# לוגיקה הרצאה 6

**אכסיומות** $A_1 A_{2,} A_3$

כלל היסק $MP$

$\underbrace{\alpha, \alpha \to \beta}_{\beta}$

קבוצה אינדוקטיבית של המשפטים היכחיים

$\vdash \alpha$

סדרת הוכחה עבור $\alpha$

$\alpha_1, \ldots, \underbrace{a_n}_{\alpha}$

לכל $1 \le i \le n$

$a_i$הוא או אכסיומה או התקבלה מהקודמים בסדרה ע"י $MP$.

**בסיס** $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup X$ - $X$ קבוצת הנחות

פעולה $MP$

$X \vdash \alpha$

הנחה מ־$X$ אכס',אכס' $X \subseteq Y$ , $y \vdash \alpha$

**משפט הדדוקציה**

לכל מערכת הוכחה שיש בה לפחות אכסיומות $A_1, A_2$ רק את כלל $MP$:

לכל קבוצת פסוקים $X$ ופסוקים $\alpha, \beta$ מתקיים:

$X \vdash \alpha \to \beta \; \Leftrightarrow \; X, \alpha \vdash \beta$

**הוכחה:**

$\Rightarrow$ נתון $X \vdash \alpha \to \beta$

הוכחנו $X, \alpha \vdash \beta$

$\Leftarrow$ נתון $X, \alpha \vdash \beta$

צ"ל $X \vdash \alpha \to \beta$

עס' $X, \alpha \vdash \beta$

קיימת סדרת הוכחה $a_1, \ldots, a_n$

לכל $i$ :

$a_i$ אכסיומה או מ־$X$ או $\alpha$ או התקבלה עס' $MP$ ו־ $a_n = \beta$.

נראה לכל $a_i$ $1 \le i \le n$

$X \vdash \alpha \to a_i$

מסקנה כבור $a_n = \beta$

כנדרש $X \vdash \alpha \to \beta$

נוכיח באינדוקציה על $i$ בסדרת ההוכחה.

**בסיס:** נוכיח $X \vdash \alpha \to a_i$

1. $a_i$ אכסיומה
2. $\alpha$
3. מ־$X$

<u>הוכחה ל 1 של הבסיס:</u>

1. אכסיומה $a_1$.
2. $A_1$ $(\alpha \to a_i) \to a_1$.
3. $MP_{1,2}$ $a_1 \to \alpha$

$\vdash \alpha \to a_1$

מונוטוניות של הוכחה עס' הנחות $(\alpha \to a_i) \vdash X$.

<u>הוכחה ל 2 של הבסיס:</u>

מטרה $\vdash \alpha \to \alpha$

משפט שהוכחנו בשבוע שעבר $X \vdash \alpha \to \alpha$.

<u>הוכחה ל 3 של הבסיס:</u>

1. הנחה מ־$X$ $a_1$
2. $(\alpha \to a_1) \to a_1$
3. $MP_{1,2}$ $a_1 \to \alpha$

$X \vdash \alpha \to a_1$.

**צעד האינדוקציה** נניח שהטענה נכונה לכל $j < i$ נוכיח עבור $a_i$:

אפשרות 1:

1. $a_i$ אכסיומה
2. $\alpha$
3. מ־$X$

עבור אפשרות זו ההוכחה זהה.

אפשרות 2:

$a_i$ התקבלה עס' $MP$ מ־$a_l$, $a_m$ עבור $m, l < i$

1. $a_1 = \delta \to a_i$
2. $a_m = \delta$
3. $MP$ $a_l, a_m$ $\qquad a_i$

הנחת האינדוקציה

$X \vdash (\alpha \to (\delta \to a_i))$

$X \vdash (\alpha \to \delta)$

1. עס' $X$ $\alpha \to (\delta \to a_i)$
2. עס, $X$ $(\alpha \to \delta)$
3. $(((\alpha \to (\delta \to a_i)) \to$
$((\alpha \to \delta) \to (\alpha \to a_i)))$ $A_2$
4. $((\alpha \to \delta) \to (\alpha \to a_i))$ $MP_{1,3}$
5. $(\alpha \to a_i)$ $MP_{2,4}$

$X \vdash (\alpha \to a_i)$

■

**תרגיל:**

נוכיח $\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$

**הוכחה:**

1. הנחה $(\alpha \to (\beta \to \gamma))$
2. הנחה $\beta$
3. הנחנה $\alpha$
4. $(\beta \to \gamma)$ $MP_{1,3}$
5. $\gamma$ $MP_{4,2}$

$(\alpha \to (\beta \to \gamma)), \beta, \gamma \vdash \alpha$

(משפט הדדוקציה) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)), \beta \vdash (\alpha \to \gamma)$

("") $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \vdash (\beta \to \alpha \to \gamma)$

("") $\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$

**תרגיל:**

נוכיח $\vdash (\neg\neg(\alpha \to \alpha)$

1. הנחה $\neg\neg\alpha$
2. משפט $\vdash (\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ $(\neg\neg\alpha \to (\neg\alpha \to (\neg\neg\neg\alpha))$
3. $(\neg\alpha \to \neg\neg\neg\alpha)$ $MP_{1,2}$
4. $(\underbrace{\neg\alpha}_{\beta} \to \underbrace{\neg\neg\neg\alpha}_{\neg\alpha}) \to (\underbrace{\neg\neg\alpha}_{\alpha} \to \underbrace{\alpha}_{\beta})$ $A_3$
5. $(\neg\neg\alpha \to \alpha)$ $MP_{3,4}$

6. $\alpha \; MP_{5,1}$
$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$
משפט הדדוקציה
$\vdash (\neg\neg\alpha \to \alpha)$

$A_3 : (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
משפט פורמלי פסוק יכיח $\vdash (\neg \underbrace{\alpha}_{(\neg\alpha)} \to (\underbrace{\alpha}_{(\neg\alpha)} \to \underbrace{\beta}_{(\neg\neg\neg\alpha)}))$.

שיטה שונה להשמך ההוכחה משלב 5:
מסקנה $\neg\neg\alpha \vdash (\neg\neg\alpha \to \alpha)$
דדוקציה בכיוון $\{\neg\neg a, \neg\neg\alpha\} \vdash \alpha \to$
$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$
דדוקציה $\vdash (\neg\neg\alpha \to \alpha)$

**להוכיח תכונות על מערכת ההוכחה.**

**משפט נאותות:**

$$\vDash \alpha \quad \Leftarrow \quad \vdash \alpha$$

**משפט הנאותות החזק:**

$$X \vDash \alpha \quad \Leftarrow \quad X \vdash \alpha$$

- $X \vDash \alpha$ מתקיים אם לכל השמה $v$,
אם$X$ $v \vDash$ (כלומר $v \vDash \beta$ לכל $\beta \in X$) אז $v \vDash \alpha$.

**משפט השלמות(החזק):**

$$X \vdash \alpha \Leftarrow X \vDash \alpha$$
$$\vdash \alpha \quad \Leftarrow \quad \vDash \alpha.$$

**הוכחה (משפט הנאותות החזק):**

נתון $x \vdash \alpha$
צ"ל $X \vDash \alpha$
<u>הוכחה באינדוקציית מבנה על הפסוקים $\alpha$ שיכיחים עס' $X$.</u>

**בסיס** סדרת ההוכחה $a_1, \ldots, \underbrace{a_n}_{\alpha}$

1. $a_1$ מ־$X$.
2. $a_1$ אכסיומה

**הוכחה:**

1. $a_1$ מ־$X$.
$X \vDash a_1$,
$X \vDash v$ אם ורק אם $v \vDash \beta$ לכל $\beta \in X$ ובפרט $v \vDash a_1$.

2. $a_1$ אכסיומה
לכל אכסיומה קל לבדוק $\vDash a_1$ טאוטולוגיה
מסקנה $X \vDash a_1$

**הנחה האינדוקצייה:**

$X \vDash a_j$
$X \vDash a_K$

**צעד האינדוקצייה** $a_i$: אכסיומה מ־$X$
$MP$ מ־ $a_k, a_j$, $j, k < i$
$a_j = \beta \to a_i$, $a_k = \beta$
$X \vDash \beta \to a_i$
$X \vDash \beta$
נניח בשלילה ש־ $X \nvDash a_i$
כלומר קיימת $v$
$v \vDash X$
$v \nvDash a_i$
עס' הנחת האינדוקציה
$v \vDash \beta \to a_i$
$v \vDash \beta$
עס' טבלת האמת של $\to$:
$v \vDash a_i$ סתירה.

**משפט הנאותות(החזק לפי אביר היזם):**

אם $X \vdash \alpha$ אז $X \vDash \alpha$
נסמן שקול: אם $X \nvDash \alpha$ אז $X \nvdash \alpha$

**הוכחה משפט השלמות:**

<u>עקביות של קבוצת פסוקים:</u>
<u>הגדרה 1:</u>
קבוצת פסוקים $X$ היא <u>עקבית</u> אם לא קיים פסוק $\alpha$ כך ש־ $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$.
<u>הגדרה 2:</u>
$X$ הינה עקבית אם לא כל פסוק יכיח מ־$X$. כלומר, קיים פסוק $\beta$, $X \nvdash \beta$.

**דוגמאות לקבוצות לא עקביות:**

1. $X = \{\alpha, \neg\alpha\}$
$X \vdash \alpha$
$X \vdash \neg\alpha$

2. $X = \{\alpha \to \beta, \alpha, \neg\beta\}$
$X \vdash \neg\beta$
$X \vdash \beta$

**משפט:**

2 ההגדרות שקולות עבור תחשיב הפסוקים.

**הוכחה** 1⇐2
נתון: לא קיים $\alpha$, $X \nvdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$
ולכן לכל $\alpha$, או $X \vdash \alpha$ או $X \nvdash \neg\alpha$ ומתקיימת הגדרה 2
2⇐1
$X$ הינה עקבית אם לא כל פסוק יכיח מ-$X$ כלומר, קיים פסוק $\beta$, $X \nvdash \beta$.