$S = \omega^{\omega}$ Aktual unendliche, fraktale Superial-Zahlen
Mit Primzahlen ins Unendliche

← *Eigenschaften*

Primzahlprodukt-Vermutung (Beweis)

Ist das Produkt aller endlichen Primzahlen, also die Primfakultät über alle Primzahlen in der Menge der natürlichen Zahlen, der Anzahl der natürlichen Zahlen gleich?

Eine Vorstellung der Vermutung und ihr Beweis

Notizen

Warum könnte die Primzahlprodukt-Vermutung stimmen?
• Die Primzahlen werden unter den sehr großen natürlichen Zahlen extrem selten.
• Es klafft eine riesige Lücke zwischen den endlichen natürlichen Zahlen und ω, siehe **Neue Einsichten zu positiven aktual unendlichen Biordinalzahlen**. Ist diese Lücke wirklich so groß?
– Meine Analyse sagt: Eine Anzahl von ω Zahlen sind vom Typ ω - n in den Biordinalzahlen.
– Stimmt allerdings die Primzahlprodukt-Vermutung, dann liegen auch alle $p^{-1}\ \omega \pm n$, mit p ist ein Primzahlprodukt einfacher Potenz aus endlich vielen Primzahlen.
· Ob es dann eine Einschränkung für die Größe von n gibt, ist mir nicht ganz unklar, aber unwahrscheinlich. Wenn nicht, sind es je p^{-1} dann $2\ \omega$ Zahlen.
Interessante Erkenntnisse zu Primzahlen
• Der **Calkin-Wilf-Baum** muss etwas mit der Primzahlstruktur zu tun haben, weil alle seine Brüche teilerfremde Zähler und Nenner haben.
• Mit dem **Satz von Wilson** können wir herausfinden, ob eine Zahl eine Primzahl ist, wenn ich es richtig verstehe, siehe Primzahl-Produkt-Definition von s in meinem Ordner „4. Variante“, Dokument „Sup-Zahl (52).pdf“, S. 5.
Verbesserungen der Seite
• Den Ausdruck ›Erzeugungskombinatorik‹ auch im oder nach dem Beweis wieder aufgreifen.

Auf die Primzahlprodukt-Vermutung bin ich durch das Herumspielen mit der **Struktur der Superial-Zahlen** gestoßen.

Schauen wir uns das Zählen der **natürlichen Superial-Zahlen** an: Beim Zählen von natürlichen Superial-Zahlen werden endliche rationale Zahlen q_1 als Koeffizienten des Unendlichen $q_1 \cdot s + z$ mitgezählt, wenn die endlichen ganzen Zahlen z als endlicher

Summand immer wieder durchlaufen. Betrachten wir im Folgenden mit Hilfe von s das Verhältnis der Anzahl der endlichen rationalen Zahlen und der endlichen ganzen Zahlen, dann scheint intuitiv die Anzahl der endlichen natürlichen Zahlen dem Produkt aller endlichen Primzahlen gleich zu sein.

Den Ansatz zu dieser Vermutung finden wir im Abschnitt ***Ausgangspunkt der Primzahlprodukt-Vermutung***, wo wir uns schon mit der Struktur von s beschäftigt haben. Dabei fanden wir, dass die Anzahl der rationalen Zahlen $[0, 1[_{\mathbb{Q}}$, von der Null bis ausschließlich der Eins, in Formel **SN.Eig.SVS.10** eine aktual unendliche positive ganze Zahl sein muss. Das können wir mit Hilfe der **Menge** $\mathbb{N}_\infty$ zum Ausdruck bringen:

$$\#[0, 1[_{\mathbb{Q}} \quad = \quad \frac{s}{2 \cdot \omega} \qquad (\text{SN.Eig.SVS.10})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{s}{2 \cdot \omega} \quad \in \quad \mathbb{N}_\infty \qquad (\text{SN.PP.1})$$

Die Ganzzahligkeit bedingt, dass alle Primfaktoren von $2 \cdot \omega$ auch in s vorkommen müssen.

Fragen die offen sind:

- Gehören die denkbaren **überrationalen Zahlen** (auch in der **Einleitung**) – vermutlich die Koordinaten von algebraischen Zahlen[1], wie $\sqrt{2}$ – auch zu den möglichen Koeffizienten der Definition der (natürlichen) Superial-Zahlen?
  Falls dem so sein sollte, dann steht $\frac{s}{2 \cdot \omega}$ nicht alleine für die rationalen Zahlen $[0, 1[_{\mathbb{Q}}$, sondern für die überrationalen Zahlen $[0, 1[_{\mathbb{Q}^r}$.
  Dies würde allerdings nichts an der Primzahlprodukt-Vermutung ändern

Und wir wissen auch, dass s unendlich viel größer als ω ist, denn nach unseren Erkenntnissen aus dem Kapitel ***Die Struktur von s*** steht s für die Anzahl der rationalen Zahlen und ω für die Anzahl der natürlichen Zahlen.

Ich vergleiche hierbei aber nicht die Mächtigkeit[2] der Menge der rationalen Zahlen und die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen, wobei es darum geht, ob sich zwei Mengen bidirektional aufeinander abbilden lassen. Sondern ich meine die kombinatorische Erzeugung von Elementen der unendlich großen Menge der rationalen Zahlen im Verhältnis zur vollständigen Induktion bei der Erzeugung der Menge der natürlichen Zahlen.

Die unendlich viel größere Erzeugungskombinatorik drücken wir mit dem Symbol $\overset{\infty}{\ggg}$ aus:

$$s \quad \overset{\infty}{\ggg} \quad \omega \qquad (\text{SN.PP.2})$$

Im Folgenden können wir dies klar erkennen.

Denn s ist in Formel **SN.Ein.35** durch folgendes Primzahl-Flächenprodukt definiert:

$$\begin{aligned} s \quad := \quad & (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \cdots)_1 \\ & \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \cdots)_2 \\ & \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \cdots)_3 \\ & \vdots \\ & \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \cdots)_{n \in \mathbb{N}} \\ & \vdots \end{aligned} \qquad \textbf{(SN.Ein.35)}$$

Da, wie oben geschildert, alle Primfaktoren von $2 \cdot \omega$ auch in s vorkommen müssen, muss $2 \cdot \omega$, und somit auch ω, ein Teil des Primzahl-Flächenprodukts sein. Und dieses Teilprodukt muss einen unendlich großen Wert haben.

ω kann nicht einer der unendlich großen Primzahltürme des Primzahl-Flächenprodukts sein

Nun können wir als erstes überlegen, ob es sich um einen der Primzahltürme handeln könnte: Die unendlich große Primzahl-Potenz mit der kleinsten Basis in s ist 2^{ω}. Wenn wir berücksichtigen, dass ja oben s durch $2 \cdot \omega$ geteilt wird und wir den Faktor 2 schon mal aus der unendlichen Potenz von 2 entfernen, ergibt sich immer noch $2^{\omega-1}$, wobei $\omega - 1$ als **Biordinalzahl** definiert ist.

> Nun ist es offensichtlich, dass $2^{\omega-1}$ ungleich und sogar sehr viel größer als ω ist: (Hier auch $\overset{\infty}{\ggg}$ nutzen?)
>
> $$2^{\omega-1} \quad \neq \quad \omega \qquad \text{(SN.PP.3)}$$
>
> $$2^{\omega-1} \quad \ggg \quad \omega \qquad \text{(SN.PP.4)}$$
>
> $$\Rightarrow \qquad (\forall p \in \mathbb{P}) \left[\, p^{\omega} \quad \ggg \quad \omega \,\right] \qquad \text{(SN.PP.5)}$$
>
> Dies gilt dann auch für alle Potenzen dieser Größenordnung endlicher Primzahlen.

Somit kommt keine Primzahl der Potenz p^{ω}, also eine Spalte des Primzahl-Flächenprodukts, als unendlich großer Primfaktoranteil von s, der ω gleicht, in Frage.

Wir vermuten, ω ist die vollständige Primfakultät aller endlichen Primzahlen

Eine Möglichkeit, die noch bleibt, ist, dass ω dem unendlichen Produkt aller endlichen Primzahlen gleich ist, also eine Zeile des Primzahl-Flächenprodukts:

$$\omega \quad \overset{?}{=} \quad \omega_{\forall p} \quad := \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \cdots \qquad \text{(SN.PP.6)}$$

$$\Rightarrow \quad s = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \cdots)^{\omega} \qquad \text{(SN.PP.7)}$$
$$= \left(\omega_{\forall p}\right)^{\omega} \stackrel{?}{=} \omega^{\omega}$$

Stimmt unsere Vermutung, dann ist s das Gleiche wie ω hoch ω.

An dieser Stelle sind wird nicht ganz sicher, ob wirklich alle endlichen Primzahlen in ω stecken oder auch welche endlich oft mehrfach vorkommen. Auch, wenn dies der einfachste Fall scheint, haben wir keinen Hinweis, warum eine der Primzahlen nicht fehlen oder doch mehrfach sein könnte. Außer, dass vielleicht die 2 an ω fehlen könnte, weil sie in $2 \cdot \omega$ wieder separat hinzu kommt.

Die Eigenschaft von ω allerdings, mit gutem Recht, soweit wir wissen, genau so viele gerade wie ungerade Zahlen zu enthalten, steht dem gegenüber. Sie liefert einen Grund, dass ω durch 2 teilbar sein sollte.

Wie können wir nun das Wissen schöpfen, dass alle endlichen Primzahlen genau ein Mal im Produkt vorkommen müssen?

Wir können unsere Vermutung plausibel machen, und schließlich auch beweisen, wenn wir erkennen, dass sowohl das vollständige Zählen als auch das vollständige Produkt aller endlichen Primzahlen das Raster der endlichen natürlichen Zahlen beschreiben.

Wir beginnen damit, zwei Möglichkeiten zu beleuchten, die Unendlichkeit der endlichen natürlichen Zahlen zu zeigen.

Zwei Arten die Unendlichkeit der endlichen natürlichen Zahlen zu beweisen

Der **›Satz des Euklid‹**[3] beweist, dass die Primzahlen in den unendlich vielen natürlichen Zahlen nicht enden, sondern es auch unendlich viele endliche Primzahlen gibt.

Wenn wir verstehen, dass der ›Satz des Euklid‹ ebenso beweist, dass die endlichen natürlichen Zahlen nicht enden, dann können wir erkennen, welche Bedeutung dieser Satz und das Zentrum seines Beweises für die natürlichen Zahlen hat.

Es gibt also mindestens zwei Arten die Unendlichkeit der endlichen natürlichen Zahlen zu beweisen:

Beweis durch Zählen

Einmal können wir die Unendlichkeit der endlichen natürlichen Zahlen durch das Zählen beweisen, mittels der vollständigen Induktion[4], auf Basis des Zählatoms Eins, ausgehend von der Null.

Beweis durch die Primfakultät und die Phasenverschiebung um ± 1

Und ein weiteres Mal können wir die Unendlichkeit der endlichen natürlichen Zahlen mittels der Primfakultät und der Phasenverschiebung um ± 1 beweisen, auf Basis der Multiplikationsatome der Primzahlen und des Zählatoms Eins, ausgehend von der Eins. So, wie es nachfolgend im ›Satz des Euklid‹ beschrieben ist. Denn sein Beweis basiert auf der Primfakultät, also auf dem Primorial[5], welche immer weiter potenziell ins Unendliche vorangetrieben wird und sich damit immer weiter dem Produkt aller Primzahlen aus Formel **SN.PP.6** nähert.

In der Primfakultät $p\#$ sind alle endlichen Primzahlen, von der Zwei bis zu einer größten p, enthalten. Die größte wird dann im Beweis immer größer, bis ins Unendliche. Ausschließlich mit diesem Produkt funktioniert der Beweis und nicht, wenn irgendeine Primzahl im Produkt fehlt.

Da aufgrund des ›Fundamentalsatzes der Arithmetik‹[6] alle natürlichen Zahlen größer als Eins entweder selber Primzahlen sind oder sich in Primfaktoren zerlegen lassen, erzeugt darüber die immer größer werdende Primfakultät indirekt alle natürlichen Zahlen größer als Eins, bis ins Unendliche, weil sie genau das Raster vorgibt, auf dem diese liegen.

Hohe Plausibilität der Primzahlprodukt-Vermutung

Es liegt also sehr nahe, dass das Produkt aller endlichen Primzahlen das Teilprodukt von s ist, dass ω gleicht. Es gibt keinen Grund, warum eine der Primzahlen in dem Produkt mehrfach vorkommen sollte oder gar müsste. Womit wir noch keinen Beweis für die Primzahlprodukt-Vermutung haben, sie aber schon mal sehr plausibel erscheint. Genau dies zeigen wir nachfolgend und nutzen dazu die vorstehende Einsicht für den Beweis.

Satz des Euklid

Der ›Satz des Euklid‹ beweist, dass die Primzahlen endlicher größe nicht enden.

Ich gebe diesen Beweis nachfolgend in Kurzform wieder. Dabei werde ich ihn etwas modifizieren, damit er zu den von uns gesuchten Eigenschaften am besten passt und wir ihn gut weiterverwenden können:

Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen im Endlichen gibt

Definition der Primzahlen im Endlichen:[7]

> *»Die Primzahlen sind innerhalb der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen dadurch charakterisiert, dass jede von ihnen genau zwei natürliche Zahlen als Teiler hat.«* [8]

Nach dieser Definition sind Null und Eins keine Primzahlen.

Dass es unendlich viele Primzahlen im Endlichen gibt, können wir durch die Schlussfolgerungskette des folgenden Beweises erkennen,[9] wenn wir die Primfakultät[10] von p mit $p\#$ berechnen:

- Bilde die Primfakultät einer bekannten Primzahl, das Produkt aller Primzahlen kleiner und einschließlich dieser Primzahl: $p\#$
- Addiere Eins dazu oder ziehe Eins ab: $p\# \pm 1$
- $p\# \pm 1$ ist nicht durch eine der Primzahlen in $p\#$ ganzzahlig teilbar.
- $p\# \pm 1$ kann daher entweder nur selber eine Primzahl sein, die dann größer als p ist, oder ihr Primzahlprodukt enthält ausschließlich Primzahlen – mindestens zwei Stück –, die nicht in $p\#$ enthalten sind und damit größer als p sein müssen.
- Alle Primzahlen, durch die $p\# \pm 1$ teilbar ist, sind damit größer als p.
- Es gibt also immer eine Primzahl, die größer ist als jede gegebene Primzahl p, womit die Menge der endlichen Primzahlen nicht endet.

Es gibt in den endlichen natürlichen Zahlen demnach bewiesenermaßen unendlich viele Primzahlen.

Besondere Rolle der Primfakultät

Die Primfakultät spielt im ›Satz des Euklid‹ die zentrale Rolle.

Zum einen sammelt sie alle Primzahlen bis einschließlich p lückenlos in ihrem Produkt $p\#$ ein. Zum anderen erlaubt sie über ihre doppelte Variation um plus-minus Einen $p\# \pm 1$ Aussagen über weitere Primzahlen, die noch nicht in ihrem Produkt enthalten sind und fungiert so quasi auch als Konstruktor:

Entweder sind $p\# - 1$ und/oder $p\# + 1$ selber schon größere Primzahlen als p oder es gibt zwischen p und $p\# - 1$, also in der **Intervall-Menge** $]p, p\# - 1[_{\mathbb{N}}$, mindestens zwei oder vier oder gar mehr weitere Primzahlen, die in der Primfaktorzerlegung von

$p\# - 1$ und/oder $p\# + 1$ stecken.

Das passende Verständnis zum Beweis unserer Vermutung

Eine Perspektivenfindung

Berechnen wir Beispielhaft das Produkt der endlichen Primzahlen von den kleinsten Primfaktoren her mit der Primfakultät[11] $p\#$, dann wird deutlich, dass es schnell sehr viel größer wird, als die größte in ihm vorkommende Primzahl:[12]

$$2\# = 2 \tag{SN.PP.8}$$

$$3\# = 6 \tag{SN.PP.9}$$

$$5\# = 30 \tag{SN.PP.10}$$

$$7\# = 210 \tag{SN.PP.11}$$

$$11\# = 2310 \tag{SN.PP.12}$$

$$13\# = 30030 \tag{SN.PP.13}$$

$$17\# = 510510 \tag{SN.PP.14}$$

$$19\# = 9699690 \tag{SN.PP.15}$$

$$23\# = 223092870 \tag{SN.PP.16}$$

Im ersten Moment erscheint es eher undurchsichtig, was die Primfakultät mit der Anzahl von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen in einer Menge zu tun hat.

Die Anzahl von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen in einer endlichen Menge

Die Ordinalzahlen[13], und in erweiterter Form die **Biordinalzahlen**, definieren die Anzahl der aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen in endlichen und unendlichen Mengen, und symbolisieren diese mit den Mengen selbst.

Nach Formel **BO.Ein.5** finden wir dort für die Anzahl n der Elemente in einer endlichen Menge aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen:

$$n \coloneqq \{0, 1, 2, \cdots, n-1\} \tag{BO.Ein.5}$$

Jede natürliche Zahl n steht also für eine lückenlose Menge, von der Null an.

Die Anzahl der Elemente einer Menge scheint hier mit dem nächst größeren Element n als das größte Element der Menge $n - 1$ gleichgesetzt. Bei näherer Betrachtung müssen wir aber feststellen, dass diese Perspektive nicht weit trägt. Denn schon bei der

Null, der leeren Menge, funktioniert sie nicht, weil es kein größtes Element in der leeren Menge gibt.

Die aktual unendliche Anzahl aller Elemente der Menge $\mathbb{N}$ der endlichen natürlichen Zahlen wird als die Anzahl der Schritte einer vollständigen Induktion[14] verstand und wie folgt als ω definiert:

$$\omega \quad := \quad \mathbb{N} \quad = \quad \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\} \qquad \textbf{(BO.Ein.9)}$$

In der Menge $\mathbb{N}$ ist nun keine größte Zahl mehr definiert und ω ist somit auch nicht die größte Zahl in $\mathbb{N}$ plus Eins. Sogar finden wir in den Biordinalzahlen im Abschnitt ›***Es gibt mehr ganze Zahlen von Null bis zu ω, als der Wert von ω ausdrückt***‹, dass sich noch ganze Zahlen zwischen jeder natürlichen Zahl in $\mathbb{N}$ und ω definieren lassen.

Wie können wir dies Interpretieren und aus welcher Perspektive passend betrachten?

Ich denke, es sollte noch eine weitere Art und Weise geben, Werte, die eine Anzahl natürlicher Zahlen von der Null an angeben, mit einer Menge zu beschreiben. Und zwar mit einer Menge von Zahlen, die auf seiner Primfaktorzerlegung basieren und das Primfaktor-Spektrum oder Primfaktor-Raster des Werts widerspiegeln.

Die Primturmzerlegung

Wie können wir die Primfaktorzerlegung jeder natürlichen Zahl eindeutig in einer Menge darstellen?

Das ist nur durch eine Menge der Primzahltürme einer natürlichen Zahl möglich, die wir *Primturmzerlegung* nennen. Denn eine Menge der reinen Primfaktoren wäre nicht eindeutig, weil dies nicht die Potenzen der Primzahlen berücksichtigt.

Sei $pt(n)$ die Menge der Primzahltürme der **endlichen und aktual unendlichen natürlichen Zahl** $n \in \mathbb{N}_\infty$:

$$pt(n) \quad := \quad \left\{ x \;\middle|\; \begin{cases} x = n & \text{falls} \quad n \in \{0, 1\} \\ \begin{array}{c} (\forall p \in \mathbb{P})\,(\forall k \in \mathbb{N}_\infty) \\ \left(\dfrac{n}{p^k} \in \mathbb{N}_\infty \wedge \dfrac{n}{p^{k+1}} \notin \mathbb{N}_\infty \right) \\ \hfill \left[x = p^k\right] \end{array} & \text{falls} \quad n \geq 2 \end{cases} \right\} \qquad \text{(SN.PF}$$

$$\Rightarrow \qquad n \;\widehat{=}\; pt(n) \qquad \text{(SN.PF}$$

Dann ist diese Menge also die Menge der Primzahlen in der maximalen Potenz, die n noch ganzzahlig teilt, oder sie enthält im Falle von Null nur die Null oder im Falle von Eins nur die Eins. Die Null und die Eins werden hier berücksichtigt, weil wir die natürlichen Zahlen komplett abbilden wollen. Der Parameter n und sein Funktionswert, seine Primturmzerlegung, entsprechen einander.

Die ersten Werte dieser Funktion sind

$$pt(0) = \{0\} \tag{SN.PP.19}$$

$$pt(1) = \{1\} \tag{SN.PP.20}$$

$$pt(2) = \{2\} \tag{SN.PP.21}$$

$$pt(3) = \{3\} \tag{SN.PP.22}$$

$$pt(4) = \{4\} \tag{SN.PP.23}$$

$$pt(5) = \{5\} \tag{SN.PP.24}$$

$$pt(6) = \{2, 3\} \tag{SN.PP.25}$$

$$pt(7) = \{7\} \tag{SN.PP.26}$$

$$pt(8) = \{8\} \tag{SN.PP.27}$$

$$pt(9) = \{9\} \tag{SN.PP.28}$$

$$pt(10) = \{2, 5\} \tag{SN.PP.29}$$

$$pt(11) = \{11\} \tag{SN.PP.30}$$

$$pt(12) = \{4, 3\} \tag{SN.PP.31}$$

und so fort.

Diese Menge können wir nun nutzen, um daraus das Primfaktor-Spektrum oder Primfaktor-Raster der natürlichen Zahl zu bestimmen.

Definition des Primturm-Potenzrasters

Die Menge der Anzahl der ersten n natürlichen Zahlen, von der Null an, stellt den Zählaspekt der Zahl n dar, also die Menge an Zahlen, die bis zu ihr erzeugt werden.

Die Primturmzerlegung ist eine Menge, die den multiplikativen Aspekt einer solchen Zahl darstellt. Sie bezieht sich aber nicht direkt auf die Erzeugung einer Menge – ein Spektrum oder Raster – natürlicher Zahlen, die mit ihrer Primturmzerlegung in Verbindung stehen, also die durch die in ihr enthaltenen Primzahltürme erzeugt werden.

Diese Menge möchte ich nun vorstellen und nenne sie das *Primturm-Potenzraster*.

Beim Primturm-Potenzraster geht es darum zu analysieren, welche anderen natürliche Zahlen sich mit den in einer natürlichen Zahl vorhandenen Primzahltürmen durch Variation ihrer Potenzen darstellen lassen. Denn es geht im Besonderen in einem zweiten Schritt darum, mit einer natürlichen Zahl ein Raster zu beschreiben, das zeigt, wie vollständig sich die natürlichen Zahlen, von der Null an, mit der Variation der Potenzen ihrer Primzahltürme beschreiben lassen.

Enthält eine natürliche Zahl einen Primfaktor, wie zum Beispiel die Zwei, mehrfach, dann können wir die selben Faktoren nicht untereinander unterscheiden. Denn all diese Zweien sind ja gleich. Unterscheiden können wir zwischen ihnen nur, wenn wir auch die Potenz der Primzahl sehen und im Primzahlturm belassen. Reduzieren wir also einen Primzahlturm auf seine Primzahlbasis, dann eliminieren wir einen essenziellen Teil seiner Eigenschaften, seines Charakters.

Würden wir in dem Fall also nur die einzelnen Primfaktoren berücksichtigen und in ihrer Potenz variieren, dann erhielten wir aufgrund der Reduktion der Primzahlpotenzen auf ihre Primzahlbasis Doppeldeutigkeiten, die eine vollständige und damit differenzierte Beschreibung der möglichen Spektren oder Raster unmöglich machen. So gesehen ist die Variation von Primzahltürmen keine Willkür, sondern zwingend, um Eineindeutigkeit zwischen der Menge des jeweiligen Primturm-Potenzrasters und der natürlichen Zahl, die es beschreibt, zu gewährleisten.

Zur Definition der Menge des Primturm-Potenzrasters und der Berechnung der lückenlosen Intervall-Menge endlicher und aktual unendlicher natürlicher Zahlen an seinem Beginn, von der Null an, brauchen wir im Folgenden also die Menge der Primfaktoranteile einer solchen Zahl.

Sei $pr(n)$ das Primturm-Potenzraster beziehungsweise die unendliche Primturm-Potenzraster-Menge, erzeugt aus ihrem **endlichen oder aktual unendlichen natürlichen Parameter** $n \in \mathbb{N}_\infty$, eine Menge die alle Kombinationen der natürlichen Potenzen seiner Primzahltürme enthält, wobei die Null und die Eins dazu genommen werden:

$$pt_{0,1}(n) \quad := \quad \{0, 1\} \cup pt(n) \qquad \text{(SN.PP.32)}$$

$$pr(n) \quad := \quad \begin{cases} n & \text{falls} \quad n \in \{0, 1\} \\ \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{c} \big(\forall i \in \#pt_{0,1}(n)\big) \\ \big(\forall j_i \in pt_{0,1}(n)\big) \\ (\forall k_i \in \mathbb{N}_\infty) \\ \left[x = \prod\limits_{\forall i} j_i^{k_i} \right] \end{array} \right\} & \text{falls} \quad n \geq 2 \end{cases} \qquad \text{(SN.PP.33)}$$

Die Menge wird hier erzeugt, indem alle Elemente in $pt(n)$, geordnet nach ihrem Index i, in jeder natürlichen Potenz miteinander kombiniert werden.

Im zweiten Fall sind die Null und Eins in der Menge immer dabei, weil sie in diesem Fall immer Teil der Primturmzerlegung sind. Und durch die jeweiligen Potenzen von Null und Eins, wie $0 = 0^1 \cdot 1^0 \cdot j_i^0 \cdots$ und $1 = 0^0 \cdot 1^1 \cdot j_i^0 \cdots$ kommen beide dann ins Primturm-Potenzraster.

Das Primturm-Potenzraster ist eine eineindeutige Abbildung jeder natürlichen Zahl. Dies kommt daher, weil jede natürliche Zahl, wie oben gezeigt, ihre einzigartige Primturmzerlegung hat, aufgrund derer sich das Primturm-Potenzraster ebenso einzigartige berechnet.

Entspreche also jede natürliche Zahl ihrem Primturm-Potenzraster

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left[n \quad \widehat{=} \quad pr(n) \right] \quad , \tag{SN.PP.34}$$

was eben keine Gleichheit bedeutet.

Mit Entsprechung ist hier und nachfolgend – generell in dieser Arbeit – gemeint, dass eine bijektive Funktion[15] existiert, die beide Dinge eineindeutig aufeinander abbildet. Jede natürliche Zahl beschreibt und charakterisiert also ihr eigenes Primturm-Potenzraster und umgekehrt.

Das Primturm-Potenzraster nutzen wir nun, um seinen lückenlosen Anteil an seinem Beginn zu berechnen.

Sei $lpr(n)$ die maximale lückenlose Menge natürlicher Zahlen, von der Null an, im Primturm-Potenzraster $pr(n)$:

$$lpr(n) \quad := \quad \{ \ x \ \mid \ (\forall i \in \mathbb{N}) \, (i \subseteq pr(n)) \, [\ x = i \ ] \ \} \tag{SN.PP.35}$$

($\mathbb{N}$ sollte hier auf aktual unendliche natürliche Zahlen erweitert werden. Allerdings wäre $\mathbb{N}_\infty$ hier nicht ganz richtig, weil es im Sinne der Biordinalzahlen nur um die Ordinalzahlen geht, also um Limeszahlen $\lambda + n$ und nicht um solche wie $\lambda - n$, also z.B. $\omega - 1$.)
(Diese Funktion könnten wir vielleicht auch durch Mengennegation und das Herauskristallisieren der kleinsten Zahl in der Antimenge realisieren.)
Diese Menge erhalten wir, indem wir alle natürlichen Zahlen i in einer Menge sammeln, die echte Teilmenge[16] des Primturm-Potenzrasters sind.

Damit haben wir etwas besonderes geschaffen, wie wir noch sehen werden.

Beispiele zur Primturmzerlegung, zum Primturm-Potenzraster und zum lückenlosen Primturm-Potenzraster:

Nachdem wir nun die Formalien definiert haben, möchte ich die Zusammenhänge an Zahlenbeispielen verdeutlichen und erlebbar machen.

Für die Zahl 0 haben wir:

$$pt(0) \quad = \quad \{0\} \tag{SN.PP.36}$$

$$pr(0) = pr(0^1 \cdot 1^0) \tag{SN.PP.37}$$

$$\Leftrightarrow \quad pr(0) = \varnothing \tag{SN.PP.38}$$

$$lpr(0) = 0 = \varnothing \tag{SN.PP.39}$$

Für die Zahl 1 haben wir:

$$pt(1) = \{1\} \tag{SN.PP.40}$$

$$pr(1) = pr(0^0 \cdot 1^1) \tag{SN.PP.41}$$

$$\Leftrightarrow \quad pr(1) = \{0\} \tag{SN.PP.42}$$

$$lpr(1) = 1 = \{0\} \tag{SN.PP.43}$$

Für die Zahl 2 haben wir:

$$pt(2) = \{2\} \tag{SN.PP.44}$$

$$pr(2) = pr(0^0 \cdot 1^0 \cdot 2^1) \tag{SN.PP.45}$$

$$\Leftrightarrow \quad pr(2) = \left\{0, 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \cdots\right\} \tag{SN.PP.46}$$

$$\Leftrightarrow \quad pr(2) = \{0, 1, 2, 8, 16, 32, \cdots\} \tag{SN.PP.47}$$

$$lpr(2) = 3 = \{0, 1, 2\} \tag{SN.PP.48}$$

Für die Zahl 4 haben wir:

$$pt(4) = \{4\} \tag{SN.PP.49}$$

$$pr(4) = pr(2^2) \tag{SN.PP.50}$$

$$\Leftrightarrow \quad pr(4) = \left\{0, 1, \left(2^2\right)^1, \left(2^2\right)^2, \left(2^2\right)^3, \cdots\right\} \tag{SN.PP.51}$$

$$\Leftrightarrow \quad pr(4) = \{0, 1, 4, 16, 64, \cdots\} \tag{SN.PP.52}$$

$$lpr(4) = 2 = \{0, 1\} \tag{SN.PP.53}$$

Für die Zahl $6 = 5\overline{\#} = 4\overline{\#}$ haben wir:

$$pt(6) = \{2, 3\} \tag{SN.PP.54}$$

$$pr(6) = pr(2 \cdot 3) \tag{SN.PP.55}$$

$$\Leftrightarrow \quad pr(6) = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, \cdots\} \tag{SN.PP.56}$$

$$lpr(6) = 5 = \{0, 1, 2, 3, 4\} \tag{SN.PP.57}$$

Für die Zahl 9 haben wir:

$$pt(9) = \{9\} \tag{SN.PP.58}$$

$$pr(9) = pr(3^2) \tag{SN.PP.59}$$

$$\Leftrightarrow \quad pr(9) = \left\{0, 1, \left(3^2\right)^1, \left(3^2\right)^2, \left(3^2\right)^3, \cdots\right\} \tag{SN.PP.60}$$

$$\Leftrightarrow \quad pr(9) = \{0, 1, 9, 81, 729, \cdots\} \tag{SN.PP.61}$$

$$lpr(9) = 2 = \{0, 1\} \tag{SN.PP.62}$$

Für die Zahl 10 haben wir:

$$pt(10) = \{2, 5\} \tag{SN.PP.63}$$

$$pr(10) = pr(2 \cdot 5) \tag{SN.PP.64}$$

$$\Leftrightarrow \quad pr(10) = \left\{0, 1, 2, 2^2, 5, 2^3, 2 \cdot 5, 2^4, 2^2 \cdot 5, 5^2, 2^5, 2^3 \cdot 5, 2 \cdot 5^2, 2^6, \cdots\right\} \tag{SN.PP.65}$$

$$\Leftrightarrow \quad pr(10) = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 32, 40, 50, 64, \cdots\} \tag{SN.PP.66}$$

$$lpr(10) = 3 = \{0, 1, 2\} \tag{SN.PP.67}$$

Für die Zahl 18 haben wir:

$$pt(18) = \{2, 9\} \tag{SN.PP.68}$$

$$pr(18) = pr(2, 3^2) \tag{SN.PP.69}$$

$$\Leftrightarrow \quad pr(18) = \left\{0, 1, 2, 2^2, 2^3, \left(3^2\right)^1, 2^4, 2 \cdot \left(3^2\right)^1, 2^5, 2^2 \cdot \left(3^2\right)^1, 2^6, 2^3 \cdot \left(3^2\right)^1, \left(3^2\right)^2, \cdots\right\} \tag{SN.PP.70}$$

$$\Leftrightarrow \quad pr(18) = \{0, 1, 2, 4, 8, 9, 16, 18, 32, 36, 64, 72, 81, \cdots\} \tag{SN.PP.71}$$

$$lpr(18) = 3 = \{0, 1, 2\} \tag{SN.PP.72}$$

Für die Zahl 20 haben wir:

$$pt(20) = \{4, 5\} \tag{SN.PP.73}$$

$$pr(20) = pr(2^2 \cdot 5) \tag{SN.PP.74}$$

$$\Leftrightarrow \quad pr(20) = \left\{0, 1, 4, 5, 4^2, 4 \cdot 5, 5^2, 4^3, \cdots\right\} \tag{SN.PP.75}$$

$$\Leftrightarrow \quad pr(20) = \{0, 1, 4, 5, 16, 20, 25, 64, \cdots\} \tag{SN.PP.76}$$

$$lpr(20) = 2 = \{0, 1\} \tag{SN.PP.77}$$

Für die Zahl $30 = 7\overline{\#} = 6\overline{\#}$ haben wir:

$$pt(30) = \{2, 3, 5\} \qquad \text{(SN.PP.78)}$$

$$pr(30) = pr(2 \cdot 3 \cdot 5) \qquad \text{(SN.PP.79)}$$

$$\Leftrightarrow \quad pr(30) = \big\{0, 1, 2, 3, 2^2, 5, 2 \cdot 3, 2^3, 3^2, 2 \cdot 5, 2^2 \cdot 3, 3 \cdot 5, 2^4, 2 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 5, \cdots\big\} \qquad \text{(SN.PP.80)}$$

$$\Leftrightarrow \quad pr(30) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, \cdots\} \qquad \text{(SN.PP.81)}$$

$$lpr(30) = 7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad \text{(SN.PP.82)}$$

Für die Zahl $210 = 11\overline{\#} = 10\overline{\#} = 9\overline{\#} = 8\overline{\#}$ haben wir:

$$pt(210) = \{2, 3, 5, 7\} \qquad \text{(SN.PP.83)}$$

$$pr(210) = pr(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) \qquad \text{(SN.PP.84)}$$

$$\Leftrightarrow \quad pr(210) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, \cdots\} \qquad \text{(SN.PP.85)}$$

$$lpr(210) = 11 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \qquad \text{(SN.PP.86)}$$

Wenn die Primzahlprodukt-Vermutung stimmt, dann gilt:

Für die Zahl $\omega \stackrel{?}{=} \omega\overline{\#}$ haben wir:

$$pt(\omega\overline{\#}) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13 \cdots\} \qquad \text{(SN.PP.87)}$$

$$pr\left(\omega\overline{\#}\right) = pr(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots) \qquad \text{(SN.PP.88)}$$

$$\Leftrightarrow \quad pr\left(\omega\overline{\#}\right) = \Big\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \cdots \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ \vdots \Big\} \tag{SN.PP.89}$$

$$lpr\left(\omega\overline{\#}\right) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \cdots\} \\ = \mathbb{N} = \omega \tag{SN.PP.90}$$

So können wir vielleicht schon ein wenig erkennen, wohin die Reise geht.

Alter, doppeldeutiger Ansatz mit dem Primpotenzraster:

Das Primpotenzraster

Die nächste Primzahl

Zur Definition der Menge des Primpotenzrasters und der Berechnung der lückenlosen Intervall-Menge natürlicher Zahlen an seinem Beginn, von der Null an, brauchen wir auch noch die Menge der Primfaktoren einer natürlichen Zahl.

Sei $pf(n)$ die Menge der Primfaktoren der natürlichen Zahl n:

$$pf(n) = \left\{ x \;\middle|\; (\forall p \in \mathbb{P}) \left(n, \frac{n}{p} \in \mathbb{N}\right) [\ x = p\ ] \right\} \tag{SN.PP.91}$$

Dann ist diese Menge also die Menge der Primzahlen, die n ganzzahlig teilen.

Sei $ppr(n)$ das Primpotenzraster beziehungsweise die unendliche Primpotenzraster-Menge, erzeugt aus ihrem natürlichen Parameter n, eine Menge die alle Kombinationen der natürlichen Potenzen seiner Primfaktoren enthält, wobei die Null und die Eins zu den Primfaktoren dazu genommen werden, um bei Null und Eins keine Lücke zu haben:

$$ppr(n) = \{\ x \mid (\forall i \in \mathbb{N}) \\ (i \in \{0, 1\} \vee pf(i) \cap pf(n) \neq \emptyset) \\ [\ x = i\ ]\ \} \tag{SN.PP.92}$$

Die Menge wird hier erzeugt, indem alle natürlichen Zahlen i darauf geprüft werden, ob sie entweder Null oder Eins sind oder mindestens einen Primfaktoren mit n teilen.

Sei $lppr(n)$ die maximale lückenlose Intervall-Menge natürlicher Zahlen, von der Null an, im Primpotenzraster $ppr(n)$:

$$lppr(n) \quad = \quad \{\ x \ \mid \ (\forall i \in \mathbb{N})\,(i \subset ppr(n))\,[\ x = i\ ]\ \} \qquad \text{(SN.PP.93)}$$

Diese Intervall-Menge erhalten wir, indem wir alle natürlichen Zahlen i in einer Menge sammeln, die echte Teilmenge(Verweis) des Primpotenzrasters sind.

(Diese Funktion könnten wir auch durch Mengennegation und das Herauskristallisieren der kleinsten Zahl in der Antimenge realisieren.)

Nachdem wir nun die Formalien definiert haben, möchte ich die Zusammenhänge an Zahlenbeispielen verdeutlichen und erlebbar machen. XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

Für die Primzahl 7 haben wir:

$$ppr(7\overline{\#}) \quad = \quad ppr(2 \cdot 3 \cdot 5) \quad = \quad ppr(30) \qquad \text{(SN.PP.94)}$$

$$ppr(7\overline{\#}) \quad = \quad \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, \cdots\} \qquad \text{(SN.PP.95)}$$

$$lppr(7\overline{\#}) \quad = \quad 7 \quad = \quad \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad \text{(SN.PP.96)}$$

Für die Zahl 6 haben wir:

$$ppr(6\overline{\#}) \quad = \quad ppr(2 \cdot 3 \cdot 5) \quad = \quad ppr(30) \qquad \text{(SN.PP.97)}$$

$$ppr(6\overline{\#}) \quad = \quad \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, \cdots\} \qquad \text{(SN.PP.98)}$$

$$lppr(6\overline{\#}) \quad = \quad 7 \quad = \quad \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad \text{(SN.PP.99)}$$

$$\Rightarrow \qquad lppr(6\overline{\#}) \quad = \quad lppr(7\overline{\#}) \qquad \text{(SN.PP.100)}$$

Für die Zahl 5 haben wir:

$$ppr(5\overline{\#}) \quad = \quad ppr(2 \cdot 3) \quad = \quad ppr(6) \qquad \text{(SN.PP.101)}$$

$$ppr(5\overline{\#}) \quad = \quad \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, \cdots\} \qquad \text{(SN.PP.102)}$$

$$lppr(5\overline{\#}) \quad = \quad 5 \quad = \quad \{0, 1, 2, 3, 4\} \qquad \text{(SN.PP.103)}$$

Für die Zahl 4 haben wir:

$$ppr(4\overline{\#}) \quad = \quad ppr(2 \cdot 3) \quad = \quad ppr(6) \qquad \text{(SN.PP.104)}$$

$$ppr(4\overline{\#}) \quad = \quad \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, \cdots\} \qquad \text{(SN.PP.105)}$$

$$lppr(4\overline{\#}) \quad = \quad 5 \quad = \quad \{0, 1, 2, 3, 4\} \qquad \text{(SN.PP.106)}$$

$$\Rightarrow \qquad lppr(4\overline{\#}) \quad = \quad lppr(5\overline{\#}) \qquad \text{(SN.PP.107)}$$

Für die Zahl 8 haben wir:

$$ppr(8\overline{\#}) \quad = \quad ppr(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) \quad = \quad ppr(210) \qquad \text{(SN.PP.108)}$$

$$ppr(8\overline{\#}) \quad = \quad \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, \cdots\} \qquad \text{(SN.PP.109)}$$

$$lppr(8\overline{\#}) \quad = \quad 11 \quad = \quad \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \qquad \text{(SN.PP.110)}$$

$$\Rightarrow \qquad lppr(8\overline{\#}) \quad = \quad lppr(9\overline{\#}) \quad = \quad lppr(10\overline{\#}) \quad = \quad lppr(11\overline{\#}) \qquad \text{(SN.PP.111)}$$

Die Mengen-Primfakultät $n\overline{\#}$ beschreibt ein Primpotenzraster minimalistisch.

Im Besonderen ist jedes Primpotenzraster eine Beschreibung der nächsten Primzahl, die größer als oder gleich n ist und auf seiner ersten Rasterlücke sitzt. Diese Primzahl erhalten wir dann durch $lppr(n\overline{\#})$.

Die Zahl beziehungsweise Menge $lppr(\omega\overline{\#})$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

$$\Rightarrow \qquad lppr(\omega\overline{\#}) \quad = \quad \mathbb{N} \quad = \quad \omega \qquad \text{(SN.PP.112)}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega\overline{\#} \quad \stackrel{?}{=} \quad \omega \qquad \text{(SN.PP.113)}$$

XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

Die Mengen-Primfakultät

Das Primturm-Potenzraster ist vom Ansatz des Beweises des ›Satz des Euklid‹ inspiriert und bietet nun, mit Hilfe der jetzt zu entwickelnden, abgewandelten Primfakultät, eine weitere Möglichkeit, die natürlichen Zahlen zu beschreiben, wie oben schon dargelegt. So gelingt es uns anschließend, die endlichen Primzahlen zu erzeugen und mit ihnen die natürlichen Zahlen erneut zu konstruieren. Dies führt uns schließlich auch zum Beweis unserer Vermutung.

Dies alles erreichen wir über ein tieferes Verständnis, wie der Beweis des ›Satz des Euklid‹ funktioniert, und über eine zu diesem Zweck etwas abgewandelte Primfakultät, mit der wir nun beginnen.

Sei der *Mengen-Primorial-Operator* $\mathbb{T}\overline{\#}$, auch *Mengen-Primfakultät* genannt, der Operator, der alle Primzahlen in der Menge $\mathbb{T}$ in einem Produkt multipliziert:

$$\mathbb{T}\overline{\#} \quad := \prod_{\forall p \in \mathbb{T} \cap \mathbb{P}} p \tag{SN.PP.114}$$

So erhalten wir eine Definition der Primfakultät, die sich auf die Elemente von Mengen bezieht.

Wie in den Ordinalzahlen beziehungsweise Biordinalzahlen definiert, können endliche und unendliche Zahlen einer Repräsentation durch Mengen entsprechen. In beiden Theorien wird diese Entsprechung als Gleichheit definiert, wie oben beispielhaft gezeigt.

Dann ergibt sich beispielsweise für die ersten natürlichen Zahlen, wenn wir sie demgemäß als Mengen verstehen:

$$0\overline{\#} \quad = \quad 1 \tag{SN.PP.115}$$

$$1\overline{\#} \quad = \quad 1 \tag{SN.PP.116}$$

$$2\overline{\#} \quad = \quad 1 \tag{SN.PP.117}$$

$$3\overline{\#} \quad = \quad 2 \quad = \quad 2 \tag{SN.PP.118}$$

$$4\overline{\#} \quad = \quad 2 \cdot 3 \quad = \quad 6 \tag{SN.PP.119}$$

$$5\overline{\#} \quad = \quad 2 \cdot 3 \quad = \quad 6 \tag{SN.PP.120}$$

$$6\overline{\#} \quad = \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad = \quad 30 \tag{SN.PP.121}$$

$$7\overline{\#} \quad = \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad = \quad 30 \tag{SN.PP.122}$$

$$8\overline{\#} \quad = \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \quad = \quad 210 \tag{SN.PP.123}$$

$$9\overline{\#} \quad = \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \quad = \quad 210 \tag{SN.PP.124}$$

$$10\overline{\#} \quad = \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \quad = \quad 210 \tag{SN.PP.125}$$

$$11\overline{\#} \quad = \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \quad = \quad 210 \tag{SN.PP.126}$$

$$12\overline{\#} \quad = \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \quad = \quad 2310 \tag{SN.PP.127}$$

Die vorm Operator stehende Zahl ist niemals Teil des Produkts, da die Menge, die eine Ordinalzahl repräsentiert, nicht selber in ihrer Menge enthalten ist.

Setzen wir diese Reihe für alle natürlichen Zahlen bis ins Unendliche zu ω fort, so ergibt sich:

▼ ausblenden

$$\mathbb{N}\overline{\#} \quad = \quad \prod_{\forall p \in \mathbb{N} \cap \mathbb{P}} p \tag{SN.PP.128}$$

▲ ausblenden

$$\Leftrightarrow \qquad \omega\overline{\#} \quad = \quad \mathbb{N}\overline{\#} \quad = \quad \prod_{\forall p \in \mathbb{P}} p \tag{SN.PP.129}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_{\forall p} \quad = \quad \omega\overline{\#} \tag{SN.PP.130}$$

Denn hier liefert uns $\omega\overline{\#}$ ein Produkt aller Primzahlen in $\mathbb{N}$, also ein Produkt aller endlichen Primzahlen.

Und so gesehen stellt sich unsere Vermutung nun als

$$\omega \quad \stackrel{?}{=} \quad \omega\overline{\#} \tag{SN.PP.131}$$

dar.

Doch was bedeutet das Produkt aller Primzahlen in Mengen natürlicher Zahlen generell?
Was sind die Bedingungen, unter denen das fragliche Gleichheitszeichen erfüllt ist?

Wie können wir sie formulieren?

Analyse des ›Satz des Euklid‹ in Bezug auf die Mengen-Primfakultät

In den obigen endlichen Beispielen zur Mengen-Primfakultät handelt es sich ja um Mengen $\mathbb{T} = n$, mit $n \in \mathbb{N}$, deren Elemente endliche natürliche Zahlen sind, von der Null bis zu einer endlichen größten $n - 1$.

Aus einer neuen Perspektive auf den ›Satz des Euklid‹ stellen wir fest, dass $n\overline{\#}$ uns ein Produkt aller Primzahlen liefert, das die Primfaktoren der Primfaktorzerlegungen aller Elemente x der Menge n enthält. Das muss so sein, denn in dem Moment, wo $n = p_i + 1$ ist, mit $p_i \in \mathbb{P}$, kommt zur Menge n die Primzahl p_i hinzu und damit auch zu ihrer Mengen-Primfakultät $n\overline{\#}$. Die hinzu gekommene Primzahl kann aber nicht Teil der Primfaktorzerlegung einer der kleineren Zahlen $x < p_i$ sein. Denn diese haben als Primfaktoren nur kleinere Primzahlen p_{i-d} , mit $1 \leq d < i$, oder sind selber eine Primzahl.

Für das Primturm-Potenzraster hat die Mengen-Primfakultät als Parameter eine besondere Bedeutung

Da das Primturm-Potenzraster ein Zahlenspektrum aufgrund der Primzahltürme seines Parameters liefert, ergibt die Mengen-Primfakultät einer Zahl als sein Parameter $pr\left(n\overline{\#}\right)$ ein besonderes Spektrum oder Raster:

Wenn wir die Mengen-Primfakultät einer natürlichen Zahl n als Parameter des Primturm-Potenzrasters benutzen, dann basiert das Raster auf allen Primzahlen, die Elemente der Mengenrepräsentation dieser natürlichen Zahl sind. In diesem Fall sind die Primzahltürme in $n\overline{\#}$ aber von minimaler Potenz, also so klein, wie möglich. Damit wird das erzeugte Raster dann so fein wie möglich.

Und hierin spiegelt sich auch noch eine Erkenntnis des ›Satz des Euklid‹ wider, die auf den ersten Blick kaum auffällt: Es ist in der dortigen Primfakultät nämlich egal, in welcher Potenz eine Primzahl vorliegt. Addieren wir Eins oder ziehen Eins ab, ist das Ergebnis nicht durch alle enthaltenen Primzahlen teilbar, auch, wenn die Potenz der Primzahl größer ist. Es kann nämlich beim Unteilbar-Machen von Produkten in Bezug auf ihre Faktoren wie $p = 5 \Rightarrow p\# = 2 \cdot 3 \cdot 5$ durch $p\# \pm 1$ oder $\Rightarrow p\# \cdot 2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ durch $p\# \cdot 2 \pm 1$ nicht zwischen den gleichen Primzahlen im Produkt unterschieden werden. Beide Summen in den Beispielen sind nicht durch 2 teilbar. Einzig dann funktioniert der Beweis nicht, wenn eine Primzahl fehlt. Das bedeutet, die minimale Potenz von Eins jeder Primzahl reicht aus, um die Endlosigkeit der Primzahlen und damit aller natürlichen Zahlen zu beweisen. Diese Erkenntnis ist für das Verständnis des Beweises wichtig und macht deutlich, warum das oben fragliche Gleichheitszeichen nachfolgend mit einem Ausrufezeichen zu versehen ist.

Die Funktion $pr\left(n\overline{\#}\right)$ liefert also ein lückenloses Primturm-Potenzraster $lpr\left(n\overline{\#}\right)$ bis ausschließlich der Primzahl, die größer als die letzte Zahl x der Menge $lpr\left(n\overline{\#}\right)$ ist. Zusammen mit der vorhergehenden Analyse lässt sich daraus eine Anleitung erkennen, wie wir aus einer endlichen natürlichen Zahl die nächst größere Primzahl, mittels Algebra und Mengenlehre, berechnen können.

Und damit erhalten wir auch eine Anleitung, aus einer gegebenen Primzahl dann immer wieder die nächste zu berechnen. Denn das Primturm-Potenzraster der Mengen-Primfakultäten einer Primzahl $pr\left(p_i\overline{\#}\right)$ kombiniert schließlich alle Primturm-Potenzraster der in ihm enthaltenen Primzahlen.

Berechnung der nächsten Primzahl

Per Algebra und Mengenlehre

Wie wir an den obigen endlichen Beispielen erkennen können und wie gerade erklärt, enthält das lückenlose Primturm-Potenzraster der Mengen-Primfakultät einer Primzahl als größte Zahl die letzte natürliche Zahl, bevor in Bezug auf das Zählen diese Primzahl als neue Zahl zur Menge, und damit zu diesem Produkt, hinzukommt. Die Mengen-Primfakultät $p_i\overline{\#}$ der Menge einer Primzahl p_i ist also die größte Menge mit natürlichen Zahlen $0 \leq x < p_i$, die durch ihr Primturm-Potenzraster aller kleineren Primzahlen $p < p_i$ in dieser Menge lückenlos dargestellt wird. Dieses spezielle *lückenlose Primturm-Potenzraster einer Primzahl* entspricht also auch eben dieser Mengen-Primfakultät.

> $p_i\overline{\#}$ ist also eine eineindeutige und vollständige Entsprechung der Menge p_i, dargestellt durch ihr lückenloses Primturm-Potenzraster.
>
> $$\Rightarrow \qquad (\forall p_i \in \mathbb{P}) \left[\; p_i \quad \widehat{=} \quad p_i\overline{\#} \; \right] \qquad \text{(SN.PP.132)}$$
>
> Denn die erste Lücke befindet sich gleich bei p_i selber, der natürlichen Zahl, die die nächst größere als die größte in der Menge ist. Damit ist die Lückenlosigkeit des lückenlosen Primturm-Potenzrasters wirklich ganz genau auf die Menge $p_i = [0, p_i - 1]_{\mathbb{N}}$ begrenzt und definiert diese Zahlenmenge exakt.

Die Mengen-Primfakultät $p_i\overline{\#}$ ist allerdings eine natürliche Zahl, die, wie oben schon gesagt, bei zunehmender Größe von p_i rasant wächst und weit außerhalb der Menge an natürlichen Zahlen liegt, dessen lückenloses Primturm-Potenzraster sie definiert.

> Die Mengen-Primfakultät $x\overline{\#}$ einer natürlichen Zahl x liefert als Parameter des lückenlosen Primturm-Potenzrasters $lpr\left(x\overline{\#}\right)$ die nächste Primzahl oder sich selbst, wenn sie selber schon eine Primzahl ist:
>
> $$(\forall x \in \mathbb{N})\,(p_i, p_{i+1} \in \mathbb{P})\,(p_i < x \leq p_{i+1}) \left[\; p_{i+1} \quad = \quad lpr\left(x\overline{\#}\right) \; \right] \qquad \text{(SN.PP.133)}$$
>
> Für den Fall, dass x einen größer als die vorhergehende Primzahl ist, folgt:
>
> $$\Rightarrow \qquad (\forall p_i, p_{i+1} \in \mathbb{P}) \left[\; p_{i+1} \quad = \quad lpr\left((p_i + 1)\,\overline{\#}\right) \; \right] \qquad \text{(SN.PP.134)}$$
>
> Für den Fall, dass x schon die nächste Primzahl oder gleich der vorhergehenden ist, folgt:

▼ ausblenden

$$\Rightarrow \qquad (\forall p_{i+1} \in \mathbb{P}) \left[\; p_{i+1} \quad = \quad lpr\Big(p_{i+1}\overline{\#} \Big) \; \right] \tag{SN.PP.135}$$

▲ ausblenden

$$\Leftrightarrow \qquad (\forall p_i \in \mathbb{P}) \left[\; p_i \quad = \quad lpr\Big(p_i\overline{\#} \Big) \; \right] \tag{SN.PP.136}$$

Was wir alles erreichen wollten.

Wir können jetzt eine neue Primzahl aus den uns bekannten vorangegangenen Primzahlen erzeugen. Also erzeugen wir die auf eine bekannte Primzahl folgende Primzahl durch Hochzählen um Einen, um unsere Primzahl dadurch mit in die Mengen-Primfakultät zu bekommen.

Wir beschreiben dies so, dass das Primturm-Potenzraster eine erste Lücke aufwies und die neue Primzahl diese Lücke nun füllt.

Das lückenlose Primturm-Potenzraster einer beliebigen natürlichen Zahl

Im Besonderen ist ein jedes derartiges Primturm-Potenzraster $pr(n)$ eine Beschreibung der kleinsten fehlenden reinen Primzahl in seinen Primzahltürmen, die auf seiner ersten Rasterlücke sitzt. Diese Primzahl erhalten wir dann durch $lpr(n)$.

Haben wir eine Potenz einer Primzahl p_i größer als Eins, wie p_i^k, mit $k > 1$, dann ist das Primturm-Potenzraster niemals lückenlos für die kleineren Potenzen von p_i.

Sehen können wir das an den Beispielen für $pr(4)$, $pr(9)$ und $pr(18)$ unter ›***Beispiele zur Primturmzerlegung, zum Primturm-Potenzraster und zum lückenlosen Primturm-Potenzraster***‹.

Denn die Menge $pr(4)$ hat die erste Lücke bei der 2, also ergibt sich: $lpr(4) = 2$.

Die Menge $pr(9)$ hat auch die erste Lücke bei der 2, also ergibt sich: $lpr(9) = 2$.

Hingegen hat die Menge $pr(18)$ die erste Lücke erst bei der 3, weil die 2 im Produkt steckt, aber nicht die 3 als Primzahlturm, sondern der Primzahlturm ist 9. Also ergibt sich: $lpr(18) = 3$.

Es ist also immer die kleinste Primzahl, mit Potenz Eins, die in den Primzahltürmen fehlt, die als Ergebnis kommt.

Das Zählen der natürlichen Zahlen in Primzahlen

Die zählende Konstruktion der Primzahlen und damit der natürlichen Zahlen gleichzeitig

Die Menge der Primzahlen $\mathbb{P}$ können wir nun durch vollständige Induktion[17] erzeugen. Mit ihr entsteht sodann natürlich auch die Menge aller natürlichen Zahlen.

Es existiere also die Menge

$$\exists \mathbb{P} : \Big(2 \in \mathbb{P} \land \forall x : \Big(x \in \mathbb{P} \Rightarrow lpr\Big((x+1)\overline{\#} \Big) \in \mathbb{P} \Big) \Big) \tag{SN.PP.137}$$

aller endlichen Primzahlen. Hier in ihrer Anordnung auf Basis der jeweiligen Vorgänger-Primzahlen konstruiert.

Dieses Vorgehen können wir als natürliche, vollständige Definition der endlichen Primzahlen verstehen.

Dies ist in dieser Anordnung nur mit der Mengen-Primfakultät möglich, die uns, mit Hilfe des lückenlosen Primturm-Potenzrasters, die Menge der natürlichen Zahlen über die Menge der Primzahlen konstruiert. Wobei an der Mengen-Primfakultät entscheidend ist, dass sie uns die Primfaktoren vom Beginn an lückenlos in der ersten Potenz liefert.

Dadurch wird immer die nächste Primzahl berechnet, die dann wieder mit all ihren vorangegangenen Primzahlen, die darauf folgende berechnet.

Beispiele zum Zählen der natürlichen Zahlen in Primzahlen:

Nachfolgend beispielhaft die Berechnung der ersten Primzahlen der Menge $\mathbb{P}$.

Die jeweiligen Primturm-Potenzraster Mengen finden wir in den **entsprechenden Beispielen** oben.

Sei der Beginn der Primzahlen $\mathbb{P}$ in den natürlichen Zahlen

$$p_1 = \boxed{2} \tag{SN.PP.138}$$

und sei die jeweils nächste Primzahl nach Formel **SN.PP.137** gegeben, dann lautet der Beginn der nachfolgenden Primzahlen, sich in angeordneter Reihenfolge ergebend,

$$p_2 = lpr\Big((p_1 + 1)\,\overline{\#}\Big) \tag{SN.PP.139}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_2 = lpr\Big(3\overline{\#}\Big) \tag{SN.PP.140}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_2 = lpr\Big(\{0, 1, 2\}\,\overline{\#}\Big) \tag{SN.PP.141}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_2 = lpr(2) \tag{SN.PP.142}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_2 = \{0, 1, 2\} = \boxed{3} \tag{SN.PP.143}$$

$$p_3 = lpr\Big((p_2 + 1)\,\overline{\#}\Big) \tag{SN.PP.144}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_3 = lpr\Big(4\overline{\#}\Big) \tag{SN.PP.145}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_3 = lpr\Big(\{0, 1, 2, 3\}\,\overline{\#}\Big) \tag{SN.PP.146}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_3 = lpr(2 \cdot 3) \tag{SN.PP.147}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_3 = lpr(6) \tag{SN.PP.148}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_3 = \{0, 1, 2, 3, 4\} = \boxed{5} \tag{SN.PP.149}$$

$$p_4 = lpr\left((p_3 + 1)\,\overline{\#}\right) \tag{SN.PP.150}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_4 = lpr\left(6\overline{\#}\right) \tag{SN.PP.151}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_4 = lpr\left(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\,\overline{\#}\right) \tag{SN.PP.152}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_4 = lpr(2 \cdot 3 \cdot 5) \tag{SN.PP.153}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_4 = lpr(30) \tag{SN.PP.154}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \boxed{7} \tag{SN.PP.155}$$

$$p_5 = lpr\left((p_4 + 1)\,\overline{\#}\right) \tag{SN.PP.156}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_5 = lpr\left(8\overline{\#}\right) \tag{SN.PP.157}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_5 = lpr\left(\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}\,\overline{\#}\right) \tag{SN.PP.158}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_5 = lpr(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) \tag{SN.PP.159}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_5 = lpr(210) \tag{SN.PP.160}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_5 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \boxed{11} \tag{SN.PP.161}$$

bis ins Unendliche.

Und so können wir dann alle endlichen Primzahlen fortwährend berechnen.

Der Beweis der Primzahlprodukt-Vermutung

Wenn das Zählen der natürlichen Zahlen in Primzahlen ins Unendliche zu ω übergeht

Notizen

• Den Ausdruck ›Erzeugungskombinatorik‹ auch im oder nach dem Beweis wieder aufgreifen:
– Dieser steht im Zusammenhang mit der Beschreibung der endlichen und aktual unendlichen natürlichen Zahlen durch das Primturm-Potenzraster.

Das besondere Verhalten des Primturm-Potenzrasters mit der Mengen-Primfakultät einer Primzahl als Parameter, wie eben dargelegt, können wir jetzt durch den Übergang ins Unendliche zu ω für den Beweis nutzen, weil wir auf diese Weise, wie oben erklärt, auch alle natürlichen Zahlen konstruieren:

Da ω die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ repräsentiert, enthält es natürlich auch alle endlichen Primzahlen. Die Mengen-Primfakultät $\omega\overline{\#}$ ist also das Produkt aller endlichen Primzahlen, wie schon gesagt.

> Das Primturm-Potenzraster $pr\left(\omega\overline{\#}\right)$ aller endlichen Primfaktoren in $\omega\overline{\#}$ geht an seinem lückenlosen Beginn zur Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, also zu ω, über. Das ist so, weil aus der Kombination aller endlichen Primzahlen in beliebiger, endlicher Potenz in einem Produkt zunächst einmal alle natürlichen Zahlen gebildet werden können:[18]

$$pt\left(\omega\overline{\#}\right) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13 \cdots\} \tag{SN.PP.162}$$

$$pr\left(\omega\overline{\#}\right) = pr(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots) \tag{SN.PP.163}$$

$$\Leftrightarrow \quad pr\left(\omega\overline{\#}\right) = \begin{array}{l} \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \cdots \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ \vdots \} \end{array} \tag{\textbf{SN.PP.89}}$$

> Wo die aktual unendlichen Elemente in der Menge beginnen, sind diese nicht mehr lückenlos, da zum Beispiel $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots - 1 \in \mathbb{N}_\infty$ nicht im Raster enthalten aber auch keine endliche Zahl ist. Lückenlos, aber trotzdem unendlich viele, sind also nur die endlichen Zahlen der Menge

$$lpr\left(\omega\overline{\#}\right) \quad = \quad \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \cdots\} \qquad \text{(SN.PP.164)}$$
$$= \quad \mathbb{N} \quad = \quad \omega \ ,$$

die sich dann zu allen endlichen natürlichen Zahlen ergibt.

Was passiert nun beim Übergang von den endlichen Primzahlen zu ω mit den Entsprechungen der Formeln **SN.PP.34** und **SN.PP.132**?

Abgesehen davon, dass es sich bei ω nach **obiger Feststellung** nicht mehr um eine Primzahl handelt, können wir sagen:

Da das lückenlose Primturm-Potenzraster der Mengen-Primfakultät einer endlichen Primzahl in Formel **SN.PP.136** gleich dieser Primzahl ist und entsprechend in der Formel **SN.PP.164** das selbe für ω gilt:

$$(\forall p \in \mathbb{P}) \left[\ p \quad = \quad lpr\left(p\overline{\#}\right)\ \right] \qquad \text{(\textbf{SN.PP.136})}$$

$$\omega \quad = \quad lpr\left(\omega\overline{\#}\right) \qquad \text{(\textbf{SN.PP.164})}$$

Die allgemeine Entsprechung **SN.PP.34** für alle natürlichen Zahlen gilt daher logischer Weise auch für alle endlichen Primzahlen:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left[\ n \quad \widehat{=} \quad pr(n)\ \right] \qquad \text{(\textbf{SN.PP.34})}$$

$$\Rightarrow \qquad (\forall p \in \mathbb{P}) \left[\ p \quad \widehat{=} \quad pr(p)\ \right] \qquad \text{(SN.PP.165)}$$

Diese Entsprechung gilt auch für ω, können wir an Formel **SN.PP.89** erkennen, da sich auch hier ein einzigartiges Spektrum oder Raster ergibt:

$$\omega \quad \widehat{=} \quad pr(\omega) \qquad \text{(SN.PP.166)}$$

Es ist also sehr stark zu vermuten, dass wir die allgemeine Entsprechung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}_\infty$ erweitern können:
(Es bleibt hier aber noch zu zeigen, dass alle Biordinalzahlen, oder zumindest alle Ordinalzahlen, eine einzigartige Primfaktorzerlegung haben, die für sie alle ein einzigartiges Spektrum oder Raster erzeugt.)

$$(\forall n \in \mathbb{N}_\infty) \left[\ n \quad \widehat{=} \quad pr(n)\ \right] \qquad \text{(SN.PP.167)}$$

Aus der Gleichheit in Formel **SN.PP.136** folgt für alle Primzahlen die Entsprechung für das Primturm-Potenzraster, die sich dann auch beim Übergang zu

ω erhält:

$$(\forall p \in \mathbb{P}) \left[\, p \quad \widehat{=} \quad pr\left(p\overline{\#}\right) \right] \tag{SN.PP.168}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega \quad \widehat{=} \quad pr\left(\omega\overline{\#}\right) \tag{SN.PP.169}$$

Denn ω steht nicht nur für die vollständige Induktion des endlichen Zählens, sondern, wie oben gezeigt, gleichzeitig auch für die vollständige Erzeugung aller endlichen Primzahlen. Daher ist ω auch der Übergang der endlichen Primzahlerzeugung ins Unendliche. So wird die rechte Seite der Entsprechung dann zum Primturm-Potenzraster des Produkts aller endlichen Primzahlen.

So geht dann auch die Entsprechung **SN.PP.132** zu ω über

$$(\forall p \in \mathbb{P}) \left[\, p \quad \widehat{=} \quad p\overline{\#} \right] \tag{SN.PP.132}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega \quad \widehat{=} \quad \omega\overline{\#} \ , \tag{SN.PP.170}$$

was darauf beruht, dass wir, wegen der Eineindeutigkeit des Primturm-Potenzrasters in Bezug auf die Primzahlen und ihren Übergang ins Unendliche zu ω, die Funktion pr ebenso weglassen können.

Und in Formel **SN.PP.131** stellte sich zuvor die jetzt zu beweisende Frage, ob die letzte Entsprechung bei ω zur Gleichheit wird.

Die beiden letzten Übergange der Entsprechungen zu ω basieren darauf, dass auf der rechten Seite jeweils die Mengen-Primfakultät steht. Ebenso gilt dies für den etwas höher stehenden Übergang der Gleichheit in Bezug auf das lückenlose Primturm-Potenzraster zu **SN.PP.164**.

Wir erkennen jetzt: Würde das Primzahlprodukt nicht bei der kleinsten Primzahl beginnen oder eine Lücke aufweisen, dann bräche alles zusammen. Diese Erkenntnis ist ein zentraler Bestandteil unseres Beweises.

Nun haben wir zwei wertmäßige Darstellungen der endlichen Primzahlen p: Zum einen beschreiben wir die Anzahl der ersten p natürlichen Zahlen mit der Menge p selber, die genau diese Zahlen mittels des Zählens enthält. Zum anderen beschreiben wir die ersten p natürlichen Zahlen mit der Mengen-Primfakultät $p\overline{\#}$ dieser Menge, die uns ein Zahlenraster in Form einer Menge $pr\left(p\overline{\#}\right)$ liefert, das genau die Menge p lückenlos enthält und aus der wir diese mittels $lpr\left(p\overline{\#}\right)$ extrahieren können. Beide Beschreibungen entsprechen einander, sind im Endlichen vom Wert her aber im Allgemeinen nicht gleich: $p \ \widehat{=} \ p\overline{\#}$.

Übergang ins Unendliche zu allen endlichen natürlichen Zahlen der Menge ω

Nun passiert beim Übergang ins Unendliche zu ω etwas besonderes:

Die Anzahl der Zahlen der Menge der ersten ω natürlichen Zahlen bleibt ω selbst. Die Mengen-Primfakultät $\omega\overline{\#}$ dieser Menge wird nun zum Produkt aller endlichen Primzahlen. Die Menge des von diesem unendlich großen Produkt gelieferten Primturm-Potenzraster $pr\left(\omega\overline{\#}\right)$ wird in seinem Beginn endlicher natürlicher Zahlen damit unendlich groß sowie vollständig lückenlos und damit gilt sowohl $\omega \mathrel{\widehat{=}} pr\left(\omega\overline{\#}\right)$ als auch $\omega = lpr\left(\omega\overline{\#}\right)$.

Die Beschreibung von ω durchs Zählen und die durch die Mengen-Primfakultät $\omega\overline{\#}$, die das Zahlenraster aller endlichen Primzahlen erzeugt, entsprechen also ebenfalls einander: $\omega \mathrel{\widehat{=}} \omega\overline{\#}$.

Wir wussten ja schon mit der **oben getroffenen Feststellung**: Die Primfaktorzerlegung von ω ist ein unendlich großer Teil derer von s, der in der Zeile oder den Zeilen der Primfakultät seines Primzahl-Flächenprodukts zu finden ist.

Die gerade gezeigten Entsprechungen beruhen auf Primfakultäten, lückenlos und bei der kleinsten Primzahl beginnend. Fehlt eine Primzahl mitten drinne oder es ist eine mehrfach im Produkt, so fällt die Entsprechung in sich zusammen.

Deshalb kann ω nur der Teil des Primzahl-Flächenprodukts von s sein, der lückenlos genau eine Zeile aller endlichen Primzahlen enthält. Unsere Vermutung der Gleichheit

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega \quad = \quad \omega\overline{\#}} \tag{SN.PP.171}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\omega \quad = \quad \prod_{\forall p \in \mathbb{P}} p} \tag{SN.PP.172}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\omega \quad = \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \cdots} \tag{SN.PP.173}$$

muss folglich wahr sein, was wir zeigen wollten.

Hiermit erhalten wir den Beweis unserer Primzahlprodukt-Vermutung.

Ein sehr interessanter, weil aufschlussreicher, Übergang, durch den wir eine Primfaktorzerlegung für ω erhalten. Eine mir bisher unbekannte Eigenschaft der unendlichen Größe der vollständigen Induktion[19].

So ist nun auch klar, dass

$$\Rightarrow \quad \boxed{s \quad = \quad \omega^{\omega}} \; , \tag{SN.PP.174}$$

wodurch wir auch ein genaueres Bild von s bekommen.

Dieser Zusammenhang ist aufgrund seiner Erkenntnisbedeutung auch Thema des Theorielogos.

Die Theorie der Superial-Zahlen liefert uns mit Hilfe der Theorie der Biordinalzahlen einen neuen und tiefen Einblick in die Struktur der endlichen Primzahlen. Und sie erweitert die endlichen Primzahlen zu aktual unendlichen Primzahlen. Dies vertieft unser Verständnis der Primzahlen weiter.

→ Diskussion des Beweises

Diskussion des Beweises

Das Verständnis des Übergangs der Mengen-Primfakultät und des Primturm-Potenzrasters ins Unendliche zu ω

← *Primzahlprodukt-Vermutung*

▾ Notizen

Parität

• Nicht nur gleiche Mächtigkeit von geraden und ungeraden Zahlen, sondern hier sogar gleiche kombinatorische Anzahl von geraden und ungeraden Zahlen.[20]

Logisches

• ω ist dann durch jede endliche Primzahl und durch deren Produkte mit jeweiliger Potenz von Eins ganzzahlig teilbar.

Wir stellen fest, dass es uns über die Erzeugung jeder endlichen Primzahl gelungen ist, die natürlichen Zahlen durch eine vollständige Induktion zu konstruieren. Dazu wird per Mengen-Primfakultät ein Primzahlprodukt erzeugt, das sich von Schritt zu Schritt immer weiter, zum Produkt aller endlichen Primzahlen vervollständigt.

Jeder Primzahl-Schritt teilt ω

Jeder dieser Schritte, also jede erzeugte Primzahl, ist, nach dem Beweis, Teiler des vollständigen aktual unendlichen Ergebnisses ω.

Jeder der Primzahl-Schritte $p = lpr\left(\overline{p\#}\right)$ teilt die Anzahl aller natürlichen Zahlen ω ganzzahlig

$$\Rightarrow \qquad (\forall p \in \mathbb{P})\left[\ \frac{\omega}{p} \quad \in \quad \mathbb{N}_\infty\ \right] \ , \qquad \text{(SN.PP.D.1)}$$

wie wir bewiesen haben.

Als wenn diese Zählschritte beim Übergang ins Unendliche zu ω ein Produkt aus all diesen Schritten bilden. Und in der Tat benötigen wir ja auch zur Konstruktion dieser Schritte aller endlichen Primzahlen das Produkt aller kleineren Primzahlen vor der gerade zu berechnenden Primzahl. So können wir es so verstehen, dass dem Ergebnis beim Übergang zu ω dann logischerweise das Produkt aller endlichen Primzahlen zugrunde liegt.

ω ist nun keine Primzahl mehr, weil ihr alle endlichen Primzahlen zugrunde liegen, die nicht enden.

Jedoch ist jeder Primzahl-Schritt kein Teiler eines anderen Primzahl-Schritts

Aber jeder dieser Konstruktionsschritte ist nicht Teiler auch nur einer der anderen Schritte, weil sie ja alle Primzahlen sind.

> Es existiert keine endliche Primzahl, die Teiler einer von ihr verschiedenen, anderen ist:

$$\Rightarrow \qquad \left(\nexists p_0, p_1 \in \mathbb{P}\right)(p_0 \neq p_1)\left[\ \frac{p_0}{p_1} \in \mathbb{N} \quad \vee \quad \frac{p_1}{p_0} \in \mathbb{N}\ \right] \qquad \text{(SN.PP.D.2)}$$

> Wie bei Primzahlen per Definition selbstverständlich.

Der Übergang ist also wirklich etwas besonderes, von Schritten, die alle keine Teiler voneinander sind, zum Ergebnis bei ω, das alle Schritte in einem Produkt zusammenfasst.

Das Gesamtspektrum der natürlichen Zahlen

Zunächst können wir sagen, was alle natürlichen Zahlen miteinander verbindet: Alle natürlichen Zahlen liegen auf dem Zählraster, sind also durch die Eins ganzzahlig teilbar. Poetischer ausgedrückt schwingen alle natürlichen Zahlen mit der Eins oder im Spektrum oder Raster der Eins.

Bei den Konstruktionsschritten zur Erzeugung jeder endlichen Primzahl erhalten wir eine Sammlung der Primfaktoren der endlichen natürlichen Zahlen, die uns über das einschrittige Zählen hinaus sagen, auf welchen größeren Spektren oder Rastern die natürlichen Zahlen auch noch liegen oder in welchen Spektren oder Rastern sie auch noch schwingen. Dabei ist eine höhere Potenz einer Primzahl irrelevant, weil jede Primzahl die kleinste Weite ihres Rasters beschreibt, auf der auch ihre höheren Potenzen liegen. Demnach gehören beispielsweise die $4 = 2^2$ oder die $8 = 2^3$ zum selben Raster, wie die $2 = 2^1$.

Die $3 = 3^1$ hingegen spannt ein anderes Raster auf und die beiden und alle weiteren Primzahl-Potenzraster überschneiden sich nicht und beschreiben kombiniert die natürlichen Zahlen ab der 2.

Warum handelt es sich denn bei $2 = 2^1$, $4 = 2^2$ oder $8 = 2^3$ und für alle weiteren Potenzen von Zwei, oder allgemeiner bei p_i^k, mit $p_i \in \mathbb{P}$ und $k \geq 1$, um das gleiche Raster? Das ist nicht gleich offensichtlich, finde ich.

Dies können wir am Distributivgesetz erkennen, denn $p_i^k + 1$ ist nicht ganzzahlig durch p_i teilbar, egal welche Potenz $k \geq 1$ wir haben; also egal, wie häufig p_i in einem Produkt steckt.

Kombinieren wir dann aber zwei unterschiedliche Primzahlen in einem Produkt, wie beispielsweise in $6 = 2 \cdot 3$, dann ist $7 = 6 + 1 = (2 \cdot 3) + 1$ durch beide Primzahlen nicht ganzzahlig teilbar. Wir erhalten also eine erweiterte Qualität bezüglich unterschiedlicher Primfaktoren einer natürlichen Zahl.

In Bezug auf die Vervielfachung der selben Primzahl durch ihre steigende Potenz in einem Produkt, bleibt die Qualität dieser Teilungsaussage unverändert und damit unabhängig von ihrer Potenz.

Auch das lässt uns tiefer verstehen, warum die Menge aller endlichen natürlichen Zahlen mit einem Produkt aller endlichen Primzahlen einfacher Potenz beschrieben wird.

Das Verlassen des Rasters einer Menge von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen

Durch das addieren oder auch das Subtrahieren der Eins auf oder von einem Primzahlprodukt verlassen wir das Raster, auf dem das Produkt liegt oder schwingt. Und ein Produkt von Primzahlen schwingt mit allen Frequenzen seiner unterschiedlichen Primzahlen. Daher können wir mit der Methode des Verlassens des Rasters aller bisherigen Primzahlen im **›Satz des Euklid‹** die Existenz immer weiterer und größerer Primzahlen beweisen.

Und unsere schrittweise Konstruktion der Primzahlen in Definition **SN.PP.137** funktioniert nach dem selben Prinzip.

Immer mehr Primzahlen machen das Raster in Bezug auf die folgenden natürlichen Zahlen immer feiner

Der ›Satz des Euklid‹ macht deutlich, dass die neu hinzukommenden, immer größeren Primzahlen wieder und wieder außerhalb des bisherigen Rasters der kleineren Zahlen liegen. Dadurch wird das Raster durch immer mehr größere Primzahlen immer feiner. Und deshalb kommen dann auch immer seltener neue Primzahlen hinzu, ohne, dass die Reihe der Primzahlen enden würde.

Sichtbarmachung der Produktstruktur von ω im Kontext ihres Primturm-Potenzrasters

Wie wir an Formel **SN.PP.89** erkennen können, wird die Produktstruktur von ω schon vor dem Beweis im Primturm-Potenzraster $pr\left(\omega\overline{\#}\right)$ der Mengen-Primfakultät von ω sichtbar.

Die Struktur des Produkts aller endlichen Primzahlen taucht nach der ersten Lücke des Rasters auf, nachdem alle endlichen natürlichen Zahlen lückenlos durch sind. Hier enthält dieses Produkt die Primzahl 2 allerdings dann schon doppelt. Wenn wir hier nun unser bewiesenes Wissen einsetzen, können wir die Verbindung erkennen.

Aufgrund unseres Beweises und seines Ergebnisses aus Formel **SN.PP.171** folgt:

$$\Rightarrow \qquad pr(\omega) \quad = \quad pr\left(\omega\overline{\#}\right) \qquad \text{(SN.PP.D.3)}$$

Daher stellt sich die Formel **SN.PP.89** nun folgendermaßen dar:

$$\Rightarrow \quad pr(\omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \cdots \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ \vdots \}$$

(**SN.PP.89**)

$$\Leftrightarrow \quad pr(\omega) = \{0, 1, 2, 3, 2^2, 5, 2 \cdot 3, 7, 2^3, 3^2, 2 \cdot 5, \cdots \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ \vdots \}$$

(SN.PP.D.4)

Aufgrund unseres Beweises können wir nun das Raster auch wie folgt schreiben:

$$\Leftrightarrow \quad pr(\omega) = \omega \\ \cup \\ \{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\ \vdots \}$$

(SN.PP.D.5)

(SN.PP.D.6)

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \qquad pr(\omega) \quad = \quad & 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots \\
& \cup \\
& \{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\
& \ 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\
& \ 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\
& \ 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\
& \ 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\
& \ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots, \\
& \ \vdots \}
\end{aligned}
$$

Auf diese Weise erhalten wir ein interessantes Muster.

Das Muster zeigt die Verbindung aller Zeilen miteinander. Sie stehen so gesehen in einer Systematik zueinander, in der sich die Potenzen der Primzahlen von Eins zu höheren variieren.

Das Gleiche gilt auch für die Entstehung der ersten Zeile selber: Sie kommt durch die Variation der Potenzen aller endlichen Primzahlen zustande, die, größtenteils als Produkte, alle endlichen natürlichen Zahlen ergeben, bis auf die Null.

Eine weitere Schreibweise ist:

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \qquad pr(\omega) \quad = \quad & \omega \\
& \cup \\
& \{\omega, \\
& \ 2 \cdot \omega, \\
& \ 3 \cdot \omega, \\
& \ 2^2 \cdot \omega, \\
& \ 5 \cdot \omega, \\
& \ 2 \cdot 3 \cdot \omega, \\
& \ \vdots \}
\end{aligned}
\tag{SN.PP.D.7}
$$

Erweitert sieht diese so aus:

$$\Leftrightarrow \quad pr(\omega) = \omega \cup \{\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega, 5\omega, 6\omega, \cdots$$
$$\omega^2, 2\omega^2, 3\omega^2, 4\omega^2, 5\omega^2, 6\omega^2, \cdots$$
$$\vdots$$
$$\omega^{\omega-1}, 2\omega^{\omega-1}, 3\omega^{\omega-1}, 4\omega^{\omega-1}, 5\omega^{\omega-1}, 6\omega^{\omega-1}, \cdots$$
$$\omega^{\omega}, 2\omega^{\omega}, 3\omega^{\omega}, 4\omega^{\omega}, 5\omega^{\omega}, 6\omega^{\omega}, \cdots$$
$$\omega^{\omega+1}, 2\omega^{\omega+1}, 3\omega^{\omega+1}, 4\omega^{\omega+1}, 5\omega^{\omega+1}, 6\omega^{\omega+1}, \cdots$$
$$\vdots$$
$$\omega^{2\omega-1}, 2\omega^{2\omega-1}, 3\omega^{2\omega-1}, 4\omega^{2\omega-1}, 5\omega^{2\omega-1}, 6\omega^{2\omega-1}, \cdots$$
$$\omega^{2\omega}, 2\omega^{2\omega}, 3\omega^{2\omega}, 4\omega^{2\omega}, 5\omega^{2\omega}, 6\omega^{2\omega}, \cdots$$
$$\omega^{2\omega+1}, 2\omega^{2\omega+1}, 3\omega^{2\omega+1}, 4\omega^{2\omega+1}, 5\omega^{2\omega+1}, 6\omega^{2\omega+1}, \cdots$$
$$\vdots \}$$

(SN.PP.D

Dies erscheint mir als Menge aller endlichen Ordinalzahlen und danach aller ordinalen Limeszahlen[21]. (Nicht ganz sicher ist für mich, ob die Potenzen mit Differenzen wirklich dazu gehören. Gehören sie dazu, dann wären es nicht nur die ordinalen Limeszahlen, sondern wohl Zahlen die aus den Biordinalzahlen als Potenzen entspringen.)

Teile davon können wir nun wegen unseres Beweises durch Formel **SN.PP.174** auch mit s ausdrücken:

$$\Leftrightarrow \quad pr(\omega) = \omega \cup \{\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega, 5\omega, 6\omega, \cdots$$
$$\omega^2, 2\omega^2, 3\omega^2, 4\omega^2, 5\omega^2, 6\omega^2, \cdots$$
$$\vdots$$
$$\omega^{\omega-1}, 2\omega^{\omega-1}, 3\omega^{\omega-1}, 4\omega^{\omega-1}, 5\omega^{\omega-1}, 6\omega^{\omega-1}, \cdots$$
$$s, 2s, 3s, 4s, 5s, 6s, \cdots$$
$$\omega^{\omega+1}, 2\omega^{\omega+1}, 3\omega^{\omega+1}, 4\omega^{\omega+1}, 5\omega^{\omega+1}, 6\omega^{\omega+1}, \cdots$$
$$\vdots$$
$$\omega^{2\omega-1}, 2\omega^{2\omega-1}, 3\omega^{2\omega-1}, 4\omega^{2\omega-1}, 5\omega^{2\omega-1}, 6\omega^{2\omega-1}, \cdots$$
$$s^2, 2s^2, 3s^2, 4s^2, 5s^2, 6s^2, \cdots$$
$$\omega^{2\omega+1}, 2\omega^{2\omega+1}, 3\omega^{2\omega+1}, 4\omega^{2\omega+1}, 5\omega^{2\omega+1}, 6\omega^{2\omega+1}, \cdots$$
$$\vdots \}$$

(SN.PP.D

Das ist abermals ein bemerkenswertes Muster. (Es ist möglich auch die Zeilen mit Differenzen und Summen in den Potenzen mit s auszudrücken.)

Auf die lückenlosen endlichen natürlichen Zahlen folgen die von Lücken umgebenen aktual unendlichen ordinalen Limeszahlen. Denn in der Theorie der Biordinalzahlen können von all den aktual unendlichen ordinalen Limeszahlen endliche natürliche Zahlen abgezogen und aufaddiert werden, die nicht in dieser Menge vorhanden sind und daher in den Lücken liegen.

Diese Erkenntnis mit der obigen Darstellung durch s führt uns dann wieder zurück zu den Superial-Zahlen und bringt sie erneut mit den Ordinalzahlen in Verbindung.

Die Größenordnung von ω und $\omega\overline{\#}$

Nach dem Beweis wissen wir nun, dass $\omega = \omega\overline{\#}$.

Aber für alle größeren endlichen Primzahlen p war doch die Mengen-Primfakultät $p\overline{\#}$ immer viel größer als $p = lpr\left(p\overline{\#}\right)$. Wie kann dann nach dem Übergang ins Unendliche $\omega = \omega\overline{\#}$ sein?

Im Endlichen ist die Anzahl der Elemente einer Menge natürlicher Zahlen, geordnet und von der Null an, immer Eins größer als das letzte Element in der Menge. Bei einer unendlich großen Anzahl an Elementen einer solchen Menge, wie ω, ist dies nicht mehr der Fall. Denn $\omega - n$, wenn $n \in \mathbb{N}$, wie in den Biordinalzahlen dargestellt, kann keine endliche Zahl sein.

Denn es gibt **viel mehr ganze Zahlen von Null bis ω, als der Wert von ω** ausdrückt. Dadurch können beide Werte im Unendlichen bei ω dann zusammen fallen. Der unendlich große Wert von $\omega\overline{\#}$ enthält aber nur das Produkt der endlichen Primzahlen und nicht das Produkt auch unendlich großer Primzahlen in den ganzen Zahlen bis ω, die es auch noch gibt.

Der unendlich große Wert von $\omega\overline{\#}$ beschreibt also das lückenlose Primturm-Potenzraster, das auch die Menge $lpr\left(\omega\overline{\#}\right) = \omega$ darstellt. Und der Wert von $\omega\overline{\#}$ hat nun auch die gleiche Größenordnung, wie der von ω.

Die Größenordnung und Struktur von *s* und *s*$^{-1}$

Der Beweis unserer Primzahlprodukt-Vermutung, und damit unserer Logo Formel **SN.PP.174**, offenbart einen tiefen Zusammenhang zwischen s und ω. Auch der Kehrwert von s lässt sich so einfach mit ω ausdrücken:

Wenn nach Beweis

$$s = \omega^{\omega} \qquad \textbf{(SN.PP.174)}$$

ist, dann ist die Körnung der von uns definierten **Ableitung** mittels s

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{\omega^{\omega}} \qquad \text{(SN.PP.D.10)}$$

$$\Leftrightarrow \quad s^{-1} = \omega^{-\omega} \qquad \text{(SN.PP.D.11)}$$

und so natürlich auch die des **Integrals**. Also können wir jedes s^{x} als

$$\Rightarrow \quad s^x = \left(\omega^\omega\right)^x \qquad \text{(SN.PP.D.12)}$$

$$\Leftrightarrow \quad s^x = \omega^{\omega \cdot x} \qquad \text{(SN.PP.D.13)}$$

durch ω ausdrücken.

Unsere superiale Basis s und ihre Potenzen stehen interessanter Weise so mit der aktualen Unendlichkeit der vollständigen Induktion der natürlichen Zahlen in direkter Verbindung.

XXX Experimentell

XXX

XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

$$s := \prod_{\forall n \in \mathbb{N}} \left(\prod_{\forall p \in \mathbb{P}} p \right) \qquad \text{(}$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega^\omega = \omega \cdot \omega^{\omega - 1} \qquad \text{(}$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega^\omega = 2^\omega \cdot 3^\omega \cdot 5^\omega \cdot 7^\omega \cdot 11^\omega \cdot 13^\omega \cdot \cdots \qquad \text{(}$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega^\omega = 2^{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \cdots} \cdot 3^\omega \cdot 5^\omega \cdot 7^\omega \cdot 11^\omega \cdot 13^\omega \cdot \cdots \qquad \text{(}$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega^\omega = \left(\left(\left(\left(\left(\left(2^2\right)^3 \right)^5 \right)^7 \right)^{11} \right)^{13} \right)^{\cdots} \cdot 3^\omega \cdot 5^\omega \cdot 7^\omega \cdot 11^\omega \cdot 13^\omega \cdot \cdots \qquad \text{(}$$

$$z = \prod_{\forall p \in \mathbb{P}} p^{\left(\prod_{\forall p \in \mathbb{P}} p^{\left(\prod_{\forall p \in \mathbb{P}} p^{\cdots} \right)} \right)} \qquad \text{(}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}} = \omega^{\left(\omega^{\left(\omega^{\cdots}\right)}\right)} \qquad \text{(}$$

XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

→ Experimentelle Gedanken zu anderen Beweiswegen

Experimentelle Gedanken zu anderen Beweiswegen

Das Verständnis des Übergangs der Mengen-Primfakultät und des

Primturm-Potenzrasters ins Unendliche zu ω

← Diskussion des Beweises

XXX Die Größenordnung des Produkts aller endlichen Primzahlen

Berechnen wir das Produkt aller endlichen Primzahlen von den kleinsten Primfaktoren her mit der Primfakultät[22] $p\#$, dann wird es sehr schnell viel größer, als die größte in ihm vorkommende Primzahl:[23]

$$2\# = 2 \tag{SN.PP.20}$$

$$3\# = 6 \tag{SN.PP.21}$$

$$5\# = 30 \tag{SN.PP.22}$$

$$7\# = 210 \tag{SN.PP.23}$$

$$11\# = 2310 \tag{SN.PP.24}$$

$$13\# = 30030 \tag{SN.PP.25}$$

$$17\# = 510510 \tag{SN.PP.26}$$

$$19\# = 9699690 \tag{SN.PP.27}$$

$$23\# = 223092870 \tag{SN.PP.28}$$

So wäre es ein sehr großes Rätsel, wie dieses Produkt irgendwann nicht weiter wächst, so, dass die natürlichen Zahlen es wieder einhohlen und letztendlich gleich groß sein können. Ich würde aus meiner heutigen Sicht sagen, dass dies ein oder sogar das wesentliche Geheimnis der Primzahlen ist.

Unter welcher Bedingung könnte denn dies überhaupt der Fall sein?

Aus meiner Sicht könnte dies nur dann der Fall sein, wenn die Anzahl der Primzahlen unter den extrem großen natürlichen Zahlen minimal wird. (Ist ›minimal‹ die korrekte Formulierung? Und ist diese Annahme notwendig?) Und mit Hilfe des **›Satz des Euklid‹**, eines Beweises, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, können wir erkennen, was das bedeuten sollte. Eine Minimierung des Anteils an Primzahlen heißt, dass es unter den ganz extrem großen natürlichen Zahlen im wesentlichen nur noch Primzahlzwillinge gibt. Die Lücken zwischen den Primzahlen würden im Schnitt maximal werden. Diese Aussage ist also eng mit der Primzahlzwillingsvermutung(Verweis) gekoppelt.

Wir können plausibel machen, wie wir noch zeigen, dass unter der Annahme, es gäbe im extrem Großen im wesentlichen nur noch Primzahlzwillinge, und, dass dann ein solches Primzahlzwillingspaar die nächsten Primzahlen erzeugt, ohne, dass dazwischen noch welche wären, eine so große Lücke zwischen den Primzahlzwillingen und den nächsten Primzahlzwillingen entsteht, dass das Zählen der natürlichen Zahlen aufholen kann.

Szenario, in dem hypothetisch als nächstgrößere und übernächstgrößere Primzahlen nur Primzahlzwillinge existieren

Ein besonderes Szenario, das wir recht gut analysieren können, ist, wenn $p\# - 1$ und $p\# + 1$ beide die nächsten Primzahlen nach p sind und auch nach ihnen wiederum $(p\# + 1)\# - 1$ und $(p\# + 1)\# + 1$ wieder die nächsten Primzahlen sind. Es gibt also zwischen ihnen allen keine Primzahlen mehr, sondern Primzahlen sind hypothetisch nur noch die Primzahlzwillinge:

Aus der letzen uns bekannten extrem großen Primzahl p_i ergeben sich die beiden nächsten Primzahlen:

$$p_i\# \pm 1 \quad \in \quad \mathbb{P} \tag{SN.PP.29}$$

$$p_{i+1} \quad := \quad p_i\# - 1 \tag{SN.PP.30}$$

$$p_{i+2} \quad := \quad p_i\# + 1 \tag{SN.PP.31}$$

Dann gibt es also zwischen unserer letzen extrem großen Primzahl p_i und den beiden nächsten keine Primzahl mehr:

$$\Rightarrow \qquad \left(\nexists n \in \,]p_i, p_{i+1}[_{\mathbb{N}}\right) [\; n \quad \in \quad \mathbb{P} \;] \tag{SN.PP.32}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left(\nexists n \in \,]p_i, p_i\# - 1[_{\mathbb{N}}\right) [\; n \quad \in \quad \mathbb{P} \;] \tag{SN.PP.33}$$

Dann ist die nächste Primfakultät $p_{i+1}\#$ die Zahl zwischen dem nächsten Primzahlzwilling:

$$p_{i+1}\# \pm 1 \tag{SN.PP.34}$$

$$\Leftrightarrow \qquad p_i\# \cdot p_{i+1} \pm 1 \tag{SN.PP.35}$$

$$\Leftrightarrow \qquad p_i\# \cdot (p_i\# - 1) \pm 1 \tag{SN.PP.36}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left((p_i\#)^2 - p_i\#\right) \pm 1 \tag{SN.PP.37}$$

Nun müssen wir untersuchen, ob der Sprung groß genug ist, damit das Zählen die Primfakultät einholen kann. Das können wir mit dem Verhältnis zum Zählen herausfinden:

$$\Rightarrow \qquad \frac{(p_i\#)^2 - p_i\#}{n} \qquad \text{(SN.PP.38)}$$

XXX

$$\Rightarrow \qquad p_{i+1}\# \pm 1 \quad \in \quad \mathbb{P} \qquad \text{(SN.PP.39)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad (p_i\# - 1)\# \pm 1 \quad \in \quad \mathbb{P} \qquad \text{(SN.PP.40)}$$

$$((p\# - 1) \cdot (p\# + 1))\# \pm 1 \quad \in \quad \mathbb{P} \qquad \text{(SN.PP.41)}$$

$$((p\# - 1) \cdot (p\# + 1))\# \pm 1 \quad \in \quad \mathbb{P} \qquad \text{(SN.PP.42)}$$

$$(\forall n \in \,]p\# + 1, ((p\# - 1) \cdot (p\# + 1))\# - 1[_{\mathbb{N}}) \, [\; n \quad \notin \quad \mathbb{P} \;] \qquad \text{(SN.PP.43)}$$

XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

XXX XXX XXX XXX XXX XXX

XXX Freie Gedanken

Die Argumentation könnte grob und sicher noch streitbarer Weise so laufen:

- Jede zweite natürliche Zahl ist durch die Primzahl Zwei teilbar, daher sollte die Anzahl der natürlichen Zahlen ω ebenso durch Zwei teilbar sein.
- Das gleiche Argument kann für jede weitere endliche Primzahl herangezogen werden.
- Jede vierte natürliche Zahl ist natürlich ebenfalls durch die zweite Potenz von Zwei teilbar, aber, wenn auch die Anzahl der natürlichen Zahlen ω durch die Vier ganzzahlig teilbar wäre, dann sollte dies auch für jede andere endliche Primzahl endlicher Potenz gelten. Das kann aber aufgrund der Betrachtung der Struktur der Superial-Zahlen, siehe **Die Struktur von s‹**, nicht sein, denn dann wäre quasi $s = \omega$.
- Wenn $s = \omega$ wäre, dann würde es genau so viele rationale Zahlen, wie natürliche Zahlen geben, was zwar für die Mächtigkeit stimmt, aber in meinen Augen nicht für deren Anzahl.
- Denn die Kombinatorik zur Erzeugung der rationalen Zahlen aus Brüchen zeigt, dass es deutlich mehr rationale Zahlen von ihrer Anzahl her geben muss, als natürliche Zahlen, denn im Calkin-Wilf-Baum enthält schon der letzte Strang alle natürlichen Zahlen und der erste Strang all deren Kehrwerte.
  Die direkte Kombinatorik von Zähler und Nenner wäre jeweils ω und ergäbe sich zu ω^2, wenn nicht gekürzt werden könnte.
- Anders, als bei der Mächtigkeit, wird bei der von mir gemeinten Anzahl der Zahlen ihre kombinatorische Erzeugung mit der vollständigen Induktion der natürlichen Zahlen

ins Verhältnis gesetzt.

- Und die Definition von s über das Primzahlflächenprodukt beruht eben auch auf einem Verhältnis zur Eins.
- XXX
- XXX
- XXX
- XXX
- XXX
- XXX
- XXX

In Arbeit ... XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

Argumentation über die Primzahltürme der Definition von *s*

Betrachten wir das aktuell verwendete Produkt zur Definition von *s*:

$$s \quad := \quad \prod_{\forall n \in \mathbb{N}} \left(\prod_{\forall p \in \mathbb{P}} p \right) \qquad \textbf{(SN.Ein.31)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad s \quad := \quad \left(\prod_{\forall p \in \mathbb{P}} p \right)^{\omega} \qquad \textbf{(SN.Ein.33)}$$

Analysieren wir naiv die maximale Häufigkeit der einzelnen Primzahlen in der Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahlen kommen wir schnell auf den Gedanken, dass wir nicht die volle höhe ω jedes einzelnen Primzahlturms benötigen, um *s* mit den Eigenschaften auszustatten die für uns interessant sind, nämlich mit jedem rationalen Koeffizienten eine ganze Zahl zu bleiben.

Beginnend mit der kleinsten Primzahl *2* stellen wir fest, dass nur jede zweite natürliche Zahl durch *2* teilbar ist und dann erst wieder jede vierte durch *4* und jede achte durch *8* und so fort.

Da wir mit der Potenz einer jeden Primzahl keine größere Zahl als ω erreichen müssen, reicht folgende Potenz einer jeden Primzahl:

$$p^x \quad = \quad \omega \qquad \text{(SN.PP.44)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x \quad = \quad \log_p \omega \qquad \text{(SN.PP.45)}$$

Folgendes Primzahlprodukt für *s* würde also hinreichen:

$$s \quad \overset{?}{:=} \quad \prod_{\forall p \in \mathbb{P}} p^{\log_p \omega} \qquad \text{(SN.PP.46)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad s \overset{?}{=} \prod_{\forall p \in \mathbb{P}} \omega \tag{SN.PP.47}$$

$$\Leftrightarrow \qquad s \overset{?}{=} \prod_{\# \mathbb{P}} \omega \tag{SN.PP.48}$$

$$\Leftrightarrow \qquad s \overset{?}{=} \omega^{\# \mathbb{P}} \tag{SN.PP.49}$$

Das verwundert nach ein bisschen Überlegung nicht weiter, denn wir haben es erzwungen. Aber es scheint uns nicht weiter zu bringen, denn es zerstört die transparenz unserer Primfaktoren-Definition von *s*!

XXX XXX XXX XXX

$$\Leftrightarrow \qquad s \overset{?}{=} \prod_{\forall p \in \mathbb{P}} \omega_p \tag{SN.PP.50}$$

$$\Leftrightarrow \qquad s \overset{?}{=} \omega_2 \cdot \omega_3 \cdot \omega_5 \cdot \omega_7 \cdot \omega_{11} \cdot \omega_{13} \cdot \cdots \tag{SN.PP.51}$$

$$\omega \overset{?}{=} 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \cdots \tag{SN.PP.52}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad s \overset{?}{=} & (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \cdots)_2 \\ & \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \cdots)_3 \\ & \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \cdots)_5 \\ & \vdots \\ & \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \cdots)_{p \in \mathbb{P}} \\ & \vdots \end{aligned} \tag{SN.PP.53}$$

XXX XXX XXX XXX

XXX

In Arbeit ... XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

→ *Überrationalitätsvermutung*

Fußnoten

1. ↑(Primärliteratur einfügen!)

   Internet:

   Vgl. Wikipedia, ***Algebraische Zahl***.

2. ↑(Primärliteratur einfügen!)

   Internet:

Vgl. Wikipedia, ***Mächtigkeit***.

3. ↑(Primärliteratur einfügen!)

   Internet:

   Vgl. Wikipedia, ***Satz des Euklid***.

4. ↑(Primärliteratur einfügen!)

   Internet:

   Vgl. Wikipedia, ***Unendlichkeitsaxiom***, Formulierung; Bedeutung für die Mathematik, Natürliche Zahlen.

5. ↑(Primärliteratur einfügen!)

   Internet:

   Vgl. Wikipedia, ***Primorial***.

6. ↑(Primärliteratur einfügen!)

   Internet:

   Vgl. Wikipedia, ***Primfaktorzerlegung***, Fundamentalsatz der Arithmetik.

7. ↑(Primärliteratur einfügen!)

   Internet:

   Vgl. Wikipedia, ***Primzahl***.

8. ↑Internet:

   Wikipedia, ***Primzahl***, Eigenschaften von Primzahlen.

9. ↑(Primärliteratur einfügen!)

   Internet:

   Vgl. Wikipedia, ***Primzahl***, Größte bekannte Primzahl.

10. ↑(Primärliteratur einfügen!)

    Internet:

    Vgl. Wikipedia, ***Primorial***.

11. ↑(Primärliteratur einfügen!)

    Internet:

    Vgl. Wikipedia, ***Primorial***.

12. ↑Vgl. Wikipedia, ***Primorial***, Eigenschaften, Grafik und Tabelle mit Beispielwerten.

13. ↑(Primärliteratur einfügen!)

    Internet:

    Vgl. Wikipedia, ***Ordinalzahl***.

14. ↑(Primärliteratur einfügen!)

    Internet:

    Vgl. Wikipedia, ***Unendlichkeitsaxiom***, Formulierung; Bedeutung für die Mathematik, Natürliche Zahlen.

15. ↑(Primärliteratur einfügen!)

    Internet:

    Vgl. Wikipedia, ***Bijektive Funktion***.

16. ↑(Primärliteratur einfügen!)

    Internet:

    Vgl. Wikipedia, ***Teilmenge***.

17. ↑(Primärliteratur einfügen!)

    Internet:

    Vgl. Wikipedia, ***Unendlichkeitsaxiom***, Formulierung; Bedeutung für die Mathematik, Natürliche Zahlen.

18. ↑(Primärliteratur einfügen!)

    Internet:

    Vgl. Wikipedia, ***Primfaktorzerlegung***, Fundamentalsatz der Arithmetik.

19. ↑(Primärliteratur einfügen!)

    Internet:

Vgl. Wikipedia, ***Unendlichkeitsaxiom***, Formulierung; Bedeutung für die Mathematik, Natürliche Zahlen.

20. ↑(Primärliteratur einfügen!)

    Internet:

    Vgl. Wikipedia, ***Parität***.

21. ↑Vgl. Wikipedia, ***Ordinalzahl***, 3 Motivation und Definition, 3.2 Limes- und Nachfolgerzahlen.
22. ↑(Primärliteratur einfügen!)

    Internet:

    Vgl. Wikipedia, ***Primorial***.

23. ↑Vgl. Wikipedia, ***Primorial***, Eigenschaften, Grafik und Tabelle mit Beispielwerten.

Stand 31. Januar 2024, 21:00 CET.

Permanente Links:
(Klicke auf die Archivlogos zum Abruf und Ansehen der Archive dieser Seite.)

INTERNET ARCHIVE WayBackMachine

archive.today webpage capture

Wolfgang Huß

Wolfgang Huß
und Media Line Digital e.K.
Steinburger Straße 38
22527 Hamburg, Germany, EU

E-Mail: wolle.huss at pjannto.com
Telefon: +49. 40. 38 03 77 37
Mobil: +49. 173. 622 60 91