VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1. Vežbe II.6

1.1. Funkcije više promenljivih

Definicija 1.1. Parcijalni izvod funkcije $z = f(x, y)$ po promenljivoj x je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x,\ y) - f(x,\ y)}{\Delta x},$$

a po promenljivoj y je

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y}.$$

Definicija 1.2. Totalni diferencijal prvog reda funkcije $z = f(x, y)$ je

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,}$$

tj.

$$\boxed{dz = z'_x dx + z'_y dy.}$$

Ako postoji parcijalni izvod

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(M),$$

gde su $x_i, x_j \in \{x, y\}$, njega zovemo **drugim parcijalnim izvodom** ili **parcijalnim izvodom drugog reda** funkcije f u tački M, po promenljivima x_i, x_j (tim redom) kojeg označavamo sa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M) \text{ ili } f''_{x_i, x_j}(M).$$

U slučaju kada je $i = j$ odgovarajući parcijalni izvod označavamo sa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(M).$$

Ako je $i \neq j$, parcijalni izvod zovemo **mešovitim**.
U opštem slučaju, mešoviti parcijalni izvodi, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M)$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M)$, ako postoje, mogu imati različite vrednosti.
Ako postoje drugi mešoviti parcijalni izvodi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M) \text{ i } \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M)$$

u nekoj okolini tačke $M(x, y)$ i ako su oni *neprekidni* u datoj tački M, onda su oni i jednaki u ovoj tački, to jest važi jednakost

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M).}$$

Definicija 1.3. **Totalni diferencijal drugog reda** dvaput diferencijabilne funkcije $z(x,y)$

$$
\begin{aligned}
d^2z &= d(dz)\\
&= d(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy)dy\\
&= \underbrace{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}_{z''_{xx}}\,dx^2 + 2\,\underbrace{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}_{z''_{xy}}\,dxdy + \underbrace{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}_{z''_{yy}}\,dy^2,
\end{aligned}
$$

odnosno

$$\boxed{d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2.}$$

Napomena: sva pravila koja smo koristili kod izvoda funkcije jedne realne promenljive (poput izvoda složene funkcije, smene, itd.) možemo koristiti i za parcijalne izvode, uz poštovanje definicije parcijalnog izvoda.

Zadatak 1.4. Za funkciju

$$f(x,y)=\frac{1}{y}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}$$

naći parcijalne izvode prvog i drugog reda, kao i totalni diferencijal prvog i drugog reda.

Rešenje. Prvo ćemo izračunati parcijalne izvode prvog reda za totalni diferencijal prvog reda.

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}\cdot(-2x)\cdot\frac{1}{y}=-\frac{2x}{y^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}},\\ f'_y &= \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}+\frac{1}{y}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}\cdot\frac{x^2}{y^2}=e^{-\frac{x^2}{y}}\cdot\frac{x^2-y}{y^3},\\ df &= -\frac{2x}{y^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}dx+\frac{x^2-y}{y^3}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}dy. \end{aligned}$$

Zatim, koristimo parcijalne izvode prvog reda za izračunavanje parcijalnih izvoda drugog reda. Drugi parcijalni izvod po x

$$f''_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{2}{y^2}\cdot(e^{-\frac{x^2}{y}}+xe^{-\frac{x^2}{y}}\cdot(-\frac{2x}{y}))=\frac{2(2x^2-y)}{y^3}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}},$$

pa mešoviti parcijalni izvod drugog reda

$$\begin{aligned} f''_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= -2x(-\frac{2}{y^3}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}+\frac{1}{y^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}\cdot\frac{x^2}{y^2})\\ &= -\frac{2x}{y^4}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}(-2y+x^2)=\frac{2x}{y^4}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}(2y-x^2). \end{aligned}$$

Na kraju, potreban je i parcijalni izvod drugog reda po y

$$\begin{aligned} f''_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{-y^3-3y^2(x^2-y)}{y^6}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}+e^{-\frac{x^2}{y}}\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{x^2-y}{y^3}=\\ &= e^{-\frac{x^2}{y}}(\frac{-y^2-3x^2y+3y^2+x^4-x^2y}{y^5})=e^{-\frac{x^2}{y}}\cdot\frac{x^4-4x^2y+2y^2}{y^5}, \end{aligned}$$

nakon čega možemo ispisati totalni diferencijal drugog reda

$$d^2f=\frac{2(2x^2-y)}{y^3}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}dx^2+2\cdot\frac{2xe^{-\frac{x^2}{y}}}{y^4}\cdot(2y-x^2)dxdy+e^{-\frac{x^2}{y}}\frac{x^4-4x^2y+2y^2}{y^5}dy^2.$$

Zadatak 1.5. Dokazati da je za funkciju

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$$

za $x = u + v$, $y = u - v$ zadovoljena jednačina

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}.$$

Rešenje. Iz uslova za x i y izražavamo parcijalne izvode po u i v

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} \cdot 1 + \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}}(-\frac{x}{y^2}) \cdot 1 \\ &= \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{y - x}{x^2 + y^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot \frac{1}{y} \cdot 1 + \frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot (-\frac{x}{y^2})(-1) \\ &= \frac{y + x}{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Konačno, potrebno je sabiranjem potvrditi jednakost

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{y - x}{x^2 + y^2} + \frac{x + y}{x^2 + y^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{2(u - v)}{2(u^2 + v^2)} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}.$$

Zadatak 1.6. Naći parcijalne izvode funkcije

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Rešenje. Za $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x^2+y^2) - 2x \cdot xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x^2+y^2) - 2y \cdot xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

U slučaju $(x,y) = (0,0)$ parcijalne izvode tražimo po definiciji

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(0+\Delta x,\ 0) - z(0,\ 0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0} - 0}{\Delta x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(0,\ 0+\Delta y) - z(0,\ 0)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\Delta y \cdot 0}{(\Delta y)^2 + 0} - 0}{\Delta y} = 0. \end{aligned}$$

Napomena: Funkcija z ima parcijalne izvode $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ u tački $(0,0)$, ali u toj tački ima prekid.

Zadatak 1.7. Pokazati da funkcija $z(x,y)$ definisana implicitno

$$x+y+z=\ln(x^2+y^2+z^2)$$

zadovoljava jednačinu

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=x-y.$$

Rešenje. Prvo, računamo parcijalni izvod po x implicitno zadate funkcije

$$\begin{aligned}x+y+z&=\ln(x^2+y^2+z^2)\quad /\frac{\partial}{\partial x},\\ 1+\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}).\end{aligned}$$

Množenjem jednačine sa $x^2+y^2+z^2$ dobija se

$$x^2+y^2+z^2+(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2z\frac{\partial z}{\partial x},$$

pa sređivanjem dolazimo do prvog parcijalnog izvoda po x

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x-(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2-2z}.}$$

Analogno, od parcijalnog izvoda po y implicitno zadate funkcije

$$x+y+z=\ln(x^2+y^2+z^2)\quad /\frac{\partial}{\partial y},$$

dobija se

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2-2z}.}$$

Konačno rešenje dobijamo sabiranjem izraza

$$\begin{aligned}(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{2xy-y(x^2+y^2+z^2)-2xz+z(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2-2z}\\ &+\frac{2yz-z(x^2+y^2+z^2)-2xy+x(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2-2z}\\ &=\frac{(x-y)\left[x^2+y^2+z^2-2z\right]}{x^2+y^2+z^2-2z}=x-y.\end{aligned}$$

1.2. Ekstremne vrednosti funkcija više promenljivih

Neka je funkcija $z = f(x,y)$ diferencijabilna u nekoj oblasti D i tačka $M_0(x_0, y_0)$ je unutrašnja tačka iz te oblasti.

I Potreban uslov za ekstrem:
Ako funkcija $z = f(x,y)$ ima ekstrem u tački $M_0(x_0, y_0)$, tada su u toj tački parcijalni izvodi $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ jednaki nuli.
Tačke u kojima je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ i } \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

nazivaju se **stacionarne tačke**.

II Dovoljan uslov za ekstrem:
Neka je tačka $M_0(x_0, y_0)$ stacionarna tačka funkcije $z = f(x,y)$, tj. neka je $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ i $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Ako u nekoj okolini tačke $M_0(x_0, y_0)$, uključujući i tu tačku, funkcija $z = f(x,y)$ ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda, tada:

1. ako je $d^2z > 0$ za $(dx, dy) \neq (0,\ 0)$ funkcija $z = f(x,y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$ ima **minimum**,
2. ako je $d^2z < 0$ za $(dx, dy) \neq (0,\ 0)$ funkcija $z = f(x,y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$ ima **maksimum**,
3. ako d^2z menja znak za $(dx, dy) \neq (0,\ 0)$ funkcija $z = f(x,y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$ **nema ekstrem**.

Ovaj kriterijum važi za bilo koju funkciju n **promenljivih**.

II* Za funkciju **dve promenljive** važi i sledeći dovoljan uslov za ispitivanje ekstremne vrednosti:

1. ima **maksimum** ako je $rt - s^2 > 0$ i $r < 0$ (ili $t < 0$),
2. ima **minimum** ako je $rt - s^2 > 0$ i $r > 0$ (ili $t > 0$),
3. **nema ekstrem** ako je $rt - s^2 < 0$,
4. potrebna su dalja ispitivanja ako je $rt - s^2 = 0$,

gde je

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ i } s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Zadatak 1.8. Naći ekstremne vrednosti funkcije

$$z(x,y) = \ln(y - 2xy) + xy - x.$$

Rešenje.
I Stacionarne tačke:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{y-2xy}(-2y) + y - 1 = 0 \Rightarrow \frac{2}{2x-1} + y - 1 = 0,\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{y-2xy}(1-2x) + x = 0 \Rightarrow \frac{1}{y} + x = 0.
\end{aligned}$$

Sistem je dalje ekvivalentan sa sistemom

$$\begin{aligned}
&2 + 2xy - y - 2x + 1 = 0,\\
&x = -\frac{1}{y},
\end{aligned}$$

pa dolazimo do jednačine

$$2 + 2xy - y - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow -y + \frac{2}{y} + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0.$$

Rešenja jednačine su $y_1 = -1$ i $y_2 = 2$, a stacionarne tačke su

$$A(1,-1) \text{ i } B(-\frac{1}{2}, 2).$$

II Pre ispitivanja karaktera stacionarnih tačaka potrebni su parcijalni izvodi drugog reda

$$\begin{aligned}
r &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{2}{2x-1} + y - 1) = -\frac{4}{(2x-1)^2}\\
t &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{y} + x) = -\frac{1}{y^2}\\
s &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{2}{2x-1} + y - 1) = 1.
\end{aligned}$$

Tačka A	Tačka B
$r = -4,\ \ t = -1,\ \ s = 1$ $rt - s^2 = 4 - 1 = 3 > 0$ $r < 0$ Funkcija $z(x,y)$ ima maksimum -2 u tački A.	$r = -1,\ \ t = -\frac{1}{4},\ \ s = 1$ $rt - s^2 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0$ Funkcija nema ekstrem u tački B.

Zadatak 1.9. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije

$$u(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 4x + 6y + 6z.$$

Rešenje. Rešavanje započinjemo traženjem stacionarnih tačaka, ali metodu rst ne možemo koristiti jer radimo sa funkcijom tri promenljive.
I Stacionarne tačke:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 2x + 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow x + y + 2 = 0 \Rightarrow x = -y - 2,\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= 4y + 2x + 2z + 6 = 0 \Leftrightarrow 2y + x + z + 3 = 0,\\
\frac{\partial u}{\partial z} &= 4z + 2y + 6 = 0 \Rightarrow 2z + y + 3 = 0 \Rightarrow z = \frac{-y-3}{2}.
\end{aligned}$$

Ubacivanjem prve i treće jednačine u drugu dobija se

$$2y - y - 2 - \frac{y+3}{2} + 3 = 0 \Leftrightarrow y - \frac{y+3}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2y - y - 3 + 2 = 0 \Rightarrow y = 1,$$

a stacionarna tačka je

$$A(-3, 1, -2).$$

II Totalni diferencijal drugog reda: Za parcijalne izvode drugog reda dobijamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4,$$

pa je totalni diferencijal drugog reda u tački A

$$\begin{aligned}
d^2u = {}& \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2\\
&+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz\\
&= 2dx^2 + 4dy^2 + 4dz^2 + 4dxdy + 4dydz\\
&= 2(dx+dy)^2 + 2(dy+dz)^2 + 2dz^2 > 0
\end{aligned}$$

Dakle, funkcija $u(x,y,z)$ ima minimum $u(-3,1,-2) = -9$ u tački $A(-3,1,-2)$.

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladmir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.