

## לוגיקה - תרגול 4

### השמות

הערה: מכאן ואילך נשמיט סוגריים 'מיותרים' מהפסוק על ידי הגדרת סדר קדימיות בין הקשרים:

1.  $\neg$  (הקשר בעל הקדימות הגבוהה ביותר)

2.  $\vee, \wedge$

3.  $\rightarrow$  (הקשר בעל הקדימות הנמוכה ביותר)

שימו לב: בשאלות הנוגעות לתחביר אין להשמיט סוגריים!

הגדרה 1: פונקציה  $v : \{p_0, p_1, p_2, \dots\} \rightarrow \{F, T\}$  נקראת השמה.

דוגמאות:

1.  $v_F(p_i) = F$  מוגדרת כך שלכל  $i \in \mathbb{N}$  מתקיים

2.  $v_T(p_i) = T$  מוגדרת כך שלכל  $i \in \mathbb{N}$  מתקיים

סימונים:

•  $Ass$  היא קבוצת כל ההשמות.

•  $TT_\circ$  היא טבלת האמת של קשר  $\circ$  כלשהו.

הגדרה 2: בהינתן השמה  $v$ , השמה מורחבת  $\bar{v}$  היא פונקציה  $\bar{v} : WFF \rightarrow \{F, T\}$  המוגדרת באינדוקציה:

בסיס: לכל  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\bar{v}(p_i) = v(p_i)$ .

סגור: לכל  $\alpha, \beta \in WFF$

•  $\bar{v}(\neg\alpha) = TT_\neg(\bar{v}(\alpha))$

• לכל  $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ ,  $\bar{v}(\alpha \circ \beta) = TT_\circ(\bar{v}(\alpha), \bar{v}(\beta))$

הגדרה 3: תהי  $v \in Ass$  ו- $\alpha \in WFF$ . אם  $\bar{v}(\alpha) = T$  נאמר ש- $v$  מספקת את  $\alpha$ , ונסמן  $v \models \alpha$ . אם  $\alpha$  טאוטולוגיה, נסמן  $\models \alpha$ .

משפט 1 – משפט התלות הסופית: יהי פסוק  $\alpha$  ושתי השמות  $v_1, v_2$ . אם לכל אטום  $p_i$  המופיע ב- $\alpha$  מתקיים  $v_1(p_i) = v_2(p_i)$  אז  $\bar{v}_1(\alpha) = \bar{v}_2(\alpha)$ .

## מושגי יסוד סמנטיים

הגדרה 4: נאמר כי פסוק  $\alpha$  הוא ספיק אם קיימת השמה המספקת אותו (קיימת  $v$  כך ש- $\bar{v}(\alpha) = T$ ).

דוגמאות:  $p_0 \vee p_1$ ,  $p_0$

הגדרה 5: פסוק  $\alpha$  נקרא טאוטולוגיה אם כל השמה מספקת אותו (לכל  $v$ ,  $\bar{v}(\alpha) = T$ ).

דוגמאות:  $p_0 \vee \neg p_0$ ,  $p_0 \rightarrow p_0$

הגדרה 6: פסוק  $\alpha$  נקרא סתירה אם לא קיימת השמה המספקת אותו (לכל  $v$ ,  $\bar{v}(\alpha) = F$ ).

דוגמה:  $p_0 \wedge \neg p_0$

שימו לב: אם פסוק אינו סתירה אז הוא ספיק (ולא בהכרח טאוטולוגיה).

תרגיל 1: הוכיחו/ הפריכו: אם  $\alpha \vee \beta$  טאוטולוגיה, אז  $\alpha$  טאוטולוגיה או  $\beta$  טאוטולוגיה.

הגדרה 7: יהיו  $\alpha, \beta$  פסוקים. אם כל השמה המספקת את  $\alpha$  מספקת גם את  $\beta$  נאמר ש- $\alpha$  גורר לוגית את  $\beta$  (או

לחילופין, ש- $\beta$  נובע לוגית מ- $\alpha$ ), ונסמן  $\alpha \models \beta$ .

טענות:

1. אם  $\alpha$  טאוטולוגיה ו- $\alpha \models \beta$ , אז  $\beta$  טאוטולוגיה.

2. אם  $\beta$  סתירה ו- $\alpha \models \beta$ , אז  $\alpha$  סתירה.

3. אם  $\alpha$  סתירה אז לכל פסוק  $\beta$  מתקיים  $\alpha \models \beta$ .

4. אם  $\beta$  טאוטולוגיה אז לכל פסוק  $\alpha$  מתקיים  $\alpha \models \beta$ .

5.  $\models$  הוא יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי (לא סימטרי).

הגדרה 8: יהיו  $\alpha, \beta$  פסוקים. אם לכל השמה  $v$  מתקיים ש- $\bar{v}(\alpha) = \bar{v}(\beta)$  נאמר כי  $\alpha$  ו- $\beta$  שקולים לוגית ונסמן  $\alpha \equiv \beta$ .

משפט 2:  $\alpha$  ו- $\beta$  שקולים לוגית אם"מ  $\alpha \models \beta$  וגם  $\beta \models \alpha$ .

## מושגים סמנטיים עבור קבוצות פסוקים

הגדרה 9: תהי  $\Sigma \subseteq WFF$ . אם  $v$  מספקת את כל הפסוקים ב- $\Sigma$  נאמר כי  $v$  מספקת את  $\Sigma$  ונסמן  $v \models \Sigma$ .

דוגמה:  $v_T \models \{p_1, p_2\}$

הגדרה 10: קבוצת פסוקים  $\Sigma$  נקראת ספיקה אם קיימת השמה  $v$  כך ש- $v$  מספקת את  $\Sigma$ .

הגדרה 11: תהי  $\Sigma \subseteq WFF$ . אם כל השמה המספקת את  $\Sigma$  מספקת גם את  $\alpha$  נאמר כי  $\Sigma$  גוררת לוגית את  $\alpha$  (או

לחילופין ש- $\alpha$  נובע לוגית מ- $\Sigma$ ) ונסמן  $\Sigma \models \alpha$ .

דוגמה:  $\{p_0, p_1\} \models p_0 \wedge p_1$

הגדרה 12: יהיו  $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq WFF$ . נאמר כי  $\Sigma_1$  ו- $\Sigma_2$  שקולות לוגית ונסמן  $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$  אם לכל השמה  $v$  מתקיים

$v \models \Sigma_1 \iff v \models \Sigma_2$ .

דוגמה:  $\{p_0, p_1\} \equiv \{p_0 \wedge p_1\}$

תרגיל 3:

תהי  $\Sigma \subseteq \text{WFF}$ . נניח שכל פסוק  $\alpha \in \Sigma$  ספיק. האם בהכרח  $\Sigma$  ספיקה?

תרגיל 4:

יהיו קבוצת פסוקים  $\Sigma$  ופסוק  $\alpha$ , ונניח ש- $\Sigma \cup \{\alpha\}$  ספיקה. האם בהכרח  $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$  אינה ספיקה?

## תרגול 4 לוגיקה

### תזכורת:

הפונקציה  $TT_{\rightarrow} : \{T, F\} \times \{T, F\} \rightarrow \{T, F\}$   
מוגדרת כך ש  $TT_{\rightarrow}(\alpha, \beta)$  היא:

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \rightarrow \beta$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

### הגדרה 2 (המשך):

דוגמה:

נתונה ההשמה :

$$v(p_i) = \begin{cases} F & i = 1 \\ T & \text{else} \end{cases}$$

נחשב את הערך של הפסוק  $p_0 \rightarrow (\neg p_1)$   
תחת ההשמה  $v$ .

$$\begin{aligned} \bar{v}(p_0 \rightarrow (\neg p_1)) &= \\ TT_{\rightarrow}(\bar{v}(p_0), \bar{v}(\neg p_1)) &= \\ TT_{\rightarrow}(v(p_0), TT_{\neg}(\bar{v}(p_1))) &= \\ TT_{\rightarrow}(T, TT_{\neg}(v(p_1))) &= \\ TT_{\rightarrow}(T, TT_{\neg}(F)) &= \\ TT_{\rightarrow}(T, T) &= T. \end{aligned}$$

### סיכום:

כלומר :

$$\bar{v}(p_0 \rightarrow (\neg p_1)) = T$$

כדי להראות ש  $p_0 \vee \neg p_0$  טאוטולוגיה, נבדוק את כל ההשמות למשתנים הרלוונטיים  $(p_0)$ , ובעזרת טבלת אמת:

$p_0$	$\neg p_0$	$p_0 \vee \neg p_0$
F	T	T
T	F	T

#### טענות:

1. אם  $\alpha$  טאוטולוגיה ו-  $\alpha \models \beta$ , אז  $\beta$  טאוטולוגיה.

הפרכה:

סימונים:

$$\alpha \vee \beta = p_0 \vee \neg p_0, \beta = \neg p_0, \alpha = p_0$$

נראה שזו אכן דוגמה נגדית:

נראה שכל תנאי השאלה מתקיימים

נראה ש  $p_0 \vee \neg p_0$  טאוטולוגיה-הוכחה

בעזרת טבלת אמת נראה שמספקת

(א) נראה ש- $p_0$  לא טאוטולוגיה

$$\bar{v}_F(\alpha)$$

$$\bar{v}_F(p_0) = v_F(p_0) = F$$

הראינו שקיימת לפחות השמה אחת שאינה מספקת

את  $p_0$  ולכן זו לא טאוטולוגיה.

(ב) נראה כי  $\beta = \neg p_0$  לא טאוטולוגיה

$$\bar{v}_T(\beta) = \bar{v}_T(\neg p_0) = TT_{\neg}(v_T(p_0)) = TT_{\neg}(T) = F$$

#### תרגיל 3:

הפרכה:

דוגמה נגדית:

$$\Sigma = \{p_0, \neg p_0\}$$

$\neg p_0, p_0$  ספיקים

נראה ש- $\Sigma$  לא ספיקה נניח בשלילה ש- $\Sigma$  ספיקה

, אז קיימת  $v$  כך ש- $v$  מספקת את  $\Sigma$  אז :

$$\bar{v}(p_0) = T$$

$$\bar{v}(\neg p_0) = T$$

$$\bar{v}(\neg p_0) = TT_{\neg}(\bar{v}(p_0)) = TT_{\neg}(T) = F$$

#### תרגיל 4:

הטענה אינה נכונה  $\neg \alpha = \neg p_0, \alpha = p_0, \Sigma = \emptyset$ .