ODREĐENI INTEGRAL

22. april 2024.

Pojam određenog integrala

Posmatramo $[a, b] \subset \mathbb{R}$

- Podela intervala: $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
- skup svih podela je $\mathcal{P}^*[a, b]$
- $P' \subset P \Rightarrow P$ je finija od P', $\quad P'$ je grublja od P
- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ dužina intervala $[x_{i-1}, x_i]$
- parametar podele P je $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i = \lambda(P)$
- $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, skup izabranih tačaka $\xi \in \mathbb{R}^n$ podele P je

$$\xi(P) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \ldots, n\}$$

- podela intervala sa izabranom tačkom (P, ξ)
- $\mathcal{P} = \mathcal{P}[a, b]$ skup svih takvih podela

Definicija

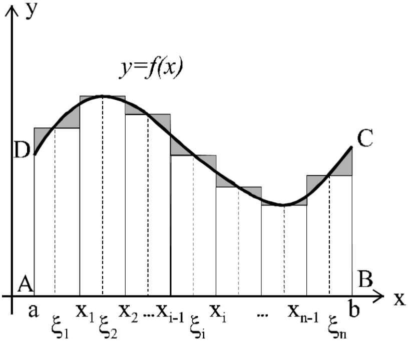
Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i neka je (P, ξ) podela sa izabranom tačkom intervala $[a, b]$. Zbir

$$I(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

se naziva integralna ili Rimanova suma funkcije $f(x)$ za datu podelu (P, ξ).

MOTIVACIJA 1:

Površina krivolinijskog trapeza je približno jednaka integralnoj sumi:



MOTIVACIJA 2: Na pravolinijskom putu AB deluje promenljiva sila $\vec{F}$ na materijalnu tačku. Zavisnost intenziteta sile od puta je $F = F(s)$. Uočimo podelu $P = \{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ sa izabranom tačkom ξ intervala, tj. puta $[a, b]$ (a i b su koordinate tačaka A i B respektivno). Rad sile $\vec{F}$ na intervalu $[s_{i-1}, s_i]$ je približno $\sum\limits_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta s_i, \Delta s_i = s_i - s_{i-1}$. Dakle, rad sile intenziteta F konstantnog pravca na pravolinijskom putu približno je jednak integralnoj sumi.

Definicija

Broj I je limes (granična vrednost) integralnih suma $I(f, P, \xi)$ funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kada $\lambda(P) \to 0$, što pišemo

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} I(f, P, \xi) = I,$$

ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takvo da za svaku podelu P i svaku izabranu tačku $\xi \in \xi(P)$, kada je $\lambda(P) < \delta$, važi nejednakost

$$|I(f, P, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Ako postoji

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} I(f, P, \xi) = I$$

tada

- $f(x)$ je integrabilna u Rimanovom smislu nad $[a, b]$
- I se naziva Rimanov ili određeni integral funkcije $f(x)$ nad $[a, b]$,

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

- a je donja granica integrala, b je gornja granica integrala
- $f(x)$ je podintegralna funkcija
- $f(x)\, dx$ je podintegralni izraz
- x je integraciona promenljiva
- $\mathcal{R}[a, b]$ skup svih integrabilnih funkcija nad [a,b] (u Rimanovom smislu)

Primer

Pokazati da je $I = \int_a^b c dx = c(b-a)$.

Posmatrajmo funkciju $f(x) = c$, $x \in [a,b]$. Neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $\xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ proizvoljna podela sa izabranom tačkom. Tada je $f(\xi_i) = c$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pa je

$$I(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c(b-a).$$

Dakle,

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} I(f, P, \xi) = c(b-a),$$

tj.

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$

Primer

Pokazati da za Dirihleovu funkciju $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ *ne postoji određeni integral ni nad jednim zatvorenim intervalom* $[a, b]$.

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ proizvoljni, $a < b$. Uzmimo proizvoljnu podelu $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervala $[a, b]$ i dve izabrane tačke

$$\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) \quad \text{i} \quad \xi' = (\xi_0', \xi_1', \ldots, \xi_n'),$$

takve da je $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ iracionalan, a $\xi_i' \in [x_{i-1}, x_i]$ racionalan broj, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tada

$$I(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0, \quad I(f, P, \xi') = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a,$$

pa $\lim\limits_{\lambda(P) \to 0} I(f, P, \xi)$ ne postoji.

Teorema

Potreban uslov da funkcija $f(x)$ bude integrabilna nad intervalom $[a, b]$ je da funkcija $f(x)$ bude ograničena nad $[a, b]$.

Dokaz. Neka je funkcija $f(x)$ definisana i neograničena nad intervalom $[a, b]$. Za proizvoljnu podelu $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ postoji interval

$$[x_{k-1}, x_k], \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

takav da funkcija $f(x)$ na njemu nije ograničena.
Na intervalima

$$[x_{i-1}, x_i], \quad i \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$$

proizvoljno izaberimo tačke ξ_i i sa I^k označimo zbir

$$I^k = \sum_{i \neq k} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Neka je M proizvoljno velik broj. Zbog neograničenosti funkcije $f(x)$ nad intervalom $[x_{k-1}, x_k]$, postoji tačka $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, takva da je

$$|f(\xi_k)| \geq \frac{|I^k| + M}{\Delta x_k}, \quad \text{odakle sledi da je} \quad |f(\xi_k)|\Delta x_k \geq |I^k| + M.$$

Za integralnu sumu sada važi

$$|I(f, P, \xi)| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \right| = \left| I^k + f(\xi_k)\Delta x_k \right| \geq |f(\xi_k)|\, \Delta x_k - |I^k| \geq M.$$

Izaberimo niz $\{M_k\}$ takav da $M_k \to \infty$, kada $k \to \infty$. Za datu podelu P i za svako $k \in \mathbb{N}$ postoji ξ tako da je $I(f, P, \xi) \geq M_k$, pa

$$\lim_{\lambda(P) \to 0} I(f, P, \xi)$$

ne postoji i $f(x)$ nije integrabilna. $\square$

Neka je $f(x)$ definisana i ograničena funkcija nad $[a, b]$ i $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ njegova podela. Uvedimo oznake

- $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$
- $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$
- $s = s(f, P) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ donja Darbuova suma za $f(x)$ nad $[a, b]$
- $S = S(f, P) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ gornja Darbuova suma za $f(x)$ nad $[a, b]$

Teorema

Za integralnu i Darbuove sume ograničene funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a, b]$ važi

- $m(b-a) \leq s(f, P) \leq I(f, P, \xi) \leq S(f, P) \leq M(b-a)$
- $\inf\limits_{\xi \in \xi(P)} I(f, P, \xi) = s(f, P); \quad \sup\limits_{\xi \in \xi(P)} I(f, P, \xi) = S(f, P).$

Takođe, važe tvrđenja:

1) $P \subset P' \Rightarrow s(f,P) \leq s(f,P') \leq S(f,P') \leq S(f,P)$

Dokaz. Tvrđenje je dovoljno pokazati u slučaju da se P i P' razlikuju za jednu tačku. Neka je $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ i $P' = P \cup \{x'\}$, $x_{k-1} < x' < x_k$. Neka je $s^k = \sum\limits_{i \neq k} m_i \Delta x_i$. Tada je

$$\begin{aligned} s(f,P) &= s^k + m_k(x_k - x_{k-1}) \\ s(f,P') &= s^k + m_k'(x' - x_{k-1}) + m_k''(x_k - x'), \end{aligned}$$

gde je $m_k' = \inf\limits_{x \in [x_{k-1}, x']} f(x)$, $\quad m_k'' = \inf\limits_{x \in [x', x_k]} f(x)$.

Kako je $m_k = \min\{m_k', m_k''\}$, to je

$$\begin{aligned} m_k(x_k - x_{k-1}) &= m_k(x_k - x' + x' - x_{k-1}) \\ &= m_k(x_k - x') + m_k(x' - x_{k-1}) \\ &\leq m_k''(x_k - x') + m_k'(x' - x_{k-1}), \end{aligned}$$

odakle sledi $s(f,P) \leq s(f,P')$ (ostalo slično). □

2) $s(f,P) \leq S(f,P')$ za proizvoljne podele P, P'

Dokaz. Za proizvoljne podele P i P' intervala $[a,b]$ neka je $P'' = P \cup P'$. Tada je $P \subset P''$ i $P' \subset P''$ pa je

$$s(f,P) \leq s(f,P'') \leq S(f,P'') \leq S(f,P'). \qquad \square$$

3) Postoje $\sup\limits_{P\in\mathcal{P}^*} s(f,P)$ i $\inf\limits_{P\in\mathcal{P}^*} S(f,P)$.

Dokaz. Skup

$$\{s(f,P) : P \in \mathcal{P}^*\}$$

je ograničen sa gornje strane, a skup

$$\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}^*\}$$

je ograničen sa donje strane, pa zbog prethodno pokazane nejednakosti $\sup\limits_{P\in\mathcal{P}^*} s(f,P)$ i $\inf\limits_{P\in\mathcal{P}^*} S(f,P)$ postoje. $\square$

- $\sup\limits_{P \in \mathcal{P}^*} s(f, P) = I_*$ je donji Darbuov integral za $f(x)$ nad $[a, b]$

- $\inf\limits_{P \in \mathcal{P}^*} S(f, P) = I^*$ je gornji Darbuov integral za $f(x)$ nad $[a, b]$

- Za svaku podelu P intervala $[a, b]$ važi

$$m(b-a) \leq s(f, P) \leq I_* \leq I^* \leq S(f, P) \leq M(b-a).$$

- Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena nad zatvorenim intervalom $[a, b]$ tada je

$$I_* = \lim_{\lambda(P) \to 0} s(f, P) \leq I^* = \lim_{\lambda(P) \to 0} S(f, P).$$

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je integrabilna ako i samo ako važi $I_* = I^*$.

Teorema

Neka je funkcija $f(x)$ ograničena nad intervalom $[a, b]$. Funkcija $f(x)$ je integrabilna nad $[a, b]$ ako i samo ako

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall P \in \mathcal{P}^*)\ \lambda(P) < \delta \Rightarrow S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

Dokaz.($\Leftarrow$) Iz pretpostavke i niza nejednakosti $s(f, P) \leq I_* \leq I^* \leq S(f, P)$ dobijamo da se donji i gornji Darbuov integral funkcije $f(x)$ poklapaju: $I_* = I^*$. Označimo njihovu zajedničku vrednost sa I. Tada je

$$s(f, P) \leq I \leq S(f, P).$$

Sa druge strane, za proizvoljnu tačku ξ podele P važi

$$s(f, P) \leq I(f, P, \xi) \leq S(f, P).$$

Iz poslednje dve relacije i početne pretpostavke sledi da je $|I(f, P, \xi) - I| < \varepsilon$ ako je podela $P \in P^*[a, b]$ takva da je $\lambda(P) < \delta$, što znači da je funkcija $f(x)$ integrabilna i $I = \int\limits_a^b f(x)dx$. $\square$

Definicija

- *Ako je funkcija* $f(x)$ *definisana u tački* a *onda je*

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

- *Ako je* $a < b$ *i* $\int_a^b f(x)dx$ *postoji onda je*

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Integrabilnost nekih klasa funkcija

Teorema

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna nad* $[a, b]$ *ona je nad tim intervalom i integrabilna.*

Dokaz. Iz neprekidnosti funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a, b]$ sledi njena uniformna neprekidnost, što znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da

$$x', x'' \in [a, b], |x' - x''| < \delta \Rightarrow \left|f(x') - f(x'')\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Izaberimo proizvoljnu podelu $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ intervala $[a, b]$ za koju je $\lambda(P) < \delta$. Tada važi $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad i = 1, 2, \dots, n$ jer postoje tačke $\xi_i^1, \xi_i^2 \in [x_{i-1}, x_i]$ sa osobinom $f(\xi_i^2) = M_i$, $f(\xi_i^1) = m_i$, pa je $M_i - m_i = f(\xi_i^2) - f(\xi_i^1) < \frac{\varepsilon}{b-a}$. To znači da je

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Još dve klase integrabilnih funkcija:

Teorema

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ograničena nad intervalom* $[a, b]$ *i nad njim ima konačan broj prekida ona je nad tim intervalom i integrabilna.*

Teorema

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *monotona nad intervalom* $[a, b]$ *ona je nad tim intervalom i integrabilna.*

Napomena

Ograničena funkcija može da ima i beskonačan broj prekida, a da bude integrabilna, jer važi

Teorema Lebega: *Ograničena funkcija* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *je integrabilna nad zatvorenim intervalom* $[a, b]$ *ako i samo ako je skup prekida date funkcije nad zatvorenim intervalom* $[a, b]$ *mere nula.*

Rimanova funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \mathrm{nzd}(\mathrm{m}, \mathrm{n}) = 1 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

neprekidna je za svako x iracionalan broj, a prekidna u svim racionalnim tačkama, mere nula, pa je integrabilna, na primer nad zatvorenim intervalom $[-1, 1]$.

Napomena

Posmatrajmo skup racionalnih tačaka iz zatvorenog intervala $[0, 1]$ *poređan u niz* $A = \{a_n\}$ *i neka je* $a_1 = 0$. *Funkcija*

$$f(x) = \sum_{a_n < x} \frac{1}{n^2}, \quad x \in [0, 1]$$

je očigledno monotono rastuća, ograničena i naprekidna u svim iracionalnim tačkama datog intervala, a prekidna u svim racionalnim tačkama iz posmatranog intervala, te je time integrabilna nad posmatranim intervalom $[0, 1]$.

Primer 17.1. Naći $\int_0^1 x\,dx$ po definiciji.

Rešenje. Podintegralna funkcija $f(x) = x$ je neprekidna, pa je integrabilna. Za podelu P intervala $[0,1]$ uzmimo **ekvidistantnu podelu** ($\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$) i izaberimo tačku $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, pri čemu je $\xi_i = \frac{i}{n}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tada je

$$I(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2n^2},$$

pa je $\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n}{2n^2} = \frac{1}{2}$. Δ

Teorema

1. *Ako je* $f(x) = 0$ *za svako* $x \in [a, b]$, *tada je* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 0dx = 0$.
2. *Ako postoji konačan skup različitih tačaka* $c_1, \ldots, c_k \in [a, b]$ *takav da je*

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, b] \setminus \{c_1, \ldots, c_k\} \\ A_i, & x = c_i,\ i \in \{1, 2, \ldots k\},\ A_i \neq 0 \end{cases}$$

tada je $\int_a^b g(x)\, dx = 0$.

Veza između određenog i neodređenog integrala

Njutn-Lajbnicova formula

Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna nad zatvorenim intervalom $[a,b]$ i ako funkcija $f(x)$ ima primitivnu funkciju $F(x)$ nad intervalom $[a,b]$, tada je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Dokaz. Realna funkcija $F(x)$ nad intervalom $[a,b]$ ima izvod (pa je i neprekidna) nad intervalom $[a,b]$. Neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ proizvoljna podela intervala $[a,b]$. Primenom Lagranžove teoreme na svakom podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ dobijamo

$$\begin{array}{lclcll}
F(x_1) - F(a) & = & F'(\xi_1)(x_1 - a) & = & f(\xi_1)\Delta x_1, & \xi_1 \in (a, x_1) \\
F(x_2) - F(x_1) & = & F'(\xi_2)(x_2 - x_1) & = & f(\xi_2)\Delta x_2, & \xi_2 \in (x_1, x_2) \\
 & \vdots & & & & \\
F(b) - F(x_{n-1}) & = & F'(\xi_n)(b - x_{n-1}) & = & f(\xi_n)\Delta x_n, & \xi_n \in (x_{n-1}, b)
\end{array}$$

Ako saberemo gornje jednakosti, dobijamo

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

čija je desna strana jedna integralna suma $I(f, P, \xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ funkcije $f(x)$.
Kako je funkcija $f(x)$ integrabilna nad intervalom $[a, b]$ to je

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{\lambda(P)\to 0} I(f, P, \xi) \\ &= \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda(P)\to 0} (F(b) - F(a)) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

$\square$

Primer

Odrediti $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

Posmatrajmo niz s opštim članom $a_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$. Kako je $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}$ integralna suma za funkciju $f(x)=\frac{1}{1+x}$ nad zatvorenim intervalom $[0,1]$, ako posmatramo ekvidistantnu podelu $P=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n-1}{n},1\}$ zatvorenog intervala $[0,1]$, $\Delta x_i=\frac{1}{n}$, $\xi_i=\frac{i}{n}$, to je

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2.$$

Primer

Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} \cos \dfrac{1}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

nije integrabilna nad zatvorenim intervalom $[-1, 1]$, *a nad tim intervalom jedna njena primitivna funkcija je na primer funkcija*

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

Neke osobine određenog integrala

- Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$, tj. $f \in \mathcal{R}[a, b]$, tada je ona integrabilna i nad svakim zatvorenim podintervalom $[c, d]$ intervala $[a, b]$.

- (linearnost integrala) Ako $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ tada i $f \pm g \in \mathcal{R}[a, b]$, $\alpha f \in \mathcal{R}[a, b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ i važi
  - $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$
  - $\int\limits_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx.$

- Ako je $f \in \mathcal{R}[a, b]$ i ako se funkcija $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ razlikuje u konačnom broju tačaka od funkcije $f(x)$ tada je i $g \in \mathcal{R}[a, b]$ i važi

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx.$$

- Ako $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ tada $f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$, $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$, $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{R}[a,b]$ uz uslov $|f(x)| \geq \alpha > 0$ za $x \in [a,b]$.

- (aditivnost integrala) Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ krajevi tri zatvorena intervala. Ako je f integrabilna na najvećem od ovih intervala onda je ona integrabilna i na ostala dva. Pri tom važi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- (monotonost i procena integrala) Ako je $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $a < b$ i $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$ tada je i

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

- Ako je $f(x) \leq g(x),\ x \in [a,b],\ a < b,\ f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ onda je

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx.$$

- Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna i nenegativna (nepozitivna) funkcija. Ako postoji tačka $c \in [a,b]$ takva da je $f(c) > 0$ ($f(c) < 0$) u kojoj je funkcija neprekidna ako $c \in (a,b)$, a neprekidna sa leve (desne) strane ako je $c = b$ ($c = a$), onda je

$$\int\limits_a^b f(x)dx > 0 \quad \left(\int_a^b f(x)dx < 0\right).$$

- Ako je $f \in \mathcal{R}[a,b],\ a < b$ onda važi nejednakost

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Primer

Naći određeni integral funkcije $f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0 \\ 5 & , \quad x > 0 \end{cases}$ *nad* $[-1, 2]$.

Funkcija $f(x)$ je neprekidna u svim tačkama intervala $[-1, 2]$ osim u 0 gde ima prekid prve vrste, pa je ona integrabilna nad $[-1, 2]$ ali nema primitivnu funkciju pa se ne može primeniti Njutn-Lajbnicova formula.

Kako je $\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx = \int\limits_{-1}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{2} f(x)dx$ i

$\int\limits_{-1}^{0} f(x)dx = \int\limits_{-1}^{0} xdx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}$, $\int\limits_{0}^{2} f(x)dx = \int\limits_{0}^{2} 5dx = 5x \Big|_{0}^{2} = 10$

($f(x) = x$ i $g(x) = 5$ se razlikuju nad intervalom $[0, 2]$ samo u jednoj tački jer je $f(0) = 0$, $g(0) = 5$, pa imaju isti određeni integral), to je

$$\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx = -\frac{1}{2} + 10 = \frac{19}{2}.$$

Teorema o srednjoj vrednosti

Neka $f, g \in \mathrm{R}[a, b]$, $a < b$, $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ *i* $g(x) \geq 0 (g(x) \leq 0)$, *za* $x \in [a, b]$. *Tada postoji* $m \leq \eta \leq M$, *takvo da je*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \eta \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Ako je još i $f \in C^0[a, b]$ *(*$C^0[a, b]$ *je skup svih neprekidnih funkcija nad intervalom* $[a, b]$*), onda postoji* $c \in [a, b]$ *takvo da je*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Dokaz. Bez ograničenja opštosti može se pretpostaviti da je funkcija $g(x)$ nenegativna. Tada iz $m \le f(x) \le M$ sledi

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x), \quad x \in [a, b].$$

Integracijom se dobija

$$m \int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M \int_a^b g(x)dx, \quad x \in [a, b].$$

Ako je $\int_a^b g(x)dx = 0$, onda je $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, pa jednakost važi.

Ako je $\int_a^b g(x)dx > 0$, onda je $m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$, pa se može uzeti

$$\eta = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}. \qquad \square$$

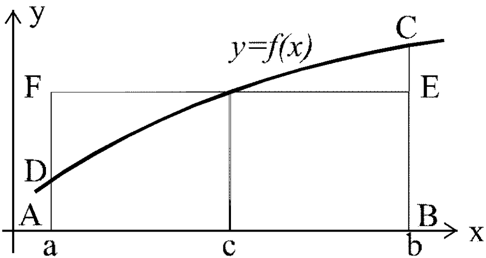
Posledica

Neka $f \in \mathrm{R}[a,b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. *Tada postoji* $m \le \eta \le M$, *takvo da je*

$$\int_a^b f(x)dx = \eta(b-a).$$

Ako je $f \in C^0[a,b]$ *onda postoji* $c \in [a,b]$ *takvo da je*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$



Određeni integral kao funkcija granice

$f(x)$ je integrabilna nad $[A, B]$, $a \in [A, B]$ proizvoljna tačka. Za $x \in [A, B]$:

- $I(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ je integral sa promenljivom gornjom granicom
- $I_1(x) = \int\limits_x^a f(t)dt$ je integral sa promenljivom donjom granicom

Teorema

Neka $f, g \in \mathrm{R}[A, B]$ *i* $I(x) = \int\limits_a^x f(t)dt,\ x \in [A, B],\ a \in [A, B]$. *Tada važi:*

1) $I(x)$ *je neprekidna funkcija nad* $[A, B]$
2) *Ako je funkcija* $f(x)$ *neprekidna u tački* $x \in (A, B]$ $(x \in [A, B))$ *sa leve (desne) strane, tada funkcija* $I(x)$ *ima levi (desni) izvod u tački* x. *Pri tome važi*

$$I'_-(x) = f(x), \quad (I'_+(x) = f(x)).$$

Dokaz. Dokazaćemo 2), za slučaj kad je funkcija $f(x)$ neprekidna nad intervalom $[A, B]$ i $x \in (A, B)$. Kako je

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{I(x+\Delta x) - I(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x},$$

to na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti za integrale, zbog neprekidnosti funkcije $f(x)$ sledi da postoji tačka $\xi \in [x, x+\Delta x] \subset [A, B]$, za $\Delta x > 0$, odnosno $\xi \in [x+\Delta x, x] \subset [A, B]$, za $\Delta x < 0$, tako da je

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi) \int\limits_{x}^{x+\Delta x} dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x f(\xi)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x).$$

$\square$

Za funkciju $I_1(x)$ pod istim uslovima važi

- $I_1(x)$ *je neprekidna nad intervalom* $[A, B]$,
- ${I_1}_-'(x) = (-I_-(x))' = -I_-'(x) = -f(x), x \in (A, B]$,
  ${I_1}_+'(x) = (-I_+(x))' = -I_+'(x) = -f(x), x \in [A, B)$.

Posledica

Ako je $f(x)$ *neprekidna funkcija nad* $[A, B]$ *tada funkcija* $I(x)$ *ima izvod nad intervalom* $[A, B]$, *pri čemu važi* $I'(x) = f(x)$, $x \in [A, B]$.

Posledica

Ako je funkcija $f(x)$ *neprekidna nad intervalom* I, *tada je funkcija* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, *pri čemu je* a *proizvoljna tačka iz intervala* I, *primitivna funkcija funkcije* $f(x)$ *nad* I.

Primer

Naći $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int\limits_1^x \frac{2+\ln t}{3+\ln t}dt}{x}$.

Kako je funkcija $f(x) = \dfrac{2+\ln x}{3+\ln x}$ neprekidna za $x \geq 1$, to postoji tačka $\xi \in [1, x]$ tako da je

$$\int\limits_1^x \frac{2+\ln t}{3+\ln t}dt = (x-1)\frac{2+\ln\xi}{3+\ln\xi}.$$

Kako je $f(x) = \dfrac{2+\ln x}{3+\ln x}$ monotono rastuća i $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+\ln x}{3+\ln x} = 1,\ f(1) = \dfrac{2}{3}$, sledi da $f(x) = \dfrac{2+\ln x}{3+\ln x} \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$, za $x \geq 1$.

Sledi da

$$\int_1^x \frac{2+\ln t}{3+\ln t} dt = (x-1)\frac{2+\ln \xi}{3+\ln \xi} \to \infty, \quad x \to \infty.$$

Primenom Lopitalovog pravila dobijamo da je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_1^x \frac{2+\ln t}{3+\ln t} dt}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2+\ln x}{3+\ln x}}{1} = 1.$$

$\square$

Parcijalna integracija i smena promenljive

Teorema

Neka funkcije $u(x)$, $v(x)$ imaju neprekidne izvode nad $[a, b]$. Tada važi

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Teorema

Neka je funkcija $f : [A, B] \to \mathbb{R}$ neprekidna, a funkcija $\varphi : [\alpha_0, \beta_0] \to [A, B]$ ima neprekidan izvod. Ako je $\alpha \in [\alpha_0, \beta_0]$, $\beta \in [\alpha_0, \beta_0]$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, onda važi jednakost

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Dokaz. neka je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$, $x \in [A, B]$. Za složenu funkciju $(F \circ \varphi)(t) = F(\varphi(t))$, $t \in [\alpha_0, \beta_0]$ imamo

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'_\varphi \cdot \varphi'_t = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Dakle, za $\alpha_0 \leq t \leq \beta_0$ funkcija $F(\varphi(t))$ je primitivna funkcija funkcije $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ pa je prema Njutn-Lajbnicovoj formuli

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Sa druge strane, iz $F'(x) = f(x)$ sledi

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

$\square$

POVRŠINA RAVNIH FIGURA

- pravougle koordinate: $y = f(x)$ je neprekidna i nenegativna za $x \in [a, b]$

$$P = \int_a^b f(x)\,dx$$

- parametarski oblik: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$
  - $\varphi(t)$ ima neprekidan izvod nad $[\alpha, \beta]$
  - $\varphi(t)$ monotono rastuća nad $[\alpha, \beta]$
  - $\psi(t)$ neprekidna nad $[\alpha, \beta]$
  - $\psi(t) \geq 0,\ t \in [\alpha, \beta]$

$$P = \int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

- polarne koordinate: $\rho = \rho(\varphi)$ neprekidna, $\alpha \leq \varphi \leq \beta,\ |\beta - \alpha| \leq 2\pi$

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi$$

DUŽINA LUKA RAVNE KRIVE

- pravougle koordinate: $y = f(x)$, ima neprekidan izvod nad $[a, b]$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

- parametarski oblik: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$
  - $\varphi(t), \psi(t)$ imaju neprekidan izvod nad $[\alpha, \beta]$
  - $\varphi'(t) > 0$ nad $[\alpha, \beta]$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\psi'^2(t) + \varphi'^2(t)}\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$$

- polarne koordinate: $\rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$, ρ ima neprekidan prvi izvod nad $[\alpha, \beta]$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi$$

ZAPREMINA OBRTNIH TELA

- pravougle koordinate: $y = f(x)$ neprekidna nad $[a, b]$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

- parametarski oblik: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$
    - $\varphi(t)$ ima neprekidan izvod nad $[\alpha, \beta]$
    - $\varphi(t)$ monotono rastuća nad $[\alpha, \beta]$
    - $\psi(t)$ neprekidna nad $[\alpha, \beta]$
    - $\psi(t) \geq 0,\ t \in [\alpha, \beta]$

$$V = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)\, dt$$

- polarne koordinate: $\rho = \rho(\varphi) \geq 0,\ \alpha \leq \varphi \leq \beta$, ρ ima neprekidan prvi izvod nad $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi$$

POVRŠINA OMOTAČA OBRTNIH TELA

- pravougle koordinate: $y = f(x) \geq 0$ i ima neprekidan prvi izvod nad $[a, b]$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

- parametarski oblik: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$
  - $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ imaju neprekidan prvi izvod nad $[\alpha, \beta]$
  - $\varphi'(t) > 0$ nad $[\alpha, \beta]$
  - $\psi(t) \geq 0,\ t \in [\alpha, \beta]$

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\psi'^2(t) + \varphi'^2(t)}\, dt$$

- polarne koordinate: $\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \leq \varphi \leq \beta \subset [0, \pi]$, ρ ima neprekidan prvi izvod nad $[\alpha, \beta]$

$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} \sin\varphi d\varphi$$