לוגיקה - תרגול 4

השמות

<u>הערה</u>: מכאן ואילך נשמיט סוגריים 'מיותרים' מהפסוק על ידי הגדרת סדר קדימיות בין הקשרים:

1. $\neg$ (הקשר בעל הקדימות הגבוהה ביותר)
2. $\vee, \wedge$
3. $\rightarrow$ (הקשר בעל הקדימות הנמוכה ביותר)

<u>שימו לב</u>: בשאלות הנוגעות לתחביר אין להשמיט סוגריים!

<u>הגדרה 1</u>: פונקציה $v : \{p_0, p_1, p_2, \ldots\} \rightarrow \{\mathrm{F}, \mathrm{T}\}$ נקראת <u>השמה</u>.
<u>דוגמאות</u>:

1. v_{F} מוגדרת כך שלכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $v_{\mathrm{F}}(p_i) = \mathrm{F}$
2. v_{T} מוגדרת כך שלכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $v_{\mathrm{T}}(p_i) = \mathrm{T}$

<u>סימונים</u>:

- Ass היא קבוצת כל ההשמות.
- $TT_\circ$ היא טבלת האמת של קשר $\circ$ כלשהו.

<u>הגדרה 2</u>: בהינתן השמה v, <u>השמה מורחבת</u> $\overline{v}$ היא פונקציה $\overline{v} : \mathrm{WFF} \rightarrow \{\mathrm{F}, \mathrm{T}\}$ המוגדרת באינדוקציה:

בסיס: לכל $i \in \mathbb{N}$, $\overline{v}\left(p_i\right) = v\left(p_i\right)$.

סגור: לכל $\alpha, \beta \in \mathrm{WFF}$

- $\overline{v}\left(\neg\alpha\right) = TT_\neg\left(\overline{v}\left(\alpha\right)\right)$
- לכל $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$, $\overline{v}\left(\alpha \circ \beta\right) = TT_\circ\left(\overline{v}\left(\alpha\right), \overline{v}\left(\beta\right)\right)$

<u>הגדרה 3</u>: תהי $v \in \mathrm{Ass}$ ו־$\alpha \in \mathrm{WFF}$. אם $\overline{v}(\alpha) = \mathrm{T}$ נאמר ש־v מספקת את α, ונסמן $v \models \alpha$. אם α טאוטולוגיה, נסמן $\models \alpha$.

<u>משפט 1 — משפט התלות הסופית</u>: יהי פסוק α ושתי השמות v_1, v_2. אם לכל אטום p_i המופיע ב־α מתקיים $v_1(p_i) = v_2(p_i)$, אז $\overline{v}_1(\alpha) = \overline{v}_2(\alpha)$.

מושגי יסוד סמנטיים

הגדרה 4: נאמר כי פסוק α הוא ספיק אם קיימת השמה המספקת אותו (קיימת v כך ש־$\overline{v}(\alpha) = \mathrm{T}$).

דוגמאות: p_0, $p_0 \vee p_1$

הגדרה 5: פסוק α נקרא טאוטולוגיה אם כל השמה מספקת אותו (לכל v, $\overline{v}(\alpha) = \mathrm{T}$).

דוגמאות: $p_0 \to p_0$, $p_0 \vee \neg p_0$

הגדרה 6: פסוק α נקרא סתירה אם לא קיימת השמה המספקת אותו (לכל v, $\overline{v}(\alpha) = \mathrm{F}$).

דוגמה: $p_0 \wedge \neg p_0$

שימו לב: אם פסוק אינו סתירה אז הוא ספיק (ולא בהכרח טאוטולוגיה).

תרגיל 1: הוכיחו/ הפריכו: אם $\alpha \vee \beta$ טאוטולוגיה, אז α טאוטולוגיה או β טאוטולוגיה.

הגדרה 7: יהיו α, β פסוקים. אם כל השמה המספקת את α מספקת גם את β נאמר ש־α גורר לוגית את β (או לחילופין, ש־β נובע לוגית מ־α), ונסמן $\alpha \models \beta$.

טענות:

1. אם α טאוטולוגיה ו־$\alpha \models \beta$, אז β טאוטולוגיה.
2. אם β סתירה ו־$\alpha \models \beta$, אז α סתירה.
3. אם α סתירה אז לכל פסוק β מתקיים $\alpha \models \beta$.
4. אם β טאוטולוגיה אז לכל פסוק α מתקיים $\alpha \models \beta$.
5. $\models$ הוא יחס רפסלקסיבי וטרנזיטיבי (לא סימטרי).

הגדרה 8: יהיו α, β פסוקים. אם לכל השמה v מתקיים ש־$\overline{v}(\alpha) = \overline{v}(\beta)$ נאמר כי α ו־β שקולים לוגית ונסמן $\alpha \equiv \beta$.

משפט 2: α ו־β שקולים לוגית אמ"מ $\alpha \models \beta$ וגם $\beta \models \alpha$.

מושגים סמנטיים עבור קבוצות פסוקים

הגדרה 9: תהי $\Sigma \subseteq \mathrm{WFF}$. אם v מספקת את כל הפסוקים ב־Σ נאמר כי v מספקת את Σ ונסמן $v \models \Sigma$.

דוגמה: $v_{\mathrm{T}} \models \{p_1, p_2\}$

הגדרה 10: קבוצת פסוקים Σ נקראת ספיקה אם קיימת השמה v כך ש־v מספקת את Σ.

הגדרה 11: תהי $\Sigma \subseteq \mathrm{WFF}$. אם כל השמה המספקת את Σ מספקת גם את α נאמר כי Σ גוררת לוגית את α (או לחילופין ש־α נובע לוגית מ־Σ) ונסמן $\Sigma \models \alpha$.

דוגמה: $\{p_0, p_1\} \models p_0 \wedge p_1$

הגדרה 12: יהיו $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \mathrm{WFF}$. נאמר כי Σ_1 ו־Σ_2 שקולות לוגית ונסמן $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$ אם לכל השמה v מתקיים $v \models \Sigma_1 \iff v \models \Sigma_2$.

דוגמה: $\{p_0, p_1\} \equiv \{p_0 \wedge p_1\}$

<u>תרגיל 3:</u>

תהי $\Sigma \subseteq \mathrm{WFF}$. נניח שכל פסוק $\alpha \in \Sigma$ ספיק. האם בהכרח Σ ספיקה?

<u>תרגיל 4:</u>

יהיו קבוצת פסוקים Σ ופסוק α, ונניח ש־$\Sigma \cup \{\alpha\}$ ספיקה. האם בהכרח $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ אינה ספיקה?

$$TT_{\to} : \{T, F\} \times \{T, F\} \to \{T, F\}$$

$$TT_{\to}(\alpha, \beta)$$

α	β	$\alpha \to \beta$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

$$v(p_i) = \begin{cases} F & i = 1 \\ T & \text{else} \end{cases}$$

$$p_0 \to (\neg p_1)$$

$$v$$

$$\begin{aligned} &\overline{v}(p_0 \to (\neg p_1)) = \\ &TT_{\to}(\overline{v}(p_0), \overline{v}(\neg p1)) \\ &TT_{\to}(v(p_0), TT_{\neg}(\overline{v}(p1))) \\ &TT_{\to}(T, TT_{\neg}(v(p_1))) \\ &TT_{\to}(T, TT_{\neg}(F)) \\ &TT_{\to}(T, T) = T. \end{aligned}$$

$$\overline{v}(p_0 \to (\neg p_1)) = T$$

$$p_0 \vee, \neg p_0$$

$$p_0$$

p_0	$\neg p_0$	$p_0 \vee \neg p_0$
F	T	T
T	F	T

$$\beta\alpha \models \beta\alpha$$

$$\alpha \vee \beta = p_0 \vee \neg p_0 \beta = \neg p_0 \ \alpha = p_0$$

$$p_0 \vee \neg p_0$$

$$p_0$$
$$\overline{v}_F(\alpha)$$
$$\overline{v}_F(p_0) = v_F(p_0) = F$$

$$p_0$$

$$\beta = \neg p_0$$
$$\overline{v}_T(\beta) = \overline{v}_T(\neg p_0) = TT_\neg(v_T(p_0)) = TT_\neg(T) = F$$

$$\Sigma = \{p_0, \neg p_0\}$$
$$\neg p_0, p_0$$
$$\Sigma\Sigma$$
$$\Sigma v v$$

$$\overline{v}(p_0) = T$$
$$\overline{v}(\neg p_0) = T$$
$$\overline{v}(\neg p_0) = TT_\neg(\overline{v}(p_0)) = TT_\neg(T) = F$$

$$\neg\alpha = \neg p_0 \alpha = p0\Sigma = \emptyset$$