לוגיקה ותורת הקבוצות - תרגול 6

מערכת הוכחה לתחשיב הפסוקים

תזכורת: קבוצת הפסוקים היכיחים, $Ded(\emptyset)$, היא הקבוצה האינדוקטיבית $X_{B,F}$ המוגדרת באופן הבא:

- $W = \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$
- $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ - קבוצת האקסיומות, כאשר:
  - $A_1 = \left\{\alpha \to (\beta \to \alpha) \mid \alpha,\beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}\right\}$
  - $A_2 = \left\{(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}\right\}$
  - $A_3 = \left\{((\neg\beta) \to (\neg\alpha)) \to (\alpha \to \beta) \mid \alpha,\beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}\right\}$
- $F = \{MP\}$ - קבוצת כללי ההיסק, כאשר MP הוא כלל הניתוק $\frac{\alpha,\alpha\to\beta}{\beta}$.

  צורת רישום נוספת: $MP(\alpha,\alpha\to\beta) = \beta$.

מערכת הוכחה עם הנחות: קבוצת הפסוקים היכיחים מקבוצת פסוקים Σ (הנחות), $Ded(\Sigma)$, היא הקבוצה האינדוקטיבית $X_{B\cup\Sigma,F}$ (עבור W, B ו־F מהגדרה 1).

- אם $\alpha \in Ded(\Sigma)$ נאמר כי α יכיח מ־Σ ונסמן $\Sigma \vdash \alpha$.
- סדרת היצירה של פסוק α מעל $Ded(\Sigma)$ נקראת סדרת הוכחה של α מתוך Σ.
- אם $\Sigma = \emptyset$, אז $Ded(\emptyset) = X_{B,F}$, קבוצת הפסוקים היכיחים (ללא הנחות).

משפט הנאותות ועקביות

משפט הנאותות הרחב: לכל קבוצת פסוקים Σ מתקיים, אם $\Sigma \vdash \alpha$ אז $\Sigma \models \alpha$.

סימון: $Con(\Sigma) = \left\{\alpha \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}} \mid \Sigma \vDash \alpha\right\}$. כלומר, משפט הנאותות משמעותו: $Ded(\Sigma) \subseteq Con(\Sigma)$.

מסקנה ממשפט הנאותות: אם $\Sigma \not\models \alpha$ אז $\Sigma \nvdash \alpha$.

משפט הנאותות הצר: אם $\vdash \alpha$ אז $\models \alpha$.

עקביות

הגדרה 1: קבוצת פסוקים $\Sigma \subseteq \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$ היא עקבית אם **לא קיים** $\alpha \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$ כך ש־$\Sigma \vdash \alpha$ וגם $\Sigma \vdash \neg\alpha$.

משפט 1 (הגדרה שקולה): Σ עקבית אמ"מ קיים פסוק α כך ש־$\Sigma \nvdash \alpha$.

איך מראים שקבוצה Σ היא עקבית?

לפי ההגדרה השקולה, די להראות פסוק α כך ש־$\Sigma \nvdash \alpha$, כלומר $\alpha \notin Ded\left(\Sigma\right)$.

לפי המסקנה ממשפט הנאותות, די להוכיח כי $\alpha \notin Con\left(\Sigma\right)$, כלומר $\Sigma \not\models \alpha$.

<u>תרגיל 1</u>: הוכיחו כי הקבוצה $\Sigma = \{p_i \to p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\} = \{p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, \dots\}$ היא עקבית.

<u>משפט 2</u>: אם Σ ספיקה אז Σ עקבית.

<u>תרגיל 2</u>:

נגדיר סדרה של קבוצות פסוקים:

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= \{\neg p_0\}\\ \Sigma_1 &= \{p_0, \neg p_1\}\\ \Sigma_2 &= \{p_0, p_1, \neg p_2\}\\ &\vdots\end{aligned}$$

באופן כללי $\Sigma_i = \{p_0, p_1, \dots, p_{i-1}, \neg p_i\}$.

1. האם לכל i מתקיים ש־Σ_i עקבית?
2. האם $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i$ עקבית?
3. האם $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i$ עקבית?
4. תהי $X \neq \emptyset$ קבוצת קבוצות פסוקים.
   הוכיחו: אם לכל $\Sigma \in X$ מתקיים ש־Σ עקבית, אז $\bigcap X$ היא עקבית.

משפט השלמות

<u>משפט השלמות</u>: לכל פסוק α וקבוצת פסוקים Σ, אם $\Sigma \models \alpha$ אז $\Sigma \vdash \alpha$.

בצרוף משפט הנאותות נקבל כי $\Sigma \vdash \alpha \Leftrightarrow \Sigma \models \alpha$.

<u>מסקנה ממשפט משלמות</u>: אם $\Sigma \nvdash \alpha$, אז $\Sigma \not\models \alpha$.

<u>משפט 3</u>: לכל קבוצת פסוקים Σ, אם Σ עקבית אז Σ ספיקה.

בצרוף משפט 2 נקבל כי Σ עקבית אמ"מ Σ ספיקה.

<u>תרגיל 3</u>: נגדיר מערכת הוכחה חדשה לתחשיב הפסוקים מעל $\mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$.

- קבוצת האקסיומות מכילה את הפסוקים מהצורה הבאה:

  לכל $\alpha,\beta,\gamma\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$,

  - A_1 : $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)$
  - A_2: $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma))$

- כללי היסק:

  - $MP(\alpha,\alpha\rightarrow\beta)=\beta$
  - MV (יוגדר בהמשך)

נסמן ב־$\Sigma\underset{N}{\vdash}\alpha$ את הטענה שפסוק α יכיח מתוך Σ במערכת החדשה.

1. נגדיר $MV(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha))=\alpha$.

   הוכיחו/ הפריכו: המערכת החדשה שלמה.

   כלומר, לכל קבוצת פסוקים $\Sigma\subseteq\mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$ ולכל פסוק $\alpha\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$, אם $\Sigma\vDash\alpha$ אז $\Sigma\underset{N}{\vdash}\alpha$.

$$\Sigma = \{p_i \to p_{i+1} | i \in \mathbb{N}\} = \{p_o \to p_1, p_1 \to p_2, \dots\}$$
$$\Sigma \not\models \alpha \alpha = \neg(p_0 \to p_o)$$
$$\alpha \Sigma$$

$$\overline{V_T}(p_i \to p_{i+1}) = TT_{\to}(V_T(p_i), V_T(p_{i+1}))$$
$$TT_{\to}(T, T) = T$$

$$V_T(\alpha) = F \Sigma V_T$$
$$\Sigma \nvdash \alpha \Leftarrow \Sigma \not\models \alpha$$
$$\Sigma \Leftarrow$$

$$\Sigma \Sigma$$
$$\overline{V}(\neg(p_0 \to p_0)) = F v \models \Sigma v \Sigma$$
$$\Sigma \forall \neg(p_0 \to p_0) \underbrace{\Leftarrow}_{\text{neotut}} \Sigma \not\models \neg(p_0 \to p_0)$$

$$\Sigma_0 = \{\neg p_o\}$$
$$\Sigma_1 = \{p_0, \neg p_1\}$$
$$\Sigma_2 = \{p_0, p_1, \neg p_2\}$$
$$\vdots$$

$$\Sigma_i = \{p_0, p_1, \dots, p_{i-1}, \neg p_i\}$$

$$\Sigma_i i$$

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$$

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$$

$$X \neq \emptyset$$
$$\bigcap X \Sigma \Sigma \in X$$

$v_i i \Sigma_i$

$$V_i(p_k) \begin{cases} F & k = i \\ T & k \neq i \end{cases}$$

$\Sigma_i \Sigma_i v_i$

$p_0, \neg p_0 \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i p_0 \in \Sigma_1 \neg p_o \in \Sigma_0$

$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i \vdash \neg p_0 \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i \vdash p_0$

$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma \neg p_0 p_0 \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$

$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i = \emptyset$

$\bigcap X$

$\bigcap X \vdash \alpha \alpha \in \mathrm{WFF}_{\{\to, \neg\}}$

$\bigcap X \subseteq \Sigma \Sigma X \neq \emptyset$

$\Sigma \Sigma \vdash \alpha$

$MV(\alpha \to (\beta \to \alpha)) = \alpha$

$\Sigma \underset{N}{\vdash} \alpha \Sigma \vDash \alpha \alpha \in \mathrm{WFF}_{\{\neg, \to\}} \Sigma \subseteq \mathrm{WFF}_{\{\neg, \to\}}$

$\Sigma \underset{N}{\vdash} \alpha \Sigma \vDash \alpha \alpha \Sigma$

$(A_1) \alpha \to (\beta \to \alpha)$

$(MV(1)) \alpha$

$\alpha \Sigma \vDash \alpha$