MATEMATIČKA ANALIZA 1 za studente softverskog inženjerstva i informacionih tehnologija

Slavica Medić

25. februar 2020

Prezentacija iz Matematičke analize 1 za studente softverskog inženjerstva i informacionih tehnologija

Autor: Slavica Medić

Nastavno-naučno veće Fakulteta koje je održano dana 16.7.2015., na osnovu predloga Odluke Saveta za bibliotečku i izdavačku delatnost br. 014-112/29, je odobrilo korišćenje *Prezentacije iz Matematičke analize 1 za studente softverskog inženjerstva i informacionih tehnologija*, kao pomoćno sredstvo u nastavi na predmetu *Matematička analiza 1*, na studijskom programu *Softversko inženjerstvo i informacione tehnologije.*

Metrika i metrički prostor

Definicija

Metrika *ili* **rastojanje** *na nepraznom skupu* X *je svako preslikavanje* $d : X^2 \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *za koje važi*

(M_1) $d(x, y) \geq 0$,
(M_2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(M_3) $d(x, y) = d(y, x)$,
(M_4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(nejednakost trougla)*

Metrički prostor *je uređen par* (X, d) *skupa* X *i metrike* d *na* X.

Za skup X *kažemo da je* **nosač metričkog prostora** (X, d).

- Realan broj $d(x, y)$ je **rastojanje elemenata** (tačaka) $x, y \in X$.

- Metrički prostor (X, d) ćemo nekada kraće označavati istim slovom kao i njegov nosač X.

- U metričkom prostoru (X, d) važi tzv. **nejednakost mnogougla**:

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Primer

$(\mathbb{R}^n, d)$ je metrički prostor, gde je metrika $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

za $x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

- *Za metriku d kažemo da je* **euklidska**, *a prostor $(\mathbb{R}^n, d)$, koji ćemo kraće obeležavati sa $\mathbb{R}^n$, $n-$***dimenzionalni euklidski prostor**.

- *Metrika d je uopštenje metrika iz $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.*

Primer

Ako je $X \neq \emptyset$ *proizvoljan skup, tada je preslikavanje* $d : X^2 \to \mathbb{R}$ *definisano sa*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

metrika.

- *Za* (X, d) *kažemo da je* **diskretan metrički prostor**.

Potprostor metričkog prostora

Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $\emptyset \neq Y \subset X$. Sa d_Y obeležimo restrikciju preslikavanja d nad skupom Y, tj. neka je

$$d_Y(x, y) = d(x, y),\ x, y \in Y.$$

Očigledno d_Y je metrika na skupu Y, tj. (Y, d_Y) je metrički prostor. Kažemo da je (Y, d_Y) **potprostor prostora** (X, d).

Metriku d_Y najčešće označavamo takođe sa d, pa je reč o potprostoru (Y, d) prostora (X, d).

Ograničenost

Definicija

Za neprazan skup $A \subset X$ *metričkog prostora* (X, d) *kažemo da je* **ograničen** *ako je skup* $\{d(a, b) : a, b \in A\}$ *ograničen u skupu* $\mathbb{R}$.

Prazan skup je ograničen skup (po definiciji).

Definicija

Ako je (X, d) *metrički prostor i ako je neprazan skup* $A \subset X$ *ograničen, tada postoji realan broj* $d(A) = \sup\{d(a, b) : a, b \in A\}$ *koji zovemo* **dijametar skupa** A.

Po definiciji uzimamo da je $d(\emptyset) = 0$.

Definicija

Za preslikavanje $f : D \to X$ skupa D u metrički prostor X kažemo da je **ograničeno nad skupom** $A \subset D$ *ako je* $f(A) \subset X$ *ograničen skup u* X.

Ako je $A = D$, tada je preslikavanje f **ograničeno**.

Ograničeno preslikavanje

$$f : N_1 \to X,$$

gde je N_1 proizvoljan beskonačan podskup skupa prirodnih brojeva je **ograničen niz**.

Definicija

Neka je $(Y, \preceq)$ *totalno uređen skup. Za funkciju* $f : X \to Y$ *kažemo da je* **ograničena sa gornje (donje) strane** *nad nepraznim podskupom* A *od* X *ako je skup njenih vrednosti* $f(A)$ *ograničen sa gornje (donje) strane u odnosu na relaciju* $\preceq$*, tj. ako postoji* $\mu \in \mathbb{R}$ *tako da za sve* $x \in X$ *važi da je* $f(x) \preceq \mu$ $(\mu \preceq f(x))$.

Reći ćemo da je funkcija f *ograničena sa gornje (donje) strane sa* μ*, a broj* μ *zvaćemo* **gornjim (donjim) ograničenjem** *ili* **gornjom (donjom) granicom funkcije** f.

Funkcija f *je* **ograničena** *ako je ograničena i sa gornje i sa donje strane.*

Potreban i dovoljan uslov da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ *ograničena, je da postoji* $\nu \in \mathbb{R}^+$*, tako da za svako* $x \in X$ *važi* $|f(x)| \leq \nu$.

Topologija u metričkom prostoru

Definicija

Neka je (X, d) metrički prostor, $a \in X$ i $r \in \mathbb{R}^+$. Za skup

$$L(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$$

kažemo da je **otvorena lopta** *u metričkom prostoru (X, d) sa centrom u tački a poluprečnika r.*

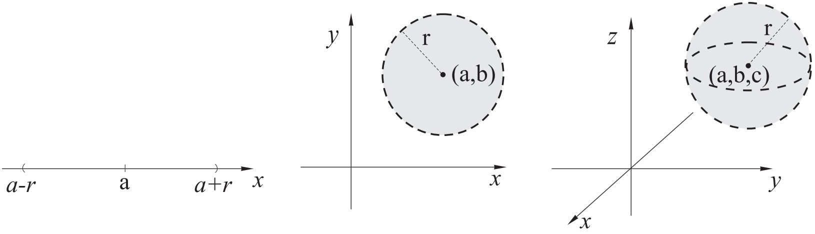
- Kako je $d(a, a) = 0 < r$, jasno je da otvorena lopta $L(a, r)$ sadrži svoj centar.

- Ako je $r_1 \leq r_2$, očigledno je $L(a, r_1) \subset L(a, r_2)$.

a) $\mathbb{R}$: $\quad L(a,r) = (a-r, a+r)$,

b) $\mathbb{R}^2$: $\quad L((a,b),r) = \{(x,y) : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r\}$,

c) $\mathbb{R}^3$: $\quad L((a,b,c),r) = \{(x,y,z) : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < r\}$.



a) b) c)

Tvrđenje

Ako je $L(a,r)$ otvorena lopta u metričkom prostoru (X,d), tada za svaku tačku $b \in L(a,r)$, postoji $s \in \mathbb{R}^+$ tako da je $L(b,s) \subset L(a,r)$.

Dokaz. Kako $b \in L(a,r)$, to je $d(a,b) < r$, pa možemo uzeti da je

$$s = r - d(a,b) > 0.$$

Odatle sledi da je za svaku tačku $x \in L(b,s)$

$$d(a,x) \leq d(a,b) + d(b,x) < r,$$

što dokazuje da je

$$L(b,s) \subset L(a,r).$$

□

Definicija

Za neprazan skup $U \subset X$ kažemo da je **otvoren** *u metričkom prostoru (X, d) ako*

$$(\forall x \in U)(\exists r \in \mathbb{R}^+)\ L(x, r) \subset U.$$

Uzimamo da je $\emptyset$ po definiciji otvoren.

- Otvorena lopta jeste otvoren skup u metričkom prostoru.

- Za neprazan skup $U \subset X$ koji je otvoren u metričkom prostoru (X, d) za svaku tačku $x \in U$, postoji $r_x \in \mathbb{R}^+$, tako da je $x \in L(x, r_x) \subset U$, pa je

$$U = \bigcup \{L(x, r_x) : x \in U\},$$

tj. sledi da je svaki neprazan otvoren skup u metričkom prostoru (X, d) unija neke familije otvorenih lopti iz (X, d).

Familiju τ svih otvorenih skupova metričkog prostora (X, d) zovemo topološka struktura ili **topologija metričkog prostora** (X, d).

- Jasno je da je $\emptyset \in \tau$ i da je $X \in \tau$.
- Unija svake familije elemenata iz τ je ponovo elemenat iz τ.
- Presek konačno mnogo elemenata iz τ je elemenat iz τ.

Definicija

Za podskup A metričkog prostora X kažemo da je **zatvoren** *ako je $C_X(A) = X \setminus A$ otvoren skup.*

Očigledno je da su $\emptyset$ i skup X i zatvoreni skupovi.

Pojam okoline tačke

Definicija

Neka je X dati metrički prostor i a tačka u X.
Za skup $V \subset X$ kažemo da je **okolina tačke** *a u metričkom prostoru X, ako postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tako da $L(a, \varepsilon) \subset V$.*

Ako je V otvoren skup kažemo da je V **otvorena okolina tačke** *a.*

*Otvorenu loptu $L(a, \varepsilon)$ zovemo $\varepsilon-$***okolina** *tačke a.*

ε - pozitivan, proizvoljno mali, unapred dat!

- Okolina tačke a u prostoru X je neki podskup od X koji sadrži ne samo tačku a već i neku otvorenu loptu sa centrom u tački a.

- Skup X okolina svake svoje tačke u prostoru X.

- *Neprazan skup $U \subset X$ je otvoren ako i samo ako je U okolina svake svoje tačke.*

- Za proizvoljnu tačku a u prostoru (X, d) familiju svih okolina tačke a u X nazivamo **sistem okolina tačke** a u prostoru X, u oznaci $\mathcal{V}(a)$.

Tvrđenje

Ako je (X, d) metrički prostor, za svake dve različite tačke a i b, postoje disjunktne otvorene okoline $L(a, \varepsilon)$ i $L(b, \varepsilon)$, tj. svake dve različite tačke mogu se odvojiti disjunktnim otvorenim okolinama.

Dokaz. Kako je $a \neq b$, to možemo uzeti da je $\varepsilon = \frac{1}{2}d(a, b) > 0$. Dokažimo da je $L(a, \varepsilon) \cap L(b, \varepsilon) = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, tj.

$$L(a, \varepsilon) \cap L(b, \varepsilon) \neq \emptyset,$$

odnosno da postoji

$$z \in L(a, \varepsilon) \cap L(b, \varepsilon).$$

Tada $z \in L(a, \varepsilon)$, tj. $d(a, z) < \varepsilon$ i $z \in L(b, \varepsilon)$, tj. $d(b, z) < \varepsilon$, pa je

$$0 < d(a, b) \leq d(a, z) + d(z, b) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(a, b),$$

što je kontradikcija, jer je $d(a, b) > 0$. $\square$

Napomena

Ako je U okolina tačke a, tada postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da važi $L(a, \frac{1}{n}) \subset U$.

Zaista, ako je U okolina tačke a, tada postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tako da je

$$a \in L(a, \varepsilon) \subset U.$$

No kako postoji $n \in \mathbb{N}$, tako da je

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$

to je

$$L\left(a, \frac{1}{n}\right) \subset L\left(a, \varepsilon\right) \subset U.$$

Klasifikacija tačaka u metričkom prostoru

Definicija

Neka je A podskup metričkog prostora X. Za tačku $a \in X$ kažemo da je **unutrašnja tačka** *skupa A, ako postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tako da je $L(a, \varepsilon) \subset A$.*

Skup A° svih unutrašnjih tačaka zovemo **unutrašnjost skupa** *A.*

Važe tvrđenja:

- $\emptyset^\circ = \emptyset$, $X^\circ = X$
- *Skup A° je najveći otvoren skup sadržan u A.*
- *Skup A je otvoren ako i samo ako je $A^\circ = A$.*

Definicija

Za tačku $a \in X$ kažemo da je **spoljašnja tačka** *podskupa A metričkog prostora X ako postoji okolina tačke a koja ne sadrži nijednu tačku skupa A.*

Skup svih spoljašnjih tačaka zovemo **spoljašnjost skupa** *A.*

Očigledno važi tvrđenje

- Ako je a spoljašnja tačka skupa A, tada je a unutrašnja tačka skupa $X \setminus A$. Dakle, spoljašnjost skupa A je skup $(X \setminus A)^{\circ}$.

Definicija

Za tačku $a \in X$ kažemo da je **rubna tačka** *skupa $A \subset X$ ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(L(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge L(a, \varepsilon) \cap C_X(A) \neq \emptyset)$$

(*svaka $\varepsilon-$okolina tačke a ima neprazan presek i sa skupom A i sa njegovim komplementom*).

Skup A^* svih rubnih tačaka skupa A nazivamo **rubom skupa** *A.*

Važe tvrđenja:

- $A^* = (X \setminus A)^*$
- $X = A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ \cup A^*$

Definicija

Tačka $a \in X$ je **adherentna tačka** *skupa $A \subset X$ ako svaka $\varepsilon-$okolina tačke a ima neprazan presek sa skupom A, tj.*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)\ L(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Skup $\overline{A}$ svih adherentnih tačaka zovemo **adherencija** *ili* **zatvorenje skupa** *A.*

Važe tvrđenja:

- $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{X} = X$
- *Skup $\overline{A}$ je najmanji zatvoren skup koji sadrži skup A.*
- *Skup A je zatvoren ako i samo ako je $A = \overline{A}$.*
- $A^* = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$.

Definicija

Za tačku $a \in X$ kažemo da je **tačka nagomilavanja** *skupa $A \subset X$ ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)\ L(a, \varepsilon) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

(*svaka $\varepsilon-$okolina tačke a ima neprazan presek sa skupom $A \setminus \{a\}$*).

• Skup svih tačaka nagomilavanja skupa A obeležavamo sa A'.

• Svaka tačka nagomilavanja skupa A je adherentna tačka datog skupa, tj. važi da je $A' \subset \overline{A}$.
• Svaka tačka skupa ne mora biti tačka nagomilavanja datog skupa, pa odatle sledi da svaka adherentna tačka ne mora da bude i tačka nagomilavanja datog skupa. Na primer, ako je $A = (0, 1) \cup \{3, 4\}$, tada je $A' = [0, 1]$, $\overline{A} = [0, 1] \cup \{3, 4\}$. Dakle, $3 \in \overline{A}$, ali $3 \notin A'$.

• Očigledno važi da je $\overline{A} = A \cup A'$.

Definicija

Za tačku $a \in A$ *kažemo da je* **izolovana tačka** *skupa* $A \subset X$ *ako*

$$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+)\ L(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$$

(*postoji* $\varepsilon-$*okolina tačke a koja sadrži samo tačku a iz skupa* A).

Primer

Za skup $A = (1,2] \cup \{3\}$ *je*

$A^\circ = (1,2)$,
$\overline{A} = [1,2] \cup \{3\}$,
$A' = [1,2]$,
$A^* = \{1,2,3\}$.
Tačka 3 *je izolovana tačka skupa* A.

Za skup $B = \{1,2,3\}$ *je*

$B^\circ = \emptyset$,
$\overline{B} = B = B^*$,
$B' = \emptyset$.
Sve tačke skupa B *su izolovane tačke.*

Konvergencija nizova u metričkom prostoru

Definicija

Neka je A prebrojiv podskup skupa prirodnih brojeva (ili skupa $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$) i X neprazan skup. Preslikavanje $a : A \to X$ zovemo **nizom** *u skupu X.*

Obično se u definiciji niza uzima da je $A = \mathbb{N}$. Međutim, tada za sledeća preslikavanja definisana sa

$$a(n) = \frac{1}{n-2}, \quad a(n) = \frac{1}{1 + (-1)^n}$$

ne bismo mogli reći da predstavljaju niz. U prvom slučaju oblast definisanosti nije čitav skup $\mathbb{N}$ već $\mathbb{N} \setminus \{2\}$, a u drugom slučaju $\mathbb{N} \setminus \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}$.

Bez gubitka opštosti za domen niza se može uzimati skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, jer za svaki prebrojiv skup A, $A \subset \mathbb{N}$, postoji bijekcija $\phi : \mathbb{N} \to A$ skupa $\mathbb{N}$ na skup A sa osobinom da ako je

$$n < m,$$

tada je i

$$\phi(n) < \phi(m), \quad \text{za sve } n, m \in \mathbb{N}.$$

Tada umesto niza a možemo posmatrati niz

$$a \circ \phi : \mathbb{N} \to X.$$

Primetimo da njegov domen jeste skup prirodnih brojeva i da oba preslikavanja imaju isti skup vrednosti.

- Bijekciju ϕ možemo definisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\phi(1) &= \min A, \\
\phi(2) &= \min(A \setminus \{\phi(1)\}), \\
&\vdots \\
\phi(n) &= \min(A \setminus \{\phi(1), \phi(2), \ldots, \phi(n-1)\}), \text{ za sve } n > 1.
\end{aligned}$$

- Na primer, bijekcija ϕ za niz dat sa $a(n) = \dfrac{1}{n-2}$ preslikava skup $\mathbb{N}$ na skup $\mathbb{N} \setminus \{2\}$ i data je sa

$$\begin{aligned}
\phi(1) &= 1, \\
\phi(n) &= n + 1, \text{ za sve } n > 1.
\end{aligned}$$

• Neka je $a : \mathbb{N} \to X$ niz. Elemenat $a(n)$ skupa X (slika prirodnog broja n) obeležavamo sa a_n i zovemo ga n-**ti član niza** a ili **opšti član niza** a. Dakle, $a(1) = a_1$ je prvi član niza, $a(2) = a_2$ je drugi član niza, itd.

• Niz $a : \mathbb{N} \to X$ kraće obeležavamo sa $\{a_n\}$, $< a_n >$ ili (a_n). Koristićemo oznaku $\{a_n\}$.

• Ako je $X = \mathbb{R}$, onda kažemo da je $\{a_n\}$ **realan niz**, a ako je $X = \mathbb{C}$ onda kažemo da je $\{a_n\}$ **kompleksan niz**. Primetimo da svakom kompleksnom nizu

$$\{a_n\} = \{x_n + iy_n\}$$

odgovaraju dva realna niza:

$$\begin{array}{lcl} \{x_n\} & - & \text{niz realnih delova niza } \{a_n\}, \\ \{y_n\} & - & \text{niz imaginarnih delova niza } \{a_n\}. \end{array}$$

Neka je $(X, \preceq)$ (totalno) uređen skup i $\{a_n\} \subset X$ niz u skupu X.

1) Ako postoji $M \in X$, tako da je $a_n \preceq M$, za sve $n \in \mathbb{N}$, onda kažemo da je niz $\{a_n\}$ **ograničen sa gornje strane**.

Element M zovemo **gornja granica niza** (**gornje ograničenje**).

Najmanja gornja granica niza (ako postoji) koji je ograničen sa gornje strane, zove se **supremum niza** (**gornja međa**), u oznaci $\sup a_n$.

2) Ako postoji $m \in X$, tako da je $m \preceq a_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$, onda kažemo da je niz $\{a_n\}$ **ograničen sa donje strane**.

Element m zovemo **donja granica niza** (**donje ograničenje**).

Najveća donja granica niza (ako postoji) ograničenog sa donje strane zove se **infimum niza** (**donja međa**), u oznaci $\inf a_n$.

Ako je niz $\{a_n\}$ ograničen i sa gornje i sa donje strane, kažemo da je **ograničen**.

Ako je $M = \sup a_n$ i $m = \inf a_n$, tada za sve $n \in \mathbb{N}$ važi da je $m \preceq a_n \preceq M$.

Ograničen niz realnih brojeva ima supremum i infimum.

• Realan niz $\{\frac{1}{n}\}$ je ograničen, pri čemu je $M = \sup \frac{1}{n} = 1$ prvi član niza, a $m = \inf \frac{1}{n} = 0$ nije član niza.

• Realan niz $\{n\}$ je ograničen sa donje strane $(m = 1)$, a nije ograničen sa gornje strane.

• Realan niz $\{(-1)^n n\}$ nije ograničen ni sa gornje ni sa donje strane.

Ako za niz $\{a_n\}$ važi:

1) $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \prec a_{n+1}$ - niz je **monotono rastući**,

2) $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_{n+1} \prec a_n$ - niz je **monotono opadajući**,

3) $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \preceq a_{n+1}$ - niz je **monotono neopadajući**,

4) $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_{n+1} \preceq a_n$ - niz je **monotono nerastući**.

• Ako niz $\{a_n\}$ zadovoljava neki od gornja četiri uslova, kažemo da je **monoton**.

• Ako niz zadovoljava uslov 1) ili 2) kažemo da je i **strogo** (**striktno**) **monoton**.

Očigledno je da je monotono rastući niz ujedno i monotono neopadajući, a monotono opadajući niz je ujedno i monotono nerastući.

• Kažemo da je niz $\{a_n\}$ **gotovo monotono rastući**, ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, važi $a_n \prec a_{n+1}$.

• Slično se definišu pojmovi **gotovo monotono opadajućeg**, **gotovo monotono nerastućeg**, **gotovo monotono neopadajućeg** i **gotovo monotonog** niza.

Definicija

Ako je $\{n_k\}$ monotono rastući niz prirodnih brojeva, onda za niz $\{a_{n_k}\}$ kažemo da je **podniz niza** *$\{a_n\}$.*

Na primer podnizovi niza $\{a_n\}$ su nizovi $\{a_{2n}\}$, $\{a_{3n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$, itd.

Definicija

Neka je (X, d) metrički prostor. Za niz $\{a_n\} \subset X$ kažemo da ima **graničnu vrednost** *$a \in X$ i pišemo da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in L(a, \varepsilon)),$$

tj.

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon).$$

Prethodna definicija za prostore $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ je:

• Broj $a \in \mathbb{R}$ je granična vrednost realnog niza $\{a_n\}$ u $\mathbb{R}$ ako i samo ako je ispunjen uslov

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon),$$

odnosno počev od n_0 svi članovi niza nalaze se u $\varepsilon-$okolini tačke a, tj. u otvorenom intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

• Broj $z \in \mathbb{C}$ je granična vrednost kompleksnog niza $\{z_n\}$ u $\mathbb{C}$ ako i samo ako je ispunjen uslov

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon).$$

• Ako niz $\{a_n\}$ ima graničnu vrednost a, tada kažemo da niz **konvergira** ili **teži** ka a, odnosno da je niz $\{a_n\}$ **konvergentan**. Za niz koji nije konvergentan kažemo da **divergira**, odnosno da je **divergentan**.

• Broj n_0 očigledno zavisi od ε i pokazuje koliko se članova niza $\{a_n\}$ nalazi izvan $\varepsilon-$okoline tačke a. Počev od n_0 svi članovi niza se nalaze u otvorenoj lopti $L(a, \varepsilon)$ dok se van nje nalazi najviše $n_0 - 1$ članova niza. Kažemo i da su u svakoj okolini **skoro svi članovi niza**.

Napomena

Ponekad se umesto $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *piše* $a_n \to a$, $n \to \infty$ *ili kraće* $a_n \to a$.

• Ako je $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus N_1)\ a_n = a$, gde je $N_1 \subset \mathbb{N}$ konačan skup, onda kažemo da je niz $\{a_n\}$ **stacionaran**. Kako za stacionaran niz $\{a_n\}$ gde je

$$a_n = a, \quad \text{za} \quad n \in \mathbb{N} \setminus N_1$$

važi

$$d(a_n, a) = d(a, a) = 0, \quad \text{za} \quad n \in \mathbb{N} \setminus N_1$$

to sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

• Slično, ako je $\{a_n\}$ **konstantan** niz, tj. $a_n = a$ za svako $n \in \mathbb{N}$, sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Primer

Za svako $\alpha > 0$ *u* $\mathbb{R}$ *važi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

To je tačno, jer je

$$\left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^\alpha} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha},$$

pa za proizvoljno $\varepsilon > 0$*, postoji*

$$n_0 = \left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}\right] + 1.$$

Tako ako je $\alpha = 1$ *i* $\varepsilon = \frac{1}{10}$*, tada je* $n_0 = 11$*.*

Ako je $\{z_n\}$, gde je $z_n = x_n + y_n i$ kompleksan niz, granična vrednost niza $\{z_n\}$ može se odrediti preko graničnih vrednosti realnih nizova $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$. Naime, važi

Tvrđenje

Kompleksan broj $z = x + yi$ je granična vrednost kompleksnog niza $\{z_n\}$, $z_n = x_n + y_n i$ u $\mathbb{C}$ ako i samo ako je x granična vrednost niza $\{x_n\}$ u $\mathbb{R}$, a y granična vrednost niza $\{y_n\}$ u $\mathbb{R}$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z = x + yi \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

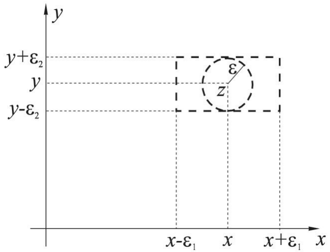
Dokaz. $(\Rightarrow)$ Pretpostavimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z = x + yi$. Neka je $(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1)$, ε_1-okolina tačke x i $(y-\varepsilon_2, y+\varepsilon_2)$, ε_2-okolina tačke y. Uzmimo da je $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Tada

$$z_n \in L(z, \varepsilon), \quad \text{za} \quad n \geq n_0,$$

pa sledi da

$$|x_n - x| < \varepsilon \leq \varepsilon_1 \quad \text{i} \quad |y_n - y| < \varepsilon \leq \varepsilon_2 \quad \text{za} \quad n \geq n_0,$$

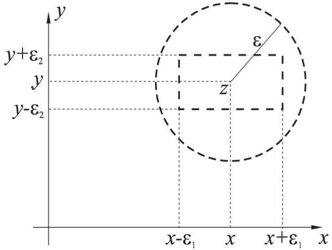
odnosno za nizove $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ važi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.



($\Leftarrow$) Pretpostavimo obrnuto, tj. neka je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, a $L(z,\varepsilon)$ proizvoljna ε okolina tačke z. Upišimo u $L(z,\varepsilon)$ pravougaonik sa stranicama $2\varepsilon_1$ i $2\varepsilon_2$ čije su stranice paralelne koordinatnim osama. Tada je $(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1)$, ε_1-okolina tačke x i $(y-\varepsilon_2, y+\varepsilon_2)$, ε_2-okolina tačke y, pa iz

$$x_n \in (x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1),\ n \geq n_1 \quad \text{i} \quad y_n \in (y-\varepsilon_2, y+\varepsilon_2),\ n \geq n_2$$

sledi da $z_n \in L(z,\varepsilon)$ za $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, odnosno $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.



Napomena

Slično se može dokazati da niz $\{(x_n^1, x_n^2, ..., x_n^m)\} \subset \mathbb{R}^m$ *konvergira ka* $(a^1, a^2, ..., a^m) \in \mathbb{R}^m$ *u* $\mathbb{R}^m$ *ako i samo ako za svako* $i = 1, ..., m$ *niz* $\{x_n^i\}$ *konvergira ka* a^i *u* $\mathbb{R}$, *tj.*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n^1, x_n^2, ..., x_n^m) = (a^1, a^2, ..., a^m) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n^i = a^i,\ i = 1, ..., m.$$

Napomena

Niz $\{a_n\} \subset X$ *konvergira ka* $a \in X$ *u metričkom prostoru* (X, d) *ako i samo ako niz realnih brojeva* $\{d(a_n, a)\}$ *konvergira ka nuli u* $\mathbb{R}$.

Napomena

Ako je k *fiksan prirodan broj, tada ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *sledi takođe da je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

Tvrđenje

Ako niz $\{a_n\} \subset X$ *konvergira u metričkom prostoru* (X, d)*, tada je granična vrednost jednoznačno određena.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dve granične vrednosti a i b. Kako je X metrički prostor, to postoje otvorene lopte $L(a, \varepsilon)$ i $L(b, \varepsilon)$, $\varepsilon = \frac{1}{2}d(a, b)$ koje su disjunktne. Tada postoje prirodni brojevi n_1 i n_2 tako da važi

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_1 \Rightarrow a_n \in L(a, \varepsilon)), \quad (\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_2 \Rightarrow a_n \in L(b, \varepsilon)).$$

Neka je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Tada sledi da je

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in L(a, \varepsilon) \cap L(b, \varepsilon)),$$

što je nemoguće. Dakle, ako niz ima graničnu vrednost, ona je jednoznačno određena. $\square$

Tvrđenje

Konvergentan niz u metričkom prostoru (X, d) je ograničen.

Dokaz. Iz toga da je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, imamo da važi

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in L(a, 1)).$$

Ako je $n_0 = 1$, tada se svi članovi niza nalaze u otvorenoj lopti $L(a, 1)$, pa je $d(a_m, a_n) \leq d(a_m, a) + d(a, a_n) < 1 + 1 = 2$, tj. niz je ograničen. Za $n_0 > 1$, neka je $D = \max\{1, d(a, a_1), d(a, a_2), \ldots, d(a, a_{n_0-1})\}$. Tada je $d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) \leq 2D$, pa je

$$\sup\{d(a_n, a_m) : a_n, a_m \in \{a_n\}\} \leq D + D = 2D.$$

Dakle, niz $\{a_n\}$ je ograničen. $\square$

Definicija

Za tačku $a \in X$ kažemo da je **tačka nagomilavanja niza** $\{a_n\}$ *u metričkom prostoru* (X, d) *ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(n \geq m \wedge a_n \in L(a, \varepsilon)).$$

• Dakle, ako je a tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$, tada svaka $\varepsilon-$okolina tačke a sadrži bar jedan član datog niza.

Obrnuto nije tačno. Na primer, ako posmatramo realan niz $\{a_n\}$ gde je $a_n = \frac{1}{n}$, tada $L(1, \varepsilon)$ sadrži prvi član niza $a_1 = 1$, ali 1 nije tačka nagomilavanja datog niza u $\mathbb{R}$.

- Tačke nagomilavanja niza $\{(-1)^n\}$ u $\mathbb{R}$ su očigledno -1 i 1 (ograničen niz ne mora da bude konvergentan!).

- Tačka nagomilavanja niza $\{n^{(-1)^n}\}$ u $\mathbb{R}$ je 0 (nije ograničen i nije konvergentan!)

- Niz $\{n\}$ nema ni jednu tačku nagomilavanja u $\mathbb{R}$.

Dakle, niz može da nema ni jednu, da ima jednu ili više tačaka nagomilavanja, pa i beskonačno mnogo.

Tvrđenje

Za svaku okolinu V tačke nagomilavanja a niza $\{a_n\}$, postoji beskonačan skup $M \subset \mathbb{N}$ tako da je $(\forall m \in M)\ a_m \in V$.

Dokaz. Dokažimo da je skup $M = \{n \in \mathbb{N} : a_m \in V\}$ beskonačan. On je neprazan jer iz same definicije tačke nagomilavanja sledi da postoji prirodan broj n takav da $a_n \in V$.
Pretpostavimo da je M konačan skup. Tada postoji $n_1 = \max\{n : n \in M\}$. Ako uzmemo da je

$$m = n_1 + 1,$$

tada postoji $n \geq m > n_1$ tako da $a_n \in V$, pa je $n \in M$ tj. $n \leq n_1$ što je kontradikcija. Dakle, M je beskonačan. □

• Iz definicije tačke nagomilavanja niza $\{a_n\}$ sledi da je tačka nagomilavanja niza adherentna tačka skupa $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, ali ne mora da bude tačka nagomilavanja toga skupa.

Npr. u slučaju niza čiji je opšti član $a_n = (-1)^n$ tačke 1 i -1 su tačke nagomilavanja niza u $\mathbb{R}$, dok je skup $\{1, -1\}$ konačan i nema tačke nagomilavanja.

Napomena

Ako niz $\{a_n\} \subset X$ u metričkom prostoru X konvergira ka a, onda je a jedina tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$.

• Tačka a je tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ ako i samo ako postoji podniz $\{a_{n_k}\}$ niza $\{a_n\}$ koji konvergira ka a.

• U metričkom prostoru (X, d), skup $A \subset X$ je zatvoren ako i samo ako za svaki niz $\{a_n\}$ elemenata iz A koji konvergira ka a sledi da $a \in A$.

Tvrđenje

Neka je (X, d) metrički prostor. Skup svih tačaka nagomilavanja niza $\{a_n\} \subset X$ je zatvoren u (X, d).

• Pretpostavimo da je skup A tačaka nagomilavanja realnog niza $\{a_n\}$ neprazan i ograničen. Kako je skup tačaka nagomilavanja zatvoren, to sledi da skup A ima najveći i najmanji element, tj. najveću i najmanju tačku nagomilavanja. Tada

a) najveću tačku nagomilavanja zovemo **limes superior** datog niza i označavamo je sa $\limsup\ a_n$ ili $\overline{\lim}\ a_n$.

b) najmanju tačku nagomilavanja zovemo **limes inferior** datog niza i označavamo je sa $\liminf\ a_n$ ili $\underline{\lim}\ a_n$.

• ako su $\liminf\ a_n$ i $\limsup\ a_n$ različiti, niz ne konvergira, ako konvergira jednaki su.

Divergencija realnih nizova

Definicija

Za niz $\{a_n\}$ *kažemo da* **teži** ∞ *kada* $n \to \infty$, *tj.* $a_n \to \infty$ *kada* $n \to \infty$ *ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n > K).$$

Za niz $\{a_n\}$ *kažemo da* **teži** $-\infty$ *kada* $n \to \infty$, *tj.* $a_n \to -\infty$ *kada* $n \to \infty$ *ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n < K).$$

Ako niz $\{a_n\}$ *teži* $+\infty$ *ili* $-\infty$ *kažemo da je* **divergentan u užem smislu**. *Za niz koji je divergentan, ali ne u užem smislu, kažemo da je* **divergentan u širem smislu**.

Napomena

Umesto $a_n \to \infty$ (odnosno $a_n \to -\infty$) kada $n \to \infty$ često ćemo pisati $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (odnosno $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

• Niz $\{(-1)^n\}$ je očigledno divergentan u širem smislu. (Ovaj niz ima dve tačke nagomilavanja.)

• Niz $\{n^{(-1)^n}\}$ divergira u širem smislu. (Ovaj niz ima samo jednu tačku nagomilavanja i to realan broj 0.)

• Niz $\{(-1)^n n\}$ je divergentan u širem smislu. (Ovaj niz nema ni jednu tačku nagomilavanja.)

• Niz $\{\sqrt{n}\}$ teži ka ∞ kada $n \to \infty$, a niz $\{-n^2\}$ teži ka $-\infty$ kada $n \to \infty$.

Osnovne osobine realnih konvergentnih nizova

1° *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$*, tada je* a *jedina tačka nagomilavanja niza* $\{a_n\}$.

2° *Konvergentan niz* $\{a_n\}$ *ima jedinstvenu graničnu vrednost.*

3° *Konvergentan niz je ograničen.*

4° *Ako je realan niz* $\{a_n\}$ *ograničen i ima jednu tačku nagomilavanja, tada je on konvergentan i njegova granična vrednost je tačka nagomilavanja.*

Naglasimo da ograničen niz sa samo jednom tačkom nagomilavanja **ne mora** da bude konvergentan u prostoru (X, d). Na primer, u prostoru $(\mathbb{Q}, |\quad|)$, posmatrajmo niz $\{a_n\}$ dat sa

$$\begin{aligned} a_{2n} &= 1, \\ a_{an-1} &\in \left(\sqrt{5}-\tfrac{1}{n}, \sqrt{5}+\tfrac{1}{n}\right) \cap \mathbb{Q} = \left(\sqrt{5}-\tfrac{1}{n}, \sqrt{5}+\tfrac{1}{n}\right)_{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

• $a_n \in (-50, 50)$ (ograničen je);
• 1 je jedina tačka nagomilavanja u $\mathbb{Q}$, u $\mathbb{R}$ ima dve tačke nagomilavanja: 1 i $\sqrt{5}$;
• $a_n \nrightarrow 1$, $n \to \infty$ jer se izvan otvorene lopte $L\left(1, \frac{1}{n}\right)_Q = \left(1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)_{\mathbb{Q}}$ nalaze svi neparni članovi niza, dakle beskonačno mnogo.

5° *Ako niz* $\{a_n\}$ *konvergira ka broju* a*, tada je i niz* $\{|a_n|\}$ *konvergentan i konvergira ka broju* $|a|$*, tj.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|.$$

• Obrnuto nije tačno. Na primer, niz $\{(-1)^n\}$ je divergentan, a niz $\{|(-1)^n|\}$, tj. $\{1\}$ je konvergentan (konvergira ka broju 1).

6° *Ako niz* $\{|a_n|\}$ *konvergira ka broju* 0*, tada je i niz* $\{a_n\}$ *konvergentan i konvergira ka broju* 0*, tj.*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

7° *Ako su nizovi* $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$ *takvi da je* $a_n \leq b_n$ *za* $n \geq k$ *i ako je* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$*,* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$*, tada je* $a \leq b$*.*

8° *Ako su nizovi* $\{a_n\}, \{b_n\}$ *i* $\{c_n\}$ *takvi da je* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *za* $n \geq k$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, *onda je i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Primer

Kako je

$$\frac{n}{n^3+n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3+n} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3+i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3+1} = \frac{n}{n^3+1},$$

to prema osobini **8°** *sledi da je*

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3+n} \leq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3+i} \right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3+1} = 0,$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3+1} + \frac{1}{n^3+2} + \ldots + \frac{1}{n^3+n} \right) = 0.$$

9° Neka je $\{b_n\}$ niz prirodnih brojeva za koji važi da je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, tada je i $\lim\limits_{n\to\infty} a_{b_n} = a$.

10° Ako niz $\{a_n\}$ konvergira ka a, tada i svaki podniz $\{a_{n_k}\}$ niza $\{a_n\}$ konvergira ka a.

Napomena

Poslednje dve osobine važe i u proizvoljnom metričkom prostoru (X, d).

Napomena

Iz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *i* $a_n < b_n$ *za* $n \geq k$, *sledi* $a \leq b$, *ali ne uvek i* $a < b$, *što se npr. videti ako se uzme da je* $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ *i* $b_n = 1$. *Tada je* $a_n < b_n$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

Računske operacije sa graničnim vrednostima i primeri

Tvrđenje (deo tvrđenja pod a) važi i u $\mathbb{R}$ i u $\mathbb{C}$)

a) *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *tada je*

1°) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b,$

2°) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b,$

3°) $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a,$

4°) *za* $b_n \neq 0$ *i* $b \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b},$

5°) *za* $b_n \neq 0$ *i* $b \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}.$

Dokaz. Dokazaćemo deo tvrđenja **a)** 1°).
Iz konvergencije nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ sledi da za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoje prirodni brojevi $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tako da je

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq n_1 \quad \text{i} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq n_2.$$

Birajući

$$n_0 = \max\{n_1, n_2\},$$

imamo da je

$$\begin{aligned} |(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| &= |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \quad n \geq n_0. \end{aligned}$$

Tvrđenje (deo tvrđenja pod b), c), d) važi u $\mathbb{R}$)

b) *Ako* $a_n \to \infty$ *i* $b_n \to b$ $(b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$, *tada*

1°) $(a_n + b_n) \to \infty$,

2°) $(a_n \cdot b_n) \to \infty$, *za* $b > 0$, *odnosno* $(a_n \cdot b_n) \to -\infty$, *za* $b < 0$.

c) *Ako* $a_n \to -\infty$ *i* $b_n \to b$ $(b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$, *tada*

1°) $(a_n + b_n) \to -\infty$,

2°) $(a_n \cdot b_n) \to -\infty$ *za* $b > 0$, *odnosno* $(a_n \cdot b_n) \to \infty$ *za* $b < 0$.

d) *Neka je* $\{a_n\}$ *niz za koji je* $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. *Tada je*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Princip monotonije

Tvrđenje

Svaki monotono neopadajući (rastući) niz koji je ograničen sa gornje strane konvergira svome supremumu, a svaki monotono nerastući (opadajući) niz ograničen sa donje strane konvergira svome infimumu.

Dokaz. Pretpostavimo na primer, da je niz $\{a_n\}$ ograničen sa gornje strane i monotono neopadajući. Neka je

$$(M-\varepsilon, M+\varepsilon), \quad M = \sup a_n,$$

$\varepsilon-$okolina tačke M. Tada postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da

$$M-\varepsilon < a_{n_1} \leq M.$$

Zaista, ako ne bi postojao takav prirodan broj n_1, sledilo bi da za sve članove niza važi

$$a_n \leq M - \varepsilon,$$

pa bi broj

$$M - \varepsilon < M$$

bio gornje ograničenje niza, koje je manja od njegovog supremuma M što je nemoguće.

S obzirom da je $\{a_n\}$ monotono neopadajući niz, važi

$$M - \varepsilon < a_{n_1} \leq a_{n_1+1} \leq a_{n_1+2} \leq \ldots \leq M < M + \varepsilon,$$

tj. $$a_n \in (M - \varepsilon, M + \varepsilon) \text{ za } n \geq n_1,$$
pa je M granična vrednost niza $\{a_n\}$. Slično se dokazuje preostali slučaj. $\square$

Posledica

Svaki gotovo monoton i ograničen niz je konvergentan.

Broj e

Posmatrajmo nizove $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, gde je

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

1) Niz $\{a_n\}$ je monotono rastući , jer

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{(\frac{n+2}{n+1})^{n+1}}{(\frac{n+1}{n})^n} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

i koristeći Bernulijevu nejednakost $(1+h)^n > 1 + nh$, $h > -1$, $h \neq 0$, $n > 1$ dobijamo da je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = 1,$$

tj. $a_{n+1} > a_n$.

2) Niz $\{b_n\}$ je monotono opadajući, jer iz

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}{(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} > \left(1+\frac{1}{n(n+2)} \cdot (n+2)\right) \cdot \frac{n}{n+1} = 1,$$

sledi da je $b_{n+1} < b_n$.

Kako je $a_n < b_n$, to je $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$, tj. nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ su ograničeni, pa su zbog njihove monotonosti oba niza konvergentna.

Neka je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e.$

Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = e$, pa je

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \tag{1}$$

jer je e supremum za niz $\{a_n\}$, a infimum za niz $\{b_n\}$. Svi članovi nizova a_n i b_n su racionalni brojevi. Broj e je iracionalan, pa u (1) važi stroga nejednakost.

Napomenimo da je $e \approx 2,718281828...$ transcedentan broj, odnosno nije nula nijednog polinoma sa celobrojnim koeficijentima. Transcedentnost broja e dokazao je Ermit[1] 1873. godine.

[1]Ermit, Č. (Charles Hermite, 1822-1901) francuski matematičar

Važe osobine:

1) *Ako niz* $\{a_n\}$, $a_n > 0$ *konvergira ka broju* $a > 0$, *tada je i niz* $\{\ln a_n\}$, *konvergentan i konvergira ka broju* $\ln a$.

2) *Ako niz* $\{a_n\}$ *konvergira ka* a, *tada je i niz* $\{e^{a_n}\}$, *konvergentan i konvergira ka* e^a.

3) *Ako niz* $\{a_n\}$, $a_n \geq 0$ *konvergira ka broju* a, *tada je i niz* $\{\sqrt[k]{a_n}\}$, $k \in \mathbb{N}$, *konvergentan i konvergira ka broju* $\sqrt[k]{a}$.

4) *Ako je* $\{a_n\}$ *niz takav da* $a_n \to \infty$, *tada je*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

5) *Ako je* $\{a_n\}$ *niz takav da* $a_n \to -\infty$, *tada je*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Primeri nekih graničnih vrednosti nizova su:

Primer

$$1)\quad a>0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1;$$

$$2)\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1;$$

$$3)\quad \lim_{n\to\infty} q^n=\begin{cases} 0, & |q|<1 \\ 1, & q=1 \\ \infty, & q>1 \end{cases};$$

$$4)\quad \alpha\in\mathbb{R}, a>1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{a^n}=0;$$

$$5)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

Niz umetnutih intervala. Bolcano-Vajerštrasova teorema

Pod **nizom umetnutih intervala** podrazumeva se niz zatvorenih intervala $\{[a_n, b_n]\}$ za koji važi:

1) $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$
(svaki sledeći nalazi se u prethodnom intervalu).

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ (dužina intervala teži ka nuli).

Tvrđenje

Neka je dat niz zatvorenih intervala $\{[a_n, b_n]\}$ *za koji važi* 1).
Tada je

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

gde je

$$a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\},$$

$$b = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ukoliko je $\{[a_n, b_n]\}$ *niz umetnutih intervala, tj. važi i* 2), *tada postoji jedan i samo jedan broj koji pripada svim intervalima.*

Dokaz. Posmatrajmo nizove $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$. Tada očigledno važi:

- niz $\{a_n\}$ je monotono neopadajući,

- niz $\{b_n\}$ je monotono nerastući,

- $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$, $n \in \mathbb{N}$, odnosno nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ su ograničeni.

Dakle, nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ su konvergentni, prema principu monotonije, i

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

i

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Takođe je $a \leq b$ (osobina $\mathbf{7}^\circ$).

Iz

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = b - a = 0$$

sledi da je $a = b$. Kako za svako n važi

$$a_n \leq a = b \leq b_n$$

to je a jedina zajednička tačka za sve intervale.

$\square$

Ovu osobinu nema skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. Između brojeva

$$\sqrt{2} - \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad \sqrt{2} - \frac{1}{n+1}$$

uzmimo racionalan broj a_n, a između brojeva

$$\sqrt{2} + \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad \sqrt{2} + \frac{1}{n+1}$$

racionalan broj b_n. Dobijamo niz zatvorenih intervala $\{[a_n, b_n]\}$ pri čemu
1) $a_n \in \mathbb{Q}, \; b_n \in \mathbb{Q}$,

2) $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$,

3) $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$.

To bi bio niz umetnutih intervala u skupu $\mathbb{R}$. U skupu $\mathbb{R}$ dati niz ima jednu i samo jednu zajedničku tačku i to $\sqrt{2}$.

Označimo sa $[a, b]_{\mathbb{Q}} = [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Za niz $\{[a_n, b_n]_{\mathbb{Q}}\}$ važi:

1) $[a_1, b_1]_{\mathbb{Q}} \supset [a_2, b_2]_{\mathbb{Q}} \supset \ldots \supset [a_n, b_n]_{\mathbb{Q}} \supset \ldots,$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$

Ne postoji racionalan broj q, tako da za svako $n \in \mathbb{N}$, $q \in [a_n, b_n]_{\mathbb{Q}}$, jer bi tada niz $\{[a_n, b_n]\}$ imao dve zajedničke tačke q i $\sqrt{2}$, što protivureči dokazu prethodne teoreme.

Dokažimo Bolcano[2]-Vajerštrasovu[3] teoremu

[2]Bolcano, B. (Bernhard Bolzano, 1781-1848) - češki matematičar i filozof
[3]Vajerštras, K. (Karl Weierstrass, 1815-1897) - nemački matematičar

Tvrđenje

Svaki ograničen niz ima bar jednu tačku nagomilavanja.

Dokaz. Neka je niz $\{a_n\}$ ograničen i

$$m = \inf a_n \leq a_n \leq M = \sup a_n.$$

Ako je $m = M$, tada je $a_n = m$, odnosno niz $\{a_n\}$ je konstantan, pa on ima jedinstvenu tačku nagomilavanja - graničnu vrednost.

Pretpostavimo da je $m \neq M$. Podelimo interval $[m, M]$ na dva jednaka dela. U bar jednom delu, označimo taj interval sa $[m_1, M_1]$, ima beskonačno mnogo članova niza i to u smislu da je skup

$$N_1 = \{n \in \mathbb{N} : a_n \in [m_1, M_1]\}$$

beskonačan.

Podelimo $[m_1, M_1]$ na dva jednaka dela. Sa $[m_2, M_2]$ označavamo onaj od podintervala intervala $[m_1, M_1]$ koji sadrži beskonačno mnogo članova niza.

Nastavljajući dolazimo do niza $\{[m_n, M_n]\}$ zatvorenih intervala za koji važi:

1) $[m_n, M_n]$ sadrži beskonačno mnogo članova niza,

2) $[m_1, M_1] \supset [m_2, M_2] \supset \dots \supset [m_n, M_n] \supset \dots$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(M_n - m_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{M-m}{2^n} = 0.$

Dakle, postoji jedinstvena tačka a koja pripada svim zatvorenim intervalima. Dokažimo da je a tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$. Iz

$$\lim_{n\to\infty} m_n = a = \lim_{n\to\infty} M_n \quad \text{i} \quad m_n \leq a \leq M_n,$$

sledi da za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoje $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tako da je

$$m_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \quad \text{i} \quad n \geq n_1$$

i

$$M_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \quad \text{i} \quad n \geq n_2,$$

odnosno

$$[m_n, M_n] \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \quad \text{za} \quad n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\},$$

pa je a tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ jer $[m_n, M_n]$ sadrži beskonačno mnogo članova datog niza. $\square$

Posledica

Iz svakog ograničenog niza može se izdvojiti konvergentan podniz.

Dokaz. Neka je $\{a_n\}$ ograničen niz. Postoji bar jedna tačka nagomilavanja a tog niza. Tada postoji monotono rastući niz prirodnih brojeva $\{n_k\}$ tako da za svako $k \in \mathbb{N}$ imamo da $a_{n_k} \in L(a, \frac{1}{k})$. Podniz $\{a_{n_k}\}$ niza $\{a_n\}$, kako je konstruisan konvergira ka tački a. $\square$

Napomena

Slična osobina važi i za prostor $\mathbb{R}^m$, tj. iz svakog ograničenog niza $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^m$ može se izdvojiti konvergentan podniz.

Posledica

Svaki ograničen niz $\{a_n\}$ koji ima samo jednu tačku nagomilavanja, je konvergentan.

Dokaz. Neka je $\{a_n\}$ ograničen niz, tj.

$$m = \inf a_n \leq a_n \leq M = \sup a_n$$

i neka je a jedina tačka nagomilavanja niza a_n.
Dokažimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pretpostavimo suprotno, postoji okolina $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ izvan koje ima beskonačno mnogo članova niza. Ovi članovi niza izvan $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, obrazuju novi niz $\{a_{n_k}\}$ koji je podniz datog niza. Ovaj niz je ograničen, pa ima jednu tačku nagomilavanja b. Očigledno je da je b ujedno i tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ i da $b \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Dakle, niz $\{a_n\}$ ima dve tačke nagomilavanja, što je suprotno pretpostavci. Znači $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. □

Kompletni metrički prostori

Definicija

Za niz $\{a_n\} \subset X$ *kažemo da je* **Košijev[4] niz** *u metričkom prostoru* (X, d) *ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \wedge m \geq n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon),$$

odnosno u ekvivalentnom obliku

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow d(a_{n+p}, a_n) < \varepsilon).$$

[4] Koši, L. A. (Louis Augustin Cauchy, 1789-1857) - francuski matematičar

Tvrđenje

Ako je niz $\{a_n\} \subset X$ konvergentan u metričkom prostoru (X, d), tada je $\{a_n\}$ Košijev niz u (X, d).

Dokaz. Ako je $a \in X$ granična vrednost niza $\{a_n\}$, tada za svako $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $n \in \mathbb{N}$, za koje je $n \geq n_0$, sledi

$$d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Takođe za svaka dva prirodna broja $m, n \geq n_0$ važi

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pa je niz $\{a_n\}$ Košijev. $\square$

Tvrđenje

Neka je $\{a_n\}$ Košijev niz u metričkom prostoru (X, d). Ako neki podniz $\{a_{n_k}\}$ niza $\{a_n\}$ konvergira prema $a \in X$ u (X, d), tada i niz $\{a_n\}$ konvergira ka a u (X, d).

Dokaz. Neka je dato proizvoljno $\varepsilon > 0$. Tada po pretpostavci postoji takav $n_0 \in \mathbb{N}$ da iz $m, n \geq n_0$ sledi

$$d(a_m, a_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kako je $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$, postoji $k \in \mathbb{N}$ da je $n_k \geq n_0$ i da je

$$d(a_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ako je, dakle, $n \geq n_0$, onda je

$$d(a_n, a) \leq d(a_n, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pa je teorema dokazana. $\square$

Tvrđenje

Svaki Košijev niz $\{a_n\}$ u metričkom prostoru (X, d) je ograničen u datom prostoru.

Dokaz. Za $\varepsilon = 1$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za $n \geq n_0$ sledi $d(a_n, a_{n_0}) < 1$.
Dakle, $\{a_n : n \geq n_0\} \subset L(a_{n_0}, 1)$.
• Ako je $n_0 = 1$ svi članovi niza su u otvorenoj lopti $L(a_{n_0}, 1)$ pa je niz $\{a_n\}$ ograničen.
• Za slučaj da je $n_0 > 1$ uzmimo da je

$$D = \max\{1, d(a_{n_0}, a_1), d(a_{n_0}, a_2), ..., d(a_{n_0}, a_{n_0-1})\}.$$

Tada je

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a_{n_0}) + d(a_{n_0}, a_m) < 2D,$$

odnosno niz $\{a_n\}$ je ograničen. $\square$

U svakom metričkom prostoru Košijev niz ne mora konvergirati. Na primer, posmatrajmo niz $\{a_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$ dat sa

$$a_n = \frac{n}{n+1}.$$

S obzirom da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, to je $\{a_n\}$ konvergentan niz u $\mathbb{R}$, pa je u $\mathbb{R}$ i Košijev, odakle sledi da je Košijev i u $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, ali konvergira ka $1 \notin \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Dakle, svaki Košijev niz prostora $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ne konvergira u tom prostoru.

Definicija

Metrički prostor (X, d) je **kompletan** *ukoliko u njemu svaki Košijev niz konvergira.*

Tvrđenje

Metrički prostor $\mathbb{R}$ *je kompletan.*

Dokaz. Neka je $\{a_n\}$ Košijev niz. Tada je on u metričkom prostoru i ograničen, pa ćemo dokazati da on ima samo jednu tačku nagomilavanja, a odatle će slediti da je konvergentan.

Kako je $\{a_n\}$ ograničen niz, to prema Bolcano-Vajerštrasovoj teoremi sledi da niz $\{a_n\}$ ima bar jednu tačku nagomilavanja a.

Dokažimo da je a jedina tačka nagomilavanja. Pretpostavimo da je $b \neq a$ još jedna tačka nagomilavanja. Uzmimo da je

$$\varepsilon = \frac{1}{3}|b - a|.$$

Neka su

$$a_n, n \in N' \text{ svi članovi niza za koje važi } a_n \in L(a,\varepsilon),$$

$$a_m, m \in N'' \text{ svi članovi niza za koje važi } a_m \in L(b,\varepsilon).$$

S obzirom da su a i b tačke nagomilavanja, sledi da su N' i N'' beskonačni podskupovi skupa $\mathbb{N}$. Tada je

$$|a_n - a_m| > \varepsilon,$$

pa sledi da niz $\{a_n\}$ nije Košijev. Kontradikcija! Dakle, niz $\{a_n\}$ ima samo jednu tačku nagomilavanja a. $\square$

- Teorema važi i za metrički prostor $\mathbb{R}^m$, tj. za svako $m \in \mathbb{N}$ metrički prostor $\mathbb{R}^m$ je kompletan.
- Takođe i metrički prostor $\mathbb{C}$ je kompletan.

Primer

Niz $\{a_n\}$, *gde je*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

divergira u $\mathbb{R}$.

Da bismo to dokazali, pokazaćemo da niz nije Košijev. Kako je

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

to sledi da se $|a_{2n} - a_n|$ *ne može ni za jedno n učiniti manje od* $\frac{1}{2}$, *odnosno dati niz nije Košijev, pa samim tim sledi da je niz* $\{a_n\}$ *divergentan.*

Potprostor kompletnog prostora ne mora biti kompletan. Tako prostor $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva nije kompletan, jer za niz $\{a_n\} \subset \mathbb{Q}$,

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

važi da

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e \notin \mathbb{Q}.$$

Prostor $\mathbb{Q}$ se može kompletirati, tj. proširiti do najmanjeg prostora koji je kompletan. Tako možemo doći do skupa $\mathbb{R}$ realnih brojeva.

Važi sledeća teorema

Tvrđenje

Zatvoren potprostor kompletnog metričkog prostora je kompletan.

Nepokretna tačka, teorema Banaha

Definicija

Ako je f preslikavanje skupa X u samog sebe, tada za tačku $x \in X$ kažemo da je **fiksna** (**nepokretna**) *tačka za preslikavanje f ako je $f(x) = x$.*

Definicija

Za preslikavanje $f : X \to Y$ metričkog prostora (X, d_1) u metrički prostor (Y, d_2) kažemo da vrši **kontrakciju** *ako postoji realan broj $\lambda \in (0, 1)$ tako da za svako $x_1, x_2 \in X$ važi*

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_1(x_1, x_2).$$

Broj λ zovemo **koeficijent kontrakcije**, *a preslikavanje f* **kontrakcija**.

- Važi **teorema Banaha**[5] o fiksnoj tački:

Tvrđenje

Ako je (X, d) *kompletan metrički prostor i* $f : X \to X$ *kontrakcija sa koeficijentom* λ, *tada postoji jedna i samo jedna fiksna tačka* $a \in X$ *preslikavanja* f *i važi da je*

$$d(a, a_n) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(a_0, a_1),$$

gde je $a_0 \in X$ *proizvoljna tačka, a* $a_i = f(a_{i-1})$, $i \in \mathbb{N}$.

(teorema daje i ocenu greške aproksimacije, kada se tačka a aproksimira članom a_n formiranog niza)

[5] Banah, Š. (Stefan Banach, 1892-1945) - poljski matematičar

Napomena

Ako je (X, d) kompletan metrički prostor i za preslikavanje $f : X \to X$ važi

$$d(f(x_1), f(x_2)) < d(x_1, x_2), \quad x_1 \neq x_2,$$

onda u opštem slučaju ne važi da za preslikavanje f postoji fiksna tačka.

Dokaz. Definišimo preslikavanje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.
Za $x \neq y$ važi da je

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 + y^2}| = \frac{|x - y||x + y|}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2}}$$

$$< |x - y|\frac{|x + y|}{|x| + |y|} \leq |x - y|\frac{|x| + |y|}{|x| + |y|} = |x - y|,$$

tj. $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, dok preslikavanje nema fiksnu tačku.

Napomena

Primetimo da je uslov kompletnosti prostora neophodan!

Zaista, u tu svrhu posmatrajmo prostor $X = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \setminus \{0\}$ i funkciju $f(x) = x^2$. Pokažimo da je f kontrakcija, da prostor X nije kompletan i da funkcija nema nepokretnu tačku u X.

$$d(f(x), f(y)) = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \leq \frac{2}{3}|x - y| = \frac{2}{3}d(x, y),$$

za sve $x, y \in X$. Jasno, zbog $f(x) = x^2 = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$, funkcija f nema u X nepokretnu tačku.

Ako bi (X, d) bio kompletan prostor, na osnovu Banahove teoreme, sledilo bi da funkcija $f : X \to X$ ima nepokretnu tačku, što je kontradikcija.

Primer

Dokazati pomoću Banahove teoreme o fiksnoj tački da jednačina $x^3 - x - 1 = 0$ *ima jedinstveno rešenje nad intervalom* $[1, 2]$.

Rešenje. Početna jednačina ekvivalentna je sa $x = \sqrt[3]{x+1}$.

Pokažimo da funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ ima nepokretnu tačku, odnosno da jednačina $f(x) = x$ ima rešenje u intervalu $[1, 2]$.

Kako je f monotono rastuća funkcija, to za $x \in [1, 2]$

$$f(x) \in [f(1), f(2)] = [\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}] \subset [1, 2],$$

pa $f : [1, 2] \to [1, 2]$.

Skup $[1, 2]$ je zatvoren metrički potprostor kompletnog prostora $\mathbb{R}$, pa je i sam kompletan.

Pokažimo da je f kontrakcija. Neka su $x, y \in [1, 2]$ proizvoljni elementi.

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \left|\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{y+1}\right|$$

$$= \left|\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{y+1}\right) \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{y+1} + \sqrt[3]{(y+1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{y+1} + \sqrt[3]{(y+1)^2}}\right|$$

$$= \frac{|x-y|}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{y+1} + \sqrt[3]{(y+1)^2}}$$

$$\leq \frac{|x-y|}{\sqrt[3]{(1+1)^2} + \sqrt[3]{1+1}\sqrt[3]{1+1} + \sqrt[3]{(1+1)^2}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}|x-y|$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}d(x,y)$$

Kako su ispunjeni uslovi Banahove teoreme, to postoji jedinstveno rešenje jednačine $x = \sqrt[3]{x+1}$ u intervalu $[1,2]$.

Definicija

Neka su dati metrički prostori (X, d_X) *i* (Y, d_Y). *Neka je* $a \in X$ *tačka nagomilavanja za oblast definisanosti* $D \subset X$ *funkcije* $f : D \to Y$. *Za* $A \in Y$ *kažemo da je* **granična vrednost funkcije** f **u tački** a *ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ f(L(a, \delta) \cap (D \setminus \{a\})) \subset L(A, \varepsilon),$$

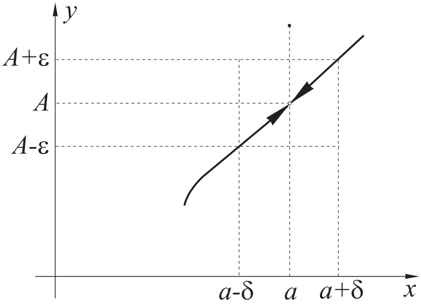
tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \setminus \{a\})(d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(A, f(x)) < \varepsilon).$$

Pišemo da je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, *ili* $f(x) \to A$, $x \to a$.

Dakle, za svaku $\varepsilon-$okolinu tačke A, postoji $\delta-$okolina tačke a koja se sva, izuzev tačke a, preslikava u $\varepsilon-$okolinu tačke A.

Primetimo da u tački a funkcija ne mora da bude definisana, a ako je i definisana, A ne mora da bude $f(a)$, jer u definiciji granične vrednosti isključena je tačka a iz okoline $L(a,\delta)$.



Napomena

Kod što kod nizova n_0 *zavisi od* ε, *tako i ovde* δ *zavisi od* ε. *Kako se* ε *menja tako se i* δ *menja.*

Napomena

Kao i kod nizova, kada je reč o realnim funkcijama ili funkcijama jedne ili više realnih promenljivih, uvek ćemo posmatrati metrički prostor $\mathbb{R}$, *odnosno* $\mathbb{R}^n$ *i to posebno nećemo naglašavati.*

• Za graničnu vrednost realne funkcije jedne realne promenljive, tj. gde je $X = Y = \mathbb{R}$, definiciju $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ možemo zapisati u obliku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \setminus \{a\})(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

• Za graničnu vrednost realne funkcije n realnih promenljivih, tj. gde je $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$, definiciju $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ možemo zapisati u obliku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \setminus \{a\} \subset \mathbb{R}^n)(d(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon),$$

gde je $d(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2}$.

Važi **Hajneova**[6] **teorema** (veza granične vrednosti funkcije i granične vrednosti niza)

Tvrđenje

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i neka je data funkcija $f : D \to Y$, $D \subset X$. Tada $f(x) \to A \in Y$, $x \to a \in X$ ako i samo ako za svaki niz $\{x_n\} \subset D \setminus \{a\}$ koji konvergira ka a, sledi da niz $\{f(x_n)\}$, konvergira ka A.

[6] Hajne, E. (Eduard Heine, 1821-1881) - nemački matematičar

Dokaz. ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da iz $x \to a$, imamo da $f(x) \to A$. Tada važi:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \setminus \{a\})(d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(A, f(x)) < \varepsilon).$$

Ako niz $\{x_n\} \subset D \setminus \{a\}$ teži ka a, tada

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ d_X(a, x_n) < \delta.$$

Tada za sve $n \geq n_0$ važi da je

$$d_Y(A, f(x_n)) < \varepsilon,$$

pa sledi da niz $\{f(x_n)\}$ teži ka A.

($\Leftarrow$) Dokažimo obrnut stav. Pretpostavimo da $f(x)$ ne teži ka A, kada $x \to a$. Tada

$$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in D \setminus \{a\})(x_n \in L\left(a, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow f(x_n) \notin L(A, \varepsilon)).$$

S obzirom da niz $\{x_n\} \in D \setminus \{a\}$, teži ka a to prema pretpostavci sledi da i niz $\{f(x_n)\}$, teži ka A, što je nemoguće po konstrukciji samog niza, jer otvorena lopta $L(A, \varepsilon)$ ne sadrži ni jedan član niza $\{f(x_n)\}$. $\square$

Na osnovu Hajneove teoreme se može dokazati kao i kod granične vrednosti nizova, da ako funkcija $f : D \to Y$ ima graničnu vrednost A u tački a, da je ta granična vrednost jednoznačno određena.

Primeri:

1. Ako je $f : D \to Y$ konstantna funkcija, tj. $f(x) = c$, za svako $x \in D$, tada je

$$\lim_{x \to a} f(x) = c.$$

2.

$$\lim_{x\to 1}(2x+1)=3,$$

jer za proizvoljno $\varepsilon>0$, birajući $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}$, imamo da je

$$|(2x+1)-3|=|2x-2|=2|x-1|<\varepsilon\Leftrightarrow|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

U ovom primeru imamo da je funkcija definisana u tački a, tj. $f(1)=3$, i postoji $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=3$ i ta granična vrednost je jednaka baš vrednosti funkcije u toj tački.

3. Za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

je

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x+1) = 3.$$

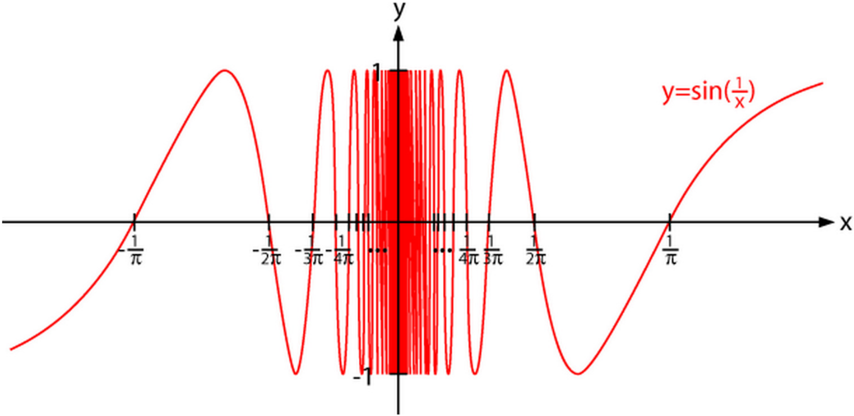
Dakle,

- funkcija je definisana u tački 1, tj. $f(1) = 0$;
- postoji $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$;
- granična vrednost nije jednaka vrednosti funkcije u datoj tački.

4. Funkcija
$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$
nije definisana u tački 0, a ima graničnu vrednost. Zaista, kako za proizvoljno $\varepsilon > 0$, birajući $\delta = \varepsilon$, imamo
$$\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| = |x - 0| < \varepsilon,$$
to važi da je
$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

5. Neka je

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}.$$



Funkcija nije definisana za $x = 0$.
Ne postoji ni $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$. Ako bi A bila granična vrednost funkcije f u tački 0, tada

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

S obzirom da za svako $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ niz $\{a_n(\alpha)\}$, gde je

$$a_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 2n\pi}$$

teži ka nuli i

$$f(a_n(\alpha)) = \sin(\alpha + 2n\pi) = \sin\alpha,$$

pa bi u zavisnosti od α imali različite granične vrednosti, što je nemoguće, jer je granična vrednost jedinstveno određena.

6. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Tada je funkcija f definisana za $x = 0$, $f(0) = 1$, ali ne postoji $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$.

7. Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

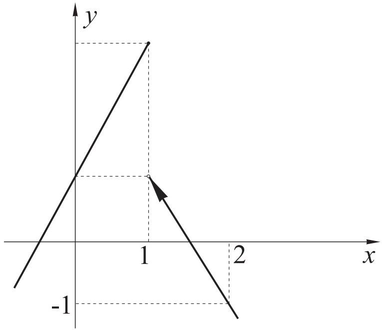
nema graničnu vrednost u tački $O(0,0)$. Posmatrajmo niz

$$a_n(k) = \left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n}\right).$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n(k) = (0,0)$, a $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n(k))$ ne postoji jer je

$$f(a_n(k)) = \frac{k}{1+k^2}.$$

Granične vrednosti nad skupom



8. Za funkciju f datu sa

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ -2x+3, & x > 1 \end{cases},$$

vidimo da $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ ne postoji. Ovde ima smisla ispitati ponašanje funkcije za $x > 1$ i za $x < 1$, tj. posmatrati funkciju f i sa leve i sa desne strane tačke 1.

Vidimo kada $x \to 1$, pri čemu je $x > 1$, da $f(x) \to 1$, a kada $x \to 1$, pri čemu je $x < 1$, da $f(x) \to 3$.

9. Ako posmatramo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisanu sa

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

vidimo da funkcija f nema graničnu vrednost ni u jednoj tački $a \in \mathbb{R}$. Međutim, restrikcija $f_{\mathbb{Q}}$ funkcije f ima graničnu vrednost u svakoj tački $a \in \mathbb{R}$.

Ovi primeri daju nam povod da definišemo graničnu vrednost funkcije f u tački a dok x pripada skupu E, gde je E podskup oblasti definisanosti funkcije f, za koji je a tačka nagomilavanja.

Definicija

Neka su (X, d_X) *i* (Y, d_Y) *dati metrički prostori i neka je* E *neprazan podskup oblasti definisanosti* D *funkcije* $f : D \to Y$*. Ako restrikcija* f_E *funkcije* f *ima graničnu vrednost* $A \in Y$ *u tački* $a \in X$*, onda kažemo da funkcija* f *ima* **graničnu vrednost** A **u tački** *nagomilavanja* a *skupa* E **dok** $x \in E$ *i pišemo da je*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x) = A.$$

Specijalno, ako je

$$D \subset \mathbb{R} = X \text{ i } E = (a, \infty) \cap D \quad (E = (-\infty, a) \cap D)$$

i ako funkcija f ima graničnu vrednost A u tački a dok $x \in E$, onda kažemo da funkcija f u tački a ima **desnu** (**levu**) **graničnu vrednost** A i pišemo da je

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a^+) = A \quad (\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a^-) = A).$$

Koriste se i oznake

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a+0) \quad (\lim_{x \to a-} f(x) = f(a-0)).$$

Leva, odnosno desna granična vrednost se jednim imenom zovu **jednostrane granične vrednosti**.

• Ako funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ u tački a ima graničnu vrednost A, tada

- postoji bar jedna jednostrana granična vrednost koja je jednaka broju A, tj. graničnoj vrednosti funkcije f u tački a;

- ako postoje obe jednostrane granične vrednosti, one su jednake graničnoj vrednosti funkcije u tački a, tj.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = A.$$

• Ako funkcija f u tački a ima obe jednostrane granične vrednosti, ona će imati graničnu vrednost samo onda ako su jednostrane granične vrednosti jednake, tj. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ postoji ako

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = A$$

i tada je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Kao što smo videli u primeru **8**. postoji leva granična vrednost u tački $x = 1$, tj. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1^-) = 3$, kao i desna granična vrednost u tački $x = 1$, tj. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1^+) = 1$, ali one nisu jednake, pa funkcija u tački $x = 1$ nema graničnu vrednost.

10. Ako posmatramo funkciju

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}},$$

vidimo da u tački $x = 0$ funkcija nema desnu graničnu vrednost, jer nije definisana nad intervalom $(0, 1]$. Međutim ovde je

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0.$$

11. Za funkciju

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

je

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2},$$

pa funkcija nema graničnu vrednost u tački 0.

12. Posmatrajmo funkciju

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

iz primera **7.** i uzmimo da je $E = \{(x,2x) : x \in \mathbb{R}\}$. Tada važi

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2+4x^2} = \frac{2}{5}.$$

Tvrđenje

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i neka je $a \in X$ tačka nagomilavanja za definicioni skup $D \subset X$ funkcije $f : D \to Y$. Tada važi

a) *Ako funkcija f ima graničnu vrednost $A \in Y$ u tački a i ako je a tačka nagomilavanja za neprazan skup $E \subset D$, tada postoji $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x)$ i važi jednakost $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.*

b) *Neka je a tačka nagomilavanja svakog od skupova $E_1, \ldots, E_n \subset D$ koji vrše particiju skupa $D \setminus \{a\}$. Tada ako postoje granične vrednosti $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E_i}} f(x)$, za svako $i = 1, \ldots, n$ i pri tome su međusobno jednake, tada postoji $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ i važi jednakost $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E_i}} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, za $i = 1, \ldots, n$.*

Ako za neko $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ uzmemo $E = \{(x, kx) : x \in \mathbb{R}\}$, tada za funkciju f iz primera **7.** važi:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\in E}} f(x,y) = \frac{k}{1+k^2}.$$

S obzirom da za svako k ove granične vrednosti nisu jednake, to ne postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, kao što smo i pre videli.

Definicija

Neka je (X,d) *metrički prostor i neka je* $a \in D$ *tačka nagomilavanja za definicioni skup* $D \subset X$, *realne funkcije* $f : D \to \mathbb{R}$. *Tada*

- *funkcija* $f(x)$ **teži ka** ∞, *tj.* $f(x) \to \infty$, $x \to a$, *ako i samo ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \setminus \{a\})(x \in L(a,\delta) \Rightarrow f(x) > K).$$

- *funkcija* $f(x)$ **teži ka** $-\infty$, *tj.* $f(x) \to -\infty$, $x \to a$, *ako i samo ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \setminus \{a\})(x \in L(a,\delta) \Rightarrow f(x) < K).$$

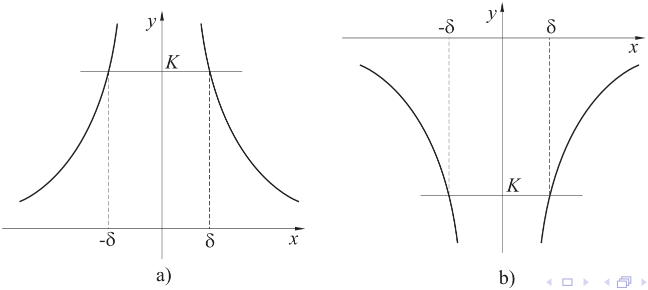
Ponekad se piše da $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, *odnosno* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

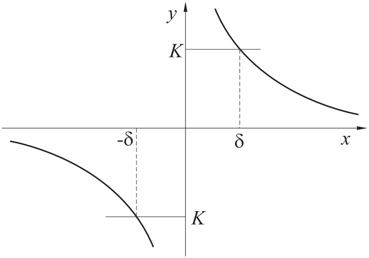
Ako posmatramo funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2}$, vidimo da $\frac{1}{x^2} \to \infty$, kada $x \to 0$, jer za svako $K > 0$, postoji $\delta = \frac{1}{\sqrt{K}}$, tako da je

$$\frac{1}{x^2} > K \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{K} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Za funkciju $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, imamo da $f(x) \to -\infty$, kada $x \to 0$, jer za svako $K < 0$, postoji $\delta = \frac{1}{\sqrt{-K}}$, tako da je

$$-\frac{1}{x^2} < K \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > -K \Leftrightarrow x^2 < -\frac{1}{K} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{-K}}.$$





Ako posmatramo funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$, vidimo da $f(x)$ ne teži ni ∞, ni $-\infty$, kada $x \to 0$, tj. ne postoji okolina 0 koja se čitava, izuzevši 0, preslika, iznad (ispod) prave $y = K$, gde je $K > 0$ ($K < 0$), jer sa leve strane tačke $x = 0$ je $f(x) < 0$, a sa desne strane tačke $x = 0$ je $f(x) > 0$. Vidimo da $f(x) \to \infty$, $x \to 0^+$, a $f(x) \to -\infty$, $x \to 0^-$.

Uopšte, ako je $a \in X$ tačka nagomilavanja podskupa E, definicionog skupa $D \subset X$, realne funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ i ako restrikcija f_E funkcije f, teži ∞, odnosno $-\infty$, kada $x \to a$, tada kažemo da $f(x) \to \infty$, odnosno $f(x) \to -\infty$, kada $x \to a$, dok $x \in E$.

Specijalno, ako je $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $E = (a, \infty) \cap D \neq \emptyset$, tada $f(x) \to \infty$, kad $x \to a^+$ ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) > K),$$

odnosno $f(x) \to -\infty$, kada $x \to a^+$ ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) < K).$$

Slično, ako je $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $E = (-\infty, a) \cap D \neq \emptyset$, tada $f(x) \to \infty$, kada $x \to a^-$ ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) > K),$$

odnosno $f(x) \to -\infty$, kada $x \to a^-$ ako

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) < K).$$

Primeri:

1. Za funkciju $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ je

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

2. $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & , \quad x \in (0, \infty) \cap Q \\ -\frac{1}{x^2} & , \quad x \in (0, \infty) \cap (R \setminus Q) \end{cases}$

3. $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 10 & , \quad x = 0 \end{cases}$

Ponašanje funkcije $f(x)$ kada $x \to \pm\infty$

Definicija

Neka je (Y, d) metrički prostor i neka je $D \subset \mathbb{R}$ definicioni skup funkcije $f : D \to Y$, za koji važi da je $(\forall a \in \mathbb{R})\ (a, \infty) \cap D \neq \emptyset$. Tada

1°) *Kažemo da funkcija $f(x)$ ima graničnu vrednost $A \in Y$, kada $x \to \infty$, ako je*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow f(x) \in L(A, \varepsilon)),$$

odnosno za $Y = \mathbb{R}$, važi

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

i to zapisujemo sa $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A.$

Definicija

Neka je (Y, d) *metrički prostor i neka je* $D \subset \mathbb{R}$ *definicioni skup funkcije* $f : D \to Y$*, za koji važi da je* $(\forall a \in \mathbb{R})\ (a, \infty) \cap D \neq \emptyset$*. Tada*

2°) *Ako je* $Y = \mathbb{R}$*, kažemo da* $f(x) \to \infty$*, kada* $x \to \infty$ *ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow f(x) > K).$$

3°) *Ako je* $Y = \mathbb{R}$*, kažemo da* $f(x) \to -\infty$*, kada* $x \to \infty$*, ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow f(x) < K).$$

Ponekad se umesto $f(x) \to \infty$, tj. $f(x) \to -\infty$, kada $x \to \infty$, piše

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \text{ odnosno } \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty.$$

Primer

Ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$, *uzmemo da je* $\Delta = \frac{1}{\varepsilon} - 1$, *to za* $x > 0$, *važi*

$$\begin{aligned} \left|\frac{x}{x+1} - 1\right| < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{|x+1|} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad |x+1| > \frac{1}{\varepsilon} \\ &\Leftrightarrow \quad x+1 > \frac{1}{\varepsilon} \\ &\Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \end{aligned},$$

pa je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

Primer

Za funkciju

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}, \frac{x-1}{x^2-1}\right), \; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$$

je

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = (0, 0).$$

Definicija

Neka je (Y, d) metrički prostor i neka je $D \subset \mathbb{R}$ definicioni skup funkcije $f : D \to Y$, za koji važi

$$(\forall a \in \mathbb{R})\ (-\infty, a) \cap D \neq \emptyset.$$

Tada
1°) *Funkcija $f(x)$ ima graničnu vrednost $A \in Y$ kada $x \to -\infty$, ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in D)(x < \Delta \Rightarrow f(x) \in L(A, \varepsilon)),$$

odnosno za $Y = \mathbb{R}$, važi

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in D)(x < \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon),$$

i to zapisujemo sa $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in Q \\ 0 & , \quad x \in R \setminus Q \end{cases} .$$

Da li ona ima graničnu vrednost kada $x \to \infty$, tj. da li postoji $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$?

Da li ona ima graničnu vrednost kada $x \to \infty$, dok x pripada skupu racionalnih brojeva, tj. da li postoji $\lim\limits_{x \to \infty, x \in \mathbb{Q}} f(x)$?

Definicija

Neka je (Y,d) metrički prostor i neka je $D \subset \mathbb{R}$ definicioni skup funkcije $f : D \to Y$, za koji važi $(\forall a \in \mathbb{R})\ (-\infty, a) \cap D \neq \emptyset$. Tada

2°) *Ako je $Y = \mathbb{R}$, kažemo da $f(x) \to \infty$, kada $x \to -\infty$, ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in D)(x < \Delta \Rightarrow f(x) > K).$$

3°) *Ako je $Y = \mathbb{R}$, kažemo da $f(x) \to -\infty$, kada $x \to -\infty$, ako*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in D)(x < \Delta \Rightarrow f(x) < K).$$

Ponekad se umesto

$$f(x) \to \infty, \text{ odnosno } f(x) \to -\infty \text{ kada } x \to -\infty,$$

piše

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \text{ odnosno } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

I ovde (uvek!) važi Hajneova teorema:

Tvrđenje

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i neka je data funkcija $f : D \to Y$, $D \subset X$. Tada važi

a) *Ako je $Y = \mathbb{R}$, tada $f(x) \to \pm\infty$, $x \to a$ ako i samo ako za svaki niz $\{x_n\} \subset D \setminus \{a\}$, koji konvergira ka a, sledi da niz $\{f(x_n)\}$ teži ∞, odnosno $-\infty$, $n \to \infty$.*

b) *Ako je $X = \mathbb{R}$, tada $f(x) \to A \in Y$, $x \to \pm\infty$ ako i samo ako za svaki niz $\{x_n\} \subset D$, koji teži ka $\pm\infty$, sledi da niz $\{f(x_n)\}$ konvergira ka A.*

c) *Ako je $X = Y = \mathbb{R}$, tada $f(x) \to \infty$ $(f(x) \to -\infty)$, $x \to \pm\infty$ ako i samo ako za svaki niz $\{x_n\} \subset D$ koji teži $\pm\infty$, sledi da niz $\{f(x_n)\}$ teži ∞ $(-\infty)$, $n \to \infty$.*

• Može se i ovde pokazati da ako postoji granična vrednost, da je ona jednoznačno određena.

• Ako posmatramo funkciju $f(x) = \cos x$, vidimo da
1) $f(x)$ ne teži ni ∞, ni $-\infty$, kada $x \to \infty$ jer $-1 \leq f(x) \leq 1$.
2) Ne postoji $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Ako bi postojao $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, tada bi po definiciji granične vrednosti, sledilo da

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in \mathbb{R})(x > \Delta \Rightarrow |\cos x - A| < \varepsilon).$$

Ako posmatramo niz $\{a_n\}$ sa opštim članom $a_n = \alpha + 2n\pi$, $\alpha \in \mathbb{R}$ vidimo da $a_n \to \infty$, kada $n \to \infty$, pa u svakom intervalu (a, ∞) su skoro svi članovi datog niza. Kako je $\cos a_n = \cos \alpha$, to bi sledilo da je $A = \cos \alpha$, što je kontradikcija, jer, ako postoji granična vrednost ona je jednoznačno određena.

Ponekad sa

$$f(x) \to \pm\infty, \text{ kada } x \to a,$$

označavamo da

$$f(x) \to \infty \text{ ili } f(x) \to -\infty \text{ kada } x \to a$$

i često pišemo

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty.$$

Slično, ako

$$f(x) \to A \text{ kada } x \to \infty \text{ ili } x \to -\infty,$$

često pišemo

$$f(x) \to A, x \to \pm\infty,$$

odnosno

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = A.$$

Računske operacije sa graničnim vrednostima funkcija

Tvrđenje

Neka je (X, d_X) metrički prostor i neka je a tačka nagomilavanja za definicioni skup $D \subset X$ funkcija $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ i $g : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Tada važi

a) *Ako je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, to je*

1°) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B$,

2°) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \cdot B$,

3°) $\lim\limits_{x\to a}(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = c \cdot A$,

4°) *za* $g(x) \neq 0$ *i* $B \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{1}{B}$,

5°) *za* $g(x) \neq 0$ *i* $B \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Tvrđenje

Neka je (X, d_X) *metrički prostor i neka je* a *tačka nagomilavanja za definicioni skup* $D \subset X$ *funkcija* $f : D \to \mathbb{R}$ *i* $g : D \to \mathbb{R}$. *Tada važi*

b) *Ako* $f(x) \to \infty$, *kada* $x \to a$ *i* $g(x) \to B$ $(B \in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$, *kada* $x \to a$, *tada*

- 1°) $(f(x) + g(x)) \to \infty$, *kada* $x \to a$,
- 2°) $(f(x) \cdot g(x)) \to \infty$, *za* $B > 0$, *odnosno* $(f(x) \cdot g(x)) \to -\infty$, *za* $B < 0$.

c) *Ako* $f(x) \to -\infty$, *kada* $x \to a$ *i* $g(x) \to B$ $(B \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$, *kada* $x \to a$, *tada*

- 1°) $(f(x) + g(x)) \to -\infty$, *kada* $x \to a$,
- 2°) $(f(x) \cdot g(x)) \to -\infty$, *za* $B > 0$, *odnosno* $(f(x) \cdot g(x)) \to \infty$, *za* $B < 0$.

d) *Ako je* $X = \mathbb{R}$, *tada osobine* **a**), **b**) *i* **c**) *važe i kada* $x \to \infty$, *odnosno* $x \to -\infty$.

Dokaz. Dokaz sledi iz Hajneove teoreme i odgovarajućih osobina nizova. Ovde ćemo ipak, radi ilustracije, dati dokaz da je $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B$, ne koristeći Hajneovu teoremu.

S obzirom da je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, to za proizvoljno $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, postoje $\delta_f, \delta_g \in \mathbb{R}^+$, tako da za sve $x \in D \setminus \{a\}$, važi

$$d_X(a,x) < \delta_f \Rightarrow |f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$d_X(a,x) < \delta_g \Rightarrow |g(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Neka je $\delta_{f+g} = \min\{\delta_f, \delta_g\}$. Tada važi:

$$|(f(x)+g(x))-(A+B)| \leq |f(x)-A| + |g(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

za $0 < d_X(a,x) < \delta_{f+g}$, odakle sledi dato tvrđenje. $\square$

Napomena

U formulaciji teoreme smo pretpostavili da je a tačka nagomilavanja za zajednički definicioni skup D funkcija f i g, jer iz

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \ i \ \lim_{x \to a} g(x) = B,$$

ne sledi uvek da je

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = A + B,$$

što se vidi iz sledećeg primera.

Primer

Neka su date funkcije f i g sa

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt{-x}.$$

Vidi se da je

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0,$$

a

$$\lim_{x\to 0} (f(x) + g(x))$$

ne postoji, jer je 0 *izolovana tačka, za definicioni skup funkcije* $f + g$.

Napomena

Tvrđenje teoreme pod a) važi i kada su u pitanju kompleksne funkcije.

Primer

Neka su date funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 10, & x = 0 \end{cases}.$$

Njihova granična vrednost u $x = 0$, *ne postoji, dok je*

$$\lim_{x \to 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to 0} 1 = 1.$$

Tvrđenje

Neka je dat metrički prostor (X, d) *i neka je* a *tačka nagomilavanja za definicioni skup* $D \subset X$ *funkcija* $f : D \to \mathbb{R}$ *i* $g : D \to \mathbb{R}$. *Tada, ako je* $f(x) \leq g(x)$ *i*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

i

$$\lim_{x \to a} g(x) = B,$$

tada je i $A \leq B$.

Tvrđenje

Neka je dat metrički prostor (X, d) i neka je a tačka nagomilavanja za definicioni skup $D \subset X$ funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ i $g : D \to \mathbb{R}$. Tada

a) *Ako za funkciju $h : D \to \mathbb{R}$, važi*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

i ako je

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = A,$$

to je i

$$\lim_{x \to a} h(x) = A.$$

b) *Slična osobina važi i za slučaj kada je $X = \mathbb{R}$ i kada $x \to \infty$, odnosno $x \to -\infty$.*

Dokaz. Sledi iz Hajneove teoreme i slične osobine za nizove. $\square$

Primer

Na osnovu prethodne i Hajneove teoreme sledi da je

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

kao i da je

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Važi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Beskonačno male i beskonačno velike veličine

Neka je (X, d) metrički prostor i funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq D \subset X$.

Definicija

Za funkciju $f(x)$ kažemo da je **beskonačno mala veličina** *kada $x \to a$, ako je*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

Definicija

Za funkciju $f(x)$ kažemo da je **beskonačno velika veličina** *kada $x \to a$, ako*

$$|f(x)| \to \infty, \text{ kada } x \to a.$$

Očigledno je da je recipročna vrednost beskonačno male veličine, beskonačno velika veličina i obrnuto.

- **Posmatrajmo dve beskonačno male veličine** $f(x)$ **i** $g(x)$ **kada** $x \to a$, **gde je** $g(x) \neq 0$ **u nekoj okolini tačke** $x = a$.

1) Ako je $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ili što je ekvivalentno sa $\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| \to \infty$ kada $x \to a$, onda kažemo da je $f(x)$ **beskonačno mala veličina višeg reda** od $g(x)$ kada $x \to a$, odnosno da je $g(x)$ **beskonačno mala veličina nižeg reda** od $f(x)$, kada $x \to a$. Kažemo još i da $f(x)$ **brže teži nuli** od $g(x)$ kada $x \to a$, odnosno da $g(x)$ **sporije teži nuli** od $f(x)$, kada $x \to a$.

Na primer, funkcija $f(x) = 1 - \cos x$ brže teži nuli od funkcije $g(x) = x$, kada $x \to 0$, jer je

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = 0.$$

2) Ako je $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=C\neq 0$, onda kažemo da su $f(x)$ i $g(x)$ **beskonačno male veličine istog reda** kada $x\to a$.

Specijalno, ako je $C=1$, tj. ako je $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, onda kažemo da su $f(x)$ i $g(x)$ **ekvivalentne beskonačno male veličine**, kada $x\to a$ i to zapisujemo sa

$$f(x)\sim g(x),\ \text{kada } x\to a.$$

Takođe kažemo da se funkcije $f(x)$ i $g(x)$ **isto ponašaju**, kada $x\to a$.

Primer

Funkcija $f(x)=\sin\alpha x$, $\alpha\neq 0$ *i funkcija* $g(x)=x$ *su beskonačno male veličine istog reda, kada* $x\to 0$, *jer je* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}=\alpha$. *Ako je* $\alpha=1$, *tada je* $\sin x\sim x$, *kada* $x\to 0$.

3) Ako ne postoji ni $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, ni $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$, tada se beskonačno male veličine $f(x)$ i $g(x)$ **ne mogu porediti**, kada $x\to a$, tj. $f(x)$ i $g(x)$ su **neuporedive beskonačno male veličine**, kada $x\to a$.

Na primer, funkcije

$$f(x)=\frac{1}{x} \text{ i } g(x)=\frac{1}{x(2+\sin x)}$$

su neuporedive beskonačno male veličine, kada $x\to\infty$, jer ne postoji ni

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}(2+\sin x),$$

ni

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2+\sin x}.$$

• **Posmatrajmo dve beskonačno velike veličine** $f(x)$ **i** $g(x)$, **kada** $x \to a$**, tj.** $|f(x)| \to \infty$ **i** $|g(x)| \to \infty$, **kada** $x \to a$.

1) Ako je

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

odnosno

$$\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| \to \infty, \text{ kada } x \to a,$$

gde je $g(x) \neq 0$, tada kažemo da je $g(x)$ **beskonačno velika veličina višeg reda** od $f(x)$, kada $x \to a$, odnosno da je $f(x)$ **beskonačno velika veličina nižeg reda** od $g(x)$, kada $x \to a$.

2) Ako je $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \neq 0$, onda kažemo da su $f(x)$ i $g(x)$ **beskonačno velike veličine istog reda**, kada $x \to a$.

Specijalno, ako je $\alpha = 1$, tj. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, onda kažemo da su $f(x)$ i $g(x)$ **ekvivalentne beskonačno velike veličine**, kada $x \to a$ ili da su $f(x)$ i $g(x)$ **asimptotski jednake**, kada $x \to a$. Tada pišemo da je

$$f(x) \sim g(x), \text{ kada } x \to a.$$

Na primer, polinomi

$$P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \quad Q_n(x) = a_n x^n, \; a_n \neq 0, \; n \in \mathbb{N},$$

su asimptotski jednaki, kada $x \to \infty$, jer je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = 1.$$

Kažemo i da se polinom ponaša kao njegov najstariji (vodeći) član kada $x \to \infty$.

3) Ako ne postoji ni $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, ni $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$, onda kažemo da se beskonačno velike veličine $f(x)$ i $g(x)$ **ne mogu uporediti**, kada $x\to a$, odnosno da su $f(x)$ i $g(x)$ **neuporedive beskonačno velike veličine**, kada $x\to a$.

Na primer, funkcije $f(x)=x$ i $g(x)=x(2+\sin x)$ su neuporedive beskonačno velike veličine, kada $x\to\infty$, jer ne postoji ni

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2+\sin x},$$

ni

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}(2+\sin x).$$

Napomena

Analogne definicije za beskonačno male i beskonačno velike veličine mogu se dati i kada $x\to a^+$, odnosno kada $x\to a^-$.

Definicija neprekidnosti funkcije i primeri

Definicija

Neka su dati metrički prostori (X, d_X) , (Y, d_Y) *i funkcija* $f : D \to Y$, $D \subset X$. *Za funkciju* f *kažemo da je* **neprekidna u tački** $a \in D$ *ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in L(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in L(f(a), \varepsilon)),$$

odnosno

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon).$$

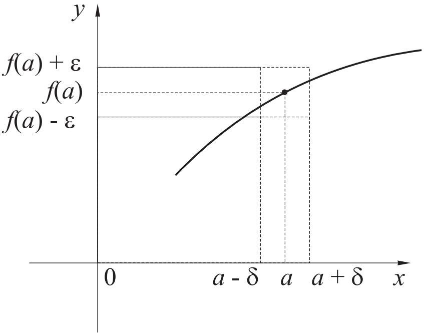
Ako je $X = Y = \mathbb{R}(\mathbb{C})$, tada neprekidnost funkcije $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ u tački a možemo zapisati na sledeći način

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Zahtevi za neprekidnost u tački a i postojanje granične vrednost u a se razlikuju u sledećim činjenicama:

- za graničnu vrednost u tački a pretpostavka je da je a tačka nagomilavanja za D, a kod neprekidnosti da $a \in D$, tj. da je funkcija f definisana u tački a;

- kod neprekidnosti se zahteva da funkcija f otvorenu loptu $L(a, \delta(\varepsilon))$ preslika u otvorenu loptu $L(f(a), \varepsilon)$, dok kod granične vrednosti je zahtev da funkcija f otvorenu loptu $L(a, \delta(\varepsilon))$ bez centra a preslika u otvorenu loptu $L(A, \varepsilon)$.



Zaključak je sledeći:

- ako je f neprekidna funkcija u tački a ne mora da postoji $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (ako je $a \in D$ izolovana tačka za skup D, tada je f automatski neprekidna u tački a, dok u tom slučaju ne postoji $\lim\limits_{x\to a} f(x)$).
- ako postoji $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ bez obzira da li je funkcija f definisana u tački a, funkcija ne mora da bude neprekidna u tački a. Na primer, ako posmatramo funkcije

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 5, & x = 0 \end{cases},$$

tada važi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$. Ni funkcija f, ni funkcija g nisu neprekidne u tački 0, jer f nije definisana u tački 0, dok je $g(0) = 5 \neq 1$.

Dakle, da bi funkcija f bila neprekidna u tački a treba da važi:

1) $a \in D$, tj. funkcija f je definisana u tački a;

2) ako je a tačka nagomilavanja za D, tada postoji $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ i važi jednakost

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a);$$

3) ako je $a \in D$ izolovana tačka, tada je f neprekidna u tački a.

Ako je $a \in D \subset \mathbb{R}$ ($a \in D \subset \mathbb{C}$) tačka nagomilavanja za definicioni skup D i ako je $Y = \mathbb{R}$, ($Y = \mathbb{C}$) $x = a + \Delta x \in D$, $\Delta x \neq 0$ i $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$, gde su Δx i Δy redom priraštaji nezavisne i zavisne promenljive, tada neprekidnost realne funkcije jedne realne promenljive možemo izraziti na sledeći način:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x = a + \Delta x \in D)(|\Delta x| < \delta \Rightarrow |\Delta y| < \varepsilon),$$

odnosno

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ a + \Delta x \in D}} \Delta y = 0.$$

Dakle, realna (kompleksna) funkcija jedne realne (kompleksne) promenljive je neprekidna u tački a iz domena ako priraštaj funkcije Δy u tački a teži ka nuli kada priraštaj argumenta Δx teži ka nuli.

Ako funkcija f nije neprekidna u tački a, onda kažemo da je funkcija f **prekidna** u tački a, odnosno da funkcija f ima **prekid** u tački a (tačka a je **prekid** date funkcije).

Napomena

Kako je funkcija u izolovanim tačkama neprekidna, to je realni niz (a i svaki drugi), kao funkcija iz $\mathbb{N}$ *u* $\mathbb{R}$ *neprekidna funkcija.*

Definicija

Neka su (X, d_X) *i* (Y, d_Y) *metrički prostori i neka je data funkcija* $f : D \to Y$, $D \subset X$.

• *Ako je restrikcija* f_E *funkcije* f *nad nepraznim skupom* $E \subset D$ *neprekidna u tački* $a \in E$, *onda kažemo da je funkcija* f **neprekidna u tački** a **dok** $x \in E$.

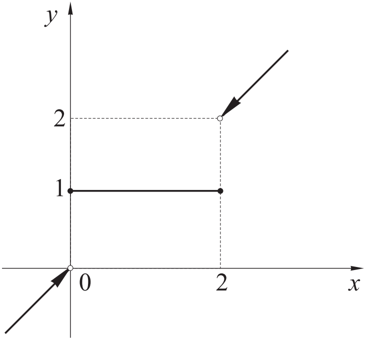
• *Ako je* f_E *neprekidna u svakoj tački skupa* E, *onda kažemo da je* f **neprekidna nad skupom** E.

• *Ako je* $E = D$, *tj. ako je funkcija* f *neprekidna u svakoj tački definicionog skupa* D, *onda kažemo da je* f **neprekidna funkcija**.

Primetimo, da ako je funkcija f neprekidna nad skupom E, ona ne mora biti neprekidna u svakoj tački skupa E. Na primer, ako posmatramo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$$

vidimo da je ona neprekidna nad zatvorenim intervalom $[0, 2]$, dok su krajnje tačke 0 i 2 prekidi date funkcije.



Ako je $f : D \to Y$, $D \subset \mathbb{R}$ i ako je f neprekidna u tački a dok

$$x \in E = D \cap [a, \infty) \quad (x \in E = D \cap (-\infty, a]),$$

tada kažemo da je funkcija f **neprekidna u tački** a **sa desne (leve) strane**.

Ako postoji $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, tada je funkcija f neprekidna u tački a sa leve strane ako je

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a),$$

a ako postoji $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, tada je funkcija f neprekidna u tački a sa desne strane ako je

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Očigledno važi:

1) *Funkcija f jedne realne promenljive je neprekidna u tački a ako i samo ako je neprekidna u tački a i sa leve i sa desne strane.*

2) *Funkcija jedne realne promenljive je neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$ ako i samo ako je*

- *neprekidna u svakoj tački otvorenog intervala (a, b);*

- *u tački a je neprekidna sa desne strane;*

- *u tački b je neprekidna sa leve strane.*

Tvrđenje

Ako su realne (kompleksne) funkcije f i g neprekidne u tački a, tada su u tački a neprekidne i sledeće funkcije:

1) $h = f + g$,
2) $h = f \cdot g$,
3) $h = \frac{f}{g}$, *pod uslovom da je* $g \neq 0$ *u nekoj okolini tačke* a.

Primeri

1. Konstantna funkcija $f(x) = c$ je neprekidna funkcija, jer je

$$\Delta y = c - c = 0,$$

pa je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

2. Funkcija $f(x) = \sin x$ je neprekidna za svako $x \in (-\infty, \infty)$. Birajući $\delta = \varepsilon$, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, imamo

$$\begin{aligned} |\Delta y| &= |\sin(x+\Delta x) - \sin x| \\ &= 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\right| \\ &\leq 2\left|\frac{\Delta x}{2}\right| \\ &= |\Delta x| < \varepsilon, \end{aligned}$$

tj.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

3. Funkcija $f(x) = x^2$ je neprekidna za svako $x \in (-\infty, \infty)$, jer iz

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x),$$

sledi da je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Slično, **stepena funkcija** $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ je neprekidna za svako $x \in (-\infty, \infty)$, pa kako je i konstantna funkcija neprekidna, iz prethodne teoreme sledi da je svaki **polinom** $P_n(x)$ neprekidna funkcija za svako $x \in (-\infty, \infty)$, dok je svaka **racionalna funkcija** $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ neprekidna funkcija u svakoj tački x_0 za koju je $Q_m(x_0) \neq 0$.

4. Za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \le 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases}$$

je

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x-1) = 1 = f(2^-) = f(2) \neq 4 = \lim_{x\to 2^+} 2x = \lim_{x\to 2^+} f(x).$$

Dakle, ne postoji u tački $x = 2$ granična vrednost, pa je funkcija u tački 2 prekidna.
Za sve ostale vrednosti od x funkcija je neprekidna.
Primetimo da je funkcija $f(x)$ neprekidna u tački 2 sa leve strane.

5. Za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

imamo da važi

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x - 3) = -1 \neq 0 = f(1),$$

pa je funkcija f u tački 1 prekidna.
Za sve ostale vrednosti od x funkcija je neprekidna.

6. Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nije neprekidna u tački $(0,0)$, jer ne postoji

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

7. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data sa

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ima prekid za svaki realan broj. Ona je neprekidna nad $\mathbb{Q}$, kao i nad $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

8. Sabiranje realnih (kompleksnih) brojeva je neprekidna funkcija.

Zaista, zbog:

$$|(x+y)-(a+b)| \leq |x-a| + |y-b| \leq 2\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

iz $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ sledi neprekidnost sabiranja realnih brojeva.

9. Množenje realnih (kompleksnih) brojeva je neprekidna funkcija.

Kako je:

$$|xy-ab| = |(x-a)(y-b)+a(y-b)+b(x-a)| \leq |x-a||y-b|+|a||y-b|+|b||x-a|$$

i

$$|x-a| \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}, \quad |y-b| \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

to iz $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$, gde je $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|}\}$, sledi da je

$$|xy-ab| < \delta^2 + \delta|a| + \delta|b| \leq \delta(1+|a|+|b|) \leq \frac{\varepsilon \cdot (1+|a|+|b|)}{1+|a|+|b|} = \varepsilon,$$

odakle zaključujemo da je množenje realnih brojeva neprekidna funkcija.

Iz Hajneove teoreme sledi

Tvrđenje

Funkcija $f : D \to Y$ *je neprekidna u tački* $a \in D$

ako i samo ako

za svaki niz $\{x_n\} \subset D$ *koji konvergira ka* a *sledi da niz* $\{f(x_n)\} \subset Y$ *konvergira ka* $f(a)$.

Vrste tačaka prekida funkcija

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i a tačka nagomilavanja za definicioni skup $D \subset X$ funkcije $f : D \to Y$.

Pretpostavimo da u tački a funkcija ima prekid.

1°) Ako postoji $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, onda kažemo da funkcija f u tački a ima **prividan** ili **otklonljiv prekid**, odnosno da je a prividan (otklonljiv) prekid.

a) Funkcija

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

ima u tački 0 prividan prekid (funkcija u tački 0 nije definisana), jer je

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ako posmatramo funkciju

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},$$

vidimo da je ona neprekidna u tački 0, jer smo je u tački 0, definisali baš sa

$$F(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

b) Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

ima otklonljiv prekid u tački 0, jer je

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (2x+1) = 1 \neq f(0) = -1.$$

Međutim, funkcija

$$F(x) = 2x + 1$$

je neprekidna u tački 0.

c) Funkcija

$$f(x) = e^{-\sqrt{\frac{x}{x+1}}}$$

ima prividan prekid u tački -1 (funkcija nije u datoj tački definisana), jer je

$$\lim_{x\to -1} e^{-\sqrt{\frac{x}{x+1}}} = 0.$$

Primetimo da u ovom primeru ne postoji desna granična vrednost date funkcije u tački -1, jer funkcija nije definisana za $x \in [-1, 0)$, pa se granična vrednost poklapa sa levom graničnom vrednošću u datoj tački. Funkcija

$$F(x) = \begin{cases} e^{-\sqrt{\frac{x}{x+1}}}, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0) \\ 0, & x = -1 \end{cases}$$

dobijena iz funkcije f je neprekidna u tački -1.

2°) Za $X = \mathbb{R}$, ako postoje leva i desna granična vrednost funkcije $f(x)$ u tački a, tj. ako postoji

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a^-)$$

i

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a^+),$$

pri čemu je

$$f(a^-) \neq f(a^+),$$

onda kažemo da funkcija u tački a ima **skok**, odnosno da je a skok date funkcije.

a) Kako za funkciju

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

važi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2},$$

to data funkcija ima skok u tački 0.

b) Za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ 3x-1, & x > 1 \end{cases}$$

je

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 = f(1)$$

i

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2,$$

pa funkcija f u tački 1 ima skok.

I) Ako u tački a funkcija f ima prividan prekid ili skok, onda kažemo da data funkcija f u tački a ima **prekid prve vrste**.

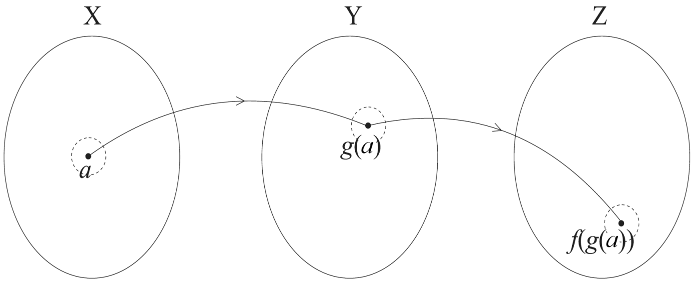
II) Ako je tačka a prekid funkcije koji nije prve vrste, onda kažemo da u tački a funkcija f ima **prekid druge vrste**.

Ako je (Y, d_Y) metrički prostor, tada za funkciju $f : I \to Y$ koja ima konačan broj prekida prve vrste nad intervalom $I \subset \mathbb{R}$, kažemo da je f **neprekidna po delovima** nad intervalom I.

Neprekidnost i granična vrednost složene funkcije

Tvrđenje

Neka su dati metrički prostori (X, d_X), (Y, d_Y) *i* (Z, d_Z) *kao i funkcije* $g : D \to Y$, $D \subset X$ *i* $f : Y \to Z$.
Ako je g *neprekidna funkcija u tački* a, f *neprekidna funkcija u tački* $g(a)$, *tada je složena funkcija* $h = f \circ g$ *neprekidna funkcija u tački* a.



Dokaz. S obzirom da je f neprekidna funkcija u tački $g(a)$ i g neprekidna funkcija u tački a to važi

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall u \in Y)(u \in L(g(a), \delta) \Rightarrow f(u) \in L(f(g(a)), \varepsilon)),$$

$$(\forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in L(a, \delta_1) \Rightarrow g(x) \in L(g(a), \varepsilon_1)).$$

Tada birajući da je $\varepsilon_1 = \delta$, imamo

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in L(a, \delta_1) \Rightarrow f(g(x)) \in L(f(g(a)), \varepsilon)),$$

odakle sledi da je složena funkcija $h = f \circ g$ neprekidna u tački a.

$\square$

Posledica

Neka su dati metrički prostori (X, d_X), (Y, d_Y) *i* (Z, d_Z) *kao i funkcije* $g : D \to Y$, $D \subset X$ *i* $f : Y \to Z$.
Ako su funkcije g *i* f *neprekidne, tada je i složena funkcija* $h = f \circ g$ *neprekidna.*

Tvrđenje

Neka su dati metrički prostori (X, d_X), (Y, d_Y) *i* (Z, d_Z) *kao i funkcije* $g : D \to Y$, $D \subset X$ *i* $f : Y \to Z$.
Ako je $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \alpha \in Y$ *i* f *neprekidna funkcija u tački* α, *tada je*

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(\alpha).$$

Dokaz. Funkcija f je neprekidna u tački α, pa je

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\delta \in \mathbb{R}^+)(\forall u \in Y)(u \in L(\alpha,\delta) \Rightarrow f(u) \in L(f(\alpha),\varepsilon)).$$

Kako je $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \alpha$, to je

$$(\forall\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+)(\exists\delta_1 \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \setminus \{a\})(x \in L(a,\delta_1) \Rightarrow g(x) \in L(\alpha,\varepsilon_1)),$$

a odatle uzimajući $\varepsilon_1 = \delta$ sledi da je

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \setminus \{a\})(x \in L(a,\delta_1) \Rightarrow f(g(x)) \in L(f(\alpha),\varepsilon)),$$

tj. $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = f(\alpha)$.

Ako je $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \alpha$ i $X = \mathbb{R}$, tada važi

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow g(x) \in L(\alpha, \delta)).$$

pa sledi da

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow f(g(x)) \in L(f(\alpha), \varepsilon)),$$

tj. $\lim\limits_{x\to\infty} f(g(x)) = f(\alpha)$.

Slično, kao i prethodnom slučaju se dokazuje da iz $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \alpha$ i $X = \mathbb{R}$, sledi da je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(g(x)) = f(\alpha)$. $\square$

Pretpostavka da je $f : Y \to Z$ je bitna, jer ako to nije tačno teorema ne mora da važi što se vidi iz sledećeg primera

Primer

Posmatrajmo funkcije

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = -x^2.$$

Iz neprekidnosti u 0 *funkcije* $f(x)$ *i iz toga da je* $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ *imamo da je*

$$f(\lim_{x\to 0} g(x)) = f(0) = 0.$$

Kako je

$$f(g(x)) = \sqrt{-x^2},$$

to je funkcija $f(g(x))$ *definisana samo za* $x = 0$, *pa*

$$\lim_{x\to 0} f(g(x))$$

ne postoji.

Tvrđenje

Neka su dati metrički prostori (X, d_X), (Y, d_Y) *i* (Z, d_Z) *kao i funkcije* $g : D \to Y$, $D \subset X$ *i* $f : Y \to Z$. *Pretpostavimo da*

1) $g(x) \to \alpha \in Y$, *kada* $x \to a$;
2) $f(u) \to \beta$, *kada* $u \to \alpha$;
3)
   a) *Ako* $a \in X$, (*za slučaj* $X = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, *tj.* x *ne teži* $\pm\infty$), *onda* $(\exists \delta^* \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in (D \setminus \{a\}) \cap L(a, \delta^*))\ g(x) \neq \alpha$;
   b) *Ako je* $X = \mathbb{R}$ *i* $g(x) \to \alpha$, *kada* $x \to \infty$, *onda* $(\exists \delta^* \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \cap (\delta^*, \infty))\ g(x) \neq \alpha$;
   c) *Ako je* $X = \mathbb{R}$ *i* $g(x) \to \alpha$, *kada* $x \to -\infty$, *onda* $(\exists \delta^* \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in D \cap (-\infty, \delta^*))\ g(x) \neq \alpha$.

Tada $f(g(x)) \to \beta$, *kada* $x \to a$.

Tvrđenje

Neka su dati metrički prostori (X, d_X) *i* (Z, d_Z) *kao i funkcije* $g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset X$ *i* $f : \mathbb{R} \to Z$. *Pretpostavimo da*

1) $g(x) \to \pm\infty$, *kada* $x \to a$,
2) $f(u) \to \beta$, *kada* $u \to \pm\infty$.

Tada $f(g(x)) \to \beta$, *kada* $x \to a$.

Primer

Neka je $u = g(x) = \frac{1}{x}$, $y = f(u) = (1 + \frac{1}{u})^u$. *Kako* $g(x) \to \infty$, *kada* $x \to 0^+$ *i* $f(u) \to e$, *kada* $u \to \infty$, *to je*

$$\lim_{x \to 0^+} f(g(x)) = \lim_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x}) = \lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Kako $g(x) \to -\infty$, *kada* $x \to 0^-$ *i* $f(u) \to e$, *kada* $u \to -\infty$, *to je*

$$\lim_{x \to 0^-} f(g(x)) = \lim_{x \to 0^-} f(\frac{1}{x}) = \lim_{x \to 0^-} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

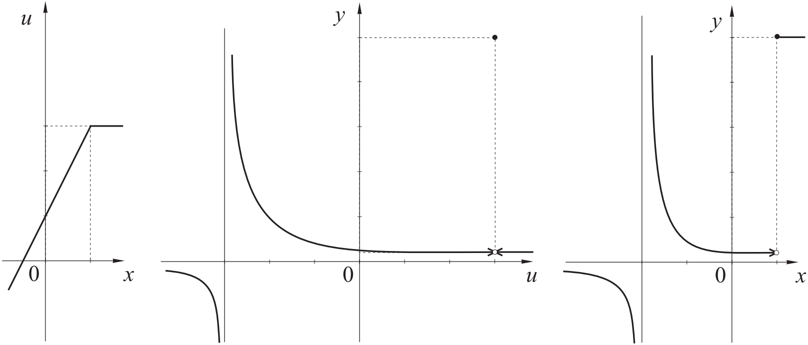
pa je

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Primer

Za $u = g(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ 3, & x > 1 \end{cases}$ *i* $y = f(u) = \begin{cases} \frac{1}{u+3}, & u \neq 3 \\ 5, & u = 3 \end{cases}$

imamo da je $f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{2x+4}, & x < 1 \\ 5, & x \geq 1 \end{cases}$.



1°) Iz neprekidnosti funkcije g u tački 2 je

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 3, \quad (\alpha = 3)$$

i

$$\lim_{u\to 3} f(u) = \frac{1}{6}, \quad (\beta = \frac{1}{6}),$$

ne sledi da je

$$\lim_{x\to 2} f(g(x)) = \frac{1}{6},$$

jer je

$$\lim_{x\to 2} f(g(x)) = \lim_{x\to 2} f(3) = 5.$$

Uslov 3) prethodne teoreme nije ispunjen, jer ne postoji okolina tačke 2 tako da je za svako x iz te okoline $g(x) \neq 3$.
2°) $\lim\limits_{x\to 1} f(g(x))$ ne postoji iako je $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 3$, i $\lim\limits_{u\to 3} f(u) = \frac{1}{6}$.

Primer

Neka je $u = g(x) = \frac{1}{x}$, $y = f(u) = (1 + \frac{1}{u})^u$. *Kako* $g(x) \to \infty$, *kada* $x \to 0^+$ *i* $f(u) \to e$, *kada* $u \to \infty$, *to je*

$$\lim_{x \to 0^+} f(g(x)) = \lim_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x}) = \lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Kako $g(x) \to -\infty$, *kada* $x \to 0^-$ *i* $f(u) \to e$, *kada* $u \to -\infty$, *to je*

$$\lim_{x \to 0^-} f(g(x)) = \lim_{x \to 0^-} f(\frac{1}{x}) = \lim_{x \to 0^-} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

pa je

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Osobine neprekidnih funkcija

Tvrđenje

Neka su (X, d_X) *i* (Y, d_Y) *metrički prostori i neka je data funkcija* $f : X \to Y$. *Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna*

a) *Funkcija* f *je neprekidna.*

b) *Inverzna slika svakog otvorenog skupa* $U \subset Y$ *je otvoren skup.*

c) *Inverzna slika svakog zatvorenog skupa* $F \subset Y$ *je zatvoren skup.*

Tvrđenje

Neka je (X, d) metrički prostor i $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset X$ funkcija koja je neprekidna u tački $a \in D$.
Ako je $f(a) > c$ $(f(a) < c)$, tada postoji pozitivan realan broj ε, tako da za sve $x \in L(a, \varepsilon) \cap D$ važi $f(x) > c$ $(f(x) < c)$.

Dokaz. Posmatrajmo slučaj kada je $f(a) > c$. Analogno se dokazuje i kada je $f(a) < c$. Neka je $\varepsilon = f(a) - c > 0$. Kako je f neprekidna funkcija u tački a, to

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in L(a, \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon),$$

tj. $c = f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$. Dakle,

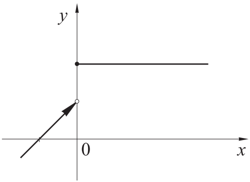
$$(\forall x \in D)(x \in L(a, \delta) \Rightarrow f(x) > c),$$

što je i trebalo da se dokaže. $\square$

Ako funkcija f ima prekid u tački $a \in D$, teorema ne mora da važi.

Na primer, ako posmatramo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases},$$



vidimo da ne postoji okolina $(-\varepsilon, \varepsilon)$ tačke 0, tako da iz $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ sledi

$f(x) > \frac{3}{2}$.

Posledica

Ako je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset X$, *neprekidna u tački* $a \in D$ *i* $f(a) > 0$ $(f(a) < 0)$, *tada postoji otvorena lopta* $L(a, \delta)$, *tako da za svako* $x \in D \cap L(a, \delta)$ *sledi da je* $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$.

Tvrđenje

Ako je funkcija $f : [a, b] \to Y$ neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$, onda je ona nad tim intervalom i ograničena.

Dokaz. Dokaz ćemo dati za slučaj kada je $Y = \mathbb{R}$.

Pretpostavimo da f nije ograničena nad $[a, b]$. Tada

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in [a, b])\ |f(x_n)| > n. \tag{2}$$

Posmatrajmo niz $\{x_n\}$. S obzirom da su svi članovi niza $\{x_n\}$ iz $[a, b]$, to je dati niz ograničen, pa postoji konvergentan podniz $\{x_{n_k}\}$ datog niza. Neka je $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi \in [a, b]$.

Kako je f neprekidna funkcija nad $[a, b]$, to je

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(\xi),$$

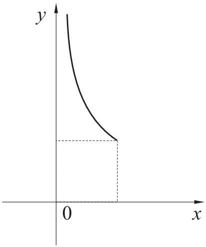
odnosno sledi da je niz $\{f(x_{n_k})\}$ konvergentan, što je u suprotnosti sa (2).

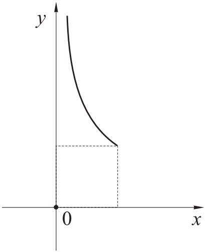
Dakle, funkcija f je ograničena nad $[a, b]$. $\square$

Obe pretpostavke prethodne teoreme su bitne.

• Ako posmatramo funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$, vidimo da je ona neprekidna nad intervalom $(0,1]$, ali nad tim intervalom nije ograničena (ne postoji $\sup\limits_{x\in(0,1]} f(x)$, dok je $\inf\limits_{x\in(0,1]} f(x) = 1$).

• Ako posmatramo funkciju $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, vidimo da ona nije ograničena nad zatvorenim intervalom $[0,1]$ (ima prekid u tački 0).





Definicija

Za neprazan skup $A \subset X$ kažemo da je **kompaktan** *u metričkom prostoru (X, d_X), ako za svaki niz $\{a_n\} \subset A$ postoji tačka nagomilavanja $a \in A$.*

Metrički prostor (X, d_X) je **kompaktan** *ako je X kompaktan skup u metričkom prostoru (X, d_X).*

Prethodna teorema važi i kada se zatvoreni interval zameni skupom kompaktnim u metričkom prostoru (X, d_X) :

Tvrđenje

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) proizvoljni metrički prostori. Ako je $f : D \to Y$, $D \subset X$ neprekidna funkcija i ako je skup D kompaktan u metričkom prostoru (X, d_X), tada je f ograničena funkcija.

Tvrđenje

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna nad* $[a, b]$, *tada ona bar jednom dostiže svoju najveću i najmanju vrednost (funkcija* $f(x)$ *ima maksimum i minumum nad intervalom* $[a, b]$*), tj. postoje realni brojevi* $\alpha, \beta \in [a, b]$, *takvi da je*

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) = f(\alpha) \quad i \quad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x) = f(\beta).$$

I ova teorema važi u opštijem slučaju, tj. važi sledeće tvrđenje:

Tvrđenje

Neka je (X, d_X) *metrički prostor i* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset X$ *neprekidna funkcija nad kompaktnim skupom* D. *Tada funkcija* f *dostiže najveću i najmanju vrednost nad skupom* D.

Tvrđenje

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna nad intervalom $[a, b]$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$, tada u intervalu (a, b) postoji bar jedna nula funkcije, tj. postoji tačka $\xi \in (a, b)$, tako da je $f(\xi) = 0$.

Dokaz. Ako je

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0,$$

tada je

$$\xi = \frac{a+b}{2} \in (a, b),$$

pa je teorema dokazana.

Ako je

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0,$$

tada od podintervala

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \quad \text{i} \quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

intervala $[a, b]$ izaberimo onaj, koji ćemo obeležiti sa $[a_1, b_1]$, kod koga funkcija na krajevima intervala ima različit znak.

Ponavljajući isti postupak na intervalu $[a_1, b_1]$ dobićemo da je ili

$$f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) = 0 \quad \text{ili} \quad f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) \neq 0.$$

Ako je

$$f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) = 0,$$

tada je

$$\xi = \frac{a_1 + b_1}{2} \in (a, b),$$

pa je teorema dokazana.

Ako je

$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \neq 0,$$

tada od podintervala

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right] \quad \text{i} \quad \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

intervala $[a_1, b_1]$ izaberimo onaj, koji ćemo obeležiti sa $[a_2, b_2]$, kod koga funkcija na krajevima intervala ima različit znak.

Nastavljajući taj proces, dobićemo da

1) Posle n koraka, ako je $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)=0$, tada je $\xi=\frac{a_n+b_n}{2}$, pa je teorema dokazana.

2) Ako je za svako $n\in\mathbb{N}$, $f(\frac{a_n+b_n}{2})\neq 0$, tada za niz intervala $\{[a_n,b_n]\}$ važi:

- $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots\supset[a_n,b_n]\supset\ldots$;

- $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0$;

pa je dati niz, niz umetnutih intervala. Sledi da postoji jedna i samo jedna zajednička tačka ξ za sve intervale.

Dokazaćemo da je $f(\xi) = 0$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$f(\xi) > 0 \quad (f(\xi) < 0).$$

Primetimo pre svega da je funkcija f definisana u tački $\xi \in (a, b)$, jer je f neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$.
Kako je f neprekidna u tački ξ i po pretpostavci je $f(\xi) > 0$ $(f(\xi) < 0)$, to postoji pozitivan realan broj δ, tako da za svako x iz skupa

$$(\xi - \delta, \xi + \delta) \cap [a, b]$$

važi

$$f(x) > 0 \quad (f(x) < 0).$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi,$$

to postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je za svako $n \geq n_0$

$$[a_n, b_n] \subset (\xi - \delta, \xi + \delta).$$

Kako je

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0,$$

to funkcija f nije uvek pozitivna (negativna) nad intervalom

$$(\xi - \delta, \xi + \delta)$$

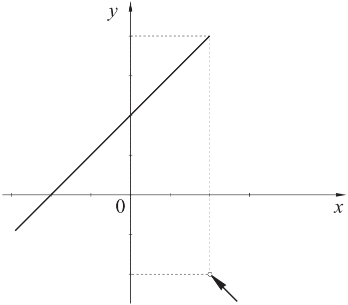
što je kontradikcija.

Dakle, $f(\xi) = 0$. $\square$

Bitna je pretpostavka teoreme da je funkcija f neprekidna nad datim zatvorenim intervalom.

Ako funkcija f nije neprekidna nad posmatranim zatvorenim intervalom, tada f ne mora obavezno da ima nulu nad odgovarajućim otvorenim intervalom. Na primer, ako posmatramo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 2 \\ -x, & x > 2 \end{cases},$$



vidimo da funkcija f nema nulu u intervalu $(0,3)$, iako je

$$f(0) = 2 > 0, \quad f(3) = -3 < 0,$$

jer funkcija f ima prekid u tački 2.

Tvrđenje

Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija nad* $[a, b]$ *i ako je* $f(a) \neq f(b)$*, ona u tom intervalu uzima sve vrednosti između* $f(a)$ *i* $f(b)$*.*

Tvrđenje

Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija, tada je ili za svako* $x \in [a, b]$*,* $f(x) = c$ *ili* $f([a, b]) = [c, d]$*.*

Tvrđenje

Ako je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *neprekidna strogo monotona funkcija nad* (a, b)*, tada je* $f((a, b))$ *otvoren interval.*

Tvrđenje

Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ *neprekidna strogo monotona funkcija nad proizvoljnim intervalom realnih brojeva* I*, tada je inverzna funkcija* $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ *neprekidna nad* $f(I)$*.*

Elementarne funkcije

Osnovne elementarne funkcije su sledeće funkcije:

- konstantna funkcija $y = c$, $c \in \mathbb{R}$,
- stepena funkcija $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
- eksponencijalna funkcija $y = a^x$, gde je $a > 0$ i $a \neq 1$,
- logaritamska funkcija $y = \log_a x$, gde je $a > 0$ i $a \neq 1$,
- trigonometrijske funkcije:
  $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = \operatorname{ctg} x$,
- inverzne trigonometrijske funkcije:
  $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = ctg\, x$, $y = arcctg\, x$.

Elementarne funkcije uvodimo sledećom rekurzivnom definicijom.

Definicija

1. *Osnovne elementarne funkcije su elementarne funkcije.*
2. *Ako su f i g elementarne funkcije, $g \neq O$ (O nula funkcija), tada su elementarne funkcije i* $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$, $f \circ g$.
3. *Elementarne funkcije se mogu dobiti samo konačnom primenom pravila 1. i 2. ove definicije.*

Na primer, elementarne funkcije su: $y = 2x^2 + 3x + 5$,
$y = 3^{2x} - \sin^2 x$, $y = \ln(\sqrt{x} + 3)$, $y = \frac{\ln x + 5}{\operatorname{arctg} x + 3x}$, $y = \ln(\arcsin x^2)$.

Na osnovu poslednje teoreme i osobina neprekidnih funkcija sledi da važi sledeća teorema

Tvrđenje

Elementarne funkcije su neprekidne u oblasti definisanosti.

Uniformna neprekidnost

Definicija

Neka su dati metrički prostori (X, d_X), (Y, d_Y) i funkcija $f : D \to Y$, $D \subset X$. Funkcija f je **uniformno neprekidna nad** $\emptyset \neq E \subset D$ *ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in E)(d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon).$$

Dakle, možemo reći da je funkcija f uniformno neprekidna nad E ako za svaki pozitivan realan broj ε, postoji pozitivan realan broj δ, koji zavisi samo od ε ali ne i od x, tako da ako je rastojanje tačaka x_1 i x_2 iz E manje od δ, tada je rastojanje slika manje od ε.

Napomena

Očigledno je, da ako je funkcija f uniformno neprekidna nad skupom E, ona je nad tim skupom i neprekidna. Da obrnuto nije uvek tačno pokazuje sledeći primer.

Primer

Funkcija $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

je nad intervalom $(0, 1)$ neprekidna, ali nije i uniformno neprekidna.

Da bi to pokazali pretpostavimo suprotno, tj. da je data funkcija nad intervalom $(0,1)$ uniformno neprekidna. Tada za $0<\varepsilon<1$, postoji $\delta>0$, tako da je

$$|x_2-x_1|<\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right|<\varepsilon.$$

Primetimo da kako $x_1,x_2\in(0,1)$, to je $\delta<1$.
Neka je

$$x_1=\delta\in(0,1), \quad x_2=\frac{\delta}{1+\varepsilon}\in(0,1).$$

Tada važi:

$$|x_2-x_1|=\left|\frac{\delta}{1+\varepsilon}-\delta\right|=\delta\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}<\delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right|=\left|\frac{1+\varepsilon}{\delta}-\frac{1}{\delta}\right|=\frac{\varepsilon}{\delta}>\varepsilon,$$

što je suprotno pretpostavci da je funkcija f uniformno neprekidna.
Dakle, f nije uniformno neprekidna nad $(0,1)$.

Tvrđenje

Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna nad* $[a, b]$, *ona je nad tim intervalom i uniformno neprekidna.*

Primer

Funkcija $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ *definisana sa* $f(x) = x$ *je nad intervalom* $(0, 1)$ *neprekidna i uniformno neprekidna.*

Primer

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definisana sa* $f(x) = x^2$ *je nad intervalom* $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ *uniformno neprekidna.*

Definicija izvoda

Posmatramo realnu funkciju $y = f(x)$, $f : D \to \mathbb{R}$, i $x \in D^\circ$.

- $\mathbf{\Delta x} \neq 0$ - **priraštaj argumenta** funkcije $f(x)$ u tački $x \in D^\circ$
- ukoliko $x + \Delta x \in D^\circ$ tada je

$$\mathbf{\Delta y} = f(x + \Delta x) - f(x)$$

priraštaj funkcije $f(x)$ u tački $x \in D^\circ$ koji odgovara priraštaju argumenta Δx

Kako je priraštaj funkcije $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, to količnik $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nije definisan za $\Delta x = 0$.

Da li postoji granična vrednost tog količnika kada $\Delta x \to 0$?

Očigledno da je potreban uslov da granična vrednost količnika postoji kada $\Delta x \to 0$ taj da i $\Delta y \to 0$ tj. da funkcija $f(x)$ treba da bude neprekidna u tački x.

Definicija

Ako postoji granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

onda se ta granična vrednost zove **izvod funkcije $f(x)$ u tački x** *i označava se sa* $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ *ili* $\mathbf{y}'$.

Izvod i neprekidnost. Jednostrani izvod

Teorema

Ako funkcija ima izvod u nekoj tački x, ona je u toj tački i neprekidna.

Dokaz. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = f'(x) \cdot 0 = 0.$ □

Obrnuto ne mora da važi! Primer: $f(x) = |x|$, neprekidna je za svako x, a nema izvod u $x = 0$, jer je

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

pri čemu je

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \qquad \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Prethodni primer pokazuje da mogu postojati desna i leva granična vrednost, $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ i $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ koje su različite, pa ima smisla definisati i jednostrane izvode.

- **Desni izvod** funkcije $f(x)$ nad $[x, x+\delta)$, $\delta > 0$ je

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x + \Delta x \in [x, x+\delta)$$

- **Levi izvod** funkcije $f(x)$ nad $(x-\delta, x]$, $\delta > 0$ je

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x + \Delta x \in (x-\delta, x]$$

$f(x)$ ima izvod u x akko postoje jednostrani izvodi i važi
$$f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x)$$

Da iz neprekidnosti funkcije u tački x ne sledi uvek da postoji bar jedan jednostrani izvod u posmatranoj tački, pokazuje sledeći primer.

Primer

Funkcija $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ *nema jednostrane izvode u tački* $x = 0$.

Rešenje. Funkcija $f(x)$ *je neprekidna za svako* x. *U tački* $x = 0$ *ne postoji ni jedan jednostrani izvod:*

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \sin \frac{1}{\Delta x} \quad \textit{ne postoji,}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \sin \frac{1}{\Delta x} \quad \textit{ne postoji.}$$

Funkcija $f(x)$ ima izvod nad intervalom $I_1 = [a, b)$, $I_2 = (a, b]$, $I_3 = [a, b]$ ako:

- funkcija ima izvod u svakoj tački (a, b)
- u tački a funkcija ima desni izvod, za intervale I_1 i I_3, piše se da je $f'(a) = f'_+(a)$
- u tački b funkcija ima levi izvod, za intervale I_2 i I_3, piše se da je $f'(b) = f'_-(b)$

Primetimo da ako funkcija $y = f(x)$ ima izvod u tački x važi

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \ \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x, \ \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$$

Može se desiti da funkcija ima izvod u svakoj tački intervala (a, b), da u tačakama a i b nema izvod, a da ima izvod nad zatvorenim intervalom $[a, b]$.

Na primer, funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \sin x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{\pi} x & , \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

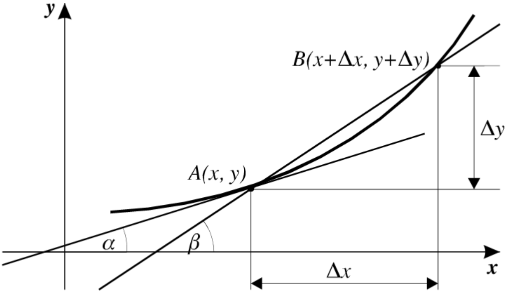
ima izvod $f'(x)$ nad intervalom $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ iako u krajnjim tačkama 0 i $\frac{\pi}{2}$ tog intervala ne postoji izvod, jer je

$$f'_-(0) = 0, \quad f'_+(0) = 1,$$

$$f'_-\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f'_+\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

Geometrijska interpretacija izvoda

$y = f(x)$ je neprekidna funkcija nad (a, b)



- A, B su tačke grafika, prava AB je sečica krive, $\mathrm{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- ako $B \to A$ prava AB postaje tangenta krive u tački A
- ako je $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ugao koji tangenta zaklapa sa pozitivnim delom x-ose tada je $$\mathrm{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

- ako je $f'(a) \neq 0$, jednačina tangente u tački $A(a, f(a))$ je

$$y - f(a) = f'(a)(x - a),$$

a jednačina normale u tački $A(a, f(a))$ je

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

- jednačina desne tangente u tački $A(a, f(a))$ je

$$y - f(a) = f'_+(a)(x - a),$$

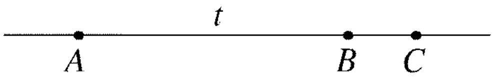
a jednačina leve tangente u tački $A(a, f(a))$ je

$$y - f(a) = f'_-(a)(x - a),$$

- ako je ako je $f'(a) = 0$ jednačina tangente funkcije u tački $A(a, f(a))$ je $y = f(a)$, a jednačina normale je $x = a$.

Fizička interpretacija izvoda - brzina i ubrzanje tačke

Neka se tačka kreće po pravoj tako da je jednačinom $s = f(t)$ data zavisnost pređenog puta od početne tačke A.



U trenutku t neka se tačka nalazi u B, a u trenutku $t + \Delta t$ u C. Pređeni put do trenutka t je $f(t)$, a do trenutka $t + \Delta t$ je $f(t + \Delta t)$. Srednja brzina v_s na putu BC je jednaka

$$v_s = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Prirodno je definisati trenutnu brzinu te tačke u B kao graničnu vrednost srednje brzine kada C teži B. Drugim rečima, brzina $v(t)$ u B se definiše kao

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t),$$

ako ta granična vrednost postoji.

Slično, ako je u trenutku t data brzina $v = f(t)$, a u trenutku $t + \Delta t$ brzina $v = f(t + \Delta t)$, srednje ubrzanje na putu BC je jednako

$$a_s = \frac{\Delta v_s}{\Delta t},$$

pa je trenutno ubrzanje u tački B jednako

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_s}{\Delta t} = v'(t),$$

ako ta granična vrednost postoji.

Osobine izvoda

Teorema

Ako funkcije $u = u(x)$, $v = v(x)$ *imaju izvod u tački* x, *tada i funkcije* $u \pm v$, uv, $\dfrac{u}{v}$ *(*$v(x) \neq 0$ *u datoj tački* x*) i* $c \cdot u$ *imaju izvod u tački* x *i važi da je:*

1. $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$,
2. $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$,
3. $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$,
4. $[c\ u(x)]' = c\ u'(x)$, $c = const.$

Teorema (izvod složene funkcije)

Neka je data složena funkcija $y = f(u),\ u = g(x)$*. Ako* $g(x)$ *ima izvod u tački* x *i* $f(u)$ *ima izvod u tački* u*, tada je*

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(u)g'(x).$$

Teorema (izvod inverzne funkcije)

Neka je $f(x)$ *neprekidna strogo monotona funkcija definisana na intervalu* (a, b) *i* $f^{-1}(x)$ *njena inverzna funkcija. Ako funkcija* $f(x)$ *ima izvod* $f'(x)$ *u tački* $x \in (a, b)$ *i* $f'(x) \neq 0$*, tada funkcija* $f^{-1}(x)$ *ima izvod u tački* $y = f(x)$ *i važi*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Neka su nad intervalom $I \subset \mathbb{R}$ definisane realne funkcije

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in I,$$

pri čemu za funkciju $\varphi(t)$ postoji inverzna funkcija $t = \varphi^{-1}(x)$.

Složena funkcija $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$ je definisana nad skupom vrednosti $\{\varphi(t) : t \in I\}$ funkcije $\varphi(t)$.

Tada je sa $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I$ funkcija $f(x)$ zadata u parametarskom obliku i promenljivu t zovemo parametrom.

Teorema (izvod parametarski zadate funkcije)

Neka je data funkcija $y = f(x)$ u parametarskom obliku $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in I$. Ako neprekidne funkcije $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ imaju izvode u tački $t \in (a, b)$ i ukoliko je $\varphi'(t) \neq 0$, tada funkcija $y = f(x)$ ima izvod u tački t i važi

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Logaritamski izvod

Neka je data funkcija Neka je $y = f(x)^{g(x)}, \quad f(x) > 0$. *Tada je*

$$\ln y = g(x) \ln f(x),$$

pa je

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)},$$

odakle je

$$y' = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$$

Primer

Odrediti prvi izvod funkcije $y = x^x$.

Diferencijabilnost. Diferencijal.

Neka je funkcija $f(x)$ definisana na skupu D i neka $x \in D^\circ$.
Priraštaj funkcije

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x), \quad x + \Delta x \in D^\circ$$

zavisi od priraštaja nezavisno promenljive Δx.

Definicija

Za funkciju $f(x)$ se kaže da je diferencijabilna u tački x ako se Δy može napisati u obliku

$$\Delta y = D\Delta x + \alpha\Delta x,$$

pri čemu $\alpha \to 0$ kada $\Delta x \to 0$, dok D ne zavisi od Δx.
Linearni deo priraštaja funkcije, $D\Delta x$, naziva se diferencijal funkcije $f(x)$ i obeležava se sa dy ili $df(x)$, tj.

$$dy = df(x) = D\Delta x.$$

- Ako je funkcija diferencijabilna u svakoj tački skupa A onda se kaže da je $f(x)$ diferencijabilna nad skupom A.
- Ako funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ ima izvod u svakoj tački skupa $X_1 \subseteq D^\circ$, tada za funkciju $f' : x \to f'(x)$, $x \in X_1$ kažemo da je izvodna funkcija funkcije f.

Primer

Za funkciju $f(x) = x^2$ je

$$\begin{aligned}
\Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) \\
&= (x+\Delta x)^2 - x^2 \\
&= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 \\
&= \underbrace{2x}_{D}\Delta x + \underbrace{\Delta x}_{\alpha}\Delta x,
\end{aligned}$$

gde $D = 2x$ ne zavisi od Δx, a $\alpha = \Delta x \to 0$, $\Delta x \to 0$, pa je ova funkcija diferencijabilna.

Teorema

Potreban i dovoljan uslov da funkcija $f(x)$ bude diferencijabilna u tački x je da ima izvod u toj tački.

Dokaz. **Uslov je potreban.** Pretpostavimo da je funkcija $f(x)$ diferencijabilna u tački x. Tada je

$$\Delta y = D\Delta x + \alpha \Delta x,$$

pri čemu $\alpha \to 0$ kada $\Delta x \to 0$. Sledi da je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (D + \alpha) = D.$$

Izvod postoji i to je baš D.

Uslov je dovoljan. Ako $f(x)$ ima izvod u tački, tj. postoji granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

tada je količnik

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Sledi da je

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x,$$

što znači da je funkcija $f(x)$ diferencijabilna u tački x.

Treba uočiti da $f'(x)$ ne zavisi od Δx. $\square$

- Dakle, diferencijal je dat obrascem $dy = f'(x)\Delta x$.
- Za funkciju $y = x$ je $dy = dx$ pa se i u opštem slučaju Δx zamenjuje sa dx, pa je

$$dy = f'(x)dx \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

  što je Lajbnicova oznaka za izvod.
- Izvod složene funkcije je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

- Izvod inverzne funkcije je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Invarijantnost oblika diferencijala

- Ako je $y = f(u)$, $u = g(x)$ složena funkcija, tada je

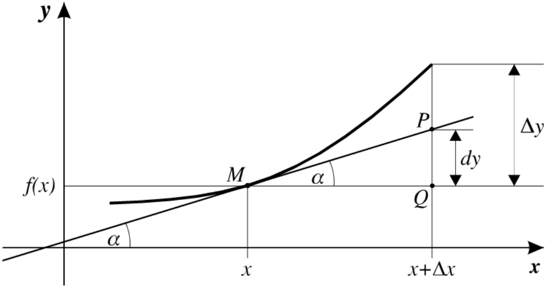
$$dy = d(f(g(x))) = (f \circ g)'(x)dx = f'(u)g'(x)dx$$

odnosno

$$dy = f'(u)du$$

Dakle, diferencijal ima osobinu invarijantnosti oblika, tj. diferencijal ima isti oblik i kada je u funkcija od x, kao što bi imao da je u nezavisna promenljiva.

Geometrijska interpretacija diferencijala



- Neka u proizvoljnoj tački $M(x, f(x))$ kriva $y = f(x)$ ima tangentu. Tada je

$$dy = f'(x)\Delta x = \mathrm{tg}\alpha\Delta x = \frac{\overline{PQ}}{\overline{MQ}}\overline{MQ} = \overline{PQ},$$

tj. diferencijal dy je priraštaj ordinate tangente u tački $M(x, f(x))$ koji odgovara priraštaju argumenta Δx.

Osobine diferencijala

Teorema (osobine diferencijala)

Ako su funkcije $u = u(x)$ i $v = v(x)$ diferencijabilne u tački x tada važi

1. $d(u(x) \pm v(x)) = du(x) \pm dv(x)$,
2. $d(u(x)v(x)) = v(x)du(x) + u(x)dv(x)$,
3. $d\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right) = \dfrac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v^2(x)}, \; v(x) \neq 0$
4. $d(c \cdot u(x)) = c \cdot du(x)$.

Primena diferencijala

Kako je

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

pri čemu $\alpha \to 0$ kada $\Delta x \to 0$, u određenom smislu priraštaj

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

možemo aproksimirati diferencijalom

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$$

kada $\Delta x \to 0$, tj.

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \quad (\Delta x \to 0).$$

Na osnovu toga sledi da je

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \quad (\Delta x \to 0).$$

Primer

Odrediti približno $\sqrt[3]{8,01}$.

Rešenje. Za funkciju $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *imamo da je*

$$\sqrt[3]{x+\Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Delta x, \quad \Delta x \to 0, x \neq 0.$$

Za $x = 8$ *i* $\Delta x = 0,01$ *dobijamo*

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{8+0,01} &\approx \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} \cdot 0,01 \\ &= 2 + \frac{1}{1200} \\ &\approx 2 + 0,00083 = 2,00083. \end{aligned}$$

Izvodi višeg reda

Neka funkcija $y = f(x)$ ima izvod u svakoj tački skupa $X_1 \subset D^\circ$.
Njen izvod $f'(x)$ je funkcija nezavisne promenljive x, $x \in X_1$.
Ako ona ima izvod u nekoj tački $x \in X_1$ tada njen izvod $(f'(x))'$ nazivamo

drugi izvod ili izvod drugog reda funkcije $f(x)$ u tački x.

Slično se definišu ostali viši izvodi funkcije $y = f(x)$:

$$\begin{array}{lcl} y & \stackrel{\text{def}}{=} & f^0(x), \\ y' & = & f'(x), \\ y'' & = & (f'(x))', \\ & \vdots & \\ f^{(n)}(x) & = & (f^{(n-1)}(x))'. \end{array}$$

- za parametarski zadatu funkciju $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in (a, b)$:

$$y''_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot t'_x = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^2} \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3}$$

- za inverznu funkciju $x = f^{-1}(y)$:

$$x''_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_x \cdot x'_y = -\frac{y''_x}{(y'_x)^2}\frac{1}{y'_x} = -\frac{y''_x}{(y'_x)^3}$$

Diferencijali višeg reda

Ako je funkcija $f(x)$ dva puta diferencijabilna nad $X_1 \subset D^\circ$ onda se diferencijal funkcije $y = f'(x)dx$ označava sa d^2y i naziva drugi diferencijal ili diferencijal drugog reda funkcije $f(x)$.

Shodno tome se $dy = f'(x)dx$ naziva diferencijal prvog reda ili prvi diferencijal.

• Važi da je $d^2 f = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx^2$.

• Ako je funkcija $f^{(n-1)}(x)$, $n \geq 2$ diferencijabilna, tada se diferencijal funkcije $d^{n-1}y = f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}$ naziva diferencijal $n-$tog reda funkcije $f(x)$ i može da se pokaže da važi $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$.

Ako je $y = f(u)$, $u = u(x)$, gde su funkcije $y = f(u)$ i $u = u(x)$ dva puta diferencijabilne, tada je

$$
\begin{aligned}
d^2y &= d(dy) \\
&= d(f'(u)du) \\
&= d(f'(u))du + f'(u)d(du) \\
&= d(f'(u))du + f'(u)d(u'(x)dx) \\
&= d(f'(u))du + f'(u)(u''(x)dx^2) \\
&= f''(u)du^2 + f'(u)d^2u,
\end{aligned}
$$

pa diferencijali višeg reda ne poseduju osobinu invarijantnosti oblika!

Osnovne teoreme diferencijalnog računa
Rolova teorema

Rolova teorema

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna nad zatvorenim intervalom* $[a, b]$, *ima izvod nad otvorenim intervalom* (a, b) *i ako je* $f(a) = f(b)$, *tada postoji bar jedna tačka* $\xi \in (a, b)$ *takva da je* $f'(\xi) = 0$.

Geometrijski smisao: Postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$ takva da je tangenta krive $y = f(x)$ u tački $A(\xi, f(\xi))$ paralelna sa $x-$osom.

Mehanička interpretacija: Tačka se kreće po pravoj, u trenutku t se nalazi u tački sa koordinatom $x(t)$.
Neka je $x = x(t)$ neprekidna za $t \in [\alpha, \beta]$ i diferencijabilna za $t \in (\alpha, \beta)$.
Ako je $x(\alpha) = x(\beta)$ (tj. položaj tačke u trenutku $t = \alpha$ poklapa se sa položajem tačke u trenutku $t = \beta$), tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$ u kojoj je brzina jednaka nuli.

Dokaz Rolove teoreme. Neprekidna funkcija nad zatvorenim intervalom dostiže bar jednom najmanju vrednost m i najveću vrednost M.

• Ako je $m = M$, $f(x)$ je konstantna na celom intervalu, pa je $f'(x) = 0$ za svako $x \in (a, b)$.

• Neka je $m < M$.
Pp. da je $M > f(a) = f(b)$ (ukoliko je $M = f(a)$ tada je $m < f(a)$).

Tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$, takva da je $f(\xi) = M$.
Dokazaćemo da je $f'(\xi) = 0$. Važi

$$f(\xi + \Delta x) \leq f(\xi), \text{ za } \xi + \Delta x \in [a, b], \quad \text{tj.}$$

$$\frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0, \Delta x > 0 \text{ i } \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \geq 0, \Delta x < 0.$$

Za tačku ξ, po pretpostavci postoji $f'(\xi)$, pa je $f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = f'(\xi)$.
Iz $f'_+(\xi) \leq 0$, $f'_-(\xi) \geq 0$ i $f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = f'(\xi)$ sledi da je $f'(\xi) = 0$. $\square$

Lagranžova teorema

Lagranžova teorema - teorema o srednjoj vrednosti

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna nad zatvorenim intervalom* $[a, b]$, *ima izvod nad otvorenim intervalom* (a, b), *tada postoji bar jedna tačka* $\xi \in (a, b)$ *takva da je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Geometrijski smisao: Postoji tačka $\xi \in (a, b)$ takva da je tangenta u $C(\xi, f(\xi))$ paralelna pravoj kroz $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$.

Mehanička interpretacija: Kod pravolinijskog kretanja tačke po zakonu $x = x(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ gde je funkcija $x(t)$ neprekidna za $t \in [\alpha, \beta]$ i diferencijabilna nad (α, β) postoji tačka $\xi \in (\alpha, \beta)$ u kojoj je trenutna brzina jednaka srednjoj brzini u posmatranom intervalu.

- Ako stavimo
$$\frac{\xi - a}{b - a} = \theta,$$
tada je $\xi = a + \theta(b - a), \quad 0 < \theta < 1$, pa se tvrđenje
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$
može zapisati u obliku
$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a), \quad 0 < \theta < 1,$$
a uzimajući $a = x$ i $b = x + h$ dobija se
$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Posledice Rolove i Lagranžove teoreme

Posledica

(Rolov metod za razdvajanje korena funkcije) Ako za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *važi:*

a) $f(x)$ *je neprekidna nad zatvorenim intervalom* $[a, b]$,

b) $f(x)$ *je diferencijabilna nad intervalom* (a, b) *i pri tome je* $f'(x) \neq 0$ *za* $x \in (a, b)$,

c) $f(a) \cdot f(b) < 0$

tada postoji samo jedna nula funkcije nad intervalom (a, b).

Posledica

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *diferencijabilna nad intervalom* (a, b) *i ako su* $c_1, c_2 \in (a, b)$, $c_1 < c_2$ *dve uzastopne nule prvog izvoda, tada nad intervalom* (c_1, c_2) *funkcija* $f(x)$ *ima najviše jednu nulu.*

Primer

Pokazati da jednačina $x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$ *nad intervalom* $(-1, 1)$ *ima tačno jedno rešenje.*

Rešenje. Posmatrajmo funkciju $f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{2}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \vee x = -1$$

$$f(-1) = -1 + 3 + \frac{1}{2} > 0, \quad f(1) = 1 - 3 + \frac{1}{2} < 0$$

pa na osnovu prethodne teoreme nad intervalom $(-1, 1)$ funkcija $f(x)$ ima tačno jednu nulu.

Posledica

Ako za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *važi:*

a) $f(x)$ *je neprekidna nad* $[a, b]$,

b) $f(x)$ *je diferencijabilna nad intervalom* (a, b) *i pri tome je* $f'(x) = 0$ *za svako* $x \in (a, b)$,

tada je funkcija $f(x)$ *konstantna funkcija nad* $[a, b]$.

Posledica

Ako funkcije $f(x)$ *i* $g(x)$ *imaju jednake izvode:* $f'(x) = g'(x),\ x \in I$, *tada se one razlikuju za konstantu nad intervalom* I.

Primer

Pokazati da je $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$.

Rešenje. Posmatrajmo funkciju $f(x) = \arcsin x + \arccos x$.

Ona je neprekidna nad $[-1, 1]$.

Diferencijabilna je nad $(-1, 1)$ i pri tome je

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad x \in (-1, 1)$$

pa je funkcija $f(x)$ konstantna funkcija nad intervalom $[-1, 1]$, tj. $f(x) = c$, $x \in [-1, 1]$.

$$c = ?$$

$$\arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = c.$$

Primer

Da li postoji konstanta c tako da je $arcctg\,\frac{1}{x} - arctg\,x = c$, *za svako* $x \neq 0$?

Rešenje. Za funkciju $f(x) = arctg\,x$ je

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Za $g(x) = arcctg\,\frac{1}{x}$ je

$$g'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \neq 0.$$

Za $x > 0$ je funkcija $arcctg\,\frac{1}{x} - arctg\,x$ konstantna, pri čemu računajući njenu vrednost npr. u tački $x = 1$ dobijamo da je

$$arcctg\,\frac{1}{x} - arctg\,x = 0, \quad x > 0$$

Za $x < 0$ je funkcija $arcctg\,\frac{1}{x} - arctg\,x$ konstantna, pri čemu računajući njenu vrednost npr. u tački $x = -1$ dobijamo da je

$$arcctg\,\frac{1}{x} - arctg\,x = \pi, \quad x < 0.$$

Posledica

Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna nad* $[a, b]$ *i diferencijabilna nad* (a, b)*. Ako postoji*

$$\lim_{x \to a^+} f'(x) \quad \left(\lim_{x \to b^-} f'(x)\right),$$

tada postoji i $f'_+(a) \quad (f'_-(b))$ *i važi jednakost*

$$\lim_{x \to a^+} f'(x) = f'_+(a) \quad \left(\lim_{x \to b^-} f'(x) = f'_-(b)\right).$$

Posledica

Ako funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ *ima izvod nad intervalom* I*, tada izvod* $f'(x)$ *ne može imati prekide prve vrste nad tim intervalom.*

Da izvod može imati prekide druge vrste pokazuje sledeći primer.

Primer

Pokazati da za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

prvi izvod $f'(x)$ *ima prekid druge vrste u tački* $x = 0$.

Rešenje. Kako je $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, za $x \neq 0$ i

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 0,$$

s obzirom da granične vrednosti $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$ i $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x)$ ne postoje, to funkcija $f'(x)$ ima u tački $x = 0$ prekid druge vrste.

Košijeva teorema

Darbuova teorema

Ako funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ima izvod nad intervalom* $[a, b]$ *i ako je* $f'(a) \neq f'(b)$, *onda* $f'(x)$ *uzima sve međuvrednosti između* $f'(a)$ *i* $f'(b)$.

Košijeva teorema

Ako su funkcije $f(x), g(x)$ *neprekidne nad zatvorenim intervalom* $[a, b]$, *imaju izvode nad* (a, b) *i za svako* $x \in (a, b)$ *je* $g'(x) \neq 0$, *tada postoji bar jedna tačka* $\xi \in (a, b)$, *takva da je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Dokaz. Primetimo da je $g(b) - g(a) \neq 0$, jer bi inače funkcija $g(x)$ ispunjavala uslove Rolove teoreme, pa bi postojala tačka $\xi \in (a, b)$ takva da je $g'(\xi) = 0$, to je suprotno uslovu da je $g'(x) \neq 0$ za svako $x \in (a, b)$.

Funkcija

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

je neprekidna nad intervalom $[a, b]$, ima izvod u svakoj tački $x \in (a, b)$ i $h(a) = h(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$.

Prema Rolovoj teoremi postoji $\xi \in (a, b)$, takvo da je

$$h'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0.$$

Sledi da je

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

što je i trebalo dokazati. □

Dokaz Lagranžove teoreme.

Lagranžova teorema je specijalan slučaj Košijeve.

Naime, stavljajući u Košijevu teoremu

$$g(x) = x,$$

dobija se

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Lopitalovo pravilo

- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ima neodređeni oblik $"\dfrac{0}{0}"$ kada $x \to a$ ako važi

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ima neodređeni oblik $"\dfrac{\infty}{\infty}"$ kada $x \to a$ ako važi

$$f(x) \to \pm\infty, \quad g(x) \to \pm\infty, \quad x \to a$$

Lopitalova teorema

Neka su funkcije $f,\ g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *diferencijabilne nad* (a,b), $g'(x) \neq 0,\ x \in (a,b)$ *i neka je* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$ $\left(\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} g(x) = 0\right)$. *Tada:*

1. *Ako postoji* $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \left(\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B\right)$, *tada postoji* $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} \left(\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}\right)$ *i važi jednakost*
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \left(\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B\right).$$
2. *Ako* $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to \pm\infty, x \to a^+ \left(x \to b^-\right)$, *tada i* $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \pm\infty$, *kada* $x \to a^+ \left(x \to b^-\right)$.

Dokaz (dela 1. kada $x \to a^+$). Za funkcije

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in (a,b) \\ 0 & , \quad x = a \end{cases} \quad , \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & , \quad x \in (a,b) \\ 0 & , \quad x = a \end{cases}$$

važi da su neprekidne nad $[a,b)$,
diferencijabilne nad (a,b) $(F'(x) = f'(x),\ G'(x) = g'(x) \neq 0)$,
pa za svako $x \in (a,b)$ zadovoljavaju uslove Košijeve teoreme nad intervalom $[a,x]$.

Sledi da postoji $\xi \in (a,x)$ tako da je

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Kako je $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta \in \mathbb{R}^+$, tako da

$$a < x < a + \delta < b \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon.$$

Za $x \in (a, a + \delta)$ na osnovu

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \varepsilon$$

zaključujemo

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Za slučaj da je $a = -\infty$ uvodimo smenu $t = \dfrac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t\to0^-} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} \\
&= \lim_{t\to0^-} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)} \\
&= \lim_{t\to0^-} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema

Neka su funkcije $f,\ g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *diferencijabilne nad* (a,b) *i* $g'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$ *i neka* $f(x) \to \pm\infty$ *i* $g(x) \to \pm\infty$ *kada* $x \to a^+$ $(f(x) \to \pm\infty$ *i* $g(x) \to \pm\infty$ *kada* $x \to b^-)$. *Tada:*

1. *Ako postoji* $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ $\left(\lim\limits_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B\right)$, *tada postoji* $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\left(\lim\limits_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}\right)$ *i važi jednakost*
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \left(\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B\right).$$
2. *Ako* $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to \pm\infty$, *kada* $x \to a^+$ $(x \to b^-)$, *tada i* $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \pm\infty$, *kada* $x \to a^+$ $(x \to b^-)$.

Primer

Odrediti $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x}$.

Rešenje. Ovde ne možemo da koristimo Lopitalovo pravilo, jer

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1}$$

ne postoji, dok je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

- Dakle, Lopitalova pravila daju dovoljne, ali ne i potrebne uslove za postojanje granične vrednosti.

I ostali neodređeni izrazi oblika $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ mogu se određivati koristeći Lopitalova pravila.

Primer

Odrediti:

a) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$,

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$,

c) $\lim\limits_{x \to 0} x^x$.

Tejlorova i Maklorenova teorema

Tejlorova teorema

Neka su funkcija $f(x)$ i svi njeni izvodi do $(n-1)$-vog reda neprekidni nad $[A,B]$ i neka $f(x)$ ima $n-$ti izvod nad (A,B).
Neka je $a \in [A,B]$ proizvoljna tačka. Tada:
za svako $b \in [A,B]$, $b \neq a$, postoji bar jedna tačka $\xi \in (a,b)$, $b > a$ (tj. postoji bar jedna tačka $\xi \in (b,a)$, $a > b$),
takva da je

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \tfrac{b-a}{1!} f'(a) + \tfrac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \tfrac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n, \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \tfrac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i + R_n, \end{aligned}$$

$$R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Za $b = a + h$ Tejlorova formula je oblika

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n,$$

$$R_n(x) = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Za $b = x$ Tejlorova formula je oblika

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta(x-a)), \quad 0 < \theta < 1.$$

Kada je funkcija $f(x)$ predstavljena kao

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + R_n(x)$$

kažemo da je razvijena po Tejlorovoj formuli u tački a.

- $T_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$ Tejlorov polinom
- $R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)), 0 < \theta < 1$ ostatak ili greška

U specijalnom slučaju za $a = 0$ imamo Maklorenovu formulu

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x),\ 0 < \theta < 1.$$

- $M_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i$ Maklorenov polinom
- $R_n(x)$ ostatak ili greška aproksimacije funkcije Maklorenovim polinomom

Primer

Napisati Maklorenove formule za funkcije:

a) $f(x) = e^x$,
b) $f(x) = \sin x$,
c) $f(x) = \cos x$,
d) $f(x) = \ln(1+x)$,
e) $f(x) = (1+x)^\alpha$.

Rešenje. a) Kako je $f(x) = f'(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$ i $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = e^0 = 1, \quad f^{(n)}(\theta x) = e^{\theta x}$, to Maklorenova formula za funkciju $f(x) = e^x$ glasi

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Primer

Napisati polinom $P(x) = 1 + x - 3x^2 + 4x^3$ *po stepenima od* $x - 1$.

Rešenje. Kako je

$$P(x) = P(1) + \frac{x-1}{1!}P'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!}P''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!}P'''(1),$$

i pri tome

$$\begin{array}{lcl} & & P(1) = 3, \\ P'(x) = 1 - 6x + 12x^2 & \Rightarrow & P'(1) = 7, \\ P''(x) = -6 + 24x & \Rightarrow & P''(1) = 18, \\ P'''(x) = 24 & \Rightarrow & P'''(1) = 24, \end{array}$$

to je $P(x) = 3 + 7(x-1) + 9(x-1)^2 + 4(x-1)^3$.

Napomena u vezi definicije izvoda

Pri definiciji izvoda funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, pretpostavka je da je $x \in D^\circ$.

Mogli smo definisati i izvod u tački $x \in D$, ali uz pretpostavku da je x tačka nagomilavanja skupa D, jer graničnu vrednost

$$\lim_{\Delta x \to 0, x+\Delta x \in D} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

možemo tražiti bez obzira da li je funkcija definisana u nekoj okolini tačke x.

Na primer, tada bi funkcija $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{Q}$, imala "izvod" u svakoj tački $x \in \mathbb{Q}$, dok ona izvod, onako kako smo ga definisali, nema ni u jednoj tački $x \in \mathbb{Q}$.

Česta je situacija da funkcija $f(x)$ u tački a ima otklonjiv prekid, tj. postoji $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, pri čemu ili funkcija $f(x)$ nije definisana u tački a, ili ako je definisana $A \neq f(a)$.
Tada funkcija nema izvod u tački a (morala bi da bude neprekidna u a).

Mogli bismo definisati

$$\overline{f'}(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - A}{\Delta x},$$

ako ta granična vrednost postoji i nazvati je **nepravi** ili **kvazi izvod**.

Ako postoji $f'(a)$, tada postoji i $\overline{f'}(a)$ i važi jednakost $f'(a) = \overline{f'}(a)$.

Funkcija u tački a može da ima nepravi izvod, a da nema izvod:

Za funkciju $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ne postoji $f'(0)$, dok je

$$\begin{aligned} \overline{f'}(0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x - \Delta x}{(\Delta x)^2} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{2\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin \Delta x}{2} = 0. \end{aligned}$$

$\overline{f'}(0)$ je u stvari izvod funkcije

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

u nuli, tj. $F'(0) = \overline{f'}(0) = 0$.

Ista je situacija kod jednostranih izvoda. Pretpostavimo da je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ definisana nad intervalom (a, b) i da postoji $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a^+)$, $\left(\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b^-)\right)$.

Ako postoji

$$\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(a+\Delta x) - f(a^+)}{\Delta x}, \quad \left(\lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(b+\Delta x) - f(b^-)}{\Delta x},\right)$$

onda tu graničnu vrednost možemo nazvati **nepravi desni (nepravi levi)** izvod u tački a (b) i obeležiti ga $\overline{f'_+}(a)$ $(\overline{f'_-}(b))$.

Ne interesuje nas da li je funkcija definisana u datim tačkama, niti, ako je definisana, da li je neprekidna sa desne (leve) strane.

Nepravi desni i nepravi levi izvod jednim imenom zovemo **jednostrani nepravi izvodi**.

Ako funkcija u tački ima desni (levi) izvod, onda ona ima u toj tački desni nepravi (levi nepravi) izvod i oni su jednaki.

Obrnuto nije tačno: Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & , \quad x < 0 \\ \dfrac{\cos x - 1}{x} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

nije definisana u nuli, pa nema u nuli ni desni ni levi izvod.

Kako je

$$f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

to je

$$\overline{f'_-}(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\Delta x) - f(0^-)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 0.$$

Slično, kako je

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = 0,$$

to je

$$\overline{f'_+}(0) = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0^+)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}}{\Delta x} = -\frac{1}{2}.$$

Monotonost

Definicija

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ *je nad intervalom* $I \subset \mathbb{R}$

1. *monotono rastuća ako za svake dve tačke* $x_1, \ x_2 \in I$ *važi*
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$
2. *monotono opadajuća ako za svake dve tačke* $x_1, \ x_2 \in I$ *važi*
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$
3. *monotono nerastuća ako za svake dve tačke* $x_1, \ x_2 \in I$ *važi*
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$
4. *monotono neopadajuća ako za svake dve tačke* $x_1, \ x_2 \in I$ *važi*
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

U svakom od navedenih slučajeva funkcija je monotona, u slučajevima 1 i 2 je strogo monotona.

Teorema

Neka funkcija $f(x)$ ima izvod nad intervalom I. Ako je $f(x)$ monotono neopadajuća funkcija nad intervalom I tada je $f'(x) \geq 0$, za $x \in I$, a ako je monotono nerastuća funkcija nad intervalom I tada je $f'(x) \leq 0$, za $x \in I$.

Dokaz (za monotono neopadajuću funkciju). Za proizvoljno $x \in I$, s obzirom da je $f(x)$ monotono neopadajuća funkcija je

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0, \quad x + \Delta x \in I,$$

odakle sledi da je

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

□

Teorema

Neka funkcija $f(x)$ ima prvi izvod nad intervalom I. Ako je $f'(x) > 0$, funkcija $f(x)$ je monotono rastuća nad intervalom I, a ako je $f'(x) < 0$, funkcija $f(x)$ je monotono opadajuća nad intervalom I.

Dokaz. Neka je $[x_1, x_2] \subset I$ proizvoljan podinterval intervala I. Funkcija $f(x)$ nad intervalom $[x_1, x_2]$ zadovoljava sve uslove Lagranžove teoreme, pa postoji tačka $\xi \in (x_1, x_2)$ takva da je

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Ako je $f'(x) > 0$, tada je i $f'(\xi) > 0$, pa je

$$f(x_2) > f(x_1).$$

Dokaz je sličan kada je $f'(x) < 0$. $\square$

Definicija

Neka je funkcija $f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke a.
Funkcija je rastuća u tački a ako postoji okolina tačke a u kojoj za svako x iz te okoline važi

$$f(x) > f(a) \text{ za } x > a, \quad f(x) < f(a) \text{ za } x < a.$$

Funkcija je opadajuća u tački a ako postoji okolina tačke a u kojoj za svako x iz te okoline važi

$$f(x) < f(a) \text{ za } x > a, \quad f(x) > f(a) \text{ za } x < a.$$

Teorema

Ako je funkcija $f(x)$ rastuća (opadajuća) u tački a i ako postoji $f'(a)$, tada je $f'(a) \geq 0$, $(f'(a) \leq 0)$.

Teorema

Neka funkcija $f(x)$ u tački a ima izvod $f'(a) \neq 0$. Ako je $f'(a) > 0$, funkcija f(x) je rastuća u tački a, a ako je $f'(a) < 0$ ona je u tački a opadajuća.

Primer

Pokazati da funkcija $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ *nije monotona ni u jednoj okolini nule. Da li je ova funkcija rastuća u nuli?*

Rešenje. $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad x = 0 \end{cases}$,

$f'(0) = \frac{1}{2} > 0$, pa je funkcija rastuća u nuli.
Ako posmatramo nizove sa opštim članovima

$$a_n = \frac{1}{2n\pi}, \quad b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}, \quad c_n = -\frac{1}{2n\pi}, \quad d_n = -\frac{1}{(2n+1)\pi},$$

možemo primetiti da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$,

$$f'(a_n) = f'(c_n) = -\frac{1}{2}, \quad f'(b_n) = f'(d_n) = \frac{3}{2},$$

pa ne postoji okolina nule u kojoj je prvi izvod stalnog znaka, te funkcija nije monotona ni u jednoj okolini nule.

Dovoljan uslov za monotonost:

Teorema

Neka funkcija $f(x)$ ima prvi izvod u okolini tačke a i neka je $f'(x)$ neprekidna funkcija u tački a. Ako je $f'(a) > 0$, funkcija $f(x)$ je monotono rastuća u nekoj okolini tačke a, a ako je $f'(a) < 0$, funkcija $f(x)$ je monotono opadajuća u nekoj okolini tačke a.

Darbuova teorema

Ako funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ima izvod nad intervalom $[a, b]$ i ako je $f'(a) \neq f'(b)$, onda $f'(x)$ uzima sve međuvrednosti između $f'(a)$ i $f'(b)$.

- funkcija $f'(x)$ ne mora biti neprekidna nad $[a, b]$, $f'(x)$ može imati prekid druge vrste

Dokaz. Neka je $f'(a) > f'(b)$ i $f'(a) > C > f'(b)$.

Posmatrajmo funkciju $g(x) = f(x) - Cx$.

$g'(x) = f'(x) - C$, pa je

$$g'(a) = f'(a) - C > 0 > f'(b) - C = g'(b).$$

$g(x)$ je neprekidna nad $[a, b]$, pa nad njim dostiže svoju najveću vrednost, tj. postoji $\xi \in [a, b]$ da je $g(\xi) = \max_{x \in [a,b]} g(x)$.

Štaviše, $\xi \neq a$ jer je $g'(a) > 0$ ($g(x)$ je rastuća u a) i $\xi \neq b$, jer je $g'(b) < 0$.

Dakle, $\xi \in (a, b)$.

Kako je tu ekstrem, mora biti $g'(\xi) = 0$, tj. $f'(\xi) = C$. □

Ekstremne vrednosti funkcija

Definicija

Ako je realna funkcija $f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke $a \in \mathbb{R}$, tada kažemo da funkcija $f(x)$ u tački a ima lokalni minimum ako postoji $\delta > 0$ takvo da

$$x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) > f(a),$$

a lokalni maksimum ako postoji $\delta > 0$ takvo da

$$x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) < f(a).$$

- tačka a je tada lokalna ekstremna vrednost i to je najmanja ili najveća vrednost funkcije u nekoj okolini tačke a.
- ako je za $x = a + \Delta x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ priraštaj funkcije $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a) > 0$ tada funkcija u tački a ima lokalni minimum, a ako je $\Delta y < 0$ ima lokalni maksimum

Teorema

Ako funkcija $f(x)$ ima u tački a ekstremnu vrednost i ako postoji $f'(a)$ tada je $f'(a) = 0$.

- uslov je potreban, ne i dovoljan (primer funkcije x^3)
- stacionarne tačke - tačke u kojima je $f'(x) = 0$
- funkcija može imati ekstremnu vrednost u $x = a$, a da $f'(a)$ ne postoji (primer funkcije $|x|$)
- kritične tačke

Teorema

Ako je funkcija u tački a neprekidna i postoji $\delta > 0$ takvo da je

$$f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0), \qquad \text{za } x \in (a - \delta, a),$$

a

$$f'(x) < 0 \quad (f'(x) > 0), \qquad \text{za } x \in (a, a + \delta),$$

onda funkcija u tački a ima ekstremnu vrednost i to maksimum (minimum).

Dokaz (za maksimum).

Ako za $x \in (a-\delta, a)$ važi $f'(x) > 0$, funkcija je monotono rastuća nad $(a-\delta, a)$.

Ako za $x \in (a, a+\delta)$ važi $f'(x) < 0$, funkcija je monotono opadajuća nad $(a, a+\delta)$.

Ako bi postojala neka tačka $x_1 \in (a-\delta, a)$ takva da je $f(x_1) \geq f(a)$, sledilo bi da postoji tačka $\xi \in (x_1, a)$ takva da je

$$0 \geq f(a) - f(x_1) = f'(\xi)(a - x_1).$$

Moralo bi biti $f'(\xi) \leq 0$. Kontradikcija.

Slično se pokazuje da ne postoji tačka $x_1 \in (a, a+\delta)$ takva da je $f(x_1) \geq f(a)$. $\square$

Primer

Proveriti da li funkcija $f(x) = \begin{cases} x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ *ima ekstremnu vrednost u tački* $x = 0$.

Rešenje. Kako je

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases},$$

$$f''(x) = 4 + 2\sin\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}, x \neq 0,$$

to je $f'(0) = 0$, pa je $x = 0$ stacionarna tačka. $f''(0)$ ne postoji.

Pokažimo da ne postoji $\delta > 0$ takvo da je u intervalu $(-\delta, 0)$, odnosno u intervalu $(0, \delta)$ prvi izvod istog znaka.

Ako posmatramo nizove se opštim članovima

$$a_n = \frac{1}{2n\pi}, \quad b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}, \quad c_n = -\frac{1}{2n\pi}, \quad d_n = -\frac{1}{(2n+1)\pi},$$

vidimo da važi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n = 0.$$

Dakle, u svakoj okolini nule su skoro svi članovi posmatranih nizova. Kako je

$$f'(a_n) = \frac{2}{n\pi} - 1 < 0, \quad f'(b_n) = \frac{4}{(2n+1)\pi} + 1 > 0,$$

$$f'(c_n) = -\frac{2}{n\pi} - 1 < 0, \quad f'(d_n) = -\frac{4}{(2n+1)\pi} + 1 > 0,$$

sledi da za svako $\delta > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za svako $n \geq n_0$

$$a_n, b_n \in (0, \delta) \quad \wedge \quad c_n, d_n \in (-\delta, 0).$$

Dakle, sledi da za svako $\delta > 0$ u intervalima $(-\delta, 0)$ i $(0, \delta)$ postoje tačke u kojima je prvi izvod pozitivan i tačke u kojima je prvi izvod negativan. Dakle, prvi izvod ne menja znak prolazeći kroz tačku $x = 0$.

Na osnovu do sada utvrđenih kriterijuma ne možemo reći da li funkcija u tački nula ima ekstremnu vrednost ili ne.

Kako je $f(0) = 0$ i $f(x) > 0$ za svako $x \neq 0$, sledi da funkcija $f(x)$ u tački nula ima minimum.

Teorema

Neka je $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ *i* $f^{(n)}(a) \neq 0, n \geq 2$. *Ako je n paran broj, funkcija* $f(x)$ *ima u tački a ekstremnu vrednost i to:*

- *maksimum ako je* $f^{(n)}(a) < 0$ *odnosno,*
- *minimum ako je* $f^{(n)}(a) > 0$.

Ako je n neparan broj funkcija $f(x)$ *nema ekstremnu vrednost u tački a. U tom slučaju ako je* $f^{(n)}(a) > 0$ *funkcija je u tački a rastuća a ako je* $f^{(n)}(a) < 0$ *funkcija je u tački a opadajuća.*

Dokaz (za slučaj $f^{(n)}(a) > 0$): Iz Tejlorove formule
$f(a+\Delta x) = f(a) + \frac{\Delta x}{1} f'(a) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a+\theta\Delta x)$,
$0 < \theta < 1$
i uslova teoreme sledi

$$f(a+\Delta x) - f(a) = \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a+\theta\Delta x), \quad 0 < \theta < 1.$$

Ako je $f^{(n)}(a) > 0$ tada je $f^{(n-1)}(x)$ rastuća funkcija u tački a, pa je

$$f^{(n-1)}(a+\theta\Delta x) > f^{(n-1)}(a) = 0, \quad \Delta x > 0,$$

$$f^{(n-1)}(a+\theta\Delta x) < f^{(n-1)}(a) = 0, \quad \Delta x < 0.$$

Ako je n parno, izraz

$$\frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a+\theta\Delta x),$$

(a onda i priraštaj funkcije) je za svako dovoljno malo Δx pozitivan, tj. funkcija u tački a ima minimum.
Ako je n neparno, izraz

$$\frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a+\theta\Delta x),$$

nije stalnog znaka (pozitivan je za $\Delta x > 0$, a negativan za $\Delta x < 0$) i ekstremne vrednosti u a nema. $\square$

Tangenta i normala krive

Videli smo već da ako funkcija $f(x)$ ima izvod u tački a, jednačina tangente u tački $A(a, f(a))$ je

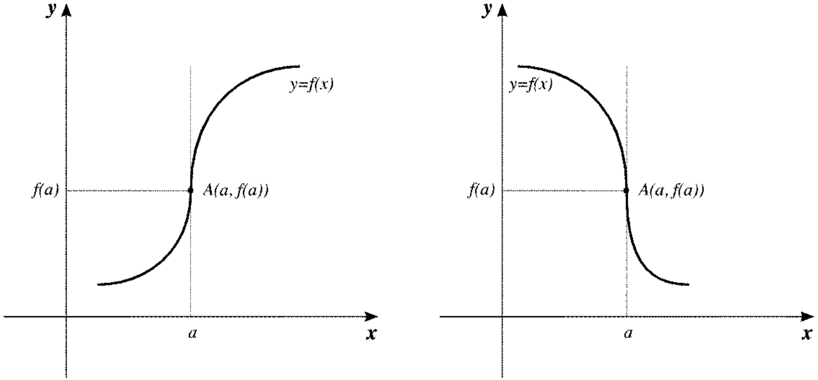
$$y - f(a) = f'(a)(x - a),$$

a jednačina normale u tački $A(a, f(a))$ je

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a),$$

ako je $f'(a) \neq 0$, odnosno normala je $x = a$ ako je $f'(a) = 0$.

- Tangenta funkcije u tački $A(a, f(a))$ može da bude paralelna sa y-osom, ako $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \infty$ ili $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to -\infty$ kada $\Delta x \to 0$:



U ovim slučajevima tangenta u tački $A(a, f(a))$ je prava $x = a$, a normala je prava $y = f(a)$.

- Može da se desi da ne postoji $f'(a)$, ali postoji $f'_+(a)$ ili $f'_-(a)$:

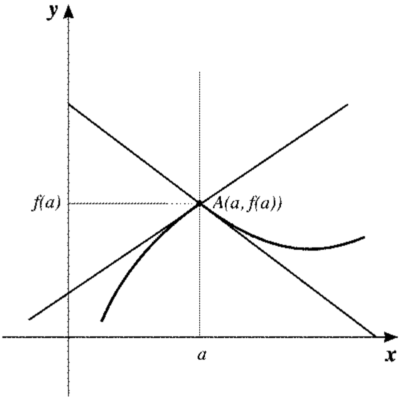
Ako postoji $f'_+(a)$, prava

$$y - f(a) = f'_+(a)(x - a)$$

je tangenta na desnu granu funkcije u tački $A(a, f(a))$ (desna tangenta).
Ako postoji $f'_-(a)$, prava

$$y - f(a) = f'_-(a)(x - a)$$

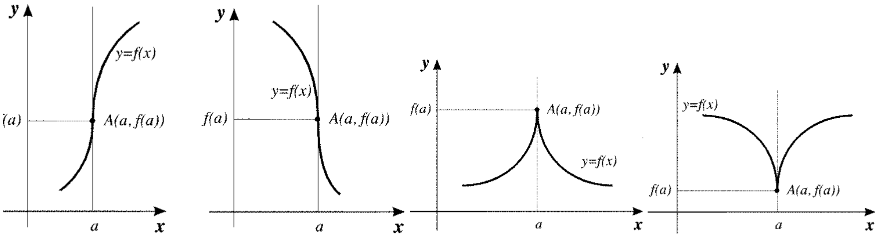
je tangenta na levu granu funkcije u tački $A(a, f(a))$ (leva tangenta)



• ako $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \infty$ ili $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to -\infty$ kada $\Delta x \to 0^+$ prava $x = a$ je tangenta na desnu granu funkcije u tački $A(a, f(a))$,

• ako $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \infty$ ili $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to -\infty$ kada $\Delta x \to 0^-$ prava $x = a$ je tangenta na levu granu funkcije u tački $A(a, f(a))$,

• ako je prava $x = a$ tangenta i na levu i na desnu granu funkcije u tački $A(a, f(a))$, prava $x = a$ je tangenta funkcije u tački $A(a, f(a))$.



• Ako ne postoji $f'_+(a)$, a postoji nepravi desni izvod $\overline{f}'_+(a)$ u tački a, prava

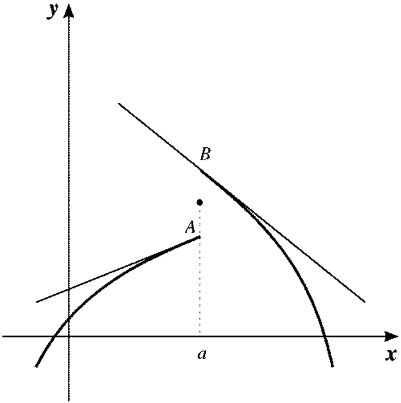
$$y - f(a^+) = \overline{f}'_+(a)(x-a)$$

je tangenta na desnu granu funkcije u tački $A(a, f(a))$.

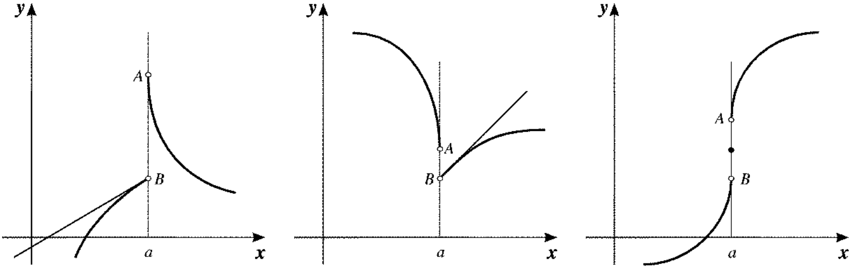
• Ako ne postoji $f'_-(a)$, a postoji nepravi levi izvod $\overline{f}'_-(a)$ u tački a, prava

$$y - f(a^-) = \overline{f}'_-(a)(x-a)$$

je tangenta na levu granu funkcije u tački $A(a, f(a))$.

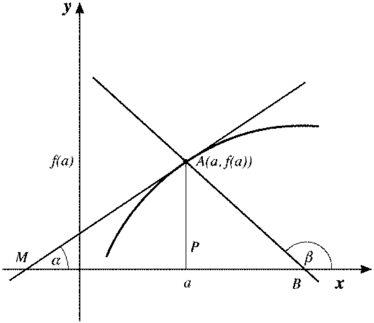


- ako $\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a^+)}{\Delta x} \to \pm\infty$, kada $\Delta x \to 0^+$, prava $x=a$ je tangenta na desnu granu funkcije u tački $A(a, f(a^+))$
- ako $\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a^-)}{\Delta x} \to \pm\infty$, kada $\Delta x \to 0^-$, prava $x=a$ je tangenta na levu granu funkcije u tački $B(a, f(a^-))$



Pretpostavimo da funkcija ima izvod u tački a i da je $f'(a) \neq 0$.

- deo tangente od tačke A do preseka sa $x-$osom naziva se dužina tangente, T, a dužina njene projekcije na $x-$osu naziva se subtangenta, S_T.
- deo normale od tačke A do preseka sa $x-$osom naziva se dužina normale, N, a dužina njene projekcije na $x-$osu naziva se subnormala, S_N.



Iz $|f'(a)| = |\,tg\,\alpha| = \dfrac{|f(a)|}{S_T} = \dfrac{S_N}{|f(a)|}$ sledi

$$S_T = \left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|, \quad T = \sqrt{f^2(a) + S_T^2}$$

$$S_N = |f(a)f'(a)|\,, \quad N = \sqrt{f^2(a) + S_N^2}$$

Konveksnost, konkavnost, prevojne tačke

Definicija

Funkcija $f(x)$ definisana nad intervalom I je konveksna nad I ako za proizvoljne dve tačke $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ za svako x, $x_1 < x < x_2$ važi

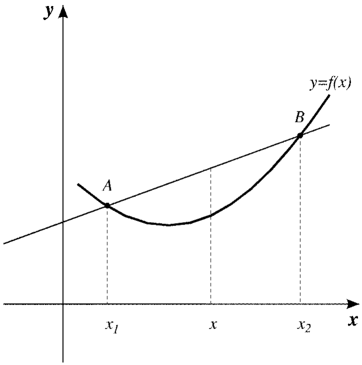
$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

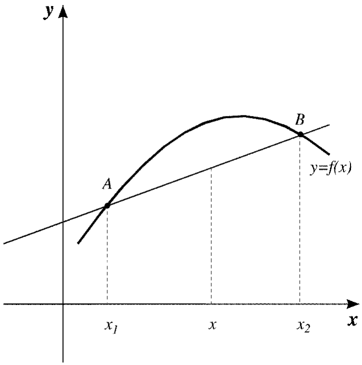
Ako je

$$f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

funkcija je konkavna.

Geometrijska interpretacija: Ako postavimo sečicu kroz tačke $A(x_1, f(x_1))$ i $B(x_2, f(x_2))$, $x_1 < x_2$ grafik funkcije je uvek ispod sečice nad intervalom (x_1, x_2) u slučaju konveksnosti, odnosno iznad sečice u slučaju konkavne funkcije nad (x_1, x_2).





Definicija

Neka je funkcija $f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke a i neka je u tački a diferencijabilna. Funkcija $f(x)$ je konveksna (konkavna) u tački a ako postoji okolina $(a-\delta, a+\delta)$ tačke a, takva da je

$$f(x) > y_t(x) \quad (f(x) < y_t(x)),$$

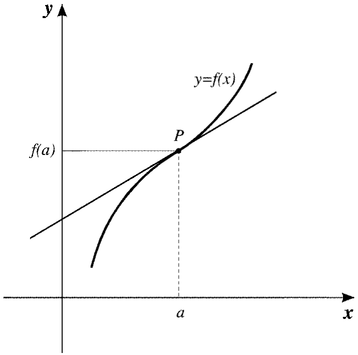
za svako $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$, gde je

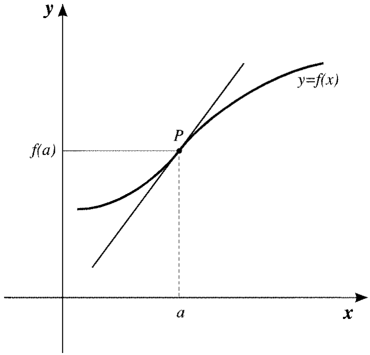
$$y_t(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

jednačina tangente na datu funkciju u tački $A(a, f(a))$.

Definicija

Za tačku $P(a, f(a))$ se kaže da je prevojna tačka funkcije $f(x)$ ako postoji okolina $(a-\delta, a+\delta)$ tačke a, takva da je funkcija $f(x)$ nad intervalom $(a-\delta, a)$ konkavna, a nad intervalom $(a, a+\delta)$ konveksna ili obrnuto.

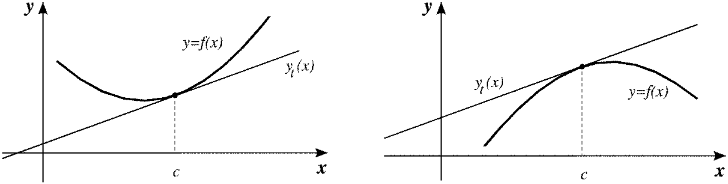




Ako postoji izvod funkcije $f(x)$ nad intervalom I tada konveksnost i konkavnost može da se definiše na dva (ekvivalentna) načina:

Definicija 1

Funkcija $f(x)$ je konveksna nad I ako za svako $c \in I$ i $x \in I \setminus \{c\}$
$f(x) > y_t(x)$, *gde je* $y_t = f(c) + f'(c)(x-c)$ *jednačina tangente na krivu u tački* $C(c, f(c))$ *(u slučaju konkavnosti je* $f(x) < y_t(x.)$*)*



Definicija 2

Funkcija $f(x)$ je konveksna (konkavna) nad I ako je $f'(x)$ monotono rastuća (opadajuća) funkcija nad I.

Teorema

Ako funkcija ima izvod nad intervalom I, tada su Definicija 1 i Definicija 2 konveksnosti (konkavnosti) ekvivalentne.

Dokaz. Pokažimo da Definicija 1 $\Rightarrow$ Definicija 2, za slučaj konveksnosti:

Neka je funkcija $f(x)$ konveksna nad intervalom I u smislu Definicije 1. Neka su x_1 i x_2, $x_1 < x_2$ proizvoljne tačke iz intervala I. Neka su

$$y_t^1 = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1),$$

$$y_t^2 = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2),$$

tangente na datu funkciju u tačkama $A(x_1, f(x_1))$ i $B(x_2, f(x_2))$. Tada važi

$$f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$f(x_1) > f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2).$$

Sabiranjem ovih nejednakosti dobija se

$$f(x_2) + f(x_1) > f(x_1) + f(x_2) + f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2),$$

tj.

$$(f'(x_2) - f'(x_1))(x_2 - x_1) > 0,$$

odakle sledi

$$f'(x_2) > f'(x_1),$$

pa je $f'(x)$ monotono rastuća funkcija nad intervalom I.

$\square$

Teorema

Ako je $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) nad intervalom I, tada je funkcija $f(x)$ konveksna (konkavna) nad intervalom I.
Ako postoji $f''(x)$ nad I i ako je funkcija $f(x)$ konveksna (konkavna) nad I, tada je $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) nad I.

Dokaz. Ako je

$$f''(x) > 0 \quad (f''(x) < 0),$$

tada je $f'(x)$ monotono rastuća (opadajuća) funkcija, pa je $f(x)$ konveksna (konkavna) nad intervalom I.
Ako je je $f(x)$ konveksna (konkavna) nad intervalom I, tada je $f'(x)$ monotono rastuća (opadajuća) funkcija nad intervalom I, pa je

$$f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0)$$

nad intervalom I. $\square$

Teorema

Ako je $P(a, f(a))$ prevojna tačka funkcije $f(x)$ i ako postoji $f''(a)$, tada je $f''(a) = 0$.

Dokaz. $f'(x)$ ima ekstremnu vrednost u tački a! $\square$

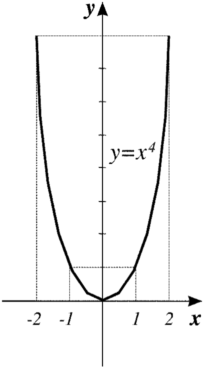
Obrnuto ne mora da važi! Funkcija $f(x) = x^4$ ima drugi izvod

$$f''(x) = 12x^2$$

za koji je

$$f''(0) = 0,$$

a tačka $O(0,0)$ nije prevojna tačka.



Za funkciju $f(x) = (x-1)^3$ je $A(1,0)$ prevojna tačka, jer je

$$f''(x) = 6(x-1)$$

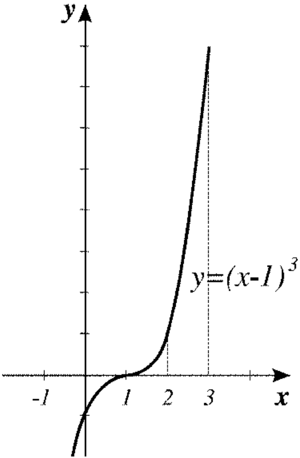
pa je

$$f''(x) > 0 \text{ za } x > 1$$

$$f''(x) < 0 \text{ za } x < 1,$$

a

$$f''(1) = 0.$$



Tačka a može da bude prevojna tačka funkcije a da u tački a ne postoji drugi izvod.

Ako u tački a drugi izvod $f''(x)$ menja znak (bez obzira da li postoji $f''(a)$) i ako je funkcija $f(x)$ definisana u tački a, tada je $P(a, f(a))$ prevojna tačka date funkcije.

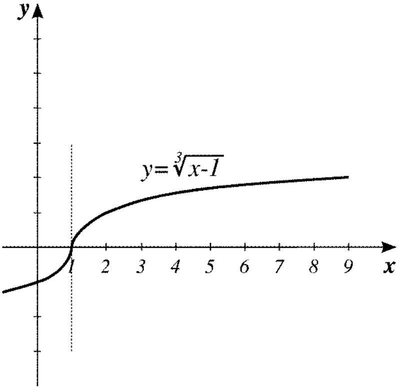
Primer je funkcija

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

za koju je $P(1,0)$ prevojna tačka,

$$f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$$

menja znak prolazeći kroz nju, a $f''(1)$ ne postoji.



Teorema

Ako je $f''(a) > 0 \quad (f''(a) < 0)$, *funkcija* $f(x)$ *je konveksna (konkavna) u tački* a.

Ako je $f''(a) > 0$, ne postoji uvek okolina tačke a nad kojom je funkcija konveksna!

Ako $f''(x)$ postoji u nekoj okolini tačke a i ako je neprekidan u a, onda iz $f''(a) > 0$ sledi da postoji okolina tačke a nad kojom je funkcija konveksna.

Teorema

Ako postoji $\delta > 0$ *takvo da je u intervalu* $(a - \delta, a)$ *funkcija ispod (iznad) tangente funkcije* $f(x)$ *u tački* $A(a, f(a))$, *a u intervalu* $(a, a + \delta)$ *funkcija iznad (ispod) tangente funkcije* $f(x)$ *u tački* $A(a, f(a))$ *i ako postoji* $f''(a)$, *tada je* $f''(a) = 0$.

Može se desiti da je u intervalu $(a-\delta, a)$ funkcija ispod (iznad) tangente, a u intervalu $(a, a+\delta)$ funkcija iznad (ispod) tangente funkcije $f(x)$ u tački $A(a, f(a))$, a tačka $A(a, f(a)$ nije prevojna!

Primer

Ispitati da li je tačka $O(0,0)$ prevojna tačka funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x^3(2+\sin\frac{1}{x^2}) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x^2 + 3x^2\sin\frac{1}{x^2} - 2\cos\frac{1}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} ,$$

$f''(x) = 12x + 6x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x}\cos\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}$, za $x \neq 0$, a $f''(0)$ ne postoji. Posmatraju se nizovi s opštim članovima
$a_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}$, $c_n = -\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$, $d_n = -\frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}$.

Teorema

Neka je $f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0,\ n \geq 3.$
Ako je n neparan, tada je $P(a, f(a))$ *prevojna tačka funkcije* $f(x)$.
Ako je n paran, tada je funkcija u okolini tačke $x = a$ *konveksna za* $f^{(n)}(a) > 0$, *a konkavna za* $f^{(n)}(a) < 0$.

Dokaz. (za prevojnu tačku) Neka je $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Kako je

$$f^{(2k+1)}(a) = (f'')^{(2k-1)}(a) \neq 0,$$

to sledi da je $f''(x)$ rastuća funkcija u tački $x = a$ za $(f'')^{(2k-1)}(a) > 0$, a opadajuća funkcija za $(f'')^{(2k-1)}(a) < 0$.
Sledi da postoji $\delta > 0$ tako da je

$$f''(x) < f''(a) = 0 \quad (f''(x) > f''(a) = 0),\ \text{za } x \in (a - \delta, a),$$

$$f''(x) > f''(a) = 0 \quad (f''(x) < f''(a) = 0),\ \text{za } x \in (a, + - \delta).$$

Dakle, nad intervalom $(a - \delta, a)$ je funkcija konkavna (konveksna), a nad intervalom $(a, a + \delta)$ konveksna (konkavna), pa je $A(a, f(a))$ prevojna. $\square$

Asimptote funkcija

Definicija

Neka je funkcija $f(x)$ *definisana nad intervalom* (a, ∞) ($(-\infty, a)$), $a \in \mathbb{R}$. *Funkcija* $\phi(x)$ *je asimptota funkcije* $f(x)$ *kada* $x \to \infty$, *ako je*

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - \phi(x) \right] = 0.$$

Slično, funkcija $\phi(x)$ *je asimptota funkcije* $f(x)$ *kada* $x \to -\infty$, *ako je*

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - \phi(x) \right] = 0.$$

- $f(x)$ se asimptotski ponaša kao $\phi(x)$, kad $x \to \infty$ (tj. $x \to \infty$), što pišemo $f(x) \sim \phi(x)$
- Geometrijski smisao: postoji $b \in \mathbb{R}$ takav da je razlika ordinata krivih $y = f(x)$ i $y = \phi(x)$ proizvoljno mala za $x > b$ $(x < b)$.

Ako je asimptota funkcije prava $\phi(x) = mx + n$, tada funkcija $y = f(x)$ ima:

- za $m \neq 0$ ima kosu asimptotu $\phi(x) = mx + n$,
- za $m = 0$ ima horizontalnu asimptotu $\phi(x) = n$.

Po definiciji je za $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0 \text{ ili } \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}\right] = 0,$$

pa je

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx].$$

Definicija

Funkcija $y = f(x)$ ima vertikalnu asimptotu u tački nagomilavanja $x = a$ definicionog skupa, ako funkcija bar sa jedne strane tačke a teži ∞ odnosno $-\infty$. Za pravu $x = a$ kažemo da je vertikalna asimptota funkcije $f(x)$.

Ispitivanje toka funkcija

Obavezna grupa zahteva:

- određivanje oblasti definisanosti
- određivanje nula funkcije
- određivanje intervala monotonosti i ekstremnih vrednosti
- određivanje intervala konveksnosti, konkavnosti i prevojnih tačaka
- određivanje asimptota funkcije i ispitivanje položaja grafika u odnosu na asimptote
- tangente funkcije u tačkama gde ne postoji $f'(x)$ i njegovo ponašanje u tim tačkama
- skiciranje grafika funkcije

Neobavezna grupa zahteva:

- znak funkcije
- parnost i neparnost funkcije
- periodičnost funkcije

Funkcije n realnih promenljivih

Posmatramo realne funkcije n realnih promenljivih, tj.
$f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1$

Vrednost funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ u tački $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$

- $n > 3 \quad z = f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- $n = 3, \quad u = f(X) = f(x, y, z),$
- $n = 2, \quad z = f(X) = f(x, y)$

Parcijalni izvodi

$M(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2,\ f : D \to \mathbb{R},\ z = f(x, y)$

- ako $M \in D$ nije izolovana tačka oblasti definisanosti D funkcije $z = f(x, y)$ tada je
$$\Delta z = f(N) - f(M) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$
$N(x + \Delta x, y + \Delta y) \in D, \quad (\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$ totalni priraštaj funkcije $z = f(x, y)$
- ako $D_1 = D \cap \{(\nu, y) : \nu \in \mathbb{R}\}$ nije jednočlan skup tada
$$\Delta_x z = f(M_{x+\Delta x}) - f(M) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$
$M_{x+\Delta x}(x + \Delta x, y) \in D_1, \quad \Delta x \neq 0$ je parcijalni priraštaj po promenljivoj x u tački M,
- ako $D_2 = D \cap \{(x, \nu) : \nu \in \mathbb{R}\}$ nije jednočlan skup tada
$$\Delta_y z = f(M_{y+\Delta y}) - f(M) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$
$M_{y+\Delta y}(x, y + \Delta y) \in D_2, \quad \Delta y \neq 0$ je parcijalni priraštaj po promenljivoj y u tački M.

$$M(x_1,\dots,x_n)\in D\subset\mathbb{R}^n,\ n\geq 2,\ f:D\to\mathbb{R},\ z=f(x_1,\dots,x_n)$$

- ako $M\in D$ nije izolovana tačka oblasti definisanosti D funkcije $z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ tada je

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(N)-f(M)\\ &= f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,\dots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,x_2,\dots,x_n),\end{aligned}$$

  $N(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,\dots,x_n+\Delta x_n)\in D,\quad (\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\neq(0,0,\dots,0)$ totalni priraštaj funkcije $z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$

- ako $D_i=D\cap\{(x_1,\dots,x_{i-1},\nu,x_{i+1},\dots,x_n):\nu\in\mathbb{R}, i=1,\dots,n\}$ nije jednočlan skup tada

$$\begin{aligned}\Delta_{x_i}z &= f(M_{x_i+\Delta x_i})-f(M)\\ &= f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+\Delta x_i,x_{i+1},\dots,x_n)-f(x_1,x_2,\dots,x_n),\end{aligned}$$

  $M_{x_i+\Delta x_i}(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+\Delta x_i,x_{i+1},\dots,x_n)\in D_i,\quad \Delta x_i\neq 0$ je parcijalni priraštaj po promenljivoj x_i u tački M.

Za svako $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, posmatrajmo restrikciju $f_i : D_i \to \mathbb{R}$ funkcije f nad skupom D_i.

Definicija

Ako funkcija $f_i(x_i)$, $x_i \in D_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ima izvod u tački $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D^\circ$ onda taj izvod funkcije $f_i(x_i)$ zovemo parcijalni izvod funkcije $f(x_1, \dots, x_n)$ u tački M po promenljivoj x_i. Označavamo ga sa

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M) \text{ ili } z_{x_i}(M)$$

i važi

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_i} &= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i} \\ &= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2 \dots, x_n)}{\Delta x_i} \end{aligned}$$

Ako funkcija $f_i(x_i)$, $x_i \in D_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ima desni (levi) izvod u tački $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, onda taj izvod funkcije $f_i(x_i)$ zovemo desni (levi) parcijalni izvod funkcije $f(x_1, x_2 \dots, x_n)$ u tački M po promenljivoj x_i i obeležavamo ga sa

$$\frac{\partial^+ z}{\partial x_i}(M) \text{ ili } z^+_{x_i}(M) \quad \left(\frac{\partial^- z}{\partial x_i}(M) \text{ ili } z^-_{x_i}(M)\right).$$

U tom slučaju je

- desni parcijalni izvod funkcije $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ po promenljivoj x_i

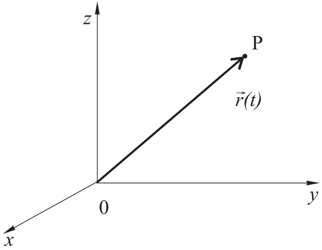
$$\frac{\partial^+ z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0^+} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i}$$

- levi parcijalni izvod funkcije $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ po promenljivoj x_i je

$$\frac{\partial^+ z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0^-} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i}$$

Funkcija ima parcijalni izvod po promenljivoj x_i, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ u tački M (unutrašnja!) **ako i samo ako** *ima i levi i desni parcijalni izvod po promenljivoj x_i i ako su oni jednaki.*

Vektorske funkcije



Sa E označimo skup tačaka trodimenzionalnog prostora. Neka je O fiksna tačka (koordinatni početak). Vektor $\overrightarrow{OP}$, gde je P promenljiva tačka iz E, je vektor položaja tačke P u odnosu na dati koordinatni sistem.

Označimo sa $X_0(E) = \{\overrightarrow{OP} : P \in E\}$. Preslikavanje $f : E \to X_0(E)$ dato sa $f(P) = \overrightarrow{OP}$, $P \in E$ je bijekcija. Skup $X_0(E)$ ćemo kraće označavati sa X_0.

Definicija

Neka je $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ *i neka su* $x : D \to \mathbb{R}, \;\; y : D \to \mathbb{R}, \;\; z : D \to \mathbb{R}$ *tri realne funkcije realne promenljive. Svako preslikavanje* $\vec{r} : D \to X_0$ *definisano sa*

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in D,$$

zovemo **vektorskom funkcijom jedne skalarne promenljive***.*

Definicija

Ako je $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ *i ako su* $x : D \to \mathbb{R}$, $y : D \to \mathbb{R}$, $z : D \to \mathbb{R}$ *tri realne funkcije* n *realnih promenljivih, tada se preslikavanje* $\vec{r} : D \to X_0$ *zadato sa*

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in D,$$

zove **vektorska funkcija** n **realnih promenljivih***.*

Definicija

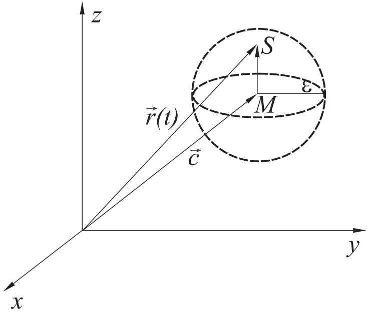
Ako je $a \in \mathbb{R}^n$ tačka nagomilavanja oblasti definisanosti $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ vektorske funkcije $\vec{r} : D \to X_0$, tada za vektor $\vec{c}$ kažemo da je **granična vrednost vektorske funkcije $\vec{r}$ u tački** *a ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall t \in D \setminus \{a\})(d(a,t) < \delta \Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{c}| < \varepsilon).$$

Pišemo da je $\lim\limits_{t \to a} \vec{r}(t) = \vec{c}$.

Iz same definicije granične vrednosti vidimo da je

$$\lim_{t \to a} \vec{r}(t) = \lim_{t \to a} x(t)\vec{i} + \lim_{t \to a} y(t)\vec{j} + \lim_{t \to a} z(t)\vec{k}.$$



Ako oko vrha M vektora $\vec{c}$ opišemo otvorenu loptu $L(M,\varepsilon)$ poluprečnika ε, to sledi da postoji $\delta \in \mathbb{R}^+$, tako da za svako $t \in L(a,\delta) \setminus \{a\}$, vrh S vektora $\vec{r}(t)$ pripada $L(M,\varepsilon)$, tj. svi vektori $\overrightarrow{MS}$ leže u otvorenoj lopti $L(M,\varepsilon)$.

Napomena

Ako je $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ i ako za svako $t \in D$ sa $\tau(t)$ označimo vrh vektora $\vec{r}(t)$, tada važi

$$\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \vec{c} \Leftrightarrow \lim_{t\to a} \tau(t) = (c_1, c_2, c_3).$$

Definicija

Za vektorsku funkciju $\overrightarrow{r} : D \to X_0,\ D \subset \mathbb{R}^n$, *kažemo da je* **neprekidna u tački** $a \in D$ *ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall t \in D)(d(a,t) < \delta \Rightarrow |\overrightarrow{r}(t) - \overrightarrow{r}(a)| < \varepsilon).$$

Vektorska funkcija $\overrightarrow{r} : D \to X_0,\ D \subset \mathbb{R}^n$ je **neprekidna** ako je neprekidna u svakoj tački $a \in D$.

Iz same definicije neprekidnosti sledi da je funkcija $\overrightarrow{r}$ neprekidna u tački a ako i samo ako su komponente $x : D \to \mathbb{R}$, $y : D \to \mathbb{R}$, $z : D \to \mathbb{R}$ funkcije $\overrightarrow{r} : D \to X_0$ neprekidne u tački a.

Kao i kod skalarne funkcije, sledi da je vektorska funkcija $\overrightarrow{r}$ neprekidna u tački nagomilavanja $a \in D$ ako i samo ako važi da je

$$\lim_{t \to a} \overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r}(a),$$

a ako je $a \in D$ izolovana tačka definicionog skupa D vektorske funkcije $\overrightarrow{r}$, tada je $\overrightarrow{r}$ automatski neprekidna u datoj tački.

Vektorska funkcija $\overrightarrow{r} : D \to X_0$, $D \subset \mathbb{R}^n$, je **neprekidna nad skupom** $E \subset D$ ako je restrikcija funkcije $\overrightarrow{r}_E$ ($\overrightarrow{r}_E(t) = \overrightarrow{r}(t)$, $t \in E$) neprekidna funkcija za svako $t \in E$.

Definicija

Ako je $D = I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *i ako je* $\overrightarrow{r} : I \to X_0$ *neprekidna funkcija, tada skup tačaka*

$$L = \{\mathcal{T}(t) : t \in I\}$$

zovemo **kriva** *u prostoru, odnosno* **hodograf vektorske funkcije** $\overrightarrow{r}$.

Primetimo da je L kriva ako i samo ako je $\mathcal{T} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ neprekidna funkcija.

Kriva L je parametarski data sa $L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a, b]$,
a u vektorskom obliku sa $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$, $t \in [a, b]$.

Ako je

$$M((x(a), y(a), z(a)) \equiv N(x(b), y(b), z(b))$$

za krivu L kažemo da je **zatvorena**.

Ako sve tačke krive L leže u jednoj ravni, onda kažemo da je L **ravna kriva**.

Definicija

Ako je (X, d) metrički prostor, **spojnicom (lukom)** *u prostoru X nazivamo svako neprekidno preslikavanje $s : I \to X$ intervala $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ u prostor X.*

Ako su tačke $a = s(0)$ i $b = s(1)$ različite, tada kažemo da spojnica s **povezuje tačke** *a i b.*

Teorema

Skup $L \subset \mathbb{R}^3$ je kriva ako i samo ako je spojnica.

Dokaz. Ako je L spojnica, očigledno je da je L kriva.
Neka je $L = \{\tau(t) : t \in [a, b]\}$ kriva u prostoru. Tada je $\tau : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ neprekidna funkcija. Ako posmatramo funkciju $h : [0, 1] \to [a, b]$ zadatu sa

$$h(x) = (b - a)x + a,$$

vidimo da za nju važi

- h je bijekcija,
- h je neprekidna funkcija nad $[0, 1]$,
- h^{-1} je neprekidna funkcija nad $[a, b]$.

Preslikavanje $f = \tau \circ h$ je neprekidno preslikavanje zatvorenog intervala $[0, 1]$ na tačke krive L, pa je L spojnica. $\square$

Definicija

Za skup $\emptyset \neq A \subset X$ *kažemo da je* **povezan** *(***lučno povezan***) u metričkom prostoru* (X, d)*, ako za svake dve različite tačke* $a, b \in A$*, postoji spojnica* $s : I \to A$ *koja povezuje tačke* a *i* b*.*

Ako je skup X *povezan u metričkom prostoru* (X, d)*, tada kažemo da je metrički prostor* (X, d) **povezan***.*

Definicija

Ako je skup $A \subset X$ *istovremeno otvoren i povezan u metričkom prostoru* (X, d) *i* $A_1 \subset A^*$*, tada za skup* $A \cup A_1$ *kažemo da je* **oblast***. Specijalno, ako je* $A_1 = \emptyset$*, tada se za* A *kaže i* **otvorena oblast***, a ako je* $A_1 = A^*$*, tada se za* $A \cup A_1 = A \cup A^* = \overline{A}$ *kaže i* **zatvorena oblast***.*

Iz same definicije zatvorene oblasti ne sledi da je svaki neprazan zatvoren skup, zatvorena oblast.

Primer

Skup $A = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$ je zatvoren, ali nije zatvorena oblast, jer je $A^\circ = \emptyset$. $\Diamond$

Definicija

Za skup $L \subset E = \mathbb{R}^3$ kažemo da je Žordanova[7] kriva ili Žordanov luk sa krajevima ako:

1°) postoji interval $I = [a, b]$ i preslikavanje $\tau : I \to E$, tako da je

$$L = \{\tau(t) : t \in I\};$$

2°) τ je bijektivno preslikavanje intervala I na L;

3°) τ je neprekidno preslikavanje.

Tačke $A = \tau(a)$, $B = \tau(b)$ zovemo krajevi krive L.

[7] Žordan, K. (Camil Jordan, 1838-1922) - francuski matematičar

Ako umesto 2°) uzmemo da važi

2*) τ je bijekcija skupa $[a,b)$ na L i $\tau(a)=\tau(b)$,
onda kažemo da je L zatvorena Žordanova kriva.

Tvrđenje

Ako je $L_1=\{M(x,y):x^2+y^2=1\}$, tada je kriva L zatvorena Žordanova kriva ako i samo ako postoji preslikavanje $f:L_1\to L$, tako da važi

1) *f je bijektivno preslikavanje skupa L_1 na L;*
2) *f je neprekidno preslikavanje;*
3) *$f^{-1}:L\to L_1$ je neprekidno preslikavanje.*

Tvrđenje

Neka je $L \subset \tau = \mathbb{R}^2$ ravna zatvorena Žordanova kriva. Tada

1) $\mathbb{R}^2 \setminus L = \Omega_1 \cup \Omega_2$, *gde su Ω_1 i Ω_2 dve disjunktne otvorene oblasti;*
2) $L = \Omega_1^* = \Omega_2^*$;
3) *Jedna od oblasti, npr. uzmimo da je to Ω_1, je ograničen skup i nju zovemo unutrašnjost krive L, dok je druga Ω_2 neograničen skup i nju zovemo spoljašnjost krive L.*

Za ravnu oblast $G \subset \tau = \mathbb{R}^2$ kažemo da je jednostruko povezana ako unutrašnjost svake Žordanove krive $L \subset G$ pripada oblasti G.

Funkcija $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ f : D \to \mathbb{R}$ ima parcijalni izvod po $x_i,\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ nad $E \subset D$, pri čemu je skup E unija neke otvorene oblasti E_1 i dela njenog ruba ako

1. postoji $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ po prethodnoj definiciji;
2. za rubnu tačku $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ ako ne postoji $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}(M)$, tada:

a) ako postoji $\varepsilon_i > 0$ sa osobinom da je

$$L_{\varepsilon_i} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i - \varepsilon_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\} \subset E$$

postoji

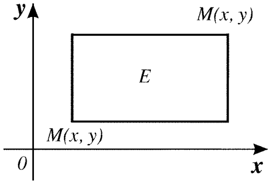
$$\frac{\partial^- z}{\partial x_i}(M).$$

Ako je za svako $\varepsilon_i > 0$

$$D_{\varepsilon_i} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + \varepsilon_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\} \not\subset E,$$

tada je

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M) = \frac{\partial^- z}{\partial x_i}(M).$$



b) ako postoji $\varepsilon_i > 0$ sa osobinom da je

$$D_{\varepsilon_i} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + \varepsilon_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\} \subset E$$

postoji

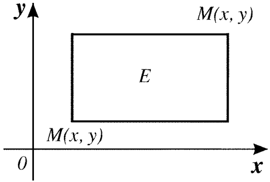
$$\frac{\partial^+ z}{\partial x_i}(M).$$

Ako je za svako $\varepsilon_i > 0$

$$L_{\varepsilon_i} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i - \varepsilon_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\} \not\subset E,$$

tada je

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M) = \frac{\partial^+ z}{\partial x_i}(M).$$



c) ako za svako $\varepsilon_i > 0$

$$L_{\varepsilon_i} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i - \varepsilon_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\} \not\subset E$$

$$D_{\varepsilon_i} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + \varepsilon_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\} \not\subset E,$$

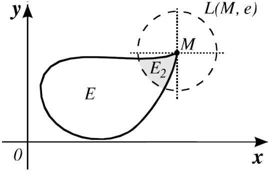
tada ako postoji

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(N), \text{ za svako } N \in L(M, \varepsilon) \cap E_1 = E_2 \neq \emptyset, \text{ za neko } \varepsilon > 0,$$

uzimamo po definiciji da je

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M) = \lim_{\substack{N \to M \\ N \in E_2}} \frac{\partial z}{\partial x_i}(N),$$

$i = 1, 2, \ldots, n.$



Napomena

Za funkciju $z = f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} + y & , \quad x > 0, y \geq 0 \\ y & , \quad x = 0, y \geq 0 \end{cases}$

postoji

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(0,1) &= \frac{\partial^+ z}{\partial x}(0,1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 1) - f(0,1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{\Delta x} + 1 - 1}{\Delta x} = 0, \end{aligned}$$

a kako je $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, \quad x > 0, y > 0,$

ne postoji $\displaystyle \lim_{\substack{(x,y) \to (0,1) \\ x > 0, y > 0}} \frac{\partial z}{\partial x}(x,y).$

Primer

Naći parcijalne izvode funkcije $z = \sqrt{(1-x^2-y^2)^3}$.

Funkcija $z = \sqrt{(1-x^2-y^2)^3}$ je definisana za $x^2+y^2 \leq 1$.

Za svaku tačku $M(x,y)$ za koju je $x^2+y^2<1$ (M je unutrašnja tačka oblasti definisanosti) je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3x\sqrt{1-x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3y\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

U rubnoj tački $M(x,y)$ za koju je $x^2+y^2=1,\ x\neq 0,\ y\neq\pm 1$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(M) &= \frac{\partial^- z}{\partial x}(M)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\sqrt{(1-(x+\Delta x)^2-(1-x^2))^3}-0}{\Delta x}=0,\ \text{za } x>0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(M) &= \frac{\partial^+ z}{\partial x}(M)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sqrt{(1-(x+\Delta x)^2-(1-x^2))^3}-0}{\Delta x}=0,\ \text{za } x<0.\end{aligned}$$

U tačkama $M(0,1)$ i $N(0,-1)$ je

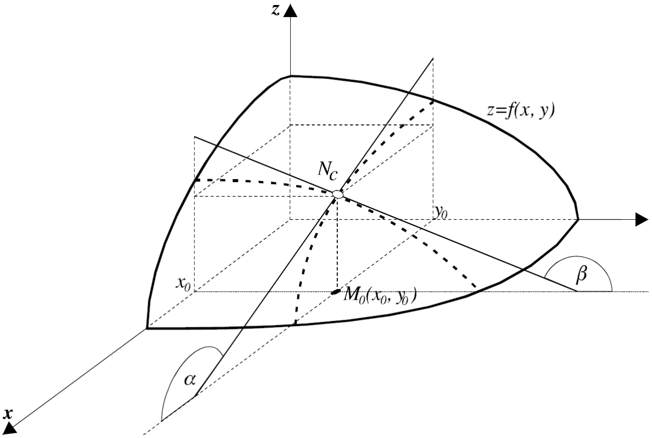
$$\frac{\partial z}{\partial x}(M) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\ x^2+y^2<1}} -3x\sqrt{1-x^2-y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(N) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,-1)\\ x^2+y^2<1}} -3x\sqrt{1-x^2-y^2} = 0.$$

Slično se računaju parcijalni izvodi po y u rubnim tačkama.

Geometrijska interpretacija parcijalnih izvoda

- Površ $\mathcal{S}$ zadata jednačinom $z = f(x, y)$
- nad skupom D funkcija je neprekidna i ima parcijalne izvode
- $M_0(x_0, y_0) \in D$, odgovara tački $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathcal{S}$



Pri traženju parcijalnog izvoda $\frac{\partial z}{\partial x}$ u tački M_0 posmatra se funkcija $z = f(x, y)$ kao funkcija jedne promenljive x, a y se tretira kao konstanta $y = y_0$, to jest $z = f(x, y_0) = f_1(x)$. Funkcijom $z = f_1(x)$ definisana je kriva L dobijena presekom površi S i ravni $y = y_0$.

$$f_1'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0),$$

je koeficijent pravca tangente u tački N_0 krive L dobijene presekom ravni $y = y_0$ i površi $z = f(x, y)$.
Slično, funkcijom $z = f_2(y) = f(x_0, y)$ definisana je kriva L_1 dobijena presekom površi S i ravni $x = x_0$, pa je

$$f_2'(y_0) = \operatorname{tg} \beta = \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)$$

koeficijent pravca tangente u tački N_0 krive L_1 dobijene presekom ravni $x = x_0$ i površi $z = f(x, y)$.

Diferencijabilnost

Definicija

Neka je $M(x_1, \ldots, x_n)$ unutrašnja tačka oblasti $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ na kojoj je definisana funkcija $z = f(x_1, \ldots, x_n) = f(X)$, $X \in D$. Funkcija $f(x_1, \ldots, x_n)$ je diferencijabilna u tački M ako se njen totalni priraštaj

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\text{gde } N(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) \in D, (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \neq (0, \ldots, 0)$$

koji odgovara priraštajima $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ promenljivih $x_1, \ldots, x_n$ može napisati u obliku

$$\Delta z = D_1 \Delta x_1 + \cdots + D_n \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \cdots + \alpha_n \Delta x_n,$$

pri čemu D_i ne zavise od Δx_i i $\lim\limits_{(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \to (0, \ldots, 0)} \alpha_i = 0.$

Linearni deo priraštaja je totalni diferencijal funkcije z u tački M, u oznaci $dz(M) = df(M) = D_1 \Delta x_1 + \cdots + D_n \Delta x_n$.

Na primer, za funkciju $z = x^2 + y^2$ imamo da je

$$\begin{aligned}\Delta z &= (x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2 - (x^2+y^2)\\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2 - x^2 - y^2\\ &= \underbrace{2x}_{D_1}\Delta x + \underbrace{2y}_{D_2}\Delta y + \underbrace{\Delta x}_{\alpha_1}\Delta x + \underbrace{\Delta y}_{\alpha_2}\Delta y.\end{aligned}$$

Teorema

Neka je funkcija $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ diferencijabilna u tački M. Tada

a) *funkcija f je neprekidna u tački M,*

b) *postoje parcijalni izvodi* $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}, \dfrac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial z}{\partial x_n}$

i važi jednakost $D_1 = \dfrac{\partial z}{\partial x_1}(M), \ \ldots, D_n = \dfrac{\partial z}{\partial x_n}(M).$

Dokaz.

a) $\lim\limits_{(\Delta x_1,\dots\Delta x_n)\to(0,\dots,0)} \Delta z = \lim\limits_{(\Delta x_1,\dots\Delta x_n)\to(0,\dots,0)} \sum\limits_{i=1}^{n}(D_i + \alpha_i)\Delta x_i = 0$, pa je funkcija $z = f(x_1, \dots, x_n)$ neprekidna u tački M.

b) Pokažimo npr. da je $D_1 = \dfrac{\partial z}{\partial x_1}(M)$ (ostalo analogno).
Iz diferencijabilnosti funkcije z u tački M je za $\Delta x_1 \neq 0$, $\Delta x_2 = \Delta x_3 = \cdots = \Delta x_n = 0$,

$$\Delta_{x_1} z = D_1 \Delta x_1 + \alpha_1 \Delta x_1.$$

Sledi da je

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} z}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} (D_1 + \alpha_1) = D_1.$$

Odavde sledi da $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}$ postoji u tački M i da je $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}(M) = D_1$. $\square$

Kako je $dz = dx_i = \Delta x_i$ za funkciju $z = x_i$, $i = 1, \ldots, n$, to totalni diferencijal možemo zapisati u obliku

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n.$$

Ako sa

$$\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2} \neq 0$$

označimo rastojanje tačaka

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{i} \quad N(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n)$$

tada izraz

$$\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \cdots + \alpha_n \Delta x_n$$

možemo zapisati u obliku

$$\omega\rho, \text{ gde je } \omega = \alpha_1 \frac{\Delta x_1}{\rho} + \alpha_2 \frac{\Delta x_2}{\rho} + \cdots + \alpha_n \frac{\Delta x_n}{\rho}.$$

Kako je

$$\left|\frac{\Delta x_i}{\rho}\right| \leq 1 \quad \text{za svako} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

i kako je

$$\lim_{(\Delta x_1, \ldots \Delta x_n) \to (0, \ldots, 0)} \alpha_i = 0,$$

sledi da je

$$\lim_{\rho \to 0} \omega = 0.$$

Iz tog razloga, da je funkcija $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ diferencijabilna možemo zapisati i u obliku

$$\Delta z = D_1 \Delta x_1 + D_2 \Delta x_2 + \cdots + D_n \Delta x_n + \omega \rho,$$

gde $D_1, D_2, \ldots, D_n$ ne zavise od $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, a $\lim\limits_{\rho \to 0} \omega = 0$.

Suprotan smer prethodne teoreme ne važi uvek - neprekidnost funkcije u tački M i postojanje njenih parcijalnih izvoda u ovoj tački ne garantuje diferencijabilnost funkcije u toj tački.

Primer

Funkcija

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

je neprekidna u tački $O(0,0)$, ima parcijalne izvode u u tački $O(0,0)$, a nije diferencijabilna u tački $O(0,0)$.

Iz

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

i

$$\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon = \delta$$

sledi da je

$$|f(x,y)-f(0,0)| < \varepsilon,$$

pa je funkcija $f(x,y)$ neprekidna u tački $O(0,0)$.

Funkcija ima parcijalne izvode u tački $O(0,0)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(\Delta x)^2 \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{(0)^2 \cdot \Delta y}{(0)^2 + (\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = 0$$

Ona nije diferencijabilna u toj tački. Ako bi bila, njen priraštaj bi mogao da se napiše u obliku

$$\Delta z = \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} - 0 = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \omega \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

pri čemu je $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \omega = 0$, što nije tačno, jer za $\Delta x = \Delta y > 0$ imamo

$$\omega(\Delta x, \Delta x) = \frac{(\Delta x)^3}{(2(\Delta x)^2)\Delta x \sqrt{2}},$$

pa je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \omega(\Delta x, \Delta x) = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

što je kontradikcija.

Teorema

Ako funkcija $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ ima parcijalne izvode u nekoj $\delta-$okolini tačke M i ako su ti izvodi neprekidni u samoj tački M, tada je funkcija diferencijabilna u M.

Neprekidnost parcijalnih izvoda nije potreban uslov za diferencijabilnost:

Primer

Funkcija

$$z = f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

je diferencijabilna u tački $O(0,0)$, a oba parcijalna izvoda imaju prekid u tački $O(0,0)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, \text{ za } (x,y) \neq (0,0),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, \text{ za } (x,y) \neq (0,0),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin\frac{1}{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(\Delta y)^2 \sin\frac{1}{(\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = 0,$$

$$\begin{aligned}\Delta z = z(\Delta x, \Delta y) &= 0\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y \\ &+ \left(\Delta x \sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)\Delta x \\ &+ \left(\Delta y \sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)\Delta y,\end{aligned}$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \alpha = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta x \sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = 0,$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \beta = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta y \sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = 0,$$

pa je funkcija diferencijabilna u $O(0,0)$.

$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \dfrac{\partial z}{\partial x}$ i $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \dfrac{\partial z}{\partial y}$ ne postoje, pa su oba parcijalna izvoda prekidna u $O(0,0)$

$\left(a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0\right) \to (0,0), n\to\infty; \frac{\partial z}{\partial x}(a_n) \to -\infty, n\to\infty\right)$

- funkcija $z = f(x_1, \dots, x_n)$ je diferencijabilna nad skupom $A \subset D^\circ$ ako je diferencijabilna u svakoj tački skupa A
- ako funkcija $z = f(x_1, \dots, x_n)$ ima neprekidne parcijalne izvode u tački $M \subset D^\circ$ onda kažemo da je ona neprekidno diferencijabilna u tački M
- ako funkcija $z = f(x_1, \dots, x_n)$ ima neprekidne parcijalne izvode u svim tačkama skupa $A \subset D^\circ$ onda kažemo da je ona neprekidno diferencijabilna nad skupom A
- za dovoljno male priraštaje $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ važi da je $\Delta z \approx dz$

Izvod složene funkcije

Neka je dato n funkcija

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \\ u_2 &= \varphi_2(x_1, \ldots, x_m), \\ &\vdots \\ u_n &= \varphi_n(x_1, \ldots, x_m), \end{aligned}$$

koje preslikavaju skup $D_1 \subset \mathbb{R}^m$ na skup $D \subset \mathbb{R}$.
Neka je $z = f(u_1, \ldots, u_n)$ definisana nad D^n. Tada je funkcija

$$z = f(\varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_m))$$

složena funkcija od funkcija

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \text{ i } f,$$

pri čemu je oblast definisanosti ove funkcije skup $D_1 \subset R^m$.

Teorema

Neka funkcije $u_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_m)$, $i = 1, \dots, n$ *imaju parcijalne izvode po svim promenljivama* $x_1, \dots, x_m$ *u tački* $M(x_1, \dots, x_m)$.
Ako je funkcija $z = f(u_1, \dots, u_n)$ *diferencijabilna u tački*

$$N(\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)),$$

tada složena funkcija $z = f(u_1, \dots, u_n)$ *ima sve parcijalne izvode po promenljivama* x_i *u tački* M *pri čemu važe jednakosti*

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_1} &= \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ &\vdots \\ \frac{\partial z}{\partial x_m} &= \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_m} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_m}. \end{aligned}$$

Dokaz. (za slučaj $z = f(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$)

Kako je funkcija z diferencijabilna u tački M, to je

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta v + \alpha\Delta u + \beta\Delta v, \lim_{(\Delta u,\Delta v)\to(0,0)} \alpha = \lim_{(\Delta u,\Delta v)\to(0,0)} \beta = 0.$$

Za $\Delta y = 0$ i $\Delta x \neq 0$, iz diferencijabilnosti funkcije f sledi

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Za $\Delta x \to 0$ je i $(\Delta_x u, \Delta_x v) \to (0, 0)$, pa je

$$\lim_{\Delta x\to 0} \alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \beta = 0.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta_x v}{\Delta x} \right) \\
&= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Slično se pokazuje da je

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Izvod vektorske funkcije skalarne promenljive

Definicija

Ako za vektorsku funkciju

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in D^\circ$$

postoji

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

onda kažemo da vektorska funkcija $\vec{r}(t)$ *ima* **izvod u tački** t *koji se obeležava sa* $\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$ *ili sa* $\dot{\vec{r}}(t)$*, tj.*

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Očigledno je $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$,

pa važe slična pravila kao kod izvoda realne funkcije jedne realne promenljive:

a) $\dfrac{d}{dt}(\lambda_1\vec{r}_1 + \lambda_2\vec{r}_2) = \lambda_1\dfrac{d\vec{r}_1}{dt} + \lambda_2\dfrac{d\vec{r}_2}{dt}$,

b) $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) = \dfrac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \vec{r}_2 + \dfrac{d\vec{r}_2}{dt} \cdot \vec{r}_1$,

c) $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) = \dfrac{d\vec{r}_1}{dt} \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \dfrac{d\vec{r}_2}{dt}$,

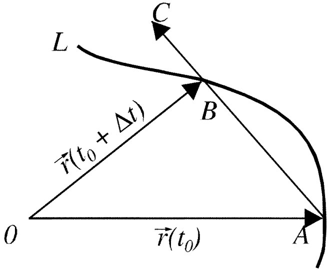
d) $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}(u(t))) = \dfrac{d\vec{r}}{du}\dfrac{du}{dt}$,

e) $\dfrac{d}{dt}(u\vec{r}) = u\dfrac{d\vec{r}}{dt} + \dfrac{du}{dt}\vec{r}$.

pri čemu izvodi sa desne strane postoje po pretpostavci.

Geometrijska interpretacija izvoda:

Pretpostavimo da je $\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0 \neq 0.$



Tada je $\Delta\vec{r}(t) = \overrightarrow{AB}$.
A je vrh vektora $\vec{r}(t_0)$,
B je vrh vektora $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$,
pa je $\dfrac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \overrightarrow{AC}$.

Granična vrednost

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}_0$$

je vektor koji leži na pravoj koja prolazi kroz tačku A koju ćemo definisati kao **tangenta krive** L u tački A.

Tangenta krive L u tački A je prava

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_0} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0}, \quad \dot{r}_0 \neq 0,$$

a ravan

$$\dot{x}_0(x - x_0) = \dot{y}_0(y - y_0) = \dot{z}_0(z - z_0),$$

koja je normalna na p zovemo **normalna ravan krive** L.

(stavljeno je da je $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0$)

Vektor $\dot{\vec{r}}$ ima smer tamo kuda skalar raste.

Intenzitet vektora $\frac{d\vec{r}}{dt}$ zavisi od izbora parametra t.
Ako uzmemo da je $t = \alpha\tau$, $\alpha \neq 0$, prema d) je tada

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{d\tau}\right|\left|\frac{1}{\alpha}\right|,$$

pa možemo izabrati parametar tako da taj intenzitet bude jednak 1. Obeležićemo tu vrednost parametra sa s.

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1.$$

Sledi da je $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$, tj. $s = \int\limits_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$.
Dakle, s je dužina luka krive L od neke fiksne tačke M. Prema geometrijskoj interpretaciji izvoda sledi da je $\dot{\vec{r}}(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \vec{t}_0$, ort tangente na krivu L u posmatranoj tački sa smerom porasta skalara t.

Za jedinični vektor $\vec{c} = \vec{c}(t)$ je $\vec{c} \cdot \vec{c} = 1$, odakle sledi da je

$$\frac{d\vec{c}}{dt} \cdot \vec{c} + \frac{d\vec{c}}{dt} \cdot \vec{c} = 0.$$

Dakle, izvod jediničnog vektora $\vec{c}$ normalan je na vektor $\vec{c}$. Za $\vec{r} = r\vec{r}_0$ ($\vec{r}_0$ je ort) je

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r}_0 + r\frac{d\vec{r}_0}{dt}.$$

Ako je $\vec{r}_0$ konstantan vektor, tada vektor

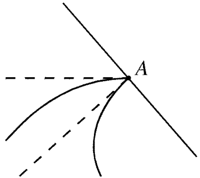
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r}_0$$

ima pravac jediničnog vektora, a ako je $\vec{r}$ konstantnog intenziteta, tada vektor

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\vec{r}_0}{dt}$$

ima pravac koji je normalan na vektor $\vec{r}_0$.

Mehanička interpretacija jednostranih izvoda:



Ako materijalna tačka tokom kretanja udari u prepreku, odbija se i nastavlja kretanje. U trenutku t_0 sudara sa preprekom, funkcija $\vec{r}$ nema izvod, ali postoje **desni i levi izvod u tački** t_0 :

$$\dot{\vec{r}}_+(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}, \quad \dot{\vec{r}}_-(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0^-} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Oni daju brzinu tačke pre i posle udara u prepreku. Odgovaraju im desna i leva tangenta na krivu L u tački udara A :

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}_{0^+}} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_{0^+}} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_{0^+}}, \quad \frac{x - x_0}{\dot{x}_{0^-}} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_{0^-}} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_{0^-}}.$$

Tangentna ravan i normala površi

Neka je površ S data jednačinom $F(x, y, z) = 0$.

- $P(x, y, z)$ je regularna(nesingularna) tačka površi S ako postoje sva tri parcijalna izvoda $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}$ u tački P koji su neprekidni u tački P i
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \neq (0, 0, 0)$$

- Ako tačka $P(x, y, z)$ nije regularna tačka površi S, onda za nju kažemo da je singularna tačka površi S.

Neka je skup L tačaka površi S (u daljem tekstu kriva L u parametarskom obliku) dat sa

$$L : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \\ z = \omega(t) \end{cases}$$

- φ, ψ, ω imaju neprekidne izvode za svako $t \in [\alpha, \beta]$
- $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t) \neq 0$, za svako $t \in [\alpha, \beta]$

Tada vektor

$$\dot{\vec{r}_0} = \dot{\vec{r}_0}(t_0) = \dot{x}(t_0)\vec{i} + \dot{y}(t_0)\vec{j} + \dot{z}(t_0)\vec{k}$$

leži na tangenti krive L u tački $P(x_0, y_0, z_0)$.
Tangenta krive L u tački P je tangenta površi S u tački P.

Jednačina površi je $F(x, y, z) = 0$ tj. $F(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) = 0$ jer L leži na S. Diferenciranjem po t dobijamo

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}}_{\vec{n}\cdot\dot{\vec{r}}} = 0,$$

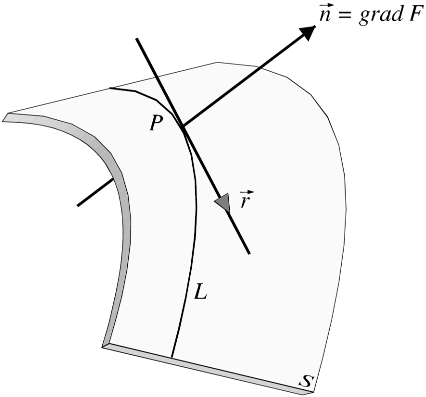
pri čemu je

- $\vec{n} = \mathrm{grad} F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$, ne zavisi od oblika krive, jedino od koordinata tačke P i funkcije $F(x, y, z)$,
- $\dot{\vec{r}} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$ leži na tangenti krive L u tački P

Kako je P regularna tačka površi S, to je

$$|\mathrm{grad} F| = |\vec{n}| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \neq 0.$$

Iz $\vec{n} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$ sledi da su vektori $\dot{\vec{r}}$ i $\vec{n}$ ortogonalni. Ovo znači da je vektor $\dot{\vec{r}}$, koji leži na tangenti krive L u tački P, normalan na vektor $\vec{n}$ u tački P.



Ovo se može primeniti na bilo koju krivu L koja leži na površi S i prolazi kroz tačku P.

Definicija

Ravan formirana od svih tangenti površi S kroz datu regularnu tačku $P \in S$ je tangentna ravan površi S u tački P.

Vektor

$$\vec{n}(P) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(P), \frac{\partial F}{\partial y}(P), \frac{\partial F}{\partial z}(P) \right)$$

je vektor normale tangentne ravni površi $F(x, y, z) = 0$ u tački P.

Jednačina tangentne ravni u regularnoj tački $P_0(x_0, y_0, z_0)$ je

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Ako je površ S data jednačinom $z = f(x, y)$, možemo da je napišemo kao

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0.$$

Tada je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1,$$

pa je jednačina tangentne ravni u tački $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = z - z_0.$$

Geometrijska interpretacija totalnog diferencijala
Zamenom $x - x_0 = \Delta x$ i $y - y_0 = \Delta y$, prethodna jednačina tangentne ravni se svodi na

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy. \end{aligned}$$

Desna strana gornje jednakosti je totalni diferencijal funkcije $z = f(x, y)$, u tački $M_0(x_0, y_0)$ ravni xy, pa je

$$z - z_0 = dz.$$

Sledi da je vrednost totalnog diferencijala funkcije $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$ koji odgovara priraštajima Δx i Δy jednaka priraštaju po aplikati z tangentne ravni u tački $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dobijenom pri pomeranju iz tačke $M_0(x_0, y_0)$ u tačku $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Definicija

Prava koja prolazi kroz tačku $P_0(x_0, y_0, z_0)$ površi $F(x, y, z) = 0$ i koja je normalna na tangentnu ravan površi u tački P_0 je normala površi u tački P_0 i data je jednačinom

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)}.$$

Ako je površ S zadata jednačinom $z = f(x, y)$, jednačina normale površi u tački $P_0(x_0, y_0, z_0)$ postaje

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Parcijalni izvodi višeg reda

Neka $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, postoji $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ za neko $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ u svim tačkama nepraznog podskupa $D_1 \subset D$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ je realna funkcija definisana nad skupom D_1, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : D_1 \to \mathbb{R}$, pa se može postaviti pitanje postojanja parcijalnog izvoda te funkcije po promenljivoj x_j u nekoj tački $M \in D_1$.

Definicija

Ako postoji parcijalni izvod $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)(M)$ tada je to drugi parcijalni izvod ili parcijalni izvod drugog reda funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ u tački M po promenljivama x_i, x_j (tim redom!) i označavamo ga sa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M).$$

- za $i=j$ je $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(M) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(M)$
- za $i \neq j$ je $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M)$ mešoviti parcijalni izvod
- u opštem slučaju $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M)$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M)$ mogu imati različite vrednosti

Primer

Funkcija $z = f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$
ima mešovite parcijalne izvode u svim tačkama, pri čemu oni nisu jednaki u koordinatnom početku, tj. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Teorema

Ako postoje drugi mešoviti parcijalni izvodi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *i* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *u nekoj* $\delta-$*okolini tačke* $M(x_1, \ldots, x_n)$ *i ako su oni neprekidni u datoj tački* M, *onda su oni i jednaki u toj tački, tj. važi jednakost*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M).$$

Parcijalni izvodi višeg reda definišu se induktivno:

- parcijalni izvod reda m ili m-tog reda funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ u tački $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ po promenljivama $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ (tim redom!) označava se sa

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_m}}(M),$$

pri čemu neki od indeksa mogu biti jednaki.

Redosled traženja parcijalnih izvoda u opštem slučaju utiče na njegovu vrednost. U slučaju da su izvodi neprekidne funkcije u nekoj tački, na osnovu prethodne teoreme, redosled više nije bitan.

$C^m(D,\mathbb{R})$ je skup svih funkcija takvih da su svi parcijalni izvodi m-tog reda neprekidni nad skupom D.

Posledica

Za $f \in C^m(D,\mathbb{R})$ se vrednost izraza $\dfrac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}(M)$ ne menja pri proizvoljnoj permutaciji indeksa $i_1, i_2, \dots, i_m$.

Funkcije klase $C^m(D,\mathbb{R})$, gde je D otvorena oblast su m puta neprekidno diferencijabilne. Za m-ti parcijalni izvod takve funkcije koristićemo oznaku

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

gde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq \alpha_i \leq m, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m.$

Totalni diferencijal višeg reda

Za diferencijabilnu funkciju $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nad skupom D je totalni diferencijal prvog reda (prvi totalni diferencijal) funkcije $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ u tački $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ koji odgovara priraštajima $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ promenljivih $x_1, x_2, \dots, x_n$ dat formulom

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n,$$

gde su $dx_i = \Delta x_i,\ i = \{1, 2, \dots, n\}$ proizvoljni priraštaji nezavisnih promenljivih, tj. proizvoljni brojevi nezavisni od x_i, $i = \{1, 2, \dots, n\}$.

- $x_1, x_2, \dots, x_n$ možemo da menjamo tako da pri tome $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ ostanu konstantni
- za date $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ totalni diferencijal dz je funkcija od $x_1, x_2, \dots, x_n$ koja takođe može da bude diferencijabilna

Definicija

Totalni diferencijal $d(dz)$ u tački $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koji odgovara priraštajima nezavisnih promenljivih $dx_1, \ldots, dx_n$ se zove drugi totalni diferencijal (totalni diferencijal drugog reda) funkcije $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ u tački M, u oznaci d^2z.

Ako funkcija $z = f(x, y)$ ima neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda u otvorenoj oblasti D, tada je totalni diferencijal dz funkcije $z = f(x, y)$ diferencijabilna funkcija pa u D postoji d^2z. Kako su dx i dy konstantni, sledi

$$\begin{aligned}
d^2z &= d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2
\end{aligned}$$

Ako sa d označimo $d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$, tada se može pisati

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)z, \quad d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z$$

Opštije,

ako funkcija $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ima neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda u otvorenoj oblasti D, tada je totalni diferencijal dz funkcije $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ diferencijabilna funkcija pa u D postoji d^2z. Kako su $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ konstantni, sledi

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n\right) \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}dx_1^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}dx_2^2 + \cdots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}dx_n^2 + \\ &\quad +2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}\partial x_n}dx_{n-1}dx_n\right) \end{aligned}$$

Ako sa d označimo

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n,$$

prethodna formula se može zapisati kao

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 z,$$

a prvi totalni diferencijal možemo zapisati u obliku

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) z.$$

- totalni diferencijal m-tog reda ili m-ti totalni diferencijal, $m \geq 3$, definišu se induktivno
- za m-ti totalni diferencijal, $m \geq 2$, kažemo da je totalni diferencijal višeg reda ili viši totalni diferencijal

Teorema

Ako funkcija $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^m(D, \mathbb{R})$, D je otvorena oblast, tada postoji totalni diferencijal $d^m z$ $m-$tog reda koji je dat obrascem

$$d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m z.$$

Lokalni ekstremi

Definicija

Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ *definisana na nekoj okolini* $L(A, \varepsilon)$ *tačke* $A \in D$ *(sledi da je* $A \in D^\circ$*).*

- *Ako je za svaku tačku* $X \in L(A, \varepsilon) \setminus \{A\}$ *ispunjeno*

$$f(X) < f(A),$$

  tada funkcija f *u tački* A *ima lokalni maksimum jednak* $f(A)$*.*

- *Ako je za svaku tačku* $X \in L(A, \varepsilon) \setminus \{A\}$ *ispunjeno*

$$f(X) > f(A),$$

  tada funkcija f *u tački* A *ima lokalni minimum jednak* $f(A)$*.*

Lokalne maksimume i lokalne minimume zovemo lokalni ekstremi.

Drugim rečima, funkcija $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ u tački

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D^\circ$$

ima lokalni ekstrem ako za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ postoje $\delta_i > 0$ takvi da je

$$\text{za svako } |\Delta x_i| < \delta_i, \quad (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0),$$

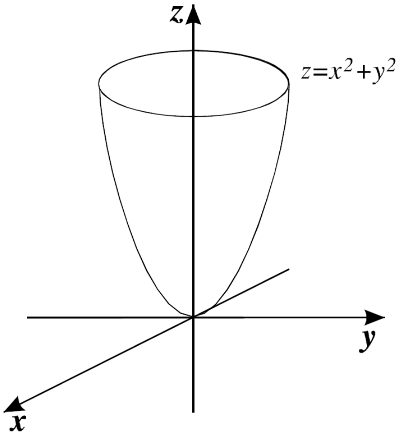
$$B(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) \in D$$

priraštaj funkcije

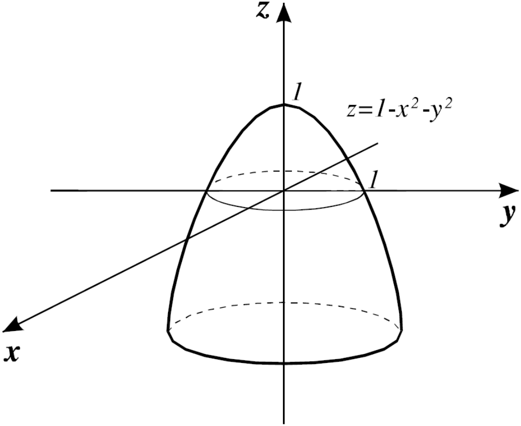
$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)$$

u tački A ili pozitivan (lokalni minimum) ili negativan (lokalni maksimum) (o rubnim ekstremima biće reči kasnije).

Funkcija $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ u tački $O(0, 0)$ ima lokalni minimum:



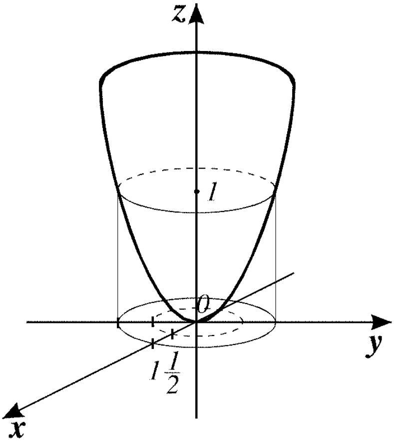
Funkcija $z = f(x, y) = 1 - x^2 + y^2$ u tački $O(0, 0)$ ima lokalni maksimum:



Funkcija

$$z = f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & , \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 1 & , \quad x = y = 0 \end{cases}$$

u tački $O(0,0)$ ima lokalni maksimum:



Potreban uslov za postojanje lokalnog ekstrema:

Teorema

Neka funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ *u tački* $A(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D^\circ$ *ima sve parcijalne izvode prvog reda i neka u toj tački ima lokalni ekstrem. Tada je*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(A) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) = 0.$$

Specijalno, ako je $f(X)$, $X \in D$ *diferencijabilna funkcija u nekoj okolini tačke* $A \in D^\circ$, *onda je*

$$df(A) = 0, \quad (dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \neq (0, 0, \dots, 0).$$

Dokaz. Neka je $L(a, \varepsilon)$ otvorena lopta u kojoj je definisana funkcija $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i u kojoj važi da je

$$f(X) < f(A) \quad (f(X) > f(A)) \text{ za sve } x \in L(a, \varepsilon) \setminus \{A\}.$$

Za proizvoljno $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ posmatrajmo funkciju

$$f_i : (a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon) \to \mathbb{R}$$

definisanu sa

$$f_i(x_i) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n), \text{ za } x_i \in (a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon).$$

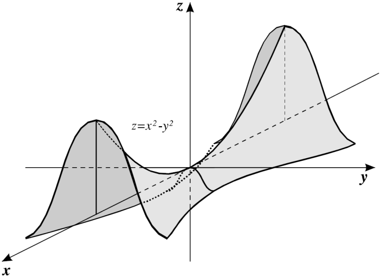
Ta funkcija jedne promenljive ima lokalni ekstrem u tački a_i, pa je

$$f_i'(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0.$$

$\square$

Navedeni uslov nije i dovoljan za postojanje ekstrema:

Funkcija $z = x^2 - y^2$ ima izvode $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y$, koji su jednaki nuli za $x = y = 0$.



Kako je $f(O) = f(0,0) = 0$, $\quad \Delta z = f(x,y) - f(0,0) = x^2 - y^2$, to je

$$\begin{cases} \Delta f > 0 & , \quad x \neq 0, y = 0 \\ \Delta f < 0 & , \quad x = 0, y \neq 0 \end{cases}$$

pa ova funkcija nema lokalni ekstrem u tački $O(0,0)$.

- stacionarne tačke - unutrašnje tačke oblasti definisanosti diferencijabilne funkcije $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ u kojima su svi parcijalni izvodi prvog reda jednaki nuli

Dovoljni uslovi za postojanje lokalnog ekstrema (2 teoreme):

Teorema

Neka je $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ otvorena oblast i neka $A(a_1, \dots, a_n) \in D$, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, pri čemu je A stacionarna tačka funkcije $f(x_1, \dots, x_n)$, tj. $df(A) = 0$ za $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$. Tada

1. *Ako je $d^2 f(A) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^2 f(a_1, \dots a_n) < 0$ za $(dx_1, \dots, dx_n) \neq (0, \dots, 0)$, tada f u A ima lokalni maksimum.*
2. *Ako je $d^2 f(A) > 0$ za $(dx_1, \dots, dx_n) \neq (0, \dots, 0)$, funkcija f u tački A ima lokalni minimum.*
3. *Ako $d^2 f(A)$ menja znak za $(dx_1, \dots, dx_n) \neq (0, \dots, 0)$, funkcija f u tački A nema lokalni ekstrem.*

Teorema

Neka je $D \subset \mathbb{R}^2$ *otvorena oblast i neka* $A(a,b) \in D$, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ *i*

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0.$$

Označimo sa $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$. *Tada:*

1. *Ako je* $r > 0 (t > 0)$ *i* $rt - s^2 > 0$, *funkcija* $f(x,y)$ *u tački* $A(a,b)$ *ima lokalni minimum.*
2. *Ako je* $r < 0 (t < 0)$ *i* $rt - s^2 > 0$, *funkcija* $f(x,y)$ *u tački* $A(a,b)$ *ima lokalni maksimum.*
3. *Ako je* $rt - s^2 < 0$, $f(x,y)$ *u tački* $A(a,b)$ *nema lokalni ekstrem.*
4. *Ako je* $rt - s^2 = 0$, *potrebna su dalja ispitivanja (posmatra se znak priraštaja funkcije u tački* $A(a,b)$*).*

Primer

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$

Iz $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y = 0$ i $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x + 2y = 0$ dobijamo stacionarne tačke $A(x, -x)$, tj. sve tačke prave $y = -x$ su stacionarne tačke. Kako je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2,$$

to je uvek

$$rt - s^2 = 4 - 4 = 0$$

ili

$$d^2 f(A) = 2(dx + dy)^2 \geq 0,$$

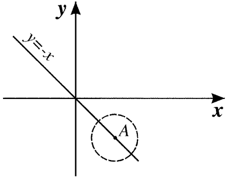
pa na osnovu ovih kriterijuma ne možemo zaključiti da li data funkcija u tačkama $A(x, -x)$ ima lokalni ekstrem.

U svakoj okolini tačke $A(x, -x)$ ima i drugih tačaka

$$B(y, -y), \text{ pri čemu je } A \neq B,$$

pri čemu važi da je

$$f(B) - f(A) = 0.$$



Dalje, za sve tačke

$$X(x, y), \text{ gde je } x \neq y$$

je

$$f(x, y) - f(0, 0) = (x + y)^2 > 0,$$

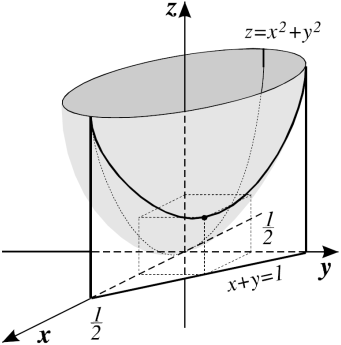
pa zaključujemo da je $f(X) - f(A) \geq 0$, za tačke $X \in L(A, \varepsilon)$, pa zaključujemo da funkcija ni u jednoj tački $A(x, -x)$ nema lokalni ekstrem.

Vezani (uslovni) ekstremi

Kod određivanja ekstremnih vrednosti funkcija više promenljivih promenljive mogu biti vezane nekim dodatnim relacijama (ne mogu slobodno da se menjaju u oblasti definisanosti funkcije).

Primer

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ *pod uslovom da je* $x + y = 1$.



Iz date veze sledi da je $y = 1 - x$, pa je u odgovarajućim tačkama

$$f(x, y) = f(x, 1 - x) = 2x^2 - 2x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.$$

Funkcija $f(x, 1 - x)$ ima minimum za $x = \frac{1}{2}$ (pa i $y = \frac{1}{2}$).

Minimalna vrednost je $\frac{1}{2}$.

Sama funkcija $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ u svakoj okolini tačke $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ima i manjih vrednosti od $\frac{1}{2}$.

Inače, njena najmanja vrednost je 0.

Ograničimo razmatranja na funkciju dve promenljive, $z = f(x, y)$. Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, definisana na $D \subset \mathbb{R}^2$ i $\varphi : D \to \mathbb{R}$. Neka je

$$B = \{(x, y) \in D : \varphi(x, y) = 0\}$$

neprazan skup određen uslovom ili vezom $\varphi(x, y) = 0$.

Definicija

Funkcija $z = f(x, y)$ u tački nagomilavanja $A(x, y) \in B$ skupa B ima uslovni (vezani) lokalni maksimum (uslovni (vezani) lokalni minimum) pri uslovu $\varphi(x, y) = 0$, ako

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall X \in B \cap (L(A, \varepsilon) \setminus \{A\})) \quad f(X) < f(A) \quad (f(X) > f(A)).$$

Uslovni lokalni minimum odnosno uslovni lokalni maksimum jednim imenom zovemo uslovni ili vezani ekstremi a jednačina $\varphi(x, y) = 0$ zove se jednačina veze.

Ako je jednačina krive $L : \varphi(x, y) = 0$, problem određivanja uslovnih ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ na krivoj L može se formulisati kao: **odrediti uslovne ekstreme funkcije $\mathbf{z = f(x, y)}$ nad skupom D, pod uslovom $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$.**

Lagranžov metod za određivanje uslovnog ekstrema:

Neka je $M_0 = (x_0, y_0)$ potencijalna tačka uslovnog ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ sa jednačinom veze $\varphi(x, y) = 0$.

Pp. da funkcije $f(x, y)$ i $\varphi(x, y)$ imaju neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda u nekoj okolini tačke $M_0(x_0, y_0)$ i da je bar jedan od parcijalnih izvoda

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(M_0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(M_0)$$

različit od 0 (neka je npr. $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(M_0) \neq 0$.)

Iz $\varphi(x, y) = 0$ sledi da je $y = \psi(x)$, pa je $z = f(x, \psi(x)) = h(x)$ funkcija jedne promenljive. Potreban uslov da funkcija

$$z = f(x, \psi(x))$$

u tački $M(x_0, \psi(x_0))$ ima ekstremnu vrednost je da je $\dfrac{dz}{dx}(M_0) = 0$. Sledi da je

$$dz(M_0) = df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)dy = 0. \tag{3}$$

Iz jednačine veze se dobija

$$d\varphi(M_0) = \varphi_x(M_0)dx + \varphi_y(M_0)dy = 0. \tag{4}$$

Množenjem jednakosti (4) sa λ i dodavanjem jednakosti (3) dobijamo

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)\right) dy = 0.$$

Iz $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ izrazimo λ :

$$\lambda = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Dakle, jednakosti

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

daju potrebne uslove za nevezane ekstreme u tački $M_0(x_0, y_0)$ funkcije

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$ (**LAGRANŽOVA FUNKCIJA**).

Dakle, uslovni ekstrem funkcije $f(x, y)$, ako je $\varphi(x, y) = 0$, je obavezno stacionarna tačka Lagranžove funkcije

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

pa se tačke koje mogu biti uslovni ekstremi funkcije $f(x, y)$, ako je $\varphi(x, y) = 0$, dobijaju tako što se formira Lagranžova funkcija i njeni prvi parcijalni izvodi

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}$$

izjednače sa nulom. Dobijamo sistem od tri jednačine

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= f_x(x, y) + \lambda\varphi_x(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= f_y(x, y) + \lambda\varphi_y(x, y) = 0 \\ & \varphi(x, y) = 0, \end{aligned}$$

čijim rešavanjem određujemo λ, x i y mogućih tačaka ekstrema.

Postojanje i prirodu uslovnih ekstrema određujemo pomoću znaka drugog totalnog diferencijala Lagranžove funkcije

$$d^2F(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2,$$

za skup vrednosti x_0, y_0, λ dobijenih iz prikazanog sistema jednačina pod uslovom $\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0$, za $(dx, dy) \neq (0,0)$.

- $d^2F(x_0, y_0) < 0$ u tački (x_0, y_0) funkcija $f(x,y)$ ima uslovni maksimum
- $d^2F(x_0, y_0) > 0$ u tački (x_0, y_0) funkcija $f(x,y)$ ima uslovni minimum
- $d^2F(x_0, y_0)$ u tački (x_0, y_0) menja znak funkcija $f(x,y)$ nema uslovni ekstrem

Primer

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ *pod uslovom da je* $x + y = 1$.

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1),$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial F}{\partial x} & = & 2x + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = & 2y + \lambda = 0, \\ & & x + y - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}, \lambda = -1.$$

Kako je $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$ i $dx + dy = 0$, to je

$$\begin{array}{rcl} d^2F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & = & 2dx^2 + 2dy^2 \\ & = & 2dx^2 + 2(-dx)^2 = 4dx^2 > 0, (dx, dx) \neq (0, 0), \end{array}$$

pa funkcija u tački $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ima uslovni minimum pod uslovom $x + y = 1$.

Primer

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = f(x,y) = xy$ *pod uslovom da je* $y - x = 0$.

$$F(x,y,\lambda) = xy + \lambda(y-x),$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial F}{\partial x} & = & y - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & = & x + \lambda = 0, \\ & & y - x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y = 0, \lambda = 0.$$

Kako je $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1$ i $dy - dx = 0$, to je $d^2F(0,0) = dx^2 > 0$, za $dx \neq 0$. Kako je $d^2F(0,0) > 0$, to funkcija u tački $O(0,0)$ ima uslovni lokalni minimum. Primetimo da je $rt - s^2(0,0) = -1 < 0$, dakle **funkcija može imati uslovni ekstrem i ako je** $rt - s^2 < 0$.

Neka je data funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, definisana na skupu $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ i funkcije $\varphi_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$, za fiksirano $m \in \mathbb{N}$, $m < n$. Neka je

$$B = \{X \in D : \varphi_i(X) = 0,\ i = 1, 2, \dots, m\}$$

neprazan skup određen sa $\varphi_1(X) = 0, \varphi_2(X) = 0, \dots, \varphi_m(X) = 0$.

Definicija

Funkcija $z = f(x_1, \dots, x_n)$ u tački nagomilavanja $A(a_1, a_2, \dots, a_n) \in B$ skupa B ima uslovni (vezani) lokalni maksimum (uslovni (vezani) lokalni minimum) pri uslovima $\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \varphi_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n) = 0$ ako

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall X \in B \cap (L(A, \varepsilon) \setminus \{A\})) \quad f(X) < f(A) \quad (f(X) > f(A)).$$

Uslovni lokalni minimum odnosno uslovni lokalni maksimum jednim imenom zovemo uslovni ili vezani ekstremi.

Ako tražimo uslovne ekstreme funkcije $z = f(x_1, \ldots, x_n)$, pod uslovima

$$\begin{gathered} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{gathered}$$

gde je $1 \leq m < n$, formiramo Lagranžovu funkciju:

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, \ldots, x_n),$$

uz pretpostavku da funkcije $f(x_1, \ldots, x_n)$ i $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, m$ imaju neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda u nekoj okolini potencijalne tačke uslovnog ekstrema $M(a_1, \ldots, a_n)$.

Dalje, pretpostavimo da u toj okolini funkcionalna matrica

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

ima rang m. Izjednačavanjem sa nulom svih parcijalnih izvoda prvog reda funkcije $F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ i uzimajući u obzir jednačine veze, dobijamo sistem od $n + m$ jednačina:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$\varphi_j(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad j \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

čijim rešavanjem nalazimo $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ i koordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mogućih ekstrema.

Postojanje i prirodu uslovnih ekstrema određujemo pomoću znaka drugog diferencijala Lagranžove funkcije. Ako je u dobijenim tačkama

- $d^2F < 0$, $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$, funkcija $f(x, y)$ ima uslovni maksimum
- $d^2F > 0$ $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$, funkcija $f(x, y)$ ima uslovni minimum
- d^2F menja znak funkcija $f(x, y)$ nema uslovni ekstrem

Između $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ postoje veze

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} dx_n = 0,$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Primer

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $u = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ *pod uslovom da je* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a > b > c > 0$.

$$F(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$

$$\left.\begin{array}{lcl} \frac{\partial F}{\partial x} & = & 2x + 2\lambda\frac{x}{a^2} = 2x(1 + \frac{\lambda}{a^2}) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee \lambda = -a^2, \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = & 2y + 2\lambda\frac{y}{b^2} = 2y(1 + \frac{\lambda}{b^2}) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee \lambda = -b^2, \\ \frac{\partial F}{\partial z} & = & 2z + 2\lambda\frac{z}{c^2} = 2z(1 + \frac{\lambda}{c^2}) = 0 \Rightarrow z = 0 \vee \lambda = -c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{lll} A(a,0,0), & B(-a,0,0) & (\lambda = -a^2) \\ C(0,b,0), & D(0,-b,0) & (\lambda = -b^2) \\ E(0,0,c), & H(0,0,-c) & (\lambda = -c^2) \end{array}$$

Kako je

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 + 2\frac{\lambda}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 + 2\frac{\lambda}{b^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2 + 2\frac{\lambda}{c^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 0,$$

to je

$$d^2F = 2\left(\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right)dx^2 + \left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right)dy^2 + \left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right)dz^2\right).$$

Za tačke A i B je

$$d^2F(A) = d^2F(B) = 2\left(\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)dy^2 + \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)dz^2\right).$$

Diferenciranjem jednačine veze dobijamo

$$\frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy + \frac{2z}{c^2}dz = 0,$$

odakle uvrštavanjem koordinata tačaka A i B dobijamo $\pm\dfrac{2a}{a^2}dx = 0$, odakle je $dx = 0$.
S obzirom da je $(dx, dy, dz) \neq (0, 0, 0)$, bar jedan od diferencijala dy ili dz mora biti različit od nule.
Kako je

$$1 - \frac{a^2}{b^2} < 0 \quad \text{i} \quad 1 - \frac{a^2}{c^2} < 0$$

sledi da je

$$d^2F(A) = d^2F(B) < 0,$$

pa funkcija u tačkama A i B ima uslovni maksimum.

Za tačke C i D je

$$d^2F(C) = d^2F(D) = 2\left(\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)dx^2 + \left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)dz^2\right).$$

Iz $\pm\frac{2b}{b^2}dy = 0$ sledi da je je $dy = 0$. S obzirom da je $(dx, dy, dz) \neq (0,0,0)$, bar jedan od diferencijala dx ili dz mora biti različit od nule. Ako je $dx = 0$ tada je

$$d^2F(C) = d^2F(D) = 2\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)dz^2 < 0,$$

a ako je $dz = 0$ tada je

$$d^2F(C) = d^2F(D) = 2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)dx^2 > 0,$$

pa kako d^2F menja znak u tačkama C i D, funkcija u tačkama C i D nema uslovni ekstrem.

Za tačke E i H je

$$d^2F(E) = d^2F(H) = 2\left(\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)dx^2 + \left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)dy^2\right).$$

Iz $\pm\dfrac{2c}{c^2}dy = 0$ sledi da je je $dz = 0$. Kako je

$$1-\frac{c^2}{a^2} > 0 \quad \text{i} \quad 1-\frac{c^2}{b^2} > 0$$

sledi da je

$$d^2F(E) = d^2F(H) > 0,$$

pa funkcija u tačkama E i F ima uslovni minimum.

Primitivna funkcija i neodređeni integral

- $f(x)$ definisana nad intervalom I, tj. $f : I \to \mathbb{R}$
- ako za funkciju $f(x)$ postoji funkcija $F : I \to \mathbb{R}$, koja ima izvod $F'(x)$ nad intervalom I, takva da je

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I$$

tada je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ nad intervalom I

- ona nije jednoznačno određena, svaka funkcija $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ je takođe primitivna funkcija jer je

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Veza između dve primitivne funkcije $F(x)$ i $G(x)$ funkcije $f(x)$:

Teorema

Ako su $F(x)$ i $G(x)$ dve primitivne funkcije za $f(x)$ nad nekim intervalom I onda se one nad tim intervalom razlikuju za konstantu, tj. nad intervalom I je $F(x) - G(x) = C$.

Bitna je pretpostavka da se razlika $G(x) - F(x)$ posmatra nad intervalom, a ne na proizvoljnom skupu:

Primer

Pokazati da su funkcije $G(x) = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ i $F(x) = \operatorname{arctg} x$ primitivne funkcije funkcije $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, za $x \neq 0$. Odrediti $G(x) - F(x)$.

- $F(x)$ je primitivna funkcija funkcije $f(x)$ za svako $x \in \mathbb{R}$, jer je $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
- $\left(-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, za $x \neq 0$, pa je nad svakim od intervala $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$ funkcija $G(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$.
- Pri tome je $G(x) - F(x) = \begin{cases} \pi & , \quad x \in (-\infty, 0) \\ 0 & , \quad x \in (0, \infty) \end{cases}$.

Definicija

Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f(x)$ nad nekim intervalom I naziva se neodređeni integral funkcije $f(x)$ nad datim I i označava se sa

$$\int f(x)dx.$$

- $f(x)$ je podintegralna funkcija
- $f(x)dx$ je podintegralni izraz
- $\displaystyle\int$ je znak integrala
- ako je $F(x)$ jedna primitivna funkcija tada je

$$\int f(x)dx = F(x) + C = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$$

Da li za svaku funkciju postoji primitivna funkcija?

Teorema

Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna nad intervalom I tada postoji primitivna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ nad intervalom I, tj. postoji neodređeni integral funkcije $f(x)$ nad datim intervalom I.

- funkcija $f(x)$ ne mora da bude neprekidna da bi za nju postojao neodređeni integral; funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

za $x = 0$ ima prekid druge vrste, a jedna njena primitivna funkcija je

$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Ako funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ u nekoj tački intervala $[a,b]$ ima prekid druge vrste, da li za nju uvek postoji primitivna funkcija nad posmatranim intervalom?

Primer

Proveriti da li **Dirihleova funkcija** $\chi(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ *ima primitivnu funkciju nad proizvoljnim intervalom I.*

NE. Ako bi nad proizvoljnim zatvorenim intervalom $[a,b]$ postojala funkcija $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, koja ima izvod nad I, pri čemu je $F'(x)=\chi(x)$, tada važi

$$\begin{aligned} F'(x)&=1,\ \text{za } x\in[a,b]\cap\mathbb{Q},\\ F'(x)&=0,\ \text{za } x\in[a,b]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}),\end{aligned}$$

a ne postoji $\xi\in[a,b]$ sa osobinom da je (na primer) $F'(\xi)=\frac{1}{2}$ (Darbuova teorema), što znači da $F(x)$ nije primitivna funkcija funkcije $\chi(x)$ nad $[a,b]$.

- ako funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ ima prekid prve vrste u $c \in I$ tada za nju ne postoji primitivna funkcija $F(x)$ nad intervalom I (ako funkcija $f(x)$ ima izvod u svakoj tački intervala I, tada taj izvod ne može imati prekide prve vrste)

- ako neodređeni integral date funkcije postoji, on se ne može uvek izraziti u konačnom obliku (preko konačnog broja elementarnih funkcija) - neki primeri:

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx \quad \int \frac{\sin x}{x} dx.$$

Osobine neodređenog integrala

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$
2. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$

   specijalno: $\int F'(f(x))f'(x)dx = \int dF(f(x)) = F(f(x)) + C$
4. $\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx,\ a \in \mathbb{R}$
5. $\int (f_1(x) + \cdots + f_n(x))\ dx = \int f_1(x)\,dx + \cdots + \int f_n(x)\,dx$
6. *Ako je* $\int f(x)\,dx = F(x) + C$*, tada je*

   $\int f(ax+b)\,dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C,\ a \neq 0$

Tako je, na osnovu osobine 3.

$$\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2} dx = \frac{arctg^3 x}{3} + C.$$

- Tablica neodređenih integrala
- ukoliko nije drugačije naglašeno, traženje neodređenog integrala podrazumeva nalaženje datog integrala nad svim intervalima iz oblasti definisanosti date funkcije

Smena promenljive u neodređenom integralu

Teorema

Neka sirjekcija $\varphi : I_1 \to I \subset \mathbb{R}$ ima neprekidan izvod različit od nule nad intervalom I_1 i neka za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ postoji neodređeni integral nad intervalom I. Tada važi

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt;$$

(posle integracije desne strane se stavi $t = \varphi^{-1}(x),\ x \in I$.)

Dokaz. Jednakost važi jer su izvodi obe strane jednaki:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int f(x)dx &= f(x), \\
\frac{d}{dx}\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt &= \frac{d}{dt}\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)\frac{dt}{dx} \\
&= f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x),
\end{aligned}$$

a zbog stalnosti znaka $\varphi'(t)$ je funkcija $\varphi(t)$ strogo monotona, pa ima inverznu funkciju $\varphi^{-1}(x)$.

- često je pogodnije smenu promenljivih umesto u obliku

$$x = \varphi(t)$$

pisati u obliku

$$t = \psi(x),\ dt = \psi'(x)\,dx.$$

Recimo,

$$\begin{aligned}\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}dx &= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C,\\ \int \frac{\psi'(x)}{2\sqrt{\psi(x)}}dx &= \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{\psi(x)} + C.\end{aligned}$$

Primer

Da li se u integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}, x > 2,$ *može uvesti smena* $x = \arcsin t$*?*

Parcijalna integracija

Teorema

Neka su $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne funkcije i neka postoji primitivna funkcija funkcije $u'(x)v(x)$. Tada postoji primitivna funkcija funkcije $u(x)v'(x)$ i važi jednakost

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Dokaz. Polazeći od jednakosti $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ dobija se

$$\int (u(x)v(x))'dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx,$$

odakle je

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

(konstantu je dovoljno staviti sa jedne strane jednakosti)

Napomena

- $\int P_n(x)e^{ax}dx$, $n \geq 1$ *rešava se sa n parcijalnih integracija, uzimajući*

$$u = P_n(x), \quad e^{ax}dx = dv$$

- $\int P_n(x)\sin ax\, dx \quad \left(\int P_n(x)\cos ax\, dx\right)$, $n \geq 1$ *rešava se sa n parcijalnih integracija, uzimajući*

$$u = P_n(x), \quad \sin ax\, dx = dv, (\cos ax\, dx = dv)$$

- $\int P_n(x)\ln^m x\, dx$, $n \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ *rešava se sa m parcijalnih integracija, uzimajući*

$$u = \ln^m x, \quad P_n(x)\, dx = dv$$

Primer

Odrediti neodređeni integral $I(x)$ funkcije $f(x) = \begin{cases} x & , \quad x < 2 \\ 2 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$

$I(x)$ postoji nad $\mathbb{R}$ ($f(x)$ je neprekidna funkcija). Kako je

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$\int 2 dx = 2x + C_2,$$

to da bi $I(x)$ bila neprekidna funkcija mora da važi

$$2 + C_1 = 4 + C_2, \text{ tj. } C_1 = C_2 + 2$$

pa je $I(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + 2 + C & , \quad x < 2 \\ 2x + C & , \quad x \geq 2 \end{cases}$.

Integrali racionalnih funkcija

Racionalna funkcija je $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

- ako je $\deg P(x) < \deg Q(x)$ - prava racionalna funkcija
- ako je $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$ - neprava racionalna funkcija

Svaka neprava racionalna funkcija može se napisati u obliku

$$R(x) = T(x) + \frac{R_1(x)}{Q(x)}, \quad \deg R_1(x) < \deg Q(x)$$

- $P(x)$ je deljiv polinomom $x - a$ ako i samo ako je $P(a) = 0$
- Svaki polinom stepena $n \geq 1$ ima tačno n nula, $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$
- Ako su $a_1, \dots, a_m$ različite nule polinoma $P(x) = c_n x^n + \dots c_1 x + c_0,\ n \geq 1$ onda je
$$P(x) = c_n (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_m)^{k_m},\ k_1 + \dots + k_m = n.$$
- Ako je kompleksan broj $z = \alpha + i\beta$ koren reda k polinoma $P(x)$ tada je i $\bar{z} = \alpha - i\beta$ takođe koren reda k polinoma $P(x)$.

Integrali racionalnih funkcija

Teorema

Neka je $P(x)$ polinom stepena manjeg od n, a $Q(x)$ polinom stepena n takav da je

$$Q(x) = c_n(x-a_1)^{k_1}\dots(x-a_p)^{k_p}(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}\dots(x^2+b_qx+c_q)^{l_q} = n,$$

gde je $k_1+\dots+k_p+2(l_1+\dots+l_q)$, $a_i, b_j, c_j \in \mathbb{R}$, $b_j^2-4c_j<0$, $i=1,\dots,p$, $j=1,\dots,q$. *Tada se polinom* $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ *može napisati u obliku*

$$\begin{aligned} R(x) &= \left(\frac{A_{11}}{x-a_1}+\dots+\frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}\right)+\dots+\left(\frac{A_{p1}}{x-a_p}+\dots+\frac{A_{pk_p}}{(x-a_p)^{k_p}}\right)\\ &+\left(\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1}+\dots+\frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}}\right)+\dots\\ &+\left(\frac{B_{q1}x+C_{q1}}{x^2+b_qx+c_q}+\dots+\frac{B_{ql_q}x+C_{ql_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{l_q}}\right)\end{aligned}$$

$\frac{A}{(x-a)^k}$ i $\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^l}$, $b^2-4c<0$, se nazivaju prosti ili parcijalni razlomci.

Biće rađeni na vežbama:

- Integrali prostih razlomaka
- Integrali nekih iracionalnih funkcija
  - $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ (tri Ojlerove smene),
  - $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,\ a \neq 0,$
  - $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}},\ n \in \mathbb{N},\ a \neq 0,$
  - $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{px+q}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{px+q}\right)^{r_k}\right) dx,\ aq - bp \neq 0,\ r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{Q},$
  - $\int x^m(a+bx^n)^p dx,\ m, n, p \in \mathbb{Q},\ n, p \neq 0,\ a, b \in \mathbb{R},\ a, b \neq 0,$
- Integrali trigonometrijskih funkcija
  - $\int R(\sin x, \cos x)dx,$
  - $\int \sin^m x \cos^n x dx,$
  - $\int \sin mx \sin nx dx, \quad \int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \cos mx \cos nx dx,$
- Integrali nekih eksponencijalnih funkcija
  - $\int R(e^x)dx,$
  - $\int (P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x)dx$

Pojam određenog integrala

Posmatramo $[a, b] \subset \mathbb{R}$

- Podela intervala: $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \; a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
- skup svih podela je $P^*[a, b]$
- $P' \subset P \Rightarrow P$ je finija od P', $\quad P'$ je grublja od P
- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$ dužina intervala $[x_{i-1}, x_i]$
- parametar podele P je $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i = \lambda(P)$
- $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \; \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, skup izabranih tačaka $\xi \in \mathbb{R}^n$ podele P je

$$\xi(P) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n\}$$

- podela intervala sa izabranom tačkom (P, ξ)
- $\mathsf{P} = \mathsf{P}[a, b]$ skup svih takvih podela

Definicija

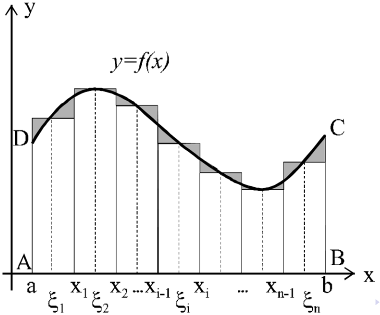
Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ i neka je (P,ξ) podela sa izabranom tačkom intervala $[a,b]$. Zbir

$$I(f,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

se naziva integralna ili Rimanova suma funkcije $f(x)$ za datu podelu (P,ξ).

MOTIVACIJA 1:

Površina krivolinijskog trapeza je približno jednaka integralnoj sumi:



MOTIVACIJA 2: Na pravolinijskom putu AB deluje promenljiva sila $\vec{F}$ na materijalnu tačku. Zavisnost intenziteta sile od puta je $F = F(s)$. Uočimo podelu $P = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$ sa izabranom tačkom ξ intervala, tj. puta $[a, b]$ (a i b su koordinate tačaka A i B respektivno). Rad sile $\vec{F}$ na intervalu $[s_{i-1}, s_i]$ je približno $\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta s_i, \Delta s_i = s_i - s_{i-1}$. Dakle, rad sile intenziteta F konstantnog pravca na pravolinijskom putu približno je jednak integralnoj sumi.

Definicija

Broj I je limes (granična vrednost) integralnih suma $I(f, P, \xi)$ funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ za $\lambda(P) \to 0$, pišemo

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} I(f, P, \xi) = I,$$

ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takvo da za svaku podelu P i svaku izabranu tačku $\xi \in \xi(P)$, kada je $\lambda(P) < \delta$, važi nejednakost

$$|I(f, P, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Ako postoji

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} I(f, P, \xi) = I$$

tada

- $f(x)$ je integrabilna u Rimanovom smislu nad $[a, b]$
- I se naziva Rimanov ili određeni integral funkcije $f(x)$ nad $[a, b]$,

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

- a je donja granica integrala, b je gornja granica integrala
- $f(x)$ je podintegralna funkcija
- $f(x)\, dx$ je podintegralni izraz
- x je integraciona promenljiva
- R$[a, b]$ skup svih integrabilnih funkcija nad [a,b] (u Rimanovom smislu)

Primer

Pokazati da je $I = \int_a^b c dx = c(b-a)$.

Posmatrajmo funkciju $f(x) = c$, $x \in [a, b]$. Neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $\xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ proizvoljna podela sa izabranom tačkom. Tada je $f(\xi_i) = c$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pa je

$$I(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c(b-a).$$

Dakle,

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} I(f, P, \xi) = c(b-a),$$

tj.

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$

Primer

Pokazati da za Dirihleovu funkciju $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ *ne postoji određeni integral ni nad jednim zatvorenim intervalom* $[a, b]$.

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ proizvoljni, $a < b$. Uzmimo proizvoljnu podelu $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ intervala $[a, b]$ i dve izabrane tačke

$$\xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\} \quad \text{i} \quad \xi' = \{\xi'_0, \xi'_1, \dots, \xi'_n\},$$

takve da je $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ iracionalan, a $\xi'_i \in [x_{i-1}, x_i]$ racionalan broj, $i = 1, 2, \dots, n$. Tada

$$I(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0, \quad I(f, P, \xi') = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a,$$

pa $\lim\limits_{\lambda(P) \to 0} I(f, P, \xi)$ ne postoji.

Teorema

Potreban uslov da funkcija $f(x)$ bude integrabilna nad intervalom $[a, b]$ je da funkcija $f(x)$ bude ograničena nad $[a, b]$.

Dokaz. Neka je funkcija $f(x)$ definisana i neograničena nad intervalom $[a, b]$. Za proizvoljnu podelu $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ postoji interval

$$[x_{k-1}, x_k], \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

takav da funkcija $f(x)$ na njemu nije ograničena.

Na intervalima

$$[x_{i-1}, x_i], \quad i \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$$

proizvoljno izaberimo tačke ξ_i i sa I^k označimo zbir

$$I^k = \sum_{i \neq k} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Neka je M proizvoljno velik broj. Zbog neograničenosti funkcije $f(x)$ nad intervalom $[x_{k-1}, x_k]$, postoji tačka $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, takva da je

$$|f(\xi_k)| \geq \frac{|I^k| + M}{\Delta x_k}, \quad \text{odakle sledi da je} \quad |f(\xi_k)|\Delta x_k \geq |I^k| + M.$$

Za integralnu sumu sada važi

$$|I(f, P, \xi)| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i\right| = \left|I^k + f(\xi_k)\Delta x_k\right| \geq |f(\xi_k)|\,\Delta x_k - |I^k| \geq M.$$

Izaberimo niz $\{M_k\}$ takav da $M_k \to \infty$, kada $k \to \infty$. Za datu podelu P i za svako $k \in \mathbb{N}$ postoji ξ tako da je $I(f, P, \xi) \geq M_k$, pa

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} I(f, P, \xi)$$

ne postoji i $f(x)$ nije integrabilna. $\square$

Neka je $f(x)$ definisana i ograničena funkcija nad $[a, b]$ i $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ njegova podela. Uvedimo oznake

- $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$
- $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$
- $s = s(f, P) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ donja Darbuova suma za $f(x)$ nad $[a, b]$
- $S = S(f, P) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ gornja Darbuova suma za $f(x)$ nad $[a, b]$

Teorema

Za integralnu i Darbuove sume ograničene funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a, b]$ važi

- $m(b-a) \leq s(f, P) \leq I(f, P, \xi) \leq S(f, P) \leq M(b-a)$
- $\inf\limits_{\xi \in \xi(P)} I(f, P, \xi) = s(f, P); \quad \sup\limits_{\xi \in \xi(P)} I(f, P, \xi) = S(f, P).$

Takođe važe tvrđenja:

1) $P \subset P' \Rightarrow s(f,P) \leq s(f,P') \leq S(f,P') \leq S(f,P)$

Dokaz. Tvrđenje je dovoljno pokazati u slučaju da se P i P' razlikuju za jednu tačku. Neka je $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ i $P' = P \cup \{x'\}$, $x_{k-1} < x' < x_k$. Neka je $s^k = \sum\limits_{i \neq k} m_i \Delta x_i$. Tada je

$$\begin{aligned} s(f,P) &= s^k + m_k(x_k - x_{k-1}) \\ s(f,P') &= s^k + m_k'(x' - x_{k-1}) + m_k''(x_k - x'), \end{aligned}$$

gde je

$$m_k' = \inf_{x \in [x_{k-1}, x']} f(x), \quad m_k'' = \inf_{x \in [x', x_k]} f(x).$$

Kako je $m_k = \min\{m_k', m_k''\}$, to je

$$\begin{aligned} m_k(x_k - x_{k-1}) &= m_k(x_k - x' + x' - x_{k-1}) \\ &= m_k(x_k - x') + m_k(x' - x_{k-1}) \\ &\leq m_k''(x_k - x') + m_k'(x' - x_{k-1}), \end{aligned}$$

odakle sledi $s(f,P) \leq s(f,P')$ (ostalo slično). $\square$

2) $s(f,P) \le S(f,P')$ *za proizvoljne podele* P, P'

Dokaz. Za proizvoljne podele P i P' intervala $[a,b]$ neka je $P'' = P \cup P'$. Tada je $P \subset P''$ i $P' \subset P''$ pa je

$$s(f,P) \le s(f,P'') \le S(f,P'') \le S(f,P').$$

□

3) *Postoje* $\sup\limits_{P \in \mathrm{P}*} s(f,P)$ *i* $\inf\limits_{P \in \mathrm{P}*} S(f,P)$.

Dokaz. Skup

$$\{s(f,P) : P \in P^*\}$$

je ograničen sa gornje strane, a skup

$$\{S(f,P) : P \in P^*\}$$

je ograničen sa donje strane, pa zbog prethodno pokazane nejednakosti $\sup\limits_{P \in \mathrm{P}*} s(f,P)$ i $\inf\limits_{P \in \mathrm{P}*} S(f,P)$ postoje. □

- $\sup\limits_{P \in \mathrm{P}^*} s(f,P) = I_*$ je donji Darbuov integral za $f(x)$ nad $[a,b]$

- $\inf\limits_{P \in \mathrm{P}^*} S(f,P) = I^*$ je gornji Darbuov integral za $f(x)$ nad $[a,b]$

- Za svaku podelu P intervala $[a,b]$ važi
$$m(b-a) \leq s(f,P) \leq I_* \leq I^* \leq S(f,P) \leq M(b-a).$$

- Ako je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ograničena nad zatvorenim intervalom $[a,b]$ tada je
$$I_* = \lim_{\lambda(P) \to 0} s(f,P) \leq I^* = \lim_{\lambda(P) \to 0} S(f,P).$$

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je integrabilna ako i samo ako važi $I_* = I^*$.

Teorema

Neka je funkcija $f(x)$ ograničena nad intervalom $[a,b]$. Funkcija $f(x)$ je integrabilna nad $[a,b]$ ako i samo ako

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall P \in \mathrm{P}^*)\ \lambda(\mathrm{P}) < \delta \Rightarrow \mathrm{S}(\mathrm{f},\mathrm{P}) - \mathrm{s}(\mathrm{f},\mathrm{P}) < \varepsilon.$$

Dokaz.($\Leftarrow$) Iz pretpostavke i niza nejednakosti $s(f,P) \leq I_* \leq I^* \leq S(f,P)$ dobijamo da se donji i gornji Darbuov integral funkcije $f(x)$ poklapaju: $I_* = I^*$. Označimo njihovu zajedničku vrednost sa I. Tada je

$$s(f,P) \leq I \leq S(f,P).$$

Sa druge strane, za proizvoljnu tačku ξ podele P važi

$$s(f,P) \leq I(f,P,\xi) \leq S(f,P).$$

Iz poslednje dve relacije i početne pretpostavke sledi da je $|I(f,P,\xi) - I| < \varepsilon$ ako je podela $P \in P^*[a,b]$ takva da je $\lambda(P) < \delta$, što znači da je funkcija $f(x)$ integrabilna i $I = \int\limits_a^b f(x)dx$. $\square$

Definicija

- *Ako je funkcija $f(x)$ definisana u tački a onda je*

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

- *Ako je $a < b$ i $\int_a^b f(x)dx$ postoji onda je*

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Integrabilnost nekih klasa funkcija

Teorema

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna nad $[a, b]$ ona je nad tim intervalom i integrabilna.

Dokaz. Iz neprekidnosti funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a, b]$ sledi njena uniformna neprekidnost, što znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da

$$x', x'' \in [a, b], |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Izaberimo proizvoljnu podelu $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ intervala $[a, b]$ za koju je $\lambda(P) < \delta$. Tada važi

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b - a}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

jer postoje tačke $\xi_i^1, \xi_i^2 \in [x_{i-1}, x_i]$ sa osobinom $f(\xi_i^2) = M_i$, $f(\xi_i^1) = m_i$, pa je $M_i - m_i = f(\xi_i^2) - f(\xi_i^1) < \frac{\varepsilon}{b-a}$. To znači da je

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon.$$

Još dve klase integrabilnih funkcija:

Teorema

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena nad intervalom $[a, b]$ i nad njim ima konačan broj prekida ona je nad tim intervalom i integrabilna.

Teorema

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona nad intervalom $[a, b]$ ona je nad tim intervalom i integrabilna.

Napomena

Ograničena funkcija može da ima i beskonačan broj prekida, a da bude integrabilna, jer važi

Teorema Lebega: *Ograničena funkcija* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *je integrabilna nad zatvorenim intervalom* $[a, b]$ *ako i samo ako je skup prekida date funkcije nad zatvorenim intervalom* $[a, b]$ *mere nula.*

Rimanova funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \mathrm{nzd(m,n)} = 1 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

neprekidna je za svako x iracionalan broj, a prekidna u svim racionalnim tačkama, mere nula, pa je integrabilna, na primer nad zatvorenim intervalom $[-1, 1]$.

Napomena

Posmatrajmo skup racionalnih tačaka iz zatvorenog intervala $[0,1]$ *poređan u niz* $A=\{a_n\}$ *i neka je* $a_1=0$. *Funkcija*

$$f(x)=\sum_{a_n<x}\frac{1}{n^2},\quad x\in[0,1]$$

je očigledno monotono rastuća, ograničena i naprekidna u svim iracionalnim tačkama datog intervala, a prekidna u svim racionalnim tačkama iz posmatranog intervala, te je time integrabilna nad posmatranim intervalom $[0,1]$.

Primer 17.1. Naći $\int_0^1 x\,dx$ po definiciji.

Rešenje. Podintegralna funkcija $f(x) = x$ je neprekidna, pa je integrabilna. Za podelu P intervala $[0,1]$ uzmimo **ekvidistantnu podelu** ($\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$) i izaberimo tačku $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, pri čemu je $\xi_i = \frac{i}{n}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Tada je

$$I(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2n^2},$$

pa je $\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}$. Δ

Teorema

1. *Ako je* $f(x) = 0$ *za svako* $x \in [a, b]$, *tada je* $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b 0dx = 0$.
2. *Ako postoji konačan skup različitih tačaka* $c_1, \ldots, c_k \in [a, b]$ *takav da je*
$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, b] \setminus \{c_1, \ldots, c_k\} \\ A_i, & x = c_i,\ i \in \{1, 2, \ldots k\},\ A_i \neq 0 \end{cases}$$
tada je $\int\limits_a^b g(x)\,dx = 0$.

Veza između određenog i neodređenog integrala

Njutn-Lajbnicova formula

Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$ i ako funkcija $f(x)$ ima primitivnu funkciju $F(x)$ nad intervalom $[a, b]$, tada je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Dokaz. Posmatrajmo realnu funkciju $F(x)$ nad intervalom $[a, b]$. Ona je neprekidna i ima izvod nad intervalom $[a, b]$. Uzmimo da je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ proizvoljna podela intervala $[a, b]$.
Primenjujući Lagranžovu teoremu (teoremu o srednjoj vrednosti) na svakom podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dobijamo

$$\begin{array}{lllll}
F(x_1) - F(a) & = & F'(\xi_1)(x_1 - a) & = & f(\xi_1)\Delta x_1, \quad \xi_1 \in (a, x_1) \\
F(x_2) - F(x_1) & = & F'(\xi_2)(x_2 - x_1) & = & f(\xi_2)\Delta x_2, \quad \xi_2 \in (x_1, x_2) \\
 & \vdots & & & \\
F(b) - F(x_{n-1}) & = & F'(\xi_n)(b - x_{n-1}) & = & f(\xi_n)\Delta x_n, \quad \xi_n \in (x_{n-1}, b)
\end{array}$$

Ako saberemo gornje jednakosti, dobijamo

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

čija je desna strana jedna integralna suma $I(f, P, \xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ funkcije $f(x)$.
Kako je funkcija $f(x)$ integrabilna nad intervalom $[a, b]$ to je

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \lim_{\lambda(P)\to 0} I(f, P, \xi) \\
&= \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \\
&= \lim_{\lambda(P)\to 0} (F(b) - F(a)) \\
&= F(b) - F(a).
\end{aligned}$$

Primer

Odrediti $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

Posmatrajmo niz s opštim članom $a_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$. Kako je

$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}$ integralna suma za funkciju $f(x)=\frac{1}{1+x}$ nad zatvorenim intervalom $[0,1]$, ako posmatramo ekvidistantnu podelu $P=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n-1}{n},1\}$ zatvorenog intervala $[0,1]$, $\Delta x_i=\frac{1}{n}$, $\xi_i=\frac{i}{n}$, to je

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2.$$

Primer

Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

nije integrabilna nad zatvorenim intervalom $[-1, 1]$, *a nad tim intervalom jedna njena primitivna funkcija je na primer funkcija*

$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

Neke osobine određenog integrala

- Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$, tj. $f \in \mathrm{R}[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, tada je ona integrabilna i nad svakim zatvorenim podintervalom $[c, d]$ intervala $[a, b]$.
- (linearnost integrala) Ako $f, g \in \mathrm{R}[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ tada i $f \pm g \in \mathrm{R}[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, $\alpha f \in \mathrm{R}[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ i važi
  - $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$
  - $\int\limits_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx.$
- Ako je $f \in \mathrm{R}[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ i ako se funkcija $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ razlikuje u konačnom broju tačaka od funkcije $f(x)$ tada je i $g \in \mathrm{R}[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ i važi

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx.$$

- Ako $f, g \in \mathrm{R[a,b]}$ tada $f \cdot g \in \mathrm{R[a,b]}$, $|\mathrm{f}| \in \mathrm{R[a,b]}$, $\dfrac{1}{\mathrm{f}} \in \mathrm{R[a,b]}$ uz uslov $|f(x)| \geq \alpha > 0$ za $x \in [a, b]$.

- (aditivnost integrala) Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ krajevi tri zatvorena intervala. Ako je f integrabilna na najvećem od ovih intervala onda je ona integrabilna i na ostala dva. Pri tom važi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- (monotonost i procena integrala) Ako je $f \in \mathrm{R[a,b]}$, $a < b$ i $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$ tada je i

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

- Ako je $f(x) \leq g(x),\ x \in [a,b],\ a < b,\ f, g \in \mathrm{R[a,b]}$ onda je

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx.$$

- Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna i nenegativna (nepozitivna) funkcija. Ako postoji tačka $c \in [a,b]$ takva da je $f(c) > 0$ $(f(c) < 0)$ u kojoj je funkcija neprekidna ako $c \in (a,b)$, a neprekidna sa leve (desne) strane ako je $c = b$ $(c = a)$, onda je

$$\int\limits_a^b f(x)dx > 0 \quad \left(\int_a^b f(x)dx < 0\right).$$

- Ako je $f \in \mathrm{R[a,b]},\ \mathrm{a} < \mathrm{b}$ onda važi nejednakost

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Primer

Naći određeni integral funkcije $f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0 \\ 5 & , \quad x > 0 \end{cases}$ *nad* $[-1, 2]$.

Funkcija $f(x)$ je neprekidna u svim tačkama intervala $[-1, 2]$ osim u 0 gde ima prekid prve vrste, pa je ona integrabilna nad $[-1, 2]$ ali nema primitivnu funkciju pa se ne može primeniti Njutn-Lajbnicova formula.

Kako je $\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx = \int\limits_{-1}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{2} f(x)dx$ i

$\int\limits_{-1}^{0} f(x)dx = \int\limits_{-1}^{0} xdx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}$, $\int\limits_{0}^{2} f(x)dx = \int\limits_{0}^{2} 5dx = 5x \Big|_{0}^{2} = 10$

($f(x) = x$ i $g(x) = 5$ se razlikuju nad intervalom $[0, 2]$ samo u jednoj tački jer je $f(0) = 0$, $g(0) = 5$, pa imaju isti određeni integral), to je

$$\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx = -\frac{1}{2} + 10 = \frac{19}{2}.$$

Teorema o srednjoj vrednosti:

Teorema

Neka $f, g \in \mathrm{R}[a,b]$, $a < b$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ *i* $g(x) \geq 0 (g(x) \leq 0)$, *za* $x \in [a,b]$. *Tada postoji* $m \leq \eta \leq M$, *takvo da je*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \eta \int_a^b g(x)dx.$$

Ako je još i $f \in C^0[a,b]$ ($C^0[a,b]$ *je skup svih neprekidnih funkcija nad intervalom* $[a,b]$), *onda postoji* $c \in [a,b]$ *takvo da je*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Dokaz. Bez ograničenja opštosti može se pretpostaviti da je funkcija $g(x)$ nenegativna. Tada iz $m \leq f(x) \leq M$ sledi

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \quad x \in [a, b].$$

Integracijom se dobija

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx, \quad x \in [a, b].$$

Ako je $\int_a^b g(x)dx = 0$, onda je $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, pa jednakost važi.

Ako je $\int_a^b g(x)dx > 0$, onda je $m \leq \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$, pa se može uzeti

$$\eta = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

□

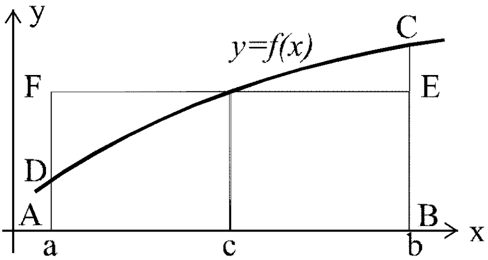
Posledica

Neka $f \in \mathrm{R}[a,b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. *Tada postoji* $m \le \eta \le M$, *takvo da je*

$$\int_a^b f(x)dx = \eta(b-a).$$

Ako je $f \in C^0[a,b]$ *onda postoji* $c \in [a,b]$ *takvo da je*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)(b-a).$$



Određeni integral kao funkcija granice

$f(x)$ je integrabilna nad $[A, B]$, $a \in [A, B]$ proizvoljna tačka. Za $x \in [A, B]$:

- $I(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ određeni integral sa promenljivom gornjom granicom
- $I_1(x) = \int\limits_x^a f(t)dt$ određeni integral sa promenljivom donjom granicom

Teorema

Neka $f \in \mathrm{R}[A, B]$ *i* $I(x) = \int\limits_a^x f(t)dt,\ x \in [A, B],\ a \in [A, B]$. *Tada važi:*

1) $I(x)$ *je neprekidna funkcija nad* $[A, B]$
2) *Ako je funkcija* $f(x)$ *neprekidna u tački* $x \in (A, B]$ $(x \in [A, B))$ *sa leve (desne) strane, tada funkcija* $I(x)$ *ima levi (desni) izvod u tački* x. *Pri tome važi*

$$I'_-(x) = f(x), \quad (I'_+(x) = f(x)).$$

Dokaz. Dokazaćemo 2), za slučaj kad je funkcija $f(x)$ neprekidna nad intervalom $[A,B]$ i $x \in (A,B)$. Kako je

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{I(x+\Delta x) - I(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x},$$

to na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti za integrale, zbog neprekidnosti funkcije $f(x)$ sledi da postoji tačka $\xi \in [x, x+\Delta x] \subset [A,B]$, za $\Delta x > 0$, odnosno $\xi \in [x+\Delta x, x] \subset [A,B]$, za $\Delta x < 0$, tako da je

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi) \int\limits_{x}^{x+\Delta x} dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x f(\xi)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x).$$

$\square$

Za funkciju $I_1(x)$ pod istim uslovima važi

- *$I_1(x)$ je neprekidna nad intervalom $[A, B]$,*
- $I_{1-}{}'(x) = (-I_-(x))' = -I'_-(x) = -f(x), x \in (A, B]$,
  $I_{1+}{}'(x) = (-I_+(x))' = -I' + -(x) = -f(x), x \in [A, B)$.

Posledica

Ako je $f(x)$ neprekidna funkcija nad $[A, B]$ tada funkcija $I(x)$ ima izvod nad intervalom $[A, B]$, pri čemu važi $I'(x) = f(x)$, $x \in [A, B]$.

Posledica

Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna nad intervalom I, tada je funkcija $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, pri čemu je a proizvoljna tačka iz intervala I, primitivna funkcija funkcije $f(x)$ nad I.

Primer

Naći $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int\limits_1^x \frac{2+\ln t}{3+\ln t}\,dt}{x}$.

Kako je funkcija $f(x)=\dfrac{2+\ln x}{3+\ln x}$ neprekidna za $x\geq 1$, to postoji tačka $\xi\in[1,x]$ tako da je

$$\int\limits_1^x \frac{2+\ln t}{3+\ln t}dt=(x-1)\frac{2+\ln\xi}{3+\ln\xi}.$$

Kako je $f(x)=\dfrac{2+\ln x}{3+\ln x}$ monotono rastuća i $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\ln x}{3+\ln x}=1$, $f(1)=\dfrac{2}{3}$, sledi da $f(x)=\dfrac{2+\ln x}{3+\ln x}\in\left[\dfrac{2}{3},1\right]$, za $x\geq 1$.

Sledi da

$$\int_1^x \frac{2+\ln t}{3+\ln t}\,dt = (x-1)\frac{2+\ln \xi}{3+\ln \xi} \to \infty, \quad x \to \infty.$$

Primenom Lopitalovog pravila dobijamo da je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_1^x \frac{2+\ln t}{3+\ln t}\,dt}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2+\ln x}{3+\ln x}}{1} = 1.$$

$\square$

Parcijalna integracija i smena promenljive

Teorema

Neka funkcije $u(x)$, $v(x)$ imaju neprekidne izvode nad $[a, b]$. Tada važi

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Teorema

Neka je funkcija $f : [A, B] \to \mathbb{R}$ neprekidna, a funkcija $\varphi : [\alpha_0, \beta_0] \to [A, B]$ ima neprekidan izvod. Ako je $\alpha \in [\alpha_0, \beta_0]$, $\beta \in [\alpha_0, \beta_0]$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, onda važi jednakost

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Dokaz. neka je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$, $x \in [A, B]$. Za složenu funkciju $(F \circ \varphi)(t) = F(\varphi(t))$, $t \in [\alpha_0, \beta_0]$ imamo

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'_\varphi \cdot \varphi'_t = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Dakle, za $\alpha_0 \leq t \leq \beta_0$ funkcija $F(\varphi(t))$ je primitivna funkcija funkcije $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ pa je prema Njutn-Lajbnicovoj formuli

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Sa druge strane, iz $F'(x) = f(x)$ sledi

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

□

Primena određenog integrala

POVRŠINA RAVNIH FIGURA

- pravougle koordinate: $y = f(x)$ je neprekidna i nenegativna za $x \in [a, b]$

$$P = \int_a^b f(x)\, dx$$

- parametarski oblik: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$
  - $\varphi(t)$ ima neprekidan izvod nad $[\alpha, \beta]$
  - $\varphi(t)$ monotono rastuća nad $[\alpha, \beta]$
  - $\psi(t)$ neprekidna nad $[\alpha, \beta]$
  - $\psi(t) \geq 0,\ t \in [\alpha, \beta]$

$$P = \int_\alpha^\beta \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt$$

- polarne koordinate: $\rho = \rho(\varphi)$ neprekidna, $\alpha \leq \varphi \leq \beta,\ |\beta - \alpha| \leq 2\pi$

$$P = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\, d\varphi$$

DUŽINA LUKA RAVNE KRIVE

- pravougle koordinate: $y = f(x)$, ima neprekidan izvod nad $[a, b]$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

- parametarski oblik: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$
  - $\varphi(t)$, $\psi(t)$ imaju neprekidan izvod nad $[\alpha, \beta]$
  - $\varphi'(t) > 0$ nad $[\alpha, \beta]$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\psi'^2(t) + \varphi'^2(t)}\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$$

- polarne koordinate: $\rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$, ρ ima neprekidan prvi izvod nad $[\alpha, \beta]$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi$$

ZAPREMINA OBRTNIH TELA

- pravougle koordinate: $y = f(x)$ neprekidna nad $[a, b]$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

- parametarski oblik: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$
  - $\varphi(t)$ ima neprekidan izvod nad $[\alpha, \beta]$
  - $\varphi(t)$ monotono rastuća nad $[\alpha, \beta]$
  - $\psi(t)$ neprekidna nad $[\alpha, \beta]$
  - $\psi(t) \geq 0,\ t \in [\alpha, \beta]$

$$V = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)\, dt$$

- polarne koordinate: $\rho = \rho(\varphi) \geq 0,\ \alpha \leq \varphi \leq \beta,\ \rho$ ima neprekidan prvi izvod nad $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi$$

POVRŠINA OMOTAČA OBRTNIH TELA

- pravougle koordinate: $y = f(x) \geq 0$ i ima neprekidan prvi izvod nad $[a, b]$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

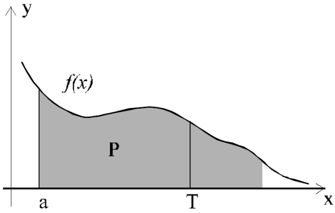
- parametarski oblik: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$
  - $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ imaju neprekidan prvi izvod nad $[\alpha, \beta]$
  - $\varphi'(t) > 0$ nad $[\alpha, \beta]$
  - $\psi(t) \geq 0,\ t \in [\alpha, \beta]$

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\psi'^2(t) + \varphi'^2(t)}\, dt$$

- polarne koordinate: $\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \leq \varphi \leq \beta \subset [0, \pi]$, ρ ima neprekidan prvi izvod nad $[\alpha, \beta]$

$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\sin\varphi d\varphi$$

MOTIVACIJA (geometrijska interpretacija)



$\int\limits_a^T f(x)dx$, $f(x) \geq 0$ predstavlja površinu ravnog lika ograničenog x-osom, pravama $x = a$, $x = T$ i lukom krive $y = f(x)$ nad intervalom $[a, T]$.
Prirodno bi bilo površinu lika ograničenog x-osom, pravom $x = a$ i lukom krive $y = f(x)$ nad intervalom $[a, \infty)$ definisati kao $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

Nesvojstveni integral I vrste

Definicija

Neka je funkcija $f(x)$ definisana nad $[a,\infty)$ i integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom $[a,T]\subset[a,\infty)$. Nesvojstveni integral funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a,\infty)$, u oznaci $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx$ je funkcija $F(T)$ definisana sa

$$F(T)=\int_a^T f(x)dx,\quad T\geq a.$$

Ako postoji $A=\lim\limits_{T\to\infty}F(T)=\lim\limits_{T\to\infty}\int_a^T f(x)dx$, u oznaci $\int_a^\infty f(x)dx$, tada nesvojstveni integral $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)\,dx$ konvergira ka broju A. Ako granična vrednost $\lim\limits_{T\to\infty}F(T)$ ne postoji, tada nesvojstveni integral $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)\,dx$ divergira.

Definicija

Neka je funkcija $f(x)$ definisana nad $(-\infty, a]$ i integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom $[T, a] \subset (-\infty, a]$. Nesvojstveni integral funkcije $f(x)$ nad intervalom $(-\infty, a]$, u oznaci $\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)dx$ je funkcija $F(T)$ definisana sa

$$F(T) = \int\limits_{T}^{a} f(x)dx, \quad T \leq a.$$

Ako postoji $B = \lim\limits_{T\to-\infty} F(T) = \lim\limits_{T\to-\infty} \int\limits_{T}^{a} f(x)$, u oznaci $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$, tada nesvojstveni integral $\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)dx$ konvergira ka broju B. Ako granična vrednost $\lim\limits_{T\to-\infty} F(T)$ ne postoji, tada nesvojstveni integral $\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)dx$ divergira.

Definicija

Neka je funkcija $f(x)$ definisana nad intervalom $(-\infty, \infty)$ i integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom $[M, N] \subset (-\infty, \infty)$. Nesvojstveni integral funkcije $f(x)$ nad intervalom $(-\infty, \infty)$, u oznaci $\int\limits_{(-\infty,\infty)} f(x)dx$, je uređen par $\left(\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)dx, \int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx\right)$ nesvojstvenih integrala $\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)dx$, $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx$, gde je a proizvoljan realan broj. Ako oba ova nesvojstvena integrala konvergiraju tada nesvojstveni integral $\int\limits_{(-\infty,\infty)} f(x)dx$ konvergira i pišemo $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$. Ukoliko bar jedan od njih divergira tada i nesvojstveni integral $\int\limits_{(-\infty,\infty)} f(x)dx$ divergira.

Nesvojstvene integrale $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ jednim imenom zovemo nesvojstveni integral prve vrste.

Primer

Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala $I_\alpha = \int\limits_{[1,\infty)} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Rešenje. Po definiciji treba posmatrati

$$\lim_{T\to\infty} \int\limits_1^T \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{T\to\infty} T^{1-\alpha} - 1\right), \quad \alpha \neq 1.$$

$$\begin{array}{llll}
1-\alpha < 0 & \Rightarrow \quad T^{1-\alpha} \to 0,\ T \to \infty & \Rightarrow & I_\alpha \text{ konvergira ka } \frac{1}{\alpha-1} \\
1-\alpha > 0 & \Rightarrow \quad T^{1-\alpha} \to \infty,\ T \to \infty & \Rightarrow & I_\alpha \text{ divergira} \\
\alpha = 1 & \Rightarrow \quad \int\limits_1^T \frac{dx}{x} = \ln T \to \infty,\ T \to \infty & \Rightarrow & I_\alpha \text{ divergira}
\end{array}$$

Dakle, I_α konvergira za $\alpha > 1$, a divergira za $\alpha \leq 1$.

- Ako postoji, granična vrednost

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} f(x)dx = V.P. \int_{(-\infty,\infty)} f(x)dx$$

naziva se glavna vrednost integrala.

- Ako nesvojstveni integral $\int_{(-\infty,\infty)} f(x)dx$ konvergira, tada postoji $V.P. \int_{(-\infty,\infty)} f(x)dx$ i važi jednakost

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = V.P. \int_{(-\infty,\infty)} f(x)dx.$$

- Može da postoji $V.P. \int_{(-\infty,\infty)} f(x)dx$, a da nesvojstveni integral $\int_{(-\infty,\infty)} f(x)dx$ divergira (sledeći primer).

Primer

Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala $I = \int\limits_{(-\infty,\infty)} \frac{2x}{1+x^2}\,dx$.

Rešenje.
$$I = \left(\int\limits_{(-\infty,a]} \frac{2x}{1+x^2}\,dx, \quad \int\limits_{[a,\infty)} \frac{2x}{1+x^2}\,dx \right) = (I_1, I_2).$$

Kako je

$$\lim_{T\to\infty} \int\limits_a^T \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{T\to\infty} \ln(1+T^2) - \ln(1+a^2) = \infty,$$

to I_2 divergira, pa I divergira. Za glavnu vrednost se dobija

$$\begin{aligned} V.P. \int\limits_{(-\infty,\infty)} \frac{2x}{1+x^2}\,dx &= \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-T}^{T} \frac{2x}{1+x^2}\,dx \\ &= \lim_{T\to\infty} (\ln(1+T^2) - \ln(1+T^2)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nesvojstveni integral II vrste

Definicija

Neka je $f(x)$ definisana nad konačnim intervalom $[a, b)$ i integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom $[a, b-\varepsilon] \subset [a, b)$, $\varepsilon > 0$. Nesvojstveni integral druge vrste funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a, b)$ u oznaci $\int\limits_{[a,b)} f(x)dx$ je funkcija $F(\varepsilon)$ definisana sa

$$F(\varepsilon) = \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad a < b-\varepsilon < b.$$

Ako postoji $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} F(\varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx = A$, tada nesvojstveni integral $\int\limits_{[a,b)} f(x)dx$ konvergira ka A. Piše se $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx = A$.

Ukoliko $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} F(\varepsilon)$ ne postoji, nesvojstveni integral $\int\limits_{[a,b)} f(x)dx$ divergira.

Primer

Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Rešenje.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\arcsin(1-\varepsilon) - 0) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

pa nesvojstveni integral $\int\limits_{[0,1)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ konvergira ka $\frac{\pi}{2}$.

Definicija

Neka je $f(x)$ definisana nad konačnim intervalom $(a, b]$ i integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom $[a+\varepsilon, b] \subset (a, b], \varepsilon > 0$.
Nesvojstveni integral druge vrste funkcije $f(x)$ nad intervalom $(a, b]$ u oznaci $\int\limits_{(a,b]} f(x)dx$ je funkcija $F(\varepsilon)$ definisana sa

$$F(\varepsilon) = \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \quad a < a+\varepsilon < b.$$

Ako postoji $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} F(\varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = B$, tada nesvojstveni integral

$\int\limits_{(a,b]} f(x)dx$ konvergira ka B. Piše se $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = B$.
Ukoliko $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} F(\varepsilon)$ ne postoji, nesvojstveni integral $\int\limits_{(a,b]} f(x)dx$ divergira.

Definicija

Neka je $f(x)$ definisana nad konačnim intervalom (a,b) i integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom $[m,M] \subset (a,b)$.
Nesvojstveni integral druge vrste funkcije $f(x)$ nad intervalom (a,b) u oznaci $\int\limits_{(a,b)} f(x)dx$ je uređen par $\left(\int\limits_{(a,c]} f(x)dx, \int\limits_{[c,b)} f(x)dx\right)$ nesvojstvenih integrala $\int\limits_{(a,c]} f(x)dx$ i $\int\limits_{[c,b)} f(x)dx$, gde je $c \in (a,b)$ proizvoljan realan broj. Ako svaki od nesvojstvenih integrala $\int\limits_{(a,c]} f(x)dx$ i $\int\limits_{[c,b)} f(x)dx$ konvergira, onda nesvojstveni integral $\int\limits_{(a,b)} f(x)dx$ konvergira i pišemo

$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, *a ukoliko bar jedan od njih divergira, nesvojstveni integral $\int\limits_{(a,b)} f(x)dx$ divergira.*

Definicija

Ako je $f(x)$ definisana u svim tačkama intervala (a,b) osim u tački $c \in (a,b)$ i ako su definisani nesvojstveni integrali $\int\limits_{(a,c)} f(x)dx$ i $\int\limits_{(c,b)} f(x)dx$ tada je nesvojstveni integral druge vrste funkcije $f(x)$ nad intervalom (a,b) u oznaci $\int\limits_{(a,b)} f(x)dx$ uređen par $\left(\int\limits_{(a,c)} f(x)dx, \int\limits_{(c,b)} f(x)dx\right)$ nesvojstvenih integrala $\int\limits_{(a,c)} f(x)dx$ i $\int\limits_{(c,b)} f(x)dx$. Ako oba nesvojstvena integrala $\int\limits_{(a,c)} f(x)dx$ i $\int\limits_{(c,b)} f(x)dx$ konvergiraju, onda nesvojstveni integral $\int\limits_{(a,b)} f(x)dx$ konvergira i pišemo $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, a ukoliko bar jedan od njih divergira, nesvojstveni integral $\int\limits_{(a,b)} f(x)dx$ divergira.

Definicija

Ako za nesvojstveni integral $\int\limits_{(a,b)} f(x)dx$ *postoji granična vrednost*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx = V.P. \int\limits_{(a,b)} f(x)\, dx$$

to je glavna vrednost nesvojstvenog integrala $\int\limits_{(a,b)} f(x)dx$.

- Slično se definiše i nesvojstveni integral $\int\limits_{(a,b)} f(x)dx$ kada funkcija $f(x)$ nije definisana u konačnom broju tačaka intervala (a,b).

Napomena

Pri definiciji $\int\limits_{[a,b)} f(x)dx$ *nismo ništa pretpostavili o ponašanju funkcije* $f(x)$ *u tački* b!

- ako $f(x) \to \pm\infty$, kad $x \to b^-$, nesvojstveni integral može da konvergira ili da divergira
- ako postoji $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = L$, nesvojstveni integral može samo da konvergira i to ka Rimanovom integralu $\int\limits_a^b f_1(x)dx$ funkcije

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in [a,b) \\ L & , \quad x = b \end{cases} ,$$

pa važi jednakost $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx$.

Primer

Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala $I_\beta = \int\limits_{(0,1]} \frac{dx}{x^\beta}$.

Rešenje. Za $\beta > 0$, $f(x) = \frac{1}{x^\beta} \to \infty$, $x \to 0^+$. Po definiciji je

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\beta} = \frac{1}{1-\beta}(1 - \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-\beta+1}).$$

$$\begin{array}{llll}
-\beta+1>0 & \Rightarrow \quad \varepsilon^{-\beta+1} \to 0, \varepsilon \to 0 & \Rightarrow & I_\beta \text{ konvergira ka } \frac{1}{1-\beta} \\
-\beta+1<0 & \Rightarrow \quad \varepsilon^{-\beta+1} \to \infty, \varepsilon \to 0 & \Rightarrow & I_\beta \text{ divergira} \\
\beta = 1 & \Rightarrow \quad \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\ln \varepsilon \to \infty, \varepsilon \to 0 & \Rightarrow & I_\beta \text{ divergira}
\end{array}$$

Dakle, I_β konvergira za $\beta < 1$, a divergira za $\beta \geq 1$.

Nesvojstveni integral III vrste

Definicija

Neka je funkcija $f(x)$ integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom $[a+\varepsilon, T]$, $\varepsilon > 0$, $T > 0$, $a+\varepsilon < T < \infty$. Po definiciji je

$$\int\limits_{(a,\infty)} f(x)dx = \left(\int\limits_{(a,c]} f(x)dx, \int\limits_{[c,\infty)} f(x)dx \right), c \in (a,\infty)$$ *nesvojstveni integral treće vrste funkcije $f(x)$ nad intervalom (a,b).*

Ako oba nesvojstvena integrala $\int\limits_{(a,c]} f(x)dx$ i $\int\limits_{[c,\infty)} f(x)dx$ (druge i prve vrste, respektivno) konvergiraju, onda nesvojstveni integral $\int\limits_{(a,\infty)} f(x)dx$ konvergira i pišemo $\int\limits_a^\infty f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^\infty f(x)dx$.

- Slično se definiše ostali slučajevi nesvojstvenog integrala treće vrste.

Osnovne osobine nesvojstvenog integrala

Linearnost nesvojstvenog integrala:

Teorema

Ako $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx$ *i* $\int\limits_{[a,\infty)} g(x)dx$ *konvergiraju tada za svako* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *važi*

$$\int\limits_a^\infty (\alpha f(x) \pm \beta g(x))\ dx = \alpha \int\limits_a^\infty f(x)dx \pm \beta \int\limits_a^\infty g(x)dx$$

Parcijalna integracija u nesvojstvenom integralu:

Teorema

Pretpostavimo da $\int\limits_{[a,\infty)} u(x)v'(x)dx$ *i* $\int\limits_{[a,\infty)} v(x)u'(x)dx$ *konvergiraju.*

Tada važi:

$$\int\limits_a^\infty u(x)v'(x)dx = \lim_{T\to\infty} u(T)v(T) - u(a)v(a) - \int\limits_a^\infty v(x)u'(x)dx.$$

Smena promenljive u nesvojstvenom integralu:

Teorema

Neka funkcija $t = \varphi(x)$ *ima neprekidan prvi izvod različit od nule nad* $[a, \infty)$ *i neka nesvojstveni integral* $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx$ *konvergira. Tada važi*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_A^{B} f(\phi(t))\phi'(t)dt,$$

$$A = \varphi(a), \quad B = \lim_{x\to\infty} \varphi(x), \quad \phi(t) = \varphi^{-1}(x)$$

Kriterijumi konvergencije nesvojstvenog integrala

Košijev kriterijum

Nesvojstveni integral $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx$ *konvergira ako i samo ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji realan broj* $T_0 > a$ *takav da za svako* T, T' *takve da je* $T' > T > T_0$ *važi*

$$\left|\int_{T}^{T'} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Navešćemo još neke od kriterijuma konvergencije i to samo za slučaj kad je podintegralna funkcija $f(x)$ stalnog znaka za $x \geq x_0$.

Uporedni kriterijum

Neka je $0 \leq f(x) \leq Mg(x)$ *za* $x \geq a, M > 0$.
Ako $\int\limits_{[a,\infty)} g(x)dx$ *konvergira, onda konvergira i integral* $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx$ *i važi da je*

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx \leq M \int\limits_a^{\infty} g(x)dx.$$

Obrnuto, ako je $0 \leq mg(x) \leq f(x)$, *za* $x \geq a$, $m > 0$ *i integral* $\int\limits_{[a,\infty)} g(x)dx$ *divergira tada divergira i* $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx$.

Pogodnije za upotrebu:

Teorema

Neko je $f(x) > 0$ *i* $g(x) > 0$ *i* $f(x) \approx g(x)$, *kada* $x \to \infty$, *tj.* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
Tada nesvojstveni integrali $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx$ *i* $\int\limits_{[a,\infty)} g(x)dx$ *istovremeno konvergiraju ili divergiraju.*

Primer

Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala $\int\limits_{[1,\infty)} \frac{x^5+x^3+8x^2}{x^6+2x+1}dx$.

Rešenje. $\frac{x^5+x^3+8x^2}{x^6+2x+1} \approx \frac{1}{x}$, $x \to \infty$, a kako $\int\limits_{[1,\infty)} \frac{1}{x}dx$ divergira, to i $\int\limits_{[1,\infty)} \frac{x^5+x^3+8x^2}{x^6+2x+1}dx$ divergira.

Neke funkcije definisane nesvojstvenim integralom

Ojlerova **gama funkcija**:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

definisana je za one $x \in \mathbb{R}$ za koje nesvojstveni integral $\int_{(0,\infty)} e^{-t} t^{x-1} dt$ konvergira, odnosno za $x > 0$.

Funkcionalna jednačina za gama funkciju:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0.$$

pokazuje smisao uvođenja gama funkcije - proširuje $n!$ na skup pozitivnih realnih brojeva; ako stavimo redom $x = n, n-1, \ldots, 2, 1$ i imamo u vidu da je $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$, dobija se $\Gamma(n+1) = n!$.

Beta funkcija:

$$\mathbf{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

definisana je za one vrednosti $a, b \in \mathbb{R}$ za koje nesvojstveni integral $\int\limits_{(0,1)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ konvergira, odnosno za $a > 0$ i $b > 0$.

Veza beta i gama funkcije:

$$\mathbf{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Apsolutna konvergencija nesvojstvenog integrala

Definicija

Nesvojstveni integral prve vrste $\int_{[a,\infty)} f(x)dx$ *konvergira apsolutno ako* $\int_{[a,\infty)} |f(x)|dx$ *konvergira. Nesvojstveni integral koji je konvergentan, ali ne apsolutno konvergentan konvergira uslovno.*

- definicija je data za nesvojstveni integral prve vrste, slično se može uraditi za nesvojstveni integral druge i treće vrste

Teorema

Svaki apsolutno konvergentan integral je i konvergentan (u običnom smislu). Obrnuto ne mora da važi.

Opšti pojmovi, definicije

- Diferencijalna jednačina - jednačina koja sadrži bar jedan izvod nepoznate funkcije jedne ili više promenljivih.
- Obična diferencijalna jednačina - nepoznata funkcija je funkcija jedne promenljive, parcijalna diferencijalna jednačina - nepoznata funkcija je funkcija više promenljivih.
- Red diferencijalne jednačine je red najvišeg izvoda nepoznate funkcije koji se javlja.
- Sistem (običnih ili parcijalnih) diferencijalnih jednačina je sistem jednačina kod kog svaka jednačina sadrži bar jedan izvod reda $n \in \mathbb{N}$ jedne od nepoznatih funkcija jedne ili više promenljivih, npr. $x' = 2x - 3xy, y' = -2x + 5xy, x = x(t), y = y(t)$.

  Ako je broj nepoznatih funkcija jednak broju jednačina sistema, sistem je određen.

- Jednačina
$$tx'(t) + ty''(t) = t^2 - 1$$
može se smatrati neodređenim sistemom $(n = 2, m = 1)$.
- Opšti oblik jednačine n-tog reda:
$$G(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad n \geq 0.$$
- Normalni oblik jednačine n-tog reda:
$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$
- Funkcija $y = f(x)$, definisana i n puta diferencijabilna u intervalu (a, b) je rešenje jednačine n-tog reda u opštem, tj. normalnom obliku, ako je za svako $x \in (a, b)$
$$G(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0,$$
odnosno
$$f^{(n)} = F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)).$$

- Rešenje je u implicitnom obliku ako je dato vezom $g(x,y)=0$, npr. $x^2+y^2=r^2$ je implicitno rešenje jednačine $x+yy'=0$.
- Početni (Košijev) problem - Pronaći rešenje jednačine

$$G(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$$

koje zadovoljava početni uslov

$$y(x_0)=\alpha_0,\quad y'(x_0)=\alpha_1,\quad \dots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=\alpha_{n-1},$$

pri čemu je x_0 proizvoljna tačka posmatranog intervala, $\alpha_i\in\mathbb{R}$ su proizvoljni brojevi, $i=0,\dots,n-1$.
- Granični problem - Problem drugog reda: naći rešenje jednačine $y=y(x)$ jednačine

$$y''=F(x,y,y')$$

nad intervalom $[a,b]$ koje zadovoljava granični uslov

$$y(a)=A,\quad y(b)=B.$$

- $$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, y(\pi) = -1$$
  je granični problem koji ima beskonačno mnogo rešenja.

- $$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, y(\pi) = 2$$
  je granični problem koji nema rešenje.

- $$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
  je granični problem koji ima jedinstveno rešenje.

Modeli:

izvod $\frac{dy}{dx}$ predstavlja veličinu promene funkcije $y(x)$ u zavisnosti od x, a sve što se u prirodi dešava je promena

- $y' = ky$, $y = y(x)$, k-proizvoljna konstanta - Maltusov zakon rasta populacije
- $y'' - 2xy' + 2py = x^2$, $y = y(x)$, p-proizvoljna konstanta - Ermitova jednačina čija su rešenja talasne funkcije kvantne mehanike
- $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u = (x, t)$ - jednodimenzionalna jednačina provođenja toplote
- $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$ - jednačina matematičkog klatna (L je dužina klatna, g je gravitaciona konstanta, θ je uglovno udaljenje od ravnotežnog položaja)

- $N(t)$-broj jedinki posmatrane populacije u trenutku t; ako smatramo da je veličina promene populacije srazmerna broju jedinki dobijamo matematički model rasta populacije:

$$N'(t) = kN(t), \quad k = const.$$

Tada je $N(t)$ rešenje početnog problema

$$N'(t) = kN(t), \quad N(t_0) = N_0 :$$

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} = kN \quad &\Rightarrow \quad \frac{dN}{N} = kdt \Rightarrow \int \frac{dN}{N} = \int kdt \Rightarrow \ln N(t) = kt + c \\ &\Rightarrow \quad N(t) = e^{kt+c} \Rightarrow N(t) = c_1 e^{kt} \end{aligned}$$

$t = t_0 \Rightarrow N(t_0) = c_1 e^{kt_0}$, tj. $c_1 = N_0 e^{-kt_0}$,
pa je rešenje posmatranog početnog problema

$$N(t) = N_0 e^{k(t-t_0)}.$$

Ukoliko matematički model pojave zadovoljava osobine:

- postoji rešenje početnog problema,
- rešenje početnog problema je jedinstveno,
- rešenje početnog problema neprekidno zavisi od početnih uslova

kaže se da je problem korektno postavljen u smislu Adamara.

- Kvalitativna analiza - ne samo nalaženje rešenja, već i proučavanje njegovih osobina na osnovu posmatrane jednačine
- ključna tačka postupka rešavanja bila je integracija, odatle se termin integrala diferencijalne jednačine koristi za njeno rešenje

Diferencijalne jednačine prvog reda

- Opšti oblik
$$G(x, y, y') = 0 \tag{5}$$
- Normalni oblik
$$y' = F(x, y) \tag{6}$$
- x je promenljiva, $y = y(x)$ je nepoznata funkcija, y' je izvod po promenljivoj, F, G poznate funkcije.
- $y = f(x)$, definisana i diferencijabilna nad (a, b) je rešenje jednačine (5) odnosno (6) ako za svako $x \in (a, b)$ važi da je
$$G(x, f(x), f'(x)) = 0,$$
odnosno
$$f'(x) = F(x, f(x)).$$

Teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja

Neka je $F(x,y)$ *neprekidna u zatvorenoj oblasti* $G : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \alpha \leq y \leq \beta \end{cases}$ *i neka postoji* $K > 0$ *tako da u oblasti* G *važi*

$$|F(x,y_2) - F(x,y_1)| \leq K\, |y_2 - y_1| \text{ (Lipšicov uslov).}$$

Tada postoji jedinstveno rešenje početnog problema

$$y' = F(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (x_0,y_0) \in G,$$

koje je definisano nad intervalom $[a',b'] \subset [a,b]$. *Rešenje je dato sa*

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x), \text{ gde je } \{y_n(x)\} \text{ niz sukcesivnih aproksimacija,}$$

definisan rekurzivno sa

$$y_0(x) = y_0, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y_{n-1}(t)dt), n = 1,2,\dots$$

$a' = \max\left\{a, x_0 - \frac{\beta - y_0}{M}, x_0 - \frac{y_0-\alpha}{M}\right\}$, $b' = \min\left\{b, x_0 + \frac{\beta - y_0}{M}, x_0 + \frac{y_0-\alpha}{M}\right\}$,
$M = \sup\limits_{(x,y)\in G} |f(x,y)| > 0$

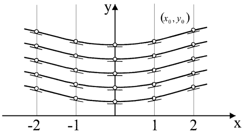
- dovoljan uslov za konvergenciju niza je neprekidnost i Lipšicov uslov
- neprekidnost i jedinstvenost rešenja ne garantuju konvergenciju niza sukcesivnih aproksimacija
- ako niz konvergira ka nekom rešenju, ono ne mora biti jedinstveno
- u praksi se umesto Lipšicovog uslova zahteva da je u oblasti G

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \leq M.$$

- metoda se koristi u teorijske, a manje u praktične svrhe

Neka je funkcija $F(x, y)$ definisana i neprekidna u oblasti G i neka je $y = f(x)$ je rešenje jednačine $y' = F(x, y)$ nad intervalom (a, b).

- (x, y, y') je linijski element
- skup svih linijskih elemenata je polje pravaca
- tangenta rešenja $y = f(x)$ u svakoj tački (x, y) grafika ima koeficijent pravca y' dat sa $y' = F(x, y)$; svaka kriva sa ovom osobinom je saglasna sa poljem pravaca



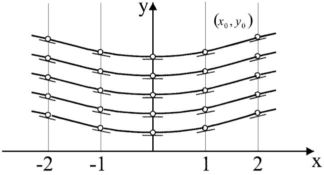
- skup svih krivih saglasnih sa poljem pravaca naziva se opšte rešenje jednačine
- kriva koja zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_0$, tj. prolazi kroz neku tačku (x_0, y_0) naziva se partikularno rešenje

Primer

Odrediti rešenje $y = y(x)$ diferencijalne jednačine $y' = x$.

U svim tačkama sa istom apscisom tangente imaju isti nagib:

x:	. . . , -2, -1, 0, 1, 2, . . .
y:	sve vrednosti (proizvoljne)
y':	. . . , -2, -1, 0, 1, 2, . . .



Lako se može zaključiti da su sva rešenja (opšte rešenje u smislu naše definicije) data sa

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + c,$$

gde je c proizvoljna konstanta, a partikularno koje prolazi kroz tačku (x_0, y_0) sa data sa

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + y_0 - \frac{x_0^2}{2}.$$

Ojlerove poligonalne linije - aproksimacija rešenja

- podela konačnog intervala intervala (a, b) koji sadrži x_0 :
  $a = z_n < z_{n-1} < \cdots < z_1 < z_0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
- kroz (x_0, y_0) postavimo pravu $L_0 : y = y_0 + (x - x_0)F(x_0, y_0)$, sa nagibom $F(x_0, y_0)$
- ako je $\xi_1 = x_1$ ili z_1 dosta blizu x_0, u tački ξ_1 ordinata prave L_0 data sa $y_1 = y_0 + (\xi - x_0)F(x_0, y_0)$ ne odstupa mnogo od ordinate rešenja u toj tački
- kroz (ξ_1, y_1) postavimo pravu $L_1 : y = y_1 + (x - \xi_1)F(\xi_1, y_1)$
- nakon k koraka - Ojlerova poligonalna linija

$$L_k : y = y_k + (x - \xi_k)F(\xi_k, y_k),$$

$(\xi_k \leq x \leq \xi_{k+1}, \xi_i = x_i)$ ili $(\xi_{k+1} \leq x \leq \xi_k, \xi_i = z_i), i = 1, 2, \ldots, n$

gde se y_{k+1} računa iz obrasca

$$y_{k+1} = y_k + (\xi_{k+1} - \xi_k)F(\xi_k, y_k), k = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

Jednačina koja razdvaja promenljive

Normalni oblik: $\boxed{y' = f(x)g(y)}$

Teorema

Ako je $f(x)$ neprekidna nad $a < x < b$, a $g(y)$ neprekidna i različita od 0 nad $\alpha < y < \beta$ tada postoji jedinstveno rešenje jednačine $y' = f(x)g(y)$ koje zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (\alpha, \beta)$ i definisano je na nekoj okolini x_0. Rešenje je dato sa

$$y(x) = G^{-1}\left(G(y_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)dt\right),$$

pri čemu je $G(u)$ primitivna funkcija za $\frac{1}{g(u)}$ nad (α, β).

Opšte rešenje pod uslovom $g(y) \neq 0$ je dato obrascem

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c.$$

O egzistenciji i jedinstvenosti rešenja ako je funkcija g(y) neprekidna nad intervalom (α, β), ali ne važi $\mathbf{g(y) \neq 0}$ nad datim intervalom:

- Ako je $\mathbf{g(y_0) \neq 0}$, zbog neprekidnosti $g(y)$ postoji interval $(\alpha_1, \beta_1) \subset (\alpha, \beta)$ koji sadrži y_0 sa osobinom

  $$g(y)g(y_0) > 0 \text{ za svako } y \in (\alpha_1, \beta_1).$$

  Zaključak teoreme ostaje, ali se (α, β) zamenjuje sa (α_1, β_1).

- Ako je $\mathbf{g(y_0) = 0}$, rešenje početnog problema je sigurno funkcija $y(x) = y_0$, ali to rešenje ne mora da bude jedinstveno (videti sledeći primer).

Primer

Rešiti početni problem $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, $y(1) = 0$.

Jedno rešenje početnog problema je $y(x) = 0$.
Iz $\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$ zbog konvergencije nesvojstvenog integrala

$$\int\limits_{(0,y(x))} \frac{du}{3u^{\frac{2}{3}}} \text{ za } y(x) > 0, \text{ odnosno } \int\limits_{(y(x),0)} \frac{du}{3u^{\frac{2}{3}}} \text{ za } y(x) < 0,$$

da je

$$\int\limits_0^{y(x)} \frac{du}{3u^{\frac{2}{3}}} = \int\limits_1^x dt, \text{ odnosno } \sqrt[3]{u}\Big|_0^{y(x)} = t\Big|_1^x.$$

Sledi da je $\sqrt[3]{y(x)} = x - 1$, odnosno $y(x) = (x-1)^3$, pa dati problem ima najmanje dva rešenja.

Primer

Naći rešenje jednačine $y' = x(y-1)^2$ *koje prolazi kroz tačku* $(0,1)$.

$$\frac{dy}{(y-1)^2} = xdx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y-1} = \frac{x^2}{2} + c \qquad \Rightarrow \quad y - 1 = -\frac{2}{x^2+2c}$$
$$\Rightarrow \quad y(x) = 1 - \frac{2}{x^2+2c}$$

Uzimajući u obzir početni uslov dobijamo $1 = 1 - \dfrac{2}{2c}$, tj. $0 = \dfrac{1}{c}$ (konstanta u "opštem" rešenju ne može da se odredi).
Ova situacija je nastupila jer nesvojstveni integral

$$\int\limits_{(1,y)} \frac{dy}{(y-1)^2} \text{ za } y > 1, \text{ odnosno } \int\limits_{(y,1)} \frac{dy}{(y-1)^2} \text{ za } y < 1$$

divergira. Rešenje problema je $y(x) = 1$.

Homogena diferencijalna jednačina

Normalni oblik: $\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$, $f(t)$ je neprekidna funkcija nad (a, b);

smenom: $\frac{y}{x} = u$, $y' = u + xu'$ svodi se na jednačinu $u' = \frac{f(u) - u}{x}$ koja razdvaja promenljive.

Ako je $\mathbf{f(u) - u \neq 0}$ nad intervalom $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ tada kroz svaku tačku (x_0, y_0) oblasti $G : \begin{cases} a < \frac{y}{x} < b \\ x > 0 \end{cases}$ ili $G : \begin{cases} a < \frac{y}{x} < b \\ x < 0 \end{cases}$ prolazi samo jedno rešenje $y(x) = xu(x)$ definisano za svako x za koje je

ili $\quad \lim\limits_{y \to \alpha^+} G(y) < G(y_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt < \lim\limits_{y \to \beta^-} G(y)$

ili $\quad \lim\limits_{y \to \beta^-} G(y) < G(y_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt < \lim\limits_{y \to \alpha^+} G(y)$,

gde je $u(x)$ dato sa $\displaystyle\int\limits_{u_0}^{u(x)} \frac{dt}{f(t) - t} = \ln\left|\frac{x}{x_0}\right|, \quad u_0 = \frac{y_0}{x_0}$.

Ako je $\mathbf{f(u) - u = 0}$ za neko $\mathbf{x \in (a, b)}$:

- Ako je $\mathbf{f(u_0) \neq u_0}$, $\left(u_0 = \frac{y_0}{x_0}\right)$, zbog neprekidnosti funkcije $f(u) - u$ postoji interval $(a_1, b_1) \subset (a, b)$, koji sadrži tačku u_0, tako da je

$$(f(u) - u)(f(u_0) - u_0) > 0 \text{ za svako } u \in (a_1, b_1)$$

pa svi zaključci važe nad podintervalom (a_1, b_1) intervala (a, b).

- Ako je $\mathbf{f(u) - u = 0}$ **za svako** $\mathbf{u \in (a, b)}$, jednačina glasi $y' = \frac{y}{x}$, a to je jednačina koja razdvaja promenljive.
- Ako je $\mathbf{f(u_0) = u_0}$, $\left(u_0 = \frac{y_0}{x_0}\right)$, rešenje početnog problema je sigurno funkcija $y(x) = u_0 x$, $\left(y'(x) = u_0 = f\left(\frac{u_0 x}{x}\right) = f(u_0)\right)$. Ovo rešenje ne mora da bude jedinstveno.

Napomena

Opšte rešenje uz pretpostavku $f(u) - u \neq 0$ dato je obrascem
$\int \frac{du}{f(u)-u} = \ln cx \quad \left(u = \frac{y}{x}\right), \quad y = y(x),$ *a partikularno se dobija određivanjem c iz početnog uslova $y(x_0) = y_0$. Gornji integral mora da postoji nad posmatranim intervalom!*

Primer

Jednačina $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, gde su $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ realni brojevi, a $f(t)$ neprekidna funkcija nad intervalom (a, b), svodi se na jednačinu koja razdvaja promenljive ili na homogenu.

- Ako je $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, jednačina se smenom

$$a_1x + b_1y + c_1 = t \text{ ili } a_2x + b_2y + c_2 = t$$

svodi na jednačinu koja razdvaja promenljive.

- Ako je $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, smenom

$$x = X + \alpha, \quad y = Y + \beta$$

gde su α i β (jedinstvena!) rešenja sistema

$$\begin{aligned} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 &= 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

dobija se

$$\begin{aligned} Y' = y' &= f\left(\frac{a_1X + a_1\alpha + b_1Y + b_1\beta + c_1}{a_2X + a_2\beta + b_2Y + b_2\beta + c_2}\right) \\ &= f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right) \\ &= g\left(\frac{Y}{X}\right). \end{aligned}$$

Linearna diferencijalna jednačina

Opšti oblik: $\boxed{y' + f(x)\ y = g(x)}$

Teorema

Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne nad intervalom (a, b) tada postoji jedinstveno rešenje linearne diferencijalne jednačine koje zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$ i definisano je nad (a, b) u obliku

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt} \left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{t} f(u)du} g(t)dt \right).$$

- smena: $y(x) = u(x) \cdot v(x)$

Bernulijeva jednačina

Opšti oblik: $\boxed{y' + f(x)\; y = g(x)y^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}}$

- $\alpha = 0$ - linearna diferencijalna jednačina
- $\alpha = 1$ - jednačina koja razdvaja promenljive

- smena: $z(x) = (y(x))^{-\alpha+1}, \quad z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x)$

Svodi se na linearnu diferencijalnu jednačinu

$$z'(x) + (1-\alpha)\,f(x)\,z(x) - (1-\alpha)\,g(x) = 0$$

Ako su $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne nad (a,b), tada kroz svaku tačku (x_0, z_0), gde je $x_0 \in (a,b)$, $z_0 \in \mathbb{R}$, prolazi jedinstveno rešenje definisano nad (a,b). Kako se zbog $\alpha \in \mathbb{R}$ mora pretpostaviti da je $y > 0$, rešenje je u opštem slučaju definisano na najvećem podintervalu (a_1, b_1) od (a,b) kom pripada x_0 i u kom je $z(x) > 0$.

Jednačina totalnog diferencijala

$$\boxed{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0}$$

je jednačina totalnog diferencijala ako postoji funkcija $F(x,y)$ takva da je

- $dF(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$
- $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P(x,y),\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$

Teorema

Neka su $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ neprekidne u otvorenoj jednostruko povezanoj oblasti G i $Q(x_0,y_0) \neq 0$. Da bi jednačina $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ bila jednačina totalnog diferencijala potrebno je i dovoljno da bude za svako $(x,y) \in G$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Ako oblast nije jednostruko povezana, tvrđenje ne mora da važi!

Integracioni množitelj

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Da li postoji funkcija $h(x,y) \neq 0$ takva da je diferencijalna jednačina

$$\boxed{h(x,y)P(x,y)dx + h(x,y)Q(x,y)dy = 0}$$

jednačina totalnog diferencijala, tj. $\dfrac{\partial(hP)}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial(hQ)}{\partial x}(x,y)$?

$$\frac{1}{h}\left(P\frac{\partial h}{\partial y} - Q\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$h(x,y)$ - integracioni množitelj (funkcija koja ima u otvorenoj jednostruko povezanoj oblasti G neprekidne parcijalne izvode, zadovoljava gornji uslov i različita je od nule u G)

Klero-ova jednačina $\boxed{y = xy' + f(y')}$

Tvrđenje

Neka funkcija $f(t)$ ima nad intervalom (a, b) neprekidan drugi izvod koji je različit od nule i neka je $\varphi(t)$ inverzna funkcija od $-f'(t)$. Tada su rešenja jednačine $y = xy' + f(y')$ funkcije

- $y = xc + f(c), \quad c \in (a, b)$ *(c je konstanta)*
- $y = x\varphi(x) + f(\varphi(x))$ *(tzv. singularno rešenje)* *definisano nad intervalom (α, β), gde $\alpha = \inf_{t\in(a,b)} \{-f'(t)\}$ ako infimum postoji, u suprotnom $\alpha = -\infty$ i $\beta = \sup_{t\in(a,b)} \{-f'(t)\}$ ako supremum postoji, u suprotnom je $\beta = \infty$*
- *svaka kriva sastavljena od proizvoljnog luka AB krive i na nju nastavljenih tangenata u tačkama A i B.*

Lagranžova jednačina

$$\boxed{y = xf(y') + g(y')}$$

Uzmimo $p = y'$, tj. $dy = pdx$. Dobijamo $y = xf(p) + g(p)$, a odavde diferenciranjem $pdx = dy = (xf'(p) + g'(p))dp + f(p)dx$, tj. $(f(p) - p)dx + (xf'(p) + g'(p))dp = 0$.

- $f(p) - p \neq 0 \Rightarrow \dfrac{dx}{dp} + \dfrac{f'(p)}{f(p) - p}x + \dfrac{g'(p)}{f(p) - p} = 0$, što je linearna jednačina, iz koje dobijamo $x = x(p)$, što sa $y(p) = x(p)f(p) + g(p)$ predstavlja rešenje Lagranžove jednačine u parametarskom obliku.
- Ako jednačina $f(p) - p = 0$ ima rešenja i ako je jedno rešenje $p = c$, tada je rešenje jednačine i $y = cx + g(c)$.
- Ako je $f(p) - p = 0$ za svako p, Lagranžova jednačina postaje $y = xy' + g(y')$ (Klero-ova).

(ovo je spec. slučaj opšteg postupka uvođenja parametra)

Snižavanje reda diferencijalne jednačine

I) $\boxed{y^{(n)}(x) = f(x)}$, $f(x)$ neprekidna funkcija nad (a, b)

$$
\begin{aligned}
y^{(n-1)}(x) &= \int f(x)\,dx = f_1(x) + c_1 \\
y^{(n-2)}(x) &= \int (f_1(x) + c_1)\,dx = f_2(x) + c_1 x + c_2 \\
&\vdots \\
y(x) &= f_n(x) + \frac{c_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{c_{n-1} x}{1!} + c_n
\end{aligned}
$$

Primer

Rešiti početni problem $y^{IV} = \sin x,\ y(0) = y''(0) = 1,\ y'(0) = y'''(0) = 0$

$y''' = \int y^{IV}(x)dx = \int \sin x dx = -\cos x + c_1,$
$y'' = \int y'''(x)dx = \int(-\cos x + c_1)dx = -\sin x + c_1 x + c_2,$
$y' = \int y''(x)dx = \int(-\sin x + c_1 x + c_2)dx = \cos x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3,$
$y = \int y'(x)dx = \int(\cos x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3)dx =$
$\sin x + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4,$

$$\begin{array}{lcl} y'''(0) = -1 + c_1 = 0 & \Rightarrow & c_1 = 1 \\ y''(0) = c_2 = 1 & \Rightarrow & c_2 = 1 \\ y'(0) = 1 + c_3 = 0 & \Rightarrow & c_3 = -1 \\ y(0) = c_4 = 1 & \Rightarrow & c_4 = 1 \end{array}$$

$\Rightarrow y = \sin x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - x + 1$

III) $\boxed{F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0,\ 1 \leq k < n}$

smena: $y^{(k)}(x) = z(x)$

dobijamo jednačinu reda $n-k$ oblika

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

IV) $\boxed{F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,\ n \geq 2}$

smena: $y' = z(y)$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z'(y)y'(x) = z'\,z \\ y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{d(zz')}{dx} = \frac{dz}{dx}z' + z\frac{dz'}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}z' + z\frac{dz'}{dy}\frac{dy}{dx} \\ &= zz'^2 + z^2 z'' \end{aligned}$$

dobijamo jednačinu reda $n-1$ oblika $\quad H(y, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0.$

- Ako znamo jedno rešenje $y_1(x)$ diferencijalne jednačine

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

tada se jednačina

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

rešava smenom

$$y = z(x)y_1(x),$$

gde je $z(x)$ nepoznata funkcija.

-

$$y = zy_1 \Rightarrow \begin{array}{rcl} y' & = & z'y_1 + zy_1' \\ y'' & = & z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1'' \end{array}$$

pa da bi y bilo rešenje $z(x)$ mora da zadovoljava jednačinu

$$y_1z'' + (2y_1' + a_1(x)y_1)z' + (\underbrace{y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1}_{0})z = f(x)$$

koja ne sadrži z, pa joj se smenom $z' = p, z'' = p'$ snižava red.

- Ako znamo dva rešenja $y_1(x)$ i $y_2(x)$ diferencijalne jednačine

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x),$$

tj. ako je

$$y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x) = f(x),$$
$$y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x) = f(x),$$

oduzimanjem ove dve jednakosti dobija se

$$(y_2(x) - y_1(x))'' + a_1(x)(y_2(x) - y_1(x))' + a_2(x)(y_2(x) - y_1(x)) = 0,$$

tj. funkcija $h(x) = y_2(x) - y_1(x)$ je jedno rešenje jednačine

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0.$$

Ona se rešava smenom

$$y = z(x)(y_2(x) - y_1(x)).$$

Linearna jednačina $n-$tog reda, $n \geq 2$

Opšti oblik: $g_0(x)y^{(n)} + g_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + g_n(x)y = h(x).$

Pretpostavke:

- $h(x), g_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n$ definisane i neprekidne nad otvorenim intervalom I
- $g_0(x) \neq 0, x \in I$

$$\begin{aligned} L_n[y] &= f(x) \\ L_n[y] &= y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y \\ a_i(x) &= \frac{g_i(x)}{g_0(x)}, i = 1, 2, \ldots, n, \quad f(x) = \frac{h(x)}{g_0(x)} \end{aligned}$$

$$\boxed{y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)}$$

- $f(x) = 0, x \in I$ - homogena diferencijalna jednačina, u suprotnom je to nehomogena diferencijalna jednačina

1) problem egzistencije rešenja
2) problem jednoznačnosti rešenja
3) problem pronalaženja rešenja (efektivnog rešavanja)

Teorema

Ako su $a_i(x), i = 1, 2, \ldots, n$ i $f(x)$ neprekidne funkcije nad intervalom I, $x_0 \in I$ proizvoljna tačka, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ proizvoljni brojevi, tada postoji jednistveno rešenje $y(x)$ diferencijalne jednačine $L_n[y] = f(x)$ koje zadovoljava početni uslov

$$y(x_0) = \alpha_0,\ y'(x_0) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$$

i definisano je nad datim intervalom I.

Homogena linearna jednačina $L_n[y] = 0$

Lema

Operator $L_n[\ ]$ je linearan, tj. važi

$$L_n[y_1 + y_2] = L_n[y_1] + L_n[y_2], \quad L_n[cy] = cL_n[y],$$

gde je c proizvoljna konstanta.

Teorema

(PRINCIP SUPERPOZICIJE) *Ako su $y_i(x), i = 1, 2, \ldots, m$ rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine tada je rešenje i*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i(x), \quad \text{gde su } c_i \text{ proizvoljne konstante.}$$

Dokaz. $L_n\left[\sum_{i=1}^{m} c_i y_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{m} c_i L_n[y_i(x)] = 0.$

- opšte rešenje: $m = n$, c_i se mogu izabrati tako da je zadovoljen svaki početni uslov
- partikularno rešenje - dob. izborom konstanti c_i, $i = 1, \ldots, n$

Definicija

Funkcije $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, su linearno zavisne nad intervalom I ako postoje brojevi c_i koji nisu svi jednaki nuli, da je

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0, \qquad \text{za svako } x \in I.$$

Funkcije koje nisu linearno zavisne su linearno nezavisne.

Definicija

Ako su funkcije $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x) \in C^{n-1}(I)$, $n \geq 2$, tada je

$$W(x) = W(y_1, \ldots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

determinanta Vronskog od $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ nad I.

Lema

Neka su funkcije $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ $(n-1)$ *puta neprekidno diferencijabilne nad intervalom* I. *Ako su funkcije* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *linearno zavisne nad intervalom* I, *tada je* $W(x) = 0$ *za svako* $x \in I$.

Dokaz. Ako su funkcije $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linearno zavisne nad intervalom I, tada postoje konstante $c_1, c_2, \ldots, c_n$ koje nisu sve istovremeno jednake nuli, tako da je

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0, \text{ za svako } x \in I.$$

Ako je na primer $c_n \neq 0$, tada je

$$y_n = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_{n-1} y_{n-1}, \quad \alpha_i = -\frac{c_i}{c_n}, i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Sledi da je poslednja kolona u $W(x)$ linearna kombinacija prethodnih kolona, pa je $W(x) = 0$.

Lema

Ako su rešenja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ homogene linearne jednačine $L_n[y] = 0$ linearno nezavisna, tada je $W(x) \neq 0$, za svako $x \in I$.

Teorema

Potreban i dovoljan uslov da $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ budu linearno nezavisna rešenja homogene linearne jednačine $L_n[y] = 0$ nad nekim intervalom I je da bude

$$W(x) \equiv W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) \neq 0, \text{ za svako } x \in I.$$

Dakle, za skup rešenja $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ jednačine $L_n[y] = 0$ je ili $W(x) = 0$ za svako $x \in I$ ili $W(x) \neq 0$ za svako $x \in I$.

Primer

Ispitati linearnu zavisnost funkcija $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$ nad $\mathbb{R}$. Naći $W(x)$.

Iz $\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$ sledi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, jer:

$$\begin{array}{rcr} x = 1 & \Rightarrow & \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ x = -1 & \Rightarrow & -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{array}$$

tako da su funkcije $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$ linearno nezavisne nad $\mathbb{R}$. Kako je

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2,$$

sledi da je $W(0) = 0$, $W(x) \neq 0$, za svako $x \neq 0$.

Primer

Da li funkcije $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$ mogu biti rešenja nad skupom $\mathbb{R}$ neke homogene linearne jednačine oblika $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$, gde su $a_1(x)$ i $a_2(x)$ neprekidne funkcije za svako $x \in \mathbb{R}$? Formirati homogenu linearnu jednačinu čija su rešenja $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$.

$y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$ su linearno nezavisne nad $\mathbb{R}$. Ne mogu da budu rešenja homogene linearne jednačine $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ nad $\mathbb{R}$, jer je $W(0) = 0$. Ako su $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$ rešenja neke linearne jednačine, tada je rešenje te jednačine i funkcija $y(x) = c_1x + c_2x^2$, gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante.

$$\begin{array}{rcl} y(x) & = & c_1x + c_2x^2 \\ y'(x) & = & c_1 + 2c_2x \\ y''(x) & = & 2c_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} c_2 & = & \frac{y''(x)}{2} \\ c_1 & = & y'(x) - xy''(x) \end{array}$$

$\Rightarrow y(x) = xy'(x) - x^2y''(x) + \frac{x^2}{2}y''(x)$, pa je tražena jednačina $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Definicija

Svaki skup od n, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ linearno nezavisnih rešenja jednačine $L_n[y] = 0$ je fundamentalni skup rešenja jednačine $L_n[y] = 0$.

Teorema

Postoji fundamentalni skup rešenja jednačine $L_n[y] = 0$ nad intervalom I.

Dokaz. Neka je x_0 proizvoljna tačka iz intervala I i $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ rešenja jednačine $L_n[y] = 0$ koja zadovoljavaju početni uslov

$$\begin{array}{llll} y_1(x_0) = 1, & y_1'(x_0) = 0, & \dots, & y_1^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ y_2(x_0) = 0, & y_2'(x_0) = 1, & \dots, & y_2^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n(x_0) = 0, & y_n'(x_0) = 0, & \dots, & y_n^{(n-1)}(x_0) = 1. \end{array}$$

(postoje na osnovu teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti)

Rešenja $y_i(x)$ su linearno nezavisna nad intervalom I, jer da su linearno zavisna, sledilo bi da je $W(x) = 0$ za svako $x \in I$, pa i za $x = x_0$.

Za x_0 imamo da je

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

što je kontradikcija. $\square$

Teorema

(FORMULA LJUVILA-ABELA) Neka je $x_0 \in I$ proizvoljna tačka, a $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ fundamentalni skup rešenja homogene linearne jednačine $L_n[y] = 0$. Tada je za svako $x \in I$

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}.$$

• Ako je $a_1 = c$, tada je $W(x) = W(x_0)e^{-c(x-x_0)}$, te za $c = 0$ važi $W(x) = W(x_0)$, za svako $x \in I$.

Posledica

Rešenja $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ homogene linearne jednačine $L_n[y] = 0$ su linearno nezavisna nad intervalom I ako je $W(x_0) \neq 0$ za neku tačku $x_0 \in I$.

Teorema

Ako je $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ *fundamentalni skup rešenja homogene linearne jednačine* $L_n[y] = 0$ *nad intervalom* I*, tada je opšte rešenje te jednačine nad intervalom* I *dato sa*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

gde su $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *proizvoljni realni brojevi.*

Dokaz. Neka su su $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ proizvoljni realni brojevi i neka je $h(x)$ rešenje jednačine $L_n[y] = 0$ koje zadovoljava početni uslov

$$h(x_0) = \alpha_0, h'(x_0) = \alpha_1, \ldots, h^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}, \quad x_0 \in I.$$

Pokažimo da se u rešenju

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

konstante $c_1, c_2, \ldots, c_n$ mogu odrediti tako da i $y(x)$ zadovoljava isti početni uslov.

Uvrštavajući početni uslov u

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

dobijamo sistem S algebarskih jednačina

$$\begin{array}{lclclcl}
c_1 y_1(x_0) & + & c_2 y_2(x_0) & + \cdots + & c_n y_n(x_0) & = & \alpha_0 \\
c_1 y_1'(x_0) & + & c_2 y_2'(x_0) & + \cdots + & c_n y_n'(x_0) & = & \alpha_1 \\
 & & & & & & \\
c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + & c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) & + \cdots + & c_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & \alpha_{n-1}
\end{array}$$

Determinanta ovog sistema je $D_S = W(x_0) \neq 0$ jer su rešenja $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ linearno nezavisna, pa je sistem određen.

Znači, rešenje

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

gde je $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ rešenje sistema S zadovoljava isti početni uslov kao i rešenje $h(x)$.

Zbog jednoznačnosti rešenja početnog problema je $y(x) = h(x), x \in I$. $\square$

Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

$$\boxed{L_n[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, a_i \in \mathbb{R}}$$

Ako je $y = e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$ tada je $y^{(i)} = k^i e^{kx}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pa je

$$L_n[e^{kx}] = e^{kx}(\underbrace{k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n}_{P_n(k)})$$

pa je

$$L_n[e^{kx}] = 0 \Leftrightarrow k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0$$

- $P_n(k)$ - karakterističan polinom
- $k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0$ - karakteristična jednačina

Rešenja diferencijalne jednačine su za svako $x \in (-\infty, \infty)$ funkcije

$$y_i = e^{k_i x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Lema

Ako je $y(x) = u(x) + iv(x)$ kompleksno rešenje linearne jednačine $L_n[y] = 0$ tada su $u(x)$ i $v(x)$ dva realna rešenja te jednačine.

Dokaz. $L_n[u(x) + iv(x)] = L_n[u(x)] + iL_n[v(x)] = 0$

$$\Rightarrow L_n[u(x)] = L_n[v(x)] = 0.$$

- Koreni karakteristične jednačine su realni i jednostruki

Karakteristična jednačina ima $1 < m \leq n$ različitih realnih korena k_i, $i = 1, \ldots, m$; realna rešenja su $y_i = e^{k_i x}$, $i = 1, \ldots, m$; linearno su nezavisna (čine fundamentalni skup rešenja) ako je $m = n$, jer je

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \ldots & e^{k_m x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & \ldots & k_m e^{k_m x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1^{m-1} e^{k_1 x} & k_2^{m-1} e^{k_2 x} & \ldots & k_m^{m-1} e^{k_m x} \end{vmatrix} \\ &= e^{(k_1 + k_2 + \cdots + k_m)x} V, \end{aligned}$$

gde je

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1^{m-1} & k_2^{m-1} & \dots & k_m^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le m} (k_i - k_j) \neq 0,$$

jer je $k_i \neq k_j$ za $i \neq j$.

Opšte rešenje za $m = n$ dato je sa:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{k_i x}.$$

- Koreni karakteristične jednačine su kompleksni i jednostruki

$k_j = \alpha_j + i\,\beta_j$, $\beta_j \neq 0$, tada su rešenja

$$\begin{aligned} y_{j_1} &= \mathrm{Re}(e^{(\alpha_j + i\,\beta_j)x}) = e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x \\ y_{j_2} &= \mathrm{Im}(e^{(\alpha_j + i\,\beta_j)x}) = e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x \end{aligned}$$

Lako se proverava da su ova dva rešenja linearno nezavisna.

Iako je $\overline{k_j} = \alpha_j - i\,\beta_j$ takođe koren karakteristične jednačine, nema dodatnih rešenja!

- Koreni karakteristične jednačine su realni i višestruki

k_i koren višestrukosti $m > 1$, tada su rešenja jednačine funkcije

$$y_{i_1}(x) = e^{k_i x},\ y_{i_2}(x) = xe^{k_i x},\ \dots,\ y_{i_m}(x) = x^{m-1}e^{k_i x}$$

i linearno su nezavisna:
Kako je

$$P_n(k_i) = P_n'(k_i) = \cdots = P_n^{(m-1)}(k_i) = 0, \quad P_n^{(m)}(k_i) \neq 0$$

i kako je $L_n[e^{kx}] = e^{kx}P_n(k)$ to se diferenciranjem po k dobija

$$\begin{aligned} L_n[xe^{kx}] &= xe^{kx}P_n(k) + e^{kx}P_n'(k) \\ &= e^{kx}(xP_n(k) + P_n'(k)) \end{aligned}$$

pa se iz $L_n[xe^{kx}] = e^{kx}(xP_n(k) + P_n'(k))$ stavljajući $k = k_i$ dobija $L_n[xe^{k_i x}] = 0$, tj da je i $xe^{k_i x}$ rešenje. Slično, diferenciranjem $(m-1)$ puta po k dobijamo da su rešenja i funkcije

$$y_{i_1}(x) = e^{k_i x},\ y_{i_2}(x) = xe^{k_i x}, \dots, y_{i_m}(x) = x^{m-1}e^{k_i x}.$$

- Koreni karakteristične jednačine su kompleksni i višestruki

$k_j = \alpha_j + i\,\beta_j$, $\beta_j \neq 0$ koren višestrukosti $m > 1$, tada su $2m$ realnih (linearno nezavisnih) rešenja jednačine funkcije

$$
\begin{aligned}
y_{j_1} &= e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, \\
y_{j_2} &= x e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, \\
&\vdots \\
y_{j_m} &= x^{m-1} e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, \\
y_{j_{m+1}} &= e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x, \\
y_{j_{m+2}} &= x e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x, \\
&\vdots \\
y_{j_{2m}} &= x^{m-1} e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x.
\end{aligned}
$$

Primer

Neka su rešenja karakteristične jednačine neke homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$\begin{aligned} k_1 = k_2 = k_3 &= 1, \\ k_4 &= -1, \\ k_5 &= 3+i, \\ k_6 &= 3-i, \\ k_7 = k_8 = k_9 &= 2+i, \\ k_{10} = k_{11} = k_{12} &= 2-i. \end{aligned}$$

$$y(x) = e^x(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) + c_4 e^{-x} + e^{3x}(c_5 \cos x + c_6 \sin x) + e^{2x}(c_7 \cos x + c_8 x \cos x + c_9 x^x \cos x + c_{10} \sin x + c_{11} x \sin x + c_{12} x^2 \sin x)$$

Primer

Neka su rešenja karakteristične jednačine neke homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$
\begin{aligned}
k_1 = k_2 = k_3 &= 1, \\
k_4 &= -1, \\
k_5 &= 3+i, \\
k_6 &= 3-i, \\
k_7 = k_8 = k_9 &= 2+i, \\
k_{10} = k_{11} = k_{12} &= 2-i.
\end{aligned}
$$

$$
y(x) = e^x(c_1 + c_2x + c_3x^2) + c_4e^{-x} + e^{3x}(c_5\cos x + c_6\sin x) + e^{2x}(c_7\cos x + c_8x\cos x + c_9x^x\cos x + c_{10}\sin x + c_{11}x\sin x + c_{12}x^2\sin x)
$$

Primer

Neka su rešenja karakteristične jednačine neke homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$\begin{aligned} k_1 = k_2 = k_3 &= 1, \\ k_4 &= -1, \\ k_5 &= 3+i, \\ k_6 &= 3-i, \\ k_7 = k_8 = k_9 &= 2+i, \\ k_{10} = k_{11} = k_{12} &= 2-i. \end{aligned}$$

$$y(x) = e^x(c_1 + c_2x + c_3x^2) + c_4e^{-x} + e^{3x}(c_5\cos x + c_6\sin x) + e^{2x}(c_7\cos x + c_8x\cos x + c_9x^x\cos x + c_{10}\sin x + c_{11}x\sin x + c_{12}x^2\sin x)$$

Primer

Neka su rešenja karakteristične jednačine neke homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$\begin{aligned} k_1 = k_2 = k_3 &= 1, \\ k_4 &= -1, \\ k_5 &= 3+i, \\ k_6 &= 3-i, \\ k_7 = k_8 = k_9 &= 2+i, \\ k_{10} = k_{11} = k_{12} &= 2-i. \end{aligned}$$

$$y(x) = e^x(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) + c_4 e^{-x} + e^{3x}(c_5 \cos x + c_6 \sin x) + e^{2x}(c_7 \cos x + c_8 x \cos x + c_9 x^x \cos x + c_{10} \sin x + c_{11} x \sin x + c_{12} x^2 \sin x)$$

Primer

Neka su rešenja karakteristične jednačine neke homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$\begin{aligned} k_1 = k_2 = k_3 &= 1, \\ k_4 &= -1, \\ k_5 &= 3+i, \\ k_6 &= 3-i, \\ k_7 = k_8 = k_9 &= 2+i, \\ k_{10} = k_{11} = k_{12} &= 2-i. \end{aligned}$$

$$y(x) = e^x(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) + c_4 e^{-x} + e^{3x}(c_5 \cos x + c_6 \sin x) + \\ e^{2x}(c_7 \cos x + c_8 x \cos x + c_9 x^x \cos x + c_{10} \sin x + c_{11} x \sin x + c_{12} x^2 \sin x)$$

Nehomogena linearna jednačina

Teorema

Neka je $y_p(x)$ neko (partikularno) rešenje jednačine

$$L_n[y] = f(x)$$

i $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$ *opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine* $L_n[y] = 0$.
Tada je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

opšte rešenje jednačine $L_n[y] = f(x)$.

Dokaz. $y(x)$ je rešenje jednačine $L_n[y] = f(x)$ jer iz linearnosti operatora $L_n[\ ]$ sledi

$$\begin{aligned} L_n[y(x)] &= L_n[y_h(x) + y_p(x)] = L_n[y_h(x)] + L_n[y_p(x)] \\ &= 0 + f(x) = f(x) \end{aligned}$$

Pokažimo da ono sadrži svako rešenje koje zadovoljava početni uslov

$$y^{(i)}(x_0) = \alpha_i,\ i = 0, 1, \dots, n-1,$$

(tj. svako partikularno rešenje), gde su α_i proizvoljni realni brojevi, $x_0 \in I$ proizvoljna tačka i $y^{(0)}(x) = y(x)$:

Neka je $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ fundamentalni skup rešenja jednačine $L_n[y] = 0$. Tada je njeno opšte rešenje

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x).$$

Neka su $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ proizvoljni brojevi i $h(x)$ rešenje jednačine $L_n[y] = f(x)$ koje u proizvoljnoj tački x_0 zadovoljava početni uslov

$$h(x_0) = \alpha_0, h'(x_0) = \alpha_1, \dots, h^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}.$$

Pokazaćemo da se u rešenju

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x)$$

konstante mogu odrediti tako da i funkcija $y(x)$ zadovoljava isti početni uslov.

Uvrštavajući početni uslov u rešenje $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p(x)$dobijamo sistem S algebarskih jednačina

$$\begin{array}{llll}
c_1y_1(x_0) & +c_2y_2(x_0) & +\cdots+c_ny_n(x_0) & =\alpha_0 - y_p(x_0) \\
c_1y_1'(x_0) & +c_2y_2'(x_0) & +\cdots+c_ny_n'(x_0) & =\alpha_1 - y_p'(x_0) \\
 & & & \vdots \\
c_1y_1^{(n-1)}(x_0) & +c_2y_2^{(n-1)}(x_0) & +\cdots+c_ny_n^{(n-1)}(x_0) & =\alpha_{n-1} - y_p^{(n-1)}(x_0)
\end{array}$$

Determinanta sistema S je $D_S = W(x_0) \neq 0$, pa je sistem određen.

Dakle, rešenje $g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p(x)$, gde je $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ rešenje sistema S zadovoljava isti početni uslov kao i $h(x)$.

Zbog jednoznačnosti rešenja početnog problema je $g(x) = h(x)$ za svako $x \in I$. $\square$

Metod varijacije konstanti

Teorema

Neka je $y_1(x), \dots, y_n(x)$ fundamentalni skup rešenja jednačine $L_n[y] = 0$ nad intervalom I. Tada je partikularno rešenje $y_p(x)$ nehomogene jednačine $L_n[y] = f(x)$ koje zadovoljava početni uslov $y_p^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)} = 0$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, dato sa

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_i(s)}{W(s)} f(s) ds,$$

gde je $x_0 \in I$ proizvoljna tačka, a $W_i(s)$, $i = 0, 1, \dots, n$, je determinanta koja se dobija kada se iz determinante Wronskog funkcija $y_1(x), \dots, y_n(x)$ i-ta kolona zameni sa $col(0, 0, \dots, 1)$ dok su ostale kolone iste kao kod $W(x)$.

Dokaz. Neka je $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ fundamentalni skup rešenja. Potrebno je odrediti funkcije $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ tako da je

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$$

partikularno rešenje nad intervalom I jednačine $L_n[y] = f(x)$.
Diferenciranjem obe strane i ako za prvi uslov za funkcije $c_i(x)$ uzmemo

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \cdots + c_n'(x)y_n(x) = 0$$

dobijamo

$$y_p'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) + \cdots + c_n(x)y_n'(x)$$

Ponovnim diferenciranjem poslednje jednakosti i ako za drugi uslov za funkcije $c_i(x)$ uzmemo

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \cdots + c_n'(x)y_n'(x) = 0$$

dobijamo

$$y_p''(x) = c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + \cdots + c_n(x)y_n''(x).$$

Nastavljajući ovaj postupak dobijamo

$$c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0,$$

$$y_p^{(n-1)}(x) = c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x).$$

Sada je

$$\begin{aligned} y_p^{(n)}(x) &= c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) \\ &\quad + c_1(x)y_1^{(n)}(x) + c_2(x)y_2^{(n)}(x) + \cdots + c_n(x)y_n^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Kako funkcija

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$$

treba da bude rešenje jednačine $L_n[y] = f(x)$, zamenom $y_p(x), y_p'(x), \ldots, y_p^{(n)}(x)$ u tu jednačinu i vodeći računa da je $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ fundamentalni skup rešenja jednačine $L_n[y] = 0$, dobijamo

$$L_n[y_p(x)] \equiv \sum_{i=1}^{n} c_i(x) \underbrace{L_n[y_i(x)]}_{0} + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) = f(x),$$

odnosno

$$c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Determinanta linearnog (algebarskog) sistema

$$\begin{array}{ccccccc}
c_1'(x)y_1(x) & + & c_2'(x)y_2(x) & +\cdots+ & c_n'(x)y_n(x) & = & 0 \\
c_1'(x)y_1'(x) & + & c_2'(x)y_2'(x) & +\cdots+ & c_n'(x)y_n'(x) & = & 0 \\
\vdots & & & & & & \\
c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) & + & c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) & +\cdots+ & c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) & = & f(x)
\end{array}$$

je $W(x) \neq 0$ jer su rešenja $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ jednačine $L_n[y] = 0$ po pretpostavci linearno nezavisna. Rešavanjem po $c_i'(x)$ dobija se

$$c_i'(x) = \frac{D_{C_i}}{D} = \frac{W_i(x)f(x)}{W(x)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Integracijom nad intervalom (x_0, x) za $x > x_0$ (tj. (x, x_0) za $x < x_0$) sledi da je

$$c_i(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{W_i(s)}{W(s)} f(s) ds, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

čijom zamenom u obrazac za $y_p(x)$ dobijamo da je partikularno rešenje

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_i(s)}{W(s)} f(s) ds.$$

$\square$

Na primer, za $n = 2$ sistem za određivanje funkcija c_i glasi

$$\begin{array}{rcrcl} c_1'(x)y_1(x) & + & c_2'(x)y_2(x) & = & 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) & + & c_2'(x)y_2'(x) & = & f(x), \end{array}$$

dok je za $n = 3$ odgovarajući sistem

$$\begin{array}{rcrcrcl} c_1'(x)y_1(x) & + & c_2'(x)y_2(x) & + & c_3'(x)y_3(x) & = & 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) & + & c_2'(x)y_2'(x) & + & c_3'(x)y_3'(x) & = & 0 \\ c_1'(x)y_1''(x) & + & c_2'(x)y_2''(x) & + & c_3'(x)y_3''(x) & = & f(x) \end{array}$$

Primer

Naći opšte rešenje jednačine $y''' - y'' = e^x$.

$$y''' - y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad k^3 - k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = 0, k_3 = 1$$
$$\Rightarrow \quad y_h(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x$$

Metodom varijacije konstanti dobijamo sistem

$$\begin{array}{ccccccc} c_1'(x) & + & c_2'(x)x & + & c_3'(x)e^x & = & 0 \\ & & c_2'(x) & + & c_3'(x)e^x & = & 0 \\ & & & & c_3'(x)e^x & = & e^x \end{array}$$

čijim rešavanjem i integracijom rešenja dobijamo

$$\begin{array}{lcl} c_3'(x) = 1 & \Rightarrow & c_3(x) = x + C_3 \\ c_2'(x) = -c_3'(x)e^x = -e^x & \Rightarrow & c_2(x) = -e^x + C_2 \\ c_1'(x) = -c_2'(x)x - c_3'(x)e^x = (x-1)e^x & \Rightarrow & c_1(x) = (x-2)e^x + C_1 \end{array}$$

Jedno partikularno rešenje nehomogene jednačine je

$$y_p(x) = (x-2)e^x$$

pa je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + (x-2)e^x.$$

Metod jednakih koeficijenata

Ako je jednačina linearna sa konstantnim koeficijentima oblika

$$\boxed{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)}$$

gde je funkcija $f(x)$ specijalnog oblika

$$f(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x),$$

partikularno rešenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = x^r e^{\alpha x}(T_k(x)\cos\beta x + R_k(x)\sin\beta x)$$

pri čemu je

- $k = \max\{n, m\}, \quad n = \deg P(x), \quad m = \deg Q(x)$, ako su oba polinoma različita od nula polinoma (ako je P(x) nula polinom onda je $k = m$, a ako je $Q(x)$ nula polinom onda je $k = n$)
- r je višestrukost $\alpha + i\beta$ kao korena karakteristične jednačine odgovarajuće homogene jednačine

Korisna je činjenica: ako je

$$L_n[y] = f_1(x) + f_2(x)$$

i ako je

$y_1(x)$ partikularno rešenje jednačine $L_n[y] = f_1(x)$ nad I,

$y_2(x)$ partikularno rešenje jednačine $L_n[y] = f_2(x)$ nad I,

tada je

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

nad intervalom I partikularno rešenje jednačine

$$L_n[y] = f_1(x) + f_2(x)$$

Primer

Odrediti opšte rešenja jednačine $y''' - y'' = e^x + \sin x + x$.

Rešenje. Opšte rešenje homogenog dela jednačine je

$$y_h(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x.$$

Jedno partikularno rešenje jednačine $y''' - y'' = e^x$ je

$$y_{p_1}(x) = xe^x.$$

Jedno partikularno rešenje jednačine $y''' - y'' = \sin x$ je

$$y_{p_2}(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x).$$

Jedno partikularno rešenje jednačine $y''' - y'' = x$ je

$$y_{p_3}(x) = -\frac{1}{6}x^2(x+3).$$

Opšte rešenje je

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + xe^x + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) - \frac{1}{6}x^2(x+3).$$

Ojlerova jednačina

Ojlerova jednačina je oblika

$$\boxed{(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x)}$$

gde su a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ konstante i smenom

$$ax+b = e^t, ax+b > 0 \quad (ax+b = -e^t, ax+b < 0)$$

svodi se na jednačinu sa konstantnim koeficijentima.

Primer

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x^3y''' + x^2y'' + 3xy - 8y = 0.$$

Za $x > 0$ smenom

$$x = e^t \quad \Rightarrow \quad y'_x = y'_t t'_x = \frac{1}{x}y'_t,$$
$$y''_x = -\frac{1}{x^2}y'_t + \frac{1}{x^2}y''_t = \frac{1}{x^2}(y''_t - y'_t)$$
$$y'''_x = -\frac{2}{x^3}(y''_t - y'_t) + \frac{1}{x^3}(y'''_t - y''_t) = \frac{1}{x^3}(y'''_t - 3y''_t + 2y'_t)$$

dobija se linearna diferencijalna jednačina $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0.$ čija karakteristična jednačina $r^3 - 2r^2 + 4r - 8$ ima korene $r_1 = 2$, $r_2 = 2i$, $r_3 = -2i$ pa je njen fundamentalni skup rešenja $\{e^{2t}, \sin 2t, \cos 2t\}$ tako da je fundamentalni skup rešenja Ojlerove jednačine
$\{x^2, \sin(2\ln|x|), \cos(2\ln|x|)\}$, $x \neq 0$
pa je opšte rešenje $\qquad y = c_1x^2 + c_2\sin(2\ln|x|) + c_3\cos(2\ln|x|).$

Brojni redovi - osnovne definicije i teoreme

Neka je $\{a_n\}$ niz realnih (kompleksnih) brojeva.

Definicija

Brojni red u prostoru realnih (kompleksnih) brojeva je uređen par $(\{a_n\}, \{s_k\})$ koji se sastoji od dva niza

$$\{a_n\}, \quad a_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C}),$$

$$\{s_k\}, \quad s_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

za koje važi

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n, \quad s_{k+1} = s_k + a_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Elementi a_n, $n = 1, 2, \ldots$ su članovi reda, a $\{s_k\}$ je niz parcijalnih suma. Red se kraće označava sa $\sum a_n$ ili $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Primer

Posmatrajmo geometrijski niz $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots$ *u skupu* $\mathbb{R}$.

$$s_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2^n}, k \in \mathbb{N}.$$

Za fiksiran prirodan broj $k \in \mathbb{N}$ *je* $s_k = \dfrac{1 - \frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)$.

Kolika je suma svih članova niza (šta se događa kada $k \to \infty$*)?*

Prirodna ideja je da je ta suma jednaka $\lim\limits_{k\to\infty} s_k$, *ako on postoji.*

U ovom primeru, $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = 2$.

Definicija

Brojni red $\sum a_n$ je konvergentan ako i samo ako je niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ konvergentan, tj. ako postoji konačan broj $s \in \mathbb{R}$ tako da je

$$s = \lim_{k \to \infty} s_k.$$

Broj s je limes (zbir) reda $\sum a_n$, što kraće zapisujemo

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Nalaženje sume s nazivamo sumiranje reda.

Za red koji ne konvergira kažemo da divergira.

Elementarne osobine redova:

- Članovi reda ne moraju biti numerisani od 1.
  Ako numeracija kreće od 0, red označavamo sa
  $$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n, \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}.$$
  Ako numeracija kreće od $p\in\mathbb{N}$, red označavamo sa
  $$\sum_{n\in\mathbb{N}_p} a_n, \quad \mathbb{N}_p = \{n\in\mathbb{N} | n\geq p\}$$
  i tada, ako je red konvergentan, sumu zapisujemo $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$.
- konačno mnogo članova reda ne utiče na njegovu konvergenciju, tj. ako red $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergira, tada i red $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_p} a_n$ konvergira i važi
  $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{p-1} a_n + \sum_{n=p}^{\infty} a_n.$$

- Redovi $\sum a_n$ i $\sum \lambda a_n$ oba istovremeno kovergiraju ili divegriraju za $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

- Ako redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ oba konvergiraju (numeracija je od istog indeksa!), tada i red $\sum(a_n + b_n)$ konvergira.

- Ako red $\sum a_n$ konvergira, a red $\sum b_n$ divergira, tada red $\sum(a_n + b_n)$ divergira.

- Ako redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ oba divergiraju, tada red $\sum(a_n + b_n)$ može i da konvergira i da divergira.

Košijev kriterijum konvergencije - omogućuje ispitivanje konvergencije reda bez poznavanja njegove sume.

Tvrđenje

Brojni red $\sum a_n$ konvergira ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $p \in \mathbb{N}$ i sve $k \in \mathbb{N}$ važi implikacija

$$k \geq k_0 \Longrightarrow \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon.$$

Dokaz. Red je konvergentan ako i samo ako je niz njegovih parcijalnih suma konvergentan, što je ekvivalentno tome da je niz parcijalnih suma Košijev, tj.

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}) \quad k \geq k_0 \Rightarrow |s_{k+p} - s_k| < \varepsilon,$

gde je $|s_{k+p} - s_k| = \left| \sum_{n=1}^{k+p} a_n - \sum_{n=1}^{k} a_n \right| = \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon,$

što je i trebalo pokazati. $\square$

Potreban uslov za konvergenciju brojnog reda:

Tvrđenje

Ako brojni red $\sum a_n$ *konvergira, tada je* $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0.$

Dokaz. Sledi iz prethodne teoreme, za $p=1$.

Primer da ovaj uslov nije i dovoljan za konvergenciju:

Primer

Za harmonijski red $\sum \frac{1}{n}$ *važi da je* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$*, a red je divergentan jer za proizvoljno* $k_0\in\mathbb{N}$ *važi*

$$|s_{2k_0} - s_{k_0}| = \left|\sum_{n=k_0+1}^{2k_0}\frac{1}{n}\right| = \left|\frac{1}{k_0+1}+\frac{1}{k_0+2}+\cdots+\frac{1}{2k_0}\right| \ge \frac{k_0}{2k_0} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4},$$

tj. postoji $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon = \frac{1}{4})$ *tako da za svako* $k_0\in\mathbb{N}$ *postoje* $k,p\in\mathbb{N}, k\ge k_0$ $(k=p=k_0)$ *takvi da je* $\left|\sum\limits_{n=k+1}^{k+p}\frac{1}{n}\right| \ge \varepsilon.$

Redovi sa pozitivnim članovima

Ako je $a_n \in \mathbb{R}$ i $a_n \geq 0$, za sve $n \in \mathbb{N}$ tada je uobičajen naziv za red $\sum a_n$ red sa pozitivnim članovima.

Tvrđenje

Red $\sum a_n$ sa pozitivnim članovima konvergira ako i samo ako je niz parcijalnih suma ograničen odgore.

Dokaz. Kako je $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ i $a_{k+1} \geq 0$, to je

$$s_{k+1} = s_k + a_{k+1} \geq s_k,$$

tj. niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ je monotono neopadajući niz, te je po principu monotonije konvergentan ako i samo ako je ograničen odgore. $\square$

Kriterijumi konvergencije redova sa pozitivnim članovima:

I) Uporedni kriterijum

Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi sa pozitivnim članovima.

1. Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je $a_n \leq b_n$ za svako $n \geq n_0$, tada
   - $\sum b_n$ konvergira $\Rightarrow \sum a_n$ konvergira
   - $\sum a_n$ divergira $\Rightarrow \sum b_n$ divergira

2. Ako članovi reda $\sum a_n$ i $\sum b_n$ zadovoljavaju uslov $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lambda$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \infty$, (tj. $a_n \sim \lambda b_n$ kad $n \to \infty$), tada redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ istovremeno konvergiraju ili divergiraju.

II) Korenski (Košijev) kriterijum

Neka je $\sum a_n$ red sa pozitivnim članovima.

- Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in (0,1)$ tako da za sve $n > n_0$ važi da je $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, tj. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ tada red $\sum a_n$ konvergira.
- Ako za beskonačan skup prirodnih brojeva n važi da je $\sqrt[n]{a_n} > 1$, tj. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, pa red $\sum a_n$ divergira.
- Ako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji.

Napomena

Ako je $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ konvergentan niz onda je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ i red $\sum a_n$ konvergira ako $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ a divergira ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$.

II) Korenski (Košijev) kriterijum

Neka je $\sum a_n$ red sa pozitivnim članovima.

- Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in (0,1)$ tako da za sve $n > n_0$ važi da je $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, tj. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ tada red $\sum a_n$ konvergira.
- Ako za beskonačan skup prirodnih brojeva n važi da je $\sqrt[n]{a_n} > 1$, tj. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, pa red $\sum a_n$ divergira.
- Ako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji.

Napomena

Ako je $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ *konvergentan niz onda je* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *i red* $\sum a_n$ *konvergira ako* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ *a divergira ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$.

III) Količnički (Dalamberov) kriterijum

Neka je $\sum a_n$ red sa pozitivnim članovima.

- Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in (0,1)$ tako da za sve $n > n_0$ važi da je $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, tj. $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ tada red $\sum a_n$ konvergira.
- Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $Q > 1$ tako da za sve $n > n_0$ važi da je $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq Q$, tj. $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ tada red $\sum a_n$ divergira.
- Ako je $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji.

Napomena

Ako $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ *konvergira, važi* $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Tada $\sum a_n$ *konvergira za* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *a divergira za* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

III) Količnički (Dalamberov) kriterijum

Neka je $\sum a_n$ red sa pozitivnim članovima.

- Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in (0,1)$ tako da za sve $n > n_0$ važi da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, tj. $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ tada red $\sum a_n$ konvergira.
- Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $Q > 1$ tako da za sve $n > n_0$ važi da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq Q$, tj. $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ tada red $\sum a_n$ divergira.
- Ako je $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji.

Napomena

Ako $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ *konvergira, važi* $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
Tada $\sum a_n$ *konvergira za* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *a divergira za* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Napomena

Može se pokazati da za niz $\{a_n\}$ *nenegativnih brojeva važi*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

što znači da je korenski kriterijum precizniji:

• *ako količnički kriterijum pokaže konvergenciju (divergenciju) reda, korenski kriterijum će tada pokazati isto,*

• *ako količnički kriterijum ne može da da odgovor o prirodi reda, može da se desi da na osnovu korenskog kriterijuma odredimo da li red konvergira ili ne.*

IV) Integralni kriterijum

Neka je $\sum a_n = \sum f(n)$ red sa pozitivnim članovima takav da funkcija f zadovoljava uslove:

- postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je f definisano za sve $x \in \mathbb{R}$, $x \geq n_0$
- $f(x) \geq 0$, f je monotono opadajuća funkcija nad $[n_0, \infty)$ i $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Tada red $\sum a_n$ konvergira ako i samo ako nesvojstveni integral $\int\limits_{[n_0,\infty)} f(x)dx$ konvergira.

Primeri

Primer

Pomoću integralnog kriterijuma ispitati konvergenciju reda $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *u zavisnosti od vrednosti parametra* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Rešenje.

- za $\alpha = 1$ red divergira (harmonijski)
- za $\alpha \leq 0$ red divergira (član reda $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ ne teži 0)
- za $\alpha > 0$ funkcija $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ zadovoljava uslove za primenu integralnog kriterijuma: kako nesvojstveni integral

$$\int\limits_{[1,\infty)} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \lim\limits_{T\to\infty} \left(\frac{T^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right) & , \quad \alpha \neq 1 \\ \lim\limits_{T\to\infty} (\ln T - 0) & , \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

konvergira za $\alpha > 1$, a divergira za $\alpha \leq 1$, to i red $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konvergira za $\alpha > 1$, a divergira za $\alpha \leq 1$.

Primer

Ispitati konvergenciju redova 1) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+2}{n^4-2n+1}$, *2)* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Rešenje.

1) Koristićemo uporedni kriterijum:

$$\frac{n^2+2}{n^4-2n+1} \sim \frac{1}{n^2} \to 0, \quad n \to \infty,$$

$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ konvergira ($\alpha = 2 > 1$), pa i red $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+2}{n^4-2n+1}$ konvergira.

2) $$\sum \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \quad \alpha = \frac{3}{2} > 1,$$ pa red konvergira.

Primer

Ispitati konvergenciju reda $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n!)^2}{2n!}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n!)^2}{(2n)!} &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!\cdot n!}{2n\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)\cdot\dots\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!\cdot n!}{2^n\cdot n!\cdot(2n-1)!!} < \sum \frac{1}{2^n},\end{aligned}$$

jer je $\displaystyle\frac{n!}{(2n-1)!!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1}{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\dots\cdot 3\cdot 1} < 1$,
a (geometrijski) red $\sum \frac{1}{2^n}$ konvergira, pa po prvom uporednom kriterijumu konvergira i "manji" red $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n!)^2}{2n!}$.

Primer

Ispitati konvergenciju reda $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt{2}+(-1)^n}{2^n}$.

Rešenje.

Korenski kriterijum: Kako je

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{2}+(-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{2}+(-1)^n} = \frac{1}{2},$$

to dati red konvergira.

Količnički kriterijum ne daje odgovor da li dati red konvergira:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{\sqrt{2}+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{\sqrt{2}+(-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}+(-1)^{n+1}}{\sqrt{2}+(-1)^n}$$

ima dve tačke nagomilavanja, pri čemu je

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 < \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Alternativni redovi

- Red $\sum a_n$ u prostoru $\mathbb{R}$ je alternativan ako je za svako $n \in \mathbb{N}$

$$a_{2n-1} \geq 0, \quad a_{2n} \leq 0.$$

- neka je za svako $n \in \mathbb{N}$, $b_n = |a_n|$, tada je

$$\sum a_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$$

Primer

Red $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *je alternativni red, a odgovarajući niz* $\{b_n\}$ *je niz* $\{\frac{1}{n}\}$.

Lajbnicov kriterijum konvergencije alternativnih redova:

Tvrđenje

Neka je $\sum a_n$ *alternativan red u* $\mathbb{R}$. *Ako je niz* $\{b_n\} = \{|a_n|\}$ *monotono nerastući i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, *tada red* $\sum a_n$ *konvergira.*

Ako niz $\{|a_n|\}$ alternativnog reda $\sum a_n$ teži 0, ali ne monotono, tada red $\sum a_n$ može, ali ne mora da konvergira.

Primer

Za red $\sum a_n$ dat sa $\sum a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3^4} + \dots$ važi da $|a_n|$ teži 0, ali ne monotono. Pri tome je

$$\sum a_n = \sum b_n + \sum c_n,$$

gde je

$$\sum b_n = \sum_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{1}{n}, \quad \sum c_n = \sum_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{-1}{3^n}.$$

$\sum c_n$ je konvergentan, a $\sum b_n$ divergentan, pa je $\sum a_n$ divergentan.

Približno izračunavanje sume alternativnog reda:

Može se pokazati da ako sumu s alternativnog reda zamenimo parcijalnom sumom s_k, pravimo grešku koja je manja od člana b_{k+1}, tj.

$$|s - s_k| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n - \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1} b_n \right| \leq b_{k+1}.$$

Prvi odbačeni član predstavlja gornju granicu greške.

Apsolutno konvergentni redovi

- Ako red $\sum |a_n|$ konvergira tada red $\sum a_n$ konvergira apsolutno.
- Red koji konvergira ali ne konvergira apsolutno, konvergira uslovno.

Primer

Red $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ *apsolutno konvergira, jer red* $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum \frac{1}{n^2}$ *konvergira* ($\alpha = 2 > 1$).

Primer

Red $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *(alternativni harmonijski red) konvergira, ali red* $\sum \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ *divergira, što znači da red* $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *konvergira uslovno.*

Tvrđenje

Ako je brojni red $\sum a_n$ *apsolutno konvergentan tada je on i konvergentan i važi*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Tvrđenje

Neka je $\sum \alpha_n$ *brojni red i neka je* $\sum a_n$ *red u* $\mathbb{R}$ *sa pozitivnim članovima,* $a_n \geq 0$*, tako da važi* $|\alpha_n| \leq a_n$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$*. Ako red* $\sum a_n$ *konvergira u* $\mathbb{R}$ *tada red* $\sum \alpha_n$ *apsolutno konvergira i važi*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Kriterijumi konvergencije apsolutno konvergentnih redova:

1. Korenski kriterijum
   - $\sum a_n$ konvergira apsolutno ako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$.
   - $\sum a_n$ divergira ako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$.
   - nema odgovora ako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

2. Količnički (Dalamberov) kriterijum
   - $\sum a_n$ konvergira apsolutno ako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$.
   - $\sum a_n$ divergira ako je $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$.
   - nema odgovora ako je $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq 1 \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

Komutativni i asocijativni zakon za redove:
Neka je $a_1, a_2, \ldots$ beskonačan brojni niz i $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jedna permutacija skupa prirodnih brojeva. Niz $a_{p(1)}, a_{p(2)}, \ldots$ sastoji se od istih članova kao početni niz, ali je redosled drugačiji.

- Ako je $\sum a_n$ apsolutno konvergentan brojni red, tada je i $\sum a_{p(n)}$ apsolutno konvergentan brojni red, pri čemu važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}.$$

- Ako je $\sum a_n$ apsolutno konvergentan brojni red i $\mathbb{N}_1$ i $\mathbb{N}_2$ neprazni, disjunktni podskupovi od $\mathbb{N}$, tako da je $\mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 = \mathbb{N}$ tada su i $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_1} a_n$ i $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_2} a_n$ apsolutno konvergentni i važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} a_n + \sum_{n\in\mathbb{N}_2} a_n$$

Operacije sa redovima

Ako su $\sum a_n$, $\sum b_n$ konvergentni redovi i $c \in \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ tada su redovi $\sum(a_n + b_n)$ i $\sum ca_n$ konvergentni i važi

- za sabiranje redova:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

- za množenje reda skalarom:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$$

(Košijev) proizvod redova $\sum\limits_{n=0} a_n$ i $\sum\limits_{n=0} b_n$ je red $\sum \xi_n$ čiji su članovi

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad \text{tj.} \quad \sum_{n=0} a_n \cdot \sum_{n=0} b_n = \sum_{n=0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right)$$

Ako su redovi $\sum\limits_{n=0} a_n$ i $\sum\limits_{n=0} b_n$ apsolutno konvergentni, tada je i njihov proizvod apsolutno konvergentan i važi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right)$$

Primer

Red $\sum\limits_{n=0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ konvergira (ali ne apsolutno).

Red $\left(\sum\limits_{n=0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right)^2$ ne konvergira.