

## הרצאה 4

28 באפריל 2019

קבוצת הפסוקים היכחיים/משפטים מורמליים - סינטקטי - פסוקים עם  $\{\leftarrow, \rightarrow\}$  בלבד.  
הגדרה אידוקטיבית:

$$\begin{aligned} B &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \\ A_1 &= \{(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) | \alpha, \beta \in \text{WFF}\{\neg, \rightarrow\}\} \\ A_2 &= \{((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) | \alpha, \beta, \gamma \in \text{WFF}\{\neg, \rightarrow\}\} \\ A_3 &= \{((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) | \alpha, \beta \in \dots\} \\ F &= \{MP\} \end{aligned}$$

$$\frac{MP}{\underbrace{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}_{\beta}}$$

כדי להראות ספסוק שייד לקבוצת הפסוקים היכחיים צריך להראות סדרת יצירה שנקראת סדרת הוכחה.

סדרת הוכחה עבור פסוק  $\beta$  הוא סדרת הפסוקים  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .  
שכל אחד מהם הוא או אכסיומה או התקבל מהקודמים בהסדרה ע"י כלל ההיסק  $MP$ .

$$\begin{aligned} &\text{בנוסף } \beta = a_n \\ &\underbrace{a_1 a_2 a_3}_{axi'} | \dots a_n \\ &\text{Proof series for } a_3 \end{aligned}$$

**דוגמה:**

$$\vdash \alpha \rightarrow \alpha$$

כסימון להקלה בקריאות נסמן  $\alpha \rightarrow \alpha$  כ- $\beta$

$$1. (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \quad A_2$$

$$2. (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \quad A_1$$

$$3. ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \quad MP1, 2$$

$$\begin{aligned}
& \text{:(א) הכנסת } \beta \\
& (\alpha \rightarrow (\underline{\underline{\alpha \rightarrow \alpha}})) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \\
& (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)), A_1 \quad .4 \\
& (\alpha \rightarrow \alpha), MP \ 4, 3 \quad .5 \\
& \vdash (\alpha \rightarrow \alpha)
\end{aligned}$$

**דוגמה:**

$$\begin{aligned}
& \vdash (\neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \\
& (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \quad A_3 \quad .1 \\
& ((\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\neg \alpha \rightarrow ((\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))), A_1 \quad .2 \\
& (\neg \alpha \rightarrow ((\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))) \quad MP \ 1, 2 \quad .3 \\
& (\underbrace{\neg \alpha}_{\alpha} \rightarrow ((\underbrace{\neg \beta \rightarrow \neg \alpha}_{\beta} \rightarrow (\underbrace{\alpha \rightarrow \beta}_{\gamma}))) \xrightarrow{1} : A_2 \quad .4 \\
& (\underbrace{\neg \alpha}_{\alpha} \rightarrow (\underbrace{\neg \beta \rightarrow \neg \alpha}_{\beta})) \xrightarrow{2} \\
& (\underbrace{\neg \alpha}_{\alpha} \rightarrow (\underbrace{\alpha \rightarrow \beta}_{\gamma})) \\
& (\neg \alpha \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)) \rightarrow (\neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \quad MP \ 3, 4 \quad .5 \\
& (\neg \alpha \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)) \quad A_1 \quad .6 \\
& (\neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \quad MP \ 5, 6 \quad .7 \\
& \vdash (\neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))
\end{aligned}$$

**הוכחה על סמך הנחות**

נתונה קבוצה של פסוקים  $X$ , נגדיר את קבוצת המסקנות של  $X$  (קבוצת הפסוקים היכחיים ע"ס  $X$ ) כקבוצה האינדוקטיבית:

$$\begin{aligned}
B &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup X \\
F &= \{MP\}
\end{aligned}$$

סדרת הוכחה עבוק קב'  $\beta$  ע"ס  $X$   $a_1, a_2, \dots, a_n$

$1 \leq i \leq n$  ולכל  $a_n = \beta$

$a_i$  הוא אכסיומה או מ- $X$

או התקבל מהקודמים בסדרה ע"י  $MP$ .

סימון:  $X \vdash \beta$

$$\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$$

$$X = \{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in WFF_{\{\rightarrow, \neg\}}\}$$

1. הנחה  $\alpha \rightarrow \beta$

2. הנחה  $\beta \rightarrow \gamma$ .

מטרה:  $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\} \vdash (\alpha \rightarrow \gamma)$

**משפט:**

נתון:

$X \vdash \beta$  ולכל  $\alpha \in X$ ,  $\alpha \vdash \beta$  אזי נסיק  $\beta$ .

**צ"ל:**

$\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$

1.  $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$  A2

2.  $((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)))$  A1

3. הנחה  $\beta \rightarrow \gamma$

4.  $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)), MP$  2, 3

5.  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma), MP$  1, 4

6. הנחה  $\alpha \rightarrow \beta$

7.  $\alpha \rightarrow \beta, MP$  5, 6

$\beta \rightarrow \gamma, \alpha \rightarrow \beta \vdash \alpha \rightarrow \gamma$

**טענה 1:**

אם  $\alpha \in X$  אז  $X \vdash \alpha$

הוכחה:

1. הנחה

$X \vdash \alpha$

$\alpha \vdash \alpha$

**טענה 2:**

אם  $X \subseteq Y$  אז לכל פסוק  $\alpha$ , אם  $X \vdash \alpha$  אז  $Y \vdash \alpha$

התכונה נקראת: מונוטוניות של הוכחה.  $X \vdash \alpha$

$a_1[x_1$

$y_1$

$\vdots | x_2$

$| y_2$

$\Rightarrow$

$\vdots$

$a_n | \vdots$

$\vdots$

$[x_n$

$y_n]$

**נוסח אלטרנטיבי לטענה 2:**

אם  $B_1 \subseteq B_2$  אז  $X_{B_1, F} \subseteq X_{B_2, F}$

**מסקנה:**

אם  $\vdash \alpha$  אז  $X \vdash \alpha$  לכל קבוצה  $X$ .

**טענה 3:**

אם לכל פסוק  $\alpha$  ב- $X$ ,  $Y \vdash \alpha$   
אז לכל פסוק  $\beta$  אם  $X \vdash \beta$  אז  $Y \vdash \beta$ .

**הוכחה:** נתון  $X \vdash \beta$  נתון  $\underbrace{a_1, \dots, a_n}_{\text{from } X}, \underbrace{\beta}_{\beta}$   
על כל איבר  $a_i$  שהסדרה שלו היא "מ- $X$ "  
נחליף אותו בסדרת הוכחה מתוך  $Y$ .

**דוגמה:**

$$X = \{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\}$$

$$\delta = \alpha \rightarrow \gamma$$

$$X \vdash \delta \text{ ידוע}$$

$$Y = \{\beta, \gamma\} \text{ נגדיר}$$

נוכיח ש-

$$y \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

$$y \vdash \beta \rightarrow \gamma$$

$$y \vdash \delta \text{ נסיק}$$

$$1. \quad v\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta), A1$$

$$2. \quad \text{הנחה מ-} y \vdash \beta$$

$$3. \quad \alpha \rightarrow \beta$$

$$y \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

$$(A) \quad (\gamma \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)), A1$$

$$(B) \quad \text{הנחה מ-} y \vdash \gamma.$$

$$(G) \quad \beta \rightarrow \gamma$$

$$y \vdash \beta \rightarrow \gamma$$

**טענה 4 (הוכחות הן סופיות)**

אם  $\overbrace{X}^{(\text{infinite})} \vdash \alpha$  אז קיימת תת קבוצה סופית של  $X$ ,  $X' \subseteq X$  כך ש-  $X' \vdash \alpha$ .

**משפט הדדוקציה:**

לכל מערכת הוכחה שיש בה לפחות את האכסיומות  $A_1-A_2$

ויש בה בדיוק את כלל ההיסק  $\boxed{\text{MP}}$

**מתקיים:**

לכל קבוצת פסוקים  $X$  ופסוקים  $\alpha, \beta$ :

$X \vdash \alpha \rightarrow \beta$  אם ורק אם  $X, \alpha \vdash \beta$

**מסקנה:**  $\vdash \beta \rightarrow \alpha \Leftarrow \beta \vdash \alpha$

**הוכחה:**  $\Rightarrow$  נתון  $X \vdash \alpha \rightarrow \beta$

נוכיח  $X, \alpha \vdash \beta$

1. הנחה  $\alpha$

2. יכיח מ- $X$   $\alpha \rightarrow \beta$ .

3.  $\beta$  MP

$X, \alpha \vdash \beta$