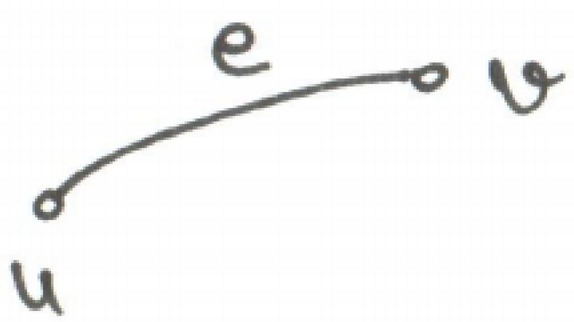
ВЕЖБЕ 8

Основни појмови теорије графова

Граф G је уређени пар $(V(G), E(G))$

$V(G)$ - скуп чворова

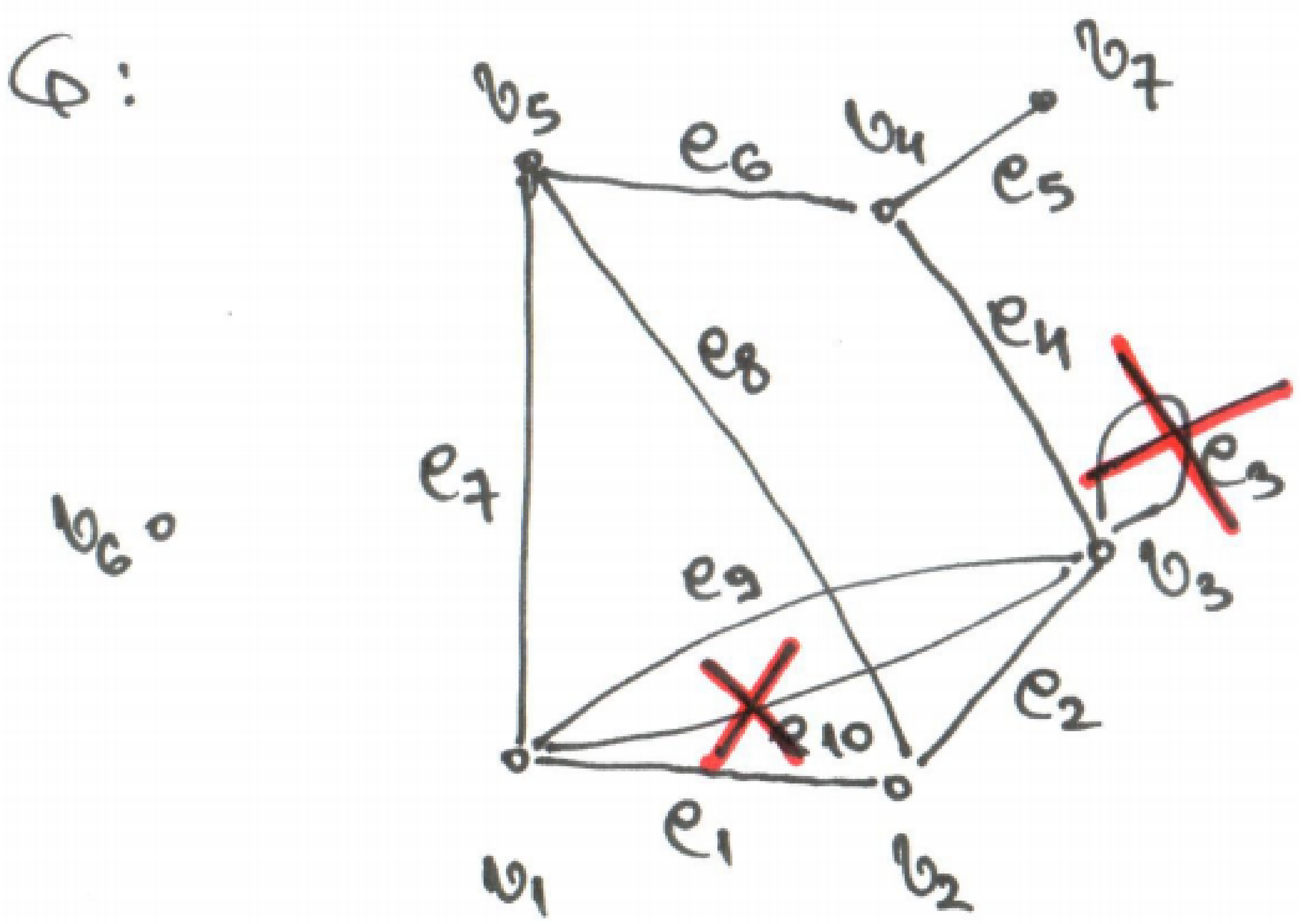
$E(G)$ - скуп грана



$G = (V(G), E(G), \psi_G)$

ψ_G - функција ИНЦИДЕНЦИЈЕ

G:



v_7 - висећи чвор

v_6 - изоловани чвор

e_3 - петља

e_9, e_{10} - паралелне гране

ПРОСТИ ГРАФОВИ!

$N_G(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$

скуп суседа чвора v у G

$N_G(v_3) = \{v_1, v_2, v_4\}$

$d_G(v) = |N_G(v)|$ степен чвора

$d_G(v_3) = 3$

$$\delta(G) = \min_{v \in V(G)} d_G(v)$$

$$\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Регуларан $\to$ сви чворови истог степена

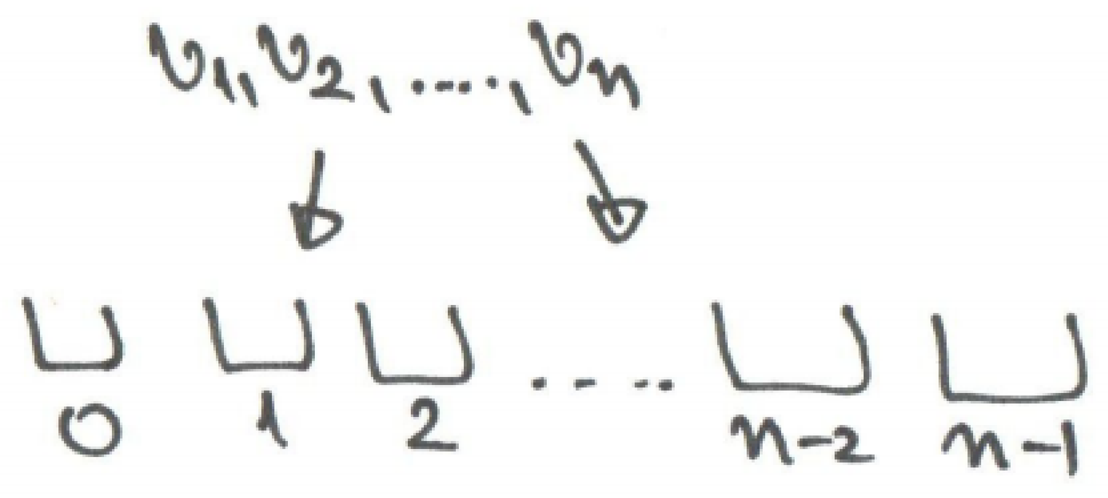
$$T: \sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$$

1. У сваком графу постоје два чвора једнаког степена.

Нека је дати граф $G=(V,E)$, $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$

Знамо да важи $0\le d(v_i)\le n-1$, $\forall v_i\in V$

Имамо n чворова и n кутија.



- Ако имамо изоловани чвор у G онда немамо чвор степена $n-1$

$\left.\begin{array}{l} n \text{ чворова} \\ n-1 \text{ кутија } (0,1,\dots,n-2) \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ДП}}$ бар 2 чвора су у истој кутији, тј. истог су степена

- Ако имамо чвор степена $n-1$, онда немамо изоловани чвор

$\left.\begin{array}{l} n \text{ чворова} \\ n-1 \text{ кутију } (1,2,\dots,n-1) \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ДП}}$ бар 2 чвора су истог степена

$\exists v_i, v_j$

$d(v_i)=d(v_j)$

- Ако немамо ни изоловани, ни чвор степена $n-1$

$\left.\begin{array}{l} n \text{ чворова} \\ n-2 \text{ кутије } (1,2,\dots,n-2) \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ДП}}$ бар 2 чвора су истог степена

2. Колико на скупу $V=\{1,2,\dots,n\}$ има

а) различитих графова

Максимално можемо имати $\binom{n}{2}$ грана у графу са n чворова.

$$2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2 = 2^{\binom{n}{2}}$$

За сваку грану бирамо да ли се налази у графу или се не налази.

б) различитих графова са тачно m грана?

$$\binom{\binom{n}{2}}{m}$$

Од свих могућих грана бирамо којих m узимамо за граф

3. Нека је G граф са n чворова и $n-1$ грана. Доказати да у G постоји изоловани или висећи чвор.

Претпоставимо супротно, $\underbrace{d(v)\geq 2,\ \forall v\in V(G)}_{\iff \delta(G)\geq 2}$

$e=|E|=n-1$

$n=|V|$

$$2|E|=\sum_{v\in V(G)} d(v)$$

$$2\cdot(n-1)=\sum_{v\in V(G)} d(v)\geq 2\cdot n$$

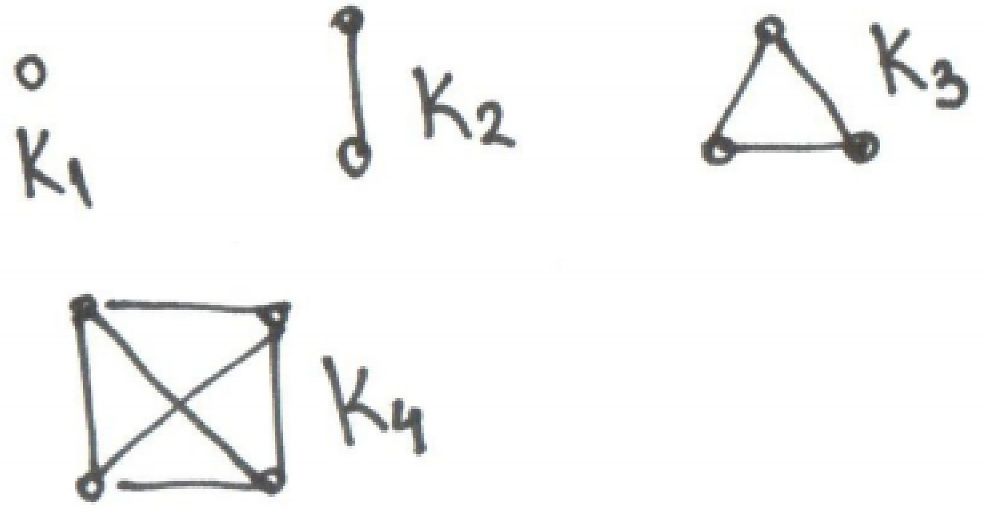
$$n-1\geq n \quad ⚡$$

Закључујемо да $\exists v_i\in V(G)$

$d(v_i)<2 \iff d(v_i)=0 \vee d(v_i)=1$

4. Одредити број чворова и грана за следеће графове

а) комплетан граф K_n



$|V(K_n)| = n$

$|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

$(n-1)$-регуларан граф

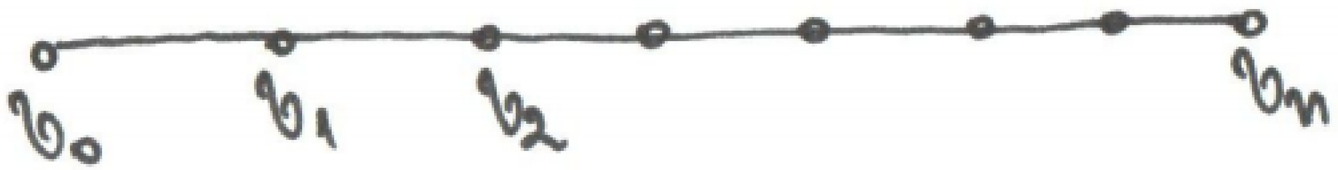
б) празан граф $\overline{K_n}$

$|V(\overline{K_n})| = n$!

$|E(\overline{K_n})| = 0$

0-регуларан граф

c) пут P_{n+1}



$|V(P_{n+1})| = n+1$

$|E(P_{n+1})| = n$ ← дужина пута

полурегуларан граф

$d(v_0) = d(v_n) = 1$

$d(v_i) = 2 \quad \forall i = 1, \dots, n-1$

d) контура C_n

$|V(C_n)| = n$

$|E(C_n)| = n$

дужина контуре C_n је n!

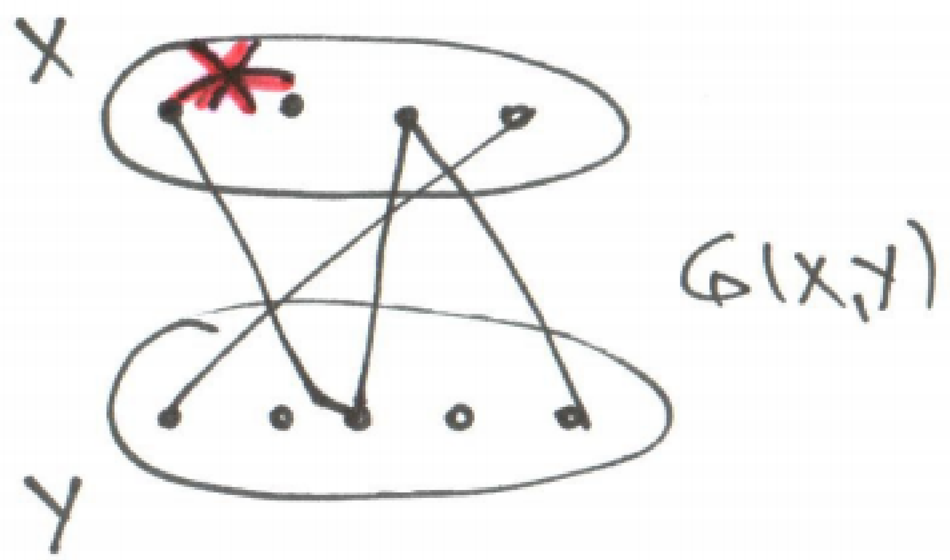
2-регуларан граф

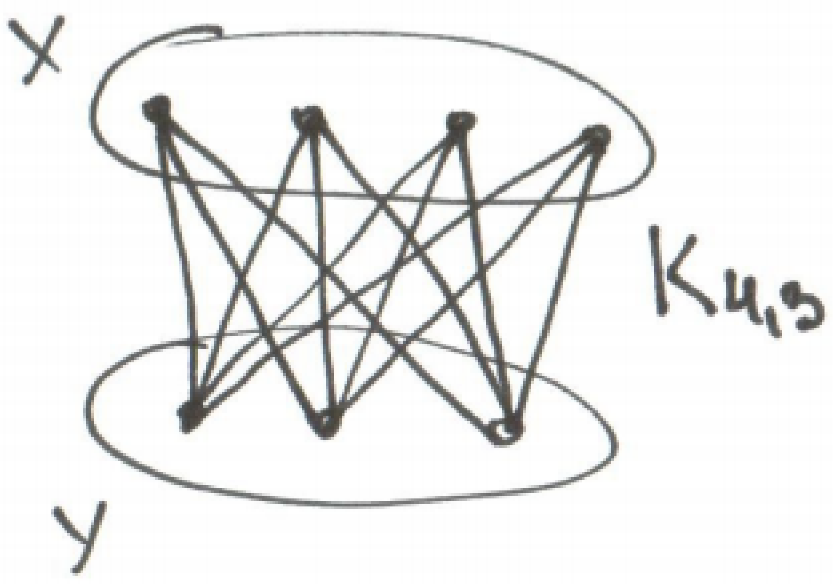
е) комплетан бипартитан граф $K_{m,n}$

бипартитан граф G

$X \cap Y = \emptyset \quad X \cup Y = V(G)$

комплетан бипартитан граф $K_{m,n}$

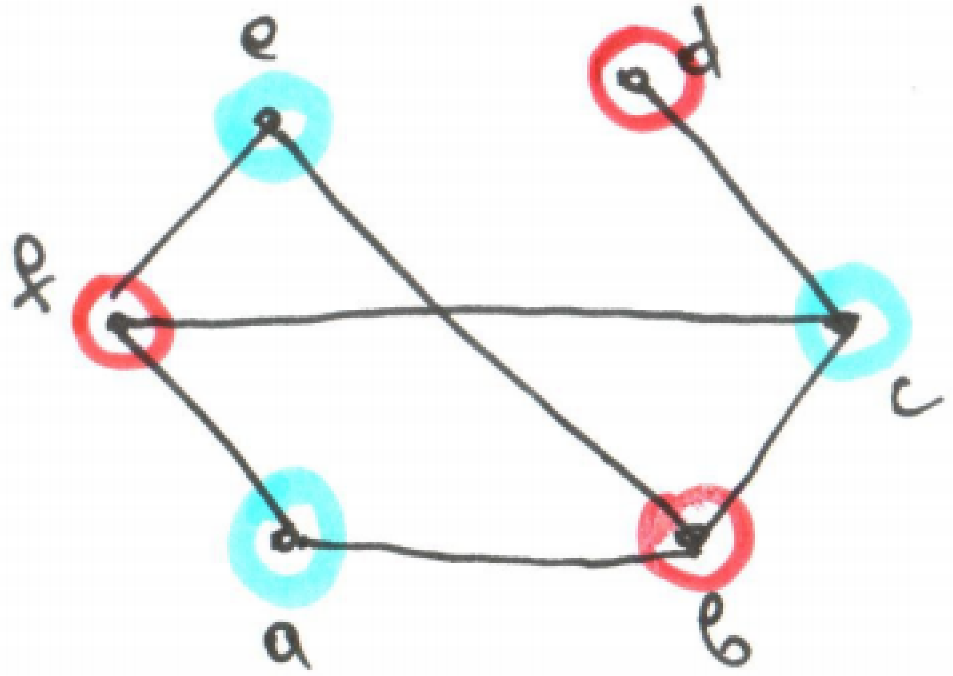


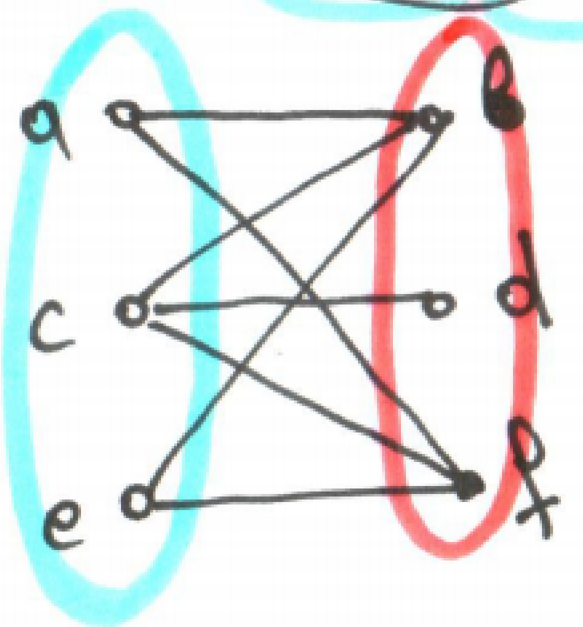


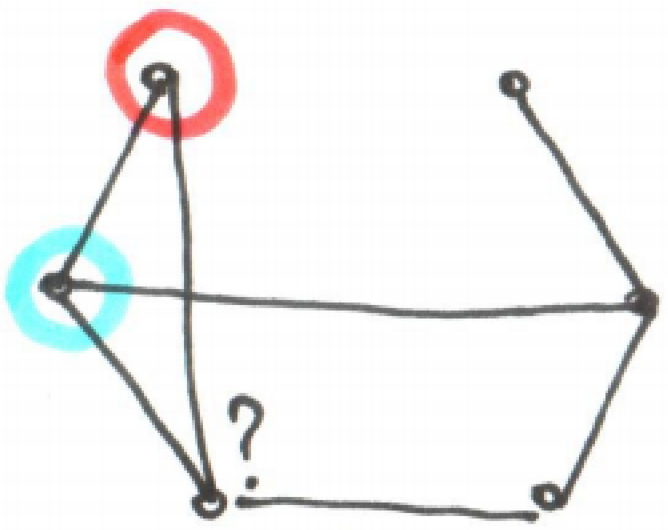
$|V(K_{m,n})| = m+n$

$|E(K_{m,n})| = m \cdot n$

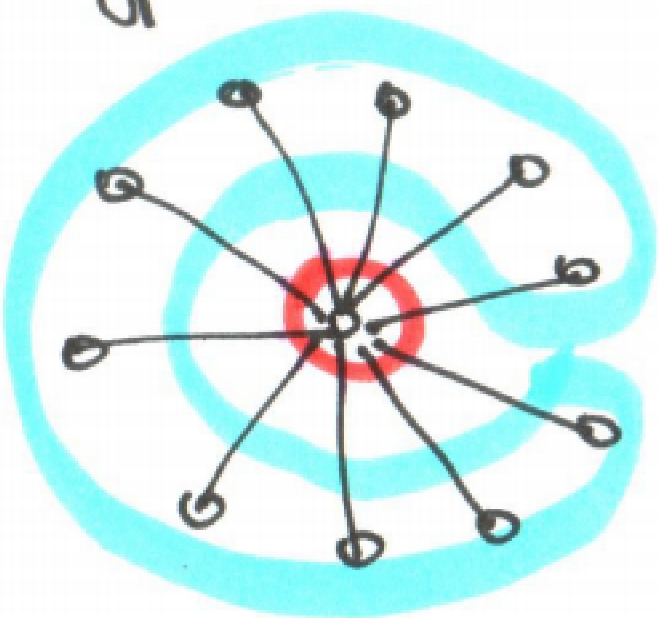
T: Граф је бипартитан акко не садржи непарне контуре.





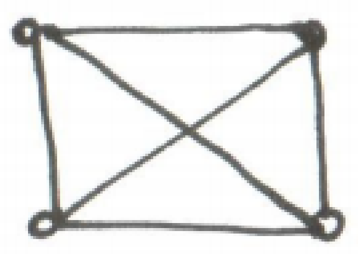


Није бипартитан!

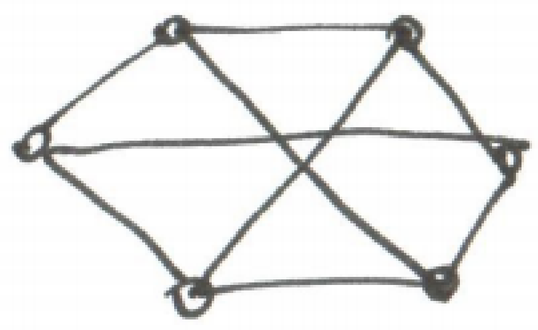


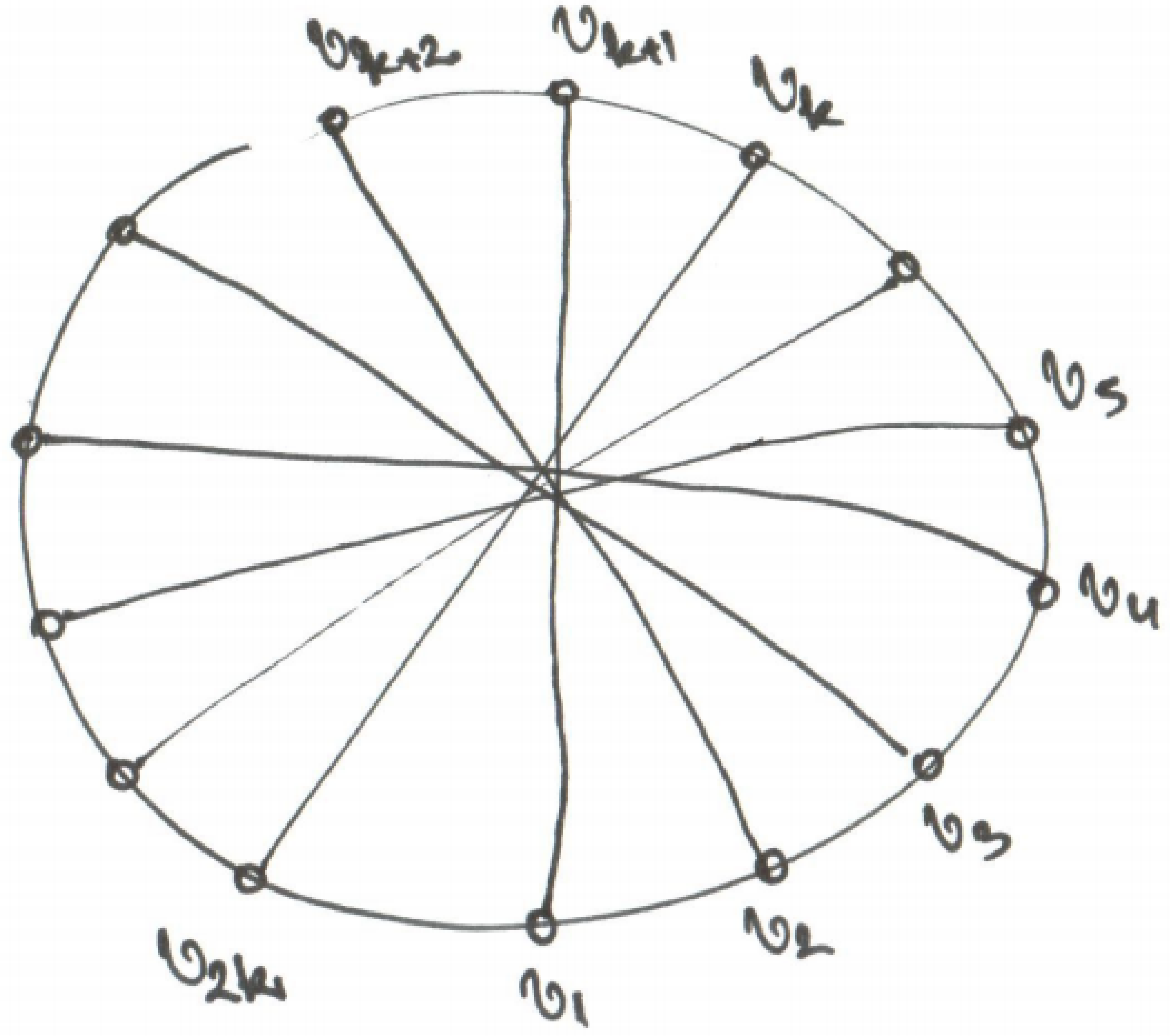
5. За сваки паран природан број $n \geq 4$ постоји кубни граф са n чворова.

• $n=4$



• $n=6$





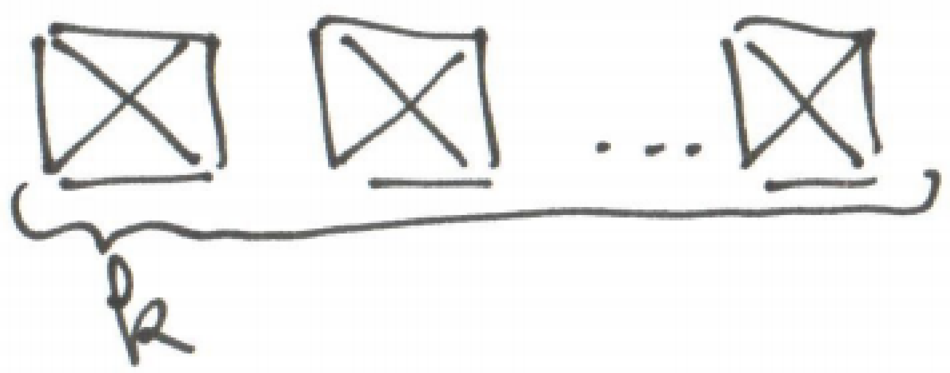
Посматрајмо контуру C_{2k}

Повучемо „дугачке" дијагонале

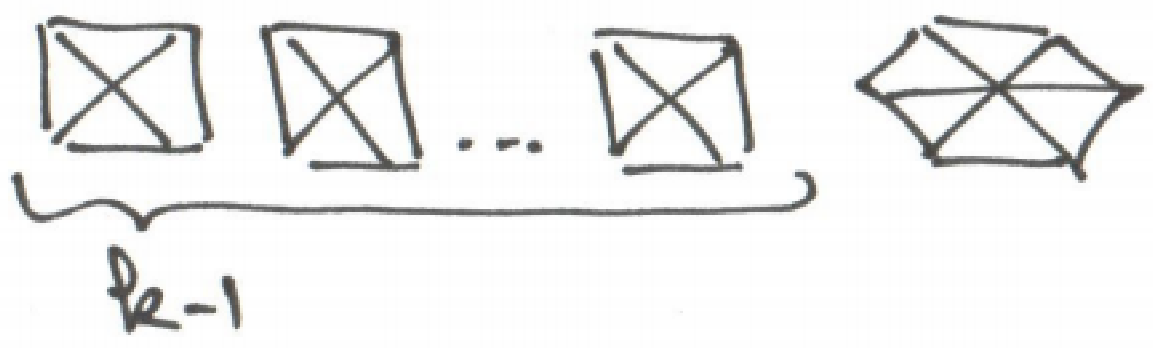
$v_i v_{k+i}$, $\forall i = 1, 2, \dots, k$

II начин: $4k$ $4k+2$

1° $n = 4k$



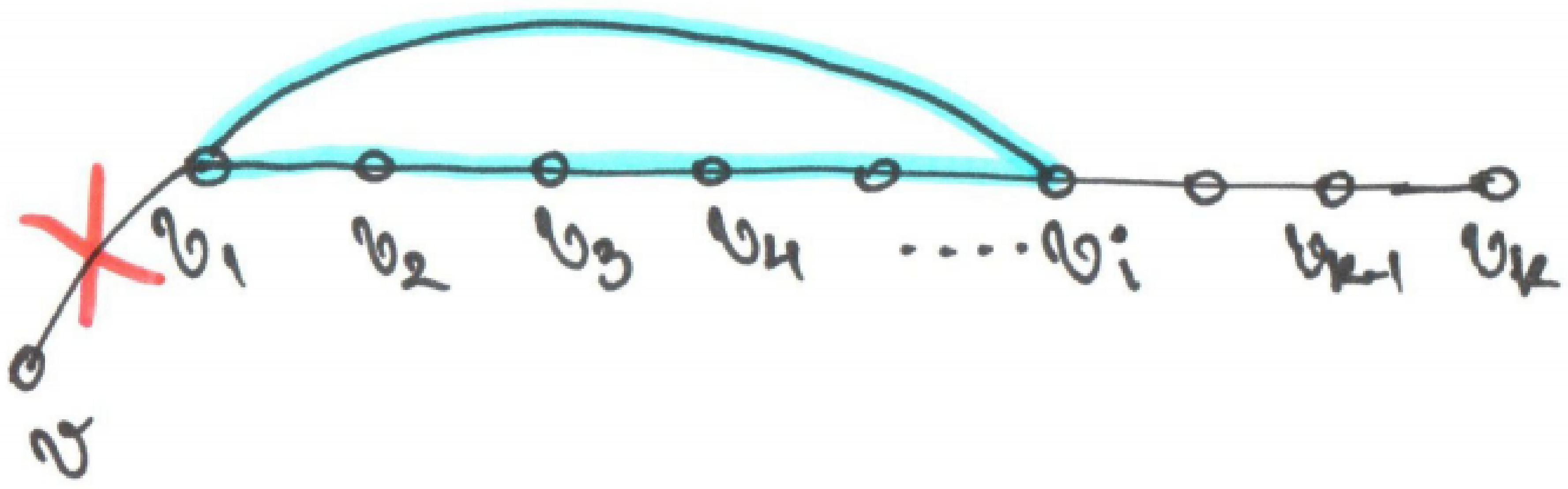
2° $n = 4k+2$



6. Ако је у графу G степен сваког чвора бар 2, онда G садржи контуру.

$\delta(G) \geq 2 \iff \forall v \in V \quad d(v) \geq 2$

Посматрајмо пут максималне дужине у графу G $\quad v_1 v_2 v_3 \dots v_k$



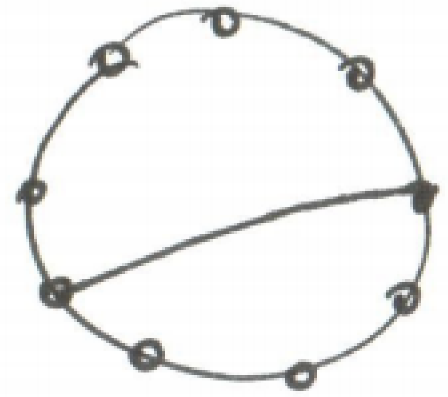
Због услова $\delta(G) \geq 2$ знамо да $\exists v \in V(G)$ т.д. $v v_1 \in E(G)$

Ако је v чвор који није на путу, онда је пут $v v_1 v_2 \dots v_k$ дужи од максималног. ↯

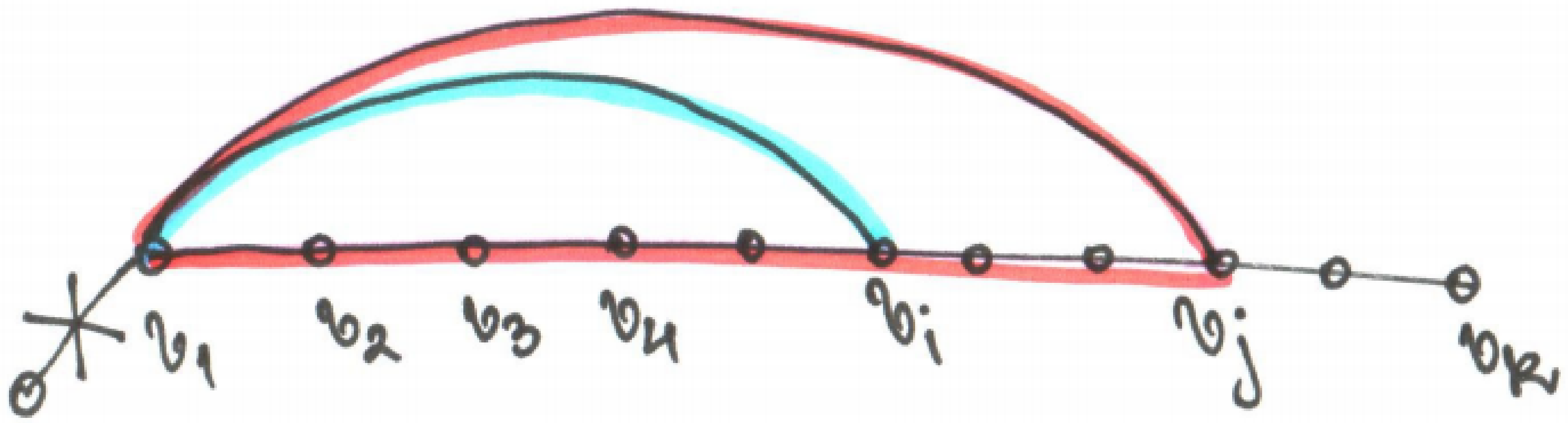
$\Rightarrow$ Сусед чвора v_1 је неки од чворова $v_3, v_4, \dots, v_k$. Узмимо да је то чвор v_i.

Сада смо добили контуру $v_1 v_2 \dots v_i v_1$

7. Ако је $\delta(G)\geq 3$, доказати да G садржи контуру са тетивом.



Посматрајмо пут максималне дужине у графу G.



Из услова $\delta(G)\geq 3$ знамо да $\exists\, v_i, v_j$

$3\leq i<j\leq k$ т.д. $v_1v_i,\ v_1v_j \in E(G)$

Сада је $v_1v_2\dots v_i\dots v_jv_1$ тражена контура,

а v_1v_i је њена тетива

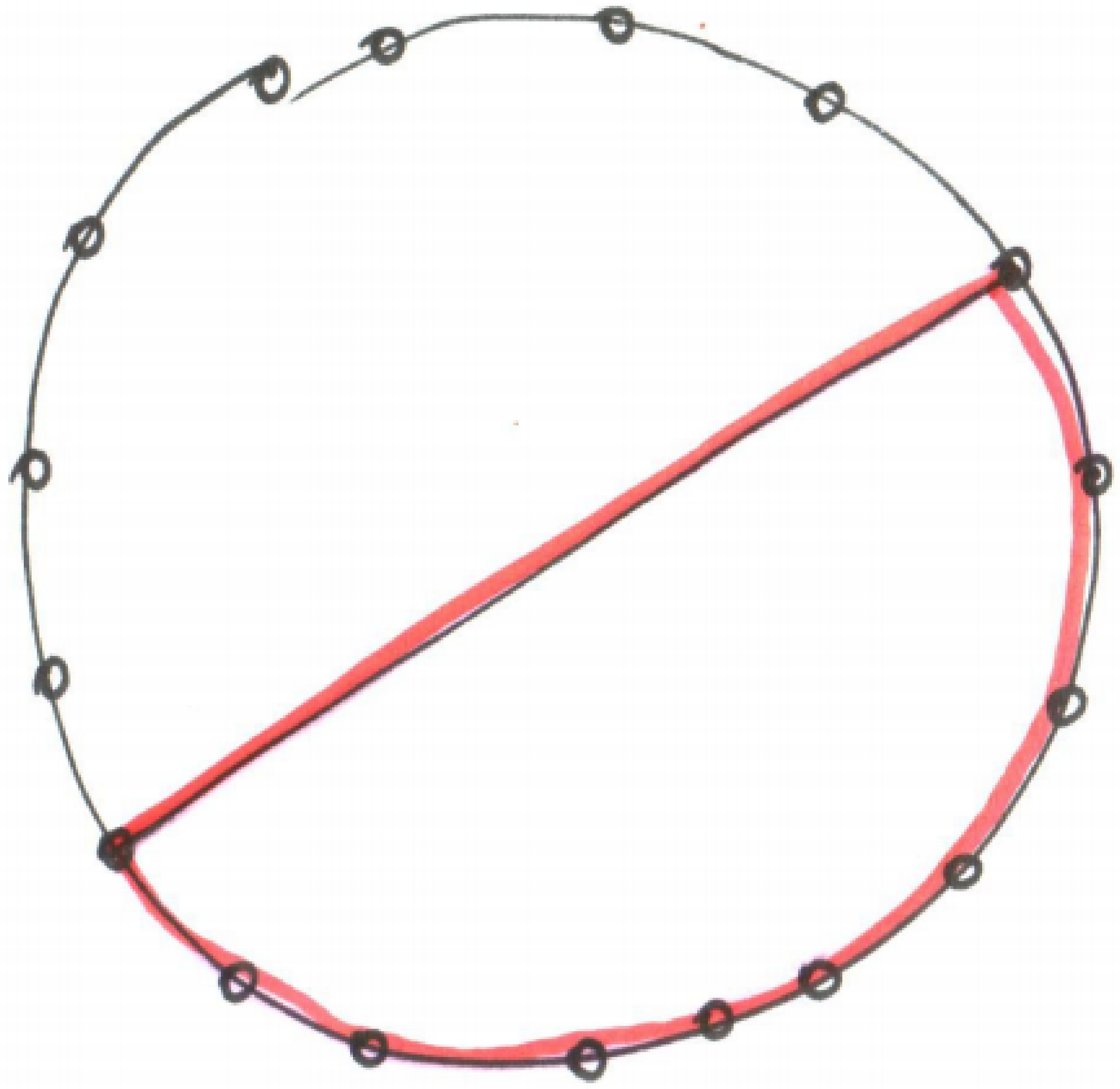
8. Ако је $\delta(G) \geq 3$, доказати да G садржи контуру парне дужине.

(7) $\Rightarrow$ G има контуру са тетивом

1° Контура парне дужине $\Rightarrow$ доказ је готов

2° Контура је непарна

Тетива дели непарну контуру на два дела различите парности. Уколико непарном делу додамо тетиву, добићемо контуру парне дужине.



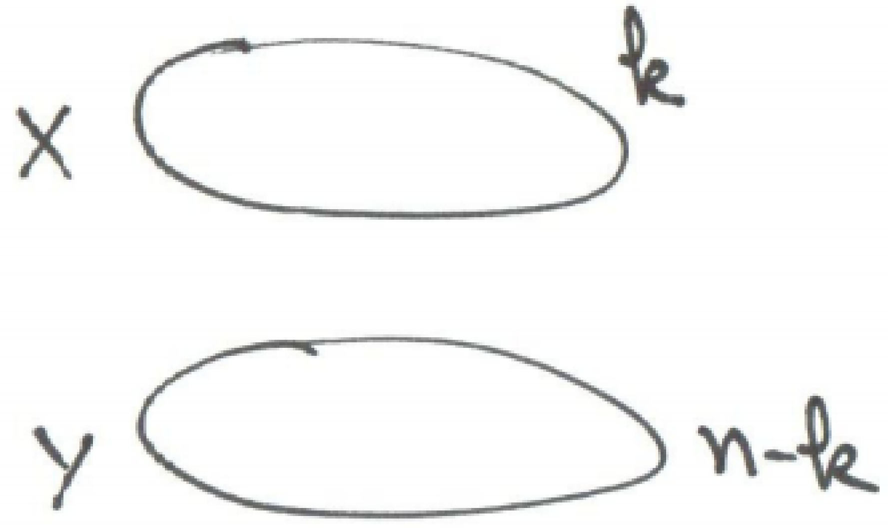
9. Ако је $\delta(G) \geq 2$, доказати да G садржи контуру дужине бар $\delta(G)+1$. (домаћи)

10. Ако је G бипартитан граф са n чворова и e грана, доказати да је $e \le \frac{n^2}{4}$.

Нека је $G(X,Y)$ дати бипартитан граф

$|V(G)| = n = |X| + |Y|$

Нека је $|X| = k$. Сада је $|Y| = n-k$



$$
\begin{aligned}
|E(G)| &\le |X|\cdot|Y| \\
&= k\cdot(n-k) \\
&= kn - k^2
\end{aligned}
$$

Претпоставимо да класа X има мањи број чворова, тј. $k \le \frac{n}{2}$

$$|E(G)| \le kn - k^2 \le \frac{n}{2}\cdot n - \frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{4} = \frac{2n^2 - n^2}{4} = \frac{n^2}{4}$$

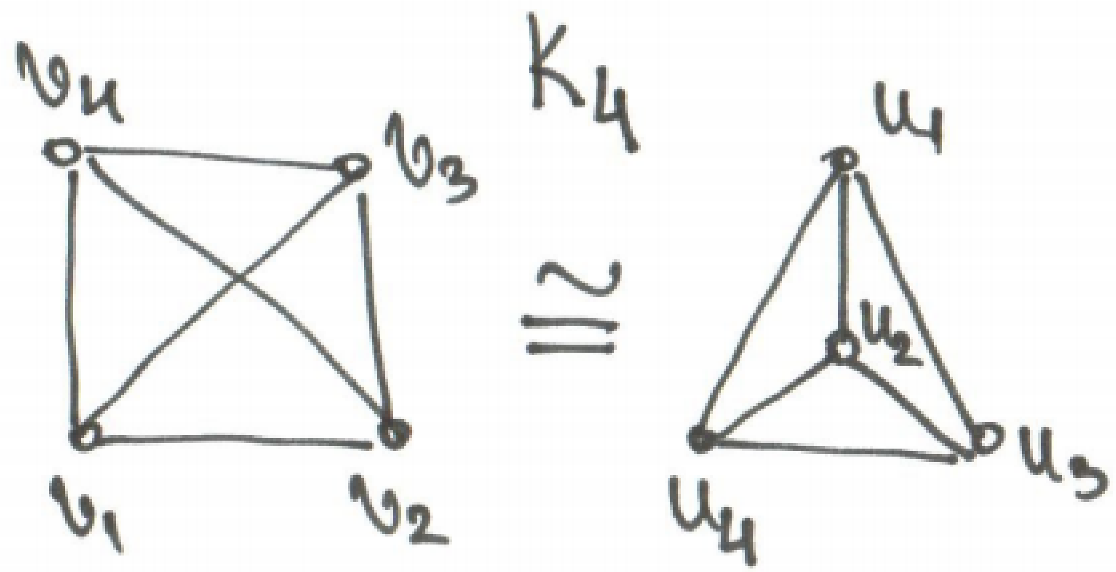
$G_1 = G_2 \iff V(G_1) = V(G_2) \wedge E(G_1) = E(G_2)$

$G_1 \cong G_2 \iff \exists$ изоморфизам f за које важи

1° $f: V(G_1) \to V(G_2)$ бијекција

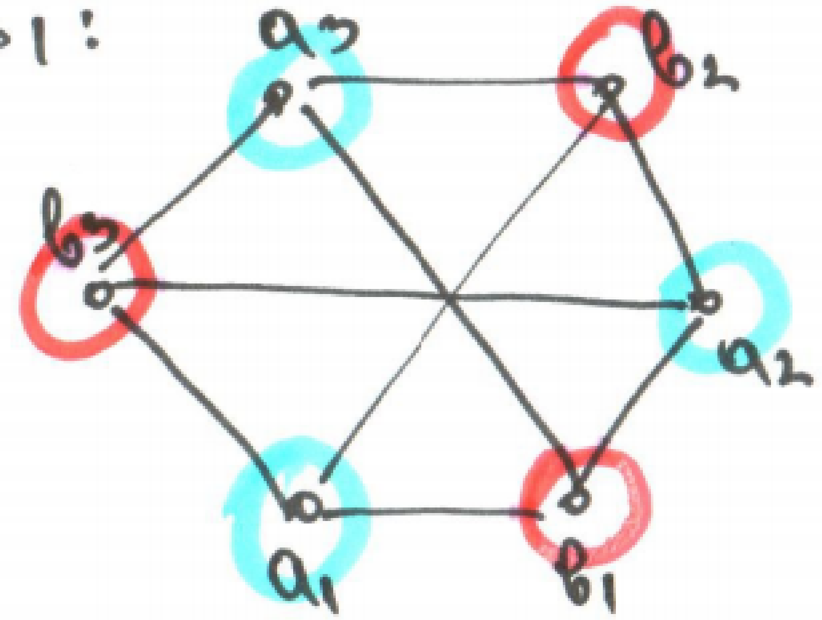
2° $uv \in E(G_1) \iff f(u)f(v) \in E(G_2)$

K_4



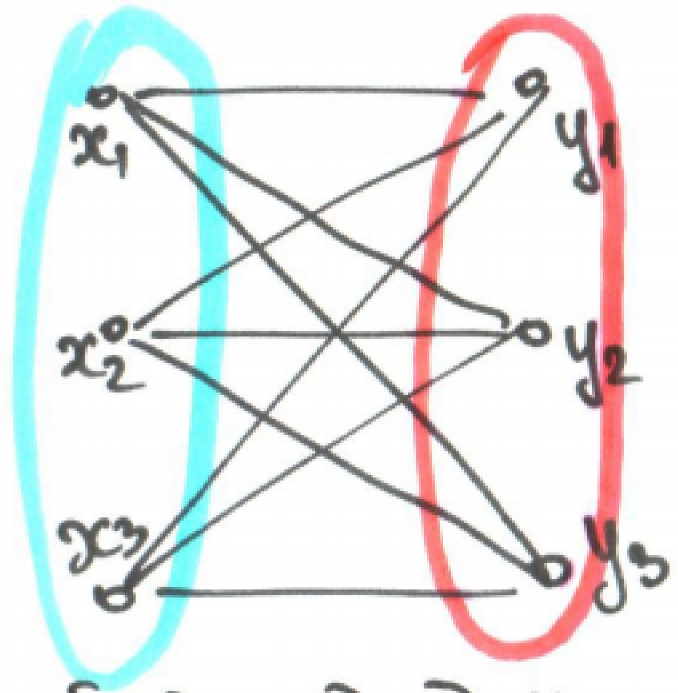
$f: \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ u_4 & u_2 & u_1 & u_3 \end{pmatrix}$

G_1:



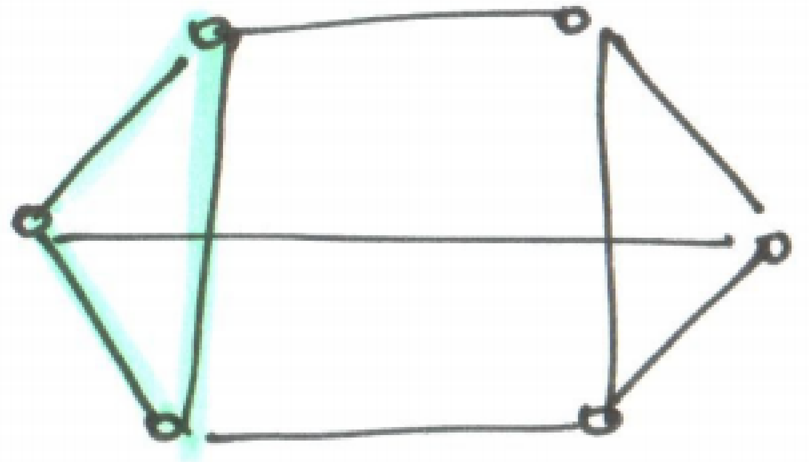
бипартитан

G_2:



бипартитан

G_3:



није бипартитан

$G_1 \cong G_2$

$a_i \mapsto x_i \quad b_i \mapsto y_i$

$G_2 \not\cong G_3$

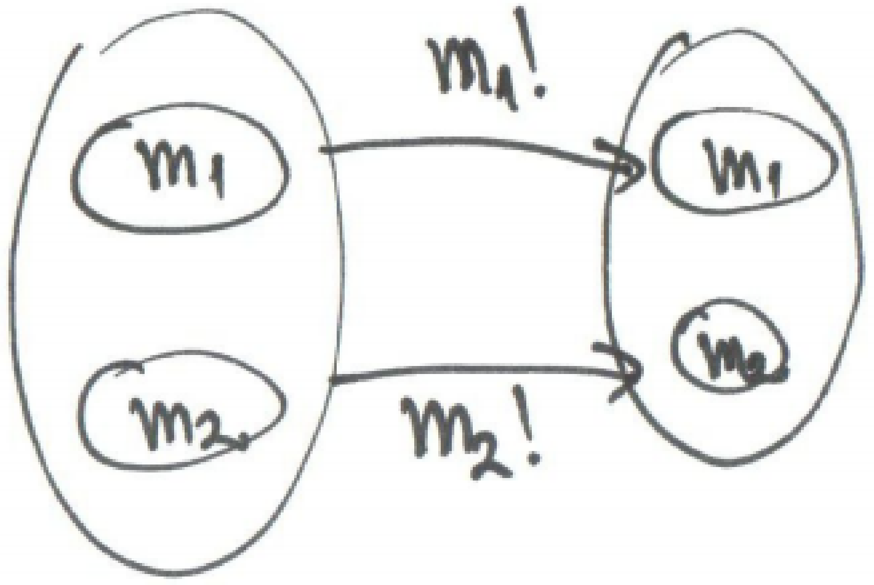
$G_1 \not\cong G_3$

11. Колико има изоморфизама за два комплетна графа са по n чворова?

→ Треба одредити број бијективних пресликавања n-точланог скупа на n-точлани скуп.

$\Rightarrow n!$

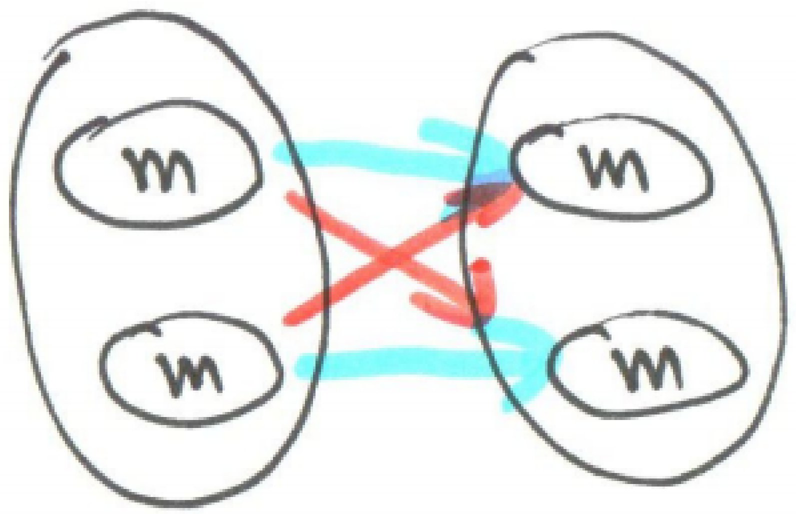
12. Доказати да су свака два комплетна бипартитна графа са класама по m_1 и m_2 чворова изоморфна. Колико има изоморфизама?



Треба само класе исте кардиналности пресликати једну на другу

$m_1! \cdot m_2!$ $\quad m_1 \neq m_2$

- Ако је $m_1 = m_2 = m$



$2 \cdot (m! \cdot m!) = 2 \cdot (m!)^2$

13. Колико има неизоморфних 2-регуларних графова са 10 чворова?

Контуре или уније контура

Најмања контура је C_3!

C_{10}

$C_5 \cup C_5$

$C_4 \cup C_6$ $\quad$ $C_3 \cup C_3 \cup C_4$

$C_3 \cup C_7$

$\cancel{C_2 \cup C_8}$

$\cancel{C_1 \cup C_9}$

Постоји 5 таквих графова.

Граф H је подграф графа G, $H \subset G$, ако је $V(H) \subseteq V(G) \land E(H) \subset E(G)$.

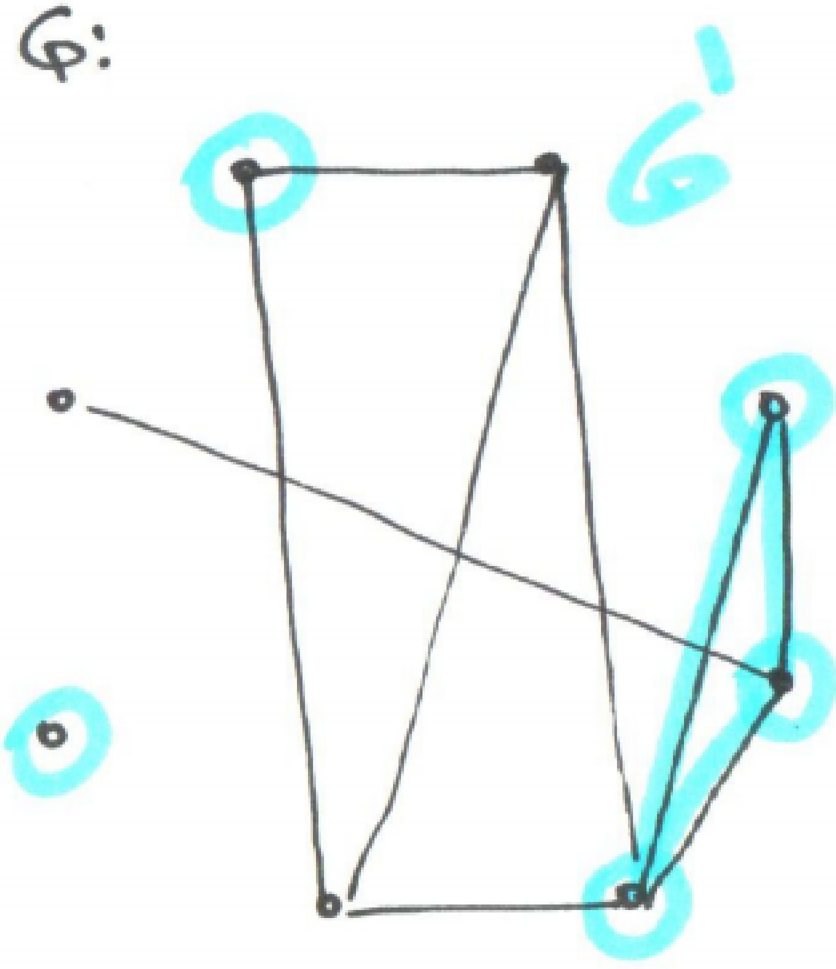
Граф H је покривајући подграф графа G, ако је $V(H) = V(G) \land E(H) \subset E(G)$

Индукован подграф

$G' = G[V']$

$1^\circ \; V(G') = V'$

$2^\circ \; E(G') = \{uv \mid u,v \in V' \land uv \in E\}$



$G'' = G[E'']$

$1^\circ \; V(G'') = \{v \mid \exists\, uv \in E''\}$

$2^\circ \; E(G'') = E''$

$G \cup \overline{G} = K_n$

$|E(\overline{G})| + |E(G)| = \binom{n}{2}$

Комплемент графа G, у ознаци $\overline{G}$, је граф за који важи

$V(\overline{G}) = V(G)$

$E(\overline{G}) = \{uv \mid u,v \in V(G) \land uv \notin E(G)\}$