לוגיקה - תרגול 4

השמות

הערה: מכאן ואילך נשמיט סוגריים 'מיותרים' מהפסוק על ידי הגדרת סדר קדימיות בין הקשרים:

1. $\neg$ (הקשר בעל הקדימות הגבוהה ביותר)
2. $\vee, \wedge$
3. $\rightarrow$ (הקשר בעל הקדימות הנמוכה ביותר)

שימו לב: בשאלות הנוגעות לתחביר אין להשמיט סוגריים!

הגדרה 1: פונקציה $v : \{p_0, p_1, p_2, \ldots\} \rightarrow \{\mathrm{F}, \mathrm{T}\}$ נקראת השמה.

דוגמאות:

1. v_{F} מוגדרת כך שלכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $v_{\mathrm{F}}(p_i) = \mathrm{F}$
2. v_{T} מוגדרת כך שלכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $v_{\mathrm{T}}(p_i) = \mathrm{T}$

סימונים:

- Ass היא קבוצת כל ההשמות.
- $TT_\circ$ היא טבלת האמת של קשר $\circ$ כלשהו.

הגדרה 2: בהינתן השמה v, השמה מורחבת $\overline{v}$ היא פונקציה $\overline{v} : \mathrm{WFF} \rightarrow \{\mathrm{F}, \mathrm{T}\}$ המוגדרת באינדוקציה:

בסיס: לכל $i \in \mathbb{N}$, $\overline{v}(p_i) = v(p_i)$.

סגור: לכל $\alpha, \beta \in \mathrm{WFF}$

- $\overline{v}(\neg\alpha) = TT_\neg(\overline{v}(\alpha))$
- לכל $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$, $\overline{v}(\alpha \circ \beta) = TT_\circ(\overline{v}(\alpha), \overline{v}(\beta))$

הגדרה 3: תהי $v \in \mathrm{Ass}$ ו־$\alpha \in \mathrm{WFF}$. אם $\overline{v}(\alpha) = \mathrm{T}$ נאמר ש־v מספקת את α, ונסמן $v \models \alpha$. אם α טאוטולוגיה, נסמן $\models \alpha$.

משפט 1 — משפט התלות הסופית: יהי פסוק α ושתי השמות v_1, v_2. אם לכל אטום p_i המופיע ב־α מתקיים $v_1(p_i) = v_2(p_i)$, אז $\overline{v}_1(\alpha) = \overline{v}_2(\alpha)$.

מושגי יסוד סמנטיים

הגדרה 4: נאמר כי פסוק α הוא ספיק אם קיימת השמה המספקת אותו (קיימת v כך ש־$\overline{v}(\alpha)=\mathrm{T}$).

דוגמאות: p_0, $p_0 \vee p_1$

הגדרה 5: פסוק α נקרא טאוטולוגיה אם כל השמה מספקת אותו (לכל v, $\overline{v}(\alpha)=\mathrm{T}$).

דוגמאות: $p_0 \to p_0$, $p_0 \vee \neg p_0$

הגדרה 6: פסוק α נקרא סתירה אם לא קיימת השמה המספקת אותו (לכל v, $\overline{v}(\alpha)=\mathrm{F}$).

דוגמה: $p_0 \wedge \neg p_0$

שימו לב: אם פסוק אינו סתירה אז הוא ספיק (ולא בהכרח טאוטולוגיה).

תרגיל 1: הוכיחו/ הפריכו: אם $\alpha \vee \beta$ טאוטולוגיה, אז α טאוטולוגיה או β טאוטולוגיה.

הגדרה 7: יהיו α, β פסוקים. אם כל השמה המספקת את α מספקת גם את β נאמר ש־α גורר לוגית את β (או לחילופין, ש־β נובע לוגית מ־α), ונסמן $\alpha \models \beta$.

טענות:

1. אם α טאוטולוגיה ו־$\alpha \models \beta$, אז β טאוטולוגיה.
2. אם β סתירה ו־$\alpha \models \beta$, אז α סתירה.
3. אם α סתירה אז לכל פסוק β מתקיים $\alpha \models \beta$.
4. אם β טאוטולוגיה אז לכל פסוק α מתקיים $\alpha \models \beta$.
5. $\models$ הוא יחס רפסלקסיבי וטרנזיטיבי (לא סימטרי).

הגדרה 8: יהיו α, β פסוקים. אם לכל השמה v מתקיים ש־$\overline{v}(\alpha)=\overline{v}(\beta)$ נאמר כי α ו־β שקולים לוגית ונסמן $\alpha \equiv \beta$.

משפט 2: α ו־β שקולים לוגית אמ"מ $\alpha \models \beta$ וגם $\beta \models \alpha$.

מושגים סמנטיים עבור קבוצות פסוקים

הגדרה 9: תהי $\Sigma \subseteq \mathrm{WFF}$. אם v מספקת את כל הפסוקים ב־Σ נאמר כי v מספקת את Σ ונסמן $v \vDash \Sigma$.

דוגמה: $v_{\mathrm{T}} \models \{p_1, p_2\}$

הגדרה 10: קבוצת פסוקים Σ נקראת ספיקה אם קיימת השמה v כך ש־v מספקת את Σ.

הגדרה 11: תהי $\Sigma \subseteq \mathrm{WFF}$. אם כל השמה המספקת את Σ מספקת גם את α נאמר כי Σ גוררת לוגית את α (או לחילופין ש־α נובע לוגית מ־Σ) ונסמן $\Sigma \models \alpha$.

דוגמה: $\{p_0, p_1\} \models p_0 \wedge p_1$

הגדרה 12: יהיו $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \mathrm{WFF}$. נאמר כי Σ_1 ו־Σ_2 שקולות לוגית ונסמן $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$ אם לכל השמה v מתקיים $v \vDash \Sigma_1 \iff v \vDash \Sigma_2$.

דוגמה: $\{p_0, p_1\} \equiv \{p_0 \wedge p_1\}$

תרגיל 3:

תהי $\Sigma \subseteq \mathrm{WFF}$. נניח שכל פסוק $\alpha \in \Sigma$ ספיק. האם בהכרח Σ ספיקה?

תרגיל 4:

יהיו קבוצת פסוקים Σ ופסוק α, ונניח ש־$\Sigma \cup \{\alpha\}$ ספיקה. האם בהכרח $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ אינה ספיקה?

תרגול 4 לוגיקה

תזכורת:

הפונקצייה $TT_{\rightarrow} : \{T,F\} \times \{T,F\} \rightarrow \{T,F\}$
מוגדרת כך ש $TT_{\rightarrow}(\alpha,\beta)$ היא:

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

הגדרה 2 (המשך):

דוגמה:

נתונה ההשמה :

$$v(p_i) = \begin{cases} F & i=1 \\ T & \text{else} \end{cases}$$

נחשב את הערך של הפסוק $p_0 \rightarrow (\neg p_1)$
תחת ההשמה v.

$$\overline{v}(p_0 \rightarrow (\neg p_1)) =$$
$$TT_{\rightarrow}(\overline{v}(p_0), \overline{v}(\neg p1))$$
$$TT_{\rightarrow}(v(p_0), TT_{\neg}(\overline{v}(p1)))$$
$$TT_{\rightarrow}(T, TT_{\neg}(v(p_1)))$$
$$TT_{\rightarrow}(T, TT_{\neg}(F))$$
$$TT_{\rightarrow}(T, T) = T.$$

סיכום:

כלומר :

$$\overline{v}(p_0 \rightarrow (\neg p_1)) = T$$

כדי להראות ש $p_0 \vee, \neg p_0$ טאוטולוגיה, נבדוק את כל ההשמות למשתנים הרלווינטים (p_0), ובעזרת טבלת אמת:

p_0	$\neg p_0$	$p_0 \vee \neg p_0$
F	T	T
T	F	T

טענות:

1. אם α טאוטולוגיה ו- $\beta \models \alpha$, אז β טאוטולוגיה.
הפרכה:
סימונים:
$\alpha = p_0$, $\beta = \neg p_0$, $\alpha \vee \beta = p_0 \vee \neg p_0$
נראה שזו אכן דוגמה נגדית:
נראה שכל תנאי השאלה מתקיימים
נראה ש $p_0 \vee \neg p_0$ טאוטולוגיה-הוכחה
בעזרת טבלת אמת נראה שמספקת
   (א) נראה ש-p_0לא טאוטולוגיה
   $\overline{v}_F(\alpha)$
   $\overline{v}_F(p_0) = v_F(p_0) = F$
   הראינו שקיימת לפחות השמה אחת שאינה מספקת את p_0 ולכן זו לא טאוטולוגיה.
   (ב) נראה כי $\beta = \neg p_0$ לא טאוטולוגיה
   $\overline{v}_T(\beta) = \overline{v}_T(\neg p_0) = TT_{\neg}(v_T(p_0)) = TT_{\neg}(T) = F$

תרגיל 3:

הפרכה:
דוגמה נגדית:
$\Sigma = \{p_0, \neg p_0\}$
$\neg p_0, p_0$ ספיקים
נראה ש-Σ לא ספיקה נניח בשלילה ש-Σ ספיקה
, אז קיימת v כך ש-v מספקת את Σ אז :

$\overline{v}(p_0) = T$
$\overline{v}(\neg p_0) = T$
$\overline{v}(\neg p_0) = TT_{\neg}(\overline{v}(p_0)) = TT_{\neg}(T) = F$

תרגיל 4:

הטענה אינה נכונה $\Sigma = \emptyset$, $\alpha = p0$, $\neg\alpha = \neg p_0$.