VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1. Vežbe II.7

1.1. Uslovni ekstremi

Neka je data funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ definisana na skupu $D \subset \mathbb{R}^2$ i neka je data funkcija $\varphi : D \to \mathbb{R}$. Neka je skup B dat sa $B = \{(x, y) \in D : \varphi(x, y) = 0\}$ i pretpostavimo da je $B \neq \emptyset$. Kažemo da je skup B određen uslovom ili vezom $\varphi(x, y) = 0$.

Kažemo da funkcija $z = f(x, y)$ u tački $A(x, y) \in B$ ima uslovni (vezani) lokalni maksimum (odnosno uslovni (vezani) lokalni minimum) pri uslovu

$$\varphi(x, y) = 0,$$

ako postoji broj $\varepsilon > 0$, takav da za svako $X \in (B \backslash \{A\}) \cap L(A, \varepsilon)$ važi

$$f(X) < f(A) \quad (\text{odnosno } f(X) > f(A)),$$

tj. $(\exists \varepsilon > 0), (\forall X \in B \cap (L(A, \varepsilon) \setminus \{A\})),\ f(X) < f(A),\ (\text{odnosno } f(X) > f(A))$.

Uslovni lokalni maksimum, odnosno uslovni lokalni minimum, jednim imenom zovemo *uslovni* ili *vezani ekstremi.* Jednačina $\varphi(x, y) = 0$ zove se *jednačina veze.*

Dakle, u nalaženju uslovnog ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ promenljive x i y se ne mogu više smatrati kao nezavisne promenljive jer su one povezane relacijom $\varphi(x, y) = 0$.

Postupak nalaženja tačaka koje mogu biti uslovni ekstremi funkcije $z = f(x, y)$ pod uslovom da je $\varphi(x, y) = 0$ je predstavljen kroz sledeće korake.
1. **Formiramo Lagranžovu funkciju** na sledeći način

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y).$$

2. **Tražimo stacionarne tačke** tako što izjednačimo prve parcijalne izvode $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ i $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ funkcije $F(x, y, \lambda)$ sa nulom.
Dobijamo sistem od tri jednačine

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= f_x(x, y) + \lambda\varphi_x(x, y) = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= f_y(x, y) + \lambda\varphi_y(x, y) = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \varphi(x, y) = 0,
\end{aligned}$$

pomoću kojih određujemo vrednosti parametra λ i koordinate x i y potencijalnih tačaka ekstrema. Neka tačka $A(x_0, y_0)$ zadovoljava dati sistem za λ_0.
3. **Diferenciramo uslov** $\varphi(x, y) = 0$, odakle dobijamo vezu dx i dy.
4. **Totalni diferencijal drugog reda**
Pitanje postojanja i prirode uslovnih ekstrema se rešava pomoću znaka totalnog diferencijala drugog reda Lagranžove funkcije

$$d^2F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2,$$

za skup vrednosti x_0, y_0, λ_0 pod uslovom $\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0$, $(dx, dy) \neq (0, 0)$.
Dalje,

- ako je $d^2F(x_0, y_0) < 0$, tada u tački (x_0, y_0) funkcija $f(x, y)$ ima **uslovni maksimum**,
- ako je $d^2F(x_0, y_0) > 0$, tada u tački (x_0, y_0) funkcija $f(x, y)$ ima **uslovni minimum**,
- a ako $d^2F(x_0, y_0)$ menja znak, tada u tački (x_0, y_0) funkcija $f(x, y)$ **nema uslovni ekstrem**.

Analogno tražimo i ekstreme funkcije $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pod uslovom da je $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, gde je $1 \leq m < n$. Lagranžova funkcija u ovom slučaju ima sledeći oblik

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) &= f(x_1, x_2, ..., x_n)\\
&\quad + \lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + \lambda_m\varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n).
\end{aligned}$$

Zadatak 1.1. Naći ekstreme funkcije

$$z(x,y) = y^2 - x^2 + 5$$

pod uslovom

$$y + 2x - 16 = 0.$$

Rešenje.
Lagranžova funkcija: $F(x,\ y,\ \lambda) = y^2 - x^2 + 5 + \lambda(y + 2x - 16)$
Stacionarne tačke:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2x + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow x = \lambda,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{\lambda}{2},$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = y + 2x - 16 = 0 \Leftrightarrow -\frac{\lambda}{2} + 2\lambda - 16 = 0 \Leftrightarrow 3\lambda - 32 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{32}{3}.$$

Dalje, dobijamo da je $x = \lambda = \frac{32}{3}$ i $y = -\frac{\lambda}{2} = -\frac{\frac{32}{3}}{2} = -\frac{16}{3}$, pa sledi da je stacionarna tačka tačka

$$A(\frac{32}{3}, -\frac{16}{3}).$$

Diferenciranje uslova: Diferenciranjem uslova dobija se $dy + 2dx = 0$, odnosno

$$dy = -2dx.$$

Totalni diferencijal drugog reda:
Uvrštavanjem vrednosti parcijalnih izvoda drugog reda u tački A u totalni diferencijal drugog reda dobijamo

$$\begin{aligned} d^2F(A) &= -2dx^2 + 2dy^2 \\ &= -2dx^2 + 8dx^2 \\ &= 6dx^2 > 0, \end{aligned}$$

odakle sledi da funkcija $z(x,y)$ ima uslovni minimum u tački A i on iznosi $-\dfrac{241}{3}$.

Zadatak 1.2. Proveriti da li funkcija

$$u(x, y, z) = xy + yz$$

u tački $A(1, 1, 1)$ ima uslovni ekstrem ako je

$$x^2 + y^2 = 2 \text{ i } y + z = 2.$$

Rešenje.
Lagranžova funkcija: $F(x,\ y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xy + yz + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(y + z - 2)$
Stacionarne tačke:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= y + 2\lambda_1 x = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{y}{2x},\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= x + z + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial z} &= y + \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow y = -\lambda_2,\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} &= x^2 + y^2 - 2 = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} &= y + z - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Kako je zadatak da se proveri da li funkcija $u(x, y, z)$ ima ekstremnu vrednost u tački $A(1, 1, 1)$, primetimo prvo da su četvrta i peta jednačina zadovoljene za $x = y = z = 1$.
Dalje, ispitaćemo da li je moguće izračunati vrednost parametara λ_1 i λ_2 tako da važe i preostale tri navedene jednačine. Za $x = y = z = 1$, iz prve jednačine dobijamo da je $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, a iz treće da je $\lambda_2 = -1$. Kako je za ove vrednosti parametara λ_1 i λ_2 zadovoljena i druga jednačina, zaključujemo da je stacionarna tačka tačka

$$A(1, 1, 1).$$

Diferenciranje uslova: Diferenciranjem prvog uslova $y + z = 2$ dobija se $dy + dz = 0$, odnosno

$$dz = -dy.$$

Diferenciranjem drugog uslova $x^2 + y^2 = 2$ dobija se $2xdx + 2ydy = 0$, odnosno $dx + dy = 0$. Odavde je

$$dx = -dy.$$

Totalni diferencijal drugog reda:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda_1 = -1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = 0,\\
&\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda_1 = -1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 1,\\
&\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0,
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem parcijalnih izvoda drugog reda u totalni diferencijal drugog reda dobijamo

$$\begin{aligned} d^2F(A) &= -dx^2 - dy^2 + 2dxdy + 2dydz \\ &= -(dx-dy)^2 + 2dydz \\ &= -(2dy)^2 - 2dy^2 \\ &= -6dy^2 < 0, \end{aligned}$$

odakle sledi da funkcija $u(x,y,z)$ ima uslovni maksimum u tački A i on iznosi 2.

Zadatak 1.3. Broj 27 predstaviti kao proizvod tri broja tako da je zbir ta tri broja minimalan.
Rešenje.
Funkcija koju treba da minimiziramo je $u(x, y, z) = x + y + z$ pod uslovom da je $xyz = 27$.
Lagranžova funkcija: $F(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(xyz - 27)$
Stacionarne tačke:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 1 + \lambda yz = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 1 + \lambda xz = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial z} &= 1 + \lambda xy = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= xyz - 27 = 0.
\end{aligned}$$

Ako iz prve jednačine izrazimo $\lambda = -\frac{1}{yz}$ i uvrstimo u drugu i treću jednačinu dobijamo da je $x = y = z$, pa je $x^3 = 27$, tj. $x = y = z = 3$ za $\lambda = -\frac{1}{9}$. Dakle, stacionarna tačka je $A(3, 3, 3)$ za $\lambda = -\frac{1}{9}$.
Diferenciranje uslova: $yzdx + xzdy + xydz = 0$, a uvrštavanjem vrednosti za A dobijamo da je

$$dx = -dy - dz.$$

Totalni diferencijal drugog reda: Za parcijalne izvode drugog reda dobijamo

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \lambda z, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \lambda y,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \lambda x,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0,$$

pa je totalni diferencijal drugog reda u tački A

$$\begin{aligned}
d^2F(A) &= -\frac{2}{3}dxdy - \frac{2}{3}dxdz - \frac{2}{3}dydz\\
&= -\frac{2}{3}\left(-dy^2 - dydz - dz^2\right)\\
&= \frac{1}{3}\left((dy + dz)^2 + dy^2 + dz^2\right) > 0.
\end{aligned}$$

Dakle, u tački A funkcija dostiže uslovni minimum $u(3, 3, 3) = 9$, tj. broj 27 treba predstaviti kao $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$.

Zadatak 1.4. Neka su x, y i z stranice kvadra čija površina omotača iznosi $24cm^2$. Odrediti za koje x, y i z će zapremina kvadra biti maksimalna.

Rešenje.

Treba odrediti maksimalnu zapreminu kvadra čija površina omotača iznosi $24cm^2$, tj. treba maksimizirati funkciju

$$V(x, y, z) = xyz$$

pod uslovom $2xy + 2xz + 2yz = 24$, odnosno

$$xy + xz + yz - 12 = 0.$$

Lagranžova funkcija: $F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - 12)$

Stacionarne tačke:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= yz + \lambda y + \lambda z = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= xz + \lambda x + \lambda z = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial z} &= xy + \lambda x + \lambda y = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= xy + xz + yz - 12 = 0.
\end{aligned}$$

Rešenje datog sistema jednačina je tačka $A(2, 2, 2)$ koja se dobija za $\lambda = -1$.

Diferenciranje uslova: Diferenciranjem uslova dobijamo

$$(y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz = 0,$$

tj. u tački A imamo da je

$$4dx + 4dy + 4dz = 0,$$

pa je

$$dx = -dy - dz.$$

Totalni diferencijal drugog reda: Za parcijalne izvode drugog reda dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= z + \lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = y + \lambda,\\
\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = x + \lambda,\\
\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} &= 0,
\end{aligned}$$

pa važi $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(A) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}(A) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}(A) = 1.$

Uvrštavanjem parcijalnih izvoda drugog reda u totalni diferencijal drugog reda dobijamo

$$\begin{aligned} d^2F(A) &= 2dxdy + 2dxdz + 2dydz \\ &= 2(-dy - dz)dy + 2dxdz + 2dydz \\ &= -dy^2 - dz^2 - (dy + dz)^2 < 0, \end{aligned}$$

pa u tački $A(2,2,2)$ funkcija dostiže maksimum. Dakle, kvadar čija je površina omotača $24cm^2$ ima maksimalnu zapreminu ukoliko su njegove stranice $x = y = z = 2$ i ona iznosi $V = 8cm^3$.

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.