לוגיקה ־ תרגול 10

תזכורת

משתנים קשורים וחופשיים

<u>הגדרה 1</u>: נגדיר באינדוקציה על מבנה הנוסחאות מהו משתנה חופשי x בנוסחה φ.

בסיס: עבור φ נוסחה אטומית, אם x מופיע ב־φ אז x חופשי ב־φ.

צעד: יהיו α,β נוסחאות.

עבור $\varphi=(\neg\alpha)$: x חופשי ב־φ אם x חופשי ב־α.

עבור $\varphi=(\alpha\to\beta),(\alpha\leftrightarrow\beta),(\alpha\wedge\beta),(\alpha\vee\beta)$: x חופשי ב־φ אם x חופשי ב־α או x חופשי ב־β.

עבור $\varphi=\exists y\alpha,\forall y\alpha$: x חופשי ב־φ אם x חופשי ב־α ו־$x\neq y$.

משתנה שאינו חופשי נקרא משתנה קשור.

<u>דוגמה</u>:

$$\exists x_1\left(\forall x_2\left(R_1(x_2)\right)\to R_2(x_1,x_2)\right)$$

המופע הראשון של x_2 קשור אך השני חופשי ולכן x_2 חופשי בנוסחה.

המופע היחיד של x_1 קשור ולכן x_1קשור בנוסחה.

<u>הגדרה 2</u>: נוסחה ללא משתנים חופשיים נקראת <u>פסוק</u>.

<u>תרגיל 1</u>: נתון המילון $\tau=\langle R(\circ,\circ),F_1(\circ),F_2(\circ,\circ),c\rangle$ ונתון הפסוק $\varphi=\forall x_1\forall x_2\left(R(x_1,x_2)\to R(x_2,x_1)\right)$.

אילו מבנים יספקו את הפסוק?

<u>משפט 1</u>: יהיו α נוסחה מעל מילון τ, M מבנה עבור τ ו־s_1,s_2 זוג השמות עבור M, כך שלכל משתנה חופשי x_i ב־α מתקיים $s_1(x_i)=s_2(x_i)$. אז $M\models_{s_1}\alpha$ אם ורק אם $M\models_{s_2}\alpha$.

<u>מסקנה</u>: לכל מבנה M, <u>פסוק</u> φ והשמה s, אם $M\models_s\varphi$ אז $M\models\varphi$.

מושגי יסוד סמנטיים

הגדרות:

1. נוסחה φ היא ספיקה אם קיימים מבנה M והשמה s כך ש־$M \models_s \varphi$.
2. מבנה M והשמה s מספקים קבוצת נוסחאות Σ אם לכל $\varphi \in \Sigma$ מתקיים $M \models_s \varphi$. סימון $M \models_s \Sigma$
3. קבוצת נוסחאות Σ היא ספיקה אם קיימים מבנה M והשמה s המספקים אותה.
4. נוסחה ψ גוררת לוגית נוסחה φ אם כל מבנה M וכל השמה s המספקים את ψ מספקים גם את φ. סימון $\psi \models \varphi$.
5. נאמר כי קבוצת נוסחאות Σ גוררת לוגית נוסחה φ אם כל מבנה M והשמה s המספקים את Σ מספקים גם את φ. סימון $\Sigma \models \varphi$.
6. נוסחה φ מעל מילון τ היא אמת לוגית אם לכל מבנה M עבור τ, ולכל השמה s מתקיים $M \models_s \varphi$.

תרגיל 2: נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c_0, c_1 \rangle$.
נגדיר $\Sigma = \{R(t, x_0) \mid \text{ש"ע } t\}$.

1. הוכיחו כי Σ ספיקה.
2. הוכיחו כי $\Sigma \not\models \forall x_1 R(x_0, x_1)$.

תרגיל 3: נתון מילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ) \rangle$.
עבור כל אחת מהנוסחאות הבאות, הוכיחו או הפריכו כי היא אמת לוגית:

1. $\varphi_1 = \forall x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2) \to \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2))$
2. $\varphi_2 = \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2)) \to \forall x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2)$

לוגיקה תרגול 10

5 ביוני 2019

תרגיל 1:

נתון מילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F_1(\circ), F_2(\circ,\circ), c\rangle$ ונתון הפסוק $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 (R(x_1,x_2) \to R(x_2,x_1))$.

אילו מבנים יספקו את הפסוק?

פתרון:

כל המבנים M שעבורם R^M הוא יחס סימטרי (למשל $M = \langle \mathbb{N}, =, -, +, 7\rangle$.

נוכיח את הטכנה.

יהי M מבנה כלשהו עבור τ אז:

$M \models \varphi$ $\Leftrightarrow$

לכל s, $M \models_{s} \varphi$ $\Leftrightarrow$

לכל s, לכל $d_1, d_2 \in D^M$

$$M \models_{\underbrace{s[x_1 \leftarrow d_1][x_2 \leftarrow d_2]}_{s'}} R(x_1,x_2) \to R(x_2,x_1)$$

לכל s, לכל $d_1, d_2 \in D^M$, אם $M \models_{s'} R(x_1,x_2)$ אז $M \models_{s'} R(x_2,x_1)$ $\Leftrightarrow$

לכל s, לכל $d_1, d_2 \in D^M$ אם $(s'(x_1), s'(x_2)) \in R^M$ אז $(s'(x_2), s'(x_1)) \in R^M$ $\Leftrightarrow$

לכל s, לכל $d_1, d_2 \in D^M$ אם $(d_1, d_2) \in R^M$ אז $(d_2, d_1) \in R^M$ $\Leftrightarrow$

לכל $d_1, d_2 \in D^M$ אם $(d_1, d_2) \in R^M$ אז $(d_2, d_1) \in R^M$ $\Leftrightarrow$

R^M סימטרי.

(כל המעברים דו־כיווניים ולא דורשים הסבר כי הם מבוססים על ההגדרה).

תרגיל 2:

נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c_0, c_1\rangle$, נגדיר $\Sigma = \{R(t,x_0) \mid$ ש“ע $t\}$

1. הוכיחו כי Σ ספיקה.
2. הוכיחו כי $\Sigma \not\models \forall x_1 R(x_0,x_1)$.

פתרון סעיף 1:

הוכחה:

נוכיח כי קיים במנה M והשמה s המספקים את Σ.
נבחר במבנה $M=\langle\{a\},\{(a,a)\},f,a,a\rangle$
כאשר $f(a,a)=a$ תהי s ההשמה $s(x_1)=a$.
לכל $R(t,x)\in\Sigma$ מתקיים $R(t,x_0) \underset{s}{\models} M \Leftrightarrow$
$R^M \ni (\overline{s}(t),\overline{s}(x_0)) \Leftrightarrow$
$\{(a,a)\} \ni (a,a)$ ולכן $\Sigma \underset{s}{\models} M$.

פתרון סעיף 2:

הוכחה:
נסמן: $M=\langle\mathbb{N},\geq,+,0,1\rangle$, תהי s ההשמה $s(x_i)=0$.

1. נראה כי $M\underset{s}{\models}\Sigma$: לכל $R(t,x_0)\in\Sigma$ מתקיים $M\underset{s}{\models}R(t,x_0) \Leftrightarrow$
$(\overline{s}(t),\overline{s}(x_0))\in R^M \Leftrightarrow \overline{s}(t)\geq 0$ וזה נכון כי 0 מינימלי בטבעיים.

2. נראה $M\underset{s}{\not\models}\forall x_1 R(x_0,x_1)$: מספיק להראות $d\in\mathbb{N}$ כך ש $M \underset{s[x_1\leftarrow d]}{\not\models} R(x_0,x_1)$.
נבחר $d=3$ אז $M \underset{s[x_1\leftarrow d]}{\not\models} R(x_0,x_1) \Leftrightarrow$
$(\overline{s}[x_1\leftarrow d](x_0),\overline{s}[x_1\leftarrow d](x_1))=(0,3)\notin R^M$
אבל $(0,3)\notin R^M$ כי לא מתקיים $0\geq 3$ ולכן $M\underset{s}{\not\models}\forall x_1 R(x_0,x_1)$.

תרגיל 3:

נתון מילון $\tau=\langle R(\circ,\circ),F(\circ)\rangle$.
עבור כל אחת מהנוסחאות הבאות, הוכיחו או הפריכו כי היא אמת לוגית:

1. $\varphi_1=\forall x_1\forall x_2 R(x_1,x_2)\to\forall x_1\forall x_2 R(F(x_1),F(x_2))$

2. $\varphi_2=\forall x_1\forall x_2 R(F(x_1),F(x_2))\to\forall x_1\forall x_2 R(x_1,x_2)$

פתרון:

1. יועלה לאתר הקורס.

2. הטענה אינה נכונה:
נבחר מבנה והשמה:
$M=\langle\{0,1\},\{(0,0)\},F^M\rangle$
$F^M(n)=0$ לכל $n\in\mathbb{N}$תהי s השמה $s(x_i)=0$.