# KOMPLETNI METRIČKI PROSTORI, NEPOKRETNA TAČKA

19. februar 2024.

## Kompletni metrički prostori

### Definicija

*Za niz* $\{a_n\} \subset X$ *kažemo da je* **Košijev**[1] **niz** *u metričkom prostoru* $(X, d)$ *ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \wedge m \geq n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon),$$

*odnosno u ekvivalentnom obliku*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow d(a_{n+p}, a_n) < \varepsilon).$$

[1] Koši, L. A. (Louis Augustin Cauchy, 1789-1857) - francuski matematičar

## Tvrđenje

*Ako je niz* $\{a_n\} \subset X$ *konvergentan u metričkom prostoru* $(X, d)$*, tada je* $\{a_n\}$ *Košijev niz u* $(X, d)$*.*

*Dokaz.* Ako je $a \in X$ granična vrednost niza $\{a_n\}$, tada za svako $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $n \in \mathbb{N}$, za koje je $n \geq n_0$, sledi

$$d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Takođe za svaka dva prirodna broja $m, n \geq n_0$ važi

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pa je niz $\{a_n\}$ Košijev. □

## Tvrđenje

*Neka je $\{a_n\}$ Košijev niz u metričkom prostoru $(X, d)$. Ako neki podniz $\{a_{n_k}\}$ niza $\{a_n\}$ konvergira prema $a \in X$ u $(X, d)$, tada i niz $\{a_n\}$ konvergira ka $a$ u $(X, d)$.*

*Dokaz.* Neka je dato proizvoljno $\varepsilon > 0$. Tada po pretpostavci postoji takav $n_0 \in \mathbb{N}$ da iz $m, n \geq n_0$ sledi

$$d(a_m, a_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kako je $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$, postoji $k \in \mathbb{N}$ da je $n_k \geq n_0$ i da je

$$d(a_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ako je, dakle, $n \geq n_0$, onda je

$$d(a_n, a) \leq d(a_n, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pa je teorema dokazana. □

## Tvrđenje

*Svaki Košijev niz $\{a_n\}$ u metričkom prostoru $(X, d)$ je ograničen u datom prostoru.*

*Dokaz.* Za $\varepsilon = 1$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za $n \geq n_0$ sledi $d(a_n, a_{n_0}) < 1$. Dakle, $\{a_n : n \geq n_0\} \subset L(a_{n_0}, 1)$.

- Ako je $n_0 = 1$ svi članovi niza su u otvorenoj lopti $L(a_{n_0}, 1)$ pa je niz $\{a_n\}$ ograničen.
- Za slučaj da je $n_0 > 1$ uzmimo da je

$$D = \max\{1, d(a_{n_0}, a_1), d(a_{n_0}, a_2), ..., d(a_{n_0}, a_{n_0-1})\}.$$

Tada je

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a_{n_0}) + d(a_{n_0}, a_m) < 2D,$$

odnosno niz $\{a_n\}$ je ograničen. □

U svakom metričkom prostoru Košijev niz ne mora konvergirati. Na primer, posmatrajmo niz $\{a_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$ dat sa

$$a_n = \frac{n}{n+1}.$$

S obzirom da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, to je $\{a_n\}$ konvergentan niz u $\mathbb{R}$, pa je u $\mathbb{R}$ i Košijev, odakle sledi da je Košijev i u $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, ali konvergira ka $1 \notin \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Dakle, svaki Košijev niz prostora $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ne konvergira u tom prostoru.

## Definicija

*Metrički prostor $(X, d)$ je* **kompletan** *ukoliko u njemu svaki Košijev niz konvergira.*

## Tvrđenje

*Metrički prostor $\mathbb{R}$ je kompletan.*

*Dokaz.* Neka je $\{a_n\}$ Košijev niz u $\mathbb{R}$. Tada je on u metričkom prostoru $\mathbb{R}$ i ograničen, pa ćemo dokazati da on ima samo jednu tačku nagomilavanja, a odatle će slediti da je konvergentan.

Kako je $\{a_n\}$ ograničen niz, to prema Bolcano-Vajerštrasovoj teoremi sledi da niz $\{a_n\}$ ima bar jednu tačku nagomilavanja $a$.

Dokažimo da je $a$ jedina tačka nagomilavanja. Pretpostavimo da je $b \neq a$ još jedna tačka nagomilavanja. Uzmimo da je

$$\varepsilon = \frac{1}{3}|b - a|.$$

Neka su

$$a_n, n \in N' \text{ svi članovi niza za koje važi } a_n \in L(a, \varepsilon),$$

$$a_m, m \in N'' \text{ svi članovi niza za koje važi } a_m \in L(b, \varepsilon).$$

S obzirom da su $a$ i $b$ tačke nagomilavanja, sledi da su $N'$ i $N''$ beskonačni podskupovi skupa $\mathbb{N}$. Tada je

$$|a_n - a_m| > \varepsilon,$$

pa sledi da niz $\{a_n\}$ nije Košijev. Kontradikcija! Dakle, niz $\{a_n\}$ ima samo jednu tačku nagomilavanja $a$. $\square$

- Teorema važi i za metrički prostor $\mathbb{R}^m$, tj. za svako $m \in \mathbb{N}$ metrički prostor $\mathbb{R}^m$ je kompletan.
- Takođe i metrički prostor $\mathbb{C}$ je kompletan.

## Primer

*Niz $\{a_n\}$, gde je*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

*divergira u $\mathbb{R}$.*

*Da bismo to dokazali, pokazaćemo da niz nije Košijev. Kako je*

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

*to sledi da se $|a_{2n} - a_n|$ ne može ni za jedno $n$ učiniti manje od $\frac{1}{2}$, odnosno dati niz nije Košijev, pa samim tim sledi da je niz $\{a_n\}$ divergentan.*

Potprostor kompletnog prostora ne mora biti kompletan. Tako prostor $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva nije kompletan, jer za niz $\{a_n\} \subset \mathbb{Q}$,

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

važi da

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e \notin \mathbb{Q}.$$

Prostor $\mathbb{Q}$ se može kompletirati, tj. proširiti do najmanjeg prostora koji je kompletan. Tako možemo doći do skupa $\mathbb{R}$ realnih brojeva.

Važi sledeća teorema

## Tvrđenje

*Zatvoren potprostor kompletnog metričkog prostora je kompletan.*

### Definicija

*Ako je $f$ preslikavanje skupa $X$ u samog sebe, tada za tačku $x \in X$ kažemo da je* **fiksna** (**nepokretna**) *tačka za preslikavanje $f$ ako je $f(x) = x$.*

### Definicija

*Za preslikavanje $f : X \to Y$ metričkog prostora $(X, d_1)$ u metrički prostor $(Y, d_2)$ kažemo da vrši* **kontrakciju** *ako postoji realan broj $\lambda \in (0, 1)$ tako da za svako $x_1, x_2 \in X$ važi*

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_1(x_1, x_2).$$

*Broj $\lambda$ zovemo* **koeficijent kontrakcije**, *a preslikavanje $f$* **kontrakcija**.

- Važi **teorema Banaha**[2] o fiksnoj tački:

## Tvrđenje

*Ako je* $(X, d)$ *kompletan metrički prostor i* $f : X \to X$ *kontrakcija sa koeficijentom* $\lambda$*, tada postoji jedna i samo jedna fiksna tačka* $a \in X$ *preslikavanja* $f$ *i važi da je*

$$d(a, a_n) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(a_0, a_1),$$

*gde je* $a_0 \in X$ *proizvoljna tačka, a* $a_i = f(a_{i-1})$, $i \in \mathbb{N}$.

(teorema daje i ocenu greške aproksimacije, kada se tačka $a$ aproksimira članom $a_n$ formiranog niza)

[2] Banah, Š. (Stefan Banach, 1892-1945) - poljski matematičar

## Napomena

*Ako je $(X, d)$ kompletan metrički prostor i za preslikavanje $f : X \to X$ važi*

$$d(f(x_1), f(x_2)) < d(x_1, x_2), \quad x_1 \neq x_2,$$

*onda u opštem slučaju ne važi da za preslikavanje $f$ postoji fiksna tačka.*

**Dokaz.** Definišimo preslikavanje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Za $x \neq y$ važi da je

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 + y^2}| = \frac{|x - y||x + y|}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2}}$$

$$< |x - y| \frac{|x + y|}{|x| + |y|} \leq |x - y| \frac{|x| + |y|}{|x| + |y|} = |x - y|,$$

tj. $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, dok preslikavanje nema fiksnu tačku.

## Napomena

*Primetimo da je uslov kompletnosti prostora neophodan!*

Zaista, u tu svrhu posmatrajmo prostor $X = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \setminus \{0\}$ i funkciju $f(x) = x^2$. Pokažimo da je $f$ kontrakcija, da prostor $X$ nije kompletan i da funkcija nema nepokretnu tačku u $X$.

$$d(f(x), f(y)) = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \leq \frac{2}{3}|x - y| = \frac{2}{3}d(x, y),$$

za sve $x, y \in X$. Jasno, zbog $f(x) = x^2 = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$, funkcija $f$ nema u $X$ nepokretnu tačku.

Ako bi $(X, d)$ bio kompletan prostor, na osnovu Banahove teoreme, sledilo bi da funkcija $f : X \to X$ ima nepokretnu tačku, što je kontradikcija.

## Primer

*Dokazati pomoću Banahove teoreme o fiksnoj tački da jednačina* $x^3 - x - 1 = 0$ *ima jedinstveno rešenje nad intervalom* $[1, 2]$.

**Rešenje.** Početna jednačina ekvivalentna je sa $x = \sqrt[3]{x+1}$.

Pokažimo da funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ ima nepokretnu tačku, odnosno da jednačina $f(x) = x$ ima rešenje u intervalu $[1, 2]$.

Kako je $f$ monotono rastuća funkcija, to za $x \in [1, 2]$

$$f(x) \in [f(1), f(2)] = [\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}] \subset [1, 2],$$

pa $f : [1, 2] \to [1, 2]$.

Skup $[1, 2]$ je zatvoren metrički potprostor kompletnog prostora $\mathbb{R}$, pa je i sam kompletan.

Pokažimo da je $f$ kontrakcija. Neka su $x, y \in [1, 2]$ proizvoljni elementi.

$$
\begin{aligned}
d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| &= \left|\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{y+1}\right| \\
= \left|\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{y+1}\right) \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{y+1} + \sqrt[3]{(y+1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{y+1} + \sqrt[3]{(y+1)^2}}\right| \\
&= \frac{|x-y|}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{y+1} + \sqrt[3]{(y+1)^2}} \\
&\le \frac{|x-y|}{\sqrt[3]{(1+1)^2} + \sqrt[3]{1+1}\sqrt[3]{1+1} + \sqrt[3]{(1+1)^2}} \\
&= \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}|x-y| \\
&= \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} d(x, y)
\end{aligned}
$$

Kako su ispunjeni uslovi Banahove teoreme, to postoji jedinstveno rešenje jednačine $x = \sqrt[3]{x+1}$ u intervalu $[1, 2]$.