לוגיקה הרצאה 10

3 ביולי 2019

תחשיב היחסים

<u>מילון:</u> $\tau = \langle R\ldots, F\ldots, C\ldots\rangle$
<u>מבנה עבור מילון:</u> $M = \left\langle D^M, R^M\ldots, F^M\ldots, C^M\ldots\right\rangle$
<u>שמות עצם מעל מילון</u> τ $term(\tau)$
קבוצה אינד'

- <u>בסיס:</u> כל סימן קבוע c במילון הוא ש"ע
  כל משתנה x_i הוא ש"ע .
- פעולות: לכל סימן פונקציה k־מקומית F במילון, ולכל k ש"ע $t_1,\ldots,t_k$ מתקיים שגם $F(t_1,\ldots,t_k)$ היא ש"ע
- הפירוש של ש"ע ניתן ע"י השמה.

<u>הגדרה:</u> בהינתן מילון τ ומבנה M עבור τ.
פנקצייה: $s : \underbrace{Var}_{\{x_i|i\in\mathbb{N}\}} \to D^M$ נקראת השמה.
בהינתן השמה s עבור מבנה M במילון τ נגדיר <u>השמה מורחבת</u> $\overline{S} : term(\tau) \to D^M$ באינדוקציה על $term(\tau)$.

- <u>בסיס:</u> עבור $t = x_i$ שהוא משתנה, נגדיר: $\overline{s}(t) = s(t)$.
  עבור $t = c_i$ כאשר c_i סימן קבוע ב־τ נגדיר:
  $\overline{s}(c_I) = c_i^M$
- <u>סגור:</u> נניח שהגדרנו את $\overline{s}$ עבור ש"ע $t_1,\ldots t_k$
  ונניח ש F הוא סימן פונקציה k מקומית במילון.
  אז נגדיר:
  $\overline{s}(F(t_1,\ldots,t_k)) = F^M(\overline{s}(t_1),\ldots,\overline{s}(t_k))$

דוגמה:

$$\tau = \langle F, (,), C\rangle$$

1. $M =< \mathbb{N}, \times, 0 >$
   נגדיר השמה $S(x_i) = i$
   דוגמאות לש"ע:

$$\overline{S}(x_0) = 0$$
$$\overline{S}(x_1) = 1$$
$$\overline{S}(c) = C^M = 0$$
$$\overline{S}(F(x_0,c)) = F^M(\overline{S}(x_0),\overline{S}(c)) = 0\cdot 0 = 0$$
$$\overline{S}(F(x_8,x_{100})) = F^M(\overline{S}(x_8),\overline{S}(x_{100})) = 8\cdot 100 = 800$$
$$\overline{S}(F(F(x_0,c),x_1))$$

2. $M =< P(\mathbb{N}), \bigcup, \emptyset >$
   נגדיר השמה $s = (x_i) = \{i\}$

דוגמאות לש"ע

$$\overline{S}(x_0)=\{0\}$$
$$\overline{S}(c)=C^M=\emptyset$$
$$\overline{S}(F(X_0,c))=F^M(\overline{S}(x_0),\overline{S}(c))=\{0\}\cup\emptyset=\{0\}$$

$$\begin{tikzcd} \text{Structure} & \text{Dict.} \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dd, bend left] \\ \text{Assign} \arrow[d, Rightarrow] & \text{Noun} \\ \text{Truth Values} & \text{Formula} \end{tikzcd}$$

נוסחאות:

<u>הגדרה:</u> קבוצת הנוסחאות מעל מילון τ. מוגדרת בצורה אינדוקטיבית:

- <u>בסיס:</u> (נוסחאות אטומיות) לכל שני שמות עצם t_1,t_2 מתקיים ש־ $\boxed{\mathrm{t1}\approx t_2}$ הוא נוסחא.
  לכל סימן יחס k־מקומי R במילון ולכל k ש"ע $t_1,\dots,t_k$ מתקיים ש־
  $\boxed{\mathrm{R}(t_1,\dots,t_k)}$ היא נוסחא.
- <u>סגור:</u> בהינתן נוסחאות α,β מתקיים ש:
  $(\alpha\to\beta),(\alpha\vee\beta),(\alpha\wedge\beta),(\neg\alpha)$
- כמתים: בהינתן נוסחא α ומשתנה x_i מתקיים ש־:
  $(\forall\underbrace{x_i}_{\text{for each possible value}},\alpha)$ ו־ $(\exists x_i,\alpha)$ הן נוסחאות.

דוגמאות:

$\tau=\langle R,F_1,F_2,C\rangle$
F_1 סימן פונקציה חד מקומית.
F_2 סימן פונקציה דו־מקומית.
R סימן יחס דו־מקומי.
$c\approx c$, $x_0\approx x_1$, $F_1(x_0)\approx F_2(c,x_7)$, $R(c,F_1(x_3))$, $R(x_0,F_2(F_1(c),x_0))$
$((c\approx c)\wedge R(c,F_1(x_3))\to(x_0\approx x_1)$
$\forall x_0(x_0\approx c)$
$\forall x_1(x_0\approx c)$
$\exists x_0(x_0\approx c)$
$\exists x_8((\forall x_0(c\approx F_1(x_0))\wedge(c\approx x_8))$

הגדרת ערכי אמת

בהינתן מילון τ, מבנה M והשמה s, מגדירים מתי M ו־s <u>מספקים</u> נוסחא α מעל τ.
כלומר נותנים ל־α ערך אמת 1 ומסמנים $M\underset{s}{\models}\alpha$
$(M,s)(\alpha)=1$, $(M,S)\models\alpha$.
באינדוקציה על קבוצת הנוסחאות מעל τ:

- <u>בסיס:</u> $\alpha=t_1\approx t_2$ נגדיר $M\underset{s}{\models}\alpha$.
  אם"ם $\underbrace{\overline{s}(t_2)}_{\in D^M}=\underbrace{\overline{s}(t_1)}_{\in D^M}$ (שיוויון ב־D^M)
- <u>דוגאות:</u>
  $\tau=\langle R,F_1,F_2,C\rangle$ כמו קודם.
  $$\begin{cases} M=\left\langle\mathbb{N},\le,^2,+,1\right\rangle \\ S(x_i)=1 & \forall i \\ \alpha=x_0\approx c \end{cases} \Rightarrow \underbrace{M\underset{s}{\models}\alpha}_{\overline{s}(x_0)=s(x_0)=1=c^M=\overline{s}(c)}$$
  $s(x_i)=0$ לכל $i\Rightarrow M\underset{s'}{\not\models}\alpha$

$\overline{s'}(c)=1$, $\overline{s}(x_0)=0$

חזרה להגדרה עדיין בבסיס:

$\alpha=R(t_1,\ldots,t_k)$ כאשר R סימן יחס k־מקומי ב־α $t_1,\ldots t_k$ ש"ע

נגדיר: $M\underset{s}{\vDash}\alpha$ אם"ם $(\overline{s}(t_1),\ldots,\overline{s}(t_k))\in R^M$

חזרה לדוגמא:

τ,M,s

$\alpha=R(x_0,c)$: $M\underset{s}{\vDash}\alpha$ כי $\overline{s}(x_0)=\overline{s}(c)=1$ וכן $1\le 1$ כלומר $(1,1)\in R^M$.

$M\underset{s}{\vDash}\alpha\wedge\beta$ אם"ם $M\underset{s}{\vDash}\alpha$ וגם $M\underset{s}{\vDash}\beta$

$M\underset{s}{\vDash}\alpha\to\beta$ לפי טבלת האמת של $\to$.

כמתים:

הגדרת עזר: בהינתן השמה s ומשתנה x_i ואיבר $d\in d^M$

נגדיר השמה מתוקנת:

$s'=s[x_i\leftarrow d]$

$$s'(x_j)=\begin{cases}d & i=j\\ s(x_j) & i\neq j\end{cases}$$

עכשיו, בהינתן α שעבורו הגדרנו האם M,s מספקים אותה,

ובהינתן משתנה x_i נגדיר:

$M\underset{s}{\vDash}\forall x_i\alpha$ אם"ם לכל $d\in D^m$ מתקיים $\underset{s'[x_i\leftarrow d]}{M}\vDash\alpha$

$M\underset{s}{\vDash}\exists x_i\alpha$ אם"ם קיים $d\in D^M$ כך שמתקיים $\underset{s'[x_i\leftarrow d]}{M}\vDash\alpha$

בחזרה להגדרה:

סגור:

קשרים: בהינתן נוסחאות α,β שהגדרנו עבורן האם M,s מספקים אותן, נגדיר:

$M\underset{s}{\vDash}\neg\alpha$ אם"ם $M\underset{s}{\nvDash}\alpha$.

$M\underset{s}{\vDash}\alpha\vee\beta$ אם"ם $M\underset{s}{\vDash}\alpha$ או $M\underset{s}{\vDash}\beta$.

עכשיו בהיתן α שעבורה הגדרנו האם $M,\ s$ מספקים אותה, ובהינתן משתנה x_i נגדיר:

$M\underset{s}{\vDash}\forall x_i\alpha$ אם"ם לכל $d\in D^M$ מתקיים $M\underset{s[x_i\leftarrow d]}{\vDash}\alpha$

$M\underset{s}{\vDash}\exists x_i\alpha$ אם"ם קיים $d\in D^M$ כך שמתקיים $M\underset{s[x_i\leftarrow d]}{\vDash}\alpha$

דוגמאות:

$\alpha'=\forall x_{\emptyset_1}(x_0\approx c)$

$M\underset{s}{\vDash}\alpha\Leftrightarrow$ לכל $M\vDash x_1\approx c,d\in D^M$

$s'=s[x_{\emptyset_1}\leftarrow d]$

$\Leftrightarrow\ \overline{s}(x_0)=\overline{s}(c)$ (בדוגמא $M\underset{s}{\nvDash}\forall x_0$

$\overline{s}(x_0)=\overline{s}(c)$.