לוגיקה - תרגול 5

מערכת הוכחה לתחשיב הפסוקים

המוגדרת באופן אופך האינדוקטיבית הפסוקים היכיחים, ווערכת האינדוקטיבית קבוצת הפסוקים היכיחים, ווערכת האינדוקטיבית החוכחה:

- $X = \text{WFF}_{\{\neg, \rightarrow\}} \bullet$
- באר: כאשר: האקסיומות, כאשר: $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

$$A_1 = \left\{ \alpha \to (\beta \to \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg, \to\}} \right\} -$$

$$A_2 = \left\{ (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{WFF}_{\{\neg, \to\}} \right\} -$$

$$A_3 = \{ ((\neg \beta) \to (\neg \alpha)) \to (\alpha \to \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg, \to\}} \} -$$

 $rac{lpha, lpha o eta}{eta}$ קבוצת כלל הניתוק ההיסק, כאשר MP הוא כלל הניתוק י קבוצת כללי ההיסק. $MP\left(lpha, lpha o eta
ight) = eta$ צורת רישום נוספת: $MP\left(lpha, lpha o eta
ight) = eta$

דוגמאות:

(שייך בסיס)
$$(\underbrace{p_1}_{lpha}
ightarrow (\underbrace{p_2}_{eta}
ightarrow \underbrace{p_1}_{lpha})) \in Ded\left(\emptyset
ight)$$

(שייך לבסיט)
$$(\underbrace{[p_1 \to [p_2 \to p_1]]}_{\alpha} \to \underbrace{[p_0 \to [p_1 \to [p_2 \to p_1]])}_{\beta}) \in Ded(\emptyset)$$

(הפעלת שני הקודמים) ($p_0 o (p_1 o (p_2 o p_1))) \in Ded\left(\emptyset\right)$

... α ששייך לקבוצה האינדוקטיבית ($\alpha \in Ded\left(\emptyset\right)$) נקרא פסוק יכיח, ויסומן α

הוכחה הוכחה פורמלית). כלומר סדרת הוכחה (או הוכחה פורמלית). סדרת היצירה של α נקראת סדרת הוכחה (או הוכחה פורמלית). כלומר סדרת היצירה של פסוקים $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ כך שמתקיים:

- $.lpha_n=lpha$.1
- :מתקיים מתקיים.
- הוא אקסיומה $lpha_i$ (א)

או

MP התקבל מפסוקים קודמים על ידי הכלל $lpha_i$

מערכת הוכחה עם הנחות

היא הקבוצה $Ded\left(\Sigma\right)$, (הנחות), בערכת הוכחה עם הנחות: קבוצת הפסוקים היכיחים מקבוצת פסוקים (הנחות), היא הקבוצה הגדרה 4, מערכת הוכחה עם הנחות: קבוצת מהגדרה 1). האינדוקטיבית $X_{B\cup\Sigma,F}$ (עבור X, B ור

- $.\Sigma \vdash \alpha$ ונסמן $\underline{\Sigma}$ יכיח מיכ מאמר ני $\alpha \in Ded\left(\Sigma\right)$ •
- Δ מתוך מעל סדרת היצירה של פסוק lpha מעל $Ded\left(\Sigma
 ight)$ נקראת סדרת הוכחה של lpha
 - . (ללא הנחות), קבוצת הפסוקים היכיחים (ללא הנחות), $Ded\left(\emptyset\right)=X_{B,F}$ אז $\Sigma=\emptyset$

 $\{\alpha, \neg \alpha\} \vdash \beta$ מתקיים $\{\alpha, \beta\}$ מתקיים כי לכל זוג נוכיח כי לכל זוג פסוקים

תכונות מערכת ההוכחה:

 $.\alpha,\beta\in {\rm WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$ יהיי $\Sigma,\Gamma\subseteq {\rm WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$ יהיי

 $\Sigma \vdash \alpha$ אז $\alpha \in \Sigma$ אם .1 ... הנחת המבוקש: אם ... הוכחה: ל- α יש סדרת הוכחה באורך באורך מעל

 $\Sigma \vdash \alpha$ סופית כך ש־ $\Sigma \vdash \alpha$ אז קיימת $\Gamma \vdash \alpha$ אז קיימת סופית כך ש־ $\Sigma \vdash \alpha$ סופית ההוכחה: אינטואיציה: בסדרת ההוכחה של מספר סופי של פסוקים, ולכן בהכרח משתמשים רק במספר סופי של הנחות מתוך Γ .

 $\Gamma \vdash \alpha$ אז $\Sigma \subseteq \Gamma$ וגם $\Sigma \vdash \alpha$ אם $\Omega \vdash \alpha$. 3 מעל $\Omega \vdash \alpha$ מעל α אינטואיציה: סדרת ההוכחה של α מעל α מעל α מעל סדרת הוכחה של α

4. α אז α אז α אז $\beta \in \Sigma$ אם לכל α אם α אנטואיציה: בסדרת ההוכחה של α מתוך α , נחליף כל מופע של פסוק $\beta \in \Sigma$ בהוכחה של α מתוך α .

 $\Sigma \cup \{lpha\} \vdash eta$ אם ורק אם $\Sigma \vdash lpha
ightarrow eta$ מתקיים: $lpha
ightarrow eta
ightarrow \Delta$ אם ורק אם $\Delta \vdash \alpha
ightarrow \Delta$ מתקיים: משפט הדדוקציה אינו מוסיף כוח הוכחה, כלומר כל מה שניתן להוכיח בעזרתו ניתן להוכיח גם בלעדיו. משפט זה רק מקל על הוכחת קיום סדרת הוכחה.

תרגיל 1: הוכיחו שהפסוק (eta o(eta o(eta olpha)) יכיח, בעזרת משפט הדדוקציה.

משפט הנאותות

 $\Sigma \models \alpha$ אז $\Sigma \vdash \alpha$ אז $\Sigma \vdash \alpha$ מתקיים, אם Σ מתקיים לכל קבוצת פסוקים Σ מתקיים, אם $\Sigma \vdash \alpha$ אז $\Sigma \vdash \alpha$ סימון: $\Sigma \vdash \alpha \models \alpha$ סימון: $\Sigma \vdash \alpha \models \alpha$ אז $\Sigma \not\vdash \alpha$ אז $\Sigma \not\vdash \alpha$ אז $\Sigma \not\vdash \alpha$ מסקנה ממשפט הנאותות: אם $\Sigma \not\vdash \alpha$ אז $\Sigma \not\vdash \alpha$

 $\models \alpha$ אז $\vdash \alpha$ משפט הנאותות הצר: אם

 $.{
m WFF}_{\{\lnot,\lor\}}$ נגדיר מערכת הוכחה חדשה עבור :2 נגדיר מערכת אקסיומות: ${
m A}=\left\{lpha\lor(\beta\lor\lnotlpha)\mid lpha,\beta\in{
m WFF}_{\{\lnot,\lor\}}
ight\}$ כללי ההיסק: לכל $lpha,eta\in{
m WFF}_{\{\lnot,\lor\}}$

$$MV_1(\alpha,\beta) = \alpha \vee \beta$$
 .1

$$MV_2(\alpha, (\neg \alpha) \lor \beta) = \beta$$
 .2

נסמן ב־ $Ded_N\left(\emptyset\right)$ את קבוצת הפסוקים היכיחים במערכת החדשה, ואם $\varphi\in Ded_N\left(\emptyset\right)$ אז נסמן באופן דומה באופן היכיחים במערכת במערכת במערכת בעבור בסוקים היכיחים במערכת החדשה בערכת החדשה בערכת בערכת בעבור בעבור בעבור בעבור בעבור בערכת החדשה בערכת החדשה בערכת העבוצת הנחות בעבור בעבור בערכת העבוצת הנחות בערכת בערכת העבוצת הנחות בערכת בע

.(\(\varphi \varphi

תרגול 5 לוגיקה

דוגמה:

סדרת הוכחה:

.		
$\neg \alpha \to (\neg \beta \to \neg \alpha)$	A_1	.1
$\neg \alpha$	הנחה	.2
$\neg \beta \rightarrow \neg \alpha$	$MP_{1,2}$.3
$(\neg \beta \to \neg \alpha) \to (\alpha \to \beta)$	A_3	.4
$\alpha \to \beta$	$MP_{3,4}$.5
α	הנחה	.6
β	$MP_{5,6}$.7

:1 תרגיל

. הוכיחו שהפסוק יכיח יכיח $\alpha \to (\beta \to (\beta \to \alpha))$ הוכיחו הוכיחו

הוכחה (לפי דדוקציה):

$$\begin{split} &\alpha \to (\beta \to (\beta \to \alpha)) \\ &\Leftrightarrow (\text{deduction}) \\ &\{\alpha\} \vdash \beta \to (\beta \to \alpha) \\ &\Leftrightarrow (\text{deduction}) \\ &\{\alpha,\beta\} \vdash \beta \to \alpha \\ &\Leftrightarrow (\text{deduction}) \\ &\{\alpha,\beta\} \vdash \alpha \end{split}$$

מתקיים $\alpha, \beta \vdash \alpha$ מהנחת המבוקש.

$$Ded(\Sigma) = \left\{ lpha \in \mathrm{WFF}_{\{\lnot, \to\}} | \Sigma \vdash lpha
ight\}$$
 אינדי

$$Con(\Sigma)=\left\{lpha\in {
m WFF}_{\{\lnot,
ightarrow\}}\mid \Sigma\vDashlpha
ight\}$$
 לא אינדי

:2 תרגיל

ענדיר מערכת הוכחה חדשה עבור עבור מערכת מערכת נגדיר מערכת $A=\left\{lpha\lor(\beta\lor\lnotlpha)\mid lpha,eta\in \mathrm{WFF}_{\{\lnot,\lor\}}
ight\}$ כלל ההיסק: לכל להיסק:

$$MV_1(\alpha,\beta) = \alpha \vee \beta$$
 .1

$$MV_2(\alpha, (\neg a) \lor \beta) = \beta$$
 .2

נסמן ב- $Ded_N(\emptyset)$ את קבוצת הפסוקים היכיחים במערכת החדשה, ואם וואס $Ded_N(\emptyset)$ את קבוצת הפסוקים היכיחים במערכת במערכת נסמן ב-אוני באופן דומה נסמן באופן דומה נסמן בווא באופן דומה נסמן באופן דומה נסמן באופן באופן דומה נסמן באופן דומה נסמן באופן דומה במערכת במערכת באופן דומה נסמן באופן באופן דומה נסמן באופן באופן דומה נסמן באופן דומה נסמן באופן דומה נסמן באופן דומה נסמן באופן בא

 $arphi\in lpha\in \alpha$ פסוק לכל (כלומר, לכל מאותה החדשה החדשה ההוכחה כי מערכת ההוכחה החדשה אז $arphi\in \alpha$ אז $arphi\in \alpha$ אז $arphi\in \mathcal{C}$ אז $arphi\in \mathcal{C}$ אז $arphi\in \mathcal{C}$

פתרון:

נוכיח באינדוקציית מבנה ש:

$$(\vDash \varphi \Leftarrow \vdash_N \varphi) \ Ded_N(\phi) \subseteq Con(\phi)$$

בסיס: טעבלת טעבלת טעבלת אמת: בסיס: לכל $\models \alpha \lor (\beta \lor \neg \alpha)$ בר בסיס: נראה בסיס:

α	β	$\neg \alpha$	$\beta \vee \neg \alpha$	$\alpha \vee (\beta \vee \neg \alpha)$
T	Т	F	T	T
T	F	F	F	T
F	Т	T	T	T
F	F	T	Т	T

$$otag$$
 בלומר eta , $otag$ כלומר $lpha$, $otag$ כלומר נניח

$$\delta = MV_1(\alpha, \beta) = \alpha \vee \beta \star$$

 $v \in ASS$ תהיי

$$\overline{V}(\alpha \vee \beta)TT_v(\overline{V}(\alpha), \overline{V}(\beta)) = TT_V(T, T) = T$$
induction def.

$$\delta = MV_2(\alpha_1(\neg \alpha) \lor \gamma) = \gamma \quad \beta = ((\neg \alpha) \lor \gamma) \star$$

 $v \in ASS$ תהיי

$$\begin{split} \overline{V}(\alpha) &= T \\ \overline{V}(\beta) &= \overline{V}((\neg \alpha) \lor \gamma) = T \\ \overline{V}(\neg) &= TT_{\neg}(\overline{V}(\alpha)) = TT_{\neg}(T) = F \end{split}$$

. לפי טבלת אמת לפי לפי
$$\overline{V}(\gamma)=T$$
 לפי ה"א. $\alpha \underbrace{\overline{V}(\gamma)=\alpha}_{\text{not mandatory}} \star$