לוגיקה — תרגול 11

גדירות של יחס בתוך מבנה נתון על ידי נוסחה

<u>הגדרה 1</u>: יהיו τ מילון, M מבנה מעל τ ו־P יחס n־מקומי מעל D^M ($P \subseteq \underbrace{D^M \times D^M \times \ldots \times D^M}_{n}$).

נאמר כי P <u>גדיר</u> ב־M אם קיימת נוסחה φ מעל τ בעלת n משתנים חופשיים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ כך שלכל השמה s מתקיים:

$$M \models_s \varphi \iff (s(x_1), s(x_2), \ldots, s(x_n)) \in P$$

<u>תרגיל 1</u>: נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c\rangle$.

1. הגדירו במבנה $M = \langle \mathbb{N}, \leq, +, 0\rangle$ את היחס הדו־מקומי $P_1 = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i < j\right\}$.
2. הגדירו במבנה $M = \langle P(\mathbb{N}), \subseteq, \cup, \{1\}\rangle$ את היחס הדו־מקומי $P_2 = \{(A,B) \mid A \cup \{1\} \subseteq B\}$.
3. הגדירו במבנה $M = \langle P(\mathbb{N}), \subseteq, \cup, \{1\}\rangle$ את היחס החד־מקומי $P_3 = \{\emptyset\}$.

<u>טענה</u>: יהיו τ מילון, M מבנה מעל τ ו־P_1, P_2 שני יחסים k־מקומיים מעל D^M ($P_1, P_2 \subseteq \underbrace{D^M \times D^M \times \ldots \times D^M}_{k}$) הגדירים ב־$M$ ע"י נוסחאות מעל τ בעלות k משתנים חופשיים φ_1, φ_2 בהתאמה. אז מתקיים:

1. היחס $P_1 \cap P_2$ גדיר ע"י $\varphi_1 \wedge \varphi_2$.
2. היחס $P_1 \cup P_2$ גדיר ע"י $\varphi_1 \vee \varphi_2$.
3. היחס $(D^M)^k \backslash P_1$ גדיר ע"י $\neg\varphi_1$.

תרגיל 2:

נתון המילון $\tau=\langle R(\circ,\circ),F(\circ)\rangle$.

יהי M המבנה הבא מעל τ:

$$M=\langle\{0,1\}^{\mathbb{N}},R^M,F^M\rangle$$

כאשר R^M,F^M מוגדרים באופן הבא:

- $R^M=\left\{(a,b)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\mid\forall i\in\mathbb{N},\ a_i\le b_i\right\}$.
- בהינתן $b=b_0b_1b_2\ldots\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$:

$$F^M(b)=b_1b_2b_3\ldots$$

הוכיחו כי היחסים הבאים גדירים במבנה M:

1. $R_1=\left\{(a,b)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\mid\forall i\in\mathbb{N}^+,\ a_i=b_i\right\}$.
2. $R_2=\{b^{\text{zero}}\}$, כאשר b^{zero} הוא וקטור האפס המוגדר באופן הבא: $b_i^{\text{zero}}=0$ לכל $i\in\mathbb{N}$.
3. $R_3=\left\{b\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}\mid b_i=1 \text{ אחד שעבורו } i\in\mathbb{N} \text{ קיים לפחות}\right\}$.

תרגיל 3: נתון המילון $\tau=\langle F(\circ,\circ),c\rangle$.

יהי $M=\langle\mathbb{N}^+,f_\times,1\rangle$ מבנה עבור τ, כאשר $f_\times(a,b)=a\cdot b$.

1. יהיו $m,n\in\mathbb{N}^+$. נאמר כי m **מחלק את** n אם קיים $k\in\mathbb{N}^+$ כך ש־$n=k\cdot m$.
   רשמו נוסחה $\varphi_Q(x_1,x_2)$ המגדירה ב־M את היחס הדו־מקומי הבא:

$$Q=\left\{(m,n)\in\mathbb{N}^+\mid n \text{ מחלק את } m\right\}$$

2. מספר טבעי ייקרא **ראשוני** אם הוא גדול מ־1 והמחלקים היחידים שלו הם הוא עצמו ו־1.
   רשמו נוסחה $\varphi_P(x_1)$ המגדירה ב־M את היחס החד־מקומי הבא:

$$P=\left\{p\in\mathbb{N}^+\mid p \text{ ראשוני}\right\}$$

3. מספר $n\in\mathbb{N}^+$ ייקרא **חופשי מריבועים** אם בפירוק של n לגורמים ראשוניים,
   $n=p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}$, כל ראשוני מופיע עם חזקה 1 לכל היותר, כלומר $e_i\le 1$ לכל i.
   רשמו נוסחה $\varphi_S(x_1)$ המגדירה ב־M את היחס החד־מקומי הבא:

$$S=\left\{n\in\mathbb{N}^+\mid n \text{ חופשי מריבועים}\right\}$$

לוגיקה ותורת הקבוצות — תרגול 11
תחשיב היחסים

ירות של יחס בתוך מבנה נתון על ידי נוסחה

<u>הגדרה 1</u>: יהיו τ מילון, M מבנה מעל τ ו־P יחס n־מקומי מעל D^M ($P \subseteq \underbrace{D^M \times D^M \times \ldots \times D^M}_{n}$).

נאמר כי P <u>גדיר</u> ב־M אם קיימת נוסחה φ מעל τ בעלת n משתנים חופשיים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ כך שלכל השמה s מתקיים:

$$M \models_s \varphi \iff (s(x_1), s(x_2), \ldots, s(x_n)) \in P$$

<u>תרגיל 3</u>: נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c \rangle$.

1. הגדירו במבנה $M = \langle \mathbb{N}, \leq, +, 0 \rangle$ את היחס הדו־מקומי $P_1 = \left\{ (i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i < j \right\}$.

<u>פתרון</u>: נסמן $\varphi = R(x_1, x_2) \wedge \neg (x_1 \approx x_2)$

לכל השמה s מתקיים:

$M \vDash_s R(x_1, x_2) \wedge \neg (x_1 \approx x_2) \iff$

$M \vDash_s R(x_1, x_2)$ וגם $M \vDash_s \neg (x_1 \approx x_2) \iff$

$(\overline{s}(x_1), \overline{s}(x_2)) \in R^M$ וגם $M \nvDash_s (x_1 \approx x_2) \iff$

$\overline{s}(x_1) \leq \overline{s}(x_2)$ וגם $\overline{s}(x_1) \neq \overline{s}(x_2) \iff$ (אלגברי) $\iff$

$\overline{s}(x_1) < \overline{s}(x_2) \iff$ (הגדרת P_1)

$(\overline{s}(x_1), \overline{s}(x_2)) \in P_1$

2. הגדירו במבנה $M = \langle P(\mathbb{N}), \subseteq, \cup, \{1\} \rangle$ את היחס הדו־מקומי $P_2 = \{ (A,B) \mid A \cup \{1\} \subseteq B \}$.

<u>פתרון</u>: נסמן $\varphi = R(F(x_1, c), x_2)$

לכל השמה s מתקיים:

$M \models_s R(F(x_1, c), x_2) \iff$

$(\overline{s}(F(x_1, c)), \overline{s}(x_2)) \in R^M \iff$

$\left(F^M(\overline{s}(x_1), \overline{s}(c)), s(x_2) \right) \in R^M \iff$

$F^M\left(s(x_1), c^M\right) \subseteq s(x_2) \iff$

$s(x_1) \cup \{1\} \subseteq s(x_2) \iff$

$(s(x_1), s(x_2)) \in P_2$

3. הגדירו במבנה $M = \langle P(\mathbb{N}), \subseteq, \cup, \{1\} \rangle$ את היחס החד־מקומי $P_3 = \{\emptyset\}$.

פתרון: נסמן $\varphi = \forall x_2 R(x_1, x_2)$.

לכל השמה s מתקיים:

$M \models_s \varphi \iff$

לכל $d \in D^M$ מתקיים $R(x_1, x_2)$ $M \models_{\underbrace{s[x_2 \leftarrow d]}_{s'}} \iff$

לכל $d \in D^M$ מתקיים $(\overline{s}'(x_1), \overline{s}'(x_2)) \in R^M \iff$

לכל $d \in P(\mathbb{N})$ מתקיים $s(x_1) \subseteq d \iff$ (מתורת הקבוצות)

$s(x_1) = \emptyset \iff$

$s(x_1) \in P_3$

טענה: יהיו τ מילון, M מבנה מעל τ ו־P_1, P_2 שני יחסים k־מקומיים מעל D^M ($P_1, P_2 \subseteq \underbrace{D^M \times D^M \times \ldots \times D^M}_{k}$) הגדירים ב־$M$ ע"י נוסחאות מעל τ בעלות k משתנים חופשיים φ_1, φ_2 בהתאמה. אז מתקיים:

1. היחס $P_1 \cap P_2$ גדיר ע"י $\varphi_1 \wedge \varphi_2$.
2. היחס $P_1 \cup P_2$ גדיר ע"י $\varphi_1 \vee \varphi_2$.
3. היחס $(D^M)^k \backslash P_1$ גדיר ע"י $\neg\varphi_1$.

תרגיל 4:

תזכורת: נסמן וקטור בינארי אינסופי באופן הבא: $b = b_0 b_1 b_2 \ldots$, כאשר לכל $i \in \mathbb{N}$, $b_i \in \{0,1\}$.

נתון המילון $\tau = \langle R(\circ, \circ), F(\circ) \rangle$.

יהי M המבנה הבא מעל τ:

$$M = \langle \{0,1\}^{\mathbb{N}}, R^M, F^M \rangle$$

כאשר R^M, F^M מוגדרים באופן הבא:

- $R^M = \left\{ (a,b) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N},\ a_i \leq b_i \right\}$.
- בהינתן $b = b_0 b_1 b_2 \ldots \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$:

$$F^M(b) = b_1 b_2 b_3 \ldots$$

הוכיחו כי היחסים הבאים גדירים במבנה M:

1. $R_1 = \left\{ (a,b) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N}^+,\ a_i = b_i \right\}$.

   פתרון: נגדיר $\varphi_1(x_1, x_2) = (F(x_1) \approx F(x_2))$.

   לכל השמה s מתקיים:

   $M \vDash_s (F(x_1) \approx F(x_2)) \iff$

$$\iff \overline{s}(F(x_1)) = \overline{s}(F(x_2))$$
$$\iff F^M(s(x_1)) = F^M(s(x_2))$$
$$\iff s(x_1)_1\, s(x_1)_2 \ldots = s(x_2)_1\, s(x_2)_2 \ldots$$
$$\iff \quad s(x_2)_i = s(x_1)_i \quad :i \in \mathbb{N}^+ \text{ לכל}$$
$$(s(x_1), s(x_2)) \in R_1$$

2. $R_2 = \{b^{\text{zero}}\}$, כאשר b^{zero} הוא וקטור האפס המוגדר באופן הבא: $b_i^{\text{zero}} = 0$ לכל $i \in \mathbb{N}$.

<u>פתרון:</u> נגדיר $\varphi_2(x_1) = \forall x_2 R(x_1, x_2)$.

לכל השמה s מתקיים:

$$\iff \quad M \vDash_s \forall x_2 R(x_1, x_2)$$
$$\iff \quad M \vDash_{\underbrace{s[x_2 \leftarrow d]}_{s'}} R(x_1, x_2) \quad :d \in D^M \text{ לכל}$$
$$\iff \quad (s'(x_1), s'(x_2)) \in R^M \quad :d \in D^M \text{ לכל}$$
$$\iff \quad (s'(x_1), d) \in R^M \quad :d \in D^M \text{ לכל}$$
$$\iff s(x_1)_i \le d_i \quad :i \in \mathbb{N} \text{ ולכל } d \in D^M \text{ לכל}$$
$$\iff s(x_1)_i \le 0 \quad :i \in \mathbb{N} \text{ לכל}$$
$$\iff s(x_1)_i = 0 \quad :i \in \mathbb{N} \text{ לכל}$$
$$s(x_1) \in R_2.$$

3. $R_3 = \left\{ b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid b_i = 1 \text{ קיים לפחות } i \in \mathbb{N} \text{ אחד שעבורו} \right\}$.

<u>פתרון:</u> נשים לב ש־ $b \in R_3$ אם ורק אם $b \neq b^{\text{zero}}$ ולכן נגדיר $\varphi_3 = \neg \varphi_2$.

<u>תרגיל 5</u>: נתון המילון $\tau = \langle F(\circ, \circ), c \rangle$.

יהי $M = \langle \mathbb{N}^+, f_\times, 1 \rangle$ מבנה עבור τ, כאשר $f_\times(a, b) = a \cdot b$ (כפל רגיל של מספרים טבעיים).

1. יהיו $m, n \in \mathbb{N}^+$. נאמר כי m **מחלק את** n אם קיים $k \in \mathbb{N}^+$ כך ש־$n = k \cdot m$.
רשמו נוסחה $\varphi_Q(x_1, x_2)$ המגדירה ב־M את היחס הדו־מקומי הבא:

$$Q = \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^+ \mid n \text{ מחלק את } m \right\}$$

פתרון:

$$\varphi_Q = \exists x_3 F(x_1, x_3) \approx x_2$$

2. מספר טבעי ייקרא **ראשוני** אם הוא גדול מ־1 והמחלקים היחידים שלו הם הוא עצמו ו־1.
רשמו נוסחה $\varphi_P(x_1)$ המגדירה ב־M את היחס החד־מקומי הבא:

$$P = \left\{ p \in \mathbb{N}^+ \mid p \text{ ראשוני} \right\}$$

פתרון:

$$\varphi_P = (\neg(x_1 \approx c)) \wedge \forall x_2 \left((\neg(x_2 \approx c) \wedge (\neg(x_2 \approx v_1))) \to \neg \varphi_Q(x_2, x_1) \right)$$

3. מספר $n \in \mathbb{N}^{+}$ ייקרא **חופשי מריבועים** אם בפירוק של n לגורמים ראשוניים,
$n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, כל ראשוני מופיע עם חזקה 1 לכל היותר, כלומר $e_i \leq 1$ לכל i.
רשמו נוסחה $\varphi_S(x_1)$ המגדירה ב־M את היחס החד־מקומי הבא:

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N}^{+} \mid \text{חופשי מריבועים } n \right\}$$

פתרון:

$$\varphi_S = \forall x_2 \left(\varphi_P(v_2) \rightarrow \left(\neg \left(\varphi_Q \left(F(x_2, x_2), x_1 \right) \right) \right) \right)$$

לוגיקה תרגול 11

תרגיל 1:

$\varphi_1(x_1,x_2)=\exists x_3 R(x_2,F(x_1,x_3))$ (לא מוצלח מדי).
$\varphi_1(x_1,x_2)=R(x_1,x_2)\wedge\neg(x_1\approx x_2)$(פשוט ומוצלח)

<u>סעיף 1:</u>

תהיי s השמה

$\Leftrightarrow M\underset{s}{\models}\varphi_1$

$\Leftrightarrow M\underset{s}{\models}R(x_1,x_2)\wedge\neg(x_1\approx x_2)$

$\Leftrightarrow M\underset{s}{\models}R(x_1,x_2)$ וגם $M\underset{s}{\models}\neg(x_1\approx x_2)$

$\Leftrightarrow M\underset{s}{\models}R^M(s(x_1),s(x_2))$ וגם $M\underset{s}{\not\models}(x_1\approx x_2)$

$\Leftrightarrow(s(x_1),s(x_2))\in P\Leftrightarrow$ (ביטוי אלגברי) $s(x_1)\le s(x_2)$ וגם $s(x_1)\neq s(x_2)$

$.s(x_1)<s(x_2)$

<u>סעיף 2:</u>

$\varphi_2(x_1,x_2)=R(F(x_1,c),x_2)$

תהיי s השמה

$\Leftrightarrow M\underset{s}{\models}\varphi_2$

$\Leftrightarrow\vdots$

$.(s(x_1),s(x_2))\in P_2\Leftrightarrow s(x_1)\bigcup\{1\}\subseteq s(x_2)$

<u>סעיף 3:</u>

$\varphi_3(x_1)=\forall x_2 R(x_1,x_2)$

תהיי s השמה

$\Leftrightarrow M\underset{s}{\models}\varphi_3$

$\Leftrightarrow\vdots$

$\Leftrightarrow$(מתורת הקבוצות) $s(x_1)\subseteq d$ מתקיים $d\in P(\mathbb{N})$ לכל

$.s(x_1)\in P_3 \qquad s(x_1)=\emptyset$

תרגיל 2:

1. $.R_1=\{(a,b)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}|\forall i\in\mathbb{N}^+,a_i=b_i\}$
   $\varphi_1(x_1,x_2)=(F(x_1)\approx F(x_2))$
2. $R_2=\{b^{zero}\}$, כאשר b^{zero}הוא וקטור האפס המוגדר באופן הבא: $b_i^{zero}=0$ לכל $.i\in\mathbb{N}$
   $.\varphi_2(x_1)=\forall x_2 R(x_1,x_2)$
3. $.R_3=\{b\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}\mid b_i=1$ אחד שעבורו $i\in\mathbb{N}$ קיים לפחות $\}$
   $.\varphi_3=\neg\varphi_2$

תרגיל 3:

1. $\varphi_Q(x_1,x_2)=\exists x_3(F(x_1,x_3)\approx x_2)$
2. $\varphi_P(x_1)=\neg(x_1\approx c)\wedge\forall x_2(\neg(x_2\approx 1)\wedge\neg(x_2\approx x_1)\rightarrow\neg\varphi_Q(x_2,x_1))$
3. $\varphi_S(x_1)=\forall x_2\varphi_P(x_2)\wedge\varphi_Q(x_2,x_1)\rightarrow\neg\varphi_Q(\varphi_Q(x_2,x_1),x_1)$