

לוגיקה ותורת הקבוצות - תרגול 3

הגדרה אינדוקטיבית של קבוצת הפסוקים החוקיים

הגדרה 1: קבוצת הפסוקים החוקיים, WFF (Well Formed Formulae), היא הקבוצה האינדוקטיבית הבאה:

$$\begin{aligned}X &= \{\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, (,), p_0, p_1, p_2, \dots\}^* \\B &= \{p_0, p_1, p_2, \dots\} \\F &= \{F_{\neg}, F_{\vee}, F_{\wedge}, F_{\rightarrow}\} \\WFF &= X_{B,F}\end{aligned}$$

• העולם X הוא קבוצת המילים הסופיות מעל הסימנים הנ"ל.

דוגמה לאיבר בעולם: $p_1 \wedge (\vee p_2 (\in X$

• איברי B : p_0, p_1, p_2, \dots נקראים פסוקים אטומיים (או משתנים אטומיים).

עבור כל $\alpha, \beta \in X$ הפונקציות ב- F מוגדרות באופן הבא,

$$\begin{aligned}F_{\neg}(\alpha) &= (\neg\alpha) \\F_{\vee}(\alpha, \beta) &= (\alpha \vee \beta) \\F_{\wedge}(\alpha, \beta) &= (\alpha \wedge \beta) \\F_{\rightarrow}(\alpha, \beta) &= (\alpha \rightarrow \beta)\end{aligned}$$

דוגמאות לפסוקים חוקיים (כלומר ב-WFF):

$$p_5, (\neg p_{17}), (p_{1000} \rightarrow p_8), ((\neg p_0) \rightarrow (p_5 \rightarrow (p_1 \vee p_0)))$$

הערה: האם $p_0 \vee p_1$ זהה ל- $p_1 \vee p_0$? לא, כי הסדר חשוב.

איך מראים שמילה $\alpha \in X$ היא פסוק חוקי ($\alpha \in WFF$)?

מראים סדרת יצירה לפסוק מעל $WFF = X_{B,F}$.

דוגמה: האם $(p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_9))$ פסוק חוקי?

איך מראים שמילה $\alpha \in X$ אינה פסוק חוקי ($\alpha \notin \text{WFF}$)?

1. מוצאים תכונה Y שמשותפת לכל הפסוקים החוקיים (β מקיימת את Y $\mid \beta \in X$) $T = \{\beta \in X \mid Y\}$.
2. מוכיחים ש- α אינו מקיים את Y ($\alpha \notin T$).
3. מוכיחים באינדוקציה על מבנה WFF שכל הפסוקים החוקיים מקיימים את Y ($\text{WFF} \subseteq T$).

תכונות בסיסיות של פסוקים חוקיים

המילים ב-WFF מקיימות את התכונות הבאות:

תכונה 1: $\{\alpha \in X \mid \alpha \text{ פסוק אטומי או מתחיל ב-} (\neg \text{ ונגמר ב-})\}$
דוגמא לשימוש בתכונה 1: מתכונה 1 נובע שהמילה $p_1 p_2$ אינה פסוק חוקי.

תכונה 2: $T_2 = \{\alpha \in X \mid \#_-(\alpha) = \#_+(\alpha)\}$
 כאשר $\#_-(\alpha)$ הוא מספר הסוגריים השמאליים ב- α ו- $\#_+(\alpha)$ הוא מספר הסוגריים הימניים ב- α .

הגדרה 2: נאמר ש- β היא רישא של α אם α, β מילים כך ש:

$$\begin{aligned}\alpha &= a_1 a_2 \dots a_n \\ \beta &= b_1 b_2 \dots b_k\end{aligned}$$

כאשר $k \leq n$ ולכל $1 \leq i \leq k$ מתקיים $a_i = b_i$.
 נאמר כי β רישא ממש של α אם β רישא של α ו- $\alpha \neq \beta$ (כלומר $k < n$).

תכונה 3 (נסיון ראשון): לכל $\beta \neq \epsilon$ רישא ממש של α : β $\mid \#_-(\beta) > \#_+(\beta)$ $\alpha \in X$ $\text{WFF} \subseteq T = \{\alpha \in X \mid \#_-(\beta) > \#_+(\beta) : \beta \neq \epsilon \text{ רישא ממש של } \alpha\}$

תכונה 3: $T_3 = \left\{ \alpha \in X \mid \begin{array}{l} 1. \alpha \in \text{WFF} \\ 2. \text{לכל } \beta \neq \epsilon \text{ רישא ממש של } \alpha : \beta \mid \#_-(\beta) > \#_+(\beta) \end{array} \right\}$

מסקנה מתכונות 2 + 3: אם α ב-WFF ו- β רישא ממש של α , אז $\beta \notin \text{WFF}$.
 משלוש התכונות שהוכחנו נובע משפט הקריאה היחידה שמשמעותו היא:
 בהינתן $\varphi \in \text{WFF}$, מתקיים בדיוק אחד משלושת הבאים:

1. φ הוא פסוק אטומי
2. $\varphi = (\neg \alpha)$ כאשר $\alpha \in \text{WFF}$.
3. $\varphi = (\alpha \circ \beta)$ כאשר $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ ו- $\alpha, \beta \in \text{WFF}$.

תכונה נוספת של פסוקים: לא קיים פסוק חוקי אינסופי, למשל $(((p_0 \wedge p_1) \wedge p_2) \wedge p_3) \wedge \dots \notin \text{WFF}$ כי:

1. העולם שלנו הוא X – רק מילים סופיות.

2. ניתן להוכיח ש- $\alpha \notin \text{WFF}$ באמצעות התכונה הבאה:

$$T = \{\beta \in X \mid \text{יש מספר סופי של אטומים ב-}\beta\}$$

תרגול 3 לוגיקה

דוגמה:

נראה סדרת יצירה עבור: $(p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_9))$

1. p_0 (אטום).

2. p_1 (אטום).

3. p_9 (אטום).

4. $F_{\vee}(2, 3) (p_1 \vee p_9)$

5. $F_{\rightarrow}(1, 4)(p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_9))$

תזכורת: רצ' להוכיח:

$X_{B,F} \subseteq T = \{x \in X \mid Y \text{ את } x\}$
בלשב 3 מספיק להראות:

1. $B \subseteq T$

2. T סגורה ל-F. כלומר

לכל $f \in F$ אם $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ אז $f(t_1, t_2, \dots, t_n) \in T$

דוגמאות לרישיות ממש:

מי הן הרישיות ממש של $(\neg p_5)$?:

$\epsilon, (, (\neg, (\neg p_5$

מי הן הרישיות ממש של ϵ ?: אין

מי הן הרישיות ממש של $($?: ϵ .

נסיון לפתרון ה-3:

הבעיה:

התכונה הזאת אינה סגורה תחת הפונקציות של WFF נשים לב שהמילה $X \in$ מקיימת את התכונה אבל אם נפעיל עליה את F_{\neg} ונקבל (\neg) ומילה זו אינה מקיימת את התכונה

הוכחת התכונה המחוזקת:

בסיס:

אם α פסוק אטומי:

1. $\alpha \in \text{WFF}$ פסוק חוקי ולכן $\alpha \in \text{WFF}$

2. α מכיל רק תו אחד ולכן α -ל- α
אין רישות ממש שאינן ריקות ולכן התכונה מתקיימת באופן ריק.

סגור:

נניח כי γ, δ מקיימות את התכונה
ונראה כי התכונה נשמרת תחת הפעולות ב- F :
 $\alpha = (\neg \gamma)$

1. $\alpha \in \text{WFF}$ לפי ה"א
 $\gamma \in \text{WFF}$ ומסגירות WFF -ל- F .

2. יש שלוש רישות ממש לא ריקות אפשריות:

$$\beta = (\neg \gamma) \text{ או } \beta = (\gamma) \text{ או } \beta = (\neg \gamma)$$

$$\begin{aligned} \text{(ב) } \beta = (\neg \gamma) \text{ כאשר } \gamma' \text{ רישא ממש של } \gamma: \\ \text{לה"א } \#(\gamma') > \#(\gamma) \text{ ולכן:} \\ \#(\beta) = 1 + \#(\gamma') > 1 + \#(\gamma) = 1 + \#(\beta) > \#(\beta) \end{aligned}$$

$$\text{(ג) } \beta = (\neg \gamma) \text{ לה"א } \gamma \text{ פסוק חוקי ולכן מקיים את תכונה 2 ולכן:}$$

$$\begin{aligned} \#(\gamma) &= \#(\gamma) \\ \#(\beta) &= 1 + \#(\gamma) = 1 + \#(\beta) > \#(\beta) \end{aligned}$$

$$3. \text{ עבור } F_o(\gamma, \delta) = (\gamma \circ \delta)$$

$$\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$$

כאשר $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$
ההוכחה דומה אבל יש יותר סוגים של רישות.

שאלת בונוס:

הוכיחו כי $(p_0 p_1)$ אינו פסוק חוקי.

התכונה:

מספר המופעים של פסוקים אטומיים ב- α גדול בדיוק ב-1.
מספר המופעים של קשרים דו מקומיים ב- α .