VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Novi Sad,
2020.

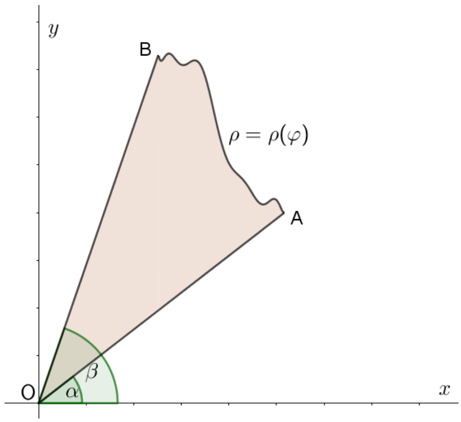
Sadržaj

1. Vežbe III.5

- Polarni koordinatni sistem

Neka je data kriva $\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \leq \varphi \leq \beta,\ |\beta - \alpha| \leq 2\pi$, u polarnom koordinatnom sistemu, gde je $\rho = \rho(\varphi)$ neprekidna funkcija. Geometrijsku figuru OAB, ograničenu polupravama $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta$ i krivom $\rho = \rho(\varphi)$ nazvaćemo krivolinijski trougao. Površina P tog krivolinijskog trougla iznosi

$$P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

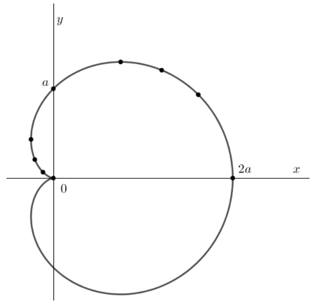


Pri crtanju krivih u xy-ravni, treba da imamo u vidu da je ρ rastojanje tačke od koordinatnog početka, a φ ugao između pozitivnog dela x-ose i duži koja spaja tačku sa koordinatnim početkom, kao i da je $x = \rho\cos\varphi$ i $y = \rho\sin\varphi$.

Zadatak 1.1. Izračunati površinu ograničenu kardioidom

$$\rho = a(1 + \cos\varphi),\ a > 0,\ \varphi \in [0, 2\pi].$$

Rešenje. Da bismo dobili neku pretpostavku kako kardioida izgleda možemo nacrtati neke tačke na kardioidi. Tako se za $\varphi = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi$ dobijaju tačke na slici. Npr. za $\varphi = 0$ imamo da je $\rho = 2a,\ x = 2a$ i $y = 0$.



Vidimo da je $\rho = \rho(\varphi)$ parna funkcija, tj. važi $\rho(\varphi) = \rho(-\varphi)$, tako da se druga polovina krive dobija kada se gornja polovina preslika osnom simetrijom u odnosu na x-osu. Površinu cele oblasti možemo računati kao dva puta površina gornje polovine oblasti, tj.

$$\begin{aligned}
P &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi a^2 (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^\pi (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi \\
&= a^2 \int_0^\pi d\varphi + 2a^2 \int_0^\pi \cos\varphi d\varphi + \frac{a^2}{2} \int_0^\pi (1 + \cos 2\varphi) d\varphi \\
&= a^2 \varphi \Big|_0^\pi + 2a^2 \sin\varphi \Big|_0^\pi + \frac{a^2}{2} \varphi \Big|_0^\pi + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^\pi = a^2\pi + \frac{a^2\pi}{2} = \frac{3}{2} a^2 \pi.
\end{aligned}$$

- Parametarski oblik

Ako je funkcija $y = f(x)$ data u parametarskom obliku $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [a, b]$, pri čemu funkcije $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ zadovoljavaju uslove:

a) funkcija $\varphi(t)$ ima neprekidan prvi izvod nad zatvorenim intervalom $[\alpha, \beta]$,

b) funkcija $\varphi(t)$ je monotono rastuća nad zatvorenim intervalom $[\alpha, \beta]$,

c) funkcija $\psi(t)$ je neprekidna nad zatvorenim intervalom $[\alpha, \beta]$,

d) $\psi(t) \geq 0$ za svako $t \in [\alpha, \beta]$.

Tada je

$$P = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt, \quad \text{tj.} \quad P = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y \cdot x_t' dt.$$

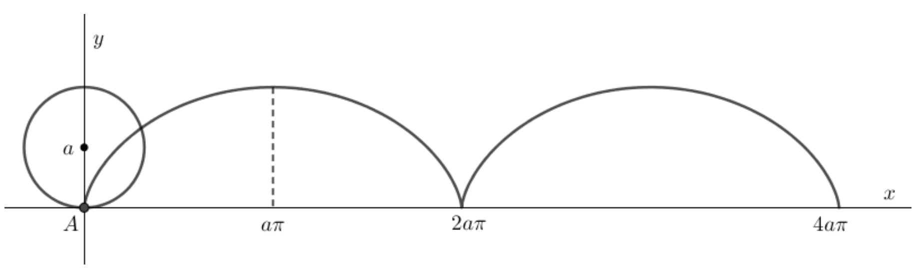
Ako parametarski zadata funkcija zadovoljava uslove *a*), *c*) i *d*) i $\varphi(t)$ je monotono opadajuća nad zatvorenim intervalom $[\alpha, \beta]$, tada je

$$P = -\int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt = \int\limits_{\beta}^{\alpha} \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Zadatak 1.2. Naći površinu ograničenu x-osom i jednim lukom cikloide

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ a > 0.$$

Rešenje. Cikloida je kriva koja opisuje kretanje tačke na kružnici dok se kružnica kreće (kotrlja) po pravoj liniji. Tako da ako uzmemo da je $t = 0$ dobijamo početnu tačku $(0, 0)$. Treba nam još jedna tačka za koju važi $y = 0$ i vidimo da je sledeća takva $(2a\pi, 0)$ za $t = 2\pi$. Ako želimo da nacrtamo cikloidu možemo ponovo za par vrednosti parametra t da nađemo koje vrednosti uzimaju x i y.



Kako treba izračunati površinu između jednog luka cikloide i x-ose i kako je $x'(t) = a - a\cos t = a(1 - \cos t)$ dobijamo da je površina

$$
\begin{aligned}
P &= \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt\\
&= a^2\int_0^{2\pi} d\varphi - 2a^2\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi + \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi\\
&= a^2\Big|_0^{2\pi} - 2a^2\sin\varphi\Big|_0^{2\pi} + \frac{a^2}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{2\pi} = 2a^2\pi + a^2\pi = 3a^2\pi.
\end{aligned}
$$

1.1. Dužina luka krive

- Pravougli koordinatni sistem

Pretpostavimo da je u ravni definisana kriva sa $y = f(x),\ a \leq x \leq b$, gde funkcija $f(x)$ ima neprekidan prvi izvod $f'(x)$ nad zatvorenim intervalom $[a, b]$. Dužina luka krive $y = f(x)$ nad zatvorenim intervalom $[a, b]$ je

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Zadatak 1.3. Naći dužinu luka krive $y^2 - 2\ln y - 4x = 0$ od $x = \frac{1}{4}$ do $x = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{2}$.

Rešenje. Pošto je teško ovu krivu izraziti kao $y = y(x)$, izrazićemo je kao $x = x(y)$, tj. $x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln y}{2}$. Znači, x i y će zameniti uloge. Treba nam i $x' = \frac{y}{2} - \frac{1}{2y} = \frac{y^2-1}{2y}$.

Za $x = \frac{1}{4}$ imamo $y^2 - 2\ln y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1$.

Za $x = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{2}$ imamo $y^2 - 2\ln y = e^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad y = e$.

Kako iz izvoda inverzne fukcije znamo $y' = \frac{1}{x'}$ sledi $dx = x'dy$ odnosno $\sqrt{1 + (y')^2}dx = \sqrt{1 + \frac{1}{(x')^2}}\, x'dy = \sqrt{1 + (x')^2}dy$. Vidimo da, ako x i y zamene uloge, nova formula za dužinu luka je veoma slična početnoj. Konačno, dužina luka jednaka je

$$\begin{aligned} l &= \int_1^e \sqrt{1 + (x')^2}dy = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{y^2 - 1}{2y}\right)^2}dy = \int_1^e \sqrt{\frac{4y^2 + y^4 - 2y^2 + 1}{4y^2}} \\ &= \int_1^e \sqrt{\frac{(y^2 + 1)^2}{(2y)^2}}dy = \int_1^e \frac{y^2 + 1}{2y}dy = \frac{1}{2}\int_1^e ydy + \frac{1}{2}\int_1^e \frac{dy}{y} \\ &= \frac{1}{4}y^2\Big|_1^e + \frac{1}{2}\ln|y|\Big|_1^e = \frac{1}{4}(e^2 - 1) + \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{e^2 + 1}{4}. \end{aligned}$$

Voditi računa da je $\sqrt{a^2} = |a|$, ali za $y \in [1, e]$ imamo da je $\frac{y^2+1}{2y}$ pozitivno pa možemo skratiti kvadrat i koren.

- Polarni koordinatni sistem

Ako je $\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$, jednačina krive u polarnom koordinatnom sistemu, gde funkcija $\rho = \rho(\varphi)$ ima neprekidan prvi izvod nad intervalom $[\alpha, \beta]$ tada je

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\; d\varphi.$$

Zadatak 1.4. Naći dužinu luka kardiode $\rho = a(1 + \cos\varphi),\ a > 0$.

Rešenje. Kako je $\rho' = -a\sin\varphi$ imamo

$$\begin{aligned}\rho^2 + (\rho')^2 &= a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi = a^2(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\\ &= 2a^2(1+\cos\varphi) = 4a^2\frac{1+\cos\varphi}{2} = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}.\end{aligned}$$

Izračunaćemo dužinu samo gornje polovine kardioide i pomnožiti je sa 2. Za $\varphi \in [0, \pi]$ važi $\cos\frac{\varphi}{2} \geq 0$, pa je

$$\begin{aligned}l &= 2\int_0^\pi \sqrt{4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi = 2\int_0^\pi 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi\\ &= 4a\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 8a(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) = 8a.\end{aligned}$$

- Parametarski oblik

Ako je kriva $y = f(x)$ data u parametarskom obliku $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ gde za funkcije $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $\psi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ važi: φ i ψ imaju neprekidne izvode nad zatvorenim intervalom $[\alpha, \beta]$ i pri tome $\varphi'(t) > 0$. Tada je

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \frac{(\psi'(t))^2}{(\varphi'(t))^2}} \varphi'(t) dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} dt$$

Zadatak 1.5. Naći dužinu luka cikloide $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), a > 0$

Rešenje. Kako je $x_t' = a(1 - \cos t)$, $y_t' = a \sin t$, dobijamo da je

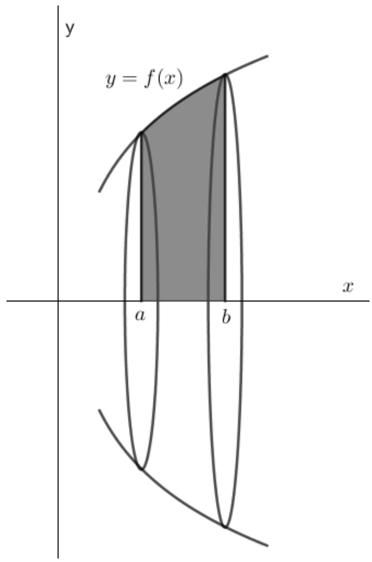
$$\begin{aligned}(x_t')^2 + (y_t')^2 &= a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = a^2 - 2a^2 \cos t + a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) \\ &= 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \frac{1 - \cos t}{2} = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2},\end{aligned}$$

tj. $\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = 2a \sin \frac{t}{2}$. Dakle, dužina luka cikloide je

$$l = \int\limits_{0}^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -4a(-1 - 1) = 8a.$$

1.2. Zapremina obrtnih tela

- Pravougli koordinatni sistem



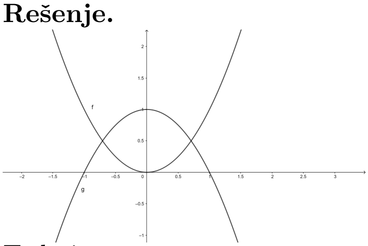
Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna nad intervalom $[a, b]$. Ako je krivolinijski trapez, čije stranice su interval $[a, b]$, delovi pravih $x = a$ i $x = b$ i kriva $y = f(x), a \leq x \leq b$, obrće oko x-ose, dobija se obrtno telo.

Zapremina tela dobijenog obrtanjem krive $y = f(x)$ oko x-ose nad zatvorenim intervalom $[a, b]$ je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Zadatak 1.6. Naći zapreminu tela koje nastaje obrtanjem oko x-ose površi između krivih $f(x) = x^2$ i $g(x) = 1 - x^2$.

Rešenje.



Neka je V_1 zapremina koja nastaje obrtanjem funkcije $f(x)$ oko x-ose, a V_2 zapremina koja nastaje obrtanjem funkcije $g(x)$ oko x-ose.

Tada je

$$V_1 = \pi \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{5}(\frac{4\sqrt{2}}{32} + \frac{4\sqrt{2}}{32}) = \frac{\pi}{5}\frac{8\sqrt{2}}{32} = \frac{\pi\sqrt{2}}{20}.$$

$$V_2 = \pi \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - x^2)^2 dx = \pi \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2x^2 + x^4)dx = \pi\Big(x\Big|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2\frac{x^3}{3}\Big|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{x^5}{5}\Big|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Big)$$

$$= \pi\Big((\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) - \frac{2}{3}(\frac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{2\sqrt{2}}{8}) + \frac{1}{5}(\frac{4\sqrt{2}}{32} + \frac{4\sqrt{2}}{32})\Big) = \pi(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{20})$$

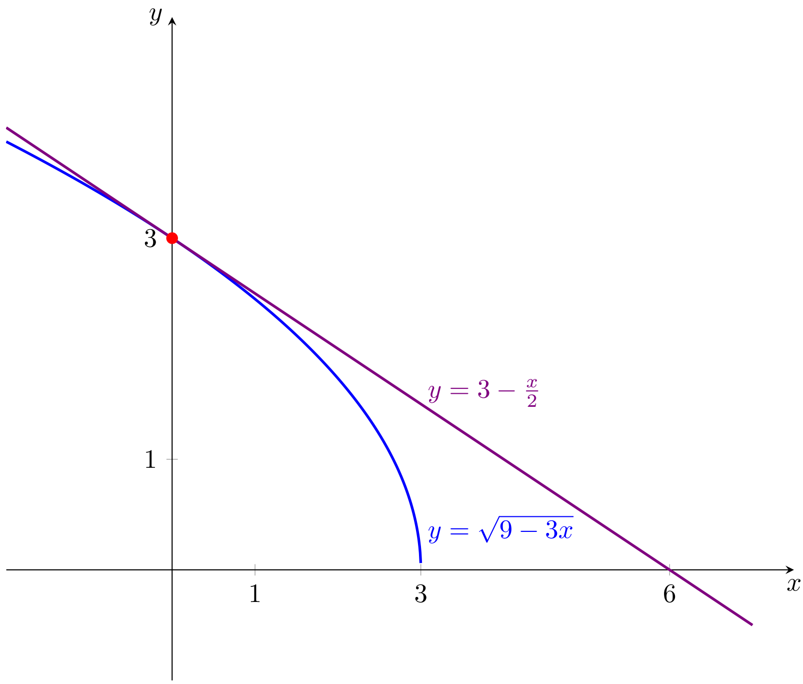
Tražena zapremina iznosi:

$$V = V_2 - V_1 = \pi\sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Zadatak 1.7. Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom figure određene parabolom $y^2 = 9 - 3x$, tangentom na parabolu u tački $A(0,3)$ i $x-$osom oko $x-$ose.

Rešenje. Potrebno je izračunati prvi izvod funkcije $y = \sqrt{9-3x}$ i odrediti tangetu na funkciju u tački A po formuli $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Lako se dobija: $y' = \frac{-3}{2\sqrt{9-3x}}$ i $y'(0) = -\frac{1}{2}$, što koristimo da formiramo jednačinu tangente

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3.$$



Na osnovu grafika funkcije zapremina je

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^6 (-\frac{1}{2}x + 3)^2\, dx - \pi \int_0^3 (9 - 3x)\, dx \\ &= \pi \frac{x^3}{12}\bigg|_0^6 - \pi \frac{3}{2}x^2\bigg|_0^6 + 9\pi x\bigg|_0^6 - \pi(9x0\frac{3}{2}x^2)\bigg|_0^3 \\ &= \pi(18 - 54 + 54) - \pi(27 - \frac{27}{2}) = \frac{9}{2}\pi. \end{aligned}$$

- Polarni koodinatni sistem

Posmatramo figuru F u polarnom kordinatnom sistemu. Neka je funkcije $\rho = \rho(\varphi)$ nenegativna i neka ima neprekidan prvi izvod nad zatvorenim intervalom $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$. Treba naći zapreminu tela nastalog obrtanjem figure F oko polarne ose. Zapremina obrnog tela je

$$V = \frac{2\pi}{3} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \sin\varphi d\varphi.$$

Zadatak 1.8. Naći zapreminu tela nastalog obrtanjem kardioide oko polarne ose.
Rešenje.

$$V = \frac{2\pi}{3} \int\limits_{0}^{\pi} a^3(1+\cos\varphi)^3 \sin\varphi d\varphi = -\frac{2}{3}\pi a \frac{(1+\cos\varphi)^4}{4}\Big|_0^{\pi} = \frac{8a^3\pi}{3}$$

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[5] Neboja Ralević, Tijana Ostojić, Manojlo Vuković, Aleksandar Janjoš. *Praktikum iz Matematike analize I.* FTN Izdavatvo, Novi Sad, 2021.