UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

TESTOVI IZ ALGEBRE

Rade Doroslovački

Ljubo Nedović

Novi Sad, 2016.

Edicija: „TEHNIČKE NAUKE - UDŽBENICI"

Naziv udžbenika: „Testovi iz algebre"

Autori: Rade Doroslovački
Ljubo Nedović

Recenzenti: prof. dr Zoran Stojaković, Prirodno - matematički fakultet u Novom Sadu

prof. dr Ilija Kovačević, Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu

Izdavač: Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

Glavni i odgovorni urednik:
Prof. dr Rade Doroslovački, dekan Fakulteta tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

Priprema i štampa: FTN - Grafički centar GRID, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad

Štampanje odobrio:
Savet za bibliotečku i izdavačku delatnost Fakulteta tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

Predsednik Saveta za bibliotečku i izdavačku delatnost:
Dr Radoš Radivojević, redovni profesor Fakulteta tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

CIP-Каталогизација у публикацији
Библиотека Матице српске, Нови Сад

512(075.8)(079.1)

DOROSLOVAČKI, Rade
Testovi iz algebre / Doroslovački Rade, Nedović Ljubo. - 1. izd. - Novi Sad : Fakultet tehničkih nauka, 2016 (Novi Sad : Grid). - 88 str. ; 24 cm. - (Edicija "Tehničke nauke - udžbenici" ; 599)

Тираж 600. - Библиографија.

ISBN 978-86-7892-862-8

1. Nedović, Ljubo [autor]

a) Algebra - Testovi
COBISS.SR-ID 309162503

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 1

- Za relaciju poretka $\subseteq$ skupa $\mathcal{A} = \{A, B, C, D\}$, gde je $A = \{a,b\}, B = \{b,c\}, C = \{a,b,c\}, D = \{b\}$ i navesti: najmanji el: D minimalne el: D najveći el: C maksimalne el: C

- Zaokružiti brojeve ispred sirjektivnih funkcija:
  ~~1)~~ $f : (0, \frac{\pi}{4}) \to (0, \infty),\ f(x) = \mathrm{tg}\, x$ ~~2)~~ $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = 3 - x$ ~~3)~~ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
  4) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty),\ f(x) = x^2$ 5) $f : [0, \infty) \to [0, \infty),\ f(x) = x^2$ 6) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x$

- Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:
  1) $(a')' = a$ 2) $a + a' = 0$ 3) $a \cdot 0 = 0$ ~~4)~~ $1 + a = a$ ~~5)~~ $(a + b)' = a' + b'$

- Koreni (nule) polinoma $x^2 - i$ su: 1) $e^{i\frac{\pi}{4}}$, 2) $e^{-i\frac{\pi}{4}}$, 3) $-e^{i\frac{\pi}{4}}$, 4) $-e^{-i\frac{\pi}{4}}$,

- Odrediti realni i imaginarni deo, moduo, argument, i konjugovani broj kompleksnog broja $z = \sqrt{3} - i$:
  $Re(z) = \sqrt{3}$, $Im(z) = -1$, $|z| =$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{6}$, $\bar{z} = \sqrt{3} + i$.

- Sledeće kompleksne brojeve napisati u algebarskom obliku:
  $e^{i\pi} = -1$ $2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$ $2e^{0 \cdot i} = 2$ $e^{-i\pi} = -1$ $e^{-i\frac{3\pi}{2}} = i$

- Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su komutativni, asocijativni, grupoidi sa neutralnim elementom.
  ~~1)~~ $(\mathbb{N}, +)$ 2) $(\mathbb{N}, \cdot)$ 3) $(\mathbb{R}, +)$ 4) $(\mathbb{R}, \cdot)$ 5) $(\{-1, 1\}, \cdot)$ 6) $((0, \infty), \cdot)$

- Pri delenju polinoma $x^8 - 2x^4 + 1$ sa $x^2 + 1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je $x^6 - x^4 - x^2 + 1$, a ostatak je 0

****

- Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj grupi $(P, \cdot)$ u kojoj je $\hbar$ neutralni element, a sa x^{-1} je označen inverzni element od elementa x:
  ~~1)~~ $a \cdot \hbar = \hbar$ 2) $a^{-1} \cdot a = \hbar$ 3) $\hbar \cdot \hbar = \hbar$ 4) $\hbar^{-1} = \hbar$ 5) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ ~~6)~~ $a \cdot a = a$

- Koreni (nule) polinoma $x^2 - x\sqrt{2} + 1$ su: 1) $e^{i\frac{\pi}{4}}$, 2) $e^{-i\frac{\pi}{4}}$, 3) $-e^{i\frac{\pi}{4}}$, 4) $-e^{-i\frac{\pi}{4}}$,

- NZD za polinome $x^2 - x\sqrt{2} + 1$ i $x^2 - i$ **1)** Ne postoji **2)** je linearni polinom **3)** je konstantni polinom

- Zaokružiti slova (ili slovo) ispred jednakosti koje su tačne u skupu kompleksnih brojeva:
  a) $z\bar{z} = |z|^2$ b) $\frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}^+) \overrightarrow{Oz_1} = k\overrightarrow{Oz_2}$ c) $\bar{z} \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \bar{z}$
  d) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ~~e)~~ $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ f) $\arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|}$
  g) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ ~~h)~~ $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ~~i)~~ $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = |z|^2 \bar{z}$ j) $|z| = 1 \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$

- Izračunati: a) $\arg(-13i) = -\frac{\pi}{2}$ b) $\arg(6) = 0$ c) $\arg(-9) = \pi$ d) $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$
  e) $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$ f) $\arg(-1 + i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$ g) $\arg(0) =$ nedefinisan h) $\arg(2 + i)(3 + i) = \frac{\pi}{4}$

- Napisati Kejlijeve tablice grupoida $(\mathbb{Z}_4, +)$ i $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$, odrediti inverzne elemente i izračunati:

+	0	1	2	3
0	[illegible]	1	2	3
1	[illegible]	[illegible]	3	0
2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$-0 = 0$, $-1 = 3$, $-2 = 2$ $1^{-1} = 1$, $2^{-1} = /$,
$(1 + 2^3)^{-1} = 1$, $((-1)^{-1} + 2^3)^{-1} = 3$, $(2 + 2^3)^2 = 0$.
Da li je $(\mathbb{Z}_4, +)$ Abelova grupa? DA NE.
Zaokruži tačan odgovor.

- Da li je $\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (4,1), (3,1), (2,1)\}$ relacija poretka skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: DA NE, i ako jeste, nacrtati njen Haseov dijagram. Odrediti minimalne: 5 , maksimalne: 1 ,
  najveći element: 1 i najmanji element: 5 .

- Neka je $z = 6$, $u = 4 + i$ i $w = 5 + 3i$. Rotacijom tačke z oko tačke u za ugao $\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka $5 + 3i$, translacijom tačke z za vektor w dobija se tačka $11 + 3i$, a $\sphericalangle wuz = -\frac{\pi}{2}$

• Napisati primere konačnog prstena bez jedinice $(A, +, \cdot)$ i beskonačnog prstena bez jedinice $(B, +, \cdot)$.
$A =$ $\{\mathbb{Z}_4 \setminus \{1,3\}\}$ $B =$ $\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

• Ako je p polinom stepena 2 nad nekim poljem $\mathbb{R}$ i ako ima tačno jedan koren u tom polju, tada je p:
1) uvek svodljiv **2)** uvek nesvodljiv **3)** nekada svodljiv a nekada nesvodljiv **4)** ništa od prethodnog **5)** uvek normalizovan

• U skupu $\mathbb{R}$ date su relacije: $\rho_1 = \{(x,1)|x \in \mathbb{R}\}$, $\rho_2 = \{(x,y)|x^2 = y^2, x, y \in \mathbb{R}\}$, $\rho_3 = \{(x,3x)|x \in \mathbb{R}\}$, $\rho_4 = \{(x,y)|x \in \mathbb{R}, y \in [x, x+1]\}$, $\rho_5 = \{(2,5)\}$, $\rho_6 = \{(x^2, x)|x \in \mathbb{R}\}$

Iza oznake svake od tih relacija zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost.
ρ_1 : R S A T ρ_2 : R S A T ρ_3 : R S A T ρ_4 : R S A T ρ_5 : R S A T ρ_6 : R S A T

• Neka je A najveći podskup od $(0, \infty) = \mathbb{R}^+$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je funkcija $f : A \to B$ definisana sa $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Tada je $A =$ $(0,1]$, $f($ ___ $) = 1$ i $B =$ $[0,1)$. Funkcija $f : A \to B$ je:
1) sirjektivna ali ne injektivna **2)** injektivna ali ne sirjektivna **3)** niti injektivna niti sirjektivna **4)** bijektivna **5)** $f^{-1} : O \to S$, $f^{-1}(x) =$ $\sqrt{1-x^2}$, $O =$ $[0,1)$, $S =$ $(0,1]$

• Neka je $A = \{1,2,3,4,5\}$ i $B = \{1,2,3\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f \underline{\nearrow}$ označava neopadajuću funkciju f:

$\left|\{f|f : A \longrightarrow B\}\right| =$ 3^5 $\left|\{f|f : A \xrightarrow{1-1} B\}\right| =$ 0 $\left|\{f|f : A \longrightarrow B \wedge f \nearrow\}\right| =$ 0 $\left|\{f|f : B \xrightarrow{na} B\}\right| =$ $3!$

$\left|\{f|f : B \to A\}\right| =$ 5^3 $\left|\{f|f : A \xrightarrow{1-1} A\}\right| =$ $5!$ $\left|\{f|f : B \to A \wedge f \underline{\nearrow}\}\right| =$ $\binom{5}{3}$ $\left|\{f|f : A \setminus \{5\} \xrightarrow{na} B\}\right| =$ $3 \cdot \frac{4!}{2!}$ 36

• Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f : A \to B$ definisana sa $f(x) = \ln(x^2 - e)$. Tada je $A =$ $(-\infty, -\sqrt{e}) \cup (\sqrt{e}, \infty)$ $f($ $\pm\sqrt{e + \frac{1}{e}}$ $) = -1$ i $B =$ $\mathbb{R}$.
Funkcija $f : A \to B$ je: **1)** bijektivna
2) sirjektivna ali ne injektivna **3)** injektivna ali ne sirjektivna **4)** niti injektivna niti sirjektivna

• Funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = \ln x$: **1)** je izomorfizam $(\mathbb{R}^+, \cdot) u (\mathbb{R}, +)$ **2)** je homomorfizam $(\mathbb{R}^+, \cdot) u (\mathbb{R}, +)$ **3)** ima inverznu f^{-1} **4)** f^{-1} je homomorfizam $(\mathbb{R}^+, \cdot) u (\mathbb{R}, +)$ **5)** f^{-1} je izomorfizam $(\mathbb{R}^+, \cdot) u (\mathbb{R}, +)$

• Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koje je tačno u Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$.
1) $xx = x + x$ **2)** $xy = x + y$ **3)** $xx' = (x+1)'$ **4)** $xy = 1 \Rightarrow x = 1$ **5)** $xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$ **6)** $(x = 0 \vee y = 0) \Rightarrow xy = 0$ **7)** $x = xy + xy'$ **8)** $(\forall x \in B)(\exists y \in B)\ x + y = 1 \wedge xy = 0$

• Zaokružiti grupoide sa neutralnim elementom, koji nisu grupe: **1)** $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{1,3,5\}, \cdot)$ **2)** $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{1,3,5\}, +)$ **3)** $(\{f|f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, \circ)$ **4)** $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ **5)** $(\mathbb{Z}, \cdot)$ **6)** $(\{7k|k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$ **7)** $(\mathbb{R}[x], \cdot)$

• Zaokružiti podgrupe grupe $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$: **1)** $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$ **2)** $((0, \infty), \cdot)$ **3)** $((-\infty, 0), \cdot)$ **4)** $(\{e^{i\theta}|\theta \in \mathbb{R}\}, \cdot)$ **5)** $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ **6)** $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +)$ **7)** $((0,1), \cdot)$ **8)** $(\{-1,1\}, \cdot)$ **9)** $(\{-1, i, 1, -i\}, \cdot)$ **10)** $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

• Zaokružiti brojeve (ili broj) ispred struktura koje su domeni integriteta: **1)** $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ **2)** $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ **3)** $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ **4)** $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ **5)** $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ **6)** $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ **7)** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ **8)** $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

• Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^4 + t^2 + 1$ nesvodljiv nad njima. $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_5$

• Ako je p polinom stepena 3 nad poljem $\mathbb{R}$, tada je p nad poljem $\mathbb{R}$:
1) uvek svodljiv **2)** uvek nesvodljiv **3)** ništa od prethodnog.

• $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(a+ib) = 0$, $b \neq 0$. Zaokruži tačno: **a)** $x - a + ib \mid f(x)$ **b)** $x - a - ib \mid f(x)$ **c)** $x - e^{ia} \mid f(x)$ **d)** $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \mid f(x)$; **e)** $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 \mid f(x)$; **f)** $x^2 - ax + a^2 + b^2 \mid f(x)$; **g)** $x - e^{-ia} \mid f(x)$

• Ako je $A = \{e^{i\varphi} + e^{i\psi} \mid \psi \in \mathbb{R}\}$ i $B = \{1 - e^{i\psi} \mid \psi \in \mathbb{R}\}$ tada je **a)** $A \cap B \neq \emptyset$, **b)** $A \subset B$, **c)** $A \subseteq B$, **d)** $A \nsubseteq B$, **e)** $A \supseteq B$, **f)** $A \nsupseteq B$, **g)** $A \supset B$, **h)** $A \cap B = \emptyset$, **i)** $A = B$.

• Neka je $\{i, -i\}$ skup nekih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tada skup svih vrednosti za a, b i c je $a = c$ $a \in \mathbb{R}$ $b \in$ 1 $c \in \mathbb{R}$.

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 2

1. • Iza oznake svake od datih relacija u skupu $\mathbb{Z}$ zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost.
$\leq$: R, S, A, T $<$: R, S, A, T $\equiv_3$ definisana sa $x \equiv_3 y \Leftrightarrow 3|(x-y)$: R, S, A, T

2. • Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ definisana sa $f(x) = 2^x$. Tada je: 1) $f^{-1}(x) = x^2$, 2) $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, 3) $f^{-1}(x) = \log_2 x$, 4) $f^{-1}(x) = 2^{-x}$, ~~5)~~ $f^{-1}(x) = \frac{2}{x}$, 6) $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x^{-1}$, 7) $f^{-1}(x) = \log_2 \frac{1}{x}$.

3. • Ako su P i Q polinomi i $dg(P) = 3$ i $dg(Q) = 4$, tada je $dg(PQ) =$ 7 i $dg(P+Q) =$ 4

4. • Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u Bulovoj algebri.
1) $c + ab = (b+c)(a+c)$ 2) $(ab)' = a' + b'$ 3) $(aa)' = a' + a'$ ~~4)~~ $(a+b)' = a' + b'$
~~5)~~ $(a+a)' = a' + a'$ ~~6)~~ $1 + 1 = 0$ 7) $1 + a = 0'$ ~~8)~~ $1 + a = 1 \cdot a$

5. • Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su asocijativni grupoidi sa neutralnim elementom (tj. monoidi):
1) $(\mathbb{Z}, +)$ 2) $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ 3) $(\{-1, 1\}, \cdot)$ 4) $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ 5) $(\mathbb{C}, \cdot)$ ~~6)~~ $(\{-1, 0, 1\}, +)$ 7) $(\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$

6. • Za kompleksne brojeve $z_1 = 1 + i$ i $z_2 = 2 - 2i$ izračunati
$z_1 + z_2 =$ 3 - i $z_1 \cdot z_2 =$ 4 $\frac{z_2}{z_1} =$ -2i $\arg(z_2) =$ $-\frac{\pi}{4}$ $|z_2| =$ $2\sqrt{2}$

7. • Koreni (nule) polinoma $x^2 - i$ su: 1) $e^{i\frac{\pi}{4}}$, 2) $e^{-i\frac{\pi}{4}}$, 3) $-e^{i\frac{\pi}{4}}$, 4) $-e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

8. • Odrediti realni i imaginarni deo, moduo, argument, i konjugovani broj kompleksnog broja $z = -1 - i\sqrt{3}$:
$Re(z) =$ -1 , $Im(z) =$ $-\sqrt{3}$, $|z| =$ 2 , $\arg(z) =$ $-\frac{2\pi}{3}$, $\overline{z} =$ $-1+i\sqrt{3}$.

9. • Sledeće kompleksne brojeve napisati u algebarskom obliku:
$e^{i\pi} =$ -1 $2e^{i\frac{\pi}{2}} =$ 2i $e^{i2k\pi} =$ 1 $2e^{0 \cdot i} =$ 2 $e^{i(2k+1)\pi} =$ -1 $e^{-i\pi} =$ -1 $e^{-i\frac{3\pi}{2}} =$ i

10. • Pri deljenju polinoma $x^5 + 1$ sa $x + 1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, a ostatak je 0.

* *

11. • Ako su P i Q polinomi, $P + Q \neq 0$ i $dg(P) = 2$ i $dg(Q) = 2$, tada je $dg(PQ) \in \{$ 4 $\}$ i $dg(P+Q) \in \{$ 0, 1, 2 $\}$

12. • Ako je $z_1 \neq w$, $z_2 \neq w$, $z_1 \neq 0$ i $z_2 \neq 0$, tada važi:
1) $\arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}^+) \overrightarrow{Oz_1} = k\overrightarrow{Oz_2}$ 2) $\arg(z_1 - w) = \arg(z_2 - w) \Leftrightarrow \frac{z_1 - w}{|z_1 - w|} = \frac{z_2 - w}{|z_2 - w|}$
3) $(\exists k \in \mathbb{R}^+) \overrightarrow{wz_1} = k\overrightarrow{wz_2} \Leftrightarrow \frac{z_1 - w}{|z_1 - w|} = \frac{z_2 - w}{|z_2 - w|}$ 4) $(\exists k \in \mathbb{R}^+) \overrightarrow{wz_1} = k\overrightarrow{wz_2} \Leftrightarrow \arg(z_1 - w) = \arg(z_2 - w)$
5) Množenjem kompleksnog broja realnim pozitivnim brojem argument se ne menja.
6) Brojevi iz $\mathbb{C}$ koji pripadaju istoj polupravoj koja ishodi iz koordinatnog početka imaju jednake argumente.
7) Množenje broja $z \in \mathbb{C}$ realnim brojem k je homotetija sa centrom $O(0, 0)$ i koeficijentom k tj. $H_{O,k}(z)$.

13. • Zaokružiti tačne iskaze: 1) $\{z | \arg z > 0\} = \{z | I_m(z) > 0\} \cup \mathbb{R}^-$
2) $\{z | \arg z \geq 0\} = \{z | I_m(z) \geq 0\} \setminus \{0\}$ 3) $\{z | -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\} = \{z | R_e(z) > 0\}$
4) $\{z | -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}\} = \{z | R_e(z) \geq 0\} \setminus \{0\}$ 5) $\{z | -\frac{\pi}{2} < \arg z \leq \frac{\pi}{2}\} = \{z | R_e(z) > 0\} \cup \{xi | x > 0\}$
6) $\{z | -\frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{\pi}{2}\} = \{z | R_e(z) > 0\} \cup \{xi | x < 0\}$

14. • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj grupi $(P, \cdot)$ u kojoj je e neutralni element, a sa x^{-1} je označen inverzni element od elementa x:
~~1)~~ $a \cdot e = e$ 2) $a \cdot x = b \cdot x \Rightarrow a = b$ 3) $e \cdot e = e$ 4) $e^{-1} = e$ 5) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ ~~6)~~ $a \cdot a = a$

15. • Koreni (nule) polinoma $x^2 - x\sqrt{2} + 1$ su: 1) $e^{i\frac{\pi}{4}}$, 2) $e^{-i\frac{\pi}{4}}$, 3) $-e^{i\frac{\pi}{4}}$, 4) $-e^{-i\frac{\pi}{4}}$

16. • NZD za polinome $x^2 - x\sqrt{2} + 1$ i $x^2 - i$ 1) Ne postoji 2) je linearni polinom 3) je konstantni polinom

17. • Zaokružiti brojeve ispred jednakosti koje su tačne u skupu kompleksnih brojeva:
1) $\overline{z} \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \overline{z}$ 2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ 3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ 4) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$
5) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ 6) $z\overline{z} = |z|^2$ ~~7)~~ $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = |z|^2\overline{z}$ 8) $|z^{-1}| = 1 \Rightarrow z^{-1} = \overline{z}$

18. • Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f : A \to B$ definisana sa $f(x) = \arccos(x+1)$. Tada je $A =$ $[-2,0]$, $f(\frac{-\sqrt{2}-2}{2}) = \frac{3\pi}{4}$, $f(\frac{\sqrt{2}-2}{2}) = \frac{\pi}{4}$ i $B =$ $[0,\pi]$, a $f : A \to B$ je: 1) bijektivna 2) sirjektivna ali ne injektivna 3) injektivna ali ne sirjektivna 4) niti injektivna niti sirjektivna

19) • $A = \{1,2,3\}$, $B = \{x,y,z,u\}$, $f_1 = \{(1,x),(2,y)\}$, $f_2 = \{(1,x),(2,y)(3,x)\}$, $f_3 = \{(1,u),(2,y),(3,x)\}$. **Svako** polje obavezno popuniti sa **da** ili **ne**.

$\backslash$	f_i je funkcija	$f_i : A \longrightarrow B$	$f_i : \{1,2\} \longrightarrow B$	$f_i : A \xrightarrow{1-1} B$	$f_i : A \xrightarrow{na} B$	$f_i : A \underset{\mathbf{na}}{\xrightarrow{1-1}} B$
f_1	da	ne	da	ne	ne	ne
f_2	da	da	da ?	da	ne	ne
f_3	da	da	da	da	ne	ne

20. • Funkcija $f : (-\pi, -\frac{\pi}{4}) \longrightarrow (-1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ definisana sa $f(x) = \cos x$ je:
1) sirjektivna i nije injektivna 2) injektivna i nije sirjektivna
3) nije injektivna i nije sirjektivna 4) bijektivna

21. • Funkcija $f : (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) \longrightarrow (0,1)$ definisana sa $f(x) = \sin x$ je:
1) sirjektivna i nije injektivna 2) injektivna i nije sirjektivna
3) nije injektivna i nije sirjektivna 4) bijektivna

22. • Funkcija $f : (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}) \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = \operatorname{tg} x$ je:
1) sirjektivna i nije injektivna 2) injektivna i nije sirjektivna
3) nije injektivna i nije sirjektivna 4) bijektivna

23. • Napisati primere konačnog prstena bez jedinice $(A,+,\cdot)$ i beskonačnog prstena bez jedinice $(B,+,\cdot)$.
$A =$ $\{\mathbb{Z}_4 \setminus \{1,3\}\}$ $B =$ $\{2k | k \in \mathbb{Z}\}$

24. • Ako je p polinom stepena 2 nad proizvoljnim poljem F i ako ima tačno jedan koren u tom polju F, tada je p nad tim poljem F: 1) svodljiv 2) nesvodljiv 3) nekada svodljiv a nekada nesvodljiv 4) ništa od prethodnog

25. • Neka je A najveći podskup od $(0,\infty) = \mathbb{R}^+$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je funkcija $f : A \to B$ definisana sa $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$. Tada je $A =$ $(0,1]$, $f($ 1 $) = 0$ i $B =$ $[-1,0)$. Funkcija $f : A \to B$ je: 1) sirjektivna ali ne injektivna 2) injektivna ali ne sirjektivna 3) niti injektivna niti sirjektivna 4) bijektivna 5) $f^{-1} : O \to S$,
$f^{-1}(x) =$ $\sqrt{1-x^2}$, $O =$ $[-1,0)$, $S =$ $(0,1]$

26. • Neka je $A = \{1,2\}$ i $B = \{1,2,3\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f \underline{\nearrow}$ označava neopadajuću funkciju f:

$\left|\{f | f : A \longrightarrow B\}\right| =$ 9, $\left|\{f | f : A \xrightarrow{1-1} B\}\right| =$ 6, $\left|\{f | f : A \longrightarrow B \wedge f \nearrow\}\right| =$ 3, $\left|\{f | f : B \xrightarrow{na} B\}\right| =$ 6,
$\left|\{f | f : B \to A\}\right| =$ 8, $\left|\{f | f : A \xrightarrow{1-1} A\}\right| =$ 2, $\left|\{f | f : B \to A \wedge f \underline{\nearrow}\}\right| =$ 4, $\left|\{f | f : B \xrightarrow{na} A\}\right| =$ 6.

27. • Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f : A \to$ definisana sa $f(x) = \ln(x^2+2)$. Tada je $A =$ $\mathbb{R}$, $f($ $\pm\sqrt{e-2}$ $) = 1$ i $B =$ $[\ln 2, \infty)$. Funkcija $f : A \to B$ je: 1) bijektivna 2) injektivna ali ne sirjektivna 3) sirjektivna ali ne injektivna 4) niti injektivna niti sirjektivna

28. • Neka je $\{-2,1\}$ skup svih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ nad poljem realnih brojeva. Tada skup svih mogućnosti za a je $a \in \{$ 0, 3 $\}$.

29. • Zaokružiti grupoide sa neutralnim elementom, koji nisu grupe: ~~1)~~ $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{1,3,5\}, \cdot)$ ~~2)~~ $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{1,3,5\}, +)$
3) $(\{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, \circ)$ 4) $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ 5) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ~~6)~~ $(\{7k | k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$ 7) $(\mathbb{R}[x], \cdot)$

30. • Da li postoji polje nad kojim je polinom $t^4 + t^2 + 1$ nesvodljiv? DA NE ?

31. • Ako je p polinom stepena 3 nad poljem $\mathbb{Q}$, tada je p nad poljem $\mathbb{Q}$:
1) uvek svodljiv 2) uvek nesvodljiv 3) ništa od prethodnog.

32. • $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(a+i) = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Zaokruži tačno: ~~1)~~ $x - a + i \,|\, f(x)$ 2) $x - a - i \,|\, f(x)$ 3) $x - e^{ia} \,|\, f(x)$
4) $x^2 - 2ax + a^2 + 1 \,|\, f(x)$; 5) $x^2 + 2ax + a^2 + 1 \,|\, f(x)$; f) $x^2 - ax + a^2 + 1 \,|\, f(x)$; 6) $x - e^{-ia} \,|\, f(x)$

31. (•) Ako je $A = \{e^{i\varphi} + e^{i\psi} \mid \psi, \varphi \in \mathbb{R}\}$ i $B = \{1 - e^{i\psi} \mid \psi \in \mathbb{R}\}$ tada je **1)** $A \cap B \neq \emptyset$, ~~**2)**~~ $A \subset B$, **3)** $A \subseteq B$, **4)** $A \nsubseteq B$, **5)** $A \supseteq B$, ~~**6)**~~ $A \nsupseteq B$, **7)** $A \supset B$, ~~**8)**~~ $A \cap B = \emptyset$, **9)** $A = B$.

34. (•) Neka je $\{i, -i, 1\}$ skup korena polinoma $x^3 + ax^2 + bx + c$. Tada je $a = -1$ $b = 1$ $c = -1$.

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 3

1. (•) U skupu $A = \Big\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\Big\}$ je data relacija $\subseteq$. Navesti ako postoje (napisati / ako ne postoji):
najmanji element: / , minimalne elemente: {1}, {2}, {3} ,
najveći element: {1,2,3} , maksimalne elemente: {1,2,3} .

2. (•) Neka su $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = \ln x$. Izračunati (napisati / ako ne postoji): **1)** $f^{-1}(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}^+$ **2)** $g^{-1}(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ **3)** $(f \circ g)(x) = \sqrt{\ln x}$, $x \in (1, \infty)$ **4)** $(g \circ f)(x) =$, $x \in \mathbb{R}^+$
$\ln x > 0$ $x > 1$ $\ln\sqrt{x}$

3. (•) Napisati $SDNF$ Bulovog izraza $(x'y + xy + xy')'$: $x'y'$

4. (•) Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koja su grupoidi:
1) $(\mathbb{Z}, +)$ ~~**2)**~~ $(\{-1,0,1\}, +)$ **3)** $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ **4)** $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, +)$ **5)** $(\{-1,1\}, \cdot)$ **6)** $(\{1\}, \cdot)$

5. (•) Za kompleksne brojeve $z_1 = 1 + i$ i $z_2 = -2i$ izračunati
$z_1 + z_2 = 1 - i$ $z_1 \cdot z_2 = 2 - 2i$ $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{2}$ $|z_2| = 2$

6. (•) Koreni (nule) polinoma $x^2 + i$ su: **1)** $e^{i\frac{\pi}{4}}$, **2)** $e^{-i\frac{\pi}{4}}$, **3)** $-e^{i\frac{\pi}{4}}$, **4)** $-e^{-i\frac{\pi}{4}}$,

7. (•) Odrediti realni i imaginarni deo, moduo, argument, i konjugovani broj kompleksnog broja $z = -i\sqrt{3}$:
$Re(z) = 0$, $Im(z) = -\sqrt{3}$, $|z| = \sqrt{3}$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$, $\overline{z} = i\sqrt{3}$.

8. (•) Pri deljenju polinoma $x^4 - 1$ sa $x^2 + x + 1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je $x^2 - x$, a ostatak je $x - 1$.

9. • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koja su grupe:
~~**1)**~~ $(\mathbb{Z}, \cdot)$ **2)** $(\mathbb{Z}, +)$ **3)** $(\{-1,1\}, \cdot)$ **4)** $(\mathbb{Z}_4, +)$ ~~**5)**~~ $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ **6)** $((0, \infty), \cdot)$

10. (•) Koje od navedenih struktura su polja:
1) $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ ~~**2)**~~ $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ~~**3)**~~ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ **4)** $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ **5)** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ **6)** $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$

* *

11. (•) Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred jednakosti koje su tačne u skupu kompleksnih brojeva: **1)** $z\overline{z} = |z|^2$
~~**2)**~~ $Re(z) = \frac{1}{2}(z - |z|)$ ~~**3)**~~ $Im(z) = \frac{1}{2}(z + |z|)$ **4)** $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ ~~**5)**~~ $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$
6) $\overline{z} \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \overline{z}$ **7)** $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$ **8)** $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ **9)** $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = |z|^{-2}\overline{z}$
10) $|z| = 1 \Rightarrow z^{-1} = \overline{z}$

12. (•) Izračunati: **1)** $\arg(-13i) = -\frac{\pi}{2}$ **2)** $\arg(6) = 0$ **3)** $\arg(-9) = \pi$ **4)** $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$
5) $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$ **6)** $\arg(-1 + i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$ **7)** $\arg(0) =$ /

13. (•) Napisati Kejlijeve tablice grupoida $(\mathbb{Z}_3, +)$ i $(\mathbb{Z}_3, \cdot)$, odrediti inverzne elemente i izračunati:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$-0 = 0$, $-1 = 2$, $-2 = 1$ $1^{-1} = 1$, $2^{-1} = 2$,
$(2 + 2^3)^{-1} = 1$ $((-1)^{-1} + 2^3)^{-1} = 1$, $(2 + 2^3)^2 = 1$.

14. (•) Da li je $\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (4,1), (3,1)\}$ relacija poretka skupa $A = \{1,2,3,4,5\}$: DA NE, i ako jeste, nacrtati njen Haseov dijagram. Odrediti
minimalne: 5 , maksimalne: 1, 2 ,
najveći: / i najmanji: 5 element.

15. (•) Neka je $z = 3 + 2i$, $u = 1 + i$ i $w = 2 - i$. Rotacijom tačke z oko tačke u za ugao $\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka $3i$, translacijom tačke z za vektor w dobija se tačka $5 + i$, a $\measuredangle wuz = -\frac{\pi}{2}$

16. • Zaokružiti brojeve (ili broj) ispred struktura koje su prsteni ali nisu polja: 1) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$
2) $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$ 3) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ 4) $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ 5) $(\mathbb{N},+,\cdot)$ 6) $(\mathbb{C},+,\cdot)$ 7) $(\mathbb{R}[t],+,\cdot)$ 8) $(\mathbb{R}^+,+,\cdot)$

17 • U polju $\mathbb{Z}_5$ izračunati $3(2^3+4)+3=$ 4 $2^{-1}=$ 3 $3^{-1}=$ 2 $-2=$ 3 $-3=$ ____

18. • U skupu $\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$ date su relacije: $\rho_1=\{(x,3x)|x\in\mathbb{N}\}$, $\rho_2=\{(x,y)|x+y=0,x,y\in\mathbb{N}\}$, $\rho_3=\{(x,x)|x\in\mathbb{N}\}$, $\rho_4=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{N},xy<4\}$, $\rho_5=\{(2x,2x)|x\in\mathbb{N}\}$, $\rho_6=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Iza oznake svake od tih relacija zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost, S- simetričnost, A- antisimetričnost, T- tranzitivnost.

ρ_1 : R S A T ρ_2 : R S A T ρ_3 : R S A T ρ_4 : R S A T ρ_5 : R S A T ρ_6 : R S A T

19. • Neka je $A=\{1,2,3,4\}$ i $B=\{1,2\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f\nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f\underline{\nearrow}$ označava neopadajuću funkciju f:

$\left|\{f|f:A\longrightarrow B\}\right|=$ 16, $\left|\{f|f:A\xrightarrow{1-1}B\}\right|=$ 0, $\left|\{f|f:A\longrightarrow B\wedge f\nearrow\}\right|=$ 0, $\left|\{f|f:B\xrightarrow{na}B\}\right|=$ 2,
$\left|\{f|f:B\longrightarrow A\}\right|=$ 16, $\left|\{f|f:A\xrightarrow{1-1}A\}\right|=$ 24, $\left|\{f|f:B\longrightarrow A\wedge f\underline{\nearrow}\}\right|=$ 10, $\left|\{f|f:A\xrightarrow{na}B\}\right|=$ 14.

20. • Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f:A\to B$ definisana sa $f(x)=\ln(x^2+e^{-1})$. Tada je $A=$ $\mathbb{R}$, $f($ 0 $)=-1$ i $B=$ $[-1,\infty)$.
Funkcija $f:A\to B$ je: **1)** bijektivna **2)** sirjektivna ali ne injektivna **3)** injektivna ali ne sirjektivna **4)** niti injektivna niti sirjektivna

21. • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koje je tačno u Bulovoj algebri $\mathcal{B}=(B,+,\cdot,',0,1)$.
1) $xx=x+x$ 2) $xy=x+y$ 3) $xx'=(x+1)'$ 4) $xy=1\Rightarrow x=1$ 5) $xy=0\Rightarrow(x=0\vee y=0)$
6) $(x=0\vee y=0)\Rightarrow xy=0$ 7) $x=xy+xy'$ 8) $(\forall x\in B)(\exists y\in B)\,x+y=1\wedge xy=0$

22. • Zaokružiti asocijativno komutativne grupoide sa neutralnim elementom, koji nisu grupe: 1) $(\mathbb{R}[x],\cdot)$
2) $(\{z\in\mathbb{C}|Im(z)=Re(z)\},+)$ 3) $(\{f|f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\},\circ)$ 4) $(\mathbb{N}\cup\{0\},+)$ 5) $(\mathbb{Z},\cdot)$ 6) $(\{7k|k\in\mathbb{Z}\},\cdot)$

23. • Zaokružiti podgrupe grupe $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$: 1) $(\mathbb{R}\setminus\{0\},+)$ 2) $((0,\infty),\cdot)$ 3) $((-\infty,0),\cdot)$ 4) $(\mathbb{N},\cdot)$
5) $(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot)$ 6) $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},+)$ 7) $((0,1),\cdot)$ 8) $(\{-1,1\},\cdot)$ 9) $(\{-1,0,1\},\cdot)$ 10) $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$

24. • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su prsteni. 1) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ 2) $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$ 3) $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},+,\cdot)$
4) $\big((0,\infty),+,\cdot\big)$ 5) $(\mathbb{N},+,\cdot)$ 6) $(\mathbb{C},+,\cdot)$ 7) $(\mathbb{R}[t],+,\cdot)$ 8) $(\{-1,1\},+,\cdot)$ 9) $(\{7k|k\in\mathbb{Z}\},+,\cdot)$

25. • Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom t^2+2t+1 svodljiv nad njima. $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_5$

26. • Ako je p polinom stepena 2 nad poljem $\mathbb{R}$, tada je p nad poljem $\mathbb{R}$:
1) uvek svodljiv **2)** uvek nesvodljiv **3)** ništa od prethodnog.

27. • Neka je $\{1,-1\}$ skup svih korena polinoma $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ nad poljem realnih brojeva. Tada skup svih mogućnosti za c je $c\in\{$ 1 , -1 $\}$.

greška

28 • Navesti geometrijsku interpretaciju skupova A,B,C,D i sledećih kompleksnih funkcija $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ i $t:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i sirjektivnosti funkcija f, g, h i t.

$f(z)=\overline{z}e^{i2\arg(z)}$ je identička funkcija. bijekcija
$g(z)=-zi$ je rotacija za $-\frac{\pi}{2}$ bijekcija
$h(z)=z+i$ je translacija za i bijekcija
$t(z)=-\overline{z}$ je simetrija u odnosu na Im-osu bijekcija
$A=\{z|(z-i)^3=i\}$ je temena jednakostraničnog trougla sa centrom i
$B=\{z||z|^{2010}=1\}$ je kružnica sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika 1 $\mathcal{K}(0,1)$
$C=\{z||z-i|^3=i\}$ je prazan skup
$D=\{z|z=-\overline{z}\}$ je cela Im-osa

29. Za koje vrednosti realnih parametara a, b i c formula $f(x) = a^2 e^{bx} + c^2$

1) definiše funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $(a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \wedge b \in \mathbb{R}) \vee (a = 0 \wedge \dots)$

2) definiše injektivnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \wedge b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

3) definiše sirjektivnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \wedge b \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \wedge c = 0$

4) definiše bijektivnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \wedge b \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \wedge c = 0$

5) definiše rastuću funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \wedge b \in \mathbb{R}^+ \wedge c \in \mathbb{R}$

6) definiše neopadajuću funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $(a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \wedge b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \wedge c \in \mathbb{R}) \vee (a = 0 \wedge \dots)$

30. U Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ važi: (1) $x + y = (x'y')'$ (2) $xy = (x' + y')'$ (3) $xy = 1 \Rightarrow x = 1$ (4) $x = y \Rightarrow x' = y'$ (5) $x' = y' \Rightarrow x = y$ (6) $f(x) = x' \Rightarrow f : B \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\to}} B$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 4

1. Iza oznake svake od datih relacija u skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost F- funkcija.

(relacija „deli") : $RSATF$ $\quad \rho = \{(1,1),(3,2),(2,1)\} : RSATF$ $\quad \rho = \{(1,3),(1,2),(2,1)\} : \cancel{RSATF}$

1. Neka su $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ i $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ definisane sa $f(x) = \frac{1}{2x}$ i $g(x) = e^x - 1$. Izračunati:

1) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2x}$ 2) $g^{-1}(x) = \ln(1+x)$ 3) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{2(e^x-1)}$ 4) $(f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+2x}{2x}\right)$ 5) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \ln\left(\frac{1+2x}{2x}\right)$

3. Zaokružiti brojeve ispred bijektivnih funkcija:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3$ 2) $f : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$ 3) $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, $f(x) = x^2$
4) $f : [-3,-1) \to [9,1)$, $f(x) = x^2$ 5) $f : (0, \frac{\pi}{2}) \to (0,\infty)$, $f(x) = \operatorname{tg} x$

4. Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

1) $(a')' = a + 1'$ 2) $aa' = 1$ 3) $a \cdot 0 = 1'$ 4) $1 + a = a$ 5) $(ab)' = a'b'$

5. Skup kompleksnih rešenja jednačine $x^2 = -9$ je $S = \{\ 3i,\ -3i\ \}$.

6. Odrediti realni i imaginarni deo, moduo, argument, i konjugovani broj kompleksnog broja $z = \pi e^{i\frac{7\pi}{3}}$:

$Re(z) = \frac{\pi}{2}$, $Im(z) = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$, $|z| = \pi$, $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$, $\bar{z} = \pi e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $z^3 = \pi^3 e^{i\pi}$.

7. Sledeće kompleksne brojeve napisati u algebarskom obliku:

$e^{i\pi} = -1$, $2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$, $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1+i$, $2e^{0 \cdot i} = 2$ $\quad 2e^{i2k\pi} = 2$

8. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su grupoidi a nisu grupe.

1) $(\mathbb{N}, +)$ 2) $(\mathbb{N}, \cdot)$ 3) $(\{-1,0,1\}, \cdot)$ 4) $(\mathbb{R}, +)$ 5) $(\mathbb{R}, \cdot)$ 6) $((0,\infty), +)$ 7) $((0,\infty), \cdot)$

9. Neka su $P = (a_0, a_1, \dots, a_4)$ i $Q = (b_0, b_1, \dots, b_3)$ polinomi. Tada je $dg(P+Q) =$ 4 i $dg(PQ) =$ 7

10. Pri delenju polinoma $x^4 + x^2 + 1$ sa $x^2 - x + 1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je $x^2 + x$, a ostatak je $x + 1$.

* *

11. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koje je tačno u Bulovoj algebri:

1) $a \cdot ab = a \cdot 0'$ 2) $a + 1 = 0'$ 3) $a \cdot b = (ab)'$ 4) $a \cdot b = (a' + b')'$ 5) $a \cdot 0 = 1'$ 6) $(a + ab)' = a'$
7) $a + ab = a$ 8) $1 + 0 = 0'$

12. Broj svih antisimetričnih relacija skupa $A = \{1, 2\}$ je: 12 prebroj prvo one koje nisu!

13. U skupu $\mathbb{C}$ date su relacije: $\rho_1 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = |w|\}$, $\rho_2 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid z \cdot w = 0\}$,
$\rho_3 = \{(0,0)\} \cup \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid \arg(z) = \arg(w)\}$, $\rho_4 = \{(0,0)\} \cup \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid z \cdot w = 1\}$,
$\rho_5 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid R_e(z) = I_m(w)\}$, $\rho_6 = \mathbb{C}^2$

Iza oznake svake od tih relacija zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnostS- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost F- funkcija.

$\rho_1 : RSATF$ $\quad \rho_2 : RSATF$ $\quad \rho_3 : RSATF$ $\quad \rho_4 : RSATF$
$\rho_5 : \cancel{RSATF}$ $\quad \rho_6 : RSATF$

14. • Ako je $f: A \to B$ sirjektivna funkcija i $b \in B$, tada broj rešenja po $x \in A$ jednačine $f(x) = b$ može biti (zaokruži) 0 1 2 3 ∞

15. • Ako je $f: A \to B$ injektivna funkcija i $b \in B$, tada broj rešenja po $x \in A$ jednačine $f(x) = b$ može biti (zaokruži) 0 1 2 3 ∞

16. • Naći najveći podskup A skupa $\mathbb{R}$ i zatim najmanji podskup B skupa $\mathbb{R}$ tako da je izrazom $f(x) = \arccos x$ dobro definisana funkcija $f: A \to B$. Tada je $A =$ $[-1, 1]$ i $B =$ $[0, \pi]$. Funkcija $f: A \to B$ je: **1)** sirjektivna i injektivna **2)** ni sirjektivna ni injektivna **3)** sirjektivna ali nije injektivna **4)** nije sirjektivna a jeste injektivna

17. • Neka je $A = \{1,2,3,4,5\}$ i $B = \{6,7\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija:
$\left|\{f|f: A \longrightarrow B\}\right| = 32$ $\left|\{f|f: A \xrightarrow{1-1} B\}\right| = 0$ $\left|\{f|f: A \xrightarrow{na} B\}\right| = 30$ $\left|\{f|f: A \underset{na}{\xrightarrow{1-1}} B\}\right| = 0$
$\left|\{f|f: B \longrightarrow A\}\right| = 25$ $\left|\{f|f: B \xrightarrow{1-1} A\}\right| = 20$ $\left|\{f|f: B \xrightarrow{na} A\}\right| = 0$ $\left|\{f|f: B \underset{na}{\xrightarrow{1-1}} A\}\right| = 0$

18. • Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su asocijativni grupoidi sa neutralnim elementom:
1) $(\{2k|k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$ **2)** $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap)$ **3)** $(\{a + ai|a \in \mathbb{R}\}, +)$ **4)** $(\mathbb{Z}, \cdot)$ **5)** $(\{f|f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}, \circ)$

19. • Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su prsteni a nisu polja: **1)** $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ **2)** $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ **3)** $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ **4)** $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ **5)** $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ **6)** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ **7)** $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ **8)** $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$

20. • Skup svih stepena nesvodljivih polinoma nad poljem $\mathbb{R}$ je $\{$ 1, 2 $\}$, a nad poljem $\mathbb{C}$ je $\{$ 1 $\}$.

21. • Navesti geometrijsku interpretaciju skupova A, B, C, D i sledećih kompleksnih funkcija $f, g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i sirjektivnosti funkcija f i g.
$f(z) = z \cdot (-i)$ je rotacija za $-\frac{\pi}{2}$ bijekcija
$f(z) = \overline{z}e^{i2\arg(z)}$ je identička funkcija bijekcija
$g(z) = -\overline{z}$ je simetrija u odnosu na Im-osu bijekcija
$A = \{z|\ z^2 = \overline{z}\} = \{0, 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\}$ temena jednakostraničnog trougla sa težištem u 0
$B = \{z|\ |z| = |\overline{z}|\}$ je cela kompleksna ravan
$C = \{z|\ \frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{z-\overline{z}}{2i}\}$ je prava $y = x$
$D = \{z|\ |z| \le 2 \land 0 \le \arg z \le \pi\}$ je gornji poludisk od $K(0,2)$ bez 0 (zajedno sa granicom)
$E = \{z|(z-i)^3 = i\}$ je temena jednakostraničnog trougla sa centrom u ...
$F = \{z||z|^{2010} = 1\}$ je $K(0,1)$
$G = \{z||z-i|^3 = i\}$ je prazan skup
$H = \{z|z = -\overline{z}\}$ je cela Im-osa

22. • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred jednakosti koje su tačne u skupu kompleksnih brojeva: **1)** $z\overline{z} = |z|^2$ **2)** $Re(z) = \frac{1}{2}(z - |z|)$ **3)** $Im(z) = \frac{1}{2}(z + |z|)$ **4)** $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ **5)** $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ **6)** $\overline{z} \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \overline{z}$ **7)** $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$ **8)** $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ **9)** $z \ne 0 \Rightarrow z^{-1} = |z|^{-2}\overline{z}$ **10)** $|z| = 1 \Rightarrow z^{-1} = \overline{z}$

23. • **1)** $\arg(-13i) = -\frac{\pi}{2}$ **2)** $\arg(6) = 0$ **3)** $\arg(-9) = \pi$
4) $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$ **5)** $\arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$ **6)** $\arg(-1 + i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$

24. • Da li je $\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (4,1), (3,1)\}$ relacija poretka skupa $A = \{1,2,3,4,5\}$: DA NE, i ako jeste, nacrtati njen Haseov dijagram. Odrediti
minimalne: 5 , maksimalne: 1, 2 ,
najveći: / i najmanji: 5 element.

25. • Neka je $z = 3 + 2i$, $u = 1 + i$ i $w = 2 - i$. Rotacijom tačke z oko tačke u za ugao $\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka $3i$, translacijom tačke z za vektor w dobija se tačka $5+i$, a $\measuredangle wuz = -\frac{\pi}{2}$

26. • Ako je p polinom stepena 4 nad nekim poljem F i ako ima koren u tom polju, tada je p: **1)** uvek svodljiv **2)** uvek nesvodljiv **3)** nekada svodljiv a nekada nesvodljiv **4)** ništa od prethodnog **5)** uvek normalizovan

27. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su prsteni. 1) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ 2) $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$ ~~3)~~ $(\mathbb{Q}\backslash\{0\},+,\cdot)$
~~4)~~ $((0,\infty),+,\cdot)$ ~~5)~~ $(\mathbb{N},+,\cdot)$ 6) $(\mathbb{C},+,\cdot)$ 7) $(\mathbb{R}[t],+,\cdot)$ ~~8)~~ $(\{-1,1\},+,\cdot)$ 9) $(\{7k|k\in\mathbb{Z}\},+,\cdot)$

28. Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom t^2+t+1 nesvodljiv nad njima. $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_5$

29. Ako je p polinom stepena 2 nad poljem $\mathbb{R}$, tada je p nad poljem $\mathbb{R}$:
1) uvek svodljiv **2)** uvek nesvodljiv **3)** ništa od prethodnog.

30. Neka je $f\in\mathbb{R}[x]$ i $f(e^{-i\frac{\pi}{6}})=0$. Zaokruži tačno: **a)** $x-e^{-i\frac{\pi}{6}}\,|\,f(x)$ **b)** $x+e^{i\frac{\pi}{6}}\,|\,f(x)$ **c)** $x-e^{i\frac{\pi}{6}}\,|\,f(x)$
d) $x^2-x\sqrt{3}+1\,|\,f(x)$; **e)** $x^2-2x\sqrt{3}+1\,|\,f(x)$; **f)** $x^2+x\sqrt{3}+1\,|\,f(x)$; **g)** $x^2-x+1\,|\,f(x)$

31. Zaokruži tačno: ~~1)~~ $-\frac{\pi}{2}\le\arg z\le\frac{\pi}{2}\ \Leftrightarrow\ R_e(z)\ge 0$ 2) $-\frac{\pi}{2}\le\arg z\le\frac{\pi}{2}\ \Leftrightarrow\ \left(R_e(z)\ge 0\wedge z\neq 0\right)$
3) $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}\ \Leftrightarrow\ R_e(z)>0$ 4) $\arg z<0\ \Rightarrow\ I_m(z)\le 0$ ~~5)~~ $\arg z<0\ \Leftarrow\ I_m(z)\le 0$

32. Neka je $\{2,3\}$ skup svih korena polinoma $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ nad poljem realnih brojeva. Tada skup svih mogućnosti za a je $a\in\{$ -8, -7 $\}$.

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 5

1. Iza oznake svake od datih relacija u skupu $\{1,2,3\}$ zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost F- funkcija.
(relacija „deli") : R S A T F $\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,1)\}$: R S A T F
$\rho=\{(1,3),(1,2),(2,1)\}$: ~~R S A T~~ F

2. Neka su $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ i $g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ definisane sa $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ i $g(x)=2^x-1$. Izračunati:
1) $f^{-1}(x)=\frac{1}{x^2}$ **2)** $g^{-1}(x)=\log_2(x+1)$ **3)** $(f\circ g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2^x-1}}$ **4)** $(f\circ g)^{-1}(x)=\log_2(\frac{1+x^2}{x^2})$ **5)** $(g^{-1}\circ f^{-1})(x)=\log_2(\frac{1+x^2}{x^2})$

3. Zaokružiti brojeve ispred **sirjektivnih funkcija**: 1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^3$
2) $f:\mathbb{R}\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), f(x)=\mathrm{arctg}\,x$ 3) $f:\mathbb{R}\to[0,\infty),\ f(x)=x^2$ 4) $f:[-3,3)\to[0,9],\ f(x)=x^2$
~~5)~~ $f:(0,\frac{\pi}{3})\to(0,\sqrt{3}\,],\ f(x)=\mathrm{tg}\,x$

4. Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B,+,\cdot,',0,1)$:
~~1)~~ $(a')'=a+0'$ 2) $a+a'=1$ 3) $a\cdot 0=1'$ 4) $1+a=0'$ 5) $a+b=(a'b')'$

5. Skup kompleksnih rešenja jednačine $x^3=-1$ je $S=\{$ $e^{i\frac{\pi}{3}}$, -1, $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ $\}$.

6. Odrediti realni i imaginarni deo, moduo, argument, i konjugovani broj kompleksnog broja $z=\frac{\pi}{6}e^{i\frac{13\pi}{6}}$:
$Re(z)=\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$, $Im(z)=\frac{\pi}{12}$, $|z|=\frac{\pi}{6}$, $\arg(z)=\frac{\pi}{6}$, $\overline{z}=\frac{\pi}{6}e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $z^3=\frac{\pi^3}{216}e^{i\frac{\pi}{2}}$.

7. Sledeće kompleksne brojeve napisati u eksponencijalnom obliku, odnosno u obliku $\rho e^{i\varphi},\rho\in[0,\infty),\varphi\in(-\pi,\pi]$:
$-1=e^{i\pi}$, $2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $2=2e^{i0}$ $-\pi i=\pi e^{-i\frac{\pi}{2}}$

8. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su grupe.
~~1)~~ $(\mathbb{N},+)$ ~~2)~~ $(\mathbb{N},\cdot)$ ~~3)~~ $(\{-1,0,1\},\cdot)$ 4) $(\mathbb{R},+)$ ~~5)~~ $(\mathbb{R},\cdot)$ ~~6)~~ $((0,\infty),+)$ 7) $(\{-1,1\},\cdot)$ 8) $((0,\infty),\cdot)$
2, a nedefinisan

9. Neka su P i Q proizvoljni nenula polinomi trećeg stepena. Tada je $dg(P+Q)\in\{$ 0, 1, 2, 3 $\}$ i $dg(PQ)\in\{6\}$.

10. Pri delenju polinoma x^3+x^2+x+1 sa $x+1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je x^2+1, a ostatak je 0.

11. Neka su f i g funkcije definisane sa $f=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\c&d&a&b\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&d&c&a\end{pmatrix}$. Tada je $f\circ g=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\d&b&a&c\end{pmatrix}$,
$f^{-1}=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\c&d&a&b\end{pmatrix}$, $g^{-1}=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\d&a&c&b\end{pmatrix}$, $(f\circ g)^{-1}=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\c&b&d&a\end{pmatrix}$, $g^{-1}\circ f^{-1}=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\c&b&d&a\end{pmatrix}$.

* *

12. Zajednički koren polinoma $P(x)=x^2-\sqrt{2}x+1$ i $Q(x)=x^2-i$ je $e^{i\frac{\pi}{4}}$, a $NZD(P,Q)=\left(x-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

13. • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakom prstenu $(F,+,\cdot)$:
~~1)~~ $a+bc=(a+b)(a+c)$ 2) $(F,+)$ je grupa ~~3)~~ $(F,\cdot)$ je grupa
~~4)~~ operacija $+$ je distributivna prema $\cdot$ ~~5)~~ $ab=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$ ~~6)~~ $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$
7) $a \cdot 0 = 0$ 8) $a \cdot (-a) = -a^2$ 9) $a + (-a) = 0$

14. • Neka je $g:(0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$, inverzna funkcija je
$g^{-1}(x) =$ $\sqrt{1-x^2}$, $g^{-1}: A \to \mathbb{R}$, $A =$ $(-1, 0]$

15. • Neka je funkcija $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = \frac{x}{x-2}$. Tada je $f^{-1}(x) =$ $\frac{2x}{x-1}$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

16. • Zaokruži brojeve ispred tačnih iskaza. ~~1)~~ $\arg z > 0 \Leftrightarrow I_m(z) > 0$ 2) $\arg z < 0 \Leftrightarrow I_m(z) < 0$
3) $\arg z < 0 \Rightarrow I_m(z) \leq 0$ 4) $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \Rightarrow R_e(z) > 0$ ~~5)~~ $\arg z < 0 \Leftarrow I_m(z) \leq 0$

17. • Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f: A \to B$ definisana sa $f(x) = \ln(x^2 + e)$. Tada je $A =$ $\mathbb{R}$, $f($ 0 $) = 1$, $f($ — $) = 0$ i $B =$ $[1, \infty)$, a $f: A \to B$ je:
a) bijektivna b) sirjektivna ali ne injektivna g) injektivna ali ne sirjektivna d) niti injektivna niti sirjektivna

14. • Koje od navedenih struktura su polja: ~~1)~~ $(\mathbb{R}, \cdot, +)$ ~~2)~~ $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\}, +, \circ\right)$
~~3)~~ $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, +)$ ~~4)~~ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 5) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ~~6)~~ $(\mathbb{C}, \cdot, +)$ 7) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

13. • Neka je $z = 3 + 2i$, $u = 1 + i$ i $w = 2 - i$. Rotacijom tačke z oko tačke u za ugao $\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka $3i$, translacijom tačke z za vektor w dobija se tačka $5+i$, a $\measuredangle wuz =$ $-\frac{\pi}{2}$

16. • Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f: A \to B$ definisana sa $f(x) = \arccos(x+1)$. Tada je $A =$ $[-2, 0]$, $f($ $-\frac{1}{2}$ $) = \frac{3\pi}{4}$, $f($ $-\frac{1}{2}$ $) = \frac{\pi}{4}$ i $B =$ $[0, \pi]$, a $f: A \to B$ je: 1) bijektivna 2) sirjektivna ali ne injektivna 3) injektivna ali ne sirjektivna 4) niti injektivna niti sirjektivna

17. • Funkcija $f: (-\pi, -\frac{\pi}{4}) \longrightarrow (-1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ definisana sa $f(x) = \cos x$ je: 1) sirjektivna i nije injektivna
2) injektivna i nije sirjektivna 3) nije injektivna i nije sirjektivna 4) bijektivna

18. • Funkcija $f: (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) \longrightarrow (0, 1]$ definisana sa $f(x) = \sin x$ je: 1) sirjektivna i nije injektivna
2) injektivna i nije sirjektivna 3) nije injektivna i nije sirjektivna 4) bijektivna

19. • Funkcija $f: (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}) \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = \operatorname{tg} x$ je: 1) sirjektivna i nije injektivna
2) injektivna i nije sirjektivna 3) nije injektivna i nije sirjektivna 4) bijektivna

20. • Navesti geometrijsku interpretaciju skupova A, B, C, D, E i sledećih kompleksnih funkcija $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ i $s: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i sirjektivnosti funkcija f i g.

$f(z) = \overline{z} e^{i\pi}$ je osna simetrija u odnosu na Im-osu bijekcija

$g(z) = -z$ je centralna simetrija bijekcija

$h(z) = R_e(z)$ je projekcija na realnu osu

$s(z) = z \cdot \frac{i-1}{\sqrt{2}}$ je rotacija za $\frac{3\pi}{4}$ bijekcija

$A = \{z | z^{11} = i\}$ je temena pravilnog mnogougla sa centrom u 0

$B = \{z || z^{11}| = |i|\}$ je $\mathcal{K}(0, 1)$

$C = \{z | z = -\overline{z}\}$ je cela Im-osa

$D = \{z | \arg z = \overline{\arg(-z)}\}$ je prazan skup

$E = \{z | I_m(z) = -R_e(z)\}$ je prava $y = -x$

Zaokružiti slova ispred tačnih iskaza: a) $A \subset B$ ~~b)~~ $C \subseteq D$ c) $D \subseteq C$ ~~d)~~ $B \subseteq D$ e) $D \subseteq E$

21. • Neka je $\{1, 0\}$ skup svih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tada skup svih mogućnosti za a je $a \in \{-2, -1\}$, skup svih mogućnosti za b je $b \in \{0, 1\}$ i skup svih mogućnosti za c je $c \in \{0\}$.

22. • Neka je $A = \{1,2,3\}$ i $B = \{1,2\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f \underline{\nearrow}$ označava neopadajuću funkciju f:

$\left|\{f|f : A \longrightarrow B\}\right| = \underline{\ 9\ }$, $\left|\{f|f : A \xrightarrow{1-1} B\}\right| = \underline{\ 0\ }$, $\left|\{f|f : A \to B \wedge f \nearrow\}\right| = \underline{\ 0\ }$, $\left|\{f|f : B \overset{na}{\to} B\}\right| = 2$

$\left|\{f|f : B \to A\}\right| = \underline{\ 9\ }$, $\left|\{f|f : A \to A \wedge f \nearrow\}\right| = \underline{\ 1\ }$, $\left|\{f|f : B \to A \wedge f \underline{\nearrow}\}\right| = \underline{\ 6\ }$, $\left|\{f|f : A \overset{na}{\to} B\}\right| = 6$

23. • Zaokružiti brojeve ispred jednakosti koje su tačne u skupu kompleksnih brojeva: **1)** $\arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|}$
2) $\sqrt{z\overline{z}} = |z|$ **3)** $Re(z) = \frac{1}{2}(z - |z|)$ **4)** $Im(z) = \frac{1}{2}(z + |z|)$ **5)** $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ **6)** $|-z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$
7) $\overline{z} \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \overline{z}$ **8)** $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$ **9)** $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ **j)** $|z| = 1 \Rightarrow z^{-1} = \overline{z}$

24. • Ako je $P(x) = ax^2 + bx + c$ polinom nad poljem realnih brojeva i ako je $c \neq 0$, tada stepen $dg(P)$ polinoma P je: **1)** $dg(P) = 2$, **2)** $dg(P) \in \{1,2\}$, **3)** $dg(P) \in \{0,2\}$, **4)** $dg(P) \in \{0,1,2\}$

25. • Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su prsteni ali nisu polja: **1)** $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ **2)** $(\{9k|k \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ **3)** $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$ **4)** $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ **5)** $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ **6)** $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ **7)** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ **8)** $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ **9)** $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$

26. • Ako je p polinom stepena 4 nad nekim poljem F i ako ima tačno jedan koren u tom polju, tada je p: **1)** uvek svodljiv **2)** uvek nesvodljiv **3)** nekada svodljiv a nekada nesvodljiv **4)** ništa od prethodnog **5)** uvek normalizovan

27. • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koje je tačno u Bulovoj algebri $B = (\{0,1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$.
1) $xx = x + x$ **2)** $xy = x + y$ **3)** $xx' = (x+1)'$ **4)** $xy = 1 \Rightarrow x = 1$ **5)** $xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$ **6)** $(x = 0 \vee y = 0) \Rightarrow xy = 0$ **7)** $x = xy + xy'$ **8)** $(\forall x \in B)(\exists y \in B)\; x + y = 1 \wedge xy = 0$

28. • Zaokružiti asocijativno komutativne grupoide sa neutralnim elementom, koji nisu grupe: **1)** $(\{z \in \mathbb{C}|Im(z) = Re(z)\}, +)$ **2)** $(\{f|f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, \circ)$ **3)** $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ **4)** $(\mathbb{Z}, \cdot)$ **5)** $(\{7k|k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$ **6)** $(\mathbb{R}[x], \cdot)$

29. • Zaokružiti podgrupe grupe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$: **1)** $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$ **2)** $((0,\infty), \cdot)$ **3)** $((-\infty, 0), \cdot)$ **4)** $(\mathbb{N}, \cdot)$ **5)** $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ **6)** $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +)$ **7)** $((0,1), \cdot)$ **8)** $(\{-1,1\}, \cdot)$ **9)** $(\{-1,0,1\}, \cdot)$ **10)** $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

30. • Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^2 + 2t + 1$ svodljiv nad njima. $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_5$

31. • Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}) = 0$. Zaokruži tačno: **1)** $x^2 + x + 1 \mid f(x)$; **2)** $x^2 + x\sqrt{3} + 1 \mid f(x)$; **3)** $x - e^{-i\frac{\pi}{3}} \mid f(x)$ **4)** $x - e^{i\frac{\pi}{3}} \mid f(x)$ **5)** $x - e^{i|\frac{\pi}{3}|} \mid f(x)$ **6)** $x^2 - x + 1 \mid f(x)$; **7)** $x^2 - x\sqrt{3} + 1 \mid f(x)$

32. • Ako je $z \in \mathbb{C}$ tada: **1)** $\arg z + \arg(-\overline{z}) \in \{-\pi, \pi\}$ **2)** $\arg z = -\arg \overline{z}$ **3)** $|z| = |\overline{z}|$ **4)** $z^{-1} = \overline{z}$ **5)** $|\arg z| = |\arg \overline{z}|$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 6

1. • Neka su $f : (0,1) \to (0,1)$ i $g : (0,1) \to (0,1)$ definisane sa $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ i $g(x) = -x + 1$. Izračunati:
1) $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$ **2)** $g^{-1}(x) = -x+1$ **3)** $(f \circ g)(x) = \sqrt{x(2-x)}$ **4)** $(f \circ g)^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ **5)** $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$

2. • **Bijektivne** funkcije su: **1)** $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$ **2)** $f : [-1,1] \to [0,\pi]$, $f(x) = \arccos x$ **3)** $f : [\pi, \frac{3\pi}{2}] \to [-1, 0]$, $f(x) = \cos x$ **4)** $f : [-3, 0] \to [0, 9]$, $f(x) = x^2$ **5)** $f : (1,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = \ln x$

3. • Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:
1) $(a')' = a + 1'$ **2)** $a + a' = 0'$ **3)** $a \cdot 0 = (1')'$ **4)** $1 + a = 1'$ **5)** $a + b = (a' + b')'$

4. • Skup kompleksnih rešenja jednačine $x^4 = 1$ je $S = \{\ 1, -1, i, -i\ \}$.

5. • Za kompleksni broj $z = e^{i\frac{\pi}{2}} + 1$, naći:
$Re(z^2) = 0$, $Im(z^2) = 2$, $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$, $\overline{z} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z^3 = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

6. • Sledeće kompleksne brojeve napisati u eksponencijalnom obliku, tj. u obliku $\rho e^{i\varphi}, \rho \in [0,\infty), \varphi \in (-\pi,\pi]$:
$-2^2 = 4e^{i\pi}$, $(\sqrt{2i})^2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\sqrt{(2i)^2} = \{2e^{i\frac{\pi}{2}}, 2e^{-i\frac{\pi}{2}}\}$, $-1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $3\pi = e^{i\pi}$, $-2\pi i = e^{i}$

7. • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su asocijativno komutativni grupoidi ali nisu grupe.
1) $(\mathbb{N},+)$ 2) $(\mathbb{N},\cdot)$ 3) $(\{-1,0,1\},\cdot)$ ~~4)~~ $(\mathbb{R},+)$ 5) $(\mathbb{R},\cdot)$ 6) $((0,\infty),+)$ ~~7)~~ $(\{-1,1\},\cdot)$ 8) $((0,\infty),\cdot)$

8. • Neka su P i Q proizvoljni nenula polinomi nultog stepena. Tada je $dg(P+Q) \in \{\ 0\ \}$ i $dg(PQ) \in \{0\}$.

9. • Pri delenju polinoma x sa $x+1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je $\underline{\ 1\ }$, a ostatak je $\underline{\ -1\ }$.

10. • Neka su f i g funkcije definisane sa $f = \begin{pmatrix} a&b&c&d \\ d&a&b&c \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} a&b&c&d \\ a&d&c&b \end{pmatrix}$. Tada je $f \circ g = \begin{pmatrix} a&b&c&d \\ \ & & & \end{pmatrix}$,
$f^{-1} = \begin{pmatrix} a&b&c&d \\ b&c&d&a \end{pmatrix}$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a&b&c&d \\ a&d&c&b \end{pmatrix}$, $(f \circ g)^{-1} = \begin{pmatrix} a&b&c&d \\ d&c&b&a \end{pmatrix}$, $f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} a&b&c&d \\ \ & & & \end{pmatrix}$.

* *

11. • Iza oznake svake od datih relacija u skupu $\mathbb{R}$ zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost F- funkcija.
$\rho = \{(x,\sqrt{1-x^2}) | x \in (0,1)\}$: R S A T F $\rho = \{(x,y) | x^2+y^2 = 1\}$: R S A T F $\rho = \{(x,y) | x+y = 1\}$: R S A T F $\rho = \{(-x,-\frac{1}{x}) | x > 0\}$: R S A T F $\rho = \{(x,-\sqrt{1-x^2}) | x \in (0,1)\}$: R S A T F

12. • Zajednički koren polinoma $P(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 1$ i $Q(x) = x^2 + i$ je $e^{-i\frac{\pi}{4}}$, a $NZD(P,Q) = x - e^{-i\frac{\pi}{4}}$

13. • Zajednički koren polinoma $P(x) = x^2 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $Q(x) = x^3 + 1$ je $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, a $NZD(P,Q) = x - e^{i\frac{2\pi}{3}}$

14. • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakom domenu integriteta $(F,+,\cdot)$:
~~1)~~ $a + bc = (a+b)(a+c)$ 2) $(F,+)$ je grupa ~~3)~~ $(F,\cdot)$ je grupa ~~4)~~ operacija $+$ je distributivna prema $\cdot$ 5) $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ 6) $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ 7) $a \cdot 0 = 0$ 8) $a \cdot (-a) = -a^2$ 9) $a + (-a) = 0$

15. • Neka je $g : [0,1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, inverzna funkcija je
$g^{-1}(x) = \underline{\sqrt{1-x^2}}$, $g^{-1} : A \to \mathbb{R}$, $A = \underline{(0,1]}$

16. • Neka je funkcija $f : (-\infty,0] \to [0,\infty)$ definisana sa $f(x) = x^2$. Tada je $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

17. • Zaokruži brojeve ispred tačnih iskaza. 1) $\arg z \in (0,\pi) \Leftrightarrow I_m(z) > 0$ 2) $\arg z < 0 \Rightarrow I_m(z) \leq 0$ ~~3)~~ $\arg z < 0 \Leftarrow I_m(z) \leq 0$ 4) $0 < \arg z < \frac{\pi}{2} \Rightarrow R_e(z) > 0$ 5) $0 < \arg z < \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_m(z) > 0$

18. • Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f : A \to B$ definisana sa $f(x) = -\sqrt{x+1}$. Tada je $A = \underline{[-1,\infty)}$, $f(\underline{\ 0\ }) = -1$, $f(\underline{-1}) = 0$ i $B = \underline{(-\infty,0]}$, a $f : A \to B$ je: 1) bijektivna 2) sirjektivna ali ne injektivna 3) injektivna ali ne sirjektivna 4) ni injektivna ni sirjektivna

19. • Koje od navedenih struktura su asocijativni grupoidi koji nisu grupe:
1) $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \middle| f_k(x) = k^2x, k \in \mathbb{R}\},+\right)$ ~~2)~~ $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \middle| f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\},+\right)$
3) $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \middle| f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\},\circ\right)$ 4) $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \middle| f_k(x) = k^2x, k \in \mathbb{R}\},\circ\right)$
~~5)~~ $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \middle| f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}^+\},\circ\right)$

20. • Neka su z,u,w kompleksni brojevi. Tada rotacijom tačke z oko tačke u za ugao $\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka $\underline{u+(z-u)e^{i\frac{\pi}{2}}}$, translacijom tačke z za vektor w dobija se tačka $\underline{z+w}$, a $\sphericalangle uzw = \underline{\arg\frac{u-z}{w-z}}$

21. • Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f : A \to B$ definisana sa $f(x) = \mathrm{arctg}(x-2)$. Tada je $A = \underline{\mathbb{R}}$, $f(\underline{\ 1\ }) = -\frac{\pi}{4}$, $f(\underline{\ 2\ }) = 0$ i $B = \underline{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$, a $f : A \to B$ je: 1) bijektivna 2) sirjektivna ali ne injektivna 3) injektivna ali ne sirjektivna 4) niti injektivna niti sirjektivna

• Funkcija $f : (0,\frac{5\pi}{6}) \longrightarrow (-\frac{9}{10},1)$ definisana sa $f(x) = \cos x$ je: 1) sirjektivna i nije injektivna 2) injektivna i nije sirjektivna 3) nije injektivna i nije sirjektivna 4) bijektivna

• Funkcija $f : (-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}) \longrightarrow [-1,-\frac{1}{3}]$ definisana sa $f(x) = \sin x$ je: 1) sirjektivna i nije injektivna 2) injektivna i nije sirjektivna 3) nije injektivna i nije sirjektivna 4) bijektivna

24. • Funkcija $f : (-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) \setminus \{-\frac{\pi}{2}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = \operatorname{tg} x$ je: 1) sirjektivna i nije injektivna 2) injektivna i nije sirjektivna 3) nije injektivna i nije sirjektivna 4) bijektivna

25. • Navesti geometrijsku interpretaciju skupova A, B, C, D, E i sledećih kompleksnih funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ i $s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i sirjektivnosti funkcija f i g.

$f(z) = \overline{z}e^{-i\pi}$ je osna simetrija [illegible] Im osu bijekcija

$g(z) = \overline{-z}$ je osna simetrija u odnosu na Im osu bijekcija

$h(z) = I_m(z)$ je projekcija na Im osu [illegible]

greška $s(z) = z \cdot \frac{i-\sqrt{3}}{2}$ je rotacija za $-\frac{\pi}{3}$ bijekcija

$A = \{z | z^3 = -1\}$ je temena jednakostraničnog trougla sa centrom u O

$B = \{z | |z^3| = -1\}$ je prazan skup

$C = \{z | z = \overline{-\overline{z}}\}$ je koordinatni početak $\{0\}$

$D = \{z | \arg(-z) = \overline{\arg(-z)}\}$ je cela kompleksna ravan bez koordinatnog početka

$E = \{z | I_m(z) = iR_e(z)\}$ je koordinatni početak

Zaokružiti slova ispred tačnih iskaza: a) $A \subset B$ b) $C \subseteq D$ c) $D \subseteq C$ d) $B \subseteq D$ e) $D \subseteq E$

26. • Neka je $\{1, i\}$ skup nekih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tada je
$a \in \{ -1 \}$, $b \in \{ 1 \}$ $c \in \{ -1 \}$

27. • Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f \underline{\nearrow}$ označava neopadajuću funkciju f:

$\left|\{f | f : A \longrightarrow B\}\right| = 64$, $\left|\{f | f : A \xrightarrow{1-1} B\}\right| = 12$, $\left|\{f | f : A \to B \wedge f \nearrow\}\right| = 4$, $\left|\{f | f : B \overset{na}{\to} B\}\right| = 24$,

$\left|\{f | f : B \to A\}\right| = 81$, $\left|\{f | f : A \to A \wedge f \nearrow\}\right| = 1$, $\left|\{f | f : B \to A \wedge f \underline{\nearrow}\}\right| = 15$, $\left|\{f | f : A \overset{na}{\to} B\}\right| = 0$.

28. • U skupu kompleksnih brojeva je: 1) $\sqrt{z\overline{z}} = \pm|z|$ 2) $(\forall\varphi \in (-\pi, \pi])\ (e^{i\varphi})^{-1} = \overline{e^{i\varphi}}$ 3) $|z| = 1 \Rightarrow z^{-1} = \overline{z}$ 4) $-iIm(z) = \frac{1}{2}(-z + \overline{z})$ 5) $Re(z) = \frac{1}{2}(z + |z|)$ 6) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$ 7) $|z| = 1 \Leftarrow z^{-1} = \overline{z}$ 8) $|-z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$ 9) $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\})(\exists k \in \mathbb{R}^+)\ \overrightarrow{Oz_1} = k\overrightarrow{Oz_2} \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|}$

29. • Ako je $P(x) = ax^3 + bx + c$ polinom nad poljem realnih brojeva i ako je $c \neq 0$, tada stepen $dg(P)$ polinoma P je: 1) $dg(P) = 3$, 2) $dg(P) \in \{1, 3\}$, 3) $dg(P) \in \{0, 3\}$, 4) $dg(P) \in \{0, 1, 3\}$, 5) $dg(P) \in \{0, 1, 2, 3\}$

30. • Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su domeni integriteta ali nisu polja: 1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 2) $(\{9k | k \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ 3) $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$ 4) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 5) $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ 6) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 7) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 8) $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ 9) $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$

31. • Ako je p polinom stepena 4 nad nekim poljem F i ako nema koren u tom polju, tada je p: 1) uvek svodljiv 2) uvek nesvodljiv 3) nekada svodljiv a nekada nesvodljiv 4) ništa od prethodnog 5) uvek normalizovan

32. • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koje je tačno u Bulovoj algebri $B = (\{0, 1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$.
1) $xx = x + x$ 2) $xy = x + y$ 3) $xx' = (x+1)'$ 4) $xy = 1 \Rightarrow x = 1$ 5) $xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$ 6) $(x = 0 \vee y = 0) \Rightarrow xy = 0$ 7) $x = xy + xy'$ 8) $(\forall x \in B)(\exists y \in B)\ x + y = 1 \wedge xy = 0$

33. • Zaokružiti asocijativno komutativne grupoide sa neutralnim elementom, koji nisu grupe: 1) $(\mathbb{R}[x], \cdot)$ 2) $(\{z \in \mathbb{C} | Im(z) = Re(z)\}, +)$ 3) $(\{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, \circ)$ 4) $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ 5) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ 6) $(\{7k | k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$

34. • Zaokružiti podgrupe grupe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$: 1) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$ 2) $((0, \infty), \cdot)$ 3) $((-\infty, 0), \cdot)$ 4) $(\mathbb{N}, \cdot)$ 5) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ 6) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +)$ 7) $((0, 1), \cdot)$ 8) $(\{-1, 1\}, \cdot)$ 9) $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ 10) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

35. • Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^2 + 2t + 1$ svodljiv nad njima. $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_5$

36. • Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(e^{i\pi}) = 0$. Tada važi:
1) $x - 1 \,|\, f(x)$; 2) $x + 1 \,|\, f(x)$; 3) $x^2 + 1 \,|\, f(x)$; 4) $x^2 - 1 \,|\, f(x)$; 5) $x - e^{-i\pi} \,|\, f(x)$ 6) $x - e^{i\pi} \,|\, f(x)$

37. • Koje jednakosti su tačne za sve kompleksne brojeve z za koje su i definisane: 1) $|\arg z + \arg(-\overline{z})| = \pi$ 2) $z\overline{z} = |z|^2$ 3) $\arg z = -\arg \overline{z}$ 4) $z^{-1} = \overline{z}|z|^{-2}$ 5) $|z| = |\overline{z}|$ 6) $|\arg z| = |\arg \overline{z}|$ 7) $\overline{e^{i\varphi}} = (e^{i\varphi})^{-1}$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 7

1. • Neka je funkcija $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ definisana sa $f(x)=e^{3-2x}$. Tada je:
1) $f^{-1}(x)=e^{\frac{3-x}{2}}$ 2) $f^{-1}(x)=e^{3-2x}$ 3) $f^{-1}(x)=\ln x$ 4) $f^{-1}(x)=\frac{3-\ln x}{2}$ 5) $f^{-1}(x)=\ln(3-2x)$
6) $f^{-1}(x)=\log_{3-2x}x$ 7) $f^{-1}(x)=\ln\sqrt{x^{-1}e^3}$

2. • Neka su $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ i $g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ definisane sa $f(x)=e^x-1$ i $g(x)=\frac{1}{x^2}$. Izračunati:
1) $f^{-1}(x)=\ln(x+1)$ 2) $g^{-1}(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$ 3) $(f\circ g)(x)=$ 4) $(f\circ g)^{-1}(x)=$ 5) $(g^{-1}\circ f^{-1})(x)=$

3. • **Injektivne** funkcije su: 1) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ 2) $f:[-1,1]\to[0,2\pi],\ f(x)=\arccos x$
3) $f:[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}]\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$ 4) $f:[-3,3]\to[0,9],\ f(x)=x^2$ 5) $f:(1,\infty)\to[0,\infty),\ f(x)=\ln x^2$

4. • Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B,+,\cdot,',0,1)$:
1) $(a')'0'=a+1'$ 2) $a+a'=1'$ 3) $a\cdot 0'=(1')'$ 4) $1+a=0'$ 5) $ab=(a'+b')'$

5. • Skup S **svih** kompleksnih rešenja jednačine $x^4=0$ je $S=\{$ 0 $\}$.

6. • Za kompleksni broj $z=e^{i\frac{\pi}{3}}-1$, naći:
$R_e(z)=-\frac{1}{2}$, $I_m(z)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|z|=1$, $\arg(z)=\frac{2\pi}{3}$, $\overline{z}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, $z^2=e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

7. • Sledeće kompleksne brojeve napisati u eksponencijalnom obliku, odnosno u obliku $\rho e^{i\varphi},\rho\in[0,\infty),\varphi\in(-\pi,\pi]$:
$-2^{-2}=\frac{1}{4}e^{i\pi}$, $(\sqrt{-2i})^2=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $\sqrt{(-2i)^2}=$, $-2-2i=2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, $-5\pi=5\pi e^{i\pi}$ $3\pi i=3\pi e^{i\frac{\pi}{2}}$

8. • Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su grupe. 1) $(\{-1,1\},+)$ 2) $(\{z\in\mathbb{C}|Im(z)=Re(z)\},+)$
3) $(\{f|f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\},\circ)$ 4) $(\mathbb{N},+)$ 5) $(\{2k|k\in\mathbb{Z}\},\cdot)$ 6) $(\mathbb{R}[x],\cdot)$ 7) $(\{\frac{m}{2}\,|\,m\in\mathbb{Z}\},+)$

9. • Ako su P i $Q\neq -P$ polinomi i $dg(P)=dg(Q)=3$, tada je
$dg(PQ)\in\{$ 6 $\}$ i $dg(P+Q)\in\{$ 0, 1, 2, 3 $\}$

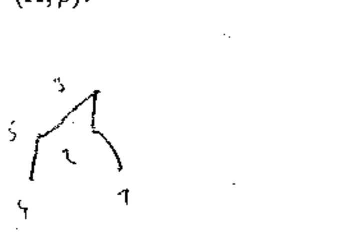
10. • Za polinome $p(x)=(x+1)^2x(x-2)^6$ i $q(x)=x^5(x+1)(x-5)^2(x-1)^3$ nad poljem realnih brojeva izračunati: $NZD(p,q)=(x+1)x$

* *

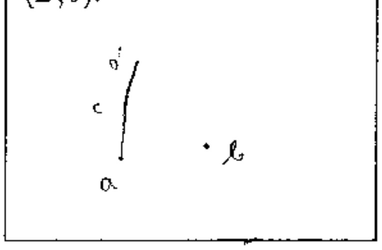
11. • Neka je $A=\{1,2,3\}$, $f:A\to A$ i $g:A\to A$ funkcije definisane sa $f=\binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$, $g=\binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$. Tada je
$f^{-1}=\binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$, $g^{-1}=\binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$, $f\circ f=\binom{1\,2\,3}{1\,2\,3}$, $f\circ g=\binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$, $f^{-1}\circ g^{-1}=\binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$, $(g\circ f)^{-1}=\binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$.

12. • Neka je $A=\{1,2,3,4,5\}$, $\rho=\{(x,x)|x\in A\}\cup\{(1,2),(1,3),(2,3),(4,5),(4,3),(5,3)\}$,
$B=\{a,b,c,d\}$ i $\theta=\{(x,x)|x\in B\}\cup\{(a,c),(a,d),(c,d)\}$. Nacrtati Haseove dijagrame i popuniti tabelu, odnosno staviti / tamo gde traženo ne postoji.

(A,ρ):



(B,θ):



	(A,ρ)	(B,θ)
minimalni	1, 4	a, b
maksimalni	3	d, b
najveći	3	/
najmanji	/	/

13. • Iza oznake svake od datih relacija u skupu $\mathbb{R}$ zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost F- funkcija.
$\rho=\{(x,\sqrt{1-x^2})|x\in(-1,0)\}$: R S A T F $\rho=\{(x,e^x)|x\in\mathbb{R}\}$: R S A T F
$\rho=\{(x,\ln x)|x\in\mathbb{R}\}$: R S A T F $\rho=\{(x,-\frac{1}{x})|x>0\}$: R S A T F
$\rho=\{(x,-\sqrt{1-x^2})|x\in(-1,0)\}$: R S A T F

14. • Ako je $f:A\to B$ sirjektivna funkcija i $b\in B$, tada broj rešenja po $x\in A$ jednačine $f(x)=b$ može biti (zaokruži) 0 1 2 3 ∞

15. (•) Ako je $f: A \to B$ injektivna funkcija i $b \in B$, tada broj rešenja po $x \in A$ jednačine $f(x) = b$ može biti (zaokruži) 0 1 2 3 ∞

16. (•) Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u polju $(F, +, \cdot)$, a nisu u domenu integriteta. 1) $a \cdot 0 = 0$ 2) $a + bc = (a+b)(a+c)$ 3) $(F, +)$ je grupa 4) $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa 5) operacija + je distributivna prema $\cdot$ 6) $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ 7) $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ 8) $(\forall a \in F \setminus \{0\})(\exists b \in F) ab = 1$ 9) $a + (-a) = 0$

17. (•) Neka je $g : (0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$, inverzna funkcija je $g^{-1}(x) =$ $\sqrt{1-x^2}$, $g^{-1} : A \to \mathbb{R}$, $A =$ $(-1, 0]$

18. (•) Neka je funkcija $f : (-\infty, -\frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = x^2 + x + 1$. Tada $f^{-1} : A \to \mathbb{R}$, $A =$ $[\frac{3}{4}, \infty)$

19. (•) Zaokruži brojeve ispred tačnih iskaza. 1) $\arg z \in (0, \pi] \Leftrightarrow I_m(z) > 0$ 2) $\arg z \leq 0 \Rightarrow I_m(z) \leq 0$ 3) $\arg z \leq 0 \Leftarrow I_m(z) \leq 0$ 4) $0 < \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow R_e(z) > 0$ 5) $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \Leftarrow R_e(z) > 0$

20. (•) Komutativne grupe su:

1) $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, f_k(x) = k^2 x, k \in \mathbb{R}\}, +\right)$ 2) $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\}, +\right)$

3) $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\}, \circ\right)$ 4) $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, f_k(x) = k^2 x, k \in \mathbb{R}\}, \circ\right)$

5) $\left(\{f \,\middle|\, f : \mathbb{R} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{R}\}, \circ\right)$

21. (•) Neka su u, z, w kompleksni brojevi. Tada rotacijom tačke w oko tačke z za ugao $-\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka $z + (w-z)e^{-i\frac{\pi}{2}}$, translacijom tačke z za vektor w dobija se tačka $z + w$, a $\measuredangle wzu =$ $\arg\left(\frac{u-z}{w-z}\right)$

22. (•) Navesti geometrijsku interpretaciju sledećih kompleksnih funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ i $s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i sirjektivnosti funkcija f,g,h i s.

$f(z) = \overline{z} e^{-i\frac{\pi}{2}}$ je osna simetrija od prave ... $\measuredangle \frac{3\pi}{4}$ ... bijekcija

$g(z) = |z| e^{i \arg z} \wedge g(0) = 0$ je identička funkcija bijekcija

$h(z) = e^{i \arg z}$ je projekcija na $\mathcal{K}(0, 1)$ za sve tačke ...

$s(z) = -z \cdot \frac{i+1}{\sqrt{2}}$ je rotacija za $\frac{-3\pi}{4}$ bijekcija

23. (•) Neka je $\{1, 3\}$ skup svih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tada je
$a \in \{$ $-7, -5$ $\}$, $b \in \{$ $7, 15$ $\}$, $c \in \{$ $-9, -3$ $\}$

24. (•) Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{1, 2\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f \underline{\nearrow}$ označava neopadajuću funkciju f:
$\left|\{f | f : A \longrightarrow B\}\right| = \underline{8}$, $\left|\{f | f : A \xrightarrow{1-1} B\}\right| = \underline{0}$, $\left|\{f | f : A \to B \wedge f \nearrow\}\right| = \underline{0}$, $\left|\{f | f : B \overset{na}{\to} B\}\right| = \underline{2}$,
$\left|\{f | f : B \to A\}\right| = \underline{9}$, $\left|\{f | f : A \to A \ \wedge \ f \nearrow\}\right| = \underline{1}$, $\left|\{f | f : B \to A \wedge f \underline{\nearrow}\}\right| = \underline{6}$, $\left|\{f | f : A \overset{na}{\to} B\}\right| = \underline{6}$.

25. (•) U skupu kompleksnih brojeva je: 1) $\sqrt{z\overline{z}} = \pm|z|$ 2) $z = e^{i\varphi} \Rightarrow z^{-1} = \overline{z}$ 3) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ 4) $R_e(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ 5) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$ 6) $|z| = 1 \Leftarrow z^{-1} = \overline{z}$ 7) $|-z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$ 8) $z_1|z_2| = z_2|z_1| \Leftarrow \arg z_1 = \arg z_2$

26. (•) Ako je $P(x) = ax^4 + bx^2 + cx$ polinom nad poljem realnih brojeva i ako je $c \neq 0$, tada stepen $dg(P)$ polinoma P je: 1) $dg(P) = 4$, 2) $dg(P) \in \{1, 4\}$, 3) $dg(P) \in \{0, 4\}$, 4) $dg(P) \in \{1, 2, 4\}$, 5) $dg(P) \in \{0, 1, 2, 4\}$

27. (•) Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su prsteni ali nisu domeni integriteta:
1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 2) $(\{9k | k \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ 3) $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$ 4) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 5) $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ 6) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 7) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 8) $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ 9) $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$

28. (•) Ako je p polinom stepena 3 nad nekim poljem F i ako nema koren u tom polju, tada je p: 1) uvek svodljiv 2) uvek nesvodljiv 3) nekada svodljiv a nekada nesvodljiv 4) ništa od prethodnog 5) uvek normalizovan

29. • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koje je tačno u Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$.
1) $(xy)' = x + y$ 2) $(xx')' = (x+1)'$ 3) $x \neq 1 \Rightarrow xy \neq 1$ 4) $(x \neq 0 \wedge y \neq 0) \Rightarrow xy \neq 0$
5) $xy \neq 0 \Rightarrow (x \neq 0 \wedge y \neq 0)$ 6) $x = xy + xy' + x$ 7) $xx = x + x$
8) $(\forall x \in B)(\exists y \in B)\ x + y = 1 \wedge xy = 0$

30. • Napisati jedan primer konačne nekomutativne grupe i jedan primer beskonačne nekomutativne grupe
Konačna: . Beskonačna: $(\{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, \circ)$

31. • Zaokružiti podgrupe grupe $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$: 1) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$ 2) $((0,\infty), \cdot)$ 3) $((-\infty, 0), \cdot)$ 4) $(\mathbb{N}, \cdot)$
5) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ 6) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +)$ 7) $((0,1), \cdot)$ 8) $(\{-1, 1\}, \cdot)$ 9) $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ 10) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

32. • Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^4 + t^2 + 1$ svodljiv nad njima. $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_5$

33. • Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(e^{-i\frac{\pi}{2}}) = 0$. Tada važi:
1) $x - i \mid f(x)$; 2) $x + i \mid f(x)$; 3) $x^2 + 1 \mid f(x)$; 4) $x^2 - 1 \mid f(x)$; 5) $x - e^{-i\frac{\pi}{2}} \mid f(x)$ 6) $x - e^{i\frac{\pi}{2}} \mid f(x)$

• Koje jednakosti su tačne za sve $z \in \mathbb{C}$ i sve $\varphi \in (-\pi, \pi]$ za koje su i definisane: 1) $\overline{e^{i\varphi}} = e^{i\overline{\varphi}}$ 2) $\overline{e^{i\varphi}} = e^{\overline{i\varphi}}$
3) $\arg z + \arg(-\overline{z}) \in \{-\pi, \pi\}$ 4) $\arg z + \arg \overline{z} = 0$ 5) $z^{-1}|z|^2 = \overline{z}$ 6) $|z| = |\overline{z}|$ 7) $|\arg z| = |\arg \overline{z}|$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 8

1. • Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to R \setminus \{3\}$ definisana sa $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$. Tada je: $f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x-3}$

2. • Neka su $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = x^3 - 1$. Izračunati:
1) $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ 2) $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$ 3) $(f \circ g)(x) = 2x^3 - 1$ 4) $(f \circ g)^{-1}(x) =$ 5) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) =$

3. • **Sirjektivne** funkcije su: 1) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ 2) $f : [-1, 1] \to [0, 2\pi], f(x) = \arccos x$
3) $f : [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}] \to [\frac{1}{2}, 1],\ f(x) = \cos x$ 4) $f : [-3, 3] \to [0, 9],\ f(x) = x^2$
5) $f : (1, \infty) \to [0, \infty),\ f(x) = \ln x^2$

4. • Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:
1) $(a')'0' = a + 1$ 2) $a' + a' = a' + 1'$ 3) $a \cdot 0' = (a')'$ 4) $1 + a = a'$ 5) $(ab) = (a' + b')'$

5. • Skup S svih kompleksnih rešenja jednačine $e^{ix} = 0$ je $S = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

6. • Za kompleksni broj $z = e^{i\frac{\pi}{2}} - 1$, naći:
$R_e(z) = -1$, $I_m(z) = -1$, $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$, $\overline{z} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, $z^2 =$

7. • Sledeće kompleksne brojeve napisati u eksponencijalnom obliku, odnosno u obliku $\rho e^{i\varphi}, \rho \in [0, \infty), \varphi \in (-\pi, \pi]$:
$-2i^{-2} = 2e^{i0}$, $(\sqrt[3]{i})^3 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\sqrt[3]{i^3} \in \{e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{-i\frac{5\pi}{6}}\}$, $-2 - 2i =$, $-5\pi = 5\pi e^{i\pi}$ $3\pi i = 3\pi e^{i\frac{\pi}{2}}$

8. • Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su asocijativni grupoidi sa neutralnim elementom.
1) $(\{-1, 1\}, +)$ 2) $(\{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, \circ)$ 3) $(\mathbb{N}, +)$ 4) $(\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$
5) $(\mathbb{R}[x], \cdot)$ 6) $(\{\frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{Z}\}, +)$

9. • Ako su P i $Q \neq -P$ polinomi i $dg(P) = dg(Q) = 0$, tada je
$dg(PQ) \in \{\ 0\ \}$ i $dg(P + Q) \in \{\ 0\ \}$

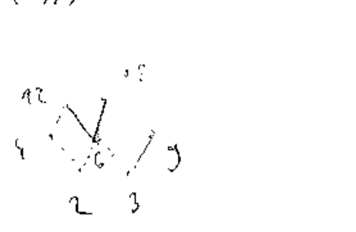
10. • Za polinome $p(x) = (x+1)^2 x (x-2)^6$ i $q(x) = x^5 (x+1)^3 (x-5)^2 (x-2)^3$ nad poljem realnih brojeva izračunati: $NZD(p, q) = (x+1)^2 x (x-2)^3$

* *

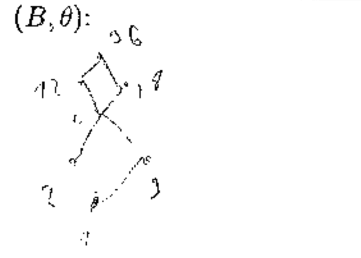
11. • Neka je $A = \{1, 2, 3\}$, $f : A \to A$ i $g : A \to A$ funkcije definisane sa $f = \binom{1\ 2\ 3}{2\ 3\ 1}$, $g = \binom{1\ 2\ 3}{3\ 1\ 2}$. Tada je
$f^{-1} = \binom{1\ 2\ 3}{3\ 1\ 2}$ $g^{-1} = \binom{1\ 2\ 3}{2\ 3\ 1}$ $f \circ f = \binom{1\ 2\ 3}{3\ 1\ 2}$ $g \circ f = \binom{1\ 2\ 3}{1\ 2\ 3}$ $f^{-1} \circ g^{-1} = \binom{1\ 2\ 3}{1\ 2\ 3}$ $(g \circ f)^{-1} = \binom{1\ 2\ 3}{\ }$

12. • Neka je ρ relacija „deli" skupa $A = \{2,3,4,6,9,12,18\}$ i neka je θ relacija „deli" skupa $B = \{1,2,3,6,12,18,36\}$. Nacrtati Haseove dijagrame i popuniti tabelu, odnosno staviti / tamo gde traženo ne postoji.

(A,ρ):



(B,θ):



	(A,ρ)	(B,θ)
minimalni	2, 3	1
maksimalni	12, 18	36
najveći	/	36
najmanji	/	1

13. • U Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B,+,\cdot,',0,1)$ važi: ~~1)~~ $x+y = x'y'$ 2) $xy = (x'+y')'$ 3) $xy = 1 \Rightarrow y = 1$ 4) $x = y \Rightarrow x' = y'$ 5) $x' = y' \Rightarrow x = y$ 6) $f(x) = x' \Rightarrow f : B \underset{\text{na}}{\rightarrow} B$ 7) $f(x) = x' \Rightarrow f : B \underset{\text{1-1}}{\rightarrow} B$

14. • Za funkciju $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ iz grupe $(\mathbb{R},+)$ u grupu $((0,\infty),\cdot)$, definisanu sa $f(x) = 2^x$, važi: 1) f je homomorfizam 2) f je izomorfizam 3) f^{-1} postoji i f^{-1} je homomorfizam 4) f^{-1} je izomorfizam

15. • Zaokružiti polja nad kojima je polinom t^3+t+1 svodljiv: $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$

16. • Skup svih mogućih stepena nesvodljivih polinoma nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$ je { 1, 2 }

17. • U prstenu polinoma, za svaki polinom p važi: ~~1)~~ ako je p jednak proizvodu dva polinoma, tada je p svodljiv ~~2)~~ ako je $p = 0$, tada je on svodljiv ~~3)~~ ako je $p = 0$, tada je on nesvodljiv 4) ako je p svodljiv tada je $p \neq 0$ i $dg(p) \neq 0$ i p je jednak proizvodu dva polinoma stepena većeg od 0 5) ako je $p \neq 0$ i $dg(p) \neq 0$ i p je jednak proizvodu dva polinoma stepena većeg od 0, tada je p je svodljiv

18. • Neka su $p(x) = 2x+1$ i $q(x) = x^2+2$ polinomi nad poljem $\mathbb{Z}_7$ i $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_7[x]/p,+,\cdot)$ i $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}_7[x]/q,+,\cdot)$. Tada su polja: **a)** Samo $\mathcal{A}$ **b)** Samo $\mathcal{B}$ **c)** $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ **d)** Ni $\mathcal{A}$ ni $\mathcal{B}$.

19. • Neka je $g : (-\infty,1] \to (-\infty,0]$, $g(x) = -\sqrt{1-x}$. Tada inverzna funkcija je $g^{-1}(x) = 1 - x^2$

20. • Neka je funkcija $f : (-\infty,-\frac{1}{4}] \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = -2x^2 - x - 2$. Tada $f^{-1} : A \to \mathbb{R}$, $A = (-\infty, -\frac{15}{8}]$

21. • Zaokruži brojeve ispred tačnih iskaza. ~~1)~~ $\arg z > 0 \Rightarrow I_m(z) > 0$ 2) $\arg z < 0 \Rightarrow I_m(z) < 0$ 3) $\arg z < 0 \Leftrightarrow I_m(z) < 0$ 4) $\arg z > 0 \Leftarrow I_m(z) > 0$ 5) $\arg z \notin [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \Rightarrow R_e(z) < 0$

22. • Grupe su: ~~1)~~ $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \middle| f_k(x) = k^2x, k \in \mathbb{R}\},+\right)$ 2) $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \middle| f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\},\circ\right)$ 3) $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \middle| f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\},+\right)$ 4) $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \middle| f_k(x) = k^2x, k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\},\circ\right)$ 5) $\left(\{f \middle| f : \mathbb{R} \underset{\text{na}}{\overset{1-1}{\rightarrow}} \mathbb{R}\},\circ\right)$

23. • Neka su u,z,w kompleksni brojevi. Tada rotacijom tačke u oko tačke w za ugao $-\frac{\pi}{4}$ dobija se tačka $w + (u-w)e^{-i\frac{\pi}{4}}$, translacijom tačke w za vektor u dobija se tačka $w + u$, a $\sphericalangle uwz = \arg\left(\frac{z-w}{u-w}\right)$

24. • Navesti geometrijsku interpretaciju sledećih kompleksnih funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ i $s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i sirjektivnosti funkcija f,g,h i s.

$f(z) = \overline{z}e^{i\pi}$ je osna simetrija oko Im-ose bijekcija

$g(z) = |z|e^{i\arg(-z)} \wedge g(0) = 0$ je simetrija oko koord. početka bijekcija

$h(z) = e^{i\arg|z|}$ je projekcija u tačku 1 nije ni

$s(z) = -z\cdot(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$ je rotacija za ugao $-\frac{4\pi}{5}$ bijekcija

25. • Neka je $\{1\}$ skup **svih** korena polinoma $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$, gde su $a,b,c \in \mathbb{R}$. Tada je $a \in \{ -3 \}$, $b \in \{ 3 \}$ $c \in \{ -1 \}$

26. • Neka je $A = \{1\}$ i $B = \{1,2,3,4,5\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f\underline{\nearrow}$ označava neopadajuću funkciju f:

$\left|\{f|f : A \longrightarrow B\}\right| = 5$ $\left|\{f|f : A \overset{1-1}{\longrightarrow} B\}\right| = 5$ $\left|\{f|f : A \to B \wedge f \nearrow\}\right| = 5$ $\left|\{f|f : B \overset{na}{\to} B\}\right| = 120$

$\left|\{f|f : B \to A\}\right| = 1$ $\left|\{f|f : A \to A \ \wedge \ f \nearrow\}\right| = 1$ $\left|\{f|f : B \to A \wedge f\underline{\nearrow}\}\right| = 1$ $\left|\{f|f : A \overset{na}{\to} B\}\right| = 0$

27. • U skupu kompleksnih brojeva je: 1) $\sqrt{z\bar{z}} = |z|$ 2) $z = e^{i\frac{\pi}{7}} \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$ 3) $|z_1 z_2| = |z_2||z_1|$
4) $R_e(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ 5) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_2 - \bar{z}_1$ 6) $|z| = 1 \Leftarrow z^{-2} = \bar{z}^2$ 7) $|-z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$
8) $z_1|z_2| = z_2|z_1| \Rightarrow \arg z_1 = \arg z_2$

28. • Ako je $P(x) = ax^3 + bx + c$ polinom nad poljem realnih brojeva i ako je $c \neq 0$, tada stepen $dg(P)$ polinoma P je: 1) $dg(P) = 3$ 2) $dg(P) \in \{0,1,3\}$ 3) $dg(P) \in \{0,3\}$ 4) $dg(P) \in \{0,1,3,4\}$ 5) $dg(P) \in \{0,1,2,3\}$

29. • Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su domeni integriteta, a nisu polja:
1) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ 2) $(\{9k|k\in\mathbb{Z}\},+,\cdot)$ 3) $(\mathbb{Z}_9,+,\cdot)$ 4) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ 5) $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ 6) $(\mathbb{N},+,\cdot)$ 7) $(\mathbb{C},+,\cdot)$
8) $(\mathbb{R}[t],+,\cdot)$ 9) $(\mathbb{R}^+,+,\cdot)$

30. • Ako je p svodljiv polinom stepena 4 nad nekim poljem F, tada polinom p: **1)** uvek ima korena u polju F **2)** nikada nema korena u polju F **3)** nekada ima a nekada nema korena u polju F **4)** ništa od prethodnog

31. • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koje je tačno u Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (\{0,1\},+,\cdot,',0,1)$
1) $(xy)' = x + y$ 2) $(xx')' = (x+1)'$ 3) $x \neq 1 \Rightarrow xy \neq 1$ 4) $(x \neq 0 \wedge y \neq 0) \Rightarrow xy \neq 0$
5) $xy \neq 0 \Rightarrow (x \neq 0 \wedge y \neq 0)$ 6) $x = xy + xy' + x$ 7) $xx = x + x$
8) $(\forall x \in B)(\exists y \in B)\, x + y = 1 \wedge xy = 0$

32. • Napisati jedan primer konačnog prstena bez jedinice i jedan primer beskonačnog prstena bez jedinice.
Konačan: $(\{\mathbb{Z}_4\setminus\{1\}\},+,\cdot)$. Beskonačan: $(\{2k \mid k\in\mathbb{Z}\},+,\cdot)$

33. • Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(e^{i\pi}) = 0$. Tada važi: 1) $x - e^{i\pi} \mid f(x)$ 2) $x - e^{-i\pi} \mid f(x)$ 3) $x^2 + 1 \mid f(x)$
4) $x - 1 \mid f(x)$ 5) $x + 1 \mid f(x)$ 6) $x^2 - 1 \mid f(x)$

34. • Koje jednakosti su tačne za sve $z \in \mathbb{C}$ i sve $\varphi \in (-\pi,\pi]$ za koje su i definisane: 1) $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\overline{\varphi}}$
2) $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$ 3) $e^{i(\arg z + \arg(-\bar{z}))} = -1$ 4) $e^{i(\arg z + \arg \bar{z})} = 1$ 5) $z^{-1} = \bar{z}|z|^{-2}$ 6) $|-z| = |\bar{z}|$
7) $|\arg(-z)| + |\arg \bar{z}| = \pi$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 9

1. • Neka su $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ i $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ definisane sa $f(x) = e^x - 1$ i $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Izračunati:
1) $f^{-1}(x) = \cancel{\ln(x+1)}$ **2)** $g^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ **3)** $(f \circ g)(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - 1$ **4)** $(f \circ g)^{-1}(x) = \ln(\frac{x}{?}+1)$ **5)** $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \ln(\frac{1}{x}+1)$

2. • **Bijektivne** funkcije su: 1) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-,\ f(x) = -x^2$ 2) $f : [-1,1] \to [0,2\pi],\ f(x) = \arccos x$
3) $f : [-\frac{\pi}{3}, 0] \to [\frac{1}{2}, 1],\ f(x) = \cos x$ 4) $f : [-3,0] \to [0,9],\ f(x) = x^2$
5) $f : [1,\infty) \to [0,\infty),\ f(x) = \ln x^2$

3. • Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B,+,\cdot,',0,1)$:
1) $(a')'0' = a$ 2) $a' + 0' = 1 + 0$ 3) $a \cdot 1' = (a')'$ 4) $1 + a = a' + 0'$ 5) $(ab)' = (a' + b')'$

4. • Skup S svih kompleksnih rešenja jednačine $e^{ix} = 1$ je $S = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

5. • Za kompleksni broj $z = e^{i\frac{\pi}{3}} - 1$, naći:
$R_e(z) = \frac{1}{2}$, $I_m(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|z| = \sqrt{3}$, $\arg(z) = \frac{\pi}{6}$, $\bar{z} = \sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $z^2 = 3e$

6. • Sledeće kompleksne brojeve napisati u eksponencijalnom obliku, odnosno u obliku $\rho e^{i\varphi}, \rho \in [0,\infty), \varphi \in (-\pi,\pi]$:
$-2 = 2e^{i\pi}$, $9 = 9e^{i\cdot 0}$, $e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$, $-2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $5\pi = 5\pi e^{i\cdot 0}$ $-3\pi + 3\pi i = 3\sqrt{2}\pi\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

7. • Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su grupe. 1) $(\{-1,1\},\cdot)$ 2) $(\{f \mid f : \mathbb{R} \xrightarrow[na]{1-1} \mathbb{R}\},\circ)$ 3) $(\mathbb{N},+)$
4) $(\{2k|k\in\mathbb{Z}\},\cdot)$ 5) $(\{2k|k\in\mathbb{Z}\},+)$ 6) $(\mathbb{R}[x],\cdot)$ 7) $(\{\frac{m}{5} \mid m \in \mathbb{Z}\},+)$

8. • Ako su P i $Q \neq -P$ polinomi i $dg(P) = dg(Q) = 1$, tada je
$dg(PQ) \in \{\ 1\ \}$ i $dg(P+Q) \in \{\ 0,\ 1\ \}$

9. • Za polinome $p(x) = (x-5)^3 x(x-2)^6$ i $q(x) = x^5(x+1)^3(x-5)^2(x-2)^3$ nad poljem realnih brojeva izračunati: $NZD(p,q) = x(x-5)^2(x-2)^3$

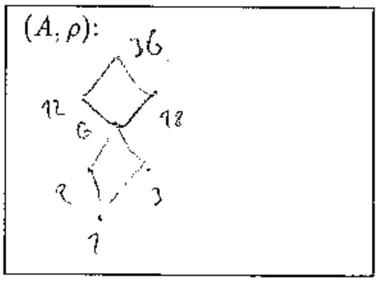
* *

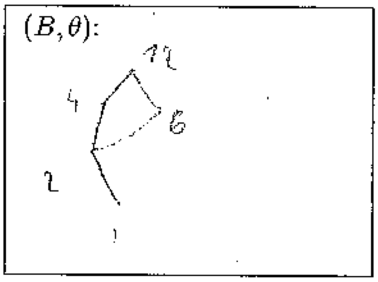
10. Neka su $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ i $g:(0,\infty)\to(1,\infty)$ definisane sa $f(x)=\frac{1}{2x}$ i $g(x)=2x+1$. Izračunati:
1) $f^{-1}(x)=\frac{1}{2x}$, **2)** $(f\circ g)(x)=\frac{1}{4x+2}$, **3)** $(f\circ g):\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}\xrightarrow[na]{1-1}\mathbb{R}\setminus\{0\}$, **4)** $(g\circ f):\mathbb{R}\setminus\{0\}\xrightarrow[na]{1-1}\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

11. Neka je $A=\{1,2,3,4,5\}$, $f:A\to A$ i $g:A\to A$ funkcije definisane sa $f=\binom{1\,2\,3\,4\,5}{4\,1\,5\,3\,2}$, $g=\binom{1\,2\,3\,4\,5}{3\,5\,1\,4\,2}$. Tada je $f^{-1}=\binom{1\,2\,3\,4\,5}{2\,5\,4\,1\,3}$, $g^{-1}=\binom{1\,2\,3\,4\,5}{3\,5\,1\,4\,2}$, $g\circ f=\binom{4\,3\,2\,1\,5}{1\,2\,3\,4\,5}$, $f^{-1}\circ g^{-1}=\binom{1\,2\,3\,4\,5}{4\,3\,2\,1\,5}$, $(g\circ f)^{-1}=\binom{1\,2\,3\,4\,5}{4\,3\,2\,1\,5}$.

12. Neka je ρ relacija „deli" skupa $A=\{1,2,3,,6,12,18,36\}$ i neka je θ relacija „deli" skupa $B=\{1,2,4,6,12\}$

Nacrtati Haseove dijagrame i popuniti tabelu, odnosno staviti / tamo gde traženo ne postoji.





	(A,ρ)	(B,θ)
minimalni	1	1
maksimalni	36	12
najveći	36	12
najmanji	1	1

13. U Bulovoj algebri $\mathcal{B}=(B,+,\cdot,',0,1)$ definisana je relacija $f=\{(x,x')|x\in B\}$. Relacija f je:
~~1)~~ Refleksivna **2)** Simerična ~~3)~~ Tranzitivna ~~4)~~ Antisimetrična **5)** Funkcija
6) $f:B\xrightarrow[\textbf{na}]{}B$ **7)** $f:B\xrightarrow[\textbf{1-1}]{}B$

14. Za funkciju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ iz grupe $(\mathbb{R},+)$ u grupu $(\mathbb{R},+)$, definisanu sa $f(x)=7x$, važi:
1) f je homomorfizam **2)** f je izomorfizam **3)** f^{-1} postoji i f^{-1} je homomorfizam **4)** f^{-1} je izomorfizam

15. Zaokružiti polja nad kojima je polinom t^3+t^2-1 svodljiv: $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$

16. Skup svih mogućih stepena nesvodljivih polinoma nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ je { 1 }

17. U prstenu polinoma, za svaki polinom p važi: **1)** ako je p jednak proizvodu dva nesvodljiva polinoma, tada je p svodljiv ~~2)~~ ako je $p=4$, tada je on svodljiv ~~3)~~ ako je $p=3$, tada je on nesvodljiv **4)** ako je p nesvodljiv tada je $p\neq 0$ i $dg(p)\neq 0$ i p nije jednak proizvodu dva polinoma stepena većih od 0 **5)** ako je $p\neq 0$ i $dg(p)\neq 0$ i p je jednak proizvodu dva polinoma stepena manjeg od $dg(p)$, tada je p je svodljiv

18. Neka su $p(x)=x+2$ i $q(x)=x^2+1$ polinomi nad poljem $\mathbb{Z}_5$ i $\mathcal{A}=(\mathbb{Z}_7[x]/p,+,\cdot)$ i $\mathcal{B}=(\mathbb{Z}_7[x]/q,+,\cdot)$.
Tada su polja: **a)** Samo $\mathcal{A}$ **b)** Samo $\mathcal{B}$ **c)** $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ **d)** Ni $\mathcal{A}$ ni $\mathcal{B}$.

19. Zaokruži brojeve ispred tačnih iskaza. **1)** $\arg z>0 \Leftarrow I_m(z)>0$ **2)** $\arg z<0 \Leftrightarrow I_m(z)<0$
3) $\arg z\geq 0 \Rightarrow I_m(z)\geq 0$ ~~4)~~ $\arg z\geq 0 \Leftarrow I_m(z)\geq 0$ **5)** $\arg z\notin[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \Rightarrow R_e(z)<0$

20. U Bulovoj algebri $\mathcal{B}=(B,+,\cdot,',0,1)$, broj rešenja sistema jednačina $x+a=1 \wedge xa=0$, po nepoznatoj x, u zavisnosti od $a\in B$, može biti (zaokružiti tačna rešenja): 0 1 2 ∞

21. Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su asocijativni grupoidi sa neutralnim elementom:
~~1)~~ $(\{2k|k\in\mathbb{Z}\},\cdot)$ **2)** $(\mathcal{P}(\mathbb{N}),\cap)$ **3)** $(\{a+ai|a\in\mathbb{R}\},+)$ **4)** $(\mathbb{Z},\cdot)$ **5)** $(\{f|f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\},\circ)$

22. Zaokružiti brojeve ispred struktura koja su polja: ~~1)~~ $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ~~2)~~ $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$ **3)** $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ **4)** $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$
~~5)~~ $(\mathbb{N},+,\cdot)$ **6)** $(\mathbb{C},+,\cdot)$ ~~7)~~ $(\mathbb{R}[t],+,\cdot)$ ~~8)~~ $(\mathbb{R}^+,+,\cdot)$ ~~9)~~ $\left(\left\{f_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,\middle|\,f_k(x)=kx,k\in\mathbb{R}\right\},+,\circ\right)$

22. Neka su z_1,z_2,z_3 kompleksni brojevi. Tada rotacijom tačke z_3 oko tačke z_2 za ugao $-\frac{\pi}{3}$ dobija se tačka $z_2+(z_3-z_2)e^{-i\frac{\pi}{3}}$ translacijom tačke z_2 za vektor z_3 dobija se tačka z_2+z_3, a $\measuredangle z_2z_1z_3=\arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$

23. Navesti geometrijsku interpretaciju sledećih kompleksnih funkcija $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $h:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ i $s:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i sirjektivnosti funkcija f,g,h i s.

$f(z)=ze^{-i\frac{\pi}{4}}$ je rotacija za $-\frac{\pi}{4}$ bijekcija

$g(z)=|z|e^{i\arg\overline{z}} \wedge g(0)=0$ je simetrija u odnosu na Re osu bijekcija

$h(z)=e^{i\arg|z|} \wedge h(0)=1$ je projekcija u tačku 1 ni ni

$s(z)=\overline{z}\cdot(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5})$ je od simetrije oko prave koja prolazi kroz koordinatni
i zaklapa $\measuredangle$ $-\frac{\pi}{5}$ sa pozitivnim delom Re ose bijekcija

14. • Neka je $\{-1,0,1\}$ skup svih korena polinoma $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, gde su $a,b,c\in\mathbb{R}$. Tada je $a\in\{\ 0\ \}$, $b\in\{\ -1\ \}$ $c\in\{\ 0\ \}$

15 • Neka je $A=\{4,7\}$ i $B=\{1,2,5\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f\nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f\nearrow$ označava neopadajuću funkciju f:

$\left|\{f|f:A\longrightarrow B\}\right|=9$ $\left|\{f|f:A\xrightarrow{1-1}B\}\right|=6$ $\left|\{f|f:A\to B\wedge f\nearrow\}\right|=3$ $\left|\{f|f:B\overset{na}{\to}B\}\right|=6$

$\left|\{f|f:B\to A\}\right|=8$ $\left|\{f|f:A\to A\ \wedge\ f\nearrow\}\right|=1$ $\left|\{f|f:B\to A\wedge f\nearrow\}\right|=4$ $\left|\{f|f:A\overset{na}{\to}B\}\right|=0$

16 • U skupu kompleksnih brojeva je: 1) $\sqrt{z\overline{z}}=|z|$ 2) $z=e^{i\frac{\pi}{7}}\Rightarrow z^{-1}=\overline{z}$ 3) $|z_1z_2|=|z_2||z_1|$ 4) $R_e(z)=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$ 5) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z}_2-\overline{z}_1$ 6) $|z|=1\Leftarrow z^{-2}=\overline{z}^2$ 7) $|-z_1-z_2|\le|z_1|+|z_2|$ 8) $z_1|z_2|=z_2|z_1|\Rightarrow\arg z_1=\arg z_2$

17 • Ako je $P(x)=ax^3+c$ polinom nad poljem realnih brojeva i ako je $c\neq0$, tada stepen $dg(P)$ polinoma P je: 1) $dg(P)=3$, 2) $dg(P)\in\{0,1,3\}$, 3) $dg(P)\in\{1,3\}$, 4) $dg(P)\in\{0,1,3\}$, 5) $dg(P)\in\{0,3\}$

18 • Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su domeni integriteta: 1) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ 2) $(\{9k|k\in\mathbb{Z}\},+,\cdot)$ 3) $(\mathbb{Z}_9,+,\cdot)$ 4) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ 5) $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ 6) $(\mathbb{N},+,\cdot)$ 7) $(\mathbb{C},+,\cdot)$ 8) $(\mathbb{R}[t],+,\cdot)$ 9) $(\mathbb{R}^+,+,\cdot)$

19 • Ako je p nesvodljiv polinom stepena 4 nad nekim poljem F, tada polinom p: 1) uvek ima korena u polju F 2) nikada nema korena u polju F 3) nekada ima a nekada nema korena u polju F 4) ništa od prethodnog

20 • Napisati primere dva konačna prstena i dva primera beskonačnih prstena koji nisu polja.
Konačni: $(\{0\},+,\cdot)$, $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$. Beskonačni: $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{R}[t],+,\cdot)$

21 • Neka je $f\in\mathbb{R}[x]$ i $f(e^{-i\frac{\pi}{12}})=0$. Zaokruži tačno: a) $x-e^{-i\frac{\pi}{12}}\,\big|\,f(x)$ b) $x+e^{i\frac{\pi}{12}}\,\big|\,f(x)$ c) $x-e^{i\frac{\pi}{12}}\,\big|\,f(x)$
d) $x^2-x\sqrt{2-\sqrt{3}}+1\,\big|\,f(x)$ e) $x^2-x\sqrt{2+\sqrt{3}}+1\,\big|\,f(x)$ f) $x^2-2x\sqrt{2+\sqrt{3}}+1\,\big|\,f(x)$

22 • Koje jednakosti su tačne za sve $z\in\mathbb{C}$ i sve $\varphi\in(-\pi,\pi]$ za koje su i definisane: 1) $\overline{e^{-i\varphi}}=e^{-i\varphi}$ 2) $\overline{e^{-i\varphi}}=e^{-i\varphi}$ 3) $e^{i(\arg z-\arg(-z))}=-1$ 4) $e^{i(\arg z+\arg(-z))}=1$ 5) $1=z\overline{z}|z|^{-2}$ 6) $\arg z>0\Rightarrow\arg z-\arg(-z)=\pi$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 10

1. • Iza oznake svake od datih relacija u skupu $\mathbb{R}$ zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost F- funkcija.
$>$: R S A T F $\rho=\{(-1,-1),(0,0),(1,1)\}$: R S A T F

2. • Neka su $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ i $g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ definisane sa $f(x)=\frac{1}{2x}$ i $g(x)=2^x-1$. Izračunati:
1) $f^{-1}(x)=\frac{1}{2x}$ 2) $g^{-1}(x)=\log_2(x+1)$
3) $(f\circ g)(x)=\frac{1}{2\cdot2^x-2}$ 4) $(f\circ g)^{-1}(x)=\log_2\left(\frac{2x+1}{2x}\right)$ 5) $(g^{-1}\circ f^{-1})(x)=\log_2(\ \ $

3. • Zaokružiti brojeve ispred bijektivnih funkcija:
1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3-x$ 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ 3) $f:\mathbb{R}\to[0,\infty),\ f(x)=x^2$
4) $f:[0,\infty)\to[0,\infty),\ f(x)=x^2$ 5) $f:(0,\frac{\pi}{2})\to(0,\infty),\ f(x)=\operatorname{tg}x$ 6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x$

4. • Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B,+,\cdot,',0,1)$:
1) $(a')'=a'$ 2) $a+a'=0$ 3) $a\cdot0=0$ 4) $1+a=a$ 5) $(a+b)'=a'+b'$

5. • Skup kompleksnih rešenja jednačine $x^2=-1$ je $S=\{\ -i,\ i\ \}$.

6. • Odrediti realni i imaginarni deo, moduo, argument, i konjugovani broj kompleksnog broja $z=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$:
$Re(z)=-\frac{1}{2}$, $Im(z)=-\frac{1}{2}$, $|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\arg(z)=-\frac{3\pi}{4}$, $\overline{z}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

7. Sledeće kompleksne brojeve napisati u algebarskom obliku:

$e^{i\pi} = -1$, $2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$, $2e^{0\cdot i} = 2$.

8. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su komutativne grupe.
1) $(\mathbb{N},+)$ 2) $(\mathbb{N},\cdot)$ 3) $(\mathbb{R},+)$ 4) $(\mathbb{R},\cdot)$ 5) $((0,\infty),+)$ 6) $((0,\infty),\cdot)$

9. Neka su $P = (a_0, a_1, \ldots, a_4)$ i $Q = (b_0, b_1, \ldots, b_3)$ polinomi. Tada je
$dg(P+Q) =$ 4 i $dg(PQ) =$ 7

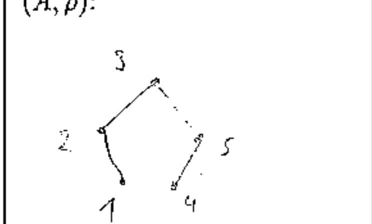
* *

10. Napisati jednu relaciju skupa $A = \{1,2,3\}$ koja je refleksivna, simetrična, antisimetrična i tranzitivna:
$\rho = \{$ (1,1), (2,2), (3,3) $\}$

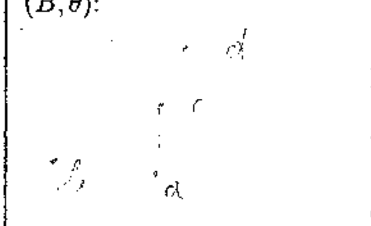
11. Broj svih antisimetričnih relacija skupa $A = \{1,2\}$ je: 12

12. Neka je $A = \{1,2,3,4,5\}$, $\rho = \{(x,x)|x \in A\} \cup \{(1,2),(1,3),(2,3),(4,5),(4,3),(5,3)\}$, $B = \{a,b,c,d\}$ i $\theta = \{(x,x)|x \in B\} \cup \{(a,c),(a,d),(c,d)\}$. Nacrtati Haseove dijagrame i popuniti tabelu, odnosno staviti / tamo gde traženo ne postoji.

(A,ρ):



(B,θ):



	(A,ρ)	(B,θ)
minimalni	1, 4	a, b
maksimalni	3	d, b
najveći	3	/
najmanji	/	/

13. U skupu $\mathbb{C}$ date su relacije: $\rho_1 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = |w|\}$, $\rho_2 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid z \cdot w = 0\}$, $\rho_3 = \{(0,0)\} \cup \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid \arg(z) = \arg(w)\}$, $\rho_4 = \{(0,0)\} \cup \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid z \cdot w = 1\}$, $\rho_5 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid R_e(z) = I_m(w)\}$, $\rho_6 = \mathbb{C}^2$

Iza oznake svake od tih relacija zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost F- funkcija .
ρ_1 : R S A T F ρ_2 : R S A T F ρ_3 : R S A T F ρ_4 : R S A T F ρ_5 : ~~R S A T F~~ ρ_6 : R S A T F

14. Ako je $f : A \to B$ sirjektivna funkcija i $b \in B$, tada broj rešenja po $x \in A$ jednačine $f(x) = b$ može biti (zaokruži) 0 1 2 3 ∞

15. Ako je $f : A \to B$ injektivna funkcija i $b \in B$, tada broj rešenja po $x \in A$ jednačine $f(x) = b$ može biti (zaokruži) 0 1 2 3 ∞

16. Naći najveći podskup A skupa $\mathbb{R}$ i najmanji podskup B skupa $\mathbb{R}$ tako da je izrazom $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ dobro definisana funkcija $f : A \to B$. Tada je $A =$ $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$ i $B =$ $\mathbb{R}$. Funkcija $f : A \to B$ je: **1)** sirjektivna i injektivna **2)** ni sirjektivna ni injektivna **3)** sirjektivna ali nije injektivna **4)** nije sirjektivna a jeste injektivna

17. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koje je tačno u Bulovoj algebri $B = (B,+,\cdot,',0,1)$.
1) $xx = x + x$ 2) $xy = x + y$ 3) $xy = (x+y)'$ 4) $xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$
5) $(x = 0 \vee y = 0) \Rightarrow xy = 0$ 6) $x = xy + xy'$ 7) $(\forall x \in B)(\exists y \in B)\, x + y = 1 \wedge xy = 0$

18. U Bulovoj algebri $B = (B,+,\cdot,',0,1)$, broj rešenja sistema jednačina $x + a = 1 \wedge xa = 0$, po nepoznatoj x, u zavisnosti od $a \in B$, može biti (zaokružiti tačna rešenja): 0 1 2 ∞

19. Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su asocijativni grupoidi sa neutralnim elementom:
1) $(\{2k|k \in \mathbb{Z}\},\cdot)$ 2) $(\mathcal{P}(\mathbb{N}),\cap)$ 3) $(\{a + ai|a \in \mathbb{R}\},+)$ 4) $(\mathbb{Z},\cdot)$ 5) $(\{f|f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\},\circ)$

20. Zaokružiti slova (ili slovo) ispred struktura koje su prsteni a nisu polja: 1) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ 2) $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$ 3) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ 4) $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ 5) $(\mathbb{N},+,\cdot)$ 6) $(\mathbb{C},+,\cdot)$ 7) $(\mathbb{R}[t],+,\cdot)$ 8) $(\mathbb{R}^+,+,\cdot)$

11. Zaokružiti homomorfizme $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ iz grupe $(\mathbb{Z}, +)$ u grupu $(\mathbb{Z}_2, +)$: 1) $\forall x \in \mathbb{Z},\ f(x) = 0$
~~2)~~ $\forall x \in \mathbb{Z},\ f(x) = 1$ 3) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ je paran broj} \\ 1 & x \text{ je neparan broj} \end{cases}$ ~~4)~~ $f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ je neparan broj} \\ 1 & x \text{ je paran broj} \end{cases}$

12. Ako je $z_1 = -1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = 1 - i$, tada je $z_1 + z_2 =$ ______ $z_1 \cdot z_2 =$ ______
$\frac{z_1}{z_2} =$ ______ $\arg(z_1) = -\frac{2\pi}{3}$ $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}$ $\arg(z_1 z_2) =$ ______ $\arg(\frac{z_1}{z_2}) =$ ______

13. • Zaokružiti brojeve za koje je prsten $(\mathbb{Z}_3[t]/P, +, \cdot)$ polje:
1) $P(t) = t + 2$ 2) $P(t) = t^2 + 1$ ~~3)~~ $P(t) = t^2 + t + 1$ ~~4)~~ $P(t) = t^3 + t + 1$ ~~5)~~ $P(t) = t^{2005} + 1$

14. • Pri deljenju polinoma $t^5 + t + 1$ polinomom $t^2 + t + 1$ nad poljem $\mathbb{Z}_7$ dobija se količnik ______
i ostatak 0. Da li dobijeni rezultat važi nad proizvoljnim poljem? DA NE

15. • Skup svih stepena nesvodljivih polinoma nad poljem $\mathbb{R}$ je $\{$ 1, 2 $\}$, a nad poljem $\mathbb{C}$ je $\{$ 1 $\}$.

16. Navesti geometrijsku interpretaciju skupova A, B, C, D i sledećih kompleksnih funkcija $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i sirjektivnosti funkcija f i g.
$f(z) = z \cdot (-i)$ je ______
$g(z) = -\overline{z}$ je ______
$A = \{z \mid z^2 = \overline{z} \wedge z \neq 0\}$ je ______
$B = \{z \mid |z| = |\overline{z}|\}$ je cela kompleksna ravan
$C = \{z \mid \frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{z-\overline{z}}{2i}\}$ je prava $y = x$
$D = \{z \mid |z| \leq 2 \wedge 0 \leq \arg z \leq \pi\}$ je ______

17. • U Bulovoj algebri $B = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ definisana je relaija $f = \{(x', x) \mid x \in B\}$. Relacija f je:
~~1)~~ Refleksivna 2) Simetrična ~~3)~~ Tranzitivna ~~4)~~ Antisimetrična 5) Funkcija 6) $f : B \underset{\text{na}}{\to} B$
7) $f : B \underset{\text{1-1}}{\to} B$

18. Neka su z_1, z_2, z_3 kompleksni brojevi. Tada rotacijom tačke z_1 oko tačke z_3 za ugao $-\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka $z_3 + (z_1 - z_3)e^{-i\frac{\pi}{2}}$, translacijom tačke z_2 za vektor z_1 dobija se tačka $z_2 + z_1$, a $\measuredangle z_2 z_1 z_3 =$ ______

19. Neka je $A = \{4, 7, 5\}$ i $B = \{1, 2\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f \underline{\nearrow}$ označava neopadajuću funkciju f:
$\left|\{f \mid f : A \longrightarrow B\}\right| = 8$ $\left|\{f \mid f : A \xrightarrow{1-1} B\}\right| = 0$ $\left|\{f \mid f : A \to B \wedge f \nearrow\}\right| = 0$ $\left|\{f \mid f : B \xrightarrow{na} B\}\right| =$ ___
$\left|\{f \mid f : B \to A\}\right| = 9$ $\left|\{f \mid f : A \to A \wedge f \nearrow\}\right| = 1$ $\left|\{f \mid f : B \to A \wedge f \underline{\nearrow}\}\right| = 6$ $\left|\{f \mid f : A \xrightarrow{na} B\}\right| =$ ___

20. • U skupu kompleksnih brojeva je: ~~1)~~ $\sqrt{z\overline{z}} = |z|$ 2) $z = e^{i\frac{\pi}{7}} \Rightarrow z^{-1} = \overline{z}$ 3) $|z_1 z_2| = |z_2||z_1|$
4) $R_e(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ 5) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_2 - \overline{z}_1$ 6) $|z| = 1 \Leftarrow z^{-2} = \overline{z}^2$ 7) $|-z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
~~8)~~ $z_1|z_2| = z_2|z_1| \Rightarrow \arg z_1 = \arg z_2$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 11

1. • Iza oznake svake od datih relacija u skupu $\mathbb{R}$ zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost F- funkcija.
$\geq$: R S A T F $\rho = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$: R S A T F $\rho = \{(1, 2), (1, 3)\}$: R S A T F

2. • Neka su $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ i $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ definisane sa $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ i $g(x) = \ln(\sqrt{x} + 1)$. Izračunati:
1) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2}$ 2) $g^{-1}(x) = (e^x - 1)^2$ 3) $(f \circ g)(x) =$ ______ 4) $(f \circ g)^{-1}(x) =$ ______ 5) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) =$ ______

3. • Neka su f i g funkcije definisane sa $f = \binom{a\ b\ c\ d}{c\ d\ a\ b}$, $g = \binom{a\ b\ c\ d}{b\ a\ d\ c}$ i $h = \binom{a\ b\ c\ d}{d\ c\ b\ a}$. Tada je $f \circ g = \binom{a\ b\ c\ d}{d\ c\ b\ a}$,
$f^{-1} = \binom{a\ b\ c\ d}{c\ d\ a\ b}$, $g^{-1} = \binom{a\ b\ c\ d}{b\ a\ d\ c}$, $(f \circ g)^{-1} = \binom{a\ b\ c\ d}{d\ c\ b\ a}$, $g^{-1} \circ f^{-1} = \binom{a\ b\ c\ d}{d\ c\ b\ a}$.

4. • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u Bulovoj algebri:
~~1)~~ $ab + bc + ac + a = (a + b)(a + c)$ 2) $a' + a' = a'$ ~~3)~~ $a + a' = 0$ 4) $a \cdot 0 = 0$ 5) $1 \cdot 0 = 1$ 6) $a + 1 = 1$

5. U grupi $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot)$ neutralni element je ___, a inverzni elementi su:
$2^{-1} =$ ___, $3^{-1} =$ ___, $4^{-1} =$ ___,

6. Za kompleksne brojeve $z_1 = (1+i)^2$ i $z_2 = 1 + i^3$ izračunati
$z_1 + z_2 =$ $z_1 \cdot z_2 =$ $\frac{z_1}{z_2} =$ $\arg(\frac{z_1}{z_2}) =$ $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$

7. Pri delenju polinoma $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ sa $x - 1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je ___, a ostatak je 0.

8. Zaokružiti slova (ili slovo) ispred struktura koje su asocijativni i komutativni grupoidi sa neutralnim elementom.
1) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ 2) $(\{-1,0,1\},+)$ 3) $(\mathbb{N}, \cdot)$ 4) $(\mathbb{N} \cup \{0\},+)$ 5) $(\mathbb{C},+)$ 6) $(\mathbb{Q}, \cdot)$ 7) $(\{-1,0,1\}, \cdot)$

****

9. Napisati jednu relaciju ρ skupa $A = \{1,2,3\}$ koja nije refleksivna, nije simetrična, nije antisimetrična nije tranzitivna i nije funkcija: $\rho = \{$ $\}$

10. Napisati jednu relaciju ρ skupa $A = \{1,2,3\}$ koja je refleksivna, simetrična, antisimetrična tranzitivna i funkcija: $\rho = \{$ $\}$

11. Broj svih antisimetričnih relacija skupa $A = \{1,2\}$ je:

12. U Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ važi: (a) $x + y = (x'y')'$ (b) $xy = (x' + y')'$
(c) $xy = 1 \Rightarrow x = 1$ (d) $x = y \Rightarrow x' = y'$ (e) $x' = y' \Rightarrow x = y$ (f) $f(x) = x' \Rightarrow f : B \underset{\text{na}}{\overset{1-1}{\to}} B$

13. Za funkciju $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ iz grupe $((0,\infty), \cdot)$ u grupu $(\mathbb{R}, +)$, definisanu sa $f(x) = \ln x$, važi: 1) f je homomorfizam 2) f je izomorfizam 3) f^{-1} postoji i f^{-1} je homomorfizam 4) f^{-1} postoji i f^{-1} je izomorfizam 5) ništa od prethodno navedenog

14. Zaokružiti podgrupe grupe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$: 1) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$ 2) $((0,\infty), \cdot)$ 3) $((-\infty, 0), \cdot)$ 4) $(\mathbb{N}, \cdot)$ 5) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ 6) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +)$ 7) $((0,1), \cdot)$ 8) $(\{-1,1\}, \cdot)$

15. Da li su sledeći uređeni parovi asocijativni grupoidi sa neutralnim elementom:
a) $(\mathbb{N}, +)$ b) $(\mathbb{N}, \cdot)$ c) $(\mathbb{N}, -)$ d) $(\mathbb{Z}, -)$ e) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ f) $(\mathbb{Z}\setminus\{0\}, :)$ g) $(\mathbb{R}, :)$ h) $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, :)$.

16. Ako je $f : G \to H$ izomorfizam grupoda $(G, +)$ sa neutralnim elementom 0 u grupoid $(H, \cdot)$ sa neutralnim elementom 1, tada je: 1) $f(0) = 1$ 2) $f(-a) = a^{-1}$ 3) $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$

17. Navesti dva primera domena integriteta koji nisu polja:

18. U polju $\mathbb{Z}_7$ izračunati $(3^2)^{-1} + 2^{-1} \cdot 3 =$ ___

19. U polju $\mathbb{Z}_5$, skup rešenja po $x \in \mathbb{Z}_5$ jednačine $3 + 4(x^{-1} + 2x^2) = x$ je ___

20. Ako je $|z| = 1$ tada je: 1) $z = \overline{z}$ 2) $\arg z = \arg \overline{z}$ 3) $z^{-1} = z$ 4) $|z| = |\overline{z}|$ 5) $z^{-1} = \overline{z}$ 6) $|\arg z| = |\arg \overline{z}|$

21. 1) $-\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \left(I_m(z) \ge 0 \land z \ne 0\right)$ 2) $-\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \left(R_e(z) \ge 0 \land z \ne 0\right)$
3) $|z| > 0 \Rightarrow |\arg(z)| = |\arg(\overline{z})|$ 4) $\sqrt{z\overline{z}} = |z|$, gde je $\sqrt{\ }$ realni koren

22. $\arg(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}) =$ ___, $|e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}| = 1$, $R_e(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}) =$ ___, $I_m(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}) =$ ___.

23. Zaokružiti polja nad kojima je polinom $t^2 + t + 1$ svodljiv: $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$

24. Skup svih mogućih stepena svodljivih polinoma nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$ je

25. U prstenu polinoma, za svaki polinom p važi: 1) ako je p jednak proizvodu dva polinoma, tada je p svodljiv 2) ako je $p = 0$, tada je on svodljiv 3) ako je $p = 0$, tada je on nesvodljiv 4) ako je p svodljiv tada je $p \ne 0$ i $dg(p) \ne 0$ i p je jednak proizvodu dva polinoma stepena većeg od 0 5) ako je $p \ne 0$ i $dg(p) \ne 0$ i p je jednak proizvodu dva polinoma stepena većeg od 0, tada je p je svodljiv

• Neka su $p(x) = 2x + 1$ i $q(x) = x^2 + 2$ polinomi nad poljem $\mathbb{Z}_5$ i $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_5[x]/p, +, \cdot)$ i $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}_5[x]/q, +, \cdot)$. Tada su polja: a) Samo $\mathcal{A}$ b) Samo $\mathcal{B}$ c) $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ d) Ni $\mathcal{A}$ ni $\mathcal{B}$.

• U skupu kompleksnih brojeva je: 1) $\sqrt{z\overline{z}} = |z|$ 2) $z = e^{i\frac{\pi}{7}} \Rightarrow z^{-1} = \overline{z}$ 3) $|z_1 z_2| = |z_2||z_1|$ 4) $R_e(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ 5) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_2 - \overline{z}_1$ 6) $|z| = 1 \Leftarrow z^{-2} = \overline{z}^2$ 7) $|-z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ 8) $z_1|z_2| = z_2|z_1| \Rightarrow \arg z_1 = \arg z_2$

• Neka su $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -3 - i$ i $z_3 = -1 - i$. Izraziti u zavisnosti od z_1, z_2 i z_3 ugao $\measuredangle z_2 z_3 z_1 =$ ____ i zatim ga efektivno izračunati $\measuredangle z_2 z_3 z_1 = -\frac{3\pi}{4}$
Da li je ovaj ugao pozitivno orijentisan? DA NE

• Napisati bar jedan polinom nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ koji je nesvodljiv i koji je stepena:
a) 1 $x-1$ b) 2 x^2+1

• Ako je p svodljiv polinom nad poljem $\mathbb{Q}$, tada skup svih mogućih vrednosti za $dg(p)$ je $\{2, 3, \ldots\}$

• Odrediti sve vrednosti parametara $a, b \in \mathbb{Q}$ za koje je polinom $p(x) = ax + b$ nesvodljiv nad poljem $\mathbb{Q}$:
$b \in \mathbb{Q} \wedge a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

• Neka je $\{1\}$ skup svih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tada skup svih mogućnosti za a je $a \in \{ -3 \}$, skup svih mogućnosti za b je $b \in \{ 3 \}$ i skup svih mogućnosti za c je $c \in \{ -1 \}$.

• Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{1, 2\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f \underline{\nearrow}$ označava neopadajuću funkciju f:

$\left|\{f | f : A \longrightarrow B\}\right| = 32$ $\left|\{f | f : A \xrightarrow{1-1} B\}\right| = 0$ $\left|\{f | f : A \rightarrow B \wedge f \nearrow\}\right| = 0$ $\left|\{f | f : B \xrightarrow{na} B\}\right| =$ ___
$\left|\{f | f : B \rightarrow A\}\right| =$ ___ $\left|\{f | f : A \rightarrow A \wedge f \nearrow\}\right| = 1$ $\left|\{f | f : B \rightarrow A \wedge f \underline{\nearrow}\}\right| = 10$ $\left|\{f | f : A \xrightarrow{na} B\}\right| =$ ___

• Ako je $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(e^{-i\alpha}) = 0$ i $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, tada je: 1) $x - e^{-i\alpha} \mid f(x)$ 2) $x - e^{i\alpha} \mid f(x)$ 3) $x - e^{i|\alpha|} \mid f(x)$ 4) $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 \mid f(x)$ 5) $x^2 - x\cos\alpha + 1 \mid f(x)$ 6) $x^2 + x\cos\alpha + 1 \mid f(x)$ 7) $x^2 - x\cos\alpha + \alpha^2 \mid f(x)$

• Ako je $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(e^{-i\alpha}) = 0$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, tada je: 1) $x - e^{-i\alpha} \mid f(x)$ 2) $x - e^{i\alpha} \mid f(x)$ 3) $x - e^{i|\alpha|} \mid f(x)$ 4) $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 \mid f(x)$ 5) $x^2 - x\cos\alpha + 1 \mid f(x)$ 6) $x^2 + x\cos\alpha + 1 \mid f(x)$ 7) $x^2 - x\cos\alpha + \alpha^2 \mid f(x)$

• Ako je $z_1 \neq w$, $z_2 \neq w$, $z_1 \neq 0$ i $z_2 \neq 0$, tada je:
1) $\arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}^+)\overrightarrow{Oz_1} = k\overrightarrow{Oz_2}$
2) $\arg(z_1 - w) = \arg(z_2 - w) \Leftrightarrow \frac{z_1 - w}{|z_1 - w|} = \frac{z_2 - w}{|z_2 - w|}$
3) Množenjem kompleksnog broja s realnim pozitivnim brojem argument se ne menja.
4) $(\exists k \in \mathbb{R}^+)\overrightarrow{wz_1} = k\overrightarrow{wz_2} \Leftrightarrow \arg(z_1 - w) = \arg(z_2 - w)$
5) $(\exists k \in \mathbb{R}^+)\overrightarrow{wz_1} = k\overrightarrow{wz_2} \Leftrightarrow \frac{z_1 - w}{|z_1 - w|} = \frac{z_2 - w}{|z_2 - w|}$
6) Kompleksni brojevi koji pripadaju istoj polupravoj koja ishodi iz koordinatnog početka imaju jednake argumente.
7) Množenje kompleksnog broja z realnim brojem k je homotetija sa centrom $O(0,0)$ i koeficijentom k odnosno $H_{O,k}(z)$.

• Funkcija $f : (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}) \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = \operatorname{tg} x$ je: 1) injektivna i nije sirjektivna 2) sirjektivna i nije injektivna 3) bijektivna 4) nije injektivna i nije sirjektivna

• Funkcija $f : (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) \longrightarrow (0, 1]$ definisana sa $f(x) = \sin x$ je: 1) injektivna i nije sirjektivna 2) sirjektivna i nije injektivna 3) bijektivna 4) nije injektivna i nije sirjektivna

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 12

1. • Pri deljenju polinoma $x^3 - x^2 - x + 1$ sa $x + 1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je $x^2 - 2x + 1$, a ostatak je 0.

• Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:
1) $(a')' = a' \cdot a'$ 2) $a \cdot a' = 0$ 3) $a \cdot 1' = 1'$ 4) $1 + a' = 0'$ 5) $a' \cdot b' = (a' + b')'$

• Odrediti realni i imaginarni deo, moduo, argument, i konjugovani broj kompleksnog broja $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{6}$:
$Re(z) =$, $Im(z) =$, $|z| =$, $\arg(z) =$, $\overline{z} =$

• Za $\subseteq$ u skupu $\mathcal{A} = \{A, B, C, D, E\}$, gde je
$A = \{a, b, c\}, B = \{a, b, c, d\}, C = \{a, b\}, D = \{a, b, c, e\}, E = \{a, c\}$
odrediti
najmanji el: minimalne el: najveći el: maksimalne el:

• Sledeće kompleksne brojeve napisati u algebarskom obliku:
$2e^{-2\pi i} =$ $e^{-3\pi i} =$ $2e^{-i\frac{3\pi}{2}} =$ $e^{5\pi i} =$ $e^{i\frac{3\pi}{2}} =$.

• Zaokružiti brojeve ispred sirjektivnih funkcija:
1) $f : [-1, \infty) \to [-1, \infty),\ f(x) = x^3$ 2) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$ 3) $f : (-\infty, 0] \to [0, \infty),\ f(x) = x^2$
4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ 5) $f : (-\infty, 1) \to (0, \infty),\ f(x) = e^{-x}$ 6) $f : (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}) \to (-1, 1),\ f(x) = \sin x$

• Zaokružiti brojeve ispred injektivnih funkcija:
1) $f : [-1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ 2) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$ 3) $f : (-\infty, 0] \to [0, \infty),\ f(x) = x^2$
4) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ 5) $f : (-\infty, 1) \to (0, \infty),\ f(x) = e^{-x}$ 6) $f : (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}) \to (-1, 1),\ f(x) = \sin x$

• Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su komutativni grupoidi sa neutralnim elementom i nisu grupe.
1) $(\mathbb{N}, +)$ 2) $(\mathbb{N}, \cdot)$ 3) $(\mathbb{R}, +)$ 4) $(\mathbb{R}, \cdot)$ 5) $(\{-1, 1\}, \cdot)$ 6) $((0, \infty), \cdot)$ 7) $((0, 1], \cdot)$

• Za polinome $p(x) = (x+1)^3 x^3 (x-2)^6$ i $q(x) = x^5 (x+1)^4 (x-5)^2 (x+2)^3$ nad poljem realnih brojeva izračunati: $NZD(p, q) =$

****

• Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj grupi $(P, +)$, gde je $\hbar$ neutralni, a $-x$ inverzni za x:
1) $a + \hbar = \hbar$ 2) $-a + a = \hbar$ 3) $\hbar + \hbar = \hbar$ 4) $-\hbar = \hbar$ 5) $-(a + b) = -b + (-a)$ 6) $-(a + b) = -a + (-b)$

• Koreni polinoma $x^2 - x\sqrt{2} + 1$ su: 1) $e^{i\frac{3\pi}{4}}$, 2) $e^{-i\frac{\pi}{4}}$, 3) $e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, 4) $-e^{i\frac{3\pi}{4}}$ 5) $-e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ 6) $e^{i\frac{\pi}{4}}$, 7) $-e^{i\frac{\pi}{4}}$.

• Koreni polinoma $x^2 - i$ su: 1) $e^{i\frac{3\pi}{4}}$, 2) $e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, 3) $-e^{i\frac{3\pi}{4}}$, 4) $-e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, 5) $e^{i\frac{\pi}{4}}$, 6) $e^{-i\frac{\pi}{4}}$, 7) $-e^{i\frac{\pi}{4}}$.

• NZD za polinome $x^2 - x\sqrt{2} + 1$ i $x^2 - i$ je polinom : NZD$(x^2 - x\sqrt{2} + 1,\ x^2 - i) =$

• Izračunati: 1) $\arg(-7) =$ 2) $\arg(-3i) =$ 3) $\arg(9) =$ 4) $\arg(-0) =$
5) $\arg(8i) =$ 6) $\arg(-1 + i) =$ 7) $\arg(\sqrt{3} - i) =$ 8) $\arg(-\sqrt{3} + 1) =$

• Napisati tablicu grupoida $(\{1, 3, 7, 9\}, \cdot)$, gde je $\cdot$ množenje po modulu 10. Odrediti inverzne elemente i izračunati:

$\cdot$	1	3	7	9
1				
3				
7				
9				

$1^{-1} =$, $3^{-1} =$, $7^{-1} =$, $9^{-1} =$ $(9 \cdot 7)^{-1} =$, $7^{-1} \cdot 9^{-1} =$
Da li je $(\{1, 3, 7, 9\}, \cdot)$ Abelova grupa? DA NE. Zaokružiti tačan odgovor.
Da li je $(\{1, 3, 7, 9\}, \cdot) = (\{3^n | n \in \mathbb{N}\}, \cdot)$? DA NE. Zaokružiti tačan odgovor.

• Da li je $\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (3,5), (4,3), (4,2), (4,5), (2,5)\}$ relacija poretka skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: DA NE, i ako jeste, nacrtati njen Haseov dijagram. Odrediti
minimalne: , maksimalne: ,
najveći element: i najmanji element:

Haseov dijagram

• Ako je p polinom stepena 4 nad poljem $\mathbb{R}$ i ako je svodljiv u tom polju, tada p: 1) uvek ima korena u polju $\mathbb{R}$ 2) nema korena u polju $\mathbb{R}$ 3) nekada ima, a nekad nema korena u polju $\mathbb{R}$ 4) je uvek normalizovan 5) ništa od prethodnog

19. • Koje jednakosti su tačne za sve $z \in \mathbb{C}$ i sve $\varphi \in (-\pi, \pi]$ za koje su i definisane: 1) $\overline{e^{-i\varphi}} = e^{-\overline{i\varphi}}$ 2) $\overline{e^{-i\varphi}} = e^{-i\varphi}$ 3) $e^{i(\arg z - \arg(-z))} = -1$ 4) $e^{i(\arg z + \arg(-z))} = 1$ 5) $1 = z\overline{z}|z|^{-2}$ 6) $\arg z > 0 \Rightarrow \arg z - \arg(-z) = \pi$

19. • U skupu kompleksnih brojeva je: 1) $\sqrt{z\overline{z}} = |z|$ 2) $z = e^{i\frac{\pi}{7}} \Rightarrow z^{-1} = \overline{z}$ 3) $|z_1 z_2| = |z_2||z_1|$ 4) $R_e(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ 5) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_2 - \overline{z}_1$ 6) $|z| = 1 \Leftarrow z^{-2} = \overline{z}^2$ 7) $|-z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$? 8) $z_1|z_2| = z_2|z_1| \Rightarrow \arg z_1 = \arg z_2$

20. • U skupu $\mathbb{N}$ date su relacije: $\rho_1 = \{(x,x)|x \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, x+1)|x \in \mathbb{N}\}$, $\rho_2 = \{(x,x)|x \in \mathbb{N}\}$, $\rho_3 = \{(x,y)|y \in \{1, 2, \dots, x\}, x \in \mathbb{N}\}$, $\rho_4 = \{(x,y)|x, y \in \mathbb{N},\ x \cdot y$ je neparan broj$\}$, $\rho_5 = \{(1,1),(2,2)\}$, $\rho_6 = \emptyset$, $\rho_7 = \mathbb{N}^2$

Iza oznake svake od tih relacija zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost.
ρ_1 : R S A T F ρ_2 : R S A T F ρ_3 : R S A T F ρ_4 : R S A T F ρ_5 : R S A T F ρ_6 : R S A T F ρ_7 : R S A T F

21. • Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je funkcija $f : A \to B$ definisana sa $f(x) = -\sqrt{1-x}$. Tada $A =$ $(-\infty, 1]$, $f($ 0 $) = -1$, $f($ 1 $) = 0$ i $B =$ ______. Funkcija $f : A \to B$ je: 1) sirjektivna i neinjektivna 2) injektivna i nesirjektivna 3) ni injektivna ni sirjektivna 4) bijektivna 5) $f^{-1}(x) =$ $1-x^2$. Ako $f^{-1} : O \to S$, tada je $O =$ $(-\infty, 0]$, $S =$ $(-\infty, 1]$

22. • Za kompleksni broj $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$, naći:
$R_e(z) =$ $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$, $I_m(z) =$ $\frac{1}{2}$, $|z| =$ $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\arg(z) =$ $\frac{\pi}{12}$, $\overline{z} =$ $\sqrt{2+\sqrt{3}}\, e^{}$, $z^2 =$ $(2+\sqrt{3})e^{}$.

23. • Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{1, 2\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f \underline{\nearrow}$ označava neopadajuću funkciju f:

$\Big|\{f|f : A \longrightarrow B\}\Big| =$ 8 $\Big|\{f|f : A \xrightarrow{1-1} B\}\Big| =$ 0 $\Big|\{f|f : A \longrightarrow B \land f \nearrow\}\Big| =$ 0 $\Big|\{f|f : B \xrightarrow{na} B\}\Big| =$ 2
$\Big|\{f|f : A \xrightarrow{na} B\}\Big| =$ 6 $\Big|\{f|f : A \xrightarrow{1-1} A\}\Big| =$ 6 $\Big|\{f|f : B \longrightarrow A \land f \underline{\nearrow}\}\Big| =$ 6 $\Big|\{f|f : B \longrightarrow A\}\Big| =$ 9

24. • Neka su $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ i $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ definisane sa $f(x) = e^x - 1$ i $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Izračunati:
1) $f^{-1}(x) =$ $\ln(x+1)$ 2) $g^{-1}(x) =$ $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 3) $(f \circ g)(x) =$ $e^{\frac{1}{x^2}} - 1$ 4) $(f \circ g)^{-1}(x) =$ $\ln(x+1)$ 5) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) =$ $\frac{1}{\sqrt{\ln(x+1)}}$

25. • Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u Bulovoj algebri $B = (\{0, 1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$.
1) $x = xy + xy'$ 2) $xx' = (x+1)'$ 3) $xx = x + x$ 4) $xy = x + y$ 5) $xy = 1 \Rightarrow x = 1$
6) $xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \lor y = 0)$ 7) $(x = 0 \lor y = 0) \Rightarrow xy = 0$
8) $(\forall x \in B)(\exists y \in B)\ x + y = 1 \land xy = 0$

26. • Grupe su: 1) $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Big| f_k(x) = k^2 x, k \in \mathbb{R}\}, +\right)$ 2) $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Big| f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \circ\right)$
3) $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Big| f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\}, +\right)$ 4) $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Big| f_k(x) = k^2 x, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \circ\right)$
5) $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Big| f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}^+\}, \circ\right)$ 6) $\left(\{f \Big| f : \mathbb{R} \underset{na}{\xrightarrow{1-1}} \mathbb{R}\}, \circ\right)$

27. • Zaokružiti podgrupe grupe $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$: 1) $(\{-1, 1\}, \cdot)$ 2) $((0, \infty), \cdot)$ 3) $(\{-1, i, 1, -i\}, \cdot)$ 4) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$
5) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ 6) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +)$ 7) $((0, 1), \cdot)$ 8) $((-\infty, 0), \cdot)$ 9) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ 10) $(\{e^{i\theta} | \theta \in \mathbb{R}\}, \cdot)$

28. • Napisati primere beskonačnog prstena bez jedinice $(A, +, \cdot)$ i konačnog prstena bez jedinice $(B, +, \cdot)$.
$A =$ $\{7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ $B =$ $\mathbb{Z}_4 / \{1, 3\}$

29. • Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^3 + t + 1$ svodljiv nad njima. $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_5$

30. • Ako je p polinom stepena manjeg od 3 nad poljem $\mathbb{C}$ tada je polinom p:
1) uvek svodljiv 2) uvek nesvodljiv 3) ništa od prethodnog.

31. • $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(1 - 2i) = 0$. Zaokružiti tačno: 1) $x - 1 + 2i \mid f(x)$ 2) $x - 1 - 2i \mid f(x)$ 3) $x - e^{2i} \mid f(x)$
4) $x^2 - 2x + 5 \mid f(x)$; 5) $x^2 + 2x + 4 \mid f(x)$; f) $x^2 - x + 1 \mid f(x)$; 6) $x - e^{-i} \mid f(x)$

• Neka je $z = 1+i$, $u = 4+2i$ i $w = 2+3i$. Rotacijom tačke z oko tačke w za ugao $\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka ________, translacijom tačke z za vektor w dobija se tačka ________, $\measuredangle zuw =$ $-\frac{\pi}{4}$.

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 13

1. • Neka su $f : (-1,\infty) \to (-\infty, 0)$ i $g : (-1,\infty) \to (-\infty, 0)$ definisane sa $f(x) = -\sqrt{1+x}$ i $g(x) = -(x+1)^3$. Izračunati:
   1) $f^{-1}(x) = x^2$ **2)** $g^{-1}(x) =$ **3)** $(f \circ g)(x) =$ **4)** $(f\circ g)^{-1}(x) =$ **5)** $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) =$

2. • **Injektivne** funkcije su: 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$ 2) $f : [-1,1] \to [0, 2\pi]$, $f(x) = \arccos x$ 3) $f : [\pi, \frac{3\pi}{2}] \to [-1,1]$, $f(x) = \cos x$ 4) $f : [-3,0] \to [0,11]$, $f(x) = x^2$ 5) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$

3. • Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:
   1) $(a')' = (a+1')'$ 2) $aa' = 1'$ 3) $a \cdot 1' = (1')'$ 4) $1 + a = 0'$ 5) $ab = (a'+b')'$

4. • Skup kompleksnih rešenja jednačine $x^3 = 1$ je $S = \{$ $\}$.

5. • Za kompleksni broj $z = e^{i\pi} + i$, naći:
   $Re(z^2) =$, $Im(z^2) =$, $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) =$, $\overline{z} =$, $z^3 =$.

6. • Sledeće kompleksne brojeve napisati u eksponencijalnom obliku, odnosno u obliku $\rho e^{i\varphi}, \rho \in [0,\infty), \varphi \in (-\pi, \pi]$:
   $2^2 = 4e^{i\cdot 0}$, $(\sqrt{i}\,)^2 =$, $\sqrt{(i)^2} =$, $-1-i =$, $\frac{\pi}{2} =$, $-\frac{\pi}{2}i =$

7. • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su asocijativno komutativni grupoidi.
   1) $(\mathbb{N},+)$ **2)** $(\mathbb{N},\cdot)$ **3)** $(\{-1,0,1\},\cdot)$ **4)** $(\{-1,1\},+)$ **5)** $(\mathbb{R},\cdot)$ **6)** $((0,\infty),+)$ **7)** $(\{-1,1\},\cdot)$ **8)** $((0,\infty),\cdot)$

8. • Neka su P i Q polinomi drugoga stepena i $P \neq -Q$. Tada je $dg(P+Q) \in \{$ $\}$ i $dg(PQ) \in \{$ $\}$.

9. • Pri delenju polinoma x^2+1 sa $x+1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je $x-1$, a ostatak je 2.

10. • Neka su f i g funkcije definisane sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & d & b & c \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & b & c & a \end{pmatrix}$. Tada je $f \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ & & & \end{pmatrix}$,
    $f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ & & & \end{pmatrix}$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ & & & \end{pmatrix}$, $(f\circ g)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ & & & \end{pmatrix}$, $f^{-1}\circ g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ & & & \end{pmatrix}$.

* *

11. • Iza oznake svake od datih relacija u skupu $\mathbb{R}$ zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost F- funkcija.
    $\rho = \{(x, \sqrt{1-x^2}) | x \in (0,1]\}$: R S A T F $\qquad \rho = \{(x, -\frac{1}{x}) | x > 0\}$: R S A T F
    $\rho = \{(x,y) | x^2+y^2 = 0\}$: R S A T F $\qquad \rho = \{(x,y) | x+y = 0\}$: R S A T F
    $\rho = \{(x,y) | x \le y < x+5\}$: R S A T F $\qquad \rho = \{(x,y) | xy < 0\}$: R S A T F

12. • Zajednički koreni polinoma $P(x) = x^2 - (i+1)x + i$ i $Q(x) = x^2+1$ su $\{\ i\ \}$, a $NZD(P,Q) = x - i$

13. • Zajednički koreni polinoma $P(x) = x^2 - i$ i $Q(x) = x^4 + 1$ su $\{$ $\}$, a $NZD(P,Q) =$

14. • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakom prstenu $(F,+,\cdot)$: 1) $a + (-a) = 0$ 2) $a + bc = (a+b)(a+c)$ 3) $(F,+)$ je grupa 4) $(F,\cdot)$ je grupa 5) operacija $+$ je distributivna prema $\cdot$ 6) $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ 7) $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ 8) $a \cdot 0 = 0$ 9) $a \cdot (-a) = -a^2$

15. • Zaokruži brojeve ispred tačnih iskaza. 1) $\arg z \in (0,\pi] \Leftarrow I_m(z) > 0$ 2) $\arg z \le 0 \Rightarrow I_m(z) \le 0$ 3) $\arg z \le 0 \Leftarrow I_m(z) \le 0$ 4) $0 \le \arg z < \frac{\pi}{2} \Rightarrow R_e(z) > 0$ 5) $-\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2} \Leftarrow R_e(z) \ge 0$

16. • Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f : A \to B$ definisana sa $f(x) = \ln(x^2 + e^{-1})$. Tada je $A = \mathbb{R}$, $f(\ 0\ ) = -1$ i $B = [-1, \infty)$.
    Funkcija $f : A \to B$ je: **1)** bijektivna **2)** sirjektivna ali ne injektivna **3)** injektivna ali ne sirjektivna **4)** niti injektivna niti sirjektivna

- Koje od navedenih struktura su grupe: 1) $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\big|\, f_k(x) = k^2x, k \in \mathbb{R}\}, +\right)$
2) $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\big|\, f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\}, +\right)$ 3) $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\big|\, f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\}, \circ\right)$
4) $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\big|\, f_k(x) = k^2x, k \in \mathbb{R}\}, \circ\right)$ 5) $\left(\{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\big|\, f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}^+\}, \circ\right)$

- Neka su $z_1 = 1$, $z_2 = 5+2i$ i $z_3 = 2+3i$ kompleksni brojevi. Tada rotacijom tačke z_1 oko tačke z_3 za ugao $\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka ______, translacijom tačke z_1 za vektor z_2 dobija se tačka $6+2i$, a $\measuredangle z_1z_2z_3 =$ ______

13. - Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f : A \to B$ definisana sa $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$. Tada je $A =$ ______, $f($ 0 $) = -1$, $f($ 1 $) = 0$ i $B =$ ______, a $f : A \to B$ je: 1) bijektivna 2) sirjektivna ali ne injektivna 3) injektivna ali ne sirjektivna 4) niti injektivna niti sirjektivna

- Funkcija $f : (\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}) \longrightarrow (-1, \frac{9}{10})$ definisana sa $f(x) = \cos x$ je: 1) sirjektivna i nije injektivna 2) injektivna i nije sirjektivna 3) nije injektivna i nije sirjektivna 4) bijektivna

- Funkcija $f : (-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}) \longrightarrow [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ definisana sa $f(x) = \sin x$ je: 1) sirjektivna i nije injektivna 2) injektivna i nije sirjektivna 3) nije injektivna i nije sirjektivna 4) bijektivna

- Funkcija $f : [\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = \operatorname{tg} x$ je: 1) sirjektivna i nije injektivna 2) injektivna i nije sirjektivna 3) nije injektivna i nije sirjektivna 4) bijektivna

- Navesti geometrijsku interpretaciju skupova A, B, C, D, E i sledećih kompleksnih funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ i $s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i sirjektivnosti funkcija f, g, h i s.
$f(z) = -\overline{z}i$ je ______
$g(z) = -(\overline{-z})$ je rotacija za ugao 0 bijekcija
$h(z) = R_e(z)$ je projekcija na realnu osu
$s(z) = z \cdot \frac{i-\sqrt{3}}{2}$ je rotacija za $\frac{5\pi}{6}$ bijekcija
$A = \{z | z^3 = 1\}$ je temena jednakostraničnog trougla
$B = \{z || z^3| = 1\}$ je $K(0,1)$
$C = \{z | z^2 = \overline{z}\}$ je ______
$D = \{z | \arg(-z) = \overline{\arg(-z)}\}$ je ______
$E = \{z | I_m(z) = iR_e(z)\}$ je ______
Zaokružiti slova ispred tačnih iskaza: a) $A \subset B$ b) $C \subseteq D$ c) $D \subseteq C$ d) $B \subseteq D$ e) $D \subsetneq E$

14. - Neka je $\{1,2\}$ skup svih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tada je
$a \in \{$ $-4, -5$ $\}$, $b \in \{$ $8, 5$ $\}$ $c \in \{$ $-2, -4$ $\}$

15. - Neka je $A = \{1,2,3\}$ i $B = \{1,2\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f \underline{\nearrow}$ označava neopadajuću funkciju f:
$\left|\{f | f : A \longrightarrow B\}\right| =$ 8 $\left|\{f | f : A \xrightarrow{1-1} B\}\right| =$ 0 $\left|\{f | f : A \to B \wedge f \nearrow\}\right| =$ ___ $\left|\{f | f : B \overset{na}{\to} B\}\right| =$ 2
$\left|\{f | f : B \to A\}\right| =$ 9 $\left|\{f | f : A \to A \wedge f \nearrow\}\right| =$ 1 $\left|\{f | f : B \to A \wedge f \underline{\nearrow}\}\right| =$ 6 $\left|\{f | f : A \overset{na}{\to} B\}\right| =$ 6

16. - U skupu kompleksnih brojeva je: 1) $\sqrt{i^2} = i$ 2) $(\forall \varphi \in (-\pi, \pi])\ (e^{i\varphi})^{-1} = \overline{e^{i\varphi}}$ 3) $|z| = 1 \Rightarrow z^{-1} = \overline{z}$
4) $z^{-1} = \overline{z}|z|^{-2}$ 5) $\overline{|z_1z_2|} = |z_1||z_2|$ 6) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$ 7) $|z| = 1 \Leftarrow z^{-1} = \overline{z}$
8) $|-z_1 - z_2| = |-z_1| + |-z_2|$
9) $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\})(\exists k \in \mathbb{R}^+)\ \overrightarrow{Oz_1} = k\overrightarrow{Oz_2} \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|}$

17. - Ako je $P(x) = ax^3 + bx^2 + c$ polinom nad poljem realnih brojeva i ako je $c \neq 0$, tada stepen $dg(P)$ polinoma P je:
1) $dg(P) = 3$ 2) $dg(P) \in \{1,3\}$ 3) $dg(P) \in \{0,3\}$ 4) $dg(P) \in \{0,2,3\}$ 5) $dg(P) \in \{0,1,2,3\}$

1. • Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su domeni integriteta: 1) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ 2) $(\{9k|k\in\mathbb{Z}\},+,\cdot)$ 3) $(\mathbb{Z}_9,+,\cdot)$ 4) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ 5) $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ 6) $(\mathbb{N},+,\cdot)$ 7) $(\mathbb{C},+,\cdot)$ 8) $(\mathbb{R}[t],+,\cdot)$ 9) $(\mathbb{R}^+,+,\cdot)$

• Ako je p polinom stepena 3 nad nekim poljem F i ako nema koren u tom polju, tada je p: **1)** uvek svodljiv **2)** uvek nesvodljiv **3)** nekada svodljiv a nekada nesvodljiv **4)** ništa od prethodnog **5)** uvek normalizovan

• Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koje je tačno u Bulovoj algebri $B=(B,+,\cdot,',0,1)$.
1) $xx=x+x$ 2) $x'y'=(x+y)'$ 3) $xx'=(x+1)'$ 4) $xy=1 \Rightarrow x=1$
5) $xy=0 \Rightarrow (x=0 \vee y=0)$ 6) $(x=0 \vee y=0) \Rightarrow xy=0$ 7) $y=xy+xy'$
8) $(\forall x\in B)(\exists y\in B)\ x+y=1 \wedge xy=0$

• Zaokružiti asocijativno komutativne grupoide, koji nisu grupe: 1) $(\{z\in\mathbb{C}|Im(z)=Re(z)\},+)$
2) $(\{f|f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\},\circ)$ 3) $(\mathbb{N}\cup\{0\},+)$ 4) $(\mathbb{Z},\cdot)$ 5) $(\{7k|k\in\mathbb{Z}\},\cdot)$ 6) $(\mathbb{R}[x],\cdot)$

• Zaokružiti grupoide: 1) $(\mathbb{R}\setminus\{0\},+)$ 2) $((0,\infty),\cdot)$ 3) $((-\infty,0),\cdot)$ 4) $(\mathbb{N},\cdot)$
5) $(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot)$ 6) $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},+)$ 7) $((0,1),\cdot)$ 8) $(\{-1,1\},+)$ 9) $(\{-1,0,1\},\cdot)$ 10) $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$

• Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom t^2+t+1 svodljiv nad njima. $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_5$

• Neka je $f\in\mathbb{R}[x]$ i $f(1+i)=0$. Tada važi: 1) $x-1-i\,|\,f(x)$; 2) $x-1+i\,|\,f(x)$;
3) $x^2-2x+2\,|\,f(x)$; 4) $x^2-2x+2\,|\,f(x)$; 5) $x-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\,|\,f(x)$ 6) $x-e^{i\frac{\pi}{4}}\,|\,f(x)$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 14

1. • Iza oznake svake od tih relacija zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost, S- simetričnost, A- antisimetričnost, T- tranzitivnost. F.
$\leq$: R S A T F $\qquad$ $<$: R S A T F $\qquad$ $\equiv_3$ $(x\equiv_3 y \Leftrightarrow 3|(x-y))$: R S A T F

2. • Neka su $f:(-1,0)\to(-\frac{\pi}{2},0)$ i $g:(-1,0)\to(-\frac{\pi}{2},0)$ definisane sa $f(x)=\arcsin x$ i $g(x)=2\,\mathrm{arctg}\,x$. Izračunati:
1) $f^{-1}(x)=$ sin x 2) $g^{-1}(x)=$ tg $\frac{x}{2}$ 3) $(f\circ g)(x)=$
4) $(g^{-1}\circ f^{-1})(x)=$ tg$\left(\frac{\sin x}{2}\right)$ 5) $(f\circ g)^{-1}(x)=$

3. • **Bijektivne** funkcije su: 1) $f:\mathbb{R}^-\to\mathbb{R}^-$, $f(x)=-x^2$ 2) $f:[-1,1]\to[-\pi,\pi]$, $f(x)=\arcsin x$
3) $f:[\frac{\pi}{2},\pi]\to[-1,1]$, $f(x)=\cos x$ 4) $f:[-3,0]\to[-8,1]$, $f(x)=1-x^2$ 5) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$

4. • Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B,+,\cdot,',0,1)$:
1) $(1')'=(a\cdot 1')'$ 2) $(aa')'=0'$ 3) $a+1'=(a')'$ 4) $1+a=(1')'$ 5) $(ab)'=(a'+b')'$

• Skup kompleksnih rešenja jednačine $x^2=2i$ je $S=\{$ $\}$.

6. • Za kompleksni broj $z=e^{i\pi}+e^{i\frac{\pi}{3}}$, naći:
$Re(z^2)=$, $Im(z^2)=$, $|z|=$ 1 , $\arg(z)=$, $\bar{z}=$, $z^3=$.

7. • Sledeće kompleksne brojeve napisati u eksponencijalnom obliku, odnosno u obliku $\rho e^{i\varphi}, \rho\in[0,\infty), \varphi\in(-\pi,\pi]$:
$-2^2=$, $(\sqrt[3]{i})^3=$, $\sqrt[3]{(i)^3}=$, $-\sqrt{3}-i=$, $\frac{\pi}{6}=$, $-\frac{\pi}{3}i=$

8. • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su komutativne grupe.
1) $(\mathbb{N},+)$ 2) $(\mathbb{N},\cdot)$ 3) $(\{-1,0,1\},\cdot)$ 4) $(\{-1,1\},+)$ 5) $(\mathbb{R},\cdot)$ 6) $((0,\infty),+)$ 7) $(\{-1,1\},\cdot)$ 8) $((0,\infty),\cdot)$

9. • Neka su P i Q polinomi trećega stepena i $P\neq -Q$. Tada je $dg(P+Q)\in\{$ $\}$ i $dg(PQ)\in\{$6$\}$.

10. • Pri delenju polinoma x^3-1 sa $x+1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je x^2-x+1, a ostatak je -2.

11. • Neka su f i g funkcije definisane sa $f=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\d&c&b&a\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&a&d&c\end{pmatrix}$. Tada je $f\circ g=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\ & & & \end{pmatrix}$,
$f^{-1}=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\d&c&b&a\end{pmatrix}$, $g^{-1}=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\ & & & \end{pmatrix}$, $(f\circ g)^{-1}=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\ & & & \end{pmatrix}$, $f^{-1}\circ g^{-1}=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\ & & & \end{pmatrix}$.

* *

• Neka su $f:(-1,0)\to(-1,0)$ i $g:(-1,0)\to(-1,0)$ definisane sa $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$ i $g(x)=x^2-1$. Izračunati:

1) $f^{-1}(x)=$ ______ 2) $g^{-1}(x)=$ ______ 3) $(f\circ g)(x)=$ ______
4) $(g^{-1}\circ f^{-1})(x)=$ ______ 5) $(f\circ g)^{-1}(x)=$ ______

• Broj svih simetričnih relacija skupa $A=\{1,2\}$ je: 8

• Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koje je tačno u Bulovoj algebri $\mathcal{B}=(B,+,\cdot,',0,1)$.
1) $xx=x+x$ 2) $xy=x+y$ 3) $xy=(x+y)'$ 4) $xy=0 \Rightarrow (x=0 \vee y=0)$
5) $(x=0 \vee y=0) \Rightarrow xy=0$ 6) $x=xy+xy'$ 7) $(\forall x\in B)(\exists y\in B)\ x+y=1 \wedge xy=0$

• Neka je $A=\{1,2,3\}$ i $B=\{2,3,4\}$ i binarne relacije $f_1=\{(1,3),(2,4)\}$, $f_2=\{(1,3),(3,4),(2,3)\}$, $f_3=\{(3,3),(2,2),(1,4)\}$, $f_4=\{(3,3),(2,3),(1,3)\}$. Popuniti obavezno sa **da** ili **ne**:

\	f_i je funkcija	f_i je funkcija skupa A u skup B	$f_i: A \xrightarrow{1-1} B$	$f_i: A \xrightarrow{na} B$	$f: A \underset{na}{\xrightarrow{1-1}} B$
f_1	da	ne	ne	ne	ne
f_2	ne	ne	ne	ne	ne
f_3	da	da	da	da	da
f_4	da	da	ne	ne	ne

• Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f:A\to B$ definisana sa $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. Tada je $A=$ $\mathbb{R}$, $f($ ______ $)=1$ i $B=$ ______. Funkcija $f:A\to B$ je:

a) sirjektivna ali ne injektivna b) injektivna ali ne sirjektivna
c) niti injektivna niti sirjektivna d) bijektivna

• Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakom polju $(F,+,\cdot)$:
1) $a+bc=(a+b)(a+c)$ 2) $(F,\cdot)$ je grupa 3) $(F,\cdot)$ je grupoid 4) operacija $+$ je distributivna prema $\cdot$ 5) $ab=0\Rightarrow a=0\vee b=0$ 6) $a\neq 0\wedge b\neq 0\Rightarrow ab\neq 0$ 7) $a\cdot 0=0$ 8) $a\cdot(-a)=-a^2$
9) $a+(-a)=0$

• Neka su z_1, z_2 i z_3 kompleksni brojevi. Tada rotacijom tačke z_2 oko tačke z_1 za ugao $\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka ______, translacijom tačke z_1 za vektor z_2 dobija se tačka ______, a $\measuredangle z_3 z_1 z_2 =$ ______

• Zaokružiti brojeve ispred sirjektivnih funkcija:
1) $f:\mathbb{R}^+\to(-\infty,3),\ f(x)=3-x$ 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$ 3) $f:\mathbb{R}^+\to(0,\infty),\ f(x)=\sqrt{x}$
4) $f:[0,\infty)\to[0,\infty),\ f(x)=x^6$ 5) $f:(0,\frac{\pi}{2})\to(0,\infty),\ f(x)=\mathrm{tg}\,x$ 6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x$

• Funkcija f je injektivna ako i samo ako za svako x, y, a i b važi: 1) $\big((x,a)\in f\wedge(y,a)\in f\big)\Rightarrow x=y$
2) $\big((x,a)\in f\wedge(y,a)\in f\big)\Rightarrow x\neq y$ 3) $x=y\Rightarrow f(x)=f(y)$ 4) $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$
5) $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$

• Neka je $A=\{1,2,3\}$ i $B=\{1,2,3,4\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija:

$\big|\{f|f:A\longrightarrow B\}\big|=$ 64 $\big|\{f|f:A\xrightarrow{1-1}B\}\big|=$ 24 $\big|\{f|f:A\longrightarrow B\wedge f\nearrow\}\big|=$ 4 $\big|\{f|f:B\xrightarrow{na}B\}\big|=$ ___
$\big|\{f|f:B\longrightarrow A\}\big|=$ 81 $\big|\{f|f:A\xrightarrow{1-1}A\}\big|=$ 6 $\big|\{f|f:B\longrightarrow A\wedge f\nearrow\}\big|=$ 15 $\big|\{f|f:A\xrightarrow{na}A\}\big|=$ ___

• Navesti geometrijsku interpretaciju skupova A,B,C,D,E i sledećih kompleksnih funkcija $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ i $s:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i sirjektivnosti funkcija f, g, h i s.

$f(z)=-\overline{z}\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ je simetrija oko prave koja ...
$g(z)=-\overline{z}$ je simetrija oko ... bijekcija
$h(z)=R_e(z)$ je projekcija na ...
$s(z)=z\cdot\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ je rotacija za $\frac{\pi}{3}$ ... bijekcija
$A=\{z|z^3=-1\}$ je temena jednakostraničnog ...
$B=\{z||z^3|=-1\}$ je prazan skup

$C = \{z | z^3 = \overline{-z}\}$ je ______

$D = \{z | \arg(-z) = \overline{\arg(-z)}\}$ je ______

$E = \{z | I_m(z) = iR_e(z)\}$ je ______

Zaokružiti slova ispred tačnih iskaza: a) $A \subset B$ b) $C \subseteq D$ c) $D \subseteq C$ d) $B \subseteq D$ e) $D \subseteq E$

• Neka je $\{1, -1, 2\}$ skup svih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tada je $a \in \{ \quad \}$, $b \in \{ \quad \}$ $c \in \{ \quad \}$

• U skupu kompleksnih brojeva je: 1) $\sqrt{4} = 2$ 2) $(e^{i\varphi})^{-1} = \overline{e^{i\varphi}}$ 3) $|z|^2 = 1 \Rightarrow z^{-1} = \overline{z}$ 4) $z \neq 0 \Rightarrow z = z^2\overline{z}|z|^{-2}$ 5) $\overline{|z_1 z_2|} = |z_1||z_2|$ 6) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$ 7) $|z|^3 = 1 \Leftarrow z^{-1} = \overline{z}$ 8) $|-z_1 - z_2| \leq |-z_1| + |-z_2|$ 9) $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\})(\exists k \in \mathbb{R}^+)\ \overrightarrow{Oz_1} = k\overrightarrow{Oz_2} \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|}$

• Ako je $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinom nad poljem realnih brojeva i ako je $d \neq 0$, tada stepen $dg(P)$ polinoma P je: 1) $dg(P) = 3$ 2) $dg(P) \in \{1, 3\}$ 3) $dg(P) \in \{0, 3\}$ 4) $dg(P) \in \{0, 2, 3\}$ 5) $dg(P) \in \{0, 1, 2, 3\}$

• Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su domeni integriteta: 1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 2) $(\{9k | k \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ 3) $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$ 4) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 5) $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ 6) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 7) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 8) $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ 9) $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$

• Ako je p svodljiv polinom stepena 3 nad nekim poljem F tada polinom p : **1)** uvek ima koren upolju F **2)** nekad ima koren upolju F **3)** nema koren u polju F **4)** ništa od prethodnog **5)** je uvek normalizovan

• Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^{2015} + 1$ svodljiv nad njima. $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_5$

• Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(1) = 0$. Tada važi: 1) $x - 1 \mid f(x)$; 2) $x + 1 \mid f(x)$; 3) $x^2 - 1 \mid f(x)$; 4) $x^2 - 2x + 1 \mid f(x)$; 5) $x - e^{i2\pi} \mid f(x)$ 6) $x - e^{-i2\pi} \mid f(x)$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 15

• Da li je $\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (5,1), (1,2), (5,3), (5,4), (4,1), (3,1)\}$ relacija poretka skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: DA NE i ako jeste, nacrtati Haseov dijagram, odrediti minimalne: , maksimalne: , najveći: najmanji: element.

• Neka su $f : (-1, 0) \to (\frac{\pi}{2}, \pi)$ i $g : (-1, 0) \to (\frac{\pi}{2}, \pi)$ definisane sa $f(x) = \arccos x$ i $g(x) = \frac{\pi}{2}x + \pi$. Izračunati:

1) $f^{-1}(x) =$ **2)** $g^{-1}(x) =$ **3)** $(f \circ g)(x) =$ **4)** $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) =$ **5)** $(f \circ g)^{-1}(x) =$

• **Injektivne** funkcije su: 1) $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^-$, $f(x) = -x^2$ 2) $f : [-1, 1] \to [-\pi, \pi]$, $f(x) = \arcsin x$ 3) $f : [\frac{\pi}{2}, \pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ 4) $f : [-3, 1] \to [-8, 0]$, $f(x) = 1 - x^2$ 5) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x^2$

• Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$: 1) $(1' + 1) = (a \cdot 1')'$ 2) $(aa')' = 1'$ 3) $a + 0' = (a')'$ 4) $1 + a = (1')'$ 5) $ab = (a' + b')'$

• Skup kompleksnih rešenja jednačine $x = \sqrt{9}$ je $S = \{ \quad \}$.

• Za kompleksni broj $z = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$, naći: $Re(z^2) =$, $Im(z^2) =$, $|z| =$, $\arg(z) =$, $\overline{z} =$, $z^3 =$.

• Napisati u eksponencijalnom obliku, odnosno obliku $\rho e^{i\varphi}, \rho \in [0, \infty), \varphi \in (-\pi, \pi]$ ako je $\sqrt{}$ kompleksni : $2^{-2} =$, $(\sqrt{4}\,)^2 =$, $\sqrt{(4)^2} =$, $-1 - i =$, $\frac{\pi}{6} \cdot (-1) =$ $-\frac{\pi}{3}i =$

• Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su grupoidi. 1) $(\mathbb{N}, +)$ 2) $(\mathbb{N}, \cdot)$ 3) $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ 4) $(\{-1, 1\}, +)$ 5) $(\mathbb{R}, \cdot)$ 6) $((0, \infty), +)$ 7) $(\{-1, 1\}, \cdot)$ 8) $((-\infty, 0), \cdot)$

• Neka su P i Q polinomi četvrtog stepena i $P \neq -Q$. Tada je $dg(P + Q) \in \{ \quad \}$ i $dg(PQ) \in \{ \quad \}$.

10. • Pri delenju polinoma x^3+2 sa $x+1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je x^2-x+1, a ostatak je 1.

11. • Neka su f i g funkcije definisane sa $f=\begin{pmatrix} a&b&c&d\\ c&a&d&b\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix} a&b&c&d\\ d&c&a&b\end{pmatrix}$. Tada je
$f^{-1}=\begin{pmatrix} a&b&c&d\\ b&d&a&c\end{pmatrix}$, $g^{-1}=\begin{pmatrix} a&b&c&d\\ c&d&b&a\end{pmatrix}$, $(f\circ g)^{-1}=\begin{pmatrix} a&b&c&d\\ d&a&c&b\end{pmatrix}$, $f\circ g=\begin{pmatrix} a&b&c&d\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$, $f^{-1}\circ g^{-1}=\begin{pmatrix} a&b&c&d\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$.

* *

12. • Neka su $f:(-1,0)\to(-1,0)$ i $g:(-1,0)\to(-1,0)$ definisane sa $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$ i $g(x)=x^2-1$. Tada je:

1) $f(x)>g(x)$ 2) $f(x)<g(x)$ 3) $f(x)=g(x)$ 4) $f(x)\geq g(x)$ 5) ništa od prethodnog

13. • Broj svih antisimetričnih relacija skupa $A=\{1,2\}$ je: 12

14. • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koje je tačno u Bulovoj algebri $B=(\{0,1\},+,\cdot,',0,1)$.
1) $xx=x+x$ 2) $xy=1\Rightarrow x=1$ 3) $x=1\Rightarrow xy=1$ 4) $xy=0\;\Rightarrow\;(x=0\;\vee\;y=0)$
5) $(x=0\;\vee\;y=0)\;\Rightarrow\;xy=0$ 6) $x=xy+xy'$ 7) $(x=0\;\wedge\;y=0)\;\Rightarrow\;xy=0$

15. • Neka je $A=\{1,2\}$, $B=\{5,6,7,8\}$, $f_1=\{(1,5),(2,6),(1,7)\}$, $f_2=\{(1,5),(1,5)\}$, $f_3=\{(1,8),(2,5)\}$, $f_4=\{(1,7),(2,7)\}$ Popuniti sa **da** ili **ne** ili **-** .

\	f_i je funkcija	f_i je funkcija skupa A u skup B	$f_i:\,A\xrightarrow{1-1}B$	$f_i:\,A\xrightarrow{na}B$	$f:A\underset{\text{na}}{\xrightarrow{1-1}}B$
f_1	ne	ne	ne	ne	ne
f_2	ne	ne	ne	ne	ne
f_3	da	da	da	ne	ne
f_4	da	da	ne	ne	ne

16. • Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f:A\to B$ definisana sa $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$. Tada je $A=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f(\;\;)=1$ i $B=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Funkcija $f:A\to B$ je: **a)** bijektivna **b)** injektivna ali ne sirjektivna **c)** niti injektivna niti sirjektivna **d)** sirjektivna ali ne injektivna

17. • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakom polju $(F,+,\cdot)$:
1) $ac+bc=(a+b)c$ 2) $(F\setminus\{0\},\cdot)$ je grupa 3) $(F,\cdot)$ je grupoid 4) operacija $+$ je distributivna prema $\cdot$ 5) $ab=0\Rightarrow a=0\vee b=0$ 6) $a\neq0\wedge b\neq0\Rightarrow ab\neq0$ 7) $a\cdot0=0$ 8) $a\cdot(-a)=-a^2$
9) $a+(-a)=0$

18. • Neka su z_1,z_2 i z_3 kompleksni brojevi. Tada rotacijom tačke z_3 oko tačke z_2 za ugao $\frac{\pi}{3}$ dobija se tačka $z_2+(z_3-z_2)e^{i\frac{\pi}{3}}$, translacijom tačke z_2 za vektor z_1 dobija se tačka z_2+z_1, a $\sphericalangle z_3z_1z_2=\arg\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)$

19. • Zaokružiti brojeve ispred bijektivnih funkcija:
1) $f:\mathbb{R}^+\to(-\infty,3)$, $f(x)=3-x$ 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-7x^3$ 3) $f:\mathbb{R}^+\to[0,\infty)$, $f(x)=\sqrt{x}$
4) $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=x^{-6}$ 5) $f:[0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}x$ 6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$

20. • Funkcija f **nije** injektivna ako i samo ako postoje x, y, a i b takvi da važi:
1) $\Big((x,a)\in f\wedge(y,a)\in f\Big)\Rightarrow x=y$ 2) $\Big((x,a)\in f\wedge(y,a)\in f\Big)\Rightarrow x\neq y$ 3) $x=y\Rightarrow f(x)=f(y)$
4) $f(x)=f(y)\Rightarrow x\neq y$ 5) $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$

21. • Neka je $A=\{1\}$ i $B=\{1,2,3,4\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija:
$\Big|\{f|f:A\longrightarrow B\}\Big|=4$ $\Big|\{f|f:A\xrightarrow{1-1}B\}\Big|=4$ $\Big|\{f|f:A\longrightarrow B\wedge f\nearrow\}\Big|=4$ $\Big|\{f|f:B\xrightarrow{na}B\}\Big|=$
$\Big|\{f|f:B\longrightarrow A\}\Big|=1$ $\Big|\{f|f:A\xrightarrow{1-1}A\}\Big|=1$ $\Big|\{f|f:B\longrightarrow A\wedge f\nearrow\}\Big|=1$ $\Big|\{f|f:A\xrightarrow{na}A\}\Big|=1$

22. • Navesti geometrijsku interpretaciju skupova A,B,C,D,E i sledećih kompleksnih funkcija $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ i $s:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i sirjektivnosti funkcija f, g, h i s.

$f(z)=-\overline{z}\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ je simetrija oko prave koja zaklapa ugao $\frac{3\pi}{8}$ u odnosu na pozitivan deo ose bijekcija
$g(z)=-\overline{z}$ je simetrija oko Im-ose bijekcija
$g(z)=-z$ je centralna simetrija bijekcija
$g(z)=\overline{z}$ je simetrija oko Re-ose bijekcija

$s(z) = z \cdot \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ je rotacija za $\frac{\pi}{3}$ ...

$A = \{z | z^3 = -1\}$ je trougao jednakostranični ...

$B = \{z || z^3| = 0\}$ je koordinatni početak

$C = \{z | z^3 = \overline{-z}\}$ je $\{0, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{-i\frac{\pi}{2}}\}$ tri tačke

$D = \{z | \arg \overline{z} = \overline{\arg z}\}$ je Re osa bez koordinatnog početka

$E = \{z | iI_m(z) = R_e(z)\}$ je koordinatni početak

Zaokružiti slova ispred tačnih iskaza: ~~a)~~ $A \subset B$ ~~b)~~ $C \subseteq D$ c) $D \subseteq C$ ~~d)~~ $B \subseteq D$ ~~e)~~ $D \subseteq E$

23. Neka je $\{1, 0\}$ skup svih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tada je
$a \in \{ \ -1, -2 \ \}$, $b \in \{ \ 0, 1 \ \}$ $c \in \{ \ 0 \ \}$

24. U skupu kompleksnih brojeva je: ~~1)~~ $\sqrt{4} = 2$ 2) $\sqrt{4} = \pm 2$ ~~3)~~ $(e^{i\varphi})^{-1} = \overline{e^{-i\varphi}}$ 4) $|z|^2 = 1 \Rightarrow z^{-1} = \overline{z}$
~~5)~~ $z \neq 0 \Rightarrow z = z^3\overline{z}|z|^{-2}$ 6) $\overline{|z_1 z_2|} = |\overline{z_2}||\overline{z_1}|$ ~~7)~~ $|-z_1 - z_2| \geq |-z_1| - |-z_2|$ 8) $|z|^{-5} = 1 \Leftarrow z^{-1} = \overline{z}$
9) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_2 \overline{z}_1$ 10) $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\})(\exists k \in \mathbb{R}^-)\ \overrightarrow{Oz_1} = k\overrightarrow{Oz_2} \Leftrightarrow \arg z_1 = \pm\pi + \arg z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{|z_1|} = -\frac{z_2}{|z_2|}$

25. Ako je $P(x) = ax^5 + bx^3 + d$ polinom nad poljem realnih brojeva i ako je $d \neq 0$, tada stepen $dg(P)$ polinoma P je: ~~1)~~ $dg(P) = 5$, ~~2)~~ $dg(P) \in \{3, 5\}$, ~~3)~~ $dg(P) \in \{0, 5\}$, 4) $dg(P) \in \{0, 3, 5\}$, 5) $dg(P) \in \{0, 1, 3, 5\}$

Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su prsteni bez delitelja nule: 1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 2) $(\{9k | k \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ ~~3)~~ $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$ 4) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 5) $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ ~~6)~~ $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 7) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 8) $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ ~~9)~~ $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$

Ako je p svodljiv polinom stepena **4** nad nekim poljem F **tada** polinom p : **1)** uvek ima koren u polju F **2)** nekad ima koren upolju F **3)** nema koren u polju F **4)** ništa od prethodnog **5)** je uvek normalizovan

Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^2 + 1$ svodljiv nad njima. $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_5$

Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(i) = 0$. Tada važi: 1) $x - i \mid f(x)$; 2) $x + i \mid f(x)$; ~~3)~~ $x^2 - 1 \mid f(x)$; 4) $x^2 + 1 \mid f(x)$; 5) $x - e^{i\frac{\pi}{2}} \mid f(x)$ 6) $x - e^{-i\frac{\pi}{2}} \mid f(x)$

Proveriti koje od sledećih ekvivalencija i implikacija su tačne za svaki kompleksni broj z:

~~1)~~ $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow R_e(z) \geq 0$ 2) $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \left(R_e(z) \geq 0 \land z \neq 0\right)$
3) $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow R_e(z) > 0$ 4) $\arg z < 0 \Rightarrow I_m(z) \leq 0$ ~~5)~~ $\arg z < 0 \Leftarrow I_m(z) \leq 0$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 16

1. Pri deljenju polinoma x^3+1 sa x^2-x+1 nad $\mathbb{R}$, količnik je $x+1$, a ostatak je 0.

2. Neka je f funkcija definisana sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Tada je:

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad f \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad (f \circ g)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad g^{-1} \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

3. Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:
1) $(a')' = (a' \cdot a')'$ ~~2)~~ $a \cdot a' = 0'$ 3) $a + 1' = (a')'$ 4) $1 + a' = 0'$ ~~5)~~ $a' \cdot b' = (a' + b')'$

4. Odrediti realni i imaginarni deo, moduo, argument, i konjugovani broj kompleksnog broja $z = -2+2i\sqrt{3}$:
$R_e(z) = -2$, $I_m(z) = 2\sqrt{3}$, $|z| = 4$, $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$, $\overline{z} = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, $\arg(z^{-1}) = -\frac{2\pi}{3}$.

5. Sledeće kompleksne brojeve napisati u algebarskom obliku:
$7e^{-6\pi i} = 7$ $e^{-9\pi i} = -1$ $3e^{-i\frac{5\pi}{2}} = -3i$ $e^{11\pi i} = -1$ $e^{i\frac{7\pi}{2}} = -i$

6. Zaokružiti brojeve ispred injektivnih funkcija: 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x}$ ~~2)~~ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
3) $f : [-1, \infty) \to [-1, \infty),\ f(x) = (x+1)^2$ 4) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$
~~5)~~ $f : (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}) \to [-1, 1],\ f(x) = \cos x$ 6) $f : (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}) \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x$

7. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su komutativne grupe.
1) $(\{-1,1\},\cdot)$ ~~2)~~ $(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot)$ ~~3)~~ $(\mathbb{R},\cdot)$ 4) $(\mathbb{Q},+)$ ~~5)~~ $((0,1],\cdot)$ ~~6)~~ $((0,\infty),+)$ ~~7)~~ $([0,\infty),\cdot)$

8. Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definisana sa $f(x)=ax^2+(a+1)x+2$. Za koje vrednosti parametar $a\in\mathbb{R}$ funkcija f je:
1) injektivna $a=0$, 2) sirjektivna $a=0$, 3) bijektivna $a=0$.

* *

9. ~~1)~~ $\arg z<0 \Leftrightarrow I_m(z)\le 0$ 2) $\arg z<0 \Rightarrow I_m(z)\le 0$ 3) $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2} \Rightarrow I_m(z)\in\mathbb{R}$
~~4)~~ $\arg z>0 \Rightarrow I_m(z)>0$ 5) $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow R_e(z)>0$ ~~6)~~ $-\frac{\pi}{2}\le\arg z\le\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow R_e(z)\ge 0$

10. Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj grupi $(P,\cdot)$, gde je e neutralni, a x^{-1} inverzni za x:
~~1)~~ $a\cdot e=e$ 2) $a^{-1}\cdot a=e$ 3) $e\cdot e=e$ 4) $e^{-1}=e$ 5) $(a\cdot b)^{-1}=b^{-1}\cdot a^{-1}$ ~~6)~~ $(a\cdot b)^{-1}=a^{-1}\cdot b^{-1}$

11. Neka su $a,b\in\mathbb{R}$ i $w\in\mathbb{C}$ koeficijenti polinoma $P(x)=x^2+ax+b$ i $Q(x)=x^2+w$. Ako je $2-3i$ zajednički koren polinoma P i Q, tada preostali koreni polinoma P i Q su redom $\alpha_1=$ $2+3i$ i $\alpha'=$ $-2+3i$, dok je $a=$ -4, $b=$ 13 i $w=$ $5+12i$.

12. Izračunati: 1) $\arg(-13i)=-\frac{\pi}{2}$ 2) $\arg(-31)=\pi$ 3) $\arg(29)=0$ 4) $\arg(0)=$ /
5) $\arg(11i)=\frac{\pi}{2}$ 6) $\arg(-5-5i)=-\frac{3\pi}{4}$ 7) $\arg(\sqrt{3}+i)=\frac{\pi}{6}$ 8) $\arg(-\sqrt{3}+1)=\frac{5\pi}{6}$

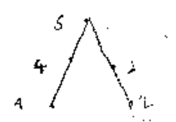
13. Napisati tablicu grupoida $(\{1,3,5,7\},\cdot)$, gde je $\cdot$ množenje po modulu 8. Odrediti inverzne elemente i izračunati:

$\cdot$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$1^{-1}=1$, $3^{-1}=3$, $5^{-1}=5$, $7^{-1}=7$, $(5\cdot 7)^{-1}=3$, $7^{-1}\cdot 5^{-1}=3$
Da li je $(\{1,3,5,7\},\cdot)$ komutativna grupa? DA NE. Zaokružiti tačan odgovor.
Da li je $(\{1,3,5,7\},\cdot)$ ciklička grupa? DA NE. Zaokružiti tačan odgovor.

14. $\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,4),(4,5),(1,5),(2,3),(2,5),(3,5)\}$ je relacija poretka skupa $A=\{1,2,3,4,5\}$: DA NE, i ako jeste, nacrtati njen Haseov dijagram. Odrediti
minimalne: 1, 2, maksimalne: 5,
najveći element: 5 i najmanji element: /

Haseov dijagram



15. Napisati normalizovani polinom $P(x)$ nesvodljiv nad poljem $\mathbb{R}$ i nesvodljiv nad poljem $\mathbb{C}$ čiji zbir koeficijenata je 2015. $P(x)=$ $x+2014$

16. Koje jednakosti su tačne za sve $z\in\mathbb{C}$ i sve $\varphi\in(-\pi,\pi]$ za koje su i definisane: ~~1)~~ $\overline{e^{-i\varphi}}=e^{-i\overline{\varphi}}$
2) $\overline{e^{-i\varphi}}=e^{i\overline{\varphi}}$ ~~3)~~ $e^{i(\arg z-\arg z^{-1})}=z^2|z|^{-2}$ 4) $e^{i(\arg z+\arg z^{-1})}=1$ 5) $1=z\overline{z}|z|^{-2}$
6) $\arg z>0 \Leftrightarrow \arg z-\arg(-z)=\pi$

17. U skupu kompleksnih brojeva je: 1) $z\overline{z}=|z\overline{z}|$ 2) $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\Rightarrow z^{-1}=\overline{z}$ 3) $|z_1z_2|=|z_2||z_1|$
~~4)~~ $R_e(z)=\frac{1}{2}(z-\overline{z})$ 5) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z}_1-\overline{z}_2$ 6) $|z|=1\Leftrightarrow z^{-3}=\overline{z}^3$ ~~7)~~ $|z_1-z_2|\ge|z_1|+|z_2|$
~~8)~~ $z_1|z_2|=z_2|z_1|\Leftrightarrow \arg z_1=\arg z_2$

18. Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je funkcija $f:A\to B$ definisana sa $f(x)=2\,\mathrm{arctg}\,x$. Tada $A=$ $\mathbb{R}$, $f($ 1 $)=\frac{\pi}{2}$, $f($ 0 $)=0$ i $B=$ $(-\pi,\pi)$. Funkcija $f:A\to B$ je:
1) sirjektivna i neinjektivna 2) injektivna i nesirjektivna 3) ni injektivna ni sirjektivna 4) bijektivna
5) $f^{-1}(x)=$ $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$. Ako $f^{-1}:O\to S$, tada je $O=$ $(-\pi,\pi)$, $S=$ $\mathbb{R}$

19. Za kompleksni broj $z=e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{6}}$, naći:
$R_e(z)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $I_m(z)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $|z|=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{2}$, $\arg(z)=-\frac{\pi}{4}$, $\overline{z}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z^2=\frac{4-\sqrt{12}}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

20. Neka je $A=\{1,2,3,4\}$ i $B=\{1,2,3\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f\nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f\underline{\nearrow}$ označava neopadajuću funkciju f:

$\left|\{f|f:A\longrightarrow B\}\right|=81$ $\left|\{f|f:A\xrightarrow{1-1}B\}\right|=0$ $\left|\{f|f:A\longrightarrow B\wedge f\nearrow\}\right|=0$ $\left|\{f|f:B\xrightarrow{na}B\}\right|=6$
$\left|\{f|f:B\to A\}\wedge f\nearrow\right|=4$ $\left|\{f|f:A\xrightarrow[na]{1-1}A\}\right|=24$ $\left|\{f|f:B\to A\wedge f\underline{\nearrow}\}\right|=20$ $\left|\{f|f:B\to A\}\right|=64$

21. Neka su $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = \sqrt[5]{x}$. Izračunati:

1) $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ 2) $g^{-1}(x) = x^5$ 3) $(f \circ g)(x) = 2\sqrt[5]{x}+1$ 4) $(f \circ g)^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^5$ 5) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^5$

22. Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u Bulovoj algebri $B = (\{0,1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$.

1) $x = xy + xy'$ 2) $xx' = (x+1)'$ 3) $xx = x + x$ 4) $xy = x + y$ 5) $xy = 1 \Rightarrow x = 1$
6) $xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$ 7) $(x = 0 \vee y = 0) \Rightarrow xy = 0$
8) $(\forall x \in B)(\exists y \in B)\, x + y = 1 \wedge xy = 0$

23. Zaokružiti slova (ili slovo) ispred struktura koje su prsteni a nisu polja: 1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 2) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$
3) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 4) $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ 5) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 6) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 7) $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ 8) $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$

24. Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^3 + t^2 + 1$ svodljiv nad njima. $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$

25. $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(2 - i) = 0$. Zaokružiti tačno: 1) $x - 2 + i \mid f(x)$ 2) $x - 2 - i \mid f(x)$ 3) $x - e^i \mid f(x)$
4) $x^2 + 4x + 5 \mid f(x)$; 5) $x + 2 + i \mid f(x)$ 6) $x^2 - 4x + 5 \mid f(x)$; 7) $x - e^{-i} \mid f(x)$

26. Neka je $z = 1$, $u = 2i$ i $w = 2 + 3i$. Rotacijom tačke z oko tačke w za ugao $\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka $5+2i$, translacijom tačke z za vektor w dobija se tačka $3+3i$, $\sphericalangle zwu = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

27. Neka je $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $f_1 = \{(1,1),(2,2),(3,1),(4,2)\}$, $f_2 = \{(1,1),(2,2)\}$, $f_3 = \{(1,4),(2,1)\}$, $f_4 = \{(1,3),(2,3)\}$ Popuniti sa **da** ili **ne** ili **-**.

\	f_i je funkcija	$f_i :\ A \longrightarrow B$	$f_i :\ B \longrightarrow A$	$f_i :\ A \xrightarrow{1-1} B$	$f_i :\ A \xrightarrow{na} B$	$f : A \underset{\text{na}}{\overset{1-1}{\to}} B$
f_1	da	ne	da	ne	ne	ne
f_2	da	da	ne	da	ne	ne
f_3	da	da	ne	da	ne	ne
f_4	da	da	ne	ne	ne	ne

28. Neka su 1, 2 i 4 svi koreni polinoma P koji je definisan sa $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ nad poljem $\mathbb{C}$. Odrediti koeficijent uz x^3 u polinomu $P(x)$: $a \in \{ -8,\ -9,\ -11 \}$.

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 17

1. Za relaciju $<$ u skupu celih brojeva $\mathbb{Z}$ zaokružiti ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R-refleksivnost, S-simetričnost, A-antisimetričnost, T-tranzitivnost: R S A T F

2. Neka je f funkcija definisana sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Tada je:

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad f \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad (f \circ g)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad g^{-1} \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

3. Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

1) $(a')' = a'$ 2) $a + a' = 0$ 3) $a \cdot 0 = 0$ 4) $1 + a = a$ 5) $(a + b)' = a' + b'$

4. Zaokružiti slova (ili slovo) ispred struktura koja su grupe:

1) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ 2) $(\mathbb{R}, \cdot)$ 3) $(\mathbb{N}, +)$ 4) $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ 5) $(\mathbb{N}, \cdot)$

5. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakom prstenu $(P, +, \cdot)$:
1) $a + bc = (a + b)(a + c)$ 2) $(P, +)$ je asocijativni grupoid 3) $(P, +)$ je asocijativni grupoid sa neutralnim elementom 4) operacija $+$ je komutativna 5) operacija $\cdot$ je komutativna

6. Za kompleksne brojeve $z_1 = 1 + i$ i $z_2 = -2 - 2i$ izračunati
$z_1 + z_2 = -1 - i$ $\quad z_1 \cdot z_2 = -4i$ $\quad \frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2}$ $\quad \arg(z_2) = -\frac{3\pi}{4}$ $\quad |z_2| = 2\sqrt{2}$

7. Ako za polinome p i q važi $dg(p) = 5$ i $dg(q) = 2$, tada je $dg(p^2) = 10$ i $dg(p + q) = 5$

* *

8. Zaokružiti brojeve ispred injektivnih funkcija:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3-x$ 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ 3) $f:\mathbb{R}\to[0,\infty),\ f(x)=x^2$
4) $f:[0,\infty)\to[0,\infty),\ f(x)=x^2$ 5) $f:(0,\frac{\pi}{2})\to(0,\infty),\ f(x)=\operatorname{tg}x$ 6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x$

9. Za svaku injektivnu funkciju f postoje skupovi A i B, takvi da je funkcija $f:A\to B$ bijektivna?
1) uvek 2) nikada 3) samo pod još nekim uslovima

10. Neka je $f:S\to S$ i $(\forall x\in S)\ f(f(x))=x$. Tada je $f:S\to S$ sirjekcija. DA NE

11. Neka su ρ_i relacije skupa $\mathbb{R}$: $\rho_1=\{(x,x+1)|x\in\mathbb{R}\}$, $\rho_2=\{(x,y)|x\in\mathbb{R},\ y\in[x-1,x+1]\}$, $\rho_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x\ge 0\ \wedge\ y\ge 0\}$, $\rho_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y^2=x^2\}$,

Iza oznake svake od tih relacija zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost, S- simetričnost, A- antisimetričnost, T- tranzitivnost.

ρ_1: ~~R~~ ~~S~~ A ~~T~~ F ρ_2: R S ~~A~~ ~~T~~ ~~F~~ ρ_3: ~~R~~ S A T ~~F~~ ρ_4: R S A T ~~F~~

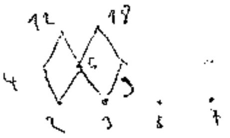
12. Ispitati da li relacija „deli" skupa $A=\{2,3,4,5,6,7,9,12,18\}$ jeste relacija poretka: DA NE (zaokruži), i ako jeste, nacrtati Haseov dijagram, i naspisati

minimalne el. { 5, 7, 2, 3 }

maksimalne el. { 5, 7, 12, 18 }

najveći el. { / }

najmanji el. { / }



13. U Bulovoj algebri $B=(B,+,\cdot,',0,1)$ važi: ~~a)~~ $x+y=x'y'$ b) $xy=(x'+y')'$
c) $xy=1\Rightarrow y=1$ ~~d)~~ $x=y\Rightarrow x'=y'$ e) $x'=y'\Rightarrow x=y$ f) $f(x)=x'\Rightarrow f:B\xrightarrow[\text{na}]{}B$

14. Za funkciju $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ iz grupe $(\mathbb{R},+)$ u grupu $((0,\infty),\cdot)$, definisanu sa $f(x)=2^x$, važi: 1) f je homomorfizam 2) f je izomorfizam 3) f^{-1} postoji i f^{-1} je homomorfizam 4) f^{-1} postoji i f^{-1} je izomorfizam ~~5)~~ ništa od prethodno navedenog

15. Zaokružiti podgrupe grupe $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$: ~~1)~~ $(\mathbb{R}\setminus\{0\},+)$ 2) $((0,\infty),\cdot)$ ~~3)~~ $((-\infty,0),\cdot)$ ~~4)~~ $(\mathbb{N},\cdot)$
~~5)~~ $(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot)$ ~~6)~~ $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},+)$ ~~7)~~ $((0,1),\cdot)$ 8) $(\{-1,1\},\cdot)$

16. Da li su sledeći uređeni parovi grupoidi sa neutralnim elementom:
~~a)~~ $(\mathbb{N},+)$ b) $(\mathbb{N},\cdot)$ ~~c)~~ $(\mathbb{N},-)$? d) $(\mathbb{Z},-)$ e) $(\mathbb{Z},\cdot)$ f) $(\mathbb{Z}\setminus\{0\},:)$? ~~g)~~ $(\mathbb{R},:)$ h) $(\mathbb{R}\setminus\{0\},:)$.

17. Ako je $f:G\to H$ izomorfizam grupoda $(G,+)$ sa neutralnim elementom 0 u grupoid $(H,\cdot)$ sa neutralnim elementom 1, tada je: 1) $f(0)=1$ ~~2)~~ $f(-a)=a$ 3) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

18. Navesti 4 beskonačna polja: $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ $(\mathbb{R},+,\cdot)$ $(\mathbb{C},+,\cdot)$ $(\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in\mathbb{Q}\},+,\cdot)$

19. U polju $\mathbb{Z}_7$ izračunati $3(2^3+5)^{-1}+6=$ 3

20. U polju $\mathbb{Z}_5$, skup rešenja po $x\in\mathbb{Z}_5$ jednačine $x^2+4(x^{-1}+2x+1)=3$ je $\{4\}$

21. Ako je $|z|=1$ tada je: ~~1)~~ $z=\bar{z}$ ~~2)~~ $\arg z=\arg\bar{z}$ ~~3)~~ $z^{-1}=z$ 4) $|z|=|\bar{z}|$ 5) $z^{-1}=\bar{z}$ 6) $|\arg z|=|\arg\bar{z}|$

22. 1) $\arg z\ge 0\ \Leftrightarrow\ \left(I_m(z)\ge 0\wedge z\ne 0\right)$ ~~2)~~ $\arg z\ge 0\ \Leftrightarrow\ \left(R_e(z)\ge 0\wedge z\ne 0\right)$
3) $|z|>1\ \Rightarrow\ |\arg(z)|=|\arg(\bar{z})|$ 4) $|z|=1\ \Rightarrow\ z\bar{z}=|z|$

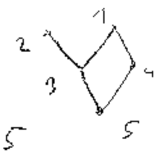
23. $\arg(e^{i\frac{\pi}{6}}-e^{-i\frac{\pi}{6}})=$ $\frac{\pi}{2}$, $|e^{i\frac{\pi}{6}}-e^{-i\frac{\pi}{6}}|=$ 1, $R_e(e^{i\frac{\pi}{6}}-e^{-i\frac{\pi}{6}})=$ 0, $I_m(e^{i\frac{\pi}{6}}-e^{-i\frac{\pi}{6}})=$ 1

24. Zaokružiti polja nad kojima je polinom t^3+t+1 svodljiv: $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$

25. Skup svih mogućih stepena nesvodljivih polinoma nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$ je { 1, 2 }

26. U prstenu polinoma, za svaki polinom p važi: ~~1)~~ ako je p jednak proizvodu dva polinoma, tada je p svodljiv ~~2)~~ ako je $p=0$, tada je on svodljiv ~~3)~~ ako je $p=0$, tada je on nesvodljiv 4) ako je p svodljiv tada je $p\ne 0$ i $dg(p)\ne 0$ i p je jednak proizvodu dva polinoma stepena većeg od 0 5) ako je $p\ne 0$ i $dg(p)\ne 0$ i p je jednak proizvodu dva polinoma stepena većeg od 0, tada je p je svodljiv

27. • Da li je $\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(3,2),(5,2),(5,1),(5,3),(5,4),(4,1),(3,1)\}$ relacija poretka skupa $A = \{1,2,3,4,5\}$: DA NE, i ako jeste, nacrtati Haseov dijagram, odrediti minimalne: 5 , maksimalne: 2, 1 , najveći: / najmanji: 5 element.



28. • Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ definisana sa $f(x) = 2^x$. Tada je: ~~1)~~ $f^{-1}(x) = x^2$, ~~2)~~ $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, 3) $f^{-1}(x) = \log_2 x$, ~~4)~~ $f^{-1}(x) = 2^{-x}$, ~~5)~~ $f^{-1}(x) = \frac{2}{x}$, 6) $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x^{-1}$, 7) $f^{-1}(x) = -\log_2 \frac{1}{x}$.

29. • Neka su $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = x^5$. Izračunati:

1) $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ 2) $g^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$ 3) $(f \circ g)(x) = 2x^5 + 1$

4) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \sqrt[5]{\frac{x-1}{2}}$ 5) $(f \circ g)^{-1}(x) = \sqrt[5]{\frac{x-1}{2}}$

30. • **Bijektivne** funkcije su: 1) $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^-$, $f(x) = -x^2$ ~~2)~~ $f : [-1,1] \to [-\pi,\pi], f(x) = \arcsin x$
3) $f : [\frac{\pi}{2},\pi] \to [-1,0]$, $f(x) = \cos x$ 4) $f : [-3,0] \to [-8,1]$, $f(x) = 1 - x^2$
5) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x^7$

31. • Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B,+,\cdot,',0,1)$:

1) $a + a' = (a \cdot a')' = 1$ 2) $(aa')' = 0'$ 3) $a + 1' = (a')'$ 4) $1 + a' = (1')'$ 5) $a + b = (a'b')'$

32. • Skup kompleksnih rešenja jednačine $x = \sqrt[3]{-8}$ je $S = \{ -2,\ 2e^{i\frac{\pi}{3}},\ 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \}$.

33. • Za kompleksni broj $z = e^{-i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$, naći:
$Re(z^2) = \frac{1}{2}$, $Im(z^2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|z| = 1$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{6}$, $\bar{z} = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z^3 = e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

34. • Napisati u eksponencijalnom obliku, odnosno obliku $\rho e^{i\varphi}, \rho \in [0,\infty), \varphi \in (-\pi,\pi]$ ako je $\sqrt[3]{\ }$ kompleksni:
$-2^{-2} = \frac{1}{4}e^{i\pi}$, $(\sqrt[3]{1})^3 = e^{0i}$, $\sqrt[3]{1^3} \in \{ e^{0i}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}} \}$, $-1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $\frac{\pi}{3} \cdot (3i) = \pi e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\frac{\pi}{3}(-i) = \frac{\pi}{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 18

1. • Za relaciju ekvivalencije $\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$ particija $\mathcal{P}$ skupa $\{1,2,3,4,5\}$ koja joj odgovara je $\mathcal{P} = \{ \{1,2\}, \{3,4\}, \{5\} \}$.

2. • Neka su funkcije $f,g : (-1,0) \to (-1,0)$ definisane sa $f(x) = -\sqrt{x+1}$ i $g(x) = x^2 - 1$. Tada je
$f^{-1}(x) = x^2 - 1$, $(f \circ g)(x) = X$, $(f \circ g)^{-1}(x) = X$, $g^{-1}(x) = -\sqrt{x+1}$, $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = X$.

3. • U svakoj Bulovoj algebri $(B,+,\cdot,',0,1)$ tačno je: 1) $ab = 1 \Rightarrow a = 1 \wedge b = 1$ 2) $(a')' = a \cdot 1$
~~3)~~ $a + a' = 1'$ ~~4)~~ $a \cdot 1' = a$ 5) $1 + a = 0'$ ~~6)~~ $a + b = (a' + b')'$

4. • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koja su asocijativni grupoidi sa neutralnim elementom:
1) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\},\cdot)$ 2) $(\mathbb{R},\cdot)$ ~~3)~~ $(\mathbb{N},+)$ 4) $(\mathbb{N} \cup \{0\},+)$ 5) $(\{1,0,-1\},\cdot)$

5. • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakom polju $(F,+,\cdot)$:
~~1)~~ $a + bc = (a+b)(a+c)$ ~~2)~~ $(F,\cdot)$ je grupa 3) $(F,+)$ je komutativna grupa ~~4)~~ $(F \setminus \{0\},+)$ je grupa
5) operacija $\cdot$ je komutativna

6. • Za kompleksne brojeve $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ i $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ izračunati: $|\frac{z_1}{z_2}| = 1$ $\arg\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\pi}{3}$
$z_1 + z_2 = 2$ $z_1 \cdot z_2 = 4$ $(\frac{z_1}{z_2})^3 = 1$ $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{3}$ $|z_2| = 2$

7. • Ako za polinome p i q važi $p + q \neq 0$, $dg(p) = 2$ i $dg(q) = 2$, tada je
$dg(p^2) \in \{ 4 \}$, $dg(p+q) \in \{ 0, 1, 2 \}$

* *

8. • Zaokružiti brojeve ispred sirjektivnih funkcija:
1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - x$ ~~2)~~ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ 3) $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, $f(x) = x^2$
4) $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^2$ 5) $f : (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to (-\infty,\infty)$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ ~~6)~~ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$

9. Za svaku injektivnu funkciju $f : A \to B$ postoji skup $C \subseteq B$ takv da je funkcija $f : A \to C$ bijektivna?
1) uvek 2) nikada 3) samo pod još nekim uslovima

10. Neka je $f : S \to S$ i $(\forall x \in S)\ f(f(x)) = x$. Tada je $f : S \to S$: 1) injektivna 2) sirjektivna 3) bijektivna

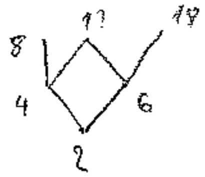
11. Neka su ρ_i relacije skupa $\mathbb{R}$: $\rho_1 = \{(2,5),(5,7),(2,7)\}$, $\rho_2 = \{(x,y) | x^2 + y^2 = 1 \wedge x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$, $\rho_3 = \{(x^2, x) | x \in \mathbb{R}\}$, $\rho_4 = \{(x,y) | x^2 = y^2 \wedge x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$, $\rho_5 = \{(|x|, x) | x \in \mathbb{R}\}$, $\rho_6 = \{(1,2),(2,1),(1,3)\}$.

Iza oznake svake od tih relacija zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost, S- simetričnost, A- antisimetričnost, T- tranzitivnost, F- funkcija.

ρ_1 : R S A T F ρ_2 : R S A T F ρ_3 : R S A T F ρ_4 : R S A T F ρ_5 : R S A T F ρ_6 : R S A T F

12. Ispitati da li relacija „deli" skupa $A = \{2,4,6,12,8,18\}$ jeste relacija poretka: DA NE (zaokruži), i ako jeste, nacrtati Haseov dijagram, i naspisati

minimalne el. { 2 }
maksimalne el. { 8, 12, 18 }
najveći el. { / }
najmanji el. { 2 }



13. U Bulovoj algebri $B = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ važi: 1) $x + y = x'y'$ 2) $xy = (x' + y')'$ 3) $xy = 1 \Rightarrow x + y = 1$ 4) $x + y = 1 \Leftrightarrow xy = 1$ 5) $x = y \Rightarrow x' = y'$ 6) $x' = y' \Rightarrow x = y$ 7) $f(x) = x' \Rightarrow f : B \xrightarrow[\text{na}]{} B$

14. Za funkciju $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ grupe $((0,\infty), \cdot)$ u grupu $(\mathbb{R}, +)$, definisanu sa $f(x) = -\log_3 x$ važi da je:
1) homomorfizam 2) izomrfizam 3) f^{-1} homomorfizam 4) f^{-1} funkcija 5) f^{-1} izomorfizam

15. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakom prstenu $(R, +, \cdot)$:
1) $(b + c)a = ca + ba$ 2) $(b + c)a = ca + ab$ 3) $(R, +)$ je grupa 4) $(R, \cdot)$ je asocijativni grpoid 5) $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ 6) operacija $\cdot$ je distributivna prema operaciji $+$ 7) $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ 8) $a \cdot 0 = 0$ 9) $a \cdot (-a) = -a^2$

16. Neka je $g : [-1, 0) \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, inverzna funkcija je
$g^{-1}(x) = -\sqrt{1-x^2}$, $g^{-1} : A \to \mathbb{R}$, $A = (-1, 0]$

17. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ definisana sa $f(x) = \frac{2x}{x-2}$. Tada je: **a)** $f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-2}$

18. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definisana sa $f(x) = 2x^{-5}$. Tada je:
$f^{-1}(x) = \sqrt[5]{\frac{2}{x}}$, $(f \circ f)(x) = \frac{x^{25}}{16}$, $f(x+1) = 2(x+1)^5$, $f(\frac{1}{x}) = 2x^5$.

19. Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f : A \to B$ definisana sa $f(x) = \arccos(x + 1)$. Tada je $A = [-2, 0]$, $f(\frac{\sqrt{2}-2}{2}) = \frac{\pi}{4}$, $f(-\frac{3}{2}) = \frac{2\pi}{3}$ i $B = [0, \pi]$, a $f : A \to B$ je: **a)** bijektivna **b)** sirjektivna ali ne injektivna **g)** injektivna ali ne sirjektivna **d)** niti injektivna niti sirjektivna

20. Napisati 4 beskonačna prstena: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

21. U polju $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$, skup rešenja po $x \in \mathbb{Z}_3$ jednačine $x^2 + 2(x^{-1} + 2x + 1) = 0$ je $\{1, 2\}$

22. Zaokružiti brojeve koji su koreni odgovarajućih jednačina:
$z \in \{0, 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\} \Rightarrow z^2 = \bar{z}$
$z \in \{0, 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\} \Rightarrow z^3 = |z|$
$z \in \{0, 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\} \Rightarrow z^4 = z$
$z \in \{0, 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\} \Rightarrow z^3 = 1.$

23. Ako je $z \neq 0$ tada je: 1) $ze^{-2i \arg z} = \bar{z}$ 2) $\arg z = \arg \bar{z}$ 3) $|z| = |\bar{z}|$ 4) $z|z|^{-2} = \bar{z}^{-1}$ 5) $|\arg z| = |\arg \bar{z}|$

24. $\arg(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}) = \frac{\pi}{2}$, $|e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}| = \sqrt{2}$, $R_e(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}) = 0$, $I_m(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}) = \sqrt{2}$.

25. Zaokružiti polja nad kojima je polinom $t^2 + t + 1$ **nesvodljiv**: $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$

16.
Skup svih mogućih stepena nesvodljivih i svodljivih polinoma nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$ je $\{\ 2\ \}$

17.
U prstenu polinoma, za svaki polinom p važi: ~~1)~~ ako je p jednak proizvodu dva polinoma, tada je p svodljiv ~~2)~~ ako je $p = 0$, tada je on svodljiv ~~3)~~ ako je $p = 0$, tada je on nesvodljiv 4) ako je p svodljiv tada je $p \neq 0$ i $dg(p) \neq 0$ i p je jednak proizvodu dva polinoma stepena većeg od 0 5) ako je p jednak proizvodu dva polinoma stepena većeg od 0, tada je p svodljiv

18.
Neka su $A = \{1,2,3\}$ i $B = \{2,3,4\}$ i neka je $f_1 = \{(1,3),(2,4)\}$, $f_2 = \{(1,3),(3,4),(2,3)\}$, $f_3 = \{(3,3),(2,2),(1,4)\}$, $f_4 = \{(3,3),(2,3),(1,3)\}$. Popuniti obavezno sa **da** ili **ne**:

$\backslash$	f_i je funkcija	$f_i : A \to B$	$f_i : A \overset{1-1}{\to} B$	$f_i : A \overset{\text{na}}{\to} B$	$f : A \underset{\text{na}}{\overset{1-1}{\to}} B$	f_i je rastuća funkcija
f_1	da	ne	ne	ne	ne	da
f_2	da	da	ne	ne	ne	ne
f_3	da	da	da	da	da	ne
f_4	da	da	ne	ne	ne	ne

19.
Neka je $A = \{1,2,3\}$ i $B = \{1,2,3,4\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija:

$\left|\{f | f : A \longrightarrow B\}\right| = 64$ $\left|\{f | f : A \overset{1-1}{\longrightarrow} B\}\right| = 24$ $\left|\{f | f : A \longrightarrow B \wedge f \nearrow\}\right| = 4$ $\left|\{f | f : B \overset{na}{\longrightarrow} B\}\right| = 24$

$\left|\{f | f : B \longrightarrow A\}\right| = 81$ $\left|\{f | f : A \overset{1-1}{\longrightarrow} A\}\right| = 6$ $\left|\{f | f : B \longrightarrow A \wedge f \nearrow\}\right| = 15$ $\left|\{f | f : A \overset{na}{\longrightarrow} A\}\right| = 6$

20.
Neka je f funkcija definisana sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$. Tada je

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}, \quad g = f \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad h = g \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$$

a) $(\{f,g,h\},\circ)$ je grupoid; b) $(\{f,g,h\},\circ)$ je asocijativan grupoid; c) $(\{f,g,h\},\circ)$ je komutativan grupoid; d) $(\{f,g,h\},\circ)$ je asocijativan grupoid sa neutralnim elementom; e) $(\{f,g,h\},\circ)$ je grupa.

21.
Skup kompleksnih rešenja jednačine $x = \sqrt[4]{-4}$ je $S = \{\ \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\ \}$.

22.
Za kompleksni broj $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$, naći:
$Re(z^2) = \frac{\sqrt{3}+2}{8}$, $Im(z^2) = \frac{2+\sqrt{3}}{8}$, $|z| = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, $\arg(z) = \frac{\pi}{12}$, $\overline{z} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} e^{-i\frac{\pi}{12}}$, $z^3 = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^3}{64} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$

23.
Napisati u eksponencijalnom obliku, odnosno obliku $\rho e^{i\varphi}, \rho \in [0,\infty), \varphi \in (-\pi,\pi]$ ako je $\sqrt[3]{\ }$ kompleksni:
$-2^{-2} = \frac{1}{4} e^{i\pi}$, $(\sqrt[3]{1})^3 = e^{i \cdot 0}$, $\sqrt[3]{1^3} \in \{ e^{i\cdot 0}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}} \}$, $-1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot (3i) = 3\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $e^{i\frac{\pi}{3}}(-i) = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 19

1.
Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$ je: 1) sirjektivna ali ne injektivna 2) injektivna ali ne sirjektivna 3) niti injektivna niti sirjektivna 4) bijektivna

2.
Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^9$ je: 1) sirjektivna ali ne injektivna 2) injektivna ali ne sirjektivna 3) niti injektivna niti sirjektivna 4) bijektivna

3.
U Bulovoj algebri su tačna tvrđenja

~~1)~~ $a + ab = a \cdot 1'$ 2) $1 + 1 = 1$ 3) $1 \cdot 0' = 1$ 4) $a + b = (a'b')'$ ~~5)~~ $a' \cdot b' = (a' + b')'$

4.
Od sledećih struktura, grupe su

1) $(\mathbb{Z},+)$ ~~2)~~ $(\{-1,0,1\},+)$ 3) $(\{-1,1\},\cdot)$ ~~4)~~ $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\},\cdot)$ 5) $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\},\cdot)$ ~~6)~~ $(\{-1,0,1\},\cdot)$

5.
Neka su $f : (-\infty,0) \to (-\infty,0)$ i $g : (-\infty,0) \to (-\infty,0)$ definisane sa $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = -\sqrt{-x}$. Izračunati:

1) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ 2) $g^{-1}(x) = -x^2$ 3) $(f \circ g)(x) = -\frac{1}{\sqrt{-x}}$
4) $(g \circ f)(x) = -\sqrt{-\frac{1}{x}}$ 5) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = -\frac{1}{x^2}$ 6) $(f \circ g)^{-1}(x) = -\frac{1}{x^2}$

6.
U Bulovoj algebri $(B,+,\cdot,',0,1)$ tačna su tvrđenja

1) $a + a' = (a \cdot a')' = 1$ 2) $(aa')' = 0'$ 3) $a + 1' = (a')'$ 4) $1 + a' = (1')'$ 5) $a + b = (a'b')'$

7. NZD(P,Q) za polinome $P=(t-3)^4(t+7)^2(t-1)^5(t+13)^3$ i $Q=(t-3)^2(t-15)(t-1)^7(t+13)^5$ je polinom
a) $(t-3)^4(t-1)^7(t+13)^5$ b) $(t-3)(t-1)(t+13)$ c) $(t-3)^4(t+7)^2(t-1)^7(t+13)^5(t-15)$
d) $(t-3)(t+7)(t-1)(t+13)(t-15)$ e) $(t-3)^2(t-1)^5(t+13)^3$

8. Skup kompleksnih rešenja jednačine $x=\sqrt[4]{1}$ je $S=\{$ 1, i, −1, −i $\}$.

9. Za kompleksni broj $z=\pi$, naći:
$Re(z^2)=$ π^2 , $Im(z^2)=$ 0 , $|z|=$ π , $\arg(z)=$ 0 , $\overline{z}=$ π , $z^3=$ π^3 .

10. Za nenula polinome $p(x)=a^2x^2+b$ i $q(x)=c^2x^2+dx$ je
$dg(p)\in\{$0, 2$\}$, $dg(p\cdot q)\in\{$1, 2, 3, 4$\}$ $dg(p+q)\in\{$1, 2$\}$

* *

11. Neka su funkcije $f,g:(-1,0)\to(-1,0)$ definisane sa $f(x)=-\sqrt{x+1}$ i $g(x)=x^2-1$. Tada je
$f^{-1}(x)=$ x^2-1 , $(f\circ g)(x)=$ x , $(f\circ g)^{-1}(x)=$ x , $g^{-1}(x)=$ $-\sqrt{x+1}$, $(g^{-1}\circ f^{-1})(x)=$ x

12. Broj n relacija skupa $A=\{1,2,3\}$ koje su refleksivne, simetrične, antisimetrične, tranzitivne i funkcije je $n=$ 1

13. Zaokružiti brojeve ispred injektivnih funkcija: 1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3-x$
2) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x$ 3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-x$ 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$
5) $f:[0,\infty)\to[0,\infty),\ f(x)=x^2$ 6) $f:(0,\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2}\}\to(-\infty,\infty),\ f(x)=\operatorname{tg}x$
7) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x$

14. Za svaku injektivnu funkciju $f:A\to B$ postoji skup $C\subseteq B$ takv da je funkcija $f:A\to C$ bijektivna?
1) uvek 2) nikada 3) samo pod još nekim uslovima

15. Za svaku sirjektivnu funkciju $f:A\to B$ postoji skup $C\subseteq A$ takv da je funkcija $f:C\to B$ bijektivna?
1) uvek 2) nikada 3) samo pod još nekim uslovima

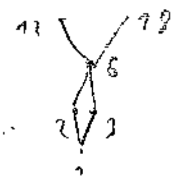
16. Neka je funkcija $f:A\to A$ injektivna. Tada: 1) f je sirjektivna 2) f je bijektivna 3) postoji f^{-1}

17. Neka je skup A konačan i $f:A\overset{1-1}{\to}A$. Tada: 1) f je sirjektivna 2) f je bijektivna 3) postoji f^{-1}

18. Neka je $f:S\to S$ i $(\forall x\in S)\ f(f(x))=x$. Tada je $f:S\to S$: 1) injektivna 2) sirjektivna 3) bijektivna

19. Napisati bar jednu funkciju $f:S\to S$ za koju važi da je $(\forall x\in S)\ f(f(x))=x$ (involucija tj. reflektor, odnosno $f\circ f=i_d$ ili $f=f^{-1}$), ako je $S=\{1,2,3,4\}$. Napomena: i_d je identička funkcija, odnosno $(\forall x\in S)\ i_d(x)=x$. $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$. Koliko ih ima ukupno? 10

20. Ispitati da li relacija „deli" skupa $A=\{1,2,3,6,12,18\}$ jeste relacija poretka: DA NE (zaokruži), i ako jeste, nacrtati Haseov dijagram, i naspisati
minimalne el. $\{$ 1 $\}$
maksimalne el. $\{$ 12, 18 $\}$
najveći el. $\{$ / $\}$
najmanji el. $\{$ 1 $\}$



21. U Bulovoj algebri $B=(B,+,\cdot,',0,1)$ važi: 1) $x+y=x'y'$ 2) $xy=(x'+y')'$ 3) $xy=1\Rightarrow x+y=1$
4) $x+y=1\Leftrightarrow xy=1$ 5) $x=y\Rightarrow x'=y'$ 6) $x'=y'\Rightarrow x=y$ 7) $f(x)=x'\Rightarrow f:B\underset{\text{na}}{\to}B$

22. Za funkciju $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ grupe $(\mathbb{R},+)$ u grupu $((0,\infty),\cdot)$, definisanu sa $f(x)=e^{-x}$ važi da je:
1) homomorfizam 2) izomrfizam 3) f^{-1} homomorfizam 4) f^{-1} funkcija 5) f^{-1} izomorfizam

23. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakom polju $(R,+,\cdot)$: 1) $(b+c)a=ab+ac$
2) $(b+c)a=ca+ba$ 3) $(R,+)$ je grupa 4) $(R,\cdot)$ je asocijativni grupoid 5) $ab=0\Leftrightarrow a=0\vee b=0$
6) operacija + je distributivna prema operaciji $\cdot$ 7) $a\neq0\wedge b\neq0\Rightarrow ab\neq0$ 8) $a\cdot0=a$
9) $a\cdot(-a)=-a^2$

24. Neka je $g : [-1, 0) \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\sqrt{4-4x^2}$, inverzna funkcija je
$g^{-1}(x) = \underline{-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}$, $g^{-1} : A \to \mathbb{R}$, $A = \underline{(-2, 0]}$

25. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ definisana sa $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$. Tada je: **a)** $f^{-1}(x) =$ $\frac{1+x}{x-2}$ greška

26. Napisati 4 beskonačna prstena: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

27. U polju $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$, skup rešenja po $x \in \mathbb{Z}_5$ jednačine $x^2 + 1 = 0$ je $\{ 2, 3 \}$

28. Ako je $z \neq 0$ tada je: 1) $ze^{-2i\arg z} = \overline{z}$ 2) $\arg z = \arg \overline{z}$ 3) $|z| = |\overline{z}|$ 4) $z|z|^{-2} = \overline{z}^{\,-1}$ 5) $|\arg z| = |\arg \overline{z}|$

29. $\arg(e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}) = \underline{\frac{\pi}{2}}$, $|e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}| = \underline{1}$, $R_e(e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}) = \underline{0}$, $I_m(e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}) = \underline{1}$.

30. Zaokružiti polja nad kojima je polinom $t^2 + 1$ **nesvodljiv**: $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$

31. Skup svih mogućih stepena nesvodljivih polinoma nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ je $\{ 1 \}$

32. Neka su $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{2, 3, 4\}$ i neka je $f_1 = \{(1, 3), (2, 4)\}$, $f_2 = \{(1, 3), (3, 4), (2, 3)\}$, $f_3 = \{(3, 3), (2, 2), (1, 4)\}$, $f_4 = \{(3, 3), (2, 3), (1, 3)\}$. Popuniti obavezno sa **da** ili **ne**:

$\backslash$	f_i je funkcija	$f_i : A \to B$	$f_i : A \overset{1-1}{\to} B$	$f_i : A \overset{\text{na}}{\to} B$	$f_i : A \underset{\text{na}}{\overset{1-1}{\to}} B$	f_i je rastuća funkcija
f_1	da	ne	ne	ne	ne	da
f_2	da	ne	ne	ne	ne	ne
f_3	da	da	da	da	da	ne
f_4	da	da	ne	ne	ne	ne

33. Neka je $A = \{1\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija:

$\left|\{f | f : A \longrightarrow B\}\right| = \underline{4}$ $\left|\{f | f : A \overset{1-1}{\longrightarrow} B\}\right| = \underline{4}$ $\left|\{f | f : A \longrightarrow B \wedge f \nearrow\}\right| = \underline{4}$ $\left|\{f | f : B \overset{na}{\longrightarrow} B\}\right| = \underline{24}$

$\left|\{f | f : B \longrightarrow A\}\right| = \underline{1}$ $\left|\{f | f : A \overset{1-1}{\longrightarrow} A\}\right| = \underline{1}$ $\left|\{f | f : B \longrightarrow A \wedge f \nearrow\}\right| = \underline{1}$ $\left|\{f | f : A \overset{na}{\longrightarrow} A\}\right| = \underline{1}$

34. Skup kompleksnih rešenja jednačine $x = \sqrt[4]{0}$ je $S = \{ 0 \}$.

35. Za kompleksni broj $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$, naći:
$Re(z^2) = \frac{3}{2}$, $Im(z^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $|z| = \sqrt{3}$, $\arg(z) = \frac{\pi}{6}$, $\overline{z} = \sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $z^3 = 3\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}}$.

36. Napisati u eksponencijalnom obliku, odnosno obliku $\rho e^{i\varphi}, \rho \in [0, \infty), \varphi \in (-\pi, \pi]$ ako je $\sqrt[3]{\ }$ kompleksni:
$-2^3 = 8e^{i\pi}$, $(\sqrt[3]{1})^3 = e^{i\cdot 0}$, $\sqrt[3]{1^3} \in \{ e^{i\cdot 0}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}} \}$, $-2 - 2i = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $\pi \cdot i = \pi e^{i\frac{\pi}{2}}$, $-\pi \cdot i = \pi e^{-i\frac{\pi}{2}}$

18:15

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 1

1. Za ravan $\alpha: \ -x = 2^2$ napisati jedan njen vektor normale $\vec{n}_\alpha = (-1, 0, 0)$ i koordinate jedne njene tačke $A(-4, 0, 0)$

2. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linernih jednačina $x - y = 1 \wedge x - y = a$ nad poljem realnih brojeva je: **1)** neodređen: $a = 1$ **2)** određen: nikad **3)** kontradiktoran: $a \neq 1$

3. Za vektore $\vec{a} = (-1, 0, 1)$ i $\vec{b} = (2, 2, -1)$ izračunati: **1)** $|\vec{a}| =$ $\sqrt{2}$ **2)** $|\vec{b}| =$ 3
3) $\vec{a} - 2\vec{b} =$ $(-5, -4, 3)$ **4)** $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ -3 **5)** $\vec{a} \times \vec{b} =$ $(-2, -1, -2)$ **6)** $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) =$ $\frac{3\pi}{4}$

4. Koje od sledećih uređenih n-torki su generatorne za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$: **1)** $\big((0,0,-1),(0,4,0),(9,0,0)\big)$
2) $\big((1,0,0),(0,-1,0)\big)$ **3)** $\big((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,2,3)\big)$ **4)** $\big((1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)\big)$

5. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [illegible] \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2$ $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$

6. Matrice linearnih transformacija $f(x) = (2x, x, x)$, $g(x,y,z) = (x, x, 0)$ $h(x,y) = x$ i $s(x,y,z) = x + y + z$ su:
$M_f = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $M_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ $M_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$
3	0	1	1	1	2	1	1	

****

8. Odrediti sve vrednosti realnog parametara a za koje je sistem linearnih jednačina
$$\begin{aligned} ax - ay &= a \\ x - y &= a \end{aligned}$$
1) kontradiktoran: $a \neq 0 \wedge a \neq 1$
2) određen: —
3) 1 puta neodređen: $a = 0 \vee a = 1$
4) 2 puta neodređen: —

9. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži BC i CD. (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{PQ}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{PQ} =$ $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$

10. Izraziti vektor $\vec{x} = (4,4,4)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1,0,1)$, $\vec{b} = (0,1,1)$ i $\vec{c} = (1,1,0)$:
$\vec{x} = 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

11. U vektorskom prostoru slobodnih vektora, petorka vektora (a,b,c,d,e) je:
1) uvek zavisna **2)** nikad baza, **3)** može ali ne mora da bude generatorna.

12. U vektorskom prostoru slobodnih vektora, par vektora (a,b) je:
1) uvek nezavisan, **2)** uvek zavisan, **3)** nekad nezavisan a nekad zavisan.

13. Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$? **1)** $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ **2)** $\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$ **3)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

14. Ako je matrica A' dobijena od matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ elementarnim transformacijama, tada je:
1) $|det(A)| = \lambda |det(A')|$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$ **2)** $\mathbf{rang}(A) = \mathbf{rang}(A')$ **3)** $A \cdot A' = I$ **4)** $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$

15. Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje komutativne matrice A, B, C reda 2 i svaki skalar λ:
1) $\det(AB) = \det(A) + \det(B)$ **2)** $(B + C)A = BA + CA$ **3)** $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$
4) $\det(AB) = \det(B) det(A)$ **5)** $(AB)^2 = A^2 B^2$ **6)** $\mathbf{rang}(AB) = \mathbf{rang}(A)\mathbf{rang}(B)$
7) $A(B + C) = BA + CA$ **8)** $A(BC) = (AB)C$

16.

Koja od sledećih tvrdnji je tačna za svaka dva slobodna vektora $\vec{x}$ i $\vec{a}$:
a) $(\vec{a} - \mathbf{pr}_{\vec{x}}\vec{a}) \perp \vec{x}$ b) $(\vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x}) \perp \vec{a}$ c) $(\vec{a} - \mathbf{pr}_{\vec{x}}\vec{a}) \parallel \vec{x}$ d) $(\vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x}) \parallel \vec{a}$ e) ništa od prethodnog

17.

Neka su a, b i c proizvoljni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + b + c, b + c, b - c)$ je:
a) uvek zavisna b) uvek nezavisna c) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c.

18.

Neka su a, b i c proizvoljni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + c, a + b, a - b + 2c)$ je:
a) uvek zavisna b) uvek nezavisna c) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c.

19.

Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ su kolinearni ako i samo ako: 1) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
3) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ 4) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$ 5) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$ 6) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni
7) $(\exists\lambda \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \lambda\vec{b}$ 8) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 9) $(\exists\lambda \in \mathbb{R})\ (\vec{a} = \lambda\vec{b} \vee \lambda\vec{a} = \vec{b})$ 10) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \wedge \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

20

Neka je $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ proizvoljni vektor i neka je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{m} \cdot \vec{x}$, gde je $\vec{m} = m_1\vec{i} + m_2\vec{j} + m_3\vec{k}$ dati slobodni vektor različit od nule. Funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je:
1) linearna transformacija 2) injektivna 3) sirjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

21

Za svaku linearnu transformaciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i svako $x, y, \lambda, v \in \mathbb{R}$ tačno je: 1) $x = 0 \Leftarrow f(x) = 0$
2) $f(0) = 0$ 3) $f(2xy) = f(x)f(2y)$ 4) $f(xy) = x\,f(y)$ 5) $f(x) = ax + 1$ za neko $a \in \mathbb{R}$
6) $f(2\lambda + v) = 2f(\lambda) + f(v)$

22.

Neka je $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}) = (x_1, x_1, x_1)$ tj. $\varphi(\vec{x}) = (\vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{i})$, gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$
23 1) linearna transformacija 2) injektivna 3) sirjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

Neka je $\mathcal{M}$ skup svih kvadratnih matrica reda 3 čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\det : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2) $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ 3) $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ 4) $\det : \mathcal{M} \underset{na}{\xrightarrow{1-1}} \mathbb{R}$ 5) det je linearna

24.

Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(2, 3)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ 2) $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$ 3) $\text{rang} : \mathcal{M} \overset{na}{\to} \mathbb{N} \cup \{0\}$ 4) $\text{rang} : \mathcal{M} \overset{1-1}{\to} \mathbb{N} \cup \{0\}$
5) $\text{rang} : \mathcal{M} \overset{na}{\to} \{0, 1, 2\}$

25.

Ako je $f(0) = 0$, tada f: 1) jeste linearna transformacija 2) nije linearna transformacija 3) može a ne mora biti linearna transformacija 4) jeste linearna transformacija ako preslikava vektorski prostor u vektorski prostor

26.

Neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ generatorna u prostoru V, $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ nezavisna za prostor V i $\dim V = k$. Tada je
1) $m \leq k \leq n$ 2) $n \leq k \leq m$ 3) $n \leq m \leq k$ 4) $k \leq m \leq n$ 5) $k \leq n \leq m$ 6) $m \leq n \leq k$

27.

Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke A, $|\overrightarrow{AB}| = 2$. Odrediti $\vec{r}_B$ u zavisnosti od $\vec{r}_A$ i $\vec{a}$, ako je vektor $\vec{a}$ istog pravca kao i vektor $\overrightarrow{AB}$, a suprotnog smera od vektora $\overrightarrow{AB}$. $\vec{r}_B = \vec{r}_A - \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot 2$

28.

Neka je $k-$ torka vektora $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ nezavisna i neka je $(d_1, d_2, \ldots, d_\ell)$ zavisna $\ell-$ torka vektora. Tada je: 1) $k \leq \ell$ 2) $\ell \leq k$ 3) $k = \ell$ 4) $\ell < k$ 5) $\ell > k$ 6) ništa od prethodnog

29.

Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju: 1) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$, **dim** $U =$ 2
2) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + x^2 = 0\}$ **dim** $U =$ 2
3) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot 0 = 0\}$ **dim**$U =$ 3
4) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z + 0\}$ **dim** $U =$ 2

30.

Neka je $a = (0, 2, 2)$, $b = (0, -3, 3)$, $c = (0, 1, -1)$, $d = (0, -1, 1)$, $e = (1, 0, 0)$, $f = (0, 1, 0)$, $g = (0, 1, 2)$. Odrediti dimenzije sledećih potprostora V vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$:

1) $V = L(a, b, c) \Rightarrow dim(V) =$ 2 **2)** $V = L(a) \Rightarrow dim(V) =$ 1

3) $V = L(a, b) \Rightarrow dim(V) =$ 2 **4)** $V = L(b, c, d) \Rightarrow dim(V) =$ 1

5) $V = L(b, c, e) \Rightarrow dim(V) =$ 2 , **6)** $V = L(a, g) \Rightarrow dim(V) =$ 2

7) $V = L(e, f, g) \Rightarrow dim(V) =$ 3

31. Izračunati bar jedan nenula vektor $\vec{n}$ koji je normalan i na vektor $\vec{i}+\vec{j}$ i na vektor $\vec{k}$.
$\vec{n} =$ (1, -1, 0)

32. Ako je A kvadratna matrica reda n, tada je: 1) $\det A = 0 \Rightarrow \mathbf{rang}\, A = 0$
2) $\det A = 0 \Leftrightarrow \mathbf{rang}\, A \leq n-1$, 3) $\det A = 0 \Rightarrow \mathbf{rang}\, A = n$ 4) $\mathbf{rang}\, A = n \Rightarrow \det A \neq 0$,
5) $\mathbf{rang}\, A = n \Leftarrow \det A \neq 0$. 6) $\mathbf{rang}\, A = n \Leftarrow \exists A^{-1}$

33. Neka su $\mathbf{a_1} = (a_{11}, \ldots, a_{n1})$, $\mathbf{a_2} = (a_{12}, \ldots, a_{n2}), \ldots, \mathbf{a_n} = (a_{1n}, \ldots, a_{nn})$ vektori kolne matrice $A = A_{nn} = [a_{i,j}]_{nn}$, neka je $V = \text{Lin}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots \mathbf{a_n}) = \{\alpha_1\mathbf{a_1} + \alpha_2\mathbf{a_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{a_n} | \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$ i neka je $\mathbf{a_i}^2$ skalarni proizvod vektora $\mathbf{a_i}$ sa samim sobom. Tada je: 1) $\mathbf{a_1} = \ldots \mathbf{a_n} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1}^2 + \ldots + \mathbf{a_n}^2 = 0$
2) $\dim V = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{rang}\, A = 0$ 3) $\dim V = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1} = \ldots \mathbf{a_n} = 0$ 4) $\dim V = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1}^2 + \ldots + \mathbf{a_n}^2 = 0$
5) $\mathbf{rang}\, A = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1} = \ldots \mathbf{a_n} = 0$ 6) $\mathbf{rang}\, A = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1}^2 + \ldots + \mathbf{a_n}^2 = 0$

34. Linearne transformacije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su uvek oblika:
$f(x,y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y, \phi x + \psi y)$ $g(x,y) = (\alpha x + \beta y)$ $h(x) = \alpha x$

35. **Postoji** linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ za koju važi da je: 1) sirjektivna
~~2) injektivna~~ ~~3) bijektivna~~ ~~4) izomorfizam~~ ~~5) ništa od prethodnog~~

36. **Postoji** linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ za koju važi da je: 1) injektivna
~~2) sirjektivna~~ 3) bijektivna ~~4) izomorfizam~~ ~~5) ništa od prethodnog.~~

37. Za **svaki** vektorsk prostor V i svaku sirjektivnu linearna transformaciju $f : V \to V$ sledi da je transformacija f: 1) injektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam ~~4) ništa od prethodnog.~~

38. Za **svaki** vektorsk prostor V i svaku injektivnu linearna transformaciju $f : V \to V$ sledi da je transformacija f: 1) sirjektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam ~~4) ništa od prethodnog~~

39. Za **svaki** izomorfizam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i njegovu matricu A važi: 1) f je injektivnaq 2) postaoji A^{-1} 3) $n = m$ 4) f je sirjektivna 5) f je bijektivna 6) A je regularna 7) $\det A \neq 0$ ~~8) ništa od prethodnog~~

40. Za **svaki** vektorski prostor V postoji homogen sistem linearnih jednačina, čiji skupsvih rešenja je vektorski prostor izomorfan prostoru V. Zakruži tačan odgovor DA NE

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 2

1. Neka tačke $P(1,0,0), Q(0,1,0)$ i $R(0,0,1)$ pripadaju ravni α. Tada je $\overrightarrow{PQ} = (-1, 1, 0)$ i $\overrightarrow{PR} = (-1, 0, 1)$. Napisati bar jedan vektor $\vec{n}$ normalan na α, $\vec{n} = (1, 1, 1)$. Ako je $(A, B, C, D) = (1, 1, 1, -1)$, tada je $Ax + By + Cz + D = 0$ jednačina ravni α. Napisati bar jednu tačku $M \in \alpha$ i $M \notin \{P, Q, R\}$, $M(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

2. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linernih jednačina $x - y = 1 \wedge ax - y = 1$ nad poljem realnih brojeva je: 1) neodređen: $a = 1$ 2) određen: $a \neq 1$ 3) kontradiktoran: /

3. Za vektore $\vec{a} = (-1,1,0)$ i $\vec{b} = (-1,0,1)$ izračunati: 1) $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ 2) $|\vec{b}| = \sqrt{2}$
3) $\vec{a} - 2\vec{b} = (1, 1, -2)$ 4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ 5) $\vec{a} \times \vec{b} = (1, 1, 1)$ 6) $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$

4. Koje od sledećih uređenih n-torki **nisu** generatorne za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$:
~~1)~~ $\big((0,0,-1),(0,4,0),(9,0,0)\big)$ 2) $\big((1,0,0),(0,-1,0)\big)$ ~~3)~~ $\big((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,2,3)\big)$
4) $\big((1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)\big)$

5. $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -729$ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

6. Matrice linearnih transformacija $f(x,y) = (2x, x, y)$, $g(x,y,z) = (x,z)$, $h(x,y) = (x,y)$ i $s(x,y,z) = z$ su:
$M_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

3 2 2 2 1 2 1 (1

* *

8. Odrediti sve vrednosti realnog parametara a za koje je sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & y & = & a-4 \\ -x & + & ay & = & a+9 \end{array}$$

1) kontradiktoran:
2) određen: $a \in \mathbb{R}$
3) 1 puta neodređen:
4) 2 puta neodređen:

9. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži BC i CD. (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{PQ}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{PQ} = \vec{a} - \frac{\vec{b}}{2}$

10. Napisati $\vec{x} = (1,2,3)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (0,0,1)$, $\vec{b} = (0,1,1)$ i $\vec{c} = (1,1,1)$: $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

11. Naći vektor položaja projekcije A' tačke $A(1,2,3)$ na pravu p određenu sa $x = 8 \wedge z = 9$: $\vec{r}_{A'} = (8, 2, 9)$

12. Naći vektor položaja $\vec{r}_T$ tačke T, prodora prave $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$ kroz ravan $\alpha: x+y+z=0$.

$\vec{r}_T = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

13. Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$? 1) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

14. Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje komutativne matrice A, B, C reda 3 i svaki skalar λ:
1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 2) $(B+C)A = BA + CA$ 3) $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$
4) $\det(AB) = \det(B)det(A)$ 5) $(AB)^2 = A^2B^2$ 6) $\mathbf{rang}(AB) = \mathbf{rang}(BA)$
7) $A(B+C) = BA + CA$ 8) $A(BC) = (AB)C$

15. Neka su a, b i c proizvoljni **zavisni** vektori. Tada uređena trojka vektora $(a+b+c, b+c, b-c)$ je:
1) uvek zavisna 2) uvek nezavisna 3) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbora vektora a, b, c.

16. Neka su a, b i c proizvoljni **nezavisni** vektori. Tada uređena trojka vektora $(a+c, a+b, -a+c-2b)$ je:
1) uvek zavisna 2) uvek nezavisna 3) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbora vektora a, b, c.

17. **Ako su** $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ **kolinearni**, tada važi: 1) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
3) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ 4) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$ 5) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$ 6) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni
7) $(\exists\lambda \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \lambda\vec{b}$ 8) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 9) $(\exists\lambda \in \mathbb{R})(\vec{a} = \lambda\vec{b} \ \vee\ \lambda\vec{a} = \vec{b})$ 10) $(\exists\alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \ \wedge\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

18. **Ako su** $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ **nekomplanarni** tada važi:
1) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ 2) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ 3) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$

4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ 5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ 6) $(\exists\alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$

7) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \ \wedge\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ 8) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.

19. Neka je $\varphi: V \to \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$ gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi: V \to \mathbb{R}^3$
1) linearna transformacija 2) injektivna 3) sirjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

20. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(3,5)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\mathsf{rang}: \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ 2) $\mathsf{rang}: \mathcal{M} \to \mathbb{N}$ 3) $\mathsf{rang}: \mathcal{M} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ 4) $\mathsf{rang}: \mathcal{M} \overset{1-1}{\to} \mathbb{N} \cup \{0\}$
5) $\mathsf{rang}: \mathcal{M} \overset{na}{\to} \{0, 1, 2, 3\}$

21. Ako je $f(0) = 0$, tada f: 1) jeste linearna transformacija 2) nije linearna transformacija 3) može a ne mora biti linearna transformacija 4) jeste linearna transformacija ako preslikava vektorski prostor u vektorski prostor

22. • Neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ generatorna u prostoru V, $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ nezavisna za prostor V i $\dim V = k$. Tada je

1) $m \le k \le n$ 2) $n \le k \le m$ 3) $n \le m \le k$ 4) $k \le m \le n$ 5) $k \le n \le m$ 6) $m \le n \le k$

23. • Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke $A(1,2,4)$, $|\overrightarrow{AB}| = 3$. Odrediti $\vec{r}_B$ ako je $\vec{a} = (1,2,2)$ i ako je vektor $\vec{a}$ istog pravca kao i vektor $\overrightarrow{AB}$, a suprotnog smera od vektora $\overrightarrow{AB}$. $\vec{r}_B = (0, 0, 2)$

24. • Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:

1) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 1\}$, **dim** $U=$ 2

2) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ **dim** $U=$ 1

3) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot 0 = 0\}$ **dimU=** 3

4) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z + 0\}$ **dim** $U=$ 2

25. • Neka je $a = (0,0,0)$, $b = (1,0,1)$, $c = (1,0,-1)$, $d = (-1,0,1)$, $e = (1,1,1)$, $f = (1,0,0)$, $g = (2,0,2)$. Odrediti dimenzije sledećih potprostora V vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$:

1) $V = L(a) \Rightarrow dim(V) =$ 0 **2)** $V = L(a,b) \Rightarrow dim(V) =$ 1

3) $V = L(a,b,c) \Rightarrow dim(V) =$ 2 **4)** $V = L(b,c,d) \Rightarrow dim(V) =$ 2

5) $V = L(b,c,e) \Rightarrow dim(V) =$ 3 **6)** $V = L(e,f,g) \Rightarrow dim(V) =$ 3

26. • Ako je A kvadratna matrica reda n, tada je: **1)** $\det A = 0 \Rightarrow$ **rang** A$= 0$
2) $\det A = 0 \Leftrightarrow$ **rang** A$\le n-1$, **3)** $\det A = 0 \Rightarrow$ **rang** A$= n$ **4)** **rang** A$= n \Rightarrow \det A \ne 0$,
5) **rang** A$= n \Leftarrow \det A \ne 0$, **6)** **rang** A$= n \Leftarrow \exists A^{-1}$.

27.

• Neka su $\mathbf{a_1} = (a_{11}, \ldots, a_{n1})$, $\mathbf{a_2} = (a_{12}, \ldots, a_{n2}), \ldots$, $\mathbf{a_n} = (a_{1n}, \ldots, a_{nn})$ vektori kolone matrice $A = A_{nn} = [a_{ij}]_{nn}$, neka je V=Lin$(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n})$=$\{\alpha_1\mathbf{a_1} + \alpha_2\mathbf{a_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{a_n} | \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$ i neka je $\mathbf{a_i}^2$ skalarni proizvod vektora $\mathbf{a_i}$ sa samim sobom. Tada je: **1)** $\mathbf{a_1} = \ldots = \mathbf{a_n} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1}^2 + \ldots + \mathbf{a_n}^2 = 0$
2) $\dim V = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{rang}\, A = 0$ **3)** $\dim V = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1} = \ldots = \mathbf{a_n} = 0$ **4)** $\dim V = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1}^2 + \ldots + \mathbf{a_n}^2 = 0$
5) **rang** $A = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1} = \ldots = \mathbf{a_n} = 0$ **6)** **rang** $A = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1}^2 + \ldots + \mathbf{a_n}^2 = 0$

28. • Linearne transformacije $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ i $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su uvek oblika:
$f(x,y,z) = (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \delta x + \theta y + \gamma_2 z)$ $g(x) = (\alpha x, \beta x)$ $h(x) = \alpha x$

29. • **Postoji** linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ za koju važi da je: **1)** sirjektivna **2)** injektivna **3)** bijektivna **4)** izomorfizam **5)** ništa od prethodnog

30. • **Postoji** linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ za koju važi da je: **1)** injektivna **2)** sirjektivna **3)** bijektivna **4)** izomorfizam **5)** ništa od prethodnog.

31. • **Za svaki** vektorski prostor V i svaku sirjektivnu linearnu transformaciju $f : V \to V$ sledi da je transformacija f: **1)** injektivna **2)** bijektivna **3)** izomorfizam **4)** ništa od prethodnog.

32. • **Za svaki** vektorski prostor V i svaku injektivnu linearnu transformaciju $f : V \to V$ sledi da je transformacija f: **1)** sirjektivna **2)** bijektivna **3)** izomorfizam **4)** ništa od prethodnog

33. • **Za svaki izomorfizam** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i njegovu matricu A važi:
1) f je injektivna **2)** postoji A^{-1} **3)** $n = m$ **4)** f je sirjektivna **5)** f je bijektivna **6)** A je regularna **7)** $\det A \ne 0$ **8)** ništa od prethodnog

34. • **Za svaki** vektorski prostor V postoji homogen sistem linearnih jednačina, čiji skup svih rešenja je vektorski prostor izomorfan prostoru V. Zaokruži tačan odgovor DA NE

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 3

1. • Neka tačke $P(0,0,0)$ i $Q(0,1,0)$ pripadaju ravni α koja je paralelna sa vektorom $(1,1,1)$. Napisati bar jedan vektor $\vec{n}$ normalan na ravan α, $\vec{n} = (-1, 0, 1)$. Ako je $(A,B,C,D) = (-1, 0, 1, 0)$, tada jednačina $Ax + By + Cz + D = 0$ jeste jednačina ravni α. $(\forall t, s \in \mathbb{R})\ M(t,s,t) \in \alpha$. DA NE

1. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linearnih jednačina $ax - ay = a \wedge -2ax + 2ay = -2a$ nad poljem realnih brojeva je: **1)** neodređen: $a \in \mathbb{R}$ **2)** određen: **3)** kontradiktoran:

2. Za vektore $\vec{a} = (-1, 0, 0)$ i $\vec{b} = (-1, 0, 1)$ izračunati: **1)** $|\vec{a}| =$ 1 **2)** $|\vec{b}| =$ $\sqrt{2}$
3) $\vec{a} - 2\vec{b} =$ (1, 0, -2) **4)** $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ 1 **5)** $\vec{a} \times \vec{b} =$ (0, 1, 0) **6)** $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) =$?

4. Koje su od sledećih uređenih n-torki baze vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$: **1)** $\big((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\big)$
~~**2)**~~ $\big((1,0,0),(0,2,0)\big)$ ~~**3)**~~ $\big((1,3,2),(1,1,0),(3,0,4),(1,2,3)\big)$ ~~**4)**~~ $\big((1,0,0),(2,0,0),(3,0,0)\big)$

5. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 1$, $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$

6. Matrica linearne transformacije $f(x, y) = (2y, x - y, 3x + y)$ je: $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

7. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$$\underset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \underset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}} \underset{1}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} \underset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}} \underset{1}{\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}} \underset{0}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

* *

8. Odrediti sve vrednosti realnog parametara a za koje je sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} ax + ay &= a \\ -x + ay &= a \end{aligned}$$

1) kontradiktoran:
2) određen: $a \neq 0 \wedge a \neq -1$
3) 1 puta neodređen: $a = 0 \vee a = -1$
4) 2 puta neodređen:

9. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži AC i BP. (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{AQ}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{AQ} = \frac{3\vec{a}}{4} + \frac{\vec{b}}{4}$

10. Napisati $\vec{x} = (0, -2, -1)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (0, -1, 1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 1)$:
$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

11. Naći vektor položaja projekcije A' tačke $A(1, 1, -1)$ na ravan $x + y + z = 0$: $\vec{r}_{A'} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

12. Naći vektor položaja $\vec{r}_T$ tačke T, prodora prave $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$ kroz ravan $\alpha: x + 2y - z = 0$.
$\vec{r}_T = (1, 0, 1)$

13. Karakteristični polinom matrice $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ je: $\lambda^2 - 8$, a karakteristični koreni λ su
$\lambda \in \{2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\}$

14. Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje matrice A, B, C reda **1** i svaki skalar λ:
1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ **2)** $(B + C)A = BA + CA$ **3)** $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$
4) $\det(AB) = \det(B)det(A)$ **5)** $(AB)^2 = A^2B^2$ **6)** $\mathbf{rang}(AB) = \mathbf{rang}(BA)$
7) $A(B + C) = BA + CA$ **8)** $A(BC) = (AB)C$

15. Neka su a, b i c **proizvoljni** vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + b + c, b + c, b - c)$ je:
~~**1)**~~ uvek zavisna ~~**2)**~~ uvek nezavisna **3)** nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbora vektora a, b, c.

16. Neka su a, b i c proizvoljni **nezavisni** vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + c, a + b, b + c)$ je:
~~**1)**~~ uvek zavisna **2)** uvek nezavisna ~~**3)**~~ nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbora vektora a, b, c.

17. Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ **su nekolinearni ako i samo ako:** ~~**1)**~~ $\vec{a} \times \vec{b} = 0$
~~**2)**~~ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ~~**3)**~~ rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ **4)** rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 2$ ~~**5)**~~ rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$
6) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nezavisni ~~**7)**~~ $(\exists\lambda \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \lambda\vec{b}$ ~~**8)**~~ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ~~**9)**~~ $(\exists\lambda \in \mathbb{R})\ (\vec{a} = \lambda\vec{b} \vee \lambda\vec{a} = \vec{b})$
~~**10)**~~ $(\exists\alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \wedge \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

18. Vektori $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ i $\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$ su **komplanarni ako i samo ako:**

~~1)~~ $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}=2$ ~~2)~~ $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\le 3$ ~~3)~~ $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}=3$

~~4)~~ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$ 5) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})=0$ ~~6)~~ $(\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R})\ \vec{a}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$

~~7)~~ $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0\ \wedge\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$ 8) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ je zavisna.

19. Neka je $\varphi: V\to\mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k})=(x_1-x_2, x_1+x_3, -x_1-x_2-2x_3)$ gde su $(V,\mathbb{R},+,\cdot)$ i $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R},+,\cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi: V\to\mathbb{R}^3$
1) linearna transformacija ~~2)~~ injektivna ~~3)~~ sirjektivna ~~4)~~ bijektivna ~~5)~~ izomorfizam

20. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(1,1)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\mathsf{rang}:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ ~~2)~~ $\mathsf{rang}:\mathcal{M}\to\mathbb{N}$ 3) $\mathsf{rang}:\mathcal{M}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ ~~4)~~ $\mathsf{rang}:\mathcal{M}\overset{1-1}{\to}\mathbb{N}\cup\{0\}$
5) $\mathsf{rang}:\mathcal{M}\overset{na}{\to}\{0,1\}$

21. $(\forall x\in\mathbb{R}^5)f(x)=0$, tada $f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}$: 1) jeste linearna transformacija ~~2)~~ nije linearna transformacija ~~3)~~ može a ne mora biti linearna transformacija 4) jeste injektivna ~~5)~~ jeste sirjektivna ~~6)~~ jeste izomorfizam

22. Neka je $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ zavisna, a $(c_1,c_2,\dots,c_m)$ nezavisna za prostor V i $\dim V=k$. Tada je moguće
1) $m\le k\le n$ 2) $n\le k\le m$ 3) $n\le m\le k$ 4) $k\le m\le n$ 5) $k\le n\le m$ 6) $m\le n\le k$

23. Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke $A(1,1,1)$, $|\overrightarrow{AB}|=3$ i $|\overrightarrow{BC}|=9$. Odrediti $\vec{r}_C$ ako je $\vec{a}=(1,2,2)$, $\vec{b}=(1,4,8)$ i ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ istog pravca i smera redom kao i vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$. $\vec{r}_C=$ (3,7,11)

24. Koji od sledećih podskupova $U\subseteq\mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:

1) $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=y\}$, **dim** $U=$ 2
2) $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^4+y^4=0\}$ **dim** $U=$ 1
3) $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=x\}$ **dimU**$=$ 3
4) $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=z=y\}$ **dim** $U=$ 1

25. Ako je $f:V\to V$ homomorfizam prostora V u samog sebe, tada je: ~~1)~~ f mora biti izomorfizam
~~2)~~ $dim(V)=dim(f(V))$ 3) $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ (gde je $\mathbf{0}$ nula-vektor prostora V)
~~4)~~ za svaku nezavisnu n-torku vektora $(v_1,\dots,v_n)$ iz V, n-torka $\Big(f(v_1),\dots,f(v_n)\Big)$ je nezavisna u V
5) za svaku zavisnu n-torku vektora $(v_1,\dots,v_n)$ iz V, n-torka $\Big(f(v_1),\dots,f(v_n)\Big)$ je zavisna u V

26. Ako je A kvadratna matrica reda 5, tada je: ~~1)~~ $\det A=0\Rightarrow$ **rang** A$=0$
2) $\det A=0\Leftrightarrow$ **rang** A≤ 4, ~~3)~~ $\det A=0\Rightarrow$ **rang** A$=5$ 4) **rang** A$=5\Rightarrow\det A\neq 0$,
5) **rang** A$=5\Leftarrow\det A\neq 0$, 6) **rang** A$=5\Leftarrow\exists A^{-1}$.

27. Neka su $\mathbf{a_1}=(a_{11},\dots,a_{n1})$, $\mathbf{a_2}=(a_{12},\dots,a_{n2}),\dots,\ \mathbf{a_n}=(a_{1n},\dots,a_{nn})$ vektori kolone matrice $A=A_{nn}=[a_{ij}]_{nn}$, neka je $V=\mathrm{Lin}(\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\dots,\mathbf{a_n})=\{\alpha_1\mathbf{a_1}+\alpha_2\mathbf{a_2}+\dots+\alpha_n\mathbf{a_n}|\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}\}$ i neka je $\mathbf{a_i}^2$ skalarni proizvod vektora $\mathbf{a_i}$ sa samim sobom. Tada je: 1) $\mathbf{a_1}=\dots=\mathbf{a_n}=0\Leftrightarrow\mathbf{a_1}^2+\dots+\mathbf{a_n}^2=0$
2) $\dim V=0\Leftrightarrow \boldsymbol{rang}\,A=0$ 3) $\dim V=0\Leftrightarrow\mathbf{a_1}=\dots=\mathbf{a_n}=0$ 4) $\dim V=0\Leftrightarrow\mathbf{a_1}^2+\dots+\mathbf{a_n}^2=0$
5) **rang** $A=0\Leftrightarrow\mathbf{a_1}=\dots=\mathbf{a_n}=0$ 6) **rang** $A=0\Leftrightarrow\mathbf{a_1}^2+\dots+\mathbf{a_n}^2=0$

28. Linearne transformacije $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ i $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ su uvek oblika:
$f(x,y,z,u)=(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta u, \varepsilon x+\varphi y+\eta z+\psi u)$ $g(x)=(\alpha x,\beta x,\gamma x)$ $h(x)=\alpha x$

29. **Postoji** linearna transformacija $f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^4$ za koju važi da je: 1) sirjektivna
~~2)~~ injektivna ~~3)~~ bijektivna ~~4)~~ izomorfizam ~~5)~~ ništa od prethodnog

30. **Postoji** linearna transformacija $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^5$ za koju važi da je: 1) injektivna
~~2)~~ sirjektivna ~~3)~~ bijektivna ~~4)~~ izomorfizam ~~5)~~ ništa od prethodnog.

31. Za vektorski prostor $\mathbb{R}^5$ i svaku sirjektivnu linearnu transformaciju $f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$ sledi da je transformacija f:

1) injektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam ~~4)~~ ništa od prethodnog.

32. Za svaki vektorski prostor V i svaku injektivnu linearnu transformaciju $f: V \to V$ sledi da je f:
1) sirjektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam ~~4)~~ ništa od prethodnog

33. Za svaki izomorfizam $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i njegovu matricu A važi: 1) f je injektivna 2) postoji A^{-1} 3) $n=m$ 4) f je sirjektivna 5) f je bijektivna 6) A je regularna 7) $\det A \neq 0$ ~~8)~~ ništa od prethodnog

34. Za svaki vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ postoji homogen sistem linearnih jednačina, čiji skup svih rešenja je vektorski prostor izomorfan prostoru $\mathbb{R}^n$. Zaokruži tačan odgovor DA NE

35. Ako je A regularna kvadratna matrica i $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, tada važi: 1) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$ ~~2)~~ $(\alpha A)^{-1} = \alpha A^{-1}$ ~~3)~~ $(\alpha A)^{-1} = \alpha\frac{1}{\det A}A^{-1}$ ~~4)~~ $(\alpha A)^{-1} = A^{-1}\alpha$ 5) $(\alpha A)^{-1} = A^{-1}\alpha^{-1}$ 6) $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 4

1. Neka tačke $P(0,0,0)$ i $Q(1,1,1)$ pripadaju ravni α koja je paralelna sa vektorom $(1,1,-1)$. Napisati bar jedan vektor $\vec{n}$ normalan na ravan α, $\vec{n} = (-2\ ,\ 2\ ,\ 0\ )$. Ako je $(A,B,C,D) = (-1\ ,\ 1\ ,\ \ ,\ 0\ )$, tada jednačina $Ax+By+Cz+D=0$ jeste jednačina ravni α. $(\forall t,s\in\mathbb{R})\ M(t,s,t)\in\alpha$. DA NE

2. Za koje vrednosti parametra $a\in\mathbb{R}$ sistem jednačina $ax-ay=a \wedge ax+ay=a$ nad poljem realnih brojeva je:
1) dvostruko neodređen: $a=0$ 2) jednostruko neodređen: / 3) određen: $a\neq 0$ 4) kontradiktoran: /

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 9 & -8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 7 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$

4. Zaokružiti cifru (cifre) ispred uređenih n-torki koje su linearno NEZAVISNE u vektorkom prostoru trojki $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$: 1) $\big((0,1,0)\big)$ 2) $\big((1,2,0),(1,1,0),(2,-1,1)\big)$ 3) $\big((1,0,0),(2,0,2)\big)$
4) $\big((1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\big)$ ~~5)~~ $\big((1,1,1),(2,2,2)\big)$ ~~6)~~ $\big((0,0,2),(0,0,0),(3,0,0)\big)$
~~7)~~ $\big((0,1,0),(0,2,0)\big)$ ~~8)~~ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)\big)$

5. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ 3 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 3 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 1

$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 0 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 3

6. Matrice i rangovi linearnih transformacija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $f(x)=(2x,3x)$ i $g,h,r,s:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $g(x,y,z)=(y,x+z)$, $h(x,y,z)=(x-y,0)$, $r(x,y,z)=(z,y)$, $s(x,y,z)=(x-y-z,z-x-y)$, $p(x,y,z)=(0,0)$ su: (Rang upisati ispod odgovarajuće matrice)

$M_f = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 1 $M_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2 $M_h = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 1 $M_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 2 $M_s = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 2 $M_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 0

7. Za vektore $\vec{a}=(1,1,-3)$ i $\vec{b}=(-3,-3,9)$ važi: 1) $\vec{a}\parallel\vec{b}$ ~~2)~~ $\vec{a}\perp\vec{b}$ ~~3)~~ $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ 4) $\vec{a}\not\perp\vec{b}$

8. Neka je je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala. Tada u zavisnosti od $\vec{r}_D$, $\vec{r}_B$ i $\vec{r}_A$ napisati vektor položaja tačke C: $\vec{r}_C = \vec{r}_B - \vec{r}_A + \vec{r}_D$

* *

9. Odrediti sve vrednosti realnog parametara a za koje je sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} x + ay &= a \\ -x + ay &= a \end{aligned}$$

1) kontradiktoran: ______
2) određen: $a \neq 0$
3) 1 puta neodređen: $a = 0$
4) 2 puta neodređen: ______

10. Ako je A regularna kvadratna matrica i $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tada važi: 1) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$ 2) $(\alpha A)^{-1} = \alpha A^{-1}$ 3) $(\alpha A)^{-1} = \alpha \frac{1}{\det A} A^{-1}$ 4) $(\alpha A)^{-1} = A^{-1}\alpha$ 5) $(\alpha A)^{-1} = A^{-1}\alpha^{-1}$ 6) $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$

11. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži AC i BP. (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{AQ}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{BD}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{AQ} = -\frac{3}{4}$ ...

12. Napisati $\vec{x} = (4, 1, 4)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (0, -1, 1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 1)$: $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$

13. Naći vektor položaja projekcije A' tačke $A(1, 1, -1)$ na ravan $x + y + 2z = 0$: $\vec{r}_{A'} = (1, 1, -1)$

14. Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$? 1) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

15. Da li je $|(a\vec{b} + b\vec{a}) \times (a\vec{b} - b\vec{a})| = |a\vec{b} + b\vec{a}| \cdot |a\vec{b} - b\vec{a}|$? DA NE (Napomena $|\vec{a}| = a$ i $|\vec{b}| = b$)

16. Za vektorski prostor $\mathbb{R}^5$ i svaku sirjektivnu linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ sledi da je transformacija f:
1) injektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam 4) ništa od prethodnog.

17. Za svaki vektorski prostor V i svaku injektivnu linearnu transformaciju $f : V \to V$ sledi da je f:
1) sirjektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam 4) ništa od prethodnog

18. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni vektori, da li je $|(a\vec{b} + b\vec{a}) \times (a\vec{b} - b\vec{a})| = |a\vec{b} + b\vec{a}| \cdot |a\vec{b} - b\vec{a}|$? DA NE (Napomena $|\vec{a}| = a$ i $|\vec{b}| = b$)

19. Za koje vrednosti parametara $a, b \in \mathbb{R}$ navedene funkcija je linearne transformacija i ako jesu, naći odgovarajuću matricu i diskutovati njen rang:

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x \sin(a + b) - y - z, y)$ $a, b \in \mathbb{R}$ $\begin{bmatrix} \sin(a+b) & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ rang $= 2$

20. Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ **su kolinearni ako :** 1) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
3) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ 4) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 2$ 5) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$ 6) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nezavisni
7) $(\exists \lambda \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \lambda \vec{b}$ 8) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 9) $(\exists \lambda \in \mathbb{R})(\vec{a} = \lambda \vec{b} \ \vee \ \lambda \vec{a} = \vec{b})$ 10) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \ \wedge \ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

21. Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su **nekomplanarni ako i samo ako:** 1) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ 2) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ 3) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$

4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ 5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ 6) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$
7) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \ \wedge \ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ 8) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.

22. Neka je $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3, -x_1 - x_2 - x_3)$ gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$
1) linearna transformacija 2) injektivna 3) sirjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

23. $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = 0$, tada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5$: 1) jeste linearna transformacija 2) nije linearna transformacija 3) može a ne mora biti linearna transformacija 4) jeste injektivna 5) jeste sirjektivna 6) jeste izomorfizam

24. Neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ zavisna, a $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ nezavisna za prostor V i $\dim V = n$. Tada je moguće
1) $m \leq k \leq n$ 2) $n \leq k \leq m$ 3) $n \leq m \leq k$ 4) $k \leq m \leq n$ 5) $k \leq n \leq m$ 6) $m \leq n \leq k$

25. Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke $A(1,1,1)$, $|\overrightarrow{AB}| = 3$ i $|\overrightarrow{BC}| = 9$. Odrediti $\vec{r}_C$ ako je $\vec{a} = (1,2,2)$, $\vec{b} = (1,4,8)$ i ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ istog pravca i suprotnog smera redom sa vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$.
$\vec{r}_C = (-1, -5, \cdot 3$

26. Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:

1) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = y + x\}$, $\dim U =$ 3
2) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 = 0\}$ $\dim U =$ 2
3) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 4\}$ dimU= 2
4) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 1\}$ $\dim U =$ 1

27. Ako je $f : V \to V$ izomorfizam prostora V u samog sebe, tada je: 1) f mora biti homomorfizam 2) $dim(V) = dim(f(V))$ 3) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (gde je $\mathbf{0}$ nula-vektor prostora V)
4) za svaku nezavisnu n-torku vektora $(v_1, ..., v_n)$ iz V, n-torka $\big(f(v_1), ..., f(v_n)\big)$ je nezavisna u V
5) za svaku zavisnu n-torku vektora $(v_1, ..., v_n)$ iz V, n-torka $\big(f(v_1), ..., f(v_n)\big)$ je zavisna u V

28. Ako je A kvadratna matrica reda 4, tada je: ~~1)~~ $\det A = 0 \Rightarrow$ **rang** A$= 0$ 2) $\det A = 0 \Leftrightarrow$ **rang** A≤ 3, ~~3)~~ $\det A = 0 \Rightarrow$ **rang** A$= 4$ 4) **rang** A$= 4 \Rightarrow \det A \neq 0$, 5) **rang** A$= 4 \Leftarrow \det A \neq 0$, 6) **rang** A$= 4 \Leftarrow \exists A^{-1}$.

29. Linearne transformacije $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ i $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su uvek oblika:
$f(x,y,z,u) = (\alpha x + \beta y + \ldots$ $g(x) = (\alpha x, \beta x, \gamma x)$ $h(x) = \alpha x$

30. **Postoji** linearna transformacija $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ za koju važi da je: 1) sirjektivna ~~2)~~ injektivna ~~3)~~ bijektivna ~~4)~~ izomorfizam ~~5)~~ ništa od prethodnog

31. **Postoji** linearna transformacija $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ za koju važi da je: 1) injektivna ~~2)~~ sirjektivna ~~3)~~ bijektivna ~~4)~~ izomorfizam ~~5)~~ ništa od prethodnog

32. Za **neki izomorfizam** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i njegovu matricu A važi: 1) f je injektivna 2) postoji A^{-1} 3) f je sirjektivna 4) f je bijektivna 5) A je regularna 6) $\det A \neq 0$ ~~7)~~ ništa od prethodnog

33. • Za **svaki** vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ postoji homogen sistem linearnih jednačina, čiji skup svih rešenja je vektorski prostor izomorfan prostoru $\mathbb{R}^n$. Zaokruži tačan odgovor DA NE

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 5

1. Neka tačke $P(1,1,1)$, $Q(1,0,1)$ i $R(0,1,1)$ pripadaju ravni α. Napisati bar jedan jedinični vektor $\vec{n}$ normalan na α i jedan vektor $\vec{m}$ paralelan sa α, $\vec{n} = (0, 0, 1)$, $\vec{m} = (1, 0, 0)$. Ako je $(A, B, C, D) = (0, 0, 1, -1)$, tada je $Ax + By + Cz + D = 0$ jednačina ravni α. Napisati koordinate tačke $M \in \alpha$ ravni α koja je najbliža koordinatnom početku. $M(0, 0, -1)$.

2. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linernih jednačina $x - y = 1 \wedge ax - y + z = 1$ nad poljem realnih brojeva je: 1) neodređen: $a \in \mathbb{R}$ 2) određen: / 3) kontradiktoran: /

3. Za vektore $\vec{a} = (8,1,4)$ i $\vec{b} = (1,2,2)$ izračunati: 1) $|\vec{a}| =$ 9 2) $|\vec{b}| =$ 3
3) $2\vec{a} - \vec{b} =$ (15, 0, 6) 4) $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ 18
5) $\vec{a} \times \vec{b} =$ (-6, -12, 15) 6) $\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) =$ $\frac{2}{3}$

4. Koje od sledećih uređenih n-torki **jesu** generatorne za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$:
1) $\big((0,0,-1),(0,4,0),(9,0,0)\big)$ ~~2)~~ $\big((1,0,0),(0,-1,0)\big)$ 3) $\big((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,2,3)\big)$
~~4)~~ $\big((1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)\big)$

5. $\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [7]$ $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 9 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8$ $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}^{-1} =$ /

6. (•) Matrice linearnih transformacija $f(x) = (2x, x, x)$, $g(x, y, z) = x$, $h(x, y) = (y, y)$ i $s(x, y, z) = z + x$ su:

$M_f = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad M_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad M_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. (•) Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

2 2 2 2 1 2 1 0 1

* *

8. (•) Odrediti sve vrednosti realnog parametara a za koje je sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} ax + ay &= a \\ ax + ay &= a \end{aligned}$$

1) kontradiktoran: /
2) određen: /
3) jednostruko neodređen: $a \neq 0$
4) dvostruko neodređen: $a = 0$

9 (•) Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži BC i CD. (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{PQ}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AQ}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{PQ} = \frac{\vec{a}}{2} - \frac{3\vec{b}}{4}$

10 (•) Napisati $\vec{x} = (1, 0, 1)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (0, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 1)$:

$\vec{x} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a}$

11. (•) Koordinate projekcije A' tačke $A(9, a, 4)$ na pravu određenu sa $x = 3 \wedge z = 2$ za svako $a \in \mathbb{R}$ su: $A'(3, a, 2)$

12. (•) Vektor položaja $\vec{r}_T$ tačke prodora prave $p : \vec{r} = \vec{r}_S + t\vec{a}$ kroz ravan $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_R$ je $\vec{r}_T = \vec{r}_s + \frac{(\vec{r}_R - \vec{r}_s)\vec{n}}{\vec{a}\,\vec{n}}\vec{a}$

13, (•) Projekcija vetora $\vec{x}$ na ravan $\alpha : \vec{n}\vec{r} = 0$ je: $\mathbf{pr}_{\alpha,\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{n}\frac{\vec{x}\,\vec{n}}{|\vec{n}|^2}$

14. (•) Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$? a) $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$ ~~c)~~ $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

15. (•) Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje komutativne matrice A, B, C reda 2 i svaki skalar λ:
1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 2) $(B + C)A = AB + CA$ ~~3)~~ $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$
4) $\det(AB) = \det(B)det(A)$ 5) $(AB)^2 = A^2B^2$ 6) $\mathbf{rang}(AB) = \mathbf{rang}(BA)$
7) $A(B - C) = BA - CA$ 8) $A(BC) = (BA)C$

16, (•) Neka su a, b i c proizvoljni **zavisni** vektori. Tada uređena trojka vektora $(2a + b + 3c, a - 2b + c, b - 5c)$ je:
1) uvek zavisna ~~2)~~ uvek nezavisna ~~3)~~ nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbora vektora a, b, c.

17 (•) Neka su a, b i c proizvoljni **nezavisni** vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + c, a + b, -a + 2c)$ je:
~~1)~~ uvek zavisna 2) uvek nezavisna ~~3)~~ nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbora vektora a, b, c.

18, (•) **Ako su $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ nekolinearni**, tada važi: ~~1)~~ $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ ~~2)~~ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
~~3)~~ rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ 4) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$ ~~5)~~ rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$ ~~6)~~ $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni
~~7)~~ $(\exists \lambda \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \lambda\vec{b}$ ~~8)~~ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ~~9)~~ $(\exists \lambda \in \mathbb{R})(\vec{a} = \lambda\vec{b} \vee \lambda\vec{a} = \vec{b})$ 10) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

19. (•) Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su **komplanarni** ako je:

1) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ ~~2)~~ rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ ~~3)~~ rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$

4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ 5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ 6) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$

~~7)~~ $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ 8) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.

20.

(•) Neka je $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_3, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$ gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$
1) linearna transformacija ~~2)~~ injektivna ~~3)~~ sirjektivna ~~4)~~ bijektivna ~~5)~~ izomorfizam

21,

Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(2,5)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ 2) $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$ 3) $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ 4) $\text{rang} : \mathcal{M} \overset{1-1}{\to} \mathbb{N} \cup \{0\}$
5) $\text{rang} : \mathcal{M} \overset{na}{\to} \{0,1,2,3\}$

22. Neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ generatorna u prostoru V, $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ nezavisna za prostor V i $\dim V = m$. Tada je
1) $m \leq k \leq n$ 2) $n \leq k \leq m$ 3) $n \leq m \leq k$ 4) $k \leq m \leq n$ 5) $k \leq n \leq m$ 6) $m \leq n \leq k$

23. Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke $A(1,2,4)$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = 3$. Odrediti $\vec{r}_C$ ako je $\overrightarrow{AB} \| \vec{a} = (1,2,2)$, $\overrightarrow{BC} \| \vec{b} = (-2,1,2)$ i ako su smerovi vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ suprotni smerovima redom vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$.
$\vec{r}_C = (2, -1, 0)$

24

Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:

1) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$, **dim** U= 2

2) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$ **dim** U= /

3) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot 1 = 0\}$ **dimU**= 2

4) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x\}$ **dim** U= 3

25.

- Neka je $a = (0,0,0)$, $b = (1,0,1)$, $c = (1,0,-1)$, $d = (-1,0,1)$, $e = (1,1,1)$, $f = (1,0,0)$, $g = (2,0,2)$. Odrediti dimenzije sledećih potprostora V vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$: ?

26. Ako je A kvadratna matrica reda 5, tada je: 1) $\det A = 0 \Leftarrow$ **rang** A$= 0$ 2) $\det A = 0 \Leftrightarrow$ **rang** A≤ 4,
3) $\det A = 0 \Rightarrow$ **rang** A$= 5$ 4) **rang** A$= 5 \Rightarrow \det A \neq 0$, 5) **rang** A$= 5 \Leftarrow \det A \neq 0$,
6) **rang** A$= 5 \Leftarrow \exists A^{-1}$.

27.

Neka su $\mathbf{a_1} = (a_{11}, \ldots, a_{n1})$, $\mathbf{a_2} = (a_{12}, \ldots, a_{n2}), \ldots$, $\mathbf{a_n} = (a_{1n}, \ldots, a_{nn})$ vektori kolone matrice $A = A_{nn} = [a_{ij}]_{nn}$, neka je V=Lin$(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n})$=$\{\alpha_1\mathbf{a_1} + \alpha_2\mathbf{a_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{a_n} | \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$ i neka je $\mathbf{a_i}^2$-skalarni proizvod vektora $\mathbf{a_i}$ sa samim sobom. Tada je 1) $\mathbf{a_1} = \ldots = \mathbf{a_n} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1}^2 + \ldots + \mathbf{a_n}^2 = 0$
2) $\dim V = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{rang}\, A \neq 0$ 3) $\dim V = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1} = \ldots = \mathbf{a_n} = 0$ 4) $\dim V = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1}^2 + \ldots + \mathbf{a_n}^2 \neq 0$
5) **rang** $A = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1} = \ldots = \mathbf{a_n} = 0$ 6) **rang** $A = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1}^2 + \ldots + \mathbf{a_n}^2 \neq 0$

28.

Postoji linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ za koju važi da je: 1) sirjektivna
2) injektivna 3) bijektivna 4) izomorfizam 5) ništa od prethodnog

29.

Postoji linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ za koju važi da je: 1) injektivna
2) sirjektivna 3) bijektivna 4) izomorfizam 5) ništa od prethodnog.

30.

Za svaku sirjektivnu linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sledi da je transformacija f:
1) injektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam 4) ništa od prethodnog.

31.

Za svaku injektivnu linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sledi da je transformacija f:
1) sirjektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam 4) ništa od prethodnog

32.

Za svaki izomorfizam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i njegovu matricu A važi: 1) f je injektivna 2) postoji A^{-1}
3) $n = m$ 4) f je sirjektivna 5) f je bijektivna 6) A je regularna 7) $\det A \neq 0$ 8) ništa od prethodnog

33,

Za svaki konačno dimenzioni vektorski prostor V postoji homogen sistem linearnih jednačina, čiji skup svih rešenja je vektorski prostor izomorfan prostoru V. Zakruži tačan odgovor DA NE

34,

Neka je $a = (2,2,0)$, $b = (-3,3,0)$, $c = (1,-1,0)$, $d = (-1,1,0)$, $e = (0,0,1)$, $f = (1,0,0)$, $g = (1,2,0)$. Zaokružiti broj koji je dimenzija potprostora V vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$: 1) $V = L(b,c,d) \Rightarrow dim(V)$ je: 1,2,3

2) $V = L(e,f,g) \Rightarrow dim(V)$ je: 1,2,3 3) $V = L(a,b) \Rightarrow dim(V)$ je: 1,2,3
4) $V = L(e,f,g) \Rightarrow dim(V)$ je: 1,2,3 5) $V = L(b,c,e) \Rightarrow dim(V)$ je: 1,2,3
6) $V = L(a,b,c) \Rightarrow dim(V)$ je: 1,2,3 7) $V = L(a,g) \Rightarrow dim(V)$ je: 1,2,3

35. Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B, C reda 2 i svaki skalar λ:
1) $A(BC) = (AB)C$ 2) $(B+C)A = BA + CA$ ~~3)~~ $(AB)^2 = A^2B^2$ ~~4)~~ $A - B = B - A$
5) $\det(AB) = \det(B)det(A)$ ~~6)~~ $\mathbf{rang}(AB) = \mathbf{rang}(A)rang(B)$ ~~7)~~ $\det(A \cdot B) = \det(A) + \det(B)$
~~8)~~ $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$

36. Neka su a, n, x matrice kolone istog formata nad poljem $\mathbb{R}$. Tada je: ~~1)~~ $(n^\top x)a = (an^\top)x$
2) $(n^\top a)x = (xn^\top)a$ 3) $n^\top a = a^\top n$ ~~4)~~ $na = an$ ~~5)~~ $(n^\top x)a = n^\top(xa)$ 6) $a^\top n = 0 \Rightarrow a \perp n$
Napomena $[\lambda] \cdot A \stackrel{def}{=} \lambda A$, za svaku matricu A.

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 6

1. Za ravan $\alpha: \ z = 1$ napisati jedan njen vektor normale $\vec{n}_\alpha = (0 , 0 , 1)$ i koordinate neke njene tri različite nekolinearne tačke $A(0 , 0 , 1)$, $B(1 , 1 , 1)$, $C(0 , 1 , 1)$.

2. Ako je $\vec{a} = (1,0,1)$ i $\vec{b} = (0,2,0)$, tada je
$\vec{a}\vec{b} =$ 0 $\quad \sphericalangle(\vec{a}\vec{b}) =$ 90° $\quad \vec{a} \times \vec{b} =$ (-2, 0, 2).

3. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $ax + y = 1 \wedge x + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je: **1)** neodređen: $a = 1 \vee a = -1$ **2)** određen: $a \neq -1 \wedge a \neq 1$ **3)** kontradiktoran: /

4. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = [0]$ $\quad \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

5. Zaokružiti cifru (cifre) ispred uređenih n-torki koje su GENERATORNE u vektorkom prostoru trojki $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$: ~~1)~~ $\big((0,1,0)\big)$ 2) $\big((1,2,0),(1,1,0),(2,-1,1)\big)$ ~~3)~~ $\big((1,0,0),(2,0,2)\big)$
4) $\big((1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\big)$ ~~5)~~ $\big((1,1,1),(2,2,2)\big)$ ~~6)~~ $\big((0,0,2),(0,0,0),(3,0,0)\big)$
~~7)~~ $\big((0,1,0),(0,2,0)\big)$ 8) $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)\big)$

6. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
3 2 2 2 1 2 1 0

7. Matrice i rangovi linearnih transformacija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (0, 9x)$ i $g, h, r, s: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y,z) = (x+y, x+z)$, $h(x,y,z) = (x-y, 0)$, $r(x,y,z) = (0,y)$, $s(x,y,z) = (x-y-z, 6y)$ i $p(x,y,z) = (z,0)$ su: (Rang upisati ispod odgovarajuće matrice)

$M_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$ $\quad M_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad M_h = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad M_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad M_s = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad M_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
1 2 1 1 2 1

8. Neka je je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala, a S presek dijagonala. U zavisnosti od $\vec{r}_S$, $\vec{r}_B$ i $\vec{r}_A$ napisati vektore položaja tačaka C i D $\quad \vec{r}_C = 2\vec{r}_S - \vec{r}_A \quad \vec{r}_D = 2\vec{r}_S - \vec{r}_B$

* *

9. Odrediti sve vrednosti realnog parametara a za koje je sistem linearnih jednačina
$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & ay & = & a \\ x & + & y & = & a \end{array}$$
1) kontradiktoran: $a \neq 0 \wedge a \neq 1$
2) određen: /
3) 1 puta neodređen: $a = 0 \vee a = 1$
4) 2 puta neodređen: /

10. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži BC i AB. (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{DP}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BD}$.
$\overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{DP} = -\frac{3\vec{b}}{2}$

11. Izraziti vektor $\vec{x} = (1,2,2)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1,2,1)$, $\vec{b} = (1,1,-1)$ i $\vec{c} = (1,1,0)$:
$\vec{x} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

12. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}, +, \cdot)$, petorka vektora (a, b, c, d, e) je:
1) uvek zavisna 2) nikad baza, 3) može ali ne mora da bude generatorna.

13. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, par vektora (a, b) je:
1) uvek nezavisan, 2) uvek zavisan, 3) nekad nezavisan a nekad zavisan.

14. Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$? 1) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

15. Ako je matrica A' dobijena od matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ elementarnim transformacijama, tada je:
1) $|det(A)| = \lambda |det(A')|$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$ 2) $\mathbf{rang}(A) = \mathbf{rang}(A')$ 3) $A \cdot A' = I$ 4) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$

16. Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje matrice A, B, C reda **2** nad poljem $\mathbb{R}$ i svaki skalar $\lambda \in \mathbb{R}$:
1) $\det(AB) = \det(A) + \det(B)$ 2) $(B + C)A = BA + CA$ 3) $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$
4) $\det(AB) = \det(B) det(A)$ 5) $(AB)^2 = A^2 B^2$ 6) $\mathbf{rang}(AB) = \mathbf{rang}(A)\mathbf{rang}(B)$
7) $A(B + C) = BA + CA$ 8) $A(BC) = (AB)C$

17. Koja od sledećih tvrdnji je tačna za svaka dva slobodna nenula vektora $\vec{x}$ i $\vec{a}$:
a) $(\vec{a} - \mathbf{pr}_{\vec{x}}\vec{a})\vec{x} = 0$ b) $(\vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x})\vec{a} = 0$ c) $(\vec{a} - \mathbf{pr}_{\vec{x}}\vec{a}) \times \vec{x} = 0$ d) $(\vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x}) \times \vec{a} = 0$
e) ništa od prethodnog

18. Neka su a, b i c proizvoljni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + b + c, b + c, b - c)$ je:
a) uvek zavisna b) uvek nezavisna c) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c.

19. Neka su a, b i c nezavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + c, a + b, a - b + 2c)$ je:
a) uvek zavisna **b)** uvek nezavisna **c)** nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c.

20. • Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ su **nekolinearni akko je**: 1) $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$ 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
3) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ 4) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$ 5) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 2$ 6) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni
7) $(\exists \lambda \in \mathbb{R})\ \vec{a} \neq \lambda\vec{b}$ 8) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 9) $(\forall \lambda \in \mathbb{R})\quad (\vec{a} \neq \lambda\vec{b} \ \wedge\ \lambda\vec{a} \neq \vec{b})$ 10) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0$

21. Ako je $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ i $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{m} \cdot \vec{x}$ i $\vec{m} \neq 0$, tada funkcija f **uvek** jeste: 1) linearna transformacija 2) injektivna 3) sirjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

22. Za **neku** linearnu transformaciju $f : \mathbb{R} \overset{1-1}{\to} \mathbb{R}$ i svako $x, y, \lambda, v \in \mathbb{R}$ tačno je: 1) $x = 0 \Leftarrow f(x) = 0$
2) $f(0) = 0$ **3)** $f(xy) = yx$ 4) $f(xy) = y\,f(x)$ 5) $f(x) = ax + 0$ za neko $a \in \mathbb{R}$
6) $f(2\lambda - v) = 2f(\lambda) - f(v)$

23. Neka je $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_1, x_2, x_1)$, gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$
1) linearna transformacija 2) injektivna 3) sirjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

24. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih kvadratnih matrica reda 1 čiji elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\det : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2) $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ 3) $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ 4) $\det : \mathcal{M} \underset{na}{\xrightarrow{1-1}} \mathbb{R}$ 5) det je linearna

25. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(1, 2)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ 2) $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$ 3) $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ 4) $\text{rang} : \mathcal{M} \overset{na}{\to} \{0, 1\}$ 5) $\text{rang} : \mathcal{M} \overset{na}{\to} \{0, 1, 2\}$

26. Ako je $f(x + y) = f(x) + f(y)$, tada f: **1)** jeste linearna transformacija **2)** nije linearna transformacija
3) može a ne mora biti linearna transformacija **4)** jeste linearna transformacija ako je $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

27. Neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ generatorna u prostoru V, $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ nezavisna za prostor V i $\dim V = 4$.
Tada je 1) $m \leq 4 \leq n$ 2) $n \leq 4 \leq m$ 3) $n \leq m \leq 4$ 4) $4 \leq m \leq n$ 5) $4 \leq n \leq m$
6) $m \leq n \leq 4$

28. Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke A, $|\overrightarrow{AB}| = 2$ i $|\overrightarrow{BC}| = 3$. Odrediti $\vec{r}_C$ u zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ako je $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} \parallel \vec{b}$ i vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\vec{a}$ su istog smera, a vektori $\overrightarrow{BC}$ i $\vec{b}$ suprotnog. $\vec{r}_C = \vec{r}_A + 2\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - 3\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

29. Neka je $\ell-$ torka vektora $(b_1, b_2, \ldots, b_\ell)$ zavisna i neka je $(0, d_2, \ldots, d_k)$ neka $k-$ torka vektora. Tada je:
1) $k \leq \ell$ **2)** $\ell \leq k$ **3)** $k = \ell$ **4)** $\ell < k$ **5)** $\ell > k$ 6) ništa od prethodnog

30. Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju: 1) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$, **dim** $U=$ 2

2) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ **dim** $U=$ 1

3) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot 0 = 0\}$ **dimU=** 3

4) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ **dim** $U=$ 0

31. Ako je A kvadratna matrica **reda 2**, tada je: ~~1)~~ $\det A = 0 \Rightarrow$ **rang** A$= 0$ 2) $\det A = 0 \Leftarrow$ **rang** A≤ 1, 3) $\det A = 0 \Leftarrow$ **rang** A$= 1$ ~~4)~~ **rang** A$= 1 \Rightarrow \det A \neq 0$, ~~5)~~ **rang** A$= 1 \Leftarrow \det A \neq 0$, 6) **rang** A$= 2 \Leftarrow \exists A^{-1}$.

32. Linearne transformacije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, i $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ su uvek oblika:
$f(x,y)=(\alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y, \varepsilon x+\eta y)$ $g(x,y)=\alpha x+\beta y$ $h(x)=\alpha x$ $F(x,y,z)=(\alpha x+\beta y+\gamma z, \delta x+\varepsilon y+\eta z)$ $G(x)=(\alpha x, \beta x)$

33. Linearne transformacije f i g definisane su sa $f(x_1,x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$ i $g(x_1,x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.
a) Po definiciji kompozicije $\circ$ odrediti $(f \circ g)(x_1,x_2) = f\big(g(x_1,x_2)\big) =$ $(-2x_1, 3x_1 - x_2)$
b) Napisati matrice M_f i M_g koje odgovaraju linearnim transformacijama f i g

$M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $M_g = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) Izračunati proizvod matrica $M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $M_g^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ i $g^{-1}(x_1,x_2) = (-\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2, -\frac{1}{2}x_1)$

d) Napisati linearnu transformaciju $h(x_1,x_2)$ kojoj odgovara matrica $M_f \cdot M_g$ tj. $h(x_1,x_2) =$ $(-2x_1, 3x_1 - x_2)$

e) Da li je $h = f \circ g$ tj. da li je $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})$ $h(x_1,x_2) = (f \circ g)(x_1,x_2)$? DA NE

34. Neka su a, n, x matrice kolone istog formata nad poljem $\mathbb{R}$. Tada je: 1) $(n^\top x)a = (an^\top)x$ 2) $(n^\top a)x = (xn^\top)a$ 3) $n^\top a = a^\top n$ ~~4)~~ $na = an$, ~~5)~~ $(n^\top x)a = n^\top(xa)$ 6) $a^\top n = 0 \Rightarrow a \perp n$
Napomena $[\lambda] \cdot A \stackrel{def}{=} \lambda A$, za svaku matricu A.

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 7

1. Za ravan α kojoj pripadaju tačke $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$ i $C(0,0,3)$ napisati jedan njen vektor normale $\vec{n}_\alpha = (1, 1, 1)$ i koordinate njene tačke $M(1, 1, 1)$ koja je jednako udaljena od koordinatnih osa. Takvih tačaka M ima: 1) 1 ~~2)~~ 2 3) 3 4) 4 ~~5)~~ više od 4

2. Ako je $\vec{a} = (0,-1,1)$ i $\vec{b} = (-1,0,1)$, tada je $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ $\vec{a}\vec{b} = 1$ $\measuredangle(\vec{a}\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ $\vec{a} \times \vec{b} = (-1, -1, -1)$.

3. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $ax + y = 1 \wedge ax - y = a$ nad poljem realnih brojeva je: 1) neodređen: / 2) određen: $a \neq 0$ 3) kontradiktoran: $a = 0$

4. $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -8$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}^{-1} =$ /

5. Zaokružiti cifru (cifre) ispred uređenih n-torki koje su ZAVISNE u vektorkom prostoru uređenih trojaka $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$: ~~1)~~ $\big((0,1,0)\big)$ 2) $\big((1,2,1),(1,1,0),(2,3,1)\big)$ ~~3)~~ $\big((1,0,0),(2,0,2)\big)$
~~4)~~ $\big((1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\big)$ 5) $\big((1,1,1),(2,2,2)\big)$ 6) $\big((0,0,2),(0,0,0),(3,0,0)\big)$
7) $\big((0,1,0),(0,2,0)\big)$ 8) $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)\big)$

6. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3 1 1 2 1 2 1 0

7. Matrice i rangovi linearnih transformacija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (0, 9x)$ i $g, h, r, s, p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x + y, x + z)$, $h(x, y, z) = (x - y, 0)$, $r(x, y, z) = (0, y)$, $s(x, y, z) = (x - y - z, 6y)$ i $p(x, y, z) = (z, 0)$ su: (Rang upisati ispod odgovarajuće matrice)

$M_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$ $M_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M_h = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $M_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $M_s = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ $M_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. Neka je je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala, a S presek dijagonala. U zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ i $\vec{r}_D$ napisati vektore položaja tačaka S i C. $\vec{r}_S = \frac{\vec{r}_B + \vec{r}_D}{2}$ $\vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_D - \vec{r}_A$

* *

9. Odrediti sve vrednosti realnog parametra a za koje je sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} ax + ay &= a \\ ax + ay &= a \end{aligned}$$

1) kontradiktoran: ~~/~~
2) određen: ~~/~~
3) 1 puta neodređen: $a \neq 0$
4) 2 puta neodređen: $a = 0$

10. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži AD i DC. (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BP}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BD}$.
$\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BP} = \frac{3\vec{b}}{2}$

11. Izraziti vektor $\vec{x} = (1, 0, -2)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, -1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 0)$:
$\vec{x} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

12. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}, +, \cdot)$, petorka vektora (a, b, c, d, e) je:
~~**1)** uvek zavisna~~ ~~**2)** nikad baza,~~ **3)** može ali ne mora da bude generatorna.

13. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, vektor $a \neq 0$ je:
1) uvek nezavisan, ~~**2)** uvek zavisan,~~ **3)** uvek baza.

14. Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$? **a)** $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$ ~~**c)**~~ $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

15. Ako je matrica A' dobijena od matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ elementarnim transformacijama, tada je:
1) $(\exists\lambda \in \mathbb{R})|det(A')| = \lambda|det(A)|$ **2)** $\mathbf{rang}(A) = \mathbf{rang}(A')$
3) $\det A = 0 \Leftrightarrow \det A' = 0$ **4)** $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$

16. Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje komutativne matrice A, B, C reda **4** nad poljem $\mathbb{R}$ i svaki skalar $\lambda \in \mathbb{R}$: ~~**1)** $\det(AB) = \det(A) + \det(B)$~~ **2)** $(B + C)A = BA + CA$ **3)** $\det(\lambda A) = \lambda^4 \det(A)$
4) $\det(AB) = \det(B)det(A)$ **5)** $(AB)^2 = A^2B^2$ ~~**6)** $\mathbf{rang}(AB) = \mathbf{rang}(A)\mathbf{rang}(B)$~~
7) $A(B + C) = BA + CA$ **8)** $A(BC) = (AB)C$

17. Koja od sledećih tvrdnji je tačna za svaka dva slobodna nenula vektora $\vec{x}$ i $\vec{a}$: **a)** $(\vec{a} - \mathbf{pr}_{\vec{x}}\vec{a})\vec{x} = 0$
b) $(\vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x})\vec{a} = 0$ ~~**c)** $(\vec{a} - \mathbf{pr}_{\vec{x}}\vec{a}) \times \vec{x} = 0$~~ ~~**d)** $(\vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x}) \times \vec{a} = 0$~~ ~~**e)** ništa od prethodnog~~

18. Neka su a, b i c proizvoljni nezavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + b + c, b + c, b - c)$ je:
~~**a)** uvek zavisna~~ **b)** uvek nezavisna ~~**c)** nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c.~~

19. Neka su a, b i c zavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + c, a + b, a - b + c)$ je:
a) uvek zavisna **b)** uvek nezavisna **c)** nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c.

20. Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su **nekomplanarni akko** je:

~~**1)** rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$~~ ~~**2)** rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$~~ **3)** rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$

~~**4)** $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$~~ **5)** $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$ ~~**6)** $(\exists\alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$~~

7) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ ~~**8)** $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.~~

21. Ako je $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ i $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{m} \cdot \vec{x}$, tada funkcija f **uvek** jeste:
1) linearna transformacija **2)** injektivna **3)** sirjektivna ~~**4)** bijektivna~~ ~~**5)** izomorfizam~~

22. Za svaku nenula linearnu transformaciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i svako $x, y, \lambda, v \in \mathbb{R}$ tačno je: 1) $x = 0 \Leftarrow f(x) = 0$ 2) $f(0) = 0$ ~~3)~~ $f(xy) = yx$ 4) $f(xy) = y\,f(x)$ 5) $f(x) = ax$ za neko $a \in \mathbb{R}$ 6) f je izomorfizam

23. Neka je $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_3)$, gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$
1) linearna transformacija 2) injektivna 3) sirjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

24. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih kvadratnih matrica reda 2 čiji elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\det : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ ~~2)~~ $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ 3) $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ ~~4)~~ $\det : \mathcal{M} \xrightarrow[na]{1-1} \mathbb{R}$ ~~5)~~ det je linearna transformacija?

25. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(3, 2)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ ~~2)~~ $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$ 3) $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ 4) $\text{rang} : \mathcal{M} \to \{0, 1, 2\}$
5) $\text{rang} : \mathcal{M} \xrightarrow{na} \{0, 1, 2\}$

26. Neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ generatorna u prostoru V, $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ **zavisna** za prostor V i $\dim V = 4$. Tada je ~~1)~~ $m \leq 4 \leq n$ ~~2)~~ $n \leq 4 \leq m$ ~~3)~~ $n \leq m \leq 4$ ~~4)~~ $4 \leq m \leq n$ ~~5)~~ $4 \leq n \leq m$ 6) $n \geq 4$

27. Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke A, $|\overrightarrow{AB}| = 5$ i $|\overrightarrow{BC}| = 7$. Odrediti $\vec{r}_C$ u zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{i}$ i $\vec{j}$, ako je $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{i}$, $\overrightarrow{BC} \parallel \vec{j}$ i vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\vec{i}$ su istog smera, a vektori $\overrightarrow{BC}$ i $\vec{j}$ suprotnog. $\vec{r}_C = \vec{r}_A + 5\frac{\vec{i}}{|\vec{i}|} - 7\frac{\vec{j}}{|\vec{j}|}$

28. Neka je $\ell-$torka vektora $(b_1, b_2, \ldots, b_\ell)$ nezavisna i $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$ generatorna $k-$ torka vektora. Tada je: ~~1)~~ $k \leq \ell$ 2) $\ell \leq k$ ~~3)~~ $k = \ell$ ~~4)~~ $\ell < k$ ~~5)~~ $\ell > k$ ~~6)~~ ništa od prethodnog

29. Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:

1) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y^2 = 0\}$, **dim** $U =$ 1

~~2)~~ $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 0\}$ **dim** $U =$ —

3) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot 3 = 0\}$ **dimU=** 2

4) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 0\}$ **dim** $U =$ 3

30. Ako je A kvadratna matrica **reda 4**, tada je: ~~1)~~ $\det A = 0 \Rightarrow$ **rang** A$= 0$ 2) $\det A = 0 \Leftarrow$ **rang** A≤ 3, 3) $\det A = 0 \Leftarrow$ **rang** A$= 3$ ~~4)~~ **rang** A$= 3 \Rightarrow \det A \neq 0$, ~~5)~~ **rang** A$= 3 \Leftarrow \det A \neq 0$, 6) **rang** A$= 4 \Leftarrow \exists A^{-1}$.

31. Linearne transformacije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, i $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ su uvek oblika:
$f(x,y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y, \ldots)$ $g(x,y) = \alpha x + \beta y$ $h(x) = \alpha x$ $F(x,y,z) = (\alpha x + \beta y + \gamma z, \delta x + \varepsilon y + \ldots)$ $G(x) = (\alpha x, \beta x)$

32. Linearne transformacije f i g definisane su sa $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$ i $g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 - x_2)$

a) Po definiciji kompozicije $\circ$ odrediti $(f \circ g)(x_1, x_2) = f\big(g(x_1, x_2)\big) = (0, 3x_1 - 3x_2)$

b) Napisati matrice M_f i M_g koje odgovaraju linearnim transformacijama f i g:

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \; M_g = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

c) Izračunati proizvod matrica $M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$, $M_g^{-1} = \begin{bmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{bmatrix}$ i $g^{-1}(x_1, x_2) =$

d) Napisati linearnu transformaciju $h(x_1, x_2)$ kojoj odgovara matrica $M_f \cdot M_g$ tj. $h(x_1, x_2) =$ $(0, 3x_1 - 3x_2)$

e) Da li je $h = f \circ g$ tj. da li je $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\; h(x_1, x_2) = (f \circ g)(x_1, x_2)$? DA NE

33. Neka su a, n, x matrice kolone istog formata nad poljem $\mathbb{R}$. Tada je: 1) $(n^\top x)a = (an^\top)x$ ~~2)~~ $(n^\top a)x = (xn^\top)a$ 3) $n^\top a = a^\top n$ ~~4)~~ $na = an$ ~~5)~~ $(n^\top x)\vec{a} = n^\top(xa)$ 6) $a^\top n = 0 \Rightarrow a \perp n$

Napomena $[\lambda] \cdot A \stackrel{def}{=} \lambda A$, za svaku matricu A.

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 8

1. ⊙ Neka tačke $O(0,0,0)$, $A(1,0,1)$ i $B(1,1,1)$ pripadaju ravni α. Napisati vektor $\overrightarrow{AB} = (\ 0,\ 1,\ 0\ )$. Napisati bar jedan vektor $\vec{n}$ normalan na α, $\vec{n} = (-1,\ 0,\ 1\ )$. Ako je $(A,B,C,D) = (-1,\ 0,\ 1,\ 0\ )$, tada je $Ax + By + Cz + D = 0$ jednačina ravni α. Napisati bar jednu tačku $M \in \alpha$ i $M \notin \{O,A,B\}$, $M(\ 1,\ ,\ 1\ )$.

2. ⊙ Ako je $\vec{a} = (2,-1,1)$ i $\vec{b} = (-1,1,1)$, tada je
$|\vec{a}| = \sqrt{6}$ $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ $\vec{a}\vec{b} = -2$ $\cos\sphericalangle(\vec{a}\vec{b}) = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ $\vec{a}\times\vec{b} = (-2,-3,1)$.

3. ⊙ Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $ax + y = 1 \wedge -x + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je: 1) neodređen: / 2) određen: $a \in \mathbb{R}$ 3) kontradiktoran: /

4. ⊙ $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -8$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}^{-1} =$ /

5. ⊙ Zaokružiti cifru (cifre) ispred uređenih n-torki koje su NEZAVISNE u vektorkom prostoru uređenih trojaka $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$: 1) $\big((0,1,0)\big)$ ~~2)~~ $\big((1,2,1),(1,1,0),(2,3,1)\big)$ 3) $\big((1,0,0),(2,0,2)\big)$
4) $\big((1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\big)$ ~~5)~~ $\big((1,1,1),(2,2,2)\big)$ ~~6)~~ $\big((0,0,2),(0,0,0),(3,0,0)\big)$
~~7)~~ $\big((0,1,0),(0,2,0)\big)$ ~~8)~~ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)\big)$

6. ⊙ Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2 2 2 2 1 3 1 1

7. ⊙ Matrice i rangovi linearnih transformacija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x,x)$ i $g,h,r,s,p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y,z) = (x+x, z+z)$, $h(x,y,z) = (x,z)$, $r(x,y,z) = (x,y)$, $s(x,y,z) = (x, x+y+z)$ i $p(x,y,z) = (0,0)$ su: (Rang upisati ispod odgovarajuće matrice)

$M_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $M_g = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $M_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $M_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $M_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1 2 2 2 2 0

8. ⊙ Neka je je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala, a S presek dijagonala. U zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{r}_D$ i $\vec{r}_S$ napisati vektore položaja tačaka B i C. $\vec{r}_B = 2\vec{r}_S - \vec{r}_D$ $\vec{r}_C = 2\vec{r}_S - \vec{r}_A$

* *

9. ⊙ Odrediti sve vrednosti realnog parametra a za koje je sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} ax + ay &= 1 \\ ax + ay &= 1 \end{aligned}$$

1) kontradiktoran: $a = 0$
2) određen: /
3) 1 puta neodređen: $a \neq 0$
4) 2 puta neodređen: /

10. ⊙ Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži AD i DC. (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BP}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BP} = 3\vec{b} - \frac{3\vec{a}}{2}$

11. ⊙ Izraziti vektor $\vec{x} = (1,2,0)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1,2,1)$, $\vec{b} = (1,1,-1)$ i $\vec{c} = (1,1,0)$:
$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

12. ⊙ U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^4,\mathbb{R},+,\cdot)$, petorka vektora (a,b,c,d,e) je:
1) uvek zavisna ~~2)~~ nikad generatorna, 3) može ali ne mora da bude generatorna.

13. ⊙ U vektorskom prostoru $(\mathbb{C},\mathbb{R},+,\cdot)$, vektor $a \neq 0$ je:
1) uvek nezavisan, ~~2)~~ uvek zavisan, ~~3)~~ uvek baza.

14. ⊙ Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$? ~~a)~~ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ~~c)~~ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

15. ⊙ Ako je matrica A' dobijena od matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ elementarnim transformacijama, tada je:
1) $(\exists\lambda \in \mathbb{R})|det(A')| = \lambda|det(A)|$ 2) $\mathbf{rang}(A) = \mathbf{rang}(A')$ 3) $\det A = 0 \Leftrightarrow \det A' = 0$
4) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$

16. Ako su vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ **komplanarni** tada je:

1) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ 2) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ 3) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$

4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ 5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$ 6) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$

7) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ 8) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.

17. Ako je $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ i $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{m} \cdot \vec{x}$ i $\vec{m} \neq 0$, tada funkcija f **uvek** jeste: 1) linearna transformacija 2) injektivna 3) sirjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

18. Za **svaki** izomorfizam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i svako $x, y \in \mathbb{R}$ tačno je: 1) $f(x) = ax$ za neko $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 2) $f(0) = 0$ 3) $x = 0 \Leftarrow f(x) = 0$ 4) $f(xy) = yx$ 5) $f(xy) = y\,f(x)$ 6) $f(x) = ax$ za neko $a \in \mathbb{R}$ 7) f je sirjektivna

19. Neka je $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_1 - x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_3)$, gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$
1) linearna transformacija 2) injektivna 3) sirjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

20. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih kvadratnih matrica reda 3 čiji elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\det : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2) $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ 3) $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ 4) $\det : \mathcal{M} \underset{na}{\xrightarrow{1-1}} \mathbb{R}$ 5) det je linearna [illegible]?

21. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(3, 1)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ 2) $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$ 3) $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ 4) $\text{rang} : \mathcal{M} \to \{0, 1\}$ 5) $\text{rang} : \mathcal{M} \xrightarrow{na} \{0, 1\}$

22. Neka $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nije generatorna u prostoru V, $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ **nezavisna** za prostor V i $\dim V = 4$.
Tada: 1) $m \leq 4 \leq n$ 2) $n \leq 4 \leq m$ 3) $m \leq 4$ 4) $4 \leq m \leq n$ 5) $4 \leq n \leq m$ 6) $n \geq 4$

23. Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke A, $|\overrightarrow{AB}| = 3$ i $|\overrightarrow{BC}| = 4$. Odrediti $\vec{r}_C$ u zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ako je $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} \parallel \vec{b}$ i vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\vec{a}$ su suprotog smera, a vektori $\overrightarrow{BC}$ i $\vec{b}$ istog smera. $\vec{r}_C = \vec{r}_A - 3\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + 4\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

24. Neka je k–torka vektora $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ nezavisna i $(d_1, d_2, \ldots, d_\ell)$ generatorna ℓ– torka vektora. Tada je: 1) $k \leq \ell$ 2) $\ell \leq k$ 3) $k = \ell$ 4) $\ell < k$ 5) $\ell > k$ 6) ništa od prethodnog

25. Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:

1) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$, **dim** U= 1

2) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ **dim** U= 2

3) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 \geq 0\}$ **dimU**= 3

4) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ **dim** U= 0

26. Ako je A kvadratna matrica **reda 5**, tada je: 1) $\det A = 0 \Rightarrow$ **rang** A$= 0$ 2) $\det A = 0 \Leftarrow$ **rang** A≤ 4, 3) $\det A = 0 \Leftarrow$ **rang** A$= 4$ 4) **rang** A$= 4 \Rightarrow \det A \neq 0$, 5) **rang** A$= 4 \Leftarrow \det A \neq 0$, 6) **rang** A$= 5 \Leftarrow \exists A^{-1}$.

27. Linearne transformacije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, i $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ su uvek oblika:
$f(x,y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y, \varepsilon x + \phi y)$ $g(x,y) = \lambda x + \beta y$ $h(x) = \alpha x$ $F(x,y,z) = (\alpha x + \beta y + \gamma z, \ldots)$ $G(x) = (\ldots)$

28. **Postoji** linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ za koju važi da je: 1) sirjektivna
2) injektivna 3) bijektivna 4) izomorfizam 5) ništa od prethodnog

29. **Postoji** linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ za koju važi da je: 1) injektivna
2) sirjektivna 3) bijektivna 4) izomorfizam 5) ništa od prethodnog.

30. Za **svaki** vektorski prostor V i svaku sirjektivnu linearnu transformaciju $f : V \to V$ sledi da je transformacija f: 1) injektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam 4) ništa od prethodnog.

31. Za **svaki** vektorski prostor V i svaku injektivnu linearnu transformaciju $f : V \to V$ sledi da je f:
1) sirjektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam 4) ništa od prethodnog

32. Za svaki izomorfizam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i njegovu matricu A važi: 1) f je injektivna 2) postoji A^{-1} 3) $n = m$ 4) f je sirjektivna 5) f je bijektivna 6) A je regularna 7) $\det A \neq 0$ ~~8)~~ ništa od prethodnog

33. Za **svaki** vektorski prostor V postoji homogen sistem linearnih jednačina, čiji skup svih rešenja je vektorski prostor izomorfan prostoru V. Zakruži tačan odgovor DA NE

34. Neka su $\vec{x}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ slobodni vektori i $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični međusobno normalni. Tada je:
1) $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} = \vec{x}$ 2) $(\vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{j}, \vec{x}\vec{k}) \in \mathbb{R}^3$ 3) $(\vec{x}\vec{i})^2 + (\vec{x}\vec{j})^2 + (\vec{x}\vec{k})^2 = \vec{x}\vec{x}$
~~4)~~ $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ ~~5)~~ $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} = \vec{x}\vec{x}$

35. Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori iz skupa svih slobodnih vektora V. Tada $(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a}\vec{b})(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{a}\vec{a})(\vec{b}\vec{b})$ **akko je**: 1) $\vec{a}, \vec{b}$ proizvoljni vektori iz V ~~2)~~ $\vec{a} = 0 \vee \vec{b} = 0$ ~~3)~~ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ~~4)~~ $\vec{a} \perp \vec{b}$

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 9

1. Neka tačke $M(3,0,3)$, $N(0,3,3)$ i $P(3,3,0)$ pripadaju ravni α. Napisati bar jedan vektor $\vec{n}$ normalan na α, $\vec{n} = ($ 1, 1, 1 $)$. Ako je $(A,B,C,D) = ($ 1, 1, 1, −6 $)$, tada je $Ax + By + Cz + D = 0$ jednačina ravni α. Napisati bar jednu tačku $Q \in \alpha$ i $Q \notin \{M,N,P\}$, $Q($ 2, 4, 0 $)$. Težište T trougla MNP je $T($ 2, 2, 2 $)$.

2. Ako je $\vec{a} = (3,-3,0)$ i $\vec{b} = (-3,0,3)$, tada je $|\vec{a}| = 3\sqrt{2}$ $|\vec{b}| = 3\sqrt{2}$ $\vec{a}\vec{b} = -9$ $\sphericalangle(\vec{a}\vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$ $\vec{a} \times \vec{b} = (-9,-9,-9)$.

3. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $2ax - 2y = 1 \wedge -4x + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je:
1) neodređen: /
2) određen: $a \neq -2 \wedge a \neq 2$
3) kontradiktoran: $a = -2 \vee a = 2$

4. $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 20 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = [3]$ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -1$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

5. Ako je A kvadratna matrica **reda 3**, tada je: ~~1)~~ $\det A = 0 \Rightarrow$ **rang** A$= 0$ 2) $\det A = 0 \Leftarrow$ **rang** A≤ 2, 3) $\det A = 0 \Leftarrow$ **rang** A$= 2$ 4) **rang** A$= 3 \Rightarrow \det A \neq 0$, ~~5)~~ **rang** A$= 2 \Leftarrow \det A \neq 0$, 6) **rang** A$= 3 \Leftarrow \exists A^{-1}$.

6. Linearne transformacije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, i $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ su uvek oblika:
$f(x,y) = (ax+\beta y, \gamma x+\delta y, \varepsilon x+\zeta y)$ $g(x,y) = \alpha x + \beta y$ $h(x) = \alpha x$ $F(x,y,z) = (\ldots)$ $G(x) = (\alpha x, \beta x)$

7. Za svaki izomorfizam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i njegovu matricu A važi: 1) f je injektivna 2) postoji A^{-1} 3) $n = m$ 4) f je sirjektivna 5) f je bijektivna 6) A je regularna 7) $\det A \neq 0$ ~~8)~~ ~~ništa~~ od prethodnog

8. Za **svaki** vektorski prostor V postoji homogen sistem linearnih jednačina, čiji skup svih rešenja je vektorski prostor izomorfan prostoru V. Zakruži tačan odgovor DA NE

9. Zaokružiti cifre ispred uređenih n-torki koje su GENERATORNE u vektorskom prostoru uređenih trojki $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$: ~~1)~~ $\big((1,2,3)\big)$ 2) $\big((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\big)$ ~~3)~~ $\big((1,0,0),(0,1,0)\big)$
~~4)~~ $\big((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\big)$ ~~5)~~ $\big((1,1,1),(2,2,3),(3,3,4)\big)$ 6) $\big((0,0,2),(0,0,0),(3,0,0),(0,7,0)\big)$
7) $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)\big)$

10. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 0 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 3 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ 1

11. ⊙ Matrice i rangovi linearnih transformacija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (2x, 3x)$ i $g, h, r, s, p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x + y, y + y + y)$, $h(x, y, z) = (2x, 3x)$, $r(x, y, z) = (z, y)$, $s(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z)$ i $p(x, y, z) = (0, 0 + 0)$ su: (Rang upisati ispod odgovarajuće matrice)

$M_f = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $M_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $M_h = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $M_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $M_s = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix}$ $M_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1 2 1 2 0

12. ⊙ Neka je je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala, a S sredina od CD. U zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{r}_D$ i $\vec{r}_S$ napisati vektore položaja tačaka B i C. $\vec{r}_B = \vec{r}_A + 2\vec{r}_S - 2\vec{r}_D$ $\vec{r}_C = 2\vec{r}_S - \vec{r}_D$

* *

13. ⊙ Projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{n}$ je $\vec{x}' = \vec{n}\,\frac{\vec{x}\,\vec{n}}{|\vec{n}|^2}$ a na ravan $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ je $\vec{x}'' = \vec{x} - \vec{n}\,\frac{\vec{x}\,\vec{n}}{|\vec{n}|^2}$

14. ⊙ Napisati vektore položaja bar dve tačke M i N u zavisnosti od $\vec{n}, \vec{r}_Q$ i d, koje su sa različitih strana ravni $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ i od nje udaljene za d. $\vec{r}_M = \vec{r}_Q + d\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ $\vec{r}_N = \vec{r}_Q - d\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

15. ⊙ Neka je tačka P presk ravni $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ i prave $a : \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$ i $\vec{n}\vec{a} \neq 0$. Tada je: ~~1)~~ $\vec{r}_P = \vec{r}_Q + \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_Q)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$ ~~2)~~ $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{a}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{n}$ 3) $\vec{r}_P = \vec{r}_A - \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_Q)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$ 4) $\vec{r}_P = \vec{r}_A - \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_Q)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$ ~~5)~~ $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{n}$

16. ⊙ Neka su a, b i c zavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(2a - 3b + c, 3b - c, a - 5b + c)$ je: 1) uvek zavisna ~~2)~~ uvek nezavisna ~~3)~~ zavisna ili nezavisna, tj. zavisi od izbora vektora a, b, c.

17. ⊙ Neka su a, b i c nezavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + b - c, a + b, -c)$ je: 1) uvek zavisna ~~2)~~ uvek nezavisna ~~3)~~ zavisna ili nezavisna, tj. zavisi od izbora vektora a, b, c

18. ⊙ Za prave $m : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{5}$ i $n : \frac{x-5}{-6} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-10}$ važi: ~~a)~~ mimoilazne su ($m \cap n = \emptyset \wedge m \nparallel n$) b) paralelne su i različite ($m \parallel n \wedge m \neq n$) ~~c)~~ poklapaju se ($m = n$) ~~d)~~ seku se ($m \cap n = \{M\}$)

19. ⊙ Za proizvoljne vektore $\vec{n}$ i $\vec{r}$ važi: 1) $\vec{n}\vec{r} = |\vec{n}||\vec{r}| \Leftrightarrow \vec{n} \times \vec{r} = 0$ 2) $\vec{n}\vec{r} = |\vec{n}||\vec{r}| \Rightarrow \vec{n} \times \vec{r} = 0$ 3) $\vec{n}\vec{r} = |\vec{n}||\vec{r}| \Leftarrow \vec{n} \times \vec{r} = 0$ 4) $\vec{n}\vec{r} \neq |\vec{n}||\vec{r}| \Rightarrow \vec{n} \times \vec{r} \neq 0$ 5) $\vec{n}\vec{r} \neq |\vec{n}||\vec{r}| \Leftrightarrow \vec{n} \times \vec{r} \neq 0$

20. ⊙ Odrediti sve vrednosti realnog parametra a za koje je sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} ax + ay &= 1 \\ ax - ay &= 1 \end{aligned}$$

1) kontradiktoran: $a = 0$
2) određen: $a \neq 0$
3) 1 puta neodređen: /
4) 2 puta neodređen: /

21. • Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži AD i DC. (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BP}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{BD}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BP} =$

22. ⊙ Izraziti vektor $\vec{x} = (1, 2, 2)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, -1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 0)$:
$\vec{x} = \frac{3}{2}\vec{a}$

23. ⊙ U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^6, \mathbb{R}, +, \cdot)$, petorka vektora (a, b, c, d, e) je: ~~1)~~ uvek nezavisna 2) nikad generatorna, 3) nekada zavisna, a nekada nezavisna.

24. ⊙ U vektorskom prostoru $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, vektor $a \neq 0$ je: 1) uvek nezavisan, ~~2)~~ uvek zavisan, ~~3)~~ uvek baza.

25. ⊙ Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$? 1) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ~~3)~~ $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

26. ⊙ Ako je matrica A' dobijena od matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ elementarnim transformacijama, tada je: 1) $(\exists \lambda \in \mathbb{R})|det(A')| = \lambda|det(A)|$ 2) $\mathbf{rang}(A) = \mathbf{rang}(A')$ 3) $\det A = 0 \Leftrightarrow \det A' = 0$ 4) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$

27. ⊙ Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su **nekomplanarni** akko:

~~1)~~ rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ ~~2)~~ rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ 3) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$

~~4)~~ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ 5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$

~~6)~~ $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ 7) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ ~~8)~~ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.

• Ako je $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ i $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{m} \cdot \vec{x}$, tada funkcija f **uvek** jeste:
1) linearna transformacija 2) injektivna 3) sirjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

• Za **svaki** izomorfizam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i svako $x, y \in \mathbb{R}$ tačno je: 1) $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ za neke $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ 2) $f(0) = 0$ 3) $(x, y) = 0 \Leftarrow f(x, y) = 0$ 4) $f(x, y) = 0 \Leftarrow (x, y) = 0$ 5) f je injektivna 6) f je sirjektivna

30 • Neka je $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$, gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$
1) linearna transformacija 2) injektivna 3) sirjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

31 • Neka je $\mathcal{M}$ skup svih kvadratnih matrica reda 1 čiji elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\det : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2) $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ 3) $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ 4) $\det : \mathcal{M} \xrightarrow[na]{1-1} \mathbb{R}$ 5) det je linearna

32 • Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(3, 2)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\mathsf{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ 2) $\mathsf{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$ 3) $\mathsf{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ 4) $\mathsf{rang} : \mathcal{M} \to \{0, 1\}$ 5) $\mathsf{rang} : \mathcal{M} \xrightarrow{na} \{0, 1, 2\}$

33 • Neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ generatorna u prostoru V, $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ **nezavisna** za prostor V i $\dim V = 4$. Tada: 1) $m \leq 4 \leq n$ 2) $n \leq 4 \leq m$ 3) $m \leq 4$ 4) $4 \leq m \leq n$ 5) $4 \leq n \leq m$ 6) $n \geq 4$

34 • Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke A, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = 1$. Odrediti $\vec{r}_C$ u zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ako je $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} \parallel \vec{b}$ i vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\vec{a}$ su istog smera, a vektori $\overrightarrow{BC}$ i $\vec{b}$ suprotog smera. $\vec{r}_C = \vec{r}_A + \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

35 • Neka je k–torka vektora $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ nezavisna i $(d_1, d_2, \ldots, d_\ell)$ baza. Tada je:
1) $k \leq \ell$ 2) $\ell \leq k$ 3) $k = \ell$ 4) $\ell < k$ 5) $\ell > k$ 6) ~~ništa~~ od prethodnog

36 • Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:
1) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z\}$, **dim** $U=$ 2
2) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ **dim** $U=$ 2
3) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ **dimU**= 1
4) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 0\}$ **dim** $U=$ 3

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 10

1. • Neka tačke $M(1, -1, 2)$, $N(-1, 1, 2)$ i $P(1, 1, 0)$ pripadaju ravni α. Napisati bar jedan vektor $\vec{n}$ normalan na α, $\vec{n} = (1, 1, 1)$. Ako je $(A, B, C, D) = (1, 1, 1, -2)$, tada je $Ax + By + Cz + D = 0$ jednačina ravni α. Napisati koordinate tačke Q koja pripada ravni α i x osi. $Q(2, 0, 0)$.

2. • Ako je $\vec{a} = (2, -2, 0)$ i $\vec{b} = (-2, 0, 2)$, tada je $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$ $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$ $\vec{a}\vec{b} = -4$ $\sphericalangle(\vec{a}\vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$ $\vec{a} \times \vec{b} = (-4, -4, -4)$

3. • Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $ax - y = 1 \wedge x + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je: **1)** neodređen: / **2)** određen: $x \in \mathbb{R}$ **3)** kontradiktoran: /

4. • $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -6 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6$ $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

5. • Koje su od sledećih uređenih n-torki zavisne za vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$: 1) $\big((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\big)$ 2) $\big((1, 0, 0), (0, -1, 0)\big)$ 3) $\big((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 2, 3)\big)$ 4) $\big((1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)\big)$

6. • Matrice linearnih transformacija $h(x) = 5x$, $f(x, y) = x + 2y$, $g(x, y, z) = (x, x - y)$ i $s(x, y) = (3x, y)$ su:
$M_h = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$ $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ $M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $M_s = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. • Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$
3 2 2 1 0 3 1 1 1

8. Neka je je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala, a S sredina od BC. U zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{r}_D$ i $\vec{r}_S$ napisati vektore položaja tačaka B i C. $\vec{r}_B = 2\vec{r}_S - \vec{r}_D$ $\vec{r}_C = 2\vec{r}_S - \vec{r}_A$

****

9. Izraziti vektor $\vec{x} = (1,2,2)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1,2,1)$, $\vec{b} = (1,1,-1)$ i $\vec{c} = (1,1,0)$:
$\vec{x} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

10. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^6, \mathbb{R}, +, \cdot)$, petorka vektora (a,b,c,d,e) je:
1) uvek nezavisna 2) nikad generatorna, 3) nekada zavisna, a nekada nezavisna .

11. U vektorskom prostoru $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, vektor $a \neq 0$ je:
1) uvek nezavisan, 2) uvek zavisan, 3) uvek baza.

12. Neka su $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $n = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ matrice kolone nad poljem $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $a^\top n = 0 \Rightarrow a \perp n$ 2) $na = an$ 3) $n^\top a = a^\top n$ 4) $(n^\top x)a = (an^\top)x$ 5) $(n^\top a)x = (xn^\top)a$
6) $(n^\top x)a = n^\top(xa)$

13. Linearne transformacije f i g definisane su sa $f(x_1,x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$ i $g(x_1,x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.
a) Po definiciji kompozicije $\circ$ odrediti $(f \circ g)(x_1,x_2) = f(g(x_1,x_2)) = (-2x_2, 3x_1 - x_1)$
b) Napisati matrice M_f i M_g koje odgovaraju linearnim transformacijama f i g
$M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $M_g = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
c) Izračunati proizvod matrica $M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $M_g^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ i $g^{-1}(x_1,x_2) = (-x_1 + 2x_2, -3x_1)$
d) Napisati linearnu transformaciju $h(x_1,x_2)$ kojoj odgovara matrica $M_f \cdot M_g$ tj. $h(x_1,x_2) = (-2x_2, 3x_1 - x_1)$
e) Da li je $h = f \circ g$ tj. da li je $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\ h(x_1,x_2) = (f \circ g)(x_1,x_2)$? DA NE

14. Odrediti vrednosti parametara $a, b \in \mathbb{R}$ za koje je sistem
$$\begin{aligned} x + by &= 1 \\ bx - ay &= b \end{aligned}$$
(a) kontradiktoran: /
(b) određen: $a \neq -b^2$
(c) 1 puta neodređen: $a = -b^2$
(d) 2 puta neodređen: /

15. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ različiti nekolinearni vektori, tada je neorijentisani, konveksni ugao između vektora $\vec{m} = a\vec{b} - b\vec{a}$ i $\vec{n} = \frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b}$: 1) 0 2) $\frac{\pi}{6}$ 3) $\frac{\pi}{4}$ 4) $\frac{\pi}{3}$ 5) $\frac{\pi}{2}$ 6) π

16. Izračunati vektore položaja $\vec{r_{T'}}$ i $\vec{r_{T''}}$ projekcija tačke $T(-1,1,-1)$ na pravu $a: \vec{r} = (-1,0,-2) + t(1,-1,1)$, $t \in \mathbb{R}$ i ravan $\alpha: (1,-1,0) \cdot \vec{r} = (1,-1,0) \cdot (1,0,0)$.
$\vec{r_{T'}} = (-1, 0, -2)$ $\vec{r_{T''}} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$

17. Izračunati α i β ako je $\alpha(1,-3,2) + \beta(3,7,-3) = (0,0,0)$: $(\alpha, \beta) \in \{\ (0,0)\ \}$

18. Izračunati α i β ako je $\alpha(1,-3,2) + \beta(2,-6,4) = (0,0,0)$: $(\alpha, \beta) \in \{(-2\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

19. Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uređena trojka nekoplanarnih slobodnih vektora. Tada: 1) trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno nezavisna 2) trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno zavisna 3) postoji takav vektor $\vec{d}$ da je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ nezavisna 4) postoji takav vektor $\vec{d}$ da je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ zavisna 5) za svaki vektor $\vec{d}$ je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ nezavisna 6) za svaki vektor $\vec{d}$ je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ zavisna 7) svaki vektor $\vec{d}$ je linearna kombinacija uređene trojke vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

20. Neka su $\mathbf{a_1} = (a_{11}, \ldots, a_{1n})$, $\mathbf{a_2} = (a_{21}, \ldots, a_{2n})$, $\ldots$, $\mathbf{a_n} = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})$ vektori vrste matrice $A = A_{nn} = [a_{i,j}]_{nn}$ i neka je $V = \mathrm{Lin}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots \mathbf{a_n}) = \{\alpha_1\mathbf{a_1} + \alpha_2\mathbf{a_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{a_n} | \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$. Tada
1) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{rang}\, A < n$ 2) $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots \mathbf{a_n})$ je zavisna akko $\det A = 0$ 3) $\dim V \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{rang}\, A \geq 1$
4) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \dim V < n$ 5) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{rang}\, A \leq n$ 6) $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots \mathbf{a_n})$ je zavisna akko $\mathrm{rang}\, A < n$

21. U vektorskom prostoru svih slobodnih vektora, uređen par vektora (a, b) je:
1) uvek nezavisan, 2) uvek zavisan, 3) nekad nezavisan a nekad zavisan, 4) uvek generatoran.

22. (•) Ako je uređena trojka vektora (a,b,c) zavisna, tada je uređena trojka vektora $(a+b, a+c, a+2b-c)$
~~a) uvek nezavisna~~ (b) uvek zavisna ~~c) nekada zavisna, a nekada nezavisna.~~

23. (•) Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačka T težište trougla BCD (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{DT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{DT} = \frac{2\vec{a}}{3} - \frac{\vec{b}}{3}$

24. (•) Neka je u sedmodimenzionalnom vektorskom prostoru V, k-torka vektora $(a_1,\ldots,a_k)$ generatorna. Tada je uvek: ~~1) $k<7$~~ ~~2) $k \le 7$~~ ~~3) $k=7$~~ ~~4) $k>7$~~ (5) $k \ge 7$ ~~6) ništa od prethodnog~~

25. (•) Ako je $f: V \to W$ izomorfizam, tada je: (1) postoji f^{-1} (2) V i W su izomorfni (3) $V = W$
(4) za svaku nezavisnu n-torku vektora $(v_1,\ldots,v_n)$ iz V, n-torka $\Big(f(v_1),\ldots,f(v_n)\Big)$ je nezavisna u W
(5) za svaku zavisnu n-torku vektora $(v_1,\ldots,v_n)$ iz V, n-torka $\Big(f(v_1),\ldots,f(v_n)\Big)$ je zavisna u W

Potreban i dovoljan uslov da ravan α bude potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ je: da sadrži koord. početak
$(\forall \lambda,\beta \in \mathbb{R})(\forall (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in \alpha)\lambda(x_1,y_1,z_1)+\beta(x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$ i tada je α potprostor dimenzije: 2

26. (•) Za proizvoljne kvadratne regularne matrice A, B, C reda 2 važi:
(1) $A(BC) = (AB)C$ ~~2) $AB = BA$~~ (3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ~~4) $\det(AB) = \det(A) + \det(B)$~~
(5) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ~~6) $(AB)^2 = A^2B^2$~~ ~~7) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$~~

27. (•) Zaokružiti brojeve ispred podskupova $U_i \subseteq \mathbb{R}^3$ koji su podprostori i za one koji jesu napisati njihove dimenzije.
~~1) $U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \lor x = -y\}$~~ (2) $U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y\}$
(3) $U_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 = -y^3\}$ (4) $U_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$
~~5) $U_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$~~ (6) $U_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 0\}$
dim $U_1 =$ / **dim** $U_2 =$ 2 **dim** $U_3 =$ 2 **dim** $U_4 =$ 1 **dim** $U_5 =$ / **dim** $U_6 =$ 0

28. (•) Neka je $a = (2,2,0)$, $b = (-3,3,0)$, $c = (1,-1,0)$, $d = (-1,1,0)$, $e = (0,0,1)$, $f = (1,0,0)$, $g = (1,2,0)$.
1) $V = L(b,c,d) \Rightarrow dim(V) =$ 1 **2)** $V = L(a,f,g) \Rightarrow dim(V) =$ 2 **3)** $V = L(a) \Rightarrow dim(V) =$ 1
4) $V = L(0,0,0) \Rightarrow dim(V) =$ 0 **5)** $V = L(a,b) \Rightarrow dim(V) =$ 2 **6)** $V = L(e,f,g) \Rightarrow dim(V) =$ 3
7) $V = L(b,c,e) \Rightarrow dim(V) =$ 2 **8)** $V = L(a,b,c) \Rightarrow dim(V) =$ 2 **9)** $V = L(a,g) \Rightarrow dim(V) =$ 2

29. (•) Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ su **nekolinearni akko** je: (1) $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$ ~~2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$~~
~~3) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$~~ ~~4) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \le 2$~~ (5) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 2$ ~~6) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni~~
~~7) $(\exists\lambda \in \mathbb{R})\ \vec{a} \neq \lambda\vec{b}$~~ ~~8) $\vec{a} \parallel \vec{b}$~~ (9) $(\forall\lambda \in \mathbb{R})\quad (\vec{a} \neq \lambda\vec{b} \ \land\ \lambda\vec{a} \neq \vec{b})$ ~~10) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \ \land\ \alpha^2 + \beta^2 = 0$~~

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 11

1. (•) Neka tačke $M(1,0,0)$, $N(-1,1,1)$ i $P(0,-1,-1)$ pripadaju ravni α.
$\overrightarrow{MP} = (-1, -1, -1)$ $\overrightarrow{MN} = (-2, 1, 1)$. Napisati bar jedan vektor $\vec{n}$ normalan na α, $\vec{n} = (0, 1, -1)$.
Ako je $(A,B,C,D) = (0, 1, -1, 0)$, tada je $Ax + By + Cz + D = 0$ jednačina ravni α. Napisati bar jednu tačku $S \in \alpha$ i $S \notin \{M,N,P\}$, $S(19, 2, 2)$.

2. (•) Sistem linearnih jednačina $\begin{matrix} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{matrix}$ je
~~1) kontradiktoran,~~ ~~2) određen,~~ (3) 1 puta neodređen, ~~4) 2 puta neodređen.~~

3. (•) Neka je p prava čija je jednačina $x - 1 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-2}$. Napisati jedan vektor pravca prave p:
$\vec{p} = (1, 2, -2)$, i koordinate jedne tačke prave p: $(1, -1, 0)$.

4. (•) Matrica linearne transformacije $f(x,y,z) = (x+y-2z, x-z)$ je: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

5. (•) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 13 & -6 & 8 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

6. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 2 3 1 2 0 1 3

7. Ako je $\vec{a} = (1, -1, 0)$ i $\vec{b} = (1, 1, -1)$, tada je $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ $\vec{a}\vec{b} = 0$,
$\vec{a} \times \vec{b} = (1, 1, 2)$ $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{6}$ $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$.

8. Proizvoljna linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je oblika $f(x, y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y, \varepsilon x + \psi y)$

9. Neka je S presek dijagonala paralelograma $ABCD$. Zaokružiti slovo (slova) ispred tačnih jednakosti:
a) $\vec{r}_S = \frac{1}{2}\vec{r}_A + 0 \cdot \vec{r}_B + \frac{1}{2}\vec{r}_C + 0 \cdot \vec{r}_D$ b) $\vec{r}_S = 0 \cdot \vec{r}_A + \frac{1}{2}\vec{r}_B + 0 \cdot \vec{r}_C + \frac{1}{2}\vec{r}_D$ c) $\vec{r}_S = \frac{1}{4}\vec{r}_A + \frac{1}{4}\vec{r}_B + \frac{1}{4}\vec{r}_C + \frac{1}{4}\vec{r}_D$

* *

10. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ je sistem linernih jednačina $x + y + z = 0 \wedge ax + ay + az = 1$ nad poljem realnih brojeva
a) neodređen: / b) određen: / c) kontradiktoran: $a \in \mathbb{R}$

11. Broj rešenja homogenog sistema linernih jednačina nad poljem realnih brojeva može da bude:
~~a) 0~~ b) 1 ~~c) 2~~ d) ∞.

12. Funkcija $f : V \to W$ između vektorskih prostora V i W nad poljem F je linearna ako
a) $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ ~~b) f zadovoljava osam aksioma vektorskog prostora.~~
~~c) $f : V \to W$ je bijektivna funkcija.~~

13. Ako je $f : V \to W$ linearna transformacija, koje od sledećih tvrđenja je tačno?
a) $f(0) = 0$. ~~b) $f(-x) = -x$ za svako $x \in V$.~~ ~~c) $f(\lambda v) = f(\lambda) + f(v)$ za svako $\lambda \in F$, $v \in V$.~~

14. Linearna transformacija $f : V \to W$ je izomorfizam ako
a) $(\forall x \in V)(\forall y \in V)\ f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ i $(\forall z \in W)(\exists v \in V)\ f(v) = z$ ~~b) V i W su izomorfni.~~
~~c) za svaku n-torku vektora $(v_1, ..., v_n)$ iz V, n-torka vektora $\big(f(v_1), ..., f(v_n)\big)$ je baza od W.~~

15. Izračunati vektore položaja $\vec{r_{T'}}$ i $\vec{r_{T''}}$ projekcija tačke $T(-1, 1, -1)$ na pravu
$a : \big(A(-1, 0, -2), \vec{a} = (1, -1, 1)\big)$ i ravan $\alpha : x - y = 1$.
$\vec{r_{T'}} = (-1, 0, 2)$ $\vec{r_{T''}} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$

16. Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B, C reda 4:
~~a) $det(A + B) = det(A) + det(B)$~~ b) $det(AB) = det(BA)$ ~~c) $det(AB) = det(BA) \Rightarrow AB = BA$~~
d) $det(A) = det(A^{\top})$

17. Napisati analitičke izraze za funkcije $f, g, h, s, t, u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, čije su geometrijske interpretacije redom:
Osna simetrija u odnosu na x-osu: $f(x, y) = (\ x\ ,\ -y\ )$
Osna simetrija u odnosu na y-osu: $g(x, y) = (\ -x\ ,\ y\ )$
Osna simetrija u odnosu na pravu $y = -x$: $h(x, y) = (\ -y\ ,\ -x\ )$
Osna simetrija u odnosu na $y = x$: $s(x, y) = (\ y\ ,\ x\ )$
Centralna simetrija u odnosu na koordinatni početak: $t(x, y) = (\ -x\ ,\ -y\ )$
2 koji smer Rotacija za 90° oko koordinatnog početka: $u(x, y) = (\ -y\ ,\ x\ )$ $u(x,y) = (y, -x)$
Projekcija na x-osu: $v(x, y) = (\ x\ ,\ 0\ )$
Od navedenih funkcija linearne transformacije su: sve, izomorfizmi su: f, g, h, s, t, u.

18. Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ **su kolinearni akko**: 1) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ ~~2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$~~
~~3) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$~~ ~~4) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$~~ 5) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$ 6) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni
~~7) $(\exists \lambda \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \lambda \vec{b}$~~ 8) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 9) $(\exists \lambda \in \mathbb{R})(\vec{a} = \lambda \vec{b} \vee \lambda \vec{a} = \vec{b})$ 10) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0 \wedge \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

19. Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su **komplanarni akko**:

1) $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ 2) $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ 3) $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$

4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ 5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ 6) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$

7) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \ \wedge\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ 8) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.

20. Neka je $ABCD$ kvadrat, M sredina dijagonale AC, a N težište trougla ABC, napisati $\overrightarrow{MN}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{MN} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{6}$

21. Koje od tvrđenja je tačno ako je A kvadratna matrica reda n: a) $Rang(A) = 0 \Rightarrow det(A) = 0$ b) $det(A) = 0 \Leftrightarrow Rang(A) \leq n - 1$ c) $Rang(A) = n \Rightarrow det(A) \neq 0$, d) $Rang(A) = n \Rightarrow det(A) = 0$.

22. Napisati vektor položaja $\vec{r}_B$ tačke B koja je simetrična tački A u odnosu na tačku T: $\vec{r}_B = f(\vec{r}_A, \vec{r}_T) = 2\vec{r}_T - \vec{r}_A$

23. $(m+1)$ - torka vektora u m - dimenzionalnom vektorskom prostoru je: a) uvek linearno nezavisna, b) uvek linearno zavisna, c) nekad linearno nezavisna, a nekad linearno zavisna.

24. m - torka vektora u m - dimenzionalnom vektorskom prostoru je: a) uvek linearno nezavisna, b) uvek linearno zavisna, c) nekad linearno nezavisna, a nekad linearno zavisna.

25. $(m-1)$ - torka vektora u m - dimenzionalnom vektorskom prostoru je: a) uvek linearno nezavisna, b) uvek linearno zavisna, c) nekad linearno nezavisna, a nekad linearno zavisna.

26. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, linearno nezavisna trojka (a, b, c) je: a) uvek baza, b) uvek generatorna, c) nikad generatorna, a) nikad baza.

27. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, generatorna trojka (a, b, c) je: a) uvek baza, b) uvek linearno nezavisna, c) nikad linearno nezavisna, a) nikad baza.

28. Za koje vrednosti parametara a, b su navedene funkcije linearne transformacije, i za one koje jesu, naći odgovarajuću matricu i diskutovati njen rang:

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = (x + y + z + a)^b$ $a = 0 \wedge b = 1$ $M_f = [1\ 1\ 1]$ $rang(M_f) = 1$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ g(x) = (\frac{a}{x}, ax + b)$ $a = 0 \wedge b = 0$ $M_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $rang(M_g) = 0$

29. **Postoji** linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ za koju važi da je: 1) sirjektivna 2) injektivna 3) bijektivna 4) izomorfizam 5) ništa od prethodnog

30. **Postoji** linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ za koju važi da je: 1) injektivna 2) sirjektivna 3) bijektivna 4) izomorfizam 5) ništa od prethodnog.

31. Za **svaki** vektorski prostor V i svaku sirjektivnu linearnu transformaciju $f : V \to V$ sledi da je transformacija f: 1) injektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam 4) ništa od prethodnog.

32. Za **svaki** vektorski prostor V i svaku injektivnu linearnu transformaciju $f : V \to V$ sledi da je transformacija f: 1) sirjektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam 4) ništa od prethodnog

---

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 12

1. Neka tačke $M(2,0,0)$, $N(0,2,0)$ i $P(1,1,1)$ pripadaju ravni α. $\overrightarrow{MP} = (-1, 1, 1)$ $\overrightarrow{MN} = (-2, 2, 0)$. Napisati bar jedan vektor $\vec{n}$ normalan na α, $\vec{n} = (-1, -1, 0)$. Ako je $(A, B, C, D) = (1, 1, 0, -2)$, tada je $Ax + By + Cz + D = 0$ jednačina ravni α. Napisati bar jednu tačku $S \in \alpha$ i $S \notin \{M, N, P\}$, $S(1, 1, 14)$.

1. ⊙ Sistem linearnih jednačina $\begin{matrix} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \end{matrix}$ je

~~1)~~ kontradiktoran, ~~2)~~ određen, ~~3)~~ 1 puta neodređen, 4) 2 puta neodređen.

3 ⊙ Neka je p prava čija je jednačina $x+5=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-2}$. Napisati jedan vektor pravca prave p: $\vec{p}=(\ 1\ ,\ 2\ ,\ -2\ )$, i koordinate jedne tačke prave p: $(\ -5\ ,\ 1\ ,\ 0\ )$.

4. ⊙ Za koje vrednosti parametra $a\in\mathbb{R}$ sistem jednačina $ax+y=1 \wedge x+ay=a$ nad poljem realnih brojeva je: 1) neodređen: $a=1 \vee a=-1$ 2) određen: $a\neq 1 \wedge a\neq -1$ 3) kontradiktoran: /

5. ⊙ $\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}7 & -6\\8 & -7\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}7 & -6\\8 & -7\end{bmatrix}$

6. ⊙ Zaokružiti cifru (cifre) ispred uređenih n-torki koje su GENERATORNE u vektorkom prostoru trojki $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$: ~~1)~~ $\big((0,1,0)\big)$ 2) $\big((1,2,0),(1,1,0),(2,-1,1)\big)$ ~~3)~~ $\big((1,0,0),(2,0,2)\big)$ 4) $\big((1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\big)$ ~~5)~~ $\big((1,1,1),(2,2,2)\big)$ ~~6)~~ $\big((0,0,2),(0,0,0),(3,0,0)\big)$ ~~7)~~ $\big((0,1,0),(0,2,0)\big)$ 8) $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)\big)$

7. ⊙ Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 3 & 1 & 0\\0 & 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 2 & 0\\2 & 0 & 2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

3 2 2 2 1 2 1 0

8. ⊙ Matrice i rangovi linearnih transformacija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $f(x)=(0,9x)$ i $g,h,r,s:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $g(x,y,z)=(x+y,x+z)$, $h(x,y,z)=(x-y,0)$, $r(x,y,z)=(0,y)$, $s(x,y,z)=(x-y-z,6y)$ i $p(x,y,z)=(z,0)$ su: (Rang upisati ispod odgovarajuće matrice)

$M_f=\begin{bmatrix}0\\9\end{bmatrix}$ $M_g=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $M_h=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $M_r=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ $M_s=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 6 & 0\end{bmatrix}$ $M_p=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

1 2 1 1 2 1

9. ⊙ Neka je je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala, a S presek dijagonala. U zavisnosti od $\vec{r}_S$, $\vec{r}_B$ i $\vec{r}_A$ napisati vektore položaja tačaka C i D $\vec{r}_C=2\vec{r}_S-\vec{r}_A$ $\vec{r}_D=2\vec{r}_S-\vec{r}_B$

* *

10. ⊙ Izračunati vektore položaja $\vec{r}_{Q'}$ i $\vec{r}_{Q''}$ projekcija tačke $Q(5,-3,4)$ na pravu a i ravan α, ako je $A\in a$, $a\parallel\vec{a}$, $B\in\alpha$, $\vec{n}\perp\alpha$ i pri čemu je $A(0,-5,-4)$, $\vec{a}=(6,3,1)$, $B(3,2,2)$, $\vec{n}=(1,-1,1)$.

$\vec{r}_{Q'}=(\frac{132}{23},-\frac{49}{23},-\frac{70}{23})$ $\vec{r}_{Q''}=(\ 2\ ,\ 0\ ,\ 1\ )$

11. ⊙ U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R},+,\cdot)$ navesti po jedan primer vektorskog podprostora koji je redom dimenzije 0,1,2 i 3. Primer navesti jednačinom ili geometrijskim opisom.

$\dim V_0=0$ $V_0: x=y=z=0$, $\dim V_1=1$ $V_1: x=y=0 \wedge z\in\mathbb{R}$, $\dim V_2=2$ $V_2: x=0\wedge y\in\mathbb{R}\wedge z\in\mathbb{R}$, $\dim V_3=3$ $V_3=\mathbb{R}^3$

12. ⊙ Koji od sledećih podskupova $U\subseteq\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,\ldots,x_n)|x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\}$ je podprostor:

a) $U=\{x\in\mathbb{R}^n\mid x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$ ~~b)~~ $U=\{x\in\mathbb{R}^n\mid x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$

~~c)~~ $U=\{x\in\mathbb{R}^n\mid \forall i,\ x_i\in\{0,1\}\}$ ~~d)~~ $U=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\forall i,\ x_i\in[0,\infty)\}$

13. ⊙ Navesti dve baze vektorkog prostora $\mathbb{R}^3$:

$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ i $\{(3,0,0),(0,3,0),(0,0,3)\}$.

15. ⊙ Neka je $p=(1,0,1)$, $q=(0,2,2)$, $r=(0,0,3)$, $s=(0,4,0)$. Zaokružiti slovo ispred zavisne n-torke: ~~a)~~ (p,q,r), b) (q,r,s), ~~c)~~ (p,q), ~~d)~~ (p,r), ~~e)~~ (p,s), ~~f)~~ (q,r), ~~g)~~ (q,s), ~~h)~~ (r,s).

16. ⊙ Trojka (v_1,v_2,v_3) je generatorna za V ako: ~~a)~~ svaki od vektora v_1,v_2,v_3 je različit od nula-vektora. b) Za svaki vektor v važi $v=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_nv_3$ za neke skalare $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. ~~c)~~ $dim(V)=3$.

17. ⊙ Za linearno zavisnu trojku vektora (v_1,v_2,v_3) prostora V važi: ~~a)~~ par (v_1,v_2) je uvek linearno zavisan b) par (v_1,v_2) može biti linearno zavisan ili nezavisan u zavisnosti od izbora vektora (v_1,v_2,v_3) ~~c)~~ par (v_1,v_2) je uvek linearno nezavisan

18. Za linearno nezavisni par vektora (v_1, v_2) prostora V važi: ~~a)~~ trojka (v_1, v_2, v_3) je uvek linearno zavisna **b)** trojka (v_1, v_2, v_3) može biti linearno zavisna ili nezavisna u zavisnosti od izbora vektora (v_1, v_2, v_3) ~~c)~~ trojka (v_1, v_2, v_3) je uvek linearno nezavisna.

19. Uređena trojka nekomplanarnih slobodnih vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je: **a)** uvek linearno nezavisna ~~b)~~ uvek linearno zavisna ~~c)~~ u zavisnosti od datih vektora nekada zavisna, a nekada nezavisna.

20. Za svaku linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i svako $x, y \in \mathbb{R}$ tačno je: ~~a)~~ $f(x, x) = 2x$. **b)** $f(0, 0) = 0$. ~~c)~~ $f(x, y) = x + y$. ~~d)~~ $f(x, y) = xy$.

21. Šta od navedenog nije aksioma vektorskog prostora: ~~a)~~ $(\forall x, y \in V)(\forall \alpha \in F)\ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ ~~b)~~ $(\forall x \in V)(\forall \alpha, \beta \in F)\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ **c)** $(\forall x, y \in V)\ x \cdot y = y \cdot x$ **d)** $(\forall x \in V)\ 0 \cdot x = 0$

22. Za proizvoljne kvadratne matrice A, B, C reda n važi:
~~a)~~ $Rang(AB) = Rang(A)rang(B)$ **b)** $A + (B + C) = (A + B) + C$ **c)** $det(AB) = det(A)det(B)$ ~~d)~~ $AB = BA$ **d)** $A + B = B + A$

23. Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (px + y, x + py)$ je izomorfizam akko $p \in$ $\mathbb{R}$

24. Sistem linernih jednačina nad poljem realnih brojeva $ax + y = 1 \ \wedge\ x + by = 0$ je:
određen za $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}$, 1 puta neodr. za ______,
2 puta neodr. za ______, protivrečan za ______.

25. Vektor $\vec{s}$ simetrale $\sphericalangle BAC$ trougla ABC izraziti kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$:
$\vec{s} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

26. Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$? ~~a)~~ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

27. Karakteristični polinom matrice $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ je: $\lambda^2 - 3\lambda + 8$

28. Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B, C reda 3 i svaki skalar λ
~~a)~~ $det(A - B) = det(A) - det(B)$ **b)** $det(\lambda A) = \lambda^3 det(A)$ **c)** $det(ABC) = det(A)det(B)det(C)$.

29. Neka $A \sim B$ znači da su matrice A i B ekvivalentne. Tada važi:
~~a)~~ $A \sim B \Leftrightarrow |det(A)| = |det(B)|$, ~~b)~~ $det(A) = det(B) \Rightarrow A \sim B$, ~~c)~~ $A \sim B \Rightarrow det(A) = det(B)$,
d) $A \sim B \Rightarrow \Big(det(A) = 0 \Leftrightarrow det(B) = 0\Big)$. ~~e)~~ $A \sim B \Leftrightarrow \Big(Rang(A) = 0 \Leftrightarrow Rang(B) = 0\Big)$.

30. Koje od tvrđenja je tačno ako je matrica A' dobijena od matrice A elementarnim transformacijama.
a) $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow det(A') \neq 0$ **b)** $Rang(A) = Rang(A')$
c) $det(A) = \lambda det(A')$ za neki skalar λ ~~c)~~ $det(A) = \lambda^2 det(A')$ za neki skalar λ.

31. Koje od tvrđenja je tačno ako je A kvadratna matrica reda n: **a)** $Rang(A) = 0 \Rightarrow det(A) = 0$
b) $det(A) = 0 \Leftrightarrow Rang(A) \leq n - 1$ **c)** $Rang(A) = n \Rightarrow det(A) \neq 0$, ~~d)~~ $Rang(A) = n \Rightarrow det(A) = 0$.

32. Izračunati vektor položaja $\vec{r}_T$ tačke T, prodora prave $p :\ \vec{r} = (7, 7, 4) + t(2, 2, 1),\ t \in \mathbb{R}$ kroz ravan $\alpha :\ \vec{r} \cdot (-1, 0, 1) = (2, 5, 2) \cdot (-1, 0, 1)$. $\vec{r}_T = (1, 1, 1)$

33. Ako je $f : V \to W$ izomorfizam vektorskih prostora, tada je: **a)** postoji f^{-1}, ~~b)~~ $V = W$,
c) za svaku zavisnu n-torku vektora $(v_1, ..., v_n)$ iz V, n-torka $\Big(f(v_1), ..., f(v_n)\Big)$ je zavisna u W.

34. Za koje vrednosti parametara a, b su navede funkcije linearne transformacije, i za one koje jesu, naći odgovarajuću matricu i diskutovati njen rang:

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = (ax + by + z, a + b)$ $a = b = 0$ $M_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $rang(M_f) = 1$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1,\ g(x, y) = \sin(a)x + \cos(b)y$ $a, b \in \mathbb{R}$ $M_g = [\sin(a)\ \cos(b)]$ $a = k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge b = \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in \mathbb{Z} \Rightarrow rang(M_g) = 0$
$a \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee b \neq \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in \mathbb{Z} \Rightarrow rang(M_g) = 1$

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 13

1, Neka tačke $P(1,2,0), Q(2,1,0)$ i $R(1,1,1)$ pripadaju ravni α. Napisati bar jedan jedinični vektor $\vec{n}$ normalan na α i jedan vektor $\vec{m}$ paralelan sa α, $\vec{n} = (1, 1, 1)$, $\vec{m} = (0, 1, -1)$. Ako je $(A, B, C, D) = (1, 1, 1, -3)$, tada je $Ax + By + Cz + D = 0$ jednačina ravni α. Napisati koordinate tačke $M \in \alpha$ ravni α koja je najbliža koordinatnom početku. $M(1, 1, 1)$.

2. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linearnih jednačina $x + ay = 1 \wedge ax + y = 1$ nad poljem realnih brojeva je: **1)** neodređen: $a \neq -1 \wedge a \neq 1$ **2)** određen: $a = 1$ **3)** kontradiktoran: $a = -1$

3, Za vektore $\vec{a} = (1,1,0)$ i $\vec{b} = (0,1,1)$ izračunati: **1)** $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ **2)** $|\vec{b}| = \sqrt{2}$
3) $2\vec{a} - \vec{b} = (2, 1, -1)$ **4)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$
5) $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{3}$ **6)** $\sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Koje od sledećih uređenih n-torki **jesu nezavisne** za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$: **1)** $\big((0,0,-1),(0,4,0),(9,0,0)\big)$
~~2)~~ $\big((1,3,-2),(-2,-6,4)\big)$ ~~3)~~ $\big((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,2,3)\big)$ ~~4)~~ $\big((1,0,1),(1,1,0),(2,1,1)\big)$

5. $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\10\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 2\\6 & 3\end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix}5 & 5 & 2\\2 & 2 & 0\\2 & 0 & 1\end{vmatrix} = -8$ $\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 3\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}3 & -3\\-2 & 1\end{bmatrix}$

6, Matrice linearnih transformacija $f(x,y) = (2x, x, y)$, $g(x,y,z) = y$, $h(x,y) = (x,y)$ i $s(x,y,z) = (y, z, x+x)$ su:
$M_f = \begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ $M_g = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ $M_h = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ $M_s = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\2 & 0 & 0\end{bmatrix}$

7. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.
$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 3 & 1 & 3\\1 & 3 & 0 & 3\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\-3 & 0 & -6\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 2 & 0\\2 & 0 & 2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0 & 0 & 9\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}3 & 3\\7 & 7\end{bmatrix}$
3 1 1 2 0 3 3 1 1

* *

8. Odrediti sve vrednosti realnog parametara a za koje je sistem linearnih jednačina
$$\begin{aligned} ax &+ y = a \\ -x &+ ay = a \end{aligned}$$
1) kontradiktoran: /
2) određen: $a \in \mathbb{R}$
3) jednostruko neodređen: /
4) dvostruko neodređen: /

9. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži AB i AD. (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{PQ}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{PQ} = \vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}$

10. Napisati $\vec{x} = (2,0,1)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1,0,1)$, $\vec{b} = (2,1,1)$ i $\vec{c} = (1,1,1)$:
$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

11. Koordinate projekcija A' tačke $A(1,1,2)$ na pravu određenu sa $x = y = z$ je: $A'(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$

12. Vektor položaja $\vec{r}_T$ tačke prodora prave $p: \vec{r} = \vec{r}_Q + t\vec{l}$ kroz ravan $\alpha: \vec{m}\vec{r} = \vec{m}\vec{r}_W$ je
$\vec{r}_T = \vec{r}_Q + \frac{(\vec{r}_W - \vec{r}_Q)\,\vec{m}}{\vec{l}\,\vec{m}}\,\vec{l}$

13. Normalna projekcija vetora $\vec{x} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ na ravan $\alpha: x + 2y + z = 0$ je: $\mathbf{pr}_\alpha(\vec{x}) = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

14, Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 5\end{bmatrix}$? **a)** $\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix}-3\\-3\end{bmatrix}$ ~~c)~~ $\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$.

15. Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B, C reda 3 i svaki skalar λ:
1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ~~2)~~ $(B+C)A = AB + CA$ **3)** $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$
4) $\det(AB) = \det(B)det(A)$ ~~5)~~ $(AB)^2 = A^2B^2$ ~~6)~~ $\mathbf{rang}(AB) = \mathbf{rang}(BA)$
~~7)~~ $A(B - C) = BA - CA$ **8)** $A(BC) = (BA)C$

16. Koja od sledećih tvrdnji je tačna za svaka dva slobodna nenula vektora $\vec{x}$ i $\vec{a}$: **a)** $(\vec{a} - \mathbf{pr}_{\vec{x}}\vec{a})\vec{x} = 0$
b) $(\vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x})\vec{a} = 0$ ~~c)~~ $(\vec{a} - \mathbf{pr}_{\vec{x}}\vec{a}) \times \vec{x} = 0$ ~~d)~~ $(\vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x}) \times \vec{a} = 0$ ~~e)~~ ništa od prethodnog

17. Neka su a, b i c nezavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a+b+c, b+c, b-c)$ je:
~~a)~~ uvek zavisna **b)** uvek nezavisna ~~c)~~ nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c.

18. Neka su a, b i c zavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a+c, a+b, a-b+2c)$ je:
a) uvek zavisna ~~b)~~ uvek nezavisna ~~c)~~ nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c.

19. Nenula vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ su **nekolinearni** ako je ~~1)~~ $\vec{a} \times \vec{b} = 0$
2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ~~3)~~ rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ ~~4)~~ rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$ ~~5)~~ rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$
~~6)~~ $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni ~~7)~~ $(\exists\lambda \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \lambda\vec{b}$ ~~8)~~ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 9) $(\forall\lambda \in \mathbb{R})\ (\vec{a} \neq \lambda\vec{b} \wedge \lambda\vec{a} \neq \vec{b})$
~~10)~~ $(\exists\alpha, \beta \in \mathbb{R})\, \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

20. Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su **nekomplanarni** ako je:
~~1)~~ rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ ~~2)~~ rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ 3) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$
~~4)~~ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ 5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$ ~~6)~~ $(\exists\alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$
~~7)~~ $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ 8) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je nezavisna.

21. Neka je $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_3, x_2, x_1)$ gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$
1) linearna transformacija 2) injektivna 3) sirjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

22. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(3,5)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) rang : $\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ ~~2)~~ rang : $\mathcal{M} \to \mathbb{N}$ 3) rang : $\mathcal{M} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ ~~4)~~ rang : $\mathcal{M} \overset{1-1}{\to} \mathbb{N} \cup \{0\}$
5) rang : $\mathcal{M} \overset{na}{\to} \{0, 1, 2, 3\}$

23. Neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ generatorna u prostoru V, $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ zavisna za prostor V i $\dim V = m$. Tada je ~~1)~~ $m \leq k \leq n$ ~~2)~~ $n \leq k \leq m$ 3) $m \leq k$ ~~4)~~ $k \leq m \leq n$ ~~5)~~ $k \leq n \leq m$ 6) $m \leq n \leq k$

24. Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke $A(3, 1, 2)$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = 9$. Odrediti $\vec{r}_C$ ako je $\overrightarrow{AB} \| \vec{a} = (1, 4, 8)$, $\overrightarrow{BC} \| \vec{b} = (-8, 1, 4)$ i ako su smerovi vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ suprotni smerovima redom vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$.
$\vec{r}_C = (10, -4, -10)$

25. Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:
1) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$, **dim** $U=$ 2
2) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$ **dim** $U=$ 1
3) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot 1 = x\}$ **dimU=** 3
4) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2x\}$ **dim** $U=$ 2

26. Ako je A kvadratna matrica reda 5, tada je: 1) $\det A = 0 \Leftarrow$ **rang** A$= 0$ 2) $\det A = 0 \Leftrightarrow$ **rang** A≤ 4, ~~3)~~ $\det A = 0 \Rightarrow$ **rang** A$= 5$ 4) **rang** A$= 5 \Rightarrow \det A \neq 0$, 5) **rang** A$= 5 \Leftarrow \det A \neq 0$,
6) **rang** A$= 5 \Leftarrow \exists A^{-1}$

27. Neka su $\mathbf{a_1} = (a_{11}, \ldots, a_{n1})$, $\mathbf{a_2} = (a_{12}, \ldots, a_{n2})$, $\ldots$, $\mathbf{a_n} = (a_{1n}, \ldots, a_{nn})$ vektori kolone matrice $A = A_{nn} = [a_{ij}]_{nn}$, neka je $V = \mathrm{Lin}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}) = \{\alpha_1\mathbf{a_1} + \alpha_2\mathbf{a_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{a_n} | \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$ i neka je $\mathbf{a_i}^2$ skalarni proizvod vektora $\mathbf{a_i}$ sa samim sobom. Tada je: 1) $\mathbf{a_1} = \ldots = \mathbf{a_n} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1}^2 + \ldots + \mathbf{a_n}^2 = 0$
2) $\dim V \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{rang}\, A \neq 0$ 3) $\dim V = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1} = \ldots = \mathbf{a_n} = 0$ ~~4)~~ $\dim V = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1}^2 + \ldots + \mathbf{a_n}^2 \neq 0$
5) **rang** $A \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1} = \ldots = \mathbf{a_n} = 0$ ~~6)~~ **rang** $A = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a_1}^2 + \ldots + \mathbf{a_n}^2 \neq 0$

28. **Za svaku** nenula linearnu transformaciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ važi da je: 1) sirjektivna
2) injektivna 3) bijektivna 4) izomorfizam ~~5)~~ ništa od prethodnog

29. **Postoji** linearna transformacija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ za koju važi da je: 1) injektivna
~~2)~~ sirjektivna ~~3)~~ bijektivna ~~4)~~ izomorfizam ~~5)~~ ništa od prethodnog.

30. Za **svaku** sirjektivnu linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sledi da je transformacija f:
1) injektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam ~~4)~~ ništa od prethodnog.

31. Za svaku injektivnu linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sledi da je transformacija f:
1) sirjektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam ~~4)~~ ništa od prethodnog

32. Za svaki **izomorfizam** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i njegovu matricu A važi: 1) f je injektivna 2) postoji A^{-1} 3) $n = m$ 4) f je sirjektivna 5) f je bijektivna 6) A je regularna 7) $\det A \neq 0$ ~~8)~~ ništa od prethodnog

33. Za **svaki** konačno dimenzioni vektorski prostor V postoji homogen sistem linearnih jednačina, čiji skup svih rešenja je vektorski prostor izomorfan prostoru V. Zaokruži tačan odgovor DA NE

34. Neka je $a = (2,2,0)$, $b = (-3,3,0)$, $c = (1,-1,0)$, $d = (-1,1,0)$, $e = (0,0,1)$, $f = (1,0,0)$, $g = (1,2,0)$. Zaokružiti broj koji je dimenzija potprostora V vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$:
1) $V = L(b,c,d) \Rightarrow dim(V)$ je: 1,2,3
2) $V = L(e,f,g) \Rightarrow dim(V)$ je: 1,2,3 **3)** $V = L(a,b) \Rightarrow dim(V)$ je: 1,2,3
4) $V = L(e,f,g) \Rightarrow dim(V)$ je: 1,2,3 **5)** $V = L(b,c,e) \Rightarrow dim(V)$ je: 1,2,3
6) $V = L(a,b,c) \Rightarrow dim(V)$ je: 1,2,3 **7)** $V = L(a,g) \Rightarrow dim(V)$ je: 1,2,3

35. Neka su $\vec{x}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ slobodni vektori i $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični međusobno normalni i α, β i γ uglovi koje vektor $\vec{x}$ obrazuje sa redom vektorima $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Tada je: 1) $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} = \vec{x}$ 2) $(\vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{j}, \vec{x}\vec{k}) \in \mathbb{R}^3$
3) $(\vec{x}\vec{i})^2 + (\vec{x}\vec{j})^2 + (\vec{x}\vec{k})^2 = \vec{x}\vec{x}$ ~~4)~~ $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ ~~5)~~ $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} = \vec{x}\vec{x}$
6) $(|\vec{x}|\cos\alpha)\vec{i} + (|\vec{x}|\cos\beta)\vec{j} + (|\vec{x}|\cos\gamma)\vec{k} = \vec{x}$ 7) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 14

1. Za ravan α kojoj pripadaju tačke $A(2,0,0), B(0,2,0)$ i koja je paralelna sa $z-$osom napisati jedan njen vektor normale $\vec{n}_\alpha = (1, 1, 0)$ i koordinate njene tačke $M(1, 1, 0)$ koja je najbliža koordinatnom početku.

2. Ako je $\vec{a} = (1,2,2)$ i $\vec{b} = (2,1,-2)$, tada je
$|\vec{a}| = 3$ $|\vec{b}| = 3$ $\vec{a}\vec{b} = 0$ $\sphericalangle(\vec{a}\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ $\vec{a} \times \vec{b} = 9$.

3. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $ax + y = 1 \wedge ax - ay = a$ nad poljem realnih brojeva je: **1)** neodređen: $a = 0$ **2)** određen: $a \neq 0 \wedge a \neq -1$ **3)** kontradiktoran: $a = -1$

4. $$\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -8 \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Zaokružiti cifru (cifre) ispred uređenih n-torki koje su NEZAVISNE u vektorkom prostoru uređenih trojaka $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$: 1) $\big((0,1,0)\big)$ ~~2)~~ $\big((1,2,1),(1,1,0),(2,3,1)\big)$ 3) $\big((1,0,0),(2,0,2)\big)$
4) $\big((1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\big)$ ~~5)~~ $\big((1,1,1),(2,2,2)\big)$ ~~6)~~ $\big((0,0,2),(0,0,0),(3,0,0)\big)$
~~7)~~ $\big((0,1,0),(0,2,0)\big)$ ~~8)~~ $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)\big)$

6. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.
$$\underset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 2 & -4 \end{bmatrix}} \underset{1}{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}} \underset{1}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}} \underset{2}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}} \underset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}} \underset{1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{0}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

7. Matrice i rangovi linearnih transformacija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (2x, 9x)$ i $g, h, r, s, p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y,z) = (x,y)$, $h(x,y,z) = (0,0)$, $r(x,y,z) = (y,y)$, $s(x,y,z) = (x - y - z, 6y + x)$ i $p(x,y,z) = (z,z)$ su: (Rang upisati ispod odgovarajuće matrice)
$$\underset{1}{M_f = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}} \quad \underset{2}{M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \underset{0}{M_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{1}{M_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \underset{2}{M_s = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}} \underset{1}{M_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

8. Neka je je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala, a S presek dijagonala. U zavisnosti od $\vec{r}_A, \vec{r}_B$ i $\vec{r}_S$ napisati vektore položaja tačaka C i D. $\vec{r}_C = 2\vec{r}_S - \vec{r}_A$ $\vec{r}_D = 2\vec{r}_S - \vec{r}_B$

* *

9. Odrediti sve vrednosti realnog parametra a za koje je sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} 2ax &+ ay &= a \\ 3ax &+ 2ay &= 5a \end{aligned}$$

1) kontradiktoran: /
2) određen: $a \neq 0$
3) 1 puta neodređen: /
4) 2 puta neodređen: $a = 0$

10. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom središte duži AD i DC. (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BP}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BP} = -\frac{3}{2}\vec{a} + 3\vec{b}$

11. Izraziti vektor $\vec{x} = (3, 4, 0)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, -1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 0)$:
$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

12. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}, +, \cdot)$, šestorka vektora (a, b, c, d, e, f) je:
1) uvek zavisna 2) nikad baza, 3) može ali ne mora da bude generatorna.

13. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, vektor $a \neq 0$ je:
1) uvek nezavisan, ~~2) uvek zavisan,~~ 3) uvek baza.

14. Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$? ~~1)~~ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ~~3)~~ $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

15. Koje od tvrđenja je tačno ako je kvadratna matrica B dobijena od matrice A elementarnim transformacijama. ~~1)~~ $det(A) = det(B)$ ~~2)~~ $det(A) \neq 0 \wedge det(B) \neq 0$ 3) $Rang(A) = Rang(B)$ ~~4)~~ $A \cdot B = I$ ~~5)~~ $A = \alpha B$ za neki skalar α ~~6)~~ matrice A i B imaju iste karakteristične korene 7) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \exists B^{-1}$

16. Neka su $\vec{x}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ slobodni vektori i $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični međusobno normalni. Tada je:
1) $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} = \vec{x}$ 2) $(\vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{j}, \vec{x}\vec{k}) \in \mathbb{R}^3$ 3) $(\vec{x}\vec{i})^2 + (\vec{x}\vec{j})^2 + (\vec{x}\vec{k})^2 = \vec{x}\vec{x}$
~~4)~~ $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ ~~5)~~ $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} = \vec{x}\vec{x}$

17. Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uređena trojka nekolinearnih slobodnih vektora. Tada: ~~1)~~ trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno nezavisna ~~2)~~ trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno zavisna 3) postoje takvi vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ da je trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ nezavisna 4) postoje takvi vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ da je trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ zavisna

18. U vektorskom prostoru slobodnih vektora, par vektora (a, b) je:
~~1) uvek nezavisan,~~ ~~2) uvek zavisan,~~ 3) nekad nezavisan a nekad zavisan.

19. Izračunati vektor položaja $\vec{r}_T$ tačke T, projekcije tačke $(1, 1, 1)$ na pravu $p: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. $\vec{r}_T = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

20. Koja od sledećih tvrdnji je tačna za svaka dva slobodna nenula vektora $\vec{x}$ i $\vec{a}$:
a) $(\vec{a} - \mathbf{pr}_{\vec{x}}\vec{a})\vec{x} = 0$ b) $(\vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x})\vec{a} = 0$ ~~c)~~ $(\vec{a} - \mathbf{pr}_{\vec{x}}\vec{a}) \times \vec{x} = 0$ ~~d)~~ $(\vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x}) \times \vec{a} = 0$
~~e) ništa od prethodnog~~

21. Neka su a, b i c proizvoljni nezavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + b - c, b + c, a + b - c)$ je:
a) uvek zavisna ~~b) uvek nezavisna~~ ~~c) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c.~~

22. Neka su a, b i c zavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(2a + 3c, a + 4b, 7a - b + 5c)$ je:
a) uvek zavisna b) uvek nezavisna c) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c.

23. Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su **nekomplanarni ako** je:

~~1)~~ rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ ~~2)~~ rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ 3) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$

~~4)~~ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ 5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$ ~~6)~~ $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$

7) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ ~~8)~~ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.

24. Ako je $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ i $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{k} \cdot \vec{x}$, tada funkcija f **uvek** jeste:
1) linearna transformacija ~~2)~~ injektivna ~~3)~~ sirjektivna ~~4)~~ bijektivna ~~5)~~ izomorfizam

25. • Za **svaku** nenula linearnu transformaciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i svako $x, y, \lambda, v \in \mathbb{R}$ tačno je: 1) $x = 0 \Leftarrow f(x) = 0$
2) $f(0) = 0$ ~~3)~~ $f(xy) = yx$ 4) $f(xy) = y\,f(x)$ 5) $f(x) = ax$ za neko $a \in \mathbb{R}$ 6) f je izomorfizam

26. • Neka je $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 2x_1 + x_2 + x_3)$, gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$
1) linearna transformacija ~~2)~~ injektivna ~~3)~~ sirjektivna ~~4)~~ bijektivna ~~5)~~ izomorfizam

27. • Neka je $\mathcal{M}$ skup svih kvadratnih matrica reda 2 čiji elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\det : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ ~~2)~~ $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ 3) $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ ~~4)~~ $\det : \mathcal{M} \underset{na}{\xrightarrow{1-1}} \mathbb{R}$ ~~5)~~ det je linearna

28. • Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(1, 2)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) rang : $\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ ~~2)~~ rang : $\mathcal{M} \to \mathbb{N}$ 3) rang : $\mathcal{M} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ 4) rang : $\mathcal{M} \to \{0, 1, 2\}$
~~5)~~ rang : $\mathcal{M} \xrightarrow{na} \{0, 1, 2\}$

29. • Neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ generatrna u prostoru V, $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ **nezavisna** za prostor V i $\dim V = 4$. Tada je 1) $m \le 4 \le n$ ~~2)~~ $n \le 4 \le m$ ~~3)~~ $n \le m \le 4$ ~~4)~~ $4 \le m \le n$ ~~5)~~ $4 \le n \le m$ 6) $n \ge 4$

30. • Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke A, $|\overrightarrow{AB}| = 3$ i $|\overrightarrow{BC}| = 6$. Odrediti $\vec{r}_C$ u zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{i}$ i $\vec{j}$, ako je $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{i}$, $\overrightarrow{BC} \parallel \vec{j}$ i vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\vec{i}$ su istog smera, a vektori $\overrightarrow{BC}$ i $\vec{j}$ suprotnog. $\vec{r}_C = \vec{r}_A + 3\frac{\vec{i}}{|\vec{i}|} - 6\frac{\vec{j}}{|\vec{j}|}$

31. • Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:
1) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 = 0\}$, $\dim U =$ 2
2) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ $\dim U =$ 1
3) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ $\dim U =$ 0
4) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \ge 0\}$ $\dim U =$ 3

32. • Linearne transformacije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, i $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ su uvek oblika:
$f(x,y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y, \ldots)$ $g(x,y) = \alpha x + \beta y$ $h(x) = \alpha x$ $F(x,y,z) = (\alpha x + \beta y + \gamma z, \delta x + \ldots)$ $G(x) = (\alpha x, \beta x)$

33. • Linearne transformacije f i g definisane su sa
$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, 2x_1 + 3x_2)$ i $g(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, x_1 - 3x_2)$.
a) Po definiciji kompozicije $\circ$ odrediti $(f \circ g)(x_1, x_2) = f\big(g(x_1, x_2)\big) = (-x_1 + 4x_2, 5x_1 - 13x_2)$
b) Napisati matrice M_f i M_g koje odgovaraju linearnim transformacijama f i g:
$M_f = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $M_g = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.
c) Izračunati proizvod matrica $M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -13 \end{bmatrix}$, $M_g^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{12}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ i $g^{-1}(x_1, x_2) = (\frac{12}{7}x_1 + \frac{4}{7}x_2, \frac{5}{7}x_1 + \frac{1}{7}x_2)$
d) Napisati linearnu transformaciju $h(x_1, x_2)$ kojoj odgovara matrica $M_f \cdot M_g$ tj. $h(x_1, x_2) = (-x_1 + 4x_2, 5x_1 - 13x_2)$
e) Da li je $h = f \circ g$ tj. da li je $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\ h(x_1, x_2) = (f \circ g)(x_1, x_2)$? DA NE

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 15

1. • Za pravu p kojoj pripadaju tačke $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ napisati jedan vektor koji je paralelan sa njom $\vec{p} = (-2, 2, 0)$, jedan vektor normalan na nju i na vektor $\vec{k}$ $(2, 2, 0)$ i koordinate njene tačke $M(1, 1, 0)$ koja je najbliža z-osi.

2. • Ako je $\vec{a} = (1, 1, 2)$ i $\vec{b} = (2, 1, 0)$, tada je $|\vec{a}| = \sqrt{6}$ $|\vec{b}| = \sqrt{5}$ $\vec{a}\vec{b} = 3$ $\cos \sphericalangle(\vec{a}\vec{b}) = \frac{\sqrt{30}}{10}$ $\vec{a} \times \vec{b} = (-2, 4, -1)$

3. • Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $2ax + y = 1 \ \wedge\ ax + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je: 1) neodređen: $a = 0 \vee a = \frac{1}{2}$ 2) određen: $a \ne 0 \wedge a \ne \frac{1}{2}$ 3) kontradiktoran: /

4. • $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 52 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = 4$ $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 10$ $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

5. Zaokružiti cifru (cifre) ispred uređenih n-torki koje su GENERATORNE u vektorkom prostoru uređenih parova $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$: ~~1)~~ $\big((0,1)\big)$ **2)** $\big((1,2),(1,1),(2,3)\big)$ ~~3)~~ $\big((1,0),(2,0)\big)$ **4)** $\big((1,0),(0,2),(0,0)\big)$ ~~5)~~ $\big((1,1),(2,2)\big)$ ~~6)~~ $\big((0,0),(0,0),(3,0)\big)$ ~~7)~~ $\big((0,1),(0,2)\big)$ **8)** $\big((1,0),(0,1),(0,0),(1,2)\big)$

6. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}0&0&0\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1&1\\1&1\\2&2\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1&3&-1&2\\0&-3&1&-2\\0&-6&2&-4\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}4&0&2\\-2&0&-1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&0\\2&0&2\end{bmatrix}$$

1 0 1 2 1 2 1 2

7. Matrice i rangovi linearnih transformacija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $f(x)=(x,0)$ i $g,h,r,s,p:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $g(x,y,z)=(x+z,y)$, $h(x,y,z)=(x,x)$, $r(x,y,z)=(z,0)$, $s(x,y,z)=(x-y-z,0)$ i $p(x,y,z)=(z,z)$ su: (Rang upisati ispod odgovarajuće matrice)

$M_f=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $M_g=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ $M_h=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ $M_r=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $M_s=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $M_p=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

1 2 1 1 1 1

8. Neka je je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala, S presek dijagonala i P sredina od SC. U zavisnosti od $\vec{a}=\overrightarrow{AS}$ i $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ napisati vektore $\overrightarrow{BD}=2(\vec{b}-\vec{a})$ i $\overrightarrow{BP}=\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$

* *

9. Odrediti sve vrednosti realnog parametra a za koje je sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} x &+ ay &= a\\ x &+ 2ay &= 2a\\ 2x &+ y &= 2\end{aligned}$$

1) kontradiktoran: $a\neq 0$
2) određen: $a=0$
3) 1 puta neodređen: /
4) 2 puta neodređen: /

10. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži AC i BC. (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{AQ}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$ i $\vec{b}=\overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{AQ}=\vec{a}$

11. Izraziti vektor $\vec{x}=(1,0,-2)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}=(1,2,1)$, $\vec{b}=(1,1,-1)$ i $\vec{c}=(1,1,0)$:

$\vec{x}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

12. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^5,\mathbb{R},+,\cdot)$, četvorka vektora (a,b,c,d) je:
~~1) uvek zavisna~~ **2)** nikad baza ~~3) uvek nezavisna~~ ~~4) nikad nezavisna~~ **5)** nikad generatorna

13. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R},\mathbb{R},+,\cdot)$, vektor $a\neq 0$ je:
1) uvek nezavisan **2)** uvek generatoran ~~3) uvek zavisan~~ **4)** uvek baza

14. Karakteristični polinom matrice $\begin{bmatrix}-1&2\\2&1\end{bmatrix}$ je λ^2-5, a karakteristični koreni su: $\{\sqrt{5},-\sqrt{5}\}$

15. Koje od tvrđenja je tačno ako je kvadratna matrica B dobijena od matrice A elementarnim transformacijama. ~~1)~~ $det(A)=det(B)$ **2)** $\det(A)\neq 0 \Rightarrow \det(B)\neq 0$ **3)** $det(A)=0 \Rightarrow det(B)=0$ **4)** $Rang(A)=Rang(B)$ **5)** $\det A=\alpha\det B$ za neki skalar α **6)** $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \exists B^{-1}$

16. Neka su $\vec{x},\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ slobodni vektori i $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ jedinični međusobno normalni. Tada je:
1) $(\vec{x}\vec{i})\vec{i}+(\vec{x}\vec{j})\vec{j}+(\vec{x}\vec{k})\vec{k}=\vec{x}$ **2)** $(\vec{x}\vec{i},\vec{x}\vec{j},\vec{x}\vec{k})\in\mathbb{R}^3$ **3)** $(\vec{x}\vec{i})^2+(\vec{x}\vec{j})^2+(\vec{x}\vec{k})^2=\vec{x}\vec{x}$
~~4)~~ $(\vec{x}\vec{i})\vec{i}+(\vec{x}\vec{j})\vec{j}+(\vec{x}\vec{k})\vec{k}\in\mathbb{R}^3$ ~~5)~~ $(\vec{x}\vec{i})\vec{i}+(\vec{x}\vec{j})\vec{j}+(\vec{x}\vec{k})\vec{k}=\vec{x}\vec{x}$

17. Neka je $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ uređena trojka nekolinearnih slobodnih vektora. Tada:
1) postoje takvi vektori $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ da je trojka $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ baza ~~2) trojka $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ nikada generatorna~~
~~3) trojka $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ uvek generatorna~~ **4)** postoje takvi vektori $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ da je trojka $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ zavisnav

18. U vektorskom prostoru slobodnih vektora, par vektora (a,b) je: ~~1) može biti generatoran~~
~~2) uvek nezavisan~~ ~~3) uvek zavisan~~ **4)** nekad nezavisan a nekad zavisan **5)** nikada baza

19. Izračunati vektore položaja $\vec{r}_P$ i $\vec{r}_Q$ projekcija tačke $T(1,2,3)$, redom na pravu $x=y=z$ i ravan $x+y+z=9$. $\vec{r}_P=(2,2,2)$ $\vec{r}_Q=(2,3,4)$

20. Koja od sledećih tvrdnji je tačna za svaka dva slobodna nenula vektora $\vec{x}$ i $\vec{a}$:
a) $(\vec{a}-\mathbf{pr}_{\vec{x}}\vec{a})\perp\vec{x}$ **b)** $(\vec{x}-\mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x})\perp\vec{a}$ ~~c)~~ $(\vec{a}-\mathbf{pr}_{\vec{x}}\vec{a})\parallel\vec{x}$ ~~d)~~ $(\vec{x}-\mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x})\parallel\vec{a}$ ~~e) ništa od prethodnog~~

21. Neka su a, b i c proizvoljni nezavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a+b-c, b+c, a+2b)$ je:
a) uvek zavisna ~~b) uvek nezavisna~~ ~~c) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c.~~

22. Neka su a, b i c zavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(3a+9c, 7a+8b, 7a-4b+5c)$ je:
a) uvek zavisna ~~b) uvek nezavisna~~ ~~c) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c.~~

23. Ako su $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ **komplanarni** tada:

~~1) $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$~~ 2) $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ ~~3) $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$~~

4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ ~~5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$~~ ~~6) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$~~

~~7) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$~~ 8) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.

24. Ako je $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ i $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{p} \cdot \vec{x}$ gde je $\vec{p}$ proizvoljan slobodni vektor, tada funkcija f **uvek** jeste:
1) linearna transformacija ~~2) injektivna~~ ~~3) sirjektivna~~ ~~4) bijektivna~~ ~~5) izomorfizam~~

25. Neka je $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_3)$, gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$
1) linearna transformacija 2) injektivna 3) sirjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

26. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih kvadratnih matrica reda 1 čiji elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\det : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2) $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ 3) $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ 4) $\det : \mathcal{M} \underset{na}{\xrightarrow{1-1}} \mathbb{R}$ 5) det je linearna

27. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(9, 2)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\operatorname{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ ~~2) $\operatorname{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$~~ 3) $\operatorname{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ 4) $\operatorname{rang} : \mathcal{M} \to \{0, 1, 2\}$
5) $\operatorname{rang} : \mathcal{M} \xrightarrow{na} \{0, 1, 2\}$

28. Neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nezavisna u prostoru V, $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ **generatrna** za prostor V i $\dim V = 4$.
Tada je ~~1) $m \leq 4 \leq n$~~ 2) $n \leq 4 \leq m$ ~~3) $n \leq m \leq 4$~~ ~~4) $4 \leq m \leq n$~~ ~~5) $4 \leq n \leq m$~~ ~~6) $n \geq 4$~~

29. Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke A, $|\overrightarrow{AB}| = 1$ i $|\overrightarrow{BC}| = 2$. Odrediti $\vec{r}_C$ u zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{i}$ i $\vec{j}$, ako je $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{i}$, $\overrightarrow{BC} \parallel \vec{j}$ i vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\vec{i}$ su suprotnog smera, a vektori $\overrightarrow{BC}$ i $\vec{j}$ istog. $\vec{r}_C = \vec{r}_A - \frac{\vec{i}}{|\vec{i}|} + 2\frac{\vec{j}}{|\vec{j}|}$

30. Linearne transformacije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, i $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ su uvek oblika:
$f(x,y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y, \varepsilon x + \varphi y)$ $g(x,y) = \alpha x + \beta y$ $h(x) = \alpha x$ $F(x,y,z) = (\alpha x + \beta y + \gamma z, \delta x + \varepsilon y + \varphi z)$ $G(x) = (\alpha x, \beta x)$
$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi \in \mathbb{R}$!

31. Linearne transformacije f i g definisane su sa $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, 2x_1 - 4x_2)$ i $g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 3x_2)$.

a) Po definiciji kompozicije $\circ$ odrediti $(f \circ g)(x_1, x_2) = f(g(x_1, x_2)) = (-3x_1 - 5x_2, -6x_1 - 10x_2)$

b) Napisati matrice M_f i M_g koje odgovaraju linearnim transformacijama f i g:

$M_f = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, $M_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

c) Izračunati proizvod matrica $M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -6 & -10 \end{bmatrix}$, $M_g^{-1} = \begin{bmatrix} / \end{bmatrix}$ i $g^{-1}(x_1, x_2) =$ /

d) Napisati linearnu transformaciju $h(x_1, x_2)$ kojoj odgovara matrica $M_f \cdot M_g$ tj. $h(x_1, x_2) = (-3x_1 - 5x_2, -6x_1 - 10x_2)$

e) Da li je $h = f \circ g$ tj. da li je $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\ h(x_1, x_2) = (f \circ g)(x_1, x_2)$? DA NE

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 16

1. Za ravan $\alpha :\ z = 1$ napisati jedan njen vektor normale $\vec{n}_\alpha = (0, 0, 1)$ i koordinate neke njene tri različite nekolinearne tačke $A(2, 3, 1)$, $B(13, 17, 1)$, $C(5, 7, 1)$.

1. • Ako je $\vec{a}=(1,0,1)$ i $\vec{b}=(0,2,0)$, tada je
$\vec{a}\vec{b}=$ 0 $\quad \sphericalangle(\vec{a}\vec{b})=$ $\frac{\pi}{2}$ $\quad \vec{a}\times\vec{b}=$ $2\sqrt{2}$.

3. • Za koje vrednosti parametra $a\in\mathbb{R}$ sistem jednačina $ax+y=1 \wedge x+ay=a$ nad poljem realnih brojeva je: 1) neodređen: $a=1 \vee a=-1$ 2) određen: $a\neq 1 \wedge a\neq -1$ 3) kontradiktoran: /

4. • $\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=0$ $\qquad \begin{bmatrix}7 & -6\\8 & -7\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}7 & -6\\8 & -7\end{bmatrix}$

5. • Zaokružiti cifru (cifre) ispred uređenih n-torki koje su GENERATORNE u vektorkom prostoru trojki $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$: ~~1)~~ $\big((0,1,0)\big)$ 2) $\big((1,2,0),(1,1,0),(2,-1,1)\big)$ ~~3)~~ $\big((1,0,0),(2,0,2)\big)$
4) $\big((1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\big)$ ~~5)~~ $\big((1,1,1),(2,2,2)\big)$ ~~6)~~ $\big((0,0,2),(0,0,0),(3,0,0)\big)$
~~7)~~ $\big((0,1,0),(0,2,0)\big)$ 8) $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)\big)$

6. • Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 3 & 1 & 0\\0 & 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 2 & 0\\2 & 0 & 2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

3 2 2 2 1 2 1 0

7. • Matrice i rangovi linearnih transformacija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $f(x)=(0,9x)$ i $g,h,r,s:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $g(x,y,z)=(x+y,x+z)$, $h(x,y,z)=(x-y,0)$, $r(x,y,z)=(0,y)$, $s(x,y,z)=(x-y-z,6y)$ i $p(x,y,z)=(z,0)$ su: (Rang upisati ispod odgovarajuće matrice)

$M_f=\begin{bmatrix}0\\9\end{bmatrix}$ $\quad M_g=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $\quad M_h=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $\quad M_r=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ $\quad M_s=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 6 & 0\end{bmatrix}$ $\quad M_p=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

1 2 1 1 2 1

8. • Neka je je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala, a S presek dijagonala. U zavisnosti od $\vec{r}_S$, $\vec{r}_B$ i $\vec{r}_A$ napisati vektore položaja tačaka C i D $\quad \vec{r}_C=2\vec{r}_S-\vec{r}_A$ $\qquad \vec{r}_D=2\vec{r}_S-\vec{r}_B$

* *

9. • Napisati vektore položaja $\vec{r_{P'}}$ i $\vec{r_{P''}}$ projekcija tačke P na pravu $p(A,\vec{a})$ i ravni $\alpha(Q,\vec{n}_\alpha)$.
$\vec{r_{P'}}=\vec{r}_A+\dfrac{(\vec{r}_P-\vec{r}_A)\vec{a}}{\vec{a}\,\vec{a}}\,\vec{a}$ $\quad,\ \vec{r_{P''}}=\vec{r}_P+\dfrac{(\vec{r}_Q-\vec{r}_P)\vec{n}_\alpha}{\vec{n}_\alpha\vec{n}_\alpha}\,\vec{n}_\alpha$

10. • Broj rešenja homogenog sistema linernih jednačina nad poljem realnih brojeva može da bude:
~~a)~~ 0 $\quad$ b) 1 $\quad$ ~~c)~~ 2 $\quad$ d) ∞.

11. • Koji od sledeća tri vektora je karakteristični vektor za matricu $\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$
~~a)~~ $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ $\quad$ ~~b)~~ $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $\quad$ c) $\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$.

12. • Koji od sledeća tri polinoma je karakteristični polinom za matricu $\begin{bmatrix}1 & 3\\-2 & 0\end{bmatrix}$
~~a)~~ $\lambda^2+\lambda+6$ $\quad$ ~~b)~~ $\lambda^2+\lambda+6$ $\quad$ ~~c)~~ $-\lambda+7$.

13. • Koji od tvrđenja je tačno za bilo koje matrice A,B,C i svaki skalar λ
~~a)~~ $det(A+b)=det(A)+det(B)$ $\quad$ ~~b)~~ $det(\lambda A)=\lambda det(A)$ $\quad$ c) $det(ABC)=det(A)det(B)det(C)$.

14. • $\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}=\ldots$ $\quad$ ~~a)~~ $\cos 2\varphi$ $\quad$ b) 1 $\quad$ ~~c)~~ 0 $\quad$ ~~d)~~ $\sin 2\varphi$

15. • Koje od tvrđenja je tačno ako je matrica A' dobijena od matrice A elementarnim transformacijama.
a) $det(A)=0 \Leftrightarrow det(A')=0$ $\quad$ ~~b)~~ $det(A)=det(A')$ $\quad$ c) $det(A)=\lambda det(A')$ za neki skalar $\lambda\neq 0$.

16. • Koje od tvrđenja je tačno ako je A kvadratna matrica. reda n ?
~~a)~~ $det(A)=0\Rightarrow Rang(A)=0$ $\quad$ b) $det(A)=0\Leftrightarrow Rang(A)\leq n-1$ $\quad$ ~~c)~~ $det(A)=0\Rightarrow Rang(A)=n$.

17. • Matrica linearne transformacije $f(x,y)=(3x+y,y)$ je ~~a)~~ $\begin{bmatrix}3 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$ ~~b)~~ $\begin{bmatrix}1 & 3\\1 & 0\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$

2

18. (•) Rang matrice $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ je ~~a) 0~~ **(b) 1** ~~c) 2~~ ~~d) 3.~~

19. (•) Odrediti tačke A_1, A_2, A_3, A_4 simetrične tački $A(1,2,3)$ redom u odnosu na ravni xOy, xOz, yOz i koordinatni početak. $A_1(1,2,-3)$ $A_2(1,-2,3)$ $A_3(-1,2,3)$ $A_4(-1,-2,-3)$.

20. (•) Koja od sledećih tvrdnji je tačna za svaka dva slobodna nenula vektora $\vec{x}$ i $\vec{a}$:
(a) $(\vec{a} - \mathbf{pr}_{\vec{x}}\vec{a}) \perp \vec{x}$ (b) $(\vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x}) \perp \vec{a}$ ~~c)~~ $(\vec{a} - \mathbf{pr}_{\vec{x}}\vec{a}) \parallel \vec{x}$ ~~d)~~ $(\vec{x} - \mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x}) \parallel \vec{a}$ ~~e)~~ ništa od prethodnog

21. (•) Ako je $(d_1, \ldots, d_\ell)$ ne zavisna u prostoru V i $\dim V = k$, tada je:
~~1)~~ $k \leq \ell$ (2) $\ell \leq k$ ~~3)~~ $k = \ell$ ~~4)~~ $\ell < k$ ~~5)~~ $\ell > k$

22. (•) Linearne transformacije f i g definisane su sa $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$ i $g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.

a) Po definiciji kompozicije $\circ$ odrediti $(f \circ g)(x_1, x_2) = f\big(g(x_1, x_2)\big) = (-2x_2, 3x_1 - x_2)$

b) Napisati matrice M_f i M_g koje odgovaraju linearnim transformacijama f i g

$M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $M_g = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

c) Izračunati proizvod matrica $M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $M_g^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ i $g^{-1}(x_1, x_2) = (-\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2, -\frac{1}{2}x_1)$.

d) Napisati linearnu transformaciju $h(x_1, x_2)$ kojoj odgovara matrica $M_f \cdot M_g$ tj. $h(x_1, x_2) = (-2x_2, 3x_1 - x_2)$

e) Da li je $h = f \circ g$ tj. da li je $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\ h(x_1, x_2) = (f \circ g)(x_1, x_2)$? DA NE

23. (•) Nesvodljiv polinom nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ može biti stepena $\in \{\ 1\ \}$.

24. (•) Odrediti vrednosti parametara $a, b \in \mathbb{R}$ za koje je sistem
$$\begin{array}{rcrcl} x & + & by & = & 1 \\ bx & - & ay & = & b \end{array}$$
(a) kontradiktoran: /
(b) određen: $a \neq -b^2$
(c) 1 puta neodređen: $a = -b^2$
(d) 2 puta neodređen: /

25. (•) Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ različiti nekolinearni vektori, tada je neorijentisani, konveksni ugao između vektora $\vec{m} = a\vec{b} - b\vec{a}$ i $\vec{n} = \frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b}$: ~~1)~~ 0 ~~2)~~ $\frac{\pi}{6}$ ~~3)~~ $\frac{\pi}{4}$ ~~4)~~ $\frac{\pi}{3}$ (5) $\frac{\pi}{2}$ ~~6)~~ π

26. (•) Izračunati α i β ako je $\alpha(1, -3, 2) + \beta(3, 7, -3) = (0, 0, 0)$: $(\alpha, \beta) \in \{\ (0,0)\ \}$

27. (•) Izračunati α i β ako je $\alpha(1, -3, 2) + \beta(2, -6, 4) = (0, 0, 0)$: $(\alpha, \beta) \in \{\ \lambda(-2,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\ \}$

28. (•) Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uređena trojka nekoplanarnih slobodnih vektora. Tada: (1) trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno nezavisna ~~2)~~ trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno zavisna ~~3)~~ postoji takav vektor $\vec{d}$ da je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ nezavisna (4) postoji takav vektor $\vec{d}$ da je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ zavisna ~~5)~~ za svaki vektor $\vec{d}$ je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ nezavisna (6) za svaki vektor $\vec{d}$ je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ zavisna (7) svaki vektor $\vec{d}$ je linearna kombinacija uređene trojke vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

29. (•) Neka su $\mathbf{a_1} = (a_{11}, \ldots, a_{1n})$, $\mathbf{a_2} = (a_{21}, \ldots, a_{2n})$, $\ldots$, $\mathbf{a_n} = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})$ vektori vrste matrice $A = A_{nn} = [a_{i,j}]_{nn}$ i neka je $V = \mathrm{Lin}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots \mathbf{a_n}) = \{\alpha_1\mathbf{a_1} + \alpha_2\mathbf{a_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{a_n} | \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$. Tada
~~1)~~ $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{rang}\, A < n$ (2) $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots \mathbf{a_n})$ je zavisna akko $\det A = 0$ (3) $\dim V \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{rang}\, A \geq 1$
~~4)~~ $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \dim V < n$ ~~5)~~ $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{rang}\, A \leq n$ (6) $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots \mathbf{a_n})$ je zavisna akko $\mathrm{rang}\, A < n$

30. (•) U vektorskom prostoru svih slobodnih vektora, uređen par vektora (a, b) je:
~~1)~~ uvek nezavisan, ~~2)~~ uvek zavisan, (3) nekad nezavisan a nekad zavisan, ~~4)~~ uvek generatoran.

31. (•) Ako je uređena trojka vektora (a, b, c) zavisna, tada je uređena trojka vektora $(a + b, a + c, a + 2b - c)$
~~a)~~ uvek nezavisna (b) uvek zavisna ~~c)~~ nekada zavisna, a nekada nezavisna.

32. (•) Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačka T težište trougla BCD (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{DT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{DT} = \frac{2\vec{a}}{3} + \frac{\vec{b}}{3}$

33. (•) Ako je $f: V \to W$ izomorfizam, tada je: (1) postoji f^{-1} (2) V i W su izomorfni ~~3)~~ $V = W$
(4) za svaku nezavisnu n-torku vektora $(v_1, ..., v_n)$ iz V, n-torka $\big(f(v_1), ..., f(v_n)\big)$ je nezavisna u W
(5) za svaku zavisnu n-torku vektora $(v_1, ..., v_n)$ iz V, n-torka $\big(f(v_1), ..., f(v_n)\big)$ je zavisna u W

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 17

1. Neka je prava p data presekom ravni $x + y = 0$ i $y - z = 0$. Napisati bar jedan vektor $\vec{p} = (-1, 1, 1)$ paralelan sa pravom p i jedan vektor $\vec{m} = (1, 1, 0)$ normalan na pravu p.

2. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linernih jednačina $x + ay = 1 \wedge ax - y = 1$ nad poljem realnih brojeva je: **1)** neodređen: / **2)** određen: $a \in \mathbb{R}$ **3)** kontradiktoran: /

3. Za vektore $\vec{a} = (0, -1, 1)$ i $\vec{b} = (0, 1, 0)$ izračunati: **1)** $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ **2)** $|\vec{b}| = 1$
3) $3\vec{a} - 2\vec{b} = (0, -5, 3)$ **4)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$
5) $|\vec{a} \times \vec{b}| = 1$ **6)** $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3\pi}{4}$

4. Koje od sledećih uređenih n-torki **su zavisne** za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$: ~~1)~~ $\big((0,0,-1),(0,4,0),(9,0,0)\big)$
2) $\big((1,3,-2),(-2,-6,4)\big)$ 3) $\big((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,2,3)\big)$ 4) $\big((1,0,1),(1,1,0),(2,1,1)\big)$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

6. Matrice linearnih transformacija $f(x,y) = x + 2y$, $g(x,y,z) = (y,z)$, $h(x,y) = (x,y,y)$ i $s(x,y,z) = (0,0,x+x)$ su:
$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad M_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad M_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad M_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$
2 2 1 1 0 3 3 1 1

****

8. Odrediti sve vrednosti realnog parametara a za koje je sistem linearnih jednačina
$$\begin{aligned} ax &+ ay &= a \\ -ax &+ ay &= a \end{aligned}$$
1) kontradiktoran: /
2) određen: $a \neq 0$
3) jednostruko neodređen: /
4) dvostruko neodređen: $a = 0$

9. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži BC i CD. (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{PQ}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{PQ} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$

10. Napisati $\vec{x} = (0,0,1)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1,0,1)$, $\vec{b} = (2,1,1)$ i $\vec{c} = (1,1,1)$:
$\vec{x} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

11. Koordinate projekcija A' tačke $A(1,1,4)$ na ravan određenu sa $x + y + z = 0$ je: $A'(-1, -1, 2)$

12. Vektor položaja $\vec{r}_T$ tačke prodora prave $p: \vec{r} = \vec{r}_S + t\vec{l}$ kroz ravan $\alpha: \vec{a}\vec{r} = \vec{a}\vec{r}_D$ je
$\vec{r}_T = \vec{r}_S + \frac{(\vec{r}_D - \vec{r}_S)\vec{a}}{\vec{l}\,\vec{a}}\vec{l}$

13. Normalna projekcija vetora $\vec{x} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ na ravan $\alpha: 2x - y + z = 0$ je:
$\mathbf{pr}_\alpha(\vec{x}) = (0, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

14. Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$? a) $\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

15. Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B, C reda 2 i svaki skalar λ:
~~1)~~ $det(A+B) = det(A) + det(B)$ ~~2)~~ $det(\lambda A) = \lambda^3 det(A)$ 3) $det(AB) = det(A)det(B)$
~~4)~~ $rang(A+B) = rang(A) + rang(B)$ ~~5)~~ $rang(AB) = rang(A)rang(B)$ 6) $A(BC) = (AB)C$
7) $A(B+C) = AB + AC$ ~~8)~~ $AB = BA$ 9) $A + B = B + A$

16. Koja od sledećih tvrdnji je tačna za svaka dva slobodna nenula vektora $\vec{x}$ i $\vec{a}$: 1) $(\vec{a}-\mathbf{pr}_{\vec{x}}\vec{a})\vec{x}=0$
2) $(\vec{x}-\mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x})\vec{a}=0$ ~~3)~~ $(\vec{a}-\mathbf{pr}_{\vec{x}}\vec{a})\times\vec{x}\neq 0$ ~~4)~~ $(\vec{x}-\mathbf{pr}_{\vec{a}}\vec{x})\times\vec{a}=0$ ~~5)~~ ništa od prethodnog

17. Neka su a, b i c nezavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a+b, b+c, c)$ je:
~~1)~~ uvek zavisna 2) uvek nezavisna ~~3)~~ nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c.

18. Neka su a, b i c zavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(3a+5c, 7a+9b, 6a-5b-8c)$ je:
1) uvek zavisna ~~2)~~ uvek nezavisna ~~3)~~ nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c.

19. Nenula vektori $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ i $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ su **nekolinearni** ako je ~~1)~~ $\vec{a}\times\vec{b}=0$ 2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
~~3)~~ rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}=1$ ~~4)~~ rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}\leq 2$ 5) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}\leq 1$ ~~6)~~ $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni
~~7)~~ $(\exists\lambda\in\mathbb{R})\,\vec{a}=\lambda\vec{b}$ 8) $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ 9) $(\forall\lambda\in\mathbb{R})(\vec{a}\neq\lambda\vec{b}\ \wedge\ \lambda\vec{a}\neq\vec{b})$ ~~10)~~ $(\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R})\,\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=0\ \Rightarrow\ \alpha^2+\beta^2=0$

20. Ako su ektori $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ i $\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$ **komplanarni** tada je:
1) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\leq 2$ 2) rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\leq 3$ ~~3)~~ rang $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}=3$
4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$ ~~5)~~ $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})\neq 0$ ~~6)~~ $(\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R})\,\vec{a}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$
~~7)~~ $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0\ \Rightarrow\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0$ ~~8)~~ $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ je nezavisna.

21. Neka je $\varphi: V\to\mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k})=(x_3, x_2+x_3, x_1+x_2+x_3)$ gde su $(V,\mathbb{R},+,\cdot)$ i $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R},+,\cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi: V\to\mathbb{R}^3$
1) linearna transformacija 2) injektivna 3) sirjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

22. Neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ generatorna u prostoru V, $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ nezavisna za prostor V i $\dim V=m$. Tada je ~~1)~~ $m\leq k\leq n$ ~~2)~~ $n\leq k\leq m$ 3) $m\leq k$ ~~4)~~ $k\leq m\leq n$ ~~5)~~ $k\leq n\leq m$ 6) $n\leq m\leq k$

23. Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke $A(1,1,1)$, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=18$. Odrediti $\vec{r}_C$ ako je $\overrightarrow{AB}\|\vec{a}=(1,4,8)$, $\overrightarrow{BC}\|\vec{b}=(-8,1,4)$ i ako su smerovi vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ suprotni smerovima redom vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$.
$\vec{r}_C=(1,1,1)-(2,8,16)-(-16,2,8)=(15,-9,-23)$

24. Ako je A kvadratna matrica reda 7, tada je: 1) $\det A=0\Leftarrow$ **rang** A$=0$ 2) $\det A=0\Leftrightarrow$ **rang** A≤ 6
~~3)~~ $\det A=0\Rightarrow$ **rang** A$=7$ 4) **rang** A$=7\Rightarrow\det A\neq 0$ 5) **rang** A$=7\Leftarrow\det A\neq 0$
6) **rang** A$=7\Leftarrow\exists A^{-1}$

25. **Postoji** linearna transformacija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ za koju važi da je: 1) sirjektivna
2) injektivna 3) bijektivna 4) izomorfizam ~~5)~~ ništa od prethodnog

26. **Napisati bar jednu**, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ za koju važi da:
1) je injektivna $f(x)=(x,0)$ **2)** nije injektivna $f(x)=(0,0)$ **3)** nije sirjektivna $f(x)=(0,0)$

27. **Napisati bar jednu**, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ za koju važi da
1) je injektivna $f(x,y)=(x,y,0)$ **2)** nije injektivna $f(x,y)=(0,0,0)$
3) je sirjektivna $f(x,y)=$ **4)** nije sirjektivna $f(x,y)=(0,0,0)$

28. **Napisati bar jednu**, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ za koju važi da:
1) je injektivna $f(x,y,z)=$ **2)** nije injektivna $f(x,y,z)=(0,0)$
3) je sirjektivna $f(x,y,z)=(x,y)$ **4)** nije sirjektivna $f(x,y,z)=(0,0)$

29. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(8,3)$ čiji elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada funkcija rang je: 1) rang : $\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ ~~2)~~ rang : $\mathcal{M}\to\mathbb{N}$ 3) rang : $\mathcal{M}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ ~~4)~~ rang : $\mathcal{M}\overset{na}{\to}\mathbb{N}\cup\{0\}$
5) rang : $\mathcal{M}\overset{na}{\to}\{0,1,2,3\}$

30. Zaokružiti one skupove $V\subseteq\mathbb{R}^3$ za koje važi $(1,0,2)\in V$: 1) $V=Lin\Big(\{(2,0,4)\}\Big)$
~~2)~~ $V=Lin\Big(\{(-8,10,4),(4,-5,-2)\}\Big)$ ~~3)~~ $V=Lin\Big(\{(-8,10,4),(4,-5,-2),(0,0,0)\}\Big)$
4) $V=Lin\Big(\{(0,-1,1),(1,1,1)\}\Big)$ 5) $V=Lin\Big(\{(0,0,0)\}\Big)$ 6) $V=Lin\Big(\{(2,0,3),(4,0,5)\}\Big)$
7) $V=Lin\Big(\{(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\}\Big)$

17. Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:

1) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$, **dim** U= 2

2) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + x^2 = 0\}$ **dim** U= 2

3) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot 0 = 0\}$ **dim**U= 3

4) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z + 0\}$ **dim** U= 2

17. Neka su $\vec{x}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ slobodni vektori i $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični međusobno normalni i α, β i γ uglovi koje vektor $\vec{x}$ obrazuje sa redom vektorima $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Tada je: 1) $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} = \vec{x}$ 2) $(\vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{j}, \vec{x}\vec{k}) \in \mathbb{R}^3$ 3) $(\vec{x}\vec{i})^2 + (\vec{x}\vec{j})^2 + (\vec{x}\vec{k})^2 = \vec{x}\vec{x}$ ~~4)~~ $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ ~~5)~~ $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} = \vec{x}\vec{x}$ 6) $(|\vec{x}|\cos\alpha)\vec{i} + (|\vec{x}|\cos\beta)\vec{j} + (|\vec{x}|\cos\gamma)\vec{k} = \vec{x}$ 7) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 18

1. Za pravu $a: x = y = z$ napisati jedan njen vektor $\vec{a} = (1 , 1 , 1) \parallel a$ i koordinate jedne njene tačke $A(0 , 0 , 0)$

2. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linernih jednačina $x + y = 1 \land x + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je: **1)** neodređen: $a = 1$ **2)** određen: $a \neq 1$ **3)** kontradiktoran: /

3. Za vektore $\vec{a} = (2, 1, 2)$ i $\vec{b} = (1, 1, 0)$ izračunati: **1)** $|\vec{a}| =$ 3 **2)** $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ **3)** $\vec{a} - 2\vec{b} = (0, -1, 2)$ **4)** $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ 3 **5)** $\vec{a} \times \vec{b} = (-2, 0, 1)$ **6)** $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$

4. Koje od sledećih uređenih n-torki su nezavisne za vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$: 1) $\big((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\big)$ 2) $\big((1, 0, 0), (0, -1, 0)\big)$ ~~3)~~ $\big((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 2, 3)\big)$ ~~4)~~ $\big((1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)\big)$

5. $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -3$ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

6. Matrice linearnih transformacija $h(x) = 5x$, $f(x, y) = x$, $g(x, y, z) = y$ i $s(x, y) = (x + y, x + y)$ su:
$M_h = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$ $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ $M_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $M_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 0 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ 1

* *

8. Ako je $ABCD$ paralelogram, S presek dijagonala AC i BD, T težište trougla SCD i ako je $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, tada je: ~~1)~~ $\overrightarrow{BT} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ ~~2)~~ $\overrightarrow{BT} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}$ ~~3)~~ $\overrightarrow{BT} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$ ~~4)~~ $\overrightarrow{BT} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ 5) $\overrightarrow{BT} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$

9. Ako je $\vec{x} = (5, 4, 3)$, $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$, $\vec{c} = (1, 1, 0)$ i $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, tada (α, β, γ) je: ~~1)~~ (3,2,1) ~~2)~~ (2,3,1) ~~3)~~ (3,1,2) ~~4)~~ (1,2,3) ~~5)~~ (1,3,2) ~~6)~~ (2,-1,3) ~~7)~~ (2,2,3) 8) (2,1,3) ~~9)~~ (2,3,3) ~~10)~~ (1,1,3)

10. Neka je tačka P presek ravni $\alpha: \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ i prave $a: \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$ i $\vec{n}\vec{a} \neq 0$. Tada je:
1) $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$ ~~2)~~ $\vec{r}_P = \vec{r}_Q + \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_Q)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$ ~~3)~~ $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{a}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{n}$
4) $\vec{r}_P = \vec{r}_A - \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_Q)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$ ~~5)~~ $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{n}$

11. Neka su a, b i c zavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + b, a + c, b + c)$ je:
1) uvek zavisna ~~2)~~ uvek nezavisna ~~3)~~ zavisna ili nezavisna, tj. zavisi od izbora vektora a, b, c.

12. Neka su a, b i c nezavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + b, a + c, -a + 2b - 2c)$ je:
~~1)~~ uvek zavisna 2) uvek nezavisna ~~3)~~ zavisna ili nezavisna, tj. zavisi od izbora vektora a, b, c.

13. Za prave $m: \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{5}$ i $n: \frac{x-5}{-6}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-10}$ važi: **a)** mimoilazne su $(m\cap n=\emptyset \wedge m \nparallel n)$ **b)** paralelne su i različite $(m \parallel n \wedge m\neq n)$ **c)** poklapaju se $(m=n)$ **d)** seku se $(m\cap n=\{M\})$

14. $\vec a \perp \vec b$ ako i samo ako: **1)** $\vec a\times\vec b=0$ **2)** $\vec a\vec b=0$ **3)** $\vec a\times\vec b\neq 0$ **4)** $\vec a(\vec b\times\vec c)=0$ **5)** $\vec a=0$ **6)** $|\vec a\times\vec b|=|\vec a||\vec b|$.

15. Broj svih linearnih transformacija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ za koje važi $f(xy)=f(x)f(y)$ je: **a)** 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4 **f)** 5

16. Neka su matrice $A=[a_{ij}]_{nn}$ i $B=[b_{ij}]_{nn}$ nad poljem $\mathbb{R}$. Tada postoji $\lambda\in\mathbb{R}$ takav da je:
1) $\mathbf{rang}(A)=\mathbf{rang}(B)\Rightarrow |det(A)|=\lambda\,|det(B)|$ **2)** $\mathbf{rang}(A)=\mathbf{rang}(B)\Rightarrow det(A)=\lambda\, det(B)$
3) $|det(A)|=\lambda\,|det(B)|\Rightarrow \mathbf{rang}(A)=\mathbf{rang}(B)$ **4)** $det(A)=\lambda\, det(B)\Rightarrow \mathbf{rang}(A)=\mathbf{rang}(B)$

17. Par $(\vec a,\vec b)$ je kolinearan ako je on par: **1)** nenula vektora **2)** različitih vektora **3)** neparalelnih vektora **4)** vektora istoga pravca **5)** za koji je $\vec a\times\vec b=0$ **6)** za koji je $\vec a\vec b=0$ **7)** za koji je $\vec a=0$ **8)** zavisnih vektora

18. Trojka slobodnih vektora $(\vec a,\vec b,\vec c)$ je komplanarna ako je ona trojka: (nije ekvivalencija!) **1)** nenula vektora **2)** različitih vektora **3)** paralelnih vektora **4)** vektora istoga pravca **5)** za koju je $\vec a(\vec b\times\vec c)=0$ **6)** za koju je $\vec a\times\vec b=0$ **7)** zavisnih vektora **8)** vektora čiji pravci su paralelni istoj ravni

19. Zaokružiti brojeve ispred podskupova $U_i\subseteq\mathbb{R}^3$ koji su podprostori i brojeve koji su njihova dimenzija.
1) $U_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=y\}$ **2)** $U_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-y\}$
3) $U_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2-y^2=0\}$ **4)** $U_4=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=y=z\}$
5) $U_5=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=0\}$
dim U_1 je: 0 1 2 **dim** U_2 je: 0 1 2 **dim** U_4 je: 0 1 2 **dim** U_5 je: 0 1 2

20. Neka je $a=(2,2,0)$, $b=(-3,3,0)$, $c=(1,-1,0)$, $d=(-1,1,0)$, $e=(0,0,1)$, $f=(1,0,0)$, $g=(1,2,0)$.
Zaokružiti broj koji je dimenzija potprostora V vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$:
1) $V=L(b,c,d)\Rightarrow dim(V)$ je: 1,2,3 **2)** $V=L(e,f,g)\Rightarrow dim(V)$ je: 1,2,3
3) $V=L(a,b)\Rightarrow dim(V)$ je: 1,2,3 **4)** $V=L(e,f,g)\Rightarrow dim(V)$ je: 1,2,3
5) $V=L(b,c,e)\Rightarrow dim(V)$ je: 1,2,3 **6)** $V=L(a,b,c)\Rightarrow dim(V)$ je: 1,2,3
7) $V=L(a,g)\Rightarrow dim(V)$ je: 1,2,3

21. Ako je A kvadratna matrica reda 3, tada je: **1)** $\mathbf{rang}\,A=3\Leftarrow \det A\neq 0$, **2)** $\det A=0\Rightarrow \mathbf{rang}\,A=0$ **3)** $\det A=0\Leftrightarrow \mathbf{rang}\,A\leq 2$, **4)** $\det A=0\Rightarrow \mathbf{rang}\,A=3$ **5)** $\mathbf{rang}\,A=3\Rightarrow \det A\neq 0$, **6)** $\mathbf{rang}\,A=3\Leftarrow \exists A^{-1}$

22. Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A,B,C reda 2 i svaki skalar λ:
1) $A(BC)=(AB)C$ **2)** $(B+C)A=BA+CA$ **3)** $(AB)^2=A^2B^2$ **4)** $A-B=B-A$
5) $\det(AB)=\det(B)det(A)$ **6)** $\mathbf{rang}(AB)=\mathbf{rang}(A)rang(B)$ **7)** $\det(A\cdot B)=\det(A)+\det(B)$
8) $\det(\lambda A)=\lambda\det(A)$

23. Ako su vektori $\vec a=a_1\vec i+a_2\vec j+a_3\vec k$ i $\vec b=b_1\vec i+b_2\vec j+b_3\vec k$ **kolinearni** tada je: **1)** $\vec a\times\vec b=0$ **2)** $\vec a\cdot\vec b=0$
3) $\mathrm{rang}\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{bmatrix}=1$ **4)** $\mathrm{rang}\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{bmatrix}\leq 2$ **5)** $\mathrm{rang}\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{bmatrix}\leq 1$ **6)** $\vec a$ i $\vec b$ su zavisni
7) $(\exists\lambda\in\mathbb{R})\ \vec a=\lambda\vec b$ **8)** $\vec a\nparallel\vec b$ **9)** $(\forall\lambda\in\mathbb{R})(\vec a\neq\lambda\vec b\ \wedge\ \lambda\vec a\neq\vec b)$ **10)** $(\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R})\,\alpha\vec a+\beta\vec b=0\ \Rightarrow\ \alpha^2+\beta^2=0$

24. Vektori $\vec a=a_1\vec i+a_2\vec j+a_3\vec k$, $\vec b=b_1\vec i+b_2\vec j+b_3\vec k$ i $\vec c=c_1\vec i+c_2\vec j+c_3\vec k$ su **nekomplanarni** ako je:
1) $\mathrm{rang}\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}\leq 2$ **2)** $\mathrm{rang}\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}\leq 3$ **3)** $\mathrm{rang}\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}=3$
4) $\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=0$ **5)** $\vec a(\vec b\times\vec c)\neq 0$ **6)** $(\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R})\ \vec a=\alpha\vec b+\beta\vec c$
7) $\alpha\vec a+\beta\vec b+\gamma\vec c=0\ \Rightarrow\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0$ **8)** $(\vec a,\vec b,\vec c)$ je nezavisna.

25. Linearne transformacije f i g definisane su sa $f(x_1,x_2)=(x_1-x_2,2x_1+x_2)$ i $g(x_1,x_2)=(x_1-x_2,x_1+x_2)$.
a) Po definiciji kompozicije $\circ$ odrediti $(f\circ g)(x_1,x_2)=f\big(g(x_1,x_2)\big)=$ $(-2x_2, 3x_1-x_2)$
b) Napisati matrice M_f i M_g koje odgovaraju linearnim transformacijama f i g

$M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $M_g = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) Izračunati proizvod matrica $M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $M_g^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ i $g^{-1}(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, -\frac{1}{2}x_1)$

d) Napisati linearnu transformaciju $h(x_1, x_2)$ kojoj odgovara matrica $M_f \cdot M_g$ tj. $h(x_1, x_2) = (-2x_2, 3x_1 - x_2)$

e) Da li je $h = f \circ g$ tj. da li je $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\ h(x_1, x_2) = (f \circ g)(x_1, x_2)$? DA NE

6) Neka je $\mathcal{M}$ skup svih kvadratnih matrica čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\det : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ ~~2)~~ $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ 3) $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ ~~4)~~ $\det : \mathcal{M} \underset{na}{\xrightarrow{1-1}} \mathbb{R}$ ~~5)~~ det je linearna

7) Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(5, 2)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\text{rang} : \mathcal{M} \overset{na}{\to} \{0, 1, 2\}$ 2) $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ ~~3)~~ $\text{rang} : \mathcal{M} \overset{na}{\to} \mathbb{N} \cup \{0\}$ 4) $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$
~~5)~~ $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$

12. 8) Neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ nezavisna u prostoru V, $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ generatorna za prostor V i $\dim V = n$.
Tada je 1) $m \leq n$ ~~2)~~ $n \leq k \leq m$ 3) $m \leq k$ ~~4)~~ $k \leq m \leq n$ ~~5)~~ $k \leq n \leq m$ 6) $m \leq n \leq k$

13. 9) **Napisati bar jednu**, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ za koju važi da:
1) je injektivna $f(x, y, z) =$ /
2) nije injektivna $f(x, y, z) = (2x, 2y)$
3) je sirjektivna $f(x, y, z) = (2x, 2y)$
4) nije sirjektivna $f(x, y, z) = (0, 0)$

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 19

1. Za ravan $\alpha : \ z = 1$ napisati jedan njen vektor normale $\vec{n}_\alpha = (\ 0\ , 0\ , 1\ )$ i koordinate neke njene tri različite nekolinearne tačke $A(14, 14, 1)$, $B(12, 3, 1)$, $C(2, 5, 1)$.

2. Ako je $\vec{a} = (1, 0, 1)$ i $\vec{b} = (0, 2, 0)$, tada je
$\vec{a}\vec{b} = $ 0 $\quad \sphericalangle(\vec{a}\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ $\quad \vec{a} \times \vec{b} = 2\sqrt{2}$.

3. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $ax + y = 1 \wedge x + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je: **1)** neodređen: $a = 1 \vee a = -1$ **2)** određen: $a \neq 1 \wedge a \neq -1$ **3)** kontradiktoran: /

4. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ $\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

5. Zaokružiti cifru (cifre) ispred uređenih n-torki koje su GENERATORNE u vektorkom prostoru trojki $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$: ~~1)~~ $\big((0, 1, 0)\big)$ **2)** $\big((1, 2, 0), (1, 1, 0), (2, -1, 1)\big)$ ~~3)~~ $\big((1, 0, 0), (2, 0, 2)\big)$
4) $\big((1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\big)$ ~~5)~~ $\big((1, 1, 1), (2, 2, 2)\big)$ ~~6)~~ $\big((0, 0, 2), (0, 0, 0), (3, 0, 0)\big)$
~~7)~~ $\big((0, 1, 0), (0, 2, 0)\big)$ 8) $\big((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 3)\big)$

6. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$\underset{3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}}$ $\underset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$ $\underset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$ $\underset{2}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$ $\underset{1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}$ $\underset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$ $\underset{1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$ $\underset{0}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$

7. Matrice i rangovi linearnih transformacija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (0, 9x)$ i $g, h, r, s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x + y, x + z)$, $h(x, y, z) = (x - y, 0)$, $r(x, y, z) = (0, y)$, $s(x, y, z) = (x - y - z, 6y)$ i $p(x, y, z) = (z, 0)$ su: (Rang upisati ispod odgovarajuće matrice)

$M_f = \underset{1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}}$ $\quad M_g = \underset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$ $\quad M_h = \underset{1}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$ $M_r = \underset{1}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$ $M_s = \underset{2}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}}$ $M_p = \underset{1}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$.

8. Neka je je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala, a S presek dijagonala. U zavisnosti od $\vec{r}_S$, $\vec{r}_B$ i $\vec{r}_A$ napisati vektore položaja tačaka C i D:
$\vec{r}_C = 2\vec{r}_S - \vec{r}_A$ $\qquad \vec{r}_D = 2\vec{r}_S - \vec{r}_B$

* *

9. Odrediti vrednosti parametara $a, b \in \mathbb{R}$ za koje je sistem $\begin{array}{rcrcl} x & + & by & = & 1 \\ bx & - & ay & = & b \end{array}$

(a) kontradiktoran: /
(b) određen: $a \neq -b^2$
(c) 1 puta neodređen: $a = -b^2$
(d) 2 puta neodređen: /

10. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ različiti nekolinearni vektori, tada je neorijentisani, konveksni ugao između vektora $\vec{m} = a\vec{b} - b\vec{a}$ i $\vec{n} = \frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b}$: 1) 0 2) $\frac{\pi}{6}$ 3) $\frac{\pi}{4}$ 4) $\frac{\pi}{3}$ 5) $\frac{\pi}{2}$ 6) π

11. Izračunati vektore položaja $\vec{r_{T'}}$ i $\vec{r_{T''}}$ projekcija tačke $T(-1, 1, -1)$ na pravu $a : \vec{r} = (-1, 0, -2) + t(1, -1, 1),\ t \in \mathbb{R}$ i ravan $\alpha : (1, -1, 0) \cdot \vec{r} = (1, -1, 0) \cdot (1, 0, 0)$.

$\vec{r_{T'}} = (-1, 0, -1)$ $\qquad$ $\vec{r_{T''}} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$

12. Izračunati α i β ako je $\alpha(1, -3, 2) + \beta(3, 7, -3) = (0, 0, 0)$: $(\alpha, \beta) \in \{\ (0, 0)\ \}$

13. Izračunati α i β ako je $\alpha(1, -3, 2) + \beta(2, -6, 4) = (0, 0, 0)$: $(\alpha, \beta) \in \{\ (-2\ell, \ell) \mid \ell \in \mathbb{R}\ \}$

14. Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uređena trojka nekoplanarnih slobodnih vektora. Tada: 1) trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno nezavisna 2) trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno zavisna 3) postoji takav vektor $\vec{d}$ da je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ nezavisna 4) postoji takav vektor $\vec{d}$ da je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ zavisna 5) za svaki vektor $\vec{d}$ je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ nezavisna 6) za svaki vektor $\vec{d}$ je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ zavisna 7) svaki vektor $\vec{d}$ je linearna kombinacija uređene trojke vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

15. Neka su $\mathbf{a_1} = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \mathbf{a_2} = (a_{21}, \ldots, a_{2n}), \ldots, \mathbf{a_n} = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})$ vektori vrste matrice $A = A_{nn} = [a_{i,j}]_{nn}$ i neka je $V = \mathrm{Lin}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots \mathbf{a_n}) = \{\alpha_1\mathbf{a_1} + \alpha_2\mathbf{a_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{a_n} | \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$. Tada 1) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{rang}\, A < n$ 2) $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots \mathbf{a_n})$ je zavisna akko $\det A = 0$ 3) $\dim V \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{rang}\, A \geq 1$ 4) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \dim V < n$ 5) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{rang}\, A \leq n$ 6) $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots \mathbf{a_n})$ je zavisna akko $\mathrm{rang}\, A < n$

16. U vektorskom prostoru svih slobodnih vektora, uređen par vektora (a, b) je: 1) uvek nezavisan, 2) uvek zavisan, 3) nekad nezavisan a nekad zavisan, 4) uvek generatoran.

17. Ako je uređena trojka vektora (a, b, c) zavisna, tada je uređena trojka vektora $(a + b, a + c, a + 2b - c)$ a) uvek nezavisna b) uvek zavisna c) nekada zavisna, a nekada nezavisna.

18. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačka T težište trougla BCD (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{DT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{DT} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{\vec{b}}{3}$

19. Neka je u sedmodimenzionalnom vektorskom prostoru V, k-torka vektora $(a_1, \ldots, a_k)$ generatorna. Tada je uvek: 1) $k < 7$ 2) $k \leq 7$ 3) $k = 7$ 4) $k > 7$ 5) $k \geq 7$ 6) ništa od prethodnog

20. Ako je $f : V \to W$ izomorfizam, tada je: 1) postoji f^{-1} 2) V i W su izomorfni 3) $V = W$
4) za svaku nezavisnu n-torku vektora $(v_1, ..., v_n)$ iz V, n-torka $\big(f(v_1), ..., f(v_n)\big)$ je nezavisna u W
5) za svaku zavisnu n-torku vektora $(v_1, ..., v_n)$ iz V, n-torka $\big(f(v_1), ..., f(v_n)\big)$ je zavisna u W

21. Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) | x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ je podprostor:
1) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$ 2) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_n = n\}$
3) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ 4) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$
5) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 2x_2 = 3x_3 = \cdots = nx_n\}$ 6) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0\}$
(gde je $x = (x_1, \ldots, x_n)$)

22. Potreban i dovoljan uslov da ravan α bude potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ je: da sadrži koordinatni početak i tada je α potprostor dimenzije: 2

23. Za proizvoljne kvadratne regularne matrice A, B, C reda $n > 1$ važi:
1) $A(BC) = (AB)C$ 2) $AB = BA$ 3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 4) $\det(AB) = \det(A) + \det(B)$
5) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 6) $(AB)^2 = A^2B^2$ 7) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

24. ⊙ Linearne transformacije f i g definisane su sa $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$ i $g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.

a) Po definiciji kompozicije $\circ$ odrediti $(f \circ g)(x_1, x_2) = f(g(x_1, x_2)) = (-2x_2, 3x_1 - x_2)$

b) Napisati matrice M_f i M_g koje odgovaraju linearnim transformacijama f i g

$M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $M_g = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

c) Izračunati proizvod matrica $M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $M_g^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ i $g^{-1}(x_1, x_2) = (-\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2, -\frac{1}{2}x_1)$

d) Napisati linearnu transformaciju $h(x_1, x_2)$ kojoj odgovara matrica $M_f \cdot M_g$ tj.

$h(x_1, x_2) = (-2x_2, 3x_1 - x_2)$

e) Da li je $h = f \circ g$ tj. da li je $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\ h(x_1, x_2) = (f \circ g)(x_1, x_2)$? DA NE

25. ⊙ Karakteristični polinom matrice $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ je: $\lambda^2 - 4$

26. ⊙ Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B reda 3 i svaki skalar λ

~~a)~~ $det(A - B) = det(A) - det(B)$ ~~b)~~ $det(\lambda A) = \lambda det(A)$ c) $det(A^n) = \big(det(A)\big)^n$.

Rađeno za 9.

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 20

1. ⊙ Sistem linearnih jednačina $\begin{matrix} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{matrix}$ je

1) kontradiktoran, **2)** određen, **3)** 1 puta neodređen, **4)** 2 puta neodređen.

2. ⊙ Neka je p prava čija je jednačina $x - 1 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-2}$. Napisati jedan vektor pravca prave p: $\vec{p} = (1, 2, -2)$, i koordinate jedne tačke prave p: $(1, -1, 0)$.

3. ⊙ Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ je sistem linernih jednačina $x + ay = 0 \wedge x + ay = a$ nad poljem realnih brojeva: **1)** neodređen: $a = 0$ **2)** određen: / **3)** kontradiktoran: $a \neq 0$

4. ⊙ Za vektore $\vec{a} = (-2, 1, 1)$ i $\vec{b} = (4, -2, -2)$ izračunati:

1) $2\vec{a} + \vec{b} = (0, 0, 0)$ **2)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -12$ **3)** $\vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, 0)$ **4)** $|\vec{a}| = \sqrt{6}$

5. ⊙ Koje su od sledećih uređenih n-torki baze vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$: **1)** $\big((0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\big)$

~~**2)**~~ $\big((1,0,0), (0,-1,0)\big)$ ~~**3)**~~ $\big((0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,2,3)\big)$ ~~**4)**~~ $\big((1,1,1), (2,2,2), (3,3,3)\big)$

6. ⊙ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 13 & -6 & 8 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

7. ⊙ Napisati u obliku $Ax + By + Cz + D = 0$ jednačinu ravni koja sadrži tačku $(1, 2, 3)$ i paralelna je sa osama x i z, gde su A, B, C, D realni brojevi: $y - 2 = 0$

8. ⊙ Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3 2 2 1 1 2 2 1 0

9. ⊙ Matrice linearnih transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + 2y, x - 3y)$ i $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x, z)$ su $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

* *

10. ⊙ Napisati $\vec{r}_P$ vektor položaja projekcije tačke $A(0, 0, 0)$ na pravu $p : \frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. $\vec{r}_P = (2, -1, -1)$

11. ⊙ Za prave $m : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{5}$ i $n : \frac{x-5}{-6} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-1}$ važi: ~~a)~~ mimoilazne su $(m \cap n = \emptyset \wedge m \nparallel n)$ ~~b)~~ paralelne su i različite $(m \parallel n \wedge m \neq n)$ ~~c)~~ poklapaju se $(m = n)$ d) seku se $(m \cap n = \{M\})$

12. Odrediti vrednosti parametara $a, b \in \mathbb{R}$ za koje je sistem
$$\begin{array}{rcrcl} x & + & by & = & 1 \\ bx & - & ay & = & b \end{array}$$

(a) kontradiktoran: /

(b) određen: $a \neq -b^2$

(c) 1 puta neodređen: $a = -b^2$

(d) 2 puta neodređen: /

13. Za koje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ su vektori $\vec{a} = (1,2,3)$ i $\vec{b} = (1, \alpha, \beta)$: **1)** nekolinearni $\alpha \neq 2 \lor \beta \neq 3$ **2)** ortogonalni $\alpha = \frac{-3\beta - 1}{2}$

14. Neka je $a = (0,0,0)$, $b = (1,0,1)$, $c = (1,0,-1)$, $d = (-1,0,1)$, $e = (1,1,1)$, $f = (1,0,0)$, $g = (2,0,2)$. Odrediti dimenzije sledećih potprostora V vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$:

1) $V = L(a) \Rightarrow dim(V) =$ 0 **2)** $V = L(a,b) \Rightarrow dim(V) =$ 1

3) $V = L(a,b,c) \Rightarrow dim(V) =$ 2 **4)** $V = L(b,c,d) \Rightarrow dim(V) =$ 2

5) $V = L(b,c,e) \Rightarrow dim(V) =$ 3 **6)** $V = L(e,f,g) \Rightarrow dim(V) =$ 3

15. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ različiti nekolinearni vektori, tada su vektori $\vec{m} = |\vec{a}|\vec{b} - |\vec{b}|\vec{a}$ i $\vec{n} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

~~1)~~ kolinearni **2)** ortogonalni ~~3)~~ ni kolinearni ni ortogonalni.

16. Potreban i dovoljan uslov da prava p bude potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ je: da prolazi kroz koord. početak

i tada je p potprostor dimenzije: 1

17. Koje od tvrđenja je tačno ako je A kvadratna matrica reda $n > 1$: ~~1)~~ $Rang(A) = 0 \Leftrightarrow det(A) = 0$ ~~2)~~ $det(A) = 0 \Leftrightarrow Rang(A) \leq n$ ~~3)~~ $Rang(A) = n \Rightarrow det(A) > 0$, **4)** $Rang(A) = n \Rightarrow det(A) \neq 0$.

18. Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$? ~~1)~~ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **2)** $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ **3)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

19. Izračunati α i β ako je $\alpha(1,-3,2) + \beta(3,7,-3) = (0,0,0)$: $(\alpha, \beta) \in \{ \ (0, 0) \ \}$

20. Izračunati α i β ako je $\alpha(1,-3,2) + \beta(2,-6,4) = (0,0,0)$: $(\alpha, \beta) \in \{ \ \lambda(-2, 1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \ \}$

21. Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uređena trojka nekoplanarnih slobodnih vektora. Tada: **1)** trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno nezavisna ~~2)~~ trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno zavisna ~~3)~~ postoji takav vektor $\vec{d}$ da je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ nezavisna **4)** postoji takav vektor $\vec{d}$ da je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ zavisna ~~5)~~ za svaki vektor $\vec{d}$ je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ nezavisna **6)** za svaki vektor $\vec{d}$ je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ zavisna **7)** svaki vektor $\vec{d}$ je linearna kombinacija uređene trojke vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

22. Neka su $\mathbf{a_1} = (a_{11}, \ldots, a_{1n})$, $\mathbf{a_2} = (a_{21}, \ldots, a_{2n}), \ldots, \mathbf{a_n} = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})$ vektori vrste matrice $A = A_{nn} = [a_{i,j}]_{nn}$ i neka je $V = \text{Lin}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots \mathbf{a_n}) = \{\alpha_1 \mathbf{a_1} + \alpha_2 \mathbf{a_2} + \ldots + \alpha_n \mathbf{a_n} | \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$. Tada ~~1)~~ $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang} A < n$ **2)** $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots \mathbf{a_n})$ je zavisna akko $\det A = 0$ **3)** $\dim V \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang} A \geq 1$ ~~4)~~ $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \dim V < n$ ~~5)~~ $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang} A \leq n$ **6)** $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots \mathbf{a_n})$ je zavisna akko $\text{rang} A < n$

23. U vektorskom prostoru svih slobodnih vektora, uređen par vektora (a, b) je: ~~1)~~ uvek nezavisan, ~~2)~~ uvek zavisan, **3)** nekad nezavisan a nekad zavisan, ~~4)~~ uvek generatoran.

24. Ako je uređena trojka vektora (a, b, c) zavisna, tada je uređena trojka vektora $(a + b, a + c, a + 2b - c)$ ~~a)~~ uvek nezavisna **b)** uvek zavisna ~~c)~~ nekada zavisna, a nekada nezavisna.

25. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačka T težište trougla BCD (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{DT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{DT} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{\vec{b}}{3}$

26. Neka je u sedmodimenzionalnom vektorskom prostoru V, k-torka vektora $(a_1, \ldots, a_k)$ generatorna. Tada je uvek: ~~1)~~ $k < 7$ ~~2)~~ $k \leq 7$ ~~3)~~ $k = 7$ ~~4)~~ $k > 7$ **5)** $k \geq 7$ ~~6)~~ ništa od prethodnog

27. • Ako je $f : V \to W$ izomorfizam, tada je: **1)** postoji f^{-1} **2)** V i W su izomorfni ~~3)~~ $V = W$ **4)** za svaku nezavisnu n-torku vektora $(v_1, ..., v_n)$ iz V, n-torka $\big(f(v_1), ..., f(v_n)\big)$ je nezavisna u W **5)** za svaku zavisnu n-torku vektora $(v_1, ..., v_n)$ iz V, n-torka $\big(f(v_1), ..., f(v_n)\big)$ je zavisna u W

28. • Potreban i dovoljan uslov da ravan α bude potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ je: da sadrži koord. početak i tada je α potprostor dimenzije: 2

29. Za proizvoljne kvadratne regularne matrice A, B, C reda $n > 1$ važi:
1) $A(BC) = (AB)C$ ~~2)~~ $AB = BA$ 3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ~~4)~~ $\det(AB) = \det(A) + \det(B)$
5) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ~~6)~~ $(AB)^2 = A^2B^2$ ~~7)~~ $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

30. Linearne transformacije f i g definisane su sa $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$ i $g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.

a) Po definiciji kompozicije $\circ$ odrediti $(f \circ g)(x_1, x_2) = f(g(x_1, x_2)) = (-2x_2, 3x_1 - x_2)$

b) Napisati matrice M_f i M_g koje odgovaraju linearnim transformacijama f i g

$M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $M_g = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

c) Izračunati proizvod matrica $M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $M_g^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ i $g^{-1}(x_1, x_2) = (-\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2, -\frac{1}{2}x_1)$

d) Napisati linearnu transformaciju $h(x_1, x_2)$ kojoj odgovara matrica $M_f \cdot M_g$ tj.

$h(x_1, x_2) = (-2x_2, 3x_1 - x_2)$

e) Da li je $h = f \circ g$ tj. da li je $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\ h(x_1, x_2) = (f \circ g)(x_1, x_2)$? DA NE

31. Karakteristični polinom matrice $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ je: $\lambda^2 - 4$

32. Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B reda 3 i svaki skalar λ
~~a)~~ $det(A - B) = det(A) - det(B)$ ~~b)~~ $det(\lambda A) = \lambda det(A)$ c) $det(A^n) = \left(det(A)\right)^n$.