הרצאה 8 לוגיקה

מטרה: $X \vDash \alpha$ **אז** $X \vdash \alpha$

נאותות:

$X \vdash \alpha$ **אז** $X \vDash \alpha$

$X \nvDash \alpha$ אז $X \nvdash \alpha$

למה 1:

X עקבית $\Leftrightarrow$ כל תת־קבוצה סופית של X עקבית.

למה 2:

$X\bigcup\{\neg\alpha\}$ עקבית $\Leftrightarrow$ $X \nvdash \alpha$

למה 3:

אם X ספיקה אז X עקבית

מטרה:

להוכיח את הכיוון ההפוך
<u>צ"ל X עקבית אז X ספיקה</u>

הגדרנו:

X עקבית מקסימלית אם ורק אם לכל α בדיוק אחד מהבאים מתקיים $X \vdash \alpha$ או $X \vdash \neg\alpha$

למה 5:

לכל קבוצה עקבית X קיימת קבוצה עקבית מקסימלית Y , עד ש־$X \subseteq Y$.

למה 6:

לכל קבוצת פסוקים X
X עקבית אם ורק אם X ספיקה
$\Rightarrow$ עס' למה 3
$\Leftarrow$
נתון X עקבית
עס' למה 5 קיימת $X \subseteq Y$ כך ש־Y מקסימלית
נגדיר השמה v:

$$Y \vdash p_i \Leftrightarrow v(p_i) = T$$
$$Y \vdash \neg p_i \Leftrightarrow v(p_i) = F$$

<u>v מוגדרת היטב</u>
<u>טענה:</u>
לכל $\alpha \in Y$ מתקיים $Y \vDash v$.
כלומר $Y \vDash v$ **לא נוכיח.**
אז $X \vDash v$ והראינו ש־X ספיקה.
נסתכל על $\alpha \in X$ אז $\alpha \in Y$ ולכן $\alpha \vDash v$.

משפט השלמות:

אם $X \vDash \alpha$ אז $X \vdash \alpha$

הוכחה:

נתון $X \vDash \alpha$ ונניח בדרך השלילה ש־$X \nvdash \alpha$.
עס' למה ' $X \bigcup \{\neg\alpha\}$ עקבית ולכן למה 6 ספיקה
כלומר קיימת v

$$v \vDash X$$
$$v \vDash \neg\alpha$$
$$v \vDash \alpha$$
$$X \vDash \alpha \Rightarrow v \vDash \alpha$$

<u>סתירה</u>
מסקנה $X \vdash \alpha$.

מסקנה ממשפט השלמות והנאותות

$$\boxed{\vdash \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \vDash \alpha}$$

סיכום של הוכחת משפט השלמות

$$\boxed{\mathrm{X}\vdash \alpha \Leftarrow X \vDash \alpha}$$

רצינו:

$$\begin{array}{ccc} X \nvDash \alpha & \Leftarrow & X \nvdash \alpha \\ \Uparrow & & \Updownarrow \\ (\mathrm{Sfika})X \bigcup \{\neg\alpha\} & \Leftrightarrow & (\mathrm{Ikvit})X \bigcup \{\neg\alpha\} \end{array}$$

$M(X)$=\{קבוצת ההשמות v כך ש־$v \vDash X$\}
v היא מודל של X

משפט הקומפקטיות

לקבוצת פסוקים X יש מודל (היא ספיקה) אם ורק אם לכל תת־קבוצה סופית שלה יש מודל (היא ספיקה).

הוכחה:

X ספיקה $\Leftrightarrow$ X עקבית.
$\Leftrightarrow$ כל תת קבוצה סופית שלה עקבית
$\Leftrightarrow$ כל תת קבוצה סופית שלה היא ספיקה.

דוגמא לשמוש בקומפקטיות

נתונות שתי קבוצות של פסוקים Σ_1 ו־Σ_2 כך ש־

1. אין השמה שמספקת גם את Σ_1 וגם את Σ_2.
$M(\Sigma_1) \bigcap M(\Sigma_2) = \emptyset$
2. כל השמה מספקת או את Σ_1 או את Σ_2.

דוגמא פשוטה:

$\Sigma_1 = \{p_0 \wedge p_1\}$, $\Sigma_2 = \{\neg p_0 \vee \neg p_1\}$

כאשר Σ_1, Σ_2 <u>במקרה</u> סופיות

צריך להוכיח:

שקיים פסוק p_1 כך ש־Σ_1 שקולה לו כלומר לכל v: $v \models \Sigma_1 \Leftrightarrow v \models p_1$

וקיים פסוק p_2 ששקול ל־Σ_2.

שאלה:

האם $\alpha \bigwedge_{\alpha\in\Sigma_1} = p_1$ הוא פתרון?

<u>לא</u> כאשר Σ_1 היא אינסופית.

דוגמא:

$\Sigma_1 = \{p_0, \neg p_0, p_0 \vee \neg p_0\} \bigcup \{p_i, \neg p_i | i \in \mathbb{N}\}$ אף השמה אינה מספקת את Σ_1

$\Sigma_2 = \{p_0 \vee \neg p_0\}$ כל השמה מספקת את Σ_2.

$\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ אינה ספיקה

עס' משפט הקומקטיות קיימת קבוצה $D \subseteq \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$ <u>סופית</u> ולא ספיקה.

עס' קומפקטיות קיימת $D \subseteq \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$

D סופית , לא ריקה , לא ספיקה

$D_1 = D \bigcap \Sigma_1$,$D_2 = D \bigcap \Sigma_2$

לפחות אחת מ־D_1, D_2 אינה ריקה כי D אינה ריקה.

נניח D_1 אינה ריקה

$D_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \subseteq \Sigma_1$

$p_1 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \alpha_k$

$p_2 = \neg p_1$

נוכיח שלכל השמה v:

$v \models \Sigma_1 \Leftrightarrow v \models p_1$

- ⋆ $\Rightarrow$ $v \models \Sigma_1 \Leftarrow v \models \alpha$ לכל $\alpha \in \Sigma_1$

  בפרט ל־$\alpha_i \in D_1$

  $v \models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k = p$

- ⋆ $\Leftarrow$ $v \not\models \Sigma_1$ לפי נתון $v \models \Sigma_2 \Leftarrow v \models D_2$

  אבל נתון $D = D_1 \bigcup D_2$ אינה ספיקה ולכן $v \not\models D_1$

  כלומר קיים $\alpha \in D_1$ כך ש־$v \not\models \alpha$ מסקנה $v \not\models p_1$.

$\neg p_1 = p_2$

צ"ל לכל v, $v \models \Sigma_2 \Leftrightarrow v \models p_2$

$v \models \Sigma_2 \Leftrightarrow v \not\models \Sigma_1 \Leftrightarrow v \not\models p_1 \Leftrightarrow v \models \neg p_1$

$\underset{p_2}{\parallel}$

דוגמה:

נוסחה פסוקים שמתארת את המערכת M: α_M

נוסכחה פסוקים שמתארת את המפרט φ

$\alpha_M \wedge \neg\varphi$ ספיקה ?

- ⋆ כן: מצאנו באג
- ⋆ לא: המערכת נכונה.

מכרכת עם 2 תהליכים p_1 ו־p_2 שיש להם בקשות ויש ארביטר שמחליט מי יקבל את בקשתו.

לכל תהליך יש דגל:

- ⋆ P_i:R_1 מציג בקשה (request)
- ⋆ G_i: דגל של הארביטר.

  כש־G_1 הוא 1 אז p_1 מקבל את התור.

  כש־G_2 הוא 1 אז P_2 מקבל את התור.

לארביטר יש גם משתנים:

- ⋆ D_1 - p_1 קבל את התור בפעם הקודמת.
- ⋆ D_2 - p_2 קבל את התור בפעם הקודמת.

תאור המערכת:

$$\text{EXEC}=$$
$$(\overset{1}{G_1} \leftrightarrow (\overset{1}{R_1} \wedge (\neg \overset{0}{R_2} \vee \overset{1}{D_2})))$$
$$(\overset{1}{G_2} \leftrightarrow (\overset{1}{R_2} \wedge (\neg \overset{0}{R_1} \vee \overset{1}{D_1})))$$

מפרט:

$\varphi_1 = \neg(G_1 \wedge G_2)$

$\text{EXEC}_1(\overbrace{G_1}^{1} \wedge \overbrace{G_2}^{1})$

שלילת המפרט

האם הפסוק ספיק ?

$\text{EXEC}_1 \neg(D_1 \wedge D_2) = \alpha_M^{'}$ המערכת החדשה

נבדוק $\alpha_M' \wedge (G_1 \wedge G_2)$ שלילת המפרט

ספיק? **לא.**

מסקנה:

המערכת המתוקנת מספקת את המפרט $\neg(G_1 \wedge G_2)$.

נניח שהנוסחה ספיקה

$$v \vDash \textbf{EXEC} \wedge \neg(D_1 \wedge D_2)$$
$$\wedge (G_1 \wedge G_2)$$
$$\Rightarrow \overline{v}(G_1) = T \quad \overline{v}(G_2) = T$$
$$\Rightarrow \overline{v}(R_1 \wedge (\neg R_2 \vee D_2)) = T$$
$$\Rightarrow \overline{v}(R_1) + T$$
$$* \, \overline{v}(\neg R_2 \vee D_2) = T$$
$$\overline{v}(G_2) = T \Rightarrow \overline{v}(R_2) = T$$
$$* * \overline{v}(\neg R_2) = F$$
$$\underbrace{\Rightarrow}_{*+**} \overline{v}(D_2) = T$$

מפרט דרישה

$\varphi_2 = (R_1 \wedge \neg R_2 \rightarrow G_1)$

$\alpha_M' \wedge (R_1 \wedge \neg R_2 \wedge \neg G_1)$ שלילת המפרט