# לוגיקה - תרגול 4

## השמות

הערה: מכאן ואילך נשמיט סוגריים 'מיותרים' מהפסוק על ידי הגדרת סדר קדימויות בין הקשרים:

1. $\neg$ (הקשר בעל הקדימות הגבוהה ביותר)
2. $\vee, \wedge$
3. $\rightarrow$ (הקשר בעל הקדימות הנמוכה ביותר)

שימו לב: בשאלות הנוגעות לתחביר אין להשמיט סוגריים!

הגדרה 1: פונקציה $v : \{p_0, p_1, p_2, \ldots\} \rightarrow \{\mathrm{F}, \mathrm{T}\}$ נקראת השמה.

דוגמאות:

1. $v_{\mathrm{F}}$ מוגדרת כך שלכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $v_{\mathrm{F}}(p_i) = \mathrm{F}$
2. $v_{\mathrm{T}}$ מוגדרת כך שלכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $v_{\mathrm{T}}(p_i) = \mathrm{T}$

סימונים:

- $\mathrm{Ass}$ היא קבוצת כל ההשמות.
- $TT_{\circ}$ היא טבלת האמת של קשר $\circ$ כלשהו.

הגדרה 2: בהינתן השמה $v$, השמה מורחבת $\overline{v}$ היא פונקציה $\overline{v} : \mathrm{WFF} \rightarrow \{\mathrm{F}, \mathrm{T}\}$ המוגדרת באינדוקציה:

**בסיס:** לכל $i \in \mathbb{N}$, $\overline{v}\left(p_i\right) = v\left(p_i\right)$ .

**סגור:** לכל $\alpha, \beta \in \mathrm{WFF}$

- $\overline{v}\left(\neg\alpha\right) = TT_{\neg}\left(\overline{v}\left(\alpha\right)\right)$
- לכל $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$, $\overline{v}\left(\alpha \circ \beta\right) = TT_{\circ}\left(\overline{v}\left(\alpha\right), \overline{v}\left(\beta\right)\right)$

הגדרה 3: תהי $v \in \mathrm{Ass}$ ו־$\alpha \in \mathrm{WFF}$. אם $\overline{v}(\alpha) = \mathrm{T}$ נאמר ש־$v$ מספקת את $\alpha$, ונסמן $v \models \alpha$. אם $\alpha$ טאוטולוגיה, נסמן $\models \alpha$.

משפט 1 — משפט התלות הסופית: יהי פסוק $\alpha$ ושתי השמות $v_1, v_2$. אם לכל אטום $p_i$ המופיע ב־$\alpha$ מתקיים $v_1(p_i) = v_2(p_i)$, אז $\overline{v}_1(\alpha) = \overline{v}_2(\alpha)$.

## מושגי יסוד סמנטיים

הגדרה 4: נאמר כי פסוק $\alpha$ הוא ספיק אם קיימת השמה המספקת אותו (קיימת $v$ כך ש־$\overline{v}(\alpha) = \mathrm{T}$).

דוגמאות: $p_0$, $p_0 \vee p_1$

הגדרה 5: פסוק $\alpha$ נקרא טאוטולוגיה אם כל השמה מספקת אותו (לכל $v$, $\overline{v}(\alpha) = \mathrm{T}$).

דוגמאות: $p_0 \to p_0$, $p_0 \vee \neg p_0$

הגדרה 6: פסוק $\alpha$ נקרא סתירה אם לא קיימת השמה המספקת אותו (לכל $v$, $\overline{v}(\alpha) = \mathrm{F}$).

דוגמה: $p_0 \wedge \neg p_0$

שימו לב: אם פסוק אינו סתירה אז הוא ספיק (ולא בהכרח טאוטולוגיה).

תרגיל 1: הוכיחו/ הפריכו: אם $\alpha \vee \beta$ טאוטולוגיה, אז $\alpha$ טאוטולוגיה או $\beta$ טאוטולוגיה.

הגדרה 7: יהיו $\alpha, \beta$ פסוקים. אם כל השמה המספקת את $\alpha$ מספקת גם את $\beta$ נאמר ש־$\alpha$ גורר לוגית את $\beta$ (או לחילופין, ש־$\beta$ נובע לוגית מ־$\alpha$), ונסמן $\alpha \models \beta$.

טענות:

1. אם $\alpha$ טאוטולוגיה ו־$\alpha \models \beta$, אז $\beta$ טאוטולוגיה.
2. אם $\beta$ סתירה ו־$\alpha \models \beta$, אז $\alpha$ סתירה.
3. אם $\alpha$ סתירה אז לכל פסוק $\beta$ מתקיים $\alpha \models \beta$.
4. אם $\beta$ טאוטולוגיה אז לכל פסוק $\alpha$ מתקיים $\alpha \models \beta$.
5. $\models$ הוא יחס רפסלקסיבי וטרנזיטיבי (לא סימטרי).

הגדרה 8: יהיו $\alpha, \beta$ פסוקים. אם לכל השמה $v$ מתקיים ש־$\overline{v}(\alpha) = \overline{v}(\beta)$ נאמר כי $\alpha$ ו־$\beta$ שקולים לוגית ונסמן $\alpha \equiv \beta$.

משפט 2: $\alpha$ ו־$\beta$ שקולים לוגית אמ"מ $\alpha \models \beta$ וגם $\beta \models \alpha$.

## מושגים סמנטיים עבור קבוצות פסוקים

הגדרה 9: תהי $\Sigma \subseteq \mathrm{WFF}$. אם $v$ מספקת את כל הפסוקים ב־$\Sigma$ נאמר כי $v$ מספקת את $\Sigma$ ונסמן $v \models \Sigma$.

דוגמה: $v_{\mathrm{T}} \models \{p_1, p_2\}$

הגדרה 10: קבוצת פסוקים $\Sigma$ נקראת ספיקה אם קיימת השמה $v$ כך ש־$v$ מספקת את $\Sigma$.

הגדרה 11: תהי $\Sigma \subseteq \mathrm{WFF}$. אם כל השמה המספקת את $\Sigma$ מספקת גם את $\alpha$ נאמר כי $\Sigma$ גוררת לוגית את $\alpha$ (או לחילופין ש־$\alpha$ נובע לוגית מ־$\Sigma$) ונסמן $\Sigma \models \alpha$.

דוגמה: $\{p_0, p_1\} \models p_0 \wedge p_1$

הגדרה 12: יהיו $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \mathrm{WFF}$. נאמר כי $\Sigma_1$ ו־$\Sigma_2$ שקולות לוגית ונסמן $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$ אם לכל השמה $v$ מתקיים $v \models \Sigma_1 \iff v \models \Sigma_2$.

דוגמה: $\{p_0, p_1\} \equiv \{p_0 \wedge p_1\}$

תרגיל 3:

תהי $\Sigma \subseteq \mathrm{WFF}$. נניח שכל פסוק $\alpha \in \Sigma$ ספיק. האם בהכרח $\Sigma$ ספיקה?

תרגיל 4:

יהיו קבוצת פסוקים $\Sigma$ ופסוק $\alpha$, ונניח ש־$\Sigma \cup \{\alpha\}$ ספיקה. האם בהכרח $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ אינה ספיקה?

# תרגול 4 לוגיקה

**תזכורת:**

הפונקצייה $TT_{\rightarrow} : \{T,F\} \times \{T,F\} \rightarrow \{T,F\}$
מוגדרת כך ש $TT_{\rightarrow}(\alpha,\beta)$ היא:

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha \rightarrow \beta$ |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | T |
| T | F | F |
| T | T | T |

**הגדרה 2 (המשך):**

דוגמה:
נתונה ההשמה :

$$v(p_i) = \begin{cases} F & i=1 \\ T & \text{else} \end{cases}$$

נחשב את הערך של הפסוק $p_0 \rightarrow (\neg p_1)$
תחת ההשמה $v$.

$$\begin{aligned}
&\overline{v}(p_0 \rightarrow (\neg p_1)) = \\
&TT_{\rightarrow}(\overline{v}(p_0), \overline{v}(\neg p1)) \\
&TT_{\rightarrow}(v(p_0), TT_{\neg}(\overline{v}(p1))) \\
&TT_{\rightarrow}(T, TT_{\neg}(v(p_1))) \\
&TT_{\rightarrow}(T, TT_{\neg}(F)) \\
&TT_{\rightarrow}(T, T) = T.
\end{aligned}$$

**סיכום:**

כלומר :

$$\overline{v}(p_0 \rightarrow (\neg p_1)) = T$$

כדי להראות ש $p_0 \vee, \neg p_0$ טאוטולוגיה, נבדוק את כל ההשמות למשתנים הרלווינטים ($p_0$), ובעזרת טבלת אמת:

| $p_0$ | $\neg p_0$ | $p_0 \vee \neg p_0$ |
|---|---|---|
| F | T | T |
| T | F | T |

**טענות:**

1. אם $\alpha$ טאוטולוגיה ו־ $\alpha \models \beta$, אז $\beta$ טאוטולוגיה.
הפרכה:
סימונים:
$\alpha = p_0$ , $\beta = \neg p_0$, $\alpha \vee \beta = p_0 \vee \neg p_0$
נראה שזו אכן דוגמה נגדית:
נראה שכל תנאי השאלה מתקיימים
נראה ש $p_0 \vee \neg p_0$ טאוטולוגיה־הוכחה
בעזרת טבלת אמת נראה שמספקת
   (א) נראה ש־$p_0$לא טאוטולוגיה
   $\overline{v}_F(\alpha)$
   $\overline{v}_F(p_0) = v_F(p_0) = F$
   הראינו שקיימת לפחות השמה אחת שאינה מספקת את $p_0$ ולכן זו לא טאוטולוגיה.
   (ב) נראה כי $\beta = \neg p_0$ לא טאוטולוגיה
   $\overline{v}_T(\beta) = \overline{v}_T(\neg p_0) = TT_\neg(v_T(p_0)) = TT_\neg(T) = F$

**תרגיל 3:**

הפרכה:
דוגמה נגדית:
$\Sigma = \{p_0, \neg p_0\}$
$p_0, \neg p_0$ ספיקים
נראה ש־$\Sigma$ לא ספיקה נניח בשלילה ש־$\Sigma$ ספיקה
, אז קיימת $v$ כך ש־$v$ מספקת את $\Sigma$ אז :

$\overline{v}(p_0) = T$
$\overline{v}(\neg p_0) = T$
$\overline{v}(\neg p_0) = TT_\neg(\overline{v}(p_0)) = TT_\neg(T) = F$

**תרגיל 4:**

הטענה אינה נכונה $\Sigma = \emptyset$, $\alpha = p0$ , $\neg\alpha = \neg p_0$.