Momčilo B. Novković
Slavica S. Medić
Biljana N. Carić
Vladimir Ćurić
Ilija M. Kovačević

ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Novi Sad, 2008.

Naziv udžbenika: ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Autori:
Mr (neformalno Dr) Momčilo Novković
Mr Biljana Carić, asistent FTN-a u Novom Sadu
Slavica Medić, asistent pripravnik FTN-a u Novom Sadu
Vladimir Ćurić, asistent FTN-a u Novom Sadu
Dr Ilija Kovačević, redovni profesor FTN-a u Novom Sadu

Recenzenti:
Dr Jovan Mališić, redovni profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu u penziji
Dr Mirko Budinčević, redovni profesor PMF-a u Novom Sadu

Izdavač: Symbol, Novi Sad, Narodnog fronta 32

Štampa: SP PRINT, Novi Sad, Vladike Ćirića 21

Tiraž: 500

Nastavno-naučno veće Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu na svojoj sednici 25. juna 2003. prihvatilo je ovu knjigu kao stalni univerzitetski udžbenik.

CIP – Katalogizacija u publikaciji
Biblioteka Matice srpske, Novi Sad

517(075.8)(076)

ZBIRKA rešenih zadataka iz matematiče analize I / Momčilo B. Novković... [et al.] – Novi Sad : Symbol, 2008 (Novi Sad : SP print). – 373 str. : graf. prikazi ; 24 cm.

Tiraž 500. – Bibliografija: str. 1-4. Bibliografija.

ISBN 978-86-85251-13-9
1. Новковић, Момчило Б.
а) Математичка анализа – Задаци
COBISS.SR-ID 219259655

Uspomeni na našeg dragog saradnika

Momčila Novkovića

BIOGRAFIJA

Tužno je i teško pisati pod ovim okolnostima za svog đaka i najbližeg saradnika biografiju. Rečima se ne može iskazati sve šta je Momčilo Novković za kratko vreme – 34 godine života postigao. Od dečaćića sa teškim detinjstvom približio se odbrani doktorske disertacije. Nažalost, do same odbrane nije došlo, jer ga je tragična smrt u saobraćajnoj nesreći 30. maja 2001. godine sprečila da već završenu doktorsku disertaciju odbrani.

Momčilo Bore Novković rođen je 26.05.1967. godine u Vrbasu u siromašnoj radničkoj porodici. Osnovnu školu je završio u rodnom mestu sa odličnim uspehom. Srednju matematičku gimnaziju (stručni naziv: pomoćni istraživač u matematici) je završio u Vrbasu sa odličnim uspehom. Nosilac je diplome "Vuk Karadžić" i "Mihajlo Petrović Alas". Pri tome je uspešno učestvovao na mnogim takmičenjima iz matematike, fizike, geografije, istorije itd. Školske 1986/87 godine upisuje se na Fakultet tehničkih nauka, mašinski odsek, smer proizvodni sistemi. Njegove studije zapravo počinju školske 1987/88 godine, jer je nakon upisa na Fakultet otišao na odsluženje vojnog roka.

Momčilo Novković je osnovne studije na vreme završio na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu, mašinski odsek, smer proizvodni sistemi Diplomirao je u najkraćem mogućem roku, 23.12.1992. godine odbranom diplomskog rada "Utvrđivanje funkcionalnih zavisnosti između rezultata poslovanja i vrednosti imovine preduzeća" sa prosekom 8,38. Momčilo Novković se izdržavao sam za vreme studija. Bio je prodekan student u dva mandata, član Materijalne komisije studenata FTN, član Saveta Fakulteta, i te dužnosti je savesno obavljao. I pored svog velikog angažovanja na ovim funkcijama, Momčilo Novković je na vreme i sa visokim prosekom završio osnovne studije kao treći u generaciji od 450 studenata. Bio je član MENSE, Međunarodnog udruženja natprosečno inteligentnih.

Zbog kadrovskih potreba Fakulteta, dekanat je preporučio mladom i perspektivnom Momčilu Novkoviću–Momi da upiše magistarske studije iz oblasti Verovatnoće, statistike i slučajnih procesa. Veliki je to bio izazov za jednog diplomiranog mašinskog inženjera.

Ali svojim talentom i upornošću on je za kratko vreme magistrirao na Matematičkom fakultetu u Beogradu. Položio je sve ispite sa prosečnom ocenom 9,67 , a magistarski rad "Autoregresivni modeli vremenskih serija sa gama i Laplasovim raspodelama" odbranio je 13. avgusta 1997. godine, čime je stekao zvanje magistra matematičkih nauka.

Doktorsku disertaciju pod nazivom "Marginalne raspodele i problemi ocenjivanja parametara u nekim nelinearnim modelima vremenskih serija" prijavio je 26.02.2001. godine. Pozitivan izveštaj komisije Nastavno-naučno veće Matematičkog fakulteta Beogradu prihvatilo je 5. 10. 2001. godine na svojoj 215 sednici. Nažalost, u teškoj saobraćajnoj nesreći koja se desila 30.05. 2001. godine prekinuta je jedna uspešna nastavna i naučna karijera. U toj saobraćajnoj nesreći, ne svojom krivicom, Momčilo Novković je nastradao. Prihvatanjem pozitivnog izveštaja Komisije Nastavno-naučnog veća Matematičkog fakulteta u Beogradu, Momčilo Novković je neformalno postao doktor matematičkih nauka.

Modeli koje je izučavao u svom magistarskom radu i doktorskoj disertaciji imaju veliku primenu kako u teoretskom razvoju matematike, tako i u praktičnoj primeni. Svojim radom na ovim modelima svrstao se u velikog poznavaoca ove materije, a sami modeli imaju veliku primenu u svim oblastima nauke (mašinstvo, saobraćaj, elektrotehnika i računarstvo, ...). Mnoge je modele unapredio (ispred imena svakog takvog modela stoji N–Novkovićevi modeli) a neke je i sam izmislio. Takvi su, na primer, modeli, FNAREX(1), NAREX(1) definisani u njegovom magistarskom radu, zatim EXAR(1), NEXAR(1), ARE(1), NARE (1), NMAEX(1), NEXMA(1), NMAE(1), FNAREX(2), EXAR(2), ...).

Momčilo Novković se bavio u svom radu sa problemima raznih nelinearnih modela (autoregresivni modeli sa mešavinama dve eksponencijalne raspodele, modeli sa Relejovom i Vejbulovom raspodelom, raspodele sa negativnim koeficijentima, problemi ocenjivanja parametara u svim modelima).

Završetkom doktorske disertacije Momčilo Novković se za kratko vreme razvio u vrhunskog stručnjaka iz ove oblasti i pred njim je bila blistava naučna karijera. Pri proučavanju ovih modela došao je do dosta originalnih rezultata, i kao što je rečeno, originalni rezultati su primenljivi u raznim oblastima nauke.

Po završetku osnovnih studija Momčilo Novković se 1.06.1993.godine zapošljava na Fakultetu, prvo kao saradnik, a nakon magistriranja od 6.10.1997. godine kao asistent matematike. Za vreme uspešnog rada na Fakultetu izvodio je vežbe iz Matematičke analize 1 za studente prve godine Elektrotehničke struke i računarstva, Matematičkih metoda IV (Verovatnoća i statistika) za studente II godine Građevinsnog odseka, Matematika tri (statistika) za studente III godine Mašinskog odseka i Statističke metode u preduzeću za studente I godine odseka Industrijsko inženjerstvo i menadžment.

Autor je ili koautor sledećih knjiga:

1. M. Novković, Priručnik za polaganje klasifikacionog ispita iz matematike za upis na fakultet ili višu školu, "Budućnost", Novi Sad, 1998, 1-181.
2. M. Novković, Priručnik za polaganje klasifikacionog ispita iz matematike za upis na fakultet ili višu školu - II deo, "Budućnost", Novi Sad, 1998, 1-101.
3. I. Kovačević, M. Novković, Diferencijalni račun realnih funkcija jedne i više realnih promenljivih, FTN, Novi Sad, 1998, 1-125.
4. I. Kovačević, M. Novković, B. Rodić, Integralni račun realnih funkcija jedne realne promenljive, FTN,Novi Sad, 1998, 1-105.
5. V. Marić, I. Kovačević, M. Novković, Obične diferencijalne jednačine, FTN Novi Sad, 1998, 1-95.
6. M. Novković, B. Rodić, I. Kovačević, Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1, FTN, Novi Sad, 1998, 1-312.
7. M. Novković, I. Kovačević, Zbirka rešenih zadataka iz Verovatnoće i statistike, Stylos, Novi Sad, 1999, 1-163.
8. I. Kovačević, V. Marić, M. Novković, B. Rodić, Matematička analiza 1 (diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine), FTN Novi Sad, 2000, 1-280.
9. M. Novković, B. Rodić, I. Kovačević, Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1, FTN Novi Sad, 2000, 1-348.
10. M. Novković, Priručnik za polaganje prijemnog ispita iz matematike za upis na fakultet ili višu školu, "Budućnost" Novi Sad, 2001, 1-258 (posthumno).

Momčilo Novković je autor sledećih naučnih radova:

1. M. Novković, Autoregresivni modeli vremenskih serija sa gama i Laplasovim raspodelama, magistarski rad, Matematički fakultet Beograd, 1997. godine, 1–72.
2. M. Novković, On Laplace Autoregressive Time Series Models, Matematički vesnik 50 (1998), 53–56.
3. M. Novković, On Exponential Autoregressive TimeSeries Models, Novi Sad Journal of Mathematics 99, vol. 1 (1999), 98-101.
4. M. Novković, Marginalne raspodele i problemi ocenjivanja parametara u nekim nelinearnim modelima vremenskih serija, doktorska disertacija Matematički fakultet, Beograd, 2001, 1-138.

Iz samih činjenica vidi se da je Momčilo Novković za kratko vreme (34 godine života) uspeo mnogo.

Napisao je veliki broj knjiga i bio je pred odbranom doktorata. Spadao je među one koji smatraju da je za nastavnika i asistenta na Univerzitetu, nastava – oplemenjena i oplođena naučnim radom, osnovna delatnost i prvenstvena obaveza.

On je tom poslu tako i prilazio, unoseći entuzijazam i jednu notu inventivnosti kloneći se šablona. Izvođena sa simpatijama i podrškom studentima takva se nastava pokazala veoma uspešnom. Zbog svog velikog doprinosa radu i životu Instituta i Fakulteta u celini i zbog svog korektnog i srdačnog stava prema studentima, kolegama i svima radnim ljudima Momčilo Novković je bio poznata i veoma omiljena ličnost na FTN–u, a i šire.

Momčilo Novković je i sve druge poverene zadatke savesno i požrtvano obavljao (pisanje informatora FTN–a, sprovođenje prijemnih ispita, sprovođenje ankete među studentima, sređivanje nastavnih planova i programa Fakulteta, itd). Njegova angažovanost na svim poslovima nije imala samo formalni i verbalni karakter već se sastojala od stvarnih napora za rešavanje konkretnih problema. Prema studentima i mlađim asistentima, a nekad i prema starijim kolegama–nastavnicima se ponašao kao pravi učitelj. Njegova plemenitost, čednost, skromnost, mudrost, vrednoća i spremnost da svakome zaista pomogne ostaće zapamćena među studentima i svima koji su ga poznavali. Bio je jedan od najomiljenijih asistenata na Fakultetu (to pokazuju i ankete studenata gde je Momčilo Novković dobijao skoro čistu desetku, tako i redovi ispred kabineta kada je Momčilo Novković imao konsultacije, koje je držao dok god je bilo studenata).

Njegovim tragičnim odlaskom iz naše sredine, studenti i radni ljudi Fakulteta su zaista izgubili velikog vaspitača mladih generacija i perspektivnog naučnog radnika. Mnogo se od njega zahtevalo, bio je spreman za saradnju i za kratko vreme je zaista mnogo dao. Zaslužuje samo sve pohvale i divljenje. Svi koji su ga poznavali mogu o njemu da kažu sve najlepše i s ponosom i tugom će se uvek setiti njegovog osmeha, plemenitosti,...

Ovih nekoliko reči same govore o kakvom mladom perspektivnom naučniku je reč. U naponu života i naučnog pregalaštva , naš dragi Moma je otišao iz naših redova. Bolno je nama, a i svima koji su sa njim sarađivali, da primimo nepobitnu istinu da ga nema među nama. Mnogih zadataka je nerešenih, koje je u daljem svom radu želeo da reši. Njegovim odlaskom smo svi zaista neizmerno puno izgubili.

Kada je bio u vrhuncu života, nastavne i naučne karijere, kada je došao do mogućnosti da uživa plodove svoga napornog rada, dragi naš Moma je otišao tiho iz naših redova. Hvala mu za sve učinjeno. Nama ostaje bolno sećanje i večna tuga.

Osećali smo potrebu, iako teška srca, da napišemo ovih nekoliko reči, da bi čitaoci shvatili da je pred našim dragim đakom Momom bila blistava i perspektivna nastavno-naučna karijera. Nadamo se da će njegovi naučni radovi doći u ruke novih istraživača, koji će dalje raditi na usavršavanju i primeni statističkih modela koje je u svom naučnom radu izučavao Momčilo Novković.

PREDGOVOR

Predmet Matematička analiza I je osnova svih ostalih znanja iz Matematičke analize kao i osnova za praćenje i shvatanje gradiva iz skoro svih stručnih predmeta tehničke struke, i kao takav se u većem ili manjem obimu predaje na prvoj ili delom na drugoj godini studija na svim tehničkim, prirodno-matematičkim i njima srodnim fakultetima.

Uočeno je da studenti imaju teškoća kod savlađivanja gradiva iz Matematičke analize I, što zbog nedovoljnog znanja koje su poneli iz srednje škole, što zbog objektivne težine predmeta. Zbog toga se pojavila potreba za pisanjem jedne ovakve zbirke koja bi omogućila lakše savlađivanje pojmova, razumevanje dokaza i rešavanje zadataka.

Zbirka zadataka je pisana prema planu i programu Matematičke analize I za studente elektrotehničke struke i računarstva FTN-a, no autori smatraju da ona može korisno poslužiti i studentima tehnike, matematike, fizike, kao i studentima drugih fakulteta koji izučavaju sadržaje iz Matematičke analize.

Zbirka je podeljena u dva dela. U prvom delu detaljno i sistematski su obrađeni zadaci (uvod, granične vrednosti nizova i funkcija, diferencijalni račun realnih funkcija jedne i više realnih promenljivih, integralni račun realnih funkcija jedne realne promenljive, obične diferencijalne jednačine) koji se rade na vežbama iz ovog kursa. U drugom delu zbirke detaljno su urađeni zadaci sa pismenih ispita iz Matematičke analize I za studente elektrotehničke struke i računarstva.

Zbirka zadataka sa knjigama [7] i [9] čini jednu celinu. Smatramo da je ova Zbirka zajedno sa pomenutim knjigama dovoljna za uspešno savlađivanje gradiva iz predmeta Matematičke analize I.

Ova knjiga predstavlja drugo izdanje Zbirke [12], pri čemu je tekst ispravljen (otklonjene su uočene štamparske greške) i dopunjen sa zadacima koji su u međuvremenu bili na pismenim ispitima iz Matematičke analize I.

I ovom prilikom zahvaljujemo se recenzentima na korisnim sugestijama i primedbama kojima su omogućili da sadržaj zbirke bude poboljšan.

Svesni smo da nijedna knjiga ne može da izađe bez grešaka (nadamo se da ih u ovoj ima malo), pa ćemo biti zahvalni svima koji nam ukažu na greške koje bismo otklonili u narednom izdanju knjige.

Autori

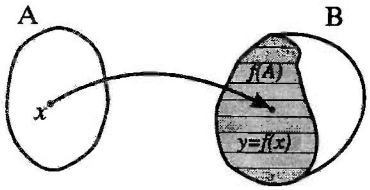
PREDGOVOR TREĆEM IZDANJU

Ovo izdanje se razlikuje od prethodnog izdanja sa novim zadacima. U njemu su uklonjene neke štamparske greške koje su u međuvremenu uočene i dopunjeno sa zadacima sa ispita zaključno sa 2002. godinom.

Autori

SADRŽAJ

UVOD



Ako su A i B neprazni skupovi i ako je svakom $x \in A$ dodeljen, po izvesnom zakonu, tačno jedan element $y \in B$, tada kažemo da je na skupu A definisana funkcija (preslikavanje) f sa vrednostima u skupu B. Simbolički zapisano:

1. $(\forall x \in A)\ (\exists y \in B)\ (x, y) \in f$,
2. $(\forall x \in A)\ (\forall\ y_1, y_2 \in B)$
   $(x, y_1) \in f\ \wedge\ (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$.

Umesto $(x, y) \in f$ pišemo $y=f(x)$.

Skup A nazivamo oblast definisanosti (ili domen) funkcije f, a skup $f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subset B$ skup vrednosti (ili kodomen) funkcije f. Promenljivu x zovemo nezavisna promenljiva (argument, original), a y zavisna promenljiva (vrednost funkcije ili slika). Ako je $A \subset R$ i $B \subset R$ tada za funkciju $f : A \to B$ kažemo da je realna funkcija jedne realne promenljive.

Napomena: Umesto "funkcija f data sa $f(x)=?$" kraće pišemo samo funkcija $y=f(x)$.
Funkcija može biti zadata:

1. Analitički:
   - Eksplicitno $y=f(x)$,
   - Implicitno $F(x,y)=0$,
   - Parametarski $y=f(t), x=g(t)$.
2. Grafički,
3. Tabelarno.

Funkcija može biti zadata i pomoću dve ili više formula

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad x \le 0 \\ x & , \quad 0 < x \le 1 \\ \sqrt{x} & , \quad x > 1 \end{cases}.$$

Za preslikavanje $f : A \to B$ kažemo da je:

- Injektivno ("1 – 1")

različitim originalima odgovaraju različite slike, tj. $x_1 \ne x_2 \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$,

- Sirjektivno ("na")

za svako $y \in B$ postoji $x \in A$ takvo da je $f(x)=y$, tj. $f(A) = B$,

- Bijektivno ("1 – 1" i "na").

Oblast definisanosti

Oblast definisanosti je najširi podskup skupa R gde su izvodljive sve operacije date funkcijom.

- **Racionalna funkcija** $y=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $Q_m(x)\neq 0$

$$y=\frac{x-3}{x-2},\quad \begin{matrix} x-2\neq 0 \\ x\neq 2\end{matrix} \Rightarrow D: x\in R\setminus\{2\}.$$

- $y=\sqrt[n]{f(x)}$

$n=2k\in N$, $f(x)\geq 0$
$n=2k+1\in N$, nema ograničenja za $f(x)$

$$\sqrt{x^2}=|\,x\,|=\begin{cases} x\ , & x\geq 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

$$\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow x^2-1\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq 1\Leftrightarrow \sqrt{x^2}\geq\sqrt{1}\Leftrightarrow |x|\geq 1\Rightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty).$$

Nule funkcije

Nula funkcije $y=f(x)$ je vrednost promenljive x za koju je $y=0$.

Parnost i neparnost funkcije:

Ako je oblast definisanosti D funkcije $y=f(x)$ simetričan skup (skup D je simetričan ako za svako $x\in D$ sledi da je i $-x\in D$) tada:

1. za funkciju f kažemo da je parna ako je $f(-x)=f(x)$ za sve vrednosti $x\in D$,
2. za funkciju f kažemo da je neparna ako je $f(-x)=-f(x)$, za sve vrednosti $x\in D$.

Funkcija ne mora da bude ni parna ni neparna.

Periodičnost

Funkcija je periodična ako postoji broj $\omega\neq 0$, takav da je $f(x+\omega)=f(x)$ za svako $x\in D$. Broj ω nazivamo period. Najmanji pozitivan broj ω, ako postoji, zove se osnovni period funkcije.

Monotonost funkcije

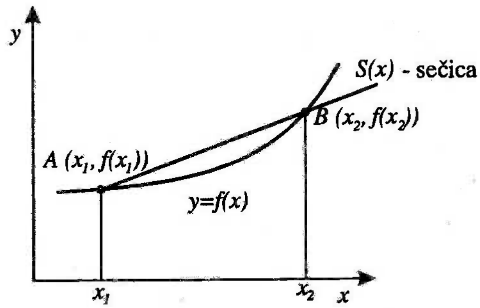
Za funkciju $f: D\rightarrow R$ kaže se da je nad intervalom $I\subset D$:

- monotono rastuća, ako za svake dve tačke $x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$,
- monotono opadajuća, ako za svake dve tačke $x_1,x_2\in I$,
  $x_1<x_2\Rightarrow\ f(x_1)>f(x_2)$,
- monotono nerastuća, ako za svake dve tačke $x_1,x_2\in I$,
  $x_1<x_2\Rightarrow\ f(x_1)\geq f(x_2)$,
- monotono neopadajuća, ako za svake dve tačke $x_1,x_2\in I$,
  $x_1<x_2\Rightarrow\ f(x_1)\leq f(x_2)$.

U svakom od navedenih slučajeva se kaže da je funkcija monotona nad intervalom I.

Konveksnost i konkavnost

Konveksnost i konkavnost funkcije se posmatra nad intervalom $I \subset D \subset R$.



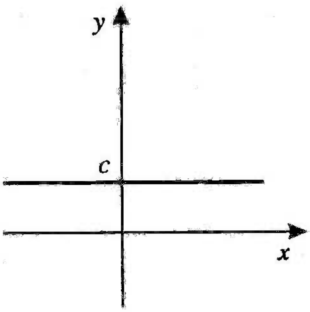
Ako za svake dve tačke $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ i $x \in (x_1, x_2)$ sledi:

- $f(x) < S(x)$ funkcija je konveksna nad intervalom *I*,
- $f(x) > S(x)$ funkcija je konkavna nad intervalom *I*.

Ograničenost

Za funkciju $y=f(x)$ kažemo da je ograničena sa donje strane ako postoji broj M_1, takav da je za svako $x \in D, f(x) \geq M_1$. Funkcija f je ograničena sa gornje strane ako postoji broj M_2, takav da je za svako $x \in D, f(x) \leq M_2$. Funkcija je ograničena ako je ograničena i sa donje i sa gornje strane, tj. ako postoje brojevi M_1 i M_2, takvi da je za svako $x \in D, M_1 \leq f(x) \leq M_2$, ili ako postoji pozitivan broj *K*, takav da je $|f(x)| \leq K$ za svako $x \in D$.

Konstantna funkcija $y = f(x) = c$



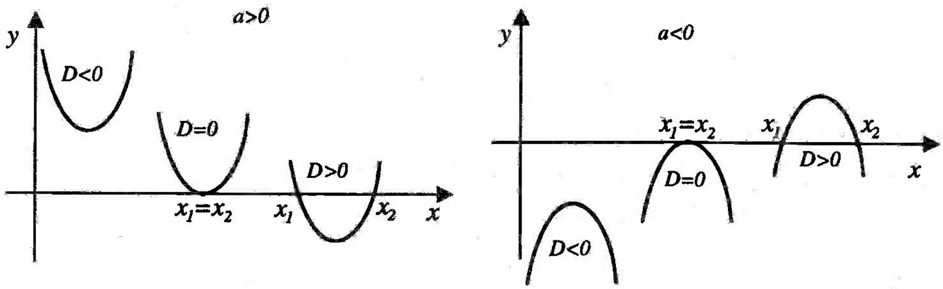
- $D: x \in R$,
- monotono nerastuća i monotono ne opadajuća,
- nije ni konveksna ni konkavna.

Parabola $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

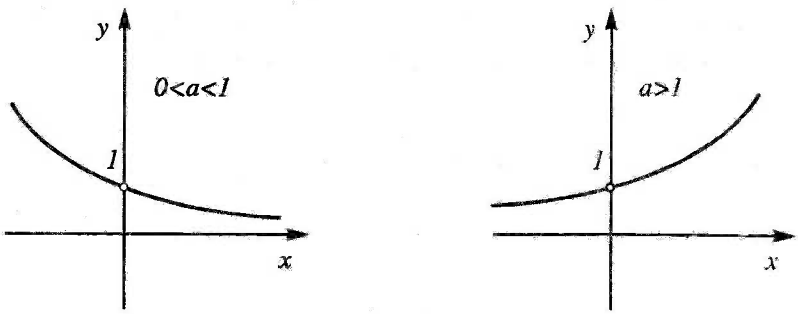
- $D : x \in R$.

U zavisnosti od znaka diskriminante D $(D = b^2 - 4ac)$ za rešenja (nule) funkcije se dobija:

- $D>0$ – rešenja su realna i različita,
- $D=0$ – rešenja su realna i jednaka,
- $D<0$ – nema realnih nula (rešenja su konjugovano-kompleksna).



Eksponencijalna funkcija $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$



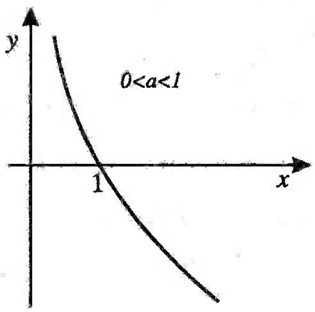
monotono opada *monotono raste*

- $D : x \in R$,
- funkcija nema nula,
- specijalan slučaj za $a=e$ $(y = e^x)$ ili $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$.

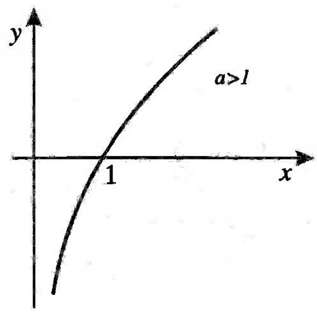
Logaritamska funkcija $y = f(x) = log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

$D : x \in R^+$.

Simetrična je u odnosu na pravu $y=x$ sa funkcijom $y = a^x$. Logaritamska funkcija je inverzna funkcija funkcije $y = a^x$.



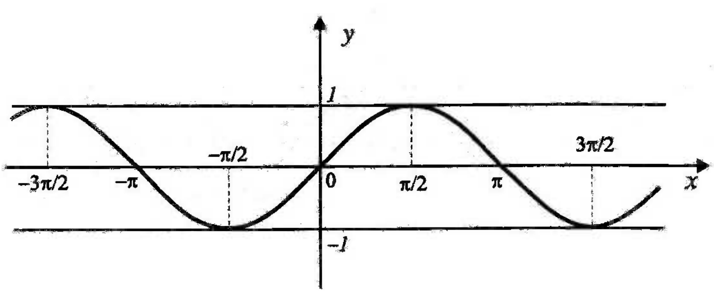
monotono opada



monotono raste

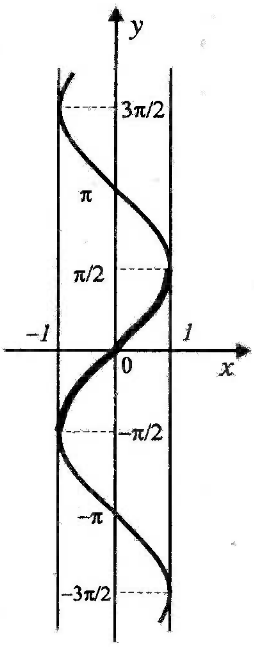
- $x=1$ je nula funkcije,
- $a=e=2{,}71828\ldots$ $y=lnx$,
- $a=10$ $y=logx$.

y=sinx



- $D : x \in R$,
- skup vrednosti $[-1, 1]$,
- funkcija je periodična: osnovni period je $\omega = 2\pi$,
- $sin(-x) = -sin\,x$ - funkcija je neparna,
- $x=k\pi$, $k \in Z$ - nule funkcije.

y=arcsinx

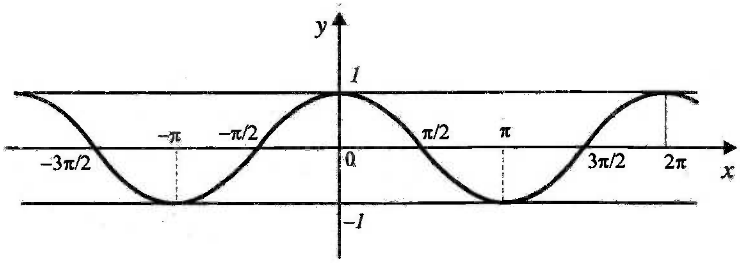


Funkcija $y=sinx$ obostrano jednoznačno (zbog monotonosti) preslikava interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ na interval $[-1,1]$. Zato je moguće definisati inverznu funkciju sa domenom $[-1,1]$ i skupom vrednosti $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Restrikcija funkcije $f(x)=sin\,x$ nad intervalom $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ima inverznu funkciju, koja se označava sa $y=arcsin\,x$. Simetrična je u odnosu na pravu $y=x$ sa $y=sinx$.

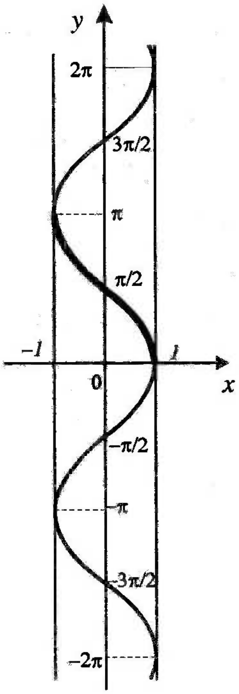
- $D: x \in [-1,1]$,
- skup vrednosti $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
- $y=arcsin(-x)=-arcsin\,x$ - funkcija je neparna,
- funkcija monotono raste.

y=cosx



- $D: x \in R$,
- skup vrednosti $[-1,1]$,
- funkcija je periodična: osnovni period je $\omega=2\pi$,
- $cos(-x)=cos\,x$ - funkcija je parna,
- $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in Z$ - nule funkcije.

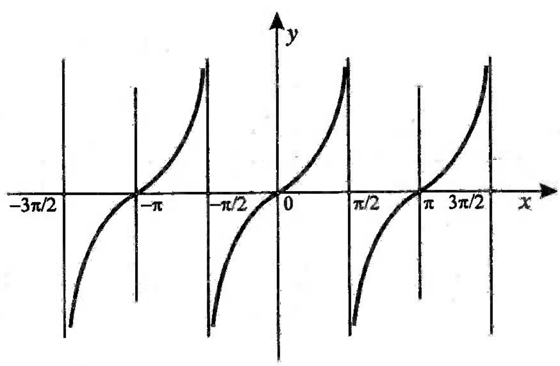
y=arccosx



Funkcija $y=cosx$ obostrano jednoznačno (zbog monotonosti) preslikava interval $[0,\pi]$ na interval $[-1,1]$. Zato je moguće definisati inverznu funkciju sa domenom $[-1,1]$ i skupom vrednosti $[0,\ \pi]$. Restrikcija funkcije $f(x)=\cos x$ nad intervalom $[0,\pi]$ ima inverznu funkciju, koja se označava sa $y=arccosx$.

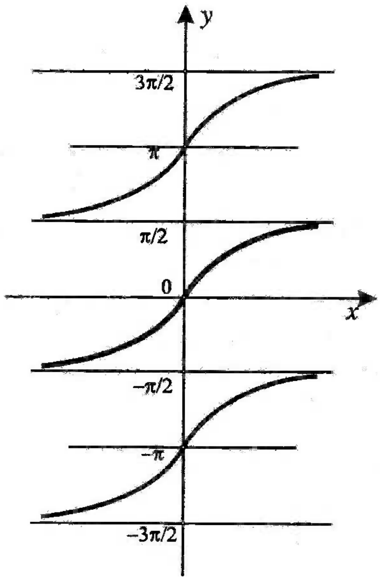
- D: $x\in[-1,1]$,
- Skup vrednosti $[0,\ \pi]$,
- Funkcija monotono opada.

y=tgx



- definisana za svako $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$,
- skup vrednosti funkcije je $(-\infty,\infty)$,
- funkcija je periodična: osnovni period je $\omega=\pi$,
- $tg(-x)=-tg(x)$ - funkcija je neparna,
- funkcija je monotono rastuća na svim intervalima oblika
  $(\frac{(2k+1)}{2}\pi,\frac{(2k+3)}{2}\pi)$, $k\in Z$
- $x=k\pi$, $k\in Z$ - nule funkcije.

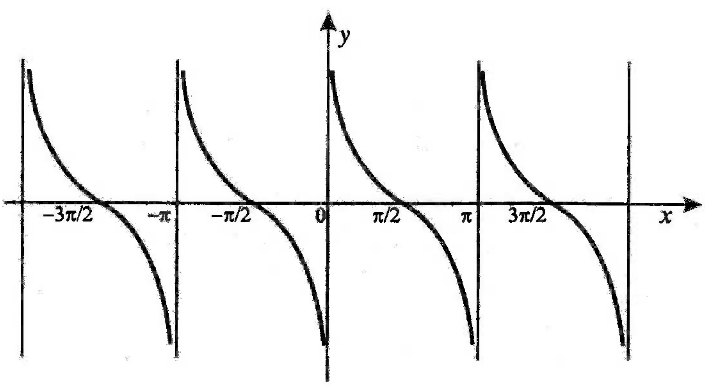
y=arctgx



Funkcija $y=tgx$ obostrano jednoznačno (zbog monotonosti) preslikava interval $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ na interval $(-\infty,\infty)$. Zato je moguće definisati inverznu funkciju sa oblašću definisanosti $(-\infty,\infty)$ i skupom vrednosti $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Restrikcija funkcije $y=tgx$ nad intervalom $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ima inverznu funkciju, koja se označava sa $y = arctgx$.

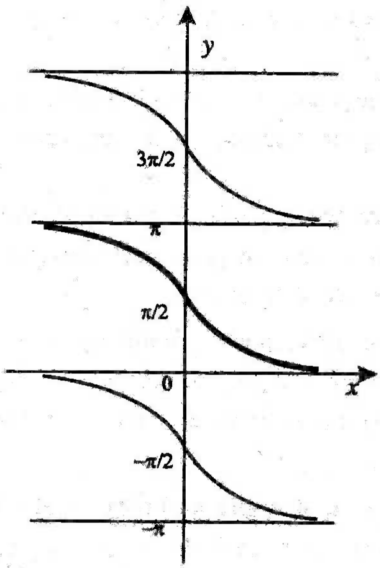
- $D: x \in R$,
- Skup vrednosti $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,
- Monotono raste,
- $arctg(-x) = -arctg(x)$ - neparna.

y=ctgx



- definisana za svako $x \neq k\pi$, $k \in Z$,
- skup vrednosti funkcije je $(-\infty,\infty)$,
- funkcija je periodična: osnovni period je $\omega=\pi$,
- $ctg(-x) = -ctg(x)$ - funkcija je neparna,
- funkcija monotono opada na svim intervalima oblika $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k \in Z$
- $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ - nule funkcije.

y=arcctgx



Funkcija $y=ctgx$ obostrano jednoznačno (zbog monotonosti) preslikava interval $(0,\pi)$ na interval $(-\infty,\infty)$. Zato je moguće definisati inverznu funkciju sa domenom $(-\infty,\infty)$ i skupom vrednosti $(0,\pi)$. Restrikcija funkcije $y=ctgx$ nad intervalom $(0,\pi)$ ima inverznu funkciju, koja se označava sa $y = arcctgx$.

- $D: x \in R$,
- skup vrednosti $(0,\pi)$,
- monotono opada.

2. GRANIČNE VREDNOSTI

Granične vrednosti nizova

Proizvoljno preslikavanje $a: N \to R$ zovemo realni niz, dok njegovu vrednost $a(n) = a_n$ nazivamo opšti ili n-ti član niza.

Ako postoji realan broj G, takav da je $a_n \leq G$, za svako $n \in N$, onda se G naziva gornja granica (gornje ograničenje) niza $\{a_n\}$, i za taj niz kažemo da je ograničen sa gornje strane.

Ako postoji realan broj g takav da je $a_n \geq g$, za svako $n \in N$, onda se g naziva donja granica (donje ograničenje) niza $\{a_n\}$, i za taj niz kažemo da je ograničen sa donje strane. Ako je $g \leq a_n \leq G$, za svako $n \in N$, za niz kažemo da je ograničen.

Ako je niz $\{a_n\}$ ograničen sa gornje strane tada postoji najmanje gornje ograničenje M niza $\{a_n\}$ koje zovemo supremum niza ($M=sup\ \{a_n\}$). Ako je niz $\{a_n\}$ ograničen sa donje strane tada postoji najveće donje ograničenje m niza $\{a_n\}$ koje zovemo infimum niza ($m=inf\ \{a_n\}$).

Za niz $\{a_n\}$ kažemo da ima graničnu vrednost a (konvergira ka broju a), ako za svaki unapred dati pozitivan broj ε postoji prirodan broj $n_0(\varepsilon)$ takav da je $|a_n - a| < \varepsilon$, za $n \geq n_0(\varepsilon)$ i pišemo da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. To znači da se izvan svake ε okoline $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ nalazi samo konačno mnogo članova niza.

Za tačku $a \in R$ kažemo da je tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ ako i samo ako se u svakoj ε okolini broja a nalazi beskonačno mnogo članova niza, tj. ako postoji beskonačan podskup $N_0 \subset N$ koji niz $\{a_n\}$ preslika u ε okolinu tačke a.

Jedan niz može imati jednu ili više tačaka nagomilavanja, a može se desiti da nema ni jednu tačku nagomilavanja. Granična vrednost niza je uvek tačka nagomilavanja niza, dok obrnuto ne važi.

Za realni niz $\{a_n\}$ kažemo da je:

a) monotono rastući, ako za svako $n \in N$, važi $a_n < a_{n+1}$,

b) monotono opadajući, ako za svako $n \in N$, važi $a_n > a_{n+1}$,

c) monotono neopadajući, ako za svako $n \in N$, važi $a_n \leq a_{n+1}$,

d) monotono nerastući, ako za svako $n \in N$, važi $a_n \geq a_{n+1}$.

Svaki monotono rastući (neopadajući) niz koji je ograničen sa gornje strane konvergira svom supremumu. Svaki monotono opadajući (nerastući) niz ograničen sa donje strane konvergira svom infimumu.

Ako je k fiksan prirodan broj, tada ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, sledi takođe da je i $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

U zadacima gde postoji $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = a$ i $f(x)$ je neprekidna funkcija u tački $x = a$ (definicija neprekidnosti funkcije data je kasnije) koristićemo činjenicu da je

$\lim\limits_{x\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{x\to\infty} a_n) = f(a)$. Ukoliko ne možemo da koristimo predhodnu činjenicu, to će biti napomenuto.

Neke osobine graničnih vrednosti nizova

Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, tada je:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$,
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$,
3) $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$,
4) Za $b_n \neq 0$ i $b \neq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$
5) Ako je $a_n \leq b_n$ za $n \geq k$ i ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ tada je $a \leq b$.
6) Ako su nizovi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$ takvi da je $a_n \leq b_n \leq c_n$ za $n \geq k$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, tada je i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + \ldots + b_n} = \begin{cases} 0, & m > k \\ \frac{a_0}{b_0}, & k = m \\ \pm\infty, & k > m \ (+\infty \ ako\ je\ a_0 > 0, -\infty \ ako\ je\ a_0 < 0) \end{cases}$$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \infty, & q > 1 \end{cases}$$

  Za $q = -1$ niz ima dve tačke nagomilavanja -1 i $+1$, pa je divergentan. Za $q < -1$ parni članovi teže ka ∞, a neparni ka $-\infty$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$, $\alpha \in R$, $a > 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $a > 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$.

Osnovne jednakosti

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1) \qquad 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad 2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$1^2 + 3^2 + \ldots + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}.$$

1. Ispitati: ograničenost, supremum, infimum, odrediti tačke nagomilavanja i graničnu vrednost (ukoliko postoji) za niz $\{ a_n \}$ sa opštim članom $a_n = \dfrac{3n-1}{5n+1}$.

$a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{5}{11},\ a_3 = \frac{1}{2},\ a_4 = \frac{11}{21},\ a_5 = \frac{7}{13}, \ldots$

$$a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow \frac{3n+2}{5n+6} - \frac{3n-1}{5n+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(3n+2)(5n+1)-(3n-1)(5n+6)}{(5n+6)(5n+1)} > 0$$

$$15n^2 + 13n + 2 - (15n^2 + 13n - 6) > 0 \Leftrightarrow 8 > 0$$

Sledi, niz $\{ a_n \}$ je monotono rastući.

$\frac{1}{3} \le a_n < 1$, broj 1 je jedno gornje ograničenje, broj $\frac{1}{3}$ je jedno donje ograničenje.

$\inf \{ a_n \} = \frac{1}{3}$ (prvi član niza).

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{5n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n-1}{n}}{\frac{5n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{1}{n}}{5+\frac{1}{n}}$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} (3-\frac{1}{n}) = 3$ i $\lim\limits_{n\to\infty} (5+\frac{1}{n}) = 5$, to je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-\frac{1}{n}}{5+\frac{1}{n}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(3-\frac{1}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(5+\frac{1}{n})}$.

Dalje, s obzirom da je $\lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3$, $\lim\limits_{n\to\infty} = \frac{1}{n} = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} 5 = 5$, to je

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3-\frac{1}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(5+\frac{1}{n})} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 5 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{3}{5}.$$

Granična vrednost niza $\{ a_n \}$ je $\frac{3}{5}$, tačka nagomilavanja niza $\{ a_n \}$ je $\frac{3}{5}$ i

$\sup \{ a_n \} = \frac{3}{5}$ (nije član niza).

Napomena:

Ubuduće, kada budemo tražili graničnu vrednost zbira, proizvoda i količnika dva ili više nizova (dve ili više funkcija) odmah ćemo primeniti pravila za računske operacije sa graničnim vrednostima – pretpostavljajući da svaka pojedinačna granična vrednost postoji. Ukoliko ne možemo da koristimo ta pravila, to će biti posebno napomenuto.

2. **Za prethodni primer odrediti počev od kog člana se svi naredni nalaze u ε-okolini granične vrednosti a za $\varepsilon=0{,}1$.**

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3n-1}{5n+1}-\frac{3}{5}\right| < 0{,}1 \Leftrightarrow \left|\frac{15n-5-15n-3}{5(5n+1)}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{8}{5(5n+1)} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow 16 < 5n+1 \Rightarrow 5n > 15 \Rightarrow n > 3 \qquad n_0 = 4.$$

Izračunati sledeće granične vrednosti:

3. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\ldots+n-1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}.$$

4. $$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n-5^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+1\right)}{5^n\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n-1\right)} = \lim_{n\to\infty} 5\cdot\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n-1} = -5.$$

5. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1(1+1)+2(2+1)+\ldots+n(n+1)}{n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2+1+2+\ldots+n}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}}{n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n(2n^2+3n+1)+3(n^2+n)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+6n^2+4n}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

6. $$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+n}-n+n\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) - \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} - \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right)\frac{\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+n}+n^2}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+n}+n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} - \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{n^3+n-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+n}+n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} - \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+n}+n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1+2}{2n+1}\right)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{2n}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{2}{2n+1}\cdot 2n}.$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{2n+1}{2}}=e$ i $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{2n+1}\cdot 2n=2$, to je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{2}{2n+1}\cdot 2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{4n}{2n+1}}=e^2.$$

Napomena:

Ako tražimo graničnu vrednost niza $((1+\frac{1}{a_n})^{a_n})^{b_n}$, pri čemu je $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{a_n}=e$ i $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$ ($a\in R$, a može da bude i $+\infty$, odnosno $-\infty$), tada pišemo da je $\lim\limits_{n\to\infty}((1+\frac{1}{a_n})^{a_n})^{b_n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=e^a$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)!+(n+1)!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)!+(n+1)\cdot n(n-1)!}{(n+1)\cdot n(n-1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+n^2+n}{n^2+n}=1.$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(\sqrt{n^2+n}+n)^2}{n^2}}{\frac{\sqrt[3]{n^6+1}}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)^2}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^6}}}=4.$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})\cdot\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n}-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{n}}}}=1.$$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3+2}{5n^3}\right)^{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{5n^3}\right)^{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5n^3}{2}}\right)^{\frac{5n^3}{2}\cdot\frac{2}{5n^3}\sqrt{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{5n^3}}=e^0=1.$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\pi\sqrt{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi+n\pi)\right]^2=$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin\pi(\sqrt{n^2+n}-n)\cos n\pi+\cos\pi(\sqrt{n^2+n}-n)\sin n\pi\right]^2=$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[(-1)^n\sin\pi(\sqrt{n^2+n}-n)\right]^2 = \lim\limits_{n\to\infty}(\sin^2\pi(\sqrt{n^2+n}-n))=$

$= \lim\limits_{n\to\infty}(\sin^2\pi(\sqrt{n^2+n}-n)\cdot\dfrac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\sin^2\dfrac{\pi(n^2+n-n^2)}{\sqrt{n^2+n}+n})=$

$= \lim\limits_{n\to\infty}(\sin^2\dfrac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\sin^2\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1})$.

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\dfrac{\pi}{2}$ i kako je funkcija $y=\sin^2 x$ neprekidna za svako x, to

je $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}) = \sin^2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\sin^2\dfrac{\pi}{2}=1$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sin\pi(\sqrt{n^2+n}-n+n)=$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin\pi(\sqrt{n^2+n}-n)\cos n\pi+\cos\pi(\sqrt{n^2+n}-n)\sin n\pi\right]=$

$= \lim\limits_{n\to\infty}((-1)^n\sin\pi(\sqrt{n^2+n}-n)) = \lim\limits_{n\to\infty}((-1)^n\sin\pi(\sqrt{n^2+n}-n))=$

$= \lim\limits_{n\to\infty}((-1)^n\cdot\sin(\pi(\sqrt{n^2+n}-n)\dfrac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n})) = \lim\limits_{n\to\infty}((-1)^n\sin\dfrac{\pi(n^2+n-n^2)}{\sqrt{n^2+n}+n})=$

$= \lim\limits_{n\to\infty}((-1)^n\sin\dfrac{\pi\cdot n}{\sqrt{n^2+n}+n}) = \lim\limits_{n\to\infty}((-1)^n\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+1/n}+1})$.

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n=1$ za $n=2k,\ k\in N$ i $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n=-1$ za $n=2k-1,\ k\in N$ sledi da niz $(-1)^n$ nema graničnu vrednost, tj. nije konvergentan.

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\sin\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$ ne postoji.

Napomena:

Ovde nismo mogli da za $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n \sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}$ primenimo pravilo da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ jer $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ ne postoji.

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\pi\sqrt{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty}((-1)^n \cdot \sin\pi(\sqrt{n^2+1}-n)\cdot\dfrac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n}) =$

$$= \lim_{n\to\infty}((-1)^n \cdot \sin\frac{\pi(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n}) = \lim_{n\to\infty}((-1)^n \cdot \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}).$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} = \sin\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} = \sin 0 = 0$, to je

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n \cdot \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0.$$

Napomena:

Ovde nismo mogli da za $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n \sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ primenimo pravilo da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ jer $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ ne postoji.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}(2n^2+1)(\ln(n^3-6n^2+4n-1)-\ln n-2\ln(n-2)) =$

$$\lim_{n\to\infty} \ln(\frac{n^3-6n^2+4n-1}{n(n-2)^2})^{2n^2+1} = \ln\lim_{n\to\infty}(\frac{n^3-6n^2+4n-1}{n^3-4n^2+4n})^{2n^2+1} =$$

$$= \ln\lim_{n\to\infty}(1+\frac{-2n^2-1}{n^3-4n^2+4n})^{2n^2+1} = \ln\lim_{n\to\infty}(1+\frac{-2n^2-1}{n^3-4n^2+4n})^{\frac{n^3-4n^2+4n}{-(2n^2+1)}\cdot\frac{-(2n^2+1)}{n^3-4n^2+4n}(2n^2+1)} =$$

$$= \ln e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-(2n^2+1)^2}{n^3-4n^2+4n}} = \ln e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-(4n^4+4n^2+1)}{n^3-4n^2+4n}} = -\infty.$$

Napomena:

Kako $e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n^4-4n^2-1}{n^3-4n^2+4n}} \to 0$ i $\ln u \to -\infty$, kada $u \to 0$, tada je $\ln e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n^4-4n^2-1}{n^3-4n^2+4n}} = -\infty$.

16. U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati graničnu vrednost niza sa opštim članom $a_n = \left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-n+2}\right)^{\frac{n^2-n+2}{an^2+(a-1)n-1}}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-n+2}\right)^{\frac{n^2-n+2}{an^2+(a-1)n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+2-n-1}{n^2-n+2}\right)^{\frac{n^2-n+2}{an^2+(a-1)n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n^2-n+2}{n+1}}\right)^{-\frac{n^2-n+2}{n+1}\cdot\left(-\frac{n+1}{n^2-n+2}\right)\cdot\frac{n^2-n+2}{an^2+(a-1)n-1}} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{an^2+(a-1)n-1}}.$$

Ako je $a=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{-n+1}} = e$. Ako je $a\neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1$.

17. Opšti član niza je $a_n = \sqrt{n^2+\lambda n} - n + 1$. Odrediti realan parametar λ tako da bude $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, a zatim odrediti počev od kog člana niza se svi naredni nalaze na rastojanju manjem od 0.05 od ove granične vrednosti.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+\lambda n}-(n-1)\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+\lambda n}+(n-1)}{\sqrt{n^2+\lambda n}+(n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\lambda n-(n^2-2n+1)}{\sqrt{n^2+\lambda n}+(n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(\lambda+2)n-1}{\sqrt{n^2+\lambda n}+n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda+2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{\lambda}{n}}+1-\frac{1}{n}} = \frac{\lambda+2}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = -2.$$

$$\left|\sqrt{n^2-2n}-(n-1)-0\right| < 0.05$$

$$\left|\sqrt{n^2-2n}-(n-1)\right| < 0.05 \qquad \left(\begin{array}{l} n^2-2n < n^2-2n+1 = (n-1)^2,\ n>1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{n^2-2n} < n-1, n\geq 2 \Rightarrow \sqrt{n^2-2n}-(n-1) < 0 \end{array}\right)$$

$$-\sqrt{n^2-2n}+n-1 < 0.05$$

$$-\sqrt{n^2-2n} < 1.05-n$$

$$\sqrt{n^2-2n} > n-1.05 \ \Big/\ ^2 \Leftrightarrow n^2-2n > n^2-2.1n+(1.05)^2 \Leftrightarrow 0.1n > (1.05)^2$$

$$n > 10(1.05)^2 = 11.025 \Rightarrow n_0 = 12.$$

18. Dat je niz sa opštim članom $a_n = n(\sqrt[3]{n^3+\lambda n^2+n} - \sqrt{n^2+1})$. Za koju vrednost parametra λ će dati niz divergirati, a za koju konvergirati?

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[3]{n^3+\lambda n^2+n} - \sqrt{n^2+1} - n + n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[3]{n^3+\lambda n^2+n} - n) - \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1} - n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[3]{n^3+\lambda n^2+n}-n)\cdot\frac{\sqrt[3]{(n^3+\lambda n^2+n^2)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+\lambda n^2+n}+n^2}{\sqrt[3]{(n^3+\lambda n^2+n)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+\lambda n^2+n}+n^2}-$$

$$-\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^3+\lambda n^2+n-n^3)}{\sqrt[3]{(n^3+\lambda n^2+n)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+\lambda n^2+n}+n^2}-$$

$$-\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda n^3+n^2}{\sqrt[3]{(n^3+\lambda n^2+n)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+\lambda n^2+n}+n^2}-$$

$$-\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda n^3+n^2}{\sqrt[3]{(n^3+\lambda n^2+n)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+\lambda n^2+n}+n^2}-\frac{1}{2}.$$

Ako je $\lambda\neq 0 \Rightarrow$ niz divergira.

Ako je $\lambda=0 \Rightarrow$ niz konvergira: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$.

19. Dat je niz sa opštim članom $a_n=n-1-\sqrt{pn^2+qn}$, $p,q\in R$, $p\geq 0$. U zavisnosti od parametara p i q odrediti kada ovaj niz divergira, a kada konvergira ka:

a) nuli,

b) broju različitom od nule.

$$\lim_{n\to\infty}(n-1-\sqrt{pn^2+qn})\cdot\frac{n-1+\sqrt{pn^2+qn}}{n-1+\sqrt{pn^2+qn}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+1-pn^2-qn}{n-1+\sqrt{pn^2+qn}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-p)n^2-(2+q)n+1}{n-1+\sqrt{pn^2+qn}}.$$

$1-p\neq 0\Rightarrow$ za $p\neq 1$ i za svako q niz divergira.

Za $p=1$ niz konvergira.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-(2+q)n+1}{n-1+\sqrt{n^2+qn}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-(2+q)+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{q}{n}}}=\frac{-(2+q)}{2}=-1-\frac{q}{2}$$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-1-\frac{q}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{q}{2}=-1\Rightarrow q=-2$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-1-\frac{q}{2}=k$; $k\neq 0$, $q\neq -2$.

20. Ako podnizovi $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n-1}\}$, $\{x_{3n}\}$ realnog niza $\{x_n\}$ konvergiraju, pokazati da i niz konvergira. Dokazati da ako podnizovi $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n+1}\}$, $\{x_{4n}\}$ realnog niza $\{x_n\}$ konvergiraju, da to ne mora i niz $\{x_n\}$. (Naći kontra primer).

Ako niz $\{a_n\}$ konvergira ka a, tada i svaki podniz $\{a_{n_k}\}$ niza $\{a_n\}$ konvergira ka a.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=a$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=b$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=c$

$x_2,x_4,x_6,x_8,\ldots$ $\quad$ $x_1,x_3,x_5,x_7,x_9,\ldots$ $\quad$ $x_3,x_6,x_9,\ldots$

Niz $\{x_{6n}\}$ je podniz niza $\{x_{2n}\}$ i konvergira ka a.
x_6, x_{12}

Niz $\{x_{6n}\}$ je podniz niza $\{x_{3n}\}$ i konvergira ka c.

Konvergentan niz ima jedinstvenu graničnu vrednost $\Rightarrow a = c$. (1)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Niz } \{x_{6n-3}\} \text{ je podniz niza } \{x_{2n-1}\} \text{ i konvergira ka } b \\ \quad x_3, x_9, x_{15}, x_{21}, \ldots \\ \text{Niz } \{x_{6n-3}\} \text{ je podniz i niza } \{x_{3n}\} \text{ i konvergira ka } c \end{array}\right\} \Rightarrow b = c. \quad (2)$$

Iz (1) i (2) $\Rightarrow a = b = c$.

Izvan svake ε - okoline tačke a imamo konačan broj članova niza $\{x_{2n}\}$ i konačan broj članova niza $\{x_{2n-1}\}$. Znači, izvan svake ε - okoline tačke a se nalazi samo konačan broj članova niza $\{x_n\}$. Sledi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, tj. niz $\{x_n\}$ je konvergentan.

Ako uzmemo $x_n = (-1)^n$, $n \geq 1$, imamo $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = -1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4n} = 1$.

Niz nije konvergentan jer konvergentan niz ima samo jednu tačku nagomilavanja.

21. Neka je niz $\{a_n\}$ dat sa $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = 3 \cdot \dfrac{2a_n + 1}{a_n + 4}$ $n \in N$. Pokazati da je niz $\{a_n\}$ konvergentan i naći njegovu graničnu vrednost.

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{9}{5},\ a_3 = 3 \cdot \frac{2a_2 + 1}{a_2 + 4} = \frac{2\frac{9}{5} + 1}{\frac{9}{5} + 4} = 3\frac{18 + 5}{9 + 20} = \frac{69}{29}, \ldots$$

Očigledno je da je niz $\{a_n\}$ niz pozitivnih brojeva, tj. $a_n > 0$, za svako $n \in N$.

Pokažimo da je niz $\{a_n\}$ monotono rastući.

Za $n = 1$ treba pokazati da je $a_1 < a_2$.

$$a_1 = 1 < \frac{9}{5} = a_2$$

Za $n = k$ pretpostavimo da važi $a_{k-1} < a_k$.

Za $n = k + 1$ treba pokazati da je $a_k < a_{k+1}$.

$$a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow a_{k+1} - a_k > 0$$

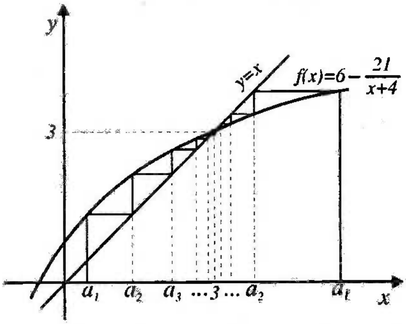
$$3 \cdot \frac{2a_k + 1}{a_k + 4} - 3 \cdot \frac{2a_{k-1} + 1}{a_{k-1} + 4} = 3 \cdot \frac{(2a_k + 1)(a_{k-1} + 4) - (2a_{k-1} + 1)(a_k + 4)}{(a_{k-1} + 4)(a_k + 4)} =$$

$$= 3 \cdot \frac{2a_k a_{k-1} + 8a_k + a_{k-1} + 4 - (2a_k a_{k-1} + 8a_{k-1} + a_k + 4)}{(a_k + 4)(a_{k-1} + 4)} =$$

$$= 3 \cdot \frac{7a_k - 7a_{k-1}}{(a_k + 4)(a_{k-1} + 4)} = \frac{21(a_k - a_{k-1})}{(a_k + 4)(a_{k-1} + 4)} > 0.$$

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da je niz $\{a_n\}$ monotono rastući $\Rightarrow a_1 \leq a_n$, za svako $n \in N$.

Pokažimo da je niz $\{a_n\}$ ograničen sa gornje strane.



Kako jednačina $x = 3\cdot\dfrac{2x+1}{x+4}$ ima pozitivno rešenje $x=3$ i kako je niz $\{a_n\}$ monotono rastući, to ako je konvergentan tada je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = sup\{a_n\} = a$, što je u našem slučaju $a=3$. Kako jednačina $x = f(x) = 6 - \dfrac{21}{x+4}$ ima jedno pozitivno rešenje $x=3$ (vidi sliku), to da smo uzeli:

1. za a_1 bilo koji broj iz intervala $(0,3)$ dobili bi monotono rastući niz koji konvergira ka supremumu, $sup\{a_n\}=3$,
2. za $a_1=3$ dobili bi konstantan niz sa opštim članom $a_n=3$,
3. za $a_1>3$ dobili bi monotono opadajući niz koji konvergira ka infimumu, $inf\{a_n\}=3$.

Za $n=1$ treba pokazati da je $a_1<3$.

$a_1 = 1 < 3$

Za $n=k$ pretpostavimo da važi $a_k<3$.

Za $n=k+1$ treba pokazati da je $a_{k+1}<3$.

$a_k < 3 \Rightarrow a_k = 3-\varepsilon,\ \varepsilon>0$

$$a_{k+1} = 3\cdot\frac{2a_k+1}{a_k+4} = 3\cdot\frac{2(3-\varepsilon)+1}{3-\varepsilon+4} = 3\frac{6-2\varepsilon+1}{7-\varepsilon} = 3\cdot\frac{7-2\varepsilon}{7-\varepsilon} < 3.$$

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da je niz $\{a_n\}$ ograničen sa gornje strane, tj. $a_n<3$, za svako $n\in N$.

Niz $\{a_n\}$ je ograničen i monoton $\Rightarrow$ Niz $\{a_n\}$ je konvergentan, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Iz $a_{n+1} = 3\cdot\dfrac{2a_n+1}{a_n+4}$ sledi

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 3\frac{2\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 4} \Leftrightarrow A = 3\frac{2A+1}{A+4} \Leftrightarrow A^2+4A = 6A+3 \Leftrightarrow A^2-2A-3=0.$$

Rešenja poslednje jednačine su: $A_{1,2} = \dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{2\pm4}{2}$, odnosno $A_1=-1$ i $A_2=3$.

Zbog $a_n>0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \ge 0 \Rightarrow A\ge 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

Napomena:

U problem da li niz $\{a_n\}$, dat rekurzivno sa $a_{n+1}=f(a_n)$, $a_1\in R$, gde je f neprekidna funkcija, ima graničnu vrednost ili ne, nećemo se upuštati. Ovde ćemo uvek posmatrati nizove za koje postoji granična vrednost. Napomenimo ovde da ako postoji granična vrednost niza $\{a_n\}$ da niz mora da konvergira ka presečnoj tački prave $y=x$ i krive

$y = f(x)$, tj. da za graničnu vrednost $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ važi da je $a = f(a)$ (vidi prethodni primer). $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow a = f(a)$.

Napomenimo ovde da niz $\{a_n\}$ nije konvergentan (nema graničnu vrednost) ako prava $y = x$ i kriva $y = f(x)$ nemaju zajedničkih tačaka.

22. Neka je niz $\{a_n\}$, $n \in N$, definisan na sledeći način $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{9}{a_{n-1}})$, $a_0 = 1$. Pokazati da je niz konvergentan i naći njegovu graničnu vrednost.

Očigledno je da je niz $\{a_n\}$ niz pozitivnih brojeva, tj. $a_n > 0$ za svako $n \in N$.

$$a_n - a_{n-1} = \frac{a_{n-1}^2 + 9}{2a_{n-1}} - a_{n-1} = \frac{a_{n-1}^2 + 9 - 2a_{n-1}^2}{2a_{n-1}} = \frac{9 - a_{n-1}^2}{2a_{n-1}} = \frac{9 - \frac{1}{4}(a_{n-2} + \frac{9}{a_{n-2}})^2}{2a_{n-1}} =$$

$$= \frac{9 - \frac{1}{4}(a_{n-2}^2 + 18 + \frac{81}{a_{n-2}^2})}{2a_{n-1}} = \frac{-\frac{1}{4}(a_{n-2}^2 + 18 + \frac{81}{a_{n-2}^2} - 36)}{2a_{n-1}} = \frac{-\frac{1}{4}(a_{n-2}^2 - 18 + \frac{81}{a_{n-2}^2})}{2a_{n-1}} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}(a_{n-2} - \frac{9}{a_{n-2}})^2}{2a_{n-1}} \le 0$$

Sledi da je niz $\{a_n\}$ monotono nerastući.

Kako je niz $\{a_n\}$ monotono nerastući i ograničen sa donje strane $\Rightarrow$ niz $\{a_n\}$ je konvergentan, tj. $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Iz $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{9}{a_{n-1}})$ sledi $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}(\lim_{n\to\infty} a_{n-1} + \frac{9}{\lim_{n\to\infty} a_{n-1}}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \; A = \frac{1}{2}(A + \frac{9}{A}) = \frac{A^2 + 9}{2A} \; \Leftrightarrow \; 2A^2 = A^2 + 9 \; \Leftrightarrow \; A^2 = 9.$$

Rešenja poslednje jednačine su $A_1 = 3$ i $A_2 = -3$.

Zbog $a_n > 0$ za svako $n \in N \;\Rightarrow\; A = 3$.

23. Dat je niz $\{a_n\}$, $a_1 = \sqrt[3]{2}$, $a_n = \sqrt[3]{2 + 3a_{n-1}}$, $n > 1$. Pokazati da niz konvergira i naći graničnu vrednost.

Pokažimo da je niz $\{a_n\}$ ograničen.

Za $n = 1$ treba pokazati da je $0 < a_1 < 2$.

$0 < a_1 = \sqrt[3]{2} < 2$

Za $n = k - 1$ pretpostavimo da važi $0 < a_{k-1} < 2$.

Za $n = k$ treba pokazati da je $0 < a_k < 2$.

$0 < a_k = \sqrt[3]{2 + 3a_{k-1}} < \sqrt[3]{2 + 3 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} = 2$

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da je $0 < a_n < 2$ za svako $n \in N$.

$a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow \sqrt[3]{2+3a_{n-1}} > a_{n-1} \Leftrightarrow 2+3a_{n-1} > a_{n-1}^3 \Leftrightarrow -a_{n-1}^3 + 3a_{n-1} + 2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -(a_{n-1} - 2)(a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} + 1) > 0 \Leftrightarrow (2 - a_{n-1})(a_{n-1} + 1)^2 > 0$

Ovo je tačno jer je $a_{n-1} < 2$ za svako $n \in N$. Niz $\{a_n\}$ je monotono rastući. Kako je niz $\{a_n\}$ monoton i ograničen, sledi, niz $\{a_n\}$ je konvergentan, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Iz

$a_n = \sqrt[3]{2+3a_{n-1}}$ sledi:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[3]{2 + 3\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}} \Leftrightarrow A = \sqrt[3]{2+3A} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A^3 = 2 + 3A \Leftrightarrow A^3 - 3A - 2 = 0 \Leftrightarrow (A-2)(A+1)^2 = 0$.

Rešenja poslednje jednačine su: $A_1 = 2$, i $A_2 = A_3 = -1$.

Kako je $a_n > 0$, za svako $n \in N$, sledi $A = 2$.

24. **Neka je niz $\{a_n\}$ definisan na sledeći način $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$, $a_1 = \frac{c}{2}$, $c \in R^+$. Pokazati da je niz monotono rastući. Dokazati da je niz konvergentan ako i samo ako $c \in (0,1]$ i naći njegovu graničnu vrednost.**

Pokažimo da je niz $\{a_n\}$ monotono rastući.

Za $n = 1$ treba pokazati da je $a_2 - a_1 > 0$.

$$a_2 = \frac{c}{2} + \frac{a_1^2}{2} = \frac{c}{2} + \frac{c^2}{8}$$

$$a_2 - a_1 = \frac{c}{2} + \frac{c^2}{8} - \frac{c}{2} = \frac{c^2}{8} > 0$$

Za $n = k$ pretpostavimo da važi $a_k - a_{k-1} > 0$

Za $n = k+1$ treba pokazati da je $a_{k+1} - a_k > 0$.

$$a_{k+1} - a_k = \frac{c}{2} + \frac{a_k^2}{2} - \left(\frac{c}{2} + \frac{a_{k-1}^2}{2}\right) = \frac{a_k^2 - a_{k-1}^2}{2} = \frac{(a_k - a_{k-1})(a_k + a_{k-1})}{2} > 0$$

zbog pretpostavke i zbog $a_n > 0$ za svako $n \in N$.

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da je niz $\{a_n\}$ monotono rastući $\Rightarrow$ $a_1 \le a_n$ za svako $n \in N$.

1) Niz je konvergentan $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A) \Rightarrow c \in (0,1]$

Iz $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$ sledi:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} a_n^2 \Leftrightarrow A = \frac{c}{2} + \frac{A^2}{2} \Leftrightarrow A^2 - 2A + c = 0.$$

Rešenja poslednje jednačine su: $A_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4c}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-c}$. Da bi ova rešenja bila realna mora važiti: $1-c \geq 0 \Rightarrow c \leq 1$ i $c \in R^+ \Rightarrow c \in (0,1]$

2) $c \in (0,1] \Rightarrow$ niz je konvergentan

Pokažimo da je niz $\{a_n\}$ ograničen sa gornje strane.

Za $n=1$ treba pokazati da je $a_1 < 1$.

$$a_1 = \frac{c}{2} \leq \frac{1}{2} < 1$$

Za $n=k$ pretpostavimo da važi $a_k < 1$.

Za $n=k+1$ treba pokazati da je $a_{k+1} < 1$.

$$a_{k+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_k^2}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{a_k^2}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da je $a_n < 1$, za svako $n \in N$.
Kako je niz $\{a_n\}$ monoton i ograničen sledi, niz $\{a_n\}$ je konvergentan, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Moguće granične vrednosti su: $A_1 = 1+\sqrt{1-c} > 1$ i $A_2 = 1-\sqrt{1-c} < 1$.

Zbog toga što je $a_n < 1$ za svako $n \in N$, sledi $A = 1-\sqrt{1-c}$.

25. Neka je $a > b > 0$ i neka su dati nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ definisani sa $a_1 = a$, $b_1 = b$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Dokazati da je niz $\{a_n\}$ opadajući, a niz $\{b_n\}$ rastući i da oba niza konvergiraju ka istom broju.

Primenom matematičke indukcije pokazaćemo da je $a_n > b_n > 0$.

Za $n=1$ treba pokazati da je $0 < b_1 < a_1$.

$0 < b_1 < a_1$ (sledi iz $a_1 = a > b = b_1$)

Za $n=k$ pretpostavićemo da važi $0 < b_k < a_k$.

Za $n=k+1$ treba pokazati da je $0 < b_{k+1} < a_{k+1}$.

- $\sqrt{a_k b_k} < \dfrac{a_k + b_k}{2} \; /^2 \Leftrightarrow a_k b_k < \dfrac{(a_k+b_k)^2}{4} = \dfrac{a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2}{4}$

$$0 < \frac{a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2}{4} - \frac{4a_k b_k}{4} = \frac{(a_k - b_k)^2}{4}.$$

- $\sqrt{a_k b_k} < \dfrac{a_k + b_k}{2}$ (nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine, znak jednakosti važi samo ako je $a_k = b_k$).

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da su svi članovi nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ pozitivni i da je $a_n > b_n$ za svako $n \in N$.

$a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} < \dfrac{a_n + a_n}{2} = \dfrac{2a_n}{2} = a_n \Rightarrow$ niz $\{a_n\}$ je monotono opadajući $\Rightarrow a_1 \geq a_n$, za svako $n \in N$.

$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} > \sqrt{b_n b_n} = b_n \Rightarrow$ niz $\{ b_n \}$ je monotono rastući $\Rightarrow b_1 \le b_n$, za svako $n \in N$.

Moglo je i ovako

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} < 0$

$b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = \sqrt{b_n}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) > 0$

Iz $a_n > b_n$, za svako $n \in N$ i monotonosti nizova $\{ a_n \}$ i $\{ b_n \}$, sledi: $a_1 \ge a_n > b_n \ge b_1$

Kako su nizovi $\{ a_n \}$ i $\{ b_n \}$ monotoni i ograničeni sledi da su konvergentni, tj.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Iz $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ sledi

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n) \Leftrightarrow A = \dfrac{A+B}{2} \Leftrightarrow 2A = A + B \Leftrightarrow A = B$.

KOŠIJEVI NIZOVI

Za niz $\{a_n\}$ kažemo da je Košijev ako za svako $\varepsilon \in R^+$, postoji $n_0(\varepsilon) \in N$ takav da je $|a_m - a_n| < \varepsilon$, za svako $m,n \geq n_0(\varepsilon)$, odnosno, ako za svako $\varepsilon \in R^+$ postoji $n_0(\varepsilon) \in N$, takav da je $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ za svako $n \geq n_0(\varepsilon)$ i $p \in N$.

Svaki konvergentan niz je Košijev. U metričkom prostoru R važi: niz $\{a_n\}$ je Košijev ako i samo ako je konvergentan.

1. Dati su Košijevi realni nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$.

a) Ako je $a_n \in R_1 = R \setminus \{1\}$, ispitati da li je niz $\{a_n\}$ konvergentan

i) u prostoru R

ii) u prostoru R_1 (Posmatrati niz $\{a_n\}$ dat sa

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

b) Da li je niz $\{a_n \cdot b_n\}$

i) konvergentan,

ii) Košijev?

a)

i) Niz $\{a_n\}$ je Košijev $\Rightarrow$ Niz $\{a_n\}$ je konvergentan u prostoru R.

ii)

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < a_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \notin R_1.$$

Niz $\{a_n\}$ u prostoru R_1 nije konvergentan.

b) Nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ su Košijevi $\Rightarrow$ Nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ su konvergentni u prostoru R ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$).

i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b \Rightarrow$ Niz $\{a_n \cdot b_n\}$ je konvergentan.

ii) Pošto je konvergentan onda je i Košijev.

2. Dati su nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ sa opštim članovima $a_n = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$ i $b_n = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n$. Pokazati da je niz $\{a_n\}$ divergentan, a niz $\{b_n\}$ konvergentan.

Pokazaćemo da niz $\{a_n\}$ nije Košijev, odnosno da postoji $\varepsilon > 0$ takvo da za svako $n_0 \in N$ postoji $n > n_0(\varepsilon)$ i $p \in N$ tako da važi $|a_{n+p} - a_n| > \varepsilon$.

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+p}-(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}) \right| =$$

$$= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+p} > \frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+p}+...+\frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}$$

Za $p = n$ dobija se $|a_{2n} - a_n| > \frac{n}{n+n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.

Kako niz $\{a_n\}$ nije Košijev sledi da nije ni konvergentan.

Za niz $\{b_n\}$ ćemo pokazati da je monotono opadajući i ograničen.

$$b_{n+1} - b_n = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)-(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n) =$$

$$= \frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n = \frac{1}{n+1}-(\ln(n+1)-\ln n) = \frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n}) < 0 \text{ jer}$$

logaritmovanjem nejednakosti $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ dobija se

$$n\ln(1+\frac{1}{n}) < 1 < (n+1)\ln(1+\frac{1}{n}) \Leftrightarrow n < \frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})} < n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}.$$

Treba još pokazati da je niz ograničen sa donje strane.

Iz $\ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ sledi $\ln 2 < 1$, $\quad \ln\frac{3}{2} < \frac{1}{2}$, $\quad \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$.

Sabiranjem nejednakosti dobija se

$$\ln 2\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n} < 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n} \Leftrightarrow \ln(n+1) < 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$$

$$\ln n < \ln(n+1) < 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n > 0$$

Niz $\{b_n\}$ je konvergentan $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ (poznata Ojlerova konstanta).

3. Dati su opšti članovi nizova

$$a_n = \frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+...+\frac{\sin n}{2^n} \quad \text{i} \quad b_n = \frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+...+\frac{1}{\ln n}.$$

Pomoću Košijevog kriterijuma pokazati da je niz:

a) $\{a_n\}$ konvergentan **b) $\{b_n\}$ divergentan.**

a) Pokazaćemo da je niz $\{a_n\}$ Košijev!

$$\left|a_{n+p}-a_n\right|=\left|\frac{\sin 1}{2}+\ldots+\frac{\sin n}{2^n}+\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}-\left(\frac{\sin 1}{2}+\ldots+\frac{\sin n}{2^n}\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|\le\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}\right|+\left|\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}\right|+\ldots+\left|\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+p}}<\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+p}}+\frac{1}{2^{n+p+1}}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{2^p}+\ldots\right)\le\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}<\varepsilon$$

$$\frac{1}{2^n}<\varepsilon\Leftrightarrow 2^n>\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow n\ln 2>\ln\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow n>\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\Rightarrow n_0=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right]+1$$

Niz $\{a_n\}$ je Košijev $\Rightarrow$ Niz $\{a_n\}$ je konvergentan.

b) Pokazaćemo da niz $\{b_n\}$ nije Košijev.

$$\left|b_{n+p}-b_n\right|=\left|\frac{1}{\ln 2}+\ldots+\frac{1}{\ln n}+\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+p)}-\left(\frac{1}{\ln 2}+\ldots+\frac{1}{\ln n}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{\ln(n+1)}+\frac{1}{\ln(n+2)}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+p)}>\frac{1}{\ln(n+p)}+\frac{1}{\ln(n+p)}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+p)}=$$

$$=\frac{p}{\ln(n+p)}>\frac{p}{n+p}$$

$p=n \Rightarrow \left|b_{n+p}-b_n\right|>\dfrac{n}{n+n}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ Niz $\{b_n\}$ nije Košijev $\Rightarrow$ Niz $\{b_n\}$ nije konvergentan.

4. Proveriti da li je niz $a_n=\dfrac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{\cos n!}{n(n+1)}$ Košijev.

$$\left|a_{n+p}-a_n\right|=\left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)}+\frac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)}\right|\le$$

$$\le\left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)}\right|+\left|\frac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)}\right|+\ldots+\left|\frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}=$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$$

$\dfrac{1}{n}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\dfrac{1}{\varepsilon}\Rightarrow n_0=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1 \Rightarrow$ Niz $\{a_n\}$ je Košijev.

Granične vrednosti funkcija

Neka je $f : X \to R$, $X \subset R$ realna funkcija jedne realne promenljive i neka je a tačka nagomilavanja za definicioni skup X. Za funkciju $y = f(x)$ se kaže da ima graničnu vrednost A u tački a ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon) > 0$ takvo da za svako $x \in X \setminus \{a\}$ ako je $|x-a| < \delta(\varepsilon)$ sledi $|f(x)-A| < \varepsilon$. Tada pišemo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Osnovne osobine graničnih vrednosti funkcija

Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, tada je, pod uslovom da je x_0 tačka nagomilavanja preseka definicionih skupova funkcija $f(x)$ i $g(x)$,

1) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \pm B$,
2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \cdot B$,
3) $\lim\limits_{x\to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c \cdot A$,
4) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$ za $g(x) \neq 0$ i $B \neq 0$.

Ako u tački x_0 funkcija ima desnu i levu graničnu vrednost onda ona u toj tački ima graničnu vrednost ako su leva i desna granična vrednost jednake.

- $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(x+1)}{x} = \log_a e$

Sve napomene koje smo dali pri traženju graničnih vrednosti nizova primenjuju se i za traženje graničnih vrednosti funkcija.

1. $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^3+x^2+x-3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+2x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2. $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \lim_{t\to 1} \frac{t^4-1}{t^3-1} = \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)(t^3+t^2+t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \lim_{t\to 1} \frac{t^3+t^2+t+1}{t^2+t+1} = \frac{4}{3}.$$

Smena: $\sqrt[12]{x} = t \Rightarrow x = t^{12}$, $x \to 1 \Rightarrow t \to 1$.

3. $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{x^3+x^2+15}}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{x^3+x^2+15}-3+3}{x^2-5x+6}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-5x+6}-\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+15}-3}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-5x+6}\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}-$$

$$-\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+15}-3}{x^2-5x+6}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x^3+x^2+15)^2}+3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+15)^2}+3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x^2-5x+6)(\sqrt{x^2+5}+3)}-$$

$$-\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2+15-27}{(x^2-5x+6)(\sqrt[3]{(x^3+x^2+15)^2}+3\cdot\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}-\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-12}{x^2-5x+6}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+15)^2}+3\cdot\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}\cdot\frac{1}{6}-\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+3x+6)}{(x-2)(x-3)}\cdot\frac{1}{27}=-4\cdot\frac{1}{6}+16\cdot\frac{1}{27}=-\frac{2}{27}.$$

4. $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x^2+121}}{\sqrt{3x-2}-\sqrt[3]{3x+2}}=\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3+\sqrt{x+2}-2-\sqrt[3]{x^2+121}+5}{x-2}}{\dfrac{\sqrt{3x-2}-2-\sqrt[3]{3x+2}+2}{x-2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}+\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}-\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+121}-5}{x-2}}{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}-\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}}$$

Kako je

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 2}(x+2)=\frac{4}{6},$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^2+121}-5}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^2+121}-5}{x-2}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2+121}+5\sqrt[3]{x^2+121}+25}{\sqrt[3]{x^2+121}+5\sqrt[3]{x^2+121}+25}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}\cdot\frac{1}{75}=\frac{1}{75}\lim_{x\to 2}(x+2)=\frac{4}{75},$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{3x-2}+2}{\sqrt{3x-2}+2}=\lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{x-2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\quad \text{i}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}\cdot\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2\sqrt[3]{3x+2}+4}{\sqrt[3]{3x+2}-2\sqrt[3]{3x+2}+4}=\lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{x-2}\cdot\frac{1}{12}=\frac{3}{12},$$

sledi da je: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x^2+121}}{\sqrt{3x-2}-\sqrt[3]{3x+2}}=\dfrac{\frac{4}{6}+\frac{1}{4}-\frac{4}{75}}{\frac{3}{4}-\frac{3}{12}}=\dfrac{259}{150}$.

5. $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x^2-3}{x+3}\right)^{\frac{x}{x^2-4}}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+3+2x^2-x-6}{x+3}\right)^{\frac{x}{x^2-4}}=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2x^2-x-6}{x+3}\right)^{\frac{x}{x^2-4}}=$$

$$\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2x^2-x-6}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2x^2-x-6}\cdot\frac{2x^2-x-6}{x+3}\cdot\frac{x}{x^2-4}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x+3}\cdot\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{x^2-4}}=e^{\frac{2}{5}\cdot\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)(x+2)}}=$$

$$=e^{\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{4}}=e^{\frac{7}{10}}=\sqrt[10]{e^7}.$$

6. $$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{x-e}=\lim_{x\to e}\ln\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}}=\ln\lim_{x\to e}\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}}=$$

$$=\ln\lim_{x\to e}\left(1+\frac{x}{e}-1\right)^{\frac{1}{x-e}}=\ln\lim_{x\to e}\left(1+\frac{x-e}{e}\right)^{\frac{e}{x-e}\cdot\frac{1}{e}}=\ln e^{\lim\limits_{x\to e}\frac{1}{e}}=\ln e^{\frac{1}{e}}=\frac{1}{e}.$$

7. $$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}(1-x)\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}\cdot\lim_{x\to 1}\sin\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)}\cdot 1$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}(1-x)}\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

8. $$\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}}\qquad y=(\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}}\Rightarrow\ln y=\frac{1}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}\ln(\operatorname{tg}x)$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}\cdot\ln\frac{\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x-\ln\cos x}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}-\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}x}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}+\ln x}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}+\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln x}{\ln x}}{\frac{1}{\ln x}+\sqrt[3]{\frac{1}{\ln^3 x}+\frac{1}{\ln x}}} = \frac{1}{0^-} = -\infty .$$

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \ln \lim_{x\to 0} y = -\infty \ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0} y = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0 .$$

Primetimo da ovde ne postoji leva granična vrednost u tački $x=0$, jer funkcija nije definisana za $x<0$.

9. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1+sinx}}{x^3} \cdot \frac{\sqrt{1+tgx}+\sqrt{1+sinx}}{\sqrt{1+tgx}+\sqrt{1+sinx}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+tgx-1-\sin x}{x^3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+tgx}+\sqrt{1+\sin x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3 \cos x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4\cdot \frac{x^2}{4}} \cdot 1 = \frac{1}{4} \cdot \lim_{x\to 0} \Big(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\Big)^2 = \frac{1}{4} .$$

10. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (sinx)^{tg^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\sin x-1)^{\frac{1}{\sin x-1}(\sin x-1)\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-1}{1-\sin^2 x}} =$$

$$= e^{1\cdot \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}} = e^{-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} .$$

11. $$\lim_{x\to 1} (sin^2 \frac{\pi x}{2})^{\frac{1}{(x-1)^3}} = \lim_{x\to 1} (1-\cos^2 \frac{\pi x}{2})^{\frac{1}{-\cos^2 \frac{\pi x}{2}}\cdot(-\cos^2 \frac{\pi x}{2})\cdot \frac{1}{(x-1)^3}} = e^{-\lim\limits_{x\to 1} \frac{\cos^2 \frac{\pi x}{2}}{(x-1)^3}} =$$

$$= e^{-\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin^2 (\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2})}{(x-1)^3}} = e^{-\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}(1-x)}{(x-1)^2 (x-1)}} = e^{-\lim\limits_{x\to 1} \left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}(1-x)\frac{2}{\pi}}\right]^2 \cdot \frac{1}{x-1}} =$$

$$= e^{-\frac{\pi^2}{4} \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x-1}} = \begin{cases} 0 \ \text{kada} \ x\to 1^+ \\ \infty \ \text{kada} \ x\to 1^- . \end{cases}$$

Dakle, granična vrednost $\lim\limits_{x\to 1} (sin^2 \frac{\pi x}{2})^{\frac{1}{(x-1)^3}}$ ne postoji.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\dfrac{\ln(t+1)}{\ln a}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t\ln a}{\ln(t+1)}=\ln a\cdot\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\ln(t+1)}{t}}=\ln a\cdot\dfrac{1}{\ln e}=\ln a.$

Smena: $a^x-1=t$, $a^x=t+1$, $x=\dfrac{\ln(t+1)}{\ln a}$, $x\to 0\Rightarrow t\to 0$.

Proveriti da li postoje sledeće granične vrednosti

13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x}{x-2}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x}{x-2}=-\infty$.

Funkcija nema graničnu vrednost jer sa jedne strane teži $+\infty$, a sa druge $-\infty$. Napomenimo da funkcija ne teži ni $+\infty$, ni $-\infty$ kada $x\to 2$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$.

Funkcija nema graničnu vrednost u tački $x=0$ jer su leva i desna granična vrednost različite.

15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{|x-1|}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}1=1$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{-(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}-1=-1$.

Funkcija nema graničnu vrednost u tački $x=1$ jer su leva i desna granična vrednost različite.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}$

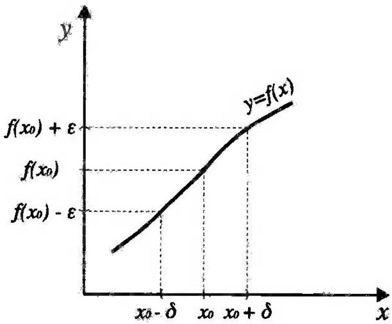
$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\sin x}{x}=-1$.

Funkcija nema graničnu vrednost u tački $x=0$ jer su leva i desna granična vrednost različite.

Neprekidnost funkcije

Za funkciju $f: D \to R$ kažemo da je neprekidna u tački $x_0 \in D$ ako za svako $\varepsilon \in R^+$ postoji $\delta \in R^+$ takvo da svako $x \in D$ važi $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Da bi funkcija bila neprekidna u tački x_0 treba da važi:



1. $x_0 \in D$, tj. funkcija je definisana u tački x_0,
2. ako je x_0 tačka nagomilavanja za D, tada postoji $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ i važi jednakost $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,
3. Ako je $x_0 \in D$ izolovana tačka tada je funkcija neprekidna u toj tački.

Ako funkcija nije neprekidna u tački x_0, onda kažemo da je funkcija f prekidna u tački x_0, odnosno da funkcija f ima prekid u tački x_0.

Za funkciju $f: D \to R$ kažemo da je neprekidna u tački $x_0 \in D$ sa leve (desne) strane ako za svako $\varepsilon \in R^+$ postoji $\delta \in R^+$ tako da za svako $x \in (x_0 - \delta, x_0] \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $(x \in [x_0, x_0 + \delta))$

Ako je $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ funkcija je neprekidna sa leve strane.

Ako je $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ funkcija je neprekidna sa desne strane.

Funkcija f je neprekidna u tački x_0 ako i samo ako je neprekidna u tački x_0 sa leve i sa desne strane.

Neka funkcija f u tački x_0 ima prekid i neka je x_0 tačka nagomilavanja za oblast definisanosti D.

1. Ako postoji $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, onda kažemo da funkcija f u tački x_0 ima prividan (otklonjiv) prekid $(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0))$
2. Ako postoji $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, pri čemu je $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, onda kažemo da funkcija f u tački x_0 ima skok.

Prekid prve vrste (prividan prekid ili skok). Prekid druge vrste (ako nije prekid prve vrste).

1. **Data je funkcija** $f(x)=\begin{cases}(e+x)^{\sin x}, & x\geq 0\\ \sin x+A, & x<0.\end{cases}$

Odrediti A **tako da funkcija bude neprekidna.**

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-}(\sin x+A)$$

$$\lim_{x\to 0^-}(\sin x+A)=A,\ f(0)=1\Rightarrow A=1$$

2. **Data je funkcija** $f(x)=\begin{cases}(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ A, & x=0\\ -\dfrac{1}{1+\ln x}, & x>0.\end{cases}$

Odrediti A **tako da funkcija bude neprekidna.**

$$\lim_{x\to 0^-}(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}=0,\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{1+\ln x}=0$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-}(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{1+\ln x}\Rightarrow A=0$$

3. **Data je funkcija** $f(x)=\begin{cases}\mathrm{arctg}(1+\frac{1}{x}), & x\neq 0\\ A, & x=0.\end{cases}$

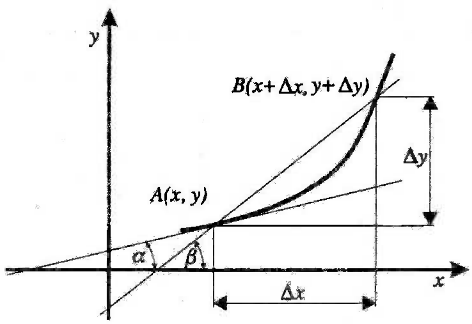
Da li se može odrediti konstanta A **tako da funkcija bude neprekidna u tački** $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}\mathrm{arctg}(1+\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}\qquad \lim_{x\to 0^-}\mathrm{arctg}(1+\frac{1}{x})=-\frac{\pi}{2}$$

Leva i desna granična vrednost nisu iste pa ne postoji $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$. Znači, ne postoji konstanta A takva da je funkcija $f(x)$ neprekidna u tački $x=0$.

DIFERENCIJALNI RAČUN

Posmatrajmo grafik neprekidne funkcije $y = f(x)$ nad intervalom (a,b).



Ako postoji granična vrednost $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, x, $x+\Delta x \in (a,b)$, onda se ta granična vrednost, koja se označava sa $f'(x)$ ili y' zove izvod funkcije $f(x)$ u tački x.

Dakle, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Prava AB, gde su A i B tačke grafika, naziva se sečica te krive, određena tačkama A i B. Pustimo da se tačka B kreće po krivoj i da teži da se poklopi sa tačkom A. Sečica AB pri tom menja svoj položaj (nagib). Ukoliko postoji granični položaj te sečice kada tačka B teži ka tački A, tada se prava koja zauzima taj položaj naziva tangenta krive $y = f(x)$ u tački A.

Pretpostavimo da je ugao α koji tangenta zaklapa sa pozitivnim smerom x-ose različit od $\dfrac{\pi}{2}$, $(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2})$. Ako je β ugao koji zaklapa sečica AB sa pozitivnim delom x-ose, to je

$$tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

pa je koeficijent pravca $tg\alpha$ tangente kroz tačku A dat izrazom

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Neka je funkcija $y = f(x)$ diferencijabilna nad intervalom (a,b). Izvod $f'(x)$ funkcije $f(x)$ je funkcija nezavisne promenljive x, definisana nad intervalom (a,b). Ako je ona diferencijabilna u nekoj tački $x \in (a,b)$, onda se njen izvod
$(f'(x))'$ naziva drugim izvodom ili izvodom drugog reda funkcije $f(x)$ u tački x, koji ćemo označavati sa $y'' = f''(x)$.

Ako je definisan izvod $(n-1)$ reda, $n \geq 2$, tada je $n-$ti izvod ili izvod $n-$tog reda definisan kao izvod funkcije $y = f^{(n-1)}(x)$, tj. $(f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x)$.

Tablica izvoda

	Funkcija $f(x)$	Izvod $f'(x)$	Važi za
1.	$c = const$	0	$x \in R$
2.	x	1	$x \in R$
3.	x^n	nx^{n-1}	$n \in N$, $x \in R$
	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	a) $\alpha = \frac{p}{q} \in Q$, $q \in N$ neparan broj, $x \neq 0$ b) $\alpha = \frac{p}{q} > 1$, q neparan broj, $x \in R$
	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x \in R$, $x > 0$
4.	a^x	$a^x \ln a$	$a > 0$, $a \neq 1$, $x \in R$
5.	e^x	e^x	$x \in R$
6.	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$
7.	$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$,
8.	$\sin x$	$\cos x$	$x \in R$
9.	$\cos x$	$-\sin x$	$x \in R$
10.	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$
11.	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$, $k \in Z$
12.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\| < 1$
13.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\| < 1$
14.	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in R$
15.	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in R$

Osobine izvoda

Ako funkcije $u=u(x)$ i $v=v(x)$ imaju izvod u tački x, tada i funkcije $u\pm v$, uv, $\frac{u}{v}$ i cu, $c\in R$, imaju izvode u toj tački ($\frac{u}{v}$ pod pretpostavkom da je $v(x)\neq 0$ u datoj tački x). Pri tom je:

a) $[u(x)\pm v(x)]' = u'(x)\pm v'(x)$,

b) $[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$,

c) $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$,

d) $(c\cdot u(x))' = c\cdot u'(x)$ (c je konstanta).

Izvod složene funkcije

Neka je data složena funkcija $y=f(u)$, $u=g(x)$. Ako $g(x)$ ima izvod u tački x, a $f(u)$ izvod u tački u, tada je

$(f\circ g)'(x)=f'(u)\cdot g'(x) \qquad ((f\circ g)(x)=f(g(x)))$.

1. Naći izvod funkcije $y=x^2$ po definiciji.

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2 - x^2 = \Delta x(2x+\Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x+\Delta x$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x.$$

2. Naći izvod funkcije $y=(x^2-3x+3)^5$.

$$u=x^2-3x+3 \Rightarrow y=u^5$$

$$y' = y'_u\cdot u'_x = (u^5)'_u\cdot(x^2-3x+3)'_x = 5u^4\cdot(2x-3) = 5(x^2-3x+3)^4\cdot(2x-3).$$

3. Naći izvod funkcije $y=ln\frac{1+\sqrt{sinx}}{1-\sqrt{sinx}}+2arctg\sqrt{sinx}$.

$$y' = \frac{1-\sqrt{\sin x}}{1+\sqrt{\sin x}}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}\right)' + 2\cdot\frac{1}{1+(\sqrt{\sin x})^2}\cdot(\sqrt{\sin x})' = \frac{1-\sqrt{\sin x}}{1+\sqrt{\sin x}}\cdot$$

$$\cdot\frac{(1+\sqrt{\sin x})'(1-\sqrt{\sin x})-(1+\sqrt{\sin x})(1-\sqrt{\sin x})'}{(1-\sqrt{\sin x})^2} + 2\cdot\frac{1}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot(\sin x)' =$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot(\sin x)'(1-\sqrt{\sin x})-(1+\sqrt{\sin x})(-\frac{1}{2\sqrt{\sin x}})(\sin x)'}{(1+\sqrt{\sin x})(1-\sqrt{\sin x})}+\frac{1}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x=$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x\cdot(1-\sqrt{\sin x})+(1+\sqrt{\sin x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x}{1-\sin x}+\frac{\cos x}{(1+\sin x)\cdot\sqrt{\sin x}}=$$

$$=\frac{\cos x\cdot(1-\sqrt{\sin x}+1+\sqrt{\sin x})}{2\cdot(1-\sin x)\cdot\sqrt{\sin x}}+\frac{\cos x}{(1+\sin x)\cdot\sqrt{\sin x}}=$$

$$=\frac{2\cos x\cdot(1+\sin x)+2\cos x\cdot(1-\sin x)}{2\cdot(1-\sin x)(1+\sin x)\cdot\sqrt{\sin x}}=\frac{2\cos x}{(1-\sin^2 x)\cdot\sqrt{\sin x}}=\frac{2}{\cos x\cdot\sqrt{\sin x}}.$$

4. Naći izvod funkcije $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$.

$$y'=2^{\frac{x}{\ln x}}\cdot\ln 2\cdot\frac{1\cdot\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=2^{\frac{x}{\ln x}}\cdot\ln 2\cdot\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}.$$

5. Naći izvod funkcije $y=(\frac{x}{a})^b+(\frac{b}{x})^a+(\frac{a}{b})^x$.

$$y'=\frac{1}{a^b}\cdot b\cdot x^{b-1}+b^a\cdot(-\frac{a}{x^{a+1}})+(\frac{a}{b})^x\cdot\ln\frac{a}{b}.$$

6. $y=a^{a^x}+a^{x^a}+x^{a^a}+a^{a^a}$,

$$y'=a^{a^x}\cdot\ln a\cdot a^x\cdot\ln a+a^{x^a}\cdot\ln a\cdot a\cdot x^{a-1}+a^a\cdot x^{a^a-1}.$$

Logaritamski izvod

Po ovom pravilu možemo da tražimo izvod funkcije samo u tačkama gde je funkcija pozitivna.

7. Naći izvod funkcije $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot\frac{1-x}{1+x^2}\cdot\sin^3 x\cdot\cos^2 x$.

$$\ln y=\ln(x^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1-x}{1+x^2}\cdot\sin^3 x\cos^2 x)=\frac{2}{3}\ln x+\ln(1-x)-\ln(1+x^2)+3\ln\sin x+2\ln\cos x$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\cdot(-1)-\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x+3\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x+2\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)$$

$$y'=y(\frac{2}{3x}-\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}+3ctgx-2tgx)$$

$$y'=\sqrt[3]{x^2}\cdot\frac{1-x}{1+x^2}\cdot\sin^3 x\cdot\cos^2 x\cdot(\frac{2}{3x}-\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}+3ctgx-2tgx).$$

8. Naći drugi izvod funkcije $y = x^x$.

$ln\,y = x \cdot ln\,x$

$\frac{1}{y}y' = 1 \cdot ln\,x + x \cdot \frac{1}{x} = ln\,x + 1$ $\qquad y'' = (x^x)' \cdot (ln\,x + 1) + x^x \cdot (ln\,x + 1)'$

$y' = x^x(ln\,x + 1)$ $\qquad y'' = x^x(ln\,x + 1)^2 + \frac{x^x}{x}$.

9. Naći izvod funkcije $y = (\frac{x}{1+x})^x + lnx$.

Ako je $y_1 = (\frac{x}{1+x})^x$ sledi $y' = y_1' + (ln\,x)'$

$ln\,y_1 = x \cdot ln\frac{x}{1+x}$

$\frac{1}{y_1}y_1' = ln\frac{x}{1+x} + x \cdot \frac{1+x}{x} \cdot \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = ln\frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}$

$y_1' = (\frac{x}{1+x})^x \cdot \left[ln\frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}\right]$

$y' = (\frac{x}{1+x})^x \cdot (ln\frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}) + \frac{1}{x}$.

Izvod inverzne funkcije

Neka je $f(x)$ neprekidna strogo monotona funkcija definisana nad intervalom (a,b), a $f^{-1}(x)$ njena inverzna funkcija. Ako funkcija $f(x)$ ima izvod $f'(x)$ u tački $x \in (a,b)$, pri čemu je $f'(x) \neq 0$, tada funkcija $f^{-1}(x)$ ima izvod u tački $y = f(x)$ i važi $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, tj. $y_x' = \frac{1}{x_y'}$.

$$y_x'' = \frac{dy_x'}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{x_y'}) = \frac{d}{dy}(\frac{1}{x_y'}) \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{x_y''}{(x_y')^2} \cdot \frac{1}{x_y'} = -\frac{x_y''}{(x_y')^3}$$

$$y_x''' = \frac{dy_x''}{dx} = \frac{d}{dx}(-\frac{x_y''}{(x_y')^3}) = \frac{d}{dy}(-\frac{x_y''}{(x_y')^3}) \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{x_y'''(x_y')^3 - x_y'' \cdot 3(x_y')x_y''}{(x_y')^6} \cdot \frac{1}{x_y'} =$$

$$= \frac{3(x_y'')^2 - x_y''' \cdot x_y'}{(x_y')^5}, \text{ itd.}$$

10. Naći y'' za $y = tg(x+y)$.

$arctgy = x + y \Rightarrow x = arctgy - y$

$x_y' = \frac{1}{1+y^2} - 1 = -\frac{y^2}{1+y^2}$, $\qquad y_x' = \frac{1}{x_y'} = -\frac{1+y^2}{y^2} = -\frac{1}{y^2} - 1$

$y_x'' = (y_x')_y' \cdot y_x' = (-\frac{1}{y^2} - 1)_y' \cdot (-\frac{1}{y^2} - 1) = \frac{2}{y^3}(-\frac{1}{y^2} - 1) = -\frac{2}{y^5} - \frac{2}{y^3}$.

Izvod funkcije zadate u parametarskom obliku

Neka su nad intervalom $I \subset R$ definisane dve realne funkcije $x=\varphi(t)$ i $y=\psi(t),\ t\in I$ i neka za funkciju $\varphi(t)$ postoji inverzna funkcija $t=\varphi^{-1}(x)$. Tada je složena funkcija $y=\psi(\varphi^{-1}(x))=f(x)$, definisana nad skupom vrednosti $\{\ \varphi(t): t\in I\ \}$ funkcije $\varphi(t)$. Kažemo da je sa $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in I$, funkcija $f(x)$ zadata u parametarskom obliku pri čemu ćemo pomoćnu promenljivu t nazvati parametrom.

Neka je data funkcija $y=f(x)$ u parametarskom obliku $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in(a,b)$. Ako neprekidne funkcije $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ imaju izvode u tački $t\in(a,b)$, i ukoliko je $\varphi'(t)\neq 0$, tada funkcija $y=f(x)$ ima izvod u tački t i važi $f'(x)=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, tj. $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

$$y''_x=\frac{dy'_x}{dx}=\frac{dy'_x}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=(y'_x)'_t\cdot t'_x=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

$$\left(y''_x=\frac{dy'_x}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{y''_t\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_t}{(x'_t)^2}\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{y''_t\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_t}{(x'_t)^3}\right)$$

$$y'''=\frac{dy''_x}{dx}=\frac{dy''_x}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=(y''_x)'_t\cdot t'_x=\frac{(y''_x)'_t}{x'_t}, \text{ itd.}$$

11. **Naći y'' za $x=\ln t$ i $y=t+\dfrac{1}{t}$.**

$$y'_t=1-\frac{1}{t^2}=\frac{t^2-1}{t^2},\quad x'_t=\frac{1}{t},\qquad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\frac{t^2-1}{t^2}}{\frac{1}{t}}=\frac{t^2-1}{t}=t-\frac{1}{t}$$

$$(y'_x)'_t=1+\frac{1}{t^2}=\frac{t^2+1}{t^2}\qquad y''_x=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\frac{t^2+1}{t^2}}{\frac{1}{t}}=\frac{t^2+1}{t}=t+\frac{1}{t}.$$

Izvod funkcije zadate implicitno

12. **Naći y'' za $arctg\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.**

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(2x+2yy')$$

$$\frac{y'x-y}{\frac{x^2+y^2}{x^2}\cdot x^2}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2}$$

$$y'x-y=x+yy'\Rightarrow y'x-yy'=x+y\Rightarrow y'(x-y)=x+y\Rightarrow y'=\frac{x+y}{x-y}.$$

$$y'' = \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = \frac{x-y+xy'-yy'-(x-xy'+y-yy')}{(x-y)^2} = \frac{2xy'-2y}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{2x\cdot\frac{x+y}{x-y}-2y}{(x-y)^2} = \frac{2x^2+2xy-2xy+2y^2}{(x-y)^3} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

13. Pokazati da funkcija $y = e^{2x}sin5x$ zadovoljava jednačinu $y'' - 4y' + 29y = 0$.

$$y' = 2e^{2x}\sin 5x + 5e^{2x}\cos 5x$$

$$y'' = 4e^{2x}\sin 5x + 10e^{2x}\cos 5x + 10e^{2x}\cos 5x - 25e^{2x}\sin 5x =$$

$$= -21e^{2x}\sin 5x + 20e^{2x}\cos 5x$$

$$\underbrace{-21e^{2x}\sin 5x + 20e^{2x}\cos 5x}_{y''} - 4\cdot\underbrace{(2e^{2x}\sin 5x + 5e^{2x}\cos 5x)}_{y'} + 29e^{2x}\sin 5x = 0.$$

Lopitalovo pravilo

"$\frac{0}{0}$" i "$\frac{\infty}{\infty}$"

Količnik $\frac{f(x)}{g(x)}$ ima neodređeni oblik "$\frac{0}{0}$" kada $x \to a$, ako važi da je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, odnosno neodređeni oblik "$\frac{\infty}{\infty}$" ako $f(x) \to \pm\infty$ i $g(x) \to \pm\infty$ kada $x \to a$.

Za nalaženje granične vrednosti neodređenog oblika "$\frac{0}{0}$" i "$\frac{\infty}{\infty}$" treba proveriti da li granična vrednost $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ postoji ili ne. Za nalaženje granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, često se pokazuju korisnim tzv. Lopitalova pravila.

Neka su funkcije $f:(a,b) \to R$ i $g:(a,b) \to R$ diferencijabilne nad otvorenim intervalom (a,b) i pri tom je $g'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$ i neka je

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0 \quad (\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} g(x) = 0)$.

Ako postoji $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ $(\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)} = B)$ tada postoji i $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ $(\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)})$ i važi jednakost $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ $(\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)} = B)$

Ako $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \pm\infty$, kada $x \to a^+$ (kada $x \to b^-$), tada i $\frac{f(x)}{g(x)} \to \pm\infty$, kada $x \to a^+$ (kada $x \to b^-$).

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tgx}-e^{-tgx}-2x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tgx}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}-e^{-tgx}\cdot(-\dfrac{1}{\cos^2 x})-2}{6x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tgx}+e^{-tgx}-2\cos^2 x}{6x^2\cos^2 x}=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tgx}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}-e^{-tgx}(-\dfrac{1}{\cos^2 x})-2\cdot 2\cos x(-\sin x)}{2x}=$

$=\dfrac{1}{12}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tgx}-e^{-tgx}+4\sin x\cdot\cos^3 x}{x\cdot\cos^2 x}=\dfrac{-1}{12}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tgx}-e^{-tgx}+4\sin x\cdot\cos^3 x}{x}=$

$=\dfrac{1}{12}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tgx}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}-e^{-tgx}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}+4\cos^4 x-12\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{1}=$

$=\dfrac{1}{12}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{e^{tgx}}{\cos^2 x}+\dfrac{e^{-tgx}}{\cos^2 x}+4\cos^4 x-12\sin^2 x\cdot\cos^2 x)=\dfrac{1}{12}(1+1+4)=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}.$

15. **Naći** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}$, $a>0$, $n>0$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n\cdot x^{n-1}}{a\cdot e^{ax}}=\dfrac{n}{a}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{n-1}}{e^{ax}}=\dfrac{n}{a}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n-1)x^{n-2}}{a\cdot e^{ax}}=\dfrac{n(n-1)}{a^2}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{n-2}}{e^{ax}}=$

$=\ldots\ldots=\dfrac{n!}{a^n}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^{ax}}=0.$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{-100}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-100\cdot x^{-101}}{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot(-\frac{2}{x^3})}=50\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{-98}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=50\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-98\cdot x^{-99}}{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot(-\frac{2}{x^3})}=$

$=50\cdot 49\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{-96}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\ldots\ldots=50!\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{-2}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=50!\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot(-\frac{2}{x^3})}=50!\cdot\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0.$

17. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}=\cos a\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}=\cos a\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{1}{x-a}}{\dfrac{e^x}{e^x-e^a}}=$

$=\cos a\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{e^x(x-a)}=\dfrac{\cos a}{e^a}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}=\dfrac{\cos a}{e^a}\lim\limits_{x\to a}e^x=\dfrac{\cos a}{e^a}\cdot e^a=\cos a.$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$

Neka je $f(x)=x+\sin x$, a $g(x)=x$. Ovde ne možemo da primenimo Lopitalovo pravilo jer $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ ne postoji.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x})=1\text{, jer je }\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

I ostali neodređeni izrazi oblika " $0\cdot\infty$ ", " $\infty-\infty$ ", " 0^0 ", " ∞^0 " i " 1^∞ " mogu se određivati koristeći Lopitalova pravila (ukoliko su zadovoljeni uslovi za njegovu primenu).

a) " $\boldsymbol{0\cdot\infty}$ "

Ako je $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ i $g(x)\to\pm\infty$ kada $x\to a$, tada je

$\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$, a to je neodređeni izraz oblika " $\dfrac{0}{0}$ ", ili

$\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{1/f(x)}$, a to je neodređeni izraz oblika " $\dfrac{\infty}{\infty}$ ".

19. $$\lim_{x\to 1}\ln(x-1)\cdot\ln x=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{-1}{\ln^2 x}\cdot\dfrac{1}{x}}=-\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot\ln^2 x}{x-1}=$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{\ln^2 x+x\cdot 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}}{1}=-\lim_{x\to 1}(\ln^2 x+2\ln x)=0.$$

b) " $\infty-\infty$ "

$(f(x)\to\pm\infty$ kada $x\to a$ i $g(x)\to\pm\infty$ kada $x\to a)$

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\left[1-\frac{g(x)}{f(x)}\right]$$

Ako je $\lim\limits_{x\to a}\left[1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right]=0$ slučaj se svodi na prethodni.

Ako je $\lim\limits_{x\to a}\left[1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right]\neq 0$, to $f(x)-g(x)\to\pm\infty$, kada $x\to a$.

20. $$\lim_{x\to\infty}(x-x^2\ln(1+\frac{1}{x}))=\lim_{x\to\infty}x\left[1-x\ln(1+\frac{1}{x})\right]$$

- $$\lim_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{1}{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(-\dfrac{1}{x^2})}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}x\left[1-x\ln(1+\frac{1}{x})\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x\ln(1+\frac{1}{x})}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-(\ln(1+\frac{1}{x})+x\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(-\dfrac{1}{x^2}))}{-\dfrac{1}{x^2}}=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})-\frac{-1}{(x+1)^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x(x+1)+x^2}{x^2(x+1)^2}}{-\frac{2}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{2x^2(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2(x^2+2x+1)} = \frac{1}{2}.$$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{1+x^2 ln\frac{ex}{x+1}}-x) = \lim\limits_{x\to\infty} x\left[\sqrt{\frac{1}{x^2}+ln\frac{ex}{x+1}}-1\right] = *$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+ln\frac{ex}{x+1}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+ln\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ex}{x+1}} = \sqrt{ln\,e} = \sqrt{1} = 1$

$$* = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+ln\frac{ex}{x+1}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}+ln\frac{ex}{x+1}}}\cdot(-\frac{2}{x^3}+\frac{x+1}{ex}\cdot\frac{e(x+1)-ex}{(x+1)^2})}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(-\frac{2}{x^3}+\frac{e}{ex\cdot(x+1)})}{-2\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}+ln\frac{ex}{x+1}}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}(-\frac{2}{x}+\frac{x^2}{x^2+x}) = -\frac{1}{2}.$$

c) " 1^∞ "; " 0^0 "; " ∞^0 "

Neka je $\phi(x)=f(x)^{g(x)}$, $f(x)>0$ (u nekoj okolini tačke a). Ako je $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ neodređen izraz oblika " 0^0 " $(\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0)$, " ∞^0 " $(f(x)\to\infty$ kada $x\to a$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0)$ ili " 1^∞ " $(\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ i $g(x)\to\pm\infty$ kada $x\to a$), tada je $\lim\limits_{x\to a} ln\,\phi(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)ln\,f(x)$ neodređen izraz oblika " $0\cdot\infty$ " i " $\infty\cdot 0$ ".

22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$y=\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow ln\,y=\frac{1}{x}\cdot ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}=\frac{1}{x}\cdot\left[\frac{1}{x}\cdot ln(1+x)-1\right]$$

$$\lim_{x\to 0} ln\,y = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left[\frac{1}{x}\cdot ln(1+x)-1\right] = \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} =$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-1-x}{1+x}}{x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\cdot(1+x)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=-\frac{1}{2}\Rightarrow \ln\lim_{x\to 0}y=-\frac{1}{2}\Rightarrow \lim_{x\to 0}y=e^{-\frac{1}{2}}.$$

23. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$

$$y=x^{\frac{3}{4+\ln x}}\Rightarrow \ln y=\frac{3}{4+\ln x}\cdot\ln x$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}\frac{3\ln x}{4+\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=3$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=3\Rightarrow \ln\lim_{x\to 0^+}y=3\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}y=e^3.$$

24. $\lim\limits_{x\to 0^+}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$

$$y=(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}\Rightarrow \ln y=\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(ctgx)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(ctgx)}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{ctgx}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{\frac{\sin x}{x}}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=-1\Rightarrow \ln\lim_{x\to 0^+}y=-1\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}y=e^{-1}.$$

ISPITIVANJE FUNKCIJA

• Asimptote funkcije

Neka je funkcija $f(x)$ definisana nad intervalom $(a,\infty)((-\infty,a))$, $a\in R$. Funkcija $\phi(x)$ je asimptota funkcije $f(x)$ kada $x\to\infty$ ako je $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-\phi(x)]=0$. Analogno, funkcija $\phi(x)$ je asimptota funkcije $f(x)$ kada $x\to-\infty$, ako je $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-\phi(x)]=0$. Kaže se, takođe, da se funkcija $f(x)$ asimptotski ponaša kao $\phi(x)$ i piše se $f(x)\sim\phi(x)$ kada $x\to+\infty$ (odnosno $x\to-\infty$). Geometrijski smisao asimptote je sledeći: postoji realan broj b, takav da je razlika ordinata krivih $y=f(x)$ i $y=\phi(x)$ proizvoljno mala za svako $x>b$ $(x<b)$. Kriva $y=f(x)$ se približava svojoj asimptoti $y=\phi(x)$ kada $x\to\infty$ (analogno i kada $x\to-\infty$).
Ako je asimptota prava, znači $\phi(x)=mx+n$; $n\in R$, kaže se da kriva $y=f(x)$ ima:

1) Za $m\neq 0$ kosu asimptotu $\phi(x)=mx+n$,

   Po definiciji je (uzmimo da $x\to\infty$) $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(mx+n)]=0$ ili $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x}-(m+\dfrac{n}{x})\right]=0$,

   pa je $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]$.

   Ako postoje brojevi m i n, kriva $y=f(x)$ ima za asimptotu $y=mx+n$, kada $x\to+\infty$. Analogno se posmatra slučaj kada $x\to-\infty$. Asimptote funkcije ne moraju biti iste kada $x\to+\infty$, odnosno $x\to-\infty$.

2) Za $m=0$ horizontalnu asimptotu $\phi(x)=n$.

   Ako postoji $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ ($\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$), vidimo da je prava $\phi(x)=n=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ ($\phi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$) horizontalna asimptota funkcije $f(x)$ kada $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$).

3) Funkcija $y=f(x)$ ima vertikalnu asimptotu u tački $x=a$ ako ne postoji okolina tačke a nad kojom je funkcija $f(x)$ ograničena. Za pravu $x=a$ kažemo da je vertikalna asimptota krive $f(x)$.

• Monotonost i ekstremne vrednosti funkcije

Neka funkcija $f(x)$ ima prvi izvod nad intervalom I. Ako je $f'(x)>0$, funkcija $f(x)$ je monotono rastuća nad intervalom I, a ako je $f'(x)<0$, funkcija je monotono opadajuća nad intervalom I.
Ako je realna funkcija $f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke $a\in R$, tada kažemo da funkcija $f(x)$ u tački a ima minimum (maksimum) ako postoji $\delta>0$, takvo da za $x\in(a-\delta,\ a)\cup(a,\ a+\delta)\Rightarrow f(x)>f(a)$ $(f(x)<f(a))$. Ako funkcija u tački a ima minimum ili maksimum kažemo da u tački a funkcija ima ekstremnu vrednost. Ako funkcija $f(x)$ ima u tački a ekstremnu vrednost i ako postoji $f'(a)$ tada je $f'(a)=0$. Tačke u kojima je $f'(x)=0$ zovemo stacionarnim tačkama. Jedna od mogućnosti da se

ispita da li u tački a funkcija ima ekstremnu vrednost ili ne je da ispitamo znak prvog izvoda.

Ako je funkcija u tački a neprekidna i ako postoji $\delta > 0$ takvo da za $x \in (a-\delta, a)$ je $f'(x) > 0$, $(f'(x) < 0)$, a za $x \in (a, a+\delta)$ je $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ onda funkcija u tački a ima ekstremnu vrednost i to maksimum (minimum).

Neka je $f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$ i $f^{(n)}(a) \neq 0$, $n \geq 2$. Ako je n paran broj, funkcija $f(x)$ ima u tački a ekstremnu vrednost i to: maksimum ako je $f^{(n)}(a) < 0$ odnosno minimum ako je $f^{(n)}(a) > 0$. Ako je n neparan broj, funkcija $f(x)$ nema ekstremnu vrednost u tački a. U tom slučaju ako je $f^{(n)}(a) > 0$ funkcija je u tački a rastuća a ako je $f^{(n)}(a) < 0$ funkcija je u tački a opadajuća.

- **Tangenta funkcije u tačkama gde ne postoji prvi izvod**

Neka je x_0 tačka u kojoj ne postoji prvi izvod.

1) Ako je $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) = A$ i $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$ tada jednačina desne tangente (ako je $f(x_0) = f(x_0^+)$) u tački $(x_0, f(x_0))$ je $y - f(x_0) = A(x - x_0)$, odnosno neprave desne tangente (funkcija nije definisana u tački x_0 ili je $f(x_0) \neq f(x_0^+)$) u tački $(x_0, f(x_0^+))$ je $y - f(x_0^+) = A(x - x_0)$.

2) Ako je $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = A$ i $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$ tada jednačina leve tangente (ako je $f(x_0) = f(x_0^-)$) u tački $(x_0, f(x_0))$ je $y - f(x_0) = A(x - x_0)$, odnosno neprave leve tangente (funkcija nije definisana u tački x_0 ili je $f(x_0) \neq f(x_0^-)$) u tački $(x_0, f(x_0^-))$ je $y - f(x_0^-) = A(x - x_0)$.

3) Ako je $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) = \pm\infty$ i $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$ tada jednačina vertikalne desne tangente (ako je $f(x) = f(x_0^+)$) u tački $(x_0, f(x_0))$, odnosno neprave vertikalne desne tangente (funkcija nije definisana u tački x_0 ili je $f(x_0) \neq f(x_0^+)$) u tački $(x_0, f(x_0^+))$ je $x = x_0$.

4) Ako je $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = \pm\infty$ i $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$ tada jednačina vertikalne leve tangente (ako je $f(x_0) = f(x_0^-)$) u tački $(x_0, f(x_0))$, odnosno neprave vertikalne leve tangente (funkcija nije definisana u tački x_0 ili je $f(x_0) \neq f(x_0^-)$) u tački $(x_0, f(x_0^-))$ je $x = x_0$.

- **Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke**

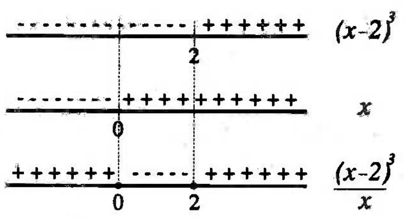
Ako je $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$ nad intervalom I, tada je funkcija $f(x)$ konveksna (konkavna) nad intervalom I. Ako postoji $f''(x)$ nad intervalom I i ako je funkcija $f(x)$ konveksna (konkavna) nad I, tada je $f''(x)\geq 0$ $(f''(x)\leq 0)$ nad intervalom I.

Ako je $P(a,f(a))$ prevojna tačka funkcije $f(x)$ i ako postoji $f''(a)$, tada je $f''(a)=0$.
Za tačku $P(a,f(a))$ se kaže da je prevojna tačka funkcije $f(x)$ ako postoji okolina $(a-\delta,a+\delta)$ tačke a, takva da je funkcija $f(x)$ nad intervalom $(a-\delta,a)$ konkavna (konveksna), a nad intervalom $(a,a+\delta)$ konveksna (konkavna).

1. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $y=\sqrt{\dfrac{(x-2)^3}{x}}$.

Domen

$$\frac{(x-2)^3}{x}\geq 0$$
$$x\neq 0$$



$$D: x\in R\setminus[\,0,2)$$

Nule funkcije

$$y=\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}=0\Leftrightarrow\frac{(x-2)^3}{x}=0\Leftrightarrow(x-2)^3=0\Leftrightarrow x-2=0\Rightarrow x=2$$

Asimptote

$$\lim_{x\to 0^-}\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}=\infty\Rightarrow \text{ prava } x=0 \text{ je vertikalna asimptota funkcije.}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}=\infty\Rightarrow \text{ funkcija nema horizontalnu asimptotu.}$$

$$m_1=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{(x-2)^2(x-2)}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x-2|}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}=1$$

$$n_1=\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}-x\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x^3}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{(x-2)^3}{x^3}}-1}{\dfrac{1}{x}}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\frac{x-2}{x})^{\frac{3}{2}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{2}\cdot(\frac{x-2}{x})^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x-(x-2)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -3\cdot \lim_{x\to\infty}(\frac{x-2}{x})^{\frac{1}{2}} = -3$$

$\Rightarrow$ prava $y_1 = x-3$ je kosa asimptota funkcije kada $x \to \infty$

$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x-2|}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-x}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}} = -1$$

$$n_2 = \lim_{x\to-\infty} [f(x)+x] = \lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}} + x\right] = \lim_{x\to-\infty}(|x|\cdot\sqrt{(\frac{x-2}{x})^3} + x) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(-x\sqrt{(\frac{x-2}{x})^3} + x) = \lim_{x\to-\infty} x(1-\sqrt{(\frac{x-2}{x})^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-(\frac{x-2}{x})^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{x}} = 3$$

$\Rightarrow$ prava $y_2 = -x+3$ je kosa asimptota funkcije kada $x \to -\infty$.

Monotonost i ekstremne vrednosti

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}} \cdot \frac{3(x-2)^2\cdot x - (x-2)^3}{x^2} = \frac{(x-2)^2(3x-x+2)}{2\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}\cdot x^4} = \frac{2(x+1)\sqrt{(x-2)^4}}{2\sqrt{x^3(x-2)^3}} =$$

$$= (x+1)\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}$$

$y' > 0$ za $x \in (-1,0) \cup [2,\infty)$ funkcija raste

$y' < 0$ za $x \in (-\infty,-1)$ funkcija opada

Napomena:

Kada pišemo da funkcija raste (opada) za $x \in (-1,0) \cup [2,\infty)$, to znači da funkcija raste (opada) nad intervalom $(-1,0)$ i da funkcija raste (opada) nad intervalom $[2,\infty)$.

Funkcija ima minimum $\sqrt{27}$ za $x=-1$ ($y(-1) = \sqrt{\frac{(-1-2)^3}{-1}} = \sqrt{27}$).

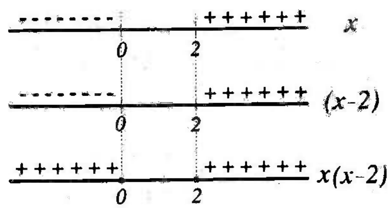
$tg\alpha = y'(2^+) = 3\cdot\sqrt{\frac{0}{8}} = 0$ - koeficijent pravca tangente

$\alpha = 0$ - ugao između tangente i pozitivnog dela x-ose.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

$$y'' = \sqrt{\frac{x-2}{x^3}} + (x+1)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}}\cdot\frac{x^3-(x-2)\cdot 3x^2}{x^6} = \sqrt{\frac{x-2}{x^3}}\cdot\left(1+\frac{(x+1)(x-3x+6)}{\frac{2(x-2)}{x^3}\cdot x^4}\right) =$$

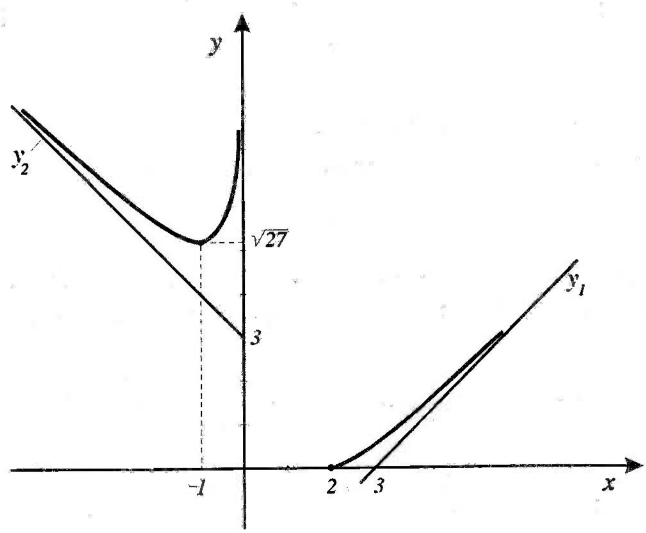
$$= \sqrt{\frac{x-2}{x^3}}\cdot\frac{x^2-2x+(x+1)(3-x)}{x(x-2)} = \sqrt{\frac{x-2}{x^3}}\cdot\frac{x^2-2x+3x-x^2+3-x}{x(x-2)} = \frac{3}{x(x-2)}\cdot\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}$$



$y'' > 0$ za $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ funkcija je konveksna.
Funkcija nema prevojnih tačaka.

Napomena:
Kada pišemo da je funkcija konveksna (konkavna) za $x \in (-\infty,0) \cup (2,\infty)$, to znači da je funkcija konveksna (konkavna) nad intervalom $(-\infty,0)$ i da je funkcija konveksna (konkavna) nad intervalom $(2,\infty)$.

Grafik funkcije



2. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$.

Domen

$$\begin{matrix} x+1\neq 0 \\ x\neq -1 \end{matrix} \Rightarrow D: x\in R\setminus\{-1\}$$

Nule funkcije

$$y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Asimptote

$\lim\limits_{x\to -1^-}\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}=-\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to -1^+}\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}=\infty \Rightarrow$ prava $x=-1$ je vertikalna asimptota funkcije.

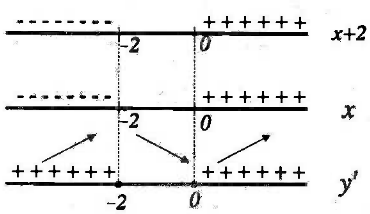
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}=\pm\infty \Rightarrow$ funkcija nema horizontalnu asimptotu.

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3(x+1)}}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x(x+1)}}=0$$

$\Rightarrow$ funkcija nema kosu asimptotu.

Monotonost i ekstremne vrednosti

$$y'=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{2x\cdot(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x+1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{3(x+1)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x^4}}$$



Za $x=-1$ funkcija nema ekstremnu vrednost jer $-1\notin D$.

$y'>0$ za $x\in(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$ funkcija raste

$y'<0$ za $x\in(-2,-1)\cup(-1,0)$ funkcija opada

Funkcija ima maksimum $\sqrt[3]{-4}$ za $x=-2$ ($y(-2)=\sqrt[3]{-4}$). Funkcija ima minimum 0 za $x=0$ ($y(0)=0$).

Prvi izvod nije definisan za $x=0$.

$$tg\alpha=\lim_{x\to 0^+}y'=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+2}{3(x+1)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x}}=\infty\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2},$$

$$tg\beta = \lim_{x\to 0^-} y' = -\infty \Rightarrow \beta = -\frac{\pi}{2}.$$

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

$$y'' = \frac{1}{3}\left(\frac{(x+1)^2-(x+2)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x}} + \frac{x+2}{(x+1)^2}\frac{1}{3}\left(\frac{(x+1)^2}{x}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{2(x+1)x-(x+1)^2}{x^2}\right) =$$

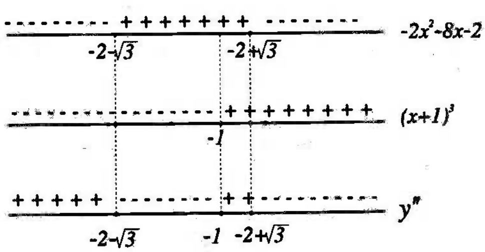
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x+1-2x-4}{(x+1)^3}\cdot\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x}} + \frac{x+2}{3(x+1)}\sqrt[3]{\frac{x^2}{(x+1)^4}}\cdot\frac{2x-x-1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{-x-3}{(x+1)^3}\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x}} + \frac{(x+2)(x-1)}{3x^2(x+1)}\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{(x+1)^4}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x}}\left(\frac{-x-3}{(x+1)^3} + \frac{(x+2)(x-1)}{3x^2(x+1)}\,\frac{x}{(x+1)^2}\right) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x}}\,\frac{-3x(x+3)+(x+2)(x-1)}{3x(x+1)^3} =$$

$$= \frac{-3x^2-9x+x^2+2x-x-2}{9x(x+1)^3}\cdot\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x}} = \frac{(-2x^2+8x-2)}{9(x+1)^3}\cdot\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x^4}}$$

$$x^2+4x+1=0 \Rightarrow x_1 = -2-\sqrt{3} \;\; i \;\; x_2 = -2+\sqrt{3}$$

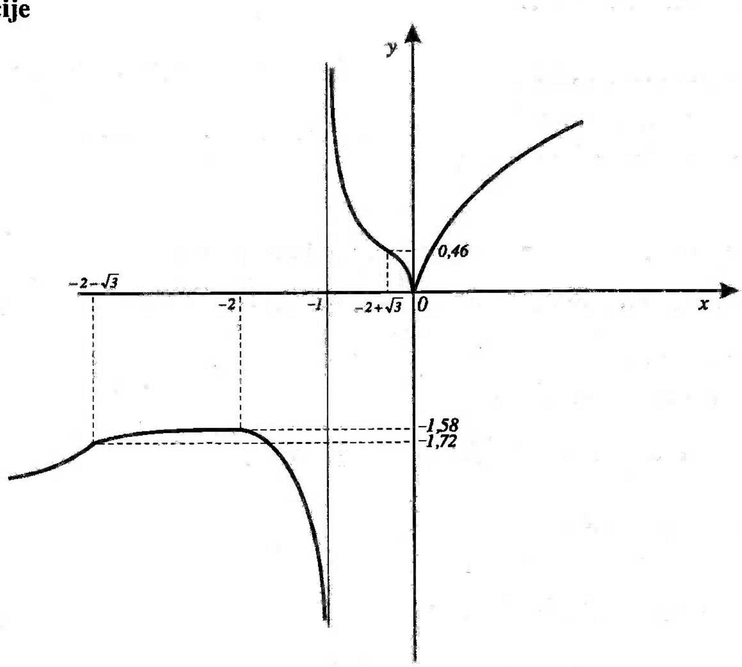


$y''>0$ za $x\in(-\infty,-2-\sqrt{3})\cup(-1,-2+\sqrt{3})$ funkcija je konveksna

$y''<0$ za $x\in(-2-\sqrt{3},-1)\cup(-2+\sqrt{3},0)\cup(0,\infty)$ funkcija je konkavna.

Tačke $(-2-\sqrt{3}, y(-2-\sqrt{3}))$, $(-2+\sqrt{3}, y(-2+\sqrt{3}))$ su prevojne tačke ($y(-2-\sqrt{3})\approx 1{,}72$, $y(-2+\sqrt{3})\approx 0{,}46$).

Grafik funkcije



3. **Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije** $y=(x+1)^3(x-1)^{\frac{2}{3}}$.

Domen

$D: x \in R$

Nule funkcije

$y=(x+1)^3(x-1)^{\frac{2}{3}}=0 \Leftrightarrow x=-1$ i $x=1$.

$x=0$ za $y=1$.

Asimptote

Funkcija nema vertikalnu asimptotu.

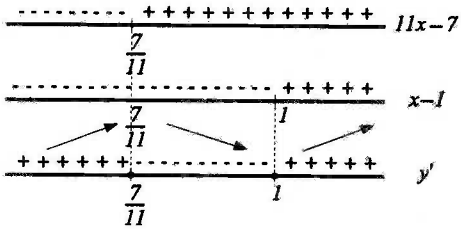
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty \Rightarrow$ funkcija nema horizontalnu asimptotu.

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^3(x-1)^{\frac{3}{2}}}{x}=\infty \Rightarrow \text{funkcija nema kosu asimptotu.}$$

Monotonost i ekstremne vrednosti

$$y'=3(x+1)^2(x-1)^{\frac{2}{3}}+(x+1)^3\cdot\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}=3(x+1)^2\sqrt[3]{(x-1)^2}+\frac{2(x+1)^3}{3\sqrt[3]{x-1}}=$$

$$=\frac{(x+1)^2}{3\sqrt[3]{x-1}}(9(x-1)+2(x+1))=\frac{(x+1)^2(11x-7)}{3\sqrt[3]{x-1}}$$



$y' > 0$ za $x \in (-\infty, \frac{7}{11}) \cup (1, \infty)$ funkcija raste

$y' < 0$ za $x \in (\frac{7}{11}, 1)$ funkcija opada.

Funkcija u tački $x = -1$ nema ekstremnu vrednost jer prvi izvod ne menja znak u toj tački. Funkcija ima maksimum $y(\frac{7}{11})$ za $x = \frac{7}{11}$ $\left(y(\frac{7}{11}) \approx 2{,}23 \right)$. Funkcija ima minimum 0 za $x = 1$.

Prvi izvod nije definisan za $x = 1$.

$$tg\alpha = \lim_{x \to 1^+} y' = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x+1)^2(11x-7)}{3 \cdot \sqrt[3]{x-1}} = \infty \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$tg\beta = \lim_{x \to 1^-} y' = -\infty \Rightarrow \beta = -\frac{\pi}{2}$$

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

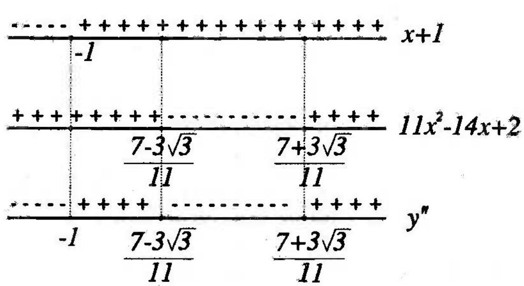
$$y'' = \frac{1}{3} \cdot \frac{[\,11(x+1)^2 + 2(11x-7)(x+1)\,]\sqrt[3]{x-1} - (11x-7)(x+1)^2 \cdot \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} =$$

$$= \frac{x+1}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}}[33(x+1)(x-1) + 6(11x-7)(x-1) - (11x-7)(x+1)] =$$

$$= \frac{x+1}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}}\left[33x^2 - 33 + 66x^2 - 66x - 42x + 42 - 11x^2 - 11x + 7x + 7\right] =$$

$$= \frac{8(x+1)(11x^2 - 14x + 2)}{9 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^4}}$$

$$11x^2 - 14x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{7 - 3\sqrt{3}}{11} \quad i \quad x_2 = \frac{7 + 3\sqrt{3}}{11}$$

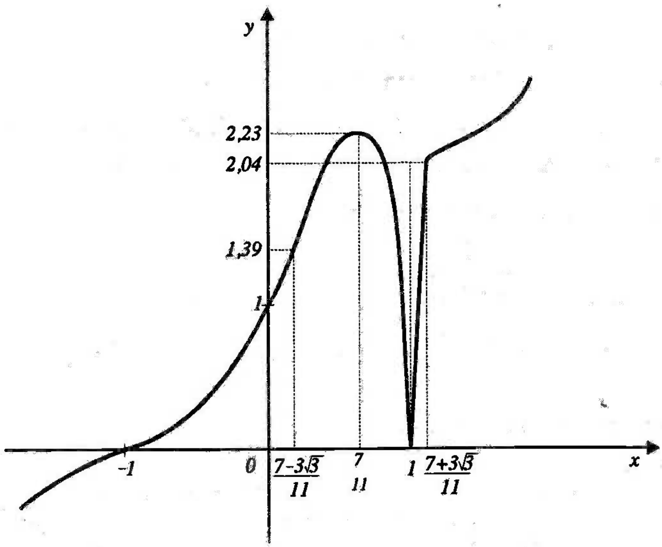


$y'' > 0$ za $x \in (-1, \frac{7-3\sqrt{3}}{11}) \cup (\frac{7+3\sqrt{3}}{11}, \infty)$ funkcija je konveksna

$y'' < 0$ za $x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{7-3\sqrt{3}}{11}, 1) \cup (1, \frac{7+3\sqrt{3}}{11})$ funkcija je konkavna

Tačke $(-1, 0)$, $(\frac{7-3\sqrt{3}}{11}, y(\frac{7-3\sqrt{3}}{11}))$ i $(\frac{7+3\sqrt{3}}{11}, y(\frac{7+3\sqrt{3}}{11}))$ su prevojne tačke funkcije ($y(-1) = 0$, $y(\frac{7-3\sqrt{3}}{11}) \approx 1{,}39$, $y(\frac{7+3\sqrt{3}}{11}) \approx 2{,}04$).

Grafik funkcije



4. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $y = \sqrt[3]{(x^2 + 2x)^2}$.

Domen

$D: x \in R$

Nule funkcije

$y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ i $x = -2$.

Asimptote

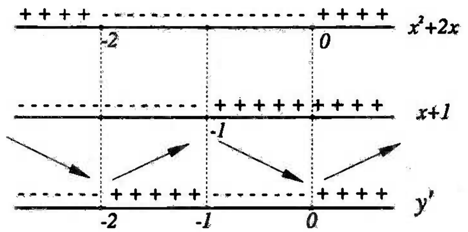
Funkcija nema vertikalnu asimptotu

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} = \sqrt[3]{(x^2 + 2x)^2} = \infty \Rightarrow$ funkcija nema horizontalnu asimptotu.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x^2 + 2x)^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{(x^2 + 2x)^2}{x^3}} = \pm\infty \Rightarrow$ funkcija nema kosu asimptotu.

Monotonost i ekstremne vrednosti

$$y' = \frac{2}{3}(x^2+2x)^{-\frac{1}{3}} \cdot (2x+2) = \frac{4(x+1)}{3\cdot\sqrt[3]{x(x+2)}}$$



$y'>0$ za $x\in(-2,-1)\cup(0,\infty)$ funkcija raste

$y'<0$ za $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,0)$ funkcija opada

Funkcija ima minimum 0 za $x=0$ ($y(0)=0$). Funkcija ima minimum 0 za $x=-2$ ($y(-1)=1$). Funkcija ima maksimum 1 za $x=-1$ ($y(-2)=0$).

Prvi izvod nije definisan u tačkama $x=0$ i $x=-2$.

$$tg\alpha = \lim_{x\to 2^-} y' = \lim_{x\to 2^-}\frac{4(x+1)}{3\cdot\sqrt[3]{x(x+2)}} = -\infty \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2} \qquad tg\beta = \lim_{x\to 2^+} y' = \infty \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$tg\gamma = \lim_{x\to 0^-} y' = -\infty \Rightarrow \gamma = -\frac{\pi}{2} \qquad tg\delta = \lim_{x\to 0^+} y' = \infty \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2}$$

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

$$y'' = \frac{4\cdot 3\cdot\sqrt[3]{x^2+2x} - 4(x+1)\cdot 3\cdot\frac{1}{3}(x^2+2x)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2(x+1)}{9\cdot\sqrt[3]{(x^2+2x)^2}} = \frac{12(x^2+2x)-8(x+1)^2}{9\sqrt[3]{(x^2+2x)^4}} =$$

$$= \frac{4(3x^2+6x-2x^2-4x-2)}{9\sqrt[3]{(x^2+2x)^4}} = \frac{4(x^2+2x-2)}{9\cdot\sqrt[3]{(x^2+2x)^4}}$$

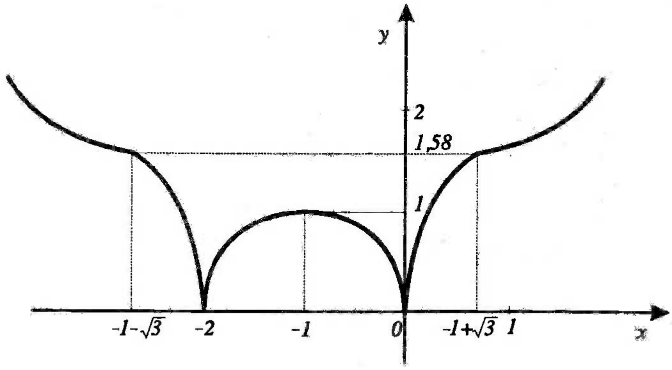
$$x^2+2x-2=0 \Rightarrow x_1=-1-\sqrt{3} \;\; i \;\; x_2=-1+\sqrt{3}$$

$y''>0$ za $x\in(-\infty,-1-\sqrt{3})\cup(-1+\sqrt{3},\infty)$ funkcija je konveksna

$y''<0$ za $x\in(-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3})$ funkcija je konkavna

Tačke $(-1-\sqrt{3},y(-1-\sqrt{3}))$ i $(-1+\sqrt{3},y(-1+\sqrt{3}))$ su prevojne tačke funkcije ($y(-1-\sqrt{3})\approx 1{,}58$, $y(-1+\sqrt{3})\approx 1{,}58$).

Grafik funkcije



5. **Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije** $y = arctg\frac{2x}{x^2-1}$.

Domen

$$\left.\begin{array}{l} x^2-1\neq 0 \\ x^2\neq 1 \Rightarrow x\neq \pm 1 \end{array}\right\} \Rightarrow D: x\in R\setminus\{-1,1\}$$

Nule funkcije

$$y = arctg\frac{2x}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0 .$$

Neparnost i parnost funkcije

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ funkcija je neparna. Kako je funkcija neparna (simetrična u odnosu na koordinatni početak), dovoljno je posmatrati funkciju samo za $x \geq 0$.

Asimptote

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} arctg\frac{2x}{x^2-1} = arctg\infty = \frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{x\to 1^-} arctg\frac{2x}{x^2-1} = arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{funkcija nema vertikalnu asimptotu.}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} arctg\frac{2x}{x^2-1} = arctg0 = 0 \Rightarrow$ prava $y = 0$ je horizontalna asimptota funkcije.

Funkcija nema kosu asimptotu.

Monotonost i ekstremne vrednosti

$$y' = \frac{1}{1+(\frac{2x}{x^2-1})^2}\cdot\frac{2(x^2-1)-2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{\frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2-1)^2}}\cdot\frac{2x^2-2-4x^2}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{-2-2x^2}{x^4-2x^2+1+4x^2} = \frac{-2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2}{1+x^2}$$

$y' < 0$ za svako $x \in D$ funkcija opada.

Funkcija nema ekstremnih vrednosti.

$$tg\alpha = \lim_{x\to\pm 1} y' = \lim_{x\to\pm 1} \frac{-2}{1+x^2} = -1 \;\; (y=-x) \qquad tg\beta = y'(0) = -2 \;\; (y=-2x)$$

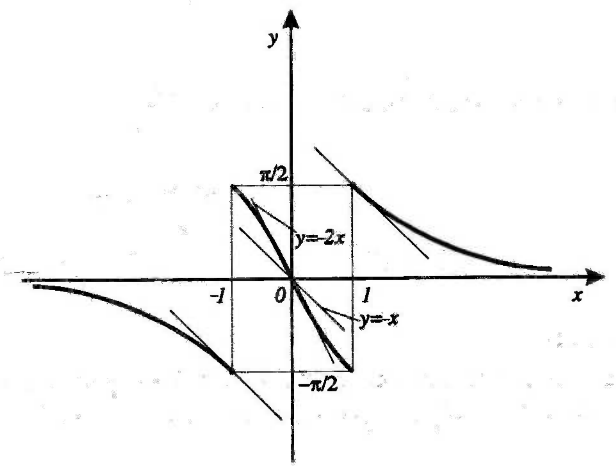
Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

$$y'' = \frac{2\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$y''>0$ za $x\in(0,1)\cup(1,\infty)$ funkcija je konveksna

Tačka $(0,0)$ je prevojna tačka funkcije.

Grafik funkcije



6. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $y = x + arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Domen

$$-1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1 \quad D: x\in R$$

Nule funkcije

$$y = x + arcsin\frac{2x}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Parnost i neparnost funkcije

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ funkcija je neparna. Kako je funkcija neparna (simetrična u odnosu na koordinatni početak) dovoljno je posmatrati funkciju samo za $x\ge 0$.

Asimptote

Funkcija nema vertikalnu asimptotu.

$\lim_{x\to+\infty}(x + arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}) = \pm\infty \Rightarrow$ funkcija nema horizontalnu asimptotu.

$$m_1 = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{arcsin\frac{2x}{1+x^2}}{x}\right) = 1$$

$$n_1=\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\arcsin 0=0 \Rightarrow$$ prava $y=x$ je kosa asimptota.

Monotonost i ekstremne vrednosti

$$y'=1+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=1+\frac{2(1-x^2)}{\sqrt{\frac{(x^2+1)^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^2}=$$

$$=1+\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2\sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}}}=1+\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\left|x^2-1\right|}$$

$$y'=\begin{cases}1+\dfrac{2}{1+x^2}, & x\in[0,1)\\[2mm] 1-\dfrac{2}{1+x^2}, & x\in(1,\infty)\end{cases}$$

$y'>0$ za $x\in[0,1)\cup(1,\infty)$ funkcija raste

Funkcija nema ekstremnih vrednosti.

Prvi izvod nije definisan za $x=1$.

$$tg\alpha=\lim_{x\to 1^+}y'=\lim_{x\to 1^+}\left(1-\frac{2}{1+x^2}\right)=0\Rightarrow\alpha=0 \quad (y=0)$$

$$tg\beta=\lim_{x\to 1^-}y'=\lim_{x\to 1^-}\left(1+\frac{2}{1+x^2}\right)=2 \quad (y=2x)$$

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

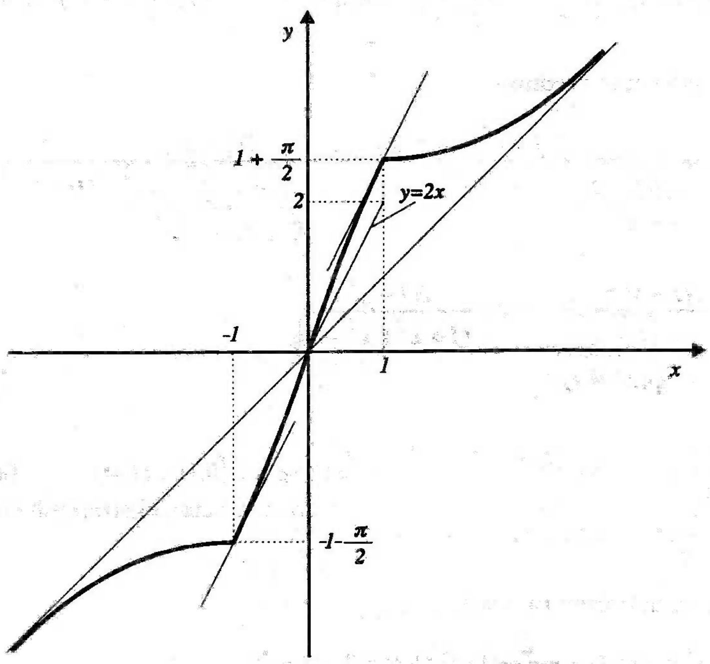
$$y''=\begin{cases}-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}, & x\in[0,1)\\[2mm] \dfrac{4x}{(1+x^2)^2}, & x\in(1,\infty)\end{cases}$$

$y''>0$ za $x\in(1,\infty)$ funkcija je konveksna

$y''<0$ za $x\in[0,1)$ funkcija je konkavna

Tačke $(0,0)$ i $(1,\ 1+\frac{\pi}{2})$ su prevojne tačke funkcije ($y(0)=0$, $y(1)=1+\frac{\pi}{2}$).

Grafik funkcije



7. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $y=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{|1-x|}}{x}, & x>0 \\ \dfrac{\log|x|+1}{x\log e}, & x<0. \end{cases}$

Domen

$x>0$

$$y=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x}}{x}, & 0<x\le 1 \\ \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}, & x>1 \end{cases}$$

$x<0$

$$y=\frac{\log(-x)+1}{x\log e}$$

$$D: x\in R\setminus\{0\}$$

Nule funkcije

$x>0$

$y=0 \Leftrightarrow x=1.$

$x<0$

$y=0 \Rightarrow \log(-x)+1=0 \Rightarrow \log(-x)=-1$

$-x=10^{-1}=\dfrac{1}{10} \Rightarrow x=-\dfrac{1}{10}$

Asimptote

$x>0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-x}}{x}=\infty \Rightarrow$ prava $x=0$ je vertikalna asimptota funkcije.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}=0 \Rightarrow$ prava $y=0$ je horizontalna asimptota kada $x\to\infty$.

$x<0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\log(-x)+1}{x\log e}=\infty \Rightarrow$ prava $x=0$ je vertikalna asimptota funkcije.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\log(-x)+1}{x\log e}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{-x\ln 10}\cdot(-1)}{\log e}=0 \Rightarrow$ prava $y=0$ je horizontalna asimptota funkcije kada $x\to-\infty$.

Funkcija nema kosu asimptotu.

Monotonost i ekstremne vrednosti

$x>0$

$$y'=\frac{-\dfrac{x}{2\sqrt{1-x}}-\sqrt{1-x}}{x^2}=\frac{-x-2(1-x)}{2x^2\sqrt{1-x}}=\frac{x-2}{2x^2\sqrt{1-x}}$$

$$y'=\begin{cases}\dfrac{x-2}{2x^2\sqrt{1-x}}, & 0<x<1\\[2mm] \dfrac{2-x}{2x^2\sqrt{x-1}}, & x>1\end{cases}$$

$y'>0$ za $x\in(1,2)$ funkcija raste

$y'<0$ za $x\in(0,1)\cup(2,\infty)$ funkcija opada

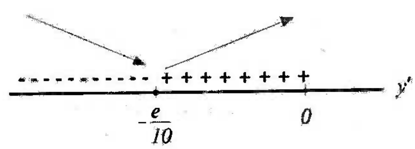
Funkcija ima minimum 0 za $x=1$. Funkcija ima maksimum $\frac{1}{2}$ za $x=2$.

$tg\alpha=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2-x}{2x^2\sqrt{x-1}}=\infty\Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad tg\beta=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x-2}{2x^2\sqrt{1-x}}=-\infty\Rightarrow\beta=-\dfrac{\pi}{2}$

$x<0$

$$y'=\frac{\dfrac{-1}{-x\ln 10}\cdot x\log e-(\log(-x)+1)\cdot\log e}{x^2\log^2 e}=\frac{\log e-\log(-x)-1}{x^2\log e}=\frac{\log(-\dfrac{e}{10x})}{x^2\log e}$$

$$y'=0\Leftrightarrow \log(-\frac{e}{10x})=0\Leftrightarrow -\frac{e}{10x}=1\Leftrightarrow x=-\frac{e}{10}$$



$y'>0$ za $x\in(-\frac{e}{10},0)$ funkcija raste

$y'<0$ za $x\in(-\infty,-\frac{e}{10})$ funkcija opada

Funkcija ima minimum $-\frac{10}{e}$ za $x=-\frac{e}{10}$ $\left(y(-\frac{e}{10})=-\frac{10}{e}\right)$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

$\boldsymbol{x>0}$

$$y''=\frac{1}{2}\frac{x^2\sqrt{1-x}-(x-2)\left[2x\sqrt{1-x}+x^2\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right]}{x^4(1-x)}=\frac{2x^2(1-x)-(x-2)\left[4x(1-x)-x^2\right]}{4x^4(1-x)\sqrt{1-x}}=$$

$$=\frac{2x^2-2x^3-4x^2+8x+5x^3-10x^2}{4x^4(1-x)\sqrt{1-x}}=\frac{3x^2-12x+8}{4x^3(1-x)\sqrt{1-x}}$$

$$y''=\begin{cases}\dfrac{3x^2-12x+8}{4x^3(1-x)\sqrt{1-x}}, & 0<x<1\\ \dfrac{3x^2-12x+8}{4x^3(x-1)\sqrt{x-1}}, & x>1\end{cases}\qquad 3x^2-12x+8=0\Rightarrow x_1=\frac{6+2\sqrt{3}}{3},\ x_2=\frac{6-2\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & +++ & & ---------- & & ++++++ & \\ 0 & & \frac{6-2\sqrt{3}}{3} & & \frac{6+2\sqrt{3}}{3} & & 3x^2-12x+8\end{array}$$

$y''>0$ $x\in(0,x_2)\cup(x_1,\infty)$ funkcija je konveksna

$y''<0$ $x\in(x_2,1)\cup(1,x_1)$ funkcija je konkavna

Tačke $(x_1,y(x_1))$ i $(x_2,y(x_2))$ su prevojne tačke funkcije ($y(x_1)\approx 0{,}46$, $y(x_2)\approx 0{,}46$).

$\boldsymbol{x<0}$

$$y''=\frac{1}{\log e}\frac{-\frac{\log e}{x}\cdot x^2-(\log e-\log(-x)-\log 10)\cdot 2x}{x^4}=\frac{\log\frac{100x^2}{e^3}}{x^3\log e}$$

$$y''=0\Leftrightarrow \log\frac{100x^2}{e^3}=0\Leftrightarrow\frac{100x^2}{e^3}=1\Leftrightarrow x^2=\frac{e^3}{100}\Leftrightarrow x=-\frac{e^{\frac{3}{2}}}{10}$$

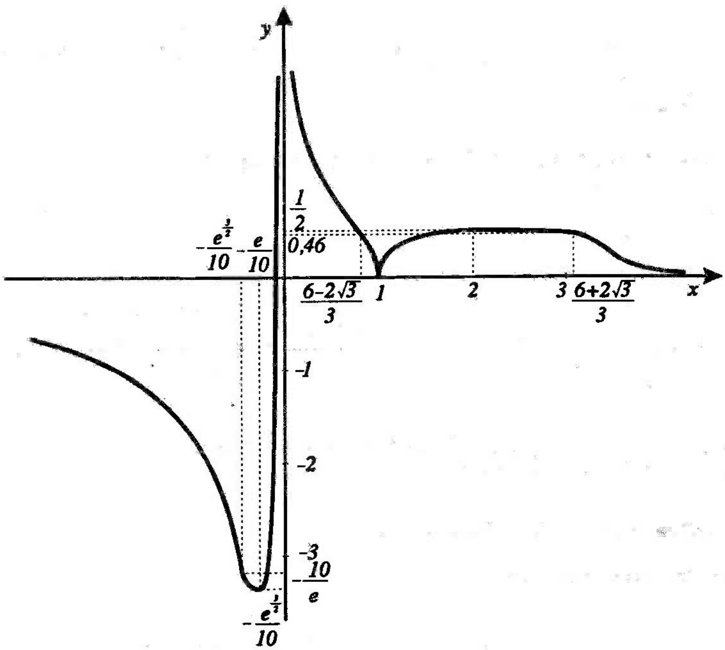
$$\begin{array}{ccccc} & ----------- & & +++++++ & \\ & & -\frac{e^{3/2}}{10} & & 0 \quad y''\end{array}$$

$y''<0$ za $x\in(-\infty,-\frac{e^{3/2}}{10})$ funkcija je konkavna

$y''>0$ za $x\in(-\frac{e^{3/2}}{10},0)$ funkcija je konveksna

Tačka $(-\frac{e^{3/2}}{10}, y(-\frac{e^{3/2}}{10}))$ je prevojna tačka funkcije $\left(y(-\frac{e^{3/2}}{10}) \approx -3{,}34 \right)$.

Grafik funkcije



8. **Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije** $y = x \cdot e^{\frac{1}{\ln|x|}}$.

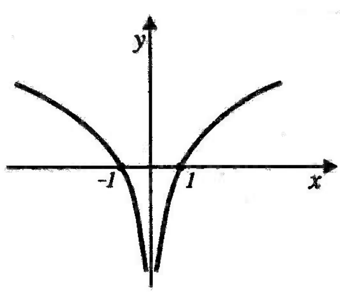
Domen

$\ln|x| \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$

$x \neq 0$

$D: x \in R \setminus \{-1, 0, 1\}$

$y = \ln|x|$



Nule funkcije

$y = x \cdot e^{\frac{1}{\ln|x|}} = 0$ za $x = 0 \notin D$.

Funkcija nema nula.

$$y = \begin{cases} x e^{\frac{1}{\ln x}}, & x \in (0,1) \cup (1, \infty) \\ x e^{\frac{1}{\ln(-x)}}, & x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \end{cases}$$

Parnost i neparnost funkcije

$f(-x)=-f(x) \Rightarrow$ funkcija je neparna. Kako je funkcija neparna (simetrična u odnosu na koordinatni početak), dovoljno je posmatrati funkciju samo za $x>0$.

Asimptote

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot e^{\frac{1}{\ln x}}=0$, $\lim\limits_{x\to 1^-} x\cdot e^{\frac{1}{\ln x}}=0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} x\cdot e^{\frac{1}{\ln x}}=\infty \Rightarrow$ prava $x=1$ je vertikalna asimptota funkcije.

$\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot e^{\frac{1}{\ln x}}=\infty \Rightarrow$ funkcija nema horizontalnu asimptotu.

$$m_1=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{\ln x}}=1$$

$$n_1=\lim_{x\to\infty}\left[x\cdot e^{\frac{1}{\ln x}}-x\right]=\lim_{x\to\infty}x\left[e^{\frac{1}{\ln x}}-1\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}\left(-\frac{1}{x\cdot\ln^2 x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot e^{\frac{1}{\ln x}}}{\ln^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln^2 x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{2\ln x}{x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

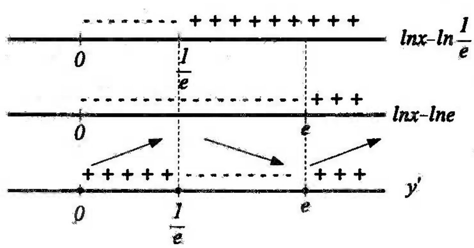
$\Rightarrow$ funkcija nema kosu asimptotu kada $x\to\infty$.

Monotonost i ekstremne vrednosti

$$y'=e^{\frac{1}{\ln x}}+x\cdot e^{\frac{1}{\ln x}}\cdot\left(-\frac{1}{x\cdot\ln^2 x}\right)=e^{\frac{1}{\ln x}}\left(1-\frac{1}{\ln^2 x}\right)=e^{\frac{1}{\ln x}}\frac{\ln^2 x-1}{\ln^2 x}$$

$$\ln^2 x-1=(\ln x-\ln e)\cdot\left(\ln x-\ln\frac{1}{e}\right)$$

$$y'=0 \Leftrightarrow \ln^2 x-1=0 \Leftrightarrow \ln^2 x=1 \Leftrightarrow \ln x=\pm 1 \Leftrightarrow x_1=e^{-1}=\frac{1}{e},\ x_2=e^1=e$$



$y'>0$ za $x\in(0,\frac{1}{e})\cup(e,\infty)$ funkcija raste

$y'<0$ za $x\in(\frac{1}{e},1)\cup(1,e)$ funkcija opada

Funkcija ima minimum $y(e)$ za $x=e$ ($y(e)\approx 7{,}39$). Funkcija ima maksimum $y(\frac{1}{e})$ za $x=\frac{1}{e}$ ($y(\frac{1}{e})\approx 0{,}14$).

$$tg\alpha=\lim_{x\to 0^+} y'=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{\ln x}}(1-\frac{1}{\ln^2 x})=1\Rightarrow \alpha=45^0 \quad (y=x)$$

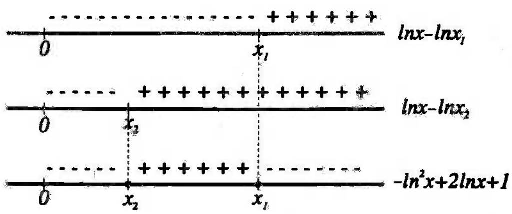
$$tg\beta=\lim_{x\to 1^-} y'=\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{\ln x}}(1-\frac{1}{\ln^2 x})=\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{\ln x}}-\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{\ln^2 x}=0\Rightarrow \beta=0$$

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

$$y''=e^{\frac{1}{\ln x}}\cdot(\frac{-1}{x\cdot \ln^2 x})\cdot(1-\frac{1}{\ln^2 x})+e^{\frac{1}{\ln x}}\cdot\frac{2}{x\cdot \ln^3 x}=e^{\frac{1}{\ln x}}\cdot\frac{-(\ln^2 x-1)+2\ln x}{x\cdot \ln^4 x}=$$

$$=\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x\cdot \ln^4 x}\cdot(-\ln^2 x+2\ln x+1)$$

$$-\ln^2 x+2\ln x+1=0,\ \ln x=t,\quad -t^2+2t+1=0 \Leftrightarrow t_{1,2}=1\pm\sqrt{2}\Leftrightarrow x_1=e^{1+\sqrt{2}},\ x_2=e^{1-\sqrt{2}}$$

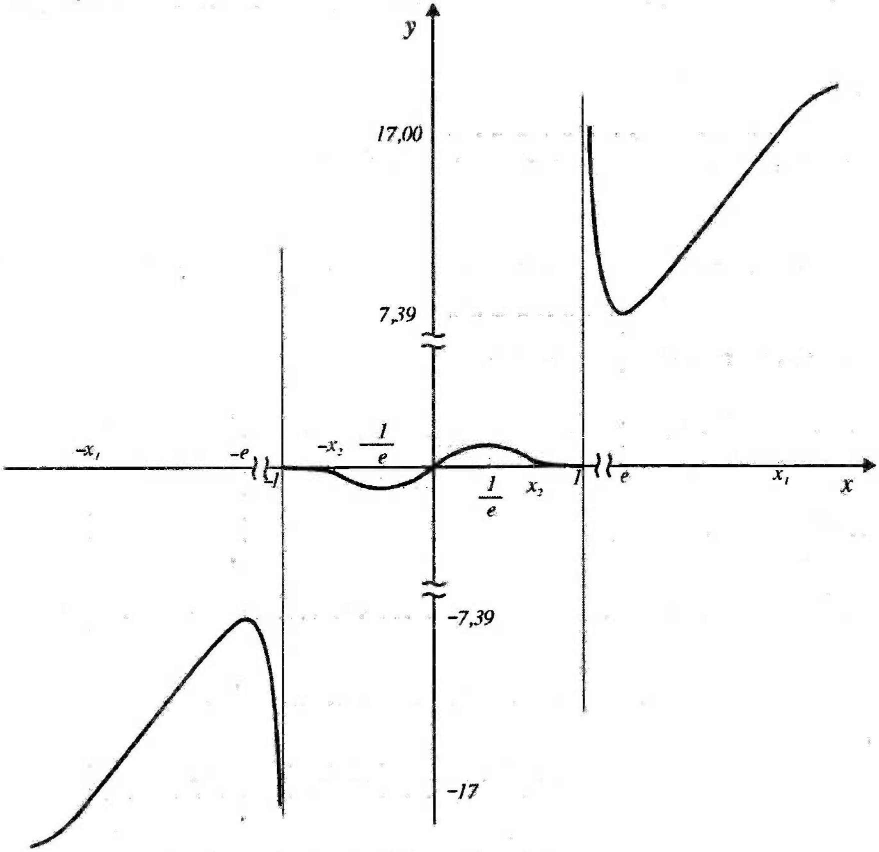


$y''>0$ za $x\in(x_2,1)\cup(1,x_1)$ funkcija je konveksna

$y''<0$ za $x\in(0,x_2)\cup(x_1,\infty)$ funkcija je konkavna

Tačke $(e^{1+\sqrt{2}},y(e^{1+\sqrt{2}}))$ i $(e^{1-\sqrt{2}},y(e^{1-\sqrt{2}}))$ su prevojne tačke funkcije ($y(x_1)\approx 17$, $y(x_2)\approx 0{,}06$).

Grafik funkcije



9. Detaljno ispitati i nacrtati grafike funkcija

$$g(x)=3\cdot e^{x}-x\cdot e^{x}-3 \text{ i } f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{e^{x}-1}} \text{ (bez nalaženja } f''(x)\text{).}$$

- $g(x)=3\cdot e^{x}-x\cdot e^{x}-3$

Domen

$D: x\in R$

Nule funkcije

$$g(x)=3\cdot e^{x}-x\cdot e^{x}-3=0 \Rightarrow x=0$$

Očigledno da funkcija ima jednu nulu za $x=0$. Da li funkcija ima još neku nulu zaključićemo na osnovu daljeg ispitivanja funkcije.

Asimptote

Funkcija nema vertikalnu asimptotu.

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}(3\cdot e^{x}-x\cdot e^{x}-3)=\lim_{x\to\infty} e^{x}(3-x)-3=-\infty$$

$\Rightarrow$ funkcija nema horizontalnu asimptotu kada $x\to\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(3e^x - xe^x - 3) = 3\lim_{x\to-\infty} e^x - \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} - 3 = -\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} - 3 = \lim_{x\to-\infty} e^x - 3 = -3$$

$\Rightarrow$ prava $y = -3$ je horizontalna asimptota funkcije kad $x \to -\infty$.

$$m_1 = \lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot e^x - x\cdot e^x - 3}{x} = \lim_{x\to\infty}(3\cdot e^x - e^x - x\cdot e^x) = \lim_{x\to\infty} e^x(2-x) = -\infty$$

$\Rightarrow$ funkcija nema kosu asimptotu kada $x \to \infty$.

Monotonost i ekstremne vrednosti

$g'(x) = 3\cdot e^x - e^x - x\cdot e^x = e^x(2-x)$

$g'(x) > 0$ za $x \in (-\infty, 2)$ funkcija raste

$g'(x) < 0$ za $x \in (2, \infty)$ funkcija opada

Funkcija ima maksimum $g(2)$ za $x = 2$ ($g(2) \approx 4{,}39$).

Konkavnost, konveksnost i prevojne tačke

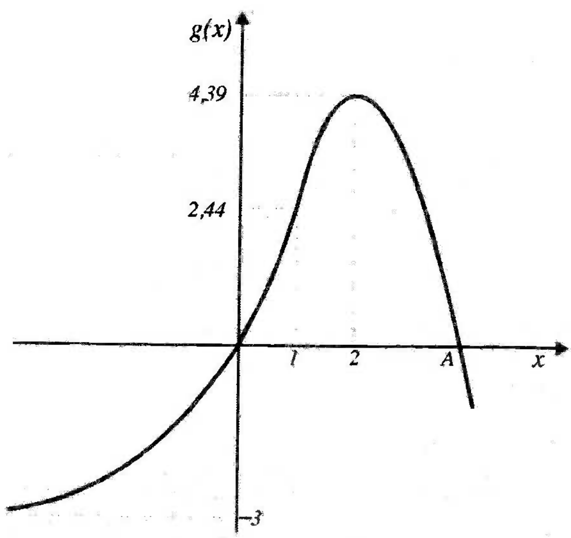
$g''(x) = e^x(2-x) + e^x(-1) = e^x(1-x)$

$g''(x) > 0$ za $x \in (-\infty, +1)$ funkcija je konveksna

$g''(x) < 0$ za $x \in (1, \infty)$ funkcija je konkavna

Tačka $(1, g(1))$ je prevojna tačka funkcije ($g(1) \approx 2{,}44$).

Grafik funkcije



Sa grafika funkcije se vidi da funkcija $g(x)$ ima još jednu nulu $x = A$ (broj A se može numerički odrediti).

- $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{e^x-1}}$

Domen

$e^x-1\neq 0 \Leftrightarrow e^x\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0$

$D: x\in R\setminus\{0\}$

Asimptote

$$\lim_{x\to 0^\pm}\frac{x}{\sqrt[3]{e^x-1}}=\lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{\frac{1}{3}(e^x-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot e^x}=\lim_{x\to 0^\pm}\frac{3\cdot\sqrt[3]{(e^x-1)^2}}{e^x}=0$$

$\Rightarrow$ funkcija nema vertikalnu asimptotu.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{e^x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot\sqrt[3]{(e^x-1)^2}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot\frac{2}{3}(e^x-1)^{-\frac{1}{3}}\cdot e^x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{e^x-1}}=0$$

$\Rightarrow$ prava $y=0$ je horizontalna asimptota kada $x\to\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{e^x-1}}=\infty \Rightarrow$ funkcija nema horizontalnu asimptotu kada $x\to-\infty$.

$$m_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt[3]{e^x-1}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{e^x-1}}=-1$$

$$n_2=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{e^x-1}}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{e^x-1}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+(e^x-1)^{-\frac{1}{3}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{3}(e^x-1)^{-\frac{4}{3}}e^x}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2e^x}{3\sqrt[3]{(e^x-1)^4}}=\frac{1}{3}\lim_{x\to-\infty}x^2e^x=\frac{1}{3}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}}=\frac{1}{3}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}=-\frac{2}{3}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\frac{2}{3}\lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

$\Rightarrow$ prava $y=-x$ je kosa asimptota funkcije kada $x\to-\infty$.

Monotonost i ekstremne vrednosti

$$f'(x)=\frac{\sqrt[3]{e^x-1}-x\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(e^x-1)^2}}\cdot e^x}{\sqrt[3]{(e^x-1)^2}}=\frac{3e^x-3-xe^x}{3\cdot\sqrt[3]{(e^x-1)^4}}=\frac{g(x)}{3\cdot\sqrt[3]{(e^x-1)^4}}$$

$f'(x)>0$ za $x\in(0,A)$ funkcija raste

$f'(x)<0$ za $x\in(-\infty,0)\cup(A,\infty)$ funkcija opada

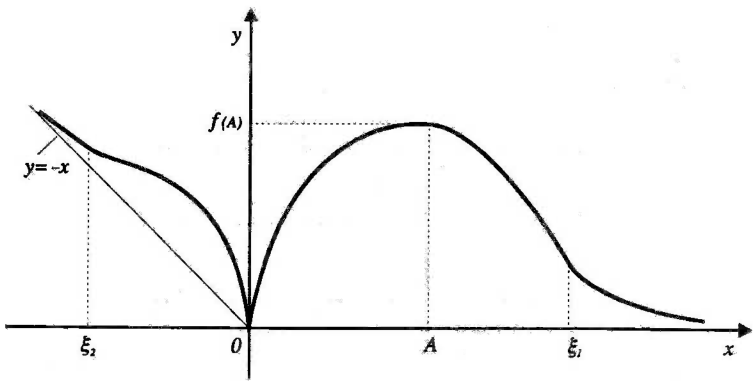
Funkcija $f(x)$ ima maksimum $f(A)$ za $x=A$.

Prvi izvod nije definisan u tački $x=0$.

$$tg\alpha = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3e^x - 3 - x\cdot e^x}{3\cdot(e^x-1)^{\frac{4}{3}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x(2-x)}{4(e^x-1)^{\frac{1}{3}}e^x} = +\infty \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$tg\beta = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty \Rightarrow \beta = -\frac{\pi}{2}$$

Grafik funkcije



10. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = ln\left|\dfrac{ln|x|+1}{ln|x|-1}\right|$.

Domen

$ln|x|-1 \neq 0 \Leftrightarrow ln|x| \neq 1$ $\quad$ $ln|x|+1 \neq 0 \Leftrightarrow ln|x| \neq -1$ $\quad$ $x \neq 0$

$|x| \neq e \Leftrightarrow x \neq \pm e$ $\quad$ $|x| \neq e^{-1} \Leftrightarrow x \neq \pm e^{-1}$

$$D: R\setminus\left\{-e, -\frac{1}{e}, 0, e, \frac{1}{e}\right\}$$

Parnost i neparnost funkcije

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ funkcija je parna. Kako je funkcija parna (simetrična u odnosu na y-osu) dovoljno je posmatrati funkciju samo za $x > 0$.

Nule funkcije

$$f(x) = ln\left|\frac{ln\,x+1}{ln\,x-1}\right| = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{ln\,x+1}{ln\,x-1}\right| = 1$$

1) $\dfrac{ln\,x+1}{ln\,x-1} = 1$

$ln\,x+1 = ln\,x-1 \Leftrightarrow 1 = -1$

2) $\dfrac{ln\,x+1}{ln\,x-1} = -1$

$ln\,x+1 = -ln\,x+1 \Leftrightarrow 2ln\,x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Asimptote

$$\lim_{x\to 0^+} ln\left|\frac{ln\,x+1}{ln\,x-1}\right| = ln \lim_{x\to 0^+}\left|\frac{ln\,x+1}{ln\,x-1}\right| = ln\,1 = 0$$

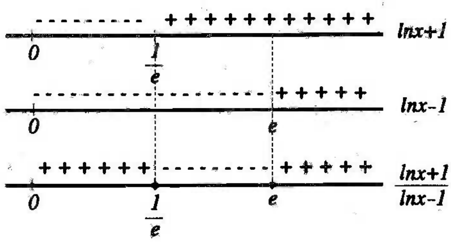
$$\lim_{x\to\frac{1}{e}^{\pm}} ln\left|\frac{ln\,x+1}{ln\,x-1}\right| = -\infty \Rightarrow \text{prava } x=\frac{1}{e} \text{ je vertikalna asimptota funkcije.}$$

$$\lim_{x\to e^{\pm}} ln\left|\frac{ln\,x+1}{ln\,x-1}\right| = \infty \Rightarrow \text{prava } x=e \text{ je vertikalna asimptota funkcije.}$$

$$\lim_{x\to\infty} ln\left|\frac{ln\,x+1}{ln\,x-1}\right| = 0 \Rightarrow \text{prava } y=0 \text{ je horizontalna asimptota funkcije.}$$

Funkcija nema kosu asimptotu.

$$f(x)=ln\left|\frac{ln\,x+1}{ln\,x-1}\right|$$

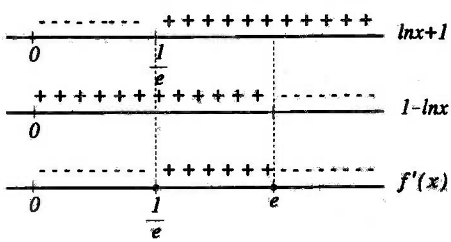


$$f(x)=\begin{cases} ln\dfrac{ln\,x+1}{ln\,x-1}, & x\in(0,\ \dfrac{1}{e})\cup(e,\ \infty) \\[2ex] ln\dfrac{ln\,x+1}{1-ln\,x}, & x\in(\dfrac{1}{e},e) \end{cases}$$

Monotonost i ekstremne vrednosti

$x\in(0,\ \dfrac{1}{e})\cup(e,\ \infty)$

$$f'(x)=\frac{ln\,x-1}{ln\,x+1}\cdot\frac{\frac{1}{x}(ln\,x-1)-(ln\,x+1)\cdot\frac{1}{x}}{(ln\,x-1)^2}=\frac{-2}{x(ln^2 x-1)}=\frac{2}{x(1-ln^2 x)}$$



$f'(x)<0$ za $x\in(0,\dfrac{1}{e})\cup(e,\infty)$ funkcija opada

Funkcija nema ekstremnih vrednosti.

$$tg\alpha=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x(1-ln^2 x)}=2\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-1}}{1-ln^2 x}=2\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^{-2}}{-2\,ln\,x\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-1}}{ln\,x}=$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^{-2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2}$$

$$x \in (\frac{1}{e}, e)$$

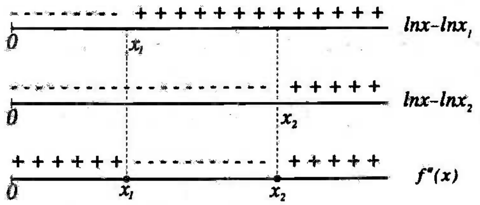
$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{\ln x + 1} \cdot \frac{\frac{1}{x}\cdot(1-\ln x)+(\ln x+1)\cdot\frac{1}{x}}{(1-\ln x)^2} = \frac{2}{x(1-\ln^2 x)}$$

$f'(x) > 0$ za $x \in (\frac{1}{e},\ e)$ funkcija raste. Funkcija nema ekstremnih vrednosti.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

$$f''(x) = \frac{-2\left[1-\ln^2 x + x(-2\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right]}{x^2(1-\ln^2 x)^2} = \frac{2(\ln^2 x + 2\ln x - 1)}{x^2(1-\ln^2 x)^2}$$

$\ln^2 x + 2\ln x - 1 = 0$, $\ln x = t$, $t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, $x_1 = e^{-1-\sqrt{2}}$, $x_2 = e^{-1+\sqrt{2}}$

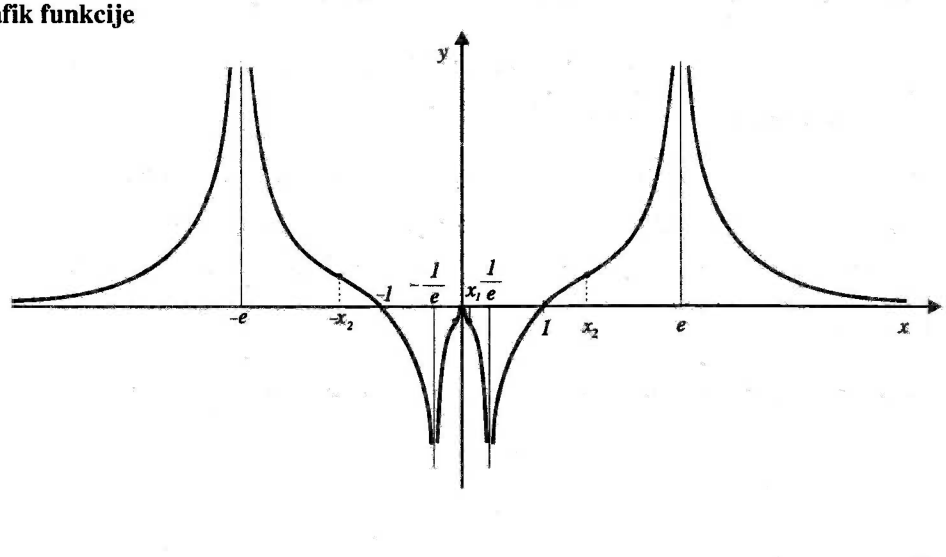


$f''(x) > 0$ za $x \in (0, x_1) \cup (x_2, e) \cup (e, \infty)$ funkcija je konveksna

$f''(x) < 0$ za $x \in (x_1, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, x_2)$ funkcija je konkavna

Tačke $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ su prevojne tačke funkcije ($f(x_1) \approx -0{,}88,\quad f(x_2) \approx 0{,}87$).

Grafik funkcije



Diferencijabilnost funkcije

Funkcija f je diferencijabilna nad otvorenim skupom D ako postoji izvod za svako $x \in D$. Ako je funkcija diferencijabilna u tački (nad skupom D) onda je i neprekidna u toj tački (nad skupom D). Obrnuto nije uvek tačno.

1. Date su funkcije $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+x^2\cos\frac{1}{x} & ,x\neq 0\\ A & ,x=0\end{cases}$ **i** $g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+x^3\cos\frac{1}{x} & ,x\neq 0\\ B & ,x=0.\end{cases}$

a) Odrediti A i B tako da funkcije budu neprekidne i pokazati da je $f'(0)=g'(0)=\frac{1}{2}$.

b) Pokazati da je $g'(x)$ neprekidna funkcija, a da $f'(x)$ ima prekid za $x=0$.

c) Da li postoje okoline tačke $x=0$ u kojima su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ monotone? (Posmatrati nizove $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ date sa $a_n=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ i $b_n=\dfrac{1}{\frac{3\pi}{2}+2n\pi}$).

a) $A=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x}{2}+x^2\cos\frac{1}{x})=0$, $B=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x}{2}+x^3\cos\frac{1}{x})=0$

$f'(x)=\frac{1}{2}+2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$, za $x\neq 0$, $g'(x)=\frac{1}{2}+3x^2\cos\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{x}$, za $x\neq 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ ne postoji, jer ne postoji $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$, pa zato po definiciji tražimo izvod u tački $x=0$.

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{2}+\Delta x^2\cos\frac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\frac{1}{2}+\Delta x\cos\frac{1}{\Delta x})=\frac{1}{2}$$

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{2}+3x^2\cos\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{x})=\frac{1}{2}$$

b) Kako je $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}g'(x)$, to je funkcija $g'(x)$ neprekidna za $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{2}+2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x})$ ne postoji, jer ne postoji $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$, $\Rightarrow$ funkcija $f'(x)$ nije neprekidna za $x=0$.

c) Funkcija $g'(x)$ je neprekidna za $x=0$ i $g'(0)=\frac{1}{2}>0$, pa postoji okolina tačke $x=0$ u kojoj je $g'(x)>0$, tj. okolina u kojoj funkcija $g(x)$ monotono raste.

Očigledno je da su svi članovi nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ pozitivni i da je $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ i $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

$$f'(a_n)=\frac{1}{2}+2a_n\cos\frac{1}{a_n}+\sin\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\cos(\frac{\pi}{2}+2n\pi)+\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi)=\frac{3}{2}>0.$$

$$f'(b_n)=\frac{1}{2}+2b_n\cos\frac{1}{b_n}+\sin\frac{1}{b_n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{\frac{3\pi}{2}+2n\pi}\cos(\frac{3\pi}{2}+2n\pi)+\sin(\frac{3\pi}{2}+2n\pi)=-\frac{1}{2}<0.$$

U svakoj okolini tačke $x=0$ postoje tačke u kojima je $f'(x)>0$ i tačke u kojima je $f'(x)<0$, pa ne postoji nijedna okolina tačke $x=0$ u kojoj je funkcija $f(x)$ monotona.

2. Funkcija f je data sa $f(x)=\begin{cases} Ax+B & , x\le 0\\ \frac{x}{3}+x^2\sin\frac{1}{7x} & , x>0.\end{cases}$

Odrediti A i B tako da funkcija bude diferencijabilna za svako x. Da li je funkcija rastuća u tački $x=0$? Da li je funkcija monotona u nekoj okolini tačke $x=0$?

Da bi funkcija bila diferencijabilna, mora biti neprekidna u tački $x=0$ i mora postojati $f'(0)$.

$$\lim_{x\to 0^+}(\frac{x}{3}+x^2\sin\frac{1}{7x})=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+}(\frac{x}{3}+x^2\sin\frac{1}{7x})=0,\ f(0)=B\ \Rightarrow B=0$$

$$f'(x)=\begin{cases} A & , x\le 0\\ \frac{1}{3}+2x\sin\frac{1}{7x}+x^2\cos\frac{1}{7x}\cdot\frac{1}{7}(-\frac{1}{x^2}) & , x>0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} A & , x\le 0\\ \frac{1}{3}+2x\sin\frac{1}{7x}-\frac{1}{7}\cos\frac{1}{7x} & , x>0\end{cases}$$

$$f'(0)=A$$

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{3}+2x\sin\frac{1}{7x}-\frac{1}{7}\cos\frac{1}{7x})$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)$ ne postoji, jer ne postoji $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos\frac{1}{7x}$, pa zato desni izvod u tački $x=0$ tražimo po definiciji

$$f'(0^+)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0^+ +\Delta x)-f(0^+)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\frac{\Delta x}{3}+(\Delta x)^2\sin\frac{1}{7\Delta x}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}(\frac{1}{3}+\Delta x\sin\frac{1}{7\Delta x})=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ A=\frac{1}{3}$$

- $f'(0)=\frac{1}{3}>0\ \Rightarrow$ funkcija je rastuća u tački $x=0$
- $x\in(-\varepsilon,0]\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}>0$
- $x\in(0,\varepsilon)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}+2x\sin\frac{1}{7x}-\frac{1}{7}\cos\frac{1}{7x}\ge\frac{1}{3}-2\varepsilon-\frac{1}{7}=\frac{4}{21}-2\varepsilon>0$ za svako dovoljno malo $\varepsilon>0$.

Dakle, u svakoj dovoljno maloj okolini tačke $x=0$ funkcija f je monotono rastuća jer je $f'(x)>0$ za $x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.

3. Data je funkcija $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{4}+x^3\sin\dfrac{1}{x^2} & , x>0 \\ C & , x=0 \\ (1+e^{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{x}}+Ax+B & , x<0. \end{cases}$

a) **Odrediti konstante A, B i C tako da funkcija bude diferencijabilna u tački $x=0$.**

b) **Pokazati da funkcija $f(x)$ nije monotona u okolini tačke $x=0$, koristeći nizove $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ i $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}$.**

a) Da bi funkcija bila diferencijabilna u tački $x=0$, mora biti neprekidna u tački $x=0$ i mora postojati $f'(0)$.

$$C=\lim_{x\to0^-}\left[(1+e^{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{x}}+Ax+B\right]=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{x}{4}+x^3\sin\frac{1}{x^2}\right].$$

$$\lim_{x\to0^-}(1+e^{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^-}(1+e^{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{e^{1/x}}\cdot e^{1/x}\cdot 1/x}=e^{\lim\limits_{x\to0^-}\frac{e^{1/x}}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1/x}{e^{-1/x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-1/x^2}{e^{-1/x}\cdot 1/x^2}}=$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to0^-}e^{1/x}}=e^0=1$$

$$\lim_{x\to0^-}\left[(1+e^{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{x}}+Ax+B\right]=1+B,\quad \lim_{x\to0^+}\left[\frac{x}{4}+x^3\sin\frac{1}{x^2}\right]=0$$

$$C=1+B=0\Rightarrow C=0 \text{ i } B=-1$$

$x<0$

Neka je $f(x)=g(x)+Ax+B$, gde je $g(x)=(1+e^{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{x}}$. Tada je $f'(x)=g'(x)+A$. Izvod funkcije $g(x)$ se traži korišćenjem logaritamskog izvoda.

$$\ln g(x)=\frac{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}{x}$$

$$\frac{1}{g(x)}\cdot g'(x)=\frac{\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot x-\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}{x^2}=-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3(1+e^{\frac{1}{x}})}-\frac{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}{x^2}$$

$$g'(x)=-g(x)\cdot\left[\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3(1+e^{\frac{1}{x}})}+\frac{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}{x^2}\right]$$

$$f'(x)=g'(x)+A=-g(x)\cdot\left[\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3(1+e^{\frac{1}{x}})}+\frac{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}{x^2}\right]+A$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\left[-g(x)\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3(1+e^{\frac{1}{x}})}+\frac{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}{x^2}\right)+A\right].$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3(1+e^{\frac{1}{x}})}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^{-3}}{e^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-3x^{-4}}{e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}}=-3\lim_{x\to 0^-}\frac{x^{-2}}{e^{-\frac{1}{x}}}=-3\lim_{x\to 0^-}\frac{-2x^{-3}}{e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}}=$$

$$=6\lim_{x\to 0^-}\frac{x^{-1}}{e^{-\frac{1}{x}}}=6\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^{-2}}{e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}}=-6\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0.$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\cdot e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}=0.$$

Sledi da je $f'(0^-)=A$.

$x>0$

$$f'(x)=\frac{1}{4}+3x^2\sin\frac{1}{x^2}+x^3\cdot\cos\frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)=\frac{1}{4}+3x^2\sin\frac{1}{x^2}-2\cos\frac{1}{x^2}$$

$\lim_{x\to 0^+}f'(x)$ ne postoji, jer ne postoji $\lim_{x\to 0^+}\cos\frac{1}{x^2}$, pa zato po definiciji tražimo desni izvod u tački $x=0$.

$$f'(0^+)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0^+ +\Delta x)-f(0^+)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\frac{\Delta x}{4}+(\Delta x)^3\sin\frac{1}{\Delta x^2}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\left(\frac{1}{4}+(\Delta x)^2\sin\frac{1}{\Delta x^2}\right)=\frac{1}{4}$$

$$f'(0^-)=f'(0^+)\Rightarrow A=\frac{1}{4}$$

b) Očigledno je da su svi članovi nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ pozitivni i da je $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ i $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

$$f'(a_n)=\frac{1}{4}+3a_n^2\sin\frac{1}{a_n^2}-2\cos\frac{1}{a_n^2}=\frac{1}{4}+\frac{3}{2n\pi}\sin 2n\pi-2\cos 2n\pi=\frac{1}{4}-2=-\frac{7}{4}<0$$

$$f'(b_n)=\frac{1}{4}+3b_n^2\sin\frac{1}{b_n^2}-2\cos\frac{1}{b_n^2}=\frac{1}{4}+\frac{3}{(2n+1)\pi}\sin(2n+1)\pi-2\cos(2n+1)\pi=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}>0$$

Ovim smo pokazali da u svakoj okolini tačke $x=0$ ima tačaka u kojima je $f'(x)<0$ i tačaka u kojima je $f'(x)>0$ pa funkcija $f(x)$ nije monotona u okolini tačke $x=0$.

4. Data je funkcija $f(x)=\begin{cases} 2x^2(x-1)\sin\frac{1}{x}+x, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$

Pokazati da je $f(x)$ diferencijabilna za svako $x\in R$. Da li postoji okolina tačke $x=0$ u kojoj je funkcija $f(x)$ monotona (posmatrati nizove $a_n=\frac{1}{2n\pi}$ i $b_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$)?

Za $x\neq 0$ je $f'(x)=2(3x^2-2x)\cdot\sin\frac{1}{x}-2(x-1)\cdot\cos\frac{1}{x}+1$. Ovaj izraz postoji za svako $x\neq 0$. Kako $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ ne postoji to $f'(0)$ moramo naći primenom definicije

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(\Delta x)^2(\Delta x-1)\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}+\Delta x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2\Delta x(\Delta x-1)\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}+1)=1.$$

Kako i $f'(0)$ postoji $\Rightarrow$ $f(x)$ je diferencijabilna za svako $x\in R$.

Da bi ispitali da li postoji okolina tačke $x=0$ u kojoj je $f(x)$ monotona posmatramo nizove sa opštim članovima $a_n=\frac{1}{2n\pi}$ i $b_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, pa u svakoj okolini tačke $x=0$ se nalazi beskonačno mnogo članova ova dva niza.

$$f'(a_n)=2(\frac{3}{4n^2\pi^2}-\frac{1}{n\pi})\sin 2n\pi-2(\frac{1}{2n\pi}-1)\cos 2n\pi+1=3-\frac{1}{n\pi}>0 \text{ za svako } n\in N$$

$$f'(b_n)=-1+\frac{2}{(2n+1)\pi}<0, \text{ za svako } n\in N.$$

U svakoj okolini tačke $x=0$ ima beskonačno mnogo tačaka u kojima je $f'(x)>0$ i beskonačno mnogo tačaka u kojima je $f'(x)<0$, pa ne postoji okolina tačke $x=0$ u kojoj je $f(x)$ monotona.

OSNOVNE TEOREME DIFERENCIJALNOG RAČUNA

Rolova teorema

Ako je funkcija $f:[a,b]\to R$ neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a,b]$, ima izvod nad otvorenim intervalom (a,b) i ako je $f(a)=f(b)$, tada postoji bar jedna tačka $\xi\in(a,b)$, takva da je $f'(\xi)=0$.

1. Neka je $f:R\to R$ dva puta diferencijabilna funkcija, sa osobinom da je $f'(a)=f'(b)=0$ i $f'(x)\neq 0$ za $x\in(a,b)$.

a) Dokazati da funkcija f ima najviše jednu nulu u intervalu (a,b). Dokazati da je funkcija f monotono rastuća ili monotono opadajuća nad intervalom $[a,b]$.

b) Dokazati da jednačina $f''(x)=0$ ima bar jedno rešenje u intervalu (a,b).

a) Pretpostavićemo suprotno da funkcija f ima dve nule u intervalu (a,b), tj. da postoje $c,d\in(a,b)$ tako da je $f(c)=f(d)=0$. Tada na osnovu Rolove teoreme postoji $\xi\in(c,d)\subset(a,b)$ tako da je $f'(\xi)=0$, što je kontradikcija sa uslovom zadatka $f'(x)\neq 0$ za $x\in(a,b)$. Dakle, funkcija f može da ima najviše jednu nulu u intervalu (a,b). Dakle, u intervalu (a,b) je $f'(x)>0$ ili $f'(x)<0$, tj. prvi izvod ne menja znak, pa je funkcija f monotono rastuća ili monotono opadajuća. Ostaje da pokažemo da to važi i na krajevima intervala. Uzmimo slučaj da je funkcija f monotono rastuća, tj. $f'(x)>0$ za svako $x\in(a,b)$. Pretpostavimo da je $f(a)\geq f(x)$ za svako $x\in(a,b)$. Ako je $f(a)=f(x)$ onda, na osnovu Rolove teoreme, postoji $\xi\in(a,x)$ takvo da je $f'(\xi)=0$, što je nemoguće. Ako je $f(a)>f(x)$ tada, zbog neprekidnosti funkcije f, za svako η, $f(a)>\eta>f(x)$ postoji $\xi\in(a,x)$ takvo da je $f(\xi)=\eta$. Dakle $f(\xi)>f(x)$ za $\xi<x$, što je nemoguće jer je funkcija f rastuća u intervalu (a,b). Znači mora biti $f(a)<f(x)$ za svako $x\in(a,b)$. Slično se dokazuje i za drugu krajnju tačku intervala $[a,b]$:

$f(b)\leq f(x)$ za svako $x\in(a,b)$

$f(b)=f(x)\Rightarrow$ postoji $\xi\in(x,b)$ takvo da je $f'(\xi)=0$, što je nemoguće.

$f(b)<f(x)\Rightarrow$ za svako η takvo da je $f(b)<\eta<f(x)$ postoji $\xi\in(x,b)$ takvo da je $f'(\xi)=\eta$, tj. $f(\xi)<f(x)$ za $\xi>x$ što je nemoguće.

Sledi, funkcija f je monotona nad intervalom $[a,b]$.

b) $f'(a)=f'(b)$ i f' je diferencijabilna (funkcija f je dva puta diferencijabilna), pa ako primenimo Rolovu teoremu na funkciju $f'(x)$, postoji $\xi\in(a,b)$ takvo da je $f''(\xi)=0$.

2. Pokazati da jednačina $a_n cosnx + a_{n-1}cos(n-1)x + ... + a_1 cosx = 0$ ima bar jedno rešenje u intervalu $(0,\pi)$.

Funkcija $F(x) = \frac{a_n}{n} sinnx + \frac{a_{n-1}}{n-1} sin(n-1)x + ... + a_1 sinx$ zadovoljava uslove Rolove teoreme (funkcija $F(x)$ je neprekidna nad intervalom $[0,\pi]$, diferencijabilna nad intervalom $(0,\pi)$ i $F(0) = F(\pi) = 0$) odakle sledi da postoji $\xi \in (0,\pi)$ za koje je $F'(\xi) = 0$, tj. $a_n cosn\xi + a_{n-1}cos(n-1)\xi + ... + a_1 cos\xi = 0$, što je trebalo i dokazati.

Lagranžova teorema

Ako je funkcija $f : [a,b] \to R$ neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a,b]$ i ima izvod nad otvorenim intervalom (a,b), tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a,b)$ takva da je: $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

3. Pokazati da jednačina $2xcos\frac{1}{x} + sin\frac{1}{x} = \frac{16\sqrt{2} - 9}{2\pi}$ ima bar jedno rešenje u intervalu $(\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi})$.

Funkcija $F(x) = x^2 cos\frac{1}{x}$ je neprekidna nad intervalom $\left[\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right]$, a diferencijabilna nad intervalom $(\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi})$ pa zadovoljava uslove Lagranžove teoreme, tj. postoji $\xi \in (\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi})$ takvo da je $F(\frac{4}{\pi}) - F(\frac{3}{\pi}) = F'(\xi)(\frac{4}{\pi} - \frac{3}{\pi})$.

$$F(\frac{4}{\pi}) - F(\frac{3}{\pi}) = \frac{16}{\pi^2} cos\frac{\pi}{4} - \frac{9}{\pi^2} cos\frac{\pi}{3} = \frac{16}{\pi^2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{9}{\pi^2}\frac{1}{2} = \frac{16\sqrt{2} - 9}{2\pi^2} = F'(\xi) \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$\frac{16\sqrt{2} - 9}{2\pi^2} = \left[2\xi cos\frac{1}{\xi} + sin\frac{1}{\xi}\right] \cdot \frac{1}{\pi} \Rightarrow 2\xi cos\frac{1}{\xi} + sin\frac{1}{\xi} = \frac{16\sqrt{2} - 9}{2\pi}.$$

Košijeva teorema

Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne nad zatvorenim intervalom $[a,b]$, imaju izvode nad otvorenim intervalom (a,b), i za svako $x \in (a,b)$ je $g'(x) \neq 0$, tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a,b)$, takva da je $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

4. Date su funkcije f i g sa $f(x)=x+\arccos\dfrac{2e^x}{e^{2x}+1}$ i $g(x)=x-\dfrac{\pi}{2}+2\operatorname{arctg}e^x$. Naći sve realne brojeve x za koje važi $f(x)=g(x)$.

$$f'(x)=1+\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2e^x}{e^{2x}+1}\right)^2}}\cdot\frac{2e^x(e^{2x}+1)-2e^x\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}=1+\frac{2e^x(e^{2x}-1)}{|e^{2x}-1|(e^{2x}+1)}$$

$$e^{2x}-1>0 \Leftrightarrow e^{2x}>1 \Leftrightarrow 2x\ln e>\ln 1=0 \Leftrightarrow 2x>0 \Rightarrow x>0$$

$$f'(x)=\begin{cases} 1+\dfrac{2e^x}{e^{2x}+1}=\dfrac{(e^x+1)^2}{e^{2x}+1}, & x>0\\ 1-\dfrac{2e^x}{e^{2x}+1}=\dfrac{(e^x-1)^2}{e^{2x}+1}, & x<0\end{cases}$$

$$g'(x)=1+2\cdot\frac{1}{1+e^{2x}}\cdot e^x=\frac{(e^x+1)^2}{e^{2x}+1}$$

Za svako $x>0$ važi $f'(x)=g'(x)$. Kako su funkcije $f(\mu)$ i $g(\mu)$ neprekidne za svako $\mu\in[0,x]$, i prvi izvod ovih funkcija postoji za svako $\mu\in(0,x)$, to one ispunjavaju uslove Košijeve teoreme, pa za svako $x>0$ postoji $\xi\in(0,x)$ takvo da važi $\dfrac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

$$f(0)=\arccos 1=0$$

$$g(0)=0-\frac{\pi}{2}+2\operatorname{arctg}1=-\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{4}=0$$

$$f'(\xi)=g'(\xi)\Rightarrow\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=1$$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=1\Rightarrow f(x)=g(x)$ za svako $x\geq 0$.

Da bi pokazali da je $f(x)\neq g(x)$ za svako $x<0$ posmatramo funkciju $F(x)=f(x)-g(x)$. Očigledno je $F(0)=0$. Ako bi postojala tačka $a<0$ za koju je $F(a)=0$, na osnovu Rolove teoreme postoji $\xi\in(a,0)$, takvo da je $F'(\xi)=0$. Međutim, ovo je nemoguće, s obzirom da je

$F'(x)=f'(x)-g'(x)=\dfrac{(e^x-1)^2-(e^x+1)^2}{e^{2x}+1}=\dfrac{-4e^x}{e^{2x}+1}<0$ za svako $x<0$. Dakle, $f(x)\neq g(x)$ za svako $x<0$.

INTEGRALNI RAČUN

Neodređeni integral

Ako za funkciju $f: I \to R$, $x \in I$, postoji funkcija $F: I \to R$, koja ima izvod $F'(x)$ nad intervalom I i pri tom važi $F'(x) = f(x)$, $x \in I$, onda kažemo da je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ nad intervalom I.

Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f(x)$ nad nekim intervalom I naziva se neodređeni integral funkcije $f(x)$ i označava se sa $\int f(x)dx$.

U ovoj definiciji $f(x)$ se naziva podintegralna funkcija, $f(x)dx$ podintegralni izraz, $\int$ znak integrala, a postupak nalaženja neodređenog integrala naziva se integracija.

Ako je $F(x)$ jedna primitivna funkcija funkcije $f(x)$ nad nekim intervalom, onda je skup svih primitivnih funkcija, tj. $\int f(x)dx$ nad tim intervalom oblika $\{F(x)+c : c \in R\}$, što kraće pišemo $\int f(x)dx = F(x) + c$.

Ako je funkcija $f: I \to R$ neprekidna nad intervalom I tada postoji primitivna funkcija $F: I \to R$ nad intervalom I, tj. postoji neodređeni integral funkcije $f(x)$ nad datim intervalom.

Osobine neodređenog integrala

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$,
2. $\int f'(x)dx = f(x) + c$,
3. $d\int f(x)dx = f(x)dx$,
4. $\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$, a=const,
5. $\int (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \dots + \int f_n(x)dx$,

Tablica integrala

$\int dx = x + c$	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + c_1,\ a \neq 0$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln \left\| \frac{x-a}{x+a} \right\| + c,\ a \neq 0$
$\int \frac{dx}{x} = ln\| x \| + c$	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} ln \left\| \frac{a+x}{a-x} \right\| + c,\ a \neq 0$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln \left\| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\| + c,\ a \neq 0$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + c = -arccos \frac{x}{a} + c_1,\ a > 0$
$\int sin\, x dx = -cos\, x + c$	$\int \frac{dx}{sin\, x} = ln \left\| tg \frac{x}{2} \right\| + c$
$\int cos\, x dx = sin\, x + c$	$\int \frac{dx}{cos\, x} = ln \left\| tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \right\| + c$
$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + c$	$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} arcsin \frac{x}{a} + c,\ a > 0$
$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + c$	$\int \sqrt{x^2+A}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2} ln \left\| x + \sqrt{x^2+A} \right\| + c$

Podrazumeva se da date jednakosti važe nad onim intervalima nad kojima su podintegralne funkcije neprekidne.

Integracija pomoću smene

Neka sirjekcija $\varphi : I_1 \to I \subset R$ ima neprekidan izvod različit od nule nad intervalom I_1 i neka za funkciju $f : I \to R$ postoji neodređeni integral nad intervalom I. Tada važi $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, (pri tom se podrazumeva da se posle integracije desne strane nad intervalom I, stavi $t = \varphi^{-1}(x)$).

1. $$\int \frac{dx}{7x^2-8} = \frac{1}{7}\int \frac{dx}{x^2 - (\sqrt{\frac{8}{7}})^2} = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{8}{7}}} ln \left| \frac{x-\sqrt{\frac{8}{7}}}{x+\sqrt{\frac{8}{7}}} \right| + c = \frac{1}{2\sqrt{56}} ln \left| \frac{x\sqrt{7}-\sqrt{8}}{x\sqrt{7}+\sqrt{8}} \right| + c$$

Napomena:

Prilikom traženja neodređenog integrala skoncentrisaćemo se na metode traženja datog integrala podrazumevajući da se integral traži nad nekim intervalom gde su konkretne metode izvodljive. Na primer, ako uvodimo smenu $tg\frac{x}{2}=t$ to znači da smo se, ako u zadatku nije drugačije napomenuto, ograničili na interval $(-\pi,\pi)$ - pod uslovom da je nad tim intervalom podintegralna funkcija definisana. Kada se traži određeni integral o svim činjenicama će se voditi računa, tj. o intervalima gde su odgovarajuće metode primenljive.

2. $$\int\frac{arctg\frac{x}{2}}{4+x^2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{arctg\frac{x}{2}}{1+(\frac{x}{2})^2}dx=\begin{pmatrix} arctg\frac{x}{2}=t \\ \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}dx=2dt\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\int tdt=\frac{t^2}{4}+c=\frac{1}{4}(arctg\frac{x}{2})^2+c$$

3. $$\int\frac{x-\sqrt{arctg2x}}{1+4x^2}dx=\int\frac{xdx}{1+4x^2}-\int\frac{\sqrt{arctg2x}}{1+(2x)^2}dx=\begin{pmatrix} 1+4x^2=t & arctg2x=t_1 \\ xdx=\frac{1}{8}dt & \frac{dx}{1+4x^2}=\frac{1}{2}dt_1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int t_1^{\frac{1}{2}}dt_1=\frac{1}{8}ln|\,t\,|-\frac{1}{2}\cdot\frac{t_1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{1}{8}ln\left|1+4x^2\right|-\frac{1}{3}(arctg2x)^{\frac{3}{2}}+c\,.$$

4. $$\int\frac{e^{arctgx}+xln(1+x^2)+1}{1+x^2}dx=\int\frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx+\int\frac{x\,ln(1+x^2)}{1+x^2}dx+\int\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\begin{pmatrix} arctgx=t & ln(1+x^2)=t_1 \\ \frac{dx}{1+x^2}=dt & \frac{xdx}{1+x^2}=\frac{1}{2}dt_1\end{pmatrix}=\int e^t dt+\frac{1}{2}\int t_1dt_1+\int\frac{dx}{1+x^2}=e^t+\frac{t_1^{\,2}}{4}+arctgx+c=$$

$$=e^{arctgx}+\frac{1}{4}\left[(ln(1+x^2)\right]^2+arctgx+c\,.$$

5. $$\int\sqrt{\frac{ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx=\begin{pmatrix} ln(x+\sqrt{1+x^2})=t \\ \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=dt\end{pmatrix}=\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}\left[\,ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\right]^{\frac{3}{2}}+c$$

6. $$\int\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx=\begin{pmatrix}\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2 \\ dx=2tdt\end{pmatrix}=2\int\frac{t+t^3}{1+t}dt=2\int\frac{t+1-1+t^3+1-1}{1+t}dt=$$

$$=2\int dt-4\int\frac{dt}{1+t}+2\int\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}dt=2t-4ln|\,t+1\,|+2\cdot(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t)+c=$$

$$=2\sqrt{x}-4ln\left|\,\sqrt{x}+1\,\right|+\frac{2}{3}(\sqrt{x})^3-x+2\sqrt{x}+c\,.$$

7. $\int \frac{lnx}{x\sqrt{1+lnx}}dx = \left(\begin{matrix} \sqrt{1+\ln x} = t \Rightarrow 1+\ln x = t^2 \\ \frac{dx}{x} = 2tdt \end{matrix} \right) = \int \frac{t^2-1}{t} 2tdt = 2\int t^2 dt - 2\int dt =$

$= 2\frac{t^3}{3} - 2t + c = \frac{2}{3}(1+\ln x)\cdot\sqrt{1+\ln x} - 2\sqrt{1+\ln x} + c = \frac{2\sqrt{1+\ln x}}{3}(\ln x - 2) + c.$

8. $\int \frac{1-3x}{3+2x}dx = \int \frac{dx}{3+2x} - 3\int \frac{x}{3+2x}dx = \int \frac{dx}{3+2x} - 3\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x+3-3}{3+2x}dx =$

$= \int \frac{dx}{3+2x} - \frac{3}{2}\int dx + \frac{9}{2}\int \frac{dx}{3+2x} = \frac{11}{2}\int \frac{dx}{3+2x} - \frac{3}{2}x = \left(\begin{matrix} 3+2x = t \Rightarrow 2dx = dt \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{matrix} \right) =$

$= \frac{11}{4}\int \frac{dt}{t} - \frac{3}{2}x = \frac{11}{4}\ln|\, t\,| - \frac{3}{2}x + c = \frac{11}{4}\ln|\,3+2x\,| - \frac{3}{2}x + c.$

Parcijalna integracija

Neka su $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne funkcije i neka postoji primitivna funkcija funkcije $u'(x)v(x)$. Tada postoji primitivna funkcija funkcije $u(x)v'(x)$ i pri tom važi jednakost $\int udv = uv - \int vdu$.

1. $I = \int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\, dx$

$u = \ln\sqrt{x^2-1} \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}2xdx = \frac{x}{x^2-1}dx$

$dv = x\sqrt{x^2+1}\,dx \Rightarrow v = \int x\sqrt{x^2+1}dx = \left(\begin{matrix} x^2+1 = t \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{matrix} \right) = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$

$I = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}\cdot\ln\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{3}\int \sqrt{(x^2+1)^3}\,\frac{x}{x^2-1}dx$

$\int \frac{x\sqrt{(x^2+1)^3}}{x^2-1}dx = \left(\begin{matrix} x^2+1 = t^2 \\ xdx = tdt \end{matrix} \right) = \int \frac{t^4 dt}{t^2-2} = \int \frac{(t^2)^2 - 2^2 + 4}{t^2-2}dt = \int (t^2+2)dt + 4\int \frac{dt}{t^2-2} =$

$= \frac{t^3}{3} + 2t + 4\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + c = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + 2(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}\right| + c$

$I = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{9}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} - \frac{2}{3}\sqrt{x^2+1} - \frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}\right| + c$

2. $\int arcsinx\, lnx\, dx$

$$u = arcsin\,x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\,, \quad dv = ln\,xdx$$

$$v = \int ln\,xdx = \begin{pmatrix} u_1 = ln\,x \Rightarrow du_1 = \dfrac{dx}{x} \\ dv_1 = dx \Rightarrow v_1 = x \end{pmatrix} = x\,ln\,x - \int x\frac{dx}{x} = x\,ln\,x - x$$

$$\int arcsin\,x\,ln\,x\,dx = x(ln\,x-1)arcsin\,x - \int \frac{x(ln\,x-1)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$u = ln\,x - 1 \Rightarrow du = \frac{dx}{x},\ dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$v = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{pmatrix} 1-x^2 = t \\ xdx = -\dfrac{1}{2}dt \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

$$\int \frac{x(ln\,x-1)}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2}(ln\,x-1) + \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$$

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx = \begin{pmatrix} 1-x^2 = t^2 \Rightarrow xdx = -tdt \\ x^2 = 1-t^2 \end{pmatrix} = -\int \frac{t}{1-t^2}\cdot tdt = -\int \frac{t^2}{1-t^2}dt = \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt =$$

$$= \int dt + \int \frac{dt}{t^2-1} = t + \frac{1}{2}ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right| + c$$

$$\int \frac{x(ln\,x-1)}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2}(ln\,x-1) + \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right| + c$$

$$\int arcsin\,x\,ln\,x\,dx = x(ln\,x-1)arcsin\,x + \sqrt{1-x^2}(ln\,x-2) - \frac{1}{2}ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right| + c\,.$$

3. $$\int x^5 e^{-x^2}dx = \begin{pmatrix} -x^2 = t \\ xdx = -\dfrac{1}{2}dt \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\int t^2 e^t dt = \begin{pmatrix} u = t^2 \Rightarrow du = 2tdt \\ dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(t^2 e^t - 2\int te^t dt) =$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 e^t + \int te^t dt = \begin{pmatrix} u_1 = t \Rightarrow du_1 = dt \\ dv_1 = e^t dt \Rightarrow v_1 = e^t \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}t^2 e^t + te^t - \int e^t dt =$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 e^t + te^t - e^t = -e^{-x^2}(1 + x^2 + \frac{x^4}{2}) + c\,.$$

4. $$\int (x^2+1)\cdot arctg\sqrt{x^2-1}dx = \begin{pmatrix} u = arctg\sqrt{x^2-1} \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \\ dv=(x^2+1)dx \Rightarrow v=\dfrac{x^3}{3}+x \end{pmatrix} =$$

$$=(\frac{1}{3}x^3+x)arctg\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2-1}}dx=(\frac{1}{3}x^3+x)arctg\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x^2-1+4}{\sqrt{x^2-1}}dx=$$

$$=(\frac{1}{3}x^3+x)\cdot arctg\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x^2-1+4}{\sqrt{x^2-1}}dx=$$

$$=(\frac{1}{3}x^3+x)\cdot arctg\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{3}\int\sqrt{x^2-1}dx-\frac{4}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=(\frac{1}{3}x^3+x)\cdot arctg\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{3}(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|)-\frac{4}{3}ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c=$$

$$=(\frac{1}{3}x^3+x)\cdot arctg\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{6}x\sqrt{x^2-1}-\frac{7}{6}ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c.$$

5. $$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x}{(x^2+a^2)^2}xdx=$$

$$=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x}{(x^2+a^2)^2}xdx$$

$$u=x\Rightarrow du=dx\,,\ dv=\frac{xdx}{(x^2+a^2)^2}$$

$$v=\int dv=\int\frac{xdx}{(x^2+a^2)^2}=\begin{pmatrix} x^2+a^2=t \\ xdx=\dfrac{1}{2}dt \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{2}\int t^{-2}dt=-\frac{1}{2}t^{-1}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}$$

$$\int\frac{x}{(x^2+a^2)^2}xdx==-\frac{x}{2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{2a}arctg\frac{x}{a}-\frac{x}{2(x^2+a^2)}+c$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^3}arctg\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}(\frac{1}{2a}arctg\frac{x}{a}-\frac{x}{2(x^2+a^2)})+c=\frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+c$$

6. $$\int cos^2(lnx)dx=\begin{pmatrix} u=cos^2(ln\,x)\Rightarrow du=2cos(ln\,x)\cdot(-sin(ln\,x))\cdot\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx\Rightarrow v=x \end{pmatrix}=$$

$$=x\,cos^2(ln\,x)+2\int cos(ln\,x)\,sin(ln\,x)dx=x\,cos^2(ln\,x)+\int sin(2\,ln\,x)\,dx$$

$$\int sin(2\,ln\,x)\,dx=\begin{pmatrix} u=sin(2\,ln\,x) & dv=dx \\ du=\dfrac{2}{x}cos(2\,ln\,x)dx & v=x \end{pmatrix}=x\,sin(2\,ln\,x)-2\int cos(2\,ln\,x)dx=$$

$$=\begin{pmatrix} u_1=cos(2\,ln\,x) & dv_1=dx \\ du_1=-sin(2\,ln\,x)\dfrac{2dx}{x} & v_1=x \end{pmatrix}=x\,sin(2\,ln\,x)-2x\,cos(2\,ln\,x)-4\int sin(2\,ln\,x)\,dx$$

$$\int sin(2\,ln\,x)\,dx = \frac{1}{5}(x\,sin(ln\,x) - 2x\,cos(2\,ln\,x)) + c$$

$$\int cos^2(lnx)dx = x\,cos^2(ln\,x) + \frac{1}{5}(x\,sin(2\,ln\,x) - 2x\,cos(2\,ln\,x)) + c$$

Integrali sa kvadratnim trinomom

I Integrali oblika $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$ ($a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$) rešavaju se na sledeći način.

- $m = 0$

$$ax^2 + bx + c = a\left[(x+k)^2 + l\right] \;,\; k, l = const$$

$$\int \frac{n}{ax^2+bx+c}dx = \frac{n}{a}\int \frac{dx}{(x+k)^2+l}$$

- $m \neq 0$

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b) + n - \frac{mb}{2a}}{ax^2+bx+c}dx$$

1. $$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \begin{pmatrix} x+1=t \\ dx=dt \end{pmatrix} = \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + c = \frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2} + c$$

2. $$\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4) - 2 + 6}{x^2-4x+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx + 4\int \frac{dx}{x^2-4x+5} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx + 4\int \frac{dx}{(x-2)^2+1} = \begin{pmatrix} x^2-4x+5=t & x-2=t_1 \\ (2x-4)dx=dt & dx=dt_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t} + 4\int \frac{dt_1}{t_1^2+1} = \frac{3}{2}ln|\,t\,| + 4arctgt_1 + c = \frac{3}{2}ln\left|x^2 - 4x + 5\right| + 4arctg(x-2) + c\,.$$

II Integrali oblika $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ ($a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$) rešavaju se na sličan način kao integrali oblika I.

III Integrali oblika $\int \frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ ($m \neq 0$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$) se pomoću smene $mx + n = \frac{1}{t}$ svode na integrale oblika II.

3. $$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}=\begin{pmatrix} x+1=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=\frac{-1}{t^2}dt \\ x=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}\end{pmatrix}=-\int\frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{(1-t)^2}{t^2}+2\frac{1-t}{t}}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{t\sqrt{\frac{(1-t)^2+2t-2t^2}{t^2}}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\arcsin\frac{1}{x+1}+c\,.$$

IV Integrali oblika $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$ ($a\neq 0$, $b^2-4ac<0$) svode se na integrale oblika $\int\sqrt{a^2-x^2}\ dx$ i $\int\sqrt{x^2+A}\ dx$.

4. $$\int\sqrt{x-x^2}\ dx=\left(x-x^2=-(x^2-x+\frac{1}{4})+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2\right)=\int\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}\ dx=$$

$$=\begin{pmatrix} x-\frac{1}{2}=t \\ dx=dt\end{pmatrix}=\int\sqrt{(\frac{1}{2})^2-t^2}\,dt=\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}+\frac{\frac{1}{4}}{2}\arcsin\frac{t}{\frac{1}{2}}+c=$$

$$=\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{8}\arcsin(2x-1)+c\,.$$

5. $$\int\frac{dx}{3x^2-x+1}=\begin{pmatrix} 3x^2-x+1=3(x^2-\frac{x}{3})+1=3(x^2-\frac{x}{3}+\frac{1}{36})+1-\frac{1}{12}= \\ =3(x-\frac{1}{6})^2+\frac{11}{12}=3\cdot\left[(x-\frac{1}{6})^2+\frac{11}{36}\right]\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{6})^2+(\frac{\sqrt{11}}{6})^2}=\frac{1}{3}\frac{6}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}}+c=\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6x-1}{\sqrt{11}}+c\,.$$

6. $$\int\frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}dx=\int\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+4}dx=\int\frac{x^2+3x+4-5x-3}{x^2+3x+4}dx=\int dx-\int\frac{5x+3}{x^2+3x+4}dx=$$

$$=x-\int\frac{\frac{5}{2}(2x+3)+3-\frac{15}{2}}{x^2+3x+4}dx=x-\frac{5}{2}\int\frac{2x+3}{x^2+3x+4}dx+\frac{9}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{7}}{2})^2}=$$

$$=x-\frac{5}{2}\ln\left|x^2+3x+4\right|+\frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+c$$

7. $$\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}=\begin{pmatrix} 2+3x-2x^2=-2(x^2-\frac{3}{2}x)+2=-2(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16})+2+\frac{9}{8}= \\ =-2(x-\frac{3}{4})^2+\frac{25}{8}=2\left[\frac{25}{16}-(x-\frac{3}{4})^2\right]\end{pmatrix}=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{5}{4})^2 - (x - \frac{3}{4})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-3}{5} + c\,.$$

8. $$\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx = \begin{pmatrix} x^2-4x+5=t \\ (2x-4)dx = dt \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 3\sqrt{x^2-4x+5} + c\,.$$

9. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}} = \begin{pmatrix} x = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{x} \\ dx = -\frac{1}{t^2}dt \end{pmatrix} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}-1}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1+t-t^2}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t-t^2}} =$$

$$= \left(1+t-t^2 = -(t^2-t+\frac{1}{4}) + 1 + \frac{1}{4} = -(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4} = \frac{5}{4} - (t-\frac{1}{2})^2 \right) =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{(\frac{\sqrt{5}}{2})^2 - (t-\frac{1}{2})^2}} = -\arcsin \frac{2t-1}{\sqrt{5}} + c = -\arcsin \frac{\frac{2}{x}-1}{\sqrt{5}} + c = -\arcsin \frac{2-x}{x\sqrt{5}} + c$$

Integrali racionalnih funkcija

Svaku nepravu racionalnu funkciju $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (stepen polinoma $P(x)$ je veći ili jednak od stepena polinoma $Q(x)$) možemo napisati u obliku $\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R_1(x)}{Q(x)}$, gde je $T(x)$ polinom, a $\frac{R_1(x)}{Q(x)}$ racionalna funkcija kod koje je stepen polinoma $R_1(x)$ manji od stepena polinoma $Q(x)$ ($\frac{R_1(x)}{Q(x)}$ se naziva pravi razlomak ili prava racionalna funkcija).

Neka je $P(x)$ polinom stepena manjeg od n, a $Q(x)$ polinom oblika $Q(x) = c_n(x-a_1)^{k_1} \ldots (x-a_p)^{k_p}(x^2+b_1x+c_1)^{l_1} \ldots (x^2+b_qx+c_q)^{l_q}$, gde je $k_1+k_2+\ldots+k_p+2(l_1+l_2+\ldots+l_q) = n$, n je stepen polinoma $Q(x)$, a_i, b_j i c_j su realni brojevi za koje važi $b_j^2 - 4c_j < 0$, $i = 1,2,\ldots,p$, $j = 1,2,\ldots,q$ (svaki polinom $Q(x)$ se može napisati u tom obliku).

Tada se $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ može napisati u obliku

$$R(x) = (\frac{A_{11}}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}) + \ldots + (\frac{A_{p1}}{x-a_p} + \ldots + \frac{A_{pk_p}}{(x-a_p)^{k_p}}) +$$

$$+(\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1}+...+\frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+b_1x+c)^{l_1}}+...+(\frac{B_{q1}x+C_{q1}}{x^2+b_qx+c_q}+...+\frac{B_{ql_q}x+C_{ql_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{l_q}}$$

Koeficijente A_{ij}, B_{ij} i C_{ij} dobijamo metodom neodređenih (nepoznatih) koeficijenata. Ova metoda se sastoji u sledećem: za datu funkciju $R(x)$ pretpostavi se da važi data jednakost u kojoj su A_{ij}, B_{ij} i C_{ij} neodređeni koeficijenti. Množenjem te jednakosti sa $Q(x)$, dobijaju se na levoj i desnoj strani polinomi; kako su dva polinoma identički jednaka ako i samo ako su im jednaki koeficijenti uz iste stepene od x, te se izjednačavanjem ovih koeficijenata dobija sistem jednačina za određivanje A_{ij}, B_{ij} i C_{ij}.

Razlomci oblika $\frac{A}{(x-a)^k}$ i $\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^l}$ nazivaju se prosti ili parcijalni razlomci.

1. $\int\frac{x^2dx}{(x^2-3x+2)^2}$

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2} \qquad (1)$$

$x^2=A(x-1)(x^2-4x+4)+B(x^2-4x+4)+C(x^2-2x+1)(x-2)+D(x^2-2x+1)$

$x^2=Ax^3-4Ax^2+4Ax-Ax^2+4Ax-4A+Bx^2-4Bx+4B+Cx^3-2Cx^2+Cx-$

$-2Cx^2+4Cx-2C+Dx^2-2Dx+D$

$x^2=(A+C)x^3+(-5A+B-4C+D)x^2+(8A-4B+5C-2D)x+(-4A+4B-2C+D)$

$A+C=0$, $\quad -5A+B-4C+D=1$, $\quad 8A-4B+5C-2D=0$, $\quad -4A+4B-2C+D=0$.

Pomnožimo jednačinu (1) sa $(x-1)^2$.

$$\frac{x^2}{(x-2)^2}=B+A(x-1)+(\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2})(x-1)^2$$

Za $x=1$, dobija se $B=1$.

Pomnožimo jednačinu (1) sa $(x-2)^2$.

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}=D+(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2})(x-2)^2+C(x-2)$$

Za $x=2$, dobija se $D=4$. Dalje se iz sistema jednačina dobija $A=4$ i $C=-4$.

$$\int\frac{x^2}{(x^3-3x+2)^2}dx=\int(\frac{4}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{-4}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2})dx=$$

$$=4\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}-4\int\frac{dx}{x-2}+4\int\frac{dx}{(x-2)^2}=\begin{pmatrix}x-1=t\Rightarrow dx=dt\\ x-2=t_1\Rightarrow dx=dt_1\end{pmatrix}=$$

$$=4\int\frac{dt}{t}+\int t^{-2}dt-4\int\frac{dt_1}{t_1}+4\int t_1^{-2}dt_1=4\ln|t|+\frac{t^{-1}}{-1}-4\ln|t_1|+4\frac{t_1^{-1}}{-1}+c=$$

$$=4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{1}{x-1}-4\frac{1}{x-2}+c=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^4-\frac{5x-6}{x^2-3x+2}+c\,.$$

2. $$\int\frac{x^2+3x-1}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx=\int\frac{x^2+x+1+2x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx=\int\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx+$$

$$+2\int\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx=\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+x+1)}+2\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

Koreni jednačine $x^2+x+1=0$ su kompleksni jer je $D<0$.

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)$$

$$1=(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C)$$

$$A+B=0,\quad A-B+C=0,\quad A-C=1$$

Za $x=1$ dobija se $A=\frac{1}{3}$. Dalje se iz sistema jednačina dobija $B=-\frac{1}{3}$ i $C=-\frac{2}{3}$.

$$\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1+3}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x}{x^2+x+1}=\left(x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\left(\begin{array}{l}x-1=t\Rightarrow dx=dt\\ x^2+x+1=t_1\Rightarrow(2x+1)dx=dt_1\\ x+\frac{1}{2}=t_2\Rightarrow dx=dt_2\end{array}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{6}\int\frac{dt_1}{t_1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt_2}{t_2^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{1}{3}\ln|t|-\frac{1}{6}\ln|t_1|-\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\frac{2t_2}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{\sqrt{3}}actg\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}$$

$$2\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\int\frac{dx}{((x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2)^2}=\frac{1}{2(\frac{\sqrt{3}}{2})^3}arctg\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}+\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}\left[(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2\right]}=$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}$$

$$\int\frac{x^2+3x-1}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx=\frac{2}{6}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{8}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+$$

$$+\frac{4x+2}{3(x^2+x+1)}+c=\frac{1}{6}ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{4x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{5}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c\,.$$

3. $\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx=\frac{1}{4}\int\frac{4x^3-4}{4x^3-x}dx=\frac{1}{4}\int\frac{4x^3-x+x-4}{4x^3-x}dx=\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{4}\int\frac{x-4}{x(4x^2-1)}dx=$

$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\int\frac{x-4}{x(2x-1)(2x+1)}dx$$

$$\frac{x-4}{x(2x-1)(2x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{2x+1}$$

$$x-4=A(2x-1)(2x+1)+Bx(2x+1)+Cx(2x-1)$$

Za $x=0$ dobija se $A=4$. Za $x=\frac{1}{2}$ dobija se $B=-\frac{7}{2}$. Za $x=-\frac{1}{2}$ dobija se $C=-\frac{9}{2}$.

$$\int\frac{x-4}{x(2x-1)(2x+1)}dx=4\int\frac{dx}{x}-\frac{7}{2}\int\frac{dx}{2x-1}-\frac{9}{2}\int\frac{dx}{2x+1}=\begin{pmatrix}2x-1=t\Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt\\ 2x+1=t_1\Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt_1\end{pmatrix}=$$

$$=4\,ln|\,x\,|-\frac{7}{4}\int\frac{dt}{t}-\frac{9}{4}\int\frac{dt_1}{t_1}=4\,ln|\,x\,|-\frac{7}{4}ln|\,t\,|-\frac{9}{4}ln|\,t_1\,|=4\,ln|\,x\,|-\frac{7}{4}ln|\,2x-1\,|-\frac{9}{4}ln|\,2x+1\,|$$

$$\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx=\frac{1}{4}x+ln|\,x\,|-\frac{7}{16}ln|\,2x-1\,|-\frac{9}{16}ln|\,2x+1\,|+c\,.$$

4. $\int\frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}dx$

Koreni jednačine $x^2-4x+5=0$ su kompleksni jer je $D<0$.

$$\frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}=\frac{Ax+B}{x^2-4x+5}+\frac{Cx+D}{(x^2-4x+5)^2}$$

$$x^3+1=(Ax+B)(x^2-4x+5)^2+Cx+D$$

$$x^3+1=Ax^3+(B-4A)x^2+(5A-4B+C)x+5B+D$$

$A=1$, $\quad B-4A=0$, $\quad 5A-4B+C=0$, $\quad 5B+D=1$

Rešavanjem sistema jednačina dobija se $A=1$, $B=4$, $C=11$, $D=-19$.

$$\int\frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}dx=\int\frac{x+4}{x^2-4x+5}dx+\int\frac{11x-19}{(x^2-4x+5)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-4+12}{x^2-4x+5}dx+$$

$$+\int\frac{\frac{11}{2}(2x-4)+3}{(x^2-4x+5)^2}dx=\left(x^2-4x+5=x^2-4x+4+1=(x-2)^2+1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx+6\int\frac{dx}{(x-2)^2+1}dx+\frac{11}{2}\int\frac{2x-4}{(x^2-4x+5)^2}dx+3\int\frac{dx}{((x-2)^2+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}ln(x^2-4x+5)+6arctg(x-2)-\frac{11}{2(x^2-4x+5)}+\frac{3}{2}arctg(x-2)+\frac{3x-6}{2(x^2-4x+5)}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+5\right|+\frac{15}{2}arctg(x-2)+\frac{3x-17}{2(x^2-4x+5)}+c\,.$$

5. $$\int\frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx=\int\frac{x(x^3-6x^2+12x-8)+8x+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx=\int xdx+\int\frac{8x+6}{(x-2)^3}dx$$

$$\frac{8x+6}{(x-2)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}$$

$$8x+6=A(x-2)^2+B(x-2)+C$$

$$8x+6=Ax^2+(-4A+B)x+4A-2B+C$$

$$A=0\,,\qquad -4A+B=8\,,\qquad 4A-2B+C=6$$

Rešavanjem sistema jednačina dobija se $A=0$, $B=8$ i $C=22$.

$$\int\frac{8x+6}{(x-2)^3}dx=8\int\frac{dx}{(x-2)^2}+22\int\frac{dx}{(x-2)^3}=\begin{pmatrix}x-2=t\\dx=dt\end{pmatrix}=$$

$$=8\int t^{-2}dt+22\int t^{-3}dt=-\frac{8}{t}-22\frac{t^{-2}}{2}=-\frac{8}{x-2}-\frac{11}{(x-2)^2}$$

$$\int\frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{6x^2+12x-8}=\frac{x^2}{2}-\frac{8}{x-2}-\frac{11}{(x-2)^2}+c\,.$$

Integrali iracionalnih funkcija

I Integral oblika $\int \boldsymbol{R}\left[x,(\frac{ax+b}{px+q})^{r_1},\ldots,(\frac{ax+b}{px+q})^{r_k}\right]dx$.

Posmatrajmo integral kod koga je podintegralna funkcija racionalna funkcija od x i od različitih stepena izraza $\frac{ax+b}{px+q}$, pri čemu je $aq-bp\neq 0$ (inače se izraz svodi na konstantu). Neka je s najmanji zajednički sadržalac imenilaca eksponenata $r_1,r_2,\ldots,r_k$.

Uvedimo smenu $\sqrt[s]{\frac{ax+b}{px+q}}=t\Rightarrow\frac{ax+b}{px+q}=t^s$. Tada je $(\frac{ax+b}{px+q})^{r_i}=t^{sr_i}$ za svako $i=1,2,\ldots,k$, pri čemu je, s obzirom da se imenilac svakog broja r_i sadrži u s, sr_i ceo broj.

Takođe je $x=\frac{qt^s-b}{a-pt^s}$, pa se dati integral svodi na integral racionalne funkcije nove promenljive t.

1. $$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt{x+1}}=\begin{pmatrix}\sqrt[6]{x+1}=t\Rightarrow x+1=t^6\\dx=6t^5dt,\end{pmatrix}=\int\frac{6t^5}{t^4-t^3}dt=6\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt=$$

$$=6\int\frac{(t-1)(t+1)+1}{t-1}dt=6\int(t+1)dt+6\int\frac{dt}{t-1}=6\frac{t^2}{2}+6t+6\ln|t-1|+c=$$

$$=3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}+6\ln\left|\sqrt[6]{x+1}-1\right|+c\,.$$

2. $\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx=\begin{pmatrix}\sqrt[6]{x+1}=t\\ x+1=t^6\\ dx=6t^5dt\end{pmatrix}=\int\frac{1-t^3}{1+t^2}6t^5dt=-6\int\frac{t^8-t^5}{t^2+1}dt=$

$$=-6\int(t^6-t^4-t^3+t^2+t-1+\frac{-t+1}{t^2+1})dt=-\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{6}{4}t^4-\frac{6}{3}t^3-\frac{6}{2}t^2+6t+$$

$$+6\int\frac{tdt}{t^2+1}-6\int\frac{dt}{t^2+1}=-\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4-2t^3-3t^2+6t+6\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+1}-6arctgt+c=$$

$$=-\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4-2t^3-3t^2+6t+3ln\left|t^2+1\right|-6arctgt+c=-\frac{6}{7}(\sqrt[6]{x+1})^7+\frac{6}{5}(\sqrt[6]{x+1})^5+$$

$$+\frac{3}{2}(\sqrt[6]{x+1})^4-2(\sqrt[6]{x+1})^3-3(\sqrt[6]{x+1})^2+6(\sqrt[6]{x+1})+3ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right|-6arctg\sqrt[6]{x+1}+c.$$

II Integrali binomnog diferencijala

Integral binomnog diferencijala je integral oblika $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, gde su m, n i p racionalni brojevi ($n,p\neq 0$), a a i b realni brojevi različiti od nule. Integral

$\int x^m(a+bx^n)^p dx$, se može, pre svega, transformisati smenom $x^n=t$, odakle je $x=t^{\frac{1}{n}}$,

$dx=\frac{1}{n}\cdot t^{\frac{1}{n}-1}dt$, pa se integral svodi na $\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p dt=\frac{1}{n}\int t^q(a+bt)^p dt$, gde smo stavili $\frac{m+1}{n}-1=q$ (takođe racionalan broj).

Razmotrimo tri slučaja:

- p je ceo broj, $q=\frac{r}{s}$. Tada je $\int t^{\frac{r}{s}}(a+bt)^p dt=\int R(t,t^{\frac{r}{s}})dt$, tj. dobija se integral razmotren ranije, a on se smenom $t=z^s$ svodi na integral racionalne funkcije od z.

- q je ceo broj, $p=\frac{r}{s}$ (racionalan). Tada se dobija integral

  $\int t^q(a+bt)^{\frac{r}{s}}dt=\int R(t,(a+bt)^{\frac{r}{s}})dt$, koji se smenom $a+bt=z^s$ svodi na integral racionalne funkcije od z.
- $p+q$ je ceo broj (neka je $p=\frac{r}{s}$). Tada je

  $\int t^q(a+bt)^p dt=\int t^{p+q}(\frac{a+bt}{t})^p dt=\int R(t,(\frac{a+bt}{t})^{\frac{r}{s}})dt$, pri čemu se poslednji integral

  smenom $\frac{a+bt}{t}=z^s$ svodi na integral racionalne funkcije od z.

3. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}(1+\sqrt[6]{x})}=\int x^{-\frac{3}{4}}(1+x^{\frac{1}{6}})^{-1}dx=\begin{pmatrix}\sqrt[6]{x}=t,\ x=t^6\\ dx=6t^5dt\end{pmatrix}=\int(t^6)^{-\frac{3}{4}}(1+t)^{-1}6t^5dt=$

$=6\int t^{\frac{1}{2}}(1+t)^{-1}dt=\begin{pmatrix}t=z^2\\ dt=2zdz\end{pmatrix}=12\int z(1+z^2)^{-1}zdz=12\int\frac{z^2+1-1}{z^2+1}dz=12\int dz-12\int\frac{dz}{z^2+1}=$

$=12z-12arctgz+c=12t^{\frac{1}{2}}-12arctgt^{\frac{1}{2}}+c=12x^{\frac{1}{12}}-12arctgx^{\frac{1}{12}}+c.$

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(4-\sqrt[3]{x})}=\int x^{-\frac{1}{2}}(4-x^{\frac{1}{3}})^{-1}dx=\begin{pmatrix}x^{\frac{1}{3}}=t,\ x=t^3\\ dx=3t^2dt\end{pmatrix}=3\int t^{-\frac{3}{2}}(4-t)^{-1}t^2dt=$

$=3\int t^{\frac{1}{2}}(4-t)^{-1}dt=\begin{pmatrix}t=z^2\\ dt=2zdz\end{pmatrix}=6\int z(4-z^2)^{-1}zdz=6\int\frac{z^2}{4-z^2}dz=-6\int\frac{z^2-4+4}{z^2-4}dz=$

$=-6\int dz-24\int\frac{dz}{z^2-2^2}=-6z-24\cdot\frac{1}{2\cdot2}ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right|+c=-6t^{\frac{1}{2}}-6\,ln\left|\frac{\sqrt{t}-2}{\sqrt{t}+2}\right|+c=$

$=-6\sqrt[6]{x}-6\,ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt[6]{x}+2}\right|+c.$

5. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=\int x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}dx=\begin{pmatrix}x^{\frac{2}{3}}=t,x=t^{\frac{3}{2}}\\ dx=\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}dt\end{pmatrix}=\frac{3}{2}\int t^{\frac{3}{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}dt=$

$=\frac{3}{2}\int t^2(1+t)^{-\frac{1}{2}}dt=\begin{pmatrix}1+t=z^2\\ dt=2zdz\end{pmatrix}=3\int(z^2-1)^2\frac{1}{z}zdz=3\int(z^4-2z^2+1)dz=\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z+c=$

$=\frac{3}{5}(1+t)^{\frac{5}{2}}-2(1+t)^{\frac{3}{2}}+3(1+t)^{\frac{1}{2}}+c=\frac{3}{5}(1+\sqrt[3]{x^2})^{\frac{5}{2}}-2(1+\sqrt[3]{x^2})^{\frac{3}{2}}+3(1+\sqrt[3]{x^2})^{\frac{1}{2}}+c.$

6. $\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}dx=\begin{pmatrix}x^{\frac{1}{3}}=t,\ x=t^3\\ dx=3t^2dt\end{pmatrix}=3\int t^{-2}(1+t)^{\frac{1}{2}}t^2dt=3\int(1+t)^{\frac{1}{2}}dt=$

$=\begin{pmatrix}1+t=z^2\\ dt=2zdz\end{pmatrix}=6\int z^2dz=6\cdot\frac{z^3}{3}+c=2\cdot(\sqrt{1+t})^3=2\cdot(1+\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}}+c$

7. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}=\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx=\begin{pmatrix}x^2=t,\ x=t^{\frac{1}{2}}\\ dx=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\int t^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{2}}t^{-\frac{1}{2}}dt=$

$$=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}(1+t)^{-\frac{3}{2}}dt=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}\cdot\frac{(1+t)^{-\frac{3}{2}}}{t^{-\frac{3}{2}}}dt=\frac{1}{2}\int t^{-3}\cdot\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-\frac{3}{2}}dt=\begin{pmatrix}\frac{1+t}{t}=z^2,\ t=\frac{1}{z^2-1}\\ dt=\frac{-2z}{(z^2-1)^2}dz\end{pmatrix}=$$

$$=-\int\frac{(z^2-1)^3}{z^3}\frac{z}{(z^2-1)^2}dz=-\int\frac{z^2-1}{z^2}dz=-z-\frac{1}{z}+c=-\sqrt{\frac{1+t}{t}}-\sqrt{\frac{t}{1+t}}+c=$$

$$=-\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}-\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}+c.$$

8. $$\int\sqrt[3]{3x-x^3}\,dx=\int x^{\frac{1}{3}}(3-x^2)^{\frac{1}{3}}dx=\begin{pmatrix}x^2=t,\ \ x=t^{\frac{1}{2}}\\ dx=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{6}}(3-t)^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{3}}(3-t)^{\frac{1}{3}}dt=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}\frac{(3-t)^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{3-t}{t}\right)^{\frac{1}{3}}dt=\begin{pmatrix}\frac{3-t}{t}=z^3,\ t=\frac{3}{z^3+1}\\ dt=\frac{-9z^2}{(z^3+1)^2}dz\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{9}{2}\int\frac{z^3}{(z^3+1)^2}dz$$

$$u=z\Rightarrow du=dz,\quad dv=\frac{z^2dz}{(z^3+1)^2}\Rightarrow v=\int dv=\begin{pmatrix}z^3+1=t\\ z^2dz=\frac{dt}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{3t}=-\frac{1}{3(z^3+1)}$$

$$\int\frac{z^3}{(z^3+1)^2}dz=-\frac{z}{3(z^3+1)}+\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z^3+1}$$

$$\frac{1}{z^3+1}=\frac{1}{(z+1)(z^2-z+1)}=\frac{A}{z+1}+\frac{Bz+C}{z^2-z+1}$$

$$1=A(z^2-z+1)+(Bz+C)(z+1)=(A+B)z^2+(-A+B+C)z+(A+C)$$

$$A+B=0,\quad -A+B+C=0,\ A+C=1$$

Za $z=-1$ dobija se $A=\frac{1}{3}$. Dalje se iz sistema jednačina dobija $B=-\frac{1}{3}$ i $C=\frac{2}{3}$.

$$\int\frac{dz}{z^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z+1}-\frac{1}{3}\int\frac{z-2}{z^2-z+1}dz=\frac{1}{3}\ln|z+1|-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2z-1-3}{z^2-z+1}dz=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|z+1|-\frac{1}{6}\ln\left|z^2-z+1\right|+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{(z-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{1}{3}\ln|z+1|-\frac{1}{6}\ln\left|z^2-z+1\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}ln|z+1|-\frac{1}{6}ln|z^2-z+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2z-1}{\sqrt{3}}$$

$$\int\sqrt[3]{3x-x^3}\,dx=-\frac{9}{2}\left[-\frac{z}{3(z^3+1)}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}ln|z+1|-\frac{1}{6}ln|z^2-z+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right]=$$

$$=\frac{3}{2}\frac{\left(\frac{3-x^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}}{\frac{3-x^2}{x^2}+1}-\frac{1}{2}ln\left|\sqrt[3]{\frac{3-x^2}{x^2}}+1\right|+\frac{1}{4}ln\left|\sqrt[3]{\left(\frac{3-x^2}{x^2}\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{3-x^2}{x^2}}+1\right|-\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\frac{2\sqrt[3]{\frac{3-x^2}{x^2}}-1}{\sqrt{3}}+c$$

III Integrali oblika $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$.

Neka je dat integral $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ ($a\neq 0$), gde je R racionalna funkcija od x i $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Ovaj integral se svodi na integral racionalne funkcije primenom jedne od Ojlerovih smena.

- Ako je $a>0$, uvodi se smena $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$ (prva Ojlerova smena). Tada je (uzmimo da je $\sqrt{ax^2+bx+c}=t+x\sqrt{a}$, znak minus ispred a ne menja način izvođenja) $ax^2+bx+c=t^2+2xt\sqrt{a}+ax^2$, odakle je $x=\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}$. Znači da je x racionalna funkcija od t (takođe je i dx racionalan izraz od t i dt), a $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}=t+\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}$, tj. i $\sqrt{ax^2+bx+c}$ je racionalan izraz od t.
Prema tome, dati integral se transformiše u integral racionalne funkcije od t.

- Ako je $c>0$, može se uvesti smena $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$ (druga Ojlerova smena). Tada je (uzmimo ispred korena znak plus)
$ax^2+bx+c=x^2t^2+2xt\sqrt{c}+c$, odakle je $x=\frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}$.
Prema tome, x je racionalna funkcija od t, a kako se dx i $\sqrt{ax^2+bx+c}$ izražavaju takođe racionalno preko t, dati integral se svodi na integral racionalne funkcije od t.

- Ako kvadratni trinom ax^2+bx+c ima realne različite korene x_1 i x_2, može se staviti $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-x_1)\cdot t$ (treća Ojlerova smena).

Kako je $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, to je $a(x-x_1)(x-x_2)=(x-x_1)^2t^2$, a odatle je $x=\frac{ax_2-x_1t^2}{a-t^2}$, dx i $\sqrt{ax^2+bx+c}$ takođe zavise od t. Prema tome, x je racionalna funkcija od t, a kako se dx i $\sqrt{ax^2+bx+c}$ izražavaju racionalno preko t, dati integral se svodi na integral racionalne funkcije od t.

9. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

Kako je $a>0$ koristimo prvu Ojlerovu smenu.

$$\sqrt{x^2+x+1}=t-x\Rightarrow x^2+x+1=t^2-2tx+x^2\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{1+2t}$$

$$dx=\frac{2t(2t+1)-2(t^2-1)}{(2t+1)^2}dt\Rightarrow dx=\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt$$

$$t-x=t-\frac{t^2-1}{1+2t}=\frac{t^2+t+1}{2t+1},\quad x+1=\frac{t^2-1}{2t+1}+1=\frac{t^2-1+2t+1}{2t+1}=\frac{t^2+2t}{2t+1}$$

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}}{\frac{t^2+2t}{2t+1}\cdot\frac{t^2+t+1}{2t+1}}dt=2\int\frac{dt}{t(t+2)}=2\int\frac{dt}{t^2+2t}=\left(t^2+2t=(t+1)^2-1^2\right)=$$

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}=2\int\frac{dt}{(t+1)^2-1^2}=2\cdot\frac{1}{2}ln\left|\frac{t+1-1}{t+1+1}\right|=ln\left|\frac{t}{t+2}\right|c=ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x+2+\sqrt{x^2+x+1}}\right|+c$$

10. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$

Kako je $c>0$ koristimo drugu Ojlerovu smenu.

$$\sqrt{1+x-x^2}=xt-1\Rightarrow 1+x-x^2=x^2t^2-2xt+1\Rightarrow x=\frac{2t+1}{t^2+1}$$

$$dx=\frac{2(t^2+1)-2t(2t+1)}{(t^2+1)^2}dt=\frac{-2(t^2+t-1)}{(t^2+1)^2}dt,\quad xt-1=\frac{2t^2+t}{t^2+1}-\frac{t^2+1}{t^2+1}=\frac{t^2+t-1}{t^2+1}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{-\frac{2(t^2+t-1)}{(t^2+1)^2}}{\frac{t^2+t-1}{t^2+1}}dt=-2\int\frac{dt}{t^2+1}=-2arctgt+c=-2arctg\frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}+c$$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+5x-2}}$

$$-2x^2+5x-2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{-4}=\frac{-5\pm 3}{-4}\Rightarrow x_1=2,\ \ x_2=\frac{1}{2}$$

Kako kvadratni trinom ima realne i različite korene koristimo treću Ojlerovu smenu.

$$\sqrt{-2x^2+5x-2}=t(x-2)\Rightarrow -2x^2+5x-2=t^2(x-2)^2$$

$$-2(x-2)(x-\frac{1}{2})=t^2(x-2)^2\Rightarrow -2x+1=t^2x-2t^2\Rightarrow x=\frac{2t^2+1}{t^2+2}$$

$$dx=\frac{4t(t^2+2)-2t(2t^2+1)}{(t^2+2)^2}=\frac{6tdt}{(t^2+2)^2},\quad t(x-2)=t(\frac{2t^2+1}{t^2+2}-\frac{2t^2+4}{t^2+2})=\frac{-3t}{t^2+2}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-2x^2+5x-2}}=\int\frac{\frac{6t}{(t^2+2)^2}}{\frac{-3t}{t^2+2}}dt=-2\int\frac{dt}{t^2+(\sqrt{2})^2}=-\sqrt{2}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+c=$$

$$=-\sqrt{2}arctg\frac{\sqrt{-2x^2+5x-2}}{(x-2)\sqrt{2}}+c.$$

12. $\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

Kako je $a>0$ koristimo prvu Ojlerovu smenu.

$$\sqrt{x^2+x+1}=t-x\Rightarrow x^2+x+1=t^2-2tx+x^2\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{2t+1}$$

$$dx=\frac{2t(2t+1)-2(t^2-1)}{(2t+1)^2}dt=\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt,\quad t-x=t-\frac{t^2-1}{2t+1}=\frac{t^2+t+1}{2t+1}$$

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int\frac{\frac{t^2+2t}{2t+1}}{\frac{t^2+t+1}{2t+1}}\cdot\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt=2\int\frac{t^2+2t}{4t^2+4t+1}dt=\frac{1}{2}\int\frac{4t^2+4t+1+4t-1}{4t^2+4t+1}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int dt+\frac{1}{2}\int\frac{4t-1}{4(t+\frac{1}{2})^2}dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\int\frac{4t-1}{(2t+1)^2}dt$$

$$\frac{4t-1}{(2t+1)^2}=\frac{A}{2t+1}+\frac{B}{(2t+1)^2}=\frac{A(2t+1)+B}{(2t+1)^2}=\frac{2At+A+B}{(2t+1)^2}$$

$$4t-1=2At+A+B,\quad 2A=4,\qquad A+B=-1$$

Rešenja sistema jednačina su $A=2$ i $B=-3$.

$$\int\frac{4t-1}{(2t+1)^2}dt=\int\frac{dt}{2t+1}-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{(2t+1)^2}=\frac{1}{2}ln|2t+1|+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2t+1}$$

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}ln\left|2t+1\right|+\frac{3}{4(2t+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+x+1}+x)+\frac{1}{2}ln\left|2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1\right|+\frac{3}{4\left[2(\sqrt{x^2+x+1}+x)+1\right]}+c.$$

13. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$

Kako je $c>0$ koristimo drugu Ojlerovu smenu.

$$\sqrt{1-2x-x^2}=xt-1\Rightarrow 1-2x-x^2=x^2t^2-2xt+1\Rightarrow x=\frac{2t-2}{t^2+1}=2\frac{t-1}{t^2+1}$$

$$dx=2\frac{t^2+1-2t(t-1)}{(t^2+1)^2}=-2\frac{t^2-2t-1}{(t^2+1)^2}dt,\quad xt-1=2\frac{t^2-t}{t^2+1}-\frac{t^2+1}{t^2+1}=\frac{t^2-2t-1}{t^2+1}$$

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=-2\int\frac{\frac{t^2-2t-1}{(t^2+1)^2}dt}{1+\frac{t^2-2t-1}{t^2+1}}=-2\int\frac{\frac{t^2-2t-1}{(t^2+1)^2}dt}{\frac{2(t^2-t)}{t^2+1}}=-\int\frac{t^2-2t-1}{t(t-1)(t^2+1)}dt$$

$$\frac{t^2-2t-1}{t(t-1)(t^2+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{Ct+D}{t^2+1}=\frac{A(t-1)(t^2+1)+Bt(t^2+1)+t(t-1)(Ct+D)}{t(t-1)(t^2+1)}$$

$$t^2-2t-1=A(t-1)(t^2+1)+Bt(t^2+1)+t(t-1)(Ct+D)$$

Za $t=0$ dobijamo $A=1$. Za $t=1$ dobijamo $B=-1$. Dalje je $C=0$ i $D=2$.

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=-\int\frac{dt}{t}+\int\frac{dt}{t-1}-2\int\frac{dt}{t^2+1}=-ln\left|t\right|+ln\left|t-1\right|-2arctgt+c=$$

$$=ln\left|\frac{t-1}{t}\right|-2arctgt+c\qquad\text{gde je } t=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}.$$

Ojlerove smene u većini slučajeva dovode do integrala prilično glomaznih racionalnih funkcija, pa se preporučuje da se one koriste samo u slučajevima kada nema drugih mogućnosti integracije. Razmotrićemo zbog toga neke specijalne slučajeve integrala $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ za koje postoje metodi rešavanja pogodniji od Ojlerovih smena.

a) Integral oblika $\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $a\neq 0$, gde je $P_n(x)$ polinom n-tog stepena od x ($n\geq 1$), rešava se primenom identiteta

$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, gde je $Q_{n-1}(x)$ polinom stepena $n-1$ sa neodređenim (nepoznatim) koeficijentima, a λ neodređena (nepoznata) konstanta. Nađemo izvod leve i desne strane poslednje jednakosti i sređivanjem po stepenima od x, određuju se koeficijenti polinoma $Q_{n-1}(x)$ i λ, rešavanjem sistema od $n+1$ nepoznatih.

14. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{1+2x-x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} \;/'$

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} = (2Ax+B)\sqrt{1+2x-x^2}+(Ax^2+Bx+C)\frac{1-x}{\sqrt{1+2x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$x^3 = (2Ax+B)(1+2x-x^2)+(Ax^2+Bx+C)(1-x)+\lambda$$

$$x^3 = -3Ax^3+(5A-2B)x^2+(2A+3B-C)x+(B+C+\lambda)$$

$$-3A=1, \qquad 5A-2B=0, \qquad 2A+3B-C=0, \qquad B+C+\lambda=0$$

Rešavanjem sistema jednačina dobija se $A=-\frac{1}{3}$, $B=-\frac{5}{6}$, $C=-\frac{19}{6}$ i $\lambda=4$.

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = (-\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x-\frac{19}{6})\sqrt{1+2x-x^2}+4\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}} = \begin{pmatrix} x-1=t \\ dx=dt \end{pmatrix} =$$

$$= \int\frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-t^2}} = arcsin\frac{t}{\sqrt{2}}+c = arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+c$$

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = -\frac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+c.$$

15. $\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+x+1}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} \;/'$

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}} = A\sqrt{x^2+x+1}+(Ax+B)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$2x^2+2 = 2A(x^2+x+1)+2Ax^2+2Bx+Ax+B+2\lambda$$

$$2x^2+2 = 4Ax^2+(3A+2B)x+2A+B+2\lambda$$

$$4A=2, \qquad 3A+2B=0, \qquad 2A+B+2\lambda=2$$

Rešavanjem sistema jednačina dobija se $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{3}{4}$ i $\lambda=\frac{7}{8}$.

$$\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = (\frac{x}{2}-\frac{3}{4})\sqrt{x^2+x+1}+\frac{7}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}} =$$

$$= (\frac{x}{2}-\frac{3}{4})\sqrt{x^2+x+1}+\frac{7}{8}ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+c.$$

16. $\displaystyle\int\frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx=\int\frac{x(x+1)+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx=\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx+\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx=A\sqrt{x^2-x+1}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}\ \Big/'$$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{2Ax-A}{2\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$2x+2=2Ax-A+2\lambda\Rightarrow A=1,\ 2\lambda=2+A\Rightarrow\lambda=\frac{3}{2}$$

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx=\sqrt{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}=$$

$$=\sqrt{x^2-x+1}+\frac{3}{2}ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right|$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}=\begin{pmatrix}x=\frac{1}{t}\\ dx=-\frac{1}{t^2}dt\end{pmatrix}=-\int\frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{t^2-t+1}{t^2}}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}=$$

$$=-ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right|=-ln\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1}\right|$$

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx=\sqrt{x^2-x+1}+\frac{3}{2}ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right|-ln\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1}\right|+c\,.$$

b) Integral oblika $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $n\in N$, $a\neq 0$, svodi se na integral prethodnog tipa uvođenjem smene $x-\alpha=\frac{1}{t}$. Tada je

$$dx=-\frac{dt}{t^2},\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(\frac{\alpha t+1}{t})^2+b\cdot\frac{\alpha t+1}{t}+c}=\frac{1}{|t|}\cdot\sqrt{pt^2+qt+r}\,,$$ gde p, q i r zavise od a, b, c i α.

17. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}=\begin{pmatrix}x+1=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt\Rightarrow x=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}\\ x^2+2x=\frac{(1-t)^2}{t^2}+\frac{2-2t}{t}=\frac{1-2t+t^2+2t-2t^2}{t^2}=\frac{1-t^2}{t^2}\end{pmatrix}=$

$$=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^3}\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}}=-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{-t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int\frac{1-t^2-1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int\sqrt{1-t^2}dt-\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=\frac{t}{2}\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{2}arcsin\,t-arcsin\,t+c=\frac{1}{2(x+1)}\sqrt{x^2+2x}-\frac{1}{2}arcsin\frac{1}{x+1}+c\,.$$

Integrali trigonometrijskih funkcija

I Integrali oblika $\int sin(\alpha x)cos(\beta x)dx$, $\int sin(\alpha x)sin(\beta x)dx$, $\int cos(\alpha x)cos(\beta x)dx$, gde su α i β proizvoljne konstante, rešavaju se primenom trigonometrijskih identiteta:

$$sin(\alpha x)cos(\beta x)=\frac{1}{2}[sin(\alpha-\beta)x+sin(\alpha+\beta)x]$$

$$sin(\alpha x)sin(\beta x)=\frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta)x-cos(\alpha+\beta)x]$$

$$cos(\alpha x)cos(\beta x)=\frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta)x+cos(\alpha+\beta)x]$$

1. $\int \mathbf{sin6xcos7xdx}=\frac{1}{2}\int[sin(-x)+sin\,13x]dx=\frac{1}{2}\int sin(-x)dx+\frac{1}{2}\int sin\,13xdx=$

$$=\frac{1}{2}cos\,x-\frac{1}{26}cos\,13x+c\,.$$

2. $\int \mathbf{sin10xsin15xdx}=\frac{1}{2}\int[cos\,5x-cos\,25x]dx=\frac{1}{10}sin\,5x-\frac{1}{50}sin\,2x+c\,.$

3. $\int \mathbf{sin3xcos5xdx}=\frac{1}{2}\int[sin(-2x)+sin\,8x]d=\frac{1}{4}cos(-2x)-\frac{1}{16}cos\,8x+c=$

$$=\frac{1}{4}cos\,2x-\frac{1}{16}cos\,8x+c\,.$$

4. $\int \mathbf{cosxcos2xcos3xdx}=\frac{1}{2}\int cos\,x[cos\,x+cos\,5x]dx=$

$$=\frac{1}{2}\int cos\,x\,cos\,xdx+\frac{1}{2}\int cos\,x\,cos\,5xdx=\frac{1}{4}\int[1+cos\,2x]dx+$$

$$+\frac{1}{4}\int[cos\,4x+cos\,6x]dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}sin\,2x+\frac{1}{16}sin\,4x+\frac{1}{24}sin\,6x+c\,.$$

II Integrali oblika $\int \boldsymbol{R(sinx, cosx)dx}$

Posmatrajmo integral kod koga je podintegralna funkcija racionalna funkcija od $sin\,x$ i $cos\,x$. Svaki ovakav integral može se svesti na integral racionalne funkcije po novoj promenljivoj, smenom $t = tg\frac{x}{2}$. Koristeći se poznatim trigonometrijskim obrascima imamo da je $sin\,x = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $cos\,x = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Ako je $x \in ((2k-1)\pi,\ (2k+1)\pi),\ k \in Z$, tada je $x = 2arctgt + 2k\pi$, pa je $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Sledi da je

$\int R(sin\,x, cos\,x)dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}) \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt$, gde je R_1 nova racionalna funkcija.

5. $$\int \frac{\mathbf{sinx}}{\mathbf{1+sinx+cosx}}dx = \left(tg\frac{x}{2} = t\right) = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt =$$

$$= 4\int \frac{t}{\frac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = 4\int \frac{tdt}{2(t+1)(1+t^2)} = \int \frac{2t}{(t+1)(t^2+1)}dt =$$

$$= \int \frac{t^2+2t+1-(1+t^2)}{(t+1)(t^2+1)}dt = \int \frac{(t+1)^2-(t^2+1)}{(t+1)(t^2+1)}dt = \int \frac{t+1}{t^2+1}dt - \int \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}dt +$$

$$+ \int \frac{dt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{2}ln\left|t^2+1\right| + arctgt - ln\left|t+1\right| + c = \frac{1}{2}ln\left|tg^2\frac{x}{2}+1\right| + \frac{x}{2} - ln\left|tg\frac{x}{2}+1\right| + c\,.$$

6. $$\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{cosx+2sinx+3}} = \left(tg\frac{x}{2} = t\right) = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{4t}{1+t^2}+3}dt = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+4t+3+3t^2}{1+t^2}}dt =$$

$$= \int \frac{2dt}{2(t^2+2t+2)} = \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = arctg(t+1) + c = arctg(tg\frac{x}{2}+1) + c\,.$$

Data smena često dovodi do integrala glomaznih racionalnih funkcija, pa je preporučljivo izbegavati je onda kada je to moguće. Navešćemo neke od specijalnih slučajeva integrala racionalne funkcije od $sin\,x$ i $cos\,x$, u kojima je pogodnije uvesti neku drugu smenu.

I$_1$ Ako je u integralu oblika $\int R(sin\,x, cos\,x)dx$ funkcija R takva da je $R(sin\,x, -cos\,x) = -R(sin\,x, cos\,x)$, uvodi se smena $sin\,x = t\ \ (cos\,xdx = dt)$.

I$_2$ Ako je u integralu oblika $\int R(cos\,x, sin\,x)dx$ funkcija R takva da je $R(-sin\,x, cos\,x) = -R(sin\,x, cos\,x)$, uvodi se smena $cos\,x = t\ \ (-sin\,xdx = dt)$.

I_3 Ako je u integralu oblika $\int R(\sin x, \cos x)dx$ funkcija R takva da je $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, to je $R(-\cos x\,tgx, -\cos x) = R(\cos x\,tgx, \cos x)$. Dakle uvodi se smena $tgx = t$ $\left(dx = \dfrac{dt}{1+t^2}\right)$.

7. $$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}dx = \int \frac{tgx - 1}{tgx + 2}dx = \begin{pmatrix} tgx = t, x = arctgt \\ dx = \dfrac{dt}{t^2+1} \end{pmatrix} = \int \frac{t-1}{t+2}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t-1}{(t+2)(t^2+1)}dt$$

$$\frac{t-1}{(t+2)(1+t^2)} = \frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{At^2 + A + Bt^2 + Ct + 2Bt + 2C}{(t+2)(t^2+1)}$$

$t - 1 = A(t^2+1) + (Bt + C)(t+2)$

$A + B = 0$, $\quad 2B + C = 1$, $\quad A + 2C = -1$

Za $t = -2$ dobija se $A = -\frac{3}{5}$. Dalje se iz sistema dobija $B = \frac{3}{5}$ i $C = -\frac{1}{5}$.

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}dx = -\frac{3}{5}\int\frac{dt}{t+2} + \frac{1}{5}\int\frac{3t-1}{t^2+1}dt = -\frac{3}{5}\int\frac{dt}{t+2} + \frac{3}{10}\int\frac{2t}{t^2+1}dt - \frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= -\frac{3}{5}\ln|t+2| + \frac{3}{10}\ln|t^2+1| - \frac{1}{5}arctg\,t + c = -\frac{3}{5}\ln|tgx+2| - \frac{3}{10}\ln|tg^2x+1| - \frac{1}{5}x + c.$$

8. $$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{(\sin^2 x)^2}{\cos^4 x}\sin x dx = \int \frac{(1-\cos^2)^2}{\cos^4 x}\sin x dx = \begin{pmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{pmatrix} =$$

$$= -\int \frac{(1-t^2)^2}{t^4}dt = -\int \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{t^4}dt = -\int dt + 2\int t^{-2}dt - \int t^{-4}dt = -t - \frac{2}{t} + \frac{1}{3t^3} + c =$$

$$= -\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + c.$$

9. $$\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 x \cos x} = \int \frac{\cos x dx}{2\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)} = \begin{pmatrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{1-t^2+t^2}{t^2(1-t^2)}dt = \frac{1}{2}\int t^{-2}dt + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2t} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c =$$

$$= -\frac{1}{2\sin x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + c.$$

10. $$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \begin{pmatrix} tgx = t,\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{pmatrix} = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{1+\dfrac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{1+2t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot arctg\,t\sqrt{2} + c = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg(tgx\sqrt{2}) + c$$

III Integrali oblika $\int (\sin \alpha x)^m (\cos \beta x)^n dx$, $m,n \in N$ rešavaju se pomoću Ojlerovih formula $\sin \alpha x = \dfrac{e^{\alpha xi} - e^{-\alpha xi}}{2i}$, $\cos \beta x = \dfrac{e^{\beta xi} + e^{-\beta xi}}{2}$.

11. $I = \int \sin^3 x \cos^2 3x dx$

$$\sin^3 x \cos^2 3x = \left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right)^3 \left(\frac{e^{3xi} + e^{-3xi}}{2}\right)^2 = \frac{e^{3xi} - 3e^{xi} + 3e^{-xi} - e^{-3xi}}{-8i} \cdot \frac{e^{6xi} + 2 + e^{-6xi}}{4} =$$

$$= \frac{e^{9xi} + 2e^{3xi} + 3e^{-3xi} - 3e^{7xi} - 6e^{xi} - 3e^{-5xi} + 3e^{5xi} + 6e^{-xi} + 3e^{-7xi} - e^{3xi} - 2e^{-3xi} - e^{-9xi}}{-32i} =$$

$$= -\frac{1}{16}\frac{e^{9xi} - e^{-9xi}}{2i} + \frac{3}{16}\frac{e^{7xi} - e^{-7xi}}{2i} - \frac{3}{16}\frac{e^{5xi} - e^{-5xi}}{2i} - \frac{1}{16}\frac{e^{3xi} - e^{-3xi}}{2i} + \frac{6}{16}\frac{e^{xi} - e^{xi}}{2i} =$$

$$= -\frac{1}{16}\sin 9x + \frac{3}{16}\sin 7x - \frac{3}{16}\sin 5x - \frac{1}{16}\sin 3 + \frac{6}{16}\sin x$$

$$I = -\frac{1}{16}\int \sin 9x dx + \frac{3}{16}\int \sin 7x dx - \frac{3}{16}\int \sin 5x dx - \frac{1}{16}\int \sin 3x dx + \frac{6}{16}\int \sin x dx =$$

$$= \frac{1}{144}\cos 9x - \frac{3}{112}\cos 7x + \frac{3}{80}\cos 5x + \frac{1}{48}\cos 3x - \frac{3}{8}\cos x + c.$$

12. $I = \int \sin^2 2x \cos^3 x dx$

$$\sin^2 2x \cos^3 x = \left(\frac{e^{2xi} - e^{-2xi}}{2i}\right)^2 \cdot \left(\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}\right)^3 =$$

$$\frac{e^{4xi} - 2 + e^{-4xi}}{4i^2} \cdot \frac{e^{3xi} + 3e^{xi} + 3e^{-xi} + e^{-3xi}}{8} =$$

$$= \frac{e^{7xi} + 3e^{5xi} + 3e^{3xi} + e^{xi} - 2e^{3xi} - 6e^{xi} - 6e^{-xi} - 2e^{-3xi} + e^{-xi} + 3e^{-3xi} + 3e^{-5xi} + 3e^{-7xi}}{-32} =$$

$$= -\frac{1}{16}\cdot\frac{e^{7xi} + e^{-7xi}}{2} - \frac{3}{16}\cdot\frac{e^{5xi} + e^{-5xi}}{2} - \frac{1}{16}\cdot\frac{e^{3xi} + e^{-3xi}}{2} + \frac{5}{16}\cdot\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} =$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 7x - \frac{3}{16}\cos 5x - \frac{1}{16}\cos 3x + \frac{5}{16}\cos x$$

$$I = -\frac{1}{16}\int \cos 7x dx - \frac{3}{16}\int \cos 5x dx - \frac{1}{16}\int \cos 3x dx + \frac{5}{16}\int \cos x dx =$$

$$= -\frac{1}{112}\sin 7x - \frac{3}{80}\sin 5x - \frac{1}{18}\sin 3x + \frac{5}{16}\sin x + c.$$

IV Integral oblika $\int (P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x)\, dx$.

Posmatrajmo integral $\int (P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x)dx$, gde je $P_n(x)$ polinom n-tog stepena, $Q_m(x)$ polinom m-tog stepena, a α i β proizvoljne konstante. Ovaj integral se rešava primenom identiteta

$$\int (P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x)dx = R_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x + T_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + c,$$

gde su $R_k(x)$ i $T_k(x)$ polinomi k-tog stepena sa neodređenim (nepoznatim) koeficijentima, a $k = max\{m, n\}$. Diferenciranjem leve i desne strane, izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene od x i rešavanjem sistema od $2k+2$ jednačina sa $2k+2$ nepoznatih, dobijaju se koeficijenti polinoma $R_k(x)$ i $T_k(x)$.

13. $\int (x+1)\cdot e^{2x}\cos x dx$

$$\int (x+1)\cdot e^{2x}\cos x dx = (Ax+B)\cdot e^{2x}\sin x + (Cx+D)\cdot e^{2x}\cos x \;\; \Big/'$$

$$(x+1)\cdot e^{2x}\cos x = A\cdot e^{2x}\sin x + (Ax+B)\cdot e^{2x}(2\sin x+\cos x) + C\cdot e^{2x}\cos x +$$
$$+(Cx+D)\cdot e^{2x}(2\cos x - \sin x)$$
$$(x+1)\cos x = [\,(2A-C)x + A + 2B - D\,]\sin x + [\,(A+2C)x + B + C + 2D\,]\cos x$$
$$2A - C = 0\,, \quad A + 2B - D = 0\,, \quad A + 2C = 1\,, \quad B + C + 2D = 1$$

Rešavanjem sistema dobija se $A = \frac{1}{5}$, $B = \frac{1}{25}$, $C = \frac{2}{5}$ i $D = \frac{7}{25}$.

$$\int (x+1)\cdot e^{2x}\cos x dx = (\frac{1}{5}x + \frac{1}{25})\cdot e^{2x}\sin x + (\frac{2}{5}x + \frac{7}{25})\cdot e^{2x}\cos x\,.$$

14. $\int \left[xe^{2x}\cos x + (x^2-2)e^{2x}\sin x \right] dx$

$$\int \left[xe^{2x}\cos x + (x^2-2)e^{2x}\sin x \right] dx = \left[Ax^2 + Bx + C \right] e^{2x}\sin x + \left[Dx^2 + Ex + F \right] e^{2x}\cos x + c \;\; \Big/'$$

$$xe^{2x}\cos x + (x^2-2)e^{2x}\sin x = [\,2Ax + B\,]e^{2x}\sin x + \left[Ax^2 + Bx + C \right] e^{2x}(2\sin x + \cos x) +$$
$$+ [\,2Dx + E\,]e^{2x}\cos x + \left[Dx^2 + Ex + F \right] e^{2x}(2\cos x - \sin x) =$$
$$= e^{2x}\sin x \left[2Ax + B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C - Dx^2 - Ex - F \right] +$$
$$+ e^{2x}\cos x \left[Ax^2 + Bx + C + 2Dx + E + 2Dx^2 + 2Ex + 2F \right] =$$
$$= \left[(A+2D)x^2 + (B+2D+2E)x + C + E + 2F \right] e^{2x}\cos x +$$
$$+ \left[(2A-D)x^2 + (2A+2B-E)x + B + 2C - F \right] e^{2x}\sin x$$
$$A + 2D = 0\,, \quad B + 2D + 2E = 1\,, \quad C + E + 2F = 0\,, \quad 2A - D = 1\,,$$
$$2A + 2B - E = 0\,, \quad B + 2C - F = -2$$

Rešavanjem sistema dobija se $A = \frac{2}{5}$, $B = -\frac{1}{25}$, $C = -\frac{16}{125}$, $D = -\frac{1}{5}$, $E = \frac{18}{25}$ i $F = \frac{213}{125}$.

$$\int \left[xe^{2x}\cos x + (x^2-2)e^{2x}\sin x \right] dx = (\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{25}x - \frac{6}{125})e^{2x}\sin x + (-\frac{1}{5}x^2 + \frac{18}{25}x + \frac{213}{125})e^{2x}\cos x + c$$

15. $\int e^x \sin 5x dx = \begin{pmatrix} u = \sin 5x \Rightarrow du = 5\cos 5x dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{pmatrix} = e^x \sin 5x - 5\int e^x \cos 5x dx =$

$$= \begin{pmatrix} u_1 = \cos 5x \Rightarrow du_1 = -5\sin 5x dx \\ dv_1 = e^x dx \Rightarrow v_1 = e^x \end{pmatrix} = e^x \sin 5x - 5e^x \cos 5x - 25\int e^x \sin 5x dx =$$

$$\int e^x \sin 5x dx = \frac{1}{26}(e^x \sin 5x - 5e^x \cos 5x) + c .$$

Integrali oblika $\int P_n(x)\sin\beta x dx$, $\int P_n(x)\cos\beta x dx$, $\int P_n(x)\cdot e^{\alpha x}dx$ rešavaju se parcijalnom integracijom.

Integrali eksponencijalne funkcije

Integral oblika $\int R(e^x)dx$, gde je R racionalna funkcija od e^x, rešava se smenom $e^x = t$. Tada je $e^x dx = dt$, odakle je $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$, pa je $\int R(e^x)dx = \int R(t)\frac{dt}{t}$, što znači da se integral svodi na integral racionalne funkcije od t.

16. $$\int \frac{arctge^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}dx = \begin{pmatrix} e^{\frac{x}{2}} = t, \ x = 2\ln t \\ dx = \frac{2}{t}dt \end{pmatrix} = 2\int \frac{arctgt}{t(1+t^2)}\cdot\frac{dt}{t} = 2\int \frac{arctgt}{t^2(1+t^2)}dt =$$

$$= \begin{pmatrix} u = arctgt \Rightarrow du = \frac{dt}{1+t^2} \\ dv = \frac{dt}{t^2(t^2+1)} \Rightarrow v = \int \frac{1+t^2-t^2}{t^2(t^2+1)}dt = \int t^2 dt - \int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{1}{t} - arctgt \end{pmatrix} =$$

$$= 2(-\frac{1}{t}arctgt - arctg^2 t + \int \frac{dt}{t(1+t^2)} + \int \frac{arctgt}{1+t^2}dt)$$

$$\int \frac{dt}{t(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t(1+t^2)} = \int \frac{1+t^2-t^2}{t(1+t^2)}dt = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{t}{1+t^2}dt = \ln|t| - \frac{1}{2}\ln|1+t^2|$$

$$\int \frac{arctgt}{1+t^2}dt = \begin{pmatrix} arctgt = z \\ \frac{dt}{1+t^2} = dz \end{pmatrix} = \int zdz = \frac{z^2}{2} = \frac{arctg^2 t}{2}$$

$$\int \frac{arctge^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}dx = -\frac{2arctgt}{t} - 2arctg^2 t + 2\ln|t| - \ln|1+t^2| + arctg^2 t + c =$$

$$= -\frac{2arctge^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} - arctg^2 e^{\frac{x}{2}} + \ln\frac{e^x}{1+e^x} + c .$$

17. $$\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}dx = \begin{pmatrix} e^x = t, \ x = \ln t \\ dx = \frac{dt}{2} \end{pmatrix} = \int \frac{t^3-t}{t^2+1}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{t^2-1}{t^2+1}dt = \int \frac{t^2+1-2}{t^2+1}dt =$$

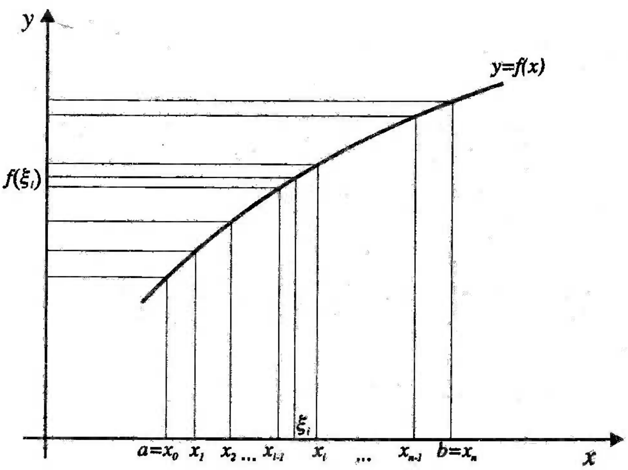
$$= \int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = t - 2arctgt + c = e^x - 2arctge^x + c .$$

Određeni integral

Uočimo zatvoren interval $[a,b] \subset R$. Konačan skup tačaka $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$, takav da je $a=x_0<x_1<...<x_n=b$, zovemo podela intervala $[a,b]$. Sa $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,2,...,n$ označimo dužinu intervala $[x_{i-1},x_i]$. Pod parametrom podele P podrazumevamo $\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i=\lambda(P)$ (maksimalna dužina intervala podele P).

Na svakom intervalu $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,...,n$ izaberimo ξ_i i neka je $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in R^n$. Na ovaj način dobija se podela intervala $[a,b]$ sa izabranom tačkom koju označavamo sa (P,ξ).

Neka je $f:[a,b]\to R$ i neka je (P,ξ) podela sa izabranom tačkom intervala $[a,b]$. Zbir $I(f,P,\xi)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ se naziva integralna ili Rimanova suma (integralni ili Rimanov zbir) funkcije $f(x)$ za datu podelu (P,ξ).



Za broj I kažemo da je limes (granična vrednost) integralnih suma $I(f,P,\xi)$ funkcije $f:[a,b]\to R$, za $\lambda(P)\to 0$ i pišemo $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} I(f,P,\xi)$, ako za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta>0$, takvo da za svaku podelu P i svaku izabranu tačku $\xi\in\xi(P)$, kada $\lambda(P)<\delta$, važi nejednakost $|I(f,P,\xi)-I|<\varepsilon$. Ako postoji $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} I(f,P,\xi)=I$, onda se kaže da je funkcija $f(x)$ integrabilna u Rimanovom smislu nad intervalom $[a,b]$. Broj I se naziva Rimanov ili određeni integral funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a,b]$ i piše se $I=\int\limits_a^b f(x)dx$. Pri tom se a i b nazivaju donja odnosno gornja granica integrala, respektivno.

Darbuove sume

U uskoj vezi sa integralnom sumom stoje Darbuove sume. Neka je funkcija $f(x)$ definisana i ograničena nad intervalom $[a,b]$ i neka je $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ podela tog intervala. Uvedimo sledeće oznake:

$m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Sume $s = s(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ i $S = S(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$, nazivamo donja i gornja Darbuova suma funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a,b]$, respektivno.

Njutn - Lajbnicova formula

Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna nad zatvorenim intervalom $[a,b]$, i ako $f(x)$ ima primitivnu funkciju $F(x)$ nad intervalom $[a,b]$, tada je $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Smena promenljive

Neka je funkcija $f:[a,b]\to R$ neprekidna, a funkcija $\varphi:[\alpha_0,\beta_0]\to[a,b]$ ima neprekidan izvod. Ako je $\alpha\in[\alpha_0,\beta_0]$, $\beta\in[\alpha_0,\beta_0]$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, onda važi jednakost $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Parcijalna integracija

Neka funkcije $u(x)$ i $v(x)$ imaju neprekidne izvode nad intervalom $[a,b]$. Tada važi jednakost $\int\limits_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)du(x)$.

Formula se kraće piše u obliku $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$.

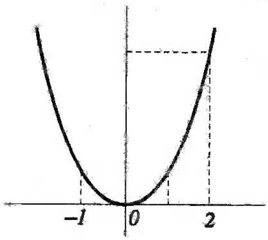
Osobine određenog integrala

1. Ako je funkcija $f(x)$ definisana u tački a onda je $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.
2. Ako je $a<b$ i $\int\limits_a^b f(x)dx$ postoji, onda je $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.
3. $\int\limits_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$,
4. $\int\limits_a^b \alpha\cdot f(x)dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)dx$.

5. Neka tačke a, b i $c \in R$ predstavljaju krajeve za tri zatvorena intervala. Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na najvećem od ovih intervala, onda je ona integrabilna i na ostala dva. Pri tom važi jednakost

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

1. Izračunati po definiciji $\int_{-1}^{2} x^2 dx$.



Interval $[-1,2]$ podelimo na n jednakih delova (ekvidistantna podela).

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{3}{n}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(-1+i\cdot\frac{3}{n})^2\cdot\frac{3}{n} = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-\frac{6}{n}i+\frac{9}{n^2}i^2) = \frac{3}{n}(n-\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i+\frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2) =$$

$$= \frac{3}{n}(n-\frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}) = 3-9\frac{n^2+n}{n^2}+\frac{9}{2}\frac{2n^2+3n+1}{n^2} =$$

$$= 3+\frac{-18n^2-18n+18n^2+27n+9}{2n^2} = 3+\frac{9(n+1)}{2n^2}$$

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(3+\frac{9(n+1)}{2n^2}) = 3$$

2. Koristeći integralnu sumu izračunati $\int_0^1 a^x dx$.

Interval $[0,1]$ delimo tačkama $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0,\dots,n$. Donja Darbuova suma je

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot a^{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n}\cdot(1+a^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{2}{n}}+\dots+a^{\frac{n-1}{n}}) = \frac{1}{n}\cdot\frac{a-1}{a^{\frac{1}{n}}-1}$$

$$\int_0^1 a^x dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{a-1}{a^{\frac{1}{n}}-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{a-1}{\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{1/n}} = \frac{a-1}{\ln a} \qquad \left(\text{jer je } \lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \ln a\right)$$

3. Odrediti $\lim_{n\to\infty} a_n$ ako je $a_n = \frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2}$.

$$a_n = \frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n^2}}+\dots+\frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}.$$

a_n je gornja Darbuova suma funkcije $y=\frac{1}{1+x^2}$ u intervalu $[0,1]$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx\Big|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4}$$

4. Odrediti $\lim_{n\to\infty} a_n$ ako je $a_n = \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}$.

$$a_n = \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+...+\frac{n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}$$

a_n je gornja Darbuova suma funkcije $y=x$ u intervalu $(0,1)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}\right) = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

5. Date su funkcije $f(x)=\begin{cases} x^x-1, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x^x-1, & x>0 \\ 1, & x=0. \end{cases}$

Da li funkcije $f(x)$ i $g(x)$ imaju primitivnu funkciju za $x\geq 0$? Da li su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne nad intervalom $[a,b]$, $a\geq 0$? Ako su integrabilne, da li imaju isti određeni integral nad intervalom $[a,b]$, $a\geq 0$?

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = x\ln x$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+}(x^x-1) = \lim_{x\to 0^+} x^x - 1 = 0$$

Funkcija $f(x)$ je neprekidna za $x\geq 0$, pa ima primitivnu funkciju. Funkcija $g(x)$ za $x=0$ ima prekid prve vrste pa nema primitivnu funkciju.
Obe su integrabilne; funkcija $f(x)$ jer je neprekidna, a funkcija $g(x)$ jer ima konačno mnogo tačaka prekida za $x\geq 0$. Funkcije $f(x)$ i $g(x)$ imaju isti određeni integral jer se razlikuju u konačno mnogo tačaka.

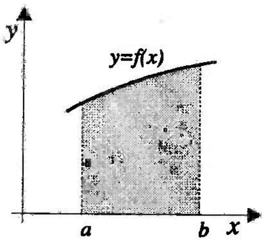
6. $$\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln xdx + \int_{1}^{e}\ln xdx = \left(\begin{array}{l} u=\ln x \Rightarrow du=\frac{dx}{x} \\ dv=dx \Rightarrow v=x \end{array}\right) = -(x\ln x - x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + (x\ln x - x)\Big|_{1}^{e} =$$

$$= -x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + x\ln x\Big|_{1}^{e} - x\Big|_{1}^{e} = -(0+\frac{1}{e})+1-\frac{1}{e}+e-0-e+1 = 2-\frac{2}{e}.$$

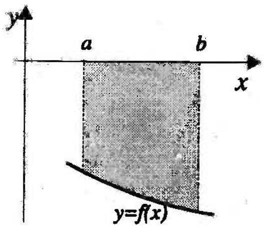
Površina ravnih likova

- Pravougli koordinatni sistem

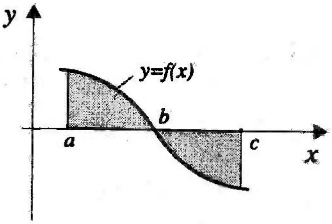
Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a,\ b]$.



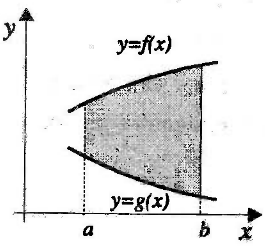
$$P=\int_a^b f(x)dx$$



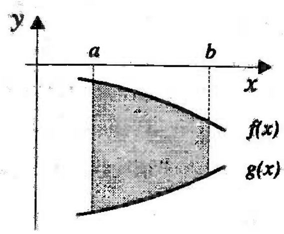
$$P=-\int_a^b f(x)dx$$



$$P=\int_a^b f(x)dx-\int_b^c f(x)dx$$

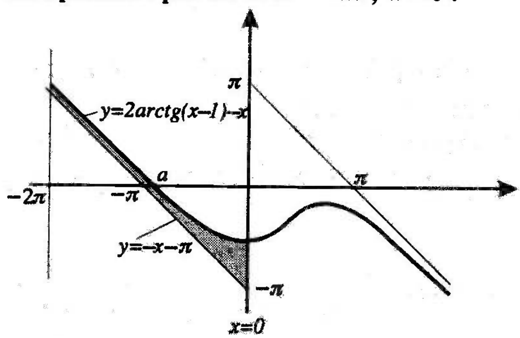


$$P=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$



$$P=-\int_a^b g(x)dx+\int_a^b f(x)dx=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

1. Izračunati površinu ograničenu krivom $y=2arctg(x-1)-x$, njenom kosom asimptotom i pravama $x=-2\pi$, $x=0$.



Asimptote:
$y=-x+\pi,\ x\to\infty$
$y=-x-\pi,\ x\to-\infty$

$$P=\int_{-2\pi}^{0}[2arctg(x-1)-x+x+\pi]dx=2\int_{-2\pi}^{0} arctg(x-1)dx+\pi\int_{-2\pi}^{0} dx$$

$$\int_{-2\pi}^{0} arctg(x-1)dx = \begin{pmatrix} x-1=t \\ dx=dt \end{pmatrix} = \int arctgtdt = \begin{pmatrix} u=arctgt, & du=\dfrac{dt}{1+t^2} \\ dv=dt, & v=t \end{pmatrix} = tarctgt - \int \frac{tdt}{1+t^2} =$$

$$= tarctgt - \frac{1}{2}ln\left|1+t^2\right| = (x-1)arctg(x-1)\Big|_{-2\pi}^{0} - \frac{1}{2}ln\left|1+(x-1)^2\right|\Big|_{-2\pi}^{0} =$$

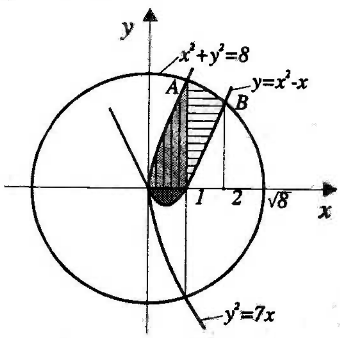
$$= -arctg(-1) + (1+2\pi)arctg(-1-2\pi) - \frac{1}{2}ln\,2 + \frac{1}{2}ln\left|1+(1+2\pi)^2\right| =$$

$$= \frac{\pi}{4} - (1+2\pi)arctg(1+2\pi) - \frac{1}{2}ln\,2 + \frac{1}{2}ln\left|1+(1+2\pi)^2\right|$$

$$\int_{-2\pi}^{0} dx = x\Big|_{-2\pi}^{0} = 2\pi$$

$$P = \frac{\pi}{2} - 2(1+2\pi)arctg(1+2\pi) - ln\,2 + ln\left|1+(1+2\pi)^2\right| + 2\pi^2$$

2. Izračunati površinu ograničenu kružnicom $x^2+y^2=8$ i parabolama $y^2=7x$ i $y=x^2-x$.



Tačka *A* je presečna tačka kružnice $x^2+y^2=8$ i parabole $y^2=7x$.

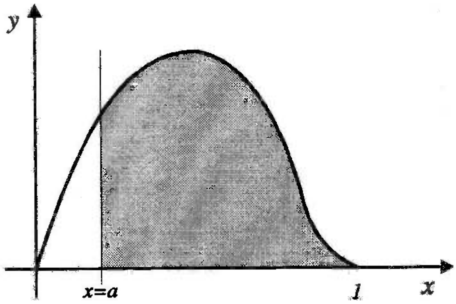
Tačka *B* je presečna tačka kružnice $x^2+y^2=8$ i parabole $y=x^2-x$.

$$P = \int_0^1 \sqrt{7x}dx - \int_0^1 (x^2-x)dx + \int_1^2 \sqrt{8-x^2}dx - \int_1^2 (x^2-x)dx = \sqrt{7}\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx + \int_1^2 \sqrt{8-x^2}dx - \int_0^2 x^2dx + \int_0^2 xdx =$$

$$= \sqrt{7}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x}{2}\sqrt{8-x^2} + \frac{8}{2}arcsin\frac{x}{\sqrt{8}}\right)\Bigg|_1^2 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{2\sqrt{7}}{3} + 2 + 4\,arcsin\frac{2}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{7} - 4\,arcsin\frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{8}{3} + 2 = \frac{2\sqrt{7}}{3} - \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{4}{3} + \pi - 4\,arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

3. Izračunati površinu ograničenu krivom $y=\sqrt{x}\ln^2 x$ **i pravama** $x=a$ $(0<a<1)$, $x=1$ **i** $y=0$**, a zatim naći** $\lim\limits_{a\to 0^+} P$.



$$P=\int_a^1 \sqrt{x}\ln^2 x\,dx=\left(\begin{array}{l} u=\ln^2 x\Rightarrow du=2\ln x\dfrac{dx}{x} \\ dv=x^{\frac{1}{2}}dx\Rightarrow v=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\end{array}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x\Big|_a^1-\frac{4}{3}\int_a^1 x^{\frac{1}{2}}\ln x\,dx=$$

$$=\left(\begin{array}{l} u_1=\ln x\Rightarrow du_1=\dfrac{dx}{x} \\ dv_1=x^{\frac{1}{2}}dx\Rightarrow v_1=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\end{array}\right)=$$

$$=-\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}\ln^2 a-\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x\Big|_a^1-\frac{2}{3}\int_a^1 x^{\frac{1}{2}}dx\right)=-\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}\ln^2 a+\frac{8}{9}a^{\frac{3}{2}}\ln a+\frac{8}{9}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_a^1=$$

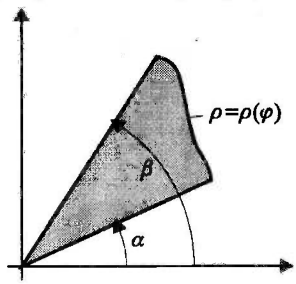
$$=-\frac{2}{9}a^{\frac{3}{2}}(3\ln^2 a-4\ln a)+\frac{16}{27}(1-a^{\frac{3}{2}})$$

$$\lim_{a\to 0^+}P=-\frac{2}{9}\lim_{a\to 0^+}\frac{3\ln^2 a-4\ln a}{a^{-\frac{3}{2}}}+\frac{16}{27}=\frac{16}{27}-\frac{2}{9}\lim_{a\to 0^+}\frac{\frac{6\ln a}{a}-\frac{4}{a}}{-\frac{3}{2}a^{-\frac{5}{2}}}=\frac{16}{27}+\frac{8}{27}\lim_{a\to 0^+}\frac{3\ln a-2}{a^{-\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{16}{27}+\frac{8}{27}\lim_{a\to 0^+}\frac{\frac{3}{a}}{-\frac{3}{2}a^{-\frac{5}{2}}}=\frac{16}{27}-\frac{16}{27}\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{a^{-\frac{3}{2}}}=\frac{16}{27}-\frac{16}{27}\lim_{a\to 0^+}a^{\frac{3}{2}}=\frac{16}{27}$$

- Polarni koordinatni sistem

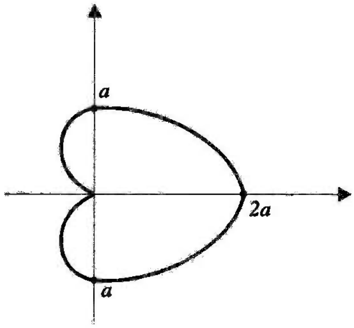
Neka je data kriva $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$, $|\beta-\alpha|\le 2\pi$, u polarnom koordinatnom sistemu, gde je $\rho=\rho(\varphi)$ neprekidna funkcija. Geometrijsku figuru *OAB*, ograničenu polupravama $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ i krivom $\rho=\rho(\varphi)$ nazvaćemo krivolinijski trougao.



Površina *P* tog krivolinijskog trougla iznosi

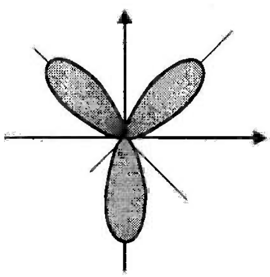
$$P=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

4. Izračunati površinu ograničenu kardioidom $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $a>0$.



$$P = 2P_1 = \int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi =$$
$$= a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi =$$
$$= a^2\int_0^{\pi}d\varphi + 2a^2\int_0^{\pi}\cos\varphi d\varphi + \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi =$$
$$= a^2\varphi\Big|_0^{\pi} + 2a^2\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{2}\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi} =$$
$$= a^2\pi + \frac{a^2\pi}{2} = \frac{3}{2}a^2\pi$$

5. Naći površinu ograničenu krivom $\rho = a\sin 3\varphi$, $a\in R$.



$$\sin 3\varphi = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \frac{\pi}{3}$$
$$P = 3\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2\sin^2 3\varphi d\varphi = \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 6\varphi}{2}d\varphi =$$
$$= \frac{3a^2}{4}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{a^2}{8}\sin 6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{a^2\pi}{4}.$$

- Parametarski oblik

Ako je funkcija $y=f(x)$ data u parametarskom obliku $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, pri čemu funkcije $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ zadovoljavaju uslove:

a) funkcija $\varphi(t)$ ima neprekidan prvi izvod nad zatvorenim intervalom $[\alpha,\beta]$,

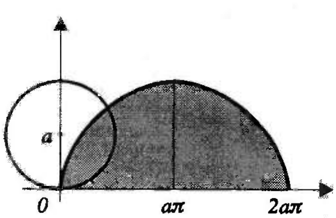
b) funkcija $\varphi(t)$ je monotono rastuća nad zatvorenim intervalom $[\alpha,\beta]$,

c) funkcija $\psi(t)$ je neprekidna nad zatvorenim intervalom $[\alpha,\beta]$,

d) $\psi(t)\geq 0$ za svako $t\in[\alpha,\beta]$.

Tada je $P=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt$, $P=\int_{\alpha}^{\beta} y\cdot x'_t\,dt$.

6. Naći površinu ograničenu jednim lukom cikloide $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $a\in R$.

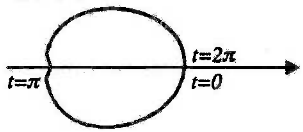


$$t_1 : x=0,\ y=0 \Rightarrow t_1 = 0$$
$$t_2 : x=2a\pi,\ y=0 \Rightarrow t_2 = 2\pi$$
$$x'(t) = a(1-\cos t)$$

$$P=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=a^2\int_0^{2\pi}dt-2a^2\int_0^{2\pi}\cos t dt+a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}dt-2a^2\int_0^{2\pi}\cos t dt+\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}dt+\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2t dt=2a^2\pi+a^2\pi=3a^2\pi .$$

7. Naći površinu ograničenu krivom $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$ $0\le t\le 2\pi$, $a>0$.



$$x'_t=a(-2\sin t+2\sin 2t)=-2a(\sin t-\sin 2t)$$

$$y(t)\cdot x'_t=-2a^2(\sin t-\sin 2t)(2\sin t-\sin 2t)=$$

$$=-2a^2(2\sin^2 t-\sin t\sin 2t-2\sin t\sin 2t+\sin^2 2t)$$

$$P=-8a^2\int_\pi^0\frac{1-\cos 2t}{2}dt+12a^2\int_\pi^0\sin t\sin 2t dt-4a^2\int_\pi^0\frac{1-\cos 4t}{2}dt=$$

$$=4a^2\int_0^\pi dt-4a^2\int_0^\pi\cos 2t dt-24a^2\int_0^\pi\sin^2 t\cos t dt+2a^2\int_0^\pi\cos 4t dt=4a^2\pi+2a^2\pi=6a^2\pi .$$

Dužina luka krive

- Pravougli koordinatni sistem

Pretpostavimo da je u ravni definisana kriva *AB* sa $y=f(x)$, $a\le x\le b$, gde funkcija $f(x)$ ima neprekidan prvi izvod $f'(x)$ nad zatvorenim intervalom $[a,b]$.

Dužina luka krive $y=f(x)$ nad zatvorenim intervalom $[a,b]$ je $l=\int_a^b\sqrt{1+(f'^2(x))}dx$

1. Naći dužinu luka krive $y^2-2\ln y-4x=0$ od $x=\frac{1}{4}$ do $x=\frac{e^2}{4}-\frac{1}{2}$.

$$x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y,\quad x'=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2y}$$

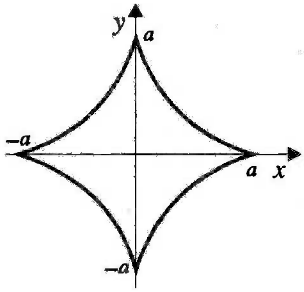
$$x=\frac{1}{4},\ y^2-2\ln y=1\Rightarrow y=1,\quad x=\frac{e^2}{4}-\frac{1}{2},\ y^2-2\ln y=e^2-2\Rightarrow y=e$$

$$y'=\frac{1}{x'}\Rightarrow dx=x'dy,\quad \sqrt{1+(y')^2}dx=\sqrt{1+\frac{1}{(x')^2}}x'dy=\sqrt{1+(x')^2}dy$$

$$l=\int_1^e\sqrt{1+(x')^2}dy=\int_1^e\sqrt{1+(\frac{y^2-1}{2y})}dy=\int_1^e\sqrt{\frac{4y^2+y^4-2y^2+1}{4y^2}}dy=\int_1^e\sqrt{\frac{(y^2+1)^2}{(2y)^2}}dy=$$

$$=\int_1^e\frac{y^2+1}{2y}dy=\frac{1}{2}\int_1^e ydy+\frac{1}{2}\int_1^e\frac{dy}{y}=\frac{1}{4}y^2\Big|_1^e+\frac{1}{2}\ln y\Big|_1^e=\frac{1}{4}(e^2-1)+\frac{1}{2}(1-0)=\frac{e^2+1}{4}.$$

2. Naći dužinu astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, $a>0$.



$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$$

$$y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'=-x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y'=-\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}\Rightarrow (y')^2=\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{y^{-\frac{2}{3}}}=\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$l=4\cdot\int_0^a\sqrt{1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}dx=4\int_0^a\sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}dx=4\int_0^a\sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}dx=4a^{\frac{1}{3}}\int_0^a x^{-\frac{1}{3}}dx=4a^{\frac{1}{3}}\left.\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right|_0^a=6a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}=6a\,.$$

- Polarni koordinatni sistem

Ako je $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$, jednačina krive AB u polarnom koordinatnom sistemu, gde funkcija $\rho=\rho(\varphi)$ ima neprekidan prvi izvod nad intervalom $[\alpha,\beta]$ tada je $l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$.

3. Naći dužinu luka kardioide $\rho=a(1+\cos\varphi)$, $a>0$.

$$\rho'=-a\sin\varphi$$

$$\rho^2+(\rho')^2=a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi=a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=$$

$$=2a^2(1+\cos\varphi)=4a^2\frac{1+\cos\varphi}{2}=4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$\varphi\in(0,\pi)\Rightarrow\cos\frac{\varphi}{2}\geq 0$$

$$l=2\int_0^\pi\sqrt{4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi=2\int_0^\pi 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=8a\sin\left.\frac{\varphi}{2}\right|_0^\pi=8a(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0)=8a\,.$$

4. Naći dužinu luka logaritamske spirale $\rho=e^{a\varphi}$ $(a>0)$ od koordinatnog početka do tačke $A(\rho=1,\varphi=0)$.

$$\rho=0\Rightarrow\varphi=-\infty$$

$$\rho'=ae^{a\varphi}\quad \rho^2+(\rho')^2=\rho^{2a\varphi}+a^2e^{2a\varphi}=(1+a^2)e^{2a\varphi},\qquad \sqrt{\rho^2+(\rho')^2}=e^{a\varphi}\sqrt{1+a^2}$$

$$l=\lim_{\omega\to\infty}\int_\omega^0 e^{a\varphi}\sqrt{1+a^2}d\varphi=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\lim_{\omega\to\infty}\left.e^{a\varphi}\right|_\omega^0=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\lim_{\omega\to\infty}e^{a\varphi}(1-e^{a\omega})=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$$

- Parametarski oblik

Ako je kriva $y=f(x)$ data u parametarskom obliku $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ gde za funkcije $\varphi:[\alpha,\beta]\to R, \psi:[\alpha,\beta]\to R$ važi: $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ imaju neprekidne izvode nad zatvorenim intervalom $[\alpha,\beta]$ i pri tome $\varphi'(t)>0$. Tada je $l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\frac{\psi'^2(t)}{\varphi'^2(t)}}\varphi'(t)dt=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$, tj. $l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt$.

5. **Naći dužinu luka krive $y=a(\sin t-t\cos t)$, $x=a(\cos t+t\sin t)$, $0\le t\le 2\pi$, $a>0$.**

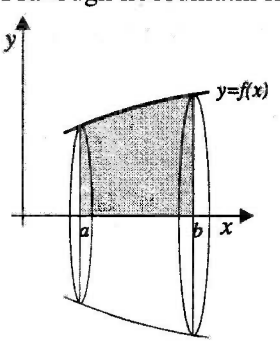
$$x_t'=a(-\sin t+\sin t+t\cos t)=at\cos t$$
$$y_t'=a(\cos t-\cos t+t\sin t)=at\sin t$$
$$(x_t')^2+(y_t')^2=a^2t^2$$
$$l=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2t^2}dt=a\int\limits_0^{2\pi}tdt=\frac{a}{2}\cdot t^2\Big|_0^{2\pi}=2a\pi^2.$$

6. **Naći dužinu luka cikloide $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $a>0$.**

$$x_t'=a(1-\cos t),\quad y_t'=a\sin t$$
$$(x_t')^2+(y_t')^2=a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t=a^2-2a^2\sin^2 t+a^2(\sin^2 t+\cos^2 t)=$$
$$=2a^2(1-\cos t)=4a^2\frac{1-\cos t}{2}=4a^2\sin^2\frac{t}{2}$$
$$\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}=2a\sin\frac{t}{2}$$
$$l=\int\limits_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4a(-1-1)=8a.$$

Zapremina obrtnih tela

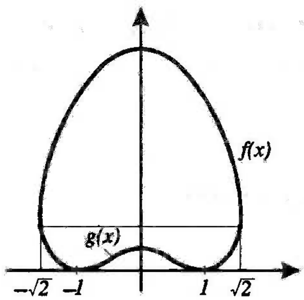
- Pravougli koordinatni sistem



Neka je funkcija $f:[a,b]\to R$ neprekidna nad intervalom $[a,b]$. Ako se krivolinijski trapez, čije stranice su interval $[a,b]$, delovi pravih $x=a$ i $x=b$ i kriva $y=f(x)$, $a\le x\le b$ obrće oko x-ose, dobija se obrtno telo.
Zapremina tela dobijenog obrtanjem krive $y=f(x)$ oko x-ose nad zatvorenim intervalom $[a,b]$ je

$$V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

1. **Naći zapreminu tela koje nastaje obrtanjem oko x-ose površi između krivih** $f(x)=3-x^2+2\sqrt{2-x^2}$ **i** $g(x)=3-x^2-2\sqrt{2-x^2}$ **.**



$D:\ 2-x^2\geq 0 \Rightarrow x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

$g(x)=0 \Rightarrow 3-x^2=2\sqrt{2-x^2}\ \Big/\ ^2$

$9-6x^2+x^4=8-4x^2$

$x^4-2x^2+1=0$

$(x^2-1)^2=0$

$x=\pm 1$

$f(0)=3+2\sqrt{2}\,,\ g(0)=3-2\sqrt{2}$

$$V_1=\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f^2(x)dx\,,\quad V_2=\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} g^2(x)dx$$

$$V=V_1-V_2=\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx=\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}[f(x)-g(x)][f(x)+g(x)]dx=$$

$$=\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 4\sqrt{2-x^2}(6-2x^2)dx=2\pi\int_0^{\sqrt{2}} 8\sqrt{2-x^2}(3-x^2)\cdot\frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}}dx=$$

$$=16\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{(2-x^2)(3-x^2)}{\sqrt{2-x^2}}dx=16\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x^4-5x^2+6}{\sqrt{2-x^2}}dx$$

$$\int\frac{x^4-5x^2+6}{\sqrt{2-x^2}}dx=(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{2-x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}\ \Big/\ '$$

$$\frac{x^4-5x^2+6}{\sqrt{2-x^2}}=(3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{2-x^2}+(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{2-x^2}}$$

$$x^4-5x^2+6=(3Ax^2+2Bx+C)(2-x^2)-x(Ax^3+Bx^2+Cx+D)+\lambda$$

$$x^4-5x^2+6=-4Ax^4-3Bx^3+(6A-2C)x^2+(4B-D)x+2C+\lambda$$

$$-4A=1\Rightarrow A=-\frac{1}{4}\,,\quad -3B=0\Rightarrow B=0\,,\qquad 6A-2C=-5\Rightarrow C=\frac{7}{4}\,,$$

$$4B-D=0\Rightarrow D=0\,,\quad 2C+\lambda=6\Rightarrow\lambda=\frac{5}{2}$$

$$\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x^4-5x^2+6}{\sqrt{2-x^2}}dx=\left(-\frac{1}{4}x^3+\frac{7}{4}x\right)\sqrt{2-x^2}\,\Big|_0^{\sqrt{2}}+\frac{5}{2}\int_0^{\sqrt{2}}\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}=\frac{5}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\,\Big|_0^{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{5}{2}\arcsin 1-\frac{5}{2}\arcsin 0=\frac{5\pi}{4}$$

$$V=16\pi\cdot\frac{5\pi}{4}=20\pi^2\,.$$

- Polarni koordinatni sistem

Posmatrajmo figuru F u polarnom koordinatnom sistemu. Neka je funkcija $\rho = \rho(\varphi)$ nenegativna i neka ima neprekidan prvi izvod nad zatvorenim intervalom $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$. Treba naći zapreminu tela nastalog obrtanjem figure F oko polarne ose. Zapremina obrtnog tela je $V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi$.

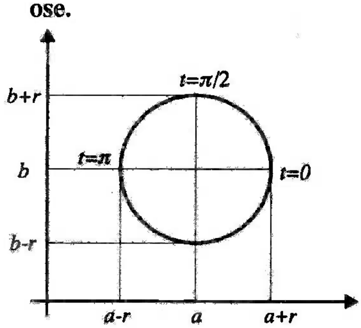
2. **Naći zapreminu tela nastalog obrtanjem kardioide oko polarne ose.**

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_0^\pi a^3(1+\cos\varphi)^3 \sin\varphi d\varphi = -\frac{2}{3}\pi a\frac{(1+\cos\varphi)^4}{4}\Big|_0^\pi = \frac{8a^3\pi}{3}.$$

- Parametarski oblik

Ako se kriva $y = f(x)$ data u parametarskom obliku $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, gde za funkcije $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ važe iste osobine kao i kada smo definisali površinu ravnih likova, obrće oko $x-$ose tada je zapremina V dobijenog tela data obrascem $V = \pi\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)\,dt$, tj. $V = \pi\int_\alpha^\beta y^2 \cdot x_t'\, dt$.

3. **Naći zapreminu torusa nastalog obrtanjem kruga $x = a + r\cos t$ $y = b + r\sin t$ oko x - ose.**



$$x_t' = -r\sin t$$
$$y^2 \cdot x_t' = (b + r\sin t)^2 \cdot (-r\sin t)$$

$$V = -\pi\int_0^\pi (b+r\sin t)^2(-r\sin t)dt - (\pi\int_\pi^{2\pi}(b+r\sin t)^2(-r\sin t)dt) =$$

$$= \pi r\int_0^\pi (b^2 + 2br\sin t + r^2\sin^2 t)\sin t\, dt + r\pi\int_\pi^{2\pi}(b^2 + 2br\sin t + r^2\sin^2 t)\sin t\, dt =$$

$$= \pi r\int_0^\pi (b^2\sin t + 2br\frac{1-\cos 2t}{2} + r^2(1-\cos^2 t)\sin t)\, dt + r\pi\int_\pi^{2\pi}(b^2 + 2br\sin t + r^2\sin^2 t)\sin t dt =$$

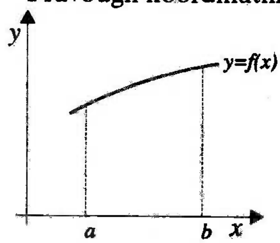
$$= -\pi rb^2 \cos t\Big|_0^{\pi} + b\pi r^2 t\Big|_0^{\pi} + \frac{br^2\pi}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi} - \pi r^3 \cos t\Big|_0^{\pi} + \frac{\pi r^3}{3}\cos^3 t\Big|_0^{\pi} - \pi rb^2 \cos t\Big|_{\pi}^{2\pi} + b\pi r^2 t\Big|_{\pi}^{2\pi} +$$

$$+\frac{br^2\pi}{2}\sin 2t\Big|_{\pi}^{2\pi} - \pi r^3 \cos t\Big|_{\pi}^{2\pi} + \frac{\pi r^3}{3}\cos^3 t\Big|_{\pi}^{2\pi} = -\pi rb^2(-1-1) + b\pi^2 r^2 - \pi r^3(-1-1) +$$

$$+\frac{\pi r^3}{3}(-1-1) - \pi rb^2(1+1) + b\pi^2 r^2 - \frac{\pi r^3}{3}(1+1) + \frac{\pi r^3}{3}(1+1) = 2b\pi^2 r^2.$$

Površina omotača obrtnih tela

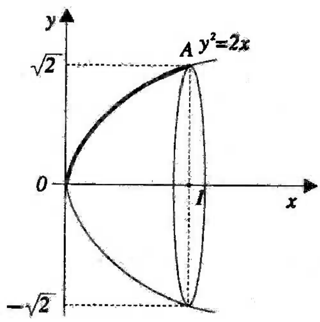
- Pravougli koordinatni sistem



Definišimo površinu "omotača" obrtnog tela, koje se dobija obrtanjem krivolinijskog trapeza, čije stranice su interval $[a,b]$, delovi pravih $x=a$ i $x=b$ i kriva $y=f(x)$, $a \le x \le b$, oko $x-$ose. Funkcija $f(x)$ je nenegativna i ima neprekidan prvi izvod nad zatvorenim intervalom $[a,b]$.

Površina M omotača obrtnog tela je $P = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$.

1. Izračunati površinu omotača paraboličnog ogledala dubine $1m$, prečnika $D = 2\sqrt{2}\ m$.



$A(1,\sqrt{2})$

$y^2 = ax$

$(\sqrt{2})^2 = a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y^2 = 2x$

$y = \pm\sqrt{2x}$

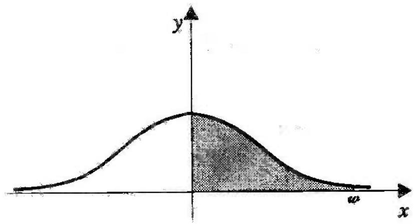
$y' = \dfrac{2}{2\sqrt{2x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\dfrac{1}{2x}} = \dfrac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x}}$

$$M = 2\pi\int_0^1 \sqrt{2x}\cdot\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x}}dx = 2\pi\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx = \begin{pmatrix} 2x+1=t \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{pmatrix} = \pi\int\sqrt{t}\,dt = \frac{2\pi}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2\pi}{3}3^{\frac{3}{2}} - \frac{2\pi}{3} = 2\pi\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3}-1)\ m^2.$$

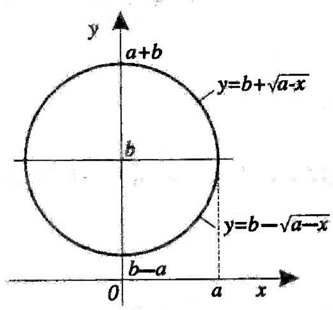
2. **Figura ograničena krivom** $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ **i svojom asimptotom obrće se oko** x**-ose. Naći zapreminu tako nastalog tela.**



$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2}=0 \Rightarrow y=0$$ horizontalna asimptota

$$V=2\pi\lim_{x\to\infty}\int_0^{\omega}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=2\pi\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}arctgx\Big|_0^{\omega}+\frac{x}{2(x^2+1)}\Big|_0^{\omega}\right)=2\pi\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}arctg\omega+\frac{\omega}{2(\omega^2+1)}\right)=\frac{\pi^2}{2}$$

3. **Naći površinu torusa nastalog rotacijom kružnice** $x^2+(y-b)^2=a^2$ **oko** x **- ose** $(b>a)$.



$$(y-b)^2=a^2-x^2$$
$$y-b=\pm\sqrt{a^2-x^2}$$
$$y=b\pm\sqrt{a^2-x^2}$$
$$y'=\mp\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\Rightarrow(y')^2=\frac{x^2}{a^2-x^2}$$
$$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$M=2\cdot 2\pi\int_0^a(b+\sqrt{a^2-x^2})\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx+2\cdot 2\pi\int_0^a(b-\sqrt{a^2-x^2})\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$
$$=4\pi\int_0^a\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2-x^2}}+a\right)dx+4\pi\int_0^a\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2-x^2}}-a\right)dx=8\pi ab\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=8\pi ab\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a=$$
$$=8\pi ab(\arcsin 1-\arcsin 0)=4ab\pi^2.$$

- Polarni koordinatni sistem

Ako se kriva $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi[\alpha,\beta]\subset[0,\pi]$ obrće oko polarne ose, tada je površina P omotača obrtnog tela, pod pretpostavkama da funkcija $\rho=\rho(\varphi)$ ima neprekidan prvi izvod nad zatvorenim intervalom $[\alpha,\beta]$ data obrascem

$$P=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\rho(\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\sin\varphi\, d\varphi.$$

4. Naći površinu lopte poluprečnika R.

$\rho = R$ je jednačina kružnice u polarnom koordinatnom sistemu, pa je površina lopte

$$P = 2\pi\int_0^{\pi} R^2 \sin\varphi \, d\varphi = -2\pi R^2 \cos\varphi\Big|_0^{\pi} = 4\pi R^2 .$$

- Parametarski oblik

Ako se kriva $y = f(x)$ data u parametarskom obliku $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, obrće oko x – ose, tada je površina P omotača obrtnog tela pod pretpostavkama:

a) funkcija $\varphi(t)$ ima neprekidan pozitivan prvi izvod nad zatvorenim intervalom $[\alpha, \beta]$,

b) funkcija $\psi(t)$ je nenegativna i ima neprekidan prvi izvod nad zatvorenim intervalom $[\alpha, \beta]$,

data obrascem $P = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt$.

5. Naći površinu tela nastalog obrtanjem jednog svoda cikloide oko x – ose.

$x = a(t - \sin t)$, $x'_t = (1 - \cos t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $y'_t = a\sin t$

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + a^2\sin^2 t = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}$$

$\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = 2a\sin\frac{t}{2}$, jer je $\sin\frac{t}{2} > 0$ za $t \in [0, 2\pi]$.

Površina omotača nastalog tela je

$$P = 4a^2\pi\int_0^{2\pi}(1 - \cos t)\sin\frac{t}{2}dt = 8a^2\pi\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt = 8a^2\pi\int_0^{2\pi}(1 - \cos^2\frac{t}{2})\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= -16a^2\pi\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} + 16a^2\pi\frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\Big|_0^{2\pi} = -16a^2\pi(-1 - 1) + \frac{16}{3}a^2\pi(-1 - 1) = \frac{64}{3}a^2\pi .$$

6. Naći $I = \int\frac{dx}{\cos x + 2}$ nad intervalom $(0, \frac{3\pi}{2})$.

Uvedimo smenu $tg\frac{x}{2} = t$, $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$

Za $x \in (0, \pi)$ je

$$I_1 = \int\frac{dx}{\cos x + 2} = \int\frac{\frac{2dt}{1 + t^2}}{\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 2} = 2\int\frac{dt}{t^2 + 3} = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}} + c_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + c_1 .$$

Slično za $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ je $I_2 = \int\frac{dx}{\cos x + 2} = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + c_2$.

Kako je funkcija $f(x)=\dfrac{1}{\cos x+2}$ neprekidna za svako x to za nju postoji neodređeni integral nad zadatim intervalom.

Dakle, $\lim\limits_{x\to\pi} I=\lim\limits_{x\to\pi^-} I_1=\lim\limits_{x\to\pi^+} I_2$.

Kako je

$$\lim_{x\to\pi^-} I_1=\lim_{x\to\pi^-}\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+c_1=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+c_1$$

$$\lim_{x\to\pi^+} I_2=\lim_{x\to\pi^+}\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+c_2=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}+c_2,$$

sledi da je $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}+c_1=-\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}+c_2$, odnosno da je $c_2=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}+c_1$.

Dakle,

$$I=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+c, & x\in(0,\pi)\\[2ex] \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}+c, & x=\pi\\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}+c, & x\in(\pi,\dfrac{3\pi}{2}).\end{cases}$$

FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH

Ovde ćemo dati osnove realnih funkcija dve realne promenljive. Slične osnove važe i za realne funkcije više realnih promenljivih.

Broj A je granična vrednost funkcije $z=f(x,y)$ kada tačka $M(x,y)$ teži tački $M_0(x_0,y_0)$ na bilo koji način (duž neke proizvoljne putanje), ako za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta>0$ takvo da iz $d(M,M_0)<\delta$ sledi $|f(x,y)-A|<\varepsilon$, što se piše u obliku $A=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$.

Funkcija $z=f(x,y)$ je neprekidna u tački $M_0(x_0,y_0)$ ako je $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$, (x_0,y_0) je tačka nagomilavanja definicionog skupa.

Ako je (x_0,y_0) izolovana tačka oblasti definisanosti funkcija je u njoj neprekidna.

Totalni priraštaj funkcije $z=f(x,y)$ je $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$.

Funkcija $z=f(x,y)$ je neprekidna u tački $M(x,y)$ ako je

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\right]=0 .$$

Parcijalni priraštaj funkcije $z=f(x,y)$ po promenljivoj x je $\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$, a po promenljivoj y je $\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$.

Parcijalni izvod funkcije $z=f(x,y)$ po promenljivoj x je

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},$$

a po promenljivoj y je

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

Funkcija $z=f(x,y)$ je diferencijabilna u tački $M(x,y)$ ako se njen totalni priraštaj u ovoj tački može napisati u obliku:

$\Delta z=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+\beta(\Delta x,\ \Delta y)\cdot\Delta y$, gde su A i B neki brojevi nezavisni od Δx i Δy i $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ i $\beta(\Delta x,\ \Delta y)$ teže nuli kad Δx i Δy teže nuli.

$$\alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+\beta(\Delta x,\ \Delta y)\cdot\Delta y=\frac{\alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+\beta(\Delta x,\ \Delta y)\cdot\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\cdot\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=$$

$=\omega\cdot\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, gde je $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ rastojanje između tačaka $(x+\Delta x,y+\Delta y)$ i (x,y).

$\Delta z=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\omega\cdot\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\omega=0\Rightarrow$ funkcija je diferencijabilna.

a) Ako je funkcija $z=f(x,y)$ diferencijabilna u tački $M(x,y)$, tada je i neprekidna u toj tački.
b) Ako je funkcija $z=f(x,y)$ diferencijabilna u tački $M(x,y)$, tada postoje parcijalni izvodi $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ u toj tački i važi $\frac{\partial z}{\partial x}=A$, $\frac{\partial z}{\partial y}=B$.
c) Ako funkcija $z=f(x,y)$ ima parcijalne izvode prvog reda u nekoj okolini tačke $M(x,y)$ i ako su oni neprekidni u tački $M(x,y)$, tada je funkcija u toj tački diferencijabilna.

Totalni diferencijal prvog reda funkcije $z=f(x,y)$ u tački $M(x,y)$ je $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Ako postoji parcijalni izvod $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(M)$ njega zovemo drugim parcijalnim izvodom ili parcijalnim izvodom drugog reda funkcije f u tački M, po promenljivima x_i, x_j (tim redom) kojeg označavamo sa $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M)$ ili $f_{x_i,x_j}(M)$. U slučaju kada je $i=j$ odgovarajući parcijalni izvod označavamo sa $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(M)$. Ako je $i\neq j$, parcijalni izvod zovemo mešovitim.

U opštem slučaju, mešoviti parcijalni izvodi, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M)$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M)$, ako postoje, mogu imati različite vrednosti.

Ako postoje drugi mešoviti parcijalni izvodi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M)$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M)$ u nekoj okolini tačke $M(x,y)$ i ako su oni neprekidni u datoj tački M, onda su oni i jednaki u ovoj tački, to jest važi jednakost $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M)$.

Totalni diferencijal drugog reda

$$d^2z=d(dz)=d(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy)=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy)dx+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy)dy=$$
$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2=(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy)^2 z.$$

1. Za funkciju $z=x^2-2xy^2+y^3$ naći parcijalne izvode prvog i drugog reda, kao i totalni diferencijal prvog i drugog reda.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2y^2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-4xy+3y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-4x+6y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(-4xy+3y^2)=-4y$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(2x-2y^2)dx+(3y^2-4xy)dy$$

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2=2dx^2-8ydxdy+(6y-4x)dy^2.$$

2. **Za funkciju** $f(x,y)=\frac{1}{y}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}$ **naći parcijalne izvode prvog i drugog reda, kao i totalni diferencijal prvog i drugog reda.**

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}\cdot(-2x)\cdot\frac{1}{y}=-\frac{2x}{y^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}},\ \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}+\frac{1}{y}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}\cdot\frac{x^2}{y^2}=e^{-\frac{x^2}{y}}\cdot\frac{x^2-y}{y^3}$$

$$df=-\frac{2x}{y^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}dx+\frac{x^2-y}{y^3}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}dy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{2}{y^2}\cdot(e^{-\frac{x^2}{y}}+xe^{-\frac{x^2}{y}}\cdot(-\frac{2x}{y}))=\frac{2(2x^2-y)}{y^3}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2x(-\frac{2}{y^3}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}+\frac{1}{y^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}\cdot\frac{x^2}{y^2})=-\frac{2x}{y^4}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}(-2y+x^2)=\frac{2x}{y^4}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}(2y-x^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{-y^3-3y^2(x^2-y)}{y^6}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}+e^{-\frac{x^2}{y}}\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{x^2-y}{y^3}=$$

$$=e^{-\frac{x^2}{y}}(\frac{-y^2-3x^2y+3y^2+x^4-x^2y}{y^5})=e^{-\frac{x^2}{y}}\cdot\frac{x^4-4x^2y+2y^2}{y^5}$$

$$d^2f=\frac{2(2x^2-y)}{y^3}\cdot e^{-\frac{x^2}{y}}dx^2+2\cdot\frac{2xe^{-\frac{x^2}{y}}}{y^4}\cdot(2y-x^2)dxdy+e^{-\frac{x^2}{y}}\frac{x^4-4x^2y+2y^2}{y^5}dy^2.$$

3. **Dokazati da je za funkciju** $z=arctg\frac{x}{y}$, $x=u+v$, $y=u-v$ **zadovoljena jednačina** $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}\cdot 1+\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}(-\frac{x}{y^2})\cdot 1=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{y-x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{y^2}{y^2+x^2}\cdot\frac{1}{y}\cdot 1+\frac{y^2}{y^2+x^2}\cdot(-\frac{x}{y^2})(-1)=\frac{y+x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{y-x}{x^2+y^2}+\frac{x+y}{x^2+y^2}=\frac{2y}{x^2+y^2}=\frac{2(u-v)}{2(u^2+v^2)}=\frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

4. **Pokazati da funkcija** $z(x,y)$ **definisana implicitno** $x+y+z=ln(x^2+y^2+z^2)$ **zadovoljava jednačinu** $(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=x-y$.

$$x+y+z=ln(x^2+y^2+z^2)\,\Big/'_x$$

$$1+\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x})$$

$$x^2+y^2+z^2+(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x-(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2-2z}$$

$$x+y+z=ln(x^2+y^2+z^2)\,\Big/'_y$$

$$1+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(2y+2z\frac{\partial z}{\partial y})\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2-2z}$$

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2xy-y(x^2+y^2+z^2)-2xz+z(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2-2z}+$$

$$+\frac{2yz-z(x^2+y^2+z^2)-2xy+x(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2-2z}=\frac{(x-y)\left[x^2+y^2+z^2-2z\right]}{x^2+y^2+z^2-2z}=x-y.$$

5. **Data je funkcija** $z(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

a) **Ispitati neprekidnost funkcije** $z(x,y)$ **u tački** $(0,0)$.

b) **Naći** $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ **i** $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.

c) **Pokazati da funkcija** $z(x,y)$ **nije diferencijabilna u tački** $(0,0)$.

a) Da bi funkcija $z(x,y)$ bila neprekidna u tački $(0,0)$ mora da je

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=$$

$$=\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot y\right|\leq|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon=\delta\Rightarrow$$ funkcija $z(x,y)$ je neprekidna.

b) $$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z(\Delta x,0)-z(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\cdot 0}{\sqrt{(\Delta x)^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{z(0,\Delta y)-z(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{0\cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta y)^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{(\Delta y)^2}}}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0$$

c) $$\Delta z=z(x+\Delta x,y+\Delta y)-z(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy+\omega\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$\Delta z(0,0)=z(\Delta x,\Delta y)-z(0,0)=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

Kako je $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=0$ i $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)=0 \Rightarrow \Delta z(0,0)=\omega\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

$$\omega\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\Rightarrow$$

$$\omega=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\cos\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\omega=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\cos\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\overset{\Delta y=k\cdot\Delta x}{=}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{k\cdot(\Delta x)^2}{(1+k^2)(\Delta x)^2}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{(1+k^2)(\Delta x)^2}}=\frac{k}{k^2+1}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{1}{\sqrt{(1+k^2)(\Delta x)^2}}.$$

ω ne teži 0 kada $\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}$ $\Rightarrow$ funkcija $z(x,y)$ nije diferencijabilna u tački $(0,0)$.

6. Neka je funkcija $z=z(x,y)$ data sa $z=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$. Ispitati neprekidnost i diferencijabilnost date funkcije u tački $(0,0)$.

Funkcija z je definisana za $|x|\le 1$, $|y|\le 1$ i u toj oblasti je neprekidna.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z(\Delta x,0)-z(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2}+\sqrt{1-(\Delta x)^2}+1-2}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|+\sqrt{1-(\Delta x)^2}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{|\Delta x|}{\Delta x}-\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x(\sqrt{1-(\Delta x)^2}+1)}\right)=\begin{cases}1 & , \ \Delta x\to 0^+\\ -1 & , \ \Delta x\to 0^-\end{cases}$$

Slično $$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{|\Delta y|+\sqrt{1-(\Delta y)^2}-1}{\Delta x}=\begin{cases}1 & , \ \Delta x\to 0^+\\ -1 & , \ \Delta x\to 0^-\end{cases}.$$

Dakle, funkcija $z(x,y)$ nije diferencijabilna, jer ne postoje parcijalni izvodi u tački $(0,0)$.

7. **Ako je** $z=\begin{cases} arctg\dfrac{x}{y}, y\neq 0 \\ 0 \quad , y=0 \end{cases}$ **pokazati da je** $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0)=0$**. Pokazati da funkcija** z **nije diferencijabilna u tački** $(0,0)$**. Da li su oba izvoda** $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ **i** $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ **neprekidna u tački** $(0,0)$**?**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z(\Delta x,0)-z(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{z(0,\Delta y)-z(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{arctg0-0}{\Delta y}=0$$

Pokazaćemo da funkcija nije neprekidna.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} arctg\dfrac{x}{y} \overset{y=x}{=} \lim\limits_{x\to 0} arctg1=\dfrac{\pi}{4} \\[2ex] \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} arctg\dfrac{x}{y} \overset{y=-x}{=} \lim\limits_{x\to 0} arctg-1=-\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

funkcija nije neprekidna, pa nije ni diferencijabilna.

Kada bi oba parcijalna izvoda bila neprekidna u tački $(0,0)$ funkcija bi bila diferencijabilna u toj tački, što smo pokazali da nije tačno, prema tome oba parcijalna izvoda ne mogu biti neprekidna u tački $(0,0)$.

Ekstremne vrednosti

Neka je funkcija $z=f(x,y)$ diferencijabilna u nekoj oblasti D i tačka $M_0(x_0,y_0)$ je unutrašnja tačka iz te oblasti.

Ako postoji broj $\varepsilon>0$, takav da za svako Δx i Δy koji zadovoljavaju uslov $|\Delta x|<\varepsilon$, $|\Delta y|<\varepsilon$, $(\Delta x,\Delta y)\neq(0,0)$ sledi $\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)<0$ tada funkcija $z=f(x,y)$ u tački $M_0(x_0,y_0)$ ima lokalni maksimum, a ako za svako $|\Delta x|<\varepsilon$ i $|\Delta y|<\varepsilon$, $(\Delta x,\Delta y)\neq(0,0)$ sledi $\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)>0$ tada funkcija u tački $M_0(x_0,y_0)$ ima lokalni minimum.

Drugim rečima, u tački $M_0(x_0,y_0)$ funkcija $z=f(x,y)$ ima lokalni maksimum ili lokalni minimum ako postoji ε-okolina tačke $M_0(x_0,y_0)$ takva da u svim tačkama $M(x,y)\neq M_0(x_0,y_0)$ iz ove okoline $\Delta f=f(x,y)-f(x_0,y_0)$ je istog znaka.

Potreban uslov za ekstrem:

Ako funkcija $z = f(x,y)$ ima ekstrem u tački $M_0(x_0,y_0)$, tada u toj tački parcijalni izvodi $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ ili su jednaki nuli ili ne postoje.

Tačke u kojima su parcijalni izvodi $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ jednaki nuli ili ne postoje nazivaju se kritične tačke funkcije $z = f(x,y)$. Tačke u kojima je $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ nazivaju se stacionarne tačke.

Dovoljan uslov za ekstrem:

Neka je tačka $M_0(x_0,y_0)$ stacionarna tačka funkcije $z = f(x,y)$, tj. neka je $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$ i $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$. Ako u nekoj okolini tačke $M_0(x_0,y_0)$, uključujući i tu tačku, funkcija $z = f(x,y)$ ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda, tada funkcija $z = f(x,y)$ u tački $M_0(x_0,y_0)$:

- ako je $d^2z > 0$ za $(dx,dy) \neq (0,0)$ funkcija $z = f(x,y)$ u tački $M_0(x_0,y_0)$ ima minimum,
- ako je $d^2z < 0$ za $(dx,dy) \neq (0,0)$ funkcija $z = f(x,y)$ u tački $M_0(x_0,y_0)$ ima maksimum,
- ako d^2z menja znak za $(dx,dy) \neq (0,0)$ funkcija $z = f(x,y)$ u tački $M_0(x_0,y_0)$ nema ekstrem.

Ovaj kriterijum važi za bilo koju funkciju $n-$promenljivih.
Za funkciju dve promenljive važi i sledeći dovoljan uslov za ispitivanje ekstremne vrednosti:

1) ima maksimum ako je $rt - s^2 > 0$ i $r < 0$ (ili $t < 0$),
2) ima minimum ako je $rt - s^2 > 0$ i $r > 0$ (ili $t > 0$),
3) nema ekstrem ako je $rt - s^2 < 0$,
4) potrebna su dalja ispitivanja ako je $rt - s^2 = 0$,

gde je $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ i $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1. Naći ekstremne vrednosti funkcije $z = ln(y - 2xy) + xy - x$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y-2xy}(-2y) + y - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{2x-1} + y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 + 2xy - y - 2x + 1 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y-2xy}(1-2x) + x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} + x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{y}$$

$$2+2xy-y-2x+1=0 \Leftrightarrow -y+\frac{2}{y}+1=0 \Leftrightarrow y^2-y-2=0$$

Rešenja poslednje jednačine su $y_1=-1$ i $y_2=2$. Za x koordinatu dobija se $x_1=1$ i $x_2=-\frac{1}{2}$. Dakle, stacionarne tačke su $A(1,-1)$ i $B(-\frac{1}{2},2)$.

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{2}{2x-1}+y-1)=-\frac{4}{(2x-1)^2}$$

$$t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{y}+x)=-\frac{1}{y^2} \qquad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{y}+x)=1.$$

Tačka A

$r=-4,\ t=-1,\ s=1$

$rt-s^2=4-1=3>0$

$r<0$

Funkcija $z(x,y)$ ima maksimum -2 u tački A.

Tačka B

$r=-1,\ t=-\frac{1}{4},\ s=1$

$rt-s^2=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}<0$

Funkcija nema ekstrem u tački B.

2. Naći ekstremne vrednosti funkcije $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-2x-2y=0 \Leftrightarrow 2x^3-x-y=0 \Leftrightarrow x+y=2x^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-2x-2y=0 \Leftrightarrow 2y^3-x-y=0 \Leftrightarrow x+y=2y^3 \Leftrightarrow x^3=y^3 \Rightarrow x=y$$

$$2x^3-2x=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=1$$

$$y_1=0,\ y_2=-1,\ y_3=1$$

Stacionarne tačke su $A(-1,-1)$, $B(1,1)$ i $C(0,0)$.

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-2,\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-2,\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2$$

Tačka A

$r=10,\ t=10,\ s=-2 \Rightarrow rt-s^2=100-4=96>0\ (r>0)$

Funkcija $z(x,y)$ ima minimum -2 u tački A.

Tačka B

$r=10,\ t=10,\ s=-2 \Rightarrow rt-s^2=100-4=96>0\ (r>0)$

Funkcija $z(x,y)$ ima minimum -2 u tački B.

Tačka C

$r=-2,\ t=-2,\ s=-2 \Rightarrow rt-s^2=4-4=0 \Rightarrow$ potrebna su dalja ispitivanja.

Treba proveriti da li je d^2z stalnog znaka za svako dovoljno malo $(dx,dy)\neq(0,0)$. Za tačku C je $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial z^2}=-2$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = -2dx^2 - 4dxdy - 2dy^2 =$$

$$= -2(dx^2 + 2dxdy + dy^2) = -2(dx + dy)^2$$

Zbog toga što je $d^2z = 0$ za $dx = -dy$ potrebna su dalja ispitivanja, pa imamo:

- za $y = -x$ ($\Delta y = -\Delta x$) je

$$\Delta z = z(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - z(0,0) = (\Delta x)^4 + (\Delta y)^4 - (\Delta x)^2 - 2\Delta x\Delta y - (\Delta y)^2 =$$

$$= (\Delta x)^4 + (-\Delta x)^4 - (\Delta x)^2 - 2\Delta x(-\Delta x) - (-\Delta x)^2 = 2(\Delta x)^4 > 0,$$

- za $y = x$ ($\Delta y = \Delta x$) je

$\Delta z = (\Delta x)^4 + (\Delta x)^4 - (\Delta x)^2 - 2(\Delta x)^2 - (\Delta x)^2 = 2(\Delta x)^2((\Delta x)^2 - 2) < 0$ za dovoljno malo Δx.

Kako priraštaj nije stalnog znaka u okolini tačke $C(0,0)$, to funkcija $z(x,y)$ nema ekstremnu vrednost u tački C.

3. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije

$$u = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 4x + 6y + 6z.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow x + y + 2 = 0 \Rightarrow x = -y - 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4y + 2x + 2z + 6 = 0 \Leftrightarrow 2y + x + z + 3 = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 4z + 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow 2z + y + 3 = 0 \Rightarrow z = \frac{-y-3}{2}$$

$$2y - y - 2 - \frac{y+3}{2} + 3 = 0 \Leftrightarrow y - \frac{y+3}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2y - y - 3 + 2 = 0 \Rightarrow y = 1$$

Stacionarna tačka je $A(-3,1,-2)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = 0 \text{ i } \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = 2.$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}dydz =$$

$$= 2dx^2 + 4dy^2 + 4dz^2 + 4dxdy + 4dydz = 2(dx + dy)^2 + 2(dy + dz)^2 + 2dz^2 > 0$$

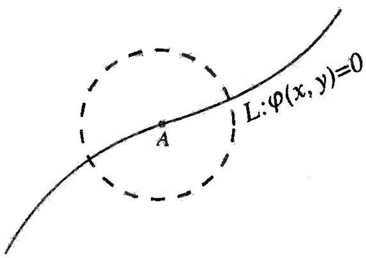
$u(-3,1,-2) = -9$. Dakle, funkcija $u(x,y,z)$ ima minimum -9 u tački $A(-3,1,-2)$.

Uslovni (vezani) ekstremi

Neka je data funkcija $f: D \to R$ definisana na skupu $D \subset R^2$ i neka je data funkcija $\varphi: D \to R$. Označimo sa B skup $B = \{(x,y) \in D : \varphi(x,y) = 0\}$. Pretpostavimo da je $B \neq \emptyset$. Kažemo da je skup B određen uslovom ili vezom $\varphi(x,y) = 0$.

Kažemo da funkcija $z = f(x,y)$ u tački $A(x,y) \in B$ ima uslovni (vezani) lokalni maksimum (uslovni (vezani) lokalni minimum) pri uslovu $\varphi(x,y) = 0$, ako postoji broj $\varepsilon > 0$, takav da za svako $X \in (B \setminus \{A\}) \cap L(A,\varepsilon)$ važi
$f(X) < f(A)$ $(f(X) > f(A))$, tj. (postoji $\varepsilon > 0$)
(za svako $X \in B \cap (L(A,\varepsilon) \setminus \{A\})$) $f(X) < f(A)$ $(f(X) > f(A))$.

Uslovni lokalni maksimum odnosno uslovni lokalni minimum jednim imenom zovemo uslovni ili vezani ekstremi. Jednačina $\varphi(x,y) = 0$ zove se jednačina veze.



Ako je jednačina krive $L: \varphi(x,y) = 0$, tada se problem nalaženja uslovnih ekstrema funkcije $z = f(x,y)$ na krivoj L može formulisati na sledeći način: naći ekstrem funkcije $z = f(x,y)$ u D pod uslovom da je $\varphi(x,y) = 0$.

Dakle, u nalaženju uslovnog ekstrema funkcije $z = f(x,y)$ promenljive x i y se ne mogu više smatrati kao nezavisno promenljive. One su povezane relacijom $\varphi(x,y) = 0$, koja se, zove jednačina veze. Da bi pronašli tačke koje mogu biti uslovni ekstremi funkcije $z = f(x,y)$ pod uslovom da je $\varphi(x,y) = 0$ formiramo Lagranžovu funkciju $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$ i izjednačimo prve parcijalne izvode $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ i $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ funkcije $F(x,y,\lambda)$ sa nulom. Dobijamo sistem od tri jednačine

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = f_x(x,y) + \lambda\varphi_x(x,y) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = f_y(x,y) + \lambda\varphi_y(x,y) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x,y) = 0, \end{cases} \qquad (*)$$

pomoću kojih određujemo vrednosti λ i koordinate x i y mogućih tačaka ekstrema.

Pitanje postojanja i prirode uslovnih ekstrema se rešava pomoću znaka drugog totalnog diferencijala Lagranžove funkcije

$$d^2F(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2,$$

za skup vrednosti x_0, y_0, λ dobijenih iz (*) pod uslovom $\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy=0$ $(dx,dy)\neq(0,0)$. Ako je $d^2F(x_0,y_0)<0$, tada u tački (x_0,y_0) funkcija $f(x,y)$ ima uslovni maksimum, a ako je $d^2F(x_0,y_0)>0$ uslovni minimum.

Slično, ako želimo da nađemo ekstreme funkcije $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ pod uslovom da je

$$\begin{cases}\varphi_1(x_1,x_2,...,x_n)=0\\ \varphi_2(x_1,x_2,...,x_n)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varphi_m(x_1,x_2,...,x_n)=0\end{cases}$$

, $1\le m\le n$, formiramo Lagranžovu funkciju

$$F_1(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\lambda_1\varphi_1(x_1,x_2,...,x_n)+...+\lambda_m\varphi_m(x_1,x_2,...,x_n).$$

4. Naći ekstreme funkcije $z=y^2-x^2+5$ pod uslovom $y+2x-16=0$.

$$F(x,y,\lambda)=y^2-x^2+5+\lambda(y+2x-16)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-2x+2\lambda=0 \Leftrightarrow x=\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2y+\lambda=0 \Leftrightarrow y=-\frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=y+2x-16=0 \Leftrightarrow -\frac{\lambda}{2}+2\lambda-16=0 \Leftrightarrow 3\lambda-32=0 \Rightarrow \lambda=\frac{32}{3}$$

Stacionarna tačka je $A(\frac{32}{3},-\frac{16}{3})$.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-2,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=0$$

Diferenciranjem uslova dobija se $dy+2dx=0$, odnosno $dy=-2dx$.

$$d^2F=-2dx^2+2dy^2=-2dx^2+8dx^2=6dx^2>0.$$

Funkcija $z(x,y)$ ima uslovni minimum $-\frac{241}{3}$ u tački A.

5. Od svih pravouglih paralelopipeda zapremine $V=27$ naći onaj koji ima najmanju prostornu dijagonalu.

Ako stranice paralelopipeda označimo sa x,y i z onda je $V=x\cdot y\cdot z$.

$$D=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ x>0,\ y>0,\ z>0$$

$$F(x,y,z,\lambda)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\lambda(xyz-27)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\lambda yz=0 \Big/ \cdot x \Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\lambda xyz=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\lambda xz=0 \Big/ \cdot y \Rightarrow \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\lambda xyz=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\lambda yx=0 \Big/ \cdot z \Rightarrow \frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\lambda xyz=0$$

Odavde sledi $x^2=y^2=z^2$. Zbog $x>0$, $y>0$, $z>0$ $\Rightarrow$ $x=y=z$.

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=xyz-27=0 \Leftrightarrow x^3-27=0 \Leftrightarrow x=3$$

Stacionarna tačka je $A(3,3,3)$.

$$9\lambda=-\frac{3}{\sqrt{27}} \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{3\sqrt{27}}\cdot\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{27}}=-\frac{3\sqrt{3}}{3\cdot 27}=-\frac{\sqrt{3}}{27}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-x\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}=\frac{\sqrt{27}-\dfrac{9}{\sqrt{27}}}{27}=\frac{27-9}{27\sqrt{27}}=\frac{2}{3\sqrt{27}}=\frac{2\sqrt{3}}{27}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=-\frac{xy\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}+\lambda z=-\frac{\sqrt{3}}{27}-\frac{3\sqrt{3}}{27}=-\frac{4\sqrt{3}}{27}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}$$

Diferenciranjem uslova dobija se $yzdx+xzdy+xydz=0$. Kako je $x=y=z$ sledi da je $dx+dy+dz=0$, odnosno $dz=-dx-dy$.

$$d^2F=\frac{2\sqrt{3}}{27}(dx^2+dy^2+dz^2)-\frac{8\sqrt{3}}{27}(dxdy+dxdz+dydz)=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{27}(2dx^2+2dy^2+2dxdy)-\frac{8\sqrt{3}}{27}(dxdy-dx^2-dxdy-dxdy-dy^2)=$$

$$=\frac{12\sqrt{3}}{27}(dx^2+dy^2+dxdy)=\frac{4\sqrt{3}}{9}\left[(dx+\frac{dy}{2})^2+\frac{3dy^2}{4}\right]>0 \text{ minimum}$$

Funkcija D ima uslovni minimum $3\sqrt{3}$ u tački A.
Najmanju prostornu dijagonalu ima kocka sa stranicama $x=y=z=3$.

6. **Proveriti da li funkcija $u=xy+yz$ u tački $A(1,1,1)$ ima uslovni ekstrem ako je $x^2+y^2=2$ i $y+z=2$.**

$$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=xy+yz+\lambda_1(x^2+y^2-2)+\lambda_2(y+z-2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y+2\lambda_1 x=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=x+z+2\lambda_1 y+\lambda_2=0,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=y+\lambda_2=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}=x^2+y^2-2=0,\quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}=y+z-2=0$$

Date jednačine su zadovoljene za $x = y = z = 1$ ako je $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$ i $\lambda_2 = -1$.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda_1 = -1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda_1 = -1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 1$$

Diferenciranjem uslova $y + z = 2$ dobija se $dy + dz = 0$, odnosno $dz = -dy$.

Diferenciranjem uslova $x^2 + y^2 = 2$ dobija se $2xdx + 2ydy = 0$, odnosno $dx + dy = 0$. Odavde je $dx = -dy$.

$$d^2F = -dx^2 - dy^2 + 2dxdy + 2dydz = -(dx - dy)^2 + 2dydz = -(2dy)^2 - 2dy^2 =$$
$$= -4dy^2 - 2dy^2 = -6dy^2 < 0$$

Funkcija $u(x,y,z)$ ima uslovni maksimum 2 u tački A.

7. Odrediti najveću i najmanju vrednost funkcije $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ u oblasti $x^2 + y^2 \le 25$.

Funkcija $z(x,y)$ je neprekidna na zatvorenoj oblasti $x^2 + y^2 \le 25$, pa mora dostizati svoju najveću i najmanju vrednost.

Unutar oblasti $x^2 + y^2 < 25$ tražimo običan ekstrem.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 12 = 0 \Rightarrow x = 6, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 16 = 0 \Rightarrow y = -8$$

$6^2 + (-8)^2 = 36 + 64 = 100 > 25 \Rightarrow$ tačka $(6,-8)$ ne pripada oblasti.

Za $x^2 + y^2 = 25$ tražimo uslovni ekstrem.

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda(x^2 + y^2 - 25).$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 12 + 2\lambda x = 0 \Rightarrow x - 6 + \lambda x = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{1+\lambda}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 16 + 2\lambda y = 0 \Rightarrow y + 8 + \lambda y = 0 \Rightarrow y = \frac{-8}{1+\lambda}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 25 = 0$$

$$\frac{36}{(1+\lambda)^2} + \frac{64}{(1+\lambda)^2} - 25 = 0$$

$$100 - 25(1+\lambda)^2 = 0 \Rightarrow (1+\lambda)^2 = 4$$

$$1 + \lambda = 2 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \qquad 1 + \lambda = -2 \Rightarrow \lambda_2 = -3$$

Stacionarne tačke su $A(3,-4)$ za $\lambda_1 = 1$ i $B(-3,4)$ za $\lambda_2 = -3$.

$z(3,-4) = 25 - 36 - 64 = -75$ minimum – najmanja vrednost

$z(-3,4) = 25 + 36 + 64 = 125$ maksimum – najveća vrednost.

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Diferencijalne jednačine prvog reda

Jednačina koja razdvaja promenljive

To je jednačina oblika $y' = F(x,y)$ čija se desna strana može napisati kao proizvod dve neprekidne funkcije od kojih jedna zavisi samo od x, a druga samo od y, tj. $y' = f(x) \cdot g(y)$.

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx, \; g(y) \neq 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y(x^2-1)y' = -x(y^2-1)$.

$$y(x^2-1)\frac{dy}{dx} = -x(y^2-1) \Big/ \cdot \frac{dx}{(x^2-1)(y^2-1)}$$

$$\frac{y}{y^2-1}dy = -\frac{x}{x^2-1}dx$$

$$\int \frac{y}{y^2-1}dy = -\int \frac{x}{x^2-1}dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2-1}dy = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}dx$$

$$\ln\left|y^2-1\right| = -\ln\left|x^2-1\right| + c$$

$$\ln\left|y^2-1\right| + \ln\left|x^2-1\right| = c$$

$$\ln\left|y^2-1\right|\left|x^2-1\right| = c$$

$$\left|y^2-1\right|\left|x^2-1\right| = e^c = c_1.$$

Napomena:

Kada kažemo "Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine", podrazumevamo da se traži opšte rešenje, u skladu sa definicijom opšteg rešenja nad intervalom u kojem su zadovoljeni uslovi odgovarajućih teorema u vezi egzistencije i jedinstvenosti rešenja. To, međutim, treba proveriti u svakom konkretnom primeru kada se traži partikularno rešenje (dat je početni uslov zadate diferencijalne jednačine).

Konkretno u našem primeru dobili smo opšte rešenje dato u implicitnom obliku $\left|y^2-1\right|\left|x^2-1\right| = c_1$ za

1. $(x,y) \in G_1 = \left\{(x,y) \in R^2 : 0 < x < \infty, -\infty < y < -1\right\}$,
2. $(x,y) \in G_2 = \left\{(x,y) \in R^2 : 0 < x < \infty, -1 < y < 1\right\}$,
3. $(x,y) \in G_3 = \left\{(x,y) \in R^2 : 0 < x < \infty, 1 < y < \infty\right\}$, itd.

Dakle x pripada nekom otvorenom intervalu gde je $x^2 - 1 \neq 0$, a y nekom otvorenom intervalu gde je $y^2 - 1 \neq 0$.

2. **Uvođenjem smene** $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ **rešiti diferencijalnu jednačinu** $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial r}dr + \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}d\varphi}{\dfrac{\partial x}{\partial r}dr + \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}d\varphi} = \frac{\sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = r$$

$$\frac{\sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi} = \frac{r - r\cos\varphi}{r\sin\varphi}$$

$$\sin^2\varphi\, dr + r\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi + \cos^2\rho\, dr + r\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$$

$$(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi - \cos\varphi)dr = -r\sin\varphi\, d\varphi$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{-\sin\varphi\, d\varphi}{1-\cos\varphi} \Rightarrow \int\frac{dr}{r} = -\int\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}d\varphi$$

$$\ln|r| = -\int\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}d\varphi = \begin{pmatrix} 1-\cos\varphi = t \\ \sin\varphi\, d\varphi = dt \end{pmatrix} = -\int\frac{dt}{t} \Rightarrow \ln|r| = -\ln|t| + \ln c$$

$$\ln|r| + \ln|1-\cos\varphi| = \ln c \Rightarrow \ln|r(1-\cos\varphi)| = \ln c$$

$$r(1-\cos\varphi) = c, \qquad \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = c \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} - x = c.$$

3. **Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y' = \dfrac{-x-xy}{y+xy}$.

$$y' = \frac{-x(1+y)}{y(1+x)} = -\frac{x}{1+x}\cdot\frac{1+y}{y}$$

$$\frac{y}{1+y}dy = -\frac{x}{1+x}dx \Rightarrow \int\frac{y}{1+y}dy = -\int\frac{x}{1+x}dx$$

$$\int\frac{y+1-1}{1+y}dy = -\int\frac{x+1-1}{1+x}dx \Rightarrow \int dy - \int\frac{dy}{y+1} = -\int dx + \int\frac{dx}{1+x}$$

$$y - \ln|y+1| = -x + \ln|1+x| + c.$$

Homogena jednačina

To je jednačina koja se može svesti na oblik $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, gde je f neprekidna funkcija.

Smenom $u = \dfrac{y}{x}$, gde je u funkcija od x, homogena jednačina svodi se na jednačinu koja razdvaja promenljive.

1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $(x-y)ydx - x^2dy = 0$.

$$x^2dy = (xy - y^2)dx \Rightarrow dy = \frac{xy-y^2}{x^2}dx$$

$$dy = (\frac{y}{x} - (\frac{y}{x})^2)dx \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x} - (\frac{y}{x})^2$$

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = x \cdot u \Rightarrow y' = u + x \cdot u'$$

$$u + xu' = u - u^2 \Rightarrow \frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{u^2} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{du}{u^2} = -\int\frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{u} = -ln|\,x\,| + c = -ln|x\cdot c_1|,\ c = -ln\,c_1$$

$$\frac{x}{y} = ln|x \cdot c_1|,\ y = \frac{x}{ln|x\cdot c_1|}.$$

2. Pokazati da se diferencijalna jednačina $2x^4yy' + y^4 = 4x^6$ smenom $y = z^m$, gde je z funkcija od x, svodi na homogenu diferencijalnu jednačinu i naći njeno opšte rešenje.

$$y = z^m,\ y' = mz^{m-1}\cdot z'$$

$$2x^4z^m \cdot mz^{m-1}\cdot z' + z^{4m} = 4x^6 \Rightarrow 2x^4z^{2m-1}\cdot mz' = 4x^6 - z^{4m}$$

$$z' = \frac{2}{m}\cdot\frac{x^2}{z^{2m-1}} - \frac{z^{2m+1}}{2mx^4}$$

$$\left.\begin{matrix} 2m-1=2 \\ 2m+1=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

$$z' = \frac{4}{3}\frac{x^2}{z^2} - \frac{z^4}{3x^4} = \frac{4}{3}(\frac{x}{z})^2 - \frac{1}{3}(\frac{z}{x})^4 \quad \text{(homogena diferencijalna jednačina)}$$

$$\frac{z}{x} = t \Rightarrow z = xt,\ z' = t + xt'$$

$$t + xt' = \frac{4}{3t^2} - \frac{1}{3}t^4 \Rightarrow xt' = \frac{4}{3t^2} - \frac{t^4}{3} - t \Rightarrow x\frac{dt}{dx} = \frac{4 - t^6 - 3t^3}{3t^2}$$

$$-\frac{dx}{x} = \frac{3t^2}{t^6 + 3t^3 - 4}dt \Rightarrow -\int\frac{dx}{x} = \int\frac{3t^2}{t^6+3t^3-4}dt$$

$$-ln|\,x\,| + ln\,c = \int\frac{3t^2}{t^6+3t^3-4}dt = \begin{pmatrix} t^3 = r \\ 3t^2dt = dr \end{pmatrix} = \int\frac{dr}{r^2+3r-4} = \frac{1}{5}\int\frac{dr}{r-1} - \frac{1}{5}\int\frac{dr}{r+4} =$$

$$= \frac{1}{5}(ln|\,r-1\,| - ln|\,r+4\,|) = \frac{1}{5}ln\left|\frac{r-1}{r+4}\right|$$

$$\frac{1}{5}ln\left|\frac{r-1}{r+4}\right| + ln|\,x\,| = ln\,c \Rightarrow ln\sqrt[5]{\frac{r-1}{r+4}} + ln\,x = ln\,c \Rightarrow ln\,x\sqrt[5]{\frac{r-1}{r+4}} = ln\,c$$

$$x\cdot\sqrt[5]{\frac{r-1}{r+4}}=c\Rightarrow x\cdot\sqrt[5]{\frac{t^3-1}{t^3+4}}=c\Rightarrow x\cdot\sqrt[5]{\frac{\frac{z^3}{x^3}-1}{\frac{z^3}{x^3}+4}}=c\Rightarrow x\cdot\sqrt[5]{\frac{z^3-x^3}{z^3+4x^3}}=c$$

$$z^3=y^2\Rightarrow x\cdot\sqrt[5]{\frac{y^2-x^3}{y^2+4x^3}}=c\,.$$

3. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$.

$$y'=\frac{2\frac{y}{x}}{1-(\frac{y}{x})^2}$$ (homogena diferencijalna jednačina)

Uvodimo smenu $\frac{y}{x}=u$, $y=x\cdot u$, $y'=u+x\cdot u'$.

$$u+x\cdot u'=\frac{2u}{1-u^2}\Rightarrow x\cdot u'=\frac{2u}{1-u^2}-u=\frac{u+u^3}{1-u^2}$$

$$\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du=\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}=\frac{A}{u}+\frac{Bu+C}{1+u^2}=\frac{A(1+u^2)+Bu^2+Cu}{u(1+u^2)}$$

$$1-u^2=(A+B)\cdot u^2+Cu+A$$

$$A+B=-1,\quad C=0,\quad A=1\Rightarrow B=-2$$

$$\int(\frac{1}{u}-\frac{2u}{1+u^2})du=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow ln|u|-ln|1+u^2|=ln|x|+c\Rightarrow\frac{u}{1+u^2}=x\cdot c_1,\ c=ln\,c_1$$

$$\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=x\cdot c_1\Rightarrow\frac{\frac{y}{x}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=x\cdot c_1\Rightarrow\frac{xy}{x^2+y^2}=x\cdot c_1\Rightarrow\frac{y}{x^2+y^2}=c_1.$$

4. Naći familiju krivih kod kojih je rastojanje između tački dodira tangente i preseka tangente sa y-osom jednako dužini odsečka koje na y-osi određuje tangenata.

Neka je nepoznata funkcija $y=f(x)$. Jednačina tangente u nekoj tački $T(x,y)$ je $y-y_0=y'(x-x_0)$. Odsečak na $y-$osi je $(x_0=0)$ $y_0=y-xy'$. Rastojanje između tačke dodira tangente $T(x,y)$ i preseka tangente sa $y-$osom (tačka $(0,y_0)$) je $\sqrt{(x-0)^2+(y-y+xy')^2}=\sqrt{x^2+(xy')^2}$.

$$\sqrt{x^2+(xy')^2}=|y-xy'|\ \Big/^2\Rightarrow x^2+(xy')^2=y^2-2xyy'+(xy')^2$$

$$2xyy' = y^2 - x^2 \Rightarrow y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{(\frac{y}{x})^2 - 1}{2 \cdot \frac{y}{x}} \text{ (homogena diferencijalna jednačina)}$$

$$\frac{y}{x} = u \,, \; y = xu \,, \; y' = u + xu'$$

$$u + xu' = \frac{u^2 - 1}{2u} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 1}{2u} - u = \frac{u^2 - 1 - 2u^2}{2u} = -\frac{u^2 + 1}{2u}$$

$$\frac{2u}{u^2 + 1}du = -\frac{dx}{x} \Rightarrow ln\left|u^2 + 1\right| = -ln\left|x\right| + c = ln\left|\frac{1}{x} \cdot c_1\right| , \; c = ln\left|c_1\right|$$

$$u^2 + 1 = \frac{c_1}{x} \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{c_1}{x} \Rightarrow x^2 + y^2 = c_1 \cdot x \,.$$

Jednačine koje se svode na homogenu

Diferencijalna jednačina oblika $y' = f(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2})$ gde su a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 i c_1 realni brojevi, a f neprekidna funkcija, može se svesti na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive ili na homogenu.

a) $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$. U tom slučaju smenom $a_1x + b_1y + c_1 = t$ ili $a_2x + b_2y + c_2 = t$ data diferencijalna jednačina se svodi na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive.

b) $D \neq 0$. Uvodimo smenu $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$, gde se α i β određuju iz sistema $a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$, $a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0$ (α, β su jednoznačno određeni). Tada je $Y' = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right) = g\left(\frac{Y}{X}\right)$, $X \neq 0$, a to je homogena diferencijalna jednačina.

1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \frac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$.

Kako je $D = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0$ uvodimo smenu $1 + x + y = t$

$$1 + y' = t' \Leftrightarrow y' = t' - 1$$

$$1 - 3x - 3y = 1 - 3(x + y) = 1 - 3(t - 1) = 1 - 3t + 3 = 4 - 3t$$

$$t' - 1 = \frac{4 - 3t}{t} \Rightarrow t' = \frac{4 - 3t}{t} + 1 = \frac{4 - 2t}{t} \Rightarrow \frac{t}{4 - 2t}dt = dx$$

$$\int \frac{t}{4 - 2t}dt = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{4 - 2t - 4}{4 - 2t}dt = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{2}\int (1 - \frac{4}{4 - 2t})dt = \int dx$$

$$-\frac{1}{2}t+\int\frac{2dt}{4-2t}=x+c \Rightarrow -\frac{1}{2}t-ln|4-2t|=x+c$$

$$-\frac{1}{2}(1+x+y)-ln|4-2-2x-2y|=x+c \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y-ln|-2(x+y-1)|=c+\frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y-ln|(x+y-1)|=c+\frac{1}{2}+ln\,2=c_1.$$

2. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $(2x-y+4)dy+(x-2y+5)dx=0$.

$$(2x-y+4)dy=-(x-2y+5)dx$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x-2y+5}{2x-y+4} \Rightarrow y'=\frac{-x+2y-5}{2x-y+4}$$

Kako je $D=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1-4=-3\neq 0$, uvodimo smenu $x=X+\alpha$, $y=Y+\beta$ i $y'=Y'$.

$$Y'=\frac{-X-\alpha+2Y+2\beta-5}{2X+2\alpha-Y-\beta+4}$$

$$-\alpha+2\beta-5=0, \qquad 2\alpha-\beta+4=0$$

Rešavanjem sistema dobija se $\alpha=-1$ i $\beta=2$.

$$Y'=\frac{-X+2Y}{2X-Y}=\frac{-1+2\frac{Y}{X}}{2-\frac{Y}{X}} \text{ (homogena diferencijalna jednačina)}$$

$$\frac{Y}{X}=t \Rightarrow Y=Xt \Rightarrow Y'=t+Xt'$$

$$t+Xt'=\frac{-1+2t}{2-t} \Rightarrow Xt'=\frac{-1+2t}{2-t}-t=\frac{-1+2t-2t+t^2}{2-t}=\frac{t^2-1}{2-t}$$

$$\frac{2-t}{t^2-1}dt=\frac{dX}{X} \Rightarrow 2\int\frac{dt}{t^2-1}-\frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2-1}dt=\int\frac{dX}{X}$$

$$2\cdot\frac{1}{2}ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{2}ln\left|t^2-1\right|=ln\,X+c \Rightarrow ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-ln(t^2-1)^{\frac{1}{2}}=ln\,X\cdot c_1,\quad c=ln\,c_1$$

$$ln\left|\frac{t-1}{(t+1)\sqrt{t^2-1}}\right|=ln\,X\cdot c_1 \Rightarrow \frac{\frac{Y}{X}-1}{(\frac{Y}{X}+1)\sqrt{(\frac{Y}{X})^2-1}}=c_1\cdot X \;/^2$$

$$\frac{(\frac{Y}{X}-1)^2}{(\frac{Y}{X}+1)^2\left[(\frac{Y}{X})^2+1\right]}=\frac{\frac{Y}{X}-1}{(\frac{Y}{X}-1)^3}=\frac{(Y-X)X^2}{(Y+X)^3}=c_2X^2 \Rightarrow \frac{Y-X}{(Y+X)^3}=c_2$$

$$Y=y-2,\quad X=x+1$$

$$\frac{y-2-x-1}{(y-2+x+1)^3}=c_2 \Rightarrow \frac{y-x-3}{(y+x-1)^3}=c_2.$$

3. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'=(\frac{x-y-1}{2x-2y+1})^2$.

Kako je $D=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-2+2=0$, uvodimo smenu $2x-2y+1=t$.

$$2(x-y)=t-1 \Rightarrow x-y=\frac{t-1}{2},\quad x-y-1=\frac{t-1}{2}-1=\frac{t-1-2}{2}=\frac{t-3}{2}$$

$$y'=\left(\frac{\frac{t-3}{2}}{t}\right)^2=\left(\frac{t-3}{2t}\right)^2,\quad 2-2y'=t' \Rightarrow y'=\frac{2-t'}{2}$$

$$\frac{2-t'}{2}=\frac{(t-3)^2}{4t^2} \Rightarrow 2-t'=\frac{(t-3)^2}{2t^2} \Rightarrow t'=2-\frac{(t-3)^2}{2t^2}=\frac{4t^2-(t^2-6t+9)}{2t^2}$$

$$\frac{2t^2}{3t^2+6t-9}dt=dx \Rightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{3t^2+6t-9-6t+9}{3t^2+6t-9}dt=dx$$

$$\frac{2}{3}\int dt-2\int\frac{2t-3}{3t^2+6t-9}dt=\int dx \Rightarrow \frac{2}{3}t-\frac{2}{3}\int\frac{6t+6-15}{3t^2+6t-9}dt=x+c$$

$$\frac{2}{3}t-\frac{2}{3}ln\left|3t^2+6t+9\right|+\frac{10}{3}\int\frac{dt}{(t+1)^2-(2)^2}=x+c$$

$$\frac{2}{3}t-\frac{2}{3}ln\left|3t^2+6t+9\right|+\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot 2}ln\left|\frac{t+1-2}{t+1+2}\right|=x+c$$

$$\frac{2}{3}(2x-2y+1)-\frac{2}{3}ln\left|3(2x-2y+1)^2+6(2x-2y+1)+9\right|++\frac{5}{6}ln\left|\frac{2x-2y}{2x-2y+4}\right|=x+c$$

4. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'=\frac{4x-y+7}{2x+y-1}$.

Kako je $D=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=4+2=6\neq 0$, uvodimo smenu $x=X+\alpha$, $y=Y+\beta$, $y'=Y'$.

$4\alpha-\beta+7=0$, $\qquad 2\alpha+\beta-1=0$

Rešavanjem sistema dobija se $\alpha=-1$ i $\beta=3$.

$x=X-1\Rightarrow X=x+1$, $y=Y+3\Rightarrow Y=y-3$, $y'=Y'$

$$Y'=\frac{4X-Y}{2X+Y}=\frac{4-\frac{Y}{X}}{2+\frac{Y}{X}}$$ (homogena diferencijalna jednačina).

Uvodimo smenu $\frac{Y}{X}=u$, $Y=X\cdot u$, $Y'=u+X\cdot u'$.

$$u+X\cdot u'=\frac{4-u}{2+u} \Rightarrow X\frac{du}{dX}=\frac{4-u}{2+u}-u=\frac{4-u-2u-u^2}{2+u}=\frac{4-3u-u^2}{2+u}=-\frac{u^2+3u-4}{2+u}$$

$$\frac{2+u}{u^2+3u-4}du=-\frac{dX}{X}$$

$$\frac{2+u}{u^2+3u-4}=\frac{2+u}{(u-1)(u+4)}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+4}=\frac{Au+4A+Bu-B}{(u+4)(u-1)}$$

$A+B=1$, $\quad 4A-B=2$

Rešavanjem sistema dobija se $A=\frac{3}{5}$ i $B=\frac{2}{5}$.

$$\frac{3}{5}\int\frac{du}{u-1}+\frac{2}{5}\int\frac{du}{u+4}=-\int\frac{dX}{X}$$

$$\frac{3}{5}ln|u-1|+\frac{2}{5}ln|u+4|=-ln|X|+c=-ln|X|+ln c_1=ln\frac{c_1}{X},\ c=ln c_1$$

$$ln\sqrt[5]{(u-1)^3}+ln\sqrt[5]{(u+4)^2}=ln\sqrt[5]{(u-1)^3(u+4)^2}=ln\frac{c_1}{X}$$

$$\sqrt[5]{(u-1)^3(u+4)^2}=\frac{c_1}{X}\Rightarrow(\frac{Y}{X}-1)^3\cdot(\frac{Y}{X}+4)^2=\frac{c_2}{X^5},\ c_2=c_1^5$$

$$\frac{(Y-X)^3\cdot(Y+4X)^2}{X^5}=\frac{c_2}{X^5}\Rightarrow(Y-X)^3(Y+4X)^2=c_2$$

$$Y-X=y-3-x-1=y-x-4,\ Y+4X=y-3+4x+4=y+4x+1$$

$$(y-x-4)^3\cdot(4x+y+1)^2=c_2.$$

Linearna jednačina

To je jednačina koja se može svesti na oblik $y'+f(x)y=g(x)$, gde su f i g neprekidne funkcije.

a) Rešenje jednačine dato je obrascem $y=e^{-\int f(x)dx}\left[c-\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx\right]$.

b) Rešenje je oblika $y=uv$, gde su u i v funkcije od x. Iz $y'=u'v+uv'$ sledi da je $u'v+uv'+f(x)uv=g(x)$, odnosno da je $vu'+(v'+f(x)v)u=g(x)$. Nepoznatu funkciju v tražimo iz uslova $v'+f(x)v=0$. $\frac{dv}{v}=-f(x)dx\Rightarrow\int\frac{dv}{v}=-\int f(x)dx$. Pri traženju neodređenog integrala ovde se ne uzima u obzir konstanta, jer se ona u daljem traženju rešenja skrati. $v\frac{du}{dx}=g(x)\Rightarrow du=\frac{g(x)}{v}dx\Rightarrow\int du=\int\frac{g(x)}{v}dx$.

1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3$, $x\neq-1$.

Uvodimo smenu $y=u\cdot v$, $y'=u'v+uv'$.

$$u'v+uv'-\frac{2}{x+1}uv=(x+1)^3\Rightarrow vu'+(v'-\frac{2}{x+1}v)u=(x+1)^3$$

$$v'-\frac{2}{x+1}v=0\Rightarrow\frac{dv}{v}=\frac{2}{x+1}dx\Rightarrow ln|v|=2ln|x+1|\Rightarrow v=(x+1)^2$$

$$(x+1)^2\cdot u'=(x+1)^3\Rightarrow du=(x+1)dx\Rightarrow u=\frac{1}{2}x^2+x+c$$

$$y=u\cdot v=\frac{1}{2}x^2(x+1)^2+x(x+1)^2+c(x+1)^2.$$

2. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $dy = \dfrac{x^3 + y}{x} dx$.

$y' = \dfrac{dy}{dx} = x^2 + \dfrac{1}{x} y \Rightarrow y' - \dfrac{1}{x} y = x^2$ (linearna diferencijalna jednačina)

Uvodimo smenu $y = u \cdot v$, $y' = u' \cdot v + v' \cdot u$.

$v \cdot u' + u \cdot v' - \dfrac{1}{x} u \cdot v = x^2 \Rightarrow v \cdot u' + (v' - \dfrac{1}{x} v)u = x^2$

$v' - \dfrac{1}{x} v = 0 \Rightarrow \dfrac{dv}{v} = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow ln|v| = ln|x| \Rightarrow v = x$

$xu' = x^2 \Rightarrow u' = x \Rightarrow du = xdx \Rightarrow u = \dfrac{x^2}{2} + c$

$y = \dfrac{x^3}{2} + cx$.

Bernulijeva jednačina

To je jednačina oblika $y' + f(x)y = g(x) \cdot y^{\alpha}$, gde je $\alpha \in R$, a f i g su neprekidne funkcije. Za $\alpha = 0$ ili $\alpha = 1$ ona je linearna (za $\alpha = 1$ ona je i jednačina koja razdvaja promenljive jer je u tom slučaju $y' = y(g(x) - f(x))$). Da bi je sveli na linearnu i za proizvoljno α, uvodimo smenu $z(x) = y^{1-\alpha}$, $z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha} \cdot y'$, pa jednačina postaje

$$\frac{z'(x)}{(1-\alpha) \cdot y^{-\alpha}} + f(x) \cdot y - g(x) \cdot y^{\alpha} = 0 \Big/ \cdot (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha}$$

$$z'(x) + f(x)(1-\alpha) \cdot y \cdot y^{-\alpha} - (1-\alpha)g(x) \cdot y^{\alpha} \cdot y^{-\alpha} = 0$$

$$z'(x) + (1-\alpha) \cdot f(x) \cdot z(x) - (1-\alpha) \cdot g(x) = 0.$$

1. Naći funkciju koja prolazi kroz tačku $(-1,-1)$ sa osobinom da je odsečak tangente na $x-$osi u svakoj tački jednak količniku kvadrata apscise i kvadrata ordinate tačke dodira.

Neka je nepoznata funkcija $y = f(x)$. Jednačina tangente u nekoj tački $T(x,y)$ je $y - y_0 = y'(x - x_0)$. Odsečak na $x-$osi je $(y_0 = 0)$ $x_0 = x - \dfrac{y}{y'}$. Po uslovu zadatka je

$x - \dfrac{y}{y'} = \dfrac{x^2}{y^2}$.

$x - \dfrac{y}{y'} = \dfrac{x^2}{y^2} \Rightarrow \dfrac{xy^2 - x^2}{y^2} = \dfrac{y}{y'} \Rightarrow \dfrac{1}{y'} = \dfrac{xy^2 - x^2}{y^3}$

$x' = \dfrac{1}{y'}$, $x' = \dfrac{x}{y} - \dfrac{x^2}{y^3} \Leftrightarrow x' - \dfrac{1}{y} x + \dfrac{1}{y^3} x^2 = 0$ (Bernulijeva diferencijalna jednačina $\alpha = 2$)

Uvodimo smenu $z = x^{-1}$, $z' = -\frac{1}{x^2}x'$.

$$x' - \frac{1}{y}x + \frac{1}{y^3}x^2 = 0 \Rightarrow \frac{x'}{x^2} - \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{y^3} = 0 \Rightarrow -z' - \frac{1}{y}z + \frac{1}{y^3} = 0$$

$z' + \frac{1}{y}z - \frac{1}{y^3} = 0$ (linearna diferencijalna jednačina),

$z = u\cdot v$, $z' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' + \frac{1}{y}uv = \frac{1}{y^3} \Rightarrow u'v + (v' + \frac{1}{y}v)u = \frac{1}{y^3}$$

$$v' + \frac{1}{y}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dy} = -\frac{1}{y}v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln v = -\ln y \Rightarrow v = \frac{1}{y}$$

$$\frac{du}{dy}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{y^3} \Rightarrow du = \frac{1}{y^2}dy,\ u = -\frac{1}{y} + c$$

$$z = \frac{1}{y}(-\frac{1}{y} + c) \Rightarrow z = \frac{cy-1}{y^2},\ x(y) = \frac{1}{z(y)} = \frac{y^2}{cy-1}.$$

Uslov da kriva prolazi kroz tačku $(-1,-1)$ daje $-1 = \frac{1}{-c-1} \Rightarrow c = 0$.

Tako da je tražena funkcija $x = -y^2$, tj. $y = -\sqrt{-x}$.

2. **Naći krive kod kojih je u svakoj tački odsečak tangente na $y-$osi proporcionalan kvadratu ordinate tačke dodira.**

Odsečak tangente $y - y_0 = y'(x - x_0)$ na $y-$osi je $y_0 = y - xy'$. Prema uslovu zadatka je $y - xy' = ky^2$. Ovo je Bernulijeva diferencijalna jednačina sa $\alpha = 2$. Uvodimo smenu $t = \frac{1}{y}$, $t' = -\frac{y'}{y^2}$.

$-\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y} = \frac{k}{x} \Rightarrow t' + \frac{1}{x}t = \frac{k}{x}$ (linearna diferencijalna jednačina).

Uvodimo smenu $t = uv$, $t' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{k}{x} \Rightarrow u'v + u(v' + \frac{1}{x}v) = \frac{k}{x}$$

$$v' + \frac{1}{x}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = -\ln|x| \Rightarrow v = \frac{1}{x}$$

$$u'\cdot\frac{1}{x} = \frac{k}{x} \Rightarrow u' = k \Rightarrow u = kx + c$$

$$t = k + \frac{c}{x} \Rightarrow \frac{1}{y} = k + \frac{c}{x} \Rightarrow \frac{1}{y} - \frac{c}{x} = k \Rightarrow \frac{\frac{1}{k}}{y} - \frac{\frac{c}{k}}{x} = 1$$

$$\frac{1}{k} = A,\ -\frac{c}{k} = B \Rightarrow \frac{A}{y} + \frac{B}{x} = 1.$$

3. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $(2x^2 y\ln y - x)y' = y$.

$$y' = \frac{y}{2x^2 y\ln y - x} \Rightarrow x' = \frac{1}{y'} = \frac{2x^2 y\ln y - x}{y}$$

$x' + \frac{1}{y}x - 2\ln y x^2 = 0$ (Bernulijeva diferencijalna jednačina sa $\alpha = 2$).

Uvodimo smenu $z = x^{1-\alpha} = \frac{1}{x}$, $z' = -\frac{x'}{x^2}$

$-\frac{x'}{x^2} - \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x} + 2\ln y = 0 \Rightarrow z' - \frac{1}{y}z + 2\ln y = 0$ (linearna diferencijalna jednačina)

Uvodimo smenu $z = u\cdot v$, $z' = u'\cdot v + u\cdot v'$.

$$v\cdot u' + u\cdot v' - \frac{1}{y}u\cdot v = -2\ln y \Rightarrow v\cdot u' + (v' - \frac{1}{y}v)\cdot u = -2\ln y$$

$$v' - \frac{1}{y}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|v| = \ln|y| \Rightarrow v = y$$

$$yu' = -2\ln y \Rightarrow du = -2\frac{\ln y}{y}dy \Rightarrow u = -\ln^2 y + c$$

$$z = u\cdot v = c\cdot y - y\ln^2 y \Rightarrow x = \frac{1}{z} = \frac{1}{y(c - \ln^2 y)}.$$

Jednačina totalnog diferencijala

Jednačina $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ je jednačina totalnog diferencijala ako postoji funkcija $F(x,y)$ takva da je leva strana jednačine totalni diferencijal funkcije $F(x,y)$, tj. da je

1) $dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

2) $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$.

Ako takva funkcija $F(x,y)$ postoji, tada iz $dF(x,y) = 0$, sledi da je $F(x,y) = c$. Da bi $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ bila jednačina totalnog diferencijala u otvorenoj jednostruko povezanoj oblasti G potrebno je i dovoljno da bude $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$, $Q(x_0,y_0) \neq 0$, $(x,y) \in G$, $(x_0,y_0) \in G$.

1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $(\frac{y}{x+y})^2 dx + (\frac{x}{x+y})^2 dy = 0$.

$$P(x,y) = (\frac{y}{x+y})^2,\ Q(x,y) = (\frac{x}{x+y})^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial P}{\partial y}=2\cdot\dfrac{y}{x+y}\cdot\dfrac{x+y-y}{(x+y)^2}=\dfrac{2xy}{(x+y)^3}\\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2\cdot\dfrac{x}{x+y}\cdot\dfrac{x+y-x}{(x+y)^2}=\dfrac{2xy}{(x+y)^3}\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}.$$

Kako je ovo jednačina totalnog diferencijala postoji funkcija $F(x,y)$ takva da je

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy=0.$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\left(\frac{y}{x+y}\right)^2,\quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\left(\frac{x}{x+y}\right)^2$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\left(\frac{y}{x+y}\right)^2\Rightarrow F(x,y)=\int\left(\frac{y}{x+y}\right)^2dx=-\frac{y^2}{x+y}+S(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=-\frac{2y(x+y)-y^2}{(x+y)^2}+S'(y)=\frac{-2xy-y^2}{(x+y)^2}+S'(y)$$

$$\frac{x^2}{(x+y)^2}=\frac{-2xy-y^2}{(x+y)^2}+S'(y),\quad S'(y)=\frac{x^2+y^2+2xy}{(x+y)^2}=\frac{(x+y)^2}{(x+y)^2}=1$$

$$\frac{dS(y)}{dy}=1\Rightarrow\int dS(y)=\int dy,\qquad S(y)=y+c_1$$

$$F(x,y)=-\frac{y^2}{x+y}+y+c_1=\frac{xy+y^2-y^2}{x+y}+c_1=\frac{xy}{x+y}+c_1,\qquad \frac{xy}{x+y}=C.$$

Integracioni množitelj

Ako nije ispunjen uslov $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, pa diferencijalna jednačina $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ nije jednačina totalnog diferencijala, postavlja se pitanje može li se ona učiniti takvom, odnosno, da li postoji funkcija $h(x,y)$, različita od nule takva da jednačina $h(x,y)\cdot P(x,y)dx+h(x,y)\cdot Q(x,y)dy=0$ bude jednačina totalnog diferencijala. Funkcija $h(x,y)$ (ukoliko postoji) naziva se integracioni množitelj. Potreban i dovoljan uslov za njenu egzistenciju dat je sa $\dfrac{\partial[\,h(x,y)\cdot P(x,y)\,]}{\partial y}=\dfrac{\partial[\,h(x,y)\cdot Q(x,y)\,]}{\partial x}$.

$$P(x,y)\cdot\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}+h(x,y)\cdot\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)\cdot\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}+h(x,y)\cdot\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

$$\frac{1}{h(x,y)}\left[P(x,y)\cdot\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}-Q(x,y)\cdot\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\right]=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$$

Iz poslednjeg izraza se određuje nepoznata funkcija $h(x,y)$.

1. Pokazati da diferencijalna jednačina $(\frac{x^5}{y^3}+\frac{3x^3}{y})dx+(x^2+\frac{3x^4}{y^2})dy=0$ **ima integracioni množitelj oblika** $y\cdot h(\frac{y}{x})$ **i naći ono rešenje koje seče** x**-osu u tački** $x=1$**.**

Ako pomnožimo datu diferencijalnu jednačinu sa integracionim množiteljem $y\cdot h(\frac{y}{x})$ dobićemo $y\cdot h(\frac{y}{x})(\frac{x^5}{y^3}+\frac{3x^3}{y})dx+y\cdot h(\frac{y}{x})(x^2+\frac{3x^4}{y^2})dy=0$. Da bi ovo bila jednačina totalnog diferencijala mora važiti $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, gde je $P=h(\frac{y}{x})(\frac{x^5}{y^2}+3x^3)$, a $Q=h(\frac{y}{x})(x^2y+\frac{3x^4}{y})$

$$\frac{y}{x}=t,\ h=h(t)\quad \frac{\partial h(t)}{\partial x}=\frac{dh}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=h'\cdot(-\frac{y}{x^2}),\ \frac{\partial h(t)}{\partial y}=\frac{dh}{dt}\cdot\frac{dt}{dy}=h'\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial y}(\frac{x^5}{y^2}+3x^3)+h\cdot(\frac{-2x^5}{y^3}),\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial x}(x^2y+\frac{3x^4}{y})+h\cdot(2xy+\frac{12x^3}{y})$$

$$h'\cdot\frac{1}{x}(\frac{x^5}{y^2}+3x^3)+h\cdot(\frac{-2x^5}{y^3})=h'\cdot(-\frac{y}{x^2})(x^2y+\frac{3x^4}{y})+h\cdot(2xy+\frac{12x^3}{y})$$

$$h'(\frac{x^4}{y^2}+3x^2+y^2+3x^2)=h(2xy+\frac{12x^3}{y}+\frac{2x^5}{y^3})$$

$$\frac{h'}{h}=\frac{\frac{2xy^4+12x^3y^2+2x^5}{y^3}}{\frac{x^4+6x^2y^2+y^4}{y^2}}=\frac{2x(x^4+6x^2y^2+y^4)}{y(x^4+6x^2y^2+y^4)}=2\cdot\frac{x}{y}=\frac{2}{t}$$

$$\frac{dh}{h}=\frac{2}{t}dt\quad \int\frac{dh}{h}=2\cdot\int\frac{dt}{t}\Rightarrow ln|h|=ln|t^2|\Rightarrow h=t^2\Rightarrow h=\frac{y^2}{x^2}.$$

Na ovaj način dobili smo jednačinu totalnog diferencijala

$(x^3+3xy^2)dx+(y^3+3x^2y)dy=0$.

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=x^3+3xy^2,\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=y^3+3x^2y$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=x^3+3xy^2\Rightarrow F(x,y)=\int(x^3+3xy^2)dx=\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2y^2+S(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=3x^2y+S'(y)=y^3+3x^2y\Rightarrow S(y)=\frac{y^4}{4}+c_1$$

$$F(x,y)=\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4}+c_1\Rightarrow \frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4}=C$$

U tački $(1,0)$ je $C=\frac{1}{4}$. Rešenje koje seče $x-$osu u tački $x=1$, dato u implicitnom obliku, je $x^4+6x^2y^2+y^4=1$.

2. Pokazati da diferencijalna jednačina $xdx+ydy+xdy-ydx=0$ ima integracioni množitelj oblika $h=h(x^2+y^2)$ i naći njeno opšte rešenje.

Ako pomnožimo datu diferencijalnu jednačinu sa $h(x^2+y^2)$ dobićemo

$h(x-y)dx+h(x+y)dy=0,\quad h=h(x^2+y^2)$.

Da bi ovo bila jednačina totalnog diferencijala mora važiti $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, gde je $P=h(x-y)$, a $Q=h(x+y)$.

$$x^2+y^2=t,\quad h=h(t),\quad \frac{\partial h}{\partial x}=\frac{dh}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=h'\cdot 2x,\quad \frac{\partial h}{\partial y}=\frac{dh}{dt}\cdot\frac{dt}{dy}=h'\cdot 2y.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial y}(x-y)-h=2y(x-y)h'-h,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial x}(x+y)+h=2x(x+y)h'+h$$

$$2y(x-y)\cdot h'-h=2x(x+y)\cdot h'+h$$

$$2h'(xy-y^2-x^2-xy)=2h\Rightarrow -h'(x^2+y^2)=h\Rightarrow h'(x^2+y^2)=-h\Rightarrow$$

$$\frac{h'}{h}=-\frac{1}{x^2+y^2}=-\frac{1}{t}$$

$$\int\frac{h'(t)}{h}dt=-\int\frac{dt}{t}\Rightarrow ln|h|=-ln|t|\Rightarrow h=\frac{1}{t}\Rightarrow h=\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x-y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x-y}{x^2+y^2}\Rightarrow F=\int\frac{x}{x^2+y^2}dx-y\int\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}ln(x^2+y^2)-y\cdot\frac{1}{y}arctg\frac{x}{y}+S(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y-\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot x(-\frac{1}{y^2})+S'(y)=\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}+S'(y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}+S'(y)$$

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}+S'(y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}\Rightarrow S'(y)=0\Rightarrow S(y)=c$$

$$ln\sqrt{x^2+y^2}-arctg\frac{x}{y}=C.$$

3. **Pokazati da diferencijalna jednačina** $(5x^2+2xy+3y^3)dx+3(x^2+xy^2+2y^3)dy=0$ **ima integracioni množitelj oblika** $h=h(x+y)$ **i naći njeno opšte rešenje.**

$$h(x+y)\cdot(5x^2+2xy+3y^3)dx+3h(x+y)\cdot(x^2+xy^2+2y^3)dy=0$$

$$\frac{\partial h(x+y)}{\partial y}(5x^2+2xy+3y^3)+h(x+y)(2x+9y^2)=$$

$$=3\frac{\partial h(x+y)}{\partial x}(x^2+xy^2+2y^3)+3h(x+y)(2x+y^2)$$

$$x+y=t\,,\ h=h(t)\,,\ \frac{\partial h(t)}{\partial y}=h'_t\cdot t'_t=h'_t\,,\ \frac{\partial h(t)}{\partial x}=h'_t\cdot t'_x=h'_t$$

$$h'_t(5x^2+2xy+3y^2-3x^2-3xy^2-6y^3)=h(t)(6x+3y^2-2x-9y^2)$$

$$h'_t(2x^2+2xy+3xy^2-3y^3)=h(t)(4x-6y^2)=2h(t)(2x-3y^2)$$

$$h'_t\left[2x(x+y)-3y^2(x+y)\right]=2h(t)(2x-3y^2)$$

$$h'_t(2x-3y^2)(x+y)=2h(t)(2x-3y^2)\Rightarrow\frac{h'_t}{h(t)}=\frac{2}{x+y}=\frac{2}{t}$$

$$\frac{dh(t)}{h(t)}=2\cdot\frac{dt}{t}\Rightarrow\int\frac{dh(t)}{h(t)}=2\int\frac{dt}{t}\Rightarrow ln|h(t)|=2\,ln|\,t\,|\Rightarrow h(t)=t^2\Rightarrow h(x+y)=(x+y)^2$$

$$(x+y)^2(5x^2+2xy+3y^3)dx+3(x+y)^2(x^2+xy^2+2y^3)dy=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=(x^2+2xy+y^2)(5x^2+2xy+3y^3)=$$

$$=5x^2+2x^3y+3x^2y^3+10x^3y+4x^2y^2+6xy^2+5x^2y^2+2xy^3+3y^5$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=3(x+y)^2(x^2+xy^2+2y^3)=(3x^2+6xy+3y^2)(x^2+xy^2+2y^3)=$$

$$=3x^4+3x^3y^2+6x^2y^3+6x^3y+6x^2y^3+12xy^4+3x^2y^2+3xy^4+6y^5$$

$$F(x,y)=\int(5x^4+2x^3y+3x^2y^3+10x^3y+4x^2y^2+6xy^4+5x^2y^2+2xy^3+3y^5)dx=$$

$$=x^5+\frac{1}{2}x^4y+x^3y^3+\frac{5}{2}x^4y+\frac{4}{3}x^3y^2+3x^2y^4+\frac{5}{3}x^3y^2+x^2y^3+3xy^5+S(y)=$$

$$=x^5+3x^4y+x^3y^3+3x^3y^2+3x^2y^4+x^2y^3+3xy^5+S(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=3x^4+3x^3y^2+6x^3y+12x^2y^3+3x^2y^2+15xy^4+S'(y)=$$

$$=3x^4+3x^3y^2+6x^2y^3+6x^3y+6x^2y^3+12xy^4+3x^2y^2+3xy^4+6y^5\Rightarrow S'(y)=6y^5$$

$$S(y)=y^6+c_1$$

$$x^5+3x^4y+x^3y^3+3x^3y^2+3x^2y^4+x^2y^3+3xy^5+y^6=C$$

$$x^2(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)+y^3(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)=C$$

$$(x^2+y^3)(x+y)^3=C\,.$$

Klero-ova jednačina

To je jednačina oblika $y = xy' + f(y')$. Neka je $y' = p$, pri čemu je p funkcija od x.
$y = xp + f(p)$, $y' = p + xp' + f'(p) \cdot p'$, $p'(x + f'(p)) = 0$. Odavde sledi da je ili $p' = 0$ ili $x + f'(p) = 0$

- $p' = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow y = cx + f(c)$
- $x + f'(p) = 0 \Rightarrow x = -f'(p) \Rightarrow p = g(x) \Rightarrow y = x \cdot g(x) + f[g(x)]$ (singularno rešenje).

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y = xy' - ln y'$.

$y' = p$, $p = p(x)$

$y = x \cdot p - ln\, p$

$$y' = p + x \cdot p' - \frac{1}{p} \cdot p' \Rightarrow p'(x - \frac{1}{p}) = 0$$

- $p' = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow y = c \cdot x + ln\, c$
- $x - \frac{1}{p} = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{x} \Rightarrow y = 1 - ln\frac{1}{x} = 1 + ln\, x$ (singularno rešenje).

2. Uvodeći smenu $y = \frac{1}{z}$ rešiti jednačinu $(y')^3 - y^4(y + xy') = 0$.

$$y = \frac{1}{z},\ y' = -\frac{1}{z^2}z',\ z \neq 0$$

$$-\frac{(z')^3}{z^6} - \frac{1}{z^4}(\frac{1}{z} - \frac{x}{z^2} \cdot z') = 0, \quad (-z')^3 - z + xz' = 0$$

$z = xz' - (z')^3$ (Kleroova diferencijalna jednačina)

$z' = p$, $z = pdx$

$z = xp - p^3 \Rightarrow z' = p + (x - 3p^2)p' \Rightarrow p = p + (x - 3p^2)p'$

$(x - 3p^2)p' = 0 \Rightarrow p' = 0$ ili $x - 3p^2 = 0$.

- $p' = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow z = xc - c^3 \Rightarrow \frac{1}{y} = xc - c^3 \Rightarrow y = \frac{1}{xc - c^3}$
- $x - 3p^2 = 0 \Rightarrow p = \pm\sqrt{\frac{x}{3}} \Rightarrow z = \pm x \cdot \sqrt{\frac{x}{3}} - (\pm\sqrt{\frac{x}{3}})^3$

$\frac{1}{y} = \pm x\sqrt{\frac{x}{3}} \mp (\sqrt{\frac{x}{3}})^3$ (singularno rešenje).

3. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y = xy' + \frac{a}{y'}$, a=const.

Smenom $y' = p$ jednačina se svodi na $y = xp + \frac{a}{p}$.

$$y' = p + xp' - \frac{a}{p^2}p' \Rightarrow p'(x - \frac{a}{p^2}) = 0 \Rightarrow p' = 0 \text{ ili } x - \frac{a}{p^2} = 0$$

- $p' = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow y = cx + \frac{a}{c}$
- $x - \frac{a}{p^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{p^2} \Rightarrow p^2 = \frac{a}{x} \Rightarrow p = \pm\sqrt{\frac{a}{x}}$

$$y = \pm x\sqrt{\frac{a}{x}} \pm \frac{a}{\sqrt{\frac{a}{x}}} = \pm\sqrt{ax} \pm \sqrt{ax} = \pm 2\sqrt{ax}.$$

Uvođenje parametra

U nekim slučajevima može se odrediti rešenje jednačine $F(x,y,y') = 0$, a da se ne odredi y' kao funkcija od x i y. Postupak se sastoji u uvođenju parametra i posebno je važan za slučajeve jednačina koje se ne mogu rešiti po y'. Dakle, uzmimo da je parametar $p = y'$. Tako dobijamo dve jednačine $F(x,y,p) = 0$ i $dy = pdx$. Ako je F diferencijabilna, imamo $\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial p}dp = 0$.

Ova jednačina može se pisati u jednom od oblika $(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial y})dx + \frac{\partial F}{\partial p}dp = 0$ ili $(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial y})dy + p\frac{\partial F}{\partial p}dp = 0$. Sada, ukoliko je to moguće, iz $F(x,y,p) = 0$ i jedne od poslednje dve jednačine odredi se $x = x(p)$ ili $y = y(p)$. Ako smo odredili $x = x(p)$ tada je $y(p) = \int px'(p)dp + c$. Ako smo odredili $y = y(p)$ tada je $x(p) = \int \frac{y'(p)}{p}dp + c$.

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu $(y')^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$.

$y' = p$, $dy = pdx$

$p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0 \Rightarrow 4ypx = p^3 + 8y^2$

$x = \frac{p^3 + 8y^2}{4yp} = \frac{p^2}{4y} + \frac{2y}{p}$, $p \neq 0$, $y \neq 0$

Posle diferenciranja imamo

$dx = (\frac{p}{2y} - \frac{2y}{p^2})dp + (-\frac{p^2}{4y^2} + \frac{2}{p})dy$, $dx = \frac{1}{p}dy$

$$\frac{1}{p}dy=(\frac{p}{2y}-\frac{2y}{p^2})dp+(\frac{2}{p}-\frac{p^2}{4y^2})dy$$

$$\frac{p^3-4y^2}{2yp^2}dp=(\frac{p^2}{4y^2}-\frac{2}{p}+\frac{1}{p})dy=\frac{p^3-4y^2}{4y^2p}dy$$

$$\frac{p^3-4y^2}{2yp}\frac{dp}{p}=\frac{p^3-4y^2}{2yp}\cdot\frac{dy}{2y}\Rightarrow\frac{dp}{p}=\frac{dy}{2y}\Rightarrow\frac{dy}{y}=2\frac{dp}{p}$$

$$\int\frac{dy}{y}=2\int\frac{dp}{p}\Rightarrow ln|y|=2ln|p|+c=ln|p^2\cdot c_1|,\ c=ln c_1\Rightarrow y=c_1p^2$$

$$x=\frac{p^2}{4c_1p^2}+\frac{2c_1p^2}{p}=\frac{1}{4c_1}+2c_1p=c_2+c_3p\text{, gde je } c_2=\frac{1}{4c_2},\ c_3=2c_2.$$

$$p=\frac{1}{c_3}(x-c_2)\Rightarrow y=\frac{c_1}{c_3^2}(x-c_2)^2=c_4(x-c_2)^2\quad c_4=\frac{c_1}{c_3^2}.$$

Konstante c_2 i c_4 mogu se predstaviti preko konstante c, tako da jednačina u rešenju praktično ima samo jednu konstantu.

Lagranžova jednačina

To je jednačina oblika $y=xf(y')+g(y')$. Neka je $y'=p$ pri čemu je p funkcija od x.

$$y=xf(p)+g(p)\Rightarrow dy=f(p)dx+x\cdot f'(p)dp+g'(p)dp$$

$$pdx-f(p)dx=(x\cdot f'(p)+g'(p))dp\Leftrightarrow(p-f(p))dx=(xf'(p)+g'(p))dp$$

- $p-f(p)\neq 0$

  $\frac{dx}{dp}=\frac{f'(p)}{p-f(p)}x+\frac{g'(p)}{p-f(p)}$ (linearna diferencijalna jednačina)
- $p-f(p)=0\Rightarrow p=p_1$, tada je

  $y=xf(p_1)+g(p_1)$ singularno rešenje date diferencijalne jednačine.

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y=\frac{-y'}{2}(2x+y')$.

$$y=-x\cdot y'-\frac{1}{2}(y')^2$$

Smenom $y'=p$ dobijamo $y=-xp-\frac{1}{2}p^2$.

$$dy=-pdx-xdp-pdp\Rightarrow pdx=-pdx-(x+p)dp\Rightarrow 2pdx=-(x+p)dp$$

$$p\neq 0$$

$\frac{dx}{dp}=-\frac{x}{2p}-\frac{1}{2}\Rightarrow x'+\frac{1}{2p}x=-\frac{1}{2}$ (linearna diferencijalna jednačina).

$$x=u\cdot v,\quad x'=u'v+uv'$$

$$u'v+uv'+\frac{1}{2p}uv=-\frac{1}{2}\Rightarrow vu'+(v'+\frac{v}{2p})u=-\frac{1}{2}$$

$$v'+\frac{v}{2p}=0\Rightarrow\frac{dv}{dp}=-\frac{v}{2p}\Rightarrow\frac{dv}{v}=-\frac{1}{2}\frac{dp}{p}\Rightarrow\int\frac{dv}{v}=-\frac{1}{2}\int\frac{dp}{p}\Rightarrow ln|\,v\,|=-\frac{1}{2}ln|\,p\,|\Rightarrow v=p^{-\frac{1}{2}}$$

$$p^{-\frac{1}{2}}u'=-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{du}{dp}=-\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}\Rightarrow du=-\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}dp\Rightarrow u=-\frac{1}{3}p^{\frac{3}{2}}+c$$

$$x=u\cdot v=p^{-\frac{1}{2}}(-\frac{1}{3}p^{\frac{3}{2}}+c)=-\frac{1}{3}p+cp^{-\frac{1}{2}}$$

$$y=-p(-\frac{1}{3}p+cp^{-\frac{1}{2}})-\frac{1}{2}p^2=-\frac{1}{6}p^2-cp^{\frac{1}{2}}$$

$p=0\Rightarrow y'=0\Rightarrow y=0$ je singularno rešenje.

2. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y=2xy'+(y')^2$.

$y'=p\,,\ dy=pdx$

$y=2xp+p^2$

$$\frac{dy}{dx}=2p+2x\frac{dp}{dx}+2p\frac{dp}{dx}\Rightarrow dy=2pdx+2(x+p)dp$$

$pdx=2pdx+2(x+p)dp\Rightarrow -pdx=2(x+p)dp$

$p\neq 0$

$$\frac{dx}{dp}=-\frac{2(x+p)}{p}=-\frac{2}{p}x-2$$

$x'+\frac{2}{p}x=-2$ (linearna diferencijalna jednačina)

$x=u\cdot v\,,\quad x'=u'\cdot v+u\cdot v'$

$$u'v+uv'+\frac{2}{p}uv=-2\Rightarrow vu'+(v'+\frac{2}{p}v)u=-2$$

$$v'+\frac{2}{p}v=0\Rightarrow\frac{dv}{v}=-2\frac{dp}{p}\Rightarrow\int\frac{dv}{v}=-2\int\frac{dp}{p}\Rightarrow ln|\,v\,|=-2\,ln|\,p\,|\Rightarrow v=p^{-2}.$$

$$p^{-2}u'=-2\Rightarrow\frac{du}{dp}=-2p^2\Rightarrow du=-2p^2dp\Rightarrow\int du=-2\int p^2dp\Rightarrow u=-\frac{2}{3}p^3+c.$$

$$x=uv=(-\frac{2}{3}p^3+c)\cdot\frac{1}{p^2}=-\frac{2}{3}p+\frac{c}{p^2}$$

$$y=(-\frac{2}{3}p+\frac{c}{p^2})\cdot 2p+p^2=-\frac{4p^2}{3}+\frac{2c}{p}+p^2=\frac{2c}{p}-\frac{p^2}{3}$$

$p=0\,,\ y'=0\Rightarrow y=0$ je singularno rešenje.

Diferencijalne jednačine višeg reda

Snižavanje reda diferencijalne jednačine

a) $y^{(n)}(x)=f(x)$ (direktna integracija).

1. Naći rešenje diferencijalne jednačine $y''sin^4x=sin2x$.

$$y''=\frac{sin2x}{sin^4x}=\frac{2sinx\,cosx}{sin^4x}=2\frac{cosx}{sin^3x}\Rightarrow y'=\int y''dx=2\int\frac{cosx}{sin^3x}dx=\left(\begin{array}{c}sinx=t\\cosxdx=dt\end{array}\right)=$$

$$=2\int\frac{dt}{t^3}=2\int t^{-3}dt=-\frac{1}{t^2}+c_1=-\frac{1}{sin^2x}+c_1$$

$$y=\int y'dx=-\int\frac{dx}{sin^2x}+c_1\int dx=ctgx+c_1x+c_2.$$

b) $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},...,y^{(n)})=0$, $1\le k<n$ (diferencijalna jednačina koja ne sadrži y)

smena: $y^{(k)}=z$, $z=z(x)$.

2. Naći rešenje diferencijalne jednačine $xy''=y'ln\frac{y'}{x}$.

$y'=z$, $y''=z'$

$xz'=z\,ln\frac{z}{x}\Rightarrow z'=\frac{z}{x}ln\frac{z}{x}$ (homogena diferencijalna jednačina)

$\frac{z}{x}=u\Rightarrow z=xu$, $z'=u+xu'$

$$u+xu'=u\,lnu\Rightarrow x\frac{du}{dx}=u(lnu-1)\Rightarrow\frac{du}{u(lnu-1)}=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{du}{u(lnu-1)}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow ln|\,lnu-1\,|=ln|\,x\,|+c=ln|xc_1\,|,\ c=ln|\,c_1\,|$$

$$lnu-1=c_1x\Rightarrow lnu=c_1x+1\Rightarrow u=e^{1+c_1\cdot x}$$

$$z=xu=x\cdot e^{1+c_1\cdot x}$$

$$y'=z=x\cdot e^{1+c_1\cdot x}\Rightarrow y=\int y'dx=\int x\cdot e^{1+c_1\cdot x}dx=\left(\begin{array}{c}u=x\Rightarrow du=dx\\dv=e^{1+c_1\cdot x}dx\Rightarrow v=\frac{1}{c_1}e^{1+c_1\cdot x}\end{array}\right)=$$

$$=\frac{1}{c_1}x\cdot e^{1+c_1\cdot x}-\frac{1}{c_1}\int e^{1+c_1\cdot x}dx=\frac{1}{c_1}x\cdot e^{1+c_1\cdot x}-\frac{1}{c_1^2}e^{1+c_1\cdot x}+c_2=(\frac{x}{c_1}-\frac{1}{c_1^2})\cdot e^{1+c_1\cdot x}+c_2$$

3. Naći rešenje diferencijalne jednačine $x = e^{y''} + y''$.

$y'' = p \Rightarrow y' = \int y''dx = \int pdx$

$$x = e^p + p \Rightarrow \frac{dx}{dp} = e^p + 1 \Rightarrow dx = (1 + e^p)dp$$

$$y' = \int p(1 + e^p)dp = \int pdp + \int pe^p dp = \begin{pmatrix} u = p \Rightarrow du = dp \\ dv = e^p dp \Rightarrow v = e^p \end{pmatrix} = \frac{1}{2}p^2 + pe^p - e^p + c_1$$

$$y = \int y'dx = \int (\frac{1}{2}p^2 + pe^p - e^p + c_1)(1 + e^p)dp =$$

$$= \int (\frac{1}{2}p^2 + pe^p - e^p + \frac{1}{2}p^2e^p + pe^{2p} - e^{2p} + c_1 + c_1e^p)dp$$

$$\int p^2e^p = \begin{pmatrix} u = p^2 \Rightarrow du = 2pdp \\ dv = e^p dp \Rightarrow v = e^p \end{pmatrix} = p^2e^p - 2\int pe^p dp = p^2e^p - 2pe^p + 2e^p$$

$$y = \frac{1}{6}p^3 + pe^p - e^p - e^p + \frac{1}{2}p^2e^p - pe^p + e^p + \frac{1}{2}pe^{2p} - \frac{1}{4}e^{2p} - \frac{1}{2}e^{2p} + c_1p + c_1e^p + c_2.$$

Rešenje je dato u parametarskom obliku

$$x = p + e^p, \; y = (\frac{p}{2} - \frac{3}{4}) \cdot e^{2p} + (\frac{p^2}{2} - 1 + c_1) \cdot e^p + \frac{1}{6}p^3 + c_1p + c_2.$$

4. Naći rešenje diferencijalne jednačine $xy''' + y'' = x^2$.

$y'' = z, \; y''' = z'$

$xz' + z = x^2 \Rightarrow z' + \frac{1}{x}z = x$ (linearna diferencijalna jednačina)

$z = u \cdot v, \; z' = u'v + uv'$

$$vu' + uv' + \frac{1}{x}uv = x \Rightarrow vu' + (v' + \frac{v}{x})u = x$$

$$v' + \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow ln|v| = -ln|x| \Rightarrow v = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}u' = x \Rightarrow u' = x^2 \Rightarrow du = x^2dx \Rightarrow u = \frac{x^3}{3} + c_1$$

$$z = uv = \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x} \Rightarrow y'' = z = \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x}$$

$$y' = \int y''dx = \int (\frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x})dx = \frac{x^3}{9} + c_1 ln|x| + c_2$$

$$y = \int y'dx = \int (\frac{x^3}{9} + c_1 ln|x| + c_2)dx = \frac{x^4}{36} + c_1(x ln|x| - x) + c_2x + c_3.$$

c) $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, $n \geq 1$ (diferencijalna jednačina koja ne sadrži x)

$$y' = z, \; z = z(y), \; y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot y' = z' \cdot z,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d(z' \cdot z)}{dy} \cdot y' = (z \cdot z'' + (z')^2) \cdot z = z^2 z'' + z \cdot (z')^2 \text{, itd.}$$

5. Naći rešenje diferencijalne jednačine $y' - 1 = y \cdot y''$.

$$z - 1 = y \cdot z \cdot z' \Rightarrow \frac{z-1}{z} = y \cdot \frac{dz}{dy} \Rightarrow \frac{z}{z-1} dz = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{z}{z-1} dz$$

$$ln|y| = \int \frac{z}{z-1} dz = \int \frac{z-1+1}{z-1} dz = \int dz + \int \frac{dz}{z-1} = z + ln|z-1| + c_1$$

$$y = e^{z + ln|z-1| + c_1} = c_2 (z-1) \cdot e^z, \; c_2 = e^{c_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = z \Rightarrow dx = \frac{1}{z} dy = \frac{1}{z} c_2 \cdot \left[e^z + z e^z - e^z \right] dz = c_2 e^z dz$$

$$x = \int dx = c_2 e^z + c_3$$

Rešenje je dato u parametarskom obliku $x = c_2 e^z + c_3$, $y = c_2 (z-1) e^z$.

Ovde smo mogli izraziti z kao funkciju od x pa zameniti u izraz za y

$$e^z = \frac{x - c_3}{c_2} \Rightarrow z = ln\left| \frac{x - c_3}{c_2} \right|, \; c_2 e^z = x - c_3$$

$$y = (ln\left| \frac{x - c_3}{c_2} \right| - 1)(x - c_3).$$

6. Naći rešenje diferencijalne jednačine $3yy'' - 5(y')^2 = 0$.

$$y' = z, \; y'' = zz'$$

$$3yzz' - 5z^2 = 0 \Rightarrow 3yz' - 5z = 0 \Rightarrow z' = \frac{5z}{3y}$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{5}{3y} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{5dy}{3y} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \frac{5}{3} \int \frac{dy}{y} \Rightarrow ln|z| = \frac{5}{3} ln|y| + c \Rightarrow z = c_1 \sqrt[3]{y^5}, \; c = ln|c_1|$$

$$y' = z = c_1 y^{\frac{5}{3}} \Rightarrow y^{-\frac{5}{3}} dy = c_1 dx$$

$$\int y^{-\frac{5}{3}} dy = c_1 \int dx \Rightarrow -\frac{3}{2} y^{-\frac{2}{3}} = c_1 x + c_2 \Rightarrow \sqrt[3]{y^2} (c_1 x + c_2) = -\frac{3}{2}.$$

Homogena linearna diferencijalna jednačina

Homogena diferencijalna jednačina je jednačina oblika $a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$, gde su $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ neke neprekidne funkcije i $a_n(x) \neq 0$.

Ako je poznato jedno partikularno rešenje $y_1(x)$ homogenog dela jednačine $y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x)$, tada se smenom $y = z \cdot y_1$, gde je $z = z(x)$, snižava red diferencijalne jednačine.

Ako znamo dva partikularna rešenja $y_1(x)$ i $y_2(x)$ jednačine $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$, tada je funkcija $y_3(x)=y_2(x)-y_1(x)$ jedno partikularno rešenje homogenog dela jednačine, pa se taj deo jednačine rešava smenom $y_h=y_3z$. Opšte rešenje polazne nehomogene jednačine je $y(x)=y_h(x)+y_1(x)$ ili $y(x)=y_h(x)+y_2(x)$.

1. **Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $x\cdot y''+2\cdot y'-xy=0$, ako je $y_1=\frac{e^x}{x}$ partikularno rešenje.**

$$y=z\cdot\frac{e^x}{x},\ y'=z'\cdot\frac{e^x}{x}+z\cdot\frac{x\cdot e^x-e^x}{x^2}=e^x\left(\frac{z'}{x}+z\cdot\frac{x-1}{x^2}\right)$$

$$y''=e^x\left(\frac{z'}{x}+z\cdot\frac{x-1}{x^2}\right)+e^x\left(\frac{z''x-z'}{x^2}+z'\frac{x-1}{x^2}+z\cdot\frac{x^2-2x(x-1)}{x^4}\right)=$$

$$=e^x\left[\frac{z'}{x}+z\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{z''}{x}-\frac{z'}{x^2}+z'\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)+z\cdot\left(\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{e^x}{x}\left[z''+2\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot z'+\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\cdot z\right]$$

$$\left[z''+2\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot z'+\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\cdot z\right]\cdot e^x+2\cdot\left(\frac{z'}{x}+z\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\right)\cdot e^x-z\cdot e^x=0$$

$$z''+\left(2-\frac{2}{x}+\frac{2}{x}\right)\cdot z'+\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-1\right)\cdot z=0\Rightarrow z''+2z'=0$$

$$z'=u,\ z''=u'$$

$$u'+2u=0\Rightarrow\frac{du}{dx}=-2u\Rightarrow\frac{du}{u}=-2dx\Rightarrow ln|u|=-2x+c\Rightarrow u=e^{-2x+c}=c_1\cdot e^{-2x},\ c_1=e^c$$

$$z'=u=c_1\cdot e^{-2x}\Rightarrow z=c_1\cdot\int e^{-2x}dx=-\frac{c_1}{2}\cdot e^{-2x}+c_2=c_3\cdot e^{-2x}+c_2,\ c_3=-\frac{c_1}{2}$$

$$y=z\cdot\frac{e^x}{x}=c_3\cdot\frac{e^{-x}}{x}+c_2\cdot\frac{e^x}{x}.$$

2. **Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0$ ako se zna da je njeno partikularno rešenje oblika e^{mx} $(m=const)$.**

$$y_1=e^{mx},\ y_1'=me^{mx},\ y_1''=m^2e^{mx}$$

$$(2x+1)m^2e^{mx}+(4x-2)me^{mx}-8e^{mx}=0$$

$$2m^2x+m^2+4mx-2m-8=0\Rightarrow 2mx(m+2)+(m+2)(m-4)=0$$

$(m+2)(2mx+m-4)=0\Rightarrow m=-2$ za svako $x\Rightarrow y_1=e^{-2x}$

$$y=z\cdot e^{-2x},\ y'=z'e^{-2x}-2ze^{-2x}=(z'-2z)e^{-2x}$$

$$y''=z''e^{-2x}-2z'e^{-2x}-2z'e^{-2x}+4ze^{-2x}=(z''-4z'+4z)e^{-2x}$$

$$(2x+1)(z''-4z'+4z)e^{-2x}+(4x-2)(z'-2z)e^{-2x}-8ze^{-2x}=0$$

$$(2x+1)z''+(-8x-4+4x-2)z'+(8x+4-8x+4-8)z=0$$

$$(2x+1)z''-(4x+6)z'=0 \Rightarrow z''-\frac{4x+6}{2x+1}z'=0, \quad z'=p, \; z''=p',$$

$$p'=\frac{4x+6}{2x+1}p \Rightarrow \frac{dp}{p}=\frac{4x+6}{2x+1}dx \Rightarrow \int\frac{dp}{p}=\int\frac{4x+6}{2x+1}dx$$

$$ln|p|=\int\frac{4x+6}{2x+1}dx=\int\frac{2(2x+1)+4}{2x+1}dx=2\int dx+2\int\frac{2dx}{2x+1}=2x+2ln|\,2x+1\,|+c$$

$$p=e^{2x+2ln|\,2x+1\,|+c}=c_1(2x+1)^2e^{2x}, \; c_1=e^c$$

$$z'=p=c_1(2x+1)^2e^{2x}$$

$$z=\int z'dx=c_1\int(2x+1)^2e^{2x}dx=\begin{pmatrix} u=(2x+1)^2 \Rightarrow du=4(2x+1) \\ dv=e^{2x}dx \Rightarrow v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{pmatrix}=$$

$$=c_1(\frac{1}{2}(2x+1)^2e^{2x}-2\int(2x+1)e^{2x}dx)=\begin{pmatrix} u_1=2x+1 \Rightarrow du_1=2 \\ dv_1=e^{2x}dx \Rightarrow v_1=\frac{1}{2}e^{2x}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{c_1}{2}(2x+1)^2e^{2x}-2c_1(\frac{1}{2}(2x+1)e^{2x}-\int e^{2x}dx)=\frac{c_1}{2}(2x+1)^2e^{2x}-c_1(2x+1)e^{2x}+c_1e^{2x}+c_2=$$

$$=\frac{c_1}{2}(4x^2+4x+1-4x-2+2)e^{2x}+c_2=\frac{c_1}{2}(4x^2+1)e^{2x}+c_2$$

$$y=z\cdot e^{-2x}=\frac{c_1}{2}(4x^2+1)+c_2\cdot e^{-2x}.$$

3. **Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y''+\frac{x}{1-x}y'-\frac{1}{1-x}y=0$ ako se zna da je njeno partikularno rešenje oblika e^x.**

$$y=z\cdot e^x, \; y'=(z'+z)e^x, \; y''=(z'+z+z''+z')e^x$$

$$(z''+2z'+z)e^x+\frac{x}{1-x}(z'+z)e^x-\frac{1}{1-x}z\cdot e^x=0$$

$$z''+(2+\frac{x}{1-x})z'+(1+\frac{x}{1-x}-\frac{1}{1-x})z=0 \Rightarrow z''+(2+\frac{x}{1-x})z'=0, \qquad z'=u, \; z''=u'$$

$$u'=-(2+\frac{x}{1-x})u=-\frac{2-2x+x}{1-x}u=-\frac{2-x}{1-x}u=-\frac{1+1-x}{1-x}u=(\frac{1}{x-1}-1)u$$

$$\frac{du}{u}=(\frac{1}{x-1}-1)dx \Rightarrow \int\frac{du}{u}=\int(\frac{1}{x-1}-1)dx$$

$$ln|\,u\,|=ln|\,x-1\,|-x+c \Rightarrow u=e^{c_1-x+ln|\,x-1\,|}=c_1(x-1)\cdot e^{-x}, \; c_1=e^c$$

$$z'=u=c_1(x-1)\cdot e^{-x}$$

$$z=\int z'dx=c_1\int(x-1)\cdot e^{-x}dx=c_1\int xe^{-x}dx-c_1\int e^{-x}dx=\begin{pmatrix} u=x & dv=e^{-x}dx \\ du=dx & v=-e^{-x}\end{pmatrix}=$$

$$=c_1(-xe^{-x}+\int e^{-x}dx)+c_1e^{-x}=c_1(-xe^{-x}-e^{-x})+c_1e^{-x}+c_2$$

$$= -c_1(x \cdot e^{-x} + e^{-x} - e^{-x}) + c_2 = -c_1 x e^{-x} + c_2$$

$$y = z \cdot e^x = (-c_1 x \cdot e^{-x} + c_2) \cdot e^x = -c_1 x + c_2 e^x .$$

4. Naći opšte rešenje jednačine $(3x^3 + x) \cdot y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2$ ako su $y_1 = ax + b$ i $y_2 = Ax^2 + Bx + C$ njena dva partikularna rešenja.

$y_1 = ax + b$, $y_1' = a$, $y_1'' = 0$

$2a - 6x(ax + b) = 4 - 12x^2 \Rightarrow -6ax^2 - 6bx + 2a = 4 - 12x^2$

$-6a = -12$, $\quad -6b = 0$, $\qquad 2a = 4$

Iz sistema jednačina dobija se $a = 2$ i $b = 0 \Rightarrow y_1 = 2x$

$y_2 = Ax^2 + Bx + C$, $y_2' = 2Ax + B$, $y_2'' = 2A$

$(3x^3 + x) \cdot 2A + 4Ax + 2B - 6x \cdot (Ax^2 + Bx + C) = 4 - 12x^2$

$-6Bx^2 + (6A - 6C) \cdot x + 2B = 4 - 12x^2$

$-6B = -12$, $\quad 6A - 6C = 0$, $\qquad 2B = 4$

Iz sistema jednačina se dobija $B = 2$ i $A = C = 1 \Rightarrow y_2 = x^2 + 2x + 1$

$y_3 = y_2 - y_1 = x^2 + 1$ je partikularno rešenje homogenog dela jednačine.

$y_h = z \cdot (x^2 + 1)$, $y_h' = z' \cdot (x^2 + 1) + 2xz$

$y_h'' = z''(x^2 + 1) + 2xz' + 2z + 2xz' = (x^2 + 1) \cdot z'' + 4xz' + 2z$

$(3x^3 + x)(x^2 + 1)z'' + (3x^3 + x)4xz' + 2(3x^3 + x)z + 2(x^2 + 1)z' + 4xz - 6x(x^2 + 1)z = 0$

$x \cdot (3x^2 + 1)(x^2 + 1) \cdot z'' + (12x^4 + 6x^2 + 2) \cdot z' = 0$

$z' = p$, $z'' = p'$, $p = p(x)$

$x \cdot (3x^2 + 1)(x^2 + 1) \cdot p' + (12x^4 + 6x^2 + 2) \cdot p = 0$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{12x^4 + 6x^2 + 2}{x \cdot (3x^4 + 4x^2 + 1)} dx = -2 \cdot \frac{3x^4 + 4x^2 + 1 - x^2 + 3x^4}{x \cdot (3x^4 + 4x^2 + 1)} dx =$$

$$= -2 \cdot \frac{dx}{x} + 2 \cdot \frac{x - 3x^3}{3x^4 + 4x^2 + 1} = -2 \cdot \frac{dx}{x} + \frac{2x - 6x^3}{(x^2 + 1)(3x^2 + 1)} dx$$

$$\frac{2x - 6x^3}{(x^2 + 1)(3x^2 + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{3x^2 + 1} \Rightarrow A = -4,\ B = D = 0 \text{ i } C = 6$$

$$\frac{dp}{p} = -2 \cdot \frac{dx}{x} - 2 \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \frac{6x}{3x^2 + 1} dx$$

$$\ln|p| = -2\ln|x| - 2\ln|x^2 + 1| + \ln|3x^2 + 1| + c \Rightarrow p = c_1 \frac{3x^2 + 1}{x^2 (x^2 + 1)^2},\ c = \ln|c_1|$$

$$z' = p \Rightarrow z = \int p dx = c_1 \int \frac{x^2 + 1 + 2x^2}{x^2 (x^2 + 1)^2} dx = c_1 \int \frac{dx}{x^2 (x^2 + 1)} + c_1 \cdot \int \frac{2dx}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= c_1 \int \frac{dx}{x^2} - c_1 \int \frac{dx}{x^2 + 1} + 2c_1 \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = -c_1 \frac{1}{x} - c_1 arctgx + 2c_1 \frac{1}{2} arctgx + 2c_1 \frac{x}{2(x^2 + 1)} + c_2$$

$z=c_1\cdot\frac{1}{x(x^2+1)}+c_2 \Rightarrow y_h=z\cdot(x^2+1)=\frac{c_1}{x}+c_2\cdot(x^2+1)$ je rešenje homogenog dela jednačine, pa je $y=y_h+y_1=\frac{c_1}{x}+c_2\cdot(x^2+1)+2x$ rešenje polazne jednačine.

5. Naći opšte rešenje jednačine $(1-x^2)y''+2y=2$ ako su $y_1=1$ i $y_2=x^2$ njena dva partikularna rešenja.

$y_3=y_2-y_1=x^2-1$ je partikularno rešenje homogenog dela

$$y_h=z(x^2-1),\quad y_h'=z'(x^2-1)+2xz$$

$$y_h''=z''(x^2-1)+2xz'+2z+2xz'=(x^2-1)z''+4xz'+2z$$

$$(1-x^2)\cdot\left[(x^2-1)z''+4xz'+2z\right]+2(x^2-1)z=0$$

$$(x^2-1)^2z''+4x(x^2-1)z'+2(x^2-1-x^2+1)z=0$$

$$(x^2-1)z''+4xz'=0 \Rightarrow z''+\frac{4x}{x^2-1}z'=0\,; \qquad z'=u,\ z''=u'$$

$$u'=-\frac{4x}{x^2-1}u \Rightarrow \frac{du}{u}=-\frac{4x}{x^2-1}dx \Rightarrow \int\frac{du}{u}=-2\int\frac{2xdx}{x^2-1}$$

$$ln|u|=-2\,ln|x^2-1|+c=ln\left|\frac{c_1}{(x^2-1)^2}\right|,\ c=ln|c_1| \Rightarrow u=\frac{c_1}{(x^2-1)^2}$$

$$z'=u=\frac{c_1}{(x^2-1)^2} \Rightarrow z=\int\frac{c_1}{(x^2-1)^2}dx=-c_1\int\frac{x^2-1-x^2}{(x^2-1)^2}dx=-c_1\int\frac{dx}{x^2-1}+c_1\int\frac{x^2dx}{(x^2-1)^2}=$$

$$=\left(u=x\Rightarrow du=dx\,,\ dv=\frac{xdx}{(x^2-1)^2}\Rightarrow v=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-1}\right)=$$

$$=c_1\left(-\frac{1}{2}ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-1}\right)=c_1\left(-\frac{1}{2}ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{x}{2(x^2-1)}+\frac{1}{4}ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)+c_2=$$

$$=-\frac{c_1}{4}ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{c_1}{2}\cdot\frac{x}{x^2-1}+c_2=c_3\left(ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{2x}{x^2-1}\right)+c_2,\ c_3=-\frac{c_1}{4}$$

$$y_h=(x^2-1)\cdot z=c_3(x^2-1)\left(ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{2x}{x^2-1}\right)+c_2(x^2-1)$$

$$y=y_h+y_1=c_3(x^2-1)\left(ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{2x}{x^2-1}\right)+c_2(x^2-1)+1\,.$$

6. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $(x^2-1)y''+4xy'+2y=6x$ ako su $y_1=x$ i $y_2=\frac{x^2+x+1}{x+1}$ njena dva partikularna rešenja.

$$y_3=y_2-y_1=\frac{x^2+x+1}{x+1}-x=\frac{x^2+x+1-x^2-x}{x+1}=\frac{1}{x+1}$$

$$y_h=\frac{z}{x+1},\ y_h'=\frac{z'(x+1)-z}{(x+1)^2}=\frac{z'}{x+1}-\frac{z}{(x+1)^2}$$

$$y_h''=\frac{z''(x+1)-z'}{(x+1)^2}-\frac{z'(x+1)^2-2z(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{z''}{x+1}-\frac{2z'}{(x+1)^2}+\frac{2z}{(x+1)^3}$$

$$(x-1)(x+1)\left[\frac{1}{x+1}(z''-\frac{2z'}{x+1}+\frac{2z}{(x+1)^2})\right]+4x(\frac{z'}{x+1}-\frac{z}{(x+1)^2})+2\frac{z}{x+1}=0$$

$$(x-1)z''+(-\frac{2(x-1)}{x+1}+\frac{4x}{x+1})z'+(\frac{2(x-1)}{(x+1)^2}-\frac{4x}{(x+1)^2}+\frac{2(x+1)}{(x+1)^2})z=0$$

$$(x-1)z''+\frac{-2x+2+4x}{x+1}z'+\frac{2x-2-4x+2x+2}{(x+1)^2}z=0$$

$$(x-1)z''+2z'=0 \Rightarrow z''+\frac{2}{x-1}z'=0, \qquad z'=u,\ z''=u'$$

$$u'+\frac{2}{x-1}u=0 \Rightarrow \frac{du}{u}=-\frac{2}{x-1}dx \Rightarrow \int\frac{du}{u}=-2\int\frac{dx}{x-1}$$

$$ln|u|=-2ln|x-1|+c_1 \Rightarrow u=\frac{c_2}{(x-1)^2},\ c_1=lnc_2$$

$$z'=u=\frac{c_2}{(x-1)^2} \Rightarrow z=\int z'dx=\int\frac{c_2}{(x-1)^2}dx=-\frac{c_2}{x-1}+c_3$$

$$y_h=-\frac{c_2}{x^2-1}+\frac{c_3}{x+1} \qquad y=y_h+y_1=-\frac{c_2}{x^2-1}+\frac{c_3}{x+1}+y_1$$

Jednačina sa konstantnim koeficijentima

Jednačina sa konstantnim koeficijentima je jednačina oblika
$a_n\cdot y^{(n)}+a_{n-1}\cdot y^{(n-1)}+\ldots+a_1\cdot y'+a_0\cdot y=f(x)$, gde su a_i ($i=0,1,\ldots,n$) konstante
Opšte rešenje jednačine je $y=y_h+y_p$.

Jednačina $a_n\cdot r^n+a_{n-1}\cdot r^{n-1}+\ldots+a_1\cdot r+a_0=0$ se zove karakteristična jednačina, a $r_1,r_2,\ldots,r_n$ su koreni (rešenja) karakteristične jednačine.

1) Koreni karakteristične jednačine su realni i različiti
$$y_h=\sum_{i=1}^{n}c_i\cdot e^{r_ix}.$$

2) Ako je r_i realan koren karakteristične jednačine višestrukosti m ($m>1$), tada u fundamentalni skup rešenja ulaze sledećih m funkcija
e^{r_ix}, $x\cdot e^{r_ix}$, $x^2e^{r_ix}$, …, $x^{m-1}e^{r_ix}$.

3) Neka je koren $r_j=\alpha_j+\beta_j\cdot i$ kompleksan koren karakteristične jednačine (imaginarni deo je različit od nule).
Tada je $y_j=e^{r_j\cdot x}$ rešenje date diferencijalne jednačine.

$$y_j = e^{r_j \cdot x} = e^{\alpha_j \cdot x + \beta_j \cdot x \cdot i} = e^{\alpha_j \cdot x} \cdot e^{\beta_j \cdot x \cdot i} = e^{\alpha_j \cdot x}(\cos\beta_j x + i \sin\beta_j x)$$

Nas interesuju realna rešenja, pa zbog toga u fundamentalni skup rešenja ulaze

$R_e\{y_j\} = e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \cos\beta_j x$ i $I_m\{y_j\} = e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \sin\beta_j x$.

4) Ako je $r_j = \alpha_j + \beta_j \cdot i$ koren višestrukosti m $(m > 1)$, tada u fundamentalni skup rešenja date diferencijalne jednačine ulaze sledeće funkcije

$$e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \cos\beta_j x,\ x \cdot e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \cos\beta_j x,\ \ldots,\ x^{m-1} e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \cos\beta_j x$$

$$e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \sin\beta_j x,\ x \cdot e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \sin\beta_j x, \ldots,\ x^{m-1} e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \sin\beta_j x.$$

Metod jednakih koeficijenata

Ako je $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x]$ gde je $\alpha, \beta \in R$, a $P_m(x)$ i $Q_n(x)$ polinomi stepena m i n, jednačina ima jedno partikularno rešenje oblika

$y_p = x^r \cdot e^{\alpha x}[T_k(x)\cos\beta x + R_k(x)\sin\beta x]$, gde su $T_k(x)$ i $R_k(x)$ nepoznati polinomi stepena $k = max(m, n)$, a r je višestrukost korena karakteristične jednačine.

Ako $\alpha + \beta i$ nije rešenje karakteristične jednačine, uzima se $r = 0$.

1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x$.

- $y''' + y'' = 0 \Rightarrow r^3 + r^2 = 0 \Rightarrow r^2(r+1) = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0,\ r_3 = -1$

$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$

- $y''' + y'' = x^2 + 1$

$e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x] = x^2 + 1 \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 0,\ P_m(x) = x^2 + 1,$

$k = m = 2,\ \alpha + \beta i = 0 \Rightarrow r = 2$

$y_{p_1} = x^2 \cdot (Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$

$y'_{p_1} = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx,\ y''_{p_1} = 12Ax^2 + 6Bx + 2C,\ y'''_{p_1} = 24Ax + 6B$

$24Ax + 6B + 12Ax^2 + 6Bx + 2C = x^2 + 1$

$12Ax^2 + (24A + 6B)x + 6B + 2C = x^2 + 1$

$12A = 1, \qquad 24A + 6B = 0, \qquad 6B + 2C = 1$

Rešenja sistema jednačina su $A = \dfrac{1}{12}$, $B = -\dfrac{1}{3}$ i $C = \dfrac{3}{2}$.

$$y_{p_1} = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2.$$

- $y''' + y'' = 3xe^x$

$e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x] = 3xe^x \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = 0,\ P_m(x) = 3x,$

$k = m = 1,\ \alpha + \beta i = 1 \Rightarrow r = 0$

$$y_{p_2} = (Ax+B)\cdot e^x,\ y'_{p_2} = Ae^x + (Ax+B)\cdot e^x,$$

$$y''_{p_2} = Ae^x + Ae^x + (Ax+B)\cdot e^x,\ y'''_{p_2} = 2Ae^x + Ae^x + (Ax+B)\cdot e^x$$

$$(3A + Ax + B)\cdot e^x + (2A + Ax + B)\cdot e^x = 3xe^x$$

$$2Ax + 5A + 2B = 3x,\quad 2A = 3,\qquad 5A + 2B = 0$$

Rešenja sistema jednačina su $A = \frac{3}{2}$ i $B = -\frac{15}{4}$.

$$y_{p_2} = (\frac{3}{2}x - \frac{15}{4})\cdot e^x.$$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + (\frac{3}{2}x - \frac{15}{4})\cdot e^x$$

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + (\frac{3}{2}x - \frac{15}{4})e^x.$$

2. **Naći ono rešenje** $y(x)$ **jednačine** $y''' - \frac{7}{2}y'' + 2y' + 2y = e^{-\frac{1}{2}x}$ **koje zadovoljava uslov** $y(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$.

- $y''' - \frac{7}{2}y'' + 2y' + 2y = 0 \Rightarrow r^3 - \frac{7}{2}r^2 + 2r + 2 = 0$

$$(r-2)^2(r + \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 2,\ r_3 = -\frac{1}{2}$$

$$y_h = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3e^{-\frac{1}{2}x}.$$

- $y''' - \frac{7}{2}y'' + 2y' + 2y = e^{-\frac{1}{2}x}$

$$e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x] \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2},\ \beta = 0,\ P_m(x) = 1$$

$$k = m = 0,\ \alpha + \beta i = -\frac{1}{2} \Rightarrow r = 1$$

$$y_p = Axe^{-\frac{1}{2}x},\ y'_p = A(1 - \frac{x}{2})e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$y''_p = A(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x}{4})e^{-\frac{1}{2}x} = A(\frac{x}{4} - 1)e^{-\frac{1}{2}x},\ y'''_p = A(\frac{1}{4} - \frac{x}{8} + \frac{1}{2})e^{-\frac{1}{2}x} = A(\frac{3}{4} - \frac{x}{8})e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$A(\frac{3}{4} - \frac{x}{8})e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{7}{2}A(\frac{x}{4} - 1)e^{-\frac{1}{2}x} + 2A(1 - \frac{x}{2})e^{-\frac{1}{2}x} + 2Axe^{-\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$(-\frac{A}{8} - \frac{7}{8}A + 2A - A)x + (\frac{3}{4} + \frac{7}{2} + 2)A = 1 \Rightarrow A = \frac{4}{25}$$

$$y_p = \frac{4}{25}xe^{-\frac{1}{2}x}.$$

$$y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{4}{25}xe^{-\frac{1}{2}x}$$

$$y(0) = c_1 + c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = 1, \ \lim_{x\to\infty} y(x) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

$$y = (\frac{4}{25}x + 1)e^{-\frac{1}{2}x}.$$

3. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y''' - 2y'' = x\sin 2x + x + 2$.

- $y''' - 2y'' = 0 \Rightarrow r^3 - 2r^2 = 0 \Rightarrow r^2(r-2) = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0, \ r_3 = 2$

$$y_h = c_1 + c_2x + c_3e^{2x}$$

- $y''' - 2y'' = x\sin 2x$

$$x\sin 2x = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x], \ \alpha = 0, \ \beta = 2, \ Q_n(x) = x, \ P_m(x) = 0$$

$$\alpha + \beta i = 2i \Rightarrow r = 0, \ k = m = 1$$

$$y_{p_1} = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x$$

$$y'_{p_1} = A\cos 2x - 2(Ax + B)\sin 2x + C\sin 2x + 2(Cx + D)\cos 2x =$$
$$= (2Cx + A + 2D)\cos 2x + (-2Ax - 2B + C)\sin 2x$$

$$y''_{p_1} = 2C\cos 2x - 2(2Cx + A + 2D)\sin 2x - 2A\sin 2x + 2(-2Ax - 2B + C)\cos 2x =$$
$$= (-4Ax - 4B + 4C)\cos 2x + (-4Cx - 4D - 4A)\sin 2x$$

$$y'''_{p_1} = (-4A - 8Cx - 8D - 8A)\cos 2x + (-4C + 8Ax + 8B - 8C)\sin 2x$$

$$(-12A - 8Cx - 8D)\cos 2x + (-12C + 8Ax + 8B)\sin 2x + (8Ax + 8B - 8C)\cos 2x +$$
$$+(8Cx + 8D + 8A)\sin 2x = x\sin 2x$$

$$[-12A - 8D + 8B - 8C + (8A - 8C)x]\cos 2x + [-12C + 8B + 8D + 8A + (8A + 8C)x]\sin 2x = x\sin 2x$$

$$-12A - 8D + 8B - 8C = 0, \quad 8A - 8C = 0, \quad -12C + 8B + 8D + 8A = 0, \quad 8A + 8C = 1$$

Rešavanjem sistema dobija se $A = \frac{1}{16}$, $B = \frac{3}{32}$, $C = \frac{1}{16}$ i $D = -\frac{1}{16}$.

$$y_{p_1} = \frac{1}{16}(x + \frac{3}{2})\cos 2x + \frac{1}{16}(x - 1)\sin 2x$$

- $y''' - 2y'' = x + 2$

$$x + 2 = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x] \Rightarrow \alpha = 0, \ \beta = 0, \ P_m(x) = x + 2$$

$$\alpha + \beta i = 0 \Rightarrow r = 2, \ k = m = 1$$

$$y_{p_2} = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2, \ y'_{p_2} = 3Ax^2 + 2Bx, \ y''_{p_2} = 6Ax + 2B, \ y'''_{p_2} = 6A$$

$$6A - 12Ax - 4B = x + 2$$
$$-12A = 1, \quad 6A - 4B = 2$$

Rešavanjem sistema dobija se $A = -\frac{1}{12}$ i $B = -\frac{5}{8}$.

$$y_{p_2} = -\frac{1}{12}x^3 - \frac{5}{8}x^2$$

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + \frac{1}{16}(x+\frac{3}{2})\cos 2x + \frac{1}{16}(x-1)\sin 2x - \frac{1}{12}x^3 - \frac{5}{8}x^2.$$

Metod varijacije konstanti

Ako je poznat funadamentalni skup rešenja $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ homogene diferencijalne jednačine tada se partikularno rešenje može naći po formuli $y_p = C_1(x)\cdot y_1 + C_2(x)\cdot y_2 + \ldots\ldots + C_n(x)\cdot y_n$, gde su funkcije $C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ određene iz sistema jednačina

$$C_1'(x)\cdot y_1 + C_2'(x)\cdot y_2 + \ldots\ldots + C_n'(x)\cdot y_n = 0$$
$$C_1'(x)\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2' + \ldots\ldots + C_n'(x)\cdot y_n' = 0$$
$$\vdots$$
$$C_1'(x)\cdot y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\cdot y_2^{(n-1)} + \ldots\ldots + C_n'(x)\cdot y_n^{(n-1)} = f(x)$$

Ako se pri traženju funkcija $C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ iz $C_i' = g(x)$ kod neodređenog integrala $C_i(x) = \int C_i'(x)dx = \int g(x)dx$ ne uzme konstanta tada se dobija partikularno rešenje.
Prema tome opšte rešenje je oblika $y = y_h + y_p$.

4. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

- $y'' - 2y' + y = 0 \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$

  $y_h = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x$

- $y_p = c_1(x)\cdot e^x + c_2(x)\cdot x \cdot e^x$

  Rešavajući sistem

  $$c_1'(x)\cdot e^x + c_2'(x)\cdot x \cdot e^x = 0$$
  $$c_1'(x)\cdot e^x + c_2'(x)\cdot (x+1)\cdot e^x = \frac{e^x}{x}$$

  dobićemo da je

  $$c_2'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow c_2(x) = \int c_2'(x)dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$
  $$c_1'(x) = -x\cdot c_2'(x) = -x\cdot\frac{1}{x} = -1 \Rightarrow c_1(x) = \int c_1'(x)dx = -\int dx = -x$$
  $$y_p = -xe^x + xe^x\cdot\ln|x|$$
  $$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 x e^x - xe^x + xe^x\cdot\ln|x|.$$

5. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$.

- $y'' + 3y' + 2y = 0$

  $r^2 + 3r + 2 = 0 \Rightarrow (r+1)(r+2) = 0 \Rightarrow r_1 = -1,\ r_2 = -2$

  $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

- $y_p = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-2x}$

$C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{-2x} = 0$

$-C_1'(x)e^{-x} - 2C_2'(x)e^{-2x} = \dfrac{1}{1+e^x}$

Sabiranjem jednačina dobijamo $-C_2'(x)e^{-2x} = \dfrac{1}{1+e^x} \Leftrightarrow C_2'(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$

$$C_2(x) = \int C_2'(x)dx = -\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = -\int \frac{e^x(1+e^x)-e^x}{1+e^x}dx = -\int e^x dx + \int \frac{e^x}{1+e^x}dx =$$
$$= -e^x + ln(e^x+1)$$

$$C_1'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x} \Rightarrow C_1(x) = \int C_1'(x)dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx = ln(e^x+1)$$

$$y_p = ln(e^x+1)e^{-x} + (ln(e^x+1) - e^x)e^{-2x}$$

$$y = y_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + e^{-x}ln(e^x+1) + (ln(e^x+1)-e^x)e^{-2x}.$$

Ojlerova diferencijalna jednačina

$(ax+b)^n y^{(n)} + A_{n-1}(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + A_1(ax+b)y' + A_0y = f(x)$

$a, b, A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ - konstante

Ako je $ax+b>0,\ a\neq 0$, smenom $ax+b=e^t \Rightarrow t = ln(ax+b)$, odnosno

$$y' = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{a}{ax+b}\ y_t' = ae^{-t}y_t',$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = a(e^{-t}y_t'' - e^{-t}y_t')\cdot\frac{a}{ax+b} = a^2e^{-2t}(y_t''-y_t'),$$

$$y''' = \frac{dy''}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = a^2(-2e^{-2t}(y_t''-y_t') + e^{-2t}(y_t'''-y_t''))\cdot ae^{-t} = a^3e^{-3t}(y_t'''-3y_t''+2y_t'),\ \text{itd.}$$

data jednačina se svodi na jednačinu sa konstantnim koeficijentima.

Za $ax+b<0$, $a\neq 0$ uvodi se smena $ax+b=-e^t$.

Za $a=0$, $b\neq 0$ dobija se nehomogena linearna jednačina čiji je homogeni deo sa konstantnim koeficijentima. Za $a=0$ i $b=0$ dobija se $A_0\cdot y = f(x)$, a to nije diferencijalna jednačina.

6. Rešiti diferencijalnu jednačinu $(1+x)^3y''' + (1+x)y' - y = (1+x)^2$ za $x>-1$.

$1+x = e^t \Rightarrow t = ln(1+x)$

$y' = e^{-t}y_t'$, $y'' = (y_t''-y_t')e^{-2t}$, $y''' = (y_t'''-3y_t''+2y_t')\cdot e^{-3t}$

$e^{3t}\cdot e^{-3t}(y_t'''-3y_t''+2y_t') + e^t\cdot e^{-t}y_t' - y = e^{2t}$

$y_t''' - 3y_t'' + 3y_t' - y = e^{2t}$

- $y_t''' - 3y_t'' + 3y_t' - y = 0 \Rightarrow r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^3 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = 1$

$y_h = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t$

- $y_t''' - 3y_t'' + 3y_t' - y = e^{2t}$

$e^{2t} = e^{\alpha t}[P_m(t)\cos\beta t + Q_n(t)\sin\beta t] \Rightarrow \alpha = 2,\ \beta = 0,\ P_m(t) = 1$

$\alpha + \beta i = 2 \Rightarrow r = 0,\ k = m = 0$

$y_p = A\cdot e^{2t},\ y_p' = 2A\cdot e^{2t},\ y_p'' = 4A\cdot e^{2t},\ y_p''' = 8A\cdot e^{2t}$

$(8A - 12A + 6A - A)e^{2t} = e^{2t} \Rightarrow A = 1$.

$y_p = e^{2t}$

$y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t + e^{2t}$

$y = c_1(1+x) + c_2(1+x)\cdot \ln(1+x) + c_3(1+x)\cdot \ln^2(1+x) + (1+x)^2$.

7. Naći opšte rešenje jednačine $x^2 y'' + 2xy' - 2y = x^2 + 1$ za $x > 0$.

$x = e^t \Rightarrow t = \ln x$

$y' = e^{-t} y_t',\ y'' = e^{-2t}(y_t'' - y_t')$

$e^{2t}\cdot e^{-2t}(y_t'' - y_t') + 2e^t\cdot e^{-t} y_t' - 2y_t = e^{2t} + 1 \Leftrightarrow y_t'' + y_t' - 2y_t = e^{2t} + 1$

- $y_t'' - y_t' - 2y_t = 0$

$r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow (r-1)(r+2) = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -2$

$y_h = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$

- $y_t'' + y_t' - 2y_t = 1$

$1 = e^{\alpha t}[P_m(t)\cos\beta t + Q_n(t)\sin\beta t] \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 0,\ P_m(t) = 1$

$\alpha + \beta i = 0 \Rightarrow r = 0,\ k = m = 0$

$y_{p1} = A,\ y_{p1}' = y_{p1}'' = 0$

$-2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

$y_{p1} = -\frac{1}{2}$

- $y_t'' + y_t' - 2y_t = e^{2t}$

$e^{2t} = e^{\alpha t}[P_m(t)\cos\beta t + Q_n(t)\sin\beta t] \Rightarrow \alpha = 2,\ \beta = 0,\ P_m(t) = 1$

$\alpha + \beta i = 2 \Rightarrow r = 0,\ k = m = 0$

$y_{p2} = Ae^{2t},\ y_{p2}' = 2Ae^{2t},\ y_{p2}'' = 4Ae^{2t}$

$(4A + 2A - 2A)e^{2t} = e^{2t} \Rightarrow 4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

$$y_{p2} = \frac{1}{4}e^{2t}$$

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2t} = c_1 x + \frac{c_2}{x^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 .$$

8. Naći opšte rešenje jednačine $(2x+1)^2 y'' + (4x+2)y' - 4y = x^2$ za $2x+1>0$.

$$2x+1 = e^t \Rightarrow t = \ln(2x+1)$$

$$2x = e^t - 1 \Rightarrow x = \frac{e^t - 1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{4}$$

$$y' = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{2}{2x+1}\cdot y'_t = 2\cdot e^{-t}\cdot y'_t$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = 2\cdot e^{-t}\cdot 2(-e^{-t}\cdot y'_t + e^{-t}\cdot y''_t) = 4\cdot e^{-2t}(y''_t - y'_t)$$

$$4\cdot e^{2t}\cdot e^{-2t}(y''_t - y'_t) + 4e^t\cdot e^{-t}y'_t - 4y_t = \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{4}$$

$$4y''_t - 4y_t = \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{4}$$

- $4y''_t - 4y_t = 0$

$$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -1$$

$$y_h = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

- $4y''_t - 4y_t = \frac{1}{4}e^{2t}$

$$\frac{1}{4}e^{2t} = e^{\alpha t}[P_m(t)\cos\beta t + Q_n(t)\sin\beta t] \Rightarrow \alpha = 2,\ \beta = 0,\ P_m(t) = \frac{1}{4}$$

$$\alpha + \beta i = 2 \Rightarrow r = 0,\ k = m = 0$$

$$y_{p_1} = A\cdot e^{2t},\ y'_{p_1} = 2A\cdot e^{2t},\ y''_{p_1} = 4A\cdot e^{2t}$$

$$(16A - 4A)e^{2t} = \frac{1}{4}e^{2t} \Rightarrow 12A = \frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{1}{48}$$

$$y_{p_1} = \frac{1}{48}e^{2t}$$

- $4y''_t - 4y_t = -\frac{1}{2}e^t$

$$-\frac{1}{2}e^t = e^{\alpha t}[P_m(t)\cos\beta t + Q_n(t)\sin\beta t] \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = 0,\ P_m(t) = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha + \beta i = 1 \Rightarrow r = 1,\ k = m = 0$$

$$y_{p_2} = At\cdot e^t,\ y'_{p_2} = A(1+t)\cdot e^t,\ y''_{p_2} = A(1+1+t)\cdot e^t = A(2+t)\cdot e^t$$

$$(8A + 4At - 4At)\cdot e^t = -\frac{1}{2}e^t \Rightarrow 8A = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = -\frac{1}{16}$$

$$y_{p_2} = -\frac{1}{16}t \cdot e^t$$

- $4y_t'' - 4y_t = \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4} = e^{\alpha t}[P_m(t)\cos\beta t + Q_n(t)\sin\beta t] \Rightarrow \alpha = 0\ ,\ \beta = 0\ ,\ P_m(t) = \frac{1}{4}$$

$$\alpha + \beta i = 0 \Rightarrow r = 0\ ,\ k = m = 0$$

$$y_{p_3} = A\ ,\ y_{p_3}' = y_{p_3}'' = 0$$

$$-4A = \frac{1}{4} \Rightarrow A = -\frac{1}{16}$$

$$y_{p_3} = -\frac{1}{16}$$

$$y = c_1e^t + c_2e^{-t} + \frac{1}{48}e^{2t} - \frac{1}{16}t \cdot e^t - \frac{1}{16}$$

$$y = c_1(2x+1) + \frac{c_2}{2x+1} + \frac{1}{48}(2x+1)^2 - \frac{1}{16}(2x+1)\cdot \ln(2x+1) - \frac{1}{16}.$$

Neke metode rešavanja diferencijalnih jednačina

1. **U diferencijalnoj jednačini $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$ uvesti smenu $y = a(x)\cdot z$, ($a(x) \neq 0$) tako da se anulira koeficijent uz z', a zatim rešiti datu diferencijalnu jednačinu.**

$$y = az\ ,\ y' = a'z + az'\ ,\ y'' = a''z + a'z' + a'z' + az'' = a''z + 2a'z + az''$$

$$a''z + 2a'z' + az'' + \frac{2}{x}(a'z + az') + az = 0 \Rightarrow az'' + (2a' + \frac{2a}{x})z' + (a'' + \frac{2a'}{x} + a)z = 0$$

$$2a' + \frac{2a}{x} = 0 \Rightarrow \frac{da}{dx} = -\frac{a}{x} \Rightarrow \frac{da}{a} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{da}{a} = -\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|a| = -\ln|x| \Rightarrow a = \frac{1}{x}\ ,\ a' = -\frac{1}{x^2}\ ,\ a'' = \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{1}{x}z'' + (\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x})z = 0$$

$$z'' + z = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r^2 = -1 \Rightarrow r_1 = i\ ,\ r_2 = -i$$

$$z = c_1\cos x + c_2\sin x \Rightarrow y = az = \frac{z}{x} = \frac{1}{x}(c_1\cos x + c_2\sin x).$$

2. **U diferencijalnoj jednačini $2xy'' + y' + 2y = 0$ uvesti smenu $x = x(t)$ birajući funkciju $\varphi(t)$ tako da se anulira koeficijent uz $\frac{dy}{dt}$, a zatim naći opšte rešenje za $x > 0$.**

$$y' = \frac{y_t'}{x_t'}\ ,\ y'' = \frac{y_t''}{(x_t')^2} - \frac{x_t''\cdot y_t'}{(x_t')^3}$$

$$2x\cdot\left(\frac{y_t''}{(x_t')^2}-\frac{x_t''\cdot y_t'}{(x_t')^3}\right)+\frac{y_t'}{x_t'}+2y_t=0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x_t')^2}\cdot y_t''-\frac{2x\cdot x_t''}{(x_t')^3}\cdot y_t'+\frac{1}{x_t'}\cdot y_t'+2y_t=0$$

$$\frac{2x}{(x_t')^2}\cdot y_t''+\frac{(x_t')^2-2x\cdot x_t''}{(x_t')^3}\cdot y_t'+2y_t=0 \Rightarrow (x_t')^2-2x\cdot x_t''=0$$

$$x_t'=p(x),\ x_t''=p\cdot p_x'$$

$$p^2-2x\cdot p_x'p=0 \Rightarrow p-2x\cdot p_x'=0 \Rightarrow 2x\frac{dp}{dx}=p \Rightarrow 2\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dx}{x}=2\int\frac{dp}{p} \Rightarrow ln|x|=2ln|p| \Rightarrow x=p^2$$

$$x=(x_t')^2 \Rightarrow x_t'=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x^{-\frac{1}{2}}dx=dt \Rightarrow 2\sqrt{x}=t \Rightarrow x=\frac{t^2}{4}$$

$$x=\frac{t^2}{4} \Rightarrow t=2\sqrt{x} \Rightarrow 2y_t''+2y_t=0 \Rightarrow y_t''+y_t=0$$

$$r^2+1=0 \Rightarrow r_1=i, r_2=-i,\quad e^{it}=cost+i\,sint,\ R_e\{e^{it}\}=cost,\ I_m\{e^{it}\}=sint$$

$$y=c_1 cost+c_2 sint,\quad y=c_1 cos2\sqrt{x}+c_2 sin2\sqrt{x}.$$

3. **U diferencijalnu jednačinu $x^2y''+2x(x+2)y'+2(2x+1+\frac{x^2}{2})y=0$ uvesti smenu $y=x^\alpha u$, gde je α takvo da se dobije jednačina sa konstantnim koeficijentima, a zatim rešiti datu difencijalnu jednačinu.**

$$y'=\alpha x^{\alpha-1}\cdot u+x^\alpha u',\ y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}u+\alpha x^{\alpha-1}u'+\alpha x^{\alpha-1}u'+x^\alpha u''$$

$$x^2\left[\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}u+2\alpha x^{\alpha-1}u'+x^\alpha u''\right]+(2x^2+4x)\left[\alpha x^{\alpha-1}u+x^\alpha u'\right]+(4x+2+x^2)x^\alpha u=0$$

$$\alpha(\alpha-1)x^\alpha u+2\alpha x^{\alpha+1}u'+x^{\alpha+2}u''+2\alpha x^{\alpha+1}u+4\alpha x^\alpha u+2x^{\alpha+1}u'+$$
$$+4x^{\alpha+1}u'+(4x^{\alpha+1}+2x^\alpha+x^{\alpha+2})u=0$$

$$x^{\alpha+2}u''+\left[2\alpha x^{\alpha+1}+4x^{\alpha+1}+2x^{\alpha+2}\right]u'+\left[\alpha(\alpha-1)x^\alpha+2\alpha x^{\alpha+1}+4\alpha x^\alpha+4x^{\alpha+1}+2x^\alpha+x^{\alpha+2}\right]u=0$$

Deljenjem jednačine sa $x^{\alpha+2}$ dobija se

$$u''+\left(\frac{2\alpha+4}{x}+2\right)u'+\left(\frac{\alpha(\alpha-1)+4\alpha+2}{x^2}+\frac{2\alpha+4}{x}+1\right)u=0.$$

Da bi koeficijent uz u' bio konstanta za svako x treba da je $2\alpha+4=0$, odnosno $\alpha=-2$.

$$u''+2u'+u=0 \Rightarrow r^2+2r+1=0 \Rightarrow (r+1)^2=0 \Rightarrow r_1=r_2=-1$$

$$u=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x} \Rightarrow y=x^{-2}u=\frac{u}{x^2}=\frac{e^{-x}}{x^2}(c_1+c_2x).$$

4. **U smeni $x = t^{\alpha}$ odrediti α tako da se diferencijalna jednačina $xy'' - 2(1+3x^3)y' + 9x^5 y = 9x^5(x^3+1)e^{x^3}$ svede na jednačinu sa konstantnim koeficijentima, a zatim rešiti datu jednačinu.**

$$y' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{y_t'}{\alpha t^{\alpha-1}}, \qquad y'' = \frac{y_t''}{(x_t')^2} - \frac{x_t'' y_t'}{(x_t')^3} = \frac{y_t''}{\alpha^2 t^{2\alpha-2}} - \frac{\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}}{\alpha^3 t^{3\alpha-3}} y_t'$$

$$t^{\alpha}\frac{y_t''}{\alpha^2 t^{2\alpha-2}} - t^{\alpha}\frac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}}{\alpha^2 t^{3\alpha-3}} y_t' - 2\frac{y_t'}{\alpha t^{\alpha-1}} - 6t^{3\alpha}\frac{y_t'}{\alpha t^{\alpha-1}} + 9t^{5\alpha} y_t = 9t^{5\alpha}(t^{3\alpha}+1)\cdot e^{t^{3\alpha}}$$

$$y_t'' - \left(\frac{\alpha-1}{t} + \frac{2\alpha}{t} + 6\alpha t^{3\alpha-1}\right)\cdot y_t' + 9\alpha^2 t^{6\alpha-2} y_t = 9\alpha^2 t^{6\alpha-2}(t^{3\alpha}+1)\cdot e^{t^{3\alpha}}$$

Kako je uz y_t'' broj 1, to da bi diferencijalna jednačina bila sa konstantnim koeficijentima, uzmimo da je

$$6\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow x = t^{\frac{1}{3}} \Rightarrow t = x^3$$

$$\frac{\alpha-1}{t} + \frac{2\alpha}{t} + 6\alpha t^{3\alpha-1} = \frac{3\alpha-1}{t} + 6\alpha t^{3\alpha-1} = 2$$

$$9\alpha^2 t^{6\alpha-2}(t^{3\alpha}+1)\cdot e^{t^{3\alpha}} = 9\cdot\frac{1}{9}\cdot t^0(t+1)\cdot e^t = (t+1)\cdot e^t$$

$$y_t'' - 2y_t' + y_t = (t+1)\cdot e^t$$

- $y_t'' - 2y_t' + y_t = 0$

$$r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$$

$$y_h = c_1 e^t + c_2 t e^t$$

- $y_t'' - 2y_t' + y_t = (t+1)\cdot e^t$

$$(t+1)e^t = e^{\alpha t}\left[P_m(t)\cos\beta t + Q_n(t)\sin\beta t\right] \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = 0,\ P_m(t) = t+1$$

$$\alpha + \beta i = 1 \Rightarrow r = 2,\ k = m = 1$$

$$y_p = t^2(At+B)\cdot e^t = (At^3+Bt^2)\cdot e^t,\quad y_p' = (At^3+Bt^2+3At^2+2Bt)\cdot e^t$$

$$y_p'' = (At^3+Bt^2+3At^2+2Bt+3At^2+2Bt+6At+2B)\cdot e^t$$

$$At^3+Bt^2+3At^2+2Bt+3At^2+2Bt+6At+2B-2At^3-2Bt^2-6At^2-$$
$$-4Bt+At^3+Bt^2 = t+1$$

$$6A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{6}, \qquad 2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$y_p = \left(\frac{1}{6}\cdot t^3 + \frac{1}{2}\cdot t^2\right)\cdot e^t$$

$$y = c_1 e^t + c_2 t e^t + \left(\frac{1}{6}\cdot t^3 + \frac{1}{2}\cdot t^2\right)\cdot e^t = \left(c_1 + c_2 x^3 + \frac{1}{6}\cdot x^9 + \frac{1}{2}\cdot x^6\right)\cdot e^{x^3}.$$

5. **Pokazati da se diferencijalna jednačina $y'' + y'tgx - ycos^2x = sin^2xcos^2x$ smenom $sinx = t$ svodi na jednačinu sa konstantnim koeficijentima i naći njeno opšte rešenje.**

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = y_t' \cos x = y_t'\cdot\sqrt{1-\sin^2 x} = y_t'\cdot\sqrt{1-t^2}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = (y_t''\cdot\sqrt{1-t^2} + y_t'\cdot\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}})\cdot\sqrt{1-t^2} = y_t''(1-t^2) - y_t'\cdot t$$

$$y_t''(1-t^2) - y_t'\cdot t + y_t'\cdot\sqrt{1-t^2}\cdot\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - y(1-t^2) = t^2(1-t^2)$$

$$y_t'' - y = t^2$$

- $y_t'' - y = 0 \Rightarrow r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = -1,\ r_2 = 1$

$$y_h = c_1e^t + c_2e^{-t}$$

- $y_t'' - y = t^2$

$$t^2 = e^{\alpha t}[P_n(t)\cos\beta t + Q_m(t)\sin\beta t] \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 0,\ P_n(t) = t^2$$
$$\alpha + i\beta = 0 \Rightarrow r = 0,\ k = 2$$

$$y_p = At^2 + Bt + C,\ y_p' = 2At + B,\ y_p'' = 2A$$

$$2A - At^2 - Bt - C = t^2$$
$$A = -1,\ B = 0,\ 2A - C = 0 \Rightarrow C = -2$$
$$y_p = -t^2 - 2$$
$$y = c_1e^t + c_2e^{-t} - t^2 - 2, \qquad y = c_1e^{\sin x} + c_2e^{-\sin x} - \sin^2 x - 2.$$

6. **Pokazati da se diferencijalna jednačina $(xy'' + y')xln^2x + y = ln^2lnx$ smenom $x = x(t)$ može svesti na jednačinu sa konstantnim koeficijentima i naći njeno opšte rešenje.**

$$y' = \frac{y_t'}{x_t'},\ y'' = \frac{y_t''}{(x_t')^2} - \frac{y_t'\cdot x_t''}{(x_t')^3}$$

$$\left[x\left(\frac{y_t''}{(x_t')^2} - \frac{y_t'\cdot x_t''}{(x_t')^3}\right) + \frac{y_t'}{x_t'}\right]\cdot x\ln^2 x + y = \ln^2 \ln x$$

$$\frac{x^2\ln^2 x}{(x_t')^2}\cdot y_t'' + \frac{(x_t')^2 - x\cdot x_t''}{(x_t')^3}\cdot x\ln^2 x\cdot y_t' + y_t = \ln^2 \ln x$$

Kako je uz y broj 1, to da bi diferencijalna jednačina bila sa konstantnim koeficijentima treba da je

$$\frac{x^2\ln^2 x}{(x_t')^2} = c_1 \Rightarrow \frac{x\ln x}{x_t'} = \pm\sqrt{c_1} = c \Rightarrow x_t' = \frac{x\ln x}{c} = c_2 x\ln x,\quad c_2 = \frac{1}{c},$$

$$x_t'' = \frac{dx_t'}{dt} = \frac{dx_t'}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = c_2(\ln x + 1)x_t' = c_2^2 x\ln^2 x + c_2^2 x\ln x$$

$$\frac{(x_t')^2 - x\cdot x_t''}{(x_t')^3}x\ln^2 x = \frac{c_2^2x^2\ln^2 x - c_2^2x^2\ln^2 x - c_2^2x^2\ln x}{c_2^3x^3\ln^3 x}x\ln^2 x = -\frac{1}{c_2}$$

Polazna jednačina se transformiše u jednačinu $c_1y_t'' - \frac{1}{c_2}y_t' + y_t = \ln^2\ln x$. Uzmimo da je $c_1 = 1$ i $c_2 = 1$.

$$x_t' = x\ln x \Rightarrow \frac{dx}{x\ln x} = dt \Rightarrow \int\frac{dx}{x\ln x} = \int dt \Rightarrow \ln(\ln x) = t \Rightarrow \ln x = e^t \Rightarrow x = e^{e^t}$$

$$\ln^2\ln x = \ln^2 e^t = t^2$$

Primetimo da je $\ln x > 0$ zbog oblasti definisanosti diferencijalne jednačine.

Sada se polazna diferencijalna jednačina svodi na $y_t'' - y_t' + y_t = t^2$.

- $y_t'' - y_t' + y_t = 0$

$$r^2 - r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ r_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$e^{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)t} = e^{\frac{1}{2}t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t),$$

$$R_e\left\{e^{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)t}\right\} = e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t,\ I_m\left\{e^{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)t}\right\} = e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$y_h = c_1e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

- $y_t'' - y_t' + y_t = t^2$

$$t^2 = e^{\alpha t}[P_m(t)\cos\beta t + Q_n(t)\sin\beta t] \Rightarrow \alpha = \beta = 0,\ P_m(t) = t^2$$

$$\alpha + \beta i = 0 \Rightarrow r = 0,\ k = m = 2$$

$$y_p = At^2 + Bt + C,\ y_p' = 2At + B,\ y_p'' = 2A$$

$$2A - 2At - B + At^2 + Bt + C = t^2 \Rightarrow A = 1,\ B = 2,\ C = 0$$

$$y_p = t^2 + 2t$$

$$y = c_1\cdot e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + t^2 + 2t$$

$$y = \left[c_1\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(\ln x)\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\ln(\ln x)\right)\right]\sqrt{\ln x} + \ln^2(\ln x) + 2\ln(\ln x).$$

7. **Data je diferencijalna jednačina $(2x-x^2)y''+(1-x)y'+y=x$. Odrediti bar jednu, dva puta diferencijabilnu funkciju f, tako da se smenom $f(x)=t$ jednačina svodi na jednačinu sa konstantnim koeficijentima, a zatim naći opšte rešenje date jednačine za $x\in(0,2)$.**

$$y'=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=y_t'\cdot f'\,,\ y''=\frac{dy_t'}{dx}\cdot f'+y_t'\cdot f''=\frac{dy_t'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\cdot f'+y_t'f''=y_t''f'^2+y_t'f''$$

$$(2x-x^2)f'^2y_t''+((2x-x^2)f''+(1-x)f')y_t'+y_t=x$$

Kako uz y stoji broj 1, sledi da i uz y'' treba da bude konstanta, pa je $(2x-x^2)f'^2=c$.

$$(2x-x^2)f'^2=c\Rightarrow f'^2=\frac{c}{2x-x^2}\Rightarrow f'=\frac{c_1}{\sqrt{2x-x^2}}\quad,\ c_1=\sqrt{c}$$

$$f'=\frac{c_1}{\sqrt{2x-x^2}}\Rightarrow f=c_1\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=c_1\arcsin(x-1)+c_2$$

$$f''=-\frac{c_1}{2}\cdot\frac{2-2x}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}=c_1\frac{x-1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$$

$$(2x-x^2)\cdot c_1\frac{x-1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}+(1-x)\frac{c_1}{\sqrt{2x-x^2}}=0.$$

Za svako c polazna jednačina se transformiše u jednačinu $cy_t''+y=x$. Uzmimo da je $c_1=1$ i $c_2=0$.

$t=\arcsin(x-1)\Leftrightarrow x=\sin t+1$.

Sada se polazna diferencijalna jednačina svodi na $y''+y=\sin t+1$

- $y''+y=0$

  $r^2+1=0\Rightarrow r_1=i\,,\ r_2=-i$

  $e^{r_1t}=e^{it}=\cos t+i\sin t$

  $y_h=c_1\sin t+c_2\cos t$

- $y''+y=1$

  $\alpha=0\,,\ \beta=0\,,\ P_n(t)=1\,,\ \alpha+\beta i=0\Rightarrow r=0\,,\ k=0$

  $y_{p_1}=A\,,\ y_{p_1}'=y_{p_1}''=0\Rightarrow A=1$

- $y''+y=\sin t$

  $\sin t=e^{\alpha t}[\,P_n(t)\cos\beta t+Q_m(t)\sin\beta t\,]\Rightarrow\alpha=0\,,\ \beta=1\,,\ P_n(t)=0\,,\ Q_m(t)=1$

  $\alpha+\beta i=i\Rightarrow r=1\,,\ k=0$

  $y_{p_2}=t(A\sin t+B\cos t)$

  $y_{p_2}'=A\sin+B\cos t+At\cos t-Bt\sin t=(A-Bt)\sin t+(B+At)\cos t$

  $y_{p_2}''=-B\sin t+(A-Bt)\cos t+A\cos t-(B+At)\sin t=(-2B+At)\sin t+(2A-Bt)\cos t$

  $(-2B+2At)\sin t+2A\cos t=\sin t\Rightarrow A=0\,,\ B=-\dfrac{1}{2}$

$$y(t)=c_1\sin t+c_2\cos t-\frac{1}{2}t\cos t+1$$
$$\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-(x-1)^2}=\sqrt{2x-x^2}$$
$$y=c_1(x-1)+\sqrt{2x-x^2}\,(c_2-\frac{1}{2}\arcsin(x-1))+1.$$

8. **Naći tri puta diferencijabilnu funkciju** $z=f(\frac{x}{y})$, $x,y>0$ **koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu** $x^2y^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+3xy^3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^2(3y+4x)\frac{\partial z}{\partial y}-2x^2z=x^2e^{\frac{x}{y}}\sin\frac{x}{y}$.

$$\frac{x}{y}=t,\ z=f(t)$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=z_t'\cdot t_x'=\frac{1}{y}\cdot z_t',\ \frac{\partial z}{\partial y}=z_t'\cdot t_y'=-\frac{x}{y^2}\cdot z_t'$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{y}\cdot z_t')=-\frac{1}{y^2}\cdot z_t'+\frac{1}{y}z_t''(-\frac{x}{y^2})=-\frac{1}{y^2}z_t'-\frac{x}{y^3}z_t''$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{y}\cdot z_t''\cdot t_x'=\frac{1}{y^2}\cdot z_t'',\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=\frac{1}{y^2}\cdot z_t'''\cdot t_x'=\frac{1}{y^3}\cdot z_t'''$$
$$x^2y^3\frac{1}{y^3}\cdot z_t'''+3xy^3(-\frac{1}{y^2}z_t'-\frac{x}{y^3}z_t'')-(3y^3+4xy^2)(-\frac{x}{y^2}z_t')-2x^2z=x^2e^{\frac{x}{y}}\sin\frac{x}{y}$$
$$x^2z_t'''-3xyz_t'-3x^2z_t''+3xyz_t'+4x^2z_t'-2x^2z=x^2e^{\frac{x}{y}}\sin\frac{x}{y}$$
$$z_t'''-3z_t''+4z_t'-2z=e^t\sin t$$

- $z_t'''-3z_t''+4z_t'-2z=0\ \Rightarrow\ r^3-3r^2+4r-2=0$

$$(r-1)(r^2-2r+2)=0\ \Rightarrow\ r_1=1$$
$$r^2-2r+2=0\ \Rightarrow\ r_2=1+i,\ r_3=1-i$$
$$e^{(1+i)t}=e^t\cdot e^{it}=e^t(\cos t+i\sin t),\ R_e\left\{e^{(1+i)t}\right\}=e^t\cos t,\ I_m\left\{e^{(1+i)t}\right\}=e^t\sin t$$
$$z_h=c_1e^t+c_2e^t\cos t+c_3e^t\sin t$$

- $z_t'''-3z_t''+4z_t'-2z=e^t\sin t$

$$e^t\sin t=e^{\alpha t}[P_m(t)\cos\beta t+Q_n(t)\sin\beta t]\Rightarrow\alpha=1,\ \beta=1,\ P_m(t)=0,\ Q_n(t)=1$$
$$\alpha+i\beta=1+i\Rightarrow r=1,\ k=0$$
$$z_p=t\cdot e^t[\,A\cos t+B\sin t\,]$$
$$z_p'=e^t[\,t(A\cos t+B\sin t)+A\cos t+B\sin t+t(-A\sin t+B\cos t)\,]=$$
$$=e^t[(A+(A+B)t)\cos t+(B+(-A+B)t)\sin t]$$

$$z_p'' = e^t[A+(A+B)t)\cos t + (B+(-A+B)t)\sin t + (A+(A+B)t)(-\sin t) + (A+B)\cos t +$$
$$+(B+(-A+B)t)\cos t + (-A+B)\sin t] = e^t[(2A+2B+2Bt)\cos t + (-2A+2B-2At)\sin t]$$
$$z_p''' = e^t[\,(2A+2B+2Bt)\cos t + (-2t+2B-2At)\sin t + (2A+2B+2Bt)(-\sin t) + 2B\cos t +$$
$$+(-2A+2B-2At)\cos t - 2A\sin t\,] = e^t[\,(6B+(-2A+2B)t)\cos t + (-6A+(-2A-2B)t\sin t\,]$$
$$e^t[(6B+(-2A+2B)t)\cos t + (-6A+(-2A-2B)t)\sin t - 3(2A+2B+2Bt)\cos t -$$
$$-3(-2A+2B-2At)\sin t + 4(A+(A+B)t)\cos t + 4(B+(-A+B)t)\sin t) - 2t(A\cos t + B\sin t)] =$$
$$= e^t \sin t$$
$$(-2A+4At)\cos t - 2B\sin t = \sin t$$
$$A = 0\,,\; -2B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$
$$z_p = -\frac{t}{2}e^t \sin t$$
$$z = z_h + z_p = c_1 e^t + c_2 e^t \cos t + c_3 e^t \sin t - \frac{t}{2}e^t \sin t$$
$$z = c_1 e^{\frac{x}{y}} + c_2 e^{\frac{x}{y}} \cos\frac{x}{y} + c_3 e^{\frac{x}{y}} \sin\frac{x}{y} - \frac{x}{2y} e^{\frac{x}{y}} \sin\frac{x}{y}\,.$$

9. Naći dva puta diferencijabilnu funkciju $z = f(x^2+y^2)$, nad oblašću $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{y^2-x^2}{x(x^2+y^2)}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}z = \frac{2y^2}{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)\,.$$

$$x^2+y^2 = t\,,\; z = f(t)$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_t'\cdot 2x\,,\; \frac{\partial z}{\partial y} = f_t'\cdot 2y\,,\; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2(f_t''\cdot y\cdot 2y + f_t') = 2f_t' + 4y^2 f_t''$$
$$2f_t' + 4y^2 f_t'' + \frac{y^2-x^2}{x(x^2+y^2)}2x\cdot f_t' + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}f = \frac{2y^2}{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)$$
$$4y^2 f_t'' + 2\cdot\frac{y^2-x^2+x^2+y^2}{x^2+y^2}\cdot f_t' + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}f = \frac{2y^2}{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)$$
$$4f_t'' + \frac{4f_t'}{t} + \frac{2f_t}{t^2} = \frac{2}{t}\ln(t)$$

$2t^2 f_t'' + 2tf_t' + f_t = t\ln t$ (Ojlerova diferencijalna jednačina)

$t = e^s$, $s = \ln t$, $t > 0$, $\quad f_t' = e^{-s}f_s'$, $f_t'' = e^{-2s}(f_s'' - f_s')$

$$2e^{2s}\cdot e^{-2s}(f_s'' - f_s') + 2e^s e^{-s} f_s' + f_s = se^s$$
$$2f_s'' + f_s = se^s$$

- $2f_s'' + f_s = 0$

$2r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = \frac{i}{\sqrt{2}},\ r_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}}$

$e^{r_1 s} = e^{\frac{s}{\sqrt{2}}i} = \cos\frac{s}{\sqrt{2}} + i\sin\frac{s}{\sqrt{2}},\ R_e\{e^{r_1 s}\} = \cos\frac{s}{\sqrt{2}},\ I_m\{e^{r_1 s}\} = \sin\frac{s}{\sqrt{2}}$

$f_h = c_1\cos\frac{1}{\sqrt{2}}s + c_2\sin\frac{1}{\sqrt{2}}s$

- $2f_s'' + f = se^s$

$se^s = e^{\alpha s}[P_n(s)\cos\beta s + Q_m(s)\sin\beta s] \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = 0,\ P_n(s) = s$

$\alpha + \beta i = 1 \Rightarrow r = 0,\ k = 1$

$f_p = (As + B)e^s,\ f_p' = (As + A + B)e^s,\ f_p'' = (As + 2A + B)e^s$

$2As + 4A + 2B + As + B = s \Rightarrow A = \frac{1}{3},\ B = -\frac{4}{9}$

$f_p = (\frac{1}{3}s - \frac{4}{9})e^s$

$f(s) = c_1\cos\frac{1}{\sqrt{2}}s + c_2\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot s + (\frac{1}{3}s - \frac{4}{9})e^s$

$f = c_1\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(x^2+y^2)) + c_2\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}\ln((x^2+y^2)) + (\frac{1}{3}\ln(x^2+y^2) - \frac{4}{9})(x^2+y^2)$.

10. Naći tri puta diferencijabilnu funkciju $f = f(xy)$ koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu $x^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + 2y\frac{\partial f}{\partial y} - 8f = x^2y^2$, za $x > 0$ i $y > 0$.

$xy = t,\ f = f(t)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = f_t'\cdot t_y' = x\cdot f_t',\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = f_t' + x\cdot f_t''\cdot y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_t'\cdot t_x' = y\cdot f_t',\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y\cdot f_t''\cdot y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^3} = y^3\cdot f_t'''$

$x^3y^3f_t''' + xy\cdot(xy\cdot f_t'' + f_t') + 2yx\cdot f_t' - 8f_t = x^2y^2$

$t^3f_t''' + t^2f_t'' + 3t\cdot f_t' - 8f_t = t^2$ (Ojlerova diferencijalna jednačina)

$t = e^z \Rightarrow z = \ln t$

$f_t' = e^{-z}f_z',\ f_t'' = e^{-2z}(f_z'' - f_z'),\ f_t''' = e^{-3z}(f_z''' - 3f_z'' + 2f_z')$

$e^{3z}e^{-3z}(f_z''' - 3f_z'' + 2f_z') + e^{2z}e^{-2z}(f_z'' - f_z') + 3e^ze^{-z}f_z' - 8f_z = e^{2z}$

$f_z''' - 2f_z'' + 4f_z' - 8f_z = e^{2z}$

- $f_z''' - 2f_z'' + 4f_z' - 8f_z = 0$

$r^3 - 2r^2 + 4r - 8 = 0 \Rightarrow (r-2)(r^2+4) = 0 \Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = 2i,\ r_3 = -2i$

$e^{2iz} = \cos 2z + i\sin 2z,\ R_e\{e^{2iz}\} = \cos 2z,\ I_m\{e^{2iz}\} = \sin 2z$

$f_{zh} = c_1 e^{2z} + c_2\cos 2z + c_3 \sin 2z$

- $f_z''' - 2f_z'' + 4f_z' - 8f_z = e^{2z}$

$e^{2z} = e^{\alpha z}[P_m(z)\cos\beta z + Q_n(z)\sin\beta z] \Rightarrow \alpha = 2,\ \beta = 0,\ P_m(z) = 1$

$\alpha + \beta i = 2 \Rightarrow r = 1,\ k = m = 0$

$f_{zp} = Aze^{2z},\ f_{zp}' = Ae^{2z} + 2Aze^{2z} = (A + 2Az)e^{2z}$

$f_{zp}'' = (2A + 2A + 4Az)e^{2z} = (4A + 4Az)e^{2z}$

$f_{zp}''' = (4A + 8A + 8Az)e^{2z} = (12A + 8Az)e^{2z}$

$12A + 8Az - 8A - 8Az + 4A + 8Az - 8Az = 1 \Rightarrow 8A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{8}$

$f_{zp} = \frac{1}{8}ze^{2z}$

$f_z = c_1e^{2z} + c_2\cos 2z + c_3\sin 2z + \frac{1}{8}ze^{2z}$

$t = e^z,\ z = \ln t,\ t = xy,\ e^z = xy,\ z = \ln xy$

$f = c_1x^2y^2 + c_2\cos(2\ln xy) + c_3\sin(2\ln xy) + \frac{1}{8}(xy)^2\ln xy$.

11. Prelaskom na inverznu funkciju funkcije $y = y(x)$ rešiti diferencijalnu jednačinu $y^3y'y''' - 3y^3(y'')^2 - 3y^2(y')^2y'' - 7y(y')^4 + y^2(1 + 3\ln y)(y')^5 + 8x(y')^5 = 0$.

$y' = \frac{1}{x'},\ y'' = -\frac{x''}{(x')^3},\ y''' = \frac{3(x'')^2}{(x')^5} - \frac{x'''}{(x')^4}$

$$y^3\frac{1}{x'}\frac{3(x'')^2}{(x')^5} - y^3\frac{1}{x'}\frac{x'''}{(x')^4} - 3y^3\frac{(x'')^2}{(x')^6} + 3y^2\frac{x''}{(x')^5} - 7y\frac{1}{(x')^4} + y^2(1 + 3\ln y)\frac{1}{(x')^5} + 8x\frac{1}{(x')^5} = 0$$

$y^3x''' - 3y^2x'' + 7yx' - 8x = y^2(1 + 3\ln y)$ (Ojlerova diferencijalna jednačina)

$y = e^t \Rightarrow t = \ln y$

Primetimo da je zbog oblasti definisanosti diferencijalne jednačine $y > 0$.

$x' = e^{-t}x_t',\ x'' = e^{-2t}(x_t'' - x_t'),\ x''' = e^{-3t}(x_t''' - 3x_t'' + 2x_t')$

$e^{3t}e^{-3t}(x_t''' - 3x_t'' + 2x_t') - 3e^{2t}e^{-2t}(x_t'' - x_t') + 7e^te^{-t}x_t' - 8x_t = e^{2t}(1 + 3t)$

$x_t''' - 6x_t'' + 12x_t' - 8x_t = (3t + 1)\cdot e^{2t}$

- $x_1''' - 6x_1'' + 12x_1' - 8x_1 = 0$

$r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0 \;\Rightarrow\; (r-2)^3 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = 2$

$x_h = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_3 t^2 e^{2t}$

- $x_1''' - 6x_1'' + 12x_1' - 8x_1 = (3t+1)\cdot e^{2t}$

$(3t+1)\cdot e^{2t} = e^{\alpha t}[P_m(t)\cos\beta t + Q_n(t)\sin\beta t] \;\Rightarrow\; \alpha = 2\,,\ \beta = 0\,,\ P_m(t) = 3t+1$

$\alpha + \beta i = 2 \Rightarrow r = 3\,,\ k = m = 1$

$x_p = t^3(At+B)\cdot e^{2t} = (At^4 + Bt^3)\cdot e^{2t}\,,\ x_p' = \left[2At^4 + (4A+2B)t^3 + 3Bt^2\right]\cdot e^{2t}$

$x_p'' = \left[4At^4 + (16A+4B)t^3 + (12A+12B)t^2 + 6Bt\right]\cdot e^{2t}$

$x_p''' = \left[8At^4 + (48A+8B)t^3 + (72A+36B)t^2 + (24A+36B)t + 6B\right]\cdot e^{2t}$

$$8At^4 + (48A+8B)t^3 + (72A+36B)t^2 + (24A+36B)t + 6B - 24At^4 - (96A+24B)t^3 -$$
$$-(72A+72B)t^2 - 36Bt + 24At^4 + (48A+24B)t^3 + 36Bt^2 - 8At^4 - 8Bt^3 = 3t+1$$

$24At + 6B = 3t + 1 \Rightarrow A = \frac{1}{8},\ B = \frac{1}{6}$

$x_p = (\frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{6}t^3)\cdot e^{2t}$

$x = x_h + x_p = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{6}t^3)\cdot e^{2t}$

$x(y) = (c_1 + c_2 \ln y + c_3 \ln^2 y + \frac{1}{8}\ln^4 y + \frac{1}{6}\ln^3 y)\cdot y^2.$