לוגיקה הרצאה 1

3 ביולי 2019

טיעון

טיעון תקף - כל פעם שההנחות נכונות גם המסקנות נכונות.

- ⋆ כל היוונים הם בני אדם
- ⋆ כל בני האדם הם בני תמותה
- ⋆ כל היוונים הם בני תמותה

בני האדם הם הכללה של יוונים
לבני אדם יש תכונה של "בני תמותה".
ליוונים יש תכונה של בני תמותה.

כל A הוא B, כל B הוא C ולכן כל A הוא C.

למשל הנחות:

- ⋆ (הכלה) כל המרובעים הם מצולעים.
- ⋆ (תכונה) כל המצולעים הם בעלי היקף.

מסקנה:

- ⋆ **כל המרובעים הם בעלי היקף.**

דוגמה נוספת:

- ⋆ (תכונה) כל העורבים שחורים.
- ⋆ (הכללה) כל שחור הוא צבע.
- ⋆ (מסקנה שגויה) כל העורבים הם צבע.

מסקנה:

- ⋆ שפה טבעים לא פסיק ברורה ולכן צריך שפה פורמלית כדי שנוכל להוכיח דברים.

טענות:

אמירות/נוסחאות שהן אמת או שקר בעולם.

תחשיב(סינטקס):

איזה נוסחאות חוקיות בשפה.

סמנטיקה:

מתי נוסחה היא אמת או שקר.

מערכת הוכחה פורמלית:

נרצה לקשר בין הסמנטיקה למערכת ולומר שהנוסחאות היכיחות (ניתנות להוכחה) הן נכונות.
כל נוסחה נכונה ניתנת להוכחה.

הגדרה אינדוקטיבית של קבוצה:

- ⋆ נתונה קבוצה W - העולם.
- ⋆ נתונה קבוצה $B \subseteq W$ (הבסיס).
- ⋆ נתונה קבוצה של כללי יצירה\פעולות F.

ב־F יש פונקציות חלקיות (שלא בהכרח מוגדרות לכל האיברים בתחום שלהם) אנריות ל־n כלשהו.

$$f : W^n \to W$$

נגדיר את הקבוצה $X_{B,F} \subseteq W$
(הסגור של B תחת F) כקבוצה המקיימת את הדברים הבאים:

1. $B \subseteq X_{B,F}$.
2. לכל $f : W^n \to W,\ f \in F$
   אם $x_1, x_2, \dots, x_n \in X_{B,F}$ אז גם $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_{B,F}$.
3. אין ב־$X_{B,F}$ איברים מיותרים
   כלומר $X_{B,F}$ מכילה רק איברים שנדרשים לקיום א' וב'.
   במילים אחרות: $X_{B,F}$ היא הקבוצה המינימלית שנוצרת ע"י B ו־F.

דוגמה:

- ⋆ W - כל המילים הסופיות מעל א"ב a, b.
- ⋆ בסיס: $B = \{ab\}$.
- ⋆ פעולות:

  1. מוסיפה aba לצד ימין של המילה:

$$f_1(w) = waba$$

  2. מחליפה את aa השמאלי ביותר במילה ב־b

$$f_2(w_1aaw_2) = w_1bw_2 \ : aa \notin w_1$$

  3. השמטת bbb השמאלי ביותר (אם קיים):

$$f_3(w_1bbbw_2) = w_1w_2 \ : bbb \notin w_1$$

- ⋆ דוגמה למילים בשפה:
  $aa, ababa$

נראה דרך לבנות $X_{B,F}$ ע"ס B, F כאיחוד של סדרת קבוצות.

נגדיר:

בהינתן קבוצה $F(y), y$ הינה קבוצת איברים ב־W שמתקבלים בהפעלת איזושהי פעולה ב־F על איזשהו איבר ב־y.
נגדיר סדרה של קבוצות:

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_n$$

באופן הבא:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = B \\
&\dots \\
&X_{i+1} = X_i \cup F(X_i) \\
&\overline{X} = \cup_i X_i \\
&\overline{X} = X_{B,F}
\end{aligned}
$$

כלומר:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \{ab\} \\
&X_2 = \{ab, ababa\} \\
&X_3 = X_2 \cup \{ababa, ababaaba\} \\
&X_4 = X_3 \cup \{ababbba, ababaabaaba\} \\
&\text{etc}\dots
\end{aligned}
$$

דוגמה לקבוצה אינדוקטיבית:

- ⋆ $W = \mathbb{N}$
- ⋆ $B = \{0\}$
- ⋆ $F = \{+2\}$ (לא ממש פורמלי)
- ⋆ $X_{B,F} = \mathbb{N}_2$ (טבעיים זוגיים)

טענה:

- ⋆ $\overline{X}$ מקיימת את כל הדרישות ולכן $\overline{X} = X_{B,F}$
  1. צ"ל מקיימת את 1 - נראה ש-$\overline{X}$ $B \subseteq \overline{X}$
     זה נכון כי: $X_1 = B$ ו-$X_1 \subseteq \overline{X}$.
  2. צ"ל מקיימת את 2:
     עבור $x_1, x_2, \dots, x_n \in \overline{X}$ מתקיים $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \overline{X}$
     נראה שקיים X_l כלשהו כך שמתקיים $x_1, x_2, \dots, x_n \in X_l$
     ולכן נוכל להסיק ש- $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_{l+1}$
     ולכן $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \overline{X}$.

דוגמה:

$$
\begin{aligned}
&f(a_1, a_2, a_3) \\
&a_1 \in X_5 \ , a_2 \in X_{17} \ , a_3 \in X_1 \\
&\Rightarrow \\
&f(a_1, a_2, a_3) \in X_{18}
\end{aligned}
$$

צריך להוכיח ש-$\overline{X}$ מקיימת את ג'.

נוכיח טענה יותר כללית:

לכל קבוצה Y שמקיימת את התנאים $1, 2$ עבור B, F מתקיים $\overline{X} \subseteq Y$
נוכיח באינדוקציה על i ש-$X_i \subseteq Y$ ואז $\cup X_i \subseteq Y$.

- ⋆ בסיס:
  צ"ל $X_1 = B \subseteq Y$
  נכון כי Y מקיימת את תנאי 1.

* צעד:
נניח כי $X_i \subseteq Y$ ונוכיח ש־$X_{i+1} = X_i \cup F(X_i) \subseteq Y$.

* צ"ל לגבי האיברים $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X_i$ אז על סמך אינדוקציה $x_1, x_2, \ldots, x_n \in Y$
ובגלל ש־Y מקיימת את ב' אז $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Y$.

מסקנה מהטענה:
$\overline{X}$ היא המינימלית שמספקת את א' וב' ולכן מספקת גם את ג'.
מסקנה:
$\overline{X} = X_{B,F}$.

משפט ההוכחה באינדוקציה

אם Y קבוצה שמספקת את תנאים $1,2$ עבור B,F אז יודעים ש־ $X_{B,F} \subseteq Y$.

משפט זה מאפשר שיטת הוכחה שנראת "הוכחה באינדוקציית מבנה".
על מנת להוכיח ש־$X_{B,F} \subseteq Y$ נראה:

1. $B \subseteq Y$.
2. Y סגורה תחת F.

כדי להוכיח ש־$b \in X_{B,F}$ צריך להראות שקיימת עבורו <u>סדרת יצירה</u>.

סדרת יצירה:

עבור איבר b מתוך $X_{B,F}$ הינו סדרת סופית $a_1, a_2, \ldots, a_n$ כך ש:

1. $a_n = b$.
2. לכל $1 \leq i \leq n$

(א) או ש־$a_i \in B$

(ב) או ש־a_i התקבלה מקודמים בסדרה ע"י הפעלת פעולה מ־F.

דוגמה עבור
$B = \{0\}, \qquad F = \{+2\}$
נראה ש־$8 \in X_{B,F}$
סדרת היצירה שלו תהיה : $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

כדי להראות ש־$x \notin X_{B,F}$:

נמצא תכונה T ונראה ש־$X_{B,F} \subseteq T$ ונראה ש־$x \notin T$ (כלומר x אינו מקיים את T)
(T היא קבוצת האיברים בעלי תכונה כלשהי).

דוגמה:

נראה של־$aba \notin ABA$(שפה שהוגדרה קודם).
תכונה:
צ"ל מספר ה־a הכל איברי B,F הוא אי־זוגי.
אם זה נכון אז aba לא בשפה כי היא אינה מקיימת את התכונה.

שיטת ההוכחה:

* נבחר תכונה T.
* נראה שמתקיים:

1. $B \subseteq T$.
2. לכל $x_1, x_2, \ldots, x_n \in T$ מתקיים $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T$.

דוגמה:

$ab \in T$ (יש a יחיד).
כל פעולה שפועלת על מילה עם מספר זוגי של a מחזירה מילה עם מספר אי־זוגי של a.