VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1. Vežbe IV.2

1.1. Diferencijalne jednačine prvog reda 6–10

1.1.1. Jednačina totalnog diferencijala

Jednačina $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ je jednačina totalnog diferencijala ako postoji funkcija $F(x,y)$ takva da je leva strana jednačine totalni diferencijal funkcije $F(x,y)$, tj. da je

1. $dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, odnosno,
2. $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P(x,y),\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$.

Ako takva funkcija $F(x,y)$ postoji, tada iz $dF(x,y) = 0$, sledi da je $F(x,y) = c$, i to je rešenje ove diferencijalne jednačine u implicitnom obliku. Da bi takva funkcija postojala, u otvorenoj jednostruko povezanoj oblasti G potrebno je i dovoljno da P, Q, P_y, Q_x budu neprekidne, i da važi $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$, $(x,y) \in G$, $(x_0,y_0) \in G$.

Zadatak 1.1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$(y - 3x^2)dx + (x - 4y)dy = 0.$$

Rešenje: Vidimo, $P(x,y) = y - 3x^2$, a $Q(x,y) = x - 4y$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1, \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 1. \end{aligned}\right\} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Sledi da imamo jednačinu totalnog diferencijala, jer su P, Q, P_y, Q_x neprekidne funkcije (jer su polinomi po obe promenljive) na $\mathbb{R}^2$, i $\mathbb{R}^2$ je jednostruko povezana oblast, te postoji funkcija $F(x,y)$, tako da važi $\dfrac{\partial F}{\partial x} = F_x = y - 3x^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = F_y = x - 4y$. Sada imamo,

$$F(x,y) = \int (y - 3x^2)dx = yx - x^3 + \phi(y).$$

Primetimo ovde dve stvari, pre svega da kada integralimo funkciju $y - 3x^2$ po x, promenljivu y posmatramo kao konstantu. Sa druge strane, kada smo rešili integral umesto konstante c kao do sada, dodali smo neku funkciju ϕ koja vidimo zavisi od y. Razlog tome je što funkcija $F(x,y)$ zavisi od dve promenljive, pa kako smo imali integral po x, prirodno je da dodamo funkciju po y, jer je njen izvod po x jednak nuli. Jasno, da smo integralili po y, dodali bismo funkciju po x, tj. $\psi(x)$.

U nastavku koristimo drugi uslov, a to je $F_y = x - 4y$. Tako da važi,

$$\begin{aligned} F_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(yx - x^3 + \phi(y)) = x + \phi'(y) \\ F_y(x,y) &= x - 4y. \end{aligned}$$

Odakle izjednačavanjem desnih strana jednakosti dobijamo,

$$\phi'(y) = -4y \Leftrightarrow \frac{d\phi}{dy} = -4y \Leftrightarrow d\phi = -4ydy \Rightarrow \int d\phi = -\int 4ydy,$$

te je vidimo $\phi(y) = -2y^2 + c$. Konačno, $F(x, y) = yx - x^3 - 2y^2 + c$, pa je krajnje rešenje (u implicitnom obliku) dato sa $-2y^2 + xy - x^3 + c = 0$.

1.1.2. Jednačine koje dopuštaju integracioni množitelj

U prethodnom slučaju uslov od koga smo zavisili bio je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Šta ako on ne važi? Postavlja se pitanje može li se nekako naša jednačina tada "popraviti", pa da ipak imamo jednakost. Drugim rečima, pitamo se da li postoji funkcija $h(x, y) \neq 0$, koju nazivamo integracioni množitelj, tako da jednačina,

$$h(x, y)P(x, y)dx + h(x, y)Q(x, y)dy = 0,$$

bude jednačina totalnog diferencijala.

Zadatak 1.2. Pokazati da diferencijalna jednačina $xdx + ydy + xdy - ydx = 0$ ima integracioni množitelj oblika $h = h(x^2 + y^2)$ i naći njeno opšte rešenje.
Rešenje: Primetimo da je naša jednačina jednaka,

$$(x - y)dx + (x + y)dy = 0.$$

Očito, vidimo da ona nije jednačina totalnog diferencijala. Množenjem jednačine sa nekom funkcijom $h = h(x, y)$ dobijamo,

$$\underbrace{h(x, y)(x - y)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{h(x, y)(x + y)}_{Q(x,y)} dy = 0.$$

Treba da za nove $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ važi $P_y = Q_x$. Kako je $h(x, y) = h(x^2 + y^2)$, sledi da je $h_x = h'(x^2 + y^2)2x$, a $h_y = h'(x^2 + y^2)2y$, te imamo,

$$\begin{aligned} P_y &= h'(x^2 + y^2)2y(x - y) + h(x^2 + y^2)(-1), \\ Q_x &= h'(x^2 + y^2)2x(x + y) + h(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Izjednačimo desne strane ovih jednakosti, jer želimo da naša jednačina bude jednačina totalnog diferencijala.

$$\begin{aligned} 2h'(x^2 + y^2)(xy - y^2) - h(x^2 + y^2) &= 2h'(x^2 + y^2)(xy + x^2) + h(x^2 + y^2) \\ 2(x^2 + y^2)h'(x^2 + y^2) &= -2h(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Uvedimo smenu, $t = x^2 + y^2$, jednostavnosti radi, time dobijamo,

$$th'(t) = -h(t) \Leftrightarrow \frac{dh}{h} = -\frac{dt}{t} \Leftrightarrow \ln|h| = -\ln|t| \Rightarrow h(t) = t^{-1}.$$

Te imamo da je $h(x^2+y^2)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$. Sada naša jednačina dobija oblik,

$$\frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy=0,$$

i mi znamo da je ona sigurno jednačina totalnog diferencijala na svakoj jednostuko povezanoj oblasti koja ne sadrži koordinatni početak ($(x,y)=(0,0)$ je ekvivalentno sa $x^2+y^2=0$). Sledi, postoji funkcija $F(x,y)$ tako da važi,

$$F_x=\frac{x-y}{x^2+y^2} \text{ i } F_y=\frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

Stoga je,

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int\frac{x-y}{x^2+y^2}dx\\
&= \underbrace{\int\frac{x}{x^2+y^2}dx}_{\text{smena } t=x^2+y^2} - y\underbrace{\int\frac{1}{x^2+y^2}dx}_{\text{tablični integral}}\\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-y\frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\phi(y)\\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\phi(y).
\end{aligned}$$

Sa druge strane imamo,

$$\begin{aligned}
F_y &= \frac{y}{x^2+y^2}+\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\frac{x}{y^2}+\phi'(y)\\
F_y &= \frac{x+y}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Kada izjednačimo desne strane, nakon skraćivanja istih funkcija, dobijamo $\phi'(y)=0$, odakle opet sledi da je $\phi(y)=c$.
Najzad, $F(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}+c$, pa je rešenje jednačine (u implicitnom obliku) dato sa,

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+c=0,\ y\neq 0.$$

Treba napomenuti da zbog $y\neq 0$ dobijeno rešenje treba posmatrati na jednostruko povezanim oblastima gornje poluravni $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y>0\}$, ili donje poluravni $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y<0\}$.

1.1.3. Kleroova jednačina

To je jednačina oblika $y = xy' + f(y')$, gde f ima neprekidan drugi izvod razlicit od 0 na nekom intervalu (a, b). Neka je $y' = p$, pri čemu je p funkcija od x. Tada $y = xp + f(p)$, $y' = p + xp' + f'(p)p'$, $p'(x + f'(p)) = 0$. Odavde sledi da je $p' = 0$ ili $x + f(p') = 0$.

1. $p' = 0 \Leftrightarrow p = c \Rightarrow y = cx + f(c)$, i ova familija pravih (koja zavisi od parametra c) je opste resenje Kleroove diferencijalne jednačine.

2. $x + f'(p) = 0 \Leftrightarrow x = -f'(p) \Rightarrow p = g(x) \Rightarrow y = xg(x) + f(g(x))$ je singularno rešenje, koje je obvojnica familije pravih pod 1., tj. tangenta na singularno rešenje u svakoj tački je jedna od pravih iz opšteg rešenja.

Zadatak 1.3. Uvodeći smenu $y = \dfrac{1}{z}$, $z = z(x)$ rešiti jednačinu $(y')^3 - y^4(y + xy') = 0$.

Rešenje: Kako je smena $y = \dfrac{1}{z}$, sledi $y' = -\dfrac{1}{z^2}z'$. Ubacimo ove jednakosti u našu jednačinu,

$$-\frac{1}{z^6}(z')^3 - \frac{1}{z^4}\Big(\frac{1}{z} - \frac{x}{z^2}z'\Big) = 0 \Leftrightarrow -(z')^3 - z + xz' = 0,$$

dobijamo Kleroovu jednačinu,

$$z = xz' - (z')^3.$$

Uvodimo smenu $z' = p$, te dobijamo $z = xp - p^3$, odakle diferenciranjem imamo $z' = p + xp' - 3p^2p'$. Kad skratimo z' i p, dobijamo $p'(x - 3p^2) = 0$.

1. $p' = 0 \Leftrightarrow p = c \Rightarrow z = cx - c^3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{y} = cx - c^3 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{cx - c^3}$, $c \neq 0$.

2. $x - 3p^2 = 0 \Leftrightarrow p^2 = \dfrac{x}{3} \Leftrightarrow p = \pm\sqrt{\dfrac{x}{3}} \Leftrightarrow z = \pm x\sqrt{\dfrac{x}{3}} - \Big(\pm\sqrt{\dfrac{x}{3}}\Big)^3$, odakle imamo $\dfrac{1}{y} = \pm x\sqrt{\dfrac{x}{3}} \mp \Big(\sqrt{\dfrac{x}{3}}\Big)^3$, tj. $y = \Big(\pm x\sqrt{\dfrac{x}{3}} \mp \Big(\sqrt{\dfrac{x}{3}}\Big)^3\Big)^{-1}$ što predstavlja singularno rešenje.

Ovde smo rešenje dobili ekplicitno, ali u opštem slučaju dobijamo ga u parametarskom obliku, što bi u ovom zadatku izgledalo ovako:

$$\begin{aligned} &x = 3p^2, \\ &\frac{1}{y} = z = xp - p^3 = 3p^3 - p^3 = 2p^3 \Rightarrow y = \frac{1}{2p^3}. \end{aligned}$$

1.1.4. Uvođenje parametra

U nekim slučajevima može se odrediti rešenje jednačine $F(x, y, y') = 0$, a da se ne odredi y' kao funkcija od x i y. Postupak se sastoji u uvođenju parametra i posebno je važan za slučajeve jednačina koje se ne mogu rešiti po y'.
Dakle, uzmimo da je parametar $p = y'$. Time dobijamo dve jednačine $F(x, y, y') = 0$ i $dy = pdx$. Ako je F diferencijabilna, imamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial p}dp = 0.$$

Ukoliko u ovu jednačinu ubacimo $dy = pdx$, dobijamo

$$(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial y})dx + \frac{\partial F}{\partial p}dp = 0,$$

dok ukoliko u istu ubacimo $dx = \dfrac{dy}{p}$, dobijamo

$$(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial y})dy + p\frac{\partial F}{\partial p}dp = 0.$$

Sada, ako je moguće, iz $F(x, y, p) = 0$ i jedne od poslednje dve jednačine odredi se $x = x(p)$ ili $y = y(p)$. Ako smo odredili $x = x(p)$ tada je $y(p) = \int px'(p)dp + c$, dok ako smo odredili $y = y(p)$ tada je $x(p) = \int \frac{y'(p)}{p}dp + c$.

Zadatak 1.4. Rešiti diferencijalnu jednačinu $(y')^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$.
Rešenje: Uvedimo parametar $y' = p$, odakle važi $dy = pdx$. Time naša jednačina postaje,

$$p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0 \Leftrightarrow 4ypx = p^3 + 8y^2,$$

pa je,

$$x = \frac{p^3 + 8y^2}{4yp} = \frac{p^2}{4y} + \frac{2y}{p},\ p \neq 0,\ y \neq 0.$$

Posle diferenciranja imamo,

$$dx = \Big(\frac{p}{2y} - \frac{2y}{p^2}\Big)dp + \Big(-\frac{p^2}{4y^2} + \frac{2}{p}\Big)dy,$$

a kako iz $y' = p$ takođe sledi $dx = \dfrac{1}{p}dy$, imamo

$$\frac{1}{p}dy = \Big(\frac{p}{2y} - \frac{2y}{p^2}\Big)dp + \Big(-\frac{p^2}{4y^2} + \frac{2}{p}\Big)dy,$$
$$\frac{p^3 - 4y^2}{2yp^2}dp = \Big(\frac{p^2}{4y^2} - \frac{2}{p} + \frac{1}{p}\Big)dy = \frac{p^3 - 4y^2}{4y^2p}dy.$$

Odnosno,

$$\frac{p^3-4y^2}{2yp}\cdot\frac{dp}{p}=\frac{p^3-4y^2}{2yp}\cdot\frac{dy}{2y}\Leftrightarrow\frac{dp}{p}=\frac{dy}{2y}\Leftrightarrow\frac{dy}{y}=2\frac{dp}{p}.$$

Kada integralimo dobijenu jednakost, imamo

$$\int\frac{dy}{y}=2\int\frac{dp}{p}\Leftrightarrow\ln|y|=2\ln|p|+c=2\ln|p|+\ln|c_1|=\ln|p^2c_1|,$$

odakle, $y=c_1p^2$. Sada, ubacimo dobijeni identitet za y u jednakost za x, te imamo

$$x=\frac{p^2}{4c_1p^2}+\frac{2c_1p^2}{p}=\frac{1}{4c_1}+2c_1p=c_2+c_3p,\ \text{gde je } c_2=\frac{1}{4c_1},\ c_3=2c_1.$$

Time smo dobili rešenje u parametarskom obliku, $x=c_2+c_3p$, $y=c_1p^2$. Kada izrazimo p, sledi

$$p=\frac{1}{c_3}(x-c_2)\Rightarrow y=\frac{c_1}{c_3^2}(x-c_2)^2=c_4(x-c_2)^2,\ \text{gde je } c_4=\frac{c_1}{c_3^2},$$

sto je rešenje u eksplicitnom obliku, ali treba znati da nije moguće uvek izraziti y preko x.

1.1.5. Lagranžova jednačina

To je jednačina oblika $y = xf(y') + g(y')$ (primetimo da je Kleroova jednačina specijalan slučaj Lagranžove), i rešavamo je smenom $y' = p$, gde je $p = p(x)$ funkcija od x i zato imamo $dy = pdx$. Diferenciranjem početne jednačine po x dobijamo

$$y' = f(y') + xf'(y')y'' + g'(y')y'',$$

te zamenom $y' = p$, imamo

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= f(p) + xf'(p)\frac{dy'}{dx} + g'(p)\frac{dy'}{dx},\\
\frac{dy}{dx} &= f(p) + xf'(p)\frac{dp}{dx} + g'(p)\frac{dp}{dx},\\
dy &= f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp.
\end{aligned}$$

Koristeći $dy = pdx$, sledi

$$\begin{aligned}
pdx - f(p)dx &= xf'(p)dp + g'(p)dp,\\
(p - f(p))dx &= (xf'(p) + g'(p))dp.
\end{aligned}$$

U nastavku razlikujemo dva slučaja.

1. $p - f(p) \neq 0$, tada imamo,

   $$\frac{dx}{dp} = \frac{f'(p)}{p - f(p)}x + \frac{g'(p)}{p - f(p)}.$$

   Odakle vidimo da imamo linearnu diferencijalnu jednačinu,

   $$x' - \frac{f'(p)}{p - f(p)}x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}.$$

   Ako je njeno rešenje $x = x(p)$, onda je rešenje Lagranžove jednačine dato u parametarskom obliku, $x = x(p)$, $y = x(p)f(p) + g(p)$.

2. $p - f(p) = 0$, za neko p_1 onda važi $y = xf(p_1) + g(p_1)$, što predstavlja singularno rešenje.

Zadatak 1.5. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y = 2xy' + (y')^2$.
Rešenje: Koristeći oznake uvedene gore, sledi $f(y') = 2y'$, a $g(y') = (y')^2$. Uvodimo smenu $y' = p$, odakle imamo $dy = pdx$, pa naša jednačina dobija oblik,

$$y = 2xp + p^2.$$

Diferenciranjem po x, imamo

$$\begin{aligned} y' &= 2p + 2xp' + 2pp', \\ \frac{dy}{dx} &= 2p + 2x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}. \end{aligned}$$

Množenjem jednačine sa dx, i zamenom $dy = pdx$, dobijamo

$$\begin{aligned} dy &= 2pdx + 2xdp + 2pdp, \\ pdx &= 2pdx + 2xdp + 2pdp, \\ (p - 2p)dx &= (2x + 2p)dp, \\ -pdx &= 2(x + p)dp. \end{aligned}$$

Razlikujemo dva slučaja:

1. $p \neq 0$, i imamo linearnu diferencijalnu jednačinu,

$$x' = -\frac{2}{p}x - 2 \Leftrightarrow x' + \frac{2}{p}x = -2.$$

Dobijenu jednačinu rešavamo smenom $x = uv$, gde su $u = u(p)$ i $v = v(p)$. Kad ubacimo smenu, imamo

$$u'v + uv' + \frac{2}{p}uv = 2 \Leftrightarrow u'v + u\underbrace{\left(v' + \frac{2}{p}v\right)}_{=0} = -2.$$

Kada zagradu izjednačimo sa nulom, dobijamo,

$$v' = -\frac{2}{p} \Leftrightarrow \frac{dv}{dp} = -\frac{2}{p} \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -2\frac{dp}{p} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -2\int \frac{dp}{p}.$$

Odakle imamo,

$$\ln|v| = -2\ln|p| \Rightarrow v = \frac{1}{p^2}.$$

Još je ostalo pronaći funkciju u, koju dobijamo iz jednačine $u'v = -2$,

$$u'\frac{1}{p^2} = -2 \Leftrightarrow du = -2p^2dp \Leftrightarrow u = -\frac{2}{3}p^3 + c.$$

Sledi, $x = \frac{1}{p^2}(-\frac{2}{3}p^3 + c) = -\frac{2}{3}p + \frac{c}{p^2}$, pa je $y = 2\Big(-\frac{2}{3}p^2 + \frac{c}{p}\Big) + p^2 = \frac{2c}{p} - \frac{p^2}{c}$. Opšte rešenje smo dobili u parametarskom obliku, x i y su izraženi preko parametra p.

2. $p = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = 0$ singularno rešenje.

1.1.6. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 1.6. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$\left(\frac{y}{x+y}\right)^2 dx + \left(\frac{x}{x+y}\right)^2 dy = 0.$$

Zadatak 1.7. Pokazati da diferencijalna jednačina

$$(5x^2 + 2xy + 3y^3)dx + 3(x^2 + xy^2 + 2y^3)dy = 0,$$

ima integracioni množitelj oblika $h = h(x + y)$ i naći njeno opšte rešenje.

Zadatak 1.8. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y = xy' + \dfrac{a}{y'},\ a \in \mathbb{R}$.

Zadatak 1.9. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y = -\dfrac{y'}{2}(2x + y')$.

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.