Linearne transformacije

Definicija 1 *Neka su $\mathcal{V}_1 = (V_1, F, +_1, \cdot_1)$ i $\mathcal{V}_2 = (V_2, F, +_2, \cdot_2)$ vektorski prostori nad istim poljem $\mathcal{F} = (F, +, \cdot)$. Funkcija $f : V_1 \to V_2$ je* ***linearna transformacija*** *(homomorfizam) iz vektorskog prostora $\mathcal{V}_1$ u vektorski prostor $\mathcal{V}_2$ ako za sve vektore $x, y \in V_1$ i svaki skalar $\alpha \in F$ važi*

(LT1) $f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y)$,

(LT2) $f(\alpha \cdot_1 x) = \alpha \cdot_2 f(x)$.

Teorema 1 *Neka su $\mathcal{V}_1 = (V_1, F, +_1, \cdot_1)$ i $\mathcal{V}_2 = (V_2, F, +_2, \cdot_2)$ vektorski prostori nad istim poljem $\mathcal{F} = (F, +, \cdot)$. Funkcija $f : V_1 \to V_2$ je linearna transformacija iz vektorskog prostora $\mathcal{V}_1$ u vektorski prostor $\mathcal{V}_2$ ako za svaka dva vektora $x, y \in V_1$ i svaka dva skalara $\alpha, \beta \in F$ važi*

(LT) $f(\alpha \cdot_1 x +_1 \beta \cdot_1 y) = \alpha \cdot_2 f(x) +_2 \beta \cdot_2 f(y)$.

Teorema 2 *Svaka linearna transformacija $f : V_1 \to V_2$ preslikava nula-vektor prostora $\mathcal{V}_1 = (V_1, F, +, \cdot)$ u nula-vektor prostora $\mathcal{V}_2 = (V_2, F, +, \cdot)$.*

Odnosno, ako je f linearna transformacija, tada je $f(0) = 0$.

Definicija 2

(a) ***Jezgro linearne transformacije*** *$f : V_1 \to V_2$, u oznaci* $\mathrm{Ker}(f)$*, je skup svih vektora iz V_1 koji se preslikavaju u nula-vektor prostora $\mathcal{V}_2$, odnosno*

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in V_1 \mid f(x) = \mathbb{O}\}.$$

(b) ***Slika linearne transformacije*** *$f : V_1 \to V_2$, u oznaci* $\mathrm{Img}(f)$*, je skup svih vektora prostora $\mathcal{V}_2$ koji se dobijaju preslikavanjem vektora prostora $\mathcal{V}_1$, odnosno*

$$\mathrm{Img}(f) = \{y \in V_2 \mid \exists x \in V_1,\ f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in V_1\}.$$

Teorema 3 *Za linearnu transformaciju $f : V_1 \to V_2$ važi da je njeno jezgro vektorski prostor, odnosno,* $(\mathrm{Ker}(f), F, +_1, \cdot_1)$ *je potprostor prostora $\mathcal{V}_1 = (V_1, F, +_1, \cdot_1)$.*

Teorema 4 *Za linearnu transformaciju $f : V_1 \to V_2$ važi da je skup njenih slika vektorski prostor, odnosno,* $(\mathrm{Img}(f), F, +_2, \cdot_2)$ *je potprostor prostora $\mathcal{V}_2 = (V_2, F, +_2, \cdot_2)$.*

Svaka linearna transformacija $f : F^n \to F^m$ se može jednoznačno identifikovati sa njoj odgovarajućom matricom $M_f = \left[\alpha_{ij}\right]_{m \times n}$ nad poljem F, takvom da za sve $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F^n$ i $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in F^m$ važi

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad M_f \cdot [x] = [y]$$

gde su $[x] = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ i $[y] = [y_1, y_2, \ldots, y_m]^T$ matrice-kolone koje odgovaraju vektorima x i y.

Teorema 5 *Neka su $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ i $\mathcal{V}_3$ vektorski prostori nad istim poljem, i neka su funkcije $f : V_1 \to V_2$ i $g : V_2 \to V_3$ linearne transformacije. Tada je i $h = g \circ f : V_1 \to V_3$ linearna transformacija, i pri tome, ako su M_f i M_g matrice linearnih transformacija f i g redom, tada je $M_h = M_g \cdot M_f$ matrica linearne transformacije h.*

Definicija 3 *Linearna transformacija f je* **regularna** *ako i samo ako je ona bijektivna, tj. ako i samo ako je izomorfizam.*

Definicija 4 *Linearna transformacija f je regularna ako i samo ako je njena matrica M_f kvadratna i regularna, odnosno* $\det M_f \neq 0$.

- Linearna transformacija je izomorfizam ako i samo ako bazu preslikava na bazu.
- Linearna transformacija $f : V_1 \to V_2$ određena je slikama bilo koje baze iz V_1.
- Skup svih linearnih preslikavanja prostora V_1 u V_2 označavamo sa $Hom(V_1, V_2)$.

Zadatak 1 *Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisana sa $f(x, y) = (4x - 5y, 2x + 7y)$. Proveriti po definiciji da li je f linearna transformacija.*

Rešenje: Funkcija f je linearna transformacija ako za svaka dva vektora $a, b \in \mathbb{R}^2$ i svaka dva skalara $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ važi $f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b)$. Neka su $a = (x, y)$ i $b = (u, v)$ iz $\mathbb{R}^2$. Tada je

$$\begin{aligned}
f(\alpha a + \beta b) &= f(\alpha(x, y) + \beta(u, v)) = f((\alpha x, \alpha y) + (\beta u, \beta v)) = f(\alpha x + \beta u, \alpha y + \beta v) = \\
&= (4(\alpha x + \beta u) - 5(\alpha y + \beta v), 2(\alpha x + \beta u) + 7(\alpha y + \beta v)) = \\
&= (4\alpha x - 5\alpha y + 4\beta u - 5\beta v, 2\alpha x + 7\alpha y + 2\beta u + 7\beta v) = \\
&= (4\alpha x - 5\alpha y, 2\alpha x + 7\alpha y) + (4\beta u - 5\beta v, 2\beta u + 7\beta v) = \\
&= \alpha(4x - 5y, 2x + 7y) + \beta(4u - 5v, 2u + 7v) = \alpha f(x, y) + \beta f(u, v) = \alpha f(a) + \beta f(b).
\end{aligned}$$

□

Zadatak 2 *Neka su $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ funkcije definisane na sledeći način: $f(x, y, z) = (2, -3, 1) \times (x, y, z) + (x, y, z) \times (3, 0, -1)$, g je projekcija tačke prostora $\mathbb{R}^3$ na xOy ravan (prostor $\mathbb{R}^2$) i $h(x, y) = (2x - 6y, x + y, 3x + 5y)$. Dokazati da je funkcija $T = h \circ g \circ f$ linearna transformacija, i odrediti njenu matricu.*

Rešenje: Za funkciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ imamo

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= (2, -3, 1) \times (x, y, z) + (x, y, z) \times (3, 0, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \\
&= (-y - 3z, x - 2z, 3x + 2y) + (-y, x + 3z, -3y) = (-2y - 3z, 2x + z, 3x - y).
\end{aligned}$$

Funkcija $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je $g(x, y, z) = (x, y)$.

Dokaz da je funkcija T linearna transformacija (i da odredimo njenu matricu) možemo uraditi na dva načina:

- <u>1. način:</u> Funkcija $T = h \circ g \circ f$ je kompozicija linearnih transformacija, pa je i ona linearna transformacija i jednaka je:

$$\begin{aligned}
T(x, y, z) &= (h \circ g \circ f)(x, y, z) = h(g(-2y - 3z, 2x + z, 3x - y)) = h(-2y - 3z, 2x + z) = \\
&= (2(-2y - 3z) - 6(2x + z), -2y - 3z + 2x + z, 3(-2y - 3z) + 5(2x + z)) = \\
&= (-12x - 4y - 12z, 2x - 2y - 2z, 10x - 6y - 4z),
\end{aligned}$$

  a njena matrica je $M_T = \begin{bmatrix} -12 & -4 & -12 \\ 2 & -2 & -2 \\ 10 & -6 & -4 \end{bmatrix}$.

- <u>2. način:</u> Matrice linearnih transformacija f, g i h su redom
$M_f = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $M_h = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.
Na osnovu teoreme 5 funkcija T je linearna transformacija, i njena matrica je
$$M_T = M_h \cdot M_g \cdot M_f = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -4 & -12 \\ 2 & -2 & -2 \\ 10 & -6 & -4 \end{bmatrix},$$
te je $T(x, y, z) = (-12x - 4y - 12z, 2x - 2y - 2z, 10x - 6y - 4z)$.

□

Zadatak 3 *Dati su sledeći skupovi vektora* $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ *i* $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, *gde su vektori* $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (1, 2, -1)$, $a_3 = (-1, -1, -1)$, $b_1 = (1, 2, -3)$, $b_2 = (2, 1, 4)$ *i* $b_3 = (1, 1, 1)$.

(a) Dokazati da su A i B baze prostora $\mathbb{R}^3$.

(b) Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ *koji u bazi A ima reprezentaciju* $x_A = (-2, 2, 1)_A$ *predstaviti u bazi B.*

(c) Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ *koji u standardnoj bazi ima reprezentaciju* $x_E = (-4, 12, 8)_E$ *predstaviti u bazi A.*

Rešenje:

(a) Neka je matrica $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ i matrica $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Determinanta matrice A je $det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4$, a matrice B je $det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2$. Pošto je $det(A) \neq 0$, sledi da su vektori a_1, a_2 i a_3 linearno nezavisni, što znači da čine bazu 3−dimenzionalnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Analogno važi i za skup B.

(b) Za vektor x važi
$$A \cdot x_A = B \cdot x_B = E \cdot x_E.$$
Prvo ćemo vektor x predstaviti u standardnoj bazi $E = \{e_1, e_2, e_3\}$:

$$x = (-2, 2, 1)_A = -2a_1 + 2a_2 + a_3 = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1, -1, -9)_E$$

Iz reprezentacije vektora x u standardnoj bazi dobijemo vektor x u bazi B:

$$x = (\alpha,\beta,\gamma)_B = \alpha b_1+\beta b_2+\gamma b_3 = \alpha\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha+2\beta+\gamma\\2\alpha+\beta+\gamma\\-3\alpha+4\beta+\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\-9\end{bmatrix}$$

Odavde se dobija sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcr}\alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & -1\\ 2\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & -1\\ -3\alpha & + & 4\beta & + & \gamma & = & -9\\ \hline\end{array}$$

Rešenje je: $\alpha = 4, \beta = 4, \gamma = -13$, odnosno $x = (4, 4, -13)_B$.

* Zadatak možemo rešiti i preko matrica. Kako je $B\cdot x_B = A\cdot x_A$, sledi da je $x_B = B^{-1}\cdot A\cdot x_A$.

(c) Iz reprezentacije vektora x u standardnoj bazi dobijemo vektor x u bazi A:

$$x = (\alpha,\beta,\gamma)_A = \alpha a_1+\beta a_2+\gamma a_3 = \alpha\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha+\beta-\gamma\\2\alpha+2\beta-\gamma\\3\alpha-\beta-\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\12\\8\end{bmatrix}$$

Odavde se dobija sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcr}\alpha & + & \beta & - & \gamma & = & -4\\ 2\alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & 12\\ 3\alpha & - & \beta & - & \gamma & = & 8\\ \hline\end{array}$$

Rešenje je: $\alpha = 11, \beta = 5, \gamma = 20$, odnosno $x = (11, 5, 20)_A$.

* Zadatak možemo rešiti i preko matrica. Kako je $A\cdot x_A = E\cdot x_E$, sledi da je $x_A = A^{-1}\cdot x_E$.

□

Zadatak 4 *Za sledeće funkcije ispitati, odnosno diskutovati po parametrima kada su linearne transformacije, i u slučajevima kada jesu, naći njihove matrice i odrediti (diskutovati) rang tih matrica.*

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = \left(ax + y^b, bx - z\right)$.

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = ax + bxy + cy$.

(c) $j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $j(x,y,z) = (a^x + \cos(b)yz^c, \alpha x + \beta y + \gamma z)$.

(d) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $h(x,y) = \left(x^{\cos\alpha} - \beta^y, \gamma, \alpha^2 x + \beta^2 y\right)$.

Rešenje:

(a) Da bi f bila linearna transformacija, svaka komponenta slike mora biti oblika $t_1x+t_2y+t_3z$ za neke $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$. Izraz $ax + y^b$ je traženog oblika ako i samo ako je $b = 1$, a za a nema ograničenja. Izraz $bx - z$ je za svako b traženog oblika.

Dakle, f je linearna transformacija ako i samo ako je $b = 1$. U tom slučaju je $f(x,y,z) = (ax + y, x - z)$, i matrica ove linearne transformacije je $M_f = \begin{bmatrix}a & 1 & 0\\1 & 0 & -1\end{bmatrix}$. Matrica M_f je ranga 2 za svako $a \in \mathbb{R}$.

(b) Mora biti $b = 0$, što je i jedini uslov da g bude linearna transformacija. U tom slučaju je funkcija $g(x,y) = ax + cy$, i odgovarajuća matrica je $M_g = \begin{bmatrix} a & c \end{bmatrix}$. Prema tome je $\operatorname{rang}\left(M_g\right) = \begin{cases} 0 & , \quad a = c = 0 \\ 1 & , \quad a \neq 0 \ \vee \ c \neq 0 \end{cases}$.

(c) Analizirajući redom komponente slike $(a^x + \cos(b) y z^c, \alpha x + \beta y + \gamma z)$, zaključujemo da kod prve komponente mora biti $a = 0$, i s druge strane mora biti ili $\cos(b) = 0$ ili $c = 0$, kod druge komponente $\alpha x + \beta y + \gamma z$ nema ograničenja za α, β i γ.

Prema tome, zaključujemo da je funkcija j linearna transformacija ako i samo ako je $a = 0 \ \wedge \ \left(b \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ \middle| \ k \in \mathbb{Z}\right\} \ \vee \ c = 0\right)$.

(c.1) U slučaju $a = 0 \ \wedge \ b \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ \middle| \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ je $j(x,y,z) = (0, \alpha x + \beta y + \gamma z)$,

$$M_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}, \operatorname{rang}\left(M_j\right) = \begin{cases} 0 & , \quad \alpha = \beta = \gamma = 0 \\ 1 & , \quad \alpha \neq 0 \ \vee \ \beta \neq 0 \ \vee \ \gamma \neq 0 \end{cases}.$$

(c.2) U slučaju $a = 0 \ \wedge \ c = 0$ je $j(x,y,z) = (\cos(b) y, \alpha x + \beta y + \gamma z)$,

$$M_j = \begin{bmatrix} 0 & \cos(b) & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}, \operatorname{rang}\left(M_j\right) = \begin{cases} 0 & , \quad \alpha = \beta = \gamma = 0 \ \wedge \ b \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ \middle| \ k \in \mathbb{Z}\right\} \\ 2 & , \quad b \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ \middle| \ k \in \mathbb{Z}\right\} \ \wedge \ (\alpha \neq 0 \ \vee \ \gamma \neq 0) \\ 1 & , \quad \text{inače} \end{cases}.$$

(d) Analizirajući redom komponente slike $\left(x^{\cos\alpha} - \beta^y, \gamma, \alpha^2 x + \beta^2 y\right)$, zaključujemo da kod prve komponente mora biti $\cos\alpha = 1$ i $\beta = 0$ (odnosno $\alpha \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ i $\beta = 0$) ili $\cos\alpha = 0$ i $\beta = 1$ (odnosno $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ \middle| \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ i $\beta = 1$), kod druge komponente $\gamma = 0$, a kod treće komponente $\alpha^2 x + \beta^2 y$ nema ograničenja za α i β.

Dakle, h je linearna transformacija ako i samo ako je $(\alpha \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \ \wedge \ \beta = 0 \ \wedge \ \gamma = 0) \ \vee \ \left(\alpha \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ \middle| \ k \in \mathbb{Z}\right\} \ \wedge \ \beta = 1 \ \wedge \ \gamma = 0\right)$.

(d.1) U slučaju $\alpha \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \ \wedge \ \beta = 0 \ \wedge \ \gamma = 0$ je $h(x,y) = \left(x, 0, (2k\pi)^2 x\right)$, i odgovarajuća matrica je $M_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ (2k\pi)^2 & 0 \end{bmatrix}$. Pri tome je $\operatorname{rang}(M_h) = 1$.

(d.2) U slučaju $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ \middle| \ k \in \mathbb{Z}\right\} \ \wedge \ \beta = 1 \ \wedge \ \gamma = 0$ je $h(x,y) = \left(0, 0, (\frac{\pi}{2} + k\pi)^2 x + y\right)$, i odgovarajuća matrica je $M_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ (\frac{\pi}{2} + k\pi)^2 & 1 \end{bmatrix}$. Pri tome je $\operatorname{rang}(M_h) = 1$.

$\square$

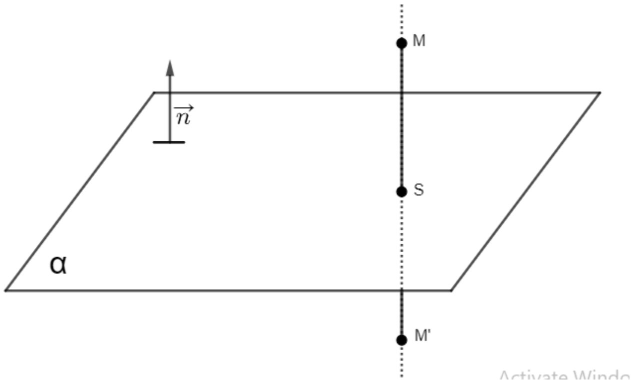
Zadatak 5 *Neka je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ravanska simetrija u odnosu na ravan α, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projekcija na ravan α, gde je $\alpha : x + y + z = 0$. Da li su f i g linearne transformacije i ako jesu, naći matrice M_f i M_g i proveriti da li su funkcije f i g izomorfizmi.*

Rešenje: Funkcije f i g možemo zapisati: $f(M) = M'$ i $g(M) = S$. Tako da treba da nađemo tačke M' i S.

Tačka S je projekcija tačke M na ravan α:

$$\vec{r}_S = \vec{r}_M + \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_M)\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\cdot\vec{n},$$

gde je $\vec{r}_0 = (0,0,0)$ tačka ravni α i $\vec{n} = (1,1,1)$ normala ravni α.
Tačka M' je simetrična tačka tački M u odnosu na ravan α, tako da je S sredina duži $\overrightarrow{MM'}$:
$\vec{r}_S = \dfrac{\vec{r}_M + \vec{r}_{M'}}{2}$, odnosno $\vec{r}_{M'} = 2\vec{r}_S - \vec{r}_M$.



$$\begin{aligned}
\vec{r}_S &= \vec{r}_M - \frac{\vec{r}_M\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\cdot\vec{n} = (x,y,z) - \frac{(x,y,z)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)}\cdot(1,1,1)\\
&= (x,y,z) - \frac{x+y+z}{3}\cdot(1,1,1) = (x,y,z) - \frac{1}{3}\cdot(x+y+z, x+y+z, x+y+z)\\
&= (\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z)
\end{aligned}$$

Tako da je funkcija g jednaka:

$$g(x,y,z) = (\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z).$$

Odgovarajuća matrica je

$$M_g = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}.$$

Linearna transformacija g nije izomorfizam, jer je $det(M_g) = 0$.

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{M'} &= 2\vec{r}_S - \vec{r}_M = 2\cdot(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z) - (x,y,z)\\
&= (\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z, -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z, -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z)
\end{aligned}$$

Tako da je funkcija f jednaka:

$$f(x,y,z) = (\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z, -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z, -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z).$$

Odgovarajuća matrica je

$$M_f = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}.$$

Linearna transformacija f jeste izomorfizam, jer je $det(M_f) = -1 \neq 0$. □

Zadatak 6 *Neka je* $\vec{r}_Q = (a,a,b)$ *i* $\vec{n} = (0,1,0)$, *gde su* $a, b \in \mathbb{R}$, *i neka je* $f_{a,b} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *translacija za vektor* $\vec{r}_Q$ *, a* $g_{a,b} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *projekcija na ravan* $\alpha : \vec{n}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_Q) = 0$ *i* $h_{a,b} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definisana sa* $h(\vec{v}) = (\vec{r}_Q\cdot\vec{v})\cdot\vec{n}$ *, gde je* $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$*. Za koje a i b su* $f_{a,b}$, $g_{a,b}$ *i* $h_{a,b}$ *linearne transformacije i u tom slučaju odrediti njihove matrice i rangove.*

Rešenje: Funkcija $f_{a,b}$ je

$$f_{a,b}(x,y,z) = (x,y,z) + (a,a,b) = (x+a, y+a, z+b),$$

i $f_{a,b}$ je linearna transformacija za $a = 0$ i $b = 0$, odnosno $f(x,y,z) = (x,y,z)$. Odgovarajuća matrica je $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Pri tome je rang$\left(M_f\right) = 3$.

Funkcija $g_{a,b}$ je

$$g_{a,b}(x,y,z) = (x,y,z) + \frac{((a,a,b)-(x,y,z))\cdot(0,1,0)}{(0,1,0)\cdot(0,1,0)}\cdot(0,1,0) = (x,y,z)+(a-y)\cdot(0,1,0) = (x,a,z),$$

i $g_{a,b}$ je linearna transformacija za $a = 0$, odnosno $g(x,y,z) = (x,0,z)$. Odgovarajuća matrica je $M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Pri tome je rang$\left(M_g\right) = 2$.

Funkcija $h_{a,b}$ je

$$h_{a,b}(x,y,z) = ((a,a,b)\cdot(x,y,z))\cdot(0,1,0) = (ax+ay+bz)\cdot(0,1,0) = (0, ax+ay+bz, 0),$$

i $h_{a,b}$ je linearna transformacija za svako $a, b \in \mathbb{R}$. Odgovarajuća matrica je $M_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Pri tome je rang $(M_h) = \begin{cases} 0 & , \quad a = b = 0 \\ 1 & , \quad a \neq 0 \ \vee \ b \neq 0 \end{cases}$. □

Zadatak 7 *Neka je $\vec{n} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ i neka funkcije f, g i h preslikavaju prostor slobodnih vektora V u samog sebe, a definisane su sa:*

$$f(\vec{x}) = (\vec{x}\times\vec{n})\times\vec{n}, \quad g(\vec{x}) = (\vec{x}\cdot\vec{n})\cdot\vec{n} \quad i \quad h(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{n}|^2}\cdot f(\vec{x}) + \frac{1}{|\vec{n}|^2}\cdot g(\vec{x}).$$

(a) Dokazati da su f, g i h linearne transformacije.

(b) Napisati redom matrice A, B i C linearnih transformacija f, g i h.

(c) Naći rangove matrica A, B i C. Izračunati h^{-1} i ispitati da li je $C^2 = I$.

(d) Odrediti dimenzije vektorskih prostora $f(V)$, $g(V)$ i $h(V)$.

Rešenje:

(a) Kako je

$$f(x,y,z) = ((x,y,z)\times(2,-2,1))\times(2,-2,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \times (2,-2,1) =$$

$$= (y+2z, 2z-x, -2x-2y)\times(2,-2,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ y+2z & 2z-x & -2x-2y \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-5x-4y+2z, -4x-5y-2z, 2x-2y-8z),$$

sledi da funkcija $f(x,y,z)$ jeste linearna transformacija. Kako je

$$g(x,y,z) = ((x,y,z)\cdot(2,-2,1))\cdot(2,-2,1) = (2x-2y+z)\cdot(2,-2,1) =$$
$$= (4x-4y+2z, -4x+4y-2z, 2x-2y+z),$$

sledi da funkcija $g(x,y,z)$ jeste linearna transformacija. Funkcija $h(x,y,z)$ je linearna kombinacija linearnih transformacija, tako da je i sama linearna transformacija.

(b) Matrice linearnih transformacija $f(x,y,z)$ i $g(x,y,z)$ su redom $A = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 2 \\ -4 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & -8 \end{bmatrix}$ i

$B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Matrica linearne transformacije $h(x,y,z)$ je $C = \frac{1}{|\vec{n}|^2}\cdot(A+B)$, gde

je $|\vec{n}|^2 = \left(\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\right)^2 = 9$. Tako da je $C = \frac{1}{9}\cdot(A+B) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{bmatrix}$.

(c) $$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 2 \\ -4 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & -8 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{bmatrix} -5 & -4 & 2 \\ -9 & -9 & 0 \\ -18 & -18 & 0 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{bmatrix} -5 & -4 & 2 \\ -9 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2$$

(1) Prvu vrstu dodajemo drugoj vrsti i prvu vrstu množimo sa 4 i dodajemo trećoj vrsti.
(2) Drugu vrstu množimo sa -2 i dodajemo trećoj vrsti.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{(3)}{\Rightarrow} \operatorname{rang}(B) = 1$$

(3) Kako su sve vrste međusobno proporcionalne, sledi da je $\operatorname{rang}(B) = 1$.

$$C = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{bmatrix} \overset{(4)}{\sim} \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & -8 & 4 \\ 0 & 63 & -36 \\ 0 & -36 & 9 \end{bmatrix} \overset{(5)}{\sim} \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 0 & -81 & -36 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang}(C) = 3$$

(4) Prvu vrstu množimo sa -8 i dodajemo drugoj vrsti i prvu vrstu množimo sa 4 i dodajemo trećoj vrsti.
(5) Treću kolonu množimo sa 4 i dodajemo drugoj koloni.

Izračunamo C^2:

$$C^2 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{bmatrix} = \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Kako je $C^2 = I$ sledi da je $C^{-1} = C$, što ujedno znači i da je $h^{-1} = h$.

(d) $dim(f(V)) = 2$,
$dim(g(V)) = 1$,
$dim(h(V)) = 3$.

□

Zadatak 8 *Neka je* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *linearna transformacija vektorskog prostora uređenih trojki u samog sebe za koju važi* $f(1,0,1) = (5,-4,-3)$, $f(1,-1,0) = (1,-1,0)$ *i* $f(1,1,1) = (7,-5,-5)$.

(a) Napisati vektore $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *i* $(0,0,1)$ *kao linearne kombinacije vektora* $(1,0,1)$, $(1,-1,0)$ *i* $(1,1,1)$.

(b) Odrediti vektore $f(1,0,0)$, $f(0,1,0)$ i $f(0,0,1)$.

(c) Odrediti linearnu transformaciju $f(x,y,z)$.

(d) Napisati matricu M linearne transformacije f u standardnoj bazi i naći njen rang.

(e) Naći M^{-1} i f^{-1} (ako postoje).

Rešenje:

(a) (1) Vektor $(1,0,0)$:

$(1,0,0) = \alpha(1,0,1) + \beta(1,-1,0) + \gamma(1,1,1)$

Odavde se dobija sistem:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 1 \\ & - & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & & & + & \gamma & = & 0 \\ \hline \end{array}$$

Rešenje je: $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = 1$.

(2) Vektor $(0,1,0)$:

$(0,1,0) = \alpha(1,0,1) + \beta(1,-1,0) + \gamma(1,1,1)$ Odavde se dobija sistem:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ & - & \beta & + & \gamma & = & 1 \\ \alpha & & & + & \gamma & = & 0 \\ \hline \end{array}$$

Rešenje je: $\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = 1$.

(3) Vektor $(0,0,1)$:

$(0,0,1) = \alpha(1,0,1) + \beta(1,-1,0) + \gamma(1,1,1)$ Odavde se dobija sistem:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ & - & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & & & + & \gamma & = & 1 \\ \hline \end{array}$$

Rešenje je: $\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = -1$.

(b)
$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= f(-(1,0,1) + (1,-1,0) + (1,1,1)) = -f(1,0,1) + f(1,-1,0) + f(1,1,1) \\ &= -(5,-4,-3) + (1,-1,0) + (7,-5,-5) = (3,-2,-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0,1,0) &= f(-(1,0,1) + (1,1,1)) = -f(1,0,1) + f(1,1,1) \\ &= -(5,-4,-3) + (7,-5,-5) = (2,-1,-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0,0,1) &= f(2(1,0,1) - (1,-1,0) - (1,1,1)) = 2f(1,0,1) - f(1,-1,0) - f(1,1,1) \\ &= 2(5,-4,-3) - (1,-1,0) - (7,-5,-5) = (2,-2,-1) \end{aligned}$$

(c) Linearnu transformaciju $f(x,y,z)$ možemo naći na dva načina.

1.način:
$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) = xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) \\ &= x(3,-2,-2) + y(2,-1,-2) + z(2,-2,-1) \\ &= (3x + 2y + 2z, -2x - y - 2z, -2x - 2y - z) \end{aligned}$$

2.način: Neka su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -4 & -1 & -5 \\ -3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$. Matricu linearne transformacije $f(x,y,z)$ možemo naći na sledeći način: $M \cdot A = B$, odnosno $M = B \cdot A^{-1}$.

$$M = B \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -4 & -1 & -5 \\ -3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(d) $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}\,(M) = 3$

(1) Treću vrstu množimo sa -2 i dodajemo drugoj vrsti i treću vrstu množimo sa 2 i dodajemo prvoj vrsti.
(2) Prvu kolonu množimo sa -2 i dodajemo drugoj koloni.

(e) Prvo izračunamo $det(M)$:

$$det(M) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Kako $det(M)$ nije 0, za matricu M postoji inverz:

$$M^{-1} = -1 \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T = -\begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} = M$$

Kako je $M^{-1} = M$ sledi da je i $f^{-1} = f$.

□

Tvrđenje 1 *Neka je M matrica linearne transformacije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Tada linearna transformacija f je:*

1. *sirjektivna (epimorfizam) akko je $n \geqslant m$ i $rangM = m$,*
2. *injektivna (monomorfizam) akko je $n \leqslant m$ i $rangM = n$,*
3. *bijektivna (izomorfizam) akko je $n = m$ i $rangM = n$.*

Primeri sa testa:

- Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definisana sa $f(x, y) = (x - y, x + y, 2x + 5y)$ je:
1) sirjektivna **2)** injektivna **3)** bijektivna **4)** izomorfizam **5)** ništa od prethodnog.
- Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definisana sa $f(x, y) = (x - y, -x + y, -5x + 5y)$ je:
1) sirjektivna **2)** injektivna **3)** bijektivna **4)** izomorfizam **5)** ništa od prethodnog.
- Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definisana sa $f(x, y, z) = (x - y - z, x + y + z)$ je:
1) sirjektivna **2)** injektivna **3)** bijektivna **4)** izomorfizam **5)** ništa od prethodnog.
- Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definisana sa $f(x, y, z) = (x - y - z, -2x + 2y + 2z)$ je:
1) sirjektivna **2)** injektivna **3)** bijektivna **4)** izomorfizam **5)** ništa od prethodnog.
- Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisana sa $f(x, y) = (x - y, -2x + y)$ je:
1) sirjektivna **2)** injektivna **3)** bijektivna **4)** izomorfizam **5)** ništa od prethodnog.
- Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisana sa $f(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$ je:
1) sirjektivna **2)** injektivna **3)** bijektivna **4)** izomorfizam **5)** ništa od prethodnog.
- Postoji linearna transformacija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koju važi da je:
1) sirjektivna **2)** injektivna **3)** bijektivna **4)** izomorfizam **5)** ništa od prethodnog.

- Na pisati bar jednu, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ za koju važi da:
  1) je injektivna $f(x) =$ **2)** nije injektivna $f(x) =$

  3) je sirjektivna $f(x) =$ **4)** nije sirjektivna $f(x) =$

- Napisati bar jednu, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ za koju važi da:

  1) je injektivna $f(x, y) =$ **2)** nije injektivna $f(x, y) =$

  3) je sirjektivna $f(x, y) =$ **4)** nije sirjektivna $f(x, y) =$

- Napisati bar jednu, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ za koju važi da:

  1) je injektivna $f(x, y, z) =$ **2)** nije injektivna $f(x, y, z) =$

  3) je sirjektivna $f(x, y, z) =$ **4)** nije sirjektivna $f(x, y, z) =$