NEODREĐENI INTEGRAL

22. april 2024.

Primitivna funkcija i neodređeni integral

- $f(x)$ definisana nad intervalom I, tj. $f : I \to \mathbb{R}$
- ako za funkciju $f(x)$ postoji funkcija $F : I \to \mathbb{R}$, koja ima izvod $F'(x)$ nad intervalom I, takva da je

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I$$

  tada je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ nad intervalom I
- ona nije jednoznačno određena, svaka funkcija $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ je takođe primitivna funkcija jer je

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Veza između dve primitivne funkcije $F(x)$ i $G(x)$ funkcije $f(x)$:

Teorema

Ako su $F(x)$ i $G(x)$ dve primitivne funkcije za $f(x)$ nad nekim intervalom I onda se one nad tim intervalom razlikuju za konstantu, tj. nad intervalom I je $F(x) - G(x) = C$.

Definicija

Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f(x)$ nad nekim intervalom I naziva se neodređeni integral funkcije $f(x)$ nad datim I i označava se sa

$$\int f(x)dx.$$

- $f(x)$ je podintegralna funkcija
- $f(x)dx$ je podintegralni izraz
- $\int$ je znak integrala
- ako je $F(x)$ jedna primitivna funkcija tada je

$$\int f(x)dx = F(x) + C = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$$

Da li za svaku funkciju postoji primitivna funkcija?

Teorema

Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna nad intervalom I tada postoji primitivna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ nad intervalom I, tj. postoji neodređeni integral funkcije $f(x)$ nad datim intervalom I.

- funkcija $f(x)$ ne mora da bude neprekidna da bi za nju postojao neodređeni integral; funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

za $x = 0$ ima prekid druge vrste, a jedna njena primitivna funkcija je

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Ako funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ u nekoj tački intervala $[a,b]$ ima prekid druge vrste, da li za nju uvek postoji primitivna funkcija nad posmatranim intervalom?

Primer

Proveriti da li **Dirihleova funkcija** $\chi(x)=\left\{\begin{array}{ll}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{array}\right.$ *ima primitivnu funkciju nad proizvoljnim intervalom I.*

NE. Ako bi nad proizvoljnim zatvorenim intervalom $[a,b]$ postojala funkcija $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, koja ima izvod nad I, pri čemu je $F'(x)=\chi(x)$, tada važi $F'(x)=1,\ \text{za } x\in[a,b]\cap\mathbb{Q}$,
$F'(x)=0,\ \text{za } x\in[a,b]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$,
a ne postoji $\xi\in[a,b]$ sa osobinom da je (na primer) $F'(\xi)=\frac{1}{2}$ (Darbuova teorema), što znači da $F(x)$ nije primitivna funkcija funkcije $\chi(x)$ nad $[a,b]$.

- ako funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ ima prekid prve vrste u $c \in I$ tada za nju ne postoji primitivna funkcija $F(x)$ nad intervalom I (ako funkcija $f(x)$ ima izvod u svakoj tački intervala I, tada taj izvod ne može imati prekide prve vrste)

- ako neodređeni integral date funkcije postoji, on se ne može uvek izraziti u konačnom obliku (preko konačnog broja elementarnih funkcija) - neki primeri:

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx \quad \int \frac{\sin x}{x} dx.$$

Osobine neodređenog integrala

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$
2. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$

   specijalno: $\int F'(f(x))f'(x)dx = \int dF(f(x)) = F(f(x)) + C$
4. $\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx,\ a \in \mathbb{R}$
5. $\int (f_1(x) + \cdots + f_n(x))\ dx = \int f_1(x)\,dx + \cdots + \int f_n(x)\,dx$
6. *Ako je* $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, *tada je*

   $\int f(ax+b)\,dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C,\ a \neq 0$

Tako je, na osnovu osobine 3.

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}dx = \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3} + C.$$

- Tablica neodređenih integrala
- ukoliko nije drugačije naglašeno, traženje neodređenog integrala podrazumeva nalaženje datog integrala nad svim intervalima iz oblasti definisanosti date funkcije

Tablica integrala

$\int dx = x + c$	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + c_1,\ a \neq 0$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln \left\| \frac{x-a}{x+a} \right\| + c,\ a \neq 0$
$\int \frac{dx}{x} = ln\| x \| + c$	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} ln \left\| \frac{a+x}{a-x} \right\| + c,\ a \neq 0$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln \left\| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\| + c,\ a \neq 0$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + c = -arccos \frac{x}{a} + c_1,\ a > 0$
$\int sin\, x dx = -cos\, x + c$	$\int \frac{dx}{sin\, x} = ln \left\| tg \frac{x}{2} \right\| + c$
$\int cos\, x dx = sin\, x + c$	$\int \frac{dx}{cos\, x} = ln \left\| tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \right\| + c$
$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + c$	$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} arcsin \frac{x}{a} + c,\ a > 0$
$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + c$	$\int \sqrt{x^2+A}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2} ln \left\| x + \sqrt{x^2+A} \right\| + c$

Smena promenljive

Teorema

Neka sirjekcija $\varphi : I_1 \to I \subset \mathbb{R}$ *ima neprekidan izvod različit od nule nad intervalom* I_1 *i neka za funkciju* $f : I \to \mathbb{R}$ *postoji neodređeni integral nad intervalom* I*. Tada važi*

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt;$$

(posle integracije desne strane se stavi $t = \varphi^{-1}(x),\ x \in I$*.)*

Dokaz. Jednakost važi jer su izvodi obe strane jednaki:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\int f(x)dx &= f(x), \\ \frac{d}{dx}\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt &= \frac{d}{dt}\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)\frac{dt}{dx} \\ &= f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x), \end{aligned}$$

a zbog stalnosti znaka $\varphi'(t)$ je funkcija $\varphi(t)$ strogo monotona, pa ima inverznu funkciju $\varphi^{-1}(x)$.

- često je pogodnije smenu promenljivih umesto u obliku

$$x = \varphi(t)$$

pisati u obliku

$$t = \psi(x),\ dt = \psi'(x)\, dx.$$

Recimo,

$$\begin{aligned} \int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} dx &= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C, \\ \int \frac{\psi'(x)}{2\sqrt{\psi(x)}} dx &= \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{\psi(x)} + C. \end{aligned}$$

Primer

Da li se u integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}, x > 2,$ *može uvesti smena* $x = \arcsin t$*?*

Parcijalna integracija

Teorema

Neka su $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne funkcije i neka postoji primitivna funkcija funkcije $u'(x)v(x)$. Tada postoji primitivna funkcija funkcije $u(x)v'(x)$ i važi jednakost

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Dokaz. Polazeći od jednakosti $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ dobija se

$$\int (u(x)v(x))'dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx,$$

odakle je

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

(konstantu je dovoljno staviti sa jedne strane jednakosti)

Napomena

- $\int P_n(x)e^{ax}dx$, $n \geq 1$ *rešava se sa n parcijalnih integracija, uzimajući*

$$u = P_n(x), \quad e^{ax}dx = dv$$

- $\int P_n(x)\sin ax\, dx \quad \left(\int P_n(x)\cos ax\, dx\right)$, $n \geq 1$ *rešava se sa n parcijalnih integracija, uzimajući*

$$u = P_n(x), \quad \sin ax\, dx = dv, (\cos ax\, dx = dv)$$

- $\int P_n(x)\ln^m x\, dx$, $n \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ *rešava se sa m parcijalnih integracija, uzimajući*

$$u = \ln^m x, \quad P_n(x)\, dx = dv$$

Primer

Odrediti neodređeni integral $I(x)$ funkcije $f(x) = \begin{cases} x & , \quad x < 2 \\ 2 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$

$I(x)$ postoji nad $\mathbb{R}$ ($f(x)$ je neprekidna funkcija). Kako je

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$\int 2 dx = 2x + C_2,$$

to da bi $I(x)$ bila neprekidna funkcija mora da važi

$$2 + C_1 = 4 + C_2, \text{ tj. } C_1 = C_2 + 2$$

pa je $I(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + 2 + C & , \quad x < 2 \\ 2x + C & , \quad x \geq 2 \end{cases}.$

Integrali racionalnih funkcija

Racionalna funkcija je $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

- ako je $\deg P(x) < \deg Q(x)$ - prava racionalna funkcija
- ako je $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$ - neprava racionalna funkcija

Svaka neprava racionalna funkcija može se napisati u obliku

$$R(x) = T(x) + \frac{R_1(x)}{Q(x)}, \quad \deg R_1(x) < \deg Q(x)$$

- $P(x)$ je deljiv polinomom $x - a$ ako i samo ako je $P(a) = 0$
- Svaki polinom stepena $n \geq 1$ ima tačno n nula, $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$
- Ako su $a_1, \ldots, a_m$ različite nule polinoma $P(x) = c_n x^n + \ldots c_1 x + c_0, \; n \geq 1$ onda je
$$P(x) = c_n (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_m)^{k_m}, \; k_1 + \cdots + k_m = n.$$
- Ako je kompleksan broj $z = \alpha + i\beta$ koren reda k polinoma $P(x)$ tada je i $\bar{z} = \alpha - i\beta$ takođe koren reda k polinoma $P(x)$.

Teorema

Neka je $P(x)$ polinom stepena manjeg od n, a $Q(x)$ polinom stepena n takav da je

$$Q(x) = c_n(x-a_1)^{k_1}\dots(x-a_p)^{k_p}(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}\dots(x^2+b_qx+c_q)^{l_q} = n,$$

gde je $k_1+\cdots+k_p+2(l_1+\cdots+l_q),\ a_i, b_j, c_j \in \mathbb{R},\ b_j^2-4c_j<0,$ $i=1,\dots,p,\ j=1,\dots,q.$ *Tada se polinom* $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ *može napisati u obliku*

$$\begin{aligned} R(x) &= \left(\frac{A_{11}}{x-a_1}+\cdots+\frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}\right)+\cdots+\left(\frac{A_{p1}}{x-a_p}+\cdots+\frac{A_{pk_p}}{(x-a_p)^{k_p}}\right) \\ &+\left(\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1}+\cdots+\frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}}\right)+\dots \\ &+\left(\frac{B_{q1}x+C_{q1}}{x^2+b_qx+c_q}+\cdots+\frac{B_{ql_q}x+C_{ql_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{l_q}}\right)\end{aligned}$$

$\frac{A}{(x-a)^k}$ i $\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^l}$, $b^2-4c<0$, se nazivaju prosti ili parcijalni razlomci.

Biće rađeni na vežbama:

- Integrali prostih razlomaka
- Integrali nekih iracionalnih funkcija
  - $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ (tri Ojlerove smene),
  - $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,\ a \neq 0,$
  - $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}},\ n \in \mathbb{N},\ a \neq 0,$
  - $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{px+q}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{px+q}\right)^{r_k}\right)dx,\ aq-bp \neq 0,\ r_1,\dots,r_k \in \mathbb{Q},$
  - $\int x^m(a+bx^n)^p dx,\ m,n,p \in \mathbb{Q},\ n,p \neq 0,\ a,b \in \mathbb{R},\ a,b \neq 0,$
- Integrali trigonometrijskih funkcija
  - $\int R(\sin x, \cos x)dx,$
  - $\int \sin^m x \cos^n x dx,$
  - $\int \sin mx \sin nx dx, \quad \int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \cos mx \cos nx dx,$
- Integrali nekih eksponencijalnih funkcija
  - $\int R(e^x)dx,$
  - $\int (P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x)dx$