# Optimizacija uz ograničenja tipa jednakosti, metodi Lagranževih množitelja i kaznenih funkcija

*Zoran D. Jeličić*
*Mirna N. Kapetina*
*26. oktobar 2020.*

## 1 Uvodna razmatranja

U prethodnom poglavlju započeli smo studiju optimizacionog problema sa ograničenjima tipa jednakosti. Obradili smo dva postupka metod smene i metod ograničene varijacija, u okviru metoda smene nedvosmisleno smo pokazali da iznalažanje optimalngo rešenja direktno zavisi od izbora promenljivih po kojima se vrši slobodna optimizacija, a sličan problem imamo i slučaju ograničene varijacije gde postoje strogi uslovi, koji moraju biti zadovoljeni da bi se prvi korak diferenciranja sproveo. Namera nam je da u ovom poglavlju izložimo dva postupka, koja imaju opštiji karakter i kao takvi imaju veću potentnost u praktičnoj primeni. Prvo ćemo razmatrati metod **Lagranževih množitelja**[1], a zatim metod **kaznenih funkcija** [2]. U rešavanju svih optimizacionih problema sa ograničenjima, metod Lagranževih množitelja je sigurno najzastupljeniji u inženjerskoj praksi, a sa druge strane u numeričkim optimizacionim formalizmima metod kaznenih funkcija se pokazao kao pouzdan alat i našao je široku primenu.

[1] Engl. Lagrange multiplier
[2] Engl. Penalty function method

### 1.1 Metod Lagranževih množitelja

Podsećamo da se optimizacioni problem, koji rešavamo formuliše na sledeći način. Naći ekstrem funkcije

$$y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ , \tag{1}$$

pod uslovom da su promenljive stanja međusobno vezane sledećom relacijom

$$g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \ldots, m \tag{2}$$

pri čemu važi da je broj ograničenja strogo manji od broja promenljivih stanja $m < n$.

U objašnjavanju metoda Lagranževih množitelja, malo ćemo obrnuti postupak u predstavljanju samog formalizma. Naime, prvo ćemo izložiti deo algoritma, a tek zatim dati intutivni dokaz[3] tvrdnji iznetih u algoritmu. Na osnovu primera, koje ćemo rešaviti dopunićemo osnovni postupak i dati preporuke za praktičnu primenu.

[3] Izvođenje formalnog dokaza je veoma složeno i sigurno prevazilazi okvire početnog kursa nelinarnog programiranja. Postoje tvrđenja, koja upućuju da je potpuni dokaz metode Lagranževih množitelja dat tek sa teorijom **Principa maksimuma** Lava Semjonoviča Pontrjagina, koja spada u teoriju optimalnog upravljanja. Osnovne postualete ove teorije izožićemo u drugom delu kursa.

Pod pretpostavkom da su funkcije (1) i (2) diferencijabilne do reda koji nam je potreban, iznalaženje potrebnih uslova da funcija (1) ima ekstrem pod ograničenjima (2) sprovodi se u sledećoj proceduri

*Potrebni uslovi lokalnog ekstrema, metod Lagranževih množitelja*

1. Formirati prošireni kriterijum optimalnosti $L$ [4], koji se naziva *Lagranževa funkcije* ili Lagranžijan

$$L \equiv F = y(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x_1, x_2, \dots, x_n)\ , \qquad (3)$$

gde sa $\lambda_k$ obeležen pomoćne promenljive, koje se nazivaju **lagranževi množitelji**, koji objedinjuju kriterijum optimalnosti (1) i ograničenja (2) u novi prošireni kriterijum optimalnosti. Glavna snaga metoda Lagranževih množitelja je da sve promenljive tretira na isti način. [5] Tačnije, dalje se rešavanje odvija u duhu optimizacije bez ograničenja, odnosno tražimo da je prvi izvod po svim promenljivima jednak nuli, što bi bio drugi i treći korak ovog postupka.

[4] Ravnopravno ćemo koristiti oznake $L$ i $F$

[5] Setimo se da su kod metoda smene i metoda ograničena varijacije, sve promenljve bile formalno ravnopravme, ali se ispotavilo se da su neke promenljive ravnopravnije od drugih

2. Parcijalni izvodi po svim originalnim promenljivima da su jednaki nuli

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial y(x_i)}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k(x_i)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \dots, n\ . \qquad (4)$$

Iz sistema jednačina možemo izračunati $n$ promenljvih, ali kako je cena uopštenja kriterijuma optimalnosti povećanje dimenzionalnosti na $n + m$, nedostajući $m$ jednačina odredićemo iz uslova da su parcijalni izvodi po Lagranževim množiteljima jednaki nuli, što je potpuno u duhu ove teorije, koja sve promenljive tretira na isti način, tj.

3. Parcijalni izvodi po Lagranževim množiteljima da su jednaki nuli

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = g_k(x_i) = 0 \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \dots, m \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \dots, n\ . \qquad (5)$$

Jasno je da su ovi dodatni uslovi (5) predstavljaju same jednačine ograničenja (2), ovaj uslov se često piše samo kao $g_k(x_i) = 0$, ali mi smo ga naveli punom obliku, poštujući proceduru po kojoj smo do ove jednakosti došli.

4. Potrebni uslovi ekstrema se dobijaju rešavanjem sistema (2) i (5) uz proveru, da li sva dobijena rešenja zadovoljavaju ograničenja (2).[6]

[6] Ovaj korak ma kako izgledao trivijalno i nepotrebno, često se zaboravlja, što utiče bar na ocenu na ispitu.

Izloženi algoritam za određivanje potrebnih uslova ekstrema, ilustorvaćemo na jednom jednostavnom primeru.

**Primer 1.** Metod Lagranževih množitelja

Posmatrajmo kriterijum optimalnosti sa dve promenljive stanja

$$y(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 5x_2^2 \; .$$

promenljive $x_1$ i $x_2$ moraju da zadovolje ograničenje

$$2x_1 + 3x_2 = 6 \; .$$

Prateći predloženi formalizam metoda **Lagranževih množitelja** prvi korak da formiramo Lagranževu funkciju (3)

$$L = 4x_1^2 + 5x_2^2 + \lambda\,(2x_1 + 3x_2 - 6)\,;.$$

Parcijalni izvod po originalnim promenljivim daje sledeći sistem jednačina

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} =& 8x_1 + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} =& 10x_2 + 3\lambda = 0 \; . \end{aligned}$$

Parcijalni izvod po dodatnoj promenljivoj daje

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x_1 + 3x_2 - 6 = 0 \; .$$

Dalje rešavanje je jednostavno, na primer, možemo svesti na jednačinu po nepoznatom Lagranževom množitelju

$$2\left(-\frac{1}{4}\lambda\right) + 3\left(-\frac{3}{10}\lambda\right) - 6 = 0 \; ,$$

i dalje lako dobijamo $\lambda = -\frac{30}{7}$, $x_1^* = 1.071$ i $x_2^* = 1.286$.

*Intuitivni dokaz metoda Lagranževih množitelja*

*Analitički pristup* Dokaze teorije Lagranževih množitelja iznećemo manje formalno, ali na dva načina, prvo ćemo razmotriti analitički pristup, a zatim i grafičku interpretaciju. Da bi pojednostavili objašanjenja iz nastvaka teksta, kao i ranije ograničili smo se na studiju kriterijuma optimalnosti sa dve promenljive

$$y = y(x_1, x_2) \; , \tag{6}$$

i jedno ograničenje

$$g(x_1, x_2) = 0 \ . \tag{7}$$

Podsetimo na teoriju metoda ograničene varijacije iz prethodnog poglavlja, gde smo pokazali da u tački ekstrema važe sledeće relacije

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 = 0 \ , \tag{8}$$

odnosno, da su dozvoljeni priraštaji ograničeni sledećom jednačinom

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2 = 0 \ . \tag{9}$$

Iz jednačine (9) nalazimo sledeću vezu dozvoljenih priraštaja

$$dx_1 = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}} dx_2 \ , \tag{10}$$

koju zamenjujemo u (8) i dobijamo

$$dy = \left( \frac{\partial y}{\partial x_2} - \frac{\frac{\partial y}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}} \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) dx_2 = 0 \ . \tag{11}$$

Ako uvdemo smenu

$$\lambda = -\frac{\frac{\partial y}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}} \ , \tag{12}$$

prethodni izraz (11) postaje

$$dy = \left( \frac{\partial y}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) dx_2 = 0 \ , \tag{13}$$

a jednačina (12) se može zapisati na sledeći način

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \tag{14}$$

Izraz u zagradi jednačine (13) [7] i (14) čine sistem jednačina tipa

$$\frac{\partial y(x_i)}{\partial x_i} + \lambda_k \frac{\partial g_k(x_i)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{za} \quad i = 1, 2 \ , \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \ldots, m \tag{15}$$

koje uz jednačinu ograničenja (7) predstavljaju potreban uslov ekstrema u duhu teorije Lagranževih množitelja.

[7] Očigldno je izraz u zagradi mora biti jednak nuli da bi se ovaj izraz održao.

*Geometrijski pristup* Počećemo ponovo od slučaja dve promnljive, verujući da bi vizualizacija složenijeg problema bila veoma komplikovana i teško razumnljiva. Zadatak nam je da nađemo minimum/maksimum funkcije

$$y = y(x_1, x_2) \ , \tag{16}$$

uz ograničenje

$$g(x_1, x_2) = 0 \,. \tag{17}$$

Naše rešenje $(x_1^*, x_2^*)$, mora da obezbedi stalno poštovanje ograničenja (17), $g(x_1^*, x_2^*) = 0$, a vrednost kriterijuma optimalnosti $y(x_1^*, x_2^*) = c$ mora da bude što je moguće manja/veća. Kada se poklope ova dva uslova, krive $y(x_1^*, x_2^*) = c$ i $g(x_1^*, x_2^*) = 0$ se međusobno dodiruju u tački (tangentno se dodiruju), što znači da su njihovi tangentni vektori međusobno paralelni i upravni na ravan dodira.

Ovo praktično znači, da ako su funkcije (16) i (17) diferencijabilne onda su u svakoj tangentnoj tački ove dve krive, njihovi gradijenti vektori međusobno paralelni, odnosno postoji celobrojni multiplikator kojih ih povezuje

$$\nabla y(x_1, x_2) = \lambda \nabla g(x_1, x_2) \,, \tag{18}$$

Suštinski je jasno da jednačina (18) u potpunosti odgovara (15), odnosno da uz jednačinu ograničenja (17) predstavlja potrebne uslove ekstrema . Ilustrovaćemo prethodna razmatranja na primeru.

Pitanje znaka lagranževog množitelja $\lambda$ nije od posebnog interesa u problemima optimizacije sa ograničenjima tipa jednakosti, međutim u poglavljima koja slede, biće od centralnog značaja.

**Primer 2.** Metod Lagranževih množitelja

Posmatrajmo kriterijum optimalnosti sa dve promenljive stanja

$$y(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 \,.$$

promenljive $x_1$ i $x_2$ moraju da zadovolje ograničenje

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \,.$$

Prvi korak da je formiramo Lagranževu funkciju (3)

$$L = 3x_1 + 4x_2 + \lambda \left( x_1^2 + x_2^2 - 1 \right) ; .$$

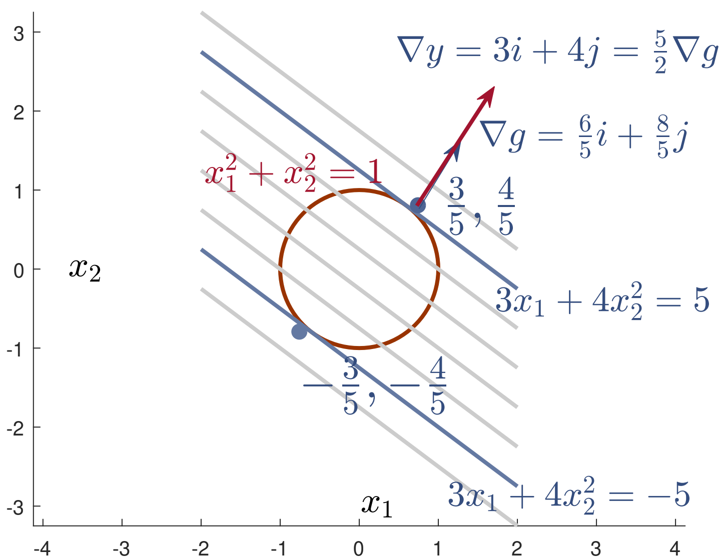
Parcijalni izvod po originalnim promenljivim daje sledeći sistem jednačina

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} =& 3 + 2\lambda x_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} =& 4 + 2\lambda x_2 = 0 \,. \end{aligned}$$

Parcijalni izvod po dodatnoj promenljivoj daje

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \,.$$

Rešavanje ovog sistema jednačina nije komplikovano, preporučujemo da elimišete $\lambda$ iz prve dve jednačine i onda se iz kavdratne jednačine ograničenja dobiju dve tačke ekstrema slika 1, $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ i $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ i vrednost lagranževog množitelja $\lambda = \pm\frac{5}{2}$. Rešenje na osnovu grafičke interpretacije, detaljno smo obrazložili u komentaru slike 1.




Slika 1: Funkcije $y(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$ ima najveću vrednost na jediničnoj kružnici $g(x_1, x_2) = x_1^2 + ^2_2 = 0$ u tački $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, a minimalnu vrednost u tački $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$. U svakoj od tačaka ekstrema. moguće je izračunati celobrojnu srazmeru između $\nabla y$ i $\nabla g$, ova vrednost je izračunata u gornjoj tački, čitaocu prepuštamo da izračuna vrednost u preostaloj tački ekstrema.

*Dovoljni uslovi ekstrema, metod Lagranževih množitelja*

Analizu dovoljnih i (ne)dovoljnih uslova ekstrema u duhu teroije Lagranževih množitelja, počećemo primerom, a dobijene rezultate i zakonomernosti gledaćemo da uopštimo u pravilo, koje ćemo nadalje primenjivati.

**Primer 3.** Cilindar minimalne površine

Od svih cilandara zadate zapremine odrediti onaj minimalne površine. Ovaj zadatak se često kolokvijalno naziva i problem optimalne konzerve, jer očigledno predstavalja konzervu za koju treba potrošiti najmanje materijala (minimalna površina), a da u nju stavimo željenu zapreminu (zadata zapremnina), slika 2.

Kriterijum optimalnosti, čiji minimum tražimo je površina cilindra sa slike 2

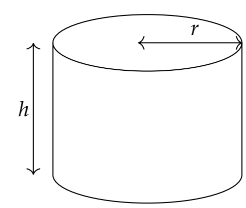
$$y \equiv A = 2r^2\pi + 2r\pi h \ ,$$

a ograničenje je zadata zapremina

$$g \equiv V = r^2\pi h; .$$

Lagranžijan, koji ćemo zbog raznovrsnosti sada obeležiti sa $F$, za naš problem je sada

$$F = 2r^2\pi + 2r\pi h + \lambda\left(V - r^2\pi h\right); .$$




Slika 2: Cilindar poluprečnika $r$ i visine $h$. Površina cilindra je $A = 2r^2\pi + 2r\pi h$, zapremina se računa kao $V = r^2\pi h$

.

Potrebni uslovi počinju počinju od uslova stacionarnosti

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 4r\pi + 2\pi h - 2\lambda r h \pi = 2r + h - \lambda r h = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial h} = 2r\pi - \lambda r^2 \pi = r(2 - \lambda r) = 0$$

Odbacivanjem trivijalnih rešenja, koja ne zadovoljavaju ograničenja, lako dolazimo da je kandidat za minimum, cilindar koji ima prečnik jednak visini $2r = h$. U tom slučaju željene vrednosti poluprečnika i visine cilindra se izračunavaju kao

$$r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$h = 2\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$\lambda = \left(\frac{16\pi}{V}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Iz uslova stacionarnosti možemo primetiti nekoliko zakonomernosti. Množenje sa konstantom svih članova kriterijuma optimalnosti ne utiče na studiju problema, zato nam $\pi$ faktički i ne treba. Međutim interesantniji je drugi zaključak, rešavanjem uslova stacionarnosti lako dobijamo kandidata za minimum $r = h = 0$, što bi nedvosmislemo značilo, cilindar najmanje zapremine je onaj, koji ne postoji, naravno ovo rešenje odbacujemo zbog postojanja ograničenja $V = r^2\pi h$, a čitaoce podsećamo na prva četiri koraka u iznalaženju potrebnih uslova ekstrema metodom Lagranževih množitelja. Ovde ponovo podsećamo na neophodnost pravilnog definisanja optimizacionog problema, npr. pitanje, koji je cilindar najmanje površine sigurno bi dobili trivijalno rešenje $A = 0$. Slično tome rešenje problema, želimo maksimalnu proizvodnju uz minimalna ulaganje bi nam bilo beskonačno i nula respektivno. Ostavljamo čitaocima da osmisle i pravilno definišu ovaj problem proizvodnje i ulaganja.

Ako je ovo rešenje tačno, nije teško shvatiti da limenke od 0.33 i 0.5 litara nemaju minimalan utrošak materijala, ali verujemo da bi zaista bilo naporno držati konzervu širine nešto više od 8cm (0.5l)

Iz postavke samog optimizacinog problema, nije teško prihvatiti da je dobijeno rešenje minimum našeg optimizaciong problema, a to ćemo u nastavku teksta pokušati i da dokažemo. Logično bi bilo da studiju dovoljnih uslova započnemo u duhu slobodne optimizacije, odnosno da formirmao Hesijan, gde je kriterijum optimalnosti Lagranžijan $F$, promenljive $x_1$ i $x_2$ su $r$ i $h$ respektivno. Tada je

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 4 - 2\lambda h$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial h} = 2 - 2\lambda r$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial h^2} = 0\ ,$$

odnosno u tački ekstrema

$$D_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = -4$$
$$D_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial h^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial h}\right)^2 = -4\ .$$

Iz ovako dobijenih uslova sledi da je kandidat za minimum u stvari prevojna tačka. Ponavljamo da logika i fizika problema nameću da je rešenje ipak minimum, što bi značilo da ovakav način ispitivanja karaktera ekstrema u slučaju metoda Lagranževih množitelja, nije dovoljno dobar i da ispitivanje karaktera ekstrema moramo da nastavimo na neki drugi način. Postupak ispitivanje dovoljnih uslova u nastavku teksta dajemo bez dokaza i upućujemo čitaoce na preporučenu literaturu i na pojašnjenja koja ćemo dati u samom tekstu.

Važna napomena, da je analiza definitnosti Hesijana pokazala da se radi o mnimumu ili maksimumu, tada bi rešenje zaista bilo minimum ili maskimum. Međutim, ako se pokaže da je rešenje prevojna tačka moramo nastaviti dalje ispitivanje.

Korake u analizi dovoljnih uslova obeležićemo brojevima 5 i 6, kao nastavak stavki iz prvog paragrafa ovog teksta *Potrebni uslovi lokalnog ekstrema, metod Lagranževih množitelja*.

5. Pod uslovom da je Laganževa funkcije (3) diferencicijabilna do reda koji nam je potreban, formiraćemo matricu $Q$ kao matricu drugih izvoda Lagranževe funkcije

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}. \tag{19}$$

   Akko je matrica $Q$ (19) u stacionarnoj tački $(x_i^*, \lambda_k^*)$:

   (a) **Pozitivno definitna**, tada je tačka $(x_i^*, \lambda_k^*)$ lokalni minimum.

   (b) **Negativno definitna**, tada je tačka $(x_i^*, \lambda_k^*)$ lokalni maksimum.

   (c) **Nedefinitna** tada idemo na sledeći korak u ispitivanju karaktera ekstrema [8]

   Radi lakšeg praćenja teksta uvešćemo sledeću oznaku
   $\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}_{|x=x^*, \lambda=\lambda^*} = L_{ij}$ .

[8] Kao i ranije slučajeve semidefinitnosti nećemo posebno ispitivati.

6. U stacionarnoj tački $(x_i^*, \lambda_k^*)$ izračunaćemo vrednost gradijenta svih ograničenja $P$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix};. \tag{20}$$

   Gde su slično kao i ranije vrednosti elemenata matrice $P$ (20) u stacionarnoj tački obeležene kao
   $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}_{|x=x^*, \lambda=\lambda^*} = g_{ij}$

Naredni korak je da formiramo matricu $\Delta$ na sledeći način

$$\Delta = \begin{bmatrix} Q - \mu I_{n\times n} & P^T_{n\times m} \\ P_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{bmatrix}, \tag{21}$$

gde su sa $0_{m\times m}$ obležene nula matrica odgovarajućih dimenzija, a sa $I$ jedinična matrica dimenzije $n \times n$. Parametre $\mu$ ćemo izračunati iz odgovarjuće determinante matrice $\Delta$

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_{11}-\mu & L_{12} & L_{13} & \dots & L_{1n} & g_{11} & g_{21} & \dots & g_{m1} \\ L_{21} & L_{22}-\mu & L_{23} & \dots & L_{2n} & g_{12} & g_{22} & \dots & g_{m2} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33}-\mu & \dots & L_{3n} & g_{13} & g_{23} & \dots & g_{m3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \dots & L_{nn}-\mu & g_{1n} & g_{2n} & \dots & g_{mn} \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & \dots & g_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & g_{13} & \dots & g_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & g_{m3} & \dots & g_{mn} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \tag{22}$$

Rešavanjem determinante $\Delta$ (22) dobijamo polinom u funkciji parametra $\mu$ i akko su koreni polinoma

(a) $\mu_i > 0$ za $i = 1, \dots, n$ tada funkcija ima (lokalni) minimum

(b) $\mu_i < 0$ za $i = 1, \dots, n$ tada funkcija ima (lokalni) maksimum

Primena poslednjeg pravila nije jednostavna pre svega zbog dimenzionalnost matrice $\Delta$, koja je $(m+n) \times (m+n)$, ali u većini naših analitičkih studija ograničićemo se na probleme umerene dimenzionalnosti.

Čitaocima ostavljamo da ispitaju dovoljne uslove za prethodni primer, minmalne površine cilindra.

## 1.2 *Metod kaznenih funkcija*

Metod kaznenih funkcija je pre svega namenjen numeričkim izračunavanjima, kada optimizacioni problem sa ograničenjima treba prilagoditi numeričkim algoritmima, koji su namenski razvijeni za traženje ekstremnih vrednosti kriterijuma optimalnosti bez ograničenja. Odnosno, metodom kaznenih funkcija se transformiše kriterijum optimalnosti u formu, koja inherentno sadrži ograničenja, a kazna za neispunjavanje ograničenja bi obesmislila optimizacionu proceduru. Ilustrovaćemo metod kaznenih funkcija na jednom trivijalnom primeru, koji u osnovi i nije optimizacioni problem, ali odlično objašnjava osnovne principe ovog metoda.

**Primer 4.** Grafički prikaz metode kaznenih funkcija

Neka je dat kriterijum optimalnosti

$$y = x^2 \,,$$

i želimo da naše rešenje zadovolji ograničenje [9]

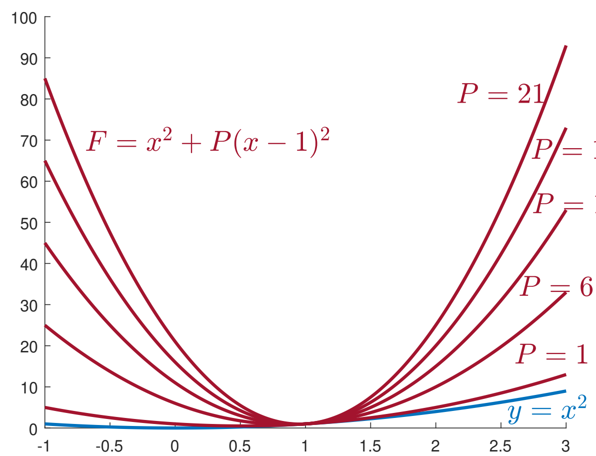
$$x = 1 \,,$$

Uvedimo sada novi kriterijum optimalnosti na sledeći način, koji će nam pomoći da nađemo minimum funkcije sa datim ograničenjem

$$F = x^2 + P\,(x-1)^2 \,\,,$$

gde se član $(x-1)^2$ naziva *kaznena funkcija*, a težinski faktor $P$ za velike vrednosti obezbeđuje da se u postupku slobodne optimizacije funkcije $F$ zadovolji i jednačina ograničenja, slika 3.

[9] Kao što smo naučili, ovo nije optimizacioni problem, jer je broj ograničenja jednak broju promenljivih, ali se na veoma intutivan način vide osnovni principi metode kaznenih funkcija




Slika 3: Ilustracija metoda kaznenih funkcija. Funkcija $F = x^2 + P\,(x-1)^2$ je nastala od funkcije $y = x^2$ dodajući ograničenje $(x-1)$ pod zankom kvadrata, a značaj ograničenja je određen težinskim faktorom $P$. Jasno se vidi da za veće vrednosti $P$ početna funkcija $x^2$ prelazi u funkciju koja ima minimum u tački $x = 1$. Do rešnja $x^* = 1$ dolazi se slobodnom optimizacijom proširenog kriterijuma $F$.

Slobodnom optimizacijom proširenog kriterijuma $F$ dobijamo

$$F'(x) = 2x + 2P\,(x-1) = 0 \,,$$

odnosno

$$x^* = \frac{P}{1+P} \,,$$

što za velike vrednosti $P$ čini da je $x^* = 1$.

Pristup iz prethodnog primera uopštićemo na slučaj funkcije više promenljivih. Naći ekstrem funcije

$$y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,, \tag{23}$$

uz ograničenja

$$g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \ldots, m \,. \tag{24}$$

Cilj nam je da formiramo novi kriterijum optimalnosti, koji će obezbediti da se ograničenja stalno poštuju, a da je postupak rešavanja zasnovan na principima optimizacije bez ograničenja. Pri tome, konstrukcija tog kriterijuma optimalnosti nije opšta već zavisi od toga da li je ekstrem u minimumu ili maksimumu. Pretpostavimo da tražimo minimum funkcije (23), tada nam novi kriterijum optimalnosti ima sledeću formu

$$F = y(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} P_k g_k^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,, \tag{25}$$

gde se članovi pod sumom nazivaju kazneni članovi, a $g_k^2$ je kaznena funkcija, ponderi $P_k$ imaju velike vrednosti, teoretski se kaže da $P_k \rightarrow \infty$. Kazneni član, koji zbog znaka kvadrata uvek pozitivan, dramatično povećava vrednost optimizacionog kriterijuma, jedini način da se njegov uticaj anulira je da su stalno zadovoljena ograničenja (24), do ovog rešenja dolazmo prirodno, tretirajući problem iznalaženja minimuma funjcije $F$ (25) kao problem bez ograničenja. U slučaju da rešavamo problem iznalaženja maksimuma, po sličnoj analogiji uopšteni kriterijum optimalnosti formiramo na sledeći način

$$F = y(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \sum_{k=1}^{m} P_k g_k^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,. \tag{26}$$

U specijalnom slučaju kada imamo samo jedno ograničenje novi kriterijum optimalnosti za minimum i maksimum mogu se formirati i kao

$$F = y \pm g^{2P} \,. \tag{27}$$

Ilustrovaćemo metod kaznenih funkcija i kroz primer.

**Primer 5.** Metod kaznenih funkcija

Izračunati minimum kriterijum optimalnosti sa dve promenljive stanja

$$y(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 5x_2^2 \,.$$

promenljive $x_1$ i $x_2$ moraju da zadovolje ograničenje

$$g = 2x_1 + 3x_2 - 6 = 0 \,.$$

Prvi korak je formiranje modifikovanog kriterijuma optimalnosti, koji odgovara traženom minimumu (25)

$$F = 4x_1^2 + 5x_2^2 + P\,(2x_1 + 3x_2 - 6)^2 \,.$$

Stacionarne tačke dalje tražimo, kao da ograničenja ne postoje

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_1} =& 8x_1 + 4P\left(2x_1 + 3x_2 - 6\right) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} =& 10x_2 + 6P\left(2x_1 + 3x_2 - 6\right) = 0 \ .\end{aligned}$$

Eliminacijom $P$ dobijamo

$$\frac{8x_1}{4} = -P\left(2x_1 + 3x_2 - 6\right) = \frac{10x_2}{6}$$

tako da je

$$x_1 = \frac{5}{6}x_2$$

Zamenom u jedan od izraza $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, npr. u prvi dobijamo [10]

$$8\left(\frac{5}{6}x_2\right) + 4P\left(\frac{5}{3}x_2 + 3x_2 - 6\right) = 0 \ ,$$

ili

$$x_2 = \frac{24P}{\frac{20}{3} + P\frac{56}{3}} = \frac{9}{7 + \frac{5}{2P}} \ .$$

Za velike vrednosti pondera $P$ ($P \to \infty$) daje poznatu vrednost za $x_2^* = 1.286$ i dalje $x_1^* = 1.071$. Proverom dovoljnih uslova, bez većih problema dobijamo

$$\begin{aligned}D_1 =& 8\left(1 + P\right) > 0 \\ D_2 =& 16\left(5 + 14P\right) > 0\end{aligned}$$

Što nedvosmisleno ukazuje da se radi o mi nimumu funkcije.

Čitaocima za vežbu ostavljamo da prethodni primer reše pretpostavljajući kriterijum optimalnosti u formi $F = y + g^{2P}$.

[10] Obratite pažnju, ne zamenjujemo u jednačinu ograničenja $g = 0$, to bi onda bila modifikacija metoda Lagranževih množitelja, već dalje rešavamo kao problem bez ograničenja. što je i osnovna pretpostavka ovog postupka