# לוגיקה - תרגול 5

# מערכת הוכחה לתחשיב הפסוקים

המוגדרת באופן אופך האינדוקטיבית הפסוקים היכיחים, ווערכת האינדוקטיבית קבוצת הפסוקים היכיחים, ווערכת האינדוקטיבית קבוצת הפסוקים היכיחים, ווערכת האינדוקטיבית הפסוקים היכיחים, ווערכת ההוכחה ווערכת ההוכחה ווערכת הפסוקים היכיחים, ווערכת ההוכחה ווערכת ההוכחה ווערכת הפסוקים היכיחים, ווערכת הפסוקים היכיחים, ווערכת הפסוקים היכיחים היכיחים, ווערכת היכיחים היכיחים הוביחים היכיחים הוערכת הפסוקים היכיחים הוביחים הוביחים היכיחים הוביחים הובי

- $X = \text{WFF}_{\{\neg, \rightarrow\}} \bullet$
- באר: כאשר: האקסיומות, כאשר:  $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

$$A_1 = \left\{ \alpha \to (\beta \to \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg, \to\}} \right\} -$$

$$A_2 = \left\{ (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{WFF}_{\{\neg, \to\}} \right\} -$$

$$A_3 = \{ ((\neg \beta) \to (\neg \alpha)) \to (\alpha \to \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg, \to\}} \} -$$

 $rac{lpha, lpha o eta}{eta}$  קבוצת כלל הניתוק ההיסק, כאשר MP הוא כלל הניתוק י קבוצת כללי ההיסק.  $MP\left(lpha, lpha o eta
ight) = eta$ צורת רישום נוספת:  $MP\left(lpha, lpha o eta
ight) = eta$ 

דוגמאות:

(שייך בסיס) 
$$(\underbrace{p_1}_{lpha} 
ightarrow (\underbrace{p_2}_{eta} 
ightarrow \underbrace{p_1}_{lpha})) \in Ded\left(\emptyset
ight)$$

(שייך לבסיט) 
$$(\underbrace{[p_1 \to [p_2 \to p_1]]}_{\alpha} \to \underbrace{[p_0 \to [p_1 \to [p_2 \to p_1]])}_{\beta}) \in Ded(\emptyset)$$

(הפעלת שני הקודמים) ( $p_0 o (p_1 o (p_2 o p_1))) \in Ded\left(\emptyset\right)$ 

...  $\alpha$  ששייך לקבוצה האינדוקטיבית ( $\alpha \in Ded\left(\emptyset\right)$ ) נקרא פסוק יכיח, ויסומן  $\alpha$ 

הוכחה הוכחה פורמלית). כלומר סדרת הוכחה (או הוכחה פורמלית). סדרת היצירה של  $\alpha$  נקראת סדרת הוכחה (או הוכחה פורמלית). כלומר סדרת היצירה של פסוקים  $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$  כך שמתקיים:

- $.lpha_n=lpha$  .1
- :מתקיים מתקיים.
- הוא אקסיומה  $lpha_i$  (א)

או

MP התקבל מפסוקים קודמים על ידי הכלל  $lpha_i$ 

# מערכת הוכחה עם הנחות

היא הקבוצה  $Ded\left(\Sigma\right)$ , (הנחות), בערכת הוכחה עם הנחות: קבוצת הפסוקים היכיחים מקבוצת פסוקים (הנחות), היא הקבוצה הגדרה 4, מערכת הוכחה עם הנחות: קבוצת מהגדרה 1). האינדוקטיבית  $X_{B\cup\Sigma,F}$  (עבור X, B ור

- $.\Sigma \vdash \alpha$  ונסמן  $\underline{\Sigma}$ יכיח מיכ מאמר ני  $\alpha \in Ded\left(\Sigma\right)$  •
- $\Delta$  מתוך מעל סדרת היצירה של פסוק lpha מעל  $Ded\left(\Sigma
  ight)$  נקראת סדרת הוכחה של lpha
  - . (ללא הנחות), קבוצת הפסוקים היכיחים (ללא הנחות),  $Ded\left(\emptyset\right)=X_{B,F}$  אז  $\Sigma=\emptyset$

 $\{\alpha, \neg \alpha\} \vdash \beta$  מתקיים  $\{\alpha, \beta\}$  מתקיים כי לכל זוג נוכיח כי לכל זוג פסוקים

# תכונות מערכת ההוכחה:

 $.\alpha,\beta\in {\rm WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$ יהיי  $\Sigma,\Gamma\subseteq {\rm WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$ יהיי

 $\Sigma \vdash \alpha$  אז  $\alpha \in \Sigma$  אם .1 ... הנחת המבוקש: אם ... הוכחה: ל- $\alpha$  יש סדרת הוכחה באורך באורך מעל

 $\Sigma \vdash \alpha$  סופית כך ש־  $\Sigma \vdash \alpha$  אז קיימת  $\Gamma \vdash \alpha$  אז קיימת סופית כך ש־  $\Sigma \vdash \alpha$  סופית ההוכחה: אינטואיציה: בסדרת ההוכחה של מספר סופי של פסוקים, ולכן בהכרח משתמשים רק במספר סופי של הנחות מתוך  $\Gamma$ .

 $\Gamma \vdash \alpha$  אז  $\Sigma \subseteq \Gamma$  וגם  $\Sigma \vdash \alpha$  אם  $\Omega \vdash \alpha$ . 3 מעל  $\Omega \vdash \alpha$  מעל  $\alpha$  אינטואיציה: סדרת ההוכחה של  $\alpha$  מעל  $\alpha$  מעל  $\alpha$  מעל סדרת הוכחה של  $\alpha$ 

4.  $\alpha$  אז  $\alpha$  אז  $\alpha$  אז  $\beta \in \Sigma$  אם לכל  $\alpha$  אם  $\alpha$  אנטואיציה: בסדרת ההוכחה של  $\alpha$  מתוך  $\alpha$ , נחליף כל מופע של פסוק  $\beta \in \Sigma$  בהוכחה של  $\alpha$  מתוך  $\alpha$ .

 $\Sigma \cup \{lpha\} \vdash eta$  אם ורק אם  $\Sigma \vdash lpha 
ightarrow eta$  מתקיים:  $lpha 
ightarrow eta 
ightarrow \Delta$  אם ורק אם  $\Delta \vdash \alpha 
ightarrow \Delta$  מתקיים: משפט הדדוקציה אינו מוסיף כוח הוכחה, כלומר כל מה שניתן להוכיח בעזרתו ניתן להוכיח גם בלעדיו. משפט זה רק מקל על הוכחת קיום סדרת הוכחה.

תרגיל 1: הוכיחו שהפסוק (eta o(eta o(eta olpha)) יכיח, בעזרת משפט הדדוקציה.

## משפט הנאותות

 $\Sigma \models \alpha$  אז  $\Sigma \vdash \alpha$  אז  $\Sigma \vdash \alpha$  מתקיים, אם  $\Sigma$  מתקיים לכל קבוצת פסוקים  $\Sigma$  מתקיים, אם  $\Sigma \vdash \alpha$  אז  $\Sigma \vdash \alpha$  סימון:  $\Sigma \vdash \alpha \models \alpha$  סימון:  $\Sigma \vdash \alpha \models \alpha$  אז  $\Sigma \not\vdash \alpha$  אז  $\Sigma \not\vdash \alpha$  אז  $\Sigma \not\vdash \alpha$  מסקנה ממשפט הנאותות: אם  $\Sigma \not\vdash \alpha$  אז  $\Sigma \not\vdash \alpha$ 

 $\models \alpha$  אז  $\vdash \alpha$  משפט הנאותות הצר: אם

 $.{
m WFF}_{\{\lnot,\lor\}}$  נגדיר מערכת הוכחה חדשה עבור :2 נגדיר מערכת אקסיומות:  ${
m A}=\left\{lpha\lor(\beta\lor\lnotlpha)\mid lpha,\beta\in{
m WFF}_{\{\lnot,\lor\}}
ight\}$  כללי ההיסק: לכל  $lpha,eta\in{
m WFF}_{\{\lnot,\lor\}}$ 

$$MV_1(\alpha,\beta) = \alpha \vee \beta$$
 .1

$$MV_2(\alpha, (\neg \alpha) \lor \beta) = \beta$$
 .2

נסמן ב־ $Ded_N\left(\emptyset\right)$  את קבוצת הפסוקים היכיחים במערכת החדשה, ואם  $\varphi\in Ded_N\left(\emptyset\right)$  אז נסמן באופן דומה באופן היכיחים במערכת במערכת במערכת בעבור בסוקים היכיחים במערכת החדשה בערכת החדשה בערכת בערכת בעבור בעבור בעבור בעבור בעבור בערכת החדשה בערכת החדשה בערכת העבוצת הנחות בעבור בעבור בערכת העבוצת הנחות בערכת בערכת העבוצת הנחות בערכת בע

.(\( \varphi \varphi

# תרגול 5 לוגיקה

$$MP(\alpha, \gamma) = \begin{cases} \beta & \gamma = \alpha \to \beta \\ \alpha & \text{otherwise} \end{cases}$$

#### דוגמה:

# $A_1$ .1

$\neg \alpha$	הנחה	.2
$\neg \beta \rightarrow \neg \alpha$	$MP_{1,2}$	.3
$(\neg \beta \to \neg \alpha) \to (\alpha \to \beta)$	$A_3$	.4
$\alpha \to \beta$	$MP_{3,4}$	.5
$\alpha$	הנחה	.6
β	$MP_{5,6}$	.7

## :1 תרגיל

. הוכיחו שהפסוק יכיח יכיח  $\alpha \to (\beta \to (\beta \to \alpha))$  הוכיחו הוכיחו

# הוכחה (לפי דדוקציה):

$$\begin{split} &\alpha \to (\beta \to (\beta \to \alpha)) \\ &\Leftrightarrow (\text{deduction}) \\ &\{\alpha\} \vdash \beta \to (\beta \to \alpha) \\ &\Leftrightarrow (\text{deduction}) \\ &\{\alpha,\beta\} \vdash \beta \to \alpha \\ &\Leftrightarrow (\text{deduction}) \\ &\{\alpha,\beta\} \vdash \alpha \end{split}$$

מתקיים  $\{\alpha,\beta\} \vdash \alpha$ מהנחת מתקיים

$$Ded(\Sigma) = \left\{ lpha \in \mathrm{WFF}_{\{\lnot, \to\}} | \Sigma \vdash lpha 
ight\}$$
 אינדי

$$Con(\Sigma)=\left\{lpha\in {
m WFF}_{\{\lnot,
ightarrow\}}\mid \Sigma\vDashlpha
ight\}$$
 לא אינדי

## :2 תרגיל

 $\mathrm{WFF}_{\{\neg,\lor\}}$  נגדיר מערכת הוכחה חדשה עבור  $A = \left\{ lpha \lor (eta \lor \lnot lpha) \mid lpha, eta \in \mathrm{WFF}_{\{\lnot,\lor\}} 
ight\}$  אקסיומות:  $lpha,eta\in \mathrm{WFF}_{\{\lnot,\lor\}}$ כלל ההיסק: לכל

$$MV_1(\alpha,\beta) = \alpha \vee \beta$$
 .1

$$MV_2(\alpha, (\neg a) \vee \beta) = \beta$$
 .2

נסמן ב־ $Ded_N(\emptyset)$  את קבוצת הפסוקים היכיחים במערכת החדשה, ואם  $Ded_N(\emptyset)$  אז נסמן באופן היכיחים במערכת בחדשה בחדשה בחדשה באופן באופן ווי $\Sigma \ {}^{\vdash}_{\!\scriptscriptstyle N} \ \varphi$  ווי $\varphi \ {}^{\vdash}_{\!\scriptscriptstyle N} \ \varphi$ עבור באופן דומה נסמן במערכת החדשה באופן דומה נסמן  $\Sigma$ מקבוצות המחות

 $arphi \in lpha \in lpha$  פסוק לכל מערכת החכחה החדשה נאותה במובן הצר (כלומר, לכל פסוק .(\beta  $\varphi$  אז און אס איז:  $\mathrm{WFF}_{\{\neg, \rightarrow\}}$ 

### פתרון:

נוכיח באינדוקציית מבנה ש:

$$(\vDash \varphi \Leftarrow \vdash_N \varphi) \ Ded_N(\phi) \subseteq Con(\phi)$$

בסיס: מעבלת טעבלת טעבלת בסיס: בסיס לכל לכל לכל לכל לכל לכל באמצעות נראה בסיס: גראה לכל לכל לכל לכל לכל לכל לכל לכל לכל אמת:

$\alpha$	β	$\neg \alpha$	$\beta \vee \neg \alpha$	$\alpha \vee (\beta \vee \neg \alpha)$
T	Т	F	Т	Т
T	F	F	F	Т
F	Т	Т	Т	Т
F	F	Т	Τ	T

otag בלומר otag otag בלומר otag בלומר otag בלומר otag בלומר otag

$$\delta = MV_1(\alpha, \beta) = \alpha \vee \beta \bullet$$

$$\overline{V}(\alpha \vee \beta)TT_v(\overline{V}(\alpha), \overline{V}(\beta)) = TT_V(T, T) = T$$

$$\delta = MV_2(\alpha_1(\neg \alpha) \lor \gamma) = \gamma \quad \beta = ((\neg \alpha) \lor \gamma) \bullet$$

 $v \in ASS$  תהיי

$$\begin{split} \overline{V}(\alpha) &= T \\ \overline{V}(\beta) &= \overline{V}((\neg \alpha) \lor \gamma) = T \\ \overline{V}(\neg) &= TT_{\neg}(\overline{V}(\alpha)) = TT_{\neg}(T) = F \end{split}$$

. לפי טבלת אמת לפי  $\overline{V}(\gamma) = T \Leftarrow$ 

. לפי ה"א 
$$\models \alpha \ \underline{MV_2(\alpha,\beta) = \alpha}$$
 ont mandatory •