VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1. Vežbe II.5

1.1. Diferencijabilnost funkcije

Funkcija $f(x)$ je **diferencijabilna** nad otvorenim skupom $D \subseteq \mathbb{R}$ ako i samo ako postoji izvod funkcije f za svako $x \in D$.

Ako je funkcija diferencijabilna u tački (nad skupom D), onda je i neprekidna u toj tački (nad skupom D). Obrnuto nije uvek tačno.

Zadatak 1.1. Odrediti konstante A i B tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} Ax + B, & x \leq 0, \\ (x+1)^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \end{cases}$$

bude diferencijabilna za svako x.

Rešenje.
Prvo, za neprekidnost funkcije imamo neprekidnu funkciju $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ za $x > 0$ i neprekidnu funkciju $Ax + B$ za $x < 0$, a u tački $x = 0$ imamo

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow B = \lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

pa je funkcija neprekidna i u $x = 0$ za $B = e$. Dalje, računamo prvi izvod funkcije $f(x)$

$$f'(x) = \begin{cases} (x+1)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2}, & x > 0, \\ A & x < 0. \end{cases}$$

Dalje, $(x+1)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2}$ je kompozicija neprekidnih funkcija za $x > 0$, pa je potrebno ispitati neprekidnost u nuli

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = A = f'(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+1)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = -\frac{e}{2},$$

jer je

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}}{2x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^2}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Zaključujemo da je funkcija neprekidna i diferencijabilna za $\boxed{A = -\frac{e}{2}}$ i $\boxed{B = e.}$

Zadatak 1.2. Date su funkcije

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0,\end{cases} \text{ i } g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+x^3\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ B, & x=0.\end{cases}$$

a) Odrediti A i B tako da funkcije budu neprekidne i pokazati da je $f'(0)=g'(0)=\frac{1}{2}$.

b) Pokazati da je $g'(x)$ neprekidna funkcija, a da $f'(x)$ ima prekid za $x=0$.

c) Da li postoje okoline tačke $x=0$ u kojima su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ monotone? (Posmatrati nizove $\{\ a_n\ \}$ i $\{\ b_n\ \}$ date sa $a_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ i $b_n=\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2n\pi}$).

Rešenje.

a) Pošto je $\cos x$ ograničena funkcija važi $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0$, to je

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}+x^2\cos\frac{1}{x}\right)=0,\ B=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}+x^3\cos\frac{1}{x}\right)=0.$$

Za $x\neq 0$ prvi izvodi imaju oblik $f'(x)=\frac{1}{2}+2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$ i $g'(x)=\frac{1}{2}+3x^2\cos\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{x}$. Kako $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ ne postoji, jer ne postoji $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$, a postoji $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}+2x\cos\frac{1}{x}$, po definiciji tražimo izvod funkcije $f(x)$ u tački $x=0$.

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{2}+\Delta x^2\cos\frac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\Delta x\cos\frac{1}{\Delta x}\right)=\frac{1}{2}\\ g'(0)&=\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+3x^2\cos\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

b) Kako je $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}g'(x)$, to je funkcija $g'(x)$ neprekidna za $x=0$.
$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{2}+2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x})$ ne postoji, odakle sledi da funkcija $f'(x)$ nije neprekidna za $x=0$.

c) Funkcija $g'(x)$ je neprekidna za $x=0$ i $g'(0)=\frac{1}{2}>0$, pa postoji okolina tačke $x=0$ u kojoj je $g'(x)>0$, tj. okolina u kojoj funkcija $g(x)$ monotono raste.
Svi članovi nizova $\{\ a_n\ \}$ i $\{\ b_n\ \}$ su pozitivni i pritom je $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ i $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. Tada imamo

$$f'(a_n)=\frac{1}{2}+2a_n\cos\frac{1}{a_n}+\sin\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\frac{3}{2}>0,$$

$$f'(b_n)=\frac{1}{2}+2b_n\cos\frac{1}{b_n}+\sin\frac{1}{b_n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{\frac{3\pi}{2}+2n\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2n\pi\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2n\pi\right)=-\frac{1}{2}<0,$$

pa u svakoj okolini tačke $x=0$ postoje tačke u kojima je $f'(x)>0$ i tačke u kojima je $f'(x)<0$, odakle sledi da ne postoji nijedna okolina tačke $x=0$ u kojoj je funkcija $f(x)$ monotona.

Zadatak 1.3. Funkcija f je data sa

$$f(x) = \begin{cases} Ax + B, & x \leq 0, \\ \frac{x}{3} + x^2 \sin \frac{1}{7x}, & x > 0. \end{cases}$$

a) Odrediti A i B tako da funkcija bude diferencijabilna za svako x.

b) Da li je funkcija rastuća u tački $x = 0$? Da li je funkcija monotona u nekoj okolini tačke $x = 0$?

Rešenje.
a) Da bi funkcija bila diferencijabilna, mora biti neprekidna u tački $x = 0$ i mora postojati $f'(0)$, jer $f'(x)$ za $x \neq 0$ postoji. Funkcija je neprekidna ako

$$\lim_{x\to 0^+} (\frac{x}{3} + x^2 \sin \frac{1}{7x}) = f(0) = \lim_{x\to 0^-} (Ax + B) = B,$$

pa vrednost B dobijamo iz

$$\lim_{x\to 0^+} (\frac{x}{3} + x^2 \sin \frac{1}{7x}) = 0, f(0) = B \quad \Rightarrow \boxed{B = 0.}$$

$$f'(x) = \begin{cases} A, & x < 0, \\ \frac{1}{3} + 2x \sin \frac{1}{7x} + x^2 \cos \frac{1}{7x} \cdot \frac{1}{7}(-\frac{1}{x^2}), & x > 0, \end{cases}$$

pa nakon sređivanja za prvi izvod funkcije $f(x)$ dobijamo

$$f'(x) = \begin{cases} A, & x < 0, \\ \frac{1}{3} + 2x \sin \frac{1}{7x} - \frac{1}{7} \cos \frac{1}{7x}, & x > 0. \end{cases}$$

Pošto je $f'(0^-) = A$ potrebno je ispitati

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{3} + 2x \sin \frac{1}{7x} - \frac{1}{7} \cos \frac{1}{7x} \right),$$

ali $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ ne postoji, jer ne postoji $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos \frac{1}{7x}$ (a postoji $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{3} + 2x \sin \frac{1}{7x}\right)$), pa zato desni izvod u tački $x = 0$ tražimo po definiciji

$$f'(0^+) = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(0^+ + \Delta x) - f(0^+)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\frac{\Delta x}{3} + (\Delta x)^2 \sin \frac{1}{7\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0^+} \left(\frac{1}{3} + \Delta x \sin \frac{1}{7\Delta x} \right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{3}.}$$

b) Za monotonost u okolini tačke $x = 0$ imamo

1. $f'(0) = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow$ funkcija je rastuća u tački $x = 0$,
2. $x \in (-\varepsilon,\ 0] \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} > 0$,
3. $x \in (0,\ \varepsilon) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} + 2x \sin \frac{1}{7x} - \frac{1}{7} \cos \frac{1}{7x} \geq \frac{1}{3} - 2\varepsilon - \frac{1}{7} = \frac{4}{21} - 2\varepsilon > 0$ za svako dovoljno malo $\varepsilon > 0$.

Dakle, u svakoj dovoljno maloj okolini tačke $x = 0$ funkcija f je monotono rastuća jer je $f'(x) > 0$ za $x \in (-\varepsilon,\ \varepsilon)$.

1.2. Rolova teorema

Teorema 1.4. *Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$, ima izvod nad otvorenim intervalom (a, b) i ako je $f(a) = f(b)$, tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$, takva da je*

$$\boxed{f'(\xi) = 0.}$$

Zadatak 1.5. Pokazati da jednačina

$$a_n \cos nx + a_{n-1} \cos (n-1)x + ... + a_1 \cos x = 0$$

ima bar jedno rešenje u intervalu $(0, \pi)$.

Rešenje.
Koristimo pomoćnu funkciju

$$F(x) = \frac{a_n}{n} \sin nx + \frac{a_{n-1}}{n-1} \sin(n-1)x + ... + a_1 \sin x$$

koja zadovoljava uslove Rolove teoreme (funkcija $F(x)$ je neprekidna nad intervalom $[\,0, \pi\,]$, diferencijabilna nad intervalom $(0, \pi)$, odakle sledi da postoji $\xi \in (0, \pi)$ za koje je

$$F'(\xi) = 0,$$

tj.

$$a_n \cos n\xi + a_{n-1} \cos (n-1)\xi + ... + a_1 \cos \xi = 0.$$

Kako je $F'(x) = \frac{a_n}{n} \sin nx + \frac{a_{n-1}}{n-1} \sin(n-1)x + ... + a_1 \sin x$ leva strana jednačine imamo da je ξ njeno rešenje.

1.3. Lagranžova teorema

Teorema 1.6. *Ako je funkcija* $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna nad zatvorenim intervalom* $[a,\, b]$ *i ima izvod nad otvorenim intervalom* $(a,\, b)$*, tada postoji bar jedna tačka* $\xi \in (a,\, b)$ *takva da je*

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).}$$

Zadatak 1.7. Pokazati da jednačina $2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} = \frac{16\sqrt{2}-9}{2\pi}$ ima bar jedno rešenje u intervalu $(\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi})$.

Rešenje.
Funkcija

$$F(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$$

je neprekidna nad intervalom $\left[\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right]$, a diferencijabilna nad intervalom $(\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi})$ pa zadovoljava uslove Lagranžove teoreme, tj. postoji $\xi \in (\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi})$ takvo da je

$$F(\frac{4}{\pi}) - F(\frac{3}{\pi}) = F'(\xi)(\frac{4}{\pi} - \frac{3}{\pi}).$$

$$F\Big(\frac{4}{\pi}\Big) - F\Big(\frac{3}{\pi}\Big) = \frac{16}{\pi^2} \cos \frac{\pi}{4} - \frac{9}{\pi^2} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{16}{\pi^2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{9}{\pi^2} \frac{1}{2} = \frac{16\sqrt{2} - 9}{2\pi^2} = F'(\xi) \cdot \frac{1}{\pi},$$

$$\frac{16\sqrt{2} - 9}{2\pi^2} = \left[2\xi \cos \frac{1}{\xi} + \sin \frac{1}{\xi}\right] \cdot \frac{1}{\pi} \Rightarrow 2\xi \cos \frac{1}{\xi} + \sin \frac{1}{\xi} = \frac{16\sqrt{2} - 9}{2\pi},$$

pa je ξ jedno rešenje date jednačine.

1.4. Košijeva teorema

Teorema 1.8. *Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne nad zatvorenim intervalom $[a,\ b]$, imaju izvode nad otvorenim intervalom $(a,\ b)$, i za svako $x \in (a,\ b)$ je $g'(x) \neq 0$, tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a,\ b)$, takva da je*

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.}$$

Zadatak 1.9. Date su funkcije

$$f(x) = x + \arccos\frac{2e^x}{e^{2x}+1} \text{ i } g(x) = x - \frac{\pi}{2} + 2\,\mathrm{arctg}\, e^x.$$

Naći sve realne brojeve x za koje važi $f(x) = g(x)$.

Rešenje.
Za prvi izvod funkcije $f(x)$ dobijamo

$$f'(x) = 1 + \frac{-1}{\sqrt{1-(\frac{2e^x}{e^{2x}+1})^2}} \cdot \frac{2e^x(e^{2x}+1) - 2e^x \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = 1 + \frac{2e^x(e^{2x}-1)}{|e^{2x}-1|\,(e^{2x}+1)},$$

što znači da oblik prvog izvoda zavisi od

$$e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow 2x \ln e > \ln 1 = 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2e^x}{e^{2x}+1} = \frac{(e^x+1)^2}{e^{2x}+1}, x > 0 \\ 1 - \frac{2e^x}{e^{2x}+1} = \frac{(e^x-1)^2}{e^{2x}+1}, x < 0 \end{cases}$$

Prvi izvod funkcije $g(x)$ ima oblik

$$g'(x) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot e^x = \frac{(e^x+1)^2}{e^{2x}+1}.$$

Za svako $x > 0$ važi $f'(x) = g'(x)$. Kako su funkcije $f(\mu)$ i $g(\mu)$ neprekidne za svako $\mu \in [0, x]$, i prvi izvod ovih funkcija postoji za svako $\mu \in (0, x)$, to one ispunjavaju uslove Košijeve teoreme, pa za svako $x > 0$ postoji $\xi \in (0, x)$ takvo da važi $\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Sada imamo

$$\begin{aligned} f(0) &= \arccos 1 = 0, \\ g(0) &= 0 - \frac{\pi}{2} + 2\,\mathrm{arctg}\, 1 = -\frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{4} = 0, \\ f'(\xi) &= g'(\xi) \Rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = 1. \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow f(x) = g(x)$ za svako $x \geq 0$.

Da bismo pokazali da je $f(x) \neq g(x)$ za svako $x < 0$ posmatramo funkciju

$$F(x) = f(x) - g(x),$$

gde je $F(0) = 0$. Ako bi postojala tačka $a < 0$ za koju je $F(a) = 0$, na osnovu Rolove teoreme postoji $\xi \in (a,\ 0)$, takvo da je $F'(\xi) = 0$ što je nemoguće, jer je

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = \frac{(e^x - 1)^2 - (e^x + 1)^2}{e^{2x} + 1} = \frac{-4e^x}{e^{2x} + 1} < 0,$$

za svako $x < 0$.
Dakle,

$$f(x) \neq g(x)$$

za svako $x < 0$.

1.5. Tejlorova teorema

Teorema 1.10. *Neka su funkcija $f(x)$ i svi njeni izvodi do $(n-1)$-og reda neprekidni nad zatvorenim intervalom $[a,\, b]$ i neka $f(x)$ ima n-ti izvod nad otvorenim intervalom $(a,\, b)$. Tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a,\, b)$ takva da je*

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} \cdot f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} \cdot f''(a) + ... + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n-1)}(a) + R_n,$$

gde je $R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(\xi)$.
Kada je funkcija $f(x)$ predstavljena kao

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$

*kažemo da je razvijena po **Tejlorovoj formuli u tački** a. Funkcija $R_n(x)$ se naziva ostatak (ili greška) i predstavlja odstupanje funkcije $f(x)$ od Tejlorovog polinoma*

$$T_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \;\; R_n(x) = f(x) - T_{n-1}(x).$$

Napomena: za $n = 1$ dobijamo Lagranžovu teoremu.

Ako u Tejlorovu formulu stavimo da je $a = 0$ dobićemo **Maklorenovu formulu**

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} \cdot f''(0) + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n-1)}(0) + R_n(x),$$

gde je $R_n(x) = \frac{x^n}{n!} \cdot f^{(n)}(\omega x),\; 0 < \omega < 1$, a odgovarajući polinom

$$M_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

zove se Maklorenov polinom.

Zadatak 1.11. Aproksimirati funkciju $f(x) = x^2e^{-x}$ Tejlorovim polinomom trećeg stepena u tački $x = 2$.

Rešenje.
Potrebna su nam prva tri izvoda funkcije $f(x)$, kao i vrednosti u tački $x = 2$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2e^{-x} \Rightarrow\ f(2) = 4e^{-2} \\
f'(x) &= 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) \Rightarrow\ f'(2) = e^{-2}(4-4) = 0 \\
f''(x) &= -e^{-x}(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x) \\
&= e^{-x}(x^2 - 4x + 2) \Rightarrow\ f''(2) = e^{-2}(4 - 8 + 2) = -2e^{-2} \\
f'''(x) &= e^{-x}(-x^2 + 6x - 6) \Rightarrow\ f'''(2) = 2e^{-2}.
\end{aligned}$$

Prema Tejlorovoj formuli za funkciju $f(x) = x^2e^{-x}$ u okolini $x = 2$ je

$$f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{6}(x-2)^3 + R_3(x),$$

pa zamenom dobijenih vrednosti dobijamo

$$\begin{aligned}
T_3(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 \\
&= 4e^{-2} - \frac{1}{e^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3e^2}(x-2)^3.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.12. Razviti funkciju

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + (x^3 - 2x^2 + 1)$$

u Tejlorov polinom trećeg stepena u tački $x = 1$ i u Maklorenov polinom trećeg stepena.

Rešenje.
Tejlorov polinom trećeg stepena u $x = 1$ za polinom $x^3 - 2x^2 + 1$ je jednak razvoju tog polinoma po stepenima od $x - 1$, tj. razvojem po stepenima od $x - 1$ ćemo dobiti Tejlorov polinom u tački $x = 1$.
Polinom $x^3 - 2x^2 + 1$ je već razvijen po stepenima od 0.
Prvo, za $z(x) = \operatorname{arctg} x$ računamo potrebne izvode i vrednosti istih u tački $x = 1$

$$\begin{aligned}
z(x) &= \operatorname{arctg} x \Rightarrow \; z(1) = \frac{\pi}{4} \\
z'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \; z'(1) = \frac{1}{2} \\
z''(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \; z''(1) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \\
z'''(x) &= \frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3} \Rightarrow \; z'''(1) = \frac{-2+6}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

a razvijanje $x^3 - 2x^2 + 1$ po stepenima od $x - 1$ je $-(x+1) + (x-1)^2 + (x-1)^3$ pa za $f(x)$ dobijamo

$$\begin{aligned}
T_3(x) &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{-\frac{1}{2}}{2!}(x-1)^2 + \frac{\frac{1}{2}}{3!}(x-1)^3 - (x+1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 - (x+1) + (x-1)^2 + (x-1)^3.
\end{aligned}$$

Nakon izračunavanja $z(0) = 0$, $z'(0) = 1$, $z''(0) = 0$, $z'''(0) = -2$ možemo izraziti i Maklorenov polinom funkcije $f(x)$

$$M_3(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + x^3 - 2x^2 + 1 = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + x + 1.$$

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladmir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.