

## לוגיקה הרצאה 6

**אכסיומות**  $A_1, A_2, A_3$

כלל היסק  $MP$

$$\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

קבוצה אינדוקטיבית של המשפטים היכחיים

$$\vdash \alpha$$

סדרת הוכחה עבור  $\alpha$

$$\alpha_1, \dots, \underbrace{a_n}_{\alpha}$$

$$1 \leq i \leq n$$

$a_i$  הוא או אכסיומה או התקבלה מהקודמים בסדרה ע"י  $MP$ .

**בסיס**  $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup X$  קבוצת הנחות

פעולה  $MP$

$$X \vdash \alpha$$

הנחה מ- $X$  אכס', אכס'  $X \subseteq Y$ ,  $y \vdash \alpha$

**משפט הדדוקציה**

לכל מערכת הוכחה שיש בה לפחות אכסיומות  $A_1, A_2$  רק את כלל  $MP$ :

לכל קבוצת פסוקים  $X$  ופסוקים  $\alpha, \beta$  מתקיים:

$$X \vdash \alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow X, \alpha \vdash \beta$$

**הוכחה:**

$$\Rightarrow \text{נתון } X \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

$$\text{הוכחנו } X, \alpha \vdash \beta$$

$$\Leftarrow \text{נתון } X, \alpha \vdash \beta$$

$$\text{צ"ל } X \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

$$\text{עס' } X, \alpha \vdash \beta$$

$$\text{קיימת סדרת הוכחה } a_1, \dots, a_n$$

$$\text{לכל } i$$

$$a_i \text{ אכסיומה או מ-} X \text{ או } \alpha \text{ או התקבלה עס' } MP \text{ ו- } a_n = \beta$$

$$\text{נראה לכל } 1 \leq i \leq n \text{ } a_i$$

$$X \vdash \alpha \rightarrow a_i$$

$$a_n = \beta \text{ מסקנה עבור}$$

$$\text{כנדרש } X \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

נוכיח באינדוקציה על  $i$  בסדרת ההוכחה.

**בסיס:** נוכיח  $X \vdash \alpha \rightarrow a_i$

1.  $a_i$  אכסיומה

2.  $\alpha$

3. מ- $X$

הוכחה ל 1 של הבסיס:

1.  $a_1$  אכסיומה

2.  $A_1 \rightarrow (\alpha \rightarrow a_i)$

3.  $MP_{1,2} \alpha \rightarrow a_1$

$\vdash \alpha \rightarrow a_1$

מונוטוניות של הוכחה עס' הנחות  $X \vdash (\alpha \rightarrow a_i)$

הוכחה ל 2 של הבסיס:

מטרה  $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

משפט שהוכחנו בשבוע שעבר  $X \vdash \alpha \rightarrow \alpha$

הוכחה ל 3 של הבסיס:

1. הנחה מ- $X$   $a_1$

2.  $a_1 \rightarrow (\alpha \rightarrow a_1)$

3.  $MP_{1,2} \alpha \rightarrow a_1$

$X \vdash \alpha \rightarrow a_1$

**צעד האינדוקציה** נניח שהטענה נכונה לכל  $j < i$  נוכיח עבור  $a_i$ :  
אפשרות 1:

1.  $a_i$  אכסיומה

2.  $\alpha$

3. מ- $X$

עבור אפשרות זו ההוכחה זהה.

אפשרות 2:

$a_i$  התקבלה עס'  $MP$  מ- $a_l, a_m$  עבור  $m, l < i$

1.  $a_1 = \delta \rightarrow a_i$

2.  $a_m = \delta$

3.  $MP a_l, a_m a_i$

הנחת האינדוקציה

$$X \vdash (\alpha \rightarrow (\delta \rightarrow a_i))$$

$$X \vdash (\alpha \rightarrow \delta)$$

$$1. \alpha \rightarrow (\delta \rightarrow a_i) \text{ X 'עס'}$$

$$2. (\alpha \rightarrow \delta) \text{ X , עס'}$$

$$3. (((\alpha \rightarrow (\delta \rightarrow a_i)) \rightarrow$$

$$((\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow (\alpha \rightarrow a_i))) A_2$$

$$4. ((\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow (\alpha \rightarrow a_i)) MP_{1,3}$$

$$5. (\alpha \rightarrow a_i) MP_{2,4}$$

$$X \vdash (\alpha \rightarrow a_i)$$

■

**תרגיל:**

$$\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \text{ נוכיח}$$

**הוכחה:**

$$1. (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \text{ הנחה}$$

$$2. \beta \text{ הנחה}$$

$$3. \alpha \text{ הנחנה}$$

$$4. (\beta \rightarrow \gamma) MP_{1,3}$$

$$5. \gamma MP_{4,2}$$

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)), \beta, \gamma \vdash \alpha$$

$$(\text{משפט הדדוקציה}) (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)), \beta \vdash (\alpha \rightarrow \gamma)$$

$$(\text{"("}) (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \vdash (\beta \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma)$$

$$(\text{"("}) \vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

**תרגיל:**

$$\vdash (\neg\neg(\alpha \rightarrow \alpha)) \text{ נוכיח}$$

$$1. \neg\neg\alpha \text{ הנחה}$$

$$2. \text{משפט } (\neg\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow (\neg\neg\alpha))) \vdash (\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$$

$$3. (\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha) MP_{1,2}$$

$$4. (\underbrace{\neg\alpha}_{\beta} \rightarrow \underbrace{\neg\neg\alpha}_{\neg\alpha}) \rightarrow (\underbrace{\neg\alpha}_{\alpha} \rightarrow \underbrace{\alpha}_{\beta}) A_3$$

$$5. (\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha) MP_{3,4}$$

$$.6 \quad \alpha MP_{5,1}$$

$$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$$

משפט הדדוקציה

$$\vdash (\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$A_3 : (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

$$\vdash (\underbrace{\neg\alpha}_{(\neg\alpha)} \rightarrow (\underbrace{\alpha}_{(\neg\alpha)} \rightarrow \underbrace{\beta}_{(\neg\neg\alpha)})) \text{ משפט פורמלי פסוק יכיח } A_3$$

שיטה שונה להשמך ההוכחה משלב 5:

$$\neg\neg\alpha \vdash (\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha) \text{ מסקנה}$$

$$\{\neg\neg\alpha, \neg\neg\alpha\} \vdash \alpha \rightarrow \text{דדוקציה בכיוון}$$

$$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$$

$$\vdash (\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha) \text{ דדוקציה}$$

**להוכיח תכונות על מערכת ההוכחה.**

**משפט נאותות:**

$$\models \alpha \Leftarrow \vdash \alpha$$

**משפט הנאותות החזק:**

$$X \models \alpha \Leftarrow X \vdash \alpha$$

.  $X \models \alpha$  מתקיים אם לכל השמה  $v$ ,

אם  $X \models v$  (כלומר  $v \models \beta$  לכל  $\beta \in X$ ) אז  $v \models \alpha$ .

**משפט השלמות(החזק):**

$$X \vdash \alpha \Leftarrow X \models \alpha$$

$$\vdash \alpha \Leftarrow \models \alpha$$

**הוכחה (משפט הנאותות החזק):**

$$x \vdash \alpha \text{ נתון}$$

$$X \models \alpha \text{ "צ"ל}$$

הוכחה באינדוקציה מבנה על הפסוקים  $\alpha$  שיכחים עס'  $X$ .

**בסיס** סדרת ההוכחה  $a_1, \dots, \underbrace{a_n}_{\alpha}$

$$1. a_1 \text{ מ-} X.$$

$$2. a_1 \text{ אכסיומה}$$

### הוכחה:

1.  $a_1$  מ- $X$ .  
 $X \models a_1$   
 $X \models a_1$  אם ורק אם  $\beta \in X$  לכל  $v \models \beta$  ובפרט  $v \models a_1$ .
2.  $a_1$  אכסיומה  
לכל אכסיומה קל לבדוק  $\models a_1$  טאוטולוגיה  
מסקנה  $X \models a_1$

### הנחה האינדוקציה:

$$X \models a_j$$

$$X \models a_K$$

**צעד האינדוקציה:**  $a_i$  אכסיומה מ- $X$

מ- $MP$   $j, k < i, a_k, a_j$

$$a_k = \beta, a_j = \beta \rightarrow a_i$$

$$X \models \beta \rightarrow a_i$$

$$X \models \beta$$

נניח בשלילה ש- $X \not\models a_i$

כלומר קיימת  $v$

$$v \models X$$

$$v \not\models a_i$$

עס' הנחת האינדוקציה

$$v \models \beta \rightarrow a_i$$

$$v \models \beta$$

עס' טבלת האמת של  $\rightarrow$ :

$$v \models a_i \text{ סתירה.}$$

### משפט הנאותות(החזק לפי אביר היזם):

$$X \models \alpha \text{ אז } X \vdash \alpha$$

$$X \not\models \alpha \text{ אז } X \not\vdash \alpha$$

### הוכחה משפט השלמות:

עקביות של קבוצת פסוקים:

הגדרה 1:

קבוצת פסוקים  $X$  היא עקבית אם לא קיים פסוק  $\alpha$  כך ש- $X \vdash \alpha$  וגם  $X \vdash \neg \alpha$ .

הגדרה 2:

$X$  הינה עקבית אם לא כל פסוק יכיח מ- $X$ . כלומר, קיים פסוק  $\beta$ ,  $X \vdash \beta$ .

### דוגמאות לקבוצות לא עקביות:

$$1. X = \{\alpha, \neg \alpha\}$$

$$X \vdash \alpha$$

$$X \vdash \neg \alpha$$

$$\begin{array}{l}
 2. \quad X = \{\alpha \rightarrow \beta, \alpha, \neg\beta\} \\
 \quad \quad X \vdash \neg\beta \\
 \quad \quad X \vdash \beta
 \end{array}$$

**משפט:**

2 ההגדרות שקולות עבור תחשיב הפסוקים.

**הוכחה**  $2 \Leftarrow 1$

נתון: לא קיים  $\alpha, \alpha \not\vdash X$  וגם  $X \vdash \neg\alpha$   
 ולכן לכל  $\alpha$ , או  $X \vdash \alpha$  או  $X \not\vdash \neg\alpha$  ומתקיימת הגדרה 2

$1 \Leftarrow 2$

$X$  הינה עקבית אם לא כל פסוק יכח מ- $X$  כלומר, קיים פסוק  $\beta$ ,  $\beta \not\vdash X$ .