Вежбе 10

-Стабла-

1. Низ степена стабла је $5, 4, 3, 2, 1, 1, \ldots, 1$. Колико има јединица?

Нека је k број висећих чворова у стаблу (тј. број јединица)

$n = 4 + k$

Ако је n број чворова у стаблу, онда је број грана $e = n-1$.

$\Rightarrow e = n - 1 = k + 3$

основна теорема теорије графова

$$2e = \sum_{v \in V} d(v) = 5 + 4 + 3 + 2 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{k \text{ јединица}} = 14 + k$$

$2 \cdot (k+3) = 14 + k$

$\Rightarrow k = 8$

2. Колико компоненти повезаности има шума са 100 чворова и 90 грана?

Шума је ацикличан граф (граф који не садржи контуре)

$n = |V(G)| = 100$

$e = |E(G)| = 90$

Нека је $\omega(G) = k$.

Свака компонента повезаности шуме је стабло

G_i стабло у шуми, $i = 1, 2, \dots, k$

Нека је $n_i = |V(G_i)|$, $e_i = |E(G_i)|$

Сада је $e_i = n_i - 1$

Добијамо
$$\begin{aligned} e &= e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_k \\ &= (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + (n_3 - 1) + \dots + (n_k - 1) \\ &= n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k - k \\ &= n - k \end{aligned}$$

$90 = 100 - k \Rightarrow k = 10$

Број компоненти повезаности у шуми је 10.

Напомена:

Нека је G шума. Ако је G повезан граф, имамо само једно стабло, а уколико је G неповезан, онда имамо унију стабала.

3. Ако је G шума, тада важи $|V(G)| = |E(G)| + \omega(G)$.

4. Нека је G повезан граф.

а) Ако G има 17 грана, колико највише чворова може да има?

Сваки повезан граф са n чворова има $e \geqslant n-1$ грана.

$e = 17$

$17 \geqslant n-1$

$n \leq 18$

б) Ако G има 21 чвор, колико најмање грана може да има?

$n = 21$

$e \geqslant 21-1$

$e \geqslant 20$

5. Граф G има 4 компоненте и 24 гране. Колико највише чворова може G да има?

$\omega(G) = 4$

$e = 24$

Свака компонента повезаности неповезаног графа је један „мали" повезан граф.

Означимо са $n_i = |V(G_i)|$, $e_i = |E(G_i)|$, где су G_i, $i = 1,2,3,4$, компоненте повезаности графа G

$$\left.\begin{aligned} e_1 &\geq n_1 - 1 \\ e_2 &\geq n_2 - 1 \\ e_3 &\geq n_3 - 1 \\ e_4 &\geq n_4 - 1 \end{aligned}\right\} + \qquad e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \geq n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - 4$$

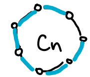
$$e \geq n - 4$$

$$24 \geq n - 4$$

$$n \leq 28$$

6. Колико висећих чворова има стабало дијаметра 3 са n чворова?

дијаметар графа $d(G) = \max\limits_{u,v\in V(G)} d_G(u,v)$

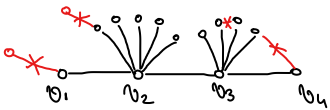


максималан пут је дужине $n-1$

$d(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

Стабла не садрже контуре $\Rightarrow$ дијаметар стабла представља дужину максималног пута

Нека је $v_1v_2v_3v_4$ максималан пут у датом стаблу



Сви остали чворови у стаблу (њих $n-4$) су суседи чворова v_2 и v_3 и сви су висећи чворови. Уколико неки од ових чворова није висећи, добили бисмо пут који је дужи од максималног или контуру, што није могуће.

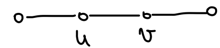
Број висећих чворова је $n-4+2=n-2$ (сви чворови у стаблу осим v_2 и v_3 су висећи)

напомена:

Овај граф зовемо ГУСЕНИЦА

7. Колико има неизоморфних стабала дијаметра 3 са 103 гране?

Пут максималне дужине у стаблу је пут дужине 3



$e=103 \Rightarrow n=104$

За пут максималне дужине смо „искористили" 4 чвора.

Преосталих 100 чворова су суседи или u или v и они су висећи чворови.

u	v
100	0
99	1
98	2
⋮	⋮
51	49
50	50
~~49~~	~~51~~
~~⋮~~	~~⋮~~
~~0~~	~~100~~

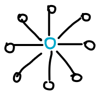
Изоморфни са претходно набројаним стаблима

$\Rightarrow$ Број неизоморфних стабала је 51.

8. За које природне бројеве s $(s > 1)$ постоји стабло са
а) 1998 *б)* 2008 (домаћи)
чворова код ког су сви чворови који нису висећи степена s?

Тражимо сва полурегуларна стабла са 1998 чворова.

• $\boxed{s=1997}$

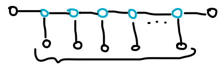


звезда $K_{1,1997}$

• $\boxed{s=2}$ пут P_{1998}

1996 чворова степена 2

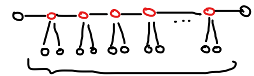
• $\boxed{s=3}$



$$\frac{1998-2}{2} = \frac{1996}{2} = 998$$

чворова степена 3

• ~~$s=4$~~ немогуће



$$\frac{1998-2}{3} = \frac{1996}{3} \notin \mathbb{Z} \quad ↯$$

Стратегија: Посматрајмо пут са $k+2$ чворова и на k „унутрашњих" чворова додаћемо још по $s-2$ висећа чвора

$$2\cdot(1998-1) = 2\cdot 1997 = \sum_{v\in V} d(v) = k\cdot s + (n-k)\cdot 1 = k\cdot s + 1998 - k = k(s-1) + 1998$$

$k\cdot(s-1) = 1996$

→ Задатак се своди на одређивање делилаца броја 1996

$$\begin{array}{r|l} 1996 & 2 \\ 998 & 2 \\ 499 & \end{array}$$

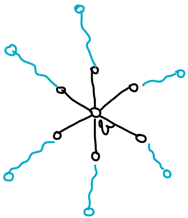
$k, s-1 \in \{1,2,4,499,998,1996\}$

$\Rightarrow s \in \{2,3,5,500,999,1997\}$

9. Нека је T стабло и $\Delta(T) = k$. Доказати да T има бар k висећих чворова.

$\Delta(T)=k \Rightarrow \exists v \in V(T)$ такав да је $d(v)=k$

Нека су $v_1, v_2, \dots, v_k$ суседи чвора v



Посматрајмо чвор v_i.

Нека је P_i пут максималне дужине чији је почетни чвор v_i и који не садржи чвор v.

Сада се на другом крају пута P_i налази висећи чвор стабла T

(пут P_i може бити и само чвор v_i, уколико је v_i висећи чвор)

$\Rightarrow$ Стабло T има барем k висећих чворова

II начин:

Нека је $n=|V(T)|$ и нека је l број висећих чворова у T.

Претпоставимо супротно, да је $l<k$.

Важи

$$2\cdot(n-1) = \sum_{v\in V} d(v) = \underbrace{l\cdot 1}_{\text{висећи}} + \underbrace{\sum d(v)}_{\substack{2\le d(v)\le k \\ n-l-1 \text{ сабирака}}} + \underbrace{1\cdot k}_{\substack{\text{чвор максималног} \\ \text{степена}}} \geq l + 2\cdot(n-l-1) + k = 2(n-1) + \underbrace{k-l}_{>0} > 2(n-1)$$

$\Rightarrow$ Стабло T садржи бар k висећих чворова.

10. Доказати да је број висећих чворова у стаблу

$$2 + \sum_{d(v)\geq 3} (d(v) - 2).$$

Нека је n_i број чворова степена i у датом графу

$n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_\Delta = n_1 + n_2 + k$ $\quad$ k - број чворова степена ≥ 3

$$2e = \sum_{v \in V} d(v) = n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 2 + n_3 \cdot 3 + \dots + n_\Delta \cdot \Delta$$
$$= n_1 + 2n_2 + \sum_{d(v)\geq 3} d(v)$$

Знамо да је $e = n - 1 = n_1 + n_2 + k - 1$

$$2(n_1 + n_2 + k - 1) = n_1 + 2n_2 + \sum_{d(v)\geq 3} d(v)$$

$$2n_1 + \cancel{2n_2} + 2k - 2 = n_1 + \cancel{2n_2} + \sum_{d(v)\geq 3} d(v)$$

$$n_1 = 2 + \underbrace{\sum_{d(v)\geq 3} d(v)}_{k \text{ сабирака}} - 2k = 2 + \sum_{d(v)\geq 3} d(v) \underbrace{- 2 - 2 - 2 - \dots - 2}_{k \text{ пута}} = 2 + \sum_{d(v)\geq 3} (d(v) - 2)$$

11. Доказати да је граф G шума акко сваки његов индукован подграф садржи чвор чији је степен мањи или једнак од један.

($\Rightarrow$) Нека је G шума и нека је H произвољан индукован подграф графа G.

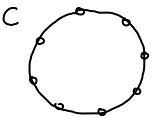
Претпоставимо да H не садржи чвор степена ≤ 1, тј. $\delta(H) \geq 2$.

$\xRightarrow[(7)]{В8}$ H садржи контуру C

Граф G такође садржи контуру C $\lightning$ (G је ацикличан граф)

($\Leftarrow$) Нека у графу G сваки индукован подграф садржи чвор степена ≤ 1.

C



Претпоставимо да G није шума, тј. да постоји контура C у графу G.

Нека је $C = v_1 v_2 v_3 \ldots v_k v_1$.

Посматрајмо подграф H који индукују чворови са контуре, $H = G[v_1, v_2, \ldots, v_k]$

Подграф H садржи све гране са контуре C и евентуално још неке тетиве те контуре.

$\Rightarrow d_H(v) \geq 2, \ \forall v \in V(H)$ $\lightning$ (са претпоставком смера)

-Покривајућа стабла-

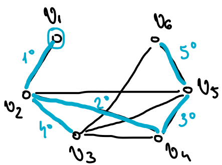
Т је покривајуће стабло за граф G ако важи

1° Т је покривајући подграф графа G, $V(T)=V(G)$

2° Т је стабло

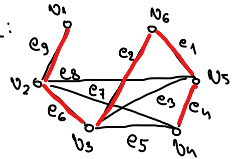
Т: Граф има покривајуће стабло акко је повезан

A1:



У сваком кораку додајемо један нови чвор и једну нову грану

A2:



Произвољно нумеришемо гране и водимо рачуна да не формирамо контуру

-МИНИМАЛНО ПОКРИВАЈУЋЕ СТАБЛО-

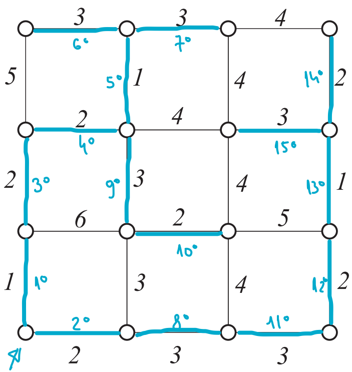
Тежински граф → свакој грани $e \in E(G)$ придружујемо број $w(e)$, тежину гране e

$$w(G)=\sum_{e\in E(G)} w(e)$$ тежина графа G

ПРОБЛЕМ МИНИМАЛНОГ ПОКРИВАЈУЋЕГ СТАБЛА:

За дати повезан тежински граф одредити покривајуће стабло најмање тежине

12. Наћи минимално покривајуће стабло тежинског графа са слике



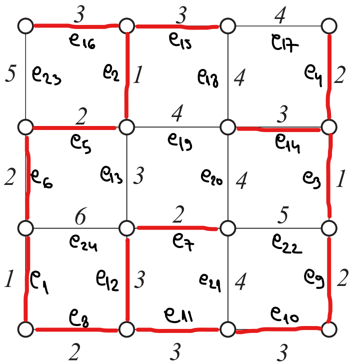
Кренемо из произвољног чвора.

У сваком кораку бирамо најлакшу грану која повезује добијено подстабло са новим чвором.

Стајемо када покупимо све чворове графа.

Примов алгоритам (А1)

(Борувка - Јарник - Прим)



Нумеришемо гране од лакших ка тежим.

Водимо рачуна да не направимо контуру.

Стојемо када изаберемо $n-1$ грану (ако граф има n чворова).

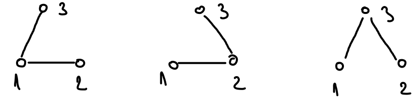
КРУСКАЛОВ АЛГОРИТАМ (А2)

Напомена:

Приметимо да смо добили 2 различита минимална покривајућа стабла ИСТЕ ТЕЖИНЕ.

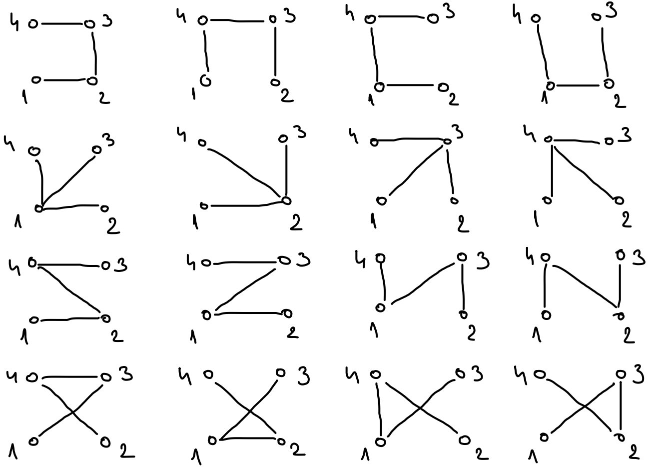
Решење је јединствено уколико све гране тежинског графа имају различиту тежину, или уколико је граф који посматрамо стабло.

Означена стабла са 3 чвора:



→ 3 означена стабла са 3 чвора

Означена стабала са 4 чвора:

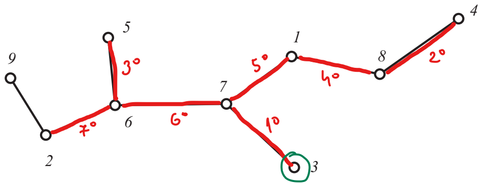


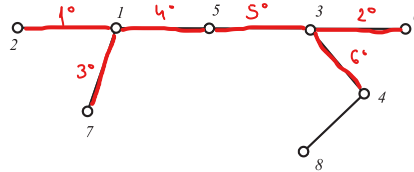
→ 16 означених стабала са 4 чвора

T: Број различитих означених стабала са n чворова је n^{n-2}

→ број различитих Приферових низова

13. Конструисати Приферов низ следећих стабала





(1,3,1,5,3,4)

Приферов низ: (7,8,6,1,7,6,2)

Тражимо висећи чвор са најмањом ознаком.
Пишемо ознаку његовог суседа, а њега „бришемо".
Стајемо када нам остане само једна грана.

Приферов низ је јединствен за свако стабло T_n и има дужину $n-2$.
Број појављивања чвора у низу је $d(v)-1$.

14. Конструисати означено стабло чији је Приферов низ

a) $(4, 5, 7, 2, 1, 1, 6, 6, 7)$

Приферов низ је дужине 9 $\Rightarrow$ стабло има 11 чворова

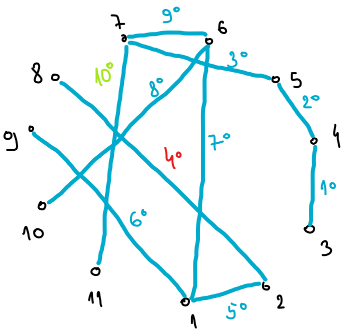
$(\cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{7}, \cancel{2}, \cancel{1}, \cancel{1}, \cancel{6}, \cancel{6}, \cancel{7})$

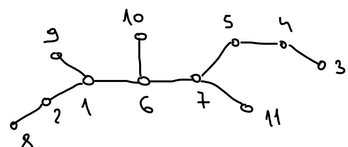
$\{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11\}$

– За почетак тражимо најмањи број из скупа који није у Приферовом низу (одговара висећем чвору са најмањом ознаком) и повезујемо га са првим чвором из Приферовог низа.

– Понављамо поступак за све непрецртане бројеве.

– На крају нам остају 2 непрецртана броја у скупу која ћемо повезати граном.



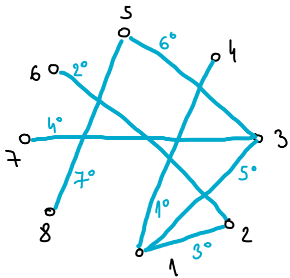


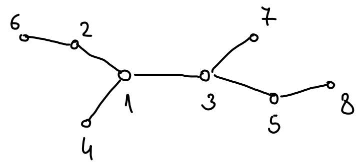
б) $(1, 2, 1, 3, 3, 5)$

Низ дужине 6 $\Rightarrow$ стабло са 8 чворова

$(\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{1}, \cancel{3}, \cancel{3}, \cancel{5})$

$\{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, \cancel{7}, 8\}$



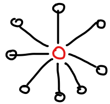


в) $(7, 8, 3, 2, 4, 1, 1)$

15. Одредити сва стабла код којих

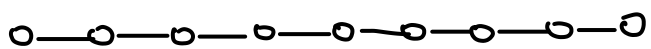
а) су сви елементи Приферовог низа једнаки

звезда



б) су сви елементи Приферовог низа различити

пут



в) се у Приферовом низу појављују тачно две различите вредности.

гусеница