

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE VIŠEG REDA

13. maj 2024.

Snižavanje reda diferencijalne jednačine

I) $y^{(n)}(x) = f(x)$, $f(x)$ neprekidna funkcija nad (a, b)

$$y^{(n-1)}(x) = \int f(x) dx = f_1(x) + c_1$$

$$y^{(n-2)}(x) = \int (f_1(x) + c_1) dx = f_2(x) + c_1x + c_2$$

$$\vdots$$

$$y(x) = f_n(x) + \frac{c_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{c_{n-1} x}{1!} + c_n$$

Snižavanje reda diferencijalne jednačine

Primer

Rešiti početni problem $y^{IV} = \sin x$, $y(0) = y''(0) = 1$,
 $y'(0) = y'''(0) = 0$

$$y''' = \int y^{IV}(x)dx = \int \sin x dx = -\cos x + c_1,$$

$$y'' = \int y'''(x)dx = \int (-\cos x + c_1)dx = -\sin x + c_1x + c_2,$$

$$y' = \int y''(x)dx = \int (-\sin x + c_1x + c_2)dx = \cos x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3,$$

$$y = \int y'(x)dx = \int (\cos x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3)dx =$$

$$\sin x + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3x + c_4,$$

$$y'''(0) = -1 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$y''(0) = c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 1$$

$$y'(0) = 1 + c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = -1$$

$$y(0) = c_4 = 1 \Rightarrow c_4 = 1$$

$$\Rightarrow y = \sin x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - x + 1$$

Snižavanje reda diferencijalne jednačine

III) $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, 1 \leq k < n$

smena: $y^{(k)}(x) = z(x)$

dobijamo jednačinu reda $n - k$ oblika

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

IV) $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, n \geq 2$

smena: $y' = z(y)$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z'(y)y'(x) = z' z$$

$$\begin{aligned} y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{d(zz')}{dx} = \frac{dz}{dx} z' + z \frac{dz'}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} z' + z \frac{dz'}{dy} \frac{dy}{dx} \\ &= zz'^2 + z^2 z'' \end{aligned}$$

dobijamo jednačinu reda $n - 1$ oblika

$$H(y, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Snižavanje reda diferencijalne jednačine

- Ako znamo jedno rešenje $y_1(x)$ diferencijalne jednačine

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

tada se jednačina

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

rešava smenom

$$y = z(x)y_1(x),$$

gde je $z(x)$ nepoznata funkcija.

$$y = zy_1 \Rightarrow \begin{aligned} y' &= z'y_1 + zy_1' \\ y'' &= z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1'' \end{aligned}$$

pa da bi y bilo rešenje $z(x)$ mora da zadovoljava jednačinu

$$y_1 z'' + (2y_1' + a_1(x)y_1)z' + \underbrace{(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1)}_0 z = f(x)$$

koja ne sadrži z , pa joj se smenom $z' = p$, $z'' = p'$ snižava red.

Snižavanje reda diferencijalne jednačine

- Ako znamo dva rešenja $y_1(x)$ i $y_2(x)$ diferencijalne jednačine

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x),$$

tj. ako je

$$y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x) = f(x),$$

$$y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x) = f(x),$$

oduzimanjem ove dve jednakosti dobija se

$$(y_2(x) - y_1(x))'' + a_1(x)(y_2(x) - y_1(x))' + a_2(x)(y_2(x) - y_1(x)) = 0,$$

tj. funkcija $h(x) = y_2(x) - y_1(x)$ je jedno rešenje jednačine

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0.$$

Ona se rešava smenom

$$y = z(x)(y_2(x) - y_1(x)).$$

Linearna jednačina n -tog reda, $n \geq 2$

Opšti oblik: $g_0(x)y^{(n)} + g_1(x)y^{(n-1)} + \dots + g_n(x)y = h(x)$.

Pretpostavke:

- $h(x), g_i(x), i = 1, 2, \dots, n$ definisane i neprekidne nad otvorenim intervalom I
- $g_0(x) \neq 0, x \in I$

$$L_n[y] = f(x)$$

$$L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y$$

$$a_i(x) = \frac{g_i(x)}{g_0(x)}, i = 1, 2, \dots, n, \quad f(x) = \frac{h(x)}{g_0(x)}$$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x)$$

- $f(x) = 0, x \in I$ - **homogena** diferencijalna jednačina,
u suprotnom je to **nehomogena** diferencijalna jednačina

Linearna jednačina n -tog reda, $n \geq 2$

- 1) problem egzistencije rešenja
- 2) problem jednoznačnosti rešenja
- 3) problem pronalaženja rešenja (efektivnog rešavanja)

Teorema

Ako su $a_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ i $f(x)$ neprekidne funkcije nad intervalom I , $x_0 \in I$ proizvoljna tačka, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ proizvoljni brojevi, tada postoji jedinstveno rešenje $y(x)$ diferencijalne jednačine $L_n[y] = f(x)$ koje zadovoljava početni uslov

$$y(x_0) = \alpha_0, y'(x_0) = \alpha_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$$

i definisano je nad datim intervalom I .

Homogena linearna jednačina $L_n[y] = 0$

Lema

Operator $L_n[]$ je linearan, tj. važi

$$L_n[y_1 + y_2] = L_n[y_1] + L_n[y_2], \quad L_n[cy] = cL_n[y],$$

gde je c proizvoljna konstanta.

Teorema

(**PRINCIP SUPERPOZICIJE**) Ako su $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$ rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine tada je rešenje i

$$y(x) = \sum_{i=1}^m c_i y_i(x), \quad \text{gde su } c_i \text{ proizvoljne konstante.}$$

Dokaz. $L_n \left[\sum_{i=1}^m c_i y_i(x) \right] = \sum_{i=1}^m c_i L_n[y_i(x)] = 0.$

- **opšte rešenje**: $m = n$, c_i se mogu izabrati tako da je zadovoljen svaki početni uslov
- **partikularno rešenje** - dobijeno izborom konstanti c_i ,
 $i = 1, 2, \dots, n$

Homogena linearna jednačina

Definicija

Funkcije $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, su **linearno zavisne nad intervalom I** ako postoje brojevi c_i koji nisu svi jednaki nuli, da je

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0, \quad \text{za svako } x \in I.$$

Funkcije koje nisu linearno zavisne su **linearno nezavisne**.

Definicija

Ako su funkcije $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \in C^{n-1}(I)$, $n \geq 2$, tada je

$$W(x) = W(y_1, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

determinanta Vronskog od $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ nad I .

Homogena linearna jednačina

Lema

Neka su funkcije $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ ($n - 1$) puta neprekidno diferencijabilne nad intervalom I . Ako su funkcije y_1, y_2, \dots, y_n linearno zavisne nad intervalom I , tada je $W(x) = 0$ za svako $x \in I$.

Dokaz. Ako su funkcije y_1, y_2, \dots, y_n linearno zavisne nad intervalom I , tada postoje konstante c_1, c_2, \dots, c_n koje nisu sve istovremeno jednake nuli, tako da je

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0, \text{ za svako } x \in I.$$

Ako je na primer $c_n \neq 0$, tada je

$$y_n = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_{n-1} y_{n-1}, \quad \alpha_i = -\frac{c_i}{c_n}, i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Sledi da je poslednja kolona u $W(x)$ linearna kombinacija prethodnih kolona, pa je $W(x) = 0$.

Homogena linearna jednačina

Lema

Ako su rešenja y_1, y_2, \dots, y_n homogene linearne jednačine $L_n[y] = 0$ linearno nezavisna, tada je $W(x) \neq 0$, za svako $x \in I$.

Teorema

Potreban i dovoljan uslov da $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ budu linearno nezavisna rešenja homogene linearne jednačine $L_n[y] = 0$ nad nekim intervalom I je da bude

$$W(x) \equiv W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) \neq 0, \text{ za svako } x \in I.$$

Dakle, za skup rešenja $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ jednačine $L_n[y] = 0$ je ili $W(x) = 0$ za svako $x \in I$ ili $W(x) \neq 0$ za svako $x \in I$.

Homogena linearna jednačina

Primer

Ispitati linearnu zavisnost funkcija $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$ nad \mathbb{R} .
Naći $W(x)$.

Iz $\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$ sledi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, jer:

$$\begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ x = -1 &\Rightarrow -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

tako da su funkcije $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$ linearno nezavisne nad \mathbb{R} .
Kako je

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2,$$

sledi da je $W(0) = 0$, $W(x) \neq 0$, za svako $x \neq 0$.

Homogena linearna jednačina

Primer

Da li funkcije $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$ mogu biti rešenja nad skupom \mathbb{R} neke homogene linearne jednačine oblika $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$, gde su $a_1(x)$ i $a_2(x)$ neprekidne funkcije za svako $x \in \mathbb{R}$? Formirati homogenu linearnu jednačinu čija su rešenja $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$.

$y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$ su linearno nezavisne nad \mathbb{R} . Ne mogu da budu rešenja homogene linearne jednačine $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ nad \mathbb{R} , jer je $W(0) = 0$. Ako su $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x^2$ rešenja neke linearne jednačine, tada je rešenje te jednačine i funkcija $y(x) = c_1x + c_2x^2$, gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante.

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1x + c_2x^2 \\ y'(x) &= c_1 + 2c_2x \Rightarrow \begin{aligned} c_2 &= \frac{y''(x)}{2} \\ c_1 &= y'(x) - xy''(x) \end{aligned} \\ y''(x) &= 2c_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow y(x) = xy'(x) - x^2y''(x) + \frac{x^2}{2}y''(x)$, pa je tražena jednačina $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Homogena linearna jednačina

Definicija

Svaki skup od n , $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ linearno nezavisnih rešenja jednačine $L_n[y] = 0$ je **fundamentalni skup rešenja** jednačine $L_n[y] = 0$.

Teorema

Postoji fundamentalni skup rešenja jednačine $L_n[y] = 0$ nad intervalom I .

Dokaz. Neka je x_0 proizvoljna tačka iz intervala I i $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ rešenja jednačine $L_n[y] = 0$ koja zadovoljavaju početni uslov

$$\begin{array}{llll} y_1(x_0) = 1, & y_1'(x_0) = 0, & \dots, & y_1^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ y_2(x_0) = 0, & y_2'(x_0) = 1, & \dots, & y_2^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n(x_0) = 0, & y_n'(x_0) = 0, & \dots, & y_n^{(n-1)}(x_0) = 1. \end{array}$$

(postoje na osnovu teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti)

Homogena linearna jednačina

Rešenja $y_i(x)$ su linearno nezavisna nad intervalom I , jer da su linearno zavisna, sledilo bi da je $W(x) = 0$ za svako $x \in I$, pa i za $x = x_0$.

Za x_0 imamo da je

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

što je kontradikcija.



Homogena linearna jednačina

Teorema

(**FORMULA LJUVILA-ABELA**) Neka je $x_0 \in I$ proizvoljna tačka, a $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ fundamentalni skup rešenja homogene linearne jednačine $L_n[y] = 0$. Tada je za svako $x \in I$

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x a_1(t)dt}.$$

- Ako je $a_1 = c$, tada je $W(x) = W(x_0)e^{-c(x-x_0)}$, te za $c = 0$ važi $W(x) = W(x_0)$, za svako $x \in I$.

Posledica

Rešenja $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ homogene linearne jednačine $L_n[y] = 0$ su linearno nezavisna nad intervalom I ako je $W(x_0) \neq 0$ za neku tačku $x_0 \in I$.

Homogena linearna jednačina

Teorema

Ako je $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ fundamentalni skup rešenja homogene linearne jednačine $L_n[y] = 0$ nad intervalom I , tada je opšte rešenje te jednačine nad intervalom I dato sa

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x),$$

gde su c_1, c_2, \dots, c_n proizvoljni realni brojevi.

Dokaz. Neka su $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ proizvoljni realni brojevi i neka je $h(x)$ rešenje jednačine $L_n[y] = 0$ koje zadovoljava početni uslov

$$h(x_0) = \alpha_0, h'(x_0) = \alpha_1, \dots, h^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}, \quad x_0 \in I.$$

Pokažimo da se u rešenju

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

konstante c_1, c_2, \dots, c_n mogu odrediti tako da i $y(x)$ zadovoljava isti početni uslov.

Uvrštavajući početni uslov u

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

dobijamo sistem S algebarskih jednačina

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0) = \alpha_0$$

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \cdots + c_n y_n'(x_0) = \alpha_1$$

$$c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$$

Determinanta ovog sistema je $D_S = W(x_0) \neq 0$ jer su rešenja $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ linearno nezavisna, pa je sistem određen. Znači, rešenje

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

gde je (c_1, c_2, \dots, c_n) rešenje sistema S zadovoljava isti početni uslov kao i rešenje $h(x)$.

Zbog jednoznačnosti rešenja početnog problema je

$$y(x) = h(x), x \in I.$$



Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

$$L_n[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_0 y = 0, a_i \in \mathbb{R}$$

Ako je $y = e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$ tada je $y^{(i)} = k^i e^{kx}$, $i = 1, 2, \dots, n$, pa je

$$L_n[e^{kx}] = e^{kx} \underbrace{(k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n)}_{P_n(k)}$$

pa je

$$L_n[e^{kx}] = 0 \Leftrightarrow k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0$$

- $P_n(k)$ - karakterističan polinom
- $k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0$ - karakteristična jednačina

Rešenja diferencijalne jednačine su za svako $x \in (-\infty, \infty)$ funkcije

$$y_i = e^{k_i x}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

Lema

Ako je $y(x) = u(x) + iv(x)$ kompleksno rešenje linearne jednačine $L_n[y] = 0$ tada su $u(x)$ i $v(x)$ dva realna rešenja te jednačine.

Dokaz. $L_n[u(x) + iv(x)] = L_n[u(x)] + iL_n[v(x)] = 0$
 $\Rightarrow L_n[u(x)] = L_n[v(x)] = 0.$

- Koreni karakteristične jednačine su realni i jednostruki**

Karakteristična jednačina ima $1 < m \leq n$ različitih realnih korena k_i , $i = 1, \dots, m$; realna rešenja su $y_i = e^{k_i x}$, $i = 1, \dots, m$; linearno su nezavisna (čine fundamentalni skup rešenja) ako je $m = n$, jer je

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \dots & e^{k_m x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & \dots & k_m e^{k_m x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1^{m-1} e^{k_1 x} & k_2^{m-1} e^{k_2 x} & \dots & k_m^{m-1} e^{k_m x} \end{vmatrix} \\ &= e^{(k_1 + k_2 + \dots + k_m)x} V, \end{aligned}$$

Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

gde je

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1^{m-1} & k_2^{m-1} & \dots & k_m^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq m} (k_i - k_j) \neq 0,$$

jer je $k_i \neq k_j$ za $i \neq j$.

Opšte rešenje za $m = n$ dato je sa:

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i e^{k_i x}.$$

- Koreni karakteristične jednačine su kompleksni i jednostruki

$k_j = \alpha_j + i \beta_j$, $\beta_j \neq 0$, tada su rešenja

$$y_{j1} = \operatorname{Re}(e^{(\alpha_j + i \beta_j)x}) = e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x$$

$$y_{j2} = \operatorname{Im}(e^{(\alpha_j + i \beta_j)x}) = e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x$$

Lako se proverava da su ova dva rešenja linearno nezavisna.

Iako je $\overline{k_j} = \alpha_j - i \beta_j$ takođe koren karakteristične jednačine, nema dodatnih rešenja!

Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

- Koreni karakteristične jednačine su realni i višestruki**

k_i koren višestrukosti $m > 1$, tada su rešenja jednačine funkcije

$$y_{i1}(x) = e^{k_i x}, y_{i2}(x) = x e^{k_i x}, \dots, y_{im}(x) = x^{m-1} e^{k_i x}$$

i linearno su nezavisna:

Kako je

$$P_n(k_i) = P'_n(k_i) = \dots = P_n^{(m-1)}(k_i) = 0, \quad P_n^{(m)}(k_i) \neq 0$$

i kako je $L_n[e^{kx}] = e^{kx} P_n(k)$ to se diferenciranjem po k dobija

$$\begin{aligned} L_n[xe^{kx}] &= x e^{kx} P_n(k) + e^{kx} P'_n(k) \\ &= e^{kx} (x P_n(k) + P'_n(k)) \end{aligned}$$

pa se iz $L_n[xe^{kx}] = e^{kx} (x P_n(k) + P'_n(k))$ stavljajući $k = k_i$ dobija $L_n[xe^{k_i x}] = 0$, tj da je i $x e^{k_i x}$ rešenje. Slično, diferenciranjem $(m-1)$ puta po k dobijamo da su rešenja i funkcije

$$y_{i1}(x) = e^{k_i x}, y_{i2}(x) = x e^{k_i x}, \dots, y_{im}(x) = x^{m-1} e^{k_i x}.$$

Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

- Koreni karakteristične jednačine su kompleksni i višestruki

$k_j = \alpha_j + i \beta_j$, $\beta_j \neq 0$ koren višestrukosti $m > 1$, tada su $2m$ realnih (linearno nezavisnih) rešenja jednačine funkcije

$$y_{j1} = e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x,$$

$$y_{j2} = x e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x,$$

$$\vdots$$

$$y_{jm} = x^{m-1} e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x,$$

$$y_{j_{m+1}} = e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x,$$

$$y_{j_{m+2}} = x e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x,$$

$$\vdots$$

$$y_{j_{2m}} = x^{m-1} e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x.$$

Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

Primer

Neka su rešenja karakteristične jednačine neke homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$\begin{aligned}k_1 = k_2 = k_3 &= 1, \\k_4 &= -1, \\k_5 &= 3 + i, \\k_6 &= 3 - i, \\k_7 = k_8 = k_9 &= 2 + i, \\k_{10} = k_{11} = k_{12} &= 2 - i.\end{aligned}$$

$$y(x) = e^x(c_1 + c_2x + c_3x^2) + c_4e^{-x} + e^{3x}(c_5 \cos x + c_6 \sin x) + e^{2x}(c_7 \cos x + c_8x \cos x + c_9x^x \cos x + c_{10} \sin x + c_{11}x \sin x + c_{12}x^2 \sin x)$$

Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

Primer

Neka su rešenja karakteristične jednačine neke homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$\begin{aligned}k_1 = k_2 = k_3 &= 1, \\k_4 &= -1, \\k_5 &= 3 + i, \\k_6 &= 3 - i, \\k_7 = k_8 = k_9 &= 2 + i, \\k_{10} = k_{11} = k_{12} &= 2 - i.\end{aligned}$$

$$y(x) = e^x(c_1 + c_2x + c_3x^2) + c_4e^{-x} + e^{3x}(c_5 \cos x + c_6 \sin x) + e^{2x}(c_7 \cos x + c_8x \cos x + c_9x^x \cos x + c_{10} \sin x + c_{11}x \sin x + c_{12}x^2 \sin x)$$

Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

Primer

Neka su rešenja karakteristične jednačine neke homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$\begin{aligned}k_1 = k_2 = k_3 &= 1, \\k_4 &= -1, \\k_5 &= 3 + i, \\k_6 &= 3 - i, \\k_7 = k_8 = k_9 &= 2 + i, \\k_{10} = k_{11} = k_{12} &= 2 - i.\end{aligned}$$

$$y(x) = e^x(c_1 + c_2x + c_3x^2) + c_4e^{-x} + e^{3x}(c_5 \cos x + c_6 \sin x) + e^{2x}(c_7 \cos x + c_8x \cos x + c_9x^x \cos x + c_{10} \sin x + c_{11}x \sin x + c_{12}x^2 \sin x)$$

Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

Primer

Neka su rešenja karakteristične jednačine neke homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$\begin{aligned}k_1 = k_2 = k_3 &= 1, \\k_4 &= -1, \\k_5 &= 3 + i, \\k_6 &= 3 - i, \\k_7 = k_8 = k_9 &= 2 + i, \\k_{10} = k_{11} = k_{12} &= 2 - i.\end{aligned}$$

$$y(x) = e^x(c_1 + c_2x + c_3x^2) + c_4e^{-x} + e^{3x}(c_5 \cos x + c_6 \sin x) + e^{2x}(c_7 \cos x + c_8x \cos x + c_9x^x \cos x + c_{10} \sin x + c_{11}x \sin x + c_{12}x^2 \sin x)$$

Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

Primer

Neka su rešenja karakteristične jednačine neke homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$\begin{aligned}k_1 = k_2 = k_3 &= 1, \\k_4 &= -1, \\k_5 &= 3 + i, \\k_6 &= 3 - i, \\k_7 = k_8 = k_9 &= 2 + i, \\k_{10} = k_{11} = k_{12} &= 2 - i.\end{aligned}$$

$$y(x) = e^x(c_1 + c_2x + c_3x^2) + c_4e^{-x} + e^{3x}(c_5 \cos x + c_6 \sin x) + e^{2x}(c_7 \cos x + c_8x \cos x + c_9x^x \cos x + c_{10} \sin x + c_{11}x \sin x + c_{12}x^2 \sin x)$$

Nehomogena linearna jednačina

Teorema

Neka je $y_p(x)$ neko (partikularno) rešenje jednačine

$$L_n[y] = f(x)$$

i $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$ opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine $L_n[y] = 0$.

Tada je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

opšte rešenje jednačine $L_n[y] = f(x)$.

Dokaz. $y(x)$ je rešenje jednačine $L_n[y] = f(x)$ jer iz linearnosti operatora $L_n[\]$ sledi

$$\begin{aligned} L_n[y(x)] &= L_n[y_h(x) + y_p(x)] = L_n[y_h(x)] + L_n[y_p(x)] \\ &= 0 + f(x) = f(x) \end{aligned}$$

Nehomogena linearna jednačina

Pokažimo da ono sadrži svako rešenje koje zadovoljava početni uslov

$$y^{(i)}(x_0) = \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

(tj. svako **partikularno** rešenje), gde su α_i proizvoljni realni brojevi, $x_0 \in I$ proizvoljna tačka i $y^{(0)}(x) = y(x)$:

Neka je $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ fundamentalni skup rešenja jednačine $L_n[y] = 0$. Tada je njeno opšte rešenje

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x).$$

Neka su $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ proizvoljni brojevi i $h(x)$ rešenje jednačine $L_n[y] = f(x)$ koje u proizvoljnoj tački x_0 zadovoljava početni uslov

$$h(x_0) = \alpha_0, h'(x_0) = \alpha_1, \dots, h^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}.$$

Pokazaćemo da se u rešenju

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p(x)$ konstante mogu odrediti tako da i funkcija $y(x)$ zadovoljava isti početni uslov.

Nehomogena linearna jednačina

Uvrštavajući početni uslov u jednačinu $L_n[y] = f(x)$ dobijamo sistem S algebarskih jednačina

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 y_1(x_0) & + c_2 y_2(x_0) & + \cdots + c_n y_n(x_0) & & = \alpha_0 - y_p(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) & + c_2 y_2'(x_0) & + \cdots + c_n y_n'(x_0) & & = \alpha_1 - y_p'(x_0) \\ & & & \vdots & \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) & + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = \alpha_{n-1} - y_p^{(n-1)}(x_0) \end{array}$$

Determinanta sistema S je $D_S = W(x_0) \neq 0$, pa je sistem određen.

Dakle, rešenje $g(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x)$, gde je (c_1, c_2, \dots, c_n) rešenje sistema S zadovoljava isti početni uslov kao i $h(x)$.

Zbog jednoznačnosti rešenja početnog problema je $g(x) = h(x)$ za svako $x \in I$. □

Metod varijacije konstanti

Teorema

Neka je $y_1(x), \dots, y_n(x)$ fundamentalni skup rešenja jednačine $L_n[y] = 0$ nad intervalom I . Tada je partikularno rešenje $y_p(x)$ nehomogene jednačine $L_n[y] = f(x)$ koje zadovoljava početni uslov $y_p^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)} = \alpha_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, dato sa

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^n y_i(x) \int_{x_0}^x \frac{W_i(s)}{W(s)} f(s) ds,$$

gde je $x_0 \in I$ proizvoljna tačka, a $W_i(s)$, $i = 0, 1, \dots, n$, je determinanta koja se dobija kada se iz determinante Wronskog funkcija $y_1(x), \dots, y_n(x)$ i -ta kolona zameni sa $\text{col}(0, 0, \dots, 1)$ dok su ostale kolone iste kao kod $W(x)$.

Metod varijacije konstanti

Dokaz. Neka je $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ fundamentalni skup rešenja. Potrebno je odrediti funkcije $c_1(x), \dots, c_n(x)$ tako da je

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$$

partikularno rešenje nad intervalom I jednačine $L_n[y] = f(x)$. Diferenciranjem obe strane i ako za prvi uslov za funkcije $c_i(x)$ uzmemo

$$c'_1(x)y_1(x) + c'_2(x)y_2(x) + \dots + c'_n(x)y_n(x) = 0$$

dobijamo

$$y'_p(x) = c_1(x)y'_1(x) + c_2(x)y'_2(x) + \dots + c_n(x)y'_n(x)$$

Ponovnim diferenciranjem poslednje jednakosti i ako za drugi uslov za funkcije $c_i(x)$ uzmemo

$$c'_1(x)y'_1(x) + c'_2(x)y'_2(x) + \dots + c'_n(x)y'_n(x) = 0$$

dobijamo

$$y''_p(x) = c_1(x)y''_1(x) + c_2(x)y''_2(x) + \dots + c_n(x)y''_n(x).$$

Metod varijacije konstanti

Nastavljajući ovaj postupak dobijamo

$$c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0,$$

$$y_p^{(n-1)}(x) = c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x).$$

Sada je

$$\begin{aligned} y_p^{(n)}(x) &= c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) \\ &\quad + c_1(x)y_1^{(n)}(x) + c_2(x)y_2^{(n)}(x) + \cdots + c_n(x)y_n^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Metod varijacije konstanti

Kako funkcija

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$$

treba da bude rešenje jednačine $L_n[y] = f(x)$, zamenom $y_p(x), y_p'(x), \dots, y_p^{(n)}(x)$ u tu jednačinu i vodeći računa da je $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ fundamentalni skup rešenja jednačine $L_n[y] = 0$, dobijamo

$$L_n[y_p(x)] \equiv \sum_{i=1}^n c_i(x) \underbrace{L_n[y_i(x)]}_0 + \sum_{i=1}^n c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = f(x),$$

odnosno

$$c_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x) y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Metod varijacije konstanti

Determinanta linearnog (algebarskog) sistema

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \cdots + c_n'(x)y_n(x) = 0$$

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \cdots + c_n'(x)y_n'(x) = 0$$

\vdots

$$c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x)$$

je $W(x) \neq 0$ jer su rešenja $y_1(x), \dots, y_n(x)$ jednačine $L_n[y] = 0$ po pretpostavci linearno nezavisna. Rešavanjem po $c_i'(x)$ dobija se

$$c_i'(x) = \frac{D_{C_i}}{D} = \frac{W_i(x)f(x)}{W(x)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Metod varijacije konstanti

Integracijom nad intervalom (x_0, x) za $x > x_0$ (tj. (x, x_0) za $x < x_0$) sledi da je

$$c_i(x) = \int_{x_0}^x \frac{W_i(s)}{W(s)} f(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

čijom zamenom u obrazac za $y_p(x)$ dobijamo da je partikularno rešenje

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^n y_i(x) \int_{x_0}^x \frac{W_i(s)}{W(s)} f(s) ds.$$



Metod varijacije konstanti

Na primer, za $n = 2$ sistem za određivanje funkcija c_i glasi

$$\begin{aligned}c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &= 0 \\c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &= f(x),\end{aligned}$$

dok je za $n = 3$ odgovarajući sistem

$$\begin{aligned}c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_3'(x)y_3(x) &= 0 \\c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_3'(x)y_3'(x) &= 0 \\c_1'(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2''(x) + c_3'(x)y_3''(x) &= f(x)\end{aligned}$$

Metod varijacije konstanti

Primer

Naći opšte rešenje jednačine $y''' - y'' = e^x$.

$$\begin{aligned}y''' - y'' = 0 &\Rightarrow k^3 - k^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 0, k_3 = 1 \\&\Rightarrow y_h(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x\end{aligned}$$

Metodom varijacije konstanti dobijamo sistem

$$\begin{aligned}c_1'(x) + c_2'(x)x + c_3'(x)e^x &= 0 \\c_2'(x) + c_3'(x)e^x &= 0 \\c_3'(x)e^x &= e^x\end{aligned}$$

čijim rešavanjem i integracijom rešenja dobijamo

$$\begin{aligned}c_3'(x) &= 1 &\Rightarrow c_3(x) &= x + C_3 \\c_2'(x) &= -c_3'(x)e^x = -e^x &\Rightarrow c_2(x) &= -e^x + C_2 \\c_1'(x) &= -c_2'(x)x - c_3'(x)e^x = (x-1)e^x &\Rightarrow c_1(x) &= (x-2)e^x + C_1\end{aligned}$$

Jedno partikularno rešenje nehomogene jednačine je

$$y_p(x) = (x-2)e^x$$

pa je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x + (x-2)e^x.$$

Metod jednakih koeficijenata

Ako je jednačina linearna sa konstantnim koeficijentima oblika

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$$

gde je funkcija $f(x)$ specijalnog oblika

$$f(x) = e^{\alpha x} (P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x),$$

partikularno rešenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = x^r e^{\alpha x} (T_k(x) \cos \beta x + R_k(x) \sin \beta x)$$

pri čemu je

- $k = \max\{n, m\}$, $n = \deg P(x)$, $m = \deg Q(x)$, ako su oba polinoma različita od nula polinoma (ako je $P(x)$ nula polinom onda je $k = m$, a ako je $Q(x)$ nula polinom onda je $k = n$)
- r je višestrukost $\alpha + i\beta$ kao korena karakteristične jednačine odgovarajuće homogene jednačine

Korisna je činjenica: ako je

$$L_n[y] = f_1(x) + f_2(x)$$

i ako je

$y_1(x)$ partikularno rešenje jednačine $L_n[y] = f_1(x)$ nad I ,

$y_2(x)$ partikularno rešenje jednačine $L_n[y] = f_2(x)$ nad I ,

tada je

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

nad intervalom I partikularno rešenje jednačine

$$L_n[y] = f_1(x) + f_2(x)$$

Primer

Odrediti opšte rešenja jednačine $y''' - y'' = e^x + \sin x + x$.

Rešenje. Opšte rešenje homogenog dela jednačine je

$$y_h(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x.$$

Jedno partikularno rešenje jednačine $y''' - y'' = e^x$ je

$$y_{p1}(x) = xe^x.$$

Jedno partikularno rešenje jednačine $y''' - y'' = \sin x$ je

$$y_{p2}(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x).$$

Jedno partikularno rešenje jednačine $y''' - y'' = x$ je

$$y_{p3}(x) = -\frac{1}{6}x^2(x + 3).$$

Opšte rešenje je

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x + xe^x + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) - \frac{1}{6}x^2(x + 3).$$

Ojlerova jednačina

Ojlerova jednačina je oblika

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1(ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax + b)y' + a_n y = f(x)$$

gde su a_i , $i = 1, 2, \dots, n$ konstante i smenom

$$ax + b = e^t, ax + b > 0 \quad (ax + b = -e^t, ax + b < 0)$$

svodi se na jednačinu sa konstantnim koeficijentima.

Ojlerova jednačina

Primer

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x^3 y''' + x^2 y'' + 3xy - 8y = 0.$$

Za $x > 0$ smenom

$$x = e^t \Rightarrow y'_x = y'_t t'_x = \frac{1}{x} y'_t,$$

$$y''_x = -\frac{1}{x^2} y'_t + \frac{1}{x^2} y''_t = \frac{1}{x^2} (y''_t - y'_t)$$

$$y'''_x = -\frac{2}{x^3} (y''_t - y'_t) + \frac{1}{x^3} (y'''_t - y''_t) = \frac{1}{x^3} (y'''_t - 3y''_t + 2y'_t)$$

dobija se linearna diferencijalna jednačina $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$.

čija karakteristična jednačina $r^3 - 2r^2 + 4r - 8 = 0$ ima korene $r_1 = 2$, $r_2 = 2i$, $r_3 = -2i$ pa je njen fundamentalni skup rešenja

$\{e^{2t}, \sin 2t, \cos 2t\}$ tako da je fundamentalni skup rešenja Ojlerove jednačine $\{x^2, \sin(2 \ln |x|), \cos(2 \ln |x|)\}$, $x \neq 0$

pa je opšte rešenje $y = c_1 x^2 + c_2 \sin(2 \ln |x|) + c_3 \cos(2 \ln |x|)$.