לוגיקה הרצאה 9

גדירות:

קבוצה של פסוקים $K = M(\Sigma)$ (קבוצה של השמות)
קבוצת השמות K היא גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים Σ עד ש- $K = M(\Sigma)$.

טענה:

לא לכל תת קבוצה של השמות תהיה תת קבוצה של פסוקים שמגדירה אותה.

משקולי ספירה:

כמה נוסחאות: קבוצה בת מניה $\aleph_0$
כמה קבוצות של פסוקים: $2^{\aleph_0}$.
כמה השמות יש: $2^{\aleph_0}$.
קבוצות של השמות: $2^{2^{\aleph_0}}$.
השמה: וקטור אינסופי מעל $\{0,1\}$.

דוגמה לקבוצות של פסוקים גדירים:

נראה קבוצות של פסוקים שהן גדירות.

1. הקבוצה הריקה של השמות - K.
   האם קיימת $M(\Sigma) = K$.
   $\Sigma_1 = \{p_1 \wedge \neg p_1\}$
   $\Sigma_2 = \{p_1, \neg p_1\}$
   $\Sigma_3 = \{p_1, \neg p_1, p_2 \vee p_3\}$
2. K - מכילה את ההשמות.
   כל Σ שמכילה רק טאוטולוגיות מגדירה את K.
3. $K = \{V_T\}$
   V_T היא ההשמה שנותנת ערך T לכל p_i.
   $\Sigma = \{p_i | i \in \mathbb{N}\}$

כדי להוכיח ש-Σ מגדירה את K צריך להוכיח
$K = M(\Sigma)$.
$v \in M(\Sigma) \Leftrightarrow v(p_i) = T$ לכל $i \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$
$V = V_T \Leftrightarrow v \in K$.

תחשיב היחסים

דוגמה מיותרת לחלוטין:

לכל x [דוברת אמת (x) $\Rightarrow$ יווני (x)]
דובר אמת (סוקרטס) $\Rightarrow$ יווני (סוקרטס)
יווני (סוקרטס)
דובר אמת (סוקרטס)
"לכל מספר טבעי x, x גדול או שווה ל־0"
"לכל x קיים y כך ש־ $x = y + 1$"

שילתות במסדי נתונים

- ⋆ "האם קיים עובד טכניון שהוא גם סטודנט בטכניון?"
- ⋆ "האם כל הסטודנטים בטכניון הולכים להופעות יום הסטודנט?"

תחום: המספרים הטבעיים\בני אדם\ הסטודנטים.
קבועים: סוקרטס, 0.
פונקציות: $y + 1$.
יחסים: $(x = y + 1)$, $=$, $\geq$, דובר אמת.

הסימנים המשותפים

קבוצה בת מניה של מתנים: $x_1, x_2, \ldots$
סימנים נוספים:
$\forall$[לכל], $\exists$[קיים], $\approx$[סימן שוויון], (,) , $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$

מילון

$$\tau = (\underbrace{R_1, R_2, \ldots,}_{\text{relation signs}} \quad \underbrace{F_1, F_2, \ldots}_{\text{function symbols}} \quad , \quad \underbrace{c_1, c_2, \ldots}_{\text{const. symbols}} \quad)$$

$R(\circ)$ - יחס אונארי
$R(\circ, \circ)$ - יחס בינארי
$R(\circ, \circ, \circ)$ - יחס טרינארי
בכל תחשיב יחסים יש סימן קבוע $(\circ, \circ) \approx$

דוגמה:

$\tau = (R_1(\circ, \circ), R_2(\circ), F_1(\circ, \circ), c)$
נדגים פרוש לסימננים <u>בצורה לא פורמלית.</u>
הפרוש/מבנה/פשר M

$$M = \{ \underbrace{D^M}_{\text{M's domain}} , \underbrace{R_1^M, R_2^M}_{\text{relations over } \Delta^M} , F_1^M, c^M \}$$

$$R_1^M : D^M x D^M \to \{T, F\}$$

$$R_1^M : D^M \to \{T, F\}$$

$$F_1^M : D^M x D^M \to D^M$$

$$C^M \in D^M$$

מבנה זה חלק מהסמנטיקה

$D^M = \mathbb{N} \backslash \{0\}$

$R_1^M(x,y) : x \leq y$.

$R_2^M(x)$: x ראשוני

$F_1^M(x,y) : x \cdot y$

$C^M : 3$

$\underbrace{R_2(c)} \wedge (\underbrace{R_1(x,c)} \to R_2(x))$

3 ראשוני $\wedge$($x \leq 3 \to$ x ראשוני)

נכון   נכון אם 1 ראשוני.

אם 1 אינו ראשוני אז $x = 2$, $x = 3$, $x = 20$ הנוסחה T.

עבור $x = 1$ מתפרשת כ-F.

סמנטיקה: מבנה + השמה למשתנים.

מבנה אחר

מבנה אחר M_2 שזהה ל-M חוץ מ- $C^{M_2} = 5$

השמה שנותמת ל-x עבור ערך 4.

הנוסחה היא F

$\neg R_2(F(x,y))$

$\neg R_2(F^M(x,y))$

$x \cdot y$ אינו ראשוני, עבור $x = 1$ ו-$y = 7$ הטענה אינה נכונה.

$\varphi_3 = \forall x \exists y (F(x,y) \approx x)$

האם נכונה מעל(ביחס ל-M):

"לכל x קיים y כך ש- $x \cdot y = x$"

נכון, נבחר $y = 1$.

הגדרת מבנה שמעליו נפרש נוסחאות של תחשיב היחסים מעל מילון τ.

בהינתן:

$$\tau = (R_1, R_2, \ldots, F_1, F_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots)$$

$$M = (\underbrace{D^M}_{\text{structure's domain}} , R_1^M, R_2^M, F_1^M, F_2^M, \ldots, c_1^M, c_2^M, \ldots)$$

כאשר D^Mהוא קבוצה לא ריקה שנקראת תחום המבנה.

- ⋆ לכל סימן קבוי , נתאם קבוע מתוך D^M.

⋆ לכל סימן פונקציה k^{F_i} מקומי נתאם פונקציה k מקומית F_i^M.
$F_i^M \cdot (D^M)^K \to D^M$

לכל סימן יחס k^R־מקומי מתאימים <u>יחס</u> k מקומי.
$R^M : (D^M)^K \to \{T, F\}$
לסימן השוויון $\approx$ נתאים
$\approx^M = \{(d,d) | \, d \in D^M\}$

דוגמה:

הסכמות על סימונים:
P, Q, R סימני יחס
F, G, H סימני פונקצייה
a, b, c קבועים
d איברים מ־D
$\tau = (\underbrace{\approx}_{\text{redundant}}, R(\circ,\circ), F(\circ,\circ), G(\circ), c_0, c_1)$
נגדיר מבנה M_4:
D^{M_4}קבוצת המילים הסופיות הלא ריקות מעל א"ב $\{a, b\}$
$D^{M_4} = \{a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots\}$
$\approx^{M_4} :=$
x רישא של y: $R^{M_4}(x, y)$
שרשור $x \cdot y$: $F^{M_4}(x, y)$
היפוך סדר האותיות במילה x: $G^{M_4}(x)$
a : $c_0^{M_4}$
b : $c_1^{M_4}$
$\varphi_4 = R(x, F(x, y))$
הפרוש של φ_4 מעל M_4
" x הוא רישא של $x \cdot y$"
תמיד נכון ללא תלות בהשמות ל־x,y.
$G(G(x)) \approx x$
הפוך של הפוך של אותיות x שווה ל־.
נכון לכל השמה ל־x.

הרחבת הסינטקס

<u>שמות עצם</u> Terms
אינטואיטיבית
x, y משתנים
3 קבוע
+ פונקציה
<u>במתמטיקה:</u>
ביטויים: $x, x+y, x+y+3, 3$
הקבוצה Terms מוגדרת אינדוקטיבית $\text{Terms} = X_{B,F}$
B: כולל את כל המשתנים ואת כל סימני הקבוע.
F: מספר הפעולות הוא כמספר הופנקציה בהינתן סימן פונקציה F k מקומי.
ובהינתן $t_1, \ldots, t_k \in \text{Terms}$, $F_i(t_1, \ldots t_k) \in \text{Terms}$.

דוגמה:

במילון שני סימני קבוע a, b
וסימן פונקציה F דו־מקומי
וסימן פונקציה G חד־מקומי.

דוגמאות לשמות עצם (סינטקטי)

$$a$$
$$b$$
$$F(a,b)$$
$$G(F(a,b))$$
$$x_1, x_2, \ldots,$$
$$F(a,x_1)$$
$$G(F(a,x_1))$$

כל שמות העתם מתפקדים כמו פונקציות בהינתן ערכים מ־D^M
הם מחזירים ערכים מ־D^M.
$M_5 = (\mathbb{N}, \underbrace{F^M}_{+}, \underbrace{G^M}_{\cdot}, \underbrace{a}_{5}, \underbrace{b}_{0})$
$G(F(a,x_2))$ השמה שתתן ערך ל־x
s: משתנים(VAR) $\to D^{M_5}$
נתון M_5 והשמה $s(x_1)=2$ $s(x_2)=3$.