לוגיקה הרצאה 5

קבוצת הפסוקים היכחיים/משפטים מורמליים - סינטקטי - פסוקים עם $\{\leftarrow, \rightarrow\}$ בלבד.

הגדרה אידוקטיבית:

$$\begin{aligned}
&B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \\
&A_1 = \{(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) | \alpha, \beta \in \text{WFF}\{\neg, \rightarrow\}\} \\
&A_2 = \{((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) | \alpha, \beta, \gamma \in \text{WFF}_{\{\neg, \rightarrow\}}\ \{ \\
&A_3 = \{((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) | \alpha, \beta \in ...\} \\
&F = \{MP\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &MP \\ &\underbrace{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}_{\beta} \end{aligned}$$

כדי להראות ספסוק שייך לקבוצת הפסוקים היכיחיים צריך להראות <u>סדרת יצירה</u> שנקראת סדרת הוכחה.

סדרת הוכחה עבור פסוק β הוא סתדרת הפסוקים $\alpha_1, \ldots, a_n$.

שכל אחד מהם הוא או אכסיומה או התקבל מהקודמים בהסדרה ע"י כלל ההיסק MP.

בנוסף $a_n = \beta$.

$$\underbrace{\overbrace{a_1 a_2}^{axi'} a_3}_{\text{Proof series for } a_3} | \ldots a_n$$

דוגמה:

צ"ל $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

כסימון להקלה בקריאות נסמן $\alpha \rightarrow \alpha$ כ-β

1. A_2 $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \underbrace{\rightarrow}_{\Uparrow} ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$
2. A_1 $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$
3. $MP1,2$ $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$

(א) הכנסת β:

$$(\alpha \rightarrow (\underline{\underline{\alpha \rightarrow \alpha}})) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$$

4. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)), A_1$

5. $(\alpha \to \alpha)$,MP $4,3$
$\vdash (\alpha \to \alpha)$

דוגמה:

$\vdash (\neg\alpha \to (\alpha \to \beta))$

1. $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta))$ A_3

2. $(\underline{(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)}) \to (\neg\alpha \to (\underline{(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)}))$,A_1

3. $(\neg\alpha \to ((\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)))$ MP $1,2$

4. $:A_2$ $(\underbrace{\neg\alpha}_{\alpha} \to ((\underbrace{\neg\beta \to \neg\alpha}_{\beta}) \to (\underbrace{\alpha \to \beta}_{\gamma}))) \overbrace{\to}^{1}$
$(\underbrace{\neg\alpha}_{\alpha} \to (\underbrace{\neg\beta \to \neg\alpha}_{\beta})) \overbrace{\to}^{2}$
$(\underbrace{\neg\alpha}_{\alpha} \to (\underbrace{\alpha \to \beta}_{\gamma}))$

5. $(\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)) \to (\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)))$ MP $3,4$

6. $(\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha))$ A_1

7. $(\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)) MP$ $5,6$
$\vdash (\neg\alpha \to (\alpha \to \beta))$

הוכחה על סמך הנחות

נתונה קבוצה של פסוקים X , נגדיר את קבוצת המסקנות של X
(קבוצת הפסוקים היכחיים עס' X)
כקבוצה האינדוקטיבית:
$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup X$
$F = \{MP\}$
סדרת הוכחה עבוק קב' β עס' X $a_1, a_2, \ldots, a_n$
$a_n = \beta$ ולכל $1 \le i \le n$
a_i הוא אכסיומה או מ-X
או התקבל מהקודמים בסדרה ע"י MP.
סימון: $X \vdash \beta$
$\underbrace{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma}_{X=\{\alpha\to\beta,\beta\to\gamma|\alpha,\beta,\gamma\in \mathrm{WFF}_{\{\to,\neg\}}\}} \vdash \alpha \to \gamma$

1. הנחה $\alpha \to \beta$.

2. הנחה $\beta \to \gamma$.

מטרה: $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \vdash (\alpha \to \gamma)$

משפט:

נתון:

$X \vdash \beta$ ולכל $\alpha \in X$, $\vdash \alpha$ אזי נסיק $\vdash \beta$.

צ"ל:

$\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \gamma$

1. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) A2$
2. $((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))) A1$
3. הנחה $\beta \to \gamma$
4. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)), MP\ 2,3$
5. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma), MP\ 1,4$
6. הנחנה $\alpha \to \beta$
7. $\alpha \to \beta, MP$ 5,6

$\beta \to \gamma, \alpha \to b \vdash \alpha \to \gamma$

טענה 1:

אם $X \ni \alpha$ אז $X \vdash \alpha$

הוכחה:

הנחנה $1.\alpha$

$X \vdash \alpha$

$\alpha \vdash \alpha$

טענה 2:

אם $X \subseteq Y$ אז לכל פסוק α, אם $X \vdash \alpha$ אז $Y \vdash \alpha$

התכונה נקראת: מונוטוניות של הוכחה. $X \vdash \alpha$

$$
\begin{array}{lcl}
a_1[x_1 & & [y_1 \\
\vdots|x_2 & & |y_2 \\
 & \Rightarrow & \vdots \\
a_n|\vdots & & \vdots \\
[x_n & & [y_n
\end{array}
$$

נוסח אלטרנטיבי לטענה 2:

אם $B_1 \subseteq B_2$ אז $X_{B_1,F} \subseteq X_{B_2,F}$

מסקנה:

אם $\vdash \alpha$ אז $X \vdash \alpha$ לכל קבוצה X.

טענה 3:

אם לכל פסוק α ב-X, $Y \vdash \alpha$
אז לכל פסוק β אם $X \vdash \beta$ אז $Y \vdash \beta$.

הוכחה: נתון $X \vdash \beta$, $\underbrace{a_1, \ldots,}_{\text{from } X} \underbrace{a_n}_{\beta}$

על כל איבר a_iשהסדרה שלו היא "מ-X"
נחליף אותו בסדרת הוכחה מתוך Y.

דוגמה:

$X = \{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\}$
$\delta = \alpha \to \gamma$
ידוע $X \vdash \delta$
נגדיר $Y = \{\beta, \gamma\}$
נוכיח ש-
$y \vdash \alpha \to \beta$
$y \vdash \beta \to \gamma$
נסיק $y \vdash \delta$

1. $v\beta \to (\alpha \to \beta),$ A1
2. הנחה מ-y β
3. $\alpha \to \beta$
$y \vdash \alpha \to \beta$

(א) $(\gamma \to (\beta \to \gamma)),$ A1
(ב) הנחה מ-y γ.
(ג) $\beta \to \gamma$
$y \vdash \beta \to \gamma$

טענה 4 (הוכחות הן סופיות)

אם $\vdash \alpha \overbrace{X}^{\text{(infinite)}}$ אז קיימת תת קבוצה <u>סופית</u> של X, $X' \subseteq X$ כך ש- $X' \vdash \alpha$.

משפט הדדוקציה:

לכל מערכת הוכחה שיש בה לפחות את האכסיומות $\boxed{A_1\text{-ו}A_2}$
ויש בה בדיוק את כלל ההיסק $\boxed{\text{MP}}$
<u>**מתקיים:**</u>
לכל קבוצת פסוקים X ופסוקים α, β:
$X, \alpha \vdash \beta$ אם ורק אם $X \vdash \alpha \to \beta$

מסקנה: $\vdash \beta \to \alpha \Leftarrow \beta \vdash \alpha$

הוכחה: $\Rightarrow$ נתון $X \vdash \alpha \to \beta$
נוכיח $X, \alpha \vdash \beta$

1. הנחה α
2. יכיח מ-X $\alpha \to \beta$.
3. MP β
$X, \alpha \vdash \beta$