לוגיקה הרצאה 11

סינטקס:

מילון τ
<u>שמות עצם:</u> סימני קבוע, משתנים וסימני פונקצייה.
<u>נוסחאות:</u>
נוסחאות אטומיות: $\underbrace{R}_{\text{N-Realtion}}\ \underbrace{(t_1,\ldots,t_n)}_{\text{nouns}}$, $\approx(t_1,t_2)$.

<u>הערה:</u>
הבדל בין שם עצם לנוסחה אטומית:
בהינתן מבנה M והשמה s שם עצם t ־ כשישוערך הבמנה M וההשמה s יחזיר ערך מתוך D^M.

נוסחה(אטומית): תשוערך ל־T/F.

המשך יצירת נוסחאות ־כלל יצירה/פעולות.
בהינתן נוסחאות α, β ומשתנה x
הנוסחאות הבאות הן נוסחאות של תחשיב היחסים:

$$\neg\alpha,\ \alpha\to\beta,\ \forall x\alpha$$
$$\alpha\wedge\beta\ \alpha\vee\beta,\ \exists x\alpha$$

סמנטיקה:

<u>מבנה M</u> שמפרש סימני מילון ביחס לתחום D^M.
<u>השמה:</u> $s:\ \underbrace{\mathrm{Var}}_{\{x_i|i\in\mathbb{N}\}}\ :\to D^M$.
<u>ההשמה מורחבת:</u>

$$\overline{s}:\underbrace{Term}_{\text{nouns}}\to D^M$$

<u>הגדרת $\overline{s}$:</u>
בהינתן $\overline{s},s,M$ מוגדרת אינדוקטיבית ע"י:

1. $\overline{s}(x)=s(x)$ x משתנה.

2. $C^M = \overline{s}(c)$ c סימן קבוע.

3. $\overline{s}(F(t_1,\ldots,t_n)) = F^M(\overline{s}(t_1),\ldots,\overline{s}(t_n))$.

ההשמה מתוקנת:

$$s[y \leftarrow d](x) = \begin{cases} d & x = y \\ s(x) & x \neq y \end{cases}$$

$s[y \leftarrow 8]$	x	y	z	$\ldots$	s	x	y	z	$\ldots$
	1	8	3	$\ldots$		1	2	3	$\ldots$

הגדרת $\models$

$M \underset{s}{\models} \alpha$

α נוסחה , s השמה, M מבנה

$M, s \models \alpha$

באינדוקציה מעל מבנה הנוסחה

<u>בסיס:</u>

$M \underset{s}{\models} R(t_1,\ldots,t_n)$

$(\overline{s}(t_1),\ldots,\overline{s}(t_n)) \in R^M$

כתוב $R^N(\overline{s}(t_1),\ldots,\overline{s}(t_n))$ הוא T.

$M \underset{s}{\models} \approx (t_1,t_2)$

$\overline{s}(t_1) = \overline{s}(t_2)$

<u>צעד:</u>

$M \underset{s}{\not\models} \alpha \Leftrightarrow M \underset{s}{\models} \neg\alpha$

$M \underset{s}{\models} \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow$

$M \underset{s}{\models} \alpha$ וגם $M \underset{s}{\models} \beta$

$M \underset{s}{\models} \alpha \to \beta \Leftrightarrow$

$M \underset{s}{\not\models} \alpha$ או $M \underset{s}{\models} \beta$

$\Leftrightarrow M \underset{s}{\models} \forall x \alpha$

לכל $d \in D^M$ $M \underset{s[x \leftarrow d]}{\models} \alpha$

$\Leftrightarrow M \underset{s}{\models} \exists x \alpha$

קיים $d \in D^M$ כך ש־ $M \underset{s[x \leftarrow d]}{\models} \alpha$.

דוגמא:

מילון: $\tau = (R(\circ,\circ), G(\circ), F(\circ,\circ))$

מבנה: $M = (\underbrace{\mathbb{N}}_{D^M}, \underbrace{<}_{R^M}, \underbrace{\alpha \cdot x}_{G^M(x)}, \underbrace{x+y}_{F^M(x,y)})$

השמה:

$s(x) = 2$ $\boxed{\text{s(y)=5}}$

$$\alpha = \exists x(R(G(x), F(x,y))$$

$$\Leftrightarrow M \underset{s}{\vDash} \alpha$$

קיים $d \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\Leftrightarrow M \underset{\underbrace{s[x \leftarrow d]}_{s}}{\vDash} R(G(x), F(x,y))$

קיים d כך ש־ $(\overline{s}'(G(x), \overline{s}'(F(x,y))) \in R^M,$

קיים d כך ש־ $\underbrace{(G^M(\overline{s}'(x)), F^N(\overline{s}'(x), \overline{s}'(y)w) \in <}_{2d<d+5}$

- ⋆ ערך z לא השפיע על התוצאה בהשמה.
- ⋆ ערך y ־ השפיע.
- ⋆ ערך x ־ לא השפיה.

נגדיר משתנים חפשיים/קשורים בנוסחה
באינדוקצייה על מבנה הנוסחה α.
<u>בסיס:</u> α נוסחה אטומית.
$(R(t_1, \ldots, t_n))$
לכל x שנמצא ב־α, x חופשי עבור α.
<u>צעד:</u>
עבור קשרים $\alpha = \beta \Box \gamma$
משתנה x הוא חופשי ב־α
אם ורק אם הוא חופשי ב־β או חופשי ב־γ.
$\alpha = \neg\beta$
x חופשי ב־α אם ורק אם הוא חופשי ב־β.
$\alpha = \forall x\beta$,$\alpha = \exists x\beta$
y חופשי ב־α אם ורק אם y חופשי ב־β <u>וגם</u> $\boxed{y \neq x}$
x לא חופשי ב־α ($y = x$ לא חופשי ב־α).
משתנה הוא <u>קשור</u> ב־α אם הוא אינו חופשי ב־α
<u>אינטוטיציה:</u>
משתנים חופשיים־ערכם משפיע על ערך הנוסחה.
מתשנים קשורים ־ ערכם אינו משפיע.

דוגמא:

$$\alpha = (\forall x \underbrace{R(x,y)}_{\underbrace{x,y}_{y}}) \wedge \underbrace{Q(x)}_{x} \wedge \underbrace{\exists z \underbrace{Q(z)}_{z}}_{\text{none}}$$

המשתנים החופשיים ב־α הם x, y.

למה:

נתונה α מעל מילון τ, מבנה M מעל τ והשמה s_1, s_2 <u>שמתאימות ל־M.</u>
אם לכל משתנה חופשי x של α $s_1(x) = s_2(x)$ אז

$$M \underset{s_1}{\vDash} \alpha \Leftrightarrow M \underset{s_2}{\vDash} \alpha$$

הגדרה:

נוסחה של תחשיב היחסים שאין בה משתנים חופשיים נקראת <u>פסוק</u>.
ערך פסוק אינו תלוי בהשמה וניתן להרשם $M \vDash \alpha$.
ניתן לרשום:
קיימת השמה s כך ש־$M \underset{s}{\vDash} \alpha$ אם ורק אם $M \vDash \alpha$.

דוגמא לפסוק:

$$\alpha = \forall x \exists y R(x,y)$$
$$M = (\mathbb{N}, \underbrace{<}_{R^N})$$
$$\Leftrightarrow M \underset{s}{\vDash} \forall x \exists y R(x,y)$$
לכל d_1 $\exists y R(x,y)$ $\Leftrightarrow M \underset{s[x \leftarrow d_1]}{\vDash}$
לכל d_1 קיים d_2 $R(x,y)$ $\Leftrightarrow M \underset{s[x \leftarrow d_1][y \leftarrow d_2]}{\vDash}$
לכל d_1קיים d_2 $d_1 < d_2 \Leftrightarrow$
$\boxed{\mathrm{T}}$.

דוגמא נוספת:

$$M \underset{s}{\nvDash} \forall x \exists y R(x,y)$$
לכל d_1 קיים d_2כך ש־
$$\Leftrightarrow M \underset{\underbrace{s[x \leftarrow d_1][y \leftarrow d_2]}_{s'}}{\vDash} R(x,y)$$
לכל d_1 קיים $d_2$$R^M(s'(x), s'(y))\Leftrightarrow$
לכל d_1 קיים d_2 $(d_1, d_2) \in < \Leftrightarrow$
לכל d_1 קיים d_2 $d_1 < d_2$.

גדירות של יחס בתוך מבנה נתון

<u>בשונה</u> מגדירות ואי־גדירות של <u>קבוצת מבנים שנעשה</u> **<u>בהמשך</u>**<u>(דומה לתחשיב הפסוקים)</u>.
<u>נתון מבנה M</u> מעל τ אינטואיטיבית: השאלה היא האם אפשר לבטא בעזרת המילון של M מושגים(יחסים) שאינם במילון.
בהינתן מבנה M מעל τ
יחס אמיתי לא סימן יחס:$P \subseteq (D^M)^n$ n־מקומי.
יחס p n מקומי הוא <u>גדיר ב־M</u> אם קיימת נוסחה α מעל τ, בעלת n משתנים חופשיים $v_1, \ldots v_n$
כך שלכל השמה s מתקיים:
$M \underset{s}{\vDash} \alpha \Leftrightarrow (s(v_1), \ldots, s(v_n)) \in P$.
נאמר אז ש־α מגדירה את P ב־M.

דוגמא:

$$\tau=(R(\circ,\circ))$$
$$M=(\mathbb{N},\underbrace{\leq}_{R^N})$$

היחס(אונרי) $P\subseteq N$ מוגדר $P=\{0\}$.

ב־α שמגדירה את p יהיה <u>משתנה חופשי יחיד:</u>

$$\alpha(v_2)=\forall v_1 R(v_2,v_1)$$

צ"ל לכל השמה s:

$$M\underset{s}{\models} d(v_2)\Leftrightarrow s(v_2)\in p$$
$$\Leftrightarrow M\underset{s}{\models}\forall v_1 R(v_2,v_1)$$

לכל $d\in\mathbb{N}$ $\Leftrightarrow M\underset{s[v_1\leftarrow d]}{\models} R(v_2,v_1)$

לכל $d\in\mathbb{N}$ $\Leftrightarrow (s(v_2),d)\in\leq$

$$\Leftrightarrow s(v_2)=0$$

$s(v_2)\in P$.

דוגמא דומה במבנה שונה

$$\tau=\langle R(\circ,\circ)\rangle$$
$$M=(2^{\mathbb{N}},\subseteq)$$
$$p=\{\emptyset\}\subseteq D^M$$
$$\alpha=\forall v_1(R(v_2,v_1))$$

להוכיח שאם α מגדירה את p במילון M החדש.

באותו מבנה:

$$p'=\{(x,y)|x\subsetneq y\}\subseteq (D^M)^2$$
$$\varphi_1(x,y)=R(x,y)\wedge\neg R(y,x)$$
$$\varphi_2(x,y)=R(x,y)\wedge\neg(x\approx y)$$

צ"ל לכל השמה s

$$M\underset{s}{\models}\varphi_1\Leftrightarrow (s(x),s(y))\in P'$$
$$M\underset{s}{\models}\varphi_2\Leftrightarrow (s(x),s(y))\in P'.$$