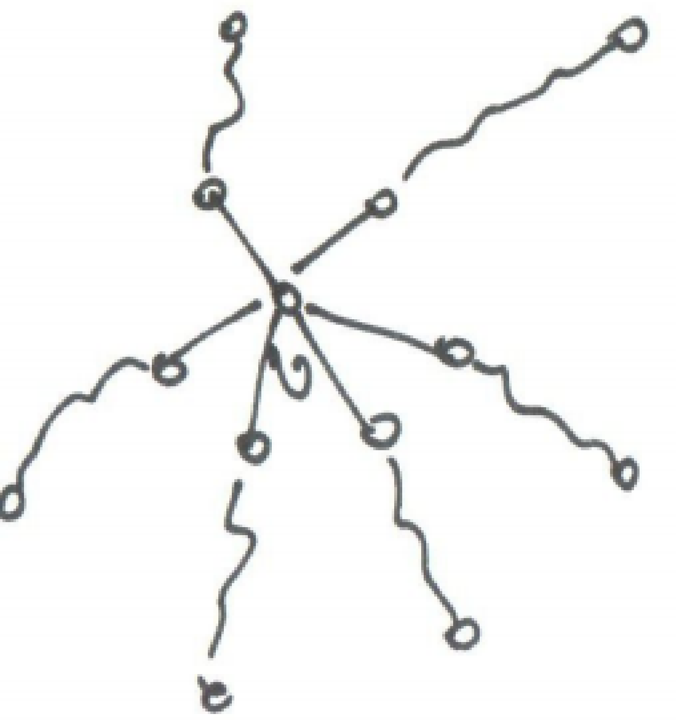
ВЕЖБЕ 10

СТАБЛА

1. Нека је T стабло и $\Delta(T)=k$. Доказати да T има бар k висећих чворова.

$\exists v\in V(T)\ d(v)=k$



$\underline{\text{II}}$ начин: n - број чворова

Претпоставимо супротно, да T има $l<k$ висећих чворова.

$$2\cdot(n-1)=\sum d(v) = l\cdot 1+\underbrace{\sum_{2\le d(v)\le k} d(v)}_{n-l-1 \text{ сабирака}} + 1\cdot k \geq l+2\cdot(n-l-1)+k$$

$$= l+2n-2l-2+k = 2n-2+\underbrace{k-l}_{>0} > 2n-2 = 2(n-1)$$ ↯

$\Rightarrow$ Стабло T садржи бар k висећих чворова.

2. Доказати да је број висећих чворова у стаблу $2+\sum\limits_{d(v)\geq 3}(d(v)-2)$.

n_i - број чворова степена i у датом графу

$n = n_1+n_2+n_3+n_4+\ldots+n_\Delta = n_1+n_2+k$ $\quad$ k - број чворова степена ≥ 3

$$2e = \sum d(v) = n_1\cdot 1 + n_2\cdot 2 + n_3\cdot 3 + n_4\cdot 4 + \ldots + n_\Delta\cdot\Delta$$

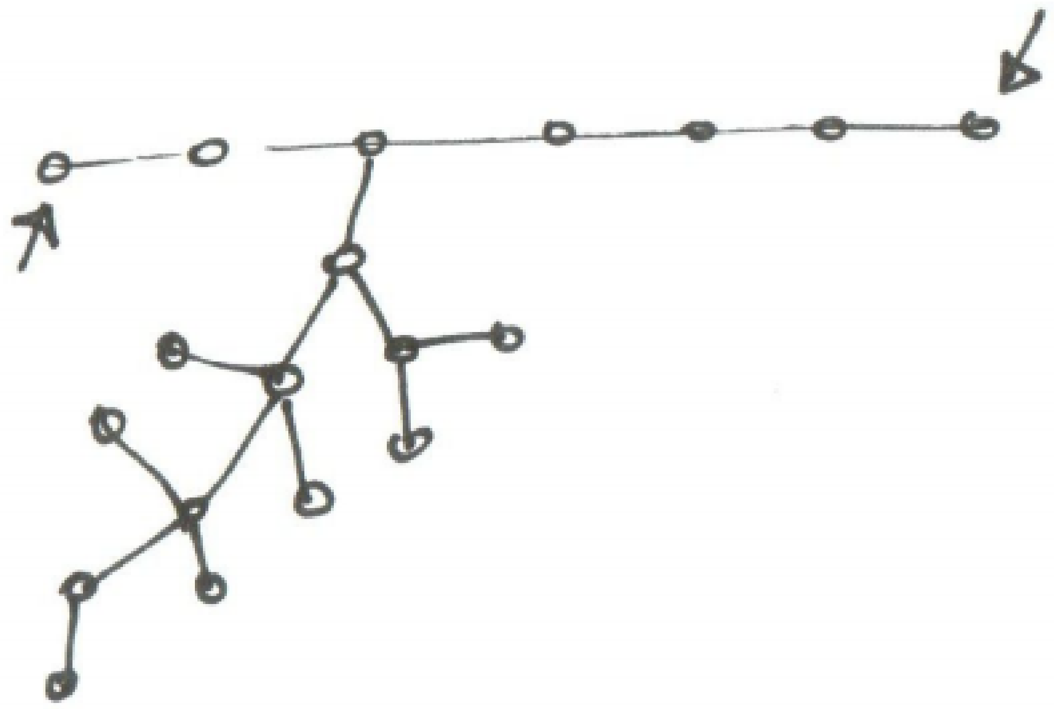
$$= n_1\cdot 1 + n_2\cdot 2 + \sum_{d(v)\geq 3} d(v)$$

Знамо $e = n-1$
$= n_1+n_2+k-1$

$$2(n_1+n_2+k-1) = n_1+2n_2+\sum_{d(v)\geq 3} d(v)$$

$$2n_1+\cancel{2n_2}+2k-2 = n_1+\cancel{2n_2}+\sum_{d(v)\geq 3} d(v)$$

$$n_1 = 2+\underbrace{\sum_{d(v)\geq 3} d(v)}_{k \text{ сабирака}} - 2k = 2+\sum_{d(v)\geq 3}(d(v)-2)$$



3. Низ степена стабла је $5, 4, 3, 2, 1, 1, 1, \dots, 1$. Колико има јединица?

k - број висећих чворова у стаблу (тј. број јединица)

$n = 4 + k$

$e = n - 1 = k + 3$

$$2e = \sum d(v) = 5+4+3+2+\underbrace{1+1+1+\dots+1}_{k\text{-пута}} = 14+k$$

$2 \cdot (k+3) = 14 + k$

$\Rightarrow k = 8$

4. Колико компоненти повезаности има шума са 100 чворова и 90 грана?

Нека је $\omega(G)=k$

$n=|V(G)|=100$

$e=|E(G)|=90$

Свака компонента повезаности шуме је стабло

G_i стабло у шуми, $i=1,\dots,k$

$n_i=|V(G_i)|$

$e_i=|E(G_i)|$ $\quad e_i=n_i-1$

$$e=e_1+e_2+e_3+\dots+e_k=(n_1-1)+(n_2-1)+(n_3-1)+\dots+(n_k-1)=(n_1+n_2+n_3+\dots+n_k)-k=n-k$$

$e=n-k$

$90=100-k$

$\Rightarrow k=10$

Ако је G шума, тада важи

$$\boxed{|V(G)|=|E(G)|+\omega(G)}$$

6. Нека је G повезан граф.

а) Ако G има 17 грана, колико највише чворова може да има?

За сваки повезан граф важи $e \geq n-1$.

$e = 17$

$17 \geq n-1$

$n \leq 18$

б) Ако G има 21 чвор, колико најмање грана може да има?

$e \geq n-1$

$n = 21$

$e \geq 21-1 = 20$

7. Граф G има 4 компоненте и 24 гране. Колико највише чворова може G да има?

$\omega(G)=4$

$e=24$

Свака компонента повезаности неповезаног графа је један „мали" повезан граф

$n_i=|V(G_i)|$, $e_i=|E(G_i)|$, где су G_i, $i=1,2,3,4$ компоненте повезаности графа G

$$\left.\begin{array}{l} e_1 \geq n_1-1 \\ e_2 \geq n_2-1 \\ e_3 \geq n_3-1 \\ e_4 \geq n_4-1 \end{array}\right\} + \quad e_1+e_2+e_3+e_4 \geq n_1+n_2+n_3+n_4-4$$

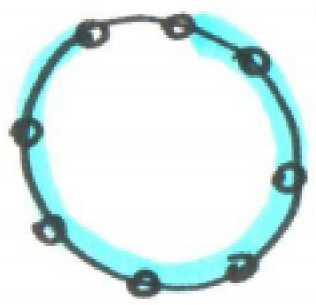
$$e \geq n-4$$

$$24 \geq n-4$$

$$n \leq 28$$

8. Колико висећих чворова има стабло дијаметра 3 са n чворова?

контура C_n



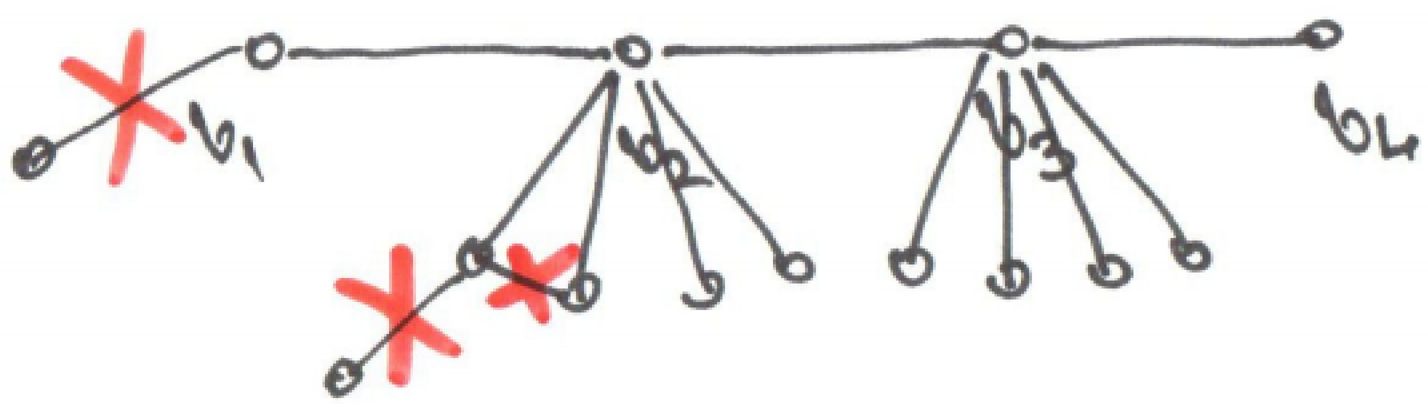
max пут је дужине $n-1$

$d(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

дијаметар $d(G) = \max\limits_{u,v \in V(G)} d_G(u,v)$

Стабло не садржи контуре $\Rightarrow$ дијаметар стабла представља дужину максималног пута

Нека је $v_1v_2v_3v_4$ максималан пут у датом стаблу



Сви остали чворови у стаблу (њих $n-4$) су суседи чворова v_2 или v_3 и сви су висећи.

Уколико сви чворови не би били висећи добили бисмо пут који је дужи од максималног или контуру, што није могуће

Број висећих чворова је $n-4+2=n-2$

(сви чворови у стаблу осим v_2 и v_3 су висећи)

9. Колико има неизоморфних стабала дијаметра 3 са 103 гране?

Пут максималне дужине у стаблу је пут дужине 3

$e=103 \Rightarrow n=104$

За пут максималне дужине смо „искористили" 4 чвора.

Осталих 100 чворова су суседи или u или v и они су висећи.

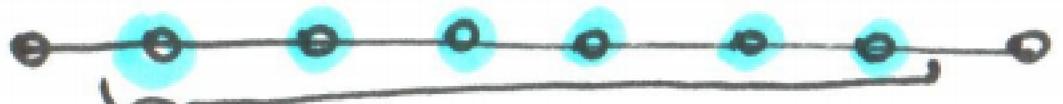
u	v
100	0
99	1
98	2
⋮	⋮
51	49
50	50
49	51
⋮	⋮
0	100

$\Rightarrow$ Постоји 51 неизоморфно стабло

10. За које природне бројеве s $(s>1)$ постоји стабло са а) 1998 / б) 2008 чворова код кої су сви чворови који нису висећи степена s?

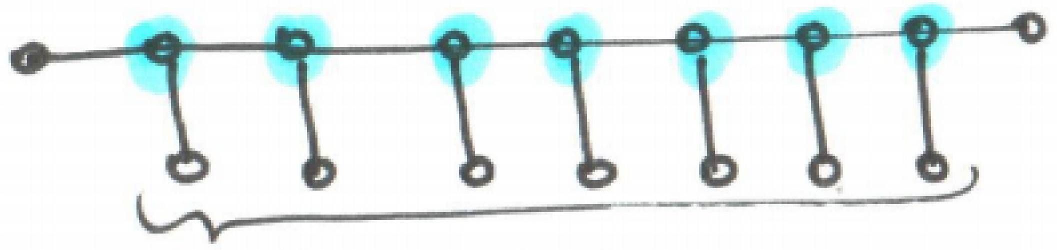
→ полурегуларан граф

• $s=2$



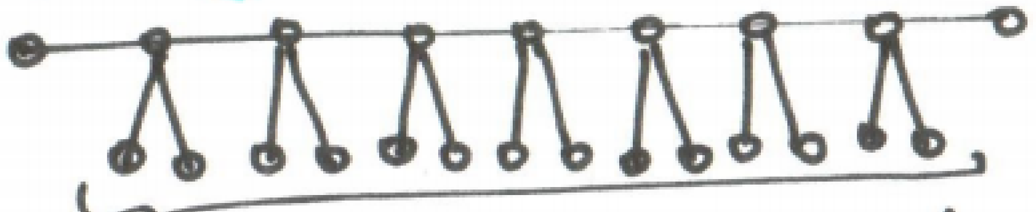
1996 чворова степена 2

• $s=3$



$\frac{1998-2}{2}=\frac{1996}{2}=998$ чворова степена 3

• ~~$s=4$~~



$\frac{1998-2}{3}=\frac{1996}{3}\notin\mathbb{Z}$ ↯

Стратегија: Посматрајмо пут са $k+2$ чвора и на k унутрашњих чворова додамо још $s-2$ висећа чвора

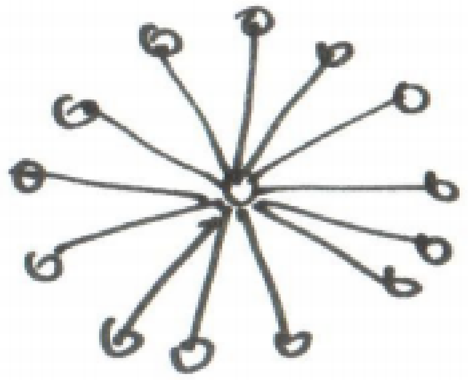
$$2\cdot(1998-1)=2\cdot 1997=\sum_{v\in V} d(v)=k\cdot s+(n-k)\cdot 1=k\cdot s+1998-k=k(s-1)+1998$$

$k\cdot(s-1)=1996$ → Задатак се своди на одређивање делилаца броја 1996

$$\begin{array}{r|l} 1996 & 2 \\ 998 & 2 \\ 499 & \end{array}$$

$k\in\{1,2,4,499,998,1996\}$

$s\in\{2,3,5,500,999,1997\}$

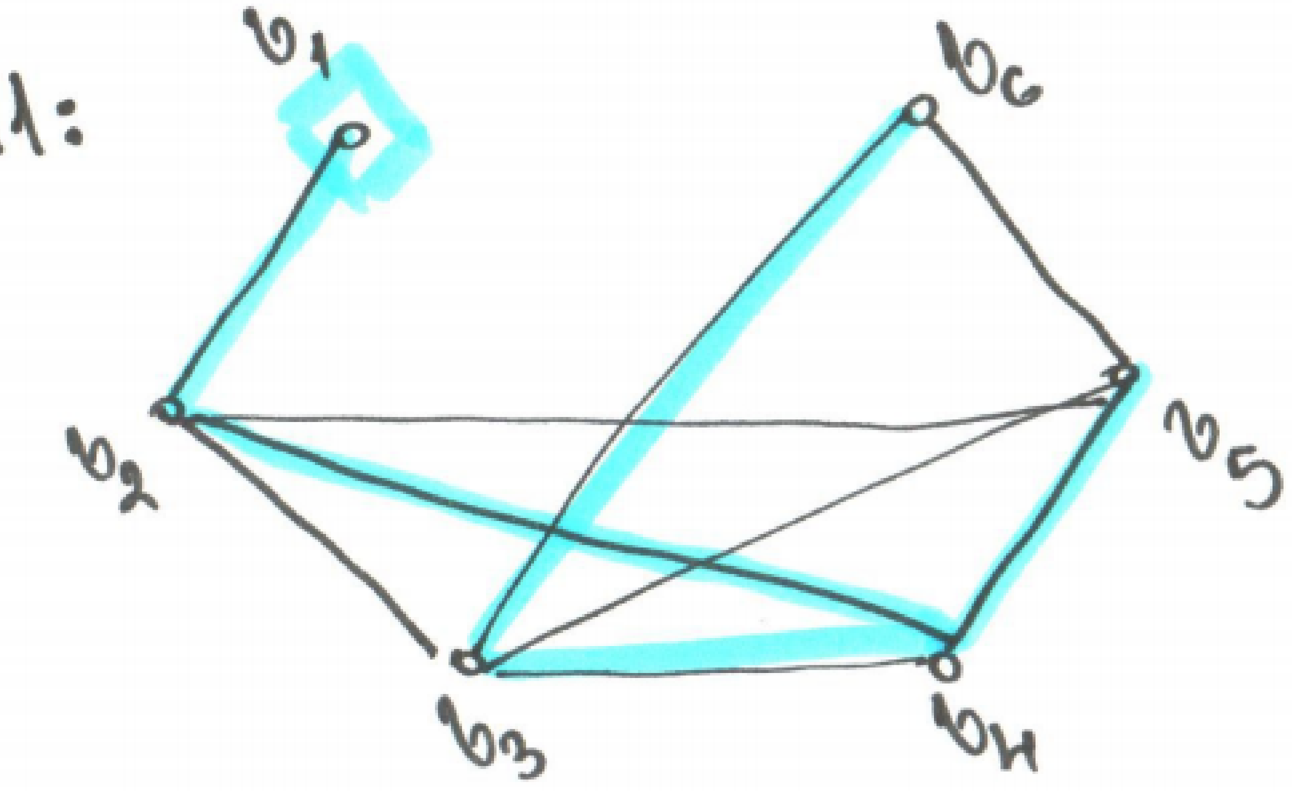


-ПОКРИВАЈУЋА СТАБЛА-

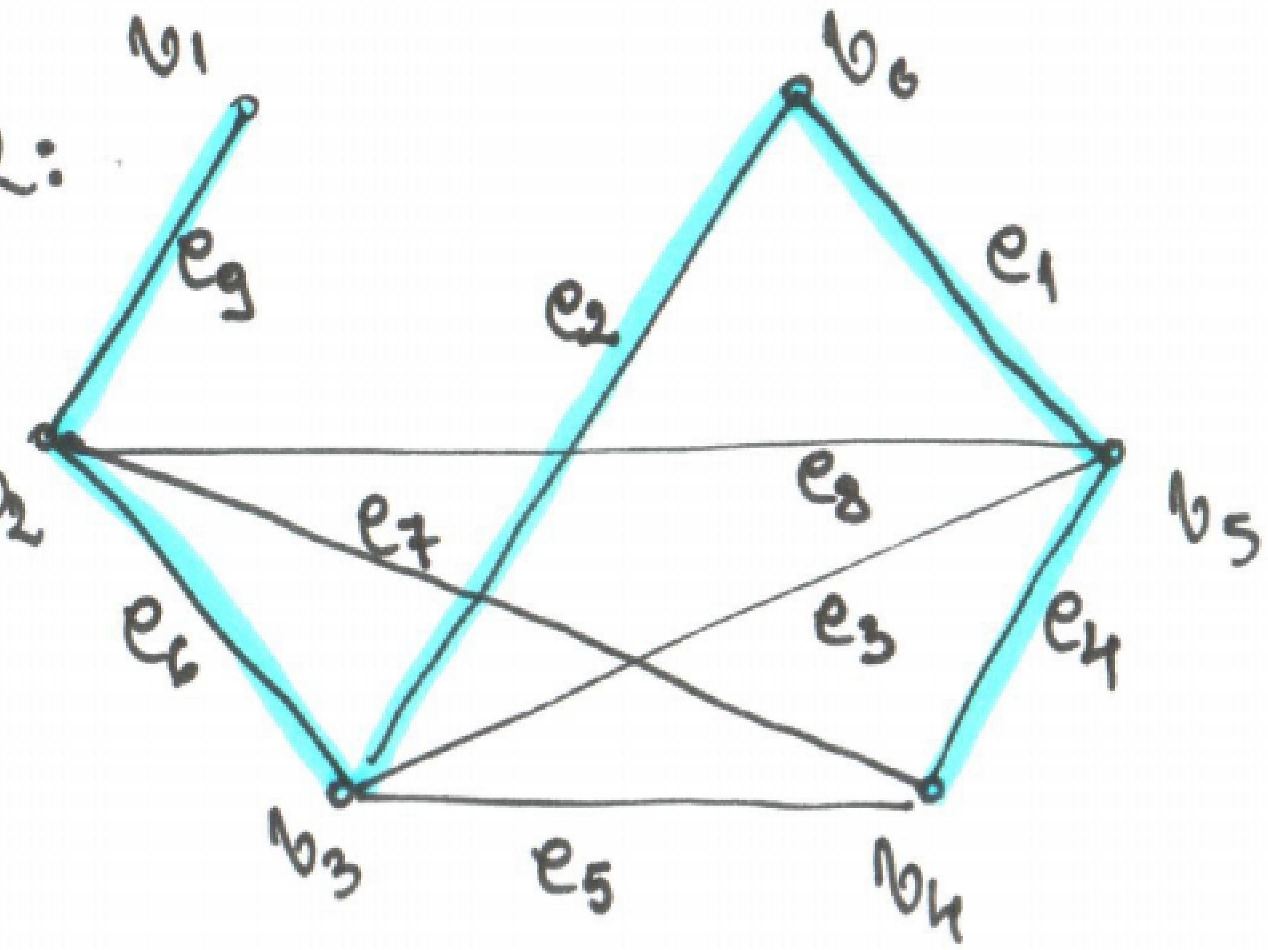
T је покривајуће стабло за граф G $\iff$ T је покривајући подграф графа G и T је стабло

Т: Граф има покривајуће стабло акко је повезан.

A1:



A2:



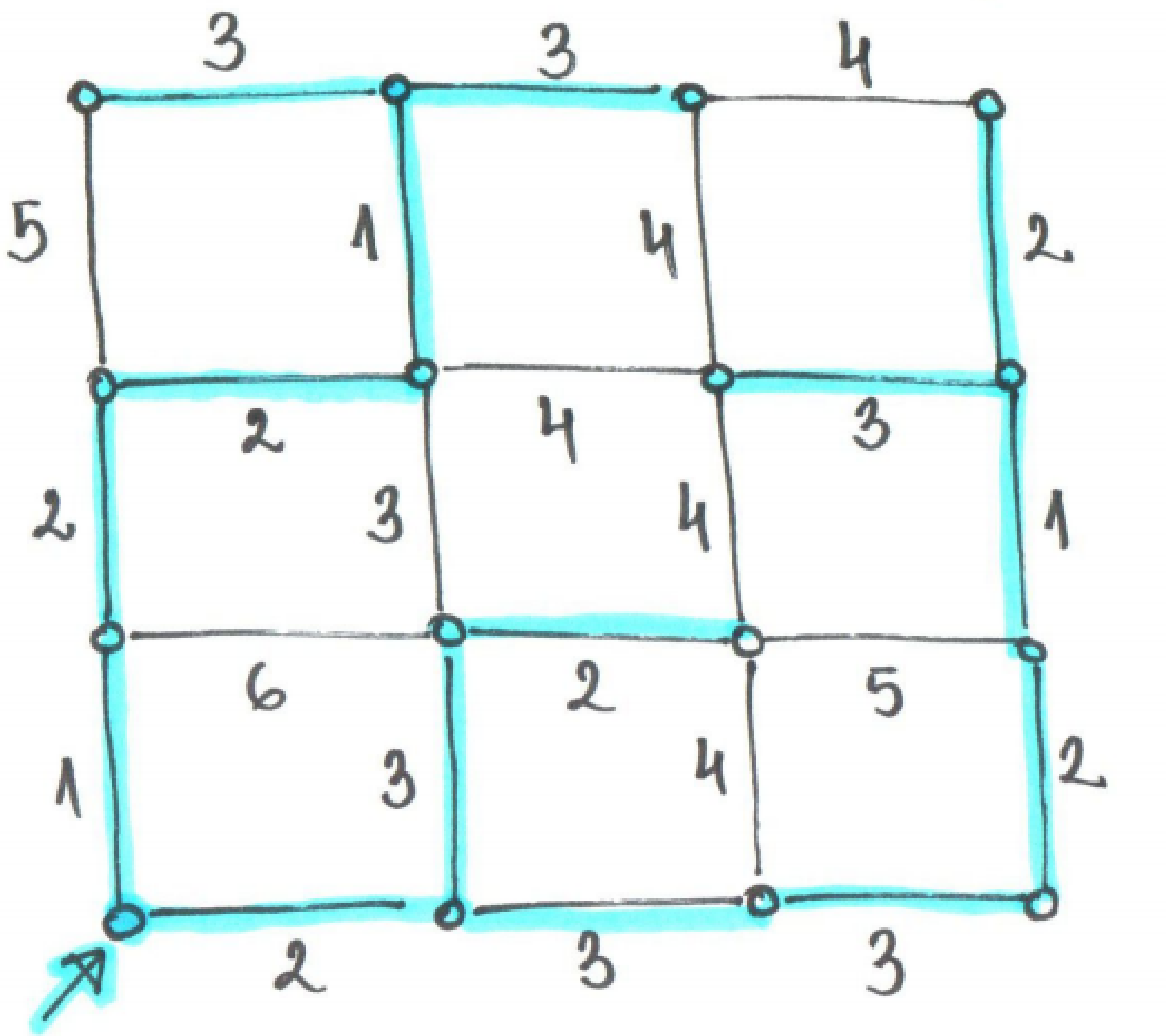
-МИНИМАЛНО ПОКРИВАЈУЋЕ СТАБЛО-

Тежински граф → свакој грани $e \in E(G)$ придружимо број $w(e)$ – тежина гране e

$w(G) = \sum w(e)$ тежина графа G

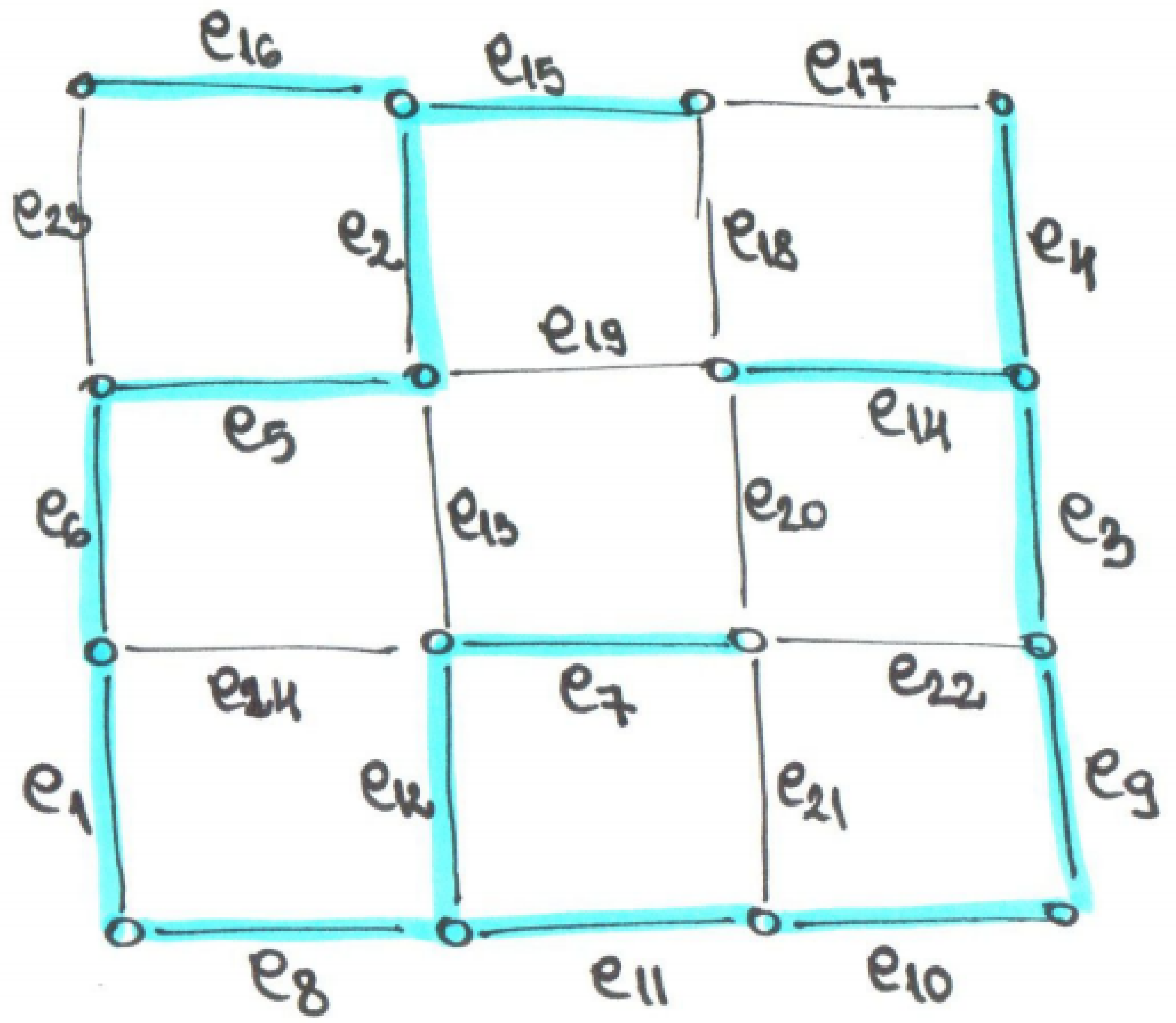
ПРОБЛЕМ: За дати повезан тежински граф одредити покривајуће стабло најмање тежине

11. Нађи минимално покривајуће стабло тежинског графа са слике



Примов алгоритам (А1)

(Борувка–Јарник–Прим)

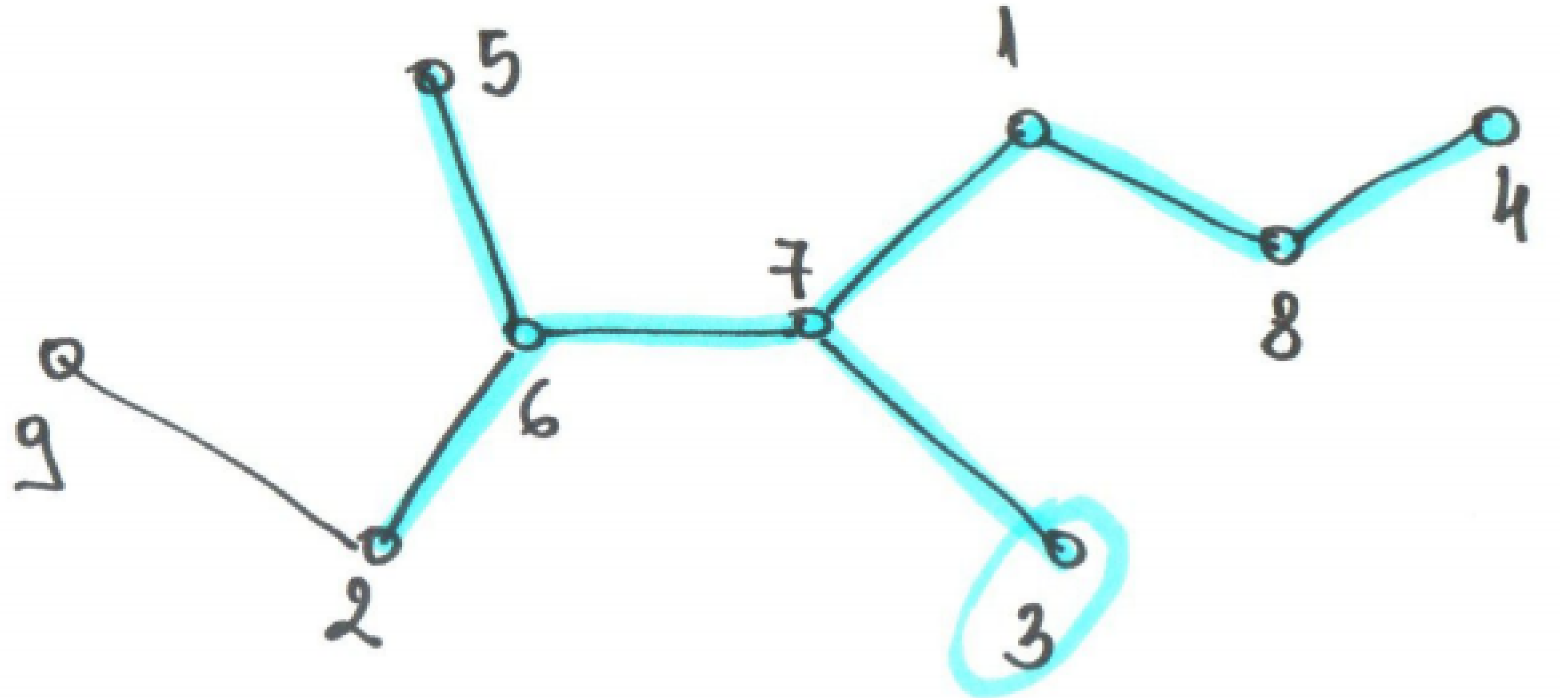


Крускалов алгоритам (А2)

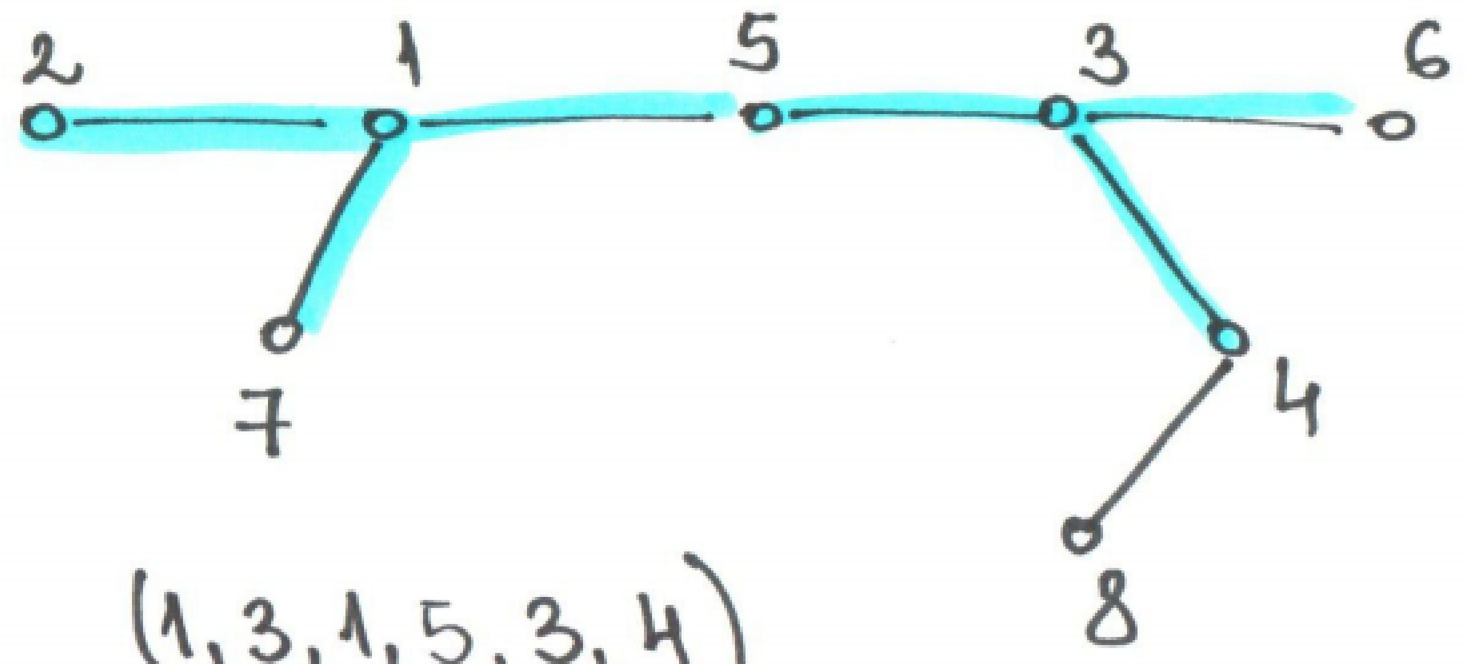
Т: Број различитих означених стабала са n чворова је n^{n-2}

→ број различитих Приферових низова

12. Конструисати Приферов низ следећих стабала



(7, 8, 6, 1, 7, 6, 2)



(1, 3, 1, 5, 3, 4)

→ висећи чвор са најмањом ознаком пишемо његовог суседа, а њега „бришемо"

Приферов низ је јединствен за свако стабло и има дужину $n-2$

Број појављивања чвора у низу је $d(v)-1$

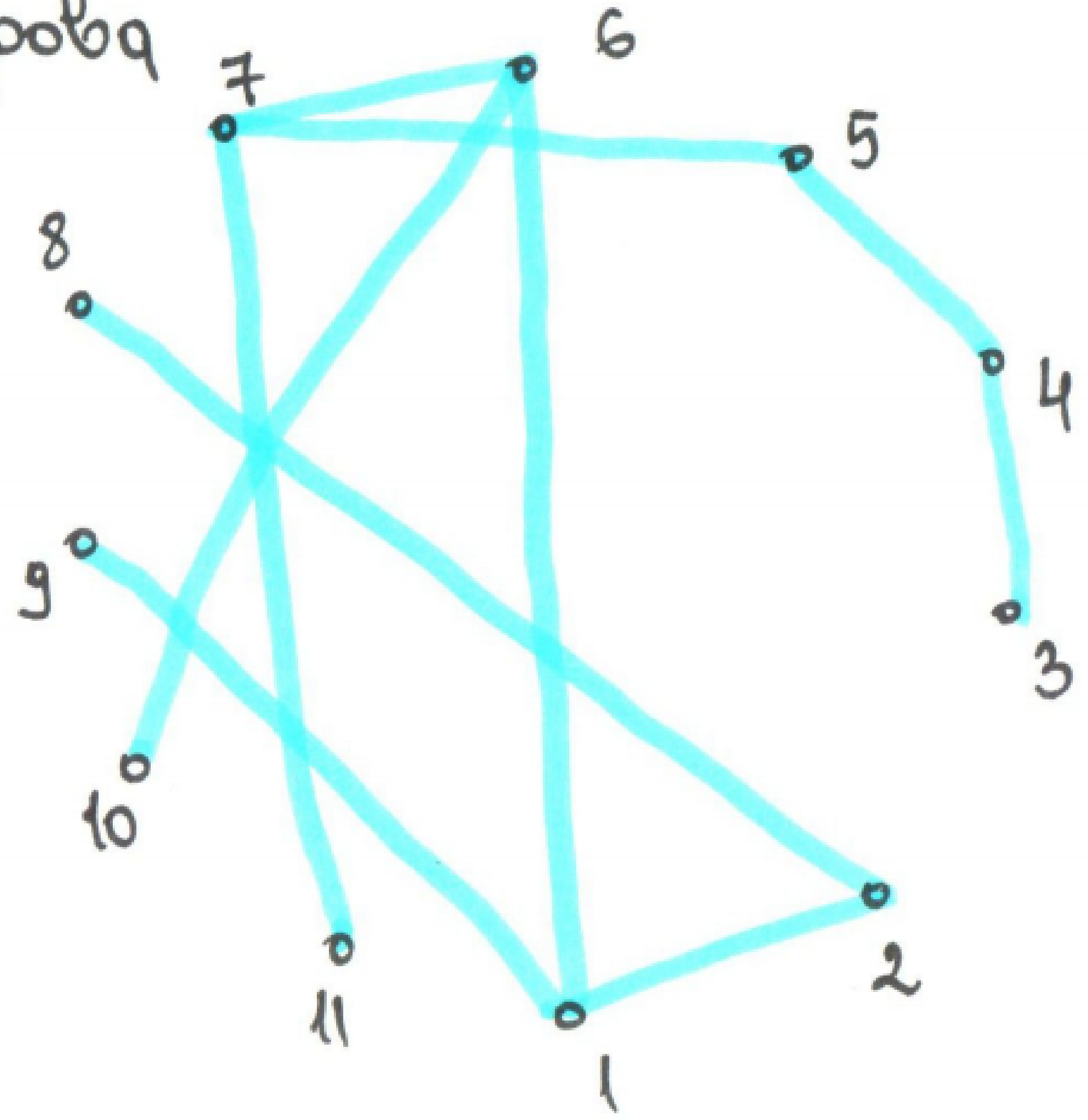
13. Конструисати означено стабло чији је Приферов низ

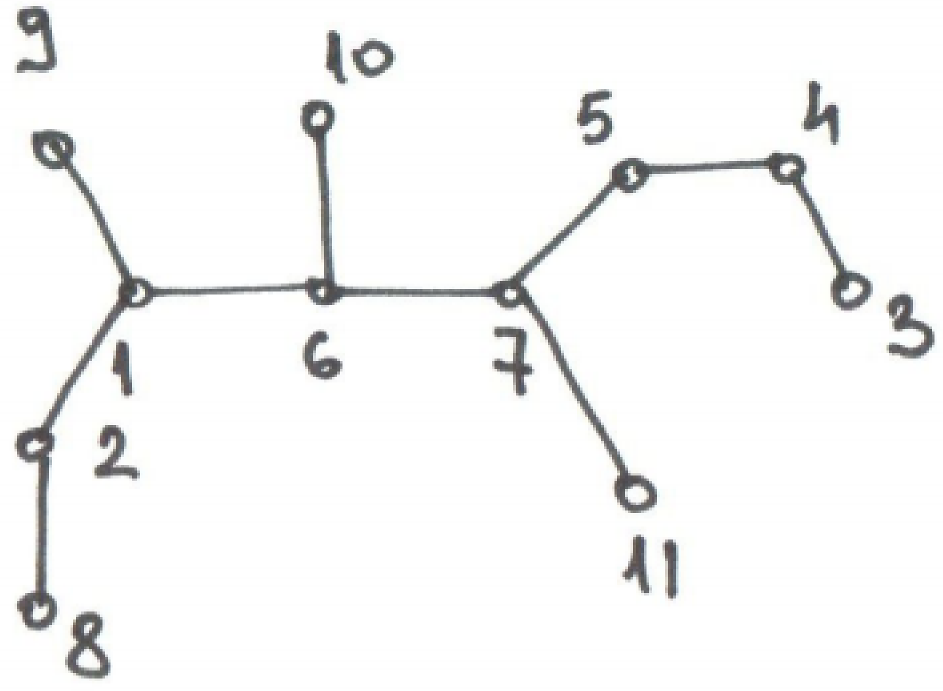
а) $(4,5,7,2,1,1,6,6,7)$

Приферов низ је дужине $9 \Rightarrow 11$ чворова

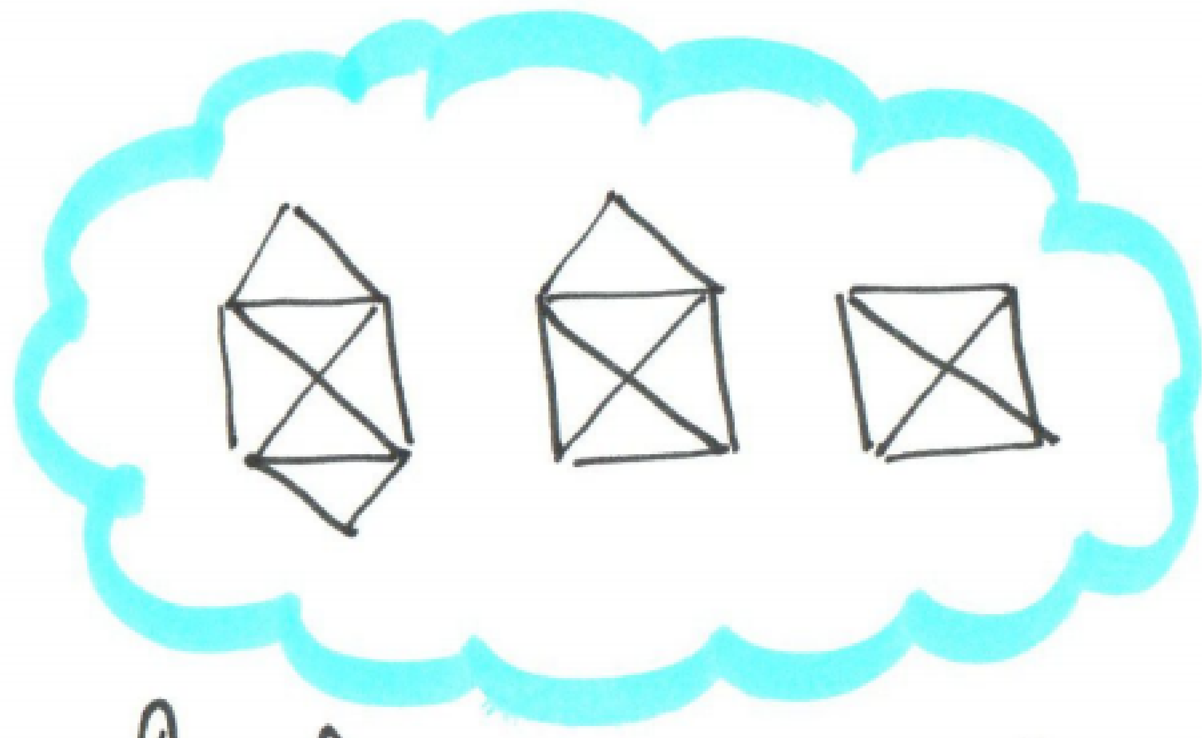
$(\cancel{4},\cancel{5},\cancel{7},\cancel{2},\cancel{1},\cancel{1},\cancel{6},\cancel{6},\cancel{7})$

$\{\cancel{1},\cancel{2},\cancel{3},\cancel{4},\cancel{5},\cancel{6},7,\cancel{8},\cancel{9},\cancel{10},11\}$

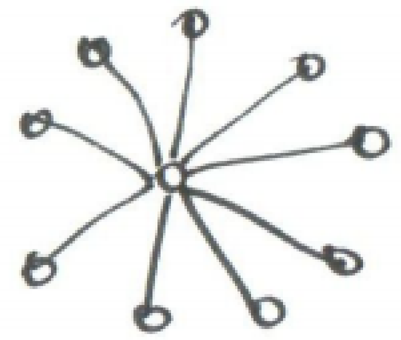




14. Одредити сва стабла код којих



a) су сви елементи Приферовог низа једнаки

звезда 

b) су сви елементи Приферовог низа различити

пут 

Домаћи: Нацртати без подизања руке и какве то везе има са теоријом графова?

c) се у Приферовом низу појављују тачно две различите вредности

гусеница