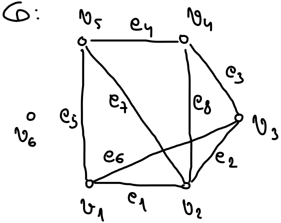
Вежбе 13

-Графови и матрице-

G:



матрица ИНЦИДЕНЦИЈЕ $B(G)$

→ однос између чворова и грана графа

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \in e_j \\ 0, & v_i \notin e_j \end{cases}$$

$$B(G) = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Број јединица у
- колони: 2
- врсти: $d(v_i)$

матрица СУСЕДСТВА $A(G)$

→ однос између чворова графа

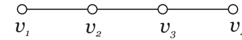
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i v_j \in E(G) \\ 0, & v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

$$A(G) = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Квадратна матрица
- На главној дијагонали нуле (јер немамо петље)
- Симетрична матрица
- Број јединица у врсти/колони: $d(v_i)$

T: Број различитих $v_i - v_j$ шетњи дужине $k \geq 1$ у графу G једнак је елементу $a_{ij}^{(k)}$ матрице $A^k(G)$, где је $A(G)$ матрица суседства графа G.

1. Одредити број свих $v_2 - v_3$ шетњи дужине 7 у графу



Једна таква шетња је $v_2 v_1 v_2 v_3 v_4 v_3 v_2 v_3$

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Тражимо матрицу A^7

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

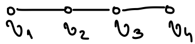
$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^7 = A^3 \cdot A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 13 & 0 & 8 \\ 13 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 13 \\ 8 & 0 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

$a_{23}^{(7)} = 21 \Rightarrow$ Број шетњи дужине 7 у графу G од v_2 до v_3 је 21.

НАПОМЕНЕ:



– Посматрајмо матрице A^2 и A^4, односно A^3 и A^7. Приметимо да се код матрица са парним експонентом нуле налазе на истим позицијама, и аналогно за непарне експоненте. Наиме, како је $d(v_2,v_3)=1$, немогуће је да имамо v_2-v_3 шетњу парне дужине. Слично, пошто је нпр. $d(v_1,v_3)=2$, број v_1-v_3 шетњи непарне дужине у посматраном графу је 0.

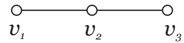
– Посматрајмо матрицу A^2 и приметимо да се на њеној главној дијагонали налазе степени чворова.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Знамо да елемент $a_{ii}^{(2)}$ матрице A^2 одговара броју шетњи дужине 2 од чвора v_i до чвора v_i.

Како се свака v_i-v_i шетња дужине 2 у графу G може представити као $v_i v_j v_i$, за неки чвор v_j који је сусед чвора v_i, добијамо да је $a_{ii}^{(2)} = |N_G(v_i)| = d_G(v_i)$, за $\forall v_i \in V(G)$.

2. Одредити број свих $v_1 - v_2$ и $v_1 - v_3$ шетњи дужине 2024 у графу



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n & c_n \\ b_n & d_n & e_n \\ c_n & e_n & f_n \end{bmatrix}$$

Користимо симетричност

$$A^{n+1} = A^n \cdot A$$

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \\ b_{n+1} & d_{n+1} & e_{n+1} \\ c_{n+1} & e_{n+1} & f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & b_n & c_n \\ b_n & d_n & e_n \\ c_n & e_n & f_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n & a_n + c_n & b_n \\ d_n & b_n + e_n & d_n \\ e_n & c_n + f_n & c_n \end{bmatrix}$$

Требају нам b_{n+1} и c_{n+1} пошто тражимо број $v_1 - v_2$ и $v_1 - v_3$ шетњи

$a_{n+1} = b_n = c_{n+1}$ → Ако одредимо b_n, знаћемо и c_n

$b_{n+1} = a_n + c_n = b_{n-1} + b_{n-1}$

$v_1 - v_2$ шетње → b_{n+1}

$v_1 - v_3$ шетње → b_n

Добијамо рекурентну релацију 2. реда

$b_{n+1} - 2b_{n-1} = 0$

Карактеристична једначина $t^2 - 2 = 0$

$t = \pm\sqrt{2}$

$b_n = A(\sqrt{2})^n + B(-\sqrt{2})^n$

$1 = b_1 = A\sqrt{2} - B\sqrt{2}$ (читамо из $A(G)$)

$0 = b_2 = 2A + 2B$ (број $v_1 - v_2$ шетњи дужине 2 је 0, јер је $d(v_1, v_2) = 1$)

$\vdots$

$A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad B = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$b_n = \frac{(\sqrt{2})^{n-1}}{2}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)$$

$n + 1 = 2024$

$v_1 - v_2: b_{2024} = \frac{(\sqrt{2})^{2023}}{2}\left(1 + (-1)^{2025}\right) = 0$

$v_1 - v_3: b_{2023} = \frac{(\sqrt{2})^{2022}}{2}\left(1 + (-1)^{2024}\right) = 2^{1011}$