VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1. Vežbe II.3

1.1. Ispitivanje funkcija

Ispitujemo osobine realne funkcije $f : D \mapsto \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ jedne realne promenljive.

- *Oblast definisanosti / Domen funkcije*
  - Racionalna funkcija $\frac{P(x)}{Q(x)}$ je definisana za $Q(x) \neq 0$;
  - Funkcija $\sqrt[n]{R(x)}$, gde je n paran broj, je definisana za $R(x) \geq 0$. Ako je n neparan broj, funkcija je definisana za sve realne brojeve;
  - Funkcija $\ln(T(x))$ je definisana za $T(x) > 0$;
  - Funkcija $\operatorname{tg} x$ je definisana za $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a funkcija $\operatorname{ctg}(x)$ je definisana za $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
  - Funkcije $\arcsin x$ i $\arccos x$ su definisane samo za $x \in [-1, 1]$;
  - Funkcije e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{arctg} x$ i $\operatorname{arcctg} x$ su definisane za sve realne brojeve.
- *Parnost funkcije*
  - Ako je $f(-x) = f(x)$ funkcija je parna, tj. njen grafik je simetričan u odnosu na y-osu (npr. $f(x) = x^2$);
  - Ako je $f(-x) = -f(x)$ funkcija je neparna, tj. njen grafik je simetričan u odnosu na koordinatni početak (npr. $f(x) = x^3$);
  - Ako je $f(-x) \neq \pm f(x)$, kažemo da funkcije nije ni parna ni neparna (npr. $f(x) = \frac{x^2+4x-5}{x-4}$).
- *Nule funkcije* su rešenja jednačine $f(x) = 0$, i ukoliko postoje predstavljaju tačke u kojima grafik funkcije seče x-osu.
- *Asimptote funkcije*
  - Neka je funkcija f definisana u nekoj okolini (levoj, desnoj okolini) tačke a sem u tački a. Ako je bar jedna od graničnih vrednosti

    $$\lim_{x \to a^+} f(x), \qquad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

    jednaka $+\infty$ ili $-\infty$ prava $x = a$ naziva se **vertikalna asimptota (V.A.)** grafika funkcije f;
  - Za $m \neq 0$ funkcija $y = f(x)$ ima **kosu asimptotu (K.A.)** $\phi(x) = mx + n$ kada $x \to +\infty$, gde je $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ i $n = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$, ako postoje brojevi m i n, tj. ako oba limesa postoje i konačni su.
    Analogno se posmatra slučaj kada $x \to -\infty$. Asimptote ne moraju biti iste kada $x \to +\infty$, odnosno $x \to -\infty$;

- Za $m = 0$ funkcija $y = f(x)$ ima **horizontalnu asimptotu (H.A.)** $\phi(x) = n$ kada $x \to +\infty$ ako postoji $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = n$. Analogno se posmatra slučaj kada $x \to -\infty$.
  Primetimo da kada $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ funkcija ne može istovremeno imati i kosu i horizontalnu asimptotu.

• *Monotonost i ekstremne vrednosti funkcije*

- Neka funkcija $f(x)$ ima prvi izvod nad intervalom I. Ako je $f'(x) > 0$, funkcija $f(x)$ je monotono rastuća nad intervalom I, a ako je $f'(x) < 0$, funkcija je monotono opadajuća nad intervalom I.
  Ako funkcija u tački a ima minimum ili maksimum kažemo da u tački a ima ekstremnu vrednost.
- Ako funkcija $f(x)$ u tački a ima ekstremnu vrednost i ako postoji $f'(a)$ tada je $f'(a) = 0$. Tačke u kojima je $f'(x) = 0$ zovemo stacionarnim tačkama. Jedna od mogućnosti da se ispita da li u tački a funkcija ima ekstremnu vrednost ili ne je da ispitamo znak prvog izvoda.
- Ako je funkcija u tački a neprekidna i ako postoji $\delta > 0$ takvo da za $x \in (a - \delta, a)$ je $f'(x) > 0$, $(f'(x) < 0)$, a za $x \in (a, a + \delta)$ je $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ onda funkcija u tački a ima ekstremnu vrednost i to maksimum (minimum).

• *Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke funkcije*

- Ako postoji f'' nad intervalom I i ako je $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$ nad intervalom I, tada je funkcija $f(x)$ konveksna (konkavna) nad intervalom I. Ako postoji $f''(x)$ nad intervalom I i ako je funkcija $f(x)$ konveksna (konkavna) nad I, tada je $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$ nad I.
- Za tačku $P(a, f(a))$ se kaže da je prevojna tačka funkcije $f(x)$ ako postoji okolina $(a - \delta, a + \delta)$ tačke a, takva da je funkcija $f(x)$ nad intervalom $(a - \delta, a)$ konkavna (konveksna), a nad intervalom $(a, a + \delta)$ konveksna (konkavna). Ako je $P(a, f(a))$ prevojna tačka funkcije $f(x)$ i ako postoji $f''(a)$, tada je $f''(a) = 0$.

Zadatak 1.1. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $y = \sqrt{\dfrac{(x-2)^3}{x}}$.

Rešenje.

- *oblast definisanosti*: za izraz ispod kvadratnog korena mora da važi $\dfrac{(x-2)^3}{x} \geq 0$ i $x \neq 0$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$(x-2)^3$	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$+$	$+$
y	$+$	$-$	$+$

  $\mathcal{D} : x \in (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$.

- *parnost*: ni parna, ni neparna funkcija. Može se zaključiti iz domena jer funkcija nije definisana na intervalu $[0, 2)$, pa njen grafik ne može biti simetričan u odnosu na y-osu niti koordinatni početak.

- *nule*:

$$y = \sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^3}{x} = 0 \Leftrightarrow (x-2)^3 = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2,$$

  tj. funkcija seče x- osu u tački $(2, 0)$.

- *asimptote*:
  - V.A. je prava $x = 0$ jer

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}} = +\infty.$$

  - H.A. ne postoji jer

$$\lim_{x\to \pm\infty} \sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}} = +\infty.$$

  - K.A. je prava $y_1 = x - 3$ kada $x \to +\infty$

$$m_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{(x-2)^2(x-2)}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x-2|}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}} = 1$$

$$n_1 = \lim_{x\to+\infty} \Big[f(x) - x\Big] = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x^3}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x^3}} - 1}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{3}{2}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x-(x-2)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -3\cdot\left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = -3.$$

Prava $y_2 = -x + 3$ je kosa asimptota funkcije kada $x \to -\infty$

$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x-2|}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-x}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}} = -1$$

$$n_2 = \lim_{x\to-\infty} \Big[f(x) - (-x)\Big] = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(|x|\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x^3}} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(-x\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x^3}} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(1 - \sqrt{\frac{(x-2)^3}{x^3}}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - \left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L.P.}}{=} 3.$$

- *monotonost i ekstremne vrednosti:*

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}}\cdot\frac{3(x-2)^2x - (x-2)^3}{x^2} = \frac{(x-2)^2(3x-x+2)}{2\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}\cdot x^4} =$$

$$= \frac{2(x+1)\sqrt{(x-2)^4}}{2\sqrt{x^3(x-2)^3}} = (x+1)\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}$$

	$(-\infty,-1)$,	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$\times$	$+$
$\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}$	$+$	$+$	$\times$	$+$
y'	$\searrow$	$\nearrow$	$\times$	$\nearrow$

$y' > 0$ za $x \in (-1,0) \cup [2,\infty)$, funkcija raste,
$y' < 0$ za $x \in (-\infty,-1)$, funkcija opada.
Funkcija ima minimum u tački $T_{min}(-1,\sqrt{27})$ $\big(x=-1,\ y(-1)=\sqrt{27}\big)$.

- *konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:* drugi izvod funkcije je dat sa

$$y'' = \sqrt{\frac{x-2}{x^3}} + (x+1)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}}\cdot\frac{x^3-(x-2)3x^2}{x^6} =$$

$$= \sqrt{\frac{x-2}{x^3}}\cdot\left(1 + \frac{(x+1)(x-3x+6)}{\frac{2(x-2)}{x^3}\cdot x^4}\right) =$$

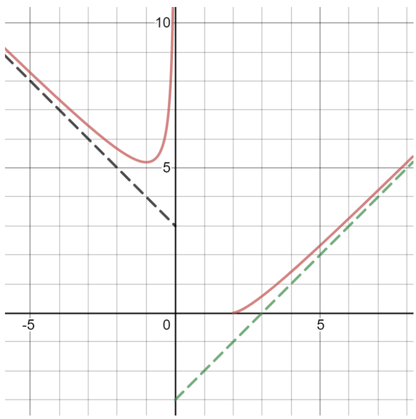
$$= \sqrt{\frac{x-2}{x^3}}\cdot\frac{x^2-2x+(x+1)(3-x)}{x(x-2)} = \frac{3}{x(x-2)}\cdot\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
x	$-$	$\times$	$+$
$x-2$	$-$	$\times$	$+$
$\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}$	$+$	$\times$	$+$
y''	$\bigcup$	$\times$	$\bigcup$

$y'' > 0$ za $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, funkcija je konveksna.
Kako je funkcija konveksna na celom domenu sledi da nema prevojnih tačaka.

- *tangente funkcije u tačkama gde ne postoji prvi izvod:* ako je α ugao između tangente i pozitivnog smera x-ose, onda je koeficijent pravca desne tangente u tački $(2, 0)$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = y'(2^+) = 3 \cdot \sqrt{\frac{0^+}{8}} = 0 \quad (\alpha = 0).$$



Slika 1: $y = \sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}$

Zadatak 1.2. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $y = \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{x^2-1}$.

Rešenje.

- *oblast definisanosti*: funkcija $y = \operatorname{arctg} x$ je definisana za sve realne brojeve, a $x^2 - 1 \neq 0$ za svako $x \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$. Dakle, $\mathcal{D} = \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$.

- *parnost*: ovo je neparna funkcija, jer je

$$f(-x) = \operatorname{arctg} \frac{2(-x)}{(-x)^2 - 1} = \operatorname{arctg} \frac{-2x}{x^2-1} = -\operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2-1} = -f(x),$$

  što znači da je njen grafik simetričan u odnosu na koordinatni početak pa je **u nastavku dovoljno posmatrati samo deo funkcije za** $x \geq 0$.

- *nule*:

$$y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

- *asimptote*:

  – V.A. ne postoji jer

$$\lim_{x \to 1^+} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2-1} = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \to 1^-} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2-1} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

  – H.A. je data jednačinom $y = 0$ jer

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2-1} = \operatorname{arctg}(0) = 0.$$

  – K.A. ne postoji jer postoji horizontalna asimptota funkcije kada $x \to +\infty$.

- *monotonost i ekstremne vrednosti:* prvi izvod funkcije y je dat sa

$$y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2} \cdot \frac{2(x^2-1) - 2x \cdot 2x}{x^2-1} = \frac{1}{\frac{(x^2-1)^2 + 4x^2}{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 - 2}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{-2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2}{x^2+1}$$

  $y' < 0$ za svako $x \in \mathcal{D}$, funkcija je opadajuća, i nema ekstremnih vrednosti.

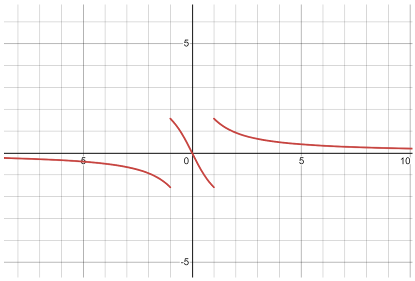
- *konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:* drugi izvod funkcije je dat sa

$$y'' = \left(\frac{-2}{x^2+1}\right)' = \frac{2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2},$$

  te znak drugog izvoda zavisi samo od $4x$. Funkcija je otuda konkavna ($y'' < 0$) na intervalima $(-\infty, -1)$ i $(-1, 0)$ i konveksna ($y'' > 0$) na intervalima $(0, 1)$ i $(1, \infty)$. Prevojna tačka je $P(0, 0)$.

- *tangente funkcije u tačkama gde ne postoji prvi izvod:* ako je α ugao između tangente i pozitivnog smera x-ose, onda je koeficijent pravca (funkcija nije definisana u $x = 1$ pa je u pitanju neprava tangenta)

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \lim_{x \to 1} y' = \lim_{x \to 1} \frac{-2}{x^2 + 1} = -1 \quad (\alpha = -\frac{\pi}{4}).$$



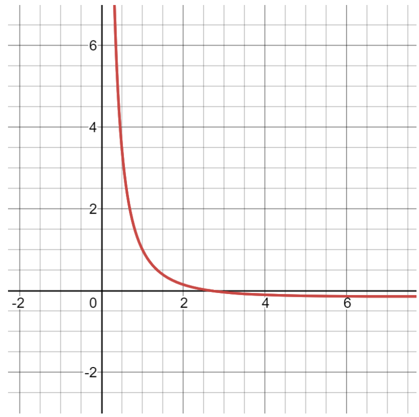
Slika 2: $y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2-1}$

Zadatak 1.3. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{x}$.

Rešenje.

- *oblast definisanosti:* je skup $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0 \wedge x \neq 0\}$ (ili $x \in (0, +\infty)$).
- *parnost*: funkcija je definisana samo za pozitivne realne brojeve pa ne može biti ni parna ni neparna.
- *nule:* $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.
- *asimptote*:
  - V.A. je prava $x = 0$ jer
  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\ln x}{x} = \frac{1-(-\infty)}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty.$$
  - H.A. je prava $y = 0$ jer
  $$\lim_{x\to +\infty} \frac{1-\ln x}{x} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1} = 0.$$
  - K.A. ne postoji, jer funkcija ima horizontalnu asimptotu.
- *monotonost i ekstremne vrednosti:*
  $$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x - (1-\ln x)\cdot 1}{x^2} = \frac{\ln x - 2}{x^2}$$
  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x - 2 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 2 \Leftrightarrow x > e^2$ i $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^2$, a $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$.
  Funkcija je rastuća na intervalu $(e^2, +\infty)$, a opadajuća na intervalu $(0, e^2)$.
  Funkcija ima minimum u tački $T_{min}(e^2, -\frac{1}{e^2})$.
- *konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:*
  $$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - (\ln x - 2)\cdot 2x}{x^4} = \frac{5 - 2\ln x}{x^3}$$
  $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 5 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow 0 < x < e^{\frac{5}{2}}$ i
  $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > e^{\frac{5}{2}}$, a $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{5}{2}}$.

  Funkcija je konveksna na intervalu $(0, e^{\frac{5}{2}})$, konkavna na intervalu $(e^{\frac{5}{2}}, +\infty)$.
  Funkcija ima prevojnu tačku za $x = e^{\frac{5}{2}}$.
- *tangente funkcije u tačkama gde ne postoji prvi izvod:* ako je α ugao između tangente i pozitivnog smera x-ose, onda je koeficijent pravca (neprava desna tangenta)
  $$\operatorname{tg}(\alpha) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x - 2}{x^2} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \quad (\alpha = -\frac{\pi}{2}).$$



Slika 3: $f(x) = \frac{1-\ln x}{x}$

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1*. FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.