לוגיקה — תרגול 11

גדירות של יחס בתוך מבנה נתון על ידי נוסחה

<u>הגדרה 1</u>: יהיו τ מילון, M מבנה מעל τ ו־P יחס n־מקומי מעל D^M ($P \subseteq \underbrace{D^M \times D^M \times \ldots \times D^M}_{n}$).

נאמר כי P <u>גדיר</u> ב־M אם קיימת נוסחה φ מעל τ בעלת n משתנים חופשיים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ כך שלכל השמה s מתקיים:

$$M \models_s \varphi \iff (s(x_1), s(x_2), \ldots, s(x_n)) \in P$$

<u>תרגיל 1</u>: נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c\rangle$.

1. הגדירו במבנה $M = \langle \mathbb{N}, \leq, +, 0\rangle$ את היחס הדו־מקומי $P_1 = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i < j\right\}$.
2. הגדירו במבנה $M = \langle P(\mathbb{N}), \subseteq, \cup, \{1\}\rangle$ את היחס הדו־מקומי $P_2 = \{(A,B) \mid A \cup \{1\} \subseteq B\}$.
3. הגדירו במבנה $M = \langle P(\mathbb{N}), \subseteq, \cup, \{1\}\rangle$ את היחס החד־מקומי $P_3 = \{\emptyset\}$.

<u>טענה</u>: יהיו τ מילון, M מבנה מעל τ ו־P_1, P_2 שני יחסים k־מקומיים מעל D^M ($P_1, P_2 \subseteq \underbrace{D^M \times D^M \times \ldots \times D^M}_{k}$) הגדירים ב־$M$ ע"י נוסחאות מעל τ בעלות k משתנים חופשיים φ_1, φ_2 בהתאמה. אז מתקיים:

1. היחס $P_1 \cap P_2$ גדיר ע"י $\varphi_1 \wedge \varphi_2$.
2. היחס $P_1 \cup P_2$ גדיר ע"י $\varphi_1 \vee \varphi_2$.
3. היחס $(D^M)^k \backslash P_1$ גדיר ע"י $\neg\varphi_1$.

תרגיל 2:

נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ)\rangle$.

יהי M המבנה הבא מעל τ:

$$M = \langle \{0,1\}^{\mathbb{N}}, R^M, F^M \rangle$$

כאשר R^M, F^M מוגדרים באופן הבא:

- $R^M = \left\{(a,b) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N},\ a_i \le b_i\right\}$.
- בהינתן $b = b_0 b_1 b_2 \ldots \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$:

$$F^M(b) = b_1 b_2 b_3 \ldots$$

הוכיחו כי היחסים הבאים גדירים במבנה M:

1. $R_1 = \left\{(a,b) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N}^+,\ a_i = b_i\right\}$.
2. $R_2 = \{b^{\text{zero}}\}$, כאשר b^{zero} הוא וקטור האפס המוגדר באופן הבא: $b_i^{\text{zero}} = 0$ לכל $i \in \mathbb{N}$.
3. $R_3 = \left\{b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \text{קיים לפחות } i \in \mathbb{N} \text{ אחד שעבורו } b_i = 1\right\}$.

תרגיל 3: נתון המילון $\tau = \langle F(\circ,\circ), c\rangle$.

יהי $M = \langle \mathbb{N}^+, f_\times, 1\rangle$ מבנה עבור τ, כאשר $f_\times(a,b) = a \cdot b$.

1. יהיו $m,n \in \mathbb{N}^+$. נאמר כי m **מחלק את** n אם קיים $k \in \mathbb{N}^+$ כך ש־$n = k \cdot m$.
   רשמו נוסחה $\varphi_Q(x_1,x_2)$ המגדירה ב־M את היחס הדו־מקומי הבא:

   $$Q = \left\{(m,n) \in \mathbb{N}^+ \mid m \text{ מחלק את } n\right\}$$

2. מספר טבעי ייקרא **ראשוני** אם הוא גדול מ־1 והמחלקים היחידים שלו הם הוא עצמו ו־1.
   רשמו נוסחה $\varphi_P(x_1)$ המגדירה ב־M את היחס החד־מקומי הבא:

   $$P = \left\{p \in \mathbb{N}^+ \mid p \text{ ראשוני}\right\}$$

3. מספר $n \in \mathbb{N}^+$ ייקרא **חופשי מריבועים** אם בפירוק של n לגורמים ראשוניים,
   $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, כל ראשוני מופיע עם חזקה 1 לכל היותר, כלומר $e_i \le 1$ לכל i.
   רשמו נוסחה $\varphi_S(x_1)$ המגדירה ב־M את היחס החד־מקומי הבא:

   $$S = \left\{n \in \mathbb{N}^+ \mid n \text{ חופשי מריבועים}\right\}$$

לוגיקה תרגול 11

תרגיל 1:

$\varphi_1(x_1,x_2)=\exists x_3 R(x_2,F(x_1,x_3))$ (לא מוצלח מדי).

$\varphi_1(x_1,x_2)=R(x_1,x_2)\wedge\neg(x_1\approx x_2)$(פשוט ומוצלח)

<u>סעיף 1:</u>

תהיי s השמה

$M\underset{s}{\models}\varphi_1\Leftrightarrow$

$M\underset{s}{\models}R(x_1,x_2)\wedge\neg(x_1\approx x_2)\Leftrightarrow$

$M\underset{s}{\models}\neg(x_1\approx x_2)$ וגם $M\underset{s}{\models}R(x_1,x_2)\Leftrightarrow$

$M\underset{s}{\not\models}(x_1\approx x_2)$ וגם $M\underset{s}{\models}R^M(s(x_1),s(x_2))\Leftrightarrow$

$s(x_1)\neq s(x_2)$ וגם $s(x_1)\leq s(x_2)$ (ביטוי אלגברי) $\Leftrightarrow(s(x_1),s(x_2))\in P\Leftrightarrow$

$s(x_1)<s(x_2)$.

<u>סעיף 2:</u>

$\varphi_2(x_1,x_2)=R(F(x_1,c),x_2)$

תהיי s השמה

$\Leftrightarrow M\underset{s}{\models}\varphi_2$

$\Leftrightarrow\vdots$

$s(x_1)\bigcup\{1\}\subseteq s(x_2)\Leftrightarrow(s(x_1),s(x_2))\in P_2$.

<u>סעיף 3:</u>

$\varphi_3(x_1)=\forall x_2 R(x_1,x_2)$

תהיי s השמה

$M\underset{s}{\models}\varphi_3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vdots$

לכל $d\in P(\mathbb{N})$ מתקיים $s(x_1)\subseteq d$ (מתורת הקבוצות)$\Leftrightarrow$

$s(x_1)=\emptyset \qquad s(x_1)\in P_3$.

תרגיל 2:

1. $R_1=\{(a,b)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}|\forall i\in\mathbb{N}^+,a_i=b_i\}$.
   $\varphi_1(x_1,x_2)=(F(x_1)\approx F(x_2))$
2. $R_2=\{b^{zero}\}$, כאשר b^{zero}הוא וקטור האפס המוגדר באופן הבא: $b_i^{zero}=0$ לכל $i\in\mathbb{N}$.
   $\varphi_2(x_1)=\forall x_2 R(x_1,x_2)$.

3. $R_3 = \{b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid b_i = 1$ קיים לפחות $i \in \mathbb{N}$ אחד שעבורו $\}$.
$\varphi_3 = \neg\varphi_2$.

תרגיל 3:

1. $\varphi_Q(x_1, x_2) = \exists x_3(F(x_1, x_3) \approx x_2)$
2. $\varphi_P(x_1) = \neg(x_1 \approx c) \wedge \forall x_2(\neg(x_2 \approx 1) \wedge \neg(x_2 \approx x_1) \rightarrow \neg\varphi_Q(x_2, x_1))$
3. $\varphi_S(x_1) = \forall x_2 \varphi_P(x_2) \wedge \varphi_Q(x_2, x_1) \rightarrow \neg\varphi_Q(\varphi_Q(x_2, x_1), x_1)$