VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

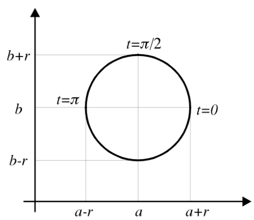
1. Vežbe III.6

- Parametarski oblik

Ako se kriva $y = f(x)$ data u parametarskom obliku $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ gde za funkcije $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $\psi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ važe iste osobine kao i kada smo definisali površinu ravnih likova, obrće oko x-ose tada je zapremina V dobijenog tela data obrascem

$$V = \pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t)\varphi'(t)dt = \pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} y^2 x'_t dt.$$

Zadatak 1.1. Naći zapreminu torusa nastalog obrtanjem kruga $x = a + r\cos t$ $y = b + r\sin t$ oko x - ose.
Rešenje.



$$x'_t = -r\sin t$$
$$y^2 x'_t = (b + r\sin t)^2(-r\sin t)$$

$$V = -\pi \int\limits_0^{\pi} (b + r\sin t)^2(-r\sin t)dt - \pi \int\limits_{\pi}^{2\pi} (b + r\sin t)^2(-r\sin tdt$$
$$= \pi r \int\limits_0^{\pi} (b^2 + 2br\sin t + r^2\sin^2 t)\sin tdt + r\pi \int\limits_{\pi}^{2\pi} (b^2 + 2br\sin t + r^2\sin^2 t)\sin tdt$$
$$= \pi r \int\limits_0^{\pi} (b^2\sin t + 2br\frac{1-\cos 2t}{2} + r^2(1-\cos^2 t)\sin t)dt$$
$$+ r\pi \int\limits_{\pi}^{2\pi} (b^2 + 2br\sin t + r^2\sin^2 t)\sin tdt = -\pi r b^2\cos t\Big|_0^{\pi} + b\pi r^2 t\Big|_0^{\pi} + \frac{br^2\pi}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi}$$
$$- \pi r^3\cos t\Big|_0^{\pi} + \frac{\pi r^3}{3}\cos^3 t\Big|_0^{\pi} - \pi r b^2\cos t\Big|_{\pi}^{2\pi} + b\pi r^2 t\Big|_{\pi}^{2\pi} + \frac{br^2\pi}{2}\sin 2t\Big|_{\pi}^{2\pi}$$
$$- \pi r^3\cos t\Big|_{\pi}^{2\pi} + \frac{\pi r^3}{3}\cos^3 t\Big|_{\pi}^{2\pi} = -\pi r b^2(-1-1) + b\pi^2 r^2 - \pi r^3(-1-1) +$$
$$\frac{\pi r^3}{3}(-1-1) - \pi r b^2(1+1) + b\pi^2 r^2 - \pi r^3(1+1) + \frac{\pi r^3}{3}(1+1) = 2b\pi^2 r^2$$

1.1. Površina omotača obrtnih tela

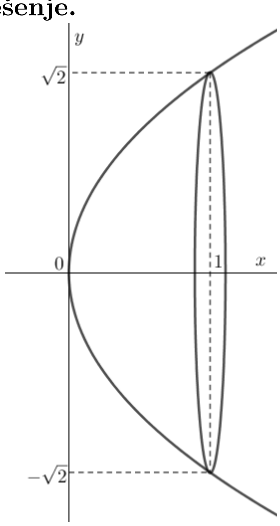
- Pravougli koordinatni sistem

Definišimo površinu omotača obrtnog tela, koje se dobija obrtanjem krivolinijskog trapeza, čije stranice su interval $[a, b]$, delovi pravih $x = a$ i $x = b$ i kriva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, oko x-ose. Funkcija $f(x)$ je nenegativna i ima neprekidan prvi izvod nad zatvorenim intervalom $[a, b]$. Površina M omotača obrtnog tela je

$$M = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}dx.$$

Zadatak 1.2. Izračunati površinu omotača paraboličnog ogledala dubine $1m$, prečnika $D = 2\sqrt{2}m$.

Rešenje.



Postavimo koordinatni sistem kao na slici. Kako parabola prolazi kroz koordinatni početak sledi da je njena jednačina $y^2 = ax$, a kako prolazi i kroz tačke $(1, \pm\sqrt{2})$ dobijamo da je $a = 2$, tj. jednačina parabole je $y^2 = 2x$. Pošto nam treba površina omotača za našu funkciju uzećemo samo pozitivan krak $y = \sqrt{2x}$ parabole i to na intervalu $[0, 1]$.
Potrebno je izračunati i $y'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$, odakle

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} = \sqrt{\frac{2x + 1}{2x}}.$$

$$M = 2\pi \int_0^1 \sqrt{2x} \cdot \sqrt{\frac{2x + 1}{2x}}dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{2x + 1}dx = \left[\begin{array}{c} 2x + 1 = t \\ dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right]$$

$$= 2\pi \int_1^3 t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dt}{2} = \pi \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^3 = \frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3} - 1)m^2.$$

- Polarni koodinatni sistem

Ako se kriva $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$, obrće oko polarne ose, tada je površina P omotača obrtnog tela, pod pretpostavkama da funkcija $\rho = \rho(\varphi)$ ima neprekidan prvi izvod nad zatvorenim intervalom $[\alpha, \beta]$, data obrascem

$$P = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} \sin\varphi d\varphi.$$

Zadatak 1.3. Naći površinu lopte poluprečnika R.
Rešenje.

Jednačina kružnice u polarnom koordinatnom sistemu je $\rho = \mathrm{R}$, pa je površina lopte

$$P = 2\pi \int\limits_{0}^{\pi} R^2 \sin\varphi d\varphi = -2\pi R^2 \cos\varphi \Big|_0^{\pi} = 4\pi R^2.$$

- Parametarski oblik

Ako se kriva $y = f(x)$ data u parametarskom obliku $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$, obré oko x-ose, tada je površina P omotača obrtnog tela pod pretpostavkama: a) funkcija $\varphi(t$ ima neprekidan pozitivan prvi izvod nad zatvorenim intervalom $[\alpha, \beta]$, b) funkcija $\psi(t)$ je nenegativna i ima neprekidan prvi izvod nad zatvorenim intervalom $[\alpha, \beta]$, data obrascem

$$P = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt.$$

Zadatak 1.4. Naći površinu tela nastalog obrtanjem jednog svoda cikloide oko x - ose.
Rešenje.

$$x = a(t - \sin t) \quad x'_t = a(1 - \cos t) \quad y = a(1 - \cos t) \quad y'_t = a \sin t$$

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + a^2 \sin^2 t = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

$$\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = 2a \sin \frac{t}{2}, \quad \sin \frac{t}{2} > 0 \quad t \in [0, 2\pi].$$

Površina omotača nastalog tela je

$$P = 4a^2\pi \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} dt = 8a^2\pi \int\limits_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = 8a^2\pi \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \frac{t}{2}) \sin \frac{t}{2} dt =$$

$$- 16a^2\pi \cos \frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} + 16a^2\pi \frac{\cos^3 \frac{t}{2}}{3}\Big|_0^{2\pi} = -16a^2\pi(-1 - 1) + \frac{16}{3}a^2\pi(-1 - 1) = \frac{64}{3}a^2\pi.$$

1.2. Dodatak

Zadatak 1.5. Naći $I = \int \frac{dx}{\cos x + 2}$ nad intervalom $(0, \frac{3\pi}{2})$.

Rešenje. Funkcija $f(x) = \frac{1}{\cos x+2}$ je neprekidna za svako x, pa za nju postoji neodređeni integral nad zadatim intervalom. Kao i pre, uvodimo smenu $tg\frac{x}{2} = t, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, ali se javlja problem što su u zadatom intervalu nalazi tačka $x = \pi$, a $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ nije definisan. Iz tog razloga interval ćemo podeliti na dva dela $(0, \pi)$ i $(\pi, \frac{3\pi}{2})$, a zatim odrediti koliko iznosi I u tački $x = \pi$.
Za $x \in (0, \pi)$ imamo

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{dx}{\cos x + 2} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+2+2t^2}{1+t^2}} \\
&= \int \frac{2dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C_1.
\end{aligned}
$$

Slično, za $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$

$$I_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C_2.$$

Treba još odrediti $I(\pi)$ i vezu između konstanti C_1 i C_2, što se dobija iz

$$I(\pi) = \lim_{x\to\pi} I = \lim_{x\to\pi^-} I_1 = \lim_{x\to\pi^+} I_2.$$

Kako je

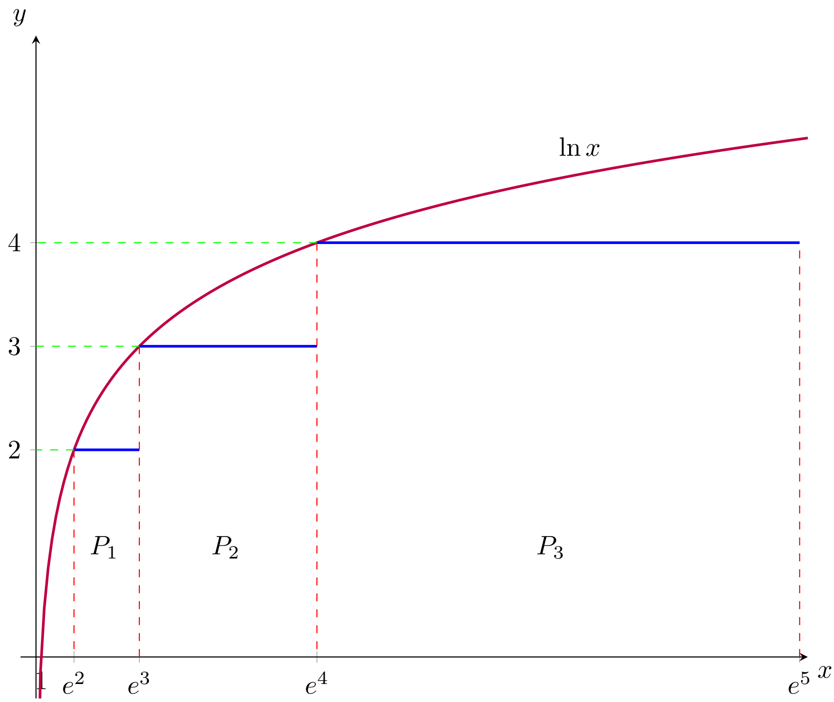
$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi^-} I_1 &= \lim_{x\to\pi^-} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C_1 \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} + C_1 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + C_1. \\
\lim_{x\to\pi^+} I_2 &= \lim_{x\to\pi^+} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C_2 \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-\pi}{2} + C_2 = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + C_2.
\end{aligned}
$$

Sledi da je $\frac{\pi}{\sqrt{3}} + C_1 = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + C_2$, odnosno $C_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + C_1$. Konačno,

$$
I = \begin{cases}
\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C_1, & x \in (0, \pi) \\
\frac{\pi}{\sqrt{3}} + C_1, & x = \pi \\
\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C_1, & x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})
\end{cases}.
$$

Zadatak 1.6. Izračunati $\lfloor\int\limits_{e^2}^{e^5}\lfloor\ln x\rfloor dx\rfloor$. Uzeti da je $e\approx 2.7$.

Rešenje. Određeni integral $\int\limits_{e^2}^{e^5}\lfloor\ln x\rfloor dx$ predstavlja površinu ispod krive $\lfloor\ln x\rfloor$ na intervalu $[e^2, e^5]$.



Skiciranjem grafika dobijamo da je

$$\begin{aligned}\int\limits_{e^2}^{e^5}\lfloor\ln x\rfloor dx &= \underbrace{2(e^3-e^2)}_{P_1}+\underbrace{3(e^4-e^3)}_{P_2}+\underbrace{4(e^5-e^4)}_{P_3}\\ &= 2e^2(e-1)+3e^3(e-1)+4e^4(e-1)\\ &= (e-1)(2e^2+3e^3+4e^4)\approx 486,549\,.\end{aligned}$$

Na kraju, imamo da je $\lfloor\int\limits_{e^2}^{e^5}\lfloor\ln x\rfloor dx\rfloor = 486$.

Zadatak 1.7. Neka je funkcija f neprekidna nad intervalom $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Dokazati da važi

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$$

Rešenje. Pošto za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ važi $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, jednakost sledi korišćenjem smene $t = \frac{\pi}{2} - x$, tj.

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos(\frac{\pi}{2} - x))dx \\ &= -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\cos t)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt.\end{aligned}$$

Zadatak 1.8. Odrediti vrednost realnog parametra b, $b > -1$, tako da važi

$$\frac{1}{1+b}\int_{-1}^{b}(3x^2+2x)dx = 4.$$

Rešenje. Prvo, sa linearnošću određenog integrala dobijamo

$$\frac{1}{b+1}\int_{-1}^{b}(3x^2+2x)\,dx = \frac{1}{b+1}\Big(\int_{-1}^{b}3x^2\,dx + \int_{-1}^{b}2x\,dx\Big).$$

Njutn-Lajbnicovom formulom dolazimo do

$$\int_{-1}^{b}3x^2\,dx = x^3\Big|_{-1}^{b} = b^3+1,$$
$$\int_{-1}^{b}2x\,dx = x^2\Big|_{-1}^{b} = b^2-1.$$

Uvrštavanjem vrednosti ova dva određena integrala dobijamo

$$\frac{1}{b+1}\int_{-1}^{b}(3x^2+2x)\,dx = \frac{b^3+1+b^2-1}{b+1} = \frac{b^2(b+1)}{b+1} = b^2,$$

pa zadati izraz ima vrednost 4 kada je $b^2 = 4$, odnosno $b = 2$ ili $b = -2$. Kako je uslov $b > -1$, zaključujemo da je rešenje $b = 2$.

Zadatak 1.9. Ako je

$$h(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ x & , \quad 2 < x \leq 4 \end{cases},$$

izračunati $g(x) = \int\limits_{x}^{x^2} h(t)dt$ za $x \in [0, 2]$.

Rešenje. Po tekstu zadatka funkcije $h(x)$ imamo

$$x \in [0, \sqrt{2}] \Rightarrow \; g(x) = \int_{x}^{x^2} 1\,dt = x^2 - x$$

$$x \in [\sqrt{2}, 2] \Rightarrow \; g(x) = \int_{x}^{2} 1\,dt + \int_{2}^{x^2} t\,dt = 2 - x + \frac{t^2}{2}\Big|_{2}^{x^2} = \frac{x^4}{2} - x.$$

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Nováković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[5] Neboja Ralević, Tijana Ostojić, Manojlo Vuković, Aleksandar Janjoš. *Praktikum iz Matematike analize I.* FTN Izdavatvo, Novi Sad, 2021.