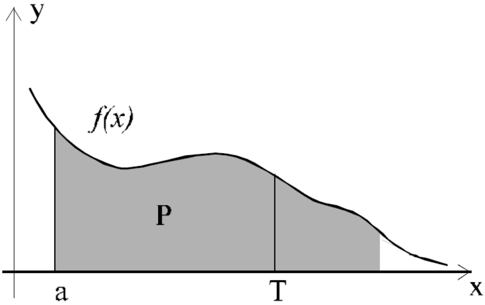
NESVOJSTVENI INTEGRAL

22. april 2024.



$\int_a^T f(x)dx$, $f(x) \geq 0$ predstavlja površinu ravnog lika ograničenog x-osom, pravama $x = a$, $x = T$ i lukom krive $y = f(x)$ nad intervalom $[a, T]$.
Prirodno bi bilo površinu lika ograničenog x-osom, pravom $x = a$ i lukom krive $y = f(x)$ nad intervalom $[a, \infty)$ definisati kao $\int_a^\infty f(x)dx$.

Nesvojstveni integral I vrste

Definicija

Neka je funkcija $f(x)$ definisana nad $[a,\infty)$ i integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom $[a,T]\subset[a,\infty)$. Nesvojstveni integral funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a,\infty)$, u oznaci $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx$ je funkcija $F(T)$ definisana sa

$$F(T)=\int\limits_a^T f(x)dx, \quad T\geq a.$$

Ako postoji $A=\lim\limits_{T\to\infty}F(T)=\lim\limits_{T\to\infty}\int\limits_a^T f(x)dx$, u oznaci $\int\limits_a^\infty f(x)dx$, tada nesvojstveni integral $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)\,dx$ konvergira ka broju A. Ako granična vrednost $\lim\limits_{T\to\infty}F(T)$ ne postoji, tada nesvojstveni integral $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)\,dx$ divergira.

Nesvojstveni integral I vrste

Definicija

Neka je funkcija $f(x)$ *definisana nad* $(-\infty, a]$ *i integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom* $[T, a] \subset (-\infty, a]$. *Nesvojstveni integral funkcije* $f(x)$ *nad intervalom* $(-\infty, a]$, *u oznaci* $\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)dx$ *je funkcija* $F(T)$ *definisana sa*

$$F(T) = \int\limits_{T}^{a} f(x)dx, \quad T \leq a.$$

Ako postoji $B = \lim\limits_{T \to -\infty} F(T) = \lim\limits_{T \to -\infty} \int\limits_{T}^{a} f(x)$, *u oznaci* $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$, *tada nesvojstveni integral* $\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)dx$ *konvergira ka broju* B. *Ako granična vrednost* $\lim\limits_{T \to -\infty} F(T)$ *ne postoji, tada nesvojstveni integral* $\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)dx$ *divergira.*

Definicija

Neka je funkcija $f(x)$ definisana nad intervalom $(-\infty, \infty)$ i integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom $[M, N] \subset (-\infty, \infty)$. Nesvojstveni integral funkcije $f(x)$ nad intervalom $(-\infty, \infty)$, u oznaci $\int\limits_{(-\infty,\infty)} f(x)dx$, je uređen par $\left(\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)dx, \int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx \right)$ nesvojstvenih integrala $\int\limits_{(-\infty,a]} f(x)dx$, $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx$, gde je a proizvoljan realan broj. Ako oba ova nesvojstvena integrala konvergiraju tada nesvojstveni integral $\int\limits_{(-\infty,\infty)} f(x)dx$ konvergira i pišemo $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$. Ukoliko bar jedan od ovih nesvojstvenih integrala divergira tada i nesvojstveni integral $\int\limits_{(-\infty,\infty)} f(x)dx$ divergira.

Nesvojstveni integral I vrste

Nesvojstvene integrale $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ jednim imenom zovemo nesvojstveni integral prve vrste.

Primer

Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala $I_\alpha = \int\limits_{[1,\infty)} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Po definiciji treba posmatrati

$$\lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{T\to\infty} T^{1-\alpha} - 1\right), \quad \alpha \neq 1.$$

$$\begin{array}{llll}
1-\alpha < 0 & \Rightarrow \quad T^{1-\alpha} \to 0,\, T\to\infty & \Rightarrow & I_\alpha \text{ konvergira ka } \frac{1}{\alpha-1} \\
1-\alpha > 0 & \Rightarrow \quad T^{1-\alpha} \to \infty,\, T\to\infty & \Rightarrow & I_\alpha \text{ divergira} \\
\alpha = 1 & \Rightarrow \quad \int\limits_1^T \frac{dx}{x} = \ln T \to \infty,\, T\to\infty & \Rightarrow & I_\alpha \text{ divergira}
\end{array}$$

Dakle, I_α konvergira za $\alpha > 1$, a divergira za $\alpha \leq 1$.

Nesvojstveni integral I vrste

- Ako postoji, granična vrednost

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} f(x)dx = V.P.\int_{(-\infty,\infty)} f(x)dx$$

naziva se glavna vrednost integrala.

- Ako nesvojstveni integral $\int_{(-\infty,\infty)} f(x)dx$ konvergira, tada postoji $V.P.\int_{(-\infty,\infty)} f(x)dx$ i važi jednakost

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = V.P.\int_{(-\infty,\infty)} f(x)dx.$$

- Može da postoji $V.P.\int_{(-\infty,\infty)} f(x)dx$, a da nesvojstveni integral $\int_{(-\infty,\infty)} f(x)dx$ divergira (sledeći primer).

Primer

Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala $I = \int\limits_{(-\infty,\infty)} \frac{2x}{1+x^2}\,dx$.

$$I = \left(\int\limits_{(-\infty,a]} \frac{2x}{1+x^2}\,dx, \quad \int\limits_{[a,\infty)} \frac{2x}{1+x^2}\,dx \right) = (I_1, I_2).$$

Kako je

$$\lim_{T\to\infty} \int_a^T \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{T\to\infty} \ln(1+T^2) - \ln(1+a^2) = \infty,$$

to I_2 divergira, pa I divergira. Za glavnu vrednost se dobija

$$\begin{aligned} V.P. \int\limits_{(-\infty,\infty)} \frac{2x}{1+x^2}\,dx &= \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{2x}{1+x^2}\,dx \\ &= \lim_{T\to\infty} (\ln(1+T^2) - \ln(1+T^2)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nesvojstveni integral II vrste

Definicija

Neka je $f(x)$ definisana nad konačnim intervalom $[a, b)$ i integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom $[a, b-\varepsilon] \subset [a, b), \varepsilon > 0$.
Nesvojstveni integral druge vrste funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a, b)$ u oznaci $\int\limits_{[a,b)} f(x)dx$ je funkcija $F(\varepsilon)$ definisana sa

$$F(\varepsilon) = \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad a < b - \varepsilon < b.$$

Ako postoji $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} F(\varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx = A$, tada nesvojstveni integral $\int\limits_{[a,b)} f(x)dx$ konvergira ka A. Piše se $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx = A$.
Ukoliko $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} F(\varepsilon)$ ne postoji, nesvojstveni integral $\int\limits_{[a,b)} f(x)dx$ divergira.

Nesvojstveni integral II vrste

Primer

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}?$$

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\arcsin(1-\varepsilon)-0)\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

pa nesvojstveni integral $\displaystyle\int_{[0,1)}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ *konvergira ka* $\dfrac{\pi}{2}$.

Nesvojstveni integral II vrste

Definicija

Neka je $f(x)$ definisana nad konačnim intervalom $(a,b]$ i integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom $[a+\varepsilon, b] \subset (a,b], \varepsilon > 0$.
Nesvojstveni integral druge vrste funkcije $f(x)$ nad intervalom $(a,b]$ u oznaci $\int\limits_{(a,b]} f(x)dx$ je funkcija $F(\varepsilon)$ definisana sa

$$F(\varepsilon) = \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \quad a < a+\varepsilon < b.$$

Ako postoji $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} F(\varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = B$, tada nesvojstveni integral $\int\limits_{(a,b]} f(x)dx$ konvergira ka B. Piše se $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = B$.
Ukoliko $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} F(\varepsilon)$ ne postoji, nesvojstveni integral $\int\limits_{(a,b]} f(x)dx$ divergira.

Nesvojstveni integral II vrste

Definicija

Neka je $f(x)$ *definisana nad konačnim intervalom* (a, b) *i integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom* $[m, M] \subset (a, b)$.

Nesvojstveni integral druge vrste funkcije $f(x)$ *nad intervalom* (a, b) *u oznaci* $\int\limits_{(a,b)} f(x)dx$ *je uređen par* $\left(\int\limits_{(a,c]} f(x)dx, \int\limits_{[c,b)} f(x)dx\right)$ *nesvojstvenih integrala* $\int\limits_{(a,c]} f(x)dx$ *i* $\int\limits_{[c,b)} f(x)dx$, *gde je* $c \in (a, b)$ *proizvoljan realan broj.*

Ako svaki od nesvojstvenih integrala $\int\limits_{(a,c]} f(x)dx$ *i* $\int\limits_{[c,b)} f(x)dx$ *konvergira, onda nesvojstveni integral* $\int\limits_{(a,b)} f(x)dx$ *konvergira i pišemo*

$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, *a ukoliko bar jedan od njih divergira, nesvojstveni integral* $\int\limits_{(a,b)} f(x)dx$ *divergira.*

Nesvojstveni integral II vrste

Definicija

Ako je $f(x)$ *definisana u svim tačkama intervala* (a,b) *osim u tački* $c \in (a,b)$ *i ako su definisani nesvojstveni integrali* $\int\limits_{(a,c)} f(x)dx$ *i* $\int\limits_{(c,b)} f(x)dx$ *tada je nesvojstveni integral druge vrste funkcije* $f(x)$ *nad intervalom* (a,b) *u oznaci* $\int\limits_{(a,b)} f(x)dx$ *uređen par* $\left(\int\limits_{(a,c)} f(x)dx, \int\limits_{(c,b)} f(x)dx\right)$ *nesvojstvenih integrala* $\int\limits_{(a,c)} f(x)dx$ *i* $\int\limits_{(c,b)} f(x)dx$. *Ako oba nesvojstvena integrala* $\int\limits_{(a,c)} f(x)dx$ *i* $\int\limits_{(c,b)} f(x)dx$ *konvergiraju, onda nesvojstveni integral* $\int\limits_{(a,b)} f(x)dx$ *konvergira i pišemo* $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, *a ukoliko bar jedan od njih divergira, nesvojstveni integral* $\int\limits_{(a,b)} f(x)dx$ *divergira.*

Nesvojstveni integral II vrste

Definicija

Ako za nesvojstveni integral $\int\limits_{(a,b)} f(x)dx$ *postoji granična vrednost*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = V.P. \int\limits_{(a,b)} f(x)\,dx$$

to je glavna vrednost nesvojstvenog integrala $\int\limits_{(a,b)} f(x)dx$.

- Slično se definiše i nesvojstveni integral $\int\limits_{(a,b)} f(x)dx$ kada funkcija $f(x)$ nije definisana u konačnom broju tačaka intervala (a, b).

Napomena

Pri definiciji $\int\limits_{[a,b)} f(x)dx$ *nismo ništa pretpostavili o ponašanju funkcije* $f(x)$ *u tački* b!

- ako $f(x) \to \pm\infty$, kad $x \to b^-$, nesvojstveni integral može da konvergira ili da divergira
- ako postoji $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = L$, nesvojstveni integral može samo da konvergira i to ka Rimanovom integralu $\int\limits_a^b f_1(x)dx$ funkcije

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in [a,b) \\ L & , \quad x = b \end{cases},$$

pa važi jednakost $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx$.

Primer

Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala $I_\beta = \int\limits_{(0,1]} \frac{dx}{x^\beta}$.

Za $\beta > 0$, $f(x) = \frac{1}{x^\beta} \to \infty$, $x \to 0^+$. Po definiciji je

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^\beta} = \frac{1}{1-\beta}(1 - \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-\beta+1}).$$

$$\begin{array}{llll} -\beta+1>0 & \Rightarrow \quad \varepsilon^{-\beta+1} \to 0, \varepsilon \to 0 & \Rightarrow & I_\beta \text{ konvergira ka } \frac{1}{1-\beta} \\ -\beta+1<0 & \Rightarrow \quad \varepsilon^{-\beta+1} \to \infty, \varepsilon \to 0 & \Rightarrow & I_\beta \text{ divergira} \\ \beta = 1 & \Rightarrow \quad \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = -\ln \varepsilon \to \infty, \varepsilon \to 0 & \Rightarrow & I_\beta \text{ divergira} \end{array}$$

Dakle, I_β konvergira za $\beta < 1$, a divergira za $\beta \geq 1$.

Nesvojstveni integral III vrste

Definicija

Neka je funkcija $f(x)$ *integrabilna nad svakim zatvorenim intervalom* $[a+\varepsilon, T]$, $\varepsilon > 0$, $T > 0$, $a+\varepsilon < T < \infty$. *Po definiciji je*
$$\int_{(a,\infty)} f(x)dx = \left(\int_{(a,c]} f(x)dx, \int_{[c,\infty)} f(x)dx \right), c \in (a,\infty)$$
nesvojstveni integral treće vrste funkcije $f(x)$ *nad intervalom* (a, b).

Ako oba nesvojstvena integrala $\int_{(a,c]} f(x)dx$ *i* $\int_{[c,\infty)} f(x)dx$ *(druge i prve vrste, respektivno) konvergiraju, onda nesvojstveni integral* $\int_{(a,\infty)} f(x)dx$ *konvergira i pišemo* $\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$.

- Slično se definiše ostali slučajevi nesvojstvenog integrala treće vrste.

Linearnost nesvojstvenog integrala:

Teorema

Ako $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx$ *i* $\int\limits_{[a,\infty)} g(x)dx$ *konvergiraju tada za svako* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *važi*

$$\int_a^\infty (\alpha f(x) \pm \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^\infty f(x)dx \pm \beta \int_a^\infty g(x)dx$$

Parcijalna integracija u nesvojstvenom integralu:

Teorema

Pretpostavimo da $\int\limits_{[a,\infty)} u(x)v'(x)dx$ *i* $\int\limits_{[a,\infty)} v(x)u'(x)dx$ *konvergiraju. Tada važi:*

$$\int_a^\infty u(x)v'(x)dx = \lim_{T\to\infty} u(T)v(T) - u(a)v(a) - \int_a^\infty v(x)u'(x)dx.$$

Smena promenljive u nesvojstvenom integralu:

Teorema

Neka funkcija $t = \varphi(x)$ ima neprekidan prvi izvod različit od nule nad $[a, \infty)$ i neka nesvojstveni integral $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx$ konvergira. Tada važi

$$\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{A}^{B} f(\phi(t))\phi'(t)dt,$$

$$A = \varphi(a), B = \lim_{x\to\infty} \varphi(x), \phi(t) = \varphi^{-1}(x)$$

Kriterijumi konvergencije nesvojstvenog integrala

Košijev kriterijum

Nesvojstveni integral $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx$ *konvergira ako i samo ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji realan broj* $T_0 > a$ *takav da za svako* T, T' *takve da je* $T' > T > T_0$ *važi*

$$\left| \int\limits_{T}^{T'} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Navešćemo još neke od kriterijuma konvergencije i to samo za slučaj kad je podintegralna funkcija $f(x)$ stalnog znaka za $x \geq x_0$.

Uporedni kriterijum

Neka je $0 \leq f(x) \leq Mg(x)$ *za* $x \geq a, M > 0$.
Ako $\int\limits_{[a,\infty)} g(x)dx$ *konvergira, onda konvergira i integral* $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx$ *i važi da je*

$$\int_a^\infty f(x)dx \leq M \int_a^\infty g(x)dx.$$

Obrnuto, ako je $0 \leq mg(x) \leq f(x)$, *za* $x \geq a$, $m > 0$ *i integral* $\int\limits_{[a,\infty)} g(x)dx$ *divergira tada divergira i* $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx$.

Kriterijumi konvergencije nesvojstvenog integrala

Pogodnije za upotrebu:

Teorema

Neko je $f(x) > 0$ *i* $g(x) > 0$ *i* $f(x) \approx g(x)$, *kada* $x \to \infty$, *tj.* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
Tada nesvojstveni integrali $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx$ *i* $\int\limits_{[a,\infty)} g(x)dx$ *istovremeno konvergiraju ili divergiraju.*

Primer

Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala $\int\limits_{[1,\infty)} \frac{x^5+x^3+8x^2}{x^6+2x+1}dx$.

Rešenje. $\frac{x^5+x^3+8x^2}{x^6+2x+1} \approx \frac{1}{x}$, $x \to \infty$, a kako $\int\limits_{[1,\infty)} \frac{1}{x}dx$ divergira, to i $\int\limits_{[1,\infty)} \frac{x^5+x^3+8x^2}{x^6+2x+1}dx$ divergira.

Neke funkcije definisane nesvojstvenim integralom

Ojlerova **gama funkcija**:

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

definisana je za one $x \in \mathbb{R}$ za koje nesvojstveni integral $\int\limits_{(0,\infty)} e^{-t} t^{x-1} dt$ konvergira, odnosno za $x > 0$.

Funkcionalna jednačina za gama funkciju:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0.$$

pokazuje smisao uvođenja gama funkcije - proširuje $n!$ na skup pozitivnih realnih brojeva; ako stavimo redom $x = n, n-1, \ldots, 2, 1$ i imamo u vidu da je $\Gamma(1) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$, dobija se $\Gamma(n+1) = n!$.

Beta funkcija:

$$\mathbf{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

definisana je za one vrednosti $a, b \in \mathbb{R}$ za koje nesvojstveni integral $\int_{(0,1)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ konvergira, odnosno za $a > 0$ i $b > 0$.

Veza beta i gama funkcije:

$$\mathbf{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Definicija

Nesvojstveni integral prve vrste $\int\limits_{[a,\infty)} f(x)dx$ *konvergira apsolutno ako* $\int\limits_{[a,\infty)} |f(x)|dx$ *konvergira. Nesvojstveni integral koji je konvergentan, ali ne apsolutno konvergentan konvergira uslovno.*

- definicija je data za nesvojstveni integral prve vrste, slično se može uraditi za nesvojstveni integral druge i treće vrste

Teorema

Svaki apsolutno konvergentan integral je i konvergentan (u običnom smislu). Obrnuto ne mora da važi.