

לוגיקה הרצאה 1

טיעון

טיעון תקף - כל פעם שההנחות נכונות גם המסקנות נכונות.

- כל היוונים הם בני אדם
- כל בני האדם הם בני תמותה
- כל היוונים הם בני תמותה

בני האדם הם הכללה של יוונים
לבני אדם יש תכונה של "בני תמותה".
ליוונים יש תכונה של בני תמותה.

כל A הוא B , כל B הוא C ולכן כל A הוא C .

למשל הנחות:

- (הכללה) כל המרובעים הם מצולעים.
- (תכונה) כל המצולעים הם בעלי היקף.

מסקנה:

- כל המרובעים הם בעלי היקף.

דוגמה נוספת:

- (תכונה) כל העורבים שחורים.
- (הכללה) כל שחור הוא צבע.
- (מסקנה שגויה) כל העורבים הם צבע.

מסקנה:

- שפה טבעית לא פסיק ברורה ולכן צריך שפה פורמלית כדי שנוכל להוכיח דברים.

טענות:

אמירות/נוסחאות שהן אמת או שקר בעולם.

תחשיב(סינטקס):

איזה נוסחאות חוקיות בשפה.

סמנטיקה:

מתי נוסחה היא אמת או שקר.

מערכת הוכחה פורמלית:

נרצה לקשר בין הסמנטיקה למערכת ולומר שהנוסחאות היכוחות (ניתנות להוכחה) הן נכונות. כל נוסחה נכונה ניתנת להוכחה.

הגדרה אינדוקטיבית של קבוצה:

• נתונה קבוצה W - העולם.

• נתונה קבוצה $B \subseteq W$ (הבסיס).

• נתונה קבוצה של כללי יצירה\פעולות F .

ב- F יש פונקציות חלקיות (שלא בהכרח מוגדרות לכל האיברים בתחום שלהם) אנריות ל- n כלשהו.

$$f : W^n \rightarrow W$$

נגדיר את הקבוצה $X_{B,F} \subseteq W$

(הסגור של B תחת F) כקבוצה המקיימת את הדברים הבאים:

1. $B \subseteq X_{B,F}$.

2. לכל $f \in F$, $f : W^n \rightarrow W$

אם $x_1, x_2, \dots, x_n \in X_{B,F}$ אז גם $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_{B,F}$.

3. אין ב- $X_{B,F}$ איברים מיותרים

כלומר $X_{B,F}$ מכילה רק איברים שנדרשים לקיום א' וב'.

במילים אחרות: $X_{B,F}$ היא הקבוצה המינימלית שנוצרת ע"י B ו- F .

דוגמה:

• W - כל המילים הסופיות מעל א"ב a, b .

• בסיס: $B = \{ab\}$.

• פעולות:

1. מוסיפה aba לצד ימין של המילה:

$$f_1(w) = waba$$

2. מחליפה את aa השמאלי ביותר במילה ב $^-$

$$f_2(w_1 a a w_2) = w_1 b w_2 : aa \notin w_1$$

3. השמטת bbb השמאלי ביותר (אם קיים):

$$f_3(w_1 b b b w_2) = w_1 w_2 : bbb \notin w_1$$

• דוגמה למילים בשפה:

$aa, ababa$

נראה דרך לבנות $X_{B,F}$ ע"ס B, F כאיחוד של סדרת קבוצות.

נגדיר:

בהינתן קבוצה $F(y), y$ הינה קבוצת איברים ב ^-W שמתקבלים בהפעלת איזושהי פעולה ב ^-F על איזושהו איבר ב ^-y .
נגדיר סדרה של קבוצות:

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_n$$

באופן הבא:

$$X_1 = B$$

\dots

$$X_{i+1} = X_i \cup F(X_i)$$

$$\overline{X} = \cup_i X_i$$

$$\overline{X} = X_{B,F}$$

כלומר:

$$X_1 = \{ab\}$$

$$X_2 = \{ab, ababa\}$$

$$X_3 = X_2 \cup \{ababa, ababaaba\}$$

$$X_4 = X_3 \cup \{ababbba, ababaabaaba\}$$

etc...

דוגמה לקבוצה אינדוקטיבית:

- $W = \mathbb{N}$
- $B = \{0\}$
- $F = \{+2\}$ (לא ממש פורמלי)
- $X_{B,F} = \mathbb{N}_2$ (טבעיים זוגיים)

טענה:

• $\overline{X} = X_{B,F}$ מקיימת את כל הדרישות ולכן $\overline{X} = X_{B,F}$

1. צ"ל מקיימת את 1 - נראה ש- $B \subseteq \overline{X}$
זה נכון כי: $X_1 = B$ ו- $X_1 \subseteq \overline{X}$.
2. צ"ל מקיימת את 2:
עבור $x_1, x_2, \dots, x_n \in \overline{X}$ מתקיים $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \overline{X}$
נראה שקיים X_l כלשהו כך שמתקיים $x_1, x_2, \dots, x_n \in X_l$
ולכן נוכל להסיק ש- $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_{l+1}$
ולכן $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \overline{X}$.

דוגמה:

$$\begin{aligned} & f(a_1, a_2, a_3) \\ & a_1 \in X_5, a_2 \in X_{17}, a_3 \in X_1 \\ & \Rightarrow \\ & f(a_1, a_2, a_3) \in X_{18} \end{aligned}$$

צריך להוכיח ש- \overline{X} מקיימת את ג'.

נוכיח טענה יותר כללית:

לכל קבוצה Y שמקיימת את התנאים 1, 2 עבור B, F מתקיים $\overline{X} \subseteq Y$
נוכיח באינדוקציה על i ש- $X_i \subseteq Y$ ואז $\cup X_i \subseteq Y$.

- בסיס:
צ"ל $X_1 = B \subseteq Y$
נכון כי Y מקיימת את תנאי 1.
- צעד:
ניח כי $X_i \subseteq Y$ ונוכיח ש- $X_{i+1} = X_i \cup F(X_i) \subseteq Y$.
- צ"ל לגבי האיברים $x_1, x_2, \dots, x_n \in X_i$ אז על סמך אינדוקציה $x_1, x_2, \dots, x_n \in Y$
ובגלל ש- Y מקיימת את ב' אז $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Y$.

מסקנה מהטענה:
 \bar{X} היא המינימלית שמספקת את א' וב' ולכן מספקת גם את ג'.
 מסקנה:
 $\bar{X} = X_{B,F}$

משפט ההוכחה באינדוקציה

אם Y קבוצה שמספקת את תנאים 1, 2 עבור B, F אז יודעים ש- $X_{B,F} \subseteq Y$.

משפט זה מאפשר שיטת הוכחה שנראת "הוכחה באינדוקציית מבנה".
 על מנת להוכיח ש- $X_{B,F} \subseteq Y$ נראה:

$$1. B \subseteq Y$$

$$2. Y \text{ סגורה תחת } F$$

כדי להוכיח ש- $b \in X_{B,F}$ צריך להראות שקיימת עבורו סדרת יצירה.

סדרת יצירה:

עבור איבר b מתוך $X_{B,F}$ הינו סדרת סופית a_1, a_2, \dots, a_n כך ש:

$$1. a_n = b$$

$$2. \text{ לכל } 1 \leq i \leq n$$

$$(א) \text{ או } a_i \in B^-$$

$$(ב) \text{ או ש- } a_i \text{ התקבלה מקודמים בסדרה ע"י הפעלת פעולה מ- } F.$$

דוגמה עבור

$$B = \{0\}, \quad F = \{+2\}$$

$$8 \in X_{B,F}$$

סדרת היצירה שלו תהיה: $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

כדי להראות ש- $x \notin X_{B,F}$:

נמצא תכונה T ונראה ש- $X_{B,F} \subseteq T^-$ ונראה ש- $x \notin T^-$ (כלומר x אינו מקיים את T)
 (T היא קבוצת האיברים בעלי תכונה כלשהי).

דוגמה:

נראה של- ABA $aba \notin ABA$ (שפה שהוגדרה קודם).

תכונה:

צ"ל מספר ה- a הכל איברי B, F הוא אי-זוגי.

אם זה נכון אז aba לא בשפה כי היא אינה מקיימת את התכונה.

שיטת ההוכחה:

• נבחר תכונה T .

• נראה שמתקיים:

1. $B \subseteq T$.

2. לכל $x_1, x_2, \dots, x_n \in T$ מתקיים $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in T$.

דוגמה:

$ab \in T$ (יש a יחיד).

כל פעולה שפועלת על מילה עם מספר זוגי של a מחזירה מילה עם מספר אי-זוגי של a .