לוגיקה הרצאה 3

תחשיבי פסוקים

סינטקס: בסיס $\{p_i | i \in N\}$ - הפסוקים האטומיים.
$F_\neg(\alpha) = (\neg\alpha)$
$F_\square(\alpha, \beta) = (\alpha\square\beta)$ ($\vee, \wedge, \rightarrow$)

WFF – well form formulas

סמנטיקה:

התאמה לפסוקים ערכי אמת (T,F)

$p_0 \vee p_2$
השמה T F
לפסוק ערך T
F F
F

הגדרת סמנטיקה:

נתונה השמה
$V : \{p_i | i \in N\} \rightarrow \{T, F\}$
נגדיר השמה $\widehat{V}$
$\widehat{V} : WFF \rightarrow \{T, F\}$

הגדרת $\widehat{V}$:

1. לכל פסוק אטומי $\widehat{V}(p_i) = v(p)$

2. לפסוק במבנה $\alpha = (\neg\beta)$
$TT_\neg : \{T, F\} \rightarrow \{T, F\}$
truth table
$TT_\neg(T) = F$
$TT_\neg(F) = T$

β	$\neg\beta$
T	F
F	T

$\widehat{V}$(פסוק)

$\widehat{V}(\neg(\alpha)) = TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha))$

3. $\alpha = (\beta \vee \gamma)$

$$\widehat{V}(\alpha) = TT_{\vee}(\widehat{V}(\beta), \widehat{V}(\gamma))$$
$$TT_{\vee}(T,T) = T$$
$$TT_{\vee}(T,F) = T$$
$$TT_{\vee}(F,T) = T$$
$$TT_{\vee}(F,F) = F$$

α	β	$\alpha \vee \beta$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

4. $\alpha = (\beta \vee \gamma)$

$$\widehat{V}(\alpha) = TT_{\wedge}(\underbrace{\widehat{V}(\beta)}_{\text{truth of sub}}, \underbrace{\widehat{V}(\gamma)}_{\text{truth of sub}})$$
$$TT_{\wedge}(T,T) = T$$
$$TT_{\wedge}(\frac{T}{\frac{F}{F}}, \frac{F}{\frac{T}{F}}) = F$$

α	β	$\alpha \wedge \beta$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

5. $\alpha = (\beta \rightarrow \gamma)$

האם β אמת אז γ אמת

$$\widehat{V}((\beta \rightarrow \gamma)) = TT_{\rightarrow}(\widehat{V}(\beta), \widehat{V}(\gamma))$$

β	γ	$\beta \rightarrow \gamma$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

אם המכונית תתקלקל אז אגיע באחור

$A \rightarrow B$

F T

המכונית לא התקלקלה והגעתי באיחור

סיכום:

בסמנטיקה של תחשיב הפסוקים:

בהינתן $V : \{p_i | i \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{T, F\}$

מגדירים $\widehat{V} : WFF \rightarrow \{T, F\}$

באופן הבא:
אם $\alpha = p_i$ אז $\widehat{V}(\alpha) = V(\alpha)$
אם $\alpha = (\neg\beta)$ אז $\widehat{V}(\alpha) = TT_\neg(\widehat{V}(\beta))$
אם $\alpha = (\beta\Box\gamma)$ אז $\widehat{V}(\alpha) = TT_\Box(\widehat{V}(\beta), \widehat{V}(\gamma))$

טענה:

בהינתן השמה v,
לכל פסוק α, $\widehat{V}(\alpha)$
מתאים ל־α ערך אמת יחיד שנקבע ע"י v וע"י
פונקציות טבלאות האמת $(TT_\Box)$.

הוכחה:

באינדוקצייה על מבנה הפסוק
מסתמכת על כך

- $\star$ v פונקציה
- $\star$ $TT_\Box$ פונקציות

כשה דנים בסמנטיקה קובעים סדר קדמאות בין קשרים שיאפשר לוותר על חלק מהסוגריים:

- $\star$ הקשר $\neg$ מופעל ראשון
- $\star$ קשרים$\vee, \wedge, \leftrightarrow$מופעלים אחרי
- $\star$ הקשר $\rightarrow$אחרי

$\neg p_0 \vee p_1$ כמו לכתוב $((\neg p_0) \vee p_1)$

מושגים סמנטיים נוספים

כאשר $T = \widehat{V}(\alpha)$ נאמר ש־vמספקת את α
ונסמן $v| = \alpha$

הגדרה:

פסוק α הוא טאוטולוגיה אם הוא מקבל ערך T לכל השמה:

דוגמאות:

$\neg p_o \vee p_o$, $\neg\alpha \vee \alpha$
טאוטולוגיה:
כל השורות בטבלת האמת
יהא T
[כל ההשמות מספקות את הפסוק]

$\neg p_0 \vee p_0$	$\neg p_0$	P_0
T	F	T
T	T	F

הוכחה ש־ $\alpha \vee \neg\alpha$ הוא טאוטולוגיה:

$\widehat{V}(\alpha \vee \neg\alpha) = TT_{\vee}(\widehat{V}(\alpha), \widehat{V}(\neg\alpha)) =$

$TT_{\vee}(\widehat{V}(\alpha), TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha))$

<u>2 מקרים:</u>

1. $V(\alpha) = T \Leftarrow TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha)) = F \Leftarrow TT_{\vee}(T,F) = T$
2. $V(\alpha) = F \Leftarrow TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha)) = T \Leftarrow TT_{\vee}(F,T) = T$

על כן $\alpha \vee \neg\alpha = |$

דוגמאות נוספות לטאוטולוגיה:

$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

איך נוכיח שזאת טאוטולוגיה?

להראות <u>לכל השמה</u> ערך הפסוק הוא T.(מספר אינסופי)

טענה:

לכל פסוק $\alpha \in WFF$

ולכל שתי השמות v_1, v_2מתקיים:

אם לכל פסוק אטומי שמופיע ב־ α מתקיים $v_1(p_i) = v_2(p_i)$

אז $\widehat{V_1}(\alpha) = \widehat{V_2}(\alpha)$

α, β	$\neg\beta$,$\neg\alpha$	$\alpha \to \beta$	$\neg\beta \to \neg\gamma$	$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\gamma)$
T,T	F,F	T	T	T
T,F	T,F	F	F	T
F,T	F,T	T	T	T
F,F	T,T	T	T	T

שיטת הוכחה שניה שפסוק הוא טאוטולוגיה:

נגדיר על $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

נניח בדרך השלילה שאינה טאוטולוגיה ולכן קיימת השמה v:

$\widehat{V}()$

$\Rightarrow$

$\widehat{V}(\alpha \to \beta) = T$

$\widehat{V}(\neg\beta \to \neg\alpha) = F$

$TT_{\neg}(\widehat{V}(\beta)) = \widehat{V}(\neg\beta) = T$

$TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha)) = \widehat{V}(\neg\alpha) = F$

$\Rightarrow$

$\widehat{V}(\beta) = F, \widehat{V}(\alpha) = T$

$\widehat{V}(\alpha \to \beta) = F$

מסקנה:

לא קיימת v שנותנת לפסוק ערך Fכלומר הוא טאוטולוגיה.

דוגמאות נוספות לטאוטולוגיה:

ראינו $\alpha \vee \neg\gamma$

$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

דסטריבוטיביות:

$((\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)))$

$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$

דה מוגרן:

$\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \beta)$

$\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$

מושג סמנטי נוסף: סתירה

ספקו הוא סתירה אם כל השמה נותנת לו ערך F.

דוגאמות:

$\alpha \wedge \neg\alpha$

כל שלילה של טאוטולוגיה

$\beta = \neg\alpha$ ו־α טאוטולוגיה

$\widehat{V}((\neg\alpha)) = TT_\neg(\widehat{V}(\alpha)) = TT_\neg(T) = F$

לכל השמה

.

נתונה α שאינה טאוטולוגיה, האם היא סתירה ?

p_0 לא טאוטולוגיה ולא סתירה.

טענה:

α הוא סתירה $\Leftrightarrow$ $\neg\alpha$ הוא טאוטולוגיה

$\neg\alpha$ הוא סתירה $\Leftrightarrow$ α הוא טאוטולוגיה

פסוק <u>הינו ספיק</u> אם קיימת השמה שמספקת אותו.

הגדרה:

השמה מספקת קבוצת פסוקים X

אם היא מספקת את כל אחד מהפסוקים ב־X.

$v \models \alpha, \forall\alpha \in X, \Leftrightarrow v| = X$

$v \models \bigwedge_{\alpha \in X} \alpha$

אם X קבוצה אינסופית

אז הביטוי <u>אינו פסוק</u>

מושג נוסף:

פסוק α <u>נובע לוגית</u> צפסוק β

אם כל השמה שמספקת את β מספקת גם את α.

$\beta| = \alpha$

"$\subseteq$"

דוגמא:

Eror 404 "white board erased"

למה:

$\alpha \models \beta$ אם ורק אם $\models \alpha \to \beta$ (הוא טאוטולוגיה).

הוכחה:

נתון $\models \alpha \to \beta$
צ"ל $\alpha \models \beta$
נתונה השמה $v \models \alpha$
נראה ש- $v \models \beta$
נניח שלא:
$\widehat{V}(\alpha) = T$
$\widehat{V}(\beta) = F$
$\widehat{V}(\alpha \to \beta) = F$
בסתירה לנתון $TT_{\to}(T, F) = F$
ש-$\alpha \to \beta$ הוא טאוטולוגיה.

$x \in A/(B/C) \Leftrightarrow$
$x \in A \wedge x \notin (B/C) \Leftrightarrow$
$x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C \Leftrightarrow$
$x \in (A/B) \cup x \in A \cap C$