VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1 Vežbe I.4 **3**

1.1 Košijevi nizovi 3

1. Vežbe I.4

1.1. Košijevi nizovi

Definicija 1.1. Niz $\{a_n\}$ je **Košijev niz** ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n,\ m \in \mathbb{N})(m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon).$$

Definicija 1.2. Niz $\{a_n\}$ je **Košijev niz** ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n,\ p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon).$$

Svaki konvergentan niz je Košijev.

U metričkom prostoru $\mathbb{R}$ važi: niz $\{a_n\}$ je Košijev ako i samo ako je konvergentan.

Zadatak 1.3. Pokazati da je niz $\{a_n\}$ sa opštim članom

$$a_n = \frac{\sin(1\cdot 2)^2}{1\cdot 2} + \frac{\sin(2\cdot 3)^3}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\sin(n\cdot(n+1))^{(n+1)}}{n\cdot(n+1)}$$

Košijev.

Rešenje. Niz $\{a_n\}$ je Košijev ako važi:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n,\ p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon).$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan broj. Tada za bilo koja dva prirodna broja n i p važi:

$$\begin{aligned}
&|a_{n+p} - a_n| \\
&= \Bigg|\frac{\sin(1\cdot 2)^2}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{\sin(n\cdot(n+1))^{(n+1)}}{n\cdot(n+1)} \\
&+ \frac{\sin((n+1)\cdot(n+2))^{(n+2)}}{(n+1)\cdot(n+2)} \cdots + \frac{\sin((n+p)\cdot(n+p+1))^{(n+p+1)}}{(n+p)\cdot(n+p+1)} \\
&- \left(\frac{\sin(1\cdot 2)^2}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{\sin(n\cdot(n+1))^{(n+1)}}{n\cdot(n+1)}\right)\Bigg| \\
&= \left|\frac{\sin((n+1)\cdot(n+2))^{(n+2)}}{(n+1)\cdot(n+2)} + \cdots + \frac{\sin((n+p)\cdot(n+p+1))^{(n+p+1)}}{(n+p)\cdot(n+p+1)}\right|
\end{aligned}$$

[iskoristimo nejednakost trougla: $|A + B| \leq |A| + |B|$]

$$\leq \left|\frac{\sin((n+1)\cdot(n+2))^{(n+2)}}{(n+1)\cdot(n+2)}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin((n+p)\cdot(n+p+1))^{(n+p+1)}}{(n+p)\cdot(n+p+1)}\right|$$

[iskoristimo ograničenost funkcije: $|\sin x| \leq 1$]

$$\leq \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)\cdot(n+p+1)}$$

$\left[\text{svaki sabirak predstavimo kao } \dfrac{1}{(n+i)(n+i+1)} = \dfrac{A}{n+i} + \dfrac{B}{n+i+1}\right]$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \\
&\leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Prethodna procena pokazuje da je $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ za sve $n,\ p \in \mathbb{N}$ takve da je

$$n \geq n_0(\varepsilon) := \lfloor\frac{1}{\varepsilon}\rfloor + 1.$$

Zadatak 1.4. Koristeći Košijev kriterijum ispitati da li je niz $\{c_n\}$ s opštim članom

$$c_n = \frac{\cos 27}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 27^2}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\cos 27^n}{n \cdot (n+1)}$$

konvergentan.

Rešenje. Niz $\{c_n\}$ je Košijev ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n,\ p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |c_{n+p} - c_n| < \varepsilon).$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan broj. Tada za bilo koja dva prirodna broja n i p važi:

$$\left|c_{n+p} - c_n\right|$$

$$= \left| \frac{\cos 27^{n+1}}{(n+1) \cdot (n+2)} + \frac{\cos 27^{n+2}}{(n+2) \cdot (n+3)} + \ldots + \frac{\cos 27^{n+p}}{(n+p) \cdot (n+p+1)} \right|$$

[iskoristimo nejednakost trougla: $|A+B| \leq |A| + |B|$]

$$\leq \left| \frac{\cos 27^{n+1}}{(n+1) \cdot (n+2)} \right| + \ldots + \left| \frac{\cos 27^{n+p}}{(n+p) \cdot (n+p+1)} \right|$$

[iskoristimo ograničenost funkcije: $|\cos x| \leq 1$]

$$\leq \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p) \cdot (n+p+1)}$$

$\left[\text{svaki sabirak predstavimo kao } \frac{1}{(n+i)(n+i+1)} = \frac{A}{n+i} + \frac{B}{n+i+1}\right]$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1}$$

$$\leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Prethodna procena pokazuje da je $|c_{n+p} - c_n| < \varepsilon$ za sve $n,\ p \in \mathbb{N}$ takve da je

$$n \geq n_0(\varepsilon) := \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1.$$

Dokazali smo da je niz $\{c_n\}$ Košijev, sledi da je niz konvergentan.

Zadatak 1.5. Neka je opšti član niza $\{a_n\}$ dat sa

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}.$$

Pokazati da je niz $\{a_n\}$ divergentan.

Rešenje.
Pokazaćemo da niz $\{a_n\}$ nije Košijev, odnosno da važi

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n,\ p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \land |a_{n+p} - a_n| \geq \varepsilon).$$

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= \left|1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+p} - (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n})\right| \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+p} \\
&> \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + ... + \frac{1}{n+p} \\
&= \frac{p}{n+p}
\end{aligned}$$

Za $p = n$ dobija se

$$|a_{2n} - a_n| > \frac{n}{n+n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Kako niz $\{a_n\}$ nije Košijev, sledi da nije ni konvergentan.

Zadatak 1.6. Neka je opšti član niza $\{b_n\}$ dat sa

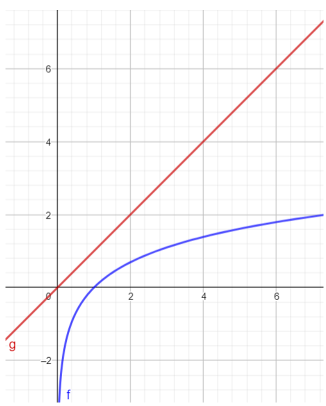
$$b_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n}.$$

Pomoću Košijevog kriterijuma pokazati da je niz $\{b_n\}$ divergentan.

Rešenje.
Pokazaćemo da niz $\{b_n\}$ nije Košijev, odnosno da važi

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n,\ p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \wedge |b_{n+p} - b_n| \geq \varepsilon).$$

$$\begin{aligned}
|b_{n+p} - b_n| &= \left| \frac{1}{\ln 2} + \dots + \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots + \frac{1}{\ln(n+p)} - (\frac{1}{\ln 2} + \dots + \frac{1}{\ln n}) \right| \\
&= \left| \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \dots + \frac{1}{\ln(n+p)} \right| \\
&\text{[iskoristimo: } \ln x \geq 0 \text{ za } x \geq 1] \\
&= \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \dots + \frac{1}{\ln(n+p)} \\
&> \frac{1}{\ln(n+p)} + \frac{1}{\ln(n+p)} + \dots + \frac{1}{\ln(n+p)} \\
&= \frac{p}{\ln(n+p)} \\
&> \frac{p}{n+p}
\end{aligned}$$



Za $p = n$ važi

$$|b_{2n} - b_n| > \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}.$$

Kako niz $\{b_n\}$ nije Košijev, sledi da niz $\{b_n\}$ nije konvergentan.

Zadatak 1.7. Neka je opšti član niza $\{a_n\}$ dat sa

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

Pomoću Košijevog kriterijuma pokazati da je niz $\{a_n\}$ konvergentan.

Rešenje.
Pokazaćemo da je niz $\{a_n\}$ Košijev, odnosno da važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n,\ p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon).$$

$$\begin{aligned}
&|a_{n+p} - a_n| \\
&= \left| \frac{\sin 1}{2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n} + \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} - (\frac{\sin 1}{2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}) \right| \\
&= \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \\
&\leq \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} \right| + \left| \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} \right| + \ldots + \left| \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} \\
&< \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} + \frac{1}{2^{n+p+1}} + \frac{1}{2^{n+p+2}} \ldots \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \underbrace{(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^p} + \ldots)}_{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q},\ |q| < 1} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Dakle, dobijamo

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

$$2^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n \ln 2 > \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$$

$$n_0 := \lfloor \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \rfloor + 1.$$

Kako je niz $\{a_n\}$ Košijev, sledi da je niz $\{a_n\}$ konvergentan.

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[5] Neboja Ralevi, Tijana Ostoji, Manojlo Vukovi, Aleksandar Janjo. *Praktikum iz Matematike analize I.* FTN Izdavatvo, Novi Sad, 2020.