# לוגיקה – תרגול 12

# גדירות של קבוצת מבנים על ידי קבוצת פסוקים

## הוכחת גדירות של אוסף מבנים על ידי קבוצת פסוקים

#### איך מוכיחים שאוסף מבנים K הוא גדיר?

- .1 מגדירים קבוצת פסוקים  $\Sigma$  מפורשת
- $M(\Sigma)=K$ מראים על ידי הכלה דו־כיוונית ש-2.

 $. au = \langle R_1\left(\circ\right), R_2\left(\circ,\circ\right), F\left(\circ,\circ\right), c 
angle$ נתון המילון: נתון המילון

- . גדיר.  $K_1 = \{M \mid \operatorname{Image}\left(F^M\right) \subseteq R_1^M$  גדיר. מעל au המקיים  $M\}$  מבנה מעל .1
- . גדיר.  $K_2=\{M\mid (d,c^M)\in R_2^M$ כך ש־  $d\in D^M$  כי איברים כי יש אינסוף כי יש מבנה מעל המקיים כי יש אינסוף איברים .2

# הוכחת אי גדירות של אוסף מבנים על ידי קבוצת פסוקים

משפט הקומפקטיות: תהי  $\Sigma$  קבוצת נוסחאות,  $\Sigma$  ספיקה אמ"מ כל תת־קבוצה סופית של  $\Sigma$  ספיקה. איך מוכיחים אי גדירות של אוסף מבנים?

- $M\left( X
  ight) =K$ מניחים בשלילה שקיימת קבוצת פסוקים X כך בשלילה. 1
  - $K\cap M\left( Y
    ight) =\emptyset$ בוחרים בוחרים מפורשת מפורשת פסוקים מפורשת 2.
- $M\left(X\cup Y
  ight)=M\left(X
  ight)\cap M\left(Y
  ight)=K\cap M\left(Y
  ight)=\emptyset$ . מוכיחים כי  $X\cup Y$  אינה ספיקה מאחר ש־
  - .4 שכל תת קבוצה סופית  $D\subseteq X\cup Y$  ספיקה.
  - .5 אינו K הם סתירה למשפט הקומפקטיות ולכן אינו גדיר.

## <u>תרגיל 2</u>:

נתון המילון (1), ואוסף המבנים (2),  $T=\langle R_1\left(\circ\right),R_2\left(\circ,\circ\right),F\left(\circ,\circ\right),c\rangle$  נתון המילון (2), המקיים כי לכל  $d\in M$  יש מספר סופי של  $d'\in D^M$  כך ש- $d'\in M$  מבנה מעל T המקיים כי לכל הכיחו כי T אינו גדיר.

# לוגיקה — תרגול 12 גדירות בתחשיב היחסים

# גדירות של קבוצת מבנים על ידי קבוצת פסוקים

 $M(\Sigma)=\{M\mid M\models \Sigma$ י ו־כ מבנה מעל au ו־סמן בהינתן קבוצת פסוקים נסמן ניהי י מילון. בהינתן קבוצת פסוקים במוקים כך ש־ $M(\Sigma)=K$ יקרא אדיר, אם קיימת קבוצת פסוקים כך ש־

## הוכחת גדירות של אוסף מבנים על ידי קבוצת פסוקים

איך מוכיחים שאוסף מבנים K הוא גדיר?

- .1 מגדירים קבוצת פסוקים  $\Sigma$  מפורשת.
- $M(\Sigma)=K$ מראים על ידי הכלה דו־כיוונית ש.2

 $. au = \langle R_1 \left( \circ \right), R_2 \left( \circ, \circ \right), F \left( \circ, \circ \right), c \rangle$  תרגיל 1: נתון המילון

גדיר.  $K_1=\{M\mid {\rm Image}\left(F^M\right)\subseteq R_1^M$  המקיים מעל  $\tau$  המבנה מעל מבנה  $M\}$  .1 .1  $\underline{encode}$ 

$$\Sigma_1 = \{ \forall x_1 \forall x_2 R_1 (F(x_1, x_2)) \}$$

נראה כי  $K_1=M\left(\Sigma_1\right)$  כלומר כי  $M\in M$  (כלומר  $M\models \Sigma_1$  (כלומר כלומר  $M\models W$  (כלומר  $M\models W$  (כלומר  $M\models W$  (כלומר  $M\models W$  (בלומר  $M\models W$  (בלומר M

גדיר.  $K_2=\{M\mid (d,c^M)\in R_2^M$ כך ש־  $d\in D^M$  כי אינסוף אינסוף כי יש מבנה מעל au המקיים כי יש אינסוף איברים  $d\in D^M$  פתרון:

. באופן הבא: הוגדר באופן  $lpha_n$  כאשר , $\Sigma_{
m inf}=\{lpha_1,lpha_2,lpha_3,lpha_4,\ldots\}$  פסוקים פסוקים בהרצאה ראינו

$$\alpha_n = \exists x_1 \dots \exists x_n \left( \bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg (x_i \approx x_j) \right)$$

. אינסופי.  $D^M$  אמ"מ אמ"מ הוכחנו כי  $M \in M$  אמ"מ הוכחנו כי  $M \in M$  אמ"מ הוכחנו כי  $M \models \alpha_n$  אמ"מ אינסופי. במקרה זה נגדיר קבוצה אינסופית של פסוקים בסוקים  $\Sigma_2 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\}$ 

משמעות הפסוק  $(d,c^M)\in R_2^M$ יש לפחות n איברים שונים d כך ש־ $(d,c^M)$ , והוא יוגדר באופן משמעות הפסוק הינה שב־ $(d,c^M)$ 

$$\varphi_n = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \left[ \bigwedge_{i=1}^n R_2(x_i, c) \land \bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg (x_i \approx x_j) \right]$$

 $(d,c^M)\in R_2^M$  אמ"מ בקיימים מקיימים איברים שונים d איברים שונים n אמ"מ ב $D^M$  קיימים מתקיים:  $K_2=M$  (בעת גוכיח כי  $K_2=M$  (בעת גוכיח כי ישונים)

 $\iff$  ( $M \nvDash \Sigma_2$  כלומר  $M \notin M$  ( $\Sigma_2$ )

 $\Longleftrightarrow M \nvDash_s \Sigma_2$ עד כך sהשמה קיימת קיימת

 $\Longleftrightarrow M \nvDash_s \varphi_n$ קיים  $n \in \mathbb{N}$  קיים

 $\iff (d,c^M)\in R_2^M$  קיים d שכולם מקיימים איברים איברים איברים איברים איברים איברים  $D^M$ כך כך שב־ $n\in\mathbb{N}$  כל איברים איברים איברים שונים שונים שונים שונים איברים אינסוף איברים d שכולם מקיימים  $D^M$ כר  $M\notin K_2$ 

## הוכחת אי גדירות של אוסף מבנים על ידי קבוצת פסוקים

משפט הקומפקטיות: תהי  $\Sigma$  קבוצת נוסחאות,  $\Sigma$  ספיקה אמ"מ כל תת־קבוצה סופית של  $\Sigma$  ספיקה. איך מוכיחים אי גדירות של אוסף מבנים?

- $M\left( X
  ight) =K$ ניחים בשלילה שקיימת קבוצת פסוקים ל כך ש-1.
  - $K\cap M\left( Y
    ight) =\emptyset$ בוחרים בוחרים מפורשת מפורשת פסוקים מפורשת.
- $M\left(X\cup Y
  ight)=M\left(X
  ight)\cap M\left(Y
  ight)=K\cap M\left(Y
  ight)=\emptyset$ . מוכיחים כי  $X\cup Y$  אינה ספיקה מאחר ש־3.
  - .4 שכל תת קבוצה סופית  $D\subseteq X\cup Y$  ספיקה.
  - .5 אינו אינו ולכן K אינו אינו גדיר.

#### <u>תרגיל 2:</u>

נתון המילון  $T=\langle R_1\left(\circ\right),R_2\left(\circ,\circ\right),F\left(\circ,\circ\right),c
angle$  נתון המילון המילון  $T=\langle R_1\left(\circ\right),R_2\left(\circ,\circ\right),F\left(\circ,\circ\right),c
angle$  עם בנה מעל T המקיים כי לכל T יש מספר סופי של T יש מספר מפר T אינו T

#### הוכחה:

 $M\left( X
ight) =K$ ניח בשלילה שקיימת קבוצת פסוקים X כך ש-1.

- $Y=\Sigma_2$  נסמן.
- :מיקה ספיקה אינה  $X \cup Y$  נראה כי
- $d(d',d) \in R_2^M$ יש מספר סופי של  $d' \in D^M$  כך יש מספר  $d \in D^M$  לכל : $M \in K$
- על אינסופי של כך  $c^M=d\in D^M$  (קיים  $D^M$  כי ב־ $D^M$  מחדוגמה הקודמת (קיים  $M\in M\left(Y\right)$  אינסופי של : $M\in M\left(Y\right)$  כך ש־ $d'\in D^M$

. אינה ספיקה אינה אינה  $\emptyset=K\cap M\left(Y\right)=M\left(X\right)\cap M\left(Y\right)=M\left(X\cup Y\right)$  לכן

:ספיקה  $X \cup Y$  ספיקה

. ספיקה היא ספיקה סופית ספיקה איז סופית פי סופית כי כל תת־קבוצה על פי סופית מספיק להראות מספיק

 $D_{X}=D\cap Y$  ,  $D_{X}=D\cap X$  נניח כי תרקבוצה חופית תתקבוצה חופית ת

.( $D_Y=\emptyset$  אם m=1)  $arphi_m\in D_Y$ יהי ביותר כך שיותר הגדול ביותר המספר הגדול היותר כ

 $.F^{M}\left(d,d'
ight)=1$  כאשר געל המילון במבנה הבא א $M=\langle\underbrace{\{1,2,\ldots,m\}}_{D^{M}},\emptyset,\underbrace{D^{M} imes\{1\}}_{R_{2}^{M}},F^{M},1
angle: au$  כאשר כאשר במבנה הבא מעל המילון כתבונן במבנה הבא מעל המילון אינויים במבנה הבא מעל המילון אונויים במבנה הבא מעל המילון אינויים במבנה הבא מעל המילון אונויים במבנה הבא מעל המילון אינויים במבנה הבא מעל המילון אינויים במבנה הבא מעל המילון אינויים במבנה הבא מעל המילון אונויים במבנה הבא מעל המילון אונויים במבנה הבילון אונויים במבנה במבנה הבי

 $:M \vDash D_Y$  נראה •

 $.ig(d,c^Mig)\in R_2^M$  מתקיים  $d\in D^M$  לכל

 $A(d,c^M)\in R_2^M$ יש כך שונים שונים M איברים שב וער וע בי  $|D^M|=m$ מכיוון ש

 $A(d,c^M)\in R_2^M$ יש ב־ $A(d,c^M)\in R_2^M$ יש בירים שונים  $A(d,c^M)$  לפחות) בפרט לכל יש בי

 $M \vDash \varphi_i$  מתקיים  $i \le m$  לכן לכל

 $M \vDash D_Y$  כלומר  $M \vDash \varphi_i$  ולכן ולכן  $i \le m$  אזי  $\varphi_i \in D_Y$  יהי

 $:M \vDash D_X$  נראה •

 $d(d',d) \in R_2^M$ יש מספר סופי של  $d' \in D^M$  סופי ולכן לכל לכל  $D^M$ 

 $M \vDash X$  ולכן  $M \in K = M\left(X\right)$  כלומר

 $M \vDash D_X$  נקבל כי  $D_X \subseteq X$ מכיוון ש

 $M \models D_X \cup D_Y = D$  :מסקנה

הראינו כי כל תת קבוצה סופית של  $X \cup Y$  ספיקה, ולכן לפי קומפקטיות  $X \cup Y$  ספיקה.

הגענו אינה K אינה לסתירה, ולכן 3+4 הגענו לסתירה.

# לוגיקה תרגול 12

#### 2019 ביולי

#### :1 תרגיל

 $\Sigma_1 = \{\forall x_1 \forall x_2 R_1(F(x_1,x_2))\} : \\ K_1 = M(\Sigma_1) \\ (C) \text{ (If } F_1) M \in M(\Sigma_1) \\ \Leftrightarrow (M \models \Sigma_1) M \in M(\Sigma_1) \\ \Leftrightarrow M \models \forall x_1 \forall x_2 R_1(F(x_1,x_2)) \end{cases}$   $\vdots \\ \Leftrightarrow F^M(d_1,d_2) \in R^M \\ \Leftrightarrow Image(F^M) \subseteq R^M \\ M \in K_1 \\ \\ \alpha_2 = \exists x_1 \exists x_2 \neg (x_1 \approx x_2) \\ \alpha = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i \leq j \leq n} \neg (x_i \approx x_n)) \\ \sum_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i \geq 2\} \\ \varphi_n = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i \leq j \leq n} \neg (x_i \approx x_j) \bigwedge_{1 \leq i \leq n} R(x_i,c)) \\ \sum_{1 \leq i \leq n} \{\varphi_n \mid n \geq 2\} \\ \sum_{1 \leq i \leq n} \{\varphi_n \mid n \geq 2\} \\ \\ \sum_{1 \leq i \leq n} \{\varphi_n \mid n \geq 2\} \\ \\$ 

#### :2 תרגיל

- M(x)=K ע כך א כד פסוקים קבוצת קבוצת שקיימת .1
  - $Y = \{ \varphi_n | n \ge 2 \}$  .2
  - . ה ספיקה אינה אינה אינה אינה  $X \cup Y$  .
- $d(d',d)\in R_2^M$ כך ש־  $d'\in D^M$  כיש מספר סופי מספר לכל : $M\in K$
- $d'\in D^M$  של מספר אינסופי של  $D^M$ : מהדוגמה הקודמת נובע כי ב־ $D^M$  מר מהדוגמה מהדוגמה ( $d',c^M)\in R_2^M$  כך של לכן  $M(X\cup Y)=M(x)\cap M(Y)$  אינה של  $K\cap M(Y)=\emptyset$  ולכן  $X\cup Y$  אינה ספיקה.
- .4 מפיקה. א ספיקה. על פי קומפקטיות מספיק להראות כי כל תת־קבוצה חיא ספיקה. א ספיקה מספיק להראות מספיק להראות כי כל הת

נניח כי  $D_X=D\cap Y$   $D_X=D\cap X$  נניח כי  $P_X=D\cap Y$  תת־קבוצה סופית, נסמן  $P_X=D\cap Y$  המספר הגדול ביותר כך ש־ $P_X=D\cap Y$  אם  $P_X=D\cap Y$  והי  $P_X=D\cap Y$  אם  $P_X=D\cap Y$  מילון  $P_X=D\cap Y$  מילון במבנה הבא מעל מילון  $P_X=D\cap Y$  מילון ש $P_X=D\cap Y$  מכיוון ש $P_X=D\cap Y$  מילון שברים  $P_X=D\cap Y$  מינון ש $P_X=D\cap Y$  מינון ש $P_X=D\cap Y$  מינון שברים  $P_X=D\cap Y$  מינון ש $P_X=D\cap Y$  מינון מ $P_X=D\cap Y$  מינון מונון מונ

- $M \vDash D_x$  נראה •
- $X \cup Y$  הומפקטיות לפי ולכן ספיקה של א ספיקה של של של סופית של הראינו כי כל תת־קבוצה חופית של א ספיקה. ספיקה.
  - .5 מסעיפים k נקבל סתירה ולכן +4 נקבל מסעיפים .5