ВЕЖБЕ 2

Дирихлеов принцип

Дирихлеов принцип (ДП)

Ако $n+1$ или више објеката треба сместити у n кутија, тада се бар у једној кутији налазе бар два објекта.

Уопштени Дирихлеов принцип (УДП)

Ако је m објеката смештено у n кутија, $m > n \cdot r$, тада се бар у једној кутији налази бар $r+1$ објекат.

1. Доказати да у групи од 367 особа постоје две особе које су рођене истог дана.

Особа може имати 366 могућности за рођендан

$$367 = 366 \cdot 1 + 1$$

Сада на основу Дирихлеовог принципа добијамо да постоје бар 2 особе које су рођене истог дана.

2. Међу 30 студената који су полагали испит један је начинио 13 грешака, а остали мање. Доказати да постоје бар три студента са истим бројем грешака.

Један студент има 13 грешака.

Сви остали студенти су направили број грешака из скупа $\{0,1,2,\dots,12\}$

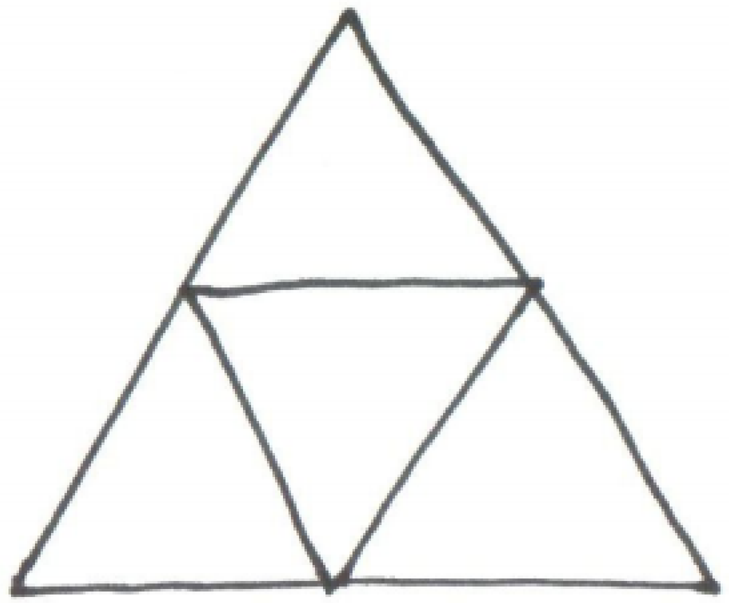
Претпоставимо супротно, да за сваки број грешака највише 2 студента имају тај број грешака.

$$30 = \text{укупан број студената} \le \underbrace{1}_{\text{студент са тачно 13 грешака}} + 2 \cdot \underbrace{13}_{\text{студенти са бројем грешака од 0 до 12}} = 27$$

$30 \le 27$ ↯

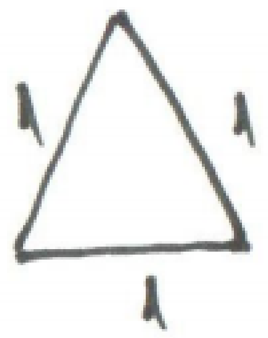
$\Rightarrow$ Постоји неки број грешака $k \in \{0,1,\dots,12\}$ који су направила бар 3 студента.

3. У унутрашњости једнакостраничног троугла странице дужине 2 распоређено је 5 тачака. Доказати да су бар 2 тачке на растојању мањем од 1.



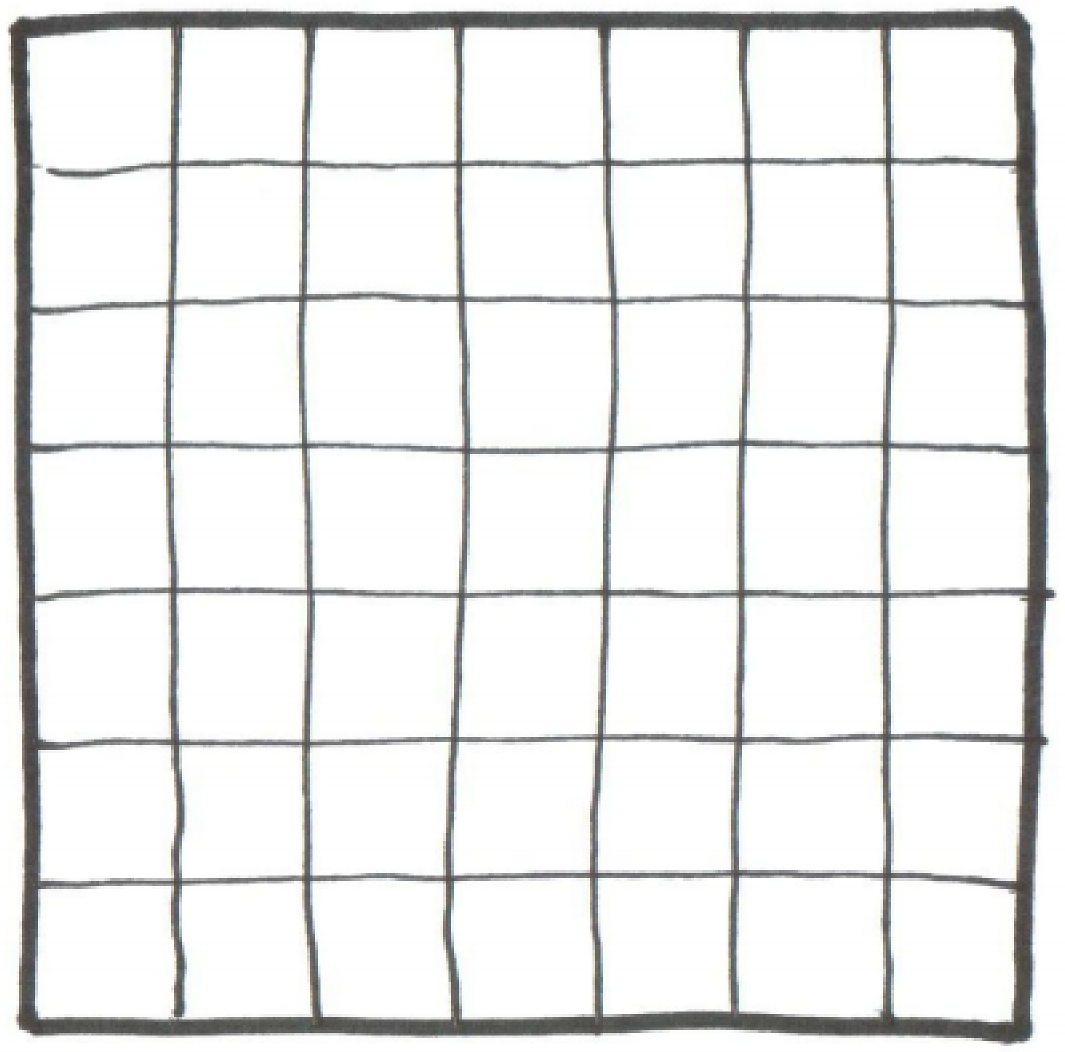
Повлачењем средњих линија троугла, велики троугао смо поделили на 4 мања једнакостранична троугла странице дужине 1.

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\text{Добили смо 4 „кутије"}\\ \text{5 тачака}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ДП}} \begin{array}{l}\text{бар 2 тачке се налазе}\\ \text{у истом малом троуглу.}\end{array}$$



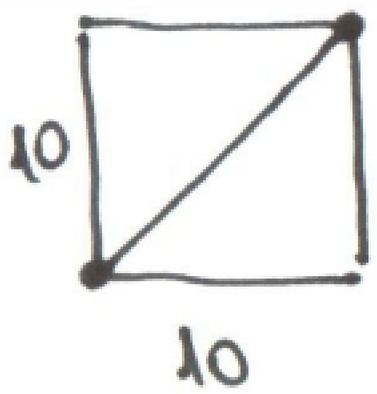
Сада је растојање између изабране две тачке строго мање од 1, због услова да се тачке бирају у унутрашњости великог троугла.

4. Војник пуца у мету облика квадрата величине 70×70. Испалио је 50 метака и сваки је погодио мету. Доказати да постоје 2 поготка која се налазе на растојању мањем од 15.



Поделимо таблу на 49 квадрата димензије 10×10.

$\left.\begin{array}{l}\text{50 метака}\\ \text{49 делова}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ДП}}$ Бар 2 поготка су смештена у оквиру истог квадрата димензије 10×10.



Највеће растојање између та два поготка је d

$$d = 10\sqrt{2} \approx 14,1 < 15$$

Та два поготка се налазе на траженом растојању које је мање од 15.

5. На тесту је учествовало 65 ученика. Сви су радили по 3 контролна задатка и за сваки од њих су добили по једну од оцена: 2,3,4 или 5. Доказати да морају постојати 2 ученика са истим оценама на свим радовима.

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$ могућности да ученик добије оцене на сва 3 рада

65 ученика

$\overset{ДП}{\Longrightarrow}$ Бар 2 ученика су добила исте оцене на сва 3 рада.

II начин:

Ученик може добити оцену на 4 начина на првом контролном.

$65 = 16 \cdot 4 + 1$

$\overset{УДП}{\Longrightarrow}$ Бар $16+1=17$ ученика је добило исту оцену на I контролном.

И на другом контролном се може добити једна од 4 оцене.

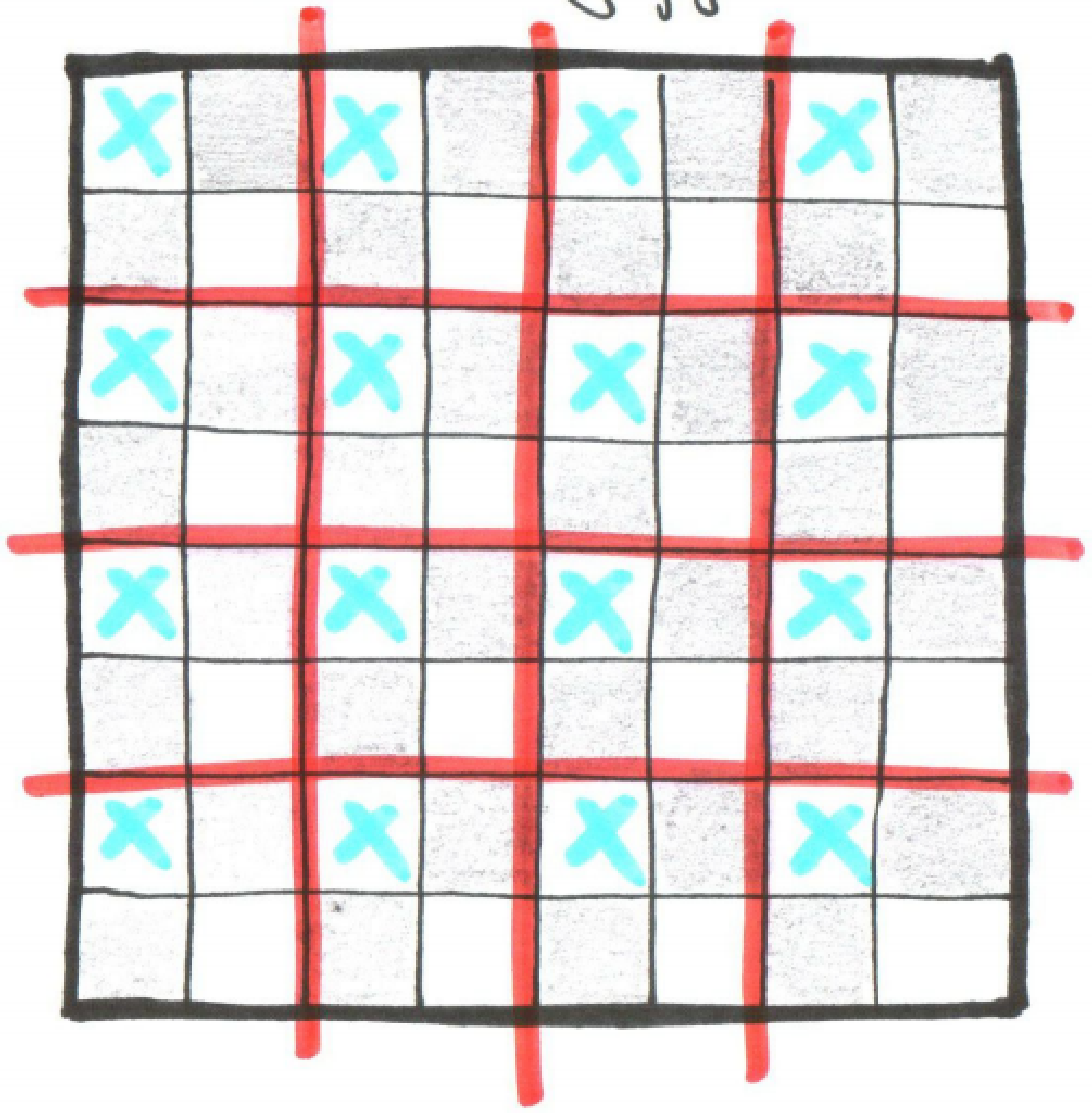
$17 = 4 \cdot 4 + 1$

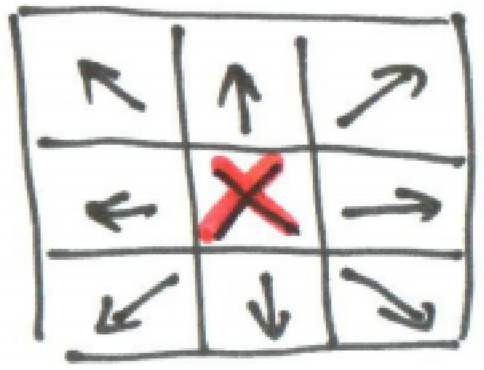
$\overset{УДП}{\Longrightarrow}$ Бар $4+1=5$ ученика има исте оцене на прва два контролна.

$5 = 1 \cdot 4 + 1$

$\overset{ДП}{\Longrightarrow}$ Бар 2 ученика имају исте оцене на сва 3 контролна.

6. Колико се највише краљева може сместити на шаховску таблу, тако да се они међусобно не нападају?





Могуће је разместити 16 краљева на начин који је приказан на слици.

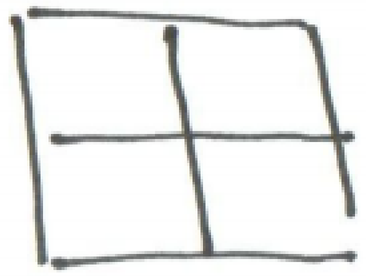
Поставља се питање да ли можемо разместити више од 16 краљева.

одговор
ДА → нова слика
НЕ → доказ

Претпоставимо да можемо разместити више од 16 краљева

Поделимо таблу на 16 делова димензије 2x2.

На основу ДП сада знамо да постоје 2 краља која се налазе на једном од ових 16 делова димензије 2x2.



Сада се та два краља увек нападају ↯

(услов је да се краљеви међусобно не нападају)

8. а) Колико најмање карата треба извући из стандардног шпила са 52 карте да би се међу извученим картама сигурно налазиле четири са истим знаком?

$13 = 4 \cdot 3 + 1$

извукли смо по 3 карте од сваког знака

Тек кад извучемо 13 карата бићемо сигурни да имамо 4 карте истог знака. Са 12 карата бисмо могли да добијемо ситуацију где смо од сваког знака извукли само по 3 карте.

!!! **Дирихлеов принцип је провера да ли смо добро решили задатак!**

б) Колико карата најмање треба извући да би се нашле бар три са знаком срца?

$39 + 3 = 42$

Извукли смо све карте са знаком ♦, ♠ и ♣ пре иједне карте са знаком ♥

9. Из скупа $\{1,2,\ldots,30\}$ насумично се извлачи 12 бројева. Доказати да међу извученим бројевима увек постоје два броја чији је највећи заједнички делилац већи од 1.

прости бројеви: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

$$\{1,2,\ldots,30\} = \{1\} \cup \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30\} \cup \{3,9,15,21,27\} \cup \{5,25\} \cup \{7\} \cup$$
$$\{11\} \cup \{13\} \cup \{17\} \cup \{19\} \cup \{23\} \cup \{29\}$$

$\left.\begin{array}{l} \text{11 дисјунктних подскупова} \\ \\ \text{12 бројева} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ДП}}$ бар 2 од извучених 12 бројева се налазе у истом (вишеелементном) подскупу

Сада су уочена 2 броја тражени бројеви који имају НЗД > 1.

УРЕЂЕНИ ИЗБОРИ

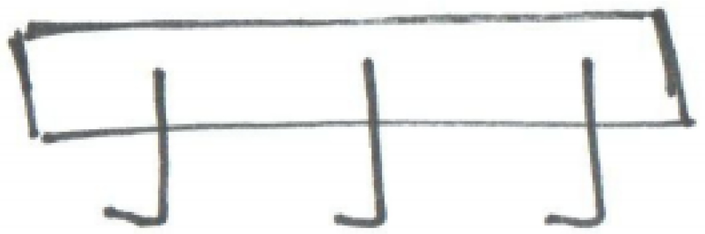
Нека су дати скупови M и N, $|M|=m$, $|N|=n$.

Број **свих пресликавања** $f: M \to N$ је n^m

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m \text{ пута}} = n^m$$

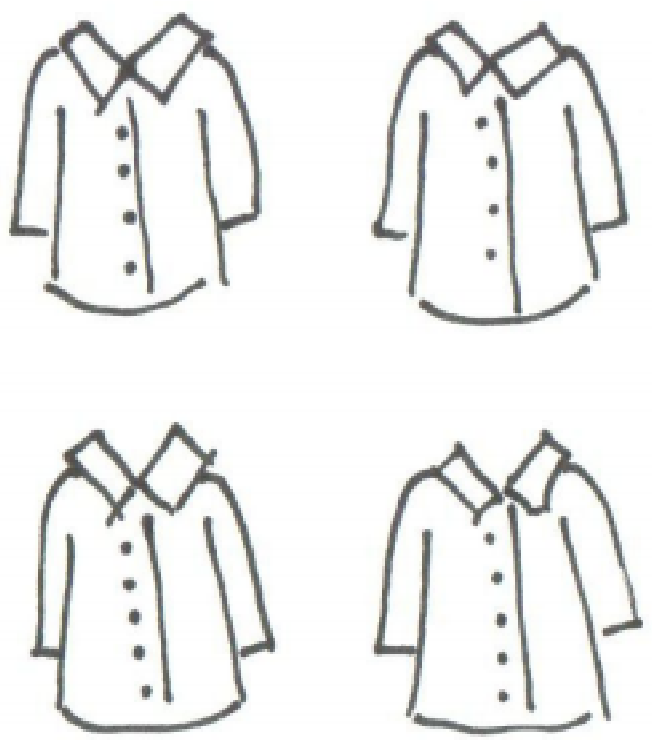
$\to$ **ВАРИЈАЦИЈЕ СА ПОНАВЉАЊЕМ**

1. На зиду се налазе 3 куке. На колико начина се на њих могу окачити 4 капута? (На једну куку се може окачити и више капута. Међусобни распоред капута окачених на исту куку није битан.)



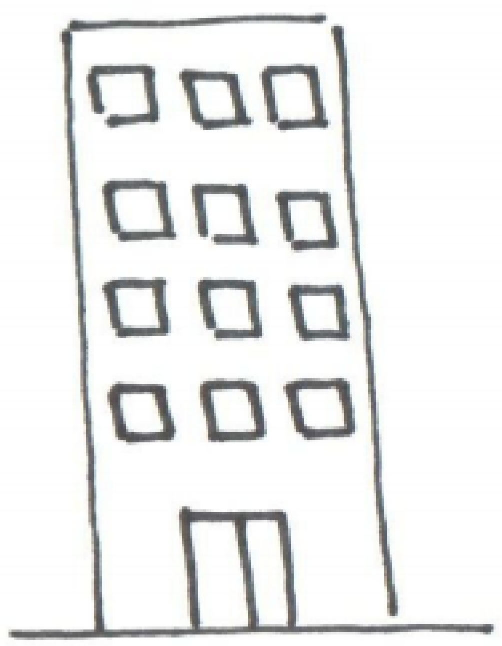
$\cancel{4^3}$ или 3^4

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$



За сваки капут бирамо куку на коју ће капут бити окачен.

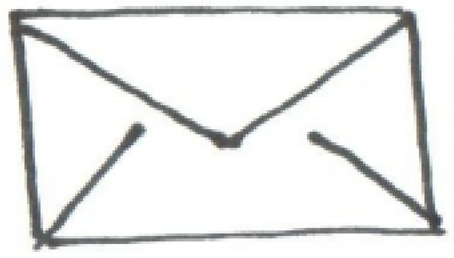
2. У лифт у приземљу четвороспратнице ушло је 6 особа. На колико начина оне могу напустити лифт? (Свака особа излази на једном од спратова.)



$$4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4=4^6$$

Свака особа има 4 могућности да напусти лифт.

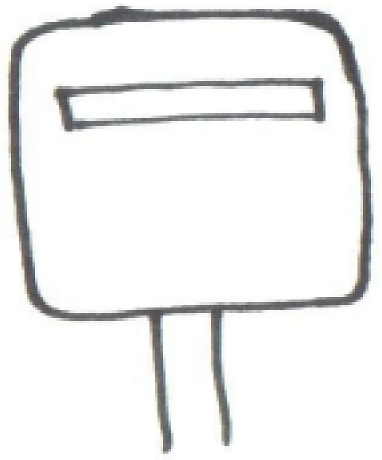
3. На колико различитих начина се m различитих писама може распоредити у n поштанских сандучића?



m

$$n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^m$$

За свако писмо бирамо у који сандучић ћемо га убацити.



n

Нека су дати скупови M и N, $|M|=m$, $|N|=n$.

Број ИНЈЕКТИВНИХ („1-1") пресликавања $f: M \xrightarrow{1-1} N$ је $n(n-1)\ldots(n-m+1)$

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)=\prod_{i=0}^{m-1}(n-i)$$

$\rightarrow$ ВАРИЈАЦИЈЕ БЕЗ ПОНАВЉАЊА

4. Клуб има 30 чланова. На колико начина се може изабрати председник, потпредседник, секретар и благајник клуба?

председник : 30
потпредседник : 29
секретар : 28
благајник : 27

решење: $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27$

5. Ученици четвртог разреда сваке недеље иду на излет. Они су добили понуду за 15 дестинација и треба да одаберу 7 које ће посетити. На колико начина могу да одаберу која места ће посетити ако се зна да ће последњи излет бити на Палићу?

15 дестинација
7 излета
последњи излет: Палић

Од 14 преосталих дестинација треба одабрати 6 за првих 6 излета, јер знамо да је последњи излет на Палић

$$\underline{14} \cdot \underline{13} \cdot \underline{12} \cdot \underline{11} \cdot \underline{10} \cdot \underline{9} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Палић}}}{\underline{1}}$$

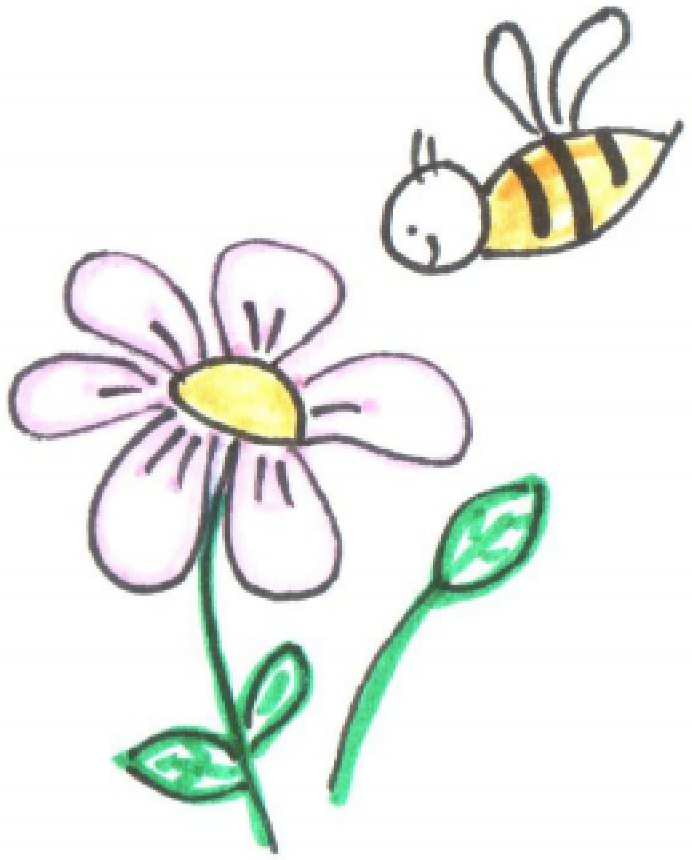
Број **БИЈЕКТИВНИХ** пресликавања коначног скупа N на самог себе $\left(f : N \xrightarrow[\text{на}]{1-1} N\right)$ одговара броју ПЕРМУТАЦИЈА овог скупа.

Број **ПЕРМУТАЦИЈА** скупа N који садржи n елемената је

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$$

6. Пчела треба да сакупи полен са 7 различитих цветова пре него што се врати у кошницу. Када пчела узме полен са неког цвета она се више не враћа на тај цвет. На колико начина пчела може да обиђе свих 7 цветова?

Тражени број представља број пермутација 7-чланог скупа којих има 7!.



7. Колико има пермутација скупа $\{1,2,\dots,n\}$ у којима су елементи 1 и 2 суседни?

Елементе 1 и 2 можемо посматрати као један елемент : блок $\boxed{12}$

$$\underbrace{\boxed{12}, \underbrace{3,4,5,6,\dots,n}_{n-2 \text{ елемента}}}_{n-1 \text{ елемент}}$$

(блок $\boxed{12}$ + елементи $3,4,\dots,n$)

$$\boxed{2 \cdot (n-1)!}$$

12 V 21

8. На колико начина n особа може да стане у ред, али тако да две уочене особе не смеју да стоје једна поред друге?

Нека особе A и B не смеју да стоје једна до друге

ACB ....

ACDB ....

ACDEB ....

⋮

A ...... B

Од свих могућих распореда можемо одузети „лоше" распореде.

$$n! - 2\cdot(n-1)!$$

Лоши су распореди где A и B стоје једно до другог, а на основу 7. задатка знамо да таквих распореда има $2\cdot(n-1)!$

9. Одредити број пресликавања скупа $\{1,2,\dots,n\}$ у скуп $\{1,2,\dots,n\}$ таквих да њихова слика има највише $n-1$ елемент.

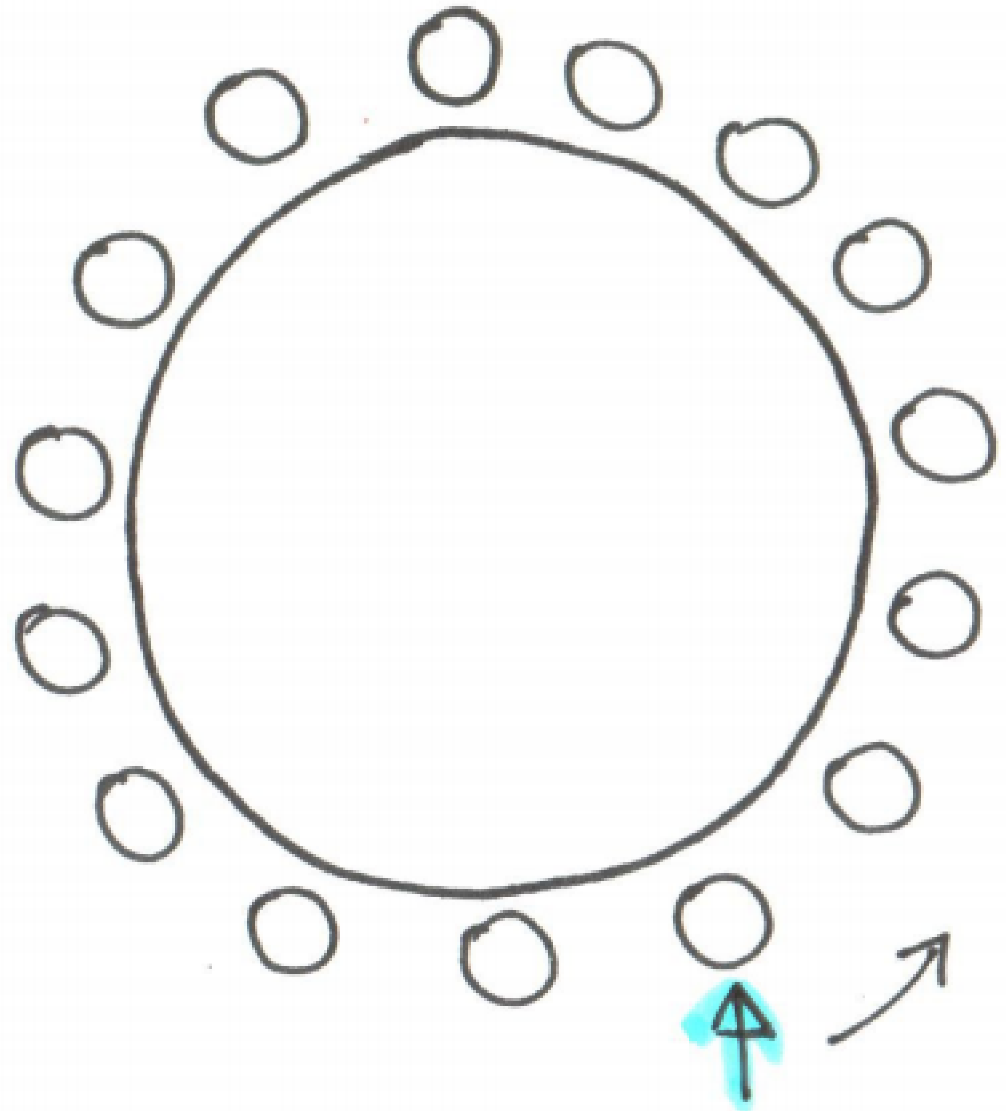
Од укупног броја свих могућих пресликавања одузећемо пресликавања код којих скуп слика има тачно n елемената.

укупан број пресликавања: n^n

скуп слика има n елемената: $n!$

$$n^n - n!$$

10. На колико начина n особа може да седне за округли сто?



1° Столице нумерисане : $n!$

2° Столице нису нумерисане

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Делимо са n јер распоред остаје исти приликом ротирања датог распореда (тј. не зависи од тога која столица је изабрана за прву столицу)