Условие

Винни-Пух знает, что мёд бывает правильный, $honey_i = 1$, и неправильный, $honey_i = 0$. Пчёлы также бывают правильные, $bee_i = 1$, и неправильные, $bee_i = 0$. По 100 своим попыткам добыть мёд Винни-Пух составил таблицу сопряженности:

	$honey_i = 1$	$honey_i = 0$
$bee_i = 1$	12	36
$bee_i = 0$	32	20

Винни-Пух использует логистическую регрессию с константой для прогнозирования правильности мёда с помощью правильности пчёл.

1. Какие оценки коэффициентов получит Винни-Пух?
2. Какой прогноз вероятности правильности мёда при встрече с неправильными пчёлами даёт логистическая модель? Как это число можно посчитать без рассчитывания коэффициентов?

РЕШЕНИЕ

$$L = -\sum_{i=1}^{100} \left(y_i \ln p_i + (1 - y_i) \ln(1 - p_i)\right) \to \min$$

$$p = \frac{1}{1 + e^{-w_0 - w_1 x}}$$

РЕШЕНИЕ

$$1 - p = 1 - \frac{1}{1+e} = \frac{1+e-1}{1+e} = \frac{e}{1+e}$$

$$L = -\sum_{i=1}^{100}\left(y_i \ln\left(\frac{1}{1+e^{-w_0-w_1x_i}}\right) + (1-y_i)\ln\left(\frac{e^{-w_0-w_1x_i}}{1+e^{-w_0-w_1x_i}}\right)\right)$$

РЕШЕНИЕ

$$L = \sum_{i=1}^{100} \left(y_i \ln\left(1 + e^{-w_0 - w_1 x_i}\right) - (1 - y_i)(-w_0 - w_1 x_i) + (1 - y_i) \ln\left(1 + e^{-w_0 - w_1 x_i}\right) \right)$$

РЕШЕНИЕ

$$L = \sum_{i=1}^{100} \left((1 - y_i)(w_0 + w_1 x_i) + \ln(1 + e^{-w_0 - w_1 x_i}) \right) \to \min_{w_0, w_1}$$

РЕШЕНИЕ

$$\frac{\partial L}{\partial w_0} = \sum_{i=1}^{100} \left(1 - y_i + \frac{1}{1 + e^{-w_0 - w_1 x_i}} (-1) e^{-w_0 - w_1 x_i} \right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = \sum_{i=1}^{100} \left((1 - y_i) x_i + \frac{1}{1 + e^{-w_0 - w_1 x_i}} (-x_i) e^{-w_0 - w_1 x_i} \right) = 0$$

РЕШЕНИЕ

$y = 1, x = 1\ - 12$ наблюдений

$$\frac{\partial L}{\partial w_0} = -\frac{12}{1 + e^{-w_0 - w_1}} e^{-w_0 - w_1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = -\frac{12}{1 + e^{-w_0 - w_1}} e^{-w_0 - w_1}$$

РЕШЕНИЕ

$y = 0, x = 1\ - 36$ наблюдений

$$\frac{\partial L}{\partial w_0} = 36 - \frac{36}{1 + e^{-w_0 - w_1}} e^{-w_0 - w_1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = 36 - \frac{36}{1 + e^{-w_0 - w_1}} e^{-w_0 - w_1}$$

РЕШЕНИЕ

$$y = 1, x = 0 \; - 32 \text{ наблюдения}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_0} = -\frac{32}{1 + e^{-w_0}} e^{-w_0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = 0$$

РЕШЕНИЕ

$y = 0, x = 0\ - 20$ наблюдений

$$\frac{\partial L}{\partial w_0} = 20 - \frac{20}{1 + e^{-w_0}} e^{-w_0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = 0$$

РЕШЕНИЕ

$$\frac{\partial L}{\partial w_0} = 56 - \frac{48}{1 + e^{-w_0 - w_1}} e^{-w_0 - w_1} - \frac{52}{1 + e^{-w_0}} e^{-w_0} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = 36 - \frac{48}{1 + e^{-w_0 - w_1}} e^{-w_0 - w_1} = 0$$

РЕШЕНИЕ

$$\frac{48}{1+e^{-w_0-w_1}}e^{-w_0-w_1} = t \Leftrightarrow t = 36$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_0} = 56 - 36 - \frac{52}{1+e^{-w_0}}e^{-w_0} = 0$$

РЕШЕНИЕ

$$52e^{-w_0} = 20 + 20e^{-w_0}$$

$$e^{-w_0} = \frac{5}{8}$$

$$w_0 = \ln\frac{8}{5} \approx 0.47$$

РЕШЕНИЕ

$$\frac{48}{1+e^{-w_0-w_1}}e^{-w_0-w_1} = 36$$

$$48e^{-w_0-w_1} = 36 + 36e^{-w_0-w_1}$$

$$-w_0 - w_1 = \ln 3$$

$$w_1 = -\ln\frac{8}{5} - \ln 3 = \ln\frac{5}{24} \approx -1.57$$

РЕШЕНИЕ

$$p = \frac{1}{1 + e^{-w_0 - w_1 x}}$$

$$p = \frac{1}{1 + e^{\ln\frac{5}{8}}} = \frac{8}{13} = \frac{32}{32 + 20}$$