לוגיקה הרצאה 5

קבוצת הפסוקים היכחיים/משפטים מורמליים - סינטקטי - פסוקים עם $\{\leftarrow, \rightarrow\}$ בלבד. הגדרה אידוקטיבית:

$$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

$$A_1 = \{(\alpha \to (\beta \to \alpha)) | \alpha, \beta \in WFF\{\neg, \to\}\}$$

$$A_2 = \{((\alpha \to (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \gamma)) | \alpha, \beta, \gamma \in WFF_{\{\neg, \to\}}\}$$

$$A_3 = \{((\neg \alpha \to \neg \beta) \to (\beta \to \alpha)) | \alpha, \beta \in ...\}$$

$$F = \{MP\}$$

$$\underbrace{\alpha,\alpha \to \beta}_{\beta}$$

כדי להראות ספסוק שייך לקבוצת הפסוקים היכיחיים צריך להראות שנקראת סדרת הוכחה. כדי להראות ספסוק שייך לקבוצת הפסוקים היכיחיים צריך להראות סדרת הפחוקים β הוא סתדרת הפחוקים סדרת הוכחה עבור פחוק להוא סתדרת הפחוקים היכיחיים עדרת הוכחה עבור פחוק הוא סתדרת הפחוקים היכיחיים אורים בייחיים שייד לקבוצת הפחוקים היכיחיים אורים בייחיים בייחיים אורים בייחיים בי

MP שכל אחד מהם הוא או אכסיומה או התקבל מהקודמים או שכל אחד מהם הוא שכל

$$a_n = \beta$$
 בנוסף axi' $a_1a_2a_3 \mid \dots a_n$ Proof series for a_3

דוגמה:

 $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$ צ"ל

etaכסימון להקלה בקריאות נסמן כסימון להקלה כ

$$(\alpha \to (\beta \to \alpha)) \underbrace{\longrightarrow}_{\uparrow} ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \alpha)) A_2 1$$

$$(\alpha \to (\beta \to \alpha)) A_1$$
 .2

$$((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) MP1, 2$$
 3

$$:\beta$$
 הכנסת (א)

$$(\alpha \to (\underline{\alpha \to \alpha})) \to (\alpha \to \alpha))$$

$$(\alpha \to (\alpha \to \alpha)), A_1$$
 .4

$$(\alpha \rightarrow \alpha)$$
 ,MP 4,3 .5
 $\vdash (\alpha \rightarrow \alpha)$

דוגמה:

$$\vdash (\neg \alpha \to (\alpha \to \beta))$$

$$(\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) A_3$$
 .1

$$((\neg\beta\to\neg\alpha)\to(\alpha\to\beta))\to(\neg\alpha\to((\neg\beta\to\neg\alpha)\to(\alpha\to\beta)))\text{ ,}A_1\text{ .2}$$

$$(\neg \alpha \rightarrow ((\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))) MP 1, 2$$
 3

$$(\underbrace{\neg \alpha}_{\alpha} \to ((\underbrace{\neg \beta \to \neg \alpha}_{\beta}) \to (\underbrace{\alpha \to \beta}_{\gamma}))) \xrightarrow{1} :A_{2} A_{2}$$

$$(\underbrace{\neg \alpha}_{\alpha} \to (\underbrace{\neg \beta \to \neg \alpha}_{\beta})) \xrightarrow{2}$$

$$(\underbrace{\neg \alpha}_{\alpha} \to (\underbrace{\alpha \to \beta}_{\beta}))$$

$$(\neg \alpha \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)) \rightarrow (\neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))) MP 3, 4$$
 .5

$$(\neg \alpha \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)) A_1$$
 .6

$$(\neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))MP \ 5,6 \ 7$$

 $\vdash (\neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$

הוכחה על סמך הנחות

X נגדיר את קבוצת של פסוקים אל נגדיר את לבוצת של פסוקים על (X' קבוצת הפסוקים היכחיים עס

כקבוצה האינדוקטיבית:

$$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup X$$
$$F = \{MP\}$$

 a_1,a_2,\ldots,a_n עס' eta עס' eta לברת הוכחה עבוק קב'

$$1 \le i \le n$$
 ולכל $a_n = \beta$

Xהוא אכסיומה או a_i

MP או התקבל מהקודמים בסדרה ע"י

$$X \vdash \beta$$
 :סימון

$$\underbrace{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma}_{X = \{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in \text{WFF}_{\{\to, \neg\}}\}}$$

$$.lpha
ightarrow eta$$
 הנחה .1

$$eta
ightarrow \gamma$$
 הנחה .2

$$\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \vdash (\alpha \to \gamma)$$
 מטרה:

משפט:

:נתון

$$.\vdash\beta$$
 אזי נסיק $\vdash\alpha$, $\alpha\in X$ ולכל $X\vdash\beta$

צ"ל:

$$\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \gamma$$

$$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))A2$$
 .1

$$((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma)))A1$$
 2

$$eta
ightarrow \gamma$$
 הנחה .3

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)), MP~2, 3$$
 .4

$$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma), MP 1, 4$$
 .5

$$lpha
ightarrow eta$$
 הנחנה.6

$$\alpha \to \beta, MP 5.6$$
 .7 $\beta \to \gamma, \alpha \to b \vdash \alpha \to \gamma$

:1 טענה

$$X \vdash \alpha$$
 אם $\alpha \in X$ אם

הוכחה:

1.lpha הנחנה

$$X \vdash \alpha$$

$$\alpha \vdash \alpha$$

:2 טענה

 $Y \vdash \alpha$ אז $X \vdash \alpha$ אם α , אם לכל פסוק אז לכל $X \subseteq Y$ אם אם התכונה נקראת: מונוטוניות של הוכחה.

נוסח אלטרנטיבי לטענה 2:

$$X_{B_1,F}\subseteq X_{B_2,F}$$
 אם $B_1\subseteq B_2$ אם

מסקנה:

X אם לכל לכל איז א ר α אם אם אם א

:3 טענה

 $Y \vdash \alpha \ , X = \alpha \ \text{ fold eather}$ אם לכל פסוק $\alpha \ + \beta \$ אז לכל פסוק אם אז לכל פסוק אם אז לכל פסוק אם אז לכל פסוק או אי

$$\underbrace{a_1,\ldots,}_{\mathrm{from}\ X}\underbrace{a_n}_{eta}$$
 , $X\vdash eta$ נתון

"X" על כל איבר a_i שהסדרה שלו כל איבר על כל איבר בסדרת בסדרת אותו בסדרת הוליף אותו בסדרת הוכחה מתוך אותו בסדרת הוליף אותו

דוגמה:

$$X = \{ lpha
ightarrow eta, eta
ightarrow \gamma \}$$
 $\delta = lpha
ightarrow \gamma$ $Y = \{ eta, \gamma \}$ נוכיח ש־ $y \vdash lpha
ightarrow eta$ $y \vdash eta
ightarrow \gamma$ $y \vdash eta
ightarrow \gamma$

$$v\beta \to (\alpha \to \beta)$$
, A1 .1

 β yב. הנחה מ-2

$$\alpha \to \beta$$
 .3 $y \vdash \alpha \to \beta$

$$(\gamma \to (\beta \to \gamma)), \text{ A1 (x)}$$

 $.\gamma$ yב) הנחה מ־(ב)

$$eta
ightarrow \gamma \ \ (\lambda)$$
 $y \vdash eta
ightarrow \gamma$

טענה 4 (הוכחות הן סופיות)

(infinite)

 $X' \vdash \alpha$ אז קיימת תת קבוצה של א $X' \subseteq X$ כך שי אז קיימת תת קבוצה סופית אז אז אז היימת ער אז אז אז אז אז אז קיימת תת

משפט הדדוקציה:

 $oxedsymbol{A_1\&A_2}$ לכל מערכת הוכחה שיש בה לפחות את האכסיומות

 $\overline{\mathrm{MP}}$ ויש בה בדיוק את כלל

מתקיים:

 $:\alpha,\beta$ ופסוקים אופסוקים לכל קבוצת אם ורק אם אובק אר $X \vdash \alpha \to \beta$ אם ורק אם $X,\alpha \vdash \beta$

$$\vdash eta
ightarrow lpha \Leftarrow eta dash lpha$$
 מסקנה:

$$X \vdash \alpha \to \beta$$
 נתון \Rightarrow הוכחה: $X, \alpha \vdash \beta$ נוכיח

$$lpha$$
 הנחה .1

$$.lpha
ightarrow eta \ X$$
יכיח מי.2

$$\beta$$
 MP .3