

## לוגיקה ותורת הקבוצות - תרגול 6

### מערכת הוכחה לתחשיב הפסוקים

תזכורת: קבוצת הפסוקים היכחים,  $Ded(\emptyset)$ , היא הקבוצה האינדוקטיבית  $X_{B,F}$  המוגדרת באופן הבא:

$$W = WFF_{\{\neg, \rightarrow\}} \bullet$$

$$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \bullet \text{ קבוצת האקסיומות, כאשר:}$$

$$A_1 = \{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \mid \alpha, \beta \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}\} -$$

$$A_2 = \{(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \mid \alpha, \beta, \gamma \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}\} -$$

$$A_3 = \{((\neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \mid \alpha, \beta \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}\} -$$

$$F = \{MP\} \bullet \text{ קבוצת כללי ההיסק, כאשר } MP \text{ הוא כלל הניתוק } \frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}.$$

$$\text{צורת רישום נוספת: } MP(\alpha, \alpha \rightarrow \beta) = \beta.$$

מערכת הוכחה עם הנחות: קבוצת הפסוקים היכחים מקבוצת פסוקים  $\Sigma$  (הנחות),  $Ded(\Sigma)$ , היא הקבוצה האינדוקטיבית  $X_{B \cup \Sigma, F}$  (עבור  $B, W$  ו- $F$  מהגדרה 1).

$$\bullet \text{ אם } \alpha \in Ded(\Sigma) \text{ נאמר כי } \alpha \text{ יכח מ-}\Sigma \text{ ונסמן } \Sigma \vdash \alpha.$$

$$\bullet \text{ סדרת היצירה של פסוק } \alpha \text{ מעל } Ded(\Sigma) \text{ נקראת סדרת הוכחה של } \alpha \text{ מתוך } \Sigma.$$

$$\bullet \text{ אם } \Sigma = \emptyset, \text{ אז } Ded(\emptyset) = X_{B,F} \text{ קבוצת הפסוקים היכחים (ללא הנחות).}$$

### משפט הנאותות ועקביות

משפט הנאותות הרחב: לכל קבוצת פסוקים  $\Sigma$  מתקיים, אם  $\Sigma \vdash \alpha$  אז  $\Sigma \models \alpha$ .

סימון:  $Con(\Sigma) = \{\alpha \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}} \mid \Sigma \vdash \alpha\}$ . כלומר, משפט הנאותות משמעותו:  $Ded(\Sigma) \subseteq Con(\Sigma)$ .

מסקנה ממשפט הנאותות: אם  $\Sigma \not\models \alpha$  אז  $\Sigma \not\vdash \alpha$ .

משפט הנאותות הצר: אם  $\Sigma \vdash \alpha$  אז  $\Sigma \models \alpha$ .

### עקביות

הגדרה 1: קבוצת פסוקים  $\Sigma \subseteq WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$  היא עקבית אם לא קיים  $\alpha \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$  כך ש- $\Sigma \vdash \neg\alpha$  וגם  $\Sigma \vdash \alpha$ .

משפט 1 (הגדרה שקולה):  $\Sigma$  עקבית אם"מ קיים פסוק  $\alpha$  כך ש- $\Sigma \not\vdash \alpha$ .

### איך מראים שקבוצה $\Sigma$ היא עקבית?

לפי ההגדרה השקולה, די להראות פסוק  $\alpha$  כך ש- $\Sigma \not\vdash \alpha$ , כלומר  $\alpha \notin Ded(\Sigma)$ .

לפי המסקנה ממשפט הנאותות, די להוכיח כי  $\alpha \notin Con(\Sigma)$ , כלומר  $\Sigma \not\models \alpha$ .

תרגיל 1: הוכיחו כי הקבוצה  $\Sigma = \{p_i \rightarrow p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\} = \{p_0 \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_2, \dots\}$  היא עקבית.

משפט 2: אם  $\Sigma$  ספיקה אז  $\Sigma$  עקבית.

תרגיל 2:

נגדיר סדרה של קבוצות פסוקים:

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= \{\neg p_0\} \\ \Sigma_1 &= \{p_0, \neg p_1\} \\ \Sigma_2 &= \{p_0, p_1, \neg p_2\} \\ &\vdots\end{aligned}$$

באופן כללי  $\Sigma_i = \{p_0, p_1, \dots, p_{i-1}, \neg p_i\}$ .

1. האם לכל  $i$  מתקיים ש- $\Sigma_i$  עקבית?

2. האם  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$  עקבית?

3. האם  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$  עקבית?

4. תהי  $X \neq \emptyset$  קבוצת קבוצות פסוקים.

הוכיחו: אם לכל  $\Sigma \in X$  מתקיים ש- $\Sigma$  עקבית, אז  $\bigcap X$  היא עקבית.

### משפט השלמות

משפט השלמות: לכל פסוק  $\alpha$  וקבוצת פסוקים  $\Sigma$ , אם  $\Sigma \vdash \alpha$  אז  $\Sigma \models \alpha$ .

בצרוף משפט הנאותות נקבל כי  $\Sigma \models \alpha \Leftrightarrow \Sigma \vdash \alpha$ .

מסקנה ממשפט השלמות: אם  $\Sigma \not\vdash \alpha$ , אז  $\Sigma \not\models \alpha$ .

משפט 3: לכל קבוצת פסוקים  $\Sigma$ , אם  $\Sigma$  עקבית אז  $\Sigma$  ספיקה.

בצרוף משפט 2 נקבל כי  $\Sigma$  עקבית אמ"מ  $\Sigma$  ספיקה.

תרגיל 3: נגדיר מערכת הוכחה חדשה לתחשיב הפסוקים מעל  $WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$ .

• קבוצת האקסיומות מכילה את הפסוקים מהצורה הבאה:

לכל  $\alpha, \beta, \gamma \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$

-  $A_1 : \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

-  $A_2 : (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

• כללי היסק:

-  $MP(\alpha, \alpha \rightarrow \beta) = \beta$

-  $MV$  (יוגדר בהמשך)

נסמן ב- $\Sigma \vdash_N \alpha$  את הטענה שפסוק  $\alpha$  יכיח מתוך  $\Sigma$  במערכת החדשה.

1. נגדיר  $MV(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) = \alpha$ .

הוכיחו/ הפריכו: המערכת החדשה שלמה.

כלומר, לכל קבוצת פסוקים  $\Sigma \subseteq WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$  ולכל פסוק  $\alpha \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$ , אם  $\Sigma \models \alpha$  אז  $\Sigma \vdash_N \alpha$ .

## תרגול 6 לוגיקה

### תרגיל 1:

הוכיחו כי הקבוצה  $\Sigma = \{p_i \rightarrow p_{i+1} | i \in \mathbb{N}\} = \{p_0 \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_2, \dots\}$  היא עקבית.

#### הוכחה:

נבחר  $\alpha = \neg(p_0 \rightarrow p_0)$ , נוכיח כי  $\Sigma \not\models \alpha$ . יש להראות השמה המספקת את  $\Sigma$  אבל לא את  $\alpha$ .

$$\begin{aligned}\overline{V}_T(p_i \rightarrow p_{i+1}) &= TT_{\rightarrow}(V_T(p_i), V_T(p_{i+1})) \\ TT_{\rightarrow}(T, T) &= T\end{aligned}$$

ולכן  $V_T(\alpha) = F$  אבל  $\Sigma$  מספקת את  $\Sigma$  (לפי מסקנה ממשפט הנאותות) קיבלנו  $\Sigma \not\models \alpha \Leftarrow \Sigma \not\models \neg(p_0 \rightarrow p_0)$  עקבית. (הגדרה שקולה עקביות)

### משפט 2:

אם  $\Sigma$  ספיקה אז  $\Sigma$  עקבית.

#### משפט 2 הוכחה:

נניח כי  $\Sigma$  ספיקה, אז קיימת לפי הגדרה השמה  $v$  כך ש  $v \models \Sigma$  ו  $v \models \neg(p_0 \rightarrow p_0) = F$ .  
 $\Sigma \not\models \neg(p_0 \rightarrow p_0) \Leftarrow \underbrace{\Sigma \not\models \neg(p_0 \rightarrow p_0)}_{\text{neotut}}$

### תרגיל 2:

נגדיר סדרה של קבוצות פסוקים:

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= \{\neg p_0\} \\ \Sigma_1 &= \{p_0, \neg p_1\} \\ \Sigma_2 &= \{p_0, p_1, \neg p_2\} \\ &\vdots\end{aligned}$$

באופן כללי:

$$\Sigma_i = \{p_0, p_1, \dots, p_{i-1}, \neg p_i\}$$

1. האם לכל  $i$  מתקיים ש- $\Sigma_i$  עקבית?
2. האם  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$  עקבית?
3. האם  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$  עקבית?
4. תהי  $X \neq \emptyset$  קבוצת קבוצות פסוקים. הוכיחו אם לכל  $\Sigma \in X$  מתקיים ש- $\Sigma$  עקבית, אז  $\bigcap X$  היא עקבית.

#### פתרון 1:

כן, על פי משפט מספיק להראות ש- $\Sigma_i$  ספיקה. לכל  $i$  נגדיר השמה  $v_i$  באופן הבא:

$$V_i(p_k) \begin{cases} F & k = i \\ T & k \neq i \end{cases}$$

$v_i$  מספקת את  $\Sigma_i$  ולכן  $\Sigma_i$  ספיקה וממפשט עקבית. (צריך להוכיח).

#### פתרון 2:

לא,  $p_0, \neg p_0 \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$  גדול  $p_0 \in \Sigma_1$  ו- $\neg p_0 \in \Sigma_0$  מהגדרת איחוד גדול  $p_0, \neg p_0 \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$  מהנחת המבוקש:  
 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i \vdash \neg p_0$  וגם  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i \vdash p_0$   
 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$  מוכיחה את  $p_0$  וגם  $\neg p_0$  ולכן מהגדרת עקביות  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$  אינה עקבית מסקנה:  
 איחוד של קבוצות עקביות לא בהכרח עקבי.

#### פתרון 3:

כן, נשים לב כי  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i = \emptyset$  זו קבוצה ספיקה ולפי משפט היא עקבית.

#### פתרון 4:

נניח בשלילה ש- $\bigcap X$  לא עקבית.  
 לכל  $\alpha \in \text{WFF}_{\{\rightarrow, \neg\}}$  מתקיים  $\bigcap X \vdash \alpha$   
 מכאן ש- $X \neq \emptyset$ , קיימת  $\Sigma$  כך ש- $\bigcap X \subseteq \Sigma$  (לפי הגדרת חיתוך גדול).  
 ממונוטוניות ההוכחה מתקיים  $\Sigma \vdash \alpha$  לפי הגדרה  $\Sigma$  לא עקבית וזו סתירה.

### תרגיל 3:

1. נגדיר  $MV(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) = \alpha$ .  
הוכיחו המערכת החדשה שלמה, כלומר לכל קבוצת פסוקים  $\Sigma \subseteq WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$  ולכל פסוק  $\alpha \in WFF_{\{\neg, \rightarrow\}}$ , אם  $\Sigma \models \alpha$  אז  $\Sigma \vdash_N \alpha$ .

#### הוכחה סעיף 1:

הטענה נכונה, תהי קבוצת פסוקים  $\Sigma$  ופסוק  $\alpha$  כך ש- $\Sigma \models \alpha$  נראה כי  $\Sigma \vdash_N \alpha$  כך נראה  
סדרת הוכחה:

$$1. (A_1) \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

$$2. (MV(1)) \alpha$$

נשים לב בכלל לא השתמשנו בנתון ש- $\Sigma \models \alpha$ . המערכת מוכיחה כל  $\alpha$  ובפרט לא נאותה.