

לוגיקה - תרגול 5

מערכת הוכחה לתחשיב הפסוקים

הגדרה 1, מערכת ההוכחה: קבוצת הפסוקים היכחים, $Ded(\emptyset)$, היא הקבוצה האינדוקטיבית $X_{B,F}$ המוגדרת באופן הבא:

$$X = WFF_{\{\neg, \rightarrow\}} \bullet$$

$$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \text{ - קבוצת האקסיומות, כאשר:}$$

$$A_1 = \{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \mid \alpha, \beta \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}\} \text{ -}$$

$$A_2 = \{(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \mid \alpha, \beta, \gamma \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}\} \text{ -}$$

$$A_3 = \{((\neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \mid \alpha, \beta \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}\} \text{ -}$$

$$F = \{MP\} \bullet \text{ - קבוצת כללי ההיסק, כאשר } MP \text{ הוא כלל הניתוק } \frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}.$$

$$\text{צורת רישום נוספת: } MP(\alpha, \alpha \rightarrow \beta) = \beta.$$

דוגמאות:

$$(שייך בסיס) \underbrace{(p_1)}_{\alpha} \rightarrow \underbrace{(p_2 \rightarrow p_1)}_{\beta} \in Ded(\emptyset)$$

$$(שייך לבסיס) \underbrace{([p_1 \rightarrow [p_2 \rightarrow p_1]])}_{\alpha} \rightarrow \underbrace{(p_0)}_{\beta} \rightarrow \underbrace{[p_1 \rightarrow [p_2 \rightarrow p_1]]}_{\alpha} \in Ded(\emptyset)$$

$$(הפעלת MP על שני הקודמים) (p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1))) \in Ded(\emptyset)$$

הגדרה 2: פסוק α ששייך לקבוצה האינדוקטיבית $(\alpha \in Ded(\emptyset))$ נקרא פסוק יכח, ויסומן $\vdash \alpha$.

הגדרה 3: יהי $\alpha \in Ded(\emptyset)$. סדרת היצירה של α נקראת סדרת הוכחה (או הוכחה פורמלית). כלומר סדרת הוכחה של פסוק α היא סדרה סופית של פסוקים $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ כך שמתקיים:

$$1. \alpha_n = \alpha.$$

$$2. \text{ לכל פסוק } \alpha_i \text{ מתקיים:}$$

$$(א) \alpha_i \text{ הוא אקסיומה}$$

או

$$(ב) \alpha_i \text{ התקבל מפסוקים קודמים על ידי הכלל } MP.$$

מערכת הוכחה עם הנחות

הגדרה 4, מערכת הוכחה עם הנחות: קבוצת הפסוקים היחידים מקבוצת פסוקים Σ (הנחות), $Ded(\Sigma)$, היא הקבוצה האינדוקטיבית $X_{B \cup \Sigma, F}$ (עבור B, X ו- F מהגדרה 1).

- אם $\alpha \in Ded(\Sigma)$ נאמר כי α יכח מ- Σ ונסמן $\Sigma \vdash \alpha$.
- סדרת היצירה של פסוק α מעל $Ded(\Sigma)$ נקראת סדרת הוכחה של α מתוך Σ .
- אם $\Sigma = \emptyset$, אז $Ded(\emptyset) = X_{B, F}$, קבוצת הפסוקים היחידים (ללא הנחות).

דוגמה: נוכיח כי לכל זוג פסוקים α, β מתקיים $\{\alpha, \neg\alpha\} \vdash \beta$.

תכונות מערכת ההוכחה:

יהיו $\alpha, \beta \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$ ו- $\Sigma, \Gamma \subseteq WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$

1. הנחת המבוקש: אם $\alpha \in \Sigma$ אז $\Sigma \vdash \alpha$.
- הוכחה: ל- α יש סדרת הוכחה באורך 1 מעל Σ .
2. סופיות ההוכחה: אם $\Gamma \vdash \alpha$ אז קיימת $\Sigma \subseteq \Gamma$ סופית כך ש- $\Sigma \vdash \alpha$.
- אינטואיציה: בסדרת ההוכחה יש מספר סופי של פסוקים, ולכן בהכרח משתמשים רק במספר סופי של הנחות מתוך Γ .

3. מונוטוניות (הרחבת הנחות): אם $\Sigma \vdash \alpha$ וגם $\Sigma \subseteq \Gamma$ אז $\Gamma \vdash \alpha$.

אינטואיציה: סדרת ההוכחה של α מעל Σ היא גם סדרת הוכחה של α מעל Γ .

4. מונוטוניות מורחבת (טענת עזר): אם $\Sigma \vdash \alpha$ וגם לכל $\beta \in \Sigma$ מתקיים $\Gamma \vdash \beta$ אז $\Gamma \vdash \alpha$.

אינטואיציה: בסדרת ההוכחה של α מתוך Σ , נחליף כל מופע של פסוק $\beta \in \Sigma$ בהוכחה של β מתוך Γ .

משפט הדדוקציה: לכל קבוצת פסוקים Σ ופסוקים α, β מתקיים: $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ אם ורק אם $\Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

הערה: משפט הדדוקציה אינו מוסיף כוח הוכחה, כלומר כל מה שניתן להוכיח בעזרתו ניתן להוכיח גם בלעדיו. משפט זה רק מקל על הוכחת קיום סדרת הוכחה.

תרגיל 1: הוכיחו שהפסוק $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$ יכח, בעזרת משפט הדדוקציה.

משפט הנאותות

משפט הנאותות הרחב: לכל קבוצת פסוקים Σ מתקיים, אם $\Sigma \vdash \alpha$ אז $\Sigma \models \alpha$.

סימון: $Con(\Sigma) = \{\alpha \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}} \mid \Sigma \vdash \alpha\}$. כלומר, משפט הנאותות משמעותו: $Ded(\Sigma) \subseteq Con(\Sigma)$.

מסקנה ממשפט הנאותות: אם $\Sigma \not\models \alpha$ אז $\Sigma \not\vdash \alpha$.

משפט הנאותות הצר: אם $\Sigma \vdash \alpha$ אז $\Sigma \models \alpha$.

תרגיל 2: נגדיר מערכת הוכחה חדשה עבור $WFF_{\{\neg, \vee\}}$.

אקסיומות: $A = \{\alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha) \mid \alpha, \beta \in WFF_{\{\neg, \vee\}}\}$

כללי ההיסק: לכל $\alpha, \beta \in WFF_{\{\neg, \vee\}}$

$$MV_1(\alpha, \beta) = \alpha \vee \beta \quad 1.$$

$$MV_2(\alpha, (\neg\alpha) \vee \beta) = \beta \quad 2.$$

נסמן ב- $Ded_N(\emptyset)$ את קבוצת הפסוקים היכחים במערכת החדשה, ואם $\varphi \in Ded_N(\emptyset)$ אז נסמן $\vdash_N \varphi$. באופן דומה נסמן $Ded_N(\Sigma)$ ו- $\vdash_N \varphi$ עבור פסוקים היכחים במערכת החדשה מקבוצת הנחות Σ . הוכיחו כי מערכת ההוכחה החדשה נאותה במובן הצר (כלומר, לכל פסוק $\varphi \in WFF_{\{\neg, \vee\}}$: אם $\vdash_N \varphi$ אז $\models \varphi$).

תרגול 5 לוגיקה

$$MP(\alpha, \gamma) = \begin{cases} \beta & \gamma = \alpha \rightarrow \beta \\ \alpha & \text{otherwise} \end{cases}$$

דוגמה:

סדרת הוכחה:

$\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$	A_1	.1
$\neg\alpha$	הנחה	.2
$\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$	$MP_{1,2}$.3
$(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$	A_3	.4
$\alpha \rightarrow \beta$	$MP_{3,4}$.5
α	הנחה	.6
β	$MP_{5,6}$.7

תרגיל 1:

הוכיחו שהפסוק $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$ יכיח בעזרת משפט הדדוקציה.

הוכחה (לפי דדוקציה):

$$\begin{aligned} & \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \\ \Leftrightarrow & \text{(deduction)} \\ & \{\alpha\} \vdash \beta \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \\ \Leftrightarrow & \text{(deduction)} \\ & \{\alpha, \beta\} \vdash \beta \rightarrow \alpha \\ \Leftrightarrow & \text{(deduction)} \\ & \{\alpha, \beta\} \vdash \alpha \end{aligned}$$

מתקיים $\{\alpha, \beta\} \vdash \alpha$ מהנחת המבוקש.

$$Ded(\Sigma) = \{\alpha \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}} \mid \Sigma \vdash \alpha\} \quad \text{אינד'}$$

$$Con(\Sigma) = \{\alpha \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}} \mid \Sigma \models \alpha\} \quad \text{לא אינד'}$$

תרגיל 2:

נגדיר מערכת הוכחה חדשה עבור $WFF_{\{\neg, \vee\}}$
 אקסיומות: $A = \{\alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha) \mid \alpha, \beta \in WFF_{\{\neg, \vee\}}\}$
 כלל ההיסק: לכל $\alpha, \beta \in WFF_{\{\neg, \vee\}}$

$$1. MV_1(\alpha, \beta) = \alpha \vee \beta$$

$$2. MV_2(\alpha, (\neg\alpha) \vee \beta) = \beta$$

נסמן ב- $Ded_N(\emptyset)$ את קבוצת הפסוקים היכחים במערכת החדשה, ואם $\varphi \in Ded_N(\emptyset)$ אז נסמן φ באופן דומה נסמן $Ded_N(\Sigma)$ ו- $\Sigma \vdash_N \varphi$ עבור פסוקים היכחים במערכת החדשה מקבוצות המחות Σ .

הוכיחו כי מערכת ההוכחה החדשה נאותה במובן הצר (כלומר, לכל פסוק $\varphi \in \alpha \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$ אם $\vdash_N \varphi$ אז $\models \varphi$).

פתרון:

נוכיח באינדוקציית מבנה ש:
 $(\models \varphi \Leftarrow \vdash_N \varphi) \quad Ded_N(\phi) \subseteq Con(\phi)$

בסיס: נראה $\models \alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha)$ לכל $\alpha, \beta \in \alpha \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$ באמצעות טעבלת אמת:

α	β	$\neg\alpha$	$\beta \vee \neg\alpha$	$\alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha)$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

סגור: נניח $\alpha, \beta \in Con(\phi)$ כלומר $\models \alpha, \models \beta$

$$\delta = MV_1(\alpha, \beta) = \alpha \vee \beta \bullet$$

$$\overline{V}(\alpha \vee \beta) \underbrace{TT_v(\overline{V}(\alpha), \overline{V}(\beta))}_{\text{induction def.}} = TT_V(T, T) = T$$

$$\delta = MV_2(\alpha_1(\neg\alpha) \vee \gamma) = \gamma \quad \beta = ((\neg\alpha) \vee \gamma) \bullet$$

תהי $v \in ASS$

$$\overline{V}(\alpha) = T$$

$$\overline{V}(\beta) = \overline{V}((\neg\alpha) \vee \gamma) = T$$

$$\overline{V}(\neg) = TT_{\neg}(\overline{V}(\alpha)) = TT_{\neg}(T) = F$$

$$\overline{V}(\gamma) = T \Leftarrow \text{לפי טבלת אמת.}$$

$$\models \alpha \underbrace{MV_2(\alpha, \beta) = \alpha}_{\text{not mandatory}} \bullet \text{ לפי ה"א.}$$