VEŽBE IZ MATEMATIČKE ANALIZE I

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1. Vežbe III.1

1.1. INTEGRALNI RAČUN

Ako za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$, postoji funkcija $F : I \to \mathbb{R}$, koja ima izvod $F'(x)$ nad intervalom I i pri tom važi

$$F'(x) = f(x), x \in I,$$

onda kažemo da je $F(x)$ *primitivna funkcija* funkcije $f(x)$ nad intervalom I.

Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f(x)$ nad nekim intervalom I naziva se *neodređeni integral* funkcije $f(x)$ i označava se sa $\int f(x)dx$.

U ovoj definiciji $f(x)$ se naziva podintegralna funkcija, $f(x)dx$ podintegralni izraz, $\int$ znak integrala, a postupak nalaženja neodređenog integrala naziva se integracija.

Ako je $F(x)$ jedna primitivna funkcija funkcije $f(x)$ nad nekim intervalom, onda je skup svih primitivnih funkcija, tj. $\int f(x)dx$ nad tim intervalom oblika

$$\{F(x) + c : \ c \in \mathbb{R}\},$$

što kraće pišemo

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c.}$$

Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna nad intervalom I tada postoji primitivna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ nad intervalom I, tj. postoji neodređeni integral funkcije $f(x)$ nad datim intervalom.

- **Osobine neodređenog integrala**

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$,
2. $\int f'(x)dx = f(x) + c$,
3. $d\int f(x)dx = f(x)dx$,
4. $\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$, $a = const.$,
5. $\int (f_1(x) + \ldots + f_n(x))\, dx = \int f_1(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx.$

1.2. Tablica integrala

$\int dx = x + c$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\int \frac{dx}{x} = \ln \lvert x \rvert + c$
$\int e^x dx = e^x + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$
$\int \cos x dx = \sin x + c$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$
$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + c_1,\ a \neq 0$
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + c,\ a \neq 0$
$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{a+x}{a-x} \right\rvert + c,\ a \neq 0$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + c,\ a \neq 0$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c = -\arccos \frac{x}{a} + c_1,\ a > 0$
$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c,\ a > 0$
$\int \sqrt{x^2 + A}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2} \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 + A} \right\rvert + c$

Podrazumeva se da date jednakosti važe nad onim intervalima nad kojima su podintegralne funkcije neprekidne.

1.3. Integracija pomoću smene

Neka sirjekcija $\varphi : I_1 \to I \subset \mathbb{R}$ ima neprekidan izvod različit od nule nad intervalom I_1 i neka za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ postoji neodređeni integral nad intervalom I. Tada važi

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,}$$

(pri tom se podrazumeva da se posle integracije desne strane stavi $t = \varphi^{-1}(x)$).

Zadatak 1.1. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\, dx$.

Rešenje.

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\ t = \ln x,\ dt = \tfrac{dx}{x}\ \right] = \int t\ dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{(\ln x)^2}{2} + c.$$

Zadatak 1.2. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{4 + x^2}\, dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{4 + x^2}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{1 + (\frac{x}{2})^2}\, dx = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \\ 2dt = \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2} dx \end{array}\right] \\ &= \frac{1}{2}\int t dt = \frac{t^2}{4} + c = \frac{1}{4}\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{2}\right)^2 + c. \end{aligned}$$

Zadatak 1.3. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x\ln(1 + x^2) + 1}{1 + x^2}\, dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x\ln(1 + x^2) + 1}{1 + x^2}\, dx = \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2}\, dx + \int \frac{x\ln(1 + x^2)}{1 + x^2}\, dx + \int \frac{dx}{1 + x^2} \\ &= \left[\begin{array}{ll} t = \operatorname{arctg} x & t_1 = \ln(1 + x^2) \\ dt = \frac{dx}{1+x^2} & \frac{1}{2}dt_1 = \frac{xdx}{1+x^2} \end{array}\right] \\ &= \int e^t dt + \frac{1}{2}\int t_1 dt_1 + \int \frac{dx}{1 + x^2} = e^t + \frac{{t_1}^2}{4} + \operatorname{arctg} x + c \\ &= e^{\operatorname{arctg} x} + \frac{1}{4}\left[\ \ln(1 + x^2)\ \right]^2 + \operatorname{arctg} x + c. \end{aligned}$$

Zadatak 1.4. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx.$

Rešenje.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx = \left[\begin{array}{c} \sqrt{1+\ln x} = t \Rightarrow 1+\ln x = t^2 \\ \frac{dx}{x} = 2tdt \end{array}\right] \\ &= \int \frac{t^2-1}{t} 2tdt = 2\int t^2 dt - 2\int dt \\ &= 2\frac{t^3}{3} - 2t + c = \frac{2}{3}(1+\ln x)\sqrt{1+\ln x} - 2\sqrt{1+\ln x} + c \\ &= \frac{2\sqrt{1+\ln x}}{3}(\ln x - 2) + c. \end{aligned}$$

1.4. Parcijalna integracija

Neka su $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne funkcije i neka postoji primitivna funkcija funkcije $u'(x)v(x)$. Tada postoji primitivna funkcija funkcije $u(x)v'(x)$ i pri tom važi jednakost

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu.}$$

Zadatak 1.5. Izračunati $I = \displaystyle\int \ln x dx$.

Rešenje.

$$I = \int \ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{bmatrix} = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + c.$$

Zadatak 1.6. Izračunati $I = \displaystyle\int x^5 e^{-x^2} dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
I &= \int x^5 e^{-x^2} dx = \begin{bmatrix} -x^2 = t \\ xdx = -\frac{1}{2}dt \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\int t^2 e^t dt = \begin{bmatrix} u = t^2 \Rightarrow du = 2tdt \\ dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}(t^2 e^t - 2\int te^t dt) = -\frac{1}{2}t^2 e^t + \int te^t dt \ = \begin{bmatrix} u_1 = t \Rightarrow du_1 = dt \\ dv_1 = e^t dt \Rightarrow v_1 = e^t \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}t^2 e^t + te^t - \int e^t dt = -\frac{1}{2}t^2 e^t + te^t - e^t = -e^{-x^2}(1 + x^2 + \frac{x^4}{2}) + c.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.7. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}
I = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} &= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2 + x^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^2}\, dx \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2 + a^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx \\
&= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \underbrace{\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx}_{I_2}
\end{aligned}$$

Sada ćemo uvesti smenu kako bismo našli rešenje integrala I_2. Integral rešavamo parcijalnom integracijom na sledeći način

$u = x \Rightarrow du = dx,$

$$dv = \frac{xdx}{(x^2+a^2)^2} \Rightarrow v = \int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{c} t = x^2+a^2 \\ \frac{1}{2}dt = xdx \end{array} \right] = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\int t^{-2}dt$$
$$= -\frac{1}{2}t^{-1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2},$$

pa je

$$I_2 = \int \frac{x}{(x^2+a^2)^2}xdx = -\frac{x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{x}{2(x^2+a^2)} + c.$$

Traženi integral je

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^3}arctg\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2a}arctg\frac{x}{a} - \frac{x}{2(x^2+a^2)}\right) + c$$
$$= \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + c.$$

Zadatak 1.8. Izračunati $I = \displaystyle\int \cos^2(\ln x)dx.$

Rešenje.

$$I = \int \cos^2(\ln x)dx = \left[\begin{array}{c} u = \cos^2(\ln x) \Rightarrow du = 2\cos(\ln x)\cdot(-\sin(\ln x))\cdot\frac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right]$$
$$= x\cos^2(\ln x) + 2\int\cos(\ln x)\sin(\ln x)dx = x\cos^2(\ln x) + \int\sin(2\ln x)dx,$$

pri čemu smo iskoristili trigonometrijsku formulu $\sin 2x = 2\sin x\cos x$. Dalje, neka je

$$I_1 = \int \sin(2\ln x)\,dx = \left[\begin{array}{cc} u = \sin(2\ln x) & dv = dx \\ du = \frac{2}{x}\cos(2\ln x)dx & v = x \end{array} \right]$$
$$= x\sin(2\ln x) - 2\int\cos(2\ln x)dx = \left[\begin{array}{cc} u_1 = \cos(2\ln x) & dv_1 = dx \\ du_1 = -\sin(2\ln x)\frac{2dx}{x} & v_1 = x \end{array} \right]$$
$$= x\sin(2\ln x) - 2x\cos(2\ln x) - 4\underbrace{\int\sin(2\ln x)\,dx}_{I_1},$$

pa dobijamo da je

$$I_1 = \frac{1}{5}(x\sin(2\ln x) - 2x\cos(2\ln x)) + c.$$

Konačno rešenje je

$$I = \int\cos^2(\ln x)dx = x\cos^2(\ln x) + \frac{1}{5}(x\sin(2\ln x) - 2x\cos(2\ln x)) + c.$$

Napomena:

1. Integrale oblika $\int P_n(x)\sin(ax)dx$ i $\int P_n(x)\cos(ax)dx$, gde je $P_n(x)$ polinom $n-$tog stepena, rešavamo parcijalnom integracijom

$$[u = P_n(x), dv = \sin(ax)dx] \text{ odnosno } [u = P_n(x), dv = \cos(ax)dx]$$

   i potrebno je uraditi n puta parcijalnu integraciju.

2. Integral oblika $\int P_n(x)\ln^m xdx$, gde je $P_n(x)$ polinom $n-$tog stepena i $m \in \mathbb{N}$, rešavamo parcijalnom integracijom

$$[u = \ln^m x, dv = P_n(x)dx]$$

   i potrebno je uraditi m puta parcijalnu integraciju.

3. Integral oblika $\int P_n(x)e^{ax}dx$, gde je $P_n(x)$ polinom $n-$tog stepena i $a \in \mathbb{R}$, rešavamo parcijalnom integracijom

$$[u = P_n(x)x, dv = e^{ax}dx]$$

   i potrebno je uraditi n puta parcijalnu integraciju.

1.5. Integrali sa kvadratnim trinomom

I Integrali oblika $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$ $(a \neq 0,\ b^2-4ac<0)$ reavaju se na sledei nain u zavisnosti od m

a) $m=0$

$$ax^2+bx+c = a\left[(x+k)^2+l\right],k,l=const.$$

$$\int \frac{n}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{n}{a}\int \frac{dx}{(x+k)^2+l};$$

b) $m \neq 0$

$$\begin{aligned}\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx &= \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+n-\frac{mb}{2a}}{ax^2+bx+c}dx\\ &= \frac{m}{2a}\underbrace{\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx}_{[t=ax^2+bx+c\Rightarrow dt=(2ax+b)dx]} + \underbrace{\int \frac{n-\frac{mb}{2a}}{ax^2+bx+c}dx.}_{a)}\end{aligned}$$

Primetimo da je prva jednakost dobijena na osnovu ideje da se u brojiocu dobije izvod imenioca, kako bi se nakon toga uvela odgovarajuća smena $((ax^2+bx+c)' = 2ax+b)$.

Zadatak 1.9. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \left[\begin{array}{c} x+1=t \\ dx=dt \end{array}\right]\\ &= \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+c = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+c.\end{aligned}$$

Zadatak 1.10. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)-2+6}{x^2-4x+5}\,dx\\ &= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx + 4\int \frac{dx}{x^2-4x+5}\\ &= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx + 4\int \frac{dx}{(x-2)^2+1} = \left[\begin{array}{cc} x^2-4x+5=t & x-2=t_1 \\ (2x-4)dx=dt & dx=dt_1 \end{array}\right]\\ &= \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t}+4\int \frac{dt_1}{t_1^2+1} = \frac{3}{2}\ln|\,t\,|+4\operatorname{arctg}t_1+c\\ &= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+5\right|+4\operatorname{arctg}(x-2)+c.\end{aligned}$$

II Integrali oblika $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ $(a \neq 0,\ b^2-4ac<0)$ reavaju se na slian nain kao integrali oblika I.

III Integrali oblika $\int \frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ $(m \neq 0,\ a \neq 0,\ b^2-4ac<0)$ se pomou smene $mx+n=\frac{1}{t}$ svode na integrale oblika II.

Zadatak 1.11. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$.

Rešenje.

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} = \left[\begin{array}{c} x+1=\frac{1}{t} \Rightarrow dx = \frac{-1}{t^2}dt \\ x=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t} \end{array} \right]$$
$$= -\int \frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{(1-t)^2}{t^2}+2\frac{1-t}{t}}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{(1-t)^2+2t-2t^2}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$= -\arcsin\frac{1}{x+1}+c.$$

IV Integrali oblika $\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$ $(a \neq 0,\ b^2-4ac<0)$ svode se na integrale oblika $\int \sqrt{A^2-x^2}\,dx$ i $\int \sqrt{x^2+A}\,dx$.

Zadatak 1.12. Izračunati $I = \displaystyle\int \sqrt{x-x^2}\,dx$.

Rešenje.

$$I = \int \sqrt{x-x^2}\,dx = \left[x-x^2 = -(x^2-x+\frac{1}{4})+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2\right]$$
$$= \int \sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} x-\frac{1}{2}=t \\ dx=dt \end{array} \right]$$
$$= \int \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-t^2dt} = \frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}+\frac{\frac{1}{4}}{2}\arcsin\frac{t}{\frac{1}{2}}+c$$
$$= \frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{8}\arcsin(2x-1)+c.$$

Literatura

[1] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Uvodni pojmovi i granični procesi.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[2] Ilija Kovačević, Nebojša Ralević, Biljana Carić, Vojislav Marić, Momčilo Novaković, Slavica Medić. *Matematička analiza 1, Diferencijalni i integralni račun; obične diferencijalne jednačine.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[3] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić. *Testovi sa ispita iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.

[4] Ilija Kovačević, Biljana Carić, Slavica Medić, Vladimir Ćurić, Momčilo Novaković. *Zbirka rešenih zadataka iz Matematičke analize 1.* FTN Izdavaštvo, Novi Sad 2018.