לוגיקה — תרגול 12

גדירות של קבוצת מבנים על ידי קבוצת פסוקים

הגדרה 1: יהי τ מילון. בהינתן קבוצת פסוקים Σ נסמן $\{M \mid M \models \Sigma$ ו־τ מבנה מעל $M\} = M(\Sigma)$.
אוסף מבנים K יקרא גדיר, אם קיימת קבוצת פסוקים Σ כך ש־$M(\Sigma) = K$.

הוכחת גדירות של אוסף מבנים על ידי קבוצת פסוקים

איך מוכיחים שאוסף מבנים K הוא גדיר?

1. מגדירים קבוצת פסוקים Σ מפורשת.
2. מראים על ידי הכלה דו־כיוונית ש־$M(\Sigma) = K$.

תרגיל 1: נתון המילון $\tau = \langle R_1(\circ), R_2(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c\rangle$.

1. הוכיחו כי $K_1 = \{M \mid \mathrm{Image}\left(F^M\right) \subseteq R_1^M$ המקיים τ מבנה מעל $M\}$ גדיר.
2. הוכיחו כי $K_2 = \{M \mid (d, c^M) \in R_2^M$ כך ש־$d \in D^M$ המקיים כי יש אינסוף איברים τ מבנה מעל $M\}$ גדיר.

הוכחת אי גדירות של אוסף מבנים על ידי קבוצת פסוקים

משפט הקומפקטיות: תהי Σ קבוצת נוסחאות, Σ ספיקה אמ"מ כל תת־קבוצה סופית של Σ ספיקה.
איך מוכיחים אי גדירות של אוסף מבנים?

1. מניחים בשלילה שקיימת קבוצת פסוקים X כך ש־$M(X) = K$.
2. בוחרים קבוצת פסוקים מפורשת Y כך ש־$K \cap M(Y) = \emptyset$.
3. מוכיחים כי $X \cup Y$ אינה ספיקה מאחר ש־$M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y) = K \cap M(Y) = \emptyset$.
4. מוכיחים שכל תת קבוצה סופית $D \subseteq X \cup Y$ ספיקה.
5. 3+4 הם סתירה למשפט הקומפקטיות ולכן K אינו גדיר.

תרגיל 2:

נתון המילון $\tau = \langle R_1(\circ), R_2(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c\rangle$ (מתרגיל 1), ואוסף המבנים
$K = \{M \mid (d', d) \in R_2^M$ כך ש־$d' \in D^M$ יש מספר סופי של $d \in D^M$ המקיים כי לכל τ מבנה מעל $M\}$
הוכיחו כי K אינו גדיר.

לוגיקה — תרגול 12
גדירות בתחשיב היחסים

גדירות של קבוצת מבנים על ידי קבוצת פסוקים

הגדרה 1: יהי τ מילון. בהינתן קבוצת פסוקים Σ נסמן $\{M$ מבנה מעל τ ו־$M \models \Sigma \mid M\} = M(\Sigma)$.
אוסף מבנים K יקרא גדיר, אם קיימת קבוצת פסוקים Σ כך ש־$M(\Sigma) = K$.

הוכחת גדירות של אוסף מבנים על ידי קבוצת פסוקים

איך מוכיחים שאוסף מבנים K הוא גדיר?

1. מגדירים קבוצת פסוקים Σ מפורשת.
2. מראים על ידי הכלה דו־כיוונית ש־$M(\Sigma) = K$.

תרגיל 1: נתון המילון $\tau = \langle R_1(\circ), R_2(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c\rangle$.

1. הוכיחו כי $K_1 = \{M \mid \mathrm{Image}\left(F^M\right) \subseteq R_1^M$ המקיים τ מבנה מעל $M\}$ גדיר.

   פתרון: נגדיר את הקבוצה Σ_1 באופן הבא:

   $$\Sigma_1 = \{\forall x_1 \forall x_2 R_1(F(x_1,x_2))\}$$

   נראה כי $K_1 = M(\Sigma_1)$

   $M \in M(\Sigma_1)$ (כלומר $M \vDash \Sigma_1$) $\Longleftrightarrow$

   $M \models \forall x_1 \forall x_2 R_1(F(x_1,x_2)) \Longleftrightarrow$

   לכל השמה s $M \models_s \forall x_1 \forall x_2 R_1(F(x_1,x_2)) \Longleftrightarrow$

   לכל השמה s ולכל $d_1,d_2 \in D^M$ מתקיים: $M \models_{s[x_1 \leftarrow d_1, x_2 \leftarrow d_2]} R_1(F(x_1,x_2)) \Longleftrightarrow$

   לכל השמה s ולכל $d_1,d_2 \in D^M$ מתקיים $\overline{s}[x_1 \leftarrow d_1, x_2 \leftarrow d_2](F(x_1,x_2)) \in R_1^M \Longleftrightarrow$

   לכל $d_1,d_2 \in D^M$ מתקיים $F^M(d_1,d_2) \in R^M \Longleftrightarrow$

   $\mathrm{Image}\left(F^M\right) \subseteq R_1^M \Longleftrightarrow$

   $M \in K_1$.

2. הוכיחו כי $K_2 = \{M \mid (d, c^M) \in R_2^M$ מבנה מעל τ המקיים כי יש אינסוף איברים $d \in D^M$ כך ש־$M\}$ גדיר.

   פתרון:

תזכורת: בהרצאה ראינו קבוצת פסוקים $\Sigma_{\text{inf}} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots\}$, כאשר α_n הוגדר באופן הבא:

$$\alpha_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg (x_i \approx x_j) \right)$$

הוכחנו כי $M \vDash \alpha_n$ אמ"מ ב-D^M יש **לפחות** n **איברים,** והוכחנו כי $M \in M(\Sigma_{\text{inf}})$ אמ"מ D^M אינסופי.

במקרה זה נגדיר קבוצה אינסופית של פסוקים $\Sigma_2 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\}$

משמעות הפסוק φ_n הינה שב-D^M יש **לפחות** n **איברים שונים** d **כך ש-**$(d, c^M) \in R_2^M$**,** והוא יוגדר באופן הבא:

$$\varphi_n = \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \left[\bigwedge_{i=1}^{n} R_2(x_i, c) \wedge \bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg (x_i \approx x_j) \right]$$

מתקיים: $M \vDash \varphi_n$ אמ"מ ב-D^M קיימים (לפחות) n איברים <u>שונים</u> d כך שכולם מקיימים $(d, c^M) \in R_2^M$.

כעת נוכיח כי $K_2 = M(\Sigma_2)$:

$M \notin M(\Sigma_2)$ (כלומר $M \nvDash \Sigma_2$) $\iff$

קיימת השמה s כך ש-$M \nvDash_s \Sigma_2$ $\iff$

קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$M \nvDash_s \varphi_n$ $\iff$

קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שב-D^M לא קיימים n איברים <u>שונים</u> d שכולם מקיימים $(d, c^M) \in R_2^M$ $\iff$

ב-D^M לא קיימים אינסוף איברים <u>שונים</u> d שכולם מקיימים $(d, c^M) \in R_2^M$ $\iff$

$M \notin K_2$

הוכחת אי גדירות של אוסף מבנים על ידי קבוצת פסוקים

<u>משפט הקומפקטיות</u>: תהי Σ קבוצת נוסחאות, Σ ספיקה אמ"מ כל תת־קבוצה סופית של Σ ספיקה.

<u>איך מוכיחים אי גדירות של אוסף מבנים?</u>

1. מניחים בשלילה שקיימת קבוצת פסוקים X כך ש-$M(X) = K$.
2. בוחרים קבוצת פסוקים מפורשת Y כך ש-$K \cap M(Y) = \emptyset$.
3. מוכיחים כי $X \cup Y$ אינה ספיקה מאחר ש-$M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y) = K \cap M(Y) = \emptyset$.
4. מוכיחים שכל תת קבוצה סופית $D \subseteq X \cup Y$ ספיקה.
5. 3+4 הם סתירה למשפט הקומפקטיות ולכן K אינו גדיר.

<u>תרגיל 2</u>:

נתון המילון $\tau = \langle R_1(\circ), R_2(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c \rangle$ (מתרגיל 1), ואוסף המבנים

$K = \{M$ מבנה מעל τ המקיים כי לכל $d \in D^M$ יש מספר סופי של $d' \in D^M$ כך ש-$(d', d) \in R_2^M$ $\mid M\}$

הוכיחו כי K אינו גדיר.

<u>הוכחה</u>:

1. נניח בשלילה שקיימת קבוצת פסוקים X כך ש-$M(X) = K$.

2. נסמן $Y = \Sigma_2$

3. נראה כי $X \cup Y$ אינה ספיקה:

- $M \in K$: לכל $d \in D^M$ יש מספר סופי של $d' \in D^M$ כך ש־$(d', d) \in R_2^M$.
- $M \in M(Y)$: מהדוגמה הקודמת נובע כי ב־D^M (קיים $c^M = d \in D^M$ כך ש־) יש מספר אינסופי של $d' \in D^M$ כך ש־$(d', c^M) \in R_2^M$.

לכן $M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y) = K \cap M(Y) = \emptyset$ ולכן $X \cup Y$ אינה ספיקה.

4. נראה כי $X \cup Y$ ספיקה:

על פי קומפקטיות מספיק להראות כי כל תת־קבוצה $D \subseteq X \cup Y$ סופית היא ספיקה.

נניח כי $D \subseteq X \cup Y$ תת־קבוצה סופית ונסמן $D_X = D \cap X$, $D_Y = D \cap Y$.

יהי m המספר הגדול ביותר כך ש־$\varphi_m \in D_Y$ ($m = 1$ אם $D_Y = \emptyset$).

נתבונן במבנה הבא מעל המילון τ: $M = \langle \underbrace{\{1, 2, \ldots, m\}}_{D^M}, \emptyset, \underbrace{D^M \times \{1\}}_{R_2^M}, F^M, 1 \rangle$, כאשר $F^M(d, d') = 1$.

- נראה $M \vDash D_Y$:
  לכל $d \in D^M$ מתקיים $\left(d, c^M\right) \in R_2^M$.
  מכיוון ש־$\left|D^M\right| = m$ יש ב־D^M m איברים שונים d כך ש־$\left(d, c^M\right) \in R_2^M$.
  בפרט לכל $i \leq m$ יש ב־D^M (לפחות) i איברים שונים d כך ש־$\left(d, c^M\right) \in R_2^M$.
  לכן לכל $i \leq m$ מתקיים $M \vDash \varphi_i$.
  יהי $\varphi_i \in D_Y$ אזי $i \leq m$ ולכן $M \vDash \varphi_i$. כלומר $M \vDash D_Y$.
- נראה $M \vDash D_X$:
  D^M סופי ולכן לכל $d \in D^M$ יש מספר סופי של $d' \in D^M$ כך ש־$(d', d) \in R_2^M$.
  כלומר $M \in K = M(X)$ ולכן $M \vDash X$.
  מכיוון ש־$D_X \subseteq X$ נקבל כי $M \vDash D_X$.

מסקנה: $M \vDash D_X \cup D_Y = D$.

הראינו כי כל תת קבוצה סופית של $X \cup Y$ ספיקה, ולכן לפי קומפקטיות $X \cup Y$ ספיקה.

5. מסעיפים 3+4 הגענו לסתירה, ולכן K אינה גדירה.

לוגיקה תרגול 12

3 ביולי 2019

תרגיל 1:

1. נגדיר את הקבוצה Σ_1באופן הבא: $\Sigma_1 = \{\forall x_1 \forall x_2 R_1(F(x_1, x_2))\}$
נראה כי $K_1 = M(\Sigma_1)$
$M \in M(\Sigma_1)$ $(M \vDash \Sigma_1)$ $\Leftrightarrow$
$M \vDash \forall x_1 \forall x_2 R_1(F(x_1, x_2))$$\Leftrightarrow$

$\vdots$

$\Leftrightarrow$
לכל $d_1, d_2 \in D^M$ מתקיים $F^M(d_1, d_2) \in R^M$ $\Leftrightarrow$
$Image(F^M) \subseteq R^M$ $\Leftrightarrow$
$M \in K_1$

2. $\alpha_2 = \exists x_1 \exists x_2 \neg(x_1 \approx x_2)$
$$\alpha = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i \leq j \leq n} \neg(x_i \approx x_n))$$
$$\sum_{inf} = \{\alpha | n \geq 2\}$$
$$\varphi_n = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i \leq j \leq n} \neg(x_i \approx x_j) \bigwedge_{1 \leq i \leq n} R(x_i, c))$$
$$\sum = \{\varphi_n | n \geq 2\}$$

תרגיל 2:

1. נניח בשלילה שקיימת קבוצת פסוקים X כך ש $M(x) = K$
2. $Y = \{\varphi_n | \, n \geq 2\}$
3. נראה כי $X \cup Y$ אינה ספיקה.

- $M \in K$: לכל $d \in D^M$יש מספר סופי $d' \in D^M$ כך ש־$(d', d) \in R_2^M$.
- $M \in M(Y)$: מהדוגמה הקודמת נובע כי ב־D^M יש מספר אינסופי של $d' \in D^M$
כך ש־$(d', c^M) \in R_2^M$
לכן $M(X \cup Y) = M(x) \cap M(Y)$
$K \cap M(Y) = \emptyset$
ולכן $X \cup Y$ אינה ספיקה.

4. נראה כי $X \cup Y$ ספיקה.
על פי קומפקטיות מספיק להראות כי כל תת־קבוצה $D \subseteq X \cup Y$ סופית היא ספיקה.

נניח כי $D \subseteq X \cup Y$ תת־קבוצה סופית, נסמן $D_X = D \cap X$ $D_Y = D \cap Y$
יהי m המספר הגדול ביותר כך ש־$\varphi_m \in D_Y$.
($m = 1$ אם $D_Y = \emptyset$).
נתבונן במבנה הבא מעל מילון τ:
$$M = \langle \underbrace{\{1, 2, \dots, m\}}_{D^M}, \emptyset, D^M \times \{1\}, F^M, 1 \rangle$$
כאשר $F^M(d, d') = 1$.
נראה $M \vDash D_Y$
לכל $d \in D^M$ מתקיים $(d, c^M) \in R_2^M$ מכיוון ש $|D^M| = m$ יש ב־D^M m איברים
שונים d כך ש־$(d, c^M) \in R_2^M$
לכן לכל $i \le m$ מתקיים $M \vDash \varphi_i$
יהי $\varphi_i \in D_Y$ אזי $i \le m$ ולכן $M \vDash \varphi_i$כלומר
$M \vDash D_Y$

- נראה $M \vDash D_x$
D^Mסופי ולכן לכל $d \in D^M$ יש מספר סופי של $d' \in D^M$כך ש־$(d', d) \in R_2^M$
כלומר $M \in K = M(x)$ ולכן $M \vDash x$ מכיוון ש־$D_x \subseteq X$ נקבל $M \vDash D_x$.
מסקנה $M \vDash D_x \cup D_y = D$
הראינו כי כל תת־קבוצה סופית של $X \cup Y$ ספיקה ולכן לפי קומפקטיות $X \cup Y$ ספיקה.

5. מסעיפים 3+4 נקבל סתירה ולכן k אינה גדירה.