Софтверско инжењерство и информационе технологије

Колоквијум I

1. На колико начина се 20 јабука може поделити Аци, Вуку, Тањи и Ани, ако Тања као најмлађа треба да добије бар три јабуке, а сви остали по бар две јабуке?
2. Доказати да за ненегативан цео број n важи
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2\,((n-k)!)^2} = \binom{2n}{n}^2 .$$
3. На једном шаховском турниру је учествовало n такмичара. Пре почетка такмичења учесницима су додељени редни бројеви од 1 до n. Одредити на колико начина је након завршетка такмичења могла бити формирана ранг листа, ако се зна да се ниједном учеснику пласман на ранг листи није поклопио са редним бројем.
4. Нека је први члан низа $a_0 = 1$ и нека за остале чланове низа важи рекурентна релација $a_n = 3a_{n-1} + 2$.

   а) Одредити генераторну функцију низа чији је општи члан a_n.

   б) Решити задату рекурентну релацију користећи генераторне функције.

Колоквијум II

1. Нека је G повезан граф. Доказати да за свака два непразна дисјунктна скупа чворова V_1 и V_2, за која важи $V_1 \cup V_2 = V(G)$, у графу G постоји грана која повезује неки чвор из скупа V_1 са чвором из V_2.
2. Нека је G повезан граф у ком сви невисећи чворови имају степен 4. Нека је k број невисећих чворова. Ако граф G има $2k + 2$ висећих чворова, доказати да је G стабло.
3. Испитати за које вредности природног броја n је могуће да топ обиђе сва поља шаховске табле димензије $n \times n$, тако да се на крају врати на почетно поље.
4. Нека је G повезан планаран граф са 20 чворова. Ако граф G има седам висећих чворова, одредити колико највише грана може да садржи.

1. На колико начина се 20 јабука може поделити Аци, Вуку, Тањи и Ани, ако Тања као најмлађа треба да добије бар три јабуке, а сви остали по бар две јабуке?

Нека је x_1 број јабука које је Тања добила, а x_2, x_3 и x_4 број јабука које су редом добили Аца, Вук и Ана.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_i \geq 2, \ i = 2, 3, 4$$

Уводимо смену $y_1 = x_1 - 3 \geq 0$

$y_i = x_i - 2 \geq 0, \ i = 2, 3, 4$

Добијамо једначину $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 20 - 3 - 3 \cdot 2 = 11$, која има $\binom{11+3}{3} = \binom{14}{3}$ решења у скупу ненегативних целих бројева.

2. Доказати да за ненегативан цео број n важи

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2\,((n-k)!)^2} = \binom{2n}{n}^2.$$

Једна идеја: помножити и поделити израз под сумом са $(n!)^2$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(n!)^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{n!\cdot n!} \cdot \frac{(n!)^2}{(k!)^2((n-k)!)^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} \cdot \left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n} \cdot \binom{n}{k}^2$$

$$= \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k} = \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}\binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}^2$$

Користимо Вандермондов идентитет

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

3. На једном шаховском турниру је учествовало n такмичара. Пре почетка такмичења учесницима су додељени редни бројеви од 1 до n. Одредити на колико начина је након завршетка такмичења могла бити формирана ранг листа, ако се зна да се ниједном учеснику пласман на ранг листи није поклопио са редним бројем.

S - све ранг листе $N = n!$

S_i : i-ти такмичар је заузео i-то место, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

Тражимо $N(S_1'S_2'\ldots S_n') = N - \binom{n}{1}N(1) + \binom{n}{2}N(2) - \binom{n}{3}N(3) + \ldots + (-1)^n N(n)$

Ако је i-ти такмичар завршио на i-том месту, остаје да се одреди ранг преосталих $n-1$ такмичара, тј. је $N(1) = (n-1)!$. На исти начин добијамо $N(2) = (n-2)!$, $N(3) = (n-3)!$, ...

$N(n-1) = N(n) = 1!$ (уколико знамо ранг за $n-1$ такмичара, знамо и за свих n)

Добијамо $N(S_1'S_2'\ldots S_n') = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1! + (-1)^n\binom{n}{n}1!$

Пошто важи $\binom{n}{i}(n-i)! = \frac{n!}{i!\,\cancel{(n-i)!}}\cancel{(n-i)!} = \frac{n!}{i!}$, решење можемо записати у следећем облику

$$N(S_1'S_2'\ldots S_n') = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!} + (-1)^n\frac{1}{n!}\right)$$

4. Нека је први члан низа $a_0 = 1$ и нека за остале чланове низа важи рекурентна релација $a_n = 3a_{n-1} + 2$.

а) Одредити генераторну функцију низа чији је општи члан a_n.

б) Решити задату рекурентну релацију користећи генераторне функције.

а) $a_n = 3a_{n-1} + 2,\ n \geq 1$

Помножимо једнакост са z^n и сумирамо по $n \geq 1$

$$\sum_{n\geq 1} a_n z^n = 3\sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^n + 2\sum_{n\geq 1} z^n$$

$$\sum_{n\geq 1} a_n z^n = 3z\sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^{n-1} + 2\sum_{n\geq 1} z^n$$

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n - a_0 = 3z\sum_{n\geq 0} a_n z^n + 2\Big(\sum_{n\geq 0} z^n - 1\Big)$$

$$A(z) - 1 = 3zA(z) + 2\left(\frac{1}{1-z} - 1\right)$$

$$A(z)(1-3z) = \frac{2}{1-z} - 2 + 1 = \frac{2-1+z}{1-z} = \frac{1+z}{1-z}$$

Тражена генераторна функција је $A(z) = \dfrac{1+z}{(1-z)(1-3z)}$

б) $$\frac{1+z}{(1-z)(1-3z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1-3z} = \frac{(A+B) + (-3A-B)z}{(1-z)(1-3z)}$$

$A + B = 1$

$-3A - B = 1$

$-2A = 2 \Rightarrow A = -1$

$B = 2$

Добијамо $A(z) = -\dfrac{1}{1-z} + 2\cdot\dfrac{1}{1-3z}$, одакле закључујемо да је општи члан посматраног низа дат са

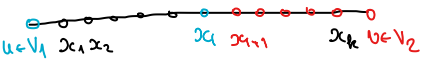
$a_n = -1 + 2\cdot 3^n$

1. Нека је G повезан граф. Доказати да за свака два непразна дисјунктна скупа чворова V_1 и V_2, за која важи $V_1 \cup V_2 = V(G)$, у графу G постоји грана која повезује неки чвор из скупа V_1 са чвором из V_2.

Посматрајмо произвољно разбијање скупа чворова на подскупове V_1 и V_2.

Нека су $u \in V_1$ и $v \in V_2$ произвољни чворови графа G.

Пошто је G повезан граф постоји u-v пут у G, пут $u x_1 x_2 x_3 \dots x_k v$.



Претпоставимо да је x_i последњи чвор са пута који је у скупу V_1. Тада су сви чворови $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_k$ из скупа V_2

$\Rightarrow$ Грана $v_i v_{i+1}$ је тражена грана која повезује неки чвор из V_1 са чвором из V_2

2. Нека је G повезан граф у ком сви невисећи чворови имају степен 4. Нека је k број невисећих чворова. Ако граф G има $2k+2$ висећих чворова, доказати да је G стабло.

Пошто је G повезан граф, да би био стабло довољно је показати да има $|V(G)|-1$ грана.

Нека је $|V(G)|=n$.

Како граф има $2k+2$ висећих чворова и k невисећих чворова, добијамо

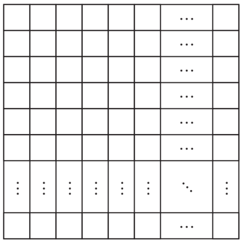
$n=(2k+2)+k=3k+2$

На основу основне теореме теорије графова је

$$2e=\sum_{v\in V} d(v)=(2k+2)\cdot 1+k\cdot 4=6k+2$$

$\Rightarrow$ $e=3k+1=n-1$, па је граф G стабло

3. Испитати за које вредности природног броја n је могуће да топ обиђе сва поља шаховске табле димензије $n \times n$, тако да се на крају врати на почетно поље. Преко сваког поља топ може проћи тачно једном!

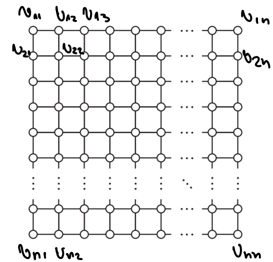


Нумеришимо поља табле:

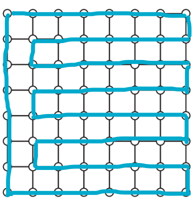
v_{ij} – i број врсте, j број колоне

Конструишемо одговарајући граф, где чворови графа одговарају пољима табле, а гране представљају дозвољене потезе топа.

Питање је да ли је добијени граф Хамилтонов



1° n парно



Граф је Хамилтонов

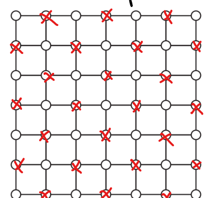
Хамилтонова контура

$v_{11}v_{12}v_{13}\dots v_{1n}v_{2n}v_{2(n-1)}\dots v_{22}$

$v_{32}v_{33}\dots v_{(n-1)n}v_{nn}v_{n(n-1)}$

$\dots v_{n2}v_{n1}v_{(n-1)1}v_{(n-2)1}\dots v_{11}$

2° n непарно



Уклањамо чворове v_{ij} за које је $i+j$ непарно (i и j различите парности)

Уклонили смо $\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$ чворова, а добили граф који има $\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil$ компоненти повезаности, па у случају када је n непарно граф није Хамилтонов.

4. Нека је G повезан планаран граф са 20 чворова. Ако граф G има седам висећих чворова, одредити колико највише грана може да садржи.

$n = |V(G)| = 20$

Означимо са V_1 скуп висећих чворова графа G

Посматрајмо граф $G' = G - V_1$ који је такође планаран граф

$n' = |V(G')| = 20 - 7 = 13$

Сада је $e' = |E(G')| \leq 3n' - 6 = 3 \cdot 13 - 6 = 33$

Добијамо $e = e' + 7 \leq 33 + 7 = 40$