

לוגיקה - תרגול 1

הגדרה אינדוקטיבית של קבוצה

הגדרה 1:

בהינתן:

- קבוצה X - נקראת העולם.
- קבוצה $B \subseteq X$ - נקראת קבוצת הבסיס, והאיברים בה נקראים אטומים.
- קבוצה של פונקציות F - נקראות פונקציות יצירה.
- כל פונקציה $f \in F$ היא מהצורה $f : X^n \rightarrow X$.
- פונקציה כזו נקראת n -מקומית, ולכל פונקציה יש $n \geq 1$ משלה.
- נגדיר את $X_{B,F} \subseteq X$ - הסגור של B תחת F כקבוצה המקיימת:

1. $B \subseteq X_{B,F}$ — מכילה את הבסיס.
2. סגירות תחת הפונקציות ב- F — לכל $f \in F$ n -מקומית ולכל $x_1, x_2, \dots, x_n \in X_{B,F}$ מתקיים ש- $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_{B,F}$.
3. אין ב- $X_{B,F}$ 'איברים מיותרים' — אם קבוצה $T \subseteq X$ מקיימת את 1 ו-2, אז $X_{B,F} \subseteq T$.

הערות:

- הוכח בהרצאה כי $X_{B,F}$ קיימת ויחידה.
- כל אחת מהקבוצות, X , B ו- F יכולה להיות סופית או אינסופית.

דוגמה:

- העולם: X - קבוצת המילים באותיות s ו- t (מילה — סדרה סופית של אותיות).
למשל $s, st, ttt \in X$.
- הבסיס: $B = \{\epsilon, st, ts\}$ — סימון מיוחד למילה הריקה, בעלת אפס אותיות.
- פונ' היצירה: $F = \{f_1, f_2\}$, כאשר:

$$f_1(w_1, w_2) = sw_1w_2t -$$

$$f_2(w_1, w_2) = w_1w_2w_1 -$$

נסמן: $X_{B,F} = X_{st}$.

אילו איברים יש ב- X_{st} ? ϵ, st, ts (כי $B \subseteq X_{st}$), $sstt$ (כי $f_1(\epsilon, st) = sstt$) וכו'.

סדרת יצירה

הגדרה 2: סדרת יצירה של איבר a מעל B ו- F היא סדרת איברים סופית a_1, a_2, \dots, a_n המקיימת:

$$1. a = a_n$$

2. לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים לפחות אחד מהשניים:

(א) $a_i \in B$ (כלומר a_i אטום)

(ב) a_i מתקבל על ידי הפעלת פונקציה מ- F על איברים שקודמים לו בסדרה.

הערות:

- סדרת היצירה היא סדרה של איברים (ולא של פעולות!).
- סדרת יצירה תמיד סופית ולא ריקה (מכילה לפחות את a).
- סדרת יצירה איננה יחידה (למעשה אם יש אחת אז יש אינסוף).
- סדרת יצירה לא חייבת להיות באורך מינימלי.
- סדרת יצירה תמיד מתחילה מאטום (כי אין איברים קודמים להפעיל עליהם פונקציות).

הוכחה באינדוקציית מבנה

משפט 2 (אינדוקציית מבנה): יהיו קבוצות $X_{B,F}$ ו- T . אם מתקיימים התנאים הבאים אז $X_{B,F} \subseteq T$,

1. (בסיס) $B \subseteq T$ (כל איברי הבסיס נמצאים ב- T).

2. (סגור) T סגורה תחת הפונקציות ב- F , כלומר לכל $f \in F$ ו- n מקומית מתקיים:

$$\text{אם } \underbrace{a_1, a_2, \dots, a_n}_{*} \in T \text{ אז } f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in T$$

* זה נקרא הנחת האינדוקציה.

הערה: הנחת האינדוקציה היא ש- a_1, \dots, a_n שייכים ל- T (כלומר מקיימים את התכונה α), ולא ל- $X_{B,F}$.

שימו לב המשפט משמש רק להוכחת הכלות מהצורה $X_{B,F} \subseteq T$, ולא להוכחת ההפוכה!

תרגיל 1: נגדיר את הקבוצה $\{|w| \text{ זוגי} \mid w \in \{s, t\}^*\}$ $T = \{w \mid |w| \text{ הוא האורך של המילה}\}$. הוכיחו כי $X_{st} \subseteq T$.

תרגול 1 לוגיקה

סדרת יצירה עבור st :

1. st (אטום).

סדרת יצירה נוספת:

1. ϵ (אטום).

2. st $f_1(\epsilon, \epsilon)$.

סדרת יצירה $sstt$:

1. st (אטום).

2. ϵ (אטום).

3. $sstt$ $f_1(st, \epsilon)$.

תרגיל 1:

פתרון:

בסיס: נראה שלכל $w \in B = \{\epsilon, st, ts\}$ מתקיים $w \in T$ כלומר $B \subseteq T$

\star $w = \epsilon$, $|w| = 0$ זוגי ולכן $w \in T$.

\star $w = st$, $|w| = 2$ זוגי ולכן $w \in T$.

\star $w = ts$, $|w| = 2$ זוגי ולכן $w \in T$.

סגור:

נניח $w_1, w_2 \in T$

קיימים $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ שעבורם $|w_1| = 2k_1$, $|w_2| = 2k_2$ ונראה שלכל $f \in F$ מתקיימת סגירות.

\star $w = f_1(w_1, w_2)$

מהגדרת f_1 נובע כי $w = sw_1w_2t$

$w \in T \Leftrightarrow |sw_1w_2t| = 2 + 2k_1 + 2k_2 \underbrace{\leftarrow}_{b''a}$

$$w = f_2(w_1, w_2) \star$$

$$w = w_1 w_2 w_3 \text{ נובע כי } f_2$$

$$w \in T \Leftarrow |sw_1 w_2 t| = 2 + 2k_1 + 2k_2 \underbrace{\Leftarrow}_{b^a}$$

$$X_{st} \subseteq T \text{ מסקנה:}$$

תרגיל 2:

$$B = \overbrace{\{0\}^N}^{\text{binary zero vector}}, X = \overbrace{\{0, 1\}^N}^{\text{binary vector}}$$

$$F = \{f_i | i \in N\}$$

העולם

כאשר לכל $f_i, i \in N$ מוגדרת כך:

$$f_i(v) = v' \text{ כאשר } v' \text{ מוגדר כך}$$

$$f'_j = \begin{cases} 1 - v_j & j = i \\ v_j & j \neq i \end{cases}$$

$(V' \text{ אינדקס } j \text{ ב-} V)$

מצאו תכונה T כך ש $X_{B,F} \subseteq T$ והוכיחו זאת.

פתרון:

$$T = \{v \in \{0, 1\}^N \mid \text{מספר סופי של 1-ים}\}$$

הוכחה:

בסיס:

$$\bar{0} \in T \Leftarrow \text{יש 0 אחדים ולכן מספר סופי}$$

סגור:

$$\text{יהי } v \in T, \text{ אזי ב-} v \text{ יש מספר סופי של אחדים נסמן ב-} k.$$

$$\text{יהי } i \in N \text{ כך ש- } v' = f_i(v)$$

$$\text{לפי ההגדרה } v', \text{ הוא שונה מ-} v \text{ בביט בודד ולכן מספר האחדים ב-} v' \text{ הוא } k+1. v' \in T$$