לוגיקה הרצאה 9

גדירות:

קבוצה של פסוקים $K = M(\Sigma)$ (קבוצה של השמות)
קבוצת השמות K היא גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים Σ עד ש־ $K = M(\Sigma)$.

טענה:

לא לכל תת קבוצה של השמות תהיה תת קבוצה של פסוקים שמגדירה אותה.

משקולי ספירה:

כמה נוסחאות: קבוצה בת מניה $\aleph_0$
כמה קבוצות של פסוקים: $2^{\aleph_0}$.
כמה השמות יש: $2^{\aleph_0}$.
קבוצות של השמות: $2^{2^{\aleph_0}}$.
השמה: וקטור אינסופי מעל $\{0,1\}$.

דוגמה לקבוצות של פסוקים גדירים:

נראה קבוצות של פסוקים שהן גדירות.

1. הקבוצה הריקה של השמות ־ K.
   האם קיימת $M(\Sigma) = K$.
   $\Sigma_1 = \{p_1 \wedge \neg p_1\}$
   $\Sigma_2 = \{p_1, \neg p_1\}$
   $\Sigma_3 = \{p_1, \neg p_1, p_2 \vee p_3\}$
2. K ־ מכילה את ההשמות.
   כל Σ שמכילה רק טאוטולוגיות מגדירה את K.
3. $K = \{V_T\}$
   V_T היא ההשמה שנותנת ערך T לכל p_i.
   $\Sigma = \{p_i | i \in \mathbb{N}\}$

כדי להוכיח ש־Σ מגדירה את K צריך להוכיח
$K = M(\Sigma)$.
$v \in M(\Sigma) \Leftrightarrow v(p_i) = T$ לכל $i \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$
$V = V_T \Leftrightarrow v \in K$.

תחשיב היחסים

דוגמה מיותרת לחלוטין:

לכל x [דוברת אמת $(x) \Rightarrow$ יווני (x)]
דובר אמת (סוקרטס) $\Rightarrow$ יווני (סוקרטס)
יווני (סוקרטס)
דובר אמת (סוקרטס)
"לכל מספר טבעי x, x גדול או שווה ל־0"
"לכל x קיים y כך ש־ $x = y + 1$"

שילתות במסדי נתונים

- "האם קיים עובד טכניון שהוא גם סטודנט בטכניון?"
- "האם כל הסטודנטים בטכניון הולכים להופעות יום הסטודנט?"

תחום: המספרים הטבעיים\בני אדם\ הסטונדטים.
קבועים: סוקרטס, 0.
פונקציות: $y+1$.
יחסים: $(x=y+1)$, $=$, $\geq$, דובר אמת.

הסימנים המשותפים

קבוצה בת מניה של מתנים: $x_1, x_2, \dots$
סימנים נוספי:
$\forall$]לכלן, $\exists$]קיים], $\approx$]סימן שוויון], (,) , $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$

מילון

$$\tau = (\underbrace{R_1, R_2, \dots,}_{\text{relation signs}} \quad \underbrace{F_1, F_2, \dots}_{\text{function symbols}} \quad , \quad \underbrace{c_1, c_2, \dots}_{\text{const. symbols}} \quad)$$

$R(\circ)$ - יחס אונארי
$R(\circ, \circ)$ - יחס בינארי
$R(\circ, \circ, \circ)$ - יחס טרינארי
בכל תחשיב יחסים יש סימן קבוע $(\circ, \circ) \approx$

דוגמה:

$\tau = (R_1(\circ, \circ), R_2(\circ), F_1(\circ, \circ), c)$
נדגים פרוש לסימננים בצורה לא פורמלית.
הפרוש/מבנה/פשר M

$$M = \{ \underbrace{D^M}_{\text{M's domain}} \quad , \quad \underbrace{R_1^M, R_2^M}_{\text{relations over } \Delta^M} \quad , F_1^M, c^M \}$$
$$R_1^M : D^M x D^M \to \{T, F\}$$
$$R_1^M : D^M \to \{T, F\}$$
$$F_1^M : D^M x D^M \to D^M$$
$$C^M \in D^M$$

מבנה זה חלק מהסמנטיקה

$D^M = \mathbb{N} \backslash \{0\}$
$R_1^M(x,y) : x \leq y$.
$R_2^M(x)$:ראשוני x
$F_1^M(x,y) : x \cdot y$
$C^M : 3$
$\underbrace{R_2(c)}\wedge(\underbrace{R_1(x,c)} \to R_2(x))$
3 ראשוני $\wedge(x \leq 3 \rightarrow$ ראשוני $x)$.
נכון   נכון אם 1 ראשוני.
אם 1 אינו ראשוני אז $x=2$, $x=3$, $x=20$ הנוסחה T.
עבור $x=1$ מתפרשת כ־F.
סמנטיקה: מבנה + השמה למשתנים.

מבנה אחר

מבנה אחר M_2 שזהה ל־M חוץ מ־ $C^{M_2} = 5$
השמה שנותמת ל־x עבור ערך 4.
הנוסחה היא F
$\neg R_2(F(x,y))$
$\neg R_2(F^M(x,y))$
$x \cdot y$ אינו ראשוני, עבור $x=1$ ו־$y=7$ הטענה אינה נכונה.
$\varphi_3 = \forall x \exists y (F(x,y) \approx x)$
האם נכונה מעל(ביחס ל־M):
"לכל x קיים y כך ש־ $x \cdot y = x$"

נכון, נבחר $y = 1$.
הגדרת מבנה שמעליו נפרש נוסחאות של תחשיב היחסים מעל מילון τ.
בהינתן:
$$\tau = (R_1, R_2, \dots, F_1, F_2, \dots, c_1, c_2, \dots)$$
$$M = (\underbrace{D^M}_{\text{structure's domain}}, R_1^M, R_2^M, F_1^M, F_2^M, \dots, c_1^M, c_2^M, \dots)$$
כאשר D^Mהוא קבוצה לא ריקה שנקראת תחום המבנה.

- ⋆ לכל סימן קבוי , נתאם קבוע מתוך D^M.
- ⋆ לכל סימן פונקציה k^{F_i} מקומי נתאם פונקצייה k מקומית F_i^M.
  $F_i^M \cdot (D^M)^K \to D^M$

לכל סימן יחס k^R-מקומי מתאימים יחס k מקומי.
$R^M : (D^M)^K \to \{T, F\}$
לסימן השוויון $\approx$ נתאים
$\approx^M = \{(d,d) |\, d \in D^M\}$

דוגמה:

הסכמות על סימונים:
P, Q, R סימני יחס
F, G, H סימני פונקצייה
a, b, c קבועים
d איברים מ־D
$$\tau = (\underbrace{\approx}_{\text{redundant}}, R(\circ, \circ), F(\circ, \circ), G(\circ), c_0, c_1)$$
נגדיר מבנה M_4:
D^{M_4}קבוצת המילים הסופיות הלא ריקות מעל א"ב $\{a, b\}$
$D^{M_4} = \{a, b, aa, ab, ba, bb, \dots\}$
$\approx^{M_4} :=$
$R^{M_4}(x, y)$:y רישא של x
$F^{M_4}(x, y)$:$x \cdot y$ שרשור
$G^{M_4}(x)$:x היפוך סדר האותיות במילה
$c_0^{M_4} : a$
$c_1^{M_4} : b$
$\varphi_4 = R(x, F(x, y))$
הפרוש של φ_4 מעל M_4
" x הוא רישא של $x \cdot y$"
תמיד נכון ללא תלות בהשמות ל־y,x.
$G(G(x)) \approx x$
הפוך של הפוך של אותיות x שווה ל־.
נכון לכל השמה ל־x.

הרחבת הסינטקס

שמות עצם Terms
אינטואיטיבית
x, y משתנים
3 קבוע
$+$ פונקציה
במתמטיקה:
ביטויים: $x, x+y, x+y+3, 3$
הקבוצה Terms מוגדרת אינדוקטיבית $\text{Terms} = X_{B,F}$
B: כולל את כל המשתנים ואת כל סימני הקבוע.
F: מספר הפעולות הוא כמספר הפונקציה בהינתן סימן פונקציה F k מקומי.
ובהינתן $t_1, \dots, t_k \in \text{Terms}$, $F_i(t_1, \dots t_k) \in \text{Terms}$.

דוגמה:

במילון שני סימני קבוע a, b
וסימן פונקציה F דו־מקומי
וסימן פונקציה G חד־מקומי.

דוגמאות לשמות עצם (סינטקטי)

a
b
$F(a,b)$
$G(F(a,b))$
$x_1, x_2, \ldots,$
$F(a,x_1)$
$G(F(a,x_1))$

כל שמות העתם מתפקדים כמו פונקציות בהינתן ערכים מ־D^M
הם מחזירים ערכים מ־D^M.

$M_5 = (\mathbb{N}, \underbrace{F^M}_{+}, \underbrace{G^M}_{\cdot}, \underbrace{a}_{5}, \underbrace{b}_{0})$

$G(F(a,x_2))$ השמה שתתן ערך ל־x
s :(VAR)משתנים$\to D^{M_5}$
נתון M_5והשמה $s(x_1)=2$ $s(x_2)=3$.