לוגיקה ותורת הקבוצות - תרגול 3

הגדרה אינדוקטיבית של קבוצת הפסוקים החוקיים

הגדרה 1: קבוצת הפסוקים החוקיים, WFF (Well Formed Formulae), היא הקבוצה האינדוקטיבית הבאה:

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= \{\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, (,), p_0, p_1, p_2, \ldots\}^* \\ B &= \{p_0, p_1, p_2, \ldots\} \\ \mathrm{F} &= \{F_\neg, F_\vee, F_\wedge, F_\rightarrow\} \\ \mathrm{WFF} &= \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}} \end{aligned}$$

- העולם X הוא קבוצת המילים הסופיות מעל הסימנים הנ"ל.

  דוגמה לאיבר בעולם: $p_1 \wedge (\vee p_2 (\in \mathrm{X}$

- איברי B: $p_0, p_1, p_2, \ldots$ נקראים פסוקים אטומיים (או משתנים אטומיים).

  עבור כל $\alpha, \beta \in \mathrm{X}$ הפונקציות ב־F מוגדרות באופן הבא,

$$\begin{aligned} F_\neg(\alpha) &= (\neg\alpha) \\ F_\vee(\alpha, \beta) &= (\alpha \vee \beta) \\ F_\wedge(\alpha, \beta) &= (\alpha \wedge \beta) \\ F_\rightarrow(\alpha, \beta) &= (\alpha \rightarrow \beta) \end{aligned}$$

דוגמאות לפסוקים חוקיים (כלומר ב־WFF):

$$p_5, (\neg p_{17}), (p_{1000} \rightarrow p_8), ((\neg p_0) \rightarrow (p_5 \rightarrow (p_1 \vee p_0)))$$

הערה: האם $p_0 \vee p_1$ זהה ל־$p_1 \vee p_0$? לא, כי הסדר חשוב.

איך מראים שמילה $\alpha \in \mathrm{X}$ היא פסוק חוקי ($\alpha \in \mathrm{WFF}$)?

מראים סדרת יצירה לפסוק מעל $\mathrm{WFF} = \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$.

דוגמה: האם $(p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_9))$ פסוק חוקי?

<u>איך מראים שמילה $\alpha \in \mathrm{X}$ אינה פסוק חוקי ($\alpha \notin \mathrm{WFF}$)?</u>

1. מוצאים תכונה Y שמשותפת לכל הפסוקים החוקיים ($T = \{\beta \in \mathrm{X} \mid Y$ מקיימת את $\beta\}$).
2. מוכיחים ש־α אינו מקיים את Y ($\alpha \notin T$).
3. מוכיחים באינדוקציה על מבנה WFF שכל הפסוקים החוקיים מקיימים את Y ($\mathrm{WFF} \subseteq T$).

תכונות בסיסיות של פסוקים חוקיים

המילים ב־WFF מקיימות את התכונות הבאות:

<u>תכונה 1</u>: $T_1 = \{\alpha \in \mathrm{X} \mid$ פסוק אטומי או מתחיל ב־) ונגמר ב־($\alpha\}$

<u>דוגמא לשימוש בתכונה 1</u>: מתכונה 1 נובע שהמילה $p_1)p_2$ אינה פסוק חוקי.

<u>תכונה 2</u>: $T_2 = \left\{\alpha \in \mathrm{X} \mid \#_{(}(a) = \#_{)}(a)\right\}$

כאשר $\#_{(}(\alpha)$ הוא מספר הסוגריים השמאליים ב־α ו־$\#_{)}(\alpha)$ הוא מספר הסוגריים הימניים ב־α.

<u>הגדרה 2</u>: נאמר ש־β היא <u>רישא</u> של α אם α, β מילים כך ש:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 a_2 \dots a_n \\ \beta &= b_1 b_2 \dots b_k \end{aligned}$$

כאשר $k \leq n$ ולכל $1 \leq i \leq k$ מתקיים ש־$a_i = b_i$.

נאמר כי β <u>רישא ממש</u> של α אם β רישא של α ו־$\alpha \neq \beta$ (כלומר $k < n$).

<u>תכונה 3 (נסיון ראשון)</u>: $\mathrm{WFF} \subseteq T = \left\{\alpha \in \mathrm{X} \mid \#_{(}(\beta) > \#_{)}(\beta) : \alpha \text{ רישא ממש של } \beta \neq \epsilon \text{ לכל}\right\}$

<u>תכונה 3</u>: $T_3 = \left\{\alpha \in \mathrm{X} \mid \begin{array}{r} \alpha \in \mathrm{WFF} \;\; .1 \\ \#_{(}(\beta) > \#_{)}(\beta) : \alpha \text{ רישא ממש של } \beta \neq \epsilon \text{ לכל} \;\; .2 \end{array}\right\}$

<u>מסקנה מתכונות 2 + 3</u>: אם α ב־WFF ו־β רישא ממש של α, אז $\beta \notin \mathrm{WFF}$.

משלוש התכונות שהוכחנו נובע <u>משפט הקריאה היחידה</u> שמשמעותו היא:

בהינתן $\varphi \in \mathrm{WFF}$, מתקיים בדיוק אחד משלושת הבאים:

1. φ הוא פסוק אטומי
2. $\varphi = (\neg\alpha)$ כאשר $\alpha \in \mathrm{WFF}$.
3. $\varphi = (\alpha \circ \beta)$ כאשר $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ ו־$\alpha, \beta \in \mathrm{WFF}$.

<u>תכונה נוספת של פסוקים</u>: לא קיים פסוק חוקי אינסופי, למשל $\alpha = ((((p_0 \wedge p_1) \wedge p_2) \wedge p_3) \wedge \ldots) \notin \mathrm{WFF}$, כי:

1. העולם שלנו הוא X — רק מילים סופיות.
2. ניתן להוכיח ש־ $\alpha \notin \mathrm{WFF}$ באמצעות התכונה הבאה:

$$T = \{\beta \in \mathrm{X} \mid \text{ב־}\beta\text{ יש מספר סופי של אטומים}\}$$

תרגול 3 לוגיקה

דוגמה:

נראה סדרת יצירה עבור: $(p_0 \to (p_1 \lor p_9)$

1. p_0 (אטום).
2. p_1 (אטום).
3. p_9 (אטום).
4. $(p_1 \lor p_9)$ $F_{\lor}(2,3)$
5. $F_{\to}(1,4)(p_0 \to (p_1 \lor p_9))$

<u>תזכורת: רצ' להוכיח:</u>

$X_{B,F} \subseteq T = \{x \in X | \text{Y}$מקימים את$\}$
בלשב 3 מספיק להראות:

1. $B \subseteq T$
2. T סגורה ל־F. כלומר
לכל $f \in F$ אם $t_1, t_2 \dots, t_n \in T$ אז $f(t_1, t_2 \dots, t_n) \in T$ י

<u>דוגמאות לרישות ממש:</u>

מי הן הרישות ממש של $(\neg p_5)$?:
$\epsilon, (, (\neg, (\neg p_5$
מי הן הרישות ממש של ϵ?: **אין**
מי הן הרישות ממש של)?: ϵ.

<u>נסיון לפתרון ה־3:</u>

<u>הבעיה:</u>

התכונה הזאת אינה סגורה תחת הפונקציות של WFF נשים לב שהמילה $(\in X$ מקיימת את התכונה אבל אם נפעיל עליה את $F_{\neg}$ ונקבל $((\neg)$ ומילה זו אינה מקיימת את התכונה

הוכחת התכונה המחוזקת:

<u>בסיס:</u>

אם α פסוק אטומי:

1. α פסוק חוקי ולכן $\alpha \in \mathrm{WFF}$
2. α מכיל רק תו אחד ולכן ל־α
אין רישות ממש שאינן ריקות ולכן התכונה
מתקיימת באופן ריק.

<u>סגור:</u>

נניח כי γ, δ מקיימות את התכונה
ונראה כי התכונה נשמרת תחת הפעולות ב ־ F:
$\alpha = (\neg\gamma)$:

1. $\alpha \in \mathrm{WFF}$ לפי ה"א
$\gamma \in \mathrm{WFF}$ ומסגירות WFF ל־F.
2. יש שלוש רישות ממש לא ריקות אפשריות:
   (א) $\beta = ($ או $\beta = (\neg$ $\#_((\beta) = 1 > 0 = \#_)(\beta)$
   (ב) $\beta = (\neg\gamma'$ כאשר γ' רישא ממש של γ:
   לה"א $\#_((\gamma') > \#_)(\gamma')$ ולכן:
   $\#_((\beta) = 1 + \#_((\gamma') > 1 + \#_)(\gamma') = 1 + \#_)(\beta) > \#_)(\beta)$.
   (ג) $\beta = (\neg\gamma$ לה"א γ פסוק חוקי ולכן מקיים
   את תכונה 2 ולכן:
   $\#_((\gamma) = \#_)(\gamma)$ ולכן:
   $\#_((\beta) = 1 + \#_((\gamma) = 1 + \#_)(\gamma) = 1 + \#_)(\beta) > \#_)(\beta)$
3. עבור $F_\circ(\gamma, \delta) = (\gamma \circ \delta)$
כאשר $\circ \in \{\vee, \wedge, \to\}$
ההוכחה דומה אבל יש יותר סוגים של רישות.

שאלת בונוס:^_^

הוכיחו כי $(p_o p_1)$ אינו פסוק חוקי.

<u>התכונה:</u>

מספר המופעים של פסוקים אטומיים ב־α גדול בדיוק ב־1.
ממספר המופעים של קשרים דו מקומיים ב־α.