

הרצאה 8 לוגיקה

מטרה: $X \vdash \alpha$ או $X \models \alpha$

נאותות:

$X \models \alpha$ או $X \vdash \alpha$

$X \not\models \alpha$ או $X \not\vdash \alpha$

למה 1:

X עקבית \Leftrightarrow כל תת-קבוצה סופית של X עקבית.

למה 2:

$X \not\models \alpha \Leftrightarrow X \cup \{\neg\alpha\}$ עקבית

למה 3:

אם X ספיקה אז X עקבית

מטרה:

להוכיח את הכיוון ההפוך

צ"ל X עקבית אז X ספיקה

הגדרנו:

X עקבית מקסימלית אם ורק אם לכל α בדיוק אחד מהבאים מתקיים $X \vdash \alpha$ או $X \vdash \neg\alpha$

למה 5:

לכל קבוצה עקבית X קיימת קבוצה עקבית מקסימלית Y , $Y \supseteq X$.

למה 6:

לכל קבוצת פסוקים X

X עקבית אם ורק אם X ספיקה

\Rightarrow עס' למה 3

\Leftarrow

נתון X עקבית

עס' למה 5 קיימת $Y \supseteq X$ כך ש- Y מקסימלית

נגדיר השמה v :

$$Y \vdash p_i \Leftrightarrow v(p_i) = T$$
$$Y \vdash \neg p_i \Leftrightarrow v(p_i) = F$$

v מוגדרת היטב

טענה:

לכל $\alpha \in Y$ מתקיים $v \models \alpha$.

כלומר $v \models Y$ לא נובח.

אז $v \models X$ והראינו ש- X ספיקה.

נסתכל על $\alpha \in X$ אז $\alpha \in Y$ ולכן $v \models \alpha$.

משפט השלמות:

אם $X \vdash \alpha$ אז $X \models \alpha$

הוכחה:

נתון $X \vdash \alpha$ ונניח בדרך השלילה ש- $X \not\models \alpha$.

עס' למה ' $X \cup \{\neg \alpha\}$ עקבית ולכן למה 6 ספיקה
כלומר קיימת v

$$v \models X$$

$$v \models \neg \alpha$$

$$v \models \alpha$$

$$X \vdash \alpha \Rightarrow v \models \alpha$$

סתירה

מסקנה $X \vdash \alpha$.

מסקנה ממשפט השלמות והנאותות

$$\boxed{\vdash \alpha \Leftrightarrow \models \alpha}$$

סיכום של הוכחת משפט השלמות

$$\boxed{X \vdash \alpha \Leftarrow X \models \alpha}$$

רצינו:

$$\begin{array}{ccc} X \not\models \alpha & \Leftrightarrow & X \not\models \alpha \\ \uparrow & & \Downarrow \\ (\text{Sfika}) X \cup \{\neg \alpha\} & \Leftrightarrow & (\text{Ikvit}) X \cup \{\neg \alpha\} \end{array}$$

$$\{v \models X \text{ ש-} v \text{ כן קבוצת ההשמות}\} = M(X) \\ v \text{ היא מודל של } X$$

משפט הקומפקטיות

לקבוצת פסוקים X יש מודל (היא ספיקה) אם ורק אם לכל תת-קבוצה סופית שלה יש מודל (היא ספיקה).

הוכחה:

X ספיקה $\Leftrightarrow X$ עקבית.
 \Leftrightarrow כל תת קבוצה סופית שלה עקבית
 \Leftrightarrow כל תת קבוצה סופית שלה היא ספיקה.

דוגמא לשמוש בקומפקטיות

נתונות שתי קבוצות של פסוקים Σ_1 ו- Σ_2 כך ש-

1. אין השמה שמספקת גם את Σ_1 וגם את Σ_2 .

$$M(\Sigma_1) \cap M(\Sigma_2) = \emptyset$$

2. כל השמה מספקת או את Σ_1 או את Σ_2 .

דוגמא פשוטה:

$$\Sigma_2 = \{\neg p_0 \vee \neg p_1\}, \Sigma_1 = \{p_0 \wedge p_1\}$$

כאשר Σ_2, Σ_1 במקרה סופיות

צריך להוכיח:

שקיים פסוק p_1 כך ש- Σ_1 שקולה לו כלומר לכל v : $v \models p_1 \Leftrightarrow v \models \Sigma_1$

וקיים פסוק p_2 ששקול ל- Σ_2 .

שאלה:

האם $p_1 = \bigwedge_{\alpha \in \Sigma_1} \alpha$ הוא פתרון?

לא כאשר Σ_1 היא אינסופית.

דוגמא:

$$\Sigma_1 = \{p_0, \neg p_0, p_0 \vee \neg p_0\} \cup \{p_i, \neg p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

$$\Sigma_2 = \{p_0 \vee \neg p_0\}$$

$\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ אינה ספיקה

עס' משפט הקומקטיות קיימת קבוצה $D \subseteq \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ סופית ולא ספיקה.

עס' קומפקטיות קיימת $D \subseteq \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

D סופית, לא ריקה, לא ספיקה

$$D_1 = D \cap \Sigma_1, D_2 = D \cap \Sigma_2$$

לפחות אחת מ- D_1, D_2 אינה ריקה כי D אינה ריקה.

נניח D_1 אינה ריקה

$$D_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subseteq \Sigma_1$$

$$p_1 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k$$

$$p_2 = \neg p_1$$

נוכיח שלכל השמה v :

$$v \models \Sigma_1 \Leftrightarrow v \models p_1$$

$$\bullet \alpha \in \Sigma_1 \Rightarrow v \models \alpha \Leftrightarrow v \models \Sigma_1$$

בפרט ל- D_1

$$v \models \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k = p_1$$

$$\bullet v \models \Sigma_1 \Leftrightarrow v \models D_2$$

אבל נתון $D = D_1 \cup D_2$ אינה ספיקה ולכן $v \not\models D_1$

כלומר קיים $\alpha \in D_1$ כך ש- $v \not\models \alpha$ מסקנה $v \not\models p_1$.

$$\neg p_1 = p_2$$

$$v \models p_2 \Leftrightarrow v \models \Sigma_2, v \models \Sigma_2$$

$$v \models \neg p_1 \Leftrightarrow v \not\models p_1 \Leftrightarrow v \not\models \Sigma_1 \Leftrightarrow v \models \Sigma_2$$

\parallel
 p_2

דוגמה:

נוסחה פסוקים שמתארת את המערכת $M: \alpha_M$

נוסחה פסוקים שמתארת את המפרט φ

$\alpha_M \wedge \neg \varphi$ ספיקה ?

• כן: מצאנו באג

• לא: המערכת נכונה.

מכרכת עם 2 תהליכים p_1 ו- p_2 שיש להם בקשות ויש ארביטר שמחליט

מי יקבל את בקשתו.

לכל תהליך יש דגל:

• $P_i: R_1$ מציג בקשה (request)

• G_i : דגל של הארביטר.

כש- G_1 הוא 1 אז p_1 מקבל את התור.

כש- G_2 הוא 1 אז p_2 מקבל את התור.

לארביטר יש גם משתנים:

• D_1 - קבל את התור בפעם הקודמת.

• D_2 - קבל את התור בפעם הקודמת.

תאור המערכת:

EXEC=

$$(G_1^1 \leftrightarrow (R_1^1 \wedge (\neg R_2^0 \vee D_2^1)))$$

$$(G_2^1 \leftrightarrow (R_2^1 \wedge (\neg R_1^0 \vee D_1^1)))$$

מפרט:

$$\varphi_1 = \neg(G_1^1 \wedge G_2^1)$$

$$\text{EXEC}_1(\underbrace{G_1^1}_1 \wedge \underbrace{G_2^1}_1)$$

שלילת המפרט

האם הפסוק ספיק ?

$$\text{EXEC}_1 \neg(D_1 \wedge D_2) = \alpha'_M$$

נבדוק $\alpha'_M \wedge (G_1 \wedge G_2)$ שלילת המפרט

ספיק? לא.

מסקנה:

המערכת המתוקנת מספקת את המפרט $\neg(G_1 \wedge G_2)$.
נניח שהנוסחה ספיקה

$$v \models \mathbf{EXEC} \wedge \neg(D_1 \wedge D_2)$$

$$\wedge (G_1 \wedge G_2)$$

$$\Rightarrow \bar{v}(G_1) = T \quad \bar{v}(G_2) = T$$

$$\Rightarrow \bar{v}(R_1 \wedge (\neg R_2 \vee D_2)) = T$$

$$\Rightarrow \bar{v}(R_1) = T$$

$$* \bar{v}(\neg R_2 \vee D_2) = T$$

$$\bar{v}(G_2) = T \Rightarrow \bar{v}(R_2) = T$$

$$* * \bar{v}(\neg R_2) = F$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{***} \bar{v}(D_2) = T$$

מפרט דרישה

$$\varphi_2 = (R_1 \wedge \neg R_2 \rightarrow G_1)$$

$$\alpha'_M \wedge (R_1 \wedge \neg R_2 \wedge \neg G_1)$$

שלילת המפרט