

1. Odrediti broj binarnih reči dužine 5 koje počinju sa 0 ili se završavaju sa 1.

Neka je A skup reči dužine 5 koje počinju sa 0, a B skup reči koje se završavaju sa 1. Broj reči koje počinju sa 0 jednak je broju reči koje se završavaju sa 1, a taj broj je 2^4 . Preseku skupova A i B pripadaju sve reči dužine 5 koje počinju sa 0 i završavaju se sa 1. Primenom principa uključenja isključenja dobijamo

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 16 + 16 - 8 = 24.$$

2. Izračunati

$$\sum_{\substack{i+j+k=3 \\ 0 < i, j, k \leq 3}} \binom{3}{i, j, k} 2^i = \binom{3}{1, 1, 1} 2^1 = 3! \cdot 2 = 12.$$

3. Napisati tablicu Stirlingovih brojeva $S(m, n)$ druge vrste za $1 \leq m \leq 4$.

(m, n)	1	2	3	4
1	1			
2	1	1		
3	1	3	1	
4	1	7	6	1

4. Neka je $|A| = 4$ i $|B| = 3$. Odrediti broj "na" preslikavanja skupa A u skup B , koristeći tablicu iz prethodnog zadatka.

Broj bijektivnih preslikavanja skupa A u B jednak je

$$|\{f : A \rightarrow B : f \text{ je „na”}\}| = 3! \cdot S(4, 3) = 6 \cdot 6 = 36$$

5. Rešiti rekurentnu relaciju $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$.

Karakteristična jednačina:

$$k^2 - k - 1 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Odatle je

$$f_n = \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Na osnovu početnih uslova, zaključujemo da važi

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\beta &= 1 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} \beta &= -\alpha \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\alpha &= 1 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} \beta &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \alpha &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Rešenje rekurentne relacije je

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, n \geq 0.$$

6. ("usmeni") **Napisati i dokazati Paskalov identitet.**

Za cele brojeve n i m , $1 \leq m \leq n$, važi

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Dokaz.

1. način (kombinatorno)

Posmatrajmo skup A sa $n \geq 1$ elemenata i izaberimo proizvoljno element $a \in A$. Neka je

S_m - skup podskupova skupa A sa m elemenata;

S_m^a - skup podskupova skupa A sa m elemenata koji sadrže a ; i

$S_m^{\bar{a}}$ - skup podskupova skupa A sa m elemenata koji ne sadrže a .

Tada je

$$S_m = S_m^a \cup S_m^{\bar{a}}, \quad S_m^a \cap S_m^{\bar{a}} = \emptyset.$$

Broj podskupova skupa A sa m elemenata koji sadrže a jednak je broju načina da iz skupa od $n-1$ elemenata $(A \setminus \{a\})$ izaberemo preostalih $m-1$ elemenata, a to je $\binom{n-1}{m-1}$.

Broj podskupova skupa A sa m elemenata koji ne sadrže a jednak je broju načina da iz skupa od $n-1$ elemenata $(A \setminus \{a\})$ izaberemo svih m elemenata, a to je $\binom{n-1}{m}$.

Prema principu zbira

$$|S_m| = |S_m^a| + |S_m^{\bar{a}}|, \text{ tj. } \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}.$$

2. način (algebarski)

Koristeći definiciju i osobine binomnog koeficijenta, dobijamo

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} &= \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} + \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} \\ &= \frac{m \cdot (n-1)! + (n-m) \cdot (n-1)!}{m!(n-m)!} \\ &= \frac{(m+n-m) \cdot (n-1)!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m} \end{aligned}$$