

NUMERIČKI ALGORITMI I NUMERIČKI SOFTVER

Uvod

predavač:
prof. dr Aleksandar Kovačević

Par reči o predavaču

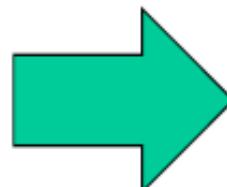
- Završio sam PMF u Novom Sadu.
- Magistirao i doktorirao na FTN gde sam sada redovni profesor.
- Od 2007 godine bavim se mašinskim učenjem, obradom podataka (data science), ali pre svega obradom prirodnog jezika (NLP).

Šta su numerički algoritmi?

- Skup tehnika pomoću kojih se matematički problemi
- formulišu kao problemi koji se mogu rešiti aritmetičkim i logičkim operacijama

$$\frac{\partial f}{\partial x} \int f(x) = 0$$

Linear Algebra



+ , - , x, /,
if then
else
> , =, <
loop

Šta su numerički algoritmi?

- To su algoritmi ili metode koje nam pružaju mogućnost da rešimo određene vrste matematičkih problema.
- To su matematički problemi za koje ne postoji analitičko rešenje ili analitičko rešenje dobijamo previše sporo.

Šta je analitičko rešenje?

- Pod analitičkim rešenjem smatramo rešenje koje se sastoji od logičkih koraka koji nam uvek daju tačno rešenje.
- Na primer, kvadratna jednačina:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ima sledeće analitičko rešenje:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Međutim za jednačine stepena većeg ili jednakog od 5 ne postoji analitičko rešenje.

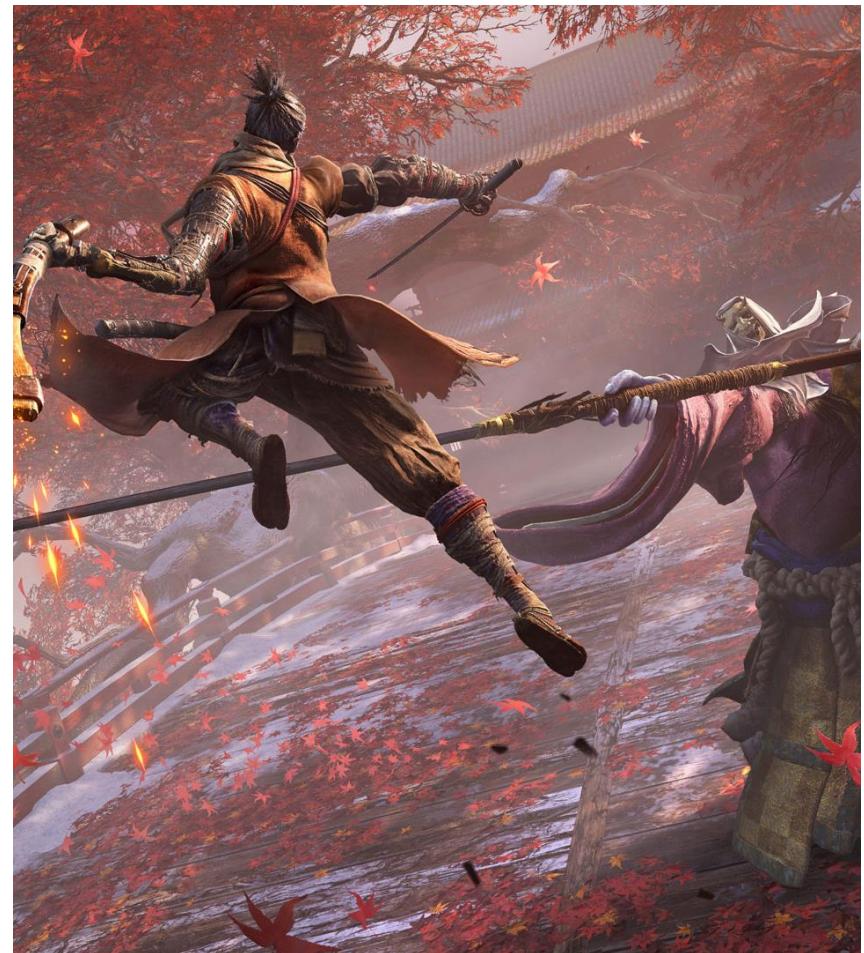
Rešenje dobijeno numeričkim algoritmom

(Često) nije tačno rešenje

već aproksimacija tačnog rešenja
(dovoljno dobra za praktičnu primenu)

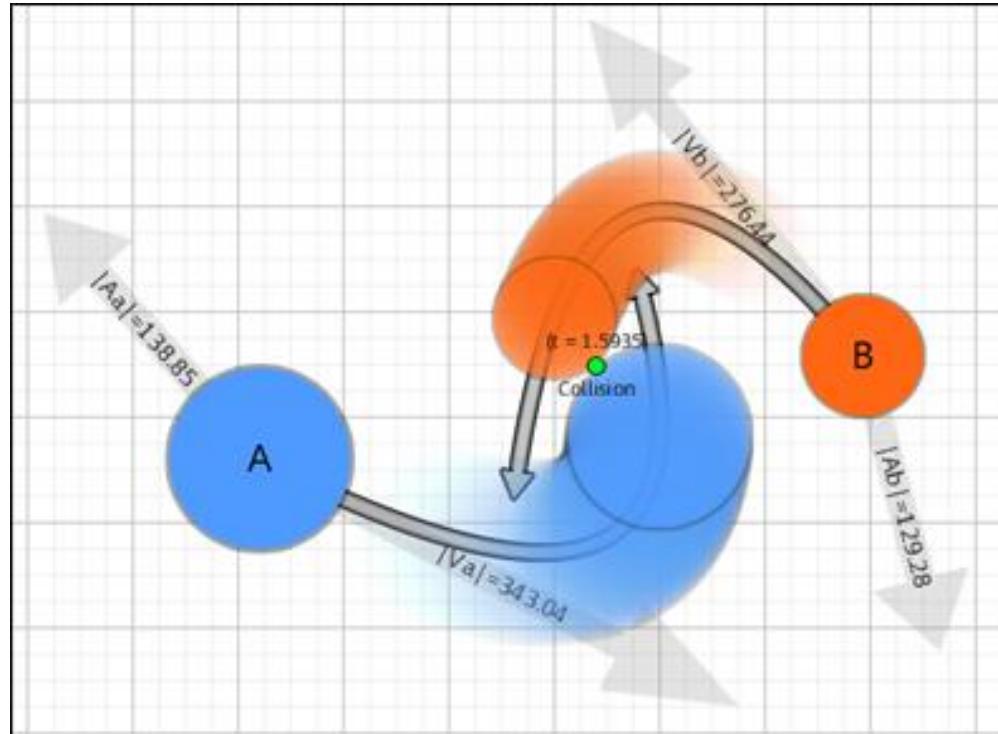
Primer upotrebe numeričkih algoritama

- Rešavanje jednačina je krucijalno za izvršavanje kompjuterskih igara.
- Detekcija kolizije dva objekta može se svesti na problem rešavanja jednačine.



Primer upotrebe numeričkih algoritama

- Određivanje trenutka kolizije dve sfere koje se kreću sa ubrzanjem svodi se određivanje nule polinoma četvrtog stepena.



Jedan primer upotrebe numeričkih algoritama

- „Jednostavno“ analitičko rešenje problema sa prethodnog slajda.

$$t = -(b/(4 a))-1/2 \operatorname{Sqrt}(b^2/(4 a^2)-(2 c)/(3 a)+(2^{(1/3)} (c^2-3 b d+12 a e))/(3 a (2 c^3-9 b c d+27 a d^2+27 b^2 e-72 a c e+\operatorname{Sqrt}(-4 (c^2-3 b d+12 a e)^3+(2 c^3-9 b c d+27 a d^2+27 b^2 e-72 a c e)^2))^{(1/3)})+(1/(3 2^{(1/3)} a))((2 c^3-9 b c d+27 a d^2+27 b^2 e-72 a c e+\operatorname{Sqrt}(-4 (c^2-3 b d+12 a e)^3+(2 c^3-9 b c d+27 a d^2+27 b^2 e-72 a c e)^2))^{(1/3)})))-1/2 \operatorname{Sqrt}(b^2/(2 a^2)-(4 c)/(3 a)-(2^{(1/3)} (c^2-3 b d+12 a e))/(3 a (2 c^3-9 b c d+27 a d^2+27 b^2 e-72 a c e+\operatorname{Sqrt}(-4 (c^2-3 b d+12 a e)^3+(2 c^3-9 b c d+27 a d^2+27 b^2 e-72 a c e)^2))^{(1/3)})-(1/(3 2^{(1/3)} a))((2 c^3-9 b c d+27 a d^2+27 b^2 e-72 a c e+\operatorname{Sqrt}(-4 (c^2-3 b d+12 a e)^3+(2 c^3-9 b c d+27 a d^2+27 b^2 e-72 a c e)^2))^{(1/3)}))-(b^3/a^3)+(4 b c)/a^2-(8 d)/a)/(4 \operatorname{Sqrt}(b^2/(4 a^2)-(2 c)/(3 a)+(2^{(1/3)} (c^2-3 b d+12 a e))/(3 a (2 c^3-9 b c d+27 a d^2+27 b^2 e-72 a c e+\operatorname{Sqrt}(-4 (c^2-3 b d+12 a e)^3+(2 c^3-9 b c d+27 a d^2+27 b^2 e-72 a c e)^2))^{(1/3)}))+(1/(3 2^{(1/3)} a))((2 c^3-9 b c d+27 a d^2+27 b^2 e-72 a c e+\operatorname{Sqrt}(-4 (c^2-3 b d+12 a e)^3+(2 c^3-9 b c d+27 a d^2+27 b^2 e-72 a c e)^2))^{(1/3)}))$$

- Očigledno je da postoji potreba za numeričkim algoritmima.

Još jedan primer upotrebe numeričkih algoritama

Fast inverse square root algoritam za brzo izračunavanje $\frac{1}{\sqrt{x}}$

```
float Q_rsqrt( float number )
{
    long i;
    float x2, y;
    const float threehalfs = 1.5F;

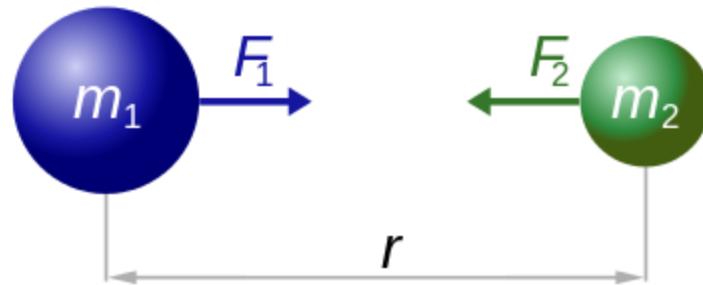
    x2 = number * 0.5F;
    y = number;
    i = * ( long * ) &y;                                // evil floating point bit level hacking
    i = 0x5f3759df - ( i >> 1 );                      // what the fuck?
    y = * ( float * ) &i;
    y = y * ( threehalfs - ( x2 * y * y ) );          // 1st iteration
// y = y * ( threehalfs - ( x2 * y * y ) );          // 2nd iteration, this can be removed

    return y;
}
```

$$\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{2}\log_2(x)$$
$$\frac{1}{\sqrt{x}} = 2^{-\frac{1}{2}\log_2(x)}$$

Istorija

- Njutnov rad na matematičkom modelu efekata gravitacije, tj. Univerzalni zakon gravitacije:



$$F_1 = F_2 = G \frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

- Ispirisao je mnoge matematičare i fizičare da modeluju pojave iz realnog sveta (dinamika fluida, elektricitet, magnetizam, kvantna mehanika itd.).
- Takvi modeli su tipično diferencijalne jednačine koje je teško ili nemoguće rešiti analitički, pa su zato rešavane numeričkim metodama.

Istorija

- Nagli rast u razvoju i upotrebi numeričkih algoritama kreće krajem 1940-tih godina, zbog razvoja računara.
- Računari su jakooooo efikasni u računskim operacijama i ponavljanju istih radnji, što je najznačajnije za numeriku.
- Jedan od najvećih umova dvadesetog veka Džon fon Nojman shvatio je značaj upotrebe računara za izvršavanje numeričkih algoritama i svojim radom:

"Numerical Inverting of Matrices of High Order"
(Bulletin of the AMS, Nov. 1947)

- postavio temelje moderne numeričke analize.



Istorija

- Nakon uvođenja računara primena numeričkih algoritama dobija nove sinonime:
 - *Scientific computing* i *Computational science*
- Pored efikasnosti, računari doneli su neke neželjene efekte u upotrebi računara. Zašto?
- Računari su najefikasniji kada rade se brojevima koji su reprezentovani u konačnoj preciznosti (*finite precision*).
- To znači da neki brojevi (npr. 0.1) nisu nikad potpuno tačno reprezentovani na računaru.

Istorija

- Džon fon Nojman i mnogi drugi načunici su sa pravom upozoravali na neželjene efekte primene računara za izvršavanje numeričkih algoritama.
- Međutim, preciznost računara u reprezentaciji brojeva (16 decimalnih cifara u *double* preciznosti po IEEE standardu) daleko premašuje preciznost koja postoji bilo gde u prirodi*.
- Zbog toga numeričke algoritme srećete svakog dana (GPS, simulacije fizike u igrama, računarska grafika, prognoza vremena itd.).

* Pogledati sekciju o numeričkoj analizi profesora Lloyd Nicholas Trefethena
<https://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/NAessay.pdf>

Neželjeni efekti primene računara za izvršavanje numeričkih algoritama – Primer Irački SCUD projektil



- 1991 pogodio američku kasarnu, poginulo je 28 ljudi
- Američka patriot raketa nije uspela da ga presretne zbog greške u odsecanju binarne reprezentacije broja 1/10

Karakteristike numeričkih algoritama

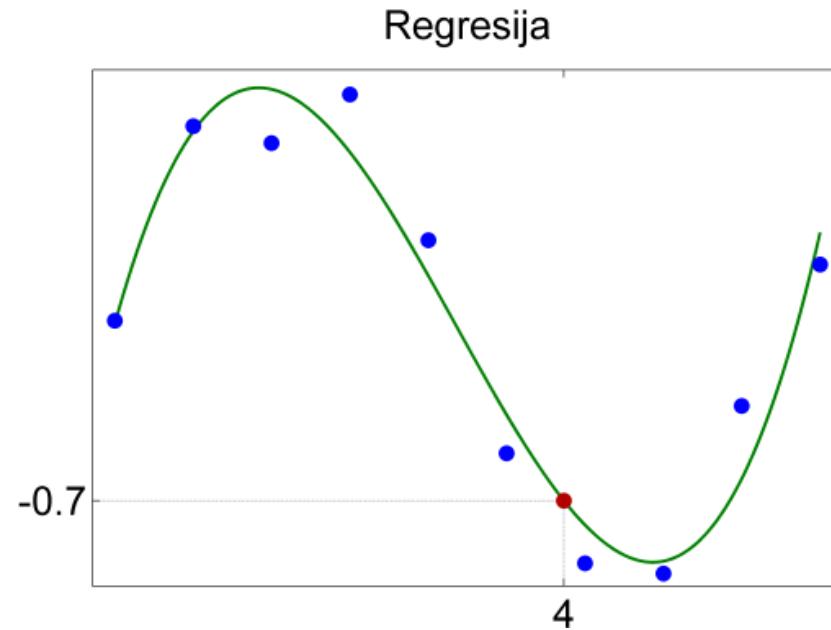
- Ne radimo sa simbolima već numeričkim vrednostima
- Ne tražimo analitička rešenja već numerička
- Ne tražimo egzaktna rešenja već približna
 - dovoljno dobra za praktičnu primenu

Sadržaj predmeta

- Prediktivno modelovanje:
 - Liearna regresija
 - Interpolacija
 - Redukcija dimenzionalnosti
 - Vremenske serije
- Simulacije realnih okruženja:
 - Numeričko rešavanje diferencijalnih jednačina
 - Numerička integracija
 - Monte-Karlo simulacije i integracija

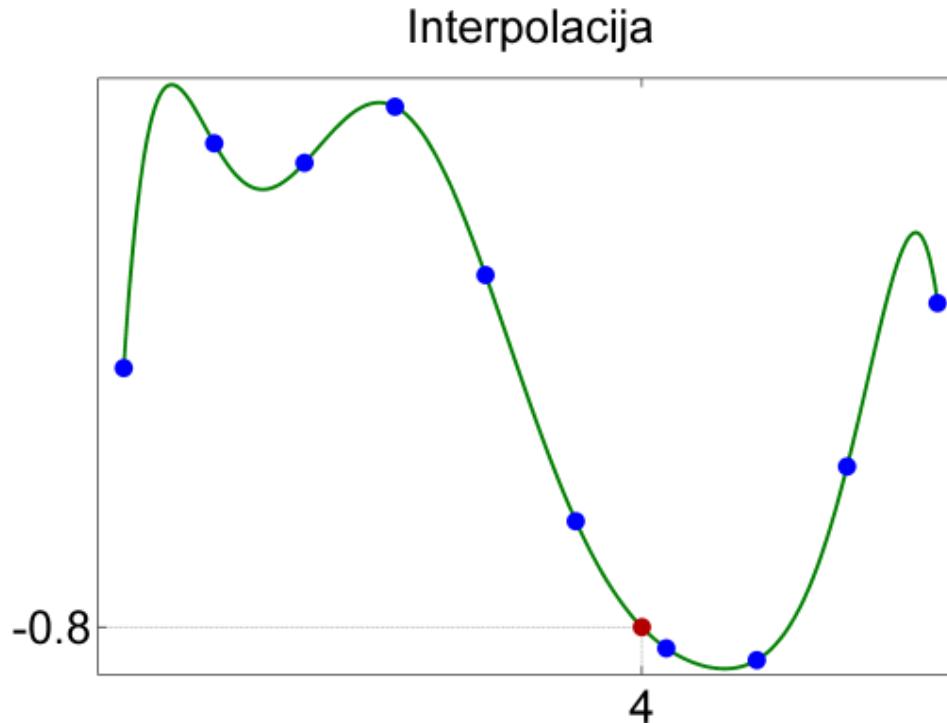
Linearna regresija

- Naučićete kako da pomoću postojećih podataka kreirate model pomoću koga:
 - Analizirate odnos nezavisne i zavisne promenljive.
 - Na primer, kako utiče gol razlika domaćeg i gostujućeg tima na verovatnoću pobeđe domaćeg tima.
 - Vršite predikcije.
 - Na primer, na osnovu gol razlika domaćeg i gostujućeg tima predvideti verovatnoću pobeđe domaćeg tima.



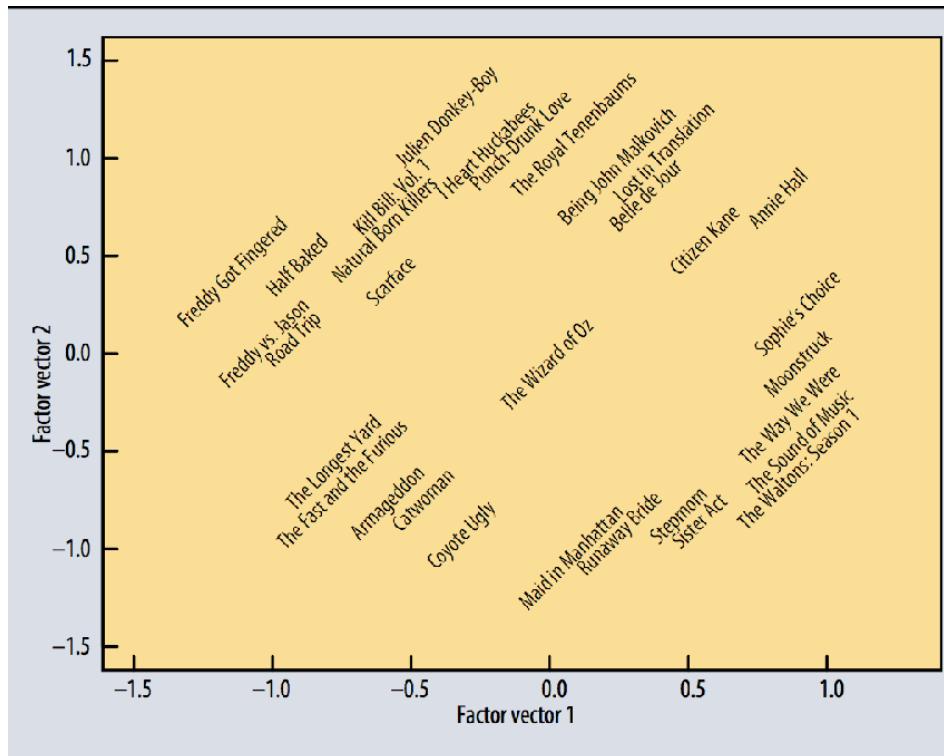
Interpolacija

- Naučićete kako da pomoću postojećih podataka kreirate model pomoću koga određujete vrednosti koje nedostaju u podacima.
 - Na primer, ako imamo gol razlike za sve utakmice osim pete i devete, na koji način možemo da iskoristimo gol razlike drugih utakmica da na efektivan način odredimo vrednosti koje nam nedostaju.



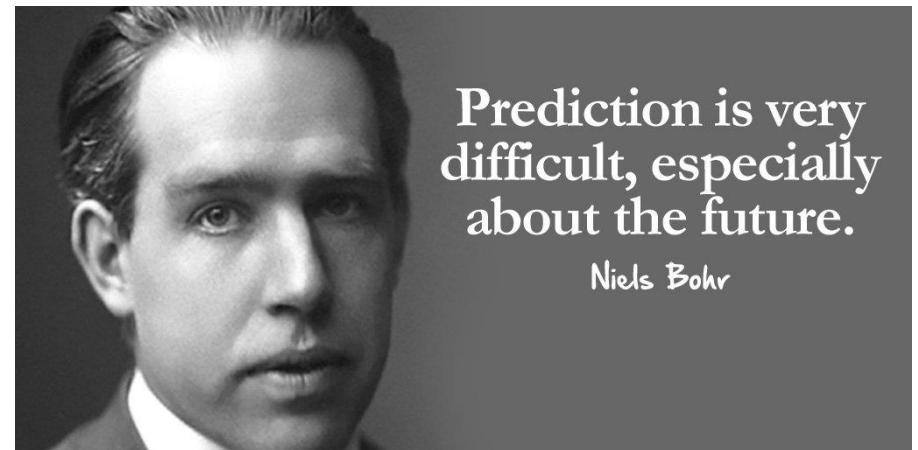
Redukcija dimenzionalnosti

- Naučićeće kako da:
 - skupove podataka visoke dimenzionalnosti (sa mnogo atributa) prikažete u dve ili tri dimenzije.
 - pronađete skrivene (*latent*) faktore (kombinacije atributa) u podacima.
- Koristićemo tehniku Analiza Glavnih Komponenti (*Principal Component Analysis*, PCA).



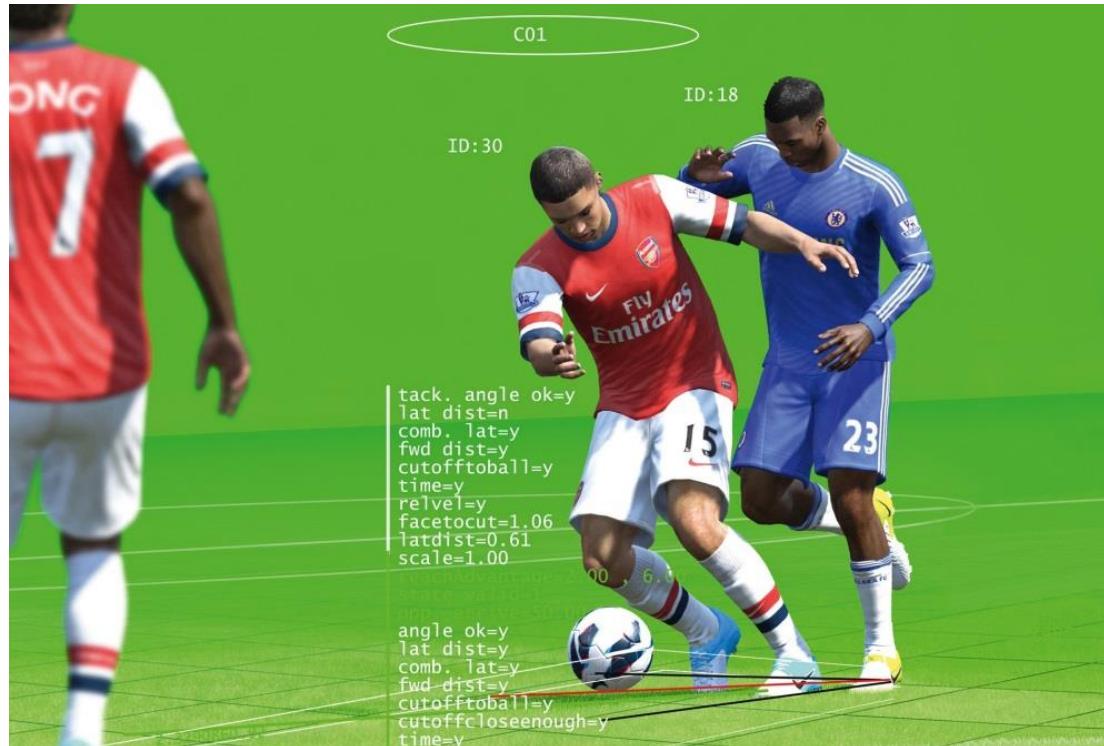
Analiza vremenskih serija

- Naučićete kako da analizirate podatke merene kroz vreme i vrišite predikcije budućih vrednosti.
 - Na primer, predvideti vrednost kripto-valute za naredni period na osnovu prethodnih vrednosti.



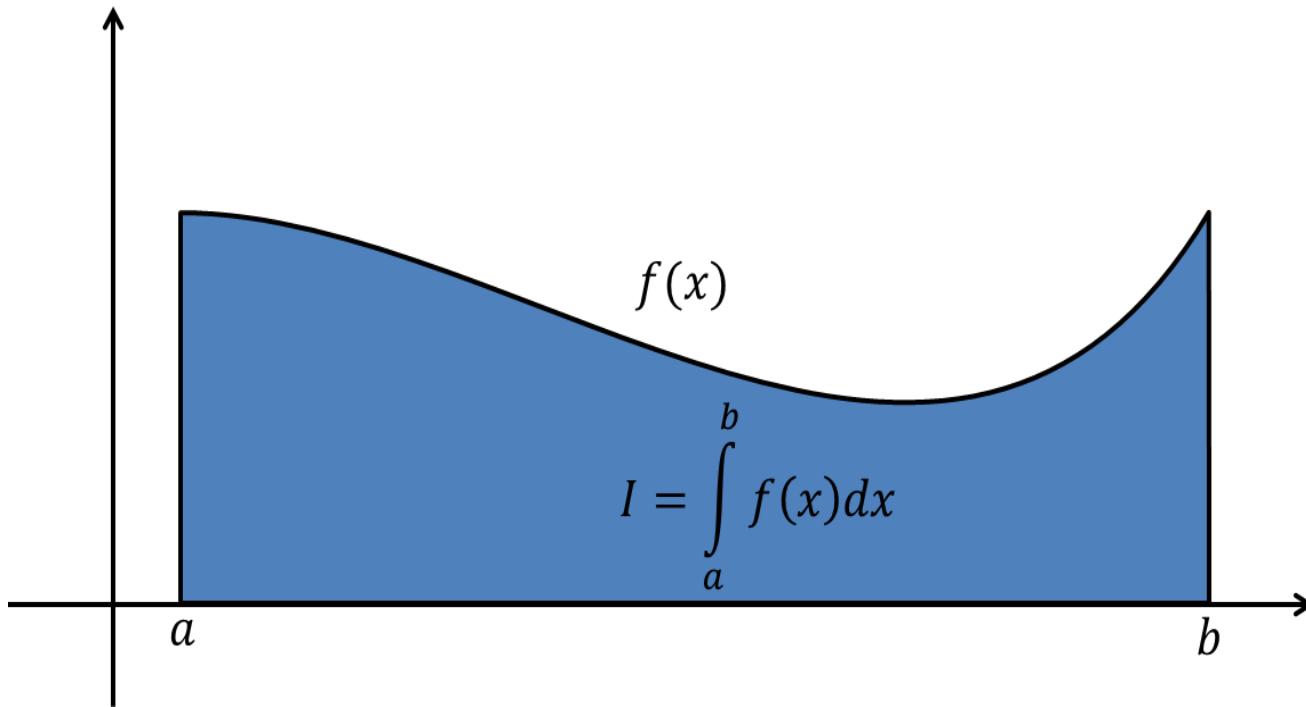
Numeričko rešavanje diferencijalnih jednačina

- Naučićete kako da lako rešavate diferencijalne jednačine čije se rešenje teško pronađe analitičkim putem.
- Takve jednačine koriste se da modeluju ponašanje realnih okruženja kroz vreme.
 - Na primer, modelovanje kretanja igrača ili fudbalske lopte u video igri.



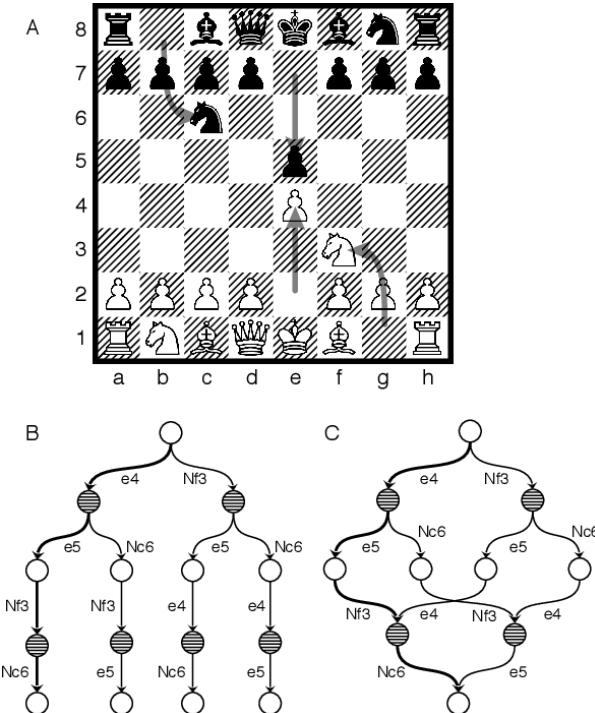
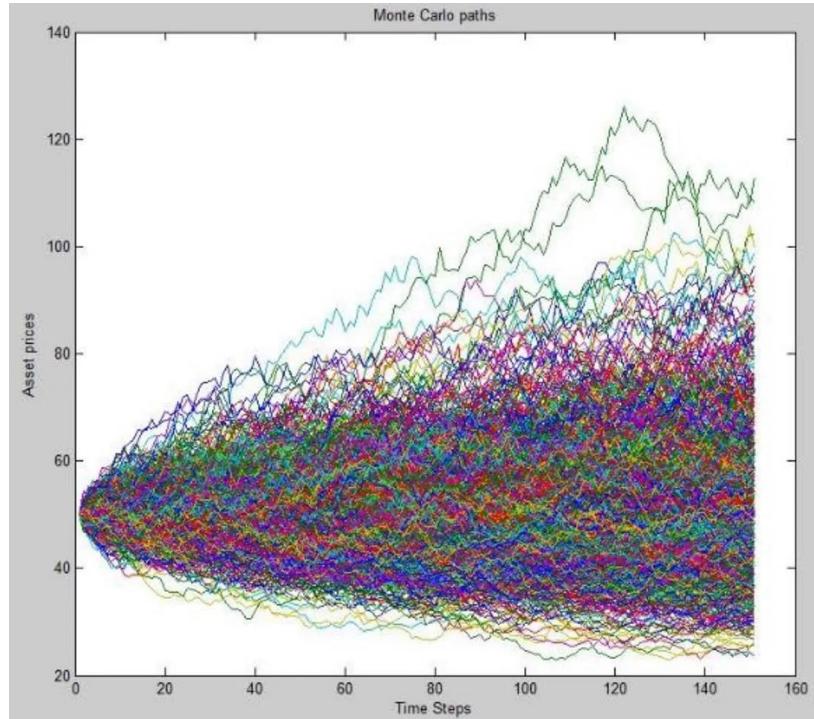
Numerička integracija

- Kako da lako rešavate integrale čije se rešenje teško pronalazi analitičkim putem.



Monte Karlo integracija

- Naučiće o Monte Karlo simulacijama koje su osnovne samo za integraciju već i za niz drugih metodologija.
 - Na primer, inteligentni agenti kompanije DeepMind koji igraju Šah ili Go koriste Monte Karlo principe da odaberu potez.



O predmetu

- Predavanja
 - objašnjenja numeričkih algoritama uz primere
- Vežbe
 - ideja je da sami implementirate i примените metode koje učite na predavanjima
 - koristi se *Python*
 - svakoj celini iz teorije odgovara jedna vežba

Pravila polaganja

- Obaveze na predmetu sastoje se od dva dela:
 - Predispitne obaveze
 - Teorijski ispit

Pravila polaganja - Predispitne obaveze

- Sastoje se od dva kolokvijuma i projekta
 - kolokvijumi će biti održani samo jednom i to u toku semestra
- **Termini za računarske kolokvijume su:**
 - I kolokvijum 30.11.2024.
 - II kolokvijum 28.12.2024.
 - O satnici bićete obavešteni na vreme.

Pravila polaganja - Predispitne obaveze

- **Prvi popravni kolokvijum**
 - Tokom februara 2025. biće održan jedan popravni kolokovijum.

Pravila polaganja - Predispitne obaveze

- Drugi popravni kolokvijum
 - U julu ili septembru biće održan drugi popravni kolokvijum.
 - Bez obzira na ranije osvojene bodove iz predispitnih obaveza, ako izlazite na drugi popravni kolovijum i položite ga, možete imati samo:
minimalan broj bodova iz svih predispitnih obaveza.

Pravila polaganja - Projekat

- Umesto polaganja drugog računarskog kolokvijuma postoji mogućnost izrade projekta
- Projekat nosi više bodova od drugog kolokvijuma
- Detaljne informacije o projektima biće date na vežbama.
- Danas samo par generalnih informacija.

Pravila polaganja - Projekat

- Izrada projekta ima nekoliko faza:
 - Specifikacija predloga projekata
 - Izrada projekta
 - Obrana projekta

Specifikacija i predloga projekata

- Studenti treba sami da osmisle temu projekta
- Okvirne informacije o temama dobićete kroz motivacione primere na predavanjima i vežbama i kroz materijale sa sajta predmeta
- Informacije o tome šta sve treba da sadrži specifikacija dobićete od asistenata
- Studenti čiji predlozi ne prođu u sledeću fazu moraju da rade drugi računarski kolokvijum

Izrada projekta

- Od momenta kada asistent odobri projekat studenti počinju sa izradom projekta
- Detalje oko načina na koji će asistenti pratiti projekte će vam oni saopštiti kad za to dođe vreme

Odbojka projekta

- Postoji samo jedan termin za odbranu projekata
- Tačan termin će objaviti asistenti i znaće se na vreme
- Način odbrane će takođe objaviti asistenti

Projekat – Važna napomena

- Kada student pristupi izradi projekta tj. kada je asistent odobrio projekat:
 - Student nema pravo polaganja drugog računarskog kolokvijuma
 - Dakle imate izbor, ali morate sami da doneSETE odluku šta želite da uradite

Bodovanje – Predispitne obaveze

Bodovanje predispitnih obaveza:

	min	max	max sa projektom
Kolokvijum 1	14	27	27
Kolokvijum 2	11	23	0
Projekat	0	0	33
Ukupno	25	50	60

Zaključna ocena bez teorijskog dela ispita

- Ako ste položili predispitne obaveze stičete pravo na zaključnu ocenu bez polaganja teorijskog dela.
- Bodovi sa predispitnih obaveza se na zaključnu ocenu preslikavaju na sledeći način:

[45, 50] ocena 10

[40, 44] ocena 9

[35, 39] ocena 8

[31, 34] ocena 7

[26, 30] ocena 6

Zaključna ocena bez teorijskog dela ispita

Važna napomena

- Da biste imali pravo na zaključnu ocenu bez teorijskog dela, obavezno je da:
 1. **Položite prvi računarski kolokvijum**
 2. **Položite drugi računarski kolokvijum ili odbranite projekat**

Zaključna ocena sa teorijskim delom ispita

- Ako niste zadovoljni ocenom bez teorijskog dela:
 1. Onda polažete teorijski deo ispita u zvaničnim terminima koje određuje FTN.
 2. Morate da doložite oba dela teorije
 - Da osvojite minimalno 50 bodova iz svakog dela.
 3. Zaključna ocena računa se po pravilima sa ovih slajdova, odnosno gubite pravo na zaključnu ocenu bez teorijskog dela.

Zaključna ocena sa teorijskim delom ispita

- Odluku o tome da li ćete prihvatiti ocenu bez teorijskog dela možete doneti do početka sledeće školske godine.
- Prvim izlaskom na teorijski deo ispita gubite pravo na ocenu bez teorijskog dela.

Pravila polaganja - Teorijski ispit

- Pismeno u terminima rasporeda ispita koje određuje FTN
- Sastoji se od 2 dela koji se mogu polagati odvojeno ili zajedno

Bodovanje – Teorijski deo

Bodovanje teorijskog dela ispita:

	min	max
Deo 1	50	100
Deo 2	50	100
Ukupno	100	200
Ukupno (preračunato)*	26	45

$$* \text{Ukupno teorijski ispit} = \frac{(Deo1 + Deo2)}{200} * 38 + 7$$

Bodovanje – Ukupno

Bodovanje teorijskog dela ispita:

	min	max
Deo 1	50	100
Deo 2	50	100
Ukupno	100	200
Ukupno (preračunato)*	26	45

Bodovanje predispitnih obaveza:

	min	max	max sa projektom
Kolokvijum 1	14	27	27
Kolokvijum 2	11	23	0
Projekat	0	0	33
Ukupno	25	50	60

Ukupno:

	min	max	max sa projektom
Ukupno teorija	26	45	45
Ukupno praktični	25	50	60
Ukupno	51	95	105

Polaganje ispita sa teorijskim delom

Važna napomena

- Da biste imali pravo na zaključnu ocenu ako se odlučite da polažete teorijski deo, obavezno je da:

1. **Položite oba dela teorije**

- Da osvojite minimalno 50 bodova iz svakog dela

2. **Položite prvi računarski kolokvijum**

3. **Položite drugi računarski kolokvijum ili odbranite projekat**

Materijali i obaveštenja

- Svi materijali i obaveštenja biće na:
 - <https://canvas.ftn.uns.ac.rs/>
- Ako nemate nalog obratite se IT službi FTN
- Ako imate nalog, a niste dodati na kurs obratite se meni ili asistentima

Literatura

- Teorijski deo
 - Slajdovi sa predavanja
 - Udjbenik:
 - „NUMERIČKE METODE U SOFTVERSKOM INŽENJERSTU“
 - Autori: Aleksandar Kovačević, Jelena Slivka
 - Izdavač: FTN, Novi Sad
- Predispitne obaveze
 - Materijali sa vežbi

PITANJA?

Neki od projekata iz 2024.

Movie Recommendation Engine

Nikola Jolović SV9/2022
Milan Lazarević SV2/2022



	The Avengers	Sherlock	Transformers	Matrix	Titanic	Me Before You	
A	2			2	4	5	2.94*
B	5			4			1
C			5			2	2.48*
D		1			5		4
E				4			2
F	4		5			1	1.12*
Similarity	-1	-1	0.86	1	1		

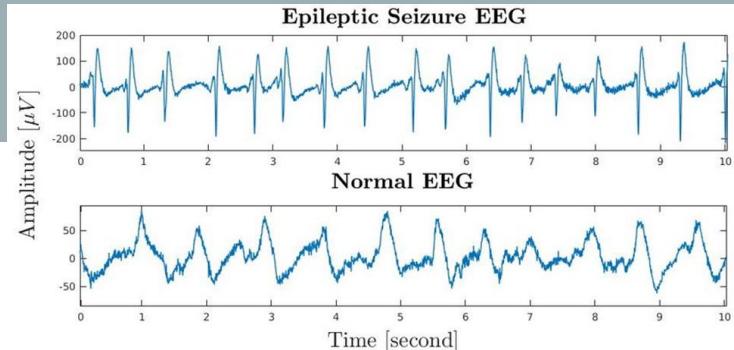
$$A_{m \times n} = U_{m \times m} \Sigma_{m \times n} V^*_{n \times n}$$

PREDIKCIJA CENE AUTOMOBILA

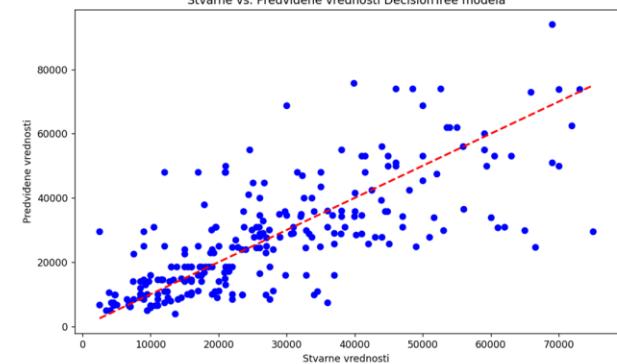
Mrda Miloš, sv34/2022

DETKECIJA EPILEPTIČNIH NAPADA POMOĆU EEG VREMENSKE SERIJE

Mijat Krivokapić SV41/2022



Stvarne vs. Predvidene vrednosti DecisionTree modela



Primer jednog diplomskog 1/2



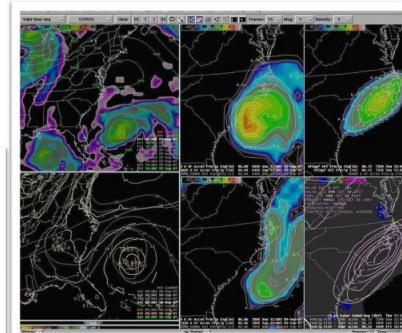
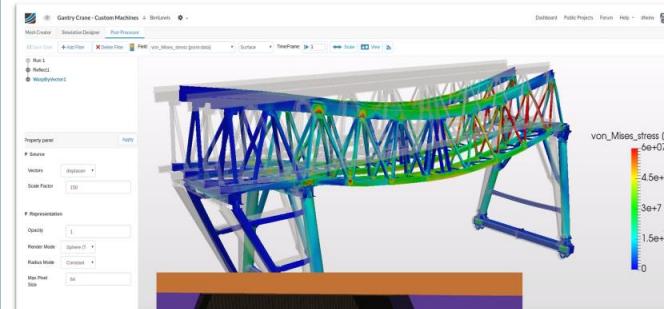
Нумеричке методе за симулацију крутих тела у дводимензионом простору

Студент: Лазар Магазин SV 25/2020

Ментор: др Александар Ковачевић

π

Мотивација



Primer jednog diplomskog 2/2

π

Методологија

› Поступак рада симулатора физике:

1. Детекција судара
2. Спољашње силе
3. Решавање ограничења
4. Кретање тела
5. Нумеричка стабилизација

