

## לוגיקה - תרגול 2

תזכורת: בתרגול הקודם הגדרנו את הקבוצה האינדוקטיבית הבאה:

- העולם:  $X = \{s, t\}^*$

- הבסיס:  $B = \{\epsilon, st, ts\}$

- פונ' היצירה:  $F = \{f_1, f_2\}$ , כאשר:

$$f_1(w_1, w_2) = sw_1w_2t -$$

$$f_2(w_1, w_2) = w_1w_2w_1 -$$

איך מראים שאיבר  $a$  שייך לקבוצה אינדוקטיבית  $(a \in X_{B,F})$ ?

משפט 1:  $a \in X_{B,F}$  אם ורק אם קיימת ל- $a$  סדרת יצירה מעל  $B$  ו- $F$

ע"פ התרגול הקודם הוכחנו כי  $st, sstt, tststs \in X_{B,F}$

איך מראים שאיבר  $a$  אינו שייך לקבוצה אינדוקטיבית  $(a \notin X_{B,F})$ ?

נמצא קבוצה  $T \subseteq X$  המקיימת:

$$1. X_{B,F} \subseteq T$$

$$2. a \notin T$$

מסקנה:  $a \notin X_{B,F}$

תרגיל 1: עבור  $X_{B,F}$  מהדוגמה הוכיחו כי  $tst \notin X_{B,F}$

תרגיל 2:

נתון:

- העולם:  $X = \{a, b\}^*$  - קבוצת המילים באותיות  $a$  ו- $b$ .

- הבסיס:  $B = \{aa\}$

- פונקציות היצירה:  $F = \{f\}$ , כאשר:

$$f(w) = \begin{cases} aawb & \text{אם } w \text{ מתחיל ב- } a \\ bbwa & \text{אחרת} \end{cases}$$

1. הוכיחו/ הפריכו:  $baa \in X_{B,F}$

2. הוכיחו/ הפריכו:  $aabb \in X_{B,F}$

תרגיל 3: תהינה  $S_1 = X_{B_1,F_1}$  ו-  $S_2 = X_{B_2,F_2}$  כך ש-  $S_1 = S_2$ .

הוכיחו כי מתקיים  $X_{B_1 \cup B_2, F_1 \cup F_2} = S_1$ .

## תרגול 2 לוגיקה

### תרגיל 1:

נגדיר קבוצה  $T = \{w \in \{s, t\}^* \mid |w| \% 2 = 0\}$   
 נוכיח כי  $tst \notin T$   
 אי-זוגיות  $|tst|$   
 הוכחנו כי  $X_{B,F} \subseteq T$   
 באינדוקציית מבנה בתירגול קודם.  
 מסקנה:  $tst \in X_{B,F} \Leftarrow$

### תרגיל 2:

1. הטענה לא נכונה:

נגדיר תכונה:

$$T_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid a \text{ מתחיל ב-} w\}$$

נראה  $X_{B,F} \subseteq T_1$  בא"מ.

בסיס:

נראה שלכל  $w \in T_1, w \in B$

$aa$ , מתקיים  $w \cdot \epsilon$  מתחילה ב- $a$ .

סגור:

ניח  $u' \in T_1$  כלומר  $u'$  מתחילה ב- $a$ .

תהי  $u = f(u')$  מה"א  $w'$  מתחילה ב- $a$  ולכן

$aa$  ולכן  $w = aa$  מתחילה ב- $a$ .

מסקנה:  $X_{B,F} \subseteq T_1$  וכן  $ba \notin T_1$

(לא מתחילה ב- $a$ ) ולכן  $ba \notin X_{B,F}$ .

2. הטענה לא נכונה:

$\Leftarrow \#_a(w)$  מספר הפעמים שאות מופיע ב  $w$  ונגדיר תכונה

$$T_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) > \#_b(w)\}$$

בסיס: לכל  $w \in B$  מתקיים  $w = aa$

$$\#_a(w) = 2 > 0 = \#_b(w)$$

סגור: ניח  $w' \in T_2$  כלומר  $\#_a(w') > \#_b(w')$

תהי  $w = f(w')$

נפריד למקרים:

(א) אם  $w' = aa$  מתחילה ב- $a$

$$\#_a(w') > \#_b(w')$$

$$\text{ולכן } \#_a(w) = 2 + \#_a(w') > 1 + \#_b(w') = \#_b(w)$$

(ב) אם  $w' = bbw'a$  מתחילה ב  $w = ba$  מה"א

$$\#_a(w) = 1 + \#_a(w')$$

$$\#_b(w) = 2 + \#_b(w')$$

האם בהכרח  $\#_a(w) > \#_b(w)$ ?

לא, למשל עבור  $w' = baa$

התכונה לא נשמרת.

האם המשמעות שאיברים ב- $X_{B,F}$  לא מקיימת את התכונה, לא כי אני יודעים שבקבוצה האינדוקטיבית כל המילים מתחילות ב- $a$ . ולכן נרצה לחזק תכונה.

$$T'_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \in X_{B,F}, \#_a(w) > \#_b(w)\}$$

בסיס:

נראה שלכל  $w \in B$  מתקיים  $w \in T'_2$ ,  $w = aa$

$w \in X_{B,F}$  ולכן  $w \in B$ .

2.  $\#_a(w) = 2 > 0 = \#_b(w)$  ולכן  $w \in T'_2$ .

סגור: נניח  $w' \in T'_2$

כלומר  $\#_a(w') > \#_b(w')$  וכן  $w' \in X_{B,F}$

תהי  $w = f(w')$  מה"א  $w' \in X_{B,F}$  ולכן מסעיף קודם היא מתחיל ב- $a$  ולכן

$$w = aaw'b$$

1. מה"א  $w' \in X_{B,F}$   $f \in F$  והקבוצה  $X_{B,F}$  סגורה תחת פעולה זו

מהגדרה ולכן  $w \in X_{B,F}$ .

2. מה"א  $\#_a(w') > \#_b(w')$

ולכן  $\#_a(w) = 2 + \#_a(w') > 1 + \#_b(w') = \#_b(w)$

וכן  $X_{B,F} \subseteq T'_2$  וכן  $aabb \in T'_2$

$$\#_a(aabb) = \#_b(aabb)$$

ולכן  $aabb \notin X_{B,F}$

מסקנה:

לעיתים כאשר נוכל להוכיח ש- $X_{B,F}$  מקיימת תכונה  $f$  נזדקק

לתכונה 2 שכבר הוכחנו ש  $X_{B,F}$  מקיימת לשם כך נגדיר תכונה מחוזקת:

$$T_B = \{w \in X \mid w \in X_{B,F}, f \text{ מקיים את } w\}$$

**תרגיל 3:**

**הוכחה:**

$$X = X_{B_1 \cup B_2, F_1 \cup F_2}$$

נוכיח כי  $X = S_1$  ע"י הכלה דו כיוונית

• כיוון ראשון  $S_1 \subseteq X$  באינדוקציית מבנה.

בסיס:

נוכיח כי  $B_1 \subseteq X$

$$B_1 \subseteq B_1 \cup B_2 \subseteq X$$

סגור:

נניח כי  $a_1, \dots, a_n \in X$

ונראה כי לכל  $f \in F_1$

$f(a_1, \dots, a_n) \in X$   
 $f \in F_1 \cup F_2 \Leftarrow f \in F$   
 סגורה ל  $F_1 \cup F_2$  ע"י הבנייה  
 $f(a_1, \dots, a_n) \in X$  ולכן  
 כיוון שני:

$X \subseteq S_1$  נוכיח באינדוקציית מבנה

בסיס:

$$B_1 \cup B_2 \subseteq S_1$$

נניח:

כי  $b \in B_1 \cup B_2$   
 אזי  $b \in B_1$  או  $b \in B_2$  נחלק למקרים

•  $b \in B_1$  במקרה זה  $b \in S_1$  ע"י הזמנה

•  $b \in B_2$  במקרה זה  $b \in S_2$  ע"י הזמנה  
 וגם מכיוון ש  $S_1 = S_2$  מתקיים  $b \in S_1$

סגור:

נניח

$a_1, \dots, a_n \in S_1$   
 ונראה כי לכל  $f \in F_1 \cup F_2$   
 $f(a_1, \dots, a_n) \in S_1$   
 נחלק למקרים:

•  $f \in F_1$  מכיוון ש-  $a_1, \dots, a_n \in S_1$  סגירות נתון  $f(a_1 \dots a_n) \in S_1$

•  $f \in F_2$  מכיוון ש-  $a_1, \dots, a_n \in S_1$  ו-  $S_1 = S_2$   $a_1 \dots a_n \in S_2$

$S_2$  סגורה תחת הפעולות ב-  $F_2$   $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in S_2$   
 מכיוון ש-  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in S_1 \Leftarrow S_1 = S_2$