

## לוגיקה - תרגול 5

### מערכת הוכחה לתחשיב הפסוקים

הגדרה 1, מערכת ההוכחה: קבוצת הפסוקים היכחים,  $Ded(\emptyset)$ , היא הקבוצה האינדוקטיבית  $X_{B,F}$  המוגדרת באופן הבא:

$$X = WFF_{\{\neg, \rightarrow\}} \bullet$$

$$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \text{ - קבוצת האקסיומות, כאשר:}$$

$$A_1 = \{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \mid \alpha, \beta \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}\} -$$

$$A_2 = \{(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \mid \alpha, \beta, \gamma \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}\} -$$

$$A_3 = \{((\neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \mid \alpha, \beta \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}\} -$$

$$F = \{MP\} \bullet \text{ - קבוצת כללי ההיסק, כאשר } MP \text{ הוא כלל הניתוק } \frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}.$$

$$\text{צורת רישום נוספת: } MP(\alpha, \alpha \rightarrow \beta) = \beta$$

דוגמאות:

$$(שייך בסיס) \underbrace{(p_1)}_{\alpha} \rightarrow \underbrace{(p_2 \rightarrow p_1)}_{\beta} \in Ded(\emptyset)$$

$$(שייך לבסיס) \underbrace{([p_1 \rightarrow [p_2 \rightarrow p_1]])}_{\alpha} \rightarrow \underbrace{(p_0)}_{\beta} \rightarrow \underbrace{[p_1 \rightarrow [p_2 \rightarrow p_1]]}_{\alpha} \in Ded(\emptyset)$$

$$(הפעלת MP על שני הקודמים) (p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1))) \in Ded(\emptyset)$$

הגדרה 2: פסוק  $\alpha$  ששייך לקבוצה האינדוקטיבית ( $\alpha \in Ded(\emptyset)$ ) נקרא פסוק יכח, ויסומן  $\vdash \alpha$ .

הגדרה 3: יהי  $\alpha \in Ded(\emptyset)$ . סדרת היצירה של  $\alpha$  נקראת סדרת הוכחה (או הוכחה פורמלית). כלומר סדרת הוכחה של פסוק  $\alpha$  היא סדרה סופית של פסוקים  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  כך שמתקיים:

$$1. \alpha_n = \alpha$$

$$2. \text{ לכל פסוק } \alpha_i \text{ מתקיים:}$$

$$(א) \alpha_i \text{ הוא אקסיומה}$$

או

$$(ב) \alpha_i \text{ התקבל מפסוקים קודמים על ידי הכלל } MP.$$

## מערכת הוכחה עם הנחות

הגדרה 4, מערכת הוכחה עם הנחות: קבוצת הפסוקים היחידים מקבוצת פסוקים  $\Sigma$  (הנחות),  $Ded(\Sigma)$ , היא הקבוצה האינדוקטיבית  $X_{B \cup \Sigma, F}$  (עבור  $B, X$  ו- $F$  מהגדרה 1).

- אם  $\alpha \in Ded(\Sigma)$  נאמר כי  $\alpha$  יכח מ- $\Sigma$  ונסמן  $\Sigma \vdash \alpha$ .
- סדרת היצירה של פסוק  $\alpha$  מעל  $Ded(\Sigma)$  נקראת סדרת הוכחה של  $\alpha$  מתוך  $\Sigma$ .
- אם  $\Sigma = \emptyset$ , אז  $Ded(\emptyset) = X_{B, F}$ , קבוצת הפסוקים היחידים (ללא הנחות).

דוגמה: נוכיח כי לכל זוג פסוקים  $\alpha, \beta$  מתקיים  $\{\alpha, \neg\alpha\} \vdash \beta$ .

תכונות מערכת ההוכחה:

יהיו  $\alpha, \beta \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$  ו- $\Sigma, \Gamma \subseteq WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$

1. הנחת המבוקש: אם  $\alpha \in \Sigma$  אז  $\Sigma \vdash \alpha$ .
- הוכחה: ל- $\alpha$  יש סדרת הוכחה באורך 1 מעל  $\Sigma$ .
2. סופיות ההוכחה: אם  $\Gamma \vdash \alpha$  אז קיימת  $\Sigma \subseteq \Gamma$  סופית כך ש- $\Sigma \vdash \alpha$ .
- אינטואיציה: בסדרת ההוכחה יש מספר סופי של פסוקים, ולכן בהכרח משתמשים רק במספר סופי של הנחות מתוך  $\Gamma$ .

3. מונוטוניות (הרחבת הנחות): אם  $\Sigma \vdash \alpha$  וגם  $\Sigma \subseteq \Gamma$  אז  $\Gamma \vdash \alpha$ .

אינטואיציה: סדרת ההוכחה של  $\alpha$  מעל  $\Sigma$  היא גם סדרת הוכחה של  $\alpha$  מעל  $\Gamma$ .

4. מונוטוניות מורחבת (טענת עזר): אם  $\Sigma \vdash \alpha$  וגם לכל  $\beta \in \Sigma$  מתקיים  $\Gamma \vdash \beta$  אז  $\Gamma \vdash \alpha$ .

אינטואיציה: בסדרת ההוכחה של  $\alpha$  מתוך  $\Sigma$ , נחליף כל מופע של פסוק  $\beta \in \Sigma$  בהוכחה של  $\beta$  מתוך  $\Gamma$ .

משפט הדדוקציה: לכל קבוצת פסוקים  $\Sigma$  ופסוקים  $\alpha, \beta$  מתקיים:  $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta$  אם ורק אם  $\Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ .

הערה: משפט הדדוקציה אינו מוסיף כוח הוכחה, כלומר כל מה שניתן להוכיח בעזרתו ניתן להוכיח גם בלעדיו. משפט זה רק מקל על הוכחת קיום סדרת הוכחה.

תרגיל 1: הוכיחו שהפסוק  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$  יכח, בעזרת משפט הדדוקציה.

## משפט הנאותות

משפט הנאותות הרחב: לכל קבוצת פסוקים  $\Sigma$  מתקיים, אם  $\Sigma \vdash \alpha$  אז  $\Sigma \models \alpha$ .

סימון:  $Con(\Sigma) = \{\alpha \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}} \mid \Sigma \vdash \alpha\}$ . כלומר, משפט הנאותות משמעותו:  $Ded(\Sigma) \subseteq Con(\Sigma)$ .

מסקנה ממשפט הנאותות: אם  $\Sigma \not\models \alpha$  אז  $\Sigma \not\vdash \alpha$ .

משפט הנאותות הצר: אם  $\Sigma \vdash \alpha$  אז  $\Sigma \models \alpha$ .

תרגיל 2: נגדיר מערכת הוכחה חדשה עבור  $WFF_{\{\neg, \vee\}}$ .

אקסיומות:  $A = \{\alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha) \mid \alpha, \beta \in WFF_{\{\neg, \vee\}}\}$

כללי ההיסק: לכל  $\alpha, \beta \in WFF_{\{\neg, \vee\}}$

$$MV_1(\alpha, \beta) = \alpha \vee \beta \quad 1.$$

$$MV_2(\alpha, (\neg\alpha) \vee \beta) = \beta \quad 2.$$

נסמן ב- $Ded_N(\emptyset)$  את קבוצת הפסוקים היכחים במערכת החדשה, ואם  $\varphi \in Ded_N(\emptyset)$  אז נסמן  $\vdash_N \varphi$ . באופן דומה נסמן  $Ded_N(\Sigma)$  ו- $\vdash_N \varphi$  עבור פסוקים היכחים במערכת החדשה מקבוצת הנחות  $\Sigma$ . הוכיחו כי מערכת ההוכחה החדשה נאותה במובן הצר (כלומר, לכל פסוק  $\varphi \in WFF_{\{\neg, \vee\}}$ : אם  $\vdash_N \varphi$  אז  $\models \varphi$ ).

## תרגול 5 לוגיקה

$$MP(\alpha, \gamma) = \begin{cases} \beta & \gamma = \alpha \rightarrow \beta \\ \alpha & \text{otherwise} \end{cases}$$

דוגמה:

סדרת הוכחה:

$\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$	$A_1$	.1
$\neg\alpha$	הנחה	.2
$\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$	$MP_{1,2}$	.3
$(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$	$A_3$	.4
$\alpha \rightarrow \beta$	$MP_{3,4}$	.5
$\alpha$	הנחה	.6
$\beta$	$MP_{5,6}$	.7

תרגיל 1:

הוכיחו שהפסוק  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$  יכיח בעזרת משפט הדדוקציה.

הוכחה (לפי דדוקציה):

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$$

$\Leftrightarrow$  (deduction)

$$\{\alpha\} \vdash \beta \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

$\Leftrightarrow$  (deduction)

$$\{\alpha, \beta\} \vdash \beta \rightarrow \alpha$$

$\Leftrightarrow$  (deduction)

$$\{\alpha, \beta\} \vdash \alpha$$

מתקיים  $\{\alpha, \beta\} \vdash \alpha$  מהנחת המבוקש.

$$Ded(\Sigma) = \{\alpha \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}} \mid \Sigma \vdash \alpha\} \quad \text{אינד'}$$

$$Con(\Sigma) = \{\alpha \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}} \mid \Sigma \models \alpha\} \quad \text{לא אינד'}$$

## תרגיל 2:

נגדיר מערכת הוכחה חדשה עבור  $WFF_{\{\neg, \vee\}}$   
 אקסיומות:  $A = \{\alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha) \mid \alpha, \beta \in WFF_{\{\neg, \vee\}}\}$   
 כלל ההיסק: לכל  $\alpha, \beta \in WFF_{\{\neg, \vee\}}$

$$1. MV_1(\alpha, \beta) = \alpha \vee \beta$$

$$2. MV_2(\alpha, (\neg\alpha) \vee \beta) = \beta$$

נסמן ב- $Ded_N(\emptyset)$  את קבוצת הפסוקים היכחים במערכת החדשה, ואם  $\varphi \in Ded_N(\emptyset)$  אז נסמן  $\varphi \vdash_N$  באופן דומה נסמן  $Ded_N(\Sigma)$  ו- $\varphi \vdash_N \Sigma$  עבור פסוקים היכחים במערכת החדשה מקבוצות המחות  $\Sigma$ .

הוכיחו כי מערכת ההוכחה החדשה נאותה במובן הצר (כלומר, לכל פסוק  $\varphi \in \alpha \in$  פסוק  $\vdash_N \varphi$  אם  $\models \varphi$  אז  $\vdash_N \varphi$ ).

## פתרון:

נוכיח באינדוקציית מבנה ש:  
 $(\models \varphi \Leftarrow \vdash_N \varphi) \quad Ded_N(\phi) \subseteq Con(\phi)$

**בסיס:** נראה  $\models \alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha)$  לכל  $\alpha, \beta \in \alpha \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$  באמצעות טעבלת אמת:

$\alpha$	$\beta$	$\neg\alpha$	$\beta \vee \neg\alpha$	$\alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha)$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

**סגור:** נניח  $\alpha, \beta \in Con(\phi)$  כלומר  $\models \alpha, \models \beta$

$$\delta = MV_1(\alpha, \beta) = \alpha \vee \beta \star$$

$$\overline{V}(\alpha \vee \beta) \underbrace{TT_v(\overline{V}(\alpha), \overline{V}(\beta))}_{\text{induction def.}} = TT_V(T, T) = T$$

$$\delta = MV_2(\alpha_1(\neg\alpha) \vee \gamma) = \gamma \quad \beta = ((\neg\alpha) \vee \gamma) \star$$

תהי  $v \in ASS$

$$\overline{V}(\alpha) = T$$

$$\overline{V}(\beta) = \overline{V}((\neg\alpha) \vee \gamma) = T$$

$$\overline{V}(\neg) = TT_{\neg}(\overline{V}(\alpha)) = TT_{\neg}(T) = F$$

$$\overline{V}(\gamma) = T \Leftarrow \text{לפי טבלת אמת.}$$

$$\models \alpha \quad \underbrace{MV_2(\alpha, \beta) = \alpha \star}_{\text{not mandatory}}$$