Основни принципи пребројавања

ПРИНЦИП СУМЕ:

- Ако су A и B дисјунктни коначни скупови, тада је $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Доказ: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

$|A| = m$ $|B| = n$

Пошто важи $A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = n+m$ јер постоји бијективно пресликавање $A \cup B$ и скупа $\{1, 2, \dots, n+m\}$
$(a_1 \to 1, a_2 \to 2, \dots, a_m \to m, b_1 \to m+1, b_2 \to m+2, \dots, b_n \to m+n)$

- Уопштење: Нека је $n \geq 2$ и $A_1, \dots, A_n$ по паровима дисјунктни коначни скупови, тј. за $i,j \in \{1, \dots, n\}$ важи $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$. Тада је:
$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

Доказ: (индукција)

1° $n = 2$: слиједи из претходног тврђења (бијективно пресл.)

2° прет.: $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$

3° доказ за $n+1$: $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}| \overset{1°}{=} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| + |A_{n+1}|$
$\overset{2°}{=} |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| + |A_{n+1}|$

ПРИНЦИП ПРОИЗВОДА:

- Нека су A и B коначни скупови. Број елемената скупа $A \times B$ је $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Доказ: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

$|A \times B| = |\{(a,b) : a \in A, b \in B\}| = \left|\bigcup_{a \in A} (\{a\} \times B)\right|$

Како важи $a_i \neq a_j \Rightarrow (\{a_i\} \times B) \cap (\{a_j\} \times B) = \emptyset$

$$\Rightarrow |A \times B| = \underbrace{\sum_{a \in A} |\{a\} \times B|}_{\text{користећи принцип збира}} = \sum_{a \in A} |1 \times B| = \sum_{a \in A} |B| = |B| \sum_{a \in A} |1| = |A| \cdot |B|$$

- Уопштење: Нека је $n \geq 2$ и нека су $A_1, A_2, \dots, A_n$ коначни скупови. Тада је:

$$\boxed{|A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot \dots \cdot |A_n|}$$

Доказ: (индукција)

1° $n = 2$: следи из претходног тврђења

2° прет.: $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$

3° доказ за $n+1$: $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times A_{n+1}| \overset{1^\circ}{=} |A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| \cdot |A_{n+1}|$

$\overset{2^\circ}{=} |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot \dots \cdot |A_n| \cdot |A_{n+1}|$

ДИРИХЛЕОВ ПРИНЦИП:

- Ако је m објеката смјештено у n кутија и $m > n$, онда постоји кутија у којој се налазе два објекта.

Доказ:

Претпоставимо супротно, након распореда n објеката у n кутија, у свакој кутији је највише један објекат, а максималан број објеката је n, што је супротно од претпоставке $m > n$. Контрадикција.

- Нека је $|A| = m$ и $|B| = n$, $m > n$. Ако је $f : A \to B$, тада f није „1-1".

Доказ:

Ако $f : \{1, 2, \dots, m\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ репрезентује смјештање објеката из $\{1, 2, \dots, m\}$ у кутије са ознакама $\{1, 2, \dots, n\}$, тада m објеката смјештамо у n кутија.

Пошто је број кутија мањи, према Дирихлеовом принципу једна кутија ће садржати бар два објекта, односно бар два објекта имају исту слику $\Rightarrow$ f није „1-1".

- Ако је у n кутија распоређено m објеката, онда постоји бар једна кутија са $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ објеката. – Уопштење

Доказ:

Претпоставивши супротно, у свакој кутији има највише $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil - 1$ објеката, односно укупно постоји објеката $n \cdot \left(\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil - 1 \right) < \left(\frac{m}{n} + 1 - 1 \right) \cdot n = m$, односно број објеката је мањи од m, што је супротно од претпоставке да има m објеката. Контрадикција.

ПРИНЦИП БИЈЕКЦИЈЕ:

- Ако између два коначна скупа $|A|$ и $|B|$ постоји бијекција, тада је $|A| = |B|$.

Доказ:

Ако је $|A| = 0$, онда је и $|B| = 0$ (важи и обратно).
Ако је $|A| = n$ и $|B| = m$, а $f : A \to B$ бијективно пресликавање. Како је f бијективно, оно је и инјективно, одакле следи да је $m \leq n$. И f^{-1} је бијективно, дакле и инјективно, односно $n \leq m$. Одавде следи да важи $m = n$.

Избори елемената

ВАРИЈАЦИЈЕ СА ПОНАВЉАЊЕМ:

- Нека су A и B скупови са особином $|A| = m \geq 1$ и $|B| = n \geq 1$. Број свих пресликавања $f: A \to B$ је n^m

Доказ: (принцип производа)

Нека је $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Произвољну функцију $f: A \to B$ можемо представити као m-торку елемената из B:

$$(f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots, f(a_m)) \in \underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{m \text{ пута}}$$

Број таквих m-торки је (потпуности):

$$|\underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{m \text{ пута}}| = |B|^m = n^m$$

- Дат је скуп A са особином $|A| = n \geq 1$. Број подскупова скупа A је 2^n.

Доказ: (биномни образац)

Нека је A_i скуп кардиналности i, подскуп скупа A, где је $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Тада је број свих подскупова

$$|A_0| + |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} =$$
$$= (1+1)^n = 2^n$$

ВАРИЈАЦИЈЕ БЕЗ ПОНАВЉАЊА:

- Нека су A и B скупови са особином $|A| = m$, $|B| = n$ и $n \geq m \geq 1$. Број пресликавања $1-1$ $f: A \to B$ је
$$n(n-1)\ldots(n-m+1)$$

Доказ: (индукција по m)

$1°$ $m = 1$: Једном аргументу одговара једна слика, а на располагању има n слика, дакле тврђење је задовољено.

2° прет: тврђење важи за $|A|=m$

3° доказ за $m+1$: Издвајањем једног елемента из A, који је произвољан, следи да за њега има n могућих слика. Нека је тај елемент a. На функцију $f: A\setminus\{a\} \to B\setminus\{f(a)\}$ можемо применити индуктивну претпоставку, односно број таквих функција је $(n-1)(n-2)\dots((n-1)-m+1)$.
Број функција $f: A \to B$ једнак је производу броја функција $\{a\} \to B$ и $A\setminus\{a\} \to B\setminus\{f(a)\}$
тј. $n(n-1)\dots((n-1)-m+1) =$
$= n(n-1)\dots(n-(m+1)+1)$ што је требало доказати.

ПЕРМУТАЦИЈЕ МУЛТИСКУПА:

- Број пермутација мултискупа M једнак је
$$P(m_1, m_2, \dots, m_l) = \frac{(m_1+m_2+\dots+m_l)}{m_1!\, m_2! \dots m_l!}$$
где је $M = [a_1, \dots, a_l]_{m_1, m_2, \dots, m_l} =$
$= \{\underbrace{\{a_1, \dots, a_1\}}_{m_1}, \dots, \underbrace{\{a_l, \dots, a_l\}}_{m_l}\}$

Доказ:
Када би сви елементи M били различити, број бијективних пресликавања скупа на самог себе би био $(m_1+m_2+\dots+m_l)!$. Међутим, због понављања одређених елемената, имамо $m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_l!$ истих пресликавања.

КОМБИНАЦИЈЕ БЕЗ ПОНАВЉАЊА:

- Број m-варијација без понављања на скупу B једнак је
$$V(n, m) = m! \left|\binom{B}{m}\right|$$

Доказ:
Нека је $n=|B|\geq 1$, да би се изабрало m елемената из B, постоји $\left|\binom{B}{m}\right|$ начина, и да се елементи испермутују $m!$

Дакле, $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = m!\left|\binom{B}{m}\right|$, односно

$$\left|\binom{B}{m}\right| = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

КОМБИНАЦИЈЕ СА ПОНАВЉАЊЕМ:

- Број m-комбинација са понављањем скупа од n елемената једнак је: $\overline{C}(n,m) = \binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n-1}{n-1}$

Доказ: (преко пермутација са понављањем)

Посматрајмо m јединица које требају да се подијеле на $n-1$ преградама на n група. Дакле, на располагању постоји $m+n-1$ елемената који се пермутују, од којих се јединице понављају m пута, а преграде $n-1$ пута:

$$\frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!} = \overline{C}(n,m)$$

ПРИНЦИП УКЉУЧЕЊА И ИСКЉУЧЕЊА:

- За произвољне скупове важи $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$

Доказ:

Скупови $A\cap B$ и $A\setminus B$ су дисјунктни:

$$A = (A\cap B)\cup(A\setminus B) \Rightarrow |A| = |A\cap B| + |A\setminus B|$$

$$B = (A\cap B)\cup(B\setminus A) \Rightarrow |B| = |A\cap B| + |B\setminus A|$$

$$A\cup B = (A\setminus B)\cup(A\cap B)\cup(B\setminus A) \Rightarrow |A\cup B| = |A\setminus B| + |A\cap B| + |B\setminus A|$$

односно $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$

- За произвољне скупове A, B и C важи
$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$

Доказ:

$$|A\cup B\cup C| = |(A\cup B)\cup C| = |A\cup B| + |C| - |(A\cup B)\cap C| =$$
$$= |A| + |B| - |A\cap B| + |C| - |(A\cap C)\cup(B\cap C)| =$$
$$= |A| + |B| - |A\cap B| + |C| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

- **Уопштење:** Нека је $n \geq 2$. Тада важи:
$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

Доказ: (индукција по n)

1° $n=2$: слиједи из доказа претходних теорема

2° прет. : важи за n

3° доказ за $n+1$:
$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \left|A_1\cup\bigcup_{i=2}^{n} A_i\right| = |A_1| + \left|\bigcup_{i=2}^{n} A_i\right| - \left|\bigcup_{i=2}^{n}(A_1\cap A_i)\right| =$$
$$= |A_1| + \sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{2,\dots,n\}}(-1)^{|I|-1}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| - \sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{2,\dots,n\}}(-1)^{|I|-1}\left|\bigcap_{i\in I}(A_i\cap A_1)\right| =$$
$$= \sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,2,\dots,n\}}(-1)^{|I|-1}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

- Нека су A и B скупови, те $|A|=m$, $|B|=n$ и $1\leq n\leq m$. Број сирјективних пресликавања скупа A у скуп B је
$$n^m - n(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m + \dots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}$$

Доказ:

Нека је $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$. Несирјективно пресликавање има бар један елемент из B неспарени са скупом A. Тј. $f: A\to B$ је бар у једном од скупова $B_i = \{f: A\to B\setminus\{b_i\}\}$

$$\Rightarrow |\{f: A\to B\}| = |\{f: A\to B : f \text{ је „на"}\}\cup\{f: A\to B : f \text{ није „на"}\}| =$$
$$= |\{f: A\to B : f \text{ је „на"}\}\cup B_1\cup B_2\cup\dots\cup B_n| =$$
$$\overset{\text{принцип}}{\underset{\text{збира}}{=}} |\{f: A\to B : f \text{ је „на"}\}| \quad |B_1\cup B_2\cup\dots\cup B_n| = n^m$$

$$|B_1\cup B_2\cup\dots\cup B_n| = |B_1| + \dots + |B_n| - |B_1\cap B_2| - \dots - |B_{n-1}\cap B_n| + \dots +$$
$$+ (-1)^{n-1}|B_1\cap\dots\cap B_n| = (n-1)^m\binom{n}{1} - \binom{n}{2}(n-2)^m + \dots + (-1)^{n-1}$$

$$\Rightarrow |\{f: A\to B : f \text{ је „на"}\}| = n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-1)^m - \dots - (-1)^{n-1}$$

СТИРЛИНГОВИ БРОЈЕВИ ДРУГЕ ВРСТЕ:

- Нека је $0 < n \leq m$. Тада је $S(m,n) = \frac{1}{n!} \left| \{ f : A \to B : f \text{ је „на"} \} \right|$

Доказ:

Ако се m елемената распоређује у n једнаких кутија, онда би се те кутије могле означити на $n!$ начина (распоређује се m елемената на n кутија на $S(m,n)$ начина). Укупно $n!\,S(m,n)$. Ако се за свако означавање креира бијективно пресликавање скупа у број којим се означава, слиједи:

$$n!\,S(m,n) = \left| \{ f : A \to B : f \text{ је „на"} \} \right|$$

- Нека су m и n цијели бројеви са особином $0 < n \leq m$. Тада је:
  i) $S(m,m) = 1$ ii) $S(m,1) = 1$ iii) $S(m,n) = S(m-1,n-1) + nS(m-1,n)$, $0 < n \leq m$

Доказ: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ $|A| = m$

i) Разбијање скупа A на m непразних партиција се може одрадити на само један начин: $\{\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_m\}\}$

ii) Разбијање скупа A на 1 непразну партицију се може одрадити на само један начин: $\{\{a_1, a_2, \dots, a_m\}\}$

iii) Фиксирајмо $a_1 \in A$. Ако је A разбијен на партиције $B_1, B_2, \dots, B_n$, тада:

1.) Ако је a_1 једини елемент неког подскупа, тада преосталих $m-1$ елемената треба распоредити на $n-1$ партиција ($S(m-1,n-1)$)

2) Ако a_1 припада неком од подскупова, а у тај подскуп се може додати још елемената, тада преосталих $m-1$ елемената треба распоредити на n партиција и на n начина одабрати коме припада a_1 ($nS(m-1,n)$)

$$S(m,n) = S(m-1,n-1) + nS(m-1,n)$$

Биномни коефицијенти и биномна формула

БИНОМНИ КОЕФИЦИЈЕНТИ:

- За цијеле бројеве n и m са особином $0 \leq m \leq n$ важи:
$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Доказ:

За $m \in \{0, n\} \Rightarrow \binom{n}{0} = 1 = \frac{n!}{n!} = \binom{n}{n}$

за $1 \leq m \leq n-1$: $\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

- Паскалов идентитет: За цијеле бројеве n и m, $1 \leq m \leq n$ важи
$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Доказ: (комбинаторни)

Фиксирајмо елемент $a \in A$, гдје је A скуп са $n \geq 1$ елемената. Број подскупова скупа A са m елемената је $\binom{n}{m}$. Број подскупова који не садрже a је $\binom{n-1}{m}$. Број подскупова који садрже a је $\binom{n-1}{m-1}$ (један ел. је фиксиран, тражи се још $m-1$ а остало је $n-1$). Скупови који не садрже a и скупови који садрже a су дисјунктни, те је, према принципу збира:
$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

- Биномна формула: Нека је $x, y \in \mathbb{R}$ и $n \geq 1$ је произвољан цијели број. Тада важи $(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + nxy^{n-1} + y^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^{n-m} y^m$

Доказ: (комбинаторни)

Пошто је $(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot \ldots \cdot (x+y)}_{n \text{ пута}}$, приликом сваког множења из сваке заграде бирамо или x или y. Ако из $m \geq 0$ заграда изаберемо y, за шта постоји $\binom{n}{m}$ начина, једнозначно из преосталих $n-m$ заграда бирамо x.

$\Rightarrow (x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^{n-m} y^m$.

ПОЛИНОМНИ КОЕФИЦИЈЕНТИ:

- Нека су дати цијели бројеви $m_1, \dots, m_l \geq 0$ и нека је $n = m_1 + \dots + m_l$.

(i) $\binom{n}{m_1,\dots,m_l} = \binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\cdots\binom{m_l}{m_l}$

(ii) Ако је $\{\{m_1,\dots,m_l\}\} = \{\{k_1,\dots,k_l\}\}$ онда је $\binom{n}{m_1,\dots,m_l} = \binom{n}{k_1,\dots,k_l}$

(iii) Ако је $0 < m_1,\dots,m_l < n$, онда је:

$$\binom{n}{m_1,m_2,\dots,m_l} = \binom{n-1}{m_1-1,m_2,\dots,m_l} + \binom{n-1}{m_1,m_2-1,\dots,m_l} + \binom{n-1}{m_1,m_2,\dots,m_l-1}$$

(iv) $\binom{n}{m_1,m_2,\dots,m_{l-1},0} = \binom{n}{m_1,m_2,\dots,m_{l-1}}$

Доказ:

(i) $\binom{n}{m_1}\cdots\binom{m_l}{m_l} = \frac{n!}{m_1!\cancel{(n-m_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-m_1)!}}{m_2!\cancel{(n-m_1-m_2)!}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{m_l!}}{m_l!\,0!} =$

$= \frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_l!} = \binom{n}{m_1,m_2,\dots,m_l}$

(ii) У имениоцу се налазе исти факторијели, само што им распоред нужно није исти. Пошто је множење комутативна и асоцијативна операција, слиједи да једнакост важи.

(iii) Лијева страна одговара броју пермутација са понављањем $P(m_1,m_2,\dots,m_l)$ гдје се нпр. a_1 понавља m_1 пута, a_2 m_2 пута, $\dots$, a_l m_l пута.
Скуп можемо подијелити на l подскупова са заједничким првим елементом. То значи да се a_1 понавља m_1-1 пута у остатку скупа без првог елемента (a_1 је први), што је укупан број пермутација $P(m_1-1,m_2,\dots,m_l)$. Исто се уради и кад се $a_2,\dots,a_l$ фиксирају на прво мјесто. И пошто су такви скупови дисјунктни, према принципу збира једнакост важи.

(iv) $\binom{n}{m_1,\dots,m_{l-1},0} = \frac{n!}{m_1!\dots m_{l-1}!\,0!} = \frac{n!}{m_1!\dots m_{l-1}!} = \binom{n}{m_1,\dots,m_{l-1}}$

Рекурентна релације низова

ХОМОГЕНЕ ЛИНЕАРНЕ РЕКУРЕНТНЕ РЕЛАЦИЈЕ СА КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА:

- Ако је карактеристична једначина рекурентне релације $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$ има k (по паровима) различитих коријена $x_1, x_2, \dots, x_k$, тада је:

  (i) за произвољне $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, рјешење је:
  $$a_n = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n + \dots + \alpha_k x_k^n$$
  (ii) константе $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ су јединствено одређене почетним условима $a(0) = a_0, \dots, a(k-1) = a_{k-1}$

Доказ:

(i) Замјеном израза у рекурентну релацију, добијамо:
$$\alpha_1 x_1^n + \dots + \alpha_k x_k^n = c_1(\alpha_1 x_1^{n-1} + \dots + \alpha_k x_k^{n-1}) + \dots + c_k(\alpha_1 x_1^{n-k} + \dots + \alpha_k x_k^{n-k})$$
$$\Rightarrow \alpha_1 x^{n-k}(x_1^k - c_1 x_1^{k-1} - \dots - c_k) + \dots + \alpha_k x^{n-k}(x_k^k - c_1 x_k^{k-1} - \dots - c_k) = 0$$
Пошто су $x_1, x_2, \dots, x_k$ коријени, изрази у заградама су једнаки 0. Доказ је завршен

(ii) Да би задане вриједности одговарале условима, потребно је да важи:
$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k &= a_0 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k &= a_1 \\ &\dots \\ \alpha_1 x_1^{k-1} + \alpha_2 x_2^{k-1} + \dots + \alpha_k x_k^{k-1} &= a_{k-1} \end{aligned}$$

Детерминанта система:
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \dots & x_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i \le j \le k} (x_j - x_i) \neq 0$$

$\Rightarrow D \neq 0$: систем је одређен и има јединствено рјешење.

НЕХОМОГЕНЕ ЛИНЕАРНЕ РЕКУРЕНТНЕ РЕЛАЦИЈЕ СА КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА:

- Ако је $a_n^{(p_1)}$ партикуларно рјешење нехомогене линеарне рекурентне релације са константним коефицијентима, тада је свако рјешење једначине
$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f(n)$ облика
$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$, гдје је $a_n^{(h)}$ рјешење одговарајуће хомогене рекурентне релације.

Доказ:

Ако је $a_n^{(p_1)}$ једно парт. рјешење, тада важи $a_n^{(p_1)} = c_1 a_{n-1}^{(p_1)} + \ldots + c_k a_{n-k}^{(p_1)} + f(n)$
а уопштено произвољно рјешење $a_n^{(p)} = c_1 a_{n-1}^{(p)} + \ldots + c_k a_{n-k}^{(p)} + f(n)$
$\Rightarrow a_n^{(p)} - a_n^{(p_1)} = c_1 (a_{n-1}^{(p)} - a_{n-1}^{(p_1)}) + c_2 (a_{n-1}^{(p)} - a_{n-1}^{(p_1)}) + \ldots$, односно
$a_n^{(p_1)} - a_n^{(p)}$ је рјешење хомогене једначине тако да се $a_n^{(p)}$ може изразити $a_n^{(h)}$ и $a_n^{(p_1)}$ користећи образац: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p_1)}$

- Ако су $a_n^{(p_1)}$ и $a_n^{(p_2)}$ редом рјешења нехомогених рекурентних релација $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f_1(n)$ и
$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f_2(n)$
онда је $a_n^{(p_1)} + a_n^{(p_2)}$ рјешење нехомогене рекурентне релације
$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f_1(n) + f_2(n)$

Доказ:

Сабирањем једначина, добија се:
$$a_n^{(p_1)} + a_n^{(p_2)} = c_1 (a_{n-1}^{(p_1)} + a_{n-1}^{(p_2)}) + c_2 (a_{n-2}^{(p_1)} + a_{n-2}^{(p_2)}) + \ldots + c_k (a_{n-k}^{(p_1)} + a_{n-k}^{(p_2)}) + f_1(n) + f_2(n)$$
$\Rightarrow a_n^{(p_1)} + a_n^{(p_2)}$ је рјешење рекурентне релације
$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f_1(n) + f_2(n)$$