לוגיקה הרצאה 6

אכסיומות $A_1 A_{2,} A_3$

כלל היסק MP

$\underbrace{\alpha, \alpha \to \beta}_{\beta}$

קבוצה אינדוקטיבית של המשפטים היכחיים

$\vdash \alpha$

סדרת הוכחה עבור α

$\alpha_1, \dots, \underbrace{a_n}_{\alpha}$

לכל $1 \le i \le n$

a_iהוא או אכסיומה או התקבלה מהקודמים בסדרה ע"י MP.

בסיס $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup X$ - X קבוצת הנחות

פעולה MP

$X \vdash \alpha$

הנחה מ־X אכס',אכס' $X \subseteq Y$, $y \vdash \alpha$

משפט הדדוקציה

לכל מערכת הוכחה שיש בה לפחות אכסיומות A_1, A_2 רק את כלל MP:

לכל קבוצת פסוקים X ופסוקים α, β מתקיים:

$X \vdash \alpha \to \beta \ \Leftrightarrow \ X, \alpha \vdash \beta$

הוכחה:

$\Rightarrow$ נתון $X \vdash \alpha \to \beta$

הוכחנו $X, \alpha \vdash \beta$

$\Leftarrow$ נתון $X, \alpha \vdash \beta$

צ"ל $X \vdash \alpha \to \beta$

עס' $X, \alpha \vdash \beta$

קיימת סדרת הוכחה $a_1, \dots, a_n$

לכל i :

a_i אכסיומה או מ־X או α או התקבלה עס' MP ו־ $a_n = \beta$.

נראה לכל a_i $1 \le i \le n$

$X \vdash \alpha \to a_i$

מסקנה כבור $a_n = \beta$

כנדרש $X \vdash \alpha \to \beta$

נוכיח באינדוקציה על i בסדרת ההוכחה.

בסיס: נוכיח $X \vdash \alpha \to a_i$

1. a_i אכסיומה
2. α
3. מ־X

<u>הוכחה ל 1 של הבסיס:</u>

1. אכסיומה a_1.
2. A_1 $a_1 \to (\alpha \to a_i)$.
3. $MP_{1,2}$ $\alpha \to a_1$

$\vdash \alpha \to a_1$
מונוטוניות של הוכחה עפ' הנחות $X \vdash (\alpha \to a_i)$.
<u>הוכחה ל 2 של הבסיס:</u>
מטרה $\vdash \alpha \to \alpha$
משפט שהוכחנו בשבוע שעבר $X \vdash \alpha \to \alpha$.
<u>הוכחה ל 3 של הבסיס:</u>

1. הנחה מ־X a_1
2. $a_1 \to (\alpha \to a_1)$
3. $\alpha \to a_1$ $MP_{1,2}$

$X \vdash \alpha \to a_1$.

צעד האינדוקציה נניח שהטענה נכונה לכל $j < i$ נוכיח עבור a_i:
אפשרות 1:

1. a_i אכסיומה
2. α
3. מ־X

עבור אפשרות זו ההוכחה זהה.
אפשרות 2:
a_i התקבלה עפ' MP מ־a_l, a_m עבור $m, l < i$

1. $a_1 = \delta \to a_i$
2. $a_m = \delta$
3. $MP\ a_l, a_m$ a_i

הנחת האינדוקציה
$X \vdash (\alpha \to (\delta \to a_i))$
$X \vdash (\alpha \to \delta)$

1. עפ' X $\alpha \to (\delta \to a_i)$
2. עפ, X $(\alpha \to \delta)$
3. $(((\alpha \to (\delta \to a_i)) \to$
$((\alpha \to \delta) \to (\alpha \to a_i)))$ A_2
4. $((\alpha \to \delta) \to (\alpha \to a_i))$ $MP_{1,3}$
5. $(\alpha \to a_i)$ $MP_{2,4}$
$X \vdash (\alpha \to a_i)$
■

תרגיל:

נוכיח $\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$

הוכחה:

1. הנחה $(\alpha \to (\beta \to \gamma))$
2. הנחה β
3. הנחנה α
4. $(\beta \to \gamma)$ $MP_{1,3}$
5. γ $MP_{4,2}$
$(\alpha \to (\beta \to \gamma)), \beta, \gamma \vdash \alpha$
$(\alpha \to (\beta \to \gamma)), \beta \vdash (\alpha \to \gamma)$ **(משפט הדדוקציה)**
$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \vdash (\beta \to \alpha \to \gamma)$ **("")**
$\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$ **("")**

תרגיל:

נוכיח $\vdash (\neg\neg(\alpha \to \alpha)$

1. הנחה $\neg\neg\alpha$
2. משפט $(\neg\neg\alpha \to (\neg\alpha \to (\neg\neg\neg\alpha)) \ \vdash (\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
3. $(\neg\alpha \to \neg\neg\neg\alpha)\ MP_{1,2}$
4. $(\underbrace{\neg\alpha}_{\beta} \to \underbrace{\neg\neg\neg\alpha}_{\neg\alpha}) \to (\underbrace{\neg\neg\alpha}_{\alpha} \to \underbrace{\alpha}_{\beta})\ A_3$
5. $(\neg\neg\alpha \to \alpha)\ MP_{3,4}$
6. $\alpha\ MP_{5,1}$

   $\neg\neg\alpha \vdash \alpha$

   משפט הדדוקציה

   $\vdash (\neg\neg\alpha \to \alpha)$

$A_3 : (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$

משפט פורמלי פסוק יכיח $((\underbrace{\beta}_{(\neg\neg\neg\alpha)} \to \underbrace{\alpha}_{(\neg\alpha)}(\to \underbrace{\alpha}_{(\neg\alpha)} \neg) \vdash$.

שיטה שונה להשמך ההוכחה משלב 5:

מסקנה $\neg\neg\alpha \vdash (\neg\neg\alpha \to \alpha)$

דדוקציה בכיוון $\{\neg\neg a, \neg\neg\alpha\} \vdash \alpha \to$

$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$

דדוקציה $\vdash (\neg\neg\alpha \to \alpha)$

להוכיח תכונות על מערכת ההוכחה.

משפט נאותות:

$$\vDash \alpha \quad \Leftarrow \quad \vdash \alpha$$

משפט הנאותות החזק:

$$X \vDash \alpha \quad \Leftarrow \quad X \vdash \alpha$$

- $X \vDash \alpha$ מתקיים אם לכל השמה v,
  אם $v \vDash X$ (כלומר $v \vDash \beta$ לכל $\beta \in X$) אז $v \vDash \alpha$.

משפט השלמות(החזק):

$$X \vdash \alpha \Leftarrow X \vDash \alpha$$
$$\vdash \alpha \quad \Leftarrow \quad \vDash \alpha.$$

הוכחה (משפט הנאותות החזק):

נתון $x \vdash \alpha$

צ"ל $X \vDash \alpha$

<u>הוכחה באינדוקציית מבנה על הפסוקים α שיכיחים עס' X.</u>

בסיס סדרת ההוכחה $a_1, \ldots, \underbrace{a_n}_{\alpha}$

1. a_1 מ־X.
2. a_1 אכסיומה

הוכחה:

1. a_1 מ־X.

   $X \vDash a_1$,

   $v \vDash X$ אם ורק אם $v \vDash \beta$ לכל $\beta \in X$ ובפרט $v \vDash a_1$.
2. a_1 אכסיומה

   לכל אכסיומה קל לבדוק $\vDash a_1$ טאוטולוגיה

   מסקנה $X \vDash a_1$

הנחה האינדוקצייה:

$X \vDash a_j$
$X \vDash a_K$

צעד האינדוקצייה a_i: אכסיומה מ־X
MP מ־ a_k, a_j, $j,k < i$
$a_j = \beta \to a_i$, $a_k = \beta$
$X \vDash \beta \to a_i$
$X \vDash \beta$
נניח בשלילה ש־ $X \nvDash a_i$
כלומר קיימת v
$v \vDash X$
$v \nvDash a_i$
עס' הנחת האינדוקציה
$v \vDash \beta \to a_i$
$v \vDash \beta$
עס' טבלת האמת של $\to$:
$v \vDash a_i$ סתירה.

משפט הנאותות(החזק לפי אביר היזם):

אם $X \vdash \alpha$ אז $X \vDash \alpha$
נסמן שקול: אם $X \nvDash \alpha$ אז $X \nvdash \alpha$

הוכחה משפט השלמות:

<u>עקביות של קבוצת פסוקים:</u>
<u>הגדרה 1:</u>
קבוצת פסוקים X היא <u>עקבית</u> אם לא קיים פסוק α כך ש־ $X \vdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$.
<u>הגדרה 2:</u>
X הינה עקבית אם לא כל פסוק יכיח מ־X. כלומר, קיים פסוק β, $X \vdash \beta$.

דוגמאות לקבוצות לא עקביות:

1. $X = \{\alpha, \neg\alpha\}$
$X \vdash \alpha$
$X \vdash \neg\alpha$

2. $X = \{\alpha \to \beta, \alpha, \neg\beta\}$
$X \vdash \neg\beta$
$X \vdash \beta$

משפט:

2 ההגדרות שקולות עבור תחשיב הפסוקים.

הוכחה 1⇐2
נתון: לא קיים α, $X \nvdash \alpha$ וגם $X \vdash \neg\alpha$
ולכן לכל α, או $X \vdash \alpha$ או $X \nvdash \neg\alpha$ ומתקיימת הגדרה 2
2⇐1
X הינה עקבית אם לא כל פסוק יכיח מ־X כלומר, קיים פסוק β, $X \nvdash \beta$.