הרצאה 13 לוגיקה

3 ביולי 2019

α <u>סתירה</u> אם לכל מבנה M ולכל השמה s $M \underset{s}{\not\models} \alpha$.

α <u>סתירה</u> קיים מבנה +השמה כך ש־ $M \underset{s}{\models} \alpha$.

עבור קבוצת נוסחאות Γ, $M \underset{s}{\models} \Gamma$ אם לכל $\alpha \in \Gamma$, $M \underset{s}{\models} \alpha$.

הגדרה:

נוסחה β נובעת לוגית מנוסחה α, סימון $\alpha \models \beta$ אם לכל מבנה+השמה : אם $M \underset{s}{\models} \alpha$ אז $M \underset{s}{\models} \beta$.

דוגמא:

$\forall x(\alpha \to \beta) \models \forall x\alpha \to \forall x\beta$

הוכחה:

נניח בדרך השלילה שאין נביעה לוגית קיים מבנה M והשמה s כך ש־

$$M \underset{s}{\models} \forall x(\alpha \to \beta)$$
$$M \underset{s}{\not\models} \forall x\alpha \to \forall x\beta$$
$$\Updownarrow$$
$$M \underset{s}{\models} \forall x\alpha$$
$$M \underset{s}{\not\models} \forall x\beta$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists d_0 \in D^M$$
$$M \underset{s[x\leftarrow d_0]}{\models} \beta$$
$$M \underset{s}{\models} \forall x\alpha$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall d \in D^M$$
$$M \underset{s[x\leftarrow d]}{\models} \alpha$$
$$M \underset{s[x\leftarrow d_0]}{\models} \alpha$$
$$M \underset{s[x\leftarrow d_0]}{\not\models} \alpha$$
$$\Downarrow$$
$$M \underset{s}{\not\models} \forall x(\alpha \to \beta)$$

בסתירה לנתון.

משפט הקומפקטיות

קבוצת נוסחאות Σ הינה ספיקה אם ורק אם כל תת־קבוצה סופית שלה היא ספיקה.

גדירות של קבוצת מבנים בתחשיב היחסים:

תזכורת: תחשיב הפסוקים:

קבוצת <u>השמות</u> היא גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים סופית Σ כך ש־ $M(S) = k$

גדירות של קבוצת מבנים ע"י <u>קבוצת פסוקים של תחשיב היחסים</u>

פסוק של תחשיב היחסים נוסחה ללא מתשנים חופשיים.

קבוצת מבנה K הינה גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים Σ כך ש־

$M(\Sigma) = K$

$Mod(\Sigma) = K$ $(Mod(\Sigma) = \{M | M \vDash \Sigma\})$

דוגמא:

נתון המילון הריק $\Sigma = \{\exists x \exists y \neg (x \approx y)\}$

איזה מבנים מספקים את Σ לאפיין $Mod(\Sigma)$

$Mod(\Sigma) = \{M | \left|D^M\right| \geq 2\}$

דוגמא:

המילון הריק, $K = \{M | \left|D^M\right| = 1\}$

נראה K גדירה:

$\Sigma = \{\forall x \forall y x \approx y\}$

הוכחה:

$Mod(\Sigma) = K$

$\Leftrightarrow M \in Mod(\Sigma) | \ M \vDash \Sigma$

$\Leftrightarrow M \vDash \forall x \forall y \, x \approx y$

לכל s:

$\Leftrightarrow M \underset{s}{\vDash} \forall x \forall y \, x \approx y$

לכל s ולכל d_1 ולכל d_2

$\Leftrightarrow M \underset{s[x \leftarrow d_1][y \leftarrow d_2]}{\vDash} x \approx y$

לכל s ולכל d_1 ולכל d_2

$\Leftrightarrow d_1 = d_2$

$\left|D^M\right| = 1$ $\blacksquare$.

טענה:

עבור נוסחה ללא מתשנים חופשיי α

מתקיים $M \underset{s}{\vDash} \alpha$ עבור s נתונה $\Leftrightarrow$ לכל השמה s, $M \underset{s}{\vDash} \alpha$

$M \underset{s}{\nvDash} \alpha$ עבור s נתונה $\Leftarrow$ לכל השמה s $M \underset{s}{\nvDash} \alpha$.

דוגמא:

$\tau = \{R(\circ, \circ)\}$

K היא קבוצת המבנים שבהם R הוא יחס סימטרי

$\Sigma = \{\forall x \forall y (R(x, y) \to R(y, x)\}$

$M \vDash \forall x \forall y (R(x, y) \to R(y, x)\}$

$\Downarrow$

$R(d_1, d_2)$

$\forall x \forall y (R(x, y) \land R(y, x))$ (Not valid)

דוגמא:

מילון ריק

$K_{\text{inf}} = \{M | \left|D^M\right| = \infty\}$

גדירה

תזכורת:

בתחשיב הפסוקים K_{fin}, F_{inf} שתיהן לא גדירות.

$\alpha_2 = \exists x_1 \exists x_2 \neg(x_1 \approx x_2)$ יש לפחות 2 איברים

$\alpha_3 = \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \bigwedge_{1\leq i,j\leq 3|i\neq j} \neg(x_i \approx x_j)$ יש לפחות 3 איברים.

$\alpha_n = \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{1\leq i,j\leq n|i\neq j} \neg(x_i \approx x_j)$

יש לפחות n איברים ב-D^M.

$\Sigma_{inf} = \{\alpha_n | n \in \mathbb{N}\}$.

דוגמא:

אי-גדירות של קבוצת מבנים:

מליון ריק (למישה יכול להיות כל מילון)

$K_{fin} = \{M | D^M_{fin}\}$

נניח ש-K_{fin}גדירה ע"י נוסחאות Σ.

$\Gamma \vDash \Sigma_{inf} \cup \Sigma$

הקבוצה גם ספיקה וגם לא ספיקה.

1. Γ אינה ספיקה
   נניח ש-Γ ספיקה $M \vDash \Sigma_{inf} \cup \Sigma \Leftarrow$
   $M \vDash \Sigma_{inf} \Leftarrow D^M$ אינסופי.
   $M \vDash \Sigma \Leftarrow D^M$ סופי.
   סתירה.

2. נראה ש-Γ ספיקה, עס, משפט הקומפקטיות,
   נסתכל על $A \subseteq \Gamma$ סופית, נזכור $A \subseteq \Sigma_{inf} \cup \Sigma$ לכן נחלק:

$$A_{inf} = A \cap \Sigma_{inf}$$

$$A_{\Sigma} = A \cup \Sigma$$

$A_{inf} = \{a_{i_1}, \dots a_{i_k}\}$, נקח את mלהיות האינדקס המקסימלי של a_{i_j}, אם $A_{inf} = \emptyset$ נבחר $m = 1$.

נבחר $D^M = \{1, \dots, m\}$ מתקיים כי $M \vDash A_{inf}$ (יש בו mאיברים שונים ולכן זה מתקיים).

$M \vDash \Sigma$ כי התחום הוא סופי ולכן אפשר גם להגיד $M \vDash A_{\Sigma}$ כלומר $M \vDash A \cap \Sigma$.

<u>מסקנה</u> $M \vDash A \Leftarrow$ניתן להסיק ממשפט הקומפקטיות כי Γ ספיקה.

דוגמא נוספת:

$\tau = (R(\circ, \circ))$

K- קבוצת כל המבנים המייצגים גרף לא מכוון קשיר.

R - יחס המתאר קשתות בין איברים בתחום.

גרף קשיר - בין כל שני צמתים יש מסלול לא מכוון ולכן R סימטרית.

<u>טענה:</u>

קבוצת הגרפים הקשירים אינה גדירה.

הוכחה:

נניח שהקבוצה גדירה ע"י Σ כלומר $Mod(\Sigma) = K$

נרחיב את המילון $\tau' = (R(\circ, \circ), c_0, c_1)$

נגדיר את אוסף הפסוקים הבא:

$$\Sigma' = \{\neg(c_0 \approx c_1)\} \cup \{\neg\alpha_k(c_0, c_1) \,|\, k \geq 1\}$$

כאשר:

$$\alpha_k(x_0, x_k) = \exists x_1, \dots \exists x_k \bigwedge_{i=0}^{k-1} R(v_i, v_{i+1})$$

כלומר יש מסלול באורך k בין x_0 ל-x_k.

קומפקטיות

$A \subseteq \Sigma \cup \Sigma'$ סופית - קיים אינדקס סופי שאומר שלא קיים מסלול באורך l בין c_0 ל-c_1
(סותר את האובדה שחייב להיות מסלול באורך כלשהו).
מבנה מספק ל-A - צריך לבנות מסלול באורך $l+1$ בין c_0 ל-c_1.