ВЕЖБЕ 7

# ГЕНЕРАТОРНЕ ФУНКЦИЈЕ

ГЕНЕРАТОРНЕ ФУНКЦИЈЕ → бесконачном низу реалних бројева додељујемо непрекидну ф-ју

$(1,1,1,\dots,1,\dots)$ $\quad 1+x+x^2+\dots+x^n+\dots = \frac{1}{1-x}$ ← ЗАТВОРЕНА ФОРМА

Нека је $(a_0,a_1,a_2,\dots,a_n,\dots)$ низ реалних бројева. Генераторна ф-ја овог низа је степени ред

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$(a_0,a_1,a_2,\dots)$ $\quad g_a(x)$

$(b_0,b_1,b_2,\dots)$ $\quad g_b(x)$

- САБИРАЊЕ

$(a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2,\dots)$

$$\begin{aligned} g(x) &= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \dots \\ &= a_0+a_1x+a_2x^2+\dots + b_0+b_1x+b_2x^2+\dots \\ &= g_a(x)+g_b(x) \end{aligned}$$

- МНОЖЕЊЕ НИЗА РЕАЛНИМ БРОЈЕМ $\alpha$

$\alpha(a_0,a_1,a_2,\dots) = (\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2,\dots)$

$$\begin{aligned} g(x) &= \alpha a_0 + \alpha a_1\cdot x + \alpha a_2\cdot x^2 + \dots \\ &= \alpha(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots) \\ &= \alpha g_a(x) \end{aligned}$$

- $\alpha(a_0,a_1,a_2,\dots) + \beta(b_0,b_1,b_2,\dots) = (\alpha a_0+\beta b_0, \alpha a_1+\beta b_1, \alpha a_2+\beta b_2,\dots)$

$$g(x) = \alpha g_a(x) + \beta g_b(x)$$

$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)$ $\qquad n \in \mathbb{N}$

$$g_a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \dots$$

- померање низа **УДЕСНО**

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \to (\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_{n}, a_0, a_1, a_2, \dots)$$

$$g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n+1} + a_2 x^{n+2} + \dots$$
$$= x^n (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$$
$$= x^n g_a(x)$$

- померање низа **УЛЕВО**

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \to (a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)$$

$$g(x) = a_n + a_{n+1} x + a_{n+2} x^2 + \dots$$
$$= \frac{g_a(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_{n-1} x^{n-1}}{x^n}$$

- замена променљиве $x$ са $\alpha x$

$$g_a(\alpha x) \to a_0 (\alpha x)^0 + a_1 (\alpha x)^1 + a_2 (\alpha x)^2 + \dots = a_0 + a_1 \alpha x + a_2 \alpha^2 x^2 + \dots$$

добијамо низ $(a_0, a_1 \alpha, a_2 \alpha^2, a_3 \alpha^3, \dots)$

- замена променљиве $x$ са $x^n$

$$g_a(x^n) \to a_0 (x^n)^0 + a_1 (x^n)^1 + a_2 (x^n)^2 + \dots = a_0 + a_1 x^n + a_2 x^{2n} + \dots$$

добија се низ $(a_0, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ нула}}, a_1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ нула}}, a_2, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ нула}}, a_3, 0, \dots)$

$$g_a(x^3) \to (a_0, 0, 0, a_1, 0, 0, a_2, 0, 0, a_3, 0, 0, a_4, 0, \dots)$$

• **Диференцирање**

$$g_a'(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots)' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

$\rightarrow (a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, na_n, \dots)$

На $k$-том месту у низу је члан $(k+1)a_{k+1}$

• **Интеграљење**

$$\int_0^x g_a(t)\,dt = \int_0^x (a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n + \dots)\,dt = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \dots$$

$\rightarrow (0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots, \frac{a_n}{n+1}, \dots)$

На $k$-том месту $(k \geq 1)$ у низу је члан $\frac{a_{k-1}}{k}$

• **Множење** генераторних функција

$(a_0, a_1, a_2, \dots)$ $g_a(x)$

$(b_0, b_1, b_2, \dots)$ $g_b(x)$

$g_a(x) \cdot g_b(x)$ је генераторна ф-ја низа $(c_0, c_1, c_2, c_3, \dots)$

$c_0 = a_0b_0$, $c_1 = a_0b_1 + a_1b_0$, $c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$, .... $\quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}$

1. Одредити генераторне функције за низове са општим чланом → тражимо затворене форме генераторних функција

а) $\boxed{a_k = k+1}$

$(1,2,3,4,5,\dots)$

$g(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$

$(1,1,1,\dots)$ $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

$$= \frac{1}{1-x}$$

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

$$\Rightarrow g(x) = f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \boxed{\frac{1}{(1-x)^2}}$$

б) $\boxed{a_k = k}$

$(0,1,2,3,4,\dots)$

Ако транслирамо низ из а) за један корак удесно, добијамо низ $a_k = k$

$$g(x) = x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \boxed{\frac{x}{(1-x)^2}}$$

c) $a_k = 2k^2$

$(2\cdot 0, 2\cdot 1^2, 2\cdot 2^2, 2\cdot 3^2, \dots) = 2(0, 1^2, 2^2, 3^2, \dots)$

Знамо да је генераторна ф-ја за низ $b_k = k$ $(0,1,2,3,\dots)$ дата са $g_b(x) = 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$g_b'(x) = 1 + 2\cdot 2x + 3\cdot 3x^2 + 4\cdot 4x^3 + \dots$$
$$= 1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \dots$$

Генераторна ф-ја $g_b'(x)$ генерише низ $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots)$

$$g_b'(x) = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x'(1-x)^2 - x((1-x)^2)'}{(1-x)^4} = \frac{(1-x)^{\cancel{2}} + x\cdot 2\cancel{(1-x)}}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

Генераторна ф-ја низа $(0, 1^2, 2^2, 3^2, \dots)$ је $x\cdot\frac{1+x}{(1-x)^3}$ (претходни низ смо померили један корак удесно)

Генераторна ф-ја траженог низа $a_k = 2k^2$ је дата са

$$g(x) = 2\cdot x\cdot\frac{1+x}{(1-x)^3}$$

d) $a_k = (k-1)k(k+1)$

Посматрамо низ $b_k = k+1$ $(1,2,3,\dots)$

$g_b(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots \overset{a)}{=} \frac{1}{(1-x)^2}$

- $g_c(x) = g_b'(x)$

$c_k = (k+1)\,b_{k+1} = (k+1)((k+1)+1) = (k+1)(k+2)$

$g_c(x) = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = ((1-x)^{-2})' = \frac{2}{(1-x)^3}$

- $g_d(x) = g_c'(x)$

$d_k = (k+1)\,c_{k+1} = (k+1)((k+1)+1)((k+1)+2) = (k+1)(k+2)(k+3)$

$g_d(x) = \left(\frac{2}{(1-x)^3}\right)' = 2(-3)(1-x)^{-4}(-1) = \frac{6}{(1-x)^4}$

| | | |
|---|---|---|
| $k=0$ | $d_0 = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ | $a_0 = 0$ |
| $k=1$ | $d_1 = 2\cdot 3\cdot 4$ | $a_1 = 0$ |
| $k=2$ | $d_2 = 3\cdot 4\cdot 5$ | $a_2 = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ |

Низ $a_k = (k-1)k(k+1)$ добијамо
померањем низа $d_k = (k+1)(k+2)(k+3)$
за два корака удесно

$\Rightarrow g(x) = x^2 \cdot g_d(x) = \frac{6x^2}{(1-x)^4}$

2. Одредити генераторну функцију низа задатог са $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 4a_n$, $a_0=2$, $a_1=-1$.

Нека је $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ тражена генераторна функција.

За одговарајуће генераторне функције важи р.р.

$a_n \quad a_{n+1} \quad a_{n+2}$

Померање УЛЕВО

$$\frac{g(x) - a_0 - a_1x}{x^2} = 2\,\frac{g(x) - a_0}{x} - 4g(x) \quad / \cdot x^2$$

$$g(x) - 2 + x = 2x\,(g(x) - 2) - 4x^2 g(x)$$

$$g(x) - 2x\,g(x) + 4x^2 g(x) = -4x - x + 2$$

$$g(x)\,(1 - 2x + 4x^2) = 2 - 5x$$

$$g(x) = \frac{2 - 5x}{1 - 2x + 4x^2}$$

3. Користећи генераторне функције решити рекурентну релацију $a_n=2a_{n-1}+1,\ a_0=0$

$a_n=2a_{n-1}+1$

$g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots$

$a_{n-1} \rightarrow a_n$

померање УДЕСНО

Рекурентну релацију $a_n=2a_{n-1}+1,\ n\geq 1$ можемо записати као р.р. $\boxed{a_{n+1}=2a_n+1,\ n\geq 0}$

$a_n \leftarrow a_{n+1}$

померање УЛЕВО!

$$\frac{g(x)-a_0}{x}=2\cdot g(x)+\frac{1}{1-x}\quad /\cdot x(1-x)$$

$$g(x)(1-x)=2x(1-x)g(x)+x$$

$$g(x)(1-x)-2x(1-x)g(x)=x$$

$$g(x)(1-x)(1-2x)=x$$

$$g(x)=\frac{x}{(1-x)(1-2x)}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1-2x}=\frac{A(1-2x)+B(1-x)}{(1-x)(1-2x)}$$

$$-2A-B=1$$
$$A+B=0$$

$$-A=1 \Rightarrow A=-1$$
$$B=1$$

$$\frac{1}{1+2x} \Rightarrow (-2)^n$$
$$1+2x = 1-(-2x)$$

$$g(x)=-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-2x}$$

$\frac{1}{1-x}$ је генераторна ф-ја низа са општим чланом $1$

$\frac{1}{1-2x}$ је генераторна ф-ја низа са општим чланом $2^n$

$$\Rightarrow \boxed{a_n=-1+2^n=2^n-1}$$

II начин:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1,\ n \geq 1,\ a_0 = 0$$

$a_{n-1} \curvearrowright a_n$

померање удесно!

$a_n: \ g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

$a_{n-1}: \ x g(x) = \qquad a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots$

$1: \ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

$$a_n - 2a_{n-1} - 1 = 0$$

$$g(x) - 2xg(x) - \frac{1}{1-x} = \underbrace{(a_0 - 1)}_{=-1} + \underbrace{(a_1 - 2a_0 - 1)}_{=0} x + \underbrace{(a_2 - 2a_1 - 1)}_{=0} x^2 + \underbrace{(a_3 - 2a_2 - 1)}_{=0} x^3 + \dots$$

$$g(x)(1-2x) = -1 + \frac{1}{1-x}$$

$$g(x)(1-2x) = \frac{-1+x+1}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

$$g(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} \dots$$

даље задатак решавамо исто као малопре.

$a_n = a_{n-2} + 4n$

$a_0 = 3,\ a_1 = 2$

померање улево:

$a_{n+2} = a_n + 4\cdot(n+2)$!

ДОМАЋИ

1. Колико има речи дужине $n$ над азбуком $\{0,1,2\}$ које садрже паран број нула?

$f_n$ - број речи дужине $n$ које садрже паран број нула

$g_n$ - број речи дужине $n$ које садрже непаран број нула

$1^\circ$ $1\ \boxed{n-1}$ $f_{n-1}$

$2^\circ$ $2\ \boxed{n-1}$ $f_{n-1}$

$3^\circ$ $0\ \boxed{\phantom{n-1}}$ $\cancel{(n-1)f_{n-2}}$ $g_{n-1}$

$$f_n = 2f_{n-1} + g_{n-1}$$

$$f_n + g_n = 3^n \Rightarrow g_{n-1} = 3^{n-1} - f_{n-1}$$

$$f_n = 2f_{n-1} + 3^{n-1} - f_{n-1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f_n &= f_{n-1} + 3^{n-1} \\ f_0 &= 1 \end{aligned}}$$

НЕХОМОГЕНА р.р.

(празна реч)

Напомена:

$g_0 = 0$

$$f_{n+1} = f_n + 3^n, \quad f_0 = 1$$

$$\frac{g(x) - 1}{x} - g(x) = \frac{1}{1-3x} \quad / \cdot x$$

$$g(x) - 1 - x g(x) = \frac{x}{1-3x}$$

$$g(x)(1-x) = 1 + \frac{x}{1-3x}$$

$$g(x)(1-x) = \frac{1-3x+x}{1-3x}$$

$$g(x) = \frac{1-2x}{(1-x)(1-3x)} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1-3x)}$$

$$f_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3^n = \frac{3^n + 1}{2}$$

2. Доказати да је у сваком скупу број подскупова са непарним бројем елемената једнак броју подскупова са парним бројем елемената.

Нека је $S$ произвољан скуп и нека $x \in S$

$\mathcal{A} = \{ A \subseteq S \mid |A| \equiv 0 \pmod 2 \}$

$\mathcal{B} = \{ B \subseteq S \mid |B| \equiv 1 \pmod 2 \}$

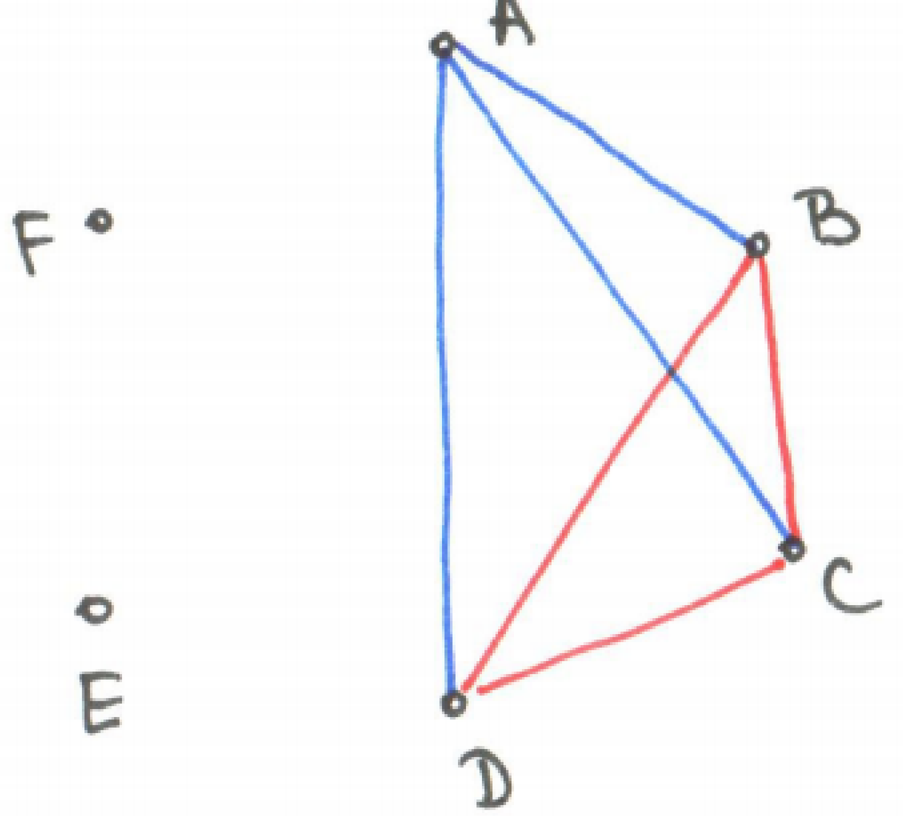
Тражимо пресликавање $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ које је бијекција.

Посматрајмо $A \in \mathcal{A}$ и дефинишемо

$$f(A) = \begin{cases} A \cup \{x\}, & x \notin A \\ A \setminus \{x\}, & x \in A \end{cases}$$

$f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ је бијективно пресликавање $\Rightarrow |\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$

3. У групи од шест особа сваке две се или познају или не познају. Доказати да се међу њима увек могу наћи бар 3 особе тако да се све три међусобно познају или међусобно не познају.




Поставимо особе у темена правилног шестоугла

Обојимо дужи: познају се - плаво
не познају се - црвено

Задатак је готов уколико успемо да пронађемо једнобојни $\Delta$

Уочимо особу A : $\left.\begin{array}{l}\text{5 дужи}\\ \text{2 боје}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{УДП}}$ бар 3 дужи које излазе из темена су обојене истом бојом

Нека су, б.у.о., дужи AB, AC и AD обојене плавом бојом.

Уколико је бар једна од дужи BC, CD или BD плава, добили смо $\Delta$.

Уколико ниједна од ове 3 дужи није плава, све три су црвене, и формирају $\Delta$.

4. Колико има шестоцифрених бројева у којима парне и непарне цифре долазе наизменично?

1° прва цифра парна

$\underset{п}{\underline{4}} \cdot \underset{н}{\underline{5}} \cdot \underset{п}{\underline{5}} \cdot \underset{н}{\underline{5}} \cdot \underset{п}{\underline{5}} \cdot \underset{н}{\underline{5}}$ $\qquad 4 \cdot 5^5$

2° прва цифра непарна

$\underset{н}{\underline{5}} \cdot \underset{п}{\underline{5}} \cdot \underset{н}{\underline{5}} \cdot \underset{п}{\underline{5}} \cdot \underset{н}{\underline{5}} \cdot \underset{п}{\underline{5}}$ $\qquad 5 \cdot 5^5$

$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot 5^5 \\ 5 \cdot 5^5 \end{array} \right\} +$

II начин: $9 \cdot 5^5$

Прву цифру бирамо произвољно, а затим даље бирамо цифре да буду парно-непарно или непарно-парно у зависности од парности прве цифре.

5. Колико има седмоцифрених бројева који не садрже цифре 0,4,8, дељиви су са 4 и сваке две суседне цифре су међусобно различите?

1,2,3,5,6,7,9

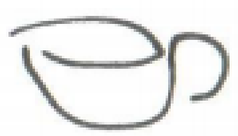
Број је дељив са 4 ако му је двоструки завршетак дељив са 4.

12, 16, 32, 36, 52, 56, 72, 76, 92, 96

→ 10 двоструких завршетака који су дељиви са 4

$$\underset{6}{\_}\ \ \underset{6}{\_}\ \ \underset{6}{\_}\ \ \underset{6}{\_}\ \ \underset{6}{\_}\ \ \underbrace{\_\ \ \_}_{10} \qquad = 6^5 \cdot 10$$

6. Три студента деле собу. Они на располагању имају 4 шољице, 5 тањирића и 6 кашичица. На колико начина они могу да попију чај, ако сваки треба да користи једну шољицу, један тањирић и једну кашичицу?

4  5  6 

$4 \cdot 5 \cdot 6$ први студент

$3 \cdot 4 \cdot 5$ други студент

$2 \cdot 3 \cdot 4$ трећи студент

Принцип производа

$(4 \cdot 5 \cdot 6) \cdot (3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4)$

7. На колико начина се на шаховску таблу може поређати 8 независних топова (таквих да се никоја два не туку) ако

а) топове не разликујемо

Сваки топ заузима једну врсту и једну колону.

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1 = 8!$$

Фиксирамо топове у врсте и у оквиру сваке врсте бирамо колону у којој се топ налази.

б) су топови нумерисани

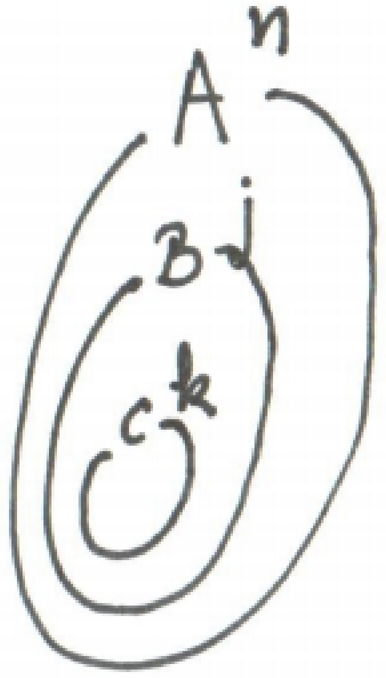
$$8! \cdot 8!$$

На 8! начина бирамо поља на којима ће бити топови (задатак под а)), а затим на 8! начина размештамо топове на изабрана поља.

8. Доказати да важи $\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{k}=\binom{n}{k}2^{n-k}$, за природне бројеве $n\geq k$.

$$\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{k}=\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k}=\binom{n}{k}\sum_{j=k}^{n}\binom{n-k}{j-k}=\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}=\binom{n}{k}2^{n-k}$$

смена $i=j-k$



9. Колико има пермутација цифара $0,1,\dots,9$ у којима је прва цифра мања од 8, а последњ
већа од 1?

$S_1$: пермутације код којих је прва цифра већа или једнака од 8

$S_2$: пермутације код којих је последња цифра мања или једнака од 1

$$N(S_1'S_2') = N - N(S_1) - N(S_2) + N(S_1S_2)$$

$$N(S_1'S_2') = 10! - 2\cdot 9! - 9!\cdot 2 + 2\cdot 8!\cdot 2$$

$$N = 10!$$

$$N(S_1) = \underset{8\vee 9}{2}\cdot 9! \qquad N(S_2) = 9!\cdot \underset{0\vee 1}{2} \qquad N(S_1S_2) = \underset{8\vee 9}{2}\cdot 8!\cdot \underset{0\vee 1}{2}$$

10. У кантини кафа кошта 1 динар, а кисела вода и сок по 2 динара. На колико начина се у кантини може потрошити стипендија од n динара ако је битан редослед којим се наручују пића?

К - кафа
В - вода
С - сок

$f_n$ - број начина да се потроши стипендија од n динара

1° К $f_{n-1}$

2° В $f_{n-2}$

3° С $f_{n-2}$

$$f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2}$$

$f_1 = 1$ (К)

$f_2 = 3$ (КК, В, С)

$(f_0 = 1)$

За домаћи завршити задатак !!