

**PREDISPITNE OBAVEZE**

**1. GRANIČNE VREDNOSTI:**

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 3}{n^2 - 4} \right)^{4n^2} =$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 7^{n+2}}{7^{n+1} + 2^{n+3}} =$

c) Kada za niz  $\{a_n\}$  u metričkom prostoru  $\mathbb{R}$  kažemo da teži  $\infty$ , kada  $n \rightarrow \infty$ ?

d) Navesti četiri osobine konvergentnih realnih nizova:

1)

2)

3)

4)

e) Neka su dati metrički prostori  $(X, d_x)$  i  $(Y, d_y)$ . Dati definiciju neprekidnosti funkcije  $f : D \rightarrow Y$ ,  $D \subset X$ , u tački  $a \in D$ :

**2. FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE (6 poena):**

a) Odrediti prvi izvod  $y'_x$  funkcije  $y = x^{e^x}$ .

b) Odrediti prvi izvod  $y'_x$  funkcije  $y = t^2 + 3$ ,  $x = \ln t + t^2$ .

c) Kada je funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  monotono rastuća nad intervalom  $I \subset D$  (dati definiciju)?

d) Kada za funkciju  $f(x)$  definisanu nad intervalom  $(a, b)$  kažemo da je diferencijabilna u tački  $x \in (a, b)$  (dati definiciju)?

Šta je diferencijal funkcije  $f(x)$ ? Napisati diferencijal funkcije  $f(x) = \sin x$ .

e) Napisati Maklorenov polinom  $P_4(x)$  četvrtog stepena za funkciju  $f(x) = \cos x$ :

### 3. FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH:

a) Odrediti totalni diferencijal drugog reda funkcije  $f(x, y) = x^y + xy$  u tački  $A(2, 2)$ .

b) Za funkciju  $z = z(x, y)$  zadatu sa  $3x^3 - 2y^2 + z^3 = xe^z$  odrediti  $\frac{\partial z}{\partial x}$ .

c) Ako je  $f(t)$  dva puta diferencijabilna funkcija i  $z(x, y) = (x^2 + y^2)f(x^2y)$ , odrediti  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

d) Za funkciju  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} + 3x & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  odrediti  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ .

e) Da li je tačka  $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  stacionarna tačka funkcije  $z = x^2 + y^2$  pod uslovom da je  $x + y = 1$ ? Objasniti.

## ISPIT

### 1. GRANIČNE VREDNOSTI:

a) Odrediti  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , ako je  $a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{16n^8 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{16n^8 + 2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{16n^8 + 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{16n^8 + 4n^2}}$ .

b) Ukoliko je moguće, odrediti konstante  $A$  i  $B$  tako da funkcija  $f(x) = \begin{cases} 7 + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} & , \quad x < 0 \\ A & , \quad x = 0 \\ \frac{\sin 3x}{\sin Bx} & , \quad x > 0 \end{cases}$  bude neprekidna.

### 2. FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE:

a) Detaljno ispitati funkciju  $f(x) = \frac{1 - \ln x^2}{1 + \ln x^2}$  i nacrtati njen grafik.

b) Da li jednačina  $\frac{1}{3(e-1)} = \frac{1}{x(1 + \ln x^2)^2}$  ima rešenje nad intervalom  $(1, e)$ ? Objasniti.

3. **FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH:** Odrediti ekstremne vrednosti funkcije  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$  uz uslov  $x + y + z = 3$ .

### 13.06.2015. MATEMATIČKA ANALIZA I - ZADACI

#### 1. INTEGRALI:

a) Izračunati  $\int \left( \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} + \frac{1}{x(\ln^2 x + 4)^2} \right) dx$ .

b) Izračunati površinu ograničenu parabolom  $y = x^2 - 2x$ , pravama  $x = -2$ ,  $x = 1$  i  $x$ -osom.

#### 2. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE:

a) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine  $\left( 3x^2y^2 + \frac{1}{y} \right) dx + \left( 2x^3y + 8y^3 - \frac{x}{y^2} \right) dy = 0$ .

b) Prelaskom na inverznu funkciju pokazati da se diferencijalna jednačina

$$-y'y''' + 3(y'')^2 + 3y''(y')^2 - (y - 2 + \sin 3y)(y')^5 = 0.$$

svodi na jednačinu  $x''' - 3x'' = y - 2 + \sin 3y$  i odrediti njeno opšte rešenje.

### 13.06.2015. MATEMATIČKA ANALIZA I - ZADACI

#### 1. INTEGRALI:

a) Izračunati  $\int \left( \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} + \frac{1}{x(\ln^2 x + 4)^2} \right) dx$ .

b) Izračunati površinu ograničenu parabolom  $y = x^2 - 2x$ , pravama  $x = -2$ ,  $x = 1$  i  $x$ -osom.

#### 2. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE:

a) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine  $\left( 3x^2y^2 + \frac{1}{y} \right) dx + \left( 2x^3y + 8y^3 - \frac{x}{y^2} \right) dy = 0$ .

b) Prelaskom na inverznu funkciju pokazati da se diferencijalna jednačina

$$-y'y''' + 3(y'')^2 + 3y''(y')^2 - (y - 2 + \sin 3y)(y')^5 = 0.$$

svodi na jednačinu  $x''' - 3x'' = y - 2 + \sin 3y$  i odrediti njeno opšte rešenje.

### 13.06.2015. MATEMATIČKA ANALIZA I - ZADACI

#### 1. INTEGRALI:

a) Izračunati  $\int \left( \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} + \frac{1}{x(\ln^2 x + 4)^2} \right) dx$ .

b) Izračunati površinu ograničenu parabolom  $y = x^2 - 2x$ , pravama  $x = -2$ ,  $x = 1$  i  $x$ -osom.

#### 2. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE:

a) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine  $\left( 3x^2y^2 + \frac{1}{y} \right) dx + \left( 2x^3y + 8y^3 - \frac{x}{y^2} \right) dy = 0$ .

b) Prelaskom na inverznu funkciju pokazati da se diferencijalna jednačina

$$-y'y''' + 3(y'')^2 + 3y''(y')^2 - (y - 2 + \sin 3y)(y')^5 = 0.$$

svodi na jednačinu  $x''' - 3x'' = y - 2 + \sin 3y$  i odrediti njeno opšte rešenje.

### 13.06.2015. MATEMATIČKA ANALIZA I - ZADACI

#### 1. INTEGRALI:

a) Izračunati  $\int \left( \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} + \frac{1}{x(\ln^2 x + 4)^2} \right) dx$ .

b) Izračunati površinu ograničenu parabolom  $y = x^2 - 2x$ , pravama  $x = -2$ ,  $x = 1$  i  $x$ -osom.

#### 2. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE:

a) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine  $\left( 3x^2y^2 + \frac{1}{y} \right) dx + \left( 2x^3y + 8y^3 - \frac{x}{y^2} \right) dy = 0$ .

b) Prelaskom na inverznu funkciju pokazati da se diferencijalna jednačina

$$-y'y''' + 3(y'')^2 + 3y''(y')^2 - (y - 2 + \sin 3y)(y')^5 = 0.$$

svodi na jednačinu  $x''' - 3x'' = y - 2 + \sin 3y$  i odrediti njeno opšte rešenje.

## 20.06.2015. MATEMATIČKA ANALIZA

### I KOLOKVIJUM

#### 1. (10 poena) GRANIČNE VREDNOSTI

a) Odrediti  $A$  i  $B$  tako da funkcija  $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} + \frac{x^2 + 4x}{x} & , \quad x < 0 \\ A + 3 \cos x & , \quad x = 0 \\ B \frac{\operatorname{tg} 6x}{\operatorname{tg} 3x} & , \quad x > 0 \end{cases}$  bude neprekidna u  $x = 0$ .

b) Pokazati da je niz  $\{b_n\}$  sa opštim članom  $b_n = \frac{\sin 4}{4} + \frac{\sin 4^2}{4^2} + \dots + \frac{\sin 4^n}{4^n}$  Košijev.

#### 2. (12 poena) FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE

Detaljno ispitati funkciju  $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$  i nacrtati njen grafik.

#### 3. (8 poena) FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije  $u(x, y, z) = x - 2y + 2z$  pod uslovom da je  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

### II KOLOKVIJUM

#### 1. (15 poena) INTEGRALI

a) Izračunati  $\int \left( \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin x}{(4 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x)} \right) dx$ .

b) Odrediti dužinu luka krive  $y = \ln x$ ,  $2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{6}$ .

#### 2. (15 poena) DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

a) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine  $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$ .

b) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine  $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = e^x(x-1)$ , ako je  $y_1 = e^x$  jedno rešenje njenog homogenog dela.

## I KOLOKVIJUM

1. (10 poena) **GRANIČNE VREDNOSTI**

- a) Koristeći princip monotonije pokazati da je niz  $\{a_n\}$  dat sa  $a_1 = 3$ ,  $a_{n+1} = \frac{9a_n + 4}{a_n + 6}$  konvergentan i odrediti njegovu graničnu vrednost.
- b) Pokazati da niz  $\{b_n\}$  sa opštim članom

$$b_n = \frac{1}{\sqrt[4]{81n^4 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{81n^4 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{81n^4 + 7n}}$$

konvergira i naći njegovu graničnu vrednost.

2. (12 poena) **FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE**

Detaljno ispitati funkciju  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1}$  i nacrtati njen grafik.

3. (8 poena) **FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH**

Naći tri pozitivna realna broja čiji je proizvod 27 tako da zbir kvadrata recipročnih vrednosti bude minimalan.

## II KOLOKVIJUM

1. (15 poena) **INTEGRALI**

- a) Izračunati  $\int \left( \frac{1}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+2x}} + \frac{x \cos x}{\sin^2 x} \right) dx$ .
- b) Primenom određenog integrala odrediti graničnu vrednost niza  $\{a_n\}$  sa opštim članom

$$a_n = \frac{1}{n} \ln \frac{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}{n^n}.$$

2. (15 poena) **DIFERENCIJALNE JEDNAČINE**

- a) Pokazati da diferencijalna jednačina

$$x dx + (4y^4 + 4x^2 y^2 + y) dy = 0$$

ima integracioni množitelj oblika  $h = h(x^2 + y^2)$  i odrediti njeno opšte rešenje.

- b) Koristeći metod varijacije konstanti rešiti diferencijalnu jednačinu  $y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}$ .

**I KOLOKVIJUM**1. (10 poena) **GRANIČNE VREDNOSTI**

a) Pokazati da je niz  $\{b_n\}$  dat sa  $b_n = \frac{\sin 3}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 3^2}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\sin 3^n}{n(n+1)}$  Košijev.

b) Izračunati  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 6}}{x^2 - 4x + 3}$ .

2. (12 poena) **FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE**

Detaljno ispitati funkciju  $y = \frac{1 + \ln x^2}{\sqrt[3]{x}}$  i skicirati njen grafik.

3. (8 poena) **FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH**

Proveriti da li funkcija  $z = x^3 + y^3 - 2xy$  ima u tačkama  $A(1, 1)$  i  $B(-1, -1)$  uslovni ekstrem uz uslov  $x^2 + y^2 = 2$ .

**II KOLOKVIJUM**1. (15 poena) **INTEGRALI**

a) Rešiti integral  $\int \left( x \ln(x^2 - 1) + \frac{x}{\sqrt{1 - 3x^2 - x^4}} \right) dx$ .

b) Data je funkcija  $g(x) = (x - \frac{3}{2})e^x$ . Izračunati površinu ograničenu krivom  $g(x)$ , pravama  $x = 1$  i  $x = 2$  i  $x$ -osom.

2. (15 poena) **DIFERENCIJALNE JEDNAČINE**

a) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine  $y' - \frac{y}{x} = y^3 \arctg(x^3 + 5)$ .

b) Smenom  $x = t^2$  svesti diferencijalnu jednačinu  $2xy'' + y' - 2y = \frac{x}{2}$  na jednačinu sa konstantnim koeficijentima i odrediti njeno opšte rešenje.

**I KOLOKVIJUM**1. (10 poena) **GRANIČNE VREDNOSTI**

a) Ispitati ograničenost, supremum, infimum, odrediti tačke nagomilavanja i graničnu vrednost (ukoliko postoji) za niz  $\{a_n\}$  sa opštim članom  $a_n = \frac{2n-1}{7n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

b) Odrediti počev od kog člana niza  $\{a_n\}$  sa opštim članom  $a_n = \frac{2n-1}{7n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , se svi naredni članovi nalaze u  $\varepsilon$ -okolini njegove granične vrednosti, za  $\varepsilon = 0,1$ .

c) Ukoliko je moguće, odrediti vrednost konstante  $A$  tako da funkcija  $f(x) = \begin{cases} A & , \quad x = 1 \\ (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} & , \quad x \in (0,1) \end{cases}$  bude neprekidna.

2. (12 poena) **FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE**

Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 2x^2}{x - 3}}.$$

3. (8 poena) **FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH**

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije  $z(x, y) = x^4 + 16y^4 - 4(x + 2y)^2$ .

**II KOLOKVIJUM**1. (15 poena) **INTEGRALI**

a) Izračunati  $\int \left( \frac{dx}{x(\ln^2 x + 4)^2} + \frac{dx}{\sqrt{x}(4 - \sqrt[3]{x})} \right)$ .

b) Primenom definicije određenog integrala odrediti graničnu vrednost niza  $\{a_n\}$  sa opštim članom

$$a_n = \frac{1}{n^2} \left( e^{\frac{n+1}{n}} + 2e^{\frac{n+2}{n}} + 3e^{\frac{n+3}{n}} + \dots + ne^2 \right).$$

2. (15 poena) **DIFERENCIJALNE JEDNAČINE**

a) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine  $(y \sin x - 1)dx + \cos x dy = 0$ .

b) Pokazati da diferencijalna jednačina  $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$  ima partikularno rešenje u obliku normiranog polinoma prvog stepena i odrediti njeno opšte rešenje.

## I KOLOKVIJUM

1. (10 poena) **GRANIČNE VREDNOSTI**

a) Odrediti  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , ako je  $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{8n^9 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8n^9 + 2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8n^9 + 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{8n^9 + 4n^3}}$ ;

b) U zavisnosti od realnih parametara  $a$ ,  $b$  i  $c$ ,  $a \geq 0$  odrediti kada će za niz  $\{d_n\}$  sa opštim članom

$$d_n = n - 3 - \sqrt{an^2 + bn + c}$$

važiti da je

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty$ ,   2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = -\infty$ ,   3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ ,   4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = k$ ,  $k \neq 0$ .

2. (12 poena) **FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE**

Detaljno ispitati funkciju  $f(x) = |x + 1|e^{-\frac{1}{x}}$  i nacrtati njen grafik.

3. (8 poena) **FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH**

Odrediti lokalne ekstremne vrednosti za funkciju  $z = \ln((x + y)(3x^2 + 3y^2 - 2))$ .

## II KOLOKVIJUM

1. (15 poena) **INTEGRALI**

a) Izračunati  $\int \left( \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^3 + x^2 + x + 1} + \frac{\sin 2x}{\sqrt{-\sin^2 x + 2 \sin x}} \right) dx$ .

b) Odrediti površinu ravnog lika ograničenog krivom  $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 4}}$  i pravama  $y = 0$ ,  $x = -1$  i  $x = 0$ .

2. (15 poena) **DIFERENCIJALNE JEDNAČINE**

a) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine  $dx = \frac{x + y^3}{y} dy$ .

b) Odrediti opšte rešenje jednačine

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' + 2xy' = x + \ln x.$$



## I KOLOKVIJUM

1. (10 poena) **GRANIČNE VREDNOSTI**

a) Pokazati da je niz  $\{b_n\}$  sa opštim članom  $b_n = \frac{\sin 2}{2} + \frac{\sin 2^2}{2^2} + \dots + \frac{\sin 2^n}{2^n}$  Košijev.

b) Ukoliko je moguće, odrediti konstante  $A$  i  $B$  tako da funkcija  $f(x) = \begin{cases} 4 + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} & , \quad x < 0 \\ A & , \quad x = 0 \\ \frac{\sin 2x}{\sin Bx} & , \quad x > 0 \end{cases}$  bude neprekidna.

2. (12 poena) **FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE**

Detaljno ispitati funkciju  $f(x) = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$  i nacrtati njen grafik.

3. (8 poena) **FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH**

Naći tri pozitivna realna broja čiji je proizvod 8 tako da zbir kvadrata recipročnih vrednosti bude minimalan.

## II KOLOKVIJUM

1. (15 poena) **INTEGRALI**

a) Odrediti  $\int \left( \frac{x^3}{x^7 + x} + \frac{e^{\sqrt{x}} \sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \right) dx$ .

b) Izračunati površinu ograničenu graficima krivih  $y = x^2 + 1$ ,  $y = -x^2 + 2x$  i pravama  $y = -2x + 4$  i  $x = 0$ .

2. (15 poena) **DIFERENCIJALNE JEDNAČINE**

a) Pokazati da diferencijalna jednačina

$$x dx + (4y^4 + 4x^2y^2 + y) dy = 0$$

ima integracioni množitelj oblika  $h = h(x^2 + y^2)$  i odrediti njeno opšte rešenje.

b) Prelaskom na inverznu funkciju pokazati da se diferencijalna jednačina

$$-y'y''' + 3(y'')^2 + 3y''(y')^2 - (y - 2 + \sin 3y)(y')^5 = 0.$$

svodi na jednačinu  $x''' - 3x'' = y - 2 + \sin 3y$  i odrediti njeno opšte rešenje.

## I KOLOKVIJUM

1. (10 poena) **GRANIČNE VREDNOSTI**

a) Odrediti  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , ako je  $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^6 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^6 + 2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^6 + 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^6 + 19n^2}}$ ;

b) U zavisnosti od realnih parametara  $a$ ,  $b$  i  $c$ ,  $a \geq 0$  odrediti kada će za niz  $\{d_n\}$  sa opštim članom

$$d_n = n - 3 - \sqrt{an^2 + bn + c}$$

važiti da je

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty$ ,    2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = -\infty$ ,    3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ ,    4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = k$ ,  $k \neq 0$ .

2. (12 poena) **FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE**

Detaljno ispitati funkciju  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1}$  i nacrtati njen grafik.

3. (8 poena) **FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH**

Proveriti da li funkcija  $z = x^3 + y^3 - 2xy$  ima u tačkama  $A(1, 1)$  i  $B(-1, -1)$  uslovni ekstrem uz uslov  $x^2 + y^2 = 2$ .

## II KOLOKVIJUM

1. (15 poena) **INTEGRALI**

a) Izračunati  $\int \left( \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin x}{1-\cos^4 x} \right) dx$ .

b) Izračunati  $\int_0^5 |2x - 6| dx$ .

2. (15 poena) **DIFERENCIJALNE JEDNAČINE**

a) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine  $dx = \frac{x + y^3}{y} dy$ .

b) Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine  $y^{IV} - 4y''' + 5y'' = 4e^x + x^2 - 2$ .