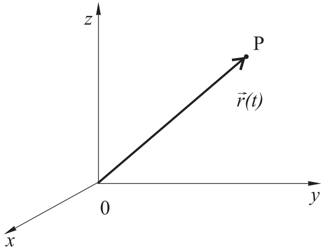
VEKTORSKE FUNKCIJE

19. april 2022.

Vektorske funkcije



Sa E označimo skup tačaka trodimenzionalnog prostora. Neka je O fiksna tačka (koordinatni početak). Vektor $\overrightarrow{OP}$, gde je P promenljiva tačka iz E, je vektor položaja tačke P u odnosu na dati koordinatni sistem.

Označimo sa $X_0(E) = \{\overrightarrow{OP} : P \in E\}$. Preslikavanje $f : E \to X_0(E)$ dato sa $f(P) = \overrightarrow{OP}$, $P \in E$ je bijekcija. Skup $X_0(E)$ ćemo kraće označavati sa X_0.

Definicija

Neka je $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ *i neka su* $x : D \to \mathbb{R}$, $y : D \to \mathbb{R}$, $z : D \to \mathbb{R}$ *tri realne funkcije realne promenljive. Svako preslikavanje* $\vec{r} : D \to X_0$ *definisano sa*

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in D,$$

zovemo **vektorskom funkcijom jedne skalarne promenljive***.*

Definicija

Ako je $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ *i ako su* $x : D \to \mathbb{R}$, $y : D \to \mathbb{R}$, $z : D \to \mathbb{R}$ *tri realne funkcije* n *realnih promenljivih, tada se preslikavanje* $\vec{r} : D \to X_0$ *zadato sa*

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in D,$$

zove **vektorska funkcija** n **realnih promenljivih***.*

Definicija

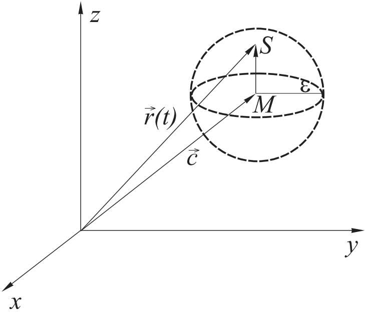
Ako je $a \in \mathbb{R}^n$ tačka nagomilavanja oblasti definisanosti $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ vektorske funkcije $\vec{r} : D \to X_0$, tada za vektor $\vec{c}$ kažemo da je **granična vrednost vektorske funkcije $\vec{r}$ u tački** *a ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall t \in D \setminus \{a\})(d(a,t) < \delta \Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{c}| < \varepsilon).$$

Pišemo da je $\lim\limits_{t \to a} \vec{r}(t) = \vec{c}$.

Iz same definicije granične vrednosti vidimo da je

$$\lim_{t \to a} \vec{r}(t) = \lim_{t \to a} x(t)\vec{i} + \lim_{t \to a} y(t)\vec{j} + \lim_{t \to a} z(t)\vec{k}.$$



Ako oko vrha M vektora $\vec{c}$ opišemo otvorenu loptu $L(M,\varepsilon)$ poluprečnika ε, to sledi da postoji $\delta \in \mathbb{R}^+$, tako da za svako $t \in L(a,\delta)\backslash\{a\}$, vrh S vektora $\vec{r}(t)$ pripada $L(M,\varepsilon)$, tj. svi vektori $\overrightarrow{MS}$ leže u otvorenoj lopti $L(M,\varepsilon)$.

Napomena

Ako je $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ i ako za svako $t \in D$ sa $\tau(t)$ označimo vrh vektora $\vec{r}(t)$, tada važi

$$\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \vec{c} \Leftrightarrow \lim_{t\to a} \tau(t) = (c_1, c_2, c_3).$$

Definicija

Za vektorsku funkciju $\overrightarrow{r} : D \to X_0$, $D \subset \mathbb{R}^n$, *kažemo da je* **neprekidna u tački** $a \in D$ *ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall t \in D)(d(a,t) < \delta \Rightarrow |\overrightarrow{r}(t) - \overrightarrow{r}(a)| < \varepsilon).$$

Vektorska funkcija $\overrightarrow{r} : D \to X_0$, $D \subset \mathbb{R}^n$ je **neprekidna** ako je neprekidna u svakoj tački $a \in D$.

Iz same definicije neprekidnosti sledi da je funkcija $\overrightarrow{r}$ neprekidna u tački a ako i samo ako su komponente $x : D \to \mathbb{R}$, $y : D \to \mathbb{R}$, $z : D \to \mathbb{R}$ funkcije $\overrightarrow{r} : D \to X_0$ neprekidne u tački a.

Kao i kod skalarne funkcije, sledi da je vektorska funkcija $\overrightarrow{r}$ neprekidna u tački nagomilavanja $a \in D$ ako i samo ako važi da je

$$\lim_{t \to a} \overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r}(a),$$

a ako je $a \in D$ izolovana tačka definicionog skupa D vektorske funkcije $\overrightarrow{r}$, tada je $\overrightarrow{r}$ automatski neprekidna u datoj tački.

Vektorska funkcija $\overrightarrow{r} : D \to X_0$, $D \subset \mathbb{R}^n$, je **neprekidna nad skupom** $E \subset D$ ako je restrikcija funkcije $\overrightarrow{r}_E$ $(\overrightarrow{r}_E(t) = \overrightarrow{r}(t),\ t \in E)$ neprekidna funkcija za svako $t \in E$.

Definicija

Ako je $D = I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *i ako je* $\overrightarrow{r} : I \to X_0$ *neprekidna funkcija, tada skup tačaka*

$$L = \{\mathcal{T}(t) : t \in I\}$$

zovemo **kriva** *u prostoru, odnosno* **hodograf vektorske funkcije** $\overrightarrow{r}$.

Primetimo da je L kriva ako i samo ako je $\mathcal{T} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ neprekidna funkcija.

Kriva L je parametarski data sa $L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \; t \in [a, b]$,
a u vektorskom obliku sa $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t),\ t \in [a, b]$.

Ako je

$$M((x(a), y(a), z(a)) \equiv N(x(b), y(b), z(b))$$

za krivu L kažemo da je **zatvorena**.

Ako sve tačke krive L leže u jednoj ravni, onda kažemo da je L **ravna kriva**.

Definicija

Ako je (X, d) metrički prostor, **spojnicom** *(***lukom***) u prostoru X nazivamo svako neprekidno preslikavanje $s : I \to X$ intervala $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ u prostor X.*

Ako su tačke $a = s(0)$ i $b = s(1)$ različite, tada kažemo da spojnica s **povezuje tačke** *a i b.*

Teorema

Skup $L \subset \mathbb{R}^3$ je kriva ako i samo ako je spojnica.

Dokaz. Ako je L spojnica, očigledno je da je L kriva.
Neka je $L = \{\tau(t) : t \in [a, b]\}$ kriva u prostoru. Tada je $\tau : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ neprekidna funkcija. Ako posmatramo funkciju $h : [0, 1] \to [a, b]$ zadatu sa $h(x) = (b - a)x + a$, vidimo da za nju važi

- h je monotono rastuća bijekcija,
- h je neprekidna funkcija nad $[0, 1]$,
- h^{-1} je neprekidna funkcija nad $[a, b]$.

Preslikavanje $f = \tau \circ h$ je neprekidno preslikavanje zatvorenog intervala $[0, 1]$ na tačke krive L, pa je L spojnica. $\square$

Definicija

Za skup $\emptyset \neq A \subset X$ *kažemo da je* **povezan (lučno povezan)** *u metričkom prostoru* (X, d), *ako za svake dve različite tačke* $a, b \in A$, *postoji spojnica* $s : I \to A$ *koja povezuje tačke* a *i* b.

Ako je skup X *povezan u metričkom prostoru* (X, d), *tada kažemo da je metrički prostor* (X, d) **povezan**.

Definicija

Ako je skup $A \subset X$ *istovremeno otvoren i povezan u metričkom prostoru* (X, d) *i* $A_1 \subset A^*$, *tada za skup* $A \cup A_1$ *kažemo da je* **oblast**. *Specijalno, ako je* $A_1 = \emptyset$, *tada se za* A *kaže i* **otvorena oblast**, *a ako je* $A_1 = A^*$, *tada se za* $A \cup A_1 = A \cup A^* = \overline{A}$ *kaže i* **zatvorena oblast**.

Iz same definicije zatvorene oblasti ne sledi da je svaki neprazan zatvoren skup, zatvorena oblast.

Primer

Skup $A = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$ je zatvoren, ali nije zatvorena oblast, jer je $A^\circ = \emptyset$. $\diamondsuit$

Definicija

Za skup $L \subset E = \mathbb{R}^3$ kažemo da je Žordanova[a] *kriva ili Žordanov luk sa krajevima ako:*
1°) postoji interval $I = [a, b]$ i preslikavanje $\tau : I \to E$, tako da je

$$L = \{\tau(t) : t \in I\};$$

2°) τ je bijektivno preslikavanje intervala I na L;
3°) τ je neprekidno preslikavanje.

Tačke $A = \tau(a)$, $B = \tau(b)$ zovemo krajevi krive L.

[a] Žordan, K. (Camil Jordan, 1838-1922) - francuski matematičar

Ako umesto 2°) uzmemo da važi

2^*) τ je bijekcija skupa $[a, b)$ na L i $\tau(a) = \tau(b)$,
onda kažemo da je L zatvorena Žordanova kriva.

Tvrđenje

Ako je $L_1 = \{M(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, tada je kriva L zatvorena Žordanova kriva ako i samo ako postoji preslikavanje $f : L_1 \to L$, tako da važi

1) *f je bijektivno preslikavanje skupa L_1 na L;*
2) *f je neprekidno preslikavanje;*
3) *$f^{-1} : L \to L_1$ je neprekidno preslikavanje.*

Tvrđenje

Neka je $L \subset \tau = \mathbb{R}^2$ *ravna zatvorena Žordanova kriva. Tada*

1) $\mathbb{R}^2 \setminus L = \Omega_1 \cup \Omega_2,$ *gde su* Ω_1 *i* Ω_2 *dve disjunktne otvorene oblasti;*
2) $L = \Omega_1^* = \Omega_2^*;$
3) *Jedna od oblasti, npr. uzmimo da je to* Ω_1*, je ograničen skup i nju zovemo unutrašnjost krive* L*, dok je druga* Ω_2 *neograničen skup i nju zovemo spoljašnjost krive* L*.*

Za ravnu oblast $G \subset \tau = \mathbb{R}^2$ kažemo da je jednostruko povezana ako unutrašnjost svake Žordanove krive $L \subset G$ pripada oblasti G.

FUNKCIJE VIŠE REALNIH PROMENLJIVIH

19. april 2022.

Funkcije n realnih promenljivih

Posmatramo realne funkcije n realnih promenljivih, tj.
$f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1$

Vrednost funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ u tački $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ zapisuje se kao

- $n > 3 \quad z = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- $n = 3, \quad u = f(X) = f(x, y, z),$
- $n = 2, \quad z = f(X) = f(x, y)$

Parcijalni izvodi

Neka $M(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2,\ f : D \to \mathbb{R},\ z = f(x,y)$

- ako $M \in D$ nije izolovana tačka oblasti definisanosti D tada je
$$\Delta z = f(N) - f(M) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y),$$
$N(x+\Delta x, y+\Delta y) \in D, \quad (\Delta x, \Delta y) \neq (0,0)$ totalni priraštaj funkcije $z = f(x,y)$
- ako $D_1 = D \cap \{(\nu, y) : \nu \in \mathbb{R}\}$ nije jednočlan skup tada
$$\Delta_x z = f(M_{x+\Delta x}) - f(M) = f(x+\Delta x, y) - f(x,y),$$
$M_{x+\Delta x}(x+\Delta x, y) \in D_1, \quad \Delta x \neq 0$ je parcijalni priraštaj po promenljivoj x u tački M,
- ako $D_2 = D \cap \{(x, \nu) : \nu \in \mathbb{R}\}$ nije jednočlan skup tada
$$\Delta_y z = f(M_{y+\Delta y}) - f(M) = f(x, y+\Delta y) - f(x,y),$$
$M_{y+\Delta y}(x, y+\Delta y) \in D_2, \quad \Delta y \neq 0$ je parcijalni priraštaj po promenljivoj y u tački M.

Neka $M(x_1,\dots,x_n)\in D\subset\mathbb{R}^n,\ n\geq 2,\ f:D\to\mathbb{R},\ z=f(x_1,\dots,x_n)$

- ako $M\in D$ nije izolovana tačka oblasti definisanosti D funkcije $z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ tada je

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(N)-f(M)\\ &= f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,\dots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,x_2,\dots,x_n),\end{aligned}$$

  $N(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,\dots,x_n+\Delta x_n)\in D,\quad (\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\neq(0,0,\dots,0)$ totalni priraštaj funkcije $z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$

- ako $D_i=D\cap\{(x_1,\dots,x_{i-1},\nu,x_{i+1},\dots,x_n):\nu\in\mathbb{R},i=1,\dots,n\}$ nije jednočlan skup tada

$$\begin{aligned}\Delta_{x_i}z &= f(M_{x_i+\Delta x_i})-f(M)\\ &= f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+\Delta x_i,x_{i+1},\dots,x_n)-f(x_1,x_2,\dots,x_n),\end{aligned}$$

  $M_{x_i+\Delta x_i}(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+\Delta x_i,x_{i+1},\dots,x_n)\in D_i,\quad \Delta x_i\neq 0$ je parcijalni priraštaj po promenljivoj x_i u tački M.

Za svako $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, posmatrajmo restrikciju $f_i : D_i \to \mathbb{R}$ funkcije f nad skupom D_i.

Definicija

Ako funkcija $f_i(x_i)$, $x_i \in D_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ima izvod u tački $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D^\circ$ onda taj izvod funkcije $f_i(x_i)$ zovemo parcijalni izvod funkcije $f(x_1, \ldots, x_n)$ u tački M po promenljivoj x_i. Označavamo ga sa

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M) \text{ ili } z_{x_i}(M)$$

i važi

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_i} &= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i} \\ &= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2 \ldots, x_n)}{\Delta x_i} \end{aligned}$$

Ako funkcija $f_i(x_i)$, $x_i \in D_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ima desni (levi) izvod u tački $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, onda taj izvod funkcije $f_i(x_i)$ zovemo desni (levi) parcijalni izvod funkcije $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ u tački M po promenljivoj x_i i obeležavamo ga sa

$$\frac{\partial^+ z}{\partial x_i}(M) \text{ ili } z^+_{x_i}(M) \quad \left(\frac{\partial^- z}{\partial x_i}(M) \text{ ili } z^-_{x_i}(M)\right).$$

U tom slučaju je

- desni parcijalni izvod funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ po promenljivoj x_i
$$\frac{\partial^+ z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0^+} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i}$$
- levi parcijalni izvod funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ po promenljivoj x_i je
$$\frac{\partial^+ z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0^-} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i}$$

Funkcija ima parcijalni izvod po promenljivoj x_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ u tački M (unutrašnja!) **ako i samo ako** *ima i levi i desni parcijalni izvod po promenljivoj x_i i ako su oni jednaki.*

Funkcija $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f : D \to \mathbb{R}$ ima parcijalni izvod po x_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ nad $E \subset D$, pri čemu je skup E unija neke otvorene oblasti E_1 i dela njenog ruba ako

1. postoji $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ po prethodnoj definiciji;
2. za rubnu tačku $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ ako ne postoji $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}(M)$, tada:

a) ako postoji $\varepsilon_i > 0$ sa osobinom da je

$$L_{\varepsilon_i} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i - \varepsilon_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\} \subset E$$

postoji

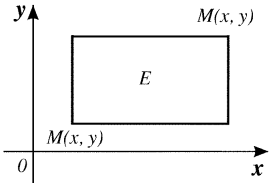
$$\frac{\partial^- z}{\partial x_i}(M).$$

Ako je za svako $\varepsilon_i > 0$

$$D_{\varepsilon_i} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + \varepsilon_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\} \not\subset E,$$

tada je

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M) = \frac{\partial^- z}{\partial x_i}(M).$$



b) ako postoji $\varepsilon_i > 0$ sa osobinom da je

$$D_{\varepsilon_i} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + \varepsilon_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\} \subset E$$

postoji

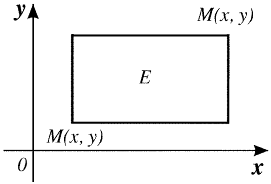
$$\frac{\partial^+ z}{\partial x_i}(M).$$

Ako je za svako $\varepsilon_i > 0$

$$L_{\varepsilon_i} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i - \varepsilon_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\} \not\subset E,$$

tada je

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M) = \frac{\partial^+ z}{\partial x_i}(M).$$



c) ako za svako $\varepsilon_i > 0$

$$L_{\varepsilon_i} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i - \varepsilon_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\} \not\subset E$$

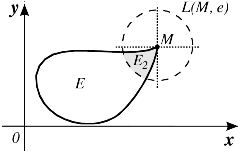
$$D_{\varepsilon_i} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + \varepsilon_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\} \not\subset E,$$

tada ako postoji

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(N), \text{ za svako } N \in L(M, \varepsilon) \cap E_1 = E_2 \neq \emptyset, \text{ za neko } \varepsilon > 0,$$

uzimamo po definiciji da je

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M) = \lim_{\substack{N \to M \\ N \in E_2}} \frac{\partial z}{\partial x_i}(N), \; i = 1, 2, \ldots, n.$$



Napomena

Za funkciju $z = f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} + y & , \quad x > 0, y \geq 0 \\ y & , \quad x = 0, y \geq 0 \end{cases}$

postoji

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(0,1) &= \frac{\partial^+ z}{\partial x}(0,1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 1) - f(0,1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{\Delta x} + 1 - 1}{\Delta x} = 0, \end{aligned}$$

a kako je $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, \quad x > 0, y > 0,$

ne postoji $\displaystyle \lim_{\substack{(x,y) \to (0,1) \\ x > 0, y > 0}} \frac{\partial z}{\partial x}(x,y).$

Primer

Naći parcijalne izvode funkcije $z = \sqrt{(1-x^2-y^2)^3}$.

Funkcija $z = \sqrt{(1-x^2-y^2)^3}$ je definisana za $x^2+y^2 \leq 1$.

Za svaku tačku $M(x,y)$ za koju je $x^2+y^2 < 1$ (M je unutrašnja tačka oblasti definisanosti) je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3x\sqrt{1-x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3y\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

U rubnoj tački $M(x, y)$ za koju je $x^2 + y^2 = 1$, $x \neq 0$, $y \neq \pm 1$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(M) &= \frac{\partial^- z}{\partial x}(M)\\ &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\sqrt{(1-(x+\Delta x)^2-(1-x^2))^3}-0}{\Delta x} = 0, \text{ za } x > 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(M) &= \frac{\partial^+ z}{\partial x}(M)\\ &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\sqrt{(1-(x+\Delta x)^2-(1-x^2))^3}-0}{\Delta x} = 0, \text{ za } x < 0.\end{aligned}$$

U tačkama $M(0,1)$ i $N(0,-1)$ je

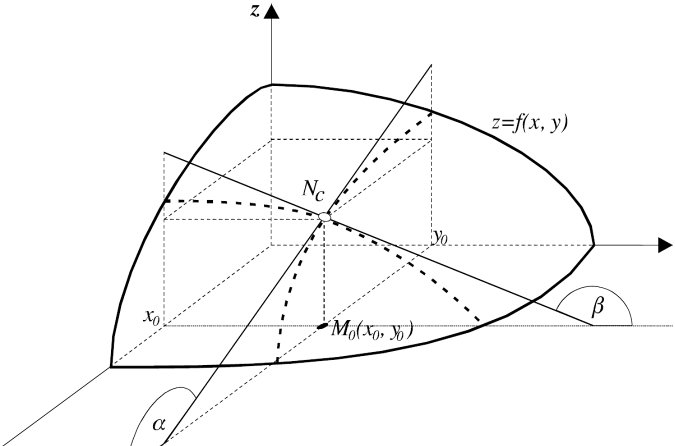
$$\frac{\partial z}{\partial x}(M) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\ x^2+y^2<1}} -3x\sqrt{1-x^2-y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(N) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,-1)\\ x^2+y^2<1}} -3x\sqrt{1-x^2-y^2} = 0.$$

Slično se računaju parcijalni izvodi po y u rubnim tačkama.

Geometrijska interpretacija parcijalnih izvoda

- Površ $\mathcal{S}$ zadata jednačinom $z = f(x, y)$
- nad skupom D funkcija je neprekidna i ima parcijalne izvode
- $M_0(x_0, y_0) \in D$, odgovara tački $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathcal{S}$



Pri traženju parcijalnog izvoda $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ u tački M_0 posmatra se funkcija $z = f(x, y)$ kao funkcija jedne promenljive x, a y se tretira kao konstanta $y = y_0$, to jest $z = f(x, y_0) = f_1(x)$. Funkcijom $z = f_1(x)$ definisana je kriva L dobijena presekom površi S i ravni $y = y_0$.

$$f_1'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0),$$

je koeficijent pravca tangente u tački N_0 krive L dobijene presekom ravni $y = y_0$ i površi $z = f(x, y)$.
Slično, funkcijom $z = f_2(y) = f(x_0, y)$ definisana je kriva L_1 dobijena presekom površi S i ravni $x = x_0$, pa je

$$f_2'(y_0) = \operatorname{tg} \beta = \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)$$

koeficijent pravca tangente u tački N_0 krive L_1 dobijene presekom ravni $x = x_0$ i površi $z = f(x, y)$.

Diferencijabilnost

Definicija

Neka je $M(x_1, \ldots, x_n)$ *unutrašnja tačka oblasti* $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ *na kojoj je definisana funkcija* $z = f(x_1, \ldots, x_n) = f(X)$, $X \in D$. *Funkcija* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *je* ***diferencijabilna u tački M*** *ako se njen totalni priraštaj*

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \ldots, x_n),$$

$$gde\ N(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) \in D, (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \neq (0, \ldots, 0)$$

koji odgovara priraštajima $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ *promenljivih* $x_1, \ldots, x_n$ *može napisati u obliku*

$$\Delta z = D_1 \Delta x_1 + \cdots + D_n \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \cdots + \alpha_n \Delta x_n,$$

pri čemu D_i *ne zavise od* Δx_i *i* $\lim\limits_{(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \to (0, \ldots, 0)} \alpha_i = 0$.

Linearni deo priraštaja je ***totalni diferencijal funkcije*** *z u tački M, u oznaci* $dz(M) = df(M) = D_1 \Delta x_1 + \cdots + D_n \Delta x_n$.

Na primer, za funkciju $z = x^2 + y^2$ imamo da je

$$\begin{aligned} \Delta z &= (x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2 - (x^2+y^2) \\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2 - x^2 - y^2 \\ &= \underbrace{2x}_{D_1}\Delta x + \underbrace{2y}_{D_2}\Delta y + \underbrace{\Delta x}_{\alpha_1}\Delta x + \underbrace{\Delta y}_{\alpha_2}\Delta y. \end{aligned}$$

Teorema

Neka je funkcija $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ diferencijabilna u tački M. Tada

a) *funkcija f je neprekidna u tački M,*

b) *postoje parcijalni izvodi* $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}, \dfrac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial z}{\partial x_n}$

i važi jednakost $D_1 = \dfrac{\partial z}{\partial x_1}(M), \ \ldots, D_n = \dfrac{\partial z}{\partial x_n}(M).$

Dokaz.

a) $\lim\limits_{(\Delta x_1,\ldots\Delta x_n)\to(0,\ldots,0)} \Delta z = \lim\limits_{(\Delta x_1,\ldots\Delta x_n)\to(0,\ldots,0)} \sum\limits_{i=1}^{n}(D_i + \alpha_i)\Delta x_i = 0$, pa je funkcija $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ neprekidna u tački M.

b) Pokažimo npr. da je $D_1 = \dfrac{\partial z}{\partial x_1}(M)$ (ostalo analogno). Iz diferencijabilnosti funkcije z u tački M je za $\Delta x_1 \neq 0$, $\Delta x_2 = \Delta x_3 = \cdots = \Delta x_n = 0$,

$$\Delta_{x_1} z = D_1 \Delta x_1 + \alpha_1 \Delta x_1.$$

Sledi da je

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} z}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{(D_1 + \alpha_1)\Delta x_1}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} (D_1 + \alpha_1) = D_1.$$

Odavde sledi da $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}$ postoji u tački M i da je $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}(M) = D_1$. $\square$

Kako je $dz = dx_i = \Delta x_i$ za funkciju $z = x_i$, $i = 1, \ldots, n$, to totalni diferencijal možemo zapisati u obliku

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n.$$

Ako sa

$$\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2} \neq 0$$

označimo rastojanje tačaka

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{i} \quad N(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n)$$

tada izraz

$$\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \cdots + \alpha_n \Delta x_n$$

možemo zapisati u obliku

$$\omega\rho, \text{ gde je } \omega = \alpha_1 \frac{\Delta x_1}{\rho} + \alpha_2 \frac{\Delta x_2}{\rho} + \cdots + \alpha_n \frac{\Delta x_n}{\rho}.$$

Kako je

$$\left|\frac{\Delta x_i}{\rho}\right| \leq 1 \quad \text{za svako} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

i kako je

$$\lim_{(\Delta x_1, \ldots \Delta x_n) \to (0, \ldots, 0)} \alpha_i = 0,$$

sledi da je

$$\lim_{\rho \to 0} \omega = 0.$$

Iz tog razloga, da je funkcija $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ diferencijabilna možemo zapisati i u obliku

$$\Delta z = D_1 \Delta x_1 + D_2 \Delta x_2 + \cdots + D_n \Delta x_n + \omega \rho,$$

gde $D_1, D_2, \ldots, D_n$ ne zavise od $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, a $\lim\limits_{\rho \to 0} \omega = 0$.

Suprotan smer prethodne teoreme ne važi uvek - neprekidnost funkcije u tački M i postojanje njenih parcijalnih izvoda u ovoj tački ne garantuje diferencijabilnost funkcije u toj tački.

Primer

Funkcija

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

je neprekidna u tački $O(0, 0)$, *ima parcijalne izvode u u tački* $O(0, 0)$, *a nije diferencijabilna u tački* $O(0, 0)$.

Iz

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

i

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon = \delta$$

sledi da je

$$|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon,$$

pa je funkcija $f(x,y)$ neprekidna u tački $O(0,0)$.

Funkcija ima parcijalne izvode u tački $O(0,0)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(\Delta x)^2 \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{(0)^2 \cdot \Delta y}{(0)^2 + (\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = 0$$

Ona nije diferencijabilna u toj tački. Ako bi bila, njen priraštaj bi mogao da se napiše u obliku

$$\Delta z = \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} - 0 = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \omega \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

pri čemu je $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \omega = 0$, što nije tačno, jer za $\Delta x = \Delta y > 0$ imamo

$$\omega(\Delta x, \Delta x) = \frac{(\Delta x)^3}{(2(\Delta x)^2)\Delta x \sqrt{2}},$$

pa je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \omega(\Delta x, \Delta x) = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

što je kontradikcija.

Teorema

Ako funkcija $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ ima parcijalne izvode u nekoj $\delta-$okolini tačke M i ako su ti izvodi neprekidni u samoj tački M, tada je funkcija diferencijabilna u M.

Neprekidnost parcijalnih izvoda nije potreban uslov za diferencijabilnost:

Primer

Funkcija

$$z = f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

je diferencijabilna u tački $O(0,0)$, a oba parcijalna izvoda imaju prekid u tački $O(0,0)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}, \text{ za } (x,y) \neq (0,0),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}, \text{ za } (x,y) \neq (0,0),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(\Delta y)^2 \sin \frac{1}{(\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = 0,$$

$$\begin{aligned}\Delta z = z(\Delta x, \Delta y) &= 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y \\ &+ \left(\Delta x \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right) \Delta x \\ &+ \left(\Delta y \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right) \Delta y,\end{aligned}$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \alpha = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \Delta x \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0,$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \beta = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \Delta y \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0,$$

pa je funkcija diferencijabilna u $O(0,0)$.

$\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \dfrac{\partial z}{\partial x}$ i $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \dfrac{\partial z}{\partial y}$ ne postoje, pa su oba parcijalna izvoda prekidna u $O(0,0)$

$$\left(a_n = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0\right) \to (0,0), n \to \infty; \tfrac{\partial z}{\partial x}(a_n) \to -\infty, n \to \infty\right)$$

- funkcija $z = f(x_1, \dots, x_n)$ je diferencijabilna nad skupom $A \subset D^\circ$ ako je diferencijabilna u svakoj tački skupa A
- ako funkcija $z = f(x_1, \dots, x_n)$ ima neprekidne parcijalne izvode u tački $M \subset D^\circ$ onda kažemo da je ona neprekidno diferencijabilna u tački M
- ako funkcija $z = f(x_1, \dots, x_n)$ ima neprekidne parcijalne izvode u svim tačkama skupa $A \subset D^\circ$ onda kažemo da je ona neprekidno diferencijabilna nad skupom A
- za dovoljno male priraštaje $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ važi da je $\Delta z \approx dz$

Izvod složene funkcije

Neka je dato n funkcija

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \\ u_2 &= \varphi_2(x_1, \ldots, x_m), \\ &\vdots \\ u_n &= \varphi_n(x_1, \ldots, x_m), \end{aligned}$$

koje preslikavaju skup $D_1 \subset \mathbb{R}^m$ na skup $D \subset \mathbb{R}$.
Neka je $z = f(u_1, \ldots, u_n)$ definisana nad D^n. Tada je funkcija

$$z = f(\varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_m))$$

složena funkcija od funkcija

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \text{ i } f,$$

pri čemu je oblast definisanosti ove funkcije skup $D_1 \subset R^m$.

Teorema

Neka funkcije $u_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_m)$, $i = 1, \dots, n$ *imaju parcijalne izvode po svim promenljivama* $x_1, \dots, x_m$ *u tački* $M(x_1, \dots, x_m)$.
Ako je funkcija $z = f(u_1, \dots, u_n)$ *diferencijabilna u tački*

$$N(\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)),$$

tada složena funkcija $z = f(u_1, \dots, u_n)$ *ima sve parcijalne izvode po promenljivama* x_i *u tački* M *pri čemu važe jednakosti*

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_1} &= \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ &\vdots \\ \frac{\partial z}{\partial x_m} &= \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_m} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_m}. \end{aligned}$$

Dokaz. (za slučaj $z = f(u,v)$, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$)

Kako je funkcija z diferencijabilna u tački M, to je

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta v + \alpha\Delta u + \beta\Delta v, \lim_{(\Delta u,\Delta v)\to(0,0)} \alpha = \lim_{(\Delta u,\Delta v)\to(0,0)} \beta = 0.$$

Za $\Delta y = 0$ i $\Delta x \neq 0$, iz diferencijabilnosti funkcije f sledi

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Za $\Delta x \to 0$ je i $(\Delta_x u, \Delta_x v) \to (0,0)$, pa je

$$\lim_{\Delta x\to 0} \alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \beta = 0.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta_x v}{\Delta x} \right) \\
&= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Slično se pokazuje da je

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Izvod vektorske funkcije skalarne promenljive

Definicija

Ako za vektorsku funkciju

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in D^{\circ}$$

postoji

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

onda kažemo da vektorska funkcija $\vec{r}(t)$ *ima* **izvod u tački** t *koji se obeležava sa* $\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$ *ili sa* $\dot{\vec{r}}(t)$, *tj.*

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Očigledno je $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$,

pa važe slična pravila kao kod izvoda realne funkcije jedne realne promenljive:

a) $\dfrac{d}{dt}(\lambda_1\vec{r}_1 + \lambda_2\vec{r}_2) = \lambda_1\dfrac{d\vec{r}_1}{dt} + \lambda_2\dfrac{d\vec{r}_2}{dt}$,

b) $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) = \dfrac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \vec{r}_2 + \dfrac{d\vec{r}_2}{dt} \cdot \vec{r}_1$,

c) $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) = \dfrac{d\vec{r}_1}{dt} \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \dfrac{d\vec{r}_2}{dt}$,

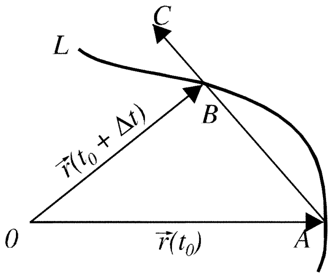
d) $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}(u(t))) = \dfrac{d\vec{r}}{du}\dfrac{du}{dt}$,

e) $\dfrac{d}{dt}(u\vec{r}) = u\dfrac{d\vec{r}}{dt} + \dfrac{du}{dt}\vec{r}$.

pri čemu izvodi sa desne strane postoje po pretpostavci.

Geometrijska interpretacija izvoda:

Pretpostavimo da je $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0 \neq 0$.



Tada je $\Delta\vec{r}(t) = \overrightarrow{AB}$.
A je vrh vektora $\vec{r}(t_0)$,
B je vrh vektora $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$,
pa je $\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \overrightarrow{AC}$.

Granična vrednost

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}_0$$

je vektor koji leži na pravoj koja prolazi kroz tačku A koju ćemo definisati kao **tangenta krive** L u tački A.

Tangenta krive L u tački A je prava

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_0} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0}, \quad \dot{r}_0 \neq 0,$$

a ravan

$$\dot{x}_0(x - x_0) = \dot{y}_0(y - y_0) = \dot{z}_0(z - z_0),$$

koja je normalna na p zovemo **normalna ravan krive** L.

(stavljeno je da je $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0$)

Vektor $\dot{\vec{r}}$ ima smer tamo kuda skalar raste.

Intenzitet vektora $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ zavisi od izbora parametra t.
Ako uzmemo da je $t = \alpha\tau$, $\alpha \neq 0$, prema d) je tada

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{d\tau}\right|\left|\frac{1}{\alpha}\right|,$$

pa možemo izabrati parametar tako da taj intenzitet bude jednak 1.
Obeležićemo tu vrednost parametra sa s.

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1.$$

Sledi da je $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$, tj. $s = \int\limits_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$.
Dakle, s je dužina luka krive L od neke fiksne tačke M. Prema geometrijskoj interpretaciji izvoda sledi da je $\dot{\vec{r}}(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \vec{t}_0$, ort tangente na krivu L u posmatranoj tački sa smerom porasta skalara t.

Za jedinični vektor $\vec{c} = \vec{c}(t)$ je $\vec{c} \cdot \vec{c} = 1$, odakle sledi da je

$$\frac{d\vec{c}}{dt} \cdot \vec{c} + \frac{d\vec{c}}{dt} \cdot \vec{c} = 0.$$

Dakle, izvod jediničnog vektora $\vec{c}$ normalan je na vektor $\vec{c}$. Za $r = r\vec{r_0}$ ($\vec{r_0}$ je ort) je

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r_0} + r\frac{d\vec{r_0}}{dt}.$$

Ako je $\vec{r_0}$ konstantan vektor, tada vektor

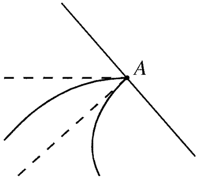
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r_0}$$

ima pravac jediničnog vektora, a ako je $\vec{r}$ konstantnog intenziteta, tada vektor

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\vec{r_0}}{dt}$$

ima pravac koji je normalan na vektor $\vec{r_0}$.

Mehanička interpretacija jednostranih izvoda:



Ako materijalna tačka tokom kretanja udari u prepreku, odbija se i nastavlja kretanje. U trenutku t_0 sudara sa preprekom, funkcija $\vec{r}$ nema izvod, ali postoje **desni i levi izvod u tački** t_0 :

$$\dot{\vec{r}}_+(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}, \quad \dot{\vec{r}}_-(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0^-} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Oni daju brzinu tačke pre i posle udara u prepreku. Odgovaraju im desna i leva tangenta na krivu L u tački udara A :

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}_{0+}} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_{0+}} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_{0+}}, \quad \frac{x - x_0}{\dot{x}_{0-}} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_{0-}} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_{0-}}.$$

Tangentna ravan i normala površi

Neka je površ S data jednačinom $F(x, y, z) = 0$.

- $M(x, y, z)$ je regularna(nesingularna) tačka površi S ako postoje sva tri parcijalna izvoda $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ u tački M koji su neprekidni u tački M i
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \neq (0, 0, 0)$$

- Ako tačka $M(x, y, z)$ nije regularna tačka površi S, onda za nju kažemo da je singularna tačka površi S.

Neka je skup L tačaka površi S (u daljem tekstu kriva L u parametarskom obliku) dat sa

$$L : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \\ z = \omega(t) \end{cases}$$

- φ, ψ, ω imaju neprekidne izvode za svako $t \in [\alpha, \beta]$
- $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t) \neq 0$, za svako $t \in [\alpha, \beta]$

Tada vektor

$$\dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{r}}_0(t_0) = \dot{x}(t_0)\vec{i} + \dot{y}(t_0)\vec{j} + \dot{z}(t_0)\vec{k}$$

leži na tangenti krive L u tački $P(x_0, y_0, z_0)$.

Tangenta krive L u tački P je tangenta površi S u tački P.

Jednačina površi je $F(x, y, z) = 0$ tj. $F(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) = 0$ jer L leži na S. Diferenciranjem po t dobijamo

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}}_{\vec{n}\cdot\dot{\vec{r}}} = 0,$$

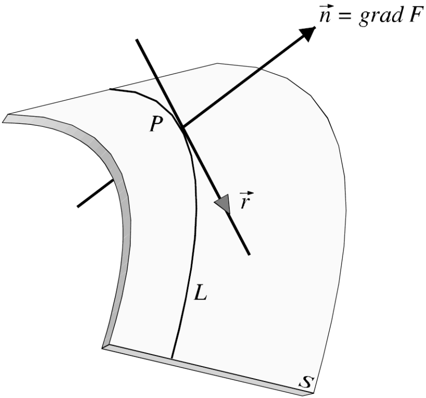
pri čemu je

- $\vec{n} = \operatorname{grad} F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$, ne zavisi od oblika krive, jedino od koordinata tačke P i funkcije $F(x, y, z)$,
- $\dot{\vec{r}} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$ leži na tangenti krive L u tački P

Kako je P regularna tačka površi S, to je

$$|\operatorname{grad} F| = |\vec{n}| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \neq 0.$$

Iz $\vec{n} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$ sledi da su vektori $\dot{\vec{r}}$ i $\vec{n}$ ortogonalni. Ovo znači da je vektor $\dot{\vec{r}}$, koji leži na tangenti krive L u tački P, normalan na vektor $\vec{n}$ u tački P.



Ovo se može primeniti na bilo koju krivu L koja leži na površi S i prolazi kroz tačku P.

Definicija

Ravan formirana od svih tangenti površi S kroz datu regularnu tačku $P \in S$ je tangentna ravan površi S u tački P.

Vektor

$$\vec{n}(P) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(P), \frac{\partial F}{\partial y}(P), \frac{\partial F}{\partial z}(P)\right)$$

je vektor normale tangentne ravni površi $F(x, y, z) = 0$ u tački P.

Jednačina tangentne ravni u regularnoj tački $P_0(x_0, y_0, z_0)$ je

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Ako je površ S data jednačinom $z = f(x, y)$, možemo da je napišemo kao $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$, pa je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1,$$

pa je jednačina tangentne ravni u tački $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = z - z_0.$$

Geometrijska interpretacija totalnog diferencijala

Zamenom $x - x_0 = \Delta x$ i $y - y_0 = \Delta y$, prethodna jednačina tangentne ravni se svodi na

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy. \end{aligned}$$

Desna strana gornje jednakosti je totalni diferencijal funkcije $z = f(x, y)$, u tački $M_0(x_0, y_0)$ ravni xy, pa je

$$z - z_0 = dz.$$

Sledi da je vrednost totalnog diferencijala funkcije $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$ koji odgovara priraštajima Δx i Δy jednak priraštaju po aplikati z tangentne ravni u tački $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dobijenog pri pomeranju iz tačke $M_0(x_0, y_0)$ u tačku $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Definicija

Prava koja prolazi kroz tačku $P_0(x_0, y_0, z_0)$ površi $F(x, y, z) = 0$ i koja je normalna na tangentnu ravan površi u tački P_0 je normala površi u tački P_0 i data je jednačinom

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)}.$$

Ako je površ S zadata jednačinom $z = f(x, y)$, jednačina normale površi u tački $P_0(x_0, y_0, z_0)$ postaje

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Parcijalni izvodi višeg reda

Neka $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$, postoji $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ za neko $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ u svim tačkama nepraznog podskupa $D_1 \subset D$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ je realna funkcija definisana nad skupom D_1, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : D_1 \to \mathbb{R}$, pa se može postaviti pitanje postojanja parcijalnog izvoda te funkcije po promenljivoj x_j u nekoj tački $M \in D_1$.

Definicija

Ako postoji parcijalni izvod $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)(M)$ tada je to drugi parcijalni izvod ili parcijalni izvod drugog reda funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ u tački M po promenljivama x_i, x_j (tim redom!) i označavamo ga sa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M).$$

- za $i = j$ je $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(M) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(M)$
- za $i \neq j$ je $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M)$ mešoviti parcijalni izvod
- u opštem slučaju $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M)$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M)$ mogu imati različite vrednosti

Primer

Funkcija $z = f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$
ima mešovite parcijalne izvode u svim tačkama, pri čemu oni nisu jednaki u koordinatnom početku, tj. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Teorema

Ako postoje drugi mešoviti parcijalni izvodi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *i* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *u nekoj* $\delta-$*okolini tačke* $M(x_1, \ldots, x_n)$ *i ako su oni neprekidni u datoj tački* M, *onda su oni i jednaki u toj tački, tj. važi jednakost*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M).$$

Parcijalni izvodi višeg reda definišu se induktivno:

- parcijalni izvod reda m ili m-tog reda funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ u tački $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ po promenljivama $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ (tim redom!) označava se sa
$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_m}}(M),$$
pri čemu neki od indeksa mogu biti jednaki.

Redosled traženja parcijalnih izvoda u opštem slučaju utiče na njegovu vrednost. U slučaju da su izvodi neprekidne funkcije u nekoj tački, na osnovu prethodne teoreme, redosled više nije bitan.
$C^m(D,\mathbb{R})$ je skup svih funkcija takvih da su svi parcijalni izvodi m-tog reda neprekidni nad skupom D.

Posledica

Za $f \in C^m(D,\mathbb{R})$ *se vrednost izraza* $\dfrac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_m}}(M)$ *ne menja pri proizvoljnoj permutaciji indeksa* $i_1, i_2, \dots, i_m$.

Funkcije klase $C^m(D,\mathbb{R})$, gde je D otvorena oblast su m puta neprekidno diferencijabilne. Za m-ti parcijalni izvod takve funkcije koristićemo oznaku

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

gde $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le \alpha_i \le m, \quad \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n = m.$

Totalni diferencijal višeg reda

Za diferencijabilnu funkciju $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nad skupom D je totalni diferencijal prvog reda (prvi totalni diferencijal) funkcije $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ u tački $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ koji odgovara priraštajima $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ promenljivih $x_1, x_2, \dots, x_n$ dat formulom

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n,$$

gde su $dx_i = \Delta x_i,\ i = \{1, 2, \dots, n\}$ proizvoljni priraštaji nezavisnih promenljivih, tj. proizvoljni brojevi nezavisni od x_i, $i = \{1, 2, \dots, n\}$.

- $x_1, x_2, \dots, x_n$ možemo da menjamo tako da pri tome $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ ostanu konstantni
- za date $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ totalni diferencijal dz je funkcija od $x_1, x_2, \dots, x_n$ koja takođe može da bude diferencijabilna

Definicija

Totalni diferencijal $d(dz)$ u tački $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koji odgovara priraštajima nezavisnih promenljivih $dx_1, \ldots, dx_n$ se zove drugi totalni diferencijal (totalni diferencijal drugog reda) funkcije $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ u tački M, u oznaci d^2z.

Ako funkcija $z = f(x, y)$ ima neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda u otvorenoj oblasti D, tada je totalni diferencijal dz funkcije $z = f(x, y)$ diferencijabilna funkcija pa u D postoji d^2z. Kako su dx i dy konstantni, sledi

$$
\begin{aligned}
d^2z &= d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2
\end{aligned}
$$

Ako sa d označimo $d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$, tada se može pisati

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right) z, \quad d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z$$

Opštije,

ako funkcija $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ima neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda u otvorenoj oblasti D, tada je totalni diferencijal dz funkcije $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ diferencijabilna funkcija pa u D postoji $d^2 z$. Kako su $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ konstantni, sledi

$$\begin{aligned} d^2 z &= d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n\right) \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}dx_1^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}dx_2^2 + \cdots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}dx_n^2 + \\ &\quad +2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}\partial x_n}dx_{n-1}dx_n\right) \end{aligned}$$

Ako sa d označimo

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n,$$

prethodna formula se može zapisati kao

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 z,$$

a prvi totalni diferencijal možemo zapisati u obliku

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) z.$$

- totalni diferencijal m-tog reda ili m-ti totalni diferencijal, $m \geq 3$, definišu se induktivno
- za m-ti totalni diferencijal, $m \geq 2$, kažemo da je totalni diferencijal višeg reda ili viši totalni diferencijal

Teorema

Ako funkcija $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^m(D, \mathbb{R})$, *D je otvorena oblast, tada postoji totalni diferencijal* $d^m z$ $m-$*tog reda koji je dat obrascem*

$$d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m z.$$

Lokalni ekstremi

Definicija

Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ *definisana na nekoj okolini* $L(A, \varepsilon)$ *tačke* $A \in D$ *(sledi da je* $A \in D^\circ$*).*

- *Ako je za svaku tačku* $X \in L(A, \varepsilon) \setminus \{A\}$ *ispunjeno*

  $$f(X) < f(A),$$

  tada funkcija f *u tački* A *ima lokalni maksimum jednak* $f(A)$.

- *Ako je za svaku tačku* $X \in L(A, \varepsilon) \setminus \{A\}$ *ispunjeno*

  $$f(X) > f(A),$$

  tada funkcija f *u tački* A *ima lokalni minimum jednak* $f(A)$.

Drugim rečima, funkcija $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ u tački

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D^\circ$$

ima lokalni ekstrem ako za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ postoje $\delta_i > 0$ takvi da je

$$\text{za svako } |\Delta x_i| < \delta_i, \quad (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0),$$

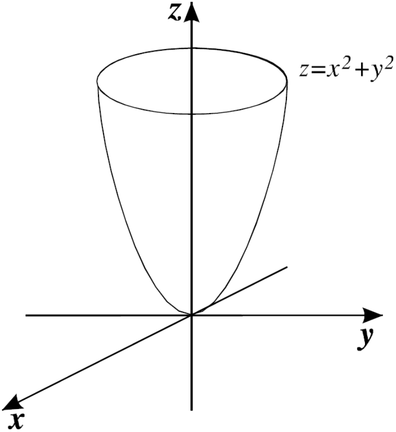
$$B(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) \in D$$

priraštaj funkcije

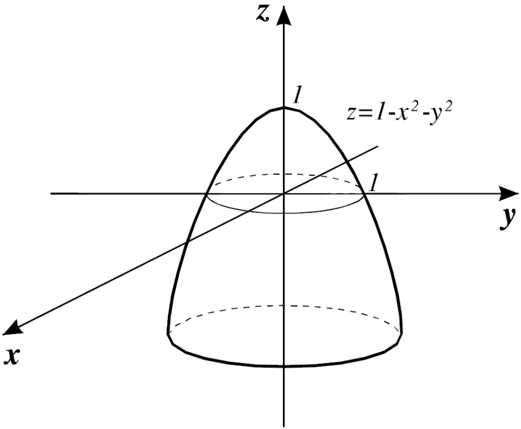
$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)$$

u tački A ili pozitivan (lokalni minimum) ili negativan (lokalni maksimum) (o rubnim ekstremima biće reči kasnije).

Funkcija $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ u tački $O(0, 0)$ ima lokalni minimum:



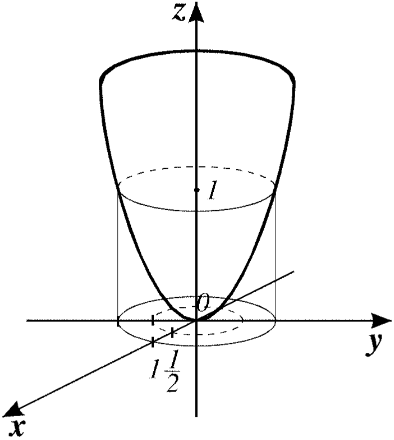
Funkcija $z = f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ u tački $O(0, 0)$ ima lokalni maksimum:



Funkcija

$$z = f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & , \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 1 & , \quad x = y = 0 \end{cases}$$

u tački $O(0,0)$ ima lokalni maksimum:



Potreban uslov za postojanje lokalnog ekstrema:

Teorema

Neka funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ u tački $A(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D^\circ$ ima sve parcijalne izvode prvog reda i neka u toj tački ima lokalni ekstrem. Tada je

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(A) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) = 0.$$

Specijalno, ako je $f(X)$, $X \in D$ diferencijabilna funkcija u nekoj okolini tačke $A \in D^\circ$, onda je

$$df(A) = 0, \quad (dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \neq (0, 0, \dots, 0).$$

Dokaz. Neka je $L(a, \varepsilon)$ otvorena lopta u kojoj je definisana funkcija $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i u kojoj važi da je

$$f(X) < f(A) \quad (f(X) > f(A)) \text{ za sve } x \in L(a, \varepsilon) \setminus \{A\}.$$

Za proizvoljno $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ posmatrajmo funkciju

$$f_i : (a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon) \to \mathbb{R}$$

definisanu sa

$$f_i(x_i) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n), \text{ za } x_i \in (a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon).$$

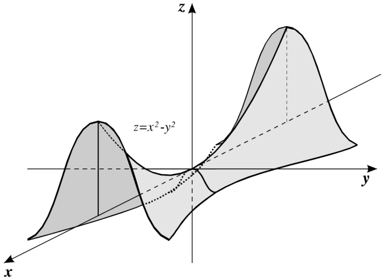
Ta funkcija jedne promenljive ima lokalni ekstrem u tački a_i, pa je

$$f_i'(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0.$$

$\square$

Navedeni uslov nije i dovoljan za postojanje ekstrema:

Funkcija $z = x^2 - y^2$ ima izvode $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x, \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y$, koji su jednaki nuli za $x = y = 0$.



Kako je $f(0,0) = 0$,

$$\Delta z(0,0) = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2, \text{ to je}$$

$$\begin{cases} \Delta f > 0 & , \quad \Delta x \neq 0, \Delta y = 0 \\ \Delta f < 0 & , \quad \Delta x = 0, \Delta y \neq 0 \end{cases}$$

pa ova funkcija nema lokalni ekstrem u tački $O(0,0)$.

- stacionarne tačke - unutrašnje tačke oblasti definisanosti diferencijabilne funkcije $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ u kojima su svi parcijalni izvodi prvog reda jednaki nuli

Dovoljni uslovi za postojanje lokalnog ekstrema (2 teoreme):

Teorema

Neka je $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ *otvorena oblast i neka* $A(a_1, \ldots, a_n) \in D$, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, *pri čemu je* A *stacionarna tačka funkcije* $f(x_1, \ldots, x_n)$, *tj.* $df(A) = 0$ *za* $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$. *Tada*

1. *Ako je* $d^2 f(A) < 0$ *za* $(dx_1, \ldots, dx_n) \neq (0, \ldots, 0)$, *funkcija* f *u tački* A *ima lokalni maksimum.*
2. *Ako je* $d^2 f(A) > 0$ *za* $(dx_1, \ldots, dx_n) \neq (0, \ldots, 0)$, *funkcija* f *u tački* A *ima lokalni minimum.*
3. *Ako* $d^2 f(A)$ *menja znak za* $(dx_1, \ldots, dx_n) \neq (0, \ldots, 0)$, *funkcija* f *u tački* A *nema lokalni ekstrem.*

Teorema

Neka je $D \subset \mathbb{R}^2$ *otvorena oblast i neka* $A(a,b) \in D$, $f \in C^2(D,\mathbb{R})$ *i*

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0.$$

Označimo sa $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$. *Tada:*

1. *Ako je* $r > 0 (t > 0)$ *i* $rt - s^2 > 0$, *funkcija* $f(x,y)$ *u tački* $A(a,b)$ *ima lokalni minimum.*
2. *Ako je* $r < 0 (t < 0)$ *i* $rt - s^2 > 0$, *funkcija* $f(x,y)$ *u tački* $A(a,b)$ *ima lokalni maksimum.*
3. *Ako je* $rt - s^2 < 0$, $f(x,y)$ *u tački* $A(a,b)$ *nema lokalni ekstrem.*
4. *Ako je* $rt - s^2 = 0$, *potrebna su dalja ispitivanja (posmatra se znak priraštaja funkcije u tački* $A(a,b)$*).*

Primer

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$

Iz $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y = 0$ i $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x + 2y = 0$ dobijamo stacionarne tačke $A(x, -x)$, tj. sve tačke prave $y = -x$ su stacionarne tačke. Kako je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2,$$

to je uvek

$$rt - s^2 = 4 - 4 = 0$$

ili

$$d^2 f(A) = 2(dx + dy)^2 \geq 0,$$

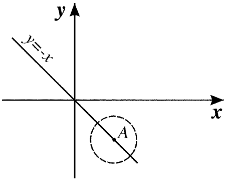
pa na osnovu ovih kriterijuma ne možemo zaključiti da li data funkcija u tačkama $A(x, -x)$ ima lokalni ekstrem.

U svakoj okolini tačke $A(x, -x)$ ima i drugih tačaka

$$B(y, -y), \text{ pri čemu je } A \neq B,$$

pri čemu važi da je

$$f(B) - f(A) = 0.$$



Dalje, za sve tačke

$$X(x, y), \text{ gde je } x \neq y$$

je

$$f(x, y) - f(0, 0) = (x + y)^2 > 0,$$

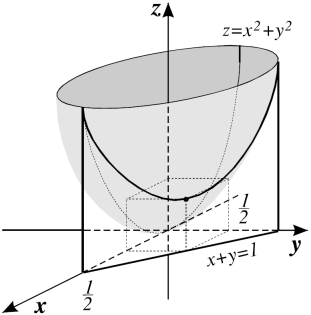
pa zaključujemo da je $f(X) - f(A) \geq 0$, za tačke $X \in L(A, \varepsilon)$, pa zaključujemo da funkcija ni u jednoj tački $A(x, -x)$ nema lokalni ekstrem.

Vezani (uslovni) ekstremi

Kod određivanja ekstremnih vrednosti funkcija više promenljivih promenljive mogu biti vezane nekim dodatnim relacijama (ne mogu slobodno da se menjaju u oblasti definisanosti funkcije).

Primer

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ *pod uslovom da je* $x + y = 1$.



Iz date veze sledi da je $y = 1 - x$, pa je u odgovarajućim tačkama

$$f(x, y) = f(x, 1 - x) = 2x^2 - 2x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.$$

Funkcija $f(x, 1 - x)$ ima minimum za $x = \dfrac{1}{2}$ (pa i $y = \dfrac{1}{2}$).

Minimalna vrednost je $\dfrac{1}{2}$.

Sama funkcija $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ u svakoj okolini tačke $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ ima i manjih vrednosti od $\dfrac{1}{2}$.

Inače, njena najmanja vrednost je 0.

Ograničimo razmatranja na funkciju dve promenljive, $z = f(x, y)$. Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, definisana na $D \subset \mathbb{R}^2$ i $\varphi : D \to \mathbb{R}$. Neka je

$$B = \{(x, y) \in D : \varphi(x, y) = 0\}$$

neprazan skup određen uslovom ili vezom $\varphi(x, y) = 0$.

Definicija

Funkcija $z = f(x, y)$ u tački nagomilavanja $A(x, y) \in B$ skupa B ima uslovni (vezani) lokalni maksimum (uslovni (vezani) lokalni minimum) pri uslovu $\varphi(x, y) = 0$, ako

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall X \in B \cap (L(A, \varepsilon) \setminus \{A\})) \quad f(X) < f(A) \quad (f(X) > f(A)).$$

Uslovni lokalni minimum odnosno uslovni lokalni maksimum jednim imenom zovemo uslovni ili vezani ekstremi a jednačina $\varphi(x, y) = 0$ zove se jednačina veze.

Ako je jednačina krive $L : \varphi(x, y) = 0$, problem određivanja uslovnih ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ na krivoj L može se formulisati kao: **odrediti uslovne ekstreme funkcije $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ nad skupom D**, **pod uslovom $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$**.

Lagranžov metod za određivanje uslovnog ekstrema:

Neka je $M_0 = (x_0, y_0)$ potencijalna tačka uslovnog ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ sa jednačinom veze $\varphi(x, y) = 0$.

Pp. da funkcije $f(x, y)$ i $\varphi(x, y)$ imaju neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda u nekoj okolini tačke $M_0(x_0, y_0)$ i da je bar jedan od parcijalnih izvoda

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(M_0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(M_0)$$

različit od 0 (neka je npr. $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(M_0) \neq 0$.)

Iz $\varphi(x,y)=0$ sledi da je $y=\psi(x)$, pa je $z=f(x,\psi(x))=h(x)$ funkcija jedne promenljive. Potreban uslov da funkcija

$$z=f(x,\psi(x))$$

u tački $M(x_0,\psi(x_0))$ ima ekstremnu vrednost je da je $\dfrac{dz}{dx}(M_0)=0$. Sledi da je

$$dz(M_0)=df(M_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)dy=0. \tag{1}$$

Iz jednačine veze se dobija

$$d\varphi(M_0)=\varphi_x(M_0)dx+\varphi_y(M_0)dy=0. \tag{2}$$

Množenjem jednakosti (2) sa λ i dodavanjem jednakosti (1) dobijamo

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)\right) dy = 0.$$

Iz $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ izrazimo λ :

$$\lambda = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Dakle, jednakosti

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

daju potrebne uslove za nevezane ekstreme u tački $M_0(x_0, y_0)$ funkcije

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$ (**LAGRANŽOVA FUNKCIJA**).

Dakle, uslovni ekstrem funkcije $f(x, y)$, ako je $\varphi(x, y) = 0$, je obavezno stacionarna tačka Lagranžove funkcije

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

pa se tačke koje mogu biti uslovni ekstremi funkcije $f(x, y)$, ako je $\varphi(x, y) = 0$, dobijaju tako što se formira Lagranžova funkcija i njeni prvi parcijalni izvodi

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}$$

izjednače sa nulom. Dobijamo sistem od tri jednačine

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= f_x(x, y) + \lambda\varphi_x(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= f_y(x, y) + \lambda\varphi_y(x, y) = 0 \\ & \varphi(x, y) = 0, \end{aligned}$$

čijim rešavanjem određujemo λ, x i y mogućih tačaka ekstrema.

Postojanje i prirodu uslovnih ekstrema određujemo pomoću znaka drugog totalnog diferencijala Lagranžove funkcije

$$d^2F(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2,$$

za skup vrednosti x_0, y_0, λ dobijenih iz prikazanog sistema jednačina pod uslovom $\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0$, za $(dx, dy) \neq (0,0)$.

- $d^2F(x_0, y_0) < 0$ u tački (x_0, y_0) funkcija $f(x,y)$ ima uslovni maksimum
- $d^2F(x_0, y_0) > 0$ u tački (x_0, y_0) funkcija $f(x,y)$ ima uslovni minimum
- $d^2F(x_0, y_0)$ u tački (x_0, y_0) menja znak funkcija $f(x,y)$ nema uslovni ekstrem

Primer

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ pod uslovom da je $x + y = 1$.

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1),$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial F}{\partial x} & = & 2x + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = & 2y + \lambda = 0, \\ & & x + y - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}, \lambda = -1.$$

Kako je $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$ i $dx + dy = 0$, to je

$$\begin{array}{rcl} d^2F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & = & 2dx^2 + 2dy^2 \\ & = & 2dx^2 + 2(-dx)^2 = 4dx^2 > 0, (dx, dx) \neq (0, 0), \end{array}$$

pa funkcija u tački $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ima uslovni minimum pod uslovom $x + y = 1$.

Primer

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $z = f(x, y) = xy$ pod uslovom da je $y - x = 0$.

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(y - x),$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial F}{\partial x} & = & y - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & = & x + \lambda = 0, \\ & & y - x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y = 0, \lambda = 0.$$

Kako je $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1$ i $dy - dx = 0$, to je $d^2 F\,(0, 0) = dx^2 > 0$, za $dx \neq 0$. Kako je $d^2 F\,(0, 0) > 0$, to funkcija u tački $O\,(0, 0)$ ima uslovni lokalni minimum. Primetimo da je $rt - s^2(0, 0) = -1 < 0$, dakle **funkcija može imati uslovni ekstrem i ako je** $rt - s^2 < 0$.

Neka je data funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, definisana na skupu $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ i funkcije $\varphi_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, za fiksirano $m \in \mathbb{N}$, $m < n$. Neka je

$$B = \{X \in D : \varphi_i(X) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$$

neprazan skup određen sa $\varphi_1(X) = 0, \varphi_2(X) = 0, \ldots, \varphi_n(X) = 0$.

Definicija

Funkcija $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ u tački nagomilavanja $A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in B$ skupa B ima uslovni (vezani) lokalni maksimum (uslovni (vezani) lokalni minimum) pri uslovima
$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \varphi_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$ *ako*

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall X \in B \cap (L(A, \varepsilon) \setminus \{A\})) \quad f(X) < f(A) \quad (f(X) > f(A)).$$

Uslovni lokalni minimum odnosno uslovni lokalni maksimum jednim imenom zovemo uslovni ili vezani ekstremi.

Ako tražimo uslovne ekstreme funkcije $z = f(x_1, \ldots, x_n)$, pod uslovima

$$\begin{gathered} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{gathered}$$

gde je $1 \leq m < n$, formiramo Lagranžovu funkciju:

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, \ldots, x_n),$$

uz pretpostavku da funkcije $f(x_1, \ldots, x_n)$ i $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, m$ imaju neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda u nekoj okolini potencijalne tačke uslovnog ekstrema $M(a_1, \ldots, a_n)$.

Dalje, pretpostavimo da u toj okolini funkcionalna matrica

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

ima rang m. Izjednačavanjem sa nulom svih parcijalnih izvoda prvog reda funkcije $F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ i uzimajući u obzir jednačine veze, dobijamo sistem od $n + m$ jednačina:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$\varphi_j(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad j \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

čijim rešavanjem nalazimo $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ i koordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mogućih ekstrema.

Postojanje i prirodu uslovnih ekstrema određujemo pomoću znaka drugog diferencijala Lagranžove funkcije. Ako je u dobijenim tačkama

- $d^2F < 0$, $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$, funkcija $f(x, y)$ ima uslovni maksimum
- $d^2F > 0$ $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$, funkcija $f(x, y)$ ima uslovni minimum
- d^2F menja znak funkcija $f(x, y)$ nema uslovni ekstrem

Između $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ postoje veze

$$\begin{gathered}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} dx_n = 0,\\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} dx_n = 0.\end{gathered}$$

Primer

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $u = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ *pod uslovom da je* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a > b > c > 0$.

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial F}{\partial x} & = & 2x + 2\lambda\frac{x}{a^2} = 2x(1 + \frac{\lambda}{a^2}) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee \lambda = -a^2, \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = & 2y + 2\lambda\frac{y}{b^2} = 2y(1 + \frac{\lambda}{b^2}) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee \lambda = -b^2, \\ \frac{\partial F}{\partial z} & = & 2z + 2\lambda\frac{z}{c^2} = 2z(1 + \frac{\lambda}{c^2}) = 0 \Rightarrow z = 0 \vee \lambda = -c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{lll} A(a, 0, 0), & B(-a, 0, 0) & (\lambda = -a^2) \\ C(0, b, 0), & D(0, -b, 0) & (\lambda = -b^2) \\ E(0, 0, c), & H(0, 0, -c) & (\lambda = -c^2) \end{array}$$

Kako je

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 + 2\frac{\lambda}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 + 2\frac{\lambda}{b^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2 + 2\frac{\lambda}{c^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 0,$$

to je

$$d^2F = 2\left(\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right) dx^2 + \left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right) dy^2 + \left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right) dz^2\right).$$

Za tačke A i B je

$$d^2F(A) = d^2F(B) = 2\left(\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) dy^2 + \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) dz^2\right).$$

Diferenciranjem jednačine veze dobijamo

$$\frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy + \frac{2z}{c^2}dz = 0,$$

odakle uvrštavanjem koordinata tačaka A i B dobijamo $\pm\dfrac{2a}{a^2}dx = 0$, odakle je $dx = 0$.
S obzirom da je $(dx, dy, dz) \neq (0, 0, 0)$, bar jedan od diferencijala dy ili dz mora biti različit od nule.
Kako je

$$1 - \frac{a^2}{b^2} < 0 \quad \text{i} \quad 1 - \frac{a^2}{c^2} < 0$$

sledi da je

$$d^2F(A) = d^2F(B) < 0,$$

pa funkcija u tačkama A i B ima uslovni maksimum.

Za tačke C i D je

$$d^2F(C) = d^2F(D) = 2\left(\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)dx^2 + \left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)dz^2\right).$$

Iz $\pm\frac{2b}{c^2}dy = 0$ sledi da je je $dy = 0$. S obzirom da je $(dx, dy, dz) \neq (0, 0, 0)$, bar jedan od diferencijala dx ili dz mora biti različit od nule. Ako je $dx = 0$ tada je

$$d^2F(C) = d^2F(D) = 2\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)dz^2 < 0,$$

a ako je $dz = 0$ tada je

$$d^2F(C) = d^2F(D) = 2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)dx^2 > 0,$$

pa kako d^2F menja znak u tačkama C i D, funkcija u tačkama C i D nema uslovni ekstrem.

Za tačke E i H je

$$d^2F(E) = d^2F(H) = 2\left(\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)dx^2 + \left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)dy^2\right).$$

Iz $\pm\frac{2c}{c^2}dy = 0$ sledi da je je $dz = 0$. Kako je

$$1-\frac{c^2}{a^2} > 0 \quad \text{i} \quad 1-\frac{c^2}{b^2} > 0$$

sledi da je

$$d^2F(E) = d^2F(H) > 0,$$

pa funkcija u tačkam A i B ima uslovni minimum.