

לוגיקה הרצאה 6

אכסיומות A_1, A_2, A_3

כלל היסק MP

$$\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

קבוצה אינדוקטיבית של המשפטים היכחיים

$$\vdash \alpha$$

סדרת הוכחה עבור α

$$\alpha_1, \dots, \underbrace{a_n}_{\alpha}$$

$$1 \leq i \leq n \text{ לכל}$$

a_i הוא או אכסיומה או התקבלה מהקודמים בסדרה ע"י MP .

בסיס $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup X$ קבוצת הנחות

פעולה MP

$$X \vdash \alpha$$

הנחה מ- X אכס', אכס' $X \subseteq Y$, $y \vdash \alpha$

משפט הדדוקציה

לכל מערכת הוכחה שיש בה לפחות אכסיומות A_1, A_2 רק את כלל MP :

לכל קבוצת פסוקים X ופסוקים α, β מתקיים:

$$X \vdash \alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow X, \alpha \vdash \beta$$

הוכחה:

$$\Rightarrow \text{נתון } X \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

$$\text{הוכחנו } X, \alpha \vdash \beta$$

$$\Leftarrow \text{נתון } X, \alpha \vdash \beta$$

$$\text{"צ"ל } X \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

$$\text{עס' } X, \alpha \vdash \beta$$

$$\text{קיימת סדרת הוכחה } a_1, \dots, a_n$$

$$\text{לכל } i :$$

$$a_i \text{ אכסיומה או מ-} X \text{ או } \alpha \text{ או התקבלה עס' } MP \text{ ו- } a_n = \beta.$$

$$\text{נראה לכל } 1 \leq i \leq n \text{ } a_i$$

$$X \vdash \alpha \rightarrow a_i$$

$$a_n = \beta \text{ מסקנה עבור}$$

$$\text{כנדרש } X \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

נוכיח באינדוקציה על i בסדרת ההוכחה.

בסיס: נוכיח $X \vdash \alpha \rightarrow a_i$

1. a_i אכסיומה

2. α

3. מ- X

הוכחה ל 1 של הבסיס:

1. a_1 אכסיומה

2. $A_1 \rightarrow (\alpha \rightarrow a_i)$

3. $MP_{1,2} \alpha \rightarrow a_1$

$\vdash \alpha \rightarrow a_1$

מונוטוניות של הוכחה עס' הנחות $X \vdash (\alpha \rightarrow a_i)$

הוכחה ל 2 של הבסיס:

מטרה $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

משפט שהוכחנו בשבוע שעבר $X \vdash \alpha \rightarrow \alpha$

הוכחה ל 3 של הבסיס:

1. הנחה מ- X a_1

2. $a_1 \rightarrow (\alpha \rightarrow a_1)$

3. $MP_{1,2} \alpha \rightarrow a_1$

$X \vdash \alpha \rightarrow a_1$

צעד האינדוקציה נניח שהטענה נכונה לכל $j < i$ נוכיח עבור a_i :
אפשרות 1:

1. a_i אכסיומה

2. α

3. מ- X

עבור אפשרות זו ההוכחה זהה.

אפשרות 2:

a_i התקבלה עס' MP מ- a_l, a_m עבור $m, l < i$

1. $a_1 = \delta \rightarrow a_i$

2. $a_m = \delta$

3. $MP a_l, a_m a_i$

הנחת האינדוקציה

$$X \vdash (\alpha \rightarrow (\delta \rightarrow a_i))$$

$$X \vdash (\alpha \rightarrow \delta)$$

$$1. \alpha \rightarrow (\delta \rightarrow a_i) \text{ X 'עס'}$$

$$2. (\alpha \rightarrow \delta) \text{ X , עס'}$$

$$3. (((\alpha \rightarrow (\delta \rightarrow a_i)) \rightarrow$$

$$((\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow (\alpha \rightarrow a_i))) A_2$$

$$4. ((\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow (\alpha \rightarrow a_i)) MP_{1,3}$$

$$5. (\alpha \rightarrow a_i) MP_{2,4}$$

$$X \vdash (\alpha \rightarrow a_i)$$

■

תרגיל:

$$\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \text{ נוכיח}$$

הוכחה:

$$1. (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \text{ הנחה}$$

$$2. \beta \text{ הנחה}$$

$$3. \alpha \text{ הנחנה}$$

$$4. (\beta \rightarrow \gamma) MP_{1,3}$$

$$5. \gamma MP_{4,2}$$

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)), \beta, \gamma \vdash \alpha$$

$$(משפט הדדוקציה) (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)), \beta \vdash (\alpha \rightarrow \gamma)$$

$$(\text{"("}) (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \vdash (\beta \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma)$$

$$(\text{"("}) \vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

תרגיל:

$$\vdash (\neg\neg(\alpha \rightarrow \alpha)) \text{ נוכיח}$$

$$1. \neg\neg\alpha \text{ הנחה}$$

$$2. \text{משפט } (\neg\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow (\neg\neg\alpha))) \vdash (\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$$

$$3. (\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha) MP_{1,2}$$

$$4. (\underbrace{\neg\alpha}_{\beta} \rightarrow \underbrace{\neg\neg\alpha}_{\neg\alpha}) \rightarrow (\underbrace{\neg\alpha}_{\alpha} \rightarrow \underbrace{\alpha}_{\beta}) A_3$$

$$5. (\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha) MP_{3,4}$$

$$.6 \quad \alpha MP_{5,1}$$

$$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$$

משפט הדדוקציה

$$\vdash (\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$A_3 : (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

$$\vdash (\neg \underbrace{\alpha}_{(\neg\alpha)} \rightarrow (\underbrace{\alpha}_{(\neg\alpha)} \rightarrow \underbrace{\beta}_{(\neg\neg\alpha)})) \text{ משפט פורמלי פסוק יכיח } A_3$$

שיטה שונה להשמך ההוכחה משלב 5:

$$\neg\neg\alpha \vdash (\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha) \text{ מסקנה}$$

$$\{\neg\neg\alpha, \neg\neg\alpha\} \vdash \alpha \rightarrow \text{דדוקציה בכיוון}$$

$$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$$

$$\vdash (\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha) \text{ דדוקציה}$$

להוכיח תכונות על מערכת ההוכחה.

משפט נאותות:

$$\models \alpha \Leftarrow \vdash \alpha$$

משפט הנאותות החזק:

$$X \models \alpha \Leftarrow X \vdash \alpha$$

. $X \models \alpha$ מתקיים אם לכל השמה v ,

אם $v \models X$ אז $v \models \alpha$ (כלומר $v \models \beta$ לכל $\beta \in X$) אז $v \models \alpha$.

משפט השלמות(החזק):

$$X \vdash \alpha \Leftarrow X \models \alpha$$

$$\vdash \alpha \Leftarrow \models \alpha$$

הוכחה (משפט הנאותות החזק):

$$x \vdash \alpha \text{ נתון}$$

$$X \models \alpha \text{ "צ"ל}$$

הוכחה באינדוקציה מבנה על הפסוקים α שיכחים עס' X .

בסיס סדרת ההוכחה $a_1, \dots, \underbrace{a_n}_{\alpha}$

$$1. a_1 \text{ מ-} X.$$

$$2. a_1 \text{ אכסיומה}$$

הוכחה:

1. a_1 מ- X .
 $X \models a_1$
 $X \models a_1$ אם ורק אם $\beta \in X$ לכל $v \models \beta$ ובפרט $v \models a_1$.
2. a_1 אכסיומה
לכל אכסיומה קל לבדוק $\models a_1$ טאוטולוגיה
מסקנה $X \models a_1$

הנחה האינדוקציה:

$$X \models a_j$$

$$X \models a_K$$

צעד האינדוקציה: a_i אכסיומה מ- X

מ- MP $j, k < i, a_k, a_j$

$$a_k = \beta, a_j = \beta \rightarrow a_i$$

$$X \models \beta \rightarrow a_i$$

$$X \models \beta$$

נניח בשלילה ש- $X \not\models a_i$

כלומר קיימת v

$$v \models X$$

$$v \not\models a_i$$

עס' הנחת האינדוקציה

$$v \models \beta \rightarrow a_i$$

$$v \models \beta$$

עס' טבלת האמת של \rightarrow :

$$v \models a_i \text{ סתירה.}$$

משפט הנאותות(החזק לפי אביר היזם):

$$X \models \alpha \text{ אז } X \vdash \alpha$$

$$X \not\models \alpha \text{ אז } X \not\vdash \alpha$$

הוכחה משפט השלמות:

עקביות של קבוצת פסוקים:

הגדרה 1:

קבוצת פסוקים X היא עקבית אם לא קיים פסוק α כך ש- $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg \alpha$.

הגדרה 2:

X הינה עקבית אם לא כל פסוק יכיח מ- X . כלומר, קיים פסוק β , $X \vdash \beta$.

דוגמאות לקבוצות לא עקביות:

$$1. X = \{\alpha, \neg \alpha\}$$

$$X \vdash \alpha$$

$$X \vdash \neg \alpha$$

$$\begin{array}{l}
 2. \quad X = \{\alpha \rightarrow \beta, \alpha, \neg\beta\} \\
 \quad \quad X \vdash \neg\beta \\
 \quad \quad X \vdash \beta
 \end{array}$$

משפט:

2 ההגדרות שקולות עבור תחשיב הפסוקים.

הוכחה $2 \Leftarrow 1$

נתון: לא קיים $\alpha, \alpha \not\vdash X$ וגם $X \vdash \neg\alpha$
 ולכן לכל α , או $X \vdash \alpha$ או $X \not\vdash \neg\alpha$ ומתקיימת הגדרה 2

$1 \Leftarrow 2$

X הינה עקבית אם לא כל פסוק יכח מ- X כלומר, קיים פסוק β , $\beta \not\vdash X$.