לוגיקה הרצאה 10

5 ביוני 2019

תחשיב היחסים

מילון: $\tau = \langle R\ldots, F\ldots, C\ldots \rangle$
מבנה עבור מילון: $M = \left\langle D^M, R^M \ldots, F^M \ldots, C^M \ldots \right\rangle$
שמות עצם מעל מילון τ $term(\tau)$
קבוצה אינד'

- בסיס: כל סימן קבוע c במילון הוא ש"ע
  כל משתנה x_i הוא ש"ע .
- פעולות: לכל סימן פונקציה k-מקומית F במילון, ולכל k ש"ע $t_1, \ldots, t_k$ מתקיים שגם $F(t_1, \ldots, t_k)$ היא ש"ע
- הפירוש של ש"ע ניתן ע"י השמה.

הגדרה: בהינתן מילון τ ומבנה M עבור τ.
פונקצייה: $s : \underbrace{Var}_{\{x_i | i \in \mathbb{N}\}} \to D^M$ נקראת השמה.

בהינתן השמה s עבור מבנה M במילון τ נגדיר השמה מורחבת $\overline{S} : term(\tau) \to D^M$ באינדוקציה על $term(\tau)$.

- בסיס: עבור $t = x_i$ שהוא משתנה, נגדיר: $\overline{s}(t) = s(t)$.
  עבור $t = c_i$ כאשר c_i סימן קבוע ב־τ נגדיר:
  $\overline{s}(c_I) = c_i^M$
- סגור: נניח שהגדרנו את $\overline{s}$ עבור ש"ע $t_1, \ldots t_k$
  ונניח ש F הוא סימן פונקציה k מקומית במילון.
  אז נגדיר:
  $\overline{s}(F(t_1, \ldots, t_k)) = F^M(\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_k))$

דוגמה:

$\tau = \langle F, (,), C \rangle$

1. $M =< \mathbb{N}, \times, 0 >$
   נגדיר השמה $S(x_i) = i$

דוגמאות לש"ע:

$$\overline{S}(x_0) = 0$$
$$\overline{S}(x_1) = 1$$
$$\overline{S}(c) = C^M = 0$$
$$\overline{S}(F(x_0, c)) = F^M(\overline{S}(x_0), \overline{S}(c)) = 0 \cdot 0 = 0$$
$$\overline{S}(F(x_8, x_{100})) = F^M(\overline{S}(x_8), \overline{S}(x_{100})) = 8 \cdot 100 = 800$$
$$\overline{S}(F(F(x_0, c), x_1))$$

2. $M =< P(\mathbb{N}), \bigcup, \emptyset >$
נגדיר השמה $s = (x_i) = \{i\}$
דוגמאות לש"ע

$$\overline{S}(x_0) = \{0\}$$
$$\overline{S}(c) = C^M = \emptyset$$
$$\overline{S}(F(X_0, c)) = F^M(\overline{S}(x_0), \overline{S}(c)) = \{0\} \cup \emptyset = \{0\}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{Structure} & \text{Dict.} \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dd, bend left] \\
\text{Assign} \arrow[d, Rightarrow] & \text{Noun} \\
\text{Truth Values} & \text{Formula}
\end{tikzcd}$$

נוסחאות:

<u>הגדרה:</u> קבוצת הנוסחאות מעל מילון τ. מוגדרת בצורה אינדוקטיבית:

- <u>בסיס:</u> (נוסחאות אטומיות) לכל שני שמות עצם t_1, t_2 מתקיים ש־ $\boxed{\mathrm{t1} \approx t_2}$ הוא נוסחא.
  לכל סימן יחס k־מקומי R במילון ולכל k ש"ע $t_1, \dots, t_k$ מתקיים ש־
  $\boxed{\mathrm{R}(t_1, \dots, t_k)}$ היא נוסחא.
- <u>סגור:</u> בהינתן נוסחאות a, β מתקיים ש:
  $(\alpha \to \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \wedge \beta)$,$(\neg\alpha)$
- כמתים: בהינתן נוסחא α ומשתנה x_i מתקיים ש־:
  $(\forall \underbrace{x_i}_{\text{for each possible value}}, \alpha)$ ו־ $(\exists x_i, \alpha)$ הן נוסחאות.

דוגמאות:

$\tau = \langle R, F_1, F_2, C\rangle$
F_1 סימן פונקציה חד מקומית.
F_2 סימן פונקציה דו־מקומית.
R סימן יחס דו־מקומי.
$c \approx c$, $x_0 \approx x_1$, $F_1(x_0) \approx F_2(c, x_7)$, $R(c, F_1(x_3))$, $R(x_0, F_2(F_1(c), x_0))$
$((c \approx c) \wedge R(c, F_1(x_3)) \to (x_0 \approx x_1)$
$\forall x_0(x_0 \approx c)$
$\forall x_1(x_0 \approx c)$
$\exists x_0(x_0 \approx c)$
$\exists x_8((\forall x_0(c \approx F_1(x_0)) \wedge (c \approx x_8))$

הגדרת ערכי אמת

בהינתן מילון τ, מבנה M והשמה s, מגדירים מתי M ו־s <u>מספקים</u> נוסחא α מעל τ.
כלומר נותנים ל־α ערך אמת 1 ומסמנים $M \underset{s}{\vDash} \alpha$
$(M, s)(\alpha) = 1$, $(M, S) \vDash \alpha$.
באינדוקציה על קבוצת הנוסחאות מעל τ:

- <u>בסיס:</u> $\alpha = t_1 \approx t_2$ נגדיר $M \underset{s}{\vDash} \alpha$.
  אם"ם $\underbrace{\overline{s}(t_2)}_{\in D^M} = \underbrace{\overline{s}(t_1)}_{\in D^M}$ (שיוויון ב־D^M)

- <u>דוגאות:</u>
  $\tau = \langle R, F_1, F_2, C\rangle$ כמו קודם.
  $$\begin{cases} M = \langle \mathbb{N}, \leq,^2, +, 1\rangle & \\ S(x_i) = 1 & \forall i \\ \alpha = x_0 \approx c & \end{cases} \quad \underbrace{\Leftarrow \alpha \underset{s}{\vDash} M}_{\overline{s}(x_0) = s(x_0) = 1 = c^M = \overline{s}(c)}$$
  $s(x_i) = 0$ לכל i $\Leftarrow$ $M \underset{s'}{\nvDash} \alpha$
  $\overline{s}(x_0) = 0$, $\overline{s'}(c) = 1$
  <u>חזרה להגדרה עדיין בבסיס:</u>
  $\alpha = R(t_1, \ldots, t_k)$ כאשר R סימן יחס k־מקומי ב־α $t_1, \ldots t_k$ ש"ע
  <u>נגדיר:</u> $M \underset{s}{\vDash} \alpha$ אם"ם $(\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_k)) \in R^M$
  <u>חזרה לדוגמא:</u>
  τ, M, s
  $\alpha = R(x_0, c)$: $M \underset{s}{\vDash} \alpha$ כי $\overline{s}(x_0) = \overline{s}(c) = 1$ וכן $1 \leq 1$ כלומר $(1,1) \in R^M$.
  $M \underset{s}{\vDash} \alpha \wedge \beta$ אם"ם $M \underset{s}{\vDash} \alpha$ וגם $M \underset{s}{\vDash} \beta$
  $M \underset{s}{\vDash} \alpha \to \beta$ לפי טבלת האמת של $\to$.
  <u>כמתים:</u>
  <u>הגדרת עזר:</u> בהינתן השמה s ומשתנה x_i ואיבר $d \in d^M$
  נגדיר <u>השמה מתוקנת:</u>
  $s' = s[x_i \leftarrow d]$

$$s'(x_j) = \begin{cases} d & i = j \\ s(x_j) & i \neq j \end{cases}$$

עכשיו, בהינתן α שעבורו הגדרנו האם M, s מספקים אותה,
ובהינתן משתנה x_i נגדיר:

$M \underset{s}{\vDash} \forall x_i \alpha$ אם"ם לכל $d \in D^m$ מתקיים $M \underset{s'[x_i \leftarrow d]}{\vDash} \alpha$

$M \underset{s}{\vDash} \exists x_i \alpha$ אם"ם קיים $d \in D^M$ כך שמתקיים $M \underset{s'[x_i \leftarrow d]}{\vDash} \alpha$

בחזרה להגדרה:

<u>סגור:</u>

<u>קשרים:</u> בהינתן נוסחאות α, β שהגדרנו עבורן האם M, s מספקים אותן, נגדיר:

$M \underset{s}{\vDash} \neg\alpha$ אם"ם $M \underset{s}{\nvDash} \alpha$.

$M \underset{s}{\vDash} \alpha \vee \beta$ אם"ם $M \underset{s}{\vDash} \alpha$ או $M \underset{s}{\vDash} \beta$.

עכשיו בהיתן α שעבורה הגדרנו האם $M,\ s$ מספקים אותה, ובהינתן משתנה x_i נגדיר:

$M \underset{s}{\vDash} \forall x_i \alpha$ אם"ם לכל $d \in D^M$ מתקיים $M \underset{s[x_i \leftarrow d]}{\vDash} \alpha$

$M \underset{s}{\vDash} \exists x_i \alpha$ אם"ם קיים $d \in D^M$ כך שמתקיים $M \underset{s[x_i \leftarrow d]}{\vDash} \alpha$

דוגמאות:

$\alpha' = \forall x_{\emptyset_1}(x_0 \approx c)$

$M \underset{s}{\vDash} \alpha \Leftrightarrow$ לכל D^M $M \vDash x_1 \approx c, d \in D^M$

$s' = s[x_{\emptyset_1} \leftarrow d]$

$\Leftrightarrow \overline{s}(x_0) = \overline{s}(c)$ (בדוגמא $M \underset{s}{\nvDash} \forall x_0$

$\overline{s}(x_0) = \overline{s}(c)$.