VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

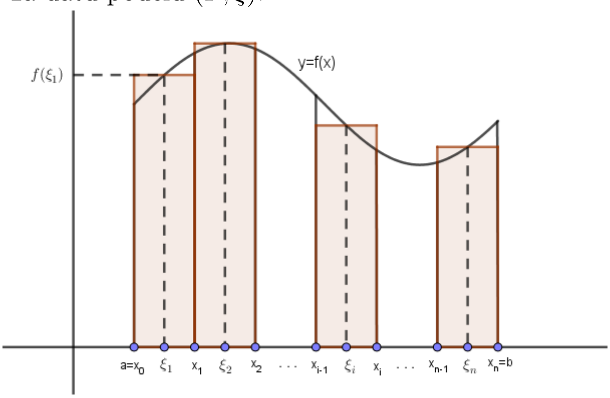
1. Vežbe III.4

1.1. Određeni integral

Uočimo zatvoren interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Konačan skup tačaka $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, takav da je $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, zovemo *podela intervala* $[a, b]$. Sa $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots, n$ označimo dužinu intervala $[x_{i-1}, x_i]$. Pod parametrom podele P podrazumevamo $\lambda(P) = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i$ (maksimalna dužina intervala podele P).

Na svakom intervalu $[x_{i-1}, x_i],\ i = 1, 2, \ldots, n$ izaberemo ξ_i i neka je $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Na ovaj način dobija se podela intervala $[a, b]$ sa izabranom tačkom koju označavamo sa (P, ξ).

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i neka je (P, ξ) podela sa izabranom tačkom intervala $[a, b]$. Zbir $S(f, P, \xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ se naziva integralna ili Rimanova suma funkcije $f(x)$ za datu podelu (P, ξ).



Ako je $f(x) \geq 0$ za $x \in [x_{i-1}, x_i]$, primetimo da je $f(\xi_i)\Delta x_i$ jednako površini pravougaonika sa stranicama $f(\xi_i)$ i Δx_i, što nam govori da će nam integralna suma (odnosno određeni integral) koristiti da izračunamo površinu dvodimenzionalnih figura.

Definicija 1.1. Za broj I kažemo da je limes (granična vrednost) integralnih suma $S(f, P, \xi)$ funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, za $\lambda(P) \to 0$ i pišemo $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} S(f, P, \xi)$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takvo da za svaku podelu P i svaku izabranu tačku $\xi \in \xi(P)$, kada $\lambda(P) < \delta$, važi nejednakost $|S(f, P, \xi) - I| < \varepsilon$. Ako postoji $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} S(f, P, \xi) = I$, onda se kaže da je $f(x)$ integrabilna u Rimanovom smislu nad intervalom $[a, b]$. Broj I se naziva Rimanov ili određeni integral funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a, b]$ i piše se $I = \int\limits_a^b f(x)dx$. Pri tom se a i b nazivaju donja odnosno gornja granica integrala, respektivno.

Podela intervala $[a,b]$ na n jednakih delova se naziva ekvidistantna podela i zbog jednostavnijeg zapisa samo ćemo nju koristiti kod zadataka. Za nju važi da su dužine svih podintervala jednake, tj. $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, $i = 1,2,\dots,n$. Zbog lakšeg zapisa ćemo takođe umesto $S(f,P,\xi)$ koristiti oznaku S_n, gde je n broj delova na koliko je podeljen interval $[a,b]$.

- **Darbuove sume**

Neka je funkcija $f(x)$ definisana i ograničena nad intervalom $[a,b]$ i neka je $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ podela tog intervala. Uvedimo sledeće oznake:

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ m = \inf_{x\in[a,b]} f(x),$$

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Sume $s = s(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ i $S = S(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$, nazivamo donja i gornja Darbuova suma funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a,b]$, respektivno. Primetimo da važi $m \le m_i \le M_i < M$ za $i = 1,2,\dots,n$ i da je $b-a = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i$, pa dobijamo

$$\begin{aligned} m(b-a) = \sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = s \le I \\ \le S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M \Delta x_i = M(b-a). \end{aligned}$$

- **Njutn-Lajbnicova formula**

Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna nad zatvorenim intervalom $[a,b]$ i ako $f(x)$ ima primitivnu funkciju $F(x)$ nad intervalom $[a,b]$, tada je

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ova formula i znanje iz rešavanja neodređenog integrala će nam koristiti da rešavamo i određeni integral.

- **Smena promenljive**

Neka je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna, a funkcija $\varphi : [\alpha_0, \beta_0] \to [a,b]$ ima neprekidan izvod. Ako je $\alpha \in [\alpha_0,\beta_0], \beta \in [\alpha_0,\beta_0], a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$, onda važi jednakost $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Voditi računa da se sa smenom menjaju i granice integrala.

- **Parcijalna integracija**

Neka funkcije $u(x)$ i $v(x)$ imaju neprekidne izvode nad intervalom $[a, b]$. Tada važi jednakost $\int\limits_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)du(x)$. Formula se kraće piše u obliku $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$.

- **Osobine određenog integrala**

1. Ako je funkcija $f(x)$ definisana u tački a onda je $\int\limits_a^a f(x) = 0$.

2. Ako je $a < b$ i $\int\limits_a^b f(x)dx$ postoji, onda je $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$.

3. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.

4. $\int\limits_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx, \ \alpha \in \mathbb{R}$.

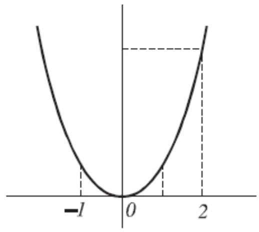
5. Neka tačke a, b i $c \in \mathbb{R}$ predstavljaju krajeve za tri zatvorena intervala. Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na najvećem od ovih intervala, onda je ona integrabilna i na ostala dva. Pri tom važi jednakost

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6. Ako je funkcija $f(x)$ parna, tada je $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$, a ako je neparna, tada je $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Zadatak 1.2. Izračunati po definiciji $\int\limits_{-1}^{2} x^2 dx$.

Rešenje.



Podintegralna funkcija je neprekidna, pa je i integrabilna. Stoga je dovoljno da posmatramo ekvidistantnu podelu i specifično izabranu tačku. Interval $[-1, 2]$ podelimo na n jednakih delova. Tada je $\Delta x_i = \frac{2-(-1)}{n} = \frac{3}{n}$, a za tačke ξ_i izaberimo desne krajeve intervala $[x_{i-1}, x_i]$, tj. $\xi_i = x_i$. Izvedimo izraz za x_i. Kako je $x_1 = -1 + \frac{3}{n}, x_2 = x_1 + \frac{3}{n} = -1 + 2 \cdot \frac{3}{n}, \dots$ vidimo da je $x_k = -1 + \frac{3k}{n},\ k = 1, 2, \dots, n$. Dakle,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(-1 + \frac{3i}{n}\Big)^2 \cdot \frac{3}{n} = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(1 - \frac{6i}{n} + \frac{9i^2}{n^2}\Big) \\
&= \frac{3}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{9}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i^2 \Big) \\
&= \frac{3}{n}\Big(n - \frac{6}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Big) \\
&= 3 - 9\frac{n^2+n}{n^2} + \frac{9}{2}\frac{2n^2+3n+1}{n^2} \\
&= 3 + \frac{-19n^2 - 18n + 18n^2 + 27n + 9}{2n^2} = 3 + \frac{9(n+1)}{2n^2}.
\end{aligned}$$

Konačno, $\int\limits_{-1}^{2} x^2 dx = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \Big(3 + \frac{9(n+1)}{2n^2}\Big) = 3.$

Napomena 1.3. Koristeći Njutn-Lajbnicovu formulu dobijamo

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$$

Zadatak 1.4. Odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ako je $a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2}$.

Rešenje. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ćemo odrediti pomoću određenog integrala i Njutn-Lajbnicove formule.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2} \\ &= \frac{n}{n^2}\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}}\Big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}. \end{aligned}$$

Vidimo da je to integralna suma za funkciju $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, koja je integrabilna nad $[0,1]$, sa ekvidistantnom podelom $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$, $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$ i $\Delta x_i = \frac{1}{n}$. Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Napomena 1.5. Kod ovih zadataka obično se izraz zapiše kao suma, a zatim ispred sume izvuče $\frac{1}{n}$ (ili $\frac{2}{n}$ ili $\frac{k}{n}$ za neki pozitivan broj k) što bi predstavljalo dužinu podintervala Δx_i kod ekvidistante podele. Onda se opšti član sume zapiše tako da se u tom izrazu pojavljuju i i n zajedno i to u obliku $\frac{i}{n}$ (ili $\frac{k\cdot i}{n}$ za neko k) tako da se dobije $x_i = \frac{i}{n}$, a granice integrala su i granice intervala $[a,b]$, pa je $a = x_0 = \frac{0}{n} = 0$ i $b = x_n = \frac{n}{n} = 1$ (ili ako je $x_i = \frac{k\cdot i}{n}$ onda je $b = x_n = \frac{k\cdot n}{n} = k$ za neko k). Kada to sredimo, opšti član sume a_i posmatramo kao $a_i = f(i)$, tj. od njega dobijamo podintegralnu funkciju $f(x)$.

Zadatak 1.6. Primenom određenog integrala odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ako je

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}.$$

Rešenje. Zapišimo $a_n = \frac{1}{n}(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n}{n}) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n}$. Dobili smo integralnu sumu integrabilne funkcije $y = x$ nad intervalom $[0,1]$ sa podelom $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$, $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$ i $\Delta x_i = \frac{1}{n}$. Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Zadatak 1.7. Odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ ako je

$$b_n = n^2\Big(\frac{1}{(n+1)(n^2+1)} + \frac{1}{(n+2)(n^2+2^2)} + \ldots + \frac{1}{4n^3}\Big).$$

Rešenje. Vidimo da ima n sabiraka zato što je $4n^3 = (n+n)(n^2+n^2)$. Slično kao u prethodnim zadacima imamo $b_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n^2}{(n+i)(n^2+i^2)}$, a kada podelimo i imenilac i brojilac sa n^3 dobijamo

$$b_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{n+i}{n}\cdot\frac{n^2+i^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})(1+(\frac{i}{n})^2)}.$$

Vidimo da je b_n jednako integralnoj sumi funkcije $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}$ koja je integrabilna nad $[0,1]$ sa istom podelom intervala kao u prethodnim zadacima. Tako da je

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}.$$

Iz $\frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$ dobija se da je $A = C = \frac{1}{2}$ i $B = -\frac{1}{2}$.
Konačno,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int_0^1\frac{-x+1}{1+x^2}dx\\ &= \frac{1}{2}\ln|1+x|\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln|1+x^2|\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1\\ &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\ln 2}{4} + \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

Zadatak 1.8. Primenom određenog integrala naći graničnu vrednost niza sa opštim članom

$$a_n = 2n\Big(\frac{1}{(2+n)(2+2n)} + \frac{1}{(4+n)(4+2n)} + \frac{1}{(6+n)(6+2n)} + \ldots + \frac{1}{12n^2}\Big).$$

Rešenje. Iz $12n^2 = (2k+n)(2k+2n)$ sledi da je $k = n$ odnosno imamo n sabiraka.

$$\begin{aligned} a_n &= 2n\Big(\frac{1}{n(\frac{2}{n}+1)n(\frac{2}{n}+2)} + \frac{1}{n(\frac{4}{n}+1)n(\frac{4}{n}+2)} + \ldots + \frac{1}{n^2\cdot 12}\Big) \\ &= \frac{2n}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\frac{2i}{n}+1)(\frac{2i}{n}+2)} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\frac{2i}{n}+1)(\frac{2i}{n}+2)}. \end{aligned}$$

Ako uzmemo $\Delta x_i = \frac{2}{n}$ i $x_i = \frac{2i}{n}$, dobijena suma je integralna suma funkcije $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$ koja je integrabilna nad $[0,2]$, pa je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}.$$

Kako je $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ (što se lako dobije predstavljanjem $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$), konačno dobijamo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \int_0^2 \frac{dx}{x+1} - \int_0^2 \frac{dx}{x+2} = \ln|x+1|\Big|_0^2 - \ln|x+2|\Big|_0^2 \\ &= \ln 3 - (\ln 4 - \ln 2) = \ln 3 - (2\ln 2 - \ln 2) = \ln\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Napomena 1.9. U ovom zadatku smo integralnu sumu mogli zapisati i kao $2\cdot\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{(2\cdot\frac{i}{n}+1)(2\cdot\frac{i}{n}+2)}$ i uzeti da je $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ i $x_i = \frac{i}{n}$, tako bismo dobili da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2x+1)(2x+2)}$. Ovaj integral se smenom $2x = t$ svodi na integral koji smo rešili.

Zadatak 1.10. Izračunati određeni integral $\int\limits_{-2}^{3} |x|dx$.

Rešenje. Koristićemo Njutn-Lajbnicovu formulu, tako da nam treba neodređeni integral od $|x|$. Kako je $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ sledi da se početni integral rastavlja na dva integrala

$$\begin{aligned}\int\limits_{-2}^{3} |x|dx &= -\int\limits_{-2}^{0} xdx + \int\limits_{0}^{3} xdx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{3} \\ &= -\frac{1}{2}(0^2 - (-2)^2) + \frac{1}{2}(3^2 - 0^2) = \frac{4}{2} + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}.\end{aligned}$$

Zadatak 1.11. Izračunati određeni integral $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|dx$.

Rešenje. Slično kao u prethodnom zadatku imamo da je

$$|\ln x| = \begin{cases} \ln x, & \ln x \geq 0 \quad \text{tj. } x \geq 1, \\ -\ln x, & \ln x < 0 \quad \text{tj. } 0 < x < 1, \end{cases}$$

pa je

$$\begin{aligned}\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|dx &= -\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} \ln xdx + \int\limits_{1}^{e} \ln xdx = \begin{bmatrix} u = \ln x, & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, & v = x \end{bmatrix} \\ &= -(x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} - \int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} dx) + x\ln x\Big|_{1}^{e} - \int\limits_{1}^{e} dx \\ &= -(0 - \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} - x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}) + e - 0 - x\Big|_{1}^{e} \\ &= -(\frac{1}{e} - (1 - \frac{1}{e})) + e - (e-1) = 1 - \frac{2}{e} + 1 = 2 - \frac{2}{e}.\end{aligned}$$

Zadatak 1.12. Izračunati određeni integral $\int\limits_1^2 \ln(x+1)dx$.

Rešenje. Izračunajmo ovaj integral pomoću smene

$$\int\limits_1^2 \ln(x+1)dx = \begin{bmatrix} x+1=t, & dx=dt \\ x=1 \;\Rightarrow\; t=2 \\ x=2 \;\Rightarrow\; t=2 \end{bmatrix} = \int\limits_2^3 \ln t dt = \begin{bmatrix} u=\ln t, & du=\frac{dt}{t} \\ dv=dt, & v=t \end{bmatrix}$$

$$= t\ln t\Big|_2^3 - t\Big|_2^3 = 3\ln 3 - 2\ln 2 - (3-2)$$

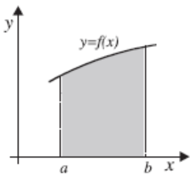
$$= \ln 9 - \ln 4 - 1 = \ln\frac{9}{4} - 1.$$

Vidimo da se prilikom smene menjaju i granice određenog integrala, kao i to da na kraju nema vraćanja smene kao kod neodređenog integrala.

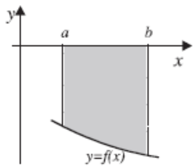
1.2. Površina ravnih likova

- Pravougli koordinatni sistem

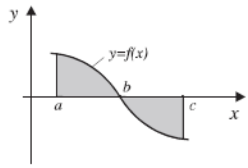
Neka su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne nad zatvorenim intervalom $[a,b]$. Tada se površine osenčenih figura računaju kao



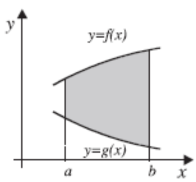
$$P=\int_a^b f(x)dx$$



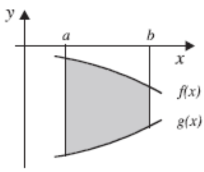
$$P=-\int_a^b f(x)dx$$



$$P=\int_a^b f(x)dx-\int_b^c f(x)dx$$



$$P=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$



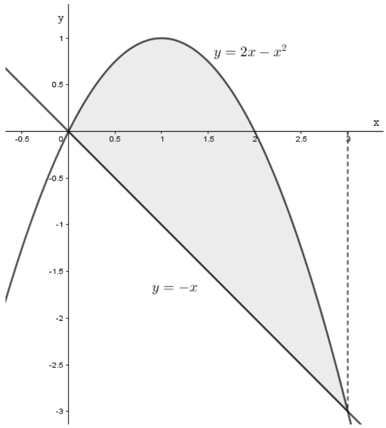
$$P=-\int_a^b g(x)dx+\int_a^b f(x)dx=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

Napomena 1.13. Svi navedeni slučajevi se mogu posmatrati kao:

ako je $g(x)\leq f(x)$ za sve $x\in[a,b]$, odnosno ako je grafik funkcije $f(x)$ iznad grafika funkcije $g(x)$ na intervalu $[a,b]$ onda se površina oblasti između funkcija $g(x)$ i $f(x)$ na intervalu $[a,b]$ računa kao $P=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$, odnosno kao određeni integral na intervalu $[a,b]$ od *'gornja funkcija minus donja funkcija'*. U prvom primeru na slici donja funkcija je $y=0$, a na drugoj slici je gornja funkcija $y=0$.

Zadatak 1.14. Izračunati površinu figure ograničene parabolom $y = 2x - x^2$ i pravom $x + y = 0$.

Rešenje.

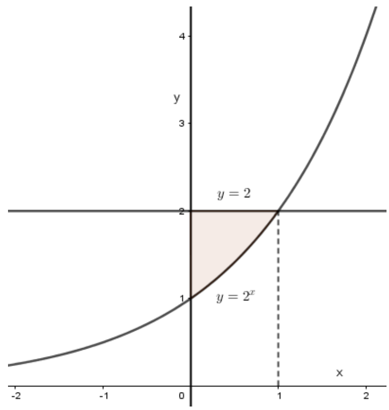


Prvo je potrebno naći presek datih krivih, tj. tražimo x i y takve da zadovoljavaju $y = 2x - x^2$ i $x + y = 0$. Dobijamo da je $2x - x^2 = -x$, tj. $x(3 - x) = 0$. Imamo dva rešenja $x = 0$ i $x = 3$. Sa slike se vidi da je $y = 2x - x^2$ gornja, a da je $y = -x$ donja funkcija. Tako da je površina ograničene oblasti jednaka

$$
\begin{aligned}
P &= \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 \\
&= \frac{3}{2} \cdot 9 - \frac{27}{3} - 0 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}.
\end{aligned}
$$

Zadatak 1.15. Izračunati površinu figure ograničene krivom $y = 2^x$ i pravama $y = 2$ i $x = 0$.

Rešenje.



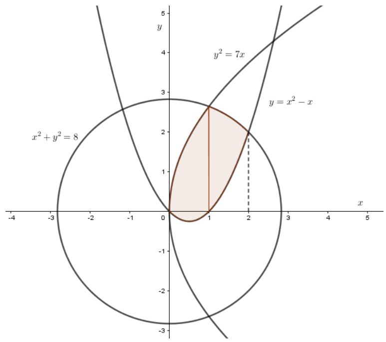
Presečna tačka krivih $y = 2^x$ i $y = 2$ se dobija za $x = 1$. Tako da je površina jednaka

$$P = \int_0^1 (2 - 2^x)dx = 2x\Big|_0^1 - \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1 = 2(1-0) - \left(\frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\right) = 2 - \frac{1}{\ln 2}.$$

Napomena 1.16. Nekada je lakše posmatrati funkciju u obliku $x = x(y)$, tako da dobijamo integral po y, ali samo treba voditi računa šta je u tom slučaju gornja (tj. desna) a šta donja (tj. leva) funkcija. Npr. ovaj zadatak se može rešavati i kao

$$P = \int\limits_1^2 (\log_2 y - 0)dy.$$

Zadatak 1.17. Izračunati površinu figure ograničene kružnicom $x^2 + y^2 = 8$ i parabolama $y^2 = 7x$ i $y = x^2 - x$, tako da tačka $(1, 1)$ pripada datoj figuri.
Rešenje.



Da bismo mogli da skiciramo crtež potrebno je odrediti presečne tačke. U ovom primeru će dovoljno biti da odredimo presečne tačke kružnice sa parabolama.

Nađimo presek kružnice i parabole $y^2 = 7x$. Zamenom u jednačinu kružnice dobija se $x^2 + 7x = 8$, tj. rešimo kvadratnu jednačinu $x^2 + 7x - 8 = 0$, $x_{1,2} = \frac{-7\pm\sqrt{49+32}}{2} = \frac{-7\pm 9}{2}$, dobijamo $x_1 = 1$ i $x_2 = -8$. Kako x mora biti pozitivno zbog jednačine parabole $y^2 = 7x$ sledi da se parabola i prava seku u tačkama $(1, \sqrt{7})$ i $(1, -\sqrt{7})$.

Nađimo presek kružnice i parabole $y = x^2 - x$. Ako zamenimo u jednačinu kružnice dobijamo $x^2 + (x^2 - x)^2 = 8$. Kada prebacimo sve na levu stranu jednačina će izgledati $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 8 = 0$, tako da dobijamo da je jedno (racionalno) rešenje te jednačine $x = 2$ i to je zapravo traženo x. Druga presečna tačka se dobija za negativno x, što vidimo sa slike.

Kako nama treba oblast u kojoj je tačka $(1, 1)$ u unutrašnjosti kružnice i pošto tačke $(1, \sqrt{7})$ i $(1, 0)$ pripadaju prvoj, odnosno drugoj paraboli, iz odnosa njihovih y-koordinata $0 < 1 < \sqrt{7}$ sledi da je tražena oblast baš osenčena oblast sa slike. Konačno,

$$
\begin{aligned}
P &= \int_0^1 (\sqrt{7x} - (x^2 - x))dx + \int_1^2 (\sqrt{8 - x^2} - (x^2 - x))dx \\
&= \left(\sqrt{7} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x}{2}\sqrt{8 - x^2} + \frac{8}{2} \cdot \arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 \\
&= \frac{2\sqrt{7}}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 + 4\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{8}{3} + 2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + 4\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(4-3)\sqrt{7}}{6} + \frac{13}{6} + 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} - 4\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{6} \\
&= \frac{\sqrt{7}}{6} + \frac{4}{3} + \pi - 4\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Napomena 1.18. Morali smo da podelimo oblast (a onda i integral) na dva dela zato što gonja funkcija nije ista na intervalima $[0, 1]$ i $[1, 2]$. Generalno, čim se negde promeni donja ili gornja funkcija koja ograničava oblast, potrebno je u toj tački promene podeliti oblast vertikalnom pravom, a samim tim moramo i više integrala računati.

Takođe, voditi računa da parabola $y^2 = 7x$ ima dva kraka $y = \sqrt{7x}$ i $y = -\sqrt{7x}$, ali nama je u ovom zadatku trebao samo krak $y = \sqrt{7x}$.

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.