לוגיקה הרצאה 12

3 ביולי 2019

גדירות של יחס במבנה:

נתון מבנה M מעל מילון τ ונתון <u>יחס</u> כלשהו k מקומי $P \subseteq (D^M)^k$ שאינו במילון τ.
נאמר ש־φ הוא גדיר ב־M אם קיימת נוסחה α מעל τ בעלת k משתנים חופשיים $v_1, \ldots, v_k$ כך שלכל השמה s מתקיים:

$$M \underset{s}{\models} \alpha \Leftrightarrow (s(v_i), \ldots, s(v_k)) \in P$$

דוגמאות:

$$P = \{0\}, \quad M = (\mathbb{N}, \underbrace{\leq}_{R^M})$$
$$\alpha(v_1) = \forall v_2 R(v_1, v_2)$$
$$M = (\mathbb{N}, +, *) \text{ ,} \tau = (F_+(\circ, \circ), F_*(\circ, \circ))$$
$$div = \{(a_1, a_2)|\ a_1|a_2\, a_1, a_2 \in \mathbb{N}\}$$
$$div \subseteq \mathbb{N}^2$$
$$\alpha(x_1, x_2) = \exists x_3(F_*(x_1, x_3) \approx x_2)$$

הוכחה:

נראה שלכל השמה s

$$\mathrm{M}\underset{s}{\models} \alpha(x_1, x_2) \Leftrightarrow ((s(x_1), s(x_2)) \in div$$
$$\Leftrightarrow M \underset{s}{\models} \exists x_3(F_*(x_1, x_3) \approx x_2)$$

קיים $d \in \mathbb{N}$

$$M \underset{\underbrace{s[x_3 \leftarrow d]}_{s'}}{\models} F_x(x_1, x_3) \approx x_2$$

קיים d $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow F_*^M(s'(x_1), s'(x_3)) = s'(x_2)$$

קיים d

$$\Leftrightarrow (s'(x_1) * s'(x_3)) = s'(x_3)$$

קיים d

$$(s(x_1) * d) = s(x_2)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(s(x_1), s(x_2))) \in div$$

דוגמאות נוספות:

$$\tau = (c_0, c_1, F_+, F_*, R_\leq)$$
$$M = (\mathbb{N}, 0, 1, +, *, \leq)$$
$$square = \{(n, m)|n = m^2\}$$
$$\alpha_{square}(x_1, x_2) = F_*(x_2, x_2) \approx x_1$$

דוגמא:

$$\tau = (R_\leq)$$

$M = (\mathbb{P}(A), \subseteq)$ (A קבוצה כלשהי)

$$P_U = \{(A, B, C)|A \cup B = C\}$$

נראה ש־$P_\cup$ גדיר ב־M

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = R_\subseteq(x_1, x_3) \land R_\subseteq(x_2, x_3) \land \forall x_4(((R_\subseteq(x_1, x_4) \land R_\subseteq(x_2, x_4)) \to R_\subseteq(x_3, x_4)))$$

דוגמאות נוספות:

$$\tau=(F_+,F_*,R_\leq)$$
$$M=(\mathbb{N},+,*,\leq)$$
$$square=\{(n,m)|n=m^2\}$$
$$\alpha_{square}(x_1,x_2)=F_*(x_2,x_2)\approx x_1$$
$$P_0=\{0\}$$
$$\alpha_+(x)=F_+(x,x)\approx x$$
$$P_1=\{1\}$$
$$\alpha_1(x)=F_*(x,x)\approx x$$
$$\neg\alpha_0(x)$$
$prime=\{a|a$ ראשוני$\}$
$$\alpha_{prime}(x_1)=\forall x_2(div(x_1,x_2)\rightarrow x_2\approx x_1\vee\alpha_1(x_2))$$

הגדרה:

α <u>אמת לוגית</u> אם ורק אם לכל מבנה M (מעל למילון של α) ולכל השמה צד (שמתאימה ל־M):

$$M\underset{s}{\models}\alpha$$

סימון: $\models\alpha$

<u>דוגמאות לנוסחאות שהן אמת לוגית ואינן אמת לוגית:</u>

1. $\alpha=(\forall xR(x,y))\rightarrow(\forall xR(x,y))$
אמת לוגית - הצבה בטאוטולוגיה של תחשיב הפסוקים.
<u>טענה:</u> כל נוסחה במבנה של טאוטולוגיה של תחשיב הפסוקים היא אמת לוגית.

2. $\forall xR(x,y)$ אמת לוגית ?
$$M=(D^M,\underset{\emptyset}{R^M})$$
$$S(y)=d_0\in D^M$$
$$\Leftrightarrow M\underset{s}{\models}\forall xR(x,y)$$
לכל $d\in D^M$
$$\Leftrightarrow M\underset{\underbrace{s[x\leftarrow d]}_{s'}}{\models}R(x,y)$$
לכל $d\in D^M$
$$R^M(\underbrace{s'(x)}_{d},\underbrace{s'(y)}_{d_0})$$
לכל d, $(d,d_0)\in R^M\in\emptyset$

עוד דוגמא להפרכה:

המבנה הוא גרף

$$\begin{tikzcd} v_1 \arrow[loop left] \arrow[r] \arrow[dr] & v_2 \\ & v_3 \end{tikzcd}$$

$$M=\{v_1,v_2,v_3),R^M)$$
$R^M=\{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_1,v_1)\}$ (יחס הקשתות)
$$s(x)=v_1,s(y)=v_2,s(z)=v_1$$
נראה ש־
$$M\underset{s}{\not\models}\forall xR(yx,y)$$
כי מ־v_3אין קשת ל־$s(y)=v_2$.

3. $\exists y\forall xR(x,y)\rightarrow\forall x\exists yR(x,y)$
נוכיח שאמת לוגית בדרך השלילה קיים S,M כך ש־
$$\Leftrightarrow M\underset{s}{\not\models}\exists x\forall yR(x,y)\rightarrow\forall x\exists yR(,xy)$$
$$\Leftrightarrow M\underset{s}{\models}\exists y\forall xR(x,y)\ (1)$$
קיים d_1לכל d_2
$$\Leftrightarrow M\underset{s[y\leftarrow d_1][x\leftarrow d_2]}{\models}R(x,y)$$
קיים d_1כך שלכל d_2
$$\Leftrightarrow R^M(d_2,d_1)$$
$$\Leftrightarrow M,s\not\models\forall x\exists yR(x,y)\,(2)$$
קיים e_1

$\Leftrightarrow M \underset{s[x\leftarrow e_1]}{\not\models} \exists y R(x,y)$

קיים e_1 לכל e_2

$M \underset{s[x\leftarrow e_1][y\leftarrow e_2]}{\not\models} R(x,y)$

4. $\forall x \exists y R(x,y) \to \exists y \forall x R(x,y)$

להציע מבנה והשמה

$M \underset{s}{\models} \forall x \exists y R(x,y)$

$M \underset{s}{\not\models} \exists y \forall x R(x,y)$

קיים d_1 כך שלכל d_2: $tree = R^M(d_2, d_1)$

קיים e_1 כך שלכל e_2 $tree = R^M(e_1 e_2)$

למעשה ע"ס נסיק $R^M(e_1, d_1)$ מתקיים <u>סתירה.</u>

5. $\beta = \exists x(\alpha \to \forall x \alpha)$

אמת לוגית.

נתונה תבנית ביצים

קיימת ביצה שאם היא שבורה אז כל הביצים שבורות

נוכיח בחלוקה למקרים שלכל s, M: $M \underset{s}{\models} \beta$

<u>מקרה 1:</u>

נתון: $M \underset{s}{\models} \forall x \alpha$

נוכיח $M \underset{s}{\models} \beta$

$M \underset{s}{\models} \forall x \alpha$

$\Leftrightarrow$

<u>קיים d</u>

$M \underset{s[x\leftarrow d]}{\models} \forall x \alpha$

נסתמך על השלמה שומרת שאם s_1 ו־s_2 מסכימות על כל המשתנים שחופשיים בנוסחה אז הם מסכימות על ערך הנוסחה.

s', s זהיות חוץ מערכם על x שאינו חופשי ב־$\forall x \alpha$

קיים d. $M \underset{s[x\leftarrow d]}{\models} \alpha \to \underbrace{\forall x \alpha}_{T}$

קיים d $\Leftrightarrow M \underset{s[x\leftarrow d]}{\models} \underbrace{\underbrace{\alpha}_{?} \to \forall \underbrace{x\alpha}_{T}}_{T}$

$M \underset{s}{\models} \exists x(\alpha \to \forall x \alpha)$

<u>מקרה 2</u>

$\Leftrightarrow M \not\models \forall x \alpha$

קיים d כך ש־ $M \underset{s[x\leftarrow d]}{\not\models} \alpha$

$$\Leftrightarrow T \begin{cases} F \to & T \\ F \to & F \end{cases}$$

$\Leftrightarrow M \underset{s[x\leftarrow d]}{\models} \underbrace{\underbrace{\alpha}_{F} \to \underbrace{\forall x \alpha}_{F}}_{T}$

$M \underset{s}{\not\models} \exists x(\alpha \to \forall x \alpha)$