UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIQKIH NAUKA

Radojka Ciganovi

Diskretna matematika

zbirka rexenih zadataka

Novi Sad, 2021

Sadr aj

Predgovor

Zbirka je podeljenja u dva dela. U prvom delu zbirke emo se bavi ti klasiqnim temama iz kombinatorike, dok je drugi deo posve en odabranim temama iz teorije grafova. Svaki deo sadr i nekoliko glava u kojima su po oblastima grupisani zadaci. Na poqetku svake glave nalazi e se kra i teorijski uvod u kom e biti pono vljeni osnovni pojmovi neophodni za rexavanje zadataka. Sami zadaci su grupisani u 3 poglavlja: uvodni zadaci, ispitni zadaci i zadaci za samostalni rad. Uvodni zadaci su zapravo zadaci qija rexenja su prezentovana na ve bama. U ispitnim zadacima su rexeni zadaci koji su se tokom prethodnih 5 godina pojavili na ispitima. U delu zadaci za samostalni rad e biti dat odre- eni broj nerexenih zadataka koji se ostavljaju qitaocu za ve bu.

Zbirka je jox uvek u fazi izrade i poglavlja e biti a urirana tokom trajanja semestra!

I Kombinatorika

1 Dirihleov princip

U ovom poglavlju emo se baviti jednim od osnovnih kombi natornih principa koji nosi naziv po nemaqkom matematiqaru Dirihleu[1] koji ga je qesto koristio u svojim radovima. Najpozna tija formulacija ovog principa je ona koja govori o razmextanju golubova u kaveze[2], i koja ka e da ako imamo vixe golubova nego xto imamo kaveza, tada bar dva goluba moraju biti smextena u isti kavez. Preciznija formulacija Dirihleovog principa bi bila slede a:

Dirihleov princip. Ako n+1 ili vixe objekata treba smestiti u n kutija, tada se u bar jednoj kutiji nalaze bar dva objekta.

Tvr enje trivijalno va i, jer ako bi se u svakoj kutiji nalazio najvixe jedan objekat, ukupan broj objekata ne bi bio ve i od n, xto je u kontradikciji sa uslovom da je broj objekata barem n+ 1. Primetimo da je tvr enje egzistencijalne prirode i da nam ne e dati odgovor na pitanje koja je kutija u pitanju i koliko se taqno objekata nalazi u njoj, ve samo znamo da takva kutija postoji. Ovo, iako na prvi pogled veoma jednostavno tvr enje, mo e biti korisno oru e prilikom rexavanja nekih izuzetno kompleksnih problema. U nastavku navodimo jedno uopxtenje ovog principa.

Uopxteni Dirihleov princip. Ako je *m* objekata smexteno u *n* kutija, gde je $m > n \cdot r$, za neki prirodan broj *r*, tada se u bar jednoj kutiji nalazi bar $r + 1$ objekat.

I ovo tvr enje se lako dokazuje svo enjem na kontradikciju. Primetimo jox da se Dirihleov princip dobija kao specijalan sluqaj uopxtenog tvr enja kada stavimo da je $r = 1$.

[1]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), najpoznatiji po svom radu u teoriji brojeva i Furijeovim redovima. Jedan je od prvih matematiqara koji su koristili modernu definiciju funkcije.

[2]U literaturi na engleskom jeziku se ovaj princip najqex e mo e na i pod nazivom *The Pigeonhole Principle.*

Uvodni zadaci

1.1. Dokazati da u grupi od 367 osoba postoje dve osobe koje imaju ro endan istog dana.

Rexenje: Broj dana kada osoba mo e da slavi ro endan je 366. Kako u grupi imamo 367 osoba, na osnovu Dirihleovog principa dobi jamo da postoje dve osobe koje imaju zajedniqki ro endan. *Napomena:* Primetimo da tvr enje ne bi moralo da va i za grupu od 366 osoba, poxto bi tada sve osobe mogle da imaju ro endan razliqitog dana u godini.

1.2. Grupa od 30 studenata je polagala test. Jedan student je imao 13 grexaka, dok su svi ostali imali manje grexaka. Dokazati da postoje bar tri studenta koja su napravila isti broj grexaka.

Rexenje: Znamo da je jedan student napravio 13 grexaka, dok je preostalih 29 studeneta imalo od nula do 12 grexaka. Sada 29 studenata treba rasporediti u 13 kutija, pa kako je $29 = 13 \cdot 2 + 3$, na osnovu uopxtenog Dirihleovog principa dobijamo da je bar 3 studenta imalo isti broj grexaka na testu.

II naqin: Pretpostavimo da je najvixe dva studenta napravilo svaki broj grexaka iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, 12\}$. Tada bi ukupan broj studenata morao biti manji ili jednak od $1 + 2 \cdot 13 = 27$, xto je u kontradikciji sa pretpostavkom da je test polagalo 30 stude nata. Prema tome, postoji broj grexaka $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 12\}$ koji su napravila bar 3 studenta.

1.3. U unutraxnjosti jednakostraniqnog trougla stranice du ine 2 raspore eno je 5 taqaka. Dokazati da se bar 2 taqke nalaze na rastojanju manjem od 1.

Rexenje: Ukoliko povuqemo srednje linije dati trougao emo podeliti na 4 manja jednako straniqna trougla stranice du ine 1. Sada treba 5 taqaka rasporediti u qetiri trougla, pa zbog Dirihleovog principa zakljuqujemo da se bar 2 taqke moraju nalaziti u istom malom trouglu. Kako se taqke biraju u unutraxnjosti velikog trougla, nemogu e je da budu smextene na njegovim stranicama, te je rastojanje izme u uoqene dve taqke strogo manje od 1.

1.4. Vojnik puca u metu oblika kvadrata veliqine 70×70. Ispalio je 50 metaka i svaki je pogodio metu. Dokazati da postoje dva pogotka koja se nalaze na rastojanju manjem od 15.

Rexenje: Podelimo metu na 49 kvadrata dimenzije 10×10. Kako imamo 50 pogodaka, na osnovu Dirihleovog principa imamo da se dva pogotka nalaze u istom malom kvadratu. Najve e rasto janje koje mogu imati dve taqke u posmatranom kvadratu odgovara du ini dijagonale i iznosi $d = 10\sqrt{2} \approx 14,1 < 15$, pa se ova dva pogotka nalaze na tra enom rastojanju koje je manje od 15.

d

1.5. Na testiranju je uqestvovalo 65 uqenika. Uqenici su radili 3 kontrolna zadatka i na svakom kontrolnom su dobili jednu od ocena: 2, 3, 4 ili 5. Da li moraju postojati dva uqenika sa istim ocenama na svim radovima?

Rexenje: Uqenik mo e dobiti jednu od 4 ocene na svakom kontro lnom, zbog qega postoji $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ mogu nosti da se dobiju ocene na ova tri kontrolna. Na testiranju uqestvuje 65 uqenika, pa nam Dirihleov princip daje da je bar dva uqenika dobilo iste ocene na sva tri rada.

II naqin: Broj mogu nosti da se dobije ocena na prvom kontrolnom je 4. Kako je $65 = 16 \cdot 4 + 1$, na osnovu uopxtenog Dirihleovog principa znamo da je bar $16 + 1 = 17$ uqenika dobilo istu ocenu na prvom kontrolnom. Posmatrajmo sada uqenike za koje znamo da su dobili istu ocenu na prvom kontrolnom. I na drugom kontrolnom se mogu dobiti 4 ocene, pa kako je $17 = 4 \cdot 4 + 1$ dobijamo da je bar 5 uqenika dobilo iste ocene na prva dva kontrolna. Za kraj posmatrajmo ovih 5 uqenika i poxto je $5 = 1 \cdot 4 + 1$, bar 2 uqenika e morati da dobiju iste ocene na sva tri kontrolna.

1.6. Koliko se najvixe kraljeva mo e postaviti na xahovsku tablu dimenzije 8×8, tako da se oni me usobno ne napadaju?

Rexenje: Mogu e je postaviti 16 kraljeva i jedan od mogu ih razme xtaja je prikazan na slici levo (dovoljno je prona i jedan takav raspored). Pretpostavimo sada da je mogu e rasporediti vixe od 16 kraljeva. Ako podelimo tablu na 16 delova dimenzije 2×2

(slika desno), onda bi se zbog Dirihleovog principa u jednom delu morala nalaziti bar 2 kralja. Me utim, zbog naqina na koji se kralj kre e po xahovskoj tabli ova dva kralja e se uvek napa dati, te je maksimalan broj kraljeva koji se mogu rasporediti na xahovsku tablu 16.

1.7. U grupi od xest osoba svake dve se ili poznaju ili ne poznaju. Dokazati da se u ovoj grupi mogu na i 3 osobe tako da se sve tri me usobno poznaju ili se sve tri osobe me usobno ne poznaju.

Rexenje: Postavimo osobe u temena pravilnog xestougla *ABCDEF*. Ukoliko se dve osobe poznaju oboji emo odgovaraju u du plavom bojom, a ako se ne poznaju, du e biti obojena crvenom bojom. Sada je cilj zadatka prona i trougao koji ima sve tri stranice obojene plavom ili sve tri stranice obojene crvenom bojom (cilj je prona i jednobojni trougao). Posmatrajmo osobu koja odgovara temenu *A.* Iz temena *A* izlazi 5 du i koje su obojene sa jednom od 2 boje. Kako je 5 = 2 · 2 + 1 zbog uopxtenog Dirihleovog principa dobijamo da bar 2 + 1 = 3 du i moraju biti obojene istom bojom.

B *F E* *C*

F E

D

C *A*

A

D *B*

Pretpostavimo, bez umanjenja opxtosti, da su du i *AB, AC* i *AD* obojene plavom bojom. Ako je sada bar jedna od du i *BC, BD* ili *CD* tako e plava, na primer du *BD,* dobijamo da je *4ABD* plavi

trougao (pogledati levu sliku). U sluqaju da nijedna od ove tri du i nije plava, sve tri du i moraju biti crvene i tada imamo da je *4BCD* crveni trougao (desna slika).

Napomena: Na slici smo plave du i predstavili punom linijom, a crvene isprekidanom.

1.8. Koliko najmanje karata treba izvu i iz standardnog xpila sa 52 karte da bi se me u izvuqenim kartama sigurno nalazile *a)* qetiri karte sa istim znakom;

b) bar tri karte sa znakom srca?

Rexenje: a) Ukoliko izvuqemo po tri karte od svakog znaka, me u izvuqenih 12 karata ne e postojati qetiri sa istim znakom. Prva naredna karta koju izvuqemo e sa tri prethodno izvuqene karte obezbediti da imamo qetiri karte istog znaka. Prema tome, tek kada izvuqemo $3 \cdot 4 + 1 = 13$ karata bi emo sigurni da imamo qetiri karte istog znaka. (Sa 12 izvuqenih karata mo emo imati situaciju da od svakog znaka imamo samo po 3 karte.) Primetimo da u ovom primeru uopxteni Dirihleov princip mo emo isko risti da proverimo da li smo dobro rexili zadatak.

b) Najgora situacija koju mo emo imati je da izvuqemo sve karte sa znakom tref, pik i karo, pre ijedne karte sa znakom herc. Dakle, minimalan broj karata koji treba izvuqi da bi se me u izvuqenim kartama sigurno nalazila tri herca je $3 \cdot 13+3 = 42$. Ovde ne kori stimo uopxteni Dirihleov princip, poxto elimo da doka emo da me u izvuqenim kartama uvek imamo 3 karte sa znakom srca, a ne 3 karte istog znaka.

Ispitni zadaci

1.9. Dokazati da u svakom desetoqlanom podskupu skupa prirodnih brojeva postoje dva broja koja poqinju sa istom cifrom.

Rexenje: Svaki prirodni broj za prvu cifru mo e imati jednu od cifara iz skupa $\{1, 2, 3, . . . , 9\}$ (nula ne mo e biti prva cifra). Posmatramo podskup skupa prirodnih brojeva sa 10 elemenata, a kako mogu nosti za prvu cifru imamo 9, primenom Dirihleovog principa dobijamo da u datom podskupu postoje bar dva broja koja imaju istu poqetnu cifru.

1.10. Dokazati da u dekadnom zapisu svakog dvadeset jednocif renog prirodnog broja postoji cifra koja se pojavila bar tri

puta. Da li isto tvr enje va i i za dvadesetocifrene prirodne brojeve?

Rexenje: Za predstavljanje prirodnih brojeva u dekadnom zapisu koristi se ukupno 10 cifara. Posmatrajmo prirodne brojeve koji imaju 21 cifru. Kako je $21 = 2 \cdot 10 + 1$, iz uopxtenog Dirihleovog principa dobijamo da se u dekadnom zapisu posmatranog broja neka cifra pojavila bar 3 puta. Isto tvr enje ne va i za prirodne brojeve sa 20 cifara, poxto postoje brojevi u qijem dekadnom zapisu smo svaku cifru upotrebili taqno dva puta (na primer broj $998877 . . . 221100$).

1.11. U knji aru je pred poqetak nove xkolske godine dostavljeno 25 kutija sa sveskama koje imaju listove na linije, kvadrati e i prazne listove. Dokazati da postoji 9 kutija koje sadr e sveske iste vrste, ako se zna da se u svakoj kutiji nalaze samo sveske jedne vrste.

Rexenje: Pristigle kutije mogu da se razvrstaju u tri grupe u zavisnosti od toga da li su sveske u kutiji na linije, kvadrati e ili su prazne. Ukupan broj kutija je 25, pa kako je $25 = 3 \cdot 8 + 1$ na osnovu Dirihleovog principa znamo da se u bar $8 + 1 = 9$ kutija moraju nalaziti sveske iste vrste.

1.12. Zvaniqna valuta u Letoniji je lat. Jedan lat sastoji se od 100 santima. U opticaju su kovanice od 1, 2, 5, 10, 20 i 50 santima i kovanice od 1 i 2 lata. Dokazati da se me u svakih 25 letonskih novqica uvek mogu prona i 4 novqi a koja imaju istu vrednost.

Rexenje: U Letoniji se u opticaju nalazi ukupno 8 vrsta novqi a. Ukoliko uzmemo 25 letonskih novqi a tada zbog uopxtenog Diri hleovog principa uvek imamo 4 novqi a sa istom vrednox u jer je $25 = 3 \cdot 8 + 1$.

1.13. Na turniru u odbojci na pesku uqestvuje n ekipa. Sistem takmiqenja je takav da svaka ekipa igra sa svakom jedan meq. Ako nijedna ekipa na turniru nije izgubila sve meqeve, dokazati da postoje dve ekipe sa istim brojem pobeda.

Rexenje: Iz uslova zadatka vidimo da je svaka ekipa mogla da zabele i najmanje jednu, a najvixe $n - 1$ pobedu. Kako na turniru uqestvuje n ekipa na osnovu Dirihleovog principa dobijamo da postoji neki broj $k \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$ takav da su dve ekipe zabele- ile taqno k pobeda na turniru.

1.14. Deset uqenika je rexilo ukupno 35 zadataka. Poznato je da me u njima ima onih koji su rexili taqno jedan zadatak, onih koji su rexili taqno dva zadatka i onih koji su rexili taqno tri zadatka. Dokazati da postoji uqenik koji je rexio bar 5 zadataka.

Rexenje: Poxto znamo da je bar po jedan uqenik rexio taqno jedan, dva i tri zadatka, preostalih sedam uqenika je uradilo $35-6 = 29$ zadataka. Kako je $29 = 4 \cdot 7 + 1$, na osnovu uopxtenog Dirihleovog principa dobijamo da postoji uqenik koji je rexio bar 5 zadataka.

1.15. Dat je skup cifara $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$ i neka se posmatraju svi qetvoroqlani podskupovi tog skupa. Dokazati da me u osam takvih podskupova uvek moraju postojati dva podskupa koja imaju isti najve i element.

Rexenje: Najve i element qetvoroqlanog podskupa skupa cifara mo e biti jedna od cifara iz skupa $\{3, 4, 5, \ldots, 9\}$. Kako imamo 7 takvih cifara, a bira se 8 qetvoroqlanih podskupova, tvr enje sledi iz Dirihleovog principa.

1.16. Umetnik je u svom ateljeu napravio 36 skulptura koje su texke redom 490, 495, 500, 505, . . . , 660 i 665 kilograma. Za prevoz svojih radova do galerije, umetnik je iznajmio 7 kamiona maksi malne nosivosti 3 tone. Da li je mogu e da se skulpture prevezu do galerije, tako da svaki kamion preveze samo jednu turu?

Rexenje: Ukupna te ina skulptura iznosi 20 790 *kg,* xto je manje od 7 · 3 000 = 21 000 *kg* koliko mogu da prenesu iznajmljeni kamioni. Kako se skulpture ne mogu prenositi u delovima, to i dalje nije dovoljno da doka emo da je mogu e preneti dela do galerije na tra eni naqin. Treba transportovati 36 = 7 · 5 + 1 skulptura u sedam kamiona, odakle dalje na osnovu uopxtenog Dirihleovog principa dobijamo da se jednim kamionom mora preneti bar 6 skulptura. Me utim, ukupna te ina 6 najlakxih skulptura iznosi 3 015 *kg,* xto premaxuje maksimalnu nosivost kamiona. Zakljuqu jemo da nije mogu e realizovati planirani transport.

1.17. Da li se tablica 5 × 5 mo e popuniti brojevima iz skupa $\{-1, 0, 1\}$ tako da zbir brojeva u svakoj vrsti, koloni i dijagonali bude razliqit?

Rexenje: Neka je S zbir pet brojeva iz skupa $\{-1, 0, 1\}$. Sada va i $-5 \le S \le 5$, te ovakvih zbirova ima 11. Kako je broj vrsta, kolona i dijagonala u ovoj tablici ukupno 12, primenom Dirihleovog

principa dobijamo da neka dva zbira moraju biti jednaka, pa nije mogu e popuniti tablicu na tra eni naqin.

1.18. Da li je mogu e rasporediti 44 kuglice u 10 kutija tako da se ne mogu na i dve kutije sa istim brojem kuglica? Smatramo da dve prazne kutije sadr e isti broj kuglica.

Rexenje: Ukoliko bi svaka kutija sadr ala razliqit broj kuglica, trebalo bi nam $0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$ kuglica. Kako je ovaj broj ve i od ukupnog broja kuglica, zakljuqujemo da ne postoji takav raspored i da moraju postojati dve kutije u kojima e se nalaziti isti broj kuglica.

1.19. Sto ljudi sedi oko okruglog stola, pri qemu je vixe ena nego muxkaraca. Dokazati da neke dve ene sede jedna naspram druge.

Rexenje: Napravimo parove osoba koje sede jedna preko puta druge za stolom. Imamo ukupno 50 takvih parova. Poxto je broj ena ve i od broja muxkaraca znamo da imamo vixe od 50 ena. Sada dobijamo da postoji bar jedan par u kom su obe osobe ene zbog Dirihleovog principa, jer je broj ena ve i od broja formiranih parova, qime je tvr enje pokazano.

1.20. Torta u obliku pravilnog xestougla stranice du ine 15 *cm* ukraxena je na vrhu sa 7 cvetova. Dokazati da se bar dva cveta ne nalaze na rastojanju ve em od 15 *cm*.

Rexenje: Ukoliko povuqemo dugaqke dijagonale, xestougao emo podeliti na 6 jednakostrani qnih trouglova. Dirihleov princip sada daje da se bar dva cveta moraju nalaziti u istom trouglu. Kako su stranice trouglova du ine 15 *cm*, dobijamo da se uoqena dva cveta nalaze na tra enom rastojanju.

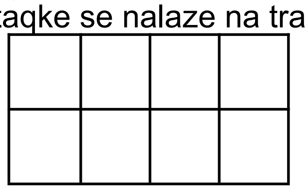
1.21. U jednakostraniqnom trouglu stranice du ine 1 raspore eno je 10 taqaka. Dokazati da tada postoje dve taqke koje se nalaze na rastojanju ne ve em od $\frac{1}{3}$.

Rexenje: Podelimo dati trougao na 9 jednako straniqnih trouglova stranice du ine $\frac{1}{3}$ kao na slici. Kako treba rasporediti 10 taqaka pri menom Dirihleovog principa zakljuqujemo da se u jednom malom trouglu nalaze bar 2 taqke. Sada se ove dve taqke nalaze na rastojanju $\leq \frac{1}{3}$.

1.22. U pravougaonik dimenzija 24 *cm* i 12 *cm* je raspore eno 25 taqaka. Dokazati da postoje dve taqke koje nisu na rastojanju ve em od 5 *cm*.

Rexenje: Primetimo da dati pravougaonik mo emo podeliti na 24 pravougaonika koji su dimenzije 4×3 kao xto je prikazano na slici. Sada zbog Dirihleovog principa sledi da postoje dve taqke koje se nalaze u istom malom pravougaoniku. Uoqimo pravou gaonik u kom se nalaze dve taqke. Najve e rastojanje izme u dve taqke u ovom pravougaoniku se dobija ako su taqke smextene u 2 nesusedna temena pravougaonika. To rastojanje je jednako du ini

dijagonale pravougaonika koja iznosi $\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5cm$. Prema tome, posmatrane dve taqke se nalaze na tra enom rastojanju.



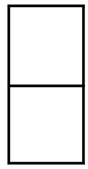
1.23. U jediniqnom kvadratu raspore eno je 9 taqaka. Dokazati da je uvek mogu e odabrati 3 taqke tako da je povrxina trougla koji one obrazuju manja ili jednaka od $\frac{1}{8}$.

Rexenje: Ukoliko spojimo sredixta naspramnih stranica dati jediniqni kvadrat emo podeli na 4 manja kvadrata stranice du ine $\frac{1}{2}$. Poxto je $9 = 4 \cdot 2 + 1$ na osnovu uopxtenog Dirihleovog principa sledi da se bar tri taqke nalaze u nekom malom kvadratu stranice $\frac{1}{2}$. Posma trajmo kvadrat u kom se nalaze ove tri taqke.

Najve u povrxinu me u svim trouglovima u uoqenom kvadratu ima e trougao qija su dva temena susedna temena kvadrata, a tre e teme se nalazi na naspramnoj strani kvadrata. Odavde sledi da je povrxina najve eg trougla koji se mo e konstruisati u ovom kvadratu $\frac{1}{2} \cdot P = \frac{1}{8}$.

1.24. U pravougaoniku qije su dimenzije 30 *cm* i 40 *cm* uoqeno je 25 taqaka. Dokazati da je uvek mogu e odabrati 3 taqke tako da je povrxina trougla koji one obrazuju manja ili jednaka od 50 cm^2.

Rexenje: Dati pravougaonik mo emo podeliti na 12 delova dimenzije 10 × 10 kao na slici. Kako je u pravougaoniku uoqeno 25 taqaka primenom uopxtenog Dirihleovog principa dobijamo da se bar tri taqke nalaze u istom malom kvadratu veliqine 10 × 10 (jer je 25 = 12 · 2 + 1). Sliqnom analizom kao u prethodnom zadatku dobijamo da je povrxina najve eg trougla koji se mo e konstruisati u izabranom kvadratu $\frac{1}{2} \cdot P = 50$.



1.25. Iz skupa {1, 2, 3, . . . , 27} se izvlaqi 15 brojeva. Dokazati da me u izabranim brojevima uvek moraju postojati dva uzastopna prirodna broja.

Rexenje: Skup {1, 2, 3, . . . , 27} mo emo predstaviti kao slede u uniju {1, 2} ∪ {3, 4} ∪ {5, 6} ∪ {7, 8} ∪ · · · ∪ {25, 26} ∪ {27}.

Poqetni skup smo razbili na 14 disjunktnih podskupova, pa kako izvlaqimo 15 brojeva, na osnovu Dirihleovog principa znamo da dva broja pripadaju istom podskupu. Zbog naqina na koji smo konstuisali skupove, ta dva broja su tra eni uzastopni brojevi.

1.26. Posmatra se skup koji sadr i 999 prostih brojeva. Dokazati da se bar 250 prostih brojeva datog skupa zavrxava istom cifrom. Da li tvr enje va i za 998 prostih brojeva?

Rexenje: Vixecifreni prosti brojevi mogu da se zavrxavaju nekom od cifara 1, 3, 7 ili 9, pa mo emo napraviti 4 kutije u koje emo raspore ivati proste brojeve u zavisnosti od poslednje cifre. Sada postoje jox dva jednocifrena prosta broja 2 i 5 koja ne e biti raspore ena ni u jednu kutiju. Ukoliko bismo uzeli po 249 prostih brojeva iz svake kutije i brojeve 2 i 5, imali bismo 998 prostih brojeva za koje ne va i tvr enje. Kako se posmatra skup koji sadr i 999 prostih brojeva, na osnovu uopxtenog Diri hleovog principa dobijamo da bar 249 + 1 = 250 prostih brojeva mora biti iz iste kutije, tj. bar 250 brojeva se mora zavrxavati istom cifrom.

1.27. Ako se iz skupa {1, 2, 3, . . . , 20} izvlaqi 11 brojeva, tada e me u izvuqenim brojevima uvek postojati brojevi *a* i *b* takvi da je $a - b = 2$.

Rexenje: Primetimo da skup {1, 2, 3, . . . , 20} mo emo predstaviti kao slede u uniju {1, 3}∪{2, 4}∪{5, 7}∪{6, 8}∪{9, 11}∪{10, 12}∪{13, 15}∪

{14, 16} ∪ {17, 19} ∪ {18, 20}. Dobili smo 10 disjunktnih podskupova. Poxto se izvlaqi 11 brojeva, koriste i Dirihleovov princip dobijamo da su iz bar jednog skupa izabrana oba broja. Kako je sada razlika ova dva broja bax 2, pronaxli smo brojeve *a* i *b* koji zadovoljavaju uslov zadatka.

1.28. Dokazati da ako se iz skupa {1, 2, 3, . . . , 11} izvuqe 7 razli qitih brojeva, tada e me u izvuqenim brojevima uvek postojati dva broja qiji je zbir 12.

Rexenje: Zadati skup se mo e predstaviti na slede i naqin $\{1, 2, 3, \ldots, 11\} = \{1, 11\} \cup \{2, 10\} \cup \{3, 9\} \cup \{4, 8\} \cup \{5, 7\} \cup \{6\}$. Poxto je potrebno izvu i 7 brojeva, postoji dvoelementni skup iz koga su izvuqena oba broja zbog Dirihleovog principa. Kako je zbir brojeva u svakom dvoelementnom skupu taqno 12 tvr enje sledi.

1.29. Dokazati da me u 26 razliqitih parnih prirodnih brojeva manjih od 100 postoje dva broja qiji je zbir 100.

Rexenje: Razbijmo skup parnih prirodnih brojeva manjih od 100 na slede e podskupove $\{2, 98\}, \{4, 96\}, \{6, 94\}, \ldots, \{48, 52\}, \{50\}$. Na ovaj naqin smo dobili ukupno 25 podskupova. Sada na osnovu Dirihle ovog principa zakljuqujemo da postoji bar jedan podskup u kom se nalaze dva od posmatranih 26 brojeva. Kako je zbir ova dva broja bax 100, tvr enje je dokazano.

1.30. Dokazati da u svakom skupu od 36 prirodnih brojeva postoje dva broja qija je razlika deljiva sa 35.

Rexenje: Prilikom deljenja proizvoljnog prirodnog broja sa brojem 35 dobija se jedan od ostataka $0, 1, \ldots, 34$. Kako imamo 35 mogu ih ostataka i kako posmatrani skup sadr i 36 brojeva, na osnovu Dirihleovog principa zakljuqujemo da dva broja moraju imati isti ostatak pri deljenju sa 35. Neka je to brojevi x i y, i neka je

$$x \equiv k \ (mod\ 35),$$
$$y \equiv k \ (mod\ 35).$$

Sada je $x - y \equiv k - k = 0 \ (mod\ 35)$, pa je razlika ova dva broja tra ena razlika koja je deljiva sa 35.

1.31. Iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ nasumiqno se izvlaqi 12 brojeva. Dokazati da me u izvuqenim brojevima uvek postoje dva broja qiji je najve i zajedniqki delilac ve i od 1.

Rexenje: Primetimo prvo da u skupu $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ imamo slede e proste brojeve: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 i 29. elimo da razbi jemo dati skup na disjunktne podskupove tako da dobijemo tra eno tvr enje nakon primene Dirihleovog principa. Broj 1 nije ni prost ni slo en broj i njega emo odvojiti u poseban podskup. Neka drugi podskup bude skup svih parnih brojeva iz polaznog skupa. U tre i podskup emo smestiti sve brojeve koji su deljivi sa 3, ali nisu parni, a u qetvrti sve brojeve deljive sa 5 koji nisu deljivi ni sa 2, ni sa 3. Nastavljaju i dalje na isti naqin dobijamo da polazni skup mo emo predstaviti kao slede u uniju

$$\{1\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\} \cup \{3, 9, 15, 21, 27\} \cup \{5, 25\} \cup \{7\} \cup \{11\} \cup \{13\} \cup \{17\} \cup \{19\} \cup \{23\} \cup \{29\}.$$

Na ovaj naqin smo skup $\{1, 2, \ldots, 30\}$ razbili na 11 disjunktnih podskupova. Kako se izvlaqi 12 brojeva na osnovu Dirihleovog principa zakljuqujemo da bar dva broja moraju biti iz nekog od vixeelementnih podskupova. Zbog naqina na koji smo konstru isali ove podskupove dobijamo da su tra ena dva broja koja imaju NZD ve i od 1 zapravo uoqena dva broja koja pripadaju nekom vixelementnom podskupu. Ukoliko su uoqena dva broja iz skupa $\{2, 4, 6, . . . , 30\}$, onda je njihov NZD paran broj. U sluqaju da su brojevi iz skupa $\{3, 9, 15, 21, 27\}$ dobijamo da je NZD deljiv sa 3, a ako su to brojevi 5 i 25 onda je njihov NZD jednak 5.

1.32. Sportska hala ima kapacitet od 1000 sedixta. Odrediti koliko najmanje gledalaca treba da kupi karte da bismo mogli sa sigurnox u da ka emo da dva gledaoca imaju iste inicijale.

Rexenje: Naxe pismo sadr i 30 slova, odakle dobijamo da postoji $30 \cdot 30$ mogu ih kombinacija za inicijale. Ukoliko bi u hali bilo barem $900 + 1$ gledalaca na osnovu Dirihleovog principa bismo znali da u hali postoje bar dva gledaoca sa istim inicijalima.

1.33. Neka je dat skup $\{3, 7, 11, 15, 19, . . . , 95, 99, 103\}$. Koliko najmanje elemenata treba izvu i iz ovog skupa da bismo mogli da ka emo da me u izvuqenim brojevima uvek postoje dva broja koja u zbiru daju 110?

Rexenje: Skup $\{3, 7, 11, 15, 19, . . . , 95, 99, 103\}$ mo emo predstaviti kao slede u uniju: $\{3\} \cup \{7, 103\} \cup \{11, 99\} \cup \{15, 95\} \cup \cdots \cup \{51, 59\} \cup \{55\}$. Na ovaj naqin smo polazni skup razbili na 14 disjunktnih podsku pova, pri qemu zbir elemenata u 12 podskupova iznosi bax 110. Sada na osnovu Dirihleovog principa znamo da ako izvuqemo 15

ili vixe brojeva uvek emo me u izvuqenim brojevima imati dva broja qiji je zbir 110.

1.34. Grupa od N studenata je radila test i osvojila od 27 do 94 poena, s tim da niko od studenata nije dobio 31, 43 i 55 poena. Odrediti koliko najmanje treba da bude N da bi sa sigurnox u mogli da ka emo da su tri studenta osvojila isti broj poena.

Rexenje: Ukupan broj mogu nosti da student osvoji poene na testu je $(94 - 27 + 1) - 3 = 65$. Sada primenom uopxtenog Dirihleovog principa zakljuqujemo da N mora biti barem $2 \cdot 65 + 1 = 131$ da bismo mogli da tvrdimo da postoje tri studenta sa istim brojem poena na testu.

1.35. Na polici se nalazi 20 knjiga na francuskom, 10 na xpa nskom, 16 na nemaqkom, 25 na ruskom i 7 na italijanskom. Koliko najmanje knjiga treba uzeti sa police da bismo bili sigurni da se me u izabranim knjigama nalazi 14 knjiga na istom jeziku?

Rexenje: Ukoliko uzmemo sve knjige na xpanskom i italijanskom, i po 13 knjiga na ostalim jezicima, ne emo imati 14 knjiga koje su napisane na istom jeziku. Me utim, ako sa police uzmemo jox jednu knjigu, tra eni uslov e biti ispunjen. Prema tome, kada uzmemo $10 + 7 + 3 \cdot 13 + 1 = 57$ knjiga sigurno emo me u izabranim knjigama imati 14 knjiga na istom

jeziku.
Napomena: Iako prilikom rexavanja ovog zadatka nismo koristili Dirihleov princip, ideja koju smo upotrebili je sliqna ideji koju smo imali i u prethodnih nekoliko zadataka. U literaturi se mo e na i jox jedno uopxtenje Dirihleovog principa, njegova tzv. jaka forma koja se mo e iskoristiti za rexavanje ovog zada tka (pogledati recimo [1] ili [7]). Ovo tvr enje ka e da ukoliko $m = m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n-n+1$ objekata treba smestiti u n kutija, gde su m_i prirodni brojevi za svako $i = 1, 2, \ldots, n,$ tada za neko i va i da se u i−toj kutiji nalazi bar m_i objekata. Primetimo da se za $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = r$ dobija uopxteni Dirihleov princip. Vratimo se sada rexenju zadatka. Ako me u izabranim knjigama treba da bude bar 14 knjiga na istom jeziku, to mogu biti knjige na francuskom, nemaqkom ili ruskom. Sada je $m_1 = m_2 = m_3 = 14,$ a $n = 3,$ pa je na osnovu spomenutog tvr enja sa police neophodno uzeti najmanje $14+14+14-3+1 = 40$ knjiga na francuskom, nemaqkom i ruskom. Kako imamo samo 10 knjiga na xpanskom i 7 na itali janskom, tra eni broj knjiga je $40 + 10 + 7 = 57.$

Zadaci za samostalni rad

1.36. Dokazati da u svakoj grupi od 100 ljudi postoji 9 ljudi koji su ro eni u istom mesecu.

1.37. Programer je iskucao 500 redova koda za 17 dana. Dokazati da postoji dan u kom je programer iskucao najmanje 30 redova koda.

1.38. U unutraxnjosti jediniqnog kvadrata uoqeno je 5 taqaka. Dokazati da tada postoje dve taqke koje se nalaze na rastojanju manje m od $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.39. U unutraxnjosti pravougaonika sa stranicama 10 *cm* i 67 *cm* na sluqajan naqin je raspore eno 2011 taqaka. Dokazati da je pri svakom rasporedu taqaka mogu e uoqiti qetiri taqke koje se nalaze u istom kvadratu stranice 1 *cm.*

1.40. Iz skupa $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ izvlaqi se 7 brojeva. Dokazati da u svakom takvom podskupu postoje dva broja, takva da je jedan od njih dva puta ve i od drugog.

1.41. Iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ bira se n+1 prirodan broj. Dokazati da me u izabranim brojevima postoje dva broja koja su uzajamno prosta.

1.42. Da li je u skupu od 100 celih brojeva uvek mogu e izabrati *a)* 15 brojeva;
b) 16 brojeva;
tako da razlika bilo koja dva izabrana broja bude deljiva sa 7?

1.43. Dokazati da je u skupu od 10 dvocifrenih prirodnih brojeva uvek mogu e izabrati dva disjunktna podskupa koja e imati isti zbir elemenata.

2 Prebrojavanja

Jedan od osnovnih problema kojim se bavi kombinatorika jeste odre ivanje broja elemenata konaqnog skupa, takozvani problem prebrojavanja (enumeracije). Iako navo enje svih elemenata nekog skupa deluje kao dobar naqin da se prebroje elementi, u praksi to qesto iziskuje puno vremena. Ovo je predstavljalo motivaciju da se razviju efikasnije metode za prebrojavanje konaqnih skupova i upravo tim metodama emo se baviti u ovoj glavi.

Broj elemenata konaqnog skupa A naziva se *kardinalni broj skupa* i obele ava se sa $|A|$. Po definiciji se uzima da je prazan skup konaqan skup kardinalnosti nula. Osnovni principi prebro javanja su princip bijekcije (u literaturi se mo e na i i pod nazivom princip jednakosti), princip zbira i princip proizvoda.

Princip bijekcije. Ako izme u konaqnih skupova A i B postoji bijektivno preslikavanje, tada je $|A| = |B|$.

Princip zbira. Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ po parovima disjunktni kona qni skupovi, onda je

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Princip proizvoda. Za konaqne skupove $A_1, A_2, \ldots, A_n$ va i $|A_1 \times A_2$

$$\times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|.$$

U kombinatorici se konaqan skup naziva i *azbuka*, a elementi azbuke su *slova*. *Req du ine m* nad azbukom A je svaka $m-$torka elemenata iz A. Neka je data azbuka A sa n slova. Proizvoljna req du ine m nad azbukom A naziva se *varijacija sa ponavljanjem* klase m od n elemenata skupa A i broj takvih reqi je n^m. Uko liko su svaka dva slova reqi razliqita, pri qemu je $m \leq n$, govorimo o *varijacijama bez ponavljanja* klase m od n elemenata. Broj varijacija bez ponavljenja jednak je $n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot (n - m + 1)$. Specijalno, reqi du ine n nad azbukom A u kojima nema pona vljanja slova nazivamo *permutacije (bez ponavljanja)* i njihov broj

je $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Kako je u reqima bitan redosled slova, ovakvi izbori se nazivaju zajedniqkim imenom ure eni izbori. Neka je dat $n-$toqlani skup A i neka je k prirodan broj za koji va i $k \leq n$. *Kombinacija* *(bez ponavljanja)* klase k od n elemenata je bilo koji k−toqlani podskup skupa *A.* Broj k−kombinacija skupa

n

od n elemenata iznosi $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Ovaj broj se oznaqava sa $\binom{n}{k}$ i

naziva se *binomni koeficijent*. Izbori elemenata kod kojih nije bitan redosled kojim se biraju elementi nazivaju se neure eni izbori. *Kombinacija sa ponavljanjem* je svaki neure eni izbor m elemenata sa ponavljanjem skupa *A.* Broj svih m− kombinacija sa ponavljanjem skupa od n elemenata je $\binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n-1}{n-1}$.

Neka azbuka A ima k slova. Posmatrajmo reqi du ine n nad azbukom A u kojima se prvo slovo pojavljuje n_1 puta, drugo slovo n_2 puta, . . . , k−to slovo se pojavljuje n_k puta. Takva req je potpuno odre ena ako za svako slovo znamo pozicije (mesta) na kojima se to slovo pojavljuje u reqi. Broj naqina da izaberemo pozicije za

prvo slovo je $\binom{n}{n_1}$. Nakon xto smo izabrali mesta za prvo slovo, ostaje nam jox $n-n_1$ mesta i treba izabrati n_2 mesta za drugo slovo, a to radimo na $\binom{n-n_1}{n_2}$ naqina. Dalje, mesta za tre e slovo biramo na $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ naqina, . . . , broj naqina da izaberemo mesta za k− to slovo je $\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k} = \binom{n_k}{n_k}$. Svaka ovakva req predstavlja jednu *permutaciju sa ponavljanjem* i broj takvih reqi je

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n_k}{n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!}.$$

Broj $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$ se naziva *polinomni koeficijent*[3] i oznaqava je sa $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. Polinomni koeficijenti predstavljaju svojevrsno uopxtenje binomnih koeficijenata.

Posmatrajmo sada jednaqinu $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k = n$ i odredimo broj rexenja ove jednaqine u skupu nenegativnih celih brojeva. Lako se mo e videti da je ovaj problem ekvivalentan problemu raspore ivanja n identiqnih kuglica u k razliqitih kutija. Neka je k kuglica pore ano u niz i neka je izme u njih postavljena $k-1$ pregrada tako da broj kuglica pre prve pregrade odgovara broju kuglica koje se nalaze u prvoj kutiji, broj kuglica izme u prve i druge pregrade odgovara broju kuglica u drugoj kutiji, . . . ,

[3]U literaturi se ovaj koeficijent mo e na i i pod nazivom multinomni koeficijent.

broj kuglica nakon poslednje pregrade odgovara broju kuglica u poslednjoj kutiji. Ako sa x_i oznaqimo broj kuglica koje se nalaze u i−toj kutiji, za $i = 1, 2, \ldots, k$, onda se dobija slede a situacija:

$$x_1 \;|\; x_2 \;|\; x_3 \;|\; x_4 \;|\; \ldots \;|\; x_{k-1} \;|\; x_k.$$

Sada treba od $n + k - 1$ pozicija u posmatarnom nizu odabrati n mesta na kojima e se nalaziti kuglice i broj naqina da se to uradi je $\binom{n+k-1}{n}$. Ekvivalentno smo mogli da biramo $k-1$ mesta na kojima se nalaze pregrade. Uoqavamo da ovaj broj odgovara broju n−kombinacija sa ponavljenjem skupa od k elemenata. Primetimo jox da smo broj nizova kuglicama i pregradama mogli da izraqu namo i kao broj permutacija sa ponavljanjem skupa od dva elementa, a to je $\frac{(n + k - 1)!}{n!(k - 1)!}$.

Uvodni zadaci

2.1. Dat je skup taqaka $\{A_1, A_2, \ldots, A_{2021}\}$, gde je taqka A_1 obojena crvenom bojom, a preostalih 2020 taqaka su plave. Da li me u svim podskupovima ovog skupa ima vixe onih koji sadr e crvenu taqku A_1 ili onih koji je ne sadr e?

Rexenje: Neka su u X svi podskupovi datog skupa koji sadr e A_1, a u Y svi podskupovi koji je ne sadr e. Za proizvoljno $S \in X$ definixemo preslikavanje $f : X \to Y$ sa $f(S) = S \setminus \{A_1\}$. Ako je $f(S_1) = f(S_2)$, onda je $S_1 \setminus \{A_1\} = S_2 \setminus \{A_1\}$, pa je $S_1 = S_2$ i defini sano preslikavanje je injekcija. Za proizvoljan skup $T \in Y$ va i $f(T \cup \{A_1\}) = T$, te je f sirjekcija. Vidimo da $f : X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} Y$ odakle na osnovu principa bijekcije zakljuqujemo da skupovi X i Y imaju isti broj elemenata.

Napomena: Drugi naqin da definixemo bijektivno preslikavanje izme u ovih skupova je $g : X \to Y$, gde je $g(S) = \{A_1, \ldots, A_{2021}\} \setminus S = S$.

2.2. Me u nenegativnim celim brojevima manjim od 10^7 posmatraju se oni kod kojih je zbir cifara jednak 31 i oni kod kojih je zbir cifara jednak 32. Kojih brojeva ima vixe?

Rexenje: Nenegativne cele brojeve manje od 10^7 emo posmatrati kao reqi du ine 7 nad azbukom cifara $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Ukoliko broj ima manje od 7 cifara, sa leve strane emo dopisati potreban broj nula (npr. umesto broja 123 gleda emo req 0000123). Neka je

A skup svih reqi du ine 7 kod kojih je zbir cifara 31, a B skup svih reqi sa zbirom cifara 32. Neka je $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 \in A$ i neka za preslikavanje $f : A \to B$ va i $f(a_i) = 9-a_i$, za svako $i = 1, 2, \ldots, 7$. Kako je

$$\sum_{i=1}^{7} f(a_i) = \sum_{i=1}^{7} (9 - a_i) = 7 \cdot 9 - \sum_{i=1}^{7} a_i = 63 - 31 = 32,$$

ovako definisano preslikavanje je dobro definisano. Lako se pro verava da je preslikavanje ,,1-1” i ,,na”, pa su na osnovu principa bijekcije skupovi A i B iste kardinalnosti.

2.3. Odrediti koliko ima

a) petocifrenih brojeva;

b) petocifrenih brojeva u qijem su dekadnom zapisu sve cifre me usobno razliqite;

v) petocifrenih brojeva u qijem su dekadnom zapisu svake dve susedne cifre me usobno razliqite.

Rexenje: a) Prva cifra mora biti razliqita od nule i nju mo emo izabrati na 9 naqina, dok svaku od preostale qetiri cifre mo emo odabrati na 10 naqina. Primenom principa proizvoda dobijamo da petocifrenih brojeva ima $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$. *b)* Prvu cifru mo emo izabrati na 9 naqina. Prilikom izbora druge cifre treba voditi raquna da se razlikuje od prve, pa ponovo imamo 9 mogu ih izbora. Tre u cifru biramo na 8 (razli qita od prve dve), qetvrtu na 7 i petu na 6 naqina. Prema tome, tra enih brojeva ima $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

v) Prvu cifru biramo na 9 naqina. Svaku narednu cifru biramo tako da se razlikuje od prethodno izabrane cifre, pa za svaku od cifara imamo 9 mogu ih izbora. Odavde je rexenje $9{\cdot}9{\cdot}9{\cdot}9{\cdot}9 = 9^5$.

2.4. Koliko se parnih qetvorocifrenih brojeva mo e zapisati pomo u cifara 1, 3, 4, 6, 7 ako u zapisu svakog broja susedne cifre moraju biti razliqite?

Rexenje: Poxto se posmatraju parni brojevi, fiksira emo prvo poslednju cifru. To mo emo uraditi na 2 naqina poxto imamo samo dve parne cifre na raspolaganju. Zbog zahteva da susedne cifre budu razliqite dalje emo birati redom tre u, drugu i prvu cifru. Za svaku od ovih cifara imamo 4 mogu a izbora, pa je tra eno rexenje $4^3 \cdot 2 = 128$.

2.5. Koliko ima xestocifrenih brojeva

a) koji se zavrxavaju sa dve sedmice;

b) koji poqinju sa dve jednake cifre?

Rexenje: a) U zadatku se zapravo tra i qetvorocifreni broj na koji emo na kraju nalepiti dve sedmice. Broj qetvorocifrenih brojeva je $9 \cdot 10^3$.

b) Na 9 naqina mo emo odabrati cifru koja e se nalaziti na prva dva mesta. Za ostale cifre nemamo ograniqenja pa tra enih brojeva ima $9 \cdot 10^4$.

2.6. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10^5 u qijem dekadnom zapisu su svake dve susedne cifre me usobno razliqite?

Rexenje: Razlikujemo sluqajeve kada je broj jednocifren, dvoci fren, trocifren, qetvorocifren i petocifren. Sada je na osnovu principa zbira rexenje $9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 = 9(1 + 9 + 9^2 + 9^3 + 9^4) = 9 \cdot \frac{9^5 - 1}{9 - 1} = 66429$.

2.7. Na zidu se nalaze 3 kuke. Na koliko naqina se na njih mogu okaqiti 4 kaputa? (Na jednu kuku se mo e okaqiti i vixe kaputa.)

Rexenje: Za svaki kaput imamo 3 mogu a izbora na koju kuku emo ga okaqiti, pa je tra eni broj naqina $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$. Ovaj broj odgovara broju varijacija sa ponavljanjem klase 4 sa 3 elementa.

2.8. U lift u prizemlju qetvorospratnice uxlo je 6 osoba. Na koliko naqina one mogu napustiti lift? (Svaka osoba izlazi na nekom od qetiri sprata.)

Rexenje: Kako svaka osoba mo e iza i na jednom od 4 sprata, broj naqina da osobe napuste lift je 4^6.

2.9. Na koliko razliqitih naqina se m razliqitih pisama mo e rasporediti u n poxtanskih sanduqi a?

Rexenje: Broj naqina da pisma ubacimo u sanduqi e je n^m, jer svako pismo mo emo ubaciti u jedan od n poxtanskih sanduqi a.

2.10. Klub ima 30 qlanova. Na koliko naqina se mo e izabrati predsednik, potpredsednik, sekretar i blagajnik kluba?

Rexenje: Predsednik kluba mo e biti izabran na 30 naqina, dok e potpredsednik e biti izabran od preostalih 29 osoba. Dalje imamo 28 naqina da odaberemo sekretara i 27 mogu ih izbora za blagajnika. Sada je tra eni broj naqina $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27$ i on odgovara broju varijacija bez ponavljanja klase 4 sa 30 elemenata.

2.11. Uqenici qetvrtog razreda imaju planirano 7 izleta u toku xkolske godine. Uqiteljica je pronaxla 15 mesta koja bi mogli da posete i zajedno sa uqenicima e odabrati u koja mesta e i i. Na koliko naqina razred mo e da odabere koja mesta e posetiti i kojim redosledom, ako se zna da poslednji izlet biti na Pali ?

Rexenje: Pali je ve izabran za poslednji izlet, pa je potrebno odabrati prvih xest izleta, koji se biraju od preostalih 14 mesta. Dobijamo da je broj naqina za realizaciju planiranih izleta $14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 1$.

2.12. Pqelica Maja treba da skupi polen sa 7 razliqitih cvetova pre nego xto se vrati u koxnicu. Kada pqelica uzme polen sa nekog cveta ona se vixe ne vra a na taj cvet. Na koliko naqina Maja mo e da obi e svih 7 cvetova?

Rexenje: Kako pqelica Maja treba da obi e svaki od 7 cvetova taqno jednom, broj naqina da se obi u svi cvetovi odgovara broju permutacija 7–qlanog skupa kojih ima $7! = 5040$.

2.13. Napisati sve permutacije skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ u leksikografskom poretku.

Rexenje: Ka emo da permutacija $a_1a_2 \ldots a_n$ prethodi permutaciji $b_1b_2 \ldots b_n$ u leksikografskom poretku ako postoji indeks k, gde je $1 \leq k \leq n$, za koji va i $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}$ i $a_k < b_k$. Permutacije skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ zapisane u leksikografskom poretku su date u slede oj tabeli, gledano po kolonama.

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Primetimo da e prva permutacija u leksikografskom poretku skupa $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ biti permutacija $123 \ldots (n-1)n$, dok e posle dnja permutacija biti $n(n-1) \ldots 321$.

2.14. Odrediti koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u kojima su elementi 1 i 2 susedni.

Rexenje: Poxto elementi 1 i 2 trebaju da budu susedni, posma tra emo ih zajedno kao jedan element, takozvani blok. Broj naqina

da ispermutujemo ovaj blok sa preostalih $n-2$ elemenata skupa je $(n-1)!$. Kako elementi koji qine blok mogu biti u redosledu 12 ili 21, broj tra enih permutacija je $2 \cdot (n-1)!$.

2.15. Na koliko naqina n osoba mogu da stanu u red, ali tako da dve uoqene osobe ne smeju da stoje jedna pored druge?

Rexenje: Neka su uoqene osobe A i B. Kako izme u ove dve osobe mogu stajati dve druge osobe, zatim tri osobe, i tako dalje, bolje je da od svih mogu ih rasporeda n osoba u red oduzmemo ,,loxe” rasporede. ,,Loxi” rasporedi su oni u kojima osobe A i B stoje zajedno, pa je na osnovu prethodnog zadatka njihov broj $2(n-1)!$. Sada je broj tra enih rasporeda $n! - 2(n-1)! = (n-2)(n-1)!$.

2.16. Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u kojima su eleme nti 1 i 2 susedni, dok 1 i 3 nisu susedni?

Rexenje: Permutacija u kojima su 1 i 2 susedni ima $2(n-1)!$. Od ovih permutacija emo oduzeti one gde su dodatno 1 i 3 susedni. Kako postoje 2 bloka u kojima je jedinica izme u 2 i 3 (blokovi 213 i 312), takvih permutacija ima $2(n-2)!$. Prema tome, broj tra enih permutacija je $2(n-1)! - 2(n-2)!$.

2.17. Koliko ima permutacija cifara $0, 1, \dots, 9$ u kojima izme u cifara 2 i 3 stoje taqno tri druge cifre?

Rexenje: Posmatrajmo blok od 5 mesta, gde su prvo i poslednje mesto u bloku rezervisani za cifre 2 i 3. Broj naqina da oda beremo kojih 5 mesta zauzima ovaj blok u permutaciji je 6. Dalje na 2 naqina razmextamo cifre 2 i 3 na izabrane pozicije (prva i poslednja cifra fiksiranog bloka). Za kraj treba razmestiti preostalih 8 cifara na 8 mesta i to radimo na 8! naqina. Konaqno rexenje je $6 \cdot 2 \cdot 8!$.

2.18. Odrediti broj naqina da n osoba sedne oko okruglog stola, ako stolice ne razlikujemo.

Rexenje: Dva rasporeda oko okruglog stola se razlikuju ukoliko bar jedna osoba ima bar jednog razliqitog suseda (gledano sa leve ili desne strane). Posmatrajmo proizvoljan raspored n osoba oko okruglog stola i primetimo da se rotiranjem osoba oko stola ne dobija novi raspored. Ukoliko bi stolice bile numerisane, broj naqina da osobe sednu oko stola bi bio $n!$. Kako imamo n rotacija, ukupan broj naqina da osobe sednu oko stola je $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

II naqin: Postavimo prvu osobu proizvoljno za sto. Fiksiranjem 29

prve osobe vixe nemamo rotaciju, te je broj naqina da preostalih $n-1$ osoba sedne $(n-1)!$, xto je i tra eni broj naqina.

2.19. Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ u kojima dvojka stoji iza jedinice?

Rexenje: Primetimo prvo da se dvojka mo e nalaziti bilo gde u permutaciji iza jedinice, a ne samo neposredno iza nje. Uko liko u proizvoljnoj permutaciji zamenimo mesta brojevima 1 i 2 dobi emo bijektivno preslikavanje izme u skupa svih permutacija u kojima 2 stoji iza 1 i skupa permutacija u kojima 2 stoji is pred 1. Kako je u svakoj permutaciji ili 2 iza 1 ili je 2 ispred 1, i kako je ukupan broj permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ jednak $n!$, zakljuqujemo da tra enih permutacija ima $\frac{n!}{2}\cdot$

2.20. Koliko ima preslikavanja skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ u skup $\{1, 2, \dots, n\}$ takvih da njihov skup slika sadr i najvixe $n-1$ element?

Rexenje: Neka je $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Od svih mogu ih preslikavanja skupa N u samog sebe oduze emo ona preslikavanja kod kojih skup slika ima taqno n elemenata. Proizvoljna preslikavanja $f : N \to N$ odgovaraju varijacijama sa ponavljanjem i njihov broj n^n. Posma trajmo sada preslikavanja kod kojih skup slika sadr i taqno n elemenata. Ova preslikavanja su bijektivna preslikavanja skupa na samog sebe i ona odgovaraju permutacijama skupa N. Prema tome, broj tra enih preslikavanja je $n^n - n!$.

Napomena: Neka su dati konaqni skupovi A i B takvi da je $|A| = m$ i $|B| = n$. Broj svih preslikavanja $f : A \to B$ je jednak n^m. Ako je $m \leq n$, onda je broj injektivnih preslikavanja $f : A \xrightarrow{1-1} B$ jednak $n(n-1)\ldots(n-m+1)$.

2.21. Na koliko naqina se na xahovsku tablu mo e pore ati 8 nezavisnih topova (takvih da se nikoja dva ne napadaju) ako *a)* topove ne razlikujemo;

b) su topovi numerisani?

Rexenje: a) Ako se topovi ne napadaju, onda se u svakoj vrsti i svakoj kolokni mora nalaziti samo jedan top. Pretpostavimo da se i−ti top nalazi u i−toj vrsti, za $i = 1, 2, \ldots, 8$. Sada treba jox odabrati u kojoj koloni se nalazi i−ti top, a to mo emo uraditi na 8! naqina.

b) U zadatku pod *a)* smo videli da je broj naqina da odaberemo polja na xahovskoj tabli na kojima e se nalaziti topovi 8!. Sada

treba jox razmestiti topove na izabrana polja, a to mo emo ura diti na 8! naqina. Konaqno rexenje je $8! \cdot 8!$.

2.22. Odrediti maksimalan broj pravih odre enih sa n zadatih taqaka u ravni.

Rexenje: Maksimalan broj pravih emo dobiti ako se taqke nalaze u takozvanom opxtem polo aju, tj. ako ne postoje 3 kolinearne[4] taqke. Tada e svake dve taqke odre ivati jednu i samo jednu pravu pa je tra eni broj pravih $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

II naqin: Prvu taqku prave mo emo odabrati na n, a drugu na $n-1$ naqina. Kako redosled kojim smo birali taqke nije bitan, jer je $p(A, B) = p(B, A)$, broj tra enih pravih je $\frac{n(n-1)}{2}$.

2.23. Odrediti broj dijagonala konveksnog n−tougla. *Rexenje:* Svaka dva temena n−tougla odre uju jednu du i njihov broj je $\binom{n}{2}$. Kako svaka od ovih du i odgovara jednoj stranici ili dijagonali n−tougla, broj dijagonala emo dobiti kada od broja du i oduzmemo stranice kojih ima n. Prema tome, broj dijagonala n−tougla je

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

II naqin: Prvu taqku dijagonale biramo na n naqina. Sada postoje $n-3$ taqke koje su razliqite od izabrane taqke i koje nisu sa njom spojene stranicom koje mogu biti druga taqka dijagonale. Dobijamo da je tra eni broj dijagonala $n(n-3)$

$2\cdot$

2.24. U ravni je nacrtano m horizontalnih i n vertikalnih pravih. Koliko ima pravougaonika qija svaka stranica le i na jednoj od nacrtanih pravih?

Rexenje: Pravougaonik je ograniqen sa dve horizontalne i dve vertikalne prave. Broj naqina da odaberemo dve horizontalne

prave je $^{m}{}_{2}$, dok dve vertikalne prave biramo na $^{n}{}_{2}$ naqina. Uku pan broj pravougaonika koji se mogu uoqiti u nacrtanoj mre i je

dakle $m\ 2 \quad n\ 2$.

2.25. U grupi od 20 xahista nalazi se 5 velemajstora. Na koliko naqina se mogu formirati dve ekipe od po 10 xahista tako da u prvoj ekipi bude dva velemajstora, a u drugoj tri?

[4]Taqke su kolinearne ako le e na istoj pravoj.

Rexenje: Prvu ekipu mo emo izabrati na 2 naqina. Kako

5 15 8

je druga ekipa jedinstveno odre ena ako znamo sastav prve ekipe, ovo je i tra eni broj naqina da se formiraju ekipe.

2.26. Na koliko naqina od 2 matematiqara i 8 in enjera mo emo formirati petoqlanu komisiju u kojoj e biti bar jedan matema tiqar?

Rexenje: U komisiji mo e biti jedan ili dva matematiqara. Broj komisija koje imaju jednog matematiqara je $^{2}{}_{1}\ ^{8}{}_{4}$, dok komisija sa dva matematiqara ima $^{2}{}_{2}\ ^{8}{}_{3}$. Tra enih komisija dakle ima

$$2\cdot \quad 8\ 4 \quad + \quad 8\ 3 \quad = 196.$$

II naqin: Ukupan broj komisija koje se mogu sastaviti od posma tranih ljudi je $^{10}{}_{5}$. Komisije u kojima nema matematiqara nisu odgovaraju e i njih ima $^{8}{}_{5}$. Sada je rexenje $^{10}{}_{5} - {}^{8}{}_{5} = 196.$

2.27. Na koliko naqina se mogu izabrati tri razliqita broja od 1 do 30 tako da njihov zbir bude paran broj?

Rexenje: Zbir tri broja e biti paran ukoliko su sva tri broja parna, ili ako je jedan paran i dva neparna. Tri parna broja iz

skupa $\{1, 2, \ldots, 30\}$ mo 15 3 naqina. Broj naqina emo izabrati na da izaberemo jedan paran broj i dva neparna iz istog skupa je

15 1 u ova dva

. Rexenje dobijamo

15 2 sabiranjem broja naqina

sluqaja.

2.28. Na koliko naqina se iz skupa od 17 osoba mo e izabrati 12 pod uslovom

a) ako je izabrana osoba *A*, tada mora biti izabrana i osoba *B*; *b)* ako je izabrana osoba *A*, tada ne sme biti izabrana osoba *B*?

Rexenje: a) U sluqaju da je izabrana osoba *A,* zbog uslova zadatka mora biti izabrana i osoba *B,* pa treba odabrati jox 10 osoba

od preostalih 15 i to radimo na $^{15}{}_{10}$ naqina. Ako osoba *A* nije izabrana, od preostalih 16 osoba treba odabrati svih 12 osoba na

16 naqina. Ukupan broj naqina da se izaberu osobe je 15 10 + 16 12 ·

12

b) Ako je osoba *A* izabrana, osoba *B* ne mo e biti birana i tada treba

odabrati jox 11 osoba od 15 na $^{15}{}_{11}$ naqina. Sluqaj da osoba 32

A nije izabrana je isti kao u zadatku pod *a)* i imamo $^{16}{}_{12}$ mogu ih izbora. Rexenje dobijamo sabiranjem broja naqina u sluqajevima kada osoba *A* jeste, odnosno nije izabrana.

2.29. Koliko ima qetvorocifrenih brojeva u kojima je svaka cifra *a)* manja od prethodne;

b) ve a od prethodne?

Rexenje: a) Ukoliko svaka naredna cifra treba da bude manja od prethodne, cifre se nalaze u opadaju em poretku. Broj naqina

da odaberemo 4 cifre iz 10 4 . Sada svaka skupa *{*0*,* 1*, . . . ,* 9*}* je

qetvorka cifara odgovara jedinstvenom qetvorocifrenom broju kod kog su cifre pore ane u opadaju em poretku, pa tra enih brojeva ima koliko i odgovaraju ih qetvorki.

b) Tra imo qetvorocifrene brojeve kod kojih se cifre nalaze u rastu em poretku. Zbog uslova zadatka nula bi mogla biti samo prva cifra, ali znamo da to nije dozvoljeno. Prema tome, biramo

9

4 nenula cifre i to mo emo naqina.

uraditi na 4

2.30. Koliko ima nizova od *n* nula i *k* jedinica, gde je $k \le n + 1$*,* takvih da nikoje dve jedinice nisu susedne?

Rexenje: Pore ajmo prvo n nula u niz tako da izme u svake dve nule ostane jedno prazno mesto. Na ovaj naqin smo napravili $n-1$ mesto gde se mogu na i jedinice (izme u prve i druge nule, izme u druge i tre e,. . .). Kako jedinica mo e biti i na poqetku, odnosno na kraju niza, imamo ukupno $(n-1) + 2 = n+1$ potencijalnih mesta za jedinice. Sada od tih $n+1$ mesta biramo k mesta na kojima e

se nalaziti jedinice i to mo emo uraditi na $n + 1$ k naqina.

II naqin: Oznaqimo sa n_1 broj nula ispred prve jedinice, sa n_2 broj nula izme u prve i druge jedinice, sa n_3 broj nula izme u druge i tre e jedinice, . . . , sa n_{k+1} broj nula nakon poslednje jedinice.

1 1 1 . . . 1 1

n_1 n_2 n_3 n_4 n_{k-1} n_k n_{k+1}

Kako je ukupan broj nula u nizu n dobijamo da treba da va i $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k + n_{k+1} = n.$ Zbog zahteva da se izme u svake dve jedinice nalazi bar jedna nula moraju biti ispunjeni slede i uslovi $n_2 \geq 1, n_3 \geq 1, \ldots, n_k \geq 1.$ Sada je potrebno pre i na skup nenegativnih celih brojeva i to mo emo uraditi uvo enjem smene

$m_1 = n_1, m_2 = n_2 - 1, m_3 = n_3 - 1, \ldots, m_k = n_k - 1$ i $m_{k+1} = n_{k+1}$. Na ovaj naqin dobijamo jednaqinu

$$m_1 + m_2 + m_3 \cdots + m_k + m_{k+1} = n - (k - 1) = n - k + 1,$$

gde je $m_i \geq 0,$ za svako $i = 1, 2, \ldots, k + 1$. Konaqno, broj rexenja ove jednaqine jednak je broju tra enih nizova i on iznosi

$(n - k + 1) + (k + 1) - 1$ $(k + 1) - 1$ $=$ $n + 1$ k .

2.31. Za okruglim stolom kralja Artura sedi 12 vitezova. Poznato je da je svaki od njih u sva i sa svojim neposrednim susedom za stolom. Na koliko naqina se mo e izabrati 5 vitezova, tako da nikoja dva me u njima nisu u sva i?

Rexenje: Uoqimo jednog viteza. Neka je to vitez Lanselot. Razliku jemo dva sluqaja, u zavisnosti od toga da li je Lanselot izabran, ili nije. Ako je Lanselot izabran, tada njegovi susedi za stolom ne mogu biti birani. Sada treba odabrati jox 4 viteza od pre ostalih 9, pri qemu ne mogu biti izabrana dva viteza koja su sedela jedan do drugog za stolom. Ukoliko vitezove koje traba odabrati proglasimo jedinicama, a preostale nulama, onda imamo niz od 4 jedinice i 5 nula i na osnovu prethodnog zadatka znamo

da imamo $5 + 1$ 4 $=$ 6

takvih nizova. U sluqaju da Lanselot 4 nije izabran, njegovi susedi mogu, ali ne moraju, biti izabrani. To znaqi da treba odabrati svih 5 vitezova od ukupno 11 i broj

naqina da se to uradi je 6 + 4 5 = 7 5 naqina da se . Ukupan broj

odaberu vitezovi je prema tome 6 4 + 7 5 = 36.

2.32. Odrediti koliko ima prirodnih brojeva manjih od 1 000 000 kod kojih je zbir cifara 7.

Rexenje: Predstavimo prirodne brojeve koji su manji od 1 000 000 kao nizove cifara du ine 6, pri qemu dopisujemo odgovaraju i broj nula na poqetak niza ako broj nije xestocifren. Neka je $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ proizvoljan niz cifara du ine 6. Sada zbog uslova zadatka mora da va i $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 7$. Dobili smo jednu jednaqinu u skupu nenegativnih celih brojeva i broj njenih

rexenja je 7 + 6 − 1 6 = 7 + 6 − 1 6 − 1 .

2.33. Domina je ploqica za igru na kojoj se nalaze dve sliqice (ne obavezno razliqite). Ako na raspolaganju imamo 7 vrsta sliqica, koliko je razliqitih domina mogu e napraviti pomo u njih?

Rexenje: Standardni paket sadr i domine sa slede im sliqica:

Neka je sa x_i oznaqen broj sliqica na kojima je nacrtano i taqkica na jednoj uoqenoj domini, $i \in \{0, 1, 2, . . . , 6\}$. Kako svaka domina ima dve sliqice, va i $0 \leq x_i \leq 2$, za svako i. Sada broj domina odgovara broju rexenja jednaqine

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2$$

u skupu nenegaticnih celih brojeva. Prema tome, broj razliqi tih domina koje mo emo napraviti sa datim vrstama sliqica je

2 + 7 − 1 2 = 8 2 = 28.

2.34. Odrediti broj celobrojnih rexenja jednaqina $x_1 + x_2 +$

$x_3 + x_4 + x_5 = 23$,

ako je $x_i > i$, za svako $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Rexenje: Ako je $x_i > i$, onda znamo da va i $x_i \geq i + 1$, pa mo emo uvesti smenu $y_i = x_i - i - 1 \geq 0$, gde $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sada je

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = (x_1 - 2) + (x_2 - 3) + (x_3 - 4) + (x_4 - 5) + (x_5 - 6) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 20$$
$$= 23 - 20 = 3.$$

Na ovaj naqin smo zadatak sveli na odre ivanje broja rexenja jednaqine $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 = 3$ u skupu nenegativnih celih brjeva,

a znamo da ova jednaqina ima $\binom{3 + 5 - 1}{3} = 35$ rexenja.

2.35. Odrediti broj rexenja nejednaqine

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leq n,$$

u skupu nenegativnih celih brojeva.

Rexenje: Zbir posmatranih m nenegativnih celih brojeva mo e biti svaki od brojeva skupa $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Posmatrajmo zato proi zvoljnu jednaqinu $x_1+x_2+\cdots+x_m = k$, gde je $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Znamo

da je broj rexenja ove jednaqine $\binom{k+m-1}{k}$. Na kraju, ukupan broj

rexenja nejednaqine mo emo dobiti sabiranjem broja rexenja poje dinaqnih jednaqina, pa je tra eni broj rexenja $\sum_{k=0}^{n} \binom{k + m - 1}{k}$.

II naqin: Umesto nejednaqine $x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leq n$ mo emo posma trati slede u jednaqinu

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} = n.$$

Kako je $x_{m+1} \geq 0$, broj rexenja zadate nejednaqine jednak je broju rexenja posmatrane jednaqine u skupu nenegativnih celih brojeva.

Sada je broj rexenja $\binom{n + (m + 1) - 1}{n} = \binom{n + m}{n}$.

2.36. Koliko se razliqitih reqi, bez obzira na smisao, mo e napisati od svih slova sadr anih u reqima MATEMATIKA i KOMBINATORIKA?

Rexenje: U reqi MATEMATIKA slovo M se pojavljuje dva puta, slovo A tri puta, slovo T dva puta, dok se slova E, I i K poja vljuju taqno jednom. Tra ene reqi odgovaraju permutacijama sa

ponavljanjem i njihov broj je $P_{10}(3, 2, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{3!2!2!}$. Ukupan broj slova u reqi KOMBINATORIKA je 13, pri qemu se slova K, O, I i A se

pojavljuju po dva puta, pa je broj svih reqi zapisanih pomo u datih slova
13!

2!2!2!2!·

2.37. Odrediti broj naqina da se 8 belih figura (dva topa, dva skakaqa, dva lovca, kralj i kraljica) postavi na prvom redu xaho vske table, ako lovci trebaju da budu na poljima

a) razliqite boje;

b) iste boje.

Rexenje: a) Znamo da prvi red xahovske table sadr i 4 crna i 4 bela polja. Broj naqina da odaberemo polja na kojima stoje lovci

je $^4{}_1$ $^4{}_1$. Ostaje jox da se ostale figure rasporede na preostalih 6 polja. Kako ne razlikujemo dva topa i ne razlikujemo dva skakaqa, broj naqina

da se figure postave na prvom redu xahovske table na tra eni naqin je 4 ·

4 .6!

2!2!·

b) Prvo na 2 naqina biramo da li e lovci biti na crnim ili belim poljima.

Kada smo izabrali boju, na $^4{}_2$ naqina biramo 2 polja odabrane boje na kojima e se nalaziti lovci. Ostale figure raspore ujemo na isti naqin kao u primeru pod *a)*. Prema tome,

tra eni broj rexenja je 2 · 4 2 .6! 2!2!· 36

2 Prebrojavanja

2.38. Iz kompleta koji sadr i 32 razliqite karte bira se 8 karata: *a)* sa vra anjem;

b) bez vra anja.

Odrediti koliko razliqitih izbora postoji ako:

1) redosled izbora jeste bitan;

2) redosled izbora nije bitan.

Rexenje: Razlikujemo slede e 4 mogu e situacije.

a 1) Ukoliko je dozvoljeno vra anje karata i vodi se raquna o redosledu izvlaqenja, tada u svakom izvlaqenju na raspolaganju imamo sve karte i broj izbora je 32^8(varijacije sa ponavljanjem). *a 2)* U sluqaju da se karte mogu vra ati, ali nije bitan redosled izvlaqenja karata u pitanju su neure eni izbori 8 elemenata sa

ponavljanjem kojih ima 8 + 32 − 1 8 (kombinacije sa ponavljanjem).

b 1) Ako nakon izvlaqenja ne vra amo kartu u xpil i pri tome vodimo raquna o redosledu karata dobijamo da je broj mogu ih izvlaqenja 32 · 31 · 30 · 29 · 28 · 27 · 26 · 25 (varijacije bez ponavljanja). *b 2)* Konaqno, u sluqaju da nije bitan redosled izvlaqenja i nema vra anja karata, samo treba odabrati 8 od 32 karte i to mo emo

uraditi na 32 8 (kombinacije bez ponavljanja).

Ispitni zadaci

2.39. Posmatrajmo sve nizove dekadnih cifara du ine 6. Da li me u njima ima vixe onih kod kojih je zbir cifara 27 ili onih kod kojih je zbir prve tri cifre jednak zbiru poslednje tri cifre?

Rexenje: Neka je A skup svih nizova kod kojih je zbir cifara 27, a B skup svih nizova kod kojih je zbir prve tri cifre jednak zbiru poslednje tri cifre. Neka je $b_1b_2b_3b_4b_5b_6$ proizvoljan niz iz B. Konstruisa emo preslikavanje $f : B \to A$ na slede i naqin

$f(b_i) =$ 2, 3 b_i, $i = 4$, 5, 6.

9 − b_i, $i = 1$,

Ovako definisano preslikavanje je dobro definisano jer je $f(b_1) + \cdots + f(b_6) = (9 - b_1) + (9 - b_2) + (9 - b_3) + b_4 + b_5 + b_6 = 27 - (b_1 + b_2 + b_3) + (b_4 + b_5 + b_6) = 27,$

pa $f(b_1) \ldots f(b_6) \in A$. Jednostavnom proverom se dolazi do zakljuqka da je preslikavanje f bijekcija, odakle na osnovu principa bije kcije dobijamo da posmatrani skupovi imaju isti broj elemenata.

2.40. Na zabavi je bilo 10 devojaka i 6 mladi a. Ako u nekom plesu uqestvuju svi mladi i, koliko ima mogu nosti za formi ranje plesnih parova?

Rexenje: Bilo koja od 10 devojaka mo e biti plesni partner prvom mladi u. Drugi mladi tada mo e izabrati jednu od preostalih 9 devojaka, tre i neku od 8 devojaka, . . . , xesti neku od 5 devojaka. Sada je broj naqina za formiranje plesnih parova $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

II naqin: Broj naqina da odaberemo koje devojke uqestvuju u plesu je $^{10}{}_{6}$.

Zatim na 6! naqina mo emo formirati plesne parove od izabranih devojaka i mladi a, pa je ukupnan broj naqina 10 6 ·6!.

2.41. Tri studenta dele sobu. Oni na raspolaganju imaju 4 razli qite xoljice, 5 razliqitih tanjiri a i 6 razliqitih kaxiqica. Na koliko naqina mogu da popiju qaj, ako svaki student treba da koristi jednu xoljicu, jedan tanjiri i jednu kaxiqicu?

Rexenje: Prvi student mo e odabrati jednu od 4 xoljice, jedan od 5 tanjiri a i jednu od 6 kaxiqica, pa je broj naqina da prvi student izabere pribor 4

$\cdot\ 5 \cdot 6$. Sada drugi student mo e uzeti pribor za qaj na $3 \cdot 4 \cdot 5$, a tre i na $2 \cdot 3 \cdot 4$ naqina. Ukupan broj naqina da studenti uzmu pribor je na osnovu principa proizvoda jednak $(4 \cdot 5 \cdot 6) \cdot (3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4)$.

II naqin: Studenti tri xoljice mogu izabrati na $\binom{4}{3}$ naqina. Kada su odabrali koje e xoljice koristiti na 3! naqina mogu odabrane xoljice rasporediti me u sobom. Analognim postupanjem za tanji ri e i kaxiqice dobijamo da je broj naqina da se izabere pribor

$$\binom{4}{3} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot (3!)^3.$$

2.42. U 15 klupa u uqionici treba rasporediti 15 devojqica i 15 deqaka tako da u svakoj klupi sede jedna devojqica i jedan deqak. Na koliko naqina je to mogu e uqiniti?

Rexenje: Devojqice razmextamo u klupe na 15! naqina i isto toliko naqina imamo za razmextanje deqaka. Kada su sva deca raspore- ena u klupe, treba jox videti da li e sedeti deqak–devojqica ili devojqica–deqak, a to mo emo uqiniti na 2 naqina. Prema tome, rexenje je $15! \cdot 15! \cdot 2^{15}$.

2.43. U razredu sa 20 uqenika na svakih mesec dana se biraju predsednik, sekretar i blagajnik (svaku od funkcija obavlja taqno jedan uqenik). Ako se tokom xkolske godine odr i osam ovakvih

izbora i prilikom svakog biranja rukovodstva razreda uqestvuje svih 20 uqenika, odrediti ukupan broj ishoda na izborima u toku jedne xkolske godine.

Rexenje: Broj naqina da se u jednom izbornom ciklusu izabere predsednik, sekretar i blagajnik razreda je $20 \cdot 19 \cdot 18$. Kako svi uqenici mogu biti birani u svakom izbornom ciklusu dobijamo da je ukupan broj ishoda za izbor rukovodstva razreda u jednoj xkolskoj godini $(20 \cdot 19 \cdot 18)^8$.

2.44. Na koliko naqina 7 deqaka i 3 devojqice mogu da stanu u red ako nikoje dve devojqice ne stoje jedna pored druge i na poqetku i kraju reda treba da bude deqak?

Rexenje: Razmestimo prvo deqake. To mo emo uqiniti na 7! naqina. Kako devojqice ne mogu da stoje na poqetku i na kraju reda zaklju qujemo da imamo 6 mesta izme u deqaka na koja mo emo staviti devojqice. Prema tome, tra eno rexenje je $7! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

2.45. Azbuka sadr i 5 samoglasnika (*A, E, I, O, U*) i 25 suglas nika. Posmatraju se reqi du ine 8 nad azbukom (bez obzira na smisao) koje sadr e 3 samoglasnika, 5 suglasnika i u kojima nema ponavljanja slova. Koliko takvih reqi poqinje slovom *A* i zavr xava se slovom *B*?

Rexenje: Kako tra ena req treba da sadr i ukupno 3 samoglasnika i 5 suglasnika, preostala 2 samoglasnika biramo na $\binom{4}{2}$ naqina, a preostale suglasnike na $\binom{24}{4}$ naqina. Izabrali smo sva slova za req i treba jox ispermutovati malopre izabrana slova na pozi cije od druge do sedme, a to radimo na 6! naqina. Ukupan broj

tra enih reqi je sada 4 2 24 4 6!.

2.46. Koliko ima reqi du ine 5 nad azbukom *{a, b, c, d, e, f, g, h}* kod kojih se slova ne ponavljaju i koje ne sadr e podreq *abc*?

Rexenje: Ukupan broj reqi du ine 5 nad azbukom *{a, b, c, d, e, f, g, h}* u kojima se slova ne ponavljaju je $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$. Posmatrajmo sada reqi koje sadr e podreq *abc*. Poziciju podreqi *abc* u reqi du ine pet mo emo odrediti na 3 naqina. Sada preostala dva slova reqi biramo na $5 \cdot 4$ naqina, pa imamo ukupno $3 \cdot 5 \cdot 4$ reqi koje sadr e podreq *abc*. Rexenje je tada $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 - 3 \cdot 5 \cdot 4$.

2.47. Koliko ima naqina da n osoba stane u red ako izme u Petra i Nemanje stoji taqno k drugih osoba?

Rexenje: Blok od $k + 2$ osobe gde su prva i poslednja pozicija reze rvisane za Petra i Nemanju mo emo razmestiti u okviru niza od n elemenata na $n-(k+2)+1 = n-k-1$ naqina. Kada smo odabrali pozi ciju bloka u okviru niza, zapravo smo fiksirali na kojim mestima e se nalaziti Petar i Nemanja, koji mogu biti razmexteni tako da Petar bude prvi, ili da Nemanja bude prvi. Preostale osobe sada mo emo razmestiti na $(n-2)!$ naqina. Konaqno rexenje dobi jamo primenom principa proizvoda i ono iznosi $2\cdot(n-k-1)\cdot(n-2)!$.

2.48. Brajeva azbuka je specijalno pismo namenjeno slepim i slabo vidim osobama. Svaki karakter u Brajevoj azbuci predstavljen je sa xest taqkica (raspore enih u tri vrste i dve kolone), pri qemu svaka taqkica mo e biti odxtampana ili ne. Koliko kara ktera mo e biti napravljeno u Brajevoj azbuci, ako je u svakom karakteru odxtampana bar jedna taqkica?

Rexenje: Kako je broj taqkica koje mogu biti odxtampane u jednom karakteru jedna, dve, tri, qetiri, pet ili xest dobijamo da je ukupan broj karaktera koje mo emo napisati u Brajevoj azbuci $\sum_{k=1}^{6}\binom{6}{k}$. Broj karaktera mo emo izraqunati na slede i naqin

$$\sum_{k=1}^{6}\binom{6}{k} = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k} - 1 = 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63.$$

2.49. Za uqex e na FTN Slagalici prijavilo se 30 ekipa. Orga nizatori su obezbedili nagrade za 8 najboljih ekipa. Odrediti na koliko naqina mogu biti dodeljene nagrade, ako je poznato da e ekipa koja je pobedila na

FTN Poteri, zavrxiti takmiqenje na jednom od prva 3 mesta.

Rexenje: Prvo na 3 naqina biramo mesto koje je osvojila ekipa koja je pobedila na FTN Poteri. Zatim se od preostalih 29 ekipa bira 7 ekipa koje su osvojile ostale nagrade i to mo emo uraditi na

29

7

naqina. Kada smo odabrali preostale ekipe koje su osvojile nagrade treba jox videti na koliko naqina te nagrade mogu biti dodeljenje, a to radimo na 7! naqina. Dobijamo da je ukupan broj naqina na koji mogu biti dodeljene nagrade 3 · 29 7 · 7!.

2.50. Koliko ima xestocifrenih brojeva kod kojih su sve cifre razliqite, pri qemu su druga i qetvrta neparne?

Rexenje: Odaberimo prvo neparne cifre za drugu i qetvrtu pozi ciju. Za drugu cifru imamo 5, a za qetvrtu 4 mogu nosti. Sada za

prvu cifru mo emo birati bilo koju od preostalih cifara osim nule pa imamo 7 naqina za izbor prve cifre. Za tre u, petu i xestu cifru nemamo dodatnih uslova i njih mo emo izabrati na 7,6 i 5 naqina, respektivno. Dakle rexenje je $7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5$.

2.51. Koliko ima xestocifrenih brojeva u kojima parne i neparne cifre dolaze naizmeniqno?

Rexenje: Razlikujemo dva sluqaja u zavisnosti od parnosti prve cifre. Ukoliko je prva cifra neparna, za svaku cifru broja imamo 5 mogu nosti, poxto imamo 5 parnih i 5 neparnih cifara na raspolaganju. Ako je prva cifra parna, broj naqina da se izabere prva cifra je 4 (sve parne cifre osim nule), dok za ostale cifre imamo po 5 mogu nosti. Prema tome, tra enih brojeva ima $5^6+4\cdot5^5$.

II naqin: Prvu cifru mo emo izabrati proizvoljno na 9 naqina. Nakon xto smo izabrali prvu cifru i ustanovili njenu parnost, ostale cifre biramo vode i raquna da se cifre smenjuju prema parnosti. Broj rexenja je sada $9 \cdot 5^5$.

2.52. Koliko ima sedmocifrenih brojeva u qijem dekadnom zapisu se ne pojavljuju cifre 0,4,8, deljivi su sa 4 i svake dve susedne cifre su me usobno razliqite?

Rexenje: Znamo da je broj deljiv sa 4 ukoliko poslednje dve cifre formiraju dvocifreni broj koji je deljiv sa 4. Od cifara koje imamo na raspolaganju mo emo napraviti 10 dvocifrenih brojeva koji su deljivi sa 4 (to su brojevi 12, 16, 32, 36, 52, 56, 72, 76, 92 i 96). Zbog uslova da su susedne cifre razliqite, ostale cifre emo dalje fiksirati gledano od nazad. Svaka naredna cifra koju biramo mora da se razlikuje samo od prethodne cifre koju smo izabrali, pa imamo 6 mogu ih izbora za svaku slede u cifru. Dobijamo da tra enih brojeva zato ima $6^5 \cdot 10$.

2.53. Koliko ima xestocifrenih brojeva koji se mogu napisati pomo u nenula cifara, ako se cifre ne ponavljaju i cifre 1 i 2 nisu susedne?

Rexenje: Broj xestocifrenih brojeva koji se mogu napisati pomo u nenula cifara bez ponavljanja je $\binom{9}{6} \cdot 6!$. ,,Loxi" brojevi su oni kod kojih su cifre 1 i 2 susedne i njihov broj je $\binom{7}{4} \cdot 2 \cdot 5!$. Tra enih brojeva prema tome ima $\binom{9}{6} \cdot 6! - \binom{7}{4} \cdot 2 \cdot 5!$.

2.54. Koliko ima parnih trocifrenih brojeva kod kojih se cifre ne ponavljaju?

Rexenje: Razlikujemo dva sluqaja. Ako je poslednja cifra 0, za prvu cifru imamo 9, a za drugu 8 mogu nosti. Ako poslednja cifra nije 0, onda imamo 4 mogu nosti za poslednju cifru - 2, 4, 6 ili 8. Tada na mesto prve cifre mo e do i jedna od 8 cifara (sve sem 0 i cifre koju smo fiksirali na poslednjem mestu). Kako 0 sada mo e biti druga cifra imamo 8 mogu nosti za izbor druge cifre. Konaqno rexenje je $9 \cdot 8 \cdot 1 + 8 \cdot 8 \cdot 4$.

2.55. Koliko ima petocifrenih prirodnih brojeva koji imaju taqno dve parne cifre?

Rexenje: Posmatrajmo prvo brojeve kod kojih je prva cifra neparna. Pozicije za dve parne cifre biramo na $\binom{4}{2} = 6$ naqina (parne cifre mogu biti na drugoj, tre oj, qetvrtoj ili petoj poziciji). Nakon xto smo odabrali pozicije za parne cifre, ostaje da se 3 neparne cifre i 2 parne cifre rasporede na izabrane pozi cije. Kako imamo 5 parnih i 5 neparnih cifara, broj naqina da se to uradi je 5^5. U sluqaju da je prva cifra posmatranog broja parna, imamo 4 naqina da odaberemo jednu od preostale qetiri pozicije za drugu parnu cifru. Prvu cifru biramo od 4 nenula parne cifre (cifre 2,4,6 ili 8), dok svaku od preostalih cifara biramo od 5 mogu ih cifara. Dobijamo da je broj petocifrenih prirodnih brojeva sa taqno dve parne cifre $6 \cdot 5^5 + 4 \cdot 4 \cdot 5^4 =$ 28 750.

2.56. Na koliko naqina na tablu dimenzija 8×8 mo emo postaviti 10 belih i 6 crnih etona? (etone iste boje ne razlikujemo.)

Rexenje: Prvo emo odabrati polja na kojima e se nalaziti etoni i to radimo na $\binom{64}{16}$ naqina. Nakon xto smo odabrali polja za etone, biramo 10 polja na kojima e se nalaziti beli etoni na $\binom{16}{10}$ naqina (crne etone emo onda postaviti na preostalih 6 izabranih polja). Ukupan broj naqina da postavimo etone na tablu je $\binom{64}{16} \cdot \binom{16}{10}$.

II naqin: Zadatak smo mogli da reximo i tako xto prvo odaberemo polja za bele etone na $^{64}{}_{10}$ naqina. Zatim od preostalih 54 polja biramo 6 polja za crne etone i to radimo na $^{54}{}_{6}$ naqina. Konaqno

rexenje je sada 64 10 · 54 6 ·

2.57. Veqeras se u Torinu u Italiji igra finale Svetskog prve nstva u odbojci za muxkarce. Na xampionatu su uqestvovale 24 ekipe koje su bile podeljene u 4 grupe (A, B, C, D) od po 6 ekipa.

Prve 4 ekipe iz svake grupe su proxle u drugu fazu takmiqenja, za koju su oformljene 4 nove grupe E, F, G i H na slede i naqin.

E	F	G	H
1A 2B 3C 4D	1B 2A 3A 4C	1C 2D 3D 4B	1D 2C 3B 4A

Pobednici novih grupa i dve najbolje drugoplasirane ekipe su obezbedile odlazak u Torino na zavrxnicu xampionata. U Torinu su reprezentacije rebom podeljeno u 2 grupe I i J. Nakon meqeva u ovim grupama, dve prvoplasirane ekipe iz svake grupe su se plasirale u polufinale. Odrediti koji e po redu biti meq za zlato na Svetskom prvenstvu. (*30. septembar 2018. godine*)

Napomena: U svakoj od 10 grupa ekipe su igrale po sistemu svaka ekipa iz grupe igra sa svakom.

Rexenje: Mo emo podeliti Svetsko prvenstvo u tri faze. U prvoj fazi je odigrano $4 \cdot {}^{6}{}_{2} = 60$ utakmica, dok je u drugoj odigrano $4 \cdot {}^{4}{}_{2} = 24$ utakmice. U zavrxici xampionata je odigrano $2 \cdot {}^{3}{}_{2} = 6$ meqeva u grupama I i J, a zatim i dva polufinalna meqa. Kako borbi za zlatnu medalju prethodi utakmica za bronzu, finale je 94. meq na xampionatu.

2.58. Predtakmiqenje na fudbalskom turniru se odvija u m grupa ($m > 1$), pri qemu je svaka grupa sastavljena od $2k$ ekipa ($k > 1$). U grupama ekipe igraju svaka sa svakom i prve dve ekipe iz svake grupe prolaze u zavrxnu fazu turnira. U zavrxnoj fazi ekipe tako e igraju svaka sa svakom, s tim xto ekipe koje su se ve sastajale u predtakmiqenju ne igraju novu utakmicu. Koliko je ukupno utakmica odigrano na ovom fudbalskom turniru?

Rexenje: U svakoj grupi predtakmiqenja je odigrano $^{2k}{}_2$ utakmica. Kako iz svake grupe prolaze po dve ekipe u zavrxu fazu i ekipe koje su ve igrale u grupi ne igraju novu utakmicu, broj utakmica

u drugoj fazi je $^{2m}{}_2 - m$. Sada je ukupan broj utakmica na turniru

$$m \quad 2k\ 2 \quad + \quad 2m\ 2 \quad - m.$$

2.59. U ravni se nalazi 10 taqaka. Taqke *A, B, C* i *D* su koline arne, a me u preostalim taqkama svake 3 su nekolinearne. Koliko ima pravih koje se mogu konstruisati kroz ovih 10 taqaka?

Rexenje: Maksimalan broj pravih koji mogu odrediti 10 taqaka u ravni je $^{10}{}_2$. Poxto su taqke *A, B, C* i *D* kolinearne, $^4{}_2$ pravih koje one odre uju predstavljaju jednu istu pravu. Zato je tra eni

broj pravih $^{10}{}_2 - ^4{}_2 + 1 = 40$.

II naqin: Taqke *A, B, C* i *D* odre uju jednu pravu, dok preostalih 6 taqaka odre uje $^6{}_2$ pravih izme u sebe. Treba jox odrediti broj pravih koje su odre ene sa jednom od ove 4 kolinearne taqke i jednom od preostalih 6 taqaka. Kako je broj ovakvih pravih $4 \cdot 6$,

dobijamo da je ukupno mogu e konstruisati $1 + ^6{}_2 + 4 \cdot 6 = 40$ pravih. 2.60. Na kru nici je uoqeno *n* razliqitih taqaka i svake dve taqke su spojene tetivom. Ukoliko ne postoje tri tetive koje prolaze kroz istu taqku u unutraxnjosti kru nice, odrediti

a) koliko je tetiva povuqeno;

b) koliko taqaka preseka je dobijeno u unutraxnjosti kru nice. *Rexenje:*

a) Svake dve taqke odre uju jednu tetivu, odakle je broj

povuqe nih tetiva $n\ 2$.

b) Primetimo da svake 4 od uoqenih *n* taqaka predstavljaju temena jednog tetivnog[5] qetvorougla. Posmatrane 4 taqke odre uju ukupno 6 tetiva, ali samo dve tetive imaju preseqnu taqku u unutra xnjosti kru nice i to su tetive koje odgovaraju dijagonalama ovog qetvorougla. Prema tome, broj preseqnih taqaka jednak je broju naqina da odaberemo 4 od zadatih *n* taqka sa kru nice, a

to mo emo uraditi na $n\ 4$ naqina.

2.61. Date su paralelne prave p i q. Na pravoj p je uoqeno m, a na pravoj q je uoqeno n taqaka. Odrediti koliko trouglova obrazuju date taqke.

Rexenje: Znamo da je svaki trougao jedinstveno odre en sa svojim temenima. Da bismo uopxte mogli formirati trougao neophodno

[5]Tetivan qetvorougao je qetvorougao oko kog se mo e opisati kru nica. 44

je da dva temena budu sa jedne prave, a tre e sa druge (u protivnom imamo tri kolinearne taqke i nije mogu e formirati trougao). Broj naqina da izaberemo dve taqke sa prave p i jednu taqku sa

prave q je m 2 n 1 . Ukoliko se bira jedna taqka sa prave p i dve sa q odgovaraju i broj izbora je m 1 n 2 . Ukupan broj trouglova

koje obrazuju uoqene taqke je dakle m 2 n 1 + m 1 n 2 .

2.62. Na svakoj stranici kvadrata zadate su po tri proizvoljne taqke od kojih nijedna nije teme kvadrata. Odrediti broj trou glova koji je odre en sa dvanaest zadatih taqaka.

Rexenje: Razlikujemo dva sluqaja. Ukoliko temena trougla pri padaju trima razliqitim stranicama kvadrata broj trouglova je

4 · 3 · 3 · 3 = 108. Drugi sluqaj je da se na jednoj stranici kvadrata

nalaze dva temena trougla. Prvo na $^4_2$ naqina biramo dve stra nice kvadrata, a zatim na $^2_1$ naqina biramo sa koje od te dve

3

odabrane stranice se uzimaju dve taqke. Sada je broj trouglova 2 $\cdot^4_2 \cdot^3_2$ $\cdot^3_1$ = 108. Ukupan broj trouglova koji je odre en zadatim taqkama je 216.

II naqin: Dvanaest taqaka u ravni, od kojih nikoje tri nisu koli nearne, odre ivalo bi ${}^{12}_{3}$ = 220 trouglova. Kako se na svakoj stranici kvadrata nalaze po 3 kolinearne taqke broj tra enih trouglova je 220 − 4 = 216.

2.63. Dato je pet pravih i na svakoj od njih je uoqeno po qetiri taqke. Koliko najvixe trouglova obrazuju date taqke?

Rexenje: Sliqno kao u prethodnom zadatku posmatramo sluqaj da su taqke izabrane sa tri razliqite prave i sluqaj da se dve taqke biraju sa iste prave. U prvom sluqaju biramo tri prave od 5 na

naqina, a zatim sa svake od izabranih pravih biramo jednu od

5

4 taqke. Broj naqina da to uradimo je ${}^{5}_{3}$ · 4 · 4 · 4 = 640. Ukoliko

3

se sa jedne prave uzimaju dve taqke, tu pravu mo emo izabrati na 5 naqina, dok pravu sa koje uzimamo tre e teme trougla biramo na 4 naqina. Ostaje jox da izaberemo dve, odnosno jednu taqku sa

izabranih pravih, pa je broj tra enih trouglova 5·4·${}^{4}_{2}$ ·${}^{4}_{1}$ = 480. Dobijamo da uoqene taqke odre uju najvixe 1120 trouglova.

II naqin: Ukoliko bi svih 5 · 4 = 20 taqaka bilo nekolinearno imali bismo

${}^{20}_{3}$ = 1140 trouglova. Poxto su taqke koje se nalaze 45

na istoj pravoj kolinearne, neophodno je oduzeti sve takve trojke taqaka. Kako imamo 5 pravih broj ,,loxih” trojki je 5 ·${}^{4}_{3}$ = 20. Konaqno rexenje je 1140 − 20 = 1120.

2.64. U ravni je dato 15 taqaka, od qega su 4 obojene crvenom, 5 plavom i 6 zelenom bojom. Odrediti broj trouglova koji imaju temena obojena sa dve razliqite boje, ako je poznato da nikoje tri taqke nisu kolinearne.

Rexenje: Razlikujemo tri sluqaja. Ukoliko trougao ima dva crvena temena, tre e teme mo e biti plavo ili zeleno. Broj trouglova

koji imaju dva crvena temena je ${}^{4}_{2}$ (5 + 6) = 66. Na isti naqin dobijamo da

je broj trouglova sa dva plava temena ${}^{5}_{2}$ (4 + 6) = 100, a broj trouglova sa

dva zelena temena ${}^{6}_{2}$ (4 + 5) = 135. Ukupan broj tra enih trouglova je 301.

2.65. Biblioteka je na poklon dobila 15 razliqitih knjiga iz matematike, 12 razliqitih knjiga iz fizike i 16 razliqitih kn jiga iz informatike. Na koliko naqina se knjige mogu slo iti na policu ako sve knjige iz iste oblasti moraju biti postavljene za jedno, pri qemu knjige iz matematike i knjige iz informatike ne smeju biti stavljene jedne do drugih?

Rexenje: Iz uslova da knjige iz matematike i informatike ne mogu stajati jedne do drugih dobijamo da raspored knjiga na polici po predmetima mora biti matematika–fizika–informatika ili informatika–fizika–matematika. Treba jox odrediti koliko ima naqina da se rasporede knjige iz svake oblasti. Poxto imamo 15 knjiga iz matematike, broj naqina da se rasporede ove knjige je 15!. Na isti naqin naqin dobijamo da imamo 12! naqina da rasporedimo knjige iz fizike i 16! naqina za knjige iz informatike. Prema tome, broj naqina da se posmatrane knjige rasporede na policu je $2 \cdot 15! \cdot 12! \cdot 16!$.

2.66. Koliko ima naqina da se na dve police razmesti 15 knjiga ako na svakoj polici treba da budu bar tri knjige?

Rexenje: Ako na prvoj polici imamo k knjiga, onda na drugoj imamo $15-k$ knjiga. Tada je ukupan broj naqina da se knjige rasporede na ove dve police

15!.

15 k

$k!(15-k)! = 15!$

$k!(15-k)!k!(15-k)! =$ 46

Kako na svakoj polici treba da budu bar 3 knjige dobijamo da $k \in \{3, 4, 5, \ldots, 12\}$. Sada je ukupan broj naqina da rasporedimo ovih 15 knjiga na dve police $10 \cdot 15!$.

2.67. Milan je pozvao 5 devojqica i 6 deqaka na proslavu svog ro endana u igraonici. Na koliko naqina deca mogu da sednu oko okruglog stola, ako izme u Milana i njegovog najboljeg druga Ivana sede taqno 3 devojqice i nijedan deqak?

Rexenje: Prvo emo odrediti broj naqina da se formira blok od 5 osoba u kom tri devojqice sede izme u Milana i Ivana. Kako prvo mo e da sedne Milan ili Ivan imamo $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ naqina za formiranje ovog bloka. Sada preostaje da se blok i preostalih 7 osoba razmeste oko okruglog stola xto se mo e uraditi na $\frac{8!}{8} = 7!$ naqina. Konaqno, ukupan broj naqina da deca sednu oko odruglog stola je $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7!$.

2.68. U jednom upravnom odboru sa n qlanova postoji predsednik i dva potpredsednika. Na koliko naqina se qlanovi upravnog odbora mogu razmestiti oko okruglog stola tako da oba potpredsednika sede pored predsednika?

Rexenje: Posmatrajmo predsednika i dva potpredsednika kao blok od tri elementa. Broj naqina da ovaj blok od tri qlana isper mutujemo zajedno sa preostalim qlanovima upravnog odbora oko okruglog stola je $\frac{(n-3+1)!}{n-3+1} = (n-3)!$. Kako u zavisnosti od toga koji potpredsednik sedi sa leve, a koji sa desne strane potpredsednika dobijamo razliqite razmextaje osoba oko okruglog stola rexenje je $2 \cdot (n-3)!$.

2.69. Na koliko naqina 10 deqaka i 5 devojqica mogu stati u krug ako dve devojqice ne smeju da stoje jedna do druge?

Rexenje: Zbog uslova da devojqice ne smeju da stoje jedna pored druge, prvo emo pore ati samo deqake u krug. Broj naqina da to uradimo je 9!. Sada imamo 10 mesta izme u deqaka na koja mogu do i devojqice, odakle sledi da je broj naqina da se razmeste devojqice $10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6$. Broj naqina da deca stanu u krug je $10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot9!$.

2.70. Na koliko naqina n muxkaraca i n ena mo e sesti oko okruglog stola ako osobe istog pola ne smeju da sede jedna do druge?

Rexenje: Muxkarce mo emo smesti u krug na $(n-1)!$ naqina. Sada izme u svaka dva muxkarca treba smestiti po jednu enu, xto

mo emo uraditi na $n!$ naqina. Ukupan broj naqina da sednu oko stola je $(n-1)!n!$.

2.71. Palindrom je niz simbola koji se qita isto i sa leve i desne strane. Primeri nizova koji su palindromi su recimo oko, neven, Ana voli Milovana, 12321. Odrediti koliko ima $n-$cifrenih prirodnih brojeva koji su palindromi.

Rexenje: Razlikujemo sluqajeve kada je n parno i kada je neparno. Za n parno je potrebno odrediti prvih $\frac{n}{2}$ cifara i to mo emo uraditi na $9\cdot10^{\frac{n}{2}-1}$ naqina (0 ne mo e biti prva cifra). U sluqaju kada je n neparno imamo $9\cdot10^{\frac{n+1}{2}-1}$ palindroma. Primetimo da se broj palindroma mo e zapisati i kao $9\cdot10^{\lceil\frac{n}{2}\rceil-1}$, za $n\in\mathbb{N}$.

2.72. Na raspolaganju imamo 6 osnovnih boja. Nove boje dobijamo mexanjem osnovnih boja uzimaju i jednake koliqine osnovnih boja. Da li je mogu e ofarbati polja xahovske table koriste i ove boje, tako da svako polje bude obojeno drugom bojom?

Rexenje: Za dobijanje izvedenih boja mo emo pomexati dve, tri, qetiri, pet ili svih xest osnovnih boja, pa je broj izvedenih boja $\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}$. Tada je ukupan broj boja koje mo emo dobiti koriste i ovih 6 osnovnih boja jednak

$$\sum_{k=1}^{6}\binom{6}{k}=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}-1=2^6-1=64-1=63.$$

Kako je xahovska tabla dimenzije 8×8 zakljuqujemo da nije mogu e ofarbati svako polje na tabli drugom bojom.

2.73. Na koliko naqina je od 6 muxkarca i 4 ene mogu e izabrati delegaciju u kojoj e biti jednak broj muxkaraca i ena?

Rexenje: Kako delegacija treba da ima isti broj muxkaraca i ena, u delegaciji mo e biti dvoje, qetvoro, xestoro ili osmoro ljudi. Sada je tra eno rexenje

6 1 4 1 + 6 2 4 2 + 6 3 4 3 + 6 4 4 4 .

2.74. Profesor istorije je zadao ukupno 10 pitanja na zavrxnom testu. Prvih pet pitanja se odnose na gradivo iz prvog polu godixta, a drugih pet pitanja su gradivo drugog polugodixta.

Uqenici trebaju da odgovore na 7 pitanja po svom izboru. Odre diti na koliko naqina uqenici mogu odabrati na koja pitanja e odgovarati, ako profesor zahteva da bar 3 pitanja budu iz grupe od prvih pet pitanja.

Rexenje: Uqenici mogu odgovoriti na taqno tri, qetiti ili pet pitanja iz prvog polugodixta. Broj naqina da uqenik odabere tri

od prvih pet pitanja je $^{5}_{3}$. Sada uqenik treba da odabere jox qetiri pitanja

iz druge grupe i to mo e uraditi na $^{5}_{4}$ naqina. U sluqaju da uqenik izabere da odgovara na qetiri pitanja iz prve

grupe imamo $^{5}_{4}$ $^{5}_{3}$ mogu ih izbora pitanja. Ako uqenik odluqi da odgovori na sva pitanja iz prve grupe, preostala dva pitanja mo e

odabrati na $^{5}_{2}$ naqina. Ukupan broj naqina da se odaberu pitanja na koja e se odgovarati je prema tome

5 3 5 4 + 5 4 5 3 + 5 5 5 2 = 50 + 50 + 10 = 110.

2.75. Na koliko naqina se iz standardnog xpila sa 52 karte mo e izvu i 4 karte, tako da me u njima budu najvixe 2 dame?

Rexenje: Razlikujemo sluqajeve kada su izvuqene dve dame, jedna dama i kada nema dama. Standardni xpil sa 52 karte sadr i

4 dame. Broj naqina da izvuqemo taqno 2 dame iz xpila je $^{4}_{2}$. Nakon xto smo izabrali 2 dame, ostaje da se izvuku jox 2 karte od preostalih 48 karata koje nisu dame, a to mo emo uraditi na

48 2 naqina. Koriste i analogno razmatranje u sluqajevima kada imamo samo jednu damu i kada uopxte nisu izvuqene dame, dobi jamo da je rexenje zadatka

4 2 48 2 + 4 1 48 3 + 4 0 48 4 .

2.76. Na koliko naqina je mogu e oformiti komisiju sa xest qlanova od 7 ena i 4 muxkarca, ako u njoj treba da bude isti broj ena i muxkaraca i Ana i Pera ne mogu biti istovremeno qlanovi komisije?

Rexenje:

Ukupan broj komisija koje imaju 3 ene i 3 muxkarca je

7 3

nalaze i Ana i Pera nisu dobre i

4 3

. Komisije u kojima se

enih komisija

6 2

broj takvih komisija je

3 2

. Sada je broj tra

7 3 − 3 2

4 3 6 2

.

49

I Kombinatorika

II naqin: Razlikujemo komisije u kojima se nalazi Ana i one u kojima se ne nalazi. Ako je Ana u komisiji, tada Pera ne mo e

biti izabran i broj takvih komisija je 6 2 3 3 . U sluqaju da Ana

nije deo komisije, Pera mo e ali i ne mora biti izabran, pa je

broj komisija 4 3 . Rexenje dobijamo sabiranjem broja rexenja

6 3

iz ova dva sluqaja.

2.77. Jedan koxarkaxi tim ima 5 igraqa koji igraju na poziciji beka, 4 na poziciji centra i 3 na poziciji krila. Na koliko naqina trener mo e odrediti koji igraqi e igrati u prvoj petorci, ako u njoj treba da budu bar dva beka, bar jedan centar i bar jedno krilo?

Rexenje: Trener se mo e odluqiti za jedan od slede a tri sastava prve petorke: 3×B 1×C 1×K, 2×B 2×C 1×K ili 2×B 1×C 2×K. Odavde dobijamo da je broj naqina da se odaberu igraqi za prvu

petork u 5 3 4 1 3 1 + 4 2 3 1 + 5 2 4 1 3 2 .

5 2

2.78. Hor u jednoj gimnaziji broji 25 devojaka i 14 momaka, od qega su 10 devojaka i 4 momka maturanti. Na koliko naqina dirigent mo e da izabere sastav od 7 osoba za sveqanost, ako u sastavu treba da bude taqno 4 maturanta i taqno 5 devojaka?

Rexenje: Razlikujemo slede a tri sluqaja. Ukoliko su sva qetiri maturanta u izabranom sastavu devojke, onda od preostalih 15 devojaka treba odabrati jox jednu. U ovom sluqaju su svi mladi i u sastavu uqenici ni ih razreda, pa od 10 momaka biramo dva.

Broj naqina na koji to mo emo uraditi je 10 4 15 1 10 2 . Druga

mogu nost je da imamo tri devojke i jednog momka maturanta. Sada od preostalih 15 devojaka biramo jox dve i od preostalih

10 momaka biramo jednog, xto daje dirigenu 10 3 4 1 15 2 10 1

mogu ih izbora. Ostaje jox sluqaj da imamo po dve devojke i dva momka koji su maturanti u sastavu. U tom sluqaju treba odabrati jox tri devojke od 15 devojaka ni ih razreda za sastav, pa je broj

izbora 10 2 4 2 15 3 . Konaqno rexenje dobijamo sabiranjem broja

izbora u ova tri sluqaja. 50

2.79. Vlada ima 5 ena i 7 muxkaraca me u svojim prijateljima, a Maja ima 8 ena i 4 muxkarca za prijatelje. Na koliko naqina Vlada i Maja mogu pozvati 6 ena i 6 muxkaraca na veqeru tako da 6 gostiju pozove Vlada, a 6 gostiju Maja?

Rexenje: U slede oj tabeli su dati mogu i sluqajevi:

Vlada	4 2 m	3 3 m	2 4 m	1 5 m	0 6 m
Maja	2 4 m	3 3 m	4 2 m	5 1 m	6 0 m

Broj naqina da Vlada i Maja pozovu goste na veqeru je

5 4 7 2 8 2 4 4 + 5 3 7 3 8 3 4 3 + 5 2 7 4 8 4 4 2

+ 5 1 8 5 + 7 6 .
7 5 4 1 8 6

2.80. Na koliko naqina se mogu izabrati tri razliqita broja od 1 do 30 tako da njihov zbir bude deljiv sa tri?

Rexenje: Skup $\{1, 2, \dots, 30\}$ mo emo razbiti na tri disjunktna pod skupa: $A_0 = \{3, 6, 9, \dots, 30\}$, $A_1 = \{1, 4, 7, \dots, 28\}$ i $A_2 = \{2, 5, 8, \dots, 29\}$ (u skupu A_0 su brojevi koji daju ostatak 0 pri deljenju sa 3, u A_1 su oni koji daju ostatak 1, i u A_2 oni koji daju ostatak 2). Zbir tri broja e biti deljiv sa 3 ako sva tri broja pripadaju istom pod skupu, ili ako su sva tri broja iz razliqitih podskupova. Odavde dobija mo da je rexenj e 3 · 10 3 + 10 1 . 10 1 . 10 1 .

2.81. Na polici se nalazi 12 knjiga. Na koliko naqina je mogu e izabrati 5 knjiga tako da nikoje dve me u izabranim knjigama nisu stajale jedna do druge na polici?

Rexenje: Znamo da je broj nizova sa n nula i k jedinica ($k \le n + 1$)

koji nemaju uzastopne jedinice jednak $n + 1$ k . Posmatrajmo pet

knjiga koje treba izabrati kao jedinice, a neka preostale knjige budu nule. Sada je na osnovu pomenutog tvr enja broj naqina da se

izabere 5 knjiga koje nisu bile susedne na polici 7 + 1 5 = 8 5 .

2.82. Na koliko naqina se mo e napisati req du ine 10 koriste i samo slova *a, b, c* i *d,* ako svako slovo treba da se pojavi bar 2, ali ne vixe od 4 puta?

Rexenje: Razlikujemo dva sluqaja. Tra ena req mo e imati jedno slovo koje se pojavljuje 4 puta, dok je broj pojavljivanja preostala tri slova 2. Slovo koje se pojavljuje 4 puta u reqi mo emo iza

brati na $^4{}_1$ naqina, a zatim treba ispermutovati odabrana slova

na 10 4, 2, 2, 2 naqina (poxto se slova ponavljaju imamo permutacije

sa ponavljanjem). Druga mogu nost je da req sadr i dva slova koja se pojavljuju 3 puta i dva slova koja se pojavljuju 2 puta. U ovom

sluqaju imamo 4 2 10 3, 3, 2, 2 reqi. Sabiranjem broja reqi u ova

dva sluqaja dobijamo da je tra eno rexenje 4 ·10! 4!2!2!2! + 6 ·10!

3!3!2!2!·

2.83. Koliko rexenja ima jednaqina $x + y + z = 15$ u skupu *a)* nenegativnih celih brojeva;

b) pozitivnih celih brojeva?

Rexenje: a) Broj rexenja jednaqine $x + y + z = 15$ u skupu nenega

tivnih celih brojeva je enjem 15 + 3 − 1 2 = 17 2

b) Uvo smene

.

$$a = x - 1 \geq 0$$
$$b = y - 1 \geq 0$$
$$c = z - 1 \geq 0,$$

problem odre ivanja broja rexenja jednaqine $x+y+z = 15$ u skupu prirodnih brojeva smo sveli na rexavanje jednaqine $a + b + c = 12$

u skupu nenegativnih celih brojeva, koja ima rexenja. 14 2

12 + 3 − 1 2 =

2.84. Odrediti broj celobrojnih rexenja jednaqine $x_1 + x_2 +$

$$x_3 + x_4 = 32,$$

ako je $x_i \geq -2$, $1 \leq i \leq 4$.

Rexenje: Smenom $y_i = x_i + 2$ za svako i, polazna jednaqina postaje $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 40$, pri qemu je $y_i \geq 0$. Sada je broj rexenja ove

jednaqine 40 + 4 − 1 = 43 3 .

4 − 1

2.85. Odrediti broj rexenja jednaqine $x_1+x_2+x_3+3x_4 = 10$ u skupu nenegativnih celih brojeva.

Rexenje: Vidimo da $x_4 \in \{0, 1, 2, 3\}$, pa razlikujemo qetiri sluqaja. Za $x_4 = 0$ treba odrediti broj rexenja jednaqine $x_1 + x_2 + x_3 = 10$.

Broj rexenja ove jednaqine je 10 + 3 − 1 3 − 1 = 12 2 = 66. Kada je

$x_4 = 1$ treba da va i $x_1+x_2+x_3+3 = 10$, odnosno dobija se jednaqina

$x_1 + x_2 + x_3 = 7$ koja ima 7 + 2 2 = 36 rexenja. Na isti naqin dobijamo da je broj rexenja odgovaraju ih jednaqina 4 + 2 2 = 15 u sluqaju da je $x_4 = 2$ i 1 + 2 2 = 3 kada je $x_4 = 3$. Sabiranjem

broja rexenja u ovim sluqajevima dobijamo da zadata jednaqina ima 120 rexenja u skupu nenegativnih celih brojeva.

2.86. Odrediti broj rexenja jednaqine

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(y_1 + y_2 + y_3) = 65$$

u skupu prirodnih brojeva.

Rexenje: Primetimo prvo da broj 65 mo emo zapisati kao 1 · 65 ili kao 13 · 5. Kako se rexenja tra e u skupu N, znamo da mora da va i $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4$ i $y_1 + y_2 + y_3 \geq 3$. Odavde je

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$ $y_1 + y_2 + y_3 = 13$ ili $y_1 + y_2 + y_3 = 5.$

Smenama $x^0_i = x_i - 1 \geq 0$ i $y^0_j = y_j - 1 \geq 0$ problem svodimo na odre ivanje broja rexenja sistema

$x^0_1 + x^0_2 + x^0_3 + x^0_4 = 1$ $x^0_1 + x^0_2 + x^0_3 + x^0_4 = 9$ $y^0_1 + y^0_2 + y^0_3 = 10$ ili $y^0_1 + y^0_2 + y^0_3 = 2$

u skupu nenegativnih celih brojeva. Broj rexenja prvog sistema je

tada 1 + 3 3 10 + 2 2 , dok je broj rexenja drugog 9 + 3 3 2 + 2 2 · Dobijamo da je tra eni broj rexenja 4 3 12 2 + 12 3 4 2 .

2.87. Odrediti broj rexenja sistema jednaqina

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_7 = 35$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

u skupu prirodnih brojeva.

Rexenje: Nakon uvo enja smene $y_i = x_i - 1$ dobijamo sistem

$$y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_7 = 28$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 7,$$

uz uslov

$y_i \geq 0$, za $i = 1, 2, \ldots, 7$. Znamo da druga jednaqina ima 7 + 2 2 = 9 rexenja u skupu nenegativnih celih brojeva. Kada 2

u prvu jednaqinu uvrstimo da je $y_1 + y_2 + y_3 = 7$ dobija se jednaqina $y_4 + y_5 + y_6 + y_7 = 21$, koja ima 21 + 3 3 = 24 3 rexenja. Kako rexenja

sistema trebaju da zadovolje obe jednaqine, dobijamo da sistem ima 9 2 · 24 3 rexenja.

2.88. Odrediti broj rexenja nejednaqine

$$7 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 12$$

u skupu prirodnih brojeva.

Rexenje: Poxto se rexenja tra e u skupu prirodnih brojeva neopho dno je prvo uvesti smenu $y_i = x_i - 1$, za $i = 1, 2, 3, 4$. Na ovaj naqin smo problem sveli na obre ivanje broja rexenja nejednaqine

$$3 \leq y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 8,$$

ako je $y_i \geq 0$. Kako se rexenja ove nejednaqine tra e u skupu nenega tivnih celih brojeva, dobijenu nejednaqinu mo emo predstaviti pomo u xest jednaqina. Izraqunavanjem broja rexenja za svaku od tih jednaqina dobijamo da je broj rexenja posmatrane nejednaqine

$$\sum_{k=3}^{8} \binom{k+3}{3} = \binom{3+3}{3} + \binom{4+3}{3} + \binom{5+3}{3} + \binom{6+3}{3} + \binom{7+3}{3} + \binom{8+3}{3}.$$

2.89. Odrediti broj rexenja nejednaqine $x_1+x_2+x_3+x_4 \leq 7$ u skupu N_0, ako je $x_1 \geq 1$ i $x_2 \geq 2$.

Rexenje: Uvo enjem smena $y_1 = x_1 - 1$ i $y_2 = x_2 - 2$ poqetna neje dnaqina se transformixe u nejednaqinu $y_1 + y_2 + x_3 + x_4 \leq 4$ u skupu nenegativnih celih brojeva. Ova nejednaqina je ekvivalentna sa slede im skupom jednaqina $\{y_1 + y_2 + x_3 + x_4 = i | i = 0, 1, 2, 3, 4\}$, pa je tra eni broj rexenja

$$\binom{4+3}{3} + \binom{3+3}{3} + \binom{2+3}{3} + \binom{1+3}{3} + \binom{0+3}{3} = 70.$$

II naqin: Broj rexenja nejednaqine $y_1 + y_2 + x_3 + x_4 \leq 4$ jednak je broju rexenja jednaqine $y_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4$, $x_5 \in \{0, 1, \ldots, 4\}$, kojih ima $\binom{4+4}{4} = 70$.

2.90. Pet ribolovaca je upecalo 20 riba. Na koliko naqina se to moglo desiti ako:

a) ne mora svaki ribolovac imati ulov;

b) znamo da je svaki ribolovac upecao bar dve ribe?

Rexenje: Ako sa x_i oznaqimo broj riba koje je upecao i−ti ribolo vac, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, zadatak se svodi na odre ivanje broja rexenja jednaqine $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$.

a) Iz uslova da ne mora svaki ribolovac imati ulov zakljuqujemo

da je $x_i \geq 0$, pa je broj rexenja jednaqine 20 + 4 4 = 24 4 .

b) Sada imamo uslov $x_i \geq 2$, za svako i, koji smenom $y_i = x_i - 2$ pola znu jednaqinu prevodi u problem $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 10$, $y_i \geq 0$. Broj rexenja nove jednaqine u skupu nenegativnih celih brojeva

je 10 + 4 4 = 14 4 .

2.91. Na koliko naqina 8 identiqnih kuglica mo emo raspore diti u 3 razliqite kutije, tako da u svakoj kutiji bude bar jedna kuglica?

Rexenje: Broj naqina da se rasporede kuglice odgovara broju rexe nja jednaqine $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ u skupu prirodnih brojeva. Smenom $y_i = x_i - 1$, $i = 1, 2, 3$, dobija se jednaqina $y_1 + y_2 + y_3 = 5$, gde je $y_i \geq 0$,

koja ima 5 + 2 2 = 7 2 rexenj a.

2.92. Iz kutije u kojoj se nalaze kuglice numerisane brojevima 0, 1, 2, . . . , 9, izvlaqi se 8 kuglica sa vra anjem. Koliko ima izvla qenja u kojima je izabrana bar jedna parna kuglica? (Redosled kojim se izvlaqe kuglice nije bitan.)

Rexenje: Od ukupnog broja izvlaqenja emo oduzeti ona u kojima nije izvuqena nijedna parna kuglica. Broj svih izvlaqenja odgo vara broju rexenja jednaqine $x_0 + x_1 + \cdots + x_9 = 8$ u skupu nenega

tivnih celih brojeva i taj broj iznosi 8 + 10 − 1 8 . Ukoliko nije

izvuqena nijedna parna kuglica, onda je $x_0 = x_2 = x_4 = x_6 = x_8 = 0$, pa posmatrana jednaqina postaje $x_1+x_3+x_5+x_7+x_9 = 8$. Kako je broj

rexenja ove jednaqine 8 + 5 − 1 8

dobijamo da je broj izvlaqenja u kojima je izvuqena bar jedna parna kuglica jednak 17 8 − 12 8 .

2.93. Na koliko naqina 40 crnih markera mo emo rasporediti u 5 razliqitih kutija, ako prva i druga kutija treba da sadr e isti broj markera?

Rexenje: Zadatak se mo e zapisati na slede i naqin: odrediti broj rexenja jednaqine $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 40$, ako je $x_i \geq 0$ i $x_1 = x_2$. Uvrxtavanjem uslova dobijamo $2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 40$, pa treba odrediti broj rexenja jednaqine $x_3 + x_4 + x_5 = 40 - 2k$ u skupu nenegativnih celih brojeva, gde $k \in \{0, 1, . . . , 20\}$. Tra eni

broj rexenja je $\sum_{k=0}^{20} \binom{40 - 2k + 2}{2} = \sum_{k=0}^{20} \binom{42 - 2k}{2}$.

Zadaci za samostalni rad

2.94. Na koliko naqina 8 uqenika mo e sesti na:

a) 6 razliqitih stolica; *b)* 12 razliqitih stolica?

2.95. Odrediti maksimalan broj pravih koje se mogu konstruisati kroz n zadatih taqaka od kojih se p taqaka nalazi na istoj pravoj.

2.96. U jednoj grupi ljudi se nalaze tri Italijana, qetiri Fran cuza i pet Xpanaca. Na koliko razliqitih naqina se ovi ljudi mogu pore ati u niz tako da svi Francuzi budu jedan pored dru gog, svi Xpanci jedan pored drugog i nikoja dva Italijana ne budu jedan do drugog?

2.97. U prirodno-matematiqkom odeljenju gimnazije od 15 uqenika matematiku eli da studira 6 uqenika, fiziku 5, a ostali hemiju. Na koliko naqina je mogu e izabrati grupu od 5 uqenika ako u njoj treba da budu bar dva budu a matematiqara, bar jedan fiziqar i bar jedan hemiqar?

2.98. U jednoj kompaniji je zaposleno 8 muxkaraca i 9 ena. Na koliko naqina je mogu e izabrati 7 osoba za odlazak na seminar ako se zna da Stefan i Marija ne smeju biti zajedno izabrani?

2.99. Odrediti broj naqina da se iz standardnog xpila sa 52 karte izvuku 4 karte, ako me u njima treba da budu bar 2 karte sa znakom tref.

2.100. Koliko ima naqina da se oformi komisija od 4 muxkarca i 6 ena ako u komisiji treba da budu najmanje dva muxkarca i barem duplo vixe ena?

2.101. Na koliko naqina je mogu e oformiti qetvoroqlanu dele gaciju od 4 muxkarca i 6 ena, ako u njoj treba da budu bar 2 ene i gospodin i gospo a Petrovi ne smeju biti izabrani zajedno? (Me u posmatranim muxkarcima i enama postoje samo jedan gospodin i jedna gospo a Petrovi .)

2.102. Odrediti broj rexenja jednaqine

$$(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 77$$

u skupu nenegativnih celih brojeva ako va i $x_1 + x_2 + x_3 \neq 1$ i $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \neq 1$.

2.103. Pismeni zadatak iz matematike je radilo 20 uqenika. Na koliko naqina je profesor mogao oceniti radove, ako znamo da je svaku od mogu ih ocena dobio bar po jedan uqenik? (Ocene koje profesor mo e dati su 1, 2, 3, 4 i 5.)

3 Binomni koeficijenti

Ispitni zadaci

3.1. Odrediti koeficijent uz x^{-8} u razvoju izraza $(16x^2-(2x)^{-1})^{14}$. *Rexenje:*

Razvijeni oblik izraza $(16x^2 - (2x)^{-1})^{14}$ je

X^{14} $_{k=0}$ 14 k $(16x^2)^k(-$ $2x)^{k-14}$ $=X^{14}$ $_{k=0}$ 14 k $(-1)^{k-14}2^5$ $^{k-14}x^{3k-14}.$

Tra imo koeficijent uz x^{-8} te treba da va i $3k - 14 = -8$. Ovo je ispunjeno za $k = 2$ odakle dobijamo da je tra eni keoficijent

14 $(-1)^{-12}$
2 2^{-4}.

3.2. Odrediti koeficijent koji se nalazi uz x^7 u razvoju izraza

$x^2 - \frac{2}{x}$ ^{n} ako je zbir koeficijenata uz prva tri qlana razvoja 97.

Rexenje: Posmatrajmo razvoj datog izraza

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2(n-k)} \left(-\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k x^{2n-3k}.$$

Iz uslova da je zbir koeficijenata uz prva tri qlana razvoja 97 vidimo da treba da va i $\binom{n}{0}(-2)^0 + \binom{n}{1}(-2)^1 + \binom{n}{2}(-2)^2 = 97.$

Odavde se dobija kvadratna jednaqina $n^2-2n-48 = (n-8)(n+6) = 0$, qije je rexenje $n = 8$ (rexenje $n = -6$ odabacujemo jer $n \in \mathbb{N}$). Kako se tra i koeficijent koji stoji uz x^7 u razvoju izraza mora da va i $2n - 3k = 7$. Rexavanjem ove jednaqine dobijamo $k = 3$, te je

tra eni koeficijent $\binom{8}{3}(-2)^3 = -448.$

3.3. Zbir prvog, drugog i tre eg koeficijenta u razvoju binoma $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ jednak je 46. Koji po redu qlan u razvoju ovog binoma ne sadr i x?

I Kombinatorika

Rexenje: Izraz $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ u razvijenom obliku mo emo zapisati kao $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2k} x^{k-n}$. Iz uslova da je zbir prva tri koeficijenta u razvoju datog binoma 46 dobijamo

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 46.$$

Sre ivanjem se dobija jednaqina $n^2 + n - 90$, qije je rexenje $n = 9$ (rexenje $n = -10$ odbacujemo jer $n \in \mathbb{N}$). Tra imo koji po redu qlan razvoja ne sadr i x, odnosno tra imo za koje k je zadovo ljena jednaqina $2k + k - 9 = 0$. Ova jednaqina je taqna za $k = 3$ pa je u pitanju qetvrti qlan razvoja koji glasi $\binom{9}{3}$.

Napomena: Zbog simetriqnosti binomnih koeficijenata dati bi nom se u razvijenom obliku mo e zapisati i na slede i naqin $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2(n-k)} x^{-k}$. Daljim rexavanjem dobijamo $k = 6$, odakle vidimo da sedmi qlan u razvoju ne sadr i x i jednak je $\binom{9}{6} = \binom{9}{3}$.

3.4. U razvoju izraza $\left(x\sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x^2}}\right)^n$ koeficijenti uz peti i deseti qlan su jednaki. Odrediti qlan razvoja koji ne sadr i x.

Rexenje: Posmatrajmo razvoj izraza $\left(x\sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x^2}}\right)^n$ koji je dat sa

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x\sqrt[4]{x^3}\right)^k \left(\frac{1}{\sqrt{x^2}}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\frac{7k}{4}} x^{-\frac{3(n-k)}{2}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\frac{7k}{4}-\frac{3(n-k)}{2}}.$$

Iz uslova da su koeficijenti koji stoje uz peti i deseti qlan razvoja jednaki sledi da treba da va i $\binom{n}{4} = \binom{n}{9}$. Sada je zbog simetriqnosti binomnih koeficijenata $n - 4 = 9$, tj. $n = 13$. Kako se tra i qlan koji ne sadr i x treba da va i $\frac{7k}{4} - \frac{3(13-k)}{2} = 0$, a ovo je ispunjeno za $k = 6$. Dobili smo da sedmi qlan datog razvoja ne sadr i x i da je jednak $\binom{13}{6}$.

60

3.5. Odrediti one qlanove u razvoju izraza $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^5$ koji nisu iracionalni.

Rexenje: Napiximo izraz u razvijenom obliku:

$$(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (\sqrt[3]{3})^k (\sqrt{2})^{5-k} = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 3^{\frac{k}{3}} 2^{\frac{5-k}{2}}.$$

Iz uslova da nam trebaju samo qlanovi koji nisu iracionalni dobijamo da treba da va i $\frac{k}{3} \in \mathbb{Z}$ i $\frac{5-k}{2} \in \mathbb{Z}$. Poxto $k = 0, 1, \ldots, 5$ iz prvog uslova sledi $k \in \{0, 3\}$. Sada neposredim ubacivanjem ovih vrednosti u drugi uslov dobijamo $k = 3$. Prema tome, jedini qlan razvoja koji nije iracionalan je $\binom{5}{3} (\sqrt[3]{3})^3 (\sqrt{2})^{5-3} = \binom{5}{3} \cdot 3 \cdot 2 = 60.$

3.6. Odrediti qlanove u razvoju izraza $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2})^n$ koji nisu iraci onalni, ako je poznato da je odnos binomnih koeficijenata uz drugi i tre i qlan $2 : 23$.

Rexenje: Posmatrajmo razvoj izraza $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2})^n$ koji je dat sa

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt[5]{3})^{n-k} (\sqrt[7]{2})^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{\frac{n-k}{5}} 2^{\frac{k}{7}}.$$

Iz uslova zadatka sledi da va i $n\ 1$: $n\ 2$ = 2 : 23, odakle se dalje

dobija kvadratna jednaqina $n^2 - 24n = 0$. Rexenje $n = 0$ odbacujemo jer $n \in N$, pa je $n = 24$. Kako se tra e qlanovi koji nisu iraci onalni mora biti $\frac{24-k}{5} \in Z$ i $\frac{k}{7} \in Z$. Iz uslova da je k deljivo sa 7 dobijamo $k \in \{0, 7, 14, 21\}$. Ubacivanjem ovih vrednosti u izraz $\frac{24-k}{5}$ dobijamo da je vrednost izraza celobrojna samo za $k = 14$. Vidimo da posmatrani razvoj ima samo jedan qlan koji nije iracionalan

i to je qlan $\binom{24}{14}(\sqrt[5]{3})^{10}(\sqrt[7]{2})^{14} = \binom{24}{14} \cdot 3^2 \cdot 2^2$.

3.7. Na i koeficijent uz x^9 u razvoju izraza $(1 - 4x)^6(1 + 3x^2)^8$.

Rexenje: Neka je $(1-4x)^6 = \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} (-4)^i x^i$ i $(1 + 3x^2)^8 = \sum_{j=0}^{8} \binom{8}{j} 3^j x^{2j}$.

Kako se tra i koeficijent uz x^9 u razvoju izraza $(1-4x)^6(1+3x^2)^8$, zadatak se svodi na rexavanje jednaqine $i + 2j = 9$, gde $0 \le i \le 6$ i $0 \le j \le 8$. Ure eni parovi (i, j) koji zadovoljavaju jednaqinu pripadaju skupu $\{(1, 4),(3, 3),(5, 2)\}$, pa je tra eni koeficijent

$$\binom{6}{1}\binom{8}{4}(-4)3^4 + \binom{6}{3}\binom{8}{3}(-4)^3 3^3 + \binom{6}{5}\binom{8}{2}(-4)^5 3^2.$$

Kombinatorika 3.8. Dokazati da va i $\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1} = \frac{n-2k}{n}\binom{n}{k}$, za prirodne brojeve n i k za koje je ispunjeno $0 \le k \le n$.

Rexenje:

$$\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} - \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{n-k}{n} - \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k}{n} = \frac{n-2k}{n}\binom{n}{k}$$

3.9. Ako su m i n redom nenegativan ceo i prirodan broj, dokazati da va i

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \cdots + \binom{m+n}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}.$$

Rexenje: Koriste i Paskalov identitet dobijamo:

1 $=$ m $+$ $m + 1$

$m + n$

$+ 1$ $m +$ $m + n$ $m + n$

$m + n$ $+$ $- 1$ m $m + n$

$=$ m $m + n$ $+$ $- 1$ $m +$ 1 $= \dots$

$= =$ $m + n$ m $m + n$ $- 1$ m $+ \cdots +$ m $+ \cdots +$ $+$ $m + 1$ $m + 1$ m $+$ $+$ $m + 2$ m

$m + n$ $- 1$ m $m + 2$ m $=$ $m + n$ m $- 1$ m $+$

$m + n$ m $+$ $+$ $m + 1$ $m + 1$ $m + n$ m $+$ $m\ m$ $+ \cdots +$ $m + 1$

$+$ $m + 2$ $m + 2$.

II naqin: Indukcija po prirodnom broju *n.*

3.10. Izraquna ti $\sum_{k=0}^{n}$ $(2k + 1)$ $n\ k$.

Rexenje:

$\sum_{k=0}^{n}$ $(2k + 1)$ $n\ k$ $= 2\sum_{k=1}^{n} k$ $n\ k$ $+\sum_{k=0}^{n}$ $n\ k$ $= 2 \cdot n2^{n-1} + 2^n =$ $2^n(n + 1)$

3.11. Dokazati da za prirodne brojeve k i n va i

$\sum_{i=0}^{n}$ $n\ i$ $(k + i)$ $= (n +$ $2k)2^{n-1}$.

Rexenje:

$\sum_{i=0}^{n}$ $(k + i)$ $n\ i$ $= k\sum_{i=0}^{n}$ $n\ i$ $+\sum_{i=1}^{n} i$ $n\ i$ $= k \cdot 2^n + n \cdot 2^{n-1}$ $= (2k +$ $n)2^{n-1}$.

3.12. Dokazati da za nenegativne cele brojeve m i n, $m \leq n$, va i

$\sum_{k=0}^{m}$ $n - k$ $m - k$ $=$ $n + 1$ m .

Rexenje: Primenom Paskalovog identiteta dobija se:

$n + 1$ m $=$ $n\ m$ $+$ n $m - 1$ $=$ $n\ m$ $+$ $n - 1$ $m - 1$ $+$ $n - 1$ $m - 2$

$$= \binom{n}{m}+\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-2}{m-2}+\binom{n-2}{m-3} = \dots$$

$$= \binom{n}{m}+\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-2}{m-2}+\dots+\binom{n-m+1}{m-m+1}+\binom{n-m+1}{0}$$

$$= \binom{n}{m}+\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-2}{m-2}+\dots+\binom{n-m+1}{1}+\binom{n-m}{0} = \sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}$$

3.13. Dokazati da važi $\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 2^m\binom{n}{m}$, gde su m i n prirodni brojevi i $m < n$. *Rexenje:*

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \sum_{k=0}^{m}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!}\cdot\frac{m!}{m!}$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{m!}{k!(m-k)!} = \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\binom{m}{k}$$

$$= \binom{n}{m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} = 2^m\binom{n}{m}$$

3.14. Dokazati da važi $\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{k} = 2^{n-k}\binom{n}{k}$, za sve prirodne brojeve n i k za koje je $n \geq k$.

Rexenje:

$$\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{k} = \sum_{j=k}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}\cdot\frac{j!}{k!(j-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{(n-j)!(j-k)!} = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j-k}.$$

Ako uvedemo smenu $t = j - k$ dobijamo

$$\binom{n}{k} \sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} = \binom{n}{k} \sum_{t=0}^{n-k} \binom{n-k}{t} = \binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

Napomena: Primetimo da smo u prethodna dva zadatka umesto poqetnog izvo enja mogli iskoristiti tvr enje koje je pokazano na ve bama:

$$\binom{n}{j}\binom{j}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k}.$$

3.15. Dokazati da va i $\sum_{k=0}^{n} k \binom{m}{k}\binom{n}{k} = n\binom{m+n-1}{n}$.

Rexenje:

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{m}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \sum_{k=0}^{n} \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k}\binom{n-1}{n-k}.$$

Kako je na osnovu tvr enja pokazanog na ve bama, tzv. Vandermondove konvolucije, $\sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k}\binom{n-1}{n-k} = \binom{m+(n-1)}{n}$, dobijamo da je poqetna suma jednaka $n\binom{m+n-1}{n}$.

3.16. Dokazati da va i $\sum_{r=k}^{m} \binom{n+r}{n} = \binom{n+m+1}{n+1} - \binom{n+k}{n+1}$.

Rexenje: Na osnovu Paskalovog identiteta dobijamo:

$$\binom{n+m+1}{n+1} - \binom{n+k}{n+1} = \binom{n+m}{n} + \binom{n+m}{n+1} - \binom{n+k}{n+1}$$

$$= \binom{n+m}{n} + \binom{n+m-1}{n} + \binom{n+m-1}{n+1} - \binom{n+k}{n+1} = \dots$$

$$= \binom{n+m}{n} + \binom{n+m-1}{n} + \dots + \binom{n+k}{n} + \binom{n+k}{n+1} - \binom{n+k}{n+1}$$

$$= \sum_{r=k}^{m} \binom{n+r}{n}$$

II naqin: Indukcija po prirodnom broju *m.*

3.17. Izraqunati $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k}$.

Rexenje:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= -n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} = -n \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i}$$

$$= -n\,(1-1)^{n-1} = 0.$$

U zadatku je uvedena smena $i = k - 1$.

3.18. Dokazati da va i $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$.

Rexenje:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(k+1)\,k!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \binom{n+1}{i} = \frac{-1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i}$$

$$=\frac{-1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\binom{n+1}{i}-\binom{n+1}{0}\right)=\frac{-1}{n+1}\left((1-1)^{n+1}-1\right)=\frac{1}{n+1}$$

Koristili smo smenu $i = k + 1$.

3.19. Dokazati da $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = (n^2+n)2^{n-2}$.

Rexenje:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n} k^2\frac{n!}{k!(n-k)!}=n\sum_{k=1}^{n}\frac{k(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=n\sum_{k=1}^{n}k\binom{n-1}{k-1}$$

Uvo enjem smene $i = k-1$ prethodna suma postaje $n\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\binom{n-1}{i}$. Dalje dobijamo

$$n\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\binom{n-1}{i}=n\left(\sum_{i=0}^{n-1}i\binom{n-1}{i}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\right)$$

$$= n((n-1)2^{n-2}+2^{n-1})$$

$$= (n^2+n)2^{n-2}.$$

II naqin: Posmatrajmo razvoj $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. Dvostrukim diferenciranjem razvoja po x dobijamo

$$n(n-1)(1+x)^{n-2}=\sum k(k-1)x^{k-2}\binom{n}{k}.$$

Uvrxtavanjem $x = 1$ u prethodni izraz dobija se

$$(n^2-n)2^{n-2}=\sum k^2\binom{n}{k}-\sum k\binom{n}{k},$$

odakle
je dalje n

$\sum_{k=0}^{n}$ $= (n^2 - n)2^{n-2} +$ $n)2^{n-2}$. k
$n2^{n-1} = (n^2 +$

k^2

Napomena: U zadatku smo koristili poznato tvr enje sa ve bi
$\sum_{k=0}^{n}$ k $n2^{n-1}$.
$n\ k$ =

3.20. Dokazati da za prirodan broj n va i

$n\ 0$ + $n\ 2k$ $n\ 1$ $n\ 3$ n +· · · =
$n\ 2$ +· · ·+ +· · · =+ 66 +· · ·+ $2k + 1$ 2^{n-1}.

Rexenje: Prvi deo tvr enja mo emo zapisati na slede i naqin: dokazati da svaki skup sadr i isti broj podskupova sa parnim i sa neparnim brojem elemenata. Posmatrajmo proizvoljan skup S sa n elemenata i neka je $x \in S$. Neka se u A nalaze svi podskupovi skupa S koji imaju paran broj elemenata, a u B svi podskupovi sa neparnim brojem elemenata. Sada za $A \in A$ definixemo preslika vanje $f : A \to B$ na slede i naqin:

$f(A) =$ $/\in A$ $A \setminus \{x\}, x$
$A \cup \{x\}, x$ $\in A$·

Ovo preslikavanje je oqigledno bijekcija, te va i $|A| = |B|$. Ovime je dokazan prvi deo tvr enja. Kako je ukupan broj podskupova skupa sa n elemenata 2^n i kako svaki skup ima isti broj podskupova sa parnim i sa neparnim brojem elemenata, trivijalno va i da je
broj takvih podskupova x^kstavimo $x = 1$ i $x = -1$,
2^{n-1}. *II naqin:* Ako u $n\ k$

formulu $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}$

dobijamo slede e identitete $\sum_{k=0}^{n}$ $n\ k$ $= 2^n$ ¡$\sum_{k=0}^{n}$ $(-1)^k$ $n\ k$ = 0. Kada

saberemo dobijene jednakosti dobijamo

2 + 2 $n\ 4$ $n\ 2k$ $= 2^n$, $n\ 0$ $n\ 2$ + · · · + · · ·
$n\ 0$ $n\ 2$ + · · · odakle je + + $= 2^{n-1}$. Sliqno
+ 2 + 2 + · · · + $n\ 4$ $n\ 2k$, oduzi

manjem gornjih jednakosti dobijamo

2 $n\ 1$ + 2 $n\ 3$ + 2 $n\ 5$ + · · · + 2

n $= 2^n,$

$2k + 1$ $+ \cdot \cdot \cdot$

pa je

n 1

$+$

n 3

$+$

n 5

$+ \cdot \cdot \cdot +$

n

$2k + 1$67

$+ \cdot \cdot \cdot = 2^{n-1}.$

4 Princip ukljuqenja i iskljuqenja

Ispitni zadaci

4.1. U jednoj anketi uqestvovalo je 1000 zaposlenih ispitanika, od qega je 550 bilo muxkaraca. Na pitanje da li se redovno bave nekim sportom 750 ispitanika je dalo negativan odgovor, dok je 30 ispitanika izjavilo da boluje od malokrvnosti. Odrediti broj malokrvnih ena koje se ne bave sportom ako je zabele eno da je broj muxkaraca koji treniraju 137, malokrvnih muxkaraca je bilo 17, malokrvnih osoba koje su sportisti 12, a da je broj malo krvnih muxkaraca koji treniraju 5.

Rexenje: Oznaqimo slede e skupove

S_1 : ispitanik je muxkarac;

S_2 : ispitanik se bavi sportom; S_3 : ispitanik je malokrvan.

S^1 S_2 S_3

Osenqeni deo na Venovom dijagramu predstavljaju malokrvne ene koje se ne bave sportom, te je tra eni broj $N(S^0{}_1S^0{}_2S_3)$. Koriste i princip ukljuqenja i iskljuqenja dobijamo da va i

$$N(S^0_1 S^0_2 S_3) = N(S_1 \cup S_2 \cup S_3) - N(S_1 \cup S_2)$$
$$= N(S_3) - N(S_1S_3) - N(S_2S_3) + N(S_1S_2S_3).$$

Broj malokrvnih ispitanika je $N(S_3) = 30$, od qega je muxkaraca $N(S_1S_3) = 17$. Me u sportistima ima $N(S_2S_3) = 12$ malokrvnih, pri qemu je $N(S_1S_2S_3) = 5$ muxkaraca. Sada je tra eni broj

$$N(S^0_1 S^0_2 S_3) = 30 - 17 - 12 + 5 = 6.$$

4.2. Koliko ima prirodnih brojeva od 1 do 1000 koji su deljivi sa 3, ali nisu deljivi ni sa 2, ni sa 5, ni sa 7?

Rexenje: Posmatrajmo skup prirodnih brojeva od 1 do 1000 koji su deljivi sa 3 i uoqimo slede e podskupove ovog skupa

S_2 : broj je deljiv sa 2

S_5 : broj je deljiv sa 5

S_7 : broj je deljiv sa 7.

Znamo da brojeva ne ve ih od n koji su deljivi brojem k ima $\frac{n}{k}$. Va i jox i da je broj deljiv sa proizvodom prostih brojeva akko je deljiv sa svakim od njih. Sada na osnovu principa ukljuqenja i iskljuqenja dobijamo da tra enih brojeva ima

$$N(S^0_2 S^0_5 S^0_7) = N - N(S_2 \cup S_5 \cup S_7)$$
$$= N - N(S_2) - N(S_5) - N(S_7) + N(S_2S_5) + N(S_2S_7) + N(S_5S_7) - N(S_2S_5S_7)$$

=

1000 3

−

1000 6

−

1000 15

−

1000 21

+

1000 30

+

1000 42

+

1000 105

–

1000 210

$= 333 - 166 - 66 - 47 + 33 + 23 + 9 - 4 = 115.$

4.3. Koliko ima prirodnih brojeva ne ve ih od 10^{30} koji nisu ni kvadrati, ni kubovi, ni peti stepeni prirodnih brojeva?

Rexenje: Neka su dati slede i skupovi

S_2 : broj je kvadrat prirodnog broja
S_3 : broj je kub prirodnog broja
S_5 : broj je peti stepen prirodnog broja.

Tra imo one prirodne brojeve koji se ne nalaze ni u jednom od ovih skupova, tj. $N(S^0{}_2S^0{}_3S^0{}_5)$. Kako je $10^{30} = (10^{15})^2$zakljuqujemo da prirodnih brojeva ne ve ih od 10^{30} koji su kvadrati prirodnih brojeva ima $N(S_2) = 10^{15}$. Sliqno zakljuqujemo da je $N(S_3) = 10^{10}$ i $N(S_5) = 10^6$, te va i

$$N(S^0{}_2S_35^0S_75^0) = N - N(S_2) - N(S_3) - N(S_5)$$
$$+ N(S_2S_3) + N(S_2S_5) + N(S_3S_5) - N(S_2S_3S_5)$$
$$= 10^{30} - 10^{15} - 10^{10} - 10^6 + 10^5 + 10^3 + 10^2 - 10.$$

4.4. Koliko celih brojeva iz skupa $\{1, 2, 3, . . . , 360\}$ ima bar jedan zajedniqki prost delilac sa 360?

Rexenje: Broj 360 mo emo zapisati u obliku proizvoda prostih faktora na slede i naqin $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Neka je S_i skup svih brojeva koji su deljivi sa i, gde je $i \in \{2, 3, 5\}$. Tra imo brojeve

koji se nalaze u uniji ova tri skupa, tj. $N(S_2 \cup S_3 \cup S_5)$, i njihov broj je na osnovu principa ukljuqenja i iskljuqenja jednak

$$N(S_2) + N(S_3) + N(S_5) - N(S_2S_3) - N(S_2S_5) - N(S_3S_5) + N(S_2S_3S_5)$$

$$= \frac{360}{2} + \frac{360}{3} + \frac{360}{5} - \frac{360}{6} - \frac{360}{10} - \frac{360}{15} + \frac{360}{30}$$

$= 180 + 120 + 72 - 60 - 36 - 24 + 12 = 264.$

4.5. Koriste i princip ukljuqenja i iskljuqenja odrediti koliko ima prostih brojeva me u prirodnim brojevima koji su manji ili jednaki od 120.

Rexenje: Kako je $11^2 = 121$ vidimo da treba izbaciti sve prirodne brojeve koji su deljivi sa nekim od brojeva 2, 3, 5 ili 7. Neka je S_i − broj je deljiv sa i, za $i \in \{2, 3, 5, 7\}$. Na osnovu principa ukljuqenja i iskljuqenja dobijamo da je

$$N(S^0_2S^0_3S^0_5S^0_7) = N - N(S_2) - N(S_3) - N(S_5) - N(S_7)$$
$$+ N(S_2S_3) + N(S_2S_5) + N(S_2S_7) + N(S_3S_5) + N(S_3S_7) + N(S_5S_7) -$$
$$N(S_2S_3S_5) - N(S_2S_3S_7) - N(S_2S_5S_7) - N(S_3S_5S_7) + N(S_2S_3S_5S_7)$$

$$= 120 - \frac{120}{2} - \frac{120}{3} - \frac{120}{5} - \frac{120}{7} + \frac{120}{6} + \frac{120}{10} + \frac{120}{14} + \frac{120}{15} + \frac{120}{21} + \frac{120}{35} - \frac{120}{30} - \frac{120}{42} - \frac{120}{70} - \frac{120}{105} + 0$$

$$= 120 - 60 - 40 - 24 - 17 + 20 + 12 + 8 + 8 + 5 + 3 - 4 - 2 - 1 - 1 = 27.$$

Dobili smo 27 prirodna broja koja nisu deljiva ni sa jednim od prostih brojeva 2, 3, 5 i 7. Poxto su ova qetiri broja prosta neophodno je i njih ubrojati. Sa druge strane, uraqunali smo broj 1 za koji znamo da nije ni prost ni slo en, pa broj prostih brojeva koji su manji ili jednaki 120 iznosi $27 + 4 - 1 = 30$.

Napomena: Koristili smo tvr enje iz teorije brojeva da za svaki pozitivan slo en ceo broj n postoji prost faktor p broja n za koji va i da je $p^2 \leq n$.

4.6. Godina je prestupna ako va i jedan od slede a dva uslova:
1° godina je deljiva sa 4, ali nije deljiva sa 100; 2° godina je deljiva sa 400.

Odrediti broj prestupnih godina od 1000. do 3000. godine. (Na primer, 1936. i 2000. godina su bile prestupne, ali 2100. godina ne e biti.)

Rexenje: Posmatrajmo slede e skupove

S_4 : godina je deljiva sa 4
S_{100} : godina je deljiva sa 100
S_{400} : godina je deljiva sa 400.

Iz datih uslova koji trebaju da va e da bi godina bila prestupna zakljuqujemo da treba odrediti $N(S_4) - N(S_{100}) + N(S_{400})$. Ukupan broj godina od 1000. do 3000. godine je 2001, pa je tra eni broj prestupnih godina

$$N(S_4) - N(S_{100}) + N(S_{400}) = \frac{2001}{4} - \frac{2001}{100} + \frac{2001}{400} = 485.$$

II naqin: U periodu od 1001. do 1099. godine imamo $\frac{99}{4} = 24$ prestupne godine. Isto va i za svaki od 20 posmatranih vekova, pa imamo $20 \cdot 24 = 480$ prestupnih godina. Ostaju jox samo da se provere godine 1000, 1100, 1200, . . . , 3000. Me u njima je 5 prestu pnih (1200,1600,2000,2400 i 2800), pa je broj prestupnih godina u posmatranom razdoblju 485.

4.7. Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, . . . , 9\}$ u kojima su prva ili poslednja cifra parne?

Rexenje: Neka su u S_1 sve permutacije kod kojih je prva cifra parna, a u S_2 sve one kod kojih je poslednja cifra parna. Ukoliko fiksiramo da je prva cifra parna, onda imamo 4 mogu nosti za iz bor prve cifre. Preostale cifre u permutaciji sada razmextamo na 8! naqina, pa je $N(S_1) = 4 \cdot 8!$. Sliqnim postupkom dobijamo da je $N(S_2) = 8! \cdot 4$. Ukoliko su i prva i poslednja cifra parne, te cifre biramo na 4, odnosno 3 naqina, dok preostale cifre permutujemo na 7! naqina na preostala mesta. Na osnovu formule za princip ukljuqenja i iskljuqenja za dva skupa dobijamo da je tra eni broj permutacija $N(S_1 \cup S_2) = N(S_1)+N(S_2)-N(S_1S_2) = 4 \cdot 8!+8! \cdot 4-4 \cdot 7! \cdot 3$.

4.8. Koliko ima permutacija cifara 0, 1, . . . , 9 u kojima je prva cifra manja od 8, a poslednja ve a od 1?

Rexenje: Posmatrajmo skup S_1 svih permutacija kod kojih je prva cifra ve a ili jednaka od 8 i skup S_2 u kom su permutacije kod

kojih je poslednja cifra manja ili jednaka od 1. Tra imo permu tacije koje nisu ni u jednom od ova dva skupa, tj. $N(S^0_1S^0_2)$. Ukupan broj permutacija skupa cifara $\{0, 1, . . . , 9\}$ je $N = 10!$. Ako je u permutaciji prva cifra ve a ili jednaka 8, onda na mesto prve cifre mo e do i jedna od dve cifre (cifra 8 ili 9), dok se ostala mesta popunjavaju sa preostalih 9 cifara. Zato je $N(S_1) = 2 \cdot 9!$. Na isti naqin dobijamo da je $N(S_2) = 9! \cdot 2$ i $N(S_1S_2) = 2 \cdot 8! \cdot 2$, pa je konaqno rexenje

$$\begin{aligned} N(S^0_1S^0_2) &= N - N(S_1) - N(S_2) + N(S_1S_2) \\ &= 10! - 2 \cdot 9! - 2 \cdot 9! + 2 \cdot 2 \cdot 8!. \end{aligned}$$

4.9. Odrediti koliko permutacija skupa $\{1, 2, . . . , 9\}$ ne sadr i ni jedan od blokova 23, 45 i 678.

Rexenje: Posmatrajmo slede e skupove permutacija S_1 :

permutacije koje sadr e blok 23

S_2 : permutacije koje sadr e blok 45

S_3 : permutacije koje sadr e blok 678.

Od svih permutacija skupa $\{1, 2, . . . , 9\}$, kojih ima $N = 9!$, oduze emo one koje sadr e bar jedan od posmatranih blokova. Kada blok 23 pokuxamo da razmestimo zajedno sa preostalih 7 elemenata skupa dobi emo $N(S_1) = 8!$ takvih permutacija (blok posmatramo kao jedan element koji se permutuje sa ostalim elementima), i isto se dobija ako permutacija sadr i blok 45. U sluqaju da permu tacija sadr i blok 678, blok se permutuje sa jox 6 elemenata, pa je $N(S_3) = 7!$. Ukoliko imamo dva ili vixe blokova, rezonovanje ide analogno. Zakljuqujemo da permutacija koje ne sadr e ni jedan od posmatranih blokova treba da bude

$$N - N(S_1) - N(S_2) - N(S_3) + N(S_1S_2) + N(S_1S_3) + N(S_2S_3) - N(S_1S_2S_3) = 9! - 8! - 8! - 7! + 7! + 6! + 6! - 5!.$$

4.10. Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, . . . , 9\}$ kod kojih cifre 3 i 5 nisu susedne i cifre 2, 4 i 6 ne qine blok?

Rexenje: Uvedimo oznake

S_1 : permutacije kod kojih su 3 i 5 susedni

S_2 : permutacije kod kojih elementi 2,4 i 6 qine blok.

Tra imo permutacije koje nisu ni u jednom od ova dva skupa, tj. $N(S^0{}_1S^0{}_2)$. Ukupan broj permutacija devetoqlanog skupa je $N = 9!$.

Ukoliko su u permutaciji elementi 3 i 5 susedni, posmatramo ta dva elementa zajedno (mogu biti u redosledu 35 ili 53) i permutu jemo ih sa ostalim elementima, pa je $N(S_1) = 2{\cdot}8!$. Kod permutacija koje sadr e blok od tri elementa treba ispermutovati elemente u bloku na 3! naqina i blok sa preostalih 6 elemenata, tako da je $N(S_2) = 3! \cdot 7!$. Analognim razmatranjem se dobija $N(S_1S_2) = 2 \cdot 3! \cdot 6!$. Koriste i formulu za princip ukljuqenja i iskljuqenja sti emo do rexenja

$$N(S^0{}_1S^0{}_2) = N - N(S_1) - N(S_2) + N(S_1S_2) = 9! - 2 \cdot 8! - 3! \cdot 7! + 2 \cdot 3! \cdot 6!.$$

4.11. Na koliko naqina 6 knjiga na engleskom, 7 knjiga na nemaqkom i 5 knjiga na ruskom mo emo rasporediti na policu tako da knjige koje su napisane na istom jeziku ne budu grupisane sve zajedno?

Rexenje: Posmatrajmo slede e rasporede knjiga na polici S_1 :

knjige na engleskom stoje zajedno

S_2 : knjige na nemaqkom stoje zajedno

S_3 : knjige na ruskom stoje zajedno.

elimo da odredimo $N(S^0{}_1S^0{}_2S^0{}_3)$. Broj naqina da rasporedimo ove knjige na policu je $N = 18!$. Ukoliko knjige na engleskom grupixemo zajedno, mo emo ih posmatrati kao jedan blok od 6 knjiga. Broj naqina da blok sa engleskim knjigama razmestimo sa knjigama na ostalim jezicima je 13!, a poxto treba rasporediti i knjige na engleskom u okviru bloka, dobijamo da je $N(S_1) = 6! \cdot 13!$. Na isti naqin se dobija da je $N(S_2) = 7! \cdot 12!$ i $N(S_3) =$

5! · 14!. Posmatrajmo sada sluqaj kada knjige na engleskom jeziku qine jedan blok, a knjige na nemaqkom drugi. Ova dva bloka mo emo ispermutovati na 7! naqina sa knjigama na ruskom jeziku. Kako je neophodno raspo rediti i knjige u samim blokovima dobijamo da je $N(S_1S_2) = 6!\cdot7!\cdot7!$. Analognim razmatranjima se dobija da je tra eni broj naqina da se knjige slo e na policu

$$\begin{aligned} N(S^0_1S^0_2S^0_3) &= N - N(S_1) - N(S_2) - N(S_3) \\ &\quad + N(S_1S_2) + N(S_1S_3) + N(S_2S_3) - N(S_1S_2S_3) \\ &= 18! - 6!\cdot 13! - 7!\cdot 12! - 5!\cdot 14! \\ &\quad + 7!\cdot 6!\cdot 7! + 6!\cdot 5!\cdot 9! + 7!\cdot 5!\cdot 8! - 3!\cdot 6!\cdot 7!\cdot 5!. \end{aligned}$$

4.12. Odrediti na koliko naqina xest braqnih parova mo e da sedne oko okruglog stola, ako nijedna ena ne treba da sedi pored svog supruga.

Rexenje: Oznaqimo sa S_i − i-ti braqni par sedi zajedno, pri qemu je $i = 1, 2, \ldots, 6$. Ukupan broj naqina da dvanaest osoba sedne oko okruglog stola je $N = 11!$. Kako nijedna ena ne treba da sedi pored svog supruga tra imo koliko je $N(S^0_1S^0_2S^0_3S^0_4S^0_5S^0_6)$. Ukoliko jedan par supru nika sedi jedno pored drugog za stolom, onda je broj naqina da razmestimo ovaj braqni par i ostale osobe oko stola 10!. Poxto osobe u paru mogu biti raspore ene tako da sede muxkarac– ena ili ena–muxkarac, imamo ukupno 2 · 10! takvih razmextaja oko okruglog stola. Na isti naqin postupamo i ako vixe braqnih parova sedi zajedno, te je rexenje

$$\begin{aligned} N(S^0_1S^0_2S^0_3S^0_4S^0_5S^0_6) &= N - \binom{6}{1}N(1) + \binom{6}{2}N(2) - \binom{6}{3}N(3) + \binom{6}{4}N(4) - \binom{6}{5}N(5) + \binom{6}{6}N(6) \\ &= 11! - 6\cdot 2\cdot 10! + 15\cdot 2^2\cdot 9! - 20\cdot 2^3\cdot 8! \\ &\quad + 15\cdot 2^4\cdot 7! - 6\cdot 2^5\cdot 6! + 2^6\cdot 5!. \end{aligned}$$

4.13. Odrediti koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, 10\}$ koje nijedan neparan broj ne preslikavaju u samog sebe.

Rexenje: Obele imo sa S_i sve permutacije kod kojih se i nalazi na i−tom mestu, gde je i neparna cifra. Treba odrediti koliko je $N(S^0_1S^0_2S^0_3S^0_4S^0_5)$. Ukupan broj permutacija ovog skupa je $N = 10!$. Ukoliko je fiksirana jedna neparna cifra na svoje mesto imamo $N(1) = 9!$ takvih permutacija, dok se u sluqaju da su fiksirane dve neparne cifre dobija $N(2) = 8!$. Na isti naqin zakljuqujemo da va i

$$\begin{aligned} N(S^0_1S^0_3S^0_5S^0_7S^0_9) &= N - N(S_1 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_7 \cup S_9) \\ &= N - \binom{5}{1}N(1) + \binom{5}{2}N(2) - \binom{5}{3}N(3) + \binom{5}{4}N(4) - \binom{5}{5}N(5) \end{aligned}$$

= 10! − 5 · 9! + 10 · 8! − 10 · 7! + 5 · 6! − 5!.

4.14. Odrediti broj permutacija π skupa $\{1, 2, . . . , 8\}$ takvih da je $\pi(n) = n$, za n parno i $\pi(n)$ 6= n, za n neparno.

Rexenje: Od svih permutacija koje fiksiraju parne cifre oduze emo one koje fiksiraju bar jednu neparnu cifru. Oznaqimo slede e skupove

S_1: $\pi(1) = 1$ S_5: $\pi(5) = 5$

S_3: $\pi(3) = 3$ S_7: $\pi(7) = 7$

Broj permutacija koje fiksiraju parne cifre je $N = 4!$. Ukoliko je fiksirana dodatno i jedna neparna cifra, ostaju da se ispermu tuju jox tri cifre i to mo emo uraditi na $N(1) = 3!$ naqina. U sluqaju da se fiksiraju jox dve neparne cifre imamo $N(2) = 2!$. Ako su fiksirane dodatno tri neparne cifre, ostaje samo jedno mesto i samo jedna cifra koja mora do i na svoje mesto, pa se ispostavlja da je $N(3) = N(4) = 1$ (u oba sluqaja se dobija permu tacija 123 . . . 8). Sada je

$N(S^0{}_1 S^4)$ = N 4 1 $N(1)$ + $N(2)$ − 4 3 $N(3)$ + $N(4)$
${}^0{}_2 S^0{}_3 S^0$ − 4 2 4 4

$$= 4! − 4 · 3! + 6 · 2! − 4 · 1! + 1.$$

4.15. Na koliko naqina se na xahovsku tablu mo e razmestiti 8 nezavisnih topova (nikoja dva topa se ne tuku), ako se nijedan top ne nalazi na beloj dijagonali?

Rexenje: Primetimo prvo da e svaki od topova zauzeti jednu vrstu i jednu kolonu. Ukoliko fiksiramo svakog topa u jednu kolonu, onda na $N = 8!$ naqina mo emo odabrati vrste u kojima se nalaze posmatrani topovi i ovaj broj odgovara broju naqina da se 8 neza visnih topova postavi na xahovsku tablu. Oznaqimo sada sa S_i svojstvo da se i−ti top nalazi u i−toj vrsti, gde $i \in \{1, 2, . . . , 8\}$. Tra imo takve rasporede u kojima se prvi top (iz prve kolone) ne nalazi u prvoj vrsti, drugi top se ne nalazi u drugoj vrsti,. . . Jasno je da ukoliko je neki top u svojoj vrsti, onda se preostali topovi mogu ispermutovati na 7! naqina i taj broj odgovara broju $N(1)$. Sada se dobija da ako se k topova nalazi u svojim vrstama, onda je tra eni broj razmextaja $N(k) = (8 − k)!$. Na osnovu pri ncipa ukljuqenja i iskljuqenja dobijamo da va i

$N(S^0{}_1 S$ 8 2 8 4 $N(5)$ + $N(7)$ + 8 1 8 3 2! −
${}^0{}_2 . . .$ 8 6 8 8 − 8 7
$S^0{}_8)$ = $N(4)$ 5! + 8 5
N − $N(2)$ − $N(8)$ 7! + 8 4 1! +
8 1 8 3 − $N(6)$ − 8 2 3! + 8 8
8 5 8 7 = 8! − 4! 8 6
$N(1)$ + $N(3)$ + 6! −

$k!$

$= 8!\sum_{k=0}^{8}$ 76

$(-1)^k$

Napomena: Za permutaciju $a_1a_2 \ldots a_n$ skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ ka emo da je deran man (rastroj poretka) ako je $a_i \neq i$, za svako $i = 1, 2, \ldots, n$.
Broj deran mana $n-$toqlanog skupa $k!$. Prema
je $D_n = n!\sum_{k=0}^{n}$
$(-1)^k$
tome, broj naqina da se 8 nezavisnih topova postavi na xahovsku tablu tako da se nijedan top ne nalazi na beloj tabli odgovara broju deran mana D_8.

4.16. Patuljci Uqa, Sre ko, Kijavko, Pospanko, Stidljivko, Ljutko i Tupko trebaju da urade u rudniku poslove $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ i P_7. Ako se zna da svaki patuljak radi taqno jedan posao i da Pospanko ne mo e da radi P_2, Stidljivko ne mo e P_6, Uqa ne mo e P_1 i Ljutko ne mo e P_3 i P_7, odrediti na koliko naqina patuljci mogu da zavrxe poslove u rudniku.

Rexenje: Uvedimo slede e oznake

S_1: Pospanko radi P_2 S_4: Ljutko radi P_3
S_2: Stidljivko radi P_6 S_5: Ljutko radi P_7
S_3: Uqa radi P_1

Treba odrediti na koliko naqina patuljci mogu obaviti poslove u rudniku tako da nijedan patuljak ne radi posao koji mu je proble matiqan, tj. $N(S'_1S'_2S'_3S'_4S'_5)$. Ukupan broj naqina da patuljci obave poslove u rudniku je 7!. Ukoliko Pospanko radi posao P_2, ostali patuljci trebaju da zavrxe preostalih xest poslova i to mogu uraditi na 6! naqina. Isto rexenje se dobija i ako nekog drugog patuljka fiksiramo na neki posao, pa je $N(1) = 6!$. Izraqunajmo sada koliko je $N(S_iS_j)$. Ako fiksiramo za dva patuljka koje poslove rade, ostali patuljci e na 5! naqina zavrxiti svoje poslove. Problematiqan je samo presek S_4S_5 poxto Ljutko ne mo e da radi dva posla istovremeno, pa je $N(S_4S_5) = 0$. Na isti naqin zakljuqu jemo da je $N(S_iS_jS_k) = 4!$, osim u sluqaju kada su u preseku i skup

S_4 i S_5, poxto je taj presek prazan. Ovakvih preseka imamo 1
(od preostala tri skupa biramo jedan i posmatramo njegov presek sa skupovima S_4 i S_5). Koriste i isti rezon pri zakljuqivanju, na osnovu principa ukljuqenja i iskljuqenja, dobijamo da je broj naqina da se obave poslovi u rudniku

$$N(S^0_1S^0_2S^0_3S^0_4S^0_5) = N - N(S_1) - N(S_2) - N(S_3) - N(S_4) - N(S_5)$$
$$+ N(S_1S_2) + N(S_1S_3) + \ldots$$
$$- N(S_1S_2S_3) - N(S_1S_2S_4) - \ldots$$
$$+ N(S_1S_2S_3S_4) + N(S_1S_2S_3S_5) + \ldots$$
$$- N(S_1S_2S_3S_4S_5)$$

= 7! − 5 1 6! + 5 2 − 1 5! − 5 3 − 3 1 4!

+ 5 4 − 3 2 3! − 0.

4.17. Koriste i princip ukljuqenja i iskljuqenja odrediti povr xinu Reloovog trougla dobijenog u preseku krugova polupreqnika *a* qiji se centri nalaze u temenima jednakostarniqnog trougla stranice du ine *a.*

A_3

$A_1 A_2$

Rexenje: Neka je S_i kru ni iseqak sa centrom u temenu A_i i centra lnim uglom $\frac{\pi}{3}$, i = 1, 2, 3. Kako kru ni iseqak S_i predstavlja xesti deo kruga dobijamo da je njegova povrxina $\frac{a^2\pi}{6}$. Primetimo da je presek svaka dva kru na iseqka $4A_1A_2A_3$, i da se u preseku sva tri iseqka tako e dobija isti trougao qija je povrxina $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Odavde dobijamo da je povrxina Reloovog trougla

$N(S_1 \cup S_2 \cup S_3) =$ 3 1 $N(1) -$ 3 2 $N(2) +$ 3 3 $N(3)$

$$= 3 \cdot \frac{a^2\pi}{6} - 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2} a^2.$$

4.18. Koliko se razliqitih brojeva mo e napisati od cifara broja 1 2 3 4 5 4 1 3, ali tako da iste cifre ne stoje jedna do druge?

Rexenje: Ukupan broj razliqitih brojeva koji se mogu zapisati koriste i cifre datog broja odgovara broju permutacija sa pona vljanjem i iznosi *N*

$= \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$. Oznaqimo slede e skupove

S_1 : jedinice stoje zajedno
S_3 : trojke stoje zajedno
S_4 : qetvorke stoje zajedno.

Ukoliko dve iste cifre stoje zajedno, te dve cifre posmatramo kao blok i permutujemo sa ostalim ciframa, te je $N(1) = \frac{7!}{2! \cdot 2!}$. U sluqaju da imamo dve grupe istih cifara koje su zajedno, permu tujemo blokove i preostale cifre na $N(2) = \frac{6!}{2!}$ naqina. Ako su sve tri grupe istih cifara grupisane zajedno, onda imamo obiqne permutacije bez ponavljanja i va i $N(3) = 5!$. Sada je na osnovu principa ukljuqenja i iskljuqenja broj tra enih reqi

$N(S^0_1 S^0_3 S^0_4) = N - \binom{3}{1} N(1) + \binom{3}{2} N(2) - \binom{3}{3} N(3)$

$= \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} - 3 \cdot \frac{7!}{2! \cdot 2!} + 3 \cdot \frac{6!}{2!} - 5!.$

4.19. Na koliko naqina je mogu e izvu i 6 karata iz standardnog xpila od 52 karte ako me u izvuqenim kartama treba da budu zastupljena sva qetiri znaka?

Rexenje: Ukupan broj naqina da se iz xpila izvuqe xest karata je $N = \binom{52}{6}$. Ako su sa S_* obele ena sva izvlaqenja u kojima nemamo znak $*$, tada treba odrediti $N(S^0_\heartsuit S^0_\diamondsuit S^0_\spadesuit S^0_\clubsuit)$. Posmatrajmo izvlaqenja u kojima nema karata sa znakom ♥. Kako u standardnom xpilu karata imamo po 13 karata od svakog znaka, sada od preostalih 39 karata treba odabrati 6, pa je $N(S_\heartsuit) = \binom{39}{6}$. Poxto ovaj broj ne zavisi od izbora znaka koji smo izostavili prilikom izvlaqenja karata, zakljuqujemo da je $N(1) = \binom{39}{6}$. U sluqaju da smo izostavili dva znaka imamo $N(2) = \binom{26}{6}$, dok je $N(3) = \binom{13}{6}$.

Jasno da je $N(4) = 0$, jer je taj doga aj nemogu . Sada je rexenje

$$N(S^0_{\heartsuit}S^0_{\diamondsuit}S^0_{\spadesuit}S^0_{\clubsuit}) = N - \binom{4}{1}N(1) + \binom{4}{2}N(2) - \binom{4}{3}N(3) + \binom{4}{4}N(4) = \binom{52}{6} - 4\binom{39}{6} + 6\binom{26}{6} - 4\binom{13}{6} + 0.$$

II naqin: Razlikujemo slede a dva sluqaja. Od jednog znaka mogu biti izvuqene 3 karte, a od preostala tri znaka po jedna karta.

Prvo na 4 naqina biramo znak iz kog emo uzeti tri karte, a zatim biramo i karte na $\binom{13}{3}\cdot 13\cdot 13\cdot 13$ naqina. Druga mogu nost je da od dva znaka odaberemo po dve karte, a od preostala dva po jednu. Broj naqina da izaberemo dva znaka od kojih biramo po dve karte je $\binom{4}{2}$, a broj naqina da izaberemo karte je $\binom{13}{2}\cdot\binom{13}{2}\cdot 13\cdot 13$. Rexenje dobijamo sabiranjem broja naqina u prvom i drugom sluqaju

$$4\cdot\binom{13}{3}\cdot 13\cdot 13\cdot 13 + \binom{4}{2}\cdot\binom{13}{2}\cdot\binom{13}{2}\cdot 13\cdot 13.$$

4.20. Odrediti broj svih reqi du ine 15 nad azbukom $\{0, 1\}$ sa taqno 7 nula i 8 jedinica kod kojih je zbir prvih sedam cifara razliqit od 3, zbir prve qetiri cifre razliqit od 4 i zbir prvih deset cifara razliqit od 5.

Rexenje: Reqi du ine 15 koje imaju taqno 7 nula i 8 jedinica ima $N = \binom{15}{8}$ (biramo npr. mesta na kojima su jedinice). Posmatrajmo slede e skupove reqi

S_1 : zbir prvih sedam cifara je 3
S_2 : zbir prve qetiri cifre je 4
S_3 : zbir prvih deset cifara je 5.

Iz uslova zadatka vidimo da treba odrediti $N(S^0_1S^0_2S^0_3)$. Ako je zbir prvih sedam cifara u reqi 3, na prvih sedam pozicija moraju na i 3 jedinice, pa je $N(S_1) = \binom{7}{3}\binom{8}{5}$. Sliqnom analizom dobijamo $N(S_2) = \binom{4}{4}\binom{11}{4}$ i $N(S_3) = \binom{10}{5}\binom{5}{3}$. Skupovi S_1 i S_2 su disjunktni, poxto je nemogu e da imamo 4 jedinice u prve qetiri cifre i da zbir prvih sedam cifara bude samo 3. Sliqno se dobija $N(S_1S_3) = \binom{7}{3}\binom{3}{2}\binom{5}{3}$, $N(S_2S_3) = \binom{4}{4}\binom{6}{1}\binom{5}{3}$ i $N(S_1S_2$

$S_3) = 0.$

Uvrxtavanjem dobijenih vrednosti u formulu za princip ukljuqenja i iskljuqenja dobijamo

$$N(S^0{}_1 S^0{}_2 S^0{}_3) = N - N(S_1) - N(S_2) - N(S_3)$$
$$+ N(S_1S_2) + N(S_1S_3) + N(S_2S_3) - N(S_1S_2S_3)$$

= 15 8 − 7 3 8 5 − 4 4 11 4 − 10 5 5 3

7 3 5 3 + 6 1 − 0.

+ 0 + 3 2 4 4 5 3