לוגיקה ותורת הקבוצות - תרגול 7

תרגיל 1: נגדיר מערכת הוכחה חדשה לתחשיב הפסוקים מעל $\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$.

- קבוצת האקסיומות מכילה את הפסוקים מהצורה הבאה:

  לכל $\alpha,\beta,\gamma\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$,
  - A_1: $\alpha\to(\beta\to\alpha)$
  - A_2: $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma))$
- כללי היסק:
  - $MP(\alpha,\alpha\to\beta)=\beta$
  - MV (יוגדר בהמשך)

נסמן ב־$\Sigma\underset{N}{\vdash}\alpha$ את הטענה שפסוק α יכיח מתוך Σ במערכת החדשה.

נגדיר $MV(\alpha\to(\beta\to\alpha))=((\neg\alpha)\to(\neg\beta))\to(\beta\to\alpha)$.

הוכיחו/ הפריכו: המערכת החדשה שלמה.

תרגיל 2: נגדיר מערכת הוכחה חדשה לתחשיב הפסוקים מעל $\mathrm{WFF}_{\{\wedge,\neg\}}$.

- קבוצת האקסיומות מכילה את הפסוקים מהצורה הבאה:
  - A_1: $\neg(\alpha\wedge(\beta\wedge\neg\alpha))$
- קבוצת כללי ההיסק:
  - $M_1(\alpha,\neg(\alpha\wedge\beta))=\neg\beta$

נסמן ב־$\underset{N}{\vdash}\alpha$ את הטענה שפסוק α יכיח במערכת החדשה.

הוכיחו/ הפריכו: אם $\models\alpha$, אז $\underset{N}{\vdash}\alpha$.

גדירות

הגדרה 1: השמה המספקת קבוצת פסוקים Σ נקראת מודל של Σ.

קבוצת המודלים של Σ היא הקבוצה: $M(\Sigma)=\{v\in\mathrm{Ass}\mid v\models\Sigma\}$

(סימונים נוספים לקבוצת המודלים של Σ: $Ass(\Sigma), Mod(\Sigma), M_\Sigma$)

ניתן לראות שלכל קבוצת פסוקים Σ מתאימה קבוצת מודלים $M(\Sigma)$ יחידה, כלומר Σ מגדירה את $M(\Sigma)$.

דוגמאות ללא הוכחה:

Σ - קבוצת פסוקים	$M(\Sigma)$ - קבוצת המודלים של Σ
$\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$	$\{v_{\mathrm{T}}\}$
קבוצת כל הטאוטולוגיות, $\emptyset$, $\{p_1 \vee \neg p_1\}$	Ass (קבוצת כל ההשמות)
קבוצת סתירות, WFF	$\emptyset$
$\{p_i \mid i > 0\}$	$\{v_{\mathrm{T}}, \mathrm{FTTT}\ldots\}$
$\{p_{15}\}$	$\{v \in \mathrm{Ass} \mid v(p_{15}) = \mathrm{T}\}$
$\{p_{15}, p_1 \vee p_2\}$	$\{v \in \mathrm{Ass} \mid v(p_{15}) = \mathrm{T}\} \cap \{v \in \mathrm{Ass} \mid v(p_1) = \mathrm{T} \text{ or } v(p_2) = \mathrm{T}\}$

הגדרה 2: קבוצת השמות K נקראת גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים Σ כך ש־$M(\Sigma) = K$. אחרת K נקראת לא גדירה.

הוכחת גדירות

איך מוכיחים שקבוצת השמות K היא גדירה?

1. מראים קבוצת פסוקים Σ מפורשת.
2. מוכיחים כי $M(\Sigma) = K$ על ידי הכלה דו־כיוונית.

תרגיל 3: נגדיר: $K_{\mathrm{even}} = \{\, v \mid v(p_i) = \mathrm{T}$ לכל i זוגי$\}$. הוכיחו כי K_{even} גדירה.

תרגיל 1:

$M(\Sigma)$	Σ
$\{v_r\}$	$\{P_0, P_1, \ldots\}$
$\{v_f\}$	$\{\neg p_0, \neg p_1, \ldots\}$
Ass	$\{p_0 \vee \neg p_0\}$
Ass	**קב' טאוטולוגיות**
Ass	$\emptyset$
$\emptyset$	$\{p_0 \wedge \neg p_0\}$
$\emptyset$	**קב' סתירות**
$\emptyset$	**WFF**
$\{v_T, \mathbf{FTT}, \ldots\}$	$\{p_i \mid i > 0\}$
$K_1 = \{v \mid v(p_{15}) = T\}$	$\Sigma_1 = \{p_{15}\}$
$K_2 = \{v \mid v(p_1) \vee v(p_2)\}$	$\Sigma_2 = \{p_1 \vee p_2\}$
$K_1 \bigcap K_2$	$\Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$

$$M(\Sigma_1 \bigcup \Sigma_2) = K_1 \bigcap K_2 \Leftarrow M(\Sigma_2) = K_2 \text{ and } M(\Sigma_1) = K_1$$