

Prezime i ime _____ br. indeksa: _____

2. jun 2020. MATEMATIČKA ANALIZA - PREDISBITNE OBAVEZE (15 poena)

Osvojeni poeni: _____

1. GRANIČNE VREDNOSTI (5 poena):

- a) [1 poen] Napisati definiciju adherentne tačke skupa A u metričkom prostoru \mathbb{R} .
- b) [1 poen] Definirati konvergentan niz u metričkom prostoru (\mathbb{R}, e) sa metrikom $e(x, y) = \frac{|y - x|}{1 + |y - x|}$.
- c) [1 poen] Ako je (X, \preceq) totalno uređen skup i $\{a_n\} \subset X$, kada kažemo da je niz $\{a_n\}$ ograničen sa gornje strane?
- d) [1 poen] Kada za niz $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ kažemo da teži ∞ , kad $n \rightarrow \infty$?
- e) [1 poen] Da li se može odrediti vrednost konstante A tako da funkcija $f(x) = \begin{cases} 3 \cos x + A & , \quad x < 0 \\ x^2 + 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$ bude neprekidna? Obrazložiti odgovor.

2. FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE (5 poena):

- a) [1 poen] Izračunati po definiciji izvod funkcije $f(x) = 5x + 3$ u tački $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$f'(x_0) =$$

- b) [1 poen] Dati geometrijsku interpretaciju prvog izvoda funkcije.

- c) [1 poen] Formulirati teoremu o prvom izvodu složene funkcije.

d) [1 poen] Pokazati po definiciji da je funkcija $f(x) = 5x$ diferencijabilna.

e) [1 poen] Odrediti jednačine tangente i normale na krivu $y = \frac{3x - x^2}{x - 4}$ u tačkama $A(2, y_0)$ i $B(6, y_1)$.

3. FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH (5 poena):

a) [1 poen] Odrediti totalni diferencijal drugog reda funkcije $f(x, y, z) = x^3 - 9xy + y^3 + 9$ u tački $A(3, 3)$.

b) [1 poen] Napisati izraz za totalni diferencijal prvog reda za funkciju $f(x, y, z, u, w)$.

c) [1 poen] Kada kažemo da funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ definisana na nekoj okolini $L(A, \varepsilon)$ tačke $A \in D$ ima lokalni maksimum u tački A ?

d) [1 poen] Ako je $u(x, y) = xf\left(\frac{y}{x}\right)$, gde je $f(t)$ dva puta diferencijabilna funkcija, odrediti $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

e) [1 poen] Odrediti tangentnu ravan i normalu površi $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$ u tački $P(2, 2, 1)$.

I KOLOKVIJUM

1. (10 poena) **GRANIČNE VREDNOSTI**

a) Pokazati da niz $\{a_n\}$ sa opštim članom

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}$$

konvergira i odrediti njegovu graničnu vrednost.

b) Izračunati $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right)$.

2. (12 poena) **FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE**

Detaljno ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x^2}$.

3. (8 poena) **FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH**

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $u(x, y, z) = xyz + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

I KOLOKVIJUM

1. (10 poena) **GRANIČNE VREDNOSTI**

a) Pokazati da niz $\{a_n\}$ sa opštim članom

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}$$

konvergira i odrediti njegovu graničnu vrednost.

b) Izračunati $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right)$.

2. (12 poena) **FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE**

Detaljno ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x^2}$.

3. (8 poena) **FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH**

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $u(x, y, z) = xyz + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

I KOLOKVIJUM

1. (10 poena) **GRANIČNE VREDNOSTI**

a) Odrediti $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, ako je $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{8n^9 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8n^9 + 2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8n^9 + 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{8n^9 + 4n^3}}$;

b) U zavisnosti od realnih parametara a , b i c , $a \geq 0$ odrediti kada će za niz $\{d_n\}$ sa opštim članom

$$d_n = n - 3 - \sqrt{an^2 + bn + c}$$

važiti da je

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty$, 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = -\infty$, 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$, 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = k$, $k \neq 0$.

2. (12 poena) **FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE**

Detaljno ispitati funkciju $f(x) = |x + 1|e^{-\frac{1}{x}}$ i nacrtati njen grafik.

3. (8 poena) **FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH**

Odrediti lokalne ekstremne vrednosti za funkciju $z = \ln((x + y)(3x^2 + 3y^2 - 2))$.

II KOLOKVIJUM

4. (15 poena) **INTEGRALI**

a) Izračunati $\int (x^x(1 + \ln x) + \frac{\sin 2x}{\sqrt{-\sin^2 x + 2 \sin x}}) dx$.

b) Odrediti površinu ravnog lika ograničenog krivom $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 4}}$ i pravama $y = 0$, $x = -1$ i $x = 0$.

5. (15 poena) **DIFERENCIJALNE JEDNAČINE**

a) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $dx = \frac{x + y^3}{y} dy$.

b) Odrediti opšte rešenje jednačine

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' + 2xy' = x + \ln x.$$

1.

a) Ispitati monotonost i ograničenost niza $\{a_n\}$ datog sa

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{7a_n + 20}{a_n + 6}, n \in \mathbb{N}.$$

Da li je dati niz konvergentan? Odrediti njegovu graničnu vrednost ukoliko ona postoji.

b) Odrediti graničnu vrednost $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt[3]{x^3 + x + 34}}{x^2 - 4x + 3}$.

2.

a) Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = \operatorname{arctg} e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}}.$$

b) Da li jednačina $\frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1} = 2 \left(\operatorname{arctg} \sqrt{e} + \ln \sqrt{\frac{e+1}{2e}} - \frac{\pi}{4} \right)$ ima rešenje na intervalu $\left(0, \frac{1}{2}\right)$?

Odgovor obrazložiti.

3.

a) Proveriti da li funkcija $u(x, y) = 3x^2y - x^3 - y^4$ ima ekstremnu vrednost u tačkama $A(6, 3)$ i $B(1, 2)$.

b) Proveriti da li funkcija $u(x, y) = xy^2z^3$ ima ekstremnu vrednost u tački $C(1, 1, 1)$ pod uslovom $x + 2y + 3z = 6$, gde su $x > 0, y > 0, z > 0$.

4.

a) Pomoću određenog integrala odrediti graničnu vrednost niza $\{b_n\}$ sa opštim članom

$$b_n = \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + 3 \sin \frac{3}{n} \dots + n \sin 1 \right).$$

b) Izračunati $\int \left(\frac{1}{\sin 2x + \cos x} + \frac{1}{(1+x)^3 \sqrt{1+2x-x^2}} \right) dx$.

5. a) Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$y - xy' = a(1 + x^2y')$$

koje zadovoljava uslov $y(1) = 1$.

b) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$(x-1)^2 y'' - (x-1)y' + 2y = (x-1)^3 \ln \frac{1}{1-x}, x < 1.$$

I KOLOKVIJUM1. (10 poena) **GRANIČNE VREDNOSTI**

a) Odrediti A i B tako da funkcija $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} + \frac{x^2 + 4x}{x} & , \quad x < 0 \\ A + 3 \cos x & , \quad x = 0 \\ B \frac{\operatorname{tg} 6x}{\operatorname{tg} 3x} & , \quad x > 0 \end{cases}$ bude neprekidna u $x = 0$.

b) Pokazati da je niz $\{b_n\}$ sa opštim članom $b_n = \frac{\sin 4}{4} + \frac{\sin 4^2}{4^2} + \dots + \frac{\sin 4^n}{4^n}$ Košijev.

2. (12 poena) **FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE**

Detaljno ispitati funkciju $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$ i nacrtati njen grafik.

3. (8 poena) **FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH**

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $u(x, y, z) = x - 2y + 2z$ pod uslovom da je $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

II KOLOKVIJUM1. (15 poena) **INTEGRALI**

a) Izračunati $\int \left(\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin x}{(4 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x)} \right) dx$.

b) Odrediti dužinu luka krive $y = \ln x$, $2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{6}$.

2. (15 poena) **DIFERENCIJALNE JEDNAČINE**

a) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

b) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = e^x(x-1)$, ako je $y_1 = e^x$ jedno rešenje njenog homogenog dela.

1. (10 poena) **GRANIČNE VREDNOSTI**a) Ispitati monotonost i ograničenost niza $\{a_n\}$ datog sa

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{7a_n + 20}{a_n + 6}, n \in \mathbb{N}.$$

Da li je dati niz konvergentan? Odrediti njegovu graničnu vrednost ukoliko ona postoji.

b) Odrediti graničnu vrednost $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt[3]{x^3 + x + 34}}{x^2 - 4x + 3}$.2. (12 poena) **FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE**

a) Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = \operatorname{arctg} e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}}.$$

b) Da li jednačina $\frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1} = 2 \left(\operatorname{arctg} \sqrt{e} + \ln \sqrt{\frac{e+1}{2e}} - \frac{\pi}{4} \right)$ ima rešenje na intervalu $\left(0, \frac{1}{2}\right)$?

Odgovor obrazložiti.

3. (8 poena) **FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH**a) Proveriti da li funkcija $u(x, y) = xy^2z^3$ ima ekstremnu vrednost u tački $C(1, 1, 1)$ pod uslovom $x + 2y + 3z = 6$, gde su $x > 0, y > 0, z > 0$.b) Koristeći totalni diferencijal naći približnu vrednost izraza $1,002 \cdot 2,0003^2 \cdot 3,004^3$.4. (15 poena) **INTEGRALI**a) Pomoću određenog integrala odrediti graničnu vrednost niza $\{b_n\}$ sa opštim članom

$$b_n = \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + 3 \sin \frac{3}{n} \dots + n \sin 1 \right).$$

b) Izračunati $\int \left(\frac{1}{\sin 2x + \cos x} + \frac{1}{(1+x)^3 \sqrt{1+2x-x^2}} \right) dx$.5. (15 poena) **DIFERENCIJALNE JEDNAČINE**

a) Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$y - xy' = a(1 + x^2 y')$$

koje zadovoljava uslov $y(1) = 1$.

b) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$(x-1)^2 y'' - (x-1)y' + 2y = (x-1)^3 \ln \frac{1}{1-x}, x < 1.$$

I KOLOKVIJUM

1. (10 poena) **GRANIČNE VREDNOSTI**

a) Pokazati da je niz $\{a_n\}$ sa opštim članom $a_n = \frac{\cos 2}{2} + \frac{\cos 2^2}{2^2} + \dots + \frac{\cos 2^n}{2^n}$ Košijev.

b) Ukoliko je moguće, odrediti konstante A i B tako da funkcija $f(x) = \begin{cases} 7 + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} & , \quad x < 0 \\ A & , \quad x = 0 \\ \frac{\sin Bx}{\sin 4x} & , \quad x > 0 \end{cases}$ bude neprekidna.

2. (12 poena) **FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE**

Detaljno ispitati funkciju $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ i nacrtati njen grafik.

3. (8 poena) **FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH**

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $u = x^3 + y^3 + z^3$ pod uslovom $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

II KOLOKVIJUM

4. (15 poena) **INTEGRALI**

a) Izračunati $\int \left(\left(\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x} \right)^3 + \frac{x^2 + x + 1}{x\sqrt{x^2 - x + 1}} \right) dx$.

b) Odrediti dužinu luka krive $y = \ln(\sin x)$, za $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

5. (15 poena) **DIFERENCIJALNE JEDNAČINE**

a) Prelaskom na inverznu funkciju odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \frac{y}{2x + 2y^4}$.

b) Odrediti opšte rešenje jednačine

$$y''' - 2y'' = x \sin 2x + x + 2.$$

I KOLOKVIJUM

1. (10 poena) **GRANIČNE VREDNOSTI**

- a) Ukoliko je moguće, odrediti vrednost konstante A tako da funkcija $f(x) = \begin{cases} A & , \quad x = 0 \\ \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} & , \quad x \neq 0 \end{cases}$ bude neprekidna u $x = 0$.
- b) Pokazati da niz $\{b_n\}$ sa opštim članom

$$b_n = \frac{1}{\sqrt[4]{81n^4 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{81n^4 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{81n^4 + 6n}}$$

konvergira i naći njegovu graničnu vrednost.

2. (12 poena) **FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE**

Detaljno ispitati funkciju $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ i nacrtati njen grafik.

3. (8 poena) **FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH**

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z(x, y) = (x^2 + y^2)e^{y-x}$.

II KOLOKVIJUM

4. (15 poena) **INTEGRALI**

- a) Izračunati $\int (\sin^4 x \cos^3 x + \frac{3x^3}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}) dx$.
- b) Primenom određenog integrala odrediti graničnu vrednost niza $\{a_n\}$ sa opštim članom

$$a_n = \frac{1}{n} \ln \frac{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}{n^n}.$$

5. (15 poena) **DIFERENCIJALNE JEDNAČINE**

- a) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2ydy = 0$.
- b) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y^{(IV)} + 2y'' + y = x^2 + e^{2x}$.

I KOLOKVIJUM1. (10 poena) **GRANIČNE VREDNOSTI**

- a) Ispitati da li je niz $\{a_n\}$ dat sa $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}$ Košijev.
b) Ukoliko je moguće, odrediti vrednost konstante A tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} A & , \quad x = 1 \\ (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} & , \quad x \in (0, 1) \end{cases}$$

bude neprekidna.

2. (12 poena) **FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE**

Detaljno ispitati funkciju $f(x) = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$ i nacrtati njen grafik.

3. (8 poena) **FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH**

Naći tri pozitivna realna broja čiji je proizvod 8 tako da zbir kvadrata recipročnih vrednosti bude minimalan.

II KOLOKVIJUM4. (15 poena) **INTEGRALI**

- a) Odrediti $\int \left(\frac{x^3}{x^7 + x} + \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^2} \right) dx$.
b) Izračunati površinu ograničenu graphicima krivih
 $y = x^2 + 1$, $y = -x^2 + 2x$ i pravama $y = -2x + 4$ i $x = 0$.

5. (15 poena) **DIFERENCIJALNE JEDNAČINE**

- a) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$.
b) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

I KOLOKVIJUM1. (10 poena) **GRANIČNE VREDNOSTI**

a) Izračunati $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \sin(n!)$.

b) Ispitati da li je niz $\{a_n\}$ dat sa $a_n = \frac{\sin 2}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 2^2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\sin 2^n}{n(n+1)}$ Košijev.

2. (12 poena) **FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE**

Detaljno ispitati funkciju $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$ i nacrtati njen grafik.

3. (8 poena) **FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH**

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $u(x, y, z) = x - 2y + 2z$ pod uslovom da je $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

II KOLOKVIJUM4. (15 poena) **INTEGRALI**

a) Izračunati $\int \left(\frac{\sqrt{3 + \sqrt[3]{x^2}}}{x} + \frac{\sin x}{(4 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x)} \right) dx$.

b) Primenom definicije određenog integrala odrediti graničnu vrednost niza $\{a_n\}$ sa opštim članom

$$a_n = \frac{1}{n^2} \left(e^{\frac{n+1}{n}} + 2e^{\frac{n+2}{n}} + 3e^{\frac{n+3}{n}} + \dots + ne^2 \right).$$

5. (15 poena) **DIFERENCIJALNE JEDNAČINE**

a) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) dx + (x^2 + y^2) dy = 0$ znajući da ima integracioni množitelj oblika $h = h(x)$.

b) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = e^x(x-1)$, ako je $y_1 = e^x$ jedno rešenje njenog homogenog dela.

1. [10 poena] **GRANIČNE VREDNOSTI**

a) [6] Dat je niz $\{a_n\}$ sa $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$. Pokazati da je niz konvergentan i naći njegovu graničnu vrednost.

b) [4] Odrediti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+2} + 7^{n+2}}{4^{n+1} - 7^{n+1}}$.

2. [12 poena] **FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE**

Detaljno ispitati funkciju $f(x) = \ln \frac{x-2}{x+2}$ i nacrtati njen grafik.

3. [8 poena] **FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH**

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$, $x, y > 0$.

4. [15 poena] **INTEGRALI**

a) [10] Izračunati neodređeni integral $\int \left(\frac{3x+11}{x^2-2x-3} + x^3 e^{x^2} \right) dx$.

b) [5] Izračunati površinu ograničenu sa $y = x^2 - 4x$ i $y = 2x$.

5. [15 poena] **DIFERENCIJALNE JEDNAČINE**

a) [7] Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

b) [8] Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' - y' - 6y = e^x + 12x$.

I KOLOKVIJUM1. (10 poena) **GRANIČNE VREDNOSTI**

a) Pokazati da je niz $\{a_n\}$ sa opštim članom $a_n = \frac{\sin 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\sin n!}{n \cdot (n+1)}$ Košijev.

b) Izračunati $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 6}{n^2 - 4} \right)^{\frac{3n^2}{n+1}}$.

2. (12 poena) **FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE**

Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \frac{1}{x-1}e^{x-2}$.

3. (8 poena) **FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH**

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z(x, y) = xy + x + y + 1$ u tačkama sa istim koordinatama pod uslovom da je $x^2 + y^2 = 1$.

II KOLOKVIJUM1. (15 poena) **INTEGRALI**

a) Izračunati $\int \left(\left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 + \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - 4} \right) dx$.

b) Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom oko y -ose površi ograničene sa $x = y^2$ i $x = 2 - y^2$.

2. (15 poena) **DIFERENCIJALNE JEDNAČINE**

a) Pokazati da diferencijalna jednačina $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0$ ima integracioni množitelj oblika $h(y^2 - x^2)$ i odrediti njeno opšte rešenje.

b) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' - 2y' + 1 = e^x + \sin 2x$.

Fakultet tehničkih nauka - SIIT, GG

Matematička analiza

17.12 2020.

1.

a) Ispitati monotonost i ograničenost niza $\{a_n\}$ datog sa

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{7a_n + 20}{a_n + 6}, n \in \mathbb{N}.$$

Da li je dati niz konvergentan? Odrediti njegovu graničnu vrednost ukoliko ona postoji.

b) Odrediti graničnu vrednost $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt[3]{x^3 + x + 34}}{x^2 - 4x + 3}$.

2. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = \operatorname{arctg} e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}}.$$

3.

a) Proveriti da li funkcija $u(x, y) = 3x^2y - x^3 - y^4$ ima ekstremnu vrednost u tačkama $A(6, 3)$ i $B(1, 2)$.

b) Proveriti da li funkcija $u(x, y, z) = xy^2z^3$ ima ekstremnu vrednost u tački $C(1, 1, 1)$ pod uslovom $x + 2y + 3z = 6$, gde su $x > 0, y > 0, z > 0$.

4.

a) Pomoću određenog integrala odrediti graničnu vrednost niza $\{b_n\}$ sa opštim članom

$$b_n = \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + 3 \sin \frac{3}{n} \dots + n \sin 1 \right).$$

b) Izračunati $\int \left(\frac{1}{\sin 2x + \cos x} + \frac{1}{(1+x)^3 \sqrt{1+2x-x^2}} \right) dx$.

5. a) Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$y - xy' = a(1 + x^2y')$$

koje zadovoljava uslov $y(1) = 1$.

b) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$(x-1)^2 y'' - (x-1)y' + 2y = (x-1)^3 \ln \frac{1}{1-x}, x < 1.$$