

הרצאה 7 לוגיקה

מפשט הנאותות הרחב

אם $\underbrace{X \vdash \alpha}$ אז $\underbrace{X \models \alpha}$ אם $\underbrace{X \vdash \alpha}$ אז $\underbrace{X \models \alpha}$
 $\forall v \text{ if } v \models X \text{ then } v \models \alpha$ there is proof. sequence for α using X assumes
 $\models \alpha$ אם $\vdash \alpha$ אז $\vdash \alpha$
 נסוח שקול:
 אם $\boxed{X \not\vdash \alpha}$ אז $X \not\models \alpha$ אם $\vdash \alpha$ אז $\vdash \alpha$
 משפט השלמות
 אם $X \vdash \alpha$ אז $X \models \alpha$

הגדרה 1

קבוצת פסוקים X היא עקבית אם לא קיים פסוק α כך ש- $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg \alpha$

הגדרה 2

קבוצת פסוקים X היא עקבית אם קיים פסוק β כך ש- $X \not\vdash \beta$.

הגדרה 1 \Leftrightarrow הגדרה 2

לא קיים α כך ש- $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg \alpha$ לפחות α או $\neg \alpha$ אינו יכח מ- X ולכן מתקיימת הגדרה 2.

הגדרה 2 \Leftrightarrow הגדרה 1

נתון: קיים פסוק β כך ש- $X \not\vdash \beta$ בדרך השלילה, נניח שקיים α כך $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg \alpha$.

$$\vdash \neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \bullet$$

$$1. \text{ פסוק יכח } \vdash \neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

$$2. \text{ מהנתון עס' } X \vdash \neg \alpha$$

$$3. \text{ מהנתון עס' } X \vdash \alpha$$

$$4. \alpha \rightarrow \beta \text{ MP } 1, 2$$

$$5. \beta \text{ MP } 3, 4$$

$$X \vdash \beta$$

בסתירה לנתון ש- $X \not\vdash \beta$.

מסקנה: לא קיים α כך ש- $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg \alpha$.

שאלה:

האם קבוצת האכסיומות של תחשיב הפסוקים היא עקבית ? (קבוצת הנחות X היא ריקה).
כן!

שאלה:

האם יתכן $X \models \alpha$ וגם $X \models \neg \alpha$?
לכל השמה v :

• אם $v \models X$ אז $v \models \alpha$

• אם $v \models X$ אז $v \models \neg \alpha$

יכול להתקיים אם אין משמה v שמספקת את X .

דוגמאות ל X :

• $X = \{p_1, \neg p_1\}$ לא ספיקה.

• $X = \{\underbrace{\alpha \rightarrow \beta}_\beta, \alpha, \neg \beta\}$ לא ספיקה.

מסקנה:

X אינה עקבית $\Leftarrow X$ אינה עקבית.
 X ספיקה $\Leftarrow X$ עקבית.

למה 1

קבוצת פסוקים היא עקבית אם ורק אם כל תת קבוצה סופית שלה היא עקבית.

הוכחה:

\Leftarrow עקבית X

נניח בשלילה שקיימת תת-קבוצה $Y \subseteq X$ סופית שאינה עקבית.

קיים α כך ש- $Y \vdash \alpha$ וגם $Y \vdash \neg \alpha$

עס' מונוטוניות ההוכחה מתקיים גם $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg \alpha$ בסתירה להנחה ש- X עקבית.

\Rightarrow נתון: כל תת-קבוצה סופית היא עקבית.

ובשלילה- X אינה עקבית

וגם $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg \alpha$ שתיהן סדרות הוכחה סופיות ולכן משתמשות כקבוצות סופיות

של הנחות

$x' \vdash \alpha, X'' \vdash \neg \alpha$

X', X'' סופיות

$X' \cup X''$ סופית

$X' \cup X'' \vdash \neg \alpha, X' \cup X'' \vdash \alpha$ בסתירה לכך שכל תת-קבוצה סופית היא עקבית.

למה 2:

1. $X \cup \{\alpha\}$ היא עקבית אם ורק אם $X \not\vdash \neg\alpha$.

2. $X \cup \{\neg\alpha\}$ היא עקבית אם ורק אם $X \not\vdash \alpha$.

הוכחה:

\Leftarrow נתון: $X \cup \{\alpha\}$ עקבית ונניח בשלילה $X \vdash \neg\alpha$
 סתירה לנתון $(X \cup \{\alpha\})$ עקבית $\begin{cases} X \cup \{\alpha\} \vdash \alpha \\ X \cup \{\alpha\} \vdash \neg\alpha \end{cases}$
 כי $X \vdash \neg\alpha$ תמיד מותר להוסיף הנחות.
 \Rightarrow נתון $X \not\vdash \neg\alpha$ ונניח ש- $X \cup \{\alpha\}$ אינה עקבית.
 $X \cup \{\alpha\} \vdash \neg\alpha$ (בחרנו את β להיות $\neg\alpha$ עס' הגדרת α של עקביות).
 \Downarrow
 $X \vdash \alpha \rightarrow \neg\alpha$ (דדוקציה)
 (נשתמש במשפט: "יכיח $\neg\alpha$ $(\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$ ")
 1. פסוק יכיח $(\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$
 2. עס' X מהנחת השלילה + דדוקציה $(\alpha \rightarrow \neg\alpha)$
 3. $\neg\alpha$

מסקנה:

$X \vdash \neg\alpha$ בסתירה לנתון.

למה 3

אם X ספיקה אז X עקבית.

תזכורת להוכחה:

נתון X ספיקה, אם X אינה עקבית אז $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$ עס' נאותות $X \models \alpha$ וגם $X \models \neg\alpha$.

מטרה:

להוכיח X עקבית $\Leftarrow X$ ספיקה.

רעיון ראשון

X עקבית אז לכל α לא מתקיים $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$.
 נגדיר השמה v :
 לכל פסוק אטומי p
 אם $X \vdash p$ אז $v(p) = T$
 אם $X \vdash \neg p$ אז $v(p) = F$.
 יתכן ש- $X \not\vdash p$ וגם $X \not\vdash \neg p$ ואז v לא מוגדרת.
 דוגמא לכך שאי אפשר לבחור את v אקראית כאשר $X \not\vdash p$

$$:X \not\vdash \neg p$$

$$\begin{aligned} X &= \{\overbrace{p_0 \vee p_1}^F\} \\ p_0 \vee p_1 &\not\vdash \overbrace{p_0}^F \Rightarrow p_0 \vee p_1 \not\vdash p_0 \\ p_0 \vee p_1 &\not\vdash \neg \overbrace{p_0}^F \\ p_0 \vee p_1 &\not\vdash \overbrace{p_1}^F \\ &\not\vdash \neg \overbrace{p_1}^T \end{aligned}$$

הגדרה נוספת:

X עקבית מקסימלית אם לכל פסוק α מתקיימת בדיוק אחת מ-2 האפשרויות:

$$1. X \vdash \alpha$$

$$2. X \vdash \neg \alpha$$

למה 4

Y עקבית מקסימלית אם ורק אם Y עקבית ולכל פסוק α , אם $Y \vdash \alpha$ אז $Y \cup \{\alpha\}$ אינה עקבית.

הוכחה:

\Leftarrow נתון Y עקבית מקסימלית

לכן Y עקבית.

נתון $Y \not\vdash \alpha$ אז עס' עקביות מקס' $Y \vdash \neg \alpha$

$$\Leftarrow \text{מסקנה } Y \cup \{\alpha\} \text{ אינה עקבית.} \begin{cases} Y \cup \{\alpha\} \vdash \alpha \\ Y \cup \{\alpha\} \vdash \neg \alpha \end{cases}$$

\Rightarrow נתון Y עקבית ולכל α אם $y \not\vdash \alpha$ אז $Y \cup \{\alpha\}$ אינה עקבית. נוכיח ש- Y עקבית מקס', קיימות 2 אפשרויות:

$$1. Y \vdash \alpha$$

$$2. Y \not\vdash \alpha \text{ אז } Y \cup \{\alpha\} \text{ אינה עקבית.}$$

עס' למה 2:

$$Y \vdash \neg \alpha \text{ סיימנו.}$$

למה 5

לכל קבוצה עקבית X קיימת קבוצה עקבית מקסימלית Y כך ש- $X \subseteq Y$.
הנחה:

קבוצת הפסוקים היא בת מניה $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$
נגדיר:

סדרת הרחבות ל- X

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$$

||
 X

נניח בשלב ה- n , X_n מוגדרת
אם $X_{n+1} = X_n$ אז $X_n \vdash \neg \alpha_n$
אם $X_{n+1} = X_n \cup \{\alpha_n\}$ אז $X_n \not\vdash \neg \alpha_n$
 $Y = \bigcup X_n$
נוכיח ש- Y עקבית, מקסימלית, מכילה את- X

טענה א:

$$X \subseteq Y$$

טענה ב:

כל X_n היא עקבית.
הוכחה ל-ב:
אינדוקציה עבור n :

• בסיס:

X_0 עקבית כי X עקבית.

• צעד:

נניח כי X_n עקבית ונוכיח X_{n+1} עקבית:
נחלק ל 2 מקרים:

1. $X_n = X_{n+1}$ ולכן X_{n+1} עקבית.

2. למה 2 (גרסה ראשונה(שחורה)).

טענה ג:

Y עקבית

נניח בשלילה שאינה עקבית ואז לפי למה 1 קיימת תת-קבוצה סופית W של Y שאינה עקבית.

קיימת $W \subseteq X_k$

לכל $w_i \in X_i, w_i \in W$ (מ- $W \subseteq Y$)

עבור האינדקס m המקסימלי המכיל של w_i :

$W \subseteq X_m$ סתירה לטענה ב'.

טענה ד:

Y עקבית מקסימלית לכל α_n נראה ש- $Y \vdash \alpha_n$ או $Y \vdash \neg \alpha_n$ עס' בניה.