

לוגיקה ותורת הקבוצות - תרגול 6

מערכת הוכחה לתחשיב הפסוקים

תזכורת: קבוצת הפסוקים היכחים, $Ded(\emptyset)$, היא הקבוצה האינדוקטיבית $X_{B,F}$ המוגדרת באופן הבא:

$$W = WFF_{\{\neg, \rightarrow\}} \bullet$$

$$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \bullet \text{ קבוצת האקסיומות, כאשר:}$$

$$A_1 = \{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \mid \alpha, \beta \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}\} -$$

$$A_2 = \{(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \mid \alpha, \beta, \gamma \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}\} -$$

$$A_3 = \{((\neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \mid \alpha, \beta \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}\} -$$

$$F = \{MP\} \bullet \text{ קבוצת כללי ההיסק, כאשר } MP \text{ הוא כלל הניתוק } \frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}.$$

$$\text{צורת רישום נוספת: } MP(\alpha, \alpha \rightarrow \beta) = \beta.$$

מערכת הוכחה עם הנחות: קבוצת הפסוקים היכחים מקבוצת פסוקים Σ (הנחות), $Ded(\Sigma)$, היא הקבוצה האינדוקטיבית $X_{B \cup \Sigma, F}$ (עבור B, W ו- F מהגדרה 1).

$$\bullet \text{ אם } \alpha \in Ded(\Sigma) \text{ נאמר כי } \alpha \text{ יכח מ-}\Sigma \text{ ונסמן } \Sigma \vdash \alpha.$$

$$\bullet \text{ סדרת היצירה של פסוק } \alpha \text{ מעל } Ded(\Sigma) \text{ נקראת סדרת הוכחה של } \alpha \text{ מתוך } \Sigma.$$

$$\bullet \text{ אם } \Sigma = \emptyset, \text{ אז } Ded(\emptyset) = X_{B,F} \text{ קבוצת הפסוקים היכחים (ללא הנחות).}$$

משפט הנאותות ועקביות

משפט הנאותות הרחב: לכל קבוצת פסוקים Σ מתקיים, אם $\Sigma \vdash \alpha$ אז $\Sigma \models \alpha$.

סימון: $Con(\Sigma) = \{\alpha \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}} \mid \Sigma \vdash \alpha\}$. כלומר, משפט הנאותות משמעותו: $Ded(\Sigma) \subseteq Con(\Sigma)$.

מסקנה ממשפט הנאותות: אם $\Sigma \not\models \alpha$ אז $\Sigma \not\vdash \alpha$.

משפט הנאותות הצר: אם $\Sigma \vdash \alpha$ אז $\Sigma \models \alpha$.

עקביות

הגדרה 1: קבוצת פסוקים $\Sigma \subseteq WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$ היא עקבית אם לא קיים $\alpha \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$ כך ש- $\Sigma \vdash \neg\alpha$ וגם $\Sigma \vdash \alpha$.

משפט 1 (הגדרה שקולה): Σ עקבית אם"מ קיים פסוק α כך ש- $\Sigma \not\vdash \alpha$.

איך מראים שקבוצה Σ היא עקבית?

לפי ההגדרה השקולה, די להראות פסוק α כך ש- $\Sigma \not\vdash \alpha$, כלומר $\alpha \notin Ded(\Sigma)$.

לפי המסקנה ממשפט הנאותות, די להוכיח כי $\alpha \notin Con(\Sigma)$, כלומר $\Sigma \not\models \alpha$.

תרגיל 1: הוכיחו כי הקבוצה $\Sigma = \{p_i \rightarrow p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\} = \{p_0 \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_2, \dots\}$ היא עקבית.

משפט 2: אם Σ ספיקה אז Σ עקבית.

תרגיל 2:

נגדיר סדרה של קבוצות פסוקים:

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= \{\neg p_0\} \\ \Sigma_1 &= \{p_0, \neg p_1\} \\ \Sigma_2 &= \{p_0, p_1, \neg p_2\} \\ &\vdots\end{aligned}$$

באופן כללי $\Sigma_i = \{p_0, p_1, \dots, p_{i-1}, \neg p_i\}$.

1. האם לכל i מתקיים ש- Σ_i עקבית?

2. האם $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$ עקבית?

3. האם $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$ עקבית?

4. תהי $X \neq \emptyset$ קבוצת קבוצות פסוקים.

הוכיחו: אם לכל $\Sigma \in X$ מתקיים ש- Σ עקבית, אז $\bigcap X$ היא עקבית.

משפט השלמות

משפט השלמות: לכל פסוק α וקבוצת פסוקים Σ , אם $\Sigma \vdash \alpha$ אז $\Sigma \models \alpha$.

בצרוף משפט הנאותות נקבל כי $\Sigma \models \alpha \Leftrightarrow \Sigma \vdash \alpha$.

מסקנה ממשפט השלמות: אם $\Sigma \not\vdash \alpha$, אז $\Sigma \not\models \alpha$.

משפט 3: לכל קבוצת פסוקים Σ , אם Σ עקבית אז Σ ספיקה.

בצרוף משפט 2 נקבל כי Σ עקבית אמ"מ Σ ספיקה.

תרגיל 3: נגדיר מערכת הוכחה חדשה לתחשיב הפסוקים מעל $WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$.

• קבוצת האקסיומות מכילה את הפסוקים מהצורה הבאה:

לכל $\alpha, \beta, \gamma \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$

- $A_1 : \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

- $A_2 : (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

• כללי היסק:

- $MP(\alpha, \alpha \rightarrow \beta) = \beta$

- MV (יוגדר בהמשך)

נסמן ב- $\Sigma \vdash_N \alpha$ את הטענה שפסוק α יכיח מתוך Σ במערכת החדשה.

1. נגדיר $MV(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) = \alpha$.

הוכיחו/ הפריכו: המערכת החדשה שלמה.

כלומר, לכל קבוצת פסוקים $\Sigma \subseteq WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$ ולכל פסוק $\alpha \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$, אם $\Sigma \models \alpha$ אז $\Sigma \vdash_N \alpha$.

תרגול 6 לוגיקה

תרגיל 1:

הוכיחו כי הקבוצה $\Sigma = \{p_i \rightarrow p_{i+1} | i \in \mathbb{N}\} = \{p_0 \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_2, \dots\}$ היא עקבית.

הוכחה:

נבחר $\alpha = \neg(p_0 \rightarrow p_0)$, נוכיח כי $\Sigma \not\models \alpha$. יש להראות השמה המספקת את Σ אבל לא את α .

$$\begin{aligned}\overline{V}_T(p_i \rightarrow p_{i+1}) &= TT_{\rightarrow}(V_T(p_i), V_T(p_{i+1})) \\ TT_{\rightarrow}(T, T) &= T\end{aligned}$$

ולכן $V_T(\alpha) = F$ אבל Σ מספקת את Σ אבל $\Sigma \not\models \alpha$ (לפי מסקנה ממשפט הנאותות) קיבלנו $\Sigma \not\models \alpha \Leftarrow \Sigma \not\models \neg(p_0 \rightarrow p_0)$ עקבית. (הגדרה שקולה עקביות)

משפט 2:

אם Σ ספיקה אז Σ עקבית.

משפט 2 הוכחה:

נניח כי Σ ספיקה, אז קיימת לפי הגדרה השמה v כך ש $v \models \Sigma$ ו $v \models \neg(p_0 \rightarrow p_0) = F$.

$$\Sigma \not\models \neg(p_0 \rightarrow p_0) \Leftarrow \underbrace{\Sigma \not\models \neg(p_0 \rightarrow p_0)}_{\text{neotut}}$$

תרגיל 2:

נגדיר סדרה של קבוצות פסוקים:

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= \{\neg p_0\} \\ \Sigma_1 &= \{p_0, \neg p_1\} \\ \Sigma_2 &= \{p_0, p_1, \neg p_2\} \\ &\vdots\end{aligned}$$

באופן כללי:

$$\Sigma_i = \{p_0, p_1, \dots, p_{i-1}, \neg p_i\}$$

1. האם לכל i מתקיים ש- Σ_i עקבית?
2. האם $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$ עקבית?
3. האם $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$ עקבית?
4. תהי $X \neq \emptyset$ קבוצת קבוצות פסוקים. הוכיחו אם לכל $\Sigma \in X$ מתקיים ש- Σ עקבית, אז $\bigcap X$ היא עקבית.

פתרון 1:

כן, על פי משפט מספיק להראות ש- Σ_i ספיקה. לכל i נגדיר השמה v_i באופן הבא:

$$V_i(p_k) \begin{cases} F & k = i \\ T & k \neq i \end{cases}$$

v_i מספקת את Σ_i ולכן Σ_i ספיקה וממפשט עקבית. (צריך להוכיח).

פתרון 2:

לא, $p_0, \neg p_0 \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$ גדול $p_0 \in \Sigma_1$ ו- $\neg p_0 \in \Sigma_0$ מהגדרת איחוד גדול $p_0, \neg p_0 \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$ מהנחת המבוקש:
 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i \vdash \neg p_0$ וגם $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i \vdash p_0$
 מוכיחה את p_0 וגם $\neg p_0$ ולכן מהגדרת עקביות $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$ אינה עקבית מסקנה:
 איחוד של קבוצות עקביות לא בהכרח עקבי.

פתרון 3:

כן, נשים לב כי $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i = \emptyset$ זו קבוצה ספיקה ולפי משפט היא עקבית.

פתרון 4:

נניח בשלילה ש- $\bigcap X$ לא עקבית.
 לכל $\alpha \in \text{WFF}_{\{\rightarrow, \neg\}}$ מתקיים $\bigcap X \vdash \alpha$ (לפי הגדרת חיתוך גדול).
 מכאן ש- $X \neq \emptyset$, קיימת Σ כך ש- $\bigcap X \subseteq \Sigma$ (לפי הגדרת חיתוך גדול).
 ממונוטוניות ההוכחה מתקיים $\Sigma \vdash \alpha$ לפי הגדרה Σ לא עקבית וזו סתירה.

תרגיל 3:

1. נגדיר $MV(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) = \alpha$
הוכיחו המערכת החדשה שלמה, כלומר לכל קבוצת פסוקים $\Sigma \subseteq WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$ ולכל פסוק $\alpha \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$, אם $\Sigma \models \alpha$ אז $\Sigma \vdash_N \alpha$.

הוכחה סעיף 1:

הטענה נכונה, תהי קבוצת פסוקים Σ ופסוק α כך ש- $\Sigma \models \alpha$ נראה כי $\Sigma \vdash_N \alpha$ כך נראה
סדרת הוכחה:

$$1. (A_1) \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

$$2. (MV(1)) \alpha$$

נשים לב בכלל לא השתמשנו בנתון ש- $\Sigma \models \alpha$. המערכת מוכיחה כל α ובפרט לא נאותה.