

Вежбе 7

-Генераторне функције-

Приимер:

$$p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

$$q(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

$$p(x) \cdot q(x) = x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

Кофицијент је уз x^5 добијамо када помножимо

$$\left. \begin{array}{l} \cdot x^2 \text{ из } p(x) \text{ са } x^3 \text{ из } q(x) \\ \cdot x^3 \text{ из } p(x) \text{ са } x^2 \text{ из } q(x) \\ \cdot x^4 \text{ из } p(x) \text{ са } x \text{ из } q(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{шрафтени кофицијент је 3}$$

- Имамо 4 златна и 3 сребрна новчића, сваки у вредности од једног динара. На колико начина можемо платити износ од 5 динара помоћу ових новчића?

$$\begin{aligned} i & - \text{брј златних новчића} & i \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ j & - \text{брј сребрних новчића} & j \in \{0, 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

јко је i сметаје променљиве је у полиному $p(x)$, а j сметаје у полиному $q(x)$. Отуда шрафтени број представља кофицијент који стоји уз x^5 у полиному $p(x) \cdot q(x)$

За $u \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}_0$ дефиниумејмо $\binom{u}{k} = \begin{cases} \frac{u(u-1)(u-2)\dots(u-k+1)}{k!}, & k > 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$

Следујући случајеви:

$$\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\dots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{k!} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1)!} = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{k! (n-1)!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

$$\cdot n=1 \quad \binom{-1}{k} = (-1)^k \binom{1+k-1}{k} = (-1)^k$$

$$\cdot n=2 \quad \binom{-2}{k_2} = (-1)^{k_2} \binom{2+k-1}{k_2} = (-1)^{k_2} \binom{k_2+1}{k_2} = (-1)^{k_2} (k_2+1)$$

Саграђено је обједињавајући УОПШТЕНУ БИНОМНУ ТЕОРЕМИЈУ

$$(1+z)^u = \sum_{k \geq 0} \binom{u}{k} z^k = \binom{u}{0} + \binom{u}{1} z + \binom{u}{2} z^2 + \dots + \binom{u}{k} z^k + \dots$$

$$\cdot \frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1} = \sum_{k \geq 0} \binom{-1}{k} (-z)^k = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \cdot (-1)^k z^k = \sum_{k \geq 0} z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^k + \dots$$

$$\cdot \frac{1}{(1-z)^2} = (1-z)^{-2} = \sum_{k \geq 0} \binom{-2}{k} (-z)^k = \sum_{k \geq 0} (-1)^k (k+1) (-1)^k z^k = \sum_{k \geq 0} (k+1) z^k = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots + (k+1) z^k + \dots$$

$$\cdot \frac{1}{(1-z)^n} = (1-z)^{-n} = \sum_{k \geq 0} \binom{-n}{k} (-z)^k = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} (-1)^k z^k = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k-1}{k} z^k = 1 + nz + \binom{n+1}{2} z^2 + \binom{n+2}{3} z^3 + \dots + \binom{n+k-1}{k} z^k + \dots$$

2. У кутији се налази 30 црвених, 40 плавих и 50 црних маркера. Одредити на колико начина се може изабрати 70 маркера из кутије, ако маркере исте боје не разликујемо.

$$\text{Пријателски кофицијент уз } z^{70} \text{ је производу } (1+z+z^2+\dots+z^{30})(1+z+z^2+\dots+z^{40})(1+z+z^2+\dots+z^{50}) \\ \text{Знамо да важи } 1+z+z^2+\dots+z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

Ради је посматрани производ

$$\frac{1-z^{31}}{1-z} \cdot \frac{1-z^{41}}{1-z} \cdot \frac{1-z^{51}}{1-z} = (1-z)^{-3} (1-z^{31}) (1-z^{41}) (1-z^{51})$$

$$(1-z)^{-3} = \sum_{k \geq 0} \binom{-3}{k} (-z)^k = \sum_{k \geq 0} \binom{3+k-1}{3-1} z^k = \sum_{k \geq 0} \binom{k+2}{2} z^k = \binom{2}{2} z + \binom{3}{2} z^2 + \binom{4}{2} z^3 + \binom{5}{2} z^4 + \dots + \binom{k+2}{2} z^k + \dots$$

У производу $(1-z^{31})(1-z^{41})(1-z^{51})$ је саја довољно наћи кофицијенте уз симетрије до z^{70}

$$(1-z)^{-3} (1-z^{31})(1-z^{41})(1-z^{51}) = \left(\binom{2}{2} z + \binom{3}{2} z^2 + \binom{4}{2} z^3 + \dots + \binom{5}{2} z^4 + \dots \right) (1-z^{31}-z^{41}-z^{51}+\dots)$$

$$z^{70}: \binom{70+2}{2} \cdot z^{70} \cdot 1 + \binom{39+2}{2} \cdot z^{39} \cdot (-z^{31}) + \binom{29+2}{2} \cdot z^{29} \cdot (-z^{41}) + \binom{19+2}{2} \cdot z^{19} \cdot (-z^{51})$$

$$\text{Пријателски кофицијент: } \binom{72}{2} - \binom{41}{2} - \binom{31}{2} - \binom{21}{2} = 1061$$

II начин: Одредити број решења једначине $x_1+x_2+x_3=70$ ако је $0 \leq x_1 \leq 30, 0 \leq x_2 \leq 40, 0 \leq x_3 \leq 50$

Удеја генераторних функција је да се бесконачном низу реалних бројева приведути и поврекију структура

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots = \frac{1}{1-z} \text{ је генераторна функција за низ } (1, 1, 1, 1, \dots)$$

ОТВОРЕНА форма ЗАТВОРЕНА форма

Нека је $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ низ реалних бројева. Генераторна функција њега је (формулни) симболни израз

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n + \dots = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

Ије динамичка конвергенција реда

ОСНОВНЕ ГЕНЕРАТОРНИХ ФУНКЦИЈА

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \leftrightarrow A(z)$$

$$(b_0, b_1, b_2, \dots) \leftrightarrow B(z)$$

САБИРАЊЕ

$$\text{niz } (a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, \dots)$$

$$\text{тј. даја } (a_0+b_0)+ (a_1+b_1)z + (a_2+b_2)z^2 + \dots = (a_0+a_1z+a_2z^2+\dots) + (b_0+b_1z+b_2z^2+\dots) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n \geq 0} b_n z^n = A(z) + B(z)$$

МОДЕРИНГ НИЗА РЕАЛНИМ БРОЈЕМ d (СКАЛИРАЊЕ)

$$\text{niz } d(a_0, a_1, a_2, \dots) = (d a_0, d a_1, d a_2, \dots)$$

$$\text{тј. даја } d a_0 + d a_1 z + d a_2 z^2 + \dots = d(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) = d \sum_{n \geq 0} a_n z^n = d A(z)$$

ДИНЕАРНОСТ

$$d(a_0, a_1, a_2, \dots) + B(b_0, b_1, b_2, \dots) \leftrightarrow d A(z) + B B(z)$$

Низу $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots)$ одговара генераторна ф-ја $A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$

Уредићемо генераторне структуре низова који су **TRANSLIRANI K KORAKU** у односу на низ $\{a_n\}_{n \geq 0}$

• Померање низа УДАСНО

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \rightarrow (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \text{ пута}}, a_0, a_1, a_2, \dots)$$

$$\text{Т. ф-ја } a_0 z^k + a_1 z^{k+1} + a_2 z^{k+2} + \dots = z^k (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) = z^k \sum_{n \geq 0} a_n z^n = z^k A(z)$$

$$* \sum_{n \geq k} a_{n-k} z^n = z^k \sum_{n \geq k} a_{n-k} z^{n-k} = z^k \sum_{i \geq 0} a_i z^i = z^k A(z)$$

смета $i = n - k$

• Померање низа ЈЛЕВО

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \rightarrow (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$$

$$\text{Т. ф-ја } a_k + a_{k+1} z + a_{k+2} z^2 + \dots = \frac{\sum_{n \geq 0} a_n z^n - a_0 - a_1 z - \dots - a_{k-1} z^{k-1}}{z^k} = \frac{A(z) - a_0 - a_1 z - \dots - a_{k-1} z^{k-1}}{z^k}$$

$$* \sum_{n \geq 0} a_{n+k} z^n = \frac{\sum_{n \geq 0} a_n z^{n+k}}{z^k} = \frac{\sum_{i \geq k} a_i z^i}{z^k} = \frac{\sum_{i \geq 0} a_i z^i - (a_0 + a_1 z + \dots + a_{k-1} z^{k-1})}{z^k} = \frac{A(z) - a_0 - a_1 z - \dots - a_{k-1} z^{k-1}}{z^k}$$

смета $i = n - k$

• ЗАМЕНА ПРЕМЕНИВИВЕ z СА dz

$$A(dz) = \sum_{n \geq 0} a_n (dz)^n = a_0 (dz)^0 + a_1 (dz)^1 + a_2 (dz)^2 + \dots + a_n (dz)^n + \dots = (a_0 d^0) + (a_1 d^1) z + (a_2 d^2) z^2 + \dots + (a_n d^n) z^n + \dots = \sum_{n \geq 0} (a_n d^n) z^n$$

Ова генераторна функција генерише низ $(a_0, a_1 d, a_2 d^2, \dots, a_n d^n, \dots)$

Приимер:

Ако чланство је убрзано $(-3)z$ у генераторну функцију низа $(1, 1, 1, \dots)$, добијамо генераторну функцију

$$\frac{1}{1 - (-3)z} = \frac{1}{1 + 3z} \text{ која генерише низ } (1 \cdot (-3)^0, 1 \cdot (-3)^1, 1 \cdot (-3)^2, \dots, 1 \cdot (-3)^n, \dots), \text{ тј. низ } \{(-3)^n\}_{n \geq 0}$$

. ИЗВОД

$$A'(z) = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots)' = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots + n a_n z^{n-1} + \dots$$

На k -том члану у новом низу је члан $(k+1)a_{k+1}$, $k \geq 0$

$$* A'(z) = \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right)' = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} = \sum_{k \geq 0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} z^k$$

смена $k = n-1$

• МНОЖЕЊЕ генераторних функција

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \leftrightarrow A(z)$$

$$(b_0, b_1, b_2, \dots) \leftrightarrow B(z)$$

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \cdot \sum_{m \geq 0} b_m z^m = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) \cdot (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots) \text{ генерише низ } \{c_n\}_{n \geq 0} \text{ за који важи}$$

$$c_0 = a_0 b_0, c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \dots \quad c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$$

3. Одредити генераторне функције за низове чији је општи члан

a) $a_n = n + 1$

Низ природних бројева
 $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$

$$A(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + \dots$$

Посматрајмо да ли је $b_n = 1$, т.ј. да ли је $(1, 1, 1, \dots)$

$$B(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots = \frac{1}{1-z}$$

$$B'(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots$$

$$\text{Видимо } A(z) - B'(z) = \left(\frac{1}{1-z} \right)' = \frac{1}{(1-z)^2}$$

b) $a_n = n$

Низ неистакнутих целих бројева
 $(0, 1, 2, 3, 4, \dots)$

Ако пренаслиједимо из а) за један корак удељено, добијамо што нечака да је са овим чланом $a_0 = 0$.

$$A(z) = z \cdot \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Први пут затворене формуле генераторних функција.

$$e) a_n = 2n^2$$

$$(2 \cdot 0, 2 \cdot 1^2, 2 \cdot 2^2, 2 \cdot 3^2, \dots) = 2 \cdot (0, 1^2, 2^2, 3^2, \dots)$$

Знамо да је генераторна функција $b_n = n$ дата са $B(z) = 0 + z + 2z^2 + 3z^3 + \dots = \frac{z}{(1-z)^2}$

$$\begin{aligned}B'(z) &= 1 + 2 \cdot 2z + 3 \cdot 3z^2 + 4 \cdot 4z^3 + \dots \\&= 1^2 + 2^2 z + 3^2 z^2 + 4^2 z^3 + \dots\end{aligned}$$

Генераторна функција $B'(z)$ генерише низ $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots)$

$$B'(z) = \left(\frac{z}{(1-z)^2} \right)' = \frac{z' (1-z)^2 - z \cdot (1-z)^{2'}}{(1-z)^4} = \frac{(1-z)^2 - 2z(1-z)}{(1-z)^4} = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

Уколико низ $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots)$ померимо један корак улево добијамо низ $(0, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots)$ коју је генерисат генераторни коцкадијом $\frac{z}{(1-z)^3}$

На крају овај низ треба скочити са 2, па је $A(z) = 2z \cdot \frac{1+z}{(1-z)^3}$

$$z) a_n = (n-1)n(n+1)$$

Посматрајмо да је $b_n = n+1 \quad (1, 2, 3, 4, \dots)$

$$B(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots \stackrel{a)}{=} \frac{1}{(1-z)^2}$$

. Нека је $C(z) = B'(z)$

Зада је $c_n = (n+1)b_{n+1} = (n+1)((n+1)+1) = (n+1)(n+2)$

$$C(z) = B'(z) = \left(\frac{1}{(1-z)^2}\right)' = \frac{2}{(1-z)^3}$$

. Нека је $D(z) = C'(z)$

$$d_n = (n+1)c_{n+1} = (n+1)((n+1)+1)((n+1)+2) = (n+1)(n+2)(n+3)$$

$$D(z) = C'(z) = \left(\frac{2}{(1-z)^3}\right)' = \frac{6}{(1-z)^4}$$

$$n=0 \quad d_0 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \quad a_0 = 0$$

Иако $a_n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ добијамо поизразљиви иако $d_n = (n+1)(n+2)(n+3)$

$$n=1 \quad d_1 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \quad a_1 = 0$$

Зада је корака удео

$$n=2 \quad d_2 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \quad a_2 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$\Rightarrow A(z) = z^2 \cdot D(z) = \frac{6z^2}{(1-z)^4}$$

4. Одредити генераторну функцију низа задатог са рекурентном релацијом

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 4a_n, \quad n \geq 0,$$

ако је $a_0 = 2$ и $a_1 = -1$.

Нека је $A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$

$a_0 \quad a_1 \quad a_2$
Бончарче џасето

$\sum_{n \geq 0} a_{n+2} z^n \rightarrow$ Ген. ф-ја низа који је поморен 2 корака улево

$\sum_{n \geq 0} a_{n+1} z^n \rightarrow$ Ген. ф-ја низа који је поморен 1 корак улево

Лога је због линеарности

$$\frac{A(z) - a_0 - a_1 z}{z^2} = 2 \frac{A(z) - a_0}{z} - 4 A(z) / z^2$$

$$A(z) - 2z = 2z(A(z) - 2) - 4z^2 A(z)$$

$$A(z)(1 - 2z + 4z^2) = 2 - 5z$$

$$A(z) = \frac{2 - 5z}{1 - 2z + 4z^2}$$

5. Користећи генераторне функције решити рекурентне релације

a) $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $n \geq 1$, ако је $a_0 = 0$;

Рекурентну релацију $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $n \geq 1$ можемо записати и на следећи начин $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $n \geq 0$

Нека је $A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$

Добијамо $\frac{A(z) - a_0}{z} = 2A(z) + \frac{1}{1-z} / \cdot (1-z)$

$$A(z)(1-z) = 2z(1-z)A(z) + z$$

$$A(z)(1-z)(1-2z) = z$$

Генераторна ф-ја $A(z) = \frac{z}{(1-z)(1-2z)}$ ← права разумоточна функција

$$A(z) = \frac{z}{(1-z)(1-2z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1-2z} = \frac{A(1-2z) + B(1-z)}{(1-z)(1-2z)} = \frac{(A+B) + (-2A-B)z}{(1-z)(1-2z)}$$

Добијамо систем $\begin{aligned} A+B &= 0 \\ -2A-B &= 1 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} A &= -1 \\ B &= 1 \end{aligned}$

$$A(z) = -\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-2z}$$

$\frac{1}{1-z}$ тензорни низ са почетним чланом 1

$\frac{1}{1-2z}$ тензорни низ са почетним чланом 2^n

a_n a_0

Генераторне
једноств

II начин:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, n \geq 1$$

a_{n-1} $\overbrace{a_n}$ *помарале ECHO*

$$a_n: A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

$$a_{n-1}: zA(z) = a_0 z + a_1 z^2 + a_2 z^3 + \dots$$

$$1 : \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

Из рекурентне решаваје наше да је $a_n - 2a_{n-1} = 0$

Баш

$$A(z) - 2zA(z) - \frac{1}{1-z} = (a_0 - 1) + \underbrace{(a_1 - 2a_0 - 1)z}_{=0} + \underbrace{(a_2 - 2a_1 - 1)z^2}_{=0} + \underbrace{(a_3 - 2a_2 - 1)z^3}_{=0} + \dots = -1$$

$$A(z)(1-2z) = -1 + \frac{1}{1-z} = \frac{z}{1-z}$$

$$A(z) = \frac{z}{(1-z)(1-2z)}$$

... Задатак даје решавамо како које монтире

Пјоситивното и противното решење на оваа задача е рекурентното решење $a_n = 2a_{n-1} + 1$, кога $n \geq 1$, формулите јасно покажати на следећи начин

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, n \geq 1$$

Када помножимо првото со z^n и сумирамо за $n \geq 1$ добијамо

$$\sum_{n \geq 1} a_n z^n = 2 \sum_{n \geq 1} a_{n-1} z^n + \sum_{n \geq 1} z^n$$

$$\sum_{n \geq 1} a_n z^n = 2z \sum_{n \geq 1} a_{n-1} z^{n-1} + \sum_{n \geq 1} z^n$$

смета
 $k = n-1$

$$\sum_{n \geq 1} a_n z^n = 2z \sum_{k \geq 0} a_k z^k + \sum_{n \geq 1} z^n$$

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n - a_0 = 2z \sum_{k \geq 0} a_k z^k + \sum_{n \geq 0} z^n - 1$$

n

Бројач именува означеното као n

ако је пиршата генераторна структура

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \text{ откога је}$$

$$A(z) = 2z A(z) + \frac{1}{1-z} - 1$$

$$\text{Одатле је } A(z) = \frac{z}{(1-z)(1-2z)}$$

6) $a_{n+1} = 2a_n + n$, $n \geq 0$, ако је $a_0 = 1$; Генералче је

Нека је $A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$

$$\frac{A(z) - a_0}{z} = 2A(z) + \frac{z}{(1-z)^2} \quad / \cdot z$$

$$A(z) - 1 = 2z A(z) + \frac{z^2}{(1-z)^2}$$

$$A(z)(1-2z) = 1 + \frac{z^2}{(1-z)^2}$$

$$A(z) = \frac{1}{1-2z} + \frac{z^2}{(1-2z)(1-z)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{(1-2z)(1-z)^2} &= \frac{A}{1-2z} + \frac{B}{1-z} + \frac{C}{(1-z)^2} \\ &= \frac{A(1-z)^2 + B(1-2z)(1-z) + C(1-2z)}{(1-2z)(1-z)^2} \\ &= \frac{A-2Az+Az^2+B-3Bz+2Bz^2+C-2Cz}{(1-2z)(1-z)^2} \end{aligned}$$

Добијамо систем

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ -2A - 3B - 2C &= 0 \quad (\Rightarrow A = 1, B = 0, C = -1) \\ A + 2B &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{1}{1-2z} + \frac{1}{1-2z} - \frac{1}{(1-z)^2} \\ &= \frac{2}{1-2z} - \frac{1}{(1-z)^2} \end{aligned}$$

Добијамо да је решење р.п. $a_n = 2 \cdot 2^n - (n+1) = 2^{n+1} - n - 1$

б) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 2^n$ $n \geq 2$, ако је $a_0 = 6$, $a_1 = 4$. шператре УДЕСНО

Нека је $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$

Помоћнимо једнакостима z^n и сумирањем до $n \geq 2$

$$\sum_{n \geq 2} a_n z^n = \sum_{n \geq 2} a_{n-1} z^n + 6 \sum_{n \geq 2} a_{n-2} z^n + \sum_{n \geq 2} 2^n z^n$$

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n - a_0 - a_1 z = z \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n - a_0 \right) + 6 z^2 \sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n \geq 0} (2z)^n - 2z - 1$$

$$A(z) - 6 - 4z = z(A(z) - 6) + 6z^2 A(z) + \frac{1}{1-2z} - 2z - 1$$

$$A(z)(1-z-6z^2) = \frac{1}{1-2z} - 4z + 5 = \frac{6-14z+8z^2}{1-2z} \quad 1-z-6z^2 = (1-3z)(1+2z)$$

$$A(z) = \frac{6-14z+8z^2}{(1-2z)(1+2z)(1-3z)} = \frac{A}{1-2z} + \frac{B}{1+2z} + \frac{C}{1-3z}$$

Добијамо систем

$$A+B+C=6$$

$$-A-5B=-4$$

$$-6A+6B-4C=8$$

$$A=-1, B=3, C=4$$

$$A(z) = -\frac{1}{1-2z} + \frac{3}{1+2z} + \frac{4}{1-3z}$$

$$a_n = -2^n + 3(-2)^n + 4 \cdot 3^n$$

$$= 4 \cdot 3^n + (-1 + 3(-1)^n) \cdot 2^n$$