VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1. Vežbe I.3

1.1. Granična vrednost rekurzivno zadatih nizova

Definicija 1.1. s je **supremum** niza $\{a_n\}$ ako važi:

1. $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq s$,
2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(a_{n_0} > s - \varepsilon)$.

Tada pišemo $s = \sup\{a_n\}$

Definicija 1.2. i je **infimum** niza $\{a_n\}$ ako važi:

1. $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \geq s$,
2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(a_{n_0} < i + \varepsilon)$.

Tada pišemo $i = \inf\{a_n\}$

Napomena: Primetimo, supremum s je najmanje gornje ograničenje niza $\{a_n\}$, dok je infimum i najveće donje ograničenje niza $\{a_n\}$.

Tvrđenje 1.3. *Svaki monotono rastući (neopadajući) niz koji je ograničen sa gornje strane konvergira svom supremumu.*

Tvrđenje 1.4. *Svaki monotono opadajući (nerastući) niz koji je ograničen sa donje strane konvergira svom infimumu.*

1.2. Zadaci

Zadatak 1.5. Neka je niz $\{a_n\}$ dat sa

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 3 \cdot \frac{2a_n + 1}{a_n + 4}, n \in \mathbb{N}.$$

Pokazati da je niz $\{a_n\}$ konvergentan i naći njegovu graničnu vrednost.

Rešenje.

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{9}{5}, a_3 = 3 \cdot \frac{2a_2 + 1}{a_2 + 4} = \frac{2\frac{9}{5} + 1}{\frac{9}{5} + 4} = \frac{69}{29}, \dots$$

Očigledno je da je niz $\{a_n\}$ niz pozitivnih brojeva, tj. $\boxed{a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}}$.
Pokažimo da je niz $\{a_n\}$ monotono rastući.
Monotonost:

BI Za $n = 1$ treba pokazati $a_2 > a_1$,

$$a_1 = 1 < \frac{9}{5} = a_2.$$

IH Pretpostavimo da za neko $n = k$ važi $a_k > a_{k-1}$.

IK Treba pokazati da za $n = k + 1$ važi $a_{k+1} > a_k$, odnosno da je

$$a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow a_{k+1} - a_k > 0.$$

$$\begin{aligned}
&3 \cdot \frac{2a_k + 1}{a_k + 4} - 3 \cdot \frac{2a_{k-1} + 1}{a_{k-1} + 4} \\
&= 3 \cdot \frac{(2a_k + 1)(a_{k-1} + 4) - (2a_{k-1} + 1)(a_k + 4)}{(a_{k-1} + 4)(a_k + 4)} \\
&= 3 \cdot \frac{2a_k a_{k-1} + 8a_k + a_{k-1} + 4 - (2a_k a_{k-1} + 8a_{k-1} + a_k + 4)}{(a_k + 4)(a_{k-1} + 4)} \\
&= 3 \cdot \frac{7a_k - 7a_{k-1}}{(a_k + 4)(a_{k-1} + 4)} = \frac{21(a_k - a_{k-1})}{(a_k + 4)(a_{k-1} + 4)} > 0.
\end{aligned}$$

Dakle, niz je monotono rastući, odnosno $\boxed{a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}}$.

Pokažimo da je niz $\{a_n\}$ ograničen sa gornje strane brojem 3.
Ograničenost:

BI Za $n = 1$ je $a_1 < 3$.

IH Pretpostavimo da za neko $n = k$ važi $a_k < 3$.

IK Treba pokazati da za $n = k + 1$ važi $a_{k+1} < 3$.

$$a_k < 3 \Rightarrow a_k = 3 - \delta, \delta > 0$$

$$a_{k+1} = 3 \cdot \frac{2a_k + 1}{a_k + 4} = 3 \cdot \frac{2(3-\delta)+1}{3-\delta+4} = 3\frac{6-2\delta+1}{7-\delta} = 3 \cdot \underbrace{\frac{7-2\delta}{7-\delta}}_{<1} < 3.$$

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da je niz $\{a_n\}$ ograničen sa gornje strane, tj. $\boxed{a_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}}$.

Iz monotonosti i ograničenosti sledi da je niz konvergentan, tj. postoji $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Konvergencija:
Neka je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Iz

$$a_{n+1} = 3\frac{2a_n + 1}{a_n + 4}$$

sledi

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 3\frac{2\lim_{n\to\infty} a_n + 1}{\lim_{n\to\infty} a_n + 4}$$

$$A = 3\frac{2A+1}{A+4} \Leftrightarrow A^2 + 4A = 6A + 3 \Leftrightarrow A^2 - 2A - 3 = 0.$$

Rešenja poslednje jednačine su:

$$A_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2},$$

odnosno

$$A_1 = -1 \text{ i } A_2 = 3.$$

Kako je $a_n > 0$, sledi da je $\lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$, odnosno$A \geq 0$. Dakle,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 3.}$$

Zadatak 1.6. Pokazati konvergenciju i odrediti graničnu vrednost niza

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \ a_1 > 2.$$

Rešenje. Dokazaćemo da je niz monotono opadajući i ograničen sa donje strane brojem 2.

Monotonost:

BI Za $n = 1$ treba pokazati $a_1 > a_2$,

$$a_2 = \sqrt{2 + a_1} < \sqrt{a_1 + a_1} = \sqrt{2a_1} < \sqrt{a_1^2} = a_1.$$

IH Pretpostavimo da za neko $n = k$ važi $a_{k-1} > a_k$.

IK Treba pokazati da za $n = k + 1$ važi $a_k > a_{k+1}$.
Iz indukcijske hipoteze dobijamo

$$a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + a_{k-1}} = a_k.$$

Dakle, niz je monotono opadajući.

Ograničenost:

BI Za $n = 1$ je $a_1 > 2$ po pretpostavci.

IH Pretpostavimo da za neko $n = k$ važi $a_k > 2$.

IK Treba pokazati da za $n = k + 1$ važi $a_{k+1} > 2$.
Iz indukcijske hipoteze dobijamo

$$a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} > \sqrt{2 + 2} = 2,$$

pa je niz ograničen.

Iz monotonosti i ogračenosti sledi da je niz konvergentan, tj. postoji $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Konvergencija:
Neka je $A = \lim_{n\to\infty} a_n$.
Iz

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

sledi

$$A = \sqrt{2 + A} \Leftrightarrow A^2 - A - 2 = 0$$

$$A_1 = 2 \vee A_2 = -1.$$

Kako je $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, za graničnu vrednost uzimamo broj 2, tj.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

Zadatak 1.7. Dokazati da je niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dat sa

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n^2$$

konvergentan i odrediti njegovu graničnu vrednost.

Rešenje.
Prvo ćemo pokazati da za sve članove niza važi $0 < x_n < 1$.
Ograničenost:

- BI Za $n = 1$ je $x_1 = \frac{1}{2}$, pa je zadovoljeno $0 < x_1 < 1$.
- IH Pretpostavimo da za neko $n = k$ važi $0 < x_k < 1$.
- IK Treba pokazati da za $n = k+1$ važi $0 < x_{k+1} < 1$.
  Iz indukcijske hipoteze dobijamo

$$0 < x_{k+1} = x_k^2 < x_k < 1.$$

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da je niz $\{x_n\}$ ograničen.

Pokazaćemo da je niz monotono opadajući.

Monotonost:
Primetimo da je $x_1 = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = x_1^2 = x_2$, pa važi $x_1 > x_2$.
Treba pokazati da važi $x_k > x_{k+1}$ za svako $k \in \mathbb{N}$.

$$x_{k+1} - x_k = x_k^2 - x_k = (x_k - 1)x_k < 0,$$

jer je $0 < x_k < 1, \forall k \in \mathbb{N}$. Dakle, niz je monotono opadajući.

Kako je niz je monotono opadajući i ograničen sa donje strane, sledi da je konvergentan i da konvergira ka svom infimumu.

Konvergencija:

Neka je
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$
Iz
$$x_{n+1} = x_n^2$$
sledi
$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n^2,$$
$$x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$$
$$x = 0 \vee x = 1,$$
a kako je niz opadajući, sledi da je
$$\lim_{x\to\infty} x_n = 0.$$

Zadatak 1.8. Neka je niz $\{a_n\}$ definisan na sledeći način

$$a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}, a_1 = \frac{c}{2}, c \in \mathbb{R}^+.$$

a) Pokazati da je niz monotono rastući.

b) Dokazati da je niz konvergentan ako i samo ako $c \in (0, 1]$ i naći njegovu graničnu vrednost.

Rešenje.

a) Pokažimo da je niz $\{a_n\}$ monotono rastući.
Monotonost:

BI Za $n = 1$ treba pokazati da je $a_2 - a_1 > 0$.

$$a_2 = \frac{c}{2} + \frac{a_1^2}{2} = \frac{c}{2} + \frac{c^2}{8}$$

$$a_2 - a_1 = \frac{c}{2} + \frac{c^2}{8} - \frac{c}{2} = \frac{c^2}{8} > 0$$

IH Za $n = k$ pretpostavimo da važi $a_k - a_{k-1} > 0$.

IK Za $n = k + 1$ treba pokazati da je $a_{k+1} - a_k > 0$.

$$a_{k+1} - a_k = \frac{c}{2} + \frac{a_k^2}{2} - \left(\frac{c}{2} + \frac{a_{k-1}^2}{2}\right) = \frac{a_k^2 - a_{k-1}^2}{2} = \frac{(a_k - a_{k-1})(a_k + a_{k-1})}{2} > 0$$

zbog IH i zbog $a_n > 0, \forall n \in N$.

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da je niz $\{a_n\}$ monotono rastući, odnosno važi $\boxed{a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.}$

b) Pokažimo niz je konvergentan ako i samo ako $c \in (0, 1]$.
1. Niz je konvergentan ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$) $\Rightarrow$ $c \in (0, 1]$.

Iz $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$ sledi:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} a_n^2$$

$$A = \frac{c}{2} + \frac{A^2}{2} \Leftrightarrow A^2 - 2A + c = 0.$$

Rešenja poslednje jednačine su:

$$A_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4c}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - c}.$$

Da bi ova rešenja bila realna mora da važi:

$$1 - c \geq 0 \Rightarrow c \leq 1 \text{ i } c \in \mathbb{R}^+$$

$\Rightarrow c \in (0, 1]$

2. $c \in (0, 1] \Rightarrow$ niz je konvergentan.
Pokažimo da je niz $\{a_n\}$ ograničen sa gornje strane.
Ograničenost:

BI Za $n = 1$ treba pokazati da je $a_1 < 1$.

$$a_1 = \frac{c}{2} \leq \frac{1}{2} < 1$$

IH Za $n = k$ pretpostavimo da važi $a_k < 1$.

IK Za $n = k + 1$ treba pokazati da je $a_{k+1} < 1$.

$$a_{k+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_k^2}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{a_k^2}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da je $\boxed{a_n < 1, \forall n \in N.}$

Kako je niz $\{a_n\}$ monoton i ograničen sledi sledi da je niz $\{a_n\}$ konvergentan, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Konvergencija:
Moguće granične vrednosti su:

$$A_1 = 1 + \sqrt{1 - c} > 1 \text{ i } A_2 = 1 - \sqrt{1 - c} < 1.$$

Zbog toga što je $a_n < 1$ za svako $n \in N$, sledi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 - \sqrt{1 - c}.$$

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[5] Neboja Ralevi, Tijana Ostoji, Manojlo Vukovi, Aleksandar Janjo. *Praktikum iz Matematike analize I.* FTN Izdavatvo, Novi Sad, 2020.