לוגיקה ־ תרגול 8

גדירות ־ תזכורות

הגדרה 1: השמה המספקת קבוצת פסוקים Σ נקראת מודל של Σ.
קבוצת המודלים של Σ היא הקבוצה: $M(\Sigma)=\{v\in \mathrm{Ass} \mid v\models \Sigma\}$

הגדרה 2: קבוצת השמות K נקראת גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים Σ כך ש־$K=M(\Sigma)$. אחרת K נקראת לא גדירה.

הוכחת גדירות

איך מוכיחים שקבוצת השמות K היא גדירה?

1. מראים קבוצת פסוקים Σ מפורשת.
2. מוכיחים כי $M(\Sigma)=K$ על ידי הכלה דו־כיוונית.

תרגיל 1: לכל $j\in\mathbb{N}$ נגדיר את קבוצת ההשמות : $K_j = \{\ v \mid$ אטומים j לכל היותר ל־ T נותנת $v\}$.
הוכיחו כי לכל $j\in\mathbb{N}$, הקבוצה K_j גדירה.

תרגיל 2:

תהיינה $X,Y\subseteq WFF$.
הוכיחו כי $M(X\cup Y)=M(X)\cap M(Y)$.

משפט הקומפקטיות ־ תזכורת

לכל קבוצת פסוקים Σ מתקיים, Σ ספיקה אמ"מ כל תת־קבוצה סופית של Σ ספיקה.

הוכחת אי־גדירות

איך מוכיחים שקבוצת השמות K אינה גדירה?

1. מניחים בשלילה ש־K גדירה ו־X היא קבוצת הפסוקים המגדירה אותה $M\left(X\right)=K$.
(לשים לב: לא ניתן להניח דבר על X פרט לכך שהיא מגדירה את K).
2. בוחרים קבוצת פסוקים מפורשת Y שעבורה ידוע (או שניתן להוכיח בקלות) מהו $M\left(Y\right)$ (קבוצות שכדאי לנסות: $Y=\{p_i \mid i\in\mathbb{N}\}$, $Y=\{\neg p_i \mid i\in\mathbb{N}\}$).
3. מוכיחים ש־$X\cup Y$ איננה ספיקה על ידי כך שמראים ש־$M\left(X\cup Y\right)=M\left(X\right)\cap M\left(Y\right)=K\cap M\left(Y\right)=\emptyset$.
4. מוכיחים ש־$X\cup Y$ ספיקה על ידי שימוש במשפט הקומפקטיות.
תהי $D\subseteq X\cup Y$ סופית.
נסמן $D_X=D\cap X$ ו־$D_Y=D\cap Y$
נבנה השמה v המספקת את D_Y ו־D_X. נתחיל בבניה ע"פ מבנה הפסוקים ב־D_Y ונשלים אותה כך ש־$v\in K$.
נוכיח שהבניה מספקת את D_Y.
$v\in K \Leftarrow v$ מספקת את $X \Leftarrow v$ מספקת את D_X.
v מספקת את D_X ו־$D_Y \Leftarrow v$ מספקת את $D=D_X\cup D_Y$.
5. מ־3+4 מקבלים סתירה ולכן K אינה גדירה.

תרגיל 3:

הוכיחו כי $K_{fin}=\{v\in \mathrm{Ass}\mid$ נותנת T למספר סופי של אטומים $v\}$ אינה גדירה.

תרגיל 4:

הוכיחו כי $K_{inf}=\{v\in \mathrm{Ass}\mid$ נותנת T לאינסוף אטומים $v\}$ אינה גדירה.

$X, Y \subseteq \mathrm{WFF}$

$M(X \cup Y) = M(X) \cap M(Y)$

$v \in M(X) \cap M(Y) \Leftarrow$

$\varphi \in Y \varphi \in X \varphi \in X \cup Y$

$v \in M(X) \varphi \in X$ "

$v \in M(X \cup Y) v \models \varphi$

$\varphi \in Y$

$v \in M(X \cup Y) \subseteq \Rightarrow$

$v \in M(Y) v \in M(X)$ "

$v \models \varphi \varphi \in X M(x)$

$v \in M(x)$

$M(Y)$