UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČIH NAUKA
Elektroenergetski softverski inženjering - E3

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Granične vrednosti nizova i funkcija

1. Odrediti sledeće granične vrednosti:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3+2n^2+1}{2n^3+n^2+2n+1}\right)^{3n}$;

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+3n^2+1}{n^3+n+2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}$;

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{3n^2}{2n+1}-\dfrac{(2n-1)(3n^2+n+2)}{4n^2})$;

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n^4+1}-\sqrt[5]{n^4+1}}$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n+1)-\ln n)$;

   (f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$;

   (g) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\left(3x^3+2x+1\right)-\ln\left(2x^2+3x+1\right)}{x-1}$;

   (h) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(1-x)}{x^3-1}$;

   (i) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2\,x^5-5\,x^4-2\,x^3+7\,x^2-4\,x+12}{3\,x^5-8\,x^4+x^2+12\,x+4}$;

   (j) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\cot^2 x}$;

   (k) $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\cot x}$.

2. Dati su nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ sa opštim članovima $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{27n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{27n^3+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{27n^3+2n}}$, $b_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}}$. Proveriti da li nizovi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ i $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ imaju graničnu vrednost. Da li su nizovi Košijevi u prostoru $\mathbf{R}$? Odrediti tačke nagomilavanja datih nizova.

Neprekidnost funkcije

3. Odrediti konstante A i B tako da funkcija f bude neprekidna u svim tačkama definisanosti, ako je:

   (a)
$$f(x)=\begin{cases} Ax+e^{\frac{1}{x-1}}, x<1\\ A, x=1\\ \operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}, x>1\end{cases}$$

   (b)
$$f(x)=\begin{cases} (\sin x)^{\tan^2 x}, x<\frac{\pi}{2}\\ A, x=\frac{\pi}{2}\\ Ae+\frac{B}{x}, x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

   (c)
$$f(x)=\begin{cases} -\sin x, x\le-\frac{\pi}{2}\\ A\sin x+B, -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ \cos x, x\ge\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

4. Ispitati da li su sledeće funkcije neprekidne. Ukoliko funkcije imaju prekid odrediti vrstu prekida.

   (a)
$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x\ne0\\ 1, x=0\end{cases}$$

   (b)
$$f(x)=\begin{cases} 2x+1, x\le1\\ 3x-1, x>1\end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, x \neq 2 \\ 3, x = 2 \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, x \leq 3 \\ (x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}}, x > 3 \end{cases}$$

Diferencijalni račun

5. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija:
   (a) $y = (\cos^4 x)\sin(x^2+3)$;
   (b) $y = \arctan\dfrac{x+1}{x-1}$;
   (c) $y = \sin\left(\ln\frac{x}{x^2+1}\right)$;
   (d) $y = (x^x)^x$;
   (e) $y = (\tan x)^{\cot(\frac{x}{2})}$;
   (f) $y = x^{\ln x}$.
6. Odrediti drugi izvod sledećih funkcija, koristeći izvod inverzne funkcije:
   (a) $y = \arccos x \quad (-1 < x < 1)$;
   (b) $y = \log x \quad (x > 0)$.
7. Odrediti drugi izvod parametarski zadatih funkcija:
   (a) $x = \sin t, y = \cos t$;
   (b) $x = \ln t, y = t + \frac{1}{t}$;
   (c) $x = e^{-t}, y = e^{2t}$;
   (d) $x = \frac{1}{1+t^2}, y = (\frac{t}{t+1})^2$.
8. Odrediti drugi izvod implicitno zadatih funkcija:
   (a) $x^2 + y^2 = a^2$;
   (b) $e^{y^2} = \arccos(x+y)$;
   (c) $\ln\frac{x}{y} + \frac{x}{y} = c$.
9. Dokazati da:
   (a) funkcija $y = (x+\sqrt{x^2+1})^n$ zadovoljava jednačinu $(1+x^2)y'' + xy' - n^2y = 0$;
   (b) funkcija $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ zadovoljava jednačinu $xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0$;
   (c) vfunkcija $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ zadovoljava jednačinu $y''' - 13y' - 12y = 0$.
10. Izračunati graničnu vrednost:
    (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{\ln(x+1)}$;
    (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin(ax))}{\ln(\sin(bx))}, (a, b > 0)$;
    (c) $\lim\limits_{x\to \mathrm{inf}} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$;
    (d) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.
11. Detaljno ispitati sledeće funkcije i nacrtati njihove grafike:
    (a) $y = \dfrac{x^2-1}{(x+2)^2}$;
    (b) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-4}}$;
    (c) $y = \dfrac{1-\ln x^2}{1+\ln x^2}$;

(d) $y = \ln \dfrac{2x}{x^2+1}$;

(e) $y = e^{\frac{2x+1}{x-1}}$;

(f) $y = x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$;

(g) $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x+2}}$;

(h) $y = \operatorname{arctg}(1 + \dfrac{1}{x})$.

Funkcije više promenljivih

12. Za funkciju $z(x,y) = x^3 + 5xy + y^3 - 7$ izračunati parcijalne izvode prvog, drugog, trećeg reda, kao i totalni diferencijal prvog i drugog reda.

13. Za funkciju $z(x,y) = x \ln(xy)$ odrediti:

    (a) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

    (b) $\frac{\partial^3 z}{\partial^2 x \partial y}$.

14. Naći ekstremne vrednosti funkcije:

    (a) $z = x^3 + y^3 - 3xy$;

    (b) $z = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + y^3$.

15. Naći ekstremne vrednosti funkcije:

    (a) $z = x^2 + y^2$ pod uslovom da je $2x + y = 2$;

    (b) $z = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln 12 - x - y$ pod uslovom da je $x + y = 10$;

    (c) $z = e^{xy}$ pod uslovom da je $x + y - 10 = 0$.

Katedra za matematiku

Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering
predmet: **Matematička analiza 1**
datum: 17. Maj 2014.
PRVI KOLOKVIJUM

Predispitne obaveze

1. Izračunati:
   a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+2x}{x^2-3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;
   b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin ax}$, $a,b\in\mathbb{R}$;
   c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n+9^{n+1}}{5^n+9^{n+2}}$.
2. Ako je niz $\{a_n\}$ dat opštim članom $a_n=\frac{n^n}{n!}$ izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.
3. Odrediti prvi izvod funkcije $y=y(x)$ zadate sa $x\sin y+e^{x^2+y^2}=\sqrt{x}y^3$.
4. Odrediti drugi izvod funkcije zadate sa $x=e^{-t}$ i $y=e^{2t}$.
5. Za funkciju $u(x,y,z)=x^3f(\sqrt{x}e^yz)$, gde je funkcija f diferencijabilna funkcija, odrediti $\frac{\partial u}{\partial x}$.
6. Za funkciju $z(x,y)=x^2y+2xy$ odrediti jednačinu tangentne ravni u tački $A(1,1,3)$.

Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering
predmet: **Matematička analiza 1**
datum: 14. maj 2015

DRUGI KOLOKVIJIM

Predispitne obaveze

1. (1 poen) Da li je funkcija $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ monotono rastuća?

2. (1 poen) Da li funkcija $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ima horizontalnu asimptotu kad $x \to \infty$?

3. (1 poen) Za funkciju $u(x,y) = x^2 f(\dfrac{y}{x})$ naći $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

4. (1 poen) Napisati jednačinu tangentne ravni na površ $z = x \ln y$ u tački $M(1,1,a)$.

5. (1 poen) Ispitati ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2 - y^2$.

6. (1 poen) Da li funkcija $f(x,y) = x^2 - y^2$ u tački (0,0) ima ekstrem uz uslov $y = 0$?

7. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   (1 poen) Ispitati neprekidnost funkcije f u tački $(0,0)$.

   (1 poen) Da li data funkcija ima $\frac{\partial f}{\partial x}$ u tački $(0,0)$?

   (1 poen) Da li je funkcija diferencijabilna u tački $(0,0)$?

Elektroenergetski softverski inženjering/Primenjeno softvesrko inženjerstvo
predmet: **Matematička analiza**
Prvi kolokvijum (probni) - Ispitni zadaci

1. a) (5 bodova) U zavisnosti od realnog parametra a odrediti graničnu vrednost niza $a_n = \dfrac{2^n + a^n}{2^{n+1} - 5a^n}$.

   b) (5 bodova) Odrediti konstante A i B tako da funkcija $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2020\,x)}{x} & , x < 0 \\ Ax + B & , 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{\ln x^2}{x-1} & , x > 1. \end{cases}$

   bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

   c) (4 boda) Izračunati

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{8x} - 2}{\sqrt{x^2+3} - 2}$$

.

Napomena: Zadatke raditi bez korišćenja Lopitalovog pravila.

Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering / Primenjeno softvesrko inženjerstvo
predmet: **Matematička analiza**
datum: **15. jun 2020. godine**

PRVI KOLOKVIJUM (Prvi deo) Rešenja predispitnih obaveza

Sve odgovore obrazložiti.

1. (2 poena) Da li je funkcija $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data sa $d(x, y) = |x - y|$ za $x, y \in \mathbb{R}$ metrika (rastojanje)?

   Rešenje

   Jeste (po definiciji rastojanja) zbog osobina apsolutne vrednosti.

   - $d(x, y) = |x - y| \geq 0$.
   - $d(x, y) = |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$
   - $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$
   - $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$

2. (1 poen) Da li je tačka 0 tačka nagomilavanja skupa $A = [-1, 0) \cup (0, 1)$?

   Rešenje

   Jeste, jer svaka lopta $L(0, r)$, $r > 0$, sadrži tačke iz skupa A različite od 0. Ekvivalentno, ne postoji lopta $L(0, r)$ takva da je $A \cap L(0, r) \backslash 0 = \emptyset$.

3. Dat je niz $a_n = \dfrac{2 + (-1)^n}{n^2}$.

   (1 poen) Odrediti $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

   Rešenje

   $a = 0$, jer je $2 + (-1)^n$ ograničeno i $n^2 \to \infty$ kad $n \to \infty$.

   (1 poen) Da li dati niz zadovoljava sve uslove principa monotonosti? Navesti i proveriti uslove.

   Rešenje

   Svaki monotono neopadajuci (nerastući) niz ograničen sa gornje (donje) strane konvergira ka svom supremumu (infimumu). Dati niz je ograničen (jer je konvergentan), ali nije monoton. Za $n = 2k - 1$ je $a_n = a_{2k-1} = \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{4k^2-2k+1} < \frac{3}{4k^2} = \frac{3}{(2k)^2} = a_{2k} = a_{n+1}$ dok je za $n = 2k$, $a_n = a_{2k} = \frac{3}{4k^2} > \frac{1}{4k^2+2k+1} = a_{2k+1} = a_{n+1}$.

4. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} 1 + x & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$.

   (1 poen) Odrediti $A = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

   Rešenje

   $A = 1$.

   (1 poen) Odrediti δ tako da je $|f(x) - A| < 10^{-2}$ za $|x| < \delta$, $x \neq 0$.

   Rešenje

   $|f(x) - A| = |1 + x - 1| = |x| < 10^{-2}$ za $|x - 0| < 10^{-2}$, tj. $\delta = 10^{-2}$.

5. (1 poen) Odrediti vrstu prekida funkcije $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ u tački 0.

   Rešenje

   $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, pa funkcija ima prividan prekid u tački 0.

6. (2 poena) Pokazati da funkcija $f(x) = x^3 - 2x + 3$ na intervalu [-3,1] ima bar jednu nulu. Gde se ta nula nalazi u odnosu na tačku -1?

   Rešenje

   Funkcija je neprekidna na $[-3, 1]$, $f(-3) < 0$, $f(1) > 0$, pa na intervalu $[-3, 1]$ funkcija ima bar jednu nulu. Kako je $f(-1) > 0$, nula se nalazi levo od tačke 1.

Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering / Primenjeno softvesrko inženjerstvo
predmet: **Matematička analiza**
datum: **15. jun 2020. godine**

Prvi kolokvijum (drugi deo) Rešenja predispitnih obaveza

Sve odgovore obrazložiti.

1. (2 poena) Data je funkcija $y = x^2$. Čemu je jednak priraštaj Δy a čemu diferencijal dy date funkcije u tački $x = 1$ ako je $\Delta x = 0.1$?

   Rešenje

   $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(1.1) - f(1) = 1.1^2 - 1^2 = 0.21$. $dy = y'dx = 2 \cdot 0.1 = 0.2$.

2. (1 poen) Odrediti prvi izvod funkcije $y = y(x)$ date sa $x(t) = \ln t$, $y(t) = e^t$, $t > 0$.

   Rešenje

   $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt} = e^t$, $y'(t) = \frac{e^t}{\frac{1}{t}} = te^t$, $x(t) = \ln t$ (ovo je izvod u parametarskom obliku).

   Drugi način: $y(x) = e^{e^t}$, $y'(x) = e^t e^{e^t}$ (ovo je izvod u eksplicitnom obliku).

3. (1 poen) Za funkciju $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ napisati Tejlorov polinom prvog stepena u tački $a = 1$, kao i formulu za grešku.

   Rešenje

   Domaći.

4. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$.

   (a) (1 poen) Da li ova funkcija ima ekstrem u $x = 0$?

   Rešenje

   Da, jer je $f(1) = 1$, $f(x) = \ln x < 1$ za $x \in (0, r)$ za svako $0 < r < e$, i $f(x) = \frac{\sin x}{x} < 1$ za $x < 0$ (jer je $\sin x > x$ za $x < 0$, sto se vidi iz grafika funkcija $y = \sin x$ i $y = x$).

   (b) (1 poen) Da li ima vertikalnu asimptotu u tački $x = 0$?

   Rešenje

   Da, jer je $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

   (c) (1 poen) Da li ima horizontalnu asimptotu kad $x \to -\infty$?

   Rešenje

   Da, jer je $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. Horizontalna asimptota je prava $y = 0$ tj. x-osa.

5. (1 poen) Za funkciju $z(x, y) = x^2 h(u, v)$, $u = xy$, $v = x + y$, gde je h diferencijabilna funkcija, naći $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

   Rešenje

   $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xh(u, v) + x^2(\dfrac{\partial h}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial h}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}) = 2xh(u, v) + x^2(\dfrac{\partial h}{\partial u} y + \dfrac{\partial h}{\partial v})$.

6. Data je funkcija $z(x, y) = (x + 1)(y - 1)$.

   (a) (1 poen) Ispitati po definiciji da li je data funkcija diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$.

   Rešenje

   $\Delta z = z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x, y) = (x+\Delta x+1)(y+\Delta y-1) - (x+1)(y-1) = (y-1)\Delta x + (x+1)\Delta y + \Delta x \Delta y$, pa je $D_1 = (y - 1)$, $D_2 = x + 1$ i npr. $\alpha_1 = \Delta y$ (ili $\alpha_2 = \Delta x$).

   (b) (1 poen) Da li funkcija ima ekstrem u tački $T(-1, 1)$?

   Rešenje

   Ne, jer u tački T je $\Delta z = \Delta x \Delta y$ što nije stalnog znaka ni u jednoj okolini tačke T.

(c) (1 poen) Naći ekstreme ove funkcije pod uslovom $x - y + 1 = 0$.

Rešenje

iz $x - y + 1 = 0$ je $y = x + 1$ pa je $z = y(y-1) = y^2 - y$. Ova kvadratna funkcija ima minimum za $y = \frac{1}{2}$ (onda je $x = -\frac{1}{2}$), pa polazna funkcija ima uslovni ekstrem u tački $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Elektroenergetski softverski inženjering/Primenjeno softvesrko inženjerstvo
predmet: **Matematička analiza** **15. Jun 2020.**
Kolokvijum 1a - Rešenja ispitnih zadataka

1. a) (7 poena) U zavisnosti od realnih parametara p i q, $p \geq 0$, $q \geq 0$, diskutovati graničnu vrednost niza datog sa

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{pn^3 + qn^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{pn^3 + qn^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{pn^3 + qn^2 + n}}.$$

Rešenje. Zadatak rešavamo primenom teoreme o uklještenim nizovima (T.O.U).

$$b_n = \frac{n}{\sqrt{pn^3 + qn^2 + n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{pn^3 + qn^2 + 1}} = c_n$$

U nastavku diskutujemo tri slučaja u zavisnosti od realnih parametra p i q:

1. za $p > 0$ i $q \geq 0$ dobijamo sledeće granične vrednosti:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{pn^3 + qn^2 + n}} \Big/^{:n} = \lim_{1\to\infty} \frac{1}{\sqrt{pn + q + \frac{1}{n}}} = 0 \quad \text{i}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{pn^3 + qn^2 + 1}} \Big/^{:n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{pn + q + \frac{1}{n^2}}} = 0$$

Primenom T.O.U. možemo da zaključimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. za $p = 0$ i $q > 0$ dobijamo sledeće granične vrednosti:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{qn^2 + n}} \Big/^{:n} = \lim_{1\to\infty} \frac{1}{\sqrt{q + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{q}} \quad \text{i}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{qn^2 + 1}} \Big/^{:n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{q + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{q}}$$

Primenom T.O.U. možemo da zaključimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{q}}$.

3. za $p = 0$ i $q = 0$ dobijamo $b_n = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \leq a_n \leq n = c_n$ odakle sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

b) (7 poena) Odrediti konstante A i B tako da funkcija $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + x} & , x < -1 \\ Ax + B & , -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+1} - 1} & , x > 0 \end{cases}$

bude neprekidna na $\mathbb{R}$. Raditi bez korišćenja Lopitalovog pravila.

Rešenje. Za zadatu funkciju $f(x)$ uslovi za neprekidnost su:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \tag{2}$$

Iz uslova (1) dobijamo da je:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + x} = \lim_{x\to -1^-} \frac{(x+1)(x^2 - 3x + 2)}{x(1+x)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} = \frac{1 + 3 + 2}{-1} = -6,$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = -A + B,$$

odakle dobijamo da je $\boxed{-A + B = -6}$.

Iz uslova (2) dobijamo da je:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x+1} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot 2 \cdot (\sqrt{x+1} + 1) = 4,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = B,$$

odakle dobijamo da je $\boxed{B = 4}$ i $-A + 4 = -6 \Rightarrow \boxed{A = 10}$.

2. (13 poena) Detaljno ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \dfrac{\ln|x|+1}{x}$.

Rešenje.

(1) *oblast definisanosti:* je skup $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ (ili $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$).

(2) *parnost*: $f(-x) = \dfrac{\ln|-x|+1}{-x} = -\dfrac{\ln|x|+1}{x} = -f(x) \Rightarrow$ funkcija $f(x)$ je *naparna* tako da u nastavku zadatka ispitujemo funkciju za $x > 0$, tj. posmatramo $f(x) = \dfrac{\ln x + 1}{x}$.

(3) *nule funkcije:* $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \approx 0,37$.

(4) *asimptote funkcije*:

· V.A. je prava $x = 0$ jer

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x + 1}{x} = \frac{(-\infty)+1}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty.$$

· H.A. je prava $y = 0$ jer

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + 1}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

· K.A. ne postoji, jer funkcija ima horizontalnu asimptotu.

(5) *monotonost i ekstremne vrednosti:*

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x + 1}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x + 1) \cdot 1}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$.
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
Funkcija je rastuća na intervalu $(0, 1)$, a opadajuća na intervalu $(1, +\infty)$.
Funkcija ima maksimum u tački $T_{max}(1, 1)$.

(6) *konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:*

$$f''(x) = -\frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 1}{x^3};$$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \sqrt{e} \approx 1,65$ i
$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{e}$, a $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$.

Funkcija je konveksna na intervalu $(\sqrt{e}, +\infty)$, konkavna na intervalu $(0, \sqrt{e})$. Funkcija ima prevojnu tačku $P(\sqrt{e}, \frac{3}{2\sqrt{e}})$, gde je $\frac{3}{2\sqrt{e}} \approx 0,91$.

(7) *tangente funkcije u tačkama gde ne postoji prvi izvod:* nema tačaka za ispitivanje.

3. (7 poena) Naći ekstremne vrednosti funkcije $z(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2xy + 2y^2)$.

Rešenje.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-y}(x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 2y) = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x-y}(-x^2 + 2xy - 2y^2 - 2x + 4y) = 0.$$

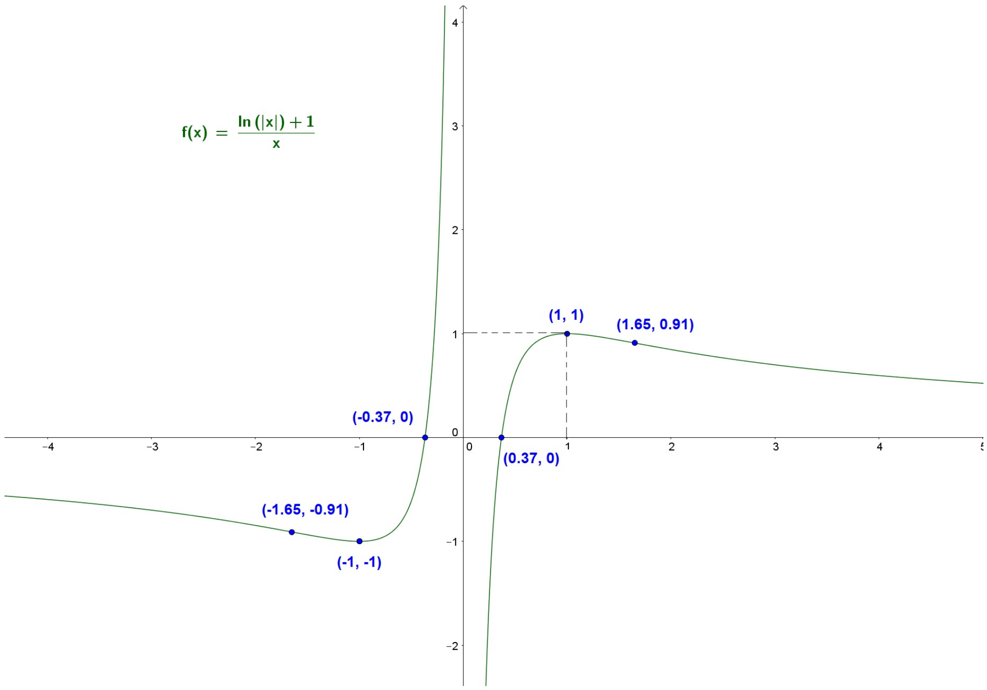
Sistem je dalje ekvivalentan sa sistemom

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 2y &= 0 \\ -x^2 + 2xy - 2y^2 - 2x + 4y &= 0 \\ \hline 2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0} & \end{aligned}$$

pa dolazimo do jednačine

$$x^2 - 2x \cdot 0 + 2 \cdot 0^2 + 2x - 2 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 0,} \boxed{x_2 = -2}.$$

Stacionarne tačke su $A(0, 0)$ i $B(-2, 0)$. Pre ispitivanja karaktera stacionarnih tačaka potrebni su parcijalni izvodi drugog reda



Slika 1: Grafik funkcije $f(x) = \frac{\ln|x|+1}{x}$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x-y}(x^2-2xy+2y^2+2x-2y)\right) = e^{x-y}(x^2-2xy+2y^2+4x-4y+2);$$
$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x-y}(-x^2+2xy-2y^2-2x+4y)\right) = e^{x-y}(x^2-2xy+2y^2+4x-8y+4);$$
$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x-y}(x^2-2xy+2y^2+2x-2y)\right) = e^{x-y}(-x^2+2xy-2y^2-4x+6y-2).$$

Tačka $A(0,0)$: $r=2,\ \ t=4,\ \ s=-2$ $rt-s^2=4>0$ $r>0$ Funkcija $z(x,y)$ ima minimum $z(0,0)=0$ u tački A.	Tačka $B(-2,0)$: $r=-2e^{-2},\ \ t=0,\ \ s=2e^{-2}$ $rt-s^2=-4e^{-4}<0$ Funkcija $z(x,y)$ nema ekstrem u tački B.

Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering / Primenjeno softvesrko inženjerstvo
predmet: **Matematička analiza**
PRVI KOLOKVIJUM Predispitne obaveze

Sve odgovore obrazložiti.

1. (1 poen) U metričkom prostoru $(\mathbb{R}^2, d)$, gde je d Euklidska metrika, date su tačke $A(-1,2)$ i $B(1,2)$. Naći $r \in \mathbb{R}^+$ tako da su lopte $L_1(A,r)$ i $L_2(B,r)$ disjunktne.
2. (1 poen) Kakva je tačka 0 za skup $A = [-1,0) \cup \{1\}$?
3. (1 poen) Da li je tačka 0 adherentna tačka skupa $[-1,0) \cup (0,1]$?
4. (1 poen) Da li je tačka 0 rubna tačka skupa $[-1,0) \cup (0,1]$?
5. (1 poen) Dat je niz $a_n = \dfrac{n+1}{n!}$. Odrediti $a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.
6. (1 poen) Ako je $a_n = n^2 + n + 1$, izračunati $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
7. (1 poen) Naći $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n}{n}$.
8. Dat je niz $a_n = \dfrac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2}$.

   (1 poen) Odrediti $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

   (1 poen) Naći indeks n_0 počevši od kog je rastojanje izmedju a i a_n manje od 10^{-2}.
9. Dat je niz $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$.

   (1 poen) Odrediti $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

   (1 poen) Koliko tačaka nagomilavanja ima dati niz?

   (1 poen) Naći indeks n_0 počevši od kog je rastojanje izmedju a i a_n manje od 10^{-2}.
10. (1 poen) Da li je niz $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ konvergentan? Da li je ograničen? Da li je monoton?
11. (1 poen) Da li je niz $a_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}}$ konvergentan? Da li je ograničen? Da li je monoton?
12. Dat je niz $a_n = \frac{\cos n\pi}{n}$.

    (1 poen) Odrediti $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

    (1 poen) Koliko tačaka nagomilavanja ima dati niz?

    (1 poen) Naći indeks n_0 počevši od kog je rastojanje izmedju a i a_n manje od 10^{-2}.
13. Dat je niz $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$.

    Odrediti $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

    Da li je dati niz Košijev?

    Naći indeks n_0 počevši od kog je rastojanje izmedju a i a_n manje od 10^{-2}.
14. Dat je niz $a_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$.

    (1 poen) Odrediti $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

    (1 poen) Da li je dati niz Košijev u $\mathbb{R}$?

    (1 poen) Naći indeks n_0 počevši od kog je rastojanje izmedju a i a_n manje od 10^{-2}.
15. (1 poen) Da li je $\{[-\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dfrac{1}{n^2}] : n \in N\}$ niz umetnutih intervala?
16. (1 poen) Koliko realnih brojeva je sadržano u svakom od datih intervala?
17. (1 poen) Neka je $a_n = -1$ i $b_n = \frac{1}{n}$. Odrediti skup tačaka koji leži u svakom od intervala $[a_n, b_n]$.

18. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

    (1 poen) Odrediti $A = \lim_{x\to 0} f(x)$.

    (1 poen) Odrediti δ tako da je $|f(x) - A| < 10^{-2}$ za $|x| < \delta$.

19. (1 poen) Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$. Odrediti $A = \lim_{x\to 0} f(x)$.

20. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} 1+x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

    (1 poen) Odrediti $A = \lim_{x\to 0} f(x)$.

    (1 poen) Odrediti δ tako da je $|f(x) - A| < 10^{-2}$ za $|x| < \delta$.

21. (1 poen) Odrediti parametar A tako da funkcija $f(x) = \begin{cases} 1-x & x < 0 \\ A & x = 0 \\ x^2+1 & x > 0 \end{cases}$ bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

22. (1 poen) Da li su funkcije $f(x) = \sin^2 x$ i $g(x) = x$ beskonačno male veličine kad $x \to 0$? Ako jesu, uporediti njihovu brzinu teženja ka nuli.

23. (1 poen) Da li su $f(x) = x\sqrt{x}$ i $g(x) = x^2$ beskonačno velike veličine kad $x \to \infty$? Ako jesu, uporediti ih.

24. (1 poen) Da li su $f(x) = 100x^2$ i $g(x) = x^2$ beskonačno velike veličine kad $x \to \infty$? Ako jesu, uporediti ih.

25. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$.

    (1 poen) Da li je data funkcija neprekidna na $\mathbb{R}$?

26. (1 poen) Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$.

    Da li je data funkcija neprekidna na $\mathbb{R}$?

Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering / Primenjeno softvesrko inženjerstvo
predmet: **Matematička analiza**
DRUGI KOLOKVIJUM Predispitne obaveze

Sve odgovore obrazložiti.

1. (1 poen) Naći po definiciji izvod funkcije $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

   Rešenje

   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{x+\Delta x} - \dfrac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x - (x+\Delta x)}{x\Delta x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$$

2. (1 poen) Odrediti realnu konstantu c tako da postoji funkcija $f(x)$ za koju je $f'(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \le 0 \\ x + c & , \quad x > 0 \end{cases}$

   Rešenje

   Prvi izvod ne može imati prekid prve vrste. Data funkcija f' ne može imati ni prekid druge vrste, pa mora biti neprekidna, tj. $c = 1$.

3. Funkcija $y = y(x)$ je data sa $\ln(x + y) = xy$.

   (a) (1 poen) Odrediti njen prvi izvod.
   Rešenje
   $\dfrac{1}{x+y}(1 + y') = y + xy'$, pa je $y'(x) = \dfrac{xy + y^2 - 1}{1 - x^2 - xy}$.

   (b) (1 poen) Naći jednačinu tangente na grafik date funkcije u tački $(0, 1)$.
   Rešenje
   $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y'(0, 1) = -1$, pa je jednačina tangente $t : y - 1 = -x$, tj. $y = 1 - x$.

4. Funkcija $y = y(x)$ je data sa $y^2 = \ln(x + 2y) + \dfrac{1}{4}$.

   (a) (1 poen) Odrediti njen prvi izvod.

   (b) (1 poen) Naći jednačinu tangente na grafik date funkcije u tački $(a, \dfrac{1}{2})$.

   Rešenje

   Domaći.

5. Funkcija $y = y(x)$ je data sa $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = 2t$, $t > 0$.

   (a) (1 poen) Odrediti njen prvi izvod.
   Rešenje
   $\frac{dy}{dt} = 2$, $\frac{dx}{dt} = 2t$, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$, pa je prvi izvod dat takodje u parametarskom obliku
   $x(t) = t^2 + 1$, $y'_x(t) = \frac{1}{t}$.

   (b) (1 poen) Odrediti realan parametar a tako da tačka $A(a, 2)$ leži na grafiku date funkcije.
   Rešenje
   $y = 2t = 2$ pa je $t = 1$ i $x(1) = 1^2 + 1 = 2$, $A(2, 2)$.

   (c) (1 poen) Naći jednačinu tangente na grafik date funkcije u tački A.
   Rešenje
   $y'(1) = \frac{1}{1} = 1$, pa je jednačina tangente $t : (y - 2) = (x - 2)$ odnosno $y = x$.

6. Funkcija $y = y(x)$ je data sa $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

   (a) (1 poen) Odrediti njen domen.

   (b) (1 poen) Odrediti njen prvi izvod.

(c) (1 poen) Odrediti realan parametar a tako da tačka $A(a,2)$ leži na grafiku date funkcije.

(d) (1 poen) Naći jednačinu tangente na grafik date funkcije u tački A.

Rešenje

Za domaći.

7. (1 poen) Odrediti jednačinu tangente na grafik funkcije $y = f(x)$ u tački $x = 2$ ako je $f(2) = -1$ i $f'(2) = 3$.

Rešenje

$t : y + 1 = 3(x-2)$, tj. $y = 3x - 7$.

8. (1 poen) Odrediti jednačinu tangente na parabolu $y = 3x^2 - 5x$ u tački $(2,2)$.

Rešenje

Za domaći.

9. (1 poen) Da li funkcija $f(x) = |x|$ zadovoljava uslove Rolove teoreme na intervalu $[-1,1]$?

Rešenje

Funkcija nema izvod u tački $x = 0 \in (-1,1)$, pa ne zadovoljava uslove Rolove teoreme.

10. (1 poen) Da li postoji tačka $c \in (1,2)$ takva da je tangenta u tački $T(c,c^2)$ na krivu $y = x^2$ paralelna sa pravom $y = 3x$?

Rešenje

Da, jer je funkcija $f(x) = x^2$ neprekidna na $[1,2]$ (i na $\mathbb{R}$) i ima izvod na $(1,2)$ (i na $\mathbb{R}$), tj. f zadovoljava uslove Lagranžove teoreme na $[1,2]$, a prava $y = 3x$ je paralelna sa sečicom funkcije kroz tačke $A(1,1)$ i $B(2,4)$.

11. (1 poen) Pokazati da funkcija $f(x) = x^3 + 3x + 1$ ima tačno jednu nulu na intervalu $[-1,0]$.

Rešenje Funkcija je polinom, pa je neprekidna i diferencijabilna na svakom intervalu. $f(-1) = -3 < 0$, $f(0) = 1 > 0$, $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$, pa funkcija ima tačno jednu nulu na $[-1,0]$.

12. (1 poen) Za funkciju $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ napisati Tejlorov polinom prvog stepena u tački $a = 1$, kao i formulu za grešku.

Rešenje

$f(x) = \dfrac{1}{2-x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{(2-x)^3}$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$ pa je

$T(x) = 1 + (x-1)$, $R(x) = \dfrac{1}{(2-(1+\theta(x-1))^3}(x-1)^2$, $0 < \theta < 1$.

13. (2 poena) Za funkciju $f(x) = \sqrt{x}$ napisati Tejlorov polinom drugog stepena u tački $a = 1$, kao i formulu za grešku.

Rešenje

$f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$, $f'''(x) = \dfrac{3}{8\sqrt{x^5}}$.

$f(1) = 1$, $f'(1) = \dfrac{1}{2}$, $f''(1) = -\dfrac{1}{4}$, $f'''(1+\theta(x-1)) = \dfrac{3}{8\sqrt{(1+\theta(x-1))^5}}$, pa je

$T_2(x) = 1 + \dfrac{1}{2}(x-1) - \dfrac{1}{8}(x-1)^2$, $R = \dfrac{1}{16\sqrt{(1+\theta(x-1))^5}}(x-1)^3$.

14. (1 poen) Da li je greška Maklorenovog polinoma drugog stepena za funkciju $f(x) = e^x$ na intervalu $[0,1]$ manja od 0.5?

Rešenje

Da. $0 < R(x) = \dfrac{e^{\theta x}}{3!}x^3 \leq \dfrac{e}{6} < \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, za $0 < \theta < 1$, $x \in [0,1]$.

15. (1 poen) Naći minimum funkcije $f(x) = x^3 + 3x$ na intervalu $[1, 3]$.

Rešenje

Funkcija je neprekidna na $[1, 3]$ (neprekidna je na $\mathbb{R}$), pa dostiže ekstreme na tom intervalu (i minimum i maksimum). Kako je $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$, funkcija je rastuća na $[1, 3]$ (rastuća je i na $\mathbb{R}$), pa dostiže ekstreme u krajnjim tačkama intervala $[1, 3]$: maksimum u tački $x = 3$, a minimum (minimalnu vrednost) 2 dostiže u u tački $x = 1$.

16. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & x \leq 0 \\ -\frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$.

   (a) (1 poen) Da li je data funkcija diferencijabilna u tački $x = 0$?

   Rešenje

   Nije, jer nije neprekidna: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{arctg} x = 0 = f(0) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$.

   (b) (1 poen) Da li je rastuća u tački $x = 0$?

   Rešenje Ne. $f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$, $f(x) = \operatorname{arctg} x < 0$ za $x < 0$, ali je $f(x) = -\dfrac{1}{x} < 0$ za $x > 0$.

   (c) (1 poen) Da li je rastuća na $\mathbb{R}$?

   Rešenje

   Nije. Ako je npr. $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, onda je $x_1 \leq x_2$ a $f(x_1) = f(0) = 0 \geq -2 = f(\frac{1}{2}) = f(x_2)$.

   (d) (1 poen) Da li ima ekstrem u $x = 0$?

   Rešenje

   Da, ima maksimum, jer je $f(0) = 0$ i $f(x) < 0$ za $x \neq 0$.

   (e) (1 poen) Da li ima vertikalnu asimptotu u tački $x = 0$?

   Rešenje

   Da, jer je $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$.

   (f) (1 poen) Da li ima horizontalnu asimptotu?

   Rešenje

   $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$, pa funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = -\dfrac{\pi}{2}$ kad $x \to -\infty$.

   $\lim\limits_{x\to \infty} -\dfrac{1}{x} = 0$, pa funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ kad $x \to \infty$.

17. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$.

   (a) (1 poen) Da li je data funkcija diferencijabilna u tački $x = 0$?

   (b) (1 poen) Da li je rastuća u tački $x = 0$?

   (c) (1 poen) Da li je rastuća na $\mathbb{R}$?

   (d) (1 poen) Da li ima ekstrem u $x = 0$?

   (e) (1 poen) Da li ima vertikalnu asimptotu u tački $x = 0$?

   (f) (1 poen) Da li ima horizontalnu asimptotu?

   Rešenje

   Domaći.

18. (1 poen) Za funkciju $z(x, y) = x^2 h(xy)$, gde je h diferencijabilna funkcija, naći $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

   Rešenje

   $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xh(xy) + x^2 y h'(xy)$.

19. (1 poen) Za funkciju $z(x, y) = x^2 h(xy)$, gde je h diferencijabilna funkcija, naći $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

   Rešenje

   Domaći.

20. (1 poen) Za funkciju $z(x,y) = xyf(x^2y)$, gde je f diferencijabilna funkcija, naći $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Rešenje

Domaći.

21. Data je funkcija $z(x,y) = xy^2$.

(a) (1 poen) Čemu je jednak priraštaj Δz date funkcije u tački $T(1,1)$?
Rešenje
$\Delta z(1,1) = z(1+\Delta x, 1+\Delta y) - z(1,1) = (1+\Delta x)(1+\Delta y)^2 - 1 = \Delta x + 2\Delta y + 2\Delta x\Delta y + (1+\Delta x)(\Delta y)^2$

(b) (1 poen) Da li je data funkcija diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$.
Rešenje
Jeste, jer je polinom po obe promenljive.

(c) (1 poen) Čemu je jednak njen diferencijal dz u tački T?
Rešenje
$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$, $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 1$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = 2$, pa je $dz(1,1) = dx + 2dy$.

(d) (1 poen) Ispitati uslovne ekstreme funkcije uz uslov $y = x^2$.
Rešenje
Ako je $y = x^2$, onda je $z = z(x) = x^5$. Ova funkcija nema ekstrema.

22. Data je funkcija $z(x,y) = x^2y$.

(a) (1 poen) Da li je data funkcija neprekidna u tački $(0,0)$?
Rešenje
Jeste, jer je data funkcija polinom po obe promenljive, pa je neprekidna u svakoj tački iz $\mathbb{R}^2$.
Na drugi način: $\Delta z(0,0) = z(0+\Delta x, 0+\Delta y) - z(0,0) = (\Delta x)^2(\Delta y) - 0 = (\Delta x)^2\Delta y \to 0$, kad $\Delta x, \Delta y \to 0$.

(b) (1 poen) Naći po definiciji $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.
Rešenje
$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{z(x+\Delta x, y) - z(x,y)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^2y - x^2y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{(x^2 + 2\Delta x + (\Delta x)^2)y - x^2y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)y = 2xy.$

(c) (1 poen) Da li funkcija ima ekstrem u tački $(0,0)$?
Rešenje
Nema, jer je $z(0,0) = 0$, a u svakoj okolini tačke $(0,0)$ ima i tačaka u kojima je vrednost funkcije z pozitivna (tačke u prvom i četvrtom kvadrantu) i tačaka u kojima je vrednost funkcije negativna (tačke u drugom i trećem kvadrantu).

23. Data je funkcija $z(x,y) = x^2(1-y)$.

(a) (1 poen) Da li je data funkcija neprekidna u tački $(0,1)$?

(b) (1 poen) Naći po definiciji $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

(c) (1 poen) Da li funkcija ima ekstrem u tački $(0,1)$?
Rešenje
Ne. $z(0,1) = 0$, a u svakoj okolini tačke $(0,1)$ ima i tačaka za koje je $z > 0$ (tačke za koje je $y < 1$) i tačaka za koje je $z < 0$ (tačke za koje je $y > 1$).

(d) (1 poen) Ispitati ekstreme date funkcije uz uslov $y = 1 - x^2$.
Rešenje
Iz uslova, $1 - y = x^2$, pa je $z = z(x) = x^4$. Ova funkcija ima minimum za $x = 0$, a polazna funkcija ima uslovni minimum za $(x,y) = (0,1)$.

24. (1 poen) Ispitati ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Rešenje

Domaći.

25. (1 poen) Da li funkcija $f(x,y)=x^2-y^2$ u tački (0,0) ima ekstrem uz uslov $y=0$?

Rešenje

Domaći.

26. (1 poen) Ispitati ekstreme funkcije $f(x,y)=x^3-3xy^2$.

Rešenje

$f_x=3x^2-3y^2=0$, $f_y=-6xy=0$, pa je $T(0,0)$ jedina stacionarna tačka date funkcije. Kako je $f(T)=0$ i $f(x,y)=x(x^2-3y^2)$, to u svakoj okolini tačke T ima tačaka u kojima je $f>0$ (one tačke u kojima je $x>0$, $y=0$) i onih u kojima je $f<0$ (one za koje je $x=0$), pa funkcija nema ekstrem u T.

27. (2 poena) Naći stacionarne tačke i ekstreme funkcije $f(x,y)=x^2+y^2$ pod uslovom $x+y=1$.

Rešenje

Domaći.

28. (1 poen) Da li funkcija $f(x,y)=x^2-y^2$ u tački (0,0) ima ekstrem uz uslov $y=x$?

Rešenje

Ne. Za $y=x$ je $f=f(x)=0$ (funkcija je identički jednaka nuli), pa nema ekstreme.

29. Data je funkcija $z=\ln x^2y$.

(1 poen) Da li data funkcija ima ekstrem uz uslov $x^2+(y+2)^2=1$?

Rešenje

Tačke koje zadovoljavaju uslov $x^2+(y+2)^2=1$ se nalaze na kružnici sa centrom u $(0,-2)$, poluprečnika 1, pa sve one imaju negativnu y koordinatu. U takvim tačama funkcija z nije definisana, pa nema ni uslovni ekstrem.

30. Data je funkcija $z(x,y)=e^{xy}$.

(a) (1 poen) Da li je data funkcija neprekidna na $\mathbb{R}^2$?

Rešenje

Da, jer je kompozicija elementarnih funkcija i definisana je na $\mathbb{R}^2$.

(b) (1 poen) Naći po definiciji $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ u tački $(0,0)$.

Rešenje

$z_x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{\Delta x\cdot 0}-e^0}{\Delta x}=0.$

(c) (1 poen) Da li funkcija ima ekstrem u tački $(0,0)$?

Rešenje

Domaći.

(d) (1 poen) Ispitati ekstreme date funkcije uz uslov $y=x$.

Rešenje

Domaći.

31. (1 poen) Dat je problem: Od svih kutija površine P, čija je osnova kvadratna, naći onu koja ima najveću zapreminu. Odrediti funkcije f i φ tako da je uslovni ekstrem funkcije f uz uslov $\varphi=0$ rešenje datog problema.

Rešenje

Neka je x stranica osnove, a y visina kutije. Onda je $f(x,y)=x^2y$, $\varphi(x,y)=2x^2+4xy-P$.

Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering / Primenjeno softvesrko inženjerstvo
predmet: **Matematička analiza**
DRUGI KOLOKVIJUM Predispitne obaveze

Sve odgovore obrazložiti.

1. (1 poen) Naći po definiciji izvod funkcije $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

   Rešenje

   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x-(x+\Delta x)}{x\Delta x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$$

2. (1 poen) Odrediti realnu konstantu c tako da postoji funkcija $f(x)$ za koju je $f'(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \le 0 \\ x+c & , \quad x > 0 \end{cases}$

   Rešenje

   Prvi izvod ne može imati prekid prve vrste. Data funkcija f' ne može imati ni prekid druge vrste, pa mora biti neprekidna, tj. $c = 1$.

3. Funkcija $y = y(x)$ je data sa $\ln(x+y) = xy$.

   (a) (1 poen) Odrediti njen prvi izvod.
   Rešenje
   $\dfrac{1}{x+y}(1+y') = y + xy'$, pa je $y'(x) = \dfrac{xy+y^2-1}{1-x^2-xy}$.

   (b) (1 poen) Naći jednačinu tangente na grafik date funkcije u tački $(0,1)$.
   Rešenje
   $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y'(0,1) = -1$, pa je jednačina tangente $t : y - 1 = -x$, tj. $y = 1 - x$.

4. Funkcija $y = y(x)$ je data sa $y^2 = \ln(x+2y) + \dfrac{1}{4}$.

   (a) (1 poen) Odrediti njen prvi izvod.

   (b) (1 poen) Naći jednačinu tangente na grafik date funkcije u tački $(a, \dfrac{1}{2})$.

   Rešenje

   Domaći.

5. Funkcija $y = y(x)$ je data sa $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = 2t$, $t > 0$.

   (a) (1 poen) Odrediti njen prvi izvod.
   Rešenje
   $\frac{dy}{dt} = 2$, $\frac{dx}{dt} = 2t$, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$, pa je prvi izvod dat takodje u parametarskom obliku $x(t) = t^2 + 1$, $y'_x(t) = \frac{1}{t}$.

   (b) (1 poen) Odrediti realan parametar a tako da tačka $A(a, 2)$ leži na grafiku date funkcije.
   Rešenje
   $y = 2t = 2$ pa je $t = 1$ i $x(1) = 1^2 + 1 = 2$, $A(2, 2)$.

   (c) (1 poen) Naći jednačinu tangente na grafik date funkcije u tački A.
   Rešenje
   $y'(1) = \frac{1}{1} = 1$, pa je jednačina tangente $t : (y-2) = (x-2)$ odnosno $y = x$.

6. Funkcija $y = y(x)$ je data sa $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

   (a) (1 poen) Odrediti njen domen.

   (b) (1 poen) Odrediti njen prvi izvod.

(c) (1 poen) Odrediti realan parametar a tako da tačka $A(a, 2)$ leži na grafiku date funkcije.

(d) (1 poen) Naći jednačinu tangente na grafik date funkcije u tački A.

Rešenje

Za domaći.

7. (1 poen) Odrediti jednačinu tangente na grafik funkcije $y = f(x)$ u tački $x = 2$ ako je $f(2) = -1$ i $f'(2) = 3$.

   Rešenje

   $t : y + 1 = 3(x - 2)$, tj. $y = 3x - 7$.

8. (1 poen) Odrediti jednačinu tangente na parabolu $y = 3x^2 - 5x$ u tački $(2, 2)$.

   Rešenje

   Za domaći.

9. (1 poen) Da li funkcija $f(x) = |x|$ zadovoljava uslove Rolove teoreme na intervalu $[-1, 1]$?

   Rešenje

   Funkcija nema izvod u tački $x = 0 \in (-1, 1)$, pa ne zadovoljava uslove Rolove teoreme.

10. (1 poen) Da li postoji tačka $c \in (1, 2)$ takva da je tangenta u tački $T(c, c^2)$ na krivu $y = x^2$ paralelna sa pravom $y = 3x$?

    Rešenje

    Da, jer je funkcija $f(x) = x^2$ neprekidna na $[1, 2]$ (i na $\mathbb{R}$) i ima izvod na $(1, 2)$ (i na $\mathbb{R}$), tj. f zadovoljava uslove Lagranžove teoreme na $[1, 2]$, a prava $y = 3x$ je paralelna sa sečicom funkcije kroz tačke $A(1, 1)$ i $B(2, 4)$.

11. (1 poen) Pokazati da funkcija $f(x) = x^3 + 3x + 1$ ima tačno jednu nulu na intervalu $[-1, 0]$.

    Rešenje Funkcija je polinom, pa je neprekidna i diferencijabilna na svakom intervalu. $f(-1) = -3 < 0$, $f(0) = 1 > 0$, $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$, pa funkcija ima tačno jednu nulu na $[-1, 0]$.

12. (1 poen) Za funkciju $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ napisati Tejlorov polinom prvog stepena u tački $a = 1$, kao i formulu za grešku.

    Rešenje

    $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{(2 - x)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{(2 - x)^3}$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$ pa je

    $T(x) = 1 + (x - 1)$, $R(x) = \dfrac{1}{(2 - (1 + \theta(x - 1))^3}(x - 1)^2$, $0 < \theta < 1$.

13. (2 poena) Za funkciju $f(x) = \sqrt{x}$ napisati Tejlorov polinom drugog stepena u tački $a = 1$, kao i formulu za grešku.

    Rešenje

    $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$, $f'''(x) = \dfrac{3}{8\sqrt{x^5}}$.

    $f(1) = 1$, $f'(1) = \dfrac{1}{2}$, $f''(1) = -\dfrac{1}{4}$, $f'''(1 + \theta(x - 1)) = \dfrac{3}{8\sqrt{(1 + \theta(x - 1))^5}}$, pa je

    $T_2(x) = 1 + \dfrac{1}{2}(x - 1) - \dfrac{1}{8}(x - 1)^2$, $R = \dfrac{1}{16\sqrt{(1 + \theta(x - 1))^5}}(x - 1)^3$.

14. (1 poen) Da li je greška Maklorenovog polinoma drugog stepena za funkciju $f(x) = e^x$ na intervalu $[0, 1]$ manja od 0.5?

    Rešenje

    Da. $0 < R(x) = \dfrac{e^{\theta x}}{3!}x^3 \leq \dfrac{e}{6} < \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, za $0 < \theta < 1$, $x \in [0, 1]$.

15. (1 poen) Naći minimum funkcije $f(x) = x^3 + 3x$ na intervalu $[1, 3]$.

Rešenje

Funkcija je neprekidna na $[1, 3]$ (neprekidna je na $\mathbb{R}$), pa dostiže ekstreme na tom intervalu (i minimum i maksimum). Kako je $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$, funkcija je rastuća na $[1, 3]$ (rastuća je i na $\mathbb{R}$), pa dostiže ekstreme u krajnjim tačkama intervala $[1, 3]$: maksimum u tački $x = 3$, a minimum (minimalnu vrednost) 2 dostiže u u tački $x = 1$.

16. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & x \leq 0 \\ -\frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$.

   (a) (1 poen) Da li je data funkcija diferencijabilna u tački $x = 0$?

   Rešenje

   Nije, jer nije neprekidna: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{arctg} x = 0 = f(0) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$.

   (b) (1 poen) Da li je rastuća u tački $x = 0$?

   Rešenje Ne. $f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$, $f(x) = \operatorname{arctg} x < 0$ za $x < 0$, ali je $f(x) = -\dfrac{1}{x} < 0$ za $x > 0$.

   (c) (1 poen) Da li je rastuća na $\mathbb{R}$?

   Rešenje

   Nije. Ako je npr. $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, onda je $x_1 \leq x_2$ a $f(x_1) = f(0) = 0 \geq -2 = f(\frac{1}{2}) = f(x_2)$.

   (d) (1 poen) Da li ima ekstrem u $x = 0$?

   Rešenje

   Da, ima maksimum, jer je $f(0) = 0$ i $f(x) < 0$ za $x \neq 0$.

   (e) (1 poen) Da li ima vertikalnu asimptotu u tački $x = 0$?

   Rešenje

   Da, jer je $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$.

   (f) (1 poen) Da li ima horizontalnu asimptotu?

   Rešenje

   $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$, pa funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = -\dfrac{\pi}{2}$ kad $x \to -\infty$.

   $\lim\limits_{x\to \infty} -\dfrac{1}{x} = 0$, pa funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ kad $x \to \infty$.

17. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$.

   (a) (1 poen) Da li je data funkcija diferencijabilna u tački $x = 0$?

   (b) (1 poen) Da li je rastuća u tački $x = 0$?

   (c) (1 poen) Da li je rastuća na $\mathbb{R}$?

   (d) (1 poen) Da li ima ekstrem u $x = 0$?

   (e) (1 poen) Da li ima vertikalnu asimptotu u tački $x = 0$?

   (f) (1 poen) Da li ima horizontalnu asimptotu?

Rešenje

Domaći.

18. (1 poen) Za funkciju $z(x, y) = x^2 h(xy)$, gde je h diferencijabilna funkcija, naći $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Rešenje

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xh(xy) + x^2 y h'(xy)$.

19. (1 poen) Za funkciju $z(x, y) = x^2 h(xy)$, gde je h diferencijabilna funkcija, naći $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Rešenje

Domaći.

20. (1 poen) Za funkciju $z(x,y) = xyf(x^2y)$, gde je f diferencijabilna funkcija, naći $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

   Rešenje

   Domaći.

21. Data je funkcija $z(x,y) = xy^2$.

   (a) (1 poen) Čemu je jednak priraštaj Δz date funkcije u tački $T(1,1)$?
   Rešenje
   $\Delta z(1,1) = z(1+\Delta x, 1+\Delta y) - z(1,1) = (1+\Delta x)(1+\Delta y)^2 - 1 = \Delta x + 2\Delta y + 2\Delta x\Delta y + (1+\Delta x)(\Delta y)^2$

   (b) (1 poen) Da li je data funkcija diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$.
   Rešenje
   Jeste, jer je polinom po obe promenljive.

   (c) (1 poen) Čemu je jednak njen diferencijal dz u tački T?
   Rešenje
   $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$, $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 1$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = 2$, pa je $dz(1,1) = dx + 2dy$.

   (d) (1 poen) Ispitati uslovne ekstreme funkcije uz uslov $y = x^2$.
   Rešenje
   Ako je $y = x^2$, onda je $z = z(x) = x^5$. Ova funkcija nema ekstrema.

22. Data je funkcija $z(x,y) = x^2y$.

   (a) (1 poen) Da li je data funkcija neprekidna u tački $(0,0)$?
   Rešenje
   Jeste, jer je data funkcija polinom po obe promenljive, pa je neprekidna u svakoj tački iz $\mathbb{R}^2$.
   Na drugi način: $\Delta z(0,0) = z(0+\Delta x, 0+\Delta y) - z(0,0) = (\Delta x)^2(\Delta y) - 0 = (\Delta x)^2\Delta y \to 0$, kad $\Delta x, \Delta y \to 0$.

   (b) (1 poen) Naći po definiciji $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.
   Rešenje
   $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{z(x+\Delta x, y) - z(x,y)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^2 y - x^2 y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{(x^2 + 2\Delta x + (\Delta x)^2)y - x^2 y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x + \Delta x)y = 2xy$.

   (c) (1 poen) Da li funkcija ima ekstrem u tački $(0,0)$?
   Rešenje
   Nema, jer je $z(0,0) = 0$, a u svakoj okolini tačke $(0,0)$ ima i tačaka u kojima je vrednost funkcije z pozitivna (tačke u prvom i četvrtom kvadrantu) i tačaka u kojima je vrednost funkcije negativna (tačke u drugom i trećem kvadrantu).

23. Data je funkcija $z(x,y) = x^2(1-y)$.

   (a) (1 poen) Da li je data funkcija neprekidna u tački $(0,1)$?

   (b) (1 poen) Naći po definiciji $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

   (c) (1 poen) Da li funkcija ima ekstrem u tački $(0,1)$?
   Rešenje
   Ne. $z(0,1) = 0$, a u svakoj okolini tačke $(0,1)$ ima i tačaka za koje je $z > 0$ (tačke za koje je $y < 1$) i tačaka za koje je $z < 0$ (tačke za koje je $y > 1$).

   (d) (1 poen) Ispitati ekstreme date funkcije uz uslov $y = 1 - x^2$.
   Rešenje
   Iz uslova, $1 - y = x^2$, pa je $z = z(x) = x^4$. Ova funkcija ima minimum za $x = 0$, a polazna funkcija ima uslovni minimum za $(x,y) = (0,1)$.

24. (1 poen) Ispitati ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2 - y^2$.

   Rešenje

   Domaći.

25. (1 poen) Da li funkcija $f(x, y) = x^2 - y^2$ u tački (0,0) ima ekstrem uz uslov $y = 0$?

Rešenje

Domaći.

26. (1 poen) Ispitati ekstreme funkcije $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

Rešenje

$f_x = 3x^2 - 3y^2 = 0$, $f_y = -6xy = 0$, pa je $T(0, 0)$ jedina stacionarna tačka date funkcije. Kako je $f(T) = 0$ i $f(x, y) = x(x^2 - 3y^2)$, to u svakoj okolini tačke T ima tačaka u kojima je $f > 0$ (one tačke u kojima je $x > 0$, $y = 0$) i onih u kojima je $f < 0$ (one za koje je $x = 0$), pa funkcija nema ekstrem u T.

27. (2 poena) Naći stacionarne tačke i ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ pod uslovom $x + y = 1$.

Rešenje

Domaći.

28. (1 poen) Da li funkcija $f(x, y) = x^2 - y^2$ u tački (0,0) ima ekstrem uz uslov $y = x$?

Rešenje

Ne. Za $y = x$ je $f = f(x) = 0$ (funkcija je identički jednaka nuli), pa nema ekstreme.

29. Data je funkcija $z = \ln x^2 y$.

(1 poen) Da li data funkcija ima ekstrem uz uslov $x^2 + (y + 2)^2 = 1$?

Rešenje

Tačke koje zadovoljavaju uslov $x^2 + (y + 2)^2 = 1$ se nalaze na kružnici sa centrom u $(0, -2)$, poluprečnika 1, pa sve one imaju negativnu y koordinatu. U takvim tačama funkcija z nije definisana, pa nema ni uslovni ekstrem.

30. Data je funkcija $z(x, y) = e^{xy}$.

   (a) (1 poen) Da li je data funkcija neprekidna na $\mathbb{R}^2$?

   Rešenje

   Da, jer je kompozicija elementarnih funkcija i definisana je na $\mathbb{R}^2$.

   (b) (1 poen) Naći po definiciji $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ u tački $(0, 0)$.

   Rešenje

   $z_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{\Delta x \cdot 0} - e^0}{\Delta x} = 0.$

   (c) (1 poen) Da li funkcija ima ekstrem u tački $(0, 0)$?

   Rešenje

   Domaći.

   (d) (1 poen) Ispitati ekstreme date funkcije uz uslov $y = x$.

   Rešenje

   Domaći.

31. (1 poen) Dat je problem: Od svih kutija površine P, čija je osnova kvadratna, naći onu koja ima najveću zapreminu. Odrediti funkcije f i φ tako da je uslovni ekstrem funkcije f uz uslov $\varphi = 0$ rešenje datog problema.

Rešenje

Neka je x stranica osnove, a y visina kutije. Onda je $f(x, y) = x^2 y$, $\varphi(x, y) = 2x^2 + 4xy - P$.

Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering / Primenjeno softvesrko inženjerstvo
predmet: **Matematička analiza**
PRVI KOLOKVIJUM (Probni) Predispitne obaveze

Sve odgovore obrazložiti.

1. U metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$, gde je d Euklidska metrika, data je lopta $L(0,2)$ i tačka $b = 1.5 \in L(0,2)$. Naći r tako da je lopta $L(b,r)$ sadržana u lopti $L(0,2)$.

   Rešenje: Lopta u $\mathbb{R}$ je otvoren interval, $L(0,2)$ je lopta sa centrom u $a = 0$ poluprečnika $s = 2$, pa je $L(0,2) = (-2,2)$. Rastojanje izmedju a i b je 1.5 ($d(a,b) = |b-a| = |1.5-0| = 1.5$), pa je r bilo koji pozitivan broj manji ili jednak $s - d(a,b) = 2 - 1,5 = 0.5$. Dakle, r može biti bilo koji broj iz intervala $(0, 0.5]$.

   Moguće vrednosti za r se mogu lako videti ako se data lopta i tačka b predstave grafički na realnoj osi (i to se priznaje kao tačan odgovor).

2. Da li je tačka 0 tačka nagomilavanja skupa $[-1,0) \cup \{1\}$?

   Rešenje: Jeste, jer u svakoj okolini tačke 0 (konkretno, levo od tačke 0) ima tačaka iz datog skupa.

3. Dat je niz $a_n = \dfrac{\cos n\pi}{n^2}$.

   Odrediti $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

   Rešenje: Funkcija $\cos x$ je ograničena, pa je $a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n\pi}{n^2} = 0$.

   Da li je dati niz Košijev u $\mathbb{R}$?

   Rešenje: Niz je realan i konvergentan, pa je Košijev.

   Da li je Košijev u $\mathbb{Q}$?

   Rešenje: Elementi niza su i racionalni brojevi (jer je $\cos n\pi = 1$ za n parno, $\cos n\pi = -1$ za n neparno, i n^2 je prirodan broj), rastojanje izmedju dva racionalna broja u metričkom prostoru $\mathbb{Q}$ je isto kao i njihovo rastojanje u $\mathbb{R}$, pa je niz Košijev i u $\mathbb{Q}$.

4. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} 1-x & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$.

   Odrediti $A = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

   Rešenje: $A = 1$.

   Odrediti δ tako da je $|f(x) - A| < 10^{-2}$ za $|x| < \delta$, $x \neq 0$.

   Rešenje: $|f(x) - A| = |(1-x) - 1| = |-x| = |x| < 10^{-2}$ za $\delta = 10^{-2}$.

5. Odrediti vrstu prekida funkcije $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ u tački 0.

   Rešenje: $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, pa funkcija ima prekid druge vrste u tački 0.

6. Data je funkcija $f(x) = \ln \frac{e^x + (2+\sin x)^2}{x^4+1}$. Da li je data funkcija ograničena na $[-1,1]$?

   Rešenje: Funkcija f je kompozicija elementarnih funkcija pa je neprekidna na svom domenu definisanosti (na skupu $\mathbb{R}$). Sledi da je f neprekidna i na $[-1,1]$. Neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu je ograničena, pa je i f ograničena na $[-1,1]$.

7. Da li su funkcije $f(x) = (x-2)\ln x$ i $g(x) = (x^2 - 2x)\ln x$ beskonačno male veličine kad $x \to 2$? Ako jesu, uporediti brzinu kojom one teže nuli.

   Rešenje: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0$, pa su f i g beskonačno male veličine kad $x \to 2$.

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, pa su f i g beskonačo male veičine istog reda kad $x \to 2$.

Elektroenergetski softverski inženjering/Primenjeno softvesrko inženjerstvo
predmet: **Matematička analiza**
Probni prvi kolokvijum - Ispitni zadaci

1. a) U zavisnosti od realnog parametra a odrediti graničnu vrednost niza $a_n = \dfrac{2^n + a^n}{2^{n+1} - 5a^n}$.

b) Odrediti konstante A i B tako da funkcija $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2020x}{x} & , x < 0 \\ Ax + B & , 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{\ln x^2}{x-1} & , x > 1. \end{cases}$

bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

c) Izračunati

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{8x} - 2}{\sqrt{x^2+3} - 2}$$

.

Napomena: Zadatke raditi bez korišćenja Lopitalovog pravila.

Rešenje.

1. a) Koristimo $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, za $-1 < q < 1$. Razlikujemo sledeća četiri slučaja:

- $|a| > 2$, odnosno $a \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + a^n}{2^{n+1} - 5a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{a}\right)^n + 1}{2\left(\frac{2}{a}\right)^n - 5} = -\frac{1}{5}.$$

- $|a| < 2$, odnosno $a \in (-2, 2)$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + a^n}{2^{n+1} - 5a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \left(\frac{a}{2}\right)^n}{2 - 5\left(\frac{a}{2}\right)^n} = \frac{1}{2}.$$

- $a = -2$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (-2)^n}{2^{n+1} - 5(-2)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2 - 5 \cdot (-1)^n} \quad \text{- granična vrednost ne postoji,}$$

zato što je

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2 - 5 \cdot (-1)^n} = \begin{cases} \dfrac{1 + (-1)}{2 - 5 \cdot (-1)}, & n = 2k - 1 \\ \dfrac{1+1}{2 - 5 \cdot 1}, & n = 2k \end{cases} = \begin{cases} 0, & n = 2k - 1 \\ -\dfrac{2}{3}, & n = 2k \end{cases}.$$

- $a = 2$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 2^n}{2^{n+1} - 5 \cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2^n}{-3 \cdot 2^n} = -\frac{2}{3}.$$

b) Kako je $f(x)$ neprekidna na intervalima $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, +\infty)$ kao kompozicija neprekidnih funkcija, odredićemo A i B iz uslova $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ i $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

- Neprekidnost funkcije $f(x)$ u tački $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin 2020x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin 2020x}{2020x} \cdot 2020 = 2020.$$

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} Ax + B = B.$$

Sledi da je $B = 2020$.

- Neprekidnost funkcije $f(x)$ u tački $x = 1$:

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (Ax + B) = A + B.$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x^2}{x-1} \overset{t=x-1}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{2\ln(t+1)}{t} = 2.$$

Kako je $B = 2020$, iz $A + B = 2$ sledi da je $A = -2017$.

c) Vidimo da ako u funkciju, čija se granična vrednost traži, zamenimo $x = 1$ dobijamo neodređeni izraz $\frac{0}{0}$. Tako da ćemo koristiti dozvoljene transformacije

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{8x} - 2}{\sqrt{x^2+3} - 2} = \lim_{x\to 1} \Big(\frac{\sqrt[3]{8x} - 2}{\sqrt{x^2+3} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3} + 2}{\sqrt{x^2+3} + 2} \cdot \frac{(\sqrt[3]{8x})^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{8x} + 2^2}{(\sqrt[3]{8x})^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{8x} + 2^2} \Big)$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{((\sqrt[3]{8x})^3 - 2^3)(\sqrt{x^2+3} + 2)}{((\sqrt{x^2+3})^2 - 2^2)((\sqrt[3]{8x})^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{8x} + 2^2)} = \lim_{x\to 1} \frac{(8x-8)(\sqrt{x^2+3} + 2)}{(x^2-1)((\sqrt[3]{8x})^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{8x} + 2^2)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{8 \cdot (\sqrt{x^2+3} + 2)}{(x+1)((\sqrt[3]{8x})^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{8x} + 2^2)} = \frac{8 \cdot 4}{2 \cdot (2^2 + 2 \cdot 2 + 2^2)} = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}.$$

Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering / Primenjeno softvesrko inženjerstvo
predmet: **Matematička analiza**
PRVI KOLOKVIJUM (Probni) Predispitne obaveze

Sve odgovore obrazložiti.

1. U metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$, gde je d Euklidska metrika, data je lopta $L(0,2)$ i tačka $b = 1.5 \in L(0,2)$. Naći r tako da je lopta $L(b,r)$ sadržana u lopti $L(0,2)$.
2. Da li je tačka 0 tačka nagomilavanja skupa $[-1,0) \cup \{1\}$?
3. Dat je niz $a_n = \dfrac{\cos n\pi}{n^2}$.

   Odrediti $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

   Da li je dati niz Košijev u $\mathbb{R}$?

   Da li je Košijev u $\mathbb{Q}$?
4. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} 1-x & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$.

   Odrediti $A = \lim_{x\to 0} f(x)$.

   Odrediti δ tako da je $|f(x) - A| < 10^{-2}$ za $|x| < \delta$, $x \neq 0$.
5. Odrediti vrstu prekida funkcije $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ u tački 0.
6. Data je funkcija $f(x) = \ln \frac{e^x + (2+\sin x)^2}{x^4+1}$. Da li je data funkcija ograničena na $[-1,1]$?
7. Da li su funkcije $f(x) = (x-2)\ln x$ i $g(x) = (x^2 - 2x)\ln x$ beskonačno male veličine kad $x \to 2$? Ako jesu, uporediti brzinu kojom one teže nuli.

Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering / Primenjeno softvesrko inženjerstvo
predmet: **Matematička analiza**
DRUGI KOLOKVIJUM Predispitne obaveze

Sve odgovore obrazložiti.

1. Funkcija $y = y(x)$ je data sa $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = 2t$, $t > 0$.
   (1 poen) Odrediti njen prvi izvod.
   (1 poen) Odrediti realan parametar a tako da tačka $A(a, 2)$ leži na grafiku date funkcije.
   (1 poen) Naći jednačinu tangente na grafik date funkcije u tački A.
2. (1 poen) Za funkciju $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ napisati Tejlorov polinom prvog stepena u tački $a = 1$, kao i formulu za grešku.
3. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & x \leq 0 \\ -\frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$.
   (1 poen) Da li je data funkcija diferencijabilna u tački $x = 0$?
   (1 poen) Da li je rastuća na $\mathbb{R}$?
   (1 poen) Da li ima ekstrem u $x = 0$?
   (1 poen) Da li ima vertikalnu asimptotu u tački $x = 0$?

Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering / Primenjeno softvesrko inženjerstvo
predmet: **Matematička analiza**
datum: **3. jul 2020. godine**

DRUGI KOLOKVIJUM, Predispitne obaveze

Napomena: Sve odgovore obrazložiti.

1. (1 poen) Odrediti realnu konstantu c tako da postoji funkcija $f(x)$ za koju je $f'(x) = \begin{cases} c - x & , \quad x \leq 1 \\ x & , \quad x > 1 \end{cases}$

   Rešenje

2. (1 poen) Da li postoji $\int \sin \frac{1}{x} dx$ na $[\pi, 2\pi]$?

   Rešenje

3. (1 poen) Da li je funkcija $f(x) = \begin{cases} 1/x & x \in (0, 1] \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ integrabilna na intervalu $[0, 1]$?

   Rešenje

4. (1 poen) Napisati gornju Darbuovu sumu za funkciju $f(x) = \operatorname{arctg} x$ na intervalu $[0, \sqrt{3}]$ za ekvidistantnu podelu.

   Rešenje

5. (1 poen) Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na intervalu $[-1,1]$ i $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = A$, naći $\int\limits_{-1}^{1} g(x)dx$ ako je

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (-1,1) \\ f(x)+1 & x = -1 \\ f(x)+2 & x = 1 \end{cases}$$

Rešenje

6. (1 poen) Neka je $f(x) = \int\limits_{0}^{x} \sin t dt$. Naći primitivnu funkciju $F(x)$ funkcije $f(x)$.

Rešenje

7. (1 poen) Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala $\displaystyle\int\limits_{[1,\infty)} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$.

Rešenje

8. (1 poen) Naći sva rešenja početnog problema $y' = \sqrt[3]{y}$, $y(0) = 0$.

Rešenje

9. (1 poen) Da li se može odrediti parametar a tako da jednačina $\ln y dx + a\frac{x}{y} dy = 0$ bude diferencijalna jednačina totalnog diferencijala na $\mathbb{R}^2$?

Rešenje

10. (1 poen) Da li su funkcije $f_1(x) = 1$ i $f_2(x) = e^x$ linearno nezavisne na $\mathbb{R}$?

Rešenje

11. Data je diferencijalna jednačina $L_n[y] = f(x)$ sa konstantnim koeficijentima. Neka su $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = -2$, $k_4 = k_5 = -i$ koreni karakteristične jednačine.

a) (1 poen) Odrediti opšte rešenje homogenog dela date jednačine.

Rešenje

b) (1 poen) Za $f(x) = x \cos x$ odrediti oblik partikularnog rešenja jednačine $L_n[y] = f(x)$.

Rešenje

12. (1 poen) Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi$.

Rešenje

13. (2 poena) Pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2)^{n+1}}$ konvergira i naći njegovu sumu.

Rešenje

14. (2 poena) Ispitati običnu i apsolutnu konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$.

Elektroenergetski softverski inženjering/Primenjeno softversko inženjerstvo
predmet: **Matematička analiza** **3.7.2020.**
Ispitni zadaci

1. a) (6 poena) Odrediti vrednost konstane $A \in \mathbb{R}$ tako da niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_n = \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right) + A \cdot \frac{1-(-1)^n}{2}$$

bude konvergentan izračunati njegovu graničnu vrednost.

   b) (6 poena) Proveriti da li je niz $a_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n\cdot(n+1)}$ Košijev.

2. (12 poena) Detaljno ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

3. (6 poena) Da li funkcija $u = xyz$ ima ekstremnu vrednost, uz uslov $x+y+z=9$, $x>0, y>0, z>0$.

4. a) (8 poena) Izračunati $\int \left(\frac{\sin x}{\sin x + 2\cos x} + e^x \operatorname{arctg} \frac{e^x-1}{e^x-2}\right) dx$.

   b) (6 poena) Dat je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sa opštim članom $a_n = 3\cdot\frac{3^4+6^4+9^4+\ldots+(3n)^4}{n^5}$. Odrediti graničnu vrednost niza $\{a_n\}$ primenom definicije određenog integrala.

5. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine:

   a) (8 poena) $\left(\frac{y}{x+y}\right)^2 dx + \left(\frac{x}{x+y}\right)^2 dy = 0$;

   b) (8 poena) $(x+1)^3 y''' - 3(x+1)^2 y'' + 7(x+1)y' - 8y = 0$, ako je $x > -1$.

Elektroenergetski softverski inženjering/Primenjeno softversko inženjerstvo
predmet: **Matematička analiza** **3.7.2020.**
Ispitni zadaci - Drugi kolokvijum

1. a) (8 poena) Izračunati $\int \left(\frac{\sin x}{\sin x + 2\cos x} + e^x \operatorname{arctg} \frac{e^x-1}{e^x-2}\right) dx$.

   b) (6 poena) Dat je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sa opštim članom $a_n = 3\cdot\frac{3^4+6^4+9^4+\ldots+(3n)^4}{n^5}$. Odrediti graničnu vrednost niza $\{a_n\}$ primenom definicije određenog integrala.

2. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine:

   a) (8 poena) $\left(\frac{y}{x+y}\right)^2 dx + \left(\frac{x}{x+y}\right)^2 dy = 0$;

   b) (8 poena) $(x+1)^3 y''' - 3(x+1)^2 y'' + 7(x+1)y' - 8y = 0$, ako je $x > -1$.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČIH NAUKA
Elektroenergetski softverski inženjering - E3

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Integralni račun

1. Izračunati:
   (a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\ dx;$
   (b) $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx;$
   (c) $\int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x}\ dx;$
   (d) $\int \frac{x-\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}\ dx.$
2. Izračunati:
   (a) $\int (x^2+x)\ln(x)\ dx;$
   (b) $\int x^5\sqrt{x^3+1}\ dx;$
   (c) $\int x^3 e^{x^2}\ dx;$
   (d) $\int \sin(\ln x)\ dx;$
   (e) $\int (x^2+2x)\cos x\ dx;$
   (f) $\int \frac{3x+1}{x^2+4x+5}\ dx;$
   (g) $\int \frac{3x-6}{x^2-4x+5}\ dx;$
   (h) $\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\ dx;$
   (i) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}\ dx;$
   (j) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}\ dx;$
   (k) $\int \frac{x^3}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}\ dx;$
3. Izračunati:
   (a) $\int \frac{1}{x^6\sqrt{x^2-1}}\ dx;$
   (b) $\int \frac{\sqrt{x^3+x^4}}{x^4}\ dx;$
   (c) $\int \sqrt[3]{3x-x^3}\ dx;$
   (d) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\ dx;$

4. Izračunati:

   (a) $\int \sin x \cos 3x \sin 3x \; dx$;

   (b) $\int \frac{1}{3+5\cos x} \; dx$;

   (c) $\int \frac{1}{\sin x - 2\cos x + 3} \; dx$;

   (d) $\int \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x} \; dx$;

   (e) $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} \; dx$;

   (f) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} \; dx$;

   (g) $\int \frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x}+1} \; dx$.

5. Izračunati:

   (a) $\int\limits_2^{e+1} x \ln(x-1) \; dx$;

   (b) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg} x^2)} \; dx$;

   (c) $\int\limits_0^4 |x^2 - 5x + 6| \; dx$.

6. Primenom određenog integrala odrediti graničnu vrednost niza $\{a_n\}$, gde je:

   (a) $a_n = n(\frac{1}{1+4n^2} + \frac{1}{2^2+4n^2} + \frac{1}{3^2+4n^2} + \ldots + \frac{1}{5n^2})$;

   (b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n^2+2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n^2+4n+4}} + \frac{1}{2n^2+6n+9} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{5}}$.

7. Izračunati površinu figure ograničene:

   (a) parabolom $y = \frac{x^2}{2}$ i kružnicom $x^2 + y^2 = 8$;

   (b) pravama $y = x$, $y = -x$ i tangentom krive $y = \sqrt{x^2-5}$ u tački $A(3,2)$;

Diferencijalne jednačine

8. Rešiti diferencijalne jednačine:

   (a) $y(1-x^2)dy - x(1-y^2)dx = 0$;

   (b) $xydx + (1+y^2)\sqrt{1+x^2}dy = 0$.

9. Odrediti partikularno rešenje diferencijalne jednačine koja zadovoljava zadati uslov:

   (a) $y' - xy' = 2(1 + x^2 y')$, $y(1) = 0$;

   (b) $(1+e^x)yy' = e^x$, $y(0) = 1$.

10. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine:

    (a) $xydy - y^2dx = (x+y)^2 e^{-\frac{y}{x}} dx$;

    (b) $(x+y-2)dx + (x-y+4)dy = 0$;

    (c) $y' = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$;

    (d) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$;

    (e) $(y^2+1)dx = (xy + y^2 + 1)dy$;

    (f) $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$;

    (g) $2y' \ln x + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{y}$;

    (h) $(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0$;

    (i) $(x \sin y + y)dx + (x^2 \cos y + x \ln x)dy = 0$ (Integracioni množitelj je oblika $\mu(x)$).

11. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine:

(a) $xy'' - y' = e^x x^2$;
(b) $yy'' + y'^2 = 2e^{-y}$;
(c) $xyy'' + xy'^2 = 3yy'$;
(d) $y'' + 6y' + 8y = 0$;
(e) $y''' + 2y'' + y = 0$;
(f) $y''' + 5y'' + y' + 5y = 0$.

12. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine:

(a) $y'' + 2y' + 2y = 1 + x$;
(b) $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$;
(c) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sin 2x$;
(d) $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{1+\sin x}$;
(e) $(2x+1)^2 y'' + (4x+2)y' - 4y = x^2$ za $2x + 1 > 0$.

13. Pokazati da se diferencijalna jednačina $(xy'' + y')x\ln^2 x + y = \ln^2 \ln x$ smenom $x = x(t)$ može svesti na jednačinu sa konstantnim koeficijentima i naći njeno opšte rešenje.

Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering
predmet: **Matematička analiza 1**
datum: 17. Jun 2014.
DRUGI KOLOKVIJUM

Predispitne obaveze

1. (1 poen) Naći onu primitivnu funkciju $F(x)$ funkcije $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 1 \\ 3, & x \geq 1 \end{cases}$ za koju je $F(0) = 0$.

2. (1 poen) Izračunati $\int\limits_0^{\pi} |\cos x|\, dx$.

3. (1 poen) Izračunati $\int\limits_{-2014}^{2014} \frac{\sin x}{3x^8 + 17x^6 + 5}\, dx$.

4. (1 poen) Da li smena $\operatorname{tg} x = t$ može da se uvede u integral $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx$? Obrazložiti.

5. (1 poen) Da li je integral $\int\limits_{(0,\frac{\pi}{2}]} \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$ konvergentan?

6. (1 poen) Pokazati da je funkcija $x^2 + y^2 = r^2$ ($r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$) rešenje diferencijalne jednačine $x + yy' = 0$. Naći ono rešenje date jednačine koje prolazi kroz tačku $(1, -1)$.

7. (1 poen) Pokazati da se smenom $y' = z, z = z(y)$ diferencijalna jednačina $yy'' = y^2 y' + (y')^2$ svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu.

8. (1 poen) Da li je $\frac{y+1}{y} dx + \frac{y^2 - x}{y^2} dy = 0$ diferencijalna jednačina totalnog diferencijala? Ako jeste, na kojoj oblasti?

9. Data je diferencijalna jednačina $L_n[y] = f(x)$. Neka su $k_1 = k_2 = 0, k_3 = -2, k_4 = 2 - i$ koreni karakteristične jednačine.

   a) (1 poen) Odrediti opšte rešenje homogenog dela $L_n[y] = 0$ date jednačine.

   b) (1 poen) Za $f(x) = x^2 \sin x$ odrediti oblik partikularnog rešenja jednačine $L_n[y] = f(x)$.

Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering / Primenjeno softversko inženjerstvo /
predmet: **Matematička analiza**

Ispitni zadaci **datum: 11. Jul 2017.**

1. a) (5 poena) U zavisnosti od realnog parametra a naći graničnu vrednost (bez korišćenja lopitalovog pravila):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2a^{n+1} + 3 \cdot 5^n}{2a^n + 5^{n+1}}.$$

   b) (7 poena) Naći graničnu vrednost $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{2x})$.

2. (12 poena) Detaljno ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \dfrac{2x^2}{2x+1} e^{\frac{1}{x}}$.

3. (7 poena) Naći ekstreme funkcije $u = x - 2y + 2z$ uz uslov $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

4. a) (8 poena) Izračunati $\displaystyle\int \left(\frac{x \ln x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sin x \cos x}{(\sin x)^4 + (\cos x)^4} \right) dx.$

   b) (6 poena)Izračunati površinu površi koja nastaje rotacijom luka parabole $y^2 = 4x$ oko x ose na segmentu $[0, 3]$.

5. a) (8 poena) Rešiti difrencijalnu jednačinu $xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx$.

   b) (8 poena) Rešiti difrencijalnu jednačinu $(x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = (x-1)^3 e^x, x > 1$, znajući da njen homogeni deo ima jedno partikularno rešenje oblika $y_1 = e^{ax}$.

Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering / Primenjeno softversko inženjerstvo /
Inženjerstvo informacionih sistema
predmet: **Matematička analiza / Matematika 2**

Ispitni zadaci **datum: 11. Jul 2017.**

1. a) (5 poena) U zavisnosti od realnog parametra a naći graničnu vrednost (bez korišćenja lopitalovog pravila):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2a^{n+1} + 3 \cdot 5^n}{2a^n + 5^{n+1}}.$$

   b) (5 poena) (7 poena) Naći graničnu vrednost $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{2x})$.

2. (12 poena) Detaljno ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \dfrac{2x^2}{2x+1} e^{\frac{1}{x}}$.

3. (7 poena) Naći ekstreme funkcije $u = x - 2y + 2z$ uz uslov $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

4. a) (8 poena) Izračunati $\displaystyle\int \left(\frac{x \ln x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sin x \cos x}{(\sin x)^4 + (\cos x)^4} \right) dx.$

   b) (6 poena)Izračunati površinu površi koja nastaje rotacijom luka parabole $y^2 = 4x$ oko x ose na segmentu $[0, 3]$.

5. a) (8 poena) Rešiti difrencijalnu jednačinu $xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx$.

   b) (8 poena) Rešiti difrencijalnu jednačinu $(x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = (x-1)^3 e^x, x > 1$, znajući da njen homogeni deo ima jedno partikularno rešenje oblika $y_1 = e^{ax}$.

Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering / Primenjeno softversko inženjerstvo / Inženjerstvo informacionih sistema
predmet: **Matematička analiza / Matematika 2**

Teorijska pitanja **datum: 11. Jul 2017.**

1. Pacijalni izvodi i diferencijabilnost funkcije više promenljivih.
2. Neodređen integral.

Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering / Primenjeno softversko inženjerstvo / Inženjerstvo informacionih sistema
predmet: **Matematička analiza / Matematika 2**

Teorijska pitanja **datum: 11. Jul 2017.**

1. Pacijalni izvodi i diferencijabilnost funkcije više promenljivih.
2. Neodređen integral.

Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering / Primenjeno softversko inženjerstvo / Inženjerstvo informacionih sistema
predmet: **Matematička analiza / Matematika 2**

Teorijska pitanja **datum: 11. Jul 2017.**

1. Pacijalni izvodi i diferencijabilnost funkcije više promenljivih.
2. Neodređen integral.

Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering / Primenjeno softversko inženjerstvo / Inženjerstvo informacionih sistema
predmet: **Matematička analiza / Matematika 2**

Teorijska pitanja **datum: 11. Jul 2017.**

1. Pacijalni izvodi i diferencijabilnost funkcije više promenljivih.
2. Neodređen integral.

Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka
Elektroenergetski softverski inženjering / Primenjeno softversko inženjerstvo / Inženjerstvo informacionih sistema
predmet: **Matematička analiza / Matematika 2**

Teorijska pitanja **datum: 11. Jul 2017.**

1. Pacijalni izvodi i diferencijabilnost funkcije više promenljivih.
2. Neodređen integral.