In [1]:
```
%plot inline -w 800 -h 800
```

In [2]:
```
function plot_function(interval,fun)
a=interval(1);
b=interval(2);
x=a-3:0.1:b+3;
y1=feval(fun,x);
hold on;
plot(x,y1);
plot(x,zeros(length(x)),'b');
set(gca, "linewidth", 4, "fontsize", 12)
set(gca, 'XTick', floor(a)-3:floor(b)+3)
endfunction

function plot_function_with_points(interval,fun)
plot_function(interval,fun)
a=interval(1);
b=interval(2);
plot_point([a,0],0,'bo',"a");
plot_point([b,0],0,'bo',"b");
plot_point([a,feval(fun,a)],0,'bo',"f(a)");
plot_point([b,feval(fun,b)],0,'bo',"f(b)");
endfunction

function handles = plot_point(xkplus1,k,format,mark)
    handles = [plot(xkplus1(1),xkplus1(2),format),...
    %h = text(xkplus1(1)-0.5,xkplus1(2)-0.2,[char(10),mark,' (' num2str(xkplus1(1),'%.1f') ',' num2str(xkplus1(2),'%.1f') ') ' num2str(k)])];
    h = text(xkplus1(1)-0.5,xkplus1(2)-0.2,[char(10),mark,num2str(k)])];
    set(h, 'fontsize', 16);
endfunction
```

Rešavanje nelinearnih jednačina

Tema današnjeg predavanja su numeričke metode za rešavanje jednačina kod kojih zavisnost između promenjljivih nije linearna.

Jedan primer nelinearne jednačine je kvadratna jednačina:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Kvadratna jednačina ima analitičko rešenje:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Međutim, postoji veliki broj nelinearnih jednačina u realnim problemima (recimo detekcija kolizija) koje nemaju analitičko rešenje. U tom slučaju koristimo numeričke metode.

Uvodna napomena:

Na ovom predavanju rešavanje nelinearne jednačine posmatraćemo kao određivanje nule funkcije, odnosno određivanje tačke x za koju važi $f(x) = 0$.

Na primer, tačka x za koju važi $cos(x) = x$ je ista tačka x za koju važi $cos(x) - x = 0$.

Numeričke metode za rešavanje nelinearnih jednačina

Postoji dve vrste metoda:

1. Zatvorene, kod kojih moramo znamo zatvoreni interval da bi mogli da upotrebimo metodu.

2. Otvorene, kod koji metod možemo da upotrebimo sa proizvoljnim početnim rešenjem.

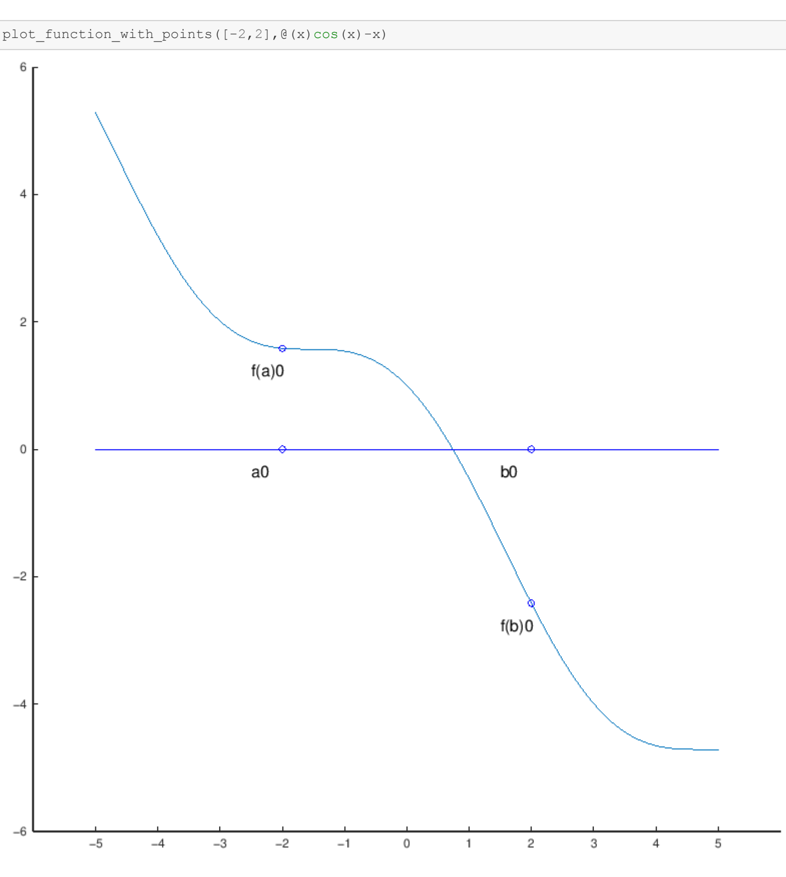
Metoda polovljenja

Najednostavnija metoda. Spada u zatorene metode, odnosno moramo da znamo neki početni interval $[a, b]$ u kome se nalazi rešenje.

Da bi mogli da koristimo metodu polovljenja, na intervalu $[a, b]$ funkcija $f(x)$ čiju nulu tražimo mora da bude neprekidna i da seče x-osu bar u jednoj tački (da ima nulu na tom zatvorenom intervalu).

Na primer, fukcija $cos(x) - x$ ima jednu nulu na intervalu $[-2, 2]$

In [3]:
```
plot_function_with_points([-2,2],@(x)cos(x)-x)
```



Algoritam metode polovljenja

1. Proveravamo da li važi $f(a)f(b) < 0$, ako ne važi ovde završavamo algoritam

Ponavljamo

2. Odredimo polovinu intervala $[a, b]$:

$$c = \frac{a+b}{2}$$

3. Provervavmo da li važi $f(c) = 0$, ako važi pronašli smo rešenje i ovde završavamo algoritam.

4. Provervamo u kom intervalu od dva ponuđena $[a, c]$ i $[c, b]$ funkcija menja znak, na primer proverimo da li važi:

$$f(a)f(c) < 0$$

.

5. Nastavljamo da delimo interval u kome funkcija menja znak, odnosno radimo jedno od $a = c$ ili $b = c$.

Kraj ponavljanja

6. Vraćamo c kao rešenje

Primer: Rešavamo jedančinu $x + 3 = 0$ na intervalu $[-4, 0]$. Rešenje je $x = -3$.

Očigledno je da je $x + 3 = 0$ linearna jednačina, ali je namerno odbrana za lakšu ilustraciju metode.

Provera početnog uslova

In [4]:
```
a=-4;
b=0;
fa=feval(@(x)x+3,a)
fb=feval(@(x)x+3,b)
fa*fb<0
```

```
fa = -1
fb =  3
ans = 1
```

Iteracija 1.

In [6]:
```
c=(a+b)/2
fc=feval(@(x)x+3,c)
fc==0
```

```
c = -2
fc =  1
ans = 0
```

In [7]:
```
fa*fc<0
```

```
ans = 1
```

In [8]:
```
b=c
```

```
b = -2
```

Iteracija 2.

In [10]:
```
fa=feval(@(x)x+3,a)
fb=feval(@(x)x+3,b)
c=(a+b)/2
fc=feval(@(x)x+3,c)
fc==0
```

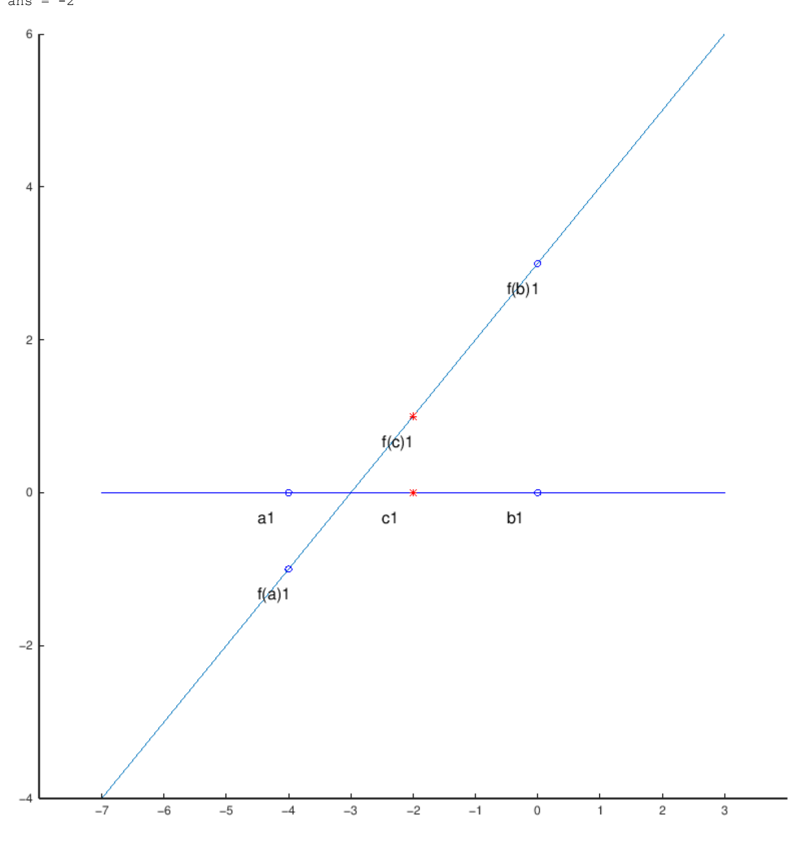
```
fa = -1
fb =  1
c = -3
fc = 0
ans = 1
```

Pogledaćemo prvo vizualizaciju metode polovljenja pre nego što krenemo na pisanje koda.

In [11]:
```
function x=polovljenje_viz(a,b,maxIter,tacnost,funkcija)
plot_function([a,b],funkcija)
if(feval(funkcija,a)*feval(funkcija,b)<0)
   for i=1:maxIter
        if i>1
            delete(hc);
            delete(hfc);
        end
        plot_point([a,0],i,'bo',"a");
        plot_point([b,0],i,'bo',"b");
        plot_point([a,feval(funkcija,a)],i,'bo',"f(a)");
        plot_point([b,feval(funkcija,b)],i,'bo',"f(b)");

        c=(a+b)/2;
        fc=feval(funkcija,c);
        hc = plot_point([c,0],i,'r*',"c");

        if(fc==0||abs(b-a)<tacnost)
            break;
        else
            if(feval(funkcija,c)*feval(funkcija,a)<0)
                b=c;
            else
                a=c;
            end
        end
        hfc = plot_point([c,fc],i,'r*',"f(c)");
    end
    x=c;
end
endfunction
```

In [15]:
```
polovljenje_viz(-4,0,1,10^-5,@(x)x+3)
```

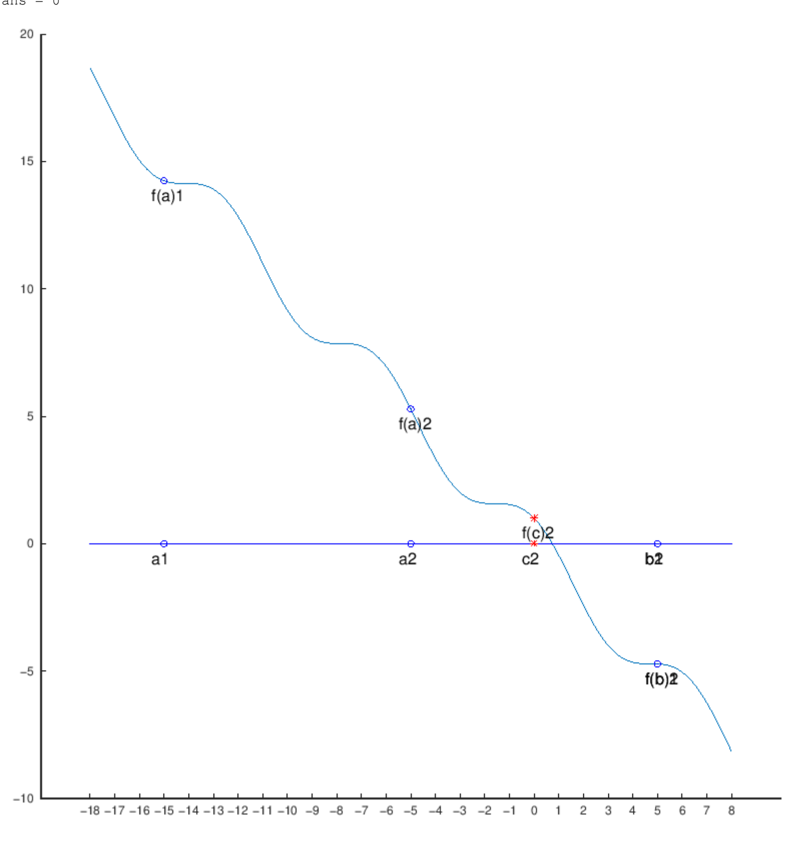
```
ans = -2
```



Metodu ćemo sada ilustrovati na primer jedančine $cos(x) - x$ na intervalu $[-15, 5]$.

In [17]:
```
polovljenje_viz(-15,5,2,10^-5,@(x)cos(x)-x)
```

```
ans = 0
```



Pogledati animaciju za metodu polovljenja sa slajdova.

Pišemo kod za metodu polovljenja.

Spajamo kod koji smo gore pisali za primer $x + 3$ u jednu celinu:

In [18]:
```
a=-4;
b=0;
fa=feval(@(x)x+3,a);
fb=feval(@(x)x+3,b);

if fa*fb<0
    for i=1:100
        fa=feval(@(x)x+3,a);
        fb=feval(@(x)x+3,b);

        c=(a+b)/2;
        fc=feval(@(x)x+3,c);

        [a,b,c,fc]

        if fc==0
            break;
        end

        if fa*fc<0
            b=c;
        else
            a=c;
        end
    end
end
```

```
ans =

  -4   0  -2   1

ans =

  -4  -2  -3   0
```

In [19]:
```
function x=polovljenje(a,b,funkcija,maxIter,tacnost)
fa=feval(funkcija,a);
fb=feval(funkcija,b);
if fa*fb<0
    for i=1:maxIter
        fa=feval(funkcija,a);
        fb=feval(funkcija,b);

        c=(a+b)/2;
        fc=feval(funkcija,c);
        [i,fc,abs(a-b)]
        if fc==0 || abs(a-b)<tacnost
            break;
        end

        if fa*fc<0
            b=c;
        else
            a=c;
        end
    end
    x=c;
end
endfunction
```

In [20]:
```
x=polovljenje(-4,0,@(x)x+3,10,10^-5)
```

```
ans =

   1   1   4

ans =

   2   0   2

x = -3
```

In [21]:
```
x=polovljenje(-15,5,@(x)cos(x)-x,100,10^-5)
```

```
ans =

    1.0000    5.2837   20.0000

ans =

    2    1   10

ans =

   3.0000  -3.3011   5.0000

ans =

   4.00000  -0.93468   2.50000

ans =

   5.00000   0.18596   1.25000

ans =

   6.00000  -0.34569   0.62500

ans =

   7.000000  -0.071216   0.312500

ans =

   8.000000   0.059700   0.156250

ans =

   9.0000000  -0.0051957   0.0781250

ans =

   10.000000    0.027395    0.039062

ans =

   11.000000    0.011135    0.019531

ans =

   12.0000000    0.0029786    0.0097656

ans =

   13.0000000   -0.0011064    0.0048828

ans =

   14.00000000    0.00093668    0.00244141

ans =

   15.000000000   -0.000084701    0.001220703

ans =

   16.00000000    0.00042602    0.00061035

ans =

   17.00000000    0.00017067    0.00030518

ans =

   18.000000000    0.000042986    0.000152588

ans =

   19.000000000   -0.000020857    0.000076294

ans =

   20.000000000    0.000011065    0.000038147

ans =

   21.0000000000   -0.0000048957    0.0000190735

ans =

   22.0000000000    0.0000030847    0.0000095367

x =  0.73908
```

Konvergencija metode polovljenja

Metoda polovljenja ima garantovanu konvergenciju jer počinje od zatvorenog intervala koji sadrži rešenje, a metod tako funkcioniše da će sigurno stići do rešenja ili toliko malog intervala da ga nema smisla više poloviti.

Brzina konvergencije

Brzina konvergencije meri kojom brzinom opada greška (rastojanje između trenutnog i tačnog rešenja) kroz iteracije metoda.

Brzina se izražava kao oblik funkcije kojoj približno odogvara opadanje greške kroz iteracije.

Na primer, ako opadanje greške prati skoro pravu liniju kažemo da metoda konvergira linearno.

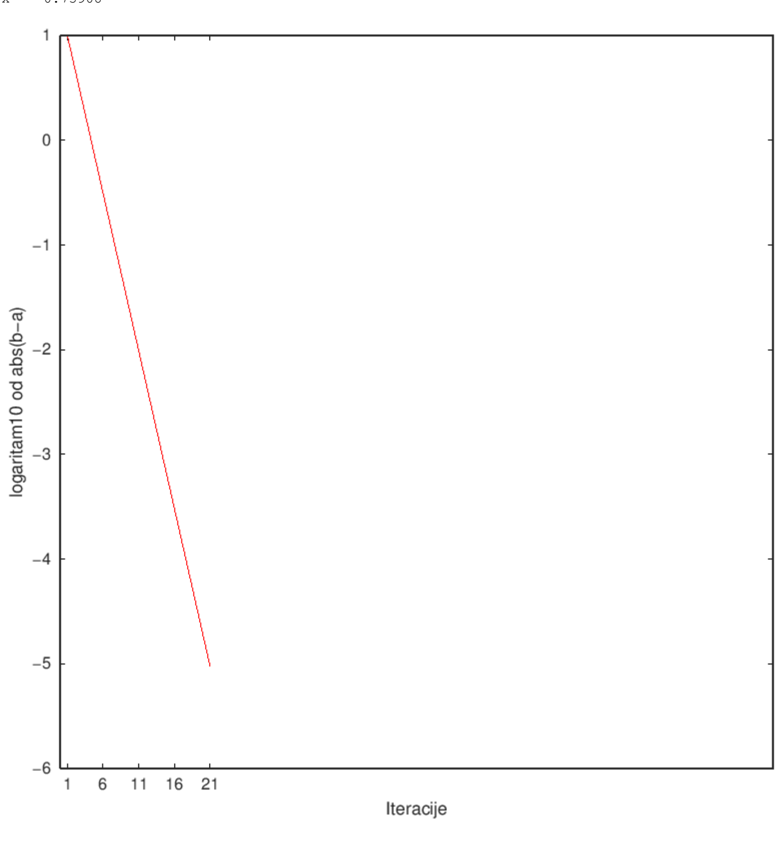
Ako prati funkciju $f(x) = x^2$ kažemo da konvergira kvadratno itd. Očigledno je da je kvadratna konvergencija bolja od linearne itd.

In [22]:
```
function x=polovljenje_konvergencija(a,b,funkcija,maxIter,tacnost)
fa=feval(funkcija,a);
fb=feval(funkcija,b);
greske = zeros(1,maxIter);
if fa*fb<0
    for i=1:maxIter
        fa=feval(funkcija,a);
        fb=feval(funkcija,b);

        c=(a+b)/2;
        fc=feval(funkcija,c);
        if fc==0 || abs(a-b)<tacnost
            break;
        end

        if fa*fc<0
            b=c;
        else
            a=c;
        end
        greske(i)=abs(a-b);
    end
    x=c;
end

plot(1:maxIter,log10(greske),'Color', [1 0 0], 'LineWidth', 2);
set(gca, 'XTick', 1:5:25)
xlabel('Iteracije')
ylabel('logaritam10 od abs(b-a)')
set(gca, "linewidth", 4, "fontsize", 16)
endfunction
```

Prikazaćemo na koji način opada veličina intervala $[a, b]$ što se može grubo može smatrati greškom za primer jednačine $cos(x) - x$

In [23]:
```
x=polovljenje_konvergencija(-15,5,@(x)cos(x)-x,100,10^-5)
```

```
x =  0.73908
```



Vidimo da greška opada kao prava linija što ilustruje da je konvergencija metode polovljenja linearna.

Metoda sečice

Mana metode polovljenja to što ne koristi vrednosti već samo znak funkcije $f(x)$ u svom algoritmu.

Metoda sečice koristi funkciju vrednosti funkcije $f(x)$.

Ideja je da prilikom traženja nule, $f(x)$ zamenimo pravom na malom intervalu (linearna interpolacija).

Umesto da tražimo nulu $f(x)$ koja može biti komplikovanog oblika, tražimo nulu prave koja je jednostavna.

Algoritam metode sečice

Imamo dve tačke x_1 i x_2 i funkciju $f(x)$ čiju nulu određujuemo.

Cilj nam je da pronađemo tačku gde prava između tačaka $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ seče x-osu.

Ako imamo pravu $y = kx + n$ ona tačku u kojoj seče x-osu možemo odrediti na sledeći način:

$$\begin{gathered} y = kx + n \\ y = 0 \\ 0 = kx + n \\ x = -\frac{n}{k} \end{gathered}$$

Određujemo sada jednačinu prave $y = kx + n$ kroz tačke $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$:

$$\begin{gathered} f(x_1) = kx_1 + n \\ f(x_2) = kx_2 + n \end{gathered}$$

Oduzimamo drugu od prve jednačine:

$$f(x_1) - f(x_2) = k(x_1 - x_2)$$

Određujemo k:

$$k = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Određujemo n zamenom k u prvu jednačinu:

$$\begin{gathered} f(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} x_1 + n \\ n = f(x_1) - \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} x_1 \end{gathered}$$

Određujemo tačku x_3 kao tačku u kojoj prava između $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ sečce x-osu:

$$\begin{gathered} x_3 = -\frac{n}{k} \\ x_3 = -\frac{f(x_1) - \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} x_1}{\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}} \\ x_3 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\frac{f(x_1) - f(x_2)}{(x_1 - x_2)}} \\ x_3 = x_1 - f(x_1) \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} \end{gathered}$$

Ako sada umesto $x_3, x_2 i x_1$ redom pišemo $x_{n+1}, x_n i x_{n-1}$ dobijamo opštu formulu za metodu sečice:

$$x_{n+1} = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

Primer: Primenićemo sada metodu sečice na funkciju $f(x) = x^2 - 2$ za početne vrenosti $x_1 = 0$ i $x_2 = 3$.

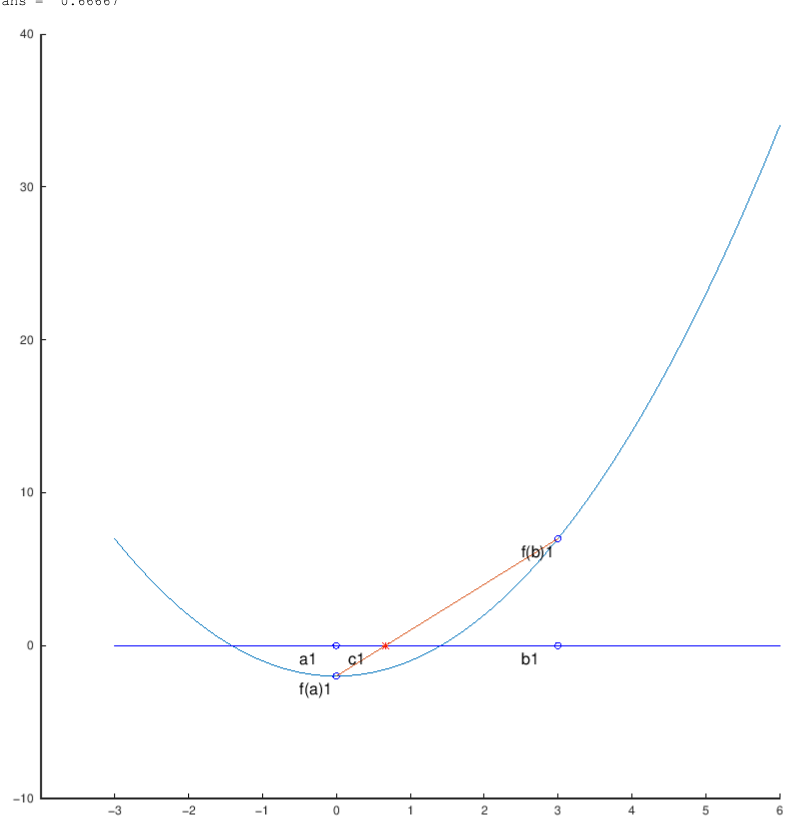
$$x_{n+1} = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

$$\begin{gathered} x_3 = x_1 - f(x_1) \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} \\ f(x_1) = f(0) = 0^2 - 2 = -2 \\ f(x_2) = f(3) = 3^2 - 2 = 7 \\ x_3 = 0 - (-2) \frac{-0 - 3}{-2 - 7} = \frac{2}{3} \end{gathered}$$

In [24]:
```
function x=secica_viz(a,b,funkcija,maxIter,tacnost)
plot_function([a,b],funkcija)
    for i=1:maxIter
        if i>1
            delete(hc);
            %delete(hp);
        end

        fa=feval(funkcija,a);
        fb=feval(funkcija,b);

        k=(fb-fa)/(b-a);
        n=fb-k*b;
        c=-n/k;

        fc=feval(funkcija,c);

        plot_point([a,0],i,'bo',"a");
        plot_point([b,0],i,'bo',"b");
        plot_point([a,feval(funkcija,a)],i,'bo',"f(a)");
        plot_point([b,feval(funkcija,b)],i,'bo',"f(b)");
        hc = plot_point([c,0],i,'r*',"c");
        tmp=linspace(min([a,b]),max([a,b]),100);
        hp=plot(tmp,k.*tmp.+n);

        if(abs(fc)<tacnost)
            break;
        end
        a=b;
        b=c;
    end
    x=c;
endfunction
```

In [25]: `secica_viz(0,3,@(x)x.^2-2,1,10^-5)`

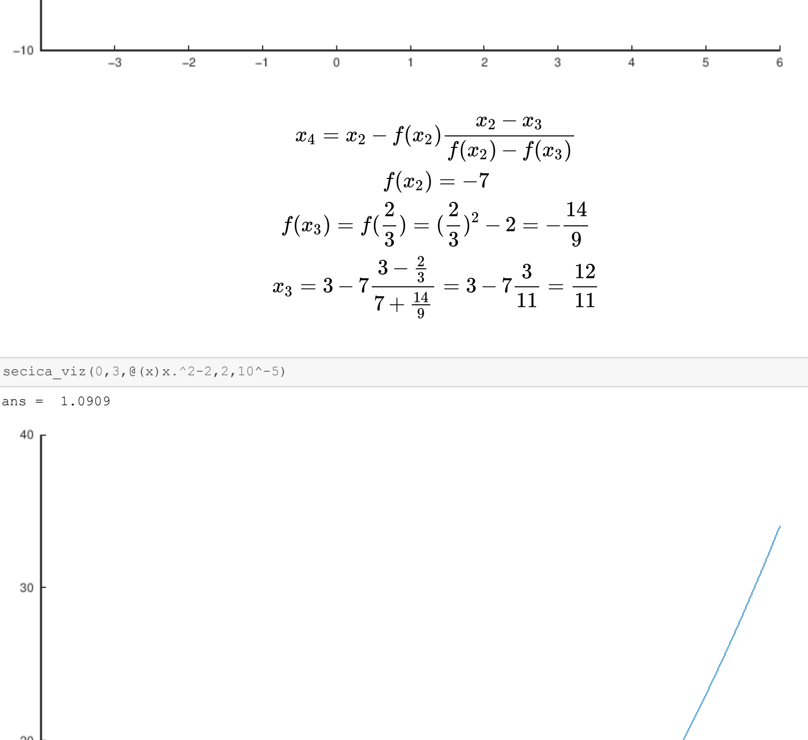
ans = 0.66667



$$x_4 = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_3}{f(x_2) - f(x_3)}$$
$$f(x_2) = -7$$
$$f(x_3) = f(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3})^2 - 2 = -\frac{14}{9}$$
$$x_3 = 3 - 7\frac{3 - \frac{2}{3}}{7 + \frac{14}{9}} = 3 - 7\frac{3}{11} = \frac{12}{11}$$

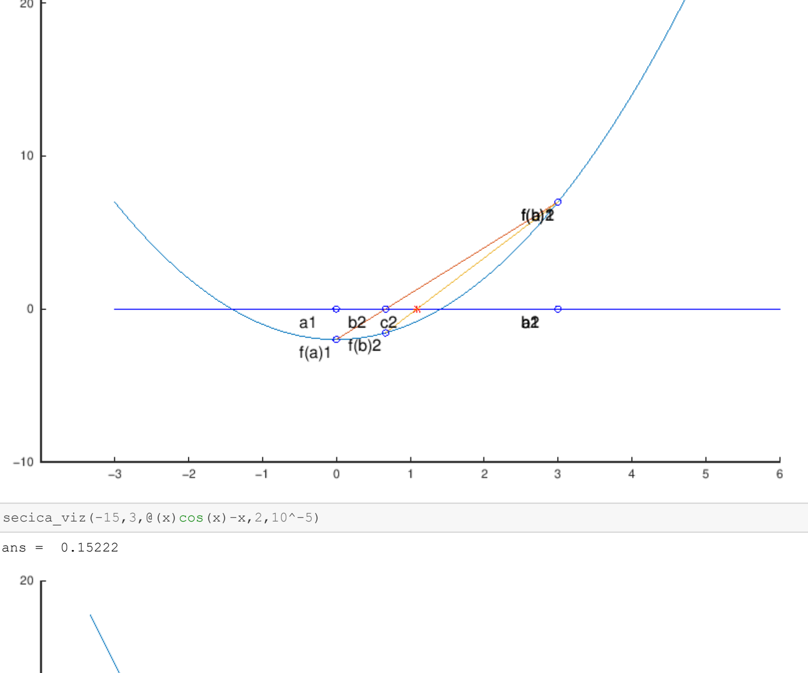
In [26]: `secica_viz(0,3,@(x)x.^2-2,2,10^-5)`

ans = 1.0909



In [27]: `secica_viz(-15,3,@(x)cos(x)-x,2,10^-5)`

ans = 0.15222



Pogledati animaciju za metodu sečice sa slajdova.

Pišemo kod za metodu sečice.

In [28]:
```
function x=secica(a,b,funkcija,maxIter,tacnost)
    for i=1:maxIter
        fa=feval(funkcija,a);
        fb=feval(funkcija,b);

        k=(fb-fa)/(b-a);
        n=fb-k*b;
        c=-n/k;

        fc=feval(funkcija,c);

        [i,fc]

        if(abs(fc)<tacnost)
            break;
        end
        a=b;
        b=c;
    end
    x=c;
endfunction
```

In [29]: `x=secica(0,3,@(x)x.^2-2,10,10^-5)`

```
ans =

   1.0000  -1.5556

ans =

   2.00000  -0.80992

ans =

   3.00000   0.40785

ans =

   4.000000  -0.047300

ans =

   5.0000000  -0.0022181

ans =

   6.000000000   0.000013279

ans =

   7.0000000000000  -0.0000000036839

x =  1.4142
```

In [30]:
```
x=secica(-15,5,@(x)cos(x)-x,100,10^-5)
x=polovljenje(-15,5,@(x)cos(x)-x,100,10^-5)
```

```
ans =

   1.00000   0.97563

ans =

   2.00000  -0.23750

ans =

   3.000000   0.048358

ans =

   4.0000000   0.0013987

ans =

   5.0000000000  -0.0000091257

x =  0.73909
ans =

    1.0000    5.2837   20.0000

ans =

    2    1   10

ans =

   3.0000  -3.3011   5.0000

ans =

   4.00000  -0.93468   2.50000

ans =

   5.00000   0.18596   1.25000

ans =

   6.00000  -0.34569   0.62500

ans =

   7.000000  -0.071216   0.312500

ans =

   8.000000   0.059700   0.156250

ans =

   9.0000000  -0.0051957   0.0781250

ans =

   10.000000    0.027395    0.039062

ans =

   11.000000    0.011135    0.019531

ans =

   12.0000000    0.0029786    0.0097656

ans =

   13.0000000   -0.0011064    0.0048828

ans =

   14.00000000    0.00093668    0.00244141

ans =

   15.000000000   -0.000084701    0.001220703

ans =

   16.00000000    0.00042602    0.00061035

ans =

   17.00000000    0.00017067    0.00030518

ans =

   18.000000000    0.000042986    0.000152588

ans =

   19.000000000   -0.000020857    0.000076294

ans =

   20.000000000    0.000011065    0.000038147

ans =

   21.0000000000   -0.0000048957    0.0000190735

ans =

   22.0000000000    0.0000030847    0.0000095367

x =  0.73908
```

Konvergencija metode sečice

Konvergencija metode sečice je super-linearna.

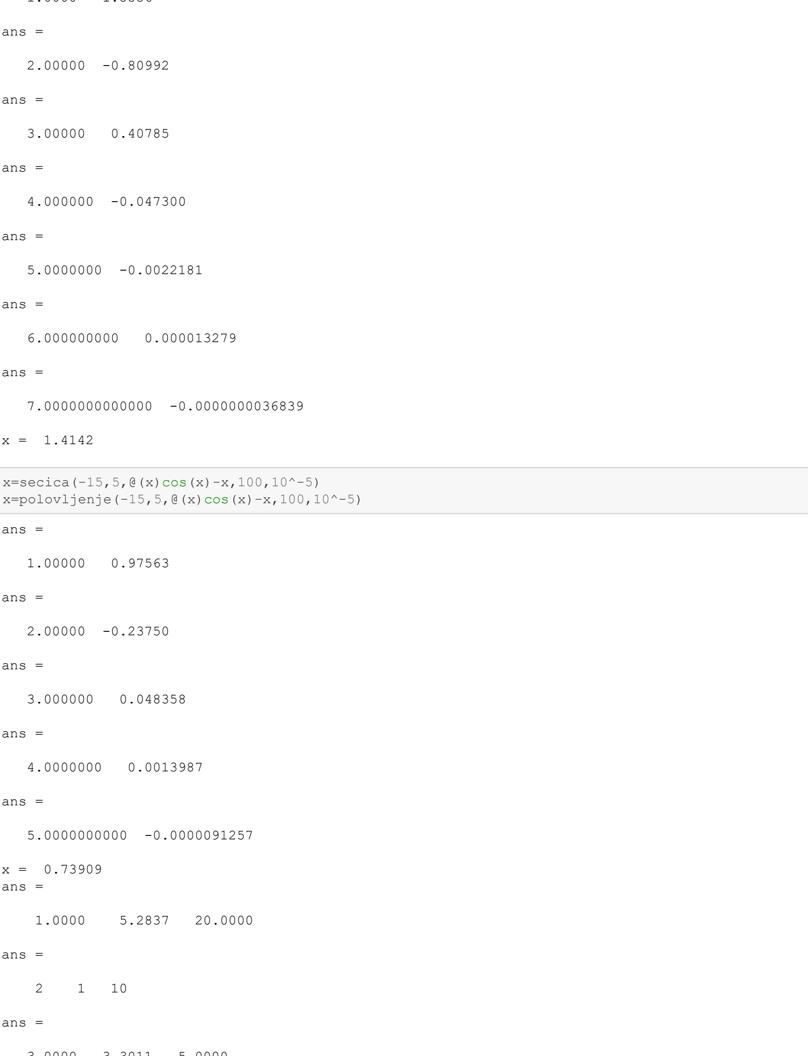
To znači da se odnos greške i iteracija menja linearno, tj. $greska = k * itreacija + n$, ali se k kod metode sečice smanjuje kroz iteracije, dakle konvergencija je sve brža. Na primer na početku može da važi $greska = k_1 \cdot itreacija + n$, a posle nekoliko iteracija $greska = k_2 \cdot itreacija + n$ itd.

Kod metode polovljenja vrednost k se ne menja kroz iteracije, odnosno trenutna greška je uvek polovina prethodne greške.

In [31]:
```
function x=secica_konvergencija(a,b,funkcija,maxIter,tacnost)
    greske = zeros(1,maxIter);
    for i=1:maxIter
        fa=feval(funkcija,a);
        fb=feval(funkcija,b);

        k=(fb-fa)/(b-a);
        n=fb-k*b;
        c=-n/k;

        fc=feval(funkcija,c);
        greske(i)=fc;

        if(abs(fc)<tacnost)
            break;
        end
        a=b;
        b=c;
    end
    x=c;
    plot(1:maxIter,log10(greske),'Color', [0 1 0], 'LineWidth', 2);
    set(gca, 'XTick', 1:5:25)
    xlabel('Iteracije')
    ylabel('logaritam10 od abs(b-a) i f(c)')
    set(gca, "linewidth", 4, "fontsize", 16)
endfunction
```

In [32]:
```
x_pol=polovljenje_konvergencija(-15,5,@(x)cos(x)-x,100,10^-5)
hold on;
x_sec=secica_konvergencija(-15,5,@(x)cos(x)-x,100,10^-5)
```

```
x_pol =  0.73908
x_sec =  0.73909
```



[illegible]

Metoda regula falsi

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Njutnova metoda

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Algoritam Njutnove metode

[illegible]

$$y_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

[illegible]

$$0 = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$
$$f'(x_1)x_2 = f'(x_1)x_1 - f(x_1)$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

[illegible]

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

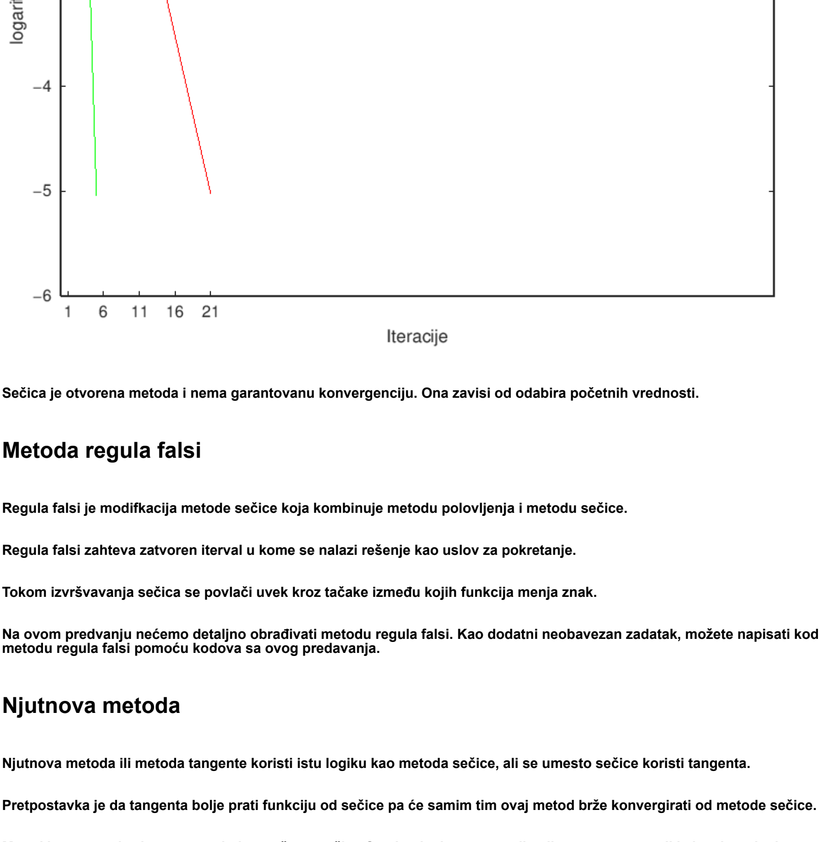
[illegible]

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$f(9) = 9^2 - 2 = 79$$
$$f'(9) = 2 \cdot 9 = 18$$
$$x_2 = 9 - \frac{79}{18} = 4.6111$$

In [33]:
```
function x=tangenta_viz(x1,funkcija,izvod,maxIter,tacnost)
    [illegible]
        x1=x2;
    end
    x=x2;
endfunction
```

In [34]: `tangenta_viz(9,@(x)x.^2-2,@(x)2.*x,1,10^-5)`

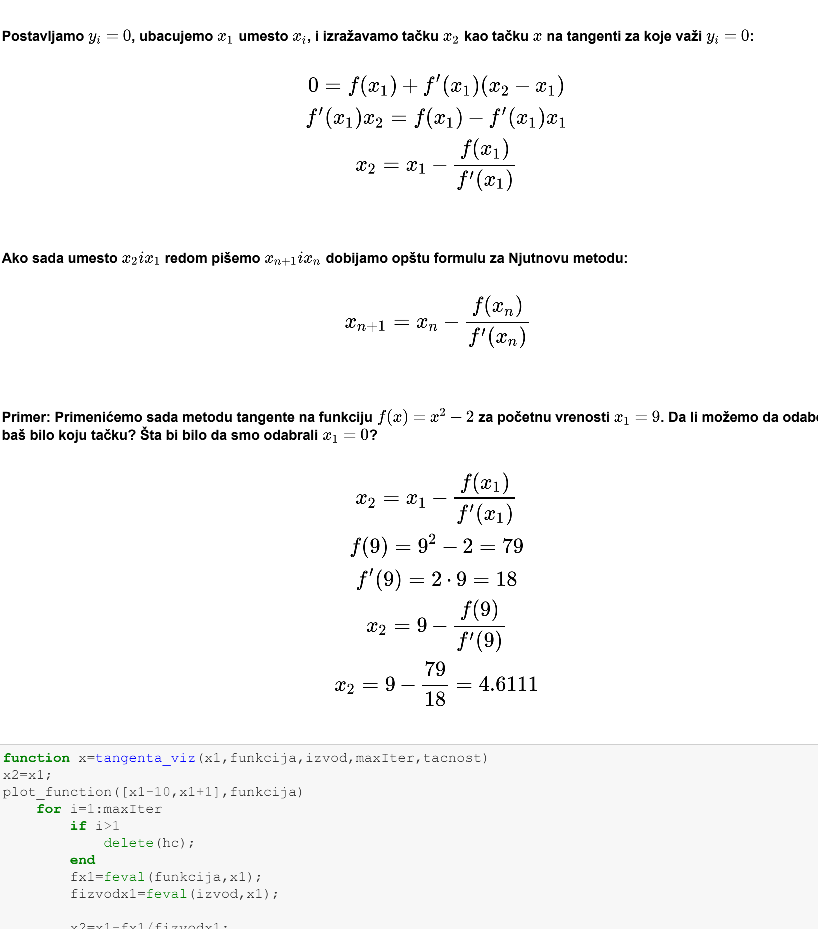
ans = 4.6111



$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$
$$f(4.6111) = 4.6111^2 - 2 = 19.262$$
$$f'(4.6111) = 2 \cdot 4.6111 = 9.222$$
$$x_3 = 4.6111 - \frac{f(4.6111)}{f'(4.6111)}$$
$$x_2 = 4.6111 - \frac{19.262}{9.222} = 2.5224$$

In [35]: `tangenta_viz(9,@(x)x.^2-2,@(x)2.*x,2,10^-5)`

ans = 2.5224



Pogledati animaciju za metodu tangente sa slajdova.

Pišemo kod za metodu tangente.

In [36]:
```
function x=tangenta(x1,funkcija,izvod,maxIter,tacnost)
    x2=x1;
    for i=1:maxIter
        fx1=feval(funkcija,x1);
        fizvodx1=feval(izvod,x1);

        x2=x1-fx1/fizvodx1;

        fx2=feval(funkcija,x2);

        [i,x2,fx2]

        if(abs(fx2)<tacnost)
            break;
        end
        x1=x2;
    end
    x=x2;
endfunction
```

In [37]: `x=tangenta(9,@(x)x.^2-2,@(x)2.*x,10,10^-15)`

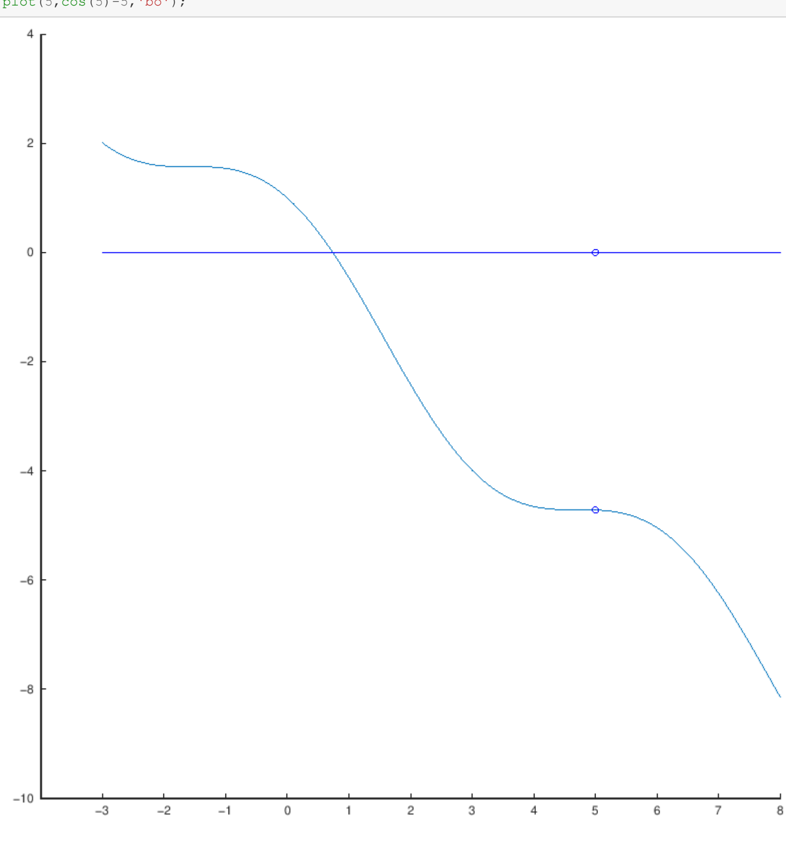
```
ans =

    1.0000    4.6111   19.2623

ans =

   2.0000   2.5224   4.3626

ans =

   3.00000   1.65766   0.74782

ans =

   4.000000   1.432089   0.050880

ans =

   5.00000000   1.41432513   0.00031557

ans =

   6.000000000000   1.414213566773   0.000000012446

ans =

   7.0000e+00   1.4142e+00   4.4409e-16

x =  1.4142
```

```
In [38]: x=tangenta(5,@(x)cos(x)-x,@(x)-sin(x)-1,10,10^-5)
disp('----------------------------------')
x=secica(-15,5,@(x)cos(x)-x,100,10^-5)
disp('----------------------------------')
x=polovljenje(-15,5,@(x)cos(x)-x,100,10^-5)
```

```
ans =

     1.0000  -109.8206   108.8297

ans =

    2.0000   15.9608  -16.9290

ans =

   3.0000  -6.6151   7.5605

ans =

   4.0000   4.6001  -4.7122

ans =

     5.0000  -743.6197   743.0281

ans =

      6.0000   3090.7584  -3089.9158

ans =

      7.0000  -3606.1401   3607.0579

ans =

      8.0000  -1024.2182   1025.2165

ans =

    9.0000   65.2592  -66.0149

ans =

   10.000   25.371  -24.400

x =  25.371
----------------------------------
ans =

   1.00000   0.97563

ans =

   2.00000  -0.23750

ans =

   3.000000   0.048358

ans =

   4.0000000   0.0013987

ans =

   5.0000000000  -0.0000091257

x =  0.73909
----------------------------------
ans =

    1.0000    5.2837   20.0000

ans =

    2    1   10

ans =

   3.0000  -3.3011   5.0000

ans =

   4.00000  -0.93468   2.50000

ans =

   5.00000   0.18596   1.25000

ans =

   6.00000  -0.34569   0.62500

ans =

   7.000000  -0.071216   0.312500

ans =

   8.000000   0.059700   0.156250

ans =

   9.0000000  -0.0051957   0.0781250

ans =

   10.000000    0.027395    0.039062

ans =

   11.000000    0.011135    0.019531

ans =

   12.0000000    0.0029786    0.0097656

ans =

   13.0000000   -0.0011064    0.0048828

ans =

   14.00000000    0.00093668    0.00244141

ans =

   15.000000000   -0.000084701    0.001220703

ans =

   16.00000000    0.00042602    0.00061035

ans =

   17.00000000    0.00017067    0.00030518

ans =

   18.000000000    0.000042986    0.000152588

ans =

   19.000000000   -0.000020857    0.000076294

ans =

   20.000000000    0.000011065    0.000038147

ans =

   21.0000000000   -0.0000048957    0.0000190735

ans =

   22.0000000000    0.0000030847    0.0000095367

x =  0.73908
```

Metoda tangente divergira za početnu vrednost $x_1 = 5$. To je zato što je tačka $x_1 = 5$ skoro tačka prevoja, tj. važi $-sin(5) - 1 = -0.041$. Što možemo videti i na grafiku.

```
In [39]: plot_function([0,5],@(x)cos(x)-x)
plot(5,0,'bo');
plot(5,cos(5)-5,'bo');
```



[illegible]

```
   4.000000000000   0.739085159965  -0.000000044770

x =  0.73909
----------------------------------
ans =

   1.0000   1.4970

ans =

   2.00000   0.74512

ans =

   3.00000  -0.93366

ans =

   4.000000   0.094587

ans =

   5.0000000   0.0084188

ans =

   6.00000000  -0.00011007

ans =

   7.00000000000   0.00000012272

x =  0.73909
----------------------------------
ans =

   1   1   5

ans =

   2.00000  -0.93468   2.50000

ans =

   3.00000   0.18596   1.25000

ans =

   4.00000  -0.34569   0.62500

ans =

   5.000000  -0.071216   0.312500

ans =

   6.000000   0.059700   0.156250

ans =

   7.0000000  -0.0051957   0.0781250

ans =

   8.000000   0.027395   0.039062

ans =

   9.000000   0.011135   0.019531

ans =

   10.0000000    0.0029786    0.0097656

ans =

   11.0000000   -0.0011064    0.0048828

ans =

   12.00000000    0.00093668    0.00244141

ans =

   13.000000000   -0.000084701    0.001220703

ans =

   14.00000000    0.00042602    0.00061035

ans =

   15.00000000    0.00017067    0.00030518

ans =

   16.000000000    0.000042986    0.000152588

ans =

   17.000000000   -0.000020857    0.000076294

ans =

   18.000000000    0.000011065    0.000038147

ans =

   19.0000000000   -0.0000048957    0.0000190735

ans =

   20.0000000000    0.0000030847    0.0000095367

x =  0.73908
```

Vidimo da metoda tangente najbrže (za 4 iteracije) stiže do rešenja.

Konvergencija Njutnove metode

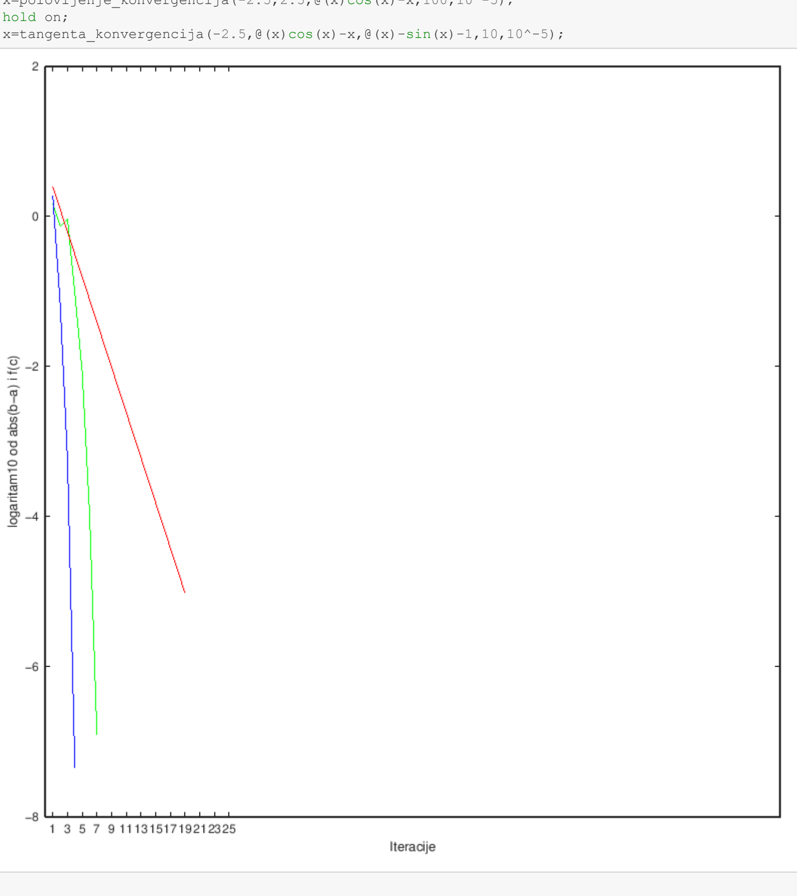
Njutnova metoda konvergira kvadratno, odnosno odnos iteracija i greške je kvadratna funkcija.

Kao što smo videli na jednom od prethodnih primera, konvergencija Njutnove metode nije garantovana i zavisi od izbora početnog rešenja.

Ako bismo u praksi hteli da što brže garantovano stignemo do tačnog rešenja, jedna od opcija bi bila da znamo bar grubo neki veći zatvoreni interval u kome je rešenje, pa da pokrenemo nekoliko iteracije metode polovljenja, pa onda kad suzimo interval odabremo neko početno rešenje i pokrenemo Njutnovu metodu.

```
In [41]: function x=tangenta_konvergencija(x1,funkcija,izvod,maxIter,tacnost)
    x2=x1;
    greske = zeros(1,maxIter);
    for i=1:maxIter
        fx1=feval(funkcija,x1);
        fizvodx1=feval(izvod,x1);

        x2=x1-fx1/fizvodx1;

        fx2=feval(funkcija,x2);

        greske(i)=fx2;
        if(abs(fx2)<tacnost)
            break;
        end
        x1=x2;
    end
    x=x2;
    plot(1:maxIter,log10(greske),'Color', [0 0 1], 'LineWidth', 2);
    set(gca, 'XTick', 1:2:25)
    xlabel('Iteracije')
    ylabel('logaritam10 od abs(b-a) i f(c)')
    set(gca, "linewidth", 4, "fontsize", 12)
endfunction
```

```
In [42]: x=secica_konvergencija(-2.5,2.5,@(x)cos(x)-x,100,10^-5);
hold on;
x=polovljenje_konvergencija(-2.5,2.5,@(x)cos(x)-x,100,10^-5);
hold on;
x=tangenta_konvergencija(-2.5,@(x)cos(x)-x,@(x)-sin(x)-1,10,10^-5);
```




```
In [ ]:
```