

DISKRETNA MATEMATIKA

- PREDAVANJE -

Jovanka Pantović

- 1 Varijacije sa ponavljanjem
- 2 Varijacije bez ponavljanja
- 3 Permutacije
- 4 Permutacije sa ponavljanjem
- 5 Kombinacije bez ponavljanja
- 6 Kombinacije sa ponavljanjem

Tema 1

Varijacije sa ponavljanjem

Uređeni izbori elemenata sa ponavljanjem

Neka je $|B| = n$.

Definition

Varijacija sa ponavljanjem klase m skupa B jeste uređena m -torka (b_1, \dots, b_m) čija svaka komponenta pripada skupu B .

$$(b_1, \dots, b_m) \in B \times \dots \times B$$

Broj varijacija sa ponavljanjem klase m skupa od n elemenata je

$$\bar{V}(n, m) = |B \times \dots \times B| = |B| \cdot \dots \cdot |B| = |B|^m = n^m.$$

Uređeni izbori elemenata sa ponavljanjem

Kod varijacija sa ponavljanjem:

- važan je redosled i
- elementi se mogu ponavljati.

Uređeni izbori elemenata sa ponavljanjem

Primer

Napisati sve varijacije sa ponavljanjem klase 4 skupa $B = \{a, b\}$.

<i>aaaa</i>	<i>aaab</i>	<i>aaba</i>	<i>aabb</i>
<i>abaa</i>	<i>abab</i>	<i>abba</i>	<i>abbb</i>
<i>baaa</i>	<i>baab</i>	<i>baba</i>	<i>babb</i>
<i>bbaa</i>	<i>bbab</i>	<i>bbba</i>	<i>bbbb</i>

Uređeni izbori elemenata sa ponavljanjem

Primer

Na koliko načina se može izabrati pin kod od 4 cifre?

Neka je $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

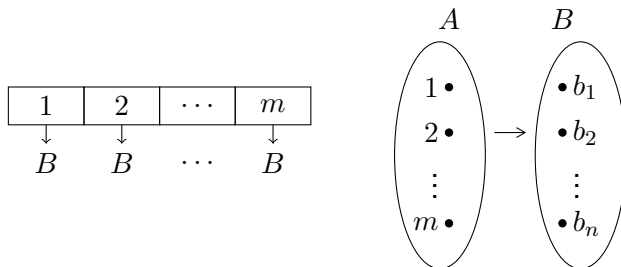
b_1	b_2	b_3	b_4
-------	-------	-------	-------

Broj traženih pin kodova jednak je

$$\overline{V}(10, 4) = 10^4.$$

Uređeni izbori elemenata sa ponavljanjem

Preslikavanje $b : \{1, \dots, m\} \rightarrow B$:



Broj preslikavanja $f : A \rightarrow B$

Teorema

Neka su A i B skupovi sa osobinom $|A| = m \geq 1$ i $|B| = n \geq 1$. Broj svih preslikavanja $f : A \rightarrow B$ jednak je n^m .

Neka je $A = \{a_1, \dots, a_m\}$.

Svako preslikavanje f dato je sa

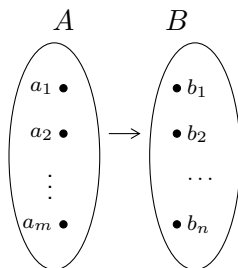
$$(f(a_1), \dots, f(a_m)) \in B \times \dots \times B.$$

Preslikavanje

$$\{f : A \rightarrow B\} \rightarrow B \times \dots \times B$$

je bijekcija. Na osnovu principa proizvoda

$$|\{f : A \rightarrow B\}| = |B \times \dots \times B| = |B| \cdot \dots \cdot |B| = n^m$$



Broj preslikavanja $f : A \rightarrow B$

Primer

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b\}$. Napisati sva preslikavanja $f : A \rightarrow B$.

$$f_1 = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$$

$$f_2 = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$$

$$f_3 = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$$

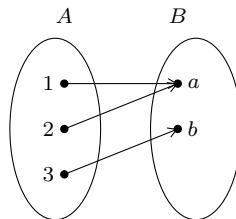
$$f_4 = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$$

$$f_5 = \{(1, b), (2, a), (3, a)\}$$

$$f_6 = \{(1, b), (2, a), (3, b)\}$$

$$f_7 = \{(1, b), (2, b), (3, a)\}$$

$$f_8 = \{(1, b), (2, b), (3, b)\}$$



$$(f_2(1), f_2(2), f_2(3)) = (a, a, b)$$

Zadatak

Zadatak

Ako je $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $n \geq 2$, onda je $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Posmatračemo preslikavanje

$$\varphi : \mathcal{P}(A) \rightarrow \{0, 1\}^n$$

sa osobinom $\varphi(X) = (b_1, \dots, b_n)$, $X \subseteq A$, gde je

$$b_i = \begin{cases} 1 & , a_i \in X \\ 0 & , a_i \notin X \end{cases} .$$

φ je bijektivno preslikavanje $\Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Zadatak

Zadatak

Neka je $A = \{a, b, c\}$. Pokazati da je $|\mathcal{P}(A)| = 2^3$.

Primer. Tada je

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

$$\begin{array}{llll} \varphi(\emptyset) & = & (0, 0, 0) & \varphi(\{a, b\}) & = & (1, 1, 0) \\ \varphi(\{a\}) & = & (1, 0, 0) & \varphi(\{a, c\}) & = & (1, 0, 1) \\ \varphi(\{b\}) & = & (0, 1, 0) & \varphi(\{b, c\}) & = & (0, 1, 1) \\ \varphi(\{c\}) & = & (0, 0, 1) & \varphi(\{a, b, c\}) & = & (1, 1, 1) \end{array}$$

Tema 2

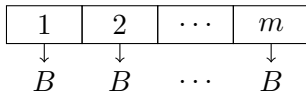
Varijacije bez ponavljanja

Uređeni izbori elemenata skupa bez ponavljanja

Neka je $|B| = n$.

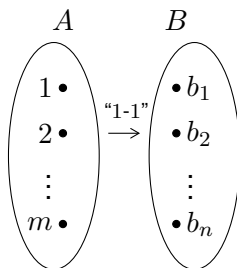
Definicija

Varijacija bez ponavljanje klase m (ili m -permutacija) skupa B jeste uređena m -torka elemenata iz B čije sve komponente su međusobno različite.



Broj injektivnih preslikavanja $f : A \rightarrow B$

Injektivno preslikavanje $b : \{1, \dots, m\} \rightarrow B$:



Uređeni izbori elemenata skupa bez ponavljanja

Neka je $B = \{b_1, \dots, b_n\}$.

Teorema

Neka je $|A| = m$ i $n \geq m \geq 1$. Broj 1 – 1 preslikavanja $f : A \rightarrow B$ jednak je

$$n(n-1) \dots (n-m+1).$$

Uređeni izbori elemenata skupa bez ponavljanja

Neka je $B = \{b_1, \dots, b_n\}$.

Teorema

Neka je $|A| = m$ $n \geq m \geq 1$. Broj 1 – 1 preslikavanja $f : A \rightarrow B$ jednak je $n(n-1) \dots (n-m+1)$.

Indukcijom po m .

$m=1$: Za $A = \{a\}$, postoje sledeća preslikavanja: $f(a) = b_1, \dots, f(a) = b_n$

T_m : Pretpostavimo da tvrđenje važi za $|A| = m$.

T_{m+1} : Treba pokazati da tvrđenje važi za $|A| = m+1$.

Injektivna preslikavanja su oblika

$$(b_1, f(a_2), \dots, f(a_{m+1})), (b_2, f(a_2), \dots, f(a_{m+1})) \dots, (b_n, f(a_2), \dots, f(a_{m+1})).$$

Na funkciju $g : \{a_2, \dots, a_{m+1}\} \rightarrow B \setminus \{b_i\}$, $1 \leq i \leq n$, možemo primeniti induktivnu pretpostavku, tj. zaključujemo da je broj takvih injektivnih funkcija jednak

$$(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot ((n-1) - m + 1) = (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m).$$

Prema principu zbira, broj funkcija $f : A \rightarrow B$ jednak je

$$n \cdot (n-1) \dots (n-m) = n(n-1) \dots (n-(m+1)+1).$$

Broj injektivnih preslikavanja $f : A \rightarrow B$

Primer

Neka je $A = \{1, 2\}$ i $B = \{a, b, c\}$. Napisati sva injektivna preslikavanja $f : A \rightarrow B$.

$$f_1 = \{(1, a), (2, b)\}$$

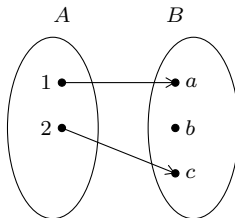
$$f_2 = \{(1, a), (2, c)\}$$

$$f_3 = \{(1, b), (2, a)\}$$

$$f_4 = \{(1, b), (2, c)\}$$

$$f_5 = \{(1, c), (2, a)\}$$

$$f_6 = \{(1, c), (2, b)\}$$



$$(f_2(1), f_2(2)) = (a, c)$$

Uređeni izbori elemenata skupa bez ponavljanja

Broj varijacija bez ponavljanja klase m od n elemenata jednak je:

$$V(n, m) = n(n-1) \dots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Primer:

- broj reči dužine m , bez ponavljanja slova, nad azbukom od n slova

Zadatak

Zadatak

Koliko ima petocifrenih brojeva

- (i) *čije su sve cifre različite?*
- (ii) *čije su svake dve susedne cifre različite?*

(i) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$

(ii) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 59049$.

Tema 3

Permutacije

Broj permutacija skupa

Permutacija je specijalni slučaj varijacije bez ponavljanja u kojoj se biraju svi dati elementi.

Definicija

Bijektivno preslikavanje konačnog skupa A u samog sebe je permutacija skupa A .

Broj permutacija skupa A od n elemenata jednak je

$$P(n) = n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Tema 4

Permutacije sa ponavljanjem

Broj permutacija multiskupa ("sa ponavljanjem")

Neka je dat konačan multiskup

$$M = \{ \underbrace{\{a_1, \dots, a_1\}}_{m_1}, \dots, \underbrace{\{a_l, \dots, a_l\}}_{m_l} \}$$

Permutacija skupa M je uređena n torka elemenata skupa M u kojoj se svaki element pojavljuje tačno onoliko puta koliko se pojavljuje u M , gde je $n = m_1 + \dots + m_l$.

Teorema

Broj permutacija multiskupa M jednak je

$$P(m_1, m_2, \dots, m_l) = \frac{(m_1 + \dots + m_l)!}{m_1! \cdot \dots \cdot m_l!}$$

Broj permutacija multiskupa ("sa ponavljanjem")

Primer

Napisati sve permutacije multiskupa $M = \{\{a, a, a, b, b, c\}\}$.

Broj permutacija multiskupa M jednak je $\frac{6!}{3!2!} = 60$.

aaabbc	aaabcb	aaacbb	aababc	aabacb	aabbac	aabbca	aabcab	aabcba	aacabb
aacbba	aacbba	abaabc	abaacb	ababac	ababca	abacab	abacba	abbaac	abbaca
abbcaa	abcaab	abcaba	abcbba	acaabb	acabab	acabba	acbaab	acbaba	acbbba
baaabc	baaacb	baabac	baabca	baacab	baacba	babaac	babaca	babcaa	bbaaac
bbaaca	bbacaa	bacaab	bacaba	bacbaa	bbaaac	bbaaca	bbacaa	bbcaaa	bcbaaa
caaabb	caabab	caabba	cabaab	cababa	cabbba	cbaaab	cbaaba	cbabaa	cbbaaa

Zadatak

Zadatak

Koliko različitih reči dužine 15 se može napisati od slova reči

A N A V O L I M I L O V A N A ?

$$P(4, 2, 2, 2, 2, 2, 1) = \frac{15!}{4!2!2!2!2!2!}$$

Tema 5

Kombinacije bez ponavljanja

Neuređeni izbori elemenata bez ponavljanja

Definition

Kombinacija bez ponavljanja klase m (m -kombinacija) skupa B od n elemenata jeste m -točlani podskup skupa B od n elemenata.

Primer:

- izbor 7 od 39 brojeva za LOTO
- izbor 2 predstavnika od 15 studenata za takmičenje iz matematike

Neuređeni izbori elemenata bez ponavljanja

Primer

Na koliko načina se iz grupe od 5 studenata mogu izabrati 3 delegata koji će objasniti profesoru da časovi od 3 sata zahtevaju 10 sati za vežbu.

Neka su studenti Alek (A), Pera (P), Vlada (V), Filip (F) i Marko (M). Tada su moguće tročlane delegacije:

<i>APV</i>	<i>APF</i>	<i>APM</i>	<i>AVF</i>	<i>AVM</i>
<i>AFM</i>	<i>PVF</i>	<i>PVM</i>	<i>PFM</i>	<i>VFM</i>

Neuređeni izbori elemenata bez ponavljanja

Neka je $|B| = n \geq 0$ i $\binom{B}{m}$ skup svih podskupova skupa B sa $m > 0$ elemenata.

Teorema

Broj m -kombinacija bez ponavljanja skupa B jednak je

$$C(n, m) = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - m + 1)}{m!}$$

Svakoj m -kombinaciji bez ponavljanja odgovara $m!$ varijacija bez ponavljanja koje dobijamo uređivanjem izabranog podskupa od m elemenata. Odatle za broj svih m permutacija važi:

$$m! \cdot \left| \binom{B}{m} \right| = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - m + 1)$$

$$\left| \binom{B}{m} \right| = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - m + 1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n - m)!}$$

Neuređeni izbori elemenata bez ponavljanja

Primer

Odrediti broj podskupova skupa A koji ima n elemenata.

Neka je $A_i \subseteq A$ i $|A_i| = i$, $0 \leq i \leq n$. Tada je

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(A)| &= |A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n| \\ &= |A_0| + |A_1| + \dots + |A_n| \\ &= C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n) \end{aligned}$$

Permutacije sa ponavljanjem preko kombinacija

Sada možemo primetiti vezu između permutacija sa ponavljanjem i kombinacija bez ponavljanja.

Teorema

Neka je $n = m_1 + \dots + m_l$. Tada je

$$P(m_1, \dots, m_l) = C(n, m_1) \cdot C(n - m_1, m_2) \cdot \dots \cdot C(m_l, m_l).$$

$$\begin{aligned} C(n, m_1) \cdot C(n - m_1, m_2) \cdot \dots \cdot C(m_l, m_l) &= \\ &= \frac{n!}{m_1!(n-m_1)!} \frac{(n-m_1)!}{m_2!(n-(m_1+m_2))!} \cdots \frac{m_l!}{m_l!0!} \\ &= \frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_l!} = P(m_1, \dots, m_l) \end{aligned}$$

Zadatak: Dati kombinatorno obrazloženje za jednakost iz tvrđenja.

Tema 6

Kombinacije sa ponavljanjem

Neuređeni izbori elemenata sa ponavljanja

Definition

Kombinacija sa ponavljanjem klase m (m -kombinacija) skupa B od n elemenata jeste m -točlani multiskup čiji elementi su iz skupa B (isti element može da se pojavi više puta). Broj svih takvih kombinacija ćemo označavati $\overline{C}(n, m)$.

Neuređeni izbori elemenata sa ponavljanja

Primer

U poslastičarnici su na raspolaganju sladoledi od vanile (v), maline (m) i pistača (p). Na koliko načina se mogu izabrati 4 kugle sladoleda?

$vvvv$	111100	$vvpp$	110110	$mmmm$	011110
$vvvm$	111010	$vmmm$	101110	$mmmp$	011101
$vvvp$	111001	$vmmp$	101101	$mmpp$	011011
$vvm m$	110110	$vmpp$	101011	$mppp$	010111
$vvmp$	110101	$vppp$	100111	$pppp$	001111

$$\underbrace{11}_v \underbrace{0}_m \underbrace{1}_m \underbrace{0}_p \underbrace{1}_p$$

Neuređeni izbori elemenata sa ponavljanjem

Neka je

$$B = \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Svakom multiskupu od m elemenata iz B možemo pridružiti uređenu $(m + n - 1)$ -torku sa m jedinica i $n - 1$ nula.

$$\underbrace{\{\{a_1, \dots, a_2, a_2, a_2, \dots, a_n, a_n\}\}}_{m \text{ elemenata}} \mapsto \underbrace{1 \dots 1}_{a_1} \underbrace{0 \ 1 \dots 1}_{a_2} \underbrace{0 \dots 0}_{a_n} \underbrace{1 \dots 1}_{a_n}$$

Neuređeni izbori elemenata sa ponavljanjem

Teorema

Broj m -kombinacija sa ponavljanjem skupa od n elemenata jednak je

- $\overline{C}(n, m) = C(m + n - 1, n - 1)$
 - $\overline{C}(n, m) = C(m + n - 1, m)$
 - $\overline{C}(n, m) = P(n - 1, m)$.
-
- broj načina da se od $m + n - 1$ mesta izabere $n - 1$ mesto za nule
 - broj načina da se od $m + n - 1$ mesta izabere m mesta za jedinice
 - broj načina da se uredi multiskup od m jedinica i $n - 1$ nula

Zadatak

Zadatak

Koliko se (neuređenih) izbora od 4 elementa može kreirati od slova azbuke $A = \{v, m, p\}$, ako se elementi mogu ponavljati?

$$\binom{4 + (3 - 1)}{3 - 1} = \binom{6}{2} = 15.$$

Celobrojna rešenja linearne jednačine

Zadatak

Neka su $n > 0$ i $m \geq 0$ nenegativni celi brojevi. Koliko rešenja ima jednačina

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$$

pod uslovom da je $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

Primetimo da postoji bijekcija između skupa rešenja i skupa uređenih $(m + n - 1)$ -torki 0 i 1:

$$\begin{aligned} \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 + \dots + x_n = m, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\} \\ \downarrow \\ \{(a_1, \dots, a_{m+n-1}) : a_1 + \dots + a_{m+n-1} = m, a_i \in \{0, 1\}\} \end{aligned}$$

$$\underbrace{11\dots 10}_{x_1} \dots 0 \underbrace{11\dots 1}_{x_n}$$

Celobrojna rešenja linearne jednačine

Zadatak

Neka su $n > 0$ i $m \geq 0$ dati prirodni brojevi. Koliko rešenja ima jednačina

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$$

pod uslovom da je $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

Broj rešenja jednak je broju $(n + m - 1)$ -torki u kojima ima m jedinica i $n - 1$ nula:

$$\binom{m + (n - 1)}{n - 1} \text{ tj. } \binom{m + (n - 1)}{m}$$

Znači od $m + n - 1$ komponenti biramo m komponenti za 1, odnosno biramo $n - 1$ komponenti za 0.

Zadatak

Zadatak

Rešiti jednačinu

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

nad skupom nenegativnih celih brojeva.

Broj permutacija elemenata multiskupa $\{0, 0, 1, 1, 1, 1\}$ jednak je:

$$\binom{4 + 3 - 1}{3 - 1} = \binom{6}{2} = 15.$$

- 1 Na koliko se načina može ubaciti 16 kuglica u 4 kutije koje su označene brojevima 1,2,3,4 tako da
 - 1.1. u svakoj kutiji bude bar po jedna kuglica
 - 2.2. ne budu sve kuglice ubačene u jednu kutiju
- 2 Odrediti broj celobrojnih rešenja jednačine

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

ako je $x_1 \geq 3$ i $x_2 \geq 4$.