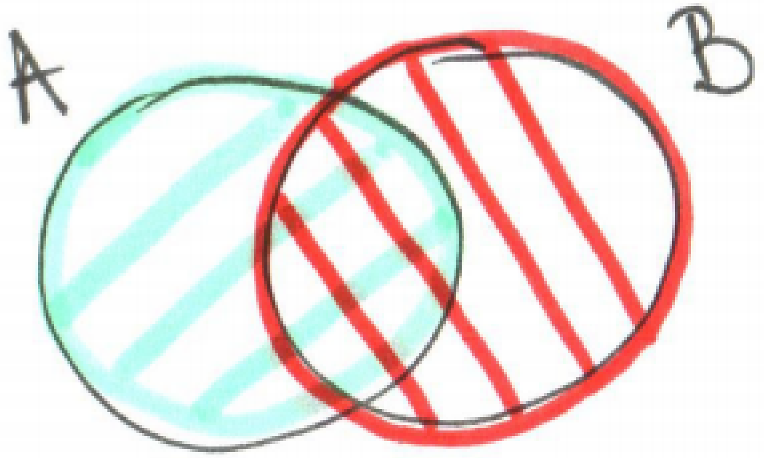
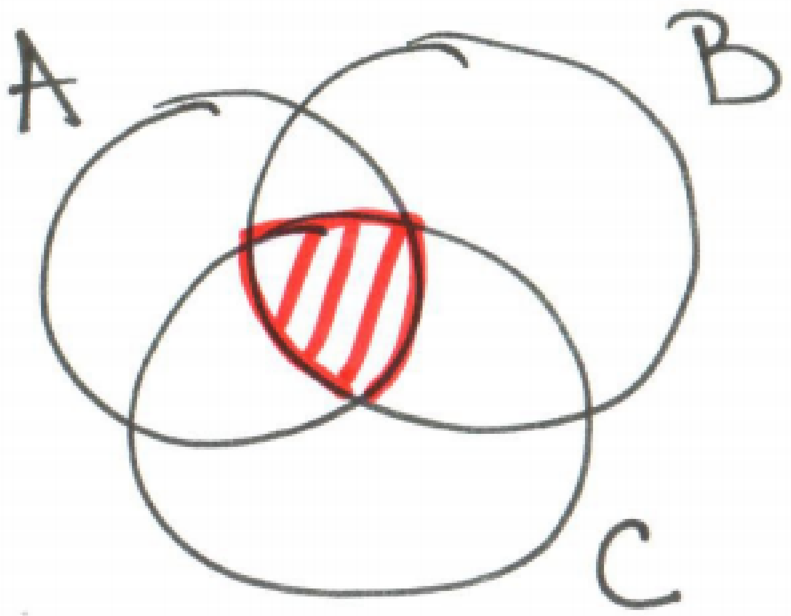
ВЕЖБЕ 5

ПРИНЦИП УКЉУЧЕЊА И ИСКЉУЧЕЊА

$A \cap B = \emptyset \qquad |A \cup B| = |A| + |B|$ принцип збира





$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| = {} & |A|^{+1} + |B|^{+1} + |C|^{+1} \\ & - |A \cap B|^{-1} - |A \cap C|^{-1} - |B \cap C|^{-1} \\ & + |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = {} & |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_1 \cap A_n| - |A_2 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-1} \cap A_n| \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots \\ & - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| - \ldots \\ & \vdots \\ & (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n|\end{aligned}$$

1. У разреду има 30 ученика. Оцену 5 из математике има њих 15, из физике 13, из хемије 12, из математике и физике 8, из физике и хемије 6, из хемије и математике 7, и из сва 3 предмета 3 ученика.

а) Колико ученика нема петицу ни из једног од свих предмета?

A_1 - 5 из М
A_2 - 5 из Ф
A_3 - 5 из Х

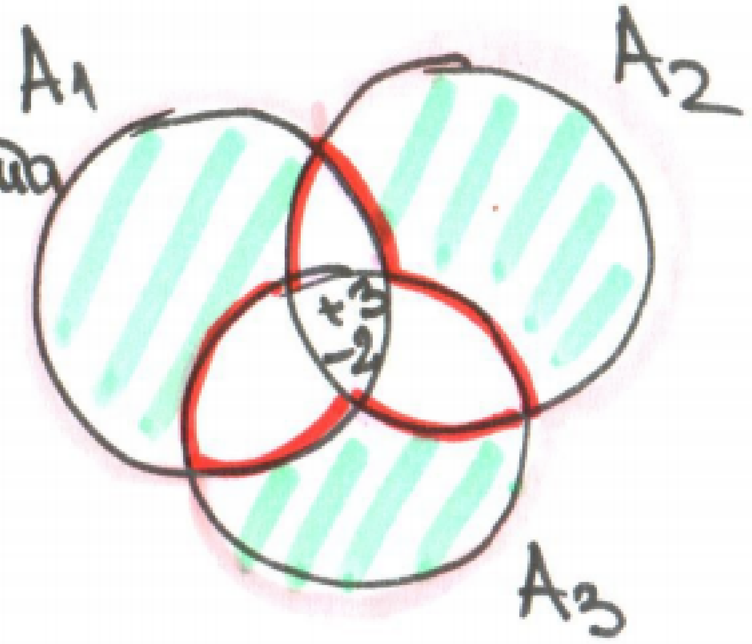
Од свих ученика одузмемо оне који имају 5 из БАР ЈЕДНОГ од сва 3 предмета

$30 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$
$$= 15 + 13 + 12 - 8 - 7 - 6 + 3 = 22$$

$30 - 22 = 8$ ученика немају 5 ни из једног предмета б) Колико ученика има петицу из тачно једног предмета?

Од свих ученика који имају 5 из бар ЈЕДНОГ предмета одузмемо оне који имају 5 из бар ДВА предмета



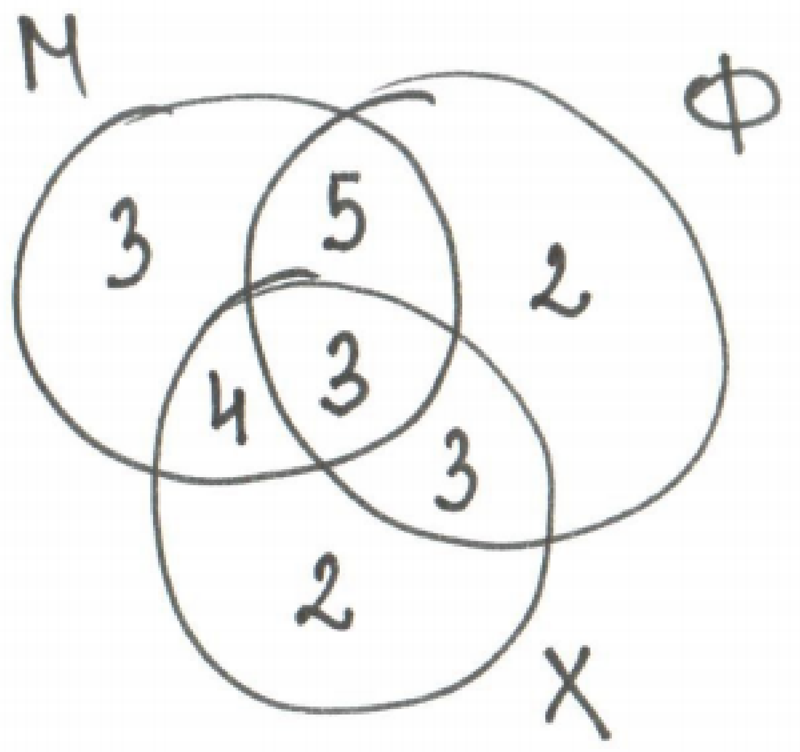
$$|A_1\cup A_2\cup A_3| - |(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3)\cup(A_2\cap A_3)| =$$

$$22 - (|A_1\cap A_2| + |A_1\cap A_3| + |A_2\cap A_3| - 2|A_1\cap A_2\cap A_3|) =$$

$$22 - 8 - 7 - 6 + 2\cdot 3 = 7$$

<u>II</u> начин: Венови дијаграми

М:15	МФ:8
Ф:13	ФХ:6
Х:12	ХМ:7
	МФХ: 3



а) $3+5+2+4+3+3+2=22$

б) $3+2+2=7$

2. Колико има природних бројева од 1 до 1000 који нису дељиви ни са 2, ни са 3, ни са 5?

A - бројеви од 1 до 1000

A_2 - дељиви са 2

A_3 - дељиви са 3

A_5 - дељиви са 5

$$|A| - |A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 1000 - 734 = 266$$

$$\begin{aligned}|A_2 \cup A_3 \cup A_5| &= |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| \\ &= \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor \\ &= 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 \\ &= 734\end{aligned}$$

3. Колико има целих бројева од 1 до 1000 који су дељиви са 3, а нису дељиви ни са 5, ни са 7? (домаћи)

4. Колико има пермутација цифара 1,2,3,...,9 у којима цифра 1 није на првом, а цифра 9 није на последњем месту?

S – све пермутације скупа $\{1,2,\dots,9\}$ $\qquad N = 9!$

S_1 – 1 на првом месту $\qquad N(S_i) \qquad S_1'$

S_9 – 9 на последњем месту $\qquad S_9'$

$$N(S_1'S_9') = N - N(S_1 \cup S_9) = 9! - (N(S_1) + N(S_9) - N(S_1S_9))$$

$$= 9! - N(S_1) - N(S_9) + N(S_1S_9)$$

$$= 9! - 8! - 8! + 7!$$

$N(S_1) = 8!$ $\qquad N(S_9) = 8!$

$1\,\boxed{\qquad\qquad}\ 8!$ $\qquad \underbrace{\boxed{\qquad\qquad}}_{8!}\,9$

$N(S_1S_9) = 7!$

$1\,\underbrace{\boxed{\qquad\qquad}}_{7!}\,9$

5. Одредити број пермутација цифара $1,2,3,\dots,9$ у којима је бар једна од цифара $1,2,3,4$ „на свом месту".

S - све пермутације

S_1 - 1 на 1. месту

S_2 - 2 на 2. месту

S_3 - 3 на 3. месту

S_4 - 4 на 4. месту

$N(S_1) = 8! = N(S_2) = N(S_3) = N(S_4) = N(1)$

$N(S_1S_2) = 7! = N(S_1S_3) = \dots = N(S_3S_4) = N(2)$

$N(S_1S_2S_3) = 6! = \dots = N(S_2S_3S_4) = N(3)$

$N(S_1S_2S_3S_4) = 5! = N(4)$

$$
\begin{aligned}
N(S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4) &= N(S_1) + N(S_2) + N(S_3) + N(S_4) \\
&\quad - N(S_1S_2) - N(S_1S_3) - \dots - N(S_3S_4) \\
&\quad + N(S_1S_2S_3) + \dots + N(S_2S_3S_4) \\
&\quad - N(S_1S_2S_3S_4) \\
&= 4N(1) - 6 \cdot N(2) + 4 \cdot N(3) - N(4) \\
&= \binom{4}{1} N(1) - \binom{4}{2} N(2) + \binom{4}{3} N(3) - \binom{4}{4} N(4) \\
&= \binom{4}{1} 8! - \binom{4}{2} 7! + \binom{4}{3} 6! - \binom{4}{4} 5!
\end{aligned}
$$

6. Наћи број пермутација цифара 1, 2, 3, ..., 8 у којима 2 није непосредно иза 1, 3 није непосредно иза 2, ..., 8 није непосредно иза 7.

S – све пермутације

S_1 – $\boxed{12}$

S_2 – $\boxed{23}$

S_3 – $\boxed{34}$

⋮

S_7 – $\boxed{78}$

$$N(S_1'S_2'\dots S_7') = N - \binom{7}{1}N(1) + \binom{7}{2}N(2) - \binom{7}{3}N(3) + \binom{7}{4}N(4) - \binom{7}{5}N(5) + \binom{7}{6}N(6) - N(7)$$
$$= 8! - \binom{7}{1}7! + \binom{7}{2}6! - \binom{7}{3}5! + \binom{7}{4}4! - \binom{7}{5}3! + \binom{7}{6}2! - 1!$$

$N(S_1) = 7! = N(1)$

$\underbrace{\boxed{12}, 3, 4, 5, 6, 7, 8}_{7!}$

$N(S_1S_3) = 6!$

$\underbrace{\boxed{12}, \boxed{34}, 5, 6, 7, 8}_{6!}$

$N(S_1S_2) = 6!$

$\underbrace{\boxed{1\boxed{2}3}, 4, 5, 6, 7, 8}_{6!}$

$N(2) = 6!$

$N(3) = 5!$

$N(4) = 4!$

$N(5) = 3!$

$N(6) = 2!$

$N(7) = 1!$

7. Колико има n-цифрених природних бројева код којих је збир цифара

а) 9

$a_1 a_2 a_3 \dots a_n \quad a_i \in \{0,1,\dots,9\}$

$a_1+a_2+a_3+\dots+a_n=9 \ (*) \quad N=\binom{9+n-1}{9}$

S – скуп свих решења једначине (*)

S_1 – сва решења ј-не код којих је $a_1=0$

$N(S_1')=N-N(S_1)=\binom{9+n-1}{9}-\binom{9+n-2}{9}$

$N(S_1)=\binom{9+(n-1)-1}{9}$

$a_1=0$

$a_2+a_3+\dots+a_n=9$

б) $\sum a_i = 10$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 10$

S - сва решења ј-не $\quad N = \binom{10+n-1}{10}$

$S_1: a_1 = 0$

$S_2: \exists_i \; a_i = 10$

$N(S_1) = \binom{10+n-2}{10}$

$a_1 = 0 \quad a_2 + \ldots + a_n = 10$

$N(S_2) = n$

$\exists_i \; a_i = 10 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$

$$N(S_1' S_2') = N - N(S_1) - N(S_2) + N(S_1 S_2) = \binom{10+n-1}{10} - \binom{10+n-2}{10} - n + (n-1)$$

$N(S_1 S_2) = n-1$

$a_1 = 0 \qquad a_2 + \ldots + a_n = 10$

$\exists_i \; a_i = 10 \qquad i = 2, 3, \ldots, n$

б) $\sum a_i = 11$

$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 11$

S - сва решења $\quad N = \binom{11+n-1}{11}$

$S_1: a_1 = 0$

$S_2: \exists_i \; a_i = 11$

$S_3: \exists_{i,j} \; a_i = 10, a_j = 1$

$N(S_1) = \binom{11+n-2}{11}$

$N(S_2) = n$

$N(S_3) = n \cdot (n-1)$

$N(S_1S_2) = n-1$

$N(S_1S_3) = (n-1)(n-2)$

$N(S_2S_3) = 0$

$N(S_1S_2S_3) = 0$

$$N(S_1'S_2'S_3') = N - N(S_1) - N(S_2) - N(S_3) + N(S_1S_2) + N(S_1S_3) + N(S_2S_3) - N(S_1S_2S_3)$$

$$= \binom{11+n-1}{11} - \binom{11+n-2}{11} - n - n(n-1) + (n-1) + (n-1)(n-2) + 0 - 0$$

8. На колико начина се у врсту могу поређати 3 Енглеза, 3 Француза и 3 Немца, тако да никоја 3 сународника не стоје заједно?

S – све пермутације скупа од 9 људи $\quad N = 9!$

S_1 : EEE

S_2 : ФФФ

S_3 : HHH

$$N(S_1'S_2'S_3') = N - 3N(1) + 3N(2) - N(3)$$
$$= 9! - 3\cdot 3!7! + 3\cdot 3!3!5! - 3!3!3!3!$$

$N(S_1) = 3!\,7! = N(1)$

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{EEE}}^{3!},\square,\square,\square,\square,\square,\square}_{7!}$$

$N(S_1S_2) = N(2) = 3!\,3!\,5!$

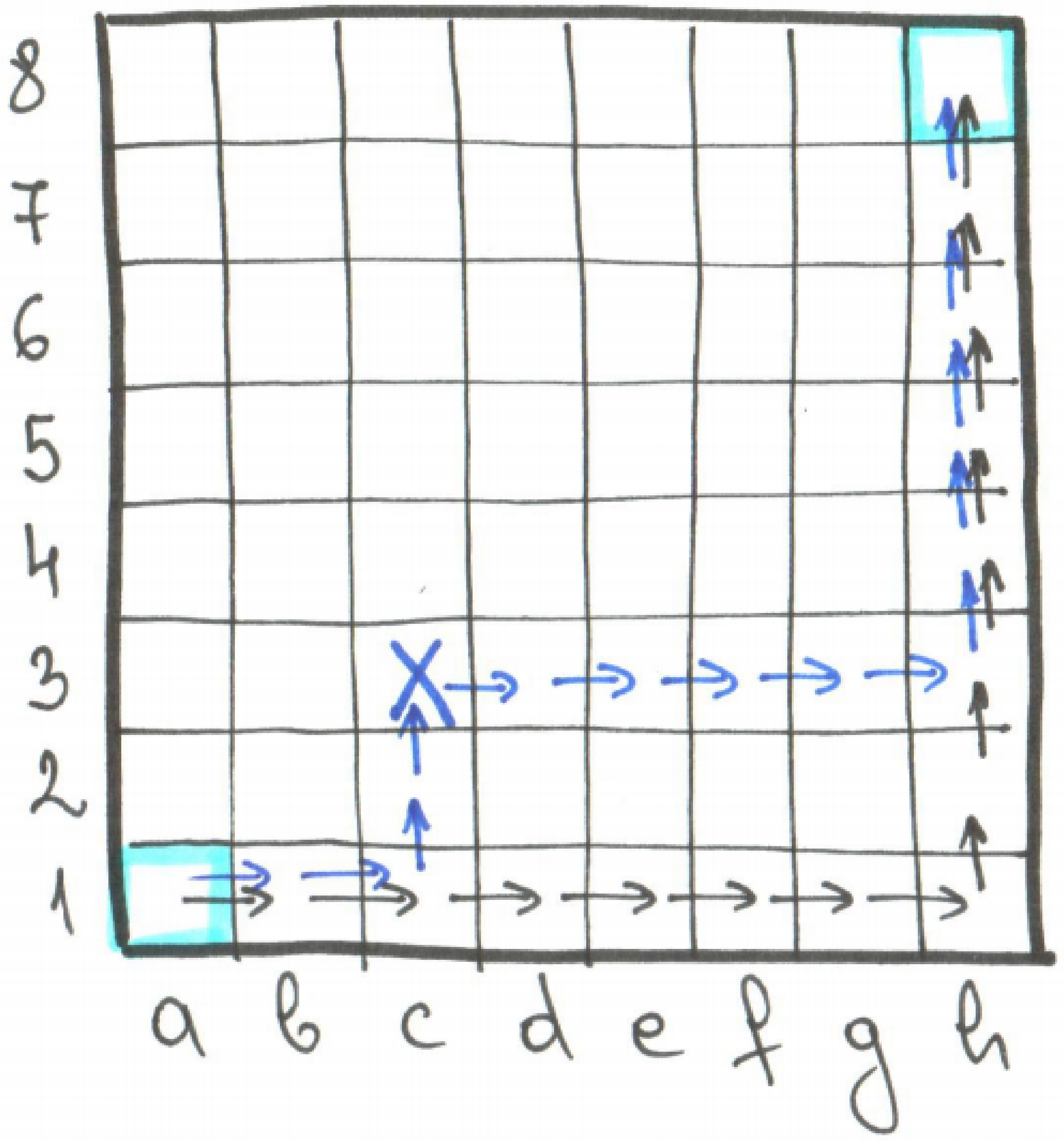
$$\underbrace{\overbrace{\boxed{}}^{3!},\overbrace{\boxed{}}^{3!},\square,\square,\square}_{5!}$$

$N(3) = (3!)^4$

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{}}^{3!},\overbrace{\boxed{}}^{3!},\overbrace{\boxed{}}^{3!}}_{3!}$$

9. Колико има најкраћих путева које топ може прећи крећући се по шаховској табли од поља a1 до поља h8 ако

a) не сме да пређе преко c3



дозвољени потези: $\rightarrow, \uparrow$

$7 \rightarrow, 7 \uparrow \Rightarrow$ укупно 14 корака

$N = \binom{14}{7}$ Када одаберемо 7 корака $\rightarrow$, онда су кораци $\uparrow$ јединствено одређени

S_1 – најкраћи пут води преко поља c3

$$N(S_1') = N - N(S_1) = \binom{14}{7} - \binom{4}{2}\binom{10}{5}$$

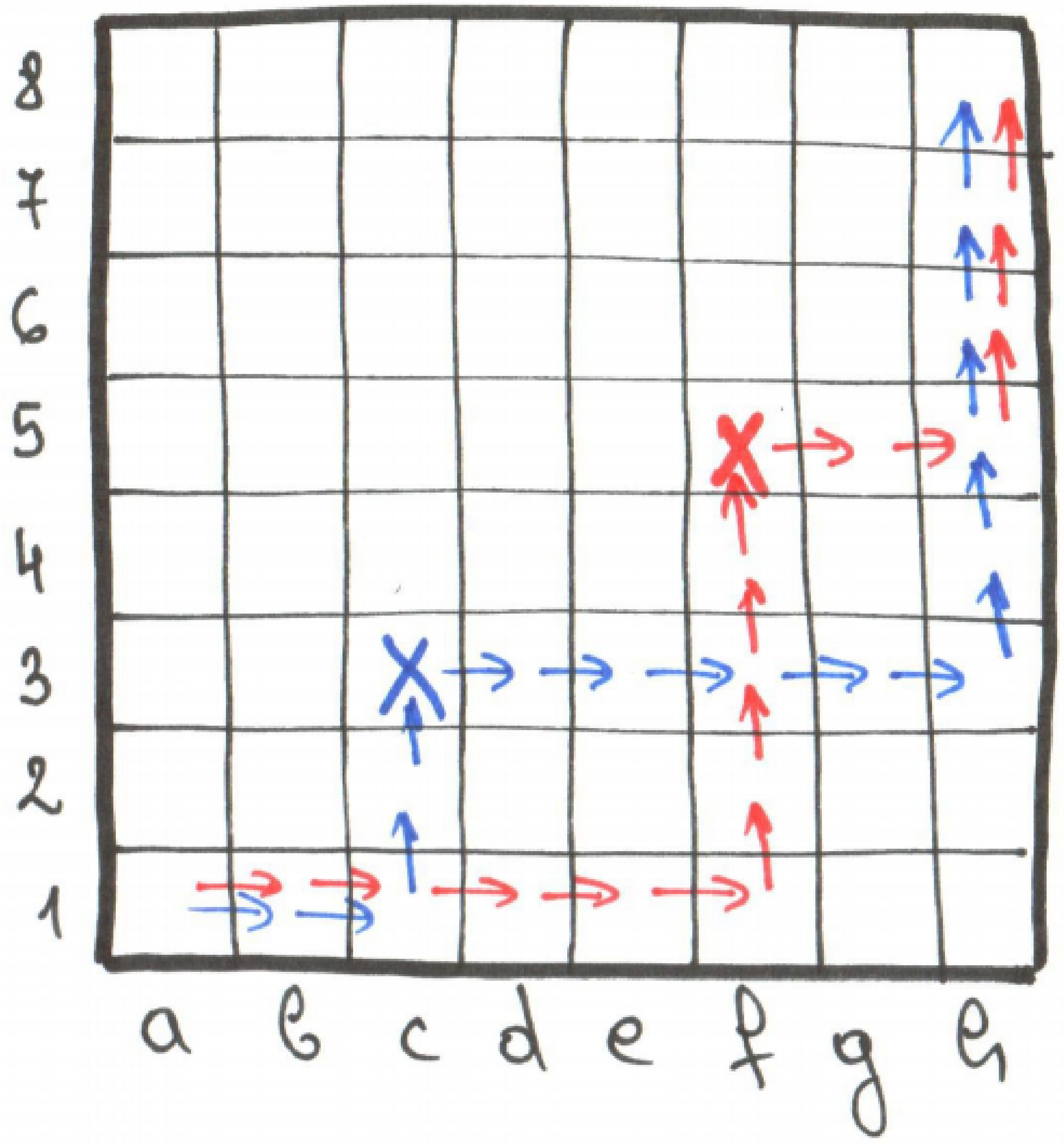
$$\left.\begin{array}{lll} a1-c3: & 2\rightarrow, 2\uparrow & \binom{4}{2} \\ c3-h8: & 5\rightarrow, 5\uparrow & \binom{10}{5} \end{array}\right\} N(S_1) = \binom{4}{2}\binom{10}{5}$$

б) Не сме да пређе ни преко c3, ни преко f_5

S_1 - најкраћи пут иде преко c3

S_2 - најкраћи путеви који иду преко f5

$$N(S_1'S_2') = N - N(S_1) - N(S_2) + N(S_1S_2)$$
$$= \binom{14}{7} - \binom{4}{2}\binom{10}{5} - \binom{9}{5}\binom{5}{2} + \binom{4}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{2}$$



$$N(S_1) = \binom{4}{2}\binom{10}{5}$$

$$N(S_2) = \binom{9}{5}\binom{5}{2}$$

a1 - f5: $5 \rightarrow, 4 \uparrow$ $\binom{9}{5}$

f5 - h8: $2 \rightarrow, 3 \uparrow$ $\binom{5}{2}$

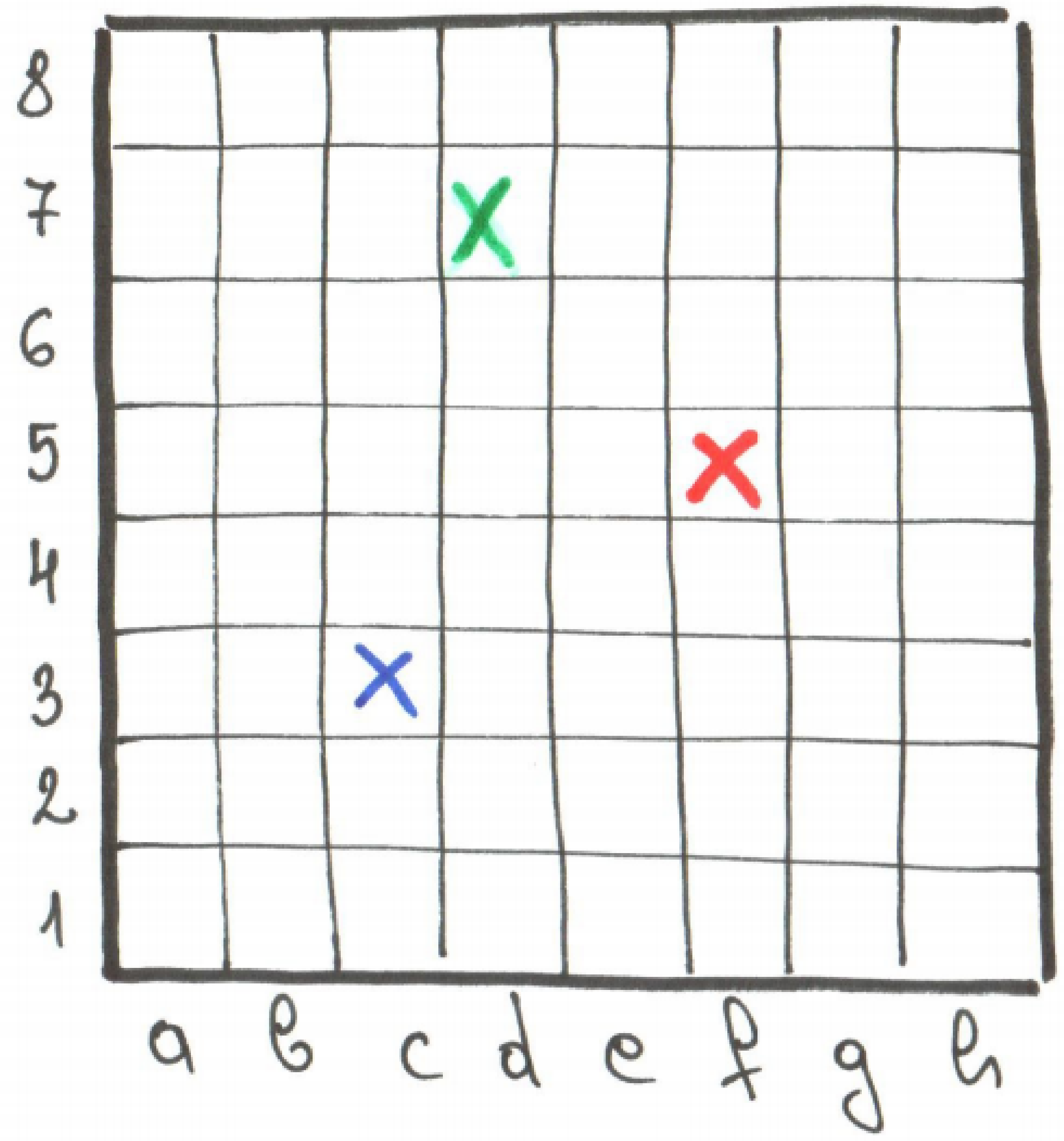
$$N(S_1S_2) = \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{2}$$

a1 - c3: $\binom{4}{2}$

c3 - f5: $3 \rightarrow, 2 \uparrow$ $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$

f5 - h8: $\binom{5}{2}$

в) Не сме да пређе ни преко c3, ни преко d7, ни преко f5



10. Одредити број целобројних решења једначине $x_1+x_2+x_3=15$, ако је

$0\le x_1\le 5$

$0\le x_2\le 6$

$0\le x_3\le 7$

$S_1: x_1\ge 6$

$S_2: x_2\ge 7$

$S_3: x_3\ge 8$

$$N(S_1'S_2'S_3') = N - N(S_1) - N(S_2) - N(S_3)$$
$$+ N(S_1S_2) + N(S_1S_3) + N(S_2S_3) - N(S_1S_2S_3)$$
$$= \binom{17}{2} - \binom{9+2}{2} - \binom{8+2}{2} - \binom{7+2}{2}$$
$$+ \binom{2+2}{2} + \binom{1+2}{2} + \binom{0+2}{2} - 0 = \ldots = 10$$

$x_1+x_2+x_3=15$

$x_i\ge 0$

$$N = \binom{15+3-1}{3-1} = \binom{17}{2}$$

$N(S_1) = \binom{9+2}{2}$

$x_1\ge 6 \quad x_2, x_3\ge 0$

$y_1 = x_1 - 6 \ge 0$

$y_1 + x_2 + x_3 = x_1 - 6 + x_2 + x_3$
$= 15 - 6 = 9$

$N(S_2) = \binom{8+2}{2}$

$x_2\ge 7 \quad x_1, x_3 \ge 0$

$y_2 = x_2 - 7 \ge 0$

$x_1 + y_2 + x_3 = 15 - 7 = 8$

$N(S_1S_2) = \binom{2+2}{2}$

$x_1\ge 6 \quad y_1 = x_1 - 6 \ge 0$

$x_2 \ge 7 \quad y_2 = x_2 - 7 \ge 0$

$x_3 \ge 0$

$y_1 + y_2 + x_3 = 15 - 13 = 2$

II начин: $x_1 + x_2 + x_3 = 15$

трик

$$0 \le x_1 \le 5 \qquad y_1 = 5 - x_1$$
$$0 \le x_2 \le 6 \qquad y_2 = 6 - x_2$$
$$0 \le x_3 \le 7 \qquad y_3 = 7 - x_3$$

$$\boxed{\begin{aligned} &0 \le y_1 \le 5 \\ &0 \le y_2 \le 6 \\ &0 \le y_3 \le 7 \end{aligned}}$$

$$\boxed{y_1 + y_2 + y_3 = 3} \qquad \binom{3+2}{2} = \binom{5}{2} = 10$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = (5 - x_1) + (6 - x_2) + (7 - x_3) = 18 - (x_1 + x_2 + x_3) = 18 - 15 = 3$$

11. Одредити број целобројних решења једначине $x_1+x_2+x_3=15$, ако је

$2 \leq x_1 \leq 5$ $\quad 0 \leq x_1-2 \leq 3$ $\quad y_1 = x_1 - 2$

$0 \leq x_2 \leq 6$ $\quad 0 \leq x_2 \leq 6$ $\quad y_2 = x_2$

$3 \leq x_3 \leq 7$ $\quad 0 \leq x_3-3 \leq 4$ $\quad y_3 = x_3 - 3$

$0 \leq y_1 \leq 3$

$0 \leq y_2 \leq 6$ $\quad y_1+y_2+y_3 = x_1-2+x_2+x_3-3 = 15-5 = 10$

$0 \leq y_3 \leq 4$