

E 6

Magnetische Felder

1. Physikalische Grundlagen

1.0 Vorbemerkung

Aus historischen Gründen trägt die "Rechengrösse" \vec{H} den Namen "magnetische Feldstärke", während das physikalisch grundlegende Feld \vec{B} "magnetische Induktion" oder "magnetische Flussdichte" genannt wird. Wenn deshalb im Folgenden vom Magnetfeld die Rede ist, ist jeweils das grundlegende B-Feld gemeint, während der Ausdruck "magnetische Feldstärke" historisch korrekt für \vec{H} reserviert sein soll. Zusätzlich werden in den Versuchen nur "unmagnetische" Materialien mit relativer magnetischer Permeabilität $\mu_r \approx 1$ verwendet, weshalb sich die Grössen nur um den Faktor $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ unterscheiden.

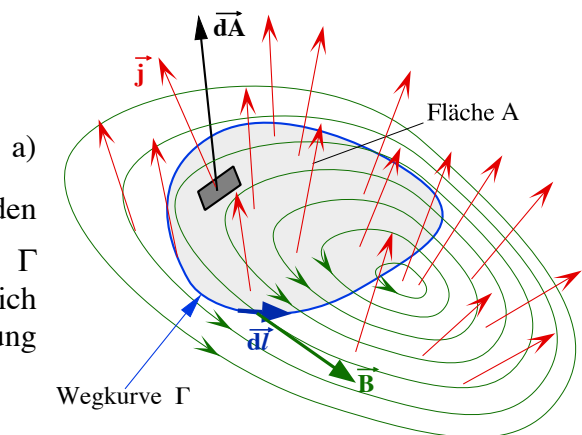
1.1 Berechnung magnetischer Felder

Der Zusammenhang zwischen dem elektrischen Strom und dem von ihm erzeugten Magnetfeld kann integral oder differentiell formuliert werden. Die entsprechenden Gesetze sind:

Durchflutungsgesetz:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Theta$$

Die Durchflutung $\Theta = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$ bezeichnet dabei den Gesamtstrom, welcher durch die von der Kurve Γ umrandete Fläche A tritt. Diese Formulierung eignet sich nur in hochsymmetrischen Situationen zur Berechnung von Magnetfeldern, auch wenn sie allgemein gültig ist.



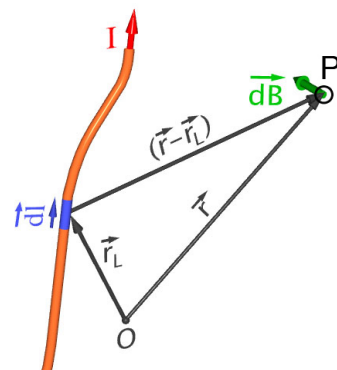
Laplace'sches Elementargesetz:

(auch Biot-Savart'sches Gesetz genannt)

$$d\vec{B} = \mu \cdot d\vec{H} = \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_L|^2} \cdot \mu \cdot I \cdot d\vec{l} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}_L)}{|\vec{r} - \vec{r}_L|} \quad \text{b)}$$

Es liefert den Beitrag eines Strombahnelementes $I \cdot d\vec{l}$ zum Feld im betrachteten Punkt P. Die Feldstärke \vec{H} in P ergibt sich dann durch Integration über den ganzen (geschlossenen) Leiter.

Dieses Gesetz ist allgemein anwendbar, weil es von der bekannten Leitergeometrie ausgeht.



1.2 Messung magnetischer Felder

Massgebend für die Wechselwirkungen ist die magnetische Flussdichte oder Induktion \vec{B} , welche im Vakuum (Luft spielt keine merkliche Rolle) proportional zur magnetischen Feldstärke \vec{H} ist:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\text{mit } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$$

und $\mu_r = 1$ für Vakuum, Luft,

Die Grösse \vec{B} kann messtechnisch über verschiedene Effekte erfasst werden. Die wichtigsten Messverfahren sind:

Mechanische Magnetometer

- Messung des Drehmomentes auf einen magnetische Dipol mit bekanntem magnetischem Dipolmoment $\vec{\mu}$: $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ (Magnetnadel oder Drehspule), z.B. über die Schwingungsdauer.
- Messung der Biot-Savart-Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter bekannter Geometrie:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{s} \times \vec{B}$$

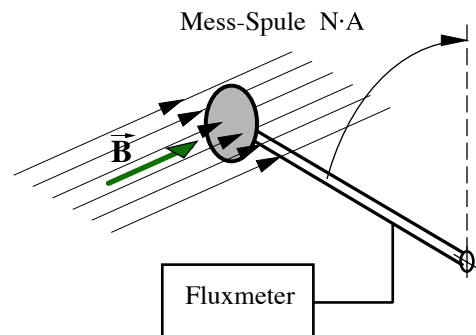
Diese Methoden sind heute in der Praxis veraltet.

Induktionsmethode

Es wird der magnetische Fluss durch eine bewegte (aus dem Feld geschwenkte oder auch im Feld rotierende oder schwingende) Spule bekannter Geometrie gemessen, entweder über die induzierte Spannung oder den induzierten Spannungsschoss mit einem Fluxmeter:

$$\int U_i \cdot dt = \Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

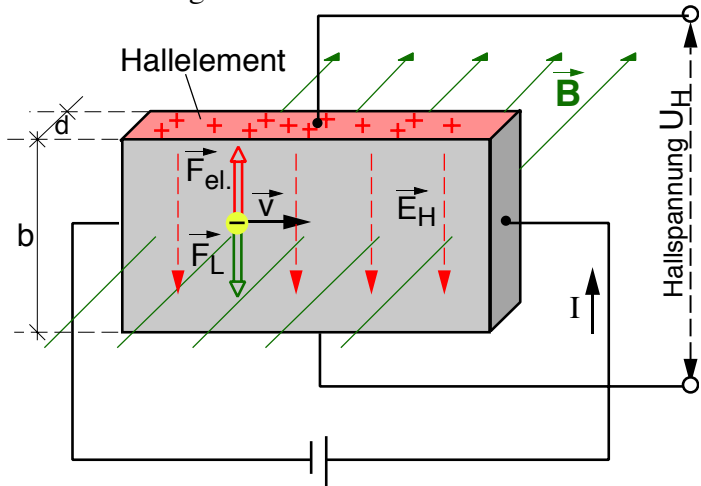
Diese Methode eignet sich, wenn die Messfläche nicht zu klein und das Feld nicht zu schwach ist.



Hall -Sonden

Die in der Laborpraxis am häufigsten anzutreffenden Magnetometer beruhen auf dem Hall-Effekt.

Ein rechteckiges dünnes Plättchen eines leitenden Materials (meistens ein Halbleiter) führt den Strom $I = N^\diamond b \cdot d \cdot q \cdot v$ (N^\diamond = Ladungsträgerdichte) und wird von einem Magnetfeld \vec{B} durchsetzt. Die Lorentzkraft \vec{F}_m auf die Ladungsträger bewirkt eine Ladungsverschiebung quer zur Bewegungsrichtung, wodurch ein elektrisches Querfeld aufgebaut wird, welches wiederum mit der Kraft \vec{F}_{el} auf die Ladungsträger wirkt.



Im Gleichgewicht ist $\vec{F}_m = \vec{F}_{el}$ und an den Schmalseiten kann die sogenannte

$$\text{Hallspannung: } U_H = \frac{1}{N^\diamond \cdot q \cdot d} \cdot I \cdot B$$

c)

abgegriffen werden, welche als Messgrösse dient. Für Elektronenleiter, $q = -e$, ist sie negativ. Für ein bestimmtes Hall-Element ist U_H abhängig vom Strom I , dieser wird beim Kalibrieren der Messkette eingestellt und muss sehr gut stabilisiert sein. Um störende Thermospannungen auszuschalten, wird meistens mit Wechselstrom, z.B. 1 kHz, gearbeitet. Da die Ladungsträgerdichte N^\diamond bei Halbleitern von der Temperatur abhängt, ist der Temperaturkoeffizient ein wesentliches Qualitätsmerkmal einer Hallsonde.

Kernspinresonanz - Magnetometer (engl. NMR = nuclear magnetic resonance)

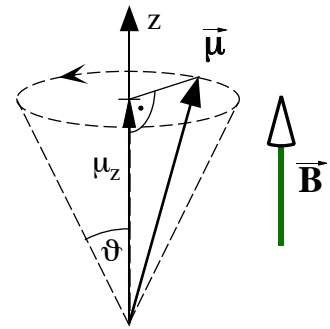
Sie basieren auf folgendem Sachverhalt:

Atomkerne besitzen im allgemeinen ein magnetisches Dipolmoment $\vec{\mu}$, welches starr mit dem Eigendrehimpuls \vec{S} verkoppelt ist. Ein solcher "Magnetkreisel" erfährt in einem äusseren Magnetfeld \vec{B} ein Drehmoment: $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ und präzediert dann nach den Gesetzen der Mechanik mit der von der Orientierung unabhängigen Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\hat{M}}{S} = \frac{\mu}{S} \cdot B$ um die Feldrichtung. Die Umlauffrequenz wird

Larmorfrequenz

$$f_L = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\mu}{S} \cdot B = \frac{\gamma}{2\pi} \cdot B$$

d)



genannt und ist direkt proportional zur magnetischen Flussdichte.

Die Grösse $\gamma = \mu / S$ heisst gyromagnetisches Verhältnis und ist eine Kerneigenschaft. Für Protonen ist $\gamma / 2\pi = 42.5 \cdot 10^6$ Hz/T, die Larmorfrequenz für $B = 1$ T also 42.5 MHz.

Die als Magnetfeldsonde dienenden Kerne werden einem orthogonal zu \vec{B} stehenden schwachen magnetischen Wechselfeld ausgesetzt und geraten in Resonanz, wenn die Anregungsfrequenz gleich der Larmorfrequenz ist. Die Resonanzstelle wird elektronisch detektiert und die zugehörige Frequenz liefert dann die magnetische Induktion B . Die Messgenauigkeit entspricht derjenigen der Frequenzmessung und ist demzufolge hervorragend.

SQUID-Magnetometer

Das Akronym SQUID steht für Superconducting Quantum Interference Device. Es handelt sich um eine supraleitende Leiterschleife, z.B. in Form eines Ringes, welche an 1 oder 2 Stellen einen sog. Josephson-Tunnel-Kontakt enthält. Der durch einen solchen Kontakt, und damit in der Schleife fliessende Suprastrom ist in gesetzmässiger Weise abhängig vom magnetischen Fluss, der die Schleife durchsetzt. Es handelt sich um einen makroskopischen Quanteneffekt, der hier nicht näher erklärt werden kann.

SQUID-Magnetometer, heute auch bei der Temperatur des flüssigen Stickstoffs (77 K) verfügbar, eignen sich besonders für extrem schwache Magnetfelder. Ihre Messempfindlichkeit ist unübertroffen und kann ohne Uebertreibung als sagenhaft bezeichnet werden. Die Messgrenze liegt etwa bei 10^{-15} T = 10^{-11} Gauss. Dieser Wert findet sich im Abstand 20 cm von einem Leiter, der einen Strom von 1 nA führt!

2. Durchführung des Experimentes

2.1 Apparatives

Die **Versuchsanordnung** besteht aus einer optischen Bank aus Aluminium, welche auf 2 Konsolen ruht und in der Höhe verstellbar ist. Die Alu-Schiene wird durch 2 Schwalbenschwänze geführt, was eine Justierung in Längsrichtung ermöglicht (ist praktisch zum Einstellen auf runde Massstabswerte), die zugehörigen Klemmschrauben befinden sich unten. Die Hallsonde wird mittels eines Trägerstiftes (verschiedene Typen vorhanden) auf einen unmagnetischen Reiter montiert. Für kleinere Verschiebungen quer zur Schiene kann ein Verschiebereiter verwendet werden.

Das Erdmagnetfeld wird elektronisch "kompensiert", indem das Gaussmeter genullt wird, nachdem die Sonde im Zentrum des Messobjektes platziert wurde. Vermeiden Sie magnetische Störfelder, indem Sie Ampèremeter, Netzgerät und allfällige weitere magnetisierbare Gegenstände in möglichst grossem Abstand von der Messzone platzieren.

Als **Messobjekte** stehen verschiedene Spulen und 2 fest montierte parallele Leiterstäbe zur Wahl, genauere Informationen finden Sie in Kapitel 4. Eine Spule wird, je nach der zu messenden Richtung, entweder direkt auf die Bank gesetzt oder mit Hilfe von Stativmaterial seitlich am Tisch stabil befestigt. Das Messobjekt relativ zur optischen Bank geometrisch justieren und bezüglich Massstab so einrichten, dass sich bequeme Ablesungen ergeben. Bei gewissen Objekten ist vor allem auf eine genaue Positionierung des Symmetriezentrums und der Achslage zu achten.

Die **Speisung** erfolgt aus einem stabilisierten Netzgerät, welches über genügend lange verdrollte oder eng parallel geführte Zuleitungen angeschlossen wird (*warum ?*) und im Strom-Modus (*warum ?*) betrieben wird. Der Strom wird mit einem guten Multimeter (Messunsicherheit $\leq 1\%$) gemessen.

Zur **Magnetfeldmessung** steht eines unserer **BELL-Gaussmeter** zur Verfügung. Die einen Geräte verfügen über eine interne Referenz, die Kalibrierung erfolgt automatisch: nach dem Einschalten, nach dem Anschliessen einer neuen Sonde und immer dann, wenn sich die interne Temperatur um $\pm 5^\circ\text{C}$ geändert hat. Die Bedienung ist menugeführt.

Konsultieren Sie im Manual die Spezifikationen Ihres Messgerätes (Genauigkeit, Stabilität,) und notieren Sie diese im Laborjournal.

Zu den Unsicherheiten des Messgerätes kommen noch die Unsicherheiten der Sonden:

Hall-Sonden BELL:

- Axialsonde SAF95-1808
 - Transversalsonde HTF95-0608
- mit nebenstehenden Daten.

Linearität (vom Messwert) :	2.5‰ bis 3 T
Temperatur-Stabilität (max.):	
Nullpunkt:	$\pm 9 \mu\text{T} / ^\circ\text{C}$
Kalibrierung:	- 0.4‰ / $^\circ\text{C}$

Sofern Sie nicht obige Sonden verwenden, informieren Sie sich bezüglich der entsprechenden Spezifikationen.

2.2 Vorgehen beim Messen

Vorbereitung:

- Unser neuestes Gaussmeter erlaubt die Verwendung einer drei-Achsen Hallsonde, mit der gleichzeitig die drei Komponenten des Feldvektors gemessen werden können. Für die andern Messgeräte stehen Axial- und Transversalsonden zur Verfügung.
- Gerät einschalten und interne Tests abwarten.
- Nullpunkt einstellen.
- Empfindlichkeitsbereich passend wählen.

Hinweise zur Messung des Feldverlaufes:

- Wählen Sie den Strom so, dass die Spule nicht heiss wird, die Messgenauigkeit aber auch in schwächeren Feldgebieten noch genügend ist.
- Verschaffen Sie sich zunächst einen groben Überblick über die zu erwartenden Messwerte und legen Sie dann fest, in welchen Bereichen Sie feinmaschig, in welchen grobmaschig messen wollen.
- Denken Sie daran, dass der Strom des Netzgerätes und der Nullpunkt des Gaussmeters driften kann. Fahren Sie deshalb von Zeit zu Zeit mit der Hallsonde ins Zentrum, kontrollieren Sie den Zentralwert und den Nullpunkt. Falls nötig aktivieren Sie die Funktion PROBE ZERO des Gaussmeters.
- Messungen in unmittelbarer Nähe von Leitern, wo sowohl der Betrag als auch die Richtung der Feldstärke schnell ändern, sind heikel, weil die Lage der Hallsensoren nicht exakt bekannt ist. So muss man z.B. bei Messungen in der Ebene der Doppelleitung jeweils das Maximum suchen.

Messung des magnetischen Untergrundes:

Das äussere Störfeld setzt sich zusammen aus dem Erdmagnetfeld (welches im Gebäude stark gestört und durch magnetisierbare Gegenstände wie z.B. das Tischgestell, verformt wird), statischen Magnetfeldern von magnetisierten Objekten, Wechselfeldern von Geräten und stromführenden Leitungen. Letztere stören nicht, da wir nur den DC-Anteil messen.

Durch das Nullen des Messgerätes mit der Sonde im Zentrum des Messobjektes wird das Störfeld an diesem Ort zwar kompensiert, nicht aber im ganzen Messbereich. Um die Messgenauigkeit zu erhöhen, bestimmen wir deshalb den nicht kompensierten Rest des Untergrundes im geplanten Messbereich experimentell. Diese Messung kann viel grobmaschiger durchgeführt werden als die anschliessende Feldbestimmung, da der Rest-Untergrund im grössten Teil des Messbereiches relativ klein sein sollte und weil er nur langsam variiert. Sofern nötig, können fehlende Untergrundwerte bei der Auswertung durch Interpolation berechnet werden.

3. Aufgaben und Auswertung

Der genaue Umfang der Arbeiten ist mit dem Dozenten zu besprechen !

Für die vom Dozenten zugewiesenen Messobjekte führen Sie die folgenden Berechnungen / Messungen durch:

1. Nachvollziehen/Herleitung der Gleichungen für den Zentralwert B_0 und den Feldverlauf B_z (B_x) ausgehend von den Grundgesetzen. Genauere Angaben zu den Berechnungen finden sich beim betreffenden Messobjekt Abschnitt 4.. **Diese Aufgabe ist vor Versuchsantritt zu lösen!**
Berechnung der theoretischen Feldverläufe am Versuchsnachmittag.
2. Messung des Zentralwertes in Abhängigkeit des Stromes ($B_0(I)$) mit einer Hallsonde bis zum Maximalwert der betreffenden Spule bzw. des Netzgerätes.
3. Messung des Feldverlaufes
Bei allen Messobjekten wird $B_z(z)$ auf der Symmetrieachse bei geeignet gewähltem, konstantem Strom gemessen.
Je nach Aufgabenstellung sind weitere Feldverläufe, z.B. $B_x(x, y=0, z=\text{const.})$ aufzunehmen.

Hinweise:

- (1) *Die Spiegelsymmetrie der Feldverläufe wird in allen Fällen mit Hilfe einiger Messpunkte experimentell verifiziert. Ob Sie sich sodann auf die eine Raumhälfte konzentrieren oder ob Sie "symmetrisch messen", sei Ihnen freigestellt. Beachten Sie bei der Auswertung, dass es in einigen Fällen schwierig ist, das Zentrum der Anordnung genau zu bestimmen. Bei einem Fit an entsprechende Feldverläufe ist es deshalb angebracht, in der zu fittenden Formel einen Nullpunktoffset des Koordinatensystems als zusätzlichen, freien Parameter einzubringen. Beurteilen Sie anschliessend, ob der gefittete Offset mit Ihrer geschätzten Justiergenauigkeit in Einklang ist.*
 - (2) *Bei jeder Messung stellt sich die Frage, wo und wie viele Messpunkte erfasst werden sollen. In der Regel soll das Punkteraster dort am feinsten sein, wo das Feld am schnellsten ändert. Die Anzahl der Messpunkte soll sodann ausreichend hoch sein, um aus den Messpunkten allein die charakteristischen Züge des Feldverlaufs zu erkennen.*
- In der Auswertung werden die Messwerte (ev. mit Unsicherheiten, wo erfasst), zusammen mit dem entsprechenden Fit resp. der theoretischen Berechnung graphisch dargestellt.
 - Welche Grösse(n) gefittet werden soll(en), hängt von der entsprechenden Aufgabe ab. Überlegen Sie sich, was sinnvoll ist und/oder diskutieren Sie dies mit Ihrem Dozenten.
 - Der Feldverlauf $B_z(z)$ (experimentelle Daten und Fit) soll sowohl linear als auch doppellogarithmisch dargestellt werden. Die logarithmische Darstellung soll zeigen, wie gut Theorie und Experiment auch in grösserer Distanz von der Spule, d.h. bei kleinen B-Werten, übereinstimmen. Ferner sollte bei grösseren Distanzen das für Dipole typische $1/r^3$ -Verhalten sichtbar werden. In doppellog-Darstellung ergibt dies eine Gerade mit Steigung -3. Beachten Sie, dass negative Werte in logarithmischer Darstellung nicht dargestellt werden.
Vielleicht plotten Sie die Daten sowohl ohne als auch mit Untergrundkorrektur.
 - Überall dort, wo die theoretische Berechnung eine numerische Integration erfordert, kann nicht gefittet werden, da wir ja keine "Fitformel" haben (mit entsprechendem Aufwand ginge es auch hier, doch). In diesen Fällen soll die theoretische Kurve mit Fehlerbereich (Grenzkurven) den Messwerten gegenübergestellt und diskutiert werden. Ein etwaiger, geometrischer Offset wird hier durch "von Hand einpassen" ermittelt (= Schieben des Koordinatensystems, bis es "offensichtlich passt").

4. Messobjekte und Präzisierung der Aufgaben

Nachstehend werden die Messobjekte vorgestellt und einige Hinweise zu den Berechnungen und Messungen gegeben. Bei den Spulen betrachten wir den Wicklungsquerschnitt bzw. die Dicke als vernachlässigbar klein gegenüber den geometrischen Abständen, rechnen also wie für 1 Leiter mit N-fachem Strom. Beim Vergleich mit den Messwerten ist demzufolge in der Nähe der Wicklung mit Abweichungen zu rechnen.

4.1 Lineare lange Doppelleitung

Abstand $2a$, antiparallele Ströme

Berechnung:

Ausgehend vom Durchflutungsgesetz

a) auf der z-Achse:

$$B_z = B_0 \cdot \left(1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right)^{-1}$$

e)

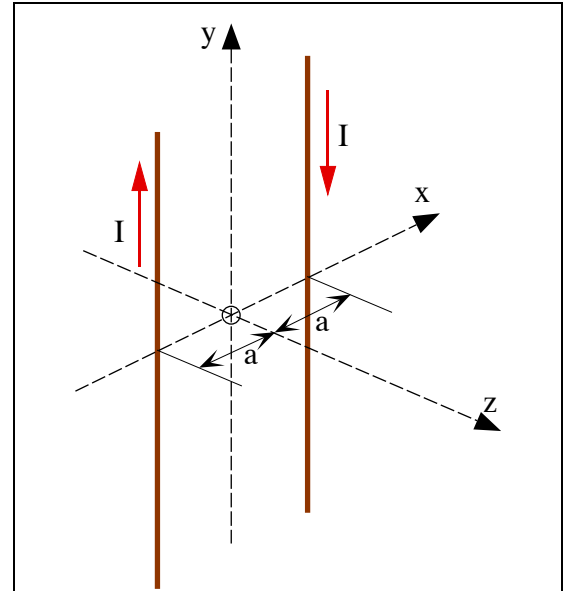
b) auf der x-Achse:

$$B_z = B_0 \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{-1}$$

f)

mit $B_0 = \frac{\mu_0 \cdot I}{\pi \cdot a}$ g)

Bei der Auswertung fitten Sie obige Formeln mit a als freiem Parameter und vergleichen den gefitteten mit dem experimentell eingestellten Wert.



4.2 Ringspule (Kreisstrom)

Radius R, Windungszahl N

Berechnung: Laplace'sches Elementargesetz.

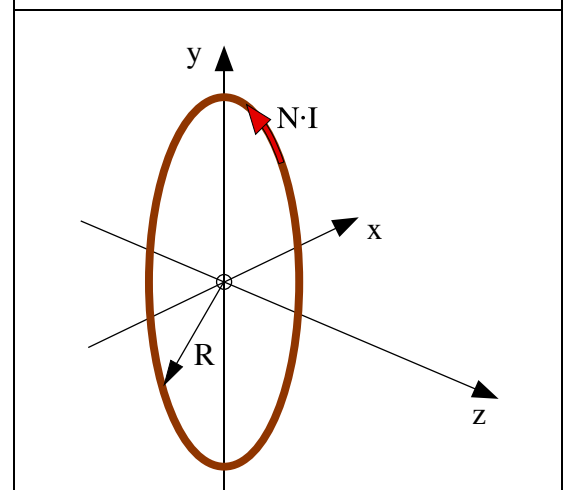
a) auf der z-Achse:

Die Berechnung des Feldes auf der Symmetrieachse ist relativ einfach. Sie sollten diese im Theorieunterricht besprochen haben. Das Ergebnis lautet:

$$B_z = B_0 \cdot \left(1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{-3/2}$$

mit $B_0 = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2R}$

h)



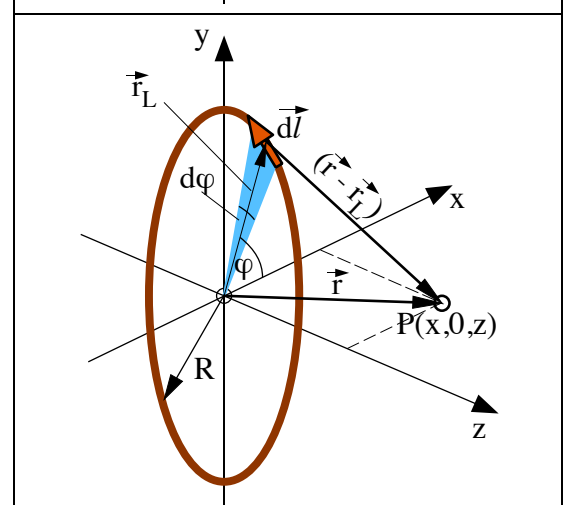
b) auf einer Querachse: $y = 0$, $z = \text{konst.}$:

Die Berechnung des Feldes in Punkten ausserhalb der Symmetrieachse ist etwas schwieriger und soll hier hergeleitet werden.

Das Laplace'sche Gesetz, formuliert für die magnetische Induktion B und $\mu_r=1$ lautet:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}_L)}{|\vec{r} - \vec{r}_L|^3}$$

i)



Die im Gesetz vorkommenden Vektoren lauten für die oben gezeichnete Situation

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_L = R \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d\vec{l} = R d\varphi \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{j)}$$

Daraus lässt sich leicht die z-Komponente von $d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}_L)$ berechnen

$$\left[d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}_L) \right]_z = R^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{R} \cos \varphi \right) d\varphi$$

und der Abstand $|\vec{r} - \vec{r}_L|$ des Punktes P vom Leiterstück beträgt

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}_L| &= \left(x^2 - 2xR \cos \varphi + R^2 + z^2 \right)^{1/2} \\ &= R \cdot \left(1 + \left(\frac{z}{R} \right)^2 + \left(\frac{x}{R} \right)^2 - 2 \frac{x}{R} \cos \varphi \right)^{1/2} \\ &= R \left(k + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\text{mit } k = 1 + \left(\frac{z}{R} \right)^2 \text{ und } \rho = \frac{x}{R}$$

Damit erhalten wir die z-Komponente von $d\vec{B}$ zu

$$dB_z = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_L|^3} \left[d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}_L) \right]_z = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{4\pi R^3 \left(k + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi \right)^{3/2}} R^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{R} \cos \varphi \right) d\varphi$$

oder

$$dB_z = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2R} \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{(1 - \rho \cos \varphi)}{\left(k + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi \right)^{3/2}} d\varphi \quad \text{k)}$$

Dieser Ausdruck muss von 0 bis 2π aufintegriert werden. Da der Integrand bezüglich π symmetrisch ist, schreiben wir

$$B_z = B_0 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{(1 - \rho \cos \varphi)}{\left(k + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi \right)^{3/2}} d\varphi = B_0 \cdot J(k, \rho) \quad \text{l)}$$

Die Funktion $J(k, \rho)$ ist ein sogenannt elliptisches Integral, das mit Hilfe numerischer Integration berechnet werden muss (für $\rho=0$ erhalten wir das Feld auf der Symmetrieachse) und $B_0 = \mu_0 NI / (2R)$ wie in (8). Auch wenn es für die Berechnung elliptischer Integrale spezielle, effiziente Algorithmen gibt scheint es in Matlab einfacher, die Integration mit der allgemeinen Funktion "quad" durchzuführen. Dank der Schnelligkeit der heutigen Computer, benötigt auch die Berechnung von einigen 100 B_z -Werten für eine "kontinuierliche" Theoriekurve nur wenig Zeit.

"Explorative" numerische Integration

Um die Bedeutung der differentiellen Formulierung des Zusammenhanges zwischen Strom und Magnetfeld näher zu bringen, soll das Laplace'sche Gesetz praktisch ohne weitere Umformung zur Berechnung des B-Feldes verwendet werden.

Die Methode stellt eine "primitive" Form der numerischen Integration dar, welche dafür besser überschaubar sein sollte. Ferner kann mit dieser "Brute-Force-Methode", dank der Rechenleistung der heutigen Personal-Computer, in vernünftiger Zeit eine genügende Genauigkeit erreicht werden.

Wir nähern das zu berechnende Integral ohne weitere Umformungen durch eine Summe an

$$\vec{B} = \sum_{i=0}^{m-1} d\vec{B}_i = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{4\pi} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} \frac{d\vec{l}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_{L_i})}{|\vec{r} - \vec{r}_{L_i}|^3} \quad m)$$

und verwenden die unter (10) notierten Vektoren mit Winkeln

$$\varphi_i = i \cdot 2\pi/m, \text{ wobei } i = 0 \dots (m-1)$$

Ferner ersetzen wir den infinitesimalen Winkel $d\varphi$ durch $\Delta\varphi = 2\pi/m$.

Matlab und Maple kennen das Kreuzprodukt und den Betrag von Vektoren. Somit kann die Summe (13) praktisch ohne weitere Umformungen in diesen Programmen verwendet werden. Um das B-Feld für eine Serie von Messorten P zu berechnen, bilden wir eine for-Schleife und speichern die Ergebnisse als Textfile zum Import in QTI-Plot ab. In QTI-Plot werden dann berechnete und gemessene Werte in einer Grafik einander gegenübergestellt (oder umgekehrt, Import der Messergebnisse in Matlab/Maple).

Zum Test, ob das "Integrationsraster" zu grob oder ausreichend fein ist, verdoppeln wir m und vergleichen die Ergebnisse. Anschaulich ist klar, dass die Einteilung feiner sein muss, wenn der Punkt P näher bei der Leiterschleife liegt, da die Schleife in unserer Methode durch "Leiterpunkte" ersetzt wird. Verifizieren und dokumentieren Sie dies an ein bis zwei Beispielen.

Man beachte ferner, dass die beschriebene numerische Integration den B-Vektor liefert, d.h. dass die theoretisch erwarteten Werte von z- und x-Komponente des B-Feldes mit ein und derselben Methode berechnet werden.

4.3 Koaxiales Ringspulen-Paar

Radius R, Abstand $2a$, Windungszahl N pro Spule, Strom gleichsinnig

Berechnung:

Durch Addition der Felder der Einzelspulen (siehe Aufgabe 2.).

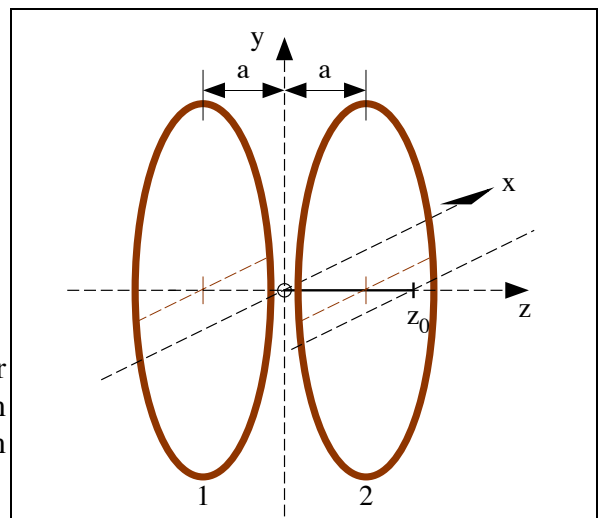
a) auf der z-Achse

berechnet man die Ausdrücke $B_z = B_{z1} + B_{z2}$ d.h.

$$B_z = B_{01} \left\{ \left[1 + \left(\frac{z+a}{R} \right)^2 \right]^{-3/2} + \left[1 + \left(\frac{z-a}{R} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\} \quad n)$$

$$\text{mit } B_{01} = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2R}$$

Hier können z.B. I, a und R als freie Fitparameter gewählt werden. Da R relativ genau bekannt ist, kann es auch sinnvoll sein, diesen Parameter fix auf den experimentellen Wert zu setzen und nur a zu fitten.



b) auf einer Querachse $y = 0$, $z_0 = \text{konst.}$ berechnet man den Ausdruck:

$$B_z = B_{01} [J(k_1, \rho) + J(k_2, \rho)]$$

$$\text{mit } k_1 = 1 + \left(\frac{z_0 + a}{R} \right)^2, \quad k_2 = 1 + \left(\frac{z_0 - a}{R} \right)^2 \quad \text{und} \quad \rho = \frac{x}{R} \quad o)$$

Auch hier kann selbstverständlich die "explorative" numerische Integration verwendet werden, um in einem Schritt B_x - und B_z -Komponente zu erhalten.

Applet dazu: <http://www.schulen.eduhi.at/riedgym/physik/physlet/krahmer/applets/magnet1.html>

4.4 Helmholtz-Spule

Darunter versteht man ein koaxiales Ringspulen-Paar mit dem Abstand $2a = R$. Berechnungen und Messungen analog zu Aufgabe 3. mit entsprechender Spezialisierung.

Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass die 2. Ableitung von B_z nach z verschwindet, wenn $a = R/2$.
Für diesen Fall ist die Homogenität des Magnetfeldes im Zentralbereich optimal.

4.5 Zylinderspule

Länge l , Durchmesser $2R$, N Windungen, ein- oder zweilagig gewickelt.

a) auf der z-Achse:

Berechnung:

Der diskrete Windungsstrom wird ersetzt durch einen äquivalenten Flächenstrom j_{2-d} , wobei

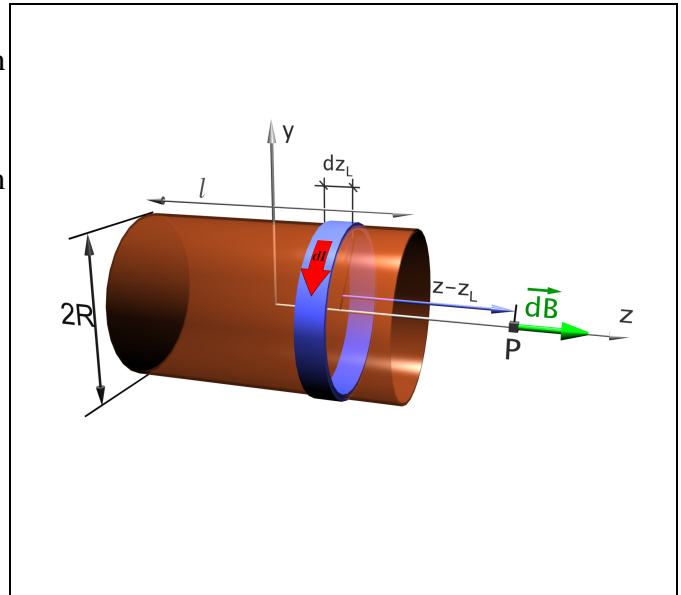
$$N \cdot I = l \cdot j_{2-d}.$$

Ein Stromsegment der Länge dz_L stellt sodann eine Ringspule dar mit Radius R und Strom

$$dI = j_{2-d} \cdot dz_L$$

und sein Beitrag zum Feld im Punkte P beträgt:

$$\begin{aligned} dB_z &= \frac{\mu_0 \cdot dI}{2} \cdot \frac{R^2}{\left[(z - z_L)^2 + R^2\right]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I \cdot dz_L}{2l} \cdot \frac{R^2}{\left[(z - z_L)^2 + R^2\right]^{3/2}} \end{aligned}$$



Die Integration von $-l/2$ bis $+l/2$ liefert

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 N I}{l} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{l/2 + z}{\sqrt{(l/2 + z)^2 + R^2}} + \frac{l/2 - z}{\sqrt{(l/2 - z)^2 + R^2}} \right] \quad \text{p)}$$

mit dem Zentralwert $B_0 = B_z(z=0)$

$$B_0 = \frac{\mu_0 N I}{l} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (2R/l)^2}} \quad \text{q)}$$

4.6 Quadratspule

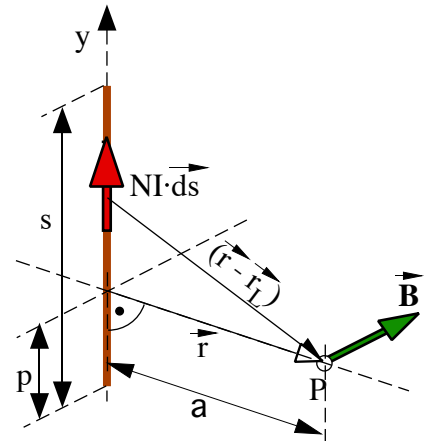
Seitenlänge s , Windungszahl N

Berechnung:

Wir betrachten zunächst ein gerades Leiterstück der Länge s und einen allgemeinen Punkt P im Abstand $|\vec{r}| = a$ vom Leiter und in der Position p längs des Leiters. Das Laplace'sche Elementargesetz liefert für die magnetische Flussdichte in P :

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{4\pi} \int_{-p}^{s-p} \frac{a}{(a^2 + y^2)^{3/2}} dy$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{4\pi} \left(\frac{s-p}{\sqrt{a^2 + (s-p)^2}} + \frac{s}{\sqrt{a^2 + p^2}} \right)$$



In der Mittelebene ist $p = s/2$ und wir erhalten:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{4\pi \cdot a} \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2/4}} \quad r)$$

\vec{B} liegt in einer Normalebene des Leiters und steht senkrecht zum Abstandvektor \vec{r} .

Für eine Quadratspule sind die Beiträge der 4 Seiten vektoriell zu addieren.

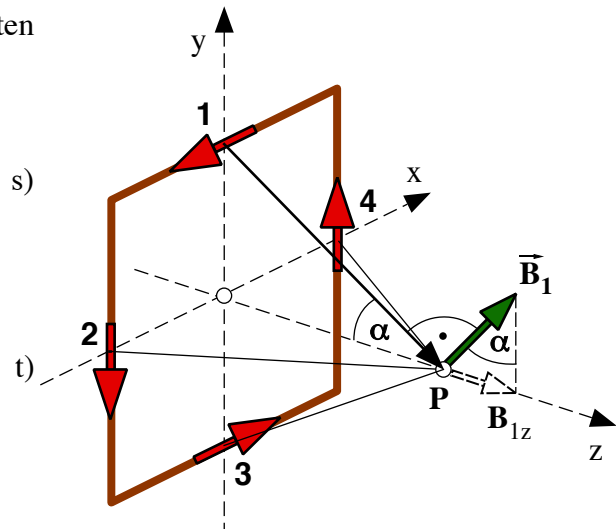
Für den **Zentralwert** ($a = s/2$) ergibt sich:

$$B_0 = \sqrt{8} \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{\pi \cdot s}$$

a) auf der z-Achse

liefert die Addition der z-Komponenten:

$$B_z = B_0 \frac{1}{(1 + 4\gamma^2) \sqrt{1 + 2\gamma^2}} \quad \text{mit } \gamma = z/s \quad t)$$



b) in der Ebene $z = 0, y = 0$ ergibt sich:

$$B_z = B_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{\sigma^2 + \sigma + 1/2}}{1 + 2\sigma} + \frac{\sqrt{\sigma^2 - \sigma + 1/2}}{1 - 2\sigma} \right] \quad \text{mit } \sigma = x/s \quad u)$$

Selbstverständlich kann man die Aufgabe auch für $y \neq 0$ lösen.

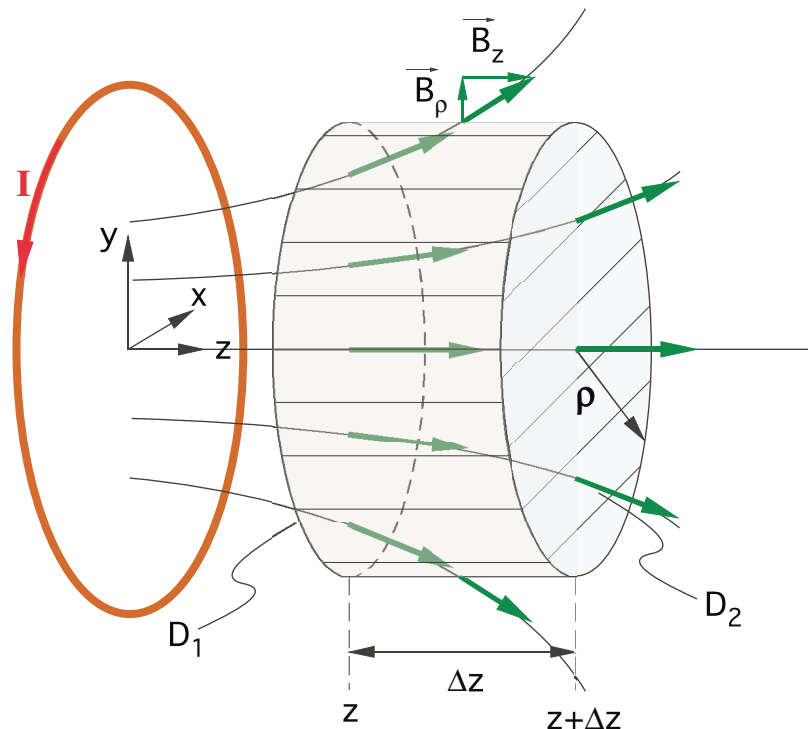
5. Verifikation der Flussregel für das B-Feld

Die allgemein gültige Flussregel wird im Folgenden für rotationssymmetrische Anordnungen ausgewertet. Aus diesem Grunde verwenden wir hier Polarkoordinaten, d.h. der Buchstabe ρ bezeichnet den Abstand von der z-Achse (=Symmetrieachse) resp. B_ρ bezeichnet die radial nach aussen zeigende Feldkomponente von \vec{B} .

Da das B-Feld ein reines Wirbelfeld ist, d.h. weil es keine magnetischen Monopole gibt, gilt immer

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Anschaulich gesprochen bedeutet dies bei einem Zylinder mit Radius ρ_0 und Höhe Δz , dass alles Feld, das durch die Bodenfläche D_1 hineinfließt und zur Deckfläche D_2 nicht mehr herauskommt, seitlich durch die Mantelfläche austreten muss.



Da in der Flussberechnung das Skalarprodukt zwischen dem Feldvektor und dem Flächenelement gebildet wird ($d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A}$), geht in die Berechnung des Flusses durch Boden- und Deckfläche nur die z-Komponente des Feldes ein, bei der Mantelfläche nur die Radialkomponente B_ρ . Aus der z-Komponente des Feldes auf Boden- und Deckfläche kann folglich der Mittelwert von B_ρ auf der Mantelfläche M berechnet werden:

$$\int_{D_1} (-B_z) dA + \int_{D_2} B_z dA + \int_M B_\rho dA = 0 \quad \text{oder} \quad \overline{B_{\rho,M}} \cdot 2\pi \rho_0 \cdot \Delta z = \overline{B_{z,D1}} \cdot \pi \rho_0^2 - \overline{B_{z,D2}} \cdot \pi \rho_0^2$$

und damit

$$\overline{B_{\rho,M}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(\overline{B_{z,D2}} - \overline{B_{z,D1}})}{\Delta z} \cdot \rho_0 \quad \text{v)}$$

wobei z.B. $\overline{B_{z,D1}}$ die mittlere z-Komponente des B-Feldes auf der Deckfläche D_1 bezeichnet.

5.1 Analytische Berechnung der Radialkomponente; Vergleich mit dem Experiment

Für Ring- und Zylinderspule existiert eine analytische Formel für das B-Feld auf der z-Achse - ausserhalb der z-Achse muss numerisch integriert werden. Diese Formel kann verwendet werden, um die Radialkomponente des Magnetfeldes in der Nähe der z-Achse näherungsweise zu berechnen:

Ersetzen wir in Formel (22) die Mittelwerte $\overline{B_z}$ näherungsweise durch den Wert des Feldes auf der Symmetrieachse $B_z(\rho = 0, z)$ und lassen die Zylinderhöhe Δz unendlich klein werden, so erhalten wir

$$B_\rho(\rho, z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{dB_{z, \text{Achse}}}{dz} \cdot \rho \quad \text{w)}$$

In dieser Näherung werden die Mittelwerte der B_z -Komponente auf Boden- und Deckfläche offensichtlich überschätzt. Da wir aber die Differenz zwischen zwei Überschätzungen bilden, ist die Formel besser, als sie auf den ersten Blick erscheint.

Die früher präsentierten Formeln für B_z auf der z-Achse von Ring- und Zylinderspule ergeben mit (23) für die Radialkomponente B_ρ

Ringspule:

$$B_\rho(\rho, z) = \frac{3}{4} \cdot \frac{\mu_0 N I}{R^3} \cdot \frac{z}{\left(1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right)^{5/2}} \cdot \rho \quad \text{x)}$$

Zylinderspule:

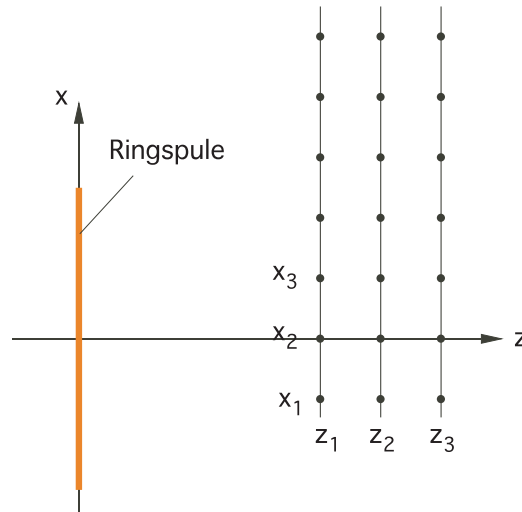
$$B_\rho(\rho, z) = -\frac{\mu_0 N I}{l} \frac{\rho \cdot R^2}{4} \left[\frac{1}{\left[\left(l/2 + z\right)^2 + \rho^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[\left(l/2 - z\right)^2 + \rho^2\right]^{3/2}} \right] \quad \text{y)}$$

Vergleichen Sie die Näherungslösung mit Ihrem Experiment in einer Grafik, indem Sie die Näherung Ihren experimentell ermittelten Werten gegenüberstellen. Wie weit gilt die Näherungslösung (eine Gerade!!), ab welchem Radius ρ sind signifikante Abweichungen feststellbar?

Kontrollieren Sie auch, ob dem Autor bei der Berechnung obiger Formeln ein Algebrafehler passierte!

5.2 "Explorativer" Test der Flussregel (Ring-, Zylinder- und Quadratspule)

Zur Überprüfung der Flussregel bei grösseren Abständen von der z-Achse, messen wir das B-Feld an drei z-Koordinaten $z_1, z_2=z_1+\Delta z, z_3=z_1+2\cdot\Delta z$ an rund 15 Positionen $x_1 \dots x_{15}$. Genauer gesagt messen wir bei z_1 (Bodenfläche) und z_3 (Deckfläche) die Komponente B_z und bei z_2 (Mitte der Mantelfläche) die Komponente B_x , d.h. die Radialkomponente $B_\rho = \text{sign}(x) \cdot B_x$.



Die Berechnung des Flusses durch Boden- (z_1) und Deckfläche (z_3) wird nun dank der Rotationssymmetrie der Anordnung schon bei relativ wenig Messpunkten ziemlich genau. Die Genauigkeit steigern wir noch, indem wir anstelle eines Streckenzuges einen Polynomfit durch die Messpunkte legen:

An die Messwerte $B_z(x_1, z_1) \dots B_z(x_{15}, z_1)$ fitten wir ein Polynom, welches nur gerade Potenzen enthält (weshalb nur gerade Potenzen?)

$$B_z(x, z_1) = a_0 + a_2 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^4 + a_6 \cdot x^6 + \dots \quad \text{und} \quad B_z(x, z_3) = b_0 + b_2 \cdot x^2 + b_4 \cdot x^4 + b_6 \cdot x^6 + \dots$$

Der benötigte Polynomgrad (6, 8, 10, ..?) hängt dabei von den Messergebnissen ab: Das Polynom soll möglichst gut durch die Messpunkte gehen - im Messbereich aber keine "unsinnigen Schlenker" aufweisen.

Den magnetischen Fluss durch eine Kreisfläche mit Radius ρ_0 erhalten wir sodann durch "rotationssymmetrische Integration" des gefitteten Polynoms

$$\begin{aligned} \Phi_{m, \text{Kreisfläche}} &= \int_{\text{Kreisfläche}} B_z dA = \int_0^{\rho_0} B_z(\rho) \cdot 2\pi \rho d\rho = \int_0^{\rho_0} (a_0 + a_2 \rho^2 + a_4 \rho^4 + \dots) \cdot 2\pi \rho d\rho \\ &= 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2} a_0 \rho_0^2 + \frac{1}{4} a_2 \rho_0^4 + \frac{1}{6} a_4 \rho_0^6 + \dots \right) \end{aligned}$$

und mit Gleichung (22) erhalten wir sodann die gesuchte Radialkomponente zu

$$B_\rho(\rho = |x|, z_2) = \frac{\Phi_m(\rho, z_1) - \Phi_m(\rho, z_3)}{2\pi\rho(z_3 - z_1)}$$

oder

$$B_x(x, z_2) = \frac{\left(\frac{1}{2}(a_0 - b_0)x + \frac{1}{4}(a_2 - b_2)x^3 + \frac{1}{6}(a_4 - b_4)x^5 + \frac{1}{8}(a_6 - b_6)x^7 \dots \right)}{(z_3 - z_1)} \quad z)$$

Gemäss Herleitung liefert (26) den Mittelwert über den Bereich $[z_1, z_3]$. Sofern der Feldverlauf aber nicht allzu wild ist, sollte der Mittelwert mit dem in der Mitte von z_1 und z_3 gemessenen Wert gut überein stimmen: $\overline{B_\rho} \approx B_\rho(\rho, z_2 = (z_1 + z_3)/2)$. Wir vergleichen deshalb die an den Koordinaten $(x_1, z_2) \dots (x_{15}, z_2)$ gemessenen Werte $B_{x,\text{exp}}$ mit den aus der Flussregel bestimmten (Mittel-) Werten.

Um das Ganze anschaulicher zu machen wird auf der nächsten Seite die Auswertung einer solchen Messung gezeigt.

Achtung: Die dargestellten, experimentellen Daten sind "fake"! Sie sollen nur das Vorgehen demonstrieren, ohne Resultate vorwegzunehmen. Korrekt sind die Fits sowie die Berechnung des Polynoms für die B_x -Kurve. Die experimentellen B_x -Werte sind aber wieder gemalt und nicht gemessen! Ferner sollte Ihre Messung/Auswertung um einiges schöner herauskommen.

Als letzter Punkt sei erwähnt, dass die B_x -Komponente selbstverständlich auch direkt durch numerische Integration berechnet werden kann. Das Ziel dieser Auswertung ist aber die praktische Demonstration der Flussregel sowie eines "Auswerte-Tricks" (Polynomfit + Integration), mit dem sich die Qualität des Ergebnisses bei "wenig" Messpunkten wesentlich verbessern lassen sollte.

Zusatz:

Je nach Spule und z-Position, bei der Sie messen, passt das Fitpolynom schlecht zu den Messdaten – die Daten zeigen eher Glockenform. In diesem Falle kann für $B(\rho)$ **die Summe einer Gauss-Kurve und einem Polynom zweiten oder vierten Grades verwendet werden.**

Die Fitfunktion lautet also

$$B_z(x, z_1) = C_1 \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right) + a_0 + a_2 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^4$$

resp.

$$B_z(x, z_3) = C_3 \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_3^2}\right) + b_0 + b_2 \cdot x^2 + b_4 \cdot x^4$$

Dabei wurden die Amplituden der Gaussfunktion C_1 resp. C_3 genannt, weil A und B wegen dem "B"-Feld zu Missverständnissen führen könnten.

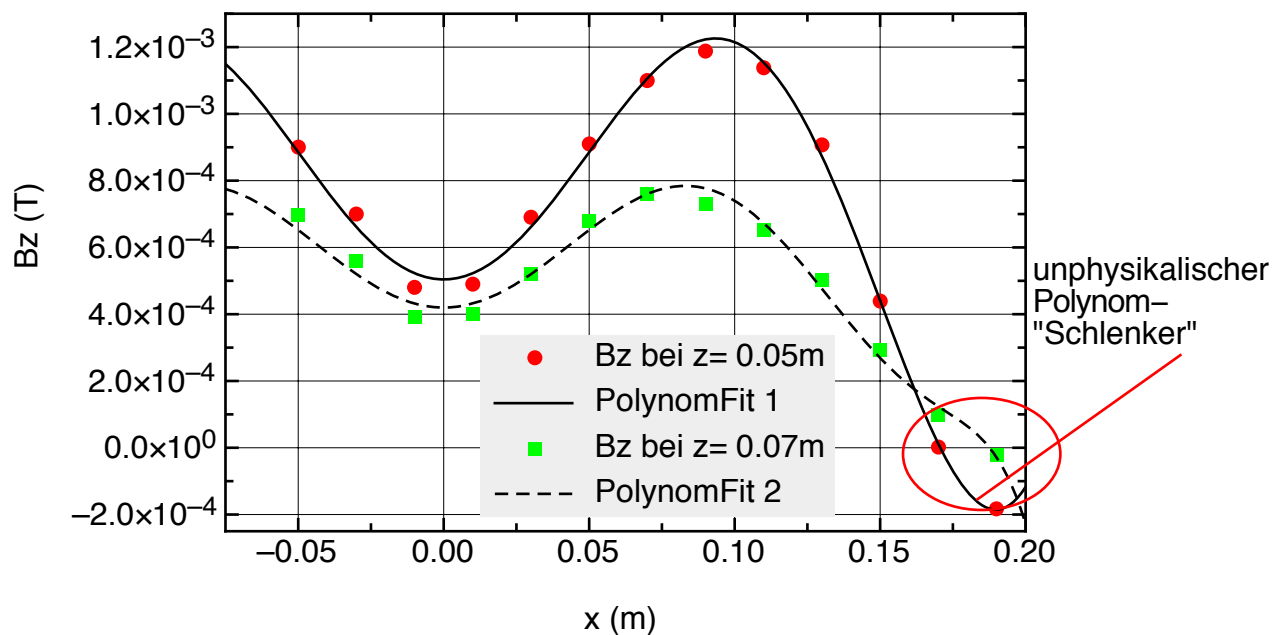
Damit der Fit funktioniert, müssen Sie aber zuerst die Gausskurve mit Polynomkoeffizienten 0 fix fitten. Mit den so ermittelten Startwerten für die Gausskurve können Sie nun auch die Polynomparameter frei geben.

Das mathematische Vorgehen ist ansonsten analog zum Vorgehen bei reinem Polynom, das benötigte Integral können Sie per Hand oder z.B. mit Wolfram Alpha oder ... berechnen.

Berechnung der B_x -Komponente mit Hilfe der Flussregel

Ringspule $R = \dots$, $I = \dots$, $N = \dots$)

$B_z(x)$ bei $z=0.05$ m und $z=0.07$ m



Polynomkoeffizienten 0.05m:

$a_0 = 5.04101e-4$

$a_2 = \dots\dots$

$a_4 = \dots\dots$

$a_6 = \dots\dots$

$a_8 = \dots\dots$

Polynomkoeffizienten 0.07m:

$b_0 = 4.19857e-4$

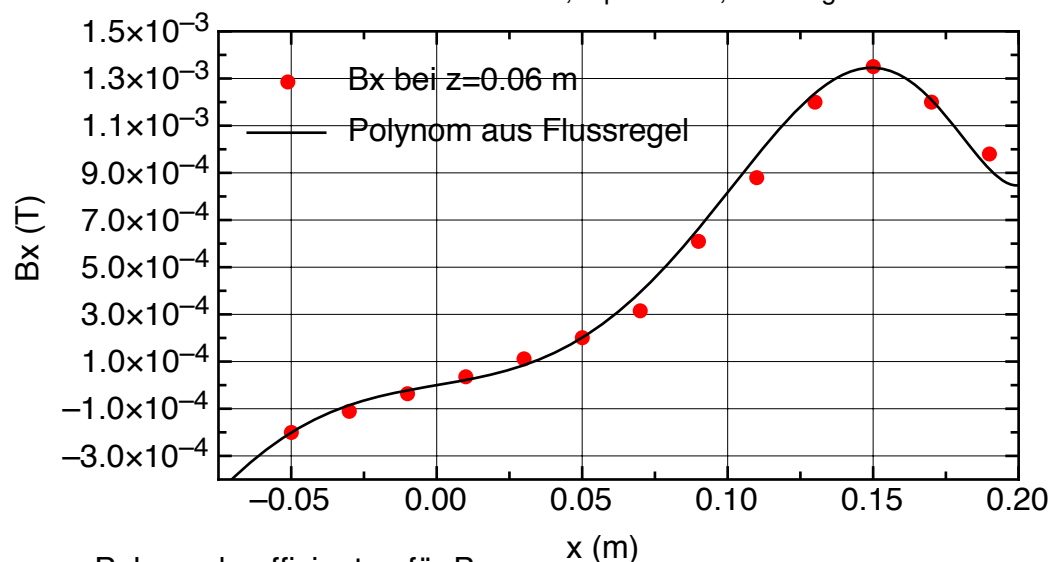
$b_2 = \dots\dots$

$b_4 = \dots\dots$

$b_6 = \dots\dots$

$b_8 = \dots\dots$

Vergleich $B_{x, \text{Exp}} \leftrightarrow B_{x, \text{Flussregel}}$



Polynomkoeffizienten für B_x :

$c_1 = 2.10611e-3$

$c_3 = \dots\dots$

$c_5 = \dots\dots$

$c_7 = \dots\dots$

$c_9 = \dots\dots$