

הגדרה אינדוקטיבית - של קבוצה

W – העולם

B – מוכל ב W קבוצת בסיס

F – קבוצת פעולות \ כללי יצירה

$X_{B,F}$ מוכלת ב W מוגדרת כקבוצה המקיימת:

1. B מוכל ב $X_{B,F}$

2. אם x_1, \dots, x_n שייך ל $X_{B,F}$ ו f שייך ל F אז $f(x_1, \dots, x_n)$ שייך ל $X_{B,F}$.

3. $X_{B,F}$ הוא קבוצה מינימלית שמקיימת את א ו ב.

הראינו ש- $X_{B,F} = \cup X_i$

$$X_1 = B$$

$$X_{i+1} = X_i \cup F(X_i)$$

משפט ההוכחה באינדוקציה

אם קבוצה Y מספקת את (א) ו- (ב) עבור F, B נתונים אז $X_{B,F} \subseteq Y$

הוכחה באינדוקציה מבנה:

כדי להוכיח ש- $X_{B,F} \subseteq Y$

1. $B \subseteq Y$

2. Y סגורה ל- F.

להראות $b \in X_{B,F}$

נראה סדרת יצירה $a_1 \dots a_n$ כך ש-

$$a_n = b \text{ ולכל } 1 \leq i \leq n$$

$a_i \in B$ או התקבלה מהקודמים הסדרה ע"י הפעלה פעולה מ- F.

להראות $b \notin X_{B,F}$ נציע תכונה (קבוצה) T ונראה

$$X_{B,F} \subseteq T$$

$$b \notin T$$

לוגיקה - תחשיב מורכב מ-

- הגדרה סינטקטית של שפה
- הגדרה של הסמנטיקה של מילים בשפה
- מערכת הוכחה עם אכסיומות וכללי היסק שמאפשרת להוכיח "משפטים"
- קשור בין אוסף הנוסחאות וייחיות (יש אפשרות להוכיח אותן) לבין סמנטיקה.

תחשיב הפסוקים

סינטקס של תחשיב הפסוקים

דוגמאות "משתנים" A, B, C
 $((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)), (A \rightarrow B), (+A)$
"השמש זורחת נסמן A , "חס בחוץ" נסמן B י"ע"
השמש זורח וחס בחוץ $(A \wedge B)$
אם השמש זורחת אז חס בחוץ $(A \rightarrow B)$

הגדרה של הסינטקס של תחשיב הפסוקים

קבוצה הפסוקים היא הקבוצה האינדוקטיבית שמוגדרת באופן הבא:

$$W = (\{\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, (,), \} \cup \{p_i | i \in N\})$$

$$B = \{p_i | i \in N\} \text{ בסיס:}$$

p_i נקראות פסוקים/פסוקים אטומיים
הפעולות:

$$F = \{F_{\neg}, F_{\wedge}, F_{\vee}, F_{\rightarrow}\} \bullet$$

$$F_{\neg}(\alpha) = (\neg \alpha) \bullet$$

$$F_{\vee}(\alpha, \beta) = (\alpha \vee \beta) \bullet$$

$$F_{\wedge}(\alpha, \beta) = (\alpha \wedge \beta) \bullet$$

$$F_{\rightarrow}(\alpha, \beta) = (\alpha \rightarrow \beta) \bullet$$

איך נראה ש:

$$((p_5 \wedge p_{11}) \rightarrow (p_6 \rightarrow p_5)) \text{ (פסוק חוקי בשפה)}$$

$$p_5 \quad .1$$

$$p_{11} \quad .2$$

$$(p_5 \vee p_{11}) \quad .3$$

$$p_6 \quad .4$$

$$(p_6 \rightarrow p_5) \quad .5$$

$$((p_5 \wedge p_{11}) \rightarrow (p_6 \rightarrow p_5)) \quad .6$$

האם: $p_2(p_1)$ פסוק ?

נוכח:

תכונה: כל פסוק הוא או אטומי או שמספר הסוגריים הפתוחים שווה למספר הסוגריים הסגורים.

הוכחה באינדוקציית מבנה:

בסיס לכל פסוק אטומי יש תכונה.

סגור נתונים α, β שמקיימים את התכונה

ב- α יש k סוגריים מכל סוג.

ב- β יש n סוגריים מכל סוג.

נסתכל על המקרה הפעלת $(\alpha \rightarrow \beta) = F_{\rightarrow}(\alpha, \beta)$

צ"ל ל- $(\alpha \rightarrow \beta)$ יש תכונה. (מספר הסוגריים מכל סוג $n+k+1$).

מסקנה מההוכחה ש- $p_2(p_1$ אינו פסוק. (צריך היה להראות לכל פעולה).

הגדרה: עבור סדרות סימנים לא ריקות α ו- β כך ש- $\alpha = a_1 \dots a_n, \beta = b_1 \dots b_k$

נאמר ש- α הוא רישא של β אם $n \leq k$ ובנוסף לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $a_i = b_i$

דוגמאות:

• ab הוא רישא של $abab$

• ab הוא רישא של $aabc$

• α הוא רישא ממש של β אם α רישא של β ו- $\alpha \neq \beta$ ($n < k$)

תכונה לכל פסוק β , אם α הוא ביטוי שהוא רישא ממש של β אז ב- α מספר הסוגריים השמאליים

גדול ממש ממספר הסוגריים הימניים.

מסקנה α לא פסוק

דוגמה:

$$\underbrace{\underbrace{((p_5 \rightarrow p_6 \vee (p_7 \wedge p_{11}))}_{\alpha}}_{\beta}$$

דוגמה לשפה חדשה שאין בה סוגריים ולכן אין בה קריאה יחידה:

סדרת סימנים $a \wedge b \wedge c$

(1) הפעלת \wedge על $a \wedge b$

(2) הפעלת \wedge על $b \vee c, a$

משפט הקריאה היחידה

1. לכל פסוק α אם יש פסוקים β_1, γ_1 וקשר \square

כך ש- $\alpha = (\beta_2 \square \gamma_2)$ ובנוסף יש פסוקים

$\alpha = (\beta_2 \triangle \gamma_2)$ וקשר \triangle כך ש-

אז בהכרח, $\beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2$, ו- \square ו- \triangle הם אותו קשר.

2. לכל פסוק α , אם יש פסוק β כך ש- $\alpha = (\neg \beta)$ אז אין קשר

\square ופסוקים γ, δ כך ש- $\alpha = (\gamma \square \delta)$ ואם קיים β^*

כך ש- $\alpha = (\neg \beta^*)$ אז $\beta = \beta^*$.

הוכחת (1): נניח בשלילה שיש $\square, \triangle, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$

$\alpha = (\beta_1 \square \gamma_1) = (\beta_2 \triangle \gamma_2)$

ולא מתקיימות טענות המשפט

מקרה (1) - נניח $\alpha = \underbrace{a_1}_{(} \underbrace{a_2 \dots a_n}_{b1)} \beta_1 \neq \beta_2$

נניח ש- β_1 הוא רישא ממש של β_2 .
 β_1 הוא פסוק ולפי מסקנה מתכונה,
 רישא ממש של פסוק אינו פסוק ולכן β_1 אינו פסוק.
סתירה לעובדה ש- β_1, β_2 פסוקים.
 מסקנה $\beta_1 = \beta_2$.

מקרה (2) - ידוע $\beta_1 = \beta_2$

אבל $\square \neq \triangle$

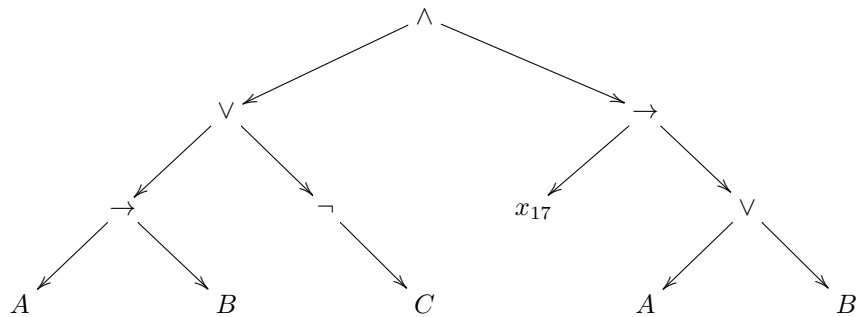
$$\alpha = \underbrace{a_1}_{(} \underbrace{\dots}_{b1} \underbrace{a_k}_{\square)} \underbrace{a_n}_{\triangle)}$$

\square ו- \triangle מופיעים באותו מקום ב- α ולכן זהים.

מקרה (3) ידוע $\square = \triangle, \beta_1 = \beta_2$ ונניח $\gamma_1 \neq \gamma_2$

לא יתכן כי שתיהן מתחילות באותו מקום ב- α ונמשכות עד הסוף ולכן זהות.
 כתוצאה מהקריאה היחידה אפשר להתאים לכל פסוק עץ יצירה שהעולם שלו הם
 פסוקים אטומיים ובכל צומת פנימי יש קשר, אם הקשר הוא \neg אז יש לצומת בן יחיד.
 אם הוא $\rightarrow, \vee, \wedge$ אז יש לו 2 בנים.

$$(((A \rightarrow B) \vee (\neg C)) \wedge (X_{17} \rightarrow (A \vee B)))$$



משפט הקריאה היחידה מבטיח לנו כי לכל פסוק קיים עץ יחיד.

סמנטיקה מטרה להתאים ערך אמת או שקר לפסוקים האטומיים ומזה להסיק ערך אמת או שקר

לפסוק כולו.

T - אמת

F - שקר

ערכי אמת: $\{T, F\}$

השמה היא פונקציה מקבוצה הפסוקים האטומיים לקבוצה $\{T, F\}$

$$V : \{p_i | i \in N\} \rightarrow \{T, F\}$$

$$V_2(p_i) = \begin{cases} T & i \% 2 = 0 \\ F & i \% 2 \neq 0 \end{cases}$$

סמנטיקה לפסוק כלשהו:

בהנתן $V : \{p_i | i \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{T, F\}$
נגדיר \rightarrow קבוצת הפסוקים:
 $\bar{V} : X_{B,F} \rightarrow \{T, F\}$

נגדיר פונקציות טבלת אמת:

$TT_{\neg} : \{T, F\} \rightarrow \{T, F\}$
 $TT_{\wedge} : \{T, F\} \wedge \{T, F\} \rightarrow \{T, F\}$
 $TT_{\vee} : \{T, F\} \vee \{T, F\} \rightarrow \{T, F\}$
 $TT_{\rightarrow} : \{T, F\} \rightarrow \{T, F\} \rightarrow \{T, F\}$