

לוגיקה - תרגול 8

גדירות - תזכורות

הגדרה 1: השמה המספקת קבוצת פסוקים Σ נקראת מודל של Σ .

קבוצת המודלים של Σ היא הקבוצה: $M(\Sigma) = \{v \in \text{Ass} \mid v \models \Sigma\}$

הגדרה 2: קבוצת השמות K נקראת גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים Σ כך ש- $M(\Sigma) = K$. אחרת K נקראת לא גדירה.

הוכחת גדירות

איך מוכיחים שקבוצת השמות K היא גדירה?

1. מראים קבוצת פסוקים Σ מפורשת.

2. מוכיחים כי $M(\Sigma) = K$ על ידי הכלה דו־כיוונית.

תרגיל 1: לכל $j \in \mathbb{N}$ נגדיר את קבוצת ההשמות: $\{v \mid v \text{ נותנת } T \text{ לכל היותר } j\text{-ל-אטומים}\} = K_j$. הוכיחו כי לכל $j \in \mathbb{N}$, הקבוצה K_j גדירה.

תרגיל 2:

תהיינה $X, Y \subseteq WFF$.

הוכיחו כי $M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y)$.

משפט הקומפקטיות - תזכורת

לכל קבוצת פסוקים Σ מתקיים, Σ ספיקה אמ"מ כל תת־קבוצה סופית של Σ ספיקה.

הוכחת אי-גדירות

איך מוכיחים שקבוצת השמות K אינה גדירה?

1. מניחים בשלילה ש- K גדירה ו- X היא קבוצת הפסוקים המגדירה אותה $M(X) = K$.

(לשים לב: לא ניתן להניח דבר על X פרט לכך שהיא מגדירה את K).

2. בוחרים קבוצת פסוקים מפורשת Y שעבורה ידוע (או שניתן להוכיח בקלות) מהו $M(Y)$ (קבוצות שכדאי לנסות: $Y = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $Y = \{\neg p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$).

3. מוכיחים ש- $X \cup Y$ איננה ספיקה על ידי כך שמראים ש- $M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y) = K \cap M(Y) = \emptyset$.

4. מוכיחים ש- $X \cup Y$ ספיקה על ידי שימוש במשפט הקומפקטיות.

תהי $D \subseteq X \cup Y$ סופית.

נסמן $D_X = D \cap X$ ו- $D_Y = D \cap Y$

נבנה השמה v המספקת את D_Y ו- D_X . נתחיל בבניה ע"פ מבנה הפסוקים ב- D_Y ונשלים אותה כך ש- $v \in K$.

נוכיח שהבניה מספקת את D_Y .

$v \in K$ מספקת את X $v \Leftarrow X$ מספקת את D_X .

v מספקת את D_X ו- D_Y $v \Leftarrow D_Y$ מספקת את $D_X \cup D_Y$.

5. מ-3+4 מקבלים סתירה ולכן K אינה גדירה.

תרגיל 3:

הוכיחו כי v נותנת T למספר סופי של אטומים $K_{fin} = \{v \in \text{Ass} \mid v \text{ אינה גדירה}\}$.

תרגיל 4:

הוכיחו כי v נותנת T לאינסוף אטומים $K_{inf} = \{v \in \text{Ass} \mid v \text{ אינה גדירה}\}$.

תרגול 8 לוגיקה

תרגיל 2:

תהינה $X, Y \subseteq \text{WFF}$
הוכיחו כי $M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y)$

הוכחה:

\Leftarrow תהי $v \in M(X) \cap M(Y)$
יהיה $\varphi \in X \cup Y$ לפי הגדרת איחוד $\varphi \in X$ או $\varphi \in Y$
בה"כ $\varphi \in X$, לפי הגדרת חיתוך $v \in M(X)$ ולפי הגדרת קבוצת מודלים.
 $v \models \varphi$ לפי הגדרת מודלים קבוצת מודלים $v \in M(X \cup Y)$.
באותו אופן ההוכחה אם $\varphi \in Y$.
 \Rightarrow $v \in M(X \cup Y) : \subseteq$
צ"ל: $v \in M(X)$ וגם $v \in M(Y)$
 $M(x)$: יהיה $\varphi \in X$. מהגדרת קבוצת מודלים $v \models \varphi$.
מהגדרת קבוצת מודלים $v \in M(x)$.
באותו אופן עבור $M(Y)$.

תרגיל 3:

הוכיחו כי v נותנת T למספר סופי של אטומים $K_{fin} = \{v \in \text{Ass} \mid v \text{ אינה גדירה}\}$.

הוכחה:

1. נניח בשלילה ש K_{fin} גדירה.
אז קיימת קבוצת פסוקים x כך ש- $M(X) = K^-$.
2. נבחר $Y = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. ניתן לראות כי $M(Y) = \{V_T\}$.
3. $X \cup Y$ אינה ספיקה: V_T נותנת T לאינסוף אטומים
ולכן $V_T \notin K_{fin}$. ולכן
 $M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y) = K_{fin} \cap \{V_T\} = \emptyset$
4. נוכיח בעזרת משפט הקומפקטיות ש- $X \cup Y$ ספיקה.
תהי $D \subseteq X \cup Y$ תת-קבוצה סופית.
נסמן: $D_Y = D \cap Y, D_X = D \cap X$.
מכיוון ש- $D_Y \subseteq D^-$ ו- D_X סופית אז גם D_Y סופית.
ולכן היא מהצורה: $D_Y = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}\}$.
נסמן ב- m את האינדקס המקסימלי של D_i ב- D_Y .

$(D_Y = \emptyset$ אם $m = 1$), מאחר ו- D_Y סופית בהכרח קיים m כזה.
 נגדיר השמה v באופן הבא:

$$v(p_i) = \begin{cases} T & i \leq m \\ F & i > m \end{cases}$$
 * כל הפסוקים ב- D_Y הם מהצורה D_i כאשר $i \leq M$
 ולכן $v \models D_Y \Leftarrow$ מספקת אותם $v \models D_Y$.
 * מכיוון ש- $v \in K_{fin}$ (נותנת T למספר שופי של אטומים)
 $v \models X \Leftarrow v \in M(X) \Leftarrow$ מספקת כל פסוק ב- X ובפרט כל
 פסוק ב- $D_X \subseteq X$ $v \models D_X \Leftarrow$
 בסה"כ קיבלנו כי v מספקת את D_x ואת D_y ולכן גם את $D = D_X \cup D_Y$.
 הראינו שלכל תת-קבוצה סופית $D \subseteq X \cup Y$ קיימת השמה המספקת אותה ולכן
 תת-קבוצה סופית היא ספיקה. ממשפט הקומפקטיות נובע $X \cup Y$ ספיקה.
 5. 3 ו-4 הם סתירה ולכן K_{fin} אינה גדירה.

תרגיל 4:

הוכיחו כי v נותנת T אינסוף אטומים $\{v \in \text{Ass} \mid K_{inf} \text{ אינה גדירה.}\}$

הוכחה:

1. same
2. נבחר $Y = \{\neg p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. ניתן לראות כי $M(Y) = \{V_F\}$.
3. $X \cup Y$ אינה ספיקה: V_f נותנת ערך T לאפס אטומים (ובפרט לא לאינסוף)
 ולכן $v_f \notin K_{inf}$
 $M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y) = K_{inf} \cap \{V_K\} = \emptyset$
4. $D_Y = \{\neg p_{i_1}, \dots, p_{i_k}\}$.
 נסמן ב- m את האינדקס המקסימלי של $\neg p_i$ ב- D_Y .
 נבנה השמה v :

$$v(p_i) = \begin{cases} F & i \leq m \\ T & i > m \end{cases}$$