DISKRETNA MATEMATIKA

Jovanka Pantović

Generatorne funkcije nizova

$$\underbrace{(a_0, a_1, a_2, \ldots)}_{\text{brojni niz}} \quad \leftrightarrow \quad \underbrace{a_0 + a_1 z + z_2 z^2 + \ldots}_{\text{formalni stepeni red}}$$

Definicija

Generatorna funkcija brojnog niza $\{a_n\}$ *jeste stepeni red*

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

$A(z)$ - zatvorena forma generatorne funkcije

Generatorne funkcije nizova

Formalni stepeni red:

- konvergencija reda nije relevantna
- važne su operacije - sabiranje, množenje, izvodi, integrali

Generatorne funkcije nizova

brojni niz	generatorna funkcija
$(0, 0, 0, \dots)$	0
$(1, 0, 0, \dots)$	1
$(3, 2, 1, 0, \dots)$	$3 + 2z + z^2$
$(1, 1, 1, \dots)$	$1 + z + z^2 + \dots$
$(1, -1, 1, -1 \dots)$	$1 - z + z^2 - z^3 + \dots$

Zatvorena forma generatorne funkcije

$$\boxed{(1, 1, 1, \dots)}$$

$$\begin{array}{rcllll}
(1-z)(1+z+z^2+\dots) & = & 1 & +z & +z^2 & +z^3 & +\dots \\
 & & & -z & -z^2 & -z^3 & -\dots \\
(1-z)(1+z+z^2+\dots) & = & 1 & & & &
\end{array}$$

$$\boxed{1+z+z^2+\dots = \tfrac{1}{1-z}}$$

KONVERGENCIJA NIJE BITNA!!!

Operacije nad generatornim funkcijama

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) \leftrightarrow A(z) \qquad (b_0, b_1, b_2, \ldots) \leftrightarrow B(z).$$

- skaliranje

$$(ca_0, ca_1, ca_2, \ldots) \leftrightarrow cA(z)$$

- sabiranje

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) + (b_0, b_1, b_2, \ldots) = A(z) + B(z)$$

- desno pomeranje

$$(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}, a_0, a_1, \ldots) = z^k A(z)$$

Operacije nad generatornim funkcijama

Primer

Napisati zatvorenu formu generatorne funkcije niza:

- $(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}, 1, 1, 1, \ldots)$
- $(1, 2, 2^2, 2^3, \ldots)$

- $z^k + z^{k+1} + \ldots = \sum_{n \geq k} z^n = \frac{z^k}{1-z}$
- $1 + 2z + (2z)^2 + (2z)^3 + \ldots = \frac{1}{1-2z}$

Operacije nad generatornim funkcijama

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \leftrightarrow A(z) \qquad (b_0, b_1, b_2, \dots) \leftrightarrow B(z).$$

- množenje

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n \geq 0} \Big(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \Big) z^n$$

Primer

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n \cdot \sum_{n \geq 0} z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{n} 1 \cdot 1 \right) z^n = \sum_{n \geq 0} (n+1) z^n \end{aligned}$$

Rešavanje rekurentnih relacija

Primer

$$h_0 = 0 \qquad h_1 = 1 \qquad h_n = 2h_{n-1} + 1, \quad n \geq 1$$

Neka je $H(z) = \sum_{n\geq 0} h_n z^n$.

$$\sum_{n\geq 1} h_n z^n = 2\sum_{n\geq 1} h_{n-1} z^n + \sum_{n\geq 1} z^n \Leftrightarrow (H(z) - h_0) = 2zH(z) + \sum_{n\geq 1} z^n$$

$$\Leftrightarrow \quad H(z)(1-2z) = \frac{1}{1-z} - 1 \Leftrightarrow H(z) = \frac{1}{(1-z)(1-2z)} - \frac{1}{1-2z}$$

$$\Leftrightarrow \quad H(z) = \frac{1}{1-2z} - \frac{1}{1-z} \Leftrightarrow H(z) = \sum_{n\geq 0} 2^n z^n - \sum_{n\geq 0} z^n$$

$$\Leftrightarrow \quad H(z) = \sum_{n\geq 0} (2^n - 1) z^n \qquad \Rightarrow \boxed{h_n = 2^n - 1}$$

Izvod

Definicija

Neka je $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *generatorna funkcija niza* a_n. *Izvod, u oznaci* $A'(z)$, *definisan je sa*

$$A'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Izvod

Definicija

Neka je $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *generatorna funkcija niza* a_n. *Izvod, u oznaci* $A'(z)$, *definisan je sa*

$$A'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Primer

$$\frac{z}{(1-z)^2} =$$

Izvod

Definicija

Neka je $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *generatorna funkcija niza* a_n. *Izvod, u oznaci* $A'(z)$, *definisan je sa*

$$A'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Primer

$$\begin{aligned} \frac{z}{(1-z)^2} &= z\left(\frac{1}{1-z}\right)' = z\left(\sum_{n\geq 0} z^n\right)' = z\sum_{n\geq 0}(z^n)' \\ &= z\sum_{n\geq 1} n z^{n-1} = \sum_{n\geq 1} n z^n = \sum_{n\geq 0} n z^n \end{aligned}$$

Uopšteni binomni koeficijenti

Definicija

Neka je u *realan broj, a* k *nenegativan ceo broj. Uopšteni binomni koeficijent* $\binom{u}{k}$ *je definisan sa*

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} \frac{u\cdot(u-1)\cdot\ldots\cdot(u-k+1)}{k!} & \textit{ako je } k > 0 \\ 1 & \textit{ako je } k = 0. \end{cases}$$

Uopšteni binomni koeficijenti

Definicija

Neka je u realan broj, a k nenegativan ceo broj. Uopšteni binomni koeficijent $\binom{u}{k}$ je definisan sa

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} \frac{u\cdot(u-1)\cdot\ldots\cdot(u-k+1)}{k!} & \textit{ako je } k > 0 \\ 1 & \textit{ako je } k = 0. \end{cases}$$

Primer

$$\binom{-n}{k} =$$

Uopšteni binomni koeficijenti

Definicija

Neka je u realan broj, a k nenegativan ceo broj. Uopšteni binomni koeficijent $\binom{u}{k}$ je definisan sa

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} \frac{u\cdot(u-1)\cdot\ldots\cdot(u-k+1)}{k!} & \text{ako je } k > 0 \\ 1 & \text{ako je } k = 0. \end{cases}$$

Primer

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= \frac{-n\cdot(-n-1)\cdot(-n-2)\ldots(-n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!} = \frac{(-1)^k(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \\ &= (-1)^k\binom{n+k-1}{k} \Rightarrow \binom{-1}{k} = (-1)^k \end{aligned}$$

Njutnova binomna formula

Teorema

Neka je u proizvoljan realan broj. Tada je

$$(1+z)^u = \sum_{n \geq 0} \binom{u}{n} z^n.$$

Njutnova binomna formula

Koristeći binomnu formulu, odrediti otvoren oblik generatorne funkcije, ako je njen zatvoren oblik

$$\frac{1}{1-cz}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-cz} &= (1-cz)^{-1} = \sum_{n\geq 0}\binom{-1}{n}(-cz)^n \\ &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n(-1)^n(cz)^n = \sum_{n\geq 0}(cz)^n\end{aligned}$$

Njutnova binomna formula

Koristeći Njutnovu formulu, odrediti otvoren oblik generatorne funkcije, ako je njen zatvoren oblik

$$(1)\ \frac{1}{(1-z)^m} \quad (2)\ \frac{1}{(1-z)^2} \quad (3)\ \frac{1}{(1-z)^3}.$$

Njutnova binomna formula

Koristeći Njutnovu formulu, odrediti otvoren oblik generatorne funkcije, ako je njen zatvoren oblik

$$(1)\ \frac{1}{(1-z)^m} \quad (2)\ \frac{1}{(1-z)^2} \quad (3)\ \frac{1}{(1-z)^3}.$$

$$(1)\ \tfrac{1}{(1-z)^m} \quad = \quad (1-z)^{-m} = \sum_{n\geq 0} \tbinom{-m}{n} (-z)^n = \sum_{n\geq 0} \tbinom{m+n-1}{n} z^n$$

Njutnova binomna formula

Koristeći Njutnovu formulu, odrediti otvoren oblik generatorne funkcije, ako je njen zatvoren oblik

$$(1)\ \frac{1}{(1-z)^m} \quad (2)\ \frac{1}{(1-z)^2} \quad (3)\ \frac{1}{(1-z)^3}.$$

$$(1)\ \tfrac{1}{(1-z)^m} \quad = \quad (1-z)^{-m} = \sum_{n\geq 0} \binom{-m}{n}(-z)^n = \sum_{n\geq 0} \binom{m+n-1}{n} z^n$$

$$(2)\ \tfrac{1}{(1-z)^2} \quad = \quad \sum_{n\geq 0} \binom{n+1}{n} z^n = \sum_{n\geq 0} (n+1) z^n$$

Njutnova binomna formula

Koristeći Njutnovu formulu, odrediti otvoren oblik generatorne funkcije, ako je njen zatvoren oblik

$$(1)\ \frac{1}{(1-z)^m} \quad (2)\ \frac{1}{(1-z)^2} \quad (3)\ \frac{1}{(1-z)^3}.$$

$$(1)\ \tfrac{1}{(1-z)^m} = (1-z)^{-m} = \sum_{n\geq 0}\binom{-m}{n}(-z)^n = \sum_{n\geq 0}\binom{m+n-1}{n}z^n$$

$$(2)\ \tfrac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n\geq 0}\binom{n+1}{n}z^n = \sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$$

$$(3)\ \tfrac{1}{(1-z)^3} = \sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{n}z^n = \sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{2}z^n$$

Zadatak

1. *Rešiti rekurentnu relaciju*

$$a_0 = -3 \qquad\qquad a_n = a_{n-1} + n, \quad n \geq 1$$

2. *Rešiti rekurentnu relaciju*

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 9 \qquad a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Zadatak

Kutija sadrži 20 crvenih, 30 zelenih i 40 plavih kuglica. Koliko ima različitih izbora od 60 kuglica?

Traženi broj je jednak broju rešenja jednačine

$$i + j + k = 60 \qquad i \in \{0, \ldots, 20\}, j \in \{0, \ldots, 30\}, k \in \{0, \ldots, 40\}.$$

Ekvivalentno, taj broj je jednak koeficijentu uz z^{60} proizvoda

$$(1+z+\ldots+z^{20})(1+z+\ldots+z^{30})(1+z+\ldots+z^{40}) = \sum_{\substack{0 \le i \le 20 \\ 0 \le j \le 30 \\ 0 \le k \le 40}} z^{i+j+k}$$

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{1-z^{21}}{1-z} \cdot \tfrac{1-z^{31}}{1-z} \cdot \tfrac{1-z^{41}}{1-z} \\
= \quad & \tfrac{1}{(1-z)^3}(1 - z^{21})(1 - z^{31})(1 - z^{41}) \\
= \quad & (1 + \tbinom{3}{2}z + \tbinom{4}{2}z^2 + \dots)(1 - z^{21} - z^{31} - z^{41} + z^{52} + z^{62} + z^{72} - z^{93}) \\
= \quad & \tbinom{60+2}{2} - \tbinom{60-21+2}{2} - \tbinom{60-31+2}{2} - \tbinom{60-41+2}{2} + \tbinom{60-52+2}{2} \\
= \quad & \dots
\end{aligned}
$$

$$
\tfrac{1}{(1-z)^3} = (1 - z)^{-3} = \sum_{n \geq 0} \tbinom{-3}{n}(-1)^n z^n = \sum_{n \geq 0} \tbinom{n+2}{2} z^n
$$

Zadatak

Odrediti broj nenegativnih rešenje jednačine

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n, n \geq 0.$$

ako su $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}_0$.

Broj nenegativnih rešenje jednačine jednak je koeficijentu a_n uz z^n u razvoju proizvoda

$$(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots)^4$$

Neka je $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

$$\begin{aligned} A(z) &= \tfrac{1}{(1-z)^4} = \tfrac{1}{(1-z)^4} = \sum_{n\geq 0} \tbinom{4+n-1}{n} z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \tbinom{n+3}{n} z^n. \end{aligned}$$

$$a_n = \binom{n+3}{n}$$

1. Napisati otvoreni oblik za $\frac{1}{1+2z} \cdot \frac{1}{1-3z}$
2. Koristeći Njutnovu binomnu formulu, razviti sledeće zatvorene forme u otvoren oblik
   1. $\left(1 + \frac{1}{2}z\right)^{-5}$
   2. $\frac{1}{(1-2z)^4}$
3. Rešiti rekurentne relacije
   1. $a_0 = 1, a_n = 3a_{n-1}, n \geq 1,$
   2. $a_0 = 3, a_1 = -12, a_n = -5a_{n-1} + 36a_{n-1}, n \geq 2$
4. Koristeći generatorne funkcije, rešiti rekurentne relacije
   1. $a_0 = 1, a_n = 3a_{n-1} + 7, n \geq 1,$
   2. $a_0 = 8, a_n = 24a_{n-1} - 144, n \geq 1,$

1. Odrediti broj reči dužine n koje ne sadrže podreč 000.
2. Dat je neograničen broj crvenih, plavih i zelenih karata. Koliko ima načina da se formira stek od n karata, tako da zelena karta nikada nije direktno postavljena na zelenu kartu?