

# DISKRETNNA MATEMATIKA

## - PREDAVANJE -

Jovanka Pantović

1 Definicija planarnog grafa

2 Ojlerova formula

3 Tvrdjenje Kuratovskog

# Tema 1

## Definicija planarnog grafa

# Planarni grafovi

## Definicija

*Graf je planaran ako može biti nacrtan u ravni tako da mu se grane ne seku. Za takvu reprezentaciju grafa kažemo da je planarna.*

## Primer

- (1) *Da li je  $K_4$  planaran graf?*
- (2) *Da li je  $Q_3$  planaran graf?*
- (3) *Da li je  $K_{3,3}$  planaran graf?*
- (4) *Da li je  $K_5$  planaran graf?*

## Tema 2

# Ojlerova formula

# Ojlerova formula

## Teorema

*Neka je  $G = (V, E)$ ,  $|E| = m \geq 2$ , povezan planaran prost graf sa  $f$  oblasti u njegovoj planarnoj reprezentaciji. Tada je*

$$f = |E| - |V| + 2.$$

*Dokaz.*

Posmatraćemo  $G_1, \dots, G_m$

- $G_i$  je podgraf grafa  $G$ , za svako  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,
- $G_i$  ima granu incidentnu sa bar jednim čvorom u  $G_{i-1}$ ,  $2 \leq i \leq m$ .

Treba pokazati da  $G_i$  zadovoljava Ojlerovu formulu za svako  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

# Ojlerova formula

## Definition

Stepen oblasti  $D$ , u oznaci  $\text{st}(D)$  je broj grana na rubu te oblasti. Ako se grana pojavljuje dva puta na rubu, ona se računa dva puta.

Neka je  $|V| \geq 3$ .

$$2|E(G)| = \sum_{1 \leq i \leq f} \text{st}(D_i) \geq 3 \cdot f \quad (1)$$

# Posledica 1

## Posledica

*Ako je  $G = (V, E)$  povezan planaran prost graf sa bar 3 čvora, onda je*

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

## Primer

*Graf  $K_5$  nije planaran.*



# Posledica 1

## Posledica

*Ako je  $G = (V, E)$  povezan planaran prost graf sa bar 3 čvora, onda je*

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

## Primer

*Graf  $K_5$  nije planaran.*

*Dokaz.*

$$|V(K_5)| = 5 \quad |E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10$$

*Ako je  $K_5$  planaran, onda je  $10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$ .*

## Posledica 2

### Posledica

*Ako je  $G = (V, E)$  povezan planaran prost graf sa bar 3 čvora i  $G$  nema konture dužine 3, onda je*

$$|E| \leq 2|V| - 4.$$

### Primer

*Graf  $K_{3,3}$  nije povezan.*

## Posledica 2

### Posledica

*Ako je  $G = (V, E)$  povezan planaran prost graf sa bar 3 čvora i  $G$  nema konture dužine 3, onda je*

$$|E| \leq 2|V| - 4.$$

### Primer

*Graf  $K_{3,3}$  nije povezan.*

*Dokaz.* Sve konture u  $K_{3,3}$  su parne dužine ne manje od 4.

$$|V(K_{3,3})| = 6 \quad |E(K_5)| = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9.$$

Ako je  $K_{3,3}$  planaran, onda je  $9 \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$ .

## Tema 3

# Tvrđenje Kuratovskog

# Homeomorfni grafovi

## Definicija

*Ako umesto grane  $uv$  dodamo novi čvor  $w$  i grane  $uw$  i  $wv$ , kazaćemo da smo kreirali novi graf primenom elementarne deobe na polazni graf.*

## Definicija

*Grafovi  $G_1 = (V_1, E_1)$  i  $G_2 = (V_2, E_2)$  su homeomorfni ako mogu biti dobijeni od istog grafa sukcesivnom primenom elementarne deobe.*

# Tvrdjenje Kuratovskog

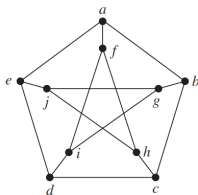
## Teorema

*Graf  $G$  nije planaran ako i samo ako sadrži podgraf koji je homeomorfan sa  $K_{3,3}$  ili  $K_5$ .*

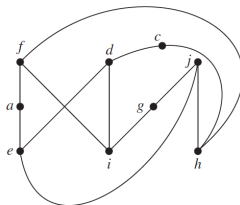
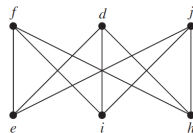
## Primer

*Petersenov graf nije planaran.*

1977 Kuratowski's Theorem 1.2.2



(a)

(b)  $H$ (c)  $K_{3,3}$