VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1. Vežbe III.3

Ojlerove smene u većini slučajeva dovode do integrala prilično glomaznih racionalnih funkcija, pa se preporučuje da se one koriste samo u slučajevima kada nema drugih mogućnosti integracije. Razmotrićemo zbog toga neke specijalne slučajeve integrala $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ za koje postoje metodi rešavanja pogodniji od Ojlerovih smena.

a) **Metod Ostrogradskog**. Integral oblika $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $a \neq 0$, gde je $P_n(x)$ polinom n-tog stepena od x ($n \geq 1$), rešava se primenom identiteta

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

gde je $Q_{n-1}(x)$ polinom stepena $n-1$ sa neodređenim (nepoznatim) koeficijentima, a λ neodređena (nepoznata) konstanta. Nađemo izvod leve i desne strane poslednje jednakosti i sređivanjem po stepenima od x, određuju se koeficijenti polinoma $Q_{n-1}(x)$ i λ, rešavanjem sistema od $n+1$ nepoznatih.

Zadatak 1.1. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx.$

Rešenje.

Polinom u brojiocu je drugog stepena, primenjujemo gore navedeni identitet za $n=2$, dakle $Q_1(x) = Ax+B$.

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+x+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} \Bigg/'$$

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}} = A\sqrt{x^2+x+1} + (Ax+B)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

Nakon množenja cele poslednje jednakosti sa $2\sqrt{x^2+x+1}$, dobija se

$$\begin{aligned} 2x^2+2 &= 2A(x^2+x+1) + 2Ax^2 + 2Bx + Ax + B + 2\lambda \\ 2x^2+2 &= 4Ax^2 + (3A+2B)x + 2A + B + 2\lambda. \end{aligned}$$

Rešavanjem sistema jednačina:

$$\begin{array}{ccccccc} 4A & & & & & = & 2 \\ 3A & + & 2B & & & = & 0 \\ 2A & + & B & + & 2\lambda & = & 2 \end{array}$$

dobija se $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{3}{4}$ i $\lambda = \frac{7}{8}$.

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{7}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}$$
$$= \left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{7}{8}\ln\left| x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + c.$$

b) Integral oblika $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, svodi se na integral prethodnog tipa uvođenjem smene $x-\alpha = \frac{1}{t}$.

Zadatak 1.2. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$.

Rešenje.

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}} = \left[\begin{array}{l} x+1=\frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt \Rightarrow x = \frac{1}{t}-1 = \frac{1-t}{t} \\ x^2+2x = \frac{(1-t)^2}{t^2} + \frac{2-2t}{t} = \frac{1-2t+t^2+2t-2t^2}{t^2} = \frac{1-t^2}{t^2} \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^3}\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}} = \underbrace{-\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^2}}}_{I_1}.$$

Primetimo da smo polazni integral sveli na integral I_1 koji se može rešiti pomenutom metodom Ostrogradskog (uraditi na taj način). Međutim, konkretno integral I_1 možemo brže svesti na tablične integrale na sledeći način:

$$I_1 = \int \frac{-t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \frac{1-t^2-1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \sqrt{1-t^2}dt - \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$= \frac{t}{2}\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\arcsin t - \arcsin t + c$$
$$= \frac{1}{2(x+1)}\sqrt{x^2+2x} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x+1} + c.$$

1.1. Integrali trigonometrijskih funkcija

I Integrali oblika

$$\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)dx, \int \sin(\alpha x)\sin(\beta x)dx, \int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)dx,$$

gde su α i β proizvoljne konstante, rešavaju se primenom trigonometrijskih identiteta:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha x)\cos(\beta x) &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)x + \sin(\alpha+\beta)x\right] \\
\sin(\alpha x)\sin(\beta x) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right] \\
\cos(\alpha x)\cos(\beta x) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\right].
\end{aligned}$$

Zadatak 1.3. Izračunati $I = \displaystyle\int \cos x \cos(2x)\cos(3x)\, dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
I &= \int \cos x \cos(2x)\cos(3x)\, dx = \frac{1}{2}\int \cos x\left[\cos x + \cos(5x)\right]\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \cos x \cos x dx + \frac{1}{2}\int \cos x \cos(5x) dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left[1 + \cos(2x)\right]\, dx + \frac{1}{4}\int \left[\cos(4x) + \cos(6x)\right]\, dx \\
&= \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\sin(2x) + \frac{1}{16}\sin(4x) + \frac{1}{24}\sin(6x) + c.
\end{aligned}$$

II Integrali oblika $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)dx$

Posmatrajmo integral kod koga je podintegralna funkcija racionalna funkcija od $\sin x$ i $\cos x$. Svaki ovakav integral može se svesti na integral racionalne funkcije po novoj promenljivoj, smenom $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Koristeći poznate trigonometrijske obrasce imamo da je

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Sledi da je

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt,$$

gde je R_1 nova racionalna funkcija.

Zadatak 1.4. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$

Rešenje.

$$I = \int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} = \left[\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\right] = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3}dt$$
$$= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+4t+3+3t^2}{1+t^2}}dt = \int \frac{2dt}{2(t^2+2t+2)} = \int \frac{dt}{(t+1)^2+1}$$
$$= \operatorname{arctg}(t+1) + c = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1) + c.$$

Smena $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ često dovodi do integrala glomaznih racionalnih funkcija, pa je preporučljivo izbegavati je onda kada je to moguće. Navešćemo neke od specijalnih slučajeva integrala racionalne funkcije od $\sin x$ i $\cos x$, u kojima je pogodnije uvesti neku drugu smenu.

II_1 Ako je u integralu oblika $\int R(\sin x, \cos x)dx$ funkcija R neparna po drugoj komponenti

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

tj. za funkciju R važi da je

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(\sin x) \cdot \cos x,$$

gde je R_1 racionalna funkcija od $\sin x$, uvodi se smena

$$\sin x = t \ (\cos x dx = dt).$$

II_2 Ako je u integralu oblika $\int R(\sin x, \cos x)dx$ funkcija R neparna po prvoj komponenti

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

tj. za funkciju R važi

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(\cos x) \cdot \sin x,$$

gde je R_1 racionalna funkcija od $\cos x$, uvodi se smena

$$\cos x = t \ (-\sin x dx = dt).$$

II_3 Ako je u integralu oblika $\int R(\sin x, \cos x)dx$ funkcija R takva da je

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

uvodi se smena $\operatorname{tg} x = t$ $(dx = \frac{dt}{1+t^2})$.

Zadatak 1.5. Izračunati $I = \int \frac{dx}{\sin x \sin(2x)}$.

Rešenje.
Koristeći trigonomertijske identitete $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, sledi

$$I = \int \frac{dx}{\sin x \sin(2x)} = \int \frac{dx}{2\sin x \sin x \cos x} \cdot \frac{\cos x}{\cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)} dx.$$

Podintegralna funkcija je

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)},$$

kako je

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)} \cdot \cos x = R_1(\sin x) \cdot \cos x,$$

uvodimo smenu $\sin x = t, \ \cos x \ dx = dt$.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{1-t^2+t^2}{t^2(1-t^2)} dt = \frac{1}{2}\int t^{-2} dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t^2} \\ &= -\frac{1}{2t} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c = -\frac{1}{2\sin x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + c. \end{aligned}$$

Zadatak 1.6. Izračunati $I = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{(\sin^2 x)^2}{\cos^4 x} \sin x dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^4 x} \sin x dx \\ &= \begin{bmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{bmatrix} = -\int \frac{(1-t^2)^2}{t^4} dt = -\int \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{t^4} dt \\ &= -\int dt + 2\int t^{-2} dt - \int t^{-4} dt = -t - \frac{2}{t} + \frac{1}{3t^3} + c \\ &= -\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + c. \end{aligned}$$

Zadatak 1.7. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Rešenje.
Prisetimo se trigonometrijskih identiteta: $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ i $\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \ \ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{array}\right] = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \\
&= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1+2t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}) + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + c.
\end{aligned}
$$

Zadatak 1.8. Izračunati integral $I = \displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}\, dx$.

Rešenje.
Deljenjem brojioca i imenioca podintegralne funkcije sa $\cos x$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}\, dx = \int \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 2} dx = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{t^2+1} \end{array}\right] \\
&= \int \frac{t-1}{t+2}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t-1}{(t+2)(t^2+1)} dt.
\end{aligned}
$$

Polazni integral smo sveli na integral prave racionalne funkcije. Predstoji nam rastavljanje podintegralne funkcije na sumu parcijalnih razlomka.

$$
\frac{t-1}{(t+2)(1+t^2)} = \frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{At^2 + A + Bt^2 + Ct + 2Bt + 2C}{(t+2)(t^2+1)}
$$

$$
t - 1 = (A+B)t^2 + (2B+C)t + A + 2C.
$$

Rešavanjem sistema

$$
\begin{array}{ccccccc}
A & + & B & & & = & 1 \\
 & & 2B & + & C & = & 1 \\
A & + & & & 2C & = & -1
\end{array}
$$

dobijamo da je $A = -\frac{3}{5}$, $B = \frac{3}{5}$ i $C = -\frac{1}{5}$.

$$
\begin{aligned}
I &= -\frac{3}{5}\int \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{5}\int \frac{3t-1}{t^2+1} dt = -\frac{3}{5}\int \frac{dt}{t+2} + \frac{3}{10}\int \frac{2t}{t^2+1} dt - \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^2+1} \\
&= -\frac{3}{5}\ln|t+2| + \frac{3}{10}\ln\left|t^2+1\right| - \frac{1}{5}\operatorname{arctg} t + c \\
&= -\frac{3}{5}\ln|\operatorname{tg} x + 2| - \frac{3}{10}\ln\left|\operatorname{tg}^2 x + 1\right| - \frac{1}{5}x + c.
\end{aligned}
$$

III **Integrali oblika $\int (\sin(\alpha x))^m (\cos(\beta x))^n dx,\ m, n \in \mathbb{N}$** rešavaju se pomoću Ojlerovih formula:

$$\sin(\alpha x) = \frac{e^{\alpha xi} - e^{-\alpha xi}}{2i}, \ \cos(\beta x) = \frac{e^{\beta xi} + e^{-\beta xi}}{2}.$$

Zadatak 1.9. Izračunati $I = \int \sin^3 x \cos^2(3x)\, dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\sin^3 x \cos^2(3x) &= \left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right)^3 \left(\frac{e^{3xi} + e^{-3xi}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{3xi} - 3e^{xi} + 3e^{-xi} - e^{-3xi}}{-8i} \cdot \frac{e^{6xi} + 2 + e^{-6xi}}{4} \\
&= -\frac{1}{32i}(e^{9xi} + 2e^{3xi} + e^{-3xi} - 3e^{7xi} - 6e^{xi} - 3e^{-5xi} \\
&+ 3e^{5xi} + 6e^{-xi} + 3e^{-7xi} - e^{3xi} - 2e^{-3xi} - e^{-9xi}) \\
&= -\frac{1}{16}\frac{e^{9xi} - e^{-9xi}}{2i} + \frac{3}{16}\frac{e^{7xi} - e^{-7xi}}{2i} - \frac{3}{16}\frac{e^{5xi} - e^{-5xi}}{2i} \\
&- \frac{1}{16}\frac{e^{3xi} - e^{-3xi}}{2i} + \frac{6}{16}\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \\
&= -\frac{1}{16}\sin 9x + \frac{3}{16}\sin 7x - \frac{3}{16}\sin 5x - \frac{1}{16}\sin 3x + \frac{6}{16}\sin x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{16}\int \sin 9x dx + \frac{3}{16}\int \sin 7x dx - \frac{3}{16}\int \sin 5x dx - \frac{1}{16}\int \sin 3x dx \\
&+ \frac{6}{16}\int \sin x dx = \frac{1}{144}\cos 9x - \frac{3}{112}\cos 7x + \frac{3}{80}\cos 5x + \frac{1}{48}\cos 3x - \frac{3}{8}\cos x + c.
\end{aligned}$$

IV **Integral oblika $I = \int (P_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x))dx$,** gde je $P_n(x)$ polinom n-tog stepena, $Q_m(x)$ polinom m-tog stepena, a α i β proizvoljne konstante rešava se primenom identiteta

$$I = R_k(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x) + T_k(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c,$$

gde su $R_k(x)$ i $T_k(x)$ polinomi k-tog stepena sa neodređenim (nepoznatim) koeficijentima, a $k = \max\{m, n\}$. Diferenciranjem leve i desne strane, izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene od x i rešavanjem sistema od $2k + 2$ jednačina sa $2k + 2$ nepoznatih, dobijaju se koeficijenti polinoma $R_k(x)$ i $T_k(x)$.

Zadatak 1.10. Izračunati $I = \displaystyle\int \left[xe^{2x}\cos x + (x^2-2)e^{2x}\sin x\right] dx.$

Rešenje.
U ovom slučaju stepeni polinoma su $n = 1$, $m = 2$, pa je $k = \max\{1,2\} = 2$. Nepoznati polinomi su $R_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ i $S_2(x) = Dx^2 + Ex + F$. Primenjujemo gore navedeni identitet.

$$
\begin{aligned}
&I = \left[Ax^2 + Bx + C\right] e^{2x}\sin x + \left[Dx^2 + Ex + F\right] e^{2x}\cos x + c \Big/ {}'\\
&xe^{2x}\cos x + (x^2-2)e^{2x}\sin x =\\
&= [2Ax + B]\, e^{2x}\sin x + \left[Ax^2 + Bx + C\right] e^{2x}(2\sin x + \cos x)\\
&+ [2Dx + E]\, e^{2x}\cos x + \left[Dx^2 + Ex + F\right] e^{2x}(2\cos x - \sin x)\\
&= e^{2x}\sin x \left[2Ax + B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C - Dx^2 - Ex - F\right]\\
&+ e^{2x}\cos x \left[Ax^2 + Bx + C + 2Dx + E + 2Dx^2 + 2Ex + 2F\right]\\
&= \left[(A+2D)x^2 + (B+2D+2E)x + C + E + 2F\right] e^{2x}\cos x\\
&+ \left[(2A-D)x^2 + (2A+2B-E)x + B + 2C - F\right] e^{2x}\sin x.
\end{aligned}
$$

Rešavanjem sistema jednačina $A + 2D = 0$, $B + 2D + 2E = 1$, $C + E + 2F = 0$, $2A - D = 1$, $2A + 2B - E = 0$, $B + 2C - F = -2$, dobijamo $A = \dfrac{2}{5}$, $B = -\dfrac{1}{25}$, $C = -\dfrac{116}{125}$, $D = -\dfrac{1}{5}$, $E = \dfrac{18}{25}$ i $F = \dfrac{13}{125}$.

Dakle,

$$
I = \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{25}x - \frac{116}{125}\right) e^{2x}\sin x + \left(-\frac{1}{5}x^2 + \frac{18}{25}x + \frac{13}{125}\right) e^{2x}\cos x + c.
$$

1.2. Integrali eksponencijalne funkcije

Integral oblika $\int R(e^x)dx$, gde je R racionalna funkcija od e^x, rešava se smenom $e^x = t$. Tada je $e^x dx = dt$, odakle je $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$, pa je $\int R(e^x)dx = \int R(t)\frac{dt}{t}$, što znači da se integral svodi na integral racionalne funkcije od t.

Zadatak 1.11. Izračunati $I = \int \frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x}+1}\, dx.$

Rešenje.

$$I = \int \frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x}+1}\, dx = \begin{bmatrix} e^x = t, & x = \ln t \\ dx = \frac{dt}{t} & \end{bmatrix} = \int \frac{t^3 - t}{t^2+1} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{t^2-1}{t^2+1} dt$$
$$= \int \frac{t^2+1-2}{t^2+1} dt = \int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = t - 2\operatorname{arctg} t + c = e^x - 2\operatorname{arctg} e^x + c.$$

Zadatak 1.12. Izračunati $I = \int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}\, dx.$

Rešenje.
Primetimo da u ovom zadatku iako podintegralna funkcija nije racionalna funkcija od e^x, smenom $e^{\frac{x}{2}} = t$ dobijamo integral koji znamo da rešimo poznatim metodama.

$$I = \int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}\, dx = \begin{bmatrix} e^{\frac{x}{2}} = t, & x = 2\ln t \\ dx = \frac{2}{t}dt & \end{bmatrix}$$
$$= 2\int \frac{\operatorname{arctg} t}{t(1+t^2)} \cdot \frac{dt}{t} = 2\int \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2(1+t^2)} dt$$
$$= \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} t \Rightarrow du = \frac{dt}{1+t^2} \\ dv = \frac{dt}{t^2(t^2+1)} \Rightarrow v = \int \frac{1+t^2-t^2}{t^2(t^2+1)}dt = \int t^{-2}dt - \int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t \end{bmatrix}$$
$$= 2(-\frac{1}{t}\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg}^2 t + \underbrace{\int \frac{dt}{t(1+t^2)}}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2}\, dt}_{I_2}).$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{t(1+t^2)} = \int \frac{1+t^2-t^2}{t(1+t^2)}dt = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{t}{1+t^2}dt = \ln|t| - \frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right| + c.$$
$$I_2 = \int \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2}dt = \begin{bmatrix} \operatorname{arctg} t = z \\ \frac{dt}{1+t^2} = dz \end{bmatrix} = \int z dz = \frac{z^2}{2} = \frac{\operatorname{arctg}^2 t}{2} + c.$$

Dakle,

$$I = -\frac{2\operatorname{arctg} t}{t} - 2\operatorname{arctg}^2 t + 2\ln|t| - \ln\left|1+t^2\right| + \operatorname{arctg}^2 t + c$$
$$= -\frac{2\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} - \operatorname{arctg}^2 e^{\frac{x}{2}} + \ln\frac{e^x}{1+e^x} + c.$$

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.