VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1. Vežbe II.4

1.1. Ispitivanje funkcija

Zadatak 1.1. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \ln\left|\dfrac{\ln|x|+1}{\ln|x|-1}\right|$.

Rešenje.

- *oblast definisanosti*: logaritam apsolutne vrednosti je definisan za sve vrednosti iz $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, što znači da mora važiti $\ln|x|-1 \neq 0$, tj. $\ln|x| \neq 1$, tj. $x \neq \pm e$. Izraz $\ln|x|+1$ takođe ne sme biti jednak nuli, tj. mora važiti $x \neq \pm\frac{1}{e}$. Iz izraza $\ln|x|$ sledi $x \neq 0$. Dakle, $\mathcal{D} : x \in \mathbb{R}\backslash\{-e, -\frac{1}{e}, 0, \frac{1}{e}, e\}$.

- *parnost*: ovo je parna funkcija, jer je

$$f(-x) = \ln\left|\frac{\ln|-x|+1}{\ln|-x|-1}\right| = \ln\left|\frac{\ln|x|+1}{\ln|x|-1}\right| = f(x),$$

  što znači da je **u nastavku dovoljno posmatrati samo deo funkcije za** $x > 0$, tj. za $x \in (0, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, e) \cup (e, \infty)$ posmatramo funkciju $f(x) = \ln\left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right|$.

- *nule*: za $x > 0$ je $f(x) = 0$ akko je

$$\left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right| = e^0 = 1,$$

$$\text{tj.} \quad \frac{\ln x+1}{\ln x-1} = 1 \quad \text{ili} \quad \frac{\ln x+1}{\ln x-1} = -1.$$

  Gornji izraz ne može biti jedinica (vodi do kontradikcije)

$$\frac{\ln x+1}{\ln x-1} = 1 \Leftrightarrow \ln x+1 = \ln x-1 \Leftrightarrow 1 = -1,$$

  ali može biti -1 jer

$$\frac{\ln x+1}{\ln x-1} = -1 \Leftrightarrow \ln x+1 = -\ln x+1 \Leftrightarrow 2\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

- *asimptote:* (za $x > 0$)

  - V.A. su date jednačinama $x = \frac{1}{e}$ i $x = e$, jer je

$$\lim_{x\to\frac{1}{e}^{\pm}} \ln\left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right| = \ln \lim_{x\to\frac{1}{e}^{\pm}} \left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right| = \ln(0^+) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to e^{\pm}} \ln\left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right| = \ln \lim_{x\to e^{\pm}} \left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right| = \ln(+\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right| = \ln \lim_{x\to 0^+} \left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right| = \ln 1 = 0.$$

- H.A. je data jednačinom $y = 0$, jer je

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left|\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}\right| = 0.$$

- K.A. ne postoji.

- *monotonost i ekstremne vrednosti:* budući da je

	$(0,\frac{1}{e})$	$(\frac{1}{e},e)$	(e,∞)
$\ln x + 1$	$-$	$+$	$+$
$\ln x - 1$	$-$	$-$	$+$
$\frac{\ln x+1}{\ln x-1}$	$+$	$-$	$+$

tj.

$$f(x) = \ln\left|\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}\right| = \begin{cases} \ln\frac{\ln x+1}{\ln x-1}, & x\in(0,\frac{1}{e})\cup(e,\infty),\\ \ln\frac{\ln x+1}{1-\ln x}, & x\in(\frac{1}{e},e),\end{cases}$$

na oba intervala se moraju naći izvodi.
-Za $x\in(0,\frac{1}{e})\cup(e,\infty)$ važi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}\cdot\frac{\frac{1}{x}(\ln x - 1) - (\ln x + 1)\frac{1}{x}}{(\ln x - 1)^2}\\ &= \frac{2}{x(1-\ln^2 x)} = \frac{2}{x(1+\ln x)(1-\ln x)},\end{aligned}$$

te je funkcija opadajuća na $(0,\frac{1}{e})$ i (e,∞) na osnovu znaka prvog izvoda.

	$(0,\frac{1}{e})$	$\times$	(e,∞)
$1+\ln(x)$	$-$	$\times$	$+$
$1-\ln(x)$	$+$	$\times$	$-$
$f'(x)$	$\searrow$	$\times$	$\searrow$

-Za $x\in(\frac{1}{e},e)$ važi

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{\ln x + 1}\cdot\frac{\frac{1}{x}(1-\ln x) + (\ln x + 1)\frac{1}{x}}{(1-\ln x)^2} = \frac{2}{x(1-\ln^2 x)}.$$

	$\times$	$(\frac{1}{e},e)$	$\times$
$1+\ln(x)$	$\times$	$+$	$\times$
$1-\ln(x)$	$\times$	$+$	$\times$
$f'(x)$	$\times$	$\nearrow$	$\times$

Funkcija je rastuća na intervalu $(\frac{1}{e},e)$, jer je $f'(x)>0$.
Na oba posmatrana intervala funkcija nema ekstremnih vrednosti.

- *konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:* prvi izvod je jednak i na $(0, \frac{1}{e}) \cup (e, \infty)$ i na $(\frac{1}{e}, e)$. Zato je

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{2}{x(1-\ln^2 x)}\right)' = \frac{2(\ln^2 x + 2\ln x - 1)}{x^2(1-\ln^2 x)^2}$$
$$= \frac{2(\ln x - \ln a)(\ln x - \ln b)}{x^2(1-\ln^2 x)^2},$$

gde su a, b rešenja kvadratne jednačine

$$\ln^2 x + 2\ln x - 1 = 0,$$

pri čemu je $a \approx 0.089$ i $b \approx 1.513$. Na osnovu znaka drugog izvoda (primetiti da je $a \leq e^{-1} \leq b \leq e$)

	$(0,a)$	(a,e^{-1})	(e^{-1},b)	(b,e)	(e,∞)
$\ln x - \ln a$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\ln x - \ln b$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cap$	$\cup$	$\cup$

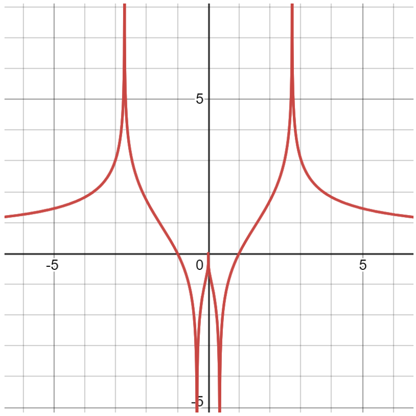
sledi da je funkcija konveksna, $f''(x) > 0$, za $x \in (0,a) \cup (b,e) \cup (e,\infty)$ i takođe da je konkavna, $f''(x) < 0$, za $x \in (a, e^{-1}) \cup (e^{-1}, b)$.
Prevojne tačke funkcije su $P_1(a, f(a))$ i $P_2(b, f(b))$, gde je $f(a) \approx -0.88$ i $f(b) \approx 0.87$.

- *tangenta funkcije:* za tačku $x = 0$ je

$$tg(\alpha) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x(1-\ln^2(x))} = 2\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{1-\ln^2(x)} \overset{\text{L.P.}}{=} 2\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^{-2}}{\frac{-2\ln x}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{\ln(x)} \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^{-2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty,$$

te je koeficijent pravca (neprave) tangente u nuli $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.



Slika 1: $f(x) = \ln\left|\frac{\ln|x|+1}{\ln|x|-1}\right|$

Zadatak 1.2. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = x \cdot e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}$ (bez nalaženja drugog izvoda).

Rešenje.

- *oblast definisanosti*: $3(x^2-2) \neq 0 \Leftrightarrow x^3 \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \sqrt[3]{2}$, tj. $\mathcal{D} : x \in (-\infty, \sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{2}, +\infty)$.

- *parnost*: $f(-x) = -x \cdot \dfrac{-x^3-1}{3(-x^3-2)} \neq \pm f(x)$, funkcija nije ni parna ni neparna.

- *nule*: proizvod dva činioca jednak je nuli akko je bar jedan od njih nula. Kako je $e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} \neq 0$ za svaki realan broj, sledi $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

- *asimptote*:

  – V.A. je data pravom $x = \sqrt[3]{2}$ jer

$$\lim_{x\to\sqrt[3]{2}^+} x \cdot e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{+\infty} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to\sqrt[3]{2}^-} x \cdot e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{-\infty} = 0.$$

  – H.A. ne postoji jer

$$\lim_{x\to-\infty} x \cdot e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} = +\infty.$$

– K.A. je prava $y = \sqrt[3]{e} \cdot x$ jer

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{xe^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} = e^{\frac{1}{3}},$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left[x \cdot e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} - x \cdot e^{\frac{1}{3}}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} - e^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}}{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{3x^2(x^3-2) - (x^3-1)3x^2}{3(x^3-2)^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} \cdot \frac{x^4}{(x^3-2)^2} = e^{\frac{1}{3}} \cdot 0 = 0.$$

- *monotonost i ekstremne vrednosti*:

$$f'(x) = e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} + x \cdot e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} \cdot \frac{3x^2(x^3-2) - (x^3-1)3x^2}{3(x^3-2)^2}$$

$$= e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} \cdot \left(1 + x \cdot \frac{-x^2}{(x^3-2)^2}\right) = e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} \cdot \frac{x^6 - 4x^3 + 4 - x^3}{(x^3-2)^2}$$

$$= e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} \cdot \frac{x^3(x^3-1) - 4(x^3-1)}{(x^3-2)^2} = e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}} \cdot \frac{(x^3-1)(x^3-4)}{(x^3-2)^2}.$$

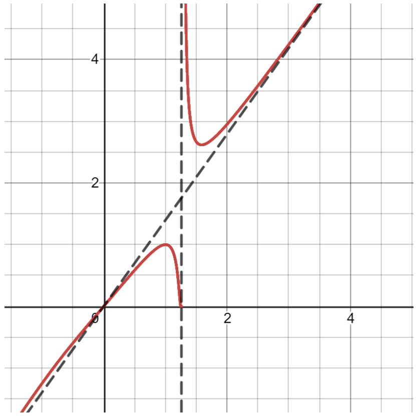
Sledi da je $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^3-1)(x^3-4) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \sqrt[3]{4}$.
Potrebno je ispitati znak prvog izvoda da bismo odredili ekstremne vrednosti.
Primetimo da znak prvog izvoda zavisi isključivo od izraza $(x^3-1)(x^3-4)$.

	$(-\infty, 1)$	$(1, \sqrt[3]{2})$	$(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$	$(\sqrt[3]{4}, \infty)$
x^3-4	$-$	$-$	$-$	$+$
x^3-1	$-$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkcija je rastuća na intervalima $(-\infty, 1)$ i $(\sqrt[3]{4}, +\infty)$, a opadajuća na intervalima $(1, \sqrt[3]{2})$ i $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$.
Funkcija ima maksimum u tački $T_{max}(1, 1)$, a minimum u tački $T_{min}(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4}\sqrt{e})$.

- *tangenta funkcije:* za tačku $x = \sqrt[3]{2}$ koeficijent pravca (neprave leve) tangente je

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \lim_{x\to \sqrt[3]{2}^-} f'(x) = 0 \quad (\alpha = 0).$$



Slika 2: $f(x) = x \cdot e^{\frac{x^3-1}{3(x^3-2)}}$

1.2. Jednačina tangente i normale

Ako funkcija $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ ima prvi izvod u tački $x_0 \in (a,b)$, tada se prava

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),}$$

gde je $y_0 = f(x_0)$, zove **tangenta grafika funkcije** f u tački $T(x_0, f(x_0))$. Ako je α ugao između tangente grafika u tački x_0 i pozitivnog smera x-ose, tada važi

$$\text{tg}(\alpha) = f'(x_0).$$

Ako je $f'(x_0) \neq 0$, tada je **normala grafika funkcije** f u tački $T(x_0, f(x_0))$ prava

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).}$$

Zadatak 1.3. Naći jednačine tangente i normale za sledeće funkcije u datim tačkama:

a) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x} - \ln x$ u tački čija je apcisa $x_0 = 1$;

b) $x = 2\,\mathrm{tg}\, t$, $y = 2\sin^2 t + \sin(2t)$ u tački $A(2, 2)$.

Rešenje.

a) Prvo računamo y koordinatu tačke $T(x_0, f(x_0))$.

$$y = f(1) = 2 \Rightarrow T(1, 2),$$

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad f'(1) = 1.$$

Jednačine tangente i normale su

$$t : y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = x + 1,$$

$$n : y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -x + 3.$$

b) Funkcija je zadata parametarski pa koristimo izvod parametarski zadate funkcije

$$x'(t) = \frac{2}{\cos^2 t}, \quad y'(t) = 4\sin t\cos t + 2\cos(2t)$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{2\sin(2t) + 2\cos(2t)}{\frac{2}{\cos^2 t}}$$

$$2\,\mathrm{tg}\, t = 2 \Rightarrow \mathrm{tg}\, t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y'_x(t) = \frac{1}{2}.$$

$$t : y - y_0 = y'_x(t)(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{x}{2} + 1.$$

$$n : y - y_0 = -\frac{1}{y'_x(t)}(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 6.$$

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.