לוגיקה הרצאה 1

3 ביולי 2019

טיעון

טיעון תקף - כל פעם שההנחות נכונות גם המסקנות נכונות.

- ⋆ כל היוונים הם בני אדם
- ⋆ כל בני האדם הם בני תמותה
- ⋆ כל היוונים הם בני תמותה

בני האדם הם הכללה של יוונים
לבני אדם יש תכונה של "בני תמותה".
ליוונים יש תכונה של בני תמותה.

כל A הוא B, כל B הוא C ולכן כל A הוא C.

למשל הנחות:

- ⋆ (הכלה) כל המרובעים הם מצולעים.
- ⋆ (תכונה) כל המצולעים הם בעלי היקף.

מסקנה:

- ⋆ **כל המרובעים הם בעלי היקף.**

דוגמה נוספת:

- ⋆ (תכונה) כל העורבים שחורים.
- ⋆ (הכללה) כל שחור הוא צבע.
- ⋆ (מסקנה שגויה) כל העורבים הם צבע.

מסקנה:

- ⋆ שפה טבעים לא פסיק ברורה ולכן צריך שפה פורמלית כדי שנוכל להוכיח דברים.

טענות:

אמירות/נוסחאות שהן אמת או שקר בעולם.

תחשיב(סינטקס):

איזה נוסחאות חוקיות בשפה.

סמנטיקה:

מתי נוסחה היא אמת או שקר.

מערכת הוכחה פורמלית:

נרצה לקשר בין הסמנטיקה למערכת ולומר שהנוסחאות היכיחות (ניתנות להוכחה) הן נכונות.
כל נוסחה נכונה ניתנת להוכחה.

הגדרה אינדוקטיבית של קבוצה:

- ⋆ נתונה קבוצה W - העולם.
- ⋆ נתונה קבוצה $B \subseteq W$ (הבסיס).
- ⋆ נתונה קבוצה של כללי יצירה\פעולות F.

ב־F יש פונקציות חלקיות (שלא בהכרח מוגדרות לכל האיברים בתחום שלהם) אנריות ל־n כלשהו.

$$f : W^n \to W$$

נגדיר את הקבוצה $X_{B,F} \subseteq W$
(הסגור של B תחת F) כקבוצה המקיימת את הדברים הבאים:

1. $B \subseteq X_{B,F}$.
2. לכל $f : W^n \to W,\ f \in F$
אם $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X_{B,F}$ אז גם $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_{B,F}$.
3. אין ב־$X_{B,F}$ איברים מיותרים
כלומר $X_{B,F}$ מכילה רק איברים שנדרשים לקיום א' וב'.
במילים אחרות: $X_{B,F}$ היא הקבוצה המינימלית שנוצרת ע"י B ו־F.

דוגמה:

- ⋆ W - כל המילים הסופיות מעל א"ב a, b.
- ⋆ בסיס: $B = \{ab\}$.
- ⋆ פעולות:

1. מוסיפה aba לצד ימין של המילה:

$$f_1(w) = waba$$

2. מחליפה את aa השמאלי ביותר במילה ב־b

$$f_2(w_1aaw_2) = w_1bw_2 \ : aa \notin w_1$$

3. השמטת bbb השמאלי ביותר (אם קיים):

$$f_3(w_1bbbw_2) = w_1w_2 \ : bbb \notin w_1$$

- ⋆ דוגמה למילים בשפה:
$aa, ababa$

נראה דרך לבנות $X_{B,F}$ ע"ס B, F כאיחוד של סדרת קבוצות.

נגדיר:

בהינתן קבוצה $F(y), y$ הינה קבוצת איברים ב־W שמתקבלים בהפעלת איזושהי פעולה ב־F על איזשהו איבר ב־y.
נגדיר סדרה של קבוצות:

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_n$$

באופן הבא:

$$X_1 = B$$
$$\dots$$
$$X_{i+1} = X_i \cup F(X_i)$$
$$\overline{X} = \cup_i X_i$$
$$\overline{X} = X_{B,F}$$

כלומר:

$$X_1 = \{ab\}$$
$$X_2 = \{ab, ababa\}$$
$$X_3 = X_2 \cup \{ababa, ababaaba\}$$
$$X_4 = X_3 \cup \{ababbba, ababaabaaba\}$$
$$\text{etc}\dots$$

דוגמה לקבוצה אינדוקטיבית:

- ⋆ $W = \mathbb{N}$
- ⋆ $B = \{0\}$
- ⋆ $F = \{+2\}$ (לא ממש פורמלי)
- ⋆ $X_{B,F} = \mathbb{N}_2$ (טבעיים זוגיים)

טענה:

- ⋆ $\overline{X}$ מקיימת את כל הדרישות ולכן $\overline{X} = X_{B,F}$
  1. צ"ל מקיימת את 1 - נראה ש-$B \subseteq \overline{X}$
     זה נכון כי: $X_1 = B$ ו-$X_1 \subseteq \overline{X}$.
  2. צ"ל מקיימת את 2:
     עבור $x_1, x_2, \dots, x_n \in \overline{X}$ מתקיים $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \overline{X}$
     נראה שקיים X_l כלשהו כך שמתקיים $x_1, x_2, \dots, x_n \in X_l$
     ולכן נוכל להסיק ש- $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_{l+1}$
     ולכן $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \overline{X}$.

דוגמה:

$$f(a_1, a_2, a_3)$$
$$a_1 \in X_5 \ , a_2 \in X_{17} \ , a_3 \in X_1$$
$$\Rightarrow$$
$$f(a_1, a_2, a_3) \in X_{18}$$

צריך להוכיח ש-$\overline{X}$ מקיימת את ג'.

נוכיח טענה יותר כללית:

לכל קבוצה Y שמקיימת את התנאים $1, 2$ עבור B, F מתקיים $\overline{X} \subseteq Y$
נוכיח באינדוקציה על i ש-$X_i \subseteq Y$ ואז $\cup X_i \subseteq Y$.

- ⋆ בסיס:
  צ"ל $X_1 = B \subseteq Y$
  נכון כי Y מקיימת את תנאי 1.

* צעד:
נניח כי $X_i \subseteq Y$ ונוכיח ש־$X_{i+1} = X_i \cup F(X_i) \subseteq Y$.

* צ"ל לגבי האיברים $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X_i$ אז על סמך אינדוקציה $x_1, x_2, \ldots, x_n \in Y$
ובגלל ש־Y מקיימת את ב' אז $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Y$.

מסקנה מהטענה:
$\overline{X}$ היא המינימלית שמספקת את א' וב' ולכן מספקת גם את ג'.
מסקנה:
$\overline{X} = X_{B,F}$.

משפט ההוכחה באינדוקציה

אם Y קבוצה שמספקת את תנאים $1, 2$ עבור B, F אז יודעים ש־ $X_{B,F} \subseteq Y$.

משפט זה מאפשר שיטת הוכחה שנראת "הוכחה באינדוקציית מבנה".
על מנת להוכיח ש־$X_{B,F} \subseteq Y$ נראה:

1. $B \subseteq Y$.
2. Y סגורה תחת F.

כדי להוכיח ש־$b \in X_{B,F}$ צריך להראות שקיימת עבורו <u>סדרת יצירה</u>.

סדרת יצירה:

עבור איבר b מתוך $X_{B,F}$ הינו סדרת סופית $a_1, a_2, \ldots, a_n$ כך ש:

1. $a_n = b$.
2. לכל $1 \leq i \leq n$

(א) או ש־$a_i \in B$

(ב) או ש־a_i התקבלה מקודמים בסדרה ע"י הפעלת פעולה מ־F.

דוגמה עבור
$B = \{0\}, \qquad F = \{+2\}$
נראה ש־$8 \in X_{B,F}$
סדרת היצירה שלו תהיה : $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

כדי להראות ש־$x \notin X_{B,F}$:

נמצא תכונה T ונראה ש־$X_{B,F} \subseteq T$ ונראה ש־$x \notin T$ (כלומר x אינו מקיים את T)
(T היא קבוצת האיברים בעלי תכונה כלשהי).

דוגמה:

נראה של־$aba \notin ABA$(שפה שהוגדרה קודם).
תכונה:
צ"ל מספר ה־a הכל איברי B, F הוא אי־זוגי.
אם זה נכון אז aba לא בשפה כי היא אינה מקיימת את התכונה.

שיטת ההוכחה:

* נבחר תכונה T.
* נראה שמתקיים:

1. $B \subseteq T$.
2. לכל $x_1, x_2, \ldots, x_n \in T$ מתקיים $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T$.

דוגמה:

$ab \in T$ (יש a יחיד).
כל פעולה שפועלת על מילה עם מספר זוגי של a מחזירה מילה עם מספר אי־זוגי של a.

לוגיקה הרצאה 2

<u>הגדרה אינדוקטיבית - של קבוצה</u>

W–העולם
B- מוכל ב W קבוצת בסיס
F- קבוצת פעולות\כללי יצירה
$X_{B,F}$ מוכלת ב W מוגדרת כקבוצה המקיימת:

1. B מוכל ב $X_{B,F}$
2. אם $X_{1...n}$שייך ל $X_{B,F}$ ו f שייך ל F אז $f(x_1,...,x_n)$ שייך ל $X_{B,F}$.
3. $X_{B,F}$ הוא קבוצה מינימלית שמקיימת את א ו ב.

הראינו ש- $X_{B,F}=\cup X_i$
$X_1=B$
$X_{i+1}=X_i\cup F(X_i)$

<u>משפט ההוכחה באינדוקציה</u>

אם קבוצהY מספקת את (א) ו-(ב) עבור F,B נתונים אז $X_{B,F}\subseteq Y$

<u>הוכחה באינדוקציית מבנה:</u>

כדי להוכיח ש-$X_{B,F}\subseteq Y$

1. $B\subseteq Y$
2. Y סגורה ל- F.

<u>להראות</u> $b\in X_{B,F}$

נראה <u>סדרת יצירה</u> $a_1\dots a_n$ כך ש-
$a_n=b$ ולכל $1\leq i\leq n$
$a_i\in B$ או התקבלה מהקודמים הסדרה ע"י הפעלת פעולה מ-F.

להראות $b\notin X_{B,F}$

נציע תכונה(קבוצה) T ונראה
$X_{B,F}\subseteq T$
$b\notin T$

<u>לוגיקה - תחשיב מורכב מ-</u>

⋆ הגדרה סינטקטית של שפה

⋆ הגדרה של הסמנטיקה של מילים בשפה

⋆ מערכת הוכחה עם אכסיומות וכללי היסק שמאפשרת להוכיח "משפטים"

⋆ קשר בין אוסף הנוסחאות היכיחיות(יש אפשרות להוכיח אותן) לבין סמנטיקה.

<u>תחשביב הפסוקים</u>

<u>סינטקס של תחשיב הפסיקים</u>

דוגמאות "משתנים" A,B,C
$(+A)$,$(A\to B)$,$((A\to B)\to(B\to A))$
"השמש זורחת נסמן A , "חם בחוץ" נסמן ע"י B
השמש זורח וחם בחוץ $(A\wedge B)$
אם השמש זורחת אז חם בחוץ $(A\to B)$

הגדרה של הסינטקס של תחשיבי הפסוקים

קבוצה הפסוקים היא הקבוצה האינדוקטיבית שמוגדרת באופן הבא:
$W = (\{\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, (,)\} \cup \{p_i | i \in N\})$
בסיס: $B = \{p_i | i \in N\}$
p_i נקראות פסוקים/פסוקים אטומיים
הפעולות:

- $\star$ $F = \{F_\neg, F_\wedge, F_\vee, F_\rightarrow\}$
- $\star$ $F_\neg(\alpha) = (\neg\alpha)$
- $\star$ $F_\vee(\alpha, \beta) = (\alpha \vee \beta)$
- $\star$ $F_\wedge(\alpha, \beta) = (\alpha \wedge \beta)$
- $\star$ $F_\rightarrow(\alpha, \beta) = (\alpha \rightarrow \beta)$

איך נראה ש:
$((p_5 \wedge p_{11}) \rightarrow (p_6 \rightarrow p_5))$ **(פסוק חוקי בשפה)**

1. p_5
2. p_{11}
3. $(p_5 \wedge p_{11})$
4. p_6
5. $(p_6 \rightarrow p_5)$
6. $((p_5 \wedge p_{11}) \rightarrow (p_6 \rightarrow p_5))$

האם: $p_2(p_1$**פסוק ?**
לא!

נוכיח:

תכונה: כל פסוק הוא או אטומי או שמספר הסוגריים הפתוחים שווה למספר הסוגריים הסגורים.

הוכחה באינדוקציית מבנה:

בסיס לכל פסוק אטומי יש תכונה.

סגור נתונים α, β שמקיימים את התכונה
ב־α יש k סוגריים מכל סוג.
ב־β יש n סוגריים מכל סוג.
נסתכל על המקרה הפעלת $(\alpha \rightarrow \beta) = F_\rightarrow(\alpha, \beta)$
צ"ל ל־$(\alpha \rightarrow \beta)$ יש תכונה. (מספר הסוגריים מכל סוג n+k+1).
מסקנה מההוכחה ש־ $p_2(p_1$ אינו פסוק.(צריך היה להראות לכל פעולה).

הגדרה: עבור סדרות סימנים <u>לא ריקות</u> α ו־ β כך ש־ $\beta = b_1 \cdots b_k, \alpha = a_1 \ldots a_n$
נאמר ש־α הוא <u>רישא</u> של β אם $n \leq k$ ובנוסף לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $a_i = b_i$

דוגמאות:

- $\star$ ab הוא רישא של $abab$
- $\star$ ab הוא רישא של $aabc$
- $\star$ α הוא <u>רישא ממש</u> של β אם α רישא של β ו־ $(n < k)\alpha \neq \beta$

תכונה לכל פסוק β, אם α הוא ביטוי שהוא רישא ממש לא ריקה של β אז ב־α מספר הסוגריים השמאליים גדול ממש ממספר הסוגריים הימניים.

<u>מסקנה</u> α לא פסוק
דוגמה:
$$\underbrace{\underbrace{((p_5 \to p_6}_{\alpha} \vee (p_7 \wedge p_{11})}_{\beta}$$

דוגמה <u>לשפה</u> חדשה שאין בה סוגריים ולכן אין בה קריאה יחידה:
סדרת סימנים $a \wedge b \wedge c$
(1)הפעלת $\wedge$ על $c, a \wedge b$
(2)הפעלת$\wedge$ על $b \wedge c, a$

<u>משפט הקריאה היחידה</u>

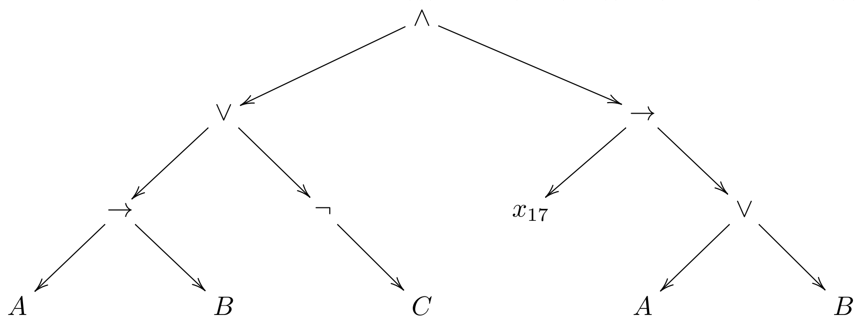
1. לכל פסוק α אם יש פסוקים β_1, γ_1 וקשר $\square$ כך ש־$\alpha = (\beta_2 \square \gamma_2)$ ובנוסף יש פסוקים β_2, γ_2 וקשר $\triangle$ כך ש־ $\alpha = (\beta_2 \triangle \alpha_2)$ אז בהכרח $\beta_1 = \beta_2,\ \gamma_1 = \gamma_2,$ ו־$\square$,$\triangle$ הם אותו קשר.
2. לכל פסוק α, אם יש פסוק β כך ש־ $\alpha = (\neg\beta)$ אז אין קשר $\square$ ופסוקים γ, δ כך ש־ $\alpha = (\gamma \square \delta)$ ואם קיים β^* כך ש־ $\alpha = (\neg\beta^*)$ אז $\beta = \beta^*$.

<u>הוכחת (1):</u> נניח בשלילה שיש $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \square, \triangle$
$\alpha = (\beta_1 \square \gamma_1) = (\beta_2 \triangle \gamma_2)$
ולא מתקיימות טענות המשפט

<u>מקרה (1)</u> - נניח $\beta_1 \neq \beta_2$ $\alpha = \underbrace{a_1}_{(}\underbrace{\underbrace{a_2 \dots a_n}_{b1}}_{b2)}$
נניח ש־β_1 הוא רישא ממש של β_2.
β_1 הוא פסוק ולפי מסקנה מתכונה,
רישא ממש של פסוק אינו פסוק ולכן β_1 אינו פסוק.
סתירה לעובדה ש־ β_2, β_1 פסוקים.
מסקנה $\beta_1 = \beta_2$.

<u>מקרה (2)</u> - ידוע $\beta_1 = \beta_2$
אבל $\triangle \neq \square$
$\alpha = \underbrace{a_1}_{(}\ \underbrace{\dots}_{b1}\ \underbrace{a_k}_{\square}\ \underbrace{a_n}_{)}$ (k־קיים).
$\square$ ו־ $\triangle$ מופיעים באותו מקום ב־α ולכן זהים.

<u>מקרה (3)</u> ידוע $\beta_1 = \beta_2$ $\square = \triangle,$ ונניח $\gamma_1 \neq \gamma_2$
לא יתכן כי שתיהן מתחילות באותו מקום ב־α ונמשכות עד הסוף ולכן זהות.
כתוצאה מהקריאה היחידה אפשר להתאים לכל פסוק <u>עץ יצירה</u> שהעולם שלו הם פסוקים אטומיים ובכל צומת פנימי יש קשר, אם הקשר הוא $\neg$ אז יש לצומת בן יחיד.
אם הוא $\wedge, \vee, \to$ אז יש לו 2 בנים.
$(((A \to B) \vee (\neg C)) \wedge (X_{17} \to (A \vee B)))$



משפט הקריאה היחידה מבטיח לנו כי לכל פסוק קיים עץ **<u>יחיד</u>**.

<u>סמנטיקה</u>

מטרה להתאים ערך אמת או שקר לפסוקים האטומיים ומזה להסיק ערך אמת או שקר לפסוק כולו.

- אמת - T
- שקר - F

ערכי אמת: $\{T, F\}$

השמה היא פונקציה מקבוצה הפסוקים האטומיים לקבוצה $\{T, F\}$

$V : \{p_i | i \in N\} \to \{T, F\}$

$$V_2(p_i) = \begin{cases} T & i\%2 = 0 \\ F & i\%2 \neq 0 \end{cases}$$

<u>סמנטיקה לפסוק כלשהו:</u>

בהנתן $V : \{p_i | i \in \mathbb{N}\} \to \{T, F\}$

נגדיר $\{T, F\}$ →קבוצת הפסוקים:

$\overline{V} : X_{B,F} \to \{T, F\}$

<u>נגדיר</u> פונקציות טבלת אמת:

$$TT_{\neg} : \{T, F\} \to \{T, F\}$$
$$TT_{\wedge} : \{T, F\} \wedge \{T, F\} \to \{T, F\}$$
$$TT_{\vee} : \{T, F\} \vee \{T, F\} \to \{T, F\}$$
$$TT_{\to} : \{T, F\} \to \{T, F\} \to \{T, F\}$$

לוגיקה הרצאה 3

תחשיבי פסוקים

סינטקס: בסיס $\{p_i | i \in N\}$ - הפסוקים האטומיים.

$F_{\neg}(\alpha) = (\neg\alpha)$

$F_{\square}(\alpha, \beta) = (\alpha\square\beta)$ $(\vee, \wedge, \rightarrow)$

WFF – well form formulas

סמנטיקה:

התאמה לפסוקים ערכי אמת (T,F)

$p_0 \vee p_2$

השמה T F

לפסוק ערך T

F F

F

הגדרת סמנטיקה:

נתונה השמה

$V : \{p_i | i \in N\} \rightarrow \{T, F\}$

נגדיר השמה $\widehat{V}$

$\widehat{V} : WFF \rightarrow \{T, F\}$

הגדרת $\widehat{V}$:

1. לכל פסוק אטומי $\widehat{V}(p_i) = v(p)$

2. לפסוק במבנה $\alpha = (\neg\beta)$

$TT_{\neg} : \{T, F\} \rightarrow \{T, F\}$

truth table

$TT_{\neg}(T) = F$

$TT_{\neg}(F) = T$

β	$\neg\beta$
T	F
F	T

$\widehat{V}$(פסוק)

$\widehat{V}(\neg(\alpha)) = TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha))$

3. $\alpha = (\beta \vee \gamma)$

$\widehat{V}(\alpha) = TT_{\vee}(\widehat{V}(\beta), \widehat{V}(\gamma))$

$TT_{\vee}(T, T) = T$

$TT_{\vee}(T, F) = T$

$TT_{\vee}(F, T) = T$

$TT_{\vee}(F, F) = F$

α	β	$\alpha\vee\beta$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

4. $\alpha = (\beta \vee \gamma)$

$$\widehat{V}(\alpha) = TT_\wedge(\underbrace{\widehat{V}(\beta)}_{\text{truth of sub}}, \underbrace{\widehat{V}(\gamma)}_{\text{truth of sub}})$$

$$TT_\wedge(T,T) = T$$

$$TT_\wedge(\tfrac{T}{\frac{F}{F}}, \tfrac{F}{\frac{T}{F}}) = F$$

α	β	$\alpha \wedge \beta$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

5. $\alpha = (\beta \to \gamma)$

האם β אמת אז γ אמת

$$\widehat{V}((\beta \to \gamma)) = TT_\to(\widehat{V}(\beta), \widehat{V}(\gamma))$$

β	γ	$\beta \to \gamma$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

אם המכונית תתקלקל אז אגיע באחור

$$A \to B$$

F T

המכונית לא התקלקלה והגעתי באיחור

סיכום:

בסמנטיקה של תחשיב הפסוקים:

בהינתן $V : \{p_i | i \in \mathbb{N}\} \to \{T, F\}$

מגדירים $\widehat{V} : WFF \to \{T, F\}$

באופן הבא:

אם $\alpha = p_i$ אז $\widehat{V}(\alpha) = V(\alpha)$

אם $\alpha = (\neg\beta)$ אז $\widehat{V}(\alpha) = TT_\neg(\widehat{V}(\beta))$

אם $\alpha = (\beta \Box \gamma)$ אז $\widehat{V}(\alpha) = TT_\Box(\widehat{V}(\beta), \widehat{V}(\gamma))$

טענה:

בהינתן השמה v,

לכל פסוק α, $\widehat{V}(\alpha)$

מתאים ל־α ערך אמת יחיד שנקבע ע"י v וע"י

פונקציות טבלאות האמת $(TT_\Box)$.

הוכחה:

באינדוקצייה על מבנה הפסוק

מסתמכת על כך

- $\star$ v פונקציה
- $\star$ $TT_\Box$ פונקציות

כשה דנים בסמנטיקה קובעים סדר קדמאות בין קשרים שיאפשר לוותר על חלק מהסוגריים:

- $\star$ הקשר $\neg$ מופעל ראשון
- $\star$ קשרים $\vee, \wedge, \leftrightarrow$ מופעלים אחרי
- $\star$ הקשר $\to$ אחרי

$\neg p_0 \vee p_1$ כמו לכתוב $((\neg p_0) \vee p_1)$

מושגים סמנטיים נוספים

כאשר $\widehat{V}(\alpha) = T$ נאמר ש־vמספקת את α
ונסמן $v| = \alpha$

הגדרה:

פסוק α הוא טאוטולוגיה אם הוא מקבל ערך T <u>לכל</u> השמה:

דוגמאות:

$\neg\alpha \vee \alpha$,$\neg p_o \vee p_o$
טאוטולוגיה:
כל השורות בטבלת האמת
יהא T
] כל ההשמות מספקות את הפסוק [

P_0	$\neg p_0$	$\neg p_0 \vee p_0$
T	F	T
F	T	T

הוכחה ש־ $\alpha \vee \neg\alpha$ הוא טאוטולוגיה:
$\widehat{V}(\alpha \vee \neg\alpha) = TT_{\vee}(\widehat{V}(\alpha), \widehat{V}(\neg\alpha)) =$
$TT_{\vee}(\widehat{V}(\alpha), TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha))$
<u>2 מקרים:</u>

1. $TT_{\vee}(T,F) = T \Leftarrow TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha)) = F \Leftarrow V(\alpha) = T$
2. $TT_{\vee}(F,T) = T \Leftarrow TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha)) = T \ \Leftarrow V(\alpha) = F$

על כן $| = \alpha \vee \neg\alpha$

דוגמאות נוספות לטאוטולוגיה:
$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$
איך נוכיח שזאת טאוטולוגיה?
להראות <u>לכל השמה</u> ערך הפסוק הוא T.(מספר אינסופי)

טענה:

לכל פסוק $\alpha \in WFF$
ולכל שתי השמות v_2, v_1מתקיים:
אם לכל פסוק אטומי שמופיע ב־ α מתקיים $v_1(p_i) = v_2(p_i)$
אז $\widehat{V_1}(\alpha) = \widehat{V_2}(\alpha)$

α, β	$\neg\beta$,$\neg\alpha$	$\alpha \rightarrow \beta$	$\neg\beta \rightarrow \neg\gamma$	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\gamma)$
T,T	F,F	T	T	T
T,F	T,F	F	F	T
F,T	F,T	T	T	T
F,F	T,T	T	T	T

שיטת הוכחה שניה שפסוק הוא טאוטולוגיה:
נגדיר על $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$
נניח בדרך השלילה שאינה טאוטולוגיה ולכן קיימת השמה v:

$\widehat{V}()$

$\Rightarrow$

$\widehat{V}(\alpha \rightarrow \beta) = T$

$\widehat{V}(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) = F$

$TT_{\neg}(\widehat{V}(\beta)) = \widehat{V}(\neg\beta) = T$

$TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha)) = \widehat{V}(\neg\alpha) = F$

$\Rightarrow$

$\widehat{V}(\beta) = F, \widehat{V}(\alpha) = T$

$\widehat{V}(\alpha \rightarrow \beta) = F$

מסקנה:

לא קיימת v שנותנת לפסוק ערך Fכלומר הוא טאוטולוגיה.

דוגמאות נוספות לטאוטולוגיה:

ראינו $\alpha \vee \neg\gamma$

$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

דסטריבוטיביות:

$((\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)))$

$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$

דה מוגרן:

$\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \beta)$

$\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$

מושג סמנטי נוסף: סתירה

ספקו הוא סתירה אם כל השמה נותנת לו ערך F.

דוגמאות:

$\alpha \wedge \neg\alpha$

כל שלילה של טאוטולוגיה

$\beta = \neg\alpha$ ו־α טאוטולוגיה

$\widehat{V}((\neg\alpha)) = TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha)) = TT_{\neg}(T) = F$

לכל השמה

.

נתונה α שאינה טאוטולוגיה, האם היא סתירה ?

p_0 לא טאוטולוגיה ולא סתירה.

טענה:

α הוא סתירה $\Leftrightarrow$ $\neg\alpha$ הוא טאוטולוגיה

$\neg\alpha$ הוא סתירה $\Leftrightarrow$ α הוא טאוטולוגיה

פסוק <u>הינו ספיק</u> אם קיימת השמה שמספקת אותו.

הגדרה:

השמה מספקת קבוצת פסוקים X

אם היא מספקת את כל אחד מהפסוקים ב־X.

$v \models \alpha, \forall\alpha \in X, \Leftrightarrow v| = X$

$v \models \bigwedge_{\alpha \in X} \alpha$

אם X קבוצה אינסופית

אז הביטוי <u>אינו פסוק</u>

מושג נוסף:

פסוק α <u>נובע לוגית</u> צפסוק β

אם כל השמה שמספקת את β מספקת גם את α.

$\beta| = \alpha$

"$\subseteq$"

דוגמא:

Eror 404 "white board erased"

למה:

$\beta \models \alpha$ אם ורק אם $\beta \to \alpha \models$ (הוא טאוטולוגיה).

הוכחה:

נתון $\models \alpha \rightarrow \beta$
צ"ל $\alpha \models \beta$
נתונה השמה $v \models \alpha$
נראה ש- $v \models \beta$
נניח שלא:
$\widehat{V}(\alpha) = T$
$\widehat{V}(\beta) = F$
$\widehat{V}(\alpha \rightarrow \beta) = F$
בסתירה לנתון $TT_{\rightarrow}(T, F) = F$
ש-$\alpha \rightarrow \beta$ הוא טאוטולוגיה.

$$x \in A/(B/C) \Leftrightarrow$$
$$x \in A \wedge x \notin (B/C) \Leftrightarrow$$
$$x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C \Leftrightarrow$$
$$x \in (A/B) \cup x \in A \cap C$$

לוגיקה הרצאה 4

סמנטיקה של פסוקי:

נתונה המשווה $v : \{p_i | i \in \mathbb{N}\} \to \{T,F\}$
מגדירים $\overline{V} = WFF \to \{T,F\}$
אם $\alpha = p_i$ $\overline{V}(p_i) = v(p_i)$
אם $\alpha = (\beta \square \gamma)$ אז $\overline{V}(\alpha) = TT_\square(\overline{V}(\beta), \overline{V}(\gamma))$
אם $\alpha = (\neg\beta)$ אז $\overline{V}(\alpha) = TT_\neg(\overline{V}(\beta))$

מושגים סמנטיים:

טאוטולוגיה
הוא פסוק שמקבל ערך T לכל השמה
סתירה:
פסוק שמקבל ערך F לכל השמה.
מה משמעות שך $v(\not\models)\alpha$
$\overline{V}(\alpha) = F$
$(\not\models \alpha)$
לא בהכרח סתירה
$\Leftarrow$ <u>לא בהכרח טאוטולוגיה.</u>

דוגמה:

בבינתן קבוצה של פסוקים X
$v \models X$
אם $v \models \alpha$ לכל $\alpha \in X$
$\bigwedge_{\alpha \in X} \alpha$ - לא כתיבה חוקית כי לא <u>פסוק</u>, יתכן סדרה אינסופית של סמימנים.
פסוק β <u>נובע לוגית</u> מפסוק α (סימון $\alpha \models \beta$) אם כל השמה מספקת של α מספקת גם את β.

למה:

$\alpha \models \beta$ אם ורק אם $\models \alpha \to \beta$

הוכחה:

$\Leftarrow$ נתון $\alpha \models \beta$ צ"ל $\models \alpha \to \beta$
נבחר השמה V:

מקרה 1: $\neg \models \alpha$, $\overline{V}(\alpha) = F$
אז

$$V \models \alpha \to \beta$$
$$TT_\to(\underbrace{\overline{V}}_{\text{F or FT or FF}}(\beta)) = T$$

מקרה 2: $\overline{V}(\alpha) = T$, $V \models \alpha$
עס $\alpha \models \beta$, גם $V \models \beta$
ולכן $V \models \alpha \to \beta$

$\Rightarrow$: נתון $\models \alpha \to \beta$
צ"ל $\alpha \models \beta$
2 מקרים:

1. $\overline{V}(\alpha) = T$
מאחר ש- $\alpha \to \beta$ טאוטולוגיה אז $\overline{V}(\alpha \to \beta) = B$
מסקנה עפ"י $TT_{\to}$: $\overline{V}(\beta) = T$

2. $\overline{V}(\alpha) = F$
אין צורך להוכיח כי ה $\models$ מתקיים וריויאלי.

דוגמה:

בהינתן קבוצת פסוקית X נאמר ש $X \models \beta$ אם כל השמה שמספקת את X (כלומר את כל $\alpha \in X$) מספקת גם את β.

דוגמה:

$\alpha \to \beta, \alpha \models \beta$
$\{\alpha \to \beta, \alpha\} \models \beta$

למה:

$X, \alpha \models \beta$ אם ורק אם $X \models \alpha \to \beta$

סימון:

$M(\alpha)\{v | v \models \alpha\}$
$M(X) = \{v | v \models X\}$
α סתירה: $M(\alpha) = \emptyset$
$\alpha \models \beta,\ M(\alpha) \subseteq M(\beta)$

שקילות לוגית

זוג פסוקים α,β <u>שקולים לוגית</u> אם הם מקבלים אותו ערך אמת בכל השמה.
במילים אחרות, לכל השמה v. $\overline{v}(\alpha) = \overline{v}(\beta)$
$M(\alpha) = M(\beta)$ סימון $\alpha \equiv \beta$

דוגמה לפסוקים שקולים:

- ⋆ כל הטאוטולוגיות
- ⋆ כל הסתירות

$(\alpha_{\wedge}(\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \beta))$
$(\neg(\neg\alpha)) \equiv \alpha$

למה:

$\alpha \equiv \beta$ אם ורק אם $\models \alpha \overbrace{\leftrightarrow}^{\text{logic connect}}$

שלמות של מערכת קשרים:

הגדרה: פסוק α <u>מממש</u> טבלת אמת נתונה אם טבלת האמת של α זהה לטבלה הנתונה.
נראה: $\neg, \vee, \wedge$
עבור טבלת אמת עם k פסוקים אטומיים יש לה 2^k שורות
$TT : \{T, F\}^k \to \{T, F\}$

דוגמה:

קשר לוגה "רוב" #

תלת־ערה(תלת מקומי?)

p_1	p_2	p_3	$\#(p_1,p_2,p_3)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

שורות שקבלו T**:**

1. $\alpha_1 = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$
2. $\alpha_2 = p_1 \wedge p_2 \neg p_3$
3. $\alpha_3 = p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3$
4. $\alpha_5 = \neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$

$\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \alpha_5$

טענה:

α מממשת את טבלת האמת של #.

עבור טבלת אמת שבה כל השורות מחזירות F

נחזיר $p_1 \wedge \neg p_1$ כאשר p_1הוא פסוק אטומי שמופיע בטבלה.

p_2	p_1	$?(p_1,p_2)$
F	F	F
F	F	F
F	F	F
F	F	F

$(p_1 \wedge \neg p_1)$

המשך:

$\}\wedge,\neg\{$ גם מערכת קשרי שלמה

$(\alpha \vee \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

מערכת קשרים שלמה $\{v,\neg\} \leftarrow (\alpha \wedge \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$

$\{\neg,\leftarrow\}$ מערכת קשרים שלמה

$(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \to \beta$

<table>
<tr><td>T</td><td>| T</td><td>T |</td><td>| T</td></tr>
<tr><td>T</td><td>| T</td><td>F |</td><td>| T</td></tr>
<tr><td>T</td><td>| F</td><td>T |</td><td>| T</td></tr>
<tr><td>F</td><td>| F</td><td>F |</td><td>| T</td></tr>
</table>

הגדרה:

נגדיר קבוצה אינדוקטיבית של קבוצת <u>המשפטים הפורמליים</u> או <u>הפסוקים היכיחים</u>.

בסיס(אקסיומות[קבוצת פסוקים]): (עוזרים להוכיח/לקבל פסוקים חדשים עס' פסוקים נתונים).

כללי יצירה/פעולות

כללי היצירה: $\underbrace{\alpha, \alpha \to \beta}_{\beta}$ (למעלה נתון שיכיח, גורר שלמטה גם).

כלל הניתוק , MP-Modus Promens

קבוצות האקסיומות של תחשיב הפסוקים

תבנית ראשונה $A1$:

פסוק δ הוא אקסיומה מטיפוס $A1$

אם קיימים פסוקים α, β כך ש-

$A1$: $\delta = (\alpha \to (\beta \to \alpha))$

$A2$:

δ מהצורה:

$$\delta = (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)))$$

$A3$:

δ מהצורה

$$\delta = ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \gamma))$$

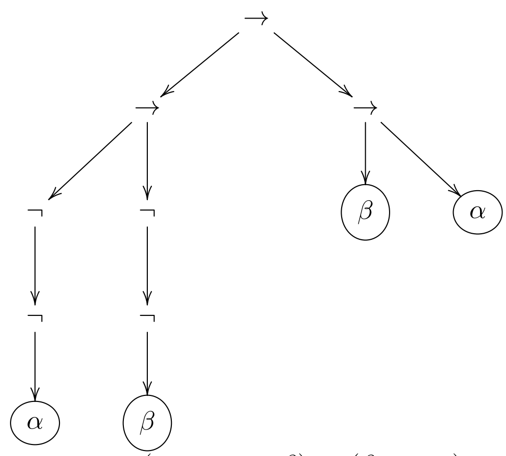
$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ קבוצת הבסיס.

דוגמאות:

A_1 : $(p_2 \to (p_1 \to p_2))$

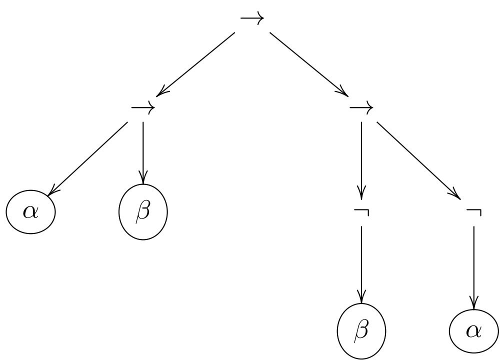
$(\neg\neg p_5 \to \neg p_5) \to (p_5 \to \neg p_5)$

עץ יצירה עבור אקסיומה 3



$(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$

$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ **האם הוא** A_3**?**



להראות שפסוק יכיח:

להראות סדרת יצירה - נקרא לה סדרת הוכחה

סדרת הוכחה עבור פסוק β

הינה סדרה של פסוקים $a_1, a_2, \ldots, a_n$

כך ש-

$\star$ $a_b = \beta$

לכל $1 \le i \le n$ **,** a_i **התקבלה מהפעלתו.**

כלל ההיסק על פסוקים קודמים בסדרה

מה יכול היות a_1?

אחת מהאכסיומות

אם פסוק α יכיח נסמן $\vdash \alpha$.

לוגיקה הרצאה 5

קבוצת הפסוקים היכחיים/משפטים מורמליים ־ סינטקטי ־ פסוקים עם $\{\leftarrow, \rightarrow\}$ בלבד.

הגדרה אידוקטיבית:

$$
\begin{aligned}
&B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \\
&A_1 = \{(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) | \alpha, \beta \in \mathrm{WFF}\{\neg, \rightarrow\}\} \\
&A_2 = \{((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) | \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{WFF}_{\{\neg, \rightarrow\}}\ \} \\
&A_3 = \{((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) | \alpha, \beta \in ...\} \\
&F = \{MP\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
MP \\
\underbrace{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}_{\beta}
\end{gathered}
$$

כדי להראות ספסוק שייך לקבוצת הפסוקים היכיחיים צריך להראות <u>סדרת יצירה</u> שנקראת סדרת הוכחה.
סדרת הוכחה עבור פסוק β הוא סתדרת הפסוקים $\alpha_1, \ldots, a_n$.
שכל אחד מהם הוא או אכסיומה או התקבל מהקודמים בהסדרה ע"י כלל ההיסק MP.
בנוסף $a_n = \beta$.

$$\underbrace{\overbrace{a_1 a_2}^{axi'} a_3}_{\text{Proof series for } a_3} | \ldots a_n$$

דוגמה:

צ"ל $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$
כסימון להקלה בקריאות נסמן $\alpha \rightarrow \alpha$ כ־β

1. A_2 $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \underbrace{\rightarrow}_{\Uparrow} ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$

2. A_1 $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$

3. $MP1, 2$ $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$

(א) הכנסת β:
$(\alpha \rightarrow (\underline{\underline{\alpha \rightarrow \alpha}})) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$

4. $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)), A_1$

5. $MP\ 4, 3$, $(\alpha \rightarrow \alpha)$
$\vdash (\alpha \rightarrow \alpha)$

דוגמה:

$\vdash (\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$

1. A_3 $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$

2. A_1, $(\underline{(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)}) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow (\underline{(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)}))$

3. $MP\ 1, 2$ $(\neg\alpha \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)))$

4. A_2: $(\underbrace{\neg\alpha}_{\alpha} \to ((\underbrace{\neg\beta \to \neg\alpha}_{\beta}) \to (\underbrace{\alpha \to \beta}_{\gamma}))) \overbrace{\to}^{1}$
$(\underbrace{\neg\alpha}_{\alpha} \to (\underbrace{\neg\beta \to \neg\alpha}_{\beta})) \overbrace{\to}^{2}$
$(\underbrace{\neg\alpha}_{\alpha} \to (\underbrace{\alpha \to \beta}_{\gamma}))$
5. $MP\ 3,4$ $(\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)) \to (\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)))$
6. A_1 $(\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha))$
7. $(\neg\alpha \to (\alpha \to \beta))MP\ 5,6$
$\vdash (\neg\alpha \to (\alpha \to \beta))$

הוכחה על סמך הנחות

נתונה קבוצה של פסוקים X , נגדיר את קבוצת המסקנות של X
(קבוצת הפסוקים היכחיים עס' X)
כקבוצה האינדוקטיבית:
$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup X$
$F = \{MP\}$
סדרת הוכחה עבוק קב' β עס' X $a_1, a_2, \ldots, a_n$
$a_n = \beta$ ולכל $1 \leq i \leq n$
a_i הוא אכסיומה או מ-X
או התקבל מהקודמים בסדרה ע"י MP.
סימון: $X \vdash \beta$
$\underbrace{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma}_{X=\{\alpha\to\beta,\beta\to\gamma|\alpha,\beta,\gamma\in \mathrm{WFF}_{\{\to,\neg\}}\}} \vdash \alpha \to \gamma$

1. הנחה $\alpha \to \beta$.
2. הנחה $\beta \to \gamma$.

מטרה: $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \vdash (\alpha \to \gamma)$

משפט:

נתון:
$X \vdash \beta$ ולכל $\alpha \in X$, $\vdash \alpha$ אזי נסיק $\vdash \beta$.

צ"ל:

$\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \gamma$

1. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))A2$
2. $((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma)))A1$
3. הנחה $\beta \to \gamma$
4. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)), MP\ 2,3$
5. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma), MP\ 1,4$
6. הנחנה $\alpha \to \beta$
7. $\alpha \to \beta, MP$ 5,6
$\beta \to \gamma, \alpha \to b \vdash \alpha \to \gamma$

טענה 1:

אם $\alpha \in X$ אז $X \vdash \alpha$
הוכחה:
הנחנה $1.\alpha$
$X \vdash \alpha$
$\alpha \vdash \alpha$

טענה 2:

אם $X \subseteq Y$ אז לכל פסוק α, אם $X \vdash \alpha$ אז $Y \vdash \alpha$
התכונה נקראת: מונוטוניות של הוכחה. $X \vdash \alpha$

$$\begin{array}{lcl} a_1[x_1 & & [y_1 \\ \vdots|x_2 & & |y_2 \\ & \Rightarrow & \vdots \\ a_n|\vdots & & \vdots \\ \;[x_n & & [y_n \end{array}$$

נוסח אלטרנטיבי לטענה 2:

אם $B_1 \subseteq B_2$ אז $X_{B_1,F} \subseteq X_{B_2,F}$

מסקנה:

אם $\vdash \alpha$ אז $X \vdash \alpha$ לכל קבוצה X.

טענה 3:

אם לכל פסוק α ב־X, $Y \vdash \alpha$
אז לכל פסוק β אם $X \vdash \beta$ אז $Y \vdash \beta$.

הוכחה: נתון $X \vdash \beta$, $\underbrace{a_1,\dots,}_{\text{from } X}\underbrace{a_n}_{\beta}$
על כל איבר a_i שהסדרה שלו היא "מ־X"
נחליף אותו בסדרת הוכחה מתוך Y.

דוגמה:

$X = \{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\}$
$\delta = \alpha \to \gamma$
ידוע $X \vdash \delta$
נגדיר $Y = \{\beta, \gamma\}$
נוכיח ש־
$y \vdash \alpha \to \beta$
$y \vdash \beta \to \gamma$
נסיק $y \vdash \delta$

1. $v\beta \to (\alpha \to \beta)$, A1
2. הנחה מ־y β
3. $\alpha \to \beta$
$y \vdash \alpha \to \beta$

(א) $(\gamma \to (\beta \to \gamma))$, A1
(ב) הנחה מ־y γ.
(ג) $\beta \to \gamma$
$y \vdash \beta \to \gamma$

טענה 4 (הוכחות הן סופיות)

אם $\overbrace{X}^{\text{(infinite)}} \vdash \alpha$ אז קיימת תת קבוצה סופית של X, $X' \subseteq X$ כך ש־ $X' \vdash \alpha$.

משפט הדדוקציה:

לכל מערכת הוכחה שיש בה לפחות את האכסיומות $\boxed{A_1\&A_2}$

ויש בה בדיוק את כלל ההיסק $\boxed{\mathrm{MP}}$

<u>**מתקיים:**</u>

לכל קבוצת פסוקים X ופסוקים α, β:

$X, \alpha \vdash \beta$ אם ורק אם $X \vdash \alpha \to \beta$

מסקנה: $\beta \vdash \alpha \Leftarrow \vdash \beta \to \alpha$

הוכחה: $\Rightarrow$ נתון $X \vdash \alpha \to \beta$

נוכיח $X, \alpha \vdash \beta$

1. הנחה α
2. יכיח מ־X $\alpha \to \beta$.
3. MP β

$X, \alpha \vdash \beta$

לוגיקה הרצאה 6

אכסיומות $A_1 A_{2,} A_3$

כלל היסק MP

$\underbrace{\alpha, \alpha \to \beta}_{\beta}$

קבוצה אינדוקטיבית של המשפטים היכחיים

$\vdash \alpha$

סדרת הוכחה עבור α

$\alpha_1, \ldots, \underbrace{a_n}_{\alpha}$

לכל $1 \leq i \leq n$

a_iהוא או אכסיומה או התקבלה מהקודמים בסדרה ע"י MP.

בסיס $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup X$ - X קבוצת הנחות

פעולה MP

$X \vdash \alpha$

הנחה מ־X אכס',אכס' $X \subseteq Y$, $y \vdash \alpha$

משפט הדדוקציה

לכל מערכת הוכחה שיש בה לפחות אכסיומות A_1, A_2 רק את כלל MP:

לכל קבוצת פסוקים X ופסוקים α, β מתקיים:

$X \vdash \alpha \to \beta \ \Leftrightarrow \ X, \alpha \vdash \beta$

הוכחה:

$\Rightarrow$ נתון $X \vdash \alpha \to \beta$

הוכחנו $X, \alpha \vdash \beta$

$\Leftarrow$ נתון $X, \alpha \vdash \beta$

צ"ל $X \vdash \alpha \to \beta$

עס' $X, \alpha \vdash \beta$

קיימת סדרת הוכחה $a_1, \ldots, a_n$

לכל i :

a_i אכסיומה או מ־X או α או התקבלה עס' MP ו־ $a_n = \beta$.

נראה לכל a_i $1 \leq i \leq n$

$X \vdash \alpha \to a_i$

מסקנה כבור $a_n = \beta$

כנדרש $X \vdash \alpha \to \beta$

נוכיח באינדוקציה על i בסדרת ההוכחה.

בסיס: נוכיח $X \vdash \alpha \to a_i$

1. a_i אכסיומה
2. α
3. מ־X

<u>הוכחה ל 1 של הבסיס:</u>

1. אכסיומה a_1.
2. A_1 $a_1 \to (\alpha \to a_i)$.
3. $MP_{1,2}$ $\alpha \to a_1$

$\vdash \alpha \to a_1$

מונוטוניות של הוכחה עס' הנחות $X \vdash (\alpha \to a_i)$.

<u>הוכחה ל 2 של הבסיס:</u>

מטרה $\vdash \alpha \to \alpha$

משפט שהוכחנו בשבוע שעבר $X \vdash \alpha \to \alpha$.

<u>הוכחה ל 3 של הבסיס:</u>

1. הנחה מ־X a_1
2. $a_1 \to (\alpha \to a_1)$
3. $\alpha \to a_1$ $MP_{1,2}$

$X \vdash \alpha \to a_1$.

צעד האינדוקציה נניח שהטענה נכונה לכל $j < i$ נוכיח עבור a_i:

אפשרות 1:

1. a_i אכסיומה
2. α
3. מ־X

עבור אפשרות זו ההוכחה זהה.

אפשרות 2:

a_i התקבלה עס' MP מ־a_l, a_m עבור $m, l < i$

1. $a_1 = \delta \to a_i$
2. $a_m = \delta$
3. MP a_l, a_m $\quad a_i$

הנחת האינדוקציה

$X \vdash (\alpha \to (\delta \to a_i))$

$X \vdash (\alpha \to \delta)$

1. עס' X $\alpha \to (\delta \to a_i)$
2. עס, X $(\alpha \to \delta)$
3. $(((\alpha \to (\delta \to a_i)) \to$ $((\alpha \to \delta) \to (\alpha \to a_i)))$ A_2
4. $((\alpha \to \delta) \to (\alpha \to a_i))$ $MP_{1,3}$
5. $(\alpha \to a_i)$ $MP_{2,4}$
$X \vdash (\alpha \to a_i)$
■

תרגיל:

נוכיח $\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$

הוכחה:

1. הנחה $(\alpha \to (\beta \to \gamma))$
2. הנחה β
3. הנחנה α
4. $(\beta \to \gamma)$ $MP_{1,3}$
5. γ $MP_{4,2}$
$(\alpha \to (\beta \to \gamma)), \beta, \gamma \vdash \alpha$
$(\alpha \to (\beta \to \gamma)), \beta \vdash (\alpha \to \gamma)$ **(משפט הדדוקציה)**
$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \vdash (\beta \to \alpha \to \gamma)$ **("")**
$\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$ **("")**

תרגיל:

נוכיח $\vdash (\neg\neg\alpha \to \alpha)$

1. הנחה $\neg\neg\alpha$
2. משפט $\vdash (\neg\alpha \to (\alpha \to \beta))$ $(\neg\neg\alpha \to (\neg\alpha \to (\neg\neg\neg\alpha))$
3. $MP_{1,2}$ $(\neg\alpha \to \neg\neg\neg\alpha)$
4. A_3 $(\underbrace{\neg\alpha}_{\beta} \to \underbrace{\neg\neg\neg\alpha}_{\neg\alpha}) \to (\underbrace{\neg\neg\alpha}_{\alpha} \to \underbrace{\alpha}_{\beta})$
5. $MP_{3,4}$ $(\neg\neg\alpha \to \alpha)$
6. $MP_{5,1}$ α
$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$
משפט הדדוקציה
$\vdash (\neg\neg\alpha \to \alpha)$

$A_3 : (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
משפט פורמלי פסוק יכיח $\vdash (\neg\underbrace{\alpha}_{(\neg\alpha)} \to (\underbrace{\alpha}_{(\neg\alpha)} \to \underbrace{\beta}_{(\neg\neg\neg\alpha)}))$.

שיטה שונה להשמך ההוכחה משלב 5:
מסקנה $\neg\neg\alpha \vdash (\neg\neg\alpha \to \alpha)$
דדוקציה בכיוון $\{\neg\neg a, \neg\neg\alpha\} \vdash \alpha \to$
$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$
דדוקציה $\vdash (\neg\neg\alpha \to \alpha)$

להוכיח תכונות על מערכת ההוכחה.

משפט נאותות:

$$\vdash \alpha \quad \Rightarrow \quad \models \alpha$$

משפט הנאותות החזק:

$$X \vdash \alpha \quad \Rightarrow \quad X \models \alpha$$

- $X \models \alpha$ מתקיים אם לכל השמה v,
אם $v \models X$ (כלומר $v \models \beta$ לכל $\beta \in X$) אז $v \models \alpha$.

משפט השלמות(החזק):

$$X \models \alpha \Rightarrow X \vdash \alpha$$
$$\models \alpha \quad \Rightarrow \quad \vdash \alpha.$$

הוכחה (משפט הנאותות החזק):

נתון $x \vdash \alpha$
צ"ל $X \models \alpha$
<u>הוכחה באינדוקציית מבנה על הפסוקים α שיכיחים עס' X.</u>

בסיס סדרת ההוכחה $a_1, \ldots, \underbrace{a_n}_{\alpha}$

1. a_1 מ־X.
2. a_1 אכסיומה

הוכחה:

1. a_1 מ־X.
$X \models a_1$,
$v \models X$ אם ורק אם $v \models \beta$ לכל $\beta \in X$ ובפרט $v \models a_1$.
2. a_1 אכסיומה
לכל אכסיומה קל לבדוק $\models a_1$ טאוטולוגיה
מסקנה $X \models a_1$

הנחה האינדוקצייה:

$X \vDash a_j$
$X \vDash a_K$

צעד האינדוקצייה a_i: אכסיומה מ־X
MP מ־ a_k, a_j, $j,k < i$
$a_j = \beta \rightarrow a_i$, $a_k = \beta$
$X \vDash \beta \rightarrow a_i$
$X \vDash \beta$
נניח בשלילה ש־ $X \nvDash a_i$
כלומר קיימת v
$v \vDash X$
$v \nvDash a_i$
עס' הנחת האינדוקציה
$v \vDash \beta \rightarrow a_i$
$v \vDash \beta$
עס' טבלת האמת של $\rightarrow$:
$v \vDash a_i$ סתירה.

משפט הנאותות(החזק לפי אביר היזם):

אם $X \vdash \alpha$ אז $X \vDash \alpha$
נסמן שקול: אם $X \nvDash \alpha$ אז $X \nvdash \alpha$

הוכחה משפט השלמות:

<u>עקביות של קבוצת פסוקים:</u>
<u>הגדרה 1:</u>
קבוצת פסוקים X היא <u>עקבית</u> אם לא קיים פסוק α כך ש־ $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$.
<u>הגדרה 2:</u>
X הינה עקבית אם לא כל פסוק יכיח מ־X. כלומר, קיים פסוק β, $X \vdash \beta$.

דוגמאות לקבוצות לא עקביות:

1. $X = \{\alpha, \neg\alpha\}$
$X \vdash \alpha$
$X \vdash \neg\alpha$

2. $X = \{\alpha \rightarrow \beta, \alpha, \neg\beta\}$
$X \vdash \neg\beta$
$X \vdash \beta$

משפט:

2 ההגדרות שקולות עבור תחשיב הפסוקים.

הוכחה 1⇐2
נתון: לא קיים $\alpha, X \nvdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$
ולכן לכל α, או $X \vdash \alpha$ או $X \nvdash \neg\alpha$ ומתקיימת הגדרה 2
2⇐1
X הינה עקבית אם לא כל פסוק יכיח מ־X כלומר, קיים פסוק β, $X \nvdash \beta$.

הרצאה 7 לוגיקה

מפשט הנאותות הרחב

אם $\underbrace{X \vdash \alpha}_{\text{there is proof. sequence for } \alpha \text{ using X assumes}}$ אז $\underbrace{X \vDash \alpha}_{\forall v \text{if v} \vDash X \text{ then v} \vDash \alpha}$

<u>אם $\vdash \alpha$ אז $\vDash \alpha$</u>

נסוח שקול:

אם $X \nvDash \alpha$ אז $\boxed{X \nvdash \alpha}$

<u>משפט השלמות</u>

אם $X \vDash \alpha$ אז $X \vdash \alpha$

הגדרה 1

קבוצת פסוקים X היא עקבית אם לא קיים פסוק α כך ש- $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$

הגדרה 2

קבוצת פסוקים X היא עקבית אם קיים פסוק β כך ש- $X \nvdash \beta$.

הגדרה 1 $\Leftarrow$ הגדרה 2

לא קיים α כך ש-$X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$

מסקנה: לפחות α או $\neg\alpha$ אינו יכיח מ-X ולכן מתקיימת הגדרה 2.

הגדרה 2 $\Leftarrow$ הגדרה 1

נתון: קיים פסוק β כך ש- $X \nvdash \beta$ בדרך השלילה, נניח שקיים α כך $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$.

- $\star$ $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$

1. פסוק יכיח $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
2. מהנתון עס' X $\neg\alpha$
3. מהנתון עס' X α
4. $\alpha \to \beta$ MP 1,2
5. β MP 3,4

$X \vdash \beta$

בסתירה לנתון ש- $X \nvdash \beta$.

מסקנה: לא קיים α כך ש- $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$.

שאלה:

האם קבוצת האכסיומות של תחשיב הפסוקים היא עקבית ? (קבוצת ההנחות X היא ריקה). <u>**כן!**</u>

שאלה:

האם יתכן $X \vDash \alpha$ וגם $X \vDash \neg\alpha$?

לכל השמה v:

- $\star$ אם $v \vDash X$ אז $v \vDash \alpha$
- $\star$ אם $v \vDash X$ אז $v \vDash \neg\alpha$

יכול להתקיים אם אין משמה v שמספקת את X.

דוגמאות ל X:

* $\star$ $X=\{p_1,\neg p_1\}$ לא ספיקה.
* $\star$ $X=\{\underbrace{\alpha\to\beta,\alpha}_{\beta},\neg\beta\}$ לא ספיקה.

מסקנה:

X אינה עקבית $\Leftarrow$ X אינה עקבית.
X ספיקה $\Leftarrow$ X עקבית.

למה 1

קבוצת פסוקים היא עקבית אם ורק אם כל תת קבוצה <u>סופית</u> שלה היא עקבית.

הוכחה:

$\Leftarrow$ X עקבית
נניח בשלילה שקיימת תת־קבוצה $Y\subseteq X$ סופית <u>שאינה עקבית</u>.
קיים α כך ש־ $Y\vdash\alpha$ וגם $Y\vdash\neg\alpha$
עס' מונוטוניות ההוכחה מתקיים גם $X\vdash\alpha$ וגם $X\vdash\neg\alpha$ בסתירה להנחה ש־X עקבית.
$\Rightarrow$ נתון: כל תת־קבוצה סופית היא עקבית.
ובשלילה־X אינה עקבית
$X\vdash\alpha$ וגם $X\vdash\neg\alpha$ שתיהן סדרות הוכחה סופיות ולכן משתמשות כקבוצות סופיות של הנחות
$x'\vdash\alpha$, $X''\vdash\neg\alpha$
X', X'' סופיות
$X'\cup X''$ סופית
$X'\cup X''\vdash\alpha$, $X'\cup X''\vdash\neg\alpha$ בסתירה לכך שכל תת־קבוצה סופית היא עקבית.

למה 2:

1. $X\cup\{\alpha\}$ היא עקבית אם ורק אם $X\nvdash\neg\alpha$.
2. $X\cup\{\neg\alpha\}$ היא עקבית אם ורק אם $X\nvdash\alpha$.

הוכחה:

$\Leftarrow$ נתון: $X\cup\{\alpha\}$ עקבית ונניח בשלילה
ש־$X\vdash\neg\alpha$
$\begin{cases}X\cup\{\alpha\}\vdash\alpha\\ X\cup\{\alpha\}\vdash\neg\alpha\end{cases}$ סתירה לנתון ($X\cup\{\alpha\}$ עקבית)
כי $X\vdash\neg\alpha$ תמיד מותר להוסיף הנחות.
$\Rightarrow$ נתון $X\nvdash\neg\alpha$ ונניח ש־$X\cup\{\alpha\}$ אינה עקבית.
$X\cup\{\alpha\}\vdash\neg\alpha$ (בחרנו את β להיות $\neg\alpha$ עס' הגדרת α של עקביות).
$\Downarrow$
$X\vdash\alpha\to\neg\alpha$ (דדוקציה)
(נשתמש במשפט: "יכיח $\neg\alpha\to(\alpha\to\neg\alpha)\vdash$")

1. פסוק יכיח $(\alpha\to\neg\alpha)\to\neg\alpha$
2. עס' X מהנחת השלילה + דדוקציה $(\alpha\to\neg\alpha)$
3. $\neg\alpha$

מסקנה:
$X\vdash\neg\alpha$ בסתירה לנתון.

למה 3

אם X ספיקה אז X עקבית.

תזכורת להוכחה:

נתון X ספיקה, אם X אינה עקבית אז $X\vdash\alpha$ וגם $X\vdash\neg\alpha$ עס' נאותות $X\vDash\alpha$ וגם $X\vDash\neg\alpha$.

מטרה:

להוכיח X עקבית $\Leftarrow$ X ספיקה.

רעיון ראשון

X עקבית אז לכל α לא מתקיים $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$.
נגדיר השמה v:
לכל פסוק אטומי p
אם $X \vdash p$ אז $v(p) = T$
אם $X \vdash \neg p$ אז $v(p) = F$.
יתכן ש־ $X \nvdash p$ וגם $X \nvdash \neg p$ ואז v לא מוגדרת.
דוגמא לכך שאי אפשר לבחור את v אקראית כאשר $X \nvdash p$
$X \nvdash \neg p$:

$$X = \{\overbrace{p_o \vee p_1}^{F}\}$$

$$p_0 \vee p_1 \nvDash \overbrace{p_0}^{F} \Rightarrow p_0 \vee p_1 \nvdash p_0$$

$$p_0 \vee p_1 \nvDash \neg \overbrace{p_0}^{F}$$

$$p_0 \vee p_1 \nvDash \overbrace{p_1}^{F}$$

$$\nvDash \neg \overbrace{p_1}^{T}$$

הגדרה נוספת:

X עקבית מקסימלית אם לכל פסוק α מתקיימת <u>בדיוק אחת</u> מ־2 האפשרויות:

1. $X \vdash \alpha$.
2. $X \vdash \neg\alpha$.

למה 4

Y עקבית מקסימלית אם ורק אם Y עקבית ולכל פסוק α, אם $Y \vdash \alpha$ אז $Y \cup \{\alpha\}$ <u>**אינה**</u> עקבית.

הוכחה:

$\Leftarrow$ נתון Y עקבית מקסימלית
לכן Yעקבית.
נתון $Y \nvdash \alpha$ אז עס' עקביות מקס' $Y \vdash \neg\alpha$

$$\begin{cases} Y \cup \{\alpha\} \vdash \alpha \\ Y \cup \{\alpha\} \vdash \neg\alpha \end{cases} \Leftarrow$$ מסקנה $Y \cup \{\alpha\}$ אינה עקבית.

$\Rightarrow$ נתון Y עקבית ולכל α אם $y \nvdash \alpha$ אז $Y \cup \{\alpha\}$ אינה עקבית.
נוכיח ש־Y עקבית מקס', קיימות 2 אפשרויות:

1. $Y \vdash \alpha$
2. $Y \nvdash \alpha$ אז $Y \cup \{\alpha\}$ אינה עקבית.

עס' למה 2:
$Y \vdash \neg\alpha$ סיימנו.

למה 5

לכל קבוצה עקבית X קיימת קבוצה עקבית מקסימלית Y כך ש־$X \subseteq Y$.
הנחה:
קבוצת הפסוקים היא בת מניה $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$
נגדיר:
סדרת הרחבות ל־X

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ X}}{X_0} \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$$

נניח בשלב ה־n, X_n מוגדרת
אם $X_n \vdash \neg\alpha_n$ אז $X_{n+1} = X_n$
אם $X_n \nvdash \neg\alpha_n$ אז $X_{n+1} = X_n \cup \{\alpha_n\}$
$Y = \cup X_n$
נוכיח ש־Y עקבית, מקסימלית, מכילה את־X

<u>טענה א:</u>
$X \subseteq Y$
<u>טענה ב:</u>
כל X_n היא עקבית.
הוכחה ל־ב:
אינדוקציה עבור n:

- ⋆ בסיס:
  X_0 עקבית כי X עקבית.

- ⋆ צעד:
  נניח כי X_n עקבית ונוכיח X_{n+1} עקבית:
  נחלק ל 2 מקרים:

  1. $X_n = X_{n+1}$ ולכן X_{n+1} עקבית.
  2. למה 2 (גרסה ראשונה(שחורה)).

<u>טענה ג:</u>
Y עקבית
נניח בשלילה שאינה עקבית ואז לפי למה 1 קיימת תת־קבוצה <u>סופית</u> W של Y שאינה עקבית.
קיימת $W \subseteq X_k$
לכל $w_i \in W$, $w_i \in X_i$ (מ־$W \subseteq Y$)
עבור האינדקס m המקסימלי המכיל של w_i:
$W \subseteq X_m$ סתירה לטענה ב'.
<u>טענה ד:</u>
Y עקבית מקסימלית לכל α_n נראה ש־$Y \vdash \alpha_n$ או $y \vdash \neg\alpha_n$ עס' בניה.

הרצאה 8 לוגיקה

מטרה: $X \vDash \alpha$ **אז** $X \vdash \alpha$

נאותות:

$X \vdash \alpha$ **אז** $X \vDash \alpha$

$X \nvDash \alpha$ אז $X \nvdash \alpha$

למה 1:

X עקבית $\Leftrightarrow$ כל תת־קבוצה סופית של X עקבית.

למה 2:

$X \bigcup \{\neg\alpha\}$ עקבית $\Leftrightarrow$ $X \nvdash \alpha$

למה 3:

אם X ספיקה אז X עקבית

מטרה:

להוכיח את הכיוון ההפוך
<u>צ"ל X עקבית אז X ספיקה</u>

הגדרנו:

X עקבית מקסימלית אם ורק אם לכל α בדיוק אחד מהבאים מתקיים $X \vdash \alpha$ או $X \vdash \neg\alpha$

למה 5:

לכל קבוצה עקבית X קיימת קבוצה עקבית מקסימלית Y , עד ש־$X \subseteq Y$.

למה 6:

לכל קבוצת פסוקים X
X עקבית אם ורק אם X ספיקה
$\Rightarrow$ עס' למה 3
$\Leftarrow$
נתון X עקבית
עס' למה 5 קיימת $Y \supseteq X$ כך ש־Y מקסימלית
נגדיר השמה v:

$$Y \vdash p_i \Leftrightarrow v(p_i) = T$$
$$Y \vdash \neg p_i \Leftrightarrow v(p_i) = F$$

<u>v מוגדרת היטב</u>
<u>טענה:</u>
לכל $\alpha \in Y$ מתקיים $v \vDash Y$.
כלומר $v \vDash Y$ **לא נוכיח.**
אז $v \vDash X$ והראינו ש־X ספיקה.
נסתכל על $\alpha \in X$ אז $\alpha \in Y$ ולכן $v \vDash \alpha$.

משפט השלמות:

אם $X \models \alpha$ אז $X \vdash \alpha$

הוכחה:

נתון $X \models \alpha$ ונניח בדרך השלילה ש־$X \nvdash \alpha$.
עס' למה ' $X \bigcup \{\neg\alpha\}$ עקבית ולכן למה 6 ספיקה
כלומר קיימת v

$$v \models X$$
$$v \models \neg\alpha$$
$$v \models \alpha$$
$$X \models \alpha \Rightarrow v \models \alpha$$

<u>סתירה</u>
מסקנה $X \vdash \alpha$.

מסקנה ממשפט השלמות והנאותות

$$\boxed{\vdash \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \models \alpha}$$

סיכום של הוכחת משפט השלמות

$$\boxed{\mathrm{X}\vdash \alpha \Leftarrow X \models \alpha}$$

רצינו:

$$\begin{array}{ccc} X \not\models \alpha & \Leftarrow & X \nvdash \alpha \\ \Uparrow & & \Updownarrow \\ (\text{Sfika}) X \bigcup \{\neg\alpha\} & \Leftrightarrow & (\text{Ikvit}) X \bigcup \{\neg\alpha\} \end{array}$$

$M(X)$=$\{$קבוצת ההשמות v כך ש־$v \models X\}$
v היא מודל של X

משפט הקומפקטיות

לקבוצת פסוקים X יש מודל (היא ספיקה) אם ורק אם לכל תת־קבוצה סופית שלה יש מודל (היא ספיקה).

הוכחה:

X ספיקה $\Leftrightarrow$ X עקבית.
$\Leftrightarrow$ כל תת קבוצה סופית שלה עקבית
$\Leftrightarrow$ כל תת קבוצה סופית שלה היא ספיקה.

דוגמא לשמוש בקומפקטיות

נתונות שתי קבוצות של פסוקים Σ_1 ו־Σ_2 כך ש־

1. אין השמה שמספקת גם את Σ_1 וגם את Σ_2.
$M(\Sigma_1) \bigcap M(\Sigma_2) = \emptyset$
2. כל השמה מספקת או את Σ_1 או את Σ_2.

דוגמא פשוטה:

$\Sigma_1 = \{p_0 \wedge p_1\}$, $\Sigma_2 = \{\neg p_0 \vee \neg p_1\}$
כאשר Σ_1, Σ_2 <u>במקרה</u> סופיות
צריך להוכיח:
שקיים פסוק p_1 כך ש־Σ_1 שקולה לו כלומר לכל v: $v \models \Sigma_1 \Leftrightarrow v \models p_1$
וקיים פסוק p_2 ששקול ל־Σ_2.

שאלה:

האם $\alpha \bigwedge_{\alpha \in \Sigma_1} = p_1$ הוא פתרון?
<u>לא</u> כאשר Σ_1 היא אינסופית.

דוגמא:

$\Sigma_1 = \{p_0, \neg p_0, p_0 \vee \neg p_0\} \bigcup \{p_i, \neg p_i | i \in \mathbb{N}\}$ אף השמה אינה מספקת את Σ_1
$\Sigma_2 = \{p_0 \vee \neg p_0\}$ כל השמה מספקת את Σ_2.
$\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ אינה ספיקה
עס' משפט הקומקטיות קיימת קבוצה $D \subseteq \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$ <u>סופית</u> ולא ספיקה.
עס' קומפקטיות קיימת $D \subseteq \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$
D סופית, לא ריקה, לא ספיקה
$D_1 = D \bigcap \Sigma_1$, $D_2 = D \bigcap \Sigma_2$
לפחות אחת מ־D_1, D_2 אינה ריקה כי D אינה ריקה.
נניח D_1 אינה ריקה
$D_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \subseteq \Sigma_1$
$p_1 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \alpha_k$
$p_2 = \neg p_1$
נוכיח שלכל השמה v:
$v \models \Sigma_1 \Leftrightarrow v \models p_1$

- $\Rightarrow$ $v \models \Sigma_1$ $\Leftarrow$ $v \models \alpha$ לכל $\alpha \in \Sigma_1$
בפרט ל־$\alpha_i \in D_1$
$v \models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k = p$

- $\Leftarrow$ $v \not\models \Sigma_1$ לפי נתון $v \models \Sigma_2 \Leftarrow v \models D_2$
אבל נתון $D = D_1 \bigcup D_2$ אינה ספיקה ולכן $v \not\models D_1$
כלומר קיים $\alpha \in D_1$ כך ש־$v \not\models \alpha$ מסקנה $v \not\models p_1$.

$\neg p_1 = p_2$
צ"ל לכל v, $v \models \Sigma_2 \Leftrightarrow v \models p_2$
$v \models \Sigma_2 \Leftrightarrow v \not\models \Sigma_1 \Leftrightarrow v \not\models p_1 \Leftrightarrow v \models \underset{\underset{p_2}{\|}}{\neg p_1}$

דוגמה:

נוסחה פסוקים שמתארת את המערכת M: α_M
נוסכחה פסוקים שמתארת את המפרט φ
$\alpha_M \wedge \neg\varphi$ ספיקה ?

- כן: מצאנו באג
- לא: המערכת נכונה.

מכרכת עם 2 תהליכים p_1 ו־p_2 שיש להם בקשות ויש ארביטר שמחליט מי יקבל את בקשתו.
לכל תהליך יש דגל:

- P_i:R_1 מציג בקשה (request)
- G_i: דגל של הארביטר.
כש־G_1 הוא 1 אז p_1 מקבל את התור.
כש־G_2 הוא 1 אז P_2 מקבל את התור.

לארביטר יש גם משתנים:

- D_1 - p_1 קבל את התור בפעם הקודמת.
- D_2 - p_2 קבל את התור בפעם הקודמת.

תאור המערכת:

$$\text{EXEC}=$$
$$(\overset{1}{G_1} \leftrightarrow (\overset{1}{R_1} \wedge (\neg \overset{0}{R_2} \vee \overset{1}{D_2})))$$
$$(\overset{1}{G_2} \leftrightarrow (\overset{1}{R_2} \wedge (\neg \overset{0}{R_1} \vee \overset{1}{D_1})))$$

מפרט:

$\varphi_1 = \neg(G_1 \wedge G_2)$

$\text{EXEC}_1(\overbrace{G_1}^{1} \wedge \overbrace{G_2}^{1})$

שלילת המפרט

האם הפסוק ספיק ?

$\text{EXEC}_1 \neg(D_1 \wedge D_2) = \alpha_M^{'}$ המערכת החדשה

נבדוק $\alpha_M' \wedge (G_1 \wedge G_2)$ שלילת המפרט

ספיק? **<u>לא.</u>**

מסקנה:

המערכת המתוקנת מספקת את המפרט $\neg(G_1 \wedge G_2)$.

נניח שהנוסחה ספיקה

$$
\begin{aligned}
& v \vDash \textbf{EXEC} \wedge \neg(D_1 \wedge D_2) \\
& \wedge (G_1 \wedge G_2) \\
& \Rightarrow \overline{v}(G_1) = T \quad \overline{v}(G_2) = T \\
& \Rightarrow \overline{v}(R_1 \wedge (\neg R_2 \vee D_2)) = T \\
& \Rightarrow \overline{v}(R_1) + T \\
& * \, \overline{v}(\neg R_2 \vee D_2) = T \\
& \overline{v}(G_2) = T \Rightarrow \overline{v}(R_2) = T \\
& ** \overline{v}(\neg R_2) = F \\
& \underbrace{\Rightarrow}_{*+**} \overline{v}(D_2) = T
\end{aligned}
$$

מפרט דרישה

$\varphi_2 = (R_1 \wedge \neg R_2 \to G_1)$

$\alpha_M' \wedge (R_1 \wedge \neg R_2 \wedge \neg G_1)$ שלילת המפרט

לוגיקה הרצאה 9

גדירות:

קבוצה של פסוקים $K = M(\Sigma)$ (קבוצה של השמות)
קבוצת השמות K היא גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים Σ עד ש־ $K = M(\Sigma)$.

טענה:

לא לכל תת קבוצה של השמות תהיה תת קבוצה של פסוקים שמגדירה אותה.

משקולי ספירה:

כמה נוסחאות: קבוצה בת מניה $\aleph_0$
כמה קבוצות של פסוקים: $2^{\aleph_0}$.
כמה השמות יש: $2^{\aleph_0}$.
קבוצות של השמות: $2^{2^{\aleph_0}}$.
השמה: וקטור אינסופי מעל $\{0,1\}$.

דוגמה לקבוצות של פסוקים גדירים:

נראה קבוצות של פסוקים שהן גדירות.

1. הקבוצה הריקה של השמות ־ K.
   האם קיימת $M(\Sigma) = K$.
   $\Sigma_1 = \{p_1 \wedge \neg p_1\}$
   $\Sigma_2 = \{p_1, \neg p_1\}$
   $\Sigma_3 = \{p_1, \neg p_1, p_2 \vee p_3\}$
2. K ־ מכילה את ההשמות.
   כל Σ שמכילה רק טאוטולוגיות מגדירה את K.
3. $K = \{V_T\}$
   V_T היא ההשמה שנותנת ערך T לכל p_i.
   $\Sigma = \{p_i | i \in \mathbb{N}\}$

כדי להוכיח ש־Σ מגדירה את K צריך להוכיח
$K = M(\Sigma)$.
$v \in M(\Sigma) \ \Leftrightarrow\ v(p_i) = T$ לכל $i \in \mathbb{N} \ \Leftrightarrow$
$V = V_T \Leftrightarrow v \in K$.

תחשיב היחסים

דוגמה מיותרת לחלוטין:

לכל x [דוברת אמת $(x) \Rightarrow$ יווני (x)]
דובר אמת (סוקרטס) $\Rightarrow$ יווני (סוקרטס)
יווני (סוקרטס)
דובר אמת (סוקרטס)
"לכל מספר טבעי x, x גדול או שווה ל־0"
"לכל x קיים y כך ש־ $x = y + 1$"

שילתות במסדי נתונים

- "האם קיים עובד טכניון שהוא גם סטודנט בטכניון?"
- "האם כל הסטודנטים בטכניון הולכים להופעות יום הסטודנט?"

תחום: המספרים הטבעיים\בני אדם\ הסטונדטים.
קבועים: סוקרטס, 0.
פונקציות: $y+1$.
יחסים: $(x=y+1)$, $=$, $\geq$, דובר אמת.

הסימנים המשותפים

קבוצה בת מניה של מתנים: $x_1, x_2, \ldots$
סימנים נוספי:
$\forall$[לכלן, $\exists$]קיים[, $\approx$]סימן שוויון[, (,) , $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$

מילון

$$\tau = (\underbrace{R_1, R_2, \ldots,}_{\text{relation signs}} \underbrace{F_1, F_2, \ldots}_{\text{function symbols}}, \underbrace{c_1, c_2, \ldots}_{\text{const. symbols}})$$

$R(\circ)$ - יחס אונארי
$R(\circ,\circ)$ - יחס בינארי
$R(\circ,\circ,\circ)$ - יחס טרינארי
בכל תחשיב יחסים יש סימן קבוע $(\circ,\circ) \approx$

דוגמה:

$\tau = (R_1(\circ,\circ), R_2(\circ), F_1(\circ,\circ), c)$
נדגים פרוש לסימננים בצורה לא פורמלית.
הפרוש/מבנה/פשר M

$$M = \{ \underbrace{D^M}_{\text{M's domain}}, \underbrace{R_1^M, R_2^M}_{\text{relations over } \Delta^M}, F_1^M, c^M \}$$

$R_1^M : D^M x D^M \rightarrow \{T, F\}$

$R_1^M : D^M \rightarrow \{T, F\}$

$F_1^M : D^M x D^M \rightarrow D^M$

$C^M \in D^M$

מבנה זה חלק מהסמנטיקה

$D^M = \mathbb{N} \backslash \{0\}$
$R_1^M(x,y) : x \leq y$.
$R_2^M(x)$:x ראשוני
$F_1^M(x,y) : x \cdot y$
$C^M : 3$

$$\underbrace{R_2(c)}_{} \wedge (\underbrace{R_1(x,c)}_{} \rightarrow R_2(x))$$

3 ראשוני. $\wedge(x \leq 3 \rightarrow$ ראשוני $x)$
נכון נכון אם 1 ראשוני.
אם 1 אינו ראשוני אז $x=2$, $x=3$, $x=20$ הנוסחה T.
עבור $x=1$ מתפרשת כ־F.
סמנטיקה: מבנה + השמה למשתנים.

מבנה אחר

מבנה אחר M_2 שזהה ל־M חוץ מ־ $C^{M_2} = 5$
השמה שנותמת ל־x עבור ערך 4.
הנוסחה היא F
$\neg R_2(F(x,y))$
$\neg R_2(F^M(x,y))$
$x \cdot y$ אינו ראשוני, עבור $x=1$ ו־$y=7$ הטענה אינה נכונה.
$\varphi_3 = \forall x \exists y (F(x,y) \approx x)$
האם נכונה מעל(ביחס ל־)M:
"לכל x קיים y כך ש־ $x \cdot y = x$"

נכון, נבחר $y=1$.

הגדרת מבנה שמעליו נפרש נוסחאות של תחשיב היחסים מעל מילון τ.

בהינתן:

$$\tau=(R_1,R_2,\ldots,F_1,F_2,\ldots,c_1,c_2,\ldots)$$

$$M=(\underbrace{D^M}_{\text{structure's domain}},R_1^M,R_2^M,F_1^M,F_2^M,\ldots,c_1^M,c_2^M,\ldots)$$

כאשר D^Mהוא קבוצה לא ריקה שנקראת תחום המבנה.

- ⋆ לכל סימן קבוי , נתאם קבוע מתוך D^M.
- ⋆ לכל סימן פונקציה k^{F_i} מקומי נתאם פונקצייה k מקומית F_i^M.
  $F_i^M\cdot(D^M)^K\to D^M$

לכל סימן יחס k^R־מקומי מתאימים יחס k מקומי.

$R^M:(D^M)^K\to\{T,F\}$

לסימן השוויון $\approx$ נתאים

$\approx^M=\{(d,d)|\,d\in D^M\}$

דוגמה:

הסכמות על סימונים:

P,Q,R סימני יחס

F,G,H סימני פונקצייה

a,b,c קבועים

d איברים מ־D

$$\tau=(\underbrace{\approx}_{\text{redundant}},R(\circ,\circ),F(\circ,\circ),G(\circ),c_0,c_1)$$

נגדיר מבנה M_4:

D^{M_4}קבוצת המילים הסופיות הלא ריקות מעל א"ב $\{a,b\}$

$D^{M_4}=\{a,b,aa,ab,ba,bb,\ldots\}$

$\approx^{M_4}:=$

x רישא של y: $R^{M_4}(x,y)$

שרשור $x\cdot y$: $F^{M_4}(x,y)$

היפוך סדר האותיות במילה x: $G^{M_4}(x)$

$c_0^{M_4}:a$

$c_1^{M_4}:b$

$\varphi_4=R(x,F(x,y))$

הפרוש של φ_4 מעל M_4

" x הוא רישא של $x\cdot y$"

תמיד נכון ללא תלות בהשמות ל־y,x.

$G(G(x))\approx x$

הפוך של הפוך של אותיות x שווה ל־.

נכון לכל השמה ל־x.

הרחבת הסינטקס

<u>שמות עצם</u> Terms

אינטואיטיבית

משתנים x,y

קבוע 3

פונקציה $+$

<u>במתמטיקה:</u>

ביטויים: $x,x+y,x+y+3,3$

הקבוצה Terms מוגדרת אינדוקטיבית $\text{Terms}=X_{B,F}$

B: כולל את כל המשתנים ואת כל סימני הקבוע.

F: מספר הפעולות הוא כמספר הופנקציה בהינתן סימן פונקציה F k מקומי.

ובהינתן $t_1,\ldots,t_k\in\text{Terms}$, $F_i(t_1,\ldots t_k)\in\text{Terms}$.

דוגמה:

במילון שני סימני קבוע a, b

וסימן פונקציה F דו־מקומי

וסימן פונקציה G חד־מקומי.

דוגמאות לשמות עצם (סינטקטי)

a
b
$F(a,b)$
$G(F(a,b))$
$x_1, x_2, \dots,$
$F(a,x_1)$
$G(F(a,x_1))$

כל שמות העתם מתפקדים כמו פונקציות בהינתן ערכים מ־D^M
הם מחזירים ערכים מ־D^M.

$M_5 = (\mathbb{N}, \underbrace{F^M}_{+}, \underbrace{G^M}_{\cdot}, \underbrace{a}_{5}, \underbrace{b}_{0})$

$G(F(a,x_2))$ השמה שתתן ערך ל־x
s :(VAR)משתנים$\rightarrow D^{M_5}$
נתון M_5והשמה $s(x_1)=2$ $s(x_2)=3$.

לוגיקה הרצאה 10

3 ביולי 2019

תחשיב היחסים

מילון: $\tau = \langle R\ldots, F\ldots, C\ldots\rangle$
מבנה עבור מילון: $M = \left\langle D^M, R^M \ldots, F^M \ldots, C^M \ldots \right\rangle$
שמות עצם מעל מילון τ $term(\tau)$
קבוצה אינד'

- בסיס: כל סימן קבוע c במילון הוא ש"ע
  כל משתנה x_i הוא ש"ע .
- פעולות: לכל סימן פונקציה k־מקומית F במילון, ולכל k ש"ע $t_1, \ldots, t_k$ מתקיים שגם $F(t_1, \ldots, t_k)$ היא ש"ע
- הפירוש של ש"ע ניתן ע"י השמה.

הגדרה: בהינתן מילון τ ומבנה M עבור τ.
פנקצייה: $s : \underbrace{Var}_{\{x_i | i \in \mathbb{N}\}} \to D^M$ נקראת השמה.
בהינתן השמה s עבור מבנה M במילון τ נגדיר השמה מורחבת $\overline{S} : term(\tau) \to D^M$ באינדוקציה על $term(\tau)$.

- בסיס: עבור $t = x_i$ שהוא משתנה, נגדיר: $\overline{s}(t) = s(t)$.
  עבור $t = c_i$ כאשר c_i סימן קבוע ב־τ נגדיר:
  $\overline{s}(c_I) = c_i^M$
- סגור: נניח שהגדרנו את $\overline{s}$ עבור ש"ע $t_1, \ldots t_k$
  ונניח ש F הוא סימן פונקציה k מקומית במילון.
  אז נגדיר:
  $\overline{s}(F(t_1, \ldots, t_k)) = F^M(\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_k))$

דוגמה:

$$\tau = \langle F, (,), C\rangle$$

1. $M = < \mathbb{N}, \times, 0 >$
   נגדיר השמה $S(x_i) = i$
   דוגמאות לש"ע:

$$\overline{S}(x_0) = 0$$
$$\overline{S}(x_1) = 1$$
$$\overline{S}(c) = C^M = 0$$
$$\overline{S}(F(x_0, c)) = F^M(\overline{S}(x_0), \overline{S}(c)) = 0 \cdot 0 = 0$$
$$\overline{S}(F(x_8, x_{100})) = F^M(\overline{S}(x_8), \overline{S}(x_{100})) = 8 \cdot 100 = 800$$
$$\overline{S}(F(F(x_0, c), x_1))$$

2. $M = < P(\mathbb{N}), \bigcup, \emptyset >$
   נגדיר השמה $s = (x_i) = \{i\}$

דוגמאות לש"ע

$$\overline{S}(x_0)=\{0\}$$
$$\overline{S}(c)=C^M=\emptyset$$
$$\overline{S}(F(X_0,c))=F^M(\overline{S}(x_0),\overline{S}(c))=\{0\}\cup\emptyset=\{0\}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{Structure} & \text{Dict.} \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dd, bend left] \\
\text{Assign} \arrow[d, Rightarrow] & \text{Noun} \\
\text{Truth Values} & \text{Formula}
\end{tikzcd}$$

נוסחאות:

<u>הגדרה:</u> קבוצת הנוסחאות מעל מילון τ. מוגדרת בצורה אינדוקטיבית:

- <u>בסיס:</u> (נוסחאות אטומיות) לכל שני שמות עצם t_1, t_2 מתקיים ש־ $\boxed{t1\approx t_2}$ הוא נוסחא.
  לכל סימן יחס k־מקומי R במילון ולכל k ש"ע $t_1,\dots,t_k$ מתקיים ש־
  $\boxed{\mathrm{R}(t_1,\dots,t_k)}$ היא נוסחא.
- <u>סגור:</u> בהינתן נוסחאות α,β מתקיים ש:
  $(\alpha\to\beta), (\alpha\vee\beta), (\alpha\wedge\beta),(\neg\alpha)$
- כמתים: בהינתן נוסחא α ומשתנה x_i מתקיים ש־:
  $(\forall \underbrace{x_i}_{\text{for each possible value}}, \alpha)$ ו־ $(\exists x_i, \alpha)$ הן נוסחאות.

דוגמאות:

$\tau=\langle R,F_1,F_2,C\rangle$
F_1 סימן פונקציה חד מקומית.
F_2 סימן פונקציה דו־מקומית.
R סימן יחס דו־מקומי.
$c\approx c$, $x_0\approx x_1$, $F_1(x_0)\approx F_2(c,x_7)$, $R(c,F_1(x_3))$, $R(x_0,F_2(F_1(c),x_0))$
$((c\approx c)\wedge R(c,F_1(x_3))\to(x_0\approx x_1)$
$\forall x_0(x_0\approx c)$
$\forall x_1(x_0\approx c)$
$\exists x_0(x_0\approx c)$
$\exists x_8((\forall x_0(c\approx F_1(x_0))\wedge(c\approx x_8))$

הגדרת ערכי אמת

בהינתן מילון τ, מבנה M והשמה s, מגדירים מתי M ו־s <u>מספקים</u> נוסחא α מעל τ.
כלומר נותנים ל־α ערך אמת 1 ומסמנים $M\underset{s}{\vDash}\alpha$
$(M,s)(\alpha)=1$, $(M,S)\vDash\alpha$.
באינדוקציה על קבוצת הנוסחאות מעל τ:

- <u>בסיס:</u> $\alpha=t_1\approx t_2$ נגדיר $M\underset{s}{\vDash}\alpha$.
  אם"ם $\underbrace{\overline{s}(t_1)}_{\in D^M}=\underbrace{\overline{s}(t_2)}_{\in D^M}$ (שיוויון ב־D^M)
- <u>דוגאות:</u>
  $\tau=\langle R,F_1,F_2,C\rangle$ כמו קודם.
  $$\underbrace{M\underset{s}{\vDash}\alpha\Leftarrow}_{\overline{s}(x_0)=s(x_0)=1=c^M=\overline{s}(c)} \quad \begin{cases} M=\left\langle \mathbb{N},\le,^2,+,1\right\rangle \\ S(x_i)=1 \\ \alpha=x_0\approx c \end{cases} \quad \forall i$$
  $s(x_i)=0$ לכל $i \Leftarrow M\underset{s'}{\nvDash}\alpha$

$\overline{s'}(c)=1$, $\overline{s}(x_0)=0$

<u>חזרה להגדרה עדיין בבסיס:</u>

$\alpha=R(t_1,\ldots,t_k)$ כאשר R סימן יחס k-מקומי ב-α $t_1,\ldots t_k$ ש"ע

<u>נגדיר:</u> $M\underset{s}{\vDash}\alpha$ אם"ם $(\overline{s}(t_1),\ldots,\overline{s}(t_k))\in R^M$

<u>חזרה לדוגמא:</u>

τ,M,s

$\alpha=R(x_0,c)$: $M\underset{s}{\vDash}\alpha$ כי $\overline{s}(x_0)=\overline{s}(c)=1$ וכן $1\leq 1$ כלומר $(1,1)\in R^M$.

$M\underset{s}{\vDash}\alpha\wedge\beta$ אם"ם $M\underset{s}{\vDash}\alpha$ וגם $M\underset{s}{\vDash}\beta$

$M\underset{s}{\vDash}\alpha\to\beta$ לפי טבלת האמת של $\to$.

<u>כמתים:</u>

<u>הגדרת עזר:</u> בהינתן השמה s ומשתנה x_i ואיבר $d\in d^M$

נגדיר <u>השמה מתוקנת:</u>

$s'=s[x_i\leftarrow d]$

$$s'(x_j)=\begin{cases}d & i=j\\ s(x_j) & i\neq j\end{cases}$$

עכשיו, בהינתן α שעבורו הגדרנו האם M,s מספקים אותה,

ובהינתן משתנה x_i נגדיר:

$M\underset{s}{\vDash}\forall x_i\alpha$ אם"ם לכל $d\in D^m$ מתקיים $\underset{s'[x_i\leftarrow d]}{M\vDash\alpha}$

$M\underset{s}{\vDash}\exists x_i\alpha$ אם"ם קיים $d\in D^M$ כך שמתקיים $\underset{s'[x_i\leftarrow d]}{M\vDash\alpha}$

בחזרה להגדרה:

<u>סגור:</u>

<u>קשרים:</u> בהינתן נוסחאות α,β שהגדרנו עבורן האם M,s מספקים אותן, נגדיר:

$M\underset{s}{\vDash}\neg\alpha$ אם"ם $M\underset{s}{\nvDash}\alpha$.

$M\underset{s}{\vDash}\alpha\vee\beta$ אם"ם $M\underset{s}{\vDash}\alpha$ או $M\underset{s}{\vDash}\beta$.

עכשיו בהיתן α שעבורה הגדרנו האם $M,\,s$ מספקים אותה, ובהינתן משתנה x_i נגדיר:

$M\underset{s}{\vDash}\forall x_i\alpha$ אם"ם לכל $d\in D^M$ מתקיים $M\underset{s[x_i\leftarrow d]}{\vDash}\alpha$

$M\underset{s}{\vDash}\exists x_i\alpha$ אם"ם קיים $d\in D^M$ כך שמתקיים $M\underset{s[x_i\leftarrow d]}{\vDash}\alpha$

דוגמאות:

$\alpha'=\forall x_{\emptyset_1}(x_0\approx c)$

$M\underset{s}{\vDash}\alpha\Leftrightarrow$ לכל D^M $M\vDash x_1\approx c,d\in$

$s'=s[x_{\emptyset_1}\leftarrow d]$

$\Leftrightarrow\ \overline{s}(x_0)=\overline{s}(c)$ (בדוגמא $M\underset{s}{\nvDash}\forall x_0$

$\overline{s}(x_0)=\overline{s}(c)$.

לוגיקה הרצאה 11

סינטקס:

מילון τ

<u>שמות עצם:</u> סימני קבוע, משתנים וסימני פונקצייה.

<u>נוסחאות:</u>

נוסחאות אטומיות: $\underbrace{R}_{\text{N-Realtion}}\underbrace{(t_1,\dots,t_n)}_{\text{nouns}}$, $\approx(t_1,t_2)$.

<u>הערה:</u>

הבדל בין שם עצם לנוסחה אטומית:

בהינתן מבנה M והשמה s שם עצם t - כשישוערך הבמנה M וההשמה s יחזיר ערך מתוך D^M.

נוסחה(אטומית): תשוערך ל־T/F.

המשך יצירת נוסחאות ־כלל יצירה/פעולות.

בהינתן נוסחאות α, β ומשתנה x

הנוסחאות הבאות הן נוסחאות של תחשיב היחסים:

$$\neg\alpha,\ \alpha\to\beta,\ \forall x\alpha$$
$$\alpha\wedge\beta\ \alpha\vee\beta,\ \exists x\alpha$$

סמנטיקה:

<u>מבנה M</u> שמפרש סימני מילון ביחס לתחום D^M.

<u>השמה:</u> $s:\underbrace{\text{Var}}_{\{x_i|i\in\mathbb{N}\}}:\to D^M$.

<u>ההשמה מורחבת:</u>

$$\overline{s}:\underbrace{Term}_{\text{nouns}}\to D^M$$

<u>הגדרת $\overline{s}$:</u>

בהינתן $M,s,\overline{s}$ מוגדרת אינדוקטיבית ע"י:

1. $\overline{s}(x)=s(x)$ x משתנה.
2. $\overline{s}(c)=C^M$ c סימן קבוע.
3. $\overline{s}(F(t_1,\dots,t_n))=F^M(\overline{s}(t_1),\dots,\overline{s}(t_n))$.

ההשמה מתוקנת:

$$s[y\leftarrow d](x)=\begin{cases}d & x=y\\ s(x) & x\neq y\end{cases}$$

$s[y\leftarrow 8]$	x	y	z	$\dots$	s	x	y	z	$\dots$
	1	8	3	$\dots$		1	2	3	$\dots$

הגדרת $\vDash$

$M \underset{s}{\vDash} \alpha$

α נוסחה , s השמה, M מבנה

$M, s \vDash \alpha$

באינדוקציה מעל מבנה הנוסחה

<u>בסיס:</u>

$M \underset{s}{\vDash} R(t_1, \ldots, t_n)$

$(\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n)) \in R^M$

כתוב $R^N(\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n))$ הוא T.

$M \underset{s}{\vDash} \approx (t_1, t_2)$

$\overline{s}(t_1) = \overline{s}(t_2)$

<u>צעד:</u>

$M \underset{s}{\nvDash} \alpha \Leftrightarrow M \underset{s}{\vDash} \neg\alpha$

$M \underset{s}{\vDash} \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow$

$M \underset{s}{\vDash} \alpha$ **וגם** $M \underset{s}{\vDash} \beta$

$M \underset{s}{\vDash} \alpha \to \beta \Leftrightarrow$

$M \underset{s}{\nvDash} \alpha$ **או** $M \underset{s}{\vDash} \beta$

$\Leftrightarrow M \underset{s}{\vDash} \forall x \alpha$

לכל $d \in D^M$ $M \underset{s[x \leftarrow d]}{\vDash} \alpha$

$\Leftrightarrow M \underset{s}{\vDash} \exists x \alpha$

קיים $d \in D^M$ כך ש־$M \underset{s[x \leftarrow d]}{\vDash} \alpha$.

דוגמא:

מילון: $\tau = (R(\circ, \circ), G(\circ), F(\circ, \circ))$

מבנה: $M = (\underbrace{\mathbb{N}}_{D^M}, \underbrace{<}_{R^M}, \underbrace{\alpha \cdot x}_{G^M(x)}, \underbrace{x+y}_{F^M(x,y)})$

<u>השמה:</u>

$s(x) = 2$ $\boxed{\text{s(y)=5}}$

$\alpha = \exists x(R(G(x), F(x, y))$

$\Leftrightarrow M \underset{s}{\vDash} \alpha$

קיים $d \in \mathbb{N}$ כך ש־ $R(G(x), F(x, y))$ $\Leftrightarrow M \underset{\underbrace{s[x \leftarrow d]}_{s}}{\vDash}$

קיים d כך ש־ $(\overline{s}'(G(x), \overline{s}'(F(x, y))) \in R^M,$

קיים d כך ש־ $\underbrace{(G^M(\overline{s}'(x)), F^N(\overline{s}'(x), \overline{s}'(y)w) \in <}_{2d<d+5}$

- $\star$ ערך z לא השפיע על התוצאה בהשמה.
- $\star$ ערך y - השפיע.
- $\star$ ערך x - לא השפיה.

נגדיר משתנים חפשיים/קשורים בנוסחה

באינדוקצייה על מבנה הנוסחה α.

<u>בסיס:</u> α נוסחה אטומית.

$(R(t_1, \ldots, t_n))$

לכל x שנמצא ב־α, x חופשי עבור α.

<u>צעד:</u>

עבור קשרים $\alpha = \beta \square \gamma$

משתנה x הוא חופשי ב־α

אם ורק אם הוא חופשי ב־β או חופשי ב־γ.

$\alpha = \neg\beta$

x חופשי ב־α אם ורק אם הוא חופשי ב־β.

$\alpha = \exists x \beta$,$\alpha = \forall x \beta$

y חופשי ב־α אם ורק אם y חופשי ב־β <u>וגם</u> $\boxed{y \neq x}$

x לא חופשי ב־α ($y = x$ לא חופשי ב־α).

משתנה הוא <u>קשור</u> ב־α אם הוא אינו חופשי ב־α

<u>אינטואיטיציה:</u>

משתנים חופשיים־ערכם משפיע על ערך הנוסחה.

מתשנים קשורים ־ ערכם אינו משפיע.

דוגמא:

$$\alpha = (\forall x \underbrace{R(x,y)}_{\underbrace{x,y}_{y}}) \land \underbrace{Q(x)}_{x} \land \underbrace{\exists z \underbrace{Q(z)}_{z}}_{\text{none}}$$

המשתנים החופשיים ב־α הם x, y.

למה:

נתונה α מעל מילון τ, מבנה M מעל τ והשמה s_1, s_2 <u>שמתאימות ל־M.</u>

אם לכל משתנה חופשי x של α $s_1(x) = s_2(x)$ אז

$$M \underset{s_1}{\vDash} \alpha \Leftrightarrow M \underset{s_2}{\vDash} \alpha$$

הגדרה:

נוסחה של תחשיב היחסים שאין בה משתנים חופשיים נקראת <u>פסוק</u>.

ערך פסוק אינו תלוי בהשמה וניתן להרשם $M \vDash \alpha$.

ניתן לרשום:

קיימת השמה s כך ש־$M \underset{s}{\vDash} \alpha$ אם ורק אם $M \vDash \alpha$.

דוגמא לפסוק:

$$\alpha = \forall x \exists y R(x,y)$$
$$M = (\mathbb{N}, \underbrace{<}_{R^N})$$
$$\Leftrightarrow M \underset{s}{\vDash} \forall x \exists y R(x,y)$$

לכל d_1 $\Leftrightarrow M \underset{s[x \leftarrow d_1]}{\vDash} \exists y R(x,y)$

לכל d_1 קיים d_2 $\Leftrightarrow M \underset{s[x \leftarrow d_1][y \leftarrow d_2]}{\vDash} R(x,y)$

לכל d_1קיים d_2 $\Leftrightarrow d_1 < d_2$

$\boxed{\text{T}}$.

דוגמא נוספת:

$$M \underset{s}{\nvDash} \forall x \exists y R(x,y)$$

לכל d_1 קיים d_2כך ש־

$$\Leftrightarrow M \underset{\underbrace{s[x \leftarrow d_1][y \leftarrow d_2]}_{s'}}{\vDash} R(x,y)$$

לכל d_1 קיים $\Leftrightarrow R^M(s'(x), s'(y)) d_2$

לכל d_1 קיים d_2 $\Leftrightarrow (d_1, d_2) \in <$

לכל d_1 קיים d_2 $d_1 < d_2$.

גדירות של יחס בתוך מבנה נתון

<u>בשונה</u> מגדירות ואי־גדירות של <u>קבוצת מבנים שנעשה **בהמשך**(דומה לתחשיב הפסוקים).</u>

<u>נתון מבנה M</u> מעל τ אינטואיטיבית: השאלה היא האם אשר לבטא בעזרת המילון של M מושגים(יחסים) שאינם במילון.

בהינתן מבנה M מעל τ

יחס אמיתי לא סימן יחס:$P \subseteq (D^M)^n$ n־מקומי.

יחס p n מקומי הוא <u>גדיר ב־M</u> אם קיימת נוסחה α מעל τ, בעלת n משתנים חופשיים $v_1, \ldots v_n$ כך שלכל השמה s מתקיים:

$M \underset{s}{\vDash} \alpha \Leftrightarrow (s(v_1), \ldots, s(v_n)) \in P$.

נאמר אז ש־α מגדירה את P ב־M.

דוגמא:

$$\tau = (R(\circ,\circ))$$
$$M = (\mathbb{N}, \underbrace{\leq}_{R^N})$$

היחס(אונרי) $P \subseteq N$ מוגדר $P = \{0\}$.

ב־α שמגדירה את p יהיה <u>משתנה חופשי יחיד:</u>

$$\alpha(v_2) = \forall v_1 R(v_2, v_1)$$

צ"ל לכל השמה s:

$$M \underset{s}{\models} d(v_2) \Leftrightarrow s(v_2) \in p$$
$$\Leftrightarrow M \underset{s}{\models} \forall v_1 R(v_2, v_1)$$

לכל $d \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow M \underset{s[v_1 \leftarrow d]}{\models} R(v_2, v_1)$

לכל $d \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow (s(v_2), d) \in \leq$

$$\Leftrightarrow s(v_2) = 0$$

$s(v_2) \in P$.

דוגמא דומה במבנה שונה

$$\tau = \langle R(\circ,\circ) \rangle$$
$$M = (2^{\mathbb{N}}, \subseteq)$$
$$p = \{\emptyset\} \subseteq D^M$$
$$\alpha = \forall v_1 (R(v_2, v_1))$$

להוכיח שאם α מגדירה את p במילון M החדש.

באותו מבנה:

$$p' = \{(x,y) | x \subsetneq y\} \subseteq (D^M)^2$$
$$\varphi_1(x,y) = R(x,y) \wedge \neg R(y,x)$$
$$\varphi_2(x,y) = R(x,y) \wedge \neg(x \approx y)$$

צ"ל לכל השמה s

$$M \underset{s}{\models} \varphi_1 \Leftrightarrow (s(x), s(y)) \in P'$$

$M \underset{s}{\models} \varphi_2 \Leftrightarrow (s(x), s(y)) \in P'$.

לוגיקה הרצאה 12

3 ביולי 2019

גדירות של יחס במבנה:

נתון מבנה M מעל מילון τ ונתון יחס כלשהו k מקומי $P \subseteq (D^M)^k$ שאינו במילון τ.
נאמר ש־φ הוא גדיר ב־M אם קיימת נוסחה α מעל τ בעלת k משתנים חופשיים $v_1, \ldots, v_k$ כך שלכל השמה s מתקיים:

$$M \underset{s}{\vDash} \alpha \Leftrightarrow (s(v_i), \ldots, s(v_k)) \in P$$

דוגמאות:

$$P = \{0\}, \quad M = (\mathbb{N}, \underbrace{\leq}_{R^M})$$
$$\alpha(v_1) = \forall v_2 R(v_1, v_2)$$
$$M = (\mathbb{N}, +, *) \ , \tau = (F_+(\circ,\circ), F_*(\circ,\circ))$$
$$div = \{(a_1, a_2) | \ a_1 | a_2 \ a_1, a_2 \in \mathbb{N}\}$$
$$div \subseteq \mathbb{N}^2$$
$$\alpha(x_1, x_2) = \exists x_3 (F_*(x_1, x_3) \approx x_2)$$

הוכחה:

נראה שלכל השמה s

$$\mathrm{M}\underset{s}{\vDash} \alpha(x_1, x_2) \Leftrightarrow ((s(x_1), s(x_2)) \in div$$
$$\Leftrightarrow M \underset{s}{\vDash} \exists x_3 (F_*(x_1, x_3) \approx x_2)$$

קיים $d \in \mathbb{N}$

$$M \underset{\underbrace{s[x_3 \leftarrow d]}_{s'}}{\vDash} F_x(x_1, x_3) \approx x_2$$

קיים d $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ F_*^M(s'(x_1), s'(x_3)) = s'(x_2)$$

קיים d

$$\Leftrightarrow \ (s'(x_1) * s'(x_3)) = s'(x_3)$$

קיים d

$$(s(x_1) * d) = s(x_2)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(s(x_1), s(x_2))) \in div$$

דוגמאות נוספות:

$$\tau = (c_0, c_1, F_+, F_*, R_\leq)$$
$$M = (\mathbb{N}, 0, 1, +, *, \leq)$$
$$square = \{(n, m) | n = m^2\}$$
$$\alpha_{square}(x_1, x_2) = F_*(x_2, x_2) \approx x_1$$

דוגמא:

$$\tau = (R_\leq)$$

$M = (\mathbb{P}(A), \subseteq)$ (A קבוצה כלשהי)

$$P_U = \{(A, B, C) | A \cup B = C\}$$

נראה ש־$P_\cup$ גדיר ב־M

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = R_\subseteq(x_1, x_3) \land R_\subseteq(x_2, x_3) \land \forall x_4(((R_\subseteq(x_1, x_4) \land R_\subseteq(x_2, x_4)) \to R_\subseteq(x_3, x_4)))$$

דוגמאות נוספות:

$$\tau = (F_+, F_*, R_\leq)$$
$$M = (\mathbb{N}, +, *, \leq)$$
$$square = \{(n,m)|n = m^2\}$$
$$\alpha_{square}(x_1, x_2) = F_*(x_2, x_2) \approx x_1$$
$$P_0 = \{0\}$$
$$\alpha_+(x) = F_+(x,x) \approx x$$
$$P_1 = \{1\}$$
$$\alpha_1(x) = F_*(x,x) \approx x$$
$$\neg\alpha_0(x)$$
$prime = \{a|a$ ראשוני$\}$
$$\alpha_{prime}(x_1) = \forall x_2(div(x_1,x_2) \to x_2 \approx x_1 \vee \alpha_1(x_2))$$

הגדרה:

α <u>אמת לוגית</u> אם ורק אם לכל מבנה M (מעל למילון של α) ולכל השמה צד (שמתאימה ל־M):

$$M \underset{s}{\models} \alpha$$

סימון: $\models \alpha$

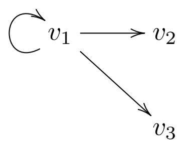
<u>דוגמאות לנוסחאות שהן אמת לוגית ואינן אמת לוגית:</u>

1. $\alpha = (\forall x R(x,y)) \to (\forall x R(x,y))$
אמת לוגית ־ הצבה בטאוטולוגיה של תחשיב הפסוקים.
<u>טענה:</u> כל נוסחה במבנה של טאוטולוגיה של תחשיב הפסוקים היא אמת לוגית.

2. $\forall x R(x,y)$ אמת לוגית ?
$M = (D^M, \underset{\emptyset}{R^M})$
$S(y) = d_0 \in D^M$
$\Leftrightarrow M \underset{s}{\models} \forall x R(x,y)$
לכל $d \in D^M$
$\Leftrightarrow M \underset{\underbrace{s[x \leftarrow d]}_{s'}}{\models} R(x,y)$
לכל $d \in D^M$
$R^M(\underbrace{s'(x)}_{d}, \underbrace{s'(y)}_{d_0})$
לכל d, $(d, d_0) \in R^M \in \emptyset$

עוד דוגמא להפרכה:

המבנה הוא גרף



$M = \{v_1, v_2, v_3\}, R^M)$
$R^M = \{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_1,v_1)\}$ (יחס הקשתות)
$s(x) = v_1, s(y) = v_2, s(z) = v_1$
נראה ש־
$M \underset{s}{\not\models} \forall x R(yx, y)$
כי מ־v_3אין קשת ל־$v_2 = s(y)$.

3. $\exists y \forall x R(x,y) \to \forall x \exists y R(x,y)$
נוכיח שאמת לוגית בדרך השלילה קיים S, M כך ש־
$\Leftrightarrow M \underset{s}{\not\models} \exists x \forall y R(x,y) \to \forall x \exists y R(,xy)$
$\Leftrightarrow M \underset{s}{\models} \exists y \forall x R(x,y)\ \ (1)$
קיים d_1לכל d_2
$\Leftrightarrow M \underset{s[y\leftarrow d_1][x \leftarrow d_2]}{\models} R(x,y)$
קיים d_1כך שלכל d_2
$\Leftrightarrow R^M(d_2, d_1)$
$\Leftrightarrow M, s \not\models \forall x \exists y R(x,y)\ (2)$
קיים e_1

$\Leftrightarrow M \underset{s[x\leftarrow e_1]}{\not\models} \exists y R(x,y)$

קיים e_1 לכל e_2

$M \underset{s[x\leftarrow e_1][y\leftarrow e_2]}{\not\models} R(x,y)$

4. $\forall x \exists y R(x,y) \to \exists y \forall x R(x,y)$

להציע מבנה והשמה

$M \underset{s}{\models} \forall x \exists y R(x,y)$

$M \underset{s}{\not\models} \exists y \forall x R(x,y)$

קיים d_1 כך שלכל d_2: $tree = R^M(d_2, d_1)$

קיים e_1 כך שלכל e_2 $tree = R^M(e_1 e_2)$

למעשה ע"ס נסיק $R^M(e_1, d_1)$ מתקיים <u>סתירה.</u>

5. $\beta = \exists x(\alpha \to \forall x \alpha)$

אמת לוגית.

נתונה תבנית ביצים

קיימת ביצה שאם היא שבורה אז כל הביצים שבורות

נוכיח בחלוקה למקרים שלכל s, M: $M \underset{s}{\models} \beta$

<u>מקרה 1:</u>

נתון: $M \underset{s}{\models} \forall x \alpha$

נוכיח $M \underset{s}{\models} \beta$

$M \underset{s}{\models} \forall x \alpha$

$\Leftrightarrow$

<u>קיים d</u>

$M \underset{s[x\leftarrow d]}{\models} \forall x \alpha$

נסתמך על השלמה שומרת שאם s_1 ו־s_2 מסכימות על כל המשתנים שחופשיים בנוסחה אז הם מסכימות על ערך הנוסחה.

s, s' זהיות חוץ מערכם על x שאינו חופשי ב־$\forall x \alpha$

קיים d. $M \underset{s[x\leftarrow d]}{\models} \alpha \to \underbrace{\forall x \alpha}_{T}$

קיים d $\Leftrightarrow M \underset{s[x\leftarrow d]}{\models} \underbrace{\underbrace{\alpha}_{?} \to \forall \underbrace{x\alpha}_{T}}_{T}$

$M \underset{s}{\models} \exists x(\alpha \to \forall x \alpha)$

<u>מקרה 2</u>

$\Leftrightarrow M \not\models \forall x \alpha$

קיים d כך ש־ $M \underset{s[x\leftarrow d]}{\not\models} \alpha$

$$\Leftrightarrow T \begin{cases} F \to & T \\ F \to & F \end{cases}$$

$\Leftrightarrow M \underset{s[x\leftarrow d]}{\models} \underbrace{\underbrace{\alpha}_{F} \to \underbrace{\forall x \alpha}_{F}}_{T}$

$M \underset{s}{\not\models} \exists x(\alpha \to \forall x \alpha)$

הרצאה 13 לוגיקה

3 ביולי 2019

α <u>סתירה</u> אם לכל מבנה M ולכל השמה s $M \underset{s}{\not\models} \alpha$.
α <u>סתירה</u> קיים מבנה +השמה כך ש־ $M \underset{s}{\models} \alpha$.
עבור קבוצת נוסחאות Γ, $M \underset{s}{\models} \Gamma$ אם לכל $\alpha \in \Gamma$, $M \underset{s}{\models} \alpha$.

הגדרה:

נוסחה β נובעת לוגית מנוסחה α, סימון $\alpha \models \beta$ אם לכל מבנה+השמה : אם $M \underset{s}{\models} \alpha$ אז $M \underset{s}{\models} \beta$.

דוגמא:

$$\forall x(\alpha \to \beta) \models \forall x\alpha \to \forall x\beta$$

הוכחה:

נניח בדרך השלילה שאין נביעה לוגית קיים מבנה M והשמה s כך ש־

$$M \underset{s}{\models} \forall x(\alpha \to \beta)$$
$$M \underset{s}{\not\models} \forall x\alpha \to \forall x\beta$$
$$\Updownarrow$$
$$M \underset{s}{\models} \forall x\alpha$$
$$M \underset{s}{\not\models} \forall x\beta$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists d_0 \in D^M$$
$$M \underset{s[x\leftarrow d_0]}{\models} \beta$$
$$M \underset{s}{\models} \forall x\alpha$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall d \in D^M$$
$$M \underset{s[x\leftarrow d]}{\models} \alpha$$
$$M \underset{s[x\leftarrow d_0]}{\models} \alpha$$
$$M \underset{s[x\leftarrow d_0]}{\not\models} \alpha$$
$$\Downarrow$$
$$M \underset{s}{\not\models} \forall x(\alpha \to \beta)$$

בסתירה לנתון.

משפט הקומפקטיות

קבוצת נוסחאות Σ הינה ספיקה אם ורק אם כל תת־קבוצה סופית שלה היא ספיקה.

גדירות של קבוצת מבנים בתחשיב היחסים:

תזכורת: תחשיב הפסוקים:

קבוצת <u>השמות</u> היא גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים סופית Σ כך ש־ $M(S)=k$

גדירות של קבוצת מבנים ע"י <u>קבוצת פסוקים של תחשיב היחסים</u>

פסוק של תחשיב היחסים נוסחה ללא מתשנים חופשיים.

קבוצת מבנה K הינה גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים Σ כך ש־

$M(\Sigma)=K$

$Mod(\Sigma)=K$ $(Mod(\Sigma)=\{M|M\vDash\Sigma\})$

דוגמא:

נתון המילון הריק $\Sigma=\{\exists x\exists y\neg(x\approx y)\}$

איזה מבנים מספקים את Σ לאפיין $Mod(\Sigma)$

$Mod(\Sigma)=\{M|\left|D^M\right|\geq 2\}$

דוגמא:

המילון הריק, $K=\{M|\left|D^M\right|=1\}$

נראה K גדירה:

$\Sigma=\{\forall x\forall y x\approx y\}$

הוכחה:

$Mod(\Sigma)=K$

$\Leftrightarrow M\in Mod(\Sigma)|\ M\vDash\Sigma$

$\Leftrightarrow\ M\vDash\forall x\forall y\, x\approx y$

לכל s:

$\Leftrightarrow\ M\underset{s}{\vDash}\forall x\forall y\, x\approx y$

לכל s ולכל d_1 ולכל d_2

$\Leftrightarrow M \underset{s[x\leftarrow d_1][y\leftarrow d_2]}{\vDash} x\approx y$

לכל s ולכל d_1 ולכל d_2

$\Leftrightarrow d_1=d_2$

$\left|D^M\right|=1$ ■.

טענה:

עבור נוסחה ללא מתשנים חופשיי α

מתקיים $M\underset{s}{\vDash}\alpha$ עבור s נתונה $\Leftrightarrow$ לכל השמה s, $M\underset{s}{\vDash}\alpha$

$M\underset{s}{\nvDash}\alpha$ עבור s נתונה $\Leftarrow$ לכל השמה s $M\underset{s}{\nvDash}\alpha$.

דוגמא:

$\tau=\{R(\circ,\circ)\}$

K היא קבוצת המבנים שבהם R הוא יחס סימטרי

$\Sigma=\{\forall x\forall y(R(x,y)\to R(y,x)\}$

$M\vDash\forall x\forall y(R(x,y)\to R(y,x)\}$

$\Downarrow$

$R(d_1,d_2)$

$\forall x\forall y(R(x,y)\wedge R(y,x))$ (Not valid)

דוגמא:

מילון ריק

$K_{\text{inf}}=\{M|\left|D^M\right|=\infty\}$

גדירה

תזכורת:

בתחשיב הפסוקים K_{fin}, F_{inf} שתיהן לא גדירות.
$\alpha_2 = \exists x_1 \exists x_2 \neg(x_1 \approx x_2)$ יש לפחות 2 איברים
$\alpha_3 = \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3$ יש לפחות 3 איברים.

$$\bigwedge_{1\leq i,j\leq 3|i\neq j} \neg(x_i \approx x_j)$$

$$\alpha_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{1\leq i,j\leq n|i\neq j} \neg(x_i \approx x_j)$$

יש לפחות n איברים ב-D^M.
$\Sigma_{inf} = \{\alpha_n | n \in \mathbb{N}\}$.

דוגמא:

אי-גדירות של קבוצת מבנים:
מליון ריק (למישה יכול להיות כל מילון)
$K_{fin} = \{M | D^M_{fin}\}$
נניח ש-K_{fin}גדירה ע"י נוסחאות Σ.
$\Gamma \vDash \Sigma_{inf} \cup \Sigma$
הקבוצה גם ספיקה וגם לא ספיקה.

1. Γ אינה ספיקה
נניח ש-Γ ספיקה $\Sigma_{inf} \cup \Sigma \vDash M \Leftarrow$
$M \vDash \Sigma_{inf} \Leftarrow D^M$ אינסופי.
$M \vDash \Sigma \Leftarrow D^M$ סופי.
סתירה.

2. נראה ש-Γ ספיקה, עס, משפט הקומפקטיות,
נסתכל על $A \subseteq \Gamma$ סופית, נזכור $A \subseteq \Sigma_{inf} \cup \Sigma$ לכן נחלק:

$$A_{inf} = A \cap \Sigma_{inf}$$

$$A_{\Sigma} = A \cup \Sigma$$

$A_{inf} = \{a_{i_1}, \ldots a_{i_k}\}$, נקח את mלהיות האינדקס המקסימלי של a_{i_j}, אם $A_{inf} = \emptyset$ נבחר $m = 1$.
נבחר $D^M = \{1, \ldots, m\}$ מתקיים כי $M \vDash A_{inf}$ (יש בו mאיברים שונים ולכן זה מתקיים).
$M \vDash \Sigma$ כי התחום הוא סופי ולכן אפשר גם להגיד $M \vDash A_{\Sigma}$ כלומר $M \vDash A \cap \Sigma$.
<u>מסקנה</u> $M \vDash A$⇐ניתן להסיק ממשפט הקומפקטיות כי Γ ספיקה.

דוגמא נוספת:

$\tau = (R(\circ, \circ))$
K- קבוצת כל המבנים המייצגים גרף לא מכוון קשיר.
R - יחס המתאר קשתות בין איברים בתחום.
גרף קשיר - בין כל שני צמתים יש מסלול לא מכוון ולכן R סימטרית.
<u>טענה:</u>
קבוצת הגרפים הקשירים אינה גדירה.

הוכחה:

נניח שהקבוצה גדירה ע"י Σ כלומר $Mod(\Sigma) = K$
נרחיב את המילון $\tau' = (R(\circ, \circ), c_0, c_1)$
נגדיר את אוסף הפסוקים הבא:

$$\Sigma' = \{\neg(c_0 \approx c_1)\} \cup \{\neg\alpha_k(c_0, c_1) \,|\, k \geq 1\}$$

כאשר:

$$\alpha_k(x_0, x_k) = \exists x_1, \ldots \exists x_k \bigwedge_{i=0}^{k-1} R(v_i, v_{i+1})$$

כלומר יש מסלול באורך k בין x_0 ל־x_k.

קומפקטיות

$A \subseteq \Sigma \cup \Sigma'$ סופית - קיים אינדקס סופי שאומר שלא קיים מסלול באורך l בין c_0 ל־c_1
(סותר את האובדה שחייב להיות מסלול באורך כלשהו).
מבנה מספק ל־A - צריך לבנות מסלול באורך $l+1$ בין c_0 ל־c_1.