לוגיקה - תרגול 2

<u>תזכורת:</u> בתרגול הקודם הגדרנו את הקבוצה האינדוקטיבית הבאה:

- העולם: $X = \{s,t\}^*$.
- הבסיס: $B = \{\epsilon, st, ts\}$.
- פו' היצירה: $\mathrm{F} = \{f_1, f_2\}$, כאשר:
  - $f_1(w_1, w_2) = sw_1w_2t$
  - $f_2(w_1, w_2) = w_1w_2w_1$

<u>איך מראים שאיבר a שייך לקבוצה אינדוקטיבית ($a \in \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$)?</u>

<u>משפט 1:</u> $a \in \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$ אם ורק אם קיימת ל-a סדרת יצירה מעל B ו-F

ע"פ התרגול הקודם הוכחנו כי $st, sstt, tststs \in X_{B,F}$.

<u>איך מראים שאיבר a אינו שייך לקבוצה אינדוקטיבית ($a \notin \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$) ?</u>

נמצא קבוצה $T \subseteq \mathrm{X}$ המקיימת:

1. $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}} \subseteq T$
2. $a \notin T$

מסקנה: $a \notin \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$

<u>תרגיל 1:</u> עבור $X_{B,F}$ מהדוגמה הוכיחו כי $tst \notin X_{B,F}$.

<u>תרגיל 2:</u>

נתון:

- העולם: $\mathrm{X} = \{a,b\}^*$ - קבוצת המילים באותיות a ו-b.
- הבסיס: $B = \{aa\}$.
- פונקציות היצירה: $\mathrm{F} = \{f\}$, כאשר:

$$f(w) = \begin{cases} aawb & \text{אם } w \text{ מתחיל ב } - a \\ bbwa & \text{אחרת} \end{cases}$$

1. הוכיחו/ הפריכו: $bba \in \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$
2. הוכיחו/ הפריכו: $aabb \in \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$

<u>תרגיל 3</u>: תהיינה $S_1 = \mathrm{X}_{B_1,\mathrm{F}_1}$ ו־$S_2 = \mathrm{X}_{B_2,\mathrm{F}_2}$ כך ש־$S_1 = S_2$.
הוכיחו כי מתקיים $S_1 = \mathrm{X}_{B_1 \cup B_2, \mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2}$.

$$T = \{w \in \{s,t\}^* |\ |w|\%2 = 0\}$$
$$tst \notin T$$
$$|tst|$$
$$X_{B,F} \subseteq T$$

$$tst \in X_{B,F} \Leftarrow$$

$$T_1 = \{w \in \{a,b\}^* | aw\}$$
$$``X_{B,F} \subseteq T_1$$

$$w \in Bw \in T_1$$
$$aw \cdot \epsilon w = aa$$

$$au'u' \in T_1$$
$$aw'``u = f(w')$$
$$aww = aaw'b$$
$$bba \notin T_1 X_{B,F} \subseteq T_1$$
$$bba \notin X_{B,F} a$$

$$w \Leftarrow \#a(w)$$
$$T_2 = \{w \in \{a,b\}^* |\ \#_a(w) > \#_b(w)\}$$
$$w = aaw \in T_2 w \in B$$
$$\#_a(w) = 2 > 0 = \#_b(w)$$
$$\#_a(w') > \#_b(w') w' \in T_2$$
$$w = f(w')$$

$$w = aaw'baw'$$
$$\#_a(w') > \#_b(w')``$$
$$\#_a(w) = 2 + \#_a(w') > 1 + \#_b(w') = \#_b(w)$$
$$``w = bbw'abw'$$
$$\#_a(w) = 1 + \#_a(w')$$
$$\#_b(w) = 2 + \#_b(w')$$
$$\#_a(w) > \#_b(w)$$
$$w' = baa$$

$$X_{B,F}$$

a

$T_2^{'} = \{w \in \{a,b\}^* | w \in X_{B,F}, \#_a(w) > \#_b(w)\}$

$w = aaw \in T_2^{'} w \in B$
$w \in X_{B,F} w \in B$
$w \in T_2^{'} \#_a(w) = 2 > 0 = \#_b(w)$
$w' \in T_2^{'}$
$\#_a(w') > \#_b(w') w' \in X_{B,F}$
$aw' \in X_{B,F}$ “$w = f(w')$
$w = aaw'b$

$X_{B,F} f \in F w' \in X_{B,F}$ “
$w \in X_{B,F}$

$\#_a(w') > \#_b(w')$ “
$\#_a(w) = 2 + \#_a(w') > 1 + \#_b(w') = \#_b(w)$
$aabb \in T_2^{'} X_{B,F} \subseteq T_2^{'}$
$\#_a(aabb) = \#_b(aabb)$
$aabb \notin X_{B,F}$

$f X_{B,F}$
$X_{B,F}$
$T_B = \{w \in X | w \in X_{B,F} f w\}$

$X = X_{B_1 \cup B_2, F_1 \cup F_2}$
“$X = S_1$

$S_1 \subseteq X$ •

$B_1 \subseteq X$
$B_1 \subseteq B_1 \cup B_2 \subseteq X$

$a_1, \ldots, a_n \in X$
$f \in F_1$
$f(a_1, \ldots, a_n) \in X$
$f \in F_1 \cup F_2 \Leftarrow f \in F$
“$F_1 \cup F_2 x$
$f(a_1, \ldots a_n) \in X$

$X \subseteq S_1$

$B_1 \cup B_2 \subseteq S_1$

$b \in B_1 \cup B_2$

$b \in B_2 b \in B_1$

- “$b \in S_1 b \in B_1$
- “$b \in S_2 b \in B_2$

$b \in S_1 S_1 = S_2$

$a_1, \ldots, a_n \in S_1$
$f \in F_1 \cup F_2$
$f(a_1, \ldots, a_n) \in S_1$

- $f(a_1 ... a_n) \in S_1 \Leftarrow a_1, \ldots, a_n \in S_1 f \in F_1$
- $a_1 \ldots a_n \in S_2 \Leftarrow S_1 = S_2 a_1, \ldots, a_n \in S_1 f \in F_2$

$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S_2 \Leftarrow F_2 S_2$
$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S_1 \Leftarrow S_1 = S_2$