לוגיקה הרצאה 6

אכסיומות $A_1 A_{2,} A_3$

כלל היסק MP

$\underbrace{\alpha, \alpha \to \beta}_{\beta}$

קבוצה אינדוקטיבית של המשפטים היכחיים

$\vdash \alpha$

סדרת הוכחה עבור α

$\alpha_1, \ldots, \underbrace{a_n}_{\alpha}$

לכל $1 \leq i \leq n$

a_iהוא או אכסיומה או התקבלה מהקודמים בסדרה ע"י MP.

בסיס $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup X$ - X קבוצת הנחות

פעולה MP

$X \vdash \alpha$

הנחה מ-X אכס',אכס' $X \subseteq Y$, $y \vdash \alpha$

משפט הדדוקציה

לכל מערכת הוכחה שיש בה לפחות אכסיומות A_1, A_2 רק את כלל MP:

לכל קבוצת פסוקים X ופסוקים α, β מתקיים:

$X \vdash \alpha \to \beta \;\Leftrightarrow\; X, \alpha \vdash \beta$

הוכחה:

$\Rightarrow$ נתון $X \vdash \alpha \to \beta$

הוכחנו $X, \alpha \vdash \beta$

$\Leftarrow$ נתון $X, \alpha \vdash \beta$

צ"ל $X \vdash \alpha \to \beta$

עס' $X, \alpha \vdash \beta$

קיימת סדרת הוכחה $a_1, \ldots, a_n$

לכל i :

a_i אכסיומה או מ-X או α או התקבלה עס' MP ו- $a_n = \beta$.

נראה לכל a_i $1 \leq i \leq n$

$X \vdash \alpha \to a_i$

מסקנה כבור $a_n = \beta$

כנדרש $X \vdash \alpha \to \beta$

נוכיח באינדוקציה על i בסדרת ההוכחה.

בסיס: נוכיח $X \vdash \alpha \to a_i$

1. a_i אכסיומה
2. α
3. מ-X

<u>הוכחה ל 1 של הבסיס:</u>

1. אכסיומה a_1.
2. A_1 $a_1 \to (\alpha \to a_i)$.
3. $MP_{1,2}$ $\alpha \to a_1$

$\vdash \alpha \to a_1$
מונוטוניות של הוכחה עס' הנחות $X \vdash (\alpha \to a_i)$.
<u>הוכחה ל 2 של הבסיס:</u>
מטרה $\vdash \alpha \to \alpha$
משפט שהוכחנו בשבוע שעבר $X \vdash \alpha \to \alpha$.
<u>הוכחה ל 3 של הבסיס:</u>

1. הנחה מ-X a_1
2. $a_1 \to (\alpha \to a_1)$
3. $MP_{1,2}$ $\alpha \to a_1$

$X \vdash \alpha \to a_1$.

צעד האינדוקציה נניח שהטענה נכונה לכל $j < i$ נוכיח עבור a_i:
אפשרות 1:

1. a_i אכסיומה
2. α
3. מ-X

עבור אפשרות זו ההוכחה זהה.
אפשרות 2:
a_i התקבלה עס' MP מ-a_l, a_m עבור $m, l < i$

1. $a_1 = \delta \to a_i$
2. $a_m = \delta$
3. MP a_l, a_m a_i

הנחת האינדוקציה
$X\vdash(\alpha\to(\delta\to a_i))$
$X\vdash(\alpha\to\delta)$

1. עס' X $\alpha\to(\delta\to a_i)$
2. עס, X $(\alpha\to\delta)$
3. $(((\alpha\to(\delta\to a_i))\to$
$((\alpha\to\delta)\to(\alpha\to a_i)))$ A_2
4. $((\alpha\to\delta)\to(\alpha\to a_i))$ $MP_{1,3}$
5. $(\alpha\to a_i)$ $MP_{2,4}$
$X\vdash(\alpha\to a_i)$
■

תרגיל:

נוכיח $\vdash(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\beta\to(\alpha\to\gamma))$

הוכחה:

1. הנחה $(\alpha\to(\beta\to\gamma))$
2. הנחה β
3. הנחנה α
4. $(\beta\to\gamma)$ $MP_{1,3}$
5. γ $MP_{4,2}$
$(\alpha\to(\beta\to\gamma)),\beta,\gamma\vdash\alpha$
$(\alpha\to(\beta\to\gamma)),\beta\vdash(\alpha\to\gamma)$ (משפט הדדוקציה)
$(\alpha\to(\beta\to\gamma))\vdash(\beta\to\alpha\to\gamma)$ ("")
$\vdash(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\beta\to(\alpha\to\gamma))$ ("")

תרגיל:

נוכיח $\vdash(\neg\neg(\alpha\to\alpha)$

1. הנחה $\neg\neg\alpha$
2. משפט $\vdash(\neg\alpha\to(\alpha\to\beta)$ $(\neg\neg\alpha\to(\neg\alpha\to(\neg\neg\neg\alpha))$
3. $(\neg\alpha\to\neg\neg\neg\alpha)$ $MP_{1,2}$
4. $(\underbrace{\neg\alpha}_{\beta}\to\underbrace{\neg\neg\neg\alpha}_{\neg\alpha})\to(\underbrace{\neg\neg\alpha}_{\alpha}\to\underbrace{\alpha}_{\beta})$ A_3
5. $(\neg\neg\alpha\to\alpha)$ $MP_{3,4}$

6. $\alpha\ MP_{5,1}$

$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$

משפט הדדוקציה

$\vdash (\neg\neg\alpha \to \alpha)$

$A_3 : (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$

משפט פורמלי פסוק יכיח $\vdash (\neg \underbrace{\alpha}_{(\neg\alpha)} \to (\underbrace{\alpha}_{(\neg\alpha)} \to \underbrace{\beta}_{(\neg\neg\neg\alpha)}))$.

שיטה שונה להשמך ההוכחה משלב 5:

מסקנה $\neg\neg\alpha \vdash (\neg\neg\alpha \to \alpha)$

דדוקציה בכיוון $\{\neg\neg a, \neg\neg\alpha\} \vdash \alpha \to$

$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$

דדוקציה $\vdash (\neg\neg\alpha \to \alpha)$

להוכיח תכונות על מערכת ההוכחה.

משפט נאותות:

$$\vdash \alpha \quad \Rightarrow \quad \vDash \alpha$$

משפט הנאותות החזק:

$$X \vdash \alpha \quad \Rightarrow \quad X \vDash \alpha$$

- $X \vDash \alpha$ מתקיים אם לכל השמה v,
  אםX $v \vDash X$ (כלומר $v \vDash \beta$ לכל $\beta \in X$) אז $v \vDash \alpha$.

משפט השלמות(החזק):

$$X \vDash \alpha \Rightarrow X \vdash \alpha$$

$\vDash \alpha \quad \Rightarrow \quad \vdash \alpha$.

הוכחה (משפט הנאותות החזק):

נתון $x \vdash \alpha$

צ"ל $X \vDash \alpha$

הוכחה באינדוקציית מבנה על הפסוקים α שיכיחים עס' X.

בסיס סדרת ההוכחה $a_1, \ldots, \underbrace{a_n}_{\alpha}$

1. a_1 מ-X.
2. a_1 אכסיומה

הוכחה:

1. a_1 מ-X.
$X \vDash a_1$,
$X \vDash v$ אם ורק אם $v \vDash \beta$ לכל $\beta \in X$ ובפרט $v \vDash a_1$.

2. a_1 אכסיומה
לכל אכסיומה קל לבדוק $\vDash a_1$ טאוטולוגיה
מסקנה $X \vDash a_1$

הנחה האינדוקצייה:

$X \vDash a_j$
$X \vDash a_K$

צעד האינדוקצייה a_i: אכסיומה מ-X
MP מ- a_k, a_j, $j, k < i$
$a_j = \beta \to a_i$, $a_k = \beta$
$X \vDash \beta \to a_i$
$X \vDash \beta$
נניח בשלילה ש- $X \nvDash a_i$
כלומר קיימת v
$v \vDash X$
$v \nvDash a_i$
עס' הנחת האינדוקציה
$v \vDash \beta \to a_i$
$v \vDash \beta$
עס' טבלת האמת של $\to$:
$v \vDash a_i$ סתירה.

משפט הנאותות(החזק לפי אביר היזם):

אם $X \vdash \alpha$ אז $X \vDash \alpha$
נסמן שקול: אם $X \nvDash \alpha$ אז $X \nvdash \alpha$

הוכחה משפט השלמות:

<u>עקביות של קבוצת פסוקים:</u>
<u>הגדרה 1:</u>
קבוצת פסוקים X היא <u>עקבית</u> אם לא קיים פסוק α כך ש- $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$.
<u>הגדרה 2:</u>
X הינה עקבית אם לא כל פסוק יכיח מ-X. כלומר, קיים פסוק β, $X \nvdash \beta$.

דוגמאות לקבוצות לא עקביות:

1. $X = \{\alpha, \neg\alpha\}$
$X \vdash \alpha$
$X \vdash \neg\alpha$

2. $X = \{\alpha \to \beta, \alpha, \neg\beta\}$
$X \vdash \neg\beta$
$X \vdash \beta$

משפט:

2 ההגדרות שקולות עבור תחשיב הפסוקים.

הוכחה 1⇐2

נתון: לא קיים α וגם $X \nvdash \alpha, \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$

ולכן לכל α, או $X \vdash \alpha$ או $X \nvdash \neg\alpha$ ומתקיימת הגדרה 2

2⇐1

X הינה עקבית אם לא כל פסוק יכיח מ-X כלומר, קיים פסוק β, $X \nvdash \beta$.