

## לוגיקה הרצאה 4

### סמנטיקה של פסוקי:

$$\begin{aligned}
 v : \{p_i | i \in \mathbb{N}\} &\rightarrow \{T, F\} \text{ נתונה המשווה} \\
 \bar{V} = WFF &\rightarrow \{T, F\} \text{ מגדירים} \\
 \bar{V}(p_i) &= v(p_i) \quad \alpha = p_i \text{ אם} \\
 \bar{V}(\alpha) &= TT_{\Box}(\bar{V}(\beta), \bar{V}(\gamma)) \text{ אז } \alpha = (\beta \Box \gamma) \text{ אם} \\
 \bar{V}(\alpha) &= TT_{\neg}(\bar{V}(\beta)) \text{ אז } \alpha = (\neg \beta) \text{ אם}
 \end{aligned}$$

### מושגים סמנטיים:

#### טאוטולוגיה

הוא פסוק שמקבל ערך T לכל השמה

#### סתירה:

פסוק שמקבל ערך F לכל השמה.

מה משמעות שך  $v(\neq) \alpha$

$$\bar{V}(\alpha) = F$$

$$(\neq \alpha)$$

לא בהכרח סתירה

$\Leftarrow$  לא בהכרח טאוטולוגיה.

### דוגמה:

בבינתן קבוצה של פסוקים X

$$v \models X$$

אם  $\alpha \in X$  לכל  $v \models \alpha$

$\bigwedge_{\alpha \in X} \alpha$  - לא כתיבה חוקית כי לא פסוק, יתכן סדרה אינסופית של סמימנים.

פסוק  $\beta$  נובע לוגית מפסוק  $\alpha$  (סימון  $\alpha \models \beta$ ) אם כל השמה מספקת של  $\alpha$  מספקת גם את  $\beta$ .

### למה:

$$\models \alpha \rightarrow \beta \text{ אם ורק אם } \alpha \models \beta$$

### הוכחה:

$$\models \alpha \rightarrow \beta \text{ "צ"ל } \alpha \models \beta$$

נבחר השמה  $V$ :

**מקרה 1:**  $\bar{V}(\alpha) = F, \neg \models \alpha$   
אז

$$V \models \alpha \rightarrow \beta$$

$$TT_{\rightarrow}(\underbrace{\bar{V}(\beta)}_{F \text{ or } FT \text{ or } FF}) = T$$

**מקרה 2:**  $V \models \alpha, \bar{V}(\alpha) = T$   
עס  $V \models \beta$  גם,  $\alpha \models \beta$   
ולכן  $V \models \alpha \rightarrow \beta$

$\Rightarrow$  נתון  $\models \alpha \rightarrow \beta$   
צ"ל  $\alpha \models \beta$   
**2 מקרים:**

1.  $\bar{V}(\alpha) = T$   
מאחר ש-  $\alpha \rightarrow \beta$  טאוטולוגיה אז  $\bar{V}(\alpha \rightarrow \beta) = B$   
מסקנה עפ"י  $\bar{V}(\beta) = T : TT_{\rightarrow}$

2.  $\bar{V}(\alpha) = F$   
אין צורך להוכיח כי  $\models$  מתקיים וריינאלי.

**דוגמה:**

בהינתן קבוצת פסוקית  $X$  נאמר ש  $X \models \beta$  אם כל השמה שמספקת את  $X$  (כלומר את כל  $\alpha \in X$ ) מספקת גם את  $\beta$ .

**דוגמה:**

$$\alpha \rightarrow \beta, \alpha \models \beta$$

$$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \models \beta$$

**למה:**

$$X \models \alpha \rightarrow \beta \text{ אם ורק אם } X, \alpha \models \beta$$

-

**סימון:**

$$M(\alpha)\{v|v \models \alpha\}$$

$$M(X) = \{v|v \models X\}$$

$$M(\alpha) = \emptyset \text{ סתירה: } \alpha$$

$$M(\alpha) \subseteq M(\beta), \alpha \models \beta$$

## שקילות לוגית

זוג פסוקים  $\beta, \alpha$  שקולים לוגית אם הם מקבלים אותו ערך אמת בכל השמה. במילים אחרות, לכל השמה  $v$ .  $\bar{v}(\alpha) = \bar{v}(\beta)$   
 $\alpha \equiv \beta$  סימון  $M(\alpha) = M(\beta)$

## דוגמה לפסוקים שקולים:

• כל הטאוטולוגיות

• כל הסתירות

$$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$$

$$(\neg(\neg\alpha)) \equiv \alpha$$

## למה:

logic connect

$$\models \alpha \iff \beta$$

## שלמות של מערכת קשרים:

**הגדרה:** פסוק  $\alpha$  מממש טבלת אמת נתונה אם טבלת האמת של  $\alpha$  זהה לטבלה הנתונה.

נראה:  $\wedge, \vee, \neg$

עבור טבלת אמת עם  $k$  פסוקים אטומיים יש לה  $2^k$  שורות

$$TT : \{T, F\}^k \rightarrow \{T, F\}$$

## דוגמה:

קשר לוגי "רוב" #

תלת-ערה(תלת מקומי?)

$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\#(p_1, p_2, p_3)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

## שורות שקבלו $T$ :

$$1. \alpha_1 = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$$

$$2. \alpha_2 = p_1 \wedge p_2 \neg p_3$$

$$3. \alpha_3 = p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3$$

$$4. \alpha_5 = \neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$$

$$\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \alpha_5$$

## טענה:

$\alpha$  מממשת את טבלת האמת של #.  
 עבור טבלת אמת שבה כל השורות מחזירות  $F$   
 נחזיר  $p_1 \wedge \neg p_1$  כאשר  $p_1$  הוא פסוק אטומי שמופיע בטבלה.

$p_2$	$p_1$	$?(p_1, p_2)$
F	F	F
F	F	F
F	F	F
F	F	F

$(p_1 \wedge \neg p_1)$

## המשך:

$\{\wedge, \neg\}$  גם מערכת קשרי שלמה  
 $(\alpha \vee \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$   
 $\{v, \neg\} \leftarrow (\alpha \wedge \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$  מערכת קשרים שלמה  
 $\{\neg, \leftarrow\}$  מערכת קשרים שלמה  
 $(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \rightarrow \beta$

T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
F	F	F	T

## הגדרה:

נגדיר קבוצה אינדוקטיבית של קבוצת המשפטים הפורמליים או הפסוקים היכחים.

**בסיס(אקסיומות[קבוצת פסוקים]):** (עוזרים להוכיח/לקבל פסוקים חדשים עס' פסוקים נתונים).  
 כללי יצירה/פעולות

**כללי היצירה:**  $\alpha, \alpha \rightarrow \beta$  (למעלה נתון שיכית, גורר שלמטה גם).

MP-Modus Promens , כלל הניתוק

## קבוצות האכסיומות של תחשיב הפסוקים

תבנית ראשונה  $A1$ :

פסוק  $\delta$  הוא אכסיומה מטיפוס  $A1$

אם קיימים פסוקים  $\beta, \alpha$  כך ש-

$$\delta = (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$$

$A2$ :

$\delta$  מהצורה:

$$\delta = (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

$A3$ :

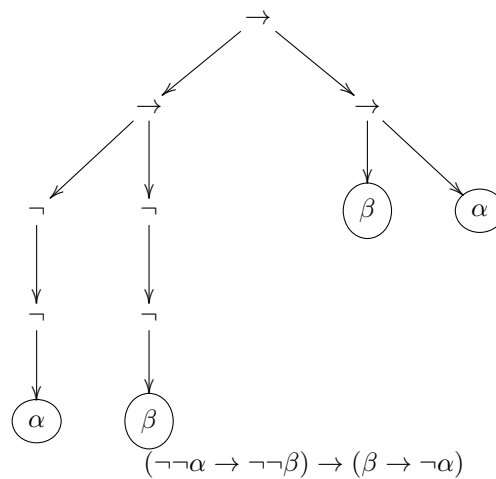
$\delta$  מהצורה

$\delta = ((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$   
 קבוצת הבסיס  $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ .

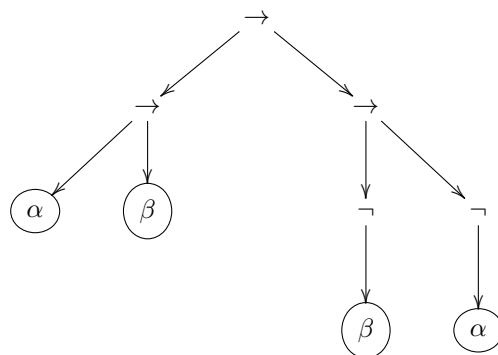
**דוגמאות:**

$(p_2 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) : A_1$   
 $(\neg\neg p_5 \rightarrow \neg p_5) \rightarrow (p_5 \rightarrow \neg p_5)$

**עץ יצירה עבור אכסיומה 3**



**$A_3$  האם הוא  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ ?**



**להראות שפסוק יחיד:**

להראות סדרת יצירה - נקרא לה סדרת הוכחה  
 סדרת הוכחה עבור פסוק  $\beta$   
 הינה סדרה של פסוקים  $a_1, a_2, \dots, a_n$   
 כך ש-

$$a_b = \beta \bullet$$

לכל  $a_i$  ,  $1 \leq i \leq n$  התקבלה מהפעלתו.

כלל ההיסק על פסוקים קודמים בסדרה

מה יכול היות  $a_1$ ?

אחת מהאכסיומות

אם פסוק  $\alpha$  יכיח נסמן  $\vdash \alpha$ .