

METRIČKI PROSTORI

Ilija Kovačević, Slavica Medić

19. februar 2024.

Definicija

Metrika ili rastojanje na nepraznom skupu X je svako preslikavanje $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ za koje važi

$$(M_1) \quad d(x, y) \geq 0,$$

$$(M_2) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(M_3) \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$(M_4) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (nejednakost trougla)}$$

Metrički prostor je uređen par (X, d) skupa X i metrike d na X .

Za skup X kažemo da je **nosač metričkog prostora** (X, d) .

- Realan broj $d(x, y)$ je **rastojanje elemenata** (tačaka) $x, y \in X$.
- Metrički prostor (X, d) ćemo nekada kraće označavati istim slovom kao i njegov nosač X .
- U metričkom prostoru (X, d) važi tzv. **nejednakost mnogougla**:
$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Primer

(\mathbb{R}^n, d) je metrički prostor, gde je metrika $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

za $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

- Za metriku d kažemo da je **euklidska**, a prostor (\mathbb{R}^n, d) , koji ćemo kraće obeležavati sa \mathbb{R}^n , n -**dimenzionalni euklidski prostor**.
- Metrika d je uopštenje metrika iz \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3 .

Primer

Ako je $X \neq \emptyset$ proizvoljan skup, tada je preslikavanje $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definisano sa

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

metrika.

- Za (X, d) kažemo da je **diskretna metrički prostor**.

Potprostor metričkog prostora

Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $\emptyset \neq Y \subset X$. Sa d_Y obeležimo restrikciju preslikavanja d nad skupom Y , tj. neka je

$$d_Y(x, y) = d(x, y), \quad x, y \in Y.$$

Očigledno d_Y je metrika na skupu Y , tj. (Y, d_Y) je metrički prostor. Kažemo da je (Y, d_Y) **potprostor prostora** (X, d) .

Metriku d_Y najčešće označavamo takođe sa d , pa je reč o potprostoru (Y, d) prostora (X, d) .

Ograničenost

Definicija

*Za neprazan skup $A \subset X$ metričkog prostora (X, d) kažemo da je **ograničen** ako je skup $\{d(a, b) : a, b \in A\}$ ograničen u skupu \mathbb{R} .*

Prazan skup je ograničen skup (po definiciji).

Definicija

*Ako je (X, d) metrički prostor i ako je neprazan skup $A \subset X$ ograničen, tada postoji realan broj $d(A) = \sup\{d(a, b) : a, b \in A\}$ koji zovemo **dijametar skupa A** .*

Po definiciji uzimamo da je $d(\emptyset) = 0$.

Definicija

Za preslikavanje $f : D \rightarrow X$ skupa D u metrički prostor X kažemo da je **ograničeno nad skupom** $A \subset D$ ako je $f(A) \subset X$ ograničen skup u X .

Ako je $A = D$, tada je preslikavanje f **ograničeno**.

Ograničeno preslikavanje

$$f : N_1 \rightarrow X,$$

gde je N_1 proizvoljan beskonačan podskup skupa prirodnih brojeva je **ograničen niz**.

Definicija

Neka je (Y, \preceq) totalno uređen skup. Za funkciju $f : X \rightarrow Y$ kažemo da je **ograničena sa gornje (donje) strane** nad nepraznim podskupom A od X ako je skup njenih vrednosti $f(A)$ ograničen sa gornje (donje) strane u odnosu na relaciju \preceq , tj. ako postoji $\mu \in \mathbb{R}$ tako da za sve $x \in X$ važi da je $f(x) \preceq \mu$ ($\mu \preceq f(x)$).

Reći ćemo da je funkcija f ograničena sa gornje (donje) strane sa μ , a broj μ zvaćemo **gornjim (donjim) ograničenjem ili gornjom (donjom) granicom funkcije f** .

Funkcija f je **ograničena** ako je ograničena i sa gornje i sa donje strane.

Potreban i dovoljan uslov da je funkcija $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ ograničena, je da postoji $\nu \in \mathbb{R}^+$, tako da za svako $x \in X$ važi $|f(x)| \leq \nu$.

Definicija

Neka je (X, d) metrički prostor, $a \in X$ i $r \in \mathbb{R}^+$. Za skup

$$L(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$$

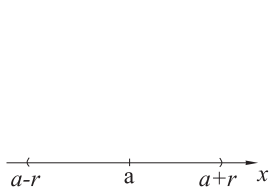
kažemo da je **otvorena lopta** u metričkom prostoru (X, d) sa centrom u tački a poluprečnika r .

- Kako je $d(a, a) = 0 < r$, jasno je da otvorena lopta $L(a, r)$ sadrži svoj centar.
- Ako je $r_1 \leq r_2$, očigledno je $L(a, r_1) \subset L(a, r_2)$.

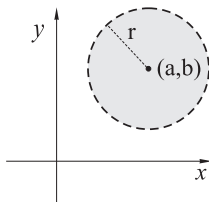
$$\text{a) } \mathbb{R} : L(a, r) = (a - r, a + r),$$

$$\text{b) } \mathbb{R}^2 : L((a, b), r) = \{(x, y) : \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r\},$$

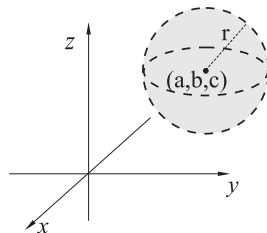
$$\text{c) } \mathbb{R}^3 : L((a, b, c), r) = \{(x, y, z) : \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} < r\}.$$



a)



b)



c)

Tvrđenje

Ako je $L(a, r)$ otvorena lopta u metričkom prostoru (X, d) , tada za svaku tačku $b \in L(a, r)$, postoji $s \in \mathbb{R}^+$ tako da je $L(b, s) \subset L(a, r)$.

Dokaz. Kako $b \in L(a, r)$, to je $d(a, b) < r$, pa možemo uzeti da je

$$s = r - d(a, b) > 0.$$

Odatle sledi da je za svaku tačku $x \in L(b, s)$

$$d(a, x) \leq d(a, b) + d(b, x) < r,$$

što dokazuje da je

$$L(b, s) \subset L(a, r).$$



Definicija

Za neprazan skup $U \subset X$ kažemo da je **otvoren** u metričkom prostoru (X, d) ako

$$(\forall x \in U)(\exists r \in \mathbb{R}^+) L(x, r) \subset U.$$

Uzimamo da je \emptyset po definiciji otvoren.

- Otvorena lopta jeste otvoren skup u metričkom prostoru.
- Za neprazan skup $U \subset X$ koji je otvoren u metričkom prostoru (X, d) za svaku tačku $x \in U$, postoji $r_x \in \mathbb{R}^+$, tako da je $x \in L(x, r_x) \subset U$, pa je

$$U = \bigcup \{L(x, r_x) : x \in U\},$$

tj. sledi da je svaki neprazan otvoren skup u metričkom prostoru (X, d) unija neke familije otvorenih lopti iz (X, d) .

Familiju τ svih otvorenih skupova metričkog prostora (X, d) zovemo topološka struktura ili **topologija metričkog prostora** (X, d) .

- Jasno je da je $\emptyset \in \tau$ i da je $X \in \tau$.
- Unija svake familije elemenata iz τ je ponovo element iz τ .
- Presek konačno mnogo elemenata iz τ je element iz τ .

Definicija

Za podskup A metričkog prostora X kažemo da je **zatvoren** ako je $C_X(A) = X \setminus A$ otvoren skup.

Očigledno je da su \emptyset i skup X i zatvoreni skupovi.

Definicija

Neka je X dati metrički prostor i a tačka u X .

*Za skup $V \subset X$ kažemo da je **okolina tačke a** u metričkom prostoru X , ako postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tako da $L(a, \varepsilon) \subset V$.*

*Ako je V otvoren skup kažemo da je V **otvorena okolina tačke a** .*

*Otvorenu loptu $L(a, \varepsilon)$ zovemo ε —**okolina tačke a** .*

ε - pozitivan, proizvoljno mali, unapred dat!

- Okolina tačke a u prostoru X je neki podskup od X koji sadrži ne samo tačku a već i neku otvorenu loptu sa centrom u tački a .
- Skup X okolina svake svoje tačke u prostoru X .
- *Neprazan skup $U \subset X$ je otvoren ako i samo ako je U okolina svake svoje tačke.*
- Za proizvoljnu tačku a u prostoru (X, d) familiju svih okolina tačke a u X nazivamo **sistem okolina tačke a** u prostoru X , u oznaci $\mathcal{V}(a)$.

Tvrđenje

Ako je (X, d) metrički prostor, za svake dve različite tačke a i b , postoje disjunktne otvorene okoline $L(a, \varepsilon)$ i $L(b, \varepsilon)$, tj. svake dve različite tačke mogu se odvojiti disjunktним otvorenim okolinama.

Dokaz. Kako je $a \neq b$, to možemo uzeti da je $\varepsilon = \frac{1}{2}d(a, b) > 0$. Dokažimo da je $L(a, \varepsilon) \cap L(b, \varepsilon) = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, tj.

$$L(a, \varepsilon) \cap L(b, \varepsilon) \neq \emptyset,$$

odnosno da postoji

$$z \in L(a, \varepsilon) \cap L(b, \varepsilon).$$

Tada $z \in L(a, \varepsilon)$, tj. $d(a, z) < \varepsilon$ i $z \in L(b, \varepsilon)$, tj. $d(b, z) < \varepsilon$, pa je

$$0 < d(a, b) \leq d(a, z) + d(z, b) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(a, b),$$

što je kontradikcija, jer je $d(a, b) > 0$.

Napomena

Ako je U okolina tačke a , tada postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da važi $L(a, \frac{1}{n}) \subset U$.

Zaista, ako je U okolina tačke a , tada postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tako da je

$$a \in L(a, \varepsilon) \subset U.$$

No kako postoji $n \in \mathbb{N}$, tako da je

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$

to je

$$L\left(a, \frac{1}{n}\right) \subset L(a, \varepsilon) \subset U.$$

Definicija

Neka je A podskup metričkog prostora X . Za tačku $a \in X$ kažemo da je **unutrašnja tačka** skupa A , ako postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tako da je $L(a, \varepsilon) \subset A$.

Skup A° svih unutrašnjih tačaka zovemo **unutrašnjost** skupa A .

Važe tvrđenja:

- $\emptyset^\circ = \emptyset$, $X^\circ = X$
- Skup A° je najveći otvoren skup sadržan u A .
- Skup A je otvoren ako i samo ako je $A^\circ = A$.

Definicija

*Za tačku $a \in X$ kažemo da je **spoljašnja tačka** podskupa A metričkog prostora X ako postoji okolina tačke a koja ne sadrži nijednu tačku skupa A .*

*Skup svih spoljašnjih tačaka zovemo **spoljašnjost skupa** A .*

Očigledno važi tvrđenje

- Ako je a spoljašnja tačka skupa A , tada je a unutrašnja tačka skupa $X \setminus A$. Dakle, spoljašnjost skupa A je skup $(X \setminus A)^\circ$.

Definicija

Za tačku $a \in X$ kažemo da je **rubna tačka** skupa $A \subset X$ ako

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(L(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge L(a, \varepsilon) \cap C_X(A) \neq \emptyset)$$

(svaka ε –okolina tačke a ima neprazan presek i sa skupom A i sa njegovim komplementom).

Skup A^* svih rubnih tačaka skupa A nazivamo **rubom skupa A** .

Važe tvrđenja:

- $A^* = (X \setminus A)^*$
- $X = A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ \cup A^*$

Definicija

Tačka $a \in X$ je **adherentna tačka** skupa $A \subset X$ ako svaka ε –okolina tačke a ima neprazan presek sa skupom A , tj.

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) L(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Skup \overline{A} svih adherentnih tačaka zovemo **adherencija** ili **zatvorenje** skupa A .

Važe tvrđenja:

- $\overline{\emptyset} = \emptyset, \overline{X} = X$
- Skup \overline{A} je najmanji zatvoren skup koji sadrži skup A .
- Skup A je zatvoren ako i samo ako je $A = \overline{A}$.
- $A^* = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A})$.

Definicija

Za tačku $a \in X$ kažemo da je **tačka nagomilavanja** skupa $A \subset X$ ako

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) L(a, \varepsilon) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

(svaka ε -okolina tačke a ima neprazan presek sa skupom $A \setminus \{a\}$).

- Skup svih tačaka nagomilavanja skupa A obeležavamo sa A' .
- Svaka tačka nagomilavanja skupa A je adherentna tačka datog skupa, tj. važi da je $A' \subset \overline{A}$.
- Svaka tačka skupa ne mora biti tačka nagomilavanja datog skupa, pa odatle sledi da svaka adherentna tačka ne mora da bude i tačka nagomilavanja datog skupa. Na primer, ako je $A = (0, 1) \cup \{3, 4\}$, tada je $A' = [0, 1]$, $\overline{A} = [0, 1] \cup \{3, 4\}$. Dakle, $3 \in \overline{A}$, ali $3 \notin A'$.
- Očigledno važi da je $\overline{A} = A \cup A'$.

Definicija

Za tačku $a \in A$ kažemo da je **izolovana tačka** skupa $A \subset X$ ako

$$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+) L(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$$

(postoji ε –okolina tačke a koja sadrži samo tačku a iz skupa A).

Primer

Za skup $A = (1, 2] \cup \{3\}$ je

$$A^\circ = (1, 2),$$

$$\overline{A} = [1, 2] \cup \{3\},$$

$$A' = [1, 2],$$

$$A^* = \{1, 2, 3\}.$$

Tačka 3 je izolovana tačka skupa A .

Za skup $B = \{1, 2, 3\}$ je

$$B^\circ = \emptyset,$$

$$\overline{B} = B = B^*,$$

$$B' = \emptyset.$$

Sve tačke skupa B su izolovane tačke.