SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA GAUSOVA ELIMINACIJA

predavač:
Aleksandar Kovačević

Sistem linearnih algebarskih jednačina (SLAJ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\cdots & +a_{nn}x_n & =b_n \end{cases}$$

Sistem linearnih algebarskih jednačina (SLAJ)

- Matrični oblik

Ax=b

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Gausova eliminacija

- Manipulisanje jednačinama da bi se eliminisala jedna promenljiva.
- Razviti algoritam koji će to da radi za svaku promenljivu.
- Cilj je doći do gornje trougaone matrice

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ & & \boldsymbol{a}_{33} & \cdots & \boldsymbol{a}_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \boldsymbol{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

- Zamenom unazad pronaći rešenje sistema.

Gausova eliminacija

- Direktan metod
  - nema iteracija tj. trenutnih i prethodnih rešenja.
- Koraci:
  - Eliminacija unapred
    - Kolonu po kolonu elimišemo elemente ispod glavne dijagonale
    - Rezultat je gornja torugaona matrica
  - Zamena unazad
    - Izračunavamo x_n direktno
    - unazad zamenom računamo ostale od x_{n-1} do x_1

Gausova eliminacija

- Početak (elimišemo x_1)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

- Množimo prvu jednačinu sa $-a_{21}/a_{11}$ i sabiramo je sa drugom

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_n x_n &= b_1 \\
\cancel{\left(a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{11}\right)}x_1 + \left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \ldots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}\right)x_n &= b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Gausova eliminacija

- Rezultat

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

- Ponoviti prethodni postupak dok se ne dobije

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ &\vdots \\ a'_{n2}x_2 + \ldots + a'_{nn}x_n &= b'_n \end{aligned}}$$

Gausova eliminacija

- Prva jednačina zove se <u>pivot jednačina</u>.
- a_{11} je <u>pivot element</u>.
- Nastavljamo: sada množimo drugu jednačinu sa $-a'_{32}/a'_{22}$ i saberemo je sa trećom

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

$$\cancel{\left(a'_{32} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}}a'_{22}\right)}x_2 + \ldots + \left(a'_{3n} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}}a'_{2n}\right)x_n = \left(b'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}}b'_2\right)$$

$$\vdots$$

Gausova eliminacija

- Ponoviti postupak da bi eliminisali a'_{i2} i dobili

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\
&\vdots \\
a''_{n3}x_3 + \ldots + a''_{nn}x_n &= b''_n
\end{aligned}
$$

- Nastaviti da bi dobili:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n} &= \boldsymbol{b_1} \\
\boldsymbol{a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n} &= \boldsymbol{b'_2} \\
\boldsymbol{a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n} &= \boldsymbol{b''_3} \\
&\vdots \\
\boldsymbol{a_{nn}^{(n-1)}x_n} &= \boldsymbol{b_n^{(n-1)}}
\end{aligned}
}
$$

Zamena unazad

- Sada možemo zamenom unazad da dobijemo rešenje $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- Običnim deljenjem dobijamo:

$$\boxed{x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}}$$

- Zamenimo x_n u (n-1)-u jednačinu

$$\boxed{a_{n-1,n-1}^{(n-2)} x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-2)} x_n = b_{n-1}^{(n-2)}}$$

- Rešiti za x_{n-1}
- Ponoviti proces da bi dobili: $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_2, x_1$

Zamena unazad

- Počinjemo sa x_n
- Izračunavamo $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_2, x_1$

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}}$$

$$a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$$

Eliminacija prve kolone

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{f}_{21} = -a_{21} / a_{11}$$
$$\mathrm{f}_{31} = -a_{31} / a_{11}$$
$$\mathrm{f}_{41} = -a_{41} / a_{11}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} & b'_3 \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} & b'_4 \end{bmatrix}$$

$$(2) + \mathrm{f}_{21} \times (1)$$
$$(3) + \mathrm{f}_{31} \times (1)$$
$$(4) + \mathrm{f}_{41} \times (1)$$

Eliminacija druge kolone

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} & b'_3 \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} & b'_4 \end{array}\right]$$

$$f_{32} = -a'_{32} / a'_{22}$$

$$f_{42} = -a'_{42} / a'_{22}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ \boxed{0} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & a''_{33} & a''_{34} & b''_3 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & a''_{43} & a''_{44} & b''_4 \end{array}\right]$$

$$(3) + f_{32} \times (2)$$

$$(4) + f_{42} \times (2)$$

Eliminacija treće kolone

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} & a''_3 \\ 0 & 0 & a''_{43} & a''_{44} & a''_4 \end{array}\right]$$

$$\mathrm{f}_{43} = -a''_{43} \,/\, a''_{33}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ \boxed{0} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & a''_{33} & a''_{34} & b''_3 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & a'''_{44} & b'''_4 \end{array}\right]$$

Gornja trougaona matrica

$$(4) + \mathrm{f}_{43} \times (3)$$

Zamena unazad

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} & b''_3 \\ 0 & 0 & 0 & a'''_{44} & b'''_4 \end{array}\right]$$

Gornja trougaona matrica

$$x_4 = b'''_4 / a'''_{44}$$

$$\boxed{a_{11}, a'_{22}, a''_{33}, a'''_{44} \neq 0}$$

$$x_3 = (b''_3 - a''_{34} x_4) / a''_{33}$$

$$x_2 = (b'_2 - a'_{23} x_3 - a'_{24} x_4) / a'_{22}$$

$$x_1 = (b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3 - a_{14} x_4) / a_{11}$$

Primer

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \\ f_{21} = 1 \\ f_{31} = 0 \\ f_{41} = -6 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -10 & -14 & -5 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \\ (2) + (1) \times f_{21} \\ (3) + (1) \times f_{31} \\ (4) + (1) \times f_{41} \end{array}$$

Eliminacija unapred

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -10 & -14 & -5 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ \\ f_{32} = -1/2 \\ f_{42} = -1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -14 & -14 & -5 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ \\ (3) + (2) \times f_{32} \\ (4) + (2) \times f_{42} \end{array}$$

Gornja trougaona matrica

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -14 & -14 & -5 \end{array}\right] \qquad f_{43} = -14$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ \boxed{0} & 2 & 4 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & -1 & 4 & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & -70 & -33 \end{array}\right] \qquad (4) + (3) \times f_{43}$$

Zamena unazad

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -70 & -33 \end{array}\right]$$

$$x_4 = -33/-70 = 33/70$$

$$x_3 = 4x_4 - 2 = -4/35$$

$$x_2 = -2x_3 = 8/35$$

$$x_1 = 1 - 2x_3 - 3x_4 = -13/70$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -13/70 \\ 8/35 \\ -4/35 \\ 33/70 \end{bmatrix}$$

Algoritam za Gausovu eliminaciju

- 1. Elminacija unapred
- za svaku jednačinu k, k = 1 do n-1
- za svaku jednačinu i, i = (k+1) do n
- (a) pomnoži jednačinu k sa $-a_{ik}$ $/a_{kk}$
- (b) saberi jednačinu k sa jednačinom i
- Ovde dobijamo gornju trougaonu matricu
- 2. Zamena unazad
- (a) izračunaj x_n kao b_{nn}/a_{nn}
- (b) zameni x_n u (n-1)-u jednačinu, izračunaj x_{n-1}
- (c) ponavljaj (b), za n-2, n-3, itd. dok sve nepoznate nisu određene.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Matlab kod

```
function x=gauss(A,b)
%A,b su matrica A i vektor b
%x je resenje sistema
[n,m]=size(A);
%eliminacija unapred
for k=1:n-1
    for i=(k+1):n
        f=-A(i,k)/A(k,k);
        for j=k:n
            A(i,j)=A(i,j)+f*A(k,j);
        end
        b(i)=b(i)+f*b(k);
    end
end
%zamena unazad
x(n)=b(n)/A(n,n);
for i=n-1:-1:1
    s=0;
    for j=(i+1):n
        s = s + A(i,j)*x(j);
    end
    x(i)=(b(i)-s)/A(i,i);
end
```

(slajd ponovljen radi lakšeg objašnjavanja Matlab koda)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\
&\vdots \\
a''_{n3}x_3 + \ldots + a''_{nn}x_n &= b''_n
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\
&\vdots \\
a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)}
\end{aligned}
}
$$

(slajd ponovljen radi lakšeg objašnjavanja Matlab koda)

- Počinjemo sa x_n
- Izračunavamo $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_2, x_1$

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}}$$

$$a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$$

```
>> format short
>> x = Gauss(A,b)
m =
     4
n =
     4
A =                                      b=
     1         0         2         3         1
    -1         2         2        -3        -1
     0         1         1         4         2
     6         2         2         4         1
f =
    1
A =                                      b=
     1         0         2         3         1
     0         2         4         0         0
     0         1         1         4         2
     6         2         2         4         1
f =
     0
A =                                      b=
     1         0         2         3         1
     0         2         4         0         0
     0         1         1         4         2
     6         2         2         4         1
f =
    -6
A =                                       b=
     1         0         2         3         1
     0         2         4         0         0
     0         1         1         4         2
     0         2       -10       -14        -5
```

Eliminišemo prvu kolonu

```
f =
   -0.5000
A =                                      b=
     1         0         2         3         1
     0         2         4         0         0
     0         0        -1         4         2
     0         2       -10       -14        -5
f =
    -1
A =                                      b=
     1         0         2         3         1
     0         2         4         0         0
     0         0        -1         4         2
     0         0       -14       -14        -5
```

Elimišemo drugu kolonu

```
f =
   -14
A =                                      b=
     1         0         2         3         1
     0         2         4         0         0
     0         0        -1         4         2
     0         0         0       -70       -33
```

Eliminišemo treću kolonu

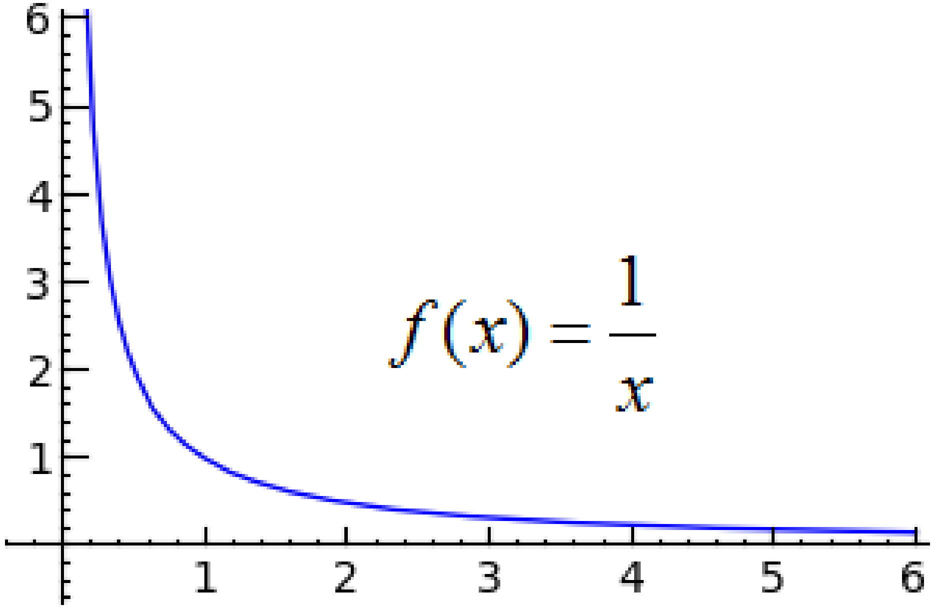
```
x =
         0
         0
         0
    0.4714     x4
x =
         0
         0
   -0.1143     x3
    0.4714
x =
         0
    0.2286     x2
   -0.1143
    0.4714
x =
   -0.1857     x1
    0.2286
   -0.1143
    0.4714
```

Zamena unazad

Problemi sa Gaussovom eliminacijom

- Problemi sa Gausovom eliminacijom
  - deljenje nulom
  - deljenje malim brojevima (greške u zaokruživanju)
  - loše uslovljeni sistemi

Problem deljenja malim brojevima



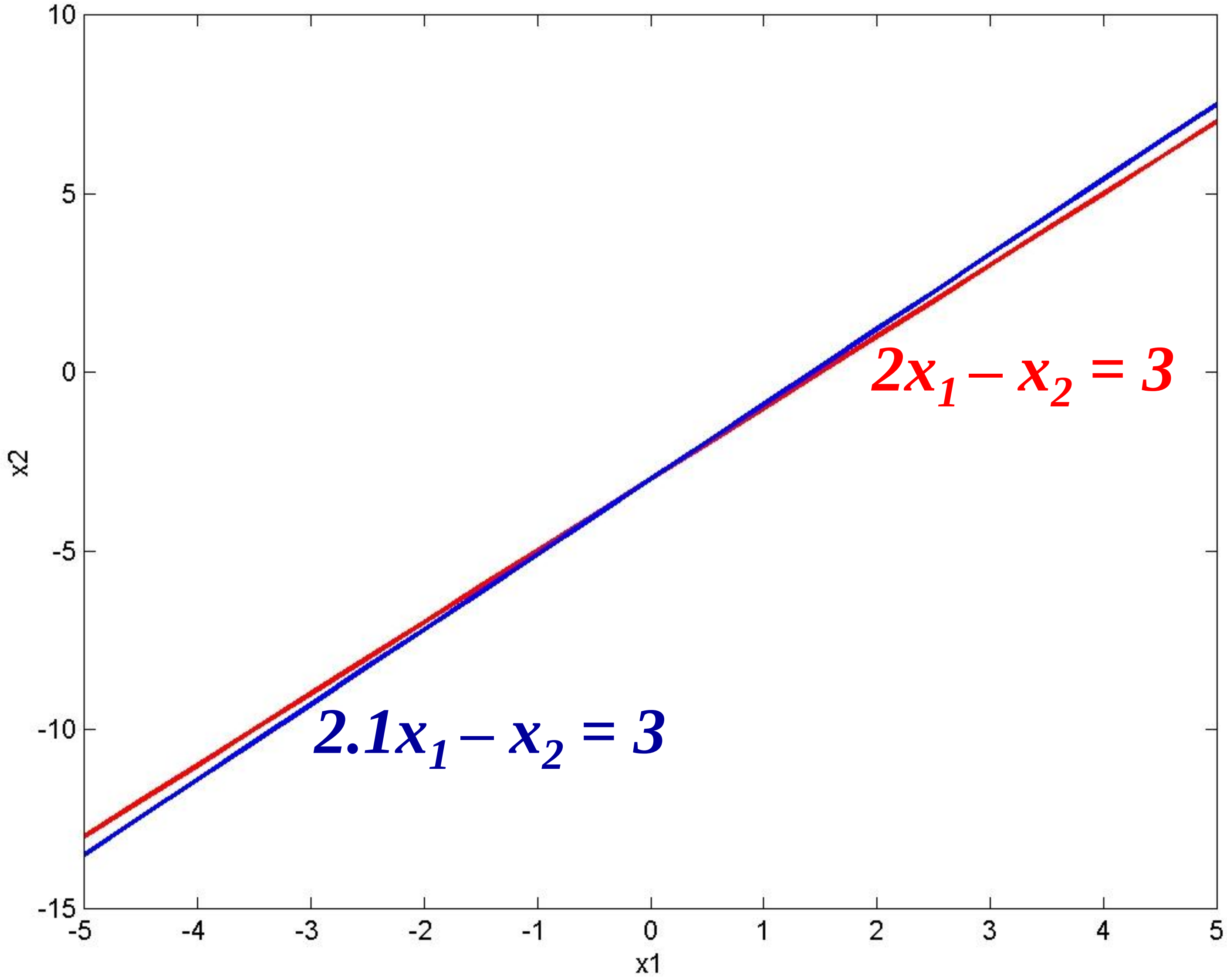
1/0.00046=2173.91
1/0.0005 =2000
2173.91-2000 = 173.91 – ozbiljna greška

1/2000 = 0.0005
1/2001 = 0.00049975
0.0005-0.00049975 = 0.00000025 – mala greška

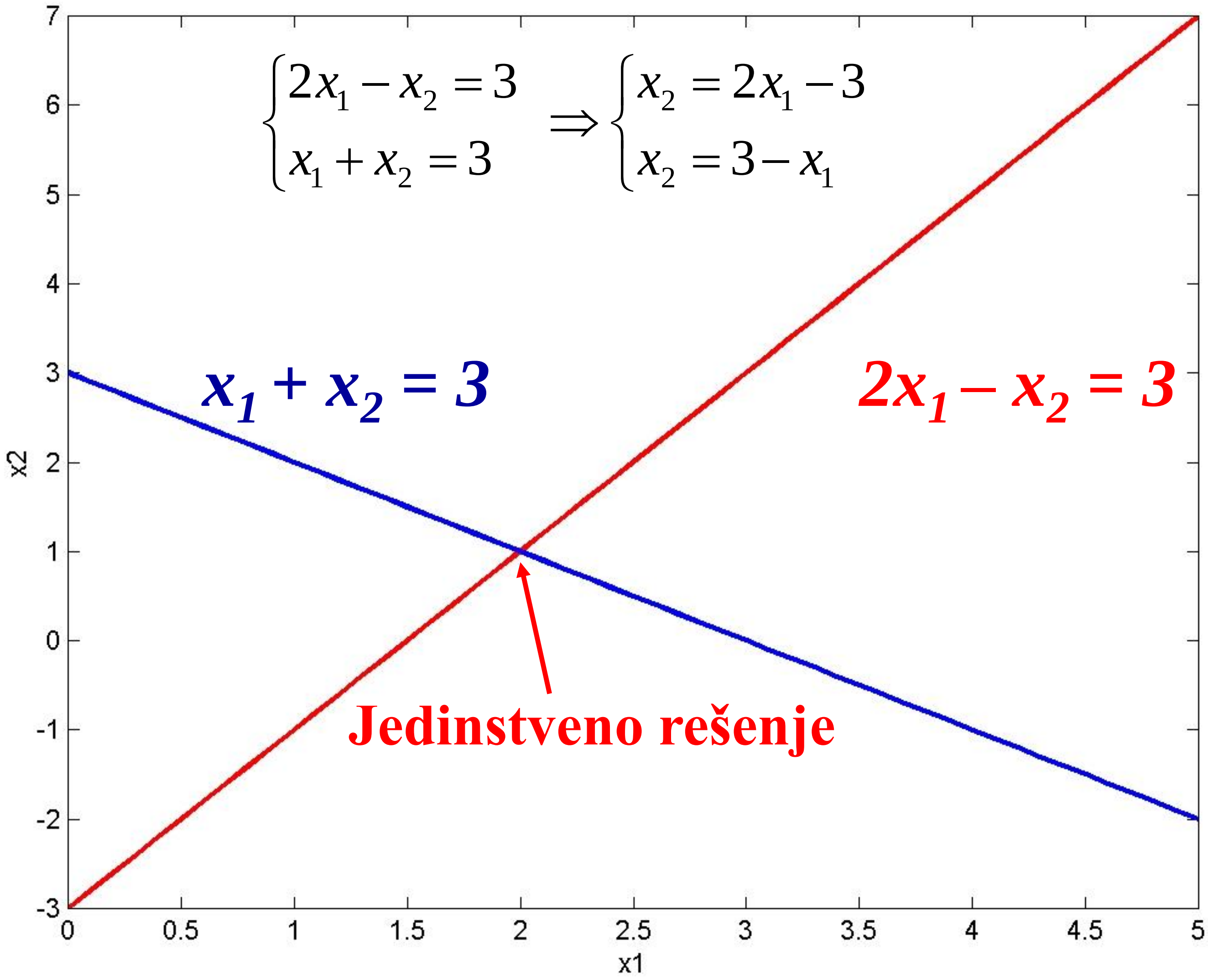
Greške u zaokruživanju

- Jako mnogo zaokruživanja u $n^3/3$ operacija.
- Još važnije – greška se propagira (nagomilava).
- Za velike sisteme (sa više od 100 jednačina), greške u zaokruživanju su veoma značajne.
- Greške u zaokruživanju su naročito ozbiljne kod <u>loše uslovljenih sistema</u>.
- To su sistemi kod kojih male promene u koeficijentima dovode do velikih promena u rešenju.

Loše uslovljen sistem



Dobro uslovljen sistem



Loše uslovljen sistem

- Ako je sistem $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -\dfrac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \dfrac{b_1}{a_{12}} \\ x_2 = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + \dfrac{b_2}{a_{22}} \end{cases}$
- loše uslovljen to znači da su nagibi pravih vrlo bliski pa:

$$\boxed{\frac{a_{11}}{a_{12}} \cong \frac{a_{21}}{a_{22}} \Rightarrow a_{11}a_{22} \cong a_{21}a_{12} \Rightarrow a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \cong 0 \Rightarrow}$$

$$\Rightarrow D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \approx 0 \Rightarrow$$

Ako koristimo Kramerovo pravilo imali bi deljenje jako malim brojem, što znači da male promene D uzrokuju velike promene u x.

Parcijalni pivoting

- Problem deljenja nulom ili jako malim brojevima rešava se “pivotingom”:
  - Kad radimo eliminaciju unapred biramo uvek pivot koji ima najveću apsolutnu vrednost u toj koloni.
  - Zamenimo trenutnu jednačinu sa tom kod koje smo pronašli najveći element – <u>pracijalni pivoting</u>.
- Ako pivot tražimo u celoj matrici, a ne u trenutnoj koloni onda menjamo i vrstu i kolonu i imamo <u>kompletan pivoting.</u>
- <u>Kompletan pivoting</u> se retko koristi jer je zahtevan, a ne pomaže mnogo.

Gausova eliminacija sa pracijalnim pivotingom

- Eliminacija unapred
- za svaku jednačinu k, k = 1 do n-1
  - pretražiti sve jednačine i≥k za max. element po apsolutnoj vrednosti
  - zameniti jedančinu *k* sa tom koja ima max.
  - Izvšriti eliminaciju
    - (a) pomnožiti jednačinu *k* sa $-a_{ik}/a_{kk}$
    - (b) sabrati sa jednačinom *i*

Parcijalni pivoting

$$\begin{aligned}
x_1 & & +2x_3 & +3x_4 & = 1 \\
-x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -3x_4 & = -1 \\
 & x_2 & +x_3 & +4x_4 & = 2 \\
6x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = 1
\end{aligned}$$

$$[A \,\vdots\, b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

Eliminacija unapred

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Zameniti vrste 1 i 4

$$f_{21} = 1/6$$

$$f_{31} = 0$$

$$f_{41} = -1/6$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 7/3 & 7/3 & -7/3 & -5/6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1/3 & 5/3 & 7/3 & 5/6 \end{array}\right]$$

$$(2) + (1) \times f_{21}$$

$$(3) + (1) \times f_{31}$$

$$(4) + (1) \times f_{41}$$

Eliminacija unapred

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 7/3 & 7/3 & -7/3 & -5/6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1/3 & 5/3 & 7/3 & 5/6 \end{array}\right]$$

Zamena vrsta nije potrebna

$$f_{32} = -3/7$$

$$f_{42} = -1/7$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 7/3 & 7/3 & -7/3 & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 33/14 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5/7 \end{array}\right]$$

$$(3) + (2) \times f_{32}$$

$$(4) + (2) \times f_{42}$$

Zamena unazad

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 6 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 7/3 & 7/3 & -7/3 & -5/6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 33/14 \end{array}\right]$$

Zameniti vrste 3 i 4

$$f_{43} = 0$$

$$x_4 = (33/14)/5 = 33/70$$

$$x_3 = (5/7 - 2\,x_4)/2 = -4/35$$

$$x_2 = (-5/6 + 7/3\,x_4 - 7/3\,x_3)/(7/3) = 8/35$$

$$x_1 = (1 - 4\,x_4 - 2\,x_3 - 2\,x_2)/6 = -13/70$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -13/70 \\ 8/35 \\ -4/35 \\ 33/70 \end{bmatrix}$$

```
function x=gaussPivoting(A,b)
[n,m]=size(A);
%eliminacija unapred
for k=1:n-1
  %pronaci vrstu sa maksimalnim elementom po
  %apsolutnoj vrednosti u k-toj koloni krenuti od vrste k
    [maxEl vrMax]= max(abs(A(k:n,k)));
    %zameniti tu vrstu sa k-tom vrstom
    vrMax = k + vrMax - 1;%jer max vraca vrednosti u intervalu 1..n
    temp = A(vrMax,:);
    A(vrMax,:)=A(k,:);
    A(k,:)=temp;
    %istu zamenu uraditi u vektoru b da bi sistem bio dosledan
    temp=b(k);
    b(k)=b(vrMax);
    b(vrMax)=temp;
    for i=(k+1):n
        m=-A(i,k)/A(k,k);
        for j=k:n
            A(i,j)=A(i,j)+m*A(k,j);
        end
        b(i)=b(i)+m*b(k);
    end
end
%zamena unazad
```

```
>> format short
>> x=GaussPivoting(A,b)
A =                                  b=
      1        0        2        3        1
     -1        2        2       -3       -1
      0        1        1        4        2
      6        2        2        4        1
vrMax =
      4
```

Pronalazimo prvi pivot tj. njegovu vrstu

```
A =                               b=
      6        2        2        4        1
     -1        2        2       -3       -1
      0        1        1        4        2
      1        0        2        3        1
```

Zamenimo vrstu 1 sa vrstom 4

```
f =
    0.1667
A =                                                   b=
    6.0000    2.0000    2.0000    4.0000    1.0000
         0    2.3333    2.3333   -2.3333   -0.8333
         0    1.0000    1.0000    4.0000    2.0000
    1.0000         0    2.0000    3.0000    1.0000
f =
      0
A =                                                   b=
    6.0000    2.0000    2.0000    4.0000    1.0000
         0    2.3333    2.3333   -2.3333   -0.8333
         0    1.0000    1.0000    4.0000    2.0000
    1.0000         0    2.0000    3.0000    1.0000
f =
   -0.1667
```

Eliminišemo prvu kolonu

```
A =                                                   b=
    6.0000    2.0000    2.0000    4.0000    1.0000
         0    2.3333    2.3333   -2.3333   -0.8333
         0    1.0000    1.0000    4.0000    2.0000
         0   -0.3333    1.6667    2.3333    0.8333
```

Nema potrebe za zamenom vrsta

Procena greške Gaussove eliminacije

- Intuitivno, ako rešimo sistem Ax=b, da bi izračunali grešku trebalo bi samo da zamenimo x u Ax i uporedimo sa b:
- r=Ax-b, naziva se ostatak ili rezidual.
- U teoriji, ako je r=0, naše rešenje je tačno.
- U praksi, radimo na računaru i ograničeni smo kapacitetom za reprezentaciju brojeva.
- Zato imamo problem kao na sledećem slajdu...

Procena greške Gaussove eliminacije

Neka je dat sledeći sistem

$$\begin{bmatrix} 0.641 & 0.242 \\ 0.321 & 0.122 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.883 \\ 0.444 \end{bmatrix}$$

Sistem rešavamo u aritmetici sa samo 3 značajne cifre. Svaki put kad izvršimo operaciju broj zaokružimo tako da ima samo 3 značajne cifre.

$$-\frac{0.321}{0.641} = -0.5007800\ldots = -0.501$$

$$-0.501 * 0.242 = -0.121$$

$$-0.121 + 0.122 = 0.001$$

$$-0.501 * 0.883 = -0.442$$

$$-0.442 + 0.444 = 0.002$$

Dalje nećemo prikazivati zaokruživanja, ali će ona biti izvršena.

Rezultat nakon prvog (i jedinog) koraka eliminacije unapred.

$$\begin{bmatrix} 0.641 & 0.242 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.883 \\ 0.002 \end{bmatrix}$$

Procena greške Gaussove eliminacije

Zamena unazad:

$$x_2 = \frac{0.002}{0.001} = 2$$

$$x_1 = \frac{0.883 - 0.242 * 2}{0.641} = 0.622$$

Dobijeno rešenje:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.622 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ostatak u *double* preciznosti (16 značajnih cifara):

$$r = b - Ax = \begin{bmatrix} 0.883 - (0.641 * 0.622 + 0.242 * 2) \\ 0.444 - (0.321 * 0.622 + 0.122 * 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000298 \\ 0.000338 \end{bmatrix}$$

Tačno rešenje sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.534 \\ 2.232 \end{bmatrix}$$

Procena greške Gaussove eliminacije

- Postavlja se pitanje da li nam ostatak može biti realna mera koliko smo pogrešili zbog zaokruživanja na 3 znač. cifre.

- Prethodni primer pokazuje da ostatak nije realna mera,

- jer kao što smo videli iako je ostatak mali tačno rešenje se značajno razlikuje od rešenja koje smo dobili.

- To znači da na stvarnu razliku između tačnog i našeg rešenja utiče jos nešto osim ostatka.

- O tome u nastavku predavanja...

Procena greške Gaussove eliminacije

- Važno je napomenuti da je prethodni primer bio izveden na fiktivnom računaru koji može da reprezentuje samo 3 decimalne cifre.
- Naravno da to nije tipično, ali je bilo nužno da bi primer bio dovoljno ilustrativan za predavanje.
- Suština je u tome da se pokaže da ako ne radimo u beskonačnoj preciznosti, odnosno ako ne možemo da skladištimo beskonačno cifara na računaru, ostatak nije pouzdana mera kvaliteta dobijenog rešenja.
- Dvostruka (*double*) preciznost na koju ste navikli ne skladišti 3 cifre već 16, što znači da ostatak ni kod *dobule* preciznosti nije pouzdan, samo je ilustratvni primer teže napraviti.

Procena greške Gaussove eliminacije

- Pre nego što pokažemo šta još utiče na razliku između tačnog rešenja i rešenja dobijenog Gausovom eliminacijom objasnićemo zašto smo u prethodnom primeru dobili loše rešenje.

- Problem sa prethodnim primerom je što u jednom koraku oduzimamo dva vrlo slična broja što nam u sistemu sa samo 3 značajne cire ostavlja samo 1 značajnu cifru:

$$-0.121 + 0.122 = 0.001 \text{ ili } -0.442 + 0.444 = 0.002$$

- Problem oduzimanja brojeva čija će razlika biti na nivou preciznosti koju možemo da smestimo na računar zove se potiranje (*cancellation*) i treba ga izbegavati u numerici, ako je to moguće.

- Nakon toga da bi izračunali x_2 delimo dva broja koja su „na granici preciznosti" i dobijamo lošu vrednost, a samim tim im loše $x_{1.}$

Procena greške Gaussove eliminacije

- Ako je x_t tačno rešenje sistema $Ax=b$
- Ako je x_c rezultat Gausove eliminacije

$$r = Ax_c - b \quad ostatak$$

$$x_c = A^{-1}b + A^{-1}r, x_t = A^{-1}b$$

$$\left|x_c - x_t\right| = \left|A^{-1}b + A^{-1}r - A^{-1}b\right|$$

$$\left|x_c - x_t\right| = \left|A^{-1}r\right|$$

- Ako inverzna matrica ima elemente sa velikim vrednostima (događa se kod loše usloveljnih sistema),
- ostatak r može imati malu vrednost, a da stvarna razlika između tačnog rešenja x_t i rezultata Gaus. el. x_c bude velika.
- Dakle ostatak nije pouzdana mera grešeke.

Procena greške Gaussove eliminacije

- Prethodni primer pokazuje nepouzdanost ostatka za određivanje greške.
- Zato ćemo u nastavku predavanja pokazati na koji način možemo da procenimo grešku.

- Ne moramo znati tačnu grešku ako smo uspeli da je procenimo na malu vrednost tj.
- nije nam važno koliko je tačno greška mala, već da je mala.
- Za procenu nam je od velikog značaja <u>kondicioni broj matrice</u>.

Kodicioni broj

- Kondicioni broj funkcije *f(x)* meri koliko promene ulaza *x* utiču na promene izlaza *y*.
- Veliki kondicioni broj znači da male promene ulaza daju velike na promene izlaza.
- Tada kažemo da je funkcija <u>loše uslovljena</u>.
- Ako ste ikad malo pomerili slavinu pod tušem, a voda je od hladne prešla na jako vrelu – to je loše uslovljena funkcija!

Kondicioni broj matrice

- Nama je kondicioni broj potreban da bi procenili grešku prilikom rešavanja sistema.
- Računa se za matricu A.
- Kad znamo kondicioni broj znamo koliko male promene vektora b ili matrice A utiču na rešenje x.
- Otkud male promene?
  - reprezentacija brojeva na računaru, greške u zaokruživanju, greške u merenju,....
  - (već smo mnogo puta rekli da u numerici često imamo posla sa nepreciznim vrednostima)

Kondicioni broj, kako se računa?

- Da bi izračunali kondicioni broj potrebna nam je norma matrice.
- Podsetimo se norme vektora:

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

p-norma (uopštenje)

norme koje se najviše koriste

1-norm: $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

2-norm: $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$

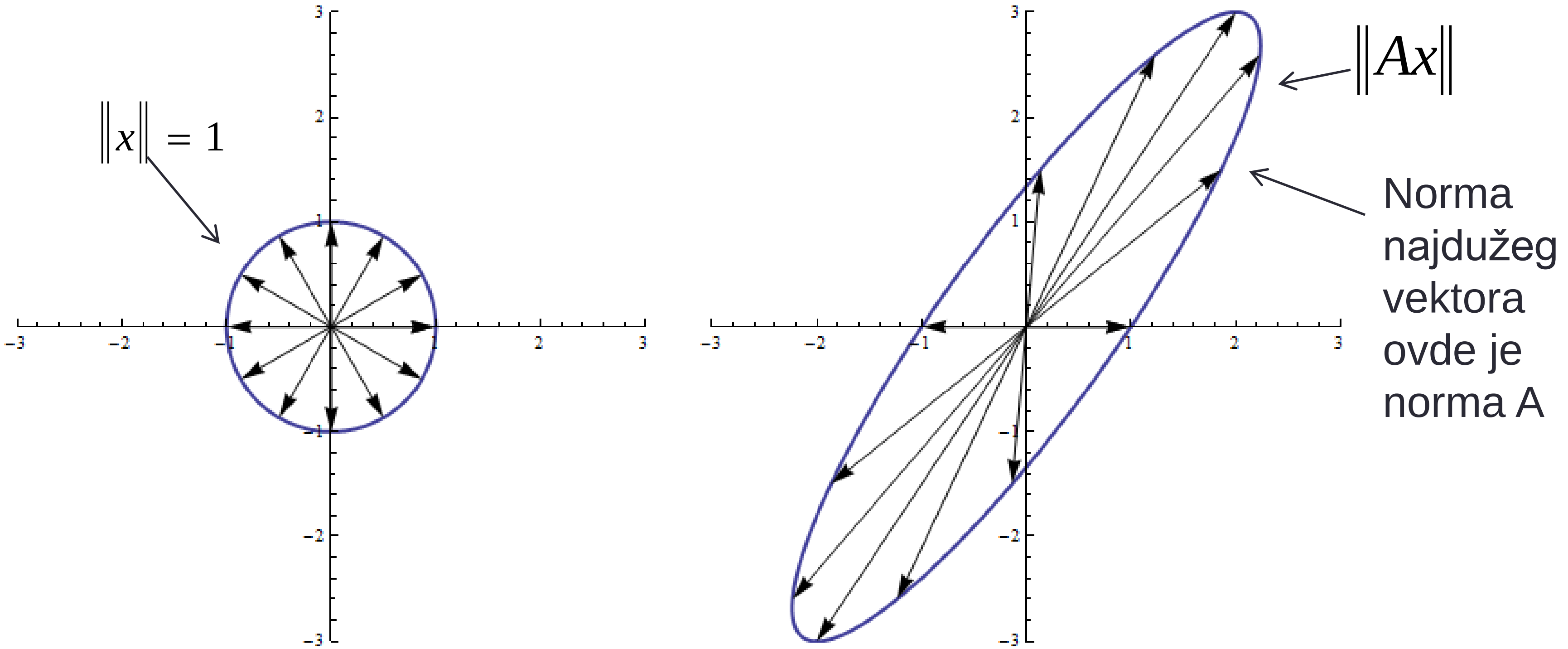
∞-norm: $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$

Norma matrice

- Norma matrice, definicija (vezana za datu vektorsku normu):

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

- Geometrijska interpretacija: norma A meri maksimalno “istezanje” jediničnih vektora za datu vektorsku normu.



Norma matrice

- Kako se može lako izračunati

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

maksimum zbirova po kolonama

maksimum zbirova po vrstama

Kondicioni broj matrice

- Kondicioni broj nesingularne kvadratne matrice:

$$cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

- Po konvenciji za singularnu matricu

$$cond(A) = \infty$$

- Veliki kondicioni broj znači da je matrica skoro singularna, a to je loše za rešavanje sistema.

Kondicioni broj i vektor *b*

- Ako u sistemu $Ax=b$, b nije tačno (zbog grešaka zaokruživanja npr.),
- koliko će se x razlikovati od tačnog rešenja?
- Ako umesto b imamo $b+\Delta b$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq cond(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

- $x+\Delta x$ je greška u x.
- Veliki *cond(A)*, mala promena u b znači veliku relativnu grešku u x.

Kondicioni broj i matrica A

- Slično prethodnom, ako imamo grešku *E* kod *A* tj. , onda važi: $(A+E)\hat{x}=b$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq cond(A)\cdot\frac{\|E\|}{\|A\|}$$

Primer loše uslovljenosti

```
>> A

A =

    1.0000    2.0000

    2.0000    3.9990

>> b

b =

    4.0000

    7.9990

>> x=gauss(A,b)

x =

     2

     1
```

```
>> cond(A)

ans = 24992
```

veliki kondicioni broj

male promene u *b* uzrokuju velike promene u rešenju *x*

```
>> A

A =

    1.0000    2.0000

    2.0000    3.9990

>> b

b =

    4.0010

    7.9980

>> x=gauss(A,b)

x =

   -3.9990

    4.0000
```

Primer dobre uslovljenosti

```
>> A

A =

    0.6000    1.4000

    2.0000   -1.7000

>> b

b =

     4.0000

     7.9990

>> x=gauss(A,b)

x =

    4.7117

    0.8379
```

```
>> cond(A)
ans = 1.8787
```

mali kondicioni broj

male promene u *b* uzrokuju <u>male</u> promene u rešenju *x*

```
>> A

A =

    0.6000    1.4000

    2.0000   -1.7000

>> b

b =

    4.0010

    7.9980

>> x=gauss(A,b)

x =

    4.7118

    0.8385
```

Poboljšanje tačnosti

- Veliki kondicioni broj može biti posledica dve stvari
  1. skoro singularne matrice
  2. loše skaliranih vrednosti matrica (vrednosti matrica su iz veoma različitih raspona)
- Prvi slučaj nije lako rešiv.
- Za drugi slučaj, matrica se može skalirati na pogodniju matricu.

Primer Skaliranje

```
>> A=[0.6,135.4;22.0,-17000]

A =

    0.6    135.4

    22   -17000

>> cond(A)

ans =

  21931
```

```
>> A1=[0.6/135.4,135.4/135.4;22.0/17000,-17000/17000]

A1 =

    0.0044    1.0000

    0.0013   -1.0000

>> cond(A1)

ans =

  349.3195
```

A različiti rasponi; A1 – skaliranje: svaka vrsta podeljena sa maksimalnim elementom te vrste. Rezultat je oko 7 puta manji kondicioni broj.

Deljenje max elementom da bi vrednosti doveli u [0,1] raspon zove se normalizacija i značajan je postupak u analizi podataka i mašinskom učenju.