לוגיקה – תרגול 11

גדירות של יחס בתוך מבנה נתון על ידי נוסחה

 $P\subseteq \underbrace{D^M\times D^M\times \ldots \times D^M}_n$ הגדרה בי יהיו T מבנה מעל T ו־P יחס P יחס P יחס מעל T ו־P מעל T משתנים T משתנים חופשיים T אם קיימת נוסחה T מעל T בעלת T משתנים חופשיים T אם קיימת נוסחה T מעל T בעלת T משתנים:

$$M \models_s \varphi \iff (s(x_1), s(x_2), \dots, s(x_n)) \in P$$

 $. au = \langle R\left(\circ,\circ\right), F\left(\circ,\circ\right), c \rangle$ נתון המילון: נתון המילון

- $.P_1 = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i < j\right\}$ הדי־מקומי האת את $M = \langle \mathbb{N}, \leq, +, 0 \rangle$.1 הגדירו במבנה.
- $P_2=\{(A,B)\mid A\cup\{1\}\subseteq B\}$ את היחס הדו־מקומי $M=\langle P(\mathbb{N}),\subseteq,\cup,\{1\}\rangle$.2
 - $P_3=\{\emptyset\}$ את היחס החד־מקומי $M=\langle P(\mathbb{N}),\subseteq,\cup,\{1\}
 angle$.3

 $(P_1,P_2\subseteq \underbrace{D^M imes D^M imes ... imes D^M}_k)$ D^M טענה: יהיו au מבנה מעל au ו־ P_1,P_2 שני יחסים P_1,P_2 שני יחסים P_1,P_2 שני יחסים P_1,P_2 בהתאמה. אז מתקיים: הגדירים ב־ P_1,P_2 ביטחאות מעל P_2 בעלות P_1,P_2 משתנים חופשיים P_1,P_2 בהתאמה. אז מתקיים:

- $.arphi_1 \wedge arphi_2$ גדיר ע"י $P_1 \cap P_2$.1.
- $arphi_1ee arphi_2$ גדיר ע"י $P_1\cup P_2$ גדיר גדיר .2
- $.
 egg_1$ גדיר ע"י גדיר ($D^M)^kackslash P_1$.3

:2 תרגיל

 $.\tau = \left\langle R\left(\circ,\circ\right),F\left(\circ\right)\right\rangle$ נתון המילון

: au המבנה הבא מעל אורי

$$M = \langle \{0,1\}^{\mathbb{N}}, R^M, F^M \rangle$$

:כאשר מוגדרים באופן R^M, F^M מוגדרים

$$.R^{M} = \left\{ (a, b) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N}, \ a_{i} \leq b_{i} \right\} \bullet$$

$$b=b_0b_1b_2\ldots\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$$
בהינתן $ullet$

$$F^M(b) = b_1 b_2 b_3 \dots$$

 $\cdot M$ הוכיחו כי היחסים הבאים גדירים במבנה

$$R_1 = \left\{ (a, b) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N}^+, \ a_i = b_i \right\}$$
 .1

- $a_i\in\mathbb{N}$ לכל $b_i^{
 m zero}=0$ באופן הבא: המוגדר האפס המוגדר האפר הוא $b_i^{
 m zero}=0$.2
 - $R_3 = \left\{b \in \left\{0,1
 ight\}^{\mathbb{N}} \mid b_i = 1$ אחד שעבורו $i \in \mathbb{N}$ קיים לפחות $i \in \mathbb{N}$ אחד שעבורו .3

 $. au = \langle F\left(\circ,\circ\right),c
angle$ נתון המילון: נתון נתרגיל

. $f_{ imes}\left(a,b
ight)=a\cdot b$ כאשר au, כאשר $M=\left\langle \mathbb{N}^{+},f_{ imes},1
ight
angle$ יהי

 $n=k\cdot m$ נאמר כי m אם קיים $k\in\mathbb{N}^+$ אם מחלק את הא נאמר כי $m,n\in\mathbb{N}^+$ נאמר .1 את היחס הדו־מקומי הבא: $arphi_Q(x_1,x_2)$

$$Q = \left\{ (m,n) \in \mathbb{N}^+ \mid n$$
 מחלק את מחלק $m \right\}$

.1. מספר טבעי ייקרא **ראשוני** אם הוא גדול מ־1 והמחלקים היחידים שלו הם הוא עצמו ו־1. מספר טבעי ייקרא רשמוני אם הוא את היחס החד־מקומי הבא: $\varphi_P\left(x_1\right)$ המגדירה ב־M

$$P = \left\{ p \in \mathbb{N}^+ \mid$$
ראשוני $p \right\}$

, מספר $n\in\mathbb{N}^+$ ייקרא n פייקרא אם בפירוק אם מריבועים אם מספר $n\in\mathbb{N}^+$ ייקרא ייקרא $e_i\le 1$ כל היותר, כלומר $n=p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}$ לכל היותר, מופיע עם חזקה p_i לכל היותר, כלומר p_i את היחס החד־מקומי הבא:

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N}^+ \mid$$
 חופשי מריבועים $n \right\}$

לוגיקה ותורת הקבוצות – תרגול 11 תחשיב היחסים

ירות של יחס בתוך מבנה נתון על ידי נוסחה

s השמה לכל הער בי x_1,x_2,\ldots,x_n משתנים חופשיים מעל au מעל arphi מעל מעל קיימת נוסחה אם מעל בי T מעל מתקיים:

$$M \models_s \varphi \iff (s(x_1), s(x_2), \dots, s(x_n)) \in P$$

 $. au = \langle R\left(\circ,\circ\right), F\left(\circ,\circ\right), c \rangle$ נתון המילון :3 נתון המילון

 $P_1 = \left\{ (i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i < j
ight\}$ הגדירו במבנה $M = \langle \mathbb{N}, \leq, +, 0
angle$ את היחס הדו־מקומי.

$$\varphi = R\left(x_1, x_2\right) \land \neg \left(x_1 \approx x_2\right)$$
 פתרון: נסמן

לכל השמה s מתקיים:

$$\iff M \vDash_s R(x_1, x_2) \land \neg (x_1 \approx x_2)$$

$$\iff M \vDash_s R(x_1,x_2)$$
 וגם $M \vDash_s \neg (x_1 \approx x_2)$

$$\iff (\overline{s}(x_1), \overline{s}(x_2)) \in R^M$$
 וגם $M \nvDash_s (x_1 \approx x_2)$

(אלגברי)
$$\iff \overline{s}(x_1) \leq \overline{s}(x_2)$$
 וגם $\overline{s}(x_1) \neq \overline{s}(x_2)$

$$(P_1$$
 הגדרת) $\iff \overline{s}(x_1) < \overline{s}(x_2)$

$$(\overline{s}(x_1), \overline{s}(x_2)) \in P_1$$

 $P_2=\{(A,B)\mid A\cup\{1\}\subseteq B\}$ את היחס הדו־מקומי $M=\langle P(\mathbb{N}),\subseteq,\cup,\{1\}
angle$.2

$$\varphi = R\left(F\left(x_{1},c\right),x_{2}\right)$$
 פתרון: נסמן

s מתקיים:

$$\iff M \models_{s} R(F(x_1,c),x_2)$$

$$\iff (\overline{s}(F(x_1,c)), \overline{s}(x_2)) \in R^M$$

$$\iff \left(F^{M}\left(\overline{s}\left(x_{1}\right), \overline{s}\left(c\right)\right), s\left(x_{2}\right)\right) \in R^{M}$$

$$\iff F^M\left(s\left(x_1\right),c^M\right)\subseteq s\left(x_2\right)$$

$$\iff s(x_1) \cup \{1\} \subseteq s(x_2)$$

$$(s(x_1),s(x_2)) \in P_2$$

 $P_3=\{\emptyset\}$ את היחס החד־מקומי $M=\langle P(\mathbb{N}),\subseteq,\cup,\{1\}
angle$.3

$$\varphi = \forall x_2 R(x_1, x_2)$$
 פתרון: נסמן

לכל השמה s מתקיים:

$$\iff M \models_s \varphi$$

$$\iff M \models_{\underbrace{s\left[x_2 \leftarrow d\right]}} R(x_1, x_2)$$
 מתקיים $d \in D^M$ לכל

$$\iff (\overline{s}'(x_1), \overline{s}'(x_2)) \in R^M$$
 לכל $d \in D^M$ לכל

(מתורת הקבוצות) $\iff s(x_1) \subseteq d$ מתקיים $d \in P(\mathbb{N})$ לכל

$$\iff s(x_1) = \emptyset$$

$$s(x_1) \in P_3$$

 $(P_1,P_2\subseteq \underbrace{D^M imes D^M imes ... imes D^M}_k)$ D^M טענה: יהיו au מילון, M מבנה מעל T ו־יחסים P_1,P_2 שני יחסים P_1,P_2 שני חסים P_1,P_2 משתנים מעל P_1,P_2 בהתאמה. אז מתקיים: הגדירים ב־ P_1,φ_2 נוסחאות מעל P_2 בעלות P_1,φ_2 משתנים חופשיים P_1,φ_2 בהתאמה. אז מתקיים:

- $.arphi_1 \wedge arphi_2$ גדיר ע"י $P_1 \cap P_2$.1
- $arphi_1ee arphi_2$ גדיר ע"י גדיר $P_1\cup P_2$.2
- $.
 eg arphi_1$ גדיר ע"י גדיר ($D^M)^k ackslash P_1$.3

תרגיל 4:

 $b_i \in \{0,1\}$, $i \in \mathbb{N}$ נסמן וקטור בינארי אינסופי באופן הבא: הבא: $b=b_0b_1b_2\dots$ נתון המילון $au=\langle R\left(\circ,\circ\right),F\left(\circ\right)\rangle$ נתון המילון

: au יהי M המבנה הבא מעל

$$M = \langle \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, R^M, F^M \rangle$$

כאשר באופן מוגדרים מוגדרים R^M, F^M

$$.R^M = \left\{ (a,b) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N}, \ a_i \leq b_i \right\} \ \bullet$$

 $b=b_0b_1b_2\ldots\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ בהינתן ullet

$$F^M(b) = b_1 b_2 b_3 \dots$$

 $\!:\!M$ הוכיחו כי היחסים הבאים גדירים במבנה

$$.R_1 = \left\{ (a,b) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N}^+, \ a_i = b_i \right\}$$
 .1
$$.\varphi_1(x_1,x_2) = (F(x_1) \approx F(x_2))$$
בתרון: נגדיר

s מתקיים:

$$\iff M \vDash_s (F(x_1) \approx F(x_2))$$

$$\iff \overline{s}\left(F\left(x_{1}\right)\right) = \overline{s}\left(F\left(x_{2}\right)\right)$$

$$\iff F^{M}\left(s\left(x_{1}\right)\right) = F^{M}\left(s\left(x_{2}\right)\right)$$

$$\iff s\left(x_{1}\right)_{1}s\left(x_{1}\right)_{2}... = s\left(x_{2}\right)_{1}s\left(x_{2}\right)_{2}...$$

$$\iff s\left(x_{2}\right)_{i} = s\left(x_{1}\right)_{i} : i \in \mathbb{N}^{+}$$

$$(s\left(x_{1}\right), s\left(x_{2}\right)) \in R_{1}$$

 $a_i \in \mathbb{N}$ לכל $b_i^{
m zero} = 0$ באופן הבא: המוגדר האפס המוגדר האפ $b_i^{
m zero}$ לכל , $R_2 = \{b_i^{
m zero}\}$.2

$$arphi_{2}\left(x_{1}
ight)=orall x_{2}R\left(x_{1},x_{2}
ight)$$
 פתרון: נגדיר

:לכל השמה s מתקיים

$$\iff M \vDash_s \forall x_2 R(x_1, x_2)$$

$$\iff M \models \underbrace{s\left[x_2 \leftarrow d\right]}_{l} R\left(x_1, x_2\right) : d \in D^M$$
 לככל

$$\iff (s'\left(x_{1}\right),s'\left(x_{2}\right))\in R^{M}:d\in D^{M}$$
 לכל

$$\iff (s'(x_1),d) \in R^M : d \in D^M$$
 לכל

$$\Longleftrightarrow s\left(x_{1}\right)_{i}\leq d_{i}\,:\!\!i\in\mathbb{N}$$
 לכל $d\in D^{M}$ לכל

$$\Longleftrightarrow s\left(x_{1}\right)_{i}\leq0:i\in\mathbb{N}$$
 לכל

$$\iff s\left(x_1\right)_i = 0 : i \in \mathbb{N}$$
 לכל

$$.s(x_1) \in R_2$$

 $R_3=\left\{b\in\{0,1\}^\mathbb{N}\mid b_i=1$ אחד שעבורו $i\in\mathbb{N}$ אחד פתרון: נשים לב ש־ $b\in R_3$ אם ורק אם $b\in R_3$ ולכן נגדיר פתרון: נשים לב ש־

 $. au = \langle F\left(\circ,\circ\right),c
angle$ נתון המילון: נתון נתרגיל

. (כפל מספרים של חביל (כפל (כפל האיל) איז (אשר הארט עבור σ מבנה עבור מספרים (כפל האיל $M=\langle \mathbb{N}^+,f_{\times},1\rangle$ יהי

 $n=k\cdot m$ נאמר כי m מחלק את אם קיים $k\in\mathbb{N}^+$ כך הייו .1 מחלק את מחלק את מחלק את $m,n\in\mathbb{N}^+$.1 רשמו נוסחה $arphi_Q\left(x_1,x_2
ight)$ המגדירה ב־

$$Q = \left\{ (m,n) \in \mathbb{N}^+ \mid n$$
 מחלק את מחלק $m \right\}$

פתרון:

$$\varphi_O = \exists x_3 F(x_1, x_3) \approx x_2$$

.1. מספר טבעי ייקרא ראשוני אם הוא גדול מ־1 והמחלקים היחידים שלו הם הוא עצמו ו־1. מספר טבעי ייקרא ראשוני אם הוא גדול מ־1 את היחס החד־מקומי הבא: $\varphi_P\left(x_1\right)$

$$P = \{ p \in \mathbb{N}^+ \mid P = p \in \mathbb{N}^+ \mid p \}$$
ראשוני

פתרון:

$$\varphi_P = (\neg (x_1 \approx c)) \land \forall x_2 ((\neg (x_2 \approx c) \land (\neg (x_2 \approx v_1))) \rightarrow \neg \varphi_Q (x_2, x_1))$$

, ייקרא חו**פשי מריבועים** אם בפירוק של $n\in\mathbb{N}^+$ מספר הקרא מספר $n\in\mathbb{N}^+$ ייקרא חו**פשי מריבועים** אם בפירוק אם $n=p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}$ לכל $n=p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}$ לכל היותר, כלומר $p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}$ המגדירה ב־ $p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}$ את היחס החד־מקומי הבא:

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N}^+ \mid S$$
חופשי מריבועים ו $n \right\}$

:פתרון

$$\varphi_S = \forall x_2 \left(\varphi_P \left(v_2 \right) \to \left(\neg \left(\varphi_Q \left(F \left(x_2, x_2 \right), x_1 \right) \right) \right) \right)$$

לוגיקה תרגול 11

תרגיל 1:

```
(לא מוצלח מדי). \varphi_1(x_1,x_2) = \exists x_3 R(x_2,F(x_1,x_3))
                                             (פשוט ומוצלח)arphi_1(x_1,x_2)=R(x_1,x_2)\wedge \neg (x_1pprox x_2)
                                                                                                                    תהייs השמה
                                             \Leftrightarrow M \vDash R(x_1, x_2) \land \neg (x_1 \approx x_2) \Leftrightarrow M \vDash R(x_1, x_2) \text{ in } M \vDash \neg (x_1 \approx x_2) \Leftrightarrow M \vDash R^M(s(x_1), s(x_2)) \text{ in } M \nvDash s (x_1 \approx x_2)
\Leftrightarrow (s(x_1),s(x_2)) \in P \Leftrightarrow (ביטוי אלגברי) s(x_1) \leq s(x_2) וגם s(x_1) \neq s(x_2)
                                                                                                        .s(x_1) < s(x_2)
                                                                                                                              :2 סעיף
                                                                             \varphi_2(x_1, x_2) = R(F(x_1, c), x_2)
                                                                                                                   תהייs השמה
                                                                                                              \Leftrightarrow M \vDash_s \varphi_2
                                                    .(s(x_1),s(x_2)) \in P_2 \Leftrightarrow s(x_1) \bigcup \{1\} \subseteq s(x_2)
                                                                                       \varphi_3(x_1) = \forall x_2 R(x_1, x_2)
                                                                                                                   תהייs השמה
                                                                                                                \Leftrightarrow M \vDash \varphi_3
                                     \Leftrightarrowמתקיים (מתורת הקבוצות) אונל s(x_1)\subseteq d מתקיים d\in P(\mathbb{N})
                                                                                  s(x_1) \in P_3
                                                                                                            s(x_1) = \emptyset
```

:2 תרגיל

$$R_1 = \{(a,b) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} | \forall i \in \mathbb{N}^+, a_i = b_i\}$$
 1 $\varphi_1(x_1, x_2) = (F(x_1) \approx F(x_2))$

- z לכל $b_i^{zero}=0$ לכל הבא: המוגדר האפס המוגדר וקטור האפ $b_i^{zero}=0$ לכל , $R_2=\{b^{zero}\}$.2 $\varphi_2(x_1)=\forall x_2R(x_1,x_2)$
 - $.R_3=\{b\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}\mid b_i=1$ אחד שעבורו $i\in\mathbb{N}$ אחד לפחות אחד . $arphi_3=\lnotarphi_2$

תרגיל 3:

$$\varphi_Q(x_1, x_2) = \exists x_3 (F(x_1, x_3) \approx x_2)$$
 1

$$\varphi_P(x_1) = \neg(x_1 \approx c) \land \forall x_2(\neg(x_2 \approx 1) \land \neg(x_2 \approx x_1) \rightarrow \neg\varphi_Q(x_2, x_1))$$
 2

$$\varphi_S(x_1) = \forall x_2 \varphi_P(x_2) \land \varphi_O(x_2, x_1) \rightarrow \neg \varphi_O(\varphi_O(x_2, x_1), x_1)$$
 3