לוגיקה ־ תרגול 8

גדירות ־ תזכורות

הגדרה 1: השמה המספקת קבוצת פסוקים Σ נקראת מודל של Σ.
קבוצת המודלים של Σ היא הקבוצה: $M(\Sigma) = \{v \in \mathrm{Ass} \mid v \models \Sigma\}$

הגדרה 2: קבוצת השמות K נקראת גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים Σ כך ש־$M(\Sigma) = K$. אחרת K נקראת לא גדירה.

הוכחת גדירות

איך מוכיחים שקבוצת השמות K היא גדירה?

1. מראים קבוצת פסוקים Σ מפורשת.
2. מוכיחים כי $M(\Sigma) = K$ על ידי הכלה דו־כיוונית.

תרגיל 1: לכל $j \in \mathbb{N}$ נגדיר את קבוצת ההשמות : $K_j = \{ v \mid$ נותנת T לכל היותר ל־j אטומים $v\}$.
הוכיחו כי לכל $j \in \mathbb{N}$, הקבוצה K_j גדירה.

תרגיל 2:

תהיינה $X, Y \subseteq WFF$.
הוכיחו כי $M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y)$.

משפט הקומפקטיות ־ תזכורת

לכל קבוצת פסוקים Σ מתקיים, Σ ספיקה אמ"מ כל תת־קבוצה סופית של Σ ספיקה.

הוכחת אי־גדירות

איך מוכיחים שקבוצת השמות K אינה גדירה?

1. מניחים בשלילה ש־K גדירה ו־X היא קבוצת הפסוקים המגדירה אותה $M(X) = K$.

   (לשים לב: לא ניתן להניח דבר על X פרט לכך שהיא מגדירה את K).

2. בוחרים קבוצת פסוקים מפורשת Y שעבורה ידוע (או שניתן להוכיח בקלות) מהו $M(Y)$ (קבוצות שכדאי לנסות: $Y = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $Y = \{\neg p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$).

3. מוכיחים ש־$X \cup Y$ איננה ספיקה על ידי כך שמראים ש־$M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y) = K \cap M(Y) = \emptyset$.

4. מוכיחים ש־$X \cup Y$ ספיקה על ידי שימוש במשפט הקומפקטיות.

   תהי $D \subseteq X \cup Y$ סופית.

   נסמן $D_X = D \cap X$ ו־$D_Y = D \cap Y$

   נבנה השמה v המספקת את D_Y ו־D_X. נתחיל בבניה ע"פ מבנה הפסוקים ב־D_Y ונשלים אותה כך ש־$v \in K$.

   נוכיח שהבניה מספקת את D_Y.

   $v \in K \Leftarrow v$ מספקת את $X \Leftarrow v$ מספקת את D_X.

   v מספקת את D_X ו־$D_Y \Leftarrow v$ מספקת את $D = D_X \cup D_Y$.

5. מ־3+4 מקבלים סתירה ולכן K אינה גדירה.

תרגיל 3:

הוכיחו כי K_{fin} = $\{v \in \mathrm{Ass} \mid$ למספר סופי של אטומים T נותנת $v\}$ אינה גדירה.

תרגיל 4:

הוכיחו כי K_{inf} = $\{v \in \mathrm{Ass} \mid$ לאינסוף אטומים T נותנת $v\}$ אינה גדירה.

תרגול 8 לוגיקה

תרגיל 2:

תהיינה $X, Y \subseteq \mathrm{WFF}$
הוכיחו כי $M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y)$

הוכחה:

$\Leftarrow$ תהיי $v \in M(X) \cap M(Y)$
יהיה $\varphi \in X \cup Y$ לפי הגדרת איחוד $\varphi \in X$ או $\varphi \in Y$
בה"כ $\varphi \in X$, לפי הגדרת חיתוך $v \in M(X)$ ולפי הגדרת קבוצת מודלים.
$v \vDash \varphi$. לפי הגדרת מודלים קבוצת מודלים $v \in M(X \cup Y)$.
באותו אופן ההוכחה אם $\varphi \in Y$.
$\Rightarrow$ $\subseteq$: $v \in M(X \cup Y)$.
צ"ל: $v \in M(X)$ וגם $v \in M(Y)$
$M(x)$: יהיה $\varphi \in X$. מהגדרת קבוצת מודלים $v \vDash \varphi$.
מהגדרת קבוצת מודלים $v \in M(x)$.
באותו אופן עבור $M(Y)$.

תרגיל 3:

הוכיחו כי $K_{fin} = \{v \in \mathrm{Ass} |$ למספר סופי של אטומים T נותנת $v\}$ אינה גדירה.

הוכחה:

1. נניח בשלילה ש K_{fin} גדירה.
אז קיימת קבוצת פסוקים x כך ש־$M(X) = K$.

2. נבחר $Y = \{p_i | i \in \mathbb{N}\}$. ניתן לראות כי $M(Y) = \{V_T\}$.

3. $X \cup Y$ אינה ספיקה: V_Tנותנת T לאינסוף אטומים
ולכן $V_T \notin K_{fin}$. ולכן
$M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y) = K_{fin} \cap \{V_T\} = \emptyset$.

4. נוכיח בעזרת משפט הקומפקטיות ש־$X \cup Y$ ספיקה.
תהיי $D \subseteq X \cup Y$ תת־קבוצה סופית.
נסמן: $D_X = D \cap X$, $D_y = D \cap Y$.
מכיוון ש־$D_Y \subseteq D$ ו־D סופית אז גם D_Yסופית.
ולכן היא מהצורה: $D_Y = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}\}$.
נסמן ב־m את האינדקס המקסימלי של D_i ב־D_Y

1) אם $m=1$ $(D_Y=\emptyset$, מאחר ו־D_Yסופית בהכרח קיים m כזה.
נגדיר השמה v באופן הבא:
$$v(p_I)=\begin{cases}T & i\leq m\\ F & i>m\end{cases}$$
* כל הפסוקים ב־D_Y הם מהצורה D_i כאשר $i\leq M$'
ולכן v מספקת אותם $\Leftarrow v\vDash D_Y$.
* מכיוון ש־$v\in K_{fin}$ (נותנת T למספר שופי של אטומיים)
$\Leftarrow v\in M(X) \Leftarrow v\vDash X \Leftarrow v$ מספקת כל פסוק ב־X ובפרט כל
פסוק ב־$D_X\subseteq X \Leftarrow v\vDash D_X$.
בסה"כ קיבלנו כי v מספקת את D_x ואת D_yולכן גם את $D=D_X\cup D_Y$.
הראינו שלכל תת־קבוצה סופית $D\subseteq X\cup Y$ קיימת השמה המספקת אותה ולכן
תת־קבוצה סופית היא ספיקה. ממשפט הקומפקטיות נובע $X\cup Y$־ ספיקה.

5. 3 ו־4 הם סתירה ולכן K_{fin} אינה גדירה.

תרגיל 4:

הוכיחו כי $K_{inf}=\{v\in \mathrm{Ass}|$ אינסוף אטומים T נותנת $v\}$ אינה גדירה.

הוכחה:

1. same
2. נבחר $Y=\{\neg p_i|i\in\mathbb{N}\}$. ניתן לראות כי $M(Y)=\{V_F\}$.
3. $X\cup Y$ אינה ספיקה: V_f נותנת ערך T לאפס אטומים (ובפרט לא לאינסוף) ולכן $v_f\notin K_{inf}$ ולכן:
$$M(X\cup Y)=M(X)\cap M(Y)=K_{inf}\cap\{V_K\}=\emptyset$$
4. $D_Y=\{\neg p_{i_1},\ldots,p_{i_k}\}$.
נסמן ב־m את האינדקס המקסימלי של $\neg p_i$ ב־D_Y.
נבנה השמה v:
$$v(p_i)=\begin{cases}F & i\leq m\\ T & i>m\end{cases}$$