

לוגיקה - תרגול 2

תזכורת: בתרגול הקודם הגדרנו את הקבוצה האינדוקטיבית הבאה:

- העולם: $X = \{s, t\}^*$

- הבסיס: $B = \{\epsilon, st, ts\}$

- פונ' היצירה: $F = \{f_1, f_2\}$, כאשר:

$$f_1(w_1, w_2) = sw_1w_2t -$$

$$f_2(w_1, w_2) = w_1w_2w_1 -$$

איך מראים שאיבר a שייך לקבוצה אינדוקטיבית $(a \in X_{B,F})$?

משפט 1: $a \in X_{B,F}$ אם ורק אם קיימת ל- a סדרת יצירה מעל B ו- F

ע"פ התרגול הקודם הוכחנו כי $st, sstt, tststs \in X_{B,F}$

איך מראים שאיבר a אינו שייך לקבוצה אינדוקטיבית $(a \notin X_{B,F})$?

נמצא קבוצה $T \subseteq X$ המקיימת:

$$1. X_{B,F} \subseteq T$$

$$2. a \notin T$$

מסקנה: $a \notin X_{B,F}$

תרגיל 1: עבור $X_{B,F}$ מהדוגמה הוכיחו כי $tst \notin X_{B,F}$

תרגיל 2:

נתון:

- העולם: $X = \{a, b\}^*$ - קבוצת המילים באותיות a ו- b .

- הבסיס: $B = \{aa\}$

- פונקציות היצירה: $F = \{f\}$, כאשר:

$$f(w) = \begin{cases} aawb & \text{אם } w \text{ מתחיל ב- } a \\ bbwa & \text{אחרת} \end{cases}$$

1. הוכיחו/ הפריכו: $ba \in X_{B,F}$

2. הוכיחו/ הפריכו: $aabb \in X_{B,F}$

תרגיל 3: תהינה $S_1 = X_{B_1,F_1}$ ו- $S_2 = X_{B_2,F_2}$ כך ש- $S_1 = S_2$.

הוכיחו כי מתקיים $X_{B_1 \cup B_2, F_1 \cup F_2} = S_1$.

תרגול 2

28 באפריל 2019

תרגיל 1:

נגדיר קבוצה $T = \{w \in \{s, t\}^* \mid |w| \% 2 = 0\}$
נוכיח כי $tst \notin T$
 $|tst|$ אי-זוגית
הוכחנו כי $X_{B,F} \subseteq T$
באינדוקציית מבנה בתירגול קודם.
מסקנה: $tst \in X_{B,F} \Leftarrow$

תרגיל 2:

1. הטענה לא נכונה:

נגדיר תכונה:

$$T_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid a \text{ מתחיל ב-} w\}$$

נראה $X_{B,F} \subseteq T_1$ בא"מ.

בסיס:

נראה שלכל $w \in T_1, w \in B$

aa, w מתקיים $w \cdot \epsilon$ מתחילה ב- a .

סגור:

נניח $u' \in T_1$ כלומר u' מתחילה ב- a .

תהי $u = f(w')$ מה"א w' מתחילה ב- a ולכן

$w = aaw'b$ ולכן w מתחילה ב- a .

מסקנה: $X_{B,F} \subseteq T_1$ וכן $bba \notin T_1$

(לא מתחילה ב- a) ולכן $bba \notin X_{B,F}$.

2. הטענה לא נכונה:

$\Leftarrow \#_a(w) \Leftarrow$ מספר הפעמיים שאות מופיע ב w ונגדיר תכונה

$$T_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) > \#_b(w)\}$$

בסיס: לכל $w \in B$ מתקיים $w = aa, w \in T_2$

$$\#_a(w) = 2 > 0 = \#_b(w)$$

סגור: נניח $w' \in T_2$ כלומר $\#_a(w') > \#_b(w')$

תהי $w = f(w')$

נפריד למקרים:

(א) אם w' מתחילה ב- a $w = aaw'b$

מה"א $\#_a(w') > \#_b(w')$

ולכן $\#_a(w) = 2 + \#_a(w') > 1 + \#_b(w') = \#_b(w)$

(ב) אם w' מתחילה ב b $w = bbw'a$ מה"א

$$\#_a(w) = 1 + \#_a(w')$$

$$\#_b(w) = 2 + \#_b(w')$$

האם בהכרח $\#_a(w) > \#_b(w)$?

לא, למשל עבור $w' = baa$

התכונה לא נשמרת.

האם המשמעות שאיברים ב- $X_{B,F}$ לא מקיימת את התכונה, לא כי אני יודעים שבקבוצה האינדוקטיבית כל המילים מתחילות ב- a . ולכן נרצה לחזק תכונה.

$$T'_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \in X_{B,F}, \#_a(w) > \#_b(w)\}$$

בסיס:

נראה שלכל $w \in B$ מתקיים $w \in T'_2$

$$w = aa$$

i. $w \in B$ ולכן $w \in X_{B,F}$

ii. $\#_a(w) = 2 > 0 = \#_b(w)$ ולכן $w \in T'_2$.

(ג) סגור:

נניח $w' \in T_2$ כלומר $\#_a(w') > \#_b(w')$

תהי $w = f(w')$

נפריד למקרים:

i. אם w' מתחילה ב- a אז $w = aaw'b$

מה"א $\#_a(w') > \#_b(w')$

$$\#_a(w) = 2 + \#_a(w') > 1 + \#_b(w') = \#_b(w)$$

ii. אם w' מתחילה ב b $w = bbw'a$ מה"א

$$\#_a(w) = 1 + \#_a(w')$$

$$\#_b(w) = 2 + \#_b(w')$$

האם בהכרח $\#_a(w) > \#_b(w)$?

לא, למשל עבור $w' = baa$

תחונה לא נשמרה.

האם המשמעות שאיברים ב- $X_{B,F}$ לא מקיימים את התכונה, לא כי אנחנו יודעים שבקבוצה אינדוקטיבית של כל המילים מתחילות ב- a . ולכן נרצה לחזק תכונה.

$$T'_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \in X_{B,F}, \#_a(w) > \#_b(w)\}$$

בסיס:

נראה שלכל $w \in B$ מתקיים $w \in T'_2$, $w = aa$

$$w \in X_{B,F} \text{ ולכן } w \in B.1$$

2. $\#_a(w) = 2 > 0 = \#_b(w)$ ולכן $w \in T'_2$.

סגור: נניח $w' \in T'_2$

כלומר $\#_a(w') > \#_b(w')$ וכן $w' \in X_{B,F}$

תהי $w = f(w')$ מה"א $w' \in X_{B,F}$ ולכן מסעיף קודם היא מתחילה ב- a ולכן

$$w = aaw'b$$

1. מה"א $w' \in X_{B,F}$ $f \in F$ והקבוצה $X_{B,F}$ סגורה תחת פעולה זו

מהגדרה ולכן $w \in X_{B,F}$.

$$\begin{aligned}
& \text{2. מה"א } \#_a(w') > \#_b(w') \\
& \text{ולכן } \#_a(w) = 2 + \#_a(w') > 1 + \#_b(w') = \#_b(w) \\
& aabb \in T'_2 \text{ וכן-} X_{B,F} \subseteq T'_2 \\
& \#_a(aabb) = \#_b(aabb) \\
& aabb \notin X_{B,F} \text{ ולכן}
\end{aligned}$$

מסקנה:

לעיתים כאשר נוכל להוכיח ש- $X_{B,F}$ מקיימת תכונה f נזדקק לתכונה 2 שכבר הוכחנו ש $X_{B,F}$ מקיימת לשם כך נגדיר תכונה מחוזקת:
 $T_B = \{w \in X \mid w \in X_{B,F}, f \text{ מקיים את } w\}$

תרגיל 3:

הוכחה:

נסמן $X = X_{B_1 \cup B_2, F_1 \cup F_2}$
 נוכיח כי $x = S_1$ ע"י הכלה דו כיוונית

• כיוון ראשון $S_1 \subseteq X$ באינדוקציית מבנה.

בסיס:

נוכיח כי $B_1 \subseteq X$
 $B_1 \subseteq B_1 \cup B_2 \subseteq X$

סגור:

נניח כי $a_1 \dots a_n \in X$
 ונראה כי לכל $f \in F_1$
 $f(a_1, \dots, a_n) \in X$
 $f \in F_1 \cup F_2 \Leftarrow f \in F$
 x סגורה ל $F_1 \cup F_2$ ע"י הבנייה
 ולכן $f(a_1, \dots, a_n) \in X$
 כיוון שני:

$X \subseteq S_1$ נוכיח באינדוקציית מבנה

בסיס:

$B_1 \cup B_2 \subseteq S_1$

נניח:

כי $b \in B_1 \cup B_2$
 אזי $b \in B_1$ או $b \in B_2$ נחלק למקרים

• $b \in B_1$ במקרה זה $b \in S_1$ ע"י הזמנה

• $b \in B_2$ במקרה זה $b \in S_2$ ע"י הזמנה

וגם מכיוון ש $S_1 = S_2$ מתקיים $b \in S_1$

סגור:

נניח

$a_1, \dots, a_n \in S_1$

ונראה כי לכל $f \in F_1 \cup F_2$
 $f(a_1, \dots, F_k) \in S_1$
 נחלק למקרים:

• $f \in P_1$ מכיון ש $a_1, \dots, a_n \in S_1$ סגירות נתון $f(a_1 \dots a_n) \in S$

• $f \in f_2$ " " " " " " a_1, \dots, a_n ש- $S_1 = S_2$ $a_1 \dots a_n \in S_2$

S_2 סגורה תחת הפעולות ב- F_2 $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in S_2$
 מכיון ש- $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in S_1 \Leftarrow S_1 = S_2$