# Optimizacija uz ograničenja tipa nejednakosti, uvođenje dodatne promenljive metod Lagranževih množitelja, metod ograničene varijacije

*Anja Buljević*
*Aleksandra Mitrović*
*Smilja Stokanović*

*10. novembar 2020.*

## *Zadaci*

### 1 *Metod Lagranževih množitelja*

Optimizacioni problem koji rešavamo formulišemo na sledeći način: naći ekstrem funkcije

$$f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

ukoliko su ograničenja

$$h_j(x_1, ..., x_n) = 0, j = 1, ..., m_1$$
$$g_k(x_1, ..., x_n) = 0, k = 1, ..., m_2$$

pri čemu mora da važi da je broj ograničenja strogo manji od broja promenljivih (m < n).

1. Naći minimum funkcije $f(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2$ uz ograničenje $x_1 - \dfrac{x_2^2}{4} \leq 0$.
   Prvi korak pri rešavanju zadataka u slučaju ograničenja tipa nejednakosti, jeste pretvaranje ograničenja nejednakosti u ograničenje jednakosti, uvođenjem dodatne promenljive:

$$x_1 - \frac{x_2^2}{4} \leq 0,$$
$$x_1 - \frac{x_2^2}{4} + x_3^2 = 0$$

   Sledeći korak jeste formiranje *Lagranžijana*:

$$L = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 - \frac{x_2^2}{4} + x_3^2)$$

Nakon što smo formirali prošireni kriterijum optimalnosti, potrebno je da pronađemo parcijalne izvode po svim promenljivima i da ih izjednačimo sa nulom:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 1) + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \frac{x_2}{2}\lambda = 0 \rightarrow x_2 = 0, \lambda = 4$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2\lambda x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0, \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 - \frac{x_2^2}{4} + x_3^2 = 0$$

Na osnovu prethodnog sistema jednačina, zaključujemo da ćemo imati tri slučaja koja treba da razmatramo:

- $x_2 = 0, x_3 = 0$
  Ukoliko uvrstimo vrednost $x_2$ i $x_3$ u jednačinu ograničenja, dobijamo vrednost $x_1$:
  $$x_1 = 0.$$
  Vrednost $\lambda$, možemo izračunati iz prve jednačine i iznosi $\lambda = 2$, a naša prva stacionarna tačka jeste $A(0, 0)$.
- $x_2 = 0, \lambda = 0$
  Uvrštavanjem vrednosti $x_1$ i $\lambda$ u prvu jednačinu, dobijamo sledeći izraz:
  $$2(x_1 - 1) = 0,$$
  $$x_1 = 1.$$
  Nakon što smo izračunali vrednost, $x_1 = 1$, potrebno je da proverimo ograničenje:
  $$x_1 - \frac{x_2^2}{4} + x_3^2 = 0.$$
  Odakle nam sledi da je:
  $$x_3^2 = -1$$
  Zaključujemo da ograničenje nije zadovoljeno.
- $\lambda = 4, x_3 = 0$
  U ovom slučaju, možemo izračunati vrednost $x_1$, uvrštavanjem vrednost $\lambda = 4$ u prvu jednačinu:
  $$2(x_1 - 1) + 4 = \rightarrow x_1 = -1.$$

Potrebno je da izračunamo i vrednost $x_2$

$$-1 - \frac{x_2^2}{4} = 0 \to x_2^2 = -4.$$

Zaključujemo da i u ovom slučaju ograničenje $x_1 - \frac{x_2^2}{4} + x_3^2 = 0$ nije zadovoljeno.

Potrebno je još da proverimo dovoljne uslove za našu stacionarnu tačku $A(0,0)$. Dovoljne uslove proveravamo formiranjem matrice Q:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \frac{\lambda}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

Glavni minori matrice Q, za tačku $A(0,0)$, $\lambda = 2$ su:

$$D_1 = 2$$
$$D_2 = 4 - \lambda = 2$$
$$D_3 = 4\lambda(2 - \frac{\lambda}{2}) = 8$$

Na osnovu glavnih minora, matrice Q, koji su u ovom slučaju $> 0$, zaključujemo da je naša tačka $A(0,0)$ minimum.

2. Odrediti stacionarne tačke i njihov karakter za problem $f(x) = x_1 x_2$, ukoliko važi ograničenje $g(x) = 25 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$.

   Prvi korak jeste da pretvorimo ograničenje tipa nejednakosti u ograničenje tipa jednakosti:

$$25 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0 / (-1)$$
$$-25 + x_1^2 + x_2^2 \leq 0$$
$$-25 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

   Sledeći korak jeste formiranje Laganžijana:

$$L = x_1 x_2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + 2\lambda x_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 2\lambda x_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2\lambda x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0, \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25 = 0$$

- $\lambda = 0$

$$x_2 = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$x_3^2 = 25$$
$$x_3 = \pm 5$$

  Rešavanjem sistema jednačina, dobili smo vrednost prve stacionarne tačke $A(0,0)$, gde se rešenje nalazi unutar oblasti.

- $x_3 = 0$

$$x_1^2 + x_2^2 = 25$$
$$x_2 + 2\lambda x_1 = 0/(x_2)$$
$$x_1 + 2\lambda x_2 = 0/(-x_1)$$

Ukoliko saberemo ove dve jednačine dobijamo izraz

$$x_2^2 - x_1^2 = 0$$
$$x_1^2 = x_2^2$$
$$\lambda = -\frac{x_2}{2x_1}$$

Daljim uvrštavanjem dobijamo:

$$2x_2^2 = 25$$

$$x_2^2 = \frac{25}{2} \rightarrow x_2 = \pm\frac{5}{2}$$

Odavde dobijamo četiri stacionarne tačke, čiji je karakter potrebno ispitati:

- $B(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}) \rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2}$
- $C(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}) \rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{2}$
- $D(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}) \rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{2}$

- $E(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}) \rightarrow \lambda_4 = -\frac{1}{2}$

Nakon što smo odredili stacionarne tačke, potrebno je i da ispitamo njihov karakter, pomoću dovoljnih uslova. Formiramo matricu Q:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

Glavni minori matrice Q su:

$$D_1 = 2\lambda$$
$$D_2 = 4\lambda^2 - 1$$
$$D_3 = 8\lambda^3 - 2\lambda$$

Ukoliko bi smo uvrstili vrednosti $\lambda$, redom za tačke $A, B, C, D$ i $E$, zaključili bi smo da je matrica $Q$ nedefinitna. Iz tog razloga potrebno je da odredimo vrednosti μ, iz matrice Δ:

$$\Delta = \begin{bmatrix} Q - \mu I_{n\times n} & P^T_{n\times m} \\ P_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

gdje je P:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2\lambda - \mu & 1 & 0 & 2x_1 \\ 1 & 2\lambda - \mu & 0 & 2x_2 \\ 0 & 0 & 2\lambda - \mu & 2x_3 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{3}$$

Ukoliko matricu Δ razvijemo po trećoj vrsti dobićemo sledeći izraz:

$$\Delta = -(2\lambda - \mu) \begin{bmatrix} 2\lambda - \mu & 1 & 2x_1 \\ 1 & 2\lambda - \mu & 2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{bmatrix} - 2x_3 \begin{bmatrix} 2\lambda - \mu & 1 & 2x_1 \\ 1 & 2\lambda - \mu & 2x_2 \\ 0 & 0 & 2x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Dalje možemo uvesti smenu $(2\lambda - \mu) = a$.

$$\Delta = a(4x_1x_2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2a - 4x_2^2a) - 2x_3(2x_3a^2 - 2x_3) = 0$$

Sređivanjem ovog izraza dobijamo sledeći izraz:

$$\Delta = a(4x_1x_2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2a - 4x_2^2a) - 2x_3(2x_3a^2 - 2x_3) = 0$$
$$\Delta = 8x_1x_2a - 4x_1^2a^2 - 4x_2^2a^2 - 4x_3^2a^2 + 4x_3^2 = 0$$

Sada je potrebno da proverimo vrednosti $\mu$ za stacionarne tačke:

- $A(0,0)$, $x_3^2 = 25$, $\lambda = 0$

$$\Delta = -4x_3^2a^2 + 4x_3^2 = 0$$
$$\Delta = -4x_3^2(a^2 - 1) = 0$$
$$\Delta = -100(a^2 - 1) = 0 \rightarrow a^2 - 1 = 0$$

$$a^2 = 1$$
$$a = \pm 1$$

$$2\lambda - \mu = \pm 1$$
$$\mu = 1 \wedge \mu = -1$$

- $B(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}})$, $E(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}})$, $x_3 = 0$, $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$\Delta = 8x_1x_2a - 4x_1^2a^2 - 4x_2^2a^2 = 0$$

Uvrštavanjem vrednosti $x_1$ i $x_2$, za tačke $B$ i $E$, dobijamo sledeći izraz:

$$\Delta = 100a - 50a^2 - 50a^2 = 0$$
$$\Delta = 100a - 100a^2 = 0$$
$$\Delta = a(1 - a) = 0$$

Vrednost $\Delta$ će biti jednaka 0, ukoliko je:

$$a = 1 \vee a = 0.$$

Vraćanjem smene $2\lambda - \mu = a$, dobijamo sledeće vrednosti $\mu$:

$$2\lambda - \mu = 1 \vee 2\lambda - \mu = 0,$$

$$\mu_1 = -2 \wedge \mu_2 = -1.$$

Pošto su obe vrednosi $\mu < 0$, zaključujemo da su tačke $B$ i $E$ maksimum.

- $C(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}})$, $D(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}})$, $x_3 = 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\Delta = 8x_1x_2a - 4x_1^2a^2 - 4x_2^2a^2 = 0$$

Uvrštavanjem vrednosti $x_1$ i $x_2$, dobijamo sledeći izraz:

$$\Delta = -100a - 50a^2 - 50a^2 = 0$$
$$\Delta = -100a - 100a^2 = 0$$
$$\Delta = -a(1+a) = 0$$

Matrica $\Delta$ će imati vrednost 0 u dva slučaja:

$$a = -1 \vee a = 0$$

Vraćanjem smene $2\lambda - \mu = a$, dobijamo sledeće vrednosti $\mu$:

$$2\lambda - \mu = 1 \vee 2\lambda - \mu = 0$$

$$\mu_1 = 2 \wedge \mu_2 = 1$$

Na osnovu vrednosti $\mu > 0$, možemo da zaključimo da su tačke $C$ i $D$ minimum.

3. Odrediti stacionarne tačke sledećeg problema $f(x) = 4x_1 - x_2^2 - 12 = 0$, ukoliko važe ograničenja:

$$25 - x_1^2 - x_2^2 = 0$$
$$10x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2 - 38 \geq 0$$

Prvo što je potrebno da odradimo jeste da pretvorimo ograničenje tipa nejednakosti u ograničenje tipa jednakosti:

$$10x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2 - 38 \geq 0/(-1)$$
$$-10x_1 + x_1^2 - 10x_2 + x_2^2 + 38 \leq 0$$
$$-10x_1 + x_1^2 - 10x_2 + x_2^2 + 38 + x_3^2 = 0$$

Kao i u prethodnom zadatku, potrebno je da formiramo Lagranžijan:

$$L = 4x_1 - x_2^2 - 12 + \lambda_1(25 - x_1^2 - x_2^2) + \lambda_2(-10x_1 + x_1^2 - 10x_2 + x_2^2 + 38 + x_3^2)$$

Sledeći korak jeste da pronađemo parcijalne izvode:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4 - 2\lambda_1 x_1 - 10\lambda_2 x_1 + 2x_1\lambda_2$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 - 10\lambda_2 x_1 + 2x_2\lambda_2 - 2x_2\lambda_1$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2\lambda_2 x_3 = 0 \rightarrow \lambda_2 = 0 \vee x_3 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 25 - x_1^2 - x_2^2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -10x_1 + x_1^2 - 10x_2 + x_2^2 + 38 + x_3^2 = 0$$

- $\lambda_2 = 0$

$$4 - 2x_1\lambda_1 = 0$$
$$-2x_2 - 2x_2\lambda_1 = 0$$
$$-2x_2(1 + \lambda_1) = 0$$

(a) $x_2 = 0$

$$25 - x_1^2 - x_2^2 = 0$$
$$x_1^2 = 25$$
$$x_1 = \pm 5$$

Kada smo odredili vrednosti $x_1$ i $x_2$, potrebno je da proverimo i ograničenje:

$$x_3^2 = 10x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2 - x_2^2 - 38$$
$$x_3^2 = -63 + 10x_1 < 0$$

(b) $\lambda_1 = -1$

$$4 + 2x_1 = 0$$
$$x_1 = -2$$

$$x_2^2 = 25 - x_1^2$$

Kao i u prethodnom slučaju, potrebno je da proverimo ograničenje:

$$x_3^2 = 10x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2 - 38$$

- $x_3 = 0$

$$-10x_1 - 10x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 38 = 0$$

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 25 \\ -10(x_1 + x_2) &= -25 - 38 \\ -10x_1 &= 10x_2 - 63 \\ x_1 &= 6.3 - x_2 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem smene $x_1 = 6.3 - x_2$, u jednačinu ograničenja, sledi:

$$(6.3 - x_2)^2 + x_2^2 = 25.$$

Daljim rešavanjem ovog sistema dobijamo stacionarne tačke:

- $A(1.545, 4.755)$
- $B(4.755, 1.545)$

4. ***Zadatak za samostalan rad*** Naći ekstreme funkcije i odrediti njihov karakter: $y(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$, ukoliko važi ograničenje $(x_1 + 1)^2 + x_2^2 \leq a$, ako je $a = 4$ i $a = 10$.

# 2 Metod ograničenih varijacija

Posmatramo kriterijumsku funkciju oblika:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ ,$$

pri čemu su jednačine ograničenja

$$\begin{aligned} h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad j = 1, \ldots, m_1, \\ g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0, \quad k = 1, \ldots, m_2, \\ g(x, x_{m+k}^2) = g_k(x) + x_{m+k}^2 = 0 \end{aligned}$$

i važi $n > m$. Na osnovu navedenog formira se Jakobijeva matrica čijim se izjednačavanjem sa nulom

$$J_k = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_k} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{m1+m2}} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_k} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_{m_1+m_2}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial h_{m1}}{\partial x_k} & \frac{\partial h_{m1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_{m1}}{\partial x_{m_1+m_2}} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_k} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{m1+m2}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g_{m2}}{\partial x_k} & \frac{\partial g_{m1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{m1}}{\partial x_{m_1+m_2}} \end{vmatrix} = 0, \quad k = m_1 + m_2 + 1, \ldots, n + m_2$$

dobijaju potrebni uslovi ekstrema funkcije više promenljivih sa ograničenjima tipa nejednakosti.

5. Pronaći stacionarne tačke, $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 13$, uz ograničenja $x_1^2 + 4x_2^2 = 4$, $8 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$.
Prvo je potrebno da ograničenje tipa nejednakosti, pretvorimo u ograničenje tipa jednakosti:

$$\begin{aligned} f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 13 \\ h_1 : x_1^2 + 4x_2^2 = 4 \\ g_1 : 8 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0/(-1). \end{aligned}$$

Kada smo ograničenje tipa nejednakosti pomnožili sa $(-1)$, uvodimo dodatnu promenljivu:

$$\begin{aligned} f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 13 \\ h_1 : x_1^2 + 4x_2^2 = 4 \\ g_1 : -8 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \end{aligned}$$

Broj promenljivih je $n = 2$, broj ograničenja tipa jednakosti je $m_1 = 1$, a nejednakosti $m_2 = 1$. Potrebna nam je jedna Jakobijeva matrica, $k = 3$.

Sledeći korak jeste da formiramo, *Jakobijevu matricu*, za k=3.

$$J_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x_1 & 2x_2 \\ 0 & 2x_1 & 8x_2 \\ 2x_3 & 2x_1 & 2x_2 \end{vmatrix} = 24x_1x_2x_3 = 0$$

Formiramo sledeći sistem jednačina:

$$x_1^2 + 4x_2^2 = 4$$
$$-8 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$
$$24x_1x_2x_3 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 0 \vee x_3 = 0$$

- $x_1 = 0$

$$\begin{aligned} 4x_2^2 &= 4 \\ x_2^2 &= 1 \\ x_2 &= \pm 1 \\ x_3^2 &= 8 - x_1^2 - x_2^2 \\ x_3 &= \pm\sqrt{7} \end{aligned}$$

  Stacionarne tačke za slučaj $x_1 = 0$ su:
  - $A(0, 1, \sqrt{7})$
  - $B(0, 1, -\sqrt{7})$
  - $C(0, -1, \sqrt{7})$
  - $D(0, -1, -\sqrt{7})$

- $x_2 = 0$

$$\begin{aligned} x_1^2 &= 4 \\ x_1^2 &= 2 \\ x_1 &= \pm 2 \\ x_3^2 &= 8 - x_1^2 - x_2^2 \\ x_3 &= \pm 2 \end{aligned}$$

  Stacionarne tačke za slučaj $x_2 = 0$ su:
  - $E(2, 0, 2)$
  - $F(2, 0, -2)$
  - $G(-2, 0, 2)$
  - $H(-2, 0, -2)$

- $x_3 = 0$

$$\begin{aligned} x_1^2 + 4x_2^2 &= 4 \\ x_1^2 + x_2^2 &= 8 \end{aligned}$$

Oduzimanjem ove dve jednačine, sledi:

$$3x_2^2 = -4$$
$$x_2^2 = -\frac{4}{3}$$

Zaključujemo da slučaj $x_3 = 0$, ne zadovoljava ograničenje.

6. Pronaći stacionarne tačke, sledeće funkcije $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 - 6x_1 + 1$, ukoliko važe ograničenja: $h_1 : x_1 + 5x_2 + 4 = 0$, $g_1 : x_1^2 - 2x_2^2 - 2 \leq 0$.
   Broj promenljivih je $n = 2$, broj ograničenja tipa jednakosti je $m_1 = 1$, a nejednakosti $m_2 = 1$, te nam je potrebna jedna Jakobijeva matrica $k = 3$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 - 6x_1 + 1 \\ h_1 &: x_1 + 5x_2 + 4 = 0 \\ g_1 &: x_1^2 - 2x_2^2 - 2 \leq 0 \end{aligned}$$

Kao i u prethodnim zadacima, potrebno je da ograničenje tipa nejednakosti, pretvorimo u ograničenje tipa jednakosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 - 6x_1 + 1 \\ h_1 &: x_1 + 5x_2 + 4 = 0 \\ g_1 &: x_1^2 - 2x_2^2 - 2 + x_3^2 = 0 \end{aligned}$$

Sledeći korak jeste da formiramo, *Jakobijevu matricu*, za k=3.

$$J_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x_1 - 6 & 2x_2 + 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2x_3 & 2x_1 & -4x_2 \end{vmatrix} = 10x_3(2x_1 - 6) - 2x_3(2x_2 + 4) = 0$$

Korištenjem jednačina ograničenja, dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned} 10x_3(2x_1 - 6) - 2x_3(2x_2 + 4) &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + 4 &= 0 \\ x_1^2 - 2x_2^2 - 2 + x_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

Dalje možemo da sredimo sistem jednačina:

$$\begin{aligned} 2x_3(10x_1 - 34 - 2x_2) &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + 4 &= 0 \\ x_1^2 - 2x_2^2 - 2 + x_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

Zaključujemo na osnovu prve jednačine, da ćemo imati dva slučaja: $x_3 = 0$ i $(10x_1 - 34 - 2x_2) = 0$.

- $x_3 = 0$

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2x_2^2 &= 2 \\ x_1 + 5x_2 + 4 &= 0 \rightarrow x_1 = -5x_2 - 4 \\ (-5x_2 - 4)^2 - 2x_2^2 &= 2 \\ 25x_2^2 + 40x_2 + 16 - 2x_2^2 &= 2 \\ 23x_2^2 + 40x_2 + 14 &= 0 \end{aligned}$$

Rešavanjem kvadratne jednačine dobijamo dve stacionarne tačke:

$$\begin{aligned} A(0.572, -0.914) \\ B(-1.165, -0.567) \end{aligned}$$

- $10x_1 - 34 - 2x_2 = 0$

$$\begin{aligned} 10x_1 - 34 - 2x_2 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + 4 &= 0/(-10) \\ -52x_2 - 74 &= 0 \\ x_2 = -1.42, x_1 &= 3.68 \end{aligned}$$

Nakon što smo pronašli vrednosti $x_1$ i $x_2$, potrebno je da proverimo i vrednost $x_3$ iz ograničenja:

$$\begin{aligned} x_3^2 &= 2 - x_1^2 + 2x_2^2 \\ x_3^2 &= -7.5 < 0 \end{aligned}$$

Pošto je $x_3^2 < 0$, ograničenje nije zadovoljeno.