ВЕЖБЕ 11

ОЈЛЕРОВИ

ГРАФОВИ

ПОВЕЗАНИ ГРАФОВИ

G је ОЈЛЕРОВ $\iff \exists$ затворена стаза W, $E(W) = E(G)$

ОЈЛЕРОВА КОНТУРА = затворена СТАЗА која купи СВЕ ГРАНЕ графа G

G је ПОЛУОЈЛЕРОВ $\iff \exists$ стаза W, $E(W) = E(G)$ ← ОЈЛЕРОВ ПУТ

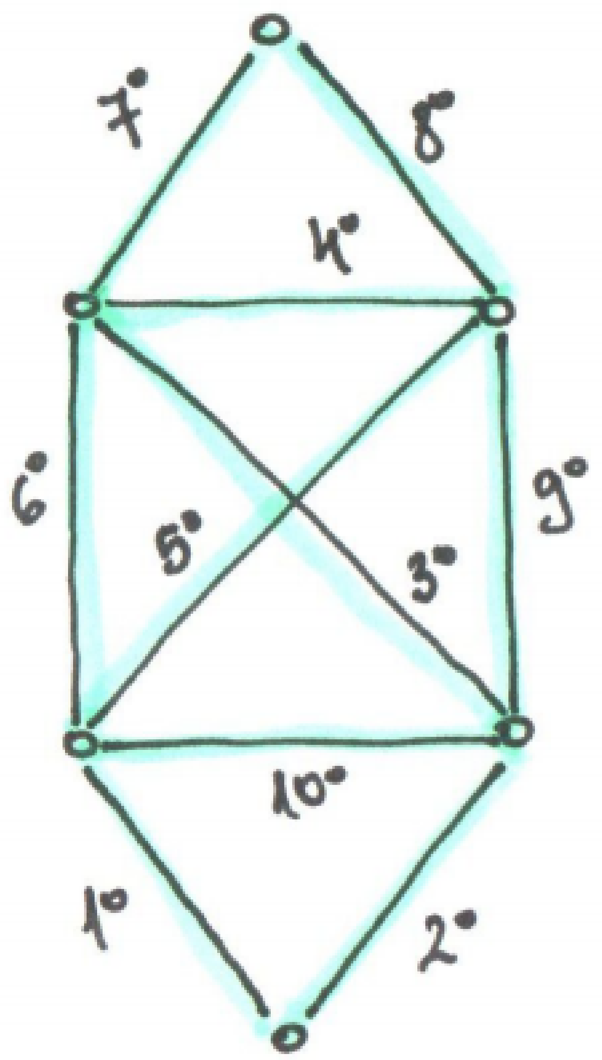
Ојлеров $\Rightarrow$ полуојлеров $\not\Leftarrow$

Т: Повезан граф је Ојлеров акко су сви чворови ПАРНОГ степена.

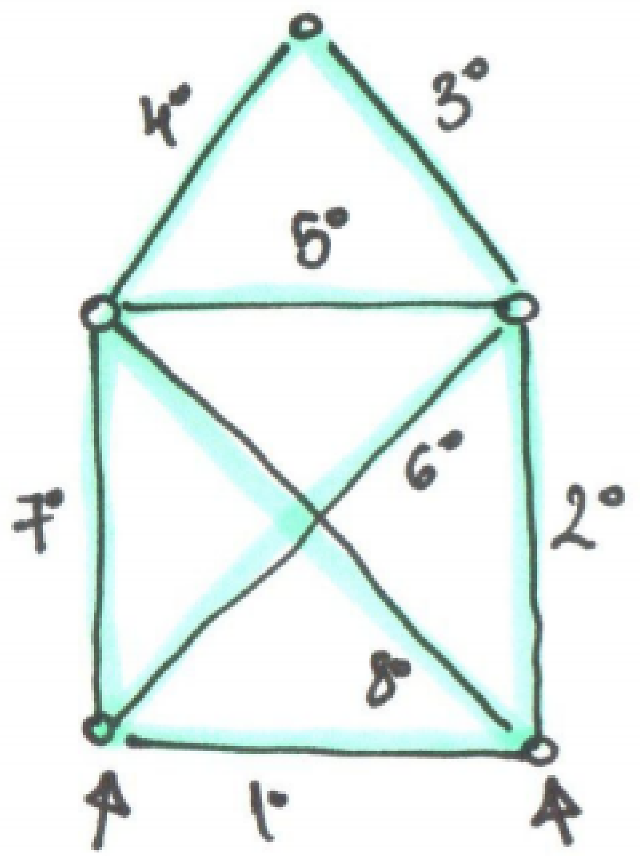
Т: Повезан граф је полуојлеров акко су НАЈВИШЕ ДВА чвора НЕПАРНОГ степена.

ТАЧНО ДВА

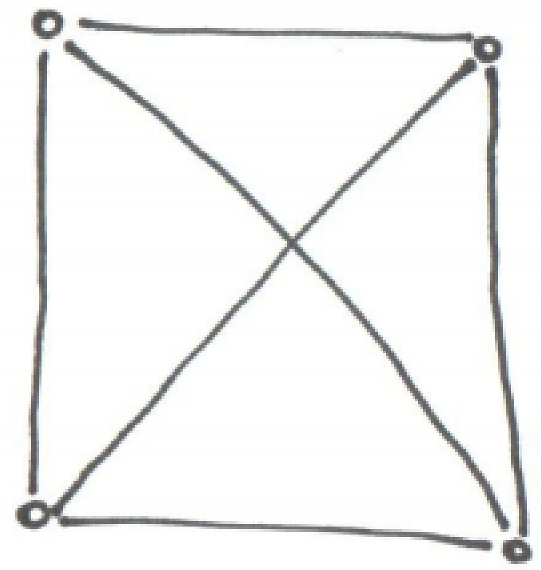
1. Који од графова на слици су Ојлерови, а који полуојлерови?



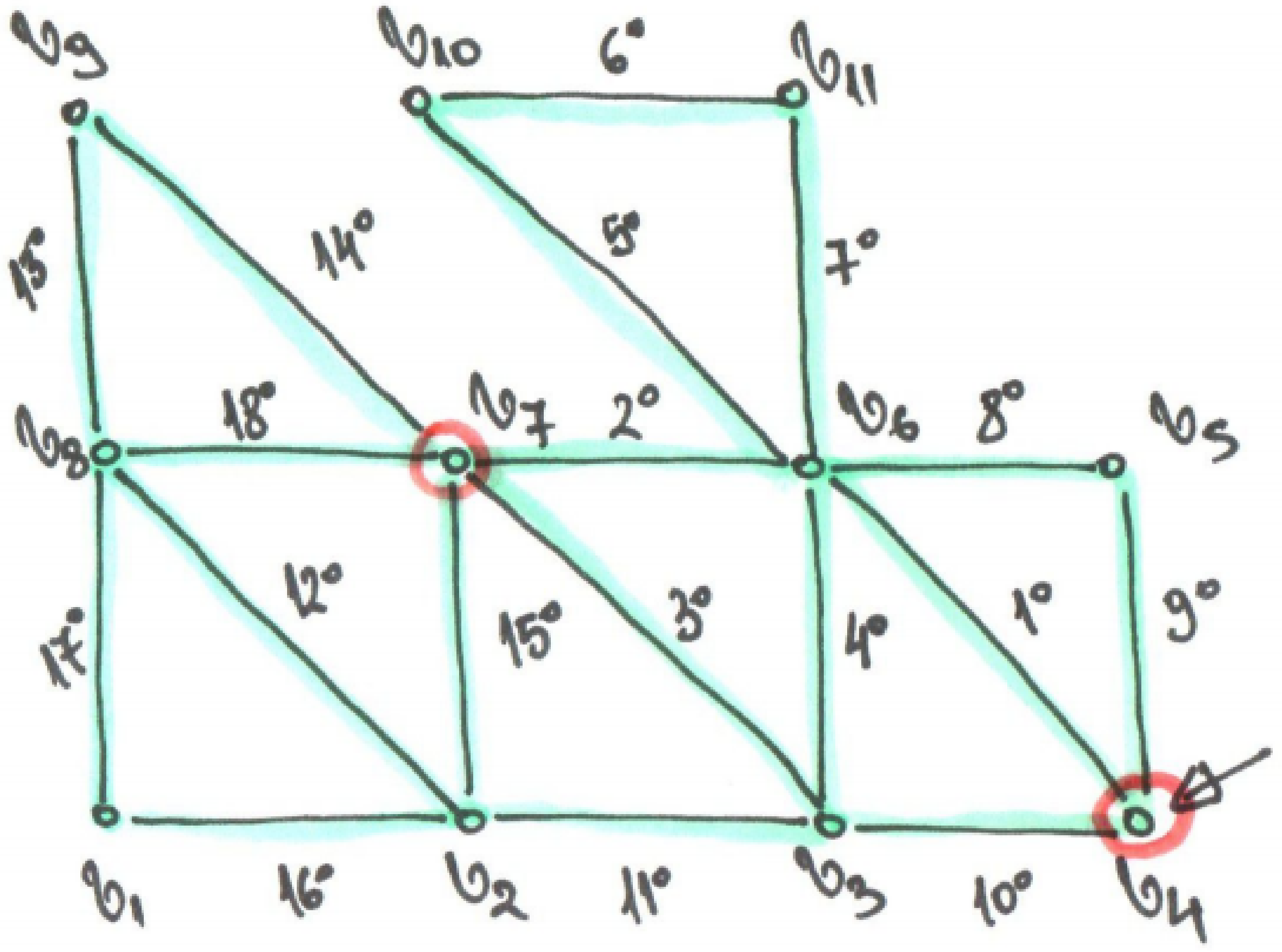
Сви чворови су парног степена ⇒ Ојлеров граф



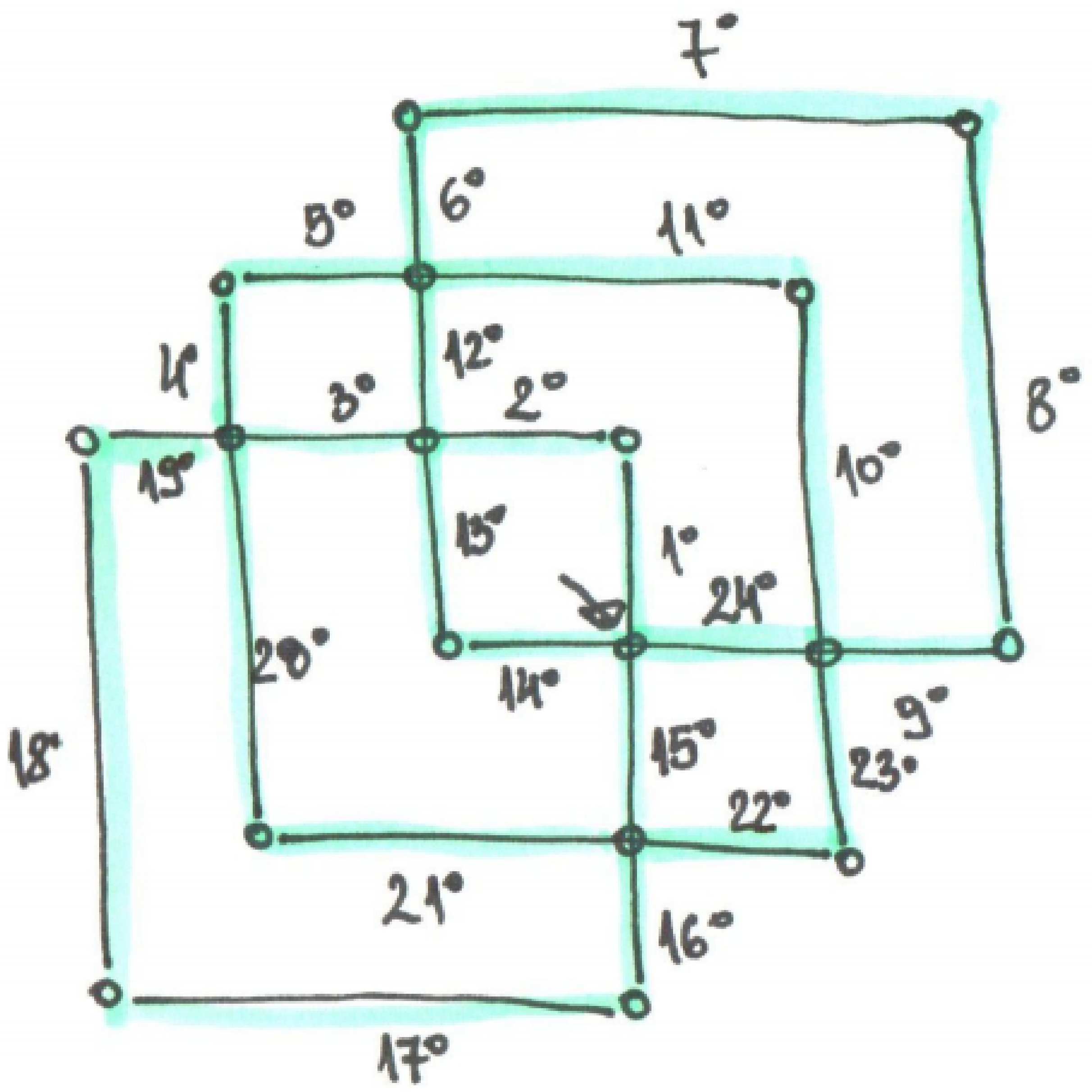
2 чвора степена 3 ⇒ полуојлеров граф



Сви чворови су непарног степена (имамо 4 таква чвора) ⇒ Није ни Ојлеров, није ни полуојлеров



v_4 и v_7 непарног степена $\Rightarrow$ полуојлеров граф



Сви чворови су парног степена
$\Rightarrow$ Ојлеров граф

ФЛЕРИЈЕВ АЛГОРИТАМ

Ојлеров пут: $v_4 v_6 v_7 v_3 v_6 \dots v_8 v_7$

2. За које n су следећи графови Ојлерови (полуојлерови)

a) комплетан граф K_n, $n \geq 3$

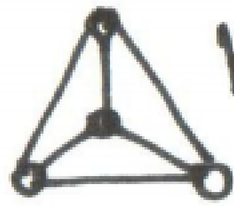
K_n је $(n-1)$-регуларан граф

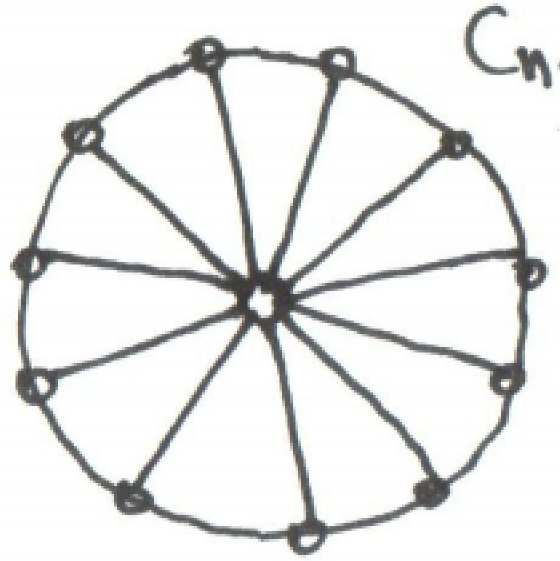
$\forall v \in V(K_n) \quad d(v) = n-1$

- n непарно $\Rightarrow$ $n-1$ парно
  $\Rightarrow$ Ојлеров граф

- n парно $(n \geq 4)$ $\Rightarrow$ $n-1$ непарно
  добијамо $n \geq 4$ чвора непарног степена $\Rightarrow$ ни Ојлеров, ни полуојлеров

b) точак W_n, $n \geq 4$





Сви чворови са контуре имају степен 3 (увек имамо бар 3 чвора степена 3) $\Rightarrow$ ни Ојлеров, ни полуојлеров

c) комплетан бипартитан граф $K_{m,n}$ $(m,n \geq 1)$

домаћи

3. Да ли постоји регуларан Ојлеров граф са парним бројем чворова и непарним бројем грана?

ПОСТОЈИ → ПРИМЕР
НЕ ПОСТОЈИ → ДОКАЗ

Нека је G граф који задовољава услове

регуларан: $d(v)=r, \ \forall v \in V(G)$

e - број грана

Ојлеров: $d(v)=r=2k$

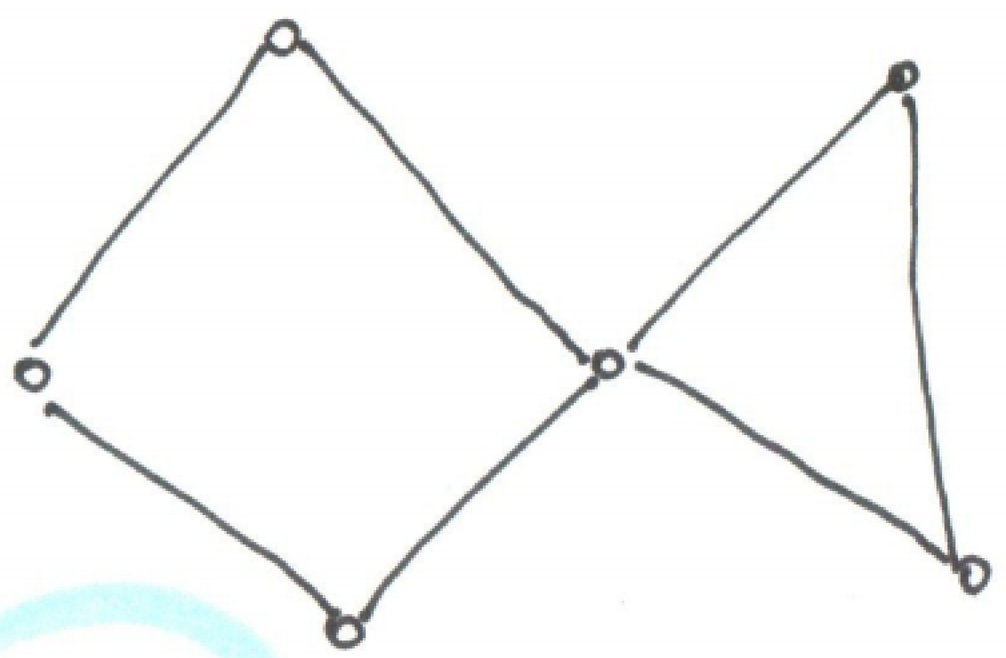
паран број чворова: $|V(G)|=2n$

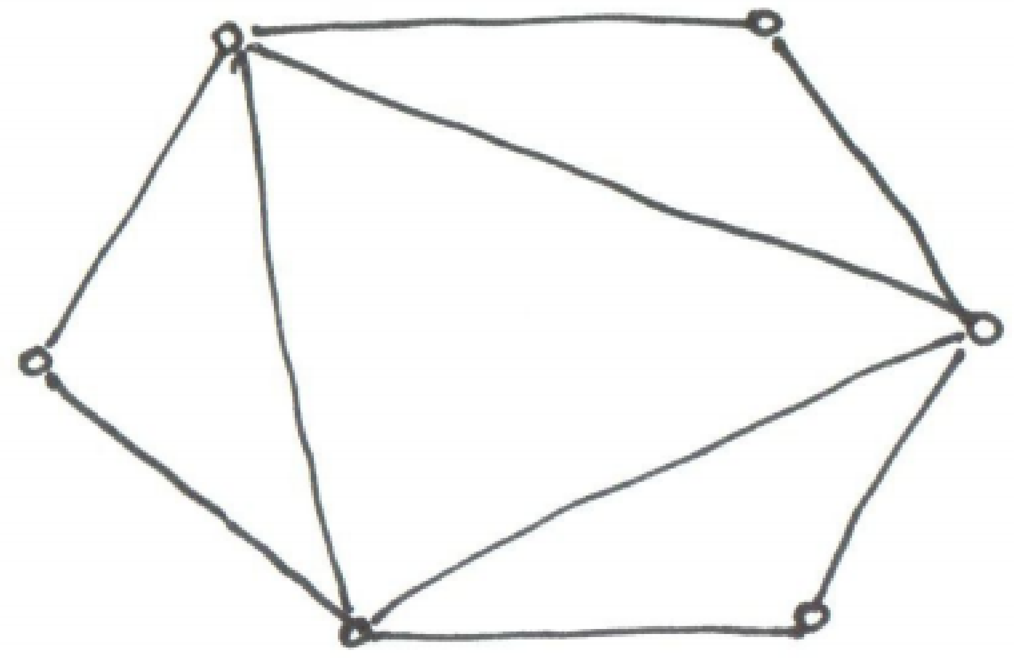
$$2e=\sum_{v\in V(G)} d(v)=\sum_{v\in V(G)} 2k=2n\cdot 2k=4kn$$

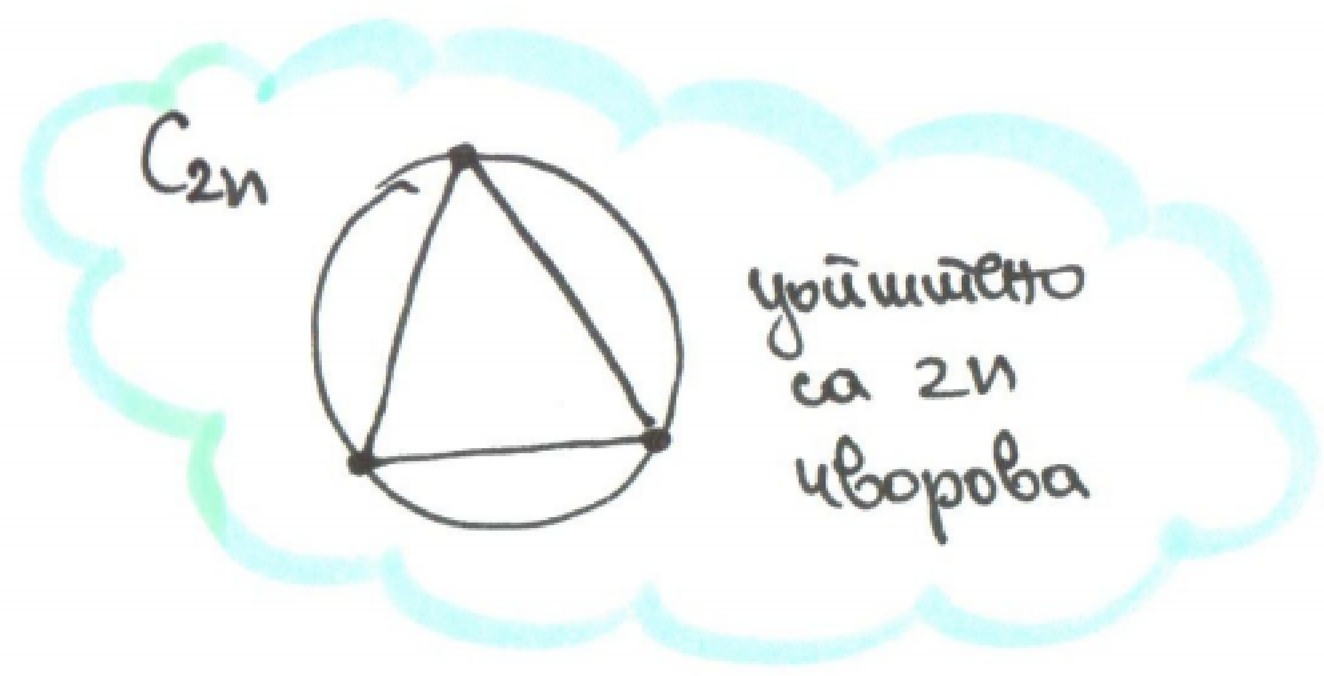
$e=2kn$ паран број $\lightning$ (претпоставили смо да је број грана графа G непаран)

$\Rightarrow$ Не постоји граф G који задовољава све услове задатка

4. Да ли постоји Ојлеров граф са парним бројем чворова и непарним бројем грана?







ХАМИЛТОНОВИ

ГРАФОВИ

G је ХАМИЛТОНОВ $\Leftrightarrow$ садржи контуру која купи СВЕ ЧВОРОВЕ графа $\leftarrow$ ХАМИЛТОНОВА КОНТУРА

G је ПОЛУХАМИЛТОНОВ $\Leftrightarrow$ садржи пут који купи СВЕ ЧВОРОВЕ $\leftarrow$ ХАМИЛТОНОВ ПУТ

Хамилтонов $\Rightarrow$ полухамилтонов $\not\Leftarrow$

Отворен проблем: проналажење потребног и довољног услова да је граф Хамилтонов

ПОТРЕБАН услов:

T: Ако је G Хамилтонов граф, тада за сваки $S \neq \emptyset$, $S \subseteq V(G)$ важи $\omega(G-S) \leq |S|$

(полухамилтонов: $\omega(G-S) \leq |S|+1$)

Довољни услови:

T: (Оре) Ако је у графу G са n чворова ($n \geq 3$) испуњено да за свака два несуседна чвора u и v важи $d(u)+d(v) \geq n$, тада је G Хамилтонов.

(полухамилтонов: $d(u)+d(v) \geq n-1$)

T: (Дирак) Ако је у графу G са n чворова ($n \geq 3$) испуњено да је $d(v) \geq \frac{n}{2}$, $\forall v \in V$, онда је G Хамилтонов граф.

(полухамилтонов: $d(v) \geq \frac{n-1}{2}$)

РЕЦЕПТ

Хамилтонов

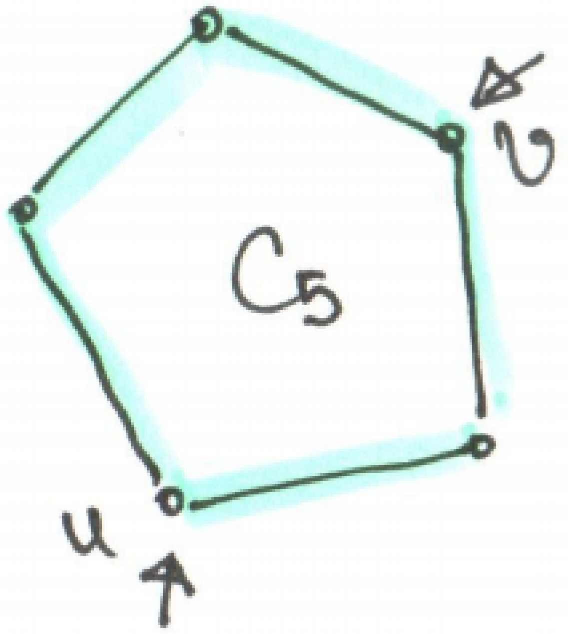
1° пронађемо тражену Хамилтонову контуру

2° Оре / Дирак

НИЈЕ Хамилтонов

1° свођењем на контрадикцију

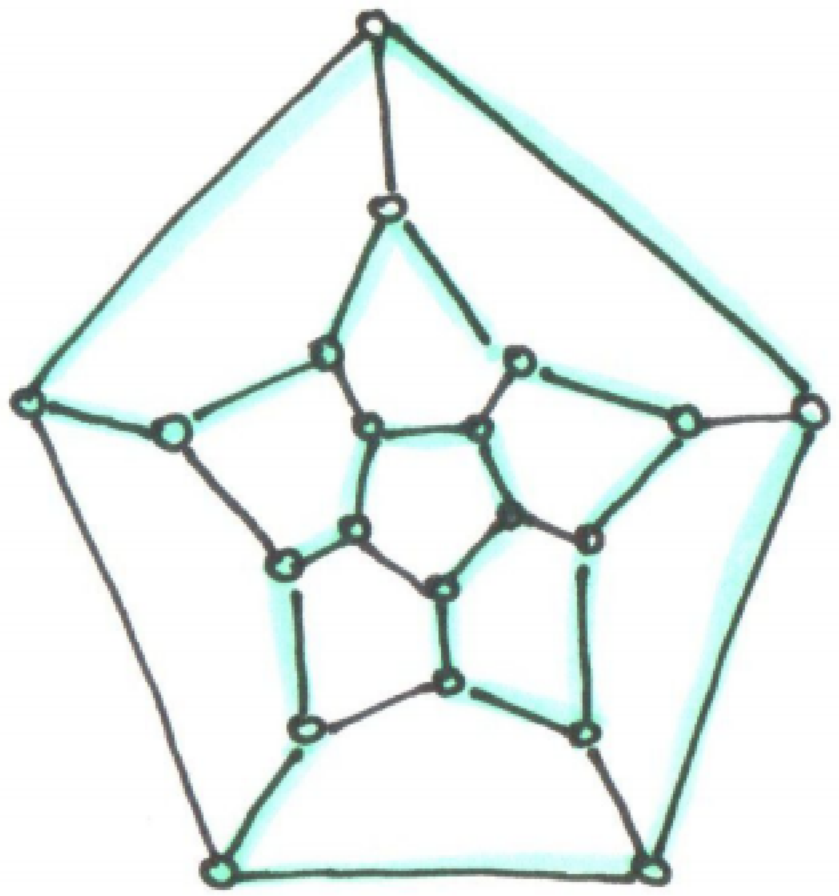
2° избацивање чворова
(контрапозиција потребног услова)



u, v несуседни
$d(u)+d(v) = 2+2 = 4 < 5$
али граф C_5 јесте Хамилтонов

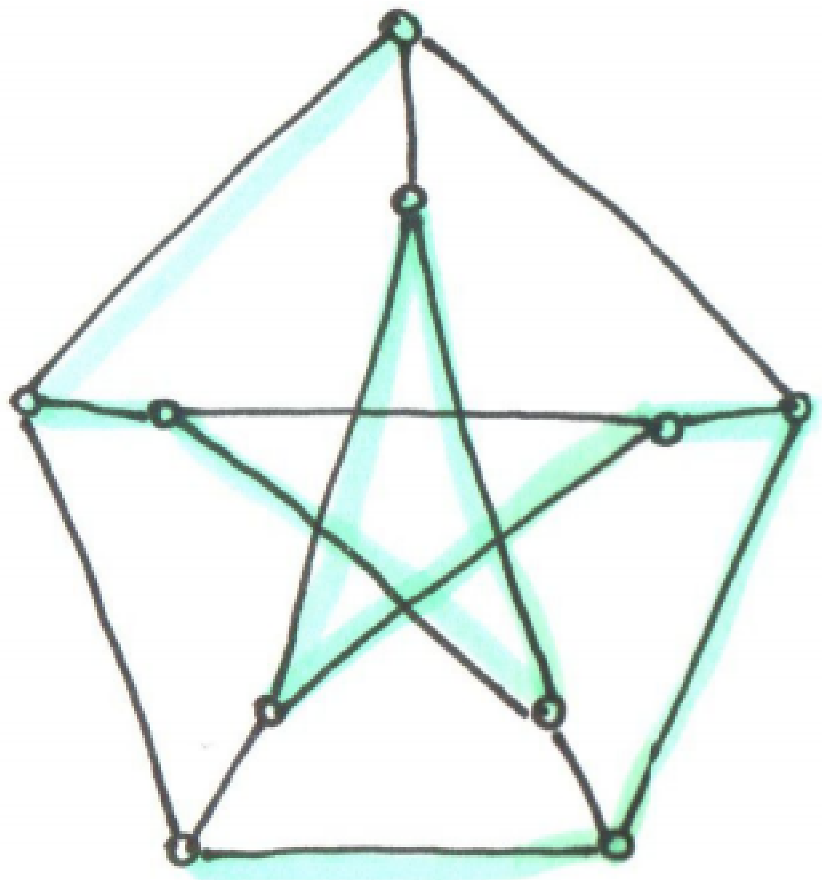
теорема Ореа је само ДОВОЉАН услов, али не и потреба

5. Који од графова на слици су Хамилтонови, а који полухамилтонови?

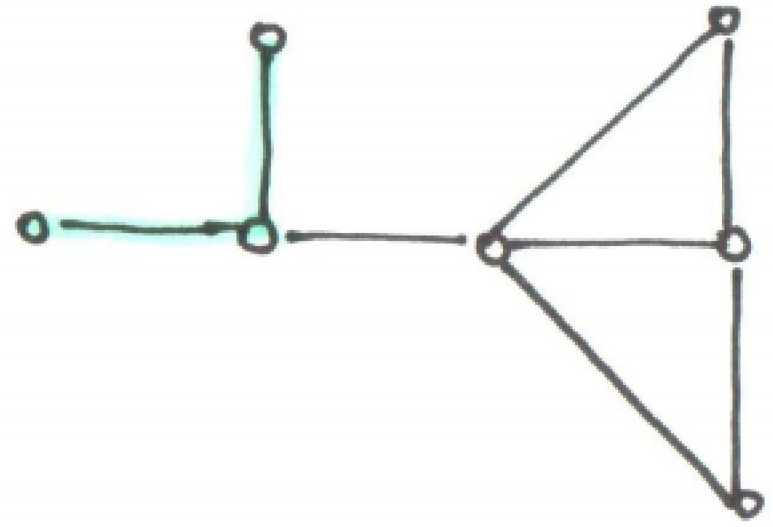


Хамилтонов

Петерсенов граф



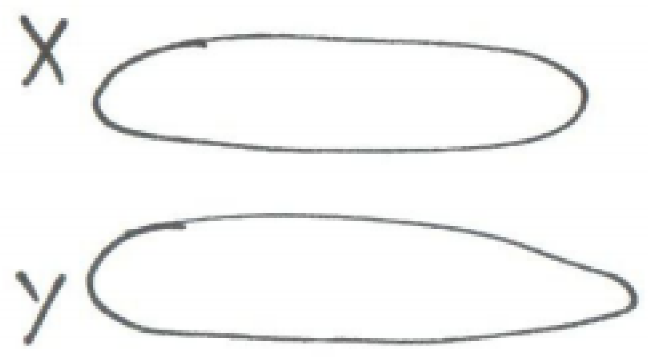
полухамилтонов



Ни Хамилтонов,
ни полухамилтонов

6. Доказати да бипартитан граф чије су класе различите кардиналности није Хамилтонов.

$G(X,Y)$, $|X| \neq |Y|$



Нека је C Хамилтонова контура графа G

$C = v_1 v_2 v_3 \ldots v_n v_1$

Нека је $v_1 \in X$. Сада је $v_2 \in Y$ (јер је његов сусед v_1 у X).

$v_3 \in X, v_4 \in Y, \ldots, v_n \in Y$ (јер је $v_1 \in X$ његов сусед)

Добијамо да је $|X| = |Y|$ ↯ $\Rightarrow G(X,Y)$ не садржи Хамилтонову контуру

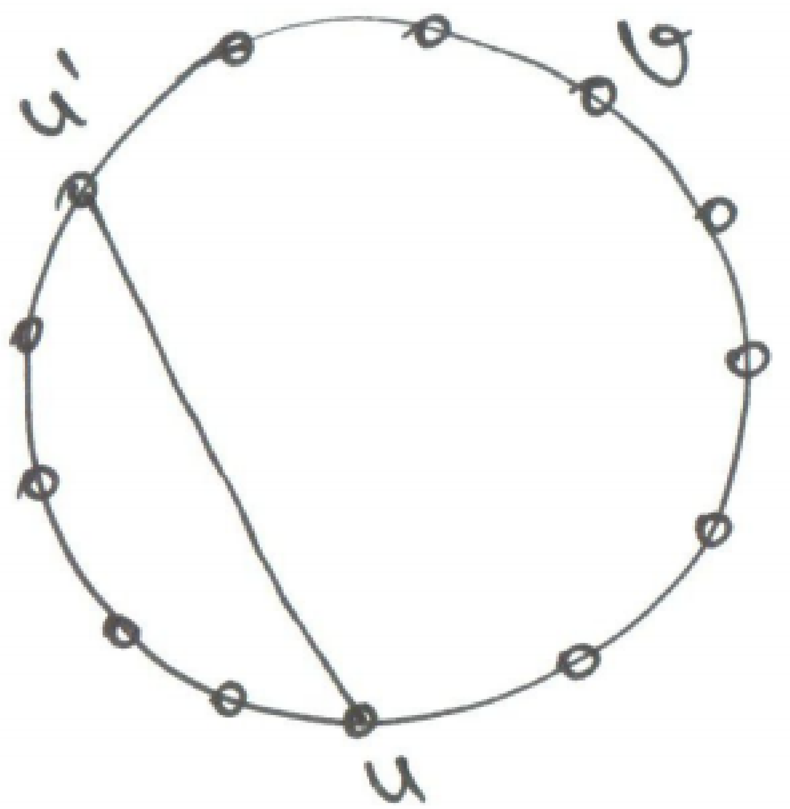
II начин:

Ако су класе различите кардиналности, једна мора бити већа, а друга мања. Нека је X мања класа. Избацивањем чворова из класе X, остаје нам граф који садржи само чворове из Y, који су сада изоловани. Добили смо већи број компоненти повезаности него што смо избацили чворова (претпоставили смо $|Y| > |X|$), па је на основу контрапозиције потребног услова немогуће да дати граф буде Хамилтонов.

7. Два несуседна чвора графа G су степена 3, док су сви остали чворови степена највише 2. Доказати да G није Хамилтонов граф.

Нека су u и v несуседни чворови степена 3.

Нека је C Хамилтонова контура која пуни све чворове графа G.



$d(u)=3 \Rightarrow \exists\, u' \neq v$ са контуре који је сусед са чвором u

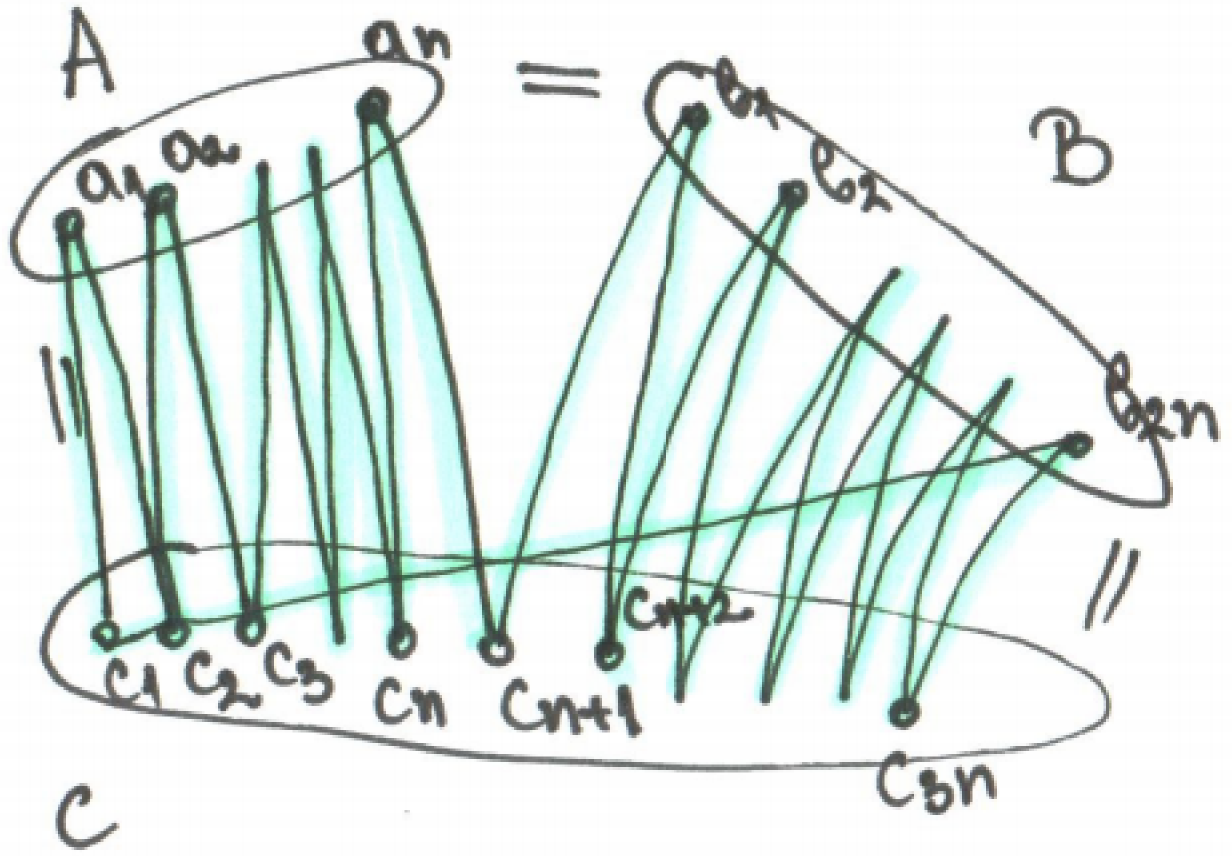
Посматрајмо сада чвор u'

$d(u') \geq 3$ ↯ (Сви чворови осим u и v су степена ≤ 2)

$\Rightarrow G$ није Хамилтонов граф

8. Доказати да је за $n \geq 1$ граф $K_{n,2n,3n}$ Хамилтонов, док $K_{n,2n,3n+1}$ није Хамилтонов.

$K_{n,2n,3n}$:



Хамилтонова контура:

$c_1 a_1 c_2 a_2 c_3 \dots c_n a_n c_{n+1} b_1 c_{n+2} b_2 c_{n+3} \dots c_{3n} b_{2n} c_1$

II начин:

Број чворова графа $K_{n,2n,3n}$ је $n+2n+3n=6n$

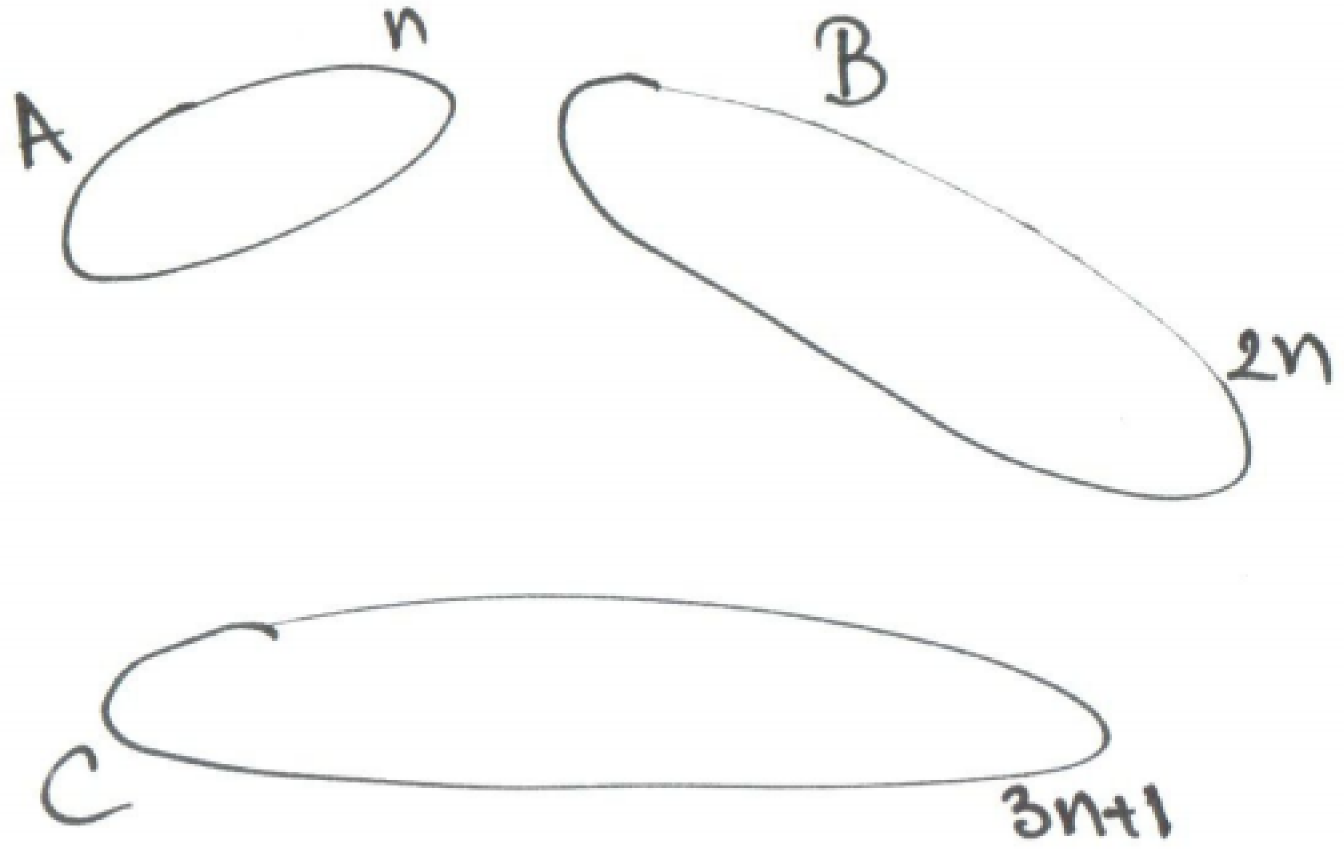
Несуседни чворови графа $K_{n,2n,3n}$ су чворови из истих класа

Нека су u и v несуседни чворови

$$d(u)+d(v)=\begin{cases} 5n+5n, & u,v\in A \\ 4n+4n, & u,v\in B \\ 3n+3n, & u,v\in C \end{cases} = \begin{cases} 10n, & u,v\in A \\ 8n, & u,v\in B \\ 6n, & u,v\in C \end{cases} \geq 6n$$

Испуњен је услов теореме Ореа $\Rightarrow$ граф $K_{n,2n,3n}$ јесте Хамилтонов

$K_{n,2n,3n+1}$

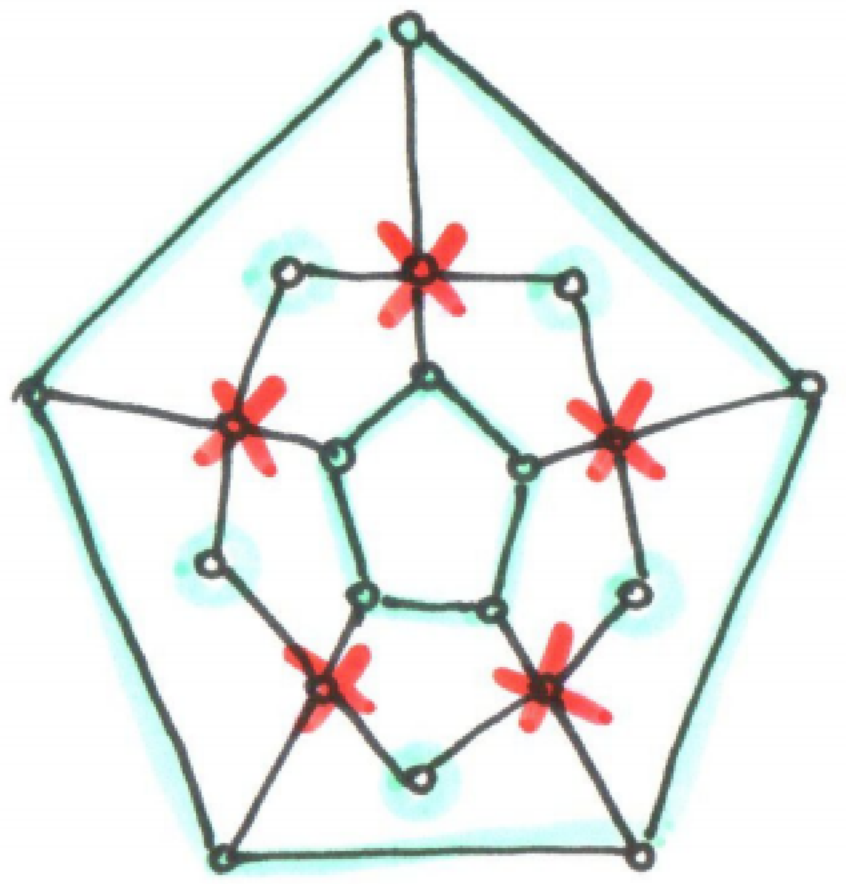


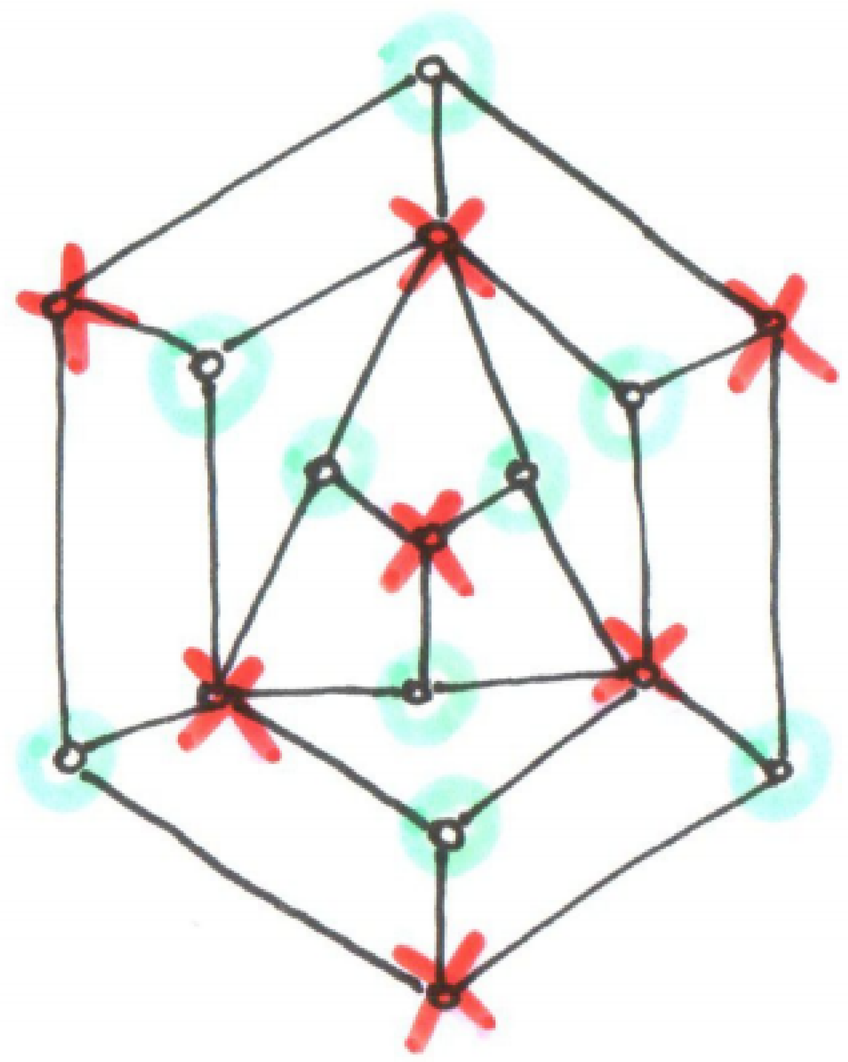
Ако би $K_{n,2n,3n+1}$ био Хамилтонов, постојала би контура C која купи све чворове графа, али то је немогуће јер C има $3n+1$ чворова, што је више него $A \cup B$ ($3n$ чворова)

II начин:

Избацивањем чворова из $A \cup B$ (избацили смо $3n$ чворова), добијамо $3n+1$ компоненту повезаности у новом графу (чворови из C), па према томе граф није Хамилтонов (контрапозиција потребног услова)

9. Доказати да следећи графови нису полухамилтонови.





$|S|=7$

$\omega(G-S)=9$

$9=\omega(G-S) > |S|+1=8$

$\Rightarrow$ није полухамилтонов (користимо контрапозицију потребног услова)

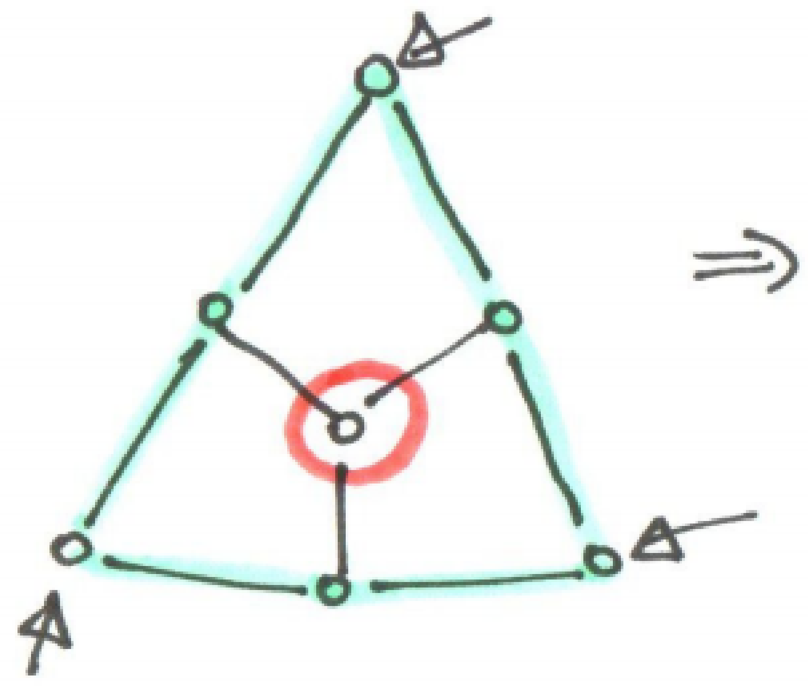
Избацили смо 5 чворова и добили 7 компоненти повезаности

$|S|=5$

$\omega(G-S)=7$

$7=\omega(G-S) > |S|+1 = 5+1=6$

$\Rightarrow$ граф није полухамилтонов (није ни хамилтонов)



$\Rightarrow$ граф није хамилтонов!

10. Нека је G граф са $n \geq 3$ чворова и бар $\binom{n-1}{2}+2$ грана. Доказати да је G Хамилтонов.

Доказаћемо да важи услов из теореме Ореа.

Претпоставимо да $\exists\, u,v \in V(G)$ несуседни за које важи $d(u)+d(v)<n$

Посматрајмо граф $G-u-v$

$$\boxed{|E(G-u-v)|} \underset{\substack{\uparrow \\ u \text{ и } v \text{ несуседни}}}{=} |E(G)| - d(u) - d(v) = \underbrace{|E(G)|}_{\geq \binom{n-1}{2}+2} - \underbrace{\underbrace{(d(u)+d(v))}_{<n}}_{>-n} > \binom{n-1}{2}+2-n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (n-2) =$$

$$(n-2)\left(\frac{n-1}{2}-1\right) = \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \boxed{\binom{n-2}{2}}$$

Граф $G-u-v$ има $n-2$ чвора, а број грана графа са $n-2$ чвора је $\boxed{\leq \binom{n-2}{2}}$ $\lightning$

$\Longrightarrow$ За свака два несуседна чвора $u,v \in V(G)$ важи $d(u)+d(v) \geq n$

$\overset{\text{Оре}}{\Longrightarrow}$ G је Хамилтонов граф

11. Да ли постоји граф са 8 чворова и 23 гране који није Хамилтонов?

10

$n=8$

$\binom{n-1}{2}+2 = \binom{8-1}{2}+2 = \binom{7}{2}+2 = \frac{7\cdot 6}{2}+2 = 21+2 = 23$ гране

10

$\Longrightarrow$ G јесте Хамилтонов

Не постоји граф са 8 чворова и 23 гране који није Хамилтонов.