# לוגיקה - תרגול 1

## הגדרה אינדוקטיבית של קבוצה

הגדרה 1:

בהינתן:

- קבוצה $\mathrm{X}$ - נקראת העולם.
- קבוצה $B \subseteq \mathrm{X}$ - נקראת קבוצת הבסיס, והאיברים בה נקראים אטומים.
- קבוצה של פו' $\mathrm{F}$ - נקראות פונקציות יצירה.

  כל פונקציה $f \in \mathrm{F}$ היא מהצורה $f : \mathrm{X}^n \to \mathrm{X}$.

  פונקציה כזו נקראת $n$-מקומית, ולכל פונקציה יש $n \geq 1$ משלה.

נגדיר את $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}} \subseteq \mathrm{X}$ - הסגור של $B$ תחת $\mathrm{F}$ כקבוצה המקיימת:

1. $B \subseteq \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$ — מכילה את הבסיס.
2. סגירות תחת הפונקציות ב-$\mathrm{F}$ — לכל $f \in \mathrm{F}$ $n$-מקומית ולכל $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$ מתקיים ש-$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$.
3. אין ב-$\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$ 'איברים מיותרים' — אם קבוצה $T \subseteq \mathrm{X}$ מקיימת את 1 ו-2, אז $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}} \subseteq T$.

הערות:

- הוכח בהרצאה כי $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$ קיימת ויחידה.
- כל אחת מהקבוצות, $\mathrm{X}$, $B$ ו-$\mathrm{F}$ יכולה להיות סופית או אינסופית.

דוגמה:

- העולם: $\mathrm{X}$ - קבוצת המילים באותיות $s$ ו-$t$ (מילה — סדרה סופית של אותיות).

  למשל $s, st, ttt \in \mathrm{X}$.
- הבסיס: $B = \{\epsilon, st, ts\}$ ($\epsilon$ - סימון מיוחד למילה הריקה, בעלת אפס אותיות).
- פו' היצירה: $\mathrm{F} = \{f_1, f_2\}$, כאשר:
  - $f_1(w_1, w_2) = sw_1w_2t$
  - $f_2(w_1, w_2) = w_1w_2w_1$

נסמן: $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}} = \mathrm{X}_{\mathrm{st}}$.

אילו איברים יש ב-$\mathrm{X}_{\mathrm{st}}$? $\epsilon, st, ts$ (כי $B \subseteq \mathrm{X}_{\mathrm{st}}$), $sstt$ (כי $f_1(\epsilon, st) = sstt$) וכו'.

## סדרת יצירה

הגדרה 2: סדרת יצירה של איבר $a$ מעל $B$ ו־$\mathrm{F}$ היא סדרת איברים סופית $a_1, a_2, \ldots, a_n$ המקיימת:

1. $a = a_n$
2. לכל $1 \le i \le n$ מתקיים לפחות אחד מהשניים:
   (א) $a_i \in B$ (כלומר $a_i$ אטום)
   (ב) $a_i$ מתקבל על ידי הפעלת פונקציה מ־$\mathrm{F}$ על איברים שקודמים לו בסדרה.

הערות:

- סדרת היצירה היא סדרה של איברים (ולא של פעולות!).
- סדרת יצירה תמיד סופית ולא ריקה (מכילה לפחות את $a$).
- סדרת יצירה איננה יחידה (למעשה אם יש אחת אז יש אינסוף).
- סדרת יצירה לא חייבת להיות באורך מינימלי.
- סדרת יצירה תמיד מתחילה מאטום (כי אין איברים קודמים להפעיל עליהם פונקציות).

## הוכחה באינדוקציית מבנה

משפט 2 (אינדוקציית מבנה): יהיו קבוצות $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$ ו־$T$. אם מתקיימים התנאים הבאים אז $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}} \subseteq T$,

1. (בסיס) $B \subseteq T$ (כל איברי הבסיס נמצאים ב־$T$).
2. (סגור) $T$ סגורה תחת הפונקציות ב־$\mathrm{F}$, כלומר לכל $f \in \mathrm{F}$ $n$־מקומית מתקיים:
   אם $\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n \in T}_{*}$ אז $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in T$.
   $*$ זה נקרא הנחת האינדוקציה.

הערה: הנחת האינדוקציה היא ש־$a_1, \ldots, a_n$ שייכים ל־$T$ (כלומר מקיימים את התכונה $\alpha$), ולא ל־$\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$.

**שימו לב** המשפט משמש רק להוכחת הכלות מהצורה $\mathrm{X}_{B,\mathrm{F}} \subseteq T$, ולא להוכחת ההכלה ההפוכה!

תרגיל 1: נגדיר את הקבוצה $T = \{w \in \{s,t\}^* \mid |w| \text{ זוגי}\}$ ($|w|$ הוא האורך של המילה). הוכיחו כי $X_{st} \subseteq T$.

$st$

$\epsilon$

$f_1(\epsilon, \epsilon)st$

$st$

$\epsilon$

$f_1(st, \epsilon)sstt$

$w \in B = \{\epsilon, st, ts\}$
$B \subseteq Tw \in T$

- $w \in T|w| = 0w = \epsilon$
- $w \in T|w| = 2w = st$
- $w \in T|w| = 2w = ts$

$w_1, w_2 \in T$
$|w_2| = 2k_2|w_1| = 2k_1k_1, k_2 \in N$
$f \in F$

- $w = f_1(w_1, w_2)$
  $w = sw_1w_2tf_1$
  $w \in T \Leftarrow |sw_1w_2t| = 2 + 2k_1 + 2k_2\underbrace{\Leftarrow}_{b"a}$
- $w = f_2(w_1, w_2)$
  $w = w_1w_2w_3f_2$
  $w \in T \Leftarrow |sw_1w_2t| = 2 + 2k_1 + 2k_2\underbrace{\Leftarrow}_{b"a}$

$X_{st} \subseteq T$

$$B = \overbrace{\{0\}^N}^{\text{binary zero vector}} \qquad X = \overbrace{\{0,1\}^N}^{\text{binary vector}}$$

$$F = \{f_i | i \in N\}$$

$$f_i, i \in N$$

$$v' f_i(v) = v'$$

$$V' j v'_j f'_j = \begin{cases} 1 - v_j & j = i \\ v_j & j \neq i \end{cases}$$

$$X_{B,F} \subseteq TT$$

$$T = \{v \in \{0,1\}^N | 1v\}$$

$$\bar{O} \in T \Leftarrow \bar{O}$$

$$kvv \in T$$

$$v' = f_i(v) i \in N$$

$$v' \in T \Leftarrow k + 1 v' v v'$$