לוגיקה הרצאה 2

<u>הגדרה אינדוקטיבית - של קבוצה</u>

W–העולם
B- מוכל ב W קבוצת בסיס
F- קבוצת פעולות\כללי יצירה
$X_{B,F}$ מוכלת ב W מוגדרת כקבוצה המקיימת:

1. B מוכל ב $X_{B,F}$
2. אם $X_{1...n}$שייך ל $X_{B,F}$ ו f שייך ל F אז $f(x_1, ..., x_n)$ שייך ל $X_{B,F}$.
3. $X_{B,F}$ הוא קבוצה מינימלית שמקיימת את א ו ב.

הראינו ש- $X_{B,F} = \cup X_i$
$X_1 = B$
$X_{i+1} = X_i \cup F(X_i)$

<u>משפט ההוכחה באינדוקציה</u>

אם קבוצהY מספקת את (א) ו-(ב) עבור F, B נתונים אז $X_{B,F} \subseteq Y$

<u>הוכחה באינדוקציית מבנה:</u>

כדי להוכיח ש-$X_{B,F} \subseteq Y$

1. $B \subseteq Y$
2. Y סגורה ל- F.

<u>להראות</u> $b \in X_{B,F}$

נראה <u>סדרת יצירה</u> $a_1 \ldots a_n$ כך ש-
$a_n = b$ ולכל $1 \leq i \leq n$
$a_i \in B$ או התקבלה מהקודמים הסדרה ע"י הפעלת פעולה מ-F.

להראות $b \notin X_{B,F}$

נציע תכונה(קבוצה) T ונראה
$X_{B,F} \subseteq T$
$b \notin T$

לוגיקה ־ תחשיב מורכב מ־

- הגדרה סינטקטית של שפה
- הגדרה של הסמנטיקה של מילים בשפה
- מערכת הוכחה עם אכסיומות וכללי היסק שמאפשרת להוכיח "משפטים"
- קשר בין אוסף הנוסחאות היכיחיות(יש אפשרות להוכיח אותן) לבין סמנטיקה.

תחשביב הפסוקים

סינטקס של תחשיב הפסיקים

דוגמאות "משתנים" A, B, C
$(+A)$,$(A \to B)$,$((A \to B) \to (B \to A))$
"השמש זורחת נסמן A , "חם בחוץ" נסמן ע"י B
השמש זורח וחם בחוץ $(A \wedge B)$
אם השמש זורחת אז חם בחוץ $(A \to B)$

הגדרה של הסינטקס של תחשיבי הפסוקים

קבוצה הפסוקים היא הקבוצה האינדוקטיבית שמוגדרת באופן הבא:
$W = (\{\vee, \wedge, \neg, \to, (,)\} \cup \{p_i | i \in N\})$
<u>בסיס:</u> $B = \{p_i | i \in N\}$
p_i נקראות פסוקים/פסוקים אטומיים
הפעולות:

- $F = \{F_\neg, F_\wedge, F_\vee, F_\to\}$
- $F_\neg(\alpha) = (\neg\alpha)$
- $F_\vee(\alpha, \beta) = (\alpha \vee \beta)$
- $F_\wedge(\alpha, \beta) = (\alpha \wedge \beta)$
- $F_\to(\alpha, \beta) = (\alpha \to \beta)$

איך נראה ש:
$((p_5 \wedge p_{11}) \to (p_6 \to p_5))$ (פסוק חוקי בשפה)

1. p_5
2. p_{11}
3. $(p_5 \wedge p_{11})$
4. p_6
5. $(p_6 \to p_5)$
6. $((p_5 \wedge p_{11}) \to (p_6 \to p_5))$

האם: $p_2(p_1$**פסוק ?**
לא!

נוכיח:

תכונה: כל פסוק הוא או אטומי או שמספר הסוגריים הפתוחים שווה למספר הסוגריים הסגורים.

הוכחה באינדוקציית מבנה:

בסיס לכל פסוק אטומי יש תכונה.

סגור נתונים α, β שמקיימים את התכונה
ב־α יש k סוגריים מכל סוג.
ב־β יש n סוגריים מכל סוג.
נסתכל על המקרה הפעלת $(\alpha \to \beta) = F_{\to}(\alpha, \beta)$
צ"ל ל־$(\alpha \to \beta)$ יש תכונה. (מספר הסוגריים מכל סוג n+k+1).
מסקנה מההוכחה ש־ $p_2(p_1$ אינו פסוק.(צריך היה להראות לכל פעולה).

הגדרה: עבור סדרות סימנים לא ריקות α ו־ β כך ש־ $\beta = b_1 \cdots b_k, \alpha = a_1 \dots a_n$
נאמר ש־α הוא רישא של β אם $n \leq k$ ובנוסף לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $a_i = b_i$

דוגמאות:

- ab הוא רישא של $abab$
- ab הוא רישא של $aabc$
- α הוא רישא ממש של β אם α רישא של β ו־ $(n < k)\alpha \neq \beta$

תכונה לכל פסוק β, אם α הוא ביטוי שהוא רישא ממש לא ריקה של β אז ב־α מספר הסוגריים השמאליים
גדול ממש ממספר הסוגריים הימניים.

מסקנה α לא פסוק
דוגמה:
$$\underbrace{\underbrace{((p_5 \to p_6}_{\alpha} \vee (p_7 \wedge p_{11})}_{\beta}$$
דוגמה לשפה חדשה שאין בה סוגריים ולכן אין בה קריאה יחידה:
סדרת סימנים $a \wedge b \wedge c$
(1)הפעלת $\wedge$ על $c, a \wedge b$
(2)הפעלת$\wedge$ על $b \wedge c, a$

משפט הקריאה היחידה

1. לכל פסוק α אם יש פסוקים β_1, γ_1 וקשר $\square$
כך ש־$\alpha = (\beta_2 \square \gamma_2)$ ובנוסף יש פסוקים
β_2, γ_2 וקשר $\triangle$ כך ש־ $\alpha = (\beta_2 \triangle \alpha_2)$
אז בהכרח $\beta_1 = \beta_2,\ \gamma_1 = \gamma_2$, ו־$\square$,$\triangle$ הם אותו קשר.

2. לכל פסוק α, אם יש פסוק β כך ש־ $\alpha = (\neg\beta)$ אז אין קשר
$\square$ ופסוקים γ, δ כך ש־ $\alpha = (\gamma \square \delta)$ ואם קיים β^*
כך ש־ $\alpha = (\neg\beta^*)$ אז $\beta = \beta^*$.

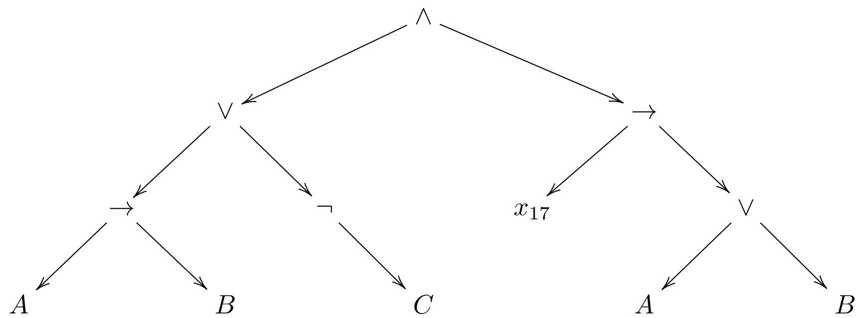
הוכחת (1): נניח בשלילה שיש $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \square, \triangle$
$\alpha = (\beta_1 \square \gamma_1) = (\beta_2 \triangle \gamma_2)$
ולא מתקיימות טענות המשפט

מקרה (1) ־ נניח $\beta_1 \neq \beta_2$ $\alpha = \underbrace{a_1}_{(}\ \underbrace{\underbrace{a_2 \ldots}_{b1} a_n}_{b2)}$

נניח ש־β_1 הוא רישא ממש של β_2.
β_1 הוא פסוק ולפי מסקנה מתכונה,
רישא ממש של פסוק אינו פסוק ולכן β_1 אינו פסוק.
סתירה לעובדה ש־ β_2, β_1 פסוקים.
מסקנה $\beta_1 = \beta_2$.

מקרה (2) ־ ידוע $\beta_1 = \beta_2$
אבל $\triangle \neq \square$
$\alpha = \underbrace{a_1}_{(}\ \underbrace{\ldots}_{\underbrace{b1}_{b2}}\ \underbrace{a_k}_{\underbrace{\square}_{\triangle}}\ \underbrace{a_n}_{)}$ (קיים־k).
$\square$ ו־ $\triangle$ מופיעים באותו מקום ב־α ולכן זהים.

מקרה (3) ידוע $\beta_1 = \beta_2, \square = \triangle$ ונניח $\gamma_1 \neq \gamma_2$
לא יתכן כי שתיהן מתחילות באותו מקום ב־α ונמשכות עד הסוף ולכן זהות.
כתוצאה מהקריאה היחידה אפשר להתאים לכל פסוק <u>עץ יצירה</u> שהעולם שלו הם
פסוקים אטומיים ובכל צומת פנימי יש קשר, אם הקשר הוא $\neg$ אז יש לצומת בן יחיד.
אם הוא $\wedge, \vee, \rightarrow$ אז יש לו 2 בנים.
$(((A \rightarrow B) \vee (\neg C)) \wedge (X_{17} \rightarrow (A \vee B)))$



משפט הקריאה היחידה מבטיח לנו כי לכל פסוק קיים עץ **יחיד**.

סמנטיקה

מטרה להתאים ערך אמת או שקר לפסוקים האטומיים ומזה להסיק ערך אמת או שקר לפסוק כולו.

- אמת - T
- שקר - F

ערכי אמת: $\{T,F\}$

השמה היא פונקציה מקבוצה הפסוקים האטומיים לקבוצה $\{T,F\}$

$$V:\{p_i|i\in N\}\rightarrow\{T,F\}$$

$$V_2(p_i)=\begin{cases}T & i\%2=0\\ F & i\%2\neq 0\end{cases}$$

סמנטיקה לפסוק כלשהו:

בהנתן $V:\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\rightarrow\{T,F\}$

נגדיר $\{T,F\}$ $\rightarrow$קבוצת הפסוקים:

$$\overline{V}:X_{B,F}\rightarrow\{T,F\}$$

נגדיר פונקציות טבלת אמת:

$$TT_{\neg}:\{T,F\}\rightarrow\{T,F\}$$
$$TT_{\wedge}:\{T,F\}\wedge\{T,F\}\rightarrow\{T,F\}$$
$$TT_{\vee}:\{T,F\}\vee\{T,F\}\rightarrow\{T,F\}$$
$$TT_{\rightarrow}:\{T,F\}\rightarrow\{T,F\}\rightarrow\{T,F\}$$