# VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

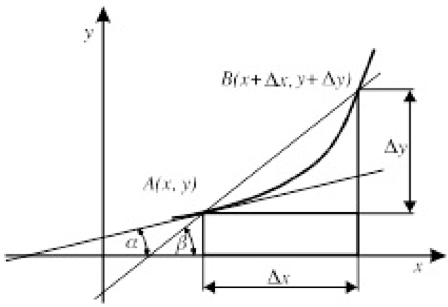
Novi Sad,
2020.

# Sadržaj

# 1. Vežbe II.1

## 1.1. Diferencijalni račun

Posmatrajmo neprekidnu funkciju $y = f(x)$ nad intervalom $(a, b)$.




Ako postoji granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

gde $x,\ x + \Delta x \in (a,\ b)$, onda se ta granična vrednost, koja se označava sa $f'(x)$ ili $y'$ zove **izvod funkcije** $f(x)$ u tački $x$.
Dakle,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Na slici je ilustrovana geometrijska interpretacija izvoda. Prava AB, gde su A i B tačke grafika, naziva se sečica te krive, određena tačkama A i B. Pustimo da se tačka B kreće po krivoj i da teži da se poklopi sa tačkom A. Sečica AB pri tom menja svoj položaj (nagib). Ukoliko postoji granični položaj te sečice kada tačka B teži ka tački A, tada se prava koja zauzima taj položaj naziva tangenta krive $y = f(x)$ u tački A.
Pretpostavimo da je ugao $\alpha$ koji tangenta zaklapa sa pozitivnim smerom $x$-ose različit od $\frac{\pi}{2}$, $(\alpha \neq \frac{\pi}{2})$. Ako je $\beta$ ugao koji zaklapa sečica AB sa pozitivnim delom $x$-ose, onda sledi da je

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

pa je koeficijent pravca $\operatorname{tg} \alpha$ tangente kroz tačku A dat izrazom

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).} \tag{1.1}$$

Neka funkcija $y = f(x)$ ima izvod nad intervalom $(a, b)$. Izvod $f'(x)$ funkcije $f(x)$ je funkcija nezavisne promenljive $x$, definisana nad intervalom $(a, b)$. Ako ona ima izvod u nekoj tački $x \in (a, b)$, onda se njen izvod $(f'(x))'$ naziva drugim izvodom ili izvodom drugog reda funkcije $f(x)$ u tački $x$, koji ćemo označavati sa $y'' = f''(x)$.
Ako je definisan izvod $(n-1)$ reda, $n \geq 2$, tada je $n-$ti izvod ili izvod $n-$tog reda $f^{(n)}(x)$ definisan kao izvod funkcije $y = f^{(n-1)}(x)$, tj.

$$\boxed{\left(f^{(n-1)}(x)\right)' = f^{(n)}(x).} \tag{1.2}$$

### 1.1.1. Tablica i osobine izvoda

**Tablica izvoda**

| Funkcija $f(x)$ | Izvod $f'(x)$ | Važi za |
|---|---|---|
| $c = const$ | $0$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $x$ | $1$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ |
| $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | a) $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $q \in \mathbb{N}$ neparan broj, $x \neq 0$; b) $\alpha = \frac{p}{q} > 1$, $q$ neparan broj, $x \in \mathbb{R}$ |
| $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ |
| $a^x$ | $a^x \ln a$ | $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x \ln a}$ | $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ |
| $\ln \lvert x \rvert$ | $\frac{1}{x}$ | $x \neq 0$, |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ |
| $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ | $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ |
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\lvert x \rvert < 1$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\lvert x \rvert < 1$ |
| $\operatorname{arctg} x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $\operatorname{arcctg} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ | $x \in \mathbb{R}$ |

**Osobine izvoda funkcije**

Ako funkcije $u = u(x)$ i $v = v(x)$ imaju izvod u tački $x$, tada i funkcije $u \pm v$, $uv$, $\frac{u}{v}$ i $cu$, $c \in \mathbb{R}$, imaju izvode u toj tački ($\frac{u}{v}$ pod pretpostavkom da je $v(x) \neq 0$ u datoj tački $x$). Pri tome je:

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x) \tag{1.3}$$

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \tag{1.4}$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2} \tag{1.5}$$

$$(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x) \text{ (c je konstanta)} \tag{1.6}$$

**Napomena:** U zadacima se traže izvodi tamo gde oni postoje.

**Zadatak 1.1.** Naći izvod funkcije $y = x^2$ po definiciji.

**Rešenje.** Koristićemo jednakost (1.1) za izračunavanje izvoda funkcije.

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) = (x+\Delta x)^2-x^2 = x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-x^2 = \Delta x(2x+\Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Dakle, sledi da je

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$$

**Zadatak 1.2.** Naći izvod funkcije:

a) $y = \dfrac{1}{x}$;

b) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

c) $y = e^x \sin x$;

d) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

**Rešenje.** Za rešavanje ovog zadatka primenjujemo tablicu i osobine izvoda.

a)

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1\cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

b)

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}\,x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}.$$

c) Primenimo osobinu za izvod proizvoda,(1.4), i tablicu izvoda

$$\begin{aligned} y' &= (e^x\cdot\sin x)' = (e^x)'\cdot\sin x + e^x\cdot(\sin x)' \\ &= e^x\cdot\sin x + e^x\cdot\cos x = e^x(\sin x + \cos x). \end{aligned}$$

d) Primenimo osobinu za izvod količnika,(1.5), i tablicu izvoda

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{(\ln x)'\cdot x^2 - \ln x\cdot(x^2)'}{x^4} = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln x\cdot 2x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}.$$

### 1.1.2. Izvod složene funkcije

Neka je data složena funkcija $y = f(u)$, $u = g(x)$. Ako $g(x)$ ima izvod u tački $x$, a $f(u)$ izvod u tački $u$, tada je

$$(f \circ g)'(x) = f'(u) \cdot g'(x), \tag{1.7}$$

gde je $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

**Zadatak 1.3.** Naći izvod funkcije $y = (x^2 - 3x + 3)^5$.

**Rešenje.** Uvodimo smenu

$$u = x^2 - 3x + 3 \Rightarrow y = u^5.$$

Primenom izvoda složene funkcije,(1.7) dobijamo

$$y' = y'(u) \cdot u'(x) = (u^5)' \cdot (x^2 - 3x + 3)' = 5u^4 \cdot (2x - 3) = 5(x^2 - 3x + 3)^4 \cdot (2x - 3).$$

**Zadatak 1.4.** Naći izvod funkcije $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$.

**Rešenje.** Uvodimo smenu

$$u = \frac{x}{\ln x} \Rightarrow y = 2^u.$$

Primenom izvoda složene funkcije,(1.7) dobijamo

$$\begin{aligned} y' &= y'(u) \cdot u'(x) = 2^u \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{x}{\ln x}\right)' \\ &= 2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{x' \ln x - x (\ln x)'}{\ln^2 x} = 2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}. \end{aligned}$$

**Zadatak 1.5.** Naći izvod funkcije $y = (\frac{x}{a})^b + (\frac{b}{x})^a + (\frac{a}{b})^x$.

**Rešenje.** Primenom osobine za izvod zbira (1.3), i izvoda složene funkcije (1.7), dobijamo

$$\begin{aligned} y' &= \left(\left(\frac{1}{a} \cdot x\right)^b\right)' + \left(\left(b \cdot \frac{1}{x}\right)^a\right)' + \left(\left(\frac{a}{b}\right)^x\right)' \\ &= \frac{1}{a^b} \cdot b \cdot x^{b-1} + b^a \cdot \left(-\frac{a}{x^{a+1}}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \ln \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

**Zadatak 1.6.** Naći izvod funkcije $y = a^{a^x} + a^{x^a} + x^{a^a} + a^{a^a}$.

**Rešenje.** Primenom osobine za izvod zbira (1.3) i izvoda složene funkcije (1.7), dobijamo

$$y' = a^{a^x} \cdot \ln a \cdot a^x \cdot \ln a + a^{x^a} \cdot \ln a \cdot a \cdot x^{a-1} + a^a \cdot x^{a^a - 1}.$$

**Zadatak 1.7.** Naći izvod funkcije $y = e^{\cos\cos x}$.

**Rešenje.** Uvodimo smenu

$$u = \cos\cos x \Rightarrow y = e^u.$$

Kao i u prethodna dva zadatka primenjujemo (1.7) i dobijamo

$$\begin{aligned} y' = y'(u) \cdot u'(x) = e^u \cdot (\cos\cos x)' &= e^{\cos\cos x} \cdot (-\sin\cos x) \cdot (\cos x)' \\ &= e^{\cos\cos x} \cdot \sin\cos x \cdot \sin x. \end{aligned}$$

**Zadatak 1.8.** Naći izvod funkcije $y = \sqrt{\sin 3x} + \sin x^2$.

**Rešenje.** Primenom tablice izvoda, osobine za izvod zbira (1.3) i izvoda složene funkcije (1.7), dobijamo

$$\begin{aligned} y' = (\sqrt{\sin 3x} + \sin x^2)' &= (\sin^{\frac{1}{2}} 3x)' + (\sin x^2)' \\ &= \frac{1}{2}(\sin 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\sin 3x)' + \cos x^2 \cdot (x^2)' \\ &= \frac{1}{2}\,(\sin 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos 3x \cdot (3\,x)' + \cos x^2 \cdot 2\,x \\ &= \frac{3\,\cos 3x}{2\,\sqrt{\sin 3x}} + 2\,x\,\cos x^2. \end{aligned}$$

**Zadatak 1.9.** Naći drugi izvod funkcije $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

**Rešenje.** Izračunaćemo prvi izvod zadate funkcije

$$\begin{aligned} y' = (\sin^4 x + \cos^4 x)' &= (\sin^4 x)' + (\cos^4 x)' \\ &= 4\,\sin^3 x\, \cdot (\sin x)' + 4\,\cos^3 x\, \cdot (\cos x)' \\ &= 4(\sin^3 x\, \cdot \cos x - \cos^3 x\, \cdot \sin x) \\ &= 4(\sin x \cos x)(\sin^2 x - \cos^2 x) \end{aligned}$$

Izvod drugog reda računamo po formuli $y'' = (y')'$, prema (1.2). Dakle, dobijamo da je

$$\begin{aligned} y'' &= (y')' = (4(\sin x \cos x)(\sin^2 x - \cos^2 x))' \\ &= 4((\sin x \cos x)'(\sin^2 x - \cos^2 x) + (\sin x \cos x)(\sin^2 x - \cos^2 x)') \\ &= 4((\cos^2 x - \sin^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) + (\sin x \cos x)(2 \sin x \cos x + 2 \cos x \sin x) \\ &= 4(-(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 + 4 \sin^2 x \cos^2 x) \\ &= -4(\cos^4 x + \sin^4 x - 6 \sin^2 x \cos^2 x). \end{aligned}$$

**Zadatak 1.10.** Pokazati da funkcija $y = e^{2x} \cdot \sin 5x$ zadovoljava jednačinu $y'' - 4y' + 29y = 0$.

**Rešenje.** Prvo ćemo izračunati prvi i drugi izvod zadate funkcije

$$\begin{aligned} y' &= 2e^{2x}\sin 5x + 5e^{2x}\cos 5x \\ y'' &= 4e^{2x}\sin 5x + 10e^{2x}\cos 5x + 10e^{2x}\cos 5x - 25e^{2x}\sin 5x \\ &= -21e^{2x}\sin 5x + 20e^{2x}\cos 5x \end{aligned}$$

Tako dobijene izvode uvrštavamo u zadatu jednačinu

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 29y = {} & \underbrace{-21e^{2x}\sin 5x + 20e^{2x}\cos 5x}_{y''} \\ & - 4 \cdot \underbrace{(2e^{2x}\sin 5x + 5e^{2x}\cos 5x)}_{y'} + 29\,\underbrace{e^{2x}\sin 5x}_{y} = 0, \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

### 1.1.3. Logaritamski izvod

Po ovom pravilu možemo da tražimo izvod funkcije samo u tačkama gde je funkcija $f(x)$ pozitivna. Neka je

$$y = f(x)^{g(x)}, f(x) > 0,$$

logaritmovanjem funkcije i primenom osobine logaritamske funkcije

$$\ln x^a = a \ln x,\ x > 0,$$

dobijamo

$$\ln y = g(x) \cdot \ln f(x),$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = g'(x) \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)},$$

$$\boxed{y' = f(x)^{g(x)} \cdot \left( g'(x) \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right).}$$

Logaritamskim izvodom se može naći izvod proizvoda.
Na primerima koji slede ilustrovaćemo primenu logaritamskog izvoda.

**Zadatak 1.11.** Naći drugi izvod funkcije $y = x^x$ za $x > 0$.

**Rešenje.** Za izračunavanje drugog izvoda koristimo formulu $y'' = (y')'$.

$$\begin{aligned}
\ln y &= x \cdot \ln x \Big/ ' \\
\frac{1}{y} y' &= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \\
y' &= y \cdot (\ln x + 1) = x^x \cdot (\ln x + 1) \\
y'' &= (x^x)' \cdot (\ln x + 1) + x^x \cdot (\ln x + 1)'
\end{aligned}$$

Dakle, dobijamo da je

$$y' = x^x (\ln x + 1) \ \text{ i } \ y'' = x^x (\ln x + 1)^2 + \frac{x^x}{x}.$$

**Zadatak 1.12.** Naći izvod funkcije $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x + \ln x$, za $\frac{x}{1+x} > 0$ i $x > 0$.

**Rešenje.** Ako uvedemo da je $y_1 = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ sledi $y' = y_1' + (\ln x)'$. Primenom logaritamskog izvoda dobijamo da je

$$\begin{aligned}
\ln y_1 &= x \cdot \ln \frac{x}{1+x} \Big/ ' \\
\frac{1}{y_1} y_1' &= \ln \frac{x}{1+x} + x \cdot \frac{1+x}{x} \cdot \frac{1+x-x}{(1+x)^2} \\
y_1' &= y_1 \cdot \left( \ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} \right) \\
y_1' &= \left(\frac{x}{1+x}\right)^x \cdot \left( \ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} \right) \\
y' &= \left(\frac{x}{1+x}\right)^x \cdot \left( \ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} \right) + \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Zadatak koji sledi ilustruje napomenu sa početka poglavlja: logaritamski izvod se koristi i kada imamo proizvod više funkcija.

**Zadatak 1.13.** Naći izvod funkcije $y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3 x \cdot \cos^2 x$.

**Rešenje.** Primenićemo postupak koji je opisan na početku poglavlja i osobine logaritamske funkcije $\ln a^n = n \ln a$, $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ i $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, $a, b > 0$.

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln(x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3 x \cos^2 x) \\
\ln y &= \frac{2}{3} \ln x + \ln(1-x) - \ln(1+x^2) + 3 \ln \sin x + 2 \ln \cos x \Big/ ' \\
\frac{1}{y} \cdot y' &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \cdot (-1) - \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x + 3 \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + 2 \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x). \\
y' &= y \cdot \left( \frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3 \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{tg} x \right) \\
y' &= \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot \left( \frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3 \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{tg} x \right)
\end{aligned}$$

**Zadatak 1.14.** Naći izvod funkcije $y = (\cos x)^{\sin x}$ za $\cos x > 0$.

**Rešenje.**
$y = (\cos x)^{\sin x} \dfrac{1}{\cos x} \left(\cos^2 \ln(\cos x) - \sin^2 x\right)$.

**Zadatak 1.15.** Naći izvod funkcije $y = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$ za $\ln x > 0$ i $x > 0$.

**Rešenje.**
$y = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \left(\ln(\ln x) + \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{2 \ln x}{x}\right)$.

## Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.