## לוגיקה - תרגול 5

## מערכת הוכחה לתחשיב הפסוקים

המוגדרת באופן אופך האינדוקטיבית הפסוקים היכיחים, ווערכת האינדוקטיבית קבוצת הפסוקים היכיחים, ווערכת האינדוקטיבית החוכחה:

- $X = \text{WFF}_{\{\neg, \rightarrow\}} \bullet$
- באר: כאשר: האקסיומות, כאשר:  $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

$$A_1 = \left\{ \alpha \to (\beta \to \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg, \to\}} \right\} -$$

$$A_2 = \left\{ (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{WFF}_{\{\neg, \to\}} \right\} -$$

$$A_3 = \{ ((\neg \beta) \to (\neg \alpha)) \to (\alpha \to \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg, \to\}} \} -$$

 $rac{lpha, lpha o eta}{eta}$  קבוצת כלל הניתוק ההיסק, כאשר MP הוא כלל הניתוק י קבוצת כללי ההיסק.  $MP\left(lpha, lpha o eta
ight) = eta$ צורת רישום נוספת:  $MP\left(lpha, lpha o eta
ight) = eta$ 

דוגמאות:

(שייך בסיס) 
$$(\underbrace{p_1}_{lpha} 
ightarrow (\underbrace{p_2}_{eta} 
ightarrow \underbrace{p_1}_{lpha})) \in Ded\left(\emptyset
ight)$$

(שייך לבסיט) 
$$(\underbrace{[p_1 \to [p_2 \to p_1]]}_{\alpha} \to \underbrace{[p_0 \to [p_1 \to [p_2 \to p_1]])}_{\beta}) \in Ded(\emptyset)$$

(הפעלת שני הקודמים) ( $p_0 o (p_1 o (p_2 o p_1))) \in Ded\left(\emptyset\right)$ 

...  $\alpha$  ששייך לקבוצה האינדוקטיבית ( $\alpha \in Ded\left(\emptyset\right)$ ) נקרא פסוק יכיח, ויסומן  $\alpha$ 

הוכחה הוכחה פורמלית). כלומר סדרת הוכחה (או הוכחה פורמלית). סדרת היצירה של  $\alpha$  נקראת סדרת הוכחה (או הוכחה פורמלית). כלומר סדרת היצירה של פסוקים  $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$  כך שמתקיים:

- $.lpha_n=lpha$  .1
- :מתקיים מתקיים.
- הוא אקסיומה  $lpha_i$  (א)

או

MP התקבל מפסוקים קודמים על ידי הכלל  $lpha_i$ 

### מערכת הוכחה עם הנחות

היא הקבוצה  $Ded\left(\Sigma\right)$ , (הנחות), בערכת הוכחה עם הנחות: קבוצת הפסוקים היכיחים מקבוצת פסוקים (הנחות), היא הקבוצה הגדרה 4, מערכת הוכחה עם הנחות: קבוצת מהגדרה 1). האינדוקטיבית  $X_{B\cup\Sigma,F}$  (עבור X, B ור

- $.\Sigma \vdash \alpha$  ונסמן  $\underline{\Sigma}$ יכיח מיכ מאמר ני  $\alpha \in Ded\left(\Sigma\right)$  •
- $\Delta$  מתוך מעל סדרת היצירה של פסוק lpha מעל  $Ded\left(\Sigma
  ight)$  נקראת סדרת הוכחה של lpha
  - . (ללא הנחות), קבוצת הפסוקים היכיחים (ללא הנחות),  $Ded\left(\emptyset\right)=X_{B,F}$  אז  $\Sigma=\emptyset$

 $\{\alpha, \neg \alpha\} \vdash \beta$  מתקיים  $\{\alpha, \beta\}$  מתקיים כי לכל זוג נוכיח כי לכל זוג פסוקים

## תכונות מערכת ההוכחה:

 $.\alpha,\beta\in {\rm WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$ יהיי  $\Sigma,\Gamma\subseteq {\rm WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$ יהיי

 $\Sigma \vdash \alpha$  אז  $\alpha \in \Sigma$  אם .1 ... הנחת המבוקש: אם ... הוכחה: ל- $\alpha$  יש סדרת הוכחה באורך באורך מעל

 $\Sigma \vdash \alpha$  סופית כך ש־  $\Sigma \vdash \alpha$  אז קיימת  $\Gamma \vdash \alpha$  אז קיימת סופית כך ש־  $\Sigma \vdash \alpha$  סופית ההוכחה: אינטואיציה: בסדרת ההוכחה יש מספר סופי של פסוקים, ולכן בהכרח משתמשים רק במספר סופי של הנחות מתוך  $\Gamma$ .

 $\Gamma \vdash \alpha$  אז  $\Sigma \subseteq \Gamma$  וגם  $\Sigma \vdash \alpha$  אם  $\Omega \vdash \alpha$ . 3 מעל  $\Omega \vdash \alpha$  מעל  $\alpha$  אינטואיציה: סדרת ההוכחה של  $\alpha$  מעל  $\alpha$  מעל  $\alpha$  מעל סדרת הוכחה של  $\alpha$ 

4.  $\alpha$  אז  $\alpha$  אז  $\alpha$  אז  $\beta \in \Sigma$  אם לכל  $\alpha$  אם  $\alpha$  אנטואיציה: בסדרת ההוכחה של  $\alpha$  מתוך  $\alpha$ , נחליף כל מופע של פסוק  $\beta \in \Sigma$  בהוכחה של  $\alpha$  מתוך  $\alpha$ .

 $\Sigma \cup \{lpha\} \vdash eta$  אם ורק אם  $\Sigma \vdash lpha 
ightarrow eta$  מתקיים:  $lpha 
ightarrow eta 
ightarrow \Delta$  אם ורק אם  $\Delta \vdash \alpha 
ightarrow \Delta$  מתקיים: משפט הדדוקציה אינו מוסיף כוח הוכחה, כלומר כל מה שניתן להוכיח בעזרתו ניתן להוכיח גם בלעדיו. משפט זה רק מקל על הוכחת קיום סדרת הוכחה.

תרגיל 1: הוכיחו שהפסוק (eta o(eta o(eta olpha)) יכיח, בעזרת משפט הדדוקציה.

#### משפט הנאותות

 $\Sigma \models \alpha$  אז  $\Sigma \vdash \alpha$  אז  $\Sigma \vdash \alpha$  מתקיים, אם  $\Sigma$  מתקיים לכל קבוצת פסוקים  $\Sigma$  מתקיים, אם  $\Sigma \vdash \alpha$  אז  $\Sigma \vdash \alpha$  סימון:  $\Sigma \vdash \alpha \models \alpha$  סימון:  $\Sigma \vdash \alpha \models \alpha$  אז  $\Sigma \not\vdash \alpha$  אז  $\Sigma \not\vdash \alpha$  אז  $\Sigma \not\vdash \alpha$  מסקנה ממשפט הנאותות: אם  $\Sigma \not\vdash \alpha$  אז  $\Sigma \not\vdash \alpha$ 

 $\models \alpha$  אז  $\vdash \alpha$  משפט הנאותות הצר: אם

 $.{
m WFF}_{\{\lnot,\lor\}}$  נגדיר מערכת הוכחה חדשה עבור :2 נגדיר מערכת אקסיומות:  ${
m A}=\left\{lpha\lor(\beta\lor\lnotlpha)\mid lpha,eta\in{
m WFF}_{\{\lnot,\lor\}}
ight\}$  כללי ההיסק: לכל  $lpha,eta\in{
m WFF}_{\{\lnot,\lor\}}$ 

$$MV_1(\alpha,\beta) = \alpha \vee \beta$$
 .1

$$MV_2(\alpha, (\neg \alpha) \lor \beta) = \beta$$
 .2

נסמן ב־ $Ded_N\left(\emptyset\right)$  את קבוצת הפסוקים היכיחים במערכת החדשה, ואם  $\varphi\in Ded_N\left(\emptyset\right)$  אז נסמן באופן דומה באופן היכיחים במערכת במערכת במערכת בעבור בסוקים היכיחים במערכת החדשה בערכת החדשה בערכת בערכת בעבור בעבור בעבור בעבור בעבור בערכת החדשה בערכת החדשה בערכת העבוצת הנחות בעבור בעבור בערכת העבוצת הנחות בערכת בערכת העבוצת הנחות בערכת בע

.(\( \varphi \varphi

# לוגיקה־נספח לתרגול 5

 $.\mathrm{WFF}_{\{\neg,\lor\}}$  נגדיר מערכת הוכחה מדשה נגדיר נגדיר מערכת יוב

$$\mathbf{A} = \left\{ \alpha \lor (\beta \lor \neg \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg, \lor\}} \right\}$$
 אקסיומות:

, $\alpha,\beta\in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$  לכל לכלי ההיסק:

$$MV_1(\alpha,\beta) = \alpha \vee \beta$$
 .1

$$MV_2(\alpha, (\neg \alpha) \lor \beta) = \beta$$
 .2

נסמן ב־ $Ded_N\left(\emptyset\right)$  את קבוצת הפסוקים היכיחים במערכת החדשה, ואם  $Ded_N\left(\emptyset\right)$  את קבוצת הפסוקים היכיחים במערכת במערכת במערכת ב $\Sigma \vdash Ded_N\left(\Sigma\right)$  עבור פסוקים היכיחים במערכת במערכת החדשה לביע ברישט בילוות במערכת במערכ

.( $\vDash arphi$  אז  $\varphi$  אם  $arphi \in \mathrm{WFF}_{\{\lnot,\lor\}}$  פטוק לכל פטוק, החוכחה במובן הצה נאותה במובן הצר (כלומר, לכל פטוק.).

$$.Ded_{N}\left(\emptyset
ight)\subseteq Con\left(\emptyset
ight)=\left\{ arphi\in\mathrm{WFF}_{\{\lnot,\lor\}}\mid\modelsarphi
ight\}$$
 פתרון: נוכיח באינדוקציית מבנה כי

$$.\varphi=\alpha\vee(\beta\vee\neg\alpha)$$
כך ש  
-  $\alpha,\beta\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$  קיימים קיימים, $\varphi\in A$ בסיס:   

נראה כי באמצעות באמצעות וראה בי  $\alpha \lor (\beta \lor \neg \alpha)$  נראה כי

$\alpha$	β	$\neg \alpha$	$\beta \vee \neg \alpha$	$\alpha \vee (\beta \vee \neg \alpha)$
F	F	Т	Т	Т
F	Т	Т	Т	T
Т	F	F	F	T
$\overline{T}$	Т	F	T	T

### <u>:סגור</u>

. <br/>|  $\alpha$ , ר כלומר  $\gamma$ , כלומר האינדוקציה: יהיו יהיו יהיו (מר האינדוקציה: יהיו

#### נפריד למקרים:

 $:MV_1$  עבור

$$\models \alpha \lor \gamma$$
 נראה כי  $\varphi = \alpha \lor \gamma$  זה במקרה  $\varphi = MV_1\left(\alpha,\gamma\right)$ 

$$\overline{v}\left(lpha
ight)=\mathrm{T}$$
ת הי השמה  $v$ . ע"פ הנחת האינדוקציה ע"פ הנחת האינדוקציה

$$\overline{v}\left(lphaee\gamma
ight)=TT_{ee}\left(\overline{v}\left(lpha
ight),\overline{v}\left(\gamma
ight)
ight)=TT_{ee}\left(\mathrm{T},\mathrm{T}
ight)=\mathrm{T}$$
ולכן,

#### $:MV_2$ עבור

 $:\gamma=(\neg\alpha)\vee\beta$  כך ש־ $\beta\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\lor\}}$  אם קיים  $:\gamma=(\neg\alpha)\vee\beta$  כך ש־ $\beta\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\lor\}}$  בקיים  $:\varphi=MV_2(\alpha,(\neg\alpha)\vee\beta)$  במקרה זה  $:\overline{v}(\alpha)=T$  ו־ $:\overline{v}((\neg\alpha)\vee\beta)=T$  ו־ $:\overline{v}((\neg\alpha)\vee\beta)=T$  בלומר  $:\overline{v}(\neg\alpha)=TT_\neg(\overline{v}(\alpha))=TT_\neg(T)=T$  בלומר  $:\overline{v}((\neg\alpha)\vee\beta)=TT_\neg(\overline{v}(\alpha))=TT_\neg(T)=T$  וגם  $:\overline{v}((\neg\alpha)\vee\beta)=TT_\lor(\overline{v}(\alpha))=TT_\lor(T)=T$  מתקיים  $:\overline{v}(\beta)=T$  מתקיים  $:\overline{v}(\beta)=T$ 

:אחרת

. $\models \alpha$  במקרה מתקיים הנחת האינדוקציה מתקיים . $\varphi = \alpha$  במקרה ה $\varphi = MV_2\left(\alpha, (\neg \alpha) \lor \beta\right)$ 

.( $\Sigma \vDash \varphi$  אז  $\Sigma \vdash_N \varphi$  אם  $\varphi \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\lor\}}$  לכל (כלומר, לכל במובן הרחב נאותה החדשה אותה במובן.2

 $.Ded_{N}\left(\Sigma\right)\subseteq Con\left(\Sigma\right)=\left\{ arphi\in\mathrm{WFF}_{\left\{ \lnot,\lor
ight\} }\mid\Sigma\vDasharphi
ight\}$  מבנה כי נוכיח באינדוקציית מבנה כי

 $\Sigma \vDash \varphi$  מתקיים  $\varphi \in A \cup \Sigma$  בסיס: צ"ל לכל

- $.\Sigma \vDash arphi$  ראינו בפרט מתקיים (סעיף קודם) אינו כבר כי מתקיים (כבר כי מתקיים : $arphi = lpha \lor (eta \lor (\neg lpha))$
- $\Sigma \vDash \varphi$  ולכן  $\varphi$  את ובפרט את ע"פ הגדרה) ב־ $\Sigma$  (ע"פ הגדרה) מספקת את ב $\varphi \in \Sigma$  (ב)

 $\Sigma \vDash \gamma$ ו ר $\Sigma \vDash \alpha$  כלומר הייו ( $\alpha, \gamma \in Con(\Sigma)$  ויהיו

נפריד למקרים:

 $:MV_1$  עבור

 $.\Sigma \vDash \alpha \lor \gamma$  נראה כי  $.\varphi = \alpha \lor \gamma$  כלומר : $\varphi = MV_1\left(\alpha,\gamma\right)$ 

 $\overline{v}\left(lpha
ight)=\mathrm{T}$  ו־ $\overline{v}\left(\gamma
ight)=\mathrm{T}$  .א. ע"פ ה.א. במספקת את המספקת את במספקת את חבי

.1 המשך בדיוק כמו בסעיף

 $:MV_2$  עבור

 $:\!\!\gamma=(\neg\alpha)\vee\beta$ כך ש־ $\beta\in {\rm WFF}_{\{\neg,\vee\}}$  אם קיים •

$$\varphi = MV_2(\alpha, (\neg \alpha) \vee \beta)$$

 $\Sigma \vDash \beta$  נתון כי  $\Xi \vDash \alpha$  וראה בי  $\Sigma \vDash (\neg \alpha) \lor \beta$  נתון כי  $\varphi = \beta$  ונראה כי

 $\overline{v}\left(lpha
ight)=\mathrm{T}$ ו ד $\overline{v}\left(\left(\neglpha
ight)eeeta
ight)=\mathrm{T}$  ורא. ע"פ ה.א. במספקת את השמה v

.1 ההמשך בדיוק כמו בסעיף

:אחרת

 $\Sigma \vDash \alpha$  במקרים מתקיים הנחת האינדוקציה מתקיים . $\varphi = \alpha$  ולפי במקרה  $\varphi = MV_2 \, (\alpha, (\neg \alpha) \lor \beta)$ 

# תרגול 5 לוגיקה

$$MP(\alpha, \gamma) = \begin{cases} \beta & \gamma = \alpha \to \beta \\ \alpha & \text{otherwise} \end{cases}$$

#### דוגמה:

### סדרת הוכחה:

$\neg \alpha \to (\neg \beta \to \neg \alpha)$	$A_1$	.1
$\neg \alpha$	הנחה	.2
$\neg \beta \rightarrow \neg \alpha$	$MP_{1,2}$	.3
$(\neg \beta \to \neg \alpha) \to (\alpha \to \beta)$	$A_3$	.4
$\alpha  o \beta$	$MP_{3,4}$	.5
$\alpha$	הנחה	.6
$\beta$	$MP_{5,6}$	.7

#### תרגיל 1:

. הוכיחו שהפסוק משפט יכיח  $\alpha \to (\beta \to (\beta \to \alpha))$  הוכיחו הוכיחו

### הוכחה (לפי דדוקציה):

$$\begin{split} &\alpha \to (\beta \to (\beta \to \alpha)) \\ &\Leftrightarrow (\text{deduction}) \\ &\{\alpha\} \vdash \beta \to (\beta \to \alpha) \\ &\Leftrightarrow (\text{deduction}) \\ &\{\alpha,\beta\} \vdash \beta \to \alpha \\ &\Leftrightarrow (\text{deduction}) \\ &\{\alpha,\beta\} \vdash \alpha \end{split}$$

מתקיים  $\{lpha,eta\} dashlpha$  מהנחת המבוקש.

$$Ded(\Sigma) = ig\{ lpha \in \mathrm{WFF}_{\{\lnot, 
ightarrow\}} | \Sigma dash lpha ig\}$$
 אינדי

$$Con(\Sigma) = \left\{ lpha \in {
m WFF}_{\{\lnot, \to\}} \mid \Sigma \vDash lpha 
ight\}$$
 לא אינדי

#### תרגיל 2:

 $ext{WFF}_{\{\neg,\lor\}}$  נגדיר מערכת הוכחה חדשה עבור  $A=\left\{lpha\lor(eta\lor\lnotlpha)\mid lpha,eta\in ext{WFF}_{\{\neg,\lor\}}
ight\}$  אקסיומות:  $lpha,eta\in ext{WFF}_{\{\neg,\lor\}}$ 

$$MV_1(\alpha,\beta) = \alpha \vee \beta$$
 .1

$$MV_2(\alpha, (\neg a) \vee \beta) = \beta$$
 .2

נסמן ב־ $Ded_N(\emptyset)$  את קבוצת הפסוקים היכיחים במערכת החדשה, ואם ו $Ded_N(\emptyset)$  אז בסמן ב־ $Ded_N(\Sigma)$  די $\varphi$  עבור פסוקים היכיחים במערכת החדשה במערכת במערכת במערכת המחות בN

 $:\!\!arphi\inlpha\in\mathrm{WFF}_{\{\lnot,
ightarrow\}}$  הוכיחו כי מערכת ההוכחה החדשה נאותה במובן הצר (כלומר, לכל פסוק  $arphi\inlpha\in\mathrm{WFF}_{\{\lnot,
ightarrow\}}$  אם arphi אז arphi אז arphi

#### פתרון:

נוכיח באינדוקציית מבנה ש:

$$(\vDash \varphi \Leftarrow \vdash_N \varphi) \ Ded_N(\phi) \subseteq Con(\phi)$$

אמת: טעבלת טעבלת באיס: באיס: אמת: באיס: לכל לכל לכל לכל בא באמצעות נראה באיס: לכל לכל לכל לכל האח

$\alpha$	β	$\neg \alpha$	$\beta \vee \neg \alpha$	$\alpha \vee (\beta \vee \neg \alpha)$
T	Т	F	Т	Т
T	F	F	F	Т
F	Т	Т	Τ	Т
F	F	Т	Τ	Т

$$\models \alpha , \models \beta$$
 כלומר  $\alpha, \beta \in Con(\phi)$  כלומר פגור:

$$\delta = MV_1(\alpha, \beta) = \alpha \vee \beta \star$$

 $v \in ASS$  תהיי

$$\overline{V}(\alpha \vee \beta)TT_v(\overline{V}(\alpha), \overline{V}(\beta)) = TT_V(T, T) = T$$

$$\delta = MV_2(\alpha_1(\neg \alpha) \lor \gamma) = \gamma \quad \beta = ((\neg \alpha) \lor \gamma) \star$$

 $v \in ASS$  תהיי

$$\begin{split} \overline{V}(\alpha) &= T \\ \overline{V}(\beta) &= \overline{V}((\neg \alpha) \lor \gamma) = T \\ \overline{V}(\neg) &= TT_{\neg}(\overline{V}(\alpha)) = TT_{\neg}(T) = F \end{split}$$

. לפי טבלת אמת לפי 
$$\overline{V}(\gamma)=T$$
 לפי ה"א. לפי ה $MV_2(lpha,eta)=lpha$  א not mandatory