הרצאה 8 לוגיקה

מטרה: $X \vDash \alpha$ **אז** $X \vdash \alpha$

נאותות:

$X \vdash \alpha$ **אז** $X \vDash \alpha$

$X \nvDash \alpha$ אז $X \nvdash \alpha$

למה 1:

X עקבית $\Leftrightarrow$ כל תת־קבוצה סופית של X עקבית.

למה 2:

$X \bigcup \{\neg\alpha\}$ עקבית $\Leftrightarrow X \nvdash \alpha$

למה 3:

אם X ספיקה אז X עקבית

מטרה:

להוכיח את הכיוון ההפוך

צ"ל X עקבית אז X ספיקה

הגדרנו:

X עקבית מקסימלית אם ורק אם לכל α בדיוק אחד מהבאים מתקיים $X \vdash \alpha$ או $X \vdash \neg\alpha$

למה 5:

לכל קבוצה עקבית X קיימת קבוצה עקבית מקסימלית Y , עד ש־$X \subseteq Y$.

למה 6:

לכל קבוצת פסוקים X

X עקבית אם ורק אם X ספיקה

$\Rightarrow$ עס' למה 3

$\Leftarrow$

נתון X עקבית

עס' למה 5 קיימת $Y \supseteq X$ כך ש־Y מקסימלית

נגדיר השמה v:

$$Y \vdash p_i \Leftrightarrow v(p_i) = T$$
$$Y \vdash \neg p_i \Leftrightarrow v(p_i) = F$$

v מוגדרת היטב

טענה:

לכל $\alpha \in Y$ מתקיים $Y \vDash v$.

כלומר $Y \vDash v$ **לא נוכיח.**

אז $X \vDash v$ והראינו ש־X ספיקה.

נסתכל על $\alpha \in X$ אז $\alpha \in Y$ ולכן $\alpha \vDash v$.

משפט השלמות:

אם $\alpha \vDash X$ אז $\alpha \vdash X$

הוכחה:

נתון $\alpha \vDash X$ ונניח בדרך השלילה ש־$\alpha \nvdash X$.

עס' למה ' $X \bigcup \{\neg\alpha\}$ עקבית ולכן למה 6 ספיקה

כלומר קיימת v

$$v \vDash X$$
$$v \vDash \neg\alpha$$
$$v \vDash \alpha$$
$$X \vDash \alpha \Rightarrow v \vDash \alpha$$

סתירה

מסקנה $\alpha \vdash X$.

מסקנה ממשפט השלמות והנאותות

$$\boxed{\vdash \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \vDash \alpha}$$

סיכום של הוכחת משפט השלמות

$$\boxed{X\vdash \alpha \Leftarrow X \vDash \alpha}$$

רצינו:

$$\begin{array}{ccc} X \nvDash \alpha & \Leftarrow & X \nvdash \alpha \\ \Uparrow & & \Updownarrow \\ (\text{Sfika}) X \bigcup \{\neg\alpha\} & \Leftrightarrow & (\text{Ikvit}) X \bigcup \{\neg\alpha\} \end{array}$$

$M(X)$=\{קבוצת ההשמות v כך ש־$X \vDash v$\}
v היא מודל של X

משפט הקומפקטיות

לקבוצת פסוקים X יש מודל (היא ספיקה) אם ורק אם לכל תת־קבוצה סופית שלה יש מודל (היא ספיקה).

הוכחה:

X ספיקה $\Leftrightarrow$ X עקבית.
$\Leftrightarrow$ כל תת קבוצה סופית שלה עקבית
$\Leftrightarrow$ כל תת קבוצה סופית שלה היא ספיקה.

דוגמא לשמוש בקומפקטיות

נתונות שתי קבוצות של פסוקים Σ_1 ו־Σ_2 כך ש־

1. אין השמה שמספקת גם את Σ_1 וגם את Σ_2.
   $M(\Sigma_1) \bigcap M(\Sigma_2) = \emptyset$
2. כל השמה מספקת או את Σ_1 או את Σ_2.

דוגמא פשוטה:

$\Sigma_1 = \{p_0 \wedge p_1\}$, $\Sigma_2 = \{\neg p_0 \vee \neg p_1\}$
כאשר Σ_1, Σ_2 <u>במקרה</u> סופיות
צריך להוכיח:
שקיים פסוק p_1 כך ש־Σ_1 שקולה לו כלומר לכל v: $v \vDash \Sigma_1 \Leftrightarrow v \vDash p_1$
וקיים פסוק p_2 ששקול ל־Σ_2.

שאלה:

האם $\bigwedge\limits_{\alpha \in \Sigma_1} \alpha = p_1$ הוא פתרון?
<u>**לא**</u> כאשר Σ_1 היא אינסופית.

דוגמא:

$\Sigma_1 = \{p_0, \neg p_0, p_0 \vee \neg p_0\} \bigcup \{p_i, \neg p_i | i \in \mathbb{N}\}$ אף השמה אינה מספקת את Σ_1
$\Sigma_2 = \{p_0 \vee \neg p_0\}$ כל השמה מספקת את Σ_2.
$\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ אינה ספיקה

עס' משפט הקומקטיות קיימת קבוצה $D \subseteq \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$ סופית ולא ספיקה.
עס' קומפקטיות קיימת $D \subseteq \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$

D סופית , לא ריקה , לא ספיקה
$D_1 = D \bigcap \Sigma_1$,$D_2 = D \bigcap \Sigma_2$
לפחות אחת מ־D_1, D_2 אינה ריקה כי D אינה ריקה.
נניח D_1 אינה ריקה
$D_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subseteq \Sigma_1$
$p_1 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \alpha_k$
$p_2 = \neg p_1$
נוכיח שלכל השמה v:
$v \models \Sigma_1 \Leftrightarrow v \models p_1$

- $\Rightarrow$ $v \models \Sigma_1 \Leftarrow v \models \alpha$ לכל $\alpha \in \Sigma_1$
  בפרט ל־$\alpha_i \in D_1$
  $v \models \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k = p$

- $\Leftarrow v \not\models \Sigma_1$ לפי נתון $v \models \Sigma_2 \Leftarrow v \models D_2$
  אבל נתון $D = D_1 \bigcup D_2$ אינה ספיקה ולכן $v \not\models D_1$
  כלומר קיים $\alpha \in D_1$ כך ש־$v \not\models \alpha$ מסקנה $v \not\models p_1$.

$\neg p_1 = p_2$
צ"ל לכל v, $v \models \Sigma_2 \Leftrightarrow v \models p_2$
$v \models \Sigma_2 \Leftrightarrow v \not\models \Sigma_1 \Leftrightarrow v \not\models \underset{\underset{p_2}{\parallel}}{p_1} \Leftrightarrow v \models \neg p_1$

דוגמה:

נוסחה פסוקים שמתארת את המערכת M: α_M
נוסכחה פסוקים שמתארת את המפרט φ
$\alpha_M \wedge \neg\varphi$ ספיקה ?

- כן: מצאנו באג
- לא: המערכת נכונה.

מכרכת עם 2 תהליכים p_1ו־p_2שיש להם בקשות ויש ארביטר שמחליט מי יקבל את בקשתו.
לכל תהליך יש דגל:

- P_i:R_1 מציג בקשה (request)
- G_i: דגל של הארביטר.
  כש־G_1 הוא 1 אז p_1 מקבל את התור.
  כש־G_2 הוא 1 אז P_2 מקבל את התור.

לארביטר יש גם משתנים:

- D_1 - p_1 קבל את התור בפעם הקודמת.
- D_2 - p_2 קבל את התור בפעם הקודמת.

תאור המערכת:

$$\text{EXEC}=$$
$$(\overset{1}{G_1} \leftrightarrow (\overset{1}{R_1} \wedge (\neg \overset{0}{R_2} \vee \overset{1}{D_2})))$$
$$(\overset{1}{G_2} \leftrightarrow (\overset{1}{R_2} \wedge (\neg \overset{0}{R_1} \vee \overset{1}{D_1})))$$

מפרט:

$\varphi_1 = \neg(G_1 \wedge G_2)$

$\text{EXEC}_1(\overbrace{G_1}^{1} \wedge \overbrace{G_2}^{1})$

שלילת המפרט

האם הפסוק ספיק ?

$\text{EXEC}_1 \neg(D_1 \wedge D_2) = \alpha_M^{'}$ המערכת החדשה

נבדוק $\alpha'_M \wedge (G_1 \wedge G_2)$ שלילת המפרט

ספיק? **<u>לא.</u>**

מסקנה:

המערכת המתוקנת מספקת את המפרט $\neg(G_1 \wedge G_2)$.

נניח שהנוסחה ספיקה

$$v \vDash \textbf{EXEC} \wedge \neg(D_1 \wedge D_2)$$
$$\wedge (G_1 \wedge G_2)$$
$$\Rightarrow \overline{v}(G_1) = T \quad \overline{v}(G_2) = T$$
$$\Rightarrow \overline{v}(R_1 \wedge (\neg R_2 \vee D_2)) = T$$
$$\Rightarrow \overline{v}(R_1) + T$$
$$* \, \overline{v}(\neg R_2 \vee D_2) = T$$
$$\overline{v}(G_2) = T \Rightarrow \overline{v}(R_2) = T$$
$$* * \overline{v}(\neg R_2) = F$$
$$\underbrace{\Rightarrow}_{*+**} \overline{v}(D_2) = T$$

מפרט דרישה

$\varphi_2 = (R_1 \wedge \neg R_2 \rightarrow G_1)$

$\alpha'_M \wedge (R_1 \wedge \neg R_2 \wedge \neg G_1)$ שלילת המפרט