

## לוגיקה - תרגול 8

### גדירות - תזכורות

הגדרה 1: השמה המספקת קבוצת פסוקים  $\Sigma$  נקראת מודל של  $\Sigma$ .

קבוצת המודלים של  $\Sigma$  היא הקבוצה:  $M(\Sigma) = \{v \in \text{Ass} \mid v \models \Sigma\}$

הגדרה 2: קבוצת השמות  $K$  נקראת גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים  $\Sigma$  כך ש- $M(\Sigma) = K$ . אחרת  $K$  נקראת לא גדירה.

### הוכחת גדירות

איך מוכיחים שקבוצת השמות  $K$  היא גדירה?

1. מראים קבוצת פסוקים  $\Sigma$  מפורשת.

2. מוכיחים כי  $M(\Sigma) = K$  על ידי הכלה דו־כיוונית.

תרגיל 1: לכל  $j \in \mathbb{N}$  נגדיר את קבוצת ההשמות:  $\{v \mid v \text{ נותנת } T \text{ לכל היותר } j\text{-ל-אטומים}\}$ .  $K_j = \{v \mid v \text{ הוכיחו כי לכל } j \in \mathbb{N}, \text{ הקבוצה } K_j \text{ גדירה.}\}$

### תרגיל 2:

תהינה  $X, Y \subseteq WFF$ .

הוכיחו כי  $M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y)$ .

### משפט הקומפקטיות - תזכורת

לכל קבוצת פסוקים  $\Sigma$  מתקיים,  $\Sigma$  ספיקה אמ"מ כל תת־קבוצה סופית של  $\Sigma$  ספיקה.

## הוכחת אי-גדירות

איך מוכיחים שקבוצת השמות  $K$  אינה גדירה?

1. מניחים בשלילה ש- $K$  גדירה ו- $X$  היא קבוצת הפסוקים המגדירה אותה  $M(X) = K$ .

(לשים לב: לא ניתן להניח דבר על  $X$  פרט לכך שהיא מגדירה את  $K$ ).

2. בוחרים קבוצת פסוקים מפורשת  $Y$  שעבורה ידוע (או שניתן להוכיח בקלות) מהו  $M(Y)$  (קבוצות שכדאי לנסות:  $Y = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ,  $Y = \{\neg p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ).

3. מוכיחים ש- $X \cup Y$  איננה ספיקה על ידי כך שמראים ש- $M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y) = K \cap M(Y) = \emptyset$ .

4. מוכיחים ש- $X \cup Y$  ספיקה על ידי שימוש במשפט הקומפקטיות.

תהי  $D \subseteq X \cup Y$  סופית.

נסמן  $D_X = D \cap X$  ו- $D_Y = D \cap Y$

נבנה השמה  $v$  המספקת את  $D_Y$  ו- $D_X$ . נתחיל בבניה ע"פ מבנה הפסוקים ב- $D_Y$  ונשלים אותה כך ש- $v \in K$ .

נוכיח שהבניה מספקת את  $D_Y$ .

$v \in K$  מספקת את  $X$   $v \Leftarrow X$  מספקת את  $D_X$ .

$v$  מספקת את  $D_X$  ו- $D_Y$   $v \Leftarrow D_Y$  מספקת את  $D_X \cup D_Y$ .

5. מ-3+4 מקבלים סתירה ולכן  $K$  אינה גדירה.

תרגיל 3:

הוכיחו כי  $v$  נותנת T למספר סופי של אטומים  $K_{fin} = \{v \in \text{Ass} \mid v \text{ אינה גדירה}\}$ .

תרגיל 4:

הוכיחו כי  $v$  נותנת T לאינסוף אטומים  $K_{inf} = \{v \in \text{Ass} \mid v \text{ אינה גדירה}\}$ .

## תרגול 8 לוגיקה

### תרגיל 2:

תהינה  $X, Y \subseteq \text{WFF}$   
הוכיחו כי  $M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y)$

#### הוכחה:

$\Leftarrow$  תהיי  $v \in M(X) \cap M(Y)$   
יהיה  $\varphi \in X \cup Y$  לפי הגדרת איחוד  $\varphi \in X$  או  $\varphi \in Y$   
בה"כ  $\varphi \in X$ , לפי הגדרת חיתוך  $v \in M(X)$  ולפי הגדרת קבוצת מודלים.  
 $v \models \varphi$  לפי הגדרת מודלים קבוצת מודלים  $v \in M(X \cup Y)$ .  
באותו אופן ההוכחה אם  $\varphi \in Y$ .  
 $\Rightarrow$   $v \in M(X \cup Y) : \subseteq$   
צ"ל:  $v \in M(X)$  וגם  $v \in M(Y)$   
 $M(x)$ : יהיה  $\varphi \in X$ . מהגדרת קבוצת מודלים  $v \models \varphi$ .  
מהגדרת קבוצת מודלים  $v \in M(x)$ .  
באותו אופן עבור  $M(Y)$ .

### תרגיל 3:

הוכיחו כי  $\{v \mid v \text{ נותנת } T \text{ למספר סופי של אטומים}\} = K_{fin}$  אינה גדירה.

#### הוכחה:

- נניח בשלילה ש  $K_{fin}$  גדירה.  
אז קיימת קבוצת פסוקים  $x$  כך ש- $M(X) = K$ .
- נבחר  $Y = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ . ניתן לראות כי  $M(Y) = \{V_T\}$ .
- $X \cup Y$  אינה ספיקה:  $V_T$  נותנת  $T$  לאינסוף אטומים  
ולכן  $V_T \notin K_{fin}$ . ולכן  
 $M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y) = K_{fin} \cap \{V_T\} = \emptyset$ .
- נוכיח בעזרת משפט הקומפקטיות ש- $X \cup Y$  ספיקה.  
תהיי  $D \subseteq X \cup Y$  תת-קבוצה סופית.  
נסמן:  $D_Y = D \cap Y, D_X = D \cap X$ .  
מכיוון ש- $D_Y \subseteq D$  ו- $D$  סופית אז גם  $D_Y$  סופית.  
ולכן היא מהצורה:  $D_Y = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}\}$ .  
נסמן ב- $m$  את האינדקס המקסימלי של  $D_i$  ב- $D_Y$ .

( $m = 1$  אם  $D_Y = \emptyset$ ), מאחר ו- $D_Y$  סופית בהכרח קיים  $m$  כזה.

נגדיר השמה  $v$  באופן הבא:

$$v(p_i) = \begin{cases} T & i \leq m \\ F & i > m \end{cases}$$

\* כל הפסוקים ב- $D_Y$  הם מהצורה  $D_i$  כאשר  $i \leq m$

ולכן  $v \models D_Y \Leftarrow$  מספקת אותם  $v \models D_Y$ .

\* מכיוון ש- $v \in K_{fin}$  (נותנת  $T$  למספר שופי של אטומים)

$v \models X \Leftarrow v \in M(X) \Leftarrow$  מספקת כל פסוק ב- $X$  ובפרט כל

פסוק ב- $D_X \subseteq X$   $v \models D_X \Leftarrow D_X$ .

בסה"כ קיבלנו כי  $v$  מספקת את  $D_x$  ואת  $D_y$  ולכן גם את  $D = D_X \cup D_Y$ .

הראינו שלכל תת-קבוצה סופית  $D \subseteq X \cup Y$  קיימת השמה המספקת אותה ולכן

תת-קבוצה סופית היא ספיקה. ממשפט הקומפקטיות נובע  $X \cup Y$  ספיקה.

5. 3 ו-4 הם סתירה ולכן  $K_{fin}$  אינה גדירה.

#### תרגיל 4:

הוכיחו כי  $\{v \mid v \text{ נותנת } T \text{ אינסוף אטומים}\} = K_{inf}$  אינה גדירה.

הוכחה:

1. same

2. נבחר  $Y = \{\neg p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ . ניתן לראות כי  $M(Y) = \{V_F\}$ .

3.  $X \cup Y$  אינה ספיקה:  $V_f$  נותנת ערך  $T$  לאפס אטומים (ובפרט לא לאינסוף)

ולכן  $v_f \notin K_{inf}$

$$M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y) = K_{inf} \cap \{V_K\} = \emptyset$$

4.  $D_Y = \{\neg p_{i_1}, \dots, p_{i_k}\}$

נסמן ב- $m$  את האינדקס המקסימלי של  $\neg p_i$  ב- $D_Y$ .

נבנה השמה  $v$ :

$$v(p_i) = \begin{cases} F & i \leq m \\ T & i > m \end{cases}$$