Инжењерство информационих система

Колоквијум I

1. На колико начина се 20 јабука може поделити на четворо деце, ако свако дете треба да добије бар две јабуке?
2. Нека је дат ненегативан цео број $n \geq 2$. Доказати да важи
$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}.$$
3. У једној групи у забавишту има пет дечака. Васпитачица је једног дана сваком од дечака дала по једну играчку и то: тркачки аутомобил, камион, багер, ватрогасни камион и полицијски аутомобил. Одредити на колико начина васпитачица наредног дана може поделити дечацима играчке, ако ниједно дете није добило играчку са којом се играло претходног дана.
4. Решити рекурентну релацију $a_n = 3a_{n-1} + 2$, за $n \geq 1$, ако је познато да је први члан низа $a_0 = 1$.

Колоквијум II

1. На пријему у амбасади гости су се руковали приликом поздрава. Доказати да је број људи који су се руковали непаран број пута на пријему паран.
2. Нека је G стабло у ком сви невисећи чворови имају степен 4. Ако је k број невисећих чворова, доказати да тада граф G има $2k + 2$ висећих чворова.
3. Испитати да ли је комлетан бипартитан граф $K_{4,6}$

   а) Ојлеров;

   б) Хамилтонов.

   Одговоре образложити!
4. Нека је G повезан планаран граф са 20 чворова. Ако граф G има седам висећих чворова, доказати да је тада број грана графа G највише 40.

1. На колико начина се 20 јабука може поделити на четворо деце, ако свако дете треба да добије бар две јабуке?

Посматрајмо једначину $x_1+x_2+x_3+x_4=20$, ако је $x_i \geqslant 2$, $i=1,2,3,4$.

Уводимо смену $y_i = x_i - 2 \geqslant 0$, $i=1,2,3,4$

Добијамо нову једначину $y_1+y_2+y_3+y_4=20-4\cdot 2=12$

Број решења нове једначине у скупу ненегативних целих бројева је $\binom{12+3}{3}=\binom{15}{3}$

2. Нека је дат ненегативан цео број $n \geq 2$. Доказати да важи

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

Користимо Паскалов идентитет

$$\binom{n+1}{3} = \binom{n}{3} + \binom{n}{2} = \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{2} + \binom{n}{2} = \binom{n-2}{3} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-1}{2} + \binom{n}{2} = \ldots = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \ldots + \binom{n-1}{2} + \binom{n}{2}$$

$$= \binom{3}{3} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \ldots + \binom{n-1}{2} + \binom{n}{2} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \ldots + \binom{n-1}{2} + \binom{n}{2}$$

Користимо $\binom{3}{3} = 1 = \binom{2}{2}$

$\underline{\text{II}}$ начин: Индукцијом по $n \geq 2$

Б.И. $n=2$

$$\binom{2}{2} = 1 = \binom{2+1}{3}$$

И.Х. Претпоставимо да за $n=k$ важи тврђење

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{k}{2} = \binom{k+1}{3}$$

И.К. Докажимо тврђење за $n=k+1$

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{k}{2} + \binom{k+1}{2} \overset{\text{и.х.}}{=} \binom{k+1}{3} + \binom{k+1}{2} \overset{\text{п.и.}}{=} \binom{k+2}{3}$$

3. У једној групи у забавишту има пет дечака. Васпитачица је једног дана сваком од дечака дала по једну играчку и то: тркачки аутомобил, камион, багер, ватрогасни камион и полицијски аутомобил. Одредити на колико начина васпитачица наредног дана може поделити дечацима играчке, ако ниједно дете није добило играчку са којом се играло претходног дана.

$N = 5!$ број начина да дечаци добију играчке

Означимо

S_i : i-то дете је добило играчку са којом се јуче играло

$$N(S_1'S_2'S_3'S_4'S_5') = N - \binom{5}{1}N(1) + \binom{5}{2}N(2) - \binom{5}{3}N(3) + \binom{5}{4}N(4) - \binom{5}{5}N(5)$$

$$= 5! - \binom{5}{1}4! + \binom{5}{2}3! - \binom{5}{3}2! + \binom{5}{4}1! - \binom{5}{5}N(5)$$

Како је $\binom{n}{i}(n-i)! = \frac{n!}{i!\cancel{(n-i)!}}\cdot\cancel{(n-i)!} = \frac{n!}{i!}$, решење можемо записати и као $5!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)$

$N(1) = 4!$

Ако је неко дете добило играчку од јуче, преостала деца могу добити играчке на $4!$ начина

Аналогно:

$N(2) = 3!$, $N(3) = 2!$, $\underline{N(4) = 1!}$

$N(5) = 1!$

ако су 4 дечака добила исту играчку као јуче, онда је и пети дечак добио своју играчку

4. Решити рекурентну релацију $a_n = 3a_{n-1} + 2$, за $n \geq 1$, ако је познато да је први члан низа $a_0 = 1$.

Нехомогена р.р.

хомогени део: $a_n^{(h)} = 3a_{n-1}^{(h)}$ $\qquad a_n^{(h)} = A\cdot 3^n$

карактеристична једначина $t-3=0$

једно партикуларно решење: $a_n^{(p)} = B$ $\qquad (B\cdot 1^n)$

$B = 3B+2 \Rightarrow B=-1$

$a_n^{(p)} = -1$

$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$

$a_0 = a_0^{(h)} + a_0^{(p)} = A\cdot 3^0 - 1$

$A-1=1$

$A=2$

решење: $a_n = 2\cdot 3^n - 1$

1. На пријему у амбасади гости су се руковали приликом поздрава. Доказати да је број људи који су се руковали непаран број пута на пријему паран.

Конструишемо граф G на следећи начин:

- чворови представљају људе
- два чвора су повезана граном уколико су се одговарајући људи руковали

Како је у сваком графу број чворова непарног степена паран, тврђење следи

2. Нека је G стабло у ком сви невисећи чворови имају степен 4. Ако је k број невисећих чворова, доказати да тада граф G има $2k+2$ висећих чворова.

Нека је $|V(G)|=n$

Означимо са n_1 број висећих чворова

$n = n_1 + k$

G стабло: $e = n-1 = n_1 + k - 1$

Основна теорема: $2e = \sum_{v\in V} d(v) = n_1 \cdot 1 + k \cdot 4$

$2n_1 + 2k - 2 = n_1 + 4k$

$n_1 = 4k - 2k + 2$

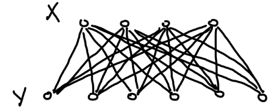
$n_1 = 2k + 2$

3. Испитати да ли је комлетан бипартитан граф $K_{4,6}$

а) Ојлеров;

б) Хамилтонов.

Одговоре образложити!



Нека је $V(K_{4,6}) = X \cup Y$, $|X| = 4$, $|Y| = 6$

а) Важи

$x \in X \quad d(x) = 6$

$y \in X \quad d(y) = 4$

Граф $K_{4,6}$ је повезан граф и сви чворови имају паран степен

$\Rightarrow K_{4,6}$ је Ојлеров граф

б) Уколико уклонимо све чворове скупа X, остају нам чворови скупа Y који су сада изоловани

Уклонили смо 4 чвора, а добили 6 компоненти повезаности

$\Rightarrow K_{4,6}$ није Хамилтонов граф

4. Нека је G повезан планаран граф са 20 чворова. Ако граф G има седам висећих чворова, доказати да је тада број грана графа G највише 40.

$n = |V(G)| = 20$

Означимо са V_1 скуп висећих чворова графа G

Посматрајмо граф $G' = G - V_1$ који је такође планаран граф

$n' = |V(G')| = 20 - 7 = 13$

Сада је $e' = |E(G')| \leq 3n' - 6 = 3 \cdot 13 - 6 = 33$

Добијамо $e = e' + 7 \leq 33 + 7 = 40$