NEPREKIDNOST FUNKCIJA

27. februar 2024.

Definicija neprekidnosti funkcije i primeri

Definicija

Neka su dati metrički prostori (X, d_X) , (Y, d_Y) *i funkcija* $f : D \to Y$, $D \subset X$. *Za funkciju* f *kažemo da je* **neprekidna u tački** $a \in D$ *ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in L(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in L(f(a), \varepsilon)),$$

odnosno

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon).$$

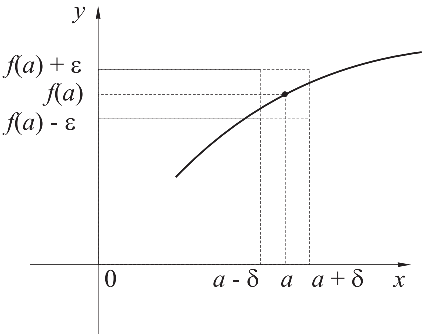
Ako je $X = Y = \mathbb{R}(\mathbb{C})$, tada neprekidnost funkcije $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ u tački a možemo zapisati na sledeći način

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Zahtevi za neprekidnost u tački a i postojanje granične vrednost u a se razlikuju u sledećim činjenicama:

- za graničnu vrednost u tački a pretpostavka je da je a tačka nagomilavanja za D, a kod neprekidnosti da $a \in D$, tj. da je funkcija f definisana u tački a;

- kod neprekidnosti se zahteva da funkcija f otvorenu loptu $L(a, \delta(\varepsilon))$ preslika u otvorenu loptu $L(f(a), \varepsilon)$, dok kod granične vrednosti je zahtev da funkcija f otvorenu loptu $L(a, \delta(\varepsilon))$ bez centra a preslika u otvorenu loptu $L(A, \varepsilon)$.



Zaključak je sledeći:

- ako je f neprekidna funkcija u tački a ne mora da postoji $\lim_{x\to a} f(x)$ (ako je $a \in D$ izolovana tačka za skup D, tada je f automatski neprekidna u tački a, dok u tom slučaju ne postoji $\lim_{x\to a} f(x)$).
- ako postoji $\lim_{x\to a} f(x)$ bez obzira da li je funkcija f definisana u tački a, funkcija ne mora da bude neprekidna u tački a. Na primer, ako posmatramo funkcije

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 5, & x = 0 \end{cases},$$

tada važi $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 1$. Ni funkcija f, ni funkcija g nisu neprekidne u tački 0, jer f nije definisana u tački 0, dok je $g(0) = 5 \neq 1$.

Dakle, da bi funkcija f bila neprekidna u tački a treba da važi:

1) $a \in D$, tj. funkcija f je definisana u tački a;

2) ako je a tačka nagomilavanja za D, tada postoji $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ i važi jednakost

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a);$$

3) ako je $a \in D$ izolovana tačka, tada je f neprekidna u tački a.

Ako je $a \in D \subset \mathbb{R}$ ($a \in D \subset \mathbb{C}$) tačka nagomilavanja za definicioni skup D i ako je $Y = \mathbb{R}$, ($Y = \mathbb{C}$) $x = a + \Delta x \in D$, $\Delta x \neq 0$ i $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$, gde su Δx i Δy redom priraštaji nezavisne i zavisne promenljive, tada neprekidnost realne funkcije jedne realne promenljive možemo izraziti na sledeći način:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x = a + \Delta x \in D)(|\Delta x| < \delta \Rightarrow |\Delta y| < \varepsilon),$$

odnosno

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ a + \Delta x \in D}} \Delta y = 0.$$

Dakle, realna (kompleksna) funkcija jedne realne (kompleksne) promenljive je neprekidna u tački a iz domena ako priraštaj funkcije Δy u tački a teži ka nuli kada priraštaj argumenta Δx teži ka nuli.

Ako funkcija f nije neprekidna u tački a, onda kažemo da je funkcija f **prekidna** u tački a, odnosno da funkcija f ima **prekid** u tački a (tačka a je **prekid** date funkcije).

Napomena

Kako je funkcija u izolovanim tačkama neprekidna, to je realni niz (a i svaki drugi), kao funkcija iz $\mathbb{N}$ u $\mathbb{R}$ neprekidna funkcija.

Definicija

Neka su (X, d_X) *i* (Y, d_Y) *metrički prostori i neka je data funkcija* $f : D \to Y$, $D \subset X$.

• *Ako je restrikcija* f_E *funkcije* f *nad nepraznim skupom* $E \subset D$ *neprekidna u tački* $a \in E$, *onda kažemo da je funkcija* f **neprekidna u tački** a **dok** $x \in E$.

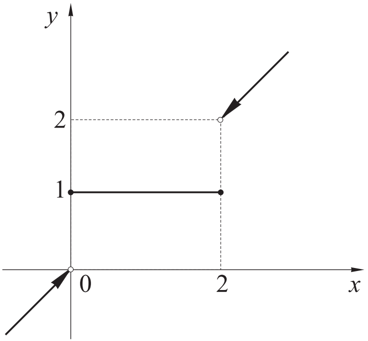
• *Ako je* f_E *neprekidna u svakoj tački skupa* E, *onda kažemo da je* f **neprekidna nad skupom** E.

• *Ako je* $E = D$, *tj. ako je funkcija* f *neprekidna u svakoj tački definicionog skupa* D, *onda kažemo da je* f **neprekidna funkcija**.

Primetimo, da ako je funkcija f neprekidna nad skupom E, ona ne mora biti neprekidna u svakoj tački skupa E. Na primer, ako posmatramo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$$

vidimo da je ona neprekidna nad zatvorenim intervalom $[0,2]$, dok su krajnje tačke 0 i 2 prekidi date funkcije.



Ako je $f : D \to Y$, $D \subset \mathbb{R}$ i ako je f neprekidna u tački a dok

$$x \in E = D \cap [a, \infty) \quad (x \in E = D \cap (-\infty, a]),$$

tada kažemo da je funkcija f **neprekidna u tački a sa desne (leve) strane**.

Ako postoji $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, tada je funkcija f neprekidna u tački a sa leve strane ako je

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a),$$

a ako postoji $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, tada je funkcija f neprekidna u tački a sa desne strane ako je

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Očigledno važi:

1) *Funkcija* f *jedne realne promenljive je neprekidna u tački* a *ako i samo ako je neprekidna u tački* a *i sa leve i sa desne strane.*

2) *Funkcija jedne realne promenljive je neprekidna nad zatvorenim intervalom* $[a, b]$ *ako i samo ako je*

- *neprekidna u svakoj tački otvorenog intervala* (a, b);

- *u tački* a *je neprekidna sa desne strane;*

- *u tački* b *je neprekidna sa leve strane.*

Tvrđenje

Ako su realne (kompleksne) funkcije f i g neprekidne u tački a, tada su u tački a neprekidne i sledeće funkcije:

1) $h = f + g$,
2) $h = f \cdot g$,
3) $h = \frac{f}{g}$, *pod uslovom da je* $g \neq 0$ *u nekoj okolini tačke* a.

Primeri

1. Konstantna funkcija $f(x) = c$ je neprekidna funkcija, jer je

$$\Delta y = c - c = 0,$$

pa je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

2. Funkcija $f(x) = \sin x$ je neprekidna za svako $x \in (-\infty, \infty)$. Birajući $\delta = \varepsilon$, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, imamo

$$\begin{aligned} |\Delta y| &= |\sin(x + \Delta x) - \sin x| \\ &= 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x + \Delta x}{2}\right| \\ &\leq 2\left|\frac{\Delta x}{2}\right| \\ &= |\Delta x| < \varepsilon, \end{aligned}$$

tj.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

3. Funkcija $f(x) = x^2$ je neprekidna za svako $x \in (-\infty, \infty)$, jer iz

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x),$$

sledi da je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Slično, **stepena funkcija** $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ je neprekidna za svako $x \in (-\infty, \infty)$, pa kako je i konstantna funkcija neprekidna, iz prethodne teoreme sledi da je svaki **polinom** $P_n(x)$ neprekidna funkcija za svako $x \in (-\infty, \infty)$, dok je svaka **racionalna funkcija** $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ neprekidna funkcija u svakoj tački x_0 za koju je $Q_m(x_0) \neq 0$.

4. Za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases}$$

je

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x-1) = 1 = f(2^-) = f(2) \neq 4 = \lim_{x\to 2^+} 2x = \lim_{x\to 2^+} f(x).$$

Dakle, ne postoji u tački $x = 2$ granična vrednost, pa je funkcija u tački 2 prekidna.
Za sve ostale vrednosti od x funkcija je neprekidna.
Primetimo da je funkcija $f(x)$ neprekidna u tački 2 sa leve strane.

5. Za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

imamo da važi

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x - 3) = -1 \neq 0 = f(1),$$

pa je funkcija f u tački 1 prekidna.
Za sve ostale vrednosti od x funkcija je neprekidna.

6. Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nije neprekidna u tački $(0,0)$, jer ne postoji

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

7. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data sa

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ima prekid za svaki realan broj. Ona je neprekidna nad $\mathbb{Q}$, kao i nad $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

8. Sabiranje realnih (kompleksnih) brojeva je neprekidna funkcija.

Zaista, zbog:

$$|(x+y)-(a+b)| \leq |x-a|+|y-b| \leq 2\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

iz $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ sledi neprekidnost sabiranja realnih brojeva.

9. Množenje realnih (kompleksnih) brojeva je neprekidna funkcija.

Kako je:

$$|xy-ab| = |(x-a)(y-b)+a(y-b)+b(x-a)| \leq |x-a||y-b|+|a||y-b|+|b||x-a|$$

i

$$|x-a| \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}, \quad |y-b| \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

to iz $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$, gde je $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|}\}$, sledi da je

$$|xy-ab| < \delta^2+\delta|a|+\delta|b| \leq \delta(1+|a|+|b|) \leq \frac{\varepsilon \cdot (1+|a|+|b|)}{1+|a|+|b|} = \varepsilon,$$

odakle zaključujemo da je množenje realnih brojeva neprekidna funkcija.

Iz Hajneove teoreme sledi

Tvrđenje

Funkcija $f : D \to Y$ *je neprekidna u tački* $a \in D$

ako i samo ako

za svaki niz $\{x_n\} \subset D$ *koji konvergira ka* a *sledi da niz* $\{f(x_n)\} \subset Y$ *konvergira ka* $f(a)$.

Vrste tačaka prekida funkcija

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i a tačka nagomilavanja za definicioni skup $D \subset X$ funkcije $f : D \to Y$.

Pretpostavimo da u tački a funkcija ima prekid.

1°) Ako postoji $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, onda kažemo da funkcija f u tački a ima **prividan** ili **otklonljiv prekid**, odnosno da je a prividan (otklonljiv) prekid.

a) Funkcija

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

ima u tački 0 prividan prekid (funkcija u tački 0 nije definisana), jer je

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ako posmatramo funkciju

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},$$

vidimo da je ona neprekidna u tački 0, jer smo je u tački 0, definisali baš sa

$$F(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

b) Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

ima otklonljiv prekid u tački 0, jer je

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(2x+1) = 1 \neq f(0) = -1.$$

Međutim, funkcija

$$F(x) = 2x+1$$

je neprekidna u tački 0.

c) Funkcija

$$f(x) = e^{-\sqrt{\frac{x}{x+1}}}$$

ima prividan prekid u tački -1 (funkcija nije u datoj tački definisana), jer je

$$\lim_{x \to -1} e^{-\sqrt{\frac{x}{x+1}}} = 0.$$

Primetimo da u ovom primeru ne postoji desna granična vrednost date funkcije u tački -1, jer funkcija nije definisana za $x \in [-1, 0)$, pa se granična vrednost poklapa sa levom graničnom vrednošću u datoj tački. Funkcija

$$F(x) = \begin{cases} e^{-\sqrt{\frac{x}{x+1}}}, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0) \\ 0, & x = -1 \end{cases}$$

dobijena iz funkcije f je neprekidna u tački -1.

2°) Za $X = \mathbb{R}$, ako postoje leva i desna granična vrednost funkcije $f(x)$ u tački a, tj. ako postoji

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a^-)$$

i

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a^+),$$

pri čemu je

$$f(a^-) \neq f(a^+),$$

onda kažemo da funkcija u tački a ima **skok**, odnosno da je a skok date funkcije.

a) Kako za funkciju

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

važi

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2},$$

to data funkcija ima skok u tački 0.

b) Za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ 3x-1, & x > 1 \end{cases}$$

je

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 = f(1)$$

i

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2,$$

pa funkcija f u tački 1 ima skok.

I) Ako u tački a funkcija f ima prividan prekid ili skok, onda kažemo da data funkcija f u tački a ima **prekid prve vrste**.

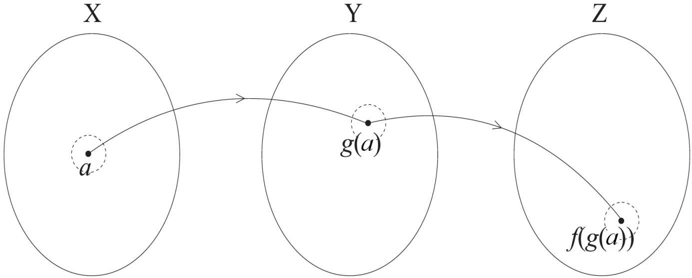
II) Ako je tačka a prekid funkcije koji nije prve vrste, onda kažemo da u tački a funkcija f ima **prekid druge vrste**.

Ako je (Y, d_Y) metrički prostor, tada za funkciju $f : I \to Y$ koja ima konačan broj prekida prve vrste nad intervalom $I \subset \mathbb{R}$, kažemo da je f **neprekidna po delovima** nad intervalom I.

Neprekidnost i granična vrednost složene funkcije

Tvrđenje

Neka su dati metrički prostori (X, d_X), (Y, d_Y) i (Z, d_Z) kao i funkcije $g : D \to Y$, $D \subset X$ i $f : Y \to Z$.
Ako je g neprekidna funkcija u tački a, f neprekidna funkcija u tački $g(a)$, tada je složena funkcija $h = f \circ g$ neprekidna funkcija u tački a.



Dokaz. S obzirom da je f neprekidna funkcija u tački $g(a)$ i g neprekidna funkcija u tački a to važi

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall u \in Y)(u \in L(g(a), \delta) \Rightarrow f(u) \in L(f(g(a)), \varepsilon)),$$

$$(\forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in L(a, \delta_1) \Rightarrow g(x) \in L(g(a), \varepsilon_1)).$$

Tada birajući da je $\varepsilon_1 = \delta$, imamo

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in L(a, \delta_1) \Rightarrow f(g(x)) \in L(f(g(a)), \varepsilon)),$$

odakle sledi da je složena funkcija $h = f \circ g$ neprekidna u tački a. $\square$

Posledica

Neka su dati metrički prostori (X, d_X), (Y, d_Y) *i* (Z, d_Z) *kao i funkcije* $g : D \to Y$, $D \subset X$ *i* $f : Y \to Z$.
Ako su funkcije g *i* f *neprekidne, tada je i složena funkcija* $h = f \circ g$ *neprekidna.*

Tvrđenje

Neka su dati metrički prostori (X, d_X), (Y, d_Y) *i* (Z, d_Z) *kao i funkcije* $g : D \to Y$, $D \subset X$ *i* $f : Y \to Z$.
Ako je $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \alpha \in Y$ *i* f *neprekidna funkcija u tački* α, *tada je*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(\alpha).$$

Dokaz. Funkcija f je neprekidna u tački α, pa je

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall u \in Y)(u \in L(\alpha, \delta) \Rightarrow f(u) \in L(f(\alpha), \varepsilon)).$$

Kako je $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \alpha$, to je

$$(\forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \backslash \{a\})(x \in L(a, \delta_1) \Rightarrow g(x) \in L(\alpha, \varepsilon_1)),$$

a odatle uzimajući $\varepsilon_1 = \delta$ sledi da je

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \setminus \{a\})(x \in L(a, \delta_1) \Rightarrow f(g(x)) \in L(f(\alpha), \varepsilon)),$$

tj. $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f(\alpha)$.

Ako je $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \alpha$ i $X = \mathbb{R}$, tada važi

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow g(x) \in L(\alpha, \delta)).$$

pa sledi da

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow f(g(x)) \in L(f(\alpha), \varepsilon)),$$

tj. $\lim\limits_{x\to\infty} f(g(x)) = f(\alpha)$.

Slično, kao i prethodnom slučaju se dokazuje da iz $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \alpha$ i $X = \mathbb{R}$, sledi da je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(g(x)) = f(\alpha)$. $\square$

Pretpostavka da je $f : Y \to Z$ je bitna, jer ako to nije tačno teorema ne mora da važi što se vidi iz sledećeg primera

Primer

Posmatrajmo funkcije

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = -x^2.$$

Iz neprekidnosti u 0 *funkcije* $f(x)$ *i iz toga da je* $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ *imamo da je*

$$f(\lim_{x \to 0} g(x)) = f(0) = 0.$$

Kako je

$$f(g(x)) = \sqrt{-x^2},$$

to je funkcija $f(g(x))$ *definisana samo za* $x = 0$, *pa*

$$\lim_{x \to 0} f(g(x))$$

ne postoji.

Tvrđenje

Neka su dati metrički prostori (X, d_X), (Y, d_Y) *i* (Z, d_Z) *kao i funkcije* $g : D \to Y$, $D \subset X$ *i* $f : Y \to Z$. *Pretpostavimo da*

1) $g(x) \to \alpha \in Y$, *kada* $x \to a$;
2) $f(u) \to \beta$, *kada* $u \to \alpha$;
3)
   a) *Ako* $a \in X$, *(za slučaj* $X = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, *tj.* x *ne teži* $\pm\infty$*), onda* $(\exists \delta^* \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in (D \setminus \{a\}) \cap L(a, \delta^*))\ g(x) \neq \alpha$;
   b) *Ako je* $X = \mathbb{R}$ *i* $g(x) \to \alpha$, *kada* $x \to \infty$, *onda* $(\exists \delta^* \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \cap (\delta^*, \infty))\ g(x) \neq \alpha$;
   c) *Ako je* $X = \mathbb{R}$ *i* $g(x) \to \alpha$, *kada* $x \to -\infty$, *onda* $(\exists \delta^* \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in D \cap (-\infty, \delta^*))\ g(x) \neq \alpha$.

Tada $f(g(x)) \to \beta$, *kada* $x \to a$.

Tvrđenje

Neka su dati metrički prostori (X, d_X) *i* (Z, d_Z) *kao i funkcije* $g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset X$ *i* $f : \mathbb{R} \to Z$. *Pretpostavimo da*

1) $g(x) \to \pm\infty$, *kada* $x \to a$,
2) $f(u) \to \beta$, *kada* $u \to \pm\infty$.

Tada $f(g(x)) \to \beta$, *kada* $x \to a$.

Primer

Neka je $u = g(x) = \frac{1}{x}$, $y = f(u) = (1 + \frac{1}{u})^u$. *Kako* $g(x) \to \infty$, *kada* $x \to 0^+$ *i* $f(u) \to e$, *kada* $u \to \infty$, *to je*

$$\lim_{x \to 0^+} f(g(x)) = \lim_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x}) = \lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Kako $g(x) \to -\infty$, *kada* $x \to 0^-$ *i* $f(u) \to e$, *kada* $u \to -\infty$, *to je*

$$\lim_{x \to 0^-} f(g(x)) = \lim_{x \to 0^-} f(\frac{1}{x}) = \lim_{x \to 0^-} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

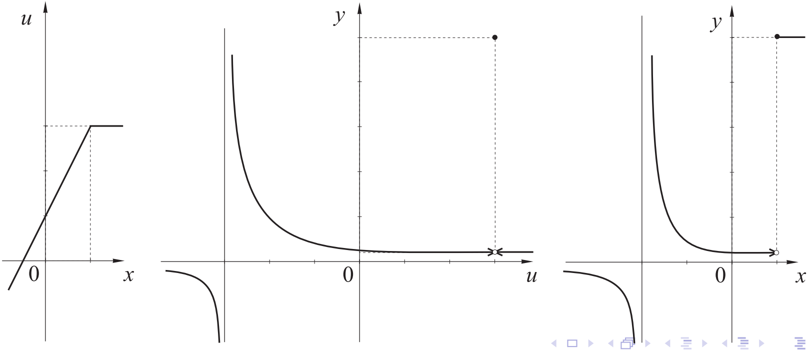
pa je

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Primer

Za $u = g(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ 3, & x > 1 \end{cases}$ *i* $y = f(u) = \begin{cases} \frac{1}{u+3}, & u \neq 3 \\ 5, & u = 3 \end{cases}$

imamo da je $f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{2x+4}, & x < 1 \\ 5, & x \geq 1 \end{cases}$.



1°) Iz neprekidnosti funkcije g u tački 2 je

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 3, \quad (\alpha = 3)$$

i

$$\lim_{u\to 3} f(u) = \frac{1}{6}, \quad (\beta = \frac{1}{6}),$$

ne sledi da je

$$\lim_{x\to 2} f(g(x)) = \frac{1}{6},$$

jer je

$$\lim_{x\to 2} f(g(x)) = \lim_{x\to 2} f(3) = 5.$$

Uslov 3) prethodne teoreme nije ispunjen, jer ne postoji okolina tačke 2 tako da je za svako x iz te okoline $g(x) \neq 3$.
2°) $\lim\limits_{x\to 1} f(g(x))$ ne postoji iako je $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 3$, i $\lim\limits_{u\to 3} f(u) = \frac{1}{6}$.

Primer

Neka je $u = g(x) = \frac{1}{x}$, $y = f(u) = (1 + \frac{1}{u})^u$. *Kako* $g(x) \to \infty$, *kada* $x \to 0^+$ *i* $f(u) \to e$, *kada* $u \to \infty$, *to je*

$$\lim_{x \to 0^+} f(g(x)) = \lim_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x}) = \lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Kako $g(x) \to -\infty$, *kada* $x \to 0^-$ *i* $f(u) \to e$, *kada* $u \to -\infty$, *to je*

$$\lim_{x \to 0^-} f(g(x)) = \lim_{x \to 0^-} f(\frac{1}{x}) = \lim_{x \to 0^-} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

pa je

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Osobine neprekidnih funkcija

Tvrđenje

Neka su (X, d_X) *i* (Y, d_Y) *metrički prostori i neka je data funkcija* $f : X \to Y$. *Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna*

a) *Funkcija* f *je neprekidna.*

b) *Inverzna slika svakog otvorenog skupa* $U \subset Y$ *je otvoren skup.*

c) *Inverzna slika svakog zatvorenog skupa* $F \subset Y$ *je zatvoren skup.*

Tvrđenje

Neka je (X, d) *metrički prostor i* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset X$ *funkcija koja je neprekidna u tački* $a \in D$.
Ako je $f(a) > c$ $(f(a) < c)$, *tada postoji pozitivan realan broj* ε, *tako da za sve* $x \in L(a, \varepsilon) \cap D$ *važi* $f(x) > c$ $(f(x) < c)$.

Dokaz. Posmatrajmo slučaj kada je $f(a) > c$. Analogno se dokazuje i kada je $f(a) < c$. Neka je $\varepsilon = f(a) - c > 0$. Kako je f neprekidna funkcija u tački a, to

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x \in L(a, \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon),$$

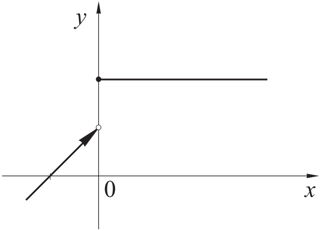
tj. $c = f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$. Dakle,

$$(\forall x \in D)(x \in L(a, \delta) \Rightarrow f(x) > c),$$

što je i trebalo da se dokaže. $\square$

Ako funkcija f ima prekid u tački $a \in D$, teorema ne mora da važi. Na primer, ako posmatramo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases},$$



vidimo da ne postoji okolina $(-\varepsilon, \varepsilon)$ tačke 0, tako da iz $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ sledi $f(x) > \frac{3}{2}$.

Posledica

Ako je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset X$, *neprekidna u tački* $a \in D$ *i* $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$), *tada postoji otvorena lopta* $L(a, \delta)$, *tako da za svako* $x \in D \cap L(a, \delta)$ *sledi da je* $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

Tvrđenje

Ako je funkcija $f : [a, b] \to Y$ *neprekidna nad zatvorenim intervalom* $[a, b]$, *onda je ona nad tim intervalom i ograničena.*

Dokaz. Dokaz ćemo dati za slučaj kada je $Y = \mathbb{R}$. Pretpostavimo da f nije ograničena nad $[a, b]$. Tada

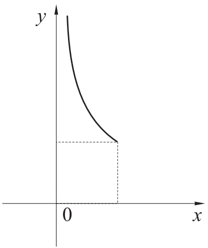
$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in [a, b]) \; |f(x_n)| > n. \tag{1}$$

Posmatrajmo niz $\{x_n\}$. S obzirom da su svi članovi niza $\{x_n\}$ iz $[a, b]$, to je dati niz ograničen, pa postoji konvergentan podniz $\{x_{n_k}\}$ datog niza. Neka je $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi \in [a, b]$. Kako je f neprekidna funkcija nad $[a, b]$, to je $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(\xi)$, odnosno sledi da je niz $\{f(x_{n_k})\}$ konvergentan, što je u suprotnosti sa (1).

Dakle, funkcija f je ograničena nad $[a, b]$. $\square$

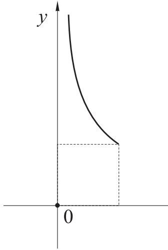
Obe pretpostavke iz prethodne teoreme su bitne.

Ako posmatramo funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$, vidimo da je ona neprekidna nad intervalom $(0, 1]$, ali nad tim intervalom nije ograničena (ne postoji $\sup\limits_{x\in(0,1]} f(x)$, dok je $\inf\limits_{x\in(0,1]} f(x) = 1$).



Ako posmatramo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$



vidimo da ona nije ograničena nad zatvorenim intervalom $[0, 1]$ (ima prekid u tački 0).

Definicija

Za neprazan skup $A \subset X$ *kažemo da je* **kompaktan** *u metričkom prostoru* (X, d_X), *ako za svaki niz* $\{a_n\} \subset A$ *postoji tačka nagomilavanja* $a \in A$.

Metrički prostor (X, d_X) *je* **kompaktan** *ako je* X *kompaktan skup u metričkom prostoru* (X, d_X).

Prethodna teorema važi i kada se zatvoreni interval zameni sa skupom kompaktnim u metričkom prostoru (X, d_X) :

Tvrđenje

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) proizvoljni metrički prostori. Ako je $f : D \to Y$, $D \subset X$ neprekidna funkcija i ako je skup D kompaktan u metričkom prostoru (X, d_X), tada je f ograničena funkcija.

Tvrđenje

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna nad* $[a, b]$, *tada ona bar jednom dostiže svoju najveću i najmanju vrednost* (f*unkcija* $f(x)$ *ima maksimum i minumum nad intervalom* $[a, b]$), *tj. postoje realni brojevi* $\alpha, \beta \in [a, b]$, *takvi da je*

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) = f(\alpha) \quad i \quad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x) = f(\beta).$$

I ova teorema važi u opštijem slučaju, tj. važi sledeće tvrđenje:

Tvrđenje

Neka je (X, d_X) *metrički prostor i* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset X$ *neprekidna funkcija nad kompaktnim skupom* D. *Tada funkcija* f *dostiže najveću i najmanju vrednost nad skupom* D.

Tvrđenje

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna nad intervalom* $[a, b]$ *i* $f(a) \cdot f(b) < 0$, *tada u intervalu* (a, b) *postoji bar jedna nula funkcije, tj. postoji tačka* $\xi \in (a, b)$, *tako da je* $f(\xi) = 0$.

Dokaz. Ako je

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0,$$

tada je

$$\xi = \frac{a+b}{2} \in (a, b),$$

pa je teorema dokazana.

Ako je

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0,$$

tada od podintervala

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \quad \text{i} \quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

intervala $[a, b]$ izaberimo onaj, koji ćemo obeležiti sa $[a_1, b_1]$, kod koga funkcija na krajevima intervala ima različit znak.

Ponavljajući isti postupak na intervalu $[a_1, b_1]$ dobićemo da je ili

$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0 \quad \text{ili} \quad f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\neq 0.$$

Ako je

$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0,$$

tada je

$$\xi=\frac{a_1+b_1}{2}\in(a,b),$$

pa je teorema dokazana.

Ako je

$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \neq 0,$$

tada od podintervala

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right] \quad \text{i} \quad \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

intervala $[a_1, b_1]$ izaberimo onaj, koji ćemo obeležiti sa $[a_2, b_2]$, kod koga funkcija na krajevima intervala ima različit znak.

Nastavljajući taj proces, dobićemo da

1) Posle n koraka, ako je $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$, tada je $\xi = \frac{a_n+b_n}{2}$, pa je teorema dokazana.

2) Ako je za svako $n \in \mathbb{N}$, $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \neq 0$, tada za niz intervala $\{[a_n, b_n]\}$ važi:

- $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$;

- $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$;

pa je dati niz, niz umetnutih intervala. Sledi da postoji jedna i samo jedna zajednička tačka ξ za sve intervale.

Dokazaćemo da je $f(\xi) = 0$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$f(\xi) > 0 \quad (f(\xi) < 0).$$

Primetimo pre svega da je funkcija f definisana u tački $\xi \in (a, b)$, jer je f neprekidna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$. Kako je f neprekidna u tački ξ i po pretpostavci je $f(\xi) > 0$ $(f(\xi) < 0)$, to postoji pozitivan realan broj δ, tako da za svako x iz skupa

$$(\xi - \delta, \xi + \delta) \cap [a, b]$$

važi

$$f(x) > 0 \quad (f(x) < 0).$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi,$$

to postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je za svako $n \geq n_0$

$$[a_n, b_n] \subset (\xi - \delta, \xi + \delta).$$

Kako je

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0,$$

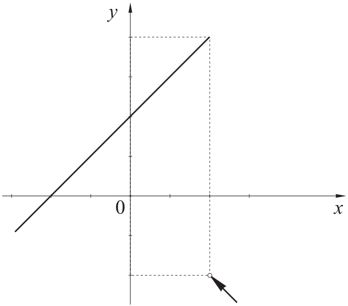
to funkcija f nije uvek pozitivna (negativna) nad intervalom

$$(\xi - \delta, \xi + \delta)$$

što je kontradikcija.

Dakle, $f(\xi) = 0$. $\square$

Bitna je pretpostavka teoreme da je funkcija f neprekidna nad datim zatvorenim intervalom. Ako funkcija f nije neprekidna nad posmatranim zatvorenim intervalom, tada f ne mora obavezno da ima nulu nad odgovarajućim otvorenim intervalom. Na primer, ako posmatramo funkciju



$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 2 \\ -x, & x > 2 \end{cases},$$

vidimo da funkcija f nema nulu u intervalu $(0,3)$, iako je $f(0) = 2 > 0$, $f(3) = -3 < 0$, jer funkcija f ima prekid u tački 2.

Tvrđenje

Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija nad* $[a, b]$ *i ako je* $f(a) \neq f(b)$, *ona u tom intervalu uzima sve vrednosti između* $f(a)$ *i* $f(b)$.

Tvrđenje

Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija, tada je ili za svako* $x \in [a, b]$, $f(x) = c$ *ili* $f([a, b]) = [c, d]$.

Tvrđenje

Ako je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *neprekidna strogo monotona funkcija nad* (a, b)*, tada je* $f((a, b))$ *otvoren interval.*

Tvrđenje

Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ *neprekidna strogo monotona funkcija nad proizvoljnim intervalom realnih brojeva* I*, tada je inverzna funkcija* $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ *neprekidna nad* $f(I)$*.*

Elementarne funkcije

Osnovne elementarne funkcije su sledeće funkcije:

- konstantna funkcija $y = c$, $c \in \mathbb{R}$,
- stepena funkcija $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
- eksponencijalna funkcija $y = a^x$, gde je $a > 0$ i $a \neq 1$,
- logaritamska funkcija $y = \log_a x$, gde je $a > 0$ i $a \neq 1$,
- trigonometrijske funkcije:
  $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = \operatorname{ctg} x$,
- inverzne trigonometrijske funkcije:
  $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = ctg\, x$, $y = arcctg\, x$.

Elementarne funkcije uvodimo sledećom rekurzivnom definicijom.

Definicija

1. *Osnovne elementarne funkcije su elementarne funkcije.*
2. *Ako su f i g elementarne funkcije, $g \neq O$ (O nula funkcija), tada su elementarne funkcije i $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$, $f \circ g$.*
3. *Elementarne funkcije se mogu dobiti samo konačnom primenom pravila 1. i 2. ove definicije.*

Na primer, elementarne funkcije su:
$y = 2x^2 + 3x + 5$, $y = 3^{2x} - \sin^2 x$, $y = \ln(\sqrt{x} + 3)$,
$y = \frac{\ln x + 5}{\operatorname{arctg} x + 3x}$, $y = \ln(\arcsin x^2)$.

Na osnovu poslednje teoreme i osobina neprekidnih funkcija sledi da važi sledeća teorema

Tvrđenje

Elementarne funkcije su neprekidne u oblasti definisanosti.

Uniformna neprekidnost

Definicija

Neka su dati metrički prostori (X, d_X), (Y, d_Y) *i funkcija* $f : D \to Y$, $D \subset X$. *Funkcija* f *je* **uniformno neprekidna nad** $\emptyset \neq E \subset D$ *ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in E)(d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon).$$

Dakle, možemo reći da je funkcija f uniformno neprekidna nad E ako za svaki pozitivan realan broj ε, postoji pozitivan realan broj δ, koji zavisi samo od ε ali ne i od x, tako da ako je rastojanje tačaka x_1 i x_2 iz E manje od δ, tada je rastojanje slika manje od ε.

Napomena

Očigledno je, da ako je funkcija f uniformno neprekidna nad skupom E, ona je nad tim skupom i neprekidna. Da obrnuto nije uvek tačno pokazuje sledeći primer.

Primer

Funkcija $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

je nad intervalom $(0, 1)$ neprekidna, ali nije i uniformno neprekidna.

Da bi to pokazali pretpostavimo suprotno, tj. da je data funkcija nad intervalom $(0,1)$ uniformno neprekidna. Tada za $0 < \varepsilon < 1$, postoji $\delta > 0$, tako da je

$$|x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right| < \varepsilon.$$

Primetimo da kako $x_1, x_2 \in (0,1)$, to je $\delta < 1$.
Neka je

$$x_1 = \delta \in (0,1), \quad x_2 = \frac{\delta}{1+\varepsilon} \in (0,1).$$

Tada važi:

$$|x_2 - x_1| = \left|\frac{\delta}{1+\varepsilon} - \delta\right| = \delta\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right| = \left|\frac{1+\varepsilon}{\delta} - \frac{1}{\delta}\right| = \frac{\varepsilon}{\delta} > \varepsilon,$$

što je suprotno pretpostavci da je funkcija f uniformno neprekidna. Dakle, f nije uniformno neprekidna nad $(0,1)$.

Tvrđenje

Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna nad* $[a, b]$, *ona je nad tim intervalom i uniformno neprekidna.*

Primer

Funkcija $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ *definisana sa* $f(x) = x$ *je nad intervalom* $(0, 1)$ *neprekidna i uniformno neprekidna.*

Primer

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definisana sa* $f(x) = x^2$ *je nad intervalom* $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ *uniformno neprekidna.*