Увод у теорију графова

Основна теорема теорије графова

- Нека је $G=(V,E)$ прост граф. Тада је $\sum_{v\in V} d_G(v) = 2|E|$.

Доказ:

Свака грана је инцидентна са два чвора. То значи да сабирањем степена чворова сваку грану бројимо два пута

- Граф има паран број чворова непарног степена.

Доказ:

Нека је $G=(V,E)$ и $V = V_{ps} \cup V_{nps}$. Тада је

$$\sum_{v\in V} d_G(v) = \sum_{v\in V_{ps}} d_G(v) + \sum_{v\in V_{nps}} d_G(v) = 2|E|$$

Број чворова парног степена је паран, а како је збир два парна броја такође паран број, и број чворова непарног степена је паран.

- Ако је број чворова графа непаран, онда постоји бар један чвор парног степена

Доказ:

Када би сви чворови графа били непарног степена, а притом их је непаран број, то би било у контрадикцији са тврђењем да сваки граф има паран број чворова непарног степена. Одатле следи да у наведеном графу мора постојати бар један чвор парног степена.

- Ако граф има n чворова и мање од n грана, онда постоји бар један чвор v са $d_G(v) \le 1$.

Доказ:

Претпоставимо супротно, тј. $d_G(v) \geq 2$

$$\sum_{v\in V} d_G(v) = \sum_{v\in V} 2 = 2\cdot|V| = 2n = 2|E| \underbrace{<}_{\text{пошто важи да је } |E|<n} 2n$$

$$\Rightarrow 2n < 2n \quad \text{↯}$$

Повезаност графова

- Релација „је повезан са" је релација еквиваленције на скупу чворова графа.

Доказ:

(Р) Рефлексивност следи из дефиниције

(С) Нека је $u \neq v$ и нека је uv-пут у графу облика $uv_0 \dots v_{n-1}v$. Тада је $vv_{n-1} \dots v_0u$ vu-пут у графу.

(Т) Претпоставимо да у графу G постоје uv и vw путеви: $uu_0 \dots u_{n-1}v$ и $vv_0 \dots v_{n-1}w$. Дакле, постоји uw шетња $uu_0 \dots u_{n-1}vv_0 \dots v_{n-1}w$. Ако постоји шетња, постоји и пут

- Граф $G=(V,E)$ је повезан акко $\omega(G)=1$

Доказ:

G је повезан акко за свака два чвора $u,v \in V$ постоји uv-пут у G. То важи акко сви чворови припадају истој класи еквиваленције у односу на релацију „је повезан са", што важи ако је $\omega(G)=1$

- Нека је $n \geq 2$. Граф са n чворова и мање од $n-1$ грана није повезан.

Доказ: (индукцијом по n)

1° $n=2$: граф са 2 чвора и 0 грана није повезан

2° претп.: граф са n чворова и мање од $n-1$ грана није повезан

3° доказ за $n+1$: граф G има $n+1$ чворова мање од n грана, дакле, постоји чвор са $d_G(v) \leq 1$. Ако је $d_G(v)=0$, број компоненти повезаности је 2 и граф није повезан. Ако је $d_G(v)=1$, онда граф G има исти број компоненти повезаности као и граф $G' = G - v = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{u,v\})$, што је граф са n чворова и мање од $n-1$ грана, што према претп. није повезан граф.

- Нека је $G=(V,E)$ повезан и нека је C контура у графу G. Ако је e грана контуре, онда је $G-e$ повезан.

Доказ:

За произвољна два чвора u и v из G важи да постоји пут $P = uv_1 \ldots v_{n-1}v = uv_1 \ldots v_i v_{i+1} \ldots v_{n-1} v$ јер је G повезан.
Ако e припада путу, онда претпоставимо да је то грана $\{v_i, v_{i+1}\}$ и тада је C облика $C = v_i v_{i+1} u_1 \ldots u_l v_i$, а пут Q у графу $G-e$ је $Q = v_i u_l u_{l-1} \ldots u_1 v_{i+1}$, па је $P = uv_1 \ldots v_{i-1} Q v_{i+2} \ldots v_{n-1} v$ стаза у графу $G-e$ од u до v, па самим тим постоји и пут uv.
Ако e не припада uv путу, онда је uv пут и у $G-e$

- Нека је $G=(V,E)$ прост граф, гдје је $V=\{1,\ldots,n\}$, $n \geq 1$ и нека је A матрица сусједства графа G. Елемента $a_{ij}^{(k)}$ у матрици A^k, $k \geq 1$ једнак је броју различитих ij шетњи дужине k у том графу.

Доказ: (индукција)

1° $n=1$: Број шетњи дужине 1 од чвора i до чвора j једнак је броју грана од i до j, што може бити 0 или 1. Пошто је граф прост, тај број је 1. По деф. матрице инциденције, тај број је једнак a_{ij} елементу матрице A

2° претп.: Тврђење важи за $|V| = n-1$ и $a_{ij}^{(k-1)}$ је бр. шетњи дужине $k-1$ између i и j

3° доказ за n: $A^k = A^{k-1} \cdot A \Rightarrow a_{ij}^{(k)} = a_{i1} a_{1j}^{(k-1)} + a_{i2} a_{2j}^{(k-1)} + \ldots + a_{in} a_{nj}^{(k-1)}$

Према инд. претп. $a_{lj}^{(k-1)}$ $(1 \leq l \leq n)$ једнак је броју шетњи дужине $k-1$ од l до j. Ако постоји грана $\{i,l\}$ $(a_{il}=1)$, онда је бр. шетњи дужине k од i до j у којима је прва грана $\{i,l\}$ једнак $a_{il} a_{lj}^{(k-1)}$.
Када се сабере број таквих шетњи дужине k од i до j, добија се сума на почетку корака.

Стабла

КАРАКТЕРИЗАЦИЈА СТАБЛА:

- Нека је $G=(V,E)$ и $|V|=n\geq 2$. Тада је G стабло акко за свака два чвора $u,v\in V$ постоји јединствен uv-пут.

Доказ:

⇒ За $n=2$ тврђење важи. За доказ $n\geq 3$ претпостављамо супротно, тј. да у стаблу G постоје два чвора u и v са два различита uv-пута. Нека су ти путеви U_1 и U_2, $U_1 = uu_1\dots u_iu_{i+1}\dots u_mv$ и $U_2 = uv_1\dots v_jv_{j+1}\dots v_nv$. Ако су путеви различити, постоји грана која припада једном, али не припада другом. Узмимо u_iu_{i+1}-шетњу $u_iu_{i-1}\dots u_1uv_1\dots v_nvu_m\dots u_{i+1}$. Ако она постоји, постоји и u_iu_{i+1} пут у графу $G-\{u_i,u_{i+1}\}$. Међутим, додајмо грану u_iu_{i+1} у стабло и вратимо се у стабло G, сада у њему постоји контура и то заправо и није стабло.

⇐ Ако за свака два чвора $u,v\in V$ постоји пут, онда је G повезан. Претпоставимо да G није ацикличан. Тада у њему постоји контура $w_1w_2\dots w_lw_1$, односно бар два пута од w_1 до w_l ⇒ w_1w_l и $w_1w_2\dots w_l$ што је у контрадикцији са претпоставком да постоји јединствен пут од једног до другог чвора, дакле G је ацикличан.

- Нека је $G=(V,E)$ стабло и нека је $|V|=n\geq 2$. Тада постоје бар два чвора степена 1.

Доказ:

Претпоставимо да је $u_1u_2\dots u_l$ најдужи пут у повезаном графу G. Имамо два чвора степена 1: u_1 и u_l. Ако претпоставимо да они нису степена 1 – нпр. u_1 је повезан са неким чвором u_i – тада постоји контура – контрадикција – или нпр. да је u_l повезан са неким висећим чвором w – тада пут u_1u_l није максималан – контрадикција.

- Нека је $G=(V,E)$, $|V|=n\geq 2$ и нека је $d_G(u)=1$ за неки чвор $u\in V$. Тада је G стабло акко је и $G-u$ стабло.

Доказ:

$\Rightarrow$ Посматрајмо два чвора $v,w\in V(G-u)$. Пошто је G стабло (претпоставили смо), онда постоји vw-пут који се не тиче чвора u са степеном 1. Дакле, као што је G повезан, тако је и $G-u$ повезан. Даље, пошто је G ацикличан и $G-u$ је ацикличан јер уклањањем гране из ацикличног графа није могуће добити контуру. Дакле, и G и $G-u$ су стабла.

$\Leftarrow$ Ако је $G-u$ ацикличан, тада се додавањем чвора степена 1 не може створити контура, дакле и G је ацикличан. Пошто је $G-u$ повезан, треба показати да постоји uw-пут за сваки чвор $w\in V(G-u)$, гдје $u\in V(G)$. Како је $d_G(u)=1$, тада постоји $v\in V(G-u)$ са особином да је uw-увијек пут ($G-u$ је повезан), ће се додавањем гране uv креира граф G који је онда такође повезан. Дакле, и $G-u$ и G су стабла.

- Нека је $G=(V,E)$ и $|V|=n\geq 2$. Тада је G стабло акко је G повезан граф и $|E|=n-1$.

Доказ: (индукција)

$\Rightarrow$ 1° $n=2$: стабло са два чвора има тачно једну грану

2° прет. : $|V|=n-1\geq 2 \Rightarrow |E|=n-2$ за стабло

3° доказ за n : Ако је G стабло, тада постоји чвор u, $d_G(u)=1$. Граф $G'=G-u$ има особину $|V(G')|=|V(G)|-1=n-1$ и $|E(G')|=|E(G)|-1=n-2$.
Како је $G-u$ стабло, и G је стабло, ће је претпоставка потврђена.

$\Leftarrow$ 1° $n=2$: Повезан граф са два чвора и једном граном је стабло.

2° прет. : $|V|=n-1$ и $|E|=n-2 \Rightarrow$ стабло

3° доказ за n : $|E(G)|=|V(G)|-1 \Rightarrow$ постоји чвор u са $d_G(u)\leq 1$. Пошто је G повезан, важи $d_G(u)=1$ и граф $G'=G-u$ је повезан са особином $|V(G')|=|V(G)|-1=n-1$ и $|E(G')|=|E(G)|-1=n-2$.
Према инд. прет. G' је стабло $\Rightarrow$ G је стабло.

- Нека је $G=(V,E)$ и $|V|=n\geq 2$. Тада је G стабло акко је G повезан и брисањем произвољне гране се добија неповезан граф.
  - минималан повезан граф

Доказ:

$\Rightarrow$ Ако је G стабло, онда је и повезан граф. Нека је $\{u,v\}\in E$ произвољна грана. Ако претпоставимо да је $G-\{u,v\}$ повезан онда постоји uv-пут и додавањем uv гране добија се контура што је супротно од претпоставке да је G ацикличан. Дакле, $G-\{u,v\}$ је неповезан

$\Leftarrow$ $G-\{u,v\}$ је неповезан граф и треба доказати да је G ацикличан. Претпоставимо да је G повезан и да садржи контуру C. Тада за сваку грану из G важи да је $G-\{u,v\}$ такође повезан, контрадикција. Дакле, G је стабло.

- Нека је $G=(V,E)$ и $|V|=n\geq 2$. Тада је G стабло акко је G ацикличан и додавањем гране се добија граф који садржи контуру. - максималан ациклички граф

Доказ:

$\Rightarrow$ Ако је G стабло, онда је G ацикличан граф. Пошто је G повезан, додавањем гране uv добија се контура у $G+uv$.

$\Leftarrow$ Треба доказати да је G повезан. Нека су u и v чворови из V. Ако $uv\in E$, онда је uv-пут. Ако $uv\notin E$, онда $G+uv$ садржи контуру која садржи uv. Одузимањем са контуре гране uv добија се uv пут у G.

- Нека је $G=(V,E)$, где је $|V|=n\geq 2$ и $|E|\geq n$. Нека су $V(G_1), V(G_2), \dots, V(G_l)$ компоненте повезаности графа G са $k_1, k_2, \dots, k_l$ чворова респективно. Тада постоји $i\in\{1,\dots,l\}$ са особином $|E(G_i)|\geq k_i$.

Доказ:

Претпоставка супротног: $\forall i\in\{1,\dots,l\}$ важи $|E(G_i)|<k_i$.

$n\leq |E(G)| = |E(G_1)|+\dots+|E(G_l)| < k_1+k_2+\dots+k_l = n \Rightarrow n<n$ $\not\!\!\!\!\rightarrow\!\leftarrow$

- Нека је $G=(V,E)$, гдје је $|V|=n\geq 2$ и $|E|\geq n$. Тада G садржи контуру.

Доказ:
Ако је G повезан: ако нема контуру, онда је стабло па има $n-1$ грана ↯

Ако је G неповезан: нека су $G_1, \dots, G_l$ компоненте повез. и $|V(G_1)|=k_1 \dots |V(G_l)|=k_l \Rightarrow k_1+\dots+k_l=n$. Тада сигурно важи $|E(G_i)|\geq k_i$ за произв. i. Ако G_i нема контуру, онда има k_i-1 грана. ↯

ПОКРИВАЈУЋА СТАБЛА:

- Нека је $n\geq 3$. Ако је G повезан и $|E(G)|=k\geq n$, онда G има покривајуће стабло.

Доказ: (индукција)

1° $k=n$: Одузимањем једне контуре, граф остаје повезан и покривајући. Повезан граф са $n-1$ грана је стабло.

2° претп.: G има покривајуће стабло ако има n грана

3° доказ за n: Брисањем произвољне контуре, ако она постоји, добијамо граф G': $V(G')=V(G)$ и $E(G')\subseteq E(G)$. Како је G' повезан према претпоставци, G' има покривајуће стабло, а што је уједно и покривајуће стабло графа G.

- Граф G има покривајуће стабло акко је повезан.

Доказ:

$\Rightarrow$ Ако G има покривајуће стабло, онда постоји пут између свака два чвора стабла, а што је и пут у повезаном графу G.

$\Leftarrow$ $|V(G)|=2 \Rightarrow$ граф је сопствено покривајуће стабло

$|V(G)|=n\geq 3$ $|E(G)|=n-1 \Rightarrow$ +-

$|V(G)|=n\geq 3$ $|E(G)|=k\geq n \Rightarrow$ према претходној теореми важи.

ПРИФЕРОВ НИЗ:

- Нека је $n \geq 2$. Број различитих означених стабала са чворовима $\{1,2,\dots,n\}$ једнак је n^{n-2}

Доказ:

Ако је $n=2$, имамо једно стабло и тврђење важи.
За $n \geq 3$, сваком стаблу са чворовима $\{1,\dots,n\}$ можемо на јединствен начин придружити Приферов низ $(p_1,\dots,p_{n-2})$ који чине $n-2$ цијела броја из скупа $\{1,2,\dots,n\}$ (која се могу понављати, а сваки низ $(p_1,p_2,\dots,p_{n-2})$ са особином $(p_1,\dots,p_{n-2}) \subseteq \{1,\dots,n\}$ је Приферов низ неког стабла са n чворова.

Ојлеров граф

- Граф је Ојлеров ако је повезан и сваки чвор у њему је парног степена.

Доказ:

$\Rightarrow$ Граф је повезан по деф. Ојлеровог графа. Нека је $u_1e_1\dots u_ne_nu_1$ Ојлерова тура. Ако се чвор v појављује l пута у тури у случају када је $v \neq u_1$, односно $l+1$ пута ако је $v = u_1$, онда је степен тог чвора $d_G(v) = 2l$.

$\Leftarrow$ Посматрајмо стазу највеће дужине $u_1e_1\dots u_ne_nu_{n+1}$.
Треба доказати да је $u_1 = u_{n+1}$: непаран број грана је инцидентан са u_1 у стази ако претпоставимо $u_1 \neq u_{n+1}$. Како је степен u_1 паран, треба додати још једну грану у стазу, па тренутна стаза није највећа ⇒ ↯
Треба доказати да се сви чворови појављују у стази: ако претпоставимо да постоји грана $\{u_i, v\}$ тако да $v \notin \{u_1, \dots, u_n\}$, што би значило да треба додати ту грану у стазу, па опет није максимална ⇒ ↯
Треба доказати да су све гране графа на контури: ако претпоставимо супротно, тада се стаза може продужити и опет није максимална ⇒ ↯

Хамилтонов граф

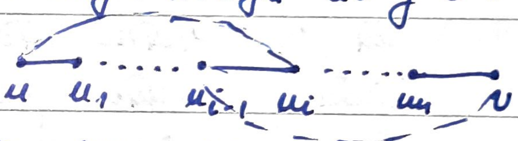
Довољни услови:

- Нека је G прост граф са n, $n \geq 3$, чворова у којем постоје несусједни чворови $u, v \in V(G)$ са особином
$$d_G(u) + d_G(v) \geq n$$
Тада је G Хамилтонов ако је и $G + \{u, v\}$ Хамилтонов.

Доказ:

$\Rightarrow$ Ако је G Хамилтонов, онда је и $G + \{u, v\}$ исто, јер је Хамилтонова контура у G истовремено и Х. контура у $G + \{u, v\}$

$\Leftarrow$ Ако је C Х. контура у $G + \{u, v\}$, а није у G, онда су u и v сусједни чворови у тој контури. Тада постоји Х. пут uv у G: $u u_1 \dots u_{i-1} u_i \dots u_n v$. Ако постоји грана $u u_i$, не постоји грана $u_{i-1} v$ јер би тада у G постојала Х. контура $u u_1 \dots u_{i-1} v u_n \dots u_i u$.



То значи да свака грана која излази из u искључује једну грану која излази из v. Тада важи:
$$d_G(v) \leq \underbrace{n-1}_{\text{преостали чворови}} - d_G(u) \Leftrightarrow d_G(u) + d_G(v) \leq n-1 < n \Rightarrow \text{⚡}$$

- Оре: Ако је граф G са $n \geq 3$ чворова и особином $d_G(u) + d_G(v) \geq n$ за сваки пар несусједних чворова $u, v \in V(G)$, онда G има Х. контуру.

Доказ:

Ако је G комплетан, тврђење је доказано. У супротном, нека је $E(K_n) \setminus E(G) = \{e_1, \dots, e_l\}$. Додавањем грана графу G не мијења се услов да је збир степена несусједних чворова l. Обзиром да уз овај услов важи да ако је $G + \{u, v\}$ Х.г., да је и G Х.г., слиједи да се овим поступком поновљеним l пута до K_n добија и да је G Х.г.

- **Дирак**: Ако је G граф са n, $n \geq 3$, чворова и $d_G(v) \geq \frac{n}{2}$ за свако $v \in V(G)$, онда је G Хамилтонов граф.

Доказ:

На основу тврђења Ореа, можемо закључити да за сваки пар чворова важи $d_G(u) + d_G(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$, одакле слиједи да је G Хамилтонов.

ПОТРЕБНИ УСЛОВИ:

- Ако је G Хамилтонов граф, онда за сваки непразан подскуп чворова $S \subset V(G)$ важи $\omega(G-S) \leq |S|$.

Доказ:

Нека је $C = v_1 v_2 \dots v_m v_1$ Х. контура. Ако је $|S| = l$ онда је $\omega(C-S) \leq l$. Како је $C \subset G$, то је $C-S \subseteq G-S$, односно $\omega(G-S) \leq \omega(C-S)$

$\Rightarrow \omega(G-S) \leq \omega(C-S) \leq |S|$

- Ако је G полуХамилтонов граф, онда за сваки непразан подскуп чворова $S \subset V(G)$ важи $\omega(G-S) \leq |S| + 1$.

Доказ:

Нека је $v_1 v_2 \dots v_m$ Х. пут. До контуре фали грана $v_m v_1$. Тада је $\omega(C-S) \leq |S| + 1$ и $\omega(G-S) \leq \omega(C-S) \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega(G-S) \leq \omega(C-S) \leq |S| + 1$

Планарни графови

- Ојлерова формула: Нека је $G=(V,E)$, $|V|\geq 2$ повезан планаран прост граф и нека је f број области на које он дијели раван. Тада је $f = |E| - |V| + 2$

Доказ: (индукција)

Нека је $|E| = m$ и посматрајмо план. репр. графа. Нека је G_1 подграф са произвољном граном из G и инцидентним чворовима. Додавањем грана, добијамо сукцесивно подгр. $G_2, G_3, \dots, G_m$ (за $m\geq 2$) - додају се гране инцидентне са неком од грана претходног подграфа - што је могуће јер је G повезан граф. Треба доказати да за свако $k\in\{1,\dots,m\}$ и G_k планарно важи $f_k = |E_k| - |V_k| + 2$

1° $k=1$: $f_1 = |E_1| - |V_1| + 2 = 1-2+2 = 1 = 1$ ✓

2° $k=k$: претпоставка да важи за G_k

3° доказ за $k+1$: $G_{k+1} = G_k + \{u,v\}$

i) Ако $u,v\in V(G_k) \Rightarrow f_{k+1} = f_k + 1$ $\quad |V(G_k)| = |V(G_{k+1})|$

$|E(G_k)| + 1 = |E(G_{k+1})|$

$\Rightarrow f_{k+1} = |E(G_{k+1})| - |V(G_{k+1})| + 2 = |E(G_k)| + 1 - |V(G_k)| + 2 = f_k + 1$ ✓

ii) Ако $u\in V(G_k)$ и $v\notin V(G_k) \Rightarrow f_{k+1} = f_k$ $\quad |V(G_k)| + 1 = |V(G_{k+1})|$

$|E(G_k)| + 1 = |E(G_{k+1})|$

$\Rightarrow f_{k+1} = |E(G_{k+1})| - |V(G_{k+1})| + 2 = |E(G_k)| + 1 - |V(G_k)| - 1 + 2 = f_k$ ✓

- Ако је $G=(V,E)$ повезан планаран граф са 3 чвора, онда је $|E| \leq 3|V| - 6$

Доказ:

$2|E| = \sum_{1<i<f} st(D_i) \geq 3\cdot f \Rightarrow f \leq \frac{2}{3}|E| \Rightarrow f = |E| - |V| + 2 \leq \frac{2}{3}|E| \Rightarrow$ тврђење важи

- Ако је $G=(V,E)$ повезан планаран граф са бар 3 чвора и G нема контуре дужине 3, тада је $|E| \leq 2|V| - 4$.

Доказ: ст. сваке обл. је бар 4 $\Rightarrow 2|E| = \sum_{1<i<f} st(D_i) \geq 4\cdot f \Rightarrow |E| - |V| + 2 \leq \frac{1}{2}|E| \Rightarrow$ доказано