DIFERENCIJALNI RAČUN FUNKCIJA JEDNE PROMENLJIVE - II deo

11. mart 2024.

Osnovne teoreme diferencijalnog računa

Rolova teorema

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna nad zatvorenim intervalom* $[a, b]$, *ima izvod nad otvorenim intervalom* (a, b) *i ako je* $f(a) = f(b)$, *tada postoji bar jedna tačka* $\xi \in (a, b)$ *takva da je* $f'(\xi) = 0$.

Geometrijski smisao: Postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$ takva da je tangenta krive $y = f(x)$ u tački $A(\xi, f(\xi))$ paralelna sa $x-$osom.

Mehanička interpretacija: Tačka se kreće po pravoj, u trenutku t se nalazi u tački sa koordinatom $x(t)$.
Neka je $x = x(t)$ neprekidna za $t \in [\alpha, \beta]$ i diferencijabilna za $t \in (\alpha, \beta)$.
Ako je $x(\alpha) = x(\beta)$ (tj. položaj tačke u trenutku $t = \alpha$ poklapa se sa položajem tačke u trenutku $t = \beta$), tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$ u kojoj je brzina jednaka nuli.

Dokaz Rolove t. Neprekidna funkcija nad zatvorenim intervalom dostiže bar jednom najmanju vrednost m i najveću vrednost M.

• Ako je $m = M$, $f(x)$ je konstantna na celom intervalu, pa je $f'(x) = 0$ za svako $x \in (a, b)$.

• Neka je $m < M$.
Pp. da je $M > f(a) = f(b)$ (ukoliko je $M = f(a)$ tada je $m < f(a)$).

Tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$, takva da je $f(\xi) = M$. Dokazaćemo da je $f'(\xi) = 0$. Važi

$$f(\xi + \Delta x) \leq f(\xi), \text{ za } \xi + \Delta x \in [a, b], \quad \text{tj.}$$

$$\frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0, \Delta x > 0 \text{ i } \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \geq 0, \Delta x < 0.$$

Za tačku ξ, po pretpostavci postoji $f'(\xi)$, pa je $f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = f'(\xi)$. Iz $f'_+(\xi) \leq 0$, $f'_-(\xi) \geq 0$ i $f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = f'(\xi)$ sledi da je $f'(\xi) = 0$.

Lagranžova teorema - teorema o srednjoj vrednosti

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna nad zatvorenim intervalom* $[a, b]$, *ima izvod nad otvorenim intervalom* (a, b), *tada postoji bar jedna tačka* $\xi \in (a, b)$ *takva da je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Geometrijski smisao: Postoji tačka $\xi \in (a, b)$ takva da je tangenta u $C(\xi, f(\xi))$ paralelna pravoj kroz $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$.

Mehanička interpretacija: Kod pravolinijskog kretanja tačke po zakonu $x = x(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ gde je funkcija $x(t)$ neprekidna za $t \in [\alpha, \beta]$ i diferencijabilna nad (α, β) postoji tačka $\xi \in (\alpha, \beta)$ u kojoj je trenutna brzina jednaka srednjoj brzini u posmatranom intervalu.

- Ako stavimo
$$\frac{\xi - a}{b - a} = \theta,$$
tada je $\xi = a + \theta(b - a), \quad 0 < \theta < 1$, pa se tvrđenje
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$
može zapisati u obliku
$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a), \quad 0 < \theta < 1,$$
a uzimajući $a = x$ i $b = x + h$ dobija se
$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Posledice Rolove i Lagranžove teoreme

Posledica

Rolov metod za razdvajanje korena funkcije *Ako za funkciju* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *važi:*

a) $f(x)$ *je neprekidna nad zatvorenim intervalom* $[a, b]$,
b) $f(x)$ *je diferencijabilna nad intervalom* (a, b) *i pri tome je* $f'(x) \neq 0$ *za* $x \in (a, b)$,
c) $f(a) \cdot f(b) < 0$

tada postoji samo jedna nula funkcije nad intervalom (a, b).

Posledica

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *diferencijabilna nad intervalom* (a, b) *i ako su* $c_1, c_2 \in (a, b)$, $c_1 < c_2$ *dve uzastopne nule prvog izvoda, tada nad intervalom* (c_1, c_2) *funkcija* $f(x)$ *ima najviše jednu nulu.*

Primer

Pokazati da jednačina $x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$ *nad intervalom* $(-1, 1)$ *ima tačno jedno rešenje.*

Rešenje. *Posmatrajmo funkciju* $f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{2}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \vee x = -1$$

$$f(-1) = -1 + 3 + \frac{1}{2} > 0, \quad f(1) = 1 - 3 + \frac{1}{2} < 0$$

pa na osnovu prethodne teoreme nad intervalom $(-1, 1)$ *funkcija* $f(x)$ *ima tačno jednu nulu.*

Posledica

Ako za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *važi:*

a) $f(x)$ *je neprekidna nad* $[a, b]$,

b) $f(x)$ *je diferencijabilna nad intervalom* (a, b) *i pri tome je* $f'(x) = 0$ *za svako* $x \in (a, b)$,

tada je funkcija $f(x)$ *konstantna funkcija nad* $[a, b]$.

Posledica

Ako funkcije $f(x)$ *i* $g(x)$ *imaju jednake izvode:* $f'(x) = g'(x)$, $x \in I$, *tada se one razlikuju za konstantu nad intervalom* I.

Primer

Pokazati da je $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$.

Rešenje. *Posmatrajmo funkciju* $f(x) = \arcsin x + \arccos x$.
Ona je neprekidna nad $[-1, 1]$.
Diferencijabilna je nad $(-1, 1)$ *i pri tome je*

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad x \in (-1, 1)$$

pa je funkcija $f(x)$ *konstantna funkcija nad intervalom* $[-1, 1]$, *tj.* $f(x) = c$, $x \in [-1, 1]$.

$$c = ?$$

$$\arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = c.$$

Posledica

Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna nad* $[a, b]$ *i diferencijabilna nad* (a, b). *Ako postoji*

$$\lim_{x \to a^+} f'(x) \quad \left(\lim_{x \to b^-} f'(x) \right),$$

tada postoji i $f'_+(a) \quad (f'_-(b))$ *i važi jednakost*

$$\lim_{x \to a^+} f'(x) = f'_+(a) \quad \left(\lim_{x \to b^-} f'(x) = f'_-(b) \right).$$

Posledica

Ako funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ *ima izvod nad intervalom* I, *tada izvod* $f'(x)$ *ne može imati prekide prve vrste nad tim intervalom.*

Da izvod može imati prekide druge vrste pokazuje sledeći primer.

Primer

Pokazati da za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

prvi izvod $f'(x)$ ima prekid druge vrste u tački $x = 0$.

Rešenje. Kako je $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, za $x \neq 0$ i

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 0,$$

s obzirom da granične vrednosti $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$ i $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x)$ ne postoje, to funkcija $f'(x)$ ima u tački $x = 0$ prekid druge vrste.

Darbuova teorema

Ako funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ima izvod nad intervalom* $[a, b]$ *i ako je* $f'(a) \neq f'(b)$, *onda* $f'(x)$ *uzima sve međuvrednosti između* $f'(a)$ *i* $f'(b)$.

Košijeva teorema

Ako su funkcije $f(x), g(x)$ *neprekidne nad zatvorenim intervalom* $[a, b]$, *imaju izvode nad* (a, b) *i za svako* $x \in (a, b)$ *je* $g'(x) \neq 0$, *tada postoji bar jedna tačka* $\xi \in (a, b)$, *takva da je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Dokaz Košijeve teoreme

Dokaz. Primetimo da je $g(b) - g(a) \neq 0$, jer bi inače funkcija $g(x)$ ispunjavala uslove Rolove teoreme, pa bi postojala tačka $\xi \in (a, b)$ takva da je $g'(\xi) = 0$, što je suprotno uslovu da je $g'(x) \neq 0$ za svako $x \in (a, b)$.
Funkcija

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

je neprekidna nad intervalom $[a, b]$, ima izvod u svakoj tački $x \in (a, b)$ i $h(a) = h(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$.
Prema Rolovoj teoremi postoji $\xi \in (a, b)$, takvo da je

$$h'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0.$$

Sledi da je

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

što je i trebalo dokazati. □

Dokaz Lagranžove teoreme.

Lagranžova teorema je specijalan slučaj Košijeve. Naime, stavljajući u Košijevu teoremu $g(x) = x$, dobija se:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ima neodređeni oblik „$\dfrac{0}{0}$" kada $x \to a$ ako važi

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ima neodređeni oblik „$\dfrac{\infty}{\infty}$" kada $x \to a$ ako važi

$$f(x) \to \pm\infty, \quad g(x) \to \pm\infty, \quad x \to a$$

Lopitalova teorema

Neka su funkcije $f,\ g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *diferencijabilne nad* (a,b), $g'(x) \neq 0,\ x \in (a,b)$ *i neka je* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ $(\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} g(x) = 0)$. *Tada:*

1. *Ako postoji* $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A,\quad \left(\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = B\right)$ *tada postoji* $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)},\quad \left(\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ *i važi jednakost*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,\quad \left(\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B\right).$$

2. *Ako* $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to \pm\infty, x \to a^+\ (x \to b^-)$, *tada i* $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \pm\infty$, *kada* $x \to a^+\ (x \to b^-)$.

Dokaz Lopitalove teoreme

Dokaz (dela 1. kada $x \to a^+$). Za funkcije

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in (a,b) \\ 0 & , \quad x = a \end{cases} \quad , \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & , \quad x \in (a,b) \\ 0 & , \quad x = a \end{cases}$$

važi da su neprekidne nad $[a,b)$,
diferencijabilne nad (a,b) $(F'(x) = f'(x),\ G'(x) = g'(x) \neq 0)$,
pa za svako $x \in (a,b)$ zadovoljavaju uslove Košijeve teoreme nad intervalom $[a,x]$.
Sledi da postoji $\xi \in (a,x)$ tako da je

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Kako je $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta \in \mathbb{R}^+$, tako da

$$a < x < a + \delta < b \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon.$$

Primena Košijeve teoreme na intervalu $[a, x]$ za neko $\xi \in (a, x)$ daje jednakost $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ te na osnovu

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \varepsilon$$

pa zaključujemo

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Za slučaj da je $a = -\infty$ uvodimo smenu $t = \dfrac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t\to 0^-} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} \\
&= \lim_{t\to 0^-} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)} \\
&= \lim_{t\to 0^-} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.
\end{aligned}$$

Teorema

Neka su funkcije $f,\ g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *diferencijabilne nad* (a,b), *i* $g'(x) \neq 0,\ x \in (a,b)$ *i neka* $f(x) \to \pm\infty$ *i* $g(x) \to \pm\infty$ *kada* $x \to a^+$ ($f(x) \to \pm\infty$ *i* $g(x) \to \pm\infty$ *kada* $x \to b^-$). *Tada:*

1. *Ako postoji* $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, $\left(\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = B\right)$ *tada postoji* $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\left(\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ *i važi jednakost*
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \quad \left(\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = B\right).$$
2. *Ako* $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to \pm\infty$, *kada* $x \to a^+$ (*kada* $x \to b^-$), *tada i* $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \pm\infty$, *kada* $x \to a^+$ (*kada* $x \to b^-$).

Primer

Odrediti $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x}$.

Rešenje. Ovde ne možemo da koristimo Lopitalovo pravilo, jer

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1}$$

ne postoji, dok je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

- Dakle, Lopitalova pravila daju dovoljne, ali ne i potrebne uslove za postojanje granične vrednosti.

I ostali neodređeni izrazi oblika $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ mogu se određivati koristeći Lopitalova pravila.

Primer

Odrediti:

a) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$,

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$,

c) $\lim\limits_{x \to 0} x^x$.

Tejlorova teorema

Neka su funkcija $f(x)$ i svi njeni izvodi do $(n-1)$-vog reda neprekidni nad $[A,B]$ i neka $f(x)$ ima $n-$ti izvod nad (A,B).
Neka je $a \in [A,B]$ proizvoljna tačka. Tada:
za svako $b \in [A,B]$, $b \neq a$, postoji bar jedna tačka $\xi \in (a,b)$, $b > a$
(tj. postoji bar jedna tačka $\xi \in (b,a)$, $a > b$),
takva da je

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \tfrac{b-a}{1!} f'(a) + \tfrac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \tfrac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n, \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \tfrac{f^{(i)}(a)}{i!} (b-a)^i + R_n, \end{aligned}$$

$$R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Za $b = a + h$ Tejlorova formula je oblika

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n,$$

$$R_n(x) = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Za $b = x$ Tejlorova formula je oblika

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta(x-a)), \quad 0 < \theta < 1.$$

Kada je funkcija $f(x)$ predstavljena kao

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + R_n(x)$$

kažemo da je razvijena po Tejlorovoj formuli u tački a.

- $T_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$ Tejlorov polinom
- $R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta(x-a)), 0 < \theta < 1$ ostatak ili greška

U specijalnom slučaju za $a = 0$ imamo Maklorenovu formulu

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x),\ 0 < \theta < 1.$$

- $M_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i$ Maklorenov polinom
- $R_n(x)$ ostatak ili greška aproksimacije funkcije Maklorenovim polinomom

Primer

Napisati Maklorenove formule za funkcije:

a) $f(x) = e^x$,
b) $f(x) = \sin x$,
c) $f(x) = \cos x$,
d) $f(x) = \ln(1 + x)$,
e) $f(x) = (1 + x)^\alpha$.

Rešenje. a) Kako je $f(x) = f'(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$
i $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = e^0 = 1, \quad f^{(n)}(\theta x) = e^{\theta x}$,
to Maklorenova formula za funkciju $f(x) = e^x$ glasi

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Primer

Napisati polinom $P(x) = 1 + x - 3x^2 + 4x^3$ *po stepenima od* $x - 1$.

Rešenje. Kako je

$$P(x) = P(1) + \frac{x-1}{1!}P'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!}P''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!}P'''(1),$$

i pri tome

$$\begin{array}{lcl} & & P(1) = 3, \\ P'(x) = 1 - 6x + 12x^2 & \Rightarrow & P'(1) = 7, \\ P''(x) = -6 + 24x & \Rightarrow & P''(1) = 18, \\ P'''(x) = 24 & \Rightarrow & P'''(1) = 24, \end{array}$$

to je $P(x) = 3 + 7(x-1) + 9(x-1)^2 + 4(x-1)^3$.

Napomena u vezi definicije izvoda

Pri definiciji izvoda funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, pretpostavka je da je $x \in D^\circ$.

Mogli smo definisati i izvod u tački $x \in D$, ali uz pretpostavku da je x tačka nagomilavanja skupa D, jer graničnu vrednost

$$\lim_{\Delta x \to 0, x + \Delta x \in D} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

možemo tražiti bez obzira da li je funkcija definisana u nekoj okolini tačke x.

Na primer, tada bi funkcija $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{Q}$, imala „izvod" u svakoj tački $x \in \mathbb{Q}$, dok ona izvod, onako kako smo ga definisali, nema ni u jednoj tački $x \in \mathbb{Q}$.

Česta je situacija da funkcija $f(x)$ u tački a ima otklonjiv prekid, tj. postoji $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, pri čemu ili funkcija $f(x)$ nije definisana u tački a, ili ako je definisana $A \neq f(a)$. Tada funkcija nema izvod u tački a (morala bi da bude neprekidna u a).

Mogli bismo definisati

$$\overline{f'}(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - A}{\Delta x},$$

ako ta granična vrednost postoji i nazvati je **nepravi** ili **kvazi izvod**.

Ako postoji $f'(a)$, tada postoji i $\overline{f'}(a)$ i važi jednakost $f'(a) = \overline{f'}(a)$.

Funkcija u tački a može da ima nepravi izvod, a da nema izvod:

Za funkciju $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ne postoji $f'(0)$, dok je

$$\begin{aligned}\overline{f'}(0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x - \Delta x}{(\Delta x)^2} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{2\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin \Delta x}{2} = 0.\end{aligned}$$

$\overline{f'}(0)$ je u stvari izvod funkcije

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} &, \quad x \neq 0 \\ 1 &, \quad x = 0 \end{cases}$$

u nuli, tj. $F'(0) = \overline{f'}(0) = 0$.

Ista je situacija kod jednostranih izvoda. Pretpostavimo da je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ definisana nad intervalom (a, b) i da postoji $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a^+), \left(\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b^-) \right)$.

Ako postoji

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a + \Delta x) - f(a^+)}{\Delta x}, \quad \left(\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(b + \Delta x) - f(b^-)}{\Delta x}, \right)$$

onda tu graničnu vrednost možemo nazvati **nepravi desni (nepravi levi)** izvod u tački a (b) i obeležiti ga $\overline{f'_+}(a)$ ($\overline{f'_-}(b)$).

Ne interesuje nas da li je funkcija definisana u datim tačkama, niti, ako je definisana, da li je neprekidna sa desne (leve) strane.

Nepravi desni i nepravi levi izvod jednim imenom zovemo **jednostrani nepravi izvodi**.

Ako funkcija u tački ima desni (levi) izvod, onda ona ima u toj tački desni nepravi (levi nepravi) izvod i oni su jednaki.
Obrnuto nije tačno: Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & , \quad x < 0 \\ \dfrac{\cos x - 1}{x} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

nije definisana u nuli, pa nema u nuli ni desni ni levi izvod.
Kako je

$$f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

to je

$$\overline{f'_-}(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\Delta x) - f(0^-)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 0.$$

Slično, kako je

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = 0,$$

to je

$$\overline{f'_+}(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0^+)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}}{\Delta x} = -\frac{1}{2}.$$

Ispitivanje funkcija (Monotonost)

Definicija

Funkcija $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ *je nad intervalom* $I \subset \mathbb{R}$

1. *monotono rastuća ako za svake dve tačke* $x_1,\ x_2 \in I$ *važi*
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$
2. *monotono opadajuća ako za svake dve tačke* $x_1,\ x_2 \in I$ *važi*
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$
3. *monotono nerastuća ako za svake dve tačke* $x_1,\ x_2 \in I$ *važi*
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$
4. *monotono neopadajuća ako za svake dve tačke* $x_1,\ x_2 \in I$ *važi*
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

U svakom od navedenih slučajeva funkcija je monotona, u slučajevima 1 i 2 je strogo monotona.

Teorema

Neka funkcija $f(x)$ ima izvod nad intervalom I. Ako je $f(x)$ monotono neopadajuća funkcija nad intervalom I tada je $f'(x) \geq 0$, za $x \in I$, a ako je monotono nerastuća funkcija nad intervalom I tada je $f'(x) \leq 0$, za $x \in I$.

Dokaz (za monotono neopadajuću funkciju). Za proizvoljno $x \in I$, s obzirom da je $f(x)$ monotono neopadajuća funkcija je

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0, \quad x + \Delta x \in I,$$

odakle sledi da je

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Teorema

Neka funkcija $f(x)$ ima prvi izvod nad intervalom I. Ako je $f'(x) > 0$, funkcija $f(x)$ je monotono rastuća nad intervalom I, a ako je $f'(x) < 0$, funkcija $f(x)$ je monotono opadajuća nad intervalom I.

Dokaz. Neka je $[x_1, x_2] \subset I$ proizvoljan podinterval intervala I. Funkcija $f(x)$ nad intervalom $[x_1, x_2]$ zadovoljava sve uslove Lagranžove teoreme, pa postoji tačka $\xi \in (x_1, x_2)$ takva da je

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Ako je $f'(x) > 0$, tada je i $f'(\xi) > 0$, pa je

$$f(x_2) > f(x_1).$$

Dokaz je sličan kada je $f'(x) < 0$.

Definicija

Neka je funkcija $f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke a. Funkcija je rastuća u tački a, ako postoji okolina tačke a u kojoj za svako x iz te okoline važi $f(x) > f(a)$ za $x > a$; $f(x) < f(a)$ za $x < a$. Funkcija je opadajuća u tački a, ako postoji okolina tačke a u kojoj za svako x iz te okoline važi $f(x) < f(a)$ za $x > a$; $f(x) > f(a)$ za $x < a$.

Teorema

Ako je funkcija $f(x)$ rastuća (opadajuća) u tački a i ako postoji $f'(a)$, tada je $f'(a) \geq 0$, $(f'(a) \leq 0)$.

Teorema

Pretpostavimo da funkcija $f(x)$ u tački a ima izvod $f'(a) \neq 0$. Ako je $f'(a) > 0$, funkcija $f(x)$ je rastuća u tački a, a ako je $f'(a) < 0$ ona je u tački a opadajuća.

Primer

Pokazati da funkcija $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ *nije monotona ni u jednoj okolini nule. Da li je ova funkcija rastuća u nuli?*

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad x = 0 \end{cases}$$

$f'(0) = \frac{1}{2} > 0$, pa je funkcija rastuća u nuli.
Funkcija nije monotona ni u jednoj okolini nule: ako posmatramo nizove sa opštim članovima

$a_n = \frac{1}{2n\pi}, \quad b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}, \quad c_n = -\frac{1}{2n\pi}, \quad d_n = -\frac{1}{(2n+1)\pi},$

možemo primetiti da je

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0,$

$f'(a_n) = f'(c_n) = -\frac{1}{2}, \quad f'(b_n) = f'(d_n) = \frac{3}{2},$

pa ne postoji okolina nule u kojoj je prvi izvod stalnog znaka.

Dovoljan uslov za monotonost:

Teorema

Neka funkcija $f(x)$ *ima prvi izvod u okolini tačke* a *i neka je* $f'(x)$ *neprekidna funkcija u tački* a*. Ako je* $f'(a) > 0$*, funkcija* $f(x)$ *je monotono rastuća u nekoj okolini tačke* a*, a ako je* $f'(a) < 0$*, funkcija* $f(x)$ *je monotono opadajuća u nekoj okolini tačke* a*.*

Darbuova teorema

Ako funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ima izvod nad intervalom* $[a, b]$ *i ako je* $f'(a) \neq f'(b)$*, onda* $f'(x)$ *uzima sve međuvrednosti između* $f'(a)$ *i* $f'(b)$*.*

- funkcija $f'(x)$ ne mora biti neprekidna nad $[a, b]$, $f'(x)$ može imati prekid druge vrste

Dokaz. Neka je $f'(a) > f'(b)$ i $f'(a) > C > f'(b)$.

Posmatrajmo funkciju $g(x) = f(x) - Cx$.

$g'(x) = f'(x) - C$, pa je

$$g'(a) = f'(a) - C > 0 > f'(b) - C = g'(b).$$

$g(x)$ je neprekidna nad $[a, b]$, pa nad njim dostiže svoju najveću vrednost, tj. postoji $\xi \in [a, b]$ da je $g(\xi) = \max\limits_{x \in [a,b]} g(x)$.

Štaviše, $\xi \neq a$ jer je $g'(a) > 0$ ($g(x)$ je rastuća u a) i $\xi \neq b$, jer je $g'(b) < 0$.

Dakle, $\xi \in (a, b)$.

Kako je tu ekstrem, mora biti $g'(\xi) = 0$, tj. $f'(\xi) = C$.

Ispitivanje funkcija (Ekstremne vrednosti funkcija)

Definicija

Ako je realna funkcija $f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke $a \in \mathbb{R}$, tada kažemo da funkcija $f(x)$ u tački a ima lokalni minimum ako postoji $\delta > 0$ takvo da

$$x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) > f(a),$$

a lokalni maksimum ako postoji $\delta > 0$ takvo da

$$x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) < f(a).$$

- tačka a je tada lokalna ekstremna vrednost i to je najmanja ili najveća vrednost funkcije u nekoj okolini tačke a.
- ako je za $x = a + \Delta x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ priraštaj funkcije $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a) > 0$ tada funkcija u tački a ima lokalni minimum, a ako je $\Delta y < 0$ ima lokalni maksimum

Teorema

Ako funkcija $f(x)$ ima u tački a ekstremnu vrednost i ako postoji $f'(a)$ tada je $f'(a) = 0$.

- uslov je potreban, ne i dovoljan (primer funkcije x^3)
- stacionarne tačke - tačke u kojima je $f'(x) = 0$
- funkcija može imati ekstremnu vrednost u $x = a$, a da $f'(a)$ ne postoji (primer funkcije $|x|$)
- kritične tačke

Teorema

Ako je funkcija u tački a neprekidna i postoji $\delta > 0$ takvo da za $x \in (a - \delta, a)$ je $f'(x) > 0$, $(f'(x) < 0)$, a za $x \in (a, a + \delta)$ je $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ onda funkcija u tački a ima ekstremnu vrednost i to maksimum (minimum).

Dokaz (za maksimum).

Ako za $x \in (a-\delta, a)$ važi $f'(x) > 0$, funkcija je monotono rastuća nad $(a-\delta, a)$.

Ako za $x \in (a, a+\delta)$ važi $f'(x) < 0$, funkcija je monotono opadajuća nad $(a, a+\delta)$.

Ako bi postojala neka tačka $x_1 \in (a-\delta, a)$ takva da je $f(x_1) \geq f(a)$, sledilo bi da postoji tačka $\xi \in (x_1, a)$ takva da je

$$0 \geq f(a) - f(x_1) = f'(\xi)(a - x_1).$$

Moralo bi biti $f'(\xi) \leq 0$. Kontradikcija.

Slično se pokazuje da ne postoji tačka $x_1 \in (a, a+\delta)$ takva da je $f(x_1) \geq f(a)$.

Teorema

Neka je $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ *i* $f^{(n)}(a) \neq 0, n \geq 2$. *Ako je* n *paran broj, funkcija* $f(x)$ *ima u tački* a *ekstremnu vrednost i to:*

- *maksimum ako je* $f^{(n)}(a) < 0$ *odnosno,*
- *minimum ako je* $f^{(n)}(a) > 0$.

Ako je n *neparan broj funkcija* $f(x)$ *nema ekstremnu vrednost u tački* a. *U tom slučaju ako je* $f^{(n)}(a) > 0$ *funkcija je u tački* a *rastuća a ako je* $f^{(n)}(a) < 0$ *funkcija je u tački* a *opadajuća.*

Dokaz (za slučaj $f^{(n)}(a) > 0$): Iz Tejlorove formule
$f(a+\Delta x) = f(a) + \frac{\Delta x}{1} f'(a) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a+\theta\Delta x)$,
$0 < \theta < 1$
i uslova teoreme sledi
$f(a+\Delta x) - f(a) = \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a+\theta\Delta x)$, $0 < \theta < 1$.

Ako je $f^{(n)}(a) > 0$ tada je $f^{(n-1)}(x)$ rastuća funkcija u tački a, pa je

$$f^{(n-1)}(a+\theta\Delta x) > f^{(n-1)}(a) = 0, \quad \Delta x > 0,$$

$$f^{(n-1)}(a+\theta\Delta x) < f^{(n-1)}(a) = 0, \quad \Delta x < 0.$$

Ako je n parno, izraz

$$\frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a+\theta\Delta x),$$

(a onda i priraštaj funkcije) je za svako dovoljno malo Δx pozitivan, tj. funkcija u tački a ima minimum.
Ako je n neparno, izraz

$$\frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a+\theta\Delta x),$$

nije stalnog znaka (pozitivan je za $\Delta x > 0$, a negativan za $\Delta x < 0$) i ekstremne vrednosti u a nema.

Primer

Proveriti da li funkcija $f(x) = \begin{cases} x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ *ima ekstremnu vrednost u tački* $x = 0$.

Rešenje. Kako je

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases},$$

$$f''(x) = 4 + 2\sin\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}, x \neq 0,$$

to je $f'(0) = 0$, pa je $x = 0$ stacionarna tačka. $f''(0)$ ne postoji. Pokažimo da ne postoji $\delta > 0$ takvo da je u intervalu $(-\delta, 0)$, odnosno u intervalu $(0, \delta)$ prvi izvod istog znaka.

Ako posmatramo nizove se opštim članovima

$$a_n = \frac{1}{2n\pi}, \quad b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}, \quad c_n = -\frac{1}{2n\pi}, \quad d_n = -\frac{1}{(2n+1)\pi},$$

vidimo da važi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n = 0.$$

Dakle, u svakoj okolini nule su skoro svi članovi posmatranih nizova. Kako je

$$f'(a_n) = \frac{2}{n\pi} - 1 < 0, \quad f'(b_n) = \frac{4}{(2n+1)\pi} + 1 > 0,$$
$$f'(c_n) = -\frac{2}{n\pi} - 1 < 0, \quad f'(d_n) = -\frac{4}{(2n+1)\pi} + 1 > 0,$$

sledi da za svako $\delta > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za svako $n \geq n_0$

$$a_n, b_n \in (0, \delta) \quad \wedge \quad c_n, d_n \in (-\delta, 0).$$

Dakle, sledi da za svako $\delta > 0$ u intervalima $(-\delta, 0)$ i $(0, \delta)$ postoje tačke u kojima je prvi izvod pozitivan i tačke u kojima je prvi izvod negativan. Dakle, prvi izvod ne menja znak prolazeći kroz tačku $x = 0$.

Na osnovu do sada utvrđenih kriterijuma ne možemo reći da li funkcija u tački nula ima ekstremnu vrednost ili ne.

Kako je $f(0) = 0$ i $f(x) > 0$ za svako $x \neq 0$, sledi da funkcija $f(x)$ u tački nula ima minimum.

Ispitivanje funkcija (Tangenta i normala krive)

Videli smo već da ako funkcija $f(x)$ ima izvod u tački a, jednačina tangente u tački $A(a, f(a))$ je

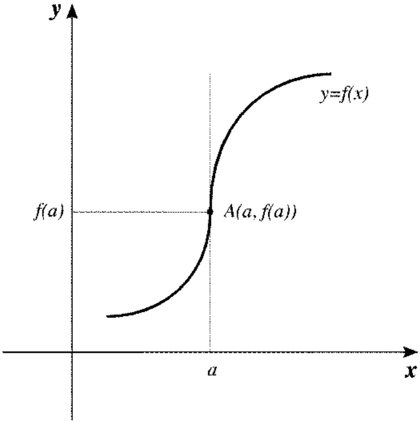
$$y - f(a) = f'(a)(x - a),$$

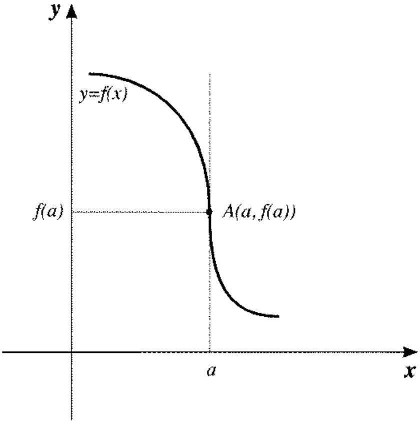
a jednačina normale u tački $A(a, f(a))$ je

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a),$$

ako je $f'(a) \neq 0$, odnosno normala je $x = a$ ako je $f'(a) = 0$.

• Tangenta funkcije u tački $A(a, f(a))$ može da bude paralelna sa y-osom, ako $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \infty$ ili $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to -\infty$ kada $\Delta x \to 0$:





U ovim slučajevima tangenta u tački $A(a, f(a))$ je prava $x = a$, a normala je prava $y = f(a)$.

- Može da se desi da ne postoji $f'(a)$, ali postoji $f'_+(a)$ ili $f'_-(a)$:

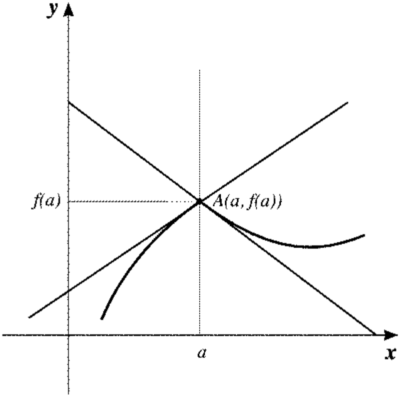
Ako postoji $f'_+(a)$, prava

$$y - f(a) = f'_+(a)(x - a)$$

je tangenta na desnu granu funkcije u tački $A(a, f(a))$ (desna tangenta).
Ako postoji $f'_-(a)$, prava

$$y - f(a) = f'_-(a)(x - a)$$

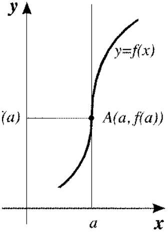
je tangenta na levu granu funkcije u tački $A(a, f(a))$ (leva tangenta)

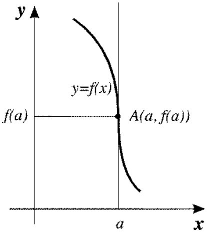


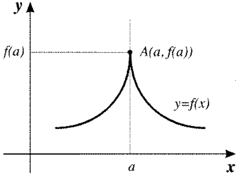
• ako $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \infty$ ili $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to -\infty$ kada $\Delta x \to 0^+$ prava $x = a$ je tangenta na desnu granu funkcije u tački $A(a, f(a))$,

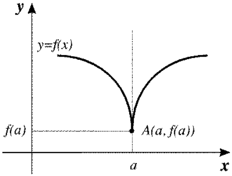
• ako $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \infty$ ili $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to -\infty$ kada $\Delta x \to 0^-$ prava $x = a$ je tangenta na levu granu funkcije u tački $A(a, f(a))$,

• ako je prava $x = a$ tangenta i na levu i na desnu granu funkcije u tački $A(a, f(a))$, prava $x = a$ je tangenta funkcije u tački $A(a, f(a))$.









• Ako ne postoji $f'_+(a)$, a postoji nepravi desni izvod $\overline{f}'_+(a)$ u tački a, prava

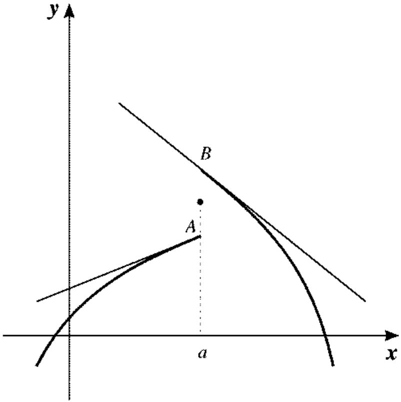
$$y - f(a^+) = \overline{f}'_+(a)(x-a)$$

je tangenta na desnu granu funkcije u tački $A(a, f(a^+))$.

• Ako ne postoji $f'_-(a)$, a postoji nepravi levi izvod $\overline{f}'_-(a)$ u tački a, prava

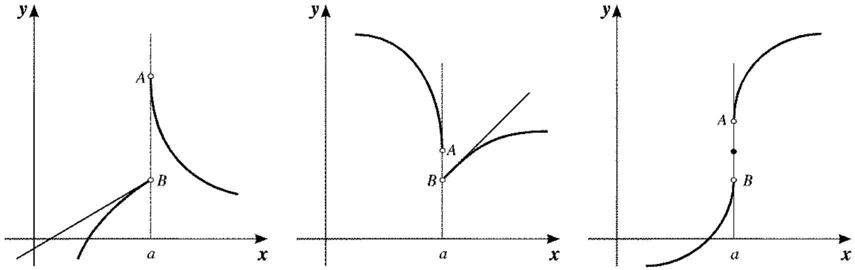
$$y - f(a^-) = \overline{f}'_-(a)(x-a)$$

je tangenta na levu granu funkcije u tački $A(a, f(a^-))$.

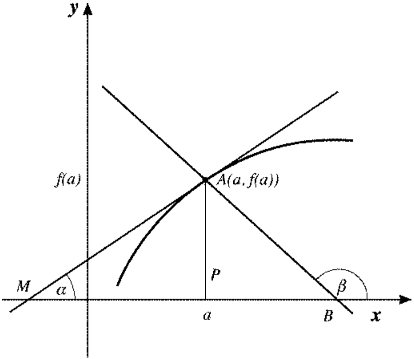


• ako $\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a^+)}{\Delta x} \to \pm\infty$, kada $\Delta x \to 0^+$, prava $x=a$ je tangenta na desnu granu funkcije u tački $A(a, f(a^+))$

• ako $\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a^-)}{\Delta x} \to \pm\infty$, kada $\Delta x \to 0^-$, prava $x=a$ je tangenta na levu granu funkcije u tački $B(a, f(a^-))$



Pretpostavimo da funkcija ima izvod u tački a i da je $f'(a) \neq 0$.



• deo tangente od tačke A do preseka sa $x-$osom naziva se dužina tangente, T, a dužina njene projekcije na $x-$osu naziva se subtangenta, S_T.

• deo normale od tačke A do preseka sa $x-$osom naziva se dužina normale, N, a dužina njene projekcije na $x-$osu naziva se subnormala, S_N.

Iz $|f'(a)| = |\operatorname{tg}\alpha| = \frac{|f(a)|}{S_T} = \frac{S_N}{|f(a)|}$ sledi

$$S_T = \left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|, \quad T = \sqrt{f^2(a) + S_T^2}$$

$$S_N = \left|f(a)f'(a)\right|, \quad N = \sqrt{f^2(a) + S_N^2}$$

Ispitivanje funkcija (Konveksnost, konkavnost, pt)

Definicija

Funkcija $f(x)$ definisana nad intervalom I je konveksna nad I ako za proizvoljne dve tačke $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ za svako $x,\ x_1 < x < x_2$ važi

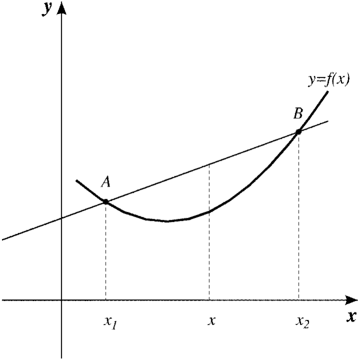
$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

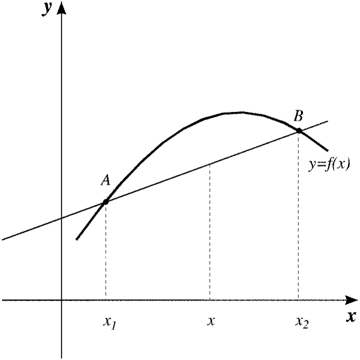
Ako je

$$f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

funkcija je konkavna.

Geometrijska interpretacija: Ako postavimo sečicu kroz tačke $A(x_1, f(x_1))$ i $B(x_2, f(x_2))$, $x_1 < x_2$ grafik funkcije je uvek ispod sečice nad intervalom (x_1, x_2) u slučaju konveksnosti, odnosno iznad sečice u slučaju konkavne funkcije nad (x_1, x_2).

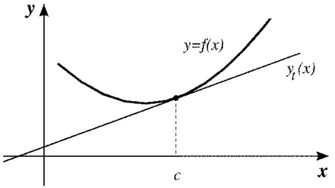


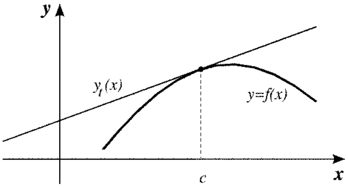


Ako postoji izvod funkcije $f(x)$ nad intervalom I tada konveksnost i konkavnost može da se definiše na dva (ekvivalentna) načina:

Definicija 1

Funkcija $f(x)$ je konveksna nad I ako za svako $c \in I$ i $x \in I \setminus \{c\}$ $f(x) > y_t(x)$, gde je $y_t = f(c) + f'(c)(x - c)$ jednačina tangente na krivu u tački $C(c, f(c))$ (u slučaju konkavnosti je $f(x) < y_t(x.)$)





Definicija 2

Funkcija $f(x)$ je konveksna (konkavna) nad I ako je $f'(x)$ monotono rastuća (opadajuća) funkcija nad I.

Teorema

Ako funkcija ima izvod nad intervalom I, tada su Definicija 1 i Definicija 2 konveksnosti (konkavnosti) ekvivalentne.

Dokaz. Pokažimo da Definicija 1 $\Rightarrow$ Definicija 2, za slučaj konveksnosti: Neka je funkcija $f(x)$ konveksna nad intervalom I u smislu Definicije 1. Neka su x_1 i x_2, $x_1 < x_2$ proizvoljne tačke iz intervala I. Neka su

$$y_t^1 = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1),$$

$$y_t^2 = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2),$$

tangente na datu funkciju u tačkama $A(x_1, f(x_1))$ i $B(x_2, f(x_2))$. Tada važi

$$f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$f(x_1) > f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2).$$

Sabiranjem ovih nejednakosti dobija se

$$f(x_2) + f(x_1) > f(x_1) + f(x_2) + f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2),$$

tj.

$$(f'(x_2) - f'(x_1))(x_2 - x_1) > 0,$$

odakle sledi

$$f'(x_2) > f'(x_1),$$

pa je $f'(x)$ monotono rastuća funkcija nad intervalom I.

$\square$

Definicija

Neka je funkcija $f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke a i neka je u tački a diferencijabilna. Funkcija $f(x)$ je konveksna (konkavna) u tački a ako postoji okolina $(a-\delta, a+\delta)$ tačke a, takva da je

$$f(x) > y_t(x) \quad (f(x) < y_t(x)),$$

za svako $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$, gde je

$$y_t(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

jednačina tangente na datu funkciju u tački $A(a, f(a))$.

Teorema

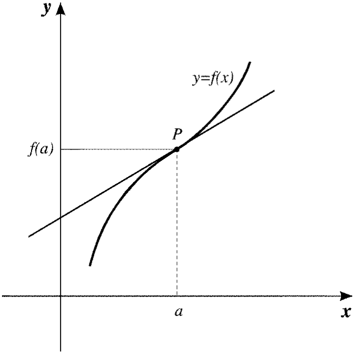
Ako je $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$ *nad intervalom* I*, tada je funkcija* $f(x)$ *konveksna (konkavna) nad intervalom* I*. Ako postoji* $f''(x)$ *nad* I *i ako je funkcija* $f(x)$ *konveksna (konkavna) nad* I*, tada je* $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$ *nad* I*.*

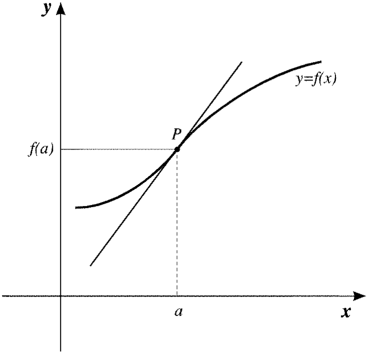
Dokaz. Ako je $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$, tada je $f'(x)$ monotono rastuća (opadajuća) funkcija, pa je $f(x)$ konveksna (konkavna) nad intervalom I.

Ako je je $f(x)$ konveksna (konkavna) nad intervalom I, tada je $f'(x)$ monotono rastuća (opadajuća) funkcija nad intervalom I, pa je $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$ nad intervalom I.

Definicija

Za tačku $P(a, f(a))$ se kaže da je prevojna tačka *funkcije $f(x)$ ako postoji okolina $(a-\delta, a+\delta)$ tačke a, takva da je funkcija $f(x)$ nad intervalom $(a-\delta, a)$ konkavna, a nad intervalom $(a, a+\delta)$ konveksna ili obrnuto.*





Teorema

Ako je $P(a, f(a))$ prevojna tačka funkcije $f(x)$ i ako postoji $f''(a)$, tada je $f''(a) = 0$.

Dokaz. $f'(x)$ ima ekstremnu vrednost u tački a!

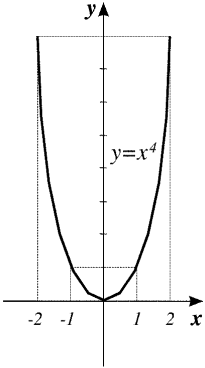
Obrnuto ne mora da važi! Funkcija $f(x) = x^4$ ima drugi izvod

$$f''(x) = 12x^2$$

za koji je

$$f''(0) = 0,$$

a tačka $O(0, 0)$ nije prevojna tačka.



Za funkciju $f(x) = (x-1)^3$ je $A(1,0)$ prevojna tačka, jer je

$$f''(x) = 6(x-1)$$

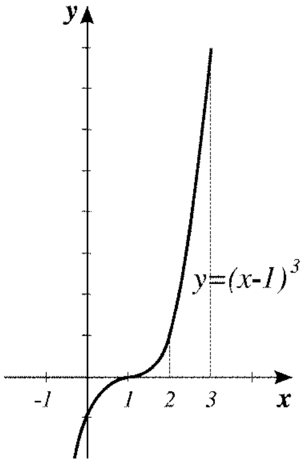
pa je

$$f''(x) > 0 \text{ za } x > 1$$

$$f''(x) < 0 \text{ za } x < 1,$$

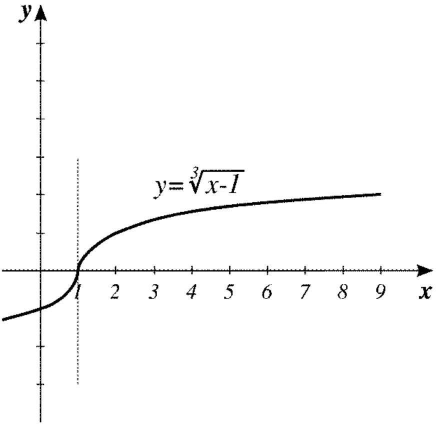
a

$$f''(1) = 0.$$



Tačka a može da bude prevojna tačka funkcije a da u tački a ne postoji drugi izvod:

Ako u tački a drugi izvod $f''(x)$ menja znak (bez obzira da li postoji $f''(a)$) i ako je funkcija $f(x)$ definisana u tački a, tada je $P(a, f(a))$ prevojna tačka date funkcije.
Primer je funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ za koju je $P(1,0)$ prevojna tačka, $f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$ menja znak prolazeći kroz nju, a $f''(1)$ ne postoji.



Teorema

Ako je $f''(a) > 0 \quad (f''(a) < 0)$, *funkcija* $f(x)$ *je konveksna (konkavna) u tački* a.

Ako je $f''(a) > 0$, ne postoji uvek okolina tačke a nad kojom je funkcija konveksna!
Ako $f''(x)$ postoji u nekoj okolini tačke a i ako je neprekidan u a, onda iz $f''(a) > 0$ sledi da postoji okolina tačke a nad kojom je funkcija konveksna.

Teorema

Ako postoji $\delta > 0$ *takvo da je u intervalu* $(a - \delta, a)$ *funkcija ispod (iznad) tangente funkcije* $f(x)$ *u tački* $A(a, f(a))$, *a u intervalu* $(a, a + \delta)$ *funkcija iznad (ispod) tangente funkcije* $f(x)$ *u tački* $A(a, f(a))$ *i ako postoji* $f''(a)$, *tada je* $f''(a) = 0$.

Može se desiti da je u intervalu $(a-\delta, a)$ funkcija ispod (iznad) tangente, a u intervalu $(a, a+\delta)$ funkcija iznad (ispod) tangente funkcije $f(x)$ u tački $A(a, f(a))$, a tačka $A(a, f(a)$ nije prevojna!

Primer

Ispitati da li je tačka $O(0,0)$ prevojna tačka funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x^3(2+\sin\frac{1}{x^2}) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x^2 + 3x^2\sin\frac{1}{x^2} - 2\cos\frac{1}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} ,$$

$f''(x) = 12x + 6x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x}\cos\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}$, za $x \neq 0$, a $f''(0)$ ne postoji. Posmatraju se nizovi s opštim članovima $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}$, $c_n = -\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$, $d_n = -\frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}$.

Teorema

Neka je $f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0,\ n \geq 3.$
Ako je n neparan, tada je $P(a, f(a))$ *prevojna tačka funkcije* $f(x)$.
Ako je n paran, tada je funkcija u okolini tačke $x = a$ *konveksna za* $f^{(n)}(a) > 0$, *a konkavna za* $f^{(n)}(a) < 0$.

Dokaz. (za prevojnu tačku) Neka je $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Kako je $f^{(2k+1)}(a) = (f'')^{(2k-1)}(a) \neq 0$, to sledi da je $f''(x)$ rastuća funkcija u tački $x = a$ za $(f'')^{(2k-1)}(a) > 0$, a opadajuća funkcija za $(f'')^{(2k-1)}(a) < 0$. Sledi da postoji $\delta > 0$ tako da je $f''(x) < f''(a) = 0$ $(f''(x) > f''(a) = 0)$, za $x \in (a - \delta, a)$, a $f''(x) > f''(a) = 0$ $(f''(x) < f''(a) = 0)$, za $x \in (a, + - \delta)$.
Dakle, nad intervalom $(a - \delta, a)$ je funkcija konkavna (konveksna), a nad intervalom $(a, a + \delta)$ konveksna (konkavna), pa je $A(a, f(a))$ prevojna.

Ispitivanje funkcija (Asimptote funkcija)

Definicija

Neka je funkcija $f(x)$ *definisana nad intervalom* (a, ∞) $\big(\, (-\infty, a)\,\big)$, $a \in \mathbb{R}$. *Funkcija* $\phi(x)$ *je asimptota funkcije* $f(x)$ *kada* $x \to \infty$, *ako je*

$$\lim_{x\to\infty}\big[f(x)-\phi(x)\big]=0.$$

Slično, funkcija $\phi(x)$ *je asimptota funkcije* $f(x)$ *kada* $x \to -\infty$, *ako je*

$$\lim_{x\to-\infty}\big[f(x)-\phi(x)\big]=0.$$

- $f(x)$ se asimptotski ponaša kao $\phi(x)$, kad $x \to \infty$ (tj. $x \to \infty$), što pišemo $f(x) \sim \phi(x)$
- Geometrijski smisao: postoji $b \in \mathbb{R}$ takav da je razlika ordinata krivih $y = f(x)$ i $y = \phi(x)$ proizvoljno mala za $x > b$ $\ (x < b)$.

Ako je asimptota funkcije prava $\phi(x) = mx + n$, tada funkcija $y = f(x)$ ima

- za $m \neq 0$ ima kosu asimptotu $\phi(x) = mx + n$,
- za $m = 0$ ima horizontalnu asimptotu $\phi(x) = n$.

Po definiciji je, za $x \to \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$ ili $\lim\limits_{x\to\infty} [\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}] = 0$, pa je

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx].$$

Definicija

Funkcija $y = f(x)$ ima vertikalnu asimptotu u tački nagomilavanja $x = a$ definicionog skupa, ako funkcija bar sa jedne strane tačke a teži ∞ odnosno $-\infty$. Za pravu $x = a$ kažemo da je vertikalna asimptota funkcije $f(x)$.

Ispitivanje toka funkcije

- Obavezna grupa zahteva
    - određivanje oblasti definisanosti
    - određivanje nula funkcije
    - određivanje intervala monotonosti i ekstremnih vrednosti
    - određivanje intervala konveksnosti, konkavnosti i prevojnih tačaka
    - određivanje asimptota funkcije i ispitivanje položaja grafika u odnosu na asimptote
    - tangente funkcije u tačkama gde ne postoji $f'(x)$ i njegovo ponašanje u tim tačkama
    - skiciranje grafika funkcije
- Neobavezna grupa zahteva
    - znak funkcije
    - parnost i neparnost funkcije
    - periodičnost funkcije