

Семинар 1.

Вспоминаем линейную алгебру. Говорим про векторное дифференцирование.

Задание 1.

4. Заданы векторы: $a(1, 5, 3)$, $b(6, -4, -2)$, $c(0, -5, 7)$ и $d(-20, 27, -35)$. Требуется подобрать числа α , β и γ так, чтобы векторы αa , βb , γc и d образовывали замкнутую ломаную линию, если «начало» каждого последующего вектора совместить с «концом» предыдущего.

Задание 2.

Найдите ортогональную проекцию вектора $\vec{a}\{2; 3; -1\}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{b}\{-1; 1; 3\}$.

Задание 3.

Вычислить $A \cdot B$, а также след и определитель полученной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 15 & 3 \end{pmatrix}$$

Задание 4.

Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Задание 5.

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы. В ответе указать квадрат длины собственного вектора $x = \{x_1, x_2, x_3\}$, с $x_2=1$, соответствующего наибольшему собственному значению.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Векторное дифференцирование.

- При отображении вектора в число $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla_x f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T.$$

- При отображении матрицы в число $f(A) : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla_A f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial A_{ij}} \right)_{i,j=1}^{n,m}.$$

Мы хотим оценить, как функция изменяется по каждому из аргументов по отдельности. Поэтому производной функции по вектору будет вектор, по матрице — матрица.

Полезные свойства:

- 1) $d(XY) = dX \cdot Y + X \cdot dY$
- 2) Если A - матрица константа, то $dA = 0$
- 3) $d(X') = dX'$
- 4) $d \det X = \det X \operatorname{tr}(X^{-1} dX)$

Задание 6.

Пусть $a \in \mathbb{R}^n$ — вектор параметров, а $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор переменных.

Необходимо найти производную их скалярного произведения по вектору переменных $\nabla_x a^T x$.

Задание 7.

Пусть теперь $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Необходимо найти $\nabla_x x^T A x$.