VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Novi Sad,
2021.

Sadržaj

1. Vežbe I.1

Konvergencija nizova

Definicija 1.1. Proizvoljno preslikavanje $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nazivamo realni niz, dok njegovu vrednost $a(n) = a_n$ nazivamo opšti ili n-ti član niza.

Definicija 1.2. Za realni niz $\{a_n\}$ kažemo da je

- ograničen sa gornje strane ako postoji realan broj G takav da je $a_n \leq G$ za sve $n \in \mathbb{N}$. G nazivamo gornje ograničenje niza $\{a_n\}$;
- ograničen sa donje strane strane ako postoji realan broj g takav da je $a_n \geq g$ za sve $n \in \mathbb{N}$. g nazivamo donje ograničenje niza $\{a_n\}$;
- ograničen ako postoje realni brojevi $g, G \in \mathbb{R}$ takvi da za sve $n \in \mathbb{N}$ važi da je $g \leq a_n \leq G$.

Definicija 1.3. Broj $a \in \mathbb{R}$ je **granična vrednost niza** $\{a_n\}$ u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Tada pišemo

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a.}$$

Definicija 1.4. Za $a \in \mathbb{R}$ kažemo da je **tačka nagomilavanja niza** $\{a_n\}$ ako se za svako $\varepsilon > 0$ u $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ nalazi beskonačno mnogo članova niza.

Definicija 1.5. Za realni niz $\{a_n\}$ kažemo da je

- monotono rastući ako za sve $n \in \mathbb{N}$ važi da je $a_n < a_{n+1}$;
- monotono neopadajući ako za sve $n \in \mathbb{N}$ važi da je $a_n \leq a_{n+1}$;
- monotono nerastući ako za sve $n \in \mathbb{N}$ važi da je $a_n \geq a_{n+1}$;
- monotono opadajući ako za sve $n \in \mathbb{N}$ važi da je $a_n > a_{n+1}$.

Osobine graničnih vrednosti nizova

Za $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ gde su $a, b \in \mathbb{R}$ važi:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$, gde je $c \in \mathbb{R}$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$, gde je $b, b_n \neq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Neke poznate granične vrednosti

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0;$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$ za $a > 0;$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$ za $\alpha \in \mathbb{R}, a > 0;$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ za $a > 0;$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1;$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e;$

7. $$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & , \quad |q| < 1, \\ 1 & , \quad q = 1, \\ \infty & , \quad q > 1, \\ \text{ne postoji} & , \quad q \leq -1. \end{cases}$$

Granične vrednosti neodređenog tipa

„$\frac{0}{0}$”, „$\frac{\infty}{\infty}$”, „$0 \cdot \infty$”, „$\infty - \infty$”, „1^∞”, „∞^0”, „0^0”.

Zadaci

Zadatak 1.6. Izračunati sledeće granične vrednosti

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2-3n+4}{5n^3+3n^2+1}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3-2n+1}{5n^3+2n^2+3}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3-3n+4}{3n^2+1}$.

Rešenje.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2-3n+4}{5n^3+3n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{5}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{5+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}} = 0$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3-2n+1}{5n^3+2n^2+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{5+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^3}} = \dfrac{4}{5}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3-3n+4}{3n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}} = \infty$.

Na osnovu prethodnog primera možemo zaključiti da ako su

$P_k(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ i $Q_m(n) = b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \cdots + b_1 n + b_0$

polinomi k-tog, odnosno m-tog stepena, važi

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{P_k(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0 & , \quad m > k, \\ \frac{a_k}{b_k} & , \quad m = k, \\ \pm\infty & , \quad m < k. \end{cases}}$$

Napomena. Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ tada je

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.}$$

Takođe, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ za $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tada je

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right)^{b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = e^b.$$

Zadatak 1.7. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{5n^2+n}\right)^n$.

Rešenje.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{5n^2+n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0.$$

Zadatak 1.8. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^3+2}{5n^3}\right)^{n^3}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3+2}{5n^3}\right)^{n^3} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{5n^3}\right)^{n^3} = \text{„}1^{\infty}\text{"} \text{ - neodređen izraz} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5n^3}{2}}\right)^{n^3} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5n^3}{2}}\right)^{\frac{5n^3}{2}\frac{2}{5n^3}n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\left(1+\frac{1}{\frac{5n^3}{2}}\right)^{\frac{5n^3}{2}}\right)}_{=e}^{\frac{2}{5}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2}{5}} = e^{\frac{2}{5}}.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.9. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{2n}$.

Rešenje.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{2n+1}{2}\frac{2}{2n+1}2n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\right)}_{=e}^{\frac{4n}{2n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{2n+1}} = e^2.$$

Zadatak 1.10. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2}{n^2}}_{\to 0}+\cdots+\underbrace{\frac{n-1}{n^2}}_{\to 0}\right) &= \text{,,}0\cdot\infty\text{'' - neodređen izraz}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}}{n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n^2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Napomena. Zbir prvih n brojeva je dat sa

$$\boxed{1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.}$$

Zadatak 1.11. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n-5^n}$.

Rešenje.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n-5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+1\right)}{5^n\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\left(\underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}_{\to 0}+1\right)}{\underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^{n}}_{\to 0}-1}=-5.$$

Zadatak 1.12. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n\cdot(n+1)}{n^3}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n\cdot(n+1)}{n^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot(1+1) + 2\cdot(2+1) + \cdots + n\cdot(n+1)}{n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\underbrace{1+2+\cdots+n}_{\text{zbir prvih } n \text{ brojeva}} + \underbrace{1^2+2^2+\cdots+n^2}_{\text{zbir kvadrata prvih } n \text{ brojeva}}}{n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+6n^2+4n}{6n^3} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Napomena. Zbir kvadrata prvih n brojeva je dat sa

$$\boxed{1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

Zadatak 1.13. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+n}\right)$.

Rešenje.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+n}\right)\\
&= \text{,,}\infty-\infty\text{'' - neodređen izraz}\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n+n-\sqrt[3]{n^3+n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)+\lim_{n\to\infty} n(n-\sqrt[3]{n^3+n})\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}+\\
&+\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-\sqrt[3]{n^3+n})(n^2+n\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt[3]{(n^3+n)^2})}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt[3]{(n^3+n)^2}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n}+\lim_{n\to\infty} \frac{n(n^3-(n^3+n))}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt[3]{(n^3+n)^2}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}+\lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt[3]{(n^3+n)^2}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}+\lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n^2})^2}\right)}\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

Zadatak 1.14. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)!+(n+1)!}{(n+1)!}$.

Rešenje.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!+(n+1)!}{(n+1)!} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!+(n+1)n(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!(1+n(n+1))}{(n-1)!n(n+1)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+n}=1.
\end{aligned}
$$

Zadatak 1.15. Izračunati $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{n}}{n}}+\sqrt{1-\frac{\sqrt{n}}{n}}\right)} = 1.
\end{aligned}$$

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.