NIZOVI, KONVERGENCIJA NIZOVA, I deo

19. februar 2024.

Definicija

Neka je A prebrojiv podskup skupa prirodnih brojeva (ili skupa $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$) i X neprazan skup. Preslikavanje $a : A \to X$ zovemo **nizom** *u skupu X.*

Obično se u definiciji niza uzima da je $A = \mathbb{N}$. Međutim, tada za sledeća preslikavanja definisana sa

$$a(n) = \frac{1}{n-2}, \quad a(n) = \frac{1}{1+(-1)^n}$$

ne bismo mogli reći da predstavljaju niz. U prvom slučaju oblast definisanosti nije čitav skup $\mathbb{N}$ već $\mathbb{N} \setminus \{2\}$, a u drugom slučaju $\mathbb{N} \setminus \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}$.

Bez gubitka opštosti za domen niza se može uzimati skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, jer za svaki prebrojiv skup A, $A \subset \mathbb{N}$, postoji bijekcija $\phi : \mathbb{N} \to A$ skupa $\mathbb{N}$ na skup A sa osobinom da ako je

$$n < m,$$

tada je i

$$\phi(n) < \phi(m), \qquad \text{za sve } n, m \in \mathbb{N}.$$

Tada umesto niza a možemo posmatrati niz

$$a \circ \phi : \mathbb{N} \to X.$$

Primetimo da njegov domen jeste skup prirodnih brojeva i da oba preslikavanja imaju isti skup vrednosti.

- Bijekciju ϕ možemo definisati na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
\phi(1) &= \min A, \\
\phi(2) &= \min(A \setminus \{\phi(1)\}), \\
&\vdots \\
\phi(n) &= \min(A \setminus \{\phi(1), \phi(2), \ldots, \phi(n-1)\}), \text{ za sve } n > 1.
\end{aligned}
$$

- Na primer, bijekcija ϕ za niz dat sa $a(n) = \dfrac{1}{n-2}$ preslikava skup $\mathbb{N}$ na skup $\mathbb{N} \setminus \{2\}$ i data je sa

$$
\begin{aligned}
\phi(1) &= 1, \\
\phi(n) &= n + 1, \text{ za sve } n > 1.
\end{aligned}
$$

• Neka je $a : \mathbb{N} \to X$ niz. Elemenat $a(n)$ skupa X (slika prirodnog broja n) obeležavamo sa a_n i zovemo ga n-**ti član niza** a ili **opšti član niza** a. Dakle, $a(1) = a_1$ je prvi član niza, $a(2) = a_2$ je drugi član niza, itd.

• Niz $a : \mathbb{N} \to X$ kraće obeležavamo sa $\{a_n\}$, $< a_n >$ ili (a_n). Koristićemo oznaku $\{a_n\}$.

• Ako je $X = \mathbb{R}$, onda kažemo da je $\{a_n\}$ **realan niz**, a ako je $X = \mathbb{C}$ onda kažemo da je $\{a_n\}$ **kompleksan niz**. Primetimo da svakom kompleksnom nizu

$$\{a_n\} = \{x_n + iy_n\}$$

odgovaraju dva realna niza:

$$\begin{array}{lcl} \{x_n\} & - & \text{niz realnih delova niza } \{a_n\}, \\ \{y_n\} & - & \text{niz imaginarnih delova niza } \{a_n\}. \end{array}$$

Neka je $(X, \preceq)$ (totalno) uređen skup i $\{a_n\} \subset X$ niz u skupu X.

1) Ako postoji $M \in X$, tako da je $a_n \preceq M$, za sve $n \in \mathbb{N}$, onda kažemo da je niz $\{a_n\}$ **ograničen sa gornje strane**.

Element M zovemo **gornja granica niza** (**gornje ograničenje**).

Najmanja gornja granica niza (ako postoji) koji je ograničen sa gornje strane, zove se **supremum niza** (**gornja međa**), u oznaci $\sup a_n$.

2) Ako postoji $m \in X$, tako da je $m \preceq a_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$, onda kažemo da je niz $\{a_n\}$ **ograničen sa donje strane**.

Element m zovemo **donja granica niza** (**donje ograničenje**).

Najveća donja granica niza (ako postoji) ograničenog sa donje strane zove se **infimum niza** (**donja međa**), u oznaci $\inf a_n$.

Ako je niz $\{a_n\}$ ograničen i sa gornje i sa donje strane, kažemo da je **ograničen**.

Ako je $M = \sup a_n$ i $m = \inf a_n$, tada za sve $n \in \mathbb{N}$ važi da je $m \preceq a_n \preceq M$.

Ograničen niz realnih brojeva ima supremum i infimum.

• Realan niz $\{\frac{1}{n}\}$ je ograničen, pri čemu je $M = \sup \frac{1}{n} = 1$ prvi član niza, a $m = \inf \frac{1}{n} = 0$ nije član niza.

• Realan niz $\{n\}$ je ograničen sa donje strane ($m = 1$), a nije ograničen sa gornje strane.

• Realan niz $\{(-1)^n n\}$ nije ograničen ni sa gornje ni sa donje strane.

Ako za niz $\{a_n\}$ važi:

1) $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \prec a_{n+1}$ - niz je **monotono rastući**,

2) $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_{n+1} \prec a_n$ - niz je **monotono opadajući**,

3) $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \preceq a_{n+1}$ - niz je **monotono neopadajući**,

4) $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_{n+1} \preceq a_n$ - niz je **monotono nerastući**.

• Ako niz $\{a_n\}$ zadovoljava neki od gornja četiri uslova, kažemo da je **monoton**.

• Ako niz zadovoljava uslov 1) ili 2) kažemo da je i **strogo** (**striktno**) **monoton**.

Očigledno je da je monotono rastući niz ujedno i monotono neopadajući, a monotono opadajući niz je ujedno i monotono nerastući.

• Kažemo da je niz $\{a_n\}$ **gotovo monotono rastući**, ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, važi $a_n \prec a_{n+1}$.

• Slično se definišu pojmovi **gotovo monotono opadajućeg**, **gotovo monotono nerastućeg**, **gotovo monotono neopadajućeg** i **gotovo monotonog** niza.

Definicija

Ako je $\{n_k\}$ monotono rastući niz prirodnih brojeva, onda za niz $\{a_{n_k}\}$ kažemo da je **podniz niza** *$\{a_n\}$.*

Na primer podnizovi niza $\{a_n\}$ su nizovi $\{a_{2n}\}$, $\{a_{3n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$, itd.

Definicija

Neka je (X,d) *metrički prostor. Za niz* $\{a_n\} \subset X$ *kažemo da ima* **graničnu vrednost** $a \in X$ *i pišemo da je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in L(a,\varepsilon)),$$

tj.

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n,a) < \varepsilon).$$

Prethodna definicija za prostore $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ je:

• Broj $a \in \mathbb{R}$ je granična vrednost realnog niza $\{a_n\}$ u $\mathbb{R}$ ako i samo ako je ispunjen uslov

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon),$$

odnosno počev od n_0 svi članovi niza nalaze se u $\varepsilon-$okolini tačke a, tj. u otvorenom intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

• Broj $z \in \mathbb{C}$ je granična vrednost kompleksnog niza $\{z_n\}$ u $\mathbb{C}$ ako i samo ako je ispunjen uslov

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon).$$

• Ako niz $\{a_n\}$ ima graničnu vrednost a, tada kažemo da niz **konvergira** ili **teži** ka a, odnosno da je niz $\{a_n\}$ **konvergentan**. Za niz koji nije konvergentan kažemo da **divergira**, odnosno da je **divergentan**.

• Broj n_0 očigledno zavisi od ε i pokazuje koliko se članova niza $\{a_n\}$ nalazi izvan $\varepsilon-$okoline tačke a. Počev od n_0 svi članovi niza se nalaze u otvorenoj lopti $L(a, \varepsilon)$ dok se van nje nalazi najviše $n_0 - 1$ članova niza. Kažemo i da su u svakoj okolini **skoro svi članovi niza**.

Napomena

Ponekad se umesto $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *piše* $a_n \to a$, $n \to \infty$ *ili kraće* $a_n \to a$.

• Ako je $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus N_1)\ a_n = a$, gde je $N_1 \subset \mathbb{N}$ konačan skup, onda kažemo da je niz $\{a_n\}$ **stacionaran**. Kako za stacionaran niz $\{a_n\}$ gde je

$$a_n = a, \quad \text{za} \quad n \in \mathbb{N} \setminus N_1$$

važi

$$d(a_n, a) = d(a, a) = 0, \quad \text{za} \quad n \in \mathbb{N} \setminus N_1$$

to sledi da je

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

• Slično, ako je $\{a_n\}$ **konstantan** niz, tj. $a_n = a$ za svako $n \in \mathbb{N}$, sledi da je $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.

Primer

Za svako $\alpha > 0$ u $\mathbb{R}$ važi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

To je tačno, jer je

$$\left| \frac{1}{n^\alpha} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^\alpha} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{1/\alpha},$$

pa za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji

$$n_0 = \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{1/\alpha} \right] + 1.$$

Tako ako je $\alpha = 1$ i $\varepsilon = \frac{1}{10}$, tada je $n_0 = 11$.

Ako je $\{z_n\}$, gde je $z_n = x_n + y_n i$ kompleksan niz, granična vrednost niza $\{z_n\}$ može se odrediti preko graničnih vrednosti realnih nizova $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$. Naime, važi

Tvrđenje

Kompleksan broj $z = x + yi$ je granična vrednost kompleksnog niza $\{z_n\}$, $z_n = x_n + y_n i$ u $\mathbb{C}$ ako i samo ako je x granična vrednost niza $\{x_n\}$ u $\mathbb{R}$, a y granična vrednost niza $\{y_n\}$ u $\mathbb{R}$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z = x + yi \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

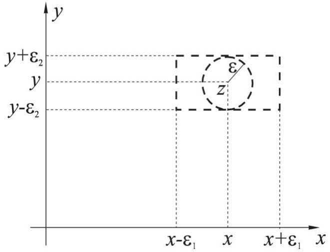
Dokaz. ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je $\lim_{n\to\infty} z_n = z = x + yi$. Neka je $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1)$, ε_1-okolina tačke x i $(y - \varepsilon_2, y + \varepsilon_2)$, ε_2-okolina tačke y. Uzmimo da je $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Tada

$$z_n \in L(z, \varepsilon), \quad \text{za} \quad n \geq n_0,$$

pa sledi da

$$|x_n - x| < \varepsilon \leq \varepsilon_1 \quad \text{i} \quad |y_n - y| < \varepsilon \leq \varepsilon_2 \quad \text{za} \quad n \geq n_0,$$

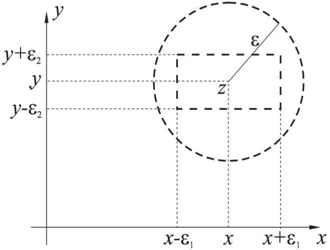
odnosno za nizove $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ važi $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.



($\Leftarrow$) Pretpostavimo obrnuto, tj. neka je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, a $L(z,\varepsilon)$ proizvoljna ε okolina tačke z. Upišimo u $L(z,\varepsilon)$ pravougaonik sa stranicama $2\varepsilon_1$ i $2\varepsilon_2$ čije su stranice paralelne koordinatnim osama. Tada je $(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1)$, ε_1-okolina tačke x i $(y-\varepsilon_2, y+\varepsilon_2)$, ε_2-okolina tačke y, pa iz

$$x_n \in (x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1),\ n \geq n_1 \quad \text{i} \quad y_n \in (y-\varepsilon_2, y+\varepsilon_2),\ n \geq n_2$$

sledi da $z_n \in L(a,\varepsilon)$ za $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, odnosno $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.



Napomena

Slično se može dokazati da niz $\{(x_n^1, x_n^2, ..., x_n^m)\} \subset \mathbb{R}^m$ *konvergira ka* $(a^1, a^2, ..., a^m) \in \mathbb{R}^m$ *u* $\mathbb{R}^m$ *ako i samo ako za svako* $i = 1, ..., m$ *niz* $\{x_n^i\}$ *konvergira ka* a^i *u* $\mathbb{R}$, *tj.*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n^1, x_n^2, ..., x_n^m) = (a^1, a^2, ..., a^m) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n^i = a^i,\ i = 1, ..., m.$$

Napomena

Niz $\{a_n\} \subset X$ *konvergira ka* $a \in X$ *u metričkom prostoru* (X, d) *ako i samo ako niz realnih brojeva* $\{d(a_n, a)\}$ *konvergira ka nuli u* $\mathbb{R}$.

Napomena

Ako je k *fiksan prirodan broj, tada ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *sledi takođe da je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

Tvrđenje

Ako niz $\{a_n\} \subset X$ *konvergira u metričkom prostoru* (X, d)*, tada je granična vrednost jednoznačno određena.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dve granične vrednosti a i b. Kako je X metrički prostor, to postoje otvorene lopte $L(a, \varepsilon)$ i $L(b, \varepsilon)$, $\varepsilon = \frac{1}{2}d(a, b)$ koje su disjunktne. Tada postoje prirodni brojevi n_1 i n_2 tako da važi

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_1 \Rightarrow a_n \in L(a, \varepsilon)), \quad (\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_2 \Rightarrow a_n \in L(b, \varepsilon)).$$

Neka je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Tada sledi da je

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in L(a, \varepsilon) \cap L(b, \varepsilon)),$$

što je nemoguće. Dakle, ako niz ima graničnu vrednost, ona je jednoznačno određena. $\square$

Tvrđenje

Konvergentan niz u metričkom prostoru (X, d) je ograničen.

Dokaz. Iz toga da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, imamo da važi

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in L(a, 1)).$$

Ako je $n_0 = 1$, tada se svi članovi niza nalaze u otvorenoj lopti $L(a, 1)$, pa je $d(a_m, a_n) \leq d(a_m, a) + d(a, a_n) < 1 + 1 = 2$, tj. niz je ograničen.
Za $n_0 > 1$, neka je $D = \max\{1, d(a, a_1), d(a, a_2), \ldots, d(a, a_{n_0-1})\}$.
Tada je $d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) \leq 2D$, pa je

$$\sup\{d(a_n, a_m) : a_n, a_m \in \{a_n\}\} \leq D + D = 2D.$$

Dakle, niz $\{a_n\}$ je ograničen. $\square$

Definicija

Za tačku $a \in X$ kažemo da je **tačka nagomilavanja niza** $\{a_n\}$ *u metričkom prostoru* (X, d) *ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(n \geq m \wedge a_n \in L(a, \varepsilon)).$$

• Dakle, ako je a tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$, tada svaka $\varepsilon-$okolina tačke a sadrži bar jedan član datog niza.

Obrnuto nije tačno. Na primer, ako posmatramo realan niz $\{a_n\}$ gde je $a_n = \frac{1}{n}$, tada $L(1, \varepsilon)$ sadrži prvi član niza $a_1 = 1$, ali 1 nije tačka nagomilavanja datog niza u $\mathbb{R}$.

- Tačke nagomilavanja niza $\{(-1)^n\}$ u $\mathbb{R}$ su očigledno -1 i 1 (ograničen niz ne mora da bude konvergentan!).

- Tačka nagomilavanja niza $\{n^{(-1)^n}\}$ u $\mathbb{R}$ je 0 (nije ograničen i nije konvergentan!)

- Niz $\{n\}$ nema ni jednu tačku nagomilavanja u $\mathbb{R}$.

Dakle, niz može da nema ni jednu, da ima jednu ili više tačaka nagomilavanja, pa i beskonačno mnogo.

Tvrđenje

Za svaku okolinu V tačke nagomilavanja a niza $\{a_n\}$, postoji beskonačan skup $M \subset \mathbb{N}$ tako da je $(\forall m \in M)\ a_m \in V$.

Dokaz. Dokažimo da je skup $M = \{n \in \mathbb{N} : a_m \in V\}$ beskonačan. On je neprazan jer iz same definicije tačke nagomilavanja sledi da postoji prirodan broj n takav da $a_n \in V$.
Pretpostavimo da je M konačan skup. Tada postoji $n_1 = \max\{n : n \in M\}$. Ako uzmemo da je

$$m = n_1 + 1,$$

tada postoji $n \geq m > n_1$ tako da $a_n \in V$, pa je $n \in M$ tj. $n \leq n_1$ što je kontradikcija. Dakle, M je beskonačan. $\square$

• Iz definicije tačke nagomilavanja niza $\{a_n\}$ sledi da je tačka nagomilavanja niza adherentna tačka skupa $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, ali ne mora da bude tačka nagomilavanja toga skupa.

Npr. u slučaju niza čiji je opšti član $a_n = (-1)^n$ tačke 1 i -1 su tačke nagomilavanja niza u $\mathbb{R}$, dok je skup $\{1, -1\}$ konačan i nema tačke nagomilavanja.

Napomena

Ako niz $\{a_n\} \subset X$ u metričkom prostoru X konvergira ka a, onda je a jedina tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$.

• Tačka a je tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ ako i samo ako postoji podniz $\{a_{n_k}\}$ niza $\{a_n\}$ koji konvergira ka a.

• U metričkom prostoru (X, d), skup $A \subset X$ je zatvoren ako i samo ako za svaki niz $\{a_n\}$ elemenata iz A koji konvergira ka a sledi da $a \in A$.

Tvrđenje

Neka je (X, d) metrički prostor. Skup svih tačaka nagomilavanja niza $\{a_n\} \subset X$ je zatvoren u (X, d).

• Pretpostavimo da je skup A tačaka nagomilavanja realnog niza $\{a_n\}$ neprazan i ograničen. Kako je skup tačaka nagomilavanja zatvoren, to sledi da skup A ima najveći i najmanji element, tj. najveću i najmanju tačku nagomilavanja. Tada

a) najveću tačku nagomilavanja zovemo **limes superior** datog niza i označavamo je sa $\limsup\ a_n$ ili $\overline{\lim}\ a_n$.

b) najmanju tačku nagomilavanja zovemo **limes inferior** datog niza i označavamo je sa $\liminf\ a_n$ ili $\underline{\lim}\ a_n$.

• ako su $\liminf\ a_n$ i $\limsup\ a_n$ različiti, niz ne konvergira, ako konvergira jednaki su.

Divergencija realnih nizova

Definicija

Za niz $\{a_n\}$ *kažemo da* **teži** ∞ *kada* $n \to \infty$, *tj.* $a_n \to \infty$ *kada* $n \to \infty$ *ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n > K).$$

Za niz $\{a_n\}$ *kažemo da* **teži** $-\infty$ *kada* $n \to \infty$, *tj.* $a_n \to -\infty$ *kada* $n \to \infty$ *ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n < K).$$

Ako niz $\{a_n\}$ *teži* $+\infty$ *ili* $-\infty$ *kažemo da je* **divergentan u užem smislu**. *Za niz koji je divergentan, ali ne u užem smislu, kažemo da je* **divergentan u širem smislu**.

Napomena

Umesto $a_n \to \infty$ (odnosno $a_n \to -\infty$) kada $n \to \infty$ često ćemo pisati $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (odnosno $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

• Niz $\{(-1)^n\}$ je očigledno divergentan u širem smislu. (Ovaj niz ima dve tačke nagomilavanja.)

• Niz $\{n^{(-1)^n}\}$ divergira u širem smislu. (Ovaj niz ima samo jednu tačku nagomilavanja i to realan broj 0.)

• Niz $\{(-1)^n n\}$ je divergentan u širem smislu. (Ovaj niz nema ni jednu tačku nagomilavanja.)

• Niz $\{\sqrt{n}\}$ teži ka ∞ kada $n \to \infty$, a niz $\{-n^2\}$ teži ka $-\infty$ kada $n \to \infty$.