VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1. Vežbe IV.1.

1.1. Diferencijalne jednačine prvog reda 1–5

Jednačina oblika $F(x, y, y') = 0$ ili ako može da se reši po y', oblika $y' = f(x, y)$, naziva se diferencijalna jednačina prvog reda.

1. $F(x, y, y') = 0$ opšti ili implicitni oblik diferencijalne jednačine

2. $y' = f(x, y)$ normalni ili eksplicitni oblik diferencijalne jednačine

Razlikujemo tri rešenja diferencijalne jednačine:

1. **Opšte rešenje** diferencijalne jednačine oblika $F(x, y, y') = 0$ je funkcija $y = y(x, c)$ koja zavisi od $c \in \mathbb{R}$ a za koju važi:
   - zadovoljava diferencijalnu jednačinu $F(x, y(x, c), y'(x, c)) = 0$
   - za svaki početni uslov $(x, y) = (x_0, y_0)$ iz oblasti rešenja D, može se jednoznačno odrediti konstanta $c = c_0$, takva da $y = y(x, c_0)$ zadovoljava početnu jednačinu, tj. $y_0 = y(x_0, c_0)$. Geometrijski ovo znači da tražimo ono rešenje koje prolazi kroz tačku (x_0, y_0).

2. **Partikularno rešenje** diferencijalne jednačine je ona funkcija koja se dobija iz opšteg rešenja za $c = c_0$.

3. **Singularno rešenje** je ono rešenje diferencijalne jednačine $F(x, y, y') = 0$ koje se ne može dobiti iz opšteg ni za jedno $c = c_0$.

U nastavku se bavimo rešavanjem raznih tipova diferencijalnih jednačina prvog reda.

1.1.1. Jednačine koje razdvajaju promenljive

Diferencijalna jednačina ovog tipa je oblika $y' = F(x,y)$ čija se desna strana može zapisati u obliku proizvoda dve neprekidne funkcije od kojih jedna zavisi samo od x, a druga samo od y, tj., $y' = f(x)g(y)$. Sada imamo,

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,\ g(y) \neq 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Zadatak 1.1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y(x^2-1)y' = -x(y^2-1).$$

Rešenje: Koristeći jednakost $y' = \dfrac{dy}{dx}$, imamo da je

$$y(x^2-1)\frac{dy}{dx} = -x(y^2-1) \Leftrightarrow \frac{ydy}{y^2-1} = -\frac{xdx}{x^2-1}.$$

Uzimajući integral leve i desne strane jednakosti dobijamo,

$$\int \frac{ydy}{y^2-1} = -\int \frac{xdx}{x^2-1} \Leftrightarrow \int \frac{2ydy}{y^2-1} = -\int \frac{2xdx}{x^2-1}.$$

Oba integrala rešavamo smenom, $t = y^2-1$, odnosno $s = x^2-1$, redom. Odavde imamo $dt = 2ydy$, i $ds = 2xdx$, te dobijamo

$$\int \frac{dt}{t} = -\int \frac{ds}{s} \Rightarrow \ln|t| = -\ln|s| + c_1.$$

Sada, vraćanjem smena, i jednostavnim manipulacijama logaritmom, imamo

$$\begin{aligned}
\ln|y^2-1| &= -\ln|x^2-1| + c_1,\\
\ln|y^2-1| + \ln|x^2-1| &= c_1,\\
\ln(|x^2-1||y^2-1|) &= c_1,\\
|x^2-1||y^2-1| &= e^{c_1}.
\end{aligned}$$

Primetimo da je e^{c_1} opet neka druga (pozitivna) konstanta, te je možemo označiti sa c_2. Najzad, opšte rešenje početne jednačine je funkcija,

$$|x^2-1||y^2-1| = c_2.$$

Zadatak 1.2. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = xy - y$.
Rešenje:

$$y' = y(x-1) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y(x-1) \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = (x-1)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int (x-1)dx.$$

Kada rešimo dobijene tablične integrale imamo,

$$\begin{aligned} \ln|y| &= \frac{x^2}{2} - x + c, \\ |y| &= \exp(\frac{x^2}{2} - x + c) = c_1 \exp(\frac{x^2}{2} - x). \end{aligned}$$

gde je $c_1 = \exp(c)$.

Zadatak 1.3. Odrediti partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$(1+e^x)yy' = e^x,$$

koje zadovoljava uslov $y(0) = 1$.
Rešenje: Kao i u prethodnim primerima, ideja je da prvo grupišemo sve funkcije po x kod dx, i sve funkcije po y kod dy. Stoga,

$$(1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x \Leftrightarrow ydy = \frac{e^x}{1+e^x}dx \Rightarrow \int ydy = \underbrace{\int \frac{e^x}{1+e^x}dx}_{t=1+e^x}.$$

Levi integral je tablični, dok se desni rešava smenom $t = 1 + e^x$, odakle imamo $dt = e^x dx$, te dobijamo,

$$\begin{aligned} &\frac{y^2}{2} = \ln|1+e^x| + c \\ &y^2 = 2(\ln(1+e^x) + \ln c_1) \Rightarrow y = \sqrt{2\ln c_1(1+e^x)}. \end{aligned}$$

Primetimo dve stvari, naime apsolutna vrednost pod logaritmom se izgubila jer je funkcija $1 + e^x$ pozitivna na celom svom domenu. Konstantu $c \in \mathbb{R}$ smo zapisali kao $\ln c_1$, jer setimo se da je kodomen svake logaritamske funkcije, pa i ln, ceo skup realnih brojeva, pa ova smena zaista može biti uspostavljena za neko $c_1 > 0$.
Kako je $y(0) = 1$, imamo

$$y(0) = \sqrt{2\ln(2c_1)} = 1 \Leftrightarrow 2\ln(2c_1) = 1 \Leftrightarrow \ln(2c_1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2c_1 = \sqrt{e} \Leftrightarrow c_1 = \frac{\sqrt{e}}{2}.$$

Znači partikularno rešenje date diferencijalne jednačine sa početnim uslovom $y(0) = 1$, je funkcija $y = \sqrt{2\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{2}(1+e^x)\right)}$.

1.1.2. Homogena diferencijalna jednačina

Svaka homogena diferencijalna jednačina se može svesti na jednačinu oblika $y' = f(\frac{y}{x})$, gde je f neprekidna funkcija na nekom intervalu (a, b). Ovakve jednačine rešavaju se smenom $u = \frac{y}{x}$, gde je funkcija u funkcija od promenljive x, tj. $u = u(x)$.
Smenu uvodimo na sledeći način, $u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = u(x)x \Rightarrow y' = u'x + u$, te se na ovaj način, videćemo kroz zadatke, svaka homogena jednačina svodi na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive.

Zadatak 1.4. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $(x-y)ydx-x^2dy = 0$.
Rešenje: Jednostavnim manipulacijama date jednačine imamo,

$$(x-y)ydx = x^2dy \Leftrightarrow (x-y)y = x^2\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \Leftrightarrow y' = \underbrace{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}_{f(\frac{y}{x})}.$$

Primetimo da smo nakon par iteracija došli do diferencijalne jednačine oblika $y' = f(\frac{y}{x})$. Uvodimo smenu $u = \frac{y}{x}$, odakle dobijamo kao što je objašnjeno u uvodu, $y' = u'x + u$. Stoga,

$$u'x + u = u - u^2 \Leftrightarrow \frac{du}{dx}x = -u^2 \Leftrightarrow \frac{du}{u^2} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{u^2} = -\int \frac{dx}{x}.$$

Rešavanjem dobijenih (tabličnih) integrala imamo,

$$\frac{u^{-1}}{-1} = -\ln|x| + c \Leftrightarrow u = \frac{1}{\ln|c_1x|}.$$

Vraćanjem smene $u = \frac{y}{x}$, dobijamo rešenje početne jednačine, funkciju,

$$y = \frac{x}{\ln|c_1x|}.$$

1.1.3. Jednačine koje se svode na homogene

Diferencijalna jednačina oblika $y' = f\Big(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big)$ gde su $a_i,\ b_i,\ c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, i f neprekidna funkcija, može se svesti na homogenu jednačinu, a ona opet na jednačinu koja razdvaja promenljive.

Primetimo da imamo dva slučaja,

1. Ako je $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, uvodimo smenu $a_1x + b_1y + c_1 = t$ ili $a_2x + b_2y + c_2 = t$, i na taj način svodimo našu jednačinu na jednačinu koja razdvaja promenljive.

2. Ako je pak $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, uvodimo smenu $x = X + \alpha$ i $y = Y + \beta$, gde su α i β brojevi koji zadovoljavaju sistem jednačina
$$\begin{array}{ccccccc} a_1\alpha & + & b_1\beta & + & c_1 & = & 0 \\ a_2\alpha & + & b_2\beta & + & c_2 & = & 0, \end{array}$$
a Y je funkcija od X.
Time dobijamo homogenu diferencijalnu jednačinu,
$$Y' = f\Big(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\Big) = f\left(\frac{a_1 + b_1\dfrac{Y}{X}}{a_2 + b_2\dfrac{Y}{X}}\right) = g\Big(\frac{Y}{X}\Big).$$

Zadatak 1.5. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine
$$x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0.$$

Rešenje: Vidimo da je,
$$y' = \frac{x - y - 1}{x - y - 2}.$$
Koristeći oznake uvedene gore, vidimo da je $a_1 = 1$, $b_1 = -1$, $a_2 = 1$, i $b_2 = -1$. Stoga važi da je,
$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$
te imamo prvi slučaj, od dva koja smo gore prepoznali. Da bismo rešili jednačinu, možemo uvesti smenu $x - y - 1 = t$ ili $x - y - 2 = t$, sasvim je svejedno.
Izaberimo na primer drugu. Tada je $x - y - 2 = t$, a $x - y - 1 = t + 1$, te diferenciranjem leve i desne strane smene, po x, dobijamo $1 - y' = t'$, tj. $y' = 1 - t'$. Kad ubacimo dobijene jednakosti u našu jednačinu dobijamo,
$$1 - t' = \frac{t + 1}{t},$$

što je vidimo vrlo jednostavna jednačina koja razdvaja promenljive. U nastavku imamo,

$$t' = 1 - \frac{t+1}{t} = \frac{t-t-1}{t} \Leftrightarrow t' = -\frac{1}{t}.$$

Sada treba da se setimo da je $t = t(x)$, i da važi $t' = \dfrac{dt}{dx}$, te imamo,

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dx} &= -\frac{1}{t} \Leftrightarrow tdt = -dx \Rightarrow \int tdt = -\int dx,\\
\frac{t^2}{2} &= -x + c,\\
t^2 &= 2(c-x).
\end{aligned}$$

Kada vratimo smenu $t = x-y-2$, dobijamo opšte rešenje početne diferencijalne jednačine, funkciju,

$$(x-y-2)^2 = 2(c-x).$$

Zadatak 1.6. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y' = \dfrac{x+y-5}{x-y+1}$.

Rešenje: Još jednom, koristeći već uvedene oznake, imamo $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $a_2 = 1$, i $b_2 = -1$. Stoga važi da je determinanta,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

te imamo sada drugi slučaj, koji kaže da treba da uvedemo smenu,

$$\begin{aligned}
x &= X + \alpha,\\
y &= Y + \beta,
\end{aligned}$$

gde su α i β brojevi koji zadovoljavaju sistem jednačina,

$$\begin{array}{ccccccc}
\alpha & + & \beta & - & 5 & = & 0\\
\alpha & - & \beta & + & 1 & = & 0
\end{array},$$

koje kada se reši dobijemo $\alpha = 2$ i $\beta = 3$.
Zaključujemo, smene su $x = X + 2$, i $y = Y + 3$, i važi $y' = Y'$. Uvrštavanjem dobijenih jednakosti u početnu jednačinu dobijamo,

$$Y' = \frac{X+Y}{X-Y} = \frac{1+\frac{Y}{X}}{1-\frac{Y}{X}},$$

što je homogena diferencijalna jednačina i rešavamo je smenom $U = \dfrac{Y}{X}$, odakle diferenciranjem imamo da je $Y' = U'X + U$. Sada,

$$U'X + U = \frac{1+U}{1-U} \Leftrightarrow U'X = \frac{1+U-U+U^2}{1-U} = \frac{1+U^2}{1-U}.$$

Primetimo, funkcija U zavisi od X, tj. $U = U(X)$, odnosno $U' = \dfrac{dU}{dX}$, te imamo,

$$\frac{dU}{dX}X = \frac{1+U^2}{1-U} \Leftrightarrow \frac{1-U}{1+U^2}dU = \frac{dX}{X}.$$

Kada integralimo levu i desnu stranu dobijamo,

$$\int \frac{1}{1+U^2}dU - \underbrace{\int \frac{U}{1+U^2}dU}_{t=1+U^2} = \int \frac{dX}{X}.$$

Prvi integral sa leve strane kao i integral sa desne strane jednakosti jesu tablični, a drugi na levoj strani se da rešiti smenom $1 + U^2 = t$. Time dobijamo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg} U - \frac{1}{2}\ln|1+U^2| &= \ln|X| + c,\\
\operatorname{arctg} U &= \ln|X| + \frac{1}{2}\ln(1+U^2) + \ln c_1, \quad c_1 > 0,\\
\operatorname{arctg} U &= \ln c_1|X|\sqrt{1+U^2},\\
\exp(\operatorname{arctg} U) &= c_1|X|\sqrt{1+U^2}.
\end{aligned}$$

Vraćanjem smene, jedne pa druge, $U = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{y-3}{x-2}$, dobijamo opšte rešenje početne diferencijalne jednačine, funkciju,

$$\exp(\operatorname{arctg}\frac{y-3}{x-2}) = c_1|x-2|\sqrt{1+\Big(\frac{y-3}{x-2}\Big)^2}.$$

Primetimo da smo rešenje dobili u implicitnom obliku, tj. kao vezu između nezavisne promenljive x i zavisne promenljive y.

1.1.4. Linearna diferencijalna jednačina

To je diferencijalna jednačina oblika $y' + f(x)y = g(x)$, gde su $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne funkcije nad nekim otvorenim intervalom I. Rešenje ove jednačine dato je sa

$$y = \exp\Big(-\int f(x)dx\Big)\Big[c - \int g(x)\exp\Big(\int f(x)dx\Big)dx\Big].$$

Dato rešenje dobijamo tako što uvedemo smenu $y = uv$, gde su $u = u(x)$ i

$v = v(x)$, funkcije od x. Tada važi $y' = u'v + uv'$, primenom pravila za izvod proizvoda, pa ubacivanjem ove dve jednakosti u početnu jednačinu dobijamo,

$$\begin{aligned} u'v + uv' + f(x)uv &= g(x) \\ u'v + u\underbrace{(v' + f(x)v)}_{=0} &= g(x). \end{aligned}$$

Da bismo našli funkcije $u = u(x)$ i $v = v(x)$ koje zadovoljavaju dobijenu jednačinu, primetimo da možemo da biramo v tako da je zadovoljeno $v' + f(x)v = 0$. Odatle važi,

$$\frac{dv}{dx} + f(x)v = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int f(x)dx.$$

Kada rešimo levi integral, dobijamo,

$$\ln|v| = -\int f(x)dx \Rightarrow v = \pm\exp(-\int f(x)dx).$$

Kako je neophodno naći jedno v koje zadovoljava jednakost, u zavisnosti od zadatka možemo izabrati + ili -. Dobivši funkciju v, potrebno je još rešiti diferencijalnu jednačinu $u'v = g(x)$, te imamo,

$$\frac{du}{dx}v = g(x) \Leftrightarrow du = \frac{g(x)}{v(x)}dx \Rightarrow \int du = \int \frac{g(x)}{v(x)}dx,$$

odakle jasno sledi rešenje dato na početku.

Zadatak 1.7. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$.
Rešenje: Kao što smo rekli, uvodimo smenu $y = uv$, odakle sledi $y' = u'v + uv'$. Uvrštavanjem u jednačinu dobijamo,

$$u'v + uv' - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3$$
$$u'v + u\underbrace{\left(v' - \frac{2}{x+1}v\right)}_{=0} = (x+1)^3.$$

Prvo rešavamo jednačinu $v' - \frac{2}{x+1}v = 0$, pa kako je $v = v(x)$ sledi,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x+1}v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2}{x+1}dx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln|v| = \ln|x+1|^2 \Leftrightarrow |v| = (x+1)^2.$$

Kako i $v = (x+1)^2$ i $v = -(x+1)^2$ zadovoljavaju gornju jednakost, imamo pravo da izaberemo jedno v, neka to bude na primer $(x+1)^2$.
Sada pošto smo pronašli v, prelazimo na drugi deo zadatka, tj. treba još rešiti jednačinu $u'v = (x+1)^3$, te važi

$$u'(x+1)^2 = (x+1)^3 \Leftrightarrow u' = x+1 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = x+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow du = (x+1)dx \Rightarrow \int du = \int (x+1)dx.$$

Sada je očigledno $u = \frac{x^2}{2} + x + c$, pa kako je $y = uv$, sledi da je rešenje početne diferencijalne jednačine funkcija,

$$y = (x+1)^2\left(\frac{x^2}{2} + x + c\right).$$

1.1.5. Bernulijeva diferencijalna jednačina

Bernulijeva jednačina je oblika $y' + f(x)y = g(x)y^m,\ m \in \mathbb{R},\ y > 0$. Primetimo, za $m = 0$ dobijamo linearnu jednačinu, dok za $m = 1$ imamo jednačinu koja razdvaja promenljive. Postoje dva pristupa rešavanju ove jednačine:

1. Direktno, uvođenjem smene $y = uv$.

2. Uvedemo pomoćnu smenu $z = y^{1-m}$, i tako svedemo našu jednačinu na linearnu, koju znamo kako da rešimo. Opišimo taj postupak.

$$y' + f(x)y = g(x)y^m \Leftrightarrow \frac{y'}{y^m} + f(x)y^{1-m} = g(x).$$

Sada kao što smo rekli, uvodimo smenu $z = y^{1-m}$, odakle na osnovu izvoda složene funkcije sledi

$$z' = (1-m)y^{-m}y' = (1-m)\frac{y'}{y^m} \Leftrightarrow \frac{y'}{y^m} = \frac{z'}{1-m}.$$

Zamenom dobijenog u jednačinu dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu,

$$\frac{z'}{1-m} + f(x)z = g(x) \Leftrightarrow z' + f(x)(1-m)z = g(x)(1-m).$$

Zadatak 1.8. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $xy' + y = y^2 \ln x$.
Rešenje: Deljenjem jednačine sa x dobijamo,

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2,$$

što je vidimo Bernulijva jednačina za $m = 2$. Rešavaćemo je smenom $y = uv$, a za domaći, pokušati na drugi način!
Implementirajući smenu u jednačinu dobijamo,

$$\begin{aligned} u'v + uv' + \frac{1}{x}uv &= \frac{\ln x}{x}u^2v^2, \\ u'v + u\underbrace{\left(v' + \frac{1}{x}v\right)}_{=0} &= \frac{\ln x}{x}u^2v^2. \end{aligned}$$

Kao i kod linearnih jednačina, i ovde sada pre svega treba da pronađemo funkciju v koja zadovoljava jednakost $v' + \frac{1}{x}v = 0$. Sada imamo,

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln|v| = -\ln|x| \Leftrightarrow \ln|v| = \ln\frac{1}{|x|} \Leftrightarrow |v| = \frac{1}{|x|}.$$

Uzmimo da je $v = \frac{1}{x}$, ali primetimo da smo mogli i $v = -\frac{1}{x}$. U nastavku se fokusiramo na jednačinu $u'v = \frac{\ln x}{x}u^2v^2$. Kada skratimo v u jednačini, dobijamo,

$$u' = \frac{\ln x}{x}u^2 v \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\ln x}{x}u^2\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2}dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{\ln x}{x^2}dx \Leftrightarrow \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c.$$

Napomenimo da je integral po x rešen parcijalnom integracijom.
Vidimo da je $\frac{1}{u} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c$, odnosno $u = \frac{x}{\ln x + x + cx}$. Sledi, krajnje rešenje je funkcija $y = uv = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\ln x + x + cx} = \frac{1}{\ln x + x + cx}$.

Zadatak 1.9. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$.
Rešenje: Ovaj zadatak rešavamo tako što zamenimo uloge promenljivim x i y. Naime, promenljivu x ćemo posmatrati kao zavisnu, a y kao nezavisnu! Primetimo, u tom slučaju imamo, $x' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$, što implicira,

$$(2x^2 y \ln y - x)\frac{1}{x'} = y,$$
$$x' = \frac{2x^2 y \ln y - x}{y},$$
$$x' + \frac{1}{y}x = 2x^2 \ln y.$$

Vidimo da je dobijena jednačina zapravo Bernulijeva, za $m = 2$. Rešićemo je smenom $x = uv$, vodeći računa da su sada $u = u(y)$ i $v = v(y)$, jer je sada y nezavisna promenljiva. To dalje daje,

$$u'v + uv' + \frac{1}{y}uv = 2u^2v^2 \ln y,$$
$$u'v + u\underbrace{(v' + \frac{1}{y}v)}_{=0} = 2u^2v^2 \ln y.$$

Još jednom, prvo tražimo v tako da $v' + \frac{1}{y}v = 0$, ali je sada $v' = \frac{dv}{dy}$, pa imamo,

$$v' = -\frac{1}{y}v \Leftrightarrow \frac{dv}{dy} = -\frac{1}{y}v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dy}{y} \Leftrightarrow \ln|v| = -\ln|y| \Leftrightarrow |v| = \frac{1}{|y|} \Rightarrow v = \pm\frac{1}{y}.$$

Biramo $v = \frac{1}{y}$. Kako smo izračunali u, prelazimo na drugu jednačinu $u'v =$

$2u^2v^2 \ln y$. Kada skratimo v, dobijamo,

$$u' = 2u^2 v \ln y \Leftrightarrow \frac{du}{dy} = \frac{2\ln y}{y} u^2 \Leftrightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{2\ln y}{y} dy \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{2\ln y}{y} dy \Leftrightarrow \frac{u^{-1}}{-1} = (\ln y)^2 + c \Leftrightarrow \frac{1}{u} = -(\ln y)^2 - c.$$

Konačno, vidimo da je $u = -\dfrac{1}{\ln^2 y + c}$, pa je rešenje početne jednačine dato sa $x = uv$, odnosno $x = \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{-1}{\ln^2 y + c}$.

1.2. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 1.10. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \dfrac{-x - xy}{y + xy}$.

Zadatak 1.11. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.

Zadatak 1.12. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$(2x - y + 4)dy + (x - 2y + 5)dx = 0.$$

Zadatak 1.13. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $dy = \dfrac{x^3 + y}{x}dx$.

Zadatak 1.14. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' \sin x + y \cos x = \sin^2 x$.

Zadatak 1.15. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$.

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.