לוגיקה - תרגול 1

הגדרה אינדוקטיבית של קבוצה

הגדרה 1:

בהינתן:

- קבוצה X - נקראת העולם.
- קבוצה $B \subseteq \mathrm{X}$ - נקראת קבוצת הבסיס, והאיברים בה נקראים אטומים.
- קבוצה של פו' F - נקראות פונקציות יצירה.

  כל פונקציה $f \in \mathrm{F}$ היא מהצורה $f : \mathrm{X}^n \to \mathrm{X}$.
  פונקציה כזו נקראת n־מקומית, ולכל פונקציה יש $n \geq 1$ משלה.

נגדיר את $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}} \subseteq \mathrm{X}$ - הסגור של B תחת F כקבוצה המקיימת:

1. $B \subseteq \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$ — מכילה את הבסיס.
2. סגירות תחת הפונקציות ב־F — לכל $f \in \mathrm{F}$ n־מקומית ולכל $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$ מתקיים ש־$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$.
3. אין ב־$\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$ 'איברים מיותרים' — אם קבוצה $T \subseteq \mathrm{X}$ מקיימת את 1 ו־2, אז $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}} \subseteq T$.

הערות:

- הוכח בהרצאה כי $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$ קיימת ויחידה.
- כל אחת מהקבוצות, X, B ו־F יכולה להיות סופית או אינסופית.

דוגמה:

- העולם: X - קבוצת המילים באותיות s ו־t (מילה — סדרה סופית של אותיות).
  למשל $s, st, ttt \in \mathrm{X}$.
- הבסיס: $B = \{\epsilon, st, ts\}$ (ϵ - סימון מיוחד למילה הריקה, בעלת אפס אותיות).
- פו' היצירה: $\mathrm{F} = \{f_1, f_2\}$, כאשר:
  - $f_1\left(w_1, w_2\right) = sw_1w_2t$
  - $f_2\left(w_1, w_2\right) = w_1w_2w_1$

נסמן: $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}} = \mathrm{X}_{\mathrm{st}}$.

אילו איברים יש ב־X_{st}? ϵ, st, ts (כי $B \subseteq \mathrm{X}_{\mathrm{st}}$), $sstt$ (כי $f_1\left(\epsilon, st\right) = sstt$) וכו'.

סדרת יצירה

<u>הגדרה 2</u>: סדרת יצירה של איבר a מעל B ו־F היא סדרת איברים <u>סופית</u> $a_1, a_2, \dots, a_n$ המקיימת:

1. $a = a_n$
2. לכל $1 \le i \le n$ מתקיים לפחות אחד מהשניים:
   (א) $a_i \in B$ (כלומר a_i אטום)
   (ב) a_i מתקבל על ידי הפעלת פונקציה מ־F על איברים שקודמים לו בסדרה.

<u>הערות</u>:

- סדרת היצירה היא סדרה של איברים (ולא של פעולות!).
- סדרת יצירה <u>תמיד סופית</u> ולא ריקה (מכילה לפחות את a).
- סדרת יצירה איננה יחידה (למעשה אם יש אחת אז יש אינסוף).
- סדרת יצירה לא חייבת להיות באורך מינימלי.
- סדרת יצירה תמיד מתחילה מאטום (כי אין איברים קודמים להפעיל עליהם פונקציות).

הוכחה באינדוקציית מבנה

<u>משפט 2 (אינדוקציית מבנה)</u>: יהיו קבוצות $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$ ו־T. אם מתקיימים התנאים הבאים אז $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}} \subseteq T$,

1. (בסיס) $B \subseteq T$ (כל איברי הבסיס נמצאים ב־T).
2. (סגור) T סגורה תחת הפונקציות ב־F, כלומר לכל $f \in \mathrm{F}$ n־מקומית מתקיים:
   אם $\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_n \in T}_{*}$ אז $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in T$.
   $*$ זה נקרא <u>הנחת האינדוקציה</u>.

הערה: הנחת האינדוקציה היא ש־$a_1, \dots, a_n$ שייכים ל־T (כלומר מקיימים את התכונה α), ולא ל־$\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$.

שימו לב המשפט משמש רק להוכחת הכלות מהצורה $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}} \subseteq T$, ולא להוכחת ההכלה ההפוכה!

<u>תרגיל 1</u>: נגדיר את הקבוצה $T = \{w \in \{s,t\}^* \mid |w| \text{ זוגי}\}$ ($|w|$ הוא האורך של המילה). הוכיחו כי $X_{st} \subseteq T$.

תרגול 1 לוגיקה

<u>סדרת יצירה עבור st:</u>

1. st (אטום).

<u>סדרת יצירה נוספת:</u>

1. ϵ (אטום).
2. st $f_1(\epsilon, \epsilon)$.

<u>סדרת יצירה $sstt$:</u>

1. st (אטום).
2. ϵ (אטום).
3. $sstt$ $f_1(st, \epsilon)$

תרגיל 1:

פתרון:

<u>בסיס:</u> נראה שלכל $w \in B = \{\epsilon, st, ts\}$
מתקיים $w \in T$ כלומר $B \subseteq T$

- ⋆ $w = \epsilon$, $|w| = 0$ זוגי ולכן $w \in T$.
- ⋆ $w = st$, $|w| = 2$ זוגי ולכן $w \in T$.
- ⋆ $w = ts$, $|w| = 2$ זוגי ולכן $w \in T$.

<u>סגור:</u>
נניח $w_1, w_2 \in T$
קיימים $k_1, k_2 \in N$ שעבורם $|w_1| = 2k_1$, $|w_2| = 2k_2$
ונראה שלכל $f \in F$ מתקיימת סגירות.

- ⋆ $w = f_1(w_1, w_2)$
מהגדרת f_1 נובע כי $w = sw_1w_2t$
$\underbrace{\Leftarrow}_{b"a} |sw_1w_2t| = 2 + 2k_1 + 2k_2 \Leftarrow w \in T$

- ⋆ $w = f_2(w_1, w_2)$
מהגדרת f_2 נובע כי $w = w_1w_2w_3$
$\underbrace{\Leftarrow}_{b"a} |sw_1w_2t| = 2 + 2k_1 + 2k_2 \Leftarrow w \in T$

<u>מסקנה:</u> $X_{st} \subseteq T$

תרגיל 2:

העולם $X = \overbrace{\{0,1\}^N}^{\text{binary vector}}$, $B = \overbrace{\{0\}^N}^{\text{binary zero vector}}$
$F = \{f_i | i \in N\}$
כאשר לכל $f_i, i \in N$ מוגדרת כך:
$f_i(v) = v'$ כאשר v' מוגדר כך
$f_j' = \begin{cases} 1 - v_j & j = i \\ v_j & j \neq i \end{cases}$ (v_j'אינדקס ה־j ב־V').
מצאו תכונה T כך ש $X_{B,F} \subseteq T$ והוכיחו זאת.

פתרון:

$T = \{v \in \{0,1\}^N |$ ב־ v מספר סופי של 1־ים$\}$

הוכחה:

בסיס:

ב־$\bar{O}$ יש 0 אחדים ולכן מספר סופי $\Leftarrow$ $\bar{O} \in T$

סגור:

יהי $v \in T$, אזי ב־v יש מספר סופי של אחדים נסמן ב k.

יהי $i \in N$ כך ש־ $v' = f_i(v)$

לפי ההגדרה v', הוא שונה מ־v בביט בודד ולכן מספר האחדים בv' הוא $k+1$ $\Leftarrow$ $v' \in T$.

לוגיקה ־ תרגול 2

<u>תזכורת:</u> בתרגול הקודם הגדרנו את הקבוצה האינדוקטיבית הבאה:

- העולם: $X = \{s,t\}^*$.
- הבסיס: $B = \{\epsilon, st, ts\}$.
- פו' היצירה: $\mathrm{F} = \{f_1, f_2\}$, כאשר:
  - $f_1(w_1,w_2) = sw_1w_2t$
  - $f_2(w_1,w_2) = w_1w_2w_1$

<u>איך מראים שאיבר a שייך לקבוצה אינדוקטיבית ($a \in \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$)?</u>

<u>משפט 1:</u> $a \in \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$ אם ורק אם קיימת ל־a סדרת יצירה מעל B ו־F

ע"פ התרגול הקודם הוכחנו כי $st, sstt, tststs \in X_{B,F}$.

<u>איך מראים שאיבר a אינו שייך לקבוצה אינדוקטיבית ($a \notin \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$) ?</u>

נמצא קבוצה $T \subseteq \mathrm{X}$ המקיימת:

1. $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}} \subseteq T$
2. $a \notin T$

מסקנה: $a \notin \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$

<u>תרגיל 1:</u> עבור $X_{B,F}$ מהדוגמה הוכיחו כי $tst \notin X_{B,F}$.

<u>תרגיל 2:</u>

נתון:

- העולם: $\mathrm{X} = \{a,b\}^*$ ־ קבוצת המילים באותיות a ו־b.
- הבסיס: $B = \{aa\}$.
- פונקציות היצירה: $\mathrm{F} = \{f\}$, כאשר:

$$f(w) = \begin{cases} aawb & \text{אם } w \text{ מתחיל ב} - a \\ bbwa & \text{אחרת} \end{cases}$$

1. הוכיחו/ הפריכו: $bba \in \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$
2. הוכיחו/ הפריכו: $aabb \in \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$

<u>תרגיל 3</u>: תהיינה $S_1 = \mathrm{X}_{B_1,\mathrm{F}_1}$ ו־$S_2 = \mathrm{X}_{B_2,\mathrm{F}_2}$ כך ש־$S_1 = S_2$.
הוכיחו כי מתקיים $S_1 = \mathrm{X}_{B_1 \cup B_2, \mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2}$.

תרגול 2 לוגיקה

תרגיל 1:

נגדיר קבוצה $T = \{w \in \{s,t\}^* |\ |w|\%2 = 0\}$
נוכיח כי $tst \notin T$
$|tst|$ אי־זוגית
הוכחנו כי $X_{B,F} \subseteq T$
באינדוקציית מבנה בתירגול קודם.
מסקנה: $\Leftarrow$ $tst \in X_{B,F}$.

תרגיל 2:

1. הטענה לא נכונה:
נגדיר תכונה:
$T_1 = \{w \in \{a,b\}^* | a$ מתחיל ב $w\{$
נראה $X_{B,F} \subseteq T_1$ בא"מ.
<u>בסיס:</u>
נראה שלכל $w \in T_1$, $w \in B$
$w = aa$, מתקיים $w \cdot \epsilon$ מתחילה ב־a.
<u>סגור:</u>
נניח $u' \in T_1$ כלומר u' מתחילה ב־a.
תהיי $u = f(w')$. מה"א w' מתחילה ב־a ולכן
$w = aaw'b$ ולכן w מתחילה ב־a.
<u>מסקנה:</u> $X_{B,F} \subseteq T_1$ וכן $bba \notin T_1$
(לא מתחילה ב־a) ולכן $bba \notin X_{B,F}$.

2. הטענה לא נכונה:
$\#a(w) \Leftarrow$ מספר הפעמיים שאות מופיע ב w ונגדיר תכונה
$T_2 = \{w \in \{a,b\}^* |\ \#_a(w) > \#_b(w)\}$
<u>בסיס:</u> לכל $w \in B$ מתקיים $w \in T_2$, $w = aa$
$\#_a(w) = 2 > 0 = \#_b(w)$
<u>סגור:</u> נניח $w' \in T_2$ כלומר $\#_a(w') > \#_b(w')$
תהי $w = f(w')$:
נפריד למקרים:

(א) אם w' מתחילה ב־a $w = aaw'b$
מה"א $\#_a(w') > \#_b(w')$
ולכן $\#_a(w) = 2 + \#_a(w') > 1 + \#_b(w') = \#_b(w)$

(ב) אם w' מתחילה ב b $w = bbw'a$ מה"א
$\#_a(w) = 1 + \#_a(w')$
$\#_b(w) = 2 + \#_b(w')$
האם בהכרח $\#_a(w) > \#_b(w)$?!
<u>לא</u>, למשל עבור $w' = baa$
התכונה לא נשמרת.
האם המשמעות שאיברים ב־$X_{B,F}$ לא מקיימת את התכונה, לא כי אני יודעים שבקבוצה האינדוקטיבית כל המילים מתחילות ב־a.ולכן נרצה לחזק תכונה.
$T_2^{'} = \{w \in \{a,b\}^* | w \in X_{B,F}, \#_a(w) > \#_b(w)\{$

<u>בסיס:</u>
נראה שלכל $w \in B$ מתקיים $w \in T_2^{'}$, $w = aa$
1. $w \in B$ ולכן $w \in X_{B,F}$
2. $\#_a(w) = 2 > 0 = \#_b(w)$ ולכן $w \in T_2^{'}$.

<u>סגור:</u> נניח $w' \in T_2^{'}$
כלומר $w' \in X_{B,F}$ וכן $\#_a(w') > \#_b(w')$

תהי $w = f(w')$ מה"א $w' \in X_{B,F}$ ולכן מסעיף קודם היא מתחיל ב־a ולכן
$w = aaw'b$

1. מה"א $w' \in X_{B,F}$ $f \in F$ והקבוצה $X_{B,F}$ סגורה תחת פעולה זו
מהגדרה ולכן $w \in X_{B,F}$.

2. מה"א $\#_a(w') > \#_b(w')$
ולכן $\#_a(w) = 2 + \#_a(w') > 1 + \#_b(w') = \#_b(w)$
וכן־ $X_{B,F} \subseteq T_2^{'}$ $aabb \in T_2^{'}$
$\#_a(aabb) = \#_b(aabb)$
ולכן $aabb \notin X_{B,F}$

<u>מסקנה:</u>
לעיתים כאשר נוכל להוכיח ש־$X_{B,F}$ מקיימת תכונה f נזדקק
לתכונה 2 שכבר הוכחנו ש $X_{B,F}$ מקיימת לשם כך נגדיר תכונה מחוזקת:
$T_B = \{w \in X | w \in X_{B,F},$ f מקיים את $w\}$

תרגיל 3:

הוכחה:

נסמן $X = X_{B_1 \cup B_2, F_1 \cup F_2}$
נוכיח כי $X = S_1$ ע"י הכלה דו כיוונית

- ⋆ כייון ראשון $S_1 \subseteq X$ באינדוקציית מבנה.

<u>בסיס:</u>
נוכיח כי $B_1 \subseteq X$
$B_1 \subseteq B_1 \cup B_2 \subseteq X$
<u>סגור:</u>
נניח כי $a_1, \ldots, a_n \in X$
ונראה כי לכל $f \in F_1$
$f(a_1, \ldots, a_n) \in X$
$f \in F_1 \cup F_2 \Leftarrow f \in F$
x סגורה ל $F_1 \cup F_2$ ע"י הבנייה
ולכן $f(a_1, \ldots a_n) \in X$
כיוון שני:
$X \subseteq S_1$ נוכיח באינדוקציית מבנה
<u>בסיס:</u>
$B_1 \cup B_2 \subseteq S_1$
<u>נניח:</u>
כי $b \in B_1 \cup B_2$
אזי $b \in B_1$ או $b \in B_2$ נחלק למקרים

- ⋆ $b \in B_1$ במקרה זה $b \in S_1$ ע"י הזמנה
- ⋆ $b \in B_2$ במקרה זה $b \in S_2$ ע"י הזמנה
וגם מכיוון ש $S_1 = S_2$מתקיים $b \in S_1$

<u>סגור:</u>
נניח
$a_1, \ldots, a_n \in S_1$
ונראה כי לכל $f \in F_1 \cup F_2$
$f(a_1, \ldots, a_n) \in S_1$
נחלק למקים:

- ⋆ $f \in F_1$ מכיוון ש־ $a_1, \ldots, a_n \in S_1$ סגירות נתון $\Leftarrow$ $f(a_1 ... a_n) \in S_1$
- ⋆ $f \in F_2$ מכיוון ש־$a_1, \ldots, a_n \in S_1$ ו־ $S_1 = S_2 \Leftarrow$ $a_1 \ldots a_n \in S_2$.

S_2 סגורה תחת הפעולות ב־$F_2 \Leftarrow$ $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S_2$
מכיוון ש־ $S_1 = S_2 \Leftarrow$ $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S_1$

לוגיקה ותורת הקבוצות - תרגול 3

הגדרה אינדוקטיבית של קבוצת הפסוקים החוקיים

הגדרה 1: קבוצת הפסוקים החוקיים, WFF ‏(Well Formed Formulae), היא הקבוצה האינדוקטיבית הבאה:

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= \{\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, (,), p_0, p_1, p_2, \ldots\}^* \\ B &= \{p_0, p_1, p_2, \ldots\} \\ \mathrm{F} &= \{F_\neg, F_\vee, F_\wedge, F_\rightarrow\} \\ \mathrm{WFF} &= \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}} \end{aligned}$$

- העולם X הוא קבוצת המילים הסופיות מעל הסימנים הנ"ל.

  דוגמה לאיבר בעולם: $p_1 \wedge (\vee p_2 (\in \mathrm{X}$

- איברי B: $p_0, p_1, p_2, \ldots$ נקראים פסוקים אטומיים (או משתנים אטומיים).

  עבור כל $\alpha, \beta \in \mathrm{X}$ הפונקציות ב־F מוגדרות באופן הבא,

$$\begin{aligned} F_\neg(\alpha) &= (\neg\alpha) \\ F_\vee(\alpha,\beta) &= (\alpha \vee \beta) \\ F_\wedge(\alpha,\beta) &= (\alpha \wedge \beta) \\ F_\rightarrow(\alpha,\beta) &= (\alpha \rightarrow \beta) \end{aligned}$$

דוגמאות לפסוקים חוקיים (כלומר ב־WFF):

$$p_5, (\neg p_{17}), (p_{1000} \rightarrow p_8), ((\neg p_0) \rightarrow (p_5 \rightarrow (p_1 \vee p_0)))$$

הערה: האם $p_0 \vee p_1$ זהה ל־$p_1 \vee p_0$? לא, כי הסדר חשוב.

איך מראים שמילה $\alpha \in \mathrm{X}$ היא פסוק חוקי ($\alpha \in \mathrm{WFF}$)?

מראים סדרת יצירה לפסוק מעל $\mathrm{WFF} = \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$.

דוגמה: האם $(p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_9))$ פסוק חוקי?

איך מראים שמילה $\alpha \in \mathrm{X}$ אינה פסוק חוקי ($\alpha \notin \mathrm{WFF}$)?

1. מוצאים תכונה Y שמשותפת לכל הפסוקים החוקיים ($T = \{\beta \in \mathrm{X} \mid$ Y מקיימת את $\beta\}$).
2. מוכיחים ש־α אינו מקיים את Y ($\alpha \notin T$).
3. מוכיחים באינדוקציה על מבנה WFF שכל הפסוקים החוקיים מקיימים את Y ($\mathrm{WFF} \subseteq T$).

תכונות בסיסיות של פסוקים חוקיים

המילים ב־WFF מקיימות את התכונות הבאות:

תכונה 1: $T_1 = \{\alpha \in \mathrm{X} \mid$ α פסוק אטומי או מתחיל ב־(ונגמר ב־)$\}$

דוגמא לשימוש בתכונה 1: מתכונה 1 נובע שהמילה $p_1)p_2$ אינה פסוק חוקי.

תכונה 2: $T_2 = \left\{\alpha \in \mathrm{X} \mid \#_{(}(a) = \#_{)}(a)\right\}$

כאשר $\#_{(}(\alpha)$ הוא מספר הסוגריים השמאליים ב־α ו־$\#_{)}(\alpha)$ הוא מספר הסוגריים הימניים ב־α.

הגדרה 2: נאמר ש־β היא רישא של α אם α, β מילים כך ש:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 a_2 \ldots a_n \\ \beta &= b_1 b_2 \ldots b_k \end{aligned}$$

כאשר $k \leq n$ ולכל $1 \leq i \leq k$ מתקיים ש־$a_i = b_i$.

נאמר כי β רישא ממש של α אם β רישא של α ו־$\beta \neq \alpha$ (כלומר $k < n$).

תכונה 3 (נסיון ראשון): $\mathrm{WFF} \subseteq T = \left\{\alpha \in \mathrm{X} \mid \#_{(}(\beta) > \#_{)}(\beta) :\right.$ α לכל $\beta \neq \epsilon$ רישא ממש של $\left.\right\}$

תכונה 3: $T_3 = \left\{\alpha \in \mathrm{X} \mid \right.$ 1. $\alpha \in \mathrm{WFF}$ 2. לכל $\beta \neq \epsilon$ רישא ממש של α : $\#_{(}(\beta) > \#_{)}(\beta)$ $\left.\right\}$

מסקנה מתכונות 2 + 3: אם α ב־WFF ו־β רישא ממש של α, אז $\beta \notin \mathrm{WFF}$.

משלוש התכונות שהוכחנו נובע משפט הקריאה היחידה שמשמעותו היא:

בהינתן $\varphi \in \mathrm{WFF}$, מתקיים בדיוק אחד משלושת הבאים:

1. φ הוא פסוק אטומי
2. $\varphi = (\neg\alpha)$ כאשר $\alpha \in \mathrm{WFF}$.
3. $\varphi = (\alpha \circ \beta)$ כאשר $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ ו־$\alpha, \beta \in \mathrm{WFF}$.

<u>תכונה נוספת של פסוקים</u>: לא קיים פסוק חוקי אינסופי, למשל $\alpha = ((((p_0 \wedge p_1) \wedge p_2) \wedge p_3) \wedge \ldots) \notin \mathrm{WFF}$, כי:

1. העולם שלנו הוא X — רק מילים סופיות.
2. ניתן להוכיח ש־ $\alpha \notin \mathrm{WFF}$ באמצעות התכונה הבאה:

$$T = \{\beta \in \mathrm{X} | \text{ב־}\beta\text{ יש מספר סופי של אטומים}\}$$

תרגול 3 לוגיקה

דוגמה:

נראה סדרת יצירה עבור: $(p_0 \to (p_1 \vee p_9)$

1. p_0 (אטום).
2. p_1 (אטום).
3. p_9 (אטום).
4. $(p_1 \vee p_9)$ $F_\vee(2,3)$
5. $F_\to(1,4)(p_0 \to (p_1 \vee p_9))$

<u>תזכורת: רצ' להוכיח:</u>

$X_{B,F} \subseteq T = \{x \in X |$ מקימים את $Y\}$
בלשב 3 מספיק להראות:

1. $B \subseteq T$
2. T סגורה ל־F. כלומר
לכל $f \in F$ אם $t_1, t_2 \ldots, t_n \in T$ אז $f(t_1, t_2 \ldots, t_n) \in T$'

<u>דוגמאות לרישות ממש:</u>

מי הן הרישות ממש של $(\neg p_5)$?:
$\epsilon, (, (\neg, (\neg p_5$
מי הן הרישות ממש של ϵ?: **אין**
מי הן הרישות ממש של)?: ϵ.

<u>נסיון לפתרון ה־3:</u>

<u>הבעיה:</u>

התכונה הזאת אינה סגורה תחת הפונקציות של WFF נשים לב שהמילה $(\in X$ מקיימת את התכונה אבל אם נפעיל עליה את $F_\neg$ ונקבל $((\neg)$ ומילה זו אינה מקיימת את התכונה

הוכחת התכונה המחוזקת:
<u>בסיס:</u>

אם α פסוק אטומי:

1. α פסוק חוקי ולכן $\alpha \in \mathrm{WFF}$
2. α מכיל רק תו אחד ולכן ל־α
אין רישות ממש שאינן ריקות ולכן התכונה מתקיימת באופן ריק.

<u>סגור:</u>

נניח כי γ, δ מקיימות את התכונה
ונראה כי התכונה נשמרת תחת הפעולות ב - F:
$\alpha = (\neg\gamma)$:

1. $\alpha \in \mathrm{WFF}$ לפי ה"א
$\gamma \in \mathrm{WFF}$ ומסגירות WFF ל־F.

2. יש שלוש רישות ממש לא ריקות אפשריות:

(א) $\beta = ($ או $\beta = (\neg$ $\#_((\beta) = 1 > 0 = \#_)(\beta)$

(ב) $\beta = (\neg\gamma'$ כאשר γ' רישא ממש של γ:
לה"א $\#_((\gamma') > \#_)(\gamma')$ ולכן:
$\#_((\beta) = 1 + \#_((\gamma') > 1 + \#_)(\gamma') = 1 + \#_)(\beta) > \#_)(\beta)$.

(ג) $\beta = (\neg\gamma$ לה"א γ פסוק חוקי ולכן מקיים
את תכונה 2 ולכן:
$\#_((\gamma) = \#_)(\gamma)$ ולכן:
$\#_((\beta) = 1 + \#_((\gamma) = 1 + \#_)(\gamma) = 1 + \#_)(\beta) > \#_)(\beta)$

3. עבור $F_\circ(\gamma, \delta) = (\gamma \circ \delta)$
כאשר $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$
ההוכחה דומה אבל יש יותר סוגים של רישות.

שאלת בונוס:^_^

הוכיחו כי $(p_o p_1)$ אינו פסוק חוקי.
<u>התכונה:</u>
מספר המופעים של פסוקים אטומיים ב־α גדול בדיוק ב־1.
ממספר המופעים של קשרים דו מקומיים ב־α.

לוגיקה - תרגול 4

השמות

הערה: מכאן ואילך נשמיט סוגריים 'מיותרים' מהפסוק על ידי הגדרת סדר קדימיות בין הקשרים:

1. $\neg$ (הקשר בעל הקדימות הגבוהה ביותר)
2. $\vee, \wedge$
3. $\rightarrow$ (הקשר בעל הקדימות הנמוכה ביותר)

שימו לב: בשאלות הנוגעות לתחביר אין להשמיט סוגריים!

הגדרה 1: פונקציה $v : \{p_0, p_1, p_2, \ldots\} \rightarrow \{\mathrm{F}, \mathrm{T}\}$ נקראת השמה.

דוגמאות:

1. v_{F} מוגדרת כך שלכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $v_{\mathrm{F}}(p_i) = \mathrm{F}$
2. v_{T} מוגדרת כך שלכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $v_{\mathrm{T}}(p_i) = \mathrm{T}$

סימונים:

- Ass היא קבוצת כל ההשמות.
- $TT_{\circ}$ היא טבלת האמת של קשר $\circ$ כלשהו.

הגדרה 2: בהינתן השמה v, השמה מורחבת $\overline{v}$ היא פונקציה $\overline{v} : \mathrm{WFF} \rightarrow \{\mathrm{F}, \mathrm{T}\}$ המוגדרת באינדוקציה:

בסיס: לכל $i \in \mathbb{N}$, $\overline{v}(p_i) = v(p_i)$.

סגור: לכל $\alpha, \beta \in \mathrm{WFF}$

- $\overline{v}(\neg\alpha) = TT_{\neg}(\overline{v}(\alpha))$
- לכל $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$, $\overline{v}(\alpha \circ \beta) = TT_{\circ}(\overline{v}(\alpha), \overline{v}(\beta))$

הגדרה 3: תהי $v \in \mathrm{Ass}$ ו־$\alpha \in \mathrm{WFF}$. אם $\overline{v}(\alpha) = \mathrm{T}$ נאמר ש־v מספקת את α, ונסמן $v \models \alpha$. אם α טאוטולוגיה, נסמן $\models \alpha$.

משפט 1 — משפט התלות הסופית: יהי פסוק α ושתי השמות v_1, v_2. אם לכל אטום p_i המופיע ב־α מתקיים $v_1(p_i) = v_2(p_i)$, אז $\overline{v}_1(\alpha) = \overline{v}_2(\alpha)$.

מושגי יסוד סמנטיים

הגדרה 4: נאמר כי פסוק α הוא ספיק אם קיימת השמה המספקת אותו (קיימת v כך ש־$\overline{v}(\alpha) = \mathrm{T}$).

דוגמאות: p_0, $p_0 \vee p_1$

הגדרה 5: פסוק α נקרא טאוטולוגיה אם כל השמה מספקת אותו (לכל v, $\overline{v}(\alpha) = \mathrm{T}$).

דוגמאות: $p_0 \to p_0$, $p_0 \vee \neg p_0$

הגדרה 6: פסוק α נקרא סתירה אם לא קיימת השמה המספקת אותו (לכל v, $\overline{v}(\alpha) = \mathrm{F}$).

דוגמה: $p_0 \wedge \neg p_0$

שימו לב: אם פסוק אינו סתירה אז הוא ספיק (ולא בהכרח טאוטולוגיה).

תרגיל 1: הוכיחו/ הפריכו: אם $\alpha \vee \beta$ טאוטולוגיה, אז α טאוטולוגיה או β טאוטולוגיה.

הגדרה 7: יהיו α, β פסוקים. אם כל השמה המספקת את α מספקת גם את β נאמר ש־α גורר לוגית את β (או לחילופין, ש־β נובע לוגית מ־α), ונסמן $\alpha \models \beta$.

טענות:

1. אם α טאוטולוגיה ו־$\alpha \models \beta$, אז β טאוטולוגיה.
2. אם β סתירה ו־$\alpha \models \beta$, אז α סתירה.
3. אם α סתירה אז לכל פסוק β מתקיים $\alpha \models \beta$.
4. אם β טאוטולוגיה אז לכל פסוק α מתקיים $\alpha \models \beta$.
5. $\models$ הוא יחס רפסלקסיבי וטרנזיטיבי (לא סימטרי).

הגדרה 8: יהיו α, β פסוקים. אם לכל השמה v מתקיים ש־$\overline{v}(\alpha) = \overline{v}(\beta)$ נאמר כי α ו־β שקולים לוגית ונסמן $\alpha \equiv \beta$.

משפט 2: α ו־β שקולים לוגית אמ"מ $\alpha \models \beta$ וגם $\beta \models \alpha$.

מושגים סמנטיים עבור קבוצות פסוקים

הגדרה 9: תהי $\Sigma \subseteq \mathrm{WFF}$. אם v מספקת את כל הפסוקים ב־Σ נאמר כי v מספקת את Σ ונסמן $v \models \Sigma$.

דוגמה: $v_{\mathrm{T}} \models \{p_1, p_2\}$

הגדרה 10: קבוצת פסוקים Σ נקראת ספיקה אם קיימת השמה v כך ש־v מספקת את Σ.

הגדרה 11: תהי $\Sigma \subseteq \mathrm{WFF}$. אם כל השמה המספקת את Σ מספקת גם את α נאמר כי Σ גוררת לוגית את α (או לחילופין ש־α נובע לוגית מ־Σ) ונסמן $\Sigma \models \alpha$.

דוגמה: $\{p_0, p_1\} \models p_0 \wedge p_1$

הגדרה 12: יהיו $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \mathrm{WFF}$. נאמר כי Σ_1 ו־Σ_2 שקולות לוגית ונסמן $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$ אם לכל השמה v מתקיים $v \models \Sigma_1 \iff v \models \Sigma_2$.

דוגמה: $\{p_0, p_1\} \equiv \{p_0 \wedge p_1\}$

<u>תרגיל 3:</u>

תהי $\Sigma \subseteq \mathrm{WFF}$. נניח שכל פסוק $\alpha \in \Sigma$ ספיק. האם בהכרח Σ ספיקה?

<u>תרגיל 4:</u>

יהיו קבוצת פסוקים Σ ופסוק α, ונניח ש־$\Sigma \cup \{\alpha\}$ ספיקה. האם בהכרח $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ אינה ספיקה?

תרגול 4 לוגיקה

תזכורת:

הפונקצייה $TT_{\rightarrow} : \{T,F\} \times \{T,F\} \rightarrow \{T,F\}$
מוגדרת כך ש $TT_{\rightarrow}(\alpha,\beta)$ היא:

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

הגדרה 2 (המשך):

דוגמה:

נתונה ההשמה :

$$v(p_i) = \begin{cases} F & i = 1 \\ T & \text{else} \end{cases}$$

נחשב את הערך של הפסוק $p_0 \rightarrow (\neg p_1)$
תחת ההשמה v.

$$\begin{aligned}
&\overline{v}(p_0 \rightarrow (\neg p_1)) = \\
&TT_{\rightarrow}(\overline{v}(p_0), \overline{v}(\neg p1)) \\
&TT_{\rightarrow}(v(p_0), TT_{\neg}(\overline{v}(p1))) \\
&TT_{\rightarrow}(T, TT_{\neg}(v(p_1))) \\
&TT_{\rightarrow}(T, TT_{\neg}(F)) \\
&TT_{\rightarrow}(T, T) = T.
\end{aligned}$$

סיכום:

כלומר :

$$\overline{v}(p_0 \rightarrow (\neg p_1)) = T$$

כדי להראות ש $p_0 \vee, \neg p_0$ טאוטולוגיה, נבדוק את כל ההשמות
למשתנים הרלוונטים (p_0), ובעזרת טבלת אמת:

p_0	$\neg p_0$	$p_0 \vee \neg p_0$
F	T	T
T	F	T

טענות:

1. אם α טאוטולוגיה ו־ $\alpha \models \beta$, אז β טאוטולוגיה.
   הפרכה:
   סימונים:
   $\alpha \vee \beta = p_0 \vee \neg p_0$,$\beta = \neg p_0$, $\alpha = p_0$
   נראה שזו אכן דוגמה נגדית:
   נראה שכל תנאי השאלה מתקיימים
   נראה ש $p_0 \vee \neg p_0$ טאוטולוגיה־הוכחה
   בעזרת טבלת אמת נראה שמספקת

(א) נראה ש־p_0לא טאוטולוגיה
$\overline{v}_F(\alpha)$
$\overline{v}_F(p_0) = v_F(p_0) = F$
הראינו שקיימת לפחות השמה אחת שאינה מספקת
את p_0 ולכן זו לא טאוטולוגיה.

(ב) נראה כי $\beta = \neg p_0$ לא טאוטולוגיה
$\overline{v}_T(\beta) = \overline{v}_T(\neg p_0) = TT_\neg(v_T(p_0)) = TT_\neg(T) = F$

תרגיל 3:

הפרכה:

דוגמה נגדית:
$\Sigma = \{p_0, \neg p_0\}$
$\neg p_0, p_0$ ספיקים
נראה ש־Σ לא ספיקה נניח בשלילה ש־Σ ספיקה
, אז קיימת v כך ש־v מספקת את Σ אז :

$$\overline{v}(p_0) = T$$
$$\overline{v}(\neg p_0) = T$$
$$\overline{v}(\neg p_0) = TT_\neg(\overline{v}(p_0)) = TT_\neg(T) = F$$

תרגיל 4:

הטענה אינה נכונה $\Sigma = \emptyset$, $\alpha = p0$, $\neg\alpha = \neg p_0$.

לוגיקה - תרגול 5

מערכת הוכחה לתחשיב הפסוקים

הגדרה 1, מערכת ההוכחה: קבוצת הפסוקים היכיחים, $Ded(\emptyset)$, היא הקבוצה האינדוקטיבית $X_{B,F}$ המוגדרת באופן הבא:

- $X = \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$
- $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ - קבו.צת האקסיומות, כאשר:
  - $A_1 = \left\{\alpha \to (\beta \to \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}\right\}$
  - $A_2 = \left\{(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}\right\}$
  - $A_3 = \left\{((\neg\beta) \to (\neg\alpha)) \to (\alpha \to \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}\right\}$
- $F = \{MP\}$ - קבוצת כללי ההיסק, כאשר MP הוא כלל הניתוק $\frac{\alpha, \alpha\to\beta}{\beta}$.

  צורת רישום נוספת: $MP(\alpha, \alpha \to \beta) = \beta$.

דוגמאות:

$(\underbrace{p_1}_{\alpha} \to (\underbrace{p_2}_{\beta} \to \underbrace{p_1}_{\alpha})) \in Ded(\emptyset)$ (שייך בסיס)

$(\underbrace{[p_1 \to [p_2 \to p_1]]}_{\alpha} \to (\underbrace{p_0}_{\beta} \to \underbrace{[p_1 \to [p_2 \to p_1]]}_{\alpha})) \in Ded(\emptyset)$ (שייך לבסיס)

$(p_0 \to (p_1 \to (p_2 \to p_1))) \in Ded(\emptyset)$ (הפעלת MP על שני הקודמים)

הגדרה 2: פסוק α ששייך לקבוצה האינדוקטיבית ($\alpha \in Ded(\emptyset)$) נקרא פסוק יכיח, ויסומן $\vdash \alpha$.

הגדרה 3: יהי $\alpha \in Ded(\emptyset)$. סדרת היצירה של α נקראת סדרת הוכחה (או הוכחה פורמלית). כלומר סדרת הוכחה של פסוק α היא סדרה סופית של פסוקים $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ כך שמתקיים:

1. $\alpha_n = \alpha$.
2. לכל פסוק α_i מתקיים:

   (א) α_i הוא אקסיומה

   או

   (ב) α_i התקבל מפסוקים קודמים על ידי הכלל MP.

מערכת הוכחה עם הנחות

<u>הגדרה 4, מערכת הוכחה עם הנחות</u>: קבוצת <u>הפסוקים היכיחים מקבוצת פסוקים Σ</u> (הנחות), $Ded\left(\Sigma\right)$, היא הקבוצה האינדוקטיבית $X_{B\cup\Sigma,F}$ (עבור X, B ו־F מהגדרה 1).

- אם $\alpha \in Ded\left(\Sigma\right)$ נאמר כי α <u>יכיח מ־Σ</u> ונסמן $\Sigma \vdash \alpha$.
- סדרת היצירה של פסוק α מעל $Ded\left(\Sigma\right)$ נקראת סדרת הוכחה של α מתוך Σ.
- אם $\Sigma = \emptyset$, אז $Ded\left(\emptyset\right) = X_{B,F}$, קבוצת הפסוקים היכיחים (ללא הנחות).

<u>דוגמה</u>: נוכיח כי לכל זוג פסוקים α, β מתקיים $\{\alpha, \neg\alpha\} \vdash \beta$.

<u>תכונות מערכת ההוכחה</u>:

יהיו $\Sigma, \Gamma \subseteq \mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$ ו־$\alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$.

1. <u>הנחת המבוקש</u>: אם $\alpha \in \Sigma$ אז $\Sigma \vdash \alpha$

הוכחה: ל־α יש סדרת הוכחה באורך 1 מעל Σ.

2. <u>סופיות ההוכחה</u>: אם $\Gamma \vdash \alpha$ אז קיימת $\Sigma \subseteq \Gamma$ סופית כך ש־$\Sigma \vdash \alpha$

אינטואיציה: בסדרת ההוכחה יש מספר סופי של פסוקים, ולכן בהכרח משתמשים רק במספר סופי של הנחות מתוך Γ.

3. <u>מונוטוניות (הרחבת הנחות)</u>: אם $\Sigma \vdash \alpha$ וגם $\Sigma \subseteq \Gamma$ אז $\Gamma \vdash \alpha$

אינטואיציה: סדרת ההוכחה של α מעל Σ היא גם סדרת הוכחה של α מעל Γ.

4. <u>מונוטוניות מורחבת (טענת עזר)</u>: אם $\Sigma \vdash \alpha$ וגם לכל $\beta \in \Sigma$ מתקיים $\Gamma \vdash \beta$ אז $\Gamma \vdash \alpha$

אינטואיציה: בסדרת ההוכחה של α מתוך Σ, נחליף כל מופע של פסוק $\beta \in \Sigma$ בהוכחה של β מתוך Γ.

<u>משפט הדדוקציה</u>: לכל קבוצת פסוקים Σ ופסוקים α, β מתקיים: $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ אם ורק אם $\Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

<u>הערה</u>: משפט הדדוקציה אינו מוסיף כוח הוכחה, כלומר כל מה שניתן להוכיח בעזרתו ניתן להוכיח גם בלעדיו. משפט זה רק מקל על הוכחת קיום סדרת הוכחה.

<u>תרגיל 1</u>: הוכיחו שהפסוק $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$ יכיח, בעזרת משפט הדדוקציה.

משפט הנאותות

<u>משפט הנאותות הרחב</u>: לכל קבוצת פסוקים Σ מתקיים, אם $\Sigma \vdash \alpha$ אז $\Sigma \models \alpha$.

סימון: $Con\left(\Sigma\right) = \left\{\alpha \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}} \mid \Sigma \vDash \alpha\right\}$. כלומר, משפט הנאותות משמעותו: $Ded\left(\Sigma\right) \subseteq Con\left(\Sigma\right)$.

<u>מסקנה ממשפט הנאותות</u>: אם $\Sigma \not\models \alpha$ אז $\Sigma \nvdash \alpha$.

<u>משפט הנאותות הצר</u>: אם $\vdash \alpha$ אז $\models \alpha$.

<u>תרגיל 2</u>: נגדיר מערכת הוכחה חדשה עבור $\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$.

אקסיומות: $\mathrm{A} = \left\{\alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}\right\}$

כללי ההיסק: לכל $\alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$,

1. $MV_1(\alpha,\beta)=\alpha\vee\beta$
2. $MV_2(\alpha,(\neg\alpha)\vee\beta)=\beta$

נסמן ב־$Ded_N(\emptyset)$ את קבוצת הפסוקים היכיחים במערכת החדשה, ואם $\varphi\in Ded_N(\emptyset)$ אז נסמן $\underset{N}{\vdash}\varphi$. באופן דומה נסמן $Ded_N(\Sigma)$ ו־$\Sigma\underset{N}{\vdash}\varphi$ עבור פסוקים היכיחים במערכת החדשה מקבוצת הנחות Σ.

הוכיחו כי מערכת ההוכחה החדשה נאותה במובן הצר (כלומר, לכל פסוק $\varphi\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$: אם $\underset{N}{\vdash}\varphi$ אז $\models\varphi$).

לוגיקה־נספח לתרגול 5

<u>תרגיל 1</u>: נגדיר מערכת הוכחה חדשה עבור $\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$.

אקסיומות: $\mathrm{A}=\left\{\alpha\vee(\beta\vee\neg\alpha)\mid\alpha,\beta\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}\right\}$

כללי ההיסק: לכל $\alpha,\beta\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$,

1. $MV_1(\alpha,\beta)=\alpha\vee\beta$
2. $MV_2(\alpha,(\neg\alpha)\vee\beta)=\beta$

נסמן ב־$Ded_N(\emptyset)$ את קבוצת הפסוקים היכיחים במערכת החדשה, ואם $\varphi\in Ded_N(\emptyset)$ אז נסמן $\underset{N}{\vdash}\varphi$. באופן דומה נסמן $Ded_N(\Sigma)$ ו־$\Sigma\underset{N}{\vdash}\varphi$ עבור פסוקים היכיחים במערכת החדשה מקבוצת הנחות Σ.

1. הוכיחו כי מערכת ההוכחה החדשה נאותה במובן הצר (כלומר, לכל פסוק $\varphi\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$: אם $\underset{N}{\vdash}\varphi$ אז $\models\varphi$).

<u>פתרון</u>: נוכיח באינדוקציית מבנה כי $Ded_N(\emptyset)\subseteq Con(\emptyset)=\left\{\varphi\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}\mid\models\varphi\right\}$.

<u>בסיס</u>: $\varphi\in A$, כלומר קיימים $\alpha,\beta\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$ כך ש־ $\varphi=\alpha\vee(\beta\vee\neg\alpha)$.

נראה כי $\models\alpha\vee(\beta\vee\neg\alpha)$ באמצעות טבלת אמת:

α	β	$\neg\alpha$	$\beta\vee\neg\alpha$	$\alpha\vee(\beta\vee\neg\alpha)$
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	T	F	T	T

<u>סגור</u>:

הנחת האינדוקציה: יהיו $\alpha,\gamma\in Con(\emptyset)$, כלומר $\models\alpha,\models\gamma$.

נפריד למקרים:

עבור MV_1:

$\varphi=MV_1(\alpha,\gamma)$. במקרה זה $\varphi=\alpha\vee\gamma$, נראה כי $\models\alpha\vee\gamma$.

תהי השמה v. ע"פ הנחת האינדוקציה $\overline{v}(\gamma)=\mathrm{T}$ ו־$\overline{v}(\alpha)=\mathrm{T}$

ולכן, $\overline{v}(\alpha\vee\gamma)=TT_\vee(\overline{v}(\alpha),\overline{v}(\gamma))=TT_\vee(\mathrm{T},\mathrm{T})=\mathrm{T}$

עבור MV_2:

- אם קיים $\beta\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$ כך ש־$\gamma=(\neg\alpha)\vee\beta$:

  $\varphi=MV_2(\alpha,(\neg\alpha)\vee\beta)$. במקרה זה $\varphi=\beta$, נראה כי $\models\beta$.

  תהי השמה v. ע"פ הנחת האינדוקציה $\overline{v}((\neg\alpha)\vee\beta)=\mathrm{T}$ ו־$\overline{v}(\alpha)=\mathrm{T}$

  כלומר $\overline{v}(\neg\alpha)=TT_\neg(\overline{v}(\alpha))=TT_\neg(\mathrm{T})=\mathrm{F}$

  וגם $\mathrm{T}=\overline{v}((\neg\alpha)\vee\beta)=TT_\vee(\overline{v}(\neg\alpha),\overline{v}(\beta))=TT_\vee(\mathrm{F},\overline{v}(\beta))$

  ולכן, ע"פ $TT_\vee$ מתקיים $\overline{v}(\beta)=\mathrm{T}$.

- אחרת:

$\varphi = MV_2\left(\alpha, (\neg\alpha) \vee \beta\right)$. במקרה זה $\varphi = \alpha$ ולפי הנחת האינדוקציה מתקיים $\vDash \alpha$.

2. הוכיחו כי מערכת ההוכחה החדשה נאותה במובן הרחב (כלומר, לכל $\varphi \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$: אם $\Sigma \underset{N}{\vdash} \varphi$ אז $\Sigma \vDash \varphi$).

<u>פתרון</u>: נוכיח באינדוקציית מבנה כי $Ded_N(\Sigma) \subseteq Con(\Sigma) = \left\{\varphi \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}} \mid \Sigma \vDash \varphi\right\}$.

<u>בסיס</u>: צ"ל לכל $\varphi \in A \cup \Sigma$ מתקיים $\Sigma \vDash \varphi$

(א) $\varphi = \alpha \vee (\beta \vee (\neg\alpha))$: ראינו כבר כי מתקיים $\vDash \varphi$ (סעיף קודם) ולכן בפרט מתקיים $\Sigma \vDash \varphi$.

(ב) $\varphi \in \Sigma$: כל השמה המספקת את Σ מספקת כל פסוק ב־Σ (ע"פ הגדרה) ובפרט את φ ולכן $\Sigma \vDash \varphi$.

<u>סגור</u>: יהיו $\alpha, \gamma \in Con(\Sigma)$, כלומר $\Sigma \vDash \alpha$ ו־$\Sigma \vDash \gamma$.

נפריד למקרים:

עבור MV_1:

$\varphi = MV_1(\alpha, \gamma)$: כלומר $\varphi = \alpha \vee \gamma$. נראה כי $\Sigma \vDash \alpha \vee \gamma$.

תהי השמה v המספקת את Σ. ע"פ ה.א. $\overline{v}(\gamma) = \mathrm{T}$ ו־$\overline{v}(\alpha) = \mathrm{T}$

המשך בדיוק כמו בסעיף 1.

עבור MV_2:

- אם קיים $\beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$ כך ש־$\gamma = (\neg\alpha) \vee \beta$:

  $\varphi = MV_2\left(\alpha, (\neg\alpha) \vee \beta\right)$.

  כלומר $\varphi = \beta$. נתון כי $\Sigma \vDash (\neg\alpha) \vee \beta$ ו־$\Sigma \vDash \alpha$ ונראה כי $\Sigma \vDash \beta$.

  תהי השמה v המספקת את Σ. ע"פ ה.א. $\overline{v}\left((\neg\alpha) \vee \beta\right) = \mathrm{T}$ ו־$\overline{v}(\alpha) = \mathrm{T}$

  ההמשך בדיוק כמו בסעיף 1.

- אחרת:

  $\varphi = MV_2\left(\alpha, (\neg\alpha) \vee \beta\right)$. במקרה זה $\varphi = \alpha$ ולפי הנחת האינדוקציה מתקיים $\Sigma \vDash \alpha$.

תרגול 5 לוגיקה

$$MP(\alpha,\gamma)=\begin{cases}\beta & \gamma=\alpha\to\beta\\ \alpha & \textbf{otherwise}\end{cases}$$

דוגמה:

סדרת הוכחה:

.1	A_1	$\neg\alpha\to(\neg\beta\to\neg\alpha)$
.2	הנחה	$\neg\alpha$
.3	$MP_{1,2}$	$\neg\beta\to\neg\alpha$
.4	A_3	$(\neg\beta\to\neg\alpha)\to(\alpha\to\beta)$
.5	$MP_{3,4}$	$\alpha\to\beta$
.6	הנחה	α
.7	$MP_{5,6}$	β

תרגיל 1:

הוכיחו שהפסוק $\alpha\to(\beta\to(\beta\to\alpha))$ יכיח בעזרת משפט הדדוקציה.

הוכחה (לפי דדוקציה):

$$\begin{aligned}&\alpha\to(\beta\to(\beta\to\alpha))\\ &\Leftrightarrow(\text{deduction})\\ &\{\alpha\}\vdash\beta\to(\beta\to\alpha)\\ &\Leftrightarrow(\text{deduction})\\ &\{\alpha,\beta\}\vdash\beta\to\alpha\\ &\Leftrightarrow(\text{deduction})\\ &\{\alpha,\beta\}\vdash\alpha\end{aligned}$$

מתקיים $\{\alpha,\beta\}\vdash\alpha$ מהנחת המבוקש.

אינד' $Ded(\Sigma)=\left\{\alpha\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}|\Sigma\vdash\alpha\right\}$

לא אינד' $Con(\Sigma)=\left\{\alpha\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}\mid\Sigma\vDash\alpha\right\}$

תרגיל 2:

נגדיר מערכת הוכחה חדשה עבור $\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$
אקסיומות: $A = \left\{\alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}\right\}$
כלל ההיסק: לכל $\alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$

1. $MV_1(\alpha, \beta) = \alpha \vee \beta$
2. $MV_2(\alpha, (\neg a) \vee \beta) = \beta$

נסמן ב־$Ded_N(\emptyset)$ את קבוצת הפסוקים היכיחים במערכת החדשה, ואם $\varphi \in Ded_N(\emptyset)$ אז נסמן $\underset{N}{\vdash} \varphi$. באופן דומה נסמן $Ded_N(\Sigma)$ ו־$\Sigma \underset{N}{\vdash} \varphi$ עבור פסוקים היכיחים במערכת החדשה מקבוצות המחות Σ.
הוכיחו כי מערכת ההוכחה החדשה נאותה במובן הצר (כלומר, לכל פסוק $\varphi \in \alpha \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$: אם $\underset{N}{\vdash} \varphi$ אז $\models \varphi$).

פתרון:

נוכיח באינדוקציית מבנה ש:
$$Ded_N(\phi) \subseteq Con(\phi) \ (\models \varphi \Leftarrow \vdash_N \varphi)$$

בסיס: נראה $\models \alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha)$ לכל $\alpha, \beta \in \alpha \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$ באמצעות טעבלת אמת:

α	β	$\neg\alpha$	$\beta \vee \neg\alpha$	$\alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha)$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

סגור: נניח $\alpha, \beta \in Con(\phi)$ כלומר $\models \beta$, $\models \alpha$

$\star$ $\delta = MV_1(\alpha, \beta) = \alpha \vee \beta$

תהיי $v \in ASS$
$$\overline{V}(\alpha \vee \beta) TT_v(\overline{V}(\alpha), \overline{V}(\beta)) \underbrace{=}_{\text{induction def.}} TT_V(T, T) = T$$

$\star$ $\beta = ((\neg\alpha) \vee \gamma) \quad \delta = MV_2(\alpha_1(\neg\alpha) \vee \gamma) = \gamma$

תהיי $v \in ASS$

$$\overline{V}(\alpha) = T$$
$$\overline{V}(\beta) = \overline{V}((\neg\alpha) \vee \gamma) = T$$
$$\overline{V}(\neg) = TT_\neg(\overline{V}(\alpha)) = TT_\neg(T) = F$$

$\Leftarrow \overline{V}(\gamma) = T$ לפי טבלת אמת.

$\star$ $\underbrace{MV_2(\alpha, \beta) = \alpha}_{\text{not mandatory}}$ $\models \alpha$ לפי ה"א.

לוגיקה ותורת הקבוצות - תרגול 6

מערכת הוכחה לתחשיב הפסוקים

תזכורת: קבוצת הפסוקים היכיחים, $Ded\left(\emptyset\right)$, היא הקבוצה האינדוקטיבית $X_{B,F}$ המוגדרת באופן הבא:

- $W=\mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$
- $B=A_1\cup A_2\cup A_3$ - קבוצת האקסיומות, כאשר:
  - $A_1=\left\{\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)\mid\alpha,\beta\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}\right\}$
  - $A_2=\left\{(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma))\mid\alpha,\beta,\gamma\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}\right\}$
  - $A_3=\left\{((\neg\beta)\rightarrow(\neg\alpha))\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)\mid\alpha,\beta\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}\right\}$
- $F=\{MP\}$ - קבוצת כללי ההיסק, כאשר MP הוא כלל הניתוק $\frac{\alpha,\alpha\rightarrow\beta}{\beta}$.

  צורת רישום נוספת: $MP\left(\alpha,\alpha\rightarrow\beta\right)=\beta$.

מערכת הוכחה עם הנחות: קבוצת הפסוקים היכיחים מקבוצת פסוקים Σ (הנחות), $Ded\left(\Sigma\right)$, היא הקבוצה האינדוקטיבית $X_{B\cup\Sigma,F}$ (עבור W, B ו־F מהגדרה 1).

- אם $\alpha\in Ded\left(\Sigma\right)$ נאמר כי α יכיח מ־Σ ונסמן $\Sigma\vdash\alpha$.
- סדרת היצירה של פסוק α מעל $Ded\left(\Sigma\right)$ נקראת סדרת הוכחה של α מתוך Σ.
- אם $\Sigma=\emptyset$, אז $Ded\left(\emptyset\right)=X_{B,F}$, קבוצת הפסוקים היכיחים (ללא הנחות).

משפט הנאותות ועקביות

משפט הנאותות הרחב: לכל קבוצת פסוקים Σ מתקיים, אם $\Sigma\vdash\alpha$ אז $\Sigma\models\alpha$.

סימון: $Con\left(\Sigma\right)=\left\{\alpha\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}\mid\Sigma\vDash\alpha\right\}$. כלומר, משפט הנאותות משמעותו: $Ded\left(\Sigma\right)\subseteq Con\left(\Sigma\right)$.

מסקנה ממשפט הנאותות: אם $\Sigma\not\models\alpha$ אז $\Sigma\nvdash\alpha$.

משפט הנאותות הצר: אם $\vdash\alpha$ אז $\models\alpha$.

עקביות

הגדרה 1: קבוצת פסוקים $\Sigma\subseteq\mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$ היא עקבית אם **לא קיים** $\alpha\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$ כך ש־$\Sigma\vdash\alpha$ וגם $\Sigma\vdash\neg\alpha$.

משפט 1 (הגדרה שקולה): Σ עקבית אמ"מ קיים פסוק α כך ש־$\Sigma\nvdash\alpha$.

איך מראים שקבוצה Σ היא עקבית?

לפי ההגדרה השקולה, די להראות פסוק α כך ש־$\Sigma \nvdash \alpha$, כלומר $\alpha \notin Ded\left(\Sigma\right)$.

לפי המסקנה ממשפט הנאותות, די להוכיח כי $\alpha \notin Con\left(\Sigma\right)$, כלומר $\Sigma \not\models \alpha$.

תרגיל 1: הוכיחו כי הקבוצה $\Sigma = \{p_i \to p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\} = \{p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, \dots\}$ היא עקבית.

משפט 2: אם Σ ספיקה אז Σ עקבית.

תרגיל 2:

נגדיר סדרה של קבוצות פסוקים:

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= \{\neg p_0\}\\ \Sigma_1 &= \{p_0, \neg p_1\}\\ \Sigma_2 &= \{p_0, p_1, \neg p_2\}\\ &\vdots\end{aligned}$$

באופן כללי $\Sigma_i = \{p_0, p_1, \dots, p_{i-1}, \neg p_i\}$.

1. האם לכל i מתקיים ש־Σ_i עקבית?
2. האם $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i$ עקבית?
3. האם $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i$ עקבית?
4. תהי $X \neq \emptyset$ קבוצת קבוצות פסוקים.
   הוכיחו: אם לכל $\Sigma \in X$ מתקיים ש־Σ עקבית, אז $\bigcap X$ היא עקבית.

משפט השלמות

משפט השלמות: לכל פסוק α וקבוצת פסוקים Σ, אם $\Sigma \models \alpha$ אז $\Sigma \vdash \alpha$.

בצרוף משפט הנאותות נקבל כי $\Sigma \vdash \alpha \Leftrightarrow \Sigma \vDash \alpha$.

מסקנה ממשפט משלמות: אם $\Sigma \nvdash \alpha$, אז $\Sigma \not\models \alpha$.

משפט 3: לכל קבוצת פסוקים Σ, אם Σ עקבית אז Σ ספיקה.

בצרוף משפט 2 נקבל כי Σ עקבית אמ"מ Σ ספיקה.

תרגיל 3: נגדיר מערכת הוכחה חדשה לתחשיב הפסוקים מעל $\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$.

- קבוצת האקסיומות מכילה את הפסוקים מהצורה הבאה:

  לכל $\alpha,\beta,\gamma\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$,

  - A_1 : $\alpha\to(\beta\to\alpha)$
  - A_2: $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma))$

- כללי היסק:

  - $MP(\alpha,\alpha\to\beta)=\beta$
  - MV (יוגדר בהמשך)

נסמן ב־$\Sigma\underset{N}{\vdash}\alpha$ את הטענה שפסוק α יכיח מתוך Σ במערכת החדשה.

1. נגדיר $MV(\alpha\to(\beta\to\alpha))=\alpha$.

   הוכיחו/ הפריכו: המערכת החדשה שלמה.

   כלומר, לכל קבוצת פסוקים $\Sigma\subseteq\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$ ולכל פסוק $\alpha\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$, אם $\Sigma\vDash\alpha$ אז $\Sigma\underset{N}{\vdash}\alpha$.

תרגול 6 לוגיקה

תרגיל 1:

הוכיחו כי הקבוצה $\Sigma = \{p_i \to p_{i+1} | i \in \mathbb{N}\} = \{p_o \to p_1, p_1 \to p_2, \dots\}$ היא עקבית.

הוכחה:

נבחר $\alpha = \neg(p_0 \to p_o)$, נוכיח כי $\Sigma \not\models \alpha$
יש להראות השמה המספקת את Σ אבל לא את α.

$$\overline{V_T}(p_i \to p_{i+1}) = TT_{\to}(V_T(p_i), V_T(p_{i+1}))$$
$$TT_{\to}(T,T) = T$$

ולכן V_Tמספקת את Σ אבל $V_T(\alpha) = F$
קיבלנו $\Sigma \nvdash \alpha \Leftarrow \Sigma \not\models \alpha$ (לפי מסקנה ממשפט הנאותות)
$\Leftarrow$ Σ עקבית.
(הגדרה שקולה עקביות)

משפט 2:

אם Σ ספיקה אז Σ עקבית.

משפט 2 הוכחה:

נניח כי Σ ספיקה, אז קיימת לפי הגדרה השמה v כך ש $v \models \Sigma$כמו כן $\overline{V}(\neg(p_0 \to p_0)) = F$
$\Sigma \not\models \neg(p_0 \to p_0) \underbrace{\Leftarrow}_{\text{neotut}} \Sigma\forall\neg(p_0 \to p_0)$

תרגיל 2:

נגדיר סדרה של קבוצות פסוקים:

$$\Sigma_0 = \{\neg p_o\}$$
$$\Sigma_1 = \{p_0, \neg p_1\}$$
$$\Sigma_2 = \{p_0, p_1, \neg p_2\}$$
$$\vdots$$

באופן כללי:

$$\Sigma_i = \{p_0, p_1, \dots, p_{i-1}, \neg p_i\}$$

1. האם לכל i מתקיים ש־Σ_i עקבית?
2. האם $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$ עקבית?
3. האם $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$ עקבית?
4. תהי $X \neq \emptyset$ קבוצת קבוצות פסוקים.
הוכיחו אם לכל $\Sigma \in X$ מתקיים ש־Σ עקבית, אז $\bigcap X$ היא עקבית.

פתרון 1:

כן, על פי משפט מספיק להראות ש־Σ_i ספיקה. לכל i נגדיר השמה v_i באופן הבא:

$$V_i(p_k)\begin{cases}F & k=i\\ T & k\neq i\end{cases}$$

v_i מספקת את Σ_i ולכן Σ_i ספיקה וממפשט עקבית.(צריך להוכיח).

פתרון 2:

לא, $\neg p_o \in \Sigma_0$ ו־ $p_0 \in \Sigma_1$ מהגדרת איחוד גדול $p_0, \neg p_0 \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i$

מהנחת המבוקש:

$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i \vdash p_0$ וגם $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i \vdash \neg p_0$

$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i$ מוכיחה את p_0 וגם $\neg p_0$ ולכן מהגדרת עקביות $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Sigma$ אינה עקבית

מסקנה:

איחוד של קבוצות עקביות לא בהכרח עקבי.

פתרון 3:

כן, נשים לב כי $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i = \emptyset$ זו קבוצה ספיקה ולפי משפט היא עקבית.

פתרון 4:

נניח בשלילה ש־ $\bigcap X$ לא עקבית.

לכל $\alpha \in \mathrm{WFF}_{\{\rightarrow,\neg\}}$ מתקיים $\bigcap X \vdash \alpha$

מכוון ש $X \neq \emptyset$, קיימת Σ כך ש־$\bigcap X \subseteq \Sigma$ (לפי הגדרת חיתוך גדול).

ממונוטוניות ההוכחה מתקיים $\Sigma \vdash \alpha$ לפי הגדרה Σ לא עקבית וזו סתירה.

תרגיל 3:

1. נגדיר $MV(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) = \alpha$

הוכיחו המערכת החדשה שלמה, כלומר לכל קבוצת פסוקים $\Sigma \subseteq \mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$ ולכל פסוק $\alpha \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$,

אם $\Sigma \vDash \alpha$ אז $\Sigma \underset{N}{\vdash} \alpha$.

הוכחה סעיף 1:

הטענה נכונה, תהי קבוצת פסוקים Σ ופסוק α כך ש־$\Sigma \vDash \alpha$ נראה כי $\Sigma \underset{N}{\vdash} \alpha$ כך נראה

<u>סדרת הוכחה:</u>

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \quad (A_1)$
2. $\alpha \quad (MV(1))$

נשים לב בכלל לא השתמשנו בנתון ש־$\Sigma \vDash \alpha$. המערכת מוכיחה כל α ובפרט לא נאותה.

לוגיקה ותורת הקבוצות ־ תרגול 7

תרגיל 1: נגדיר מערכת הוכחה חדשה לתחשיב הפסוקים מעל $\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$.

- קבוצת האקסיומות מכילה את הפסוקים מהצורה הבאה:

  לכל $\alpha,\beta,\gamma\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$,

  - A_1 : $\alpha\to(\beta\to\alpha)$
  - A_2: $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma))$

- כללי היסק:

  - $MP(\alpha,\alpha\to\beta)=\beta$
  - MV (יוגדר בהמשך)

נסמן ב־$\Sigma\underset{N}{\vdash}\alpha$ את הטענה שפסוק α יכיח מתוך Σ במערכת החדשה.

נגדיר $MV(\alpha\to(\beta\to\alpha))=((\neg\alpha)\to(\neg\beta))\to(\beta\to\alpha)$.

הוכיחו/ הפריכו: המערכת החדשה שלמה.

תרגיל 2: נגדיר מערכת הוכחה חדשה לתחשיב הפסוקים מעל $\mathrm{WFF}_{\{\wedge,\neg\}}$.

- קבוצת האקסיומות מכילה את הפסוקים מהצורה הבאה:

  - A_1: $\neg(\alpha\wedge(\beta\wedge\neg\alpha))$

- קבוצת כללי ההיסק:

  - $M_1(\alpha,\neg(\alpha\wedge\beta))=\neg\beta$

נסמן ב־$\underset{N}{\vdash}\alpha$ את הטענה שפסוק α יכיח במערכת החדשה.

הוכיחו/ הפריכו: אם $\models\alpha$, אז $\underset{N}{\vdash}\alpha$.

גדירות

הגדרה 1: השמה המספקת קבוצת פסוקים Σ נקראת מודל של Σ.

קבוצת המודלים של Σ היא הקבוצה: $M(\Sigma)=\{v\in\mathrm{Ass}\mid v\models\Sigma\}$

(סימונים נוספים לקבוצת המודלים של Σ: $Ass(\Sigma),Mod(\Sigma),M_\Sigma$)

ניתן לראות שלכל קבוצת פסוקים Σ מתאימה קבוצת מודלים $M(\Sigma)$ יחידה, כלומר Σ מגדירה את $M(\Sigma)$.

דוגמאות ללא הוכחה:

Σ - קבוצת פסוקים	$M(\Sigma)$ - קבוצת המודלים של Σ
$\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$	$\{v_{\mathrm{T}}\}$
קבוצת כל הטאוטולוגיות, $\emptyset$, $\{p_1 \vee \neg p_1\}$	Ass (קבוצת כל ההשמות)
קבוצת סתירות, WFF	$\emptyset$
$\{p_i \mid i > 0\}$	$\{v_{\mathrm{T}}, \mathrm{FTTT}\ldots\}$
$\{p_{15}\}$	$\{v \in \mathrm{Ass} \mid v(p_{15}) = \mathrm{T}\}$
$\{p_{15}, p_1 \vee p_2\}$	$\{v \in \mathrm{Ass} \mid v(p_{15}) = \mathrm{T}\} \cap \{v \in \mathrm{Ass} \mid v(p_1) = \mathrm{T} \text{ or } v(p_2) = \mathrm{T}\}$

הגדרה 2: קבוצת השמות K נקראת גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים Σ כך ש־$M(\Sigma) = K$. אחרת K נקראת לא גדירה.

הוכחת גדירות

איך מוכיחים שקבוצת השמות K היא גדירה?

1. מראים קבוצת פסוקים Σ מפורשת.
2. מוכיחים כי $M(\Sigma) = K$ על ידי הכלה דו־כיוונית.

תרגיל 3: נגדיר: $K_{\mathrm{even}} = \{\, v \mid v(p_i) = \mathrm{T}$ לכל i זוגי$\}$. הוכיחו כי K_{even} גדירה.

תרגיל 1:

Σ	$M(\Sigma)$
$\{P_0, P_1, \ldots\}$	$\{v_r\}$
$\{\neg p_0, \neg p_1, \ldots\}$	$\{v_f\}$
$\{p_0 \vee \neg p_0\}$	**Ass**
קב' טאוטולוגיות	**Ass**
$\emptyset$	**Ass**
$\{p_0 \wedge \neg p_0\}$	$\emptyset$
קב' סתירות	$\emptyset$
WFF	$\emptyset$
$\{p_i \mid i > 0\}$	$\{v_T, \mathbf{FTT}, \ldots\}$
$\Sigma_1 = \{p_{15}\}$	$K_1 = \{v \mid v(p_{15}) = T\}$
$\Sigma_2 = \{p_1 \vee p_2\}$	$K_2 = \{v \mid v(p_1) \vee v(p_2)\}$
$\Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$	$K_1 \bigcap K_2$

$$M(\Sigma_1 \bigcup \Sigma_2) = K_1 \bigcap K_2 \Leftarrow M(\Sigma_2) = K_2 \text{ and } M(\Sigma_1) = K_1$$

לוגיקה ־ תרגול 8

גדירות ־ תזכורות

הגדרה 1: השמה המספקת קבוצת פסוקים Σ נקראת מודל של Σ.

קבוצת המודלים של Σ היא הקבוצה: $M(\Sigma) = \{v \in \mathrm{Ass} \mid v \models \Sigma\}$

הגדרה 2: קבוצת השמות K נקראת גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים Σ כך ש־$K = M(\Sigma)$. אחרת K נקראת לא גדירה.

הוכחת גדירות

איך מוכיחים שקבוצת השמות K היא גדירה?

1. מראים קבוצת פסוקים Σ מפורשת.
2. מוכיחים כי $M(\Sigma) = K$ על ידי הכלה דו־כיוונית.

תרגיל 1: לכל $j \in \mathbb{N}$ נגדיר את קבוצת ההשמות : $K_j = \{ v \mid v$ נותנת T לכל היותר ל־j אטומים $\}$.

הוכיחו כי לכל $j \in \mathbb{N}$, הקבוצה K_j גדירה.

תרגיל 2:

תהיינה $X, Y \subseteq WFF$.

הוכיחו כי $M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y)$.

משפט הקומפקטיות ־ תזכורת

לכל קבוצת פסוקים Σ מתקיים, Σ ספיקה אמ"מ כל תת־קבוצה סופית של Σ ספיקה.

הוכחת אי־גדירות

איך מוכיחים שקבוצת השמות K אינה גדירה?

1. מניחים בשלילה ש־K גדירה ו־X היא קבוצת הפסוקים המגדירה אותה $M\left(X\right)=K$.

   (לשים לב: לא ניתן להניח דבר על X פרט לכך שהיא מגדירה את K).

2. בוחרים קבוצת פסוקים מפורשת Y שעבורה ידוע (או שניתן להוכיח בקלות) מהו $M\left(Y\right)$ (קבוצות שכדאי לנסות: $Y=\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$, $Y=\{\neg p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$).

3. מוכיחים ש־$X\cup Y$ איננה ספיקה על ידי כך שמראים ש־$M\left(X\cup Y\right)=M\left(X\right)\cap M\left(Y\right)=K\cap M\left(Y\right)=\emptyset$.

4. מוכיחים ש־$X\cup Y$ ספיקה על ידי שימוש במשפט הקומפקטיות.

   תהי $D\subseteq X\cup Y$ סופית.

   נסמן $D_X=D\cap X$ ו־$D_Y=D\cap Y$

   נבנה השמה v המספקת את D_Y ו־D_X. נתחיל בבניה ע"פ מבנה הפסוקים ב־D_Y ונשלים אותה כך ש־$v\in K$.

   נוכיח שהבניה מספקת את D_Y.

   $v\in K \Leftarrow v$ מספקת את $X \Leftarrow v$ מספקת את D_X.

   v מספקת את D_X ו־$D_Y \Leftarrow v$ מספקת את $D=D_X\cup D_Y$.

5. מ־3+4 מקבלים סתירה ולכן K אינה גדירה.

תרגיל 3:

הוכיחו כי K_{fin} = $\{v\in \mathrm{Ass}\mid$ v נותנת T למספר סופי של אטומים$\}$ אינה גדירה.

תרגיל 4:

הוכיחו כי K_{inf} = $\{v\in \mathrm{Ass}\mid$ v נותנת T לאינסוף אטומים$\}$ אינה גדירה.

תרגול 8 לוגיקה

תרגיל 2:

תהיינה $X, Y \subseteq \mathrm{WFF}$
הוכיחו כי $M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y)$

הוכחה:

$\Leftarrow$ תהיי $v \in M(X) \cap M(Y)$
יהיה $\varphi \in X \cup Y$ לפי הגדרת איחוד $\varphi \in X$ או $\varphi \in Y$
בה"כ $\varphi \in X$, לפי הגדרת חיתוך $v \in M(X)$ ולפי הגדרת קבוצת מודלים.
$v \vDash \varphi$. לפי הגדרת מודלים קבוצת מודלים $v \in M(X \cup Y)$.
באותו אופן ההוכחה אם $\varphi \in Y$.
$\Rightarrow$ $\subseteq$: $v \in M(X \cup Y)$.
צ"ל: $v \in M(X)$ וגם $v \in M(Y)$
$M(x)$: יהיה $\varphi \in X$. מהגדרת קבוצת מודלים $v \vDash \varphi$.
מהגדרת קבוצת מודלים $v \in M(x)$.
באותו אופן עבור $M(Y)$.

תרגיל 3:

הוכיחו כי $K_{fin} = \{v \in \mathrm{Ass}|$ למספר סופי של אטומים T נותנת $v\}$ אינה גדירה.

הוכחה:

1. נניח בשלילה ש K_{fin} גדירה.
   אז קיימת קבוצת פסוקים x כך ש־$M(X) = K$.

2. נבחר $Y = \{p_i | i \in \mathbb{N}\}$. ניתן לראות כי $M(Y) = \{V_T\}$.

3. $X \cup Y$ אינה ספיקה: V_Tנותנת T לאינסוף אטומים
   ולכן $V_T \notin K_{fin}$. ולכן
   $M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y) = K_{fin} \cap \{V_T\} = \emptyset$.

4. נוכיח בעזרת משפט הקומפקטיות ש־$X \cup Y$ ספיקה.
   תהיי $D \subseteq X \cup Y$ תת־קבוצה סופית.
   נסמן: $D_X = D \cap X$, $D_y = D \cap Y$.
   מכיוון ש־$D_Y \subseteq D$ ו־D סופית אז גם D_Yסופית.
   ולכן היא מהצורה: $D_Y = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}\}$.
   נסמן ב־m את האינדקס המקסימלי של D_i ב־D_Y
   ($m = 1$ אם $D_Y = \emptyset$), מאחר ו־D_Yסופית בהכרח קיים m כזה.
   נגדיר השמה v באופן הבא:
   $$v(p_I) = \begin{cases} T & i \leq m \\ F & i > m \end{cases}$$
   * כל הפסוקים ב־D_Y הם מהצורה D_i כאשר $i \leq M$'
   ולכן v מספקת אותם $\Leftarrow$ $v \vDash D_Y$.
   * מכיוון ש־$v \in K_{fin}$ (נותנת T למספר שופי של אטומיים)
   $\Leftarrow$$v \in M(X)$ $\Leftarrow$$v \vDash X$$\Leftarrow$$v$ מספקת כל פסוק ב־X ובפרט כל
   פסוק ב־X $\Leftarrow$ $D_X \subseteq X$ $\Leftarrow$ $v \vDash D_X$.
   בסה"כ קיבלנו כי v מספקת את D_x ואת D_yולכן גם את $D = D_X \cup D_Y$.
   הראינו שלכל תת־קבוצה סופית $D \subseteq X \cup Y$ קיימת השמה המספקת אותה ולכן
   תת־קבוצה סופית היא ספיקה. ממשפט הקומפקטיות נובע ־$X \cup Y$ ספיקה.

5. 3 ו־4 הם סתירה ולכן K_{fin} אינה גדירה.

תרגיל 4:

הוכיחו כי $K_{inf} = \{v \in \mathrm{Ass} |$ אינסוף אטומים T נותנת $v\}$ אינה גדירה.

הוכחה:

1. same

2. נבחר $Y = \{\neg p_i | i \in \mathbb{N}\}$. ניתן לראות כי $M(Y) = \{V_F\}$.

3. $X \cup Y$ אינה ספיקה: V_f נותנת ערך T לאפס אטומים (ובפרט לא לאינסוף) ולכן $v_f \notin K_{inf}$ ולכן:
$$M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y) = K_{inf} \cap \{V_K\} = \emptyset$$

4. $D_Y = \{\neg p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}\}$.
נסמן ב־m את האינדקס המקסימלי של $\neg p_i$ ב־D_Y.
נבנה השמה v:
$$v(p_i) = \begin{cases} F & i \leq m \\ T & i > m \end{cases}$$

לוגיקה ־ תרגול 9

תחשיב היחסים ־ סינטקס

<u>הגדרה 1:</u> מילון $\tau=\langle R_1^{n_1},R_2^{n_2},\dots,F_1^{m_1},F_2^{m_2},\dots,c_1,c_2,\dots\rangle$ מורכב מסימני יחס, סימני פונקציה וסימני קבוע.

- סימן יחס $R_i^{n_i}$: n_i הוא המקומיות של היחס ו־i הוא אינדקס.

  (בדרך כלל נסמן "סימן יחס R_i n_i־מקומי" במקום $R_i^{n_i}$).

- סימן פונקציה $F_i^{m_i}$: m_i הוא המקומיות של הפונקציה ו־i הוא אינדקס.

  (בדרך כלל נסמן "סימן פונקציה F_i m_i־מקומי" במקום $F_i^{m_i}$).

- סימן קבוע c_i: i הוא אינדקס.

- המשתנים זהים בכל מילון ונסמן $\mathrm{Var}=\{x_0,x_1,x_2,\dots\}$.

<u>דוגמה למילון:</u> $\tau_1=\left\langle R_1^2,R_2^2,F_1^3,c_1\right\rangle$ שני היחסים הם דו־מקומים והפונקציה תלת־מקומית.

סימון נוסף $\tau_1=\langle R_1(\circ,\circ),R_2(\circ,\circ),F_1(\circ,\circ,\circ),c_1\rangle$

<u>הגדרה 2:</u> קבוצת <u>שמות העצם</u> מעל מילון τ היא קבוצה אינדוקטיבית $\mathrm{Term}(\tau)=X_{B_{term},F_{term}}$ כאשר:

בסיס: $B_{term}=\mathrm{Var}\cup\{c_1,c_2,\dots\}$ (סימני הקבוע שבמילון τ והמשתנים)

פעולות: $F_{term}=\{$סימני הפונקציה שבמילון $\tau\}$

<u>דוגמאות לשמות עצם מעל המילון τ_1:</u>

x_1

c_1

$F_1(x_2,x_2,c_1)$

$F_1(x_1,x_2,F_1(c_1,x_1,x_3))$

האם $F_1(x_1,c_1)$ הוא ש"ע מעל τ_1? לא, כי F_1 היא תלת מקומית.

<u>הגדרה 3:</u> קבוצת <u>הנוסחאות האטומיות</u> מעל מילון τ היא הקבוצה $\mathrm{AF}(\tau)$ המוגדרת באופן הבא:

- אם R_{i} הוא סימן יחס n־מקומי מהמילון τ

  ו־$t_1,t_2,\dots,t_n$ הם שמות עצם מעל τ, אז $R_i(t_1,t_2,...,t_n)$ היא נוסחה אטומית.

- אם t_1 ו־t_2 הם שמות עצם מעל τ, אז $(t_1\approx t_2)$ היא נוסחה אטומית.

דוגמאות לנוסחאות אטומיות מעל המילון τ_2:

$R_1\left(c_1,x_1\right)$

$\left(c_1\approx x_1\right)$

$R_2\left(F_1\left(x_1,x_2,c_1\right),x_2\right)$

$\left(F_1\left(x_1,x_2,c_1\right)\approx c_1\right)$

האם $R_1\left(c_1,R_2\left(c_1,x_1\right)\right)$ היא נוסחה אטומית? לא, כי $R_2\left(c_1,x_1\right)$ אינו ש"ע.

הגדרה 4: אוסף הנוסחאות מעל מילון τ היא קבוצה אינדוקטיבית $X_{B_{form},F_{form}}$ כאשר:

בסיס: $B_{form}=\mathrm{AF}\left(\tau\right)$ (הנוסחאות האטומיות)

פעולות: $F_{form}=\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}\cup\{\forall x_i\mid i\in\mathbb{N}\}\cup\{\exists x_i\mid i\in\mathbb{N}\}$, כאשר

- הפעלת קשרים מתבצעת באופן זהה לתחשיב הפסוקים.
- הפעלת כמתים מתבצעת כך:
  אם φ נוסחה אז לכל $i\in\mathbb{N}$ גם $\left(\forall x_i\varphi\right)$ ו־$\left(\exists x_i\varphi\right)$ הן נוסחאות.

דוגמאות לנוסחאות מעל המילון τ_1:

$R_1\left(c_1,x_1\right)\wedge\left(c_1\approx x_1\right)$

$\left(\forall x_1R_1\left(c_1,x_1\right)\right)\rightarrow\left(F_1\left(x_2,x_2,c_1\right)\approx c_1\right)$

האם x_1 היא נוסחה? לא!

האם $F_1\left(x_2,x_2,c_1\right)$ היא נוסחה? לא!

שימו לב: אם t הוא ש"ע הוא אינו יכול להיות נוסחה.

האם $R_1\left(c_1,x_1\right)\rightarrow F_1\left(x_2,x_2,c_1\right)$ היא נוסחה? לא!

תחשיב היחסים — סמנטיקה

הגדרה 5: מבנה $M=\left\langle D^M,R_1^M,R_2^M,\ldots,F_1^M,F_2^M,\ldots,c_1^M,c_2^M,\ldots\right\rangle$
עבור $\tau=\left\langle R_{n_1,1},R_{n_2,2},\ldots,F_{m_1,1},F_{m_2,2},\ldots,c_1,c_2,\ldots\right\rangle$ מורכב מהחלקים הבאים:

- $D^M\neq\emptyset$ - קבוצת התחום, העולם.
- $R_i^M\subseteq\underbrace{D^M\times D^M\times\cdots\times D^M}_{n_i}$ - הפירוש של סימן יחס R_i n_i־מקומי.

  כלומר, R_i^M הוא יחס n_i־מקומי מעל D^M.
- $F_i^M:\underbrace{D^M\times D^M\times\cdots\times D^M}_{m_i}\rightarrow D^M$ - הפירוש של סימן פונקציה F_i m_i־מקומית.

  כלומר, F_i^M היא פונקציה m_i־מקומית מעל D^M.
- $c_i^M\in D^M$ - הפירוש של סימן קבוע c_i. כלומר, c_i^M איבר בתחום D^M.

דוגמה למבנה עבור מילון: יהי מילון $\tau=\left\langle R\left(\circ,\circ\right),F\left(\circ,\circ\right),c\right\rangle$.

- מבנה עבור τ: $M_1 = \left\langle \underbrace{\{0,1,2,3\}}_{D^M}, \underbrace{\{(0,0),(0,1),(1,2)\}}_{R^M}, \underbrace{\text{first}}_{F^M}, \underbrace{0}_{c^M} \right\rangle$ כאשר $\text{first}(i,j) = i$.
- מבנה נוסף עבור τ: $M_2 = \left\langle \underbrace{\mathbb{N}}_{D^M}, \underbrace{<}_{R^M}, \underbrace{+}_{F^M}, \underbrace{0}_{c^M} \right\rangle$

<u>הגדרה 6</u>: השמה s עבור מבנה M היא פונקציה $s : \{x_0, x_1, \dots\} \to D^M$.

<u>דוגמה להשמה עבור מבנה:</u> יהי $M = \langle \mathbb{Z}, \leq, +, 1005 \rangle$ מבנה עבור τ מהדוגמה הקודמת.

נגדיר את ההשמה s עבור M באופן הבא:

$$s(x_i) = \begin{cases} -5 & 0 \leq i < 10 \\ 0 & 10 \leq i < 20 \\ 5 & \text{אחרת} \end{cases}$$

<u>הגדרה 7</u>: לכל השמה s, <u>ההשמה המורחבת</u> היא פונקציה $\overline{s} : \text{Term}(\tau) \to D^M$ המוגדרת באינדוקציה על מבנה שמות העצם:

בסיס: לכל משתנה x_i, $\overline{s}(x_i) = s(x_i)$

לכל סימן קבוע c_i, $\overline{s}(c_i) = c_i^M$

סגור: לכל סימן פונקציה F_i n־מקומי, $\overline{s}(F_i(t_1, t_2, \dots, t_n)) = F_i^M(\overline{s}(t_1), \overline{s}(t_2), \dots, \overline{s}(t_n))$

<u>הגדרה 8</u>: לכל השמה s, משתנה x_i ו־$d \in D^M$, <u>ההשמה המתוקנת</u> היא ההשמה הבאה:

$$s[x_i \leftarrow d](x_j) = \begin{cases} d & i = j \\ s(x_j) & i \neq j \end{cases}$$

דוגמה:

$$s[x_{10} \leftarrow 8](x_i) = \begin{cases} -5 & 0 \leq i < 10 \\ 8 & i = 10 \\ 0 & 10 < i < 20 \\ 5 & \text{אחרת} \end{cases}$$

<u>הגדרה 9</u>: עבור מבנה M, השמה s ונוסחה φ היחס $M \vDash_s \varphi$ (M ו־s מספקים את φ) מוגדר באינדוקציה:

בסיס: $M \models_s R_i(t_1, t_2, \dots, t_n)$ אמ"מ $(\overline{s}(t_1), \overline{s}(t_2), \dots, \overline{s}(t_n)) \in R_i^M$

$M \models_s t_1 \approx t_2$ אמ"מ $\overline{s}(t_1) = \overline{s}(t_2)$

סגור: $M\models_s\neg\varphi$ אמ"מ $M\not\models_s\varphi$

$M\models_s\varphi_1\vee\varphi_2$ אמ"מ $M\models_s\varphi_2$ או $M\models_s\varphi_1$

$M\models_s\varphi_1\wedge\varphi_2$ אמ"מ $M\models_s\varphi_2$ וגם $M\models_s\varphi_1$

$M\models_s\varphi_1\to\varphi_2$ אמ"מ (אם $M\models_s\varphi_1$ אז $M\models_s\varphi_2$) כלומר $M\not\models_s\varphi_1$ או $M\models_s\varphi_2$

$M\models_s\varphi_1\leftrightarrow\varphi_2$ אמ"מ ($M\models_s\varphi_1$ אם ורק אם $M\models_s\varphi_2$)

$M\models_s\forall x_i\varphi$ אמ"מ לכל $d\in D^M$ מתקיים $M\models_{s[x_i\leftarrow d]}\varphi$

$M\models_s\exists x_i\varphi$ אמ"מ קיים $d\in D^M$ שמקיים $M\models_{s[x_i\leftarrow d]}\varphi$

<u>תרגיל 1</u>: יהיו $\tau=\langle R(\circ,\circ),F(\circ,\circ),c\rangle$ מילון, יהי $M=\langle\mathbb{Z},\leq,+,1005\rangle$ מבנה מעל τ, ו־s ההשמה עבור M שהוגדרה קודם.

הוכיחו/ הפריכו את הטענות הבאות:

1. $M\models_s R(x_0,F(x_0,F(x_{10},c)))\vee(x_0\approx x_{10})$
2. $M\models_s\forall x_0R(x_0,x_1)$

<u>הגדרה 12</u>: עבור מבנה M ונוסחה φ נאמר כי M מספק את φ ונסמן $M\models\varphi$ אם <u>לכל</u> השמה s מתקיים $M\models_s\varphi$.

לוגיקה תרגול 9

דוגמה:

נחשב את הערך ש־$\overline{s}$ נותנת לש"ע $F(x_0, F(x_{10}, t))$:

$$\begin{aligned}
\overline{s}(F(x_0, F(x_{10}, c)) =& F^M(\overline{s}(x_0), \overline{s}(F(x_{10},)) = \\
\overline{s}(x_0) + \overline{s}(F(x_{10}, c)) =& s(x_0) + F^M(\overline{s}(x_{10}, \overline{s}(c)) = \\
-5 + \overline{s}(x_{10})\overline{s}(c) =& -5 + s(x_{10}) + 1005 = \\
-5 + 0 + 1005 =& 1000
\end{aligned}$$

תרגיל 1:

יהיו $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c\rangle$ מילון , יהי $M = \langle \mathbb{Z}, \leq, +, 1005\rangle$ מבנה מעל τ,
ו־s ההשמה עבורר M שהוגדרה קודם.
הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

1. $M \vDash_s R(x_0, F(x_0, F(x_{10}, c))) \vee (x_0 \approx x_{10})$
2. $M \vDash_s \forall x_0 R(x_0, x_1)$

$$s(x_p) = \begin{cases} -5 & - \leq 1 < 10 \\ 0 & 10 \leq i < 20 \\ 5 & \text{otherwise} \end{cases}$$

הוכחה 1:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow M \vDash_s R(x_0, F(x_0, F(x_{10}, c))) \vee (x_0 \approx x_{10}) \\
&\Leftrightarrow M \vDash_s R(x_0, F(x_0, F(x_{10}, c))) \text{ or } M \vDash_s (x_0 \approx x_{10}) \\
&\Leftrightarrow (\overline{s}(x_0, s(F(x_0, F(x_{10}, C)))) \text{ or } \overline{s}(x_0) = \overline{s}(x_{10}) \\
(\text{truth}) &-5 \leq 1000 \text{ or } (\text{false}) -5 = 0
\end{aligned}$$

בסה"כ התנאי מתקיים.

הפרכה 2:

$\Leftrightarrow M \vDash_s \forall x_0 R(x_0, x_1)$

לכל $d \in \mathbb{Z}$, מתקיים $R(x_0, x_1)$ $\Leftrightarrow M \vDash_{\underbrace{s[x_0 \leftarrow d]}_{s'}}$

לכל $d \in \mathbb{Z}$ מתקיים $\Leftrightarrow (\overline{s}'(x_0), \overline{s}'(x_1)) \in R^M$

לכל $d \in \mathbb{Z}$ מתקיים $\Leftrightarrow (d, -5) \in R^M$

לכל $d \in \mathbb{Z}$ מתקיים $d \leq -5$

לא נכון למשל עבור $d = 0$.

לוגיקה ־ תרגול 10

תזכורת

משתנים קשורים וחופשיים

הגדרה 1: נגדיר באינדוקציה על מבנה הנוסחאות מהו משתנה חופשי x בנוסחה φ.

בסיס: עבור φ נוסחה אטומית, אם x מופיע ב־φ אז x חופשי ב־φ.

צעד: יהיו α, β נוסחאות.

עבור $\varphi = (\neg\alpha)$: x חופשי ב־φ אם x חופשי ב־α.

עבור $\varphi = (\alpha \to \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta)$: x חופשי ב־φ אם x חופשי ב־α או x חופשי ב־β.

עבור $\varphi = \exists y\alpha, \forall y\alpha$: x חופשי ב־φ אם x חופשי ב־α ו־$x \neq y$.

משתנה שאינו חופשי נקרא משתנה קשור.

דוגמה:

$$\exists x_1 \left(\forall x_2 \left(R_1(x_2)\right) \to R_2(x_1, x_2)\right)$$

המופע הראשון של x_2 קשור אך השני חופשי ולכן x_2 חופשי בנוסחה.

המופע היחיד של x_1 קשור ולכן x_1קשור בנוסחה.

הגדרה 2: נוסחה ללא משתנים חופשיים נקראת פסוק.

תרגיל 1: נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F_1(\circ), F_2(\circ,\circ), c\rangle$ ונתון הפסוק $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \left(R(x_1, x_2) \to R(x_2, x_1)\right)$.
אילו מבנים יספקו את הפסוק?

משפט 1: יהיו α נוסחה מעל מילון τ, M מבנה עבור τ ו־s_1, s_2 זוג השמות עבור M, כך שלכל משתנה חופשי x_i ב־α מתקיים $s_1(x_i) = s_2(x_i)$. אז $M \models_{s_1} \alpha$ אם ורק אם $M \models_{s_2} \alpha$.

מסקנה: לכל מבנה M, פסוק φ והשמה s, אם $M \models_s \varphi$ אז $M \models \varphi$.

מושגי יסוד סמנטיים

הגדרות:

1. נוסחה φ היא ספיקה אם קיימים מבנה M והשמה s כך ש־$M \models_s \varphi$.
2. מבנה M והשמה s מספקים קבוצת נוסחאות Σ אם לכל $\varphi \in \Sigma$ מתקיים $M \models_s \varphi$. סימון $M \models_s \Sigma$
3. קבוצת נוסחאות Σ היא ספיקה אם קיימים מבנה M והשמה s המספקים אותה.
4. נוסחה ψ גוררת לוגית נוסחה φ אם כל מבנה M וכל השמה s המספקים את ψ מספקים גם את φ. סימון $\psi \models \varphi$.
5. נאמר כי קבוצת נוסחאות Σ גוררת לוגית נוסחה φ אם כל מבנה M והשמה s המספקים את Σ מספקים גם את φ. סימון $\Sigma \models \varphi$.
6. נוסחה φ מעל מילון τ היא אמת לוגית אם לכל מבנה M עבור τ, ולכל השמה s מתקיים $M \models_s \varphi$.

תרגיל 2: נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c_0, c_1 \rangle$.

נגדיר $\Sigma = \{R(t, x_0) \mid t \text{ ש"ע}\}$.

1. הוכיחו כי Σ ספיקה.
2. הוכיחו כי $\Sigma \not\models \forall x_1 R(x_0, x_1)$.

תרגיל 3: נתון מילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ) \rangle$.

עבור כל אחת מהנוסחאות הבאות, הוכיחו או הפריכו כי היא אמת לוגית:

1. $\varphi_1 = \forall x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2) \to \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2))$
2. $\varphi_2 = \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2)) \to \forall x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2)$

לוגיקה - תרגול 10

תזכורת

משתנים קשורים וחופשיים

<u>הגדרה 1</u>: נגדיר באינדוקציה על מבנה הנוסחאות מהו משתנה חופשי x בנוסחה φ.

בסיס: עבור φ נוסחה אטומית, אם x מופיע ב־φ אז x חופשי ב־φ.

צעד: יהיו α, β נוסחאות.

עבור $\varphi = (\neg\alpha)$: x חופשי ב־φ אם x חופשי ב־α.

עבור $\varphi = (\alpha \to \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta)$: x חופשי ב־φ אם x חופשי ב־α או x חופשי ב־β.

עבור $\varphi = \exists y\alpha, \forall y\alpha$: x חופשי ב־φ אם x חופשי ב־α ו־$x \neq y$.

משתנה שאינו חופשי נקרא משתנה קשור.

<u>דוגמה</u>:

$$\exists x_1 \left(\forall x_2 \left(R_1(x_2)\right) \to R_2(x_1, x_2)\right)$$

המופע הראשון של x_2 קשור אך השני חופשי ולכן x_2 חופשי בנוסחה.

המופע היחיד של x_1 קשור ולכן x_1קשור בנוסחה.

<u>הגדרה 2</u>: נוסחה ללא משתנים חופשיים נקראת <u>פסוק</u>.

<u>תרגיל 1</u>: נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F_1(\circ), F_2(\circ,\circ), c\rangle$ ונתון הפסוק $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \left(R(x_1, x_2) \to R(x_2, x_1)\right)$.

אילו מבנים יספקו את הפסוק?

<u>משפט 1</u>: יהיו α נוסחה מעל מילון τ, M מבנה עבור τ ו־s_1, s_2 זוג השמות עבור M, כך שלכל משתנה חופשי x_i ב־α מתקיים $s_1(x_i) = s_2(x_i)$. אז $M \models_{s_1} \alpha$ אם ורק אם $M \models_{s_2} \alpha$.

<u>מסקנה</u>: לכל מבנה M, <u>פסוק</u> φ והשמה s, אם $M \models_s \varphi$ אז $M \models \varphi$.

מושגי יסוד סמנטיים

<u>הגדרות:</u>

1. נוסחה φ היא <u>ספיקה</u> אם קיימים מבנה M והשמה s כך ש־$M \models_s \varphi$.
2. מבנה M והשמה s <u>מספקים קבוצת נוסחאות</u> Σ אם <u>לכל</u> $\varphi \in \Sigma$ מתקיים $M \models_s \varphi$. סימון $M \models_s \Sigma$
3. קבוצת נוסחאות Σ היא <u>ספיקה</u> אם קיימים מבנה M והשמה s המספקים אותה.
4. נוסחה ψ <u>גוררת לוגית</u> נוסחה φ אם <u>כל</u> מבנה M <u>וכל</u> השמה s המספקים את ψ מספקים גם את φ. סימון $\psi \models \varphi$.
5. נאמר כי קבוצת נוסחאות Σ <u>גוררת לוגית</u> נוסחה φ אם כל מבנה M והשמה s המספקים את Σ מספקים גם את φ. סימון $\Sigma \models \varphi$.
6. נוסחה φ מעל מילון τ היא <u>אמת לוגית</u> אם לכל מבנה M עבור τ, ולכל השמה s מתקיים $M \models_s \varphi$.

<u>תרגיל 2:</u> נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c_0, c_1 \rangle$.

נגדיר $\Sigma = \{R(t, x_0) \mid t \text{ ש"ע}\}$.

1. הוכיחו כי Σ ספיקה.
2. הוכיחו כי $\Sigma \not\models \forall x_1 R(x_0, x_1)$.

<u>תרגיל 3:</u> נתון מילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ) \rangle$.

עבור כל אחת מהנוסחאות הבאות, הוכיחו או הפריכו כי היא אמת לוגית:

1. $\varphi_1 = \forall x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2))$

<u>פתרון:</u>

הטענה נכונה, נראה שהפסוק φ_1 הוא אמת לוגית. יהיו M מבנה מעל τ ו־s השמה.

$M \models_s \varphi_1 \Leftrightarrow$

אם $M \models_s \forall x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2)$ אז

$M \models_s \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2)) \Leftrightarrow$

אם לכל $d_1, d_2 \in D^M$, $R(x_1, x_2)$ $M \models_{\underbrace{s[x_1 \leftarrow d_1][x_2 \leftarrow d_2]}_{s'}}$

אז לכל $d_3, d_4 \in D^M$, $R(F(x_1), F(x_2))$ $M \models_{\underbrace{s[x_1 \leftarrow d_3][x_2 \leftarrow d_4]}_{s''}} \Leftrightarrow$

אם לכל $d_1, d_2 \in D^M$, $(s'(x_1), s'(x_2)) \in R^M$ אז לכל $d_3, d_4 \in D^M$, $(\overline{s}''(F(x_1)), \overline{s}''(F(x_2))) \in R^M \Leftrightarrow$

אם לכל $d_1, d_2 \in D^M$, $(d_1, d_2) \in R^M$ אז לכל $d_3, d_4 \in D^M$, $\left(F^M(d_3), F^M(d_4)\right) \in R^M$ וזה מתקיים כי אם ההנחה מתקיימת אז המסקנה מתקיימת עבור $d_1 = F^M(d_3)$ ו־$d_2 = F^M(d_4)$.

2. $\varphi_2 = \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2)) \rightarrow \forall x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2)$

<u>פתרון:</u>

הטענה אינה נכונה, הפסוק אינו אמת לוגית. נראה דוגמה נגדית, כלומר נראה שקיים מבנה M והשמה s שאינם מספקים אותו:

נבחר מבנה והשמה:

נגדיר $M=\left\langle \{0,1\},\{(0,0)\},F^{M}\right\rangle$ כאשר $F^{M}(n)=0$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

תהי s השמה המקיימת $s(v_i)=0$ לכל i (נעיר כי φ_2 פסוק ולכן ערך האמת אינו תלוי בהשמה, ולכן כל השמה תתאים, אך בדוגמה נגדית יש לבחור פירוש לכל הסימנים).

נראה שמסקנת הטענה לא מתקיימת כלומר ש־$M\not\models_s\varphi_2$:

נניח בשלילה $M\models_s\varphi_2$. מתקיים:

$M\models_s\varphi_2\Leftrightarrow$

אם $M\models_s\forall x_1\forall x_2R(F(x_1),F(x_2))$ אז $M\models_s\forall x_1\forall x_2R(x_1,x_2)\Leftrightarrow$

אם לכל $d_1,d_2\in D^M$, $R(F(x_1),F(x_2))$ $M\models_{\underbrace{s[x_1\leftarrow d_1][x_2\leftarrow d_2]}_{s'}}$

אז לכל $d_3,d_4\in D^M$, $R(x_1,x_2)$ $M\models_{\underbrace{s[x_1\leftarrow d_3][x_2\leftarrow d_4]}_{s''}}\Leftrightarrow$

אם לכל $d_1,d_2\in D^M$, $(\overline{s}'(F(x_1)),\overline{s}'(F(x_2)))\in R^M$ אז לכל $d_3,d_4\in D^M$, $(s''(x_1),s''(x_2))\in R^M\Leftrightarrow$

אם לכל $d_1,d_2\in D^M$, $\left(F^M(d_1),F^M(d_2)\right)\in R^M$ אז לכל $d_3,d_4\in D^M$, $(d_3,d_4)\in R^M\Leftrightarrow$

אם לכל $d_1,d_2\in D^M$, $(0,0)\in R^M$ אז לכל $d_3,d_4\in D^M$, $(d_3,d_4)\in R^M$.

הטענה הזאת אינה מתקיימת מכיוון שהתנאי מתקיים אבל המסקנה לא מתקיימת כי $(1,1)\notin R^M$ ־ בסתירה.

לוגיקה תרגול 10

3 ביולי 2019

תרגיל 1:

נתון מילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F_1(\circ), F_2(\circ,\circ), c\rangle$ ונתון הפסוק $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 (R(x_1,x_2) \to R(x_2,x_1))$.
אילו מבנים יספקו את הפסוק?

פתרון:

כל המבנים M שעבורם R^M הוא יחס סימטרי (למשל $M = \langle \mathbb{N}, =, -, +, 7\rangle$.
נוכיח את הטכנה.
יהי M מבנה כלשהו עבור τ אז:
$M \vDash \varphi \Leftrightarrow$
לכל s, $M \underset{s}{\vDash} \varphi \Leftrightarrow$
לכל s, לכל $d_1, d_2 \in D^M$
$M \underbrace{\underset{s[x_1 \leftarrow d_1][x_2 \leftarrow d_2]}{\vDash}}_{s'} R(x_1,x_2) \to R(x_2,x_1)$
לכל s, לכל $d_1, d_2 \in D^M$, אם $\Leftrightarrow$
$M \underset{s'}{\vDash} R(x_1,x_2)$ אז $M \underset{s'}{\vDash} R(x_2,x_1) \Leftrightarrow$
לכל s, לכל $d_1, d_2 \in D^M$ אם $(s'(x_1), s'(x_2)) \in R^M$ אז $(s'(x_2), s'(x_1)) \in R^M \Leftrightarrow$
לכל s, לכל $d_1, d_2 \in D^M$ אם $(d_1,d_2) \in R^M$ אז $(d_2,d_1) \in R^M \Leftrightarrow$
לכל $d_1, d_2 \in D^M$ אם $(d_1,d_2) \in R^M$ אז $(d_2,d_1) \in R^M \Leftrightarrow$
R^M סימטרי.
(כל המעברים דו־כיווניים ולא דורשים הסבר כי הם מבוססים על ההגדרה).

תרגיל 2:

נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c_0, c_1\rangle$, נגדיר $\Sigma = \{R(t,x_0) |$ ש"ע $t\}$

1. הוכיחו כי Σ ספיקה.
2. הוכיחו כי $\Sigma \nvDash \forall x_1 R(x_0, x_1)$.

פתרון סעיף 1:

הוכחה:
נוכיח כי קיים במנה M והשמה s המספקים את Σ.
נבחר במבנה $M = \langle \{a\}, \{(a,a)\}, f, a, a\rangle$
כאשר $f(a,a) = a$ תהי s ההשמה $s(x_1) = a$.
לכל $R(t,x) \in \Sigma$ מתקיים $M \underset{s}{\vDash} R(t,x_0) \Leftrightarrow$
$(\overline{s}(t), \overline{s}(x_0)) \in R^M \Leftrightarrow$
$(a,a) \in \{(a,a)\}$ ולכן $M \underset{s}{\vDash} \Sigma$.

פתרון סעיף 2:

הוכחה:
נסמן: $M = \langle \mathbb{N}, \geq, +, 0, 1\rangle$, תהי s ההשמה $s(x_i) = 0$.

1. נראה כי $M \underset{s}{\vDash} \Sigma$: לכל $R(t,x_0) \in \Sigma$ מתקיים $M \underset{s}{\vDash} R(t,x_0) \Leftrightarrow$
$(\overline{s}(t), \overline{s}(x_0)) \in R^M \Leftrightarrow \overline{s}(t) \geq 0$ וזה נכון כי 0 מינימלי בטבעיים.

2. נראה $M \underset{s}{\not\models} \forall x_1 R(x_0,x_1)$: מספיק להראות $d \in \mathbb{N}$ כך ש $R(x_0,x_1)$ $\underset{s[x_1 \leftarrow d]}{\not\models}$ M.
נבחר $d = 3$ אז $R(x_0,x_1)$ $\underset{s[x_1 \leftarrow d]}{\not\models}$ M $\Leftrightarrow$
$(\overline{s}[x_1 \leftarrow d](x_0), \overline{s}[x_1 \leftarrow d](x_1)) = (0,3) \notin R^M$
אבל $R^M \notin (0,3)$ כי לא מתקיים $3 \geq 0$ ולכן $M \underset{s}{\not\models} \forall x_1 R(x_0,x_1)$.

תרגיל 3:

נתון מילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ) \rangle$.
עבור כל אחת מהנוסחאות הבאות, הוכיחו או הפריכו כי היא אמת לוגית:

1. $\varphi_1 = \forall x_1 \forall x_2 R(x_1,x_2) \rightarrow \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1),F(x_2))$
2. $\varphi_2 = \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1),F(x_2)) \rightarrow \forall x_1 \forall x_2 R(x_1,x_2)$

פתרון:

1. יועלה לאתר הקורס.
2. הטענה אינה נכונה:
נבחר מבנה והשמה:
$M = \langle \{0,1\}, \{(0,0)\}, F^M \rangle$
$F^M(n) = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ תהי s השמה $s(x_i) = 0$.

לוגיקה — תרגול 11

גדירות של יחס בתוך מבנה נתון על ידי נוסחה

<u>הגדרה 1</u>: יהיו τ מילון, M מבנה מעל τ ו־P יחס n־מקומי מעל D^M ($P \subseteq \underbrace{D^M \times D^M \times \ldots \times D^M}_{n}$).

נאמר כי P <u>גדיר</u> ב־M אם קיימת נוסחה φ מעל τ בעלת n משתנים חופשיים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ כך שלכל השמה s מתקיים:

$$M \models_s \varphi \iff (s(x_1), s(x_2), \ldots, s(x_n)) \in P$$

<u>תרגיל 1</u>: נתון המילון $\tau = \langle R(\circ, \circ), F(\circ, \circ), c \rangle$.

1. הגדירו במבנה $M = \langle \mathbb{N}, \leq, +, 0 \rangle$ את היחס הדו־מקומי $P_1 = \left\{ (i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i < j \right\}$.
2. הגדירו במבנה $M = \langle P(\mathbb{N}), \subseteq, \cup, \{1\} \rangle$ את היחס הדו־מקומי $P_2 = \{ (A, B) \mid A \cup \{1\} \subseteq B \}$.
3. הגדירו במבנה $M = \langle P(\mathbb{N}), \subseteq, \cup, \{1\} \rangle$ את היחס החד־מקומי $P_3 = \{ \emptyset \}$.

<u>טענה</u>: יהיו τ מילון, M מבנה מעל τ ו־P_1, P_2 שני יחסים k־מקומיים מעל D^M ($P_1, P_2 \subseteq \underbrace{D^M \times D^M \times \ldots \times D^M}_{k}$) הגדירים ב־$M$ ע"י נוסחאות מעל τ בעלות k משתנים חופשיים φ_1, φ_2 בהתאמה. אז מתקיים:

1. היחס $P_1 \cap P_2$ גדיר ע"י $\varphi_1 \wedge \varphi_2$.
2. היחס $P_1 \cup P_2$ גדיר ע"י $\varphi_1 \vee \varphi_2$.
3. היחס $(D^M)^k \backslash P_1$ גדיר ע"י $\neg \varphi_1$.

תרגיל 2:

נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ)\rangle$.

יהי M המבנה הבא מעל τ:

$$M = \langle \{0,1\}^{\mathbb{N}}, R^M, F^M \rangle$$

כאשר R^M, F^M מוגדרים באופן הבא:

- $R^M = \left\{ (a,b) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N},\ a_i \leq b_i \right\}$.
- בהינתן $b = b_0 b_1 b_2 \ldots \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$:

$$F^M(b) = b_1 b_2 b_3 \ldots$$

הוכיחו כי היחסים הבאים גדירים במבנה M:

1. $R_1 = \left\{ (a,b) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N}^+,\ a_i = b_i \right\}$.
2. $R_2 = \{b^{\text{zero}}\}$, כאשר b^{zero} הוא וקטור האפס המוגדר באופן הבא: $b_i^{\text{zero}} = 0$ לכל $i \in \mathbb{N}$.
3. $R_3 = \left\{ b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \text{קיים לפחות } i \in \mathbb{N} \text{ אחד שעבורו } b_i = 1 \right\}$.

תרגיל 3: נתון המילון $\tau = \langle F(\circ,\circ), c\rangle$.

יהי $M = \langle \mathbb{N}^+, f_\times, 1\rangle$ מבנה עבור τ, כאשר $f_\times(a,b) = a \cdot b$.

1. יהיו $m, n \in \mathbb{N}^+$. נאמר כי m **מחלק את** n אם קיים $k \in \mathbb{N}^+$ כך ש־$n = k \cdot m$.
רשמו נוסחה $\varphi_Q(x_1, x_2)$ המגדירה ב־M את היחס הדו־מקומי הבא:

$$Q = \left\{ (m,n) \in \mathbb{N}^+ \mid m \text{ מחלק את } n \right\}$$

2. מספר טבעי ייקרא **ראשוני** אם הוא גדול מ־1 והמחלקים היחידים שלו הם הוא עצמו ו־1.
רשמו נוסחה $\varphi_P(x_1)$ המגדירה ב־M את היחס החד־מקומי הבא:

$$P = \left\{ p \in \mathbb{N}^+ \mid p \text{ ראשוני} \right\}$$

3. מספר $n \in \mathbb{N}^+$ ייקרא **חופשי מריבועים** אם בפירוק של n לגורמים ראשוניים,
$n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, כל ראשוני מופיע עם חזקה 1 לכל היותר, כלומר $e_i \leq 1$ לכל i.
רשמו נוסחה $\varphi_S(x_1)$ המגדירה ב־M את היחס החד־מקומי הבא:

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N}^+ \mid n \text{ חופשי מריבועים} \right\}$$

לוגיקה ותורת הקבוצות — תרגול 11
תחשיב היחסים

ירות של יחס בתוך מבנה נתון על ידי נוסחה

הגדרה 1: יהיו τ מילון, M מבנה מעל τ ו־P יחס n־מקומי מעל D^M ($P \subseteq \underbrace{D^M \times D^M \times \ldots \times D^M}_{n}$).

נאמר כי P גדיר ב־M אם קיימת נוסחה φ מעל τ בעלת n משתנים חופשיים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ כך שלכל השמה s מתקיים:

$$M \models_s \varphi \iff (s(x_1), s(x_2), \ldots, s(x_n)) \in P$$

תרגיל 3: נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c\rangle$.

1. הגדירו במבנה $M = \langle \mathbb{N}, \leq, +, 0\rangle$ את היחס הדו־מקומי $P_1 = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i < j\right\}$.

   פתרון: נסמן $\varphi = R(x_1, x_2) \wedge \neg(x_1 \approx x_2)$

   לכל השמה s מתקיים:

   $M \vDash_s R(x_1,x_2) \wedge \neg(x_1 \approx x_2) \iff$

   $M \vDash_s \neg(x_1 \approx x_2)$ וגם $M \vDash_s R(x_1,x_2) \iff$

   $M \nvDash_s (x_1 \approx x_2)$ וגם $(\overline{s}(x_1), \overline{s}(x_2)) \in R^M \iff$

   $\overline{s}(x_1) \neq \overline{s}(x_2)$ וגם $\overline{s}(x_1) \leq \overline{s}(x_2) \iff$ (אלגברי) $\iff$

   $\overline{s}(x_1) < \overline{s}(x_2) \iff$ (הגדרת P_1)

   $(\overline{s}(x_1), \overline{s}(x_2)) \in P_1$

2. הגדירו במבנה $M = \langle P(\mathbb{N}), \subseteq, \cup, \{1\}\rangle$ את היחס הדו־מקומי $P_2 = \{(A,B) \mid A \cup \{1\} \subseteq B\}$.

   פתרון: נסמן $\varphi = R(F(x_1,c), x_2)$

   לכל השמה s מתקיים:

   $M \models_s R(F(x_1,c), x_2) \iff$

   $(\overline{s}(F(x_1,c)), \overline{s}(x_2)) \in R^M \iff$

   $\left(F^M(\overline{s}(x_1), \overline{s}(c)), s(x_2)\right) \in R^M \iff$

   $F^M\left(s(x_1), c^M\right) \subseteq s(x_2) \iff$

   $s(x_1) \cup \{1\} \subseteq s(x_2) \iff$

   $(s(x_1), s(x_2)) \in P_2$

3. הגדירו במבנה $M = \langle P(\mathbb{N}), \subseteq, \cup, \{1\} \rangle$ את היחס החד־מקומי $P_3 = \{\emptyset\}$.

<u>פתרון:</u> נסמן $\varphi = \forall x_2 R(x_1, x_2)$.

לכל השמה s מתקיים:

$M \models_s \varphi \iff$

לכל $d \in D^M$ מתקיים $R(x_1, x_2)$ $M \models_{\underbrace{s\,[x_2 \leftarrow d]}_{s'}} \iff$

לכל $d \in D^M$ מתקיים $(\overline{s}'(x_1), \overline{s}'(x_2)) \in R^M \iff$

לכל $d \in P(\mathbb{N})$ מתקיים $s(x_1) \subseteq d \iff$ (מתורת הקבוצות)

$s(x_1) = \emptyset \iff$

$s(x_1) \in P_3$

<u>טענה:</u> יהיו τ מילון, M מבנה מעל τ ו־P_1, P_2 שני יחסים k־מקומיים מעל D^M ($P_1, P_2 \subseteq \underbrace{D^M \times D^M \times \ldots \times D^M}_{k}$) הגדירים ב־$M$ ע"י נוסחאות מעל τ בעלות k משתנים חופשיים φ_1, φ_2 בהתאמה. אז מתקיים:

1. היחס $P_1 \cap P_2$ גדיר ע"י $\varphi_1 \wedge \varphi_2$.
2. היחס $P_1 \cup P_2$ גדיר ע"י $\varphi_1 \vee \varphi_2$.
3. היחס $(D^M)^k \backslash P_1$ גדיר ע"י $\neg\varphi_1$.

<u>תרגיל 4:</u>

<u>תזכורת:</u> נסמן וקטור בינארי אינסופי באופן הבא: $b = b_0 b_1 b_2 \ldots$, כאשר לכל $i \in \mathbb{N}$, $b_i \in \{0,1\}$.

נתון המילון $\tau = \langle R(\circ, \circ), F(\circ) \rangle$.

יהי M המבנה הבא מעל τ:

$$M = \langle \{0,1\}^{\mathbb{N}}, R^M, F^M \rangle$$

כאשר R^M, F^M מוגדרים באופן הבא:

- $R^M = \left\{ (a,b) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N},\ a_i \leq b_i \right\}$.
- בהינתן $b = b_0 b_1 b_2 \ldots \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$:

$$F^M(b) = b_1 b_2 b_3 \ldots$$

הוכיחו כי היחסים הבאים גדירים במבנה M:

1. $R_1 = \left\{ (a,b) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N}^+,\ a_i = b_i \right\}$.

<u>פתרון:</u> נגדיר $\varphi_1(x_1, x_2) = (F(x_1) \approx F(x_2))$.

לכל השמה s מתקיים:

$M \vDash_s (F(x_1) \approx F(x_2)) \iff$

$$\Longleftrightarrow \overline{s}\left(F\left(x_1\right)\right)=\overline{s}\left(F\left(x_2\right)\right)$$
$$\Longleftrightarrow F^M\left(s\left(x_1\right)\right)=F^M\left(s\left(x_2\right)\right)$$
$$\Longleftrightarrow s\left(x_1\right)_1 s\left(x_1\right)_2 \ldots=s\left(x_2\right)_1 s\left(x_2\right)_2 \ldots$$
לכל $i \in \mathbb{N}^+$: $s\left(x_2\right)_i=s\left(x_1\right)_i \quad \Longleftrightarrow$

$$\left(s\left(x_1\right), s\left(x_2\right)\right) \in R_1$$

2. $R_2=\left\{b^{\text{zero}}\right\}$, כאשר b^{zero} הוא וקטור האפס המוגדר באופן הבא: $b_i^{\text{zero}}=0$ לכל $i \in \mathbb{N}$.

<u>פתרון:</u> נגדיר $\varphi_2\left(x_1\right)=\forall x_2 R\left(x_1, x_2\right)$.

לכל השמה s מתקיים:

$$\Longleftrightarrow \quad M \vDash_s \forall x_2 R\left(x_1, x_2\right)$$

לכל $d \in D^M$: $M \vDash_{\underbrace{s\left[x_2 \leftarrow d\right]}_{s'}} R\left(x_1, x_2\right) \quad \Longleftrightarrow$

לכל $d \in D^M$: $\left(s'\left(x_1\right), s'\left(x_2\right)\right) \in R^M \quad \Longleftrightarrow$

לכל $d \in D^M$: $\left(s'\left(x_1\right), d\right) \in R^M \quad \Longleftrightarrow$

לכל $d \in D^M$ ולכל $i \in \mathbb{N}$: $s\left(x_1\right)_i \leq d_i \Longleftrightarrow$

לכל $i \in \mathbb{N}$: $s\left(x_1\right)_i \leq 0 \Longleftrightarrow$

לכל $i \in \mathbb{N}$: $s\left(x_1\right)_i=0 \Longleftrightarrow$

$s\left(x_1\right) \in R_2$.

3. $R_3=\left\{b \in\{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid b_i=1 \text{ קיים לפחות } i \in \mathbb{N} \text{ אחד שעבורו}\right\}$.

<u>פתרון:</u> נשים לב ש־ $b \in R_3$ אם ורק אם $b \neq b^{\text{zero}}$ ולכן נגדיר $\varphi_3=\neg \varphi_2$.

<u>תרגיל 5:</u> נתון המילון $\tau=\langle F(\circ, \circ), c\rangle$.

יהי $M=\left\langle\mathbb{N}^{+}, f_{\times}, 1\right\rangle$ מבנה עבור τ, כאשר $f_{\times}(a, b)=a \cdot b$ (כפל רגיל של מספרים טבעיים).

1. יהיו $m, n \in \mathbb{N}^{+}$. נאמר כי m **מחלק את** n אם קיים $k \in \mathbb{N}^{+}$ כך ש־$n=k \cdot m$.
רשמו נוסחה $\varphi_Q\left(x_1, x_2\right)$ המגדירה ב־M את היחס הדו־מקומי הבא:

$$Q=\left\{(m, n) \in \mathbb{N}^{+} \mid n \text{ מחלק את } m\right\}$$

פתרון:

$$\varphi_Q=\exists x_3 F\left(x_1, x_3\right) \approx x_2$$

2. מספר טבעי ייקרא **ראשוני** אם הוא גדול מ־1 והמחלקים היחידים שלו הם הוא עצמו ו־1.
רשמו נוסחה $\varphi_P\left(x_1\right)$ המגדירה ב־M את היחס החד־מקומי הבא:

$$P=\left\{p \in \mathbb{N}^{+} \mid p \text{ ראשוני}\right\}$$

פתרון:

$$\varphi_P=\left(\neg\left(x_1 \approx c\right)\right) \wedge \forall x_2\left(\left(\neg\left(x_2 \approx c\right) \wedge\left(\neg\left(x_2 \approx v_1\right)\right)\right) \rightarrow \neg \varphi_Q\left(x_2, x_1\right)\right)$$

3. מספר $n \in \mathbb{N}^+$ ייקרא **חופשי מריבועים** אם בפירוק של n לגורמים ראשוניים,

$n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, כל ראשוני מופיע עם חזקה 1 לכל היותר, כלומר $e_i \leq 1$ לכל i.

רשמו נוסחה $\varphi_S(x_1)$ המגדירה ב־M את היחס החד־מקומי הבא:

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N}^+ \mid \text{חופשי מריבועים } n \right\}$$

פתרון:

$$\varphi_S = \forall x_2 \left(\varphi_P(v_2) \rightarrow \left(\neg \left(\varphi_Q \left(F(x_2, x_2), x_1 \right) \right) \right) \right)$$

לוגיקה תרגול 11

תרגיל 1:

$\varphi_1(x_1,x_2)=\exists x_3 R(x_2,F(x_1,x_3))$ (לא מוצלח מדי).
$\varphi_1(x_1,x_2)=R(x_1,x_2)\wedge\neg(x_1\approx x_2)$(פשוט ומוצלח)
<u>סעיף 1:</u>
תהיי s השמה
$M\underset{s}{\models}\varphi_1\Leftrightarrow$
$M\underset{s}{\models}R(x_1,x_2)\wedge\neg(x_1\approx x_2)\Leftrightarrow$
$M\underset{s}{\models}\neg(x_1\approx x_2)$ וגם $M\underset{s}{\models}R(x_1,x_2)\Leftrightarrow$
$M\underset{s}{\not\models}(x_1\approx x_2)$ וגם $M\underset{s}{\models}R^M(s(x_1),s(x_2))\Leftrightarrow$
$s(x_1)\neq s(x_2)$ וגם $s(x_1)\leq s(x_2)$ (ביטוי אלגברי) $\Leftrightarrow(s(x_1),s(x_2))\in P\Leftrightarrow$
$s(x_1)<s(x_2)$.
<u>סעיף 2:</u>
$\varphi_2(x_1,x_2)=R(F(x_1,c),x_2)$
תהיי s השמה
$M\underset{s}{\models}\varphi_2\ \Leftrightarrow$
$\vdots\ \Leftrightarrow$
$s(x_1)\bigcup\{1\}\subseteq s(x_2)\Leftrightarrow(s(x_1),s(x_2))\in P_2$.
<u>סעיף 3:</u>
$\varphi_3(x_1)=\forall x_2R(x_1,x_2)$
תהיי s השמה
$M\underset{s}{\models}\varphi_3\Leftrightarrow$
$\vdots\Leftrightarrow$
לכל $d\in P(\mathbb{N})$ מתקיים $s(x_1)\subseteq d$ (מתורת הקבוצות)$\Leftrightarrow$
$s(x_1)=\emptyset \qquad s(x_1)\in P_3$.

תרגיל 2:

1. $R_1=\{(a,b)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}|\forall i\in\mathbb{N}^+,a_i=b_i\}$.
   $\varphi_1(x_1,x_2)=(F(x_1)\approx F(x_2))$
2. $R_2=\{b^{zero}\}$, כאשר b^{zero}הוא וקטור האפס המוגדר באופן הבא: $b_i^{zero}=0$ לכל $i\in\mathbb{N}$.
   $\varphi_2(x_1)=\forall x_2R(x_1,x_2)$.
3. $R_3=\{b\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}\mid$ קיים לפחות $i\in\mathbb{N}$ אחד שעבורו $b_i=1\ \}$.
   $\varphi_3=\neg\varphi_2$.

תרגיל 3:

1. $\varphi_Q(x_1,x_2)=\exists x_3(F(x_1,x_3)\approx x_2)$
2. $\varphi_P(x_1)=\neg(x_1\approx c)\wedge\forall x_2(\neg(x_2\approx 1)\wedge\neg(x_2\approx x_1)\to\neg\varphi_Q(x_2,x_1))$
3. $\varphi_S(x_1)=\forall x_2\varphi_P(x_2)\wedge\varphi_Q(x_2,x_1)\to\neg\varphi_Q(\varphi_Q(x_2,x_1),x_1)$

לוגיקה — תרגול 12

גדירות של קבוצת מבנים על ידי קבוצת פסוקים

הגדרה 1: יהי τ מילון. בהינתן קבוצת פסוקים Σ נסמן $\{M$ מבנה מעל τ ו־$M \models \Sigma \mid M\} = M(\Sigma)$.

אוסף מבנים K יקרא גדיר, אם קיימת קבוצת פסוקים Σ כך ש־$M(\Sigma) = K$.

הוכחת גדירות של אוסף מבנים על ידי קבוצת פסוקים

איך מוכיחים שאוסף מבנים K הוא גדיר?

1. מגדירים קבוצת פסוקים Σ מפורשת.
2. מראים על ידי הכלה דו־כיוונית ש־$M(\Sigma) = K$.

תרגיל 1: נתון המילון $\tau = \langle R_1(\circ), R_2(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c\rangle$.

1. הוכיחו כי $K_1 = \{M \mid \mathrm{Image}\left(F^M\right) \subseteq R_1^M$ המקיים τ מבנה מעל $M\}$ גדיר.
2. הוכיחו כי $K_2 = \{M \mid (d, c^M) \in R_2^M$ כך ש־$d \in D^M$ מבנה מעל τ המקיים כי יש אינסוף איברים $M\}$ גדיר.

הוכחת אי גדירות של אוסף מבנים על ידי קבוצת פסוקים

משפט הקומפקטיות: תהי Σ קבוצת נוסחאות, Σ ספיקה אמ"מ כל תת־קבוצה סופית של Σ ספיקה.

איך מוכיחים אי גדירות של אוסף מבנים?

1. מניחים בשלילה שקיימת קבוצת פסוקים X כך ש־$M(X) = K$.
2. בוחרים קבוצת פסוקים מפורשת Y כך ש־$K \cap M(Y) = \emptyset$.
3. מוכיחים כי $X \cup Y$ אינה ספיקה מאחר ש־$M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y) = K \cap M(Y) = \emptyset$.
4. מוכיחים שכל תת קבוצה סופית $D \subseteq X \cup Y$ ספיקה.
5. 3+4 הם סתירה למשפט הקומפקטיות ולכן K אינו גדיר.

תרגיל 2:

נתון המילון $\tau = \langle R_1(\circ), R_2(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c\rangle$ (מתרגיל 1), ואוסף המבנים

$K = \{M \mid (d', d) \in R_2^M$ כך ש־$d' \in D^M$ יש מספר סופי של $d \in D^M$ מבנה מעל τ המקיים כי לכל $M\}$

הוכיחו כי K אינו גדיר.

לוגיקה — תרגול 12
גדירות בתחשיב היחסים

גדירות של קבוצת מבנים על ידי קבוצת פסוקים

<u>הגדרה 1</u>: יהי τ מילון. בהינתן קבוצת <u>פסוקים</u> Σ נסמן $\{M$ מבנה מעל τ ו־$M \models \Sigma \mid M\} = M(\Sigma)$.
אוסף <u>מבנים</u> K יקרא <u>גדיר</u>, אם קיימת קבוצת <u>פסוקים</u> Σ כך ש־$M(\Sigma) = K$.

הוכחת גדירות של אוסף מבנים על ידי קבוצת פסוקים

<u>איך מוכיחים שאוסף מבנים K הוא גדיר?</u>

1. מגדירים קבוצת <u>פסוקים</u> Σ מפורשת.
2. מראים על ידי הכלה דו־כיוונית ש־$M(\Sigma) = K$.

<u>תרגיל 1</u>: נתון המילון $\tau = \langle R_1(\circ), R_2(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c\rangle$.

1. הוכיחו כי $\{M$ מבנה מעל τ המקיים $\mathrm{Image}\left(F^M\right) \subseteq R_1^M \mid M\} = K_1$ גדיר.

   <u>פתרון</u>: נגדיר את הקבוצה Σ_1 באופן הבא:

$$\Sigma_1 = \{\forall x_1 \forall x_2 R_1(F(x_1,x_2))\}$$

   נראה כי $K_1 = M(\Sigma_1)$
   $M \in M(\Sigma_1)$ (כלומר $M \models \Sigma_1$) $\iff$
   $M \models \forall x_1 \forall x_2 R_1(F(x_1,x_2)) \iff$
   לכל השמה s $M \models_s \forall x_1 \forall x_2 R_1(F(x_1,x_2)) \iff$
   לכל השמה s ולכל $d_1, d_2 \in D^M$ מתקיים: $M \models_{s[x_1 \leftarrow d_1, x_2 \leftarrow d_2]} R_1(F(x_1,x_2)) \iff$
   לכל השמה s ולכל $d_1, d_2 \in D^M$ מתקיים $\overline{s}[x_1 \leftarrow d_1, x_2 \leftarrow d_2](F(x_1,x_2)) \in R_1^M \iff$
   לכל $d_1, d_2 \in D^M$ מתקיים $F^M(d_1,d_2) \in R^M \iff$
   $\mathrm{Image}\left(F^M\right) \subseteq R_1^M \iff$
   $M \in K_1$.

2. הוכיחו כי $\{M$ מבנה מעל τ המקיים כי יש <u>אינסוף</u> איברים $d \in D^M$ כך ש־$(d, c^M) \in R_2^M \mid M\} = K_2$ גדיר.

   <u>פתרון</u>:

תזכורת: בהרצאה ראינו קבוצת פסוקים $\Sigma_{\inf} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots\}$, כאשר α_n הוגדר באופן הבא:

$$\alpha_n = \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg (x_i \approx x_j) \right)$$

הוכחנו כי $M \vDash \alpha_n$ אמ"מ ב-D^M יש **לפחות** n **איברים,** והוכחנו כי $M \in M(\Sigma_{\inf})$ אמ"מ D^M אינסופי.

במקרה זה נגדיר קבוצה אינסופית של פסוקים $\Sigma_2 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$

משמעות הפסוק φ_n הינה שב-D^M יש **לפחות** n **איברים שונים** d **כך ש-**$(d, c^M) \in R_2^M$**,** והוא יוגדר באופן הבא:

$$\varphi_n = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \left[\bigwedge_{i=1}^{n} R_2(x_i, c) \wedge \bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg (x_i \approx x_j) \right]$$

מתקיים: $M \models \varphi_n$ אמ"מ ב-D^M קיימים (לפחות) n איברים <u>שונים</u> d כך שכולם מקיימים $(d, c^M) \in R_2^M$.

כעת נוכיח כי $K_2 = M(\Sigma_2)$:

$M \notin M(\Sigma_2)$ (כלומר $M \nvDash \Sigma_2$) $\iff$

קיימת השמה s כך ש-$M \nvDash_s \Sigma_2$ $\iff$

קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$M \nvDash_s \varphi_n$ $\iff$

קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שב-D^M לא קיימים n איברים <u>שונים</u> d שכולם מקיימים $(d, c^M) \in R_2^M$ $\iff$

ב-D^M לא קיימים אינסוף איברים <u>שונים</u> d שכולם מקיימים $(d, c^M) \in R_2^M$ $\iff$

$M \notin K_2$

הוכחת אי גדירות של אוסף מבנים על ידי קבוצת פסוקים

<u>משפט הקומפקטיות</u>: תהי Σ קבוצת נוסחאות, Σ ספיקה אמ"מ כל תת־קבוצה סופית של Σ ספיקה.

<u>איך מוכיחים אי גדירות של אוסף מבנים?</u>

1. מניחים בשלילה שקיימת קבוצת פסוקים X כך ש-$M(X) = K$.
2. בוחרים קבוצת פסוקים מפורשת Y כך ש-$K \cap M(Y) = \emptyset$.
3. מוכיחים כי $X \cup Y$ אינה ספיקה מאחר ש-$M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y) = K \cap M(Y) = \emptyset$.
4. מוכיחים שכל תת קבוצה סופית $D \subseteq X \cup Y$ ספיקה.
5. 3+4 הם סתירה למשפט הקומפקטיות ולכן K אינו גדיר.

<u>תרגיל 2:</u>

נתון המילון $\tau = \langle R_1(\circ), R_2(\circ, \circ), F(\circ, \circ), c \rangle$ (מתרגיל 1), ואוסף המבנים

$K = \{M \mid$ מבנה מעל τ המקיים כי לכל $d \in D^M$ יש מספר סופי של $d' \in D^M$ כך ש-$(d', d) \in R_2^M\}$

הוכיחו כי K אינו גדיר.

<u>הוכחה:</u>

1. נניח בשלילה שקיימת קבוצת פסוקים X כך ש-$M(X) = K$.

2. נסמן $Y=\Sigma_2$

3. נראה כי $X\cup Y$ אינה ספיקה:

- $M\in K$: לכל $d\in D^M$ יש מספר סופי של $d'\in D^M$ כך ש־$(d',d)\in R_2^M$.
- $M\in M(Y)$: מהדוגמה הקודמת נובע כי ב־D^M (קיים $c^M=d\in D^M$ כך ש־) יש מספר אינסופי של $d'\in D^M$ כך ש־$(d',c^M)\in R_2^M$.

לכן $M(X\cup Y)=M(X)\cap M(Y)=K\cap M(Y)=\emptyset$ ולכן $X\cup Y$ אינה ספיקה.

4. נראה כי $X\cup Y$ ספיקה:

על פי קומפקטיות מספיק להראות כי כל תת־קבוצה $D\subseteq X\cup Y$ סופית היא ספיקה.

נניח כי $D\subseteq X\cup Y$ תת־קבוצה סופית ונסמן $D_X=D\cap X$, $D_Y=D\cap Y$.

יהי m המספר הגדול ביותר כך ש־$\varphi_m\in D_Y$ ($m=1$ אם $D_Y=\emptyset$).

נתבונן במבנה הבא מעל המילון τ: $M=\langle\underbrace{\{1,2,\dots,m\}}_{D^M},\emptyset,\underbrace{D^M\times\{1\}}_{R_2^M},F^M,1\rangle$, כאשר $F^M(d,d')=1$.

- נראה $M\vDash D_Y$:
  לכל $d\in D^M$ מתקיים $\left(d,c^M\right)\in R_2^M$.
  מכיוון ש־$\left|D^M\right|=m$ יש ב־D^M m איברים שונים d כך ש־$\left(d,c^M\right)\in R_2^M$.
  בפרט לכל $i\le m$ יש ב־D^M (לפחות) i איברים שונים d כך ש־$\left(d,c^M\right)\in R_2^M$.
  לכן לכל $i\le m$ מתקיים $M\vDash\varphi_i$.
  יהי $\varphi_i\in D_Y$ אזי $i\le m$ ולכן $M\vDash\varphi_i$. כלומר $M\vDash D_Y$.
- נראה $M\vDash D_X$:
  D^M סופי ולכן לכל $d\in D^M$ יש מספר סופי של $d'\in D^M$ כך ש־$(d',d)\in R_2^M$.
  כלומר $M\in K=M(X)$ ולכן $M\vDash X$.
  מכיוון ש־$D_X\subseteq X$ נקבל כי $M\vDash D_X$.

מסקנה: $M\vDash D_X\cup D_Y=D$.

הראינו כי כל תת קבוצה סופית של $X\cup Y$ ספיקה, ולכן לפי קומפקטיות $X\cup Y$ ספיקה.

5. מסעיפים 3+4 הגענו לסתירה, ולכן K אינה גדירה.

לוגיקה תרגול 12

3 ביולי 2019

תרגיל 1:

1. נגדיר את הקבוצה Σ_1באופן הבא: $\Sigma_1 = \{\forall x_1 \forall x_2 R_1(F(x_1, x_2))\}$
נראה כי $K_1 = M(\Sigma_1)$
$M \in M(\Sigma_1)$ $(M \vDash \Sigma_1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow M \vDash \forall x_1 \forall x_2 R_1(F(x_1, x_2))$

$\vdots$

$\Leftrightarrow$
לכל $d_1, d_2 \in D^M$ מתקיים $F^M(d_1, d_2) \in R^M \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow Image(F^M) \subseteq R^M$
$M \in K_1$

2. $\alpha_2 = \exists x_1 \exists x_2 \neg(x_1 \approx x_2)$
$\alpha = \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i \leq j \leq n} \neg(x_i \approx x_n))$
$\sum_{inf} = \{\alpha | n \geq 2\}$
$\varphi_n = \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i \leq j \leq n} \neg(x_i \approx x_j) \bigwedge_{1 \leq i \leq n} R(x_i, c))$
$\sum = \{\varphi_n | n \geq 2\}$

תרגיל 2:

1. נניח בשלילה שקיימת קבוצת פסוקים X כך ש $M(x) = K$

2. $Y = \{\varphi_n | \, n \geq 2\}$

3. נראה כי $X \cup Y$ אינה ספיקה.

- $M \in K$: לכל $d \in D^M$יש מספר סופי $d' \in D^M$ כך ש־$(d', d) \in R_2^M$.
- $M \in M(Y)$: מהדוגמה הקודמת נובע כי ב־D^M יש מספר אינסופי של $d' \in D^M$
כך ש־$(d', c^M) \in R_2^M$
לכן $M(X \cup Y) = M(x) \cap M(Y)$
$K \cap M(Y) = \emptyset$
ולכן $X \cup Y$ אינה ספיקה.

4. נראה כי $X \cup Y$ ספיקה.
על פי קומפקטיות מספיק להראות כי כל תת־קבוצה $D \subseteq X \cup Y$ סופית היא ספיקה.

נניח כי $D \subseteq X \cup Y$ תת־קבוצה סופית, נסמן $D_X = D \cap X$ $D_Y = D \cap Y$
יהי m המספר הגדול ביותר כך ש־$\varphi_m \in D_Y$.
($m = 1$ אם $D_Y = \emptyset$).
נתבונן במבנה הבא מעל מילון τ:
$$M = \langle \underbrace{\{1, 2, \ldots, m\}}_{D^M}, \emptyset, D^M \times \{1\}, F^M, 1 \rangle$$
כאשר $F^M(d, d') = 1$.
נראה $M \vDash D_Y$
לכל $d \in D^M$ מתקיים $(d, c^M) \in R_2^M$ מכיוון ש $|D^M| = m$ יש ב־D^M m איברים שונים d כך ש־$(d, c^M) \in R_2^M$
לכן לכל $i \leq m$ מתקיים $M \vDash \varphi_i$
יהי $\varphi_i \in D_Y$ אזי $i \leq m$ ולכן $M \vDash \varphi_i$כלומר
$M \vDash D_Y$

- נראה $M \vDash D_x$
D^Mסופי ולכן לכל $d \in D^M$ יש מספר סופי של $d' \in D^M$כך ש־$(d', d) \in R_2^M$
כלומר $M \in K = M(x)$ ולכן $M \vDash x$ מכיוון ש־$D_x \subseteq X$ נקבל $M \vDash D_x$.
מסקנה $M \vDash D_x \cup D_y = D$
הראינו כי כל תת־קבוצה סופית של $X \cup Y$ ספיקה ולכן לפי קומפקטיות $X \cup Y$ ספיקה.

5. מסעיפים 3+4 נקבל סתירה ולכן k אינה גדירה.

לוגיקה — תרגול 13

תזכורת

משפט הקומפקטיות: תהי Σ קבוצת נוסחאות, Σ ספיקה אמ"מ כל תת־קבוצה סופית של Σ ספיקה.

איך מוכיחים אי גדירות של אוסף מבנים?

1. מניחים בשלילה שקיימת קבוצת פסוקים X כך ש־$M(X) = K$.
2. בוחרים קבוצת פסוקים מפורשת Y כך ש־$K \cap M(Y) = \emptyset$.
3. מוכיחים כי $X \cup Y$ אינה ספיקה מאחר ש־$M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y) = K \cap M(Y) = \emptyset$.
4. מוכיחים שכל תת קבוצה סופית $D \subseteq X \cup Y$ ספיקה.
5. 3+4 הם סתירה למשפט הקומפקטיות ולכן K אינו גדיר.

תרגיל 1:

יהי $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ), c\rangle$ מילון.

הוכיחו כי אוסף המבנים הבא אינו גדיר:

$K = \{M \mid F^M(d) \neq c^M$ מתקיים $d \in D^M$ מבנה מעל τ כך שלמספר סופי של איברים $M\}$

תרגיל 2:

יהי $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ)\rangle$ מילון.

1. יהי $K_1 = \left\{M \mid F^M = R^M\right\}$.
   הוכיחו/ הפריכו: K_1 גדיר.
2. יהי $K_2 = \{M \mid$ מספר הזוגות $(x,y) \in R^M$ שעבורם $F^M(x) \neq y$ הוא סופי$\}$.
   הוכיחו/ הפריכו: K_2 גדיר.

תרגול 13

3 ביולי 2019

תרגיל 1:

יהי $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ), c\rangle$ מילון.
הוכיחו כי אוסף המבנים הבא אינו גדיר:
$K = \{M \mid F^M(d) \neq c^M$ מתקיים $d \in D^M$ מבנה מעל τ כך שלמספר סופי של איברים $M\}$

הוכחה:

1. נניח בשלילה ש-$M(X) = k$
2. $Y = \Sigma_{inf} \bigcup \{\forall x_1 \neg(F(x_1) \approx c)\}$
3. טענת עזר
   - $M \vDash \forall x_1 \neg(F(x_1) \approx c))$ אמ"מ $F^M(d) \neq C^M$ לכל $d \in D^M$ (להוכיח)
     מכך ש $M \in M(\Sigma_{inf})$ אמ"מ D^M אינסופי נובע ש-$M(Y) = \emptyset$.
4. תהי $D \subseteq X \cup Y$ סופית ונסמן $D_X = D \cap X$, $D_y = D \cap Y$.
   יהי m המספר הגדול ביותר כך ש-$\alpha_m \in D_Y$ ($m = 1$ אם לא קיים).
   נתבונן במבנה הבא מעל המילון τ:
   $M = \langle \underbrace{\{1, 2, \ldots, m+1\}}_{D^M}, \underbrace{\emptyset}_{R^M}, F^M, 1\rangle$
   כאשר $F^M(d) = m+1$ לכל d .
   נשאר להוכיח כי D ספיקה על ידי M:
   $M \vDash D_Y$: לכל $i \leq m$ יש ב-D^M לפחות i איברים וכמו כן לכל $d \in D^M$ מתקיים $F^M(d) \neq C^M$.
   כלומר $M \vDash D_Y$.
   $M \vDash D_x$: D^Mהוא סופי ולכן למספר סופי של איברים $d \in D^M$ מתקיים $F^M(d) \neq C^M$.
5. 3+4 הם סתירה ולכן k אינה גדירה.

תרגיל 2:

יהי $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ)\rangle$ מילון.

1. יהי $K_1 = \{M \mid F^M = R^M\}$
   הוכיחו/הפריכו: K_1 גדיר.
2. יהי $K_2 = \{M \mid$ מספר הסוגות $(x,y) \in R^M$ שעבורם $F^M(x) \neq y$ הוא סופי $\}$
   הוכיחו/הפריכו: K_2 גדיר.

פתרון:

1. הוכחה:
   $\Sigma = \{\forall x_1 \forall x_2 (F(x_1) \approx x_2) \leftrightarrow R(x_1, x_2)\}$
   לכל השמה s מתקיים
   $M \underset{s}{\vDash} \alpha \Leftrightarrow$
   $\vdots \Leftrightarrow$
   לכל $d_1, d_2 \in D^M$ מתקיים $(d_1, d_2) \in R^M$ אמ"מ $(d_1, d_2) \in F^M \Leftrightarrow$
   $M \in K_1 \Leftrightarrow F^M = R^M$.
2. הפרכה:
   K_2 אינו גדיר

   (א) $M(x) = k$

(ב) $Y = \Sigma_{inf} \cup \{\forall x_1 \neg(F^M(x_1) \approx x_1) \wedge R(x_1, x_1)\}$

3. טענת עזר:
אמ"מ $M \vDash \forall x_1(\neg(F^M \approx x_1) \wedge R(x_1, x_1))$
לכל $d \in D^M$ מתקיים $(d, d) \in R^M$ וגם $F^M(d) \neq d$
(המשך יועלה לאתר הקורס).

4. $\ldots$
נתבונן במבנה הבא מעל מילון τ:
$M = \langle\{1, 2, \ldots, m+1\}, \{(x, x) | x \in D^M\}, F^M\rangle$
$F^M(d) = \{$
(יועלה הפתרון)

5. סתירה.

כלל אצבע עבור אינסוף איברים:

$\Sigma_{inf} \cup \{\forall x_1 \ldots$ יש אינסוף איברים ולכולם מקיימים משהו$\}$
$\Sigma_{inf} \cup \{\exists x_1$ יש אינסוף איברים ולפחות איבר אחד שמקיים משהו$\}$
$\varphi_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i \leq j \leq n} \neg(x_I \approx x_J) \bigwedge \ldots$ (יש לפחות n איברים שונים שמקיימים משהו)
$\Sigma = \{\varphi_n | n \geq 2\}$ (יש אינסוף איברים שמקיימים משהו)