DISKRETNA MATEMATIKA

- PREDAVANJE -

Jovanka Pantović

Tema 1

Definicija grafa

Neusmeren graf

Definicija

(Multi) graf je uređena trojka $G = (V, E, \psi)$, *gde je*

(i) $V \neq \emptyset$ *konačan skup čvorova,*

(ii) E *je skup grana, pri čemu je* $V \cap E = \emptyset$ *i*

(iii) $\psi : E \to \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$ *funkcija incidencije.*

Definicija

(Prost, neusmeren) graf je uređen par $G = (V, E)$, *gde je*

(i) $V \neq \emptyset$ *konačan skup čvorova i*

(ii) $E \subseteq \binom{V}{2}$ *je skup grana.*

Usmeren graf

Definicija

Usmeren multigraf je uređena trojka $G = (V, E, \psi)$, *gde je*

(i) $V \neq \emptyset$ *konačan skup čvorova,*

(ii) E *je skup grana, pri čemu je* $V \cap E = \emptyset$ *i*

(iii) $\psi : E \to \{(u, v) : u, v \in V, u \neq v\}$ *funkcija incidencije.*

Definicija

Usmeren prost graf je uređen par $G = (V, E)$, *gde je*

(i) $V \neq \emptyset$ *konačan skup čvorova i*

(ii) $E \subseteq \{(u, v) : u, v \in V, u \neq v\}$ *je skup grana.*

Neka je G graf i $v \in G$.

- Ako je $\psi(e) = \{u, v\}$, kažemo da je grana e **incidentna** sa u i v ili da spaja u i v.
- Čvorovi u i v su **krajevi grane** i kažemo da su u i v susedni čvorovi.
- Dve ili više grana koje su incidentne sa istim parom čvorova kažemo da su **paralelne**.

Neke oznake

- $\omega_G(v)$ - skup čvorova grafa G koji su susedni sa v
- $d_G(v)$- stepen čvora v, broj grana koje su incidentne sa v
- $\delta(G) = \min\limits_{v \in V(G)} d_G(v)$ - minimalan stepen grafa
- $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V(G)} d_G(v)$ maksimalan stepen grafa

U prostom grafu je

$$|\omega_G(v)| = d_G(v)$$

Neka je $G = (V, E)$ prost graf.

Teorema ("handshaking")

Zbir stepena čvorova grafa jednak je dvostrukom broju grana, tj.

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|.$$

Dokaz.

Svakoj grani odgovara 2 incidentna čvora. To znači da sabiranjem stepena čvorova dva puta brojimo svaku granu.

Teorema

Graf ima paran broj čvorova neparnog stepena.

Dokaz. Neka je $G = (V, E)$, i $V = V_1 \cup V_2$, gde su V_1 i V_2 redom skupovi čvorova parnog i neparnog stepena. Tada je

$$2|E| = \sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in V_1} d_G(v) + \sum_{v \in V_2} d_G(v)$$

$$2|E| - \sum_{v \in V_1} d_G(v) = \sum_{v \in V_2} d_G(v)$$

Kako je zbir (razlika) dva parna broja paran broj, suma sa desne strane mora biti paran broj, odakle direktno sledi tvrđenje.

Posledica

Ako su svi čvorovi neparnog stepena, onda je broj čvorova paran.

Posledica

Ako je broj čvorova grafa neparan, onda postoji bar jedan čvor parnog stepena.

Neka je $G = (V, E)$ prost graf.

Posledica

Ako graf ima n čvorova i manje od n grana onda postoji čvor v sa $d_G(v) \leq 1$.

Dokaz.
Pretpostavimo suprotno, da za svaki čvor $v \in G$ važi $d_G(v) \geq 2$. Tada na osnovu prethodnih tvrđenja važi

$$2n > 2|E| = \sum_{v \in V} d_G(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2 \cdot |V| = 2n$$

tj. $2n > 2n$ što je kontradikcija.

Teorema

Neka je $G = (V, E)$ prost graf i $|V| \geq 2$. Tada postoje bar dva čvora jednakih stepena.

Dokaz. Mogući stepeni čvorova pripadaju skupu $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Imamo sledeće mogućnosti:

(a) Ako postoji izolovan čvor, onda ne postoji čvor stepena $n-1$. Tada se n čvorova raspoređuje na $n-1$ stepeni ($\{0, 1, \ldots, n-2\}$).

(b) Ako ne postoji izolovan čvor, onda ne postoji čvor stepena 0. Tada se n čvorova raspoređuje na $n-1$ stepeni ($\{1, \ldots, n-1\}$).

U oba slučaja tvrđenje sledi na osnovu Dirihleovog principa.

Tema 2

Neke specijalne vrste grafova

Regularan graf

Definicija

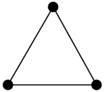
Graf je **regularan** *ako su svi njegovi čorovi istog stepena.*

Graf je k-**regularan** *ako su svi njegovi čvorovi stepena* k.

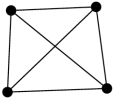
Neke specijalne vrste grafova

- K_n - kompletan graf

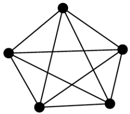
$$K_n = (V, E), V = \{1, 2, \ldots, n\}, E = \binom{V}{2}$$



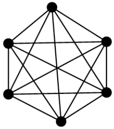
K_3



K_4

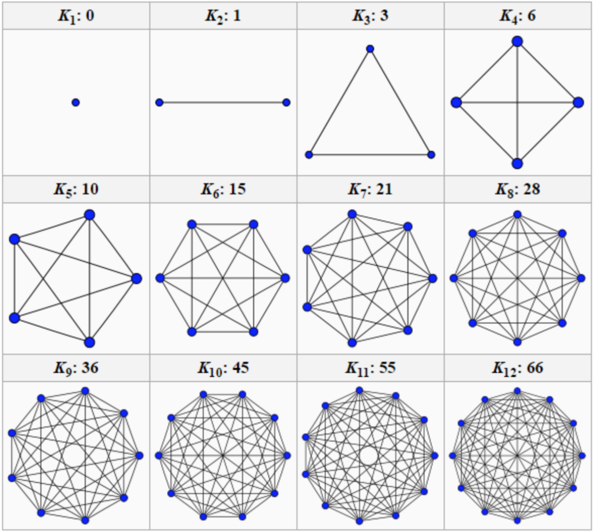


K_5



K_6

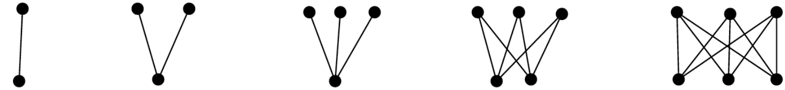
Neke specijalne vrste grafova



Neke specijalne vrste grafova

bipartitan graf
$G = (V, E)$
$V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$
$E \subseteq \{\{u, v\} : u \in V_1, v \in V_2\}$

kompletan bipartitan graf
$G = (V, E)$
$V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$
$E = \{\{u, v\} : u \in V_1, v \in V_2\}$



$K_{1,1}$ $K_{1,2}$ $K_{1,3}$ $K_{2,3}$ $K_{3,3}$

Tema 3

Jednakost i izomorfizam

Jednakost grafova

Definicija

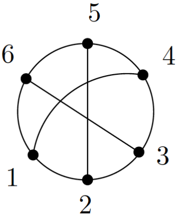
Neka je $G_1 = (V_1, E_1)$ *i* $G_2 = (V_2, E_2)$. *Kažemo da su grafovi* G_1 *i* G_2 *jednaki, u oznaci* $G_1 = G_2$ *akko* $V_1 = V_2$ *i* $E_1 = E_2$.

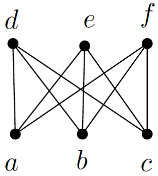
Izomorfizam grafova

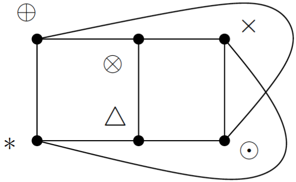
Definicija

Neka je $G_1 = (V_1, E_1)$ *i* $G_2 = (V_2, E_2)$. *Kažemo da su grafovi* G_1 *i* G_2 *izomorfni, u oznaci* $G_1 \cong G_2$ *ako postoji bijekcija* $f : V_1 \to V_2$ *sa osobinom*

$$\{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2$$





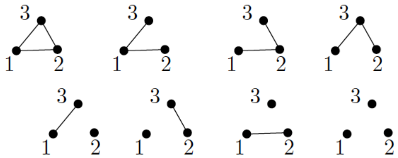


Različiti i neizomorfni grafovi

Teorema

Izomorfizam $\cong$ je relacija ekvivalencije na skupu svih grafova.

Različiti grafovi sa 3 čvora:



Neizomorfni grafovi sa 3 čvora:

Zadatak

Ako su data dva grafa sa n čvorova. Koliko ima bijektvinih preslikavanja jednog u drugi?

Zadatak

Koliko ima (po parovima) različitih prostih grafova sa n čovorova?

Tema 4

Operacije sa/na grafovima

Podgrafovi

Definicija

Neka je $G_1 = (V_1, E_1)$ *i* $G_2 = (V_2, E_2)$. *Kažemo da je* G_1 *podgraf grafa* G_2, *ako važi*

$$V_1 \subseteq V_2 \qquad E_1 \subseteq E_2$$

Definicija

Neka je $G_1 = (V_1, E_1)$ *i* $G_2 = (V_2, E_2)$ *i* $V_2 \subseteq V_1$. *Kažemo da je* G_2 *podgraf grafa* G_1 *indukovan skupom čvorova* V_2 *ako važi*

$$\{u, v\} \in E_2 \text{ iff } \{u, v\} \in E_1.$$

Definicija

Neka je $G_1 = (V_1, E_1)$ *i* $G_2 = (V_2, E_2)$. *Kažemo da je* G_1 *pokrivajući podgraf grafa* G_2, *ako važi*

$$V_1 = V_2 \quad E_1 \subseteq E_2$$

Dodavanje/oduzimanje čvorova i grana

1. $G_2 = G_1 - v$:
   $V_2 = V_1 \setminus \{v\}$ i $E_2 = E_1 \setminus \{\{u, w\} : v \in \{u, w\}\}$
2. $G_2 = G_1 - e$:
   $V_2 = V_1$ i $E_2 = E_1 \setminus \{e\}$