

# לוגיקה - תרגול 1

## הגדרה אינדוקטיבית של קבוצה

הגדרה 1:

בהינתן:

- קבוצה  $X$  - נקראת העולם.
- קבוצה  $B \subseteq X$  - נקראת קבוצת הבסיס, והאיברים בה נקראים אטומים.
- קבוצה של פונקציות  $F$  - נקראות פונקציות יצירה.
- כל פונקציה  $f \in F$  היא מהצורה  $f : X^n \rightarrow X$ .
- פונקציה כזו נקראת  $n$ -מקומית, ולכל פונקציה יש  $n \geq 1$  משלה.
- נגדיר את  $X_{B,F} \subseteq X$  - הסגור של  $B$  תחת  $F$  כקבוצה המקיימת:

1.  $B \subseteq X_{B,F}$  - מכילה את הבסיס.
2. סגירות תחת הפונקציות ב- $F$  - לכל  $f \in F$   $n$ -מקומית ולכל  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X_{B,F}$  מתקיים ש- $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_{B,F}$ .
3. אין ב- $X_{B,F}$  'איברים מיותרים' - אם קבוצה  $T \subseteq X$  מקיימת את 1 ו-2, אז  $X_{B,F} \subseteq T$ .

הערות:

- הוכח בהרצאה כי  $X_{B,F}$  קיימת ויחידה.
- כל אחת מהקבוצות,  $X$ ,  $B$  ו- $F$  יכולה להיות סופית או אינסופית.

דוגמה:

- העולם:  $X$  - קבוצת המילים באותיות  $s$  ו- $t$  (מילה - סדרה סופית של אותיות).  
למשל  $s, st, ttt \in X$ .
- הבסיס:  $B = \{\epsilon, st, ts\}$  - סימון מיוחד למילה הריקה, בעלת אפס אותיות.
- פונ' היצירה:  $F = \{f_1, f_2\}$ , כאשר:

$$f_1(w_1, w_2) = sw_1w_2t -$$

$$f_2(w_1, w_2) = w_1w_2w_1 -$$

נסמן:  $X_{B,F} = X_{st}$ .

אילו איברים יש ב- $X_{st}$ ?  $\epsilon, st, ts$  (כי  $B \subseteq X_{st}$ ),  $sstt$  (כי  $f_1(\epsilon, st) = sstt$ ) וכו'.

## סדרת יצירה

הגדרה 2: סדרת יצירה של איבר  $a$  מעל  $B$  ו- $F$  היא סדרת איברים סופית  $a_1, a_2, \dots, a_n$  המקיימת:

$$1. a = a_n$$

2. לכל  $1 \leq i \leq n$  מתקיים לפחות אחד מהשניים:

(א)  $a_i \in B$  (כלומר  $a_i$  אטום)

(ב)  $a_i$  מתקבל על ידי הפעלת פונקציה מ- $F$  על איברים שקודמים לו בסדרה.

הערות:

- סדרת היצירה היא סדרה של איברים (ולא של פעולות!).
- סדרת יצירה תמיד סופית ולא ריקה (מכילה לפחות את  $a$ ).
- סדרת יצירה איננה יחידה (למעשה אם יש אחת אז יש אינסוף).
- סדרת יצירה לא חייבת להיות באורך מינימלי.
- סדרת יצירה תמיד מתחילה מאטום (כי אין איברים קודמים להפעיל עליהם פונקציות).

## הוכחה באינדוקציית מבנה

משפט 2 (אינדוקציית מבנה): יהיו קבוצות  $X_{B,F}$  ו- $T$ . אם מתקיימים התנאים הבאים אז  $X_{B,F} \subseteq T$ ,

1. (בסיס)  $B \subseteq T$  (כל איברי הבסיס נמצאים ב- $T$ ).

2. (סגור)  $T$  סגורה תחת הפונקציות ב- $F$ , כלומר לכל  $f \in F$  ו- $n$  מקומית מתקיים:

$$\text{אם } \underbrace{a_1, a_2, \dots, a_n}_{*} \in T \text{ אז } f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in T$$

\* זה נקרא הנחת האינדוקציה.

הערה: הנחת האינדוקציה היא ש- $a_1, \dots, a_n$  שייכים ל- $T$  (כלומר מקיימים את התכונה  $\alpha$ ), ולא ל- $X_{B,F}$ .

**שימו לב** המשפט משמש רק להוכחת הכלות מהצורה  $X_{B,F} \subseteq T$ , ולא להוכחת ההפוכה!

תרגיל 1: נגדיר את הקבוצה  $\{|w| \text{ זוגי} \mid w \in \{s, t\}^*\}$   $T = \{w \mid |w| \text{ הוא האורך של המילה}\}$ . הוכיחו כי  $X_{st} \subseteq T$ .

## תרגול 1 לוגיקה

### סדרת יצירה עבור $st$ :

1.  $st$  (אטום).

### סדרת יצירה נוספת:

1.  $\epsilon$  (אטום).

2.  $st$   $f_1(\epsilon, \epsilon)$ .

### סדרת יצירה $sstt$ :

1.  $st$  (אטום).

2.  $\epsilon$  (אטום).

3.  $sstt$   $f_1(st, \epsilon)$ .

### תרגיל 1:

#### פתרון:

בסיס: נראה שלכל  $w \in B = \{\epsilon, st, ts\}$  מתקיים  $w \in T$  כלומר  $B \subseteq T$

$\star$   $w = \epsilon$ ,  $|w| = 0$  זוגי ולכן  $w \in T$ .

$\star$   $w = st$ ,  $|w| = 2$  זוגי ולכן  $w \in T$ .

$\star$   $w = ts$ ,  $|w| = 2$  זוגי ולכן  $w \in T$ .

#### סגור:

נניח  $w_1, w_2 \in T$

קיימים  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$  שעבורם  $|w_1| = 2k_1$ ,  $|w_2| = 2k_2$  ונראה שלכל  $f \in F$  מתקיימת סגירות.

$\star$   $w = f_1(w_1, w_2)$

מהגדרת  $f_1$  נובע כי  $w = sw_1w_2t$

$w \in T \Leftrightarrow |sw_1w_2t| = 2 + 2k_1 + 2k_2 \underbrace{\leftarrow}_{b''a}$

$$w = f_2(w_1, w_2) \star$$

$$w = w_1 w_2 w_3 \text{ נובע כי } f_2$$

$$w \in T \Leftarrow |sw_1 w_2 t| = 2 + 2k_1 + 2k_2 \underbrace{\Leftarrow}_{b^a}$$

מסקנה:  $X_{st} \subseteq T$

## תרגיל 2:

$$B = \overbrace{\{0\}^N}^{\text{binary zero vector}}, X = \overbrace{\{0, 1\}^N}^{\text{binary vector}}$$

העולם  $F = \{f_i | i \in N\}$

כאשר לכל  $f_i, i \in N$  מוגדרת כך:

כאשר  $v'$  מוגדר כך  $f_i(v) = v'$

$$f'_j = \begin{cases} 1 - v_j & j = i \\ v_j & j \neq i \end{cases}$$

$(V' \text{ - } j \text{ - } \text{אינדקס } j \text{ - } V')$

מצאו תכונה  $T$  כך ש  $X_{B,F} \subseteq T$  והוכיחו זאת.

## פתרון:

$$T = \{v \in \{0, 1\}^N \mid \text{מספר סופי של 1-ים}\}$$

## הוכחה:

### בסיס:

$$\bar{0} \in T \Leftarrow \text{יש 0 אחדים ולכן מספר סופי}$$

### סגור:

יהי  $v \in T$ , אזי  $v$  יש מספר סופי של אחדים נסמן ב  $k$ .

$$v' = f_i(v) \text{ - } i \text{ כך ש-}$$

לפי ההגדרה  $v', v$  הוא שונה מ-  $v$  בביט בודד ולכן מספר האחדים ב  $v'$  הוא  $k + 1$  הוא  $v' \in T$ .