לוגיקה ותורת הקבוצות - תרגול 6

מערכת הוכחה לתחשיב הפסוקים

תזכורת: קבוצת הפסוקים היכיחים, $Ded(\emptyset)$, היא הקבוצה האינדוקטיבית $X_{B,F}$ המוגדרת באופן הבא:

- $W = \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$
- $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ - קבוצת האקסיומות, כאשר:
  - $A_1 = \left\{\alpha \to (\beta \to \alpha) \mid \alpha,\beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}\right\}$
  - $A_2 = \left\{(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}\right\}$
  - $A_3 = \left\{((\neg\beta) \to (\neg\alpha)) \to (\alpha \to \beta) \mid \alpha,\beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}\right\}$
- $F = \{MP\}$ - קבוצת כללי ההיסק, כאשר MP הוא כלל הניתוק $\frac{\alpha,\alpha\to\beta}{\beta}$.

  צורת רישום נוספת: $MP(\alpha,\alpha\to\beta) = \beta$.

מערכת הוכחה עם הנחות: קבוצת הפסוקים היכיחים מקבוצת פסוקים Σ (הנחות), $Ded(\Sigma)$, היא הקבוצה האינדוקטיבית $X_{B\cup\Sigma,F}$ (עבור W, B ו-F מהגדרה 1).

- אם $\alpha \in Ded(\Sigma)$ נאמר כי α יכיח מ-Σ ונסמן $\Sigma \vdash \alpha$.
- סדרת היצירה של פסוק α מעל $Ded(\Sigma)$ נקראת סדרת הוכחה של α מתוך Σ.
- אם $\Sigma = \emptyset$, אז $Ded(\emptyset) = X_{B,F}$, קבוצת הפסוקים היכיחים (ללא הנחות).

משפט הנאותות ועקביות

משפט הנאותות הרחב: לכל קבוצת פסוקים Σ מתקיים, אם $\Sigma \vdash \alpha$ אז $\Sigma \models \alpha$.

סימון: $Con(\Sigma) = \left\{\alpha \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}} \mid \Sigma \vDash \alpha\right\}$. כלומר, משפט הנאותות משמעותו: $Ded(\Sigma) \subseteq Con(\Sigma)$.

מסקנה ממשפט הנאותות: אם $\Sigma \not\models \alpha$ אז $\Sigma \nvdash \alpha$.

משפט הנאותות הצר: אם $\vdash \alpha$ אז $\models \alpha$.

עקביות

הגדרה 1: קבוצת פסוקים $\Sigma \subseteq \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$ היא עקבית אם **לא קיים** $\alpha \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$ כך ש-$\Sigma \vdash \alpha$ וגם $\Sigma \vdash \neg\alpha$.

משפט 1 (הגדרה שקולה): Σ עקבית אמ"מ קיים פסוק α כך ש-$\Sigma \nvdash \alpha$.

איך מראים שקבוצה Σ היא עקבית?

לפי ההגדרה השקולה, די להראות פסוק α כך ש־$\Sigma \nvdash \alpha$, כלומר $\alpha \notin Ded\left(\Sigma\right)$.

לפי המסקנה ממשפט הנאותות, די להוכיח כי $\alpha \notin Con\left(\Sigma\right)$, כלומר $\Sigma \not\models \alpha$.

<u>תרגיל 1</u>: הוכיחו כי הקבוצה $\Sigma = \{p_i \to p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\} = \{p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, \dots\}$ היא עקבית.

<u>משפט 2</u>: אם Σ ספיקה אז Σ עקבית.

<u>תרגיל 2</u>:

נגדיר סדרה של קבוצות פסוקים:

$$\begin{aligned}
\Sigma_0 &= \{\neg p_0\} \\
\Sigma_1 &= \{p_0, \neg p_1\} \\
\Sigma_2 &= \{p_0, p_1, \neg p_2\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

באופן כללי $\Sigma_i = \{p_0, p_1, \dots, p_{i-1}, \neg p_i\}$.

1. האם לכל i מתקיים ש־Σ_i עקבית?
2. האם $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$ עקבית?
3. האם $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$ עקבית?
4. תהי $X \neq \emptyset$ קבוצת קבוצות פסוקים.
   הוכיחו: אם לכל $\Sigma \in X$ מתקיים ש־Σ עקבית, אז $\bigcap X$ היא עקבית.

משפט השלמות

<u>משפט השלמות</u>: לכל פסוק α וקבוצת פסוקים Σ, אם $\Sigma \models \alpha$ אז $\Sigma \vdash \alpha$.

בצרוף משפט הנאותות נקבל כי $\Sigma \vdash \alpha \Leftrightarrow \Sigma \models \alpha$.

<u>מסקנה ממשפט משלמות</u>: אם $\Sigma \nvdash \alpha$, אז $\Sigma \not\models \alpha$.

<u>משפט 3</u>: לכל קבוצת פסוקים Σ, אם Σ עקבית אז Σ ספיקה.

בצרוף משפט 2 נקבל כי Σ עקבית אמ"מ Σ ספיקה.

תרגיל 3: נגדיר מערכת הוכחה חדשה לתחשיב הפסוקים מעל $\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$.

- קבוצת האקסיומות מכילה את הפסוקים מהצורה הבאה:

  לכל $\alpha,\beta,\gamma\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$,

  - A_1 : $\alpha\to(\beta\to\alpha)$
  - A_2: $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma))$

- כללי היסק:

  - $MP(\alpha,\alpha\to\beta)=\beta$
  - MV (יוגדר בהמשך)

נסמן ב־$\Sigma\underset{N}{\vdash}\alpha$ את הטענה שפסוק α יכיח מתוך Σ במערכת החדשה.

1. נגדיר $MV(\alpha\to(\beta\to\alpha))=\alpha$.

   הוכיחו/ הפריכו: המערכת החדשה שלמה.

   כלומר, לכל קבוצת פסוקים $\Sigma\subseteq\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$ ולכל פסוק $\alpha\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$, אם $\Sigma\vDash\alpha$ אז $\Sigma\underset{N}{\vdash}\alpha$.

תרגול 6 לוגיקה

תרגיל 1:

הוכיחו כי הקבוצה $\Sigma = \{p_i \to p_{i+1} | i \in \mathbb{N}\} = \{p_o \to p_1, p_1 \to p_2, \dots\}$ היא עקבית.

הוכחה:

נבחר $\alpha = \neg(p_0 \to p_o)$, נוכיח כי $\Sigma \not\vDash \alpha$
יש להראות השמה המספקת את Σ אבל לא את α.

$$\overline{V_T}(p_i \to p_{i+1}) = TT_{\to}(V_T(p_i), V_T(p_{i+1}))$$
$$TT_{\to}(T,T) = T$$

ולכן V_Tמספקת את Σ אבל $V_T(\alpha) = F$
קיבלנו $\Sigma \not\vDash \alpha \Leftarrow \Sigma \nvdash \alpha$ (לפי מסקנה ממשפט הנאותות)
$\Leftarrow$ Σ עקבית.
(הגדרה שקולה עקביות)

משפט 2:

אם Σ ספיקה אז Σ עקבית.

משפט 2 הוכחה:

נניח כי Σ ספיקה, אז קיימת לפי הגדרה השמה v כך ש $\Sigma \vDash v$כמו כן $F = \overline{V}(\neg(p_0 \to p_0))$
$\Sigma \not\vDash \neg(p_0 \to p_0)$ $\underbrace{\Leftarrow}_{\text{neotut}}$ $\Sigma \nvdash \neg(p_0 \to p_0)$

תרגיל 2:

נגדיר סדרה של קבוצות פסוקים:

$$\Sigma_0 = \{\neg p_o\}$$
$$\Sigma_1 = \{p_0, \neg p_1\}$$
$$\Sigma_2 = \{p_0, p_1, \neg p_2\}$$
$$\vdots$$

באופן כללי:

$$\Sigma_i = \{p_0, p_1, \ldots, p_{i-1}, \neg p_i\}$$

1. האם לכל i מתקיים ש־Σ_i עקבית?
2. האם $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i$ עקבית?
3. האם $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i$ עקבית?
4. תהי $X \neq \emptyset$ קבוצת קבוצות פסוקים.
הוכיחו אם לכל $\Sigma \in X$ מתקיים ש־Σ עקבית, אז $\bigcap X$ היא עקבית.

פתרון 1:

כן, על פי משפט מספיק להראות ש־Σ_i ספיקה. לכל i נגדיר השמה v_i באופן הבא:

$$V_i(p_k) \begin{cases} F & k = i \\ T & k \neq i \end{cases}$$

v_i מספקת את Σ_i ולכן Σ_i ספיקה וממפשט עקבית.(צריך להוכיח).

פתרון 2:

לא, $\neg p_o \in \Sigma_0$ ו־$p_0 \in \Sigma_1$ מהגדרת איחוד גדול $p_0, \neg p_0 \in \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i$
מהנחת המבוקש:
$\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i \vdash p_0$ וגם $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i \vdash \neg p_0$
$\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i$ מוכיחה את p_0 וגם $\neg p_0$ ולכן מהגדרת עקביות $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \Sigma$ אינה עקבית
מסקנה:
איחוד של קבוצות עקביות לא בהכרח עקבי.

פתרון 3:

כן, נשים לב כי $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i = \emptyset$ זו קבוצה ספיקה ולפי משפט היא עקבית.

פתרון 4:

נניח בשלילה ש־ $\bigcap X$ לא עקבית.
לכל $\alpha \in \mathrm{WFF}_{\{\rightarrow,\neg\}}$ מתקיים $\bigcap X \vdash \alpha$
מכוון ש $X \neq \emptyset$, קיימת Σ כך ש־$\bigcap X \subseteq \Sigma$ (לפי הגדרת חיתוך גדול).
ממונוטוניות ההוכחה מתקיים $\Sigma \vdash \alpha$ לפי הגדרה Σ לא עקבית וזו סתירה.

תרגיל 3:

1. נגדיר $MV(\alpha \to (\beta \to \alpha)) = \alpha$
הוכיחו המערכת החדשה שלמה, כלומר לכל קבוצת פסוקים $\Sigma \subseteq \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$ ולכל פסוק $\alpha \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$, אם $\Sigma \vDash \alpha$ אז $\Sigma \underset{N}{\vdash} \alpha$.

הוכחה סעיף 1:

הטענה נכונה, תהי קבוצת פסוקים Σ ופסוק α כך ש־$\Sigma \vDash \alpha$ נראה כי $\Sigma \underset{N}{\vdash} \alpha$ כך נראה
<u>סדרת הוכחה:</u>

1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ (A_1)
2. α $(MV(1))$

נשים לב בכלל לא השתמשנו בנתון ש־$\Sigma \vDash \alpha$. המערכת מוכיחה כל α ובפרט לא נאותה.