לוגיקה - תרגול 8

גדירות - תזכורות

<u>הגדרה 1:</u> השמה המספקת קבוצת פסוקים Σ נקראת מודל של Σ.
קבוצת המודלים של Σ היא הקבוצה: $M(\Sigma) = \{v \in \mathrm{Ass} \mid v \models \Sigma\}$

<u>הגדרה 2:</u> קבוצת השמות K נקראת <u>גדירה</u> אם קיימת קבוצת פסוקים Σ כך ש־$M(\Sigma) = K$. אחרת K נקראת <u>לא</u> גדירה.

הוכחת גדירות

<u>איך מוכיחים שקבוצת השמות K היא גדירה?</u>

1. מראים קבוצת פסוקים Σ <u>מפורשת</u>.
2. מוכיחים כי $M(\Sigma) = K$ על ידי הכלה דו־כיוונית.

<u>תרגיל 1:</u> לכל $j \in \mathbb{N}$ נגדיר את קבוצת ההשמות : $K_j = \{ v \mid$ אטומים j לכל היותר ל־T נותנת $v\}$.
הוכיחו כי לכל $j \in \mathbb{N}$, הקבוצה K_j גדירה.

<u>תרגיל 2:</u>

תהיינה $X, Y \subseteq WFF$.
הוכיחו כי $M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y)$.

משפט הקומפקטיות - תזכורת

לכל קבוצת פסוקים Σ מתקיים, Σ ספיקה אמ"מ כל תת־קבוצה <u>סופית</u> של Σ ספיקה.

הוכחת אי־גדירות

איך מוכיחים שקבוצת השמות K אינה גדירה?

1. מניחים בשלילה ש־K גדירה ו־X היא קבוצת הפסוקים המגדירה אותה $M(X) = K$.
   (לשים לב: לא ניתן להניח דבר על X פרט לכך שהיא מגדירה את K).

2. בוחרים קבוצת פסוקים מפורשת Y שעבורה ידוע (או שניתן להוכיח בקלות) מהו $M(Y)$ (קבוצות שכדאי לנסות: $Y = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $Y = \{\neg p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$).

3. מוכיחים ש־$X \cup Y$ איננה ספיקה על ידי כך שמראים ש־$M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y) = K \cap M(Y) = \emptyset$.

4. מוכיחים ש־$X \cup Y$ ספיקה על ידי שימוש במשפט הקומפקטיות.
   תהי $D \subseteq X \cup Y$ סופית.
   נסמן $D_X = D \cap X$ ו־$D_Y = D \cap Y$
   נבנה השמה v המספקת את D_Y ו־D_X. נתחיל בבניה ע"פ מבנה הפסוקים ב־D_Y ונשלים אותה כך ש־$v \in K$.
   נוכיח שהבניה מספקת את D_Y.
   $v \in K \Leftarrow v$ מספקת את $X \Leftarrow v$ מספקת את D_X.
   v מספקת את D_X ו־$D_Y \Leftarrow v$ מספקת את $D = D_X \cup D_Y$.

5. מ־3+4 מקבלים סתירה ולכן K אינה גדירה.

תרגיל 3:

הוכיחו כי $K_{fin} = \{v \in \mathrm{Ass} \mid v$ נותנת T למספר סופי של אטומים$\}$ אינה גדירה.

תרגיל 4:

הוכיחו כי $K_{inf} = \{v \in \mathrm{Ass} \mid v$ נותנת T לאינסוף אטומים$\}$ אינה גדירה.

תרגול 8 לוגיקה

תרגיל 2:

תהיינה $X,Y \subseteq \mathrm{WFF}$
הוכיחו כי $M(X\cup Y)=M(X)\cap M(Y)$

הוכחה:

$\Leftarrow$ תהיי $v\in M(X)\cap M(Y)$
יהיה $\varphi\in X\cup Y$ לפי הגדרת איחוד $\varphi\in X$ או $\varphi\in Y$
בה"כ $\varphi\in X$, לפי הגדרת חיתוך $v\in M(X)$ ולפי הגדרת קבוצת מודלים.
$v\vDash\varphi$. לפי הגדרת מודלים קבוצת מודלים $v\in M(X\cup Y)$.
באותו אופן ההוכחה אם $\varphi\in Y$.
$\Rightarrow$ $\subseteq$: $v\in M(X\cup Y)$.
צ"ל: $v\in M(X)$ וגם $v\in M(Y)$
$M(x)$: יהיה $\varphi\in X$. מהגדרת קבוצת מודלים $v\vDash\varphi$.
מהגדרת קבוצת מודלים $v\in M(x)$.
באותו אופן עבור $M(Y)$.

תרגיל 3:

הוכיחו כי $K_{fin}=\{v\in\mathrm{Ass}|$ למספר סופי של אטומים T נותנת $v\}$ אינה גדירה.

הוכחה:

1. נניח בשלילה ש K_{fin} גדירה.
אז קיימת קבוצת פסוקים x כך ש־$M(X)=K$.

2. נבחר $Y=\{p_i|i\in\mathbb{N}\}$. ניתן לראות כי $M(Y)=\{V_T\}$.

3. $X\cup Y$ אינה ספיקה: V_Tנותנת T לאינסוף אטומים
ולכן $V_T\notin K_{fin}$. ולכן
$M(X\cup Y)=M(X)\cap M(Y)=K_{fin}\cap\{V_T\}=\emptyset$.

4. נוכיח בעזרת משפט הקומפקטיות ש־$X\cup Y$ ספיקה.
תהיי $D\subseteq X\cup Y$ תת־קבוצה סופית.
נסמן: $D_X=D\cap X$, $D_y=D\cap Y$.
מכיוון ש־$D_Y\subseteq D$ ו־D סופית אז גם D_Yסופית.
ולכן היא מהצורה: $D_Y=\{p_{i_1},p_{i_2},\dots,p_{i_k}\}$.
נסמן ב־m את האינדקס המקסימלי של D_i ב־D_Y
($m=1$ אם $D_Y=\emptyset$), מאחר ו־D_Yסופית בהכרח קיים m כזה.
נגדיר השמה v באופן הבא:
$$v(p_I)=\begin{cases}T & i\le m\\ F & i>m\end{cases}$$
* כל הפסוקים ב־D_Y הם מהצורה D_i כאשר $i\le M$'
ולכן v מספקת אותם $\Leftarrow$ $v\vDash D_Y$.
* מכיוון ש־$v\in K_{fin}$ (נותנת T למספר שופי של אטומיים)
$\Leftarrow v\in M(X)\Leftarrow v\vDash X\Leftarrow v$ מספקת כל פסוק ב־X ובפרט כל
פסוק ב־$D_X\subseteq X$ $\Leftarrow$ $v\vDash D_X$.
בסה"כ קיבלנו כי v מספקת את D_x ואת D_yולכן גם את $D=D_X\cup D_Y$.
הראינו שלכל תת־קבוצה סופית $D\subseteq X\cup Y$ קיימת השמה המספקת אותה ולכן
תת־קבוצה סופית היא ספיקה. ממשפט הקומפקטיות נובע ־$X\cup Y$ ספיקה.

5. 3 ו־4 הם סתירה ולכן K_{fin} אינה גדירה.

תרגיל 4:

הוכיחו כי $K_{inf} = \{v \in \text{Ass}|$ אינסוף אטומים T נותנת $v\}$ אינה גדירה.

הוכחה:

1. same
2. נבחר $Y = \{\neg p_i | i \in \mathbb{N}\}$. ניתן לראות כי $M(Y) = \{V_F\}$.
3. $X \cup Y$ אינה ספיקה: V_f נותנת ערך T לאפס אטומים (ובפרט לא לאינסוף) ולכן $v_f \notin K_{inf}$ ולכן:
$$M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y) = K_{inf} \cap \{V_K\} = \emptyset$$
4. $D_Y = \{\neg p_{i_1}, \dots, p_{i_k}\}$.
נסמן ב־m את האינדקס המקסימלי של $\neg p_i$ ב־D_Y.
נבנה השמה v:
$$v(p_i) = \begin{cases} F & i \leq m \\ T & i > m \end{cases}$$