# לוגיקה - תרגול 10

## תזכורת

## משתנים קשורים וחופשיים

<u>הגדרה 1</u>: נגדיר באינדוקציה על מבנה הנוסחאות מהו משתנה חופשי $x$ בנוסחה $\varphi$.

בסיס: עבור $\varphi$ נוסחה אטומית, אם $x$ מופיע ב־$\varphi$ אז $x$ חופשי ב־$\varphi$.

צעד: יהיו $\alpha, \beta$ נוסחאות.

עבור $\varphi = (\neg\alpha)$: $x$ חופשי ב־$\varphi$ אם $x$ חופשי ב־$\alpha$.

עבור $\varphi = (\alpha \to \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta)$: $x$ חופשי ב־$\varphi$ אם $x$ חופשי ב־$\alpha$ או $x$ חופשי ב־$\beta$.

עבור $\varphi = \exists y\alpha, \forall y\alpha$: $x$ חופשי ב־$\varphi$ אם $x$ חופשי ב־$\alpha$ ו־$x \neq y$.

משתנה שאינו חופשי נקרא משתנה קשור.

<u>דוגמה:</u>

$$\exists x_1 \left(\forall x_2 \left(R_1(x_2)\right) \to R_2(x_1, x_2)\right)$$

המופע הראשון של $x_2$ קשור אך השני חופשי ולכן $x_2$ חופשי בנוסחה.

המופע היחיד של $x_1$ קשור ולכן $x_1$קשור בנוסחה.

<u>הגדרה 2</u>: נוסחה ללא משתנים חופשיים נקראת <u>פסוק</u>.

<u>תרגיל 1</u>: נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F_1(\circ), F_2(\circ,\circ), c\rangle$ ונתון הפסוק $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \left(R(x_1, x_2) \to R(x_2, x_1)\right)$.

אילו מבנים יספקו את הפסוק?

<u>משפט 1</u>: יהיו $\alpha$ נוסחה מעל מילון $\tau$, $M$ מבנה עבור $\tau$ ו־$s_1, s_2$ זוג השמות עבור $M$, כך שלכל משתנה חופשי $x_i$ ב־$\alpha$ מתקיים $s_1(x_i) = s_2(x_i)$. אז $M \models_{s_1} \alpha$ אם ורק אם $M \models_{s_2} \alpha$.

<u>מסקנה</u>: לכל מבנה $M$, <u>פסוק</u> $\varphi$ והשמה $s$, אם $M \models_s \varphi$ אז $M \models \varphi$.

## מושגי יסוד סמנטיים

הגדרות:

1. נוסחה $\varphi$ היא ספיקה אם קיימים מבנה $M$ והשמה $s$ כך ש־$M \models_s \varphi$.
2. מבנה $M$ והשמה $s$ מספקים קבוצת נוסחאות $\Sigma$ אם לכל $\varphi \in \Sigma$ מתקיים $M \models_s \varphi$. סימון $M \models_s \Sigma$
3. קבוצת נוסחאות $\Sigma$ היא ספיקה אם קיימים מבנה $M$ והשמה $s$ המספקים אותה.
4. נוסחה $\psi$ גוררת לוגית נוסחה $\varphi$ אם כל מבנה $M$ וכל השמה $s$ המספקים את $\psi$ מספקים גם את $\varphi$. סימון $\psi \models \varphi$.
5. נאמר כי קבוצת נוסחאות $\Sigma$ גוררת לוגית נוסחה $\varphi$ אם כל מבנה $M$ והשמה $s$ המספקים את $\Sigma$ מספקים גם את $\varphi$. סימון $\Sigma \models \varphi$.
6. נוסחה $\varphi$ מעל מילון $\tau$ היא אמת לוגית אם לכל מבנה $M$ עבור $\tau$, ולכל השמה $s$ מתקיים $M \models_s \varphi$.

תרגיל 2: נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c_0, c_1 \rangle$.

נגדיר $\Sigma = \{R(t, x_0) \mid t \text{ ש"ע}\}$.

1. הוכיחו כי $\Sigma$ ספיקה.
2. הוכיחו כי $\Sigma \not\models \forall x_1 R(x_0, x_1)$ .

תרגיל 3: נתון מילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ) \rangle$.

עבור כל אחת מהנוסחאות הבאות, הוכיחו או הפריכו כי היא אמת לוגית:

1. $\varphi_1 = \forall x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2) \to \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2))$
2. $\varphi_2 = \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2)) \to \forall x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2)$

# לוגיקה תרגול 10

13 ביוני 2019

**תרגיל 1:**

נתון מילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F_1(\circ), F_2(\circ,\circ), c\rangle$ ונתון הפסוק $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 (R(x_1,x_2) \rightarrow R(x_2,x_1))$.
אילו מבנים יספקו את הפסוק?

**פתרון:**

כל המבנים $M$ שעבורם $R^M$ הוא יחס סימטרי (למשל $M = \langle \mathbb{N}, =, -, +, 7\rangle$.
נוכיח את הטכנה.
יהי $M$ מבנה כלשהו עבור $\tau$ אז:
$M \models \varphi \Leftrightarrow$
לכל $s$, $M \underset{s}{\models} \varphi \Leftrightarrow$
לכל $s$, לכל $d_1, d_2 \in D^M$
$M \underset{\underbrace{s[x_1 \leftarrow d_1][x_2 \leftarrow d_2]}_{s'}}{\models} R(x_1,x_2) \rightarrow R(x_2,x_1)$
לכל $s$, לכל $d_1, d_2 \in D^M$, אם $\Leftrightarrow$
$M \underset{s'}{\models} R(x_1,x_2)$ אז $M \underset{s'}{\models} R(x_2,x_1) \Leftrightarrow$
לכל $s$, לכל $d_1, d_2 \in D^M$ אם $(s'(x_1), s'(x_2)) \in R^M$ אז $(s'(x_2), s'(x_1)) \in R^M \Leftrightarrow$
לכל $s$, לכל $d_1, d_2 \in D^M$ אם $(d_1, d_2) \in R^M$ אז $(d_2, d_1) \in R^M \Leftrightarrow$
לכל $d_1, d_2 \in D^M$ אם $(d_1, d_2) \in R^M$ אז $(d_2, d_1) \in R^M \Leftrightarrow$
$R^M$ סימטרי.
(כל המעברים דו־כיווניים ולא דורשים הסבר כי הם מבוססים על ההגדרה).

**תרגיל 2:**

נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c_0, c_1\rangle$, נגדיר $\Sigma = \{R(t, x_0) \mid t \text{ ש״ע}\}$

1. הוכיחו כי $\Sigma$ ספיקה.
2. הוכיחו כי $\Sigma \not\models \forall x_1 R(x_0, x_1)$.

**פתרון סעיף 1:**

הוכחה:

נוכיח כי קיים במנה $M$ והשמה $s$ המספקים את $\Sigma$.
נבחר במבנה $M = \langle \{a\}, \{(a,a)\}, f, a, a \rangle$
כאשר $f(a,a) = a$ תהי $s$ ההשמה $s(x_1) = a$.
לכל $R(t,x) \in \Sigma$ מתקיים $M \models_s R(t,x_0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\overline{s}(t), \overline{s}(x_0)) \in R^M$
$(a,a) \in \{(a,a)\}$ ולכן $M \models_s \Sigma$.

**פתרון סעיף 2:**

הוכחה:
נסמן: $M = \langle \mathbb{N}, \geq, +, 0, 1 \rangle$, תהי $s$ ההשמה $s(x_i) = 0$.

1. נראה כי $M \models_s \Sigma$: לכל $R(t,x_0) \in \Sigma$ מתקיים $M \models_s R(t,x_0) \Leftrightarrow$
$(\overline{s}(t), \overline{s}(x_0)) \in R^M \Leftrightarrow \overline{s}(t) \geq 0$ וזה נכון כי $0$ מינימלי בטבעיים.

2. נראה $M \not\models_s \forall x_1 R(x_0,x_1)$: מספיק להראות $d \in \mathbb{N}$ כך ש $M \not\models_{s[x_1 \leftarrow d]} R(x_0,x_1)$.
נבחר $d = 3$ אז $M \not\models_{s[x_1 \leftarrow d]} R(x_0,x_1) \Leftrightarrow$
$(\overline{s}[x_1 \leftarrow d](x_0), \overline{s}[x_1 \leftarrow d](x_1)) = (0,3) \notin R^M$
אבל $(0,3) \notin R^M$ כי לא מתקיים $0 \geq 3$ ולכן $M \not\models_s \forall x_1 R(x_0,x_1)$.

**תרגיל 3:**

נתון מילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ) \rangle$.
עבור כל אחת מהנוסחאות הבאות, הוכיחו או הפריכו כי היא אמת לוגית:

1. $\varphi_1 = \forall x_1 \forall x_2 R(x_1,x_2) \to \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2))$

2. $\varphi_2 = \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2)) \to \forall x_1 \forall x_2 R(x_1,x_2)$

**פתרון:**

1. יועלה לאתר הקורס.

2. הטענה אינה נכונה:
נבחר מבנה והשמה:
$M = \langle \{0,1\}, \{(0,0)\}, F^M \rangle$
$F^M(n) = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$תהי $s$ השמה $s(x_i) = 0$.