Statička optimizacija u slučaju funkcije više promenljivih bez ograničenja

Anja Buljević
Aleksandra Mitrović
Smilja Stokanović

28. oktobar 2020.

Zadaci

1. Da li postoji optimum u stacionarnoj tački funkcije $y(x) = 8x_1 + x_2 + 5x_1^2 - 9x_1x_2 + 2x_2^2$?

   1. *Potrebni uslovi*

   Prvo ćemo pronaći stacionarnu tačku[1].

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x_1} &= 8 + 10x_1 - 9x_2 = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} &= 1 - 9x_1 + 4x_2 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

   Rešavanjem sistema jednačina dobijamo sledeću stacionarnu tačku: $\boxed{A(x_1^* = 1, x_2^* = 2)}$

   2. *Dovoljni uslovi*

   Nakon što smo odredili stacionarnu tačku, potrebno je da odredimo njen karakter. Karakter stacionarne tačke možemo odrediti pomoću:

   - Silvesterove teoreme
   - Svojstvenih vrednosti

   (a) Silvesterova teorema[2]

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}$$

   Odakle sledi da su glavni minori matrice H:

[1] Podsećanje sa predavanja: potreban uslov za postojanje stacionarne tačke jeste da je priraštaj funkcije $\bigtriangledown f(x) = 0$. Karakter stacionarne tačke ispitujemo na osnovu vrednosti funkcija viših izvoda.

[2] U slučaju da postoje parcijalni izvodi drugog reda funkcije y po svim promenljivama u okolini tačke $\mathbf{x}^*$ i ako važi $\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^* = 0$ onda tačka ekstremuma funkcije y u tački x^* zadovoljavaju sledeće uslove

i. Za **strogi lokalni minimum** $D_i > 0$ za $\quad i = 1, 2$

ii. Za **strogi lokalni maksimum** $D_1 < 0 \quad D_2 > 0$

gde su

$$D_1 = \left| \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}.$$

$$D_1 = 10 > 0$$
$$D_2 = 40 - 81 = -41 < 0.$$

Na osnovu dobijenih vrednosti glavnih minora, možemo da zaključimo da tačka A nije optimum.

(b) Svojstvene vrednosti[3]

$$\left|\lambda I - H\right| = 0$$

$$\left|\lambda I - H\right| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ -9 & 4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left|\lambda I - H\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 10 & 9 \\ 9 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left|\lambda I - H\right| = (\lambda - 10)(\lambda - 4) - 81 = 0$$

Rešavanjem sistema jednačina dobijamo sledeće vrednosti λ : $\boxed{\lambda_1 = 7 + 3\sqrt{10}}$ $\boxed{\lambda_2 = 7 - 3\sqrt{10}}$

Vrednosti λ koje su dobijene nisu istog znaka, te i na osnovu svojstvenih vrednosti možemo da zaključimo da tačka A nije optimum.

2. Naći stacionarne tačke i ispitati njihove karaktere za funkciju $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_2^3 x_1 - x_1 x_2$.

1. *Potrebni uslovi*

Da bismo odredili potrebne uslove, potrebno je da odredimo parcijalne izvode po svim promenljivim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 2x_1x_2 + x_2^3 - x_2 = x_2(2x_1 + x_2^2 - 1) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= x_1^2 + 3x_2^2 x_1 - x_1 = x_1(x_1 + 3x_2^2 - 1) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Iz jednačine (2) možemo da zaključimo da ćemo imati četiri slučaja kada su zadovoljeni potrebni uslovi:

$$x_1 = 0, x_2 = 0 \rightarrow A(0,0)$$
$$x_2 = 0, x_1 + 3x_2^2 - 1 = 0 \rightarrow B(1,0)$$
$$x_1 = 0, 2x_1 + x_2^2 - 1 = 0 \rightarrow C(0,1), D(0,-1)$$
$$x_1 + 3x_2^2 - 1 = 0, 2x_1 + x_2^2 - 1 = 0 \rightarrow E(\frac{2}{5}, \frac{1}{\sqrt{5}}), F(\frac{2}{5}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$$

[3] Sopstvene vrednosti i karakter ekstrema Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti Heseove matrice H, za matricu kažemo da je

i. **pozitivno definitna** ako su sve vrednoti $\lambda_i > 0 \ldots i = 1, \ldots, n$
ii. **pozitivno semidefinitna** ako su sve vrednoti $\lambda_i \geq 0 \quad i_1, \ldots, n$
iii. **negativno definitna** ako su sve vrednoti $\lambda_i < 0 \quad i_1, \ldots, n$
iv. **negativno semidefinitna** ako su sve vrednoti $\lambda_i \leq 0 \quad i_1, \ldots, n$
v. **nedefinitna** ukoliko sopstvene vrednosti menjaju znak

Uslov $\leq$ i $\geq$ logički podrazumeva da postoji barem jedna vrednost različita od nule.

2. *Dovoljni uslovi*

1. Silvesterova teorema
   Upotrebom Silvestorove teoreme„ formiramo Heseovu matricuna na osnovu koje ćemo zaključiti karakter dobijenih stacionarnih tačaka:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1 + 3x_2^2 - 1 \\ 2x_1 + 3x_2^2 - 1 & 6x_1x_2 \end{bmatrix}$$

   Odakle sledi da su glavni minori matrice H:

$$D_1 = 2x_2$$
$$D_2 = 12x_2^2x_1 - (2x_1 + 3x_2^2 - 1)^2;$$

	$A(0,0)$	$B(1,0)$	$C(0,1)$	$D(0,-1)$	$E(\frac{2}{5}, \frac{1}{\sqrt{5}})$	$F(\frac{2}{5}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$
D_1	0	0	2	-2	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$-\frac{2}{\sqrt{5}}$
D_2	-1	-1	-4	-4	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$
Karakter	/	/	/	/	MINIMUM	MAKSIMUM

   Iz tabele glavnih minora dobijenih pomoću Silvesterove teoreme vidimo da su samo tačke E i F optimalne vrednosti, dok ostale tačke ne predstavljaju optimume.

2. Svojstvene vrednosti

$$\left|\lambda I - H\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 2x_2 & -(2x_1 + 3x_2^2 - 1) \\ -(2x_1 + 3x_2^2 - 1) & \lambda - 6x_1x_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left|\lambda I - H\right| = (\lambda - 2x_2)(\lambda - 6x_1x_2) - (2x_1 + 3x_2^2 - 1)^2 = 0$$

	$A(0,0)$	$B(1,0)$	$C(0,1)$	$D(0,-1)$	$E(\frac{2}{5}, \frac{1}{\sqrt{5}})$	$F(\frac{2}{5}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$
λ_1	1	1	$1+\sqrt{5}$	$-1+\sqrt{5}$	9.756	-0.082
λ_2	-1	-1	$1-\sqrt{5}$	$-1-\sqrt{5}$	0.082	-9.756
Karakter	/	/	/	/	MINIMUM	MAKSIMUM

Na osnovu dobijenih vrednosti λ_1 i λ_2 možemo da odredimo karakter stacionarnih tački. Kao i na osnovu Silvesterove teoreme, tako i pomoću svojstvenih vrednosti vidimo sad su samo tačke E i F optimalne vrednosti, dok ostale tačke ne predstavljaju optimume.

3. Ukupni nedeljni prihod radionice je $P = -0.2x^2 - 0.25y^2 - 0.2xy + 200x + 160y$. Gdje je x, broj završenih stolova, a y, broj nezavršenih stolova. Ukupni nedeljni troškovi su $T = 100x + 70y + 4000$. Koliko stolova treba proizvesti nedeljno, kako bi dobit bila najveća?

1. *Potrebni uslovi*

Ukupnu dobit možemo izračunati tako što ćemo od ukupnih prihoda oduzeti troškove:

$$P = -0.2x^2 - 0.25y^2 - 0.2xy + 200x + 160y,$$
$$T = 100x + 70y + 4000,$$
$$D = P - T$$
$$D = -0.2x^2 - 0.25y^2 - 0.2xy + 200x + 160y - (100x + 70y + 4000)$$
$$D = -0.2x^2 - 0.25y^2 - 0.2xy + 100x + 90y - 4000$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial x} &= -0.4x - 0.2y + 100 = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial y} &= -0.5y - 0.2x + 180 = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} y &= -0.4x + 0.08x - 36 + 100 = 0 \\ -0.32x &= -64 \\ x^* &= 200, y^* = 100. \end{aligned} \tag{4}$$

Nakon što smo pronašli stacionarnu tačku, potrebno je i da proverimo da li za dobijene vrednosti x, y imamo maksimalnu dobit proveravanjem dovoljnih uslova.

2. *Dovoljni uslovi*

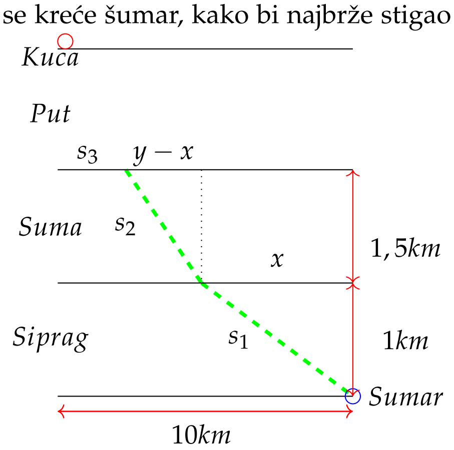
Dovoljne uslove možemo odrediti upotrebom Silvesterove teoreme, formiranjem Heseove matrice i računanjem glavnih minora:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 D}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 D}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 D}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 D}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.2 \\ -0.2 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= -0.4 \\ D_2 &= -0.2 - 0.04 = 0.16 \end{aligned}$$

Pošto je vrednost $D_1 < 0$, a vrednost $D_2 > 0$, možemo da zaključimo da će ostvarena dobit biti maksimalna.

4. Šumar se nalazi u tački A i treba da prođe putem, šumom i kroz šipražje, da bi došao do kuće. Kroz šiprag se kreće brzinom $3\frac{km}{h}$, kroz šumu brzinom $4\frac{km}{h}$ i putem $5\frac{km}{h}$. Kako treba da se kreće šumar, kako bi najbrže stigao do kuće.



U ovom slučaju, potrebno je da minimizujemo vreme kako bi šumar za što kraće vreme stigao do kuće:

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$
$$T = \frac{s_1}{V_1} + \frac{s_2}{V_2} + \frac{s_3}{V_3}$$
$$T = \frac{\sqrt{1+x^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{1.5^2+(y-x)^2}}{V_2} + \frac{10-y}{V_3}$$

Nakon što smo formirali kriterijum optimalnosti, potrebno je da nađemo pparcijalni izvode po promenljivim x i y:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{3}\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{4}\frac{-2(y-x)}{2\sqrt{1.5^2+(y-x)^2}} = 0$$
$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{4}\frac{2(y-x)}{2\sqrt{1.5^2+(y-x)^2}} - \frac{1}{5} = 0$$

Preostaje nam još da izračunamo vrednosti x i y:

$$\frac{1}{4}\frac{(y-x)}{\sqrt{1.5^2+(y-x)^2}} = \frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\frac{1}{4}\frac{(y-x)}{\sqrt{1.5^2+(y-x)^2}} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{5}$$
$$5x = 3\sqrt{1+x^2}$$
$$x = \pm\frac{3}{4}$$

Pošto je u pitanju fizička veličina, kao optimalnu vrednost x, uzimamo $x = \frac{3}{4}$.

$$
\begin{aligned}
5(y-x) &= 4\sqrt{(y-x)^2 + 1.5^2}/^2 \\
25(y-x)^2 &= 16((y-x)^2 + 1.5^2) \\
9(y-x)^2 &= 16 * 1.5^2 \\
(y-x) &= \pm\frac{4 * 1.5}{3} \\
y &= x \pm \frac{4 * 1.5}{3} \\
y &= \frac{3}{4} \pm 2 \\
y^* &= \frac{11}{4}
\end{aligned}
$$