УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА

Радојка Цигановић

Дискретна математика

збирка решених задатака

Нови Сад, 2021

Садржај

Предговор **5**

I Комбинаторика **7**

1 Дирихлеов принцип . . . 9
Уводни задаци . . . 9
Испитни задаци . . . 12
2 Пребројавања . . . 19
Уводни задаци . . . 20
Испитни задаци . . . 29
Задаци за самостални рад . . . 44
3 Биномни коефицијенти . . . 47
Испитни задаци . . . 47
4 Принцип укључења и искључења . . . 55
Испитни задаци . . . 55
Задаци за самостални рад . . . 76
5 Рекурентне релације . . . 77
Испитни задаци . . . 77
Задаци за самостални рад . . . 85

II Теорија графова **87**

6 Основни појмови теорије графова . . . 89
7 Повезаност графова . . . 97
8 Стабла . . . 105
9 Ојлерови и Хамилтонови графови . . . 119
10 Планарни графови . . . 133

Литература **143**

Предговор

Збирка је подељења у два дела. У првом делу збирке ћемо се бавити класичним темама из комбинаторике, док је други део посвећен одабраним темама из теорије графова. Сваки део садржи неколико глава у којима су по областима груписани задаци. На почетку сваке главе налазиће се краћи теоријски увод у ком ће бити поновљени основни појмови неопходни за решавање задатака. Сами задаци су груписани у 3 поглавља: уводни задаци, испитни задаци и задаци за самостални рад. Уводни задаци су заправо задаци чија решења су презентована на вежбама. У испитним задацима су решени задаци који су се током претходних 5 година појавили на испитима. У делу задаци за самостални рад ће бити дат одређени број нерешених задатака који се остављају читаоцу за вежбу.

Збирка је још увек у фази израде и поглавља ће бити ажурирана током трајања семестра!

I Комбинаторика

1 Дирихлеов принцип

Дирихлеов принцип. Ако $n+1$ или више објеката треба сместити у n кутија, тада се у бар једној кутији налазе бар два објекта.

Уопштени Дирихлеов принцип. Ако је m објеката смештено у n кутија, где је $m > n \cdot r$, за неки природан број r, тада се у бар једној кутији налази бар $r+1$ објекат.

Уводни задаци

1.1. Доказати да у групи од 367 особа постоје две особе које имају рођендан истог дана.

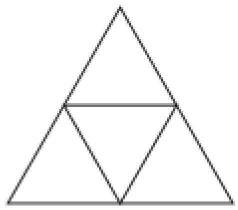
Решење: Број дана када особа може да слави рођендан је 366. Како у групи имамо 367 особа, на основу Дирихлеовог принципа добијамо да постоје две особе које имају заједнички рођендан.

1.2. Група од 30 студената је полагала тест. Један студент је имао 13 грешака, док су сви остали имали мање грешака. Доказати да постоје бар три студента која су направила исти број грешака.

Решење: Знамо да је један студент направио 13 грешака, док је преосталих 29 студенета имало од нула до 12 грешака. Сада 29 студената треба распоредити у 13 кутија, па како је $29 = 13 \cdot 2 + 3$, на основу уопштеног Дирихлеовог принципа добијамо да је бар 3 студента имало исти број грешака на тесту.

II начин: Претпоставимо да је највише два студента направило сваки број грешака из скупа $\{0, 1, 2, \ldots, 12\}$. Тада би укупан број студената морао бити мањи или једнак од $1 + 2 \cdot 13 = 27$, што је у контрадикцији са претпоставком да је тест полагало 30 студената. Према томе, постоји број грешака $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 12\}$ који су направила бар 3 студента.

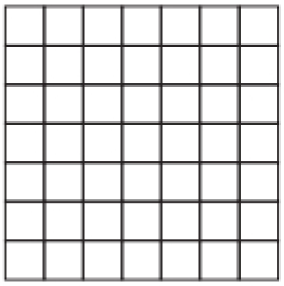
1.3. У унутрашњости једнакостраничног троугла странице дужине 2 распоређено је 5 тачака. Доказати да се бар 2 тачке налазе на растојању мањем од 1.

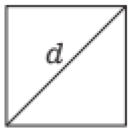


Решење: Уколико повучемо средње линије дати троугао ћемо поделити на 4 мања једнакостранична троугла странице дужине 1. Сада треба 5 тачака распоредити у четири троугла, па због Дирихлеовог принципа закључујемо да се бар 2 тачке морају налазити у истом малом троуглу. Како се тачке бирају у унутрашњости великог троугла, немогуће је да буду смештене на његовим страницама, те је растојање између уочене две тачке строго мање од 1.

1.4. Војник пуца у мету облика квадрата величине 70×70. Испалио је 50 метака и сваки је погодио мету. Доказати да постоје два поготка која се налазе на растојању мањем од 15.

Решење: Поделимо мету на 49 квадрата димензије 10×10. Како имамо 50 погодака, на основу Дирихлеовог принципа имамо да се два поготка налазе у истом малом квадрату. Највеће растојање које могу имати две тачке у посматраном квадрату одговара дужини дијагонале и износи $d = 10\sqrt{2} \approx 14,1 < 15$, па се ова два поготка налазе на траженом растојању које је мање од 15.





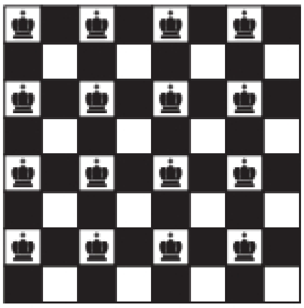
1.5. На тестирању је учествовало 65 ученика. Ученици су радили 3 контролна задатка и на сваком контролном су добили једну од оцена: 2, 3, 4 или 5. Да ли морају постојати два ученика са истим оценама на свим радовима?

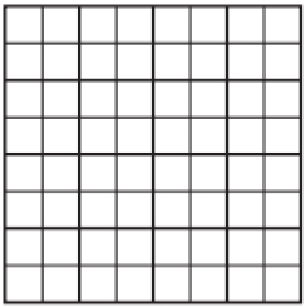
Решење: Ученик може добити једну од 4 оцене на сваком контролном, због чега постоји $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ могућности да се добију оцене на ова три контролна. На тестирању учествује 65 ученика, па нам Дирихлеов принцип даје да је бар два ученика добило исте оцене на сва три рада.

II начин: Број могућности да се добије оцена на првом контролном је 4. Како је $65 = 16 \cdot 4 + 1$, на основу уопштеног Дирихлеовог принципа знамо да је бар $16 + 1 = 17$ ученика добило исту оцену на првом контролном. Посматрајмо сада ученике за које знамо да су добили исту оцену на првом контролном. И на другом контролном се могу добити 4 оцена, па како је $17 = 4 \cdot 4 + 1$ добијамо да је бар 5 ученика добило исте оцене на прва два контролна. За крај посматрамо ових 5 ученика и пошто је $5 = 1 \cdot 4 + 1$, бар 2 ученика ће морати да добију исте оцене на сва три контролна.

1.6. Колико се највише краљева може сместити на шаховску таблу 8×8, тако да се они међусобно не нападају?

Решење: Могуће је сместити 16 краљева и један од могућих размештаја је приказан на слици лево (довољно је пронаћи један такав распоред). Претпоставимо да је могуће распоредити више од 16 краљева. Ако поделимо таблу на 16 делова 2×2 (слика десно), онда би се због Дирихлеовог принципа у једном делу морала налазити бар 2 краља. Међутим, због начина на који се краљ креће по шаховској табли ова два краља ће се увек нападати, па је максималан број краљева који се могу разместити на шаховску таблу 16.





1.7. Колико најмање карата треба извући из стандардног шпила са 52 карте да би се међу извученим картама сигурно налазиле
  а) четири карте са истим знаком;
  б) бар три карте са знаком срца?

Решење: а) Најгоре што нам се може десити је да извучемо по три карте од сваког знака и да међу извученим картама не постоје четири са истим знаком. Прва наредна карта коју извучемо ће са три претходно извучене карте обезбедити да имамо четири карте истог знака. Према томе, тек када извучемо $3 \cdot 4 + 1 = 13$ карата бићемо сигурни да међу извученим картама имамо четири карте истог знака (са 12 извучених карата можемо имати ситуацију да од сваког знака имамо само по 3 карте). Приметимо да у овом примеру уопштени Дирихлеов принцип можемо искористи да проверимо да ли смо добро решили задатак.

б) Најгора ситуација коју можемо имати је да извучемо све карте са знаком треф, пик и каро, пре иједне карте са знаком херц. Дакле, минималан број карата који треба извучи да би се међу извученим картама сигурно налазила три херца је $3 \cdot 13 + 3 = 42$. Овде не користимо уопштени Дирихлеов принцип, пошто желимо да докажемо да међу извученим картама увек имамо 3 карте са знаком срца, а не 3 карте истог знака.

Испитни задаци

1.8. Доказати да у сваком десеточланом подскупу скупа природних бројева постоје два броја која почињу са истом цифром.

Решење: Сваки природни број за прву цифру може имати једну од цифара из скупа $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ (нула не може бити прва цифра). Посматрамо подскуп скупа природних бројева са 10 елемената, а како могућности за прву цифру имамо 9, применом Дирихлеовог принципа добијамо да у датом подскупу постоје бар два броја која имају исту почетну цифру.

1.9. Из скупа $\{1, 2, 3, \ldots, 27\}$ се извлачи 15 бројева. Доказати да међу изабраним бројевима увек морају постојати два узастопна природна броја.

Решење: Скуп $\{1, 2, 3, \ldots, 27\}$ можемо представити као следећу унију

$$\{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \{5, 6\} \cup \{7, 8\} \cup \cdots \cup \{25, 26\} \cup \{27\}.$$

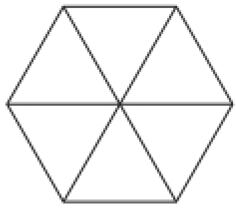
Почетни скуп смо разбили на 14 дисјунктних подскупова, па како извлачимо 15 бројева, на основу Дирихлеовог принципа знамо да два броја припадају истом подскупу. Због начина на који смо констуисали скупове, та два броја су тражени узастопни бројеви.

1.10. Дат је скуп цифара $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$ и нека се посматрају сви четворочлани подскупови тог скупа. Доказати да међу осам таквих подскупова увек морају постојати два подскупа која имају исти највећи елемент.

Решење: Највећи елемент четворочланог подскупа скупа цифара може бити једна од цифара из скупа $\{3, 4, 5, \ldots, 9\}$. Како имамо 7 таквих цифара, а бира се 8 четворочланих подскупова, тврђење следи из Дирихлеовог принципа.

1.11. Торта која има облик правилног шестоугла странице 15 cm украшена је са 7 цветова. Доказати да се бар два цвета не налазе на растојању већем од 15 cm.

Решење: Повлачењем дугачких дијагонала шестоугао можемо поделити на 6 једнакостраничних троуглова. Дирихлеов принцип сада даје да су бар два цвета смештена у исти троугао. Како је дужина странице троугла 15 cm, добијамо да се ове две тачке налазе на траженом растојању.



1.12. На турниру у одбојци на песку учествује n екипа. Систем такмичења је такав да свака екипа игра са сваком један меч. Ако ниједна екипа на турниру није изгубила све мечеве, доказати да постоје две екипе са истим бројем победа.

Решење: Из услова задатка видимо да је свака екипа могла да забележи најмање једну, а највише $n-1$ победу. Како на турниру учествује n екипа на основу Дирихлеовог принципа добијамо да постоји неки број $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ такав да су две екипе забележиле тачно k победа на турниру.

1.13. Доказати да ако се из скупа $\{1, 2, 3, \ldots, 11\}$ извуче 7 различитих бројева, тада ће међу извученим бројевима увек постојати два броја чији је збир 12.

Решење: Задати скуп се може представити на следећи начин

$$\{1, 2, 3, \ldots, 11\} = \{1, 11\} \cup \{2, 10\} \cup \{3, 9\} \cup \{4, 8\} \cup \{5, 7\} \cup \{6\}.$$

Пошто је потребно извући 7 бројева, постоји двоелементни скуп из кога су извучена оба броја због Дирихлеовог принципа. Збир бројева у двоелементним скуповима је тачно 12 па тврђење следи.

1.14. Сто људи седи око округлог стола, при чему је више жена него мушкараца. Доказати да неке две жене седе једна наспрам друге.

Решење: Направимо парове особа које седе једна преко пута друге за столом. Имамо укупно 50 таквих парова. Пошто је број жена већи од броја мушкараца знамо да имамо више од 50 жена. Сада добијамо да постоји бар један пар у ком су обе особе жене због Дирихлеовог принципа, јер је број жена већи од броја формираних парова, чиме је тврђење показано.

1.15. Да ли се таблица 5×5 може попунити бројевима из скупа $\{-1, 0, 1\}$ тако да збир бројева у свакој врсти, колони и дијагонали буде различит?

Решење: Нека је S збир пет бројева из скупа $\{-1, 0, 1\}$. Сада важи $-5 \leq S \leq 5$, те оваквих збирова има 11. Како је број врста, колона и дијагонала у овој таблици укупно 12, применом Дирихлеовог принципа добијамо да нека два збира морају бити једнака, па није могуће попунити таблицу на тражени начин.

1.16. Званична валута у Летонији је лат. Један лат састоји се од 100 сантима. У оптицају су кованице од 1, 2, 5, 10, 20 и 50 сантима и кованице од 1 и 2 лата. Доказати да се међу сваких 25 летонских новчица увек могу пронаћи 4 новчића која имају исту вредност.

Решење: У Летонији се у оптицају налази укупно 8 врста новчића. Уколико узмемо 25 летонских новчића тада због уопштеног Дирихлеовог принципа увек имамо 4 новчића са истом вредношћу јер је $25 = 3 \cdot 8 + 1$.

1.17. Десет ученика је решило укупно 35 задатака. Познато је да међу њима има оних који су решили тачно један задатак, оних који су решили тачно два задатка и оних који су решили тачно три задатка. Доказати да постоји ученик који је решио бар 5 задатака.

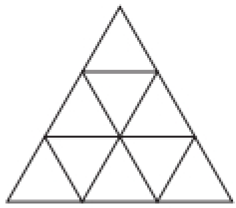
Решење: Пошто знамо да је бар по један ученик решио тачно један, два и три задатка, преосталих седам ученика је урадило $35-6 = 29$ задатака. Како је $29 = 4 \cdot 7 + 1$, на основу уопштеног Дирихлеовог принципа добијамо да постоји ученик који је решио бар 5 задатака.

1.18. Уметник је у свом атељеу направио 36 скулптура које су тешке редом 490, 495, 500, 505, $\ldots$, 660 и 665 килограма. За превоз својих радова до галерије, уметник је изнајмио 7 камиона максималне носивости 3 тоне. Да ли је могуће да се скулптуре превезу до галерије, тако да сваки камион превезе само једну туру?

Решење: Укупна тежина скулптура износи $20\,790\ kg$, што је мање од $7 \cdot 3\,000 = 21\,000\ kg$ колико могу да пренесу изнајмљени камиони. Како се скулптуре не могу преносити у деловима, то и даље није довољно да докажемо да је могуће пренети дела до галерије на тражени начин. Треба транспортовати $36 = 7 \cdot 5 + 1$ скулптура у седам камиона, одакле даље на основу уопштеног Дирихлеовог принципа добијамо да се једним камионом мора пренети бар 6 скулптура. Међутим, укупна тежина 6 најлакших скулптура износи $3\,015\ kg$, што премашује максималну носивост камиона. Закључујемо да није могуће реализовати планирани транспорт.

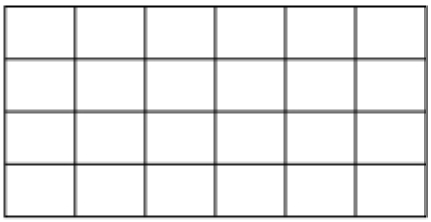
1.19. У једнакостраничном троуглу странице дужине 1 распоређено је 10 тачака. Доказати да тада постоје две тачке које се налазе на растојању не већем од $\frac{1}{3}$.

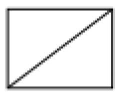
Решење: Поделимо дати троугао на 9 једнакостраничних троуглова странице дужине $\frac{1}{3}$ као на слици. Како треба распоредити 10 тачака применом Дирихлеовог принципа закључујемо да се у једном малом троуглу налазе бар 2 тачке. Сада се ове две тачке налазе на растојању $\leq \frac{1}{3}$.



1.20. У правоугаоник димензија 24 cm и 12 cm је распоређено 25 тачака. Доказати да постоје две тачке које нису на растојању већем од 5 cm.

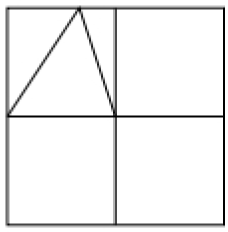
Решење: Приметимо да дати правоугаоник можемо поделити на 24 правоугаоника који су димензије 4×3 као што је приказано на слици. Сада због Дирихлеовог принципа следи да постоје две тачке које се налазе у истом малом правоугаонику. Уочимо правоугаоник у ком се налазе две тачке. Највеће растојање између две тачке у овом правоугаонику се добија ако су тачке смештене у 2 несуседна темена правоугаоника. То растојање је једнако дужини дијагонале правоугаоника која износи $\sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5cm$. Према томе, посматране две тачке се налазе на траженом растојању.





1.21. У јединичном квадрату распоређено је 9 тачака. Доказати да је увек могуће одабрати 3 тачке тако да је површина троугла који оне образују мања или једнака од $\frac{1}{8}$.

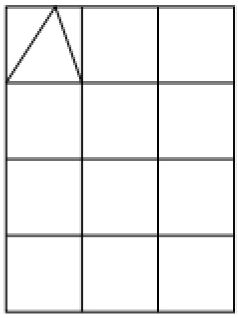
Решење: Уколико спојимо средишта наспрамних страница дати јединични квадрат ћемо подели на 4 мања квадрата странице дужине $\frac{1}{2}$. Пошто је $9 = 4 \cdot 2 + 1$ на основу уопштеног Дирихлеовог принципа следи да се бар три тачке налазе у неком малом квадрату странице $\frac{1}{2}$. Посматрајмо квадрат у ком се налазе ове три тачке.



Највећу површину међу свим троугловима у уоченом квадрату имаће троугао чија су два темена суседна темена квадрата, а треће теме се налази на наспрамној страни квадрата. Одавде следи да је површина највећег троугла који се може конструисати у овом квадрату $\frac{1}{2} \cdot P_{\square} = \frac{1}{8}$.

1.22. У правоугаонику чије су димензије 30 cm и 40 cm уочено је 25 тачака. Доказати да је увек могуће одабрати 3 тачке тако да је површина троугла који оне образују мања или једнака од 50 cm^2.

Решење: Дати правоугаоник можемо поделити на 12 делова димензије 10×10 као на слици. Како је у правоугаонику уочено 25 тачака применом уопштеног Дирихлеовог принципа добијамо да се бар три тачке налазе у истом малом квадрату величине 10×10 (јер је $25 = 12 \cdot 2 + 1$). Сличном анализом као у претходном задатку добијамо да је површина највећег троугла који се може конструисати у изабраном квадрату $\frac{1}{2} \cdot P_{\square} = 50$.



1.23. Доказати да међу 26 различитих парних природних бројева мањих од 100 постоје два броја чији је збир 100.

Решење: Разбијмо скуп парних природних бројева мањих од 100 на следеће подскупове $\{2, 98\}$, $\{4, 96\}$, $\{6, 94\}, \ldots, \{48, 52\}$, $\{50\}$. На овај начин смо добили укупно 25 подскупова. Сада на основу Дирихлеовог принципа закључујемо да постоји бар један подскуп у ком се налазе два од посматраних 26 бројева. Како је збир ова два броја баш 100, тврђење је доказано.

1.24. Ако се из скупа $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ извлачи 11 бројева, тада ће међу извученим бројевима увек постојати бројеви a и b такви да је $a - b = 2$.

Решење: Приметимо да скуп $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ можемо представити као следећу унију $\{1, 3\} \cup \{2, 4\} \cup \{5, 7\} \cup \{6, 8\} \cup \{9, 11\} \cup \{10, 12\} \cup \{13, 15\} \cup \{14, 16\} \cup \{17, 19\} \cup \{18, 20\}$. Добили смо 10 дисјунктних подскупова. Пошто се извлачи 11 бројева, користећи Дирихлеов принцип добијамо да су из бар једног скупа изабрана оба броја. Како је сада разлика ова два броја баш 2, пронашли смо бројеве a и b који задовољавају услов задатка.

1.25. Доказати да у сваком скупу од 36 природних бројева морају постојати два броја чија је разлика дељива са 35.

Решење: Остатак при дељењу броја са 35 може бити 0,1,...,34. Како имамо 35 могућих остатака и како посматрани скуп садржи

36 бројева, на основу Дирихлеовог принципа закључујемо да два броја морају имати исти остатак при дељењу са 35. Нека је

$$x \equiv k \ (mod\ 35)$$
$$y \equiv k \ (mod\ 35).$$

Сада је $x - y \equiv k - k = 0 \ (mod\ 35)$, па је разлика ова два броја тражена разлика која је дељива са 35.

1.26. Из скупа $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ се насумично извлачи 12 бројева. Доказати да међу извученим бројевима увек постоје два броја чији је највећи заједнички делилац већи од 1.

Решење: Приметимо прво да у скупу $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ имамо следеће просте бројеве: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 и 29. Желимо да разбијемо дати скуп на дисјунктне подскупове тако да добијемо тражено тврђење након примене Дирихлеовог принципа. Број 1 није ни прост ни сложен број и њега ћемо одвојити у посебан подскуп. Нека други подскуп буде скуп свих парних бројева из полазног скупа. У трећи подскуп ћемо сместити све бројеве који су дељиви са 3, али нису парни, а у четврти све бројеве дељиве са 5 који нису дељиви ни са 2, ни са 3. Настављајући даље на исти начин добијамо да полазни скуп можемо представити као следећу унију

$$\{1\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\} \cup \{3, 9, 15, 21, 27\} \cup$$
$$\{5, 25\} \cup \{7\} \cup \{11\} \cup \{13\} \cup \{17\} \cup \{19\} \cup \{23\} \cup \{29\}.$$

На овај начин смо скуп $\{1, 2, \ldots, 30\}$ разбили на 11 дисјунктних подскупова. Како се извлачи 12 бројева на основу Дирихлеовог принципа закључујемо да бар два броја морају бити из неког од вишеелементних подскупова. Због начина на који смо конструисали ове подскупове добијамо да су тражена два броја која имају НЗД већи од 1 заправо уочена два броја која припадају неком вишелементном подскупу. Уколико су уочена два броја из скупа $\{2, 4, 6, \ldots, 30\}$, онда је њихов НЗД паран број. У случају да су бројеви из скупа $\{3, 9, 15, 21, 27\}$ добијамо да је НЗД дељив са 3, а ако су то бројеви 5 и 25 онда је њихов НЗД једнак 5.

1.27. Спортска хала има капацитет 1000 седишта. Колико најмање гледалаца треба да купи карте да бисмо могли са сигурношћу да кажемо да два гледаоца имају исте иницијале?

Решење: У нашем писму постоји 30 слова, што нас доводи до $30 \cdot 30$ могућих комбинација за иницијале. Уколико би у хали било $900+1$

гледалаца на основу Дирихлеовог принципа бисмо знали да морају постојати бар два гледаоца који имају исте иницијале.

1.28. Нека је дат скуп $\{3, 7, 11, 15, 19, \ldots, 95, 99, 103\}$. Колико најмање елемената треба извући из овог скупа да бисмо могли да кажемо да међу извученим бројевима увек постоје два броја која у збиру дају 110?

Решење: Скуп $\{3, 7, 11, 15, 19, \ldots, 95, 99, 103\}$ можемо представити као следећу унију: $\{3\} \cup \{7, 103\} \cup \{11, 99\} \cup \{15, 95\} \cup \cdots \cup \{51, 59\} \cup \{55\}$. На овај начин смо полазни скуп разбили на 14 дисјунктних подскупова, при чему збир елемената у 12 подскупова износи баш 110. Сада на основу Дирихлеовог принципа знамо да ако извучемо 15 или више бројева увек ћемо међу извученим бројевима имати два броја чији је збир 110.

1.29. Група од N студената је радила тест и освојила од 27 до 94 поена, с тим да нико од студената није добио 31, 43 и 55 поена. Одредити колико најмање треба да буде N да би са сигурношћу могли да кажемо да су три студента освојила исти број поена.

Решење: Укупан број могућности да студент освоји поене на тесту је $(94 - 27 + 1) - 3 = 65$. Сада применом уопштеног Дирихлеовог принципа закључујемо да N мора бити барем $2 \cdot 65 + 1 = 131$ да бисмо могли да тврдимо да постоје три студента са истим бројем поена на тесту.

1.30. На полици се налази 20 књига на француском, 10 на шпанском, 16 на немачком, 25 на руском и 7 на италијанском. Колико најмање књига треба узети са полице да бисмо били сигурни да се међу изабраним књигама налази 14 књига на истом језику?

Решење: Уколико узмемо све књиге на шпанском и италијанском, и по 13 књига на осталим језицима, нећемо имати 14 књига на истом језику. Међутим, прва наредна књига коју узмемо са полице обезбедиће да буде испуњен тражени услов. Према томе, уколико узмемо $10 + 7 + 3 \cdot 13 + 1 = 57$ књига сигурно ћемо међу изабраним књигама имати 14 књига на истом језику.
Напомена: Иако приликом решавања овог задатка нисмо користили Дирихлеов принцип, идеја коју смо употребили је слична идеји коју смо имали и у претходних неколико задатака. Управо то је разлог зашто се аутор одлучио да овај задатак стави баш на овом месту у збирци, упркос томе што принцип решавања задатка нема везе са називом овог поглавља.

2 Пребројавања

Један од основних проблема којим се бави комбинаторика јесте одређивање броја елемената коначног скупа, такозвани проблем пребројавања (енумерације). Иако навођење свих елемената неког скупа делује као добар начин да се преброје елементи, у пракси то често изискује пуно времена. Ово је представљало мотивацију да се развију ефикасније методе за пребројавање коначних скупова и управо тим методама ћемо се бавити у овој глави.

Број елемената коначног скупа A назива се *кардинални број скупа* и обележава се са $|A|$. По дефиницији се узима да је празан скуп коначан скуп кардиналности нула. Основни принципи пребројавања су принцип бијекције (у литератури се може наћи и под називом принцип једнакости), принцип збира и принцип производа.

Принцип бијекције. Ако између коначних скупова A и B постоји бијективно пресликавање, тада је $|A| = |B|$.

Принцип збира. Ако су $A_1, A_2, \ldots, A_n$ по паровима дисјунктни коначни скупови, онда је

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Принцип производа. За коначне скупове $A_1, A_2, \ldots, A_n$ важи

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|.$$

У комбинаторици се коначан скуп назива и *азбука*, а елементи азбуке су *слова*. *Реч дужине* m над азбуком A је свака $m-$торка елемената из A. Нека је дата азбука A са n слова. Произвољна реч дужине m над азбуком A назива се *варијација са понављањем* класе m од n елемената скупа A и број таквих речи је n^m. Уколико су свака два слова речи различита, при чему је $m \leq n$, говоримо о *варијацијама без понављања* класе m од n елемената. Број варијација без понављења једнак је $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$. Специјално, речи дужине n над азбуком A у којима нема понављања слова називамо *пермутације (без понављања)* и њихов број је $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Како је у речима битан редослед слова, овакви избори се називају заједничким именом уређени избори.

Нека је дат $n-$точлани скуп A и нека је k природан број за који важи $k \leq n$. *Комбинација (без понављања)* класе k од n елемената је било који $k-$точлани подскуп скупа A. Број $k-$комбинација скупа од n елемената износи $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Овај број се означава са $\dbinom{n}{k}$ и назива се *биномни коефицијент*. Избори елемената код којих није битан редослед којим се бирају елементи називају се неуређени избори.

Дефиниције комбинација и пермутација са понављањем...

Уводни задаци

2.1. Дат је скуп тачака $\{A_1, A_2, \ldots, A_{2021}\}$, где је тачка A_1 обојена црвеном бојом, а преосталих 2020 тачака су плаве. Да ли међу свим подскуповима овог скупа има више оних који садрже црвену тачку A_1 или оних који је не садрже?

Решење: Нека су у X сви подскупови датог скупа који садрже A_1, а у Y сви подскупови који је не садрже. За произвољно $S \in X$ дефинишемо пресликавање $f : X \to Y$ са $f(S) = S \setminus \{A_1\}$. Ако је $f(S_1) = f(S_2)$, онда је $S_1 \setminus \{A_1\} = S_2 \setminus \{A_1\}$, па је $S_1 = S_2$ и дефинисано пресликавање је инјекција. За произвољан скуп $T \in Y$ важи $f(T \cup \{A_1\}) = T$, те је f сирјекција. Видимо да $f : X \xrightarrow[\text{на}]{1-1} Y$ одакле на основу принципа бијекције закључујемо да скупови X и Y имају исти број елемената.

Напомена: Други начин да дефинишемо бијективно пресликавање између ових скупова је $g : X \to Y$, где је $g(S) = \{A_1, \ldots, A_{2021}\} \setminus S = \overline{S}$.

2.2. Међу ненегативним целим бројевима мањим од 10^7 посматрају се они код којих је збир цифара једнак 31 и они код којих је збир цифара једнак 32. Којих бројева има више?

Решење: Ненегативне целе бројеве мање од 10^7 ћемо посматрати као речи дужине 7 над азбуком цифара $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Уколико посматрани број има мање од 7 цифара, са леве стране ћемо дописати потребан број нула (нпр. уместо броја 123 гледаћемо реч 0000123). Нека је A скуп свих речи дужине 7 код којих је збир цифара 31, а B скуп свих речи са збиром цифара 32. Нека је $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 \in A$ и нека за пресликавање $f : A \to B$ важи $f(a_i) = 9 - a_i$, за свако $i = 1, 2, \ldots, 7$. Како је

$$\sum_{i=1}^{7} f(a_i) = \sum_{i=1}^{7}(9 - a_i) = 7 \cdot 9 - \sum_{i=1}^{7} a_i = 63 - 31 = 32,$$

овако дефинисано пресликавање је добро дефинисано. Лако се проверава да је пресликавање „1-1” и „на”, па су на основу принципа бијекције скупови A и B исте кардиналности.

2.3. Одредити колико има

а) петоцифрених бројева;

б) петоцифрених бројева у чијем су декадном запису све цифре међусобно различите;

в) петоцифрених бројева у чијем су декадном запису сваке две суседне цифре међусобно различите.

Решење: а) Прва цифра мора бити различита од нуле и њу можемо изабрати на 9 начина, док сваку од преостале четири цифре можемо одабрати на 10 начина. Применом принципа производа добијамо да петоцифрених бројева има $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$.

б) Прву цифру можемо изабрати на 9 начина. Приликом избора друге цифре треба водити рачуна да се разликује од прве, па поново имамо 9 могућих избора. Трећу цифру бирамо на 8 (различита од прве две), четврту на 7 и пету на 6 начина. Према томе, тражених бројева има $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

в) Прву цифру бирамо на 9 начина. Сваку наредну цифру бирамо тако да се разликује од претходно изабране цифре, па за сваку од цифара имамо 9 могућих избора. Одавде је решење $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^5$.

2.4. Колико се парних четвороцифрених бројева може записати помоћу цифара 1, 3, 4, 6, 7 ако у запису сваког броја суседне цифре морају бити различите?

Решење: Пошто се посматрају парни бројеви, фиксираћемо прво последњу цифру. То можемо урадити на 2 начина пошто имамо само две парне цифре на располагању. Због захтева да суседне цифре буду различите даље ћемо бирати редом трећу, другу и прву цифру. За сваку од ових цифара имамо 4 могућа избора, па је тражено решење $4^3 \cdot 2$.

2.5. Колико има шестоцифрених бројева

а) који се завршавају са две седмице;

б) који почињу са две једнаке цифре?

Решење: а) У задатку се заправо тражи четвороцифрени број на који ћемо на крају налепити две седмице. Број четвороцифрених бројева је $9 \cdot 10^3$.

б) На 9 начина можемо одабрати цифру која ће се налазити на прва два места. За остале цифре немамо ограничења па тражених бројева има $9 \cdot 10^4$.

2.6. Колико има природних бројева мањих од 10^5 у чијем декадном запису су сваке две суседне цифре међусобно различите?

Решење: Разликујемо случајеве када је број једноцифрен, двоцифрен, троцифрен, четвороцифрен и петоцифрен. Сада је на основу принципа збира решење $9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 = 9(1 + 9 + 9^2 + 9^3 + 9^4) = 9 \cdot \dfrac{9^5 - 1}{9 - 1} = 66429$.

2.7. На зиду се налазе 3 куке. На колико начина се на њих могу окачити 4 капута? (На једну куку се може окачити и више капута.)

Решење: За сваки капут имамо 3 могућа избора на коју куку ћемо га окачити, па је тражени број начина $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$. Овај број одговара броју варијација са понављањем класе 4 са 3 елемента.

2.8. У лифт у приземљу четвороспратнице ушло је 6 особа. На колико начина оне могу напустити лифт? (Свака особа излази на неком од четири спрата.)

Решење: Како свака особа може изаћи на једном од 4 спрата, број начина да особе напусте лифт је 4^6.

2.9. На колико различитих начина се m различитих писама може распоредити у n поштанских сандучића?

Решење: Број начина да писма убацимо у сандучиће је n^m, јер свако писмо можемо убацити у један од n поштанских сандучића.

2.10. Клуб има 30 чланова. На колико начина се може изабрати председник, потпредседник, секретар и благајник клуба?

Решење: Председник клуба може бити изабран на 30 начина, док ће потпредседник ће бити изабран од преосталих 29 особа. Даље имамо 28 начина да одаберемо секретара и 27 могућих избора за благајника. Сада је тражени број начина $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27$ и он одговара броју варијација без понављања класе 4 са 30 елемената.

2.11. Ученици четвртог разреда имају планирано 7 излета у току школске године. Учитељица је пронашла 15 места која би могли да посете и заједно са ученицима ће одабрати у која места ће ићи.

На колико начина разред може да одабере која места ће посетити и којим редоследом, ако се зна да последњи излет бити на Палић?

Решење: Палић је већ изабран за последњи излет, па је потребно одабрати првих шест излета, који се бирају од преосталих 14 места. Добијамо да је број начина за реализацију планираних излета $14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 1$.

2.12. Пчелица Маја треба да скупи полен са 7 различитих цветова пре него што се врати у кошницу. Када пчелица узме полен са неког цвета она се више не враћа на тај цвет. На колико начина Маја може да обиђе свих 7 цветова?

Решење: Како пчелица Маја треба да обиђе сваки од 7 цветова тачно једном, број начина да се обиђу сви цветови одговара броју пермутација 7–чланог скупа којих има $7! = 5040$.

2.13. Написати све пермутације скупа $\{1, 2, 3, 4\}$ у лексикографском поретку.

Решење: Кажемо да пермутација $a_1a_2 \dots a_n$ претходи пермутацији $b_1b_2 \dots b_n$ у лексикографском поретку ако постоји индекс k, где је $1 \leq k \leq n$, за који важи $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\dots$ $a_{k-1} = b_{k-1}$ и $a_k < b_k$. Пермутације скупа $\{1, 2, 3, 4\}$ записане у лексикографском поретку су дате у следећој табели, гледано по колонама.

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Приметимо да ће прва пермутација у лексикографском поретку скупа $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ бити пермутација $123 \dots n$, док ће последња пермутација бити $n \dots 321$.

2.14. Одредити колико има пермутација скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ у којима су елементи 1 и 2 суседни.

Решење: Пошто елементи 1 и 2 требају да буду суседни, посматраћемо их заједно као један елемент, такозвани блок. Број начина да испермутујемо овај блок са преосталих $n - 2$ елемената скупа је $(n-1)!$. Како елементи који чине блок могу бити у редоследу 12 или 21, број тражених пермутација је $2 \cdot (n-1)!$.

2.15. На колико начина n особа могу да стану у ред, али тако да две уочене особе не смеју да стоје једна поред друге?

Решење: Нека су уочене особе A и B. Како између ове две особе могу стајати две друге особе, затим три особе, и тако даље, боље је да од свих могућих распореда n особа у ред одузмемо „лоше" распореде. „Лоши" распореди су они у којима особе A и B стоје заједно, па је на основу претходног задатка њихов број $2(n-1)!$. Сада је број тражених распореда $n! - 2(n-1)! = (n-2)(n-1)!$.

2.16. Колико има пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ у којима су елементи 1 и 2 суседни, док 1 и 3 нису суседни?

Решење: Пермутација у којима су 1 и 2 суседни има $2(n-1)!$. Од ових пермутација ћемо одузети оне где су додатно 1 и 3 суседни. Како постоје 2 блока у којима је јединица између 2 и 3 (блокови 213 и 312), таквих пермутација има $2(n-2)!$. Према томе, број тражених пермутација је $2(n-1)! - 2(n-2)!$.

2.17. Колико има пермутација цифара $0, 1, \ldots, 9$ у којима између цифара 2 и 3 стоје тачно три друге цифре?

Решење: Посматрајмо блок од 5 места, где су прво и последње место у блоку резервисани за цифре 2 и 3. Број начина да одаберемо којих 5 места заузима овај блок у пермутацији је 6. Сада на 2 начина размештамо цифре 2 и 3 на изабране позиције (прва и последња цифра фиксираног блока). За крај треба разместити преосталих 8 цифара на 8 места и то радимо на 8! начина. Коначно решење је $6 \cdot 2 \cdot 8!$.

2.18. Одредити број начина да n особа седне око округлог стола, ако столице не разликујемо.

Решење: Два распореда око округлог стола се разликују уколико бар једна особа има бар једног различитог суседа (гледано са леве или десне стране). Посматрајмо произвољан распоред n особа око округлог стола и приметимо да се ротирањем особа око стола не добија нови распоред. Уколико би столице биле нумерисане, број начина да особе седну око стола би био $n!$. Како имамо n ротација, укупан број начина да особе седну око стола је $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

II начин: Поставимо прву особу произвољно за сто. Фиксирањем прве особе више немамо ротацију, те је број начина да преосталих $n-1$ особа седне $(n-1)!$, што је и тражени број начина.

2.19. Колико има пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ у којима двојка стоји иза јединице?

Решење: Приметимо прво да се двојка може налазити било где у пермутацији иза јединице, а не само непосредно иза ње. Уколико у произвољној пермутацији заменимо места бројевима 1 и 2 добићемо бијективно пресликавање између скупа свих пермутација у којима 2 стоји иза 1 и скупа пермутација у којима 2 стоји испред 1. Како је у свакој пермутацији или 2 иза 1 или испред 1, и како је укупан број пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ једнак $n!$, закључујемо да тражених пермутација има $\dfrac{n!}{2}$.

2.20. Колико има пресликавања скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ у скуп $\{1, 2, \ldots, n\}$ таквих да њихов скуп слика садржи највише $n-1$ елемент?

Решење: Нека је $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Од свих могућих пресликавања скупа N у самог себе одузећемо она пресликавања код којих скуп слика има тачно n елемената. Произвољна пресликавања $f : N \to N$ одговарају варијацијама са понављањем и њихов број n^n. Посматрајмо сада пресликавања код којих скуп слика садржи тачно n елемената. Ова пресликавања су бијективна пресликавања скупа на самог себе и она одговарају пермутацијама скупа N. Према томе, број тражених пресликавања је $n^n - n!$.

Напомена: Нека су дати коначни скупови A и B такви да је $|A| = m$ и $|B| = n$. Број свих пресликавања $f : A \to B$ је једнак n^m. Ако је $m \leq n$, онда је број инјективних пресликавања $f : A \xrightarrow{1-1} B$ једнак $n(n-1)\ldots(n-m+1)$.

2.21. Одредити максималан број правих одређених са n задатих тачака у равни.

Решење: Максималан број правих ћемо добити ако се тачке налазе у такозваном општем положају, тј. ако не постоје 3 колинеарне тачке (леже на истој правој). Ако су тачке у општем положају, онда сваке две тачке одређују јединствену праву па је тражени број правих $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

II начин: Прву тачку праве бирамо на n, а другу на $n-1$ начин. Како редослед којим смо бирали тачке није битан, јер је $p(A, B) = p(B, A)$, број тражених правих је $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

2.22. Одредити број дијагонала конвексног $n-$тоугла.

Решење: Свака два темена $n-$тоугла одређују једну дуж и њихов број је $\binom{n}{2}$. Како свака од ових дужи одговара једној страници или дијагонали $n-$тоугла, број дијагонала ћемо добити када од броја дужи одузмемо странице којих има n. Према томе, број дијагонала $n-$тоугла је $\displaystyle\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

II начин: Прву тачку дијагонале бирамо на n начина. Сада постоје $n-3$ тачке које су различите од изабране тачке и које нису са њом спојене страницом које могу бити друга тачка дијагонале. Добијамо да је тражени број дијагонала $\displaystyle\frac{n(n-3)}{2}$.

2.23. У равни је нацртано m хоризонталних и n вертикалних правих. Колико има правоугаоника чија свака страница лежи на једној од нацртаних правих?

Решење: Правоугаоник је ограничен са две хоризонталне и две вертикалне праве. Број начина да одаберемо две хоризонталне праве је $\binom{m}{2}$, док две вертикалне праве бирамо на $\binom{n}{2}$ начина. Укупан број правоугаоника који се могу уочити у нацртаној мрежи је дакле $\displaystyle\binom{m}{2}\binom{n}{2}$.

2.24. У групи од 20 шахиста налази се 5 велемајстора. На колико начина се могу формирати две екипе од по 10 шахиста тако да у првој екипи буде два велемајстора, а у другој три?

Решење: Прву екипу можемо изабрати на $\displaystyle\binom{5}{2}\binom{15}{8}$ начина. Када смо изабрали прву екипу, друга екипа је једнозначно одређена.

2.25. На колико начина од 2 математичара и 8 економиста можемо формирати петочлану комисију у којој ће бити бар један математичар?

Решење: У комисији може бити један или два математичара. Број комисија које имају једног математичара је $\binom{2}{1}\binom{8}{4}$, док комисија са два математичара има $\binom{2}{2}\binom{8}{3}$. Тражених комисија дакле има $\displaystyle 2\cdot\binom{8}{4} + \binom{8}{3} = 196$.

II начин: Укупан број комисија које се могу саставити од посматраних људи је $\binom{10}{5}$. Комисије у којима нема математичара нису одговарајуће и њих има $\binom{8}{5}$. Сада је решење $\displaystyle\binom{10}{5} - \binom{8}{5} = 196$.

2.26. На колико начина се могу изабрати три различита броја од 1 до 30 тако да њихов збир буде паран број?

Решење: Збир три броја ће бити паран уколико су сва три броја парна, или ако је један паран и два непарна. Три парна броја из скупа $\{1, 2, \ldots, 30\}$ можемо изабрати на $\binom{15}{3}$ начина. Број начина да изаберемо један паран број и два непарна из истог скупа је $\binom{15}{1}\binom{15}{2}$. Решење добијамо сабирањем броја начина у ова два случаја.

2.27. На колико начина се из скупа од 17 особа може изабрати 12 под условом

а) ако је изабрана особа A, тада мора бити изабрана и особа B;
б) ако је изабрана особа A, тада не сме бити изабрана особа B?

Решење: а) У случају да је изабрана особа A, због услова задатка мора бити изабрана и особа B, па треба одабрати још 10 особа од преосталих 15 и то радимо на $\binom{15}{10}$ начина. Ако особа A није изабрана, од преосталих 16 особа треба одабрати свих 12 особа на $\binom{16}{12}$ начина. Укупан број начина да се изаберу особе је $\binom{15}{10} + \binom{16}{12}$.

б) Ако је особа A изабрана, особа B не може бити бирана и тада треба одабрати још 11 особа од 15 на $\binom{15}{11}$ начина. Случај да особа A није изабрана је исти као у задатку под *а)* и имамо $\binom{16}{12}$ могућих избора. Решење добијамо сабирањем броја начина у случајевима када особа A јесте, односно није изабрана.

2.28. Колико има низова од n нула и k јединица, где је $k \leq n+1$, таквих да никоје две јединице нису суседне?

Решење: Поређајмо прво n нула у низ тако да између сваке две нуле остане једно празно место. На овај начин смо направили $n-1$ место где се могу наћи јединице. Како јединица може бити и на почетку, односно на крају низа, имамо укупно $(n-1)+2 = n+1$ потенцијалних места за јединице. Сада од тих $n+1$ места бирамо k места на којима ће се налазити јединице и то можемо урадити на $\binom{n+1}{k}$ начина.

2.29. За округлим столом краља Артура седи 12 витезова. Познато је да је сваки од њих у свађи са својим непосредним суседом за столом. На колико начина се може изабрати 5 витезова, тако да никоја два међу њима нису у свађи?

Решење: Уочимо једног витеза. Нека је то витез Ланселот. Разликујемо два случаја, у зависности од тога да ли је Ланселот изабран, или није. Ако је Ланселот изабран, тада његови суседи за столом не могу бити бирани. Сада треба одабрати још 4 витеза од преосталих 9, при чему не могу бити изабрана два витеза која су седела један до другог за столом. Уколико витезове које траба одабрати прогласимо јединицама, а преостале нулама, онда имамо низ од 4 јединице и 5 нула и на основу претходног задатка знамо да имамо $\binom{5+1}{4} = \binom{6}{4}$ таквих низова. У случају да Ланселот није изабран, његови суседи могу, али не морају, бити изабрани. То значи да треба одабрати свих 5 витезова од укупно 11 и број начина да се то уради је $\binom{6+4}{5} = \binom{7}{5}$. Укупан број начина да се одаберу витезови је према томе $\binom{6}{4} + \binom{7}{5} = 36$.

2.30. Домина је плочица за игру на коју су налепљене две сличице (не обавезно различите). Ако на располагању имамо 7 врста сличица, колико је различитих домина могуће направити помоћу њих?

Решење:

2.31. Колико има природних бројева мањих од 1000000 чији је збир цифара 7?

Решење:

2.32. Колико целобројних решења има једначина $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 23$ уз услов $x_i > i$?

Решење:

2.33. Колико решења у скупу ненегативних целих бројева има неједначина

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leq n$$

Решење:

2.34. Колико се различитих речи, без обзира на смисао, може написати од свих слова садржаних у речима МАТЕМАТИКА и КОМБИНАТОРИКА?

Решење:

2.35. На колико начина се два топа, два скакача, два ловца, краљ и краљица могу поставити у први ред шаховске табле, тако да ловци буду на пољима различите боје?

Решење:

2.36. Из комплета који садржи 32 различите карте бира се 8 карата СА/БЕЗ враћања, тако да њихов редослед ЈЕСТЕ/НИЈЕ битан. Колико различитих избора има?

Решење:

Испитни задаци

2.37. Посматрајмо све низове декадних цифара дужине 6. Да ли међу њима има више оних код којих је збир цифара 27 или оних код којих је збир прве три цифре једнак збиру последње три цифре?

Решење: Нека је A скуп свих низова код којих је збир цифара 27, а B скуп свих низова код којих је збир прве три цифре једнак збиру последње три цифре. Нека је $b_1b_2b_3b_4b_5b_6$ произвољан низ из B. Конструисаћемо пресликавање $f : B \to A$ на следећи начин

$$f(b_i) = \begin{cases} 9 - b_i, & i = 1, 2, 3 \\ b_i, & i = 4, 5, 6 \end{cases}$$

Овако дефинисано пресликавање је добро дефинисано јер је

$$\begin{aligned} f(b_1) + \cdots + f(b_6) &= (9 - b_1) + (9 - b_2) + (9 - b_3) + b_4 + b_5 + b_6 \\ &= 27 - (b_1 + b_2 + b_3) + (b_4 + b_5 + b_6) = 27, \end{aligned}$$

па $f(b_1) \dots f(b_6) \in A$. Једноставном провером се долази до закључка да је пресликавање f бијекција, одакле на основу принципа бијекције добијамо да посматрани скупови имају исти број елемената.

2.38. На забави је било 10 девојака и 6 младића. Ако у неком плесу учествују сви младићи, колико има могућности за формирање плесних парова?

Решење: Било која од 10 девојака може бити плесни партнер првом младићу. Други младић тада може изабрати једну од преосталих 9 девојака, трећи неку од 8 девојака, $\dots$, шести неку од 5 девојака. Сада је број начина за формирање плесних парова $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

II начин: Број начина да одаберемо које девојке учествују у плесу је $\binom{10}{6}$. Затим на $6!$ начина можемо формирати плесне парове од изабраних девојака и младића, па је укупнан број начина $\dbinom{10}{6} \cdot 6!$.

2.39. У 15 клупа у учионици треба распоредити 15 девојчица и 15 дечака тако да у свакој клупи седе једна девојчица и један дечак. На колико начина је то могуће учинити?

Решење: Девојчице размештамо у клупе на 15! начина и исто толико начина имамо за размештање дечака. Када су сва деца распоређена у клупе, треба још видети да ли ће седети дечак–девојчица или девојчица–дечак, а то можемо учинити на 2 начина. Према томе, решење је $15! \cdot 15! \cdot 2^{15}$.

2.40. У разреду са 20 ученика на сваких месец дана се бирају председник, секретар и благајник (сваку од функција обавља тачно један ученик). Ако се током школске године одржи осам оваквих избора и приликом сваког бирања руководства разреда учествује свих 20 ученика, одредити укупан број исхода на изборима у току једне школске године.

Решење: Број начина да се у једном изборном циклусу изабере председник, секретар и благајник разреда је $20 \cdot 19 \cdot 18$. Како сви ученици могу бити бирани у сваком изборном циклусу добијамо да је укупан број исхода за избор руководства разреда у једној школској години $(20 \cdot 19 \cdot 18)^8$.

2.41. На колико начина 7 дечака и 3 девојчице могу да стану у ред ако никоје две девојчице не стоје једна поред друге и на почетку и крају реда треба да буде дечак?

Решење: Разместимо прво дечаке. То можемо учинити на 7! начина. Како девојчице не могу да стоје на почетку и на крају реда закључујемо да имамо 6 места између дечака на која можемо ставити девојчице. Према томе, тражено решење је $7! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

2.42. Азбука садржи 5 самогласника (*А, Е, И, О, У*) и 25 сугласника. Посматрају се речи дужине 8 над азбуком (без обзира на смисао) које садрже 3 самогласника, 5 сугласника и у којима нема понављања слова. Колико таквих речи почиње словом *А* и завршава се словом *Б*?

Решење: Како тражена реч треба да садржи укупно 3 самогласника и 5 сугласника, преостала 2 самогласника бирамо на $\binom{4}{2}$ начина, а преостале сугласнике на $\binom{24}{4}$ начина. Изабрали смо сва слова за реч и треба још испермутовати малопре изабрана слова на позиције од друге до седме, а то радимо на 6! начина. Укупан број тражених речи је сада $\binom{4}{2}\binom{24}{4}6!$.

2.43. Колико има речи дужине 5 над азбуком $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ код којих се слова не понављају и које не садрже подреч abc?

Решење: Укупан број речи дужине 5 над азбуком $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ у којима се слова не понављају је $8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4$. Посматрајмо сада речи које садрже подреч abc. Позицију подречи abc у речи дужине пет можемо одредити на 3 начина. Сада преостала два слова речи бирамо на $5\cdot4$ начина, па имамо укупно $3\cdot5\cdot4$ речи које садрже подреч abc. Решење је тада $8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4-3\cdot5\cdot4$.

2.44. Колико има начина да n особа стане у ред ако између Петра и Немање стоји тачно k других особа?

Решење: Блок од $k+2$ особе где су прва и последња позиција резервисане за Петра и Немању можемо разместити у оквиру низа од n елемената на $n-(k+2)+1=n-k-1$ начина. Када смо одабрали позицију блока у оквиру низа, заправо смо фиксирали на којим местима ће се налазити Петар и Немања, који могу бити размештени тако да Петар буде први, или да Немања буде први. Преостале особе сада можемо разместити на $(n-2)!$ начина. Коначно решење добијамо применом принципа производа и оно износи $2\cdot(n-k-1)\cdot(n-2)!$.

2.45. Брајева азбука је специјално писмо намењено слепим и слабовидим особама. Сваки карактер у Брајевој азбуци представљен је са шест тачкица (распоређених у три врсте и две колоне), при чему свака тачкица може бити одштампана или не. Колико карактера може бити направљено у Брајевој азбуци, ако је у сваком карактеру одштампана бар једна тачкица?

Решење: Како је број тачкица које могу бити одштампане у једном карактеру једна, две, три, четири, пет или шест добијамо да је укупан број карактера које можемо написати у Брајевој азбуци $\sum_{k=1}^{6}\binom{6}{k}$. Број карактера можемо израчунати на следећи начин

$$\sum_{k=1}^{6}\binom{6}{k}=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}-1=2^6-1=64-1=63.$$

2.46. За учешће на ФТН Слагалици пријавило се 30 екипа. Организатори су обезбедили награде за 8 најбољих екипа. Одредити на колико начина могу бити додељене награде, ако је познато да ће екипа која је победила на ФТН Потери, завршити такмичење на једном од прва 3 места.

Решење: Прво на 3 начина бирамо место које је освојила екипа која је победила на ФТН Потери. Затим се од преосталих 29 екипа бира 7 екипа које су освојиле остале награде и то можемо урадити на $\binom{29}{7}$ начина. Када смо одабрали преостале екипе које су освојиле награде треба још видети на колико начина те награде могу бити додељење, а то радимо на 7! начина. Добијамо да је укупан број начина на који могу бити додељене награде $3 \cdot \dbinom{29}{7} \cdot 7!$.

2.47. Колико има шестоцифрених бројева код којих су све цифре различите, при чему су друга и четврта непарне?

Решење: Одаберимо прво непарне цифре за другу и четврту позицију. За другу цифру имамо 5, а за четврту 4 могућности. Сада за прву цифру можемо бирати било коју од преосталих цифара осим нуле па имамо 7 начина за избор прве цифре. За трећу, пету и шесту цифру немамо додатних услова и њих можемо изабрати на 7,6 и 5 начина, респективно. Дакле решење је $7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5$.

2.48. Колико има шестоцифрених бројева који се могу написати помоћу ненула цифара, ако се цифре не понављају и цифре 1 и 2 нису суседне?

Решење: Број шестоцифрених бројева који се могу написати помоћу ненула цифара без понављања је $\binom{9}{6} \cdot 6!$. „Лоши” бројеви су они код којих су цифре 1 и 2 суседне и њихов број је $\binom{7}{4} \cdot 2 \cdot 5!$. Тражених бројева према томе има $\dbinom{9}{6} \cdot 6! - \dbinom{7}{4} \cdot 2 \cdot 5!$.

2.49. Колико има парних троцифрених бројева код којих се цифре не понављају?

Решење: Разликујемо два случаја. Ако је последња цифра 0, за прву цифру имамо 9, а за другу 8 могућности. Ако последња цифра није 0, онда имамо 4 могућности за последњу цифру - 2, 4, 6 или 8. Тада на место прве цифре може доћи једна од 8 цифара (све сем 0 и цифре коју смо фиксирали на последњем месту). Како 0 сада може бити друга цифра имамо 8 могућности за избор друге цифре. Коначно решење је $9 \cdot 8 \cdot 1 + 8 \cdot 8 \cdot 4$.

2.50. На располагању имамо 6 основних боја. Нове боје добијамо мешањем основних боја узимајући једнаке количине основних боја. Да ли је могуће офарбати поља шаховске табле користећи ове боје, тако да свако поље буде обојено другом бојом?

Решење: За добијање изведених боја можемо помешати две, три, четири, пет или свих шест основних боја, па је број изведених боја $\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}$. Тада је укупан број боја које можемо добити користећи ових 6 основних боја једнак

$$\sum_{k=1}^{6}\binom{6}{k}=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}-1=2^6-1=64-1=63.$$

Како је шаховска табла димензије 8×8 закључујемо да није могуће офарбати свако поље на табли другом бојом.

2.51. На колико начина на таблу димензија 8×8 можемо поставити 10 белих и 6 црних жетона? (Жетоне исте боје не разликујемо.)

Решење: Прво ћемо одабрати поља на којима ће се налазити жетони и то радимо на $\binom{64}{16}$ начина. Након што смо одабрали поља за жетоне, бирамо 10 поља на којима ће се налазити бели жетони на $\binom{16}{10}$ начина (црне жетоне ћемо онда поставити на преосталих 6 изабраних поља). Укупан број начина да поставимо жетоне на таблу је $\binom{64}{16}\cdot\binom{16}{10}$.

II начин: Задатак смо могли да решимо и тако што прво одаберемо поља за беле жетоне на $\binom{64}{10}$ начина. Затим од преосталих 54 поља бирамо 6 поља за црне жетоне и то радимо на $\binom{54}{6}$ начина. Коначно решење је сада $\binom{64}{10}\cdot\binom{54}{6}$.

2.52. Вечерас се у Торину у Италији игра финале Светског првенства у одбојци за мушкарце. На шампионату су учествовале 24 екипе које су биле подељене у 4 групе (A, B, C, D) од по 6 екипа. Прве 4 екипе из сваке групе су прошле у другу фазу такмичења, за коју су оформљене 4 нове групе E, F, G и H на следећи начин.

E	F	G	H
1A	1B	1C	1D
2B	2A	2D	2C
3C	3A	3D	3B
4D	4C	4B	4A

Победници нових група и две најбоље другопласиране екипе су обезбедиле одлазак у Торино на завршницу шампионата. У Торину су репрезентације жребом подељено у 2 групе I и J. Након мечева

у овим групама, две првопласиране екипе из сваке групе су се пласирале у полуфинале. Одредити који ће по реду бити меч за злато на Светском првенству. (*30. септембар 2018. године*)
Напомена: У свакој од 10 група екипе су играле по систему свака екипа из групе игра са сваком.

Решење: Можемо поделити Светско првенство у три фазе. У првој фази је одиграно $4 \cdot \binom{6}{2} = 60$ утакмица, док је у другој одиграно $4 \cdot \binom{4}{2} = 24$ утакмице. У завршници шампионата је одиграно $2 \cdot \binom{3}{2} = 6$ мечева у групама I и J, а затим и два полуфинална меча. Како борби за златну медаљу претходи утакмица за бронзу, финале је 94. меч на шампионату.

2.53. Предтакмичење на фудбалском турниру се одвија у m група ($m > 1$), при чему је свака група састављена од $2k$ екипа ($k > 1$). У групама екипе играју свака са сваком и прве две екипе из сваке групе пролазе у завршну фазу турнира. У завршној фази екипе такође играју свака са сваком, с тим што екипе које су се већ састајале у предтакмичењу не играју нову утакмицу. Колико је укупно утакмица одиграно на овом фудбалском турниру?

Решење: У свакој групи предтакмичења је одиграно $\binom{2k}{2}$ утакмица. Како из сваке групе пролазе по две екипе у завршу фазу и екипе које су већ играле у групи не играју нову утакмицу, број утакмица у другој фази је $\binom{2m}{2} - m$. Сада је укупан број утакмица на турниру $m\dbinom{2k}{2} + \dbinom{2m}{2} - m$.

2.54. Дате су паралелне праве p и q. На правој p је уочено m, а на правој q је уочено n тачака. Одредити колико троуглова образују дате тачке.

Решење: Знамо да је сваки троугао јединствено одређен са својим теменима. Да бисмо уопште могли формирати троугао неопходно је да два темена буду са једне праве, а треће са друге (у противном имамо три колинеарне тачке и није могуће формирати троугао). Број начина да изаберемо две тачке са праве p и једну тачку са праве q је $\dbinom{m}{2}\dbinom{n}{1}$. Уколико се бира једна тачка са праве p и две са q одговарајући број избора је $\dbinom{m}{1}\dbinom{n}{2}$. Укупан број троуглова које образују уочене тачке је дакле $\dbinom{m}{2}\dbinom{n}{1} + \dbinom{m}{1}\dbinom{n}{2}$.

2.55. У равни се налази 10 тачака. Тачке A, B, C и D су колинеарне, а међу преосталим тачкама сваке 3 су неколинеарне. Колико има правих које се могу конструисати кроз ових 10 тачака?

Решење: Максималан број правих који могу одредити 10 тачака у равни је $\binom{10}{2}$. Пошто су тачке A, B, C и D колинеарне, $\binom{4}{2}$ правих које оне одређују представљају једну исту праву. Зато је тражени број правих $\binom{10}{2} - \binom{4}{2} + 1 = 40$.

II начин: Тачке A, B, C и D одређују једну праву, док преосталих 6 тачака одређује $\binom{6}{2}$ правих између себе. Треба још одредити број правих које су одређене са једном од ове 4 колинеарне тачке и једном од преосталих 6 тачака. Како је број оваквих правих $4 \cdot 6$, добијамо да је укупно могуће конструисати $1 + \binom{6}{2} + 4 \cdot 6 = 40$ правих.

2.56. На свакој страници квадрата задате су по три произвољне тачке од којих ниједна није теме квадрата. Одредити број троуглова који је одређен са дванаест задатих тачака.

Решење: Разликујемо два случаја. Уколико темена троугла припадају трима различитим страницама квадрата број троуглова је $\binom{4}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$. Други случај је да се на једној страници квадрата налазе два темена троугла. Прво на $\binom{4}{2}$ начина бирамо две странице квадрата, а затим на $\binom{2}{1}$ начина бирамо са које од те две одабране странице се узимају две тачке. Сада је број троуглова $2 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{3}{1} = 108$. Укупан број троуглова који је одређен задатим тачкама је 216.

II начин: Дванаест тачака у равни, од којих никоје три нису колинеарне, одређивало би $\binom{12}{3} = 220$ троуглова. Како се на свакој страници квадрата налазе по 3 колинеарне тачке број тражених троуглова је $220 - 4 = 216$.

2.57. Дато је пет правих и на свакој од њих је уочено по четири тачке. Колико највише троуглова образују дате тачке?

Решење: Слично као у претходном задатку посматрамо случај да су тачке изабране са три различите праве и случај да се две тачке бирају са исте праве. У првом случају бирамо три праве од 5 на $\binom{5}{3}$ начина, а затим са сваке од изабраних правих бирамо једну од 4 тачке. Број начина да то урадимо је $\binom{5}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 640$. Уколико се са једне праве узимају две тачке, ту праву можемо изабрати на 5 начина, док праву са које узимамо треће теме троугла бирамо на 4 начина. Остаје још да изаберемо две, односно једну тачку са изабраних правих, па је број тражених троуглова $5 \cdot 4 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} = 480$.

Добијамо да уочене тачке одређују највише 1120 троуглова.

II начин: Уколико би свих $5 \cdot 4 = 20$ тачака било неколинеарно имали бисмо $\binom{20}{3} = 1140$ троуглова. Пошто су тачке које се налазе на истој правој колинеарне, неопходно је одузети све такве тројке тачака. Како имамо 5 правих број „лоших” тројки је $5 \cdot \binom{4}{3} = 20$. Коначно решење је $1140 - 20 = 1120$.

2.58. У равни је дато 15 тачака, од чега су 4 обојене црвеном, 5 плавом и 6 зеленом бојом. Одредити број троуглова који имају темена обојена са две различите боје, ако је познато да никоје три тачке нису колинеарне.

Решење: Разликујемо три случаја. Уколико троугао има два црвена темена, треће теме може бити плаво или зелено. Број троуглова који имају два црвена темена је $\binom{4}{2}(5+6) = 66$. На исти начин добијамо да је број троуглова са два плава темена $\binom{5}{2}(4+6) = 100$, а број троуглова са два зелена темена $\binom{6}{2}(4+5) = 135$. Укупан број тражених троуглова је 301.

2.59. Колико има начина да се на две полице размести 15 књига ако на свакој полици треба да буду бар три књиге?

Решење: Ако на првој полици имамо k књига, онда на другој имамо $15-k$ књига. Тада је укупан број начина да се књиге распореде на ове две полице

$$\binom{15}{k} k!(15-k)! = \frac{15!}{k!(15-k)!} k!(15-k)! = 15!.$$

Како на свакој полици треба да буду бар 3 књиге добијамо да $k \in \{3, 4, 5, \ldots, 12\}$. Сада је укупан број начина да распоредимо ових 15 књига на две полице $10 \cdot 15!$.

2.60. Милан је позвао 5 девојчица и 6 дечака на прославу свог рођендана у играоници. На колико начина деца могу да седну око округлог стола, ако између Милана и његовог најбољег друга Ивана седе тачно 3 девојчице и ниједан дечак?

Решење: Прво ћемо одредити број начина да се формира блок од 5 особа у ком три девојчице седе између Милана и Ивана. Како прво може да седне Милан или Иван имамо $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ начина за формирање овог блока. Сада преостаје да се блок и преосталих 7 особа разместе око округлог стола што се може урадити на $\dfrac{8!}{8} = 7!$ начина. Коначно, укупан број начина да деца седну око одруглог стола је $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7!$.

2.61. У једном управном одбору са n чланова постоји председник и два потпредседника. На колико начина се чланови управног одбора могу разместити око округлог стола тако да оба потпредседника седе поред председника?

Решење: Посматрајмо председника и два потпредседника као блок од три елемента. Број начина да овај блок од три члана испермутујемо заједно са преосталим члановима управног одбора око округлог стола је $\frac{(n-3+1)!}{n-3+1} = (n-3)!$. Како у зависности од тога који потпредседник седи са леве, а који са десне стране потпредседника добијамо различите размештаје особа око округлог стола решење је $2 \cdot (n-3)!$.

2.62. На колико начина 10 дечака и 5 девојчица могу стати у круг ако две девојчице не смеју да стоје једна до друге?

Решење: Због услова да девојчице не смеју да стоје једна поред друге, прво ћемо поређати само дечаке у круг. Број начина да то урадимо је $9!$. Сада имамо 10 места између дечака на која могу доћи девојчице, одакле следи да је број начина да се разместе девојчице $10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6$. Број начина да деца стану у круг је $10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}9!$.

2.63. На колико начина n мушкараца и n жена може сести око округлог стола ако особе истог пола не смеју да седе једна до друге?

Решење: Мушкарце можемо смести у круг на $(n-1)!$ начина. Сада између свака два мушкарца треба сместити по једну жену, што можемо урадити на $n!$ начина. Укупан број начина да седну око стола је $(n-1)!n!$.

2.64. Палиндром је низ симбола који се чита исто и са леве и десне стране. Примери низова који су палиндроми су рецимо око, невен, Ана воли Милована, 12321. Одредити колико има $n-$цифрених природних бројева који су палиндроми.

Решење: Разликујемо случајеве када је n парно и када је непарно. За n парно је потребно одредити првих $\frac{n}{2}$ цифара и то можемо урадити на $9{\cdot}10^{\frac{n}{2}-1}$ начина (0 не може бити прва цифра). У случају када је n непарно имамо $9 \cdot 10^{\frac{n+1}{2}-1}$ палиндрома. Приметимо да се број палиндрома може записати и као $9 \cdot 10^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$, за $n \in \mathbb{N}$.

2.65. На колико начина је од 6 мушкарца и 4 жене могуће изабрати делегацију у којој ће бити једнак број мушкараца и жена?

Решење: Како делегација треба да има исти број мушкараца и жена, у делегацији може бити двоје, четворо, шесторо или осморо људи. Сада је тражено решење

$$\binom{6}{1}\binom{4}{1}+\binom{6}{2}\binom{4}{2}+\binom{6}{3}\binom{4}{3}+\binom{6}{4}\binom{4}{4}.$$

2.66. На колико начина се из стандардног шпила са 52 карте може извући 4 карте, тако да међу њима буду највише 2 даме?

Решење: Разликујемо случајеве када су извучене две даме, једна дама и када нема дама. Стандардни шпил са 52 карте садржи 4 даме. Број начина да извучемо тачно 2 даме из шпила је $\binom{4}{2}$. Након што смо изабрали 2 даме, остаје да се извуку још 2 карте од преосталих 48 карата које нису даме, а то можемо урадити на $\binom{48}{2}$ начина. Користећи аналогно разматрање у случајевима када имамо само једну даму и када уопште нису извучене даме, добијамо да је решење задатка

$$\binom{4}{2}\binom{48}{2}+\binom{4}{1}\binom{48}{3}+\binom{4}{0}\binom{48}{4}.$$

2.67. На колико начина је могуће оформити комисију са шест чланова од 7 жена и 4 мушкарца, ако у њој треба да буде исти број жена и мушкараца и Ана и Пера не могу бити истовремено чланови комисије?

Решење: Укупан број комисија које имају 3 жене и 3 мушкарца је $\binom{7}{3}\binom{4}{3}$. Комисије у којима се налазе и Ана и Пера нису добре и број таквих комисија је $\binom{6}{2}\binom{3}{2}$. Сада је број тражених комисија $\binom{7}{3}\binom{4}{3}-\binom{6}{2}\binom{3}{2}$.

II начин: Разликујемо комисије у којима се налази Ана и оне у којима се не налази. Ако је Ана у комисији, тада Пера не може бити изабран и број таквих комисија је $\binom{6}{2}\binom{3}{3}$. У случају да Ана није део комисије, Пера може али и не мора бити изабран, па је број комисија $\binom{6}{3}\binom{4}{3}$. Решење добијамо сабирањем броја решења из ова два случаја.

2.68. Један кошаркаши тим има 5 играча који играју на позицији бека, 4 на позицији центра и 3 на позицији крила. На колико начина тренер може одредити који играчи ће играти у првој петорци, ако у њој треба да буду бар два бека, бар један центар и бар једно крило?

Решење: Тренер се може одлучити за један од следећа три састава прве петорке: 3×Б 1×Ц 1×К, 2×Б 2×Ц 1×К или 2×Б 1×Ц 2×К. Одавде добијамо да је број начина да се одаберу играчи за прву петорку

$$\binom{5}{3}\binom{4}{1}\binom{3}{1}+\binom{5}{2}\binom{4}{2}\binom{3}{1}+\binom{5}{2}\binom{4}{1}\binom{3}{2}.$$

2.69. Хор у једној гимназији броји 25 девојака и 14 момака, од чега су 10 девојака и 4 момка матуранти. На колико начина диригент може да изабере састав од 7 особа за свечаност, ако у саставу треба да буде тачно 4 матуранта и тачно 5 девојака?

Решење: Разликујемо следећа три случаја. Уколико су сва четири матуранта у изабраном саставу девојке, онда од преосталих 15 девојака треба одабрати још једну. У овом случају су сви младићи у саставу ученици нижих разреда, па од 10 момака бирамо два. Број начина на који то можемо урадити је $\binom{10}{4}\binom{15}{1}\binom{10}{2}$. Друга могућност је да имамо три девојке и једног момка матуранта. Сада од преосталих 15 девојака бирамо још две и од преосталих 10 момака бирамо једног, што диригену даје $\binom{10}{3}\binom{4}{1}\binom{15}{2}\binom{10}{1}$ могућих избора. Остаје још случај да имамо по две девојке и два момка који су матуранти у саставу. У том случају треба одабрати још три девојке од 15 девојака нижих разреда за састав, па је број избора $\binom{10}{2}\binom{4}{2}\binom{15}{3}$. Коначно решење добијамо сабирањем броја избора у ова три случаја.

2.70. Влада има 5 жена и 7 мушкараца међу својим пријатељима, а Маја има 8 жена и 4 мушкарца за пријатеље. На колико начина Влада и Маја могу позвати 6 жена и 6 мушкараца на вечеру тако да 6 гостију позове Влада, а 6 гостију Маја?

Решење: У следећој табели су дати могући случајеви:

Влада	4 ж 2 м	3 ж 3 м	2 ж 4 м	1 ж 5 м	0 ж 6 м
Маја	2 ж 4 м	3 ж 3 м	4 ж 2 м	5 ж 1 м	6 ж 0 м

Број начина да Влада и Маја позову госте на вечеру је

$$\binom{5}{4}\binom{7}{2}\binom{8}{2}\binom{4}{4}+\binom{5}{3}\binom{7}{3}\binom{8}{3}\binom{4}{3}+\binom{5}{2}\binom{7}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{2}$$
$$+\binom{5}{1}\binom{7}{5}\binom{8}{5}\binom{4}{1}+\binom{7}{6}\binom{8}{6}.$$

2.71. На полици се налази 12 књига. На колико начина је могуће изабрати 5 књига тако да никоје две међу изабраним књигама нису стајале једна до друге на полици?

Решење: Знамо да је број низова са n нула и k јединица ($k \leq n+1$) који немају узастопне јединице једнак $\binom{n+1}{k}$. Посматрајмо пет књига које треба изабрати као јединице, а нека преостале књиге буду нуле. Сада је на основу поменутог тврђења број начина да се изабере 5 књига које нису биле суседне на полици $\binom{7+1}{5}=\binom{8}{5}$.

2.72. На колико начина се може написати реч дужине 10 користећи само слова a, b, c и d, ако свако слово треба да се појави бар 2, али не више од 4 пута?

Решење: Разликујемо два случаја. Тражена реч може имати једно слово које се појављује 4 пута, док је број појављивања преостала три слова 2. Слово које се појављује 4 пута у речи можемо изабрати на $\binom{4}{1}$ начина, а затим треба испермутовати одабрана слова на $\binom{10}{4,2,2,2}$ начина (пошто се слова понављају имамо пермутације са понављањем). Друга могућност је да реч садржи два слова која се појављују 3 пута и два слова која се појављују 2 пута. У овом случају имамо $\binom{4}{2}\binom{10}{3,3,2,2}$ речи. Сабирањем броја речи у ова два случаја добијамо да је тражено решење $4 \cdot \frac{10!}{4!2!2!2!} + 6 \cdot \frac{10!}{3!3!2!2!}$.

2.73. Колико решења има једначина $x + y + z = 15$ у скупу
  а) ненегативних целих бројева;
  б) позитивних целих бројева?

Решење: а) Број решења једначине $x + y + z = 15$ у скупу ненегативних целих бројева је $\binom{15+3-1}{2} = \binom{17}{2}$.

б) Увођењем смене

$$\begin{aligned} a &= x - 1 \geq 0 \\ b &= y - 1 \geq 0 \\ c &= z - 1 \geq 0, \end{aligned}$$

проблем одређивања броја решења једначине $x+y+z = 15$ у скупу природних бројева смо свели на решавање једначине $a+b+c = 12$ у скупу ненегативних целих бројева, која има $\binom{12+3-1}{2} = \binom{14}{2}$ решења.

2.74. Одредити број целобројних решења једначине

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32,$$

ако је $x_i \geq -2$, $1 \leq i \leq 4$.

Решење: Сменом $y_i = x_i + 2$ за свако i, полазна једначина постаје $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 40$, при чему је $y_i \geq 0$. Сада је број решења ове једначине $\binom{40+4-1}{4-1} = \binom{43}{3}$.

2.75. Одредити број решења једначине

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(y_1 + y_2 + y_3) = 65$$

у скупу природних бројева.

Решење: Приметимо прво да број 65 можемо записати као $1 \cdot 65$ или као $13 \cdot 5$. Како се решења траже у скупу $\mathbb{N}$, знамо да мора да важи $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4$ и $y_1 + y_2 + y_3 \geq 3$. Одавде је

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 13 \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 13 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 5. \end{aligned}$$

Сменама $x'_i = x_i - 1 \geq 0$ и $y'_j = y_j - 1 \geq 0$ проблем сводимо на одређивање броја решења система

$$\begin{aligned} x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 &= 1 \\ y'_1 + y'_2 + y'_3 &= 10 \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad \begin{aligned} x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 &= 9 \\ y'_1 + y'_2 + y'_3 &= 2 \end{aligned}$$

у скупу ненегативних целих бројева. Број решења првог система је тада $\binom{1+3}{3}\binom{10+2}{2}$, док је број решења другог $\binom{9+3}{3}\binom{2+2}{2}$. Добијамо да је тражени број решења $\binom{4}{3}\binom{12}{2}+\binom{12}{3}\binom{4}{2}$.

2.76. Одредити број решења система једначина

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_7 &= 35 \\ x_1+x_2+x_3 &= 10 \end{aligned}$$

у скупу природних бројева.

Решење: Након увођења смене $y_i = x_i - 1$ добијамо систем

$$\begin{aligned} y_1+y_2+y_3+\cdots+y_7 &= 28 \\ y_1+y_2+y_3 &= 7, \end{aligned}$$

уз услов $y_i \geq 0$, за $i = 1, 2, \ldots, 7$. Знамо да друга једначина има $\binom{7+2}{2} = \binom{9}{2}$ решења у скупу ненегативних целих бројева. Када у прву једначину уврстимо да је $y_1+y_2+y_3 = 7$ добија се једначина $y_4+y_5+y_6+y_7 = 21$, која има $\binom{21+3}{3} = \binom{24}{3}$ решења. Како решења система требају да задовоље обе једначине, добијамо да систем има $\binom{9}{2}\cdot\binom{24}{3}$ решења.

2.77. Одредити број решења неједначине

$$7 \leq x_1+x_2+x_3+x_4 \leq 12$$

у скупу природних бројева.

Решење: Пошто се решења траже у скупу природних бројева неопходно је прво увести смену $y_i = x_i - 1$, за $i = 1, 2, 3, 4$. На овај начин смо проблем свели на одређивање броја решења неједначине

$$3 \leq y_1+y_2+y_3+y_4 \leq 8,$$

ако је $y_i \geq 0$. Како се решења ове неједначине траже у скупу ненегативних целих бројева, добијену неједначину можемо представити помоћу шест једначина. Израчунавањем броја решења за сваку од тих једначина добијамо да је број решења посматране неједначине

$$\sum_{k=3}^{8}\binom{k+3}{3} = \binom{3+3}{3}+\binom{4+3}{3}+\binom{5+3}{3}+\binom{6+3}{3}+\binom{7+3}{3}+\binom{8+3}{3}.$$

2.78. Одредити број решења неједначине $x_1+x_2+x_3+x_4 \leq 7$ у скупу $\mathbb{N}_0$, ако је $x_1 \geq 1$ и $x_2 \geq 2$.

Решење: Увођењем смена $y_1 = x_1 - 1$ и $y_2 = x_2 - 2$ почетна неједначина се трансформише у неједначину $y_1+y_2+x_3+x_4 \leq 4$ у скупу ненегативних целих бројева. Ова неједначина је еквивалентна са следећим скупом једначина $\{y_1 + y_2 + x_3 + x_4 = i \,|\, i = 0, 1, 2, 3, 4\}$, па је тражени број решења

$$\binom{4+3}{3} + \binom{3+3}{3} + \binom{2+3}{3} + \binom{1+3}{3} + \binom{0+3}{3} = 70.$$

II начин: Број решења неједначине $y_1 + y_2 + x_3 + x_4 \leq 4$ једнак је броју решења једначине $y_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4$, $x_5 \in \{0, 1, \dots, 4\}$, којих има $\binom{4+4}{4} = 70$.

2.79. Пет риболоваца је упецало 20 риба. На колико начина се то могло десити ако:

а) не мора сваки риболовац имати улов;

б) знамо да је сваки риболовац упецао бар две рибе?

Решење: Ако са x_i означимо број риба које је упецао $i-$ти риболовац, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, задатак се своди на одређивање броја решења једначине $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$.

а) Из услова да не мора сваки риболовац имати улов закључујемо да је $x_i \geq 0$, па је број решења једначине $\binom{20+4}{4} = \binom{24}{4}$.

б) Сада имамо услов $x_i \geq 2$, за свако i, који сменом $y_i = x_i - 2$ полазну једначину преводи у проблем $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 10, y_i \geq 0$. Број решења нове једначине у скупу ненегативних целих бројева је $\binom{10+4}{4} = \binom{14}{4}$.

2.80. На колико начина 8 идентичних куглица можемо распоредити у 3 различите кутије, тако да у свакој кутији буде бар једна куглица?

Решење: Број начина да се распореде куглице одговара броју решења једначине $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ у скупу природних бројева. Сменом $y_i = x_i - 1$, $i = 1, 2, 3$, добија се једначина $y_1 + y_2 + y_3 = 5$, где је $y_i \geq 0$, која има $\binom{5+2}{2} = \binom{7}{2}$ решења.

2.81. Из кутије у којој се налазе куглице нумерисане бројевима $0, 1, 2, \ldots, 9$, извлачи се 8 куглица са враћањем. Колико има извлачења у којима је изабрана бар једна парна куглица? (Редослед којим се извлаче куглице није битан.)

Решење: Од укупног броја извлачења ћемо одузети она у којима није извучена ниједна парна куглица. Број свих извлачења одговара броју решења једначине $x_0 + x_1 + \cdots + x_9 = 8$ у скупу ненегативних целих бројева и тај број износи $\binom{8+10-1}{8}$. Уколико није извучена ниједна парна куглица, онда је $x_0 = x_2 = x_4 = x_6 = x_8 = 0$, па посматрана једначина постаје $x_1+x_3+x_5+x_7+x_9 = 8$. Како је број решења ове једначине $\binom{8+5-1}{8}$ добијамо да је број извлачења у којима је извучена бар једна парна куглица једнак $\binom{17}{8} - \binom{12}{8}$.

2.82. На колико начина 40 црних маркера можемо распоредити у 5 различитих кутија, ако прва и друга кутија треба да садрже исти број маркера?

Решење: Задатак се може записати на следећи начин: одредити број решења једначине $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 40$, ако је $x_i \geq 0$ и $x_1 = x_2$. Уврштавањем услова добијамо $2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 40$, па треба одредити број решења једначине $x_3 + x_4 + x_5 = 40 - 2k$ у скупу ненегативних целих бројева, где $k \in \{0, 1, \ldots, 20\}$. Тражени број решења је $\sum_{k=0}^{20} \binom{40-2k+2}{2} = \sum_{k=0}^{20} \binom{42-2k}{2}$.

Задаци за самостални рад

2.83. На колико начина 8 ученика може сести на:

а) 6 различитих столица; *б)* 12 различитих столица?

2.84. У природно-математичком одељењу гимназије од 15 ученика математику жели да студира 6 ученика, физику 5, а остали хемију. На колико начина је могуће изабрати групу од 5 ученика ако у њој треба да буду бар два будућа математичара, бар један физичар и бар један хемичар?

2.85. У једној компанији је запослено 8 мушкараца и 9 жена. На колико начина је могуће изабрати 7 особа за одлазак на семинар ако се зна да Стефан и Марија не смеју бити заједно изабрани?

2.86. Колико има начина да се оформи комисија од 4 мушкарца и 6 жена ако у комисији треба да буду најмање два мушкарца и барем дупло више жена?

2.87. На колико начина је могуће оформити четворочлану делегацију од 4 мушкарца и 6 жена, ако у њој треба да буду бар 2 жене и господин и госпођа Петровић не смеју бити изабрани заједно? (Међу посматраним мушкарцима и женама постоје само један господин и једна госпођа Петровић.)

2.88. Одредити број решења једначине

$$(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 77$$

у скупу ненегативних целих бројева ако важи $x_1 + x_2 + x_3 \neq 1$ и $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \neq 1$.

Решење: Израз $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ у развијеном облику можемо записати као $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{2k}x^{k-n}$. Из услова да је збир прва три коефицијента у развоју датог бинома 46 добијамо

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=1+n+\frac{n(n-1)}{2}=46.$$

Сређивањем се добија једначина n^2+n-90, чије је решење $n=9$ (решење $n=-10$ одбацујемо јер $n\in\mathbb{N}$). Тражимо који по реду члан развоја не садржи x, односно тражимо за које k је задовољена једначина $2k+k-9=0$. Ова једначина је тачна за $k=3$ па је у питању четврти члан развоја који гласи $\binom{9}{3}$.

Напомена: Због симетричности биномних коефицијената дати бином се у развијеном облику може записати и на следећи начин $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{2(n-k)}x^{-k}$. Даљим решавањем добијамо $k=6$, одакле видимо да седми члан у развоју не садржи x и једнак је $\binom{9}{6}=\binom{9}{3}$.

3.4. У развоју израза $\left(x\sqrt[4]{x^3}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)^n$ коефицијенти уз пети и десети члан су једнаки. Одредити члан развоја који не садржи x.

Решење: Посматрајмо развој израза $\left(x\sqrt[4]{x^3}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)^n$ који је дат са

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x\sqrt[4]{x^3})^k\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{\frac{7k}{4}}x^{\frac{-3(n-k)}{2}}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{\frac{7k}{4}-\frac{3(n-k)}{2}}.$$

Из услова да су коефицијенти који стоје уз пети и десети члан развоја једнаки следи да треба да важи $\binom{n}{4}=\binom{n}{9}$. Сада је због симетричности биномних коефицијената $n-4=9$, тј. $n=13$. Како се тражи члан који не садржи x треба да важи $\frac{7k}{4}-\frac{3(13-k)}{2}=0$, а ово је испуњено за $k=6$. Добили смо да седми члан датог развоја не садржи x и да је једнак $\binom{13}{6}$.

3.5. Одредити оне чланове у развоју израза $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^5$ који нису ирационални.

Решење: Напишимо израз у развијеном облику:

$$\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(\sqrt[3]{3})^k(\sqrt{2})^{5-k}=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}3^{\frac{k}{3}}2^{\frac{5-k}{2}}.$$

Из услова да нам требају само чланови који нису ирационални добијамо да треба да важи $\frac{k}{3}\in\mathbb{Z}$ и $\frac{5-k}{2}\in\mathbb{Z}$. Пошто $k=0,1,\ldots,5$ из првог услова следи $k\in\{0,3\}$. Сада непосредим убацивањем ових вредности у други услов добијамо $k=3$. Према томе, једини члан развоја који није ирационалан је $\binom{5}{3}(\sqrt[3]{3})^3(\sqrt{2})^{5-3}=\binom{5}{3}\cdot 3\cdot 2=60$.

3.6. Одредити чланове у развоју израза $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2})^n$ који нису ирационални, ако је познато да је однос биномних коефицијената уз други и трећи члан $2:23$.

Решење: Посматрајмо развој израза $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2})^n$ који је дат са

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt[5]{3})^{n-k}(\sqrt[7]{2})^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{\frac{n-k}{5}}2^{\frac{k}{7}}.$$

Из услова задатка следи да важи $\binom{n}{1}:\binom{n}{2}=2:23$, одакле се даље добија квадратна једначина $n^2-24n=0$. Решење $n=0$ одбацујемо јер $n\in\mathbb{N}$, па је $n=24$. Како се траже чланови који нису ирационални мора бити $\frac{24-k}{5}\in\mathbb{Z}$ и $\frac{k}{7}\in\mathbb{Z}$. Из услова да је k дељиво са 7 добијамо $k\in\{0,7,14,21\}$. Убацивањем ових вредности у израз $\frac{24-k}{5}$ добијамо да је вредност израза целобројна само за $k=14$. Видимо да посматрани развој има само један члан који није ирационалан и то је члан $\binom{24}{14}(\sqrt[5]{3})^{10}(\sqrt[7]{2})^{14}=\binom{24}{14}\cdot 3^2\cdot 2^2$.

3.7. Наћи коефицијент уз x^9 у развоју израза $(1-4x)^6(1+3x^2)^8$.

Решење: Нека је $(1-4x)^6=\sum_{i=0}^{6}\binom{6}{i}(-4)^ix^i$ и $(1+3x^2)^8=\sum_{j=0}^{8}\binom{8}{j}3^jx^{2j}$. Како се тражи коефицијент уз x^9 у развоју израза $(1-4x)^6(1+3x^2)^8$, задатак се своди на решавање једначине $i+2j=9$, где $0\le i\le 6$ и $0\le j\le 8$. Уређени парови (i,j) који задовољавају једначину припадају скупу $\{(1,4),(3,3),(5,2)\}$, па је тражени коефицијент

$$\binom{6}{1}\binom{8}{4}(-4)3^4+\binom{6}{3}\binom{8}{3}(-4)^33^3+\binom{6}{5}\binom{8}{2}(-4)^53^2.$$

3.8. Доказати да важи $\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1} = \frac{n-2k}{n}\binom{n}{k}$, за природне бројеве n и k за које је испуњено $0 \leq k \leq n$.

Решење:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} - \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{n-k}{n} - \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k}{n}\\ &= \frac{n-2k}{n}\binom{n}{k}\end{aligned}$$

3.9. Ако су m и n редом ненегативан цео и природан број, доказати да важи

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \cdots + \binom{m+n}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}.$$

Решење: Користећи Паскалов идентитет добијамо:

$$\begin{aligned}\binom{m+n+1}{m+1} &= \binom{m+n}{m} + \binom{m+n}{m+1}\\ &= \binom{m+n}{m} + \binom{m+n-1}{m} + \binom{m+n-1}{m+1} = \dots\\ &= \binom{m+n}{m} + \binom{m+n-1}{m} + \cdots + \binom{m+2}{m} + \binom{m+2}{m+1}\\ &= \binom{m+n}{m} + \binom{m+n-1}{m} + \cdots + \binom{m+2}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+1}{m+1}\\ &= \binom{m+n}{m} + \binom{m+n-1}{m} + \cdots + \binom{m+2}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m}{m}.\end{aligned}$$

II начин: Индукција по природном броју n.

3.10. Израчунати $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\binom{n}{k}$.

Решење:

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\binom{n}{k} = 2\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2\cdot n2^{n-1} + 2^n = 2^n(n+1)$$

3.11. Доказати да за природне бројеве k и n важи

$$\sum_{i=0}^{n}(k+i)\binom{n}{i} = (n+2k)2^{n-1}.$$

Решење:

$$\sum_{i=0}^{n}(k+i)\binom{n}{i} = k\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = k\cdot 2^n + n\cdot 2^{n-1} = (2k+n)2^{n-1}.$$

3.12. Доказати да за ненегативне целе бројеве m и n, $m \leq n$, важи

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k} = \binom{n+1}{m}.$$

Решење: Применом Паскаловог идентитета добија се:

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{m} &= \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m-2} \\
&= \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-2}{m-2} + \binom{n-2}{m-3} = \dots \\
&= \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-2}{m-2} + \dots + \binom{n+m+1}{m-m+1} + \binom{n-m+1}{m-m} \\
&= \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-2}{m-2} + \dots + \binom{n+m+1}{1} + \binom{n-m+1}{0} \\
&= \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-2}{m-2} + \dots + \binom{n+m+1}{1} + \binom{n-m}{0} \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}
\end{aligned}$$

3.13. Доказати да важи $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 2^m\binom{n}{m}$, где су m и n природни бројеви и $m < n$.

Решење:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} &= \sum_{k=0}^{m}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!}\cdot\frac{m!}{m!} \\
&= \sum_{k=0}^{m}\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{m!}{k!(m-k)!} = \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\binom{m}{k} \\
&= \binom{n}{m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} = 2^m\binom{n}{m}
\end{aligned}$$

3.14. Доказати да важи $\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{k} = \binom{n}{k}2^{n-k}$, за све природне бројеве n и k за које је $n \geq k$.

Решење:

$$\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{k} = \sum_{j=k}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}\cdot\frac{j!}{k!(j-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$
$$= \sum_{j=k}^{n}\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{(n-j)!(j-k)!} = \binom{n}{k}\sum_{j=k}^{n}\binom{n-k}{j-k}.$$

Ако уведемо смену $t = j - k$ добијамо

$$\binom{n}{k}\sum_{j=k}^{n}\binom{n-k}{j-k} = \binom{n}{k}\sum_{t=0}^{n-k}\binom{n-k}{t} = \binom{n}{k}2^{n-k}.$$

Напомена: Приметимо да смо у претходна два задатка уместо почетног извођења могли искористити тврђење које је показано на вежбама:

$$\binom{n}{j}\binom{j}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k}.$$

3.15. Доказати да важи $\sum_{k=0}^{n}k\binom{m}{k}\binom{n}{k} = n\binom{m+n-1}{n}$.

Решење:

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{m}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}k\cdot\frac{m!}{k!(m-k)!}\cdot\frac{n\cdot(n-1)!}{k!(n-k)!}$$
$$= n\sum_{k=0}^{n}\frac{m!}{k!(m-k)!}\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n-1}{n-k}.$$

Како је на основу тврђења показаног на вежбама, тзв. Вандермондове конволуције, $\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n-1}{n-k} = \binom{m+(n-1)}{n}$, добијамо да је почетна сума једнака $n\binom{m+n-1}{n}$.

3.16. Доказати да важи $\sum_{r=k}^{m}\binom{n+r}{n} = \binom{n+m+1}{n+1} - \binom{n+k}{n+1}$.

Решење: На основу Паскаловог идентитета добијамо:

$$\begin{aligned}
&\binom{n+m+1}{n+1}-\binom{n+k}{n+1}=\binom{n+m}{n}+\binom{n+m}{n+1}-\binom{n+k}{n+1}\\
&=\binom{n+m}{n}+\binom{n+m-1}{n}+\binom{n+m-1}{n+1}-\binom{n+k}{n+1}=\dots\\
&=\binom{n+m}{n}+\binom{n+m-1}{n}+\cdots+\binom{n+k+1}{n+1}-\binom{n+k}{n+1}\\
&=\binom{n+m}{n}+\binom{n+m-1}{n}+\cdots+\binom{n+k}{n}+\cancel{\binom{n+k}{n+1}}-\cancel{\binom{n+k}{n+1}}\\
&=\sum_{r=k}^{m}\binom{n+r}{n}
\end{aligned}$$

II начин: Индукција по природном броју m.

3.17. Израчунати $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,k\binom{n}{k}$.

Решење:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,k\binom{n}{k}&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,k\,\frac{n!}{k!(n-k)!}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\\
&=-n\,\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\,\binom{n-1}{k-1}=-n\,\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\,\binom{n-1}{i}\\
&=-n\,(1-1)^{n-1}=0.
\end{aligned}$$

У задатку је уведена смена $i=k-1$.

3.18. Доказати да важи $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}$.

Решење:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k+1}\\
&=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}\binom{n+1}{i}=\frac{-1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i\binom{n+1}{i}\\
&=\frac{-1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\binom{n+1}{i}-\binom{n+1}{0}\right)\\
&=\frac{-1}{n+1}((1-1)^{n+1}-1)=\frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Користили смо смену $i=k+1$.

3.19. Доказати да важи $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = (n^2+n)2^{n-2}$.

Решење:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \sum_{k=1}^{n} k \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1}$$

Увођењем смене $i = k-1$ претходна сума постаје $n \sum\limits_{i=0}^{n-1} (i+1) \binom{n-1}{i}$. Даље добијамо

$$\begin{aligned} n \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \binom{n-1}{i} &= n \left(\sum_{i=0}^{n-1} i \binom{n-1}{i} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \right) \\ &= n((n-1)2^{n-2} + 2^{n-1}) \\ &= (n^2+n)2^{n-2}. \end{aligned}$$

II начин: Посматрајмо развој $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{k}$. Двоструким диференцирањем развоја по x добијамо

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum k(k-1)x^{k-2} \binom{n}{k}.$$

Уврштавањем $x = 1$ у претходни израз добија се

$$(n^2-n)2^{n-2} = \sum k^2 \binom{n}{k} - \sum k \binom{n}{k},$$

одакле је даље

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = (n^2-n)2^{n-2} + n2^{n-1} = (n^2+n)2^{n-2}.$$

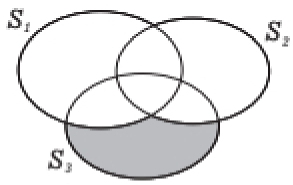
Напомена: У задатку смо користили познато тврђење са вежби $\sum\limits_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

4 Принцип укључења и искључења

Испитни задаци

4.1. У једној анкети учествовало је 1000 запослених испитаника, од чега је 550 било мушкараца. На питање да ли се редовно баве неким спортом 750 испитаника је дало негативан одговор, док је 30 испитаника изјавило да болује од малокрвности. Одредити број малокрвних жена које се не баве спортом ако је забележено да је број мушкараца који тренирају 137, малокрвних мушкараца је било 17, малокрвних особа које су спортисти 12, а да је број малокрвних мушкараца који тренирају 5.

Решење: Означимо следеће скупове



S_1 : испитаник је мушкарац;

S_2 : испитаник се бави спортом;

S_3 : испитаник је малокрван.

Осенчени део на Веновом дијаграму представљају малокрвне жене које се не баве спортом, те је тражени број $N(S_1'S_2'S_3)$. Користећи принцип укључења и искључења добијамо да важи

$$\begin{aligned} N(S_1'S_2'S_3) &= N(S_1 \cup S_2 \cup S_3) - N(S_1 \cup S_2) \\ &= N(S_3) - N(S_1S_3) - N(S_2S_3) + N(S_1S_2S_3). \end{aligned}$$

Број малокрвних испитаника је $N(S_3) = 30$, од чега је мушкараца $N(S_1S_3) = 17$. Међу спортистима има $N(S_2S_3) = 12$ малокрвних, при чему је $N(S_1S_2S_3) = 5$ мушкараца. Сада је тражени број

$$N(S_1'S_2'S_3) = 30 - 17 - 12 + 5 = 6.$$

4.2. Колико има природних бројева од 1 до 1000 који су дељиви са 3, али нису дељиви ни са 2, ни са 5, ни са 7?

Решење: Посматрајмо скуп природних бројева од 1 до 1000 који су дељиви са 3 и уочимо следеће подскупове овог скупа

$$S_2: \text{број је дељив са } 2$$
$$S_5: \text{број је дељив са } 5$$
$$S_7: \text{број је дељив са } 7.$$

Знамо да бројева не већих од n који су дељиви бројем k има $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$. Важи још и да је број дељив са производом простих бројева акко је дељив са сваким од њих. Сада на основу принципа укључења и искључења добијамо да тражених бројева има

$$\begin{aligned}
&N(S_2'S_5'S_7') = N - N(S_2 \cup S_5 \cup S_7) \\
&= N - N(S_2) - N(S_5) - N(S_7) + N(S_2S_5) + N(S_2S_7) + N(S_5S_7) - N(S_2S_5S_7) \\
&= \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{42} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{105} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{210} \right\rfloor \\
&= 333 - 166 - 66 - 47 + 33 + 23 + 9 - 4 = 115.
\end{aligned}$$

4.3. Колико има природних бројева не већих од 10^{30} који нису ни квадрати, ни кубови, ни пети степени природних бројева?

Решење: Нека су дати следећи скупови

$$S_2: \text{број је квадрат природног броја}$$
$$S_3: \text{број је куб природног броја}$$
$$S_5: \text{број је пети степен природног броја.}$$

Тражимо оне природне бројеве који се не налазе ни у једном од ових скупова, тј. $N(S_2'S_3'S_5')$. Како је $10^{30} = (10^{15})^2$ закључујемо да природних бројева не већих од 10^{30} који су квадрати природних бројева има $N(S_2) = 10^{15}$. Слично закључујемо да је $N(S_3) = 10^{10}$ и $N(S_5) = 10^6$, те важи

$$\begin{aligned}
N(S_2'S_35'S_75') &= N - N(S_2) - N(S_3) - N(S_5) \\
&\quad + N(S_2S_3) + N(S_2S_5) + N(S_3S_5) - N(S_2S_3S_5) \\
&= 10^{30} - 10^{15} - 10^{10} - 10^6 + 10^5 + 10^3 + 10^2 - 10.
\end{aligned}$$

4.4. Колико целих бројева из скупа $\{1, 2, 3, \ldots, 360\}$ има бар један заједнички прост делилац са 360?

Решење: Број 360 можемо записати у облику производа простих фактора на следећи начин $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Нека је S_i скуп свих бројева који су дељиви са i, где је $i \in \{2, 3, 5\}$. Тражимо бројеве који се налазе у унији ова три скупа, тј. $N(S_2 \cup S_3 \cup S_5)$, и њихов број је на основу принципа укључења и искључења једнак

$$
\begin{aligned}
&N(S_2)+N(S_3)+N(S_5)-N(S_2S_3)-N(S_2S_5)-N(S_3S_5)+N(S_2S_3S_5)\\
&=\frac{360}{2}+\frac{360}{3}+\frac{360}{5}-\frac{360}{6}-\frac{360}{10}-\frac{360}{15}+\frac{360}{30}\\
&=180+120+72-60-36-24+12 \;=\; 264.
\end{aligned}
$$

4.5. Користећи принцип укључења и искључења одредити колико има простих бројева међу природним бројевима који су мањи или једнаки од 120.

Решење: Како је $11^2 = 121$ видимо да треба избацити све природне бројеве који су дељиви са неким од бројева 2, 3, 5 или 7. Нека је S_i – број је дељив са i, за $i \in \{2,3,5,7\}$. На основу принципа укључења и искључења добијамо да је

$$
\begin{aligned}
&N(S_2'S_3'S_5'S_7') = N - N(S_2) - N(S_3) - N(S_5) - N(S_7)\\
&+N(S_2S_3)+N(S_2S_5)+N(S_2S_7)+N(S_3S_5)+N(S_3S_7)+N(S_5S_7)\\
&-N(S_2S_3S_5)-N(S_2S_3S_7)-N(S_2S_5S_7)-N(S_3S_5S_7)+N(S_2S_3S_5S_7)\\
&=120-\left\lfloor\frac{120}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{120}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{120}{5}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{120}{7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{120}{6}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{120}{10}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{120}{14}\right\rfloor\\
&+\left\lfloor\frac{120}{15}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{120}{21}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{120}{35}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{120}{30}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{120}{42}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{120}{70}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{120}{105}\right\rfloor+0\\
&=120-60-40-24-17+20+12+8+8+5+3-4-2-1-1=27.
\end{aligned}
$$

Добили смо 27 природна броја која нису дељива ни са једним од простих бројева 2, 3, 5 и 7. Пошто су ова четири броја проста неопходно је и њих убројати. Са друге стране, урачунали смо број 1 за који знамо да није ни прост ни сложен, па број простих бројева који су мањи или једнаки 120 износи $27 + 4 - 1 = 30$.

Напомена: Користили смо тврђење из теорије бројева да за сваки позитиван сложен цео број n постоји прост фактор p броја n за који важи да је $p^2 \leq n$.

4.6. Година је преступна ако важи један од следећа два услова:

1° година је дељива са 4, али није дељива са 100;

2° година је дељива са 400.

којих је последња цифра мања или једнака од 1. Тражимо пермутације које нису ни у једном од ова два скупа, тј. $N(S_1'S_2')$. Укупан број пермутација скупа цифара $\{0, 1, \ldots, 9\}$ је $N = 10!$. Ако је у пермутацији прва цифра већа или једнака 8, онда на место прве цифре може доћи једна од две цифре (цифра 8 или 9), док се остала места попуњавају са преосталих 9 цифара. Зато је $N(S_1) = 2 \cdot 9!$. На исти начин добијамо да је $N(S_2) = 9! \cdot 2$ и $N(S_1S_2) = 2 \cdot 8! \cdot 2$, па је коначно решење

$$\begin{aligned} N(S_1'S_2') &= N - N(S_1) - N(S_2) + N(S_1S_2) \\ &= 10! - 2 \cdot 9! - 2 \cdot 9! + 2 \cdot 2 \cdot 8!. \end{aligned}$$

4.9. Одредити колико пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, 9\}$ не садржи ни један од блокова 23, 45 и 678.

Решење: Посматрајмо следеће скупове пермутација

S_1 : пермутације које садрже блок 23

S_2 : пермутације које садрже блок 45

S_3 : пермутације које садрже блок 678.

Од свих пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, 9\}$, којих има $N = 9!$, одузећемо оне које садрже бар један од посматраних блокова. Када блок 23 покушамо да разместимо заједно са преосталих 7 елемената скупа добићемо $N(S_1) = 8!$ таквих пермутација (блок посматрамо као један елемент који се пермутује са осталим елементима), и исто се добија ако пермутација садржи блок 45. У случају да пермутација садржи блок 678, блок се пермутује са још 6 елемената, па је $N(S_3) = 7!$. Уколико имамо два или више блокова, резоновање иде аналогно. Закључујемо да пермутација које не садрже ни један од посматраних блокова треба да буде

$$\begin{aligned} N - N(S_1) - N(S_2) - N(S_3) + N(S_1S_2) + N(S_1S_3) + N(S_2S_3) - N(S_1S_2S_3) \\ = 9! - 8! - 8! - 7! + 7! + 6! + 6! - 5!. \end{aligned}$$

4.10. Колико има пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, 9\}$ код којих цифре 3 и 5 нису суседне и цифре $2, 4$ и 6 не чине блок?

Решење: Уведимо ознаке

S_1 : пермутације код којих су 3 и 5 суседни

S_2 : пермутације код којих елементи 2,4 и 6 чине блок.

Тражимо пермутације које нису ни у једном од ова два скупа, тј. $N(S_1'S_2')$. Укупан број пермутација деветочланог скупа је $N = 9!$.

Уколико су у пермутацији елементи 3 и 5 суседни, посматрамо та два елемента заједно (могу бити у редоследу 35 или 53) и пермутујемо их са осталим елементима, па је $N(S_1) = 2\cdot 8!$. Код пермутација које садрже блок од три елемента треба испермутовати елементе у блоку на 3! начина и блок са преосталих 6 елемената, тако да је $N(S_2) = 3!\cdot 7!$. Аналогним разматрањем се добија $N(S_1S_2) = 2\cdot 3!\cdot 6!$. Користећи формулу за принцип укључења и искључења стижемо до решења

$$N(S_1'S_2') = N - N(S_1) - N(S_2) + N(S_1S_2) = 9! - 2\cdot 8! - 3!\cdot 7! + 2\cdot 3!\cdot 6!.$$

4.11. На колико начина 6 књига на енглеском, 7 књига на немачком и 5 књига на руском можемо распоредити на полицу тако да књиге које су написане на истом језику не буду груписане све заједно?

Решење: Посматрајмо следеће распореде књига на полици

$$\begin{aligned} &S_1 : \text{књиге на енглеском стоје заједно}\\ &S_2 : \text{књиге на немачком стоје заједно}\\ &S_3 : \text{књиге на руском стоје заједно.}\end{aligned}$$

Желимо да одредимо $N(S_1'S_2'S_3')$. Број начина да распоредимо ове књиге на полицу је $N = 18!$. Уколико књиге на енглеском групишемо заједно, можемо их посматрати као један блок од 6 књига. Број начина да блок са енглеским књигама разместимо са књигама на осталим језицима је 13!, а пошто треба распоредити и књиге на енглеском у оквиру блока, добијамо да је $N(S_1) = 6!\cdot 13!$. На исти начин се добија да је $N(S_2) = 7!\cdot 12!$ и $N(S_3) = 5!\cdot 14!$. Посматрајмо сада случај када књиге на енглеском језику чине један блок, а књиге на немачком други. Ова два блока можемо испермутовати на 7! начина са књигама на руском језику. Како је неопходно распоредити и књиге у самим блоковима добијамо да је $N(S_1S_2) = 6!\cdot 7!\cdot 7!$. Аналогним разматрањима се добија да је тражени број начина да се књиге сложе на полицу

$$\begin{aligned} N(S_1'S_2'S_3') &= N - N(S_1) - N(S_2) - N(S_3)\\ &\quad + N(S_1S_2) + N(S_1S_3) + N(S_2S_3) - N(S_1S_2S_3)\\ &= 18! - 6!\cdot 13! - 7!\cdot 12! - 5!\cdot 14!\\ &\quad + 7!\cdot 6!\cdot 7! + 6!\cdot 5!\cdot 9! + 7!\cdot 5!\cdot 8! - 3!\cdot 6!\cdot 7!\cdot 5!.\end{aligned}$$

4.12. Одредити на колико начина шест брачних парова може да седне око округлог стола, ако ниједна жена не треба да седи поред свог супруга.

Решење: Означимо са S_i – i-ти брачни пар седи заједно, при чему је $i = 1, 2, \ldots, 6$. Укупан број начина да дванаест особа седне око округлог стола је $N = 11!$. Како ниједна жена не треба да седи поред свог супруга тражимо колико је $N(S'_1S'_2S'_3S'_4S'_5S'_6)$. Уколико један пар супружника седи једно поред другог за столом, онда је број начина да разместимо овај брачни пар и остале особе око стола $10!$. Пошто особе у пару могу бити распоређене тако да седе мушкарац–жена или жена–мушкарац, имамо укупно $2 \cdot 10!$ таквих размештаја око округлог стола. На исти начин поступамо и ако више брачних парова седи заједно, те је решење

$$\begin{aligned}N(S'_1S'_2S'_3S'_4S'_5S'_6) &= N - \binom{6}{1}N(1) + \binom{6}{2}N(2) - \binom{6}{3}N(3)\\ &+ \binom{6}{4}N(4) - \binom{6}{5}N(5) + \binom{6}{6}N(6)\\ &= 11! - 6 \cdot 2 \cdot 10! + 15 \cdot 2^2 \cdot 9! - 20 \cdot 2^3 \cdot 8!\\ &+ 15 \cdot 2^4 \cdot 7! - 6 \cdot 2^5 \cdot 6! + 2^6 \cdot 5!.\end{aligned}$$

4.13. Одредити колико има пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, 10\}$ које ниједан непаран број не пресликавају у самог себе.

Решење: Обележимо са S_i све пермутације код којих се i налази на $i-$том месту, где је i непарна цифра. Треба одредити колико је $N(S'_1S'_2S'_3S'_4S'_5)$. Укупан број пермутација овог скупа је $N = 10!$. Уколико је фиксирана једна непарна цифра на своје место имамо $N(1) = 9!$ таквих пермутација, док се у случају да су фиксиране две непарне цифре добија $N(2) = 8!$. На исти начин закључујемо да важи

$$\begin{aligned}&N(S'_1S'_3S'_5S'_7S'_9) = N - N(S_1 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_7 \cup S_9)\\ &= N - \binom{5}{1}N(1) + \binom{5}{2}N(2) - \binom{5}{3}N(3) + \binom{5}{4}N(4) - \binom{5}{5}N(5)\\ &= 10! - 5 \cdot 9! + 10 \cdot 8! - 10 \cdot 7! + 5 \cdot 6! - 5!.\end{aligned}$$

4.14. Одредити број пермутација π скупа $\{1, 2, \ldots, 8\}$ таквих да је $\pi(n) = n$, за n парно и $\pi(n) \neq n$, за n непарно.

Решење: Од свих пермутација које фиксирају парне цифре одузећемо оне које фиксирају бар једну непарну цифру. Означимо следеће скупове

$$\begin{array}{ll} S_1\colon \pi(1) = 1 & S_5\colon \pi(5) = 5\\ S_3\colon \pi(3) = 3 & S_7\colon \pi(7) = 7 \end{array}$$

Број пермутација које фиксирају парне цифре је $N = 4!$. Уколико је фиксирана додатно и једна непарна цифра, остају да се испермутују још три цифре и то можемо урадити на $N(1) = 3!$ начина. У случају да се фиксирају још две непарне цифре имамо $N(2) = 2!$. Ако су фиксиране додатно три непарне цифре, остаје само једно место и само једна цифра која мора доћи на своје место, па се испоставља да је $N(3) = N(4) = 1$ (у оба случаја се добија пермутација $123\ldots8$). Сада је

$$\begin{aligned} N(S_1'S_2'S_3'S_4') &= N - \binom{4}{1}N(1) + \binom{4}{2}N(2) - \binom{4}{3}N(3) + \binom{4}{4}N(4) \\ &= 4! - 4\cdot 3! + 6\cdot 2! - 4\cdot 1! + 1. \end{aligned}$$

4.15. На колико начина се на шаховску таблу може разместити 8 независних топова (никоја два топа се не туку), ако се ниједан топ не налази на белој дијагонали?

Решење: Приметимо прво да ће сваки од топова заузети једну врсту и једну колону. Уколико фиксирамо сваког топа у једну колону, онда на $N = 8!$ начина можемо одабрати врсте у којима се налазе посматрани топови и овај број одговара броју начина да се 8 независних топова постави на шаховску таблу. Означимо сада са S_i својство да се $i-$ти топ налази у $i-$тој врсти, где $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$. Тражимо такве распореде у којима се први топ (из прве колоне) не налази у првој врсти, други топ се не налази у другој врсти,… Јасно је да уколико је неки топ у својој врсти, онда се преостали топови могу испермутовати на 7! начина и тај број одговара броју $N(1)$. Сада се добија да ако се k топова налази у својим врстама, онда је тражени број размештаја $N(k) = (8-k)!$. На основу принципа укључења и искључења добијамо да важи

$$\begin{aligned} N(S_1'S_2'\ldots S_8') &= N - \binom{8}{1}N(1) + \binom{8}{2}N(2) - \binom{8}{3}N(3) + \binom{8}{4}N(4) \\ &- \binom{8}{5}N(5) + \binom{8}{6}N(6) - \binom{8}{7}N(7) + \binom{8}{8}N(8) \\ &= 8! - \binom{8}{1}7! + \binom{8}{2}6! - \binom{8}{3}5! + \binom{8}{4}4! \\ &- \binom{8}{5}3! + \binom{8}{6}2! - \binom{8}{7}1! + \binom{8}{8} \\ &= 8!\sum_{k=0}^{8}\frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

Напомена: За пермутацију $a_1a_2\dots a_n$ скупа $\{1,2,\dots,n\}$ кажемо да је деранжман (растрој поретка) ако је $a_i \neq i$, за свако $i = 1,2,\dots,n$. Број деранжмана $n-$точланог скупа је $D_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$. Према томе, број начина да се 8 независних топова постави на шаховску таблу тако да се ниједан топ не налази на белој табли одговара броју деранжмана D_8.

4.16. Патуљци Уча, Срећко, Кијавко, Поспанко, Стидљивко, Љутко и Тупко требају да ураде у руднику послове $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ и P_7. Ако се зна да сваки патуљак ради тачно један посао и да Поспанко не може да ради P_2, Стидљивко не може P_6, Уча не може P_1 и Љутко не може P_3 и P_7, одредити на колико начина патуљци могу да заврше послове у руднику.

Решење: Уведимо следеће ознаке

S_1: Поспанко ради P_2	S_4: Љутко ради P_3
S_2: Стидљивко ради P_6	S_5: Љутко ради P_7
S_3: Уча ради P_1	

Треба одредити на колико начина патуљци могу обавити послове у руднику тако да ниједан патуљак не ради посао који му је проблематичан, тј. $N(S_1'S_2'S_3'S_4'S_5')$. Укупан број начина да патуљци обаве послове у руднику је 7!. Уколико Поспанко ради посао P_2, остали патуљци требају да заврше преосталих шест послова и то могу урадити на 6! начина. Исто решење се добија и ако неког другог патуљка фиксирамо на неки посао, па је $N(1) = 6!$. Израчунајмо сада колико је $N(S_iS_j)$. Ако фиксирамо за два патуљка које послове раде, остали патуљци ће на 5! начина завршити своје послове. Проблематичан је само пресек S_4S_5 пошто Љутко не може да ради два посла истовремено, па је $N(S_4S_5) = 0$. На исти начин закључујемо да је $N(S_iS_jS_k) = 4!$, осим у случају када су у пресеку и скуп S_4 и S_5, пошто је тај пресек празан. Оваквих пресека имамо $\binom{3}{1}$ (од преостала три скупа бирамо један и посматрамо његов пресек са скуповима S_4 и S_5). Користећи исти резон при закључивању, на основу принципа укључења и искључења, добијамо да је број начина да се обаве послови у руднику

$N(S_E) = \binom{11}{3}\binom{4}{2}$. Посматрајмо сада путеве који пролазе истовремено кроз тачке C и D. Од тачке A до C имамо $\binom{4}{2}$ путева, од C до D је $\binom{6}{2}$ путева, а од тачке D до тачке B имамо $\binom{5}{1}$ путева. Сличним закључивањем се добија $N(S_C S_E) = \binom{4}{2}\binom{7}{1}\binom{4}{2}$. Приметимо да је немогуће да најкраћи пут истовремено пролази и кроз тачу D и кроз тачку E, па је $N(S_D S_E) = N(S_C S_D S_E) = 0$. Сада је број тражених путева

$$\begin{aligned} N(S'_C S'_D S'_E) &= N - N(S_C) - N(S_D) - N(S_E) \\ &\quad + N(S_C S_D) + N(S_C S_E) + N(S_D S_E) - N(S_C S_D S_E) \\ &= \binom{15}{5} - \binom{4}{2}\binom{11}{3} - \binom{10}{4}\binom{5}{1} - \binom{11}{3}\binom{4}{2} \\ &\quad + \binom{4}{2}\binom{6}{2}\binom{5}{1} + \binom{4}{2}\binom{7}{1}\binom{4}{2} + 0 - 0. \end{aligned}$$

4.22. Колико има бинарних речи дужине 16 које почињу битом 1 или се завршавају са битовима 00?

Решење: Нека је S_1 скуп свих бинарних речи дужине 16 које почињу битом 1, а S_2 скуп свих речи које се завршавају битовима 00. Треба одредити колико има речи у унији ова два скупа. Ако реч почиње са битом 1, онда преосталих 15 битова могу бити произвољно одабрани, одакле је број тражених бинарних речи $N(S_1) = 2^{15}$. На исти начин закључујемо да бинарних речи које се завршавају са битовима 00 има $N(S_2) = 2^{14}$. Број бинарних речи које се налазе у пресеку ова два скупа је тада $N(S_1 S_2) = 2^{13}$. Користећи принцип укључења и искључења добијамо

$$N(S_1 \cup S_2) = N(S_1) + N(S_2) - N(S_1 S_2) = 2^{15} + 2^{14} - 2^{13} = 40960.$$

4.23. За приступ порталу корисник уноси лозинку од 8 карактера. Дозвољени карактери су слова A, B, C и цифра 0. Одредити на колико начина корисник може креирати лозинку ако она треба да садржи сваки од дозвољених карактера бар једном.

Решење: Уведимо ознаке:

S_A: лозинка не садржи A $\qquad$ S_C: лозинка не садржи C

S_B: лозинка не садржи B $\qquad$ S_0: лозинка не садржи 0

Тражимо лозинке које нису ни у једном од наведених скупова, тј. $N(S'_A S'_B S'_C S'_0)$. Укупан број лозинки које се могу направити користећи дозвољене карактере је 4^8. Уколико лозинка не садрже карактер A, у њеном формирању учествују преостала три карактера, па је $N(S_A) = 3^8$. Аналогно се добија уколико лозинка не садржи карактер B, C или 0, те је $N(1) = N(S_A) = 3^8$. Када лозинка не садржи два дозвољена карактера добијамо $N(2) = 2^8$, док у случају да лозинка не садржи три карактера имамо $N(3) = 1^8$. Случај да лозинка не садржи ниједан од дозвољених карактера је немогућ, тј. $N(4) = 0$. Сада добијамо

$$\begin{aligned} N(S'_A S'_B S'_C S'_0) &= N - \binom{4}{1}N(1) + \binom{4}{2}N(2) - \binom{4}{3}N(3) + \binom{4}{4}N(4) \\ &= 4^8 - 4 \cdot 3^8 + 6 \cdot 2^8 - 4 \cdot 1^8 + 0. \end{aligned}$$

4.24. Колико има ненегативних целих бројева који су мањи од 100 000 у чијем декадном запису се појављују цифре 3, 6 и 9?

Решење: Представимо ненегативне целе бројеве који су мањи од 100 000 као низове цифара фиксне дужине 5. Број оваквих низова је $N = 10^5$ и он одговара броју посматраних бројева. Ако са S_i означимо све низове који не садрже цифру i, где је $i \in \{3, 6, 9\}$, видимо да треба одредити $N(S'_3 S'_6 S'_9)$. Уколико се цифра 3 не појављује у низу, на свакој позицији може бити једна од 9 цифара, па је $N(S_3) = 9^5$. На исти начин се добија $N(S_6) = N(S_9) = 9^5$. У случају да се не појављују две цифре важиће $N(S_i S_j) = 8^5$, а ако немамо ниједну од посматране три цифре онда је $N(S_3 S_6 S_9) = 7^5$. Сада је тражено решење

$$\begin{aligned} N(S'_3 S'_6 S'_9) &= N - 3N(1) + 3N(2) - N(3) \\ &= 10^5 - 3 \cdot 9^5 + 3 \cdot 8^5 - 7^5. \end{aligned}$$

4.25. На колико начина да се r различитих куглица може смести у 5 кутија ако бар једна кутија треба да остане празна?

Решење: Обележимо са S_i да је $i-$та кутија остала празна. Тражимо колико је $N(S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5)$. Ако је једна кутија празна, онда се све куглице налазе у преостале четири кутије, па је $N(1) = 4^r$. У случају да су две кутије празне добија се $N(2) = 3^r$ и аналогно и за остале случајеве. Сада је број елемената тражене уније

$$\binom{5}{1}N(1) - \binom{5}{2}N(2) + \binom{5}{3}N(3) - \binom{5}{4}N(4) + \binom{5}{5}N(5)$$

$$= 5 \cdot 4^r - 10 \cdot 3^r + 10 \cdot 2^r - 5 \cdot 1^r + 0^r.$$

4.26. Одредити број начина да се баци 8 различитих коцкица за игру, ако на коцкицама треба да се појави свих 6 бројева.

Решење: Ако са S_i означимо да на коцкицама није пао број i, где је $i = 1, 2, \ldots, 6$, онда треба одредити $N(S_1'S_2'S_3'S_4'S_5'S_6')$. Укупан број начина да бацимо 8 различитих коцкица је $N = 6^8$. Ако неки број није пао ни на једној коцкици добија се да је $N(1) = 5^8$ и аналогно уколико на коцкицама није пало више бројева. Случај да на коцкицама није пао ниједан број је немогућ. Због принципа укључења и искључења добијамо да је решење

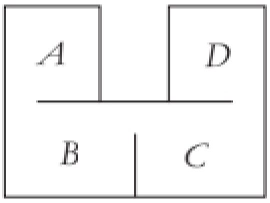
$$\begin{aligned}&N(S_1'S_2'S_3'S_4'S_5'S_6') = N - N(S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6)\\&= N - \binom{6}{1}N(1) + \binom{6}{2}N(2) - \binom{6}{3}N(3) + \binom{6}{4}N(4) - \binom{6}{5}N(5) + \binom{6}{6}N(6)\\&= 6^8 - 6 \cdot 5^8 + 15 \cdot 4^8 - 20 \cdot 3^8 + 15 \cdot 2^8 - 6 \cdot 1^8 + 0.\end{aligned}$$

4.27. У лифт у приземљу зграде са k спратова ушло је n људи, при чему је $n \geq k$. На колико начина је могуће напустити лифт ако на сваком спрату треба да изађе бар једна особа?

Решење: Ставимо S_i – на i–том спрату нико није изашао, при чему $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Како на сваком спрату треба да изађе бар једна особа закључујемо да треба одредити $N(S_1'S_2'S_3' \ldots S_k')$. Број начина да n особа напусти лифт је k^n. Ако на неком од спратова нико није изашао, тада је број начина да особе напусте лифт $(k-1)^n$. Уколико са $N(0)$ означимо укупан број начина да се напусти лифт, а са $N(1)$ број начина да се лифт напусти тако да на неком спрату нико не изађе, тада уопштавањем овог резултата добијамо $N(i) = (k-i)^n$, где је $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ број спратова на којима нико није изашао. Сада решење задатка можемо записати на следећи начин

$$\begin{aligned}N(S_1'S_2'S_3' \ldots S_k') &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} N(i)\\&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.\end{aligned}$$

4.28. На колико начина можемо окречити 4 собе са слике ако на располагању имамо n различитих боја и суседне собе требају да буду окречене различитом бојом? (Сви зидови у једној соби требају да буду окречени истом бојом. Несуседне собе могу бити окречене истом бојом.)



Решење: Уведимо следеће ознаке

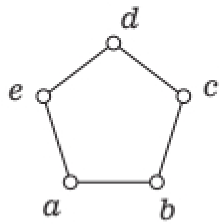
$$S_{AB}: \text{собе } A \text{ и } B \text{ су окречене истом бојом}$$
$$S_{BC}: \text{собе } B \text{ и } C \text{ су окречене истом бојом}$$
$$S_{CD}: \text{собе } C \text{ и } D \text{ су окречене истом бојом.}$$

Како суседне собе требају да буду окречене различитим бојама, тражимо $N(S'_{AB}S'_{BC}S'_{CD})$. Укупан број начина да се окрече ове четири собе је $N = n^4$. Уколико су собе A и B окречене истом бојом, на n начина бирамо боју за ове две собе, док боје за преостале две собе можемо одабрати на n^2 начина. Како ово важи за сваке две суседне собе, добијамо да је $N(1) = n\cdot 1\cdot n^2$. Ако су собе A и B, и собе B и C окречене истом бојом, онда је број начина за избор боје за ове три собе n, док соба D може бити окречена било којом бојом. Сличним разматрањима добијамо да је заправо $N(2) = n \cdot 1 \cdot 1 \cdot n$. У случају да су све собе обојене истом бојом, на n начина бирамо боју за прву собу, док остале собе кречимо са одабраном бојом, па је $N(3) = n \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$. Сада је на основу принципа укључења и искључења број начина да се окрече собе

$$\begin{aligned} N(S'_{AB}S'_{BC}S'_{CD}) &= N - 3N(1) + 3N(2) - N(3) \\ &= n^4 - 3n^3 + 3n^2 - n. \end{aligned}$$

II начин: Собу A можемо окречити са било којом од n боја. Сада за собе B, C и D не смемо употребити само боју којом смо окречили претходну собу, па за сваку од ове три собе имамо по $n-1$ боју на располагању. Укупан број начина да се окрече собе је према томе $n(n-1)^3$.

4.29. Одредити на колико начина можемо обојити чворове на датој контури са n боја, ако суседни чворови требају да буду обојени различитим бојама.
Решење: Нека је $S_{ij}-$ чворови i и j су обојени истом бојом, $i \neq j$ и $i, j \in \{a, b, c, d, e\}$. Слично као што смо то урадили у претходном



задатку добијамо да је број начина да се обоји посматрани граф

$$\begin{aligned}
&N(S'_{ab}S'_{bc}S'_{cd}S'_{de}S'_{ea}) = N - N(S_{ab} \cup S_{bc} \cup S_{cd} \cup S_{de} \cup S_{ea}) \\
&= N - \binom{5}{1}N(1) + \binom{5}{2}N(2) - \binom{5}{3}N(3) + \binom{5}{4}N(4) - \binom{5}{5}N(5) \\
&= n^5 - 5n^4 + 10n^3 - 10n^2 + 5n - n.
\end{aligned}$$

II начин: Посматрајмо на колико начина можемо обојити сваки чвор. Разликујемо следеће случајеве...

4.30. Одредити број целобројних решења једначине $x_1+x_2+x_3 = 28$, ако је $3 \le x_1 \le 9$, $0 \le x_2 \le 8$, $7 \le x_3 \le 17$.

Решење: Увођењем смене $y_1 = x_1 - 3$, $y_2 = x_2$ и $y_3 = x_3 - 7$, почетни проблем се трансформише у проблем $y_1 + y_2 + y_3 = 18$, при чему треба да важи $0 \le y_1 \le 6$, $0 \le y_2 \le 8$, $0 \le y_3 \le 10$. Знамо да једначина $y_1 + y_2 + y_3 = 18$ има $N = \binom{18+2}{2}$ решења у скупу ненегативних целих бројева. Једно решење ове једначине у посматраном скупу је нпр. $y_1 = 7, y_2 = 9$ и $y_3 = 2$, али ово решење не испуњава тражене услове. Зато је идеја да од свих решења одузмемо „лоша" решења, она решења код којих барем један од услова није испуњен. Посматрајмо следеће скупове решења ове једначине $S_1 : y_1 \ge 7$, $S_2 : y_2 \ge 9$ и $S_3 : y_3 \ge 11$. Одредимо $N(S_1)$. Тражимо број решења једначине у скупу ненегативних целих бројева ако је $y_1 \ge 7$. Када уведемо смену $z_1 = y_1 - 7$ добија се једначина $z_1 + y_2 + y_3 = 11$, која има $\binom{11+2}{2}$ решења. На исти начин добијамо да $N(S_2) = \binom{9+2}{2}$ и $N(S_3) = \binom{7+2}{2}$. Посматрајмо сада сва решења код који је $y_1 \ge 7$ и $y_2 \ge 9$. Сменама $z_1 = y_1 - 7$ и $z_2 = y_2 - 9$ добија се једначина $z_1 + z_2 + y_3 = 2$, па је $N(S_1S_2) = \binom{2+2}{2}$. Аналогно се добија да је $N(S_1S_3) = \binom{0+2}{2}$. Приметимо да ће бити $N(S_2S_3) = 0$, па је и пресек сва три скупа такође празан скуп. Уврштавањем добијених вредности у формулу за принцип укључења и искључења добијамо да је тражено решење

$$\begin{aligned} N(S_1'S_2'S_3') &= N - N(S_1) - N(S_2) - N(S_3) \\ &\quad + N(S_1S_2) + N(S_1S_3) + N(S_2S_3) - N(S_1S_2S_3) \\ &= \binom{20}{2} - \binom{13}{2} - \binom{11}{2} - \binom{9}{2} + \binom{4}{2} + \binom{2}{2} + 0 - 0 = 28. \end{aligned}$$

II начин: Искористићемо један трик да пронађемо број решења једначине $y_1 + y_2 + y_3 = 18$ ако је $0 \leq y_1 \leq 6$, $0 \leq y_2 \leq 8$, $0 \leq y_3 \leq 10$. Уведимо следећу смену

$$\begin{aligned} z_1 &= 6 - y_1 \\ z_2 &= 9 - y_2 \\ z_3 &= 11 - y_3. \end{aligned}$$

На овај начин смо добили једначину $z_1+z_2+z_3 = 6$, а одговарајући услови су $0 \leq z_1 \leq 6$, $0 \leq z_2 \leq 8$, $0 \leq z_3 \leq 10$. Приметимо да сада сва решења ове нове једначине у скупу ненегативних целих бројева задовољавају тражене услове, па је број решења једначине $\binom{6+2}{2} = \binom{8}{2} = 28$.

4.31. Милица у касици има 10 новчића од 1 динар, 6 новчића од 2 динара, 5 новчића од 5 динара и 4 новчића од 10 динара. Под претпоставком да се новчићи са истом вредношћу не разликују, одредити на колико начина Милица може узети 8 новчића.

Решење: Задатак се своди на одређивање броја решења једначине

$$x_1 + x_2 + x_5 + x_{10} = 8,$$

у скупу ненегативних целих бројева ако важи да је $x_1 \leq 10$, $x_2 \leq 6$, $x_5 \leq 5$, $x_{10} \leq 4$. Ставимо да је $S_2 : x_2 \geq 7$, $S_5 : x_5 \geq 6$ и $S_{10} : x_{10} \geq 5$ (приметимо да је услов $x_1 \leq 10$ увек испуњен). Користећи поступак који је описан у претходном задатку добијамо да је тражено решење

$$\begin{aligned} N(S_2'S_5'S_{10}') &= N - N(S_2) - N(S_5) - N(S_{10}) \\ &\quad + N(S_2S_5) + N(S_2S_{10}) + N(S_5S_{10}) - N(S_2S_5S_{10}) \\ &= \binom{8+3}{3} - \binom{1+3}{3} - \binom{2+3}{3} - \binom{3+3}{3} + 0. \end{aligned}$$

5 Рекурентне релације

Испитни задаци

5.1. Решити рекурентну релацију

$$2f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2} - f_{n-3}, \text{ за } n \geq 3,$$

ако су дати почетни услови $f_0 = f_1 = 0$ и $f_2 = 3$.

Решење: Уколико дату рекурентну релацију запишемо у облику $2f_n - f_{n-1} - 2f_{n-2} + f_{n-3} = 0$ добијамо да је одговарајућа карактеристична једначина $2t^3 - t^2 - 2t + 1 = 0$. Како је $2t^3 - t^2 - 2t + 1 = t^2(2t-1) - (2t-1) = (2t-1)(t^2-1) = (2t-1)(t-1)(t+1)$ видимо да је опште решење рекурентне релације $f_n = A + B(-1)^n + C\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Из општег решења се даље убацивањем почетних услова добија систем једначина

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ A - B + \frac{C}{2} &= 0 \\ A + B + \frac{C}{4} &= 3. \end{aligned}$$

Решавањем овог система добијамо да су тражене константе $A = 3$, $B = 1$ и $C = -4$. Решење задате рекурентне релације је према томе дато следећим изразом

$$f_n = 3 + (-1)^n - 2^{2-n}.$$

5.2. Решити рекурентну релацију

$$f_n = 4f_{n-1} - f_{n-2} - 6f_{n-3}, \text{ за } n \geq 3,$$

ако је $f_0 = f_1 = 1$ и $f_2 = 3$.

Решење: Корене карактеристичне једначине $t^3-4t^2+t+6 = 0$ можемо одредити помоћу Хорнерове шеме.

	1	−4	1	6
−1	1	−5	6	0
2	1	−3	0	
3	1	0		

Сада је опште решење рекурентне релације $f_n = A\,(-1)^n + B\,2^n + C\,3^n$. На основу почетних услова формирамо систем

$$\begin{aligned} A+B+C&=1\\ -A+2B+3C&=1\\ A+4B+9C&=3, \end{aligned}$$

чијим решавањем се добија $A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{2}{3}$ и $C=0$. Тражено решење је $f_n = \dfrac{(-1)^n+2^{n+1}}{3}$.

5.3. Решити рекурентну релацију

$$f_{n+3}-f_{n+2}-8f_{n+1}+12f_n=0,\ \text{за}\ n\geq 0,$$

ако је $f_0=f_1=1, f_2=-5$.

Решење: Карактеристична једначина $t^3-t^2-8t+12=0$ има једноструки корен $t_1=-3$ и двоструки корен $t_2=t_3=2$. Опште решење је сада $f_n=A(-3)^n+(B+nC)2^n$. Да бисмо одредили константе A, B и C треба решити систем

$$\begin{aligned} A+B&=1\\ -3A+2B+2C&=1\\ 9A+4B+8C&=-5. \end{aligned}$$

Решења система једначина су $A=-\frac{1}{5}$, $B=\frac{6}{5}$ и $C=-1$, па је решење $f_n=\dfrac{1}{5}\left(-(-3)^n+3\cdot 2^{n+1}-5n\cdot 2^n\right)$.

5.4. Решити рекурентну релацију

$$f_n=10f_{n-2}-9f_{n-4}, n\geq 4,$$

ако је $f_0=0, f_1=f_2=1$ и $a_3=4$.

Решење: Уколико у рекурентној једначини заменимо f_n са t^n добијамо карактеристичну једначину $t^4-10t^2+9=0$. Ова једначина сменом $x=t^2$ постаје квадратна једначина $x^2-10x+9=0$ која има корене $x=1$ и $x=9$. Добијамо да је $t_1=1$, $t_2=-1$, $t_3=3$ и $t_4=-3$, па је $f_n=A+B(-1)^n+C3^n+D(-3)^n$. Када убацимо почетне услове у опште решење добијамо да важи

$$\begin{aligned} A+B+C+D&=0\\ A-B+3C-3D&=1\\ A+B+9C+9D&=1\\ A-B+27C-27D&=4. \end{aligned}$$

Решавањем система стижемо до константи $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{3}{8}$, $C=\frac{1}{8}$ и $D=0$, одакле је општи члан траженог низа дат са

$$f_n=\frac{1}{4}-\frac{3}{8}(-1)^n+\frac{1}{8}3^n.$$

5.5. Решити систем рекурентних релација

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=3b_n\\ b_{n+1}&=2a_n-b_n, \end{aligned}$$

ако је $a_0=1$ и $b_0=0$.

Решење: Када у другу једначину уврстимо да је $a_n=3b_{n-1}$ добијамо рекурентну релацију $b_{n+1}=6b_{n-1}-b_n$. Њена карактеристична једначина $t^2+t-6=0$ има корене $t_1=-3$ и $t_2=2$, те је $b_n=A(-3)^n+B2^n$. За решавање добијене рекурентна релација другог реда требају нам два почетна услова, b_0 и b_1. Како је $b_1=2a_0-b_0=2$ из друге једначине, константе A и B добијамо решењем система

$$\begin{aligned} A+B&=0\\ -3A+2B&=2. \end{aligned}$$

Сада је $A=-\frac{2}{5}$ и $B=\frac{2}{5}$, те је $b_n=\dfrac{-2\cdot(-3)^n+2^{n+1}}{5}$. Општи члан низа a_n на крају добијамо на следећи начин

$$a_n=3b_{n-1}=\frac{2\cdot(-3)^n+3\cdot 2^n}{5}.$$

5.6. Решити систем рекурентних релација

$$\begin{aligned} a_{n+1}+2a_n+4b_n&=0\\ b_{n+1}-4a_n-6b_n&=0, \end{aligned}$$

уз почетне услове $a_0=1, b_0=0$.

Решење: Ако из прве једначине изразимо да је $b_n=\dfrac{-a_{n+1}-2a_n}{4}$ и то уврстимо у другу једначину добијамо рекурентну релацију $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$. Сада карактеристична једначина $t^2-4t+4=0$

има двоструку нулу $t = 2$, одакле је $a_n = (A + Bn)2^n$. Даље имамо $a_1 = -2a_0 - 4b_0 = -2$, те из почетних услова важи

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ 2A + 2B &= -2. \end{aligned}$$

Решења овог система су $A = 1$ и $B = -2$. Сада је $a_n = 2^n(1 - 2n)$ и $b_n = \dfrac{-a_{n+1} - 2a_n}{4} = n2^{n+1}$.

5.7. Решити систем рекурентних релација

$$\begin{aligned} 2a_{n+1} + b_{n+1} &= a_n + 3b_n \\ a_{n+1} + b_{n+1} &= a_n + b_n, \end{aligned}$$

ако је дато да је $a_0 = 1$ и $b_0 = 2$.

Решење: Одузимањем друге једначине од прве добија се $a_{n+1} = 2b_n$. Након замене a_{n+1} и a_n у другој једначини добијамо рекурентну релацију $b_{n+1} + b_n - 2b_{n-1} = 0$. Нуле одговарајуће карактеристичне једначине $t^2 + t - 2 = 0$ су $t_1 = -2$ и $t_2 = 1$, па је опште решење дато са $b_n = A(-2)^n + B$. Пошто је $a_1 = 2b_0 = 4$, из друге једначине добијамо $b_1 = a_0 + b_0 - a_1 = -1$. Сада се добија систем

$$\begin{aligned} A + B &= 2 \\ -2A + B &= -1, \end{aligned}$$

који има решења $A = 1$ и $B = 1$. Према томе, добијамо да су решења $b_n = (-2)^n + 1$ и $a_n = 2b_{n-1} = (-1)^{n-1}2^n + 2$.

5.8. Решити рекурентну релацију

$$f_n^2 = 5f_{n-1}^2 - 4f_{n-2}^2,\ n \geq 2,$$

ако је $f_0 = 4$ и $f_1 = 13$.

Решење: Сменом $g_n = f_n^2$ дату нелинеарну рекурентну релацију сводимо на линеарну $g_n = 5g_{n-1} - 4g_{n-2}$. Из карактеристичне једначине нове рекурентне релације $x^2-5x+4 = (x-4)(x-1) = 0$, добијамо да опште решење за низ g_n има облик $A+B\cdot 4^n$. Да бисмо одредили константе A и B неопходно је прво израчунати g_0 и g_1. Како је $g_n = f_n^2$ добијамо да је $g_0 = f_0^2 = 16$ и $g_1 = f_1^2 = 169$. Увршавањем нових почетних услова у опште решење добијамо систем

$$\begin{aligned} A + B &= 16 \\ A + 4B &= 169, \end{aligned}$$

који има решења $A = -35$ и $B = 51$. Сада је $g_n = -35 + 51 \cdot 4^n$. На крају још треба вратити смену, те је решење почетне рекурентне релације дато са $f_n = \pm\sqrt{-35 + 51 \cdot 4^n}$.

5.9. Решити рекурентну релацију

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}a_n}{2a_{n+1} - a_n}, \text{ за } n \geq 0,$$

где је $a_0 = \frac{1}{2}$ и $a_1 = \frac{1}{3}$.

Решење: Дата рекурентна релација је еквивалентна са

$$\frac{1}{a_{n+2}} = \frac{2a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}a_n} = \frac{2}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}.$$

Сменом $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ добија се рекурента релација $b_{n+2} = 2b_n - b_{n+1}$ и почетни услови $b_0 = \frac{1}{a_0} = 2$, $b_1 = \frac{1}{a_1} = 3$. Како је решење ове рекурентне релације $b_n = \dfrac{7-(-2)^n}{3}$, након враћања смене добијамо $a_n = \dfrac{3}{7-(-2)^n}$.

5.10. Ако се зна да су сви чланови низа a_n различити решити рекурентну релацију

$$a_{n+2} = a_{n+1}a_n^6, \text{ за } n \geq 0,$$

при чему је $a_0 = 1$ и $a_1 = 3$.

Решење: Логаритмовањем једначине (узећемо логаритам са основом 3 због почетних услова) добијамо

$$\log_3 a_{n+2} = \log_3 a_{n+1} + 6\log_3 a_n.$$

Ако уведемо смену $b_n = \log_3 a_n$, добићемо рекурентну релацију $b_{n+2} = b_{n+1} + 6b_n$ и почетне услове $b_0 = \log_3 1 = 0$ и $b_1 = \log_3 3 = 1$. Карактеристична једначина $t^2 - t - 6 = 0$ има нуле $t_1 = -2$ и $t_2 = 3$, одакле је опште решење дато са $b_n = A(-2)^n + B\,3^n$. Увршtавањем почетних услова у опште решење и решавањем система једначина

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -2A + 3B &= 1, \end{aligned}$$

добијамо $b_n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{5}$. Тражено решење је тада $a_n = 3^{\frac{3^n-(-2)^n}{5}}$.

Напомена: Приметимо да осим услова да су сви чланови низа различити важи и да су сви чланови позитивни, чиме је обезбеђено да уведена смена буде добро дефинисана.

5.11. Решити рекурентну релацију

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+2}^4 a_{n+1}^3}{a_n^{18}}, \text{ за } n \geq 0$$

ако се зна да су почевши од трећег члана низа сви чланови различити и да је $a_0 = a_1 = 1$ и $a_2 = 5$.

Решење: Логаритмовањем једначине добијамо

$$\log_5 a_{n+3} = 4 \log_5 a_{n+2} + 3 \log_5 a_{n+1} - 18 \log_5 a_n.$$

Сменом $b_n = \log_5 a_n$ добијамо рекурентну релацију трећег реда $b_{n+3} = 4b_{n+2} + 3b_{n+1} - 18b_n$. Сада из њене карактеристичне једначине $t^3 - 4t^2 - 3t + 18 = 0$ даље добијамо да је рекурентна релација облика $b_n = A(-2)^n + (B + Cn)3^n$. Како је $b_0 = b_1 = \log_5 1 = 0$ и $b_2 = \log_5 5 = 1$ следећи систем

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -2A + 3B + 3C &= 0 \\ 4A + 9B + 18C &= 1 \end{aligned}$$

има решења $A = \frac{1}{25}$, $B = -\frac{1}{25}$ и $C = \frac{1}{15}$. Након враћања смене добијамо

$$a_n = 5^{\frac{(-2)^n}{25} + (-\frac{1}{25} + \frac{n}{15})3^n}.$$

5.12. Решити рекурентну релацију

$$f_n - 6f_{n-1} + 9f_{n-2} = 1, n \geq 2,$$

ако је $f_0 = 0$ и $f_1 = 1$.

Решење: Дата рекурентна релација је нехомогена и зато ћемо прво одредити опште решење хомогене рекурентне релације која гласи $h_n - 6h_{n-1} + 9h_{n-2} = 0$. Карактеристична једначина хомогене релације је $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = 0$, одакле добијамо $h_n = (A + nB)\,3^n$. Једно партикуларно решење нехомогеног дела сада тражимо у облику $p_n = C\,1^n$. Убацивањем партикуларног решења у задату нехомогену рекурентну релацију добијамо $C = \frac{1}{4}$. Остало је још да се одреде константе A и B из хомогеног дела решења и њих добијамо убацивањем почетних услова и решавањем система једначина

$$\begin{aligned} A + \frac{1}{4} &= 0 \\ 3A + 3B + \frac{1}{4} &= 1. \end{aligned}$$

Добијамо да је $A = -\frac{1}{4}$ и $B = \frac{1}{2}$, одакле је решење дате нехомогене рекурентне релације

$$f_n = h_n + p_n = \frac{1 - 3^n + 2\,n\,3^n}{4}.$$

II начин: Све нехомогене рекурентне релације су посебно погодне за решавање помоћу генераторних функција.

5.13. Решити рекурентну релацију

$$f_n = 3f_{n-1} + 10f_{n-2} + 7 \cdot 5^n,\ \text{за } n \geq 2,$$

ако знамо да је $f_0 = 4$ и $f_1 = 3$.

Решење: Хомогена једначина $h_n = 3h_{n-1} + 10h_{n-2}$ има опште решење $h_n = A(-2)^n + B5^n$. Како је константа која множи 5^n део хомогеног решења, једно партикуларно решење тражимо у облику $p_n = Cn5^n$. Када ово партикуларно решење уврстимо у почетну рекурентну релацију добијамо $C = 5$, па је $p_n = n5^{n+1}$. Из почетних услова добијамо преостале две константе, те је $f_n = 6(-2)^n + 5^n(5n - 2)$.

5.14. Решити рекурентну релацију

$$a_n - a_{n-1} = 3 - 2^n,\ \text{за } n \geq 1,$$

ако је $a_0 = 1$.

Решење: Опште решење хомогене рекурентне релације $h_n - h_{n-1} = 0$ је $h_n = A$. Задата рекурентна релација има два нехомогена дела тако да ћемо тражити два партикуларна решења, по једно за сваки нехомогени део. Одредимо прво партикуларно решење нехомогене једначине $a_n - a_{n-1} = 3$. Како је решење хомогеног дела константа A, партикуларно решење које одговара овој рекурентној релацији је $p_n^1 = B\,n$. Након уврштавања овог партикуларног решења у једначину $a_n - a_{n-1} = 3$ добијамо $B = 3$, тј. $p_n^1 = 3n$. Посматрајмо сада други нехомогени део и рекурентну релацију $a_n - a_{n-1} = -2^n$. Једно партикуларно решење ове једначине је $p_n^2 = C\,2^n$, па се након замене добија $C = -2$. Добили смо $a_n = h_n + p_n^1 + p_n^2 = A + 3n - 2^{n+1}$. Константу A добијамо из почетног услова $a_0 = 1$. Према томе, тражено решење задате нехомогене рекурентне релације је $a_n = 3 + 3n - 2^{n+1}$.

5.15. Решити рекурентну релацију

$$a_n^2 - 2a_{n-1} = 0,\ \text{за } n \geq 1,$$

ако је $a_0 = 2$.

Решење: Како је $a_n^2 = 2a_{n-1}$ логаритмовањем једначине добијамо

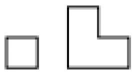
$$2\log_2 a_n = \log_2 2 + \log_2 a_{n-1} = 1 + \log_2 a_{n-1}.$$

Сменом $b_n = \log_2 a_n$ се добија нехомогена рекурентна релација

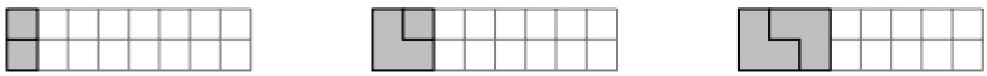
$$2b_n = 1 + b_{n-1},$$

која задовољава почетни услов $b_0 = \log_2 2 = 1$. Решење хомогеног дела је $h_n = A(\frac{1}{2})^n$, а партикуларно решење тражимо као $p_n = C$. Уврштавањем p_n у нехомогену једдначину добијамо $C = 1$, а због почетног услова важи $1 = b_0 = A(\frac{1}{2})^0 + 1$, па је $A = 0$. Добијамо $b_n = 1$, па је $a_n = 2^1 = 2$.

5.16. Правоугаоник величине $2 \times n$ издељен је на $2n$ једнаких квадрата. Одредити број начина да се прекрије правоугаоник ако на располагању имамо следеће две врсте плочица. (Плочице се могу ротирати за целобројне умношке правог угла.)



Решење: Нека је f_n број начина да се датим плочицама прекрије правоугаоник величине $2 \times n$. Разликујемо 3 случаја у зависности од тога како можемо започети прекривање правоугаоника.



1° 2° 3°

1° Ако прекривање започнемо на први начин остаје да се покрије још $2 \times (n-1)$ део правоугаоника и то можемо учинити на f_{n-1} начина.

2° У овом случају треба прекрити још $2 \times (n-2)$ квадрата, а како почетне плочице у приказани положај можемо ставити на 4 начина, укупан број прекривања је $4 \cdot f_{n-2}$.

3° Плочице се у овај положај могу ставити на 2 начина и пошто остаје да се прекрије $2 \times (n-3)$ дела правоугаоника, број прекривања је $2 \cdot f_{n-3}$.

Добијамо рекурентну релацију

$$f_n = f_{n-1} + 4f_{n-2} + 2f_{n-3},$$

са почетним условима $f_0 = f_1 = 1$ и $f_2 = 5$. Карактеристича једначина за добијену рекурентну релацију је $t^3 - t^2 - 4t - 2 = 0$ и њени

5.24. Ако се зна да су сви чланови низа a_n различити решити рекурентну релацију $a_{n+2} = a_{n+1}^3 a_n^4$, $n \geq 0$, при чему је $a_0 = 1, a_1 = 4$.

5.25. Решити рекурентну релацију $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3$, за $n \geq 2$, ако је $a_0 = a_1 = 1$.

5.26. Решити рекурентну релацију $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 1$, где је $n \geq 2$, ако су дати почетни услови $a_0 = 0$ и $a_1 = 1$.

II Теорија графова

На овом месту дајемо преглед битних појмова и теорема из теорије графова које ће бити коришћене у наставку.

Граф G је уређен пар (V, E), где је V непразан скуп *чворова*, E је скуп *грана* и важи $V \cap E = \emptyset$. Често ћемо број чворова графа G означавати са $n = |V(G)|$, а број грана са $e = |E(G)|$. Граф који садржи само један чвор је *тривијалан* граф, док су сви остали графови *нетривијални*. (Посматраћемо само графове дефинисане над коначним скуповима V и E.)

Ако је $e = uv$ грана графа, тада кажемо да су чворови u и v *суседни* и да је грана e *инцидентна* са чворовима u и v. *Скуп суседа* чвора v је скуп $N(v) = \{u \in V | uv \in E\}$. *Степен* чвора v, у ознаци $d(v)$, је број грана које излазе из чвора v, тј. $d(v) = |N(v)|$. Са $\delta(G)$ ћемо означавати минималан, а са $\Delta(G)$ максималан степен чвора у графу G. Чворови који имају степен 0 називају се *изоловани* чворови, док ћемо чворове који имају степен 1 звати *висећим* чворовима.

За граф кажемо да је *регуларан* ако сви његови чворови имају исти степен. Граф G је $k-$*регуларан* ако важи $d(v) = k, \forall v \in V(G)$. Специјално, 3–регуларне графове ћемо звати *кубним* графовима. Граф је *полурегуларан* ако постоје бројеви k и s такви да је $d(v) = k$ или $d(v) = s$, за свако $v \in V(G)$.

Теорема (Основна теорема теорије графова)**.**
Збир степена чворова графа је паран број и једнак је двоструком броју грана.

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$$

Последица. Број чворова непарног степена сваког графа је паран.

Последица. Ако граф садржи непаран број чворова, тада је бар један чвор парног степена.

Граф H је *подграф* графа G, у ознаци $H \subset G$, ако је $V(H) \subseteq V(G)$ и $E(H) \subset E(G)$. *Покривајући подграф* графа G је подграф H за који важи $V(H) = V(G)$.

Два подграфа H_1 и H_2 графа G су *грански дисјунктна* ако је $E(H_1) \cap E(H_2) = \emptyset$. Ако су $G_1, G_2, \ldots, G_k$ покривајући подграфови графа G који су грански дисјунктни ($E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset$ за $i \neq j$) и за које важи $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \cdots \cup E(G_k)$, тада кажемо да се граф G може *разложити* (*факторисати*) на графове $G_1, G_2, \ldots, G_k$.

Граф је *самокомплементаран* акко је изоморфан свом комплементу.

Грана e је *мост* ако се удаљавањем гране e из графа повећава број компоненти повезаности графа, тј. ако важи $\omega(G - e) > \omega(G)$. Чвор v који има исти улогу се назива *артикулациони чвор* (треба да важи $\omega(G - v) > \omega(G)$). Лако се показује да се избацивањем моста број компоненти повезаности повећава тачно за 1, док у случају артикулационог чвора то не мора да важи.

6 Основни појмови теорије графова

6.1. Доказати да не постоји граф са 4 чвора који има три чвора степена 3 и један висећи чвор.

Решење: Претпоставимо да такав граф постоји и да је без умањења општости $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = 3$ и $d(v_4) = 1$. Како чвор v_1 има 3 суседа, знамо да је повезан са свим преосталим чворовима, па према томе и са v_4. Исто важи и за чвор v_2. Сада је $d(v_4) \geq 2$, што је контрадикција са претпоставком.

II начин: Помоћу графичких низова.

6.2. Нека је дат граф G са 26 чворова и 58 грана. Одредити природан број k ако граф G има пет чворова степена 4, шест чворова степена 5, седам чворова степена 6 и сви преостали чворови имају степен k.

Решење: Нека је $n = |V(G)| = 26$ и $e = |E(G) = 58$. Увршатавањем осталих услова задатка у основну теорему добијамо

$$2e = \sum d(v) = 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + (n - 5 - 6 - 7) \cdot k = 92 + 8k,$$

па је $k = 3$.

6.3. Нека је $G(X, Y)$ бипартитан граф такав да је $|X| = 10$. Нека сви чворови у X имају степен 6, док Y садржи четири чвора степена 2, три чвора степена 4, а преостали чворови су степена 8. Колико чворова садржи граф $G(X, Y)$?

Решење: У бипартитном графу постоје само гране између чворова који су у различитим скуповима, па је укупан број грана које излазе из чворова у X једнак укупном броју грана које излазе из чворова у Y. Како је дати граф бипартитан, $|X| = 10$ и сви чворови у X имају степен 6 закључујемо да граф има 60 грана. Обележимо са k број чворова степена 8 у графу. Сада важи

$$60 = \sum_{u \in X} d(u) = \sum_{v \in Y} d(v) = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + k \cdot 8 = 8k + 20,$$

па је $k = 5$. Укупан број чворова графа G је $10 + 4 + 3 + 5 = 22$.

6.7. Одредити максималан број мостова у графу са n чворова.

Решење: Брисањем моста број компоненти повезаности графа се повећава за 1. Како граф са n чворова може имати најмање једну, а највише n компоненти повезаности, закључујемо да је максималан број мостова у графу са n чворова једнак $n-1$.

Напомена: Максималан број мостова међу свим графовима са n чворова имају стабла, код којих је свака од $n-1$ грана мост.

6.8. Нека је дат граф са n чворова, n грана и без изолованих и висећих чворова. Доказати да је посматрани граф 2−регуларан.

Решење: Претпоставимо да у графу постоји чвор v такав да је $d(v) \geq 3$. Из основне теореме теорије графова добијамо

$$2n = \sum d(v) \geq 2(n-1) + 3 = 2n + 1,$$

што је немогуће. Закључујемо да сви чворови у графу морају бити степена 2, тј. да је граф 2−регуларан.

6.9. Нека је у графу G број чворова дељив са 4, а број грана непаран. Доказати да граф G није регуларан.

Решење: Претпоставимо да је G граф који има $4n$ чворова и који је k−регуларан. Сада је због основне теореме теорије графова

$$2e = \sum_{i=1}^{4n} d(v_i) = \sum_{i=1}^{4n} k = 4n \cdot k.$$

Одавде следи да је број грана e паран број, што је у контрадикцији са условом задатка, па граф G не може бити регуларан.

6.10. Дат је граф G са 49 чворова у ком сви чворови имају степен 4 или 5. Доказати да G има најмање 25 чворова степена 4 или најмање 26 чворова степена 5.

Решење: Ако је $n_4 \geq 25$, доказ је готов. Претпоставимо зато да је $n_4 < 25$. Сада је $n_5 = n - n_4 > 49 - 25 = 24$, односно $n_5 \geq 25$. Ако би било $n_5 = 25$ имали бисмо непаран број чворова непарног степена у графу G, што је немогуће. Одатле закључујемо да у овом случају мора бити $n_5 \geq 26$.

6.11. Доказати да 4−регуларан граф са 15 чворова не може бити бипартитан.

Решење: Претпоставимо да је $G(X, Y)$ бипартитан 4−регуларан граф са 15 чворова. На основу основне теореме теорије графова знамо да је $2e = \sum_{v \in V(G)} d(v) = 15 \cdot 4$, па је $e = 30$. Пошто у бипартитном графу свака грана спаја чвор из скупа X са чвором из Y важи $e = \sum_{v \in X} d(v) = |X| \cdot 4$. Добили смо да број чворова у скупу X није цео број, одакле закључујемо да такав граф не постоји.

6.12. Доказати да за k-регуларан, где је $k \geq 1$, бипартитан граф $G(X, Y)$ важи $|X| = |Y|$.

Решење: Пошто је дати граф k-регуларан важи $d(v) = k$, $\forall v \in V$. Сада имамо $k|X|$ грана које излазе из чворова у X, односно $k|Y|$ грана које излазе из чворова у Y. Како у бипартитном графу постоје гране само између чворова у различитим класама важи $k|X| = e = k|Y|$, одакле следи $|X| = |Y|$.

6.13. Нека је G граф n чворова, где је $n \geq 6$. Доказати да бар један од графова G и $\overline{G}$ садржи троугао.

Решење: Знамо да у сваком графу G за произвољан чвор v важи $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$. Како је $n \geq 6$ имамо $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) \geq 5$, па је $d_G(v) \geq 3$ или $d_{\overline{G}}(v) \geq 3$. Нека је, б.у.о., $d_G(v) \geq 3$ и нека су чворови u_1, u_2 и u_3 суседи чвора v у графу G. Ако је бар једна од грана u_1u_2, u_1u_3 и u_2u_3 грана графа G, онда чворови u_i, u_j и v, $i \neq j$, формирају троугао у графу G. Уколико ниједна од ове три гране није у графу G, све три гране су у графу $\overline{G}$, па чворови u_1, u_2 и u_3 формирају троугао у графу $\overline{G}$.

6.14. Нека је дат нетривијалан граф G у коме не постоје два чвора истог степена која имају заједничког суседа. Доказати да тада граф G садржи висећи чвор.

Решење: Посматрајмо чвор највећег степена у графу G. Нека је то чвор v и нека је $d(v) = k$. Нека су чворови $u_1, u_2, \ldots, u_k$ суседи чвора v. Како у графу G не постоје два чвора истог степена која имају заједничког суседа, сви суседи чвора v морају бити различитог степена, тј. $d(u_i) \neq d(u_j)$, за свако $i \neq j$. Како је $\Delta(G) = k$ важи $1 \leq d(u_i) \leq k$. Сада сваки чвор $u_1, u_2, \ldots, u_k$ има тачно један од степена из скупа $\{1, 2, \ldots, k\}$, па постоји чвор u_i такав да је $d(u_i) = 1$.

6.15. Доказати да за сваки чвор v графа G важи $\overline{G} - v = \overline{G - v}$, где је $\overline{G}$ комплемент графа G.

Решење: Довољно је показати да је $E(\overline{G} - v) = E(\overline{G - v})$.
($\subseteq$) Нека је $e \in E(\overline{G} - v)$. Приметимо прво да чвор v није инцидентан

са граном e. Граф $\overline{G}-v$ је подграф графа $\overline{G}$, одакле следи $e \in E(\overline{G})$, па e није грана графа G. Сада из чињенице да v није крај гране e добијамо да се посматрана грана не налази ни у графу $G-v$. Добијамо $e \in \overline{G-v}$, па је $E(\overline{G}-v) \subseteq E(\overline{G-v})$.

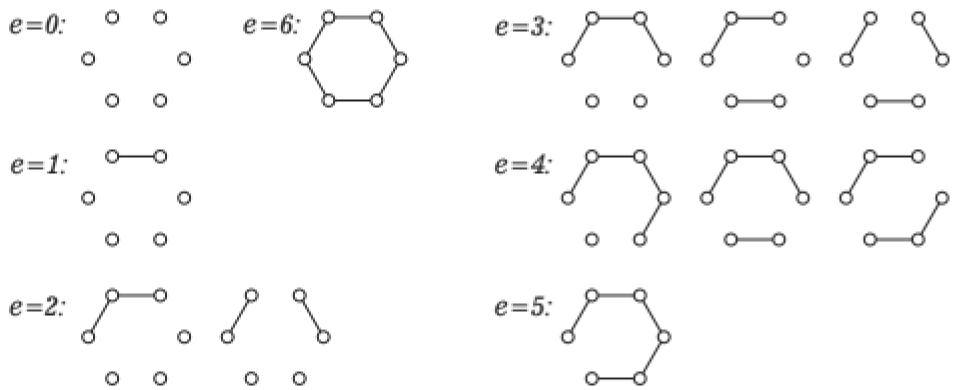
($\supseteq$) Посматрајмо сада $e \in E(\overline{G-v})$. Како грана e није у графу $G-v$ и чвор v није крај гране e, уочена грана се не налази ни у графу G. Према томе, e је грана графа $\overline{G}-v$, односно $E(\overline{G-v}) \subseteq E(\overline{G}-v)$.

6.16. Нека је дат граф G и нека је A његова матрица суседства. Доказати да се у матрици A^2 на главној дијагонали налазе степени чворова графа G.

Решење: Знамо да је елемент $a_{ij}^{(k)}$ матрице A^k једнак броју $v_i - v_j$ шетњи дужине k у графу G. Дакле, елемент $a_{ii}^{(2)}$ матрице A^2 одговара броју шетњи дужине 2 од чвора v_i до чвора v_i. Како се свака $v_i - v_i$ шетња дужине 2 у графу G може представити као $v_i\, v_j\, v_i$, за неки чвор v_j који је сусед чвора v_i, добијамо да је $a_{ii}^{(2)} = d_G(v_i)$, за свако $v_i \in V(G)$.

6.17. Одредити колико неизоморфних покривајућих подграфова има контура C_6.

Решење: Знамо да сваки покривајући подграф неког графа поседује исти скуп чворова као и полазни граф. Поделимо покривајуће подграфове дате контуре у дисјунктне класе према броју грана. Постоји само по један покривајући подграф графа C_6 који нема грана (празан граф са 6 чворова) и који има 6 грана (контура са 6 чворова). Неизоморфни покривајући подграфови који имају једну, две, три, четири или пет грана су приказани на следећој слици и има их редом 1, 2, 3, 3, 1. Сада је укупан тражених покривајућих подграфова 12.



6.18. Колико има неизоморфних графова са 20 чворова и 188 грана?

Решење: Како комплетан граф са 20 чворова има $\binom{20}{2} = 190$ грана, тражени граф добијамо брисањем 2 гране из K_{20}. То могу бити гране које немају заједничке чворове или гране које имају један заједнички чвор, па постоје само 2 неизоморфна графа са 20 чворова и 188 грана.

6.19. Нека је G самокомплементаран граф са n чворова, где је $n \equiv 1 \pmod 4$. Доказати да у графу G постоји чвор v такав да је $d_G(v) = \frac{n-1}{2}$.

Решење: Посматрајмо следеће подскупове скупа чворова графа

$$\begin{aligned} V_1 =& \{v \in V(G) \mid d_G(v) < \frac{n-1}{2}\} \\ V_2 =& \{v \in V(G) \mid d_G(v) = \frac{n-1}{2}\} \\ V_3 =& \{v \in V(G) \mid d_G(v) > \frac{n-1}{2}\}. \end{aligned}$$

Знамо да у сваком графу важи $d_g(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$, за свако $v \in V(G) = V(\overline{G})$. Како је граф G самокомплементаран важи $G \cong \overline{G}$, па графови G и $\overline{G}$ имају исти број чворова истог степена. Из претходне две чињенице закључујемо да је $|V_1| = |V_3|$. Како граф G има непаран број чворова добијамо да скуп V_2 мора имати непаран број чворова, те мора бити непразан.

6.20. Нека су дати комплетан граф K_{n-3} $(n \geq 4)$ и контура C_5. Конструишемо граф G на следећи начин

$$V(G) = V(K_{n-3}) \cup V(C_5),$$
$$E(G) = E(K_{n-3}) \cup E(C_5) \cup \{uv \mid u \in V(K_{n-3}), v \in V(C_5)\}.$$

Доказати да граф G не садржи подграф који је изоморфан са K_n.

Решење: У комплетном графу свака 3 чвора образују троугао. Уколико би комплетан граф са n чворова био подграф графа G, онда би он морао да садржи бар 3 чвора са контуре C_5. Како никоја 3 чвора са контуре C_5 не образују троугао, закључујемо да граф G не садржи подграф који је изоморфан са K_n.

6.21. Дат је граф G са n чворова, $n \geq 3$. Нека је $\delta(G) = k < \frac{n}{2}$ и нека за свака два несуседна чвора u и v графа G важи $d(u) + d(v) \geq n$. Ако је H подграф графа G индукован свим чворовима степена k, доказати да је H комплетан граф.

7 Повезаност графова

7.1. Доказати да је сваки самокомплементаран граф повезан.

Решење: Знамо да је граф самокомплементаран акко је изоморфан свом комплементу. Сада за изоморфне графове G и $\overline{G}$ мора да важи да су оба повезана или су оба неповезана. Како не могу истовремено и граф и његов комплемент бити неповезани, одмах добијамо да граф G мора бити повезан.

7.2. Нека је дат граф G са n чворова и 2 компоненте повезаности које су комплетни графови. Доказати да G поседује најмање $\dfrac{n^2-2n}{4}$ грана.

Решење: Нека су G_1 и G_2 компоненте повезаности графа G. Без умањења општости можемо претпоставити да је $|V(G_1)| = k \leq \frac{n}{2}$. Сада добијамо

$$\begin{aligned}|E(G)| = |E(G_1)| + |E(G_2)| &= \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} = \frac{n^2+2k^2-n-2nk}{2}\\ &\geq \frac{n^2+2\frac{n^2}{4}-n-2n\frac{n}{2}}{2} = \frac{n(n-2)}{4},\end{aligned}$$

што је и требало доказати.

7.3. Нека је G граф са n чворова и k компоненти повезаности. Доказати да је тада

$$|E(G)| \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

Решење: Јасно је да све компоненте неповезаног графа требају да буду комплетни графови да би граф имао максималан број грана. Посматрајмо неповезан граф са k компоненти повезаности који има максималан број грана. Нека је G_1 компонента са највећим бројем чворова и нека је $n_1 = |V(G_1)|$. Претпоставимо да постоји компонента повезаности G_2 са бројем чворова $n_2 \geq 2$. Уколико уклонимо један чвор из компоненте G_2 и пребацимо га у G_1, обрисаћемо $n_2 - 1$ грана из графа G_2 и додати n_1 грана у графу G_1. Пошто је $n_1 > n_2$ добијени граф има више грана од графа G за који смо претпоставили да има максималан број грана од свих графова са k компоненти повезаности. Према томе, компоненете повезаности графа G морају бити $k-1$ изолованих чворова и комплетан граф K_{n-k+1}. Број грана комплетног графа K_{n-k+1} је

$$\binom{n-k+1}{2} = \frac{(n-k)(n-k+1)}{2},$$

чиме је тврђење показано.

7.4. Нека је дат k-регуларан граф G, где је k непаран природан број. Доказати да граф G не садржи компоненту повезаности са непарним бројем чворова.

Решење: Нека је G_i произвољна компонента повезаности графа G. Ако са n_i означимо број чворова, а са e_i број грана компоненте G_i, онда због основне теореме важи $2e_i = \sum\limits_{v \in V(G_i)} d(v) = n_i \cdot k$. Пошто је k непаран број, једнакост ће важити само у случају да је n_i паран број. Одавде видимо да свака компонента повезаности графа G мора садржати паран број чворова.

7.5. Доказати да свака компонента повезаности графа G садржи бар $\delta(G) + 1$ чвор.

Решење: Посматрајмо компоненту повезаности G_i графа G и нека је v произвољан чвор те компоненте. Како је $\delta(G)$ минималан степен који могу да имају чворови у G, чвор v има барем $\delta(G)$ суседа. Сада су у компоненти G_i поред чвора v сигурно и сви његови суседи, па је број чворова у G_i најмање $\delta(G) + 1$.

7.6. Нека је дат граф G са 11 чворова такав да је $\delta(G) \geq 5$. Доказати да је граф G повезан.

Решење: Претпоставимо да је G неповезан, тј. $\omega(G) = k \geq 2$. Нека су $G_1, G_2, \ldots, G_k$ компоненте повезаности графа G. Из услова $\delta(G) \geq 5$ на основу претходног задатка знамо да свака компонента G_i садржи бар 6 чворова. Како је $k \geq 2$ добијамо да је укупан број чворова графа $n \geq 6k \geq 12$. Ово је контрадикција са условом да G има 11 чворова, те је задати граф повезан.

7.7. Нека је G граф са 15 чворова у ком је $\delta(G) = 3$. Доказати да G има највише 3 компоненте повезаности.

Решење: Претпоставимо супротно, да је број компоненти повезаности графа $k \geq 4$. Како је $\delta(G) = 3$ знамо да свака компонента мора имати бар 4 чвора. Сада је укупан број чворова графа G већи или једнак од $k \cdot 4 \geq 4 \cdot 4 \geq 16$, што је контрадикција са условом да G има 15 чворова. Према томе, број компоненти повезаности датог графа је највише 3.

7.8. Нека је G граф са n чворова. Ако је $\delta(G) > \frac{n-k}{k}$, где је $2 \leq k < n$, доказати да тада граф G има мање од k компоненти повезаности.

Решење: Претпоставимо да је $\omega(G) \geq k$. Како је $\delta(G) > \frac{n-k}{k}$ знамо да за сваку компоненту повезаности G_i графа G мора да важи $|V(G_i)| > \frac{n-k}{k} + 1 = \frac{n}{k}$. Сада важи $|V(G)| = \sum |V(G_i)| > k \cdot \frac{n}{k} = n$. Добили смо да граф G има више од n чворова, што је у контрадикцији са условом задатка, па је $\omega(G) < k$.

II начин: Претпоставимо поново да је $\omega(G) \geq k$. Посматрајмо компоненту повезаности графа G са најмањим бројем чворова. Нека је то компонента G_i. Сада важи $|V(G_i)| \leq \dfrac{n}{\omega(G)} \leq \dfrac{n}{k}$. Уочимо произвољан чвор $v \in V(G_i)$. За чвор v је даље испуњено

$$d_G(v) = d_{G_i}(v) \leq |V(G_i)| - 1 \leq \frac{n}{k} - 1 = \frac{n-k}{k}.$$

Како је $\delta(G) > \frac{n-k}{k}$, сви чворови графа G би требали да имају степен који је већи од $\frac{n-k}{k}$, укључујући и чвор v. Сада долазимо у контрадикцију са претходно добијеним, одакле закључујемо да граф G мора имати мање од k компоненти повезаности.

7.9. Нека је G неповезан граф са $n \geq 6$ чворова који садржи 3 компоненте повезаности. Доказати да за комплемент графа G важи

$$\Delta(\overline{G}) \geq \frac{2n}{3}.$$

Решење: Претпоставимо супротно, да је $\Delta(\overline{G}) < \frac{2n}{3}$. Сада за сваки чвор v графа $\overline{G}$ важи $d_{\overline{G}}(v) < \frac{2n}{3}$. Како графови G и $\overline{G}$ имају исти скуп чворова и како је $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ добијамо да важи

$$d_G(v) = n - 1 - d_{\overline{G}}(v) > n - 1 - \frac{2n}{3} = \frac{n}{3} - 1, \ \forall v \in V(G).$$

Даље из чињенице да је $\omega(G) = 3$ знамо да постоји компонента повезаности G_i графа G таква да је $|V(G_i)| \leq \frac{n}{3}$. Сада за произвољан чвор $u \in V(G_i)$ важи $d_{G_i}(u) \leq \frac{n}{3} - 1$. Како је степен чвора u у графу G исти као степен у G_i долазимо у контрадикцију да закључком да сваки чвор графа G мора да има степен $> \frac{n}{3} - 1$. Према томе важи $\Delta(\overline{G}) \geq \frac{2n}{3}$.

7.10. Нека су чворови u и v једини чворови непарног степена у графу G. Доказати да су тада чворови u и v повезани.

Решење: Ако је граф G повезан тада су свака два чвора графа повезана по дефиницији. Претпоставимо да је граф G неповезан. У случају да се чворови u и v налазе у истој компоненти повезаности графа G, посматрани чворови су повезани јер је свака компонента неповезаног графа један повезан граф. Претпоставимо зато да је $u \in V(G_i)$, $v \in V(G_j)$, где су G_i и G_j различите компоненте графа G. Али сада је чвор u једини чвор непарног степена у подграфу G_i, што је немогуће. Према томе, једина два чвора непарног степена у графу морају бити повезана.

7.11. Нека је u чвор непарног степена у графу G. Доказати да у G постоји чвор непарног степена који је повезан са чвором u.

Решење: Посматрајмо компоненту повезаности графа G у којој се налази чвор u. Нека је то компонента G_i. Због последице основне теореме теорије графова знамо да у компоненти повезаности G_i мора постојати бар још један чвор v који има непаран степен. Како је подграф G_i повезан граф, између свака два чвора постоји пут у G_i који их повезује, одакле добијамо да су чворови u и v повезани.

7.12. Наћи све $2-$регуларне графове чији је комплемент неповезан.

Решење: Како не могу истовремено граф и његов комплемент бити неповезани закључујемо да треба гледати $2-$регуларне графове који су повезани, тј. контуре. Јасно је да су графови $\overline{C_3}$ и $\overline{C_4}$ неповезани, а $\overline{C_5}$ повезан. Докажимо да је $\overline{C_n}$ повезан граф за свако $n > 4$. Свака два несуседна чвора са контуре ће по дефиницији комплемента сигурно бити повезана. Посматрајмо зато чворове v_1 и v_2 који су суседни чворови на контури. Како је $n > 4$ постоји чвор v_i који није сусед ни са v_1, ни са v_2. Сада се гране v_1v_i и v_2v_i налазе у комплементу, па су чворови v_1 и v_2 повезани путем дужине 2 у графу $\overline{C_n}$. Према томе, граф $\overline{C_n}$ је повезан за свако $n \geq 5$, те су једина два графа која задовољавају услов задатка C_3 и C_4.

7.13. Нека је G граф са n чворова и $e > \binom{n-1}{2}$ грана. Доказати да граф G не садржи изоловане чворове.

Решење: Доказаћемо да је G повезан, одакле ће следити да не садржи изоловане чворове. Претпоставимо да G није повезан. Сада је $\overline{G}$ повезан, па важи $e' = |E(\overline{G})| \geq n-1$. Даље имамо

$$e = \binom{n}{2} - e' \leq \binom{n}{2} - (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{n-1}{2}(n-2) = \binom{n-1}{2},$$

што је у контрадикцији са условом задатка.

7.14. Нека је G нетривијалан граф са n чворова такав да за свака два несуседна чвора $u, v \in V(G)$ важи $d(u) + d(v) \geq n - 1$. Доказати да је G повезан граф.

Решење: Посматрајмо произвољне чворове x и y у графу G. Ако грана $xy \in E(G)$, доказ је готов. Претпоставимо зато да су чворови x и y несуседни у графу G. Како у графу G не постоје петље и како $xy \notin E(G)$ добијамо да је $N(x) \subseteq V \setminus \{x, y\}$, и аналогно за скуп суседа чвора y. Одавде следи да је $N(x) \cup N(y) \subseteq V \setminus \{x, y\}$, па је $|N(x) \cup N(y)| \leq n - 2$. Сада је на основу принципа укључења и искључења

$$|N(x) \cap N(y)| = d(x) + d(y) - |N(x) \cup N(y)| \geq n - 1 - n + 2 = 1.$$

Добили смо да чворови x и y имају заједничког суседа, те између њих постоји пут дужине 2. Према томе, између свака два чвора графа G постоји или грана или пут дужине 2, одакле закључујемо да је граф G повезан.

II начин: Услов да за свака два несуседна чвора $u, v \in V(G)$ важи $d(u) + d(v) \geq n - 1$ је условОреове теореме за полухамилтонове графове. Како је сваки граф који садржи Хамилтонов пут повезан, тврђење следи.

7.15. Доказати да сваки повезан граф са $n \geq 2$ чворова садржи бар два неартикулациона чвора.

Решење: Нека је G повезан граф и нека је $v_1v_2v_3 \ldots v_k$ најдужи пут у графу G. Показаћемо да су чворови v_1 и v_k неартикулациони чворови. Претпоставимо да је чвор v_1 артикулациони чвор. Тада је граф $G - v_1$ неповезан и важи $\omega(G - v_1) \geq 2$. Како чворови $v_2, v_3, \ldots, v_s$ образују пут и у графу $G - v_1$ они ће се налазити у истој компоненти повезаности новог графа. Из чињенице да је $\omega(G - v_1) \geq 2$ знамо да постоји бар још један чвор u који не припада претходној компоненти повезаности. Како је граф G повезан и v_1 је артикулациони чвор закључујемо да је uv_1 грана графа G. Сада је пут $uv_1v_2v_3 \ldots v_k$ пут у графу G који је дужи од максималног, а то није могуће. На исти начин показујемо да је чвор v_k неартикулациони чвор.

7.16. Ако је граф G неповезан, тада за дијаметар његовог комплемента $\overline{G}$ важи $d(\overline{G}) \leq 2$.

Решење: Нека је $G = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$ неповезан граф. Посматрајмо произвољне чворове x и y графа G. Разликујемо два случаја.

Нека $x \in V(G_i)$ и $y \in V(G_j)$. Како су x и y у различитим компонентама повезаности графа G директно на основу дефиниције комплемента графа важи $xy \in E(\overline{G})$, па је $d_{\overline{G}}(x,y) = 1$. Размотрајмо сада случај да $x, y \in V(G_i)$. Како граф G има барем две компоненте повезаности знамо да постоји чвор $z \in V(G_j)$, па на исти начин као малопре имамо $xz, yz \in E(\overline{G})$, одакле је $d_{\overline{G}}(x,y) = 2$. Приметимо да је специјално $d_{\overline{G}}(x,y) = 1$ ако $xy \notin E(G_i)$. Из претходног разматрања добијамо $d(\overline{G}) \leq 2$.

Напомена: У случају да је G празан граф, његов комплемент $\overline{G}$ је комплетан граф, па је тада $d(\overline{G}) = 1$.

7.17. Окарактерисати све повезане графове са дијаметром 1.

Решење: Доказаћемо да је $d(G) = 1$ акко је $G \cong K_n$.
($\Leftarrow$) Јасно је да је $d(K_n) = 1$.
($\Rightarrow$) Нека је $d(G) = 1$. Претпоставимо да постоје чворови u и v такви да $uv \notin G$. Пошто је G повезан граф знамо да постоји $u - v$ пут у G. Како $uv \notin G$ важи $d(u,v) \geq 2$, одакле је $d(G) \geq d(u,v) \geq 2$. Како смо дошли до контрадикције закључујемо да је $G \cong K_n$.

7.18. Граф G је *2–повезан* ако је $|V(G)| > 2$ и за сваки чвор $x \in V(G)$ важи да је граф $G - x$ повезан. (На пример, контура C_n и комплетан граф K_n су 2–повезани графови, док стабло T_n није.) Нека је дат повезан граф $G = (V, E)$ и нека $u \notin V$. Граф $G + u$ конструишемо на следећи начин

$$V(G+u) = V \cup \{u\},\ E(G+u) = E \cup \{uv \mid \forall v \in V\}.$$

Доказати да је граф $G + u$ 2–повезан.

Решење: Треба показати да се брисањем произвољног чвора из графа $G + u$ добија повезан граф. Уклањањем чвора u добија се граф G који је по претпоставци повезан. Уочимо произвољан чвор $v \in V(G)$. Претпоставимо да се уклањањем чвора v граф G распада на k компоненти повезаности, тј. $G - v = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$. Посматрајмо граф G' који добијамо уклањањем чвора v из графа $G + u$. Нека су x и y произвољни чворови у G'. Уколико је неки од ова два чвора баш u, чворови x и y ће бити повезани директно граном. Ако $x, y \in V(G_i)$ тада су повезани $x - y$ путем у $G_i \subset G'$. У случају да је $x \in V(G_i), y \in V(G_j)$ имамо пут $x - u - y$. Како су свака два чвора повезана, и граф G' је повезан.

Задаци за самостални рад

7.19. Доказати да је чвор v артикулациони чвор графа G акко постоје чворови u и w различити од vтакви да сваки $u - w$ пут у графу G садржи чвор v.

8 Стабла

8.1. Испитати да ли постоји стабло чији је низ степена чворова

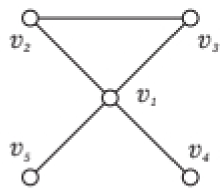
4, 2, 2, 1, 1.

Решење: Свако стабло са n чворова садржи $n-1$ грану. Уколико постоји стабло са датим низом степена чворова, онда је број грана тог стабла четири. Пошто знамо степене свих чворова графа из основне теореме теорије графова можемо израчунати број грана графа. Како је

$$2e = \sum_{v \in V} d(v) = 4 + 2 + 2 + 1 + 1 = 10,$$

добијамо да је број грана графа са датим низом степена чворова једнак $e = 5$. Одавде закључујемо да не постоји такво стабло.

II начин: Нека је $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ скуп чворова траженог графа. Максималан степен који могу имати чворови у графу је 4, одакле закључујемо да је рецимо чвор v_1 повезан граном са преосталим чворовима. Тренутно имамо чвор степена 4 и четири висећа чвора. Како у графу постоје два чвора степена 2 неопходно је још два висећа чвора повезати граном. Нека је б.у.о. $v_2 v_3 \in E$. Сада чворови v_1, v_2 и v_3 образују контуру, што је у контрадикцији са чињеницом да је стабло ацикличан граф. Ово је једини (неизоморфан) граф са датим низом степена чворова, па не постоји стабло чији чворови имају степене 4, 2, 2, 1, 1.



III начин: Знамо да стабло у ком је максималан степен k садржи бар k висећих чворова. Максималан степен чворова у траженом графу је 4, док је број висећих чворова 2, одакле добијамо да не постоји такво стабло.

Из претходног израза се добија $l \geq 2k - 2s$, што је и требало доказати.

II начин: Пошто је број изолованих чворова у шуми s, број нетривијалних стабала у графу је $k - s$. Тврђење сада тривијално следи из чињенице да свако стабло које има бар два чвора поседује бар 2 висећа чвора.

8.18. Доказати да је свака грана стабла мост.

Решење: Знамо да у стаблу T између свака два чвора u и v постоји јединствени пут P. Брисањем произвољне гране e са пута P чворови u и v сада остају неповезани, те се налазе у различитим компонентама повезаности графа $T - e$. Како је граф T повезан, а граф $T - e$ има бар две компоненте повезаности, закључујемо да је грана e мост у стаблу T.

8.19. Да ли сваки граф који има мање грана него чворова мора садржати компоненту повезаности која је стабло?

Решење: Нека је G граф са n чворова и $e < n$ грана. Ако је G повезан граф онда мора имати $n - 1$ грану, па је G стабло и доказ је готов. Претпоставимо да је G неповезан. Сада из услова имамо да у графу G мора постојати компонента повезаности G_i која има мање грана него чворова. Дакле, G_i је повезан граф који има мање грана него чворова, па мора бити $e_i = n_i - 1$. Одавде следи да је G_i тражено стабло у графу G.

8.20. Нека је T стабло са $n \geq 3$ чворова. Доказати да су следећи услови еквивалентни:

(i) T је изоморфно са звездом $K_{1,n-1}$;
(ii) T има $n - 1$ висећи чвор;
(iii) $\Delta(T) = n - 1$.

Решење: Доказаћемо да важи низ импликација

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i).$$

$(i) \Rightarrow (ii)$: Директно следи из дефиниције звезде са n чворова.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Како је T повезан граф са $n \geq 3$ чворова, сви висећи чворови морају бити суседи неког чвора v, па је $\Delta(T) = d(v) = n-1$.
$(iii) \Rightarrow (i)$: Знамо да стабло са максималним степеном $n - 1$ има бар $n - 1$ висећи чвор. Како T има тачно n чворова, један чвор је степена $n - 1$, док су преостали чворови висећи и повезани са чвором степена $n - 1$, па је стабло T баш звезда $K_{1,n-1}$.

8.21. Окарактерисати стабла која су комплетни бипартитни графови.

Решење: Показаћемо да је стабло комплетан бипартитан граф акко је звезда. Смер ($\Leftarrow$) тривијално важи. Докажимо смер ($\Rightarrow$). Нека је $K_{s,t}$ комплетан бипартитан граф који је стабло. За $s \geq 2$ и $t \geq 2$ граф $K_{s,t}$ садржи контуру дужине 4, па мора важити $s = 1$ или $t = 1$. Сада је $K_{s,t}$ изоморфан са графом $K_{1,n-1}$, који је заправо звезда.

8.22. Доказати да је граф G шума акко је сваки повезан подграф графа G индуковани подграф.

Решење: ($\Rightarrow$) Посматрајмо граф G који је шума. Знамо да је сваки повезани подграф T шуме стабло. Уколико T није индуковани подграф графа, онда у G постоји грана $e = uv$ таква да $u, v \in V(T)$, али $e \notin E(T)$. Нека је P јединствени пут између чворова u и v у стаблу T. Сада пут P и грана e формирају контуру у шуми G. Према томе, стабло T мора бити индуковани подграф графа G.

($\Leftarrow$) Нека је у графу G сваки повезан подграф индуковани подграф. Претпоставимо да граф G садржи контуру C. Нека је e произвољна грана са контуре C. Сада је граф $C - e$ повезан подграф графа G, али није његов индукован подграф, чиме смо дошли у контрадикцију са условом задатка. Закључујемо да је граф G ацикличан, тј. G је шума.

8.23. Нека је G повезан полурегуларан граф који садржи k чворова степена 4 и $2k + 2$ висећих чворова. Доказати да је G стабло.

Решење: Пошто је G повезан граф, довољно је показати да G има тачно $n - 1$ грану. Како је G полурегуларан, број чворова графа је $3k + 2$. На основу основне теореме теорије графова имамо

$$2e = \sum_{v \in V} d(v) = k \cdot 4 + (2k + 2) \cdot 1 = 6k + 2.$$

Добијамо да је број грана графа $e = 3k+1$, одакле због повезаности закључујемо да је G стабло.

Напомена: Користили смо тврђење да је граф са n чворова стабло акко је повезан и садржи тачно $n - 1$ грану.

8.24. Дат је повезан граф G. Нека је $\Delta(G) = k$ и нека је n_i број чворова степена i у графу. Ако је број висећих чворова једнак

$$n_1 = 2 + \sum_{i=2}^{k} (i - 2) n_i,$$

доказати да је тада граф G стабло.

Решење: Поново је довољно показати да G има тачно $n-1$ грану. Због основне теореме теорије графова знамо да важи

$$2e = \sum_{v\in V} d(v) = \sum_{i=1}^{k} in_i = n_1 + \sum_{i=2}^{k} in_i.$$

Из услова о броју висећих чворова графа имамо

$$n_1 = 2 + \sum_{i=2}^{k}(i-2)n_i = 2 + \sum_{i=2}^{k} in_i - 2\sum_{i=2}^{k} n_i = 2 + 2e - n_1 - 2\sum_{i=2}^{k} n_i,$$

па је $n_1 = 1 + e - \sum\limits_{i=2}^{k} n_i$. Сада је даље

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n_1 + \sum_{i=2}^{k} n_i = 1 + e - \sum_{i=2}^{k} n_i + \sum_{i=2}^{k} n_i = 1 + e.$$

Добили смо да за број чворова и грана повезаног графа G важи $n = 1 + e$, те је граф G стабло.

8.25. Нека је G повезан граф који није стабло. Ако G садржи чворове u и v такве да су графови $G-u$ и $G-v$ стабла, тада важи $d(u) = d(v)$.

Решење: Нека је G повезан граф са n чворова. Графови $G_1 = G - u$ и $G_2 = G - v$ су стабла са $n-1$ чвором, те важи $|E(G_1)| = |E(G_2)| = n-2$. Како графови G_1 и G_2 имају исти број грана, а добијени су избацивањем једног чвора и свих грана које су инцидентне са њим, тривијално добијамо $d(u) = d(v)$.

8.26. Нека је G граф са једнаким бројем чворова и грана. Доказати да G садржи бар једну контуру.

Решење: Претпоставимо супротно, да је G ацикличан граф, тј. G је шума. Знамо да у свакој шуми важи $|V(G)| = |E(G)| + \omega(G)$. Како је из услова задатка $|V(G)| = |E(G)|$ из претходног идентитета добијамо $\omega(G) = 0$, што је немогуће. Према томе, граф G није ацикличан већ постоји контура C која је подграф графа G.

8.27. Нека је G полурегуларан граф у ком су сви чворови степена 3 или 4. Одредити број чворова степена 3, ако се G може разложити на два покривајућа стабла.

Решење: Граф G је полурегуларан, па је број чворова $n = n_3 + n_4$. Како се G може разложити на два покривајућа стабла имамо да је $e = 2(n-1)$. Даље је из основне теореме $2e = \sum d(v) = 3n_3 + 4n_4$. Сада се добија $4(n_3 + n_4 - 1) = 3n_3 + 4n_4$, одакле је $n_3 = 4$ тражени број чворова степена 3.

8.28. Нека је G повезан граф који није стабло и нека је C контура у G. Доказати да комплемент сваког покривајућег стабла графа G садржи бар једну грану са контуре C.

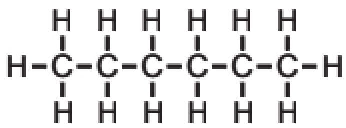
Решење: Нека је T покривајуће стабло графа G. Претпоставимо да $\overline{T}$ не садржи ниједну грану са контуре C. Сада се све гране контуре C налазе у графу $\overline{\overline{T}} = T$, па долазимо у контрадикцију са чињеницом да је T ацикличан граф. Према томе граф $\overline{T}$ мора садржати бар једну грану контуре C.

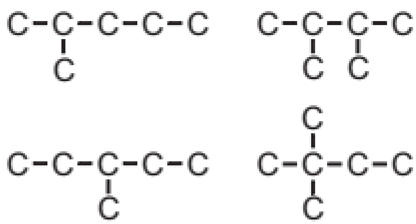
8.29. Кажемо да је граф *уницикличан* ако је повезан и има тачно једну контуру. Доказати да је сваки повезан граф G за који важи $|V(G)| = |E(G)|$ уницикличан.

Решење: Нека је $n = |V(G)|$. Знамо да сваки повезан граф има покривајуће стабло. Означимо са T_n покривајуће стабло графа G. Како стабло T_n има $n-1$ грану и свака два чвора су повезана јединственим путем, додавањем једне нове гране добијамо тачно једну контуру у графу G, па је он уницикличан граф.

8.30. Алкани су засићени угљоводоници, тј. једињења угљеника и водоника у којима су угљеникови атоми међусобно повезани једноструким везама. Општа молекулска формула алкана је C_nH_{2n+2}. Код алкана је присутна појава структурне изомерије да два једињења имају исти састав и молекулску формулу, али различиту хемијску структуру (различит распоред атома у молекулу). Ако је познато да се алкани најчешће представљају помоћу стабала, одредити све изомере алкана чија је молекулска формула C_6H_{14}.

Решење: Из услова задатка закључујемо да алкане са молекулском формулом C_6H_{14} можемо представити као стабла са 20 чворова и 19 грана. Знамо да атоми водоника и угљеника имају сталну валенцу (валенца је број других атома са којима је посматрани атом повезан једноструким везама). Атоми водоника су једновалентни и биће представљени као висећи чворови у стаблу, док ћемо валенцу угљеникових атома одредити помоћу основне теореме теорије графова. Означимо са k валенцу угљеника. Сада се добија $2 \cdot 19 = \sum d(v) = 6 \cdot k + 14$, одакле је $k = 4$. Видимо да се тражени алкани могу приказати као стабла у којима висећи чворови представљају водоникове, а чворови степена 4 угљеникове атоме. Задатак одређивања изомера алкана C_6H_{14} се сада своди на проналажење неизморфних стабала са наведеним особинама. Најједноставнији алкан са молекулском формулом C_6H_{14} је хексан и он је приказан на слици под *а)*. Непосредном провером добијамо да су сви изомери хексана приказани на слици под *б)*. (Због боље прегледности цртежа код изомера је нацртан само распоред угљеникових атома.)

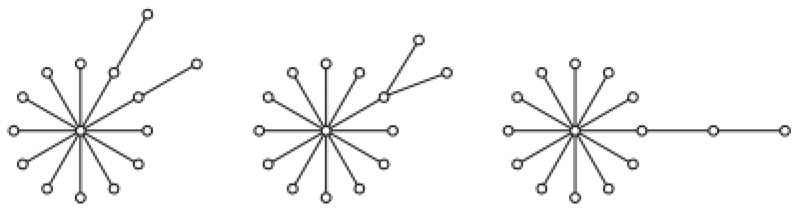




а) *б)*

8.31. Одредити сва неизоморфна стабла T са $n \geq 6$ чворова за која важи $\Delta(T) = n - 3$.

Решење: Пошто је $\Delta(T) = n - 3$ знамо да у стаблу T постоји чвор из ког излазе $n - 3$ гране. Чвор максималног степена сада заједно са својим суседима формира звезду $K_{1,n-3}$. Стабло T ћемо добити када додамо још 2 нова чвора на претходно конструисани подграф $K_{1,n-3}$. Како централни чвор звезде не може имати више суседа због услова $\Delta(T) = n - 3$ и како чворови не могу образовати контуре због захтева да T буде стабло, добијамо да постоје 3 неизоморфна стабла која задовољавају дате услове (видети слику).



8.32. Нека је дато означено стабло T у ком је $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Одредити низ степена чворова стабла T ако је Приферов низ датог стабла $(8, 6, 8, 8, 1, 6, 2, 2, 9)$.

Решење: Дужина Приферовог низа стабла са n чворова је $n - 2$, па је $n = 11$. Знамо и да је број појављивања чвора v у Приферовом низу једнак $d(v) - 1$. Чвор са ознаком 8 се појављује 3 пута у низу и његов степен је четири, чворови са ознакама 2 и 6 се појављују по два пута и њихов степен је три. Чворови 1 и 9 су степена два, а преосталих шест бројева из скупа V се не појављују у Приферовом низу и они одговарају висећим чворовима стабла T. Добили смо да је тражени низ степена чворова $4, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1$.

II начин: Конструишемо означено стабло за дати Приферов низ и избројимо ког степена су чворови у добијеном стаблу.

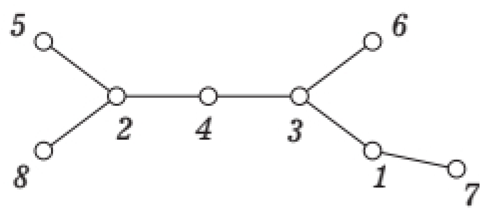
8.33. Нека је T означено стабло са $V(T) = \{1, 2, \ldots, n\}$.

а) Без конструисања стабла одредити колико висећих чворова садржи стабло чији је Приферов низ (10, 1, 7, 4, 3, 4, 10, 2, 2, 8).

б) Конструисати означено стабло T ако је његов Приферов низ (2, 3, 1, 3, 4, 2).

Решење: а) Приферов низ је дужине 10, па стабло T има 12 чворова. Како се висећи чворови не појављују у Приферовом низу, добијамо да стабло T има 5 висећих чворова. (Чворови 5, 6, 9, 11 и 12 су чворови из скупа $\{1, 2, \ldots, 12\}$ који се не појављују у датом низу и то су висећи чворови.)

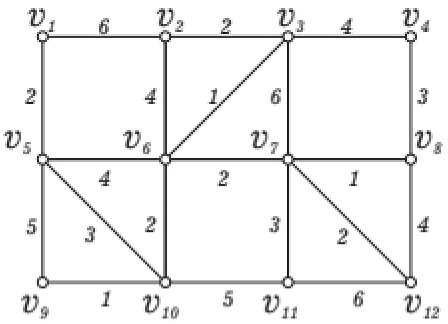
б) Тражимо означено стабло са 8 чворова. Најмањи број скупа $\{1, 2, \ldots, 8\}$ који се не појављује у Приферовом низу (2, 3, 1, 3, 4, 2) је број 5. Чворове 2 и 5 ћемо повезати граном у стаблу. Посматрајмо сада низ (3, 1, 3, 4, 2) и скуп $\{1, 2, \ldots, 8\} \setminus \{5\}$ и поново тражимо најмањи број из скупа који није у низу. То је број 6 и тај чвор повезујемо са чвором 3. Понављајући описани поступак, стижемо до момента да скуп садржи само два броја и одговарајуће чворове ћемо тада повезати граном. У нашем случају су то чворови 2 и 8. Стабло које има дати Приферов низ је приказано на следећој слици.



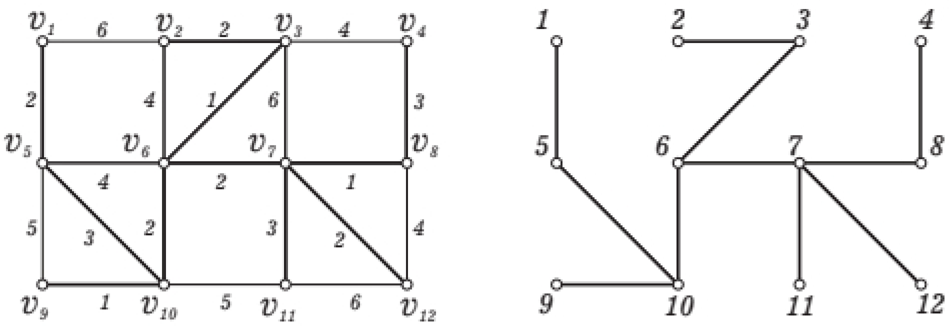
8.34. Одредити број висећих чворова означеног стабла T ако се у Приферовом низу тог стабла седам бројева појављује тачно 2 пута и један број се појављује тачно 3 пута.

Решење: Број елемената Приферовог низа је $7 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 17$, одакле је број чворова стабла 19. Знамо да број појављивања чвора у Приферовом низу одговара степену чвора -1. Према томе, стабло T има седам чворова степена 3, један чвор степена 4, док су сви преостали чворови висећи. Добијамо да је број висећих чворова стабла $19 - 8 = 11$.

8.35. За тежински граф са слике пронаћи минимално покривајуће стабло. Након тога, пренумерисати чворове у добијеном стаблу тако да чвор v_i добије ознаку i, а затим одредити Приферов низ добијеног означеног стабла.



Решење: Проблем одређивања минималног покривајућег стабла је проблем одређивања покривајућег стабла најмање укупне тежине у повезаном тежинском графу. Користимо један од два позната алгоритма, Примов или Крускалов алгоритам, за налажење минималног покривајућег стабла. Приметимо да је овде минимално покривајуће стабло јединствено, што генерално не мора важити. Повезан тежински граф може имати више покривајућих стабала која имају најмању тежину.



Одредимо сада како изгледа Приферов низ добијеног означеног стабла. Уочимо висећи чвор са најмањом ознаком. То је у нашем случају чвор 1. Овај чвор бришемо из графа, а његовог суседа чвор 5 записујемо у низ. Сада посматрамо стабло које је остало након уклањања чвора 1 и на њега применимо исти поступак. Овај поступак понављамо док не добијемо стабло које се састоји само од једне гране. На овај начин се добија да је Приферов низ раније пронађеног означеног стабла (5, 3, 6, 8, 10, 7, 10, 6, 7, 7).

Задаци за самостални рад

8.36. Нека је T стабло са 50 грана. Брисањем одређене гране стабло T се распада на стабла T_1 и T_2. Ако се зна да је број чворова стабла T_1 једнак броју грана стабла T_2, одредити број чворова и грана стабала T_1 и T_2.

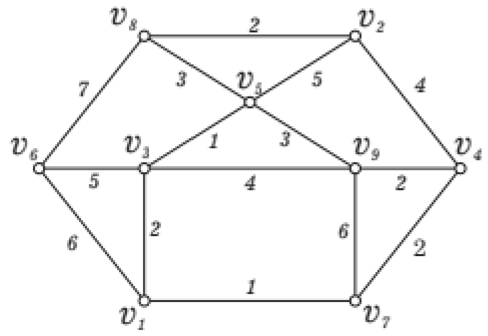
8.37. Доказати да је у сваком стаблу број висећих чворова већи од броја чворова степена ≥ 3.

8.38. Нека је дато стабло T са $n \geq 2$ чворова и нека је n_i број чворова степена i у стаблу T. Доказати да је број висећих чворова у стаблу T једнак

$$n_1 = 2 + \sum_{i=3}^{\Delta(T)} (i-2)n_i.$$

8.39. Одредити колико има изомера октана C_8H_{18}.

8.40. За тежински граф са слике пронаћи минимално покривајуће стабло. Након тога, пренумерисати чворове у добијеном стаблу тако да чвор v_i добије ознаку i, а затим одредити Приферов низ добијеног означеног стабла.

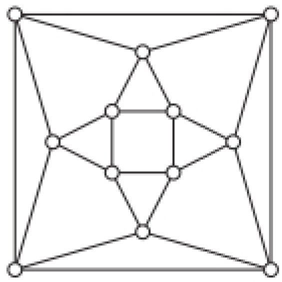


9 Ојлерови и Хамилтонови графови

9.1. Испитати да ли је следећи граф

а) Ојлеров;

б) Хамилтонов.

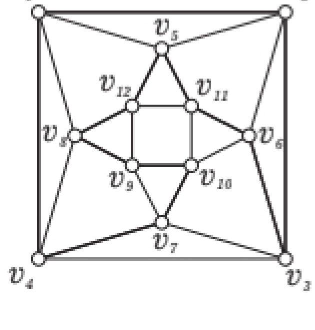


Решење: У случају да је граф Ојлеров/Хамилтонов треба нацртати одговарајућу контуру, а у случају да није неопходно је дати доказ зашто то не важи.

а) Дати граф је повезан и 4–регуларан, па знамо да је Ојлеров. Уколико нумеришимо чворове графа као на слици, онда је једна Ојлерова контура графа дата са

$$v_1\, v_2\, v_3\, v_4\, v_1\, v_5\, v_2\, v_6\, v_3\, v_7\, v_4\, v_8\, v_9\, v_7\, v_{10}\, v_6\, v_{11}\, v_5\, v_{12}\, v_{11}\, v_{10}\, v_9\, v_{12}\, v_8\, v_1.$$

б) Пример једне контуре која купи све чворове графа је приказан на следећој слици, те је задати граф Хамилтонов.



9.3. Нека је G повезан граф. Ако постоје по гранама дисјунктне контуре $C_1, C_2, \dots, C_k$ такве да је $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \dots \cup E(C_k)$, доказати да је тада граф G Ојлеров.

Решење: Посматрајмо произвољан чвор v. Ако се чвор v налази на i од ових k контура, тада је $d(v) = 2i$ јер свака грана која излази из чвора v због услова мора да припада тачно једној контури. Добили смо да је G повезан граф у ком сваки чвор има паран степен, тј. G је Ојлеров.

9.4. Доказати да Ојлеров граф не садржи грану која је мост.

Решење: Посматрајмо Ојлеров граф G и претпоставимо да је грана $e = uv$ мост у G. Пошто је граф Ојлеров знамо да су сви чворови парног степена. Граф G је повезан, па се брисањем гране e граф распада на два графа, G_1 и G_2. Нека је б.у.о. $u \in V(G_1)$. Како смо обрисали једну грану која је била инцидентна са чвором u добијамо да важи $d_{G_1}(u) \equiv 1 \pmod 2$. Сви остали чворови графа G_1 имају исти степен као и у графу G. Према томе, граф G_1 садржи тачно један чвор непарног степена, што знамо да није могуће, па граф G не може садржати мост.

9.5. Ако стабло T садржи бар један чвор степена 2 тада његов комплемент $\overline{T}$ није Ојлеров.

Решење: Нека стабло T има n чворова. Разликујемо два случаја у зависности од парности броја n. Претпоставимо прво да је n парно. Нека је u чвор степена 2 у стаблу T. Сада је $d_{\overline{T}}(u) = n-1-2 = n-3$. Пошто је n паран, број $n-3$ је непаран, па граф $\overline{T}$ не може бити Ојлеров јер садржи чвор непарног степена. Нека је сада n непарно. Знамо да свако нетривијално стабло садржи бар два висећа чвора. Нека су то чворови v и w. Добијамо да је $d_{\overline{T}}(v) = n-1-1 = n-2$ непарно, те ни у овом случају граф $\overline{T}$ неће бити Ојлеров.

9.6. Нека је G Ојлеров граф. Доказати да G има паран број грана акко садржи паран број чворова v за које важи $d(v) \equiv 2 \pmod 4$.

Решење: Пошто је граф Ојлеров знамо да су сви чворови парног степена. Нека је k_0 број чворова чији је степен дељив са 4, а k_2 број чворова чији степен даје остатак 2 при дељењу са 4. На основу основне теореме теорије графова знамо да важи

$$2e = \sum_{v \in V(G)} d(v) = \sum_{i=0}^{k_0} 4x_i + \sum_{j=0}^{k_2} (4y_j + 2) = 4\sum_{i=0}^{k_0} x_i + 4\sum_{j=0}^{k_2} y_j + 2k_2 = 4m + 2k_2.$$

($\Rightarrow$) Претпоставимо да је $e = 2l$ број грана графа G. Уврштавањем у претходно добијени идентитет добијамо $4l = 4m + 2k_2$, одакле је k_2 паран број.

($\Leftarrow$) Нека је $k_2 = 2s$. Сада важи $2e = 4m + 2 \cdot 2s = 4m + 4s$, па број грана e мора бити паран број.

9.7. Нека су H_1 и H_2 два дисјунктна регуларна повезана графа која нису Ојлерова. Конструишемо граф G на следећи начин

$$\begin{aligned} V(G) &= V(H_1) \cup V(H_2) \cup \{u\}, \\ E(G) &= E(H_1) \cup E(H_2) \cup \{uv \,|\, v \in V(H_1) \cup V(H_2)\}. \end{aligned}$$

Доказати да је граф G Ојлеров.

Решење: Приметимо прво да је, због начина на који смо га констуисали, граф G повезан. Означимо са k_1 и k_2 редом степен чворова у регуларним графовима H_1 и H_2. Из услова да графови H_1 и H_2 нису Ојлерови добијамо да су k_1 и k_2 непарни бројеви. Граф G добијамо повезивањем свих чворова из H_1 и H_2 са новим чвором u, одакле важи $d_G(v) \equiv 0 \pmod 2$, за свако $v \in V(H_1) \cup V(H_2)$. Број суседа чвора u је $|V(H_1)| + |V(H_2)|$. Графови H_i морају имати паран број чворова (иначе бисмо имали графове који имају непаран број чворова непарног степена, а то није могуће), па је и чвор u такође парног степена. Према томе, граф G је Ојлеров.

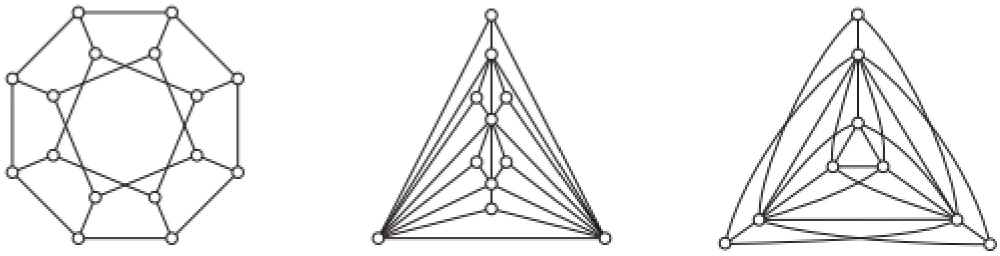
9.8. Нека је G Ојлеров граф који садржи непаран број чворова и за који важи $\Delta(G) \leq \frac{n-1}{2}$, где је $n = |V(G)|$. Доказати да је $\overline{G}$ Ојлеров граф.

Решење: Пошто је број чворова графа непаран, за произвољан чвор графа важи $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1 \equiv 0 \pmod 2$. Како је број $d_G(v)$ паран јер је G Ојлеров, добијамо да је и $d_{\overline{G}}(v)$ такође парно, за сваки чвор v. Треба још показати да је $\overline{G}$ повезан. Ако је $\Delta(G) \leq \frac{n-1}{2}$ онда је

$$\delta(\overline{G}) = n - 1 - \Delta(G) \geq n - 1 - \frac{n-1}{2} = \frac{n-1}{2}.$$

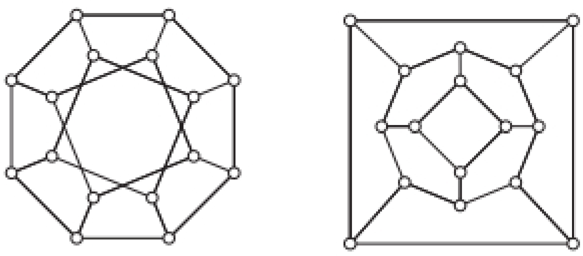
Уколико би граф $\overline{G}$ био неповезан, онда би свака његова компонента повезаности имала барем $\frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$ чворова. Како је број компоненти неповезаног графа бар 2, укупан број чворова би тада морао бити бар $n+1$, што је у контрадикцији са условом да графови G и $\overline{G}$ имају n чворова. Дакле граф $\overline{G}$ је повезан, па према томе и Ојлеров.

9.9. Испитати да ли су следећи графови Хамилтонови.



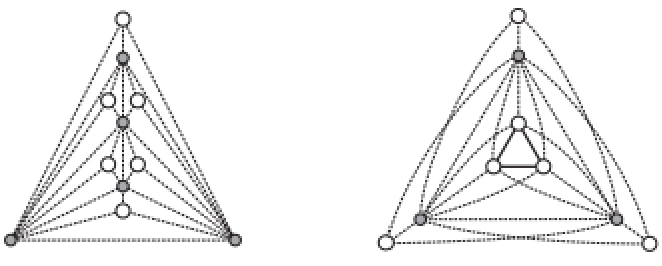
а) б) в)

Решење: а) У првом графу је могуће формирати контуру која купи све чворове графа, па је граф Хамилтонов. Једна од могућих Хамилтонових контура је приказана на наредној слици лево. Приметимо да задати граф можемо нацртати у равни и на други начин (слика десно), и за ту репрезентацију графа је можда и лакше уочити како може да изгледа тражена Хамилтонова контура.



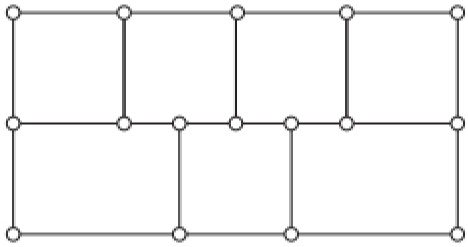
б) Уклањањем 5 чворова које смо обојили сиво, добијамо граф који се састоји из 6 изолованих чворова. Добили смо да је број компоненти повезаности новог графа већи од броја избачених чворова, па граф није Хамилтонов.

в) Уколико избацимо чворове степена 7, граф ће се распасти на троугао и три изолована чвора. Поново добијамо више компоненти повезаности него што смо избацили чворова, па ни овај граф не може да садржи Хамилтонову контуру.

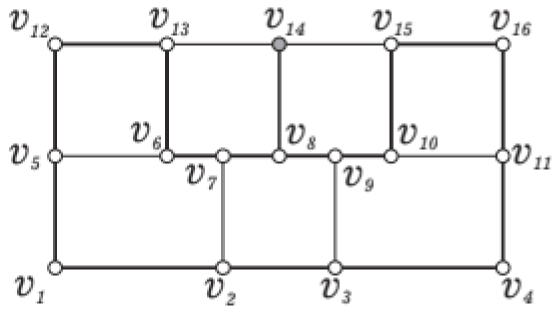


б) в)

9.10. Испитати да ли је следећи граф Хамилтонов.



Решење: Приметимо прво да сви чворови у графу имају степен 2 или 3. Претпоставимо да посматрани граф садржи Хамилтонову контуру. Уколико чворове нумеришемо као на наредној слици, онда гране v_1v_2, v_1v_5, v_4v_3, v_4v_{11}, $v_{12}v_5$, $v_{12}v_{13}$, $v_{16}v_{11}$ и $v_{16}v_{15}$ морају бити на Хамилтоновој контури због чворова v_1, v_4, v_{12} и v_{16}. (Хамилтонова контура ће покупити све гране у чворовима степена 2, а оставиће једну грану у чворовима степена 3.) Посматрајмо сада чвор v_6. Како смо у чвору v_5 већ покупили две гране, грана v_5v_6 не може бити на Хамилтоновој контури. Према томе, чвор v_6 ћемо покрити са преостале две гране у том чвору, са гранама v_6v_{13} и v_6v_7. На исти начин добијамо да се гране $v_{10}v_9$ и $v_{10}v_{15}$ морају налазити на Хамилтоновој контури. Грана v_7v_2 не може бити део тражене контуре, јер би у противном добили контуру $v_1v_2v_7v_6v_{13}v_{12}v_5v_1$ која не садржи све чворове графа. Из претходне анализе закључујемо да морамо узети грану v_7v_8, и аналогно грану v_9v_8. Сада се узимањем гране v_2v_3 затвара контура. Међутим, добијена контура није Хамилтонова контура пошто је чвор v_{14} остао непокривен. (Све три гране које су инцидентне са чвором v_{14} не смемо да користимо због раније добијених закључака.) На овај начин смо показали да дати граф није Хамилтонов.



Напомена: Приметимо да у овом графу није могуће уочити непразан скуп чворова S, такав да је $\omega(G-S) > |S|$, а граф није Хамилтонов.

9.11. Нека је G Хамилтонов граф различит од контуре. Доказати да G садржи бар два чвора степена већег или једнаког од 3.

Решење: Нека је $C = v_1v_2v_3 \dots v_nv_1$ Хамилтонова контура у графу G. Пошто је граф различит од контуре, знамо да у графу G постоје чворови v_i и v_j који нису суседни на Хамилтоновој контури такви да $v_iv_j \in E(G)$. Сада је грана v_iv_j тетива контуре C, па су чворови v_i и v_j тражени чворови степена ≥ 3.

9.12. Нека граф G садржи чвор који је повезан са најмање три чвора степена 2. Показати да тада G није Хамилтонов.

Решење: Нека је у графу G чвор v повезан са чворовима $u_1, u_2, \dots, u_k$ који су степена 2, где је $k \geq 3$. Претпоставимо да је граф G садржи Хамилтонову контуру. Пошто је $d(u_i) = 2$ обе гране које су инцидентне са овим чворовима морају бити део уочене контуре. Знамо да је чвор v сусед чворова $u_1, u_2, \dots, u_k$ и како је $k \geq 3$, добијамо да се чвор v појављује бар два пута на Хамилтоновој контури, а то је немогуће. Према томе, граф G не може бити Хамилтонов.

9.13. Доказати да је сваки регуларан самокомплементаран граф полухамилтонов.

Решење: Нека је G самокомплементаран граф са n чворова. Пошто је граф G регуларан и важи $G \cong \overline{G}$ добијамо да за сваки чвор v важи $d_G(v) = d_{\overline{G}}(v) = \frac{n-1}{2}$. Видимо да је испуњен услов Диракове теореме, па је граф G полухамилтонов.

9.14. Нека је G регуларан комплетан бипартитан граф. Доказати да је G Хамилтонов.

Решење: Претпоставимо да је $d(v) = k$, за сваки чвор $v \in V$. Из услова да је G комплетан бипартитан граф закључујемо да обе класе морају имати по k чворова, па је $|V(G)| = 2k$. Сада важи $d(v) = k = \frac{|V(G)|}{2}$, за $\forall v \in V(G)$, па на основу Диракове теореме добијамо да је граф G Хамилтонов.

9.15. Дат је k-регуларан граф G са $n \geq 2k+2$ чворова. Доказати да је тада комплемент $\overline{G}$ Хамилтонов граф.

Решење: Ако је $n \geq 2k+2$, онда је $k \leq \frac{n}{2} - 1$. За произвољан чвор v важи $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n-1$, одакле је

$$d_{\overline{G}}(v) = (n-1) - k \geq (n-1) - \frac{n}{2} + 1 = \frac{n}{2}.$$

Како ово важи за сваки чвор v, за граф $\overline{G}$ важи Диракова теорема, па је Хамилтонов.

9.16. Доказати да је комплемент регуларног неповезаног графа Хамилтонов граф.

Решење: Нека је G регуларан неповезан граф са n чворова. Претпоставимо да је $\omega(G) = k \geq 2$. Посматрајмо компоненту повезаности графа G која садржи најмањи број чворова. Ако је то компонента повезаности G_i, онда важи $|V(G_i)| \leq \frac{n}{k} \leq \frac{n}{2}$. Посматрајмо сада произољан чвор $v_i \in V(G_i)$. Даље важи $d_{G_i}(v_i) \leq |V(G_i)| - 1 \leq \frac{n}{2} - 1$. Пошто је граф G регуларан закључујемо да важи $\Delta(G) \leq \frac{n}{2} - 1$. За произвољан чвор v важи $d_{\overline{G}}(v) = (n-1) - d_G(v) \geq (n-1) - \frac{n}{2} + 1 = \frac{n}{2}$. Сада је због Дираковe теореме граф $\overline{G}$ Хамилтонов.

9.17. Нека је G граф са n чворова и $e \geq \dfrac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$ грана. Доказати да је G Хамилтонов.

Решење: Показаћемо да за свака два несуседна чвора графа G важи да је збир њихових степена већи или једнак од броја чворова, одакле ће директно на основуОреове теореме следити тврђење. Претпоставимо супротно, да постоје несуседни чворови $u, v \in V(G)$ такви да је $d(u) + d(v) < n$. Посматрајмо граф $G - u - v$. Сада је

$$\begin{aligned}|E(G-u-v)| &= |E(G)| - d(u) - d(v) = |E(G)| - (d(u) + d(v)) \\ &> \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6) - n = \frac{n^2 - 5n + 6}{2} \\ &= \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \binom{n-2}{2}.\end{aligned}$$

Граф $G - u - v$ је граф са $n - 2$ чвора, а максималан број грана које може имати граф са $n-2$ чворова је $\dbinom{n-2}{2}$, што је у контрадикцији са претходно добијеним. Према томе, важи услов Ореове теореме, па је граф G Хамилтонов.

9.18. Нека је G повезан граф са 11 чворова и 53 гране. Доказати да је G Хамилтонов и да није Ојлеров.

Решење: Знамо да граф са 11 чворова може имати максимално $\binom{11}{2} = 55$ грана. То значи да се граф G добија уклањањем две гране из комплетног графа K_{11}. Разликујемо два случаја. Уколико уклонимо гране које имају заједнички чвор добијамо граф чији је низ степена чворова $(10, 10, \ldots, 10, 9, 9, 8)$. Пошто граф G има два чвора степена 9, знамо да није Ојлеров. Из услова да је $\delta(G) = 8$ и Дираковe теореме закључујемо да је добијени граф Хамилтонов.

Други случај је да се уклоне две дисјунктне гране (гране које немају заједничке чворове). Граф који се добија на овај начин има низ степена чворова $(10, 10, \ldots, 10, 9, 9, 9, 9)$. Граф има четири чвора степена 9, па није Ојлеров, а како је $\delta(G) = 9$ добијамо да је граф Хамилтонов.

9.19. Нека је $G(X, Y)$ бипартитан граф који је Ојлеров и Хамилтонов. Доказати да тада његов комплемент $\overline{G}$ није Ојлеров.

Решење: Претпоставимо да је $v_1v_2v_3 \ldots v_nv_1$ Хамилтонова контура у графу G. Нека је б.у.о. $v_1 \in X$. Како је G бипартитан мора бити $v_2 \in Y$, $v_3 \in X, \ldots, v_n \in Y$. Сада је број чворова у скуповима X и Y једнак, па је укупан број чворова n паран. Пошто је G и Ојлеров граф важи да је $d_G(v)$ парно, за сваки чвор $v \in V(G)$. Како важи $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$, где је $n - 1$ непаран број, добијамо да је $d_{\overline{G}}(v) \equiv 1 \pmod 2$, $\forall v \in V(\overline{G})$. Видимо да сви чворови у графу $\overline{G}$ имају непаран степен, па он не може бити Ојлеров.

9.20. $n-$*димензиона коцка* Q_n је граф дефинисан на следећи начин: скуп чворова графа је скуп свих уређених $n-$торки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_i \in \{0, 1\}$, при чему су два чвора суседна акко се одговарајуће $n-$торке разликују на тачно једној координати. (На пример, у графу Q_4 чворови $(0, 1, 0, 1)$ и $(0, 0, 0, 1)$ су суседни јер се разликују на другој координати, али $(0, 1, 0, 1)$ и $(0, 0, 0, 0)$ нису суседни пошто се разликују на два места.)

а) Испитати за које n је граф Q_n Ојлеров.

б) Доказати да је Q_n Хамилтонов граф за свако $n \geq 2$.

Решење: Пре него што кренемо са решавањем задатка, приметимо да је број чворова графа Q_n једнак броју уређених $n-$торки над скупом $\{0, 1\}$ којих има 2^n.

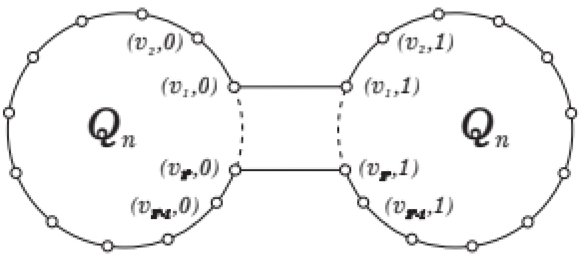
а) Докажимо прво да је граф Q_n повезан за сваки природан број n. Пут од произвољног чвора $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ до чвора $(0, 0, \ldots, 0)$ можемо добити тако што у сваком кораку једну јединицу мењамо са нулом. Уколико посматрамо унију путева од чвора $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ до $(0, 0, \ldots, 0)$ и од $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ до $(0, 0, \ldots, 0)$ добијамо једну шетњу, па знамо да су свака два чвора $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ повезана у графу Q_n. Како су суседи произвољног чвора $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ све $n-$торке које се од ње разликују на тачно једном месту, добијамо да је сваки чвор повезан са тачно n других чворова, тј. да је граф Q_n $n-$регуларан. Добијамо да је $n-$димензиона коцка Ојлеров граф за сваки паран природан број n.

Напомена: За непаран природан број n граф Q_n није Ојлеров, а за $n > 1$ није ни полуојлеров.

б) Доказ изводимо индукцијом по природном броју $n \geq 2$. За $n = 2$ имамо $Q_2 \cong C_4$, па тврђење тривијално важи. Претпоставимо да је граф Q_n Хамилтонов за неко $n \geq 2$. Приметимо да граф Q_{n+1} можемо добити од две копије графа Q_n, тако што у првој копији додамо нулу за последњу координату, а у другој копији додајемо јединицу. У новом графу још само треба повезати чворове који се разликују баш на последњој координати. Нека је $v_1 v_2 v_3 \ldots v_{2^n}$ Хамилтонова контура графа Q_n. Сада је са

$$(v_1, 0)\ (v_2, 0) \ldots (v_{2^n-1}, 0)\ (v_{2^n}, 0)\ (v_{2^n}, 1)\ (v_{2^n-1}, 1) \ldots (v_2, 1)\ (v_1, 1)\ (v_1, 0).$$

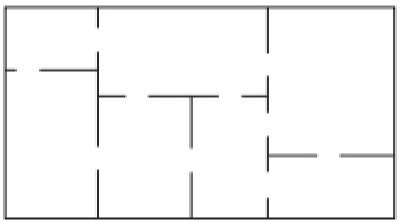
дата Хамилтонова контура графа Q_{n+1} (погледати следећу шему).



9.21. Хрчак Оки је добио нови кавез чији је распоред просторија приказан на слици и одмах је кренуо у обилазак свог новог дома.

а) Да ли је могуће да Оки прође кроз сваку просторију тачно једном и врати се у ону из које је кренуо?

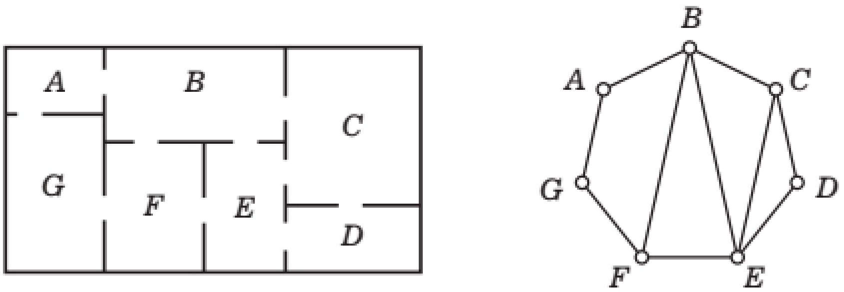
б) Да ли је могуће да Оки приликом обиласка прође кроз свака врата тачно једном и врати се у просторију из које је кренуо?



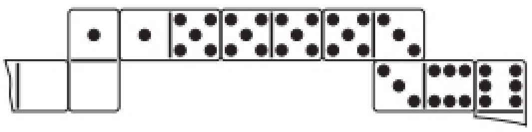
Решење: Уколико нумеришемо просторије, кавез можемо представити помоћу графа, где просторије представљају чворове, а врата између њих гране графа. Задатак се сада своди на испитивање да ли је добијени граф Ојлеров и Хамилтонов.

а) Оки ће моћи да прође кроз сваку просторију тачно једном и врати се у ону из које је кренуо уколико може да обиђе све чворове тачно једном и врати се у почетни чвор, тј. уколико конструисани граф има Хамилтонову контуру. Граф је Хамилтонов јер садржи Хамилтонову контуру $A - B - C - D - E - F - G - A$.

б) Оки може да прође кроз свака врата тачно једном и врати се у просторију из које је кренуо уколико може да пређе преко сваке гране тачно једном и врати се у почетни чвор, тј. уколико је граф Ојлеров. Добијени граф није Ојлеров јер садржи чворове непарног степена (чворови C и F су степена 3).



9.22. Стандардно паковање домина садржи 28 плочица на којима се налазе по две сличице (не обавезно различите) са бројевима $0, 1, 2, 3, 4, 5$ и 6. Испитати да ли је могуће поређати све домине из паковања у цикличну путању тако да две суседне домине на одговарајућим половинама имају исту сличицу.



Решење: Нека бројеви који се налазе на сличицама представљу чворове, а домине гране графа G. Приметимо да ће домина која има две исте сличице бити представљана петљом у графу G. Домине ће моћи да се поређају у цикличну путању уколико је конструисани граф Ојлеров. Како граф G добијамо када у комплетном графу са 7 чворова додамо петљу у сваком чвору, степени свих чворова графа су $6+2 = 8$. Добили смо повезан граф у ком чворови имају паран степен, па је могуће поређати домине тако да формирају цикличну путању.

9.23. Тања и Аца су позвали 10 заједничких пријатеља на вечеру. Свако од њихових гостију познаје барем још 4 особе (не рачунајући Тању и Аცу). Доказати да је могуће да домаћини и њихови гости седну око округлог стола тако да свака особа седи поред две особе које познаје.

Решење: Конструишимо граф G са 12 чворова тако да сваки чвор одговара једној особи при чему су два чвора суседна уколико се особе познају. Чворови којима одговарају Тања и Аца су степена 11, док су сви остали чворови у графу степена већег или једнаког од $4+2=6$. Како за конструисани граф важи Диракова теорема, граф G је Хамилтонов. Сада тражени размештај седења добијамо тако што особе поређамо око стола у оном редоследу у ком се налазе одговарајући чворови на Хамилтоновој контури.

9.24. На двор краља Артура позвано је $2n$ витезова, од којих сваки има највише $n-1$ непријатеља међу присутним витезовима. Да ли је могуће да краљев саветник распоредити витезове око округлог стола тако да ниједан витез не седи поред свог непријатеља?

Решење: Посматрајмо граф G са $2n$ чворова који одговарају витезовима. Чворови су суседни у графу G ако одговарајући витезови нису пријатељи. Треба испитати да ли је граф $\overline{G}$ Хамилтонов. Из услова задатка имамо да је $d_G(v) \leq n-1$. Сада је

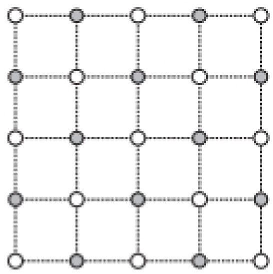
$$d_{\overline{G}}(v) = 2n-1-d_G(v) \geq 2n-1-n+1 = n.$$

Применом Диракове теореме добијамо да је граф $\overline{G}$ Хамилтонов, односно да је могуће распоредити витезове око округлог стола на тражени начин.

9.25. У учионици се налази 25 столица које су распоређене у 5 редова и у сваком реду се налази по 5 столица. Учитељица жели да направи нови распоред седења, тако да се свако дете премести на суседну столицу. (Дете може да се премести на столицу која се налази лево, десно, испред или иза његове тренутне столице.) Да ли је изводљиво да учитељица направи нови распоред за седење?

Решење: Уколико децу представимо као чворове графа, где гране представљају могући смер у ком дете може да се премести, добијамо граф који је приказан на следећој слици. У случају да уочени граф поседује Хамилтонову контуру, учитељица би могла само да заротира децу за једно место на тој контури и да добије нови распоред седења. Ако избацимо 12 чворова који су обојени сиво, добићемо граф који се састоји од 13 белих изолованих чворова.

Пошто је број избачених чворова мањи од броја добијених компоненти повезаности закључујемо да граф није Хамилтонов, па самим тим није могуће да учитељица направи нови распоред за седење ученика.

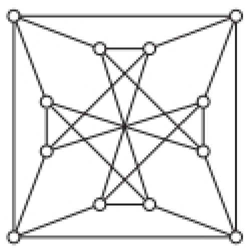


Задаци за самостални рад

9.26. Испитати да ли је следећи граф

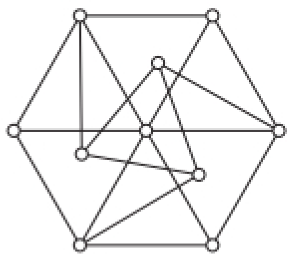
а) Ојлеров;

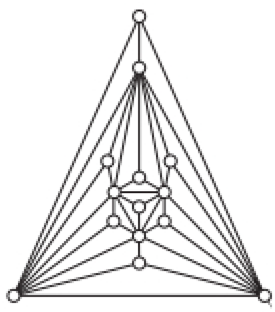
б) Хамилтонов.



9.27. Нека је G повезан граф у ком свака грана припада јединственој контури. Доказати да је тада граф G Ојлеров.

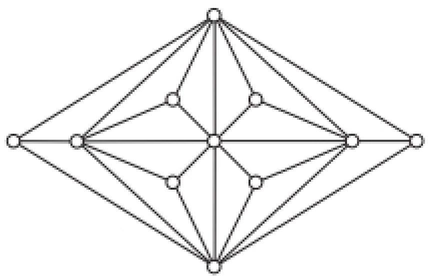
9.28. Испитати да ли су следећи графови Хамилтонови.





10 Планарни графови

10.1. Испитати да ли је дати граф максималан планаран. Уколико није, одредити најмањи број грана који је потребно доцртати тако да граф постане максималан планаран.



Решење: Све области максималног планарног графа су троуглови. Како дати граф за спољашњу област има четвороугао закључујемо да он није максималан планаран. Уколико повежемо два несуседна чвора те области, четвороугао ћемо поделили на два троугла и добићемо максималан планаран граф.

10.2. Нека је дат максималан планаран граф G који има тачно један чвор степена 9, док су сви остали чворови степена 5 или 6. Колико чворова степена 5 садржи граф G?

Решење: Знамо да у максималном планарном графу са n чворова и e грана важи $e = 3n-6$. Означимо са k број чворова степена 5. Из основне теореме теорије графова сада имамо

$$2(3n-6) = \sum d(v) = 9 + 5k + 6(n-k-1),$$

одакле је $k = 15$.

10.3. Доказати да не постоји планаран граф са 7 грана у ком је степен сваког чвора бар 3.

Решење: Претпоставимо је G граф који испуњава услове задатка. Из услова да је G планаран важи $e \leq 3n-6$, па је $13 \leq 3n$. Са друге стране имамо да је $\delta(G) \geq 3$, одакле је $2e \geq 3n$, тј. $3n \leq 14$. Како не постоји природан број n за који важи $13 \leq 3n \leq 14$ закључујемо да не постоји ни планаран граф G са 7 грана у ком је $\delta(G) \geq 3$.

10.4. Да ли постоји 4–регуларан планаран бипартитан граф?

Решење: Претпоставимо да постоји 4–регуларан планаран бипартитан граф G. Због основне теореме теорије графова знамо да важи $2e = \sum d(v) = 4n$, тј. $e = 2n$. Међутим, за бипартитне планарне графове важи $e \leq 2n-4$, одакле закључујемо да не постоји тражени граф.

10.5. Нека је G планаран граф који има мање од 30 грана. Доказати да је тада $\delta(G) \leq 4$.

Решење: Претпоставимо да је $\delta(G) \geq 5$, тј. да за сваки чвор v важи $d(v) \geq 5$. Сада је због основне теореме $2e = \sum d(v) \geq 5n$, те је $n \leq \frac{2}{5}e$. Како је G планаран граф важи $e \leq 3n - 6$, одакле добијамо $e \geq 30$. Ово је у контрадикцији са условом задатка, па је минималан степен чворова у графу G већи или једнак 4.

10.6. Доказати да је у планарном графу аритметичка средина степена чворова мања од 6.

Решење: Нека је дат планаран граф G. Желимо да оценимо $\dfrac{\sum d(v)}{n}$. Граф G је планаран па важи $e \leq 3n - 6$. Сада је

$$\frac{\sum d(v)}{n} = \frac{2e}{n} \leq \frac{6n-12}{n} = 6 - \frac{12}{n}.$$

Пошто је n природан број важи $\frac{12}{n} > 0$, те је $\dfrac{\sum d(v)}{n} < 6$.

10.7. Дат је граф G са n чворова, $n \geq 6$. Уколико се граф G разлаже на три покривајућа стабла T_1, T_2 и T_3, доказати да је G непланаран.

Решење: Уколико би граф G био планаран, важило би $e \leq 3n - 6$. Како се граф G разлаже на три дисјунктна покривајућа стабла добијамо да је $e = 3(n-1) = 3n-3$. Услов $3n-3 \leq 3n-6$ је немогућ, одакле закључујемо да граф G није планаран.

10.8. Одредити колико највише чворова може да садржи стабло чији је комплемент планаран граф.

Решење: Нека је граф $\overline{T}$ комплемент стабла T са n чворова. Како је $|E(T)| + |E(\overline{T})| = \binom{n}{2}$ добијамо

$$|E(\overline{T})| = \binom{n}{2} - (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \binom{n-1}{2}.$$

Из захтева да је граф $\overline{T}$ планаран закључујемо $|E(\overline{T})| \leq 3n-6$, па је $\binom{n-1}{2} \leq 3n-6$. Даље се добија квадратна неједначина $n^2-9n+14 = (n-2)(n-7) \leq 0$, одакле максималан број чворова у посматраном стаблу T мора бити 7.

10.9. Нека је G планаран граф са 30 чворова, при чему је 15 висећих. Доказати да G има највише 54 гране.

Решење: Посматрајмо пограф H графа G који је индукован чворовима степена ≥ 2. Како је сваки подграф планарног графа такође планаран важи $|E(H)| \leq 3|V(H)|-6 = 3\cdot 15 - 6 = 39$. Граф G сада добијамо додавањем 15 висећих чворова у граф H, па је

$$|E(G)| = |E(H)| + 15 \leq 39 + 15 = 54.$$

10.10. Доказати да у неповезаном планараном графу G важи

$$n - e + r = \omega(G) + 1,$$

где је n број чворова, e број грана, r број повезаних области на које граф дели раван, а $\omega(G)$ број компоненти повезаности графа.

Решење: Нека је $\omega(G) = k$ и нека су $G_1, G_2, \ldots, G_k$ компоненте повезаности графа G. Како је свака компонента G_i повезан планаран граф важи $n_i - e_i + r_i = 2$. Сабирањем ових једнакости добијамо

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k - e_1 - e_2 - \cdots - e_k + r_1 + r_2 + \cdots + r_k = 2k.$$

Јасно је да сабирањем броја чворова у графовима G_i добијамо укупан број чворова графа, и исто за број грана. Пошто имамо само једну спољашњу област коју смо урачунали код сваке компоненте повезаности, закључујемо да важи $r_1+r_2+\cdots+r_k = r+(k-1)$. Сада је $n+r-e = 2k-k+1 = \omega(G)+1$.

10.11. Нека је G повезан планаран граф за који важи $\delta(G) \geq 3$. Доказати да је тада $e \leq 3r-6$, где је e број грана, а r број области на које граф G дели раван.

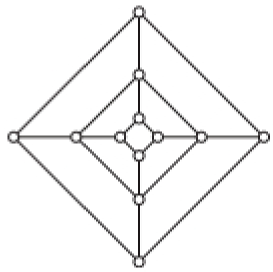
Решење: Претпоставимо да је n број чворова графа G. Сада је због услова $\delta(G) \geq 3$ испуњено $2e \geq 3n$. Даље из Ојлерове формуле добијамо $2 = r+n-e \leq r + \dfrac{2e}{3} - e = r - \dfrac{e}{3}$, одакле је $e \leq 3r-6$.

10.12. Да ли постоји 5−регуларан планаран граф са 17 области?

Решење: Претпоставимо да постоји 5−регуларан планаран граф G са 17 области. Пошто важи $2e = 5n$ из Ојлерове формуле добијамо $4 = 2r+2n-2e = 34+2n-5n$, па је $n = 10$. Сада је $e = \frac{5n}{2} = 25$. Претпоставили смо да је G планаран граф те важи оцена $e \leq 3n-6$, тј. $25 \leq 24$. Добили смо контрадикцију, па не постоји граф који испуњава услове задатка.

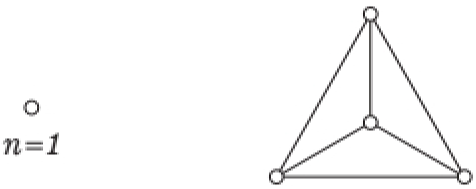
10.13. Да ли постоји повезан планаран граф са 12 чворова у ком су све области четвороуглови?

Решење: Претпоставимо да је G тражени граф. Све области планарног графа G су четвороуглови, па је $2e = 4r$. Када ово уврстимо у Ојлерову формулу добијамо $r = e - n + 2 = 2r - 12 + 2$, одакле је $r = 10$ и $e = 20$. Сада је потребно још пронаћи како изгледа граф G. Једна од могућих планарних репрезентација траженог графа је приказана на следећој слици.



10.14. Одредити све максималне планарне графове код којих је број области на које граф дели раван једнак броју чворова.

Решење: Нека је G максималан планаран граф у ком је $n = r$. Сада због Ојлерове формуле важи $2n - e = 2$. Знамо да за све максималне планарне графове са $n \geq 3$ чворова важи $e = 3n - 6$. Из претходне две једначине добијамо да је $n = 4$, па је комплетан граф са 4 чвора граф са траженим особинама. Треба још проверити како изгледају максимални планарни графови са једним и два чвора. У случају да је $n = 1$ имамо тривијалан граф са једним чвором и без грана, који дели раван на једну област, па тврђење важи. За $n = 2$, добијамо комплетан граф са 2 чвора, али број повезаних области на које K_2 дели раван је 1. Према томе, постоје само два графа која задовољавају тражене услове, графови K_1 и K_4.



n=1 *n=4*

10.15. Доказати да кубни планаран граф који не садржи троуглове и четвороуглове има најмање 20 чворова.

Решење: Пошто је $d(v) = 3$ за сваки чвор v, према основној теореми имамо $2e = 3n$. Посматрани планарни граф не садржи троуглове и четвороуглове, па је $r = r_5 + r_6 + r_7 + \dots$. Уколико покушамо да избројимо број грана графа преко његових области, сваку грану ћемо рачунати 2 пута јер сваке две суседне области планарног графа имају по једну заједничку грану која их ограничава. Према томе, важи $2e = 5r_5 + 6r_6 + 7r_7 + \cdots \geq 5r$. Уврштавањем добијених идентитета у Ојлерову формулу добијамо $n \geq 2 + \frac{9n}{10}$, одакле је број чворова графа $n \geq 20$.

10.16. Нека је G повезан планаран граф са n чворова и e грана. Ако свака област графа G садржи најмање 5 ивица, доказати да тада важи $e \leq \dfrac{1}{3}(5n - 10)$.

Решење: Пошто свака област графа садржи најмање 5 ивица важи $2e \geq 5r$. Граф G је планаран па из Ојлерове формуле добијамо $2 = r + n - e \leq \frac{2}{5}e + n - e$. Сада је $3e \leq 5n - 10$, што је и требало доказати.

10.17. Нека је G повезан планаран граф за који важи $\delta(G) \geq 4$. Доказати да у свакој планарној репрезентацији графа G можемо уочити троугао.

Решење: Нека је G повезан планаран граф са n чворова и e графа који дели раван на r области. Посматрајмо једну планарну репрезентацију графа G и претпоставимо да међу областима на које граф дели раван нема троуглова. Сада је је $r = r_4 + r_5 + \dots$, па је $2e \geq 4r$. Због услова $\delta(G) \geq 4$ и основне теореме теорије графова знамо да важи $2e \geq 4n$. Уврштавањем добијених оцена у Ојлерову формула добија се

$$2 = r + n - e \leq \frac{e}{2} + \frac{e}{2} - e = 0,$$

што је очигледно контрадикција. Према томе, граф G садржи област која је ограничена контуром дужине 3.

10.18. Нека је G повезан планаран граф са мање од 12 области у ком је сваки чвор степена бар 3. Доказати да G садржи област са највише 4 ивице.

Решење: Претпоставимо да све области графа G имају више од 4 ивице, тј. да је $r = r_5 + r_6 + \dots$. Сада је $2e \geq 5r$, одакле је $e \geq \frac{5}{2}r$. Како је $\delta(G) \geq 3$ важи $n \leq \frac{2e}{3}$. Даље је на основу Ојлерове формуле

$$r = 2 - n + e \geq 2 - \frac{2e}{3} + e = 2 + \frac{e}{3} \geq 2 + \frac{5}{6}r.$$

Добијамо $r \geq 12$, што је у контрадикцији са условом задатка, па у графу G постоји област која има највише 4 ивице.

10.19. Нека је G повезан планаран граф такав да је $\delta(G) \geq 3$. Доказати да најмање 2 области графа G имају највише 5 ивица.

Решење: Доказујемо $r_3 + r_4 + r_5 \geq 2$. Претпоставимо да у графу G постоји највише једна област која има највише 5 ивица. Сада је $r \leq 1 + r_6 + r_7 + \ldots$ па важи следећа оцена

$$2e = 3r_3 + 4r_4 + 5r_5 + 6r_6 + 7r_7 + \cdots \geq 6(r - 1).$$

Одатле је $3r \leq e + 3$. Даље из Ојлерове формуле добијамо

$$6 = 3r + 3n - 3e \leq e + 3 + 3n - 3e = 3n - 2e + 3,$$

односно $2e \leq 3n - 3$. Са друге стране, из услова $\delta(G) \geq 3$ и основне теореме теорије графова добијамо $2e \geq 3n$, што је у контрадикцији са претходно добијеним.

10.20. Доказати да у повезаном планарном графу са n чворова и e грана у ком све области имају k ивица важи $e = \dfrac{k(n-2)}{k-2}$.

Решење: Због услова да све области планарног графа имају k ивица важи $2e = r \cdot k$, па је $r = \frac{2e}{k}$. Уврштавањем у Ојлерову формулу добијамо $e(k-2) = nk - 2k$, одакле је $e = \dfrac{k(n-2)}{k-2}$.

10.21. Дат је полиедар са 12 страна, при чему су 7 троуглови и 4 четвороуглови. Одредити колико ивица има последња страна полиедра ако је познато да је број темена овог полиедра 11.

Решење: Нека је G планаран граф који се добија пројектовањем датог полиедра на раван. Из услова задатка видимо да граф G има 11 чворова и 12 области. Добили смо повезан планаран граф, па је на основу Ојлерове формуле број грана графа $e = 21$. Означимо са k дужину контуре која ограничава последњу област графа G. Пошто је свака грана заједничка ивица за две суседне области графа G закључујемо да важи $2e = 7 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + k$. Добијамо да је $k = 5$, те је последња страна полиедра петоугао.

10.22. Доказати да ако су у полиедру све стране троуглови и петоуглови, тада полиедар има паран број страна.

Решење: Нека је G одговарајући планаран граф. Како је због услова задатка $r = r_3 + r_5$ добијамо да важи $2e = 3r_3 + 5r_5$. Сада је лева страна једнакости парна, док ће десна страна бити парна само у случају да су бројеви r_3 и r_5 исте парности. У оба случаја добијамо да је укупан број области графа G паран, чиме је тврђење доказано.

10.23. Доказати да сваки полиедар садржи страну која је троугао или теме из ког излазе 3 странице.

Решење: Посматрајмо произвољан полиедар. Тада је за планаран граф G који је пројекција тог полиедра задовољено $r = r_3 + r_4 + \ldots$ и $n = n_3 + n_4 + \ldots$. Треба доказати $r_3 \geq 1$ или $n_3 \geq 1$. Претпоставимо супротно, да је $r_3 = 0$ и $n_3 = 0$. Сада важи $2e \geq 4n$ и $2e \geq 4r$, па је из Ојлерове формуле

$$2 = r + n - e \leq \frac{e}{2} + \frac{e}{2} - e = 0.$$

Добили смо контрадикцију, па граф G садржи област огранчену са 3 гране или чвор степена 3.

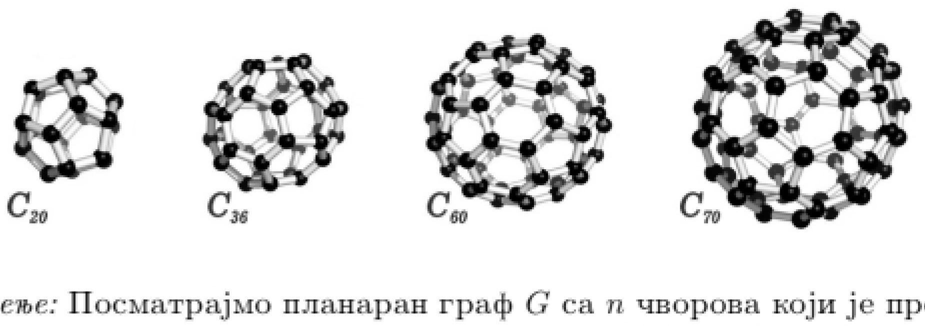
10.24. Фудбалска лопта је сашивена од 32 дела који су петоугаоног и шестоугаоног облика. Ако се у сваком темену састају по 3 дела лопте, одредити број петоугаоних делова.

Решење: Фудбалска лопта се може представити планарним графом G са 32 области. Из услова да се у сваком темену састају по 3 темена закључујемо да је добијени граф 3–регуларан, па је $2e = 3n$. Увршттавањем добијених једнакости у Ојлерову формулу добијамо $r = 2 + e - \frac{2e}{3}$, одакле је $3r = e + 6$. Пошто су сви делови лопте петоуглови и шестоуглови важи $r = r_5 + r_6 = 32$. Како је $2e = 5r_5 + 6r_6$ добијамо $6r_5 + 6r_6 = 5r_5 + 6r_6 + 12$, па је $r_5 = 12$.

10.25. Алотропске модификације су различити облици једног хемијског елемента који се разликују према начину везивања атома. Постоје три алотропске модификације угљеника: дијамант, графит и фулерен. Угљеникови атоми у фулерену граде кристалну решетку сачињену од петоуглова и шестоуглова у чијим теменима се налазе угљеникови атоми са по три везе.

а) Доказати да сваки фулерен садржи тачно 12 петоуглова.

б) Изразити број шестоуглова у функцији од броја угљеникових атома.



Решење: Посматрајмо планаран граф G са n чворова који је пројекција фулерена са n угљеникових атома на раван.

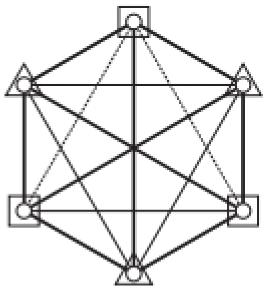
а) Пошто је сваки угљениковатом у кристалној решетки повезан са три друга атома, добијени граф је 3−регуларан и важи $2e = 3n$. На основу Ојлерове формуле важи $r_5 + r_6 + \frac{2e}{3} - e = 2$. Како је $2e = 5r_5 + 6r_6$ након сређивања добијамо $6r_5 + 6r_6 - 5r_5 - 6r_6 = 12$, одакле закључујемо да је број петоуглова у фулеренима константан и износи 12.

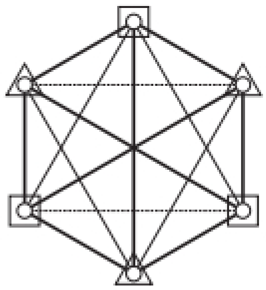
б) Показали смо да је сваки фулерен има тачно 12 петоуглова, па је $2e = 5r_5 + 6r_6 = 60 + 6r_6$. Сада из идентитета $60 + 6r_6 = 3n$ добијамо да се број шестоуглова фулерена са n угљеникових атома може изразити као $r_6 = \frac{n}{2} - 10$.

10.26. Доказати да граф који се добија уклањањем две гране из комплетног графа K_6 није планаран.

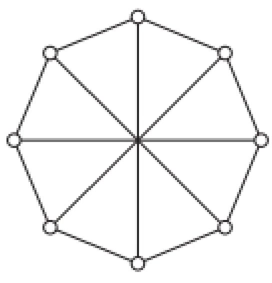
Решење: Претпоставимо да је граф $K_6 - e_1 - e_2$ планаран. Сада је $|E| = \binom{6}{2} - 2 = 13$. Са друге стране, пошто смо претпоставили да је $K_6 - e_1 - e_2$ планаран важи $|E| \leq 3n - 6 = 18 - 6 = 12$, што је у контрадикцији са претходно добијеним.

II начин: Посматрајмо граф $K_6 - e_1 - e_2$. Гране e_1 и e_2 графа K_6 могу имати заједнички чвор или бити дисјунктне. Лако се проверава да у оба случаја добијени граф садржи подграф који је изоморфан комплетном бипартитном графу $K_{3,3}$. Како граф $K_{3,3}$ није планаран, добијамо да ни његов надграф не може бити планаран.

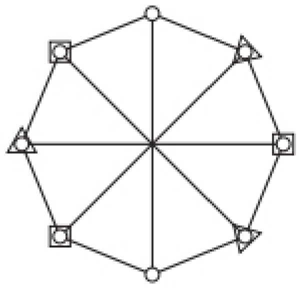




10.27. Испитати да ли је следећи граф планаран.

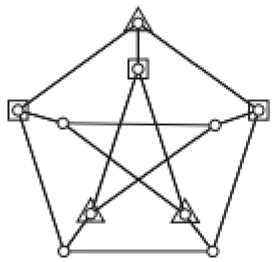


Решење: Уочени подграф се може добити елементарним поделама две гране у графу $K_{3,3}$. Пошто граф садржи подграф који је хомеоморфан са $K_{3,3}$, из теореме Куратовског следи да није планаран.



10.28. Доказати да Петерсенов граф није планаран.

Решење: Петерсенов граф је специјалан $3-$регуларан граф са 10 чворова код ког су чворови повезани као на слици. Иако на први поглед делује да Петерсенов граф садржи подграф који је хомеоморфан комплетном графу са 5 чворова, заправо се испоставља да је могуће уочити подграф који је добијен елементарним поделама од графа $K_{3,3}$.



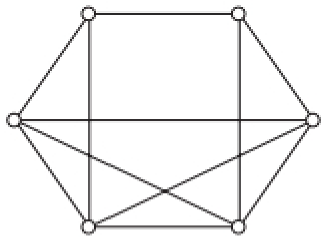
Задаци за самостални рад

10.29. Показати да у планарном бипартитном графу постоји чвор са степеном највише 3.

10.30. Показати да не постоји кубни планаран граф са 10 чворова у ком је дужина најмање контуре 5.

10.31. Доказати да у повезаном планарном графу са n чворова и e грана у ком све области имају најмање k ивица важи $e \leq \dfrac{k(n-2)}{k-2}$.

10.32. Испитати да ли је граф са слике планаран.



10.33. Доказати да граф $\overline{C}_7$ није планаран.

Литература

[1] J. A. Anderson, *Дискретна математика са комбинаториком, Превод другог издања*, Рачунарски факултет / CET Computer Equipment and Trade, Београд, 2005

[2] A. Andžāns, B. Johannesson, *Dirichlet principle, Part I, Theory, Examples, Problems, Experimental Training Material*, Riga, 2005, draft

[3] M. Bóna, *A Walk Through Combinatorics: An introduction to enumeration and graph theory, Second Edition*, World Scientific, Singapore, 2006

[4] И. Бошњак, Д. Машуловић, В. Петровић, Р. Тошић, *Збирка задатака из теорије графова*, Природно–математички факултет у Новом Саду, Департман за математику и информатику, Нови Сад, 2005

[5] Д. Вељан, *Комбинаторика с теоријом графова*, Школска књига, Загреб, 1989

[6] C. Vasudev, *Combinatorics and graph theory*, New Age International, New Delhi, 2007

[7] С. Вукадиновић, В. Стојановић, *Математископ 6, Збирка решених задатака за IV разред средњих школа, Друго издање*, ИП Математископ, Београд, 2005

[8] G. Chartrand, L. Lesniak, P. Zhang, *Graphs & Digraphs, Sixth Edition*, CRC Press, Taylor & Francis Group / A Chapman & Hall Book, 2016

[9] Д. Цветковић, М. Милић, *Теорија графова и њене примене, Друго измењено и допуњено издање*, Научна књига, Београд, 1977

[10] М. Цвитковић, *Комбинаторика, Збирка задатака*, Елемент, Загреб, 1994

[11] Р. Дачић, *Елементарна комбинаторика*, Математички институт, Београд, 1977

[12] E. G. Goodaire, M. M. Parmenter, *Disctere Mathematics with Graph Theory, Second Edition*, Prentice–Hall, New Jersey, 2002

[13] Д. Машуловић, *Одабране теме дискретне математике*, Природно–математички факултет у Новом Саду, Департман за математику и информатику, Нови Сад, 2007

[14] П. Младеновић, *Комбинаторика*, Друштво математичара СР Србије, Материјали за младе математичаре, св. 22., Београд, 1989

[15] В. Петровић, *Теорија графова*, Универзитет у Новом Саду, Природно–математички факултет, Нови Сад, 1998

[16] K. H. Rosen, *Disctere Mathematics and Its Applications, Seventh Edition*, McGraw–Hill, New York, 2012

[17] Д. Стевановић, М. Ћирић, С. Симић, В. Балтић, *Дискретна математика, Основе комбинаторике и теорије графова*, март 2007, радна верзија

[18] Д. Стевановић, М. Милошевић, В. Балтић, *Дискретна математика, Основе комбинаторике и теорије графова, Збирка решених задатака*, Друштво математичара Србије, Београд, 2004

[19] Р. Тошић, *Комбинаторика*, Универзитет у Новом Саду, Природно–математички факултет, Нови Сад, 1999

[20] A. Tucker, *Applied Combinatorics, Sixth Edition*, Wiley, United States of America, 2012