

## הרצאה 8 לוגיקה

**מטרה:**  $X \vdash \alpha$  או  $X \models \alpha$

**נאותות:**

$X \models \alpha$  או  $X \vdash \alpha$

$X \not\models \alpha$  או  $X \not\vdash \alpha$

**למה 1:**

$X$  עקבית  $\Leftrightarrow$  כל תת-קבוצה סופית של  $X$  עקבית.

**למה 2:**

$X \not\models \alpha \Leftrightarrow X \cup \{\neg\alpha\}$  עקבית

**למה 3:**

אם  $X$  ספיקה אז  $X$  עקבית

**מטרה:**

להוכיח את הכיוון ההפוך

צ"ל  $X$  עקבית אז  $X$  ספיקה

**הגדרנו:**

$X$  עקבית מקסימלית אם ורק אם לכל  $\alpha$  בדיוק אחד מהבאים מתקיים  $X \vdash \alpha$  או  $X \vdash \neg\alpha$

**למה 5:**

לכל קבוצה עקבית  $X$  קיימת קבוצה עקבית מקסימלית  $Y$ ,  $Y \supseteq X$ .

**למה 6:**

לכל קבוצת פסוקים  $X$

$X$  עקבית אם ורק אם  $X$  ספיקה

$\Rightarrow$  עס' למה 3

$\Leftarrow$

נתון  $X$  עקבית

עס' למה 5 קיימת  $Y \supseteq X$  כך ש- $Y$  מקסימלית

נגדיר השמה  $v$ :

$$Y \vdash p_i \Leftrightarrow v(p_i) = T$$
$$Y \vdash \neg p_i \Leftrightarrow v(p_i) = F$$

$v$  מוגדרת היטב

טענה:

לכל  $\alpha \in Y$  מתקיים  $v \models \alpha$ .

כלומר  $v \models Y$  לא נובח.

אז  $v \models X$  והראינו ש- $X$  ספיקה.

נסתכל על  $\alpha \in X$  אז  $\alpha \in Y$  ולכן  $v \models \alpha$ .

**משפט השלמות:**

אם  $X \vdash \alpha$  אז  $X \models \alpha$

**הוכחה:**

נתון  $X \vdash \alpha$  ונניח בדרך השלילה ש- $X \not\models \alpha$ .

עס' למה '  $X \cup \{\neg \alpha\}$  עקבית ולכן למה 6 ספיקה  
כלומר קיימת  $v$

$$v \models X$$

$$v \models \neg \alpha$$

$$v \models \alpha$$

$$X \vdash \alpha \Rightarrow v \models \alpha$$

סתירה

מסקנה  $X \vdash \alpha$ .

**מסקנה ממשפט השלמות והנאותות**

$$\boxed{\vdash \alpha \Leftrightarrow \models \alpha}$$

**סיכום של הוכחת משפט השלמות**

$$\boxed{X \vdash \alpha \Leftarrow X \models \alpha}$$

רצינו:

$$\begin{array}{ccc} X \not\models \alpha & \Leftrightarrow & X \not\models \alpha \\ \uparrow & & \updownarrow \\ (\text{Sfika}) X \cup \{\neg \alpha\} & \Leftrightarrow & (\text{Ikvit}) X \cup \{\neg \alpha\} \end{array}$$

$$\{v \models X \text{ ש-} X\} = M(X)$$

$v$  היא מודל של  $X$

#### משפט הקומפקטיות

לקבוצת פסוקים  $X$  יש מודל (היא ספיקה) אם ורק אם לכל תת-קבוצה סופית שלה יש מודל (היא ספיקה).

#### הוכחה:

$X$  ספיקה  $\Leftrightarrow X$  עקבית.  
 $\Leftrightarrow$  כל תת קבוצה סופית שלה עקבית  
 $\Leftrightarrow$  כל תת קבוצה סופית שלה היא ספיקה.

#### דוגמא לשמוש בקומפקטיות

נתונות שתי קבוצות של פסוקים  $\Sigma_1$  ו- $\Sigma_2$  כך ש-

1. אין השמה שמספקת גם את  $\Sigma_1$  וגם את  $\Sigma_2$ .

$$M(\Sigma_1) \cap M(\Sigma_2) = \emptyset$$

2. כל השמה מספקת או את  $\Sigma_1$  או את  $\Sigma_2$ .

#### דוגמא פשוטה:

$$\Sigma_2 = \{\neg p_0 \vee \neg p_1\}, \Sigma_1 = \{p_0 \wedge p_1\}$$

כאשר  $\Sigma_2, \Sigma_1$  במקרה סופיות

צריך להוכיח:

שקיים פסוק  $p_1$  כך ש- $\Sigma_1$  שקולה לו כלומר לכל  $v$ :  $v \models p_1 \Leftrightarrow v \models \Sigma_1$

וקיים פסוק  $p_2$  ששקול ל- $\Sigma_2$ .

#### שאלה:

האם  $p_1 = \bigwedge_{\alpha \in \Sigma_1} \alpha$  הוא פתרון?

לא כאשר  $\Sigma_1$  היא אינסופית.

#### דוגמא:

$$\Sigma_1 = \{p_0, \neg p_0, p_0 \vee \neg p_0\} \cup \{p_i, \neg p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

$\Sigma_2 = \{p_0 \vee \neg p_0\}$  כל השמה מספקת את  $\Sigma_2$ .

$\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  אינה ספיקה

עס' משפט הקומקטיות קיימת קבוצה  $D \subseteq \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  סופית ולא ספיקה.

עס' קומפקטיות קיימת  $D \subseteq \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$D$  סופית, לא ריקה, לא ספיקה

$$D_1 = D \cap \Sigma_1, D_2 = D \cap \Sigma_2$$

לפחות אחת מ- $D_1, D_2$  אינה ריקה כי  $D$  אינה ריקה.

נניח  $D_1$  אינה ריקה

$$D_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subseteq \Sigma_1$$

$$p_1 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k$$

$$p_2 = \neg p_1$$

נוכיח שלכל השמה  $v$ :

$$v \models \Sigma_1 \Leftrightarrow v \models p_1$$

$$\alpha \in \Sigma_1 \text{ לכל } v \models \alpha \Leftrightarrow v \models \Sigma_1 \Rightarrow \star$$

בפרט ל- $D_1$   $\alpha_i \in D_1$

$$v \models \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k = p_1$$

$$v \models D_2 \Leftrightarrow v \models \Sigma_2 \text{ לפי נתון } v \not\models \Sigma_1 \Leftarrow \star$$

אבל נתון  $D = D_1 \cup D_2$  אינה ספיקה ולכן  $v \not\models D_1$

כלומר קיים  $\alpha \in D_1$  כך ש- $\alpha \not\models v$  מסקנה  $v \not\models p_1$ .

$$\neg p_1 = p_2$$

$$v \models p_2 \Leftrightarrow v \models \Sigma_2, v \text{ לכל } \star$$

$$v \models \neg p_1 \Leftrightarrow v \not\models p_1 \Leftrightarrow v \not\models \Sigma_1 \Leftrightarrow v \models \Sigma_2$$

$\parallel$   
 $p_2$

**דוגמה:**

נוסחה פסוקים שמתארת את המערכת  $\alpha_M : M$

נוסחה פסוקים שמתארת את המפרט  $\varphi$

$\alpha_M \wedge \neg \varphi$  ספיקה ?

$\star$  כן: מצאנו באג

$\star$  לא: המערכת נכונה.

מכרכת עם 2 תהליכים  $p_1$ - $p_2$  שיש להם בקשות ויש ארביטר שמחליט

מי יקבל את בקשתו.

לכל תהליך יש דגל:

$$\star P_i : R_1 \text{ מציג בקשה (request)}$$

$$\star G_i : \text{דגל של הארביטר.}$$

כש- $G_1$  הוא 1 אז  $p_1$  מקבל את התור.

כש- $G_2$  הוא 1 אז  $p_2$  מקבל את התור.

לארביטר יש גם משתנים:

$$\star D_1 - p_1 \text{ קבל את התור בפעם הקודמת.}$$

$$\star D_2 - p_2 \text{ קבל את התור בפעם הקודמת.}$$

## תאור המערכת:

EXEC=

$$(G_1^1 \leftrightarrow (R_1^1 \wedge (\neg R_2^0 \vee D_2^1)))$$

$$(G_2^1 \leftrightarrow (R_2^1 \wedge (\neg R_1^0 \vee D_1^1)))$$

## מפרט:

$$\varphi_1 = \neg(G_1^1 \wedge G_2^1)$$

$$\text{EXEC}_1(\underbrace{G_1^1}_1 \wedge \underbrace{G_2^1}_1)$$

שלילת המפרט

האם הפסוק ספיק ?

$$\text{EXEC}_1 \neg(D_1 \wedge D_2) = \alpha'_M$$

נבדוק  $\alpha'_M \wedge (G_1 \wedge G_2)$  שלילת המפרט

ספיק? לא.

## מסקנה:

המערכת המתוקנת מספקת את המפרט  $\neg(G_1 \wedge G_2)$ .  
נניח שהנוסחה ספיקה

$$v \models \text{EXEC} \wedge \neg(D_1 \wedge D_2)$$

$$\wedge (G_1 \wedge G_2)$$

$$\Rightarrow \bar{v}(G_1) = T \quad \bar{v}(G_2) = T$$

$$\Rightarrow \bar{v}(R_1 \wedge (\neg R_2 \vee D_2)) = T$$

$$\Rightarrow \bar{v}(R_1) = T$$

$$* \bar{v}(\neg R_2 \vee D_2) = T$$

$$\bar{v}(G_2) = T \Rightarrow \bar{v}(R_2) = T$$

$$* * \bar{v}(\neg R_2) = F$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{**} \bar{v}(D_2) = T$$

\*\*\*

## מפרט דרישה

$$\varphi_2 = (R_1 \wedge \neg R_2 \rightarrow G_1)$$

$$\alpha'_M \wedge (R_1 \wedge \neg R_2 \wedge \neg G_1)$$

שלילת המפרט