לוגיקה הרצאה 1

18 במרץ 2019

טיעון

טיעון תקף ־ כל פעם שההנחות נכונות גם המסקנות נכונות.

כל היוונים הם בני אדם.
כל בני האדם הם בני תמותה.
כל היוונים הם בני תמותה

בני האדם הם הכללה של יוונים.
לבני אדם יש תכונה של "בני תמותה".

ליוונים יש תכונה של בני תמותה.

כל A הוא B, כל B הוא C ולכן כל A הוא C.

למשל:
הנחות:
(הכלה) כל המרובעים הם מצולעים.
(תכונה) כל המצולעים הם בעלי היקף.
מסקנה:
כל המרובעים הם בעלי היקף.

דוגמה נוספת־
כל העורבים שחורים. (תכונה)
כל שחור הוא צבע (הכללה)
לכן ־ כל העורבים הם צבע ־ לא נכון.

מסקנה: שפה טבעית לא מספיק ברורה לכן צריך שפה פורמלית כדי שנוכל להוכיח דברים.

טענות: אמירות\נוסחאות שהן או אמת או שקר בעולם.

תחשיב:

סינטקס ־ איזה נוסחאות חוקיות בשפה.

סמנטיקה - מתי נוסחה היא אמת או שקר.

מערכת הוכחה פורמלית

נרצה לקשר בין הסמנטיקה למערכת ההוכחה ולומר שהנוסחאות היכיחות (ניתנות להוכחה) הן נכונות.
כל נוסחה נכונה ניתנת להוכחה.

הגדרה אינדוקטיבית של קבוצה
נתונה קבוצה W - העולם.
נתונה קבוצה $B \subseteq W$ (הבסיס).
נתונה קבוצה של כללי יצירה\פעולות F.

ב־F יש פונקציות חלקיות (שלא בהכרח מוגדרות לכל האיברים בתחום שלהן) אנריות (n) ל־n כלשהו.

$$f : W^n \to W$$

נגדיר את הקבוצה $X_{B,F} \subseteq W$
(הסגור של B תחת F) כקבוצה המקיימת את הדברים הבאים:

1. $B \subseteq X_{B,F}$

2. לכל $f \in F$, $f : W^n \to W$, אם $x_1, ..., x_n \in X_{B,F}$ אז גם $f(x_1, ..., x_n) \in X_{B,F}$

ג. אין ב־$X_{B,F}$ איברים מיותרים כלומר $X_{B,F}$ מכילה רק איברים שנדרשים לקיום א' וב'.
או במילים אחרות: $X_{B,F}$ היא הקבוצה המינימלית שנוצרת על ידי B ו־F.

דוגמה
W - כל המילים הסופיות מעל א"ב a, b.

בסיס: $B = \{ab\}$

פעולות:
1. מוסיפה aba לצד ימין של המילה.

$$f_1(w) = waba$$

2. מחליפה את aa השמאלי ביותר במילה ב־b.

$$f_2(w_1 aaw_2) = w_1 bw_2$$

כאשר ב־w_1 אין מופע של aa.

3. השמטת bbb השמאלי ביותר, אם קיים:

$$f_3(w_1bbbw_2)$$

כאשר ב־w_1 אין מופע של bbb.

דוגמה למילים בשפה:

$ab, ababa$

נראה דרך לבנות $X_{B,F}$ ע"ס B, F כאיחוד של סדרה של קבוצות.

נגדיר: בהינתן קבוצה y,$F(y)$ הינה קבוצת איברים ב־W שמתקבלים בהפעלת איזושהי פעולה ב־F על איזשהו איבר ב־y.

נגדיר סדרה של קבוצות

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq ...$$

באופן הבא:
$X_1 = B$
...
$X_{i+1} = X_i \cup F(X_i)$

$$\overline{X} = \cup_i X_i$$

$$\overline{X} = X_{B,F}$$

כלומר:

$$X_1 = \{ab\}$$

$$X_2 = \{ab, ababa\}$$

$$X_3 = X_2 \cup \{ababa, ababaaba\}$$

$$X_4 = X_3 \cup \{ababbba, ababaabaaba\}$$

וכן הלאה...

<u>דוגמה לקבוצה אינדוקטיבית</u>
$W = \mathbb{N}$
$B = \{0\}$
$F = \{+2\}$
$X_{B,F} = \mathbb{N}_2$

<u>טענה</u>
$\overline{X}$ - מקיימת את כל הדרישות ולכן $\overline{X} = X_{B,F}$.

1. צ"ל - מקיימת את 1 - נראה ש-$B \subseteq \overline{X}$ - נכון כי $X_1 = B$ ו-$X_1 \subseteq \overline{X}$.

2. צ"ל - מקיימת את 2.
נתונים $x_!, ..., x_n \in \overline{X}$, צ"ל $f(x_!, ..., x_n) \in \overline{X}$.

נראה שקיים X_l כך שמתקיים $x_!, ..., x_n \in X_l$ נוכל להסיק מכך ש-$f(x_!, ..., x_n) \in$ X_{l+1} ולכן $f(x_!, ..., x_n) \in \overline{X}$

דוגמא

$$f(a_1, a_2, a_3)$$

$$a_1 \in X_5, a_2 \in X_{17}, a_3 \in X_1$$

אז מתקיים:

$$f(a_1, a_2, a_3) \in X_{18}$$

צריך להוכיח ש-$\overline{X}$ מקיימת את ג.

<u>נוכיח טענה יותר כללית</u>
לכל קבוצה y שמקיימת את תנאים 1,2 עבור B, F אזי $\overline{X} \subseteq y$.

נוכיח באינדקוציה על i ש-$X_i \subseteq y$ ואז $\cup X_i \subseteq y$.

בסיס: צ"ל $X_1 = B \subseteq y$ - נכון כי y מקיימת את תנאי 1.

צעד: נניח כי $X_i \subseteq y$ - צ"ל $X_{i+1} = X_i \cup F(X_i) \subseteq y$

צ"ל לגבי האיברים - $x_1, ..., x_n \in X_i$ אז על סמך אינדוקציה $x_1, ..., x_n \in y$ ובגלל ש־y מקיימת את ב' אז $f(x_1, ..., x_n) \in y$.

מסקנה מהטענה: $\overline{X}$ היא המינימלית שמספקת את א' וב' ולכן מספקת גם את ג'.

מסקנה: $\overline{X} = X_{B,F}$.

<u>משפט ההוכחה באינדוקציה</u>
אם y קבוצה שמספקת את תנאים 1,2 עבור B, F אז יודעים ש־$X_{B,F} \subseteq y$.

מאפשר שיטת הוכחה שנקראת "הוכחה באינדוקציית מבנה".

על מנת להוכיח ש־$X_{B,F} \subseteq y$ נראה ש:
1. $B \subseteq y$.
2. y סגורה תחת F.

כדי להוכיח ש־$b \in X_{B,F}$ צריך להראות שקיימת עבורו סדרת יצירה.
<u>סדרת יצירה:</u> עבור איבר b מתוך $X_{B,F}$הינו סדרה סופית $a_1, ..., a_n$ כך ש:
1. $a_n = b$.
2. לכל $1 \leq i \leq n$ או ש־$a_i \in B$ או ש־a_iהתקבל מקודמים בסדרה ע"י הפעלת פעולה מ־F.

דוגמה של: $B = \{0\}, F = \{+2\}$ נראה ש־$8 \in X_{B,F}$. סדרת היצירה שלו תהיה:

$$\{0, 2, 4, 6, 8\}$$

כדי להראות ש־$x \notin X_{B,F}$.

נמצא תכונה T. נראה ש־$X_{B,F} \subseteq T$ ונראה ש־$x \notin T$ (כלומר ל־x אין תכונה T) - T היא קבוצת האיברים בעלי התכונה.

נראה ש־$aba \notin ABA$ (השפה שהגדרנו מקודם).

תכונה:
צ"ל - מספר ה־a בכל איברי B, F הוא אי־זוגי.

אם זה נכון, אז aba לא בשפה כי אין לה את התכונה.

<u>שיטת ההוכחה</u>

נבחר תכונה T.

נראה שמתקיים:

1. $B \subseteq T$.
2. לכל $x_1, ..., x_n \in T$ מתקיים $f(x_1, ..., x_n) \in T$.

דוגמה:

$ab \in T$ (יש a יחיד).
כל פעולה שפועלת על מילה עם מספר זוגי של a מחזירה מילה עם מספר אי זוגי של a.