BROJNI REDOVI

Red u prostoru realnih brojeva je uređeni par $(\{a_n\},\{s_n\})$ koji se sastoji od dva niza, $\{a_n\}$ i $\{s_n\}$, $a_n, s_n \in R,\ n \in N,$ za koje važi:

$$s_1 = a_1, s_{n+1} = s_n + a_n.$$

Red u R se naziva još i brojni ili numerički red. Elementi a_n su članovi reda, a za niz $\{s_n\}$ kažemo da je niz parcijalnih suma datog reda. Red se kraće označava sa $\sum_{n\in N} a_n$ ili $\sum a_n$.

Parcijalne sume reda $\sum a_n$ su zbirovi:

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ \dots, s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Red je konvergentan ako i samo ako je njegov niz parcijalnih suma $\{s_n\}$ konvergentan. Granična vrednost (konačna) $\lim_{n\to\infty} s_n$ se zove suma (zbir) reda $\sum a_n$ i nju označavamo sa s, tj:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Numeracija reda ne mora početi od $n = 1$ već može bilo kojim brojem $p \in N_0$. Tada red označavamo sa $\sum_{n\geq p} a_n$ i njegov niz parcijalnih suma je:

$$s_1 = a_p, \dots, s_n = a_p + a_{p+1} + \dots + a_{p+n-1}.$$

Ako red $\sum a_n$ konvergira, tada konvergira i red $\sum_{n\geq p} a_n$, tj. konačno mnogo članova reda na utiče na njegovu konvergenciju. Za red koji ne konvergira, kažemo da divergira.

Red $\sum a_n$ apsolutno konvergira ako red $\sum |a_n|$ konvergira. Jedino kod apsolutno konvergentnog reda možemo menjati redosled članova u sumiranju.

Neka su dati redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ i $\alpha \in R,$ tada je:

$$\sum a_n + \sum b_n = \sum (a_n + b_n),$$

$$\alpha \sum a_n = \sum \alpha a_n .$$

Zbir dva konvergentna reda je konvergentan red, zbir konvergentnog i divergentnog reda je divergentan, dok zbir dva divergentna reda može biti i konvergentan i divergentan red.

Pod proizvodom brojnih redova $\sum_{n\geq 0} a_n$ i $\sum_{n\geq 0} b_n$ podrazumevamo red $\sum_{n\geq 0} c_n$ čiji je opšti član dat sa $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Proizvod dva apsolutno konvergentna reda je apsolutno konvergentan red.

Red $\sum_{n\geq 0} q^n, q \in R$ zove se gometrijski. On konvergira za $|q| < 1$ i u tom slučaju njegova suma je $s = \frac{1}{1-q}$.

Red $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konvergira za $\alpha > 1$, a divergira za $\alpha \leq 1$. Za $\alpha = 1$ dobija se red $\sum \frac{1}{n}$ koji se zove harmonijski.

Red čiji su svi članovi jednaki nuli naziva se nula red i njegova suma je $s = 0$.

Za dato $m \in N$, red $\sum_{n\geq m+1} a_n$ nazivamo ostatkom reda $\sum a_n$ posle $m-$tog člana i označavamo ga sa R_m. Konvergencija reda $\sum a_n$ je ekvivalentna i sa iskazom da za svako $m \in N$ odgovarajući ostatak reda $R_m \to 0$ kada $m \to \infty$.

Košijev kriterijum konvergencije: Red $\sum a_n$ konvergira ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in N$ tako da za sve $n, p \in N$, važi: $n \geq n_0 \Rightarrow |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$.

Ako red $\sum a_n$ konvergira, tada $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Međutim, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ne implicira konvergenciju reda $\sum a_n$. Na primer, kod harmonijskog reda $\sum \frac{1}{n}$ važi $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, a dati red divergira.

Zadaci

1. Pokazati konvergenciju sledećih redova i naći njihove sume:

a) $\sum \frac{1}{n(n+1)}$; **b)** $\sum \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$; **c)** $\sum (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n$;

d) $\sum\limits_{n\geq 2} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{n^2-1} \right)$.

a) Kako je opšti član datog reda $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, dobija se

$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$, sledi da je

$\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

b) Kako je opšti član datog reda $a_n = \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}$, dobija se

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}$, sledi da je $\sum \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}$.

c) **(I način)** Koristeći niz parcijalnih suma datog reda, dobijamo:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = -\frac{1}{2} \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\frac{1}{3}$, sledi da je $\sum (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{3}$.

(II način) Kako je $\sum (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2} \sum \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{2} \sum\limits_{n\geq 0} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Budući da je red $\sum\limits_{n\geq 0} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ geometrijski za $|q| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$, dobijamo da je:

$$\sum(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{3}.$$

d) Budući da je $\sum\limits_{n=2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{n^2-1}\right)=\sum\limits_{n\geq 2}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\sum\limits_{n\geq 2}\frac{1}{n^2-1}$, izračunaćemo zasebno sume redova $\sum\limits_{n=2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ i $\sum\limits_{n\geq 2}\frac{1}{n^2-1}$. Za sumu prvog reda koristimo oznaku $\bar{s}$, a za sumu drugog reda koristimo oznaku $\bar{\bar{s}}$.

Za prvi red dobijamo: $\bar{s}=\sum\limits_{n\geq 2}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^2\sum\limits_{n\geq 2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}=\frac{4}{9}\sum\limits_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{4}{9}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}$.

Kako je $\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$, to je opšti član niza parcijalnih suma drugog reda: $\bar{\bar{s}}_n=\sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right)$ pa je $\bar{\bar{s}}=\lim\limits_{n\to\infty}\bar{\bar{s}}_n=\frac{3}{4}$.

Stoga je $\sum\limits_{n\geq 2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{n^2-1}\right)=\frac{4}{3}+\frac{3}{4}=\frac{25}{12}$.

2. Pokazati divergenciju sledećih redova preko niza parcijalnih suma:

a) $\sum(-1)^n$**;** **b)** $\sum\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$**.**

a) Kako je $s_1=-1,\ s_2=0,\ s_3=-1,\ s_4=0,$ zaključujemo da je $s_{2k-1}=-1$ i $s_{2k}=0$, $k\in N$. Stoga niz $\{s_n\}, n\in N$ ima dve tačke nagomilavanja pa $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ ne postoji odakle sledi da i red $\sum(-1)^n$ divergira.

Napomena: Da dati red divergira, mogli smo videti i na osnovu opšteg člana reda (ne teži nuli).

b) Kako je $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=\sqrt{n+1}-1$ sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\infty$ pa red $\sum\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ divergira.

3. Naći opšti član reda $\sum a_n$ ako mu je niz parcijalnih suma $\{s_n\}$:

a) $s_n = 1 - \dfrac{n}{2^{n+1}}$; **b)** $s_n = 3 - \dfrac{2n+1}{2^n} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

a) Prvi član reda je $a_1 = s_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, a a_n za $n \geq 2, n \in N$ je
$a_n = s_n - s_{n-1} = 1 - \dfrac{n}{2^{n+1}} - 1 + \dfrac{n-1}{2^n} = \dfrac{n-2}{2^{n+1}}$.

b) Prvi član reda je $a_1 = s_1 = 3 - \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, a a_n za $n \geq 2, n \in N$ je $a_n = s_n - s_{n-1} =$
$= 3 - \dfrac{2n+1}{2^n} - \dfrac{1}{2^{n-1}} - 3 + \dfrac{2n-1}{2^{n-1}} + \dfrac{1}{2^{n-2}} = \dfrac{2n-1}{2^n}$. Primetimo da je u ovom slučaju data formula za a_n tačna i za $n = 1$, što u opštem slučaju ne mora da važi (zadatak pod a)).

4. Na osnovu opšteg člana, ispitati konvergenciju reda $\sum a_n$, ako je:

a) $a_n = \dfrac{2n+3}{4n+5}$; **b)** $a_n = (-1)^n \ln\left(e + \dfrac{1}{n^2}\right)$; **c)** $a_n = \dfrac{1}{(an+b)^\alpha}, a, b > 0, \alpha \in R$.

a) Iz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{4n+5} = \dfrac{1}{2} \neq 0$ sledi da red $\sum a_n$ divergira.

b) Kako niz $\{a_n\}, n \in N$ ima dve tačke nagomilavanja $\{\pm 1\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ne postoji odakle sledi da i red $\sum a_n$ divergira.

c) Kako važi $a_n = \dfrac{1}{(an+b)^\alpha} \sim \dfrac{1}{a^\alpha n^\alpha}, n \to \infty$, to je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{a^\alpha} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \infty, \alpha < 0 \\ 1, \alpha = 0 \\ 0, \alpha > 0 \end{cases}$, tj. za $\alpha \leq 0$ red $\sum a_n$ divergira, dok za $\alpha > 0$, na osnovu posmatranja samo granične vrednosti opšteg člana, ne možemo ništa zaključiti o konvergenciji datog reda.

5. Izračunati sume sledećih redova:

a) $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n+1}{3^n}$; **b)** $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(n+1)(n+2)}{3^n}$.

a) Primetimo da je $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}\sum_{n=0}\frac{1}{3^n}=\sum_{n=0}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\frac{1}{3^{n-k}}=\sum_{n=0}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^n}=\sum_{n=0}\frac{n+1}{3^n}$. Kako je red $\sum_{n=0}\frac{1}{3^n}$ apsolutno konvergentan (geometrijski za $q=\frac{1}{3})$, čija je suma $\sum_{n=0}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2},$ sledi da je i red $\sum_{n=0}\frac{n+1}{3^n}$ apsolutno konvergentan i njegova suma je $\sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{3^n}=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}.$

b) Primetimo da je $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}\sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{3^n}=\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\frac{n-k+1}{3^{n-k}}=\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}\frac{n+1-k}{3^n}=$

$$=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}((n+1)+n+...+2+1))=\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(n+2)}{3^n}.$$

Na osnovu zadatka pod a), znamo da su redovi $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}$ i $\sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{3^n}$ apsolutno konvergentni i da su im sume respektivno $\frac{3}{2}$ i $\frac{9}{4}$ pa sledi da je $\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(n+2)}{3^n}=\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}=\frac{27}{8}$, tj. $\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(n+2)}{3^n}=\frac{27}{4}.$

6. Koristeći Košijev kriterijum konvergencije, pokazati da je red $\sum\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$ divergentan.

Pokazaćemo da postoji $\varepsilon>0$ tako da za svako $n_0\in N$ postoje $p,n\in N$, tako da je $n\geq n_0$ i $|s_{n+p}-s_n|\geq\varepsilon.$

Fiksiirajmo proizvoljno $n_0\in N.$ Uzmimo da je $n=p=n_0$. Tada je:

$$|s_{n+p}-s_n|=|s_{2n}-s_n|=\left|\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+3)}}+\frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+4)}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n(2n+2)}}\right|>$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{(n+3)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(n+4)^2}}+...+\frac{1}{\sqrt{(2n+2)^2}}\right|=\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+...+\frac{1}{2n+2}\geq\frac{n}{2n+2}=$$

$$=\frac{n+1-1}{2n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\geq\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Dakle, birajući da je $\varepsilon = \frac{1}{4}$, na osnovu Košijevog kriterijuma konvergencije sledi da red $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$ divergira.

7. Izračunati $\sum\limits_{n \geq 2} \ln \frac{n^3+1}{n^3-1}$.

Primetimo da je za svako $n \in N, n \geq 2$:

$$(n+1)^3 + 1 = (n+1+1)((n+1)^2 - (n+1) + 1) = (n+2)(n^2+n+1) = \frac{(n+2)(n^3-1)}{n-1}.$$

Koristeći datu jednakost, dobijamo:

$$s_n = \sum_{k=2}^{n+1} \ln \frac{k^3+1}{k^3-1} = \ln \frac{2^3+1}{2^3-1} + \ln \frac{3^3+1}{3^3-1} + \ldots + \ln \frac{n^3+1}{n^3-1} + \ln \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3-1} =$$

$$= \ln \frac{2^3+1}{2^3-1} + \ln \frac{\frac{(2+2)(2^3-1)}{2-1}}{3^3-1} + \ldots + \ln \frac{\frac{(n-1+2)((n-1)^3-1)}{n-1-1}}{n^3-1} + \ln \frac{\frac{(n+2)(n^3-1)}{n-1}}{(n+1)^3-1} =$$

$$= \ln \frac{(2^3+1)\frac{4}{1} \ldots \frac{n+1}{n-2}\frac{n+2}{n-1}}{(n+1)^3-1} = \ln \frac{9\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{(n+1)^3-1} = \ln \frac{9(n^3+3n^2+2n)}{6(n^3+3n^2+3n)}.$$

Stoga je $s = \sum\limits_{n \geq 2} \ln \frac{n^3+1}{n^3-1} = \lim\limits_{n \to \infty} s_n = \ln \frac{3}{2}$.

8. Dokazati da je $\sum arctg \frac{1}{2n^2} = \frac{\pi}{4}$.

Napomena: Koristiti identitet $arctgx + arctgy = arctg \frac{x+y}{1-xy}, xy < 1.$

Posmatrajmo niz parcijalnih suma datog reda:

$$s_1 = a_1 = arctg \frac{1}{2},$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = arctg \frac{1}{2} + arctg \frac{1}{8} = arctg \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{16}} = arctg \frac{2}{3} \ldots$$

Dokazaćemo indukcijom da je $s_n = arctg \frac{n}{n+1}, n \in N.$

Pretpostavimo da je $s_n = arctg \frac{n}{n+1}$. Pokazujemo da je $s_{n+1} = arctg \frac{n+1}{n+2}$:

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = arctg\frac{n}{n+1} + arctg\frac{1}{2(n+1)^2} = arctg\frac{\frac{n}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2}}{1 - \frac{n}{2(n+1)^3}} =$$

$$= arctg\frac{(n+1)(2n^2+2n+1)}{2n^3+6n^2+5n+2} = arctg\frac{n+1}{n+2}.$$

Stoga je $s = \sum arctg\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} s_n = arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$

Redovi sa nenegativnim članovima

Red $\sum a_n$ je red sa nenegativnim članovima ako postoji $n_0 \in N$ takav da je $a_n \geq 0$ za sve $n \geq n_0, n \in N$. Red sa nenegativnim članovima konvergira ako i samo ako je njegov niz parcijalnih suma ograničen sa gornje strane.

Među brojnim kriterijumima za konvergenciju redova sa nenegativnim članovima izdvajamo:

Uporedni kriterijum I: Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi sa nenegativnim članovima i neka postoji $n_0 \in N$ tako da je $a_n \leq b_n$, za sve $n \geq n_0$. Tada, ako red $\sum b_n$ konvergira, onda i red $\sum a_n$ konvergira, a ako red $\sum a_n$ divergira, onda i red $\sum b_n$ divergira.

Uporedni kriterijum II: Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi sa nenegativnim članovima, $a_n, b_n \neq 0$ i neka postoji $\alpha \in R,\ \alpha > 0,$ tako da je $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \alpha.$ Tada redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ istovremeno konvergiraju ili divergiraju i to označavamo sa $\sum a_n \sim \sum b_n$.

Dalamberov (količnički) kriterijum: Neka je $\sum a_n$ red sa nenegativnim članovima, $a_n \neq 0$. Ako je $\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$ tada red $\sum a_n$ konvergira, a ako je $\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$ tada $\sum a_n$ divergira.

Košijev korenski kriterijum: Neka je $\sum a_n$ red sa nenegativnim članovima. Ako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1,$ tada red $\sum a_n$ konvergira, a ako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1,$ tada $\sum a_n$ divergira.

Napomena: Košijev kriterijum je precizniji od Dalamberovog.

Integralni kriterijum: Neka je $\sum a_n = \sum f(n)$ red sa nenegativnim članovima, pri čemu je $f(x)$ realna funkcija definisana, neprekidna, nenegativna i monotono opadajuća za $x \geq n_0,\ x \in R,\quad n_0 \in N.$ Tada su red $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$ i integral $\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ istovremeno konvergentni ili divergentni.

Zadaci

1. Koristeći uporedni kriterijum I, ispitati konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum \frac{2+\sin n}{n}$; **b)** $\sum\limits_{n\geq 3} \frac{\ln n}{n-1}$; **c)** $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{3^n - 1}{2^n + 5^n}$;

d) $\sum \frac{\operatorname{arctg}(2n)+3}{n^2+1}$; **e)** $\sum \frac{n^2 - n}{\sqrt[3]{n^{10} + 7n^4 + 2}}$.

a) Lako se uočava da su u svim primerima dati redovi sa nenegativnim članovima tako da to nećemo posebno naglašavati (osim u slučajevima u kojima je to neophodno).

Kako je $\frac{2+\sin n}{n} \geq \frac{1}{n},$ a red $\sum \frac{1}{n}$ divergira, na osnovu uporednog kriterijuma I, sledi da i red $\sum \frac{2+\sin n}{n}$ divergira.

b) Kako je $\ln n > 1$ za $n \geq 3$ sledi da je $\frac{\ln n}{n-1} > \frac{1}{n},$ red $\sum \frac{1}{n}$ divergira, na osnovu uporednog kriterijuma I, sledi da i red $\sum\limits_{n\geq 3} \frac{\ln n}{n-1}$ divergira.

c) Kako je $\frac{3^n-1}{2^n+5^n}<\frac{3^n}{5^n}$, a geometrijski red $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ konvergira $\left(|q|=\frac{3}{5}<1\right)$, na osnovu uporednog kriterijuma I, sledi da i red $\sum_{n\geq 0}\frac{3^n-1}{2^n+5^n}$ konvergira

d) Kako je $|arctg(2n)|\leq\frac{\pi}{2}$, sledi da je $0<\frac{3-\frac{\pi}{2}}{n^2+1}\leq\frac{3+arctg(2n)}{n^2+1}\leq\frac{3+\frac{\pi}{2}}{n^2+1}$ pa kako red $\left(3+\frac{\pi}{2}\right)\sum\frac{1}{n^2+1}$ konvergira, na osnovu uporednog kriterijuma I, sledi da i red $\sum\frac{arctg(2n)+3}{n^2+1}$ konvergira.

e) Kako je $\frac{n^2-n}{\sqrt[3]{n^{10}+7n^4+2}}\leq\frac{n^2}{\sqrt[3]{n^{10}}}=\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$, a red $\sum\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ konvergira $\left(\frac{4}{3}>1\right)$, na osnovu uporednog kriterijuma I, sledi da i red $\sum\frac{n^2-n}{\sqrt[3]{n^{10}+7n^4+2}}$ konvergira.

2. Koristeći uporedni kriterijum II, ispitati konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum\frac{2n^2+n+3}{n^5+4n^2}$; **b)** $\sum ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$; **c)** $\sum(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$;

d) $\sum\frac{\sqrt{n^2+1}}{(n^4+1)sin\frac{1}{n}}$; **e)** $\sum\left(1-cos\frac{2}{n}\right)$; **f)** $\sum_{n\geq 2}\frac{2}{\sqrt{n}}ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.

a) Kako je $\frac{2n^2+n+3}{n^5+4n^2}\sim\frac{2n^2}{n^5}=\frac{2}{n^3}$, a red $2\sum\frac{1}{n^3}$ konvergira $(3>1)$, na osnovu uporednog kriterijuma II, sledi da i red $\sum\frac{2n^2+n+3}{n^5+4n^2}$ konvergira.

b) Kako je $ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}$, a red $\sum\frac{1}{n}$ dinvergira (harmonijski), na osnovu uporednog kriterijuma II, sledi da i red $\sum ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ divergira.

c) Kako je

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}=(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})\frac{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}+1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}+1}=\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}+1}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}},$$

a red $\sum \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ divergira $\left(\frac{2}{3} < 1\right)$, na osnovu uporednog kriterijuma II, sledi da i red $\sum (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$ divergira.

d) Iz $\frac{1}{n} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sledi $sin\frac{1}{n} > 0,$ za sve $n \in N$ pa je red $\sum \frac{\sqrt{n^2+1}}{(n^4+1)sin\frac{1}{n}}$ red sa nenegativnim članovima. Kako je $\frac{\sqrt{n^2+1}}{(n^4+1)sin\frac{1}{n}} \sim \frac{\sqrt{n^2}}{n^4\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^2}$, a red $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergira $(2 > 1)$, na osnovu uporednog kriterijuma II, sledi da i red $\sum \frac{\sqrt{n^2+1}}{(n^4+1)sin\frac{1}{n}}$ konvergira.

e) Budući da je $1 - cos\frac{2}{n} = 2sin^2\frac{1}{n} \sim \frac{2}{n^2},$ a red $2\sum \frac{1}{n^2}$ konvergira $(2 > 1)$, na osnovu uporednog kriterijuma II, sledi da i red $\sum \left(1 - cos\frac{2}{n}\right)$ konvergira.

f) Kako je $\frac{2}{\sqrt{n}}ln\frac{n+1}{n-1} = \frac{2}{\sqrt{n}}ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{2}{\sqrt{n}}\frac{2}{n-1}, \sim \frac{4}{n\sqrt{n}}$, a red $4\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konvergira $\left(\frac{3}{2} > 1\right)$, na osnovu uporednog kriterijuma II, sledi da i red $\sum_{n\geq 2} \frac{2}{\sqrt{n}}ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ konvergira.

3. Koristeći Dalamberov kriterijum, ispitati konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum \frac{n^2}{2^n}$; **b)** $\sum \frac{3^n}{n!}$; **c)** $\sum \frac{n^n}{n!}$;

d) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; **e)** $\sum \frac{n!}{(2n-1)!!}$; **f)** $\sum \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)...(1+a^n)}, a \geq 0.$

a) Kako je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{2n^2}=\frac{1}{2}<1,$ red $\sum\frac{n^2}{2^n}$ konvergira na osnovu Dalamberovog kriterijuma.

b) Kako je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0<1,$ red $\sum\frac{3^n}{n!}$ konvergira na osnovu Dalamberovog kriterijuma.

c) Kako je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1,$ red $\sum\frac{3^n}{n!}$ divergira na osnovu Dalamberovog kriterijuma.

d) Iz $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n+2}=\frac{1}{4}<1$ sledi da red $\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ konvergira na osnovu Dalamberovog kriterijuma.

e) Kako je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}}{\frac{n!}{(2n-1)!!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}<1,$ red $\sum\frac{n!}{(2n-1)!!}$ konvergira na osnovu Dalamberovog kriterijuma.

f) Za $a=0$, dobija se nula red koji konvergira. Za $a>0,$ na osnovu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^{n+1}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)(1+a^{n+1})}}{\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{1+a^{n+1}}=\begin{cases}0, & a>1\\ \frac{1}{2}, & a=1\\ a, & 0<a<1\end{cases},$$

zaključujemo da je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ za svako $a>0$ pa stoga i red $\sum\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)...(1+a^n)}$ konvergira za svako $a\geq 0.$

4. Koristeći Košijev korenski kriterijum, ispitati konvergrnciju sledećih redova:

a) $\sum \frac{n^2 2^n}{5^n}$; **b)** $\sum \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3n}$; **c)** $\sum \left(\frac{n+9}{n+2}\right)^{2n^2}$;

d) $\sum a^{\frac{n^2+3}{n}}, a \geq 0$; **e)** $\sum \frac{n^2}{\left(a^2+\frac{1}{n}\right)^n}, a \in R$; **f)** $\sum \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

a) Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 2^n}{5^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{5}\sqrt[n]{n^2} = \frac{2}{5} < 1,$ red $\sum \frac{n^2 2^n}{5^n}$ konvergira na osnovu Košijevog korenskog kriterijuma.

b) Zbog toga što je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} < 1,$ red $\sum \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3n}$ konvergira na osnovu Košijevog korenskog kriterijuma.

c) Iz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+9}{n+2}\right)^{2n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+9}{n+2}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{7}\cdot\frac{14n}{n+2}} = e^{14} > 1$ sledi da red $\sum \left(\frac{n+9}{n+2}\right)^{2n^2}$ divergira na osnovu Košijevog korenskog kriterijuma.

d) Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^{\frac{n^2+3}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{n^2+3}{n^2}} = a$, sledi da dati red konvergira za $0 \leq a < 1$, a divergira za $a > 1.$ Za $a = 1,$ dobija se red $\sum 1$ i on drivergira (opšti član mu je 1). Dakle, red $\sum a^{\frac{n^2+3}{n}}$ konvergira za $0 \leq a < 1,$ a divergira za $a \geq 1.$

e) Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(a^2+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{a^2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^2}$, dobijamo da dati red konvergira za $a^2 > 1,$ tj. kada je $|a| > 1,$ a divergira za $|a| < 1.$ Za $|a| = 1,$ dobija se red

$\sum \frac{n^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, a on divergira (opšti član mu teži ka ∞). Dakle, za $a \in (-\infty,-1) \bigcup (1,\infty)$

red $\sum \frac{n^2}{\left(a^2+\frac{1}{n}\right)^n}$ konvergira, a divergira za $a \in [-1,1]$.

f) Iz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$ sledi da red

$\sum \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ konvergira na osnovu Košijevog korenskog kriterijuma.

5. Koristeći integralni kriterijum, ispitati konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum \frac{1}{n^p}, p \in R$; **b)** $\sum \frac{n}{e^n}$; **c)** $\sum\limits_{n\geq 3} \frac{1}{n \ln n}$.

a) Za $p \leq 0$ red $\sum \frac{1}{n^p}$ divergira jer mu opšti član ne teži nuli kada $n \to \infty$.

Za $p > 0$ posmatrajmo funkciju $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Ona je definisana, neprekidna, nenegativna i monotono nerastuća za $x \geq 1, x \in R$. Kako nesvojstveni integral

$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \lim\limits_{T\to\infty} \frac{T^{1-p}-1}{1-p}, p \neq 1 \\ \lim\limits_{T\to\infty} (\ln T - 0), p = 1 \end{cases}$ konvergira za $p > 1$, a divergira za $0 < p \leq 1$, sledi da na osnovu integralnog kriterijuma red $\sum f(n) = \sum \frac{1}{n^p}$ konvergira za $p > 1$, a divergira za $p \leq 1$.

b) Posmatrajmo funkciju $f(x) = \frac{x}{e^x}$. Ona je definisana, neprekidna, nenegativna i monotono nerastuća za $x \geq 1, x \in R$. Kako je $\int \frac{x}{e^x} dx = -\frac{x+1}{e^x} + C$, sledi da je $\int_1^\infty \frac{x}{e^x} dx = \frac{2}{e} < \infty$, tj . na osnovu integralnog kriterijuma red $\sum f(n) = \sum \frac{n}{e^n}$ konvergira.

c) Posmatrajmo funkciju $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x\ln x}}$. Ona je definisana, neprekidna, nenegativna i monotono nerastuća za $\boldsymbol{x\geq 3, x\in R}$. Kako je $\int\frac{1}{x\ln x}dx=\ln(\ln x)+C,$ sledi da je $\int_1^\infty\frac{1}{x\ln x}dx=\infty$ pa na osnovu integralnog kriterijuma red $\sum f(n)=\sum\limits_{n\geq 3}\frac{1}{n\ln n}$ divergira.

6. Ispitati konvergenciju sledećih redova:

a) $\boldsymbol{\sum\frac{(2+(-1)^n)^n}{2^n}}$; **b)** $\boldsymbol{\sum\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}$; **c)** $\boldsymbol{\sum\frac{(2n)!!e^n}{(2n-1)^{n+2}}}$.

a) Kako je $2+(-1)^n\geq 1,$ dati red je red sa nenegativnim članovima pa možemo primeniti Košijev korenski kriterijum. Iz $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2+(-1)^n)^n}{2^n}}=\frac{3}{2}$ sledi da red $\sum\frac{(2+(-1)^n)^n}{2^n}$ divergira.

b) Iz $a_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)\cdot 2n}=1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n},$ na osnovu uporednog kriterijuma I sledi da red $\sum\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ divergira (red $\frac{1}{2}\sum\frac{1}{n}$ divergira).

c) Koristići formule $(2n)!!=2^n n!$ i $n!\sim\sqrt{2n\pi}\frac{n^n}{e^n}, n\to\infty$ (Stirlingova formula), dobijamo:

$$a_n=\frac{(2n)!!e^n}{(2n-1)^{n+2}}=\frac{2^n n!e^n}{(2n-1)^{n+2}}\sim\frac{2^n\sqrt{2n\pi}n^n e^n}{(2n-1)^{n+2}e^n}=\sqrt{2n\pi}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^n\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Takođe, na osnovu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{(2n-1)\frac{n}{2n-1}}=e^{\frac{1}{2}},$ dobijamo: $a_n\sim\sqrt{2e\pi}\frac{\sqrt{n}}{2^2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\sim\frac{\sqrt{2e\pi}}{4}\frac{\sqrt{n}}{n^2}\sim\frac{\sqrt{2e\pi}}{4}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ pa kako red $\frac{\sqrt{2e\pi}}{4}\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konvergira

$\left(\frac{3}{2} > 1\right)$, na osnovu uporednog kriterijuma II, sledi da konvergira i red $\sum \frac{(2n)!!e^n}{(2n-1)^{n+2}}$.

Napomena: U primerima ovog zadatka Dalamberov kriterijum ne bi dao odgovor o konvergenciji datih redova (a) $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty, \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$).

Naizmenični redovi

Ako red $\sum a_n$ (obično) konvergira, a ne konvergira apsolutno, tada on konvergira uslovno. Red oblika $\sum (-1)^{n-1} b_n$, $b_n \geq 0$, naziva se naizmenični (alternativni) red.

Lajbnicov kriterijum: Neka je dat naizmenični red $\sum (-1)^{n-1} b_n, b_n \geq 0$ i neka su ispunjeni sledeći uslovi:

1) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$;

2) $\{b_n\}, n \in N$ je monotono nerastući niz.

Tada naizmenični red $\sum (-1)^{n-1} b_n$ konvergira i važi $|R_n| \leq b_{n+1}$.

Na primer, za harmonijski red $\sum \frac{1}{n}$ znamo da divergira. Međutim, alternativni harmonijski red $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergira jer su zadovoljeni uslovi Lajbnicovog kriterijuma $\left(1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ i } 2)\ \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}\right)$. Stoga, kažemo da red $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ uslovno konvergira i njegova suma je $s = \ln 2.$

Zadaci

1. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}$; **b)** $\sum(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; **c)** $\sum(-1)^{n-1}\frac{2n+3}{n^3+n^2+1}$;

d) $\sum\limits_{n\geq 3}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$; **e)** $\sum\limits_{n\geq 2}(-1)^{n-1}\frac{n}{n\sqrt{n}-1}$.

a) Kako niz $a_n=(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1},\ n\in N$ ima dve tačke nagomilavanja $\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ ne postoji pa red $\sum(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}$ divergira (obično) pa samim tim i apsolutno.

b) Ako posmatramo red $\sum|a_n|$, dobijamo da je $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$ pa na osnovu Košijevog korenskog kriterijuma dobijamo da red $\sum(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ konvergira apsolutno pa samim tim konvergira i obično.

c) Kako je $\frac{2n+3}{n^3+n^2+1}\sim\frac{2n}{n^3}=\frac{2}{n^2}$ i kako red $2\sum\frac{1}{n^2}$ konvergira, na osnovu uporednog kriterijuma II, konvergira i red $\sum|a_n|$, tj. $\sum(-1)^{n-1}\frac{2n+3}{n^3+n^2+1}$ konvergira apsolutno pa samim tim i obično.

d) Kako je $|a_n|=\frac{1}{n-\ln n}\geq\frac{1}{n}, n\in N, n\geq 3,$ na osnovu uporednog kriterijuma I, iz divergencije reda $\sum\limits_{n\geq 3}\frac{1}{n}$ sledi da red $\sum\limits_{n\geq 3}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$ apsolutno divergira. Običnu konvergenciju ispitujemo Lajbnicovim kriterijumom:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$;

2) Krenuvši od nejednakosti $\frac{1}{n+1-\ln(n+1)}\leq\frac{1}{n-\ln n}$, dobijamo:

$n - ln\,n \le n + 1 - ln(n+1)$, tj. $ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \le 1$, što je tačno za sve $n \in N$ jer je $ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \le ln\,2 < ln\,e = 1.$

Dakle, kako su zadovoljeni uslovi Lajbnicovog kriterijuma, red $\sum_{n\ge 3} \frac{(-1)^{n-1}}{n - ln\,n}$ konvergira uslovno.

e) Kako je $|a_n| = \frac{n}{n\sqrt{n}-1} \sim \frac{n}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}, n \in N, n \ge 2,$ na osnovu uporednog kriterijuma II, iz divergencije reda $\sum_{n\ge 2} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sledi da red $\sum_{n\ge 2} (-1)^{n-1} \frac{n}{n\sqrt{n}-1}$ apsolutno divergira. Običnu konvergenciju ispitujemo Lajbnicovim kriterijumom:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{n}-1} = 0$;

2) Krenuvši od nejednakosti $\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} \le \frac{n}{n\sqrt{n}-1}$, dobijamo:

$n(n+1)\sqrt{n} - n - 1 \le n(n+1)\sqrt{n+1} - n,$ tj. $n(n+1)(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) \le 1,$ što je tačno za sve $n \in N, n \ge 2.$

Dakle, kako su zadovoljeni uslovi Lajbnicovog kriterijuma, red $\sum_{n=2} (-1)^{n-1} \frac{n}{n\sqrt{n}-1}$ konvergira uslovno.

2. Pokazati konvergenciju reda $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$ i izračunati njegovu sumu sa tačnošću 0.05.

Kako su zadovoljeni uslovi Lajbnicovog kriterijuma $\left(1)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0,\right.$ $\left. 2)\ \frac{1}{(n+1)(n+2)} \le \frac{1}{n(n+1)}, n \in N\right)$, sledi da red $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$ konvergira (štaviše, dati red i apsolutno konvergira). Tada je $|R_n| \le b_{n+1}$. Rešavanjem nejednačine $b_{n+1} \le 0.05$, dobija se $\frac{1}{(n+1)(n+2)} \le \frac{1}{20}$, tj. $n^2 + 3n + 2 \ge 20$, odakle sledi da je $n \ge 3$.

Dakle, za $n \ge 3$ dobija se suma sa tačnošću 0.05. Uzimajući da je $"n = 3$ dobijamo:

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} \approx s_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

3. Pokazati da suma reda $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ zavisi od redosleda njegovih članova.

Znamo (na osnovu Lajbnicovog kriterijuma) da red $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergira uslovno i neka je $s = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Ako red $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ napišemo u obliku $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots$, dobija se red čiji je čiji je opšti član $a_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} > 0, n \in N$ pa je samim tim $\{s_n\}$ monotono rastući niz i $s > 0.$

Međutim, ako redu $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ izmenimo redosled članova na sledeći način:

$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots,$ dobijamo:

$$\sum \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) = \sum \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{2} \sum \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right).$$

Ako pretpostavimo da je suma reda ostala nepromenjena, dobija se $s = \frac{s}{2}$, tj. $s = 0,$ što nas dovodi u kontradikciju.

Red $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ nije apsolutno konvergentan pa mu zbog toga ne možemo menjati redosled članova!

4. Pokazati da proizvod dva konvergentna reda može biti divergentan red.

Red $\sum_{n \ge 0} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$ je konvergentan na osnovu Lajbnicovog kriterijuma $\left(1) \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0 \text{ i } 2) \ \frac{1}{\sqrt{n+2}} \le \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$, ali nije apsolutno konvergentan jer red $\sum_{n \ge 0} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ divergira.

Posmatrajmo proizvod reda $\sum_{n \ge 0} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$ sa samim sobom:

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k+1}}\frac{(-1)^{n-k+1}}{\sqrt{n+1-k}}=\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{k+1}\sqrt{n+1-k}}.$$

Koristeći odnos između aritmetičke i geometrijske sredine $\left(\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}, a,b>0\right)$,

dobijamo da je $\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}\geq\frac{2}{k+1+n+1-k}=\frac{2}{n+2}$.

Neka je $c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{\sqrt{k+1}\sqrt{n+1-k}}, n\in N.$ Iz $|c_n|\geq\frac{n+1}{n+2}$ sledi da $\lim_{n\to\infty}|c_n|\neq 0.$ Stoga je i

$\lim_{n\to\infty} c_n\neq 0$ pa red $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$ divergira.

Znamo da proizvod dva apsolutno konvergentna reda mora biti apsolutno konvergentan red, ali kao što smo videli u datom primeru, proizvod dva konvergentna reda koji nisu apsolutno konvergentni, može biti i divergentan red.

5. U zavisnosti od realnog parametra a, ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum\frac{(-1)^n}{n^a}$; **b)** $\sum\frac{(-1)^n a^{2n}}{n+1}$.

a) Kako je $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=\begin{cases}0, a>0\\ 1, a=0\\ \infty, a<0\end{cases}$, opšti član reda $\sum\frac{(-1)^n}{n^a}$ neće težiti nuli za $a\leq 0$ pa dati red divergira (samim tim i apsolutno divergira).

Znamo da red $\sum\frac{1}{n^a}$ konvergira za $a>1$, a divergira za $a\leq 1$. Stoga, red $\sum\frac{(-1)^n}{n^a}$ konvergira apslolutno (samim tim i obično) za $a>1$.

Ako je $0<a\leq 1,$ onda red $\sum\frac{(-1)^n}{n^a}$ divergira apsolutno, a kako su zadovoljeni uslovi Lajbnicovog kriterijuma $\left(1)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0 \text{ i } 2)\frac{1}{n^{a+1}}\leq\frac{1}{n^a}\right)$, sledi da u tom slučaju red $\sum\frac{(-1)^n}{n^a}$ konvergira uslovno.

b) Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{2n}}{n+1} = \begin{cases} 0, |a| \le 1 \\ \infty, |a| > 1 \end{cases}$, opšti član reda $\sum \frac{(-1)^n a^{2n}}{n+1}$ neće težiti nuli za $|a| > 1$ pa dati red divergira (samim tim i apsolutno divergira).

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^{2n}}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^2}{\sqrt[n]{n+1}} = a^2$, na osnovu Košijevog korenskog kriterijuma za $a^2 < 1$, tj. $|a| < 1$, red $\sum \frac{(-1)^n a^{2n}}{n+1}$ konvergira apsolutno (samim tim i obično konvergira).

Za $|a| = 1$, dobija se red $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$, koji uslovno konvergira (na osnovu Lajbnicovog kriterijuma).

6. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$; **b)** $\sum (-1)^n \ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)$.

a) Primetimo da $\frac{1}{\sqrt{n}} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i $\sin\frac{1}{\sqrt{n}} \ge 0, n \in N$ pa je $\sum |a_n| = \sum \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$. Kako je $\sin\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}, n \to \infty,$ a red $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergira $\left(\frac{1}{2} < 1\right)$, sledi da red $\sum (-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ apslolutno divergira.

Kako je: $1)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ i $2)\ \sin\frac{1}{\sqrt{n+1}} \le \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}\right.$ i funkcija $\sin x$ je rastuća na intervalu $\left.\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$, zadovoljeni su uslovi Lajbnicovog kriterijuma pa red $\sum (-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ uslovno divergira.

b) Primetimo da $\frac{n^2+3}{n^2+2} \ge 1$ i $\ln\frac{n^2+3}{n^2+2} \ge 0, n \in N$ pa je $\sum |a_n| = \sum \ln\frac{n^2+3}{n^2+2}$. Kako je $\ln\frac{n^2+3}{n^2+2} = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2+2}\right) \sim \frac{1}{n^2+2} \sim \frac{1}{n^2}, n \to \infty,$ a red $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergira $(2 > 1)$, sledi da red $\sum (-1)^n \ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)$ apslolutno konvergira pa samim tim i obično.