לוגיקה - תרגול 5

מערכת הוכחה לתחשיב הפסוקים

הגדרה 1, מערכת ההוכחה: קבוצת הפסוקים היכיחים, $Ded(\emptyset)$, היא הקבוצה האינדוקטיבית $X_{B,F}$ המוגדרת באופן הבא:

- $X = \mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$
- $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ - קבו.צת האקסיומות, כאשר:
  - $A_1 = \left\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}\right\}$
  - $A_2 = \left\{(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}\right\}$
  - $A_3 = \left\{((\neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}\right\}$
- $F = \{MP\}$ - קבוצת כללי ההיסק, כאשר MP הוא כלל הניתוק $\frac{\alpha, \alpha\rightarrow\beta}{\beta}$.

  צורת רישום נוספת: $MP(\alpha, \alpha \rightarrow \beta) = \beta$.

דוגמאות:

$(\underbrace{p_1}_{\alpha} \rightarrow (\underbrace{p_2}_{\beta} \rightarrow \underbrace{p_1}_{\alpha})) \in Ded(\emptyset)$ (שייך בסיס)

$(\underbrace{[p_1 \rightarrow [p_2 \rightarrow p_1]]}_{\alpha} \rightarrow (\underbrace{p_0}_{\beta} \rightarrow \underbrace{[p_1 \rightarrow [p_2 \rightarrow p_1]]}_{\alpha})) \in Ded(\emptyset)$ (שייך לבסיס)

$(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1))) \in Ded(\emptyset)$ (הפעלת MP על שני הקודמים)

הגדרה 2: פסוק α ששייך לקבוצה האינדוקטיבית ($\alpha \in Ded(\emptyset)$) נקרא פסוק יכיח, ויסומן $\vdash \alpha$.

הגדרה 3: יהי $\alpha \in Ded(\emptyset)$. סדרת היצירה של α נקראת סדרת הוכחה (או הוכחה פורמלית). כלומר סדרת הוכחה של פסוק α היא סדרה סופית של פסוקים $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ כך שמתקיים:

1. $\alpha_n = \alpha$.
2. לכל פסוק α_i מתקיים:

   (א) α_i הוא אקסיומה

   או

   (ב) α_i התקבל מפסוקים קודמים על ידי הכלל MP.

מערכת הוכחה עם הנחות

<u>הגדרה 4, מערכת הוכחה עם הנחות</u>: קבוצת <u>הפסוקים היכיחים מקבוצת פסוקים Σ</u> (הנחות), $Ded\left(\Sigma\right)$, היא הקבוצה האינדוקטיבית $X_{B\cup\Sigma,F}$ (עבור X, B ו־F מהגדרה 1).

- אם $\alpha\in Ded\left(\Sigma\right)$ נאמר כי α <u>יכיח מ־Σ</u> ונסמן $\Sigma\vdash\alpha$.
- סדרת היצירה של פסוק α מעל $Ded\left(\Sigma\right)$ נקראת סדרת הוכחה של α מתוך Σ.
- אם $\Sigma=\emptyset$, אז $Ded\left(\emptyset\right)=X_{B,F}$, קבוצת הפסוקים היכיחים (ללא הנחות).

<u>דוגמה</u>: נוכיח כי לכל זוג פסוקים α,β מתקיים $\{\alpha,\neg\alpha\}\vdash\beta$.

<u>תכונות מערכת ההוכחה</u>:

יהיו $\Sigma,\Gamma\subseteq\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$ ו־$\alpha,\beta\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$.

1. <u>הנחת המבוקש</u>: אם $\alpha\in\Sigma$ אז $\Sigma\vdash\alpha$

   הוכחה: ל־α יש סדרת הוכחה באורך 1 מעל Σ.

2. <u>סופיות ההוכחה</u>: אם $\Gamma\vdash\alpha$ אז קיימת $\Sigma\subseteq\Gamma$ סופית כך ש־$\Sigma\vdash\alpha$

   אינטואיציה: בסדרת ההוכחה יש מספר סופי של פסוקים, ולכן בהכרח משתמשים רק במספר סופי של הנחות מתוך Γ.

3. <u>מונוטוניות (הרחבת הנחות)</u>: אם $\Sigma\vdash\alpha$ וגם $\Sigma\subseteq\Gamma$ אז $\Gamma\vdash\alpha$

   אינטואיציה: סדרת ההוכחה של α מעל Σ היא גם סדרת הוכחה של α מעל Γ.

4. <u>מונוטוניות מורחבת (טענת עזר)</u>: אם $\Sigma\vdash\alpha$ וגם לכל $\beta\in\Sigma$ מתקיים $\Gamma\vdash\beta$ אז $\Gamma\vdash\alpha$

   אינטואיציה: בסדרת ההוכחה של α מתוך Σ, נחליף כל מופע של פסוק $\beta\in\Sigma$ בהוכחה של β מתוך Γ.

<u>משפט הדדוקציה</u>: לכל קבוצת פסוקים Σ ופסוקים α,β מתקיים: $\Sigma\vdash\alpha\to\beta$ אם ורק אם $\Sigma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$.

<u>הערה</u>: משפט הדדוקציה אינו מוסיף כוח הוכחה, כלומר כל מה שניתן להוכיח בעזרתו ניתן להוכיח גם בלעדיו. משפט זה רק מקל על הוכחת קיום סדרת הוכחה.

<u>תרגיל 1</u>: הוכיחו שהפסוק $\alpha\to(\beta\to(\beta\to\alpha))$ יכיח, בעזרת משפט הדדוקציה.

משפט הנאותות

<u>משפט הנאותות הרחב</u>: לכל קבוצת פסוקים Σ מתקיים, אם $\Sigma\vdash\alpha$ אז $\Sigma\models\alpha$.

סימון: $Con\left(\Sigma\right)=\left\{\alpha\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}\mid\Sigma\vDash\alpha\right\}$. כלומר, משפט הנאותות משמעותו: $Ded\left(\Sigma\right)\subseteq Con\left(\Sigma\right)$.

<u>מסקנה ממשפט הנאותות</u>: אם $\Sigma\not\models\alpha$ אז $\Sigma\nvdash\alpha$.

<u>משפט הנאותות הצר</u>: אם $\vdash\alpha$ אז $\models\alpha$.

<u>תרגיל 2</u>: נגדיר מערכת הוכחה חדשה עבור $\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$.

אקסיומות: $\mathrm{A}=\left\{\alpha\vee(\beta\vee\neg\alpha)\mid\alpha,\beta\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}\right\}$

כללי ההיסק: לכל $\alpha,\beta\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$,

2. $MV_1(\alpha,\beta)=\alpha\vee\beta$
3. $MV_2(\alpha,(\neg\alpha)\vee\beta)=\beta$

נסמן ב־$Ded_N(\emptyset)$ את קבוצת הפסוקים היכיחים במערכת החדשה, ואם $\varphi\in Ded_N(\emptyset)$ אז נסמן $\underset{N}{\vdash}\varphi$. באופן דומה נסמן $Ded_N(\Sigma)$ ו־$\Sigma\underset{N}{\vdash}\varphi$ עבור פסוקים היכיחים במערכת החדשה מקבוצת הנחות Σ.

הוכיחו כי מערכת ההוכחה החדשה נאותה במובן הצר (כלומר, לכל פסוק $\varphi\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$: אם $\underset{N}{\vdash}\varphi$ אז $\models\varphi$).

לוגיקה־נספח לתרגול 5

תרגיל 1: נגדיר מערכת הוכחה חדשה עבור $\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$.

אקסיומות: $\mathrm{A} = \left\{\alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}\right\}$

כללי ההיסק: לכל $\alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$,

1. $MV_1(\alpha, \beta) = \alpha \vee \beta$
2. $MV_2(\alpha, (\neg\alpha) \vee \beta) = \beta$

נסמן ב־$Ded_N(\emptyset)$ את קבוצת הפסוקים היכיחים במערכת החדשה, ואם $\varphi \in Ded_N(\emptyset)$ אז נסמן $\underset{N}{\vdash} \varphi$. באופן דומה נסמן $Ded_N(\Sigma)$ ו־$\Sigma \underset{N}{\vdash} \varphi$ עבור פסוקים היכיחים במערכת החדשה מקבוצת הנחות Σ.

1. הוכיחו כי מערכת ההוכחה החדשה נאותה במובן הצר (כלומר, לכל פסוק $\varphi \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$: אם $\underset{N}{\vdash} \varphi$ אז $\models \varphi$).

פתרון: נוכיח באינדוקציית מבנה כי $Ded_N(\emptyset) \subseteq Con(\emptyset) = \left\{\varphi \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}} \mid \models \varphi\right\}$.

בסיס: $\varphi \in A$, כלומר קיימים $\alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$ כך ש־ $\varphi = \alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha)$.

נראה כי $\models \alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha)$ באמצעות טבלת אמת:

α	β	$\neg\alpha$	$\beta \vee \neg\alpha$	$\alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha)$
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	T	F	T	T

סגור:

הנחת האינדוקציה: יהיו $\alpha, \gamma \in Con(\emptyset)$, כלומר $\models \alpha, \models \gamma$.

נפריד למקרים:

עבור MV_1:

$\varphi = MV_1(\alpha, \gamma)$. במקרה זה $\varphi = \alpha \vee \gamma$, נראה כי $\models \alpha \vee \gamma$.

תהי השמה v. ע"פ הנחת האינדוקציה $\overline{v}(\gamma) = \mathrm{T}$ ו־$\overline{v}(\alpha) = \mathrm{T}$

ולכן, $\overline{v}(\alpha \vee \gamma) = TT_\vee(\overline{v}(\alpha), \overline{v}(\gamma)) = TT_\vee(\mathrm{T}, \mathrm{T}) = \mathrm{T}$

עבור MV_2:

- אם קיים $\beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$ כך ש־$\gamma = (\neg\alpha) \vee \beta$:

  $\varphi = MV_2(\alpha, (\neg\alpha) \vee \beta)$. במקרה זה $\varphi = \beta$, נראה כי $\models \beta$.

  תהי השמה v. ע"פ הנחת האינדוקציה $\overline{v}((\neg\alpha) \vee \beta) = \mathrm{T}$ ו־$\overline{v}(\alpha) = \mathrm{T}$

  כלומר $\overline{v}(\neg\alpha) = TT_\neg(\overline{v}(\alpha)) = TT_\neg(\mathrm{T}) = \mathrm{F}$

  וגם $\mathrm{T} = \overline{v}((\neg\alpha) \vee \beta) = TT_\vee(\overline{v}(\neg\alpha), \overline{v}(\beta)) = TT_\vee(\mathrm{F}, \overline{v}(\beta))$

  ולכן, ע"פ $TT_\vee$ מתקיים $\overline{v}(\beta) = \mathrm{T}$.

- אחרת:

$\varphi = MV_2\left(\alpha, (\neg\alpha) \vee \beta\right)$. במקרה זה $\varphi = \alpha$ ולפי הנחת האינדוקציה מתקיים $\vDash \alpha$.

2. הוכיחו כי מערכת ההוכחה החדשה נאותה במובן הרחב (כלומר, לכל $\varphi \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$: אם $\Sigma \underset{N}{\vdash} \varphi$ אז $\Sigma \vDash \varphi$).

<u>פתרון</u>: נוכיח באינדוקציית מבנה כי $Ded_N\left(\Sigma\right) \subseteq Con\left(\Sigma\right) = \left\{\varphi \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}} \mid \Sigma \vDash \varphi\right\}$.

<u>בסיס</u>: צ"ל לכל $\varphi \in A \cup \Sigma$ מתקיים $\Sigma \vDash \varphi$

(א) $\varphi = \alpha \vee (\beta \vee (\neg\alpha))$: ראינו כבר כי מתקיים $\vDash \varphi$ (סעיף קודם) ולכן בפרט מתקיים $\Sigma \vDash \varphi$.

(ב) $\varphi \in \Sigma$: כל השמה המספקת את Σ מספקת כל פסוק ב־Σ (ע"פ הגדרה) ובפרט את φ ולכן $\Sigma \vDash \varphi$.

<u>סגור</u>: יהיו $\alpha, \gamma \in Con\left(\Sigma\right)$, כלומר $\Sigma \vDash \alpha$ ו־$\Sigma \vDash \gamma$.

נפריד למקרים:

עבור MV_1:

$\varphi = MV_1\left(\alpha, \gamma\right)$: כלומר $\varphi = \alpha \vee \gamma$. נראה כי $\Sigma \vDash \alpha \vee \gamma$.

תהי השמה v המספקת את Σ. ע"פ ה.א. $\overline{v}\left(\gamma\right) = \mathrm{T}$ ו־$\overline{v}\left(\alpha\right) = \mathrm{T}$

המשך בדיוק כמו בסעיף 1.

עבור MV_2:

- אם קיים $\beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$ כך ש־$\gamma = (\neg\alpha) \vee \beta$:

  $\varphi = MV_2\left(\alpha, (\neg\alpha) \vee \beta\right)$.

  כלומר $\varphi = \beta$. נתון כי $\Sigma \vDash (\neg\alpha) \vee \beta$ ו־$\Sigma \vDash \alpha$ ונראה כי $\Sigma \vDash \beta$.

  תהי השמה v המספקת את Σ. ע"פ ה.א. $\overline{v}\left((\neg\alpha) \vee \beta\right) = \mathrm{T}$ ו־$\overline{v}\left(\alpha\right) = \mathrm{T}$

  ההמשך בדיוק כמו בסעיף 1.

- אחרת:

  $\varphi = MV_2\left(\alpha, (\neg\alpha) \vee \beta\right)$. במקרה זה $\varphi = \alpha$ ולפי הנחת האינדוקציה מתקיים $\Sigma \vDash \alpha$.

תרגול 5 לוגיקה

$$MP(\alpha,\gamma)=\begin{cases}\beta & \gamma=\alpha\to\beta\\ \alpha & \textbf{otherwise}\end{cases}$$

דוגמה:

סדרת הוכחה:

.1	A_1	$\neg\alpha\to(\neg\beta\to\neg\alpha)$
.2	הנחה	$\neg\alpha$
.3	$MP_{1,2}$	$\neg\beta\to\neg\alpha$
.4	A_3	$(\neg\beta\to\neg\alpha)\to(\alpha\to\beta)$
.5	$MP_{3,4}$	$\alpha\to\beta$
.6	הנחה	α
.7	$MP_{5,6}$	β

תרגיל 1:

הוכיחו שהפסוק $\alpha\to(\beta\to(\beta\to\alpha))$ יכיח בעזרת משפט הדדוקציה.

הוכחה (לפי דדוקציה):

$$\begin{aligned}&\alpha\to(\beta\to(\beta\to\alpha))\\&\Leftrightarrow\text{(deduction)}\\&\{\alpha\}\vdash\beta\to(\beta\to\alpha)\\&\Leftrightarrow\text{(deduction)}\\&\{\alpha,\beta\}\vdash\beta\to\alpha\\&\Leftrightarrow\text{(deduction)}\\&\{\alpha,\beta\}\vdash\alpha\end{aligned}$$

מתקיים $\{\alpha,\beta\}\vdash\alpha$ מהנחת המבוקש.

אינד' $Ded(\Sigma)=\left\{\alpha\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}|\Sigma\vdash\alpha\right\}$

לא אינד' $Con(\Sigma)=\left\{\alpha\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}\mid\Sigma\vDash\alpha\right\}$

תרגיל 2:

נגדיר מערכת הוכחה חדשה עבור $\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$
אקסיומות: $A = \left\{\alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}\right\}$
כלל ההיסק: לכל $\alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$

1. $MV_1(\alpha, \beta) = \alpha \vee \beta$
2. $MV_2(\alpha, (\neg a) \vee \beta) = \beta$

נסמן ב־$Ded_N(\emptyset)$ את קבוצת הפסוקים היכיחים במערכת החדשה, ואם $\varphi \in Ded_N(\emptyset)$ אז נסמן $\underset{N}{\vdash} \varphi$. באופן דומה נסמן $Ded_N(\Sigma)$ ו־$\Sigma \underset{N}{\vdash} \varphi$ עבור פסוקים היכיחים במערכת החדשה מקבוצות המחות Σ.
הוכיחו כי מערכת ההוכחה החדשה נאותה במובן הצר (כלומר, לכל פסוק $\varphi \in \alpha \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$: אם $\underset{N}{\vdash} \varphi$ אז $\vDash \varphi$).

פתרון:

נוכיח באינדוקציית מבנה ש:
$Ded_N(\phi) \subseteq Con(\phi)$ $(\vDash \varphi \Leftarrow \vdash_N \varphi)$

בסיס: נראה $\vDash \alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha)$ לכל $\alpha, \beta \in \alpha \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$ באמצעות טעבלת אמת:

α	β	$\neg\alpha$	$\beta \vee \neg\alpha$	$\alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha)$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

סגור: נניח $\alpha, \beta \in Con(\phi)$ כלומר $\vDash \beta$, $\vDash \alpha$

- $\star$ $\delta = MV_1(\alpha, \beta) = \alpha \vee \beta$

תהיי $v \in ASS$
$$\overline{V}(\alpha \vee \beta) TT_v(\overline{V}(\alpha), \overline{V}(\beta)) \underbrace{=}_{\text{induction def.}} TT_V(T, T) = T$$

- $\star$ $\beta = ((\neg\alpha) \vee \gamma)$ $\quad \delta = MV_2(\alpha_1(\neg\alpha) \vee \gamma) = \gamma$

תהיי $v \in ASS$

$$\overline{V}(\alpha) = T$$
$$\overline{V}(\beta) = \overline{V}((\neg\alpha) \vee \gamma) = T$$
$$\overline{V}(\neg) = TT_{\neg}(\overline{V}(\alpha)) = TT_{\neg}(T) = F$$

$\Leftarrow \overline{V}(\gamma) = T$ לפי טבלת אמת.

- $\star$ $\underbrace{MV_2(\alpha, \beta) = \alpha}_{\text{not mandatory}}$ $\vDash \alpha$ לפי ה"א.