לוגיקה הרצאה 1

טיעון

טיעון תקף - כל פעם שההנחות נכונות גם המסקנות נכונות.

* ⋆ <u>כל</u> היוונים הם בני אדם
* ⋆ כל בני האדם הם בני תמותה
* ⋆ <u>כל היוונים הם בני תמותה</u>

בני האדם הם הכללה של יוונים
לבני אדם יש תכונה של "בני תמותה".
ליוונים יש תכונה של בני תמותה.

כל A הוא B, כל B הוא C ולכן כל A הוא C.

<u>למשל הנחות:</u>

* ⋆ (הכלה) כל המרובעים הם מצולעים.
* ⋆ (תכונה) כל המצולעים הם בעלי היקף.

<u>מסקנה:</u>

* ⋆ **כל המרובעים הם בעלי היקף.**

<u>דוגמה נוספת:</u>

* ⋆ (תכונה) כל העורבים שחורים.
* ⋆ (הכללה) כל שחור הוא צבע.
* ⋆ (מסקנה <u>שגויה</u>) כל העורבים הם צבע.

<u>מסקנה:</u>

* ⋆ שפה טבעים לא פסיק ברורה ולכן צריך שפה פורמלית כדי שנוכל להוכיח דברים.

טענות:

אמירות/נוסחאות שהן אמת או שקר בעולם.

תחשיב(סינטקס):

איזה נוסחאות חוקיות בשפה.

סמנטיקה:

מתי נוסחה היא אמת או שקר.

מערכת הוכחה פורמלית:

נרצה לקשר בין הסמנטיקה למערכת ולומר שהנוסחאות היכיחות (ניתנות להוכחה) הן נכונות.
<u>כל</u> נוסחה נכונה ניתנת להוכחה.

הגדרה אינדוקטיבית של קבוצה:

- ⋆ נתונה קבוצה W - העולם.
- ⋆ נתונה קבוצה $B \subseteq W$ (הבסיס).
- ⋆ נתונה קבוצה של כללי יצירה\פעולות F.

ב־F יש פונקציות חלקיות (שלא בהכרח מוגדרות לכל האיברים בתחום שלהם) אנריות ל־n כלשהו.

$$f : W^n \to W$$

נגדיר את הקבוצה $X_{B,F} \subseteq W$
(הסגור של B תחת F) כקבוצה המקיימת את הדברים הבאים:

1. $B \subseteq X_{B,F}$.
2. לכל $f : W^n \to W,\ f \in F$
אם $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X_{B,F}$ אז גם $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_{B,F}$.
3. אין ב־$X_{B,F}$ איברים מיותרים
כלומר $X_{B,F}$ מכילה רק איברים שנדרשים לקיום א' וב'.
במילים אחרות: $X_{B,F}$ היא הקבוצה המינימלית שנוצרת ע"י B ו־F.

דוגמה:

- ⋆ W - כל המילים הסופיות מעל א"ב a, b.
- ⋆ בסיס: $B = \{ab\}$.
- ⋆ פעולות:

1. מוסיפה aba לצד ימין של המילה:

$$f_1(w) = waba$$

2. מחליפה את aa השמאלי ביותר במילה ב־b

$$f_2(w_1aaw_2) = w_1bw_2 \ : aa \notin w_1$$

3. השמטת bbb השמאלי ביותר (אם קיים):

$$f_3(w_1bbbw_2) = w_1w_2 \ : bbb \notin w_1$$

⋆ דוגמה למילים בשפה:
$aa, ababa$

נראה דרך לבנות $X_{B,F}$ ע"ס B, F כאיחוד של סדרת קבוצות.

נגדיר:

בהינתן קבוצה y, $F(y)$ הינה קבוצת איברים ב־W שמתקבלים בהפעלת איזושהי פעולה ב־F על איזשהו איבר ב־y.
נגדיר סדרה של קבוצות:

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_n$$

באופן הבא:

$$\begin{aligned}
&X_1 = B \\
&\ldots \\
&X_{i+1} = X_i \cup F(X_i) \\
&\overline{X} = \cup_i X_i \\
&\overline{X} = X_{B,F}
\end{aligned}$$

כלומר:

$$\begin{aligned}
&X_1 = \{ab\} \\
&X_2 = \{ab, ababa\} \\
&X_3 = X_2 \cup \{ababa, ababaaba\} \\
&X_4 = X_3 \cup \{ababbba, ababaabaaba\} \\
&\text{etc.}\ldots
\end{aligned}$$

דוגמה לקבוצה אינדוקטיבית:

- $W = \mathbb{N}$ ⋆
- $B = \{0\}$ ⋆
- $F = \{+2\}$ (לא ממש פורמלי) ⋆
- $X_{B,F} = \mathbb{N}_2$ (טבעיים זוגיים) ⋆

טענה:

- ⋆ $\overline{X}$ מקיימת את כל הדרישות ולכן $\overline{X} = X_{B,F}$

1. צ"ל מקיימת את 1 - נראה ש-$B \subseteq \overline{X}$
זה נכון כי: $X_1 = B$ ו-$X_1 \subseteq \overline{X}$.

2. צ"ל מקיימת את 2:
עבור $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \overline{X}$ מתקיים $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \overline{X}$
נראה שקיים X_l כלשהו כך שמתקיים $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X_l$
ולכן נוכל להסיק ש- $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_{l+1}$
ולכן $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \overline{X}$.

דוגמה:

$$f(a_1, a_2, a_3)$$
$$a_1 \in X_5 \ , a_2 \in X_{17} \ , a_3 \in X_1$$
$$\Rightarrow$$
$$f(a_1, a_2, a_3) \in X_{18}$$

צריך להוכיח ש-$\overline{X}$ מקיימת את ג'.

נוכיח טענה יותר כללית:

לכל קבוצה Y שמקיימת את התנאים $1, 2$ עבור B, F מתקיים $\overline{X} \subseteq Y$
נוכיח באינדוקציה על i ש-$X_i \subseteq Y$ ואז $\cup X_i \subseteq Y$.

- ⋆ בסיס:
צ"ל $X_1 = B \subseteq Y$
נכון כי Y מקיימת את תנאי 1.

- ⋆ צעד:
נניח כי $X_i \subseteq Y$ ונוכיח ש-$X_{i+1} = X_i \cup F(X_i) \subseteq Y$.

- ⋆ צ"ל לגבי האיברים $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X_i$ אז על סמך אינדוקציה $x_1, x_2, \ldots, x_n \in Y$
ובגלל ש-Y מקיימת את ב' אז $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Y$.

מסקנה מהטענה:
$\overline{X}$ היא המינימלית שמספקת את א' וב' ולכן מספקת גם את ג'.
מסקנה:
$\overline{X} = X_{B,F}$.

משפט ההוכחה באינדוקציה

אם Y קבוצה שמספקת את תנאים $1,2$ עבור B,F אז יודעים ש־ $X_{B,F} \subseteq Y$.

משפט זה מאפשר שיטת הוכחה שנראת "הוכחה באינדוקציית מבנה".
על מנת להוכיח ש־$X_{B,F} \subseteq Y$ נראה:

1. $B \subseteq Y$.
2. Y סגורה תחת F.

כדי להוכיח ש־$b \in X_{B,F}$ צריך להראות שקיימת עבורו סדרת יצירה.

סדרת יצירה:

עבור איבר b מתוך $X_{B,F}$ הינו סדרת סופית $a_1, a_2, \ldots, a_n$ כך ש:

1. $a_n = b$.
2. לכל $1 \leq i \leq n$

(א) או ש־$a_i \in B$

(ב) או ש־a_i התקבלה מקודמים בסדרה ע"י הפעלת פעולה מ־F.

דוגמה עבור
$B = \{0\}, \qquad F = \{+2\}$
נראה ש־$8 \in X_{B,F}$
סדרת היצירה שלו תהיה : $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

כדי להראות ש־$x \notin X_{B,F}$:

נמצא תכונה T ונראה ש־$X_{B,F} \subseteq T$ ונראה ש־$x \notin T$ (כלומר x אינו מקיים את T)
(T היא קבוצת האיברים בעלי תכונה כלשהי).

דוגמה:

נראה של־$aba \notin ABA$(שפה שהוגדרה קודם).
תכונה:
צ"ל מספר ה־a הכל איברי B,F הוא אי־זוגי.
אם זה נכון אז aba לא בשפה כי היא אינה מקיימת את התכונה.

שיטת ההוכחה:

- ⋆ נבחר תכונה T.
- ⋆ נראה שמתקיים:

1. $B \subseteq T$.
2. לכל $x_1, x_2, \ldots, x_n \in T$ מתקיים $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T$.

דוגמה:

$ab \in T$ (יש a יחיד).
כל פעולה שפועלת על מילה עם מספר זוגי של a מחזירה מילה עם מספר אי־זוגי של a.

לוגיקה הרצאה 2

<u>הגדרה אינדוקטיבית - של קבוצה</u>

W−העולם
B- מוכל ב W קבוצת בסיס
F- קבוצת פעולות\כללי יצירה
$X_{B,F}$ מוכלת ב W מוגדרת כקבוצה המקיימת:

1. B מוכל ב $X_{B,F}$
2. אם $X_{1...n}$שייך ל $X_{B,F}$ ו f שייך ל F אז $f(x_1, ..., x_n)$ שייך ל $X_{B,F}$.
3. $X_{B,F}$ הוא קבוצה מינימלית שמקיימת את א ו ב.

הראינו ש- $X_{B,F} = \cup X_i$
$X_1 = B$
$X_{i+1} = X_i \cup F(X_i)$

<u>משפט ההוכחה באינדוקציה</u>

אם קבוצהY מספקת את (א) ו-(ב) עבור F, B נתונים אז $X_{B,F} \subseteq Y$

<u>הוכחה באינדוקציית מבנה:</u>

כדי להוכיח ש-$X_{B,F} \subseteq Y$

1. $B \subseteq Y$
2. Y סגורה ל- F.

<u>להראות</u> $b \in X_{B,F}$

נראה <u>סדרת יצירה</u> $a_1 \ldots a_n$ כך ש-
$a_n = b$ ולכל $1 \leq i \leq n$
$a_i \in B$ או התקבלה מהקודמים הסדרה ע"י הפעלת פעולה מ-F.

להראות $b \notin X_{B,F}$

נציע תכונה(קבוצה) T ונראה
$X_{B,F} \subseteq T$
$b \notin T$

לוגיקה ־ תחשיב מורכב מ־

- $\star$ הגדרה סינטקטית של שפה
- $\star$ הגדרה של הסמנטיקה של מילים בשפה
- $\star$ מערכת הוכחה עם אכסיומות וכללי היסק שמאפשרת להוכיח "משפטים"
- $\star$ קשר בין אוסף הנוסחאות היכיחיות(יש אפשרות להוכיח אותן) לבין סמנטיקה.

תחשביב הפסוקים

סינטקס של תחשיב הפסיקים

דוגמאות "משתנים" A, B, C
$(+A)$,$(A \to B)$,$((A \to B) \to (B \to A))$
"השמש זורחת נסמן A , "חם בחוץ" נסמן ע"י B
השמש זורח וחם בחוץ $(A \wedge B)$
אם השמש זורחת אז חם בחוץ $(A \to B)$

הגדרה של הסינטקס של תחשיבי הפסוקים

קבוצה הפסוקים היא הקבוצה האינדוקטיבית שמוגדרת באופן הבא:
$W = (\{\vee, \wedge, \neg, \to, (,)\} \cup \{p_i | i \in N\})$
בסיס: $B = \{p_i | i \in N\}$
p_i נקראות פסוקים/פסוקים אטומיים
הפעולות:

- $\star$ $F = \{F_\neg, F_\wedge, F_\vee, F_\to\}$
- $\star$ $F_\neg(\alpha) = (\neg\alpha)$
- $\star$ $F_\vee(\alpha, \beta) = (\alpha \vee \beta)$
- $\star$ $F_\wedge(\alpha, \beta) = (\alpha \wedge \beta)$
- $\star$ $F_\to(\alpha, \beta) = (\alpha \to \beta)$

איך נראה ש:
$((p_5 \wedge p_{11}) \to (p_6 \to p_5))$ (פסוק חוקי בשפה)

1. p_5
2. p_{11}
3. $(p_5 \wedge p_{11})$
4. p_6
5. $(p_6 \to p_5)$
6. $((p_5 \wedge p_{11}) \to (p_6 \to p_5))$

האם: $p_2(p_1$**פסוק ?**
לא!

<u>נוכיח:</u>

<u>תכונה:</u> כל פסוק הוא או אטומי או שמספר הסוגריים הפתוחים שווה למספר הסוגריים הסגורים.

<u>הוכחה באינדוקציית מבנה:</u>

<u>בסיס</u> לכל פסוק אטומי יש תכונה.

<u>סגור</u> נתונים α, β שמקיימים את התכונה
ב־α יש k סוגריים מכל סוג.
ב־β יש n סוגריים מכל סוג.
נסתכל על המקרה הפעלת $(\alpha \to \beta) = F_{\to}(\alpha, \beta)$
צ"ל ל־$(\alpha \to \beta)$ יש תכונה. (מספר הסוגריים מכל סוג n+k+1).
מסקנה מההוכחה ש־ $p_2(p_1$ אינו פסוק.(צריך היה להראות לכל פעולה).

<u>הגדרה:</u> עבור סדרות סימנים <u>לא ריקות</u> α ו־ β כך ש־ $\beta = b_1 \cdots b_k, \alpha = a_1 \ldots a_n$
נאמר ש־α הוא <u>רישא</u> של β אם $n \leq k$ ובנוסף לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $a_i = b_i$

<u>דוגמאות:</u>

- ⋆ ab הוא רישא של $abab$
- ⋆ ab הוא רישא של $aabc$
- ⋆ α הוא <u>רישא ממש</u> של β אם α רישא של β ו־ β $(n < k)\alpha \neq \beta$

<u>תכונה</u> לכל פסוק β, אם α הוא ביטוי שהוא רישא ממש לא ריקה של β אז ב־α מספר הסוגריים השמאליים
גדול ממש ממספר הסוגריים הימניים.

<u>מסקנה</u> α לא פסוק
דוגמה:
$$\underbrace{\underbrace{((p_5 \to p_6}_{\alpha} \vee (p_7 \wedge p_{11})}_{\beta}$$
דוגמה <u>לשפה</u> חדשה שאין בה סוגריים ולכן אין בה קריאה יחידה:
סדרת סימנים $a \wedge b \wedge c$
(1)הפעלת $\wedge$ על $c, a \wedge b$
(2)הפעלת$\wedge$ על $b \wedge c, a$

<u>משפט הקריאה היחידה</u>

1. לכל פסוק α אם יש פסוקים β_1, γ_1 וקשר $\square$
כך ש־$\alpha = (\beta_2 \square \gamma_2)$ ובנוסף יש פסוקים
β_2, γ_2 וקשר $\triangle$ כך ש־ $\alpha = (\beta_2 \triangle \alpha_2)$
אז בהכרח $\beta_1 = \beta_2,\ \gamma_1 = \gamma_2$ ו־$\square$,$\triangle$ הם אותו קשר.

2. לכל פסוק α, אם יש פסוק β כך ש־ $\alpha = (\neg\beta)$ אז אין קשר
$\square$ ופסוקים γ, δ כך ש־ $\alpha = (\gamma \square \delta)$ ואם קיים β^*
כך ש־ $\alpha = (\neg\beta^*)$ אז $\beta = \beta^*$.

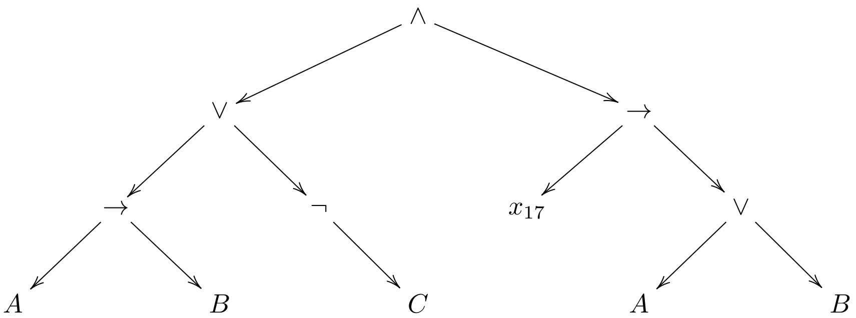
<u>הוכחת (1):</u> נניח בשלילה שיש $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \square, \triangle$
$\alpha = (\beta_1 \square \gamma_1) = (\beta_2 \triangle \gamma_2)$
ולא מתקיימות טענות המשפט

<u>מקרה (1)</u> - נניח $\beta_1 \neq \beta_2$ $\alpha = \underbrace{a_1}_{(}\underbrace{\underbrace{a_2 \dots}_{b1} a_n}_{b2)}$

נניח ש־β_1 הוא רישא ממש של β_2.
β_1 הוא פסוק ולפי מסקנה מתכונה,
רישא ממש של פסוק אינו פסוק ולכן β_1 אינו פסוק.
סתירה לעובדה ש־ β_2, β_1 פסוקים.
מסקנה $\beta_1 = \beta_2$.

<u>מקרה (2)</u> - ידוע $\beta_1 = \beta_2$
אבל $\triangle \neq \square$
$\alpha = \underbrace{a_1}_{(}\underbrace{\dots}_{\underbrace{b1}_{b2}}\underbrace{a_k}_{\underbrace{\square}_{\triangle}}\underbrace{a_n}_{)}$ (k־קיים).
$\square$ ו־ $\triangle$ מופיעים באותו מקום ב־α ולכן זהים.

<u>מקרה (3)</u> ידוע $\beta_1 = \beta_2$, $\square = \triangle$ ונניח $\gamma_1 \neq \gamma_2$
לא יתכן כי שתיהן מתחילות באותו מקום ב־α ונמשכות עד הסוף ולכן זהות.
כתוצאה מהקריאה היחידה אפשר להתאים לכל פסוק <u>עץ יצירה</u> שהעולם שלו הם
פסוקים אטומיים ובכל צומת פנימי יש קשר, אם הקשר הוא $\neg$ אז יש לצומת בן יחיד.
אם הוא $\wedge, \vee, \rightarrow$ אז יש לו 2 בנים.
$(((A \rightarrow B) \vee (\neg C)) \wedge (X_{17} \rightarrow (A \vee B)))$



משפט הקריאה היחידה מבטיח לנו כי לכל פסוק קיים עץ **<u>יחיד</u>**.

<u>סמנטיקה</u>

מטרה להתאים ערך אמת או שקר לפסוקים האטומיים ומזה להסיק ערך אמת או שקר לפסוק כולו.

- $\star$ אמת - T
- $\star$ שקר - F

ערכי אמת: $\{T,F\}$

השמה היא פונקציה מקבוצה הפסוקים האטומיים לקבוצה $\{T,F\}$

$$V:\{p_i|i\in N\}\to\{T,F\}$$

$$V_2(p_i)=\begin{cases}T & i\%2=0\\ F & i\%2\neq 0\end{cases}$$

<u>סמנטיקה לפסוק כלשהו:</u>

בהנתן $V:\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\to\{T,F\}$

נגדיר $\{T,F\}\to$קבוצת הפסוקים:

$$\overline{V}:X_{B,F}\to\{T,F\}$$

<u>נגדיר</u> פונקציות טבלת אמת:

$$TT_\neg:\{T,F\}\to\{T,F\}$$
$$TT_\wedge:\{T,F\}\wedge\{T,F\}\to\{T,F\}$$
$$TT_\vee:\{T,F\}\vee\{T,F\}\to\{T,F\}$$
$$TT_\to:\{T,F\}\to\{T,F\}\to\{T,F\}$$

לוגיקה הרצאה 3

תחשיבי פסוקים

סינטקס: בסיס $\{p_i | i \in N\}$ - הפסוקים האטומיים.

$F_{\neg}(\alpha) = (\neg\alpha)$

$F_{\square}(\alpha, \beta) = (\alpha\square\beta)$ $(\vee, \wedge, \rightarrow)$

WFF – well form formulas

סמנטיקה:

התאמה לפסוקים ערכי אמת (T,F)

$p_0 \vee p_2$

השמה T F

לפסוק ערך T

F F

F

הגדרת סמנטיקה:

נתונה השמה

$V : \{p_i | i \in N\} \rightarrow \{T, F\}$

נגדיר השמה $\widehat{V}$

$\widehat{V} : WFF \rightarrow \{T, F\}$

הגדרת $\widehat{V}$:

1. לכל פסוק אטומי $\widehat{V}(p_i) = v(p)$

2. לפסוק במבנה $\alpha = (\neg\beta)$

   $TT_{\neg} : \{T, F\} \rightarrow \{T, F\}$

   truth table

   $TT_{\neg}(T) = F$

   $TT_{\neg}(F) = T$

β	$\neg\beta$
T	F
F	T

$\widehat{V}$(פסוק)

$$\widehat{V}(\neg(\alpha)) = TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha))$$

3. $\alpha = (\beta \vee \gamma)$

$$\widehat{V}(\alpha) = TT_{\vee}(\widehat{V}(\beta), \widehat{V}(\gamma))$$
$$TT_{\vee}(T,T) = T$$
$$TT_{\vee}(T,F) = T$$
$$TT_{\vee}(F,T) = T$$
$$TT_{\vee}(F,F) = F$$

α	β	$\alpha \vee \beta$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

4. $\alpha = (\beta \vee \gamma)$

$$\widehat{V}(\alpha) = TT_{\wedge}(\underbrace{\widehat{V}(\beta)}_{\text{truth of sub}}, \underbrace{\widehat{V}(\gamma)}_{\text{truth of sub}})$$
$$TT_{\wedge}(T,T) = T$$
$$TT_{\wedge}(\tfrac{T}{\frac{F}{F}}, \tfrac{F}{\frac{T}{F}}) = F$$

α	β	$\alpha \wedge \beta$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

5. $\alpha = (\beta \to \gamma)$

האם β אמת אז γ אמת

$$\widehat{V}((\beta \to \gamma)) = TT_{\to}(\widehat{V}(\beta), \widehat{V}(\gamma))$$

β	γ	$\beta \to \gamma$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

אם המכונית תתקלקל אז אגיע באחור

$A \to B$

F T

המכונית לא התקלקלה והגעתי באיחור

סיכום:

בסמנטיקה של תחשיב הפסוקים:

בהינתן $V : \{p_i | i \in \mathbb{N}\} \to \{T, F\}$

מגדירים $\widehat{V} : WFF \to \{T, F\}$

באופן הבא:
אם $\alpha = p_i$ אז $\widehat{V}(\alpha) = V(\alpha)$
אם $\alpha = (\neg\beta)$ אז $\widehat{V}(\alpha) = TT_{\neg}(\widehat{V}(\beta))$
אם $\alpha = (\beta\Box\gamma)$ אז $\widehat{V}(\alpha) = TT_{\Box}(\widehat{V}(\beta), \widehat{V}(\gamma))$

טענה:

בהינתן השמה v,
לכל פסוק α, $\widehat{V}(\alpha)$
מתאים ל־α ערך אמת יחיד שנקבע ע"י v וע"י
פונקציות טבלאות האמת $(TT_{\Box})$.

הוכחה:

באינדוקצייה על מבנה הפסוק
מסתמכת על כך

- v פונקציה
- $TT_{\Box}$ פונקציות

כשה דנים בסמנטיקה קובעים סדר קדמאות בין קשרים שיאפשר לוותר על חלק מהסוגריים:

- הקשר $\neg$ מופעל ראשון
- קשרים$\vee, \wedge, \leftrightarrow$מופעלים אחרי
- הקשר $\rightarrow$אחרי

$\neg p_0 \vee p_1$ כמו לכתוב $((\neg p_0) \vee p_1)$

מושגים סמנטיים נוספים

כאשר $\widehat{V}(\alpha) = T$ נאמר ש־vמספקת את α
ונסמן $v| = \alpha$

הגדרה:

פסוק α הוא טאוטולוגיה אם הוא מקבל ערך T <u>לכל</u> השמה:

דוגמאות:

$\neg p_o \vee p_o$, $\neg\alpha \vee \alpha$
טאוטולוגיה:
כל השורות בטבלת האמת
יהא T
[כל ההשמות מספקות את הפסוק]

P_0	$\neg p_0$	$\neg p_0 \vee p_0$
T	F	T
F	T	T

הוכחה ש־ $\alpha \vee \neg\alpha$ הוא טאוטולוגיה:

$\widehat{V}(\alpha \vee \neg\alpha) = TT_{\vee}(\widehat{V}(\alpha), \widehat{V}(\neg\alpha)) =$

$TT_{\vee}(\widehat{V}(\alpha), TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha))$

<u>2 מקרים:</u>

1. $TT_{\vee}(T,F) = T \Leftarrow TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha)) = F \Leftarrow V(\alpha) = T$
2. $TT_{\vee}(F,T) = T \Leftarrow TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha)) = T \Leftarrow V(\alpha) = F$

על כן $| = \alpha \vee \neg\alpha$

דוגמאות נוספות לטאוטולוגיה:

$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

איך נוכיח שזאת טאוטולוגיה?

להראות <u>לכל השמה</u> ערך הפסוק הוא T.(מספר אינסופי)

טענה:

לכל פסוק $\alpha \in WFF$

ולכל שתי השמות v_2, v_1 מתקיים:

אם לכל פסוק אטומי שמופיע ב־ α מתקיים $v_1(p_i) = v_2(p_i)$

אז $\widehat{V_1}(\alpha) = \widehat{V_2}(\alpha)$

α, β	$\neg\beta$,$\neg\alpha$	$\alpha \to \beta$	$\neg\beta \to \neg\gamma$	$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\gamma)$
T,T	F,F	T	T	T
T,F	T,F	F	F	T
F,T	F,T	T	T	T
F,F	T,T	T	T	T

שיטת הוכחה שניה שפסוק הוא טאוטולוגיה:

נגדיר על $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

נניח בדרך השלילה שאינה טאוטולוגיה ולכן קיימת השמה v:

$$\widehat{V}()$$

$$\Rightarrow$$

$$\widehat{V}(\alpha \to \beta) = T$$

$$\widehat{V}(\neg\beta \to \neg\alpha) = F$$

$$TT_{\neg}(\widehat{V}(\beta)) = \widehat{V}(\neg\beta) = T$$

$$TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha)) = \widehat{V}(\neg\alpha) = F$$

$$\Rightarrow$$

$$\widehat{V}(\beta) = F, \widehat{V}(\alpha) = T$$

$$\widehat{V}(\alpha \to \beta) = F$$

מסקנה:

לא קיימת v שנותנת לפסוק ערך Fכלומר הוא טאוטולוגיה.

דוגמאות נוספות לטאוטולוגיה:

ראינו $\alpha \vee \neg\gamma$
$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$
דסטריבוטיביות:
$((\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)))$
$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
דה מוגרן:
$\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \beta)$
$\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
מושג סמנטי נוסף: סתירה
ספקו הוא סתירה אם כל השמה נותנת לו ערך F.

דוגאמות:

$\alpha \wedge \neg\alpha$
כל שלילה של טאוטולוגיה
$\beta = \neg\alpha$ ו־α טאוטולוגיה
$\widehat{V}((\neg\alpha)) = TT_\neg(\widehat{V}(\alpha)) = TT_\neg(T) = F$
לכל השמה
.
נתונה α שאינה טאוטולוגיה, האם היא סתירה ?
p_0 לא טאוטולוגיה ולא סתירה.

טענה:

α הוא סתירה $\Leftrightarrow$ $\neg\alpha$ הוא טאוטולוגיה
$\neg\alpha$ הוא סתירה $\Leftrightarrow$ α הוא טאוטולוגיה
פסוק <u>הינו ספיק</u> אם קיימת השמה שמספקת אותו.

הגדרה:

השמה מספקת קבוצת פסוקים X
אם היא מספקת את כל אחד מהפסוקים ב־X.
$v \models \alpha, \forall\alpha \in X, \Leftrightarrow v| = X$
$v \models \bigwedge_{\alpha \in X} \alpha$
אם X קבוצה אינסופית
אז הביטוי <u>אינו פסוק</u>

מושג נוסף:

פסוק α <u>נובע לוגית</u> צפסוק β
אם כל השמה שמספקת את β מספקת גם את α.
$\beta| = \alpha$

"$\subseteq$"
דוגמא:

Eror 404 "white board erased"

למה:

$\alpha \models \beta$ אם ורק אם $\models \alpha \to \beta$ (הוא טאוטולוגיה).

הוכחה:

נתון $\models \alpha \to \beta$
צ"ל $\alpha \models \beta$
נתונה השמה $v \models \alpha$
נראה ש־ $v \models \beta$
נניח שלא:
$\widehat{V}(\alpha) = T$
$\widehat{V}(\beta) = F$
$\widehat{V}(\alpha \to \beta) = F$
בסתירה לנתון $TT_{\to}(T, F) = F$
ש־$\alpha \to \beta$ הוא טאוטולוגיה.

$x \in A/(B/C) \Leftrightarrow$
$x \in A \wedge x \notin (B/C) \Leftrightarrow$
$x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C \Leftrightarrow$
$x \in (A/B) \cup x \in A \cap C$

לוגיקה הרצאה 4

סמנטיקה של פסוקים:

נתונה המשווה $v:\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\to\{T,F\}$
מגדירים $\overline{V}=WFF\to\{T,F\}$
אם $\alpha=p_i$ $\overline{V}(p_i)=v(p_i)$
אם $\alpha=(\beta\Box\gamma)$ אז $\overline{V}(\alpha)=TT_{\Box}(\overline{V}(\beta),\overline{V}(\gamma))$
אם $\alpha=(\neg\beta)$ אז $\overline{V}(\alpha)=TT_{\neg}(\overline{V}(\beta))$

מושגים סמנטיים:

טאוטולוגיה
הוא פסוק שמקבל ערך T לכל השמה
סתירה:
פסוק שמקבל ערך F לכל השמה.
מה משמעות שך $v(\not\models)\alpha$
$\overline{V}(\alpha)=F$
$(\not\models\alpha)$
לא בהכרח סתירה
$\Leftarrow$ <u>לא בהכרח טאוטולוגיה.</u>

דוגמה:

בבינתן קבוצה של פסוקים X
$v\models X$
אם $v\models\alpha$ לכל $\alpha\in X$
$\bigwedge\limits_{\alpha\in X}\alpha$ - לא כתיבה חוקית כי לא <u>פסוק</u>, יתכן סדרה אינסופית של סמימנים.
פסוק β <u>נובע לוגית</u> מפסוק α (סימון $\alpha\models\beta$) אם כל השמה מספקת של α מספקת גם את β.

למה:

$\alpha\models\beta$ אם ורק אם $\models\alpha\to\beta$

הוכחה:

$\Leftarrow$ נתון $\alpha\models\beta$ צ"ל $\models\alpha\to\beta$
נבחר השמה V:

מקרה 1: $\alpha \models \neg$, $\overline{V}(\alpha) = F$
אז

$$V \models \alpha \to \beta$$
$$TT_{\to}(\underbrace{\overline{V}}_{\text{F or FT or FF}}(\beta)) = T$$

מקרה 2: $\overline{V}(\alpha) = T$, $V \models \alpha$
עם $\alpha \models \beta$, גם $V \models \beta$
ולכן $V \models \alpha \to \beta$

$\Rightarrow$: נתון $\models \alpha \to \beta$
צ"ל $\alpha \models \beta$
2 מקרים:

1. $\overline{V}(\alpha) = T$
מאחר ש־ $\alpha \to \beta$ טאוטולוגיה אז $\overline{V}(\alpha \to \beta) = B$
מסקנה עפ"י $TT_{\to}$: $\overline{V}(\beta) = T$

2. $\overline{V}(\alpha) = F$
אין צורך להוכיח כי ה $\models$ מתקיים וריויאלי.

דוגמה:

בהינתן קבוצת פסוקית X נאמר ש $X \models \beta$ אם כל השמה שמספקת את X (כלומר את כל $\alpha \in X$) מספקת גם את β.

דוגמה:

$\alpha \to \beta$, $\alpha \models \beta$
$\{\alpha \to \beta, \alpha\} \models \beta$

למה:

$X, \alpha \models \beta$ אם ורק אם $X \models \alpha \to \beta$

-

סימון:

$M(\alpha)\{v | v \models \alpha\}$
$M(X) = \{v | v \models X\}$
α סתירה: $M(\alpha) = \emptyset$
$M(\alpha) \subseteq M(\beta),\ \alpha \models \beta$

שקילות לוגית

זוג פסוקים α,β שקולים לוגית אם הם מקבלים אותו ערך אמת בכל השמה.
במילים אחרות, לכל השמה v. $\overline{v}(\alpha) = \overline{v}(\beta)$
$M(\alpha) = M(\beta)$ סימון $\alpha \equiv \beta$

דוגמה לפסוקים שקולים:

- ⋆ כל הטאוטולוגיות
- ⋆ כל הסתירות

$$(\alpha_\wedge(\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \beta))$$
$$(\neg(\neg\alpha)) \equiv \alpha$$

למה:

$\alpha \equiv \beta$ אם ורק אם $\models \alpha \overbrace{\leftrightarrow}^{\text{logic connect}}$

שלמות של מערכת קשרים:

הגדרה: פסוק α ממממש טבלת אמת נתונה אם טבלת האמת של α זהה לטבלה הנתונה.
נראה: $\neg, \vee, \wedge$
עבור טבלת אמת עם k פסוקים אטומיים יש לה 2^k שורות
$TT : \{T, F\}^k \to \{T, F\}$

דוגמה:

קשר לוגה "רוב" #
תלת־ערה(תלת מקומי?)

p_1	p_2	p_3	$\#(p_1, p_2, p_3)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

שורות שקבלו T:

1. $\alpha_1 = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$
2. $\alpha_2 = p_1 \wedge p_2 \neg p_3$
3. $\alpha_3 = p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3$
4. $\alpha_5 = \neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$

$\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \alpha_5$

טענה:

α מממשת את טבלת האמת של #.

עבור טבלת אמת שבה כל השורות מחזירות F

נחזיר $p_1 \land \neg p_1$ כאשר p_1הוא פסוק אטומי שמופיע בטבלה.

p_2	p_1	$?(p_1, p_2)$
F	F	F
F	F	F
F	F	F
F	F	F

$(p_1 \land \neg p_1)$

המשך:

$\{\land,\neg\}$ גם מערכת קשרי שלמה

$(\alpha\lor\beta) \equiv \neg(\neg\alpha \land \neg\beta)$

$(\alpha \land \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \lor \neg\beta) \leftarrow \{v, \neg\}$ מערכת קשרים שלמה

$\{\neg, \leftarrow\}$ מערכת קשרים שלמה

$(\alpha \lor \beta) \equiv \neg\alpha \rightarrow \beta$

T	| T	T |	| T
T	| T	F |	| T
T	| F	T |	| T
F	| F	F |	| T

הגדרה:

נגדיר קבוצה אינדוקטיבית של קבוצת <u>המשפטים הפורמליים</u> או <u>הפסוקים היכיחים</u>.

בסיס(אקסיומות[קבוצת פסוקים]): (עוזרים להוכיח/לקבל פסוקים חדשים עס' פסוקים נתונים).

כללי יצירה/פעולות

כללי היצירה: $\underbrace{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}_{\beta}$ (למעלה נתון שיכיח, גורר שלמטה גם).

כלל הניתוק , MP-Modus Promens

קבוצות האכסיומות של תחשיב הפסוקים

תבנית ראשונה $A1$:

פסוק δ הוא אכסיומה מטיפוס $A1$

אם קיימים פסוקים β, α כך ש־

$A1$: $\delta = (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$

$A2$:

δ מהצורה:

$\delta = (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)))$

$A3$:

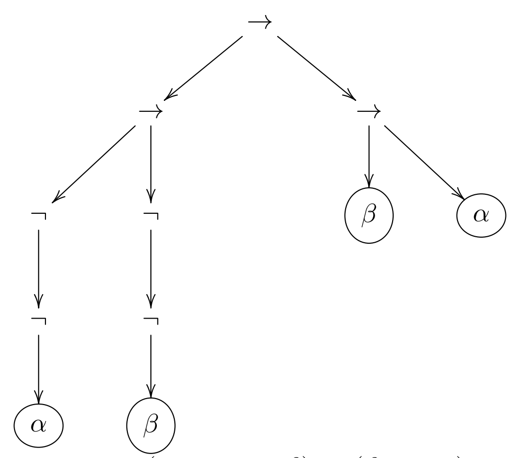
δ מהצורה

$\delta = ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \gamma))$
$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ קבוצת הבסיס.

דוגמאות:

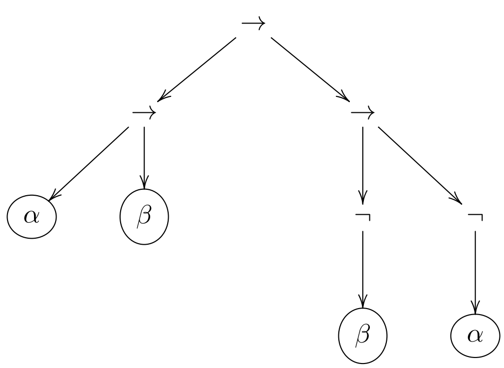
A_1 : $(p_2 \to (p_1 \to p_2))$
$(\neg\neg p_5 \to \neg p_5) \to (p_5 \to \neg p_5)$

עץ יצירה עבור אכסיומה 3



$(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$

$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ **האם הוא** A_3**?**



להראות שפסוק יכיח:

להראות סדרת יצירה ־ נקרא לה סדרת הוכחה
סדרת הוכחה עבור פסוק β
הינה סדרה של פסוקים $a_1, a_2, \ldots, a_n$
כך ש־

$\star$ $a_b = \beta$

לכל $1 \leq i \leq n$, a_i התקבלה מהפעלתו.

כלל ההיסק על פסוקים קודמים בסדרה

מה יכול היות a_1?
אחת מהאכסיומות
אם פסוק α יכיח נסמן $\vdash \alpha$.

לוגיקה הרצאה 5

קבוצת הפסוקים היכחיים/משפטים מורמליים - סינטקטי - פסוקים עם $\{\leftarrow, \rightarrow\}$ בלבד.

הגדרה אידוקטיבית:

$$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$
$$A_1 = \{(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) | \alpha, \beta \in \text{WFF}\{\neg, \rightarrow\}\}$$
$$A_2 = \{((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) | \alpha, \beta, \gamma \in \text{WFF}_{\{\neg, \rightarrow\}}\ \}$$
$$A_3 = \{((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) | \alpha, \beta \in ...\}$$
$$F = \{MP\}$$

$$MP$$
$$\underbrace{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}_{\beta}$$

כדי להראות ספסוק שייך לקבוצת הפסוקים היכיחיים צריך להראות <u>סדרת יצירה</u> שנקראת סדרת הוכחה.

סדרת הוכחה עבור פסוק β הוא סתדרת הפסוקים $\alpha_1, \ldots, a_n$.
שכל אחד מהם הוא או אכסיומה או התקבל מהקודמים בהסדרה ע"י כלל ההיסק MP.
בנוסף $a_n = \beta$.

$$\underbrace{\overbrace{a_1 a_2}^{axi'} a_3}_{\text{Proof series for } a_3} | \ldots a_n$$

דוגמה:

צ"ל $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$
כסימון להקלה בקריאות נסמן $\alpha \rightarrow \alpha$ כ-β

1. A_2 $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \underbrace{\rightarrow}_{\Uparrow} ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$
2. A_1 $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$
3. $MP1,2$ $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$

(א) הכנסת β:

$$(\alpha \rightarrow (\underline{\underline{\alpha \rightarrow \alpha}})) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$$

4. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)), A_1$
5. $(\alpha \to \alpha)$,$MP\ 4,3$

$\vdash (\alpha \to \alpha)$

דוגמה:

$\vdash (\neg\alpha \to (\alpha \to \beta))$

1. $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta))\ A_3$
2. $(\underline{(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)}) \to (\neg\alpha \to (\underline{(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)}))$,A_1
3. $(\neg\alpha \to ((\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)))\ MP\ 1,2$
4. $:A_2$ $(\underbrace{\neg\alpha}_{\alpha} \to ((\underbrace{\neg\beta \to \neg\alpha}_{\beta}) \to (\underbrace{\alpha \to \beta}_{\gamma}))) \overbrace{\to}^{1}$

$(\underbrace{\neg\alpha}_{\alpha} \to (\underbrace{\neg\beta \to \neg\alpha}_{\beta})) \overbrace{\to}^{2}$

$(\underbrace{\neg\alpha}_{\alpha} \to (\underbrace{\alpha \to \beta}_{\gamma}))$

5. $(\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)) \to (\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)))\ MP\ 3,4$
6. $(\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha))\ A_1$
7. $(\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)) MP\ 5,6$

$\vdash (\neg\alpha \to (\alpha \to \beta))$

הוכחה על סמך הנחות

נתונה קבוצה של פסוקים X , נגדיר את קבוצת המסקנות של X (קבוצת הפסוקים היכחיים עס' X)
כקבוצה האינדוקטיבית:

$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup X$

$F = \{MP\}$

סדרת הוכחה עבוק קב' β עס' X $a_1, a_2, \ldots, a_n$
$a_n = \beta$ ולכל $1 \le i \le n$
a_i הוא אכסיומה או מ־X
או התקבל מהקודמים בסדרה ע"י MP.
סימון: $X \vdash \beta$

$\underbrace{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma}_{X=\{\alpha\to\beta,\beta\to\gamma|\alpha,\beta,\gamma\in \mathrm{WFF}_{\{\to,\neg\}}\}} \vdash \alpha \to \gamma$

1. הנחה $\alpha \to \beta$.
2. הנחה $\beta \to \gamma$.

מטרה: $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \vdash (\alpha \to \gamma)$

משפט:

נתון:
$X \vdash \beta$ ולכל $\alpha \in X$, $\vdash \alpha$ אזי נסיק $\vdash \beta$.

צ"ל:

$\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \gamma$

1. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))A2$
2. $((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma)))A1$
3. הנחה $\beta \to \gamma$
4. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)), MP\ 2,3$
5. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma), MP\ 1,4$
6. הנחנה $\alpha \to \beta$
7. $\alpha \to \beta, MP$ 5,6

$\beta \to \gamma, \alpha \to b \vdash \alpha \to \gamma$

טענה 1:

אם $X \in \alpha$ אז $X \vdash \alpha$

הוכחה:

הנחנה $1.\alpha$

$X \vdash \alpha$

$\alpha \vdash \alpha$

טענה 2:

אם $X \subseteq Y$ אז לכל פסוק α, אם $X \vdash \alpha$ אז $Y \vdash \alpha$

התכונה נקראת: מונוטוניות של הוכחה. $X \vdash \alpha$

$$
\begin{array}{lcl}
a_1[x_1 & & [y_1 \\
\vdots|x_2 & & |y_2 \\
 & \Rightarrow & \vdots \\
a_n|\vdots & & \vdots \\
[x_n & & [y_n
\end{array}
$$

נוסח אלטרנטיבי לטענה 2:

אם $B_1 \subseteq B_2$אז $X_{B_1,F} \subseteq X_{B_2,F}$

מסקנה:

אם $\vdash \alpha$ אז $X \vdash \alpha$ לכל קבוצה X.

טענה 3:

אם לכל פסוק α ב־X, $Y \vdash \alpha$

אז לכל פסוק β אם $X \vdash \beta$ אז $Y \vdash \beta$.

הוכחה: נתון $X \vdash \beta$, $\underbrace{a_1, \ldots,}_{\text{from } X} \underbrace{a_n}_{\beta}$

על כל איבר a_iשהסדרה שלו היא "מ־X"

נחליף אותו בסדרת הוכחה מתוך Y.

דוגמה:

$X = \{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\}$

$\delta = \alpha \to \gamma$

ידוע $X \vdash \delta$

נגדיר $Y = \{\beta, \gamma\}$

נוכיח ש־

$y \vdash \alpha \to \beta$

$y \vdash \beta \to \gamma$

נסיק $y \vdash \delta$

1. $v\beta \to (\alpha \to \beta),\ \text{A1}$
2. הנחה מ־y β
3. $\alpha \to \beta$

$y \vdash \alpha \to \beta$

(א) $(\gamma \to (\beta \to \gamma)),\ \text{A1}$

(ב) הנחה מ־y γ.

(ג) $\beta \to \gamma$

$y \vdash \beta \to \gamma$

טענה 4 (הוכחות הן סופיות)

אם $\vdash \alpha$ $\overbrace{X}^{\text{(infinite)}}$ אז קיימת תת קבוצה <u>סופית</u> של X, $X' \subseteq X$ כך ש־ $X' \vdash \alpha$.

משפט הדדוקציה:

לכל מערכת הוכחה שיש בה לפחות את האכסיומות $\boxed{A_1 \& A_2}$

ויש בה בדיוק את כלל ההיסק $\boxed{\text{MP}}$

<u>מתקיים:</u>

לכל קבוצת פסוקים X ופסוקים α, β:

$X, \alpha \vdash \beta$ אם ורק אם $X \vdash \alpha \to \beta$

מסקנה: $\alpha \vdash \beta \Leftarrow \alpha \to \beta \vdash$

הוכחה: $\Rightarrow$ נתון $X \vdash \alpha \to \beta$
נוכיח $X, \alpha \vdash \beta$

1. הנחה α
2. יכיח מ־X $\alpha \to \beta$.
3. MP β

$X, \alpha \vdash \beta$

לוגיקה הרצאה 6

אכסיומות $A_1 A_{2,} A_3$

כלל היסק MP

$\underbrace{\alpha, \alpha \to \beta}_{\beta}$

קבוצה אינדוקטיבית של המשפטים היכחיים

$\vdash \alpha$

סדרת הוכחה עבור α

$\alpha_1, \ldots, \underbrace{a_n}_{\alpha}$

לכל $1 \leq i \leq n$

a_iהוא או אכסיומה או התקבלה מהקודמים בסדרה ע"י MP.

בסיס $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup X$ - X קבוצת הנחות

פעולה MP

$X \vdash \alpha$

הנחה מ־X אכס',אכס' $X \subseteq Y$, $y \vdash \alpha$

משפט הדדוקציה

לכל מערכת הוכחה שיש בה לפחות אכסיומות A_1, A_2 רק את כלל MP:

לכל קבוצת פסוקים X ופסוקים α, β מתקיים:

$X \vdash \alpha \to \beta \;\Leftrightarrow\; X, \alpha \vdash \beta$

הוכחה:

$\Rightarrow$ נתון $X \vdash \alpha \to \beta$

הוכחנו $X, \alpha \vdash \beta$

$\Leftarrow$ נתון $X, \alpha \vdash \beta$

צ"ל $X \vdash \alpha \to \beta$

עס' $X, \alpha \vdash \beta$

קיימת סדרת הוכחה $a_1, \ldots, a_n$

לכל i :

a_i אכסיומה או מ־X או α או התקבלה עס' MP ו־ $a_n = \beta$.

נראה לכל a_i $1 \leq i \leq n$

$X \vdash \alpha \to a_i$

מסקנה כבור $a_n = \beta$

כנדרש $X \vdash \alpha \to \beta$

נוכיח באינדוקציה על i בסדרת ההוכחה.

בסיס: נוכיח $X \vdash \alpha \to a_i$

1. a_i אכסיומה
2. α
3. מ־X

<u>הוכחה ל 1 של הבסיס:</u>

1. אכסיומה a_1.
2. A_1 $a_1 \to (\alpha \to a_i)$.
3. $MP_{1,2}$ $\alpha \to a_1$

$\vdash \alpha \to a_1$

מונוטוניות של הוכחה עס' הנחות $X \vdash (\alpha \to a_i)$.

<u>הוכחה ל 2 של הבסיס:</u>

מטרה $\vdash \alpha \to \alpha$

משפט שהוכחנו בשבוע שעבר $X \vdash \alpha \to \alpha$.

<u>הוכחה ל 3 של הבסיס:</u>

1. הנחה מ־X a_1
2. $a_1 \to (\alpha \to a_1)$
3. $MP_{1,2}$ $\alpha \to a_1$

$X \vdash \alpha \to a_1$.

צעד האינדוקציה נניח שהטענה נכונה לכל $j < i$ נוכיח עבור a_i:

אפשרות 1:

1. a_i אכסיומה
2. α
3. מ־X

עבור אפשרות זו ההוכחה זהה.

אפשרות 2:

a_i התקבלה עס' MP מ־a_l, a_m עבור $m, l < i$

1. $a_1 = \delta \to a_i$
2. $a_m = \delta$
3. MP a_l, a_m $\quad a_i$

הנחת האינדוקציה
$X \vdash (\alpha \to (\delta \to a_i))$
$X \vdash (\alpha \to \delta)$

1. עס' X $\alpha \to (\delta \to a_i)$
2. עס, X $(\alpha \to \delta)$
3. $(((\alpha \to (\delta \to a_i)) \to$
$((\alpha \to \delta) \to (\alpha \to a_i)))$ A_2
4. $((\alpha \to \delta) \to (\alpha \to a_i))$ $MP_{1,3}$
5. $(\alpha \to a_i)$ $MP_{2,4}$

$X \vdash (\alpha \to a_i)$

■

תרגיל:

נוכיח $\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$

הוכחה:

1. הנחה $(\alpha \to (\beta \to \gamma))$
2. הנחה β
3. הנחנה α
4. $(\beta \to \gamma)$ $MP_{1,3}$
5. γ $MP_{4,2}$

$(\alpha \to (\beta \to \gamma)), \beta, \gamma \vdash \alpha$
(משפט הדדוקציה) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)), \beta \vdash (\alpha \to \gamma)$
("") $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \vdash (\beta \to \alpha \to \gamma)$
("") $\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$

תרגיל:

נוכיח $\vdash (\neg\neg(\alpha \to \alpha)$

1. הנחה $\neg\neg\alpha$
2. משפט $\vdash (\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ $(\neg\neg\alpha \to (\neg\alpha \to (\neg\neg\neg\alpha))$
3. $(\neg\alpha \to \neg\neg\neg\alpha)$ $MP_{1,2}$
4. $(\underbrace{\neg\alpha}_{\beta} \to \underbrace{\neg\neg\neg\alpha}_{\neg\alpha}) \to (\underbrace{\neg\neg\alpha}_{\alpha} \to \underbrace{\alpha}_{\beta})$ A_3
5. $(\neg\neg\alpha \to \alpha)$ $MP_{3,4}$

6. α $MP_{5,1}$
$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$
משפט הדדוקציה
$\vdash (\neg\neg\alpha \to \alpha)$

$A_3 : (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
משפט פורמלי פסוק יכיח $\vdash (\neg \underbrace{\alpha}_{(\neg\alpha)} \to (\underbrace{\alpha}_{(\neg\alpha)} \to \underbrace{\beta}_{(\neg\neg\neg\alpha)}))$.

שיטה שונה להשמך ההוכחה משלב 5:
מסקנה $\neg\neg\alpha \vdash (\neg\neg\alpha \to \alpha)$
דדוקציה בכיוון $\to$ $\{\neg\neg a, \neg\neg\alpha\} \vdash \alpha$
$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$
דדוקציה $\vdash (\neg\neg\alpha \to \alpha)$

להוכיח תכונות על מערכת ההוכחה.

משפט נאותות:

$$\models \alpha \quad \Leftarrow \quad \vdash \alpha$$

משפט הנאותות החזק:

$$X \models \alpha \quad \Leftarrow \quad X \vdash \alpha$$

- $X \models \alpha$ מתקיים אם לכל השמה v,
  אם $v \models X$ (כלומר $v \models \beta$ לכל $\beta \in X$) אז $v \models \alpha$.

משפט השלמות(החזק):

$$X \vdash \alpha \Leftarrow X \models \alpha$$
$$\vdash \alpha \quad \Leftarrow \quad \models \alpha.$$

הוכחה (משפט הנאותות החזק):

נתון $x \vdash \alpha$
צ"ל $X \models \alpha$
הוכחה באינדוקציית מבנה על הפסוקים α שיכיחים עס' X.

בסיס סדרת ההוכחה $a_1, \ldots, \underbrace{a_n}_{\alpha}$

1. a_1 מ-X.
2. a_1 אכסיומה

הוכחה:

1. a_1 מ־X.
$X \vDash a_1$,
$X \vDash v$ אם ורק אם $v \vDash \beta$ לכל $\beta \in X$ ובפרט $v \vDash a_1$.

2. a_1 אכסיומה
לכל אכסיומה קל לבדוק $\vDash a_1$ טאוטולוגיה
מסקנה $X \vDash a_1$

הנחה האינדוקציה:

$X \vDash a_j$
$X \vDash a_K$

צעד האינדוקצייה a_i: אכסיומה מ־X
MP מ־ a_k, a_j, $j, k < i$
$a_j = \beta \to a_i$, $a_k = \beta$
$X \vDash \beta \to a_i$
$X \vDash \beta$
נניח בשלילה ש־ $X \nvDash a_i$
כלומר קיימת v
$v \vDash X$
$v \nvDash a_i$
עס' הנחת האינדוקציה
$v \vDash \beta \to a_i$
$v \vDash \beta$
עס' טבלת האמת של $\to$:
$v \vDash a_i$ סתירה.

משפט הנאותות(החזק לפי אביר היזם):

אם $X \vdash \alpha$ אז $X \vDash \alpha$
נסמן שקול: אם $X \nvDash \alpha$ אז $X \nvdash \alpha$

הוכחה משפט השלמות:

<u>עקביות של קבוצת פסוקים:</u>
<u>הגדרה 1:</u>
קבוצת פסוקים X היא <u>עקבית</u> אם לא קיים פסוק α כך ש־ $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$.
<u>הגדרה 2:</u>
X הינה עקבית אם לא כל פסוק יכיח מ־X. כלומר, קיים פסוק β, $X \nvdash \beta$.

דוגמאות לקבוצות לא עקביות:

1. $X = \{\alpha, \neg\alpha\}$
$X \vdash \alpha$
$X \vdash \neg\alpha$

2. $X=\{\alpha\to\beta,\alpha,\neg\beta\}$
$X\vdash\neg\beta$
$X\vdash\beta$

משפט:

2 ההגדרות שקולות עבור תחשיב הפסוקים.

הוכחה 1⇐2

נתון: לא קיים α, $X\nvdash\alpha$ וגם $X\vdash\neg\alpha$

ולכן לכל α, או $X\vdash\alpha$ או $X\nvdash\neg\alpha$ ומתקיימת הגדרה 2

2⇐1

X הינה עקבית אם לא כל פסוק יכיח מ-X כלומר, קיים פסוק β, $X\nvdash\beta$.

הרצאה 7 לוגיקה

מפשט הנאותות הרחב

אם $\underbrace{X \vdash \alpha}_{\text{there is proof. sequence for } \alpha \text{ using X assumes}}$ אז $\underbrace{X \vDash \alpha}_{\forall v \text{if v} \vDash X \text{ then v} \vDash \alpha}$

<u>אם $\vdash \alpha$ אז $\vDash \alpha$</u>

נסוח שקול:

אם $X \nvDash \alpha$ אז $\boxed{X \nvdash \alpha}$

<u>משפט השלמות</u>

אם $X \vDash \alpha$ אז $X \vdash \alpha$

הגדרה 1

קבוצת פסוקים X היא עקבית אם לא קיים פסוק α כך ש־ $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$

הגדרה 2

קבוצת פסוקים X היא עקבית אם קיים פסוק β כך ש־ $X \nvdash \beta$.

הגדרה 1 $\Leftarrow$ הגדרה 2

לא קיים α כך ש־$X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$

מסקנה: לפחות α או $\neg\alpha$ אינו יכיח מ־X ולכן מתקיימת הגדרה 2.

הגדרה 2 $\Leftarrow$ הגדרה 1

נתון: קיים פסוק β כך ש־ $X \nvdash \beta$ בדרך השלילה, נניח שקיים α כך $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$.

$\star$ $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$

1. פסוק יכיח $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
2. מהנתון עס' X $\neg\alpha$
3. מהנתון עס' X α
4. MP 1,2 $\alpha \to \beta$
5. MP 3,4 β

$X \vdash \beta$

בסתירה לנתון ש־ $X \nvdash \beta$.

מסקנה: לא קיים α כך ש־ $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$.

שאלה:

האם קבוצת האכסיומות של תחשיב הפסוקים היא עקבית ? (קבוצת ההנחות X היא ריקה).
<u>כן</u>!

שאלה:

האם יתכן $X \models \alpha$ וגם $X \models \neg\alpha$?
לכל השמה v:

- ⋆ אם $v \models X$ אז $v \models \alpha$
- ⋆ אם $v \models X$ אז $v \models \neg\alpha$

יכול להתקיים אם אין משמה v שמספקת את X.

דוגמאות ל X:

- ⋆ $X = \{p_1, \neg p_1\}$ לא ספיקה.
- ⋆ $X = \{\underbrace{\alpha \to \beta}_{\beta}, \alpha, \neg\beta\}$ לא ספיקה.

מסקנה:

X אינה עקבית $\Leftarrow$ X אינה עקבית.
X ספיקה $\Leftarrow$ X עקבית.

למה 1

קבוצת פסוקים היא עקבית אם ורק אם כל תת קבוצה <u>סופית</u> שלה היא עקבית.

הוכחה:

$\Leftarrow$ X עקבית
נניח בשלילה שקיימת תת־קבוצה $Y \subseteq X$ סופית <u>שאינה עקבית</u>.
קיים α כך ש־ $Y \vdash \alpha$ וגם $Y \vdash \neg\alpha$
עס' מונוטוניות ההוכחה מתקיים גם $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$ בסתירה להנחה ש־X עקבית.
$\Rightarrow$ נתון: כל תת־קבוצה סופית היא עקבית.
ובשלילה־X אינה עקבית
$X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$ שתיהן סדרות הוכחה סופיות ולכן משתמשות כקבוצות סופיות של הנחות
$x' \vdash \alpha$, $\quad X'' \vdash \neg\alpha$
X', X'' סופיות
$X' \cup X''$ סופית
$X' \cup X'' \vdash \alpha$, $X' \cup X'' \vdash \neg\alpha$ בסתירה לכך שכל תת־קבוצה סופית היא עקבית.

למה 2:

1. $X\cup\{\alpha\}$ היא עקבית אם ורק אם $X\nvdash\neg\alpha$.

2. $X\cup\{\neg\alpha\}$ היא עקבית אם ורק אם $X\nvdash\alpha$.

הוכחה:

$\Leftarrow$ נתון: $X\cup\{\alpha\}$ עקבית ונניח בשלילה
ש־$X\vdash\neg\alpha$
$\begin{cases} X\cup\{\alpha\}\vdash\alpha \\ X\cup\{\alpha\}\vdash\neg\alpha \end{cases}$ סתירה לנתון ($X\cup\{\alpha\}$ עקבית)
כי $X\vdash\neg\alpha$ תמיד מותר להוסיף הנחות.
$\Rightarrow$ נתון $X\nvdash\neg\alpha$ ונניח ש־$X\cup\{\alpha\}$ אינה עקבית.
$X\cup\{\alpha\}\vdash\neg\alpha$ (בחרנו את β להיות $\neg\alpha$ עפ' הגדרת α של עקביות).
$\Downarrow$
$X\vdash\alpha\to\neg\alpha$ (דדוקציה)
(נשתמש במשפט: "יכיח $\vdash(\alpha\to\neg\alpha)\to\neg\alpha$")

1. פסוק יכיח $(\alpha\to\neg\alpha)\to\neg\alpha$

2. עפ' X מהנחת השלילה + דדוקציה $(\alpha\to\neg\alpha)$

3. $\neg\alpha$

מסקנה:
$X\vdash\neg\alpha$ בסתירה לנתון.

למה 3

אם X ספיקה אז X עקבית.

תזכורת להוכחה:

נתון X ספיקה, אם X אינה עקבית אז $X\vdash\alpha$ וגם $X\vdash\neg\alpha$ עפ' נאותות $X\vDash\alpha$ וגם $X\vDash\neg\alpha$.

מטרה:

להוכיח X עקבית $\Leftarrow X$ ספיקה.

רעיון ראשון

X עקבית אז לכל α לא מתקיים $X\vdash\alpha$ וגם $X\vdash\neg\alpha$.
נגדיר השמה v:
לכל פסוק אטומי p
אם $X\vdash p$ אז $v(p)=T$
אם $X\vdash\neg p$ אז $v(p)=F$.
יתכן ש־ $X\nvdash p$ וגם $X\nvdash\neg p$ ואז v לא מוגדרת.
דוגמא לכך שאי אפשר לבחור את v אקראית כאשר $X\nvdash p$

:$X \nvdash \neg p$

$$X = \{\overbrace{p_o \vee p_1}^{F}\}$$

$$p_0 \vee p_1 \not\models \overbrace{p_0}^{F} \Rightarrow p_0 \vee p_1 \nvdash p_0$$

$$p_0 \vee p_1 \not\models \neg \overbrace{p_0}^{F}$$

$$p_0 \vee p_1 \not\models \overbrace{p_1}^{F}$$

$$\not\models \neg \overbrace{p_1}^{T}$$

הגדרה נוספת:

X עקבית מקסימלית אם לכל פסוק α מתקיימת <u>בדיוק אחת</u> מ־2 האפשרויות:

1. $X \vdash \alpha$.
2. $X \vdash \neg\alpha$.

למה 4

Y עקבית מקסימלית אם ורק אם Y עקבית ולכל פסוק α, אם $Y \vdash \alpha$ אז $Y \cup \{\alpha\}$ <u>**אינה**</u> עקבית.

הוכחה:

$\Leftarrow$ נתון Y עקבית מקסימלית
לכן Yעקבית.
נתון $Y \nvdash \alpha$ אז עס' עקביות מקס' $Y \vdash \neg\alpha$
$\begin{cases} Y \cup \{\alpha\} \vdash \alpha \\ Y \cup \{\alpha\} \vdash \neg\alpha \end{cases} \Leftarrow$ מסקנה $Y \cup \{\alpha\}$ אינה עקבית.
$\Rightarrow$ נתון Y עקבית ולכל α אם $y \nvdash \alpha$ אז $Y \cup \{\alpha\}$ אינה עקבית.
נוכיח ש־Y עקבית מקס', קיימות 2 אפשרויות:

1. $Y \vdash \alpha$
2. $Y \nvdash \alpha$ אז $Y \cup \{\alpha\}$ אינה עקבית.

עס' למה 2:
$Y \vdash \neg\alpha$ סיימנו.

למה 5

לכל קבוצה עקבית X קיימת קבוצה עקבית מקסימלית Y כך ש־$X \subseteq Y$.

הנחה:

קבוצת הפסוקים היא בת מניה $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$

נגדיר:

סדרת הרחבות ל־X

$$\begin{matrix} X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \\ \shortparallel \\ X \end{matrix}$$

נניח בשלב ה־n, X_n מוגדרת

אם $X_n \vdash \neg\alpha_n$ אז $X_{n+1} = X_n$

אם $X_n \nvdash \neg\alpha_n$ אז $X_{n+1} = X_n \cup \{\alpha_n\}$

$Y = \cup X_n$

נוכיח ש־Y עקבית, מקסימלית, מכילה את־X

<u>טענה א:</u>

$X \subseteq Y$

<u>טענה ב:</u>

כל X_n היא עקבית.

הוכחה ל־ב:

אינדוקציה עבור n:

- ⋆ בסיס:
  X_0 עקבית כי X עקבית.

- ⋆ צעד:
  נניח כי X_n עקבית ונוכיח X_{n+1} עקבית:
  נחלק ל 2 מקרים:

  1. $X_{n+1} = X_n$ ולכן X_{n+1} עקבית.
  2. למה 2 (גרסה ראשונה(שחורה)).

<u>טענה ג:</u>

Y עקבית

נניח בשלילה שאינה עקבית ואז לפי למה 1 קיימת תת־קבוצה <u>סופית</u> W של Y שאינה עקבית.

קיימת $W \subseteq X_k$

לכל $w_i \in W$, $w_i \in X_i$ (מ־$W \subseteq Y$)

עבור האינדקס m המקסימלי המכיל של w_i:

$W \subseteq X_m$ סתירה לטענה ב'.

<u>טענה ד:</u>

Y עקבית מקסימלית לכל α_n נראה ש־$Y \vdash \alpha_n$ או $y \vdash \neg\alpha_n$ עס' בניה.

הרצאה 8 לוגיקה

מטרה: $X \vDash \alpha$ **אז** $X \vdash \alpha$

נאותות:

$X \vdash \alpha$ **אז** $X \vDash \alpha$

$X \nvDash \alpha$ אז $X \nvdash \alpha$

למה 1:

X עקבית $\Leftrightarrow$ כל תת־קבוצה סופית של X עקבית.

למה 2:

$X \bigcup \{\neg\alpha\}$ עקבית $\Leftrightarrow$ $X \nvdash \alpha$

למה 3:

אם X ספיקה אז X עקבית

מטרה:

להוכיח את הכיוון ההפוך
צ"ל X עקבית אז X ספיקה

הגדרנו:

X עקבית מקסימלית אם ורק אם לכל α בדיוק אחד מהבאים מתקיים $X \vdash \alpha$ או $X \vdash \neg\alpha$

למה 5:

לכל קבוצה עקבית X קיימת קבוצה עקבית מקסימלית Y , עד ש־$X \subseteq Y$.

למה 6:

לכל קבוצת פסוקים X
X עקבית אם ורק אם X ספיקה
$\Rightarrow$ עס' למה 3
$\Leftarrow$
נתון X עקבית
עס' למה 5 קיימת $X \subseteq Y$ כך ש־Y מקסימלית

נגדיר השמה v:

$$Y \vdash p_i \Leftrightarrow v(p_i) = T$$
$$Y \vdash \neg p_i \Leftrightarrow v(p_i) = F$$

v מוגדרת היטב
טענה:
לכל $\alpha \in Y$ מתקיים $Y \vDash v$.
כלומר $Y \vDash v$ **לא נוכיח.**
אז $X \vDash v$ והראינו ש־X ספיקה.
נסתכל על $\alpha \in X$ אז $\alpha \in Y$ ולכן $\alpha \vDash v$.

משפט השלמות:

אם $\alpha \vDash X$ אז $\alpha \vdash X$

הוכחה:

נתון $\alpha \vDash X$ ונניח בדרך השלילה ש־$\alpha \nvdash X$.
עס' למה ' $X \bigcup \{\neg\alpha\}$ עקבית ולכן למה 6 ספיקה
כלומר קיימת v

$$v \vDash X$$
$$v \vDash \neg\alpha$$
$$v \vDash \alpha$$
$$X \vDash \alpha \Rightarrow v \vDash \alpha$$

סתירה
מסקנה $X \vdash \alpha$.

מסקנה ממשפט השלמות והנאותות

$$\boxed{\vdash \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \vDash \alpha}$$

סיכום של הוכחת משפט השלמות

$$\boxed{X \vdash \alpha \Leftarrow X \vDash \alpha}$$

רצינו:

$$\begin{array}{ccc} X \not\models \alpha & \Leftarrow & X \nvdash \alpha \\ \Uparrow & & \Updownarrow \\ (\text{Sfika}) X \bigcup \{\neg\alpha\} & \Leftrightarrow & (\text{Ikvit}) X \bigcup \{\neg\alpha\} \end{array}$$

$M(X)$=\{קבוצת ההשמות v כך ש־X $v \models$\}
v היא מודל של X

משפט הקומפקטיות

לקבוצת פסוקים X יש מודל (היא ספיקה) אם ורק אם לכל תת־קבוצה סופית שלה יש מודל (היא ספיקה).

הוכחה:

X ספיקה $\Leftrightarrow$ X עקבית.
$\Leftrightarrow$ כל תת קבוצה סופית שלה עקבית
$\Leftrightarrow$ כל תת קבוצה סופית שלה היא ספיקה.

דוגמא לשמוש בקומפקטיות

נתונות שתי קבוצות של פסוקים Σ_1 ו־Σ_2 כך ש־

1. אין השמה שמספקת גם את Σ_1 וגם את Σ_2.
$M(\Sigma_1) \bigcap M(\Sigma_2) = \emptyset$
2. כל השמה מספקת או את Σ_1 או את Σ_2.

דוגמא פשוטה:

$\Sigma_1 = \{p_0 \wedge p_1\}$, $\Sigma_2 = \{\neg p_0 \vee \neg p_1\}$
כאשר Σ_1, Σ_2 <u>במקרה</u> סופיות
צריך להוכיח:
שקיים פסוק p_1 כך ש־Σ_1 שקולה לו כלומר לכל v: $v \models \Sigma_1 \Leftrightarrow v \models p_1$
וקיים פסוק p_2 ששקול ל־Σ_2.

שאלה:

האם $p_1 = \bigwedge_{\alpha \in \Sigma_1} \alpha$ הוא פתרון?
<u>לא</u> כאשר Σ_1 היא אינסופית.

דוגמא:

$\Sigma_1 = \{p_0, \neg p_0, p_0 \vee \neg p_0\} \bigcup \{p_i, \neg p_i | i \in \mathbb{N}\}$ אף השמה אינה מספקת את Σ_1
$\Sigma_2 = \{p_0 \vee \neg p_0\}$ כל השמה מספקת את Σ_2.
$\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ אינה ספיקה

עס' משפט הקומקטיות קיימת קבוצה $D \subseteq \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$ סופית ולא ספיקה.
עס' קומפקטיות קיימת $D \subseteq \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$
D סופית , לא ריקה , לא ספיקה
$D_1 = D \bigcap \Sigma_1$,$D_2 = D \bigcap \Sigma_2$
לפחות אחת מ־D_1, D_2 אינה ריקה כי D אינה ריקה.
נניח D_1 אינה ריקה
$D_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \subseteq \Sigma_1$
$p_1 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \alpha_k$
$p_2 = \neg p_1$
נוכיח שלכל השמה v:
$v \models \Sigma_1 \Leftrightarrow v \models p_1$

- $\Rightarrow$ $v \models \Sigma_1 \Leftarrow v \models \alpha$ לכל $\alpha \in \Sigma_1$
  בפרט ל־$\alpha_i \in D_1$
  $v \models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k = p$

- $\Leftarrow$ $v \not\models \Sigma_1$ לפי נתון $v \models \Sigma_2 \Leftarrow v \models D_2$
  אבל נתון $D = D_1 \bigcup D_2$ אינה ספיקה ולכן $v \not\models D_1$
  כלומר קיים $\alpha \in D_1$ כך ש־$v \not\models \alpha$ מסקנה $v \not\models p_1$.

$\neg p_1 = p_2$
צ"ל לכל v, $v \models \Sigma_2 \Leftrightarrow v \models p_2$
$v \models \neg p_1 \Leftrightarrow v \not\models \underset{\overset{\|}{p_2}}{p_1} \Leftrightarrow v \not\models \Sigma_1 \Leftrightarrow v \models \Sigma_2$

דוגמה:

נוסחה פסוקים שמתארת את המערכת M: α_M
נוסכחה פסוקים שמתארת את המפרט φ
$\alpha_M \wedge \neg\varphi$ ספיקה ?

- כן: מצאנו באג
- לא: המערכת נכונה.

מכרכת עם 2 תהליכים p_1ו־p_2שיש להם בקשות ויש ארביטר שמחליט מי יקבל את בקשתו.
לכל תהליך יש דגל:

- R_1:P_i מציג בקשה (request)
- G_i: דגל של הארביטר.
  כש־G_1 הוא 1 אז p_1 מקבל את התור.
  כש־G_2 הוא 1 אז P_2 מקבל את התור.

לארביטר יש גם משתנים:

- D_1 - p_1 קבל את התור בפעם הקודמת.
- D_2 - p_2 קבל את התור בפעם הקודמת.

תאור המערכת:

$$\mathrm{EXEC}=$$
$$(\overset{1}{G_1} \leftrightarrow (\overset{1}{R_1} \wedge (\neg \overset{0}{R_2} \vee \overset{1}{D_2})))$$
$$(\overset{1}{G_2} \leftrightarrow (\overset{1}{R_2} \wedge (\neg \overset{0}{R_1} \vee \overset{1}{D_1})))$$

מפרט:

$\varphi_1 = \neg(G_1 \wedge G_2)$

$\mathrm{EXEC}_1(\overbrace{G_1}^{1} \wedge \overbrace{G_2}^{1})$

שלילת המפרט

האם הפסוק ספיק ?

$\mathrm{EXEC}_1 \neg(D_1 \wedge D_2) = \alpha_M'$ המערכת החדשה

נבדוק $\alpha_M' \wedge (G_1 \wedge G_2)$ שלילת המפרט

ספיק? **<u>לא.</u>**

מסקנה:

המערכת המתוקנת מספקת את המפרט $\neg(G_1 \wedge G_2)$.

נניח שהנוסחה ספיקה

$$v \vDash \mathbf{EXEC} \wedge \neg(D_1 \wedge D_2)$$
$$\wedge (G_1 \wedge G_2)$$
$$\Rightarrow \overline{v}(G_1) = T \quad \overline{v}(G_2) = T$$
$$\Rightarrow \overline{v}(R_1 \wedge (\neg R_2 \vee D_2)) = T$$
$$\Rightarrow \overline{v}(R_1) + T$$
$$* \, \overline{v}(\neg R_2 \vee D_2) = T$$
$$\overline{v}(G_2) = T \Rightarrow \overline{v}(R_2) = T$$
$$* * \overline{v}(\neg R_2) = F$$
$$\underbrace{\Rightarrow}_{*+**} \overline{v}(D_2) = T$$

מפרט דרישה

$\varphi_2 = (R_1 \wedge \neg R_2 \rightarrow G_1)$

$\alpha_M' \wedge (R_1 \wedge \neg R_2 \wedge \neg G_1)$ שלילת המפרט

לוגיקה הרצאה 9

גדירות:

קבוצה של פסוקים $K = M(\Sigma)$ (קבוצה של השמות)
קבוצת השמות K היא גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים Σ עד ש- $K = M(\Sigma)$.

טענה:

לא לכל תת קבוצה של השמות תהיה תת קבוצה של פסוקים שמגדירה אותה.

משקולי ספירה:

כמה נוסחאות: קבוצה בת מניה $\aleph_0$
כמה קבוצות של פסוקים: $2^{\aleph_0}$.
כמה השמות יש: $2^{\aleph_0}$.
קבוצות של השמות: $2^{2^{\aleph_0}}$.
השמה: וקטור אינסופי מעל $\{0,1\}$.

דוגמה לקבוצות של פסוקים גדירים:

נראה קבוצות של פסוקים שהן גדירות.

1. הקבוצה הריקה של השמות - K.
   האם קיימת $M(\Sigma) = K$.
   $\Sigma_1 = \{p_1 \wedge \neg p_1\}$
   $\Sigma_2 = \{p_1, \neg p_1\}$
   $\Sigma_3 = \{p_1, \neg p_1, p_2 \vee p_3\}$

2. K - מכילה את ההשמות.
   כל Σ שמכילה רק טאוטולוגיות מגדירה את K.

3. $K = \{V_T\}$
   V_T היא ההשמה שנותנת ערך T לכל p_i.
   $\Sigma = \{p_i | i \in \mathbb{N}\}$

כדי להוכיח ש-Σ מגדירה את K צריך להוכיח
$K = M(\Sigma)$.
$v \in M(\Sigma) \Leftrightarrow v(p_i) = T$ לכל $i \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$
$V = V_T \Leftrightarrow v \in K$.

תחשיב היחסים

דוגמה מיותרת לחלוטין:

לכל x [דוברת אמת $(x) \Rightarrow$ יווני (x)]
דובר אמת (סוקרטס) $\Rightarrow$ יווני (סוקרטס)
יווני (סוקרטס)
דובר אמת (סוקרטס)
"לכל מספר טבעי x, x גדול או שווה ל־0"
"לכל x קיים y כך ש־ $x = y + 1$"

שילתות במסדי נתונים

- ⋆ "האם קיים עובד טכניון שהוא גם סטודנט בטכניון?"
- ⋆ "האם כל הסטונדטים בטכניון הולכים להופעות יום הסטונדטו?"

<u>תחום:</u> המספרים הטבעיים\בני אדם\ הסטונדטים.
<u>קבועים:</u> סוקרטס, 0.
<u>פונקציות:</u> $y + 1$.
<u>יחסים:</u> $(x = y + 1)$, $=$, $\geq$, דובר אמת.

הסימנים המשותפים

קבוצה בת מניה של מתנים: $x_1, x_2, \ldots$
סימנים נוספי:
$\forall$[לכל], $\exists$[קיים], $\approx$[סימן שוויון], (,) , $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$

מילון

$$\tau = (\underbrace{R_1, R_2, \ldots,}_{\text{relation signs}} \quad \underbrace{F_1, F_2, \ldots}_{\text{function symbols}} \quad , \quad \underbrace{c_1, c_2, \ldots}_{\text{const. symbols}} \quad)$$

$R(\circ)$ - יחס אונארי
$R(\circ, \circ)$ - יחס בינארי
$R(\circ, \circ, \circ)$ - יחס טרינארי
בכל תחשיב יחסים יש סימן קבוע $(\circ, \circ) \approx$

דוגמה:

$\tau = (R_1(\circ, \circ), R_2(\circ), F_1(\circ, \circ), c)$
נדגים פרוש לסימננים <u>בצורה לא פורמלית.</u>
הפרוש/מבנה/פשר M

$$M=\{\underbrace{D^M}_{\text{M's domain}}, \underbrace{R_1^M, R_2^M}_{\text{relations over } \Delta^M}, F_1^M, c^M\}$$

$$R_1^M : D^M x D^M \to \{T,F\}$$

$$R_1^M : D^M \to \{T,F\}$$

$$F_1^M : D^M x D^M \to D^M$$

$$C^M \in D^M$$

מבנה זה חלק מהסמנטיקה

$D^M = \mathbb{N} \backslash \{0\}$

$R_1^M(x,y) : x \le y$.

$R_2^M(x)$:ראשוני x

$F_1^M(x,y) : x \cdot y$

$C^M : 3$

$\underbrace{R_2(c)}\wedge(\underbrace{R_1(x,c)} \to R_2(x))$

3 ראשוני $\wedge(x \le 3 \to$ ראשוני $x)$.

נכון נכון אם 1 ראשוני.

אם 1 אינו ראשוני אז $x=2$, $x=3$, $x=20$ הנוסחה T.

עבור $x=1$ מתפרשת כ־F.

סמנטיקה: מבנה + השמה למשתנים.

מבנה אחר

מבנה אחר M_2 שזהה ל־M חוץ מ־ $C^{M_2}=5$

השמה שנותמת ל־x עבור ערך 4.

הנוסחה היא F

$\neg R_2(F(x,y))$

$\neg R_2(F^M(x,y))$

$x \cdot y$ אינו ראשוני, עבור $x=1$ ו־$y=7$ הטענה אינה נכונה.

$\varphi_3 = \forall x \exists y (F(x,y) \approx x)$

האם נכונה מעל(ביחס ל־)M:

"לכל x קיים y כך ש־ $x \cdot y = x$"

נכון, נבחר $y=1$.

הגדרת מבנה שמעליו נפרש נוסחאות של תחשיב היחסים מעל מילון τ.

בהינתן:

$$\tau=(R_1,R_2,\dots,F_1,F_2,\dots,c_1,c_2,\dots)$$

$$M=(\underbrace{D^M}_{\text{structure's domain}}, R_1^M, R_2^M, F_1^M, F_2^M, \dots, c_1^M, c_2^M, \dots)$$

כאשר D^Mהוא קבוצה לא ריקה שנקראת תחום המבנה.

- ⋆ לכל סימן קבוי , נתאם קבוע מתוך D^M.

⋆ לכל סימן פונקציה k^{F_i} מקומי נתאם פונקציה k מקומית F_i^M.
$F_i^M \cdot (D^M)^K \to D^M$

לכל סימן יחס k^R-מקומי מתאימים <u>יחס</u> k מקומי.
$R^M : (D^M)^K \to \{T, F\}$
לסימן השוויון $\approx$ נתאים
$\approx^M = \{(d,d) | \, d \in D^M\}$

דוגמה:

הסכמות על סימונים:
P, Q, R סימני יחס
F, G, H סימני פונקצייה
a, b, c קבועים
d איברים מ־D
$\tau = (\underbrace{\approx}_{\text{redundant}}, R(\circ,\circ), F(\circ,\circ), G(\circ), c_0, c_1)$
נגדיר מבנה M_4:
D^{M_4}קבוצת המילים הסופיות הלא ריקות מעל א"ב $\{a, b\}$
$D^{M_4} = \{a, b, aa, ab, ba, bb, \dots\}$
$\approx^{M_4} :=$
x רישא של y: $R^{M_4}(x,y)$
שרשור $x \cdot y$: $F^{M_4}(x,y)$
היפוך סדר האותיות במילה x: $G^{M_4}(x)$
$c_0^{M_4} : a$
$c_1^{M_4} : b$
$\varphi_4 = R(x, F(x,y))$
הפרוש של φ_4 מעל M_4
" x הוא רישא של $x \cdot y$"
תמיד נכון ללא תלות בהשמות ל־x,y.
$G(G(x)) \approx x$
הפוך של הפוך של אותיות x שווה ל־.
נכון לכל השמה ל־x.

הרחבת הסינטקס

<u>שמות עצם</u> Terms
אינטואיטיבית
משתנים x, y
קבוע 3
פונקציה +
<u>במתמטיקה:</u>
ביטויים: $x, x+y, x+y+3, 3$
הקבוצה Terms מוגדרת אינדוקטיבית $\text{Terms} = X_{B,F}$
B: כולל את כל המשתנים ואת כל סימני הקבוע.
F: מספר הפעולות הוא כמספר הופנקציה בהינתן סימן פונקציה F k מקומי.
ובהינתן $t_1, \dots, t_k \in \text{Terms}$, $F_i(t_1, \dots t_k) \in \text{Terms}$.

דוגמה:

במילון שני סימני קבוע a, b
וסימן פונקציה F דו־מקומי
וסימן פונקציה G חד־מקומי.

דוגמאות לשמות עצם (סינטקטי)

$$\begin{aligned}&a\\&b\\&F(a,b)\\&G(F(a,b))\\&x_1,x_2,\ldots,\\&F(a,x_1)\\&G(F(a,x_1))\end{aligned}$$

כל שמות העתם מתפקדים כמו פונקציות בהינתן ערכים מ־D^M
הם מחזירים ערכים מ־D^M.
$M_5=(\mathbb{N},\underbrace{F^M}_{+},\underbrace{G^M}_{\cdot},\underbrace{a}_{5},\underbrace{b}_{0})$
$G(F(a,x_2))$ השמה שתתן ערך ל־x
s :(VAR)משתנים$\rightarrow D^{M_5}$
נתון M_5והשמה $s(x_1)=2$ $s(x_2)=3$.

לוגיקה הרצאה 10

13 ביוני 2019

תחשיב היחסים

<u>מילון:</u> $\tau = \langle R\ldots, F\ldots, C\ldots\rangle$
<u>מבנה עבור מילון:</u> $M = \left\langle D^M, R^M \ldots, F^M \ldots, C^M \ldots \right\rangle$
<u>שמות עצם מעל מילון</u> τ $term(\tau)$
קבוצה אינד'

- <u>בסיס:</u> כל סימן קבוע c במילון הוא ש"ע
  כל משתנה x_i הוא ש"ע .
- פעולות: לכל סימן פונקציה k־מקומית F במילון, ולכל k ש"ע $t_1, \ldots, t_k$ מתקיים שגם $F(t_1, \ldots, t_k)$ היא ש"ע
- הפירוש של ש"ע ניתן ע"י השמה.

<u>הגדרה:</u> בהינתן מילון τ ומבנה M עבור τ.
פנקצייה: $s : \underbrace{Var}_{\{x_i | i\in\mathbb{N}\}} \rightarrow D^M$ נקראת השמה.
בהינתן השמה s עבור מבנה M במילון τ נגדיר <u>השמה מורחבת</u> $\overline{S} : term(\tau) \rightarrow D^M$ באינדוקציה על $term(\tau)$.

- <u>בסיס:</u> עבור $t = x_i$ שהוא משתנה, נגדיר: $\overline{s}(t) = s(t)$.
  עבור $t = c_i$ כאשר c_i סימן קבוע ב־τ נגדיר:
  $\overline{s}(c_I) = c_i^M$
- <u>סגור:</u> נניח שהגדרנו את $\overline{s}$ עבור ש"ע $t_1, \ldots t_k$
  ונניח ש F הוא סימן פונקציה k מקומית במילון.
  אז נגדיר:
  $\overline{s}(F(t_1, \ldots, t_k)) = F^M(\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_k))$

דוגמה:

$\tau = \langle F, (,), C\rangle$

1. $M =< \mathbb{N}, \times, 0 >$
   נגדיר השמה $S(x_i) = i$

דוגמאות לש"ע:

$$\overline{S}(x_0)=0$$
$$\overline{S}(x_1)=1$$
$$\overline{S}(c)=C^M=0$$
$$\overline{S}(F(x_0,c))=F^M(\overline{S}(x_0),\overline{S}(c))=0\cdot 0=0$$
$$\overline{S}(F(x_8,x_{100}))=F^M(\overline{S}(x_8),\overline{S}(x_{100}))=8\cdot 100=800$$
$$\overline{S}(F(F(x_0,c),x_1))$$

2. $M=< P(\mathbb{N}),\bigcup,\emptyset >$
נגדיר השמה $s=(x_i)=\{i\}$
דוגמאות לש"ע

$$\overline{S}(x_0)=\{0\}$$
$$\overline{S}(c)=C^M=\emptyset$$
$$\overline{S}(F(X_0,c))=F^M(\overline{S}(x_0),\overline{S}(c))=\{0\}\cup\emptyset=\{0\}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{Structure} & \text{Dict.} \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dd, bend left] \\
\text{Assign} \arrow[d, Rightarrow] & \text{Noun} \\
\text{Truth Values} & \text{Formula}
\end{tikzcd}$$

נוסחאות:

הגדרה: קבוצת הנוסחאות מעל מילון τ. מוגדרת בצורה אינדוקטיבית:

- בסיס: (נוסחאות אטומיות) לכל שני שמות עצם t_1,t_2 מתקיים ש־ $\boxed{\mathrm{t1}\approx t_2}$ הוא נוסחא.
  לכל סימן יחס k־מקומי R במילון ולכל k ש"ע $t_1,\dots,t_k$ מתקיים ש־ $\boxed{\mathrm{R}(t_1,\dots,t_k)}$ היא נוסחא.
- סגור: בהינתן נוסחאות a,β מתקיים ש:
  $(\alpha\to\beta),(\alpha\vee\beta),(\alpha\wedge\beta),(\neg\alpha)$
- כמתים: בהינתן נוסחא α ומשתנה x_i מתקיים ש־:
  $(\forall \underbrace{x_i}_{\text{for each possible value}},\alpha)$ ו־ $(\exists x_i,\alpha)$ הן נוסחאות.

דוגמאות:

$\tau = \langle R, F_1, F_2, C\rangle$
F_1 סימן פונקציה חד מקומית.
F_2 סימן פונקציה דו־מקומית.
R סימן יחס דו־מקומי.
$c \approx c$, $x_0 \approx x_1$, $F_1(x_0) \approx F_2(c, x_7)$, $R(c, F_1(x_3))$, $R(x_0, F_2(F_1(c), x_0))$
$((c \approx c) \wedge R(c, F_1(x_3)) \to (x_0 \approx x_1)$
$\forall x_0 (x_0 \approx c)$
$\forall x_1 (x_0 \approx c)$
$\exists x_0 (x_0 \approx c)$
$\exists x_8 ((\forall x_0 (c \approx F_1(x_0)) \wedge (c \approx x_8))$

הגדרת ערכי אמת

בהינתן מילון τ, מבנה M והשמה s, מגדירים מתי M ו־s מספקים נוסחא α מעל τ.
כלומר נותנים ל־α ערך אמת 1 ומסמנים $M \underset{s}{\vDash} \alpha$
$(M, s)(\alpha) = 1$, $(M, S) \vDash \alpha$.
באינדוקציה על קבוצת הנוסחאות מעל τ:

- בסיס: $\alpha = t_1 \approx t_2$ נגדיר $M \underset{s}{\vDash} \alpha$.
  אם"ם $\underbrace{\overline{s}(t_2)}_{\in D^M} = \underbrace{\overline{s}(t_1)}_{\in D^M}$ (שיוויון ב־D^M)

- דוגאות:
  $\tau = \langle R, F_1, F_2, C\rangle$ כמו קודם.
  $\begin{cases} M = \langle \mathbb{N}, \leq,^2, +, 1\rangle \\ S(x_i) = 1 & \forall i \\ \alpha = x_0 \approx c \end{cases} \quad \underbrace{\Leftarrow M \underset{s}{\vDash} \alpha}_{\overline{s}(x_0) = s(x_0) = 1 = c^M = \overline{s}(c)}$
  $s(x_i) = 0$ לכל $i \Leftarrow M \underset{s'}{\nvDash} \alpha$
  $\overline{s}(x_0) = 0$, $\overline{s'}(c) = 1$
  חזרה להגדרה עדיין בבסיס:
  $\alpha = R(t_1, \ldots, t_k)$ כאשר R סימן יחס k־מקומי ב־α $t_1, \ldots t_k$ ש"ע
  נגדיר: $M \underset{s}{\vDash} \alpha$ אם"ם $(\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_k)) \in R^M$
  חזרה לדוגמא:
  τ, M, s
  $\alpha = R(x_0, c) : \alpha \underset{s}{\vDash} M$ כי $\overline{s}(x_0) = \overline{s}(c) = 1$וכן $1 \leq 1$ כלומר $(1,1) \in R^M$.
  $M \underset{s}{\vDash} \alpha \wedge \beta$ אם"ם $M \underset{s}{\vDash} \alpha$וגם $M \underset{s}{\vDash} \beta$
  $M \underset{s}{\vDash} \alpha \to \beta$ לפי טבלת האמת של $\to$.
  כמתים:
  הגדרת עזר: בהינתן השמה s ומשתנה x_iואיבר $d \in d^M$
  נגדיר השמה מתוקנת:
  $s' = s[x_i \leftarrow d]$

$$s'(x_j)=\begin{cases} d & i=j \\ s(x_j) & i\neq j \end{cases}$$

עכשיו, בהינתן α שעבורו הגדרנו האם M,s מספקים אותה,
ובהינתן משתנה x_i נגדיר:

$M\underset{s}{\vDash}\forall x_i\alpha$ אם"ם לכל $d\in D^m$ מתקיים $M\underset{s'[x_i\leftarrow d]}{\vDash}\alpha$

$M\underset{s}{\vDash}\exists x_i\alpha$ אם"ם קיים $d\in D^M$ כך שמתקיים $M\underset{s'[x_i\leftarrow d]}{\vDash}\alpha$

בחזרה להגדרה:

<u>סגור:</u>

<u>קשרים:</u> בהינתן נוסחאות α,β שהגדרנו עבורן האם M,s מספקים אותן, נגדיר:

$M\underset{s}{\vDash}\neg\alpha$ אם"ם $M\underset{s}{\nvDash}\alpha$.

$M\underset{s}{\vDash}\alpha\vee\beta$ אם"ם $M\underset{s}{\vDash}\alpha$ או $M\underset{s}{\vDash}\beta$.

עכשיו בהיתן α שעבורה הגדרנו האם $M,\ s$ מספקים אותה, ובהינתן משתנה x_i נגדיר:

$M\underset{s}{\vDash}\forall x_i\alpha$ אם"ם לכל $d\in D^M$ מתקיים α $M\underset{s[x_i\leftarrow d]}{\vDash}$

$M\underset{s}{\vDash}\exists x_i\alpha$ אם"ם קיים $d\in D^M$ כך שמתקיים α $M\underset{s[x_i\leftarrow d]}{\vDash}$

דוגמאות:

$\alpha'=\forall x_{\emptyset_1}(x_0\approx c)$

$M\underset{s}{\vDash}\alpha\Leftrightarrow$ לכל $M\vDash x_1\approx c, d\in D^M$

$s'=s[x_{\emptyset_1}\leftarrow d]$

$\Leftrightarrow \overline{s}(x_0)=\overline{s}(c)$ (בדוגמא $M\underset{s}{\nvDash}\forall x_0$

$.\overline{s}(x_0)=\overline{s}(c)$

לוגיקה הרצאה 11

סינטקס:

מילון τ
<u>שמות עצם:</u> סימני קבוע, משתנים וסימני פונקצייה.
<u>נוסחאות:</u>
נוסחאות אטומיות: $\underbrace{(t_1,\ldots,t_n)}_{\text{nouns}}\ \underbrace{R}_{\text{N-Realtion}}$, $\approx (t_1,t_2)$.
<u>הערה:</u>
הבדל בין שם עצם לנוסחה אטומית:
בהינתן מבנה M והשמה s שם עצם t - כשישוערך הבמנה M וההשמה s יחזיר ערך מתוך D^M.

נוסחה(אטומית): תשוערך ל-T/F.

המשך יצירת נוסחאות -כלל יצירה/פעולות.
בהינתן נוסחאות α, β ומשתנה x
הנוסחאות הבאות הן נוסחאות של תחשיב היחסים:

$$\neg\alpha,\ \alpha\to\beta,\ \forall x\alpha$$
$$\alpha\wedge\beta\,\alpha\vee\beta,\ \exists x\alpha$$

סמנטיקה:

<u>מבנה M</u> שמפרש סימני מילון ביחס לתחום D^M.
<u>השמה:</u> $D^M \to:\ \underbrace{\text{Var}}_{\{x_i|i\in\mathbb{N}\}}\ :s$.
<u>ההשמה מורחבת:</u>

$$\overline{s}:\underbrace{Term}_{\text{nouns}}\to D^M$$

<u>הגדרת $\overline{s}$:</u>
בהינתן $\overline{s},s,M$ מוגדרת אינדוקטיבית ע"י:

1. $\overline{s}(x)=s(x)$ x משתנה.

2. $\overline{s}(c) = C^M$ c סימן קבוע.

3. $\overline{s}(F(t_1,\dots,t_n)) = F^M(\overline{s}(t_1),\dots,\overline{s}(t_n))$.

ההשמה מתוקנת:

$$s[y \leftarrow d](x) = \begin{cases} d & x = y \\ s(x) & x \neq y \end{cases}$$

$s[y \leftarrow 8]$	x	y	z	$\dots$	s	x	y	z	$\dots$
	1	8	3	$\dots$		1	2	3	$\dots$

הגדרת $\models$

$M \underset{s}{\models} \alpha$

α נוסחה , s השמה, M מבנה

$M, s \models \alpha$

באינדוקציה מעל מבנה הנוסחה

<u>בסיס:</u>

$M \underset{s}{\models} R(t_1,\dots,t_n)$

$(\overline{s}(t_1),\dots,\overline{s}(t_n)) \in R^M$

כתוב $R^N(\overline{s}(t_1),\dots,\overline{s}(t_n))$ הוא T.

$M \underset{s}{\models} \approx (t_1,t_2)$

$\overline{s}(t_1) = \overline{s}(t_2)$

<u>צעד:</u>

$M \underset{s}{\not\models} \alpha \Leftrightarrow M \underset{s}{\models} \neg\alpha$

$M \underset{s}{\models} \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow$

$M \underset{s}{\models} \alpha$ וגם $M \underset{s}{\models} \beta$

$M \underset{s}{\models} \alpha \to \beta \Leftrightarrow$

$M \underset{s}{\not\models} \alpha$ או $M \underset{s}{\models} \beta$

$\Leftrightarrow M \underset{s}{\models} \forall x \alpha$

לכל $d \in D^M$ $M \underset{s[x \leftarrow d]}{\models} \alpha$

$\Leftrightarrow M \underset{s}{\models} \exists x \alpha$

קיים $d \in D^M$ כך ש- $M \underset{s[x \leftarrow d]}{\models} \alpha$.

דוגמא:

מילון: $\tau = (R(\circ,\circ), G(\circ), F(\circ,\circ))$

מבנה: $M = (\underbrace{\mathbb{N}}_{D^M}, \underbrace{<}_{R^M}, \underbrace{\alpha \cdot x}_{G^M(x)}, \underbrace{x+y}_{F^M(x,y)})$

השמה:

$s(x) = 2$ $\boxed{\text{s(y)=5}}$

$\alpha = \exists x (R(G(x), F(x,y))$

$\Leftrightarrow M \underset{s}{\models} \alpha$

קיים $d \in \mathbb{N}$ כך ש־ $R(G(x), F(x,y))$ $\Leftrightarrow M \underset{\underbrace{s[x \leftarrow d]}_{s}}{\models}$

קיים d כך ש־ $(\overline{s}'(G(x), \overline{s}'(F(x,y))) \in R^M$,

קיים d כך ש־ $\underbrace{(G^M(\overline{s}'(x)), F^N(\overline{s}'(x), \overline{s}'(y)w) \in <}_{2d<d+5}$

- $\star$ ערך z לא השפיע על התוצאה בהשמה.
- $\star$ ערך y ־ השפיע.
- $\star$ ערך x ־ לא השפיה.

נגדיר משתנים חפשיים/קשורים בנוסחה
באינדוקצייה על מבנה הנוסחה α.

<u>בסיס:</u> α נוסחה אטומית.
$(R(t_1, \ldots, t_n))$
לכל x שנמצא ב־α, x חופשי עבור α.

<u>צעד:</u>
עבור קשרים $\alpha = \beta \Box \gamma$
משתנה x הוא חופשי ב־α
אם ורק אם הוא חופשי ב־β או חופשי ב־γ.
$\alpha = \neg\beta$
x חופשי ב־α אם ורק אם הוא חופשי ב־β.
$\alpha = \forall x \beta$,$\alpha = \exists x \beta$
y חופשי ב־α אם ורק אם y חופשי ב־β <u>וגם</u> $\boxed{y \neq x}$
x לא חופשי ב־α ($y = x$ לא חופשי ב־α).
משתנה הוא <u>קשור</u> ב־α אם הוא אינו חופשי ב־α

<u>אינטוטיציה:</u>
משתנים חופשיים־ערכם משפיע על ערך הנוסחה.
מתשנים קשורים ־ ערכם אינו משפיע.

דוגמא:

$$\alpha = (\forall x \underbrace{R(x,y)}_{\underbrace{x,y}_{y}}) \wedge \underbrace{Q(x)}_{x} \wedge \underbrace{\exists z \underbrace{Q(z)}_{z}}_{\text{none}}$$

המשתנים החופשיים ב־α הם x, y.

למה:

נתונה α מעל מילון τ, מבנה M מעל τ והשמה s_1, s_2 <u>שמתאימות ל־M.</u>
אם לכל משתנה חופשי x של α $s_1(x) = s_2(x)$ אז

$$M \underset{s_1}{\models} \alpha \Leftrightarrow M \underset{s_2}{\models} \alpha$$

הגדרה:

נוסחה של תחשיב היחסים שאין בה משתנים חופשיים נקראת <u>פסוק</u>.
ערך פסוק אינו תלוי בהשמה וניתן להרשם $M \vDash \alpha$.
ניתן לרשום:
קיימת השמה s כך ש־$M \underset{s}{\vDash} \alpha$ אם ורק אם $M \vDash \alpha$.

דוגמא לפסוק:

$$\alpha = \forall x \exists y R(x,y)$$
$$M = (\mathbb{N}, \underbrace{<}_{R^N})$$
$$\Leftrightarrow M \underset{s}{\vDash} \forall x \exists y R(x,y)$$
לכל d_1 $\exists y R(x,y) \underset{s[x\leftarrow d_1]}{\vDash} \Leftrightarrow M$
לכל d_1 קיים d_2 $R(x,y) \underset{s[x\leftarrow d_1][y\leftarrow d_2]}{\vDash} \Leftrightarrow M$
לכל d_1קיים d_2 $\Leftrightarrow d_1 < d_2$
$\boxed{\mathrm{T}}$.

דוגמא נוספת:

$$M \underset{s}{\nvDash} \forall x \exists y R(x,y)$$
לכל d_1 קיים d_2כך ש־
$$\Leftrightarrow M \underset{\underbrace{s[x \leftarrow d_1][y \leftarrow d_2]}_{s'}}{\vDash} R(x,y)$$
לכל d_1 קיים $d_2$$\Leftrightarrow R^M(s'(x), s'(y))$
לכל d_1 קיים d_2 $\Leftrightarrow (d_1, d_2) \in <$
לכל d_1 קיים d_2 $d_1 < d_2$.

גדירות של יחס בתוך מבנה נתון

<u>בשונה</u> מגדירות ואי־גדירות של <u>קבוצת מבנים שנעשה **בהמשך**(דומה לתחשיב הפסוקים)</u>.
<u>נתון מבנה M</u> מעל τ אינטואיטיבית: השאלה היא האם אסשר לבטא בעזרת המילון של M מושגים(יחסים) שאינם במילון.
בהינתן מבנה M מעל τ
יחס אמיתי לא סימן יחס:$P \subseteq (D^M)^n$ n־מקומי.
יחס p n מקומי הוא <u>גדיר ב־M</u> אם קיימת נוסחה α מעל τ, בעלת n משתנים חופשיים $v_1, \ldots v_n$
כך שלכל השמה s מתקיים:
$M \underset{s}{\vDash} \alpha \Leftrightarrow (s(v_1), \ldots, s(v_n)) \in P$.
נאמר אז ש־α מגדירה את P ב־M.

דוגמא:

$$\tau=(R(\circ,\circ))$$
$$M=(\mathbb{N},\underbrace{\leq}_{R^N})$$

היחס(אונרי) $P\subseteq N$ מוגדר $P=\{0\}$.

ב־α שמגדירה את p יהיה <u>משתנה חופשי יחיד:</u>

$$\alpha(v_2)=\forall v_1 R(v_2,v_1)$$

צ"ל לכל השמה s:

$$M\underset{s}{\models} d(v_2)\Leftrightarrow s(v_2)\in p$$
$$\Leftrightarrow M\underset{s}{\models}\forall v_1 R(v_2,v_1)$$
לכל $d\in\mathbb{N}$ $\Leftrightarrow M\underset{s[v_1\leftarrow d]}{\models} R(v_2,v_1)$
לכל $d\in\mathbb{N}$ $\Leftrightarrow (s(v_2),d)\in\leq$
$$\Leftrightarrow s(v_2)=0$$
$s(v_2)\in P$.

דוגמא דומה במבנה שונה

$$\tau=\langle R(\circ,\circ)\rangle$$
$$M=(2^{\mathbb{N}},\subseteq)$$
$$p=\{\emptyset\}\subseteq D^M$$
$$\alpha=\forall v_1(R(v_2,v_1))$$

להוכיח שאם α מגדירה את p במילון M החדש.

באותו מבנה:

$$p'=\{(x,y)|x\subsetneq y\}\subseteq(D^M)^2$$
$$\varphi_1(x,y)=R(x,y)\wedge\neg R(y,x)$$
$$\varphi_2(x,y)=R(x,y)\wedge\neg(x\approx y)$$

צ"ל לכל השמה s

$$M\underset{s}{\models}\varphi_1\Leftrightarrow(s(x),s(y))\in P'$$
$$M\underset{s}{\models}\varphi_2\Leftrightarrow(s(x),s(y))\in P'.$$