

### לוגיקה ותורת הקבוצות - תרגול 3

#### הגדרה אינדוקטיבית של קבוצת הפסוקים החוקיים

הגדרה 1: קבוצת הפסוקים החוקיים, WFF (Well Formed Formulae), היא הקבוצה האינדוקטיבית הבאה:

$$\begin{aligned}X &= \{\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, (, ), p_0, p_1, p_2, \dots\}^* \\B &= \{p_0, p_1, p_2, \dots\} \\F &= \{F_{\neg}, F_{\vee}, F_{\wedge}, F_{\rightarrow}\} \\WFF &= X_{B,F}\end{aligned}$$

• העולם  $X$  הוא קבוצת המילים הסופיות מעל הסימנים הנ"ל.

דוגמה לאיבר בעולם:  $p_1 \wedge (\vee p_2 (\in X$

• איברי  $B$ :  $p_0, p_1, p_2, \dots$  נקראים פסוקים אטומיים (או משתנים אטומיים).

עבור כל  $\alpha, \beta \in X$  הפונקציות ב- $F$  מוגדרות באופן הבא,

$$\begin{aligned}F_{\neg}(\alpha) &= (\neg\alpha) \\F_{\vee}(\alpha, \beta) &= (\alpha \vee \beta) \\F_{\wedge}(\alpha, \beta) &= (\alpha \wedge \beta) \\F_{\rightarrow}(\alpha, \beta) &= (\alpha \rightarrow \beta)\end{aligned}$$

דוגמאות לפסוקים חוקיים (כלומר ב-WFF):

$$p_5, (\neg p_{17}), (p_{1000} \rightarrow p_8), ((\neg p_0) \rightarrow (p_5 \rightarrow (p_1 \vee p_0)))$$

הערה: האם  $p_0 \vee p_1$  זהה ל- $p_1 \vee p_0$ ? לא, כי הסדר חשוב.

איך מראים שמילה  $\alpha \in X$  היא פסוק חוקי ( $\alpha \in WFF$ )?

מראים סדרת יצירה לפסוק מעל  $WFF = X_{B,F}$ .

דוגמה: האם  $(p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_9))$  פסוק חוקי?

איך מראים שמילה  $\alpha \in X$  אינה פסוק חוקי ( $\alpha \notin \text{WFF}$ )?

1. מוצאים תכונה  $Y$  שמשותפת לכל הפסוקים החוקיים ( $\beta$  מקיימת את  $Y$   $T = \{\beta \in X \mid Y\}$ ).
2. מוכיחים ש- $\alpha$  אינו מקיים את  $Y$  ( $\alpha \notin T$ ).
3. מוכיחים באינדוקציה על מבנה WFF שכל הפסוקים החוקיים מקיימים את  $Y$  ( $\text{WFF} \subseteq T$ ).

## תכונות בסיסיות של פסוקים חוקיים

**המילים ב-WFF מקיימות את התכונות הבאות:**

תכונה 1:  $\{\alpha \in X \mid \alpha \text{ פסוק אטומי או מתחיל ב-} (\neg \text{ ונגמר ב-} )\}$   
דוגמא לשימוש בתכונה 1: מתכונה 1 נובע שהמילה  $p_1 p_2$  אינה פסוק חוקי.

תכונה 2:  $T_2 = \{\alpha \in X \mid \#_-(\alpha) = \#_+(\alpha)\}$   
 כאשר  $\#_-(\alpha)$  הוא מספר הסוגריים השמאליים ב- $\alpha$  ו- $\#_+(\alpha)$  הוא מספר הסוגריים הימניים ב- $\alpha$ .

הגדרה 2: נאמר ש- $\beta$  היא רישא של  $\alpha$  אם  $\alpha, \beta$  מילים כך ש:

$$\begin{aligned}\alpha &= a_1 a_2 \dots a_n \\ \beta &= b_1 b_2 \dots b_k\end{aligned}$$

כאשר  $k \leq n$  ולכל  $1 \leq i \leq k$  מתקיים  $a_i = b_i$ .  
 נאמר כי  $\beta$  רישא ממש של  $\alpha$  אם  $\beta$  רישא של  $\alpha$  ו- $\alpha \neq \beta$  (כלומר  $k < n$ ).

תכונה 3 (נסיון ראשון): לכל  $\beta \neq \epsilon$  רישא ממש של  $\alpha$  :  $\{\alpha \in X \mid \#_-(\beta) > \#_+(\beta)\}$   $\text{WFF} \subseteq T =$

$$T_3 = \left\{ \alpha \in X \mid \begin{array}{l} 1. \alpha \in \text{WFF} \\ 2. \text{לכל } \beta \neq \epsilon \text{ רישא ממש של } \alpha : \#_-(\beta) > \#_+(\beta) \end{array} \right\} \quad \text{תכונה 3:}$$

מסקנה מתכונות 2 + 3: אם  $\alpha$  ב-WFF ו- $\beta$  רישא ממש של  $\alpha$ , אז  $\beta \notin \text{WFF}$ .

משלוש התכונות שהוכחנו נובע משפט הקריאה היחידה שמשמעותו היא:  
 בהינתן  $\varphi \in \text{WFF}$ , מתקיים בדיוק אחד משלושת הבאים:

1.  $\varphi$  הוא פסוק אטומי
2.  $\varphi = (\neg \alpha)$  כאשר  $\alpha \in \text{WFF}$ .
3.  $\varphi = (\alpha \circ \beta)$  כאשר  $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$  ו- $\alpha, \beta \in \text{WFF}$ .

תכונה נוספת של פסוקים: לא קיים פסוק חוקי אינסופי, למשל  $(((p_0 \wedge p_1) \wedge p_2) \wedge p_3) \wedge \dots \notin \text{WFF}$  כי:

1. העולם שלנו הוא  $X$  – רק מילים סופיות.

2. ניתן להוכיח ש-  $\alpha \notin \text{WFF}$  באמצעות התכונה הבאה:

$$T = \{\beta \in X \mid \text{יש מספר סופי של אטומים ב-}\beta\}$$

$$(p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_9))$$

$$p_0$$

$$p_1$$

$$p_9$$

$$F_{\vee}(2,3) \; (p_1 \vee p_9)$$

$$F_{\rightarrow}(1,4)(p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_9))$$

$$X_{B,F} \subseteq T = \{x \in X | Y\}$$

$$B\subseteq T$$

$$\begin{array}{c} \text{FT} \\ f(t_1,t_2\dots,t_n)\in T t_1,t_2\dots,t_n\in T f\in F \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\neg p_5) \\ \epsilon, (, (\neg, (\neg p_5 \\ \epsilon \\ \epsilon \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{WFF} \\ ) \in X \\ (\neg)) F_{\neg} \end{array}$$

$$\alpha$$

$$\alpha \in \text{WFF}\alpha$$

$$\alpha\alpha$$

$$\gamma,\delta$$

$$\mathbf{F}$$

$$\alpha = (\neg \gamma)$$

$$\text{“}\alpha\in\mathbf{WFF}$$

$$\mathbf{FWFF}\gamma\in\mathbf{WFF}$$

$$\#_{\langle}(\beta)=1>0=\#_{\rangle}(\beta)\beta=($$

$$\beta=(\neg$$

$$\gamma\gamma'\beta=(\neg\gamma'$$

$$\#_{\langle}(\gamma')>\#_{\rangle}(\gamma')\text{“}$$

$$\#_{\langle}(\beta)=1+\#_{\langle}(\gamma')>1+\#_{\rangle}(\gamma')=1+\#_{\rangle}(\beta)>\#_{\rangle}(\beta)$$

$$\gamma\text{“}\beta=(\neg\gamma$$

$$\#_{\langle}(\gamma)=\#_{\rangle}(\gamma)$$

$$\#_{\langle}(\beta)=1+\#_{\langle}(\gamma)=1+\#_{\rangle}(\gamma)=1+\#_{\rangle}(\beta)>\#_{\rangle}(\beta)$$

$$F_{\circ}(\gamma,\delta)=(\gamma\circ\delta)$$

$$\circ\in\{\vee,\wedge,\rightarrow\}$$

$$\overset{\wedge}{(p_o\overline{p_1})}^{\wedge}$$

$$\alpha$$

$$\alpha$$