לוגיקה הרצאה 11

סינטקס:

מילון τ

<u>שמות עצם:</u> סימני קבוע, משתנים וסימני פונקצייה.

<u>נוסחאות:</u>

נוסחאות אטומיות: $\underbrace{(t_1,\dots,t_n)}_{\text{nouns}}\ \underbrace{R}_{\text{N-Realtion}}\ ,\ \approx(t_1,t_2)$.

<u>הערה:</u>

הבדל בין שם עצם לנוסחה אטומית:

בהינתן מבנה M והשמה s שם עצם t - כשישוערך הבמנה M וההשמה s יחזיר ערך מתוך D^M.

נוסחה(אטומית): תשוערך ל-T/F.

המשך יצירת נוסחאות -כלל יצירה/פעולות.

בהינתן נוסחאות α, β ומשתנה x

הנוסחאות הבאות הן נוסחאות של תחשיב היחסים:

$$\neg\alpha,\ \alpha\to\beta,\ \forall x\alpha$$
$$\alpha\wedge\beta\ \alpha\vee\beta,\ \exists x\alpha$$

סמנטיקה:

<u>מבנה M</u> שמפרש סימני מילון ביחס לתחום D^M.

<u>השמה:</u> $s:\ \underbrace{\text{Var}}_{\{x_i|i\in\mathbb{N}\}}\ :\to D^M$.

<u>השמה מורחבת:</u>

$$\overline{s}:\underbrace{Term}_{\text{nouns}}\to D^M$$

<u>הגדרת $\overline{s}$:</u>

בהינתן $\overline{s},s,M$ מוגדרת אינדוקטיבית ע"י:

1. $\overline{s}(x)=s(x)$ x משתנה.
2. $\overline{s}(c)=C^M$ c סימן קבוע.
3. $\overline{s}(F(t_1,\dots,t_n))=F^M(\overline{s}(t_1),\dots,\overline{s}(t_n))$.

ההשמה מתוקנת:

$$s[y\leftarrow d](x)=\begin{cases}d & x=y\\ s(x) & x\neq y\end{cases}$$

$s[y\leftarrow 8]$	x	y	z	$\dots$	s	x	y	z	$\dots$
	1	8	3	$\dots$		1	2	3	$\dots$

הגדרת $\models$

$M \underset{s}{\models} \alpha$

α נוסחה , s השמה, M מבנה

$M, s \models \alpha$

באינדוקציה מעל מבנה הנוסחה

<u>בסיס:</u>

$M \underset{s}{\models} R(t_1, \ldots, t_n)$

$(\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n)) \in R^M$

כתוב $R^N(\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n))$ הוא T.

$M \underset{s}{\models} \approx (t_1, t_2)$

$\overline{s}(t_1) = \overline{s}(t_2)$

<u>צעד:</u>

$M \underset{s}{\not\models} \alpha \Leftrightarrow M \underset{s}{\models} \neg\alpha$

$M \underset{s}{\models} \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow$

$M \underset{s}{\models} \alpha$ **וגם** $M \underset{s}{\models} \beta$

$M \underset{s}{\models} \alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow$

$M \underset{s}{\not\models} \alpha$ **או** $M \underset{s}{\models} \beta$

$\Leftrightarrow M \underset{s}{\models} \forall x \alpha$

לכל $d \in D^M$ $M \underset{s[x \leftarrow d]}{\models} \alpha$

$\Leftrightarrow M \underset{s}{\models} \exists x \alpha$

קיים $d \in D^M$ כך ש־$M \underset{s[x \leftarrow d]}{\models} \alpha$.

דוגמא:

מילון: $\tau = (R(\circ, \circ), G(\circ), F(\circ, \circ))$

מבנה: $M = (\underbrace{\mathbb{N}}_{D^M}, \underbrace{<}_{R^M}, \underbrace{\alpha \cdot x}_{G^M(x)}, \underbrace{x+y}_{F^M(x,y)})$

<u>השמה:</u>

$s(x) = 2$ $\boxed{\text{s(y)=5}}$

$\alpha = \exists x (R(G(x), F(x, y))$

$\Leftrightarrow M \underset{s}{\models} \alpha$

קיים $d \in \mathbb{N}$ כך ש־ $R(G(x), F(x, y))$ $\underset{\underbrace{s[x \leftarrow d]}_{s}}{\models}$ $M \Leftrightarrow$

קיים d כך ש־ $(\overline{s}'(G(x), \overline{s}'(F(x, y))) \in R^M,$

קיים d כך ש־ $\underbrace{(G^M(\overline{s}'(x)), F^N(\overline{s}'(x), \overline{s}'(y)w) \in <}_{2d<d+5}$

- $\star$ ערך z לא השפיע על התוצאה בהשמה.
- $\star$ ערך y ־ השפיע.
- $\star$ ערך x ־ לא השפיה.

נגדיר משתנים חפשיים/קשורים בנוסחה

באינדוקצייה על מבנה הנוסחה α.

<u>בסיס:</u> α נוסחה אטומית.

$(R(t_1, \ldots, t_n))$

לכל x שנמצא ב־α, x חופשי עבור α.

<u>צעד:</u>

עבור קשרים $\alpha = \beta \square \gamma$

משתנה x הוא חופשי ב־α

אם ורק אם הוא חופשי ב־β או חופשי ב־γ.

$\alpha = \neg\beta$

x חופשי ב־α אם ורק אם הוא חופשי ב־β.

$\alpha = \exists x \beta$,$\alpha = \forall x \beta$

y חופשי ב־α אם ורק אם y חופשי ב־β <u>וגם</u> $\boxed{y \neq x}$

x לא חופשי ב־α ($y = x$ לא חופשי ב־α).

משתנה הוא <u>קשור</u> ב־α אם הוא אינו חופשי ב־α

<u>אינטואיטיציה:</u>

משתנים חופשיים־ערכם משפיע על ערך הנוסחה.

מתשנים קשורים ־ ערכם אינו משפיע.

דוגמא:

$$\alpha = (\forall x \underbrace{R(x,y)}_{\underbrace{x,y}_{y}}) \wedge \underbrace{Q(x)}_{x} \wedge \underbrace{\exists z \underbrace{Q(z)}_{z}}_{\text{none}}$$

המשתנים החופשיים ב־α הם x, y.

למה:

נתונה α מעל מילון τ, מבנה M מעל τ והשמה s_1, s_2 <u>שמתאימות ל־M.</u>

אם לכל משתנה חופשי x של α $s_1(x) = s_2(x)$ אז

$$M \underset{s_1}{\vDash} \alpha \Leftrightarrow M \underset{s_2}{\vDash} \alpha$$

הגדרה:

נוסחה של תחשיב היחסים שאין בה משתנים חופשיים נקראת <u>פסוק</u>.

ערך פסוק אינו תלוי בהשמה וניתן להרשם $M \vDash \alpha$.

ניתן לרשום:

קיימת השמה s כך ש־$M \underset{s}{\vDash} \alpha$ אם ורק אם $M \vDash \alpha$.

דוגמא לפסוק:

$$\alpha = \forall x \exists y R(x,y)$$

$$M = (\mathbb{N}, \underbrace{<}_{R^N})$$

$$\Leftrightarrow M \underset{s}{\vDash} \forall x \exists y R(x,y)$$

לכל d_1 $\Leftrightarrow M \underset{s[x\leftarrow d_1]}{\vDash} \exists y R(x,y)$

לכל d_1 קיים d_2 $\Leftrightarrow M \underset{s[x\leftarrow d_1][y\leftarrow d_2]}{\vDash} R(x,y)$

לכל d_1קיים d_2 $\Leftrightarrow d_1 < d_2$

$\boxed{\text{T}}$.

דוגמא נוספת:

$$M \underset{s}{\nvDash} \forall x \exists y R(x,y)$$

לכל d_1 קיים d_2כך ש־

$$\Leftrightarrow M \underset{\underbrace{s[x \leftarrow d_1][y \leftarrow d_2]}_{s'}}{\vDash} R(x,y)$$

לכל d_1 קיים $d_2$$\Leftrightarrow R^M(s'(x), s'(y))$

לכל d_1 קיים d_2 $\Leftrightarrow (d_1, d_2) \in <$

לכל d_1 קיים d_2 $d_1 < d_2$.

גדירות של יחס בתוך מבנה נתון

<u>בשונה</u> מגדירות ואי־גדירות של <u>קבוצת מבנים שנעשה</u> **<u>בהמשך</u>**<u>(דומה לתחשיב הפסוקים)</u>.

<u>נתון מבנה M</u> מעל τ אינטואיטיבית: השאלה היא האם אפשר לבטא בעזרת המילון של M מושגים(יחסים) שאינם במילון.

בהינתן מבנה M מעל τ

יחס אמיתי לא סימן יחס:$P \subseteq (D^M)^n$ n־מקומי.

יחס p n מקומי הוא <u>גדיר ב־M</u> אם קיימת נוסחה α מעל τ, בעלת n משתנים חופשיים $v_1, \dots v_n$ כך שלכל השמה s מתקיים:

$$M \underset{s}{\vDash} \alpha \Leftrightarrow (s(v_1), \dots, s(v_n)) \in P.$$

נאמר אז ש־α מגדירה את P ב־M.

דוגמא:

$\tau = (R(\circ,\circ))$
$M = (\mathbb{N}, \underbrace{\leq}_{R^N})$

היחס(אונרי) $P \subseteq N$ מוגדר $P = \{0\}$.

ב־α שמגדירה את p יהיה <u>משתנה חופשי יחיד:</u>

$\alpha(v_2) = \forall v_1 R(v_2, v_1)$

צ"ל לכל השמה s:

$M \underset{s}{\models} d(v_2) \Leftrightarrow s(v_2) \in p$
$\Leftrightarrow M \underset{s}{\models} \forall v_1 R(v_2, v_1)$
לכל $d \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow M \underset{s[v_1 \leftarrow d]}{\models} R(v_2, v_1)$
לכל $d \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow (s(v_2), d) \in \leq$
$\Leftrightarrow s(v_2) = 0$
$s(v_2) \in P$.

דוגמא דומה במבנה שונה

$\tau = \langle R(\circ,\circ) \rangle$
$M = (2^{\mathbb{N}}, \subseteq)$
$p = \{\emptyset\} \subseteq D^M$
$\alpha = \forall v_1 (R(v_2, v_1))$

להוכיח שאם α מגדירה את p במילון M החדש.

באותו מבנה:

$p' = \{(x,y) | x \subsetneq y\} \subseteq (D^M)^2$
$\varphi_1(x,y) = R(x,y) \wedge \neg R(y,x)$
$\varphi_2(x,y) = R(x,y) \wedge \neg (x \approx y)$

צ"ל לכל השמה s

$M \underset{s}{\models} \varphi_1 \Leftrightarrow (s(x), s(y)) \in P'$
$M \underset{s}{\models} \varphi_2 \Leftrightarrow (s(x), s(y)) \in P'$.