DISKRETNA MATEMATIKA

Jovanka Pantović
kabinet 607-VI
pantovic@uns.ac.rs
http://imft.ftn.uns.ac.rs/∼vanja/DiskretnaMatematika

Radojka Ciganović
kabinet 607-VI
Jelena Djokić

Novi Sad

Sadržaj predmeta

1. Kombinatorika
    1. osnovni principi prebrojavanja
    2. klasični kombinatorni objekti
    3. particije skupova, Stirlingovi brojevi 2. vrste
    4. rekurentne relacije
    5. generativne funkcije
2. Grafovi
    1. osnovni pojmovi teorije grafova, reprezentacija grafa
    2. povezanost, specijalne klase, izomorfizam grafova, operacije
    3. stabla
    4. planarni grafovi
    5. Ojlerovi i Hamiltonovi grafovi, Hamiltonove konture

PREDAVANJA $\#1$

Osnovni principi prebrojavanja

1. princip sume
2. princip proizvoda
3. Dirihleov princip
4. princip bijekcije

Osnovni principi prebrojavanja

Za $n \in \mathbb{N}$, skup prvih n prirodnih brojeva je

$$\mathbb{N}_n := \{1, \ldots, n\}$$

Prebrojavanje konačnog skupa X je određivanje broja n za koji postoji bijekcija

$$f : \mathbb{N}_n \to X.$$

Princip zbira

Lemma

Ako su A i B disjunktni konačni skupovi ($A \cap B = \emptyset$), onda je

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Princip zbira

Lemma

Ako su A i B disjunktni konačni skupovi ($A \cap B = \emptyset$), onda je

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Teorema (princip sume)

Neka je $n \geq 2$ i $A_1, \ldots, A_n$ po parovima disjunktni konačni skupovi tj. za sve $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sa osobinom $i \neq j$ važi $A_i \cap A_j = \emptyset$. Tada je

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Posledica

Neka su $A_1, \ldots, A_n$ *po parovima disjunktni skupovi i neka je* $|A_i| = m$ *za svako* $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Tada je*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = n \cdot m.$$

Zadatak

Koliko rešenja ima nejednačina $|y - x| \leq 3$ *u skupu* $\{1, 2, \ldots, 30\}^2$?

Zadatak

Koliko rešenja ima nejednačina $|y-x| \le 3$ *u skupu* $\{1,2,\ldots,30\}^2$?

Skup svih rešenja jednačine je $B_1 \cup \ldots \cup B_{30}$, gde je

$$\begin{aligned} B_x &= \{(x,y) : y \in \{1,\ldots,30\}, x-3 \le y \le x+3\} \\ &= \{x\} \times A_x. \end{aligned}$$

$$A_x = \{y \in \{1,2,\ldots,30\} : x-3 \le y \le x+3\}$$

$$\begin{aligned} |B_1 \cup \ldots \cup B_{30}| &= |B_1| + \ldots + |B_{30}| = |A_1| + \ldots + |A_{30}| \\ &= 4+5+6+24\cdot 7+6+5+4 = 198. \end{aligned}$$

Zadatak

Dat je pseudo-kod

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \texttt{for}\ \ i = 1\ \ \texttt{to}\ \ n-1 \\
(2) & \quad \texttt{for}\ \ j = i+1\ \ \texttt{to}\ \ n \\
(3) & \qquad \texttt{if}\ \ (a[i] > a[j])\ \ \texttt{then} \\
(4) & \qquad\qquad \texttt{swap}\ \ a[i]\ \ \texttt{and}\ \ a[j];
\end{array}
$$

Koliko puta će biti urađeno poređenje iz koraka (3)*?*

$$B_i = \{i\} \times A_i$$

$$A_i = \{i+1, \ldots, n\}, i = 1, .., n-1 \quad \Rightarrow \quad |A_i| = n - i.$$

$$|B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1}| = |A_1| + \ldots + |A_n| = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Princip proizvoda

Lema

Neka su A i B konačni skupovi. Broj elemenata skupa $A \times B$ jednak je

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Teorema (princip proizvoda)

Neka je $n \geq 2$ i neka su $A_1, \ldots, A_n$ konačni skupovi. Tada je

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|.$$

Zadatak

Koliko ukupno ima petocifrenih brojeva?

Zadatak

Koliko ukupno ima petocifrenih brojeva?

Neka je A_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ skup cifara koje mogu biti na poziciji i.

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$$

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
$$A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$|A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5| = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000.$$

Zadatak

Koliko ima različitih nizova bitova dužine 8?

Rešenje. Nizovi bitova dužine 8 su elementi Dekatovog stepena A^8 skupa $A = \{0, 1\}$. Kardinalnost tog skupa je

$$|A^8| = |A \times \ldots \times A| = |A|^8 = 2^8 = 256.$$

◇

Zadatak

Neka su $m_1, \ldots, m_n$ *prirodni brojevi. Dat je pseudo-kod*

$$
\begin{array}{l}
k = 0 \\
\texttt{for } i_1 = 1 \texttt{ to } m_1 \\
\quad \texttt{for } i_2 = 1 \texttt{ to } m_2 \\
\quad \ldots\ldots \\
\qquad\quad \texttt{for } i_n = 1 \texttt{ to } m_n \\
\qquad\qquad\qquad k := k + 1
\end{array}
$$

Koliko je k *nakon izvršavanja datog koda?*

Zadatak

Neka su $m_1, \ldots, m_n$ prirodni brojevi. Dat je pseudo-kod

$$
\begin{array}{ll}
(1) & k = 0 \\
(1) & \texttt{for } i_1 = 1 \texttt{ to } m_1 \\
(2) & \quad \texttt{for } i_2 = 1 \texttt{ to } m_2 \\
(3) & \quad \ldots\ldots \\
(4) & \qquad \texttt{for } i_n = 1 \texttt{ to } m_n \\
(5) & \qquad\qquad k := k + 1
\end{array}
$$

Koliko je k nakon izvršavanja datog koda?

$A_{i_j} = \{1, \ldots, m_j\}$ $j \in \{1, \ldots, n\}$ - skup vrednosti koje uzima i_j

$$k = |A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \times A_{i_n}| = |A_{i_1}| \cdot |A_{i_2}| \ldots |A_{i_n}| = m_1 \cdot m_2 \ldots m_n.$$

Dirihleov princip ("Pigeonhole principle")

1834, Dirichlet

Theorem

Ako je m objekata smešteno u n kutija i $m > n$, onda postoji kutija u kojoj se nalaze bar dva objekta.

Proof.

Pretpostavimo suprotno, da u svakoj kutiji ima najviše jedan objekat. Tada je ukupan broj elemenata u kutijama jednak najviše n, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da ima bar $n + 1$ objekata. $\square$

Corollary

Neka je $|A| = m$, $|B| = n$ i $m > n$. Ako je f funkcija skupa A u skup B, onda f nije $1 - 1$.

Zadatak

Dokazati da za svaki prirodan broj n postoji prirodan broj koji je deljiv sa n i zapisuje se samo pomoću cifara 0 i 1.

Uopšteni Dirihleov princip

Theorem

Ako je m objekata smešteno u n kutija i $m > n > 1$, onda postoji kutija u kojoj se nalazi bar $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ objekata.

Proof.

Pretpostavimo suprotno, da ne postoji kutija koja ima bar $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ objekata.
To znači da u svakoj kutiji ima najviše $\lceil \frac{m}{n} \rceil - 1$ objekata.
Tada je ukupan broj objekata u kutijama jednak najviše

$$m = n \cdot (\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil - 1) < m((\frac{m}{n} + 1) - 1 = m$$

što daje kontradikciju. $\square$

Princip bijekcije

Teorema (princip bijekcije)

Dva neprazna skupa imaju isti broj elemenata ako i samo ako postoji bijekcija izmedju njih.