לוגיקה - תרגול 2

<u>תזכורת:</u> בתרגול הקודם הגדרנו את הקבוצה האינדוקטיבית הבאה:

- העולם: $X = \{s,t\}^*$.
- הבסיס: $B = \{\epsilon, st, ts\}$.
- פו' היצירה: $\mathrm{F} = \{f_1, f_2\}$, כאשר:
  - $f_1(w_1,w_2) = sw_1w_2t$
  - $f_2(w_1,w_2) = w_1w_2w_1$

<u>איך מראים שאיבר a שייך לקבוצה אינדוקטיבית ($a \in \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$)?</u>

<u>משפט 1:</u> $a \in \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$ אם ורק אם קיימת ל־a סדרת יצירה מעל B ו־F

ע"פ התרגול הקודם הוכחנו כי $st, sstt, tststs \in X_{B,F}$.

<u>איך מראים שאיבר a אינו שייך לקבוצה אינדוקטיבית ($a \notin \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$) ?</u>

נמצא קבוצה $T \subseteq \mathrm{X}$ המקיימת:

1. $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}} \subseteq T$
2. $a \notin T$

מסקנה: $a \notin \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$

<u>תרגיל 1:</u> עבור $X_{B,F}$ מהדוגמה הוכיחו כי $tst \notin X_{B,F}$.

<u>תרגיל 2:</u>

נתון:

- העולם: $\mathrm{X} = \{a,b\}^*$ - קבוצת המילים באותיות a ו־b.
- הבסיס: $B = \{aa\}$.
- פונקציות היצירה: $\mathrm{F} = \{f\}$, כאשר:

$$f(w) = \begin{cases} aawb & \text{אם } w \text{ מתחיל ב } - a \\ bbwa & \text{אחרת} \end{cases}$$

1. הוכיחו/ הפריכו: $bba \in \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$
2. הוכיחו/ הפריכו: $aabb \in \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$

<u>תרגיל 3</u>: תהיינה $S_1 = \mathrm{X}_{B_1,\mathrm{F}_1}$ ו־$S_2 = \mathrm{X}_{B_2,\mathrm{F}_2}$ כך ש־$S_1 = S_2$.
הוכיחו כי מתקיים $S_1 = \mathrm{X}_{B_1 \cup B_2, \mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2}$.

תרגול 2 לוגיקה

תרגיל 1:

נגדיר קבוצה $T = \{w \in \{s,t\}^* | \ |w|\%2 = 0\}$
נוכיח כי $tst \notin T$
$|tst|$ אי־זוגית
הוכחנו כי $X_{B,F} \subseteq T$
באינדוקציית מבנה בתירגול קודם.
מסקנה: $\Leftarrow$ $tst \in X_{B,F}$.

תרגיל 2:

1. הטענה לא נכונה:
נגדיר תכונה:
$T_1 = \{w \in \{a,b\}^* | a$ מתחיל ב $w\}$
נראה $X_{B,F} \subseteq T_1$ בא"מ.
<u>בסיס:</u>
נראה שלכל $w \in B$,$w \in T_1$
$w = aa$, מתקיים $w \cdot \epsilon$ מתחילה בa.
<u>סגור:</u>
נניח $u' \in T_1$ כלומר u' מתחילה ב a.
תהיי $u = f(w')$. מה"א w' מתחילה ב־a ולכן
$w = aaw'b$ ולכן w מתחילה ב־a.
<u>מסקנה:</u> $X_{B,F} \subseteq T_1$ וכן $bba \notin T_1$
(לא מתחילה ב־a) ולכן $bba \notin X_{B,F}$.

2. הטענה לא נכונה:
$\#a(w) \Leftarrow$ מספר הפעמיים שאות מופיע ב w ונגדיר תכונה
$T_2 = \{w \in \{a,b\}^* | \ \#_a(w) > \#_b(w)\}$
<u>בסיס</u>: לכל $w \in B$ מתקיים $w \in T_2$, $w = aa$
$\#_a(w) = 2 > 0 = \#_b(w)$
<u>סגור:</u> נניח $w' \in T_2$ כלומר $\#_a(w') > \#_b(w')$
תהי $w = f(w')$:
נפריד למקרים:

   (א) אם w' מתחילה ב־a $w = aaw'b$
   מה"א $\#_a(w') > \#_b(w')$
   ולכן $\#_a(w) = 2 + \#_a(w') > 1 + \#_b(w') = \#_b(w)$

(ב) אם w'מתחילה ב b $w = bbw'a$ מה"א
$\#_a(w) = 1 + \#_a(w')$
$\#_b(w) = 2 + \#_b(w')$
האם בהכרח $\#_a(w) > \#_b(w)$?
לא, למשל עבור $w' = baa$
התכונה לא נשמרת.
האם המשמעות שאיברים ב־$X_{B,F}$ לא מקיימת את התכונה, לא כי אני יודעים שבקבוצה האינדוקטיבית כל המילים מתחילות ב־a.ולכן נרצה לחזק תכונה.
$T_2^{'} = \{w \in \{a,b\}^* | w \in X_{B,F}, \#_a(w) > \#_b(w)\}$
<u>בסיס:</u>
נראה שלכל $w \in B$ מתקיים $w \in T_2^{'}$
$w = aa$

i. $w \in B$ ולכן $w \in X_{B,F}$
ii. $\#_a(w) = 2 > 0 = \#_b(w)$ ולכן $w \in T_2^{'}$.

(ג) <u>סגור:</u>
נניח $w' \in T_2$ כלומר $\#_a(w') > \#_b(w')$
תהיי $w = f(w')$
<u>נפריד למקרים:</u>

i. אם w' מתחילה ב־a אז $w = aaw'b$
מה"א $\#_a(w') > \#_b(w')$
ולכן $\#_a(w) = 2 + \#_a(w) > 1 + \#_b(w) = \#_b(w)$
ii. אם w'מתחילה ב b $w = bbw'a$ מה"א
$\#_a(w) = 1 + \#_a(w')$
$\#_b(w) = 2 + \#_b(w')$
האם בהכרח $\#_a(w) > \#_b(w)$?
לא, למשל עבור $u' = baa$
תחונה לא נשמרה.
האם המשמעות שאיברים ב־ $X_{B,F}$ לא מקיימים את התכונה, לא כי אנו יודעים שקבוצה אינדוקטיבית של כל המילים מתחילות ב־a. ולכן נרצה לחזק תכונה.
$T_2^{'} = \{w \in \{a,b\}^* | w \in X_{B,F}, \#_a(w) > \#_b(w)\}$

<u>בסיס:</u>
נראה שלכל $w \in B$ מתקיים $w \in T_2^{'}$, $w = aa$
1.$w \in B$ ולכן $w \in X_{B,F}$
2. $\#_a(w) = 2 > 0 = \#_b(w)$ ולכן $w \in T_2^{'}$.
<u>סגור:</u> נניח $w' \in T_2^{'}$
כלומר $w' \in X_{B,F}$ וכן $\#_a(w') > \#_b(w')$
תהי $w = f(w)$ מה"א $w' \in X_{B,F}$ ולכן מסעיף קודם היא מתחיל ב־a ולכן
$w = aaw'b$

1. מה"א $w' \in X_{B,F}$ $f \in F$ והקבוצה $X_{B,F}$ סגורה תחת פעולה זו מהגדרה ולכן $w \in X_{B,F}$.

2. מה"א $\#_a(w') > \#_b(w')$
ולכן $\#_a(w) = 2 + \#_a(w') > 1 + \#_b(w') = \#_b(w)$
$X_{B,F} \subseteq T_2^{'}$ וכן- $aabb \in T_2^{'}$
$\#_a(aabb) = \#_b(aabb)$
ולכן $aabb \notin X_{B,F}$

<u>מסקנה:</u>
לעיתים כאשר נוכל להוכיח ש-$X_{B,F}$ מקיימת תכונה f נזדקק
לתכונה 2 שכבר הוכחנו ש $X_{B,F}$ מקיימת לשם כך נגדיר תכונה מחוזקת:
$T_B = \{w \in X | w \in X_{B,F},$ f מקיים את $w\}$

תרגיל 3:

הוכחה:

נסמן $X = X_{B_1 \cup B_2, F_1 \cup F_2}$
נוכיח כי $x = S_1$ ע"י הכלה דו כיוונית

- כייון ראשון $S_1 \subseteq X$ באינדוקציית מבנה.

<u>בסיס:</u>
נוכיח כי $B_1 \subseteq X$
$B_1 \subseteq B_1 \cup B_2 \subseteq X$
<u>סגור:</u>
נניח כי $a_1 \dots a_n \in X$
ונראה כי לכל $f \in F_1$
$f(a_1, \dots, a_n) \in X$
$f \in F_1 \cup F_2 \Leftarrow f \in F$
x סגורה ל $F_1 \cup F_2$ ע"י הבנייה
ולכן $f(a_1, \dots a_n) \in X$
כיוון שני:
$X \subseteq S_1$ נוכיח באינדוקציית מבנה
<u>בסיס:</u>
$B_1 \cup B_2 \subseteq S_1$
<u>נניח:</u>
כי $b \in B_1 \cup B_2$
אזי $b \in B_1$ או $b \in B_2$ נחלק למקרים

- $b \in B_1$ במקרה זה $b \in S_1$ ע"י הזמנה
- $b \in B_2$ במקרה זה $b \in S_2$ ע"י הזמנה
וגם מכיוון ש $S_1 = S_2$מתקיים $b \in S_1$

<u>סגור:</u>
נניח
$a_1, \dots, a_n \in S_1$

ונראה כי לכל $f \in F_1 \cup F_2$
$f(a_1, \ldots, F_k) \in S_1$
נחלק למקים:

- $f \in P_1$ מכיוון ש $a_1, \ldots, a_n \in S_1$ סגירות נתון $\Leftarrow$ $f(a...a_n) \in S$
- $f \in f_2$ "" "" "" $a_1, \ldots, a_n$ ש- $S_1 = S_2$ $\Leftarrow$ $a_1 \ldots a_n \in S_2$.

S_2 סגורה תחת הפעולות ב-F_2 $\Leftarrow$ $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S_2$
מכיוון ש- $S_1 = S_2$ $\Leftarrow$ $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S_1$