

# לוגיקה הרצאה 1

## טיעון

טיעון תקף - כל פעם שההנחות נכונות גם המסקנות נכונות.

- כל היוונים הם בני אדם
- כל בני האדם הם בני תמותה
- כל היוונים הם בני תמותה

בני האדם הם הכללה של יוונים  
לבני אדם יש תכונה של "בני תמותה".  
ליוונים יש תכונה של בני תמותה.

כל  $A$  הוא  $B$ , כל  $B$  הוא  $C$  ולכן כל  $A$  הוא  $C$ .

## למשל הנחות:

- (הכללה) כל המרובעים הם מצולעים.
- (תכונה) כל המצולעים הם בעלי היקף.

## מסקנה:

- כל המרובעים הם בעלי היקף.

## דוגמה נוספת:

- (תכונה) כל העורבים שחורים.
- (הכללה) כל שחור הוא צבע.
- (מסקנה שגויה) כל העורבים הם צבע.

## מסקנה:

- שפה טבעית לא פסיק ברורה ולכן צריך שפה פורמלית כדי שנוכל להוכיח דברים.

## טענות:

אמירות/נוסחאות שהן אמת או שקר בעולם.

### תחשיב(סינטקס):

איזה נוסחאות חוקיות בשפה.

### סמנטיקה:

מתי נוסחה היא אמת או שקר.

### מערכת הוכחה פורמלית:

נרצה לקשר בין הסמנטיקה למערכת ולומר שהנוסחאות היכוחות (ניתנות להוכחה) הן נכונות. כל נוסחה נכונה ניתנת להוכחה.

### הגדרה אינדוקטיבית של קבוצה:

• נתונה קבוצה  $W$  - העולם.

• נתונה קבוצה  $B \subseteq W$  (הבסיס).

• נתונה קבוצה של כללי יצירה\פעולות  $F$ .

ב- $F$  יש פונקציות חלקיות (שלא בהכרח מוגדרות לכל האיברים בתחום שלהם) אנריות ל- $n$  כלשהו.

$$f : W^n \rightarrow W$$

נגדיר את הקבוצה  $X_{B,F} \subseteq W$

(הסגור של  $B$  תחת  $F$ ) כקבוצה המקיימת את הדברים הבאים:

1.  $B \subseteq X_{B,F}$ .

2. לכל  $f \in F$ ,  $f : W^n \rightarrow W$ .

אם  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X_{B,F}$  אז גם  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_{B,F}$ .

3. אין ב- $X_{B,F}$  איברים מיותרים

כלומר  $X_{B,F}$  מכילה רק איברים שנדרשים לקיום א' וב'.

במילים אחרות:  $X_{B,F}$  היא הקבוצה המינימלית שנוצרת ע"י  $B$  ו- $F$ .

### דוגמה:

•  $W$  - כל המילים הסופיות מעל א"ב  $a, b$ .

• בסיס:  $B = \{ab\}$ .

• פעולות:

1. מוסיפה  $aba$  לצד ימין של המילה:

$$f_1(w) = waba$$

2. מחליפה את  $aa$  השמאלי ביותר במילה ב $^-$

$$f_2(w_1 a a w_2) = w_1 b w_2 : aa \notin w_1$$

3. השמטת  $bbb$  השמאלי ביותר (אם קיים):

$$f_3(w_1 b b b w_2) = w_1 w_2 : bbb \notin w_1$$

• דוגמה למילים בשפה:

$aa, ababa$

נראה דרך לבנות  $X_{B,F}$  ע"ס  $B, F$  כאיחוד של סדרת קבוצות.

**נגדיר:**

בהינתן קבוצה  $F(y), y$  הינה קבוצת איברים ב $^-W$  שמתקבלים בהפעלת איזושהי פעולה ב $^-F$  על איזושהו איבר ב $^-y$ .  
נגדיר סדרה של קבוצות:

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_n$$

באופן הבא:

$$X_1 = B$$

$\dots$

$$X_{i+1} = X_i \cup F(X_i)$$

$$\overline{X} = \cup_i X_i$$

$$\overline{X} = X_{B,F}$$

כלומר:

$$X_1 = \{ab\}$$

$$X_2 = \{ab, ababa\}$$

$$X_3 = X_2 \cup \{ababa, ababaaba\}$$

$$X_4 = X_3 \cup \{ababbba, ababaabaaba\}$$

etc...

**דוגמה לקבוצה אינדוקטיבית:**

- $W = \mathbb{N}$
- $B = \{0\}$
- $F = \{+2\}$  (לא ממש פורמלי)
- $X_{B,F} = \mathbb{N}_2$  (טבעיים זוגיים)

**טענה:**

•  $\overline{X} = X_{B,F}$  מקיימת את כל הדרישות ולכן  $\overline{X} = X_{B,F}$

1. צ"ל מקיימת את 1 - נראה ש- $B \subseteq \overline{X}$   
זה נכון כי:  $X_1 = B$  ו- $X_1 \subseteq \overline{X}$ .
2. צ"ל מקיימת את 2:  
עבור  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \overline{X}$  מתקיים  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \overline{X}$   
נראה שקיים  $X_l$  כלשהו כך שמתקיים  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X_l$   
ולכן נוכל להסיק ש- $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_{l+1}$   
ולכן  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \overline{X}$ .

**דוגמה:**

$$\begin{aligned} & f(a_1, a_2, a_3) \\ & a_1 \in X_5, a_2 \in X_{17}, a_3 \in X_1 \\ & \Rightarrow \\ & f(a_1, a_2, a_3) \in X_{18} \end{aligned}$$

צריך להוכיח ש- $\overline{X}$  מקיימת את ג'.

**נוכיח טענה יותר כללית:**

לכל קבוצה  $Y$  שמקיימת את התנאים 1, 2 עבור  $B, F$  מתקיים  $\overline{X} \subseteq Y$   
נוכיח באינדוקציה על  $i$  ש- $X_i \subseteq Y$  ואז  $\cup X_i \subseteq Y$ .

- בסיס:  
צ"ל  $X_1 = B \subseteq Y$   
נכון כי  $Y$  מקיימת את תנאי 1.
- צעד:  
ניח כי  $X_i \subseteq Y$  ונוכיח ש- $X_{i+1} = X_i \cup F(X_i) \subseteq Y$ .
- צ"ל לגבי האיברים  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X_i$  אז על סמך אינדוקציה  $x_1, x_2, \dots, x_n \in Y$   
ובגלל ש- $Y$  מקיימת את ב' אז  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Y$ .

מסקנה מהטענה:  
 $\bar{X}$  היא המינימלית שמספקת את א' וב' ולכן מספקת גם את ג'.  
 מסקנה:  
 $\bar{X} = X_{B,F}$

### משפט ההוכחה באינדוקציה

אם  $Y$  קבוצה שמספקת את תנאים 1,2 עבור  $B, F$  אז יודעים ש-  $X_{B,F} \subseteq Y$ .

משפט זה מאפשר שיטת הוכחה שנראת "הוכחה באינדוקציית מבנה".  
 על מנת להוכיח ש-  $X_{B,F} \subseteq Y$  נראה:

$$1. B \subseteq Y$$

$$2. Y \text{ סגורה תחת } F$$

כדי להוכיח ש-  $b \in X_{B,F}$  צריך להראות שקיימת עבורו סדרת יצירה.

#### סדרת יצירה:

עבור איבר  $b$  מתוך  $X_{B,F}$  הינו סדרת סופית  $a_1, a_2, \dots, a_n$  כך ש:

$$1. a_n = b$$

$$2. \text{ לכל } 1 \leq i \leq n$$

$$(א) \text{ או } a_i \in B^-$$

$$(ב) \text{ או ש- } a_i \text{ התקבלה מקודמים בסדרה ע"י הפעלת פעולה מ- } F.$$

דוגמה עבור

$$B = \{0\}, \quad F = \{+2\}$$

$$8 \in X_{B,F}$$

סדרת היצירה שלו תהיה:  $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ .

**כדי להראות ש-  $x \notin X_{B,F}$ :**

נמצא תכונה  $T$  ונראה ש-  $X_{B,F} \subseteq T^-$  ונראה ש-  $x \notin T^-$  (כלומר  $x$  אינו מקיים את  $T$ )  
 ( $T$  היא קבוצת האיברים בעלי תכונה כלשהי).

#### דוגמה:

נראה של-  $ABA$   $aba \notin ABA$  (שפה שהוגדרה קודם).

תכונה:

צ"ל מספר ה-  $a$  הכל איברי  $B, F$  הוא אי-זוגי.

אם זה נכון אז  $aba$  לא בשפה כי היא אינה מקיימת את התכונה.

**שיטת ההוכחה:**

• נבחר תכונה  $T$ .

• נראה שמתקיים:

1.  $B \subseteq T$ .

2. לכל  $x_1, x_2, \dots, x_n \in T$  מתקיים  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in T$ .

**דוגמה:**

$ab \in T$  (יש  $a$  יחיד).

כל פעולה שפועלת על מילה עם מספר זוגי של  $a$  מחזירה מילה עם מספר אי-זוגי של  $a$ .