לוגיקה ־ תרגול 9

תחשיב היחסים ־ סינטקס

הגדרה 1: מילון $\tau = \langle R_1^{n_1}, R_2^{n_2}, \ldots, F_1^{m_1}, F_2^{m_2}, \ldots, c_1, c_2, \ldots \rangle$ מורכב מסימני יחס, סימני פונקציה וסימני קבוע.

- סימן יחס $R_i^{n_i}$: n_i הוא המקומיות של היחס ו־i הוא אינדקס.

  (בדרך כלל נסמן "סימן יחס R_i n_i־מקומי" במקום $R_i^{n_i}$).

- סימן פונקציה $F_i^{m_i}$: m_i הוא המקומיות של הפונקציה ו־i הוא אינדקס.

  (בדרך כלל נסמן "סימן פונקציה F_i m_i־מקומי" במקום $F_i^{m_i}$).

- סימן קבוע c_i: i הוא אינדקס.

- המשתנים זהים בכל מילון ונסמן $\mathrm{Var} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$.

דוגמה למילון: $\tau_1 = \left\langle R_1^2, R_2^2, F_1^3, c_1 \right\rangle$ שני היחסים הם דו־מקומים והפונקציה תלת־מקומית.

סימון נוסף $\tau_1 = \langle R_1(\circ,\circ), R_2(\circ,\circ), F_1(\circ,\circ,\circ), c_1 \rangle$

הגדרה 2: קבוצת שמות העצם מעל מילון τ היא קבוצה אינדוקטיבית $\mathrm{Term}(\tau) = X_{B_{term}, F_{term}}$ כאשר:

בסיס: $B_{term} = \mathrm{Var} \cup \{c_1, c_2, \ldots\}$ (סימני הקבוע שבמילון τ והמשתנים)

פעולות: $F_{term} = \{$סימני הפונקציה שבמילון $\tau\}$

דוגמאות לשמות עצם מעל המילון τ_1:

x_1

c_1

$F_1(x_2, x_2, c_1)$

$F_1(x_1, x_2, F_1(c_1, x_1, x_3))$

האם $F_1(x_1, c_1)$ הוא ש"ע מעל τ_1? לא, כי F_1 היא תלת מקומית.

הגדרה 3: קבוצת הנוסחאות האטומיות מעל מילון τ היא הקבוצה $\mathrm{AF}(\tau)$ המוגדרת באופן הבא:

- אם R_i הוא סימן יחס n־מקומי מהמילון τ

  ו־$t_1, t_2, \ldots, t_n$ הם שמות עצם מעל τ, אז $R_i(t_1, t_2, ..., t_n)$ היא נוסחה אטומית.

- אם t_1 ו־t_2 הם שמות עצם מעל τ, אז $(t_1 \approx t_2)$ היא נוסחה אטומית.

דוגמאות לנוסחאות אטומיות מעל המילון τ_2:

$R_1\left(c_1,x_1\right)$

$\left(c_1\approx x_1\right)$

$R_2\left(F_1\left(x_1,x_2,c_1\right),x_2\right)$

$\left(F_1\left(x_1,x_2,c_1\right)\approx c_1\right)$

האם $R_1\left(c_1,R_2\left(c_1,x_1\right)\right)$ היא נוסחה אטומית? לא, כי $R_2\left(c_1,x_1\right)$ אינו ש"ע.

הגדרה 4: אוסף הנוסחאות מעל מילון τ היא קבוצה אינדוקטיבית $X_{B_{form},F_{form}}$ כאשר:

בסיס: $B_{form}=\mathrm{AF}\left(\tau\right)$ (הנוסחאות האטומיות)

פעולות: $F_{form}=\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}\cup\{\forall x_i\mid i\in\mathbb{N}\}\cup\{\exists x_i\mid i\in\mathbb{N}\}$, כאשר

- הפעלת קשרים מתבצעת באופן זהה לתחשיב הפסוקים.
- הפעלת כמתים מתבצעת כך:

  אם φ נוסחה אז לכל $i\in\mathbb{N}$ גם $\left(\forall x_i\varphi\right)$ ו־$\left(\exists x_i\varphi\right)$ הן נוסחאות.

דוגמאות לנוסחאות מעל המילון τ_1:

$R_1\left(c_1,x_1\right)\wedge\left(c_1\approx x_1\right)$

$\left(\forall x_1 R_1\left(c_1,x_1\right)\right)\rightarrow\left(F_1\left(x_2,x_2,c_1\right)\approx c_1\right)$

האם x_1 היא נוסחה? לא!

האם $F_1\left(x_2,x_2,c_1\right)$ היא נוסחה? לא!

שימו לב: אם t הוא ש"ע הוא אינו יכול להיות נוסחה.

האם $R_1\left(c_1,x_1\right)\rightarrow F_1\left(x_2,x_2,c_1\right)$ היא נוסחה? לא!

תחשיב היחסים — סמנטיקה

הגדרה 5: מבנה $M=\left\langle D^M,R_1^M,R_2^M,\ldots,F_1^M,F_2^M,\ldots,c_1^M,c_2^M,\ldots\right\rangle$
עבור $\tau=\left\langle R_{n_1,1},R_{n_2,2},\ldots,F_{m_1,1},F_{m_2,2},\ldots,c_1,c_2,\ldots\right\rangle$ מורכב מהחלקים הבאים:

- $D^M\neq\emptyset$ - קבוצת התחום, העולם.
- $R_i^M\subseteq\underbrace{D^M\times D^M\times\cdots\times D^M}_{n_i}$ - הפירוש של סימן יחס R_i n_i־מקומי.

  כלומר, R_i^M הוא יחס n_i־מקומי מעל D^M.
- $F_i^M:\underbrace{D^M\times D^M\times\cdots\times D^M}_{m_i}\rightarrow D^M$ - הפירוש של סימן פונקציה F_i m_i־מקומית.

  כלומר, F_i^M היא פונקציה m_i־מקומית מעל D^M.
- $c_i^M\in D^M$ - הפירוש של סימן קבוע c_i. כלומר, c_i^M איבר בתחום D^M.

דוגמה למבנה עבור מילון: יהי מילון $\tau=\left\langle R\left(\circ,\circ\right),F\left(\circ,\circ\right),c\right\rangle$.

- מבנה עבור τ: $M_1 = \left\langle \underbrace{\{0,1,2,3\}}_{D^M}, \underbrace{\{(0,0),(0,1),(1,2)\}}_{R^M}, \underbrace{\text{first}}_{F^M}, \underbrace{0}_{c^M} \right\rangle$ כאשר $\text{first}(i,j) = i$.
- מבנה נוסף עבור τ: $M_2 = \left\langle \underbrace{\mathbb{N}}_{D^M}, \underbrace{<}_{R^M}, \underbrace{+}_{F^M}, \underbrace{0}_{c^M} \right\rangle$

<u>הגדרה 6</u>: השמה s עבור מבנה M היא פונקציה $s : \{x_0, x_1, \dots\} \to D^M$.

<u>דוגמה להשמה עבור מבנה:</u> יהי $M = \langle \mathbb{Z}, \leq, +, 1005 \rangle$ מבנה עבור τ מהדוגמה הקודמת.

נגדיר את ההשמה s עבור M באופן הבא:

$$s(x_i) = \begin{cases} -5 & 0 \leq i < 10 \\ 0 & 10 \leq i < 20 \\ 5 & \text{אחרת} \end{cases}$$

<u>הגדרה 7</u>: לכל השמה s, <u>ההשמה המורחבת</u> היא פונקציה $\overline{s} : \text{Term}(\tau) \to D^M$ המוגדרת באינדוקציה על מבנה שמות העצם:

בסיס: לכל משתנה x_i, $\overline{s}(x_i) = s(x_i)$

לכל סימן קבוע c_i, $\overline{s}(c_i) = c_i^M$

סגור: לכל סימן פונקציה F_i n־מקומי, $\overline{s}(F_i(t_1, t_2, \dots, t_n)) = F_i^M(\overline{s}(t_1), \overline{s}(t_2), \dots, \overline{s}(t_n))$

<u>הגדרה 8</u>: לכל השמה s, משתנה x_i ו־$d \in D^M$, <u>ההשמה המתוקנת</u> היא ההשמה הבאה:

$$s[x_i \leftarrow d](x_j) = \begin{cases} d & i = j \\ s(x_j) & i \neq j \end{cases}$$

דוגמה:

$$s[x_{10} \leftarrow 8](x_i) = \begin{cases} -5 & 0 \leq i < 10 \\ 8 & i = 10 \\ 0 & 10 < i < 20 \\ 5 & \text{אחרת} \end{cases}$$

<u>הגדרה 9</u>: עבור מבנה M, השמה s ונוסחה φ היחס $M \vDash_s \varphi$ (M ו־s מספקים את φ) מוגדר באינדוקציה:

בסיס: $M \vDash_s R_i(t_1, t_2, \dots, t_n)$ אמ"מ $(\overline{s}(t_1), \overline{s}(t_2), \dots, \overline{s}(t_n)) \in R_i^M$

$M \vDash_s t_1 \approx t_2$ אמ"מ $\overline{s}(t_1) = \overline{s}(t_2)$

סגור: $M\vDash_s\neg\varphi$ אמ"מ $M\nvDash_s\varphi$

$M\vDash_s\varphi_1\vee\varphi_2$ אמ"מ $M\vDash_s\varphi_2$ או $M\vDash_s\varphi_1$

$M\vDash_s\varphi_1\wedge\varphi_2$ אמ"מ $M\vDash_s\varphi_2$ וגם $M\vDash_s\varphi_1$

$M\vDash_s\varphi_1\to\varphi_2$ אמ"מ (אם $M\vDash_s\varphi_1$ אז $M\vDash_s\varphi_2$) כלומר $M\nvDash_s\varphi_1$ או $M\vDash_s\varphi_2$

$M\vDash_s\varphi_1\leftrightarrow\varphi_2$ אמ"מ ($M\vDash_s\varphi_1$ אם ורק אם $M\vDash_s\varphi_2$)

$M\models_s\forall x_i\varphi$ אמ"מ לכל $d\in D^M$ מתקיים $M\models_{s[x_i\leftarrow d]}\varphi$

$M\models_s\exists x_i\varphi$ אמ"מ קיים $d\in D^M$ שמקיים $M\models_{s[x_i\leftarrow d]}\varphi$

תרגיל 1: יהיו $\tau=\langle R(\circ,\circ),F(\circ,\circ),c\rangle$ מילון, יהי $M=\langle\mathbb{Z},\leq,+,1005\rangle$ מבנה מעל τ, ו־s ההשמה עבור M שהוגדרה קודם.

הוכיחו/ הפריכו את הטענות הבאות:

1. $M\vDash_s R(x_0,F(x_0,F(x_{10},c)))\vee(x_0\approx x_{10})$
2. $M\vDash_s\forall x_0R(x_0,x_1)$

הגדרה 12: עבור מבנה M ונוסחה φ נאמר כי M מספק את φ ונסמן $M\models\varphi$ אם לכל השמה s מתקיים $M\models_s\varphi$.

לוגיקה תרגול 9

דוגמה:

נחשב את הערך ש־$\overline{s}$ נותנת לש"ע $F(x_0, F(x_{10}, t))$:

$$\begin{aligned}\overline{s}(F(x_0, F(x_{10}, c)) =& F^M(\overline{s}(x_0), \overline{s}(F(x_{10},)) \ = \\ \overline{s}(x_0) + \overline{s}(F(x_{10}, c)) =& s(x_0) + F^M(\overline{s}(x_{10}, \overline{s}(c)) \ = \\ -5 + \overline{s}(x_{10})\overline{s}(c) =& -5 + s(x_{10}) + 1005 \ = \\ -5 + 0 + 1005 =& 1000\end{aligned}$$

תרגיל 1:

יהיו $\tau = \langle R(\circ, \circ), F(\circ, \circ), c\rangle$ מילון , יהי $M = \langle \mathbb{Z}, \leq, +, 1005\rangle$ מבנה מעל τ,
ו־s ההשמה עבורר M שהוגדרה קודם.
הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

1. $M \vDash_s R(x_0, F(x_0, F(x_{10}, c))) \vee (x_0 \approx x_{10})$
2. $M \vDash_s \forall x_0 R(x_0, x_1)$

$$s(x_p) = \begin{cases} -5 & - \leq 1 < 10 \\ 0 & 10 \leq i < 20 \\ 5 & \text{otherwise} \end{cases}$$

הוכחה 1:

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow M \vDash_s R(x_0, F(x_0, F(x_{10}, c))) \vee (x_0 \approx x_{10}) \\ &\Leftrightarrow M \vDash_s R(x_0, F(x_0, F(x_{10}, c))) \text{ or } M \vDash_s (x_0 \approx x_{10}) \\ &\Leftrightarrow (\overline{s}(x_0, s(F(x_0, F(x_{10}, C)))) \text{ or } \overline{s}(x_0) = \overline{s}(x_{10}) \\ (\text{truth}) &- 5 \leq 1000 \text{ or } (\text{false}) \ - 5 = 0\end{aligned}$$

בסה"כ התנאי מתקיים.

הפרכה 2:

$\Leftrightarrow M \vDash_s \forall x_0 R(x_0, x_1)$

לכל $d \in \mathbb{Z}$, מתקיים $R(x_0, x_1)$ $\Leftrightarrow M \vDash_{\underbrace{s[x_0 \leftarrow d]}_{s'}}$

לכל $d \in \mathbb{Z}$ מתקיים $(\overline{s}'(x_0), \overline{s}'(x_1)) \in R^M \Leftrightarrow$

לכל $d \in \mathbb{Z}$ מתקיים $(d, -5) \in R^M \Leftrightarrow$

לכל $d \in \mathbb{Z}$ מתקיים $d \leq -5$

לא נכון למשל עבור $d = 0$.