לוגיקה - תרגול 10

תזכורת

משתנים קשורים וחופשיים

arphi בנוסחה בנוסחה משתנה מהו מבנה על מבנה על בנוסחה בנוסחה מדרה 1: נגדיר באינדוקציה על

arphiבסיס: עבור arphi נוסחה אטומית, אם arphi מופיע ב־arphi אז א חופשי ב

. נוסחאות lpha,eta נוסחאות צעד: יהיו

x עבור x אם x חופשי ביx חופשי ביx עבור

x בר α אם x חופשי בי α אם x חופשי בי α או $x: \varphi = (\alpha \to \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta), (\alpha \land \beta), (\alpha \lor \beta)$

 $x \neq y$ ו ר α ב ב־ α אם x חופשי ב־ α חופשי בי α חופשי בי α חופשי בי

משתנה שאינו חופשי נקרא משתנה קשור.

דוגמה:

 $\exists x_1 (\forall x_2 (R_1(x_2)) \to R_2(x_1, x_2))$

. המופע הראשון של x_2 קשור אך השני חופשי ולכן x_2 חופשי בנוסחה

המופע היחיד של x_1 קשור ולכן x_1

הגדרה 2: נוסחה ללא משתנים חופשיים נקראת פסוק.

 $.arphi=orall x_1orall x_2\,(R(x_1,x_2) o R(x_2,x_1))$ ונתון הפסוק ונתון הפסוק $au=\langle R\left(\circ,\circ
ight),F_1\left(\circ
ight),F_2\left(\circ,\circ
ight),c
angle$ ונתון המילון המילון את הפסוק?

 x_i משפט α נוסחה מעל מילון τ , α מבנה עבור τ ו־ s_1,s_2 זוג השמות עבור α , כך שלכל משתנה חופשי בי α נוסחה מעל מילון α אם ורק אם α אם ורק אם α אם ורק אם α בי α מתקיים α מינו או α או ורק אם α אם ורק אם α

 $M\models arphi$ אז א $M\models_s arphi$ אם אם $M\models_s arphi$ והשמה או מסקנה: לכל מבנה

מושגי יסוד סמנטיים

:הגדרות

- $M\models_s arphi$ שר כך שיs כך והשמה מבנה M היא ספיקה אם היא ספיקה מבנה 1.
- $M\models_s \Sigma$ סימון . $M\models_s \varphi$ מתקיים $\varphi\in \Sigma$ אם לכל Σ אם בוצת נוסחאות מספקים קבוצת השמה מבנה M
 - . המספקים המחאות s והשמה מבנה M היימים היימים היא ספיקה היא Σ המספקים גו
- .9 שמח ψ מספקים את המספקים את וכל השמה s המספM אם כל מבנה φ אם נוסחה ψ מספקים או ψ .0 און $\psi \models \varphi$
- גם מספקים את המספקים את השמה s והשמה המספקים נוסחה φ אם כל גוררת נוסחאות המספקים את גוררת אם גוררת אם באר גוררת אם באר גוררת אם באר גוררת או גוררת את באר את $\Sigma \models \varphi$ את את φ .
 - $M\models_s arphi$ מתקיים s מתקיים σ מעל מילון σ מעל מילון אמת לוגית אם לכל מבנה σ עבור אם עבור σ מעל מילון σ

 $. au = \langle R\left(\circ,\circ\right), F\left(\circ,\circ\right), c_{0}, c_{1} \rangle$ נתון המילון: נתון המילון

 $\Sigma = \left\{ R\left(t,x_{0}
ight) \mid$ נגדיר $t \}$ ש"ע

- .1 הוכיחו כי Σ ספיקה.
- . $\Sigma \nvDash \forall x_1 R(x_0, x_1)$ 2.

 $. au = \langle R\left(\circ,\circ\right), F\left(\circ\right) \rangle$ נתון מילון ניתרגיל 3:

עבור כל אחת מהנוסחאות הבאות, הוכיחו או הפריכו כי היא אמת לוגית:

- $\varphi_1 = \forall x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2))$.1
- $\varphi_2 = \forall x_1 \forall x_2 R\left(F(x_1), F\left(x_2\right)\right) \rightarrow \forall x_1 \forall x_2 R\left(x_1, x_2\right)$.2

לוגיקה - תרגול 10

תזכורת

משתנים קשורים וחופשיים

arphi בנוסחה בנוסחה משתנה מהו מבנה על מבנה על בנוסחה בנוסחה מדרה 1: נגדיר באינדוקציה על

arphiבסיס: עבור arphi נוסחה אטומית, אם arphi מופיע ב־arphi אז א חופשי ב

. נוסחאות lpha,eta נוסחאות צעד: יהיו

x עבור x אם x חופשי ביx חופשי ביx עבור

x בר α אם x חופשי בי α אם x חופשי בי α או $x: \varphi = (\alpha \to \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta), (\alpha \land \beta), (\alpha \lor \beta)$

 $x \neq y$ ו ר α ב ב־ α אם x חופשי ב־ α חופשי בי α חופשי בי α חופשי בי

משתנה שאינו חופשי נקרא משתנה קשור.

דוגמה:

 $\exists x_1 (\forall x_2 (R_1(x_2)) \to R_2(x_1, x_2))$

. המופע הראשון של x_2 קשור אך השני חופשי ולכן x_2 חופשי בנוסחה

המופע היחיד של x_1 קשור ולכן x_1

הגדרה 2: נוסחה ללא משתנים חופשיים נקראת פסוק.

 $.arphi=orall x_1orall x_2\,(R(x_1,x_2) o R(x_2,x_1))$ ונתון הפסוק ונתון הפסוק $au=\langle R\left(\circ,\circ
ight),F_1\left(\circ
ight),F_2\left(\circ,\circ
ight),c
angle$ ונתון המילון המילון את הפסוק?

 x_i משפט α נוסחה מעל מילון τ , α מבנה עבור τ ו־ s_1,s_2 זוג השמות עבור α , כך שלכל משתנה חופשי בי α נוסחה מעל מילון α אם ורק אם α אם ורק אם α אם ורק אם α בי α מתקיים α מינו או α או ורק אם α אם ורק אם α

 $M\models arphi$ אז א $M\models_s arphi$ אם אם $M\models_s arphi$ והשמה או מסקנה: לכל מבנה

מושגי יסוד סמנטיים

:הגדרות

- $M\models_s arphi$ בי שי σ כך שי σ כך נוסחה σ היא ספיקה אם קיימים מבנה והשמה σ
- $M\models_s \Sigma$ סימון . $M\models_s \varphi$ מתקיים $\varphi\in\Sigma$ אם אם בנה בוטחאות נוסחאות מספקים קבוצת מספקים מבנה לכל מבנה מבנה מ
 - . המספקים אותה s המספקים אבנה M המספקים אותה ביימים היא ספיקה המספקים אותה.
- עם את ψ מספקים את א וכל השמה s המספקים אם כל מבנה M הם כל מבנה ψ מספקים את הוררת לוגית נוסחה ψ
- גם את בספקים את והשמה המספקים את כל מבנה אם כל מחרה גוררת לוגית נוסחה בי אח אם כל מבנה אם גוררת לוגית נוסחה בי אחר בי אור בי אחר בי אחר בי אחר בי אור בי אור בי אחר בי אור $\Sigma \models \varphi$ את φ . סימון
 - $M\models_s arphi$ מתקיים s מתקיים σ מעל מילון au היא אמת לוגית אם לכל מבנה σ עבור σ , ולכל השמה σ

$$.\tau = \langle R(\circ, \circ), F(\circ, \circ), c_0, c_1 \rangle$$
 נתון המילון: 2: נתון המילון

$$\Sigma = \{R(t,x_0) \mid$$
ע"ע ע"ע $t\}$ נגדיר

- Σ ספיקה.
- . $\Sigma \nvDash \forall x_1 R(x_0, x_1)$ 2.

$$. au = \langle R\left(\circ,\circ\right), F\left(\circ\right) \rangle$$
 נתון מילון נתון מילון :3

עבור כל אחת מהנוסחאות הבאות, הוכיחו או הפריכו כי היא אמת לוגית:

$$\varphi_1 = \forall x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2))$$
 .1

פתרון:

השמה. r ו־s השמה מעל r מבנה מעל r הוא אמת לוגית. יהיו r מבנה מעל r ו־s

$$\Leftrightarrow M \models_s \varphi_1$$

אס
$$M \models_s \forall x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2)$$
 אס

$$\Leftrightarrow M \models_{s} \forall x_{1} \forall x_{2} R \left(F \left(x_{1} \right), F \left(x_{2} \right) \right)$$

$$M \models_{\underline{s}\left[x_1 \leftarrow d_1\right]\left[x_2 \leftarrow d_2\right]} R\left(x_1, x_2\right)$$
 , $d_1, d_2 \in D^M$ אם לכל

$$M \models_{\underbrace{s}\left[x_{1} \leftarrow d_{1}\right]\left[x_{2} \leftarrow d_{2}\right]}^{SM} R\left(x_{1}, x_{2}\right) , d_{1}, d_{2} \in D^{M}$$
 אם לכל
$$\Leftrightarrow M \models_{\underbrace{s}\left[x_{1} \leftarrow d_{3}\right]\left[x_{2} \leftarrow d_{4}\right]}^{S'} R\left(F\left(x_{1}\right), F\left(x_{2}\right)\right) , d_{3}, d_{4} \in D^{M}$$
 אז לכל
$$\overset{\circ}{\Longrightarrow} \frac{\left[x_{1} \leftarrow d_{3}\right]\left[x_{2} \leftarrow d_{4}\right]}{s''} R\left(F\left(x_{1}\right), F\left(x_{2}\right)\right) , d_{3}, d_{4} \in D^{M}$$

$$\left(\overline{s}''\left(F\left(x_{1}
ight)
ight),\overline{s}''\left(F\left(x_{2}
ight)
ight)
ight)\in \mathcal{A}_{3},d_{4}\in D^{M}$$
 אם לכל $\left(s'\left(x_{1}
ight),s'\left(x_{2}
ight)
ight)\in R^{M}$ $\mathcal{A}_{1},d_{2}\in D^{M}$ $\Leftrightarrow R^{M}$

יזה מתקיים כי $\left(F^{M}\left(d_{3}\right),F^{M}\left(d_{4}\right)
ight)\in R^{M}$, $d_{3},d_{4}\in D^{M}$ אז לכל $\left(d_{1},d_{2}
ight)\in R^{M}$, $d_{1},d_{2}\in D^{M}$ אם לכל $d_{1}=F^{M}\left(d_{4}
ight)$ אם ההנחה מתקיימת אז המסקנה מתקיימת עבור $d_{1}=F^{M}\left(d_{3}
ight)$ אם ההנחה מתקיימת אז המסקנה מתקיימת א

$$\varphi_2 = \forall x_1 \forall x_2 R\left(F(x_1), F\left(x_2\right)\right) \rightarrow \forall x_1 \forall x_2 R\left(x_1, x_2\right)$$
 .2

פתרון:

s והשמה M והשמה מכנה, הפסוק אינו אמת לוגית. נראה דוגמה נגדית, כלומר נראה שקיים מבנה שאינם מספקים אותו:

נבחר מבנה והשמה:

$$n\in\mathbb{N}$$
 לכל $F^{M}\left(n
ight)=0$ כאשר $M=\left\langle \left\{ 0,1
ight\} ,\left\{ \left(0,0
ight)
ight\} ,F^{M}
ight
angle$ נגדיר

תהי s השמה המקיימת s לכל i (נעיר כי $arphi_2$ פסוק ולכן ערך האמת אינו תלוי בהשמה, ולכן כל השמה sתתאים, אך בדוגמה נגדית יש לבחור פירוש לכל הסימנים).

 $M \not\models_s \varphi_2$ נראה שמסקנת הטענה לא מתקיימת כלומר נראה נראה

:נניח בשלילה $M \models_s \varphi_2$ מתקיים

$$\Leftrightarrow M \models_s \varphi_2$$

$$\Leftrightarrow M\models_{s} \forall x_{1}\forall x_{2}R\left(x_{1},x_{2}
ight)$$
 אם $M\models_{s} \forall x_{1}\forall x_{2}R\left(F\left(x_{1}
ight),F\left(x_{2}
ight)
ight)$

$$M\models_{s}\left[x_{1}\leftarrow d_{1}
ight]\left[x_{2}\leftarrow d_{2}
ight]R\left(F\left(x_{1}
ight),F\left(x_{2}
ight)
ight)$$
 , $d_{1},d_{2}\in D^{M}$ אם לכל

$$M \vDash \underbrace{s\left[x_1 \leftarrow d_1\right]\left[x_2 \leftarrow d_2\right]}_{s'} R\left(F\left(x_1\right), F\left(x_2\right)\right) \text{ ,} d_1, d_2 \in D^M \text{ אם לכל } \\ \Leftrightarrow M \vDash \underbrace{s\left[x_1 \leftarrow d_3\right]\left[x_2 \leftarrow d_4\right]}_{s''} R\left(x_1, x_2\right) \text{ ,} d_3, d_4 \in D^M \text{ }$$

$$\Leftrightarrow$$
 $(s''\left(x_{1}\right),s''\left(x_{2}\right))\in R^{M}$, $d_{3},d_{4}\in D^{M}$ אז לכל $(\overline{s}'\left(F\left(x_{1}\right)\right),\overline{s}'\left(F\left(x_{2}\right)\right))\in R^{M}$, $d_{1},d_{2}\in D^{M}$ אם לכל $(F^{M}\left(d_{1}\right),F^{M}\left(d_{2}\right))\in R^{M}$, $d_{1},d_{2}\in D^{M}$ אם לכל $(F^{M}\left(d_{1}\right),F^{M}\left(d_{2}\right))\in R^{M}$, $d_{1},d_{2}\in D^{M}$

$$(d_3,d_4)\in R^M$$
 , $d_3,d_4\in D^M$ אז לכל ($0,0)\in R^M$, $d_1,d_2\in D^M$ אם לכל

הטענה הזאת אינה מתקיימת מכיוון שהתנאי מתקיים אבל המסקנה לא מתקיימת כי $(1,1) \notin R^M$ בסתירה.

לוגיקה תרגול 10

2019 ביולי

:1 תרגיל

 $arphi=orall x_1orall x_2(R(x_1,x_2) o R(x_2,x_1))$ נתון מילון $au=\langle R(\circ,\circ),F_1(\circ),F_2(\circ,\circ),c
angle$ נתון מילון אילו מבנים יספקו את הפסוק?

פתרון:

 $M=\langle \mathbb{N},=,-,+,7
angle$ כל המבנים M שעבורם R^M הוא יחס סימטרי נוכיח את הטכנה.

יהי T מבנה כלשהו עבור au אז:

$$\Leftrightarrow M \vDash \varphi$$

$$\Leftrightarrow M \vdash \varphi, s$$

$$\Leftrightarrow M \vDash \varphi$$

$$\Leftrightarrow M \vDash \varphi \text{ ,s } t \text{ ccc } s, t$$

 $\Leftrightarrow (s'(x_2),s'(x_1)) \in R^M \text{ in } (s'(x_1),s'(x_2)) \in R^M \text{ and } d_1,d_2 \in D^M$ לכל s, שוא s (s, s) או s (s) או s (s) או s (s) או s) או s

(כל המעברים דו־כיווניים ולא דורשים הסבר כי הם מבוססים על ההגדרה).

:2 תרגיל

$$\Sigma=\{R(t,x_0)|$$
 ע"ע $t\}$ י, גדיר $au=\langle R(\circ,\circ),F(\circ,\circ),c_0,c_1
angle$ נגדיר

- Σ ספיקה. חוכיחו כי
- $\Sigma \nvDash \forall x_1 R(x_0, x_1)$ 2. הוכיחו כי

פתרון סעיף 1:

$$\Sigma$$
 ווכיח כי קיים במנה M והשמה s המספקים את נוכיח כי קיים במנה $M=\langle\{a\},\{(a,a)\},f,a,a\rangle$ ובחר במבנה $s(x_1)=a$ ההשמה s ההשמה $f(a,a)=a$ כאשר לכל $M\models R(t,x_0)$ מתקיים $R(t,x)\in \Sigma$ לכל $\Leftrightarrow M\models R(t,x_0)$ ולכך R^M $R(t,x_0)$ ולכך R^M

:2 פתרון סעיף

הוכחה:

$$s(x_i)=0$$
 ההשמה s , תהי $M=\langle \mathbb{N},\geq,+,0,1 \rangle$ נסמן:

$$\Leftrightarrow M \vDash R(t,x_0)$$
 מתקיים $R(t,x_0) \in \Sigma$ לכל : $M \vDash \Sigma$.1 נראה כי .1 גראה לכל : $\overline{s}(t) \ge 0 \Leftrightarrow (\overline{s}(t),\overline{s}(x_0)) \in R^M$

 $M
ot problem (x_0,x_1)$ ב נראה $R(x_0,x_1)$ איז $R(x_0,x_1)$ מספיק להראות $R(x_0,x_1)$ כך ש $R(x_0,x_1)$ איז $R(x_0,x_1)$ אוני $R(x_0,x_1)$ אוני $R(x_0,x_1)$ כי לא מתקיים $R(x_0,x_1)$ אוני $R(x_0,x_1)$ כי לא מתקיים $R(x_0,x_1)$ אוני $R(x_0,x_1)$ כי לא מתקיים $R(x_0,x_1)$

תרגיל 3:

 $. au = \langle R(\circ,\circ), F(\circ)
angle$ נתון מילון

עבור כל אחת מהנוסחאות הבאות, הוכיחו או הפריכו כי היא אמת לוגית:

$$\varphi_1 = \forall x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2))$$
 1

$$\varphi_2 = \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2)) \rightarrow \forall x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2)$$
 .2

פתרון:

- .1 יועלה לאתר הקורס.
- 2. הטענה אינה נכונה: נבחר מבנה והשמה: $M=\langle\{0,1\},\{(0,0)\},F^M\rangle$ $s(x_i)=0$ השמה s השמה s השמה לכל $f^M(n)=0$