

לוגיקה - תרגול 4

השמות

הערה: מכאן ואילך נשמיט סוגריים 'מיותרים' מהפסוק על ידי הגדרת סדר קדימיות בין הקשרים:

1. \neg (הקשר בעל הקדימות הגבוהה ביותר)

2. \vee, \wedge

3. \rightarrow (הקשר בעל הקדימות הנמוכה ביותר)

שימו לב: בשאלות הנוגעות לתחביר אין להשמיט סוגריים!

הגדרה 1: פונקציה $v : \{p_0, p_1, p_2, \dots\} \rightarrow \{F, T\}$ נקראת השמה.

דוגמאות:

1. $v_F(p_i) = F$ מוגדרת כך שלכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים

2. $v_T(p_i) = T$ מוגדרת כך שלכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים

סימונים:

• Ass היא קבוצת כל ההשמות.

• TT_\circ היא טבלת האמת של קשר \circ כלשהו.

הגדרה 2: בהינתן השמה v , השמה מורחבת \bar{v} היא פונקציה $\bar{v} : WFF \rightarrow \{F, T\}$ המוגדרת באינדוקציה:

בסיס: לכל $i \in \mathbb{N}$, $\bar{v}(p_i) = v(p_i)$.

סגור: לכל $\alpha, \beta \in WFF$

• $\bar{v}(\neg\alpha) = TT_\neg(\bar{v}(\alpha))$

• לכל $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$, $\bar{v}(\alpha \circ \beta) = TT_\circ(\bar{v}(\alpha), \bar{v}(\beta))$

הגדרה 3: תהי $v \in Ass$ ו- $\alpha \in WFF$. אם $\bar{v}(\alpha) = T$ נאמר ש- v מספקת את α , ונסמן $v \models \alpha$. אם α טאוטולוגיה, נסמן $\models \alpha$.

משפט 1 – משפט התלות הסופית: יהי פסוק α ושתי השמות v_1, v_2 . אם לכל אטום p_i המופיע ב- α מתקיים $\bar{v}_1(p_i) = \bar{v}_2(p_i)$ אז $\bar{v}_1(\alpha) = \bar{v}_2(\alpha)$.

מושגי יסוד סמנטיים

הגדרה 4: נאמר כי פסוק α הוא ספיק אם קיימת השמה המספקת אותו (קיימת v כך ש- $\bar{v}(\alpha) = T$).

דוגמאות: $p_0 \vee p_1$, p_0

הגדרה 5: פסוק α נקרא טאוטולוגיה אם כל השמה מספקת אותו (לכל v , $\bar{v}(\alpha) = T$).

דוגמאות: $p_0 \vee \neg p_0$, $p_0 \rightarrow p_0$

הגדרה 6: פסוק α נקרא סתירה אם לא קיימת השמה המספקת אותו (לכל v , $\bar{v}(\alpha) = F$).

דוגמה: $p_0 \wedge \neg p_0$

שימו לב: אם פסוק אינו סתירה אז הוא ספיק (ולא בהכרח טאוטולוגיה).

תרגיל 1: הוכיחו/ הפריכו: אם $\alpha \vee \beta$ טאוטולוגיה, אז α טאוטולוגיה או β טאוטולוגיה.

הגדרה 7: יהיו α, β פסוקים. אם כל השמה המספקת את α מספקת גם את β נאמר ש- α גורר לוגית את β (או

לחילופין, ש- β נובע לוגית מ- α), ונסמן $\alpha \models \beta$.

טענות:

1. אם α טאוטולוגיה ו- $\alpha \models \beta$, אז β טאוטולוגיה.

2. אם β סתירה ו- $\alpha \models \beta$, אז α סתירה.

3. אם α סתירה אז לכל פסוק β מתקיים $\alpha \models \beta$.

4. אם β טאוטולוגיה אז לכל פסוק α מתקיים $\alpha \models \beta$.

5. \models הוא יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי (לא סימטרי).

הגדרה 8: יהיו α, β פסוקים. אם לכל השמה v מתקיים ש- $\bar{v}(\alpha) = \bar{v}(\beta)$ נאמר כי α ו- β שקולים לוגית ונסמן $\alpha \equiv \beta$.

משפט 2: α ו- β שקולים לוגית אם"מ $\alpha \models \beta$ וגם $\beta \models \alpha$.

מושגים סמנטיים עבור קבוצות פסוקים

הגדרה 9: תהי $\Sigma \subseteq WFF$. אם v מספקת את כל הפסוקים ב- Σ נאמר כי v מספקת את Σ ונסמן $v \models \Sigma$.

דוגמה: $v_T \models \{p_1, p_2\}$

הגדרה 10: קבוצת פסוקים Σ נקראת ספיקה אם קיימת השמה v כך ש- v מספקת את Σ .

הגדרה 11: תהי $\Sigma \subseteq WFF$. אם כל השמה המספקת את Σ מספקת גם את α נאמר כי Σ גוררת לוגית את α (או

לחילופין ש- α נובע לוגית מ- Σ) ונסמן $\Sigma \models \alpha$.

דוגמה: $\{p_0, p_1\} \models p_0 \wedge p_1$

הגדרה 12: יהיו $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq WFF$. נאמר כי Σ_1 ו- Σ_2 שקולות לוגית ונסמן $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$ אם לכל השמה v מתקיים

$v \models \Sigma_1 \iff v \models \Sigma_2$.

דוגמה: $\{p_0, p_1\} \equiv \{p_0 \wedge p_1\}$

תרגיל 3:

תהי $\Sigma \subseteq \text{WFF}$. נניח שכל פסוק $\alpha \in \Sigma$ ספיק. האם בהכרח Σ ספיקה?

תרגיל 4:

יהיו קבוצת פסוקים Σ ופסוק α , ונניח ש- $\Sigma \cup \{\alpha\}$ ספיקה. האם בהכרח $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ אינה ספיקה?

תרגול 4 לוגיקה

תזכורת:

הפונקציה $TT_{\rightarrow} : \{T, F\} \times \{T, F\} \rightarrow \{T, F\}$
מוגדרת כך ש $TT_{\rightarrow}(\alpha, \beta)$ היא:

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

הגדרה 2 (המשך):

דוגמה:

נתונה ההשמה :

$$v(p_i) = \begin{cases} F & i = 1 \\ T & \text{else} \end{cases}$$

נחשב את הערך של הפסוק $p_0 \rightarrow (\neg p_1)$
תחת ההשמה v .

$$\begin{aligned} \bar{v}(p_0 \rightarrow (\neg p_1)) &= \\ TT_{\rightarrow}(\bar{v}(p_0), \bar{v}(\neg p_1)) &= \\ TT_{\rightarrow}(v(p_0), TT_{\neg}(\bar{v}(p_1))) &= \\ TT_{\rightarrow}(T, TT_{\neg}(v(p_1))) &= \\ TT_{\rightarrow}(T, TT_{\neg}(F)) &= \\ TT_{\rightarrow}(T, T) &= T. \end{aligned}$$

סיכום:

כלומר :

$$\bar{v}(p_0 \rightarrow (\neg p_1)) = T$$

כדי להראות ש $p_0 \vee \neg p_0$ טאוטולוגיה, נבדוק את כל ההשמות למשתנים הרלוונטיים (p_0) , ובעזרת טבלת אמת:

p_0	$\neg p_0$	$p_0 \vee \neg p_0$
F	T	T
T	F	T

טענות:

1. אם α טאוטולוגיה ו- $\alpha \models \beta$, אז β טאוטולוגיה.

הפרכה:

סימונים:

$$\alpha \vee \beta = p_0 \vee \neg p_0, \beta = \neg p_0, \alpha = p_0$$

נראה שזו אכן דוגמה נגדית:

נראה שכל תנאי השאלה מתקיימים

נראה ש $p_0 \vee \neg p_0$ טאוטולוגיה-הוכחה

בעזרת טבלת אמת נראה שמספקת

(א) נראה ש- p_0 לא טאוטולוגיה

$$\bar{v}_F(\alpha)$$

$$\bar{v}_F(p_0) = v_F(p_0) = F$$

הראינו שקיימת לפחות השמה אחת שאינה מספקת

את p_0 ולכן זו לא טאוטולוגיה.

(ב) נראה כי $\beta = \neg p_0$ לא טאוטולוגיה

$$\bar{v}_T(\beta) = \bar{v}_T(\neg p_0) = TT_{\neg}(v_T(p_0)) = TT_{\neg}(T) = F$$

תרגיל 3:

הפרכה:

דוגמה נגדית:

$$\Sigma = \{p_0, \neg p_0\}$$

$\neg p_0, p_0$ ספיקים

נראה ש- Σ לא ספיקה נניח בשלילה ש- Σ ספיקה

, אז קיימת v כך ש- v מספקת את Σ אז :

$$\bar{v}(p_0) = T$$

$$\bar{v}(\neg p_0) = T$$

$$\bar{v}(\neg p_0) = TT_{\neg}(\bar{v}(p_0)) = TT_{\neg}(T) = F$$

תרגיל 4:

הטענה אינה נכונה $\Sigma = \emptyset, \alpha = p_0, \neg \alpha = \neg p_0$.