

Aktual unendliche, fraktale **Superial-Zahlen** Mit Primzahlen ins Unendliche

← *Einleitung*

Formale Entwicklung

Definition der Superial-Zahlen und ihrer wichtigen Teilmengen

Die Definition der Superial-Zahlen kann auf unterschiedliche Weisen erfolgen. Ich habe mich dafür entschieden dies auf eine Weise zu tun, die sicher stellt, dass möglichst viele Eigenschaften der endlichen natürlichen Zahlen sowie auch der ganzen Zahlen, der Primzahlen und der rationalen Zahlen ins Aktual-Unendliche fortgesetzt werden.

Bei den Superial-Zahlen handelt es sich um eine abelsche Gruppe¹ bezüglich der Addition und Multiplikation und sie sind sogar ein angeordneter algebraischer Körper², die die rationalen Zahlen \mathbb{Q} ins aktual unendliche erweitert. Dabei erweitern sich auch ihre Teilmengen der natürlichen Zahlen \mathbb{N} , der ganzen Zahlen \mathbb{Z} und der Primzahlen \mathbb{P} zu den **natürlichen Superial-Zahlen** $\mathbb{S}_{\mathbb{N}}$, den **ganzen Superial-Zahlen** $\mathbb{S}_{\mathbb{Z}}$ und sogar zu den **superialen Primzahlen** $\mathbb{S}_{\mathbb{P}}$.

So kommen wir zum Beispiel nicht nur in die Lage **Ableitungen mit Superial-Zahlen**, ganz ohne Limes, zu definieren, sondern auch in die Lage, bis ins Aktual-Unendliche zu zählen und dadurch Integrale als Summen unendlich vieler, unendlich schmaler Flächenstreifen zu berechnen.

Jede natürliche Superial-Zahl hat dabei so viele Vorgänger in $\mathbb{S}_{\mathbb{N}}$, wie sie selber groß ist. Dies ist anders, als bei den von mir erforschten auch ins Aktual-Unendliche gehenden **Biordinalzahlen**: Aktual unendliche Biordinalzahlen haben bizarrer Weise **mehr Vorgänger als ihr Wert** groß ist. In mancherlei anderen Punkten können wir erkennen, dass sie die noch nicht so perfekten Vorläufer der Superial-Zahlen sind. Mathematisch gesehen sind die Biordinalzahlen eine Erweiterung der Ordinalzahlen³ zu einem algebraischen Ring⁴.

Die Menge der Superial-Zahlen ist in vielerlei Hinsicht etwas ganz besonderes.

Definition der superialen Einheit s

Es lassen sich mindestens zwei geometrische Konstruktionen finden, die der folgenden Definition von s über das unendliche Primzahlprodukt aus der **Einleitung** äquivalent sind:

$$s := \prod_{\forall n \in \mathbb{N}} \left(\prod_{\forall p \in \mathbb{P}} p \right) \quad (\text{SN.Ein.31})$$

$$\Leftrightarrow s := \left(\prod_{\forall p \in \mathbb{P}} p \right)^{\omega} \quad (\text{SN.Ein.33})$$

Die erste der folgenden Konstruktionen geht ins aktual unendlich Große und die zweite ins aktual unendlich Kleine. Beide definieren s jedoch auf etwas unterschiedliche Weise:

Definition von s über den Wiederholungsrhythmus der natürlichen Zahlen

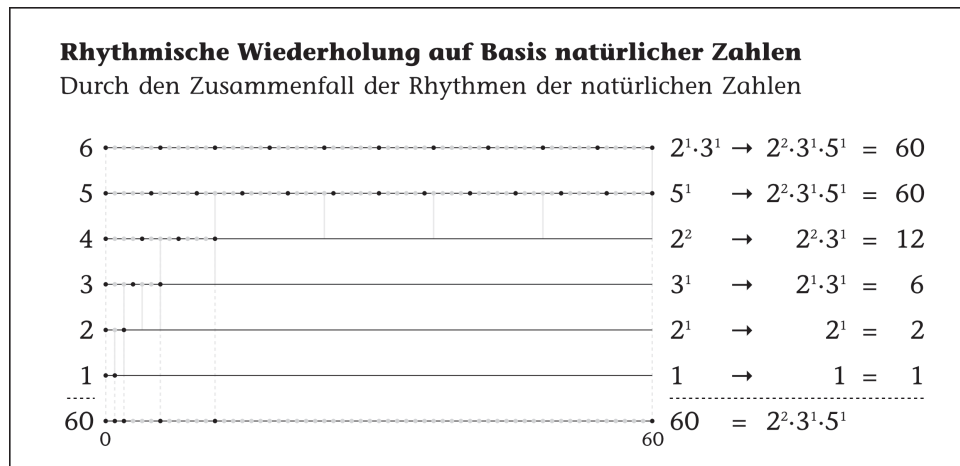


Abbildung 1 : Die Grafik zeigt, wie durch den Zusammenfall aller Rhythmen der natürlichen Zahlen, von der Eins an bis ins Unendliche, die superiale Basis s konstruiert wird.

In der geometrischen Konstruktion der rhythmischen Wiederholung bleiben die Begrenzungspunkte der Teilstrecken immer im selben Abstand von Eins. Am jeweiligen Ende der Punktreihe werden stets die nötigen Punkte angehängt, um den Rhythmus der nächsten natürlichen Zahl zu integrieren, wenn er noch nicht enthalten sein sollte (siehe **Abbildung 1**).

Definition von s^{-1} über den Regen der natürlichen Zahlen

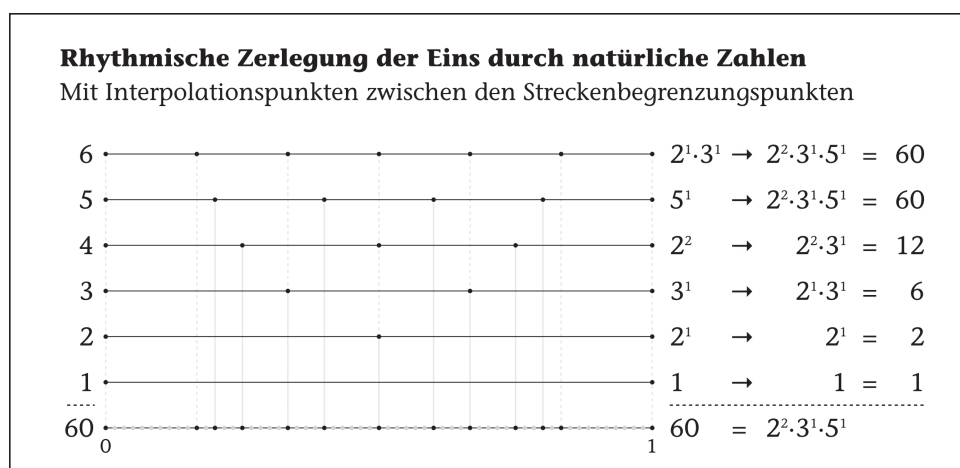


Abbildung 2 : Die Grafik zeigt, wie durch die Projektion der Begrenzungspunkte aller regelmäßigen natürlichzahligen Teilstrecken auf die Einheitsstrecke, von der Eins an bis ins Unendliche, und durch das Interpolieren ihrer Begrenzungspunkte zu einem gleichmäßigen Rhythmus, nach und nach als Abstand zwischen den Punkten die superiale Zahl s^{-1} konstruiert wird. Als Begrenzungspunktzahl, ohne die Eins, oder

als Anzahl der Teilstrecken ergibt sich die superiale Basis s .

In der Konstruktion der rhythmischen Zerlegung werden zwischen den vorhandenen Begrenzungspunkte der Teilstrecken immer neue Punkte hinzugefügt, um den Rhythmus der hinzukommenden natürlichen Zahl in einem gleichmäßigen Rhythmus zu integrieren, falls er noch nicht vorhanden ist (siehe **Abbildung 2**).

Dies ist, als wenn ein Regen von natürlichen Zahlen auf der Strecke der Eins hernieder gehen würde.

XXX Explizite Anschauung des Primzahlprodukts von s

Für das Primzahlprodukt von s ergibt sich in beiden Fällen eine mit unendlich mal unendlich vielen Primzahlen gefüllte Fläche der folgenden Art:

$$\Leftrightarrow s = \prod_{\forall n \in \mathbb{N}} (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \dots) \quad (\text{SN.Ein.34})$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow s &= (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \dots)_1 \\ &\quad \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \dots)_2 \\ &\quad \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \dots)_3 \\ &\quad \vdots \\ &\quad \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \dots)_{n \in \mathbb{N}} \\ &\quad \vdots \end{aligned} \quad (\text{SN.Ein.35})$$

$$\Leftrightarrow s = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \dots)^\omega \quad (\text{SN.Ein.36})$$

XXX XXX XXX XXX XXX XXX

XXX

XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

Polynom-Definition der Menge der Superial-Zahlen S

Um zu gewährleisten, dass die ganzen und die natürlichen Superial-Zahlen möglichst große Teilmengen im Verhältnis zur Menge S aller Superial-Zahlen sind, können die Koeffizienten der Potenzen der superialen Basis s als rationale Zahlen aus \mathbb{Q} definiert werden:

$$S := \left\{ x \mid (\forall d \in \mathbb{Z}) (\forall q_d \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}) (\forall q_i \in \mathbb{Q}) \left[q_d s^d + \sum_{(\forall i \in \mathbb{Z}) [d > i]} q_i s^i \right] \right\} \quad (\text{SN.Form.1})$$

In Arbeit ... XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

XXX

In Arbeit ... XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

→ Ganze Superial-Zahlen

Ganze Superial-Zahlen

← Formale Entwicklung

▼ Notizen

XXX

• XXX

XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

$$\mathbb{S}_Z := \left\{ x \mid (\forall d \in \mathbb{N}) (\forall q_d \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}) (\forall q_i \in \mathbb{Q}) (\forall z \in \mathbb{Z}) \right. \\ \left. \left[\begin{array}{ll} z & \text{falls } d = 0 \\ q_d s^d + \sum_{(i \in \mathbb{Z})[d > i > 0]} q_i s^i + z & \text{falls } d > 0 \end{array} \right] \right\} \quad (\text{SN.Form.Z.1})$$

XXX

In Arbeit ... XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

→ Natürliche Superial-Zahlen

Natürliche Superial-Zahlen

← Ganze Superial-Zahlen

▼ Notizen

XXX

• XXX

XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

$$\mathbb{S}_N := \{ x \mid (\forall x \in \mathbb{S}_Z) [x \geq 0] \} \quad (\text{SN.Form.N.1})$$

Schreiben wir dies in einer ausführlicheren Definition, wie bei den ganzen Superial-Zahlen, dann wird es etwas transparenter:

$$\Leftrightarrow \mathbb{S}_N := \left\{ x \mid (\forall d \in \mathbb{N}) (\forall q_d \in \mathbb{Q} > 0) (\forall q_i \in \mathbb{Q}) \right. \\ \left. (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall z \in \mathbb{Z}) \right. \quad (\text{SN.Form.N.}) \\ \left. \left[\begin{array}{ll} n & \text{falls } d = 0 \\ q_d s^d + \sum_{(i \in \mathbb{Z})[d > i > 0]} q_i s^i + z & \text{falls } d > 0 \end{array} \right] \right\}$$

Für den Fall, dass $d = 0$ ist, es sich also um endliche Zahlen handelt, bleiben nur endliche natürliche Zahlen über.

Für $d > 0$, den Fall, dass es sich um aktuell unendlich große natürliche Zahlen handelt, entspricht die Definition der von positiven ganzen Superial-Zahlen. Dies ist dadurch bestimmt, dass der Koeffizient q_d der größten Potenz s^d positiv sein muss. XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

XXX

In Arbeit ... XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

→ Superiale Primzahlen

Superiale Primzahlen

← Natürliche Superial-Zahlen

▼ Notizen

XXX

• XXX

XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

XXX

In Arbeit ... XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

→ Formalien

Formalien

← Superiale Primzahlen

Nachfolgend ein paar nützliche Definitionen:

Zahlen und Mengen im Endlichen

Ich möchte nun erst einmal tiefer beleuchten, welche hier wichtigen Eigenschaften von Zahlen und Mengen sich auf welche mögliche Weise beim Übergang vom Endlichen ins Unendliche verhalten sollten, um Sinn zu machen und eine gute Plausibilität zu ergeben.

Das bedeutet nicht, dass es prinzipiell nicht auch weitere Möglichkeiten mit ihren Perspektiven und deren jeweiligen Vor- und Nachteilen gibt. Mir erscheint die nachfolgende Perspektive natürlich am besten zum Erkenntnisgewinn geeignet und in diesem Sinne als am besten zu den Superial-Zahlen passend.

Die Teilmengen vom Beginn der natürlichen Zahlen

Betrachten wird die Teilmengen \mathbb{T}_n , die wir vom Beginn der natürlichen Zahlen bilden können und deren Größe, also die Anzahl ihrer Elemente n .

Exemplarisch vereinfacht definieren wir diese Mengen wie folgt:

$$\mathbb{T}_n := \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, n-1\} \quad (\text{SN.Form.F.1})$$

Formell korrekter können wir schreiben, wenn wir nachfolgend die Menge aller natürlichen Zahlen \mathbb{N} als stets mit der Null beginnend annehmen:

$$\mathbb{N} := \mathbb{N}_0 \quad (\text{BO.Ein.8})$$

$$\mathbb{T}_n := \{ x \mid (n \in \mathbb{N}) (\forall x \in \mathbb{N}) [x < n] \} \quad (\text{SN.Form.F.2})$$

Die Teilmengen \mathbb{T}_n der ersten n Elemente wird definiert als die Menge der Elemente x für die gilt: Ich nehme das Element n aus der Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} und alle x , die kleiner als n sind.

Wir sehen schon an der Definition, dass die Anzahl der Elemente in \mathbb{T}_n größer als alle Elemente dieser Menge ist.

Mein Freund Raimund Welsch machte mich in diesem Zusammenhang ganz zu-recht darauf aufmerksam, dass dies eben nur gilt, wenn die natürlichen Zahlen vorstehend einschließlich der Null definiert sind.

Ich antworte darauf, dass dies deutlich macht, wie sinnvoll und plausibel die Definition der natürlichen Zahlen einschließlich der Null ist, wenn wir uns mit dem Übergang uns Unendliche beschäftigen.

Das größte Element einer Menge

Im Fall der Mengen mit endlich vielen Elementen, hier repräsentiert durch die Mengen \mathbb{T}_n , existiert ein größtes Element in der Menge. Es gilt:

$$\Rightarrow \quad \# \mathbb{T}_n = n \quad (\text{SN.Form.F.3})$$

$$\Rightarrow \quad \text{groesstes}(\mathbb{T}_n) = n - 1 \quad (\text{SN.Form.F.4})$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{groesstes}(\mathbb{T}_n) + 1 = n \quad (\text{SN.Form.F.5})$$

$$\Rightarrow \quad \text{groesstes}(\mathbb{T}_n) < n \quad (\text{SN.Form.F.6})$$

Nun gehen wir ins Unendliche über.

Zahlen und Mengen im Unendlichen

Anders als im Endlichen der Mengen \mathbb{T}_n verhält es sich, wenn wir zur Menge aller natürlichen Zahlen übergehen, die unendlich viele Elemente endlicher Größe in sich hat. Auch sie beginnt mit der Null, aber in ihr gibt es per Definition kein größtes Element, weil es zu jedem Element einen Nachfolger gibt:⁵

$$\Rightarrow \quad \nexists \text{groesstes}(\mathbb{N}) \quad (\text{SN.Form.F.7})$$

Jedoch kann die Anzahl der Elemente in \mathbb{N} nach obiger Definition **SN.Ein.32** mit der aktual unendlichen Zahl ω angegeben werden:⁶

$$\omega := \#\mathbb{N} \quad (\text{SN.Form.F.8})$$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) [n < \omega] \quad (\text{SN.Form.F.9})$$

$$(\forall r \in \mathbb{R}) (\exists n \in \mathbb{N}) [r < n] \quad (\text{SN.Form.F.10})$$

$$\Rightarrow (\forall r \in \mathbb{R}) [-\omega < r < \omega] \quad (\text{SN.Form.F.11})$$

$$\Rightarrow (\forall r \in \mathbb{R}^+) [0 < \omega^{-1} < r] \quad (\text{SN.Form.F.12})$$

$$\Rightarrow (k \in \mathbb{R}) (\forall r \in \mathbb{R}^+) [k - r < k - \omega^{-1} < k < k + \omega^{-1} < k + r] \quad (\text{SN.Form.F.13})$$

Auf diese Weise kommen wir in die Lage, Zahlen außerhalb des Endlichen zu definieren; Zahlen, die also wirklich im Unendlichen liegen.

Auch können wir nun Zahlen definieren, die um eine endliche reelle Zahl herum liegen und näher an dieser sind, als jede andere reelle Zahl. Sie verhalten sich ähnlich, wie der Limes einer Umgebung ε , der gegen Null geht. Nur sind diese Umgebungszahlen nicht unscharf, wie ein Limes, sondern konkret und damit scharf.

Das gleiche gilt, wenn wir das ω durch die noch viel größere superiale Basis s ersetzen:

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) [n < s] \quad (\text{SN.Form.F.14})$$

$$(\forall r \in \mathbb{R}) (\exists n \in \mathbb{N}) [r < n] \quad (\text{SN.Form.F.15})$$

$$\Rightarrow (\forall r \in \mathbb{R}) [-s < r < s] \quad (\text{SN.Form.F.16})$$

$$\Rightarrow (\forall r \in \mathbb{R}^+) [0 < s^{-1} < r] \quad (\text{SN.Form.F.17})$$

$$\Rightarrow (k \in \mathbb{R}) (\forall r \in \mathbb{R}^+) [k - r < k - s^{-1} < k < k + s^{-1} < k + r] \quad (\text{SN.Form.F.18})$$

Die Eigenschaft der Superial-Zahlen, mit ihnen keinen unscharfen, sondern einen konkreten „Limes“ definieren zu können, eröffnet die Möglichkeit wichtige Eigenschaften der Zahlen näher untersuchen zu können, wie wir später sehen werden. Sie ermöglicht so

unter anderem die Definition einer konkreten Differentialrechnung, wie oben schon angedeutet.

Stellenwertsystem

▼ Notizen

• Übertragen von ›OM:SupNum:Einleitung:Grundlagen‹.

Ein besonderes Zahlenwertsystem und seine Kurznotation

Das ist sehr bemerkenswert und ermöglicht ein neues und besonderes Zahlenwertsystem auf Basis der superialen Basis s :

Jede Ziffer dieses Zahlenwertsystems auf Basis s kann eine Zahl sein; in jedem Fall eine rationale, möglicherweise auch eine übrationalale (siehe **Übrationalitätsvermutung**). Sehr fraglich ist für mich, ob es sinnvollerweise wirklich auch jede reelle Zahl sein kann, denn ich vermute, dass transzendente Zahlen, wie die Eulersche Zahl e oder die Kreiszahl π , als Koeffizienten in jedem Fall aus dem sinnvollen Rahmen fallen.

Nachfolgend ein paar Beispiele in einer neuen Notation, die jede Ziffer dieses Zahlensystems in spitzen Klammern notiert:

$$(\forall a, b, c, d \in \mathbb{Q}) \left[\langle a \rangle \langle b \rangle \langle c \rangle . \langle d \rangle \right. \\ \left. \begin{aligned} &:= a \cdot s^2 + b \cdot s^1 + c \cdot s^0 + d \cdot s^{-1} & (\text{SN.Form.F.19}) \\ &\in \mathbb{S} \end{aligned} \right]$$

$$\Rightarrow s^1 = \langle 1 \rangle \langle 0 \rangle . = \langle 1 \rangle \langle 0 \rangle_0 = \langle 1 \rangle_1 \quad (\text{SN.Form.F.20})$$

$$\Rightarrow s^0 = \langle 1 \rangle . = \langle 1 \rangle_0 = 1 \quad (\text{SN.Form.F.21})$$

$$\Rightarrow s^{-1} = . \langle 1 \rangle = {}_0 \langle 1 \rangle \quad (\text{SN.Form.F.22})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\frac{3}{5} \cdot s^2 + 25 \cdot s^1 + 3,5 \cdot s^0 - 7,2 \cdot s^{-1} \\ &= \left\langle -\frac{3}{5} \right\rangle \langle 25 \rangle \langle 3,5 \rangle . \langle -7,2 \rangle & (\text{SN.Form.F.23}) \\ &= \left\langle -\frac{3}{5} \right\rangle \langle 25 \rangle \langle 3,5 \rangle_0 \langle -7,2 \rangle \end{aligned}$$

Ich denke an diesen einfachen Beispielen wird klar, wie das superiale Zahlenwertsystem funktioniert und wie es notiert wird. Der Punkt hinter der nullten Potenz von s markiert quasi das Komma, ähnlich unseren reellen Zahlen im Zehnersystem notiert. Alternativ kann hinter einer spitzen Klammer auch die Potenz der superialen Basis s als ganze Zahl angegeben werden.

XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

Skalierung der superialen Ebene einer Teilmenge der Superial-Zahlen

An einigen Stellen dieser Arbeit benötigen wir die Skalierung der superialen Potenzebene einer Teilmenge \mathbb{S}_T der Superial-Zahlen \mathbb{S} :

$$\mathbb{S}_T^y := \{ a \mid (\forall t \in \mathbb{S}_T) [a = t \cdot s^y] \} \quad (\text{SN.Form.F.24})$$

Zum Beispiel ist es im Besonderen bei der **Integration** notwendig die ganzen Superial-Zahlen \mathbb{S}_Z eine Potenzebene ins superial kleine zu skalieren:

$$\Rightarrow \quad \mathbb{S}_Z^{-1} = \{ a \mid (\forall z \in \mathbb{S}_Z) [a = z \cdot s^{-1}] \} \quad (\text{SN.Ein.5})$$

Hierdurch wird eine Menge erzeugt, die es ermöglicht, eine Summe zu definieren, in der superial kleine ganze Zahlen durchgezählt werden, um superial kleine Flächen zu summieren, die das Integral ergeben.

Intervall-Menge

Eine etwas allgemeinere Definition der Intervall-Menge eines Intervalls⁷ aus einer angeordneten Zahlenmenge:

Seien $[a, b]_{\mathbb{T}}$, $[a, b[_{\mathbb{T}}$, $]a, b]_{\mathbb{T}}$ und $]a, b[_{\mathbb{T}}$ die Mengen der folgenden Intervalle von a bis b aus der Menge \mathbb{T}

$$[a, b]_{\mathbb{T}} := \{ x \mid (\forall x \in \mathbb{T}) (a, b \in \mathbb{T}) [a \leq x \leq b] \} \quad (\text{SN.Form.F.25})$$

$$[a, b[_{\mathbb{T}} := \{ x \mid (\forall x \in \mathbb{T}) (a, b \in \mathbb{T}) [a \leq x < b] \} \quad (\text{SN.Form.F.26})$$

$$]a, b]_{\mathbb{T}} := \{ x \mid (\forall x \in \mathbb{T}) (a, b \in \mathbb{T}) [a < x \leq b] \} \quad (\text{SN.Form.F.27})$$

$$]a, b[_{\mathbb{T}} := \{ x \mid (\forall x \in \mathbb{T}) (a, b \in \mathbb{T}) [a < x < b] \} \quad , \quad (\text{SN.Form.F.28})$$

so können wir flexibel Intervall-Mengen definieren.

Aufgrund der Komplexität der Superial-Zahlen ist es sehr hilfreich, wenn wir die Menge \mathbb{T} angeben können, auf der die Intervall-Menge basieren soll.

→ *Ableitungen und Integrale*

Fußnoten

1. ↑(Primärliteratur einfügen!)

Internet:

Vgl. Wikipedia, *Abelsche Gruppe*.

2. ↑(Primärliteratur einfügen!)

Internet:

Vgl. Wikipedia, *Körper (Algebra)*.

3. ↑(Primärliteratur einfügen!)

Internet:

Vgl. Wikipedia, *Ordinalzahl*.

4. ↑(Primärliteratur einfügen!)

Internet:

Vgl. Wikipedia, *Ring (Algebra)*.

5. ↑(Primärliteratur einfügen!)

Internet:

Vgl. Wikipedia, *Unendlichkeitsaxiom*, Bedeutung für die Mathematik, Natürliche Zahlen.

6. ↑(Primärliteratur einfügen!)

Internet:

Vgl. Wikipedia, *Ordinalzahl*, Topologische Eigenschaften.

7. ↑Internet:

Vgl. Wikipedia, *Intervall*.



Stand 29. Februar 2024, 17:00 CET.

Permanente Links:

(Klicke auf die Archivlogos zum Abruf und Ansehen der Archive dieser Seite.)



Wolfgang Huß

Superial-Zahlen (SN)
© 1988–2024 by
Wolfgang Huß und
Media Line Digital e.K.
is licensed under
CC BY-ND 4.0

Wolfgang Huß
und Media Line Digital e.K.
Steinburger Straße 38
22527 Hamburg, Germany, EU

E-Mail: wolle.huss at pjannto.com
Telefon: +49. 40. 38 03 77 37
Mobil: +49. 173. 622 60 91

© 1986–2024 by Wolfgang Huß und Media Line Digital e.K. is licensed under CC BY-ND 4.0 • Impressum •
v9.35