

לוגיקה הרצאה 5

קבוצת הפסוקים היכחיים/משפטים מורמליים - סינטקטי - פסוקים עם $\{\leftarrow, \rightarrow\}$ בלבד.
הגדרה אידוקטיבית:

$$\begin{aligned} B &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \\ A_1 &= \{(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \mid \alpha, \beta \in \text{WFF}\{\neg, \rightarrow\}\} \\ A_2 &= \{((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \text{WFF}\{\neg, \rightarrow\}\} \\ A_3 &= \{((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \mid \alpha, \beta \in \dots\} \\ F &= \{MP\} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} MP \\ \underbrace{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}_{\beta} \end{array}$$

כדי להראות ספסוק שייד לקבוצת הפסוקים היכחיים צריך להראות סדרת יצירה שנקראת סדרת הוכחה.

סדרת הוכחה עבור פסוק β הוא סתדרת הפסוקים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.
שכל אחד מהם הוא או אכסיומה או התקבל מהקודמים בהסדרה ע"י כלל ההיסק MP .

$$\begin{array}{c} \text{בנוסף } \beta = a_n \\ \text{axi'} \\ \underbrace{a_1 a_2 a_3}_{\text{Proof series for } a_3} \mid \dots a_n \end{array}$$

דוגמה:

$$\vdash \alpha \rightarrow \alpha$$

כסימון להקלה בקריאות נסמן $\alpha \rightarrow \alpha$ כ- β

$$1. (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \quad A_2$$

$$2. (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \quad A_1$$

$$3. ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \quad MP1, 2$$

(א) הכנסת β :

$$(\alpha \rightarrow (\underline{\underline{\alpha \rightarrow \alpha}})) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)), A_1 \quad .4$$

$$(\alpha \rightarrow \alpha), MP \ 4, 3 \quad .5$$

$$\vdash (\alpha \rightarrow \alpha)$$

דוגמה:

$$\vdash (\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$$

$$(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \quad A_3 \quad .1$$

$$((\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))) \quad A_1 \quad .2$$

$$(\neg\alpha \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))) \quad MP \ 1, 2 \quad .3$$

$$(\underbrace{\neg\alpha}_{\alpha} \rightarrow ((\underbrace{\neg\beta \rightarrow \neg\alpha}_{\beta} \rightarrow (\underbrace{\alpha \rightarrow \beta}_{\gamma}))) \xrightarrow{1} A_2 \quad .4$$

$$(\underbrace{\neg\alpha}_{\alpha} \rightarrow (\underbrace{\neg\beta \rightarrow \neg\alpha}_{\beta})) \xrightarrow{2}$$

$$(\underbrace{\neg\alpha}_{\alpha} \rightarrow (\underbrace{\alpha \rightarrow \beta}_{\gamma}))$$

$$(\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \quad MP \ 3, 4 \quad .5$$

$$(\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)) \quad A_1 \quad .6$$

$$(\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \quad MP \ 5, 6 \quad .7$$

$$\vdash (\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$$

הוכחה על סמך הנחות

נתונה קבוצה של פסוקים X , נגדיר את קבוצת המסקנות של X
(קבוצת הפסוקים היכחיים עס' X)
כקבוצה האינדוקטיבית:

$$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup X$$

$$F = \{MP\}$$

סדרת הוכחה עבוק קב' β עס' X a_1, a_2, \dots, a_n

$$1 \leq i \leq n \text{ ולכל } a_n = \beta$$

a_i הוא אכסיומה או מ- X

או התקבל מהקודמים בסדרה ע"י MP .

סימון: $X \vdash \beta$

$$\underbrace{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma}_{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma} \vdash \alpha \rightarrow \gamma$$

$$X = \{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in WFF_{\{\rightarrow, \neg\}}\}$$

$$.1 \quad \alpha \rightarrow \beta \text{ הנחה}$$

$$.2 \quad \beta \rightarrow \gamma \text{ הנחה}$$

$$\text{מטרה: } \{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\} \vdash (\alpha \rightarrow \gamma)$$

משפט:

נתון:

$\vdash \beta$ ולכל $X \vdash \alpha, \alpha \in X$ אזי נסיק β .

צ"ל:

$$\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$$

$$1. (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) A2$$

$$2. ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))) A1$$

$$3. \text{הנחה } \beta \rightarrow \gamma$$

$$4. (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)), MP 2, 3$$

$$5. (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma), MP 1, 4$$

$$6. \text{הנחה } \alpha \rightarrow \beta$$

$$7. \alpha \rightarrow \beta, MP 5, 6$$

$$\beta \rightarrow \gamma, \alpha \rightarrow \beta \vdash \alpha \rightarrow \gamma$$

טענה 1:

אם $\alpha \in X$ אז $X \vdash \alpha$

הוכחה:

1. הנחה

$$X \vdash \alpha$$

$$\alpha \vdash \alpha$$

טענה 2:

אם $X \subseteq Y$ אז לכל פסוק α , אם $X \vdash \alpha$ אז $Y \vdash \alpha$
התכונה נקראת: מונוטוניות של הוכחה. $X \vdash \alpha$

$$a_1 | x_1$$

$$\vdots | x_2$$

\Rightarrow

$$a_n | \vdots$$

$$[x_n]$$

$$[y_1]$$

$$[y_2]$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$[y_n]$$

נוסח אלטרנטיבי לטענה 2:

אם $B_1 \subseteq B_2$ אז $X_{B_1, F} \subseteq X_{B_2, F}$

מסקנה:

אם $\vdash \alpha$ אז $X \vdash \alpha$ לכל קבוצה X .

טענה 3:

אם לכל פסוק α ב- X , $Y \vdash \alpha$
אז לכל פסוק β אם $X \vdash \beta$ אז $Y \vdash \beta$.

הוכחה: נתון β , $X \vdash \beta$ נתון a_1, \dots, a_n , $\underbrace{a_1, \dots, a_n}_{\text{from } X}, \underbrace{\beta}_{\beta}$

על כל איבר a_i שהסדרה שלו היא "מ- X "
נחליף אותו בסדרת הוכחה מתוך Y .

דוגמה:

$$X = \{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\}$$

$$\delta = \alpha \rightarrow \gamma$$

$$X \vdash \delta \text{ ידוע}$$

$$Y = \{\beta, \gamma\} \text{ נגדיר}$$

נוכיח ש-

$$y \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

$$y \vdash \beta \rightarrow \gamma$$

$$y \vdash \delta \text{ נסיק}$$

$$1. \quad \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta), \text{ A1}$$

$$2. \quad \text{הנחה מ-} y \vdash \beta$$

$$3. \quad \alpha \rightarrow \beta$$

$$y \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

$$(\gamma \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)), \text{ A1 (א)}$$

$$(ב) \text{ הנחה מ-} y \vdash \gamma$$

$$(ג) \quad \beta \rightarrow \gamma$$

$$y \vdash \beta \rightarrow \gamma$$

טענה 4 (הוכחות הן סופיות)

אם $\overbrace{X}^{(\text{infinite})} \vdash \alpha$ אז קיימת תת קבוצה סופית של X , $X' \subseteq X$, כך ש- $X' \vdash \alpha$.

משפט הדדוקציה:

לכל מערכת הוכחה שיש בה לפחות את האכסיומות A_1 ו- A_2

ויש בה בדיוק את כלל ההיסק $\boxed{\text{MP}}$

מתקיים:

לכל קבוצת פסוקים X ופסוקים α, β :

$X \vdash \alpha \rightarrow \beta$ אם ורק אם $X, \alpha \vdash \beta$

מסקנה: $\vdash \beta \rightarrow \alpha \Leftarrow \beta \vdash \alpha$

הוכחה: \Rightarrow נתון $X \vdash \alpha \rightarrow \beta$
נוכיח $X, \alpha \vdash \beta$

1. הנחה α

2. יכיח מ- X $\alpha \rightarrow \beta$.

3. β MP
 $X, \alpha \vdash \beta$