לוגיקה ותורת הקבוצות - תרגול 7

<u>תרגיל 1</u>: נגדיר מערכת הוכחה חדשה לתחשיב הפסוקים מעל $\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$.

- קבוצת האקסיומות מכילה את הפסוקים מהצורה הבאה:

  לכל $\alpha,\beta,\gamma \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$,

  - A_1 : $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
  - A_2: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

- כללי היסק:

  - $MP(\alpha, \alpha \to \beta) = \beta$
  - MV (יוגדר בהמשך)

נסמן ב־$\Sigma \underset{N}{\vdash} \alpha$ את הטענה שפסוק α יכיח מתוך Σ במערכת החדשה.

נגדיר $MV(\alpha \to (\beta \to \alpha)) = ((\neg\alpha) \to (\neg\beta)) \to (\beta \to \alpha)$.

הוכיחו/ הפריכו: המערכת החדשה שלמה.

<u>תרגיל 2</u>: נגדיר מערכת הוכחה חדשה לתחשיב הפסוקים מעל $\mathrm{WFF}_{\{\wedge,\neg\}}$.

- קבוצת האקסיומות מכילה את הפסוקים מהצורה הבאה:

  - A_1: $\neg(\alpha \wedge (\beta \wedge \neg\alpha))$

- קבוצת כללי ההיסק:

  - $M_1(\alpha, \neg(\alpha \wedge \beta)) = \neg\beta$

נסמן ב־$\underset{N}{\vdash} \alpha$ את הטענה שפסוק α יכיח במערכת החדשה.

הוכיחו/ הפריכו: אם $\models \alpha$, אז $\underset{N}{\vdash} \alpha$.

גדירות

<u>הגדרה 1</u>: השמה המספקת קבוצת פסוקים Σ נקראת מודל של Σ.

קבוצת המודלים של Σ היא הקבוצה: $M(\Sigma) = \{v \in \mathrm{Ass} \mid v \models \Sigma\}$

(סימונים נוספים לקבוצת המודלים של Σ: $Ass(\Sigma), Mod(\Sigma), M_\Sigma$)

ניתן לראות שלכל קבוצת פסוקים Σ מתאימה קבוצת מודלים $M(\Sigma)$ <u>יחידה</u>, כלומר Σ מגדירה את $M(\Sigma)$.

דוגמאות ללא הוכחה:

Σ - קבוצת פסוקים	$M(\Sigma)$ - קבוצת המודלים של Σ
$\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$	$\{v_{\mathrm{T}}\}$
קבוצת כל הטאוטולוגיות, $\emptyset$, $\{p_1 \vee \neg p_1\}$	Ass (קבוצת כל ההשמות)
קבוצת סתירות, WFF	$\emptyset$
$\{p_i \mid i > 0\}$	$\{v_{\mathrm{T}}, \mathrm{FTTT}\ldots\}$
$\{p_{15}\}$	$\{v \in \mathrm{Ass} \mid v(p_{15}) = \mathrm{T}\}$
$\{p_{15}, p_1 \vee p_2\}$	$\{v \in \mathrm{Ass} \mid v(p_{15}) = \mathrm{T}\} \cap \{v \in \mathrm{Ass} \mid v(p_1) = \mathrm{T} \text{ or } v(p_2) = \mathrm{T}\}$

הגדרה 2: קבוצת השמות K נקראת גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים Σ כך ש־$M(\Sigma) = K$. אחרת K נקראת לא גדירה.

הוכחת גדירות

איך מוכיחים שקבוצת השמות K היא גדירה?

1. מראים קבוצת פסוקים Σ מפורשת.
2. מוכיחים כי $M(\Sigma) = K$ על ידי הכלה דו־כיוונית.

תרגיל 3: נגדיר: $K_{\text{even}} = \{\ v \mid v(p_i) = \mathrm{T}$ לכל i זוגי $\}$. הוכיחו כי K_{even} גדירה.

$M(\Sigma)$	Σ
$\{v_r\}$	$\{P_0, P_1, \ldots\}$
$\{v_f\}$	$\{\neg p_0, \neg p_1, \ldots\}$
Ass	$\{p_0 \vee \neg p_0\}$
Ass	
Ass	$\emptyset$
$\emptyset$	$\{p_0 \wedge \neg p_0\}$
$\emptyset$	
$\emptyset$	**WFF**
$\{v_T, \mathbf{FTT}, \ldots\}$	$\{p_i \vert i > 0\}$
$K_1 = \{v \vert\, v(p_{15}) = T\}$	$\Sigma_1 = \{p_{15}\}$
$K_2 = \{v \vert\, v(p_1) \vee v(p_2)\}$	$\Sigma_2 = \{p_1 \vee p_2\}$
$K_1 \bigcap K_2$	$\Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$

$$M(\Sigma_1 \bigcup \Sigma_2) = K_1 \bigcap K_2 \Leftarrow M(\Sigma_2) = K_2 \,\text{and}\, M(\Sigma_1) = K_1$$