# הרצאה 7 לוגיקה

### מפשט הנאותות הרחב

אם $\underbrace{X \vdash \alpha}_{\text{there is proof. sequence for } \alpha \text{ using X assumes}}$ אז $\underbrace{X \vDash \alpha}_{\forall v \text{if v} \vDash X \text{ then v} \vDash \alpha}$

<u>אם $\vdash \alpha$ אז $\vDash \alpha$</u>

נסוח שקול:

אם $X \nvDash \alpha$ אז $\boxed{X \nvdash \alpha}$

<u>משפט השלמות</u>

אם $X \vDash \alpha$ אז $X \vdash \alpha$

### הגדרה 1

קבוצת פסוקים $X$ היא עקבית אם לא קיים פסוק $\alpha$ כך ש- $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$

### הגדרה 2

קבוצת פסוקים $X$ היא עקבית אם קיים פסוק $\beta$ כך ש- $X \nvdash \beta$.

### הגדרה 1 $\Leftarrow$ הגדרה 2

לא קיים $\alpha$ כך ש-$X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$

מסקנה: לפחות $\alpha$ או $\neg\alpha$ אינו יכיח מ-$X$ ולכן מתקיימת הגדרה 2.

### הגדרה 2 $\Leftarrow$ הגדרה 1

נתון: קיים פסוק $\beta$ כך ש- $X \nvdash \beta$ בדרך השלילה, נניח שקיים $\alpha$ כך $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$.

$\star$ $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$

1. פסוק יכיח $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
2. מהנתון עס' $X$ $\neg\alpha$
3. מהנתון עס' $X$ $\alpha$
4. MP 1,2 $\alpha \to \beta$
5. MP 3,4 $\beta$

$X \vdash \beta$

בסתירה לנתון ש- $X \nvdash \beta$.

מסקנה: לא קיים $\alpha$ כך ש- $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$.

**שאלה:**

האם קבוצת האכסיומות של תחשיב הפסוקים היא עקבית ? (קבוצת ההנחות $X$ היא ריקה).
**כן!**

**שאלה:**

האם יתכן $X \vDash \alpha$ וגם $X \vDash \neg\alpha$?
לכל השמה $v$:

* אם $v \vDash X$ אז $v \vDash \alpha$
* אם $v \vDash X$ אז $v \vDash \neg\alpha$

יכול להתקיים אם אין משמה $v$ שמספקת את $X$.

**דוגמאות ל $X$:**

* $X = \{p_1, \neg p_1\}$ לא ספיקה.
* $X = \{\underbrace{\alpha \to \beta}_{\beta}, \alpha, \neg\beta\}$ לא ספיקה.

**מסקנה:**

$X$ אינה עקבית $\Leftarrow$ $X$ אינה עקבית.
$X$ ספיקה $\Leftarrow$ $X$ עקבית.

**למה 1**

קבוצת פסוקים היא עקבית אם ורק אם כל תת קבוצה <u>סופית</u> שלה היא עקבית.

**הוכחה:**

$\Leftarrow$ $X$ עקבית
נניח בשלילה שקיימת תת-קבוצה $Y \subseteq X$ סופית <u>שאינה עקבית</u>.
קיים $\alpha$ כך ש- $Y \vdash \alpha$ וגם $Y \vdash \neg\alpha$
עס' מונוטוניות ההוכחה מתקיים גם $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$ בסתירה להנחה ש-$X$ עקבית.
$\Rightarrow$ נתון: כל תת-קבוצה סופית היא עקבית.
ובשלילה-$X$ אינה עקבית
$X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$ שתיהן סדרות הוכחה סופיות ולכן משתמשות כקבוצות סופיות של הנחות
$x' \vdash \alpha$, $X'' \vdash \neg\alpha$
$X'$, $X''$ סופיות
$X' \cup X''$ סופית
$X' \cup X'' \vdash \alpha$, $X' \cup X'' \vdash \neg\alpha$ בסתירה לכך שכל תת-קבוצה סופית היא עקבית.

**למה 2:**

1. $X\cup\{\alpha\}$ היא עקבית אם ורק אם $X\nvdash\neg\alpha$.
2. $X\cup\{\neg\alpha\}$ היא עקבית אם ורק אם $X\nvdash\alpha$.

**הוכחה:**

$\Leftarrow$ נתון: $X\cup\{\alpha\}$ עקבית ונניח בשלילה
ש-$X\vdash\neg\alpha$
$\begin{cases} X\cup\{\alpha\}\vdash\alpha \\ X\cup\{\alpha\}\vdash\neg\alpha \end{cases}$ סתירה לנתון ($X\cup\{\alpha\}$ עקבית)
כי $X\vdash\neg\alpha$ תמיד מותר להוסיף הנחות.
$\Rightarrow$ נתון $X\nvdash\neg\alpha$ ונניח ש-$X\cup\{\alpha\}$ אינה עקבית.
$X\cup\{\alpha\}\vdash\neg\alpha$ (בחרנו את $\beta$ להיות $\neg\alpha$ עס' הגדרת $\alpha$ של עקביות).
$\Downarrow$
$X\vdash\alpha\to\neg\alpha$ (דדוקציה)
(נשתמש במשפט: "יכיח $\vdash(\alpha\to\neg\alpha)\to\neg\alpha$")

1. פסוק יכיח $(\alpha\to\neg\alpha)\to\neg\alpha$
2. עס' $X$ מהנחת השלילה + דדוקציה $(\alpha\to\neg\alpha)$
3. $\neg\alpha$

מסקנה:
$X\vdash\neg\alpha$ בסתירה לנתון.

**למה 3**

אם $X$ ספיקה אז $X$ עקבית.

**תזכורת להוכחה:**

נתון $X$ ספיקה, אם $X$ אינה עקבית אז $X\vdash\alpha$ וגם $X\vdash\neg\alpha$ עס' נאותות $X\vDash\alpha$ וגם $X\vDash\neg\alpha$.

**מטרה:**

להוכיח $X$ עקבית $\Leftarrow$ $X$ ספיקה.

**רעיון ראשון**

$X$ עקבית אז לכל $\alpha$ לא מתקיים $X\vdash\alpha$ וגם $X\vdash\neg\alpha$.
נגדיר השמה $v$:
לכל פסוק אטומי $p$
אם $X\vdash p$ אז $v(p)=T$
אם $X\vdash\neg p$ אז $v(p)=F$.
יתכן ש- $X\nvdash p$ וגם $X\nvdash\neg p$ ואז $v$ לא מוגדרת.
דוגמא לכך שאי אפשר לבחור את $v$ אקראית כאשר $X\nvdash p$

$X \nvdash \neg p$:

$$X = \{\overbrace{p_o \vee p_1}^{F}\}$$

$$p_0 \vee p_1 \not\models \overbrace{p_0}^{F} \Rightarrow p_0 \vee p_1 \nvdash p_0$$

$$p_0 \vee p_1 \not\models \neg \overbrace{p_0}^{F}$$

$$p_0 \vee p_1 \not\models \overbrace{p_1}^{F}$$

$$\not\models \neg \overbrace{p_1}^{T}$$

**הגדרה נוספת:**

$X$ עקבית מקסימלית אם לכל פסוק $\alpha$ מתקיימת בדיוק אחת מ-2 האפשרויות:

1. $X \vdash \alpha$.
2. $X \vdash \neg\alpha$.

**למה 4**

$Y$ עקבית מקסימלית אם ורק אם $Y$ עקבית ולכל פסוק $\alpha$, אם $Y \vdash \alpha$ אז $Y \cup \{\alpha\}$ **אינה** עקבית.

**הוכחה:**

$\Leftarrow$ נתון $Y$ עקבית מקסימלית
לכן $Y$עקבית.
נתון $Y \nvdash \alpha$ אז עס' עקביות מקס' $Y \vdash \neg\alpha$
$\begin{cases} Y \cup \{\alpha\} \vdash \alpha \\ Y \cup \{\alpha\} \vdash \neg\alpha \end{cases} \Leftarrow$ מסקנה $Y \cup \{\alpha\}$ אינה עקבית.
$\Rightarrow$ נתון $Y$ עקבית ולכל $\alpha$ אם $y \nvdash \alpha$ אז $Y \cup \{\alpha\}$ אינה עקבית.
נוכיח ש-$Y$ עקבית מקס', קיימות 2 אפשרויות:

1. $Y \vdash \alpha$
2. $Y \nvdash \alpha$ אז $Y \cup \{\alpha\}$ אינה עקבית.

עס' למה 2:
$Y \vdash \neg\alpha$ סיימנו.

**למה 5**

לכל קבוצה עקבית $X$ קיימת קבוצה עקבית מקסימלית $Y$ כך ש-$X \subseteq Y$.
הנחה:

קבוצת הפסוקים היא בת מניה $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$

נגדיר:

סדרת הרחבות ל-$X$

$$\underset{X}{\underset{\parallel}{X_0}} \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$$

נניח בשלב ה-$n$, $X_n$ מוגדרת

אם $X_n \vdash \neg\alpha_n$ אז $X_{n+1} = X_n$

אם $X_n \nvdash \neg\alpha_n$ אז $X_{n+1} = X_n \cup \{\alpha_n\}$

$Y = \cup X_n$

נוכיח ש-$Y$ עקבית, מקסימלית, מכילה את-$X$

<u>טענה א:</u>

$X \subseteq Y$

<u>טענה ב:</u>

כל $X_n$ היא עקבית.

הוכחה ל-ב:

אינדוקציה עבור $n$:

- ⋆ בסיס:

  $X_0$ עקבית כי $X$ עקבית.

- ⋆ צעד:

  נניח כי $X_n$ עקבית ונוכיח $X_{n+1}$ עקבית:

  נחלק ל 2 מקרים:

  1. $X_{n+1} = X_n$ ולכן $X_{n+1}$ עקבית.
  2. למה 2 (גרסה ראשונה(שחורה)).

<u>טענה ג:</u>

$Y$ עקבית

נניח בשלילה שאינה עקבית ואז לפי למה 1 קיימת תת-קבוצה <u>סופית</u> $W$ של $Y$ שאינה עקבית.

קיימת $W \subseteq X_k$

לכל $w_i \in W$, $w_i \in X_i$ (מ-$W \subseteq Y$)

עבור האינדקס $m$ המקסימלי המכיל של $w_i$:

$W \subseteq X_m$ סתירה לטענה ב'.

<u>טענה ד:</u>

$Y$ עקבית מקסימלית לכל $\alpha_n$ נראה ש-$Y \vdash \alpha_n$ או $y \vdash \neg\alpha_n$ עס' בניה.