GRANIČNA VREDNOST FUNKCIJE

27. februar 2024.

Definicija

Neka su dati metrički prostori (X, d_X) *i* (Y, d_Y). *Neka je* $a \in X$ *tačka nagomilavanja za oblast definisanosti* $D \subset X$ *funkcije* $f : D \to Y$. *Za* $A \in Y$ *kažemo da je* **granična vrednost funkcije** f **u tački** a *ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ f(L(a, \delta) \cap (D \setminus \{a\})) \subset L(A, \varepsilon),$$

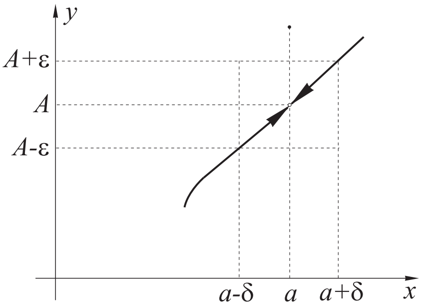
tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \setminus \{a\})(d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(A, f(x)) < \varepsilon).$$

Pišemo da je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, *ili* $f(x) \to A$, $x \to a$.

Dakle, za svaku $\varepsilon-$okolinu tačke A, postoji $\delta-$okolina tačke a koja se sva, izuzev tačke a, preslikava u $\varepsilon-$okolinu tačke A.

Primetimo da u tački a funkcija ne mora da bude definisana, a ako je i definisana, A ne mora da bude $f(a)$, jer u definiciji granične vrednosti isključena je tačka a iz okoline $L(a,\delta)$.



Napomena

Kod što kod nizova n_0 *zavisi od* ε*, tako i ovde* δ *zavisi od* ε*. Kako se* ε *menja tako se i* δ *menja.*

Napomena

Kao i kod nizova, kada je reč o realnim funkcijama ili funkcijama jedne ili više realnih promenljivih, uvek ćemo posmatrati metrički prostor $\mathbb{R}$*, odnosno* $\mathbb{R}^n$ *i to posebno nećemo naglašavati.*

• Za graničnu vrednost realne funkcije jedne realne promenljive, tj. gde je $X = Y = \mathbb{R}$, definiciju $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ možemo zapisati u obliku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \setminus \{a\})(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

• Za graničnu vrednost realne funkcije n realnih promenljivih, tj. gde je $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$, definiciju $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ možemo zapisati u obliku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \setminus \{a\} \subset \mathbb{R}^n)(d(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon),$$

gde je $d(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2}$.

Važi **Hajneova**[1] **teorema** (veza granične vrednosti funkcije i granične vrednosti niza)

Tvrđenje

Neka su (X, d_X) *i* (Y, d_Y) *metrički prostori i neka je data funkcija* $f : D \to Y$, $D \subset X$. *Tada* $f(x) \to A \in Y$, $x \to a \in X$ *ako i samo ako za svaki niz* $\{x_n\} \subset D \setminus \{a\}$ *koji konvergira ka a, sledi da niz* $\{f(x_n)\}$, *konvergira ka A.*

[1] Hajne, E. (Eduard Heine, 1821-1881) - nemački matematičar

Dokaz. ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da iz $x \to a$, imamo da $f(x) \to A$. Tada važi:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \backslash \{a\})(d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(A, f(x)) < \varepsilon).$$

Ako niz $\{x_n\} \subset D \setminus \{a\}$ teži ka a, tada

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \ d_X(a, x_n) < \delta.$$

Tada za sve $n \geq n_0$ važi da je

$$d_Y(A, f(x_n)) < \varepsilon,$$

pa sledi da niz $\{f(x_n)\}$ teži ka A.

($\Leftarrow$) Dokažimo obrnut stav. Pretpostavimo da $f(x)$ ne teži ka A, kada $x \to a$. Tada

$$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in D \backslash \{a\})\left(x_n \in L\left(a, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow f(x_n) \notin L(A, \varepsilon)\right).$$

S obzirom da niz $\{x_n\} \in D \setminus \{a\}$, teži ka a to prema pretpostavci sledi da i niz $\{f(x_n)\}$, teži ka A, što je nemoguće po konstrukciji samog niza, jer otvorena lopta $L(A, \varepsilon)$ ne sadrži ni jedan član niza $\{f(x_n)\}$. $\square$

Na osnovu Hajneove teoreme se može dokazati kao i kod granične vrednosti nizova, da ako funkcija $f : D \to Y$ ima graničnu vrednost A u tački a, da je ta granična vrednost jednoznačno određena.

Primeri:

1. Ako je $f : D \to Y$ konstantna funkcija, tj. $f(x) = c$, za svako $x \in D$, tada je

$$\lim_{x \to a} f(x) = c.$$

2.

$$\lim_{x\to 1}(2x+1)=3,$$

jer za proizvoljno $\varepsilon>0$, birajući $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}$, imamo da je

$$|(2x+1)-3|=|2x-2|=2|x-1|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

U ovom primeru imamo da je funkcija definisana u tački a, tj. $f(1)=3$, i postoji $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$ i ta granična vrednost je jednaka baš vrednosti funkcije u toj tački.

3. Za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

je

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x+1) = 3.$$

Dakle,

- funkcija je definisana u tački 1, tj. $f(1) = 0$;
- postoji $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$;
- granična vrednost nije jednaka vrednosti funkcije u datoj tački.

4. Funkcija

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

nije definisana u tački 0, a ima graničnu vrednost. Zaista, kako za proizvoljno $\varepsilon > 0$, birajući $\delta = \varepsilon$, imamo

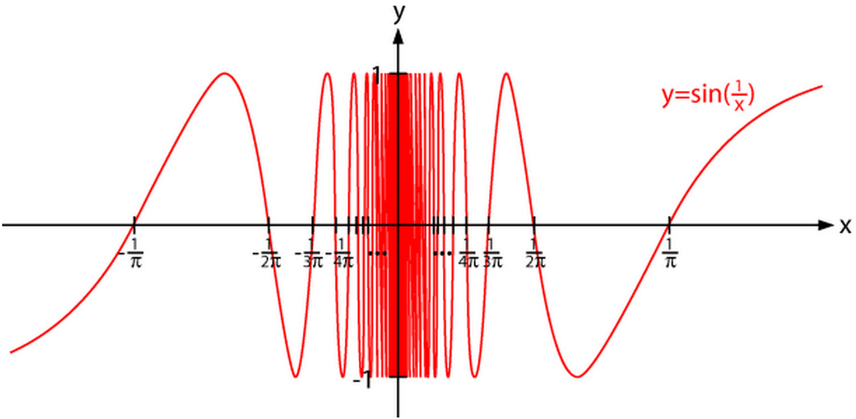
$$\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| = |x - 0| < \varepsilon,$$

to važi da je

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

5. Neka je

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}.$$



Funkcija nije definisana za $x = 0$.
Ne postoji ni $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$. Ako bi A bila granična vrednost funkcije f u tački 0, tada

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

S obzirom da za svako $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ niz $\{a_n(\alpha)\}$, gde je

$$a_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 2n\pi}$$

teži ka nuli i

$$f(a_n(\alpha)) = \sin(\alpha + 2n\pi) = \sin\alpha,$$

pa bi u zavisnosti od α imali različite granične vrednosti, što je nemoguće, jer je granična vrednost jedinstveno određena.

6. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Tada je funkcija f definisana za $x = 0$, $f(0) = 1$, ali ne postoji $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$.

7. Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

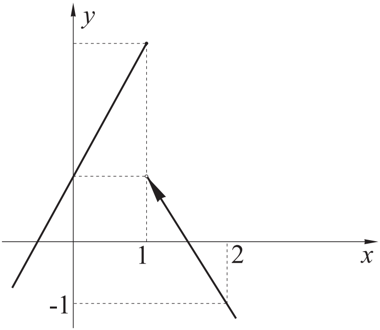
nema graničnu vrednost u tački $O(0,0)$. Posmatrajmo niz

$$a_n(k) = \left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n} \right).$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n(k) = (0,0)$, a $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n(k))$ ne postoji jer je

$$f(a_n(k)) = \frac{k}{1+k^2}.$$

Granične vrednosti nad skupom



8. Za funkciju f datu sa

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ -2x+3, & x > 1 \end{cases},$$

vidimo da $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ ne postoji. Ovde ima smisla ispitati ponašanje funkcije za $x > 1$ i za $x < 1$, tj. posmatrati funkciju f i sa leve i sa desne strane tačke 1.

Vidimo kada $x \to 1$, pri čemu je $x > 1$, da $f(x) \to 1$, a kada $x \to 1$, pri čemu je $x < 1$, da $f(x) \to 3$.

9. Ako posmatramo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisanu sa

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

vidimo da funkcija f nema graničnu vrednost ni u jednoj tački $a \in \mathbb{R}$. Međutim, restrikcija $f_{\mathbb{Q}}$ funkcije f ima graničnu vrednost u svakoj tački $a \in \mathbb{R}$.

Ovi primeri daju nam povod da definišemo graničnu vrednost funkcije f u tački a dok x pripada skupu E, gde je E podskup oblasti definisanosti funkcije f, za koji je a tačka nagomilavanja.

Definicija

Neka su (X, d_X) *i* (Y, d_Y) *dati metrički prostori i neka je* E *neprazan podskup oblasti definisanosti* D *funkcije* $f : D \to Y$*. Ako restrikcija* f_E *funkcije* f *ima graničnu vrednost* $A \in Y$ *u tački* $a \in X$*, onda kažemo da funkcija* f *ima* **graničnu vrednost** A **u tački** *nagomilavanja* a *skupa* E **dok** $x \in E$ *i pišemo da je*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x) = A.$$

Specijalno, ako je

$$D \subset \mathbb{R} = X \text{ i } E = (a, \infty) \cap D \quad (E = (-\infty, a) \cap D)$$

i ako funkcija f ima graničnu vrednost A u tački a dok $x \in E$, onda kažemo da funkcija f u tački a ima **desnu** (**levu**) **graničnu vrednost** A i pišemo da je

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a^+) = A \quad (\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a^-) = A).$$

Koriste se i oznake

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a + 0) \quad (\lim_{x \to a-} f(x) = f(a - 0)).$$

Leva, odnosno desna granična vrednost se jednim imenom zovu **jednostrane granične vrednosti**.

- Ako funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ u tački a ima graničnu vrednost A, tada

- postoji bar jedna jednostrana granična vrednost koja je jednaka broju A, tj. graničnoj vrednosti funkcije f u tački a;

- ako postoje obe jednostrane granične vrednosti, one su jednake graničnoj vrednosti funkcije u tački a, tj.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = A.$$

• Ako funkcija f u tački a ima obe jednostrane granične vrednosti, ona će imati graničnu vrednost samo onda ako su jednostrane granične vrednosti jednake, tj. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ postoji ako

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = A$$

i tada je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Kao što smo videli u primeru **8**. postoji leva granična vrednost u tački $x = 1$, tj. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1^-) = 3$, kao i desna granična vrednost u tački $x = 1$, tj. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1^+) = 1$, ali one nisu jednake, pa funkcija u tački $x = 1$ nema graničnu vrednost.

10. Ako posmatramo funkciju

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}},$$

vidimo da u tački $x = 0$ funkcija nema desnu graničnu vrednost, jer nije definisana nad intervalom $(0, 1]$. Međutim ovde je

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0.$$

11. Za funkciju

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

je

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2},$$

pa funkcija nema graničnu vrednost u tački 0.

12. Posmatrajmo funkciju

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

iz primera **7.** i uzmimo da je $E=\{(x,2x):x\in\mathbb{R}\}$. Tada važi

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E}} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{x^2+4x^2}=\frac{2}{5}.$$

Tvrđenje

Neka su (X, d_X) *i* (Y, d_Y) *metrički prostori i neka je* $a \in X$ *tačka nagomilavanja za definicioni skup* $D \subset X$ *funkcije* $f : D \to Y$*. Tada važi*

a) *Ako funkcija* f *ima graničnu vrednost* $A \in Y$ *u tački* a *i ako je* a *tačka nagomilavanja za neprazan skup* $E \subset D$*, tada postoji* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x)$ *i važi jednakost* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

b) *Neka je* a *tačka nagomilavanja svakog od skupova* $E_1, ..., E_n \subset D$ *koji vrše particiju skupa* $D \setminus \{a\}$*. Tada ako postoje granične vrednosti* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E_i}} f(x)$*, za svako* $i = 1, ..., n$ *i pri tome su međusobno jednake, tada postoji* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *i važi jednakost* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E_i}} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$*, za* $i = 1, ..., n$.

Ako za neko $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ uzmemo $E = \{(x, kx) : x \in \mathbb{R}\}$, tada za funkciju f iz primera **7.** važi:

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ x \in E}} f(x,y) = \frac{k}{1+k^2}.$$

S obzirom da za svako k ove granične vrednosti nisu jednake, to ne postoji $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, kao što smo i pre videli.

Definicija

Neka je (X, d) *metrički prostor i neka je* $a \in X$ *tačka nagomilavanja za definicioni skup* $D \subset X$ *realne funkcije* $f : D \to \mathbb{R}$. *Tada*

- *funkcija* $f(x)$ **teži ka** ∞, *tj.* $f(x) \to \infty$, $x \to a$, *ako i samo ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \backslash \{a\})(x \in L(a, \delta) \Rightarrow f(x) > K).$$

- *funkcija* $f(x)$ **teži ka** $-\infty$, *tj.* $f(x) \to -\infty$, $x \to a$, *ako i samo ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \backslash \{a\})(x \in L(a, \delta) \Rightarrow f(x) < K).$$

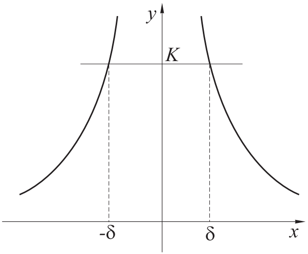
Ponekad se piše da $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, *odnosno* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

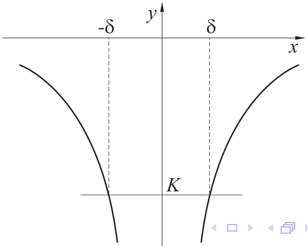
Ako posmatramo funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2}$, vidimo da $\frac{1}{x^2} \to \infty$, kada $x \to 0$, jer za svako $K > 0$, postoji $\delta = \frac{1}{\sqrt{K}}$, tako da je

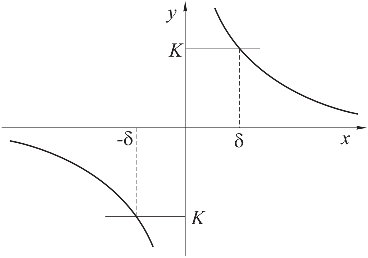
$$\frac{1}{x^2} > K \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{K} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Za funkciju $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, imamo da $f(x) \to -\infty$, kada $x \to 0$, jer za svako $K < 0$, postoji $\delta = \frac{1}{\sqrt{-K}}$, tako da je

$$-\frac{1}{x^2} < K \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > -K \Leftrightarrow x^2 < -\frac{1}{K} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{-K}}.$$







Ako posmatramo funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$, vidimo da $f(x)$ ne teži ni ∞, ni $-\infty$, kada $x \to 0$, tj. ne postoji okolina 0 koja se čitava, izuzevši 0, preslika, iznad (ispod) prave $y = K$, gde je $K > 0$ $(K < 0)$, jer sa leve strane tačke $x = 0$ je $f(x) < 0$, a sa desne strane tačke $x = 0$ je $f(x) > 0$. Vidimo da $f(x) \to \infty$, $x \to 0^+$, a $f(x) \to -\infty$, $x \to 0^-$.

Uopšte, ako je $a \in X$ tačka nagomilavanja podskupa E, definicionog skupa $D \subset X$, realne funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ i ako restrikcija f_E funkcije f, teži ∞, odnosno $-\infty$, kada $x \to a$, tada kažemo da $f(x) \to \infty$, odnosno $f(x) \to -\infty$, kada $x \to a$, dok $x \in E$.

Specijalno, ako je $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $E = (a, \infty) \cap D \neq \emptyset$, tada $f(x) \to \infty$, kad $x \to a^+$ ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) > K),$$

odnosno $f(x) \to -\infty$, kada $x \to a^+$ ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) < K).$$

Slično, ako je $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $E = (-\infty, a) \cap D \neq \emptyset$, tada $f(x) \to \infty$, kada $x \to a^-$ ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) > K),$$

odnosno $f(x) \to -\infty$, kada $x \to a^-$ ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) < K).$$

Primeri:

1. Za funkciju $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ je

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

2. $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & , \quad x \in (0,\infty) \cap Q \\ -\frac{1}{x^2} & , \quad x \in (0,\infty) \cap (R \setminus Q) \end{cases}$

3. $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 10 & , \quad x = 0 \end{cases}$

Ponašanje funkcije $f(x)$ kada $x \to \pm\infty$

Definicija

Neka je (Y, d) metrički prostor i neka je $D \subset \mathbb{R}$ definicioni skup funkcije $f : D \to Y$, za koji važi da je $(\forall a \in \mathbb{R})\ (a, \infty) \cap D \neq \emptyset$. Tada

1°) *Kažemo da funkcija $f(x)$ ima graničnu vrednost $A \in Y$, kada $x \to \infty$, ako je*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow f(x) \in L(A, \varepsilon)),$$

odnosno za $Y = \mathbb{R}$, važi

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

i to zapisujemo sa $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Definicija

Neka je (Y, d) metrički prostor i neka je $D \subset \mathbb{R}$ definicioni skup funkcije $f : D \to Y$, za koji važi da je $(\forall a \in \mathbb{R})\ (a, \infty) \cap D \neq \emptyset$. Tada

2°) *Ako je $Y = \mathbb{R}$, kažemo da $f(x) \to \infty$, kada $x \to \infty$ ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow f(x) > K).$$

3°) *Ako je $Y = \mathbb{R}$, kažemo da $f(x) \to -\infty$, kada $x \to \infty$, ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow f(x) < K).$$

Ponekad se umesto

$$f(x) \to \infty, \text{ odnosno } f(x) \to -\infty, \text{ kada } x \to \infty,$$

piše

$$\lim f(x) = \infty, \text{ odnosno } \lim f(x) = -\infty.$$

Primer

Ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$, *uzmemo da je* $\Delta = \frac{1}{\varepsilon} - 1$, *to za* $x > 0$, *važi*

$$\begin{aligned} \left|\frac{x}{x+1} - 1\right| < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{|x+1|} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad |x+1| > \frac{1}{\varepsilon} \\ &\Leftrightarrow \quad x+1 > \frac{1}{\varepsilon} \\ &\Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \end{aligned},$$

pa je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

Primer

Za funkciju

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}, \frac{x-1}{x^2-1}\right), \; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$$

je

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = (0, 0).$$

Definicija

Neka je (Y, d) *metrički prostor i neka je* $D \subset \mathbb{R}$ *definicioni skup funkcije* $f : D \to Y$, *za koji važi*

$$(\forall a \in \mathbb{R})\ (-\infty, a) \cap D \neq \emptyset.$$

Tada

1°) *Funkcija* $f(x)$ *ima graničnu vrednost* $A \in Y$ *kada* $x \to -\infty$, *ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in D)(x < \Delta \Rightarrow f(x) \in L(A, \varepsilon)),$$

odnosno za $Y = \mathbb{R}$, *važi*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in D)(x < \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon),$$

i to zapisujemo sa $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in Q \\ 0 & , \quad x \in R \setminus Q \end{cases} .$$

Da li ona ima graničnu vrednost kada $x \to \infty$, tj. da li postoji $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$?

Da li ona ima graničnu vrednost kada $x \to \infty$, dok x pripada skupu racionalnih brojeva, tj. da li postoji $\lim\limits_{x \to \infty, x \in \mathbb{Q}} f(x)$?

Definicija

Neka je (Y,d) *metrički prostor i neka je* $D \subset \mathbb{R}$ *definicioni skup funkcije* $f: D \to Y$, *za koji važi* $(\forall a \in \mathbb{R})\ (-\infty, a) \cap D \neq \emptyset$. *Tada*

2°) *Ako je* $Y = \mathbb{R}$, *kažemo da* $f(x) \to \infty$, *kada* $x \to -\infty$, *ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in D)(x < \Delta \Rightarrow f(x) > K).$$

3°) *Ako je* $Y = \mathbb{R}$, *kažemo da* $f(x) \to -\infty$, *kada* $x \to -\infty$, *ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in D)(x < \Delta \Rightarrow f(x) < K).$$

Ponekad se umesto

$$f(x) \to \infty, \text{ odnosno } f(x) \to -\infty \text{ kada } x \to -\infty,$$

piše

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \text{ odnosno } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

I ovde (uvek!) važi Hajneova teorema:

Tvrđenje

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i neka je data funkcija $f : D \to Y$, $D \subset X$. Tada važi

a) *Ako je $Y = \mathbb{R}$, tada $f(x) \to \pm\infty$, $x \to a$ ako i samo ako za svaki niz $\{x_n\} \subset D \setminus \{a\}$, koji konvergira ka a, sledi da niz $\{f(x_n)\}$ teži ∞, odnosno $-\infty$, $n \to \infty$.*

b) *Ako je $X = \mathbb{R}$, tada $f(x) \to A \in Y$, $x \to \pm\infty$ ako i samo ako za svaki niz $\{x_n\} \subset D$, koji teži ka $\pm\infty$, sledi da niz $\{f(x_n)\}$ konvergira ka A.*

c) *Ako je $X = Y = \mathbb{R}$, tada $f(x) \to \infty$ $(f(x) \to -\infty)$, $x \to \pm\infty$ ako i samo ako za svaki niz $\{x_n\} \subset D$ koji teži $\pm\infty$, sledi da niz $\{f(x_n)\}$ teži ∞ $(-\infty)$, $n \to \infty$.*

• Može se i ovde pokazati da ako postoji granična vrednost, da je ona jednoznačno određena.

• Ako posmatramo funkciju $f(x) = \cos x$, vidimo da
1) $f(x)$ ne teži ni ∞, ni $-\infty$, kada $x \to \infty$ jer $-1 \leq f(x) \leq 1$.
2) Ne postoji $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Ako bi postojao $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, tada bi po definiciji granične vrednosti, sledilo da

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in \mathbb{R})(x > \Delta \Rightarrow |\cos x - A| < \varepsilon).$$

Ako posmatramo niz $\{a_n\}$ sa opštim članom $a_n = \alpha + 2n\pi$, $\alpha \in \mathbb{R}$ vidimo da $a_n \to \infty$, kada $n \to \infty$, pa u svakom intervalu (a, ∞) su skoro svi članovi datog niza. Kako je $\cos a_n = \cos\alpha$, to bi sledilo da je $A = \cos\alpha$, što je kontradikcija, jer, ako postoji granična vrednost ona je jednoznačno određena.

Ponekad sa

$$f(x) \to \pm\infty, \text{ kada } x \to a,$$

označavamo da

$$f(x) \to \infty \text{ ili } f(x) \to -\infty \text{ kada } x \to a$$

i često pišemo

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty.$$

Slično, ako

$$f(x) \to A \text{ kada } x \to \infty \text{ ili } x \to -\infty,$$

često pišemo

$$f(x) \to A, x \to \pm\infty,$$

odnosno

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = A.$$

Računske operacije sa graničnim vrednostima funkcija

Tvrđenje

Neka je (X, d_X) *metrički prostor i neka je* a *tačka nagomilavanja za definicioni skup* $D \subset X$ *funkcija* $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *i* $g : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. *Tada važi*

a) *Ako je* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *i* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, *to je*

1°) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B$,

2°) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \cdot B$,

3°) $\lim\limits_{x\to a}(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = c \cdot A$,

4°) *za* $g(x) \neq 0$ *i* $B \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{1}{B}$,

5°) *za* $g(x) \neq 0$ *i* $B \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Tvrđenje

Neka je (X, d_X) *metrički prostor i neka je* a *tačka nagomilavanja za definicioni skup* $D \subset X$ *funkcija* $f : D \to \mathbb{R}$ *i* $g : D \to \mathbb{R}$. *Tada važi*

b) *Ako* $f(x) \to \infty$, *kada* $x \to a$ *i* $g(x) \to B$ $(B \in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$, *kada* $x \to a$, *tada*

- 1°) $(f(x) + g(x)) \to \infty$, *kada* $x \to a$,
- 2°) $(f(x) \cdot g(x)) \to \infty$, *za* $B > 0$, *odnosno* $(f(x) \cdot g(x)) \to -\infty$, *za* $B < 0$.

c) *Ako* $f(x) \to -\infty$, *kada* $x \to a$ *i* $g(x) \to B$ $(B \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$, *kada* $x \to a$, *tada*

- 1°) $(f(x) + g(x)) \to -\infty$, *kada* $x \to a$,
- 2°) $(f(x) \cdot g(x)) \to -\infty$, *za* $B > 0$, *odnosno* $(f(x) \cdot g(x)) \to \infty$, *za* $B < 0$.

d) *Ako je* $X = \mathbb{R}$, *tada osobine* **a**), **b**) *i* **c**) *važe i kada* $x \to \infty$, *odnosno* $x \to -\infty$.

Dokaz. Dokaz sledi iz Hajneove teoreme i odgovarajućih osobina nizova. Ovde ćemo ipak, radi ilustracije, dati dokaz da je $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B$, ne koristeći Hajneovu teoremu.

S obzirom da je $\lim_{x\to a} f(x) = A$ i $\lim_{x\to a} g(x) = B$, to za proizvoljno $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, postoje $\delta_f, \delta_g \in \mathbb{R}^+$, tako da za sve $x \in D \setminus \{a\}$, važi

$$d_X(a,x) < \delta_f \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$d_X(a,x) < \delta_g \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Neka je $\delta_{f+g} = \min\{\delta_f, \delta_g\}$. Tada važi:

$$|(f(x)+g(x)) - (A+B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

za $0 < d_X(a,x) < \delta_{f+g}$, odakle sledi dato tvrđenje. $\square$

Napomena

U formulaciji teoreme smo pretpostavili da je a tačka nagomilavanja za zajednički definicioni skup D funkcija f i g, jer iz

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \ i \ \lim_{x\to a} g(x) = B,$$

ne sledi uvek da je

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B,$$

što se vidi iz sledećeg primera.

Primer

Neka su date funkcije f i g sa

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt{-x}.$$

Vidi se da je

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0,$$

a

$$\lim_{x \to 0} (f(x) + g(x))$$

ne postoji, jer je 0 *izolovana tačka, za definicioni skup funkcije* $f + g$.

Napomena

Tvrđenje teoreme pod a) važi i kada su u pitanju kompleksne funkcije.

Primer

Neka su date funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 10, & x = 0 \end{cases}.$$

Njihova granična vrednost u $x = 0$, *ne postoji, dok je*

$$\lim_{x \to 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to 0} 1 = 1.$$

Tvrđenje

Neka je dat metrički prostor (X, d) *i neka je* a *tačka nagomilavanja za definicioni skup* $D \subset X$ *funkcija* $f : D \to \mathbb{R}$ *i* $g : D \to \mathbb{R}$. *Tada, ako je* $f(x) \leq g(x)$ *i*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

i

$$\lim_{x \to a} g(x) = B,$$

tada je i $A \leq B$.

Tvrđenje

Neka je dat metrički prostor (X, d) *i neka je* a *tačka nagomilavanja za definicioni skup* $D \subset X$ *funkcija* $f : D \to \mathbb{R}$ *i* $g : D \to \mathbb{R}$. *Tada*

a) *Ako za funkciju* $h : D \to \mathbb{R}$, *važi*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

i ako je

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = A,$$

to je i

$$\lim_{x \to a} h(x) = A.$$

b) *Slična osobina važi i za slučaj kada je* $X = \mathbb{R}$ *i kada* $x \to \infty$, *odnosno* $x \to -\infty$.

Dokaz. Sledi iz Hajneove teoreme i slične osobine za nizove. □

Primer

Na osnovu prethodne i Hajneove teoreme sledi da je

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

kao i da je

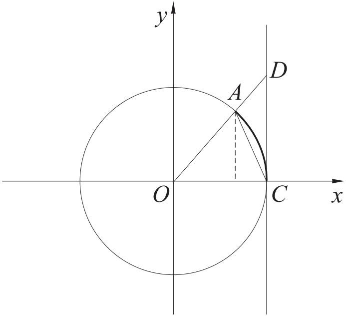
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Primer

Važi da je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Dokaz:



Za $x > 0$, sa slike vidimo da je

$$P_{\triangle OCA} < P_{\angle OCA} < P_{\triangle OCD},$$

tj.

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\,tg\,x,$$

pa je

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Odavde je na osnovu prethodne teoreme $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Iz parnosti funkcije $\dfrac{\sin x}{x}$ sledi $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Dakle,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Beskonačno male i beskonačno velike veličine

Neka je (X, d) metrički prostor i funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq D \subset X$.

Definicija

Za funkciju $f(x)$ kažemo da je **beskonačno mala veličina** *kada $x \to a$, ako je*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

Definicija

Za funkciju $f(x)$ kažemo da je **beskonačno velika veličina** *kada $x \to a$, ako*

$$|f(x)| \to \infty, \ \text{kada } x \to a.$$

Očigledno je da je recipročna vrednost beskonačno male veličine, beskonačno velika veličina i obrnuto.

• **Posmatrajmo dve beskonačno male veličine** $f(x)$ **i** $g(x)$ **kada** $x \to a$, **gde je** $g(x) \neq 0$ **u nekoj okolini tačke** $x = a$.

1) Ako je $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ili što je ekvivalentno sa $|\frac{g(x)}{f(x)}| \to \infty$ kada $x \to a$, onda kažemo da je $f(x)$ **beskonačno mala veličina višeg reda** od $g(x)$ kada $x \to a$, odnosno da je $g(x)$ **beskonačno mala veličina nižeg reda** od $f(x)$, kada $x \to a$. Kažemo još i da $f(x)$ **brže teži nuli** od $g(x)$ kada $x \to a$, odnosno da $g(x)$ **sporije teži nuli** od $f(x)$, kada $x \to a$.

Na primer, funkcija $f(x) = 1 - \cos x$ brže teži nuli od funkcije $g(x) = x$, kada $x \to 0$, jer je

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} = 0.$$

2) Ako je $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$, onda kažemo da su $f(x)$ i $g(x)$ **beskonačno male veličine istog reda** kada $x \to a$.

Specijalno, ako je $C = 1$, tj. ako je $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, onda kažemo da su $f(x)$ i $g(x)$ **ekvivalentne beskonačno male veličine**, kada $x \to a$ i to zapisujemo sa

$$f(x) \sim g(x), \text{ kada } x \to a.$$

Takođe kažemo da se funkcije $f(x)$ i $g(x)$ **isto ponašaju**, kada $x \to a$.

Primer

Funkcija $f(x) = \sin \alpha x$, $\alpha \neq 0$ *i funkcija* $g(x) = x$ *su beskonačno male veličine istog reda, kada* $x \to 0$, *jer je* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha$. *Ako je* $\alpha = 1$, *tada je* $\sin x \sim x$, *kada* $x \to 0$.

3) Ako ne postoji ni $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, ni $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$, tada se beskonačno male veličine $f(x)$ i $g(x)$ **ne mogu porediti**, kada $x \to a$, tj. $f(x)$ i $g(x)$ su **neuporedive beskonačno male veličine**, kada $x \to a$.

Na primer, funkcije

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ i } g(x) = \frac{1}{x(2+\sin x)}$$

su neuporedive beskonačno male veličine, kada $x \to \infty$, jer ne postoji ni

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}(2+\sin x),$$

ni

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2+\sin x}.$$

• **Posmatrajmo dve beskonačno velike veličine** $f(x)$ **i** $g(x)$, **kada** $x \to a$**, tj.** $|f(x)| \to \infty$ **i** $|g(x)| \to \infty$, **kada** $x \to a$.

1) Ako je

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

odnosno

$$\left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| \to \infty, \text{ kada } x \to a,$$

gde je $g(x) \neq 0$, tada kažemo da je $g(x)$ **beskonačno velika veličina višeg reda** od $f(x)$, kada $x \to a$, odnosno da je $f(x)$ **beskonačno velika veličina nižeg reda** od $g(x)$, kada $x \to a$.

2) Ako je $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \neq 0$, onda kažemo da su $f(x)$ i $g(x)$ **beskonačno velike veličine istog reda**, kada $x \to a$.

Specijalno, ako je $\alpha = 1$, tj. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, onda kažemo da su $f(x)$ i $g(x)$ **ekvivalentne beskonačno velike veličine**, kada $x \to a$ ili da su $f(x)$ i $g(x)$ **asimptotski jednake**, kada $x \to a$. Tada pišemo da je

$$f(x) \sim g(x), \text{ kada } x \to a.$$

Na primer, polinomi

$$P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \quad Q_n(x) = a_n x^n, \; a_n \neq 0, \; n \in \mathbb{N},$$

su asimptotski jednaki, kada $x \to \infty$, jer je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = 1.$$

Kažemo i da se polinom ponaša kao njegov najstariji (vodeći) član kada $x \to \infty$.

3) Ako ne postoji ni $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, ni $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$, onda kažemo da se beskonačno velike veličine $f(x)$ i $g(x)$ **ne mogu uporediti**, kada $x \to a$, odnosno da su $f(x)$ i $g(x)$ **neuporedive beskonačno velike veličine**, kada $x \to a$.

Na primer, funkcije $f(x) = x$ i $g(x) = x(2 + \sin x)$ su neuporedive beskonačno velike veličine, kada $x \to \infty$, jer ne postoji ni

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2+\sin x},$$

ni

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty}(2+\sin x).$$

Napomena

Analogne definicije za beskonačno male i beskonačno velike veličine mogu se dati i kada $x \to a^+$, odnosno kada $x \to a^-$.