DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

13. maj 2024.

Opšti pojmovi, definicije

- Diferencijalna jednačina - jednačina koja sadrži bar jedan izvod nepoznate funkcije jedne ili više promenljivih.
- Obična diferencijalna jednačina - nepoznata funkcija je funkcija jedne promenljive, parcijalna diferencijalna jednačina - nepoznata funkcija je funkcija više promenljivih.
- Red diferencijalne jednačine je red najvišeg izvoda nepoznate funkcije koji se javlja.
- Sistem (običnih ili parcijalnih) diferencijalnih jednačina je sistem jednačina kod kog svaka jednačina sadrži bar jedan izvod reda $n \in \mathbb{N}$ jedne od nepoznatih funkcija jedne ili više promenljivih, npr.
  $x' = 2x - 3xy, y' = -2x + 5xy, x = x(t), y = y(t).$
  Ako je broj nepoznatih funkcija jednak broju jednačina sistema, sistem je određen (naredni primer).

Opšti pojmovi, definicije

- Jednačina
$$tx'(t) + ty''(t) = t^2 - 1$$
može se smatrati neodređenim sistemom $(n = 2, m = 1)$.
- Opšti oblik jednačine n-tog reda:
$$G(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad n \geq 0.$$
- Normalni oblik jednačine n-tog reda:
$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$
- Funkcija $y = f(x)$, definisana i n puta diferencijabilna u intervalu (a, b) je rešenje jednačine n-tog reda u opštem, tj. normalnom obliku, ako je za svako $x \in (a, b)$
$$G(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0,$$
odnosno
$$f^{(n)} = F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)).$$

Opšti pojmovi, definicije

- Rešenje je u implicitnom obliku ako je dato vezom $g(x, y) = 0$, npr. $x^2 + y^2 = r^2$ je implicitno rešenje jednačine $x + yy' = 0$.
- Početni (Košijev) problem - Pronaći rešenje jednačine

$$G(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

koje zadovoljava početni uslov

$$y(x_0) = \alpha_0, \quad y'(x_0) = \alpha_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1},$$

pri čemu je x_0 proizvoljna tačka posmatranog intervala, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ su proizvoljni brojevi, $i = 0, \dots, n-1$.
- Granični problem - Problem drugog reda: naći rešenje jednačine $y = y(x)$ jednačine

$$y'' = F(x, y, y')$$

nad intervalom $[a, b]$ koje zadovoljava granični uslov

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Opšti pojmovi, definicije

- $$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, y(\pi) = -1$$

  je granični problem koji ima beskonačno mnogo rešenja.

- $$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, y(\pi) = 2$$

  je granični problem koji nema rešenje.

- $$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

  je granični problem koji ima jedinstveno rešenje.

Opšti pojmovi, definicije

Modeli: izvod $\frac{dy}{dx}$ predstavlja veličinu promene funkcije $y(x)$ u zavisnosti od x, a sve što se u prirodi dešava je promena

- $y' = ky$, $y = y(x)$, k - proizvoljna konstanta - Maltusov zakon rasta populacije
- $y'' - 2xy' + 2py = x^2$, $y = y(x)$, p - proizvoljna konstanta - Ermitova jednačina čija su rešenja talasne funkcije kvantne mehanike
- $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u = (x, t)$ - jednodimenzionalna jednačina provođenja toplote
- $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin\theta = 0$ - jednačina matematičkog klatna (L je dužina klatna, g je gravitaciona konstanta, θ je uglovno udaljenje od ravnotežnog položaja)

Opšti pojmovi, definicije

- $N(t)$-broj jedinki posmatrane populacije u trenutku t; ako smatramo da je veličina promene populacije srazmerna broju jedinki dobijamo matematički model rasta populacije:

$$N'(t) = kN(t), \quad k = const.$$

Tada je $N(t)$ rešenje početnog problema

$$N'(t) = kN(t), \quad N(t_0) = N_0 :$$

$$\frac{dN}{dt} = kN \;\Rightarrow\; \frac{dN}{N} = kdt \Rightarrow \int \frac{dN}{N} = \int kdt \Rightarrow \ln N(t) = kt + c$$
$$\Rightarrow\; N(t) = e^{kt+c} \Rightarrow N(t) = c_1 e^{kt}$$

$t = t_0 \Rightarrow N(t_0) = c_1 e^{kt_0}$, tj. $c_1 = N_0 e^{-kt_0}$,
pa je rešenje posmatranog početnog problema

$$N(t) = N_0 e^{k(t-t_0)}.$$

Opšti pojmovi, definicije

Ukoliko matematički model pojave zadovoljava osobine:

- postoji rešenje početnog problema,
- rešenje početnog problema je jedinstveno,
- rešenje početnog problema neprekidno zavisi od početnih uslova

kaže se da je problem korektno postavljen u smislu Adamara.

- Kvalitativna analiza - ne samo nalaženje rešenja, već i proučavanje njegovih osobina na osnovu posmatrane jednačine
- ključna tačka postupka rešavanja bila je integracija, odatle se termin integrala diferencijalne jednačine koristi za njeno rešenje

Diferencijalne jednačine prvog reda

- Opšti oblik
$$G(x, y, y') = 0 \tag{1}$$
- Normalni oblik
$$y' = F(x, y) \tag{2}$$
- x je promenljiva, $y = y(x)$ je nepoznata funkcija, y' je izvod po promenljivoj, F, G poznate funkcije.
- $y = f(x)$, definisana i diferencijabilna nad (a, b) je rešenje jednačine (1) odnosno (2) ako za svako $x \in (a, b)$ važi da je
$$G(x, f(x), f'(x)) = 0,$$
odnosno
$$f'(x) = F(x, f(x)).$$

Diferencijalne jednačine prvog reda

Teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja

Neka je $F(x,y)$ *neprekidna u zatvorenoj oblasti* $G : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \alpha \leq y \leq \beta \end{cases}$ *i neka postoji* $K > 0$ *tako da u oblasti* G *važi*

$$|F(x,y_2) - F(x,y_1)| \leq K\ |y_2 - y_1| \ \textit{(Lipšicov uslov)}.$$

Tada postoji jedinstveno rešenje početnog problema

$$y' = F(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in G,$$

koje je definisano nad intervalom $[a', b'] \subset [a, b]$. *Rešenje je dato sa*

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x), \ \textit{gde je } \{y_n(x)\} \ \textit{niz sukcesivnih aproksimacija},$$

definisan rekurzivno sa

$$y_0(x) = y_0, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y_{n-1}(t)dt), n = 1, 2, \ldots$$

$a' = \max\left\{a, x_0 - \frac{\beta - y_0}{M}, x_0 - \frac{y_0-\alpha}{M}\right\}$, $b' = \min\left\{b, x_0 + \frac{\beta - y_0}{M}, x_0 + \frac{y_0-\alpha}{M}\right\}$,
$M = \sup\limits_{(x,y)\in G} |f(x,y)| > 0$

- dovoljan uslov za konvergenciju niza je neprekidnost i Lipšicov uslov
- neprekidnost i jedinstvenost rešenja ne garantuju konvergenciju niza sukcesivnih aproksimacija
- ako niz konvergira ka nekom rešenju, ono ne mora biti jedinstveno
- u praksi se umesto Lipšicovog uslova zahteva da je u oblasti G

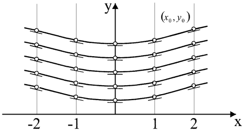
$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \leq M.$$

- metoda se koristi u teorijske, a manje u praktične svrhe

Diferencijalne jednačine prvog reda

Neka je funkcija $F(x, y)$ definisana i neprekidna u oblasti G i neka je $y = f(x)$ rešenje jednačine $y' = F(x, y)$ nad intervalom (a, b).

- (x, y, y') je linijski element
- skup svih linijskih elemenata je polje pravaca
- tangenta rešenja $y = f(x)$ u svakoj tački (x, y) grafika ima koeficijent pravca y' dat sa $y' = F(x, y)$; svaka kriva sa ovom osobinom je saglasna sa poljem pravaca



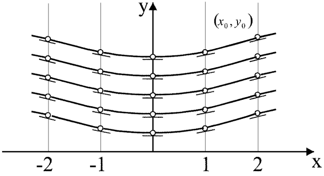
- skup svih krivih saglasnih sa poljem pravaca naziva se opšte rešenje jednačine
- kriva koja zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_0$, tj. prolazi kroz neku tačku (x_0, y_0) naziva se partikularno rešenje

Primer

Odrediti rešenje $y = y(x)$ diferencijalne jednačine $y' = x$.

U svim tačkama sa istom apscisom tangente imaju isti nagib:

x:	. . . , -2, -1, 0, 1, 2, . . .
y:	sve vrednosti (proizvoljne)
y':	. . . , -2, -1, 0, 1, 2, . . .



Lako se može zaključiti da su sva rešenja (opšte rešenje u smislu naše definicije) data sa

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + c,$$

gde je c proizvoljna konstanta, a partikularno koje prolazi kroz tačku (x_0, y_0) sa data sa

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + y_0 - \frac{x_0^2}{2}.$$

Ojlerove poligonalne linije - aproksimacija rešenja

- podela konačnog intervala intervala (a, b) koji sadrži x_0 : $a = z_n < z_{n-1} < \cdots < z_1 < z_0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
- kroz (x_0, y_0) postavimo pravu $L_0 : y = y_0 + (x - x_0)F(x_0, y_0)$, sa nagibom $F(x_0, y_0)$
- ako je $\xi_1 = x_1$ ili z_1 dosta blizu x_0, u tački ξ_1 ordinata prave L_0 data sa $y_1 = y_0 + (\xi - x_0)F(x_0, y_0)$ ne odstupa mnogo od ordinate rešenja u toj tački
- kroz (ξ_1, y_1) postavimo pravu $L_1 : y = y_1 + (x - \xi_1)F(\xi_1, y_1)$
- nakon k koraka - Ojlerova poligonalna linija

$$L_k : y = y_k + (x - \xi_k)F(\xi_k, y_k),$$

$(\xi_k \le x \le \xi_{k+1}, \xi_i = x_i)$ ili $(\xi_{k+1} \le x \le \xi_k, \xi_i = z_i), i = 1, 2, \ldots, n$

gde se y_{k+1} računa iz obrasca

$$y_{k+1} = y_k + (\xi_{k+1} - \xi_k)F(\xi_k, y_k), k = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

Jednačina koja razdvaja promenljive

Normalni oblik: $\boxed{y' = f(x)g(y)}$

Teorema

Ako je $f(x)$ neprekidna nad $a < x < b$, a $g(y)$ neprekidna i različita od 0 nad $\alpha < y < \beta$ tada postoji jedinstveno rešenje jednačine $y' = f(x)g(y)$ koje zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (\alpha, \beta)$ i definisano je na nekoj okolini x_0. Rešenje je dato sa

$$y(x) = G^{-1}\left(G(y_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)dt\right),$$

pri čemu je $G(u)$ primitivna funkcija za $\frac{1}{g(u)}$ nad (α, β).

Opšte rešenje pod uslovom $g(y) \neq 0$ je dato obrascem

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c.$$

Jednačina koja razdvaja promenljive

O egzistenciji i jedinstvenosti rešenja ako je funkcija $\mathbf{g(y)}$ neprekidna nad intervalom (α, β), ali ne važi $\mathbf{g(y) \neq 0}$ nad datim intervalom:

- Ako je $\mathbf{g(y_0) \neq 0}$, zbog neprekidnosti $g(y)$ postoji interval $(\alpha_1, \beta_1) \subset (\alpha, \beta)$ koji sadrži y_0 sa osobinom

  $$g(y)g(y_0) > 0 \text{ za svako } y \in (\alpha_1, \beta_1).$$

  Zaključak teoreme ostaje, ali se (α, β) zamenjuje sa (α_1, β_1).

- Ako je $\mathbf{g(y_0) = 0}$, rešenje početnog problema je sigurno funkcija $y(x) = y_0$, ali to rešenje ne mora da bude jedinstveno (videti sledeći primer).

Primer

Rešiti početni problem $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, $y(1) = 0$.

Jedno rešenje početnog problema je $y(x) = 0$.
Iz $\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$ zbog konvergencije nesvojstvenog integrala

$$\int\limits_{(0,y(x))} \frac{du}{3u^{\frac{2}{3}}} \text{ za } y(x) > 0, \text{ odnosno } \int\limits_{(y(x),0)} \frac{du}{3u^{\frac{2}{3}}} \text{ za } y(x) < 0,$$

da je

$$\int\limits_0^{y(x)} \frac{du}{3u^{\frac{2}{3}}} = \int\limits_1^x dt, \text{ odnosno } \sqrt[3]{u}\Big|_0^{y(x)} = t\Big|_1^x.$$

Sledi da je $\sqrt[3]{y(x)} = x - 1$, odnosno $y(x) = (x-1)^3$, pa dati problem ima najmanje dva rešenja.

Primer

Naći rešenje jednačine $y' = x(y-1)^2$ koje prolazi kroz tačku $(0,1)$.

$$\frac{dy}{(y-1)^2} = xdx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y-1} = \frac{x^2}{2} + c \qquad \Rightarrow \quad y - 1 = -\frac{2}{x^2+2c}$$
$$\Rightarrow \quad y(x) = 1 - \frac{2}{x^2+2c}$$

Uzimajući u obzir početni uslov dobijamo $1 = 1 - \dfrac{2}{2c}$, tj. $0 = \dfrac{1}{c}$ (konstanta u "opštem" rešenju ne može da se odredi).
Ova situacija je nastupila jer nesvojstveni integral

$$\int\limits_{(1,y)} \frac{dy}{(y-1)^2} \text{ za } y > 1, \text{ odnosno } \int\limits_{(y,1)} \frac{dy}{(y-1)^2} \text{ za } y < 1$$

divergira. Rešenje problema je $y(x) = 1$.

Homogena diferencijalna jednačina

Normalni oblik: $\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$, $f(t)$ je neprekidna funkcija nad (a, b);

smenom: $\frac{y}{x} = u$, $y' = u + xu'$ svodi se na jednačinu $u' = \dfrac{f(u) - u}{x}$ koja razdvaja promenljive.

Ako je $\mathbf{f(u) - u \neq 0}$ nad intervalom $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ tada kroz svaku tačku (x_0, y_0) oblasti $G : \begin{cases} a < \frac{y}{x} < b \\ x > 0 \end{cases}$ ili $G : \begin{cases} a < \frac{y}{x} < b \\ x < 0 \end{cases}$ prolazi samo jedno rešenje $y(x) = xu(x)$ definisano za svako x za koje je

ili $\quad \lim\limits_{y \to \alpha^+} G(y) < G(y_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt < \lim\limits_{y \to \beta^-} G(y)$

ili $\quad \lim\limits_{y \to \beta^-} G(y) < G(y_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt < \lim\limits_{y \to \alpha^+} G(y)$,

gde je $u(x)$ dato sa $\displaystyle\int\limits_{u_0}^{u(x)} \frac{dt}{f(t) - t} = \ln\left|\frac{x}{x_0}\right|, \quad u_0 = \frac{y_0}{x_0}.$

Homogena diferencijalna jednačina

Ako je $\mathbf{f(u) - u = 0}$ za neko $\mathbf{u \in (a, b)}$:

- Ako je $\mathbf{f(u_0) \neq u_0}$, $\left(u_0 = \frac{y_0}{x_0}\right)$, zbog neprekidnosti funkcije $f(u) - u$ postoji interval $(a_1, b_1) \subset (a, b)$, koji sadrži tačku u_0, tako da je

$$(f(u) - u)(f(u_0) - u_0) > 0 \text{ za svako } u \in (a_1, b_1)$$

  pa svi zaključci važe nad podintervalom (a_1, b_1) intervala (a, b).
- Ako je $\mathbf{f(u) - u = 0}$ **za svako** $\mathbf{u \in (a, b)}$, jednačina glasi $y' = \frac{y}{x}$, a to je jednačina koja razdvaja promenljive.
- Ako je $\mathbf{f(u_0) = u_0}$, $\left(u_0 = \frac{y_0}{x_0}\right)$, rešenje početnog problema je sigurno funkcija $y(x) = u_0 x$, $\left(y'(x) = u_0 = f\left(\frac{u_0 x}{x}\right) = f(u_0)\right)$. Ovo rešenje ne mora da bude jedinstveno.

Homogena diferencijalna jednačina

Napomena

Opšte rešenje uz pretpostavku $f(u) - u \neq 0$ *dato je obrascem* $\int \frac{du}{f(u)-u} = \ln cx \quad \left(u = \frac{y}{x}\right), \quad y = y(x),$ *a partikularno se dobija određivanjem* c *iz početnog uslova* $y(x_0) = y_0$. *Gornji integral mora da postoji nad posmatranim intervalom!*

Primer

Jednačina $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, *gde su* $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ *realni brojevi, a* $f(t)$ *neprekidna funkcija nad intervalom* (a, b), *svodi se na jednačinu koja razdvaja promenljive ili na homogenu.*

- Ako je $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, jednačina se smenom

$$a_1x + b_1y + c_1 = t \text{ ili } a_2x + b_2y + c_2 = t$$

svodi na jednačinu koja razdvaja promenljive.

Homogena diferencijalna jednačina

- Ako je $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, smenom

$$x = X + \alpha, \quad y = Y + \beta$$

gde su α i β (jedinstvena!) rešenja sistema

$$\begin{aligned} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 &= 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

dobija se

$$\begin{aligned} Y' = y' &= f\left(\frac{a_1X + a_1\alpha + b_1Y + b_1\beta + c_1}{a_2X + a_2\beta + b_2Y + b_2\beta + c_2}\right) \\ &= f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right) \\ &= g\left(\frac{Y}{X}\right). \end{aligned}$$

Opšti oblik: $\boxed{y' + f(x)\; y = g(x)}$

Teorema

Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne nad intervalom (a, b) tada postoji jedinstveno rešenje linearne diferencijalne jednačine koje zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$ i definisano je nad (a, b) u obliku

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} f(u)du} g(t)dt \right).$$

- smena: $y(x) = u(x) \cdot v(x)$

Bernulijeva jednačina

Opšti oblik: $\boxed{y' + f(x)\ y = g(x)y^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}}$

- $\alpha = 0$ - linearna diferencijalna jednačina
- $\alpha = 1$ - jednačina koja razdvaja promenljive

- smena: $z(x) = (y(x))^{-\alpha+1}, \quad z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x)$

Svodi se na linearnu diferencijalnu jednačinu

$$z'(x) + (1-\alpha)\, f(x)\, z(x) - (1-\alpha)\, g(x) = 0$$

Ako su $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne nad (a, b), tada kroz svaku tačku (x_0, z_0), gde je $x_0 \in (a, b)$, $z_0 \in \mathbb{R}$, prolazi jedinstveno rešenje definisano nad (a, b). Kako se zbog $\alpha \in \mathbb{R}$ mora pretpostaviti da je $y > 0$, rešenje je u opštem slučaju definisano na najvećem podintervalu (a_1, b_1) od (a, b) kom pripada x_0 i u kom je $z(x) > 0$.

Šta je jednostruko povezana oblast?

Definicija

Ako je $D = I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *i ako je* $\vec{r} : I \to X_0$ *neprekidna funkcija, tada skup tačaka*

$$L = \{\tau(t) : t \in I\}$$

zovemo kriva ili luk u prostoru, odnosno hodograf vektorske funkcije $\vec{r}$.

- Ako je $M((x(a), y(a), z(a)) \equiv N(x(b), y(b), z(b))$ za krivu L kažemo da je zatvorena, tj. da je luk L zatvoren.
- Ako sve tačke krive L leže u jednoj ravni, onda kažemo da je L ravna kriva.

Šta je jednostruko povezana oblast?

Definicija

Ako je (X, d) *metrički prostor, spojnicom (lukom) u prostoru* X *nazivamo svako neprekidno preslikavanje* $s : I \to X$ *intervala* $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ *u prostor* X*. Ako su tačke* $a = s(0)$ *i* $b = s(1)$ *različite, tada kažemo da spojnica* s *povezuje tačke* a *i* b*.*

Tvrđenje

Skup $L \subset \mathbb{R}^3$ *je kriva ako i samo ako je spojnica.*

Definicija

Za skup $\emptyset \neq A \subset X$ *kažemo da je povezan (lučno povezan) u metričkom prostoru* (X, d)*, ako za svake dve različite tačke* $a, b \in A$*, postoji spojnica* $s : I \to A$ *koja povezuje tačke* a *i* b*. Ako je skup* X *povezan u metričkom prostoru* (X, d)*, tada kažemo da je metrički prostor* (X, d) *povezan.*

Šta je jednostruko povezana oblast?

Definicija

Ako je skup $A \subset X$ istovremeno otvoren i povezan u metričkom prostoru (X, d) i $A_1 \subset A^*$, tada za skup $A \cup A_1$ kažemo da je oblast. Specijalno, ako je $A_1 = \emptyset$, tada se za A kaže i otvorena oblast, a ako je $A_1 = A^*$, tada se za $A \cup A_1 = A \cup A^* = \overline{A}$ kaže i zatvorena oblast.

Definicija

Za skup $L \subset E = \mathbb{R}^3$ kažemo da je Žordanova[a] kriva ili Žordanov luk sa krajevima ako:

1°) *postoji interval $I = [a, b]$ i preslikavanje $\tau : I \to E$, tako da je*

$$L = \{\tau(t) : t \in I\};$$

2°) *τ je bijektivno preslikavanje intervala I na L;*

3°) *τ je neprekidno preslikavanje.*

Tačke $A = \tau(a)$, $B = \tau(b)$ zovemo krajevi krive ili luka L.

[a]Žordan, K. (Camil Jordan, 1838-1922) - francuski matematičar

Šta je jednostruko povezana oblast?

Ako umesto 2°) uzmemo da važi

2^{*}) τ je bijekcija skupa $[a, b)$ na L i $\tau(a) = \tau(b)$, onda kažemo da je L zatvorena Žordanova kriva ili zatvoren Žordanov luk.

Tvrđenje

Ako je $L_1 = \{M(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, tada je kriva L zatvorena Žordanova kriva ako i samo ako postoji preslikavanje $f : L_1 \to L$, tako da važi

1) *f je bijektivno preslikavanje skupa L_1 na L;*
2) *f je neprekidno preslikavanje;*
3) *$f^{-1} : L \to L_1$ je neprekidno preslikavanje.*

Šta je jednostruko povezana oblast?

Tvrđenje

Neka je $L \subset \tau = \mathbb{R}^2$ *ravna zatvorena Žordanova kriva. Tada*

1) $\mathbb{R}^2 \setminus L = \Omega_1 \cup \Omega_2$, *gde su* Ω_1 *i* Ω_2 *dve disjunktne otvorene oblasti;*
2) $L = \Omega_1^* = \Omega_2^*$;
3) *Jedna od oblasti, npr. uzmimo da je to* Ω_1, *je ograničen skup i nju zovemo unutrašnjost krive* L, *dok je druga* Ω_2 *neograničen skup i nju zovemo spoljašnjost krive* L.

Za ravnu oblast $G \subset \tau = \mathbb{R}^2$ kažemo da je jednostruko povezana ako unutrašnjost svake Žordanove krive $L \subset G$ pripada oblasti G.

Jednačina totalnog diferencijala

$$\boxed{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0}$$

je jednačina totalnog diferencijala ako postoji funkcija $F(x,y)$ takva da je

- $dF(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$
- $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P(x,y),\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$

Teorema

Neka su $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ neprekidne u otvorenoj jednostruko povezanoj oblasti G i $Q(x_0,y_0) \neq 0$. Da bi jednačina $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ bila jednačina totalnog diferencijala potrebno je i dovoljno da bude za svako $(x,y) \in G$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Ako oblast nije jednostruko povezana, tvrđenje ne mora da važi!

Integracioni množitelj

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Da li postoji funkcija $h(x,y) \neq 0$ takva da je diferencijalna jednačina

$$\boxed{h(x,y)P(x,y)dx + h(x,y)Q(x,y)dy = 0}$$

jednačina totalnog diferencijala, tj. $\dfrac{\partial(hP)}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial(hQ)}{\partial x}(x,y)$?

$$\frac{1}{h}\left(P\frac{\partial h}{\partial y} - Q\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$h(x,y)$ - integracioni množitelj (funkcija koja ima u otvorenoj jednostruko povezanoj oblasti G neprekidne parcijalne izvode, zadovoljava gornji uslov i različita je od nule u G)

Klero-ova jednačina

$$\boxed{y = xy' + f(y')}$$

Tvrđenje

Neka funkcija $f(t)$ ima nad intervalom (a, b) neprekidan drugi izvod koji je različit od nule i neka je $\varphi(t)$ inverzna funkcija od $-f'(t)$. Tada su rešenja jednačine $y = xy' + f(y')$ funkcije

- $y = xc + f(c), \quad c \in (a, b)$ *(c je konstanta)*
- $y = x\varphi(x) + f(\varphi(x)) \quad$ *(tzv. singularno rešenje) definisano nad intervalom (α, β), gde je $\alpha = \inf\limits_{t\in(a,b)} \{-f'(t)\}$ ako infimum postoji, u suprotnom je $\alpha = -\infty$ i $\beta = \sup\limits_{t\in(a,b)} \{-f'(t)\}$ ako supremum postoji, u suprotnom je $\beta = \infty$*
- *svaka kriva sastavljena od proizvoljnog luka AB krive i na nju nastavljenih tangenata u tačkama A i B.*

Lagranžova jednačina

$$\boxed{y = xf(y') + g(y')}$$

Uzmimo $p = y'$, tj. $dy = pdx$. Dobijamo $y = xf(p) + g(p)$, a odavde diferenciranjem $pdx = dy = (xf'(p) + g'(p))dp + f(p)dx$, tj. $(f(p) - p)dx + (xf'(p) + g'(p))dp = 0$.

- $f(p) - p \neq 0 \Rightarrow \dfrac{dx}{dp} + \dfrac{f'(p)}{f(p) - p}x + \dfrac{g'(p)}{f(p) - p}$, što je linearna jednačina, iz koje dobijamo $x = x(p)$, što sa $y(p) = x(p)f(p) + g(p)$ predstavlja rešenje Lagranžove jednačine u parametarskom obliku.
- Ako jednačina $f(p) - p = 0$ ima rešenja i ako je jedno rešenje $p = c$, tada je rešenje jednačine i $y = cx + g(c)$.
- Ako je $f(p) - p = 0$ za svako p, Lagranžova jednačina postaje $y = xy' + g(y')$ (Klero-ova).

(ovo je spec. slučaj opšteg postupka uvođenja parametra)