לוגיקה - תרגול 10

תזכורת

משתנים קשורים וחופשיים

arphi בנוסחה באינדוקציה על מבנה הנוסחאות מהו משתנה חופשי בנוסחה הגדרה 1: נגדיר באינדוקציה על

arphiבסיס: עבור arphi נוסחה אטומית, אם arphi מופיע ב־arphi אז א חופשי ב

. נוסחאות lpha,eta ניהיו

x עבור x אם x חופשי ביx אם $x: \varphi = (\neg \alpha)$

x אם x חופשי ב־ α אם x חופשי ב־ α אם $x: \varphi = (\alpha \to \beta)\,, (\alpha \leftrightarrow \beta)\,, (\alpha \land \beta)\,, (\alpha \lor \beta)$ עבור

 $x \neq y$ ו ר α ב ב־ α אם x חופשי ב־ α חופשי בי α חופשי בי α חופשי בי

משתנה שאינו חופשי נקרא משתנה קשור.

דוגמה:

 $\exists x_1 (\forall x_2 (R_1(x_2)) \to R_2(x_1, x_2))$

. המופע הראשון של x_2 קשור אך השני חופשי ולכן x_2 חופשי בנוסחה

המופע היחיד של x_1 קשור ולכן x_1

הגדרה 2: נוסחה ללא משתנים חופשיים נקראת פסוק.

 $.arphi=orall x_1orall x_2\,(R(x_1,x_2) o R(x_2,x_1))$ ונתון הפסוק ונתון הפסוק $au=\langle R\left(\circ,\circ
ight),F_1\left(\circ
ight),F_2\left(\circ,\circ
ight),c
angle$ ונתון המילון המילון את הפסוק?

 x_i משפט α נוסחה מעל מילון τ , α מבנה עבור τ ו־ s_1,s_2 זוג השמות עבור α , כך שלכל משתנה חופשי בי α נוסחה מעל מילון α אם ורק אם α אם ורק אם α אם ורק אם α בי α מתקיים α מינו או α או ורק אם α אם ורק אם α

 $M\models arphi$ אז א $M\models_s arphi$ אם אם $M\models_s arphi$ והשמה או מסקנה: לכל מבנה

מושגי יסוד סמנטיים

:הגדרות

- $M\models_s arphi$ שר כך שיs כך והשמה מבנה M היא ספיקה אם היא ספיקה מבנה 1.
- $M\models_s \Sigma$ סימון . $M\models_s \varphi$ מתקיים $\varphi\in \Sigma$ אם לכל Σ אם בוצת נוסחאות מספקים קבוצת השמה מבנה M
 - . המספקים המחאות s המספקים מבנה M המימים היימים היא ספיקה היא בוסחאות Σ
- 4. נוסחה ψ מספקים את מספקים את וכל השמה המספקים אם כל מבנה שם ל מספקים את ψ מספקים את ψ נוסחה או נוסחה $\psi \models \varphi$
- גם מספקים את המספקים את השמה s והשמה המספקים נוסחה φ אם כל גוררת נוסחאות המספקים את גוררת אם גוררת אם באר גוררת אם באר גוררת אם באר גוררת אם באר גוררת את באר את באר את באר את באר גוררת אוויים באר את בא באר את באר את בא באר את באר את באר את באר את בא באר את בא באר את באר את בא באר את
 - $M\models_s arphi$ מתקיים s מתקיים σ מעל מילון σ מעל מילון אמת לוגית אם לכל מבנה σ עבור אם עבור σ מעל מילון σ

 $. au = \langle R(\circ, \circ), F(\circ, \circ), c_0, c_1 \rangle$ נתון המילון: מרגיל 2: נתון המילון

 $\Sigma = \left\{ R\left(t,x_{0}
ight) \mid$ נגדיר $t \}$ ש"ע

- .1 הוכיחו כי Σ ספיקה.
- . $\Sigma \nvDash \forall x_1 R(x_0, x_1)$ 2.

 $. au = \langle R\left(\circ,\circ\right), F\left(\circ\right) \rangle$ נתון מילון ניתרגיל 3:

עבור כל אחת מהנוסחאות הבאות, הוכיחו או הפריכו כי היא אמת לוגית:

- $\varphi_1 = \forall x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2))$.1
- $\varphi_2 = \forall x_1 \forall x_2 R\left(F(x_1), F\left(x_2\right)\right) \rightarrow \forall x_1 \forall x_2 R\left(x_1, x_2\right)$.2

לוגיקה תרגול 10

2019 ביוני 5

```
תרגיל 1:
```

```
arphi=orall x_1orall x_2(R(x_1,x_2)	o 	auונתון הפסוק 	au=\langle R(\circ,\circ),F_1(\circ),F_2(\circ,\circ),c
angleנתון מילון
                                                                      אילו מבנים יספקו את הפסוק?
```

 $M=\langle \mathbb{N},=,-,+,7
angle$ למשל (למשל R^M הוא חס שעבורם Mנוכיח את הטכנה. יהי T מבנה כלשהו עבור au אז: $\Leftrightarrow M \vDash \varphi$ $\Leftrightarrow M \vDash \varphi$,s לכל $M = \underbrace{\begin{cases} d_1, d_2 \in D^M & \text{is } \varphi \text{ ,s } \text{ s. } \text{s. } \text{s.$ $\Leftrightarrow (s'(x_2), s'(x_1)) \in R^M \text{ אז } (s'(x_1), s'(x_2)) \in R^M \text{ אם } d_1, d_2 \in D^M \text{ לכל } s, \\ \Leftrightarrow (d_2, d_1) \in R^M \text{ או } (d_1, d_2) \in R^M \text{ ND } d_1, d_2 \in D^M \text{ dot } d_2, d_1 \in D^M \text{ dot } d_2, d_2 \in D^M \text{ dot } d_2 \in D^M \text$

:2 תרגיל

$$\Sigma=\{R(t,x_0)|$$
 ע"ע ע"ע גדיר אייע אייע איי א יויר א יוי אייע אייע אייע אייע א יויר אמילון אייע אייע אייע אייע אייע אייע אייע

(כל המעברים דו־כיווניים ולא דורשים הסבר כי הם מבוססים על ההגדרה).

- Σ ספיקה. חוכיחו כי
- $\Sigma
 ot \vdash \forall x_1 R(x_0, x_1)$ 2. הוכיחו כי

:1 פתרון סעיף

הוכחה:

```
\Sigma נוכיח כי קיים א השמה s המספקים את נוכיח כי קיים במנה M=\langle\{a\},\{(a,a)\},f,a,a\rangle בבחר במבנה s(x_1)=a ההשמה s ההי f(a,a)=a כאשר לכל \in M\models R(t,x_0) מתקיים R(t,x)\in \Sigma לכל \Leftrightarrow (\overline{s}(t),\overline{s}(x_0))\in R^M . M\models_s \Sigma \text{ ($\overline{s}(t),\overline{s}(x_0)$)} \in \{(a,a)\}
```

:2 פתרון סעיף

הוכחה:

$$s(x_i)=0$$
 נסמן: $M=\langle \mathbb{N},\geq,+,0,1
angle$ נסמן: $M=\langle \mathbb{N},\geq,+,0,1
angle$

- $\Leftrightarrow M \vDash R(t,x_0)$ מתקיים $R(t,x_0) \in \Sigma$ לכל : $M \vDash \sum_s s$.1 .1 .1 נראה כי $\overline{s}(t) \geq 0 \Leftrightarrow (\overline{s}(t),\overline{s}(x_0)) \in R^M$
- . $M
 ot problem R(x_0,x_1)$ ער אה $d \in \mathbb{N}$ מספיק להראות $M
 ot problem R(x_0,x_1)$ מספיק להראות $d \in \mathbb{N}$ כך ש $d \in \mathbb{N}$ מספיק להראות $d \in \mathbb{N}$ איז d = 3 נבחר $d \in \mathbb{N}$ איז d = 3 איז $d \in \mathbb{N}$ מספיק להראות $d \in \mathbb{N}$ מספיק להראות $d \in \mathbb{N}$ איז $d \in \mathbb{N}$ מספיק להראות $d \in \mathbb{N}$ מספיק לא מתקיים $d \in \mathbb{N}$ מתקיים $d \in \mathbb{N}$ מולכן $d \in \mathbb{N}$ מולכן $d \in \mathbb{N}$ מיל מתקיים $d \in \mathbb{N}$ מתקיים $d \in \mathbb{N}$ מולכן $d \in \mathbb{N}$ מולכן $d \in \mathbb{N}$ מיל מתקיים $d \in \mathbb{N}$ מולכן $d \in \mathbb{N}$ מולכן

תרגיל 3:

 $. au = \langle R(\circ,\circ), F(\circ) \rangle$ נתון מילון

עבור כל אחת מהנוסחאות הבאות, הוכיחו או הפריכו כי היא אמת לוגית:

- $\varphi_1 = \forall x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2))$.1
- $\varphi_2 = \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2)) \rightarrow \forall x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2)$.2

פתרון:

- 1. יועלה לאתר הקורס.
- 2. הטענה אינה נכונה: נבחר מבנה והשמה: $M=\langle\{0,1\},\{(0,0)\},F^M\rangle$ $s(x_i)=0$ השמה s השמה s השמה s