ВЕЖБЕ 1

Математичка индукција

1. $1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Б.И. (БАЗА ИНДУКЦИЈЕ)

$n=1 \qquad 1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$

$1=1$ ✓

И.Х. (ИНДУКТИВНА ХИПОТЕЗА, ИНДУКТИВНА ПРЕТПОСТАВКА)

Претпоставимо да тврђење важи за природан број $n=k$

$$1+2+3+\dots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

И.К. (ИНДУКТИВНИ КОРАК)

Доказујемо тачност тврђења за природан број $n=k+1$, тј. доказујемо

$$1+2+3+\dots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\underbrace{1+2+3+\dots+k}_{\text{и.х. } \frac{k(k+1)}{2}}+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$$

$$(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=(k+1)\,\frac{k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

2. $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

Б.И. $n=1$ $\quad 1=1^2$ $\checkmark$

И.Х. $n=k$

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$$

И.К. $n=k+1$

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2\cdot(k+1)-1)=$$

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2k-1)}_{\text{И.Х.}}+(2k+1)=$$

$$k^2+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

3. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Б.И. $n=1$

$$1^3 \overset{?}{=} \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

$$1^3=\frac{4}{4} \checkmark$$

И.Х. $n=k$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

И.К. $n=k+1$

$$\underbrace{1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3}+(k+1)^3 \overset{\text{И.Х.}}{=} \frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=$$

$$(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=(k+1)^2\cdot\frac{k^2+4k+4}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

4. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

Б.И. $n=1$

$\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{1+1}$ ✓

И.Х. $n=k$

$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$

И.К. $n=k+1$

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}}_{\text{И.Х.}}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{\cancel{(k+1)^2}}{\cancel{(k+1)}(k+2)}=$$

$\frac{k+1}{k+2}$

5. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (домашно)

6. $3 \mid (5^n + 2^{n+1}), \; n \in \mathbb{N}$

$$p \mid q \iff q = l \cdot p \iff q \equiv 0 \pmod p$$

Б.И. $n = 1$

$5^1 + 2^{1+1} = 5 + 2^2 = 9 \qquad 3 \mid 9$

И.Х. $n = k$

$5^k + 2^{k+1} \equiv 0 \pmod 3$

И.К. $n = k+1$

$$5^{k+1} + 2^{k+2} = 5 \cdot 5^k + 5 \cdot 2^{k+1} - 5 \cdot 2^{k+1} + 2^{k+2} = 5 \cdot \underbrace{(5^k + 2^{k+1})}_{\equiv 0 \pmod 3} - 5 \cdot 2^{k+1} + 2^{k+2} =$$

збот И.Х.

$$5 \cdot \underbrace{(5^k + 2^{k+1})}_{\equiv 0 \pmod 3} - 2^{k+1} \underbrace{(5-2)}_{3 \equiv 0 \pmod 3} \equiv 0 \pmod 3$$

7. $9 \mid (13^n - 4^n), \; n \in \mathbb{N}$ (домашно)

8. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2},\ n\in\mathbb{N}$

Б.И. $n=1$ $\quad \frac{1}{1+1}\geq\frac{1}{2}$ ✓

И.Х. $n=k$ $\quad \frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\dots+\frac{1}{2k}\geq\frac{1}{2}$

И.К. $n=k+1$

$$\underbrace{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\frac{1}{k+4}+\dots\dots\frac{1}{2k}}_{\text{И.Х.}\quad\geq\frac{1}{2}}+\frac{1}{2k+1}+\underbrace{\frac{1}{2(k+1)}}_{\frac{1}{2k+2}}-\frac{1}{k+1}\geq\frac{1}{2}$$

Уколико бисмо успели да докажемо да је $\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}\geq 0$, доказ би био готов.

$$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}=\frac{2(k+1)+(2k+1)-2(2k+1)}{2(k+1)(2k+1)}=\frac{\cancel{2k}+\cancel{2}+\cancel{2k}+1-\cancel{4k}-\cancel{2}}{2(k+1)(2k+1)}=\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}>0$$

9. $(1+x)^n \geqslant 1+nx, \quad n\in\mathbb{N}, x>-1 \iff 1+x>0$

Б.И. $n=1$

$(1+x)^1 \geqslant 1+1\cdot x$

$1+x = 1+x$ ✓

И.Х. $n=k \quad (1+x)^k \geqslant 1+kx$

И.К. $n=k+1$

Доказујемо $(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x$

$(1+x)^k \geqslant 1+kx \;/\; (1+x)>0$

$(1+x)(1+x)^k \geqslant (1+x)(1+kx)$

$(1+x)^{k+1} = (1+x)\cdot(1+x)^k \geqslant (1+x)(1+kx) = 1+kx+x+kx^2 = 1+(k+1)x+kx^2 \geqslant 1+(k+1)x$

$k\geqslant 1 \wedge x^2\geqslant 0$

$kx^2\geqslant 0$

10. $2^n > n^2, \ n \geq 5$

Б.И. $n=5$

$2^5 = 32$

$5^2 = 25$

$32 > 25$ ✓

И.Х. $n=k$

$2^k > k^2$

И.К. $n=k+1$ Доказујемо $2^{k+1} > (k+1)^2$

$$2^{k+1} = 2\cdot 2^k > \boxed{2\cdot k^2 \overset{?}{>} (k+1)^2}$$

Показаћемо $2k^2 - (k+1)^2 > 0$

$$2k^2 - (k+1)^2 = 2k^2 - k^2 - 2k - 1 = k^2 - 2k - 1 =$$

$$(k-1)^2 - 2 \underset{k \geq 5}{>} 0$$

11. $n! \geq 2^n, \ n \geq 4$

$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

Б.И. $n=4$

$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$

$2^4 = 16$

$24 > 16$ ✓

И.Х. $n=k$ $\quad k! \geq 2^k$

И.К. $n=k+1$ Доказујемо $(k+1)! \geq 2^{k+1}$

$$(k+1)! = (k+1)\cdot k! \geq \underbrace{(k+1)}_{\geq 5}\cdot 2^k \geq 2\cdot 2^k = 2^{k+1}$$

12. $4n < 2^n, \ n \geq 5$ (домаћи)

13. Ако је $\boxed{x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}}$, $n \geq 3$, где је $x_1 = 5$, $x_2 = 13$, доказати да је $x_n = 2^n + 3^n$.

Б.И. $n=3$

$x_3 = 5 \cdot x_2 - 6 \cdot x_1 = 5 \cdot 13 - 6 \cdot 5 = 35$

$x_3 = 2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$

И.Х. Претпоставимо да за сваки природан број $3 \leq k \leq n$ важи $x_k = 2^k + 3^k$ (ЈАКА ИНДУКЦИЈА)

И.К. Докажимо тврђење за природан број $n+1$

$$x_{n+1} = 5 \cdot x_n - 6 \cdot x_{n-1} \overset{\text{и.х.}}{=} 5 \cdot (2^n + 3^n) - 6 \cdot (2^{n-1} + 3^{n-1}) = 5 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n - 3 \cdot 2 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 3 \cdot 3^{n-1} =$$

n и n-1 су природни бројеви који су $\leq n$ и за њих важи и.х.

$$= 5 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$$

$$= (5-3) \cdot 2^n + (5-2) \cdot 3^n$$

$$= 2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n$$

$$= 2^{n+1} + 3^{n+1}$$

14. Ако је $x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2})$, $n \geq 3$, где је $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, доказати да је $x_n = n!$

15. Сваки природан број $n \geq 2$ је прост или је производ простих бројева.

Б.И. $n=2$ је прост

И.Х. Претпоставимо да за сваки природан број $2 \leq k \leq n$ важи да је k прост број или се може записати као производ неких простих бројева.

И.К. Докажимо да тврђење важи за природан број $n+1$

- $n+1$ прост ✓
- $n+1$ сложен

$n+1 = p \cdot q$ $\quad 1 < p, q < n+1$

$2 \leq p, q \leq n$ $\Rightarrow$ За p и q важи И.Х., тј. p и q су прости бројеви или се могу записати као производ простих бројева

$n+1 = p \cdot q$ је производ простих бројева

ПРИНЦИП БИЈЕКЦИЈЕ

За скупове A и B важи

$|A| = |B|$ акко $\exists\, f: A \to B$ бијекција

1. Међу ненегативним целим бројевима мањим од 10^7 посматрају се они чији је збир цифара једнак 31 и они чији је збир цифара једнак 32. Којих бројева има више?

Бројеве ћемо представити као низове цифара фиксне дужине 7, при чему ћемо код бројева који нису седмоцифрени на почетак дописати одговарајући број нула.

$536 \to 0000536$

$$A = \{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 \mid \sum_{i=1}^{7} a_i = 31\}$$

$$B = \{b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7 \mid \sum_{i=1}^{7} b_i = 32\}$$

максимална сума цифара 7-цифреног низа је

$7 \cdot 9 = 63 = 31 + 32$

Правимо бијективно пресликавање $f: A \to B$.

Нека је $a_1a_2\dots a_7 \in A$

$$\boxed{f(a_i) = 9 - a_i}$$

$0005998 \in A$

$\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$

$9994001 \in B$

добра дефинисаност:

$$\sum_{i=1}^{7} f(a_i) = \sum_{i=1}^{7} (9 - a_i) = 7 \cdot 9 - \sum_{i=1}^{7} a_i = 63 - 31 = 32$$

1-1: $(9-a_1)(9-a_2)\dots(9-a_7) = (9-c_1)(9-c_2)\dots(9-c_7)$

$\Rightarrow 9 - a_i = 9 - c_i \Rightarrow a_i = c_i$

$a_1a_2\dots a_7 = c_1c_2\dots c_7$

На: $b_1b_2\dots b_7 \in B$

$f(a_i) = b_i \Rightarrow a_i = 9 - b_i$

$\Rightarrow f: A \to B$ је бијекција

$\Rightarrow |A| = |B|$

2. У равни је уочено 2020 тачака, од којих је једна обојена црвеном, а преосталих 2019 плавом бојом. Да ли међу свим подскуповима тог скупа има више оних који садрже црвену тачку или оних који је не садрже?

A_1 - црвена тачка

$A_2, A_3, \ldots, A_{2020}$ - плаве тачке

$\mathcal{A}$ - сви подскупови који садрже црвену тачку

$\mathcal{B}$ - сви подскупови који не садрже црвену тачку

Нека је $S \in \mathcal{A}$, тј. $S = \{A_1, A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}\}$. Пресликавање $f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ дефинишемо на следећи начин

$$f(S) = S \setminus \{A_1\} = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}\}$$

Пресликавање $f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ је бијекција $\Rightarrow |\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$

II начин:

$$f(S) = \overline{S}$$

3. Посматрајмо све низове декадних цифара дужине 6. Да ли међу њима има више оних код којих је збир цифара 27 или оних код којих је збир прве три цифре једнак збиру последње три цифре?

$x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ $\quad x_i\in\{0,1,\dots,9\},\ i=1,2,\dots,6$

$A=\{a_1a_2a_3a_4a_5a_6 \mid \sum_{i=1}^{7} a_i=27\}$

$B=\{b_1b_2b_3b_4b_5b_6 \mid b_1+b_2+b_3=b_4+b_5+b_6\}$

$f:A\to B$ $\quad a_1a_2\dots a_6\in A$ $\quad a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=27$

$f(a_i)=9-a_i$

добра деф:

$f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)=f(a_4)+f(a_5)+f(a_6)$

$9-a_1+9-a_2+9-a_3=9-a_4+9-a_5+9-a_6$

$a_1+a_2+a_3=a_4+a_5+a_6$ ↯

$f:B\to A$ $\quad b_1b_2\dots b_6\in B$

$b_1+b_2+b_3=b_4+b_5+b_6$

$$f(b_i)=\begin{cases}9-b_i, & i=1,2,3\\ b_i, & i=4,5,6\end{cases}$$

добра деф:

$$\sum_{i=1}^{6} f(b_i)=(9-b_1)+(9-b_2)+(9-b_3)+b_4+b_5+b_6=$$

$$27-\cancel{(b_1+b_2+b_3)}+\cancel{(b_4+b_5+b_6)}=27$$

$\Rightarrow f(b_1)f(b_2)\dots f(b_6)\in A$

$\Rightarrow f:B\to A$ бијекција $\Rightarrow |A|=|B|$