Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Technik

Physik-Labor
Studiengang EIT

Arbeitsunterlagen glaL3/glaL4

I. Ziele und Organisation

II. Richtlinien zur Führung des Laborheftes

III. Anleitung zur Auswertung und Fehlerrechnung

IV. Merkblätter --> für die Laborarbeit
--> für die Gestaltung von Diagrammen

V. Verzeichnis der Versuche

VI. Aufgabenblatt „Einführungsversuch“

I. Ziele und Organisation

1.Zielsetzung

Durch praktische Arbeit an physikalischen Experimenten aus verschiedenen Teilgebieten der Physik wird den Studierenden Gelegenheit geboten,

- im Unterricht vermittelte theoretische Grundlagen auf konkrete Beispiele anzuwenden und dadurch zu vertiefen
- physikalische Phänomene und Vorgänge durch eigene Beobachtungen besser kennen zu lernen und so Erfahrungen zu sammeln
- mit Messgeräten und Apparaturen umzugehen, sowie mit den Problemen beim Experimentieren vertraut zu werden
- sich eine gewisse Fertigkeit im Protokollieren eigener Labortätigkeit und im Auswerten von Messungen anzueignen.

Die *Auswertung* der Messungen bildet einen wesentlichen Bestandteil des Experimentierens. In realen Untersuchungen/Experimenten Ihrer beruflichen Zukunft geht es beispielsweise darum, die Eckwerte eines neu entwickelten Gerätes zu bestimmen (Empfindlichkeit, Genauigkeit etc.) oder die Tauglichkeit einer neuen Messmethode zu prüfen. Dies erfordert eine gute Planung der entsprechenden Experimente und eine professionelle Auswertung der gewonnenen Daten.
Im Physiklabor verhilft die Auswertung zu einem besseren Verständnis der physikalischen Zusammenhänge, vermittelt Einblick in das Problem von Messungenauigkeiten. Sie ermöglicht es auch, durch den Vergleich der Messresultate mit der Theorie oder mit Literaturwerten, einen Eindruck zu gewinnen von der Bedeutung des Experimentes für die wissenschaftliche Forschung.

2.Organisatorisches

2.1 Arbeitsgruppen

Eine Arbeitsgruppe besteht aus 2 Studierenden mit wechselnden Funktionen:

VersuchsleiterIn: plant und leitet Messungen und Auswertung, führt das Laborheft
MitarbeiterIn : hilft aktiv beim Messen und Auswerten, ist verantwortlich für das Aufräumen des Arbeitsplatzes.

Beide VersuchsteilnehmerInnen müssen gleichermassen im Bild sein über die physikalischen Grundlagen und die Messmethoden des Experimentes, *sie werden darüber mündlich geprüft*.

2.2 Versuche und Anleitungen

Die Zuteilung der Versuche ist auf Listen festgehalten, welche im Laborraum angeschlagen resp. per Mail versandt werden. Sie enthalten die Versuchsbezeichnung z.B. M1, E8 und wo nötig die zu messende Probe.
Die Versuchsanleitungen finden Sie auf der Netz-Festplatte des Physikzentrums "//physikablage.ign.technik.fhnw.ch/Labor_E_M". Massgebend für die Aufgabenstellung ist immer das Aufgabenblatt. **Da ich die Versuchsanleitungen rollend anpasse/verbessere, sollen Sie die Versuchsanleitung erst holen, wenn Sie den Versuch vorbereiten, d.h. rund 1 Woche vor Versuchsdatum resp. nachschauen, ob eine neuere Version existiert.**
In einigen Versuchen ist der Aufbau des Experiments ein wesentliches Ziel. In diesen Fällen wird die Datenmenge, die Sie erfassen, kleiner sein als bei einem Versuch, der praktisch betriebsbereit zur Verfügung steht. Dies fliesst selbstverständlich in die Beurteilung Ihrer Arbeit ein!
Bei jedem Arbeitsplatz ist eine Tafel angebracht enthaltend: Geräteliste auf der Vorderseite und allenfalls *wichtige Daten und Hinweise auf der Rückseite*.

2.3 Vorbereitung

Beide Versuchsteilnehmer: Studium des Aufgabenblattes und der Versuchsanleitung, allenfalls ist es notwendig, auch das Skriptum beizuziehen.

Versuchsleiter zusätzlich : Bereitstellung der erforderlichen Arbeitsunterlagen, z.B. Berechnungen, Diagramme und Vorbereiten des Laborheftes, gemäss Instruktion an der Einführung.

Hinweis: *Ein kurzer Augenschein am Arbeitsplatz erspart oft langes Grübeln und verhilft zu Klarheit über die Aufgabe!*

2.4 Labor-Halbtag

Die Weisungen für die Laborarbeit und eine Checkliste zur Versuchsdurchführung sind in einem *Merkblatt für die Laborarbeit* zusammengefasst. Die Weisungen sind verbindlich, die Checkliste ist als Hilfe für den Anfänger gedacht.

Zeitplan (variiert je nach Versuch):

Laborlektion 1-3: Durchführung des Experimentes

Laborlektion 4: Besprechung der Auswertung des letzten Versuches / Auswertung des aktuellen Versuches.

Nach Abschluss der Laborarbeit ist der **Arbeitsplatz aufzuräumen** (Anfangszustand herstellen, Hocker unter die Tische schieben), dann **Arbeitsplatz dem Dozenten abgeben und Messprotokolle visieren lassen.**

2.5 Auswertung

Da die Auswertung erfahrungsgemäss in den Anfängen Schwierigkeiten bereitet, besteht die Möglichkeit, den Dozenten bei Bedarf im Büro abzufangen und um Unterstützung zu bitten. Damit die Zeit optimal genutzt werden kann, **ist der Versuch vorgängig bis auf die "kritischen" Punkte auszuarbeiten (Theorieteil verfasst, Messdaten sind in den Computer eingegeben, graphische Darstellungen der Daten stehen zur Diskussion bereit, ...).**

3. Laborheft

Jeder Studierende besitzt ein "Laborheft", worin er über die als Versuchsleiter durchgeführten Experimente Protokoll führt. Als Anleitung dienen die → *Richtlinien zur Führung des Laborheftes*.

Abgabetermin: 2 Wochen nach Versuchsdurchführung.

In begründeten Fällen (Emailanfrage, direkte Absprache), kann der Abgabetermin um eine Woche verschoben werden. Für verspätet abgegebene Journale gilt:

- Abgabe verspätet um 1-7 Tage: Notenabzug um 1.
- Abgabe um mehr als 7 Tage verspätet: Versuch wird nicht korrigiert, Note 1.

Für umfangreichereVerbesserungen gilt dieselbe Regelung, ab Rückgabedatum.

Damit ich Ihre Berechnungen ev. detailliert nachvollziehen kann, werde ich für alle einen **Dropbox-Ordner** einrichten. Darin **werden alle elektronischen Versuchsdokumente abgelegt**, damit ich z.B. nicht ellenlange Tabellen eintippen muss ...

Das Ablegen der Unterlagen (eingegebene Rohdaten, Qtiplot-Berechnungen, Journal (PDF) ...) ist zwingend - Vergessen hat einen Abzug von 0.5 zur Folge. Wenn dies nach zusätzlicher Aufforderung nicht innerhalb von 3 Tagen nachgeholt wird, wird die Arbeit mit maximal 3.5 beurteilt.

4. Modulbedingungen:

- Zum Bestehen des Grundlagenlabors muss in beiden Teillabors mindestens die Note 3.5 erreicht werden.
- Bei Erfüllung des obigen Minimalstandards ist die Gesamtnote der arithmetische Mittelwert der beiden Teillabors.
- Für das Physiklabor hat jeder Student

  3 akzeptierte Versuche (inklusive „Computerversuch“ in glaL3)

  auszuweisen. Nicht akzeptierte Versuche sind z.B. nicht abgegebene Arbeiten, nur Deckblatt etc..
  Sofern ich zum Schluss komme, dass die Korrektur von Fehlern in einer Arbeit vom Lernerfolg her sinnvoll ist, retourniere ich das Journal zur Verbesserung und beurteile die Arbeit anschliessend neu. Dies bedeutet, dass ich manchmal auch gute Arbeiten zur Verbesserung zurückgebe, weil ein "dummer" Fehler das schöne Ergebnis zunichte machte.
- Wie weiter oben schon erwähnt, gehört eine gute Vorbereitung mit zum Versuch. Schlechte Vorbereitung hat Wegweisung vom Laborplatz zur Folge. Für das Nachholen des fehlenden Versuches sind Sie allein verantwortlich (Zeitpunkt finden, an welchem Laborplatz frei, Dozent verfügbar etc.). Im Wiederholungsfall wird das Physiklabor als Ganzes mit Note 3 beurteilt, d.h. das Grundlagenlabor ist damit nicht bestanden.
- Militärdienst und Krankheit haben keine Reduktion der Anzahl der verlangten Versuche zur Folge. Für entsprechende Ersatztermine sind Sie selbst verantwortlich.

5. Handbibliothek/Literatur-Vergleichswerte

Die bequemste Quelle für Literatur-Vergleichswerte ist heute sicher das Internet (Wikipedia). Es soll hier aber darauf hingewiesen werden, dass die Qualität der "Internetwerte" teilweise schlecht ist und dass deshalb sicher drei verschiedene, unabhängige Internetquellen gesucht und zitiert werden sollen.
Zusätzlich zum Internet stehen im Laborraum eine Reihe von Handbüchern, Tabellenwerken und weiteren Unterlagen zur Verfügung. Teilweise findet man hier die benötigten Materialkonstanten etc. schneller als im Internet.
Die Handbücher sind prinzipiell **nicht ausleihbar** (auch andere Klassen besuchen das Physiklabor). Kopieren/fotographieren Sie die interessierenden Seiten. Dasselbe gilt für alle Unterlagen, welche bei den Arbeitsplätzen aufliegen.
Die FH-Bibliothek besitzt sodann verschiedene Physik-Standardwerke, die Ihnen ev. weiterhelfen.
In jenen Fällen, in denen Literaturwerte nur mit grossem Aufwand zu beschaffen sind, wurden diese im entsprechenden Versuchsordner abgelegt.

II. Richtlinien zur Führung des Laborheftes

Sinn und Zweck

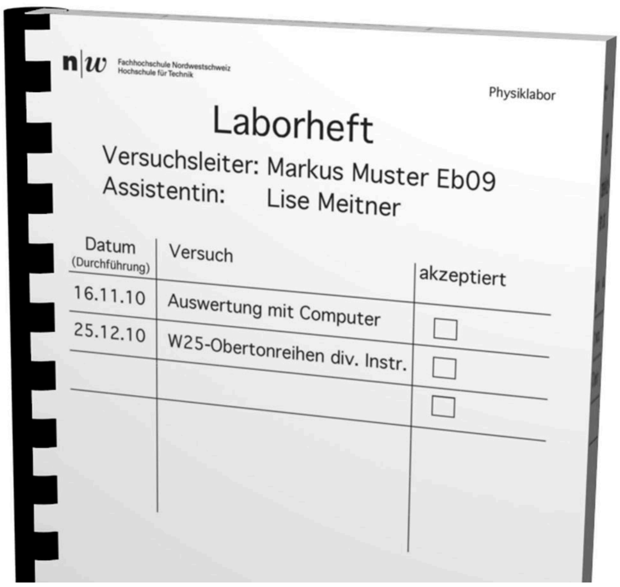
Die Studierenden sollen lernen:

- eigene Labortätigkeit präzis und ordentlich zu protokollieren
- Auswertungen "professionell" durchzuführen und übersichtlich darzustellen, sodass sie nachvollziehbar sind.
- Resultate in zweckmässiger Form und auf ansprechende Weise zu präsentieren.

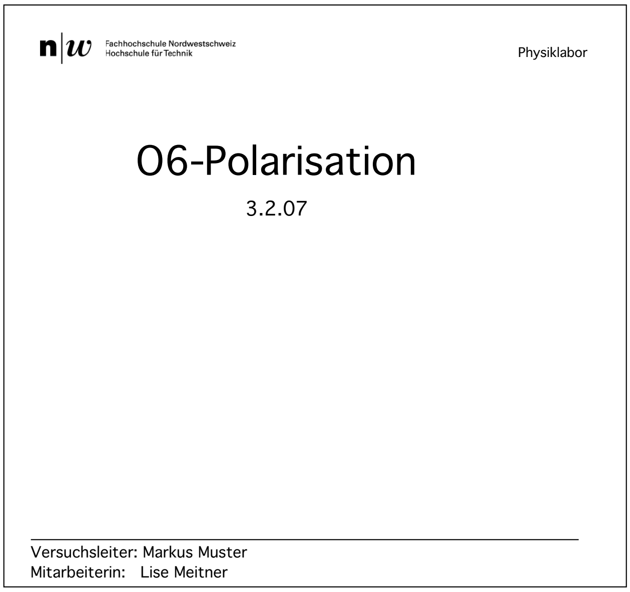
Form

Ein Laborjournal ist in der Regel ein gebundenes Heft mit Identifikationsnummer und Seitenzahlen, in welchem die gesamte Laborarbeit protokolliert wird und aus welchem keine Seiten entfernt werden dürfen. Die Hefte gehören rechtlich dem Arbeitgeber und müssen spätestens bei Stellenwechsel abgegeben werden. Da es sich beim Physiklabor aber um eine Ausbildungsveranstaltung handelt, weichen wir aus praktischen Gründen etwas vom Standard ab und verwenden folgendes Format:

- A4-Blätter gebunden mit Kunststoffrücken (keine Ordner/fliegende Blätter!!).
- Das Journal als Ganzes und jeder Versuch haben ein Deckblatt wie unten dargestellt.
- Blätter vorerst nur 1-seitig benutzen. So bleibt Platz frei für Erweiterungen während der Laborarbeit, für Nachträge, Korrekturen und Bemerkungen.
- **Seiten nummerieren**, damit Verweise möglich sind.



Deckblatt Laborjoural



Deckblatt Versuch

Trotz anderem Format halten wir uns möglichst an die Regeln zur Führung eines Laborhefts:

- Ein Laborheft ist ein **Arbeitsheft.** Handgeschriebenes, Computerplots, Bilder usw. ergänzen sich gegenseitig. Es darf durchgestrichen, abgeändert und ergänzt werden. Das **Löschen von Einträgen ist verboten:** Ein zu korrigierender Plot auf S. XX wird beispielsweise durchgestrichen und auf einem Zusatzblatt S. XX.1 nochmals dargestellt. **Die S. XX wird nicht entfernt**!!
- Figuren und Texte aus der Anleitung oder anderen Quellen dürfen, mit Quellenangabe, beliebig verwendet werden. Man beachte, dass die Zeichnungen in den Anleitungen nicht immer auf dem aktuellen Stand sind.
- Es darf mit Bleistift geschrieben, aber **nicht radiert** werden. **Diese Regel gilt absolut** bei den **Messprotokollen**.

Inhalt

Jedes Versuchsprotokoll beginnt mit dem Versuchsdeckblatt und wird wie folgt gegliedert:

1. Arbeitsgrundlagen (maximal 4 Seiten)

Enthält die persönliche Vorbereitung:

1.1 Selbstverfasste, kurze Darstellung der theoretischen Grundlagen des Versuches
"Kurz" bedeutet in diesem Falle: Mit Hilfe dieser Zusammenfassung sollte ein Kollege von Ihnen ohne Konsultation weiterer Unterlagen imstande sein, den Versuch zu verstehen.

1.2 Für den Versuch benötigte Berechnungen und Diagramme.

1.3 Die Lösung einer allenfalls gestellten theoretischen Aufgabe.

2. Durchführung

2.1 Versuchsanordnung
Schema der Versuchsanordnung mit Tabelle der relevanten Daten betreffend Apparatur und Umwelt (Geräteliste)

2.2 Messvorgang / Messmethoden
mit genauer Bezeichnung der Messgeräte und ihrer Messgenauigkeit, sofern diese nicht schon unter 2.1 aufgeführt sind.

2.3 Proben / Versuchsobjekt
Beschreibung, sofern nötig, und Tabelle der Daten mit Fehlergrenzen.

2.4 Messungen
Versuchsparameter, allfällige Beobachtungen, Spezialitäten, Finessen.
In einem "normalen" Laborjournal werden an dieser Stelle die Messergebnisse notiert. Die bei uns verwendeten Messprotokollblätter werden zugunsten der Lesbarkeit im Anhang abgelegt - umfangreiche Datensätze werden auf CD gebrannt und beigelegt.

Achtung:

- Das Ausdrucken ellenlanger Exceltabellen macht keinen Sinn (=Papierverschleiss)
- Die vom Dozenten signierten **Originalmessprotokolle gehören als Anhang ins Laborjournal**.
- Damit Falschmessungen früh erkannt werden, soll während dem Experimentieren eine Grobauswertung durchgeführt werden. Solche Grobauswertungen gehören prinzipiell auch in das Laborjournal, ev. in den Anhang.

3. Ergebnisse/Auswertung

Die Auswertung erfolgt für jede Grösse bzw. jedes Teilexperiment in einem separaten Abschnitt mit aussagekräftigem Titel (nicht "Teilversuch Nr.1") nach dem Schema

- **Auswertegleichung(en)**
- **Kommentierte Darstellung von Roh- und berechneten Daten in Tabellenform und/oder Grafik**
- **ev. Korrektur-Rechnungen**

Hinweise:

- Grundsätzlich soll die Auswertung in SI-Einheiten durchgeführt werden, d.h. Messgrössen in den Computer eingeben und *sofort* in SI-Einheiten umrechnen. Dadurch vermeiden Sie gemäss Erfahrung viele Stunden unnütze Fehlersuche!!!! Ob Sie zusätzlich zu einem Plot in SI-Einheiten noch einen Plot in "gängigen" Einheiten präsentieren oder ob Sie intern in SI rechnen und "nicht-SI" darstellen, ist Ihnen freigestellt.
- **Meistens** kann ein Sachverhalt, z.B. eine beobachtete systematische Abhängigkeit der Messgrösse von einem Versuchsparameter, mit einem **Diagramm** anschaulicher und über-

zeugender aufgezeigt werden als mit Tabellen. Resultate in Tabellenform werden deshalb in der Regel auch grafisch präsentiert.

- Kommentare zu Messergebnissen/Diagrammen sollen auf der gleichen oder der gegenüberliegenden Seite plaziert werden, damit der Leser nicht blättern muss (Zusammengehörendes zusammen darstellen).

4. Fehlerrechnung

Die **detaillierte, kommentierte Fehlerrechnung** (siehe Anleitung zur Fehlerrechnung) wird in einem separaten Abschnitt durchgeführt. Dabei wird klar dokumentiert, zu welchem Teilexperiment die entsprechende Rechung gehört.

Prinzipiell gilt die Regel, dass Ergebnisse ohne Unsicherheitsangabe wertlos sind und folglich muss für jede Grösse eine Fehlerrechnung durchgeführt werden. Um den Arbeitsaufwand zu reduzieren, wird sich der Dozent in gewissen Fällen mit Ihnen auf eine exemplarische Fehlerrechnung einigen. In solchen Fällen notieren Sie dies gut sichtbar.

Da die Fehlerrechnung/Fehlerabschätzung eine klar nichtriviale Aufgabe darstellt, wird eine gut kommentierte Rechnung verlangt, in der Sie Ihre Überlegungen auch in Textform darlegen:

- welche Messfehler werden von der Statistik erfasst, welche gehen systematisch ein?
- wie "verkoche" ich die verschiedenen Beiträge?
- welche Messunsicherheiten liefern den Hauptbeitrag zum Endfehler?
- ....

Anders ausgedrückt: *Der Wert einer rein mechanisch abgespulten Fehlerrechnung ist Null!*

Ferner: Mit der Fehlerrechnung berechnet oder schätzt man Fehlergrenzen oder Unsicherheits-schranken für gemessene Grössen. **Das sind keine Toleranzen!** Toleranzen sind vorgegebene Grenzen für *machbare* Grössen.

Bis zu diesem Punkt ist das Laborheft ein Arbeitsheft. Der nachfolgende, letzte Abschnitt, die Zusammenfassung der Ergebnisse, wird in **sorgfältiger Gestaltung, nahe an Berichtqualität** erwartet.

Beginnen Sie hier eine neue Seite.

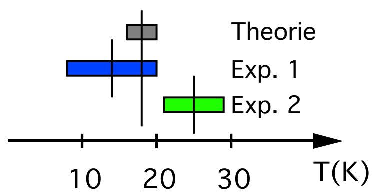
---

5. *Resultate und Diskussion*

Hier werden die Schlussresultate in Kurzform präsentiert, mit der Theorie und / oder Literatur-werten verglichen und kommentiert. Je nach Versuch handelt es sich um

Numerische Ergebnisse:

- **Graphischer Vergleich auf einen Blick -------->**



- Vergleich in **Tabellenform**
- Fehlergrenzen immer **absolut** und mit **nur 1 signifikanten Ziffer** angeben.

Resultate in Form von Diagrammen: Diagramme, welche im Abschnitt 3 erstellt wurden, werden nicht noch einmal geplottet. Deren Quintessenz wird in Textform kurz beschrieben mit Verweis auf die entsprechende Figur und Angabe der Seitenzahl. Für zusammenfassende Diagramme gilt das *Merkblatt für die Gestaltung von Diagrammen*.

Wichtig:

- Messresultate verschiedener Proben werden nicht mit "Probe 1, Probe 2, ..." gekennzeichnet sondern mit aussagekräftigen Bezeichungen: "Kupferstab, Aluminiumstab, ...".
- Zu einem Vergleich in Tabellenform **gehört prinzipiell** ein "graphischer Vergleich auf einen Blick".
- Ergebnisse und Fehlergrenzen müssen mit korrespondierender Ziffernzahl und vernünftig gewählter Potenz/Einheit angegeben werden.
  Bei Schlussresultaten wird der Fehler mit nur 1 signifikanten Ziffer aufgeführt. Beispiele:

  $I = (3.384 \pm 0.008)\cdot 10^{-4}$ kgm^2 oder besser: $I = (338.4 \pm 0.8)\cdot 10^{-6}$ kgm^2

  $T = 12.34\underline{5}$ (3) ms bei grosser Ziffernzahl

Die ***Diskussion*** *umfasst zunächst eine Beurteilung der Resultate im Hinblick auf ihre Genauigkeit, Reproduzierbarkeit und die Übereinstimmung mit bzw. Abweichung von den Vergleichswerten. Sind Abweichungen festzustellen, so soll nach möglichen Ursachen gesucht werden. Diesbezügliche Vermutungen, Behauptungen und Schlussfolgerungen sind* ***physikalisch zu begründen!***
Eine persönliche Stellungnahme am Schluss, welche auch allfällige Kritik am Versuch und Verbesserungsvorschläge enthält, trägt dazu bei, den Unterricht zu verbessern/weiterzuentwickeln.

Das Protokoll wird abgeschlossen mit: *Datum und Unterschrift des Versuchsleiters*

6. Anhang
Der Anhang enthält die Messprotokolle, Datenblätter, Programm-Listings, CD mit Messdaten etc. .

Datenfälschung, externe Hilfe bei der Auswertung, "Kopieren/Einfügen"

Datenfälschung d.h. "frisieren" von Daten, Übernahme von Daten von einem Kollegen ohne entsprechenden Hinweis, ist ein schwerer Verstoss gegen naturwissenschaftliche Ehrlichkeit und hat sofortiges Nichtbestehen des Labors sowie Meldung an die Schuldirektion zur Folge. Weitergehende Massnahmen sind Sache der Schulleitung.

In die gleiche Kategorie gehört der nicht deklarierte Beizug von externen Experten zur Auswertung resp. Erstellung des Journals. Der Beizug eines externen Experten/einer Expertin ist erlaubt, sofern Sie nachher imstande sind, die entsprechende Auswertung selbständig durchzuführen. Bei Verdacht wird dies in einer ad hoc Prüfung kontrolliert und die in dieser Prüfung erreichte Note wird zur Note für den entsprechenden Versuch. Sofern die wesentliche Mitarbeit nicht deklariert wurde wird es gleich wie Datenfälschung gehandhabt.

Es ist den Dozierenden bekannt, dass alte, auf irgendwelchen Servern abgelegte, Laborjournale eine grosse Versuchung darstellen. Im Sinne eines Lernerfolges sind Sie aber angehalten, der Versuchung des "Kopieren/Einfügens" zu widerstehen! Bei nachweisbarer Zuwiderhandlung wird die entsprechende Arbeit nicht korrigiert und mit **Note 1** bewertet (auch wenn es nur 3-4 Sätze sind). Ferner gelten die Ihnen bekannten "Plagiats-Regeln" der HS-Technik, FHNW.

III. Anleitung zur Auswertung und Fehlerrechnung

Eine physikalische Messung besteht entweder aus der Abzählung einer Menge von Gegenständen oder Ereignissen (z.B. Zählung radioaktiver Zerfälle) oder in einem Vergleich einer Grösse mit einer Masseinheit (z.B. Wägen eines Gegenstandes = Vergleich mit der Masse des Urkilogramms). Das Messresultat ist daher eine Zahl, welche mit der entsprechenden Einheit versehen ist. In der Auswertung verwenden wir ausschliesslich das *Internationale Einheitensystem SI*. Messwerte und Resultate werden aber der besseren Lesbarkeit wegen gerne auch in praktischen Einheiten angegeben.

Bei jeder Messung sind Messfehler unvermeidlich. Sie sind durch folgende Faktoren bedingt:

a) Die Versuchsobjekte und -einrichtungen, an denen wir unsere Messungen ausführen, sind unvollkommen und verändern sich zum Teil unter dem Einfluss der Versuchsbedingungen wie Temperatur, Luftdruck, Feuchtigkeit, Alterung etc.

b) Die Messinstrumente, mit denen wir physikalische Grössen messen, besitzen eine beschränkte Empfindlichkeit oder Genauigkeit und können Eichunsicherheiten und Eichfehler aufweisen.

c) In der Mikrophysik gelten die Gesetze der Quantenmechanik, sie verbietet prinzipiell die absolut genaue Bestimmung physikalischer Grössen in einem Experiment endlicher Zeitdauer.

d) Messergebnisse sind auch von der Geschicklichkeit und Sorgfalt des Experimentators abhängig.

1.Typen von Mess-Fehlern

Prinzipiell unterscheidet man zwei Typen von Messfehlern: systematische und zufällige.

a) Systematische Fehler bzw. systematische Unsicherheiten sind durch die Versuchsanordnung/-umgebung oder den Messvorgang selbst verursacht und bewirken entweder eine systematische Abweichung des Messergebnisses vom "wahren Wert" oder lediglich eine Unsicherheit der Messgrösse. Beispiele:
   - Massstäbe messen nur bei einer bestimmten Eichtemperatur richtig (meist Zimmertemp. 20°C)
   - Eichunsicherheiten oder Eichfehler von Messinstrumenten. In der Regel garantiert der Hersteller eine genau spezifizierte Eichgenauigkeit, z.B. 1 % bei einem Voltmeter.
   - verborgene, äussere Einflüsse auf das Experiment.

   Sofern die systematischen Fehler erkannt werden, lassen sie sich meist korrigieren (Eine Spannungsmessung kann beispielsweise durch den nicht unendlich grossen Innenwiderstand des Voltmeters verfälscht werden. Bei Kenntnis des Innenwiderstandes kann jedoch das Resultat korrigiert werden).

   Verborgene systematische Fehler können nur durch Veränderung der Versuchsbedingungen aufgedeckt werden. Deshalb ist es wichtig, dass Messreihen mit systematisch variierten Versuchsparametern durchgeführt und auf Abhängigkeiten der Messergebnisse von den Parametern untersucht werden. Weitere Möglichkeiten sind: Änderung der Versuchsanordnung, Verwendung anderer Messgeräte

b) Zufällige Fehler sind auch bei einer von systematischen Fehlern freien Messanordnung immer vorhanden. Sie bewirken, dass die Messwerte bei mehrmaliger Messung statistisch um den "wahren Wert" schwanken. Sie sind auf unkontrollierbare Faktoren zurückzuführen wie: die begrenzte Empfindlichkeit und Genauigkeit der Sinnesorgane des Beobachters und seiner Messinstrumente, statistisch schwankende äussere Einflüsse z.B. Gebäuderschütterungen. Luftströmungen, Temperaturschwankungen usw.
   Die durch zufällige Fehler bedingte Messungenauigkeit lässt sich prinzipiell durch mehrmalige Wiederholung derselben Messung beliebig verringern.

2. Angabe der Genauigkeit von Messresultaten.

Eine physikalische Messung ist nur dann sinnvoll, wenn der Beobachter über die Genauigkeit des gefundenen Resultates quantitative Aussagen machen kann, d.h. zum Messresultat auch den entsprechenden Fehler angibt. Ein Vergleich der eigenen Messresultate mit Literaturwerten oder mit der Theorie ist nur möglich, wenn man sich über die Genauigkeit der Ergebnisse im Klaren ist. **Zu allen Laborversuchen ist deshalb prinzipiell eine Fehlerrechnung bzw. Fehlerabschätzung durchzuführen.** Versuche, bei denen von dieser Regel abgewichen werden darf, haben einen speziellen Vermerk.

Da es sich bei der Bestimmung von Fehlern immer um Abschätzungen handelt, ist es unsinnig, sie genauer als auf etwa 10%, d.h. auf 1 signifikante Ziffer anzugeben. Nach der Grösse des Fehlers muss sich auch die Genauigkeit richten, mit der das Messresultat selber angegeben wird, also z.B.

nicht $T = (147,8532 \pm 4.87)$ s, sondern $T = (148 \pm 5)$ s.

Oft ist es nützlich, sich die Fehlerabschätzung schon vor der Durchführung des Experimentes zu überlegen, um zu erkennen, bei welchen Messungen besondere Sorgfalt angebracht ist.

Neben dem oben verwendeten **absoluten Fehler** kennt man auch noch den sogenannten **relativen Fehler**, welcher sich vor allem zur Kennzeichnung der Genauigkeit des Messergebnisses eignet. Eine Auswertung hat also beispielsweise folgendes ergeben:

Mittelwert der Messungen:	$\overline{T} = 147.85$ s
absoluter Fehler	$s_T = 4.9$ s
relativer Fehler:	$r_T = \frac{s_T}{\overline{T}} = 0.033 = 3.3\%$
=> Messresultat:	$T = (148 \pm 5)$ s

Relative Fehler werden in der Regel in %, ‰ oder ppm (**p**arts **p**er **m**illion) angegeben. In der physikalischen Messtechnik gilt eine **Genauigkeit von 1% als gut**, eine solche von 1‰ als sehr gut und eine solche von 1ppm als astronomisch!!

Beachten Sie:

- Mit der Fehlerrechnung berechnet oder schätzt man Fehlergrenzen = Unsicherheitsschranken für gemessene Grössen. **Das sind keine Toleranzen!** Toleranzen (von lateinisch tolerare = dulden) sind vorgegebene Grenzen für machbare Grössen.
- Zufällige Fehler, welche aus einer Messreihe ermittelt wurden bezeichnen wir mit s (für Streuung), Unsicherheiten, welche auf Abschätzungen beruhen mit Δ.

3.Die Fehlerbestimmung für einzelne Grössen.

3.1 Einmalige Messung einer Grösse

Wird eine Grösse nur einmal gemessen, so muss der Fehler abgeschätzt werden. Dabei sind die Ablesegenauigkeit (z.B. eines Massstabes) und die Messgenauigkeit (Eichgenauigkeit) des verwendeten Messgerätes und mögliche zufällige Schwankungen zu beurteilen. Eine solche Abschätzung enthält immer eine Portion Willkür, sie braucht Erfahrung und sollte weder zu pessimistisch noch zu optimistisch ausfallen. Solche Fehler werden mit Δ, z.B. ΔT bezeichnet.

3.2. Wiederholte Messung einer Grösse

Beim Versuch, den "wahren Wert" x_o einer Grösse durch Messung zu ermitteln, zeigt es sich, dass nacheinander wiederholte Messungen zu verschiedenen Einzelmessergebnissen führen. Es seien in einer solchen Messreihe N Messergebnisse

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_N$$

unter **gleichen Bedingungen** gefunden worden.

Ihr arithmetischer Mittelwert

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)}$$

wird dem wahren Wert x_o umso näher kommen, je grösser die Zahl N der wiederholten Messungen ist (sofern keine systematischen Fehler vorliegen).

Wie Gauss gezeigt hat, kann aus der Streuung der N Messresultate die Unsicherheit, der **Fehler der Einzelmessung s_{xi}** wie auch der **Fehler des Mittelwertes $s_{\overline{x}}$**, berechnet werden.

Normalerweise interessieren wir uns für den

Fehler des Mittelwertes

$$\boxed{s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\sum_1^N \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{N \cdot (N-1)}}}$$

und unser Resultat lautet also:

$$\boxed{x = \overline{x} + s_{\overline{x}}}$$

Dabei ist immer vorausgesetzt, dass alle Messresultate x_i voneinander **unabhängig** sind und **gleiche Genauigkeit** aufweisen. Beispiel:

Die Messung einer Schwingungsdauer ergab die Werte:

$T_1 = 5.4$ s
$T_2 = 4.8$ s
$T_3 = 5.2$ s
$T_5 = 5.1$ s
$T_4 = 4.6$ s
$T_6 = 4.9$ s
($T_7 = 3.9$ s)

Gesucht sind:

Mittelwert

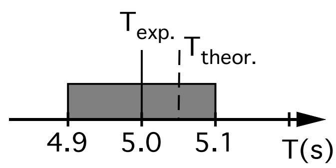
$$\overline{T} = \frac{1}{6}\sum_i T_i = \frac{30.0}{6} = 5.00 \text{ s}$$

und Fehler:

$$s_{\overline{T}} = \sqrt{\frac{0.42}{6 \cdot 5}} = 0.118 \text{ s}$$

Unser Experiment ergab also:

$$\boxed{T = 5.0 \pm 0.1 \text{ s}}$$



Beachten Sie: Messwerte, die extrem vom Mittelwert abweichen (im obigen Beispiel T_7), sind als Fehlmessungen ("Ausreisser") zu betrachten und nicht in die Fehlerrechnung einzubeziehen, sie dürfen aber im Messprotokoll nicht gelöscht werden, sondern sind als Ausreisser zu deklarieren. Es ist auch nicht zulässig, grösste und kleinste Messwerte einfach zu streichen, so würde man den Fehler künstlich verkleinern!

Bemerkungen:

- Nach der Wahrscheinlichkeitstheorie muss der wahre Wert T_o auch bei sauberer Durchführung des Experimentes nicht mit Sicherheit im Intervall $T_o \pm s_T$ liegen, die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt nur 68 % ! Liegt also in einem praktischen Fall der Vergleichswert (theoretischer Wert oder Literaturwert) ausserhalb des Fehlerbereiches des Messwertes, kann man nicht mit Sicherheit auf eine Abweichung schliessen! In einem Drittel der Fälle ist dies zu erwarten. Diese Bemerkung gilt auch für die praktischen Rezepte unter 4.2.
- Bei einer Vergrösserung des Fehlerintervalls um den Faktor 2 beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert im Fehlerintervall liegt, 95 % ; bei einem Faktor 3 beträgt sie 99 %. Solche 95 %- und 99 %-Fehlerschranken sind in der Physik nicht üblich, sie werden aber bei der Qualitätskontrolle industrieller Produkte, wo es um die Sicherheit geht, verwendet.

Mittelwertbildung mit Gewichten

Wenn eine physikalische Grösse mit verschiedenen Messmethoden bestimmt wurde, weisen die Resultate meist ungleiche Genauigkeiten auf. Es ist anschaulich klar, dass bei der Mittelwertbildung die genauere Messung stärker zu berücksichtigen ist als die weniger genaue. Gegeben seien folgende Messergebnisse:

$$x_1 = \overline{x_1} \pm s_{\overline{x1}}$$
$$x_1 = \overline{x_1} \pm s_{\overline{x1}}$$
$$.$$
$$x_n = \overline{x_n} \pm s_{\overline{xn}}$$

Den wahrscheinlichsten Wert $\overline{x}$ erhalten wir durch Bildung des **gewichteten Mittelwertes**:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_{\overline{xi}} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} g_{\overline{xi}}} \quad \text{mit den Gewichten } g_{xi} = \frac{1}{s_{\overline{xi}}^{\,2}}}$$

Den **Fehler des gewogenen Mittels** erhält man sodann zu:

$$\boxed{s_{\overline{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} g_{\overline{xi}}}}}$$

Diese Gewichtung setzt voraus, dass die Fehler rein zufällig sind.

Beispiel:

Ein Widerstand wurde nach drei verschiedenen Methoden bestimmt, welche die Werte lieferten:

Messresultate	Gewichte	Mittelwert und Fehler:
$R_1 = (42.0 \pm 0.5)\ \Omega$	$g_1 = 0.5^{-2} = 4$	$R = 41.12\,\Omega$
$R_2 = (40.8 \pm 0.3)\ \Omega$	$g_2 = 11$	$s_{\overline{R}} = \frac{1}{\sqrt{18}}\,\Omega = 0.23\,\Omega$ und somit
$R_3 = (41.1 \pm 0.6)\ \Omega$	$g_3 = 3$	

$$\underline{R = (41.1 \pm 0.2)\,\Omega}$$

3.3 Fehlertheorie

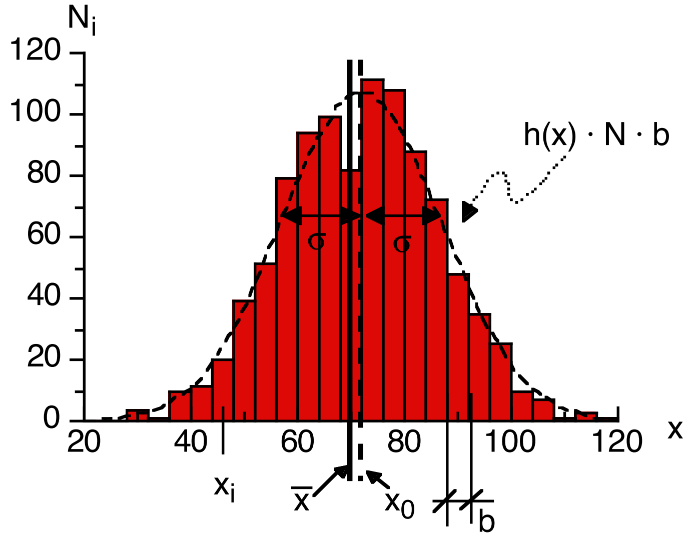
Um einen Überblick über die Streuung der N Messwerte x_i um den arithmetischen Mittelwert zu gewinnen, werden sie in einer Häufigkeitsverteilung (Histogramm) $N_i(x_i)$ dargestellt. Die absolute Häufigkeit N_i ist die Anzahl Messresultate, die im Intervall $[x_i\text{-}b/2, x_i\text{+}b/2]$ liegen.

Histogramm $N_i(x_i)$ mit Gauss' scher Normalverteilung:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Die Parameter der Normalverteilung sind:

- Erwartungswert x_o (= wahrer Wert)
- Standardabweichung σ



Gauss hat nun gezeigt, dass für N identische, unabhängige Messungen mit "Zufallsfehlern" folgendes gilt:

1) Im Grenzfall N --> ∞ geht das Histogramm in eine Gauss'sche Normalverteilung über (die Histogrammintervalle müssen dabei selbstverständlich verkleinert werden).

2) Der experimentell bestimmte Mittelwert $\overline{x}$ geht dabei gegen den wahren Wert x_o.

3) Die Standardabweichung σ (Breite der Glockenkurve) gibt Auskunft über die Streuung der Messwerte x_i d.h. also über die Genauigkeit einer einzelnen Messung. σ entspricht dem Fehler der Einzelmessung und ist durch die Anlage des Experimentes bestimmt. Die aus den N Messresultaten berechnete experimentelle Standardabweichung

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}{N-1}}$$

konvergiert für N --> ∞ gegen σ. Die Grösse s ist also ein Schätzwert für den "wahren" experimentellen Fehler der Einzelmessung. Im Beispiel der Schwingungsdauern S. 10 beträgt der Fehler der Einzelmessung:

$$s_{T_i} = \sqrt{\frac{0.42}{5}}\ s = 0.3\ s$$

Wenn wir nur eine Messung T_1 durchführen, so liegt der wahre Wert T_o mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $[T_1 - 0.3\ s, T_1 + 0.3\ s]$. Es ist zu beachten, dass der Fehler der Einzelmessung für grosse N nicht kleiner wird, sondern gegen den "wahren", unbekannten Fehler der Einzelmessung konvergiert; er wird durch Vergrössern von N immer besser bestimmt.
Vergleichen wir die Formeln zur Berechnung des Fehlers der Einzelmessung s_{Ti} und des Fehlers des Mittelwertes s_T so finden wir die Beziehung :

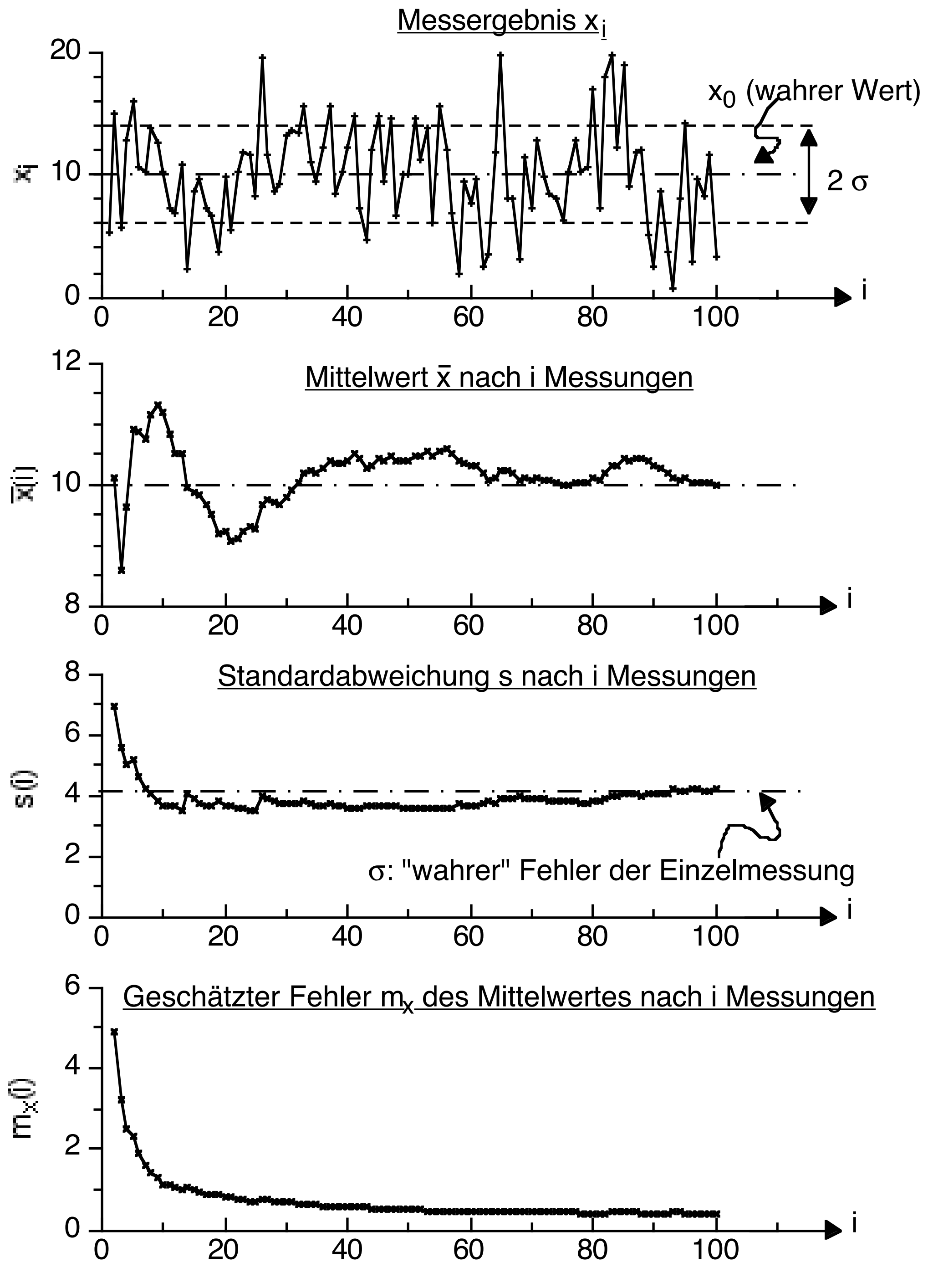
$$s_{\overline{T}} = \frac{s_{Ti}}{\sqrt{N}}$$

Der Mittelwert einer Serie von 100 Messungen ist also um einen Faktor 10 genauer als die Einzelmessung.

Simulation eines Experimentes mit 100 Messungen

Zur Veranschaulichung der Beziehungen zwischen den oben eingeführten statistischen Grössen, ist unternstehend eine Messreihe von 100 Messungen ausgewertet (Computer-Simulation mit gegebenem wahren Wert $x_o = 10$ und $\sigma = 4$).

- Der erste Plot zeigt die Messergebnisse x_1 .. x_{100}. Im "Streifen" 10±4 liegen 67% aller Messwerte.
- Der zweite Plot zeigt den Mittelwert der ersten i Messresultate: $\bar{x}(i) = {}^1\!/_i \cdot (x_1 + x_2 + .. + x_i)$. Wir beobachten, wie der Mittelwert gegen den wahren Wert $x_o = 10$ konvergiert und dass die Schwankungen immer kleiner werden.
- Der dritte Plot zeigt sodann den Fehler der Einzelmessung s_{xi}, wie er aus den Resultaten $x_1..x_i$ erhalten wird. Für N --> ∞ konvergiert s_{xi} gegen den wahren Fehler $\sigma = 4$ der Einzelmessung.
- Im letzten Plot ist der experimentell berechnete Fehler des Mittelwertes $s_{\bar{x}}$ ausgerechnet. Nach 100 Messungen erhalten wir einen Fehler $s_{\bar{x}} = 0.4 = 4/\sqrt{100}$, wie theoretisch vorausgesagt.


Messergebnis x_i
x_0 (wahrer Wert)
2 σ
x_i
Mittelwert $\bar{x}$ nach i Messungen
$\bar{x}(i)$
Standardabweichung s nach i Messungen
s(i)
σ: "wahrer" Fehler der Einzelmessung
Geschätzter Fehler m_x des Mittelwertes nach i Messungen
$m_x(i)$
i

3.4 Regression ("Fitten")

Bei manchen Versuchen geht es darum, die Gültigkeit einer Gesetzmässigkeit nachzuweisen und/oder Parameter eines funktionellen Zusammenhangs physikalischer Grössen zu bestimmen.
Für eine gegebene Gesetzmässigkeit $f(x, a_0, a_1, ...)$ werden hiezu Messwertepaare (y_i, x_i) gemessen und hernach die Parameter $a_0, a_1,..$ so angepasst, dass die bestmögliche Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment erzielt wird.
Nach der Fehlertheorie von Gauss ist der beste (= wahrscheinlichste) Parametersatz derjenige, für den die Summe der quadratischen Abweichungen minimal wird:

$$\chi^2(a_1,a_2,....) = \sum_1^N \left\{ \frac{[y_i - f(x_i,a_1,a_2,..)]^2}{\sigma_i^2} \right\} = \text{Minimum}$$

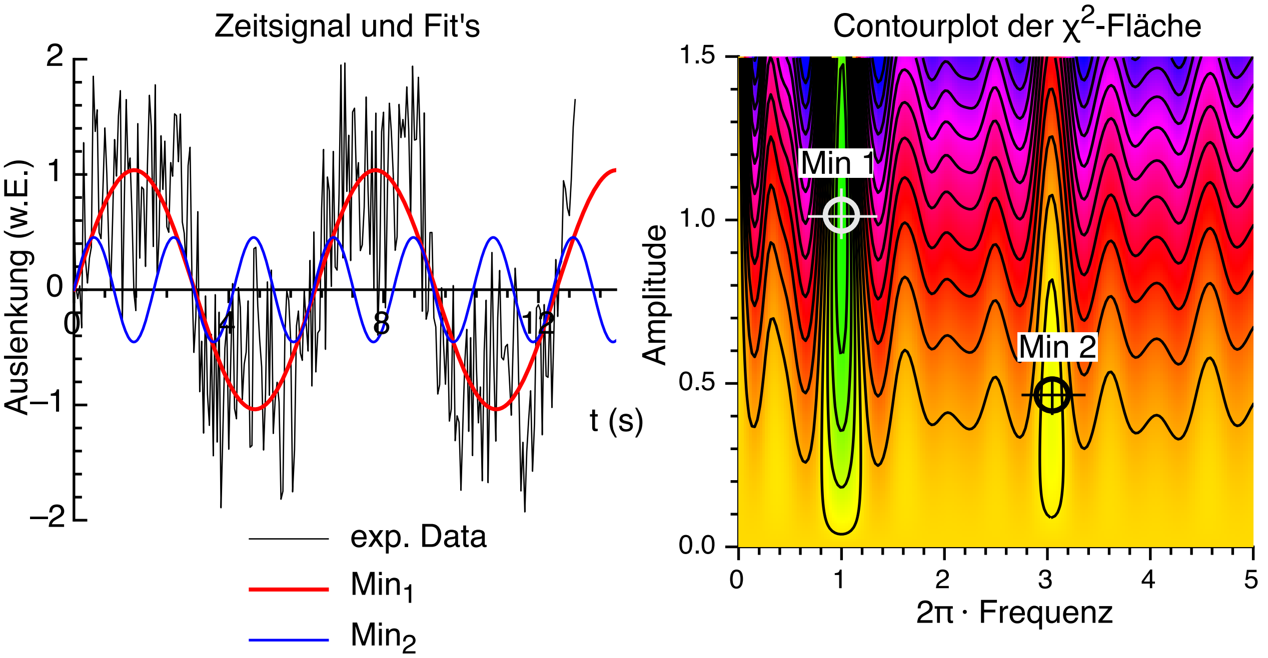
Dabei bezeichnen die σ_i die Fehler (= Standardabweichungen) der Einzelmessungen y_i.
Im Fall einer allgemeinen, nichtlinearen Funktion f muss das Minimum iterativ bestimmt werden = **nichtlineare Regression**, wobei meistens der **Levenberg-Marquardt-Algorithmus** verwendet wird. Wie Sie praktisch kennenlernen werden, besteht eine Schwierigkeit bei der nichtlinearen Regression darin, dass jedwelcher Algorithmus "gute" Startwerte für die Parameter a_i erfordert. Bei schlechten Startwerten wird ein Nebenminimum gefunden oder der Algorithmus konvergiert nicht.
Das untenstehende Bild zeigt ein stark verrauschtes Signal, welches mit einer Sinusfunktion $y = A{\cdot}\sin(k{\cdot}t)$ gefittet wird. Neben dem Zeitsignal ist die zugehörige χ^2-Fläche dargestellt: Für jeden Punkt mit Koordinaten (k, A) wird die Summe $\sum (y_{i,exp} - A{\cdot}\sin(k{\cdot}t_i))^2$ berechnet und dargestellt. Wird nun die Regressionsroutine mit Startwerten in der Nähe von Min_2 gestartet (z.B. k=3, A=0.2), so "läuft" der Algorithmus ins

Minimum 2, mit $k = 3.04 \pm 0.02$ und $A = 0.45 \pm 0.08$

hinein (blaues Zeitsignal), obwohl eine bessere Lösung bei

Minimum 1, mit $k = 1.008 \pm 0.007$ und $A = 1.04 \pm 0.06$

existiert (rotes Zeitsignal). Gut sichtbar ist auch, dass die Frequenz im Minimum 2 schlechter bestimmt ist, eine grössere Unsicherheit hat als im Minimum 1.



Dass wir uns auf ein Beispiel mit 2 Parametern beschränkt haben liegt daran, dass die Visualisierung der zugehörigen χ^2-Hyperfläche bei mehr als 2 Parametern aufwändig ist.

Einfachere Verhältnisse liegen bei der Anpassung eines Polynoms an die Messdaten (lineare Regression, ...) vor. Hier existiert, unabhängig vom Datenset, nur ein einziges Minimum - "gute Startwerte" werden deshalb nicht benötigt.

Bei der Verwendung eines Fitprogramms muss sodann beachtet werden, dass standardmässig die x-Werte als abolut genau (=Stellgrösse) und die y-Werte als fehlerbehaftet (=Messgrösse) betrachtet werden. Programme, welche auch Fehler in der Stellgrösse zulassen sind Ausnahmen.

Das Standardprogramm, welches wir zur Datendarstellung und Regression verwenden, heisst QtiPlot und ist ein OpenSource-Klon des kommerziellen Programms Origin.

Achtung: Ein Computerprogramm ist kein Ersatz für kritisches Denken. Überprüfen Sie immer den erhaltenen Fit darauf, ob die Messpunkte, wie von der Theorie gefordert, statistisch um die gefundene Kurve streuen. Ist dies nicht der Fall, so liegt ein Bedienungsfehler vor oder die Messwerte enthalten systematische Fehler, welche in der verwendeten, theoretischen Funktion nicht berücksichtigt werden (z.B. können die Messdaten einen Offset aufweisen, der in Ihrer Funktion nicht vorgesehen ist).

Zwei Finessen zur Methode der Regression:
Streng genommen liefert die Minimisierung von χ^2 nur dann die besten Parameter, wenn die Einzelmessungen y_i voneinander unabhängig und um den "wahren Wert" normal verteilt sind. In den meisten anderen Fällen ist diese Methode aber das Beste, was man machen kann und wird auch verwendet, wenn die mathematische Begründung fehlt.
In vielen praktischen Fällen ist sodann der Fehler σ_i der Einzelmessung **konstant – aber unbekannt**. Unter den oben erwähnten Voraussetzungen kann er nach dem Fitten aus den Messdaten und dem zugehörigen Fit berechnet werden

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(y_i - f(x_i, a_1, a_2, ...) \right)^2}{N - m}} \; .$$

(N bezeichnet dabei die Anzahl Messergebnisse y_i, für die Parameter a_1 ... a_m müssen die aus dem Fit erhaltenen Werte eingesetzt werden). Der so abgeschätzte Fehler der Einzelmessung erlaubt es dann, die Unsicherheiten der gefitteten Parameter zu berechnen. Wählen wir als Funktion f beispielsweise die Mittelwertbildung, so erkennen Sie sofort, dass obige Formel zur Abschätzung des Fehlers mit den Ausführungen unter 3.3 kompatibel ist.
Bei weiterem Interesse an Details bezüglich Fitten wenden Sie sich an Ihren Dozenten oder stöbern Sie in Wikipedia.

4. Fehlerfortpflanzung und Auswertung

4.1 Indirekte Messung, das Fehlerfortpflanzungsgesetz

In der Mehrzahl der Fälle liefern physikalische Versuche nicht unmittelbar das gesuchte Messergebnis, sondern die Resultatgrösse R ist eine Funktion von mehreren Grössen x,y,z,..:

$$R = R(x,y,z,..)$$

Die Argumente x,y,z,.. sind entweder direkt gemessene Grössen oder aus Handbüchern entnommene Werte (wie z.B. Dichten, spez. Wärmekapazitäten usw.). Die Fehlertheorie nennt solche indirekt gemessene Grössen auch mittelbare Grössen.
Aus den Messungen / Literatur habe man also gefunden

$$x = \bar{x} \pm s_{\bar{x}}, \quad y = \bar{y} \pm s_{\bar{y}}, \quad z = \bar{z} \pm s_{\bar{z}}$$

Gesucht sind nun der Mittelwert $\bar{R}$ sowie sein mittlerer Fehler $s_{\bar{R}}$.

Den Mittelwert von R erhält man einfach dadurch, dass man in der Funktion R die Mittelwerte einsetzt, d.h.

$$\boxed{\bar{R} = R(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z},\ ..)}$$

Der mittlere, absolute Fehler s_R (= "**statistischer Fehler**") ergibt sich sodann aus dem *Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz*:

$$\boxed{s_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial R}{\partial x}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{x}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial y}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{y}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial z}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{z}}\right)^2 + \ldots}}$$

$\left.{}^{\partial R}\!/_{\partial x}\right|_{\bar{R}}$ bedeutet dabei die partielle Ableitung der Funktion R nach der Variablen x, ausgewertet an der Stelle der Mittelwerte $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots$. Das "**quadratische Addieren**" der Fehler berücksichtigt, dass sich zwei zufällige Abweichungen auch kompensieren können - der Fehler $\pm s_R$ bezeichnet die Intervallbreite, in welcher der wahre Wert mit 68% Sicherheit liegt.

4.2. Praktische "Rezepte" zum Fehlerfortpflanzungsgesetz

Die Funktion R hat in vielen praktischen Fällen eine mathematisch einfache Form, z.B. Addition oder Division von zwei oder mehr Grössen. In diesen Fällen kann die Fehlerrechnung auf einfache Rechnungs-Rezepte reduziert werden.

1) Addition und Subtraktion $R = x + y \quad // \quad R = x - y$

Wegen $\partial R/\partial x = 1$, $\partial R/\partial y = 1$ ergibt sich nach Einsetzen ins Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\boxed{s_R = \sqrt{s_x{}^2 + s_y{}^2}}$$

Bei Addition/Subtraktion werden die absoluten Fehler quadratisch addiert - der statistische Fehler einer Summe/Differenz ist kleiner als die Summe der Einzelfehler, weil sich diese teilweise kompensieren können.

2) Multiplikation und Division $R = x \cdot y \quad // \quad R = x/y$

Die partiellen Ableitungen ergeben

$\partial R/\partial x = y$, $\partial R/\partial y = x$ resp. $\partial R/\partial x = 1/y$, $\partial R/\partial y = -x/y^2$

Damit liefert das Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$s_R = \sqrt{(y \cdot s_x)^2 + (x \cdot s_y)^2} \quad \text{resp.} \quad s_R = \sqrt{\left(\frac{1}{y} \cdot s_x\right)^2 + \left(\frac{x}{y^2} s_y\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{x}{y} \cdot \frac{s_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{y} \cdot \frac{s_y}{y}\right)^2}$$

Für den relativen Fehler von R gilt bei beiden Operationen:

$$\boxed{r_R = \frac{s_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{s_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{y}\right)^2} = \sqrt{r_x{}^2 + r_y{}^2}}$$

Bei Multiplikation/Division werden die relativen Fehler quadratisch addiert.

Dies bedeutet, dass sich bei Multiplikation einer Messgrösse mit einer fehlerfreien Konstanten der relative Fehler nicht ändert, der absolute Fehler hingegen wird um den konstanten Faktor vergrössert, bzw.verkleinert.

Beispiel: $R = 2x \Rightarrow r_R = r_x$, $s_R = r_R \cdot R = r_x \cdot 2\,x = 2\,s_x$.

Will man andererseits z.B. die Schwingungsdauer eines Pendels bestimmen, so soll nicht die Zeit einer einzelnen Schwingung gemessen werden. Man misst die Zeit für 10 Perioden und dividiert durch 10 (±0). So wird das Resultat absolut um einen Faktor 10 genauer.

3) Potenzen von gemessenen Grössen: $R = x^n$

Die partielle Ableitung liefert $s_R = n \cdot x^{n-1} \cdot s_x = n \cdot x^n \cdot \frac{s_x}{x}$ und es folgt für den relative Fehler:

$$\boxed{r_R = \frac{s_R}{R} = n \cdot r_x}$$

Beim **Potenzieren** wird der **relative Fehler** der Messgrösse **mit dem Exponenten multipliziert.**

Dies bedeutet, dass z.B. beim Wurzelziehen der relative Fehler kleiner wird, beim Quadrieren wird er verdoppelt. Will man z.B. die Boltzmannkonstante σ aus der spezifischen Emission und der Temperatur eines Hohlraumstrahlers bestimmen ($M_S = \sigma\, T^4$), so bewirkt ein relativer Fehler von 5% in der Temperaturmessung einen Fehler von 20% in σ!

Auch wenn es somit teilweise bequem ist, mit relativen Fehlern zu rechnen, sind aber im **Endresultat** immer **absolute Fehler** anzugeben.

4.3 Praktische Durchführung der Auswertung und Fehlerrechnung

a) Durch Abschätzung der entsprechenden Fehlerbeiträge lassen sich oft komplizierte Auswerteformeln auf eine Summe oder ein Produkt von fehlerbehafteten Grössen reduzieren. Überlegen Sie sich deshalb immer als erstes, welche Fehler in der Rechnung zu berücksichtigen sind und **notieren Sie diese Überlegungen zusammen mit den numerischen Werten** in Ihrem Laborjournal!, z.B.

(a + b): Der Fehler von a beträgt **absolut** ± 0.1 mm während b auf ± 1 µm genau bestimmt wurde. Deshalb kann b als absolut genau betrachtet werden.

a·b Der **relative** Fehler von b ist 100 mal kleiner als der von a und wird deshalb vernachlässigt.

b) Bei allen komplizierteren Formel verwenden Sie mit Vorteil die Methode der partiellen Ableitung, wobei aber auch hier die Formel vorerst durch entsprechende Grobabschätzung vereinfacht werden soll. Damit vermeiden Sie nichtssagende lange Bandwurmformeln! Die Formeln sind algebraisch und numerisch (einzelne Summanden ausrechnen und notieren) dokumentiert werden!!!

Beispiel zur Berechnung mit partiellen Ableitungen:

Mit Hilfe eines Gitters (300 Linien/mm) soll die Wellenlänge λ einer Gasentladungslampe bestimmt werden:

$$\lambda = d \cdot \sin(\varphi) / n$$

Im Experiment wurde der Beugungswinkel in zweiter Ordnung (n=2) zu $\varphi = (23.0 \pm 0.5)°$ bestimmt, die Gitterkonstante betrage $d = (3.33 \pm 0.05)$ µm.

Mit der Methode der partiellen Ableitung erhalten wir:

$$s_\lambda = \sqrt{\left(\frac{\sin(\varphi)}{n} \cdot s_d\right)^2 + \left(\frac{d \cdot \cos(\varphi)}{n} \cdot s_\varphi\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sin(23°) \cdot 0.05\ \mu m)^2 + (3.33\ \mu m \cdot \cos(23°) \cdot 0.5 \cdot \pi/180)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3.82 \cdot 10^{-4} + 7.16 \cdot 10^{-4}}\ \mu m$$

$$s_\lambda = 0.017\ \mu m$$

Das Schlussresultat lautet also

$$\boxed{\lambda = (0.651 \pm 0.017)\ \mu m}$$

Man beachte:

- Der **Fehler s_φ** muss in der Formel in **Radian** eingesetzt werden. (In den Winkelfunktionen spielt es selbstverständlich keine Rolle, wenn Sie Ihren Rechner entsprechend eingestellt haben.)
- Die **einzelnen Summanden in der Wurzel** sollen (d.h. für Sie "**müssen**") **numerisch berechnet und angegeben** werden. Damit wird ersichtlich, welche Grösse den grössten Beitrag zur Ungenauigkeit des Endresultates liefert.

c) Unsicherheit des Messresultates bei Auswertung mit dem Computer
Wenn Sie mit dem Computer eine Regressionsfunktion durch Ihre Daten legen, so liefert Ihnen das Programm die „best passenden“ Parameter und deren Unsicherheiten. Die Unsicherheiten werden aus der Streuung der Messpunkte um die gefundene Funktion ermittelt. Deshalb enthalten diese Unsicherheiten nur jenen Anteil, der von den stochastischen Schwankungen des Messsignals herrührt, d.h. es wird nur der statistische Fehler angegeben. In vielen Fällen hat man aber offensichtlich noch einen systematischen Fehler, der dann linear zum statistischen zu addieren ist.
Beispiel: Die Federkonstante k einer Feder soll aus den Verlängerung x_i bei Anlegen einer Kraft F_i bestimmt werden. Die Kraft werde mit einer Wägezelle gemessen:

$$|F_i| = k \cdot x_i$$

Eine lineare Regression mit der Funktion

$$y = a \cdot x + b$$

liefert Ihnen die beste, zu den Messwerten (F_i , x_i) passende Gerade

$$a \pm s_a, \qquad b \pm s_b$$

d.h. die Federkonstante und einen möglichen Nullpunktsfehler der Streckenmessung. Berücksichtigt sind hier die Ungenauigkeit beim Ablesen des Massstabes sowie Schwankungen des Auswerteelektronik der Wägezelle. Nicht enthalten ist aber z.B. der Offset der Wägezelle selbst sowie ein Fehler in der Verstärkung des Wägezellensignals. Die beiden systematischen Fehler der Wägezelle müssen deshalb noch zu den vom Fit gelieferten Fehlern addiert werden. In anderen Fällen ist die korrekte Berücksichtigung der systematischen Fehler nicht so offensichtlich. Diskutieren Sie diese mit Ihrem Dozenten.

IV a) Merkblatt für die Laborarbeit

Sicherheit und Ordnung

Alle sind dringend gebeten, zur Sicherheit und zu einer guten Ordnung in den Labors beizutragen !

- Elektrische Schaltungen stets mit abgeschalteter Speisung aufbauen und abändern. Messinstrumente zuerst immer auf den unempfindlichsten Bereich stellen.
- Vorsicht beim Umgang mit empfindlichen Messgeräten! Manipulieren Sie nicht einfach, sondern fragen Sie den Dozenten. **Wer aus Fahrlässigkeit Schäden verursacht, wird dafür finanziell belangt! Wir empfehlen allen, eine Haftpflichtversicherung abzuschliessen, da unsere Apparaturen teilweise 10'000 Fr. und mehr kosten.**
- Wasserkreisläufe wie Kühlungen, Umwälzthermostate müssen überwacht werden.
- Radioaktive Quellen sind persönlich beim Dozenten zu beziehen und wieder abzugeben.
- Geräte von andern Arbeitsplätzen dürfen nur mit Erlaubnis der Dozenten "entlehnt" werden. Sie sind nach Gebrauch wieder zurückzustellen.
- Schäden und Defekte an Messgeräten und Apparaturen bitte dem Dozenten melden, damit sie behoben werden können.
- Am Arbeitsplatz aufliegende Unterlagen wie auch Unterlagen der Handbibliothek bleiben an ihrem Bestimmungsort.

☛ Essen und Trinken, sowie das Deponieren von Kleidungsstücken in den Labors ist nicht gestattet.

Die Physik-Dozenten danken allen, welche durch ihr Verhalten zu einem geordneten Laborbetrieb beitragen !

Checkliste zur Versuchsdurchführung

- Kontrolle des Arbeitsplatzes auf Vollständigkeit und Funktionstüchtigkeit. Gewisse Hinweise und Daten finden Sie auf der Rückseite der Versuchstafeln.
- Angaben der Versuchsanleitung betreffend der Versuchsanordnung mit dem aktuellen Stand vergleichen und allenfalls abändern. Alle benötigten Daten von Apparatur, Messgeräten und Proben / Versuchsobjekten aufnehmen.
- Beim Experimentieren **prüfen**, ob die **Messwerte vernünftig sind**. Bei Unsicherheiten mit den Messgeräten, den Dozenten beiziehen. Lieber einmal zu früh als zu spät fragen!
- Am Schluss der Messungen alle Geräte ausschalten.

Nach Abschluss der Laborarbeit:

- Arbeitsplatz aufräumen, Anfangszustand herstellen, Hocker unter die Tische stellen.
- **Arbeitsplatz dem Dozenten abgeben und Messprotokoll visieren lassen.**

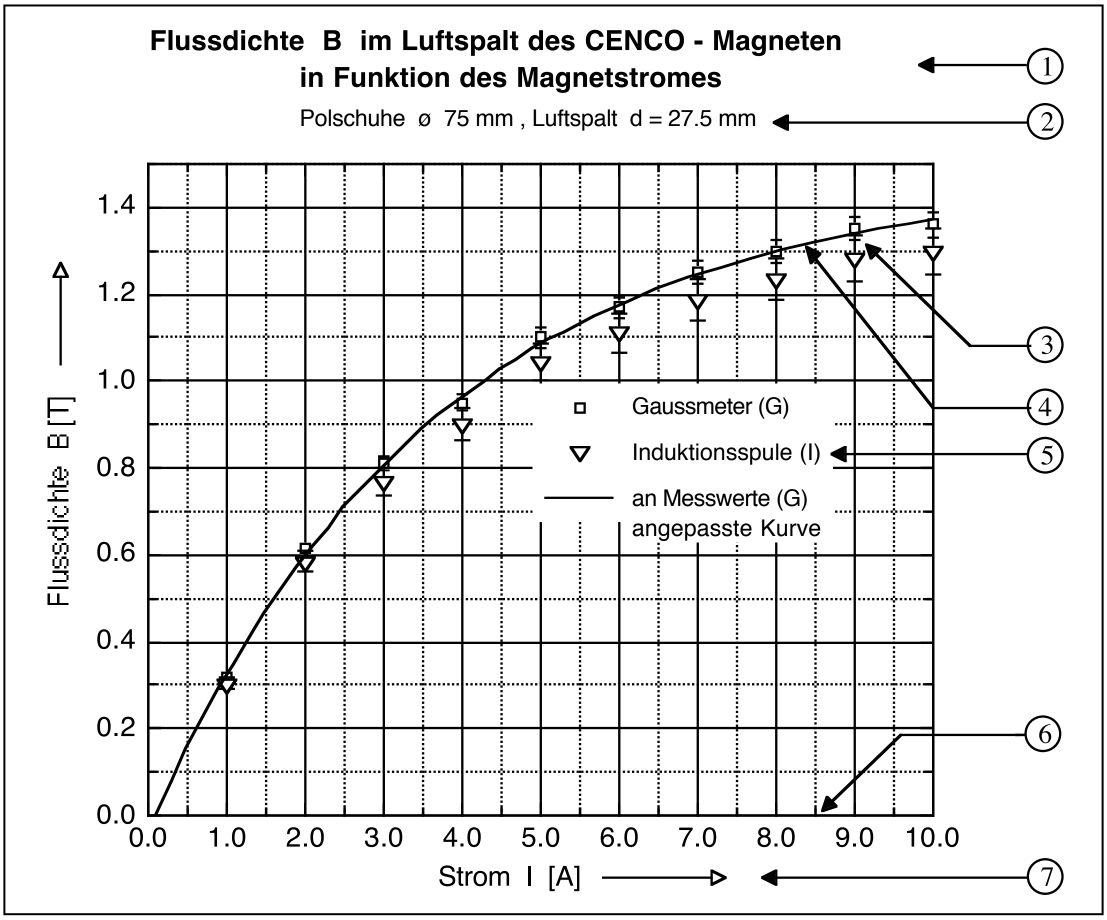
IV b) Merkblatt für die Gestaltung von Diagrammen

Grundsätze:

♥ **Ein Diagramm muss aus sich selbst verständlich sein.**
d.h. der Betrachter muss aus dem Diagramm alle zum Verständnis notwendige Information herauslesen können.

♥ **Ein Diagramm soll übersichtlich, leicht lesbar und möglichst auch noch schön sein.**

♥ **Diagramme werden mit dem Computer angefertigt.**



1) Der Titel informiert möglichst vollständig über den Inhalt.
2) Alle wesentlichen Versuchsbedingungen sind notiert.
3) **Messpunkte werden als nicht verbundene Punkte**, wenn nötig mit unterschiedlichen Symbolen, dargestellt (Fehlerbalken, sofern die Fehler bekannt und grösser als die Symbole).
4) Die theoretische oder gefittete Funktion wird als **glatte Kurve** gezeichnet (im entsprechenden Programm 500 - 1000 Stützpunkte berechnen lassen). Wenn kein theoretischer Verlauf vorliegt, kann eine mittlere Kurve von Hand durch die Messpunkte gelegt werden (kein Streckenzug!) = "Führung fürs Auge".
5) Die Legende erklärt alle Symbole und Kurven.
6) Achsenteilung entsprechend der Messgenauigkeit und leichter Ablesbarkeit zweckmässig wählen (unmögliche Teilungen (3-er z.B.) sind mühsam) - was will ich zeigen?
7) Achsen korrekt und vollständig beschriften: Grösse, Einheit (im Hinblick auf gute Lesbarkeit gewählt!) entweder wie oben im Beispiel oder nach DIN-Norm : B/T , I/A

Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Technik

Physik-Labor
Studiengang EIT

Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Technik

Physik-Labor
Studiengang EIT

VI. Aufgabenblatt „Einführungsversuch“

M 9 Massenträgheitsmoment

Aufgabe

Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment I_K eines Versuchskörpers nach folgenden Methoden:

1) Beschleunigungsversuch: Der Versuchskörper als Rotor wird mit einem konstanten Antriebsmoment beschleunigt und die Winkelbeschleunigung α gemessen. Es sollen min. 5 geeignet abgestufte Antriebsmomente benützt werden. Die Auswertung ist so anzulegen, dass eine konstantes Reibmoment keinen Einfluss auf das Messergebnis hat.

2) Pendelversuch: Der Versuchskörper wird mit Hilfe eines exzentrisch angebrachten Klemmkörpers in ein physikalisches Pendel umgewandelt und dessen Schwingungsdauer bei konstanter Amplitude gemessen. Es sollen 2 Messreihen mit verschiedenen Amplituden im Bereich von 10° bis 20° durchgeführt werden.

3) Theoretische Berechnung von I_K aus der Masse und den geometrischen Abmessungen des Versuchskörpers.

Vergleichen Sie die Ergebnisse und diskutieren Sie allfällige Abweichungen!