לוגיקה ־ תרגול 1

הגדרה אינדוקטיבית של קבוצה

הגדרה 1:

בהינתן:

- קבוצה X ־ נקראת העולם.
- קבוצה $B \subseteq \mathrm{X}$ ־ נקראת קבוצת הבסיס, והאיברים בה נקראים אטומים.
- קבוצה של פו' F ־ נקראות פונקציות יצירה.

  כל פונקציה $f \in \mathrm{F}$ היא מהצורה $f : \mathrm{X}^n \to \mathrm{X}$.

  פונקציה כזו נקראת n־מקומית, ולכל פונקציה יש $n \geq 1$ משלה.

נגדיר את $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}} \subseteq \mathrm{X}$ ־ הסגור של B תחת F כקבוצה המקיימת:

1. $B \subseteq \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$ — מכילה את הבסיס.
2. סגירות תחת הפונקציות ב־F — לכל $f \in \mathrm{F}$ n־מקומית ולכל $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$ מתקיים ש־$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$.
3. אין ב־$\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$ 'איברים מיותרים' — אם קבוצה $T \subseteq \mathrm{X}$ מקיימת את 1 ו־2, אז $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}} \subseteq T$.

הערות:

- הוכח בהרצאה כי $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$ קיימת ויחידה.
- כל אחת מהקבוצות, X, B ו־F יכולה להיות סופית או אינסופית.

דוגמה:

- העולם: X ־ קבוצת המילים באותיות s ו־t (מילה — סדרה סופית של אותיות).

  למשל $s, st, ttt \in \mathrm{X}$.
- הבסיס: $B = \{\epsilon, st, ts\}$ (ϵ ־ סימון מיוחד למילה הריקה, בעלת אפס אותיות).
- פו' היצירה: $\mathrm{F} = \{f_1, f_2\}$, כאשר:
  - $f_1(w_1, w_2) = sw_1w_2t$
  - $f_2(w_1, w_2) = w_1w_2w_1$

נסמן: $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}} = \mathrm{X}_{\mathrm{st}}$.

אילו איברים יש ב־X_{st}? ϵ, st, ts (כי $B \subseteq \mathrm{X}_{\mathrm{st}}$), $sstt$ (כי $f_1(\epsilon, st) = sstt$) וכו'.

סדרת יצירה

<u>הגדרה 2</u>: סדרת יצירה של איבר a מעל B ו־F היא סדרת איברים <u>סופית</u> $a_1, a_2, \ldots, a_n$ המקיימת:

1. $a = a_n$
2. לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים לפחות אחד מהשניים:
   (א) $a_i \in B$ (כלומר a_i אטום)
   (ב) a_i מתקבל על ידי הפעלת פונקציה מ־F על איברים שקודמים לו בסדרה.

<u>הערות</u>:

- סדרת היצירה היא סדרה של איברים (ולא של פעולות!).
- סדרת יצירה <u>תמיד סופית</u> ולא ריקה (מכילה לפחות את a).
- סדרת יצירה איננה יחידה (למעשה אם יש אחת אז יש אינסוף).
- סדרת יצירה לא חייבת להיות באורך מינימלי.
- סדרת יצירה תמיד מתחילה מאטום (כי אין איברים קודמים להפעיל עליהם פונקציות).

הוכחה באינדוקציית מבנה

<u>משפט 2 (אינדוקציית מבנה)</u>: יהיו קבוצות $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$ ו־T. אם מתקיימים התנאים הבאים אז $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}} \subseteq T$,

1. (בסיס) $B \subseteq T$ (כל איברי הבסיס נמצאים ב־T).
2. (סגור) T סגורה תחת הפונקציות ב־F, כלומר לכל $f \in \mathrm{F}$ n־מקומית מתקיים:
   אם $\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n \in T}_{*}$ אז $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in T$.
   $*$ זה נקרא <u>הנחת האינדוקציה</u>.

הערה: הנחת האינדוקציה היא ש־$a_1, \ldots, a_n$ שייכים ל־T (כלומר מקיימים את התכונה α), ולא ל־$\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$.

שימו לב המשפט משמש רק להוכחת הכלות מהצורה $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}} \subseteq T$, ולא להוכחת ההכלה ההפוכה!

<u>תרגיל 1</u>: נגדיר את הקבוצה $T = \{w \in \{s,t\}^* \mid |w| \text{ זוגי}\}$ ($|w|$ הוא האורך של המילה). הוכיחו כי $X_{st} \subseteq T$.

תרגול 1 לוגיקה

<u>סדרת יצירה עבור st:</u>

1. st (אטום).

<u>סדרת יצירה נוספת:</u>

1. ϵ (אטום).
2. st $f_1(\epsilon,\epsilon)$.

<u>סדרת יצירה $sstt$:</u>

1. st (אטום).
2. ϵ (אטום).
3. $sstt$ $f_1(st,\epsilon)$

תרגיל 1:

פתרון:

<u>בסיס:</u> נראה שלכל $w \in B = \{\epsilon, st, ts\}$
מתקיים $w \in T$ כלומר $B \subseteq T$

- ⋆ $w=\epsilon$, $|w|=0$ זוגי ולכן $w \in T$.
- ⋆ $w=st$, $|w|=2$ זוגי ולכן $w \in T$.
- ⋆ $w=ts$, $|w|=2$ זוגי ולכן $w \in T$.

<u>סגור:</u>
נניח $w_1, w_2 \in T$
קיימים $k_1, k_2 \in N$ שעבורם $|w_1| = 2k_1$, $|w_2| = 2k_2$
ונראה שלכל $f \in F$ מתקיימת סגירות.

- ⋆ $w = f_1(w_1, w_2)$
  מהגדרת f_1 נובע כי $w = sw_1w_2t$
  $\underbrace{\Leftarrow}_{b"a} 2 + 2k_1 + 2k_2 = |sw_1w_2t| \Leftarrow w \in T$
- ⋆ $w = f_2(w_1, w_2)$
  מהגדרת f_2 נובע כי $w = w_1w_2w_3$
  $\underbrace{\Leftarrow}_{b"a} 2 + 2k_1 + 2k_2 = |sw_1w_2t| \Leftarrow w \in T$

<u>מסקנה:</u> $X_{st} \subseteq T$

תרגיל 2:

העולם $X = \overbrace{\{0,1\}^N}^{\text{binary vector}}$, $B = \overbrace{\{0\}^N}^{\text{binary zero vector}}$
$F = \{f_i | i \in N\}$
כאשר לכל $f_i, i \in N$ מוגדרת כך:
$f_i(v) = v'$ כאשר v' מוגדר כך
$f'_j = \begin{cases} 1 - v_j & j = i \\ v_j & j \neq i \end{cases}$ (v'_j אינדקס ה־j ב־V').
מצאו תכונה T כך ש $X_{B,F} \subseteq T$ והוכיחו זאת.

פתרון:

$T = \{v \in \{0,1\}^N \mid$ ב־ v מספר סופי של 1־ים$\}$

הוכחה:

<u>בסיס:</u>

ב־$\bar{O}$ יש 0 אחדים ולכן מספר סופי $\Leftarrow$ $\bar{O} \in T$

<u>סגור:</u>

יהי $v \in T$, אזי ב־v יש מספר סופי של אחדים נסמן ב k.

יהי $i \in N$ כך ש־ $v' = f_i(v)$

לפי ההגדרה v', הוא שונה מ־v בביט בודד ולכן מספר האחדים בv' הוא $k+1$ $\Leftarrow$ $v' \in T$.