracionalnih funkcija

I Integral oblika $\displaystyle\int \boldsymbol{R}\left[\boldsymbol{x},\ \left(\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{px+q}}\right)^{\boldsymbol{r_1}},\ \ldots,\ \left(\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{px+q}}\right)^{\boldsymbol{r_k}}\right]\boldsymbol{dx}.$

Posmatrajmo integral kod koga je podintegralna funkcija racionalna funkcija od x i od različitih stepena izraza $\dfrac{ax+b}{px+q}$, pri čemu je $aq-bp\neq 0$ (inače se izraz svodi na konstantu).
Neka je s najmanji zajednički sadržalac imenilaca eksponenata $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_k$. Uvedimo smenu $\sqrt[s]{\dfrac{ax+b}{px+q}}=t \Rightarrow \dfrac{ax+b}{px+q}=t^s$. Tada je $\left(\dfrac{ax+b}{px+q}\right)^{r_i}=t^{sr_i}$ za svako $i=1,\ 2,\ \ldots,\ k$, pri čemu je, s obzirom da se imenilac svakog broja r_i sadrži u s, sr_i ceo broj. Takođe je $x=\dfrac{qt^s-b}{a-pt^s}$, pa se dati integral svodi na integral racionalne funkcije nove promenljive t.

Zadatak 1.2. Izračunati $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt{x+1}}$.

Rešenje.
Primetimo da je podintegralna funkcija racionalna funkcija po x i da se javlja izraz $x+1$ na stepene redom $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{2}$. Kako je $NZS\{2,3\}=6$ smena koja se uvodi je $\sqrt[6]{x+1}=t$.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt{x+1}}=\left[\begin{array}{l}\sqrt[6]{x+1}=t\Rightarrow x+1=t^6\\ dx=6t^5dt,\end{array}\right]$$
$$=\int\frac{6t^5}{t^4-t^3}dt=6\int\frac{t^5}{t^3(t-1)}dt=6\int\frac{t^2}{t-1}dt.$$

U poslednjem integralu podintegralna funkcija je neprava racionalna funkcija. Potrebno je podeliti t^2 sa $t-1$. Može se izvršiti klasično deljenje polinoma, međutim oduzimanjem i dodavanjem broja 1 brojiocu, brže ćemo izvršiti deljenje.

$$I=6\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt=6\int\frac{(t-1)(t+1)+1}{t-1}dt=6\int(t+1)dt+6\int\frac{dt}{t-1}$$
$$=6\frac{t^2}{2}+6t+6\ln|t-1|+c=3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}+6\ln\left|\sqrt[6]{x+1}-1\right|+c.$$

II Integrali binomnog diferencijala

Integral binomnog diferencijala je integral oblika $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, gde su m, n i p racionalni brojevi ($n, p \neq 0$), a a i b realni brojevi različiti od nule. Uvođenjem pomoćne smene

$$x^n = t, \quad \text{tj.} \quad x = t^{\frac{1}{n}},$$

odakle je

$$dx = \frac{1}{n} \cdot t^{\frac{1}{n}-1} dt,$$

integral se svodi na

$$\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p dt = \frac{1}{n}\int t^q(a+bt)^p dt,$$

gde je $\frac{m+1}{n} - 1 = q$ takođe racionalan broj.

Uvođenje naredne smene zavisi od vrednosti p i q, razlikujemo tri slučaja:

1. $p \in \mathbb{Z}$, $q = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$.
   Tada je $\int t^{\frac{r}{s}}(a+bt)^p dt = \int R(t,\ t^{\frac{r}{s}})dt$, tj. dobija se prethodno razmotren tip integrala, koji se smenom $t = z^s$ svodi na integral racionalne funkcije od z.
2. $q \in \mathbb{Z}$, $p = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$.
   Tada je $\int t^q(a+bt)^{\frac{r}{s}} dt = \int R(t,\ (a+bt)^{\frac{r}{s}})dt$, koji se smenom $a+bt = z^s$ (prepoznajemo da je u pitanju I tip integrala iracionalnih funkcija) svodi na integral racionalne funkcije od z.
3. $p + q \in \mathbb{Z}$ i neka je $p = \frac{r}{s}$.
   Tada je $\int t^q(a+bt)^p dt = \int t^{p+q}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt = \int R\left[t, \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\frac{r}{s}}\right] dt$,
   pri čemu se poslednji integral smenom $\frac{a+bt}{t} = z^s$ svodi na integral racionalne funkcije od z.

Naredna tri zadatka će reprezentovati redom navedene slučajeve.

Zadatak 1.3. Izračunati $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(4-\sqrt[3]{x})}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{\sqrt{x}(4-\sqrt[3]{x})} = \int x^{-\frac{1}{2}}(4-x^{\frac{1}{3}})^{-1}dx = \begin{bmatrix} x^{\frac{1}{3}} = t, \ \ x = t^3 \\ dx = 3t^2dt \end{bmatrix} \\
&= 3\int t^{-\frac{3}{2}}(4-t)^{-1}t^2dt = 3\int t^{\frac{1}{2}}(4-t)^{-1}dt = \begin{bmatrix} t = z^2 \\ dt = 2zdz \end{bmatrix} \\
&= 6\int z(4-z^2)^{-1}zdz = 6\int \frac{z^2}{4-z^2}dz = -6\int \frac{z^2-4+4}{z^2-4}dz \\
&= -6\int dz - 24\int \frac{dz}{z^2-2^2} = -6z - 24\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right| + c \\
&= -6t^{\frac{1}{2}} - 6\ln\left|\frac{\sqrt{t}-2}{\sqrt{t}+2}\right| + c = -6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt[6]{x}+2}\right| + c.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.4. Izračunati $I = \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}dx = \begin{bmatrix} x^{\frac{1}{3}} = t, \ \ x = t^3 \\ dx = 3t^2dt \end{bmatrix} \\
&= 3\int t^{-2}(1+t)^{\frac{1}{2}}t^2dt = 3\int (1+t)^{\frac{1}{2}}dt = \begin{bmatrix} 1+t = z^2 \\ dt = 2zdz \end{bmatrix} \\
&= 6\int z^2dz = 6\cdot\frac{z^3}{3} + c = 2\cdot(\sqrt{1+t})^3 + c = 2\cdot(1+\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}} + c.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.5. Izračunati $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Rešenje.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx = \left[\begin{array}{l} x^2 = t, \quad x = t^{\frac{1}{2}} \\ dx = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,dt \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{2}\int t^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{2}}\;\; t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}(1+t)^{-\frac{3}{2}}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}\cdot\frac{(1+t)^{-\frac{3}{2}}}{t^{-\frac{3}{2}}}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{-3}\cdot\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-\frac{3}{2}}\,dt \\
&= \left[\begin{array}{l} \frac{1+t}{t} = z^2, \quad t = \frac{1}{z^2-1} \\ dt = \frac{-2z}{(z^2-1)^2}\,dz \end{array}\right] = -\int \frac{(z^2-1)^3}{z^3}\,\frac{z}{(z^2-1)^2}\,dz \\
&= -\int \frac{z^2-1}{z^2}\,dz = -z - \frac{1}{z} + c = -\sqrt{\frac{1+t}{t}} - \sqrt{\frac{t}{1+t}} + c \\
&= -\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} - \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} + c.
\end{aligned}
$$

III Integrali oblika $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\,)dx$

Neka je dat integral $\int R(x,\ \sqrt{ax^2 + bx + c})\ dx$, $(a \neq 0)$, gde je R racionalna funkcija od x i $\sqrt{ax^2 + bx + c}$. Ovaj integral se svodi na integral racionalne funkcije primenom jedne od Ojlerovih smena.

1) Ako je $a > 0$, uvodi se smena $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$ (prva Ojlerova smena). Tada je (uzmimo da je $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + x\sqrt{a}$, znak minus ispred a ne menja način izvođenja) $ax^2 + bx + c = t^2 + 2xt\sqrt{a} + ax^2$, odakle je $x = \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}$. Znači da je x racionalna funkcija od t (takođe je i dx racionalan izraz od t i dt), a $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a} = t + \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a}$, tj. i $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ je racionalan izraz od t. Prema tome, dati integral se transformiše u integral racionalne funkcije od t.
2) Ako je $c > 0$, može se uvesti smena $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$ (druga Ojlerova smena). Tada je (uzmimo ispred korena znak plus) $ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c$, odakle je $x = \frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}$. Prema tome, x je racionalna funkcija od t, a kako se dx i $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ izražavaju takođe racionalno preko t, dati integral se svodi na integral racionalne funkcije od t.
3) Ako kvadratni trinom $ax^2 + bx + c$ ima realne različite korene x_1 i x_2, može se staviti $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - x_1) \cdot t$ (treća Ojlerova smena). Kako je $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, to je $a(x - x_1)(x - x_2) = (x - x_1)^2t^2$, a odatle je $x = \frac{ax_2-x_1t^2}{a-t^2}$. Prema tome, x je racionalna funkcija od t, a kako se dx i $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ izražavaju racionalno preko t, dati integral se svodi na integral racionalne funkcije od t.

Zadatak 1.6. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$.

Rešenje.
Kako je $c > 0$ koristimo drugu Ojlerovu smenu.

$$\sqrt{1 - 2x - x^2} = xt - 1 \Rightarrow 1 - 2x - x^2 = x^2t^2 - 2xt + 1 \Rightarrow x = \frac{2t-2}{t^2+1} = 2\frac{t-1}{t^2+1}$$

$$dx = 2\frac{t^2 + 1 - 2t(t-1)}{(t^2+1)^2}dt = -2\frac{t^2 - 2t - 1}{(t^2+1)^2}dt$$

$$xt - 1 = 2\frac{t^2 - t}{t^2+1} - \frac{t^2+1}{t^2+1} = \frac{t^2 - 2t - 1}{t^2+1}$$

$$I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}} = -2\int \frac{\frac{t^2-2t-1}{(t^2+1)^2}dt}{1 + \frac{t^2-2t-1}{t^2+1}} = -2\int \frac{\frac{t^2-2t-1}{(t^2+1)^2}dt}{\frac{2(t^2-t)}{t^2+1}}$$

$$= -\int \frac{t^2 - 2t - 1}{t(t-1)(t^2+1)}dt.$$

Dakle, polazni integral smo sveli na integral prave racionalne funkcije, koju je potrebno rastaviti na sumu parcijalnih razlomaka.

$$\frac{t^2-2t-1}{t(t-1)(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{Ct+D}{t^2+1}$$

$$\frac{t^2-2t-1}{t(t-1)(t^2+1)} = \frac{A(t-1)(t^2+1)+Bt(t^2+1)+t(t-1)(Ct+D)}{t(t-1)(t^2+1)}$$

Metodom neodređenih koeficijenata i rešavanjem sistema linearnih jednačina, dobija se da je $A=1$, $B=-1$, $C=0$ i $D=2$.
Konačno,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} &= -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t-1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} \\ &= -\ln|t| + \ln|t-1| - 2\operatorname{arctg} t + c \\ &= \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - 2\operatorname{arctg} t + c,\end{aligned}$$

gde je $t = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.