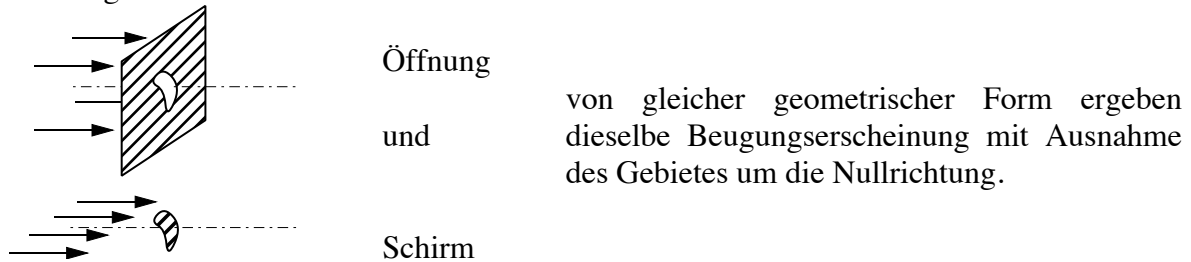


4.3 Beugung

4.3.1 Theorem von Babinet, Fraunhofer'sche – Fresnel'sche Beobachtungsart.

Die Abweichungen von der geradlinigen Wellenausbreitung, wie sie mit Hilfe von Strahlen beschrieben wird, nennt man **Beugung**. Beugung tritt immer dann auf, wenn Wellen durch Hindernisse wie Kanten, Öffnungen, Blenden und dergleichen begrenzt werden – Wellen werden um Hindernisse "herumgebeugt" (Beispiel aus dem Alltag: Schall geht um die Ecke). Die Beugungseffekte können in guter Näherung mit Hilfe des **Huygens-Fresnel'schen Prinzips** erklärt werden: Alle Punkte der hindernisfreien Zone senden Sekundär-Kugelwellen aus, deren Überlagerung das resultierende Wellenfeld liefert.

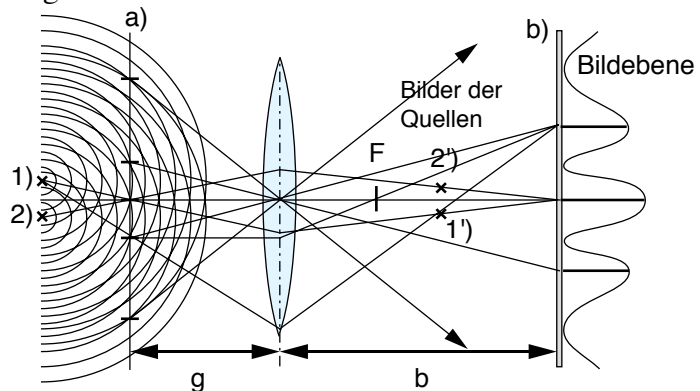
Weiter gilt das Theorem von Babinet:



Handelt es sich bei der **einfallenden Welle** um eine **ebene Welle** und betrachtet man das **Fernfeld**, so spricht man von **Fraunhofer'scher Beugung**. Diese Anordnung wird in der Technik am häufigsten verwendet. Beobachtet man das Nahfeld, d.h. das Interferenzmuster in der Nähe der beugenden Objekte, so spricht man von **Fresnel'scher Beugung**. Mit Hilfe einer Linse können beide Beobachtungsarten realisiert werden:

Fresnel'sche Beobachtungsart:

Bringt man einen Schirm an die Stelle a), so kann das Interferenzmuster direkt beobachtet werden (Maximas sind mit - markiert). Diese Schnittebene kann aber auch mit einer Linse (meist vergrößert) auf einen Schirm an der Stelle b) abgebildet werden. Verschiebt man die Linse oder den Schirm, so wird ein anderer Schnitt in die Bildebene abgebildet. Das beobachtete Muster ist von der Lage der Linse abhängig!

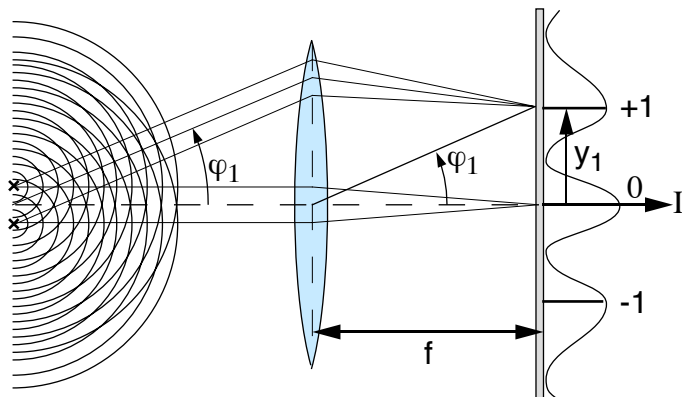


Fraunhofer'sche Beobachtungsart

Das Interferenzmuster wird in der Brennebene beobachtet. Ein Intensitätsmaximum (-minimum) in der Brennebene entspricht einer Richtung, in welcher konstruktive (destruktive) Interferenz beobachtet wird

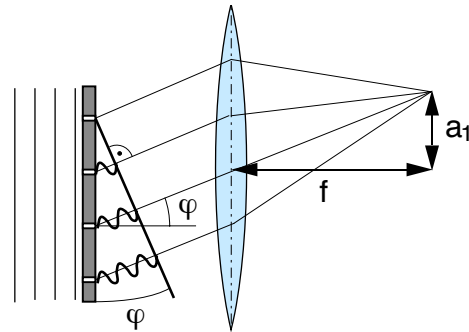
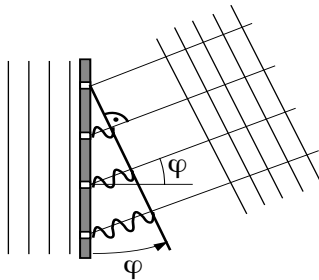
$$\tan \varphi_1 = y_1 / f$$

Das beobachtete Muster ist folglich bis auf einen Skalierungsfaktor identisch zum Interferenzmuster, welches in grosser Entfernung von den Quellen/vom beugenden Objekt beobachtet wird.



Im Gegensatz zur Fresnel'schen Beobachtungsart hat der Abstand der Linse von den Quellen **keinen Einfluss auf die Abmessungen oder die Form** des Interferenzmusters, er **bestimmt nur den erfassten Winkelbereich**. Dies macht die Interpretation des Beugungsmusters wesentlich einfacher.

4.3.2. Beugung am Strichgitter



In grosser Entfernung vom Gitter beobachtet man **Intensitätsmaximas** unter den Winkeln

$$\sin \varphi_{m,\max} = \frac{m\lambda}{d} \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Beobachtung im Endlichen ("Fraunhofer"): Das m-te Maximum ergibt einen "leuchtenden Strich" in der Brennebene bei

$$\tan \varphi_{m,\max} = \frac{a_m}{f}; \quad a_m = f \cdot \tan \left(\arcsin \left[\frac{m\lambda}{d} \right] \right)$$

4.3.3 Beugung am Einzelspalt

Die **Nullstellen** des Beugungsmusters eines Einzelspalts im Fernfeld kann mit dem Huygens'schen Prinzip in einfacher Weise erklärt werden. Die Berechnung der exakten Position der Maximas sowie des Intensitätsverlaufs $I(\varphi)$ ist hingegen um Einiges schwieriger und kann z.B. in "Physik für Ingenieure" nachgelesen werden.

Gemäss der Grundannahme Huygens' emittieren alle Punkte der Spaltöffnung Kugelwellen. Da Sie von einer senkrecht auffallenden, ebenen Welle angeregt werden, haben die Sekundärwellen gleiche Amplitude und Phase.

Wir betrachten wir nun den speziellen Winkel $\varphi = \varphi_1$, unter dem die gezeichnete Teilwelle 1 am Rande des Spalts und die Teilwelle 2 in der Mitte gerade einen Gangunterschied von $\lambda/2$ aufweisen und folglich destruktiv interferieren. Die Bedingung für diese Situation lautet:

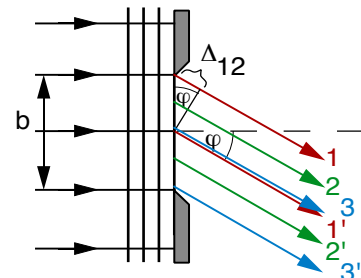
$$\sin(\varphi_1) = \frac{\Delta_{12}}{b/2} = \frac{\lambda/2}{b/2}$$

Wir bemerken nun, dass unter diesem Winkel alle Sekundärwellen zu destruktiv interferierenden Paaren zusammengefasst werden können und folglich ist die beobachtete Gesamtintensität Null.

Auch bei beliebigen Winkeln können die Sekundärquellen zu destruktiv interferierenden Paaren gruppiert werden. Im allgemeinen bleibt aber ein Rest von Quellen übrig, welche keine "Partner" haben und folglich resultiert eine Intensität $I \neq 0$.

Die nächste Möglichkeit, alle Quellen restlos zu destruktiv interferierenden Paaren zu gruppieren, ergibt sich beim Winkel φ_2 mit

$$\sin(\varphi_2) = \frac{2\lambda}{b}$$

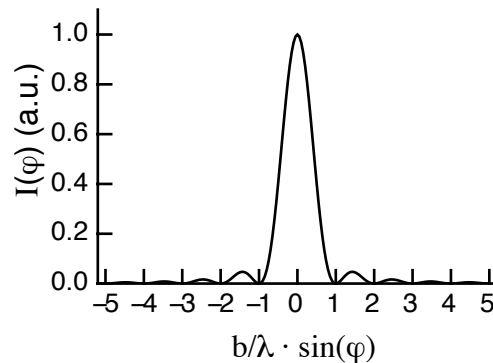


Bei diesem Winkel erhält man für jede Spalthälfte separat destruktive Interferenz aller in der Hälfte enthaltenen Sekundärquellen. Verfolgt man diese Idee weiter, so erhält man die allgemein Formel für das Auftreten der **Beugungsminimas**:

$$\sin \varphi_m = m \frac{\lambda}{b} ; m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Die genaue liefert folgenden Intensitätsverlauf:

$$I_\varphi \sim b^2 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} \cdot \sin \varphi \right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \cdot \sin \varphi \right)^2} \sim \frac{\sin^2 (X)}{X^2}$$



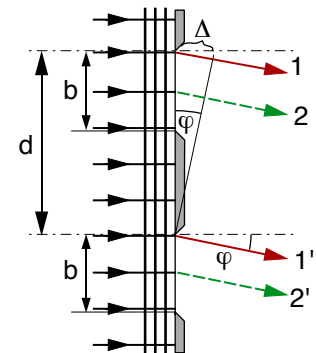
Man beachte:

- bei $m = 0$ haben wir ein Maximum!!
- je kleiner die Spaltbreite b , desto weniger Ordnungen sind sichtbar ($\sin \varphi < 1$). Für $b < \lambda$ ist kein Minimum mehr zu beobachten.
- Je kleiner die Wellenlänge, desto winkelmässig kleiner wird das Beugungsmuster
- Bei grosser Spaltbreite b beobachtet man praktisch nur Intensität in Vorwärtsrichtung, die Nebenmaxima erscheinen unter sehr kleinen Winkel und sind kaum sichtbar ("keine" Beugung).
- Ein "schönes" Beugungsmuster beobachtet man, wenn die Spaltbreite etwas grösser als die Wellenlänge ist.

4.3.3 Beugung am Doppelspalt

Auch das Beugungsmuster des Doppelspalts mit Spaltbreite b und Spaltabstand d kann relativ einfach verstanden werden. Da beide Spalte gleich breit sind, entstehen unter denselben Winkeln wie beim Einzelspalt Intensitätsnullstellen ($0+0=0!!$). Zusätzlich zu diesen Nullstellen kommen aber noch weitere hinzu welche dadurch zustande kommen, dass alle Sekundärwellen vom einen Spalt destruktiv mit jenen des andern Spaltes interferieren. Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass dies erfüllt ist wenn:

$$d \cdot \sin \varphi = (m - 1/2) \cdot \lambda \quad m = \dots$$



Auf der folgenden Seite ist das resultierende Beugungsmuster dargestellt. Man beachte, dass die Grobstruktur durch die kleinere Spaltbreite, die Feinstruktur durch den grösseren Spaltabstand bedingt ist (grosse Objekte ergeben winkelmässig kleine Beugungsmuster und umgekehrt).

Bei Mehrfachspalten resultiert ein noch feingegliedertes Muster. Man beachte, dass die Umhüllende immer das Beugungsmuster des Einfachspaltes ist. Multipliziert man das Beugungsmuster eines Einzelspaltes mit dem Muster von n regelmässig angeordneten Linienquellen (die Öffnungen sind Spalte, nicht Löcher), so erhält man das Muster eines n -fach-Spaltes. Dies hängt damit zusammen, dass das Beugungsmuster die Fouriertransformierte des Beugungsobjektes darstellt. Einen Mehrfachspalt erhält man aber durch Faltung eines Einfachspaltes mit einer Summe von Diracstössen und die Fouriertransformierte von zwei gefalteten Funktionen ist gleich dem Produkt der fouriertransformierten Funktionen:

Fraunhofer'sche Beugung = optische Fouriertransformation

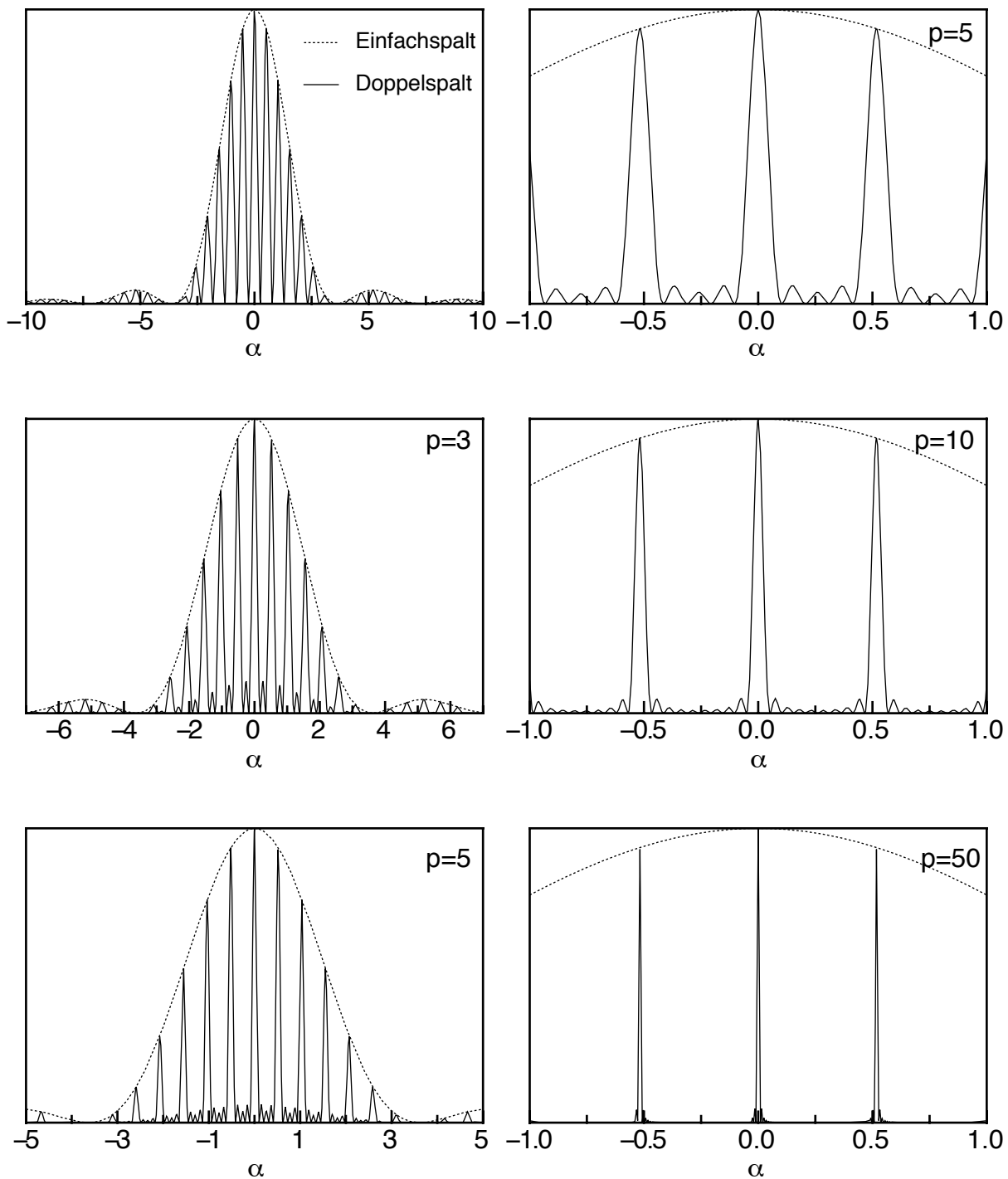
Beugungsmuster von mehreren Spalten.

(Anzahl Spalte: p, Spaltbreite b=10 μm, Spaltabstand g=100 μm, λ=632.8 nm, Winkel in Grad)

$$I(\alpha) = I_0 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi \cdot b}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\left(\frac{\pi \cdot b}{\lambda} \sin \alpha\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(p \cdot \frac{\pi \cdot g}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi \cdot g}{\lambda} \sin \alpha\right)}$$

Minimas der Umhüllenden (Einzelspalt): $\frac{\pi \cdot b}{\lambda} \sin \alpha = n \cdot \pi \Rightarrow \sin \alpha_n = n \cdot \frac{\lambda}{b}$

Hauptmaximas des "inneren" Musters: $\frac{\pi \cdot g}{\lambda} \sin \alpha = m \cdot \pi \Rightarrow \sin \alpha_m = m \cdot \frac{\lambda}{g}$



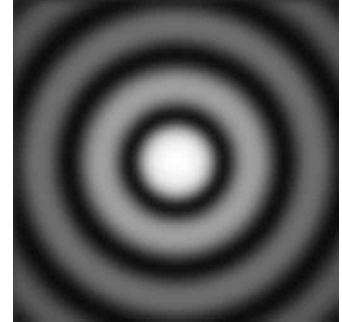
4.3.4 Beugung an einer Lochblende, Beugung an Pollenkörnern

Bei Beugung an einer Lochblende beobachtet man Interferenz**ringe**. Die Winkel, unter denen die Minimas erscheinen sind

$$\sin \alpha = 1.22 \lambda/d; 2.232 \lambda/d; 3.238 \lambda/d \dots$$

Man beachte, dass die Koeffizienten nicht mehr ganzzahlig sind. Dies hängt mit der Kreisform der Öffnung zusammen.

Ein vergleichbares Ringmuster beobachtet man, wenn der Laserstrahl an vielen Pollenkörnern von fast gleichem Durchmesser gebeugt wird: Je kleiner die Streuung der Pollendurchmesser, je grösser der Kontrast (und umgekehrt). Im Gegensatz zu den Löchern eines Rasierscherblatts sind die Pollenkörner unregelmässig angeordnet. Aus diesem Grunde zeigt das Muster keine Überstruktur sondern ist praktisch identisch zum Muster eines einzelnen Pollenkornes.

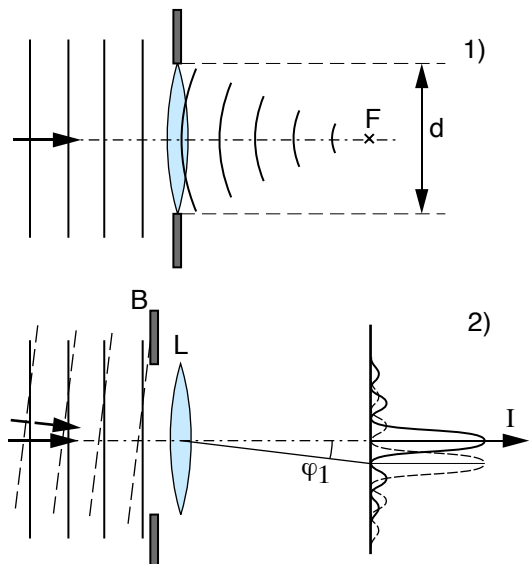


Mit Hilfe elektronischer Datenerfassung und -auswertung auf dem Computer kann die Verteilungsfunktion der Teilchendurchmesser auch bei grosser Streuung aus dem Beugungsmuster berechnet werden.

4.4 Auflösungsvermögen optischer Instrumente

In der geometrischen Optik lernten wir, dass ein paralleles Strahlenbündel von einer konvexen Linse in einen Punkt der Brennebene abgebildet wird. Die Erfahrung zeigt, dass die Lichtenergie sicher nicht in einen mathematischen Punkt konzentriert wird. Mit Hilfe der Beugungstheorie kann erklärt werden, weshalb dies auch bei ideal geformten Linsen nicht möglich ist.

Dem Parallelbündel in der Strahlenoptik entspricht in der Wellenoptik eine ebene Welle, welche durch die Linse fokussiert wird (Bild 1). Die Wirkung einer Linse mit endlichem Durchmesser d kann in zwei Teileffekte aufgespalten werden:



a) Wirkung einer Lochblende mit Durchmesser D

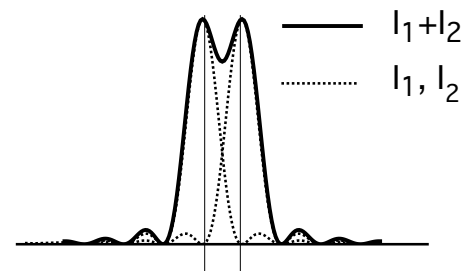
b) Abbildung mit beliebig grosser Linse L

Die Lochblende B lässt nur einen Teil der einfallenden ebenen Welle durch, welcher dann durch die Linse L abgebildet wird. "Optisch" gesprochen wird die ebene Welle an der Blende B gebeugt und das Beugungsmuster wird in Fraunhofer'scher Beobachtungsart auf einem Schirm in der Brennebene sichtbar gemacht.

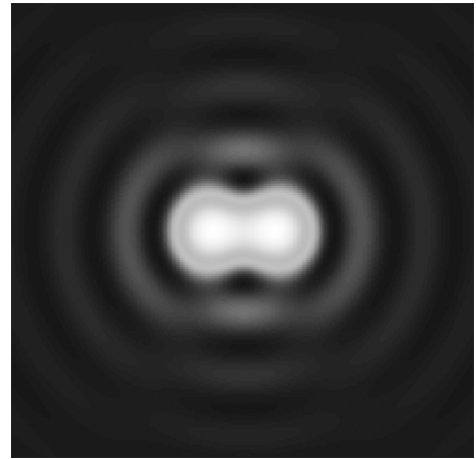
Für den Winkel φ_1 , unter dem das erste Beugungsminimum auftritt, gilt also

$$\sin \varphi_1 = 1.22 \lambda/d$$

Gemäss Definition ist φ_1 der minimale Winkel, den zwei ebene Wellen zueinander haben müssen, damit in der Brennebene zwei getrennte Lichtflecken wahrgenommen werden (=Auflösungsgrenze). Die Intensitätsverteilung in der Brennebene an der Auflösungsgrenze ist in nebenstehender Figur dargestellt.



Das nebenstehende Bild zeigt sodann das Muster, das in diesem Grenzfall resultiert. Es illustriert, dass im oben definierten "Grenzfall" und gutem Signal-Rausch-Verhältnis, noch klar zwei getrennte Quellen erkennbar sind. Die Auflösungsgrenze ist also keine scharfe Grenze. Je nach Signal-Rausch-Verhältnis kann sie über- oder unterschritten werden.



4.4.1 Auflösungsvermögen des Fernrohrs:

Die Strahlung eines Sternes, welcher mit einem Fernrohr beobachtet wird, ist in guter Näherung eine ebene Welle. Damit zwei benachbarte Sterne getrennt wahrgenommen werden können, müssen also die beiden ebenen Wellen dieser Sterne "noch nicht verschwimmende" Flecken in der Brennebene des Objektivs erzeugen (diese "Lichtflecken" werden dann mit Hilfe eines Okulars betrachtet).

Die minimale Winkeldistanz bei der noch "getrennte Lichtflecken" entstehen, beträgt also

$$\varphi_1 = \arcsin(1.22 \cdot \lambda/d)$$

und das **Auflösungsvermögen U**, definiert als der Kehrwert dieses minimalen Winkels, lautet

$$U = 1/\varphi_1 \approx 0.82 \, d/\lambda$$

Sind die Sterne winkelmässig näher beieinander, so können sie nicht mehr einzeln identifiziert werden, man beobachtet einfach einen etwas grösseren Fleck.

Hinzuzufügen ist noch, dass obige Gleichung für ideale Linsen gilt und damit so etwas wie eine optische Schallgrenze darstellt, welche aber von guter Optik praktisch erreicht wird.

4.4.2 Auflösungsvermögen des Mikroskops.

Auch Mikroskope haben ein beschränktes Auflösungsvermögen, mit einem Mikroskop können nicht beliebig benachbarte Punkte getrennt gesehen werden. Da hilft auch eine weitere Vergrösserung nicht, das Bild ist dann einfach verschwommen, feinere Details können nicht ausgemacht werden.

Da die Herleitung um einiges komplizierter ist als beim Teleskop, geben wir einfach die entsprechende Gleichung an:

Zwei Objektpunkte im Abstand y können dann getrennt gesehen werden, wenn

$$y \geq 0.61 \, \lambda / A_N$$

wobei

$$A_N = n \sin \sigma$$

die numerische Apertur des Objektivs und σ den halben Öffnungswinkel des Lichtkegels, den das Objektiv erfasst, bezeichnet.

Als grobe Faustregel gilt: Mit Lichtmikroskopen können Objekte beobachtet werden, deren Grösse ungefähr der verwendeten Lichtwellenlänge entspricht.

(=Grund für UV-Foto-Lithographie bei 0.18 μ m – Technik)

