Iterativne metode za rešavanje sistema jednačina

Na prethodnom predavanju radili smo Gausovu eliminaciju koja je direktan metod.

Direktni metodi rezultuju samo jednim rešenjem, odnosno nemaju trenutno i prethodno rešenje.

Za razliku od direktnih, iterativne metode prozivode niz rešenja.

Krećemo od nekog početnog rešenja x_0 i pomoću iterativne formule proizvodimo niz:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots$$

Iterativna formula je način pomoću koga od trenutnog rešenja x_k dobijamo sledeće rešenje x_{k+1}.

Iterativna formula u suštini čini iterativni metod, odnosno po tome se iteretivne metode razlikuju međusobno.

Iteratvini metod možemo zaustaviti na više načina. Sledeća dva načina se najviše koriste:

- #### Posle unapred zadatog broja iteracija
- #### Kada se treutno i prethodno rešenje razlikuju veoma malo, tipično ispod nekog unapred zadatog praga $tačnost$:

$$|x_{k+1} - x_k| < \text{tačnost}$$

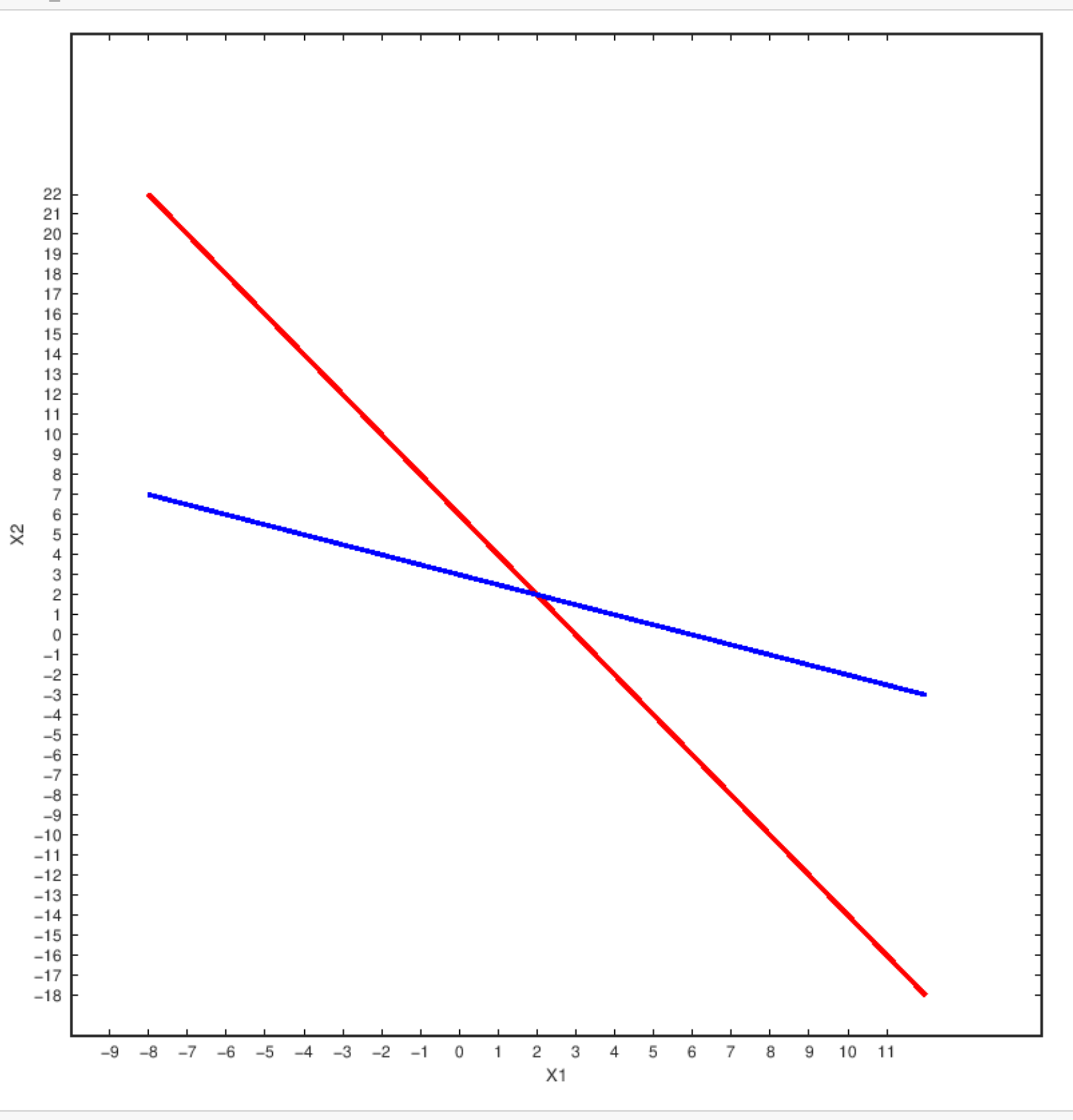
Jakobijev metod

Iterativnu formulu za Jakovijev metod objasnićemo na primeru sistema od dve jednačine sa dve nepoznate.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ -2x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned}$$

```
In [2]: A=[2,1;1,2];
        b=[6,6]';
```

```
In [3]: draw_system(A,b)
```



```
In [4]: A\b
```

```
ans =

   2.0000
   2.0000
```

Cilj nam je da od trenutnog rešenja, tj. neke dve vrednosti za x_1^k i x_2^k proizvedemo sledeće rešenje, tj. dve nove vrednosti za x_1^{k+1} i x_2^{k+1}.

Krećemo od zadatog sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 &= 6 \end{aligned}$$

Izražavamo iz svake jednačine nepoznate, tako da pazimo na redosled.

Iz prve jedančine izražavamo prvu nepoznatu x_1, iz druge jednačine drugu nepoznatu x_2 i tako redom.

Redosled jednačina je veoma važan jer utiče na konvergenciju metoda.

Ne postoji pravilo po kome se bira redosled, već je to predmet eksperimentisanja (što je dosta često u oblastima kao što su Numerika ili Veštačka inteligencija).

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(6 - x_2)}{2} \\ x_2 &= \frac{(6 - x_1)}{2} \end{aligned}$$

Zadajemo neko početno rešenje, na slučajan način:

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Koristimo nepoznate koje smo izrazili kao iterativnu formulu.

Prva jednačina iz koje smo izrazili x_1 službi nam da od x_1^0 dobijemo novo, tj. sledeće x_1^1, a druga za x_2 i tako redom.

$$\begin{aligned} x_1^1 = \frac{(6 - x_2^0)}{2} = x_1^1 = \frac{(6 - 10)}{2} = -2 \\ x_2^1 = \frac{(6 - x_1^0)}{2} = \frac{(6 - 5)}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

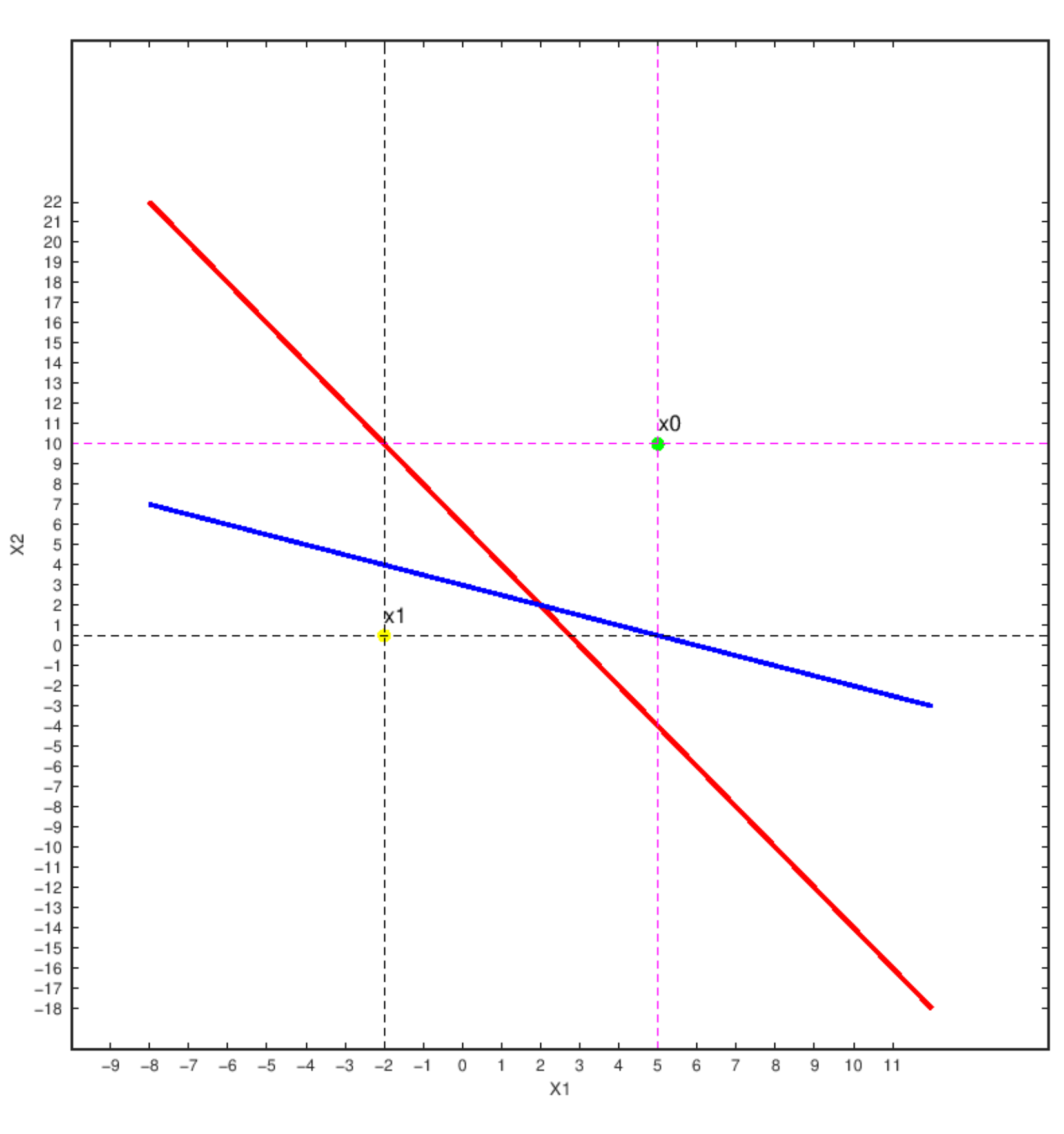
Implementiramo zamenu početnog rešenja u iterativnu formulu Jakobijevog metoda.

```
In [5]: x0=[5,10]
        x1=zeros(2,1);
        x1(1) = (6 - x0(2))/2;
        x1(2) = (6 - x0(1))/2;
        x1=x1'
```

```
x0 =

    5   10

x1 =

  -2.00000   0.50000
```

```
In [6]: x0
        x1
        draw_system(A,b)
        draw_point(x0,[0, 1, 0],'x0')
        draw_point(x1,[1, 1, 0],'x1')
        draw_dotted_lines(x0,x1)
```

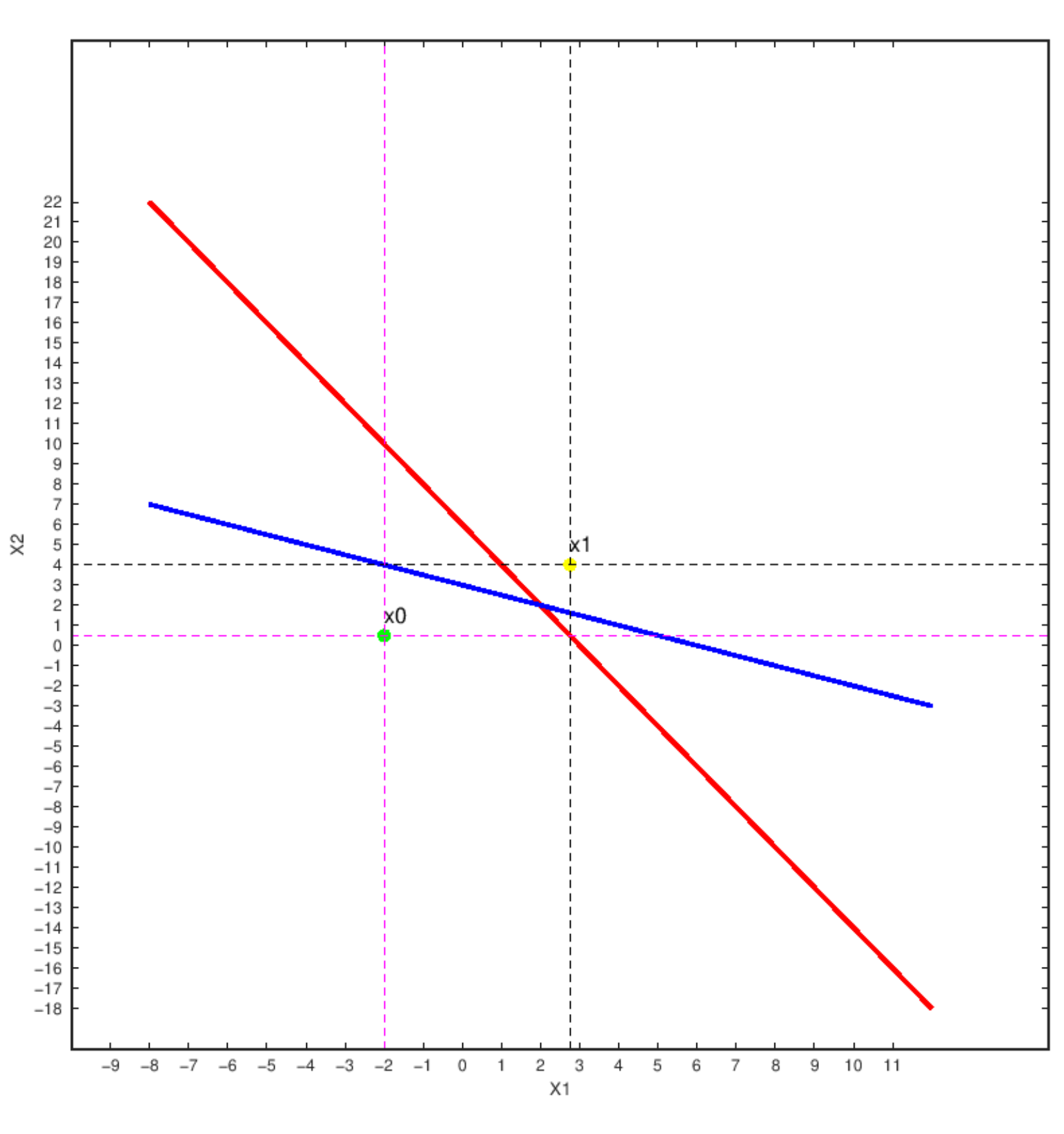
```
x0 =

    5   10

x1 =

  -2.00000   0.50000
```



Nakon što smo od x^0 odbili sada ubacujemo x^1 u iterativnu formulu da dobijemo x^2.

```
In [7]: x0=x1
        x1=zeros(2,1);
        x1(1) = (6 - x0(2))/2;
        x1(2) = (6 - x0(1))/2;
        x1=x1'
        draw_system(A,b)
        draw_point(x0,[0, 1, 0],'x0')
        draw_point(x1,[1, 1, 0],'x1')
        draw_dotted_lines(x0,x1)
```

```
x0 =

  -2.00000   0.50000

x1 =

   2.7500   4.0000
```



Uopštavamo kod da bi mogli da ga primenimo na bilo koji sistem koji je 2x2.

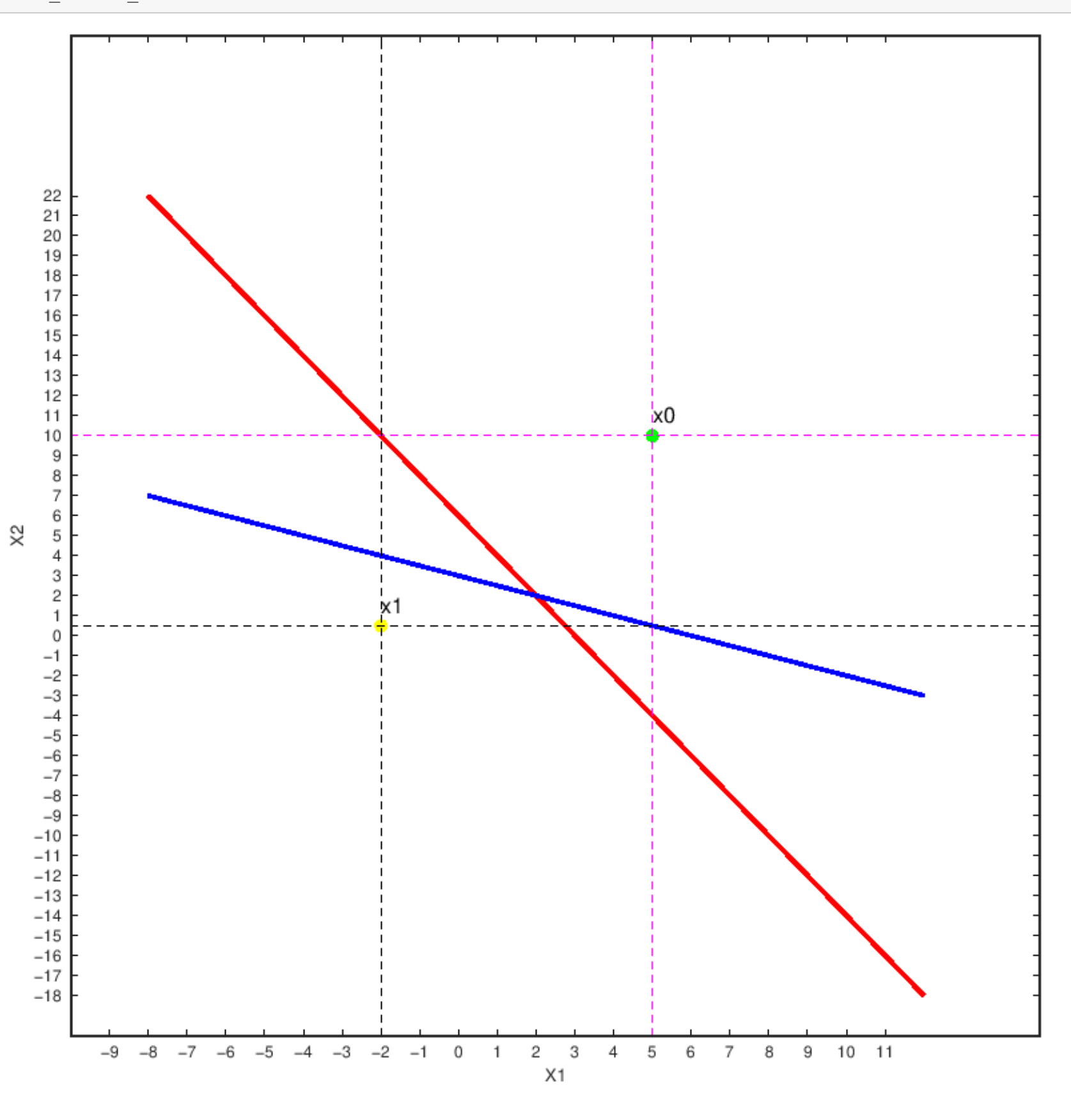
```
In [8]: A
        b
```

```
A =

   2   1
   1   2

b =

   6
   6
```

```
In [9]: %umesto konstanti, kao u kodu ranije, sada koristimo elemente matrice A i vektora b, da bi kod mogao da
         se primeni na bilo koji sistem 2x2.
        x0=[5,10];
        x1=zeros(2,1);
        x1(1) = (b(1) - A(1,2)*x0(2))/A(1,1);
        x1(2) = (b(2) - A(2,1)*x0(1))/A(2,2);
        x1
```

```
x1 =

  -2.00000
   0.50000
```

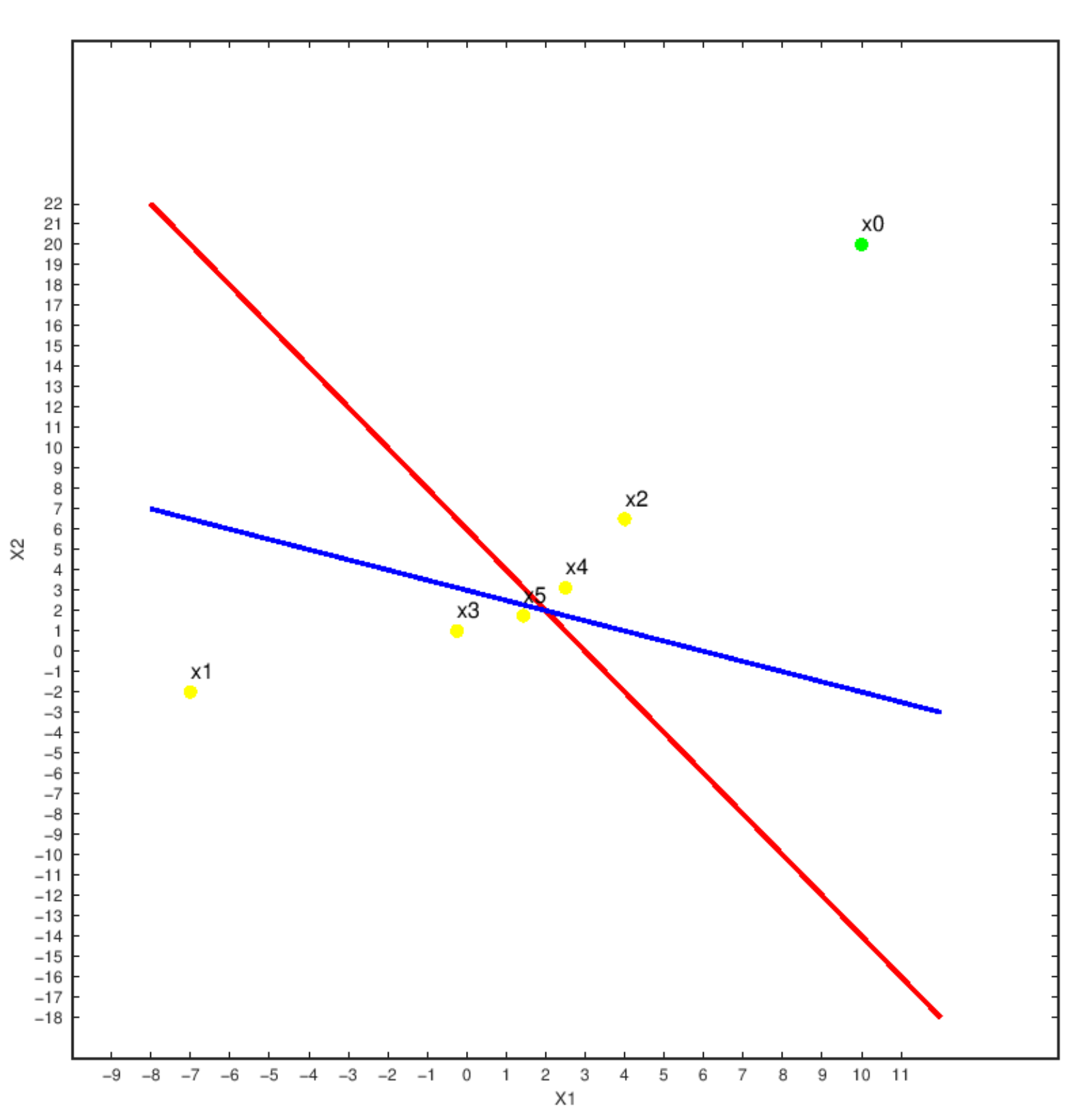
```
In [10]: %crtamo resenje sa upostenim kodom
         draw_system(A,b)
         draw_point(x0,[0, 1, 0],'x0')
         draw_point(x1,[1, 1, 0],'x1')
         draw_dotted_lines(x0,x1)
```



Dodajemo *for* petlju koja izvršava iteracije. Sada možemo da proizvedemo proizvoljan broj rešenja.

```
In [11]: x0=[10,20];
         draw_system(A,b);
         draw_point(x0,[0, 1, 0],'x0');
         x1=zeros(2,1);
         maxIter = 5;
         for i=1:maxIter
             x1(1) = (b(1) - A(1,2)*x0(2))/A(1,1);
             x1(2) = (b(2) - A(2,1)*x0(1))/A(2,2);
             draw_point(x1,[1, 1, 0],strcat('x', num2str(i)))
             %draw_dotted_lines(x0,x1)
             x0=x1;
         end
         x1
         A\b
```

```
x1 =

   1.4375
   1.7500

ans =

   2.0000
   2.0000
```



Pogledaćemo sada animaciju geometrijske intepretacije Jakovijevog metod sa slajdova.

Kako bi lakše napisali upošten kod za Jakobijev metod, primenićemo prvo metod na sistem sa tri jednačine i tri nepoznate.

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 6x_2 + x_3 &= 9 \\ -x_1 + x_2 + 7x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Izražavamo promenljive:

$$\begin{aligned} x_1 &= (3 + x_2 + x_3)/4 \\ x_2 &= (9 + 2x_1 - x_3)/6 \\ x_3 &= (-6 + x_1 - x_2)/7 \end{aligned}$$

Zadajemo početno rešenje:

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Koristimo iterativnu formulu da proizvedemo sledeće rešenje:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= (3 + x_2^0 + x_3^0)/4 = (3 + 2 + 3)/4 = 2 \\ x_2^1 &= (9 + 2x_1^0 - x_3^0)/6 = (9 + 2 \cdot 1 - 3)/6 = \frac{4}{3} \\ x_3^1 &= (-6 + x_1^0 - x_2^0)/7 = (-6 + 1 - 2)/7 = -1 \end{aligned}$$

Pišemo sada funkciju za Jakobijev metod i povezujemo je sa primerom sistema 3x3.

```
In [12]: function x=jacobi(A,b,x0,maxIter,tacnost)
         [n,m] = size(A);
         x1=zeros(n,1)';
         for k=1:maxIter
            for i=1:n
                 s=0; %ovo je suma vrednosti koje "prebacujemo na drugu stranu" kada izražavmo svaku nepoznatu
                 for j=1:n
                     if(i~=j) %pošto je nepoznata i sa leve strane jednakosti, ne može da se nađe u sumi sa desn
         e strane, pa je zato preskačemo
                         s = s + A(i,j)*x0(j);
                     end
                 end
                 x1(i) = (b(i) - s)/A(i,i); % izračunavamo vrednost promenljive koju smo izrazili
             end
             if(norm(x0-x1,"inf")<tacnost) %proveravmo da li je razlika trenutnog i početnog rešenja pala ispod
          zadate tačnosti
                 break;
             end
             x0=x1;
         end
         x=x1;
         endfunction
```

```
In [13]: A=[4,-1,-1;-2,6,1;-1,1,7]
         b=[3,9,-6]'
         x=jacobi(A,b,[1,2,3],100,10^-5)
```

```
A =

   4  -1  -1
  -2   6   1
  -1   1   7

b =

   3
   9
  -6

x =

   1.00000   2.00000  -1.00000
```

Dodaćemo sada u kod malo ispisa da bi mogli da pratimo rešenje kroz iteracije. Slobodno možete ignorisati kod za ispis jer nije deo gradiva.

```
In [15]: A=[4,-1,-1;-2,6,1;-1,1,7];
         b=[3,9,-6]';
         x=jacobi_ispis(A,b,[1,2,3],100,10^-5)
```

```
iter    trenutno rešenje        norma razlike između trenutnog i prethodnog rešenja
1.0000  1.0000  2.0000  3.0000  4.0000
2.0000  2.0000  1.3333  -1.0000 1.1667
3.0000  0.8333  2.3333  -0.7619 0.4286
4.0000  1.1429  1.9048  -1.0714 0.1845
5.0000  0.9583  2.0595  -0.9660 0.0791
6.0000  1.0234  1.9804  -1.0145 0.0319
7.0000  0.9915  2.0102  -0.9939 0.0141
8.0000  1.0041  1.9961  -1.0027 0.0057
9.0000  0.9984  2.0018  -0.9989 0.0025
10.0000 1.0007  1.9993  -1.0005 0.0011
11.0000 0.9997  2.0003  -0.9998 0.0005
12.0000 1.0001  1.9999  -1.0001 0.0002
13.0000 0.9999  2.0001  -1.0000 0.0001
14.0000 1.0000  2.0000  -1.0000 0.0000
15.0000 1.0000  2.0000  -1.0000 0.0000
x =

   1.00000   2.00000  -1.00000
```

```
In [16]: A=[2,1;1,2];
         b=[6,6]';
         x=jacobi_ispis(A,b,[5,10],100,10^-5)
```

```
iter    trenutno rešenje        norma razlike između trenutnog i prethodnog rešenja
1.0000  5.0000  10.0000 9.5000
2.0000  -2.0000 0.5000  4.7500
3.0000  2.7500  4.0000  2.3750
4.0000  1.0000  1.6250  1.1875
5.0000  2.1875  2.5000  0.5938
6.0000  1.7500  1.9062  0.2969
7.0000  2.0469  2.1250  0.1484
8.0000  1.9375  1.9766  0.0742
9.0000  2.0117  2.0312  0.0371
10.0000 1.9844  1.9941  0.0186
11.0000 2.0029  2.0078  0.0093
12.0000 1.9961  1.9985  0.0046
13.0000 2.0007  2.0020  0.0023
14.0000 1.9990  1.9996  0.0012
15.0000 2.0002  2.0005  0.0006
16.0000 1.9998  1.9999  0.0003
17.0000 2.0000  2.0001  0.0001
18.0000 1.9999  2.0000  0.0001
19.0000 2.0000  2.0000  0.0000
20.0000 2.0000  2.0000  0.0000
x =

   2.0000   2.0000
```

Gaus-Zajedelov metod

Jakobijev postupak u trenutnoj iteraciji ne koristi najnovije informacije o rešenju.

Konkretnije kad računamo x_1^1 i x_2^1, koristimo x_1^0 i x_2^0 ali, pre nego što izračunamo x_2^1 vrednost x_1^1 je već izračunata.

Ako pretpostavimo da metod konvergira vrednost x_1^1 je jedan korak bliža tačnom rešnju od x_1^0, pa se postavlja pitanje da li je možemo iskoristiti umesto x_1^0.

Na taj način dobijamo Gaus−Zajdelov postupak.

Primenjujemo Gaus-Zajdelov metod na isti primer 2x2 sistema na kome smo pokazali Jakobijev metod.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^{novo} &= \frac{(6 - x_2^{staro})}{2} \\ x_2^{novo} &= \frac{(6 - x_1^{novo})}{2} \end{aligned}$$

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

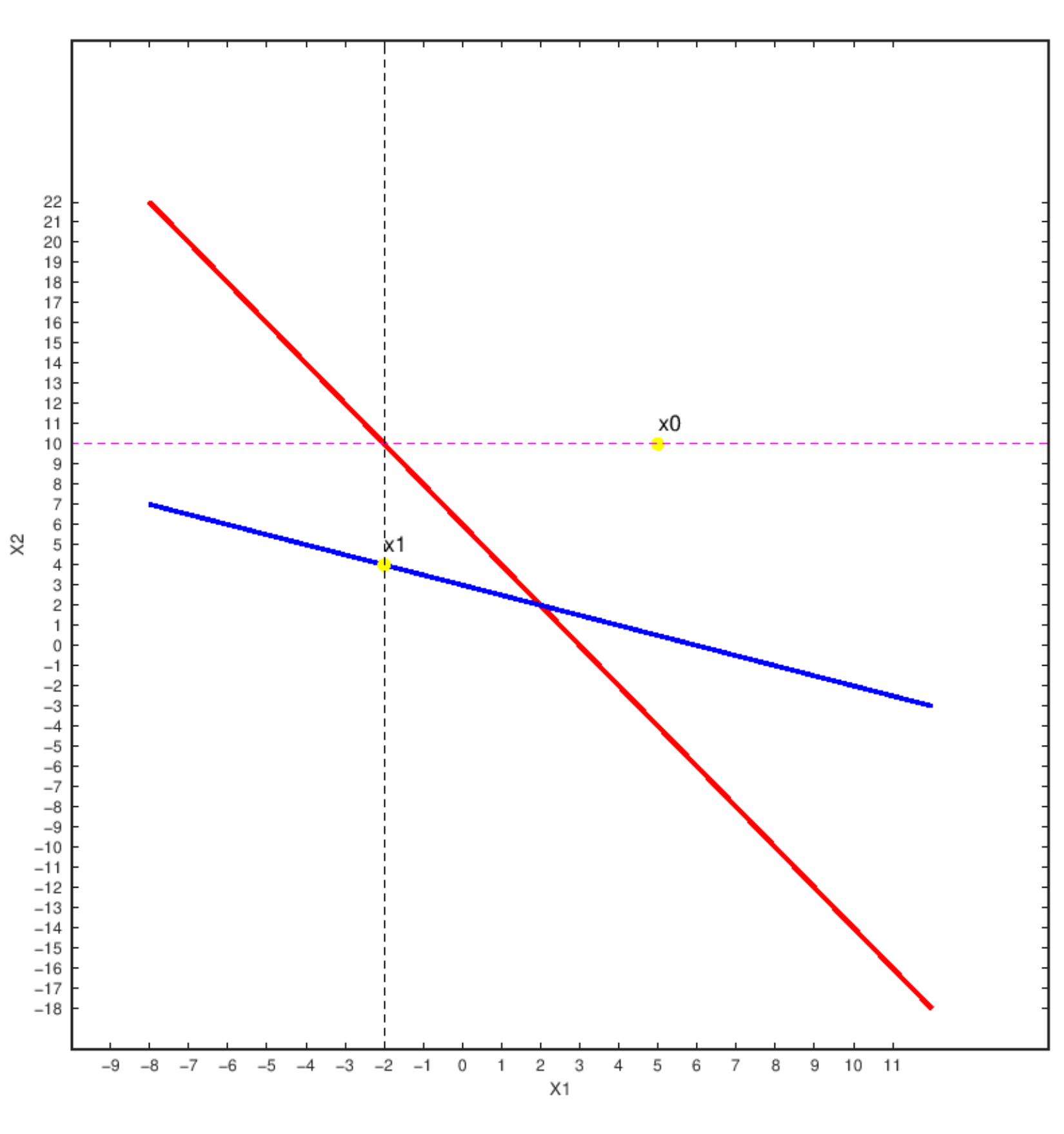
$$\begin{aligned} x_1^1 = \frac{(6 - x_2^0)}{2} = x_1^1 = \frac{(6 - 10)}{2} = -2 \\ x_2^1 = \frac{(6 - x_1^1)}{2} = \frac{(6 + 2)}{2} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^2 = \frac{(6 - x_2^1)}{2} = x_1^2 = \frac{(6 - 4)}{2} = 1 \\ x_2^2 = \frac{(6 - x_1^2)}{2} = \frac{(6 - 1)}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Sada samo izvršavamo funkciju za Gaus-Zajdelov metod, a kod ćemo objasniti kasnije.

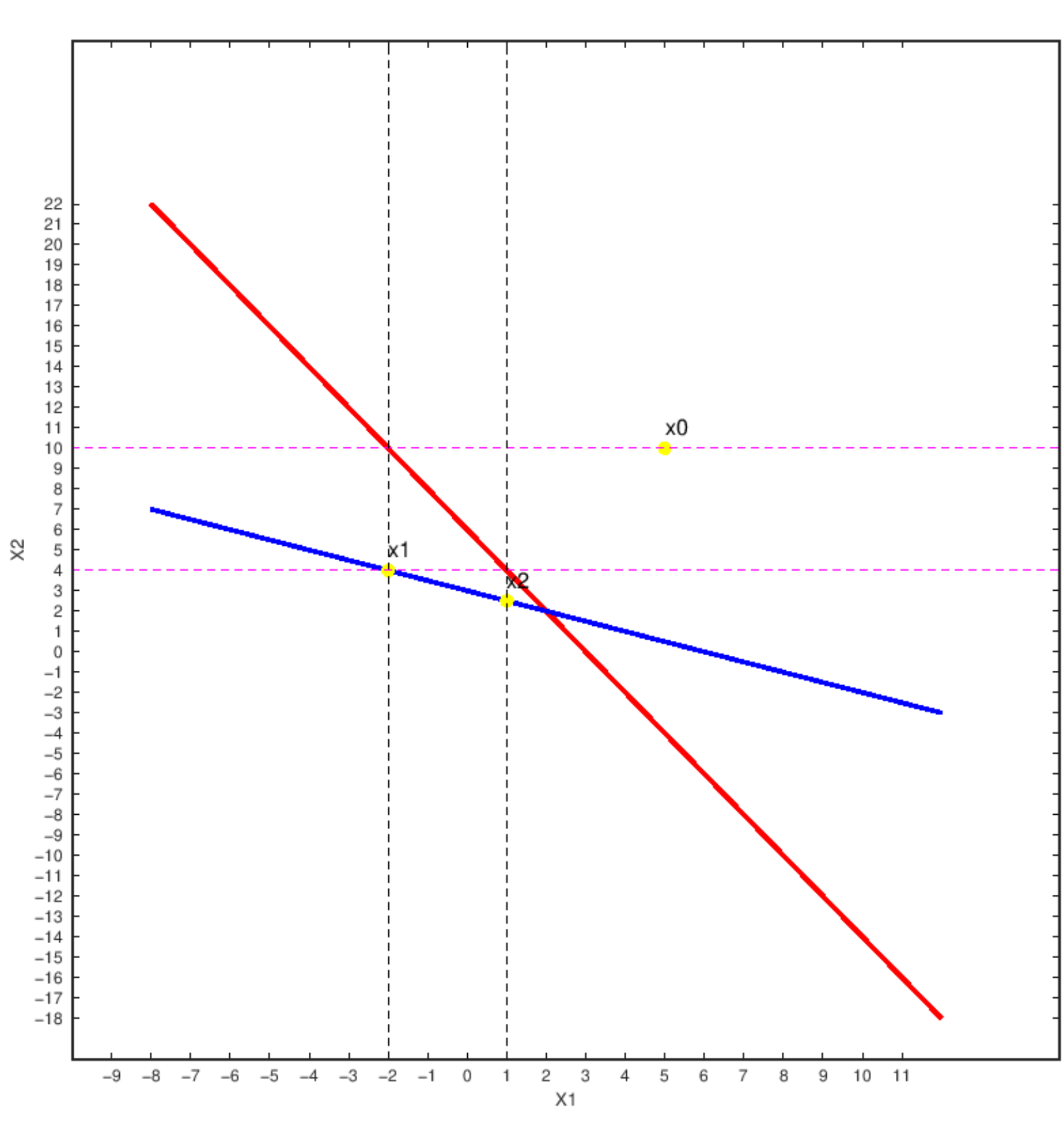
```
In [18]: A=[2,1;1,2];
         b=[6,6]';
         draw_system(A,b)
         x0=[5,10]
         x=gausz_viz(A,b,x0,1,10^-5)
```

```
x0 =

    5   10

x =

  -2   4
```



```
In [19]: A=[2,1;1,2];
         b=[6,6]';
         draw_system(A,b)
         x0=[5,10]
         x=gausz_viz(A,b,x0,2,10^-5)
```

```
x0 =

    5   10

x =

   1.0000   2.5000
```



Pogledaćemo sada animaciju geometrijske intepretacije Jakovijevog metod sa slajdova.

Pišemo kod za Gaus-Zajdelov metod. Kao pomoć koristimo isti primer 3x3 sistema kao za Jakobijev metod.

$$
\begin{aligned}
4x_1 - x_2 - x_3 &= 3\\
-2x_1 + 6x_2 + x_3 &= 9\\
-x_1 + x_2 + 7x_3 &= -6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{novo} &= (3 + x_2^{staro} + x_3^{staro})/4\\
x_2^{novo} &= (9 + 2x_1^{novo} - x_3^{staro})/6\\
x_3^{novo} &= (-6 + x_1^{novo} - x_2^{novo})/7
\end{aligned}
$$

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0\\ x_2^0\\ x_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\ 2\\ 3 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
x_1^1 &= (3 + x_2^0 + x_3^0)/4 = (3+2+3)/4 = 2\\
x_2^1 &= (9 + 2x_1^1 - x_3^0)/6 = (9 + 2\cdot 2 - 3)/6 = \frac{5}{3}\\
x_3^1 &= (-6 + x_1^1 - x_2^1)/7 = (-6 + 2 - \frac{5}{3})/7 = -\frac{17}{21}
\end{aligned}
$$

```
In [20]: function x=gausz(A,b,x0,maxIter,tacnost)
         [n,m] = size(A);
         x1=zeros(n,1)';
         for k=1:maxIter
            for i=1:n
                 s=0; %sumu s razdvajamo na dve petlje, u prvoj koristimo novo rešenje x1, a drugoj staro x0.
                 for j=1:i-1
                     s = s + A(i,j)*x1(j);
                 end
                 for j=i+1:n
                      s = s + A(i,j)*x0(j);
                 end
                 x1(i) = (b(i) - s)/A(i,i);
             end
             if(norm(x0-x1,"inf")<tacnost)
                 break;
             end
             x0=x1;
         end
         x=x1;
         endfunction
```

```
In [21]: A=[4,-1,-1;-2,6,1;-1,1,7];
         b=[3,9,-6]';
         x=gausz(A,b,[1,2,3],100,10^-5)
```

```
x =

   1.00000   2.00000  -1.00000
```

Dodaćemo sada u kod malo ispisa da bi mogli da pratimo rešenje kroz iteracije. Slobodno možete ignorisati kod za ispis jer nije deo gradiva.

Ispisujemo rezultate po iteracijama i poredimo Gaus-Zajdelovu i Jakobijevu metodu.

```
In [24]: A=[4,-1,-1;-2,6,1;-1,1,7];
         b=[3,9,-6]';
         x=gausz_ispis(A,b,[1,2,3],100,10^-5)
         x=jacobi_ispis(A,b,[1,2,3],100,10^-5)
```

```
iter    trenutno rešenje        norma razlike između trenutnog i prethodnog rešenja
1.0000  1.0000  2.0000  3.0000  3.8095
2.0000  2.0000  1.6667  -0.8095 1.0357
3.0000  0.9643  1.9563  -0.9989 0.0399
4.0000  0.9894  1.9963  -1.0010 0.0094
5.0000  0.9988  1.9998  -1.0001 0.0011
6.0000  0.9999  2.0000  -1.0000 0.0001
x =

   1.00000   2.00000  -1.00000

iter    trenutno rešenje        norma razlike između trenutnog i prethodnog rešenja
1.0000  1.0000  2.0000  3.0000  4.0000
2.0000  2.0000  1.3333  -1.0000 1.1667
3.0000  0.8333  2.3333  -0.7619 0.4286
4.0000  1.1429  1.9048  -1.0714 0.1845
5.0000  0.9583  2.0595  -0.9660 0.0791
6.0000  1.0234  1.9804  -1.0145 0.0319
7.0000  0.9915  2.0102  -0.9939 0.0141
8.0000  1.0041  1.9961  -1.0027 0.0057
9.0000  0.9984  2.0018  -0.9989 0.0025
10.0000 1.0007  1.9993  -1.0005 0.0011
11.0000 0.9997  2.0003  -0.9998 0.0005
12.0000 1.0001  1.9999  -1.0001 0.0002
13.0000 0.9999  2.0001  -1.0000 0.0001
14.0000 1.0000  2.0000  -1.0000 0.0000
15.0000 1.0000  2.0000  -1.0000 0.0000
x =

   1.00000   2.00000  -1.00000
```

Ispisujemo rezultate po iteracijama i poredimo Gaus-Zajdelovu i Jakobijevu metodu za primer sistema 2x2 koji smo koristili do sada.

```
In [25]: A=[2,1;1,2];
         b=[6,6]';
         x=gausz_ispis(A,b,[5,10],100,10^-5)
         x=jacobi_ispis(A,b,[5,10],100,10^-5)
```

```
iter    trenutno rešenje        norma razlike između trenutnog i prethodnog rešenja
1.0000  5.0000  10.0000 7.0000
2.0000  -2.0000 4.0000  3.0000
3.0000  1.0000  2.5000  0.7500
4.0000  1.7500  2.1250  0.1875
5.0000  1.9375  2.0312  0.0469
6.0000  1.9844  2.0078  0.0117
7.0000  1.9961  2.0020  0.0029
8.0000  1.9990  2.0005  0.0007
9.0000  1.9998  2.0001  0.0002
10.0000 1.9999  2.0000  0.0000
11.0000 2.0000  2.0000  0.0000
x =

   2.0000   2.0000

iter    trenutno rešenje        norma razlike između trenutnog i prethodnog rešenja
1.0000  5.0000  10.0000 9.5000
2.0000  -2.0000 0.5000  4.7500
3.0000  2.7500  4.0000  2.3750
4.0000  1.0000  1.6250  1.1875
5.0000  2.1875  2.5000  0.5938
6.0000  1.7500  1.9062  0.2969
7.0000  2.0469  2.1250  0.1484
8.0000  1.9375  1.9766  0.0742
9.0000  2.0117  2.0312  0.0371
10.0000 1.9844  1.9941  0.0186
11.0000 2.0029  2.0078  0.0093
12.0000 1.9961  1.9985  0.0046
13.0000 2.0007  2.0020  0.0023
14.0000 1.9990  1.9996  0.0012
15.0000 2.0002  2.0005  0.0006
16.0000 1.9998  1.9999  0.0003
17.0000 2.0000  2.0001  0.0001
18.0000 1.9999  2.0000  0.0001
19.0000 2.0000  2.0000  0.0000
20.0000 2.0000  2.0000  0.0000
x =

   2.0000   2.0000
```

Konvergencija iterativnih metoda

Za razumevanje konvergencije iterativnih metoda za rešavanje SLAJ potrebno je prvo da pokažemo da se metode koje smo danas učili mogu prikazati pomoću matrica.

Prvo treba uvideti da se svaki sistem oblika $Ax = b$ može transformisati u sldeći oblik:

$$x = Tx + c$$

, gde je T matrica, a c vektor. Kada uradimo transformaciju, onda možemo x sa leve strane jedankosti da proglasimo za sledeće, a x sa desne strane za prethodno rešenje i tako dobijemo iterativnu formulu:

$$x^{k+1} = Tx^k + c$$

Sada ćemo pokazati na koji način formiramo matricu T i vektor c za Jakobijev metod. Matricu sistema A rastavljamo na tri matrice:

$$
\begin{gathered}
A = L + D + U\\
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ a_{21} & 0 & 0\\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & 0\\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13}\\ 0 & 0 & a_{23}\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{gathered}
$$

Ako koristimo matrične i vektorske operacije jasno je da važi:

$$
\begin{gathered}
Ax = b\\
(L + D + U)x = b
\end{gathered}
$$

Ako hoćemo da sa leve strane jednakosti iz prve jedančine izrazimo x_1, iz druge x_2 i tako redom, to pomoću matričnih operacija možemo uraditi na sledeći način:

$$
\begin{gathered}
Dx + Lx + Ux = b\\
Dx = -(L + U)x + b\\
x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b
\end{gathered}
$$

Ako sada uradimo sledeće dodele za matricu T i vektor c i uvedemo brojač iteracija k imamo sledeće:

$$
\begin{gathered}
x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b\\
T = -D^{-1}(L + U)\\
c = D^{-1}b\\
x^{k+1} = Tx^k + c
\end{gathered}
$$

Matricu T i vektor c za Gaus-Zajedelov metod određujemo na sličan način. Razlika je u tome što sa leve strane jednakosti sada ostavljamo sve nepoznate do one na glavnoj dijagonali, kao i tu na glavnoj dijagonali.

$$
\begin{gathered}
Dx + Lx + Ux = b\\
Dx^{k+1} + Lx^{k+1} = -Ux^k + b\\
x^{k+1} = -(D + L)^{-1}Ux^k + (D + L)^{-1}b\\
T = -(D + L)^{-1}U\\
c = (D + L)^{-1}b\\
x^{k+1} = Tx^k + c
\end{gathered}
$$

Sada kada imamo formule za matricu T možemo da pokažemo zašto je ona značajna za konvergenciju.

Neka je $\hat{x}$ tačno rešenje nekog sistema, a e_k greška u k-toj iteraciji metoda, odnosno važi:

$$x_k = e_k + \hat{x}$$

U prethodnu jednakost ubacujemo u jednakost $x^{k+1} = Tx^k + c$ i tako dobijamo:

$$e_{k+1} + \hat{x} = x^{k+1} = Tx^k + c = T(e_k + \hat{x}) + c = Te_k + T\hat{x} + c$$

Pošto važi $T\hat{x} + c = \hat{x}$ imamo sledeće:

$$
\begin{gathered}
e_{k+1} + \hat{x} = Te_k + T\hat{x} + c\\
e_{k+1} = Te_k
\end{gathered}
$$

Ako nastavimo da smanjujemo k i koristimo $e_{k+1} = Te_k$ imamo:

$$e_{k+1} = Te_k = TTe_{k-1} = TTTe_{k-2} = \cdots = T^{k+1}e^0$$

Uspeli smo da povežemo grešku u iteraciji k sa matricom T. Ako uzmemo normu greške e imamo:

$$\|e_{k+1}\| \leq \|T^{k+1}\|\|e^0\|$$

Očigledno je da ako je norma od T veća od 1 greška će se kroz iteracije povećavati, odnosno metod će divergirati.

Takođe, ako je norma od T manja od 1 greška će se smanjivati odnosno metod će konvergirati.

Ovi uslovi važe za bilo koje početno rešenje x_0.

$$\lim_{k\to\infty} \|e^k\| = 0 \text{ ako } \lim_{k\to\infty} \|T^k\| = 0$$

Da bi važilo $\lim_{k\to\infty} \|T^k\| = 0$ treba da važi:

$$\|T\| < 1$$

Znači, da bi proverili konvergenciju iterativnog metoda, potrebno je prvo da izračunamo matricu T i onda proverimo da li je norma te matrice manja od 1.

Problem sa ovim testom za konvergenciju je što postoji više različitih načina da odredimo normu matrice, a ako neka od normi nije manja od jedan to ne mora da znači da neka druga neće biti, kao što možete videti u sledećem primeru:

```
In [26]: A=[0.5,0.1;0.6,0.3]
         norm(A,1)
         norm(A,"inf")
```

```
A =

   0.50000   0.10000
   0.60000   0.30000

ans =  1.1000
ans =  0.90000
```

To znači da nam treba test konvergencije koji ne koristi normu matrice.

Spektralni radijus matrice

Spektralni radijus je najveća *karakteristična vrednost* matrice:

$$\rho(T) = \max_i |\lambda_i|$$

Karakteristične vrednosti su vrednosti za koje važi:

$$Tx = \lambda x$$

Postoji tvrđenje koje nećemo dokazivati koje kaže da je svaka norma matrice veća ili jednaka od spektralnog radijusa te matrice:

$$\rho(T) \leq \|T\|$$

Što znači da ako je vrednost $\rho(T)$ veća od 1 onda će sve norme matrice T biti veće od 1 pa iterativni postupak divergira.

Dakle, potreban uslov za konvergenciju iterativnog metoda za rešavanje SLAJ za bilo koje početno rešenje je:

$$\rho(T) < 1$$

, odnosno ako je $\rho(T) > 1$ metod će divergirati.

Postoji tvrđenje koje kaže da je $\rho(T) < 1$ takođe i dovoljan uslov za konvergenciju, odosno ako važi:

$$\rho(T) < 1$$

onda metod konvergira. Dokaz za tvrđenje imate u udžbeniku predmeta.

Testiraćemo sada konvergenciju na primerima 2x2 i 3x3 sistema koje smo koristili tokom predavanja.

```
In [27]: function [L,D,U] = decompose_matrix(A)
             L=tril(A,-1);
             U=triu(A,1);
             D=diag(diag(A));
         endfunction

         function [T, ro] = test_conv_jacobi(A)
             [L,D,U] = decompose_matrix(A);
             T=-D^-1*(L+U);
             ro=max(abs(eig(T)));
         endfunction

         function [T, ro] = test_conv_gausz(A)
             [L,D,U] = decompose_matrix(A);
             T=-(L+D)^-1*U;
             ro=max(abs(eig(T)));
         endfunction
```

```
In [28]: A=[4,-1,-1;-2,6,1;-1,1,7]
         b=[3,9,-6]';
         [TJ,roJ]=test_conv_jacobi(A)
         [TGZ,roGZ]=test_conv_gausz(A)
```

```
A =

   4  -1  -1
  -2   6   1
  -1   1   7

TJ =

  -0.00000   0.25000   0.25000
   0.33333  -0.00000  -0.16667
   0.14286  -0.14286  -0.00000

roJ =  0.42946
TGZ =

   0.00000   0.25000   0.25000
   0.00000   0.08333  -0.08333
   0.00000   0.02381   0.04762

roGZ =  0.077152
```

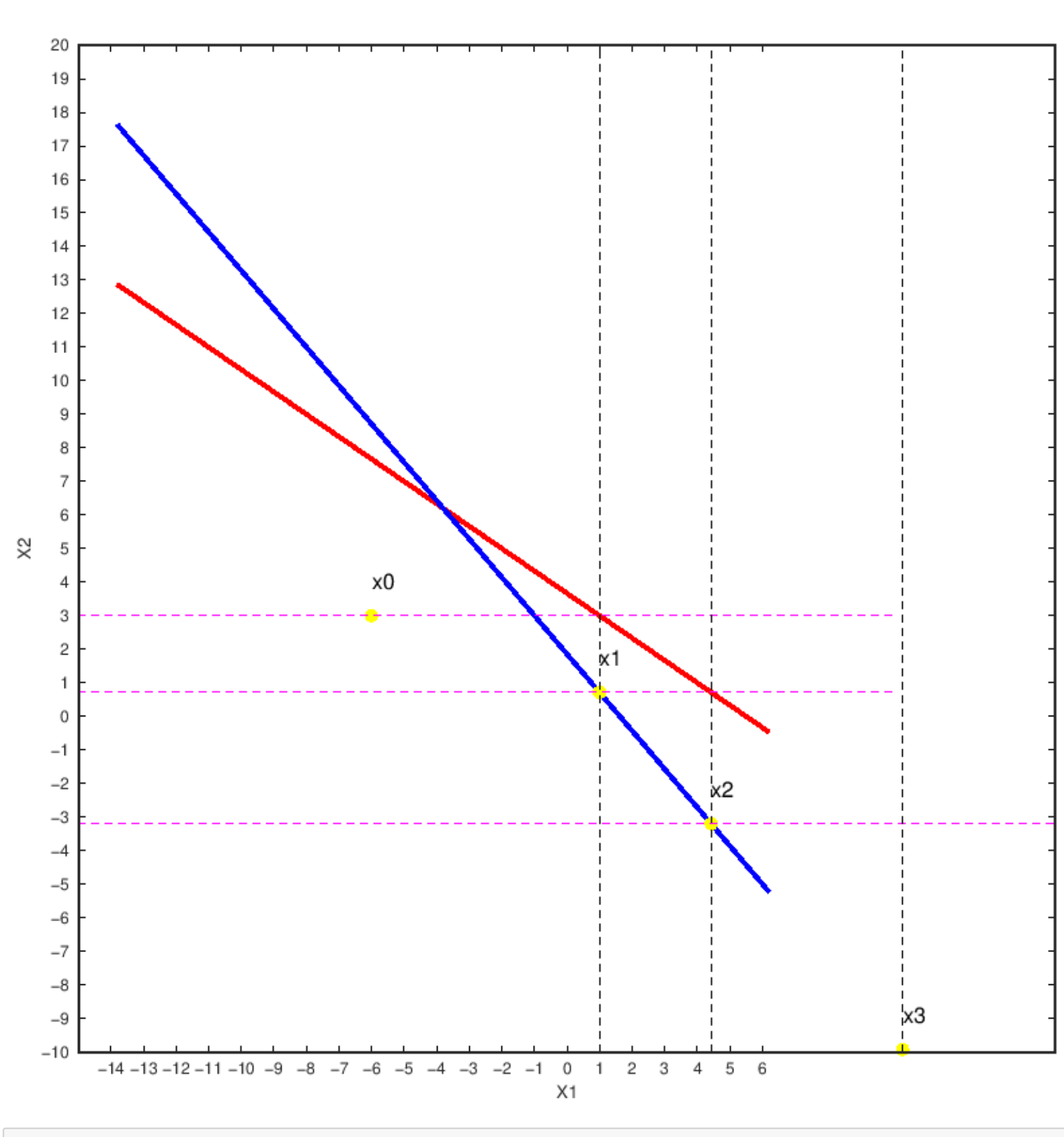
```
In [29]: A=[2,1;1,2]
         b=[6,6]';
         [TJ,roJ]=test_conv_jacobi(A)
         [TGZ,roGZ]=test_conv_gausz(A)
```

```
A =

   2   1
   1   2

TJ =

  -0.00000  -0.50000
  -0.50000  -0.00000

roJ =  0.50000
TGZ =

   0.00000  -0.50000
   0.00000   0.25000

roGZ =  0.25000
```

Primer divergencije

```
In [30]: A=[2,3;8,7];
         b=[11,13]';
         draw_system(A,b)
         [TJ,roJ]=test_conv_jacobi(A)
         [TGZ,roGZ]=test_conv_gausz(A)
         x=gausz_viz(A,b,[-6,3],3,10^-5)
```

```
TJ =

  -0.00000  -1.50000
  -1.14286  -0.00000

roJ =  1.3093
TGZ =

   0.00000  -1.50000
   0.00000   1.71429

roGZ =  1.7143
x =

   10.3061   -9.9213
```



```
In [ ]:
```