

### לוגיקה ותורת הקבוצות - תרגול 3

#### הגדרה אינדוקטיבית של קבוצת הפסוקים החוקיים

הגדרה 1: קבוצת הפסוקים החוקיים, WFF (Well Formed Formulae), היא הקבוצה האינדוקטיבית הבאה:

$$\begin{aligned}X &= \{\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, (, ), p_0, p_1, p_2, \dots\}^* \\B &= \{p_0, p_1, p_2, \dots\} \\F &= \{F_{\neg}, F_{\vee}, F_{\wedge}, F_{\rightarrow}\} \\WFF &= X_{B,F}\end{aligned}$$

• העולם  $X$  הוא קבוצת המילים הסופיות מעל הסימנים הנ"ל.

דוגמה לאיבר בעולם:  $p_1 \wedge (\vee p_2 (\in X$

• איברי  $B$ :  $p_0, p_1, p_2, \dots$  נקראים פסוקים אטומיים (או משתנים אטומיים).

עבור כל  $\alpha, \beta \in X$  הפונקציות ב- $F$  מוגדרות באופן הבא,

$$\begin{aligned}F_{\neg}(\alpha) &= (\neg\alpha) \\F_{\vee}(\alpha, \beta) &= (\alpha \vee \beta) \\F_{\wedge}(\alpha, \beta) &= (\alpha \wedge \beta) \\F_{\rightarrow}(\alpha, \beta) &= (\alpha \rightarrow \beta)\end{aligned}$$

דוגמאות לפסוקים חוקיים (כלומר ב-WFF):

$$p_5, (\neg p_{17}), (p_{1000} \rightarrow p_8), ((\neg p_0) \rightarrow (p_5 \rightarrow (p_1 \vee p_0)))$$

הערה: האם  $p_0 \vee p_1$  זהה ל- $p_1 \vee p_0$ ? לא, כי הסדר חשוב.

איך מראים שמילה  $\alpha \in X$  היא פסוק חוקי ( $\alpha \in WFF$ )?

מראים סדרת יצירה לפסוק מעל  $WFF = X_{B,F}$ .

דוגמה: האם  $(p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_9))$  פסוק חוקי?

איך מראים שמילה  $\alpha \in X$  אינה פסוק חוקי ( $\alpha \notin WFF$ )?

1. מוצאים תכונה  $Y$  שמשותפת לכל הפסוקים החוקיים ( $\beta$  מקיימת את  $Y$   $\{ \beta \in X \mid Y \}$ ).
2. מוכיחים ש- $\alpha$  אינו מקיים את  $Y$  ( $\alpha \notin T$ ).
3. מוכיחים באינדוקציה על מבנה  $WFF$  שכל הפסוקים החוקיים מקיימים את  $Y$  ( $WFF \subseteq T$ ).

## תכונות בסיסיות של פסוקים חוקיים

**המילים ב- $WFF$  מקיימות את התכונות הבאות:**

תכונה 1:  $\{ \alpha \in X \mid \alpha \text{ פסוק אטומי או מתחיל ב-} \neg \text{ ונגמר ב-} \neg \}$   $T_1 =$   
דוגמא לשימוש בתכונה 1: מתכונה 1 נובע שהמילה  $p_1 p_2$  אינה פסוק חוקי.

תכונה 2:  $T_2 = \{ \alpha \in X \mid \#_-(\alpha) = \#_+(\alpha) \}$   
 כאשר  $\#_-(\alpha)$  הוא מספר הסוגריים השמאליים ב- $\alpha$  ו- $\#_+(\alpha)$  הוא מספר הסוגריים הימניים ב- $\alpha$ .

הגדרה 2: נאמר ש- $\beta$  היא רישא של  $\alpha$  אם  $\alpha, \beta$  מילים כך ש:

$$\begin{aligned}\alpha &= a_1 a_2 \dots a_n \\ \beta &= b_1 b_2 \dots b_k\end{aligned}$$

כאשר  $k \leq n$  ולכל  $1 \leq i \leq k$  מתקיים  $a_i = b_i$ .  
 נאמר כי  $\beta$  רישא ממש של  $\alpha$  אם  $\beta$  רישא של  $\alpha$  ו- $\alpha \neq \beta$  (כלומר  $k < n$ ).

תכונה 3 (נסיון ראשון): לכל  $\beta \neq \epsilon$  רישא ממש של  $\alpha$  :  $\{ \alpha \in X \mid \#_-(\beta) > \#_+(\beta) \}$   $WFF \subseteq T =$

$$T_3 = \left\{ \alpha \in X \mid \begin{array}{l} 1. \alpha \in WFF \\ 2. \text{לכל } \beta \neq \epsilon \text{ רישא ממש של } \alpha : \#_-(\beta) > \#_+(\beta) \end{array} \right\} \quad \text{תכונה 3:}$$

מסקנה מתכונות 2 + 3: אם  $\alpha$  ב- $WFF$  ו- $\beta$  רישא ממש של  $\alpha$ , אז  $\beta \notin WFF$ .

משלוש התכונות שהוכחנו נובע משפט הקריאה היחידה שמשמעותו היא:  
 בהינתן  $\varphi \in WFF$ , מתקיים בדיוק אחד משלושת הבאים:

1.  $\varphi$  הוא פסוק אטומי
2.  $\varphi = (\neg \alpha)$  כאשר  $\alpha \in WFF$ .
3.  $\varphi = (\alpha \circ \beta)$  כאשר  $\circ \in \{ \vee, \wedge, \rightarrow \}$  ו- $\alpha, \beta \in WFF$ .

תכונה נוספת של פסוקים: לא קיים פסוק חוקי אינסופי, למשל  $(((p_0 \wedge p_1) \wedge p_2) \wedge p_3) \wedge \dots \notin \text{WFF}$  כי:

1. העולם שלנו הוא  $X$  – רק מילים סופיות.

2. ניתן להוכיח ש-  $\alpha \notin \text{WFF}$  באמצעות התכונה הבאה:

$$T = \{\beta \in X \mid \text{יש מספר סופי של אטומים ב-}\beta\}$$

## לוגיקה תרגול-3

28 באפריל 2019

### **דוגמה:**

נראה סדרת יצירה עבור:  $(p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_9))$

1.  $p_0$  (אטום).

2.  $p_1$  (אטום).

3.  $p_9$  (אטום).

4.  $F_{\vee}(2, 3) (p_1 \vee p_9)$

5.  $F_{\rightarrow}(1, 4)(p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_9))$

### **תזכורת: רצ' להוכיח:**

$X_{B,F} \subseteq T = \{x \in X \mid Y \text{ את } x\}$   
בלשב 3 מספיק להראות:

1.  $B \subseteq T$

2. T סגורה ל-F. כלומר

לכל  $f \in F$  אם  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$  אז  $f(t_1, t_2, \dots, t_n) \in T$

### **דוגמאות לרישיות ממש:**

מי הן הרישיות ממש של  $(\neg p_5)$ ?:

$\epsilon, (, (\neg, (\neg p_5$

מי הן הרישיות ממש של  $\epsilon$ ?: אין

מי הן הרישיות ממש של  $($ ?:  $\epsilon$ .

### **נסיון לפתרון ה-3:**

#### **הבעיה:**

התכונה הזאת אינה סגורה תחת הפונקציות של WFF נשים לב שהמילה  $x \in X$  מקיימת את התכונה אבל אם נפעיל עליה את  $F_{\neg}$  ונקבל  $(\neg)$  ומילה זו אינה מקיימת את התכונה

## הוכחת התכונה המחוזקת:

### בסיס:

אם  $\alpha$  פסוק אטומי:

1.  $\alpha \in \text{WFF}$  פסוק חוקי ולכן

2.  $\alpha$  מכיל רק תו אחד ולכן ל- $\alpha$  אין רישות ממש שאינן ריקות ולכן התכונה מתקיימת באופן ריק.

### סגור:

נניח כי  $\gamma, \delta$  מקיימות את התכונה ונראה כי התכונה נשמרת תחת הפעולות ב- $F$ :  
 $\alpha = (\neg \gamma)$

1.  $\alpha \in \text{WFF}$  לפי ה"א  
 $\gamma \in \text{WFF}$  ומסגירות  $\text{WFF}$  ל- $F$ .

2. יש שלוש רישות ממש לא ריקות אפשריות:

$$\#_c(\beta) = 1 > 0 = \#_c(\beta) \text{ או } \beta = (\neg \gamma)$$

$$\beta = (\neg \gamma) \text{ כאשר } \gamma' \text{ רישא ממש של } \gamma:$$

$$\text{לה"א } \#_c(\gamma') > \#_c(\gamma) \text{ ולכן:}$$

$$\#_c(\beta) = 1 + \#_c(\gamma') > 1 + \#_c(\gamma) = 1 + \#_c(\beta) > \#_c(\beta)$$

$$\beta = (\neg \gamma) \text{ לה"א } \gamma \text{ פסוק חוקי ולכן מקיים}$$

$$\text{את תכונה 2 ולכן:}$$

$$\#_c(\gamma) = \#_c(\gamma) \text{ ולכן:}$$

$$\#_c(\beta) = 1 + \#_c(\gamma) = 1 + \#_c(\gamma) = 1 + \#_c(\beta) > \#_c(\beta)$$

$$3. \text{ עבור } F_o(\gamma, \delta) = (\gamma \circ \delta)$$

$$\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\} \text{ כאשר}$$

ההוכחה דומה אבל יש יותר סוגים של רישות.

### שאלת בונוס: $\hat{\_}$

הוכיחו כי  $(p_0 p_1)$  אינו פסוק חוקי.

### התכונה:

מספר המופעים של פסוקים אטומיים ב- $\alpha$  גדול בדיוק ב-1.

ממספר המופעים של קשרים דו מקומיים ב- $\alpha$ .