

לוגיקה הרצאה 4

סמנטיקה של פסוקי:

$$\begin{aligned}
 v : \{p_i | i \in \mathbb{N}\} &\rightarrow \{T, F\} \text{ נתונה המשווה} \\
 \bar{V} = WFF &\rightarrow \{T, F\} \text{ מגדירים} \\
 \bar{V}(p_i) &= v(p_i) \quad \alpha = p_i \text{ אם} \\
 \bar{V}(\alpha) &= TT_{\Box}(\bar{V}(\beta), \bar{V}(\gamma)) \text{ אז } \alpha = (\beta \Box \gamma) \text{ אם} \\
 \bar{V}(\alpha) &= TT_{\neg}(\bar{V}(\beta)) \text{ אז } \alpha = (\neg \beta) \text{ אם}
 \end{aligned}$$

מושגים סמנטיים:

טאוטולוגיה

הוא פסוק שמקבל ערך T לכל השמה

סתירה:

פסוק שמקבל ערך F לכל השמה.

מה משמעות שך $v(\neq) \alpha$

$$\bar{V}(\alpha) = F$$

$$(\neq \alpha)$$

לא בהכרח סתירה

\Leftarrow לא בהכרח טאוטולוגיה.

דוגמה:

בבינתן קבוצה של פסוקים X

$$v \models X$$

אם $\alpha \in X$ לכל $v \models \alpha$

$\bigwedge_{\alpha \in X} \alpha$ - לא כתיבה חוקית כי לא פסוק, יתכן סדרה אינסופית של סמימנים.

פסוק β נובע לוגית מפסוק α (סימון $\alpha \models \beta$) אם כל השמה מספקת של α מספקת גם את β .

למה:

$$\models \alpha \rightarrow \beta \text{ אם ורק אם } \alpha \models \beta$$

הוכחה:

$$\models \alpha \rightarrow \beta \text{ "צ"ל } \alpha \models \beta$$

נבחר השמה V :

מקרה 1: $\bar{V}(\alpha) = F, \neg \models \alpha$
אז

$$V \models \alpha \rightarrow \beta$$

$$TT_{\rightarrow}(\underbrace{\bar{V}(\beta)}_{F \text{ or } FT \text{ or } FF}) = T$$

מקרה 2: $V \models \alpha, \bar{V}(\alpha) = T$
עס $V \models \beta$ גם, $\alpha \models \beta$
ולכן $V \models \alpha \rightarrow \beta$

\Rightarrow נתון $\models \alpha \rightarrow \beta$
צ"ל $\alpha \models \beta$
2 מקרים:

1. $\bar{V}(\alpha) = T$
מאחר ש- $\alpha \rightarrow \beta$ טאוטולוגיה אז $\bar{V}(\alpha \rightarrow \beta) = B$
מסקנה עפ"י $\bar{V}(\beta) = T : TT_{\rightarrow}$
2. $\bar{V}(\alpha) = F$
אין צורך להוכיח כי \models מתקיים וריינאלי.

דוגמה:

בהינתן קבוצת פסוקית X נאמר ש $X \models \beta$ אם כל השמה שמספקת את X (כלומר את כל $\alpha \in X$) מספקת גם את β .

דוגמה:

$$\alpha \rightarrow \beta, \alpha \models \beta$$

$$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \models \beta$$

למה:

$$X \models \alpha \rightarrow \beta \text{ אם ורק אם } X, \alpha \models \beta$$

-

סימון:

$$M(\alpha)\{v|v \models \alpha\}$$

$$M(X) = \{v|v \models X\}$$

$$M(\alpha) = \emptyset \text{ סתירה: } \alpha$$

$$M(\alpha) \subseteq M(\beta), \alpha \models \beta$$

שקילות לוגית

זוג פסוקים β, α שקולים לוגית אם הם מקבלים אותו ערך אמת בכל השמה. במילים אחרות, לכל השמה v . $\bar{v}(\alpha) = \bar{v}(\beta)$
 $\alpha \equiv \beta$ סימון $M(\alpha) = M(\beta)$

דוגמה לפסוקים שקולים:

★ כל הטאוטולוגיות

★ כל הסתירות

$$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$$

$$(\neg(\neg\alpha)) \equiv \alpha$$

למה:

logic connect

$$\models \alpha \iff \beta$$

שלמות של מערכת קשרים:

הגדרה: פסוק α מממש טבלת אמת נתונה אם טבלת האמת של α זהה לטבלה הנתונה.

נראה: \wedge, \vee, \neg

עבור טבלת אמת עם k פסוקים אטומיים יש לה 2^k שורות

$$TT : \{T, F\}^k \rightarrow \{T, F\}$$

דוגמה:

קשר לוגי "רוב" #

תלת-ערה(תלת מקומי?)

p_1	p_2	p_3	$\#(p_1, p_2, p_3)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

שורות שקבלו T :

$$1. \alpha_1 = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$$

$$2. \alpha_2 = p_1 \wedge p_2 \neg p_3$$

$$3. \alpha_3 = p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3$$

$$4. \alpha_5 = \neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$$

$$\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \alpha_5$$

טענה:

α מממשת את טבלת האמת של #.
 עבור טבלת אמת שבה כל השורות מחזירות F
 נחזיר $p_1 \wedge \neg p_1$ כאשר p_1 הוא פסוק אטומי שמופיע בטבלה.

p_2	p_1	$?(p_1, p_2)$
F	F	F
F	F	F
F	F	F
F	F	F

$(p_1 \wedge \neg p_1)$

המשך:

$\{\wedge, \neg\}$ גם מערכת קשרי שלמה
 $(\alpha \vee \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
 $\{v, \neg\} \leftarrow (\alpha \wedge \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ מערכת קשרים שלמה
 $\{\neg, \leftarrow\}$ מערכת קשרים שלמה
 $(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \rightarrow \beta$

T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
F	F	F	T

הגדרה:

נגדיר קבוצה אינדוקטיבית של קבוצת המשפטים הפורמליים או הפסוקים היכחים.

בסיס(אקסיומות)קבוצת פסוקים): (עוזרים להוכיח/לקבל פסוקים חדשים עס' פסוקים נתונים).
 כללי יצירה/פעולות

כללי היצירה: $\alpha, \alpha \rightarrow \beta$ (למעלה נתון שיכית, גורר שלמטה גם).

MP-Modus Promens , כלל הניתוק

קבוצות האכסיומות של תחשיב הפסוקים

תבנית ראשונה $A1$:

פסוק δ הוא אכסיומה מטיפוס $A1$

אם קיימים פסוקים β, α כך ש-

$$\delta = (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$$

$A2$:

δ מהצורה:

$$\delta = (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

$A3$:

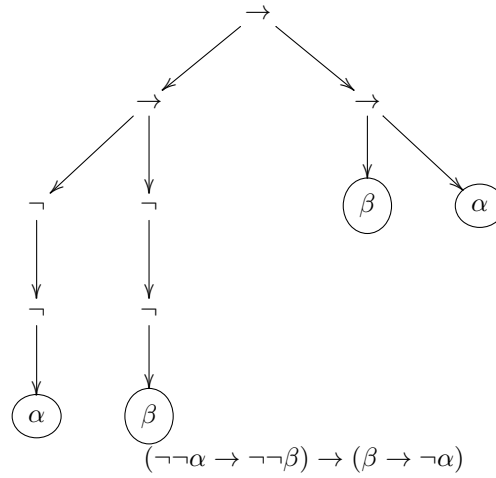
δ מהצורה

$\delta = ((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$
 קבוצת הבסיס $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

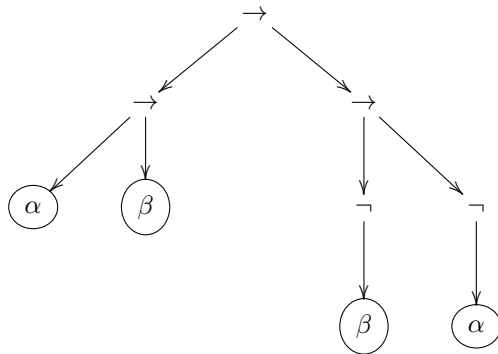
דוגמאות:

$(p_2 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) : A_1$
 $(\neg\neg p_5 \rightarrow \neg p_5) \rightarrow (p_5 \rightarrow \neg p_5)$

עץ יצירה עבור אכסיומה 3



A_3 האם הוא $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$?



להראות שפסוק יכח:

להראות סדרת יצירה - נקרא לה סדרת הוכחה
 סדרת הוכחה עבור פסוק β
 הינה סדרה של פסוקים a_1, a_2, \dots, a_n
 כך ש-

$$a_b = \beta \star$$

לכל a_i , $1 \leq i \leq n$ התקבלה מהפעלתו.

כלל ההיסק על פסוקים קודמים בסדרה

מה יכול היות a_1 ?

אחת מהאכסיומות

אם פסוק α יכיח נסמן $\vdash \alpha$.