לוגיקה — תרגול 13

תזכורת

משפט הקומפקטיות: תהי Σ קבוצת נוסחאות, Σ ספיקה אמ"מ כל תת־קבוצה סופית של Σ ספיקה.

איך מוכיחים אי גדירות של אוסף מבנים?

1. מניחים בשלילה שקיימת קבוצת פסוקים X כך ש־$M(X)=K$.
2. בוחרים קבוצת פסוקים מפורשת Y כך ש־$K\cap M(Y)=\emptyset$.
3. מוכיחים כי $X\cup Y$ אינה ספיקה מאחר ש־$M(X\cup Y)=M(X)\cap M(Y)=K\cap M(Y)=\emptyset$.
4. מוכיחים שכל תת קבוצה סופית $D\subseteq X\cup Y$ ספיקה.
5. 3+4 הם סתירה למשפט הקומפקטיות ולכן K אינו גדיר.

תרגיל 1:

יהי $\tau=\langle R(\circ,\circ),F(\circ),c\rangle$ מילון.

הוכיחו כי אוסף המבנים הבא אינו גדיר:

$K=\{M\ |$ מבנה מעל τ כך שלמספר סופי של איברים $d\in D^M$ מתקיים $F^M(d)\neq c^M$ $\}$

תרגיל 2:

יהי $\tau=\langle R(\circ,\circ),F(\circ)\rangle$ מילון.

1. יהי $K_1=\left\{M\mid F^M=R^M\right\}$.

   הוכיחו/ הפריכו: K_1 גדיר.

2. יהי $K_2=\{M\mid$ מספר הזוגות $(x,y)\in R^M$ שעבורם $F^M(x)\neq y$ הוא סופי$\}$.

   הוכיחו/ הפריכו: K_2 גדיר.

תרגול 13

3 ביולי 2019

תרגיל 1:

יהי $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ), c\rangle$ מילון.
הוכיחו כי אוסף המבנים הבא אינו גדיר:
$M\}$ מבנה מעל τ כך שלמספר <u>סופי</u> של איברים $d \in D^M$ מתקיים $K = \{M \mid F^M(d) \neq c^M$

הוכחה:

1. נניח בשלילה ש־$M(X) = k$
2. $Y = \Sigma_{inf} \bigcup \{\forall x_1 \neg(F(x_1) \approx c)\}$
3. טענת עזר
   - $M \models \forall x_1 \neg(F(x_1) \approx c))$ אמ"מ $F^M(d) \neq C^M$ לכל $d \in D^M$ (להוכיח)
   מכך ש $M \in M(\Sigma_{inf})$ אמ"מ D^M אינסופי נובע ש־$M(Y) = \emptyset$.
4. תהי $D \subseteq X \cup Y$ סופית ונסמן $D_X = D \cap X$, $D_y = D \cap Y$.
   יהי m המספר הגדול ביותר כך ש־$\alpha_m \in D_Y$ ($m = 1$ אם לא קיים).
   נתבונן במבנה הבא מעל המילון τ:
   $M = \langle \underbrace{\{1,2,\dots,m+1\}}_{D^M}, \underbrace{\emptyset}_{R^M}, F^M, 1\rangle$
   כאשר $F^M(d) = m+1$ לכל d .
   נשאר להוכיח כי D ספיקה על ידי M:
   $M \models D_Y$: לכל $i \le m$ יש ב־D^M לפחות i איברים וכמו כן לכל $d \in D^M$ מתקיים $F^M(d) \neq C^M$.
   כלומר $M \models D_Y$.
   $M \models D_x$: D^Mהוא סופי ולכן למספר סופי של איברים $d \in D^M$ מתקיים $F^M(d) \neq C^M$.
5. 3+4 הם סתירה ולכן k אינה גדירה.

תרגיל 2:

יהי $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ)\rangle$ מילון.

1. יהי $K_1 = \{M \mid F^M = R^M\}$
   הוכיחו/הפריכו: K_1 גדיר.
2. יהי { מספר הסוגות $(x,y) \in R^M$ שעבורם $F^M(x) \neq y$ הוא סופי | $K_2 = \{M$
   הוכיחו/הפריכו: K_2 גדיר.

פתרון:

1. הוכחה:
   $\Sigma = \{\forall x_1 \forall x_2 (F(x_1) \approx x_2) \leftrightarrow R(x_1,x_2)\}$
   לכל השמה s מתקיים
   $M \underset{s}{\models} \alpha \Leftrightarrow$
   $\vdots \Leftrightarrow$
   לכל $d_1, d_2 \in D^M$ מתקיים $(d_1,d_2) \in R^M$ אמ"מ $(d_1,d_2) \in F^M \Leftrightarrow$
   $M \in K_1 \Leftrightarrow F^M = R^M$.
2. הפרכה:
   K_2 אינו גדיר

   (א) $M(x) = k$

(ב) $Y = \Sigma_{inf} \cup \{\forall x_1 \neg(F^M(x_1) \approx x_1) \wedge R(x_1, x_1)\}$

3. טענת עזר:
אמ"מ $M \models \forall x_1(\neg(F^M \approx x_1) \wedge R(x_1, x_1))$
לכל $d \in D^M$ מתקיים $(d, d) \in R^M$ וגם $F^M(d) \neq d$
(המשך יועלה לאתר הקורס).

4. $\ldots$
נתבונן במבנה הבא מעל מילון τ:
$M = \langle \{1, 2, \ldots, m+1\}, \{(x, x) | x \in D^M\}, F^M \rangle$
$F^M(d) = \{$
(יועלה הפתרון)

5. סתירה.

כלל אצבע עבור אינסוף איברים:

$\Sigma_{inf} \cup \{\forall x_1 \ldots$ יש אינסוף איברים ולכולם מקיימים משהו$\}$
$\Sigma_{inf} \cup \{\exists x_1$ יש אינסוף איברים ולפחות איבר אחד שמקיים משהו$\}$
$\varphi_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i \leq j \leq n} \neg(x_I \approx x_J) \bigwedge \ldots$ (יש לפחות n איברים שונים שמקיימים משהו)
$\Sigma = \{\varphi_n | n \geq 2\}$ (יש אינסוף איברים שמקיימים משהו)