לוגיקה הרצאה 3

תחשיבי פסוקים

סינטקס: בסיס $\{p_i | i \in N\}$ - הפסוקים האטומיים.

$F_{\neg}(\alpha) = (\neg\alpha)$

$F_{\square}(\alpha, \beta) = (\alpha \square \beta)$ ($\vee, \wedge, \rightarrow$)

WFF – well form formulas

סמנטיקה:

התאמה לפסוקים ערכי אמת (T,F)

$p_0 \vee p_2$

השמה T F

לפסוק ערך T

F F

F

הגדרת סמנטיקה:

נתונה השמה

$V : \{p_i | i \in N\} \rightarrow \{T, F\}$

נגדיר השמה $\widehat{V}$

$\widehat{V} : WFF \rightarrow \{T, F\}$

הגדרת $\widehat{V}$:

1. לכל פסוק אטומי $\widehat{V}(p_i) = v(p)$
2. לפסוק במבנה $\alpha = (\neg\beta)$

   $TT_{\neg} : \{T, F\} \rightarrow \{T, F\}$

   truth table

   $TT_{\neg}(T) = F$

   $TT_{\neg}(F) = T$

β	$\neg\beta$
T	F
F	T

   $\widehat{V}$(פסוק)

   $\widehat{V}(\neg(\alpha)) = TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha))$

3. $\alpha = (\beta \vee \gamma)$

   $\widehat{V}(\alpha) = TT_{\vee}(\widehat{V}(\beta), \widehat{V}(\gamma))$

   $TT_{\vee}(T, T) = T$

   $TT_{\vee}(T, F) = T$

   $TT_{\vee}(F, T) = T$

   $TT_{\vee}(F, F) = F$

α	β	$\alpha \vee \beta$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

4. $\alpha = (\beta \vee \gamma)$

$$\widehat{V}(\alpha) = TT_{\wedge}(\underbrace{\widehat{V}(\beta)}_{\text{truth of sub}}, \underbrace{\widehat{V}(\gamma)}_{\text{truth of sub}})$$

$$TT_{\wedge}(T,T) = T$$

$$TT_{\wedge}(\tfrac{T}{\tfrac{F}{F}}, \tfrac{F}{\tfrac{T}{F}}) = F$$

α	β	$\alpha \wedge \beta$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

5. $\alpha = (\beta \to \gamma)$

האם β אמת אז γ אמת

$$\widehat{V}((\beta \to \gamma)) = TT_{\to}(\widehat{V}(\beta), \widehat{V}(\gamma))$$

β	γ	$\beta \to \gamma$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

אם המכונית תתקלקל אז אגיע באחור

$A \to B$

F T

המכונית לא התקלקלה והגעתי באיחור

סיכום:

בסמנטיקה של תחשיב הפסוקים:

בהינתן $V : \{p_i | i \in \mathbb{N}\} \to \{T, F\}$

מגדירים $\widehat{V} : WFF \to \{T, F\}$

באופן הבא:

אם $\alpha = p_i$ אז $\widehat{V}(\alpha) = V(\alpha)$

אם $\alpha = (\neg\beta)$ אז $\widehat{V}(\alpha) = TT_{\neg}(\widehat{V}(\beta))$

אם $\alpha = (\beta \Box \gamma)$ אז $\widehat{V}(\alpha) = TT_{\Box}(\widehat{V}(\beta), \widehat{V}(\gamma))$

טענה:

בהינתן השמה v,

לכל פסוק α, $\widehat{V}(\alpha)$

מתאים ל־α ערך אמת יחיד שנקבע ע"י v וע"י

פונקציות טבלאות האמת $(TT_{\Box})$.

הוכחה:

באינדוקצייה על מבנה הפסוק

מסתמכת על כך

- $\star$ v פונקציה
- $\star$ $TT_{\Box}$ פונקציות

כשה דנים בסמנטיקה קובעים סדר קדמאות בין קשרים שיאפשר לוותר על חלק מהסוגריים:

- $\star$ הקשר $\neg$ מופעל ראשון
- $\star$ קשרים $\vee, \wedge, \leftrightarrow$ מופעלים אחרי
- $\star$ הקשר $\to$ אחרי

$\neg p_0 \vee p_1$ כמו לכתוב $((\neg p_0) \vee p_1)$

מושגים סמנטיים נוספים

כאשר $\widehat{V}(\alpha) = T$ נאמר ש־vמספקת את α
ונסמן $v| = \alpha$

הגדרה:

פסוק α הוא טאוטולוגיה אם הוא מקבל ערך T <u>לכל</u> השמה:

דוגמאות:

$\neg\alpha \vee \alpha$,$\neg p_o \vee p_o$
טאוטולוגיה:
כל השורות בטבלת האמת
יהא T
] כל ההשמות מספקות את הפסוק [

P_0	$\neg p_0$	$\neg p_0 \vee p_0$
T	F	T
F	T	T

הוכחה ש־ $\alpha \vee \neg\alpha$ הוא טאוטולוגיה:
$\widehat{V}(\alpha \vee \neg\alpha) = TT_{\vee}(\widehat{V}(\alpha), \widehat{V}(\neg\alpha)) =$
$TT_{\vee}(\widehat{V}(\alpha), TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha))$
<u>2 מקרים:</u>

1. $TT_{\vee}(T, F) = T \Leftarrow TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha)) = F \Leftarrow V(\alpha) = T$
2. $TT_{\vee}(F, T) = T \Leftarrow TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha)) = T \ \Leftarrow V(\alpha) = F$

על כן $| = \alpha \vee \neg\alpha$

דוגמאות נוספות לטאוטולוגיה:
$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$
איך נוכיח שזאת טאוטולוגיה?
להראות <u>לכל השמה</u> ערך הפסוק הוא T.(מספר אינסופי)

טענה:

לכל פסוק $\alpha \in WFF$
ולכל שתי השמות v_2, v_1מתקיים:
אם לכל פסוק אטומי שמופיע ב־ α מתקיים $v_1(p_i) = v_2(p_i)$
אז $\widehat{V_1}(\alpha) = \widehat{V_2}(\alpha)$

α, β	$\neg\beta$,$\neg\alpha$	$\alpha \to \beta$	$\neg\beta \to \neg\gamma$	$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\gamma)$
T,T	F,F	T	T	T
T,F	T,F	F	F	T
F,T	F,T	T	T	T
F,F	T,T	T	T	T

שיטת הוכחה שניה שפסוק הוא טאוטולוגיה:
נגדיר על $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$
נניח בדרך השלילה שאינה טאוטולוגיה ולכן קיימת השמה v:

$\widehat{V}()$

$\Rightarrow$

$\widehat{V}(\alpha \to \beta) = T$

$\widehat{V}(\neg\beta \to \neg\alpha) = F$

$TT_{\neg}(\widehat{V}(\beta)) = \widehat{V}(\neg\beta) = T$

$TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha)) = \widehat{V}(\neg\alpha) = F$

$\Rightarrow$

$\widehat{V}(\beta) = F, \widehat{V}(\alpha) = T$

$\widehat{V}(\alpha \to \beta) = F$

מסקנה:

לא קיימת v שנותנת לפסוק ערך Fכלומר הוא טאוטולוגיה.

דוגמאות נוספות לטאוטולוגיה:

ראינו $\alpha \vee \neg\gamma$
$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$
דסטריבוטיביות:
$((\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)))$
$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
דה מוגרן:
$\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \beta)$
$\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
מושג סמנטי נוסף: סתירה
ספקו הוא סתירה אם כל השמה נותנת לו ערך F.

דוגאמות:

$\alpha \wedge \neg\alpha$
כל שלילה של טאוטולוגיה
$\beta = \neg\alpha$ ו־α טאוטולוגיה
$\widehat{V}((\neg\alpha)) = TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha)) = TT_{\neg}(T) = F$
לכל השמה
.
נתונה α שאינה טאוטולוגיה, האם היא סתירה ?
p_0 לא טאוטולוגיה ולא סתירה.

טענה:

α הוא סתירה $\Leftrightarrow$ $\neg\alpha$ הוא טאוטולוגיה
$\neg\alpha$ הוא סתירה $\Leftrightarrow$ α הוא טאוטולוגיה
פסוק <u>הינו ספיק</u> אם קיימת השמה שמספקת אותו.

הגדרה:

השמה מספקת קבוצת פסוקים X
אם היא מספקת את כל אחד מהפסוקים ב־X.
$v \models \alpha, \forall\alpha \in X, \Leftrightarrow v| = X$
$v \models \bigwedge_{\alpha \in X} \alpha$
אם X קבוצה אינסופית
אז הביטוי <u>אינו פסוק</u>

מושג נוסף:

פסוק α <u>נובע לוגית</u> צפסוק β
אם כל השמה שמספקת את β מספקת גם את α.
$\beta| = \alpha$

"$\subseteq$"
דוגמא:

Eror 404 "white board erased"

למה:

$\beta \models \alpha$ אם ורק אם $\models \alpha \to \beta$ (הוא טאוטולוגיה).

הוכחה:

נתון $\models \alpha \to \beta$
צ"ל $\alpha \models \beta$
נתונה השמה $v \models \alpha$
נראה ש־ $v \models \beta$
נניח שלא:
$\widehat{V}(\alpha) = T$
$\widehat{V}(\beta) = F$
$\widehat{V}(\alpha \to \beta) = F$
בסתירה לנתון $TT_{\to}(T, F) = F$
ש־$\alpha \to \beta$ הוא טאוטולוגיה.

$x \in A/(B/C) \Leftrightarrow$
$x \in A \wedge x \notin (B/C) \Leftrightarrow$
$x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C \Leftrightarrow$
$x \in (A/B) \cup x \in A \cap C$