

לוגיקה הרצאה 3

תחשיבי פסוקים

סינטקס: בסיס $\{p_i | i \in N\}$ - הפסוקים האטומיים.

$$F_{\neg}(\alpha) = (\neg\alpha)$$

$$(\vee, \wedge, \rightarrow) F_{\Box}(\alpha, \beta) = (\alpha \Box \beta)$$

WFF – well form formulas

סמנטיקה:

התאמה לפסוקים ערכי אמת (T,F)

$$p_0 \vee p_2$$

השמה T F

לפסוק ערך T

F F

F

הגדרת סמנטיקה:

נתונה השמה

$$V : \{p_i | i \in N\} \rightarrow \{T, F\}$$

נגדיר השמה \hat{V}

$$\hat{V} : WFF \rightarrow \{T, F\}$$

הגדרת \hat{V} :

$$1. \text{ לכל פסוק אטומי } v(p) = \hat{V}(p_i)$$

$$2. \text{ לפסוק במבנה } \alpha = (\neg\beta) \text{ } TT_{\neg} : \{T, F\} \rightarrow \{T, F\}$$

$$TT_{\neg} : \{T, F\} \rightarrow \{T, F\}$$

truth table

$$TT_{\neg}(T) = F$$

$$TT_{\neg}(F) = T$$

β	$\neg\beta$
---------	-------------

T	F
---	---

F	T
---	---

$$\widehat{V}(\neg(\alpha)) = TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha))$$

$$\widehat{V}(\alpha) = TT_{\vee}(\widehat{V}(\beta), \widehat{V}(\gamma))$$

$$TT_{\vee}(T, T) = T$$

$$TT_{\vee}(T, F) = T$$

$$TT_{\vee}(F, T) = T$$

$$TT_{\vee}(F, F) = F$$

α	β	$\alpha \vee \beta$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

$$\widehat{V}(\alpha) = TT_{\wedge}(\underbrace{\widehat{V}(\beta)}_{\text{truth of sub}}, \underbrace{\widehat{V}(\gamma)}_{\text{truth of sub}})$$

$$TT_{\wedge}(T, T) = T$$

$$TT_{\wedge}(\frac{T}{F}, \frac{F}{F}) = F$$

α	β	$\alpha \wedge \beta$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

$$\alpha = (\beta \rightarrow \gamma) \quad .5$$

$$\widehat{V}((\beta \rightarrow \gamma)) = TT_{\rightarrow}(\widehat{V}(\beta), \widehat{V}(\gamma))$$

β	γ	$\beta \rightarrow \gamma$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

אם המכוננית תתקלקל אז אגיע באחור

$$A \rightarrow B$$

$$F \quad T$$

המכוננית לא התקלקלה והגעתי באיחור

סיכום:

בסמנטיקה של תחשיב הפסוקים:

$V : \{p_i | i \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{T, F\}$ בהינתן

$\widehat{V} : WFF \rightarrow \{T, F\}$ מגדירים

באופן הבא:

$$\begin{aligned} \widehat{V}(\alpha) &= V(\alpha) \text{ אם } \alpha = p_i \\ \widehat{V}(\alpha) &= TT_{\neg}(\widehat{V}(\beta)) \text{ אם } \alpha = (\neg\beta) \\ \widehat{V}(\alpha) &= TT_{\Box}(\widehat{V}(\beta), \widehat{V}(\gamma)) \text{ אם } \alpha = (\beta \Box \gamma) \end{aligned}$$

טענה:

בהינתן השמה v ,
 לכל פסוק α , $\widehat{V}(\alpha)$
 מתאים ל- α ערך אמת יחיד שנקבע ע"י v וע"י
 פונקציות טבלאות האמת (TT_{\Box}) .

הוכחה:

באינדוקציה על מבנה הפסוק
 מסתמכת על כך

\star פונקציה v

\star פונקציות TT_{\Box}

כשה דנים בסמנטיקה קובעים סדר קדמאות בין קשרים שיאפשר לוותר על חלק מהסוגריים:

\star הקשר \neg מופעל ראשון

\star קשרים \neg, \wedge, \vee מופעלים אחרי

\star הקשר \rightarrow אחרי

$$(\neg p_0) \vee p_1 \text{ כמו לכתוב } \neg p_0 \vee p_1$$

מושגים סמנטיים נוספים

כאשר $\widehat{V}(\alpha) = T$ נאמר ש- v מספקת את α
 ונסמן $v \models \alpha$

הגדרה:

פסוק α הוא טאוטולוגיה אם הוא מקבל ערך T לכל השמה:

דוגמאות:

$$\neg \alpha \vee \alpha, \neg p_0 \vee p_0$$

טאוטולוגיה:

כל השורות בטבלת האמת

יהא T

[כל ההשמות מספקות את הפסוק]

P_0	$\neg p_0$	$\neg p_0 \vee p_0$
T	F	T
F	T	T

הוכחה ש- $\alpha \vee \neg \alpha$ הוא טאוטולוגיה:

$$\widehat{V}(\alpha \vee \neg \alpha) = TT_{\vee}(\widehat{V}(\alpha), \widehat{V}(\neg \alpha)) = TT_{\vee}(\widehat{V}(\alpha), TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha)))$$

2 מקרים:

$$TT_{\vee}(T, F) = T \Leftarrow TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha)) = F \Leftarrow V(\alpha) = T \quad 1.$$

$$TT_{\vee}(F, T) = T \Leftarrow TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha)) = T \Leftarrow V(\alpha) = F \quad 2.$$

$$| = \alpha \vee \neg \alpha \text{ על כן}$$

דוגמאות נוספות לטאוטולוגיה:

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)$$

איך נוכיח שזאת טאוטולוגיה?

להראות לכל השמה ערך הפסוק הוא T. (מספר אינסופי)

טענה:

לכל פסוק $\alpha \in WFF$

ולכל שתי השמות v_1, v_2 מתקיים:

אם לכל פסוק אטומי שמופיע ב- α מתקיים $v_1(p_i) = v_2(p_i)$

אז $\widehat{V}_1(\alpha) = \widehat{V}_2(\alpha)$

α, β	$\neg \beta, \neg \alpha$	$\alpha \rightarrow \beta$	$\neg \beta \rightarrow \neg \alpha$	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)$
T, T	F, F	T	T	T
T, F	T, F	F	F	T
F, T	F, T	T	T	T
F, F	T, T	T	T	T

שיטת הוכחה שניה שפסוק הוא טאוטולוגיה:

$$\text{נגדיר על } (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)$$

נניח בדרך השלילה שאינה טאוטולוגיה ולכן קיימת השמה v :

$$\widehat{V}()$$

$$\Rightarrow$$

$$\widehat{V}(\alpha \rightarrow \beta) = T$$

$$\widehat{V}(\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) = F$$

$$TT_{\neg}(\widehat{V}(\beta)) = \widehat{V}(\neg \beta) = T$$

$$TT_{\neg}(\widehat{V}(\alpha)) = \widehat{V}(\neg \alpha) = F$$

$$\Rightarrow$$

$$\widehat{V}(\beta) = F, \widehat{V}(\alpha) = T$$

$$\widehat{V}(\alpha \rightarrow \beta) = F$$

מסקנה:

לא קיימת v שנותנת לפסוק ערך F כלומר הוא טאוטולוגיה.

דוגמאות נוספות לטאוטולוגיה:

ראינו $\alpha \vee \neg \gamma$

$\neg(\alpha \wedge \neg \alpha)$

דסטריבוטיויות:

$$((\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)))$$

$$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$

דה מוגר:

$$\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg \alpha \wedge \neg \beta)$$

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg \alpha \vee \neg \beta)$$

מושג סמנטי נוסף: סתירה

ספקו הוא סתירה אם כל השמה נותנת לו ערך F .

דוגמאות:

$\alpha \wedge \neg \alpha$

כל שלילה של טאוטולוגיה

$\alpha \vee \neg \alpha$ טאוטולוגיה

$$\hat{V}(\neg \alpha) = TT_{\neg}(\hat{V}(\alpha)) = TT_{\neg}(T) = F$$

לכל השמה

נתונה α שאינה טאוטולוגיה, האם היא סתירה ?
לא טאוטולוגיה ולא סתירה.

טענה:

α היא סתירה $\Leftrightarrow \neg \alpha$ היא טאוטולוגיה

$\neg \alpha$ היא סתירה $\Leftrightarrow \alpha$ היא טאוטולוגיה

פסוק הינו ספיק אם קיימת השמה שמספקת אותו.

הגדרה:

השמה מספקת קבוצת פסוקים X

אם היא מספקת את כל אחד מהפסוקים ב- X .

$$v \models \alpha, \forall \alpha \in X, \Leftrightarrow v \models X$$

$$v \models \bigwedge_{\alpha \in X} \alpha$$

אם X קבוצה אינסופית

אז הביטוי אינו פסוק

מושג נוסף:

פסוק α נובע לוגית צפסוק β

אם כל השמה שמספקת את β מספקת גם את α .

$$\beta \models \alpha$$

“ \subseteq ”

דוגמא:

Error 404 "white board erased"

למה:

$\alpha \models \beta$ אם ורק אם $\alpha \rightarrow \beta$ (הוא טאוטולוגיה).

הוכחה:

נתון $\alpha \rightarrow \beta$

צ"ל $\alpha \models \beta$

נתונה השמה $v \models \alpha$

נראה ש- $v \models \beta$

נניח שלא:

$\hat{V}(\alpha) = T$

$\hat{V}(\beta) = F$

$\hat{V}(\alpha \rightarrow \beta) = F$

בסתירה לנתון $TT_{\rightarrow}(T, F) = F$

ש- $\alpha \rightarrow \beta$ הוא טאוטולוגיה.

$$x \in A/(B/C) \Leftrightarrow$$

$$x \in A \wedge x \notin (B/C) \Leftrightarrow$$

$$x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C \Leftrightarrow$$

$$x \in (A/B) \cup x \in A \cap C$$