הרצאה 7 לוגיקה

מפשט הנאותות הרחב

אם $\underbrace{X \vdash \alpha}_{\text{there is proof. sequence for } \alpha \text{ using X assumes}}$ אז $\underbrace{X \models \alpha}_{\forall v \text{if v} \models X \text{ then v} \models \alpha}$

<u>אם $\vdash \alpha$ אז $\models \alpha$</u>

נסוח שקול:

אם $X \not\models \alpha$ אז $\boxed{X \nvdash \alpha}$

<u>משפט השלמות</u>

אם $X \models \alpha$ אז $X \vdash \alpha$

הגדרה 1

קבוצת פסוקים X היא עקבית אם לא קיים פסוק α כך ש- $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$

הגדרה 2

קבוצת פסוקים X היא עקבית אם קיים פסוק β כך ש- $X \nvdash \beta$.

הגדרה 1 $\Leftarrow$ הגדרה 2

לא קיים α כך ש-$X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$

מסקנה: לפחות α או $\neg\alpha$ אינו יכיח מ-X ולכן מתקיימת הגדרה 2.

הגדרה 2 $\Leftarrow$ הגדרה 1

נתון: קיים פסוק β כך ש- $X \nvdash \beta$ בדרך השלילה, נניח שקיים α כך $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$.

- $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$

1. פסוק יכיח $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
2. מהנתון עס' X $\neg\alpha$
3. מהנתון עס' X α
4. $\alpha \to \beta$ MP 1,2
5. β MP 3,4

$X \vdash \beta$

בסתירה לנתון ש- $X \nvdash \beta$.

מסקנה: לא קיים α כך ש- $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$.

שאלה:

האם קבוצת האכסיומות של תחשיב הפסוקים היא עקבית ? (קבוצת ההנחות X היא ריקה).
<u>כן</u>!

שאלה:

האם יתכן $X \vDash \alpha$ וגם $X \vDash \neg\alpha$?
לכל השמה v:

- אם $v \vDash X$ אז $v \vDash \alpha$
- אם $v \vDash X$ אז $v \vDash \neg\alpha$

יכול להתקיים אם אין משמה v שמספקת את X.

דוגמאות ל X:

- $X = \{p_1, \neg p_1\}$ לא ספיקה.
- $X = \{\underbrace{\alpha \to \beta}_{\beta}, \alpha, \neg\beta\}$ לא ספיקה.

מסקנה:

X אינה עקבית $\Leftarrow$ X אינה עקבית.
X ספיקה $\Leftarrow$ X עקבית.

למה 1

קבוצת פסוקים היא עקבית אם ורק אם כל תת קבוצה <u>סופית</u> שלה היא עקבית.

הוכחה:

$\Leftarrow$ X עקבית
נניח בשלילה שקיימת תת־קבוצה $Y \subseteq X$ סופית <u>שאינה עקבית</u>.
קיים α כך ש־ $Y \vdash \alpha$ וגם $Y \vdash \neg\alpha$
עס' מונוטוניות ההוכחה מתקיים גם $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$ בסתירה להנחה ש־X עקבית.
$\Rightarrow$ נתון: כל תת־קבוצה סופית היא עקבית.
ובשלילה־X אינה עקבית
$X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$ שתיהן סדרות הוכחה סופיות ולכן משתמשות כקבוצות סופיות של הנחות
$x' \vdash \alpha$, $\quad X'' \vdash \neg\alpha$
X', X'' סופיות
$X' \cup X''$ סופית
$X' \cup X'' \vdash \alpha, \ X' \cup X'' \vdash \neg\alpha$ בסתירה לכך שכל תת־קבוצה סופית היא עקבית.

למה 2:

1. $X \cup \{\alpha\}$ היא עקבית אם ורק אם $X \nvdash \neg\alpha$.
2. $X \cup \{\neg\alpha\}$ היא עקבית אם ורק אם $X \nvdash \alpha$.

הוכחה:

$\Leftarrow$ נתון: $X \cup \{\alpha\}$ עקבית ונניח בשלילה
ש-$X \vdash \neg\alpha$
$\begin{cases} X \cup \{\alpha\} \vdash \alpha \\ X \cup \{\alpha\} \vdash \neg\alpha \end{cases}$ סתירה לנתון ($X \cup \{\alpha\}$ עקבית)
כי $X \vdash \neg\alpha$ תמיד מותר להוסיף הנחות.
$\Rightarrow$ נתון $X \nvdash \neg\alpha$ ונניח ש-$X \cup \{\alpha\}$ אינה עקבית.
$X \cup \{\alpha\} \vdash \neg\alpha$ (בחרנו את β להיות $\neg\alpha$ עפ' הגדרת α של עקביות).
$\Downarrow$
$X \vdash \alpha \to \neg\alpha$ (דדוקציה)
(נשתמש במשפט: "יכיח $\vdash (\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$")

1. פסוק יכיח $(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$
2. עפ' X מהנחת השלילה + דדוקציה $(\alpha \to \neg\alpha)$
3. $\neg\alpha$

מסקנה:
$X \vdash \neg\alpha$ בסתירה לנתון.

למה 3

אם X ספיקה אז X עקבית.

תזכורת להוכחה:

נתון X ספיקה, אם X אינה עקבית אז $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$ עפ' נאותות $X \vDash \alpha$ וגם $X \vDash \neg\alpha$.

מטרה:

להוכיח X עקבית $\Leftarrow$ X ספיקה.

רעיון ראשון

X עקבית אז לכל α לא מתקיים $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$.
נגדיר השמה v:
לכל פסוק אטומי p
אם $X \vdash p$ אז $v(p) = T$
אם $X \vdash \neg p$ אז $v(p) = F$.
יתכן ש- $X \nvdash p$ וגם $X \nvdash \neg p$ ואז v לא מוגדרת.
דוגמא לכך שאי אפשר לבחור את v אקראית כאשר $X \nvdash p$

$X \nvdash \neg p$:

$$X = \{\overbrace{p_o \vee p_1}^{F}\}$$
$$p_0 \vee p_1 \not\models \overbrace{p_0}^{F} \Rightarrow p_0 \vee p_1 \nvdash p_0$$
$$p_0 \vee p_1 \not\models \neg \overbrace{p_0}^{F}$$
$$p_0 \vee p_1 \not\models \overbrace{p_1}^{F}$$
$$\not\models \neg \overbrace{p_1}^{T}$$

הגדרה נוספת:

X עקבית מקסימלית אם לכל פסוק α מתקיימת <u>בדיוק אחת</u> מ־2 האפשרויות:

1. $X \vdash \alpha$.
2. $X \vdash \neg\alpha$.

למה 4

Y עקבית מקסימלית אם ורק אם Y עקבית ולכל פסוק α, אם $Y \vdash \alpha$ אז $Y \cup \{\alpha\}$ <u>**אינה**</u> עקבית.

הוכחה:

$\Leftarrow$ נתון Y עקבית מקסימלית
לכן Yעקבית.
נתון $Y \nvdash \alpha$ אז עס' עקביות מקס' $Y \vdash \neg\alpha$
$\begin{cases} Y \cup \{\alpha\} \vdash \alpha \\ Y \cup \{\alpha\} \vdash \neg\alpha \end{cases}$ $\Leftarrow$ מסקנה $Y \cup \{\alpha\}$ אינה עקבית.
$\Rightarrow$ נתון Y עקבית ולכל α אם $y \nvdash \alpha$ אז $Y \cup \{\alpha\}$ אינה עקבית.
נוכיח ש־Y עקבית מקס', קיימות 2 אפשרויות:

1. $Y \vdash \alpha$
2. $Y \nvdash \alpha$ אז $Y \cup \{\alpha\}$ אינה עקבית.

עס' למה 2:
$Y \vdash \neg\alpha$ סיימנו.

למה 5

לכל קבוצה עקבית X קיימת קבוצה עקבית מקסימלית Y כך ש־$X \subseteq Y$.

הנחה:

קבוצת הפסוקים היא בת מניה $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$

נגדיר:

סדרת הרחבות ל־X

$$\begin{array}{l} X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \\ \shortparallel \\ X \end{array}$$

נניח בשלב ה־n, X_n מוגדרת

אם $X_n \vdash \neg\alpha_n$ אז $X_{n+1} = X_n$

אם $X_n \nvdash \neg\alpha_n$ אז $X_{n+1} = X_n \cup \{\alpha_n\}$

$Y = \cup X_n$

נוכיח ש־Y עקבית, מקסימלית, מכילה את־X

<u>טענה א:</u>

$X \subseteq Y$

<u>טענה ב:</u>

כל X_n היא עקבית.

הוכחה ל־ב:

אינדוקציה עבור n:

- בסיס:
  X_0 עקבית כי X עקבית.

- צעד:
  נניח כי X_n עקבית ונוכיח X_{n+1} עקבית:
  נחלק ל 2 מקרים:

1. $X_{n+1} = X_n$ ולכן X_{n+1} עקבית.
2. למה 2 (גרסה ראשונה(שחורה)).

<u>טענה ג:</u>

Y עקבית

נניח בשלילה שאינה עקבית ואז לפי למה 1 קיימת תת־קבוצה <u>סופית</u> W של Y שאינה עקבית.

קיימת $W \subseteq X_k$

לכל $w_i \in W$, $w_i \in X_i$ (מ־$W \subseteq Y$)

עבור האינדקס m המקסימלי המכיל של w_i:

$W \subseteq X_m$ סתירה לטענה ב'.

<u>טענה ד:</u>

Y עקבית מקסימלית לכל α_n נראה ש־$Y \vdash \alpha_n$ או $y \vdash \neg\alpha_n$ עס' בניה.