VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1. Vežbe IV.4

1.1. Jednačina sa konstantnim koeficijentima

Linearna diferencijalna jednačina je

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

i u ovom delu se bavimo jednačinama u slučaju da je $a_i(x) = a_i$, odnosno, kada su koeficijenti uz $y^{(i)}$ konstante, tj. jednačinama oblika

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = f(x).$$

Prvo ćemo posmatrati slučaj kada je $f(x) = 0$, tj. posmatraćemo homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima, odnosno jednačine oblika

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = 0.$$

Jednačina

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + ... + a_1r + a_0 = 0$$

se naziva karakteristična jednačina diferencijalne jednačine. Primetimo, karakterističnu jednačinu smo dobili iz diferencijalne jednačine tako što smo zamenili $y^{(i)}$ sa r^i. Karakteristična jednačina difrencijalne jednačine n-tog reda je polinom n-tog stepena, pa postoji n korena karakteristične jednačine, neka su to $r_1, r_2, ..., r_n$.

Takođe, imamo da za svako $k \in 1, 2, ...n$ važi da je $y = e^{r_k x}$ rešenje diferencijalne jednačine, jer je $y^{(i)} = r_k^i e^{r_k x}$, pa kad ubacimo u jednačinu imamo

$$r_k^n e^{r_k x} + a_{n-1}r_k^{n-1}e^{r_k x} + ... + a_1r_k e^{r_k x} + a_0 e^{r_k x} = 0.$$

Kada podelimo jednačinu sa $y = e^{r_k x}$ dobijamo karakterističnu jednačinu tj.

$$r_k^n + a_{n-1}r_k^{n-1} + ... + a_1r_k + a_0 = 0.$$

Fundamentalni skup rešenja zavisi od prirode korena karakteristične jednačine, pa razlikujemo:

a) Ako su svi koreni karakteristične jednačine realni i različiti tada je fundamentalni skup rešenja

$$\Phi = \{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, ..., e^{r_n x}\},$$

a opšte rešenje jednačine je

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{r_i x}.$$

Zadatak 1.1. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y''' - 3y'' + 2y' = 0.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je

$$r^3 - 3r^2 + 2r = 0,$$

čija su rešenja $r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = 2$, pa je fundamentalni skup $\Phi = \{e^{0x}, e^{1x}, e^{2x}\}$, a opšte rešenje je

$$y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x}.$$

b) Ako je r_i realan koren karakteristične jednačine višestrukosti $m > 1$, tada u fundamentalni skup rešenja ulaze i sledećih m funkcija

$$e^{r_ix}, xe^{r_ix}, x^2e^{r_ix}, ..., x^{m-1}e^{r_ix}.$$

Zadatak 1.2. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y^{iv} - 2y''' + 2y' - y = 0.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je

$$r^4 - 2r^3 + 2r - 1 = 0.$$

čija su rešenja $r_1 = -1, r_2 = r_3 = r_4 = 1$, pa je fundamentalni skup $\Phi = \{e^{-x}, e^x, xe^x, x^2e^x\}$, a opšte rešenje je

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3xe^x + c_4x^2e^x.$$

c) Neka je koren $r_j = \alpha_j + \beta_j i$ kompleksan koren karakteristične jednačine, tada je i $\overline{r_j} = \alpha_j - \beta_j i$ takođe koren. Za $y_j = e^{r_jx}$ imamo

$$\begin{aligned} y_j &= e^{r_jx} = e^{(\alpha_j+\beta_ji)x} = e^{\alpha_jx}e^{\beta_jxi} \\ &= e^{\alpha_jx}\left(\cos\beta_jx + i\sin\beta_jx\right) \\ &= \underbrace{e^{\alpha_jx}\cos\beta_jx}_{Re\{y_j\}} + i\underbrace{e^{\alpha_jx}\sin\beta_jx}_{Im\{y_j\}}. \end{aligned}$$

Nas interesuju samo realna rešenja, pa zbog toga u fundamentalni skup rešenja ulaze $Re\{y_j\}$ i $Im\{y_j\}$. Primetimo da je $Re\{e^{\overline{r_j}x}\} = Re\{y_j\}$ i $Im\{e^{\overline{r_j}x}\} = -Im\{y_j\}$, pa je dovoljan samo jedan od konjugovano kompleksnog para korena.

Zadatak 1.3. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y''' - y = 0$$

Rešenje. Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je

$$r^3 - 1 = 0.$$

čija su rešenja $r_1 = 1, r_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, r_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, pa je fundamentalni skup $\mathit{\Phi} = \{e^x, e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x, e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\}$, a opšte rešenje je

$$y = c_1e^x + c_2e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

d) Ako je $r_j = \alpha_j + \beta_j i$ koren karakteristične jednačine višestrukosti $m > 1$, tada u fundamentalni skup rešenja ulaze i sledećih $2m$ funkcija

$$\begin{array}{llll} e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, & xe^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, & ..., & x^{m-1}e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, \\ e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, & xe^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, & ..., & x^{m-1}e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x. \end{array}$$

Zadatak 1.4. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y^v - y^{iv} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je

$$r^5 - r^4 + 2r^3 - 2r^2 + r - 1 = 0$$

čija su rešenja $r_1 = 1, r_2 = r_3 = i, r_3 = r_4 = -i$, pa je fundamentalni skup $\mathit{\Phi} = \{e^x, \cos x, x\cos x, \sin x, x\sin x\}$, a opšte rešenje je

$$y = c_1e^x + c_2\cos x + c_3x\cos x + c_4\sin x + c_5x\sin x.$$

U slučaju kada je $f(x) \neq 0$, prvo rešavamo homogeni deo diferencijalne jednačine, a zatim jedno partikularno rešenje početne diferencijalne jednačine tražimo jednom od sledećih metoda:

- Metod jednakih koeficijenata,
- Metod varijacije konstanti.

1.1.1. Metod jednakih koeficijenata

Ako je
$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right),$$
gde je $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a $P_m(x)$ i $Q_n(x)$ polinomi stepena m i n, jednačina ima jedno partikularno rešenje oblika
$$y_p = x^r e^{\alpha x}\left(T_k(x)\cos\beta x + R_k(x)\sin\beta x\right),$$
gde su $T_k(x)$ i $R_k(x)$ nepoznati polinomi stepena $k = \max\{m, n\}$, a r je višestrukost korena $\alpha + \beta i$ karakteristične jednačine. Ako $\alpha + \beta i$ nije rešenje karakteristične jednačine, uzima se da je $r = 0$.

Specijalno, za $\beta = 0$ ($\cos 0 = 1$ i $\sin 0 = 0$) izraz
$$e^{\alpha x}P_m(x),$$
ne zavisi od $Q_n(x)$, u tom slučaju uzimamo da je $Q_n(x) = 0$, tj. $n = 0$ i $k = m$.

Zadatak 1.5. Naći ono rešenje $y(x)$ jednačine
$$y''' - \frac{7}{2}y'' + 2y' + 2y = e^{-\frac{1}{2}x}$$
koje zadovoljava uslove $y(0) = 1$ i $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$.

Rešenje. Prvo rešavamo homogeni deo diferencijalne jednačine, tj. jednačinu
$$y''' - \frac{7}{2}y'' + 2y' + 2y = 0.$$
Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je
$$r^3 - \frac{7}{2}r^2 + 2r + 2 = 0,$$
čija su rešenja $r_1 = r_2 = 2, r_3 = -\dfrac{1}{2}$, pa je rešenje homogenog dela
$$y_h = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3e^{-\frac{1}{2}x}$$
Kako je
$$e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right)$$
za $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = 0$, $P_m(x) = 1$, $k = 0$ i $\alpha + \beta i = -\frac{1}{2} + 0i = -\frac{1}{2}$ je jednostruki koren karakteristične jednačine pa imamo da je $r = 1$, te sledi da je partikularno rešenje oblika
$$y_p = Axe^{-\frac{1}{2}x}.$$
Tada je
$$\begin{aligned}
y_p' &= A(1 - \frac{x}{2})e^{-\frac{1}{2}x},\\
y_p'' &= A(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x}{4})e^{-\frac{1}{2}x} = A(\frac{x}{4} - 1)e^{-\frac{1}{2}x},\\
y_p''' &= A(\frac{1}{4} - \frac{x}{8} + \frac{1}{2})e^{-\frac{1}{2}x} = A(\frac{3}{4} - \frac{x}{8})e^{-\frac{1}{2}x}
\end{aligned}$$

Ubacivanjem y_p u početnu jednačinu dobijamo

$$A(\frac{3}{4}-\frac{x}{8})e^{-\frac{1}{2}x}-\frac{7}{2}A(\frac{x}{4}-1)e^{-\frac{1}{2}x}+2A(1-\frac{x}{2})e^{-\frac{1}{2}x}+2Axe^{-\frac{1}{2}x}=e^{-\frac{1}{2}x},$$

a sređivanjem po stepenima od x imamo

$$(-\frac{A}{8}-\frac{7}{8}A+2A-A)x+(\frac{3}{4}+\frac{7}{2}+2)A=1,$$

što važi za $A=\frac{4}{25}$. Dakle,

$$y_p=\frac{4}{25}xe^{-\frac{1}{2}x}.$$

Opšte rešenje diferencijalne je $y=y_h+y_p$, tj.

$$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{4}{25}xe^{-\frac{1}{2}x}.$$

Iz uslova $y(0)=1$ dobijamo da je

$$c_1+c_3=1,$$

a iz uslova $\lim\limits_{x\to\infty}y(x)=0$ zaključujemo da mora da važi da je $c_1=0$ i $c_2=0$ jer

$$\lim_{x\to\infty}e^{2x}=+\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty}xe^{2x}=+\infty.$$

Konačno, rešenje koje ispunjava uslove je

$$y=(\frac{4}{25}x+1)e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Zadatak 1.6. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x.$$

Rešenje. Prvo rešavamo homogeni deo diferencijalne jednačine, tj. jednačinu

$$y''' + y'' = 0.$$

Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je

$$r^3 + r^2 = 0,$$

čija su rešenja $r_1 = r_2 = 0, r_3 = -1$, pa je rešenje homogenog dela

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}.$$

Pošto je

$$x^2 + 1 + 3xe^2 \neq e^{\alpha x} \left(P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x\right)$$

za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i za sve polinome $P_m(x)$ i $Q_n(x)$, moramo da tražimo partikularno rešenje posebno za jednačinu

$$y''' + y'' = x^2 + 1,$$

a posebno za jednačinu

$$y''' + y'' = 3xe^x.$$

Primetimo da ako je y_1 rešenje jednačine $y''' + y'' = x^2 + 1$, a y_2 rešenje jednačine $y''' + y'' = 3xe^2$, tada je $y_p = y_1 + y_2$ rešenje početne jednačine, jer je

$$\begin{aligned} y_p''' + y_p'' &= (y_1 + y_2)''' + (y_1 + y_2)'' = y_1''' + y_1'' + y_2''' + y_2'' \\ &= x^2 + 1 + 3xe^x. \end{aligned}$$

Kako je

$$x^2 + 1 = e^{\alpha x} \left(P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x\right),$$

za $\alpha = 0, \beta = 0, P_m(x) = x^2 + 1$, $k = 2$ i $\alpha + \beta i = 0 + 0i = 0$ je dvostruki koren karakteristične jednačine, te imamo da je $r = 2$ i dobijamo da je partikularno rešenje y_{p_1} jednačine

$$y''' + y'' = x^2 + 1,$$

oblika

$$y_{p_1} = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2.$$

Tada je

$$\begin{aligned} y_{p_1}' &= 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx, \\ y_{p_1}'' &= 12Ax^2 + 6Bx + 2C, \\ y_{p_1}''' &= 24Ax + 6B, \end{aligned}$$

a ubacivanjem dobijenih vrednosti u jednačinu $y''' + y'' = x^2 + 1$, dobijamo

$$24Ax + 6B + 12Ax^2 + 6Bx + 2C = x^2 + 1$$

i sređivanjem po stepenima od x

$$12Ax^2 + (24A + 6B)x + 6B + 2C = x^2 + 1.$$

Rešenje sistema

$$\begin{array}{llll} 12A & & & = 1, \\ 24A & +6B & & = 0, \\ & 6B & +2C & = 1, \end{array}$$

je $A = \frac{1}{12}, B = -\frac{1}{3}$ i $C = \frac{3}{2}$, pa je

$$y_{p_1} = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2.$$

Analogno, imamo da je

$$3xe^x = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right),$$

za $\alpha = 1, \beta = 0, P_m(x) = 3x,\ k = 1$ i $\alpha + \beta i = 1 + 0i = 1$ nije koren karakteristične jednačine i imamo da je $r = 0$, pa je partikularno rešenje y_{p_1} jednačine

$$y''' + y'' = 3xe^x,$$

oblika

$$y_{p_2} = (Ax + B)e^x.$$

Ubacivanjem

$$\begin{aligned} y'_{p_2} &= Ae^x + (Ax + B)e^x, \\ y''_{p_2} &= Ae^x + Ae^x + (Ax + B)e^x, \\ y'''_{p_2} &= 2Ae^x + Ae^x + (Ax + B)e^x, \end{aligned}$$

u jednačinu $y''' + y'' = 3xe^2$, dobijamo

$$(3A + Ax + B) \cdot e^x + (2A + Ax + B) \cdot e^x = 3xe^x,$$

a sređivanjem po stepenima od x i upoređivanjem koeficijenata dobijamo da su $A = \frac{3}{2}$ i $B = -\frac{15}{4}$ rešenja sistema

$$\begin{array}{lll} 2A & & = 3, \\ 5A & +2B & = 0, \end{array}$$

pa je

$$y_{p_2} = (\frac{3}{2}x - \frac{15}{4})e^x.$$

Konačno,

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + (\frac{3}{2}x - \frac{15}{4})e^x,$$

a opšte rešenje je

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + (\frac{3}{2}x - \frac{15}{4})e^x. \end{aligned}$$

Napomenimo da je data jednačina mogla da se reši i snižavanjem reda diferencijalne jednačine jer jednačina ne sadrži y i y'. Ostavljamo čitaocu za vežbu da uporedi rešenja.

1.1.2. Metod varijacije konstanti

Ako je poznat fundamentalni skup rešenja $\Phi = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$, homogenog dela diferencijalne jednačine tada se partikularno rešenje može naći po formuli

$$y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + ... + C_n(x)y_n,$$

gde su funkcije $C_i(x)$, $i = 1, 2, ..., n$ određene iz sistema jednačina

$$\begin{array}{ccccccccc} C_1'(x)y_1 & + & C_2'(x)y_2 & + & ... & + & C_n'(x)y_n & = & 0, \\ C_1'(x)y_1' & + & C_2'(x)y_2' & + & ... & + & C_n'(x)y_n' & = & 0, \\ \vdots & & & & & & & & \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} & + & C_2'(x)y_2^{(n-1)} & + & ... & + & C_n'(x)y_n^{(n-1)} & = & f(x). \end{array}$$

Ako se pri traženju funkcija $C_i(x)$, $i = 1, 2, ..., n$ iz $C_i'(x) = g(x)$ kod neodređenog integrala $C_i(x) = \int C_i'(x)dx = \int g(x)dx$ ne doda konstanta tada se dobija partikularno rešenje.

Zadatak 1.7. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

Rešenje. Prvo rešavamo homogeni deo, tj jednačinu

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

čija je karakteristična jednačina

$$r^2 - 2r + 1 = 0.$$

Rešenja karakteristične jednačine su $r_1 = r_2 = 1$, pa je rešenje homogenog dela

$$y_h = c_1e^x + c_2xe^x.$$

Partikularno rešenje tražimo u obliku

$$y_p = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x.$$

Sistem

$$\begin{array}{ccccc} C_1'(x)e^x & + & C_2'(x)xe^x & = & 0 \\ C_1'(x)e^x & + & C_2'(x)(x+1)e^x & = & \dfrac{e^x}{x}, \end{array}$$

rešavamo tako što prvu jednačinu pomnožimo sa -1 i dodamo drugoj, pa je

$$\begin{aligned} C_2'(x) &= \frac{1}{x}, \\ C_2(x) &= \int \frac{dx}{x} = \ln|x|. \end{aligned}$$

Iz prve jednačine određujemo $c_1(x)$ jer je

$$C_1'(x) = -xc_2'(x) = -x\frac{1}{x} = -1,$$
$$C_1(x) = -\int dx = -x.$$

Dakle, partikularno rešenje je

$$y_p = -xe^x + xe^x \ln|x|,$$

a opšte rešenje diferencijalne jednačine je

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1e^x + c_2xe^x + -xe^x + xe^x \ln|x| \end{aligned}$$

i posmatramo ga na intervalima I za koje važi da $0 \notin I$, jer funkcija y nije definisana u tački $x = 0$.

1.2. Ojlerova diferencijalna jednačina

Specijalan tip linearne diferencijalne jednačine je Ojlerova diferencijalna jednačina čiji je oblik

$$(ax+b)^n y^{(n)} + A_{n-1}(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + ... + A_1(ax+b)y' + A_0 y = f(x),$$

gde su $a, b, A_{n-1}, A_{n-2}, ..., A_0$ konstante i razmatramo sledeće slučajeve:

- Ako je $ax+b>0$, $a \neq 0$, uvođenjem smene $ax+b=e^t$ dobijamo da je $t=\ln(ax+b)$, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{a}e^t$ i

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y'_t \frac{a}{e^t} = ae^{-t}y'_t, \\ y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} = a(e^{-t}y''_t - e^{-t}y'_t)\frac{a}{e^t} = a^2e^{-2t}(y''_t - y'_t), \\ y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dt}\frac{dt}{dx} = a^2(-2e^{-2t}(y''_t - y'_t) + e^{-2t}(y'''_t - y''_t))\frac{a}{e^t} \\ &= a^3e^{-3t}(y'''_t - 3y''_t + 2y'_t), \end{aligned}$$

  itd., datu jednačinu svodimo na jednačinu sa konstantnim koeficijentima.

- Ako je $ax+b<0$, $a \neq 0$, uvodimo smenu $ax+b=-e^t$ i analognim postupkom dobijamo jednačinu sa konstantnim koeficijentima.

- Ako je $a=0$, $b \neq 0$ data jednačina je jednačina sa konstantim koeficijentima.

- Za $a=0$ i $b=0$ dobija se $A_0 y = f(x)$, a to nije diferencijalna jednačina.

Zadatak 1.8. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(1+x)^3y''' + (1+x)y' - y = (1+x)^2$$

za $x>-1$.

Rešenje. Jednačina je Ojlerova diferencijalna jednačina pa se rešava smenom $x+1=e^t$ i tada je

$$\begin{aligned} y' &= e^{-t}y'_t, \\ y'' &= (y''_t - y'_t)e^{-2t}, \\ y''' &= (y'''_t - 3y''_t + 2y'_t)e^{-3t}. \end{aligned}$$

Dakle, jednačina

$$\begin{aligned} e^{3t}e^{-3t}(y'''_t - 3y''_t + 2y'_t) + e^te^{-t}y'_t - y = e^{2t}, \\ y'''_t - 3y''_t + 3y'_t - y = e^{2t} \end{aligned}$$

je jednačina sa konstantim koeficijentima.

Prvo rešavamo homogeni deo jednačine, tj. jednačinu

$$y_t''' - 3y_t'' + 3y_t' - y = 0,$$

čija karakteristična jednačina

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0,$$

ima korene $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. Dakle, rešenje homogenog dela je

$$y_h = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t.$$

Partikularno rešenje dobijamo metodom jednakih koeficijenata jer je

$$e^{2t} = e^{\alpha t} \left(P_m(t) \cos \beta t + Q_n(t) \sin \beta t \right)$$

za $\alpha = 2, \beta = 0$ i $P_m(t) = 1$. Kako $\alpha + \beta i = 2 + 0i = 2$ nije rešenje jednačine imamo da je $r = 0$. Partikularno rešenje je oblika $y_p = Ae^{2t}$, pa je

$$\begin{aligned} y_p' &= 2Ae^{2t}, \\ y_p'' &= 4Ae^{2t}, \\ y_p''' &= 8Ae^{2t} \end{aligned}$$

i ubacivanjem u jednačinu dobijamo

$$\begin{aligned} 8Ae^{2t} - 12Ae^{2t} + 6Ae^{2t} - Ae^{2t} &= e^{2t}, \\ (8A - 12A + 6A - A)e^{2t} &= e^{2t}, \end{aligned}$$

tj. $A = 1$. Konačno, rešenje jednačine je

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t + e^{2t}. \end{aligned}$$

Vraćanjem smene $x + 1 = e^t$ dobijamo

$$y = c_1(1 + x) + c_2(1 + x) \cdot \ln(1 + x) + c_3(1 + x) \cdot \ln^2(1 + x) + (1 + x)^2.$$

1.3. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 1.9. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' + y' = e^{2x}\left(\sin(-2017x)\cos(2018x) + \cos(-2017x)\sin(2018x)\right).$$

Zadatak 1.10. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y''' + y = \frac{(1 - \sin^2 x)\operatorname{tg} x}{\cos x}.$$

Zadatak 1.11. Naći opšte rešenje jednačine

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = x^2 + 1,$$

za $x > 0$.

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.