לוגיקה הרצאה 4

סמנטיקה של פסוקי:

נתונה המשווה $v : \{p_i | i \in \mathbb{N}\} \to \{T, F\}$
מגדירים $\overline{V} = WFF \to \{T, F\}$
אם $\alpha = p_i$ $\overline{V}(p_i) = v(p_i)$
אם $\alpha = (\beta \Box \gamma)$ אז $\overline{V}(\alpha) = TT_{\Box}(\overline{V}(\beta), \overline{V}(\gamma))$
אם $\alpha = (\neg\beta)$ אז $\overline{V}(\alpha) = TT_{\neg}(\overline{V}(\beta))$

מושגים סמנטיים:

טאוטולוגיה

הוא פסוק שמקבל ערך T לכל השמה

סתירה:

פסוק שמקבל ערך F לכל השמה.
מה משמעות שך $v(\not\models)\alpha$
$\overline{V}(\alpha) = F$
$(\not\models \alpha)$
לא בהכרח סתירה
$\Leftarrow$ <u>לא בהכרח טאוטולוגיה.</u>

דוגמה:

בבינתן קבוצה של פסוקים X
$v \models X$
אם $v \models \alpha$ לכל $\alpha \in X$
$\bigwedge_{\alpha \in X} \alpha$ - לא כתיבה חוקית כי לא <u>פסוק</u>, יתכן סדרה אינסופית של סמימנים.
פסוק β <u>נובע לוגית</u> מפסוק α (סימון $\alpha \models \beta$) אם כל השמה מספקת של α מספקת גם את β.

למה:

$\models \alpha \to \beta$ אם ורק אם $\alpha \models \beta$

הוכחה:

$\Leftarrow$ נתון $\alpha \models \beta$ צ"ל $\models \alpha \to \beta$
נבחר השמה V:

מקרה 1: $\neg \models \alpha$, $\overline{V}(\alpha) = F$
אז

$$V \models \alpha \to \beta$$
$$TT_{\to}(\underbrace{\overline{V}}_{\text{F or FT or FF}}(\beta)) = T$$

מקרה 2: $\overline{V}(\alpha) = T$, $V \models \alpha$
עס $\alpha \models \beta$, גם $V \models \beta$
ולכן $V \models \alpha \to \beta$

$\Rightarrow$: נתון $\models \alpha \to \beta$
צ"ל $\alpha \models \beta$
2 מקרים:

1. $\overline{V}(\alpha) = T$
   מאחר ש־ $\alpha \to \beta$ טאוטולוגיה אז $\overline{V}(\alpha \to \beta) = B$
   מסקנה עפ"י $TT_{\to}$: $\overline{V}(\beta) = T$

2. $\overline{V}(\alpha) = F$
   אין צורך להוכיח כי ה $\models$ מתקיים וריויאלי.

דוגמה:

בהינתן קבוצת פסוקית X נאמר ש $X \models \beta$ אם כל השמה שמספקת את X (כלומר את כל $\alpha \in X$) מספקת גם את β.

דוגמה:

$\alpha \to \beta, \alpha \models \beta$
$\{\alpha \to \beta, \alpha\} \models \beta$

למה:

$X, \alpha \models \beta$ אם ורק אם $X \models \alpha \to \beta$

-

סימון:

$M(\alpha)\{v | v \models \alpha\}$
$M(X) = \{v | v \models X\}$
α סתירה: $M(\alpha) = \emptyset$
$\alpha \models \beta, \; M(\alpha) \subseteq M(\beta)$

שקילות לוגית

זוג פסוקים α,β <u>שקולים לוגית</u> אם הם מקבלים אותו ערך אמת בכל השמה.
במילים אחרות, לכל השמה v. $\overline{v}(\alpha) = \overline{v}(\beta)$
$M(\alpha) = M(\beta)$ סימון $\alpha \equiv \beta$

דוגמה לפסוקים שקולים:

- $\star$ כל הטאוטולוגיות
- $\star$ כל הסתירות

$(\alpha_{\wedge}(\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \beta))$
$(\neg(\neg\alpha)) \equiv \alpha$

למה:

$\alpha \equiv \beta$ אם ורק אם $\models \alpha \overbrace{\leftrightarrow}^{\text{logic connect}}$

שלמות של מערכת קשרים:

הגדרה: פסוק α <u>מממש</u> טבלת אמת נתונה אם טבלת האמת של α זהה לטבלה הנתונה.
נראה: $\neg, \vee, \wedge$
עבור טבלת אמת עם k פסוקים אטומיים יש לה 2^k שורות
$TT : \{T, F\}^k \to \{T, F\}$

דוגמה:

קשר לוגה "רוב" $\#$

תלת־ערה(תלת מקומי?)

p_1	p_2	p_3	$\#(p_1,p_2,p_3)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

שורות שקבלו T:

1. $\alpha_1 = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$
2. $\alpha_2 = p_1 \wedge p_2 \neg p_3$
3. $\alpha_3 = p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3$
4. $\alpha_5 = \neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$

$\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \alpha_5$

טענה:

α מממשת את טבלת האמת של $\#$.

עבור טבלת אמת שבה כל השורות מחזירות F

נחזיר $p_1 \wedge \neg p_1$ כאשר p_1הוא פסוק אטומי שמופיע בטבלה.

p_2	p_1	$?(p_1,p_2)$
F	F	F
F	F	F
F	F	F
F	F	F

$(p_1 \wedge \neg p_1)$

המשך:

$\{\neg, \wedge\}$ גם מערכת קשרי שלמה

$(\alpha \vee \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

$\{v, \neg\} \leftarrow (\alpha \wedge \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ מערכת קשרים שלמה

$\{\neg, \leftarrow\}$ מערכת קשרים שלמה

$(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \to \beta$

T	$\vert$ T	T $\vert$	$\vert$ T
T	$\vert$ T	F $\vert$	$\vert$ T
T	$\vert$ F	T $\vert$	$\vert$ T
F	$\vert$ F	F $\vert$	$\vert$ T

הגדרה:

נגדיר קבוצה אינדוקטיבית של קבוצת המשפטים הפורמליים או הפסוקים היכיחים.

בסיס(אקסיומות)[קבוצת פסוקים]: (עוזרים להוכיח/לקבל פסוקים חדשים עס' פסוקים נתונים).

כללי יצירה/פעולות

כללי היצירה: $\underbrace{\alpha, \alpha \to \beta}_{\beta}$ (למעלה נתון שיכיח, גורר שלמטה גם).

כלל הניתוק , MP-Modus Promens

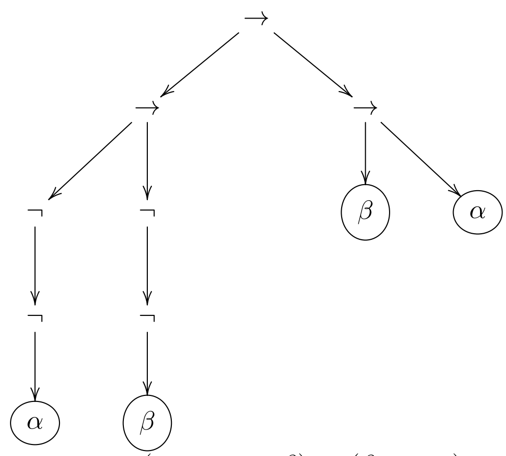
קבוצות האכסיומות של תחשיב הפסוקים

תבנית ראשונה $A1$:
פסוק δ הוא אכסיומה מטיפוס $A1$
אם קיימים פסוקים α, β כך ש־
$A1$: $\delta = (\alpha \to (\beta \to \alpha))$
$A2$:
δ מהצורה:
$$\delta = (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)))$$
$A3$:
δ מהצורה
$$\delta = ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \gamma))$$
$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ קבוצת הבסיס.

דוגמאות:

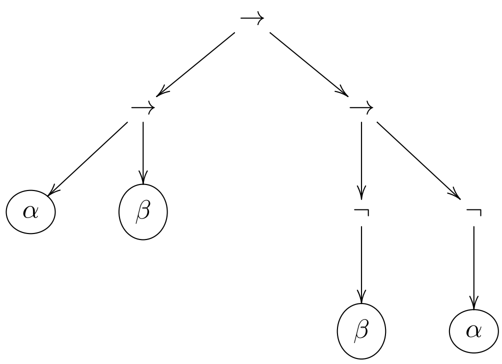
A_1 : $(p_2 \to (p_1 \to p_2))$
$(\neg\neg p_5 \to \neg p_5) \to (p_5 \to \neg p_5)$

עץ יצירה עבור אכסיומה 3



$$(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$$

$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ **האם הוא** A_3?



להראות שפסוק יכיח:

להראות סדרת יצירה ־ נקרא לה סדרת הוכחה
סדרת הוכחה עבור פסוק β
הינה סדרה של פסוקים $a_1, a_2, \ldots, a_n$
כך ש־

⋆ $a_b = \beta$

לכל $1 \le i \le n$ **,** a_i **התקבלה מהפעלתו.**

כלל ההיסק על פסוקים קודמים בסדרה

מה יכול היות a_1?

אחת מהאכסיומות

אם פסוק α יכיח נסמן $\vdash \alpha$.