Информациони инжењеринг

Колоквијум I

1. На колико начина се 20 јабука може поделити Аци, Вуку, Тањи и Ани, ако Тања као најмлађа треба да добије бар три јабуке, а сви остали по бар две јабуке?
2. Нека су n и p ненегативни цели бројеви за које важи $n \geq p \geq 0$. Доказати да важи
$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$
3. У једној групи у забавишту има пет дечака. Васпитачица је једног дана сваком од дечака дала по једну играчку и то: тркачки аутомобил, камион, багер, ватрогасни камион и полицијски аутомобил. Одредити на колико начина васпитачица наредног дана може поделити дечацима играчке, ако ниједно дете није добило играчку са којом се играло претходног дана.
4. Решити рекурентну релацију $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 2^{n+2}$, где је $n \geq 0$, ако је познато да је $a_0 = 1$ и $a_1 = 3$.

Колоквијум II

1. Нека је G граф у ком за свака два непразна дисјунктна скупа чворова V_1 и V_2, за која важи $V_1 \cup V_2 = V(G)$, постоји грана у графу која повезује неки чвор из скупа V_1 са чвором из V_2. Доказати да је тада граф G повезан.
2. Нека је G стабло у ком сви невисећи чворови имају степен 4. Ако је k број невисећих чворова, доказати да тада граф G има $2k+2$ висећих чворова.
3. Испитати да ли је комлетан бипартитан граф $K_{4,6}$
   а) Ојлеров;
   б) Хамилтонов.

   Одговоре образложити!
4. Нека је G повезан планаран граф са 20 чворова. Ако граф G има седам висећих чворова, доказати да је тада број грана графа G највише 40.

1. На колико начина се 20 јабука може поделити Аци, Вуку, Тањи и Ани, ако Тања као најмлађа треба да добије бар три јабуке, а сви остали по бар две јабуке?

Нека је x_1 број јабука које је Тања добила, а x_2, x_3 и x_4 број јабука које су редом добили Аца, Вук и Ана.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_i \geq 2, \ i = 2,3,4$$

Уводимо смену $y_1 = x_1 - 3 \geq 0$

$y_i = x_i - 2 \geq 0, \ i = 2,3,4$

Добијамо једначину $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 20 - 3 - 3 \cdot 2 = 11$, која има $\binom{11+3}{3} = \binom{14}{3}$ решења у скупу ненегативних целих бројева.

2. Нека су n и p ненегативни цели бројеви за које важи $n \geq p \geq 0$. Доказати да важи

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Користећи Паскалов идентитет добијамо

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p+1} + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p} = \binom{n-2}{p+1} + \binom{n-2}{p} + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p} = \ldots = \binom{p+2}{p+1} + \binom{p+2}{p} + \binom{p+3}{p} + \ldots + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p}$$

$$= \binom{p+1}{p+1} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \binom{p+3}{p} + \ldots + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \binom{p+3}{p} + \ldots + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p}$$

Користимо $\binom{p+1}{p+1} = 1 = \binom{p}{p}$

II начин: Индукција по $n \geq 0$

Б.И. $n=0$

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!(0-0)!} = \frac{1}{1\cdot 1} = 1$$

$\binom{1}{1} = 1$ важи база индукције

И.Х. Претпоставимо да је тврђење тачно за $n=k$

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \ldots + \binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1}$$

И.К. Докажимо да тврђење важи и за $n=k+1$

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \ldots + \binom{k}{p} + \binom{k+1}{p} \overset{\text{И.Х.}}{=} \binom{k+1}{p+1} + \binom{k+1}{p} \overset{\text{П.И.}}{=} \binom{k+2}{p+1}$$

што је и требало доказати

3. У једној групи у забавишту има пет дечака. Васпитачица је једног дана сваком од дечака дала по једну играчку и то: тркачки аутомобил, камион, багер, ватрогасни камион и полицијски аутомобил. Одредити на колико начина васпитачица наредног дана може поделити дечацима играчке, ако ниједно дете није добило играчку са којом се играло претходног дана.

$N = 5!$ број начина да дечаци добију играчке

Означимо

S_i : i-то дете је добило играчку са којом се јуче играло

$$N(S_1' S_2' S_3' S_4' S_5') = N - \binom{5}{1} N(1) + \binom{5}{2} N(2) - \binom{5}{3} N(3) + \binom{5}{4} N(4) - \binom{5}{5} N(5)$$

$$= 5! - \binom{5}{1} 4! + \binom{5}{2} 3! - \binom{5}{3} 2! + \binom{5}{4} 1! - \binom{5}{5} N(5)$$

Како је $\binom{n}{i}(n-i)! = \frac{n!}{i!\,\cancel{(n-i)!}} \cdot \cancel{(n-i)!} = \frac{n!}{i!}$, решење можемо записати и као $5!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)$

$N(1) = 4!$

Ако је неко дете добило играчку од јуче, преостала деца могу добити играчке на $4!$ начина

Аналогно:

$N(2) = 3!$, $N(3) = 2!$, $\underline{N(4) = 1!}$

$N(5) = 1!$ ако су 4 дечака добила исту играчку као јуче, онда је и пети дечак добио своју играчку

4. Решити рекурентну релацију $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = \boxed{2^{n+2}}$, где је $n \geq 0$, ако је познато да је $a_0 = 1$ и $a_1 = 3$.

$4 \cdot 2^n$ нехомогена р.р.

Хомогени део: $a_{n+2}^{(h)} - 3a_{n+1}^{(h)} + 2a_n^{(h)} = 0$

Карактеристична једначина $t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2) = 0$

$a_n^{(h)} = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n = A + B \cdot 2^n$

Једно партикуларно решење: $a_n^{(p)} = C \cdot n \cdot 2^n$

$C \cdot (n+2) \cdot 2^{n+2} - 3 \cdot C \cdot (n+1) \cdot 2^{n+1} + 2 \cdot C \cdot n \cdot 2^n = 2^{n+2} \quad / : 2^n$

$4C(\cancel{n}+2) - 6C(\cancel{n}+1) + \cancel{2Cn} = 4$

$8C - 6C = 4 \Rightarrow C = 2$

$a_n^{(p)} = 2n \cdot 2^n = n \cdot 2^{n+1}$

Почетни услови:

$1 = a_0 = a_0^{(h)} + a_0^{(p)} = A + B + 0 \Rightarrow B = 1 - A$

$3 = a_1 = a_1^{(h)} + a_1^{(p)} = A + 2B + 4$

$A + 2 - 2A = -1$

$-A = -3$

$A = 3 \quad B = -2$

Решење: $a_n = 3 - 2^{n+1} + n \cdot 2^{n+1}$

$= 3 + (n-1) \cdot 2^{n+1}$

1. Нека је G граф у ком за свака два непразна дисјунктна скупа чворова V_1 и V_2, за која важи $V_1 \cup V_2 = V(G)$, постоји грана у графу која повезује неки чвор из скупа V_1 са чвором из V_2. Доказати да је тада граф G повезан.

Претпоставимо да је G неповезан. Узимамо, б.у.о., $\omega(G)=2$

Нека су G_1 и G_2 компоненте повезаности графа G, $V_1 = V(G_1)$, $V_2 = V(G_2)$

Како су G_1 и G_2 различите компоненте повезаности графа G, између њих не постоји ниједна грана, па немамо грану између V_1 и V_2 $\lightning$ (контрадикција са условом задатка)

Ако је $\omega(G) = k > 2$, онда узимамо $V_1 = V(G_1)$ и $V_2 = V(G) \setminus V_1 = V_2 \cup V_3 \cup \ldots \cup V_k$, где су G_i компоненте графа G, $i = 1, 2, \ldots, k$

2. Нека је G стабло у ком сви невисећи чворови имају степен 4. Ако је k број невисећих чворова, доказати да тада граф G има $2k+2$ висећих чворова.

Нека је $|V(G)|=n$

Означимо са n_1 број висећих чворова

$n = n_1 + k$

G стабло: $e = n-1 = n_1 + k - 1$

Основна теорема: $2e = \sum_{v \in V} d(v) = n_1 \cdot 1 + k \cdot 4$

$2n_1 + 2k - 2 = n_1 + 4k$

$n_1 = 4k - 2k + 2$

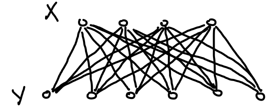
$n_1 = 2k + 2$

3. Испитати да ли је комлетан бипартитан граф $K_{4,6}$

а) Ојлеров;

б) Хамилтонов.

Одговоре образложити!



Нека је $V(K_{4,6}) = X \cup Y$, $|X| = 4$, $|Y| = 6$

а) Важи

$x \in X \quad d(x) = 6$

$y \in X \quad d(y) = 4$

Граф $K_{4,6}$ је повезан граф и сви чворови имају паран степен

$\Rightarrow K_{4,6}$ је Ојлеров граф

б) Уколико уклонимо све чворове скупа X, остају нам чворови скупа Y који су сада изоловани

Уклонили смо 4 чвора, а добили 6 компоненти повезаности

$\Rightarrow K_{4,6}$ није Хамилтонов граф

4. Нека је G повезан планаран граф са 20 чворова. Ако граф G има седам висећих чворова, доказати да је тада број грана графа G највише 40.

$n = |V(G)| = 20$

Означимо са V_1 скуп висећих чворова графа G

Посматрајмо граф $G' = G - V_1$ који је такође планаран граф

$n' = |V(G')| = 20 - 7 = 13$

Сада је $e' = |E(G')| \leq 3n' - 6 = 3 \cdot 13 - 6 = 33$

Добијамо $e = e' + 7 \leq 33 + 7 = 40$