Teorema 2.14 *Ako je* ρ *relacija ekvivalencije skupa* A*, tada je*

$$(\forall x, y \in A)\ (x\,\rho\,y \Leftrightarrow C_x = C_y).$$

Dokaz ($\Rightarrow$) Neka je $x\,\rho\,y$. Tada iz $z \in C_x$ sledi $x\,\rho\,z$, a dalje $(x\,\rho\,y \wedge x\,\rho\,z) \Rightarrow (y\,\rho\,x \wedge x\,\rho\,z) \Rightarrow y\,\rho\,z \Rightarrow z \in C_y$, odnosno $C_x \subseteq C_y$. Analogno se dokazuje i da je $C_y \subseteq C_x$, pa je $C_x = C_y$.

($\Leftarrow$) Neka je $C_x = C_y$. Iz $x \in C_x$ i $C_x = C_y$ sledi $x \in C_y$, a odatle, po definiciji 2.13 sledi $y\,\rho\,x$, odnosno $x\,\rho\,y$.

Teorema 2.15 *Neka su* C_x *i* C_y *klase ekvivalencije skupa* A *s obzirom na relaciju ekvivalencije* ρ*. Tada je*

$$C_x \cap C_y = \emptyset \ \ \textit{ili}\ \ C_x = C_y.$$

Ako važi ondaje

Dokaz Ako je $C_x \cap C_y = \emptyset$ tvrđenje teoreme je tačno. Pretpostavimo da je $C_x \cap C_y \neq \emptyset$. Tada postoji $z \in A$ tako da je $z \in C_x \cap C_y$ tj. $z \in C_x$ i $z \in C_y$, odakle sledi $x\,\rho\,z \wedge y\,\rho\,z$, odnosno $x\,\rho\,z \wedge z\,\rho\,y$, što zbog tranzitivnosti daje $x\,\rho\,y$, a na osnovu prethodne teoreme sledi $C_x = C_y$, pa je tvrđenje teoreme opet tačno.

OSNOVNE TEOREME BULOVE ALGEBRE

Teorema 4.5

$a + a = a \qquad ; \qquad aa = a \qquad$ *idempotentnost*

Dokaz: $a \overset{B_3}{=} a + 0 \overset{B_4}{=} a + aa' \overset{B_2}{=} (a+a)(a+a') \overset{B_4}{=} (a+a) \cdot 1 \overset{B_3}{=} a + a.$

Teorema 4.6

$a + 1 = 1 \qquad ; \qquad a \cdot 0 = 0 \qquad$ *ograničenost*

Dokaz: $a+1 \overset{B_3,B_1}{=\!=} 1\cdot(a+1) \overset{B_4}{=} (a+a')(a+1) \overset{B_2}{=} a+a'\cdot 1 \overset{B_3}{=} a+a' \overset{B_4}{=} 1.$

Teorema 4.7

$a+ab=a \quad ; \quad a(a+b)=a \quad$ *apsorpcija.*

Dokaz: $a+ab \overset{B_3}{=} a\cdot 1+ab \overset{B_2}{=} a(1+b) \overset{4.6}{=} a\cdot 1 \overset{B_3}{=} a.$

Teorema 4.8

$a+a'b=a+b \quad ; \quad a(a'+b)=ab.$

Dokaz: $a+a'b \overset{B_2}{=} (a+a')(a+b) \overset{B_4}{=} 1\cdot(a+b) \overset{B_1,B_3}{=\!=} a+b.$

Teorema 4.9

$(a+b)+c=a+(b+c) \quad ; \quad (ab)c=a(bc) \quad$ *asocijativnost.* dve apsorpcije

Dokaz:
$(a+b)+c \overset{B_3,B_1}{=} 1\cdot\big((a+b)+c\big) \overset{B_4}{=} (a+a')\big((a+b)+c\big) \overset{B_2}{=} \big(a(a+b)+ac\big)+$
$\big(a'(a+b)+a'c\big) \overset{4.7,4.8}{=\!=\!=} a+(a'b+a'c) \overset{B_2}{=} a+a'(b+c) \overset{4.8}{=} a+(b+c).$

aa+a'b

Teorema 4.10 bitna

Sistem jednačina $a+x=1 \;\wedge\; a\cdot x=0$ *po nepoznatoj* x, *ima jedinstveno rešenje za sve vrednosti parametra* a *iz skupa* B.

Dokaz: Zbog aksioma B_4 sledi da $x=a'$ jeste rešenje datoga sistema. Dokazati kontradikcijom da rešenja više nema. Pretpostaviti da $b\neq a'$ takođe jeste rešenje datog sistema. Tada je:
$b \overset{B_3}{=} b\cdot 1 \overset{B_4}{=} b(a+a') \overset{B_2}{=} ba+ba' = 0+ba' \overset{B_4}{=} aa'+ba' \overset{B_2}{=} (a+b)a' = 1\cdot a' = a'.$
Kontradikcija sa $b\neq a'$.

ax=0
ab=0

a+x=1
a+b=1

Teorema 4.11

$0'=1 \quad ; \quad 1'=0.$

Dokaz: Sistem

$$0+x=1 \;\wedge\; 0\cdot x=0$$

ima za rešenja $x=0'$ zbog B_4 i $x=1$ zbog B_3, a kako taj sistem po teoremi 4.10 ima samo jedno rešenje, sledi da je $0'=1$.

Teorema 4.12

$(a')'=a \quad ; \quad$ *Da li je* $f(x)=x'$ *bijektivna funkcija? Zašto?*

1-1 $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$
$f(x)=f(y) \Rightarrow x'=y' \;/' \Rightarrow (x')'=(y')' \Rightarrow x=y$
na $f(?)=x$

Dokaz: Sistem

$$a' + x = 1 \quad \wedge \quad a' \cdot x = 0$$

ima za rešenja $x = a$ i $x = (a')'$ zbog B_1 i B_4, a kako taj sistem po teorem
4.10 ima samo jedno rešenje, sledi da je $a = (a')'$.

Teorema 4.13

$$(a+b)' = a'b' \qquad ; \qquad (ab)' = a' + b' \qquad \textit{Demorganovi zakoni}$$

Dokaz: Sistem

$$(a+b) + x = 1 \quad \wedge \quad (a+b) \cdot x = 0$$

ima za rešenje $x = (a+b)'$ zbog B_4 i $x = a'b'$ zbog $(a+b) + a'b' = (a+b$
$a') \cdot (a+b+b') = 1 \cdot 1 = 1$ i $(a+b) \cdot a'b' = aa'b' + ba'b' = 0 + 0 = 0$. Međuti
zbog teoreme 4.10 sistem $(a+b) + x = 1 \ \wedge \ (a+b) \cdot x = 0$ ima samo jed
rešenje, pa mora biti $(a+b)' = a'b'$.

Indukcijom se dokazuje uopštenje $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)' = a_1' a_2' \cdots a_n'$.

Teorema 4.18 *U Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ sledeći iskazi su ekvivalentni:*

$x \preccurlyeq y$ $\quad a)\ x + y = y \qquad b)\ xy = x \qquad c)\ x' + y = 1 \qquad d)\ xy' = 0.$

Dokaz: Ako se jednakost $a)$ pomnoži sa x i primeni zakon apsorpcije, dobija se $b)$. Dodavanjem elementa x' levoj i desnoj strani jednakosti $b)$, primenom aksioma B_2, B_4 i B_3 sledi $c)$. Primenom unarne operacije $'$ na $c)$ dobija se $d)$. Ako se doda y levoj i desnoj strani jednakosti $d)$, primenimo aksioma B_2, B_4 i B_3 sledi $a)$. Kako je pokazano da $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow a)$, to je teorema dokazana.

Ovim su date četiri ekvivalentne definicije relacije $\preccurlyeq$ pa sledi:

Činjenica 4.19

Tvrdnja dualna za $x \preccurlyeq y$ jeste $y \preccurlyeq x$, jer dualno od $x + y = y$ jeste $xy = y$.

Teorema 4.20 *Relacija $\preccurlyeq$ u Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ jeste relacija poretka, tj. za svako $x, y, z \in B$ važi:* RAT

a) $x \preccurlyeq x$; **b)** $\left(x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x\right) \Rightarrow x = y$; **c)** $\left(x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z\right) \Rightarrow x \preccurlyeq z$

R $\qquad$ A $\qquad$ T

Dokaz: **a)** $x \preccurlyeq x \Leftrightarrow x + x = x$;

b) $\left(x \preccurlyeq y \ \wedge\ y \preccurlyeq x\right) \Rightarrow \left(x + y = y \ \wedge\ y + x = x\right) \Rightarrow x = y$;

c) $\left(x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z\right) \Rightarrow x + y = y \wedge y + z = z \Rightarrow x + \cancel{y} + z = \cancel{y} + z \Rightarrow$

$\Rightarrow x + z = z$ jer je $y + z$ zamenjeno sa z, pa sledi $x \preccurlyeq z$.

Slika 4.1:

infimum ⇒ supremum

$xy \preccurlyeq x \preccurlyeq x+y$

Teorema 4.22 *U Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ za svako x i y iz B važi:*
a) $x \preccurlyeq x+y$; **b)** $y \preccurlyeq x+y$; **c)** $xy \preccurlyeq x$; *d)* xy

Dokaz: **a)** $x \preccurlyeq x+y \Leftrightarrow x+y = x+y$; **c)** $xy \preccurlyeq x \Leftrightarrow xy + x = x$.

Drugim rečima, zbir je veći od sabirka, a proizvod je manji od čin (faktora). Interpretirati teoremu na Haseovom dijagramu!

Teorema 4.23 *U Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ za svako x, y i z iz B važi:*

a) $\Big(x \preccurlyeq z \ \wedge \ y \preccurlyeq z\Big) \Rightarrow x+y \preccurlyeq z$. *Važi i obratno. Teorema* 4.24

b) $\Big(z \preccurlyeq x \ \wedge \ z \preccurlyeq y\Big) \Rightarrow z \preccurlyeq xy$. *Važi i obratno. Teorema* 4.24

c) $\Big(x \preccurlyeq z \ \wedge \ y \preccurlyeq z\Big) \Rightarrow xy \preccurlyeq z$. *Ne važi obratno. Naći kontraprimer.*

d) $\Big(z \preccurlyeq x \ \wedge \ z \preccurlyeq y\Big) \Rightarrow z \preccurlyeq x+y$. *Ne važi obratno. Naći kontraprimer*

Dokaz:

a) $\Big(x \preccurlyeq z \wedge y \preccurlyeq z\Big) \Rightarrow \Big(x+z = z \wedge y+z = z\Big) \Rightarrow$
$\Rightarrow x+y+z = z \Rightarrow x+y \preccurlyeq z$;

b) $\Big(z \preccurlyeq x \wedge z \preccurlyeq y\Big) \Rightarrow \Big(zx = z \wedge zy = z\Big) \Rightarrow zxy = z \Rightarrow z \preccurlyeq xy$;

c) $\Big(x \preccurlyeq z \ \wedge \ y \preccurlyeq z\Big) \Rightarrow x+z = z \wedge y+z = z$. Na osnovu ovoga sledi:
$z + xy = (z+x)(z+y) = zz = z$, tj. $xy + z = z$, što znači $xy \preccurlyeq z$.
Kontraprimer je $x = A = \{1,2\}$, $y = B = \{2,3\}$, $z = C = \{2\}$ jer je
$A \cap B \subseteq C$ dok $A \not\subseteq C$ i $B \not\subseteq C$.

d) $\Big(z \preccurlyeq x \,\wedge\, z \preccurlyeq y\Big) \Rightarrow zx = z \wedge zy = z$. Na osnovu ovoga sledi:
$z(x+y) = zx + zy = z + z = z$, tj. $z(x+y) = z$ što znači $z \preccurlyeq x + y$.
Kontraprimer je $x = A = \{1,2\}$, $y = B = \{2,3\}$, $z = C = \{1,2,3\}$,

jer je $C \subseteq A \cup B$ dok $C \nsubseteq A$ i $C \nsubseteq B$.

Tvrdnje b) i d) su dualne redom tvrdnjama a) i c)! 4.19

Teorema 4.52 *Rreprezentacija Bulovih funkcija pomoću SDNF.*

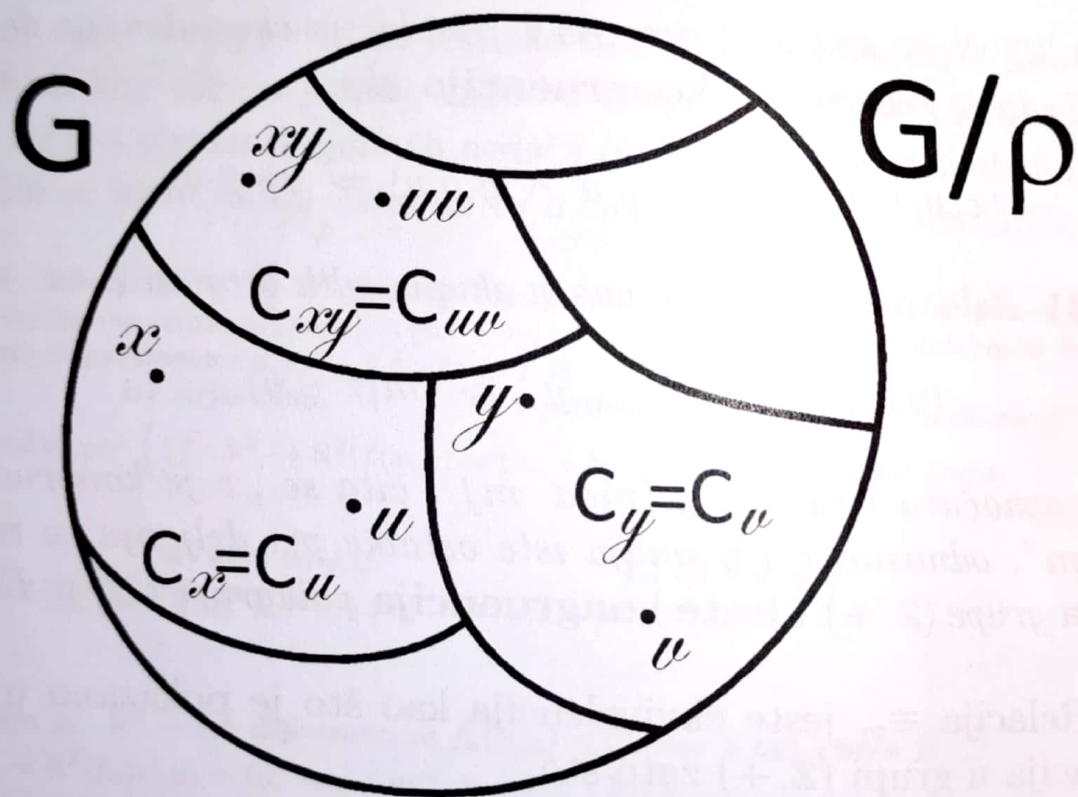
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

Dokazaćemo teoremu za $n = 3$. Na primeru tri nezavisno promenljive, odnosno za $n = 3$ prethodna teorema ima oblik: $f(x, y, z) =$
$f(0,0,0)x^0y^0z^0 + f(0,0,1)x^0y^0z^1 + f(0,1,0)x^0y^1z^0 + f(0,1,1)x^0y^1z^1 +$
$+ f(1,0,0)x^1y^0z^0 + f(1,0,1)x^1y^0z^1 + f(1,1,0)x^1y^1z^0 + f(1,1,1)x^1y^1z^1$

Proveri sada da li je ova jednakost tačna na primer za $(x, y, z) = (0, 1, 1)$. Ako se uvrsti $(x, y, z) = (0, 1, 1)$, tada će na desnoj strani svi sabirci (elementarne konjunkcije), izuzev četvrtog, biti nule jer u svim tim sabircima će se na bar jednom mestu razlikovati osnova od eksponenta pa će zbog 4.51 sabirci biti jednaki 0, a četvrti će biti $f(0, 1, 1)$. Time je naša jednakost postala $f(0, 1, 1) = f(0, 1, 1)$ odnosno tačna. Kako će se ovo očevidno uvek desiti za svaku trojku $(x, y, z) \in \{0, 1\}^3$ time je teorema dokazana.

Dokaz je sproveden za $n = 3$, međutim to očevidno važi i za svako $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 5.32 *Neka je ρ kongruencija grupoida $(G,\cdot)$. Tada jednakost $C_x * C_y = C_{xy}$, gde su x i y iz G a C_x, C_y i C_{xy} iz G/ρ, definiše binarnu operaciju $*$ u skupu G/ρ odnosno $(G/\rho, *)$ je grupoid.*



Slika 5.1:

Dokaz Treba proveriti da li $*$ jeste funkcija koja paru (C_x, C_y) pridružuje C_{xy}, tj. da li par (C_x, C_y) može da se preslika sa $*$ i u neki element različit od C_{xy}, jer ako uzmemo $u \in C_x$ i $v \in C_y$, tada je zbog 2.13. i 2.14 $(C_x, C_y) =$

(C_u, C_v), a pitanje je da li će biti i $C_{xy} = C_{uv}$? Odgovor je potvrdan samo zato što je ρ kongruencija pa važi:

$$(C_x, C_y) = (C_u, C_v) \;\Rightarrow\; (C_u = C_x \wedge C_v = C_y) \overset{2.10.}{\Rightarrow}$$

$$\overset{2.14.}{\Rightarrow} (u\,\rho\,x \;\wedge\; v\,\rho\,y) \overset{5.30.}{\Rightarrow} uv\,\rho\,xy \overset{2.14.}{\Rightarrow} C_{uv} = C_{xy}. \;\square$$

!!!

Teorema 5.41 *Svaka grupa $(G, \cdot)$ izomorfna je nekoj podgrupi grupe permutacija skupa G. Videti* 3.26

Dokaz Lako se proverava da funkcija $\sigma_a : G \to G$ definisana sa

$$(*) \qquad (\forall x \in G) \ \sigma_a(x) = ax, \quad a \in G$$

jeste bijekcija, to jest permutacija skupa G. Uočimo sada skup svih permutacija skupa G koje su oblika $(*)$ i označimo ga sa H odnosno

$$H = \{\sigma_a | \sigma_a : G \underset{\text{na}}{\overset{1-1}{\to}} G \wedge a \in G \wedge (\forall x \in G)\sigma_a(x) = ax\}.$$

Lako se pokazuje da $(H, \circ)$ jeste grupa, gde je $\circ$ operacija kompozicije funkcija. Da bi se dokazalo da su $(G, \cdot)$ i $(H, \circ)$ izomorfni, mora se konstruisati (definisati) neka funkcija $\psi : G \to H$ koja će biti bijekcija i homomorfizam, odnosno izomorfizam. Neka je funkcija $\psi : G \to H$ definisana sa

$$(\forall a \in G) \ \psi(a) = \sigma_a.$$

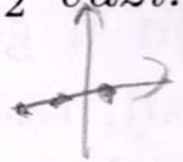
Funkcija ψ je injektivna jer za sve p i q iz G važi $\psi(p) = \psi(q) \Rightarrow \sigma_p = \sigma_q \Rightarrow (\forall x \in G)\sigma_p(x) = \sigma_q(x) \Rightarrow (\forall x \in G)px = qx \Rightarrow p = q$. Sirjektivnost sledi iz činjenice da za svako $\sigma_a \in H$ postoji takav $a \in G$ da je $\psi(a) = \sigma_a$. I konačno, dokažimo još da je ψ homomorfizam. Treba dokazati da je $\psi(ab) = \psi(a) \circ \psi(b)$, odnosno zbog definicije funkcije ψ svodi se na to da treba dokazati da je $\sigma_{ab} = \sigma_a \circ \sigma_b$. Jednakost ovih dveju funkcija σ_{ab} i $\sigma_a \circ \sigma_b$ koje očevidno imaju isti domen G, dokazaće se tako što će se *proizvoljni* x iz G preslikati i jednom i drugom funkcijom i konstatovati da se dobija isti rezultat.

$$\sigma_{ab}(x) = (ab)x = a(bx) = \sigma_a(bx) = \sigma_a(\sigma_b(x)) = (\sigma_a \circ \sigma_b)(x). \quad \square$$

Teorema 6.6 *Svaki konačan domen integriteta* $(R, +, \cdot)$ *je polje.*

Dokaz Neka je $R = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ skup od n elemenata u kojem su svaka dva različita, i neka su $a \in R$ i $a \neq 0$. Dokazaće se da postoji inverzni element za elemenat a, što će onda značiti da je $(R, +, \cdot)$ polje. Formirati skup $S = \{aa_1, aa_2, \ldots, aa_n\} \subseteq R$ i dokazati da skup S ima n elemenata, tj. da je $aa_i \neq aa_j$ za $i \neq j$. Dokaz se izvodi kontradikcijom. Pretpostavimo da je $aa_i = aa_j \ \wedge \ i \neq j$. Tada je $aa_j = aa_i \ \Rightarrow \ aa_j - aa_i = 0 \ \Rightarrow \ a(a_j - a_i) = 0 \ \Rightarrow \ a_j - a_i = 0$ jer su $a \neq 0$ i R bez delitelja nule. To je kontradikcija jer se dobilo da je $a_i = a_j \ \wedge \ i \neq j$, a u skupu $R = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ svaka dva su različita. Kako su R i S konačni skupovi, $S \subseteq R$ i $Card(S) = Card(R)$, sledi da je $S = R$. Pošto u domenu integriteta R postoji jedinica i kako je $S = R$, to je za neko $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $aa_k = e$, to jest postoji inverzni za $a \neq 0$ odnosno $a^{-1} = a_k$. $\square$

Teorema 7.6 *Za proizvoljne kompleksne brojeve* z, z_1 *i* z_2 *važi:*



a) $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$

b) $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

c) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

d) $Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$

e) $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\alpha} = \alpha$

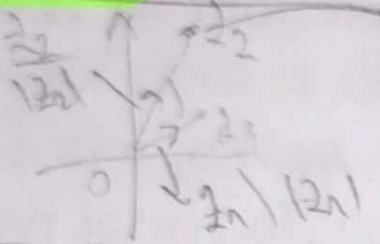
f) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

g) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

h) $Im(z_1 + z_2) = Im(z_1) + Im(z_2)$.

i) Četvorougao $O, z_1, z_1 + z_2, z_2$ *jeste paralelogram, gde je* $O = 0 + 0i$.

Teorema 7.28 *Za konveksno orijentisani ugao* $\varphi = \sphericalangle\, z_1 O z_2$ *važi*

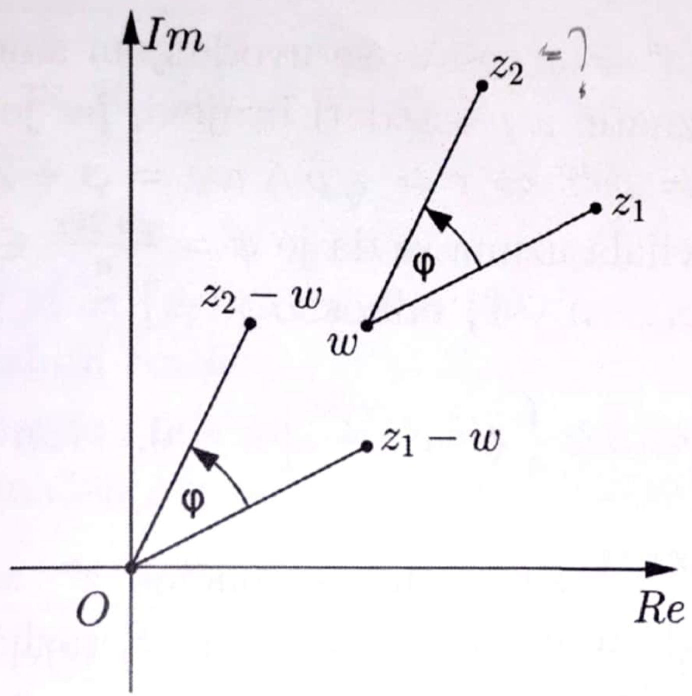


$\frac{z_1}{|z_1|} e^{i\varphi} = \frac{z_2}{|z_2|}$

$e^{i\varphi} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{z_2}{z_1}$

$$\sphericalangle\, z_1 O z_2 = \arg \frac{z_2}{z_1}.$$

Dokaz Neka je $\varphi \in (-\pi, \pi]$ merni broj orijentisang ugla $\sphericalangle\, z_1 O z_2$ odnosno $\varphi = \sphericalangle\, z_1 O z_2$. Tada je zbog 7.27 $\frac{z_2}{|z_2|} = \frac{z_1}{|z_1|} e^{i\varphi} \Leftrightarrow e^{i\varphi} = \frac{z_2}{z_1}\frac{|z_1|}{|z_2|} \Rightarrow \Rightarrow \arg e^{i\varphi} = \arg \frac{z_2}{z_1}\frac{|z_1|}{|z_2|} \Leftrightarrow \varphi = \arg \frac{z_2}{z_1}$ tj. $\sphericalangle\, z_1 O z_2 = \arg \frac{z_2}{z_1}$. Vidi 7.16 pod 1) i 5) odnosno da je $\arg \rho z = \arg z$ za $\rho \in \mathbb{R}^+$ i $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. $\square$



$z_2 - w = (z_1 - w)\, e^{\varphi i}$

Slika 7.2: Rotacija tačke z_1 za ugao φ oko tačke w

Teorema 7.29 *Ako je kompleksni broj z_2 dobijen rotacijom kompleksnog broja z_1 oko centra rotacije, broja w, za ugao φ, tada je*

tačka oko koje se rotira

$$z_2 = w + (z_1 - w)e^{i\varphi}.$$

~~koga~~ koja se rotira

$\frac{z_1-w}{|z_1-w|}e^{i\varphi} = \frac{z_2-w}{|z_2-w|}$

Dokaz je posledica teorema 7.27 i 7.13.

Teorema 7.32 *Jednačina $z^n = w = \rho e^{i\varphi}$, gde je z nepoznata, n proizvoljan prirodan broj i w proizvoljni kompleksni broj različit od nule, ima n različitih rešenja koja su u kompleksnoj ravni temena pravilnog n-tougla čije je težište u koordinatnom početku, tj. rešenja su*

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{e^{\pi i}} = e^{\frac{\pi - 2k\pi}{3}i}$ $k \in \{-1, 0, 1\}$

$z^n = w \iff z = \sqrt[n]{w}$

$e^{-\frac{\pi}{3}i}$ $e^{\frac{\pi}{3}i}$ $e^{\pi i}$

Dokaz Data jednačina $z^n = w$ rešava se uvođenjem smena $z = re^{i\psi}$ i $w = \rho e^{i\varphi}$, gde su r i ψ nepoznate, a ρ i φ dati brojevi, jer je w dati broj. Sada sledi $z^n = w \Leftrightarrow r^n e^{in\psi} = \rho e^{i\varphi} \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{\rho} \wedge n\psi = \varphi + 2k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}$. Da se neka rešenja ne bi ponavljala uzima se da je $\psi = \frac{\varphi+2k\pi}{n} \in (-\pi, \pi]$ pa je onda dovoljno da je $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ odnosno

$z = \sqrt[n]{w}$?

$$z^n = w = \rho e^{i\varphi} \Leftrightarrow z \in \left\{ \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} \,\middle|\, k = 0, \ldots, n-1 \right\} = S.$$

Znači, $z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$ su rešenja jednačine $z^n = w$ za svako $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Pokazati da su svaka dva z_k iz S različita, tj. da ih ima bar n. Ako je $k_1 \neq k_2$, tada je $z_{k_1} \neq z_{k_2}$ jer je

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\varphi}{n}} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\varphi}{n}} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{k-1} e^{i\frac{2\pi}{n}} = z_{k-1}\, e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

tj. $z_k = z_{k-1}\, e^{i\frac{2\pi}{n}}$, što znači da je z_k dobijen rotacijom broja z_{k-1} oko koordinatnog početka za ugao $\frac{2\pi}{n}$, pa sledi da su $z_0, z_1, \ldots z_{n-1}$ na istoj centralnoj kružnici poluprečnika $\sqrt[n]{\rho}$ i svaki od njih dobija se od prethodnog, rotacijom za ugao $\frac{2\pi}{n}$, jer množenje sa $e^{i\theta}$ je rotacija za ugao θ oko koordinatnog početka, a pun ugao iznosi 2π, pa se nijedan od $z_0, z_1, \ldots z_{n-1}$ neće poklapati. Znači pronašli smo bar n rešenja. Međutim, ako se primeni i teorema 8.39, koja kaže da svaki polinom n-tog stepena ima najviše n korena, sledi da data jednačina ima tačno n korena. □

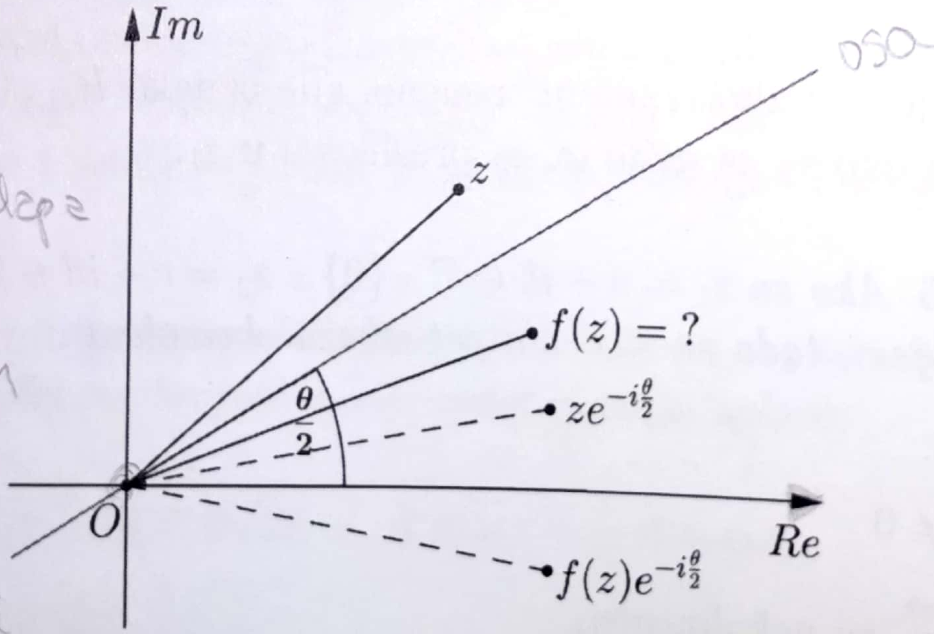
Zadatak 7.48 *Dokazati da funkcija $f_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gde je $\theta \in (-\pi, \pi]$, defin-isana sa $f_\theta(z) = \overline{z}e^{i\theta}$ u kompleksnoj ravni određuje jednu osnu simetriju. Odrediti skup svih kompleksnih brojeva koji pripadaju toj osi.*

Rešenje Primetiti da je $g(z) = \overline{z}$ osna simetrija, gde je realna osa za pravo osa simetrije. Takođe je poznato da je kompozicija rotacije $R_{0,-\frac{\theta}{2}}$ osne simetrije $g(z) = \overline{z}$ i rotacije $R_{0,\frac{\theta}{2}}$ osna simetrija čija osa gradi ugao $\frac{\theta}{2}$ sa prvobitnom osom (realnom osom). Znači, $\overline{ze^{-i\frac{\theta}{2}}}e^{i\frac{\theta}{2}} = \overline{z}e^{i\theta} = f_\theta(z)$ jeste osna simetrija. Skup tačaka tražene ose je

$$\{z | z \in \mathbb{C} \wedge (\arg(z) = \frac{\theta}{2} \vee \arg(z) = \pm\pi + \frac{\theta}{2})\} \cup \{0\},$$

gde se znak + ili − bira tako da bude $\pm\pi + \frac{\theta}{2} \in (-\pi, \pi]$.

Osna simetrija u odnosu na osu koja zaklapa ugao od $\frac{\theta}{2}$ sa pozitivnim delom realne ose i prolazi kroz koordinatni početak



Slika 7.3: Osna simetrija oko ose koja zaklapa ugao $\frac{\theta}{2}$ sa pozitivnim delom ralne ose

Teorema 8.19 *Teorema o deljenju polinoma. Za svaka dva polinoma S i $T \neq 0$, postoje takvi jedinstveni polinomi Q i R, da je*

$$S = QT + R \quad \wedge \quad (R = 0 \vee dg(R) < dg(T)).$$

Uobičajeno je da se $S = QT + R$ piše i u obliku

$$\frac{S}{T} = Q + \frac{R}{T} \text{ ili } S : T = Q + \frac{R}{T}.$$

Dokaz

- Ako je $S = 0$, tada je $-QT = R$, odakle sledi $Q = 0$ i $R = 0$ jer bi u protivnom stepen polinoma na levoj strani jednakosti $-QT = R$ bio veći od stepena polinoma na desnoj strani.

- Ako su $S \neq 0$ i $dg(S) < dg(T)$, tada očevidno mora biti $Q = 0$ i $S = R$ jer bi se opet dobili polinomi različitih stepena na levoj i desnoj strani jednakosti $S = QT + R$.

- Ako su $S \neq 0$ i $dg(S) \geq dg(T)$, tada se uzima da je $S = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n$ i $T = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_m t^m$. Sada će biti definisan konačan niz polinoma $S_1, S_2, \ldots, S_k$ čiji su vodeći koeficijenti označeni sa s_i, na sledeći način:

$$\begin{aligned} S_1 &= S - a_n b_m^{-1} t^{n-m} T \\ S_2 &= S_1 - s_1 b_m^{-1} t^{dg(S_1)-m} T \\ &\vdots \\ S_k &= S_{k-1} - s_{k-1} b_m^{-1} t^{dg(S_{k-1})-m} T \end{aligned}$$

gde je k najmanji prirodni broj za koji će biti $S_k = 0$ ili $dg(S_k) < dg(T)$. Dokazati da takav broj k postoji. Ako je $S_k = 0$ za neki prirodni broj k, onda je dokaz gotov. U suprotnom slučaju je $dg(S) > dg(S_1)$, jer su polinomi S i $a_n b_m^{-1} t^{n-m} T$ očevidno istog stepena i imaju jednake vodeće koeficijente. Na isti način zaključuje se da je $dg(S_1) > dg(S_2) > dg(S_3) > ...$, što znači da će postojati takav prirodan broj k za koji je $dg(S_k) < dg(T)$. Zamenom S_1 iz prve u drugu jednakost, zatim zamenom S_2 iz druge u treću jednakost, ...i, na kraju, zamenom S_{k-1} iz $k-1$-ve u k-tu jednakost sledi da je $S = QT + R$, gde je $R = S_k$ i

$$Q = a_n b_m^{-1} t^{n-m} + s_1 b_m^{-1} t^{dg(S_1)-m} + \ldots + s_{k-1} b_m^{-1} t^{dg(S_{k-1})-m}.$$

Ako bi pored polinoma Q i R, koji zadovoljavaju uslove teoreme postojali i polinomi Q_1 i R_1 koji zadovoljavaju uslove teoreme, tada bi se dobilo $S = QT + R$ i $S = Q_1 T + R_1$, odakle oduzimanjem sledi da je $-(Q - Q_1)T = R - R_1$, a odavde obavezno sledi da je $R - R_1 = 0$ i $Q - Q_1 = 0$ jer bi u protivnom u jednakosti $-(Q - Q_1)T = R - R_1$ bilo da je stepen polinoma na levoj strani viši od stepena polinoma na desnoj strani. Ovim je pokazana i jedinstvenost polinoma Q i R.□

Teorema 8.24 *Postoji tačno jedan takav* normiran *normalizovani polinom W da je W=NZD(S,T), gde su S i T takvi polinomi da je bar jedan od njih različit od nule.*

Dokaz Ako je $S = 0 \wedge T \neq 0$, tada je NZD$(S,T) = a^{-1}T$, gde je a vodeći koeficijent polinoma T. Analogan je i slučaj kad je $S \neq 0 \wedge T = 0$. Neka je sada $dg(S) \geq dg(T)$. Na osnovu prethodne teoreme važi

$$\begin{array}{rcll} S & = & QT + R_1 & \wedge \ (R_1 = 0 \vee dg(R_1) < dg(T)) \\ T & = & Q_1R_1 + R_2 & \wedge \ (R_2 = 0 \vee dg(R_2) < dg(R_1)) \\ & \vdots & & \\ R_{k-2} & = & Q_{k-1}R_{k-1} + R_k & \wedge \ (R_k = 0 \vee dg(R_k) < dg(R_{k-1})) \\ R_{k-1} & = & Q_kR_k. & \end{array}$$

Iz priloženog algoritma (poznat kao Euklidov algoritam) za dobijanje niza polinoma $R_1, R_2, \ldots$ očevidno je da postoji prirodni broj k za koji je $R_{k+1} = 0$ ili $dg(R_k) = 0$ jer je $dg(T) > dg(R_1) > dg(R_2) > \ldots > dg(R_{i-1}) > dg(R_i) \ldots$ Pokazaće se da je R_k zajednički delilac polinoma S i T. Iz poslednje jednakosti sledi $R_k | R_{k-1}$, što na osnovu pretposlednje, implicira da je $R_k | R_{k-2}, \ldots$, a dalje, na osnovu druge, sledi da je $R_k | T$ i što, na osnovu prve, implicira da je $R_k | S$. Znači da je R_k zajednički delilac za S i T. Dokazati sad da je R_k i *najveći* zajednički delilac za S i T. Pretpostavimo da su $W_1 | S$ i $W_1 | T$. Tada iz prve jednakosti sledi da je $W_1 | R_1$, što zajedno s drugom implicira da je $W_1 | R_2, \ldots$, a zajedno s pretposlednjom implicira da je $W_1 | R_k$ pa je dakle R_k=NZD(S,T), a traženi normalizovani polinom je $W = a^{-1}R_k$, gde je a vodeći koeficijent polinoma R_k. Jedinstvenost polinoma W jednostavno se dokazuje kontradikcijom, korišćenjem posledice 8.21. $\square$

Teorema 8.34 *(Bezuova). Vrednost polinoma P nad poljem F u tački α, to jest $\Big(\psi(P)(\alpha)\Big)$, jednaka je ostatku pri deljenju polinoma P polinomom $(-\alpha, 1) = t - \alpha = -\alpha + t$.*

Dokaz Na osnovu teoreme 8.19 postoje jedinstveni polinomi Q i R $(R = 0 \lor dg(R) < dg(t - \alpha))$ takvi da je

$$\begin{array}{rcll} P & = & (t-\alpha)Q + R & \text{odakle je zbog 8.30} \\ \psi(P) & = & \psi(t-\alpha)\psi(Q) + \psi(R) & \text{odnosno} \\ (\forall x \in F)\ \psi(P)(x) & = & (x-\alpha)\psi(Q)(x) + R. & \end{array}$$

$P(x) = (x-\alpha)Q(x) + R$
za $x = \alpha$
$P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + R$
$P(\alpha) = R$

Treba uočiti da se u prethodne tri jednakosti pojavljuje šest binarnih operacija: sabiranje i množenje polinoma, sabiranje i množenje funkcija i sabiranje i množenje u polju F. Takođe je $R \in F$ zbog $R = 0 \lor dg(R) < dg(t - \alpha) = 1$, odnosno $R = 0 \lor dg(R) = 0$.

Ako se uzme da je $x = \alpha$, dobija se da je

$$\psi(P)(\alpha) = (\alpha - \alpha)\psi(Q)(\alpha) + R, \quad \text{odnosno} \quad \psi(P)(\alpha) = R. \qquad \Box$$

Teorema 8.39 *Svaki polinom P_n n-tog stepena ima najviše n korena.*

Dokaz Polinom nultog stepena očevidno ima „nula" korena pa je tvrđenje tačno za $n = 0$. Ako P_n nema korena, dokaz je završen. Ako je $n > 0$ i P_n ima bar jedan koren α, dokaz se izvodi indukcijom po n. Za $n = 1$ sledi da polinom $P_1 = a_0 + a_1 t$ ima tačno jedan koren $-a_1^{-1} a_0$, jer jednačina $a_0 + a_1 x = 0$ ima tačno jedno rešenje u polju F, tj. tvrđenje je tačno. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za $n-1$ i dokažimo da je tačno za n. Kako je $P_n = (t-\alpha)Q_{n-1}$ zbog teoreme 8.35 i kako je po induktivnoj pretpostavci $dg(Q_{n-1}) = n-1$, na osnovu induktivne pretpostavke sledi da Q_{n-1} ima najviše $n-1$ korena, a iz jednakosti $P_n = (t-\alpha)Q_{n-1}$ tada sledi da P_n ima najviše n korena. $\square$

Teorema 8.49 *Neka je $P \in F[t]$ polinom drugog ili trećeg stepena. Tada je polinom P svodljiv nad poljem F akko polinom P ima bar jedan koren u polju F.*

$(x^2+1)(x^2+1)$ - [illegible] svodljiv nema koren $\mathbb{R}$
kontraprimer

Dokaz ($\Rightarrow$) Ako je polinom P drugog ili trećeg stepena i svodljiv nad poljem F, tada je deljiv linearnim polinomom zbog 8.45 i 8.14 ($PQ \neq 0 \Rightarrow dg(PQ) = dg(P) + dg(Q)$) i činjenice da su jedini način predstavljanja dvojke i trojke kao zbira prirodnih brojeva: 2=1+1, 3=1+2 i 3=2+1. Kako P ima linearni faktor, a svaki linearni polinom ima jedan koren, sledi da polinom P ima bar jedan koren.
($\Leftarrow$) Ako P ima koren α, zbog teoreme 8.35 tada sledi da je $t - \alpha$ faktor polinoma P, to jest P je svodljiv. □ uvek

Teorema 8.53 *Svaki polinom* $P_n = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n$ *, n-tog stepena, za* $n > 0$*, nad poljem kompleksnih brojeva može se napisati u obliku*

$$P = a_n(t - t_1)(t - t_2)\ldots(t - t_n),$$

gde je t polinom $(0, 1)$*, a* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *i* a_n *kompleksni brojevi, odnosno konstantni polinomi.*

Dokaz Na osnovu teoreme 8.52, polinom P ima bar jedan koren t_1 iz skupa kompleksnih brojeva, pa je zbog 8.35 $P = (t - t_1)P_{n-1}$, gde je P_{n-1} polinom stepena $n - 1$. Sada se na polinom P_{n-1} primeni 8.52 i dobija $P_n = (t-t_1)(t-t_2)P_{n-2}$. Nastavkom ovog postupka dobija se da je $P_n = (t-t_1)(t-t_2)\ldots(t - t_{n-1})P_1$. Kako se svaki linearni polinom može napisati u obliku $a(t - t_n)$, zamenom $P_1 = a(t - t_n)$ u prethodnu jednakost i izjednačavanjem koeficijenata uz t^n dobija se da je $a = a_n$, odnosno tvrdnju teoreme. □

Kao što je rečeno $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ je n-torka brojeva koji su koreni polinoma P i ako je k broj pojavljivanja korena t_i u toj n-torci, tada se kaže da je t_i koren reda k za polinom P. Videti 8.36.

je

Teorema 8.54 *Ako* ~~*su*~~ *P polinom nad poljem realnih brojeva (tj. poliom čiji kojeficijenti su realni brojevi) i* α *koren polinoma P, tada je i konjugovani broj* $\overline{\alpha}$ *koren polinoma P.*

$(x-\alpha)\,|\,P(x)$ $\quad (x-\overline{\alpha})\,|\,P(x)$ $\quad (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})\,|\,P(x)$ $\quad x^2 - 2x\mathrm{Re}(\alpha) + |\alpha|^2\,|\,P(x)$

Dokaz Ako je a realan broj, jasno je da je tada $a = \overline{a}$. Kako su strukture polinoma i polinomskih funkcija izomorfne nad beskonačnim poljem (8.43), onda je opravdano, samo u tom slučaju, da se $\psi(P)$ kraće piše samo sa P, odnosno $\psi(P)(x) = P(x)$ za svako x iz tog beskonačnog polja. Neka je

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = a_n(x - x_1)\ldots(x - x_n)$, tada je

$\overline{P(x)} = a_0 + a_1\overline{x} + a_2\overline{x}^2 + \ldots + a_n\overline{x}^n = P(\overline{x}) = a_n(\overline{x} - x_1)\ldots(\overline{x} - x_n)$,

pa je $P(x) = \overline{\overline{P(x)}} = \overline{a_n(\overline{x} - x_1)\ldots(\overline{x} - x_n)} = a_n(x-\overline{x}_1)\ldots(x-\overline{x}_n)$, odakle je očevidno da $P(\alpha) = 0$ implicira $P(\overline{\alpha}) = 0$. Videti 7.4 i 7.6. □

Teorema 8.55 *Svaki polinom* $P = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n$ *nad poljem realnih brojeva, može se napisati u obliku proizvoda polinoma stepena nižih od 3, čiji su koeficijenti realni brojevi.*

Dokaz Na osnovu teoreme 8.53 polinom P može se napisati u obliku $P = a_n(t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_n)$, gde su $t_1, t_2, \dots, t_n$ kompleksni koreni polinoma P. Međutim, ako je α koren polinoma P nad poljem realnih brojeva, tada je i $\overline{\alpha}$ koren polinoma P, pa ako se pomnože polinomi $(t-\alpha)$ i $(t-\overline{\alpha})$, dobija se polinom $t^2 - 2R_e(\alpha)t + |\alpha|^2$ čiji su koeficijenti realni. Nastavi li se taj postupak dokle god u polinomu $P = a_n(t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_n)$ ima kompleksnih brojeva koji nisu realni, očevidno će se dobiti polinom P u obliku koji tvrdi teorema

$$P = a_n(t^2 + p_1 t + q_1)\dots(t^2 + p_k t + q_k)(t - t_{r_1})\dots(t - t_{r_m}),$$

gde su $p_i, q_i, t_{r_j} \in \mathbb{R}$ i $t_{r_j} \in \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ za svako $i = 1, 2, \dots, k$ i $j = 1, 2, \dots, m$. $\square$

Teorema 8.69 *Nula (koren) reda $k \geq 2$ polinoma P je nula (koren) reda ~~$k-1$~~ polinoma P'. Broj α je koren reda k polinoma P ako i samo ako je α zajednički koren polinoma $P, P', P'', \ldots, P^{(k-1)}$ i α nije koren polinoma $P^{(k)}$.*

-2struki kor

(7)=0
'(7)=0
''(7)≠0

Dokaz Ako je α nula reda k polinoma P, to znači da je

$$P(x) = (x-\alpha)^k Q(x) \quad \text{gde je } \; Q(\alpha) \neq 0.$$

Izračunati izvod leve i desne strane prethodne jednakosti.

$$P'(x) = (x-\alpha)^{k-1}(kQ(x) + (x-\alpha)Q'(x)),$$

odakle sledi da je α nula reda $k-1$ polinoma P'. Drugi deo tvrđenja teoreme posledica je prvog dela, koji je dokazan. $\square$

Teorema 8.70 *Neka je $\frac{p}{q}$ racionalan broj, gde su p i q uzajamno prosti celi brojevi i neka su koeficijenti polinoma*

$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2$

$p | -2 \quad q | 3$

$$P = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

celi brojevi. Tada, ako je $\frac{p}{q}$ koren polinoma P, onda su $p|a_0$ i $q|a_n$.

Dokaz Kako je $\frac{p}{q}$ koren polinoma P, to je

$p \in \{\pm 1, \pm 2\}$
$q \in \{1, 3\}$
$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}\}$

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0 \qquad (8.1)$$

$$a_n \frac{p^n}{q} + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1} = 0 \qquad (8.2)$$

$$a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_0 \frac{q^n}{p} = 0 \qquad (8.3)$$

gde su jednakosti (8.2) i (8.3) dobijene iz jednakosti (8.1) množenjem redom sa q^{n-1} i $\frac{q^n}{p}$. Broj $a_n \frac{p^n}{q}$ mora biti ceo jer svi ostali sabirci u jednakosti (8.2) celi su brojevi. Kako je $a_n \frac{p^n}{q}$ ceo broj tada a_n mora biti deljiv sa q jer su p i q uzajamno prosti brojevi. Analogno se zaključuje da je a_0 deljiv sa p. $\square$

Teorema 9.1 *Relacija $\equiv_P$ definisana u skupu svih polinoma $F[t]$ kao*

$$(\forall Q, S \in F[t]) \;\; Q \equiv_P S \;\Leftrightarrow\; P|Q - S$$

Q и S имају исти
остатак при
дељењу са P

jeste kongruencija u odnosu na sabiranje i množenje polinoma, gde je P neki nenula polinom iz $F[t]$.

$(F[t]/\equiv_P, +, \cdot)$

$(F[t]/_{\equiv_P}, +, \cdot)$ – kako je $\equiv_P$ relacija kongruencije
može se definisati relacija među klasama

Dokaz

Znači, Q i S su u relaciji $\equiv_P$ ako i samo ako je njihova razlika deljiva sa P, to jest akko polinomi Q i S imaju iste ostatke pri deljenju polinomom P.

Relacija je refleksivna jer je $Q \equiv_P Q \;\Leftrightarrow\; P|Q - Q \;\Leftrightarrow\; P|0 \;\Leftrightarrow$ tačno. Simetričnost sledi iz $Q \equiv_P S \;\Rightarrow\; P|Q - S \;\Rightarrow\; P|S - Q \;\Rightarrow\; S \equiv_P Q$. Relacija je tranzitivna jer $(Q \equiv_P S \wedge S \equiv_P R) \Rightarrow (P|Q - S \wedge P|S - R) \Rightarrow P|Q - R \Rightarrow Q \equiv_P R$. Relacija $\equiv_P$ jeste relacija ekvivalencije. Relacija $\equiv_P$ je kongruencija u odnosu na sabiranje i množenje polinoma, jer je $(Q \equiv_P S \wedge R \equiv_P T) \Rightarrow (P|(Q - S) \wedge P|(R - T)) \Rightarrow P|((Q + R) - (S + T)) \Rightarrow Q + R \equiv_P S + T$ kao i $(Q \equiv_P S \wedge R \equiv_P T) \Rightarrow (P|Q - S \wedge P|R - T) \Rightarrow (P|(QR - SR) \wedge P|(SR - ST)) \Rightarrow P|(QR - ST) \Rightarrow QR \equiv_P ST$. Klasa ekvivalencije, s obzirom na relaciju $\equiv_P$ kojoj pripada polinom Q, označiće se sa $[Q]$, a faktor skup sa $F[t]/_{\equiv_P}$. □

Teorema 9.2 *Uređena trojka $(F[t]/_{\equiv_P}, +, \cdot)$ komutativni je prsten s jedinicom, gde su operacije $+$ i $\cdot$ definisane sa*

sabiranje među klasa   sabiranje polinoma   množenje među klase   množenje polinoma

$$(\forall Q, S \in F[t]) \qquad [Q] + [S] = [Q + S] \qquad i \qquad [Q][S] = [QS].$$

Dokaz Operacije $+$ i $\cdot$ su logički dobro definisane zbog teorema 5.32 i 9.1. Asocijativnost operacija $+$ i $\cdot$ sledi iz $([Q] + [R]) + [S] = [Q + R] + [S] = [(Q + R) + S] = [Q + (R + S)] = [Q] + [R + S] = [Q] + ([R] + [S])$ i $([Q][R])[S] = [QR][S] = [(QR)S] = [Q(RS)] = [Q][RS] = [Q]([R][S])$, gde su korišćene definicija operacija u skupu $F[t]/_{\equiv_P}$ i asocijativnost operacija $+$ i $\cdot$ u skupu polinoma $F[t]$. Analogno se dokazuju komutativnost operacija $+$ i $\cdot$ i distributivnost operacije $\cdot$ u odnosu na operaciju $+$ skupa $F[t]/_{\equiv_P}$. Neutralni element za operaciju $+$ jeste $[0]$, odnosno klasa kojoj pripadaju *svi polinomi deljivi sa* P koja se može označavati i sa $[P]$, pa je znači $0 = [0] = [P]$. Neutralni element multiplikativne operacije jeste $[1]$ jer $[1][Q] = [1 \cdot Q] = [Q]$. Inverzni element, s obzirom na operaciju $+$ uvek postoji jer je $[Q] + [-Q] = [Q + (-Q)] = [0] = [P] = (P) = 0$. □

Teorema 10.18 *Determinanta je linearna funkcija po svakoj vrsti, to jest* $\det A_{x_i+y_i} = \det A_{x_i} + \det A_{y_i}$ *i važi teorema 10.13* ($\det A_{\alpha x_i} = \alpha \cdot \det A_{x_i}$), *gde je* $A = [a_{ij}]_{nn}$ *neka matrica.*

Dokaz

$$\det A_{x_i+y_i} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots \left(x_{i\sigma(i)} + y_{i\sigma(i)}\right) \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} \cdots x_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} \cdots y_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \det A_{x_i} + \det A_{y_i}. \quad \square$$

Scanned with CamSc

Teorema 11.12 *Kvadratni sistem jednačina* S *određen je ako i samo ako je determinanta sistema različita od nule.*

Dokaz Dati sistem S ekvivalentnim transformacijama svedemo na njemu ekvivalentni sistem S_1, koji je u trougaonom obliku. Na osnovu osobina determinanti sledi da je $\det S = 0 \Leftrightarrow \det S_1 = 0$. Prema tome, ako je $\det S \neq 0$, tada je i $\det S_1 \neq 0$, pa u trougaonom obliku sistema S_1, zbog teoreme 17.15, postoji situacija

$$S_1: \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n, \end{array}$$

det(S) ≠ 0 – sistem je određen

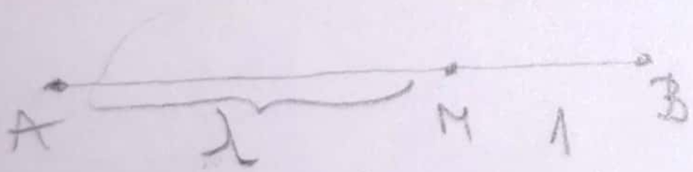
odakle sledi da je sistem određen, jer je det $S_1 = a_{11} \dots a_{nn} \neq 0$. Obratno, ako je kvadratni sistem S određen, tada je i njemu ekvivalentni trougaoni sistem S_1 obavezno kvadratni i određen, pa matrica sistema S_1 na glavnoj dijagonali ima sve elemente različite od nule, a ispod nje jednake nuli, što znači da je det $S_1 \neq 0$ odnosno det $S \neq 0$.

Lema 13.3

Deoba duži u datoj razmeri

Ako tačka M deli duž AB u razmeri $\lambda : 1$, tj. $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$, tada

$$\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + \lambda\vec{r}_B}{1+\lambda}.$$



$AM : MB = \lambda : 1$

$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \lambda$

$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$

$\vec{r}_m - \vec{r}_a = \lambda(\vec{r}_b - \vec{r}_M)$

$\vec{r}_m = \vec{r}_a + \lambda\vec{r}_B - \lambda\vec{r}_m$

$\vec{r}_M(1+\lambda) = \vec{r}_a + \lambda\vec{r}_B$

$$\vec{r}_m = \frac{\vec{r}_a + \lambda\vec{r}_B}{1+\lambda}$$

Dokaz $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = \lambda(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\vec{r}_A + \vec{r}_M = -\lambda\vec{r}_M + \lambda\vec{r}_B \Leftrightarrow (1+\lambda)\vec{r}_M = \vec{r}_A + \lambda\vec{r}_B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A+\lambda\vec{r}_B}{1+\lambda}}$$

Faktički, to je jednačina prave $p = p(A, B)$ bez tačke B, odnosno $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Leftrightarrow M \in p \setminus \{B\}$.

$A(3,0,-2)$
$\vec{p}(2,-1,3)$
$\frac{x-3}{2} = y = \frac{z+2}{-3}$

Lema 13.4

Jednačina prave p

Oznaka $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{r}_M$, podrazumevaće da je $\vec{r} = \vec{r}_M$ onaj predstavnik vektora čija je početna tačka koordinatni početak $O = O(0,0,0)$.

Neka je $\overrightarrow{OM} = \vec{r}_M = \vec{r} = (x, y, z)$ vektorska promenljiva. Tada je

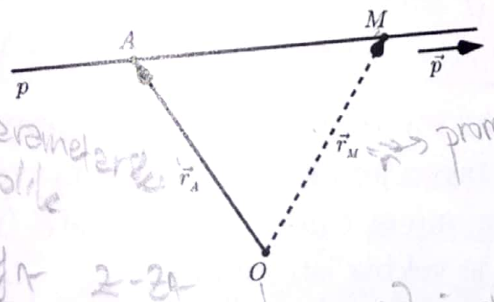
$$A(x_A, y_A, z_A) \in p \parallel \vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \quad \Leftrightarrow$$

vektorski oblik $\rightarrow$ $\boxed{p : \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{p}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{p : \frac{x-x_A}{p_1} = \frac{y-y_A}{p_2} = \frac{z-z_A}{p_3} = t} \quad \Leftrightarrow$ $\rightarrow$ kanonički oblik

$$\Leftrightarrow \boxed{p : x = x_A + tp_1 \quad \wedge \quad y = y_A + tp_2 \quad \wedge \quad z = z_A + tp_3}$$ $\rightarrow$ parametarski

$\overrightarrow{AM} \parallel \vec{p} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\vec{p} \Leftrightarrow \vec{r}_M - \vec{r}_A = t\vec{p} \Leftrightarrow \underset{(x,y,z)}{\vec{r}} = \underset{(x_A,y_A,z_A)}{\vec{r}_A} + t\underset{(p_1,p_2,p_3)}{\vec{p}}$

$x = x_A + tp_1$
$y = y_A + tp_2$ $\rightarrow$ parametarski oblik
$z = z_A + tp_3$



$t = \frac{x-x_A}{p_1} = \frac{y-y_A}{p_2} = \frac{z-z_A}{p_3}$ $\rightarrow$ kanonički oblik

Slika 13.2: Jednačina prave

Ako pravoj p pripada (data fiksna) tačka $A(x_A, y_A, z_A)$ i ako je $p \parallel \vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ (gde je $\vec{p}$ dati fiksni vektor), tada vektor položaja $\vec{r} = \vec{r}_M = (x, y, z)$ proizvoljne tačke $M = M(x, y, z)$ te prave p, po Prvom zakonu analitičke geometrije, očevidno zadovoljava

$$\vec{r}_M = \boxed{\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{p}}$$ $\rightarrow$ vektorski oblik

gde je t proizvoljni realni broj, jer je

$$M \in p \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \| \vec{p} \Leftrightarrow \vec{r}_M - \vec{r}_A \| \vec{p} \Leftrightarrow \vec{r} - \vec{r}_A = t\vec{p}.$$

Očevidno je da važi i obratno: ako vektor $\vec{r} = (x, y, z)$ zadovoljava jednačinu $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{p}$, tada tačka čije su koordinate (x, y, z) pripada pravoj koja prolazi kroz tačku $A(x_A, y_A, z_A)$ i paralelna je sa vektorom $\vec{p}$ za neki realni broj t. Znači, jednačina prave u vektorskom obliku je $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{p}$, što je ekvivalentno sistemu $x = x_A + tp_1 \wedge y = y_A + tp_2 \wedge z = z_A + tp_3$ koji se naziva parametarske jednačine prave i često ga zapisujemo i kao $\boxed{\frac{x-x_A}{p_1} = \frac{y-y_A}{p_2} = \frac{z-z_A}{p_3} = t}$ odnosno **kanonički oblik jednačine prave.**

Neka su $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b}$ dati nenula međusobno normalni vektori, neka je $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ promenljivi vektor i α ravan koja prolazi kroz koordinatni početak, a normalna na vektor $\vec{b}$. Tada vektorska jednačina

$$\vec{a} \times \vec{r} = \vec{b}$$

jeste jednačina prave p koja pripada ravni α, paralelna je sa OA, udaljena od OA za $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ (visina paralelograma čija je osnovica OA, a površina $|\vec{b}|$) i ako je P proizvoljna tačka prave p, tada je $(\vec{a}, \overrightarrow{OP}, \vec{b})$ triedar desne orijentacije.

Bar jedan od vektora iz skupa $\{(1, \lambda, \delta), (0, 1, \varepsilon), (0, 0, 1)\}$ jeste vektor proizvoljne prave, za neke realne brojeve λ, δ i ε.

Time je pokazano da vektor prave u jednačini prave zavisi **samo od DVA parametra!** Ovo je tačno jer ako je $\vec{p}$ vektor prave, tada i vektor koji se dobije od vektora $\vec{p}$ menjanjem smera i intenziteta (množenjem brojem različitim od nule), takođe je vektor iste te prave.

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ $\frac{\vec{a}}{a_1} = (1, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1})$ λ δ $\vec{a}=(0,a_1,a_2)$ $\frac{\vec{a}}{a_1}=(0,1,\frac{a_1}{a_2})$ $\vec{a}=(0,0,a_n)$ $\frac{\vec{a}}{a_n}=(0,0,1)$

Lema 13.5

Jednačina ravni α

Oznaka $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{r}_M$, podrazumevaće da je $\vec{r} = \vec{r}_M$ onaj predstavnik vektora čija je početna tačka koordinatni početak $O = O(0, 0, 0)$.

Neka je $\vec{r}_M = \vec{r} = (x, y, z)$ vektorska promenljiva. Ako je $Q(x_Q, y_Q, z_Q) \in \alpha \perp \vec{n} = (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ i $\vec{n}\vec{r}_Q = -D$ tada važi da:

$$\boxed{\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q} \Leftrightarrow \boxed{\alpha : Ax + By + Cz + D = 0,}$$

vektorski oblik

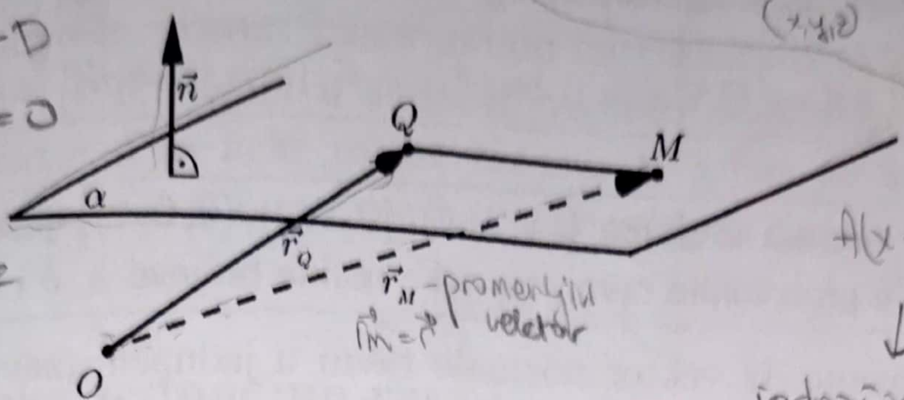
$\overrightarrow{QM} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{QM}\cdot\vec{n}=0 \iff (\vec{r}_M-\vec{r}_Q)\cdot\vec{n}=0 \iff \vec{r}\vec{n}=\vec{r}_Q\vec{n}$

(x,y,z) (A,B,C) (x_Q,y_Q,z_Q)

$Ax+By+Cz=-D$

$Ax+By+Cz+D=0$

opšti oblik



$A(x-x_Q)+B(y-y_Q)+C(z-z_Q)=0$

jednačina ravni kroz neku tačku

Slika 13.3: Jednačina ravni

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha : A(x-x_Q)+B(y-y_Q)+C(z-z_Q)=0}$$

su jednačine ravni α, gde su $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}=(A,B,C)$ vektor normalan na ravan α, Q proizvoljna fiksna tačka ravni α, $\vec{r}$ promenljivi (tekući) vektor čiji vrh uvek pripada ravni α ako je njegov početak u tački $O(0,0,0)$, A,B,C,D su realni brojevi za koje važi da je $A^2+B^2+C^2\neq 0 \Leftrightarrow (A,B,C)\neq(0,0,0) \Leftrightarrow A\neq 0 \vee B\neq 0 \vee C\neq 0$, odnosno bar jedan od A,B,C različit je od nule i $D=-\vec{n}\vec{r}_Q$.

Dokaz Jasno je da bar jedan od brojeva A,B i C mora biti različit od nule, u protivnom to bi bila jednačina praznog skupa za $D\neq 0$ ili jednačina celoga prostora za $D=0$. Neka je dati vektor normale $\vec{n}=(A,B,C)=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ i tekući (promenljivi) vektor $\vec{r}_M=\vec{r}=$
$=(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Tada sledi da $Ax+By+Cz+D=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \vec{n}\vec{r}=-D \Leftrightarrow \frac{\vec{n}\vec{r}}{|\vec{n}|}=\frac{-D}{|\vec{n}|}\Leftrightarrow \pm|\mathbf{pr}_{\vec{n}}\vec{r}|=\frac{-D}{|\vec{n}|}\Leftrightarrow M(x,y,z)\in\alpha$, gde je α ravan normalna na vektor $\vec{n}$ i udaljena od koordinatnog početka za $|\frac{-D}{|\vec{n}|}|$ u smeru vektora $\vec{n}$ za $D<0$, a u smeru vektora $-\vec{n}$ za $D>0$. □

Lema 13.11

Prodor prave kroz ravan

Zajednička tačka P ravni $\pi : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ i prave $a : \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$ dobija se tako što se $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$ uvrsti u $\vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ i reši dobijena jednačina po t. Tako se dobija da je $t = \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}$. Ako se tako dobijeno t uvrsti u $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$, promenljvi (tekući) vektor $\vec{r}$ postaje $\vec{r}_P$ i sledi formula za prodor P prave $a : \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$ kroz ravan $\pi : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$

$$\vec{n}(\vec{r}_A + t\vec{a}) = \vec{n}\vec{r}_Q$$

$$t\vec{a}\vec{n} = \vec{n}\vec{r}_Q - \vec{n}\cdot\vec{r}_a$$

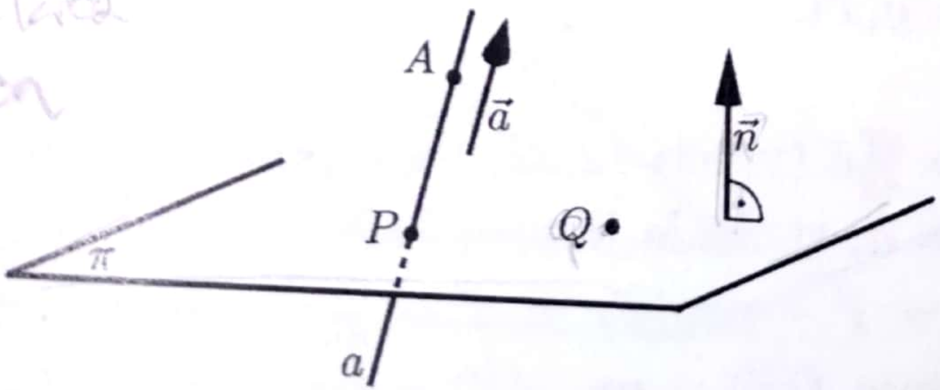
$$\boxed{\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}}$$

$$t = \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_a)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}$$

prodor prave kroz ravan

$\Leftrightarrow$

vektor položaja tačke P



Slika 13.4: Prodor prave kroz ravan

Lema 13.20

Projekcija (ortogonalna) tačke na pravu

Neka je prava a određena tačkom A koja joj pripada i vektorom $\vec{a}$ sa kojim je paralelna. Projekcija M' tačke M na pravu $a : \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$ dobija se tako što se postavi ravan α kroz tačku M normalno na pravu a i traži prodor prave a kroz ravan α po prethodnoj formuli. Tako se dobija da je

$$\boxed{\vec{r}_{M'} = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_M - \vec{r}_A)\vec{a}}{\vec{a}\vec{a}}\,\vec{a}}$$

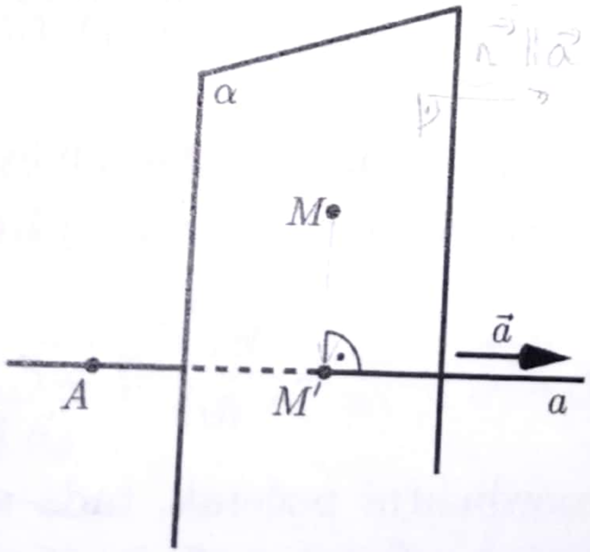
$\alpha: \vec{a}\vec{r} = \vec{a}\vec{r}_M$

$\vec{a} \cdot (\vec{r}_A + t\vec{a}) = \vec{a}\vec{r}_M$

$t\vec{a} = \frac{(\vec{r}_M - \vec{r}_A)\vec{a}}{\vec{a}}$

$t = \frac{(\vec{r}_M - \vec{r}_A)\vec{a}}{\vec{a}\vec{a}}$

$r_{M'} = r_A + \frac{(r_M - r_A)\vec{a}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$



Slika 13.7: Projekcija tačke na pravu

Lema 13.21

Projekcija (ortogonalna) tačke na ravan

Neka je ravan α određena tačkom Q koja joj pripada i vektorom $\vec{n}$ na koji je normalna. Projekcija M' tačke M na ravan $\alpha : \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ dobija se tako što se kroz tačku M postavi prava normalna na ravan α i prodorna tačka te prave kroz ravan α biće tražena tačka M':

$$\boxed{\vec{r}_{M'} = \vec{r}_M + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_M)\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\,\vec{n}}$$

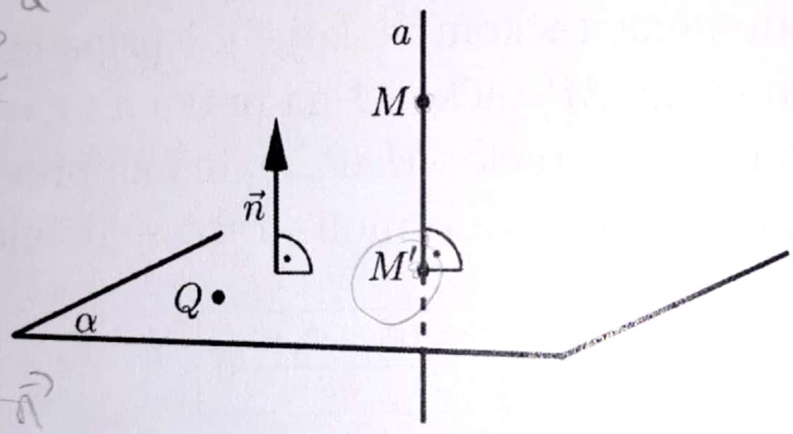
$a: \vec{r} = \vec{r}_M + t\vec{n}$

$\vec{n}\cdot(\vec{r}_M + t\vec{n}) = \vec{n}\vec{r}_a$

$t\vec{n} = \dfrac{(\vec{r}_a - \vec{r}_M)\vec{n}}{\vec{n}}$

$t = \dfrac{(\vec{r}_a - \vec{r}_M)\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}$

$\vec{r}_{M'} = \vec{r}_M + \dfrac{(\vec{r}_a - \vec{r}_n)\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n}$



Slika 13.8: Projekcija tačke na ravan

Evo još jednog dokaza, odnosno izvođenja te formule.
Uzećemo da je $\vec{n}\overrightarrow{MQ} > 0$, što očigledno ne utiče na opštost dokaza.

$$\vec{r}_{M'} = \vec{r}_M + \overrightarrow{MM'} = \vec{r}_M + \mathbf{pr}_{\vec{n}}\overrightarrow{MQ} = \vec{r}_M + \frac{\overrightarrow{MQ}\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n} = \vec{r}_M + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_M)\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n}.$$

Ako ravan prolazi kroz koordinatni početak, tada se za $\vec{r}_Q$ može uzeti vektor (tačka) $(0,0,0)$ pa prethodna formula glasi:

$$\vec{r}_{M'} = \vec{r}_M - \frac{\vec{r}_M\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\,\vec{n}.$$

Definicija 13.22

Teorema 14.4 *Ako je $(V, F, +, \cdot)$ vektorski prostor, tada za svako α iz F i svako a iz V važi:*

$$\begin{array}{ll}
1. & \alpha \cdot 0 = 0, \\
2. & 0 \cdot a = 0, \\
3. & \alpha \cdot a = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha = 0 \vee a = 0, \\
4. & (-\alpha) \cdot a = -(\alpha \cdot a), \\
5. & \alpha \cdot (-a) = -(\alpha \cdot a), \\
6. & (-\alpha) \cdot (-a) = \alpha \cdot a, \\
7. & -a = (-1) \cdot a.
\end{array}$$

Dokaz

1. $\alpha \cdot 0 \stackrel{V_1}{=} \alpha \cdot 0 + 0 \stackrel{V_1}{=} \alpha \cdot 0 + (\alpha \cdot 0 - (\alpha \cdot 0)) \stackrel{V_1}{=} (\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0) - (\alpha \cdot 0) \stackrel{V_2}{=} \alpha \cdot (0 + 0) - (\alpha \cdot 0) \stackrel{V_1}{=} \alpha \cdot 0 - (\alpha \cdot 0) \stackrel{V_1}{=} 0.$

2. $0 \cdot a \stackrel{V_1}{=} 0 \cdot a + 0 \stackrel{V_1}{=} 0 \cdot a + (0 \cdot a - (0 \cdot a)) \stackrel{V_1}{=} (0 \cdot a + 0 \cdot a) - (0 \cdot a) \stackrel{V_3}{=} (0 + 0) \cdot a - (0 \cdot a) \stackrel{V_1}{=} 0 \cdot a - (0 \cdot a) \stackrel{V_1}{=} 0.$

3. Na osnovu dva prethodna dokaza sledi $\alpha = 0 \vee a = 0 \;\Rightarrow\; \alpha \cdot a = 0$. Dokazati suprotni smer, odnosno neka je $\alpha \cdot a = 0$. Skalar α ili je jednak nuli ili različit od nule. Ako je jednak nuli, tvrđenje je dokazano a ako je različit od nule, tada postoji njemu inverzni α^{-1} u odnosu na množenje u polju F. Pomnoži li se jednakost $\alpha \cdot a = 0$ sa α^{-1} dobija se

$$\alpha^{-1}(\alpha \cdot a) = \alpha^{-1} \cdot 0 \stackrel{1, V_4}{\Rightarrow} (\alpha^{-1}\alpha) \cdot a = 0 \stackrel{F}{\Rightarrow} 1 \cdot a = 0 \stackrel{V_5}{\Rightarrow} a = 0.$$

4.

$$(-\alpha)\cdot a \stackrel{V_1}{=} (-\alpha)\cdot a + 0 \stackrel{V_1}{=} (-\alpha)\cdot a + (\alpha \cdot a - (\alpha \cdot a)) \stackrel{V_1}{=} ((-\alpha)\cdot a + \alpha \cdot a) - (\alpha \cdot a)$$
$$\stackrel{V_3}{=} (-\alpha + \alpha) \cdot a - (\alpha \cdot a) \stackrel{F}{=} 0 \cdot a - (\alpha \cdot a) \stackrel{2.}{=} 0 - (\alpha \cdot a) \stackrel{V_1}{=} -(\alpha \cdot a).$$

5. Na osnovu aksioma V_1, V_2 i dokazanog pod 2 sledi:

$$\alpha \cdot (-a) = \alpha \cdot (-a) + 0 = \alpha \cdot (-a) + (\alpha \cdot a - (\alpha \cdot a)) =$$
$$= (\alpha \cdot (-a) + \alpha \cdot a) - (\alpha \cdot a) \stackrel{V_2}{=} \alpha \cdot (-a + a) - (\alpha \cdot a) =$$
$$= \alpha \cdot 0 - (\alpha \cdot a) \stackrel{2.}{=} 0 - (\alpha \cdot a) = -(\alpha \cdot a).$$

V.P.

jeste V.P

nije V.P.

Ako tretiramo V.P. uređenih trojki iz $\mathbb{R}$ tada ravan mora da prolazi kroz koordinatni početak $(0,0,0)$

6.
$$(-\alpha)\cdot(-a) \overset{4.}{=} -(\alpha\cdot(-a)) \overset{5.}{=} -(-(\alpha\cdot a)) \overset{5.10.}{=} \alpha\cdot a. \quad \square$$

Kako je dogovoreno da će se u prstenu i polju $\alpha\cdot\beta$ označavati i sa $\alpha\beta$, tako se utvrđuje i da se $\alpha\cdot a$ označava kratko sa αa.

7. $(-1)\cdot a \overset{4.}{=} -(1\cdot a) \overset{V_5}{=} -a. \quad \square$

Teorema 14.10 *Skup svih linearnih kombinacija n-torke vektora $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ prostora V jeste potprostor prostora V (odnosno lineal $L(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je potprostor prostora V generisan n-torkom vektora A).*

Dokaz Zbir dve linearne kombinacije n-torke A opet je linearna kombinacija n-torke A

$$(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n) + (\beta_1 a_1 + \ldots + \beta_n a_n) = (\alpha_1 + \beta_1) a_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) a_n$$

i proizvod skalara i linearne kombinacije n-torke A je linearna kombinacija n-torke A

$$\alpha(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n) = (\alpha\alpha_1) a_1 + (\alpha\alpha_2) a_2 + \ldots + (\alpha\alpha_n) a_n.$$

Na osnovu teoreme 14.6 sledi tvrđenje. □

α, β, γ → svi jednaki nuli → linearno nezavisni
→ bar 1 različit od nule → lin. zavisni

Teorema 14.13 *Proizvoljna n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je* linearno zavisna *ako i samo ako je bar jedan od njenih vektora linearna kombinacija preostalih vektora.* $c = \alpha a + \beta b$ – linearno zavisni

Dokaz Ako je n-torka $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zavisna, tada je u linearnoj kombinaciji te n-torke koja je jednaka nuli, bar jedan skalar različit od nule. Vektor uz taj skalar očevidno se može napisati kao linearna kombinacija preostalih vektora. Obratno.

Ako je neki vektor n-torke $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ linearna kombinacija preostalih vektora, tada se prebacivanjem svih vektora na jednu stranu jednakosti dobija linearna kombinacija n-torke $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jednaka nuli, a jedan skalar je jedinica odnosno različit od nule. $\square$

14.20 ⇔ 14.21 -

Teorema 14.21 *(Teorema o maksimalno linearno nezavisnoj* ***n****-torki) Proizvoljna n-torka vektora jeste baza prostora V ako i samo ako je ta n-torka maksimalno linearno nezavisna.*

max nezavisnih

Dokaz ($\Rightarrow$)

Ako je n-torka B baza prostora V, tada dodavanjem proizvoljnog vektora ona postaje zavisna, jer se taj vektor može izraziti preostalim vektorima, pa je B zaista maksimalna linearno nezavisna n-torka.

($\Leftarrow$)

Ako je n-torka $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ maksimalno linearno nezavisna a da bi ona bila baza, treba još dokazati da generiše prostor V. Dokazati to kontradikcijom. Pretpostavi li se suprotno, tj. da postoji vektor $x \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ koji se ne može izraziti kao linearna kombinacija n-torke B, tada iz

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n + \alpha x = 0$$

sledi da je $\alpha = 0$ (jer bi se za $\alpha \neq 0$ vektor x mogao izraziti kao linearna kombinacija n-torke B), pa se dobija

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = 0,$$

a iz toga sledi $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ jer je B linearno nezavisna. Dobija se da je $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n, x)$ linearno nezavisna, što je kontradikcija s uslovom da je $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ **maksimalna** linearno nezavisna n-torka. □

Za proizvoljnu n-torku vektora prostora V kaže se da je minimalna n-torka generatora akko se izbacivanjem proizvoljnog vektora iz te n-torke dobija $(n-1)$-torka koja ne generiše prostor V.

14.20 ⇔ 14.22

Teorema 14.22 *(Teorema o minimalnoj **n**-torki generatora) Proizvoljna n-torka vektora B jeste baza prostora V ako i samo ako je n-torka minimalna n-torka generatora.*

min generatorruh

Dokaz (⇒)

Ako je B baza prostora V, izbacivanjem proizvoljnog vektora x iz B dobija se $(n-1)$-torka čijom se linearnom kombinacijom ne može dobiti vektor x jer bi tada B bila zavisna, pa je B zaista minimalna n-torka generatora.

(⇐)

Ako je B minimalna n-torka generatora, tada da bi ona bila i baza prostora V, treba samo dokazati da je linearno nezavisna. Dokaz se izvodi kontradikcijom. Pretpostavi li se suprotno, tj. da je B linearno zavisna, tada se bar jedan vektor n-torke B može predstaviti kao linearna kombinacija preostalih vektora, i oni očevidno generišu prostor V, što je kontradiktorno uslovu da je B minimalna n-torka generatora. □

14.20 ⇔ 14.22

Teorema 14.23 *(Teorema o jedinstvenoj reprezentaciji) Proizvoljna n-torka vektora B jeste baza prostora V ako i samo ako se svaki vektor prostora V može na jedinstven način predstaviti kao linearna kombinacija vektora n-torke B.*

Dokaz (⇒)

Neka je $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ baza prostora V. Dokazati kontradikcijom da se svaki vektor x prostora V može na jedinstven način predstaviti kao linearna kombinacija vektora baze B. Ako se pretpostavi suprotno, to jest da postoje dve različite reprezentacije vektora x u bazi B, onda sledi:

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, + \ldots + \alpha_n a_n = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2, + \ldots + \beta_n a_n.$$

Ovo je dalje ekvivalentno sa

$$(\alpha_1 - \beta_1)a_1 + (\alpha_2 - \beta_2)a_2, + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)a_n = 0.$$

07.12.2020.

Kako je B linearno nezavisna n-torka prostora V, to sledi:

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0 \ \wedge \ldots \wedge \ \alpha_n - \beta_n = 0 \ \Leftrightarrow \ \alpha_1 = \beta_1 \ \wedge \ldots \wedge \ \alpha_n = \beta_n.$$

Ovo je kontradikcija pretpostavci da postoje dve različite reprezentacije vektora x u bazi B.

($\Leftarrow$)

Poći će se od iskaza da svaki vektor ima jedinstvenu reprezentaciju u bazi B. Tada i nula vektor ima jedinstvenu reprezentaciju u bazi B:

$$0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n,$$

što implicira $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ odnosno B je linearno nezavisna n-torka. Kako je po uslovu n-torka B i generatorna, ona je ujedno i baza prostora V. $\square$

Teorema 14.26 *Uređena n-torka nenula vektora* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *prostora* V, $n \geq 2$ *zavisna je akko među njima postoji vektor jednak linearnoj kombinaciji* samo *njemu prethodnih vektora iz* $(a_1, \ldots, a_n)$.

Dokaz Dokazuje se samo smer $(\Rightarrow)$ jer je suprotan očevidno tačan. Kako je to n-torka nenula vektora, sledi da postoji najveći prirodni broj $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ takav da je $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ nezavisna, jer za $k = 2$ jeste nezavisna ($a_1 \neq 0$), a možda je i za neko veće k. Dokazati sada da je vektor $a_k = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_{k-1} a_{k-1}$ za neke skalare $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-1}$. Neka je $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_{k-1} a_{k-1} + \alpha a_k = 0$. Tada je $\alpha = 0$ ili $\alpha \neq 0$. Slučaj $\alpha = 0$ nije moguć jer kako je $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ nezavisna, onda bi i

Scanned with CamSc

$(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ bila nezavisna, što je kontradiktorno činjenici da je k najveći prirodni broj s osobinom da je $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ nezavisna. Kako je $\alpha \neq 0$, to iz $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_{k-1} a_{k-1} + \alpha a_k = 0$ sledi
$a_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha} a_2 - \ldots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha} a_{k-1}$.

Dokazati ovu teoremu i matematičkom indukcijom. Primećuje se da je dokaz indukcijom u suštini isto što i prethodni.

Teorema 14.28 *Neka je n-torka vektora* $A_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *linearno nezavisna i neka je* $B_1 = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *generatorna m-torka vektora prostora* V. *Tada je* $n \le m$.

broj nezavisnih $\Rightarrow n \le \dim V \le m \Rightarrow$ generatornih

Dokaz Koristiće se teorema 14.27: ako se generatornoj n-torci doda neki vektor, dobija se zavisna $(n+1)$-torka, pa je $(a_1, b_1, b_2, \ldots, b_m)$ je zavisna. Na osnovu teoreme 14.26 sledi da postoji vektor iz $(m+1)$-torke $(a_1, b_1, b_2, \ldots, b_m)$ koji se može „izbaciti" a da su preostali i dalje generatorni. Neka je izbačeni vektor, na primer, b_1, što ne utiče na opštost dokaza (redosled vektora $b_1, b_2, \ldots, b_m$ u $(a_1, b_1, b_2, \ldots, b_m)$ nije bitan za teoremu koja se dokazuje). Znači, $B_2 = (a_1, b_2, \ldots, b_m)$ je generatorna. Sada se opet dodaje vektor a_2 generatornoj m-torci B_2 i dobija zavisna $(m+1)$-torka $(a_1, a_2, b_2, \ldots, b_m)$. Opet postoji vektor iz $(a_1, a_2, b_2, \ldots, b_m)$ koji se može „izbaciti" a da su preostali i dalje generatorni. Izbačeni vektor mora biti iz $m-1$-torke $(b_2, \ldots, b_m)$ jer su $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nezavisni. Neka je izbačeni vektor na primer b_2. Znači $B_3 = (a_1, a_2, b_3 \ldots, b_m)$ je generatorna. Sada je pitanje da li će se ovim postupkom prvo „potrošiti" vektori iz A_1 ili iz B_1, tj. da li je $n > m$ ili $n \le m$? Ako bi bilo $n > m$, tada bi se u jednom koraku našeg postupka (algoritma) desilo da su u skupu B_i sve vektori iz A_1, a među njima postojao bi vektor jednak linearnoj kombinaciji prethodnih, što je nemoguće jer su vektori skupa A_1 (i, naravno, njegovih podskupova) nezavisni pa je $n \le m$.

skup svih linearnih transformacija

Teorema 15.13 *Uređena četvorka* $(Hom(V_1, V_2), F, +, \cdot)$ *jeste vektorski prostor, gde su* $+$ *i* $\cdot$ *binarne operacije iz prethodne definicije.*

Dokaz Prvo treba proveriti da li je $f + g \in Hom(V_1, V_2)$ ako su f i g iz $Hom(V_1, V_2)$, odnosno da li je zbir dva homomorfizma opet homomorfizam. Kako je

$$(f+g)(\alpha x+\beta y)=f(\alpha x+\beta y)+g(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)+\alpha g(x)+\beta g(y)$$

$$=\alpha(f(x)+g(x))+\beta(f(y)+g(y))=\alpha(f+g)(x)+\beta(f+g)(y),$$

to je $f+g \in Hom(V_1, V_2)$. Znači, $(Hom(V_1, V_2), +)$ jeste grupoid, a pokazaće se da je i Abelova grupa.

Asocijativnost operacije $+$ jednostavno se proverava po definiciji te operacije.

Neutralni element je funkcija $\mathcal{O} : V_1 \to V_2$ koja je definisana sa $\mathcal{O}(x) = 0$. Naravno treba proveriti da li je $\mathcal{O} \in Hom(V_1, V_2)$, tj. da li je $\mathcal{O}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathcal{O}(x) + \beta\mathcal{O}(y)$ za sve x i y iz V_1 i sve α i β iz F. Ta jednakost je tačna jer je uvek ekvivalentna sa $0=0$.

Pre ispitivanja postojanja inverznog elementa, pokazaće se da je λf homomorfizam za sve $\lambda \in F$ i sve $f \in Hom(V_1, V_2)$. Kako je

$$(\lambda f)(\alpha x + \beta y) = \lambda f(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha f(x) + \beta f(y)) =$$
$$= \alpha(\lambda f(x)) + \beta(\lambda f(y)) = \alpha(\lambda f)(x) + \beta(\lambda f)(y),\ tj.\ \lambda f \in Hom(V_1, V_2).$$

Kako se inverzni element za f u odnosu na sabiranje u svakom vektorskom prostoru obeležava sa $-f$, to treba dokazati da za svaki $f \in Hom(V_1, V_2)$ postoji $-f \in Hom(V_1, V_2)$ takav da za svako $x \in V_1$ važi $(f + (-f))(x) = \mathcal{O}(x)$ tj. $f + (-f) = \mathcal{O}$. Dokazati da traženi homomorfizam $-f$ jeste $-f = (-1)f$. Pokazano je da je $\lambda f \in Hom(V_1, V_2)$ za sve $\lambda \in F$ i sve $f \in Hom(V_1, V_2)$, pa je onda i $-f = (-1)f \in Hom(V_1, V_2)$, što znači da ostaje još samo dokazivanje da je $f + (-f) = \mathcal{O}$, što sledi iz

$$(f + (-1)f)(x) = f(x) + ((-1)f)(x) = f(x) + (-1)f(x) =$$
$$= f(x) - (1 \cdot f(x)) = f(x) - f(x) = 0 = \mathcal{O}(x).$$

Komutativnost operacije $+$ očevidna je iz definicije.

Dokazaće se još druga aksioma vektorskih prostora, to jest aksioma $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$. Kako je za svako x iz V_1:

$$(\alpha(f+g))(x) = \alpha(f+g)(x) = \alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) =$$
$$= (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x) = (\alpha f + \alpha g)(x),$$

to je $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$.

Preostale tri aksiome analogno se proveravaju po definicijama operacija $+$ i $\cdot$ i definiciji homomorfizma. □

$V \to V$

Teorema 15.14 *Uređena trojka $(Hom(V), +, \circ)$ jeste prsten, gde je operacija $+$ sabiranje homomorfizama, a $\circ$ kompozicije funkcija.*

Dokaz Videti 8.29. U prethodnoj teoremi pokazano je i da je uređen par $(Hom(V), +)$ Abelova grupa, a poznato je da je operacija kompozicije funkcija asocijativna. Preostalo je da se dokaže da je $f \circ g \in Hom(V)$ za sve f i g iz $Hom(V)$ i da važi zakon distributivnosti.

Neka su f i g iz $Hom(V)$. Tada je

$$(f \circ g)(\alpha x + \beta y) = f(g(\alpha x + \beta y)) = f(\alpha g(x) + \beta g(y)) =$$

$$= \alpha f(g(x)) + \beta f(g(y)) = \alpha(f \circ g)(x) + \beta(f \circ g)(y),$$

što znači da je $f \circ g \in Hom(V)$. Dokazati sad distributivnost. Kako je za svako x iz V

$$(f \circ (g+h))(x) = f((g+h)(x)) = f(g(x)+h(x)) =$$

$$= f(g(x)) + f(h(x)) = (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x) = (f \circ g + f \circ h)(x),$$

to je $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$ (Napomena: U svakom prstenu podrazumeva se da druga operacija, to je ovde $\circ$, ima prednost nad prvom, to je ovde $+$, što u pisanju smanjuje broj neophodnih zagrada). □

Teorema 15.15 *(Osnovni stav linearne algebre) Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori nad poljem F i neka je $(a_1, \ldots, a_n)$ baza prostora V_1.*

Tada je za svaku n-torku vektora $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in V_2^n$ jednoznačno određena linearna transformacija $f : V_1 \to V_2$ za koju je $f(a_i) = b_i$, za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Dokaz Dokazaće se prvo ***jedinstvenost*** takve linearne transformacije. Pretpostavimo da postoje takve dve linearne transformacije f, i g, za koje je $f(a_i) = g(a_i) = b_i$. Sada za proizvoljan vektor $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n \in V_1$ jeste $f(x) = f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n) = \alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \ldots + \alpha_n f(a_n) = \alpha_1 g(a_1) + \alpha_2 g(a_2) + \ldots + \alpha_n g(a_n) =$
$= g(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n) = g(x)$, što znači da je $f = g$.

Dokazati ***postojanje*** takve linearne transformacije f. Funkcija $f : V_1 \to V_2$ definisaće se na sledeći način:

$$f(x) = f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n$$

za proizvoljni $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n \in V_1$. Jednostavno se proverava (dokažite sami!) da ovako definisana funkcija f jeste linearna transformacija, čime je dokaz završen. □

Teorema 15.17 *Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori nad poljem F, neka je n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ baza prostora V_1 i neka je funkcija $f : V_1 \to V_2$ linearna transformacija.*

Tada f jeste izomorfizam, ako i samo ako uređena n-torka vektora $(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$ jeste baza prostora V_2.

Dokaz ($\Rightarrow$) Neka je f izomorfizam.

(I) Dokazati nezavisnost n-torke $\big(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\big)$
Iz $\alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \ldots + \alpha_n f(a_n) = 0$, zbog linearnosti sledi da je $f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n) = 0$, a zbog injektivnosti i zbog $f(0) = 0$ sledi $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$. Zbog nezavisnosti n-torke $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sada je $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ tj. $\big(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\big)$ nezavisna je n-torka prostora V_2.

(II) Dokazati sada da je $\big(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\big)$ i generatorna. Uzeti proizvoljni vektor y iz V_2. Tada zbog sirjektivnosti funkcije f postoji $x \in V_1$ takav da je $f(x) = y$. Kako je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ baza prostora V_1, to postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ takvi da je $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$. Zbog linearnosti funkcije f odavde sledi $y = f(x) = \alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \ldots +$

$\alpha_n f(a_n)$, što znači da je svaki element y prostora V_2 linearna kombinacija vektora n-torke $\big(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\big)$.

($\Leftarrow$) Neka je $\big(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\big)$ baza prostora V_2.

(III) Dokazati injektivnost funkcije f.

Iz $f(x) = f(y)$ odnosno $f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n) =$
$= f(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_n a_n)$, zbog linearnosti sledi da je

$$(\alpha_1 - \beta_1) f(a_1) + (\alpha_2 - \beta_2) f(a_2) + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) f(a_n) = 0,$$

a zbog nezavisnosti n-torke $\big(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\big)$ sledi da je $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0, \ldots, \alpha_n - \beta_n = 0$, to jest $x = y$, što znači da je f injektivna.

(IV) Dokazati sada sirjektivnost funkcije f. Kako je n-torka vektora $\big(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\big)$ i generatorna, to za svaki $y \in V_2$ postoje skalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ takvi da je $y = \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \ldots + \lambda_n f(a_n)$. Neka je $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$. Tada je, zbog linearnosti $f(x) = \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \ldots + \lambda_n f(a_n) = y$, odnosno f je sirjektivna, jer je dokazano da za svako $y \in V_2$ postoji $x \in V_1$ tako da je $f(x) = y$.

Linearna transformacija je izomorfizam
ako i samo ako bazu preslikava na bazu.

Teorema 16.32 *Neka je* $\mathcal{M}_{22} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ *i neka je skup transformacija* $\mathcal{L}_{22} = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid f$ *je linearna transformacija*$\}$. *Tada za funkciju* $\psi : \mathcal{M}_{22} \to \mathcal{L}_{22}$ *definisanu sa* $\psi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = f$, *gde je*

$\psi(A) = f$

$A = \psi^{-1}(f)$

$$f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2), \text{ važi:}$$

a) ψ *je bijekcija* ,

b) $(\forall A, B \in \mathcal{M}_{22}) \quad \psi(A \cdot B) = \psi(A) \circ \psi(B)$

c) $(\forall A, B \in \mathcal{M}_{22}) \quad \psi(A + B) = \psi(A) + \psi(B)$

d) $(\forall A \in \mathcal{M}_{22})(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad \psi(\lambda A) = \lambda \psi(A)$ *gde su* $\circ$ *i* $+$ *operacije kompozicije i sabiranja u skupu linearnih transformacija, a* $\cdot$ *i* $+$ *operacije množenja i sabiranja matrica, i* $\lambda \cdot A = \lambda A$ *množenje skalara i matrice dok je* $\lambda \cdot \psi(A) = \lambda\psi(A) = \lambda f$ *množenje skalara i linearne transformacije. Znači, koristi se konvencija o brisanju simbola operacije* $\cdot$ *odnosno množenja skalara i matrice, kao i množenja skalara i linearne transformacije. Operacije* $+$ *pod c) su različite!*

a. Zato što svakoj matrici $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ odgovara tačno 1 linearna transformacija

Dokaz

a) Dokazano je teoremom 16.31.

b) Neka su linearne transformacije f i g definisane izrazima $f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$, $g(x_1, x_2) = (px_1 + qx_2, rx_1 + sx_2)$. Po definiciji bijektivne funkcije ψ tada sledi da postoje matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ takve da je $\psi(A) = f$ i $\psi(B) = g$. Sada sledi da je $\big(\psi(A) \circ \psi(B)\big)(x_1, x_2) =$

$= (f \circ g)(x_1, x_2) = f\big(g(x_1, x_2)\big) = f(px_1 + qx_2, rx_1 + sx_2) =$
$= \big(a(px_1 + qx_2) + b(rx_1 + sx_2), c(px_1 + qx_2) + d(rx_1 + sx_2)\big) =$
$= (apx_1 + aqx_2 + brx_1 + bsx_2), cpx_1 + cqx_2 + drx_1 + dsx_2) =$
$= \Big((ap + br)x_1 + (aq + bs)x_2, (cp + dr)x_1 + (cq + ds)x_2\Big) =$
$= \psi\left(\begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{bmatrix}\right)(x_1, x_2) = \psi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\right)(x_1, x_2) =$
$= \psi(A \cdot B)(x_1, x_2).$

Kako je $\big(\psi(A) \circ \psi(B)\big)(x_1, x_2) = \psi(A \cdot B)(x_1, x_2)$ za svaki par $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, to je $\boxed{\psi(A) \circ \psi(B) = \psi(A \cdot B)}$. Videti teoremu 3.23.

Sada je jasno da je množenje matrica definisano onako kako je i definisano da bi u izomorfizmu ψ množenju matrica odgovarala kompozicija linearnih transformacija! Drugim rečima, ekvivalentna definicija množenja matrica glasi:

$$A \cdot B = \psi^{-1}\big(\psi(A) \circ \psi(B)\big)$$

c) $\big(\psi(A) + \psi(B)\big)(x_1, x_2) =$
$= (f + g)(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2) + (px_1 + qx_2, rx_1 + sx_2) =$
$= (ax_1 + bx_2 + px_1 + qx_2, cx_1 + dx_2 + rx_1 + sx_2) =$
$= ((a+p)x_1 + (b+q)x_2, (c+r)x_1 + (d+s)x_2) = \psi\left(\begin{bmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{bmatrix}\right)(x_1, x_2) =$
$= \psi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\right)(x_1, x_2) = \psi(A + B)(x_1, x_2).$

Kako je $\big(\psi(A) + \psi(B)\big)(x_1, x_2) = \psi(A + B)(x_1, x_2)$ za svaki par $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$, to je $\boxed{\psi(A) + \psi(B) = \psi(A + B)}$. Videti teoremu 3.23.

d) $\psi(\lambda A)(x_1, x_2) = \psi\left(\lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)(x_1, x_2) = \psi\left(\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}\right)(x_1, x_2) =$
$= (\lambda a x_1 + \lambda b x_2, \lambda c x_1 + \lambda d x_2) = \lambda(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2) =$
$= \lambda\psi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)(x_1, x_2) = \lambda\psi(A)(x_1, x_2) = \Big(\lambda\psi(A)\Big)(x_1, x_2).$

Kako je $\psi(\lambda A)(x_1, x_2) = \Big(\lambda\psi(A)\Big)(x_1, x_2)$ za svaki par (x_1, x_2) iz skupa $\mathbb{R}^2$, to je $\boxed{\psi(\lambda A) = \lambda\psi(A)}$. Videti teoremu 3.23.

Teorema 17.12 *Ekvivalentnim odnosno elementarnim transformacijama* **rang** *matrice se ne menja.*

Dokaz Kako se zamenom mesta vrstama u kvadratnoj matrici menja znak njene determinante, a apsolutna vrednost se ne menja, i kako množenjem jedne vrste matrice X sa λ, determinanta te nove matrice je $\lambda \det(X)$, sledi da primena prvih dveju ekvivalentnih transformacija ne menja **rang** matrice. Pokažimo da i treća vrsta ekvivalentnih transformacija ne menja **rang**. Ako je u nekoj kvadratnoj podmatrici X neka vrsta dodata nekoj drugoj vrsti, $\det X$ tj. minor se ne menja zbog teoreme 10.16. Neka je **rang** matrice M_{mn} jednak r. Uočimo sada neku podmatricu C_{rr} matrice M_{mn} takvu da je $\det C_{rr} \neq 0$ (koji postoji jer je **rang** $M_{mn} = r$) i neku vrstu koja „ne prolazi" kroz C_{rr}. Označimo sa $b_1, b_2, ..., b_r$ one elemente te vrste koji pripadaju kolonama koje prolaze kroz uočeni minor. Neka je A_{rr} podmatrica dobijena od podmatrice C_{rr} tako što je i-ta vrsta podmatrice C_{rr} zamenjena sa $b_1, b_2, ..., b_r$ i neka je B_{rr} podmatrica dobijena od podmatrice C_{rr} tako što je i-toj vrsti dodata vrsta $b_1, b_2, ..., b_r$. Sada, na osnovu teoreme 10.18 (osobina determinanti) sledi da je $\det C_{rr} + \det A_{rr} = \det B_{rr}$. Kako je $\det C_{rr} \neq 0$, to iz prethodne jednakosti sledi da je bar jedan od minora $\det B_{rr}$ ili $\det A_{rr}$ različit od nule, a kako su oni oba reda r, sledi da se **rang** matrice M_{mn} neće smanjiti. **Rang** se neće ni povećati, jer kako su $\det C_{r+1,r+1} = 0$ i $\det A_{r+1,r+1} = 0$, to je i $\det B_{r+1,r+1} = \det C_{r+1,r+1} + \det A_{r+1,r+1} = 0 + 0 = 0$. □

Teorema 17.15 *Ako je* r **rang** *matrice* $B_{mn} = [b_{ij}]_{mn}$, *tada se, ekvivalentnim transformacijama, od te matrice može dobiti matrica* $\star$

$$\star \quad \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1\,r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2\,r+1} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & \dots & a_{3\,r+1} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{r\,r+1} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

u kojoj ne postoje elementi ispod glavne dijagonale i r*-te vrste različiti od nule, a prvih* r *elemenata na glavnoj dijagonali su jedinice. Očevidno je da svaka matrica oblika* $\star$ *ima* **rang** r.

Matrice oblika $\star$ *nazvaće se trouglaste matrice, a matrice koje se od matrica oblika* $\star$ *razlikuju samo u tome što su umesto jedinica brojevi različiti od nule, biće takođe trouglaste matrice.*

Dokaz Na osnovu definicije ranga dobija se da je $r = 0 \Leftrightarrow B_{mn} = [b_{ij}]_{mn} = 0$ i u tom slučaju teorema je očevidno tačna. Neka je sada $B_{mn} = [b_{ij}]_{mn} \neq 0$. Ako su svi elementi prve kolone jednaki nuli, tada se zamene mesta prvoj i drugoj koloni. Ako su i sada svi elementi prve kolone jednaki nuli, tada zamenimo mesta prvoj i trećoj koloni. Nastavljanjem ovog postupka dolazi se do kolone u kojoj je bar jedan element različit od nule, na primer k-ti po redu, u protivnom polazna matrica bila bi nula matrica. Sada zamenimo mesta k-toj i prvoj vrsti. Prvu vrstu podelimo sa elementom koji je na njenom prvom mestu za koji znamo da je različit od nule, a zatim množimo odgovarajućim brojevima i dodajemo ostalim vrstama tako da svi elementi prve kolone, izuzev prvog, koji je jedinica, budu jednaki nuli. Ako matrica nema više vrsta ili kolona, onda je njen **rang** jednak $r = 1$ i dobijena matrica je traženog oblika. U suprotnom, posmatramo njenu podmatricu dobijenu brisanjem prve vrste i prve kolone. Ako je podmatrica nula matrica, **rang** polazne matrice opet je $r = 1$ i matrica je traženog oblika, a ako je podmatrica različita od nula matrice, na nju se primeni isti postupak kao i na polaznu matricu. To se sve čini dok se ne pojavi nula podmatrica ili se dogodi da brisanjem prve kolone i vrste nestane posmatrana matrica jer se sastojala samo od jedne vrste ili kolone. Tada je poslednja matrica očevidno traženog oblika. Kako **rang** te poslednje matrice mora biti r zbog teoreme 17.12, ova poslednja matrica mora imati tačno r prvih vrsta čiji svi elementi nisu nule, u protivnom bi **rang** te matrice bio manji od r. Opisani algoritam mora se završiti u konačno mnogo koraka jer broj vrsta i kolona je konačan. Ovaj algoritam naziva se Gausov algoritam.

Strogi dokaz ove teoreme daje se indukcijom po broju vrsta m matrice $[b_{ij}]_{mn}$, za svako n. Za $r=\mathbf{rang}\, B_{mn} = 0$ tvrđenje je očevidno tačno. Neka je sada $r=\mathbf{rang}\, B_{mn} \neq 0$ odnosno $B_{mn} \neq 0$. Za $m = 1$ tvrđenje je tačno jer tada matrica ima samo jednu vrstu u kojoj je bar jedan element različit od nule (zbog $\mathbf{rang}\, B_{mn} \neq 0$). Kako sada matrica ima samo jednu vrstu zamenićemo mesta kolonama tako da na prvom mestu bude elemenat različit od nule, a potom celu tu vrstu podeliti sa elementom koji se nalazi na prvom mestu. Pretpostavimo sada da je tvrđenje tačno za m i dokažimo da je tvrđenje tačno i za $m+1$. Uočiti matricu $B_{m+1,n}$ od $m+1$ vrsta. Kao što je na početku prethodnog pasusa pokazano, ova matrica se ekvivalentnim transformacijama jednostavno svodi na matricu u kojoj je prvi element prve kolone 1, a svi ostali elementi prve kolone 0 (opet moguće zbog $\mathbf{rang}\, B_{mn} \neq 0$). Ako je matrica $B_{m+1,n}$ imala samo jednu kolonu, dokaz je završen, ako je imala bar dve kolone, tada se brisanjem prve kolone i prve vrste dobija matrica od m vrsta koja je ili nula matrica ili se na nju može primeniti induktivna pretpostavka. Posle ovoga, u oba slučaja očevidno je dobijena matrica traženog oblika, pa je dokaz indukcijom završen. $\square$

Teorema 17.19 *Za svaku kvadratnu matricu B_{nn} važi da je njena determinanta različita od nule ako i samo ako su njeni vektori kolone (vrste) linearno nezavisni, to jest*

$$\det B_{nn} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \ldots, \boldsymbol{b_n}) \text{ je nezavisna,}$$

gde je $\boldsymbol{b_i} = (b_{1i}, b_{2i}, \ldots, b_{ni})$ *i-ta vektor kolona matrice* $B_{nn} = [b_{ij}]_{nn}$ *za svako* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dokaz

$(\Rightarrow)$

Ako je $\det B_{nn} \neq 0$, tada je n-torka vektora $(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \ldots, \boldsymbol{b_n})$ nezavisna. Dokaz se izvodi kontradikcijom, odnosno pretpostavkom da je n-torka vektora $(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \ldots, \boldsymbol{b_n})$ zavisna. Tada se bar jedna kolona $\boldsymbol{b_k}$ od kolona te n-torke može napisati kao linearna kombinacija preostalih kolona i neka su skalari u toj linearnoj kombinaciji redom $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$. Ako se sada svaka od preostalih vektor kolona pomnoži redom sa skalarima $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_{n-1}$ i sve doda koloni $\boldsymbol{b_k}$, dobiće se da su u koloni $\boldsymbol{b_k}$ sve nule, to jest da je $\det B_{nn} = 0$, što je kontradikcija uslovu.

$(\Leftarrow)$

Neka je n-torka $(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \ldots, \boldsymbol{b_n})$ nezavisna. Tada je $det\, B_{nn} \neq 0$. Dokaz ide kontradikcijom to jest pretpostavkom da je $det\, B_{nn} = 0$, što znači da je **rang** $B_{nn} < n$, odnosno $\dim L(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \ldots, \boldsymbol{b_n}) < n$ zbog teoreme 17.16. Kako n-torka vektora $(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \ldots, \boldsymbol{b_n})$, generiše prostor dimenzije manje od n, po teoremi 14.33 n-torka $(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \ldots, \boldsymbol{b_n})$ linearno je zavisna, što je kontradikcija uslovu. □

Drugim rečima, determinanta matrice jednaka je nuli ako i samo ako su vektori kolona linearno zavisni.

$\Leftarrow$

Zadatak 17.24 *Linearna transformacija* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definisana sa* $g(x, y, z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz)$ *je sirjektivna akko* **rang** *njene matrice* $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ *je* $\mathbf{r}(M) = 2$ *i nikad nije injektivna.*

Dokaz Prvi slučaj: $\mathbf{r}(M)$=0, tj. $a = b = c = d = e = f = 0$, tada g nije sirjektivna ni injektivna. Drugi slučaj $\mathbf{r}(M)$=$\mathbf{rang}M = 1$. Neka je tada $a \neq 0$ što ne utiče na opštost. Tada sistem:

$$\begin{matrix} ax + by + cz = u \\ dx + ey + fz = v \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax + by + cz = u \\ 0 = H(u, v) \end{pmatrix}$$

det=0 $\Leftrightarrow$ rang<n

Scanned with CamSc

nema rešenja za svako u i v jer je sigurno za neko u i v $0 \neq H(u,v)$, pa transformacija g nikada nije sirjektivna, a nikada nije ni injektivna jer za 0=H(u,v) sistem je neodređen i g nije injektivna.

U trećem slučaju $\mathbf{r}(M)$=2 i odgovarajuči sistem je

$$\begin{array}{l} ax+by+cz=u \\ dx+ey+fz=v \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{r} ax+by+cz=u \\ ry+sz=H(u,v) \end{array} \right)$$

gde pored $a \neq 0$ je i bar jedan od brojeva r i s različit od nule što znači da je sistem uvek neodređen i g je sirjektivna i nije injektivna. $H(u,v)$ je linearna funkcija od promenljivih u i v bez slobodnog člana.

Zadatak 17.25 *Linearna transformacija* $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definisana sa* $g(x,y) = (ax+by, cx+dy, ex+fy,)$ *je injektivna ako i samo ako* **rang** *njene matrice* $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ *je* **rang**(M)=2 *i nikad nije sirjektivna.*

rang<2 ni injektivna ni sirjektivna

Dokaz Prvi slučaj: **rang**M=0 tj. $a=b=c=d=e=f=0$, tada g nije injektivna. Ako je **rang**M ≠0 tj. **rang**$M \in \{1,2\}$, neka je tada $a \neq 0$ što ne utiče na opštost. Tada sledeći sistemi za bilo koje u i v ne smeju imati više od jednog rešenja da bi g bila injektivna.

Drugi slučaj: $\mathbf{r}(M)=2$. Treći slučaj: $\mathbf{r}(M)=1$.

$$\begin{array}{l} ax+by=u \\ cx+dy=v \\ ex+fy=w \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{r} ax+by=u \\ ry=F(u,v) \\ 0=G(u,w) \end{array} \quad \vee \quad \begin{array}{r} ax+by=u \\ 0=H(u,v) \\ 0=S(u,w) \end{array} \right)$$

U drugom slučaju $\mathbf{r}(M)$=**rang**M=2 i f je injektivna $(a \neq 0, r \neq 0)$, jer broj rešenja je 1 ili 0. U terćem slučaju $\mathbf{r}(M)$=**rang**M=1 i postoje u, v i w takvi da je $0 = H(u,v)$ i $0 = S(u,w)$, jer je to **homogen** sistem, pa g nije injektivna, jer je sistem tada jednostruko neodređen. U svakom od ova tri slučaja g nikad nije sirjektivna. Kako je **rang**$M \in \{0,1,2\}$ to je dokaz završen. F(u,v), G(u,w), $H(u,v)$ i $S(u,w)$ su linearne funkcije od promenljivih u i v bez slobodnog člana.