לוגיקה - תרגול 10

תזכורת

משתנים קשורים וחופשיים

<u>הגדרה 1</u>: נגדיר באינדוקציה על מבנה הנוסחאות מהו משתנה חופשי x בנוסחה φ.

בסיס: עבור φ נוסחה אטומית, אם x מופיע ב־φ אז x חופשי ב־φ.

צעד: יהיו α, β נוסחאות.

עבור $\varphi = (\neg\alpha)$: x חופשי ב־φ אם x חופשי ב־α.

עבור $\varphi = (\alpha \to \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta)$: x חופשי ב־φ אם x חופשי ב־α או x חופשי ב־β.

עבור $\varphi = \exists y\alpha, \forall y\alpha$: x חופשי ב־φ אם x חופשי ב־α ו־$x \neq y$.

משתנה שאינו חופשי נקרא משתנה קשור.

<u>דוגמה</u>:

$$\exists x_1 \left(\forall x_2 \left(R_1(x_2)\right) \to R_2(x_1, x_2)\right)$$

המופע הראשון של x_2 קשור אך השני חופשי ולכן x_2 חופשי בנוסחה.

המופע היחיד של x_1 קשור ולכן x_1קשור בנוסחה.

<u>הגדרה 2</u>: נוסחה ללא משתנים חופשיים נקראת <u>פסוק</u>.

<u>תרגיל 1</u>: נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F_1(\circ), F_2(\circ,\circ), c\rangle$ ונתון הפסוק $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \left(R(x_1,x_2) \to R(x_2,x_1)\right)$.

אילו מבנים יספקו את הפסוק?

<u>משפט 1</u>: יהיו α נוסחה מעל מילון τ, M מבנה עבור τ ו־s_1, s_2 זוג השמות עבור M, כך שלכל משתנה חופשי x_i ב־α מתקיים $s_1(x_i) = s_2(x_i)$. אז $M \models_{s_1} \alpha$ אם ורק אם $M \models_{s_2} \alpha$.

<u>מסקנה</u>: לכל מבנה M, <u>פסוק</u> φ והשמה s, אם $M \models_s \varphi$ אז $M \models \varphi$.

מושגי יסוד סמנטיים

הגדרות:

1. נוסחה φ היא ספיקה אם קיימים מבנה M והשמה s כך ש־$M \models_s \varphi$.
2. מבנה M והשמה s מספקים קבוצת נוסחאות Σ אם לכל $\varphi \in \Sigma$ מתקיים $M \models_s \varphi$. סימון $M \models_s \Sigma$
3. קבוצת נוסחאות Σ היא ספיקה אם קיימים מבנה M והשמה s המספקים אותה.
4. נוסחה ψ גוררת לוגית נוסחה φ אם כל מבנה M וכל השמה s המספקים את ψ מספקים גם את φ. סימון $\psi \models \varphi$.
5. נאמר כי קבוצת נוסחאות Σ גוררת לוגית נוסחה φ אם כל מבנה M והשמה s המספקים את Σ מספקים גם את φ. סימון $\Sigma \models \varphi$.
6. נוסחה φ מעל מילון τ היא אמת לוגית אם לכל מבנה M עבור τ, ולכל השמה s מתקיים $M \models_s \varphi$.

תרגיל 2: נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c_0, c_1 \rangle$.

נגדיר $\Sigma = \{R(t,x_0) \mid \text{ש"ע } t\}$.

1. הוכיחו כי Σ ספיקה.
2. הוכיחו כי $\Sigma \not\models \forall x_1 R(x_0,x_1)$.

תרגיל 3: נתון מילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ) \rangle$.

עבור כל אחת מהנוסחאות הבאות, הוכיחו או הפריכו כי היא אמת לוגית:

1. $\varphi_1 = \forall x_1 \forall x_2 R(x_1,x_2) \to \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2))$
2. $\varphi_2 = \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2)) \to \forall x_1 \forall x_2 R(x_1,x_2)$

לוגיקה ־ תרגול 10

תזכורת

משתנים קשורים וחופשיים

הגדרה 1: נגדיר באינדוקציה על מבנה הנוסחאות מהו משתנה חופשי x בנוסחה φ.

בסיס: עבור φ נוסחה אטומית, אם x מופיע ב־φ אז x חופשי ב־φ.

צעד: יהיו α, β נוסחאות.

עבור $\varphi = (\neg\alpha)$: x חופשי ב־φ אם x חופשי ב־α.

עבור $\varphi = (\alpha \to \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta)$: x חופשי ב־φ אם x חופשי ב־α או x חופשי ב־β.

עבור $\varphi = \exists y\alpha, \forall y\alpha$: x חופשי ב־φ אם x חופשי ב־α ו־$x \neq y$.

משתנה שאינו חופשי נקרא משתנה קשור.

דוגמה:

$$\exists x_1 \left(\forall x_2 \left(R_1(x_2)\right) \to R_2(x_1, x_2)\right)$$

המופע הראשון של x_2 קשור אך השני חופשי ולכן x_2 חופשי בנוסחה.

המופע היחיד של x_1 קשור ולכן x_1קשור בנוסחה.

הגדרה 2: נוסחה ללא משתנים חופשיים נקראת פסוק.

תרגיל 1: נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F_1(\circ), F_2(\circ,\circ), c\rangle$ ונתון הפסוק $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \left(R(x_1,x_2) \to R(x_2,x_1)\right)$.

אילו מבנים יספקו את הפסוק?

משפט 1: יהיו α נוסחה מעל מילון τ, M מבנה עבור τ ו־s_1, s_2 זוג השמות עבור M, כך שלכל משתנה חופשי x_i ב־α מתקיים $s_1(x_i) = s_2(x_i)$. אז $M \models_{s_1} \alpha$ אם ורק אם $M \models_{s_2} \alpha$.

מסקנה: לכל מבנה M, פסוק φ והשמה s, אם $M \models_s \varphi$ אז $M \models \varphi$.

מושגי יסוד סמנטיים

הגדרות:

1. נוסחה φ היא ספיקה אם קיימים מבנה M והשמה s כך ש־$M \models_s \varphi$.
2. מבנה M והשמה s מספקים קבוצת נוסחאות Σ אם לכל $\varphi \in \Sigma$ מתקיים $M \models_s \varphi$. סימון $M \models_s \Sigma$
3. קבוצת נוסחאות Σ היא ספיקה אם קיימים מבנה M והשמה s המספקים אותה.
4. נוסחה ψ גוררת לוגית נוסחה φ אם כל מבנה M וכל השמה s המספקים את ψ מספקים גם את φ. סימון $\psi \models \varphi$.
5. נאמר כי קבוצת נוסחאות Σ גוררת לוגית נוסחה φ אם כל מבנה M והשמה s המספקים את Σ מספקים גם את φ. סימון $\Sigma \models \varphi$.
6. נוסחה φ מעל מילון τ היא אמת לוגית אם לכל מבנה M עבור τ, ולכל השמה s מתקיים $M \models_s \varphi$.

תרגיל 2: נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c_0, c_1 \rangle$.

נגדיר $\Sigma = \{R(t, x_0) \mid \text{ש"ע } t\}$.

1. הוכיחו כי Σ ספיקה.
2. הוכיחו כי $\Sigma \not\models \forall x_1 R(x_0, x_1)$.

תרגיל 3: נתון מילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ) \rangle$.

עבור כל אחת מהנוסחאות הבאות, הוכיחו או הפריכו כי היא אמת לוגית:

1. $\varphi_1 = \forall x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2) \to \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2))$

פתרון:

הטענה נכונה, נראה שהפסוק φ_1 הוא אמת לוגית. יהיו M מבנה מעל τ ו־s השמה.

$M \models_s \varphi_1 \Leftrightarrow$

אם $M \models_s \forall x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2)$ אז

$M \models_s \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2)) \Leftrightarrow$

אם לכל $d_1, d_2 \in D^M$, $M \models_{\underbrace{s[x_1 \leftarrow d_1][x_2 \leftarrow d_2]}_{s'}} R(x_1, x_2)$

אז לכל $d_3, d_4 \in D^M$, $M \models_{\underbrace{s[x_1 \leftarrow d_3][x_2 \leftarrow d_4]}_{s''}} R(F(x_1), F(x_2)) \Leftrightarrow$

אם לכל $d_1, d_2 \in D^M$, $(s'(x_1), s'(x_2)) \in R^M$ אז לכל $d_3, d_4 \in D^M$, $(\overline{s}''(F(x_1)), \overline{s}''(F(x_2))) \in R^M \Leftrightarrow$

אם לכל $d_1, d_2 \in D^M$, $(d_1, d_2) \in R^M$ אז לכל $d_3, d_4 \in D^M$, $\left(F^M(d_3), F^M(d_4)\right) \in R^M$ וזה מתקיים כי אם ההנחה מתקיימת אז המסקנה מתקיימת עבור $d_1 = F^M(d_3)$ ו־$d_2 = F^M(d_4)$.

2. $\varphi_2 = \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1), F(x_2)) \to \forall x_1 \forall x_2 R(x_1, x_2)$

פתרון:

הטענה אינה נכונה, הפסוק אינו אמת לוגית. נראה דוגמה נגדית, כלומר נראה שקיים מבנה M והשמה s שאינם מספקים אותו:

נבחר מבנה והשמה:

נגדיר $M=\left\langle \{0,1\},\{(0,0)\},F^{M}\right\rangle$ כאשר $F^{M}(n)=0$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

תהי s השמה המקיימת $s(v_i)=0$ לכל i (נעיר כי φ_2 פסוק ולכן ערך האמת אינו תלוי בהשמה, ולכן כל השמה תתאים, אך בדוגמה נגדית יש לבחור פירוש לכל הסימנים).

נראה שמסקנת הטענה לא מתקיימת כלומר ש-$M\not\models_s\varphi_2$:

נניח בשלילה $M\models_s\varphi_2$. מתקיים:

$M\models_s\varphi_2 \Leftrightarrow$

אם $M\models_s\forall x_1\forall x_2 R(F(x_1),F(x_2))$ אז $M\models_s\forall x_1\forall x_2 R(x_1,x_2) \Leftrightarrow$

אם לכל $d_1,d_2\in D^M$, $M\models_{\underbrace{s[x_1\leftarrow d_1][x_2\leftarrow d_2]}_{s'}} R(F(x_1),F(x_2))$

אז לכל $d_3,d_4\in D^M$, $M\models_{\underbrace{s[x_1\leftarrow d_3][x_2\leftarrow d_4]}_{s''}} R(x_1,x_2) \Leftrightarrow$

אם לכל $d_1,d_2\in D^M$, $(\overline{s}'(F(x_1)),\overline{s}'(F(x_2)))\in R^M$ אז לכל $d_3,d_4\in D^M$, $(s''(x_1),s''(x_2))\in R^M\Leftrightarrow$

אם לכל $d_1,d_2\in D^M$, $\left(F^M(d_1),F^M(d_2)\right)\in R^M$ אז לכל $d_3,d_4\in D^M$, $(d_3,d_4)\in R^M\Leftrightarrow$

אם לכל $d_1,d_2\in D^M$, $(0,0)\in R^M$ אז לכל $d_3,d_4\in D^M$, $(d_3,d_4)\in R^M$.

הטענה הזאת אינה מתקיימת מכיוון שהתנאי מתקיים אבל המסקנה לא מתקיימת כי $(1,1)\notin R^M$ - בסתירה.

לוגיקה תרגול 10

3 ביולי 2019

תרגיל 1:

נתון מילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F_1(\circ), F_2(\circ,\circ), c\rangle$ ונתון הפסוק $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 (R(x_1,x_2) \to R(x_2,x_1))$.
אילו מבנים יספקו את הפסוק?

פתרון:

כל המבנים M שעבורם R^M הוא יחס סימטרי (למשל $M = \langle \mathbb{N}, =, -, +, 7\rangle$.
נוכיח את הטכנה.
יהי M מבנה כלשהו עבור τ אז:
$M \vDash \varphi \Leftrightarrow$
לכל s, $M \underset{s}{\vDash} \varphi \Leftrightarrow$
לכל s, לכל $d_1, d_2 \in D^M$
$$M \underset{\underbrace{s[x_1 \leftarrow d_1][x_2 \leftarrow d_2]}_{s'}}{\vDash} R(x_1,x_2) \to R(x_2,x_1)$$
לכל s, לכל $d_1, d_2 \in D^M$, אם $\Leftrightarrow$
$M \underset{s'}{\vDash} R(x_1,x_2)$ אז $M \underset{s'}{\vDash} R(x_2,x_1) \Leftrightarrow$
לכל s, לכל $d_1, d_2 \in D^M$ אם $(s'(x_1), s'(x_2)) \in R^M$ אז $(s'(x_2), s'(x_1)) \in R^M \Leftrightarrow$
לכל s, לכל $d_1, d_2 \in D^M$ אם $(d_1, d_2) \in R^M$ אז $(d_2, d_1) \in R^M \Leftrightarrow$
לכל $d_1, d_2 \in D^M$ אם $(d_1, d_2) \in R^M$ אז $(d_2, d_1) \in R^M \Leftrightarrow$
R^M סימטרי.
(כל המעברים דו־כיווניים ולא דורשים הסבר כי הם מבוססים על ההגדרה).

תרגיל 2:

נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c_0, c_1\rangle$, נגדיר $\Sigma = \{R(t, x_0) |$ ש"ע $t\}$

1. הוכיחו כי Σ ספיקה.
2. הוכיחו כי $\Sigma \nvDash \forall x_1 R(x_0, x_1)$.

פתרון סעיף 1:

הוכחה:
נוכיח כי קיים במנה M והשמה s המספקים את Σ.
נבחר במבנה $M = \langle \{a\}, \{(a,a)\}, f, a, a\rangle$
כאשר $f(a,a) = a$ תהי s ההשמה $s(x_1) = a$.
לכל $R(t,x) \in \Sigma$ מתקיים $M \underset{s}{\vDash} R(t, x_0) \Leftrightarrow$
$(\overline{s}(t), \overline{s}(x_0)) \in R^M \Leftrightarrow$
$(a,a) \in \{(a,a)\}$ ולכן $M \underset{s}{\vDash} \Sigma$.

פתרון סעיף 2:

הוכחה:
נסמן: $M = \langle \mathbb{N}, \geq, +, 0, 1\rangle$, תהי s ההשמה $s(x_i) = 0$.

1. נראה כי $M \underset{s}{\vDash} \Sigma$: לכל $R(t, x_0) \in \Sigma$ מתקיים $M \underset{s}{\vDash} R(t, x_0) \Leftrightarrow$
$(\overline{s}(t), \overline{s}(x_0)) \in R^M \Leftrightarrow \overline{s}(t) \geq 0$ וזה נכון כי 0 מינימלי בטבעיים.

2. נראה $M \underset{s}{\not\models} \forall x_1 R(x_0,x_1)$: מספיק להראות $d \in \mathbb{N}$ כך ש $M \underset{s[x_1 \leftarrow d]}{\not\models} R(x_0,x_1)$.
נבחר $d=3$ אז $M \underset{s[x_1 \leftarrow d]}{\not\models} R(x_0,x_1) \Leftrightarrow$
$(\overline{s}[x_1 \leftarrow d](x_0), \overline{s}[x_1 \leftarrow d](x_1)) = (0,3) \notin R^M$
אבל $(0,3) \notin R^M$ כי לא מתקיים $3 \geq 0$ ולכן $M \underset{s}{\not\models} \forall x_1 R(x_0,x_1)$.

תרגיל 3:

נתון מילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ) \rangle$.
עבור כל אחת מהנוסחאות הבאות, הוכיחו או הפריכו כי היא אמת לוגית:

1. $\varphi_1 = \forall x_1 \forall x_2 R(x_1,x_2) \to \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1),F(x_2))$
2. $\varphi_2 = \forall x_1 \forall x_2 R(F(x_1),F(x_2)) \to \forall x_1 \forall x_2 R(x_1,x_2)$

פתרון:

1. יועלה לאתר הקורס.
2. הטענה אינה נכונה:
נבחר מבנה והשמה:
$M = \langle \{0,1\}, \{(0,0)\}, F^M \rangle$
$F^M(n) = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ותהי s השמה $s(x_i) = 0$.