

לוגיקה ותורת הקבוצות - תרגול 7

תרגיל 1: נגדיר מערכת הוכחה חדשה לתחשיב הפסוקים מעל $WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$.

• קבוצת האקסיומות מכילה את הפסוקים מהצורה הבאה:

$$\text{לכל } \alpha, \beta, \gamma \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$$

$$- A_1 : \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

$$- A_2 : (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

• כללי היסק:

$$- MP(\alpha, \alpha \rightarrow \beta) = \beta$$

$$- MV \text{ (יוגדר בהמשך)}$$

נסמן ב- $\alpha \vdash_N$ את הטענה שפסוק α יכיח מתוך Σ במערכת החדשה.

$$\text{נגדיר } MV(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) = ((\neg \alpha) \rightarrow (\neg \beta)) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

הוכיחו/ הפריכו: המערכת החדשה שלמה.

תרגיל 2: נגדיר מערכת הוכחה חדשה לתחשיב הפסוקים מעל $WFF_{\{\wedge, \neg\}}$.

• קבוצת האקסיומות מכילה את הפסוקים מהצורה הבאה:

$$- A_1 : \neg(\alpha \wedge (\beta \wedge \neg \alpha))$$

• קבוצת כללי ההיסק:

$$- M_1(\alpha, \neg(\alpha \wedge \beta)) = \neg \beta$$

נסמן ב- $\alpha \vdash_N$ את הטענה שפסוק α יכיח במערכת החדשה.

הוכיחו/ הפריכו: אם $\models \alpha$, אז $\vdash_N \alpha$.

גדירות

הגדרה 1: השמה המספקת קבוצת פסוקים Σ נקראת מודל של Σ .

קבוצת המודלים של Σ היא הקבוצה: $M(\Sigma) = \{v \in \text{Ass} \mid v \models \Sigma\}$

(סימונים נוספים לקבוצת המודלים של Σ : $M_\Sigma, \text{Mod}(\Sigma), \text{Ass}(\Sigma)$)

ניתן לראות שלכל קבוצת פסוקים Σ מתאימה קבוצת מודלים $M(\Sigma)$ יחידה, כלומר Σ מגדירה את $M(\Sigma)$.

דוגמאות ללא הוכחה:

Σ - קבוצת פסוקים	$M(\Sigma)$ - קבוצת המודלים של Σ
$\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$	$\{v_T\}$
קבוצת כל הטאוטולוגיות, $\emptyset, \{p_1 \vee \neg p_1\}$	Ass (קבוצת כל ההשמות)
קבוצת סתירות, WFF	\emptyset
$\{p_i \mid i > 0\}$	$\{v_T, FTTT \dots\}$
$\{p_{15}\}$	$\{v \in \text{Ass} \mid v(p_{15}) = T\}$
$\{p_{15}, p_1 \vee p_2\}$	$\{v \in \text{Ass} \mid v(p_{15}) = T\} \cap \{v \in \text{Ass} \mid v(p_1) = T \text{ or } v(p_2) = T\}$

הגדרה 2: קבוצת השמות K נקראת גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים Σ כך ש- $M(\Sigma) = K$. אחרת K נקראת לא גדירה.

הוכחת גדירות

איך מוכיחים שקבוצת השמות K היא גדירה?

1. מראים קבוצת פסוקים Σ מפורשת.

2. מוכיחים כי $M(\Sigma) = K$ על ידי הכלה דו־כיוונית.

תרגיל 3: נגדיר: $K_{\text{even}} = \{v \mid v(p_i) = T \text{ לכל } i \text{ זוגי}\}$. הוכיחו כי K_{even} גדירה.

תרגיל 1:

$M(\Sigma)$	Σ
$\{v_r\}$	$\{P_0, P_1, \dots\}$
$\{v_f\}$	$\{\neg p_0, \neg p_1, \dots\}$
Ass	$\{p_0 \vee \neg p_0\}$
Ass	קב' טאוטולוגיות
Ass	\emptyset
\emptyset	$\{p_0 \wedge \neg p_0\}$
\emptyset	קב' סתירות
\emptyset	WFF
$\{v_T, \mathbf{FTT}, \dots\}$	$\{p_i i > 0\}$
$K_1 = \{v v(p_{15}) = T\}$	$\Sigma_1 = \{p_{15}\}$
$K_2 = \{v v(p_1) \vee v(p_2)\}$	$\Sigma_2 = \{p_1 \vee p_2\}$
$K_1 \cap K_2$	$\Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$$M(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = K_1 \cap K_2 \Leftrightarrow M(\Sigma_2) = K_2 \text{ and } M(\Sigma_1) = K_1$$