VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Novi Sad,
2020.

1. Vežbe I.5

1.1. Granične vrednosti funkcija

Neka je $D \subset \mathbb{R}$ i $f : D \mapsto \mathbb{R}$ realna funkcija jedne promenljive, i neka je x_0 tačka nagomilavanja za oblast definisanosti D.

Definicija 1.1. Za funkciju $y = f(x)$ se kaže da ima **graničnu vrednost** $A \in \mathbb{R}$ u tački x_0 ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ (koje zavisi od ε) takvo da za svako $x \in D\backslash\{x_0\}$ važi da iz $|x - x_0| < \delta$ sledi $|f(x) - A| < \varepsilon$, tj. akko važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D\backslash\{x_0\}) \quad \Big(|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - A| < \varepsilon\Big).$$

Tada pišemo

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = A.}$$

Osnovne osobine

Ako je x_0 tačka nagomilavanja za zajedničku oblast definisanosti funkcija $f(x)$ i $g(x)$ (tj. za presek njihovih domena), i ako je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq \pm\infty$ i $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B \neq \pm\infty$, tada je:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \Big(f(x) \pm g(x)\Big) = \Big(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\Big) \pm \Big(\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\Big) = A \pm B,$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} \Big(f(x) \cdot g(x)\Big) = \Big(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\Big) \cdot \Big(\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\Big) = A \cdot B,$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c \cdot A, \quad$ za svako $c \in \mathbb{R}$,

4. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}, \quad$ gde $g(x) \neq 0$, za $x \in O(x_0)$ i $B \neq 0$.

Ako funkcija u x_0 ima i levu i desnu graničnu vrednost, onda ona u toj tački ima graničnu vrednost ako i samo ako su leva i desna granična vrednost jednake, tj. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ postoji ako i samo ako

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A.}$$

Neke korisne (tablične) granične vrednosti

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1,$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(x+1)}{x} = \log_a e,$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1.$

Sve napomene koje smo dali pri traženju graničnih vrednosti nizova važe i pri traženju graničnih vrednosti funkcija.

Zadatak 1.2. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{x}$.

Rešenje.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x} = 3\lim_{3x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x} = 3\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = 3.$$

Zadatak 1.3. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin(ax)}$, $a\neq 0$, $b\in\mathbb{R}$.

Rešenje. Lako se pokazuje da je gornji izraz jednak sa

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin(ax)}{bx}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{bx}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}\cdot\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}} = \frac{b}{a}.$$

Zadatak 1.4. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a}$, $a\in\mathbb{R}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\\
&= \lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\\
&= \lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\\
&= \cos\left(\frac{a+a}{2}\right)\\
&= \cos(a).
\end{aligned}$$

Zadatak 1.5. Proveriti da li postoji sledeća granična vrednost: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x-2}$.

Rešenje. Primetimo da je, sa jedne strane

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = \text{“}\frac{2^+}{2^+-2}\text{”} = \text{“}\frac{2^+}{0^+}\text{”} = +\infty,$$

zato što izraz iznad razlomačke crte teži dvojci, a ispod razlomačke crte teži nuli (sa desne strane, što znači da se $x-2$ može posmatrati kao pozitivna vrednost blizu nule). Sa druge strane, tačno je da

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2} = \text{“}\frac{2^-}{2^--2}\text{”} = \text{“}\frac{2^-}{0^-}\text{”} = -\infty,$$

baš zato što izraz ispod razlomačke crte teži nuli (sa leve strane, što znači da se $x-2$ može posmatrati kao negativna vrednost blizu nule).

Budući da se levi i desni limes ne poklapaju (nisu jednaki), kažemo da funkcija nema graničnu vrednost u $x=2$.

Zadatak 1.6. Proveriti da li postoji sledeća granična vrednost: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

Rešenje. Primetimo da je, sa jedne strane

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \text{“}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{0^+}}}\text{”} = \text{“}\frac{1}{1+e^{+\infty}}\text{”} = \text{“}\frac{1}{+\infty}\text{”} = 0.$$

Sa druge strane, tačno je da je

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \text{“}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{0^-}}}\text{”} = \text{“}\frac{1}{1+e^{-\infty}}\text{”} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Budući da se levi i desni limes ne poklapaju (nisu jednaki), kažemo da funkcija nema graničnu vrednost u tački $x=0$.

Zadatak 1.7. Proveriti da li postoji sledeća granična vrednost: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{|x-1|}$.

Rešenje. Podsetimo se da je, po definiciji

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x-1 \geq 0 \\ 1-x, & x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}.$$

što implicira da levi i desni limes nisu jednaki

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{1-x} = -1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1} = 1,$$

zato što je $(x-1)$ proizvoljno mala negativna vrednost ako $x\to 1^-$ i proizvoljno mala pozitivna vrednost ako $x \to 1^+$. Budući da se levi i desni limes ne poklapaju (nisu jednaki), kažemo da funkcija nema graničnu vrednost u $x=1$.

Zadatak 1.8. Proveriti da li postoji sledeća granična vrednost: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin(x)|}{x}$.

Rešenje. Podsetimo se da je, po definiciji

$$|\sin(x)| = \begin{cases} \sin(x), & \sin(x) \geq 0 \\ -\sin(x), & \sin(x) < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sin(x), & \text{za dovoljno malo } x \geq 0 \\ -\sin(x), & \text{za dovoljno malo } x < 0 \end{cases}.$$

što implicira da levi i desni limes nisu jednaki

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin(x)|}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin(x)}{x} = -1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin(x)|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Budući da se levi i desni limes ne poklapaju (nisu jednaki), kažemo da funkcija nema graničnu vrednost u $x=0$.

Zadatak 1.9. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

Rešenje. Primetimo da bismo direktnim uvrštavanjem broja 1 umesto x dobili izraz oblika "0/0". To nam daje da je broj 1 koren oba polinoma u razlomku, te je dalje

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^3+x^2+x-3)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+x-2)}{(x^3+x^2+x-3)}.$$

(Izvršene faktorizacije se mogu dobiti ili prostim deljenjem posmatranih polinoma sa $(x-1)$ ili Hornerovom šemom.)

Direktnim uvrštavanjem broja 1 umesto x u poslednjem izrazu opet dobijamo izraz oblika "0/0", te je, sličnim postupkom kao gore, poslednji izraz

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2+x-2)}{(x^3+x^2+x-3)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+2x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)}{(x^2+2x+3)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Zadatak 1.10. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

Rešenje. Ovaj zadatak ćemo rešiti uvođenjem smene $\left[t = \sqrt[12]{x}\right]$. To znači da je $x = t^{12}$, te da ćemo umesto $\sqrt[3]{x}$ pisati t^4, a umesto $\sqrt[4]{x}$ pisati t^3. Vrlo je bitno primetiti da kad x teži broju 1, onda $t = \sqrt[12]{x}$ teži $\sqrt[12]{1}$, tj. broju 1. Dakle,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \lim_{t\to 1} \frac{t^4-1}{t^3-1} = \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \lim_{t\to 1} \frac{(t+1)(t^2+1)}{t^2+t+1} = \frac{4}{3}.$$

Zadatak 1.11. Naći graničnu vrednost $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{x^3+x^2+15}}{x^2-5x+6}$.

Rešenje. Kad x teži 2, i kvadratni koren i kubni koren u brojiocu teže ka 3. Zato, nakon dodavanja i oduzimanja broja 3, vidimo da je

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+3-3}{x^2-5x+6}=\underbrace{\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-5x+6}}_{a}-\underbrace{\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+15}-3}{x^2-5x+6}}_{b}.$$

Izračunavanjem limesa dobijamo:

$$\begin{aligned}
a&=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-5x+6}\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}\\
&=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x^2-5x+6)(\sqrt{x^2+5}+3)}\\
&=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}\\
&=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}=-4\cdot\frac{1}{6}=-\frac{2}{3},
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
b&=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+15}-3}{x^2-5x+6}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+15}\right)^2+3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+15}\right)^2+3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9}\\
&=\lim_{x\to 2}\frac{(x^3+x^2+15)-27}{(x^2-5x+6)\left(\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+15}\right)^2+3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9\right)}\\
&=\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-12}{x^2-5x+6}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+15}\right)^2+3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9}\\
&=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+3x+6)}{(x-2)(x-3)}\cdot\frac{1}{(9+3\cdot 3+9)}=\frac{1}{27}\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x+6}{x-3}=-\frac{16}{27},
\end{aligned}$$

pa je konačno

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{x^3+x^2+15}}{x^2-5x+6}=\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{16}{27}\right)=-\frac{2}{27}.$$

Zadatak 1.12. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x^2-3}{x+3}\right)^{\dfrac{x}{x^2-4}}$.

Rešenje. Pre svega treba primetiti da bismo direktnim uvrštavanjem $x = 2$ u gornji izraz dobili neodređeni izraz oblika "1^∞", zato nastavljamo

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x^2-3}{x+3}\right)^{\dfrac{x}{x^2-4}}\\
&= \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2x^2-3}{x+3}-1\right)^{\dfrac{x}{x^2-4}}\\
&= \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{(2x^2-3)-(x+3)}{x+3}\right)^{\dfrac{x}{x^2-4}}\\
&= \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2x^2-x-6}{x+3}\right)^{\dfrac{x}{x^2-4}}\\
&= \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2x^2-x-6}{x+3}\right)^{\dfrac{x+3}{2x^2-x-6}\dfrac{2x^2-x-6}{x+3}\dfrac{x}{x^2-4}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-6}{x+3}\dfrac{x}{x^2-4}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x+3}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-4}}\\
&= e^{\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)(x+2)}}\\
&= e^{\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+3}{x+2}}\\
&= e^{\dfrac{7}{10}}\\
&= \sqrt[10]{e^7}.
\end{aligned}
$$

Zadatak 1.13. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln(x)-1}{x-e}$.

Rešenje. Primetimo da se gornji izraz može napisati i kao

$$\lim_{x\to e} \frac{\ln(x)-\ln(e)}{x-e} = \lim_{x\to e} \frac{\ln\left(\frac{x}{e}\right)}{x-e} = \lim_{x\to e} \frac{1}{x-e} \ln\left(\frac{x}{e}\right) = \lim_{x\to e} \ln\left(\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}}\right).$$

Pošto je funkcija $\ln(x)$ neprekidna funkcija, imamo da je limes gornjeg logaritma jednak logaritmu limesa, pa dobijamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to e} \ln\left(\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}}\right) &= \ln\left(\lim_{x\to e} \left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}}\right) \\
&= \ln\left(\lim_{x\to e} \left(1+\frac{x}{e}-1\right)^{\frac{1}{x-e}}\right) \\
&= \ln\left(\lim_{x\to e} \left(1+\frac{x-e}{e}\right)^{\frac{e}{x-e}\frac{x-e}{e}\frac{1}{x-e}}\right) \\
&= \ln\left(e^{\lim\limits_{x\to e}\frac{x-e}{e}\frac{1}{x-e}}\right) \\
&= \lim_{x\to e} \frac{x-e}{e}\frac{1}{x-e} \\
&= \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.14. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

Rešenje. Zapišimo gornji limes kao

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\lim_{x\to 1}(1-x)\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Na osnovu osobine da je granična vrednost limesa jednaka proizvodu graničnih vrednosti dobijamo

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\cdot\lim_{x\to 1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

Budući da je $\cos(\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, sledi da je i $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)$, što se može zapisati i kao $\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)$. Konačno

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}&=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{1-x}}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{\frac{\pi}{2}(1-x)}\cdot\dfrac{\pi}{2}}\\&=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{\frac{\pi}{2}(1-x)}}\\&=\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Zadatak 1.15. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}-\sqrt{1+\sin(x)}}{x^3}$.

Rešenje. Sređivanjem gornjeg izraza može se videti da je:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}-\sqrt{1+\sin(x)}}{x^3} \cdot \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1+\operatorname{tg}(x))-(1+\sin(x))}{x^3\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}\right)}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)-\sin(x)}{x^3\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}\right)}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)-\sin(x)}{x^3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}}\\
&= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)-\sin(x)}{x^3}\\
&= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-\sin(x)}{x^3}\\
&= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\sin(x)}{x^3\cos(x)}\\
&= \frac{1}{2} \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)}\right)
\end{aligned}$$

zato što su sve granične vrednosti konačne. Za prvu i treću graničnu vrednost

je to očigledno, a za drugu treba primetiti da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2}{4}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

pa je konačno rešenje

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}-\sqrt{1+\sin(x)}}{x^3} = \frac{1}{2}\left(1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\right) = \frac{1}{4}.$$

Zadatak 1.16. Naći graničnu vrednost $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{\mathrm{tg}^2(x)}$.

Rešenje. Oduzimanjem i dodavanjem jedinice, može se videti da je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\sin(x)-1)^{\mathrm{tg}^2(x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\sin(x)-1)^{\frac{1}{\sin(x)-1}(\sin(x)-1)\mathrm{tg}^2(x)}\\
&= e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin(x)-1)\mathrm{tg}^2(x)}\\
&= e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin(x)-1)\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}\\
&= e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)-1}{\cos^2(x)}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)}\\
&= e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)-1}{1-\sin^2(x)}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)}\\
&= e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)-1}{1-\sin^2(x)}}\\
&= e^{-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin(x)}{1-\sin^2(x)}}\\
&= e^{-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin(x)}}\\
&= e^{-\dfrac{1}{1+1}}\\
&= e^{-\dfrac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{e}}.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.17. Naći graničnu vrednost $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, za $a>0$.

Rešenje. Ovaj limes se često navodi i kao tablični, ali se može rešiti i svođenjem na tablični limes sa početka poglavlja, i to uvođenjem smene $t=a^x-1$, na osnovu koje je $x=\log_a(t+1)$. Primetimo da kad x teži 0, t teži vrednosti a^0-1, tj. broju 0. Zato je

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\dfrac{\ln(t+1)}{\ln(a)}} = \frac{\ln(a)}{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(t+1)}{t}} = \ln(a),$$

gde je korišćen tablični limes $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$.

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.