VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1. Vežbe I.6

1.1. Granične vrednosti funkcija (Neprekidnost funkcije)

Definicija 1.1. Neka je D oblast definisanosti neke realne funkcije $f : D \mapsto \mathbb{R}$, i neka je x_0 proizvoljna tačka iz D. Za funkciju $f(x)$ kažemo da je *neprekidna u tački* $x_0 \in D$ akko važi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad \Big(|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Big).$$

Posledično, da bi funkcija bila neprekidna u x_0, treba da važi:

1. funkcija je definisana u x_0, tj. $x_0 \in D$,
2. ako je x_0 tačka nagomilavanja za D, tada postoji $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ i važi
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$
3. ako je $x_0 \in D$ izolovana tačka, tada je funkcija $f(x)$ po definiciji neprekidna u toj tački.

Ako su realne funkcije f i g neprekidne u tački x_0, tada su u tački x_0 neprekidne i sledeće funkcije:

a) $h = f + g$, b) $h = f \cdot g$, c) $h = f/g$, gde $g \neq 0$ u nekoj okolini x_0.

Definicija 1.2. Funkcija je *neprekidna sa leve strane* ako je

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Definicija 1.3. Funkcija je *neprekidna sa desne strane* ako je

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Tvrđenje 1.4. *Funkcija $f(x)$ je neprekidna u tački x_0 ako i samo ako je neprekidna sa leve i sa desne strane, odnosno ako važi*

$$\boxed{f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).}$$

Ako funkcija $f(x)$ nije neprekidna u tački x_0, onda kažemo da je ona *prekidna u tački* x_0, odnosno da *ima prekid u tački* x_0.

Vrste prekida

Neka $f : D \mapsto \mathbb{R}$ ima prekid u tački $x_0 \in D$. Razlikujemo

I Prekid prve vrste

a) Funkcija ima *prividan prekid* u tački x_0 koja je tačka nagomilavanja za oblast D ako:

postoji granična vrednost funkcije u toj tački, i granična vrednost se ne poklapa sa vrednosti funkcije u tački, tj. ako

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

b) Funkcija ima *skok* u tački x_0 koja je tačka nagomilavanja za oblast $D \subset \mathbb{R}$ ako postoje leva i desna granična vrednosti, koje nisu jednake:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

II Prekid druge vrste

Prekid druge vrste je prekid koji nije prve vrste, tj. onaj za koji $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ili $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ (ili oba) ne postoje ili nisu konačne vrednosti.

Zadatak 1.5. Neka je funkcija $f(x)$ data sa

$$f(x) = \begin{cases} (e+x)^{\sin(x)}, & x \geq 0 \\ \sin(x) + A, & x < 0 \end{cases}.$$

Odrediti realnu vrednost A tako da funkcija $f(x)$ bude neprekidna.

Rešenje. A se određuje iz uslova da je

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).}$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} (\sin(x) + A) = A, \\
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} (e+x)^{\sin(x)} = e^0 = 1, \\
f(0) &= (e+0)^0 = 1,
\end{aligned}$$

vidimo da su sve tri vrednosti jednake ako važi da je $A = 1$.

Napomenimo da je funkcija neprekidna u svim tačkama različitim od nule, nezavisno od A, zato što je u tim tačkama predstavljena kao kompozicija neprekidnih funkcija. Zato je $f(x)$ za $A = 1$ ne samo neprekidna u 0, već i neprekidna (nad celim $\mathbb{R}$).

Zadatak 1.6. Neka je funkcija $f(x)$ data sa

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)e^{1/x}, & x < 0 \\ A, & x = 0 \\ \frac{-1}{1+\ln(x)}, & x > 0,\ x \neq \frac{1}{e} \end{cases}.$$

Odrediti realnu vrednost A tako da funkcija $f(x)$ bude neprekidna u $x = 0$.

Rešenje. Da bi funkcija bila neprekidna mora da važi

$$\boxed{f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x).}$$

Kako je

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+2)e^{\frac{1}{x}} = 0, \\ &\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{1+\ln(x)} = 0, \\ &f(0) = A, \end{aligned}$$

iz uslova jednakosti $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ sledi da je nužno $A = 0$. Za ovu vrednost je funkcija neprekidna u $x = 0$.

Zadatak 1.7. Data je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}.$$

Da li je moguće odrediti realnu vrednost A tako da je $f(x)$ neprekidna?

Rešenje. Funkcija je neprekidna u svim tačkama $x \neq 0$, budući da je kompozicija funkcija neprekidnih na $\mathbb{R} \backslash \{0\}$. Posmatrajmo zato neprekidnost u $x = 0$. Da bi funkcija bila neprekidna mora da važi

$$\boxed{f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x).}$$

Kako su levi i desni limes u $x = 0$ dati sa

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = (\text{“}\operatorname{arctg}(-\infty)\text{”}) = -\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = (\text{“}\operatorname{arctg}(\infty)\text{”}) = \frac{\pi}{2},$$

sledi da ni za jednu vrednost ova funkcija neće biti neprekidna u $x = 0$. Funkcija $f(x)$ ima skok u tački $x = 0$.

Zadatak 1.8. Neka je funkcija $f(x)$ data sa

$$f(x) = \begin{cases} (\sin^2(2x)+1)^{\frac{\cos^3(x)}{x^2}}, & x<0 \\ A, & x=0 \\ e^{-\frac{1}{x}} + B^2, & x>0 \end{cases} \cdot$$

Odrediti konstante A i B tako da funkcija $f(x)$ bude neprekidna u $x=0$.

Rešenje. Da bi funkcija bila neprekidna mora da važi

$$\boxed{f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x).}$$

Sa jedne strane, važi da je

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} (\sin^2(2x)+1)^{\frac{\cos^3(x)}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to 0^-} (1+\sin^2(2x))^{\frac{1}{\sin^2(2x)} \sin^2(2x) \frac{\cos^3(x)}{x^2}} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin^2(2x)\cos^3(x)}{x^2}} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0^-} \cos^3(x) \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin^2(2x)}{x^2}} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin^2(2x)}{\frac{1}{4}4x^2}} \\ &= e^{4\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2} \\ &= e^4, \end{aligned}$$

dok je desna granična vrednost jednaka

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} + B^2 = 0 + B^2 = B^2.$$

To znači da je

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \quad \Leftrightarrow \quad e^4 = B^2 = A,$$

odnosno, da je funkcija neprekidna u $x=0$ ako je $A = e^4$ i $B = \pm e^2$.

Zadatak 1.9. U tački $x = 3$, ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 3 \\ (x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}}, & x > 3 \end{cases}.$$

Rešenje. Da bi funkcija bila neprekidna mora da važi

$$\boxed{f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x).}$$

Lako je videti da je

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3) = 6 + 1 = 7,$$

ali desna granična vrednost ne postoji

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}} = \lim_{x\to 3^+} (1 + (x-3))^{\frac{1}{x-3}\frac{1}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}} = +\infty.$$

Funkcija $f(x)$, dakle, u tački $x = 3$ ima prekid druge vrste.

Zadatak 1.10. Odrediti parametre A i B tako da funkcija $f(x)$ bude neprekidna u svim tačkama oblasti $(0,\pi)$, ako je

$$f(x)=\begin{cases}(\sin(x))^{\operatorname{tg}^2(x)}, & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ A, & x=\frac{\pi}{2}\\ Ae+\frac{B}{x}, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}.$$

Rešenje. Da bi funkcija bila neprekidna mora da važi

$$\boxed{f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}f(x).}$$

Kako je

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}(\sin(x))^{\operatorname{tg}^2(x)}\\ &=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left(\sqrt{1-\cos^2(x)}\right)^{\operatorname{tg}^2(x)}\\ &=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}(1-\cos^2(x))^{\frac{\operatorname{tg}^2(x)}{2}}\\ &=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}(1-\cos^2(x))^{\frac{-1}{\cos^2(x)}(-\cos^2(x))\frac{1}{2}\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}\\ &=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\dfrac{-\sin^2(x)}{2}}\\ &=\frac{1}{\sqrt{e}},\end{aligned}$$

a pošto mora da važi $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}f(x)$, imamo da je $A=\frac{1}{\sqrt{e}}$. Dalje, iz

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\left(Ae+\frac{B}{x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}e+\frac{B}{x}\right)=\sqrt{e}+\frac{2B}{\pi},$$

i pošto mora da važi $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}f(x)$, vrednost B dobijamo izjednačavanjem

$$\sqrt{e}+\frac{2B}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{e}}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{2B}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{e}}-\sqrt{e}\quad\Leftrightarrow\quad B=\frac{\pi}{2}\frac{(1-e)\sqrt{e}}{e}.$$

Za ovako odabrane vrednosti A i B funkcija je neprekidna.

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2018.