

לוגיקה הרצאה 9

גדירות:

קבוצה של פסוקים $K = M(\Sigma)$ (קבוצה של השמות)
קבוצת השמות K היא גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים Σ כך ש- $K = M(\Sigma)$.

טענה:

לא לכל תת קבוצה של השמות תהיה תת קבוצה של פסוקים שמגדירה אותה.

משקולי ספירה:

כמה נוסחאות: קבוצה בת מניה \aleph_0
כמה קבוצות של פסוקים: 2^{\aleph_0} .
כמה השמות יש: 2^{\aleph_0} .
קבוצות של השמות: $2^{2^{\aleph_0}}$.
השמה: וקטור אינסופי מעל $\{0, 1\}$.

דוגמה לקבוצות של פסוקים גדירים:

נראה קבוצות של פסוקים שהן גדירות.

1. הקבוצה הריקה של השמות - K .
האם קיימת $M(\Sigma) = K$
 $\Sigma_1 = \{p_1 \wedge \neg p_1\}$
 $\Sigma_2 = \{p_1, \neg p_1\}$
 $\Sigma_3 = \{p_1, \neg p_1, p_2 \vee p_3\}$

2. K - מכילה את ההשמות.
כל Σ שמכילה רק טאוטולוגיות מגדירה את K .

3. $K = \{V_T\}$
 V_T היא ההשמה שנותנת ערך T לכל p_i .
 $\Sigma = \{p_i | i \in \mathbb{N}\}$

כדי להוכיח ש- Σ מגדירה את K צריך להוכיח
 $K = M(\Sigma)$
 $\Leftrightarrow i \in \mathbb{N}$ לכל $v(p_i) = T \Leftrightarrow v \in M(\Sigma)$
 $v \in K \Leftrightarrow v = V_T$

תחשיב היחסים

דוגמה מיותרת לחלוטין:

לכל x [דוברת אמת $(x) \Rightarrow$ יוני (x)]
 דובר אמת (סוקרטס) \Rightarrow יוני (סוקרטס)
 יוני (סוקרטס)
 דובר אמת (סוקרטס)
 "לכל מספר טבעי x, x גדול או שווה ל-0"
 "לכל x קיים y כך ש- $x = y + 1$ "

שילתות במסדי נתונים

- * "האם קיים עובד טכניון שהוא גם סטודנט בטכניון?"
- * "האם כל הסטודנטים בטכניון הולכים להופעות יום הסטודנט?"

תחום: המספרים הטבעיים \ בני אדם \ הסטודנטים.
קבועים: סוקרטס, 0.
פונקציות: $y + 1$.
יחסים: $(x = y + 1)$, $=$, \geq , דובר אמת.

הסימנים המשותפים

קבוצה בת מניה של מתננים: x_1, x_2, \dots
 סימנים נוספים:
 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, (,), \approx$ [סימן שוויון], \exists [קיים], \forall [לכל], \approx

מילון

$\tau = (\underbrace{R_1, R_2, \dots}_{\text{relation signs}}, \underbrace{F_1, F_2, \dots}_{\text{function symbols}}, \underbrace{c_1, c_2, \dots}_{\text{const. symbols}})$
 $R(\circ)$ - יחס אונארי
 $R(\circ, \circ)$ - יחס בינארי
 $R(\circ, \circ, \circ)$ - יחס טרינארי
 בכל תחשיב יחסים יש סימן קבוע $(\circ, \circ) \approx$

דוגמה:

$\tau = (R_1(\circ, \circ), R_2(\circ), F_1(\circ, \circ), c)$
 נדגים פרוש לסימנים בצורה לא פורמלית.
 הפרוש/מבנה/פשר M

$$M = \{ \underbrace{D^M}_{\text{M's domain}}, \underbrace{R_1^M, R_2^M}_{\text{relations over } \Delta^M}, F_1^M, c^M \}$$

$$R_1^M : D^M \times D^M \rightarrow \{T, F\}$$

$$R_1^M : D^M \rightarrow \{T, F\}$$

$$F_1^M : D^M \times D^M \rightarrow D^M$$

$$C^M \in D^M$$

מבנה זה חלק מהסמנטיקה

$$D^M = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$R_1^M(x, y) : x \leq y$$

$$R_2^M(x) : \text{ראשוני } x$$

$$F_1^M(x, y) : x \cdot y$$

$$C^M : 3$$

$$\underbrace{R_2(c)} \wedge (\underbrace{R_1(x, c)} \rightarrow R_2(x))$$

$$x \text{ ראשוני} \rightarrow (x \leq 3 \wedge 3 \text{ ראשוני}).$$

נכון אם 1 ראשוני. נכון

אם 1 אינו ראשוני אז $x = 2, x = 3, x = 20$, הנוסחה T . עבור $x = 1$ מתפרשת כ- F .

סמנטיקה: מבנה + השמה למשתנים.

מבנה אחר

מבנה אחר M_2 שזהה ל- M חוץ מ- $C^{M_2} = 5$

השמה שנותמת ל- x עבור ערך 4.

הנוסחה היא F

$$\neg R_2(F(x, y))$$

$$\neg R_2(F^M(x, y))$$

$x \cdot y$ אינו ראשוני, עבור $x = 1$ ו- $y = 7$ הטענה אינה נכונה.

$$\varphi_3 = \forall x \exists y (F(x, y) \approx x)$$

האם נכונה מעל (ביחס ל- M):

“לכל x קיים y כך ש- $x \cdot y = x$ ”

נכון, נבחר $y = 1$.

הגדרת מבנה שמעליו נפרש נוסחאות של תחשיב היחסים מעל מילון τ .

בהינתן:

$$M = (\underbrace{D^M}_{\text{structure's domain}}, \underbrace{R_1^M, R_2^M, F_1^M, F_2^M, \dots, c_1^M, c_2^M, \dots}_{\tau = (R_1, R_2, \dots, F_1, F_2, \dots, c_1, c_2, \dots)})$$

כאשר D^M הוא קבוצה לא ריקה שנקראת תחום המבנה.

\star לכל סימן קבוי, נתאם קבוע מתוך D^M .

* לכל סימן פונקציה k^{F_i} מקומי נתאם פונקציה k מקומית F_i^M .
 $F_i^M \cdot (D^M)^K \rightarrow D^M$

לכל סימן יחס k^R -מקומי מתאימים יחס k מקומי.
 $R^M : (D^M)^K \rightarrow \{T, F\}$
 לסימן השוויון \approx נתאים
 $\approx^M = \{(d, d) \mid d \in D^M\}$

דוגמה:

הסכמות על סימונים:

P, Q, R סימני יחס

F, G, H סימני פונקציה

a, b, c קבועים

d איברים מ- D

$\tau = (\underbrace{\approx}_{\text{redundant}}, R(\circ, \circ), F(\circ, \circ), G(\circ), c_0, c_1)$

נגדיר מבנה M_4 :

D^{M_4} קבוצת המילים הסופיות הלא ריקות מעל "א" ב $\{a, b\}$

$D^{M_4} = \{a, b, aa, ab, ba, bb, \dots\}$

$\approx^{M_4} :=$

$R^{M_4}(x, y) : y$ רישא של x

$F^{M_4}(x, y) : x \cdot y$ שרשור

$G^{M_4}(x) : x$ היפוך סדר האותיות במילה

$c_0^{M_4} : a$

$c_1^{M_4} : b$

$\varphi_4 = R(x, F(x, y))$

הפרוש של φ_4 מעל M_4

" x הוא רישא של $x \cdot y$ "

תמיד נכון ללא תלות בהשמות ל- x, y .

$G(G(x)) \approx x$

הפוך של הפוך של אותיות x שווה ל- x .

נכון לכל השמה ל- x .

הרחבת הסינטקס

שמות עצם Terms

אינטואיטיבית

משתנים x, y

קבוע 3

פונקציה +

במתמטיקה:

ביטויים: $x, x + y, x + y + 3, 3$

הקבוצה Terms מוגדרת אינדוקטיבית $Terms = X_{B,F}$

B : כולל את כל המשתנים ואת כל סימני הקבוע.

F : מספר הפעולות הוא כמספר הפונקציה בהינתן סימן פונקציה F k מקומי.

ובהינתן $t_1, \dots, t_k \in Terms$, $F_i(t_1, \dots, t_k) \in Terms$

דוגמה:

במילון שני סימני קבוע a, b
 וסימן פונקציה F דו-מקומי
 וסימן פונקציה G חד-מקומי.

דוגמאות לשמות עצם (סינטקטי)

a
 b
 $F(a, b)$
 $G(F(a, b))$
 $x_1, x_2, \dots,$
 $F(a, x_1)$
 $G(F(a, x_1))$

כל שמות העתם מתפקדים כמו פונקציות בהינתן ערכים מ- D^M
 הם מחזירים ערכים מ- D^M .

$M_5 = (\mathbb{N}, \underbrace{F^M}_+, \underbrace{G^M}_\cdot, \underbrace{a}_5, \underbrace{b}_0)$
 $G(F(a, x_2))$ השמה שתתן ערך ל- x
 $s: \text{VAR} \rightarrow D^{M_5}$ משתנים
 נתון M_5 והשמה $s(x_1) = 2$ $s(x_2) = 3$.