

VEŽBE IZ ALGEBRE

**Arsić Dunja, Čolić Oravec Jelena,
Erić Mirjana, Janjoš Aleksandar, Kiss Maria,
Matić Zagorka, Prokić dr Ivan**

Katedra za matematiku
Fakultet tehničkih nauka



Novi Sad,
2020.

Relacije

Definicija 1. Binarna relacija ρ skupa A je bilo koji skup uređenih parova čije su koordinate iz A , tj. bilo koji podskup od A^2 .

Primer 1. Za svaki neprazan skup A važi da su $\emptyset \subseteq A^2$ i $A^2 \subseteq A^2$ binarne relacije (prazna i puna relacija).

Primer 2. Poznate relacije u geometriji su paralelnost, ortogonalnost, podudarnost, sličnost.

Neka je $\rho \subseteq A^2$. Relacija ρ je:

(R) *refleksivna* ako i samo ako $(\forall x \in A) (x, x) \in \rho$

(S) *simetrična* ako i samo ako $(\forall x, y \in A) (x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho$

(A) *antisimetrična* ako i samo ako $(\forall x, y \in A) ((x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho) \Rightarrow x = y$
 ako i samo ako $(\forall x, y \in A) ((x, y) \in \rho \wedge x \neq y) \Rightarrow (y, x) \notin \rho$

(T) *tranzitivna* ako i samo ako $(\forall x, y, z \in A) ((x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho) \Rightarrow (x, z) \in \rho$

(F) *funkcija* ako i samo ako $(\forall x, y, z \in A) ((x, y) \in \rho \wedge (x, z) \in \rho) \Rightarrow y = z$

Zadatak 1. Ispitati koje osobine imaju sledeće relacije skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$\rho_1 = \{(1, 1), (1, 2), (3, 4), (2, 3)\},$$

$$\rho_2 = \{(1, 1), (2, 2)\},$$

$$\rho_3 = \{(4, 5), (3, 4), (5, 3), (4, 3), (3, 3), (4, 4)\},$$

$$\rho_4 = \emptyset,$$

$$\rho_5 = A^2.$$

R S A T F

R S A T F

R S A T F

R S A T F

R S A T F

Rešenje:

Podvučena slova označavaju svojstvo koje dotična relacija ima.

ρ_1 (R) Pošto $(2, 2) \notin \rho_1$, ρ_1 nije refleksivna.

(S) Ne važi jer $(1, 2) \in \rho_1$ i $(2, 1) \notin \rho_1$.

(A) Jeste jer za sve $(x, y) \in \rho_1$ sa $x \neq y$ redom utvrđujemo da $(y, x) \notin \rho_1$.

(T) Nije jer $(1, 2) \in \rho_1$, $(2, 3) \in \rho_1$ i $(1, 3) \notin \rho_1$.

(F) Nije ni funkcija jer za 1 imamo $(1, 2) \in \rho_1$ i $(1, 1) \in \rho_1$.

ρ_2 (R) nije refleksivna jer $(3, 3) \notin \rho_2$.

Preostale četiri osobine, (S), (A), (T) i (F), sigurno ima jer u relaciji nema parova $(x, y) \in \rho_2$ sa $x \neq y$, te ne može da postoji ni jedna smetnja za te četiri osobine.

ρ_3 (R) Nije jer $(1, 1) \notin \rho_3$.

(S) Nije jer $(4, 5) \in \rho_3$ i $(5, 4) \notin \rho_3$.

(A) Nije jer sadrži parove $(4, 3) \in \rho_3$ i $(3, 4) \in \rho_3$.

(T) Ne važi jer $(3, 4) \in \rho_3$, $(4, 5) \in \rho_3$, ali $(3, 5) \notin \rho_3$.

(F) Nije ni funkcija jer imamo $(4, 5) \in \rho_3$ i $(4, 4) \in \rho_3$

ρ_4 (R) Ne važi, pošto ne sadrži niti jedan uređen par.

Za (S), (A), (T) i (F) iskaz $(x, y) \in \emptyset$ je uvek netačan, što nam u definicijama ostalih osobina daje tačne implikacije, pa ρ_4 zadovoljava te osobine.

ρ_5 (R), (S) i (T) jesu zadovoljeni, jer relacija sadrži sve uređene parove elemenata iz A.

(A) Nije jer $(1, 2) \in \rho_5$ i $(2, 1) \in \rho_5$.

(F) Nije jer imamo $(1, 1) \in \rho_5$ i $(1, 2) \in \rho_5$.

□

U geometrijskoj interpretaciji $\rho \subseteq \mathbb{R}^2$ je:

- *refleksivna* ako i samo je prava $y = x$ podskup grafika od ρ ;
- *simetrična* ako i samo ako je grafik od ρ osno simetričan u odnosu na pravu $y = x$;
- *antisimetrična* ako i samo ako ne postoji par tačaka koje pripadaju grafiku od ρ i simetrične su u odnosu na pravu $y = x$;
- *funkcija* ako i samo ako prave paralelne sa y-osom seku grafik od ρ u najviše jednoj tački.

★ Za tranzitivnost ne postoji geometrijska interpretacija što se tiče relacija na skupu realnih brojeva.

Zadatak 2. Ispitati koje osobine imaju sledeće relacije skupa \mathbb{R} :

$$\rho_1 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

$$\rho_2 = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

$$\rho_3 = \{(x, y) \mid \max\{x, y\} = 1, x, y \in \mathbb{R}\},$$

$$\rho_4 = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

$$\rho_5 = \{(x, y) \mid x \cdot y > 0, x, y \in \mathbb{R}\},$$

$$\rho_6 = \{(x, y) \mid x + y = 1, x, y \in \mathbb{R}\},$$

$$\rho_7 = \mathbb{N}^2,$$

$$\rho_8 = \rho_5 \cup \{(0, 0)\}.$$

$$R \quad S \quad \underline{A} \quad T \quad \underline{F}$$

$$R \quad \underline{S} \quad A \quad T \quad \underline{F}$$

$$R \quad \underline{S} \quad A \quad T \quad F$$

$$R \quad S \quad \underline{A} \quad T \quad \underline{F}$$

$$R \quad \underline{S} \quad A \quad \underline{T} \quad F$$

$$R \quad \underline{S} \quad A \quad T \quad \underline{F}$$

$$R \quad \underline{S} \quad A \quad \underline{T} \quad F$$

$$\underline{R} \quad \underline{S} \quad A \quad \underline{T} \quad F$$

Rešenje: Podvučena slova označavaju svojstvo koje dotična relacija ima. Osobine ovih relacija možemo ispitivati posmatrajući njihove grafike i geometrijske interpretacije. Isprekidanom linijom označavaćemo ključnu pravu $x = y$.

ρ_1 predstavlja kvadratnu funkciju.

(R) Nije, pošto seče pravu $x = y$ u samo dve tačke $(0, 0)$ i $(1, 1)$.

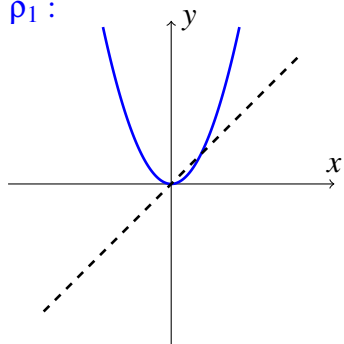
(S) Nije, jer grafik kvadratne funkcije nije simetričan u odnosu na pravu $x = y$.

(A) Jeste, jer nema simetričnih tačaka u odnosu na pravu $x = y$ koje pripadaju grafiku ρ_1 .

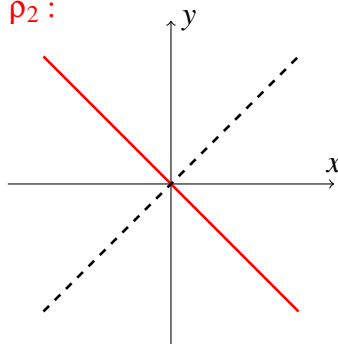
(T) Nije, jer $(2, 4), (4, 16) \in \rho_1$, a $(2, 16) \notin \rho_1$.

(F) Jeste funkcija.

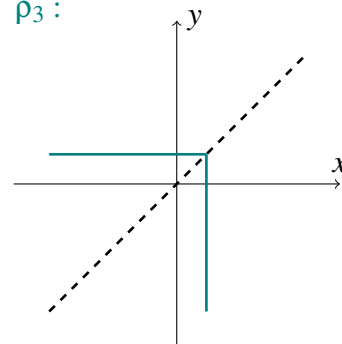
ρ_1 :



ρ_2 :



ρ_3 :



ρ_2 Grafik relacije je prava $y = -x$.

(R) Nije refleksivna, pošto pravu $x = y$ seče samo u tački $(0,0)$.

(S) Važi, grafik je u potpunosti simetričan u odnosu na pravu $y = x$ (za svaku tačku $(x, -x)$ simetričan par je $(-x, x)$).

(A) Ne važi pošto su tačke grafika $(x, -x) \in \rho_2$ simetrične sa $(-x, x) \in \rho_2$ u odnosu na pravu $y = x$.

(T) Nije zadovoljena, jer imamo $(1, -1), (-1, 1) \in \rho_2$, ali $(1, 1) \notin \rho_2$.

(F) Jeste funkcija.

ρ_3 Grafik relacije sadrži delove dve prave. Prvi deo je prava $y = 1$ za sve $x \in (-\infty, 1]$, odnosno sve tačke oblika $(x, 1)$, $x \in (-\infty, 1]$, a drugi deo je prava $x = 1$ za sve $y \in (-\infty, 1]$, odnosno sve tačke oblika $(1, y)$, $y \in (-\infty, 1]$.

(R) Nije, pošto seče pravu $y = x$ samo u tački $(1, 1)$.

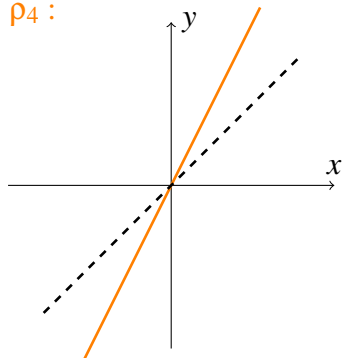
(S) Važi, grafik je simetričan u odnosu na $y = x$ (ako (x, y) pripada $x = 1$, onda (y, x) pripada $y = 1$ i obratno).

(A) Pošto je grafik simetričan u odnosu na $y = x$, ne važi.

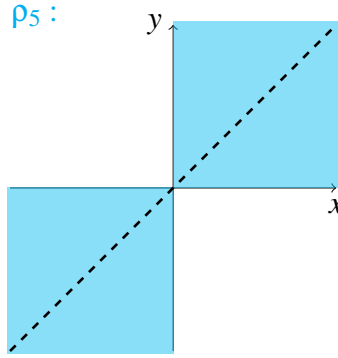
(T) Pošto $(0, 1), (1, 0) \in \rho_3$, a $(0, 0) \notin \rho_3$ relacija nije tranzitivna.

(F) Relacija ρ_3 nije ni funkcija, jer sadrži deo prave $x = 1$, a to je prava paralelna y-osi.

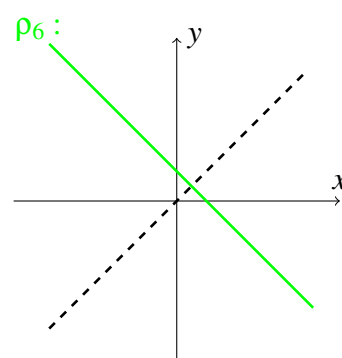
ρ_4 :



ρ_5 :



ρ_6 :



ρ_4 je linearna funkcija, tj. grafik je prava $y = 2x$.

(R) Ne važi, pošto pravu $y = x$ seče u samo jednoj tački.

(S) Ne važi. Na primer, $(1, 2) \in \rho_4$, a $(2, 1) \notin \rho_4$.

(A) Zadovoljava, što se vidi na grafiku i odnosu sa pravom $y = x$.

(T) Nije, jer $(1, 2), (2, 4) \in \rho_4$, ali $(1, 4) \notin \rho_4$.

(F) Jeste funkcija.

ρ_5 Grafik relacije obuhvata sve tačke prvog i trećeg kvadranta, pošto su to tačke sa koordinatama istog znaka, čiji je proizvod pozitivan.

(R) Ne važi, jer prvi i treći kvadrant sadrže sve tačke prave $y = x$ osim koordinatnog početka.

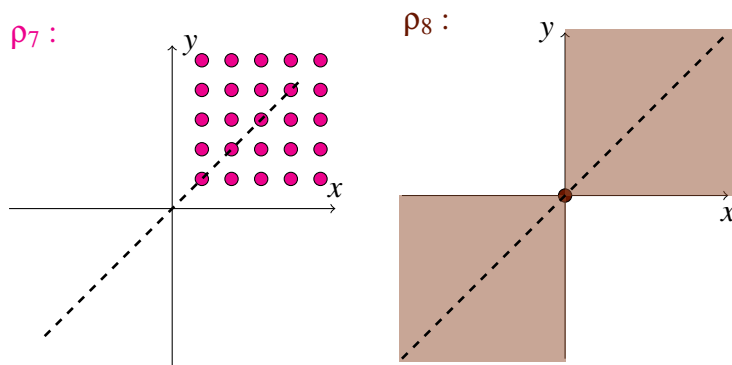
(S) i (A) ako (x, y) pripada prvom ili trećem kvadrantu, onda i (y, x) pripada istom kvadrantu, pa jeste simetrična ali nije antisimetrična.

(T) Važi, jer ako $(x, y), (y, z) \in \rho_5$ tada su x, y i z realni brojevi istog znaka, pa $(x, z) \in \rho_5$.

(F) Nije funkcija, jer bilo koja prava paralelna y-osi, osim nje same, seče prvi ili treći kvadrant u beskonačno mnogo tačaka.

ρ_6 je još jedna linearna funkcija, prava $y = 1 - x$, ali kao i ρ_2 ima negativan vodeći član. Njen grafik ispunjava iste uslove, pa osobine refleksivnosti, simetričnosti, antisimetričnosti i funkcije nije potrebno detaljnije objašnjavati.

(T) Ne zadovoljava jer $(1, 0), (0, 1) \in \rho_6$, ali $(1, 1) \notin \rho_6$.



ρ_7 Grafik obuhvata sve tačke čije su koordinate prirodni brojevi.

(R) Nije zadovoljena, jer grafik ne sadrži celu pravu $y = x$, npr. $(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin \rho_7$.

(S) i (A) grafik relacije ρ_7 je simetričan u odnosu na pravu $y = x$, pa je relacija simetrična i nije antisimetrična (tačke prvog kvadranta sa prirodnim koordinatama).

(T) Zadovoljava, jer ako $(x, y), (y, z) \in \rho_7$ sledi da su x, y i z prirodni brojevi, pa je očigledno da $(x, z) \in \rho_7$.

(F) Nije, jer bilo koja prava $x = n$ za $n \in \mathbb{N}$ sadrži beskonačno mnogo tačaka relacije ρ_7 .

ρ_8 ima isti grafik kao i relacija ρ_5 uz dodatak koordinatnog početka.

(R) Sada cela prava $y = x$ pripada grafiku ρ_8 , pa refleksivnost važi.

(S), (A), (T) i (F) Pošto je koordinatni početak tačka prave $y = x$, njegovim dodavanjem ne narušavamo niti jednu preostalu osobinu relacije ρ_5 , pa je ρ_8 simetrična i tranzitivna, a nije antisimetrična i funkcija.

□

Relacija ekvivalencije

Definicija 2. Za relaciju $\rho \subseteq A^2$ kažemo da je **relacija ekvivalencije** ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna (RST).

★ Relacija ekvivalencije ρ definisana na skupu A vrši particiju (razbijanje) skupa A , tj. jednoznačno određuje neke neprazne podskupove skupa A od kojih su svaka 2 disjunktna, a njihova unija je ceo skup A . Ovi podskupovi se nazivaju **klase ekvivalencije**, a jednoj klasi pripadaju svi oni elementi koji su međusobno u relaciji. Skup svih klasa ekvivalencije relacije ρ na skupu A naziva se **faktor skup** i označava se sa A/ρ .

Zadatak 3. Dokazati da je $\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (2,1), (3,4), (4,3)\}$ relacija ekvivalencije skupa $A = \{1,2,3,4,5\}$ i napisati particiju koja joj odgovara.

Rešenje: Relacija ρ je refleksivna pošto imamo sve uređene parove oblika (x,x) , $x \in A$. Simetričnost je zadovoljena jer imamo dva para simetričnih uređenih parova $(3,4), (4,3)$ i $(1,2), (2,1)$. Tranzitivnost se jednostavno dokazuje direktnom proverom.

Ako sa C_x označimo klasu ekvivalencije koja sadrži $x \in A$, onda imamo

$$C_1 = C_2 = \{1,2\}, \quad C_3 = C_4 = \{3,4\} \quad \text{i} \quad C_5 = \{5\}.$$

Prema tome, particija koja odgovara relaciji ρ je

$$A/\rho = \{C_1, C_3, C_5\} = \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5\}\}.$$

□

Zadatak 4. Za particiju $A_1 = \{1,2,3\}, A_2 = \{4,5\}, A_3 = \{6\}$ skupa $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ napisati relaciju ekvivalencije $\rho \subseteq A^2$ čiji je faktor skup $A/\rho = \{A_1, A_2, A_3\}$.

Rešenje: Elementi koji pripadaju jednoj klasi ekvivalencije su svi međusobno u relaciji, te je stoga tražena relacija ekvivalencije

$$\rho = A_1^2 \cup A_2^2 \cup A_3^2,$$

odnosno

$$\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2), (4,4), (5,5), (4,5), (5,4), (6,6)\}.$$

□

Zadatak 5. Napisati sve relacije ekvivalencije na skupu $A = \{1,2,3\}$.

Rešenje: Da bismo odredili sve relacije ekvivalencije na skupu A potrebno je naći sve particije ovog skupa, koje će predstavljati faktor skupove za tražene relacije.

Moguće particije skupa A su:

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{1,2\}, \{3\}\}, \{\{1,3\}, \{2\}\}, \{\{2,3\}, \{1\}\}, \{\{1,2,3\}\},$$

a odgovarajuće relacije nalazimo kao u prethodnom zadatku.

□

Relacija poretka

Definicija 3. Za relaciju $\rho \subseteq A^2$ kažemo da je **relacija poretka** ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna (RAT). Uređeni par (A, ρ) naziva se **parcijalno uređen skup**.

★ Za parcijalno uređen skup (A, ρ) i $a \in A$ važi

- a je **minimalni element** skupa ako i samo ako niko nije u relaciji sa njim osim njega samog. $\left[\neg(\exists x \in A)(x \rho a \wedge x \neq a) \right]$
- a je **maksimalni element** skupa ako i samo ako on nije u relaciji ni sa kim osim sa sobom. $\left[\neg(\exists x \in A)(a \rho x \wedge x \neq a) \right]$
- a je **najmanji element** ako i samo ako je on u relaciji sa svakim elementom. $\left[(\forall x \in A) a \rho x \right]$
- a je **najveći element** ako i samo ako je svaki element u relaciji sa njim. $\left[(\forall x \in A) x \rho a \right]$

★ Ukoliko postoji najmanji (najveći) element, tada je on ujedno i jedinstveni minimalni (maksimalni), dok obrnuto ne važi.

★ Haseov dijagram za parcijalno uređen skup (A, ρ) crtamo poštujući sledeća pravila:

- ako je $a \rho b$ za $a, b \in A$ i $a \neq b$ tada je tačka b iznad a ;
- ako postoji $c \in A$ tako da je $a \rho c$ i $c \rho b$ onda ne postoji duž između a i b , u suprotnom postoji;
- ako $a \not\rho b$ tada ne postoji duž koja spaja a i b i ne postoji rastuća putanja od a do b ;
- a i b su u relaciji ako i samo ako postoji rastuća putanja od a do b .

Zadatak 6. Na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ data je binarna relacija

$$\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (5, 5)\}.$$

Dokazati da je ρ relacija poretka, nacrtati Haseov dijagram uređenog skupa (A, ρ) i odrediti minimalni, maksimalni, najmanji i najveći element.

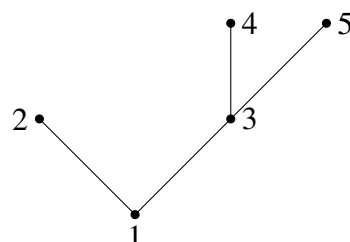
Rešenje: Jednostavno se direktnom proverom dokazuje da je ρ relacija poretka na skupu A .

MIN: 1

MAX: 2, 4, 5

Najmanji: 1

Najveći: /



□

★ Relacija \leq (manje ili jednako) je relacija poretka na skupu prirodnih brojeva \mathbb{N} jer

(R) $(\forall a \in \mathbb{N}) a \leq a$

(A) $(\forall a, b \in \mathbb{N}) a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$

(T) $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$

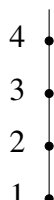
Zadatak 7. Nacrtati Haseov dijagram parcijalno uređenog skupa (\mathbb{N}, \leq) i naći minimalne, maksimalne, najmanji i najveći element.

Rešenje: MIN: 1

MAX: /

Najmanji: 1

Najveći: /



□

★ Relacija $|$ (deli) je takođe jedna relacija poretka na skupu \mathbb{N} , definisana sa

$$m|n \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) n = k \cdot m.$$

Uzmimo proizvoljne $a, b, c \in \mathbb{N}$:

(R) $a|a$ jer je $a \cdot 1 = a$

(A) Neka $a|b$ i $b|a$. Tada po definiciji relacije $|$ postoje $k, l \in \mathbb{N}$ takvi da $b = k \cdot a$ i $a = l \cdot b$, odakle zaključujemo da je $b = k \cdot l \cdot b$, pa je iz $k \cdot l = 1$ jasno da kao prirodni brojevi k i l moraju biti 1, što daje $a = b$.

(T) Neka $a|b$ i $b|c$. Tada po definiciji relacije $|$ postoje $k, l \in \mathbb{N}$ takvi da $b = k \cdot a$ i $c = l \cdot b$, odakle je $c = l \cdot k \cdot a$, pa za $n = k \cdot l$ imamo da $c = n \cdot a$, odnosno da $a|c$.

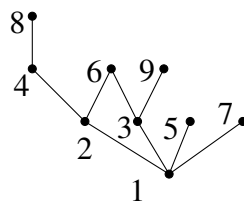
Zadatak 8. Nacrtati Haseov dijagram parcijalno uređenog skupa $(\mathbb{N}, |)$ i naći minimalne, maksimalne, najmanji i najveći element.

Rešenje: MIN: 1

MAX: /

Najmanji: 1

Najveći: /



□

★ Relacija \subseteq (podskup) je relacija poretka na partitivnom skupu nekog skupa $A \neq \emptyset$ jer

(R) $(\forall X \in P(A)) X \subseteq X$

(A) $(\forall X, Y \in P(A)) X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \Rightarrow X = Y$

(T) $(\forall X, Y, Z \in P(A)) X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$

Zadatak 9. Za skup $A = \{1, 2, 3\}$ odrediti minimalni, maksimalni, najmanji i najveći element, i nacrtati Haseov dijagram sledećih parcijalno uređenih skupova

a) $(P(A), \subseteq)$

b) $(P(A) \setminus \{A\}, \subseteq)$

c) $(P(A) \setminus \{\emptyset, A, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}, \subseteq)$

Rešenje:

a) Za troelementni skup A njegov partitivni skup je

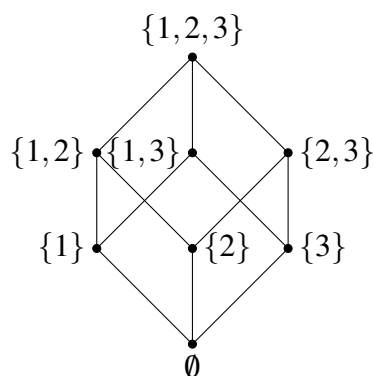
$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

MIN: \emptyset

MAX: $\{1, 2, 3\} = A$

Najmanji: \emptyset

Najveći: $\{1, 2, 3\} = A$



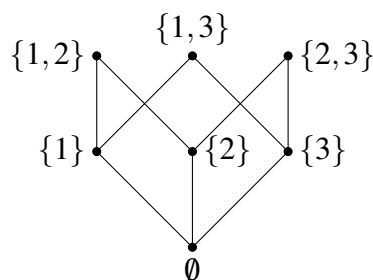
b) $P(A) \setminus \{A\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}.$

MIN: \emptyset

MAX: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$

Najmanji: \emptyset

Najveći: /



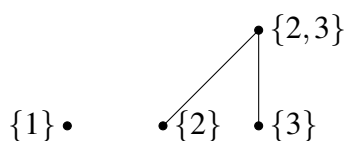
c) $P(A) \setminus \{\emptyset, A, \{1, 2\}, \{1, 3\}\} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}.$

MIN: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$

MAX: $\{1\}, \{2, 3\}$

Najmanji: /

Najveći: /





Zadatak 10. Za relaciju $|$ i sledeće podskupove A skupa \mathbb{N} nacrtati Haseov dijagram i odrediti najveći, najmanji, maksimalne i minimalne elemente:

a) $A = \mathbb{N} \setminus \{1\}$

e) $A = \mathbb{N}_{100} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 100\}$

b) $A = D_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$
(delitelji broja 42)

f) $A = \mathbb{N}_{100} \setminus \{1\}$

c) $A = D_{42} \setminus \{1\}$

g) $A = \mathbb{N}_{2^n} = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

d) $A = D_{42} \setminus \{1, 42\}$

h) $A = \mathbb{N}_{2^n} \cup \{5, 10\}$

Rešenje:

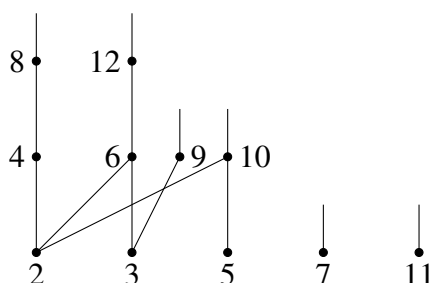
a) $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |)$

MIN: svi prosti brojevi

MAX: /

Najmanji: /

Najveći: /



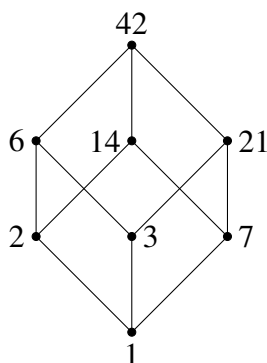
b) $(D_{42}, |)$

MIN: 1

MAX: 42

Najmanji: 1

Najveći: 42



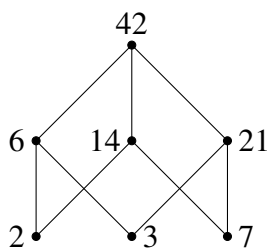
c) $(D_{42} \setminus \{1\}, |)$

MIN: 2, 3, 7

MAX: 42

Najmanji: /

Najveći: 42



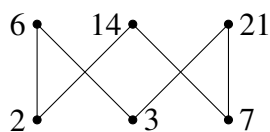
d) $(D_{42} \setminus \{1, 42\}, |)$

MIN: 2, 3, 7

MAX: 6, 7, 21

Najmanji: /

Najveći: /



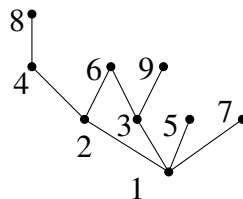
e) $(\mathbb{N}_{100}, |)$

MIN: 1

MAX: 51, 52, 53, ..., 100

Najmanji: 1

Najveći: /



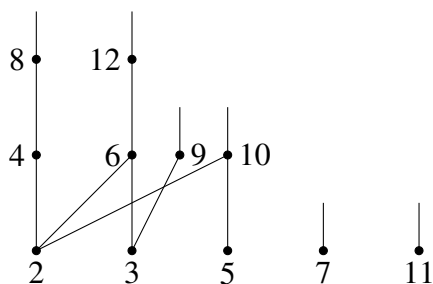
f) $(\mathbb{N}_{100} \setminus \{1\}, |)$

MIN: svi prosti brojevi < 100 .

MAX: 51, 52, 53, ..., 100

Najmanji: /

Najveći: /



g) $(\mathbb{N}_{2^n}, |)$

MIN: 2

MAX: /

Najmanji: 2

Najveći: /



h) $(\mathbb{N}_{2^n} \cup \{5, 10\}, |)$

MIN: 2, 5

MAX: 10

Najmanji: /

Najveći: /

