לוגיקה - תרגול 5

מערכת הוכחה לתחשיב הפסוקים

הגדרה 1, מערכת ההוכחה: קבוצת הפסוקים היכיחים, $Ded(\emptyset)$, היא הקבוצה האינדוקטיבית $X_{B,F}$ המוגדרת באופן הבא:

- $X = \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$
- $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ - קבו.צת האקסיומות, כאשר:
  - $A_1 = \left\{\alpha \to (\beta \to \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}\right\}$
  - $A_2 = \left\{(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}\right\}$
  - $A_3 = \left\{((\neg\beta) \to (\neg\alpha)) \to (\alpha \to \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}\right\}$
- $F = \{MP\}$ - קבוצת כללי ההיסק, כאשר MP הוא כלל הניתוק $\frac{\alpha, \alpha\to\beta}{\beta}$.

  צורת רישום נוספת: $MP(\alpha, \alpha \to \beta) = \beta$.

דוגמאות:

$(\underbrace{p_1}_{\alpha} \to (\underbrace{p_2}_{\beta} \to \underbrace{p_1}_{\alpha})) \in Ded(\emptyset)$ (שייך בסיס)

$(\underbrace{[p_1 \to [p_2 \to p_1]]}_{\alpha} \to (\underbrace{p_0}_{\beta} \to \underbrace{[p_1 \to [p_2 \to p_1]]}_{\alpha})) \in Ded(\emptyset)$ (שייך לבסיס)

$(p_0 \to (p_1 \to (p_2 \to p_1))) \in Ded(\emptyset)$ (הפעלת MP על שני הקודמים)

הגדרה 2: פסוק α ששייך לקבוצה האינדוקטיבית ($\alpha \in Ded(\emptyset)$) נקרא פסוק יכיח, ויסומן $\vdash \alpha$.

הגדרה 3: יהי $\alpha \in Ded(\emptyset)$. סדרת היצירה של α נקראת סדרת הוכחה (או הוכחה פורמלית). כלומר סדרת הוכחה של פסוק α היא סדרה סופית של פסוקים $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ כך שמתקיים:

1. $\alpha_n = \alpha$.
2. לכל פסוק α_i מתקיים:

   (א) α_i הוא אקסיומה

   או

   (ב) α_i התקבל מפסוקים קודמים על ידי הכלל MP.

מערכת הוכחה עם הנחות

הגדרה 4, מערכת הוכחה עם הנחות: קבוצת הפסוקים היכיחים מקבוצת פסוקים Σ (הנחות), $Ded\left(\Sigma\right)$, היא הקבוצה האינדוקטיבית $X_{B\cup\Sigma,F}$ (עבור X, B ו־F מהגדרה 1).

- אם $\alpha\in Ded\left(\Sigma\right)$ נאמר כי α יכיח מ־Σ ונסמן $\Sigma\vdash\alpha$.
- סדרת היצירה של פסוק α מעל $Ded\left(\Sigma\right)$ נקראת סדרת הוכחה של α מתוך Σ.
- אם $\Sigma=\emptyset$, אז $Ded\left(\emptyset\right)=X_{B,F}$, קבוצת הפסוקים היכיחים (ללא הנחות).

דוגמה: נוכיח כי לכל זוג פסוקים α,β מתקיים $\{\alpha,\neg\alpha\}\vdash\beta$.

תכונות מערכת ההוכחה:

יהיו $\Sigma,\Gamma\subseteq\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$ ו־$\alpha,\beta\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$.

1. הנחת המבוקש: אם $\alpha\in\Sigma$ אז $\Sigma\vdash\alpha$

   הוכחה: ל־α יש סדרת הוכחה באורך 1 מעל Σ.

2. סופיות ההוכחה: אם $\Gamma\vdash\alpha$ אז קיימת $\Sigma\subseteq\Gamma$ סופית כך ש־$\Sigma\vdash\alpha$

   אינטואיציה: בסדרת ההוכחה יש מספר סופי של פסוקים, ולכן בהכרח משתמשים רק במספר סופי של הנחות מתוך Γ.

3. מונוטוניות (הרחבת הנחות): אם $\Sigma\vdash\alpha$ וגם $\Sigma\subseteq\Gamma$ אז $\Gamma\vdash\alpha$

   אינטואיציה: סדרת ההוכחה של α מעל Σ היא גם סדרת הוכחה של α מעל Γ.

4. מונוטוניות מורחבת (טענת עזר): אם $\Sigma\vdash\alpha$ וגם לכל $\beta\in\Sigma$ מתקיים $\Gamma\vdash\beta$ אז $\Gamma\vdash\alpha$

   אינטואיציה: בסדרת ההוכחה של α מתוך Σ, נחליף כל מופע של פסוק $\beta\in\Sigma$ בהוכחה של β מתוך Γ.

משפט הדדוקציה: לכל קבוצת פסוקים Σ ופסוקים α,β מתקיים: $\Sigma\vdash\alpha\to\beta$ אם ורק אם $\Sigma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$.

הערה: משפט הדדוקציה אינו מוסיף כוח הוכחה, כלומר כל מה שניתן להוכיח בעזרתו ניתן להוכיח גם בלעדיו. משפט זה רק מקל על הוכחת קיום סדרת הוכחה.

תרגיל 1: הוכיחו שהפסוק $\alpha\to\left(\beta\to\left(\beta\to\alpha\right)\right)$ יכיח, בעזרת משפט הדדוקציה.

משפט הנאותות

משפט הנאותות הרחב: לכל קבוצת פסוקים Σ מתקיים, אם $\Sigma\vdash\alpha$ אז $\Sigma\models\alpha$.

סימון: $Con\left(\Sigma\right)=\left\{\alpha\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}\mid\Sigma\vDash\alpha\right\}$. כלומר, משפט הנאותות משמעותו: $Ded\left(\Sigma\right)\subseteq Con\left(\Sigma\right)$.

מסקנה ממשפט הנאותות: אם $\Sigma\not\models\alpha$ אז $\Sigma\nvdash\alpha$.

משפט הנאותות הצר: אם $\vdash\alpha$ אז $\models\alpha$.

תרגיל 2: נגדיר מערכת הוכחה חדשה עבור $\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$.

אקסיומות: $\mathrm{A}=\left\{\alpha\vee\left(\beta\vee\neg\alpha\right)\mid\alpha,\beta\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}\right\}$

כללי ההיסק: לכל $\alpha,\beta\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$,

1. $MV_1(\alpha,\beta)=\alpha\vee\beta$
2. $MV_2(\alpha,(\neg\alpha)\vee\beta)=\beta$

נסמן ב־$Ded_N(\emptyset)$ את קבוצת הפסוקים היכיחים במערכת החדשה, ואם $\varphi\in Ded_N(\emptyset)$ אז נסמן $\underset{N}{\vdash}\varphi$. באופן דומה נסמן $Ded_N(\Sigma)$ ו־$\Sigma\underset{N}{\vdash}\varphi$ עבור פסוקים היכיחים במערכת החדשה מקבוצת הנחות Σ.

הוכיחו כי מערכת ההוכחה החדשה נאותה במובן הצר (כלומר, לכל פסוק $\varphi\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$: אם $\underset{N}{\vdash}\varphi$ אז $\models\varphi$).

תרגול 5 לוגיקה

$$MP(\alpha,\gamma)=\begin{cases}\beta & \gamma=\alpha\to\beta\\ \alpha & \textbf{otherwise}\end{cases}$$

דוגמה:

סדרת הוכחה:

.1	A_1	$\neg\alpha\to(\neg\beta\to\neg\alpha)$
.2	הנחה	$\neg\alpha$
.3	$MP_{1,2}$	$\neg\beta\to\neg\alpha$
.4	A_3	$(\neg\beta\to\neg\alpha)\to(\alpha\to\beta)$
.5	$MP_{3,4}$	$\alpha\to\beta$
.6	הנחה	α
.7	$MP_{5,6}$	β

תרגיל 1:

הוכיחו שהפסוק $\alpha\to(\beta\to(\beta\to\alpha))$ יכיח בעזרת משפט הדדוקציה.

הוכחה (לפי דדוקציה):

$$\begin{aligned}&\alpha\to(\beta\to(\beta\to\alpha))\\&\Leftrightarrow\text{(deduction)}\\&\{\alpha\}\vdash\beta\to(\beta\to\alpha)\\&\Leftrightarrow\text{(deduction)}\\&\{\alpha,\beta\}\vdash\beta\to\alpha\\&\Leftrightarrow\text{(deduction)}\\&\{\alpha,\beta\}\vdash\alpha\end{aligned}$$

מתקיים $\{\alpha,\beta\}\vdash\alpha$ מהנחת המבוקש.

אינד' $Ded(\Sigma)=\left\{\alpha\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}|\Sigma\vdash\alpha\right\}$

לא אינד' $Con(\Sigma)=\left\{\alpha\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}\mid\Sigma\vDash\alpha\right\}$

תרגיל 2:

נגדיר מערכת הוכחה חדשה עבור $\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$
אקסיומות: $A=\left\{\alpha\vee(\beta\vee\neg\alpha)\mid\alpha,\beta\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}\right\}$
כלל ההיסק: לכל $\alpha,\beta\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$

1. $MV_1(\alpha,\beta)=\alpha\vee\beta$
2. $MV_2(\alpha,(\neg a)\vee\beta)=\beta$

נסמן ב־$Ded_N(\emptyset)$ את קבוצת הפסוקים היכיחים במערכת החדשה, ואם $\varphi\in Ded_N(\emptyset)$ אז נסמן $\underset{N}{\vdash}\varphi$. באופן דומה נסמן $Ded_N(\Sigma)$ ו־$\Sigma\underset{N}{\vdash}\varphi$ עבור פסוקים היכיחים במערכת החדשה מקבוצות המחות Σ.
הוכיחו כי מערכת ההוכחה החדשה נאותה במובן הצר (כלומר, לכל פסוק $\varphi\in\alpha\in$ $\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$: אם $\underset{N}{\vdash}\varphi$ אז $\vDash\varphi$).

פתרון:

נוכיח באינדוקציית מבנה ש:
$Ded_N(\phi)\subseteq Con(\phi)$ $(\vDash\varphi\Leftarrow\vdash_N\varphi)$

בסיס: נראה $\vDash\alpha\vee(\beta\vee\neg\alpha)$ לכל $\alpha,\beta\in\alpha\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\to\}}$ באמצעות טעבלת אמת:

α	β	$\neg\alpha$	$\beta\vee\neg\alpha$	$\alpha\vee(\beta\vee\neg\alpha)$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

סגור: נניח $\alpha,\beta\in Con(\phi)$ כלומר $\vDash\beta$, $\vDash\alpha$

- $\delta=MV_1(\alpha,\beta)=\alpha\vee\beta$

תהיי $v\in ASS$
$$\overline{V}(\alpha\vee\beta)TT_v(\overline{V}(\alpha),\overline{V}(\beta))\underbrace{=}_{\text{induction def.}}TT_V(T,T)=T$$

- $\beta=((\neg\alpha)\vee\gamma)$ $\quad\delta=MV_2(\alpha_1(\neg\alpha)\vee\gamma)=\gamma$

תהיי $v\in ASS$

$$\overline{V}(\alpha)=T$$
$$\overline{V}(\beta)=\overline{V}((\neg\alpha)\vee\gamma)=T$$
$$\overline{V}(\neg)=TT_{\neg}(\overline{V}(\alpha))=TT_{\neg}(T)=F$$

$\Leftarrow\overline{V}(\gamma)=T$ לפי טבלת אמת.

- $\underbrace{MV_2(\alpha,\beta)=\alpha}_{\text{not mandatory}}$ $\vDash\alpha$ לפי ה"א.