SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA ITERATIVNE METODE

predavač:
Aleksandar Kovačević

Sistem linearnih algebarskih jednačina (SLAJ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \cdots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + a_{n2}x_2 & + \cdots & + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Sistem linearnih algebarskih jednačina (SLAJ)

- Matrični oblik

Ax=b

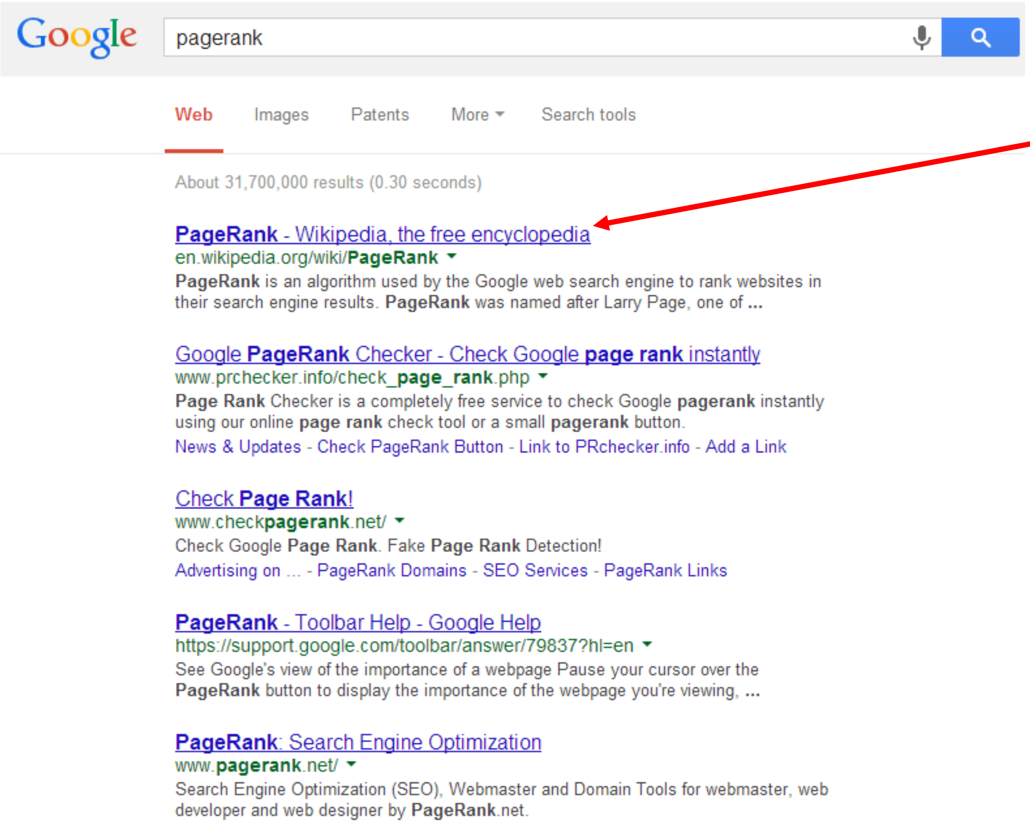
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Zašto iterativne metode?

- U praksi najčešće radimo sa sistemima koji imaju veliki broj jednačina.
- Za takve sisteme direktne metode su previše računski zahtevne.
- Vrlo često je bolje, da brzo dobijemo približno rešenje nego da dugo čekamo na tačno rešenje.
- Iz tih razloga koristimo iterativne metode

Motivacioni pimer Google PageRank

- PageRank je algoritam koji Google koristi da bi odredio rang stranice.



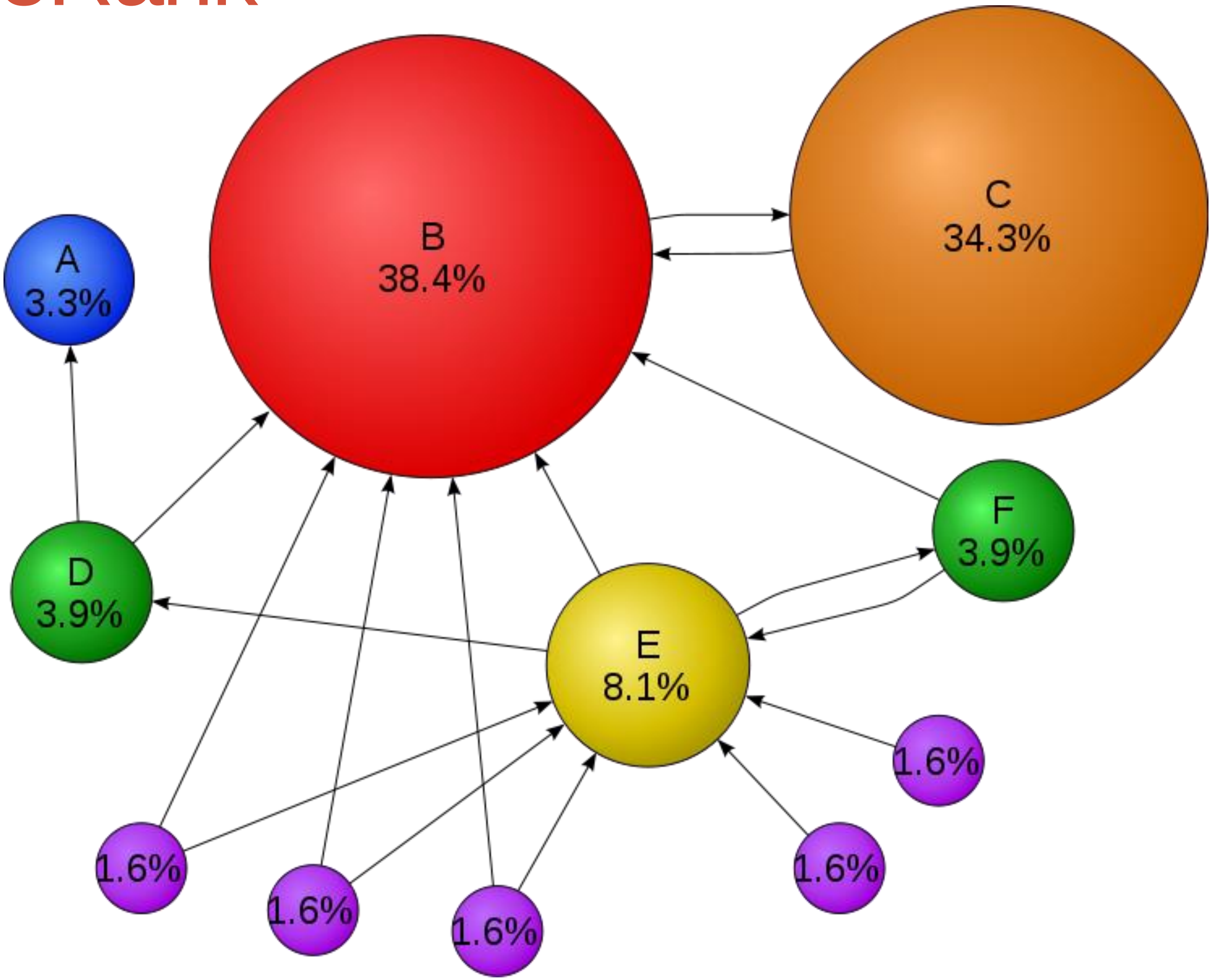
Zašto je ova stranica, bolje rangirana od ostalih?

Objasnićemo u nastavku.

PageRank

- PageRank koristi sledeću logiku:
- Web strana je popularna ako se na nju može doći preko linkova drugih popularnih strana ili
- Ako popularna strana ima link na tvoju stranu onda raste popularnost tvoje strane.
- Razvili su ga 1996 godine Sergey Brin i Larry Page (po kome je algoritam i nazvan)

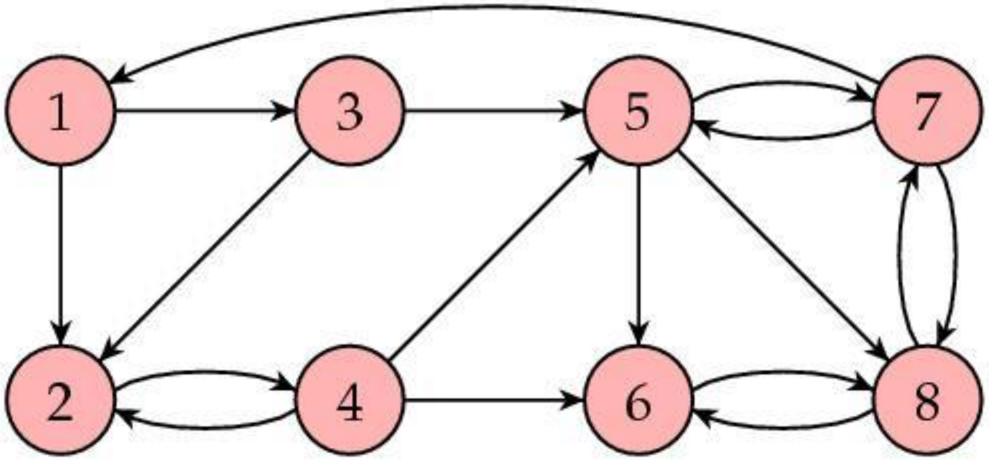
PageRank



PageRank

- Kakve to veze ima sa sistemima linearnih jednačina?
- Pa, problem određivanja ranga stranica može se svesti na problem rešavanja SLAJ. Kako?
- Kao što smo videli na prethodnom slajdu Internet se može posmatrati kao graf.
- Graf se može predstaviti matricom linkova kao na sledećem slajdu.

PageRank - matrica



Imamo 8 strana u primeru.

Vrednost matrice je:

$$H_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{l_j}, \textit{ ako stranica } j \textit{ ima link na } i; \\ \quad l_j \textit{ je ukupan broj linkova stranice } j \\ 0, \textit{ inace} \end{cases}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

na stranicu 1 pokazuje samo stranica 7, a stranica 7 ima ukupno 3 linka.

PageRank i SLAJ

- Vektor sa rangovima strana x dobija se kao rešenje sledećeg sistema:

$$(I-\alpha H)x=(1-\alpha)v$$

- I je jedinična matirca
- α je predstavlja verovatnoću da će surfer doći na određenu stranu preko linka sa neke druge strane. (obično se uzima α=0.85)
- 1-α je predstavlja verovatnoću da će surfer doći na određenu stranu na bilo koji drugi način osim preko linka npr. direktnim ukucavanjem URL-a.

PageRank i SLAJ

- Vektor sa rangovima strana x dobija se kao rešenje sledećeg sistema:

$$(I-\alpha H)x=(1-\alpha)v$$

- *v* je *vektor personalizacije* i za svaku stranu predstavlja verovatnoću da će surfer kada se odluči da ne ide preko linka doći baš na nju.
- v je obično (1/n,1/n,....,1/n) gde je n broj strana u grafu (Internetu) tj. dimenzija H.
- Sve strane imaju jednaku verovatnoću (1/n) – zove se *vektor personalizacije* zato što je za svakog surfera posebno moućge podeseti verovatnoće za svaku od strana.

PageRank i SLAJ

- Za naš primer sa 8 strana imamo:

```
>> H
H =
         0         0         0         0         0         0    0.3333         0
    0.5000         0    0.5000    0.3333         0         0         0         0
    0.5000         0         0         0         0         0         0         0
         0    1.0000         0         0         0         0         0         0
         0         0    0.5000    0.3333         0         0    0.3333         0
         0         0         0    0.3333    0.3333         0         0    0.5000
         0         0         0         0    0.3333         0         0    0.5000
         0         0         0         0    0.3333    1.0000    0.3333         0
>> alpha
alpha = 0.8500

>> RH=(eye(8)-alpha*H)
RH =
    1.0000         0         0         0         0         0   -0.2833         0
   -0.4250    1.0000   -0.4250   -0.2833         0         0         0         0
   -0.4250         0    1.0000         0         0         0         0         0
         0   -0.8500         0    1.0000         0         0         0         0
         0         0   -0.4250   -0.2833    1.0000         0   -0.2833         0
         0         0         0   -0.2833   -0.2833    1.0000         0   -0.4250
         0         0         0         0   -0.2833         0    1.0000   -0.4250
         0         0         0         0   -0.2833   -0.8500   -0.2833    1.0000
```

PageRank i SLAJ

- Za naš primer sa 8 strana imamo:

```
>> vh
vh =
   0.1250    0.1250    0.1250    0.1250    0.1250    0.1250    0.1250
  0.1250
```

Rešenje sistema (I-αH)x=(1-αv)

```
>> x = RH\((1-alpha)*vh)'
```

Gaussovom eliminacijom u Matlabu.

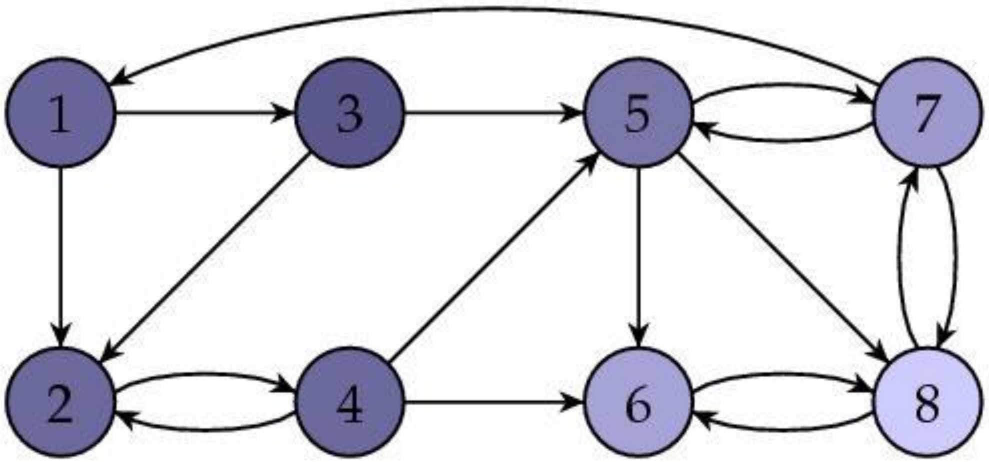
```
x =

   0.0631
   0.0925
   0.0456
   0.0974
   0.1101
   0.1841
   0.1565
   0.2508
```

Najbolje je rangirana strana 8 pa 6 pa 7 itd.

Ako bi Google utvrdio da ove strane odgovaraju vašem upitu, na ovaj način bih ih rangirao.

PageRank i SLAJ

- Graf sa dobijenim rangovima (svetlije znači veći rang).



PageRank i iterativne metode

- Kakve to veze ima sa iterativnim metodama?
- U realnosti matrica H celog Interneta je blago rečeno ogromna i puna nula.
- Nule su posledica toga što relativno mali broj strana (u odnosu na ceo Internet) ima linkove na proizvoljnu stranu koju posmatramo.

PageRank i iterativne metode

- Direktne metode (kao što je Gausova eliminacija) imaju preveliku računsku zahtevnost za ogromne sisteme.
- Zato se u praksi za ođivanje PageRank-a koristi neki od iterativnih metoda.
- Kokretno, jedan od korišćenih je Gaus-Zajdelov metod, koji danas učimo.

Iterativni metod osnove

- Kod iterativnih metoda krećemo od odabrane početne vrednosti x^0
  - bira je korisnik metode (na slučajan ili neki drugi način)
- Koristimo iterativnu formulu koja daje vezu između x_k i x_{k-1}.
- Na taj način izračunavamo niz
  - $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^{k-1}, x^k, \ldots$

Iterativni metod osnove

- Niz $x^0, x^1, x^2, ..., x^{k-1}, x^k, ...$ konvergira ka tačnom rešenju *x*, za beskonačno mnogo iteracija.
- U praksi nam ne treba ∞ iteracija.
- Koristimo apsolutnu približnu grešku da zaustavimo iterativni metod:

$$\left| x_k - x_{k-1} \right|$$

- Tolerancijom kontrolišemo odnos brzine i tačnosti.

$$\left| x_k - x_{k-1} \right| < tolerancija$$

Iterativne metode i SLAJ

- Sistem $Ax=b$ transformišemo u oblik $x=Tx+c$
- Uzimamo početno rešenje x^0 i pomoću iterativne formule

$$x^k=Tx^{k-1}+c,$$

kreiramo niz $x^0,x^1,x^2,....,x^{k-1},x^k,......$

Iterativne metode i SLAJ

- Matricu T i vektor c određujemo pomoću A i b.

- U zavisnosti od toga kako ih određujemo imamo dva poznata iterativna metoda:
  - Jakobijev (Jacobi)
  - Gaus-Zajdelov (Gauss-Seidel)

Osnovna ideja rastavljanja na T i c

- Transformišemo Ax+b u x=Tx+c
- Za sistem 3x3

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \phantom{-\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{b_1}{a_{11}} \\
x_2 &= -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 \phantom{- \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2} - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 + \frac{b_2}{a_{22}} \\
x_3 &= -\frac{a_{31}}{a_{33}}x_1 - \frac{a_{32}}{a_{33}}x_2 \phantom{- \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3} + \frac{b_3}{a_{33}}
\end{aligned}
$$

$$x = Tx + c$$

Osnovna ideja rastavljanja na T i c

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$a_{11}x_1 = b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3)$$

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3)}{a_{11}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - (\sum_{j=1 \wedge j \neq 1}^{3} a_{1j}x_j)}{a_{11}}$$

$$x_i = \frac{b_i - (\sum_{j=1 \wedge j \neq i}^{n} a_{ij}x_j)}{a_{ii}}$$

Jakobijev metod

- Uopštenje prethodnog primera

$$\begin{aligned} a_{11}\boxed{x_1} + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\boxed{x_2} + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}\boxed{x_n} &= b_n \end{aligned}$$

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}$$

$$x_1^1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^0 - \cdots - a_{1n}x_n^0)$$

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k \right]$$

$$x_2^1 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^0 - a_{23}x_3^0 - \cdots - a_{2n}x_n^0)$$

$$x_n^1 = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^0 - a_{n2}x_2^0 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^0)$$

Jakobijev metod matrični zapis

A=L+D+U (*nema veze sa LU faktorizacjiom*)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$Ax=b \Rightarrow (L+D+U)x=b$

$Dx^{k+1} = -(L+U)x^k + b$

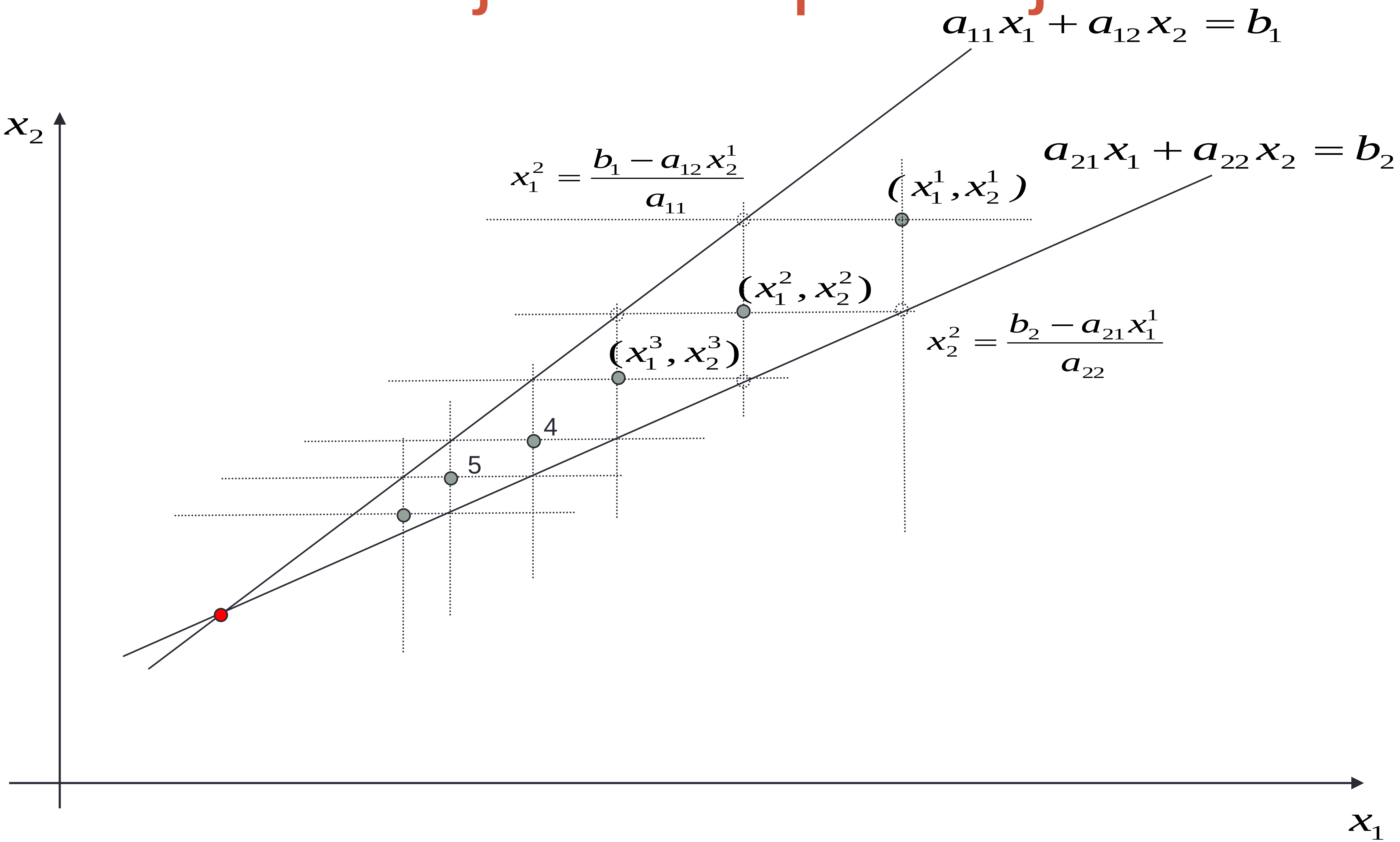
$$\underbrace{x_i^{k+1}}_{Dx^{k+1}} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^k}_{Lx^k} - \underbrace{\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^k}_{Ux^k} \right]$$

$x^{k+1} = -D^{-1}(L+U)x^k + D^{-1}b$

$T = -D^{-1}(L+U)$

$c = D^{-1}b$

Geometrijska interpretacija



Matlab kod

```
function x=jacobi(A,b,maxIter,tacnost,x0)
xk = x0;
xkplus1 = x0;
[n m] = size(A);
for k = 1:maxIter
    for i = 1:n
        s=0;
        for j=1:n
            if(i~=j)
                s = s + A(i,j)*xk(j);
            end
        end
        xkplus1(i)=(b(i)-s)/A(i,i);
    end
    if(abs(xk-xkplus1)<tacnost)
        break;
    end
    xk = xkplus1;
end
x=xkplus1;
```

isto što i ∞ norma jer
ako je svaka komponenta
vektora xk-xkplus1<tacnosti
manja je i maksimalna komponenta

Jakobijev metod primer 2x2

- Rešavamo sistem:

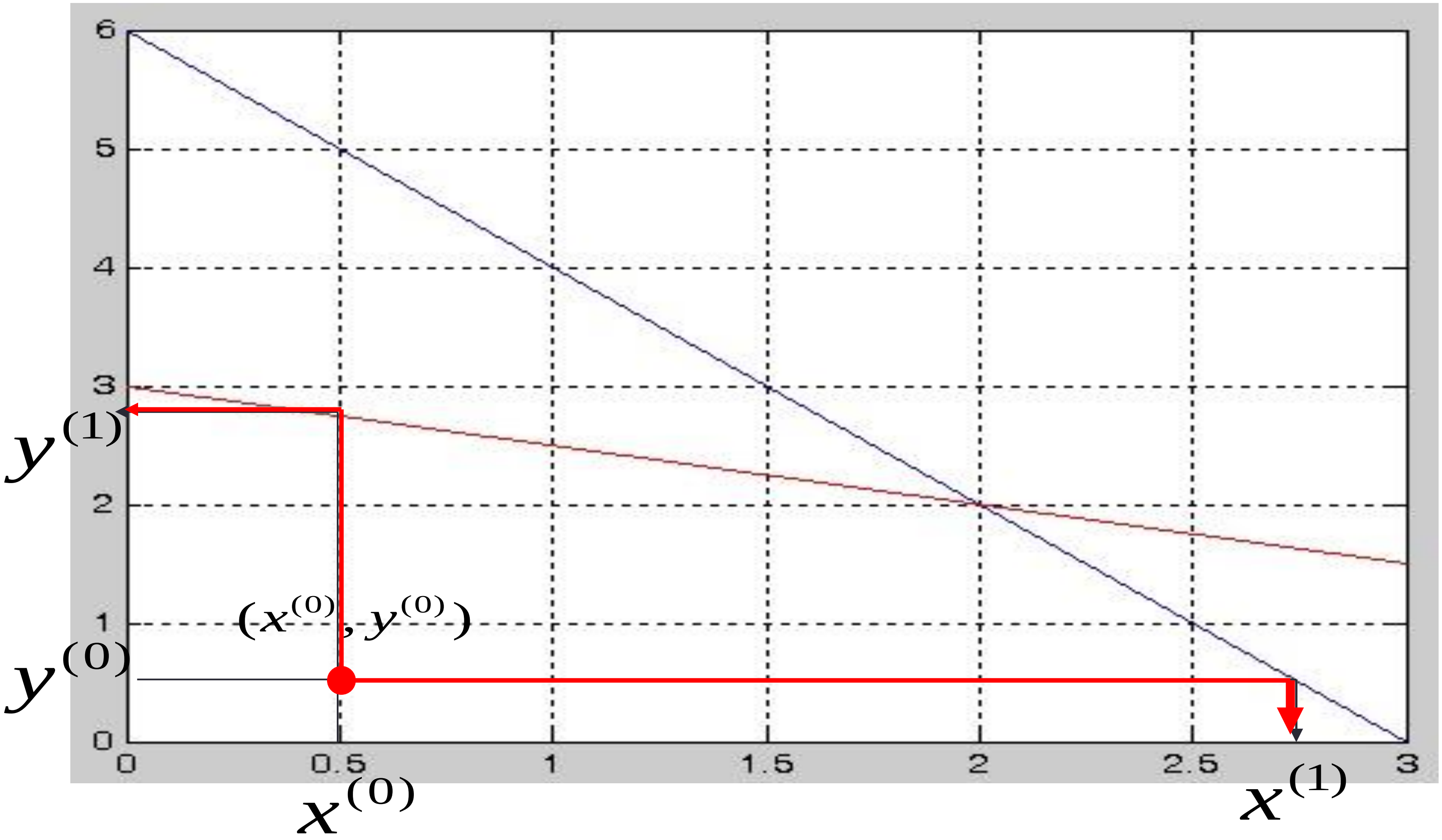
$$\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ x + 2y &= 6 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= -\frac{1}{2}y + 3 \\ y &= -\frac{1}{2}x + 3 \end{aligned}$$

- početno rešenje $x^{(0)} = y^{(0)} = 1/2$
- Prva iteracija algoritma

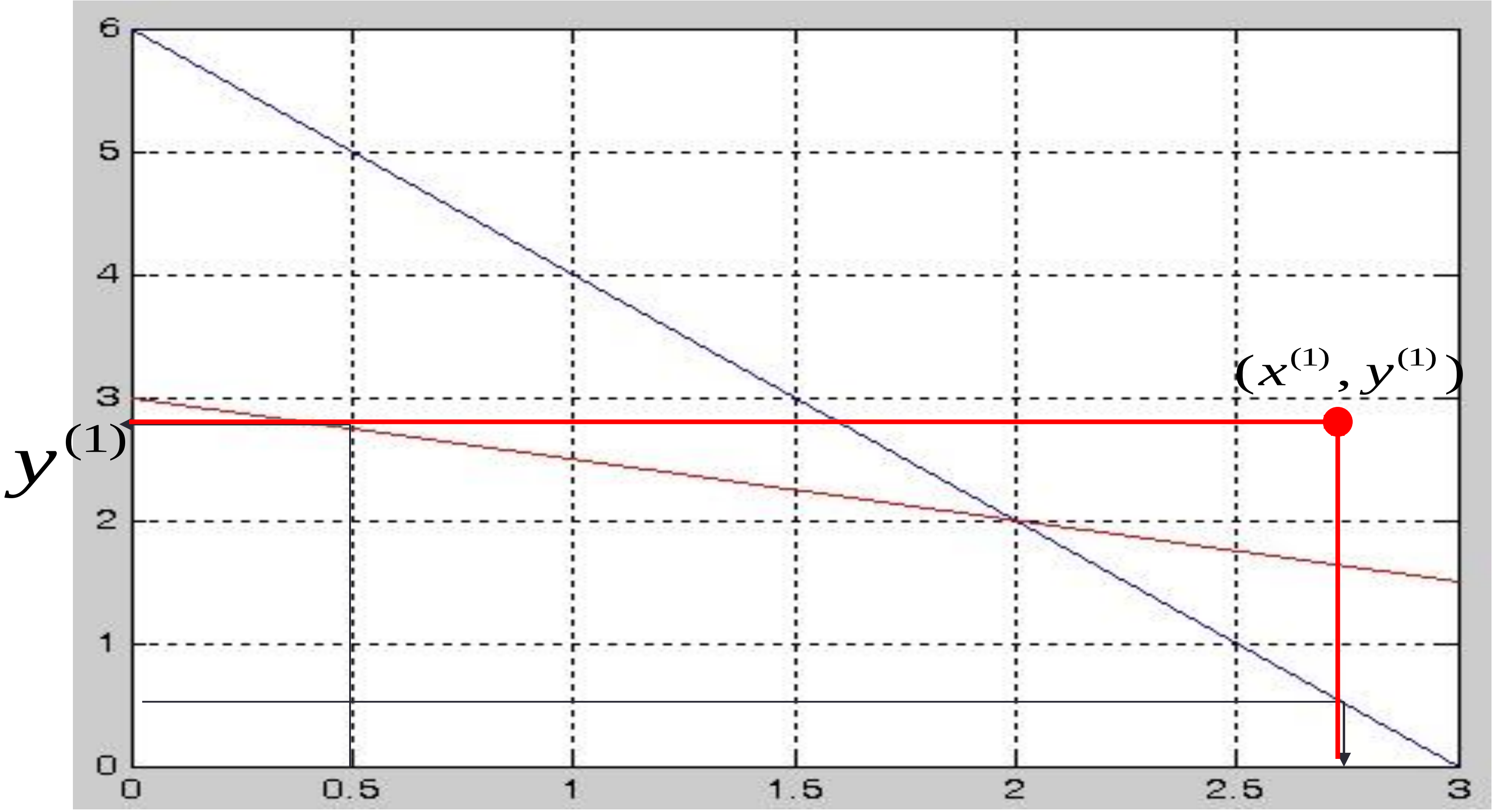
$$x^{(1)} = -\frac{1}{2}y^{(0)} + 3 = -\frac{1}{2} * \frac{1}{2} + 3 = \frac{11}{4}$$

$$y^{(1)} = -\frac{1}{2}x^{(0)} + 3 = -\frac{1}{2} * \frac{1}{2} + 3 = \frac{11}{4}$$

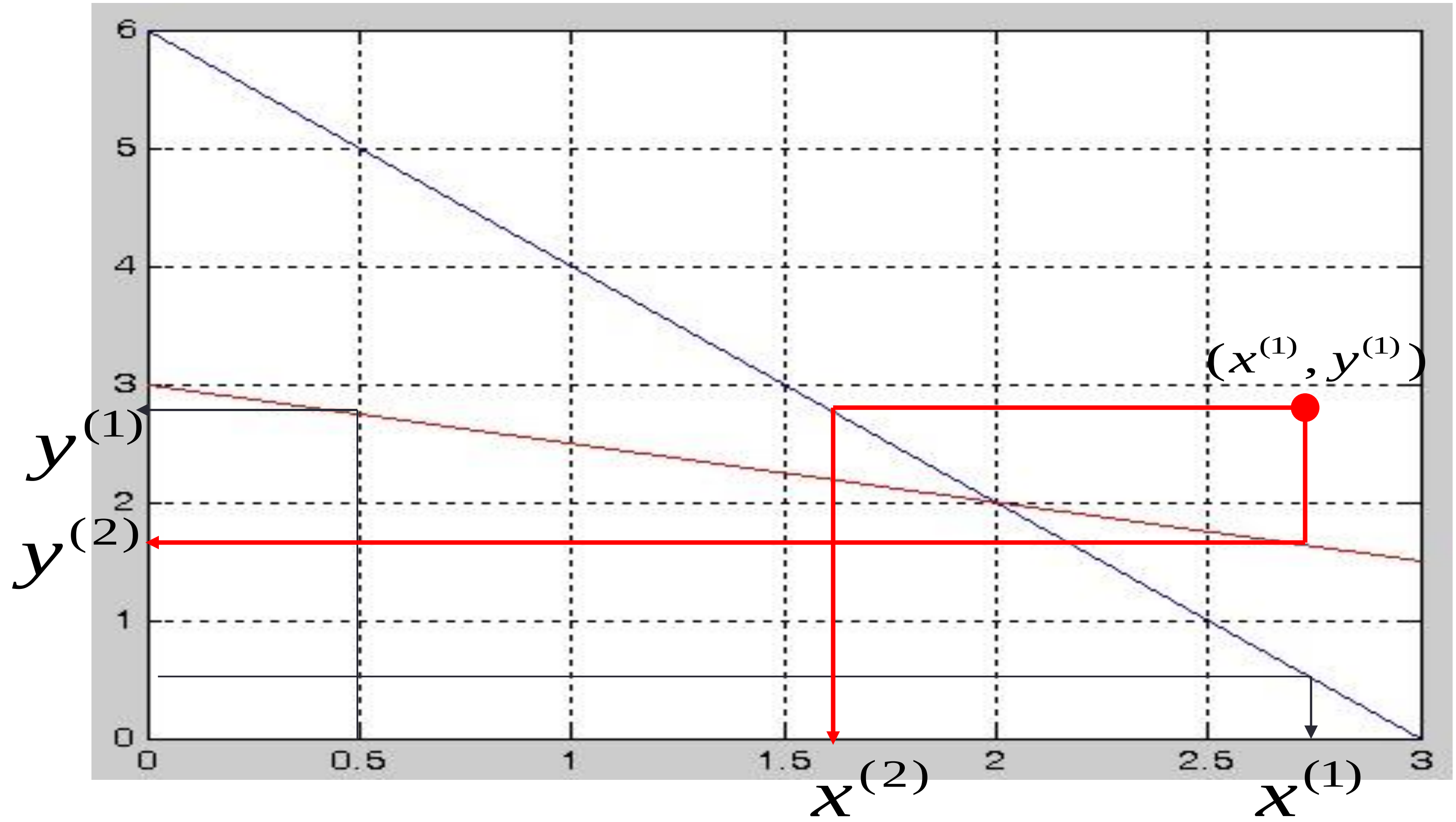
Iteracija #1



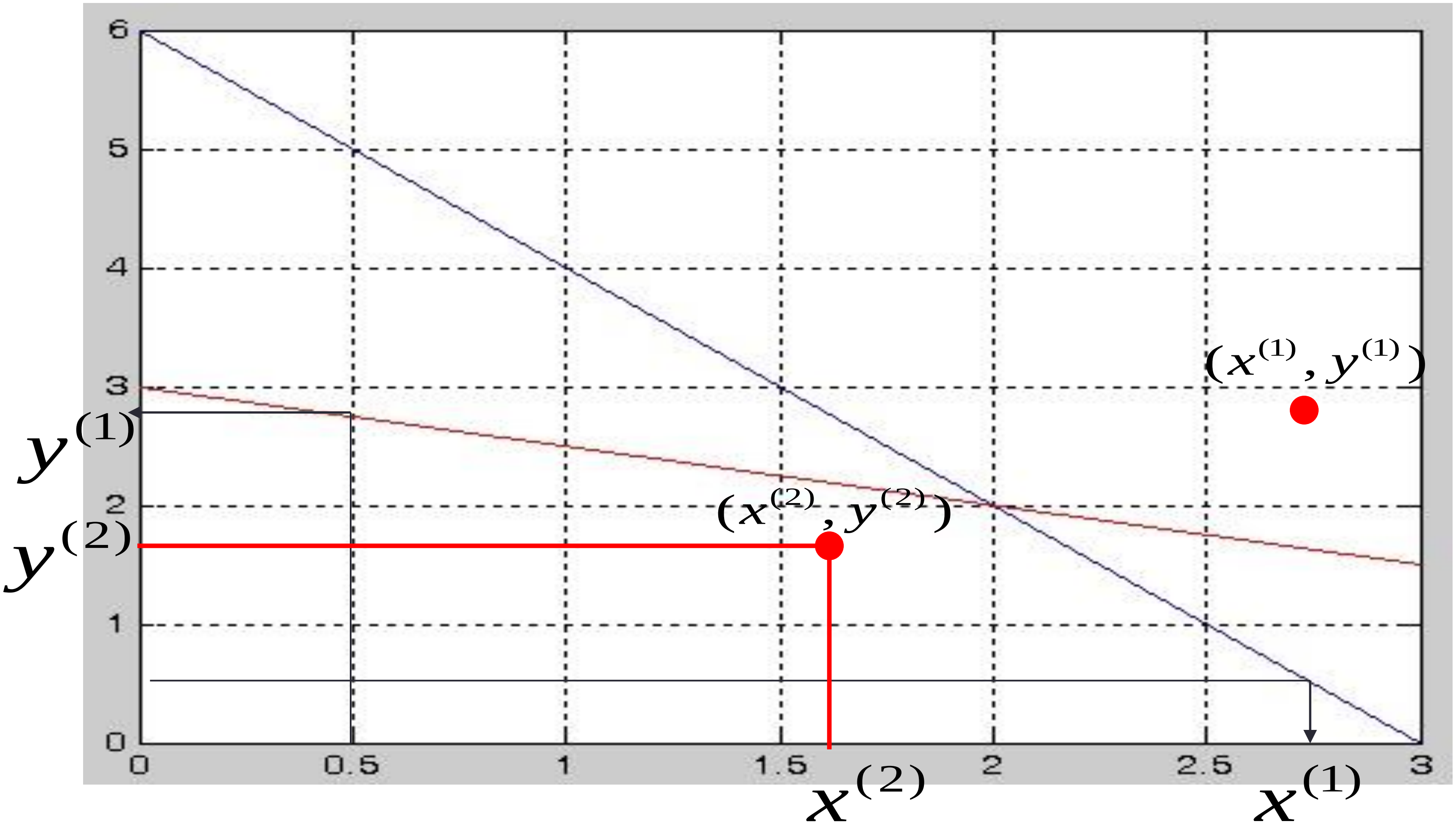
Iteracija #1 (nastavak)



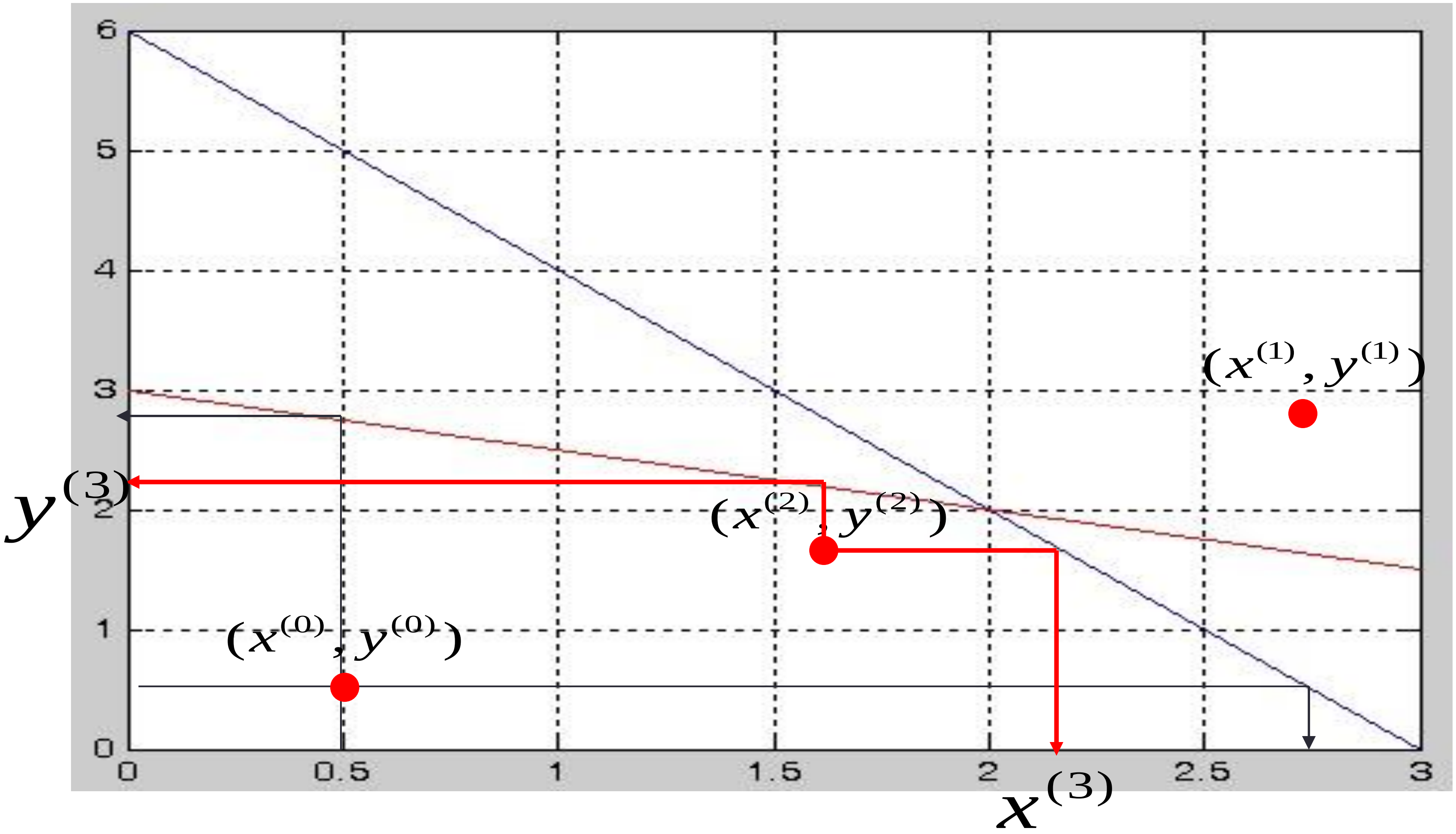
Iteracija #2



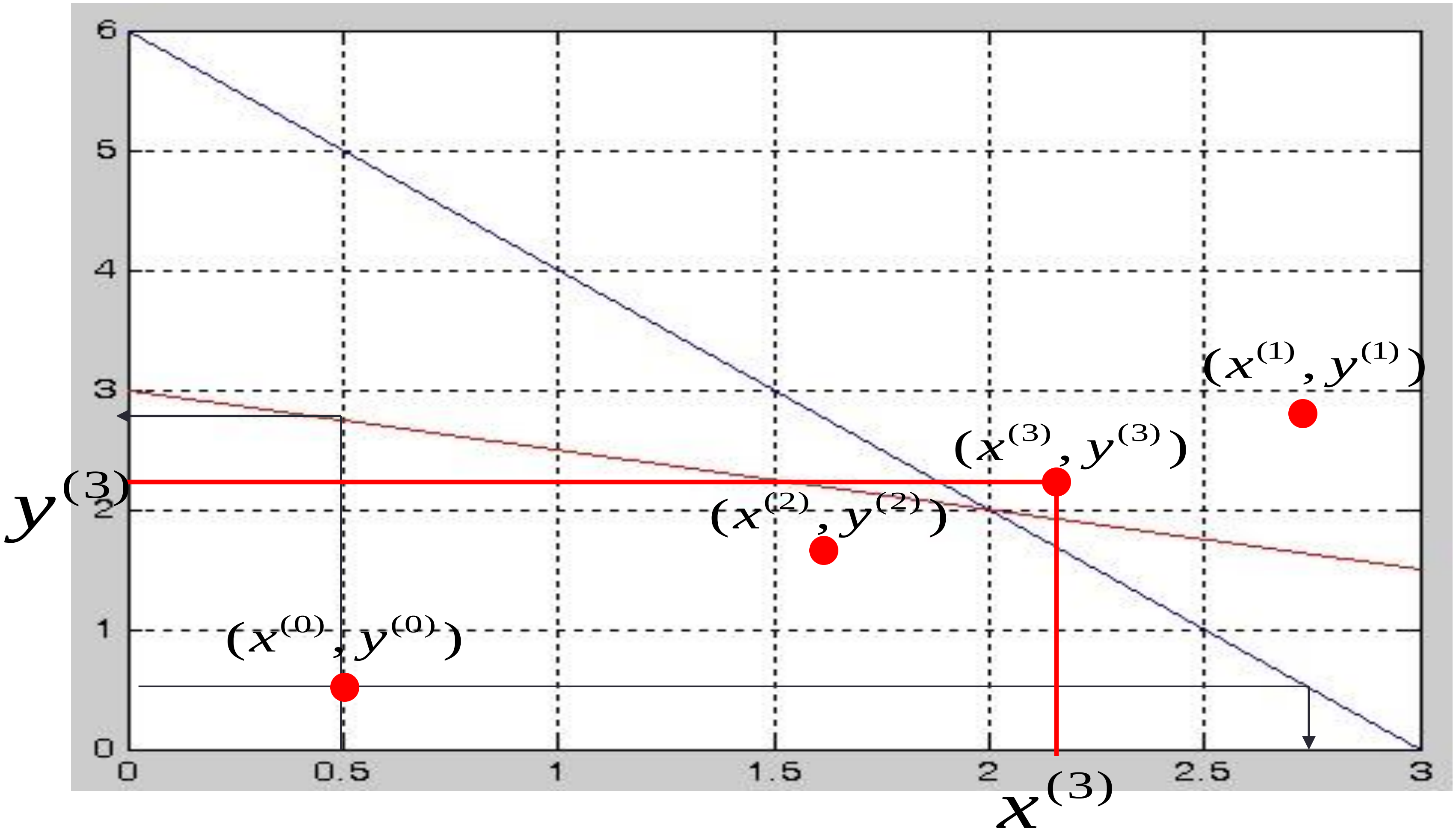
Iteracija #2 (nastavak)



Iteracija #3



Iteracija #3 (nastavak)



Primer – Matlab

$$\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ x + 2y &= 6 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= -\frac{1}{2}y + 3 \\ y &= -\frac{1}{2}x + 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Matlab:

```
jacobi(A,b,100,10^-5,[0.5,0.5])
```

Iteracija #	x-koordinata	y-koordinata	$\left\| x_k - x_{k-1} \right\|$
0	0.500000000000000	0.500000000000000	/
1	2.750000000000000	2.750000000000000	2.250000000000000
2	1.625000000000000	1.625000000000000	1.125000000000000
3	2.187500000000000	2.187500000000000	0.562500000000000
4	1.906250000000000	1.906250000000000	0.281250000000000
5	2.046875000000000	2.046875000000000	0.140625000000000
6	1.976562500000000	1.976562500000000	0.070312500000000
7	2.011718750000000	2.011718750000000	0.035156250000000
8	1.994140625000000	1.994140625000000	0.017578125000000
9	2.002929687500000	2.002929687500000	0.008789062500000
10	....	....	....

Tačno rešenje je (2,2)

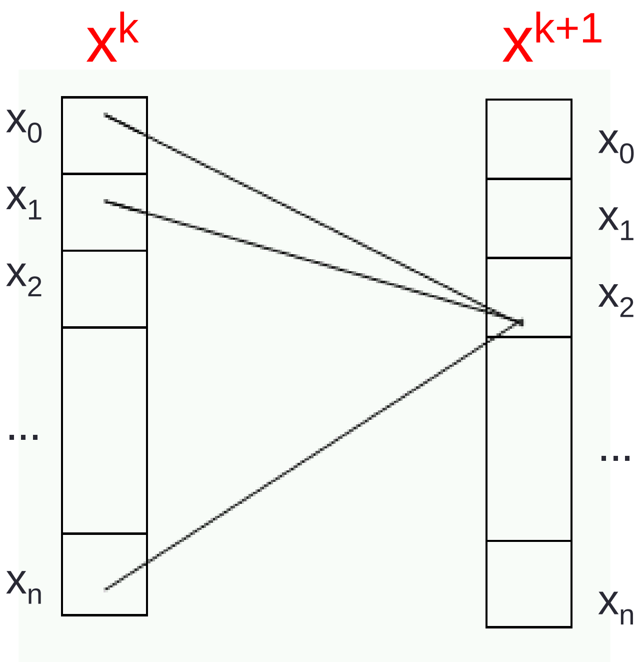
Posle 20 iteracija apsolutna približna greška pada ispod 10^{-5} (tolerancija)

Jakobijev metod mane

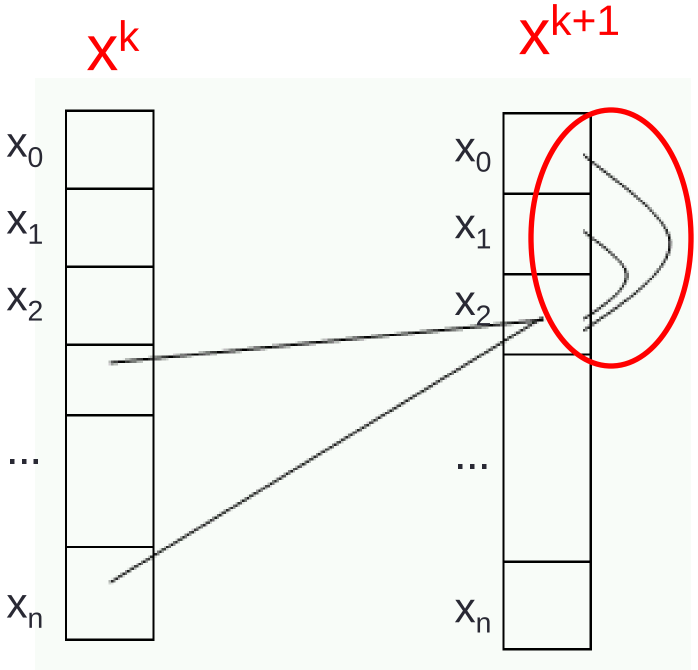
- Jakobijev metod radi ali,
- u trenutnoj iteraciji ne koristi najnovije informacije o rešenju.
- Kad računamo (x^1,y^1), koristimo (x^0,y^0) ali,
- pre nego što izračunamo y^1 mi već imamo x^1 (bolju procenu od x^0).
- Što ne bi iskoristili x^1 za izračunavanje y^1?
- Tako dobijamo Gaus-Zajdelovu metodu.

Gauss-Zajdelov metod

Jakobijev metod



Gaus-Zajdelov metod



Gauss-Zajdelov metod

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \longrightarrow a_{11}x_1^{novo} = b_1 - (a_{12}x_2^{staro} + a_{13}x_3^{staro})$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \longrightarrow a_{22}x_2^{novo} = b_2 - (a_{21}x_1^{novo} + a_{23}x_3^{staro})$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \longrightarrow a_{33}x_3^{novo} = b_3 - (a_{31}x_1^{novo} + a_{32}x_2^{novo})$$

Gauss-Zajdelov metod

- Uopštenje prethodnog primera

Koristimo najnovije informacije

$$\begin{aligned} a_{11}\boxed{x_1} + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\boxed{x_2} + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}\boxed{x_n} &= b_n \end{aligned}$$

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}$$

$$x_1^1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^0 - \cdots - a_{1n}x_n^0)$$

$$x_2^1 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^1 - a_{23}x_3^0 - \cdots - a_{2n}x_n^0)$$

$$x_n^1 = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^1 - a_{n2}x_2^1 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^1)$$

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{k} \right]$$

Gauss-Zajdelov metod matrični zapis

$$Ax=b \Rightarrow (L+D+U)x=b$$

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1}}_{Lx^{k+1}} - \underbrace{\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{k}}_{Ux^{k}} \right]$$

Dx^{k+1}

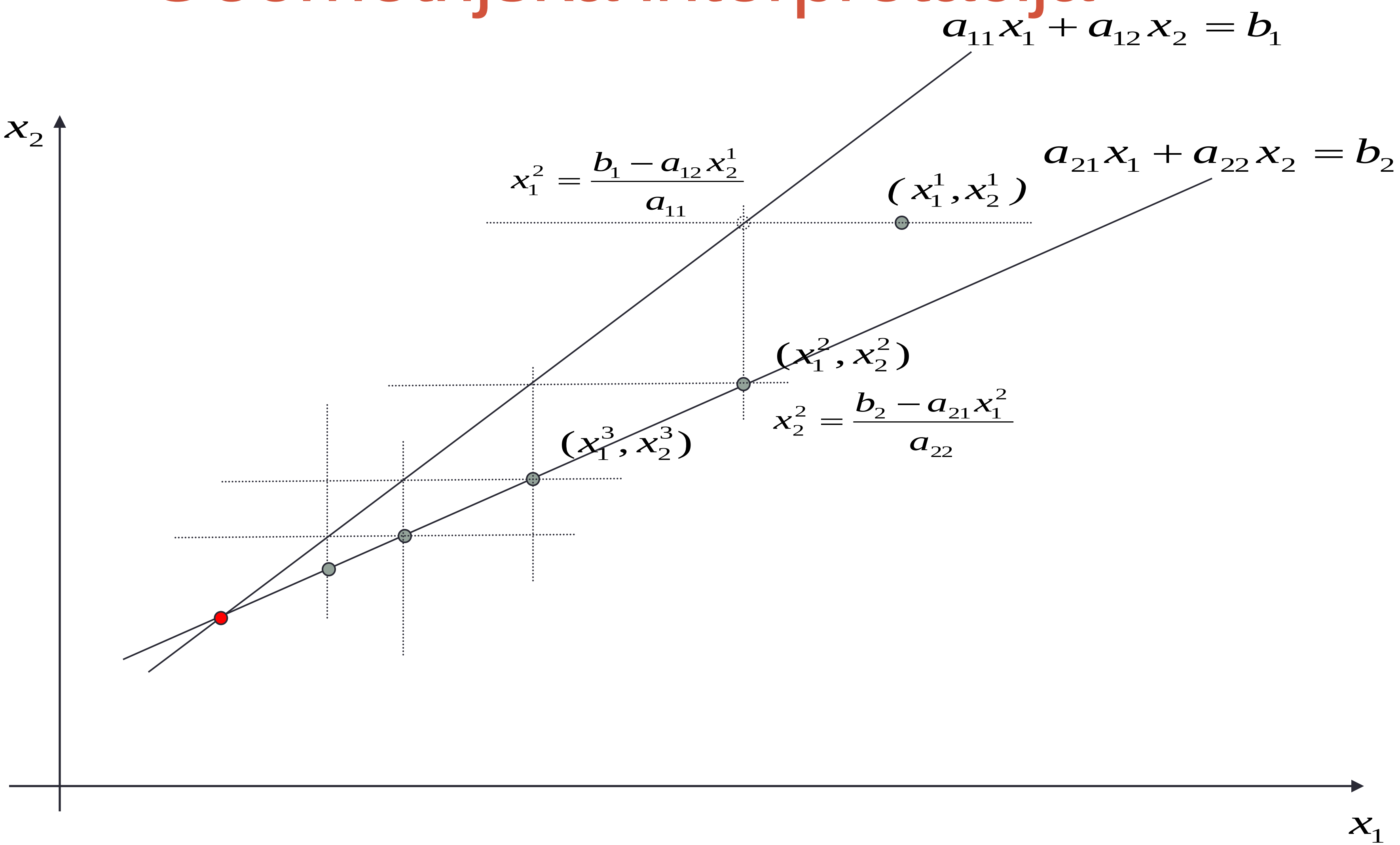
$$(D+L)x^{k+1} = -Ux^k + b$$

$$x^{k+1} = -(D+L)^{-1}Ux^k + (D+L)^{-1}b$$

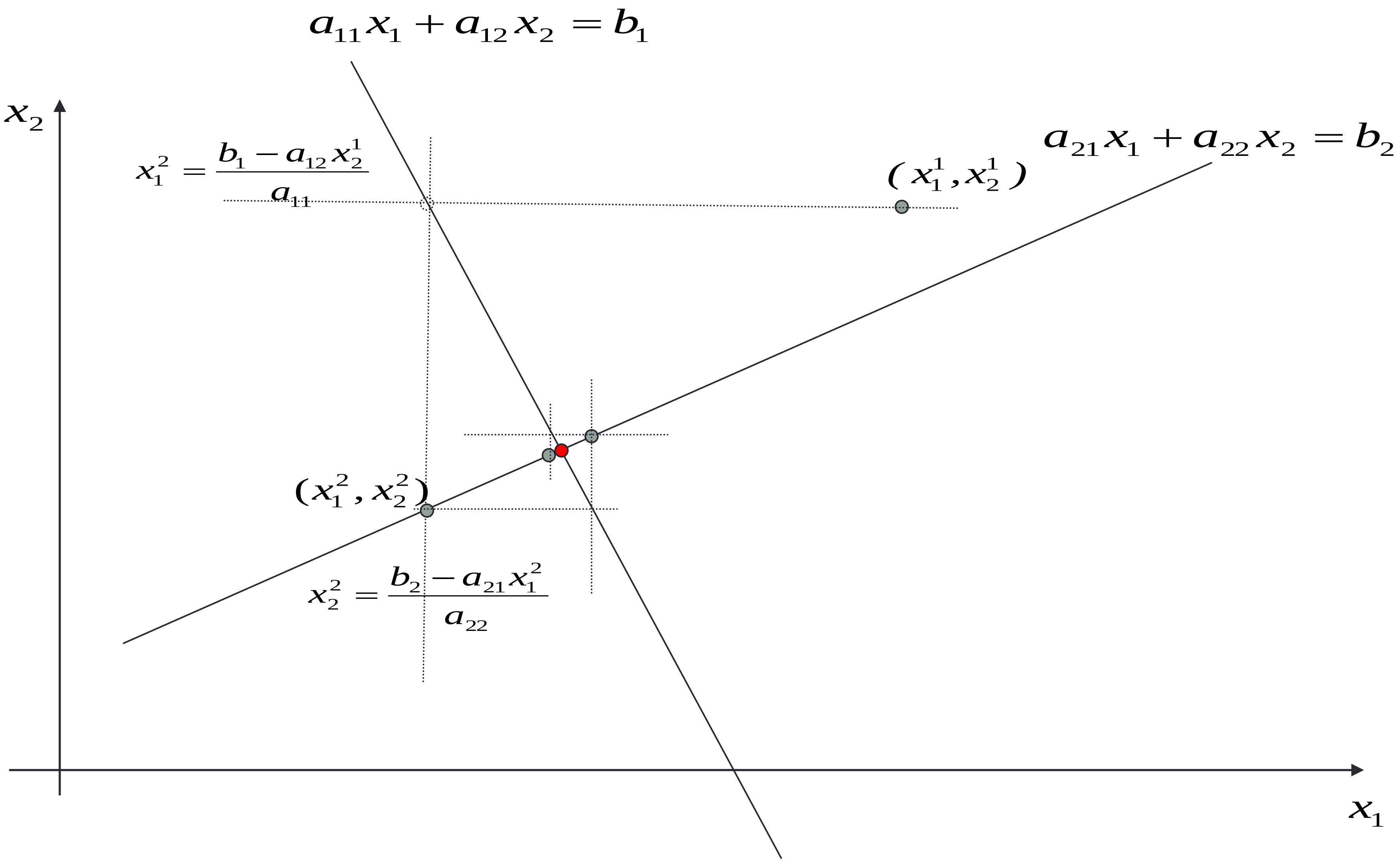
$$T = -(D+L)^{-1}U$$

$$c = -(D+L)^{-1}b$$

Geometrijska interpretacija



Geometrijska interpretacija



Matlab kod

```
function x=gausz(A,b,maxIter,tacnost,x0)
xk = x0;
xkplus1 = x0;
[n m] = size(A);
for k = 1:maxIter
    for i = 1:n
        s=0;
        for j=1:i-1
            s = s + A(i,j)* xkplus1(j);
        end
        for j=i+1:n
            s = s + A(i,j)*xk(j);
        end
        xkplus1(i)=(b(i)-s)/A(i,i);
    end
    if(abs(xk-xkplus1)<tacnost)
        break;
    end
    xk = xkplus1;
end
x=xkplus1;
```

```
%ovo je jakobi
%primetite razliku
for j=1:n
  if(i~=j)
    s = s + A(i,j)*xk(j);
  end
end
```

Gaus-Zajdelov metod primer 2x2

- Rešavamo sistem:

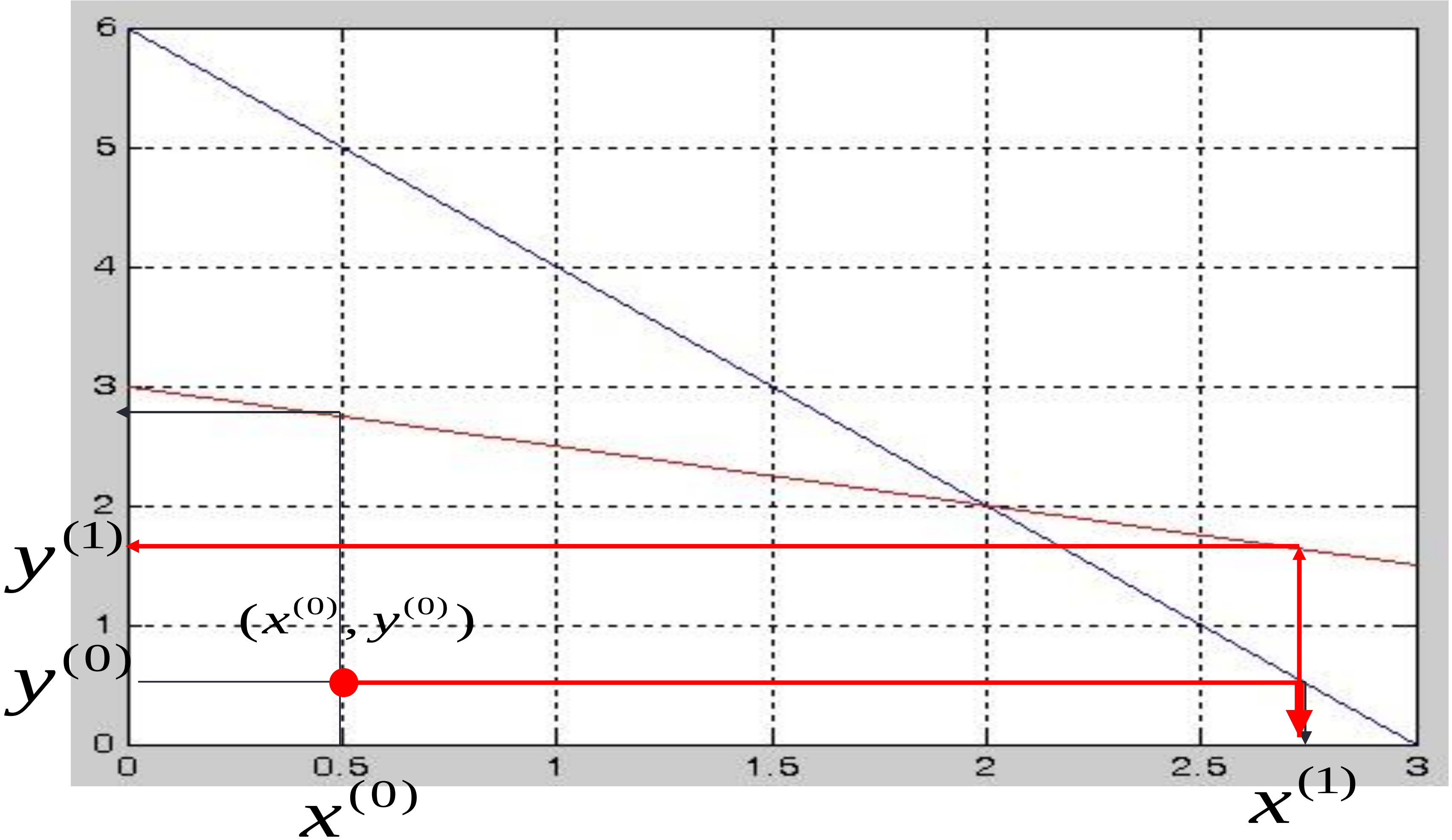
$$\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ x + 2y &= 6 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= -\frac{1}{2}y + 3 \\ y &= -\frac{1}{2}x + 3 \end{aligned}$$

- početno rešenje $x^{(0)} = y^{(0)} = 1/2$
- Prva iteracija algoritma

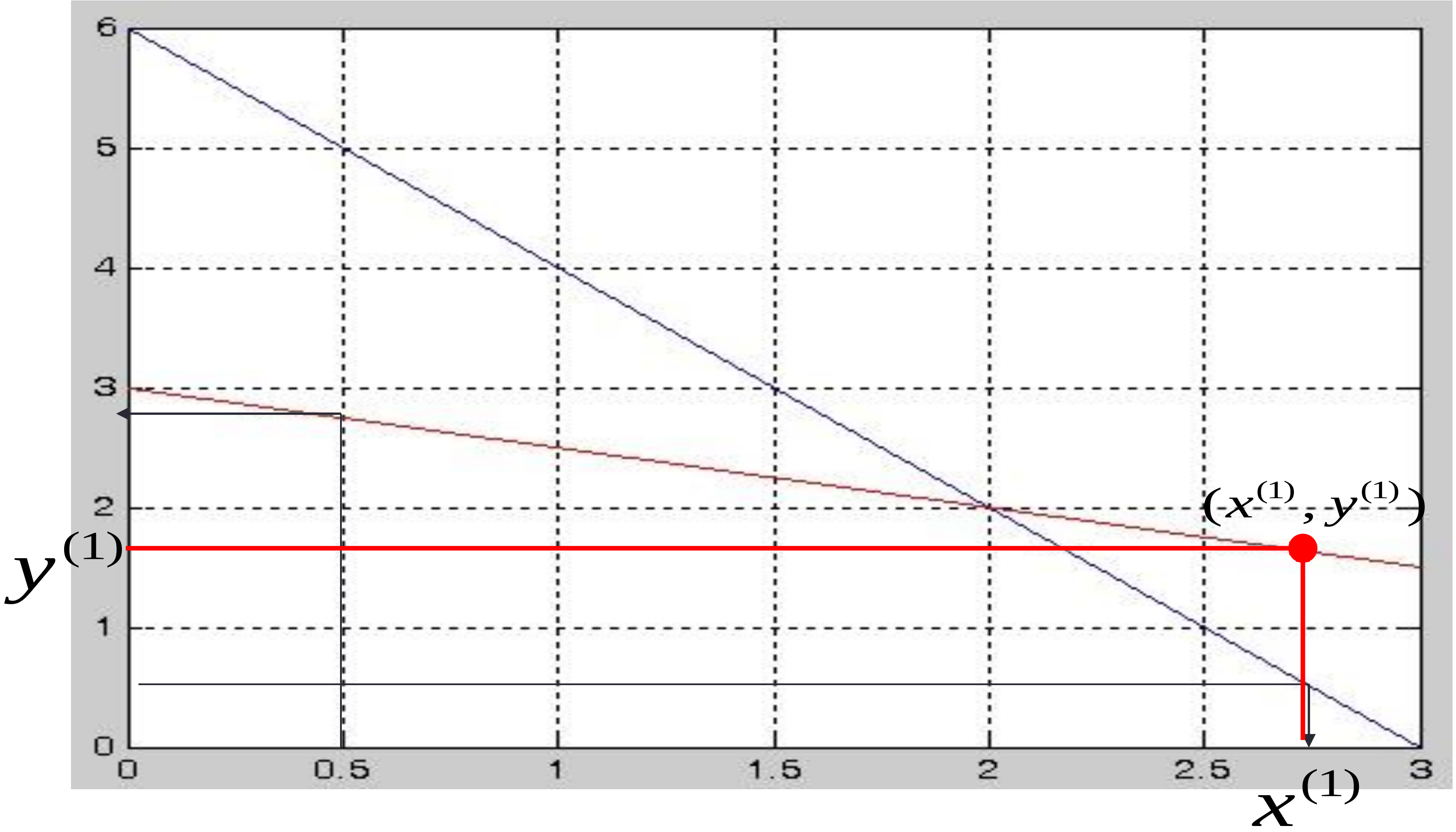
$$x^{(1)} = -\frac{1}{2}y^{(0)} + 3 = -\frac{1}{2} * \frac{1}{2} + 3 = -\frac{1}{4} + 3 = \frac{11}{4}$$

$$y^{(1)} = -\frac{1}{2}x^{(1)} + 3 = -\frac{1}{2} * \frac{11}{4} + 3 = -\frac{11}{8} + 3 = \frac{13}{8}$$

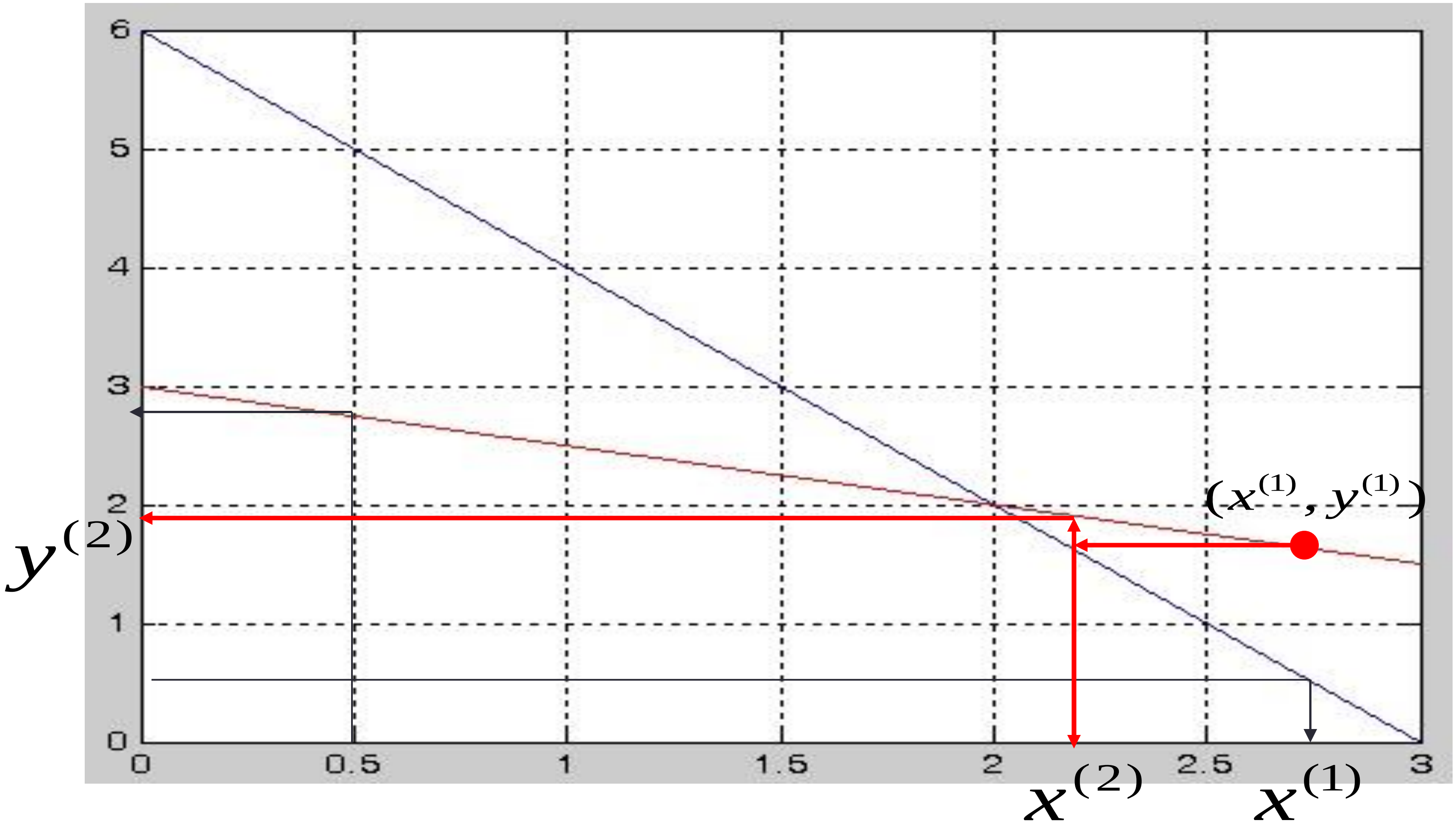
Iteracija #1



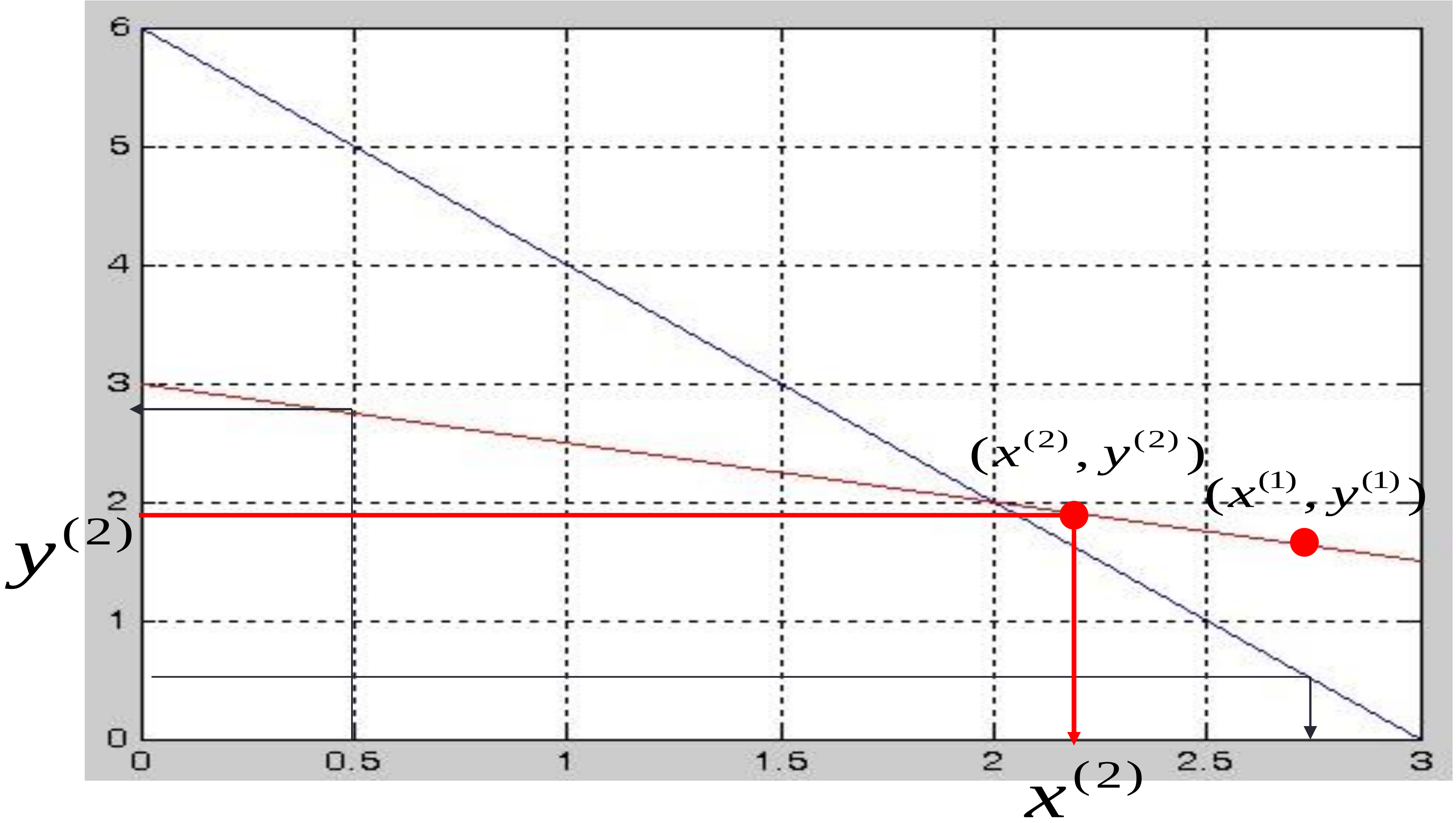
Iteracija #1 (nastavak)



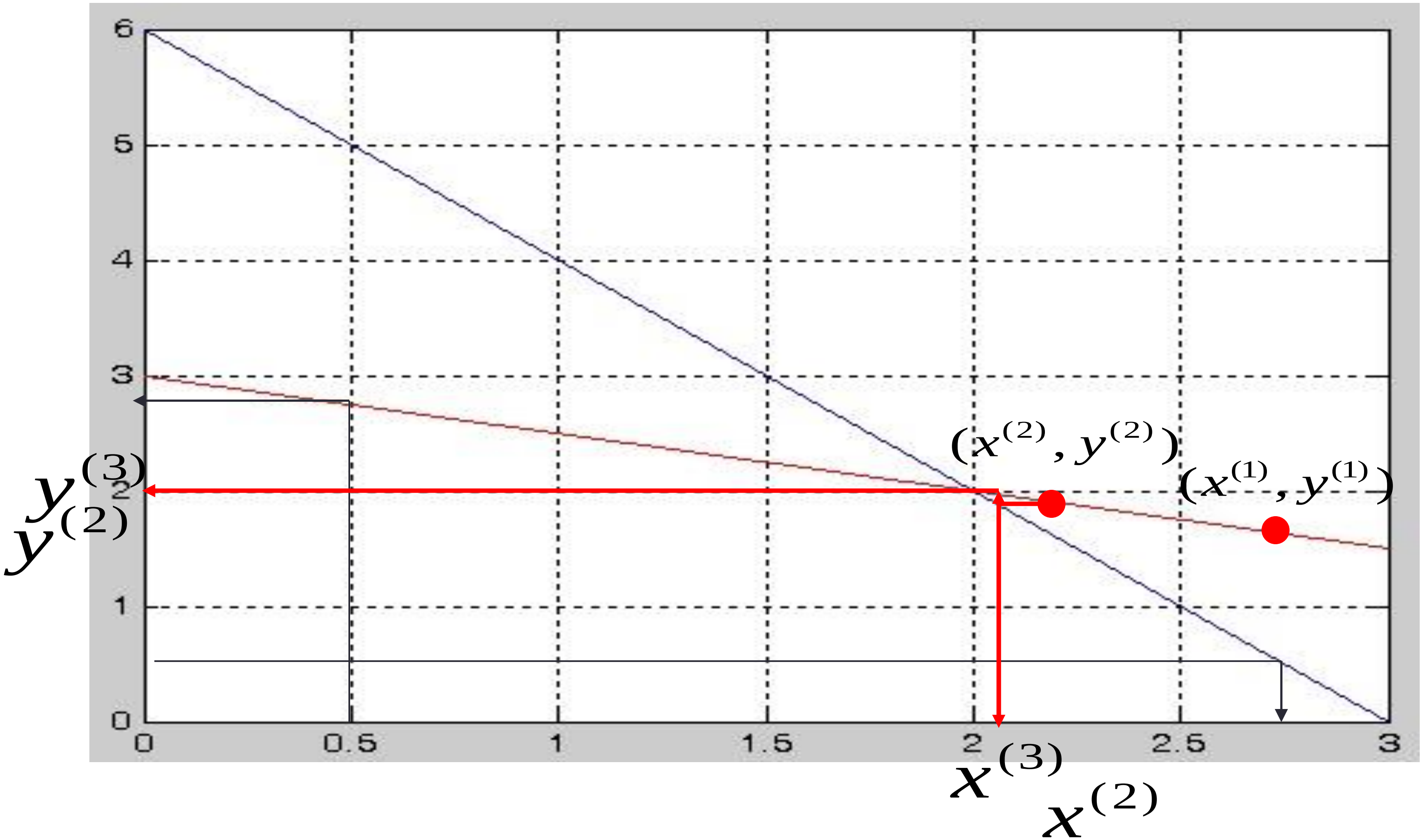
Iteracija #2



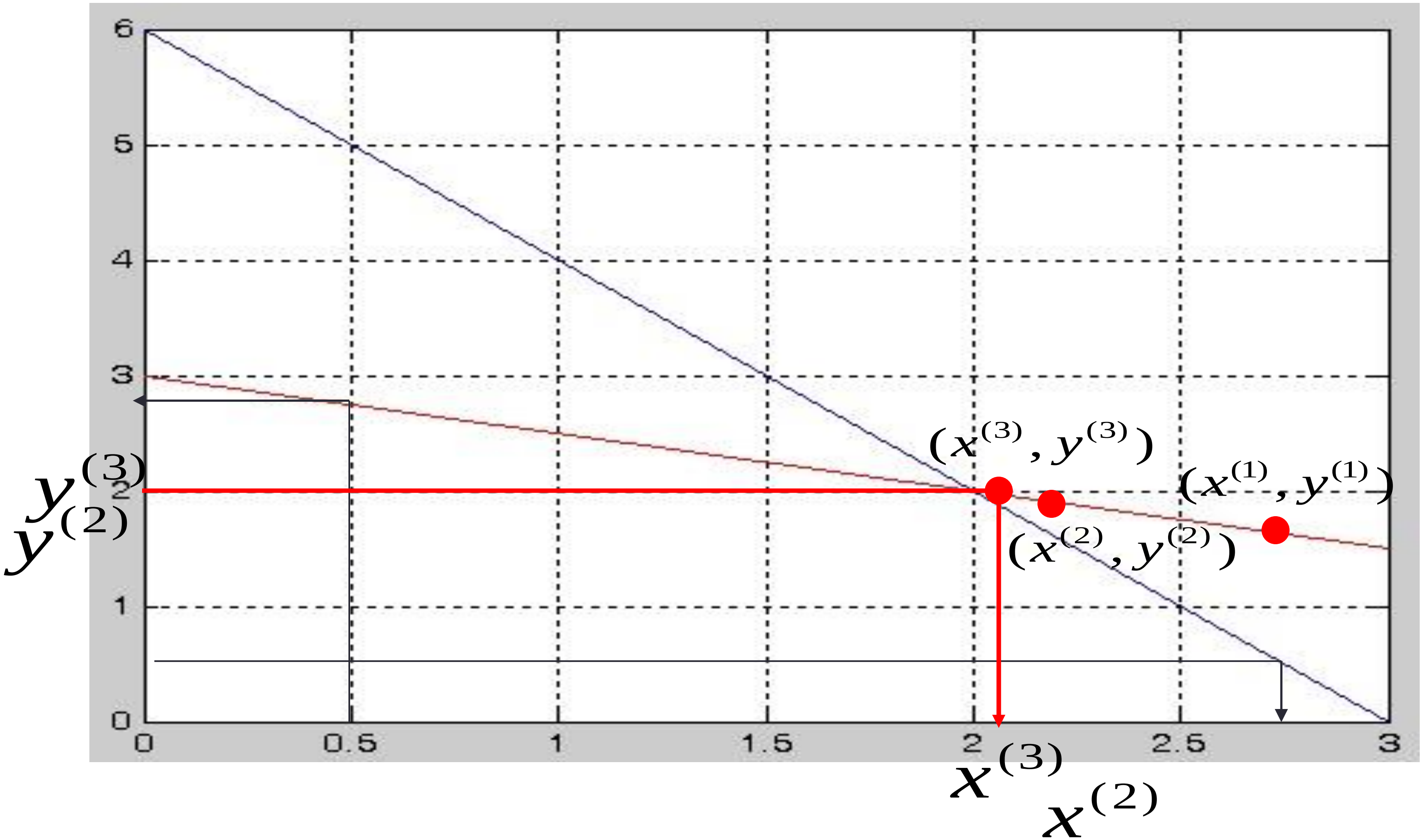
Iteracija #2 (nastavak)



Iteracija #3



Iteracija #3 (nastavak)



Primer – Matlab

$$\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ x + 2y &= 6 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= -\frac{1}{2}y + 3 \\ y &= -\frac{1}{2}x + 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Matlab:

```
gausz(A,b,100,10^-5,[0.5,0.5])
```

Iteracija #	x-koordinata	y-koordinata	$\left\|x_k - x_{k-1}\right\|$
0	0.500000000000000	0.500000000000000	/
1	2.750000000000000	1.625000000000000	2.250000000000000
2	2.187500000000000	1.906250000000000	0.562500000000000
3	2.046875000000000	1.976562500000000	0.140625000000000
4	2.011718750000000	1.994140625000000	0.035156250000000
5	2.002929687500000	1.998535156250000	0.008789062500000
6	2.000732421875000	1.999633789062500	0.002197265625000
7	2.000183105468750	1.999908447265625	0.000549316406250
8	2.000045776367188	1.999977111816406	0.000137329101563
9	2.000011444091797	1.999994277954102	0.000034332275391
10	2.000002861022949	1.999998569488525	0.000008583068848

Tačno rešenje je (2,2)

Posle 10 iteracija apsolutna približna greška pada ispod 10^{-5}

Konvergencija iterativnih metoda

Ako je tačno rešenje sistema $\hat{x}$

Ako je greška u *k*-toj iteraciji e^k

$$x^k = e^k + \hat{x}$$ x^k se za e^k razlikuje od tačnog reš.

Zamenimo to u: $x^{k+1} = Tx^k + c$

jer je x=Tx+c

$$e^{k+1} + \cancel{\hat{x}} = x^{k+1} = Tx^k + c = T(e^k + \hat{x}) + c = Te^k + \cancel{T\hat{x} + c}$$

$$e^{k+1} = Te^k = TTe^{k-1} = TTTe^{k-2} = T^{(k+1)}e^0$$

Konvergencija iterativnih metoda

iteracija $$\left\| e^{k+1} \right\| = \left\| T^{(k+1)} e^{0} \right\| \leq \left\| T^{(k+1)} \right\| \left\| e^{0} \right\|$$ stepen

Iterativni metod će konvergirati za bilo koje početno rešenje x^0 ako važi sledeće:

<u>Uslov za konvergenciju</u>

$$\operatorname*{Lim}_{k \to \infty} \left\| e^{k+1} \right\| \to 0 \quad \text{ako} \quad \operatorname*{Lim}_{k \to \infty} \left\| T^{(k+1)} \right\| \to 0$$

Konvergencija iterativnih metoda

- Na osnovu prethodnog iterativni metod konvergira ako je

$$\|T\| < 1$$

- jer tada važi $$\lim_{k\to\infty} \left\| T^{(k+1)} \right\| \to 0$$

Konvergencija iterativnih metoda

- Problem sa prethodnim uslovom za konvergenciju je to što zavisi od izbora norme.
- Može se dogoditi da metod konvergira iako je $\|T\| > 1$ zato što smo odabrali normu koja je nije pogodna za tu konkretnu T.
- Ako metod konvergira neka od normi će biti < 1 ali traženje takve norme predstavlja gubljenje vremena.
- Dakle potreban nam je uslov koji ne zavisi od norme.

Spektralni radijus

- Spektralni radijus ρ matrice T je apsolutna vrednost njene <u>maksimalne</u> karakteristične (sopstvene) vrednosti

$$\rho(T) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$$

- gde su λ_i karateristične vrednosti matrice.
- Karakteristične vrednosti matrice T:

$$Tx = \lambda x$$

Spektralni radijus

- Za svaku matričnu normu važi:

$$\rho(T) \leq \|T\|$$

- Pa, ako je $\rho(T) \geq 1$ onda je i $\|T\| \geq 1$, pa metod divergira.
- Pošto ovo važi za sve norme, ako znamo da je $\rho(T) \geq 1$ metod sigurno divergira.
- Znači da $\rho(T) < 1$ je potreban uslov za konvergenciju tj. ako on ne važi metod divergira.

Spektralni radijus

- Može se pokazati da važi i

$$\rho(T) < 1 \Rightarrow \|T\| < 1$$

- To znači da je $\rho(T) < 1$ i potreban i dovoljan uslov.
- Ako metod konvergira mora da važi $\rho(T) < 1$
- Ako važi $\rho(T) < 1$ onda metod konvergira.

Konvergencija Jakobijevog metoda

$T=-D^{-1}(L+U)$

$$T=\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\dfrac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & -\dfrac{a_{n-1n}}{a_{n-1n-1}} \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & \cdots & -\dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix}$$

Konvergencija Jakobijevog metoda

Izračunamo *row sum* normu T (maksimum zbira apsolutnih vrednosti po vrstama)

$$\|T\|_\infty < 1 \Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \quad \text{za } i = 1,2,\ldots,n$$

$$\Rightarrow |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$$

Ako ovo važi za matricu se kaže da je dijagonalno dominantna

Ako je matrica A dijagonalno dominantna, Jakobijev metod konvergira za <u>bilo koje</u> početno rešenje.

Primetite da se ovaj uslov proverava <u>za A</u>, a ne T.

Konvergencija Gaus-Zajdelovog metoda

- GZ metod konvergira za bilo koje početno rešenje ako je matrica A dijagonalno dominantna
- Pored toga postoje i drugi načini provere konvergencije GZ metoda,
- na primer ako je A simetrična i pozitivno definitna, ali se njima nećemo baviti detaljnije.

Performanse iterativnih metoda

- Podsetimo se da je broj operacija za Gaussovu eliminaciju $O(n^3)$ tj. reda n^3.
- Za iterativne metode broj množenja u svakoj iteraciji je $O(n^2)$.
- Ako je broj iteracija potrebnih za konvergenciju mnogo manji od *n*, tada su iterativne metode efikasnije od direktnih.
- Iterativne metode su takođe efikasne kad je A matrica koja sadrži puno nula elemenata (što je čest slučaj u praksi – npr. PageRank, sistemi za preporuku itd).

Primer konvergencije za Jakobijev metod

- Za primer od ranije,

$$\begin{aligned}2x+y&=6\\ x+2y&=6\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}x&=-\frac{1}{2}y+3\\ y&=-\frac{1}{2}x+3\end{aligned} \Rightarrow A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix}6\\ 6\end{bmatrix}$$

- Za Jakobijev metod matrica T je $D^{-1}(L+U)$ ili u Matlabu

```
>> L=[0,0;1,0]      >> U=[0,1;0,0]    >> D=[2,0;0,2]     >> T=-D^-1*(L+U)

L =
                    U =                D =                T =
     0     0
                         0     1            2     0              0   -0.5000
     1     0             0     0            0     2        -0.5000         0
```

Primer konvergencije za Jakobijev metod

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
%ρ(T) matlab kod
e = eig(A);
ro = max(abs(e));
```

1. *row sum* norma od T je $\|T\|_{\infty} = 0.5 < 1$
2. Spektralni radijus od T je $\rho(T) = 0.5 < 1$
3. A (ne T) je dijagonalno dominantna

- Uslovi od 1., 2. i 3. pokazuju da Jakobijev metod <u>konvergira za ovaj primer</u>.

Primer konvergencije za GZ metod

- Za primer od ranije,

$$\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ x + 2y &= 6 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= -\frac{1}{2}y + 3 \\ y &= -\frac{1}{2}x + 3 \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- Za GZ metod matrica T je $-(D+L)^{-1}U$ ili u Matlabu

```
>> L=[0,0;1,0]      >> U=[0,1;0,0]   >> D=[2,0;0,2]   >> T=-(D+L)^-1*U

L =
                    U =              D =              T =
     0     0
                         0     1          2     0          0   -0.5000
     1     0             0     0          0     2          0    0.2500
```

Primer konvergencije za GZ metod

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. *row sum* norma od T je $\|T\|_\infty = 0.5 < 1$
2. Spektralni radijus od T je $\rho(T) = 0.25 < 1$
3. A (ne T) je dijagonalno dominantna

- Uslovi od 1.- 3. pokazuju da Gaus-Zajdelova metoda konvergira.

Primer divergencije za Jakobijev metod

$$\begin{aligned}2x+3y&=11\\5x+7y&=13\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}x&=-\frac{3}{2}y+\frac{11}{2}\\y&=-\frac{5}{7}x+\frac{13}{7}\end{aligned} \Rightarrow A=\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix}11\\13\end{bmatrix}$$

- Za Jakobijev metod matrica T je $-D^{-1}(L+U)$ ili u Matlabu

```
>> L=[0,0;5,0]     >> U=[0,3;0,0]  >> D=[2,0;0,7]    >> T=-D^-1*(L+U)

L =                U =             D =               T =

     0     0            0     3          2     0              0    -1.5000
     5     0            0     0          0     7        -0.7143          0
```

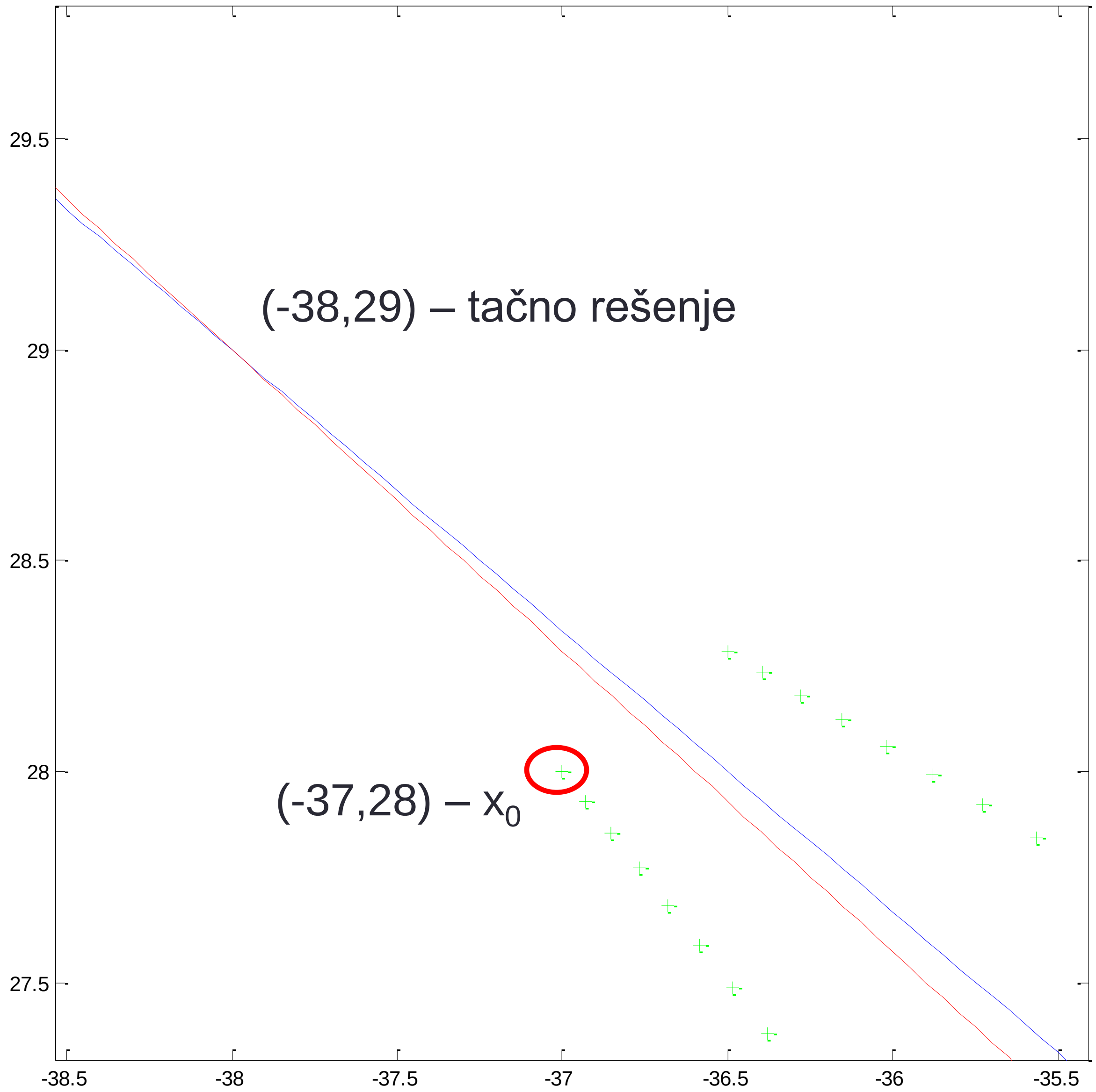
Primer divergencije za Jakobijev metod

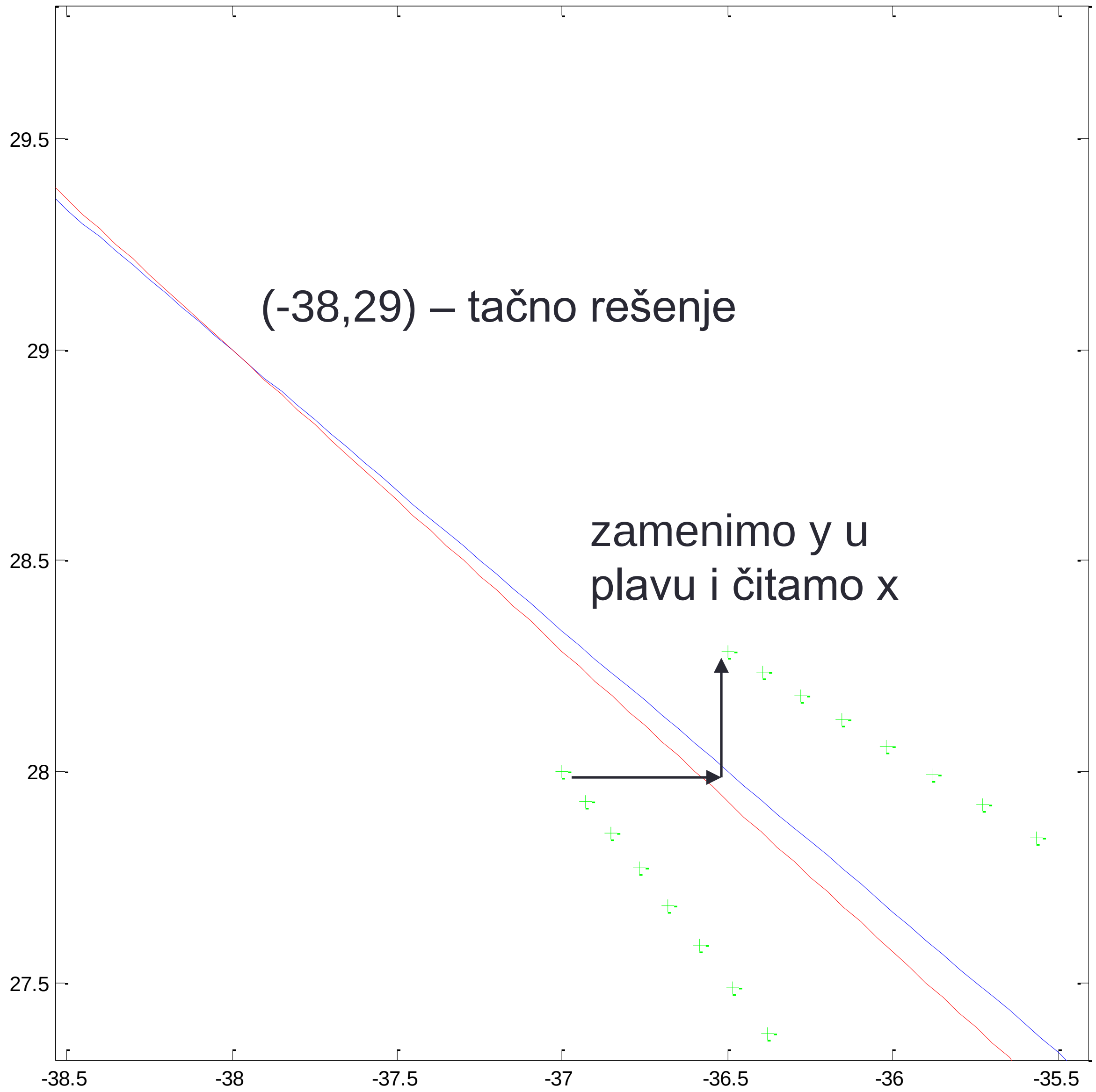
$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1.5 \\ -0.7143 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

1. *row sum* norma od T je $\|T\|_\infty = 1.5 > 1$
2. Spektralni radijus od T je $\rho(T) = 1.0351 > 1$
3. A (ne T) nije dijagonalno dominantna

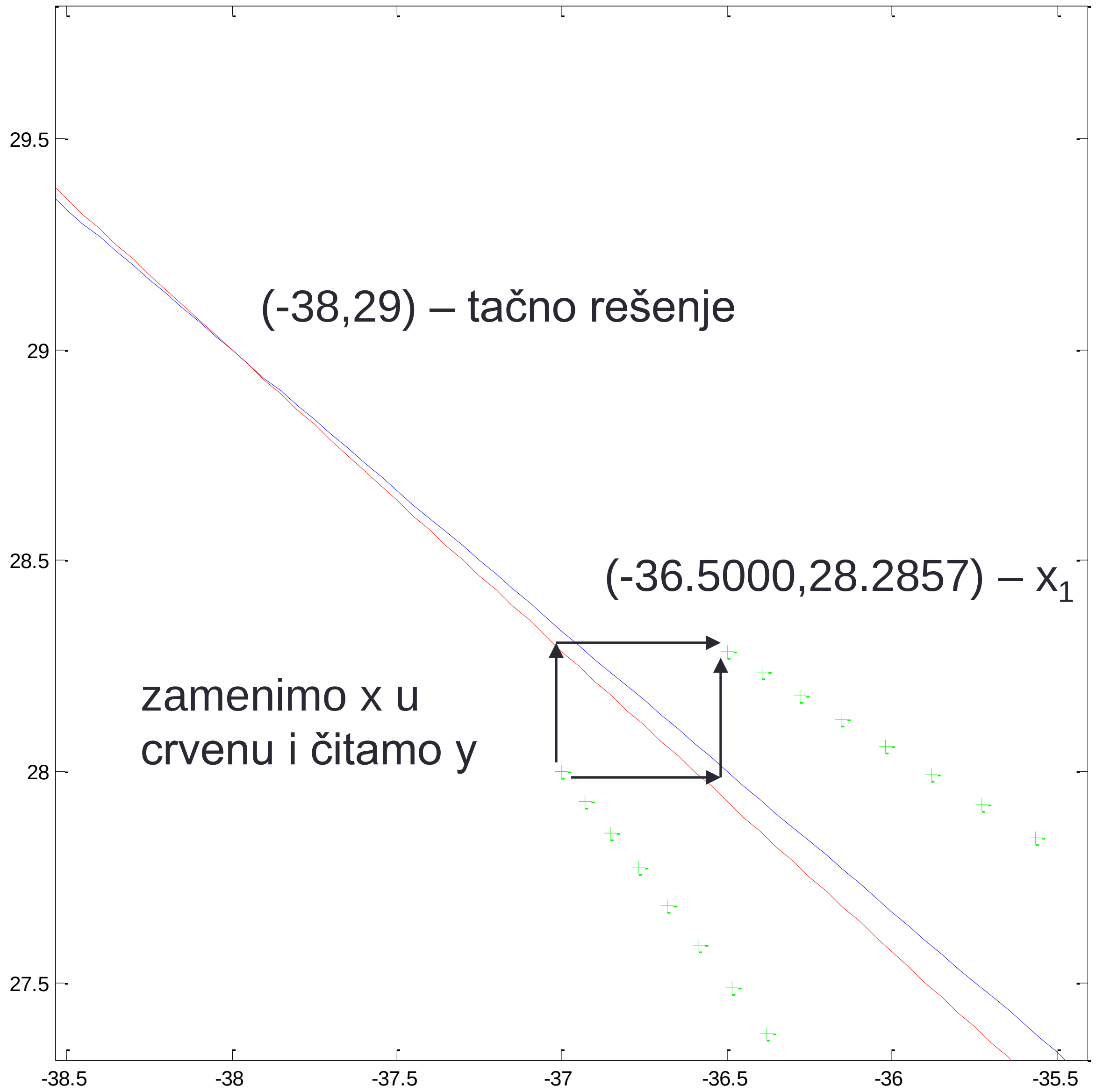
- Uslov 2. nam je sigurni pokazatelj da ni Jakobijeva ni GZ metoda neće konvergirati za ovaj primer.
- Ostali uslovi su nam samo indikator konvergencije kad važe ali ne i indikator divergencije kad ne važe (drugačije rečeno to su dovoljni ali ne i potrebni uslovi).

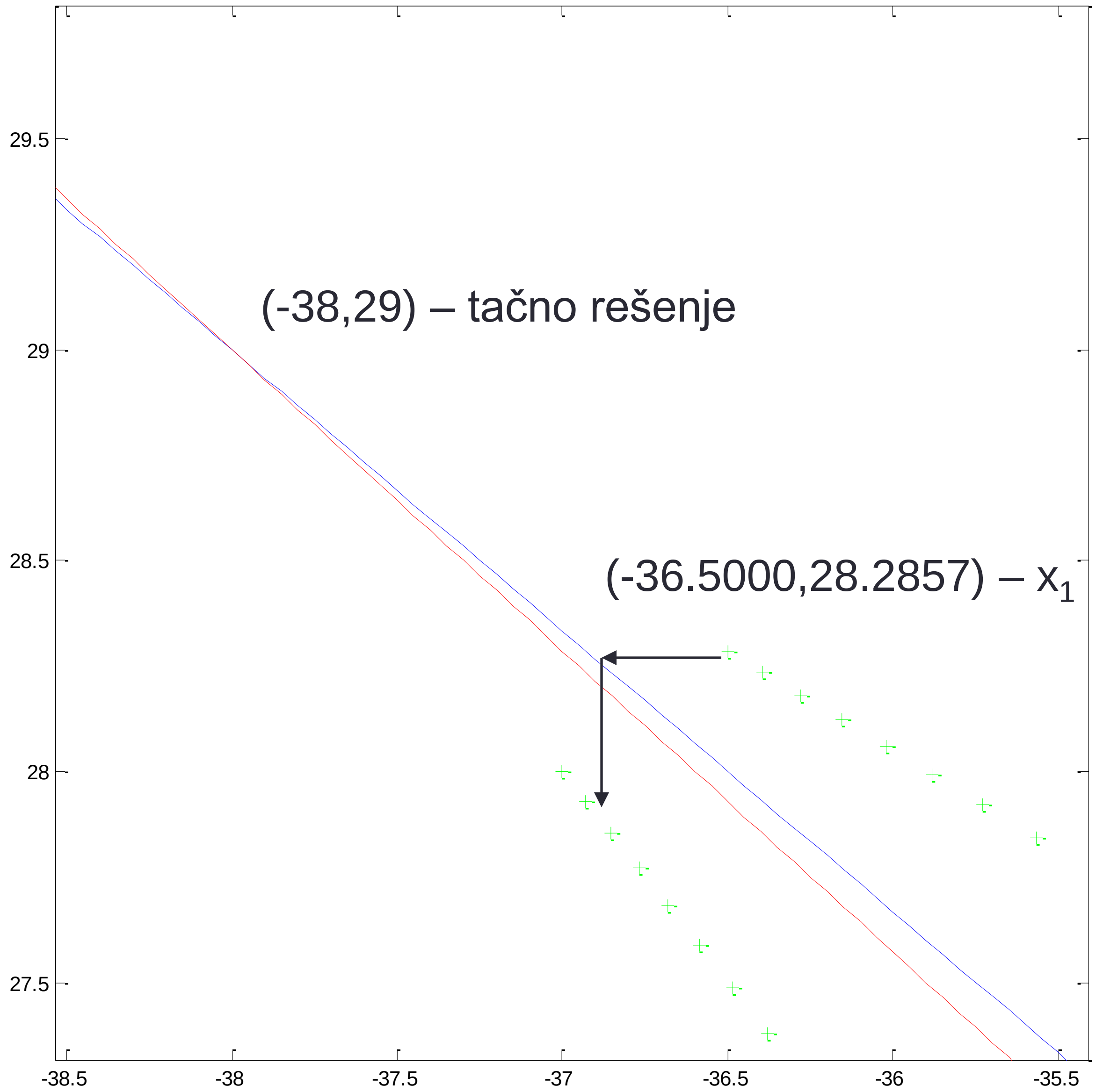
Primer divergencije za Jakobijev metod

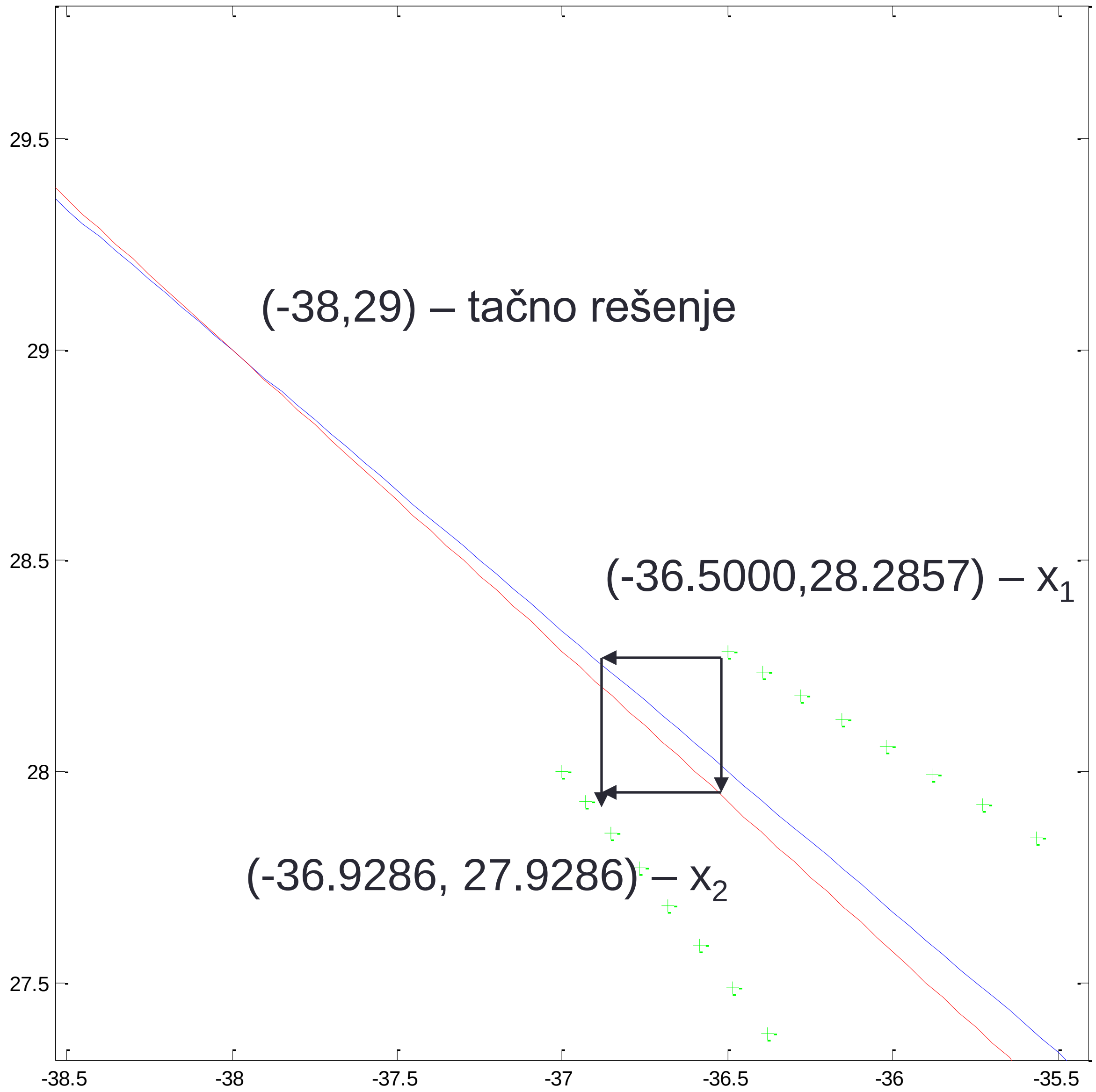




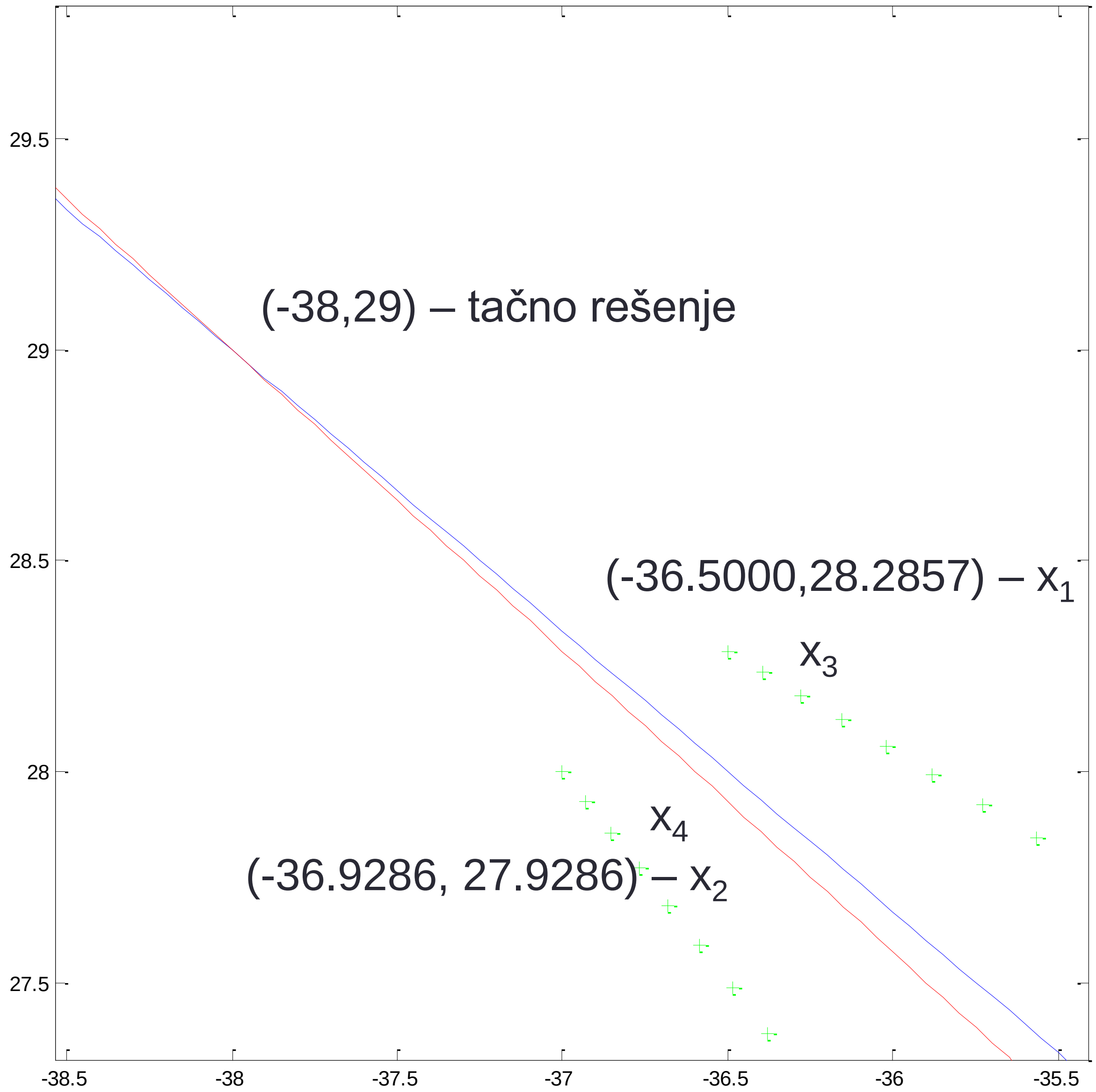
(-38,29) – tačno rešenje
zamenimo y u plavu i čitamo x
29.5
29
28.5
28
27.5
-38.5
-38
-37.5
-37
-36.5
-36
-35.5


(-38,29) – tačno rešenje
(-36.5000,28.2857) – x1
zamenimo x u
crvenu i čitamo y
29.5
29
28.5
28
27.5
-38.5
-38
-37.5
-37
-36.5
-36
-35.5


29.5
29
28.5
28
27.5
-38.5
-38
-37.5
-37
-36.5
-36
-35.5
(-38,29) – tačno rešenje
(-36.5000,28.2857) – x1



(-38,29) – tačno rešenje
(-36.5000,28.2857) – x_1
(-36.9286, 27.9286) – x_2
29.5
29
28.5
28
27.5
-38.5
-38
-37.5
-37
-36.5
-36
-35.5


(-38,29) – tačno rešenje
(-36.5000,28.2857) – x_1
x_3
x_4
(-36.9286, 27.9286) – x_2
29.5
29
28.5
28
27.5
-38.5
-38
-37.5
-37
-36.5
-36
-35.5

Primer divergencije - GZ

$$\begin{aligned} 2x+3y&=11 \\ 5x+7y&=13 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x&=-\frac{3}{2}y+\frac{11}{2} \\ y&=-\frac{5}{7}x+\frac{13}{7} \end{aligned} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix}$$

- Za GZ metod matrica T je $T=-(D+L)^{-1}*U$ ili u Matlabu

```
>> L=[0,0;5,0]    >> U=[0,3;0,0]  >> D=[2,0;0,7]   >> T=-(D+L)^-1*U

L =               U =             D =              T =

     0     0           0     3         2     0           0   -1.5000
     5     0           0     0         0     7           0    1.0714
```

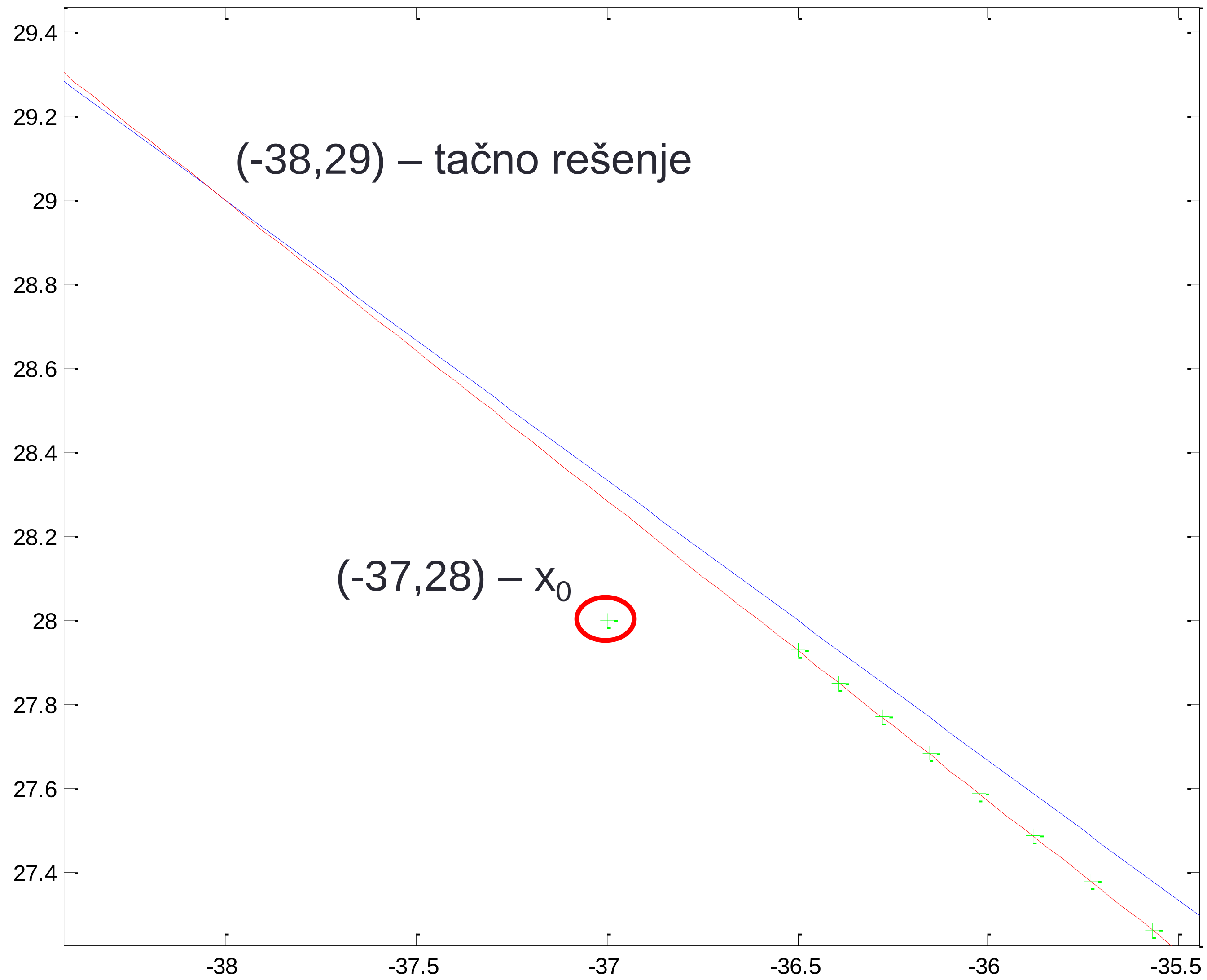
Primer divergencije - GZ

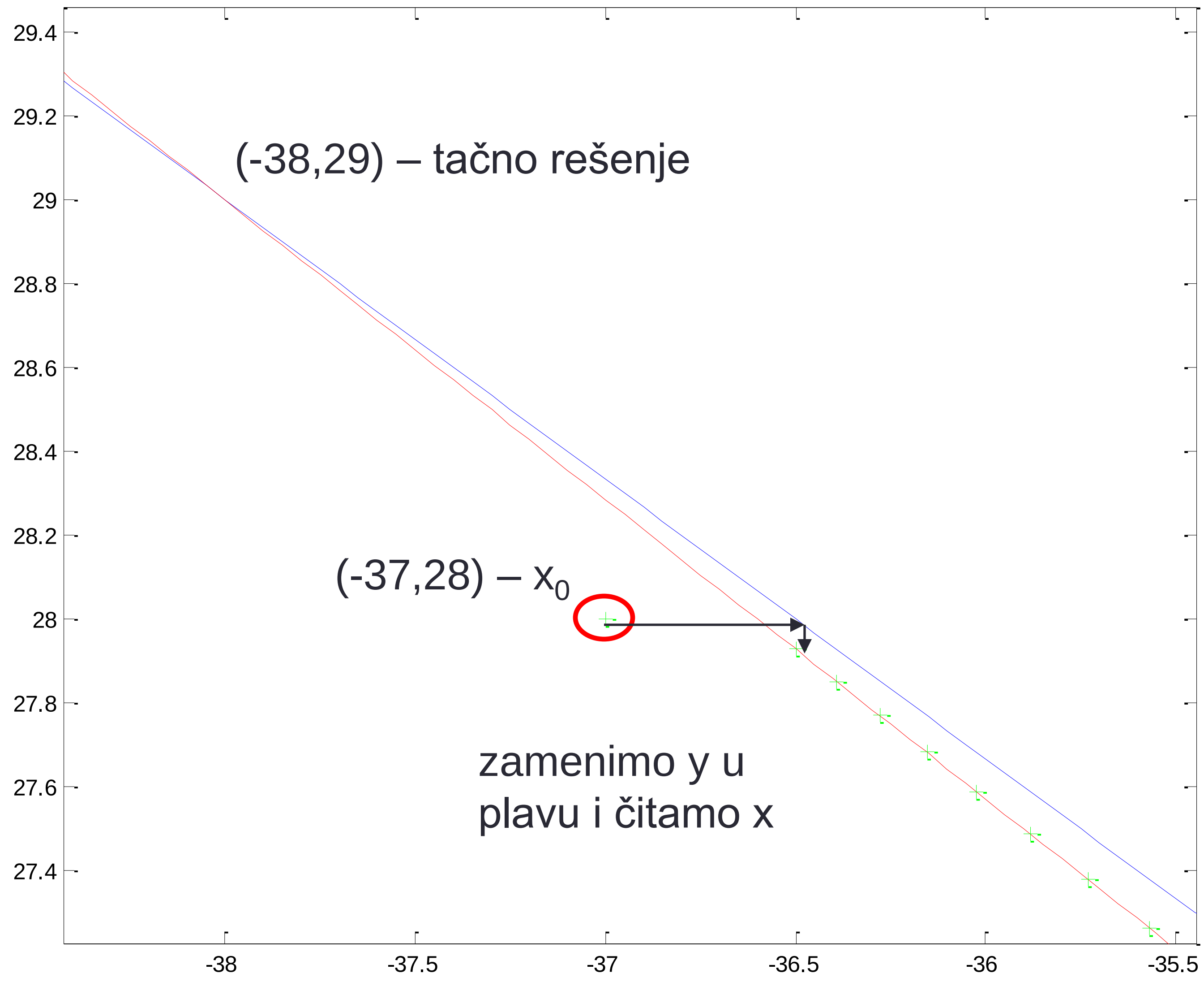
$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1.5 \\ 0 & 1.0714 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

1. *row sum* norma od T je $\|T\|_\infty = 1.5 > 1$
2. Spektralni radijus od T je $\rho(T) = 1.0714 > 1$
3. A (ne T) nije dijagonalno dominantna

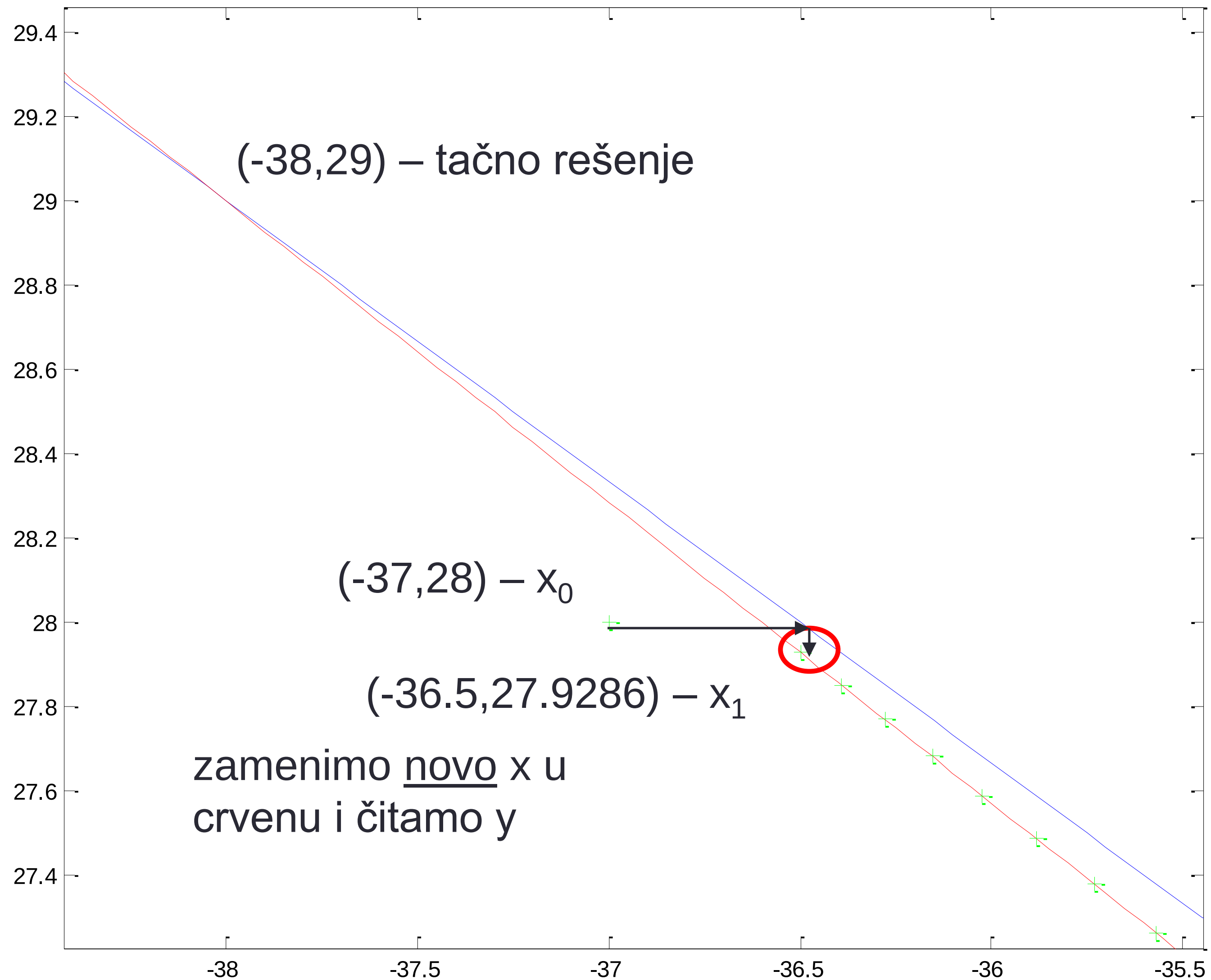
- Uslov 2. nam je sigurni pokazatelj da ni Jakobijeva ni GZ metoda neće konvergirati za ovaj primer.
- Ostali uslovi su nam samo indikator konvergencije kad važe ali ne i indikator divergencije kad ne važe (drugačije rečeno to su dovoljni ali ne i potrebni uslovi).

Primer divergencije - GZ

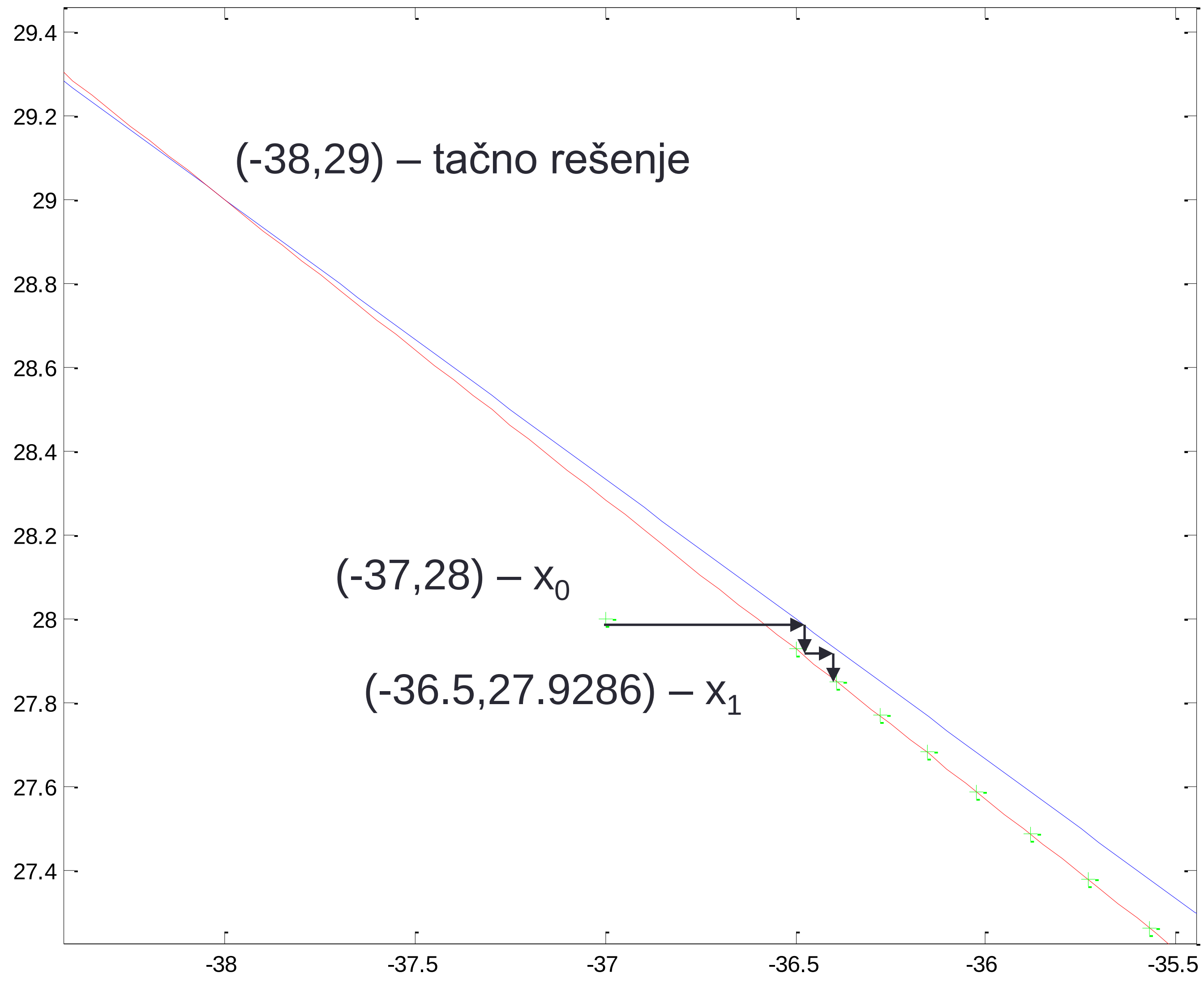




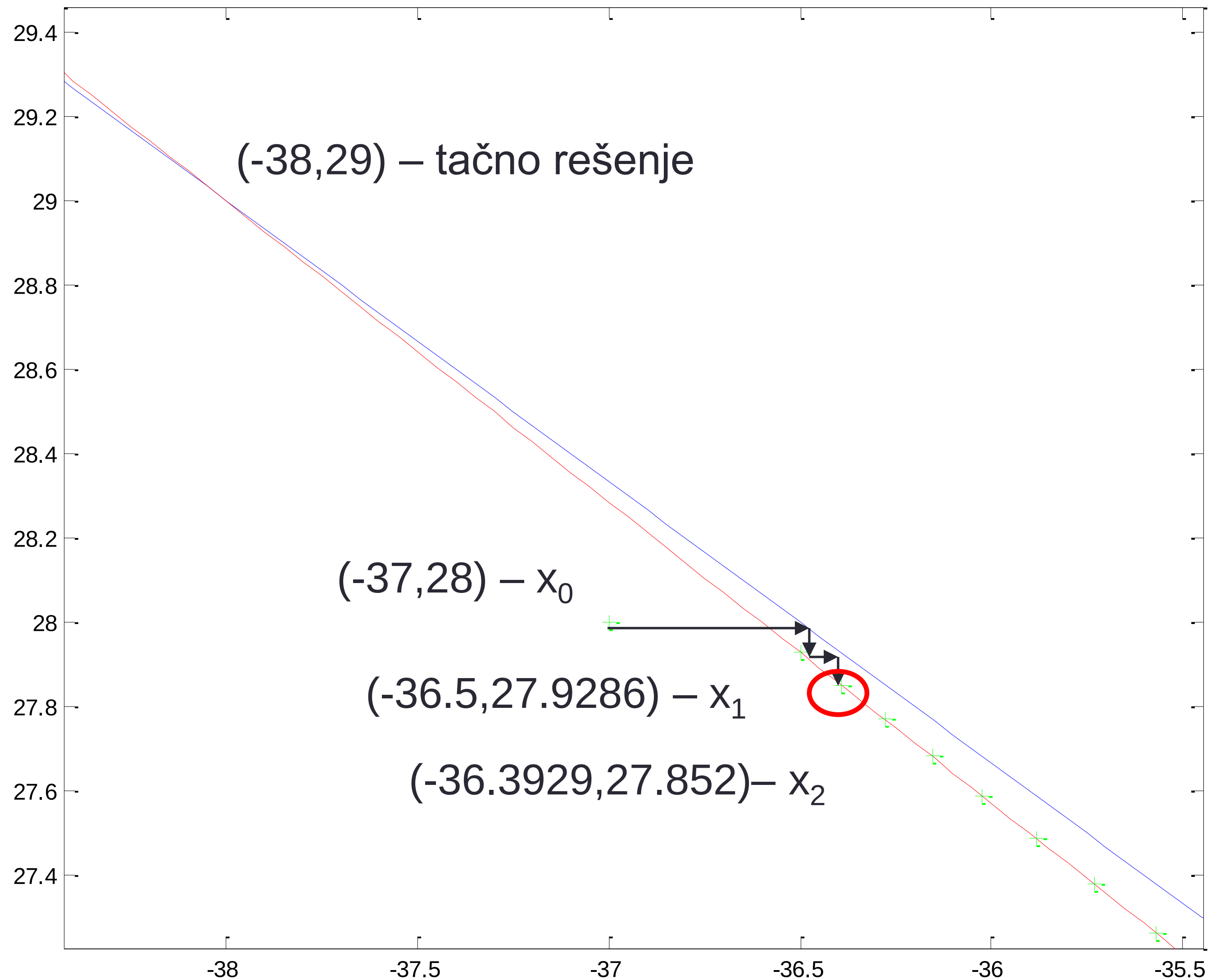
(-38,29) – tačno rešenje
(-37,28) – x_0
zamenimo y u
plavu i čitamo x
29.4
29.2
29
28.8
28.6
28.4
28.2
28
27.8
27.6
27.4
-38
-37.5
-37
-36.5
-36
-35.5



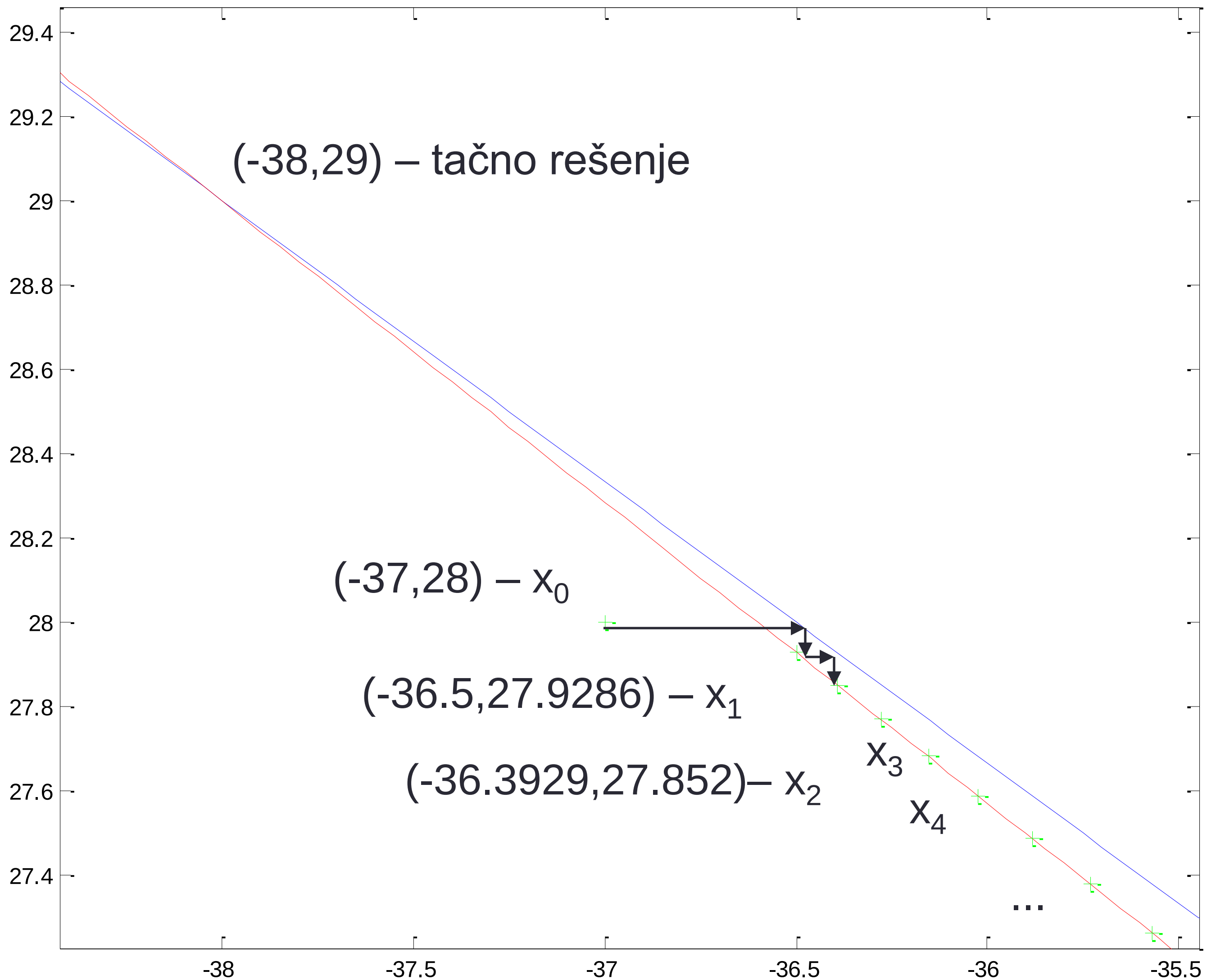
(-38,29) – tačno rešenje
(-37,28) – x_0
(-36.5,27.9286) – x_1
zamenimo novo x u crvenu i čitamo y
29.4
29.2
29
28.8
28.6
28.4
28.2
28
27.8
27.6
27.4
-38
-37.5
-37
-36.5
-36
-35.5



(-38,29) – tačno rešenje
(-37,28) – x_0
(-36.5,27.9286) – x_1
29.4
29.2
29
28.8
28.6
28.4
28.2
28
27.8
27.6
27.4
-38
-37.5
-37
-36.5
-36
-35.5



29.4
29.2
29
28.8
28.6
28.4
28.2
28
27.8
27.6
27.4
-38
-37.5
-37
-36.5
-36
-35.5
(-38,29) – tačno rešenje
(-37,28) – x_0
(-36.5,27.9286) – x_1
(-36.3929,27.852)– x_2



29.4
29.2
29
28.8
28.6
28.4
28.2
28
27.8
27.6
27.4
-38
-37.5
-37
-36.5
-36
-35.5
(-38,29) – tačno rešenje
(-37,28) – x_0
(-36.5,27.9286) – x_1
(-36.3929,27.852)– x_2
x_3
x_4
...