

## הרצאה 7 לוגיקה

### מפשט הנאותות הרחב

אם  $\underbrace{X \vdash \alpha}$  אז  $\underbrace{X \models \alpha}$    
 there is proof. sequence for  $\alpha$  using  $X$  assumes  $\models \alpha$  אז  $\vdash \alpha$  אם   
 נסוח שקול:   
 אם  $X \not\vdash \alpha$  אז  $\boxed{X \not\models \alpha}$    
 משפט השלמות   
 אם  $X \vdash \alpha$  אז  $X \models \alpha$

### הגדרה 1

קבוצת פסוקים  $X$  היא עקבית אם לא קיים פסוק  $\alpha$  כך ש-  $X \vdash \alpha$  וגם  $X \vdash \neg \alpha$

### הגדרה 2

קבוצת פסוקים  $X$  היא עקבית אם קיים פסוק  $\beta$  כך ש-  $X \not\vdash \beta$ .

### הגדרה 1 $\Leftrightarrow$ הגדרה 2

לא קיים  $\alpha$  כך ש-  $X \vdash \alpha$  וגם  $X \vdash \neg \alpha$    
 מסקנה: לפחות  $\alpha$  או  $\neg \alpha$  אינו יכיח מ-  $X$  ולכן מתקיימת הגדרה 2.

### הגדרה 2 $\Leftrightarrow$ הגדרה 1

נתון: קיים פסוק  $\beta$  כך ש-  $X \not\vdash \beta$  בדרך השלילה, נניח שקיים  $\alpha$  כך  $X \vdash \alpha$  וגם  $X \vdash \neg \alpha$ .

$$\vdash \neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \quad *$$

$$1. \text{ פסוק יכיח } \vdash \neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

$$2. \text{ מהנתון עס' } X \vdash \neg \alpha$$

$$3. \text{ מהנתון עס' } X \vdash \alpha$$

$$4. \alpha \rightarrow \beta \text{ MP } 1, 2$$

$$5. \beta \text{ MP } 3, 4$$

$$X \vdash \beta$$

בסתירה לנתון ש-  $X \not\vdash \beta$ .

מסקנה: לא קיים  $\alpha$  כך ש-  $X \vdash \alpha$  וגם  $X \vdash \neg \alpha$ .

**שאלה:**

האם קבוצת האכסיומות של תחשיב הפסוקים היא עקבית ? (קבוצת הנחות  $X$  היא ריקה).  
**כן!**

**שאלה:**

האם יתכן  $X \models \alpha$  וגם  $X \models \neg \alpha$ ?  
 לכל השמה  $v$ :

$\star$  אם  $v \models X$  אז  $v \models \alpha$

$\star$  אם  $v \models X$  אז  $v \models \neg \alpha$

יכול להתקיים אם אין משמה  $v$  שמספקת את  $X$ .

**דוגמאות ל  $X$ :**

$\star X = \{p_1, \neg p_1\}$  לא ספיקה.

$\star X = \{\underbrace{\alpha \rightarrow \beta}_\beta, \alpha, \neg \beta\}$  לא ספיקה.

**מסקנה:**

$X$  אינה עקבית  $\Leftarrow X$  אינה עקבית.  
 $X$  ספיקה  $\Leftarrow X$  עקבית.

**למה 1**

קבוצת פסוקים היא עקבית אם ורק אם כל תת קבוצה סופית שלה היא עקבית.

**הוכחה:**

$\Leftarrow X$  עקבית

נניח בשלילה שקיימת תת-קבוצה  $Y \subseteq X$  סופית שאינה עקבית.

קיים  $\alpha$  כך ש-  $Y \vdash \alpha$  וגם  $Y \vdash \neg \alpha$

עס' מונוטוניות ההוכחה מתקיים גם  $X \vdash \alpha$  וגם  $X \vdash \neg \alpha$  בסתירה להנחה ש-  $X$  עקבית.

$\Rightarrow$  נתון: כל תת-קבוצה סופית היא עקבית.

ובשלילה-  $X$  אינה עקבית

וגם  $X \vdash \alpha$  וגם  $X \vdash \neg \alpha$  שתיהן סדרות הוכחה סופיות ולכן משתמשות כקבוצות סופיות

של הנחות

$X' \vdash \alpha, X'' \vdash \neg \alpha$

$X', X''$  סופיות

$X' \cup X''$  סופית

$X' \cup X'' \vdash \neg \alpha, X' \cup X'' \vdash \alpha$  בסתירה לכך שכל תת-קבוצה סופית היא עקבית.

## למה 2:

1.  $X \cup \{\alpha\}$  היא עקבית אם ורק אם  $X \not\vdash \neg\alpha$ .

2.  $X \cup \{\neg\alpha\}$  היא עקבית אם ורק אם  $X \not\vdash \alpha$ .

## הוכחה:

$\Leftarrow$  נתון:  $X \cup \{\alpha\}$  עקבית ונניח בשלילה  
 $X \vdash \neg\alpha$   
 סתירה לנתון  $\begin{cases} X \cup \{\alpha\} \vdash \alpha \\ X \cup \{\alpha\} \vdash \neg\alpha \end{cases}$  (עקבית)  
 כי  $X \vdash \neg\alpha$  תמיד מותר להוסיף הנחות.  
 $\Rightarrow$  נתון  $X \not\vdash \neg\alpha$  ונניח ש- $X \cup \{\alpha\}$  אינה עקבית.  
 $X \cup \{\alpha\} \vdash \neg\alpha$  (בחרנו את  $\beta$  להיות  $\neg\alpha$  עס' הגדרת  $\alpha$  של עקביות).  
 $\Downarrow$   
 $X \vdash \alpha \rightarrow \neg\alpha$  (דדוקציה)  
 (נשתמש במשפט: "יכיח  $\neg\alpha$   $\rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\alpha)$ " )  
 1. פסוק יכיח  $(\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$   
 2. עס'  $X$  מהנחת השלילה + דדוקציה  $(\alpha \rightarrow \neg\alpha)$   
 3.  $\neg\alpha$

מסקנה:

$X \vdash \neg\alpha$  בסתירה לנתון.

## למה 3

אם  $X$  ספיקה אז  $X$  עקבית.

## תזכורת להוכחה:

נתון  $X$  ספיקה, אם  $X$  אינה עקבית אז  $X \vdash \alpha$  וגם  $X \vdash \neg\alpha$  עס' נאותות  $X \models \alpha$  וגם  $X \models \neg\alpha$ .

## מטרה:

להוכיח  $X$  עקבית  $\Leftarrow X$  ספיקה.

## רעיון ראשון

$X$  עקבית אז לכל  $\alpha$  לא מתקיים  $X \vdash \alpha$  וגם  $X \vdash \neg\alpha$ .  
 נגדיר השמה  $v$ :  
 לכל פסוק אטומי  $p$   
 אם  $X \vdash p$  אז  $v(p) = T$   
 אם  $X \vdash \neg p$  אז  $v(p) = F$ .  
 יתכן ש- $X \not\vdash p$  וגם  $X \not\vdash \neg p$  ואז  $v$  לא מוגדרת.  
 דוגמא לכך שאי אפשר לבחור את  $v$  אקראית כאשר  $X \not\vdash p$

$$:X \not\vdash \neg p$$

$$\begin{aligned} X &= \{\overbrace{p_0 \vee p_1}^F\} \\ p_0 \vee p_1 &\not\vdash \overbrace{p_0}^F \Rightarrow p_0 \vee p_1 \not\vdash p_0 \\ p_0 \vee p_1 &\not\vdash \neg \overbrace{p_0}^F \\ p_0 \vee p_1 &\not\vdash \overbrace{p_1}^F \\ &\not\vdash \neg \overbrace{p_1}^T \end{aligned}$$

#### הגדרה נוספת:

$X$  עקבית מקסימלית אם לכל פסוק  $\alpha$  מתקיימת בדיוק אחת מ-2 האפשרויות:

$$1. X \vdash \alpha$$

$$2. X \vdash \neg \alpha$$

#### למה 4

$Y$  עקבית מקסימלית אם ורק אם  $Y$  עקבית ולכל פסוק  $\alpha$ , אם  $Y \vdash \alpha$  אז  $Y \cup \{\alpha\}$  אינה עקבית.

#### הוכחה:

$\Leftarrow$  נתון  $Y$  עקבית מקסימלית

לכן  $Y$  עקבית.

נתון  $Y \not\vdash \alpha$  אז עס' עקביות מקס'  $Y \vdash \neg \alpha$

$$\Leftarrow \text{מסקנה } Y \cup \{\alpha\} \text{ אינה עקבית.} \begin{cases} Y \cup \{\alpha\} \vdash \alpha \\ Y \cup \{\alpha\} \vdash \neg \alpha \end{cases}$$

$\Rightarrow$  נתון  $Y$  עקבית ולכל  $\alpha$  אם  $y \not\vdash \alpha$  אז  $Y \cup \{\alpha\}$  אינה עקבית. נוכיח ש- $Y$  עקבית מקס', קיימות 2 אפשרויות:

$$1. Y \vdash \alpha$$

$$2. Y \not\vdash \alpha \text{ אז } Y \cup \{\alpha\} \text{ אינה עקבית.}$$

עס' למה 2:

$$Y \vdash \neg \alpha \text{ סיימנו.}$$

## למה 5

לכל קבוצה עקבית  $X$  קיימת קבוצה עקבית מקסימלית  $Y$  כך ש- $X \subseteq Y$ .  
הנחה:

קבוצת הפסוקים היא בת מניה  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$   
נגדיר:

סדרת הרחבות ל- $X$

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$$

||  
 $X$

נניח בשלב ה- $n$ ,  $X_n$  מוגדרת  
אם  $X_{n+1} = X_n$  או  $X_n \vdash \neg \alpha_n$   
אם  $X_{n+1} = X_n \cup \{\alpha_n\}$  או  $X_n \not\vdash \neg \alpha_n$   
 $Y = \bigcup X_n$   
נוכיח ש- $Y$  עקבית, מקסימלית, מכילה את- $X$

טענה א:

$$X \subseteq Y$$

טענה ב:

כל  $X_n$  היא עקבית.  
הוכחה ל-ב:  
אינדוקציה עבור  $n$ :

\* בסיס:

$X_0$  עקבית כי  $X$  עקבית.

\* צעד:

נניח כי  $X_n$  עקבית ונוכיח  $X_{n+1}$  עקבית:  
נחלק ל 2 מקרים:

1.  $X_n = X_{n+1}$  ולכן  $X_{n+1}$  עקבית.

2. למה 2 (גרסה ראשונה(שחורה)).

טענה ג:

$Y$  עקבית

נניח בשלילה שאינה עקבית ואז לפי למה 1 קיימת תת-קבוצה סופית  $W$  של  $Y$  שאינה עקבית.

קיימת  $W \subseteq X_k$

לכל  $w_i \in X_i, w_i \in W$  (מ- $W \subseteq Y$ )

עבור האינדקס  $m$  המקסימלי המכיל של  $w_i$ :

$W \subseteq X_m$  סתירה לטענה ב'.

טענה ד:

$Y$  עקבית מקסימלית לכל  $\alpha_n$  נראה ש- $Y \vdash \alpha_n$  או  $Y \vdash \neg \alpha_n$  עס' בניה.