$S = \omega^{\omega}$

Aktual unendliche, fraktale
Superial-Zahlen
Mit Primzahlen ins Unendliche

← *Formale Entwicklung*

Ableitungen und Integrale

Aktuale Unendlichkeit ersetzt den Limes oder das Differential

Der Ausgangspunkt zur Entdeckung und Erforschung der Superial-Zahlen war, wie in der **Einleitung** schon beschrieben, mein Bedürfnis, mehr Klarheit davon zu bekommen, was Ableitungen(Verweis) und Integrale(Verweis) eigentlich sind. Ich wollte genauer Verstehen und explizit ausdrücken können, was implizit vor sich geht, wenn wir eine Funktion ableiten oder integrieren.

So entdeckte ich die Superial-Zahlen und mit ihnen eine Möglichkeit, bei der ihre normierte aktuale Unendlichkeit in der Entwicklung der Definition der Ableitung und der Integration den Limes(Verweis) oder das Differential(Verweis) ersetzt. Auf diese Weise können wir, anstatt den Limes-Operator oder den Differential-Operator zu benutzen, einfach wie gewohnt mit Zahlen rechnen.

Es geht also um Transparenz und Genauigkeit, denen wir an dieser Stelle den Vorzug gegenüber der Kürze und der alten Gewohnheit von (kurzen) Schreibweisen geben werden. Wir wollen zunächst entdecken, ergründen und verstehen und eben nicht gleich verkürzen.

→ Die Ableitung

Die Ableitung

← *Ableitungen und Integrale*

Bei der Ableitung spielt ein Bruch die zentrale Rolle, bei dem sowohl Zähler als auch Nenner Differenzen sind, die, aus heute üblicher Perspektive, bei höherer Genauigkeit immer kleiner werden und im Positiven gegen Null streben.

Dies kann klassischer Weise durch einen Limes ausgedrückt werden:

$$f'(x) \quad = \quad \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \text{(SN.AbIn.1)}$$

Da sowohl Zähler als auch Nenner in der gleichen Größenordnung gegen Null streben, sorgt der Bruch dafür, dass unser Ergebnis im Endlichen verbleibt.

Wolfgang Huß

Wolfgang Huß
und Media Line Digital e.K.
Steinburger Straße 38
22527 Hamburg, Germany, EU

E-Mail: wolle.huss at pjannto.com
Telefon: +49. 40. 38 03 77 37
Mobil: +49. 173. 622 60 91

Die letzte Formel ist in der **Stellenwertsystem-Schreibweise** der Superial-Zahlen ausgedrückt.

Durch das Einsetzen einer normierten Unendlichkeit können wir nun erkennen, dass das Δx gar nicht von x abhängt, wie es scheinen könnte, sondern das x in Δx kennzeichnet „nur“ die Stelle, an der das Δx eingesetzt wird. Der Parameter der Funktion $f(x)$ ist allerdings weiter von x abhängig.

Vergleichen wir dies mit der in der Mathematik üblichen und deutlich kürzeren Differential-Schreibweise:

$$f'(x) \quad = \quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \qquad \text{(SN.AbIn.5)}$$

Dann sehen wir, dass einiges an struktureller Information verborgen bleibt, wenn wir nicht genau schauen, was hinter der Formulierung steckt. So glauben wir eben leicht, wie gesagt, der Nenner hätte etwas mit x zu tun, was von der zugrunde liegenden Rechnung her durch das Einsetzen einer normierten aktualen Unendlichkeit nicht der Fall ist; es in Wahrheit also wenigstens nicht sein muss.

Denn in aktualer Unendlichkeit ausgedrückt entspricht:

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}f(x) \quad = \quad f(\langle x\rangle.\langle 1\rangle) - f(x) \qquad \text{(SN.AbIn.6)}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}x \quad = \quad .\langle 1\rangle \qquad \text{(SN.AbIn.7)}$$

Die Division durch $.\langle 1\rangle$ holt uns schlicht die Differenz im Zähler aus dem unendlich Kleinen wieder ins Endliche. Und das können wir auch durch den entsprechenden unendlich großen Faktor s oder $\langle 1\rangle_1$ erreichen:

$$\Rightarrow \qquad f'(x) \quad = \quad \big(f(x + s^{-1}) - f(x)\big) \cdot s \qquad \text{(SN.AbIn.8)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad f'(x) \quad = \quad (f(\langle x\rangle.\langle 1\rangle) - f(x)) \cdot \langle 1\rangle_1 \qquad \text{(SN.AbIn.9)}$$

Die Definition der Ableitung muss folglich nicht zwingend als Division formuliert werden.

Durch die detaillierte Betrachtung mit aktual unendlichen Zahlen erschließt sich ein genaueres Verständnis.

Beispiele für Ableitungen

Um besser zu verstehen, was genau vor sich geht, wollen wir uns zwei Beispiele betrachten:

Für die Funktion $f(x) = x^2$ ergibt sich:

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{\left(x + s^{-1}\right)^2 - x^2}{s^{-1}} \qquad \text{(SN.AbIn.10)}$$

▼ ausblenden

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{\left(x^2 + 2x \cdot s^{-1} + s^{-2}\right) - x^2}{s^{-1}} \qquad \text{(SN.AbIn.11)}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{2x \cdot s^{-1} + s^{-2}}{s^{-1}} \qquad \text{(SN.AbIn.12)}$$

▲ ausblenden

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = 2x + s^{-1} \qquad \text{(SN.AbIn.13)}$$

Wenn wir also s^{-1} zu Null setzen, dann kommt das übliche Ergebnis $f'(x) = 2x$ heraus.

Für $f(x) = x^3$ ergibt sich:

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{\left(x + s^{-1}\right)^3 - x^3}{s^{-1}} \qquad \text{(SN.AbIn.14)}$$

▼ ausblenden

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{\left(x^3 + 3x^2 \cdot s^{-1} + 3x \cdot s^{-2} + s^{-3}\right) - x^3}{s^{-1}} \qquad \text{(SN.AbIn.15)}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{3x^2 \cdot s^{-1} + 3x \cdot s^{-2} + s^{-3}}{s^{-1}} \qquad \text{(SN.AbIn.16)}$$

▲ ausblenden

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = 3x^2 + 3x \cdot s^{-1} + s^{-2} \qquad \text{(SN.AbIn.17)}$$

Wenn wir also s^{-1} zu Null setzen, dann kommt das übliche Ergebnis $f'(x) = 3x^2$

heraus.

Wir können hieran erkennen, dass die Vorgehensweise mit dem Limes Details der Vorgänge verbirgt.

Welche Funktion ist nach dieser Definition ihre eigene Ableitung?

Wir können tatsächlich recht einfach erkennen, welche **Funktion ihrer eigenen Ableitung gleich** ist. Die Superial-Zahlen führen uns hier zu einer erstaunlichen Entdeckung.

→ Die Integration

Die Integration

← Die Ableitung

In Arbeit ... XXX XXX XXX Integralrechnung XXX XXX XXX XXX XXX

$$[0, k \cdot s[_{\mathbb{S}_N} \quad = \quad \left\{ x \;\middle|\; (\forall q \in [0,k]_{\mathbb{Q}})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall z \in \mathbb{Z})\,\left(\forall z^- \in \mathbb{Z}^-\right) \left[x \quad = \quad \begin{cases} n & \text{falls } q = 0 \\ q \cdot s + z & \text{falls } 0 < q < k \\ k \cdot s + z^- & \text{falls } q = k \end{cases} \right] \right\} \tag{SN.AbIn.18}$$

$$\sum_{i=0}^{s-1} s^{-1} \quad = \quad \sum_{\forall [0,s[_{\mathbb{S}_N}} s^{-1} \quad = \quad 1 \tag{SN.AbIn.19}$$

$$\sum_{i=0}^{k \cdot s-1} s^{-1} \quad = \quad \sum_{\forall [0,k \cdot s[_{\mathbb{S}_N}} s^{-1} \quad = \quad k \tag{SN.AbIn.20}$$

$$\sum_{i=0}^{s-1} c \cdot s^{-1} \quad = \quad \sum_{\forall [0,s[_{\mathbb{S}_N}} c \cdot s^{-1} \quad = \quad c \tag{SN.AbIn.21}$$

$$\sum_{i=0}^{k \cdot s-1} c \cdot s^{-1} \quad = \quad \sum_{\forall [0,k \cdot s[_{\mathbb{S}_N}} c \cdot s^{-1} \quad = \quad k \cdot c \tag{SN.AbIn.22}$$

In Arbeit ... XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

Integration und ganze Superial-Zahlen

Den ganzen Superial-Zahlen begegnen wir, wenn wir uns mit der Umkehrung der oben definierten Ableitung beschäftigen, der Integration:

Bei der Integration addieren wir nämlich all die unendlich vielen und superial kleinen Differenzen des Abstands s^{-1} der Ableitung als superial kleine, feine oder schmale Streifen einer Fläche auf. Diese Streifen müssen wir dann in einer unendlichen Summe durchzählen und aufsummieren.

Zum Einstieg die Formel **SN.AbIn.3** vorab in der neuen Notation:

$$f'(x) \quad := \quad \frac{f(\langle x \rangle . \langle 1 \rangle) - f(x)}{.\langle 1 \rangle} \qquad \text{(SN.AbIn.4)}$$

Wenn im Folgenden *n* Element der Menge aller ganzen Superial-Zahlen $_{Z}$ einschließlich Null und ausschließlich $x\ s^1$ ist, können wir die Integration über folgende Summe ausdrücken:

$$n \quad \in \quad [0; \langle x \rangle_1[\quad \subset \quad \mathbb{S}_Z \qquad \text{(SN.AbIn.23)}$$

$$f(x) \quad = \quad f(0) + \sum_{n \in [0; \langle x \rangle_1[} . \left\langle f'(n) \right\rangle \qquad \text{(SN.AbIn.24)}$$

$$\int_0^x f'(n)\, dn \quad := \quad \sum_{n \in [0; \langle x \rangle_1[} . \left\langle f'(n) \right\rangle \qquad \text{(SN.AbIn.25)}$$

Damit haben wir die vorherige Ableitung wieder rückgängig gemacht, wenn wir eine schlüssige Definition der ganzen Superial-Zahlen $_{Z}$ finden.

Wie könnten ganze Superial-Zahlen nun aussehen? Wir haben es zuvor ja schon angedeutet:

- Die gebrochenen Summanden mit negativer Potenz von *s* sollten Null sein.
- Im endlichen Summanden s^0 sollten sie nur ganze Zahlen haben.
- Die Summanden mit Potenzen von *s* größer Null sollten ganze Zahlen sein, was bedeutet, dass nur Koeffizienten als Faktoren der potenzierten **Primzahlprodukt-Fläche** in Frage kommen, die aus dem Produkt Primzahlen entfernen oder hinzufügen, ohne seine Größenordnung zu verändern.

Faktoren, die aus der Primzahlprodukt-Fläche in diesem Sinne nur Primfaktoren entfernen oder hinzufügen sind zunächst erst einmal ganz klar die rationalen Zahlen. Sie bestehen nur aus endlichen Brüchen von Primfaktoren endlicher Anzahl und Potenz.

In Frage kämen vielleicht noch, wie schon erwähnt, Brüche unendlicher Anzahl von Primfaktoren endlicher Potenz, was zur **Überrationalitätsvermutung** führt, mit der wir uns hier erst später näher beschäftigen wollen.

Beispiele für ganze Superial-Zahlen sind:

$$(\forall a, b \in \mathbb{Q})\, (\forall z \in \mathbb{Z}) \left[\ \langle a \rangle \langle b \rangle \langle z \rangle . \quad \in \quad \mathbb{S}_Z\ \right] \qquad \text{(SN.AbIn.26)}$$

$$\Rightarrow \quad \langle -5 \rangle. \quad \in \quad \mathbb{S}_Z \tag{SN.AbIn.27}$$

$$\Rightarrow \quad \left\langle -\frac{4}{25} \right\rangle \left\langle \frac{3}{2} \right\rangle \langle -5 \rangle. \quad \in \quad \mathbb{S}_Z \tag{SN.AbIn.28}$$

$$\Rightarrow \quad \left\langle \frac{4}{25} \right\rangle \left\langle \frac{3}{2} \right\rangle \langle 5, 2 \rangle. \quad \notin \quad \mathbb{S}_Z \tag{SN.AbIn.29}$$

$$\Rightarrow \quad \left\langle \frac{4}{25} \right\rangle \left\langle \frac{3}{2} \right\rangle \langle 5 \rangle.\langle 1 \rangle \quad \notin \quad \mathbb{S}_Z \tag{SN.AbIn.30}$$

Das vorletzte letzte Beispiel ist übrigens eine negative ganze Superial-Zahl und das letzte eine positive nicht ganze Superial-Zahl, weil die größte Stelle dominant ist. Eine genaue Definition der **ganzen Superial-Zahlen** findet sich in der formalen Entwicklung.

Ganze Superial-Zahlen lassen sich also sinnvoll definieren und bei näherer Betrachtung, die wir später vollziehen, haben diese sehr interessante Eigenschaften und lassen uns Zahlen besser verstehen.

In Arbeit ... XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

→ Die eulersche Zahl e und ihre e-Funktion in der Differentialrechnung

Die eulersche Zahl e und ihre e-Funktion in der Differentialrechnung

← Die Integration

▾ Notizen

- Meine Herleitung der e-Funktion mit Hilfe von Superial-Zahlen stammt aus dem Jahr 2001: siehe Datei "superial zahlen (26).pdf".

Wir können tatsächlich recht einfach erkennen, welche Funktion ihrer eigenen Ableitung gleich ist. Die Superial-Zahlen führen uns hier zu einer erstaunlichen Entdeckung.

Die Definition unserer Ableitung finden wir in Formel **SN.AbIn.4**:

$$f'(x) \quad := \quad \frac{f(\langle x \rangle.\langle 1 \rangle) - f(x)}{.\langle 1 \rangle} \tag{SN.AbIn.4}$$

Soll eine Funktion nun ihre eigene Ableitung sein, dann gilt:

$$f'(x) \quad = \quad f(x) \tag{SN.AbIn.31}$$

$$\Rightarrow \qquad f(x) \quad = \quad \frac{f(\langle x\rangle.\langle 1\rangle) - f(x)}{.\langle 1\rangle} \qquad \text{(SN.AbIn.32)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad f(x)\cdot .\langle 1\rangle \quad = \quad f(\langle x\rangle.\langle 1\rangle) - f(x) \qquad \text{(SN.AbIn.33)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad f(x)\cdot .\langle 1\rangle + f(x) \quad = \quad f(\langle x\rangle.\langle 1\rangle) \qquad \text{(SN.AbIn.34)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad f(x)\cdot (.\langle 1\rangle + 1) \quad = \quad f(\langle x\rangle.\langle 1\rangle) \qquad \text{(SN.AbIn.35)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad f(x)\cdot \langle 1\rangle.\langle 1\rangle \quad = \quad f(\langle x\rangle.\langle 1\rangle) \qquad \text{(SN.AbIn.36)}$$

Nach kurzer Überlegung können wir erraten, dass die Bedingung für unsere Funktion von einer Exponentialfunktion der Basis $\langle 1\rangle.\langle 1\rangle$ erfüllt werden kann, denn der Parameter der Funktion soll sich um eine superial kleine Einheit erhöhen, wenn mit $\langle 1\rangle.\langle 1\rangle$ multipliziert wird. Wir erraten also

$$f(x) \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle 1\rangle^{\langle x\rangle_1} \qquad \text{(SN.AbIn.37)}$$

und zeigen durch Einsetzen der letzten in die vorletzte Formel, dass unsere Vermutung

$$\Rightarrow \qquad \langle 1\rangle.\langle 1\rangle^{\langle x\rangle_1}\cdot \langle 1\rangle.\langle 1\rangle \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle 1\rangle^{\langle\langle x\rangle.\langle 1\rangle\rangle_1} \qquad \text{(SN.AbIn.38)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \langle 1\rangle.\langle 1\rangle^{\langle x\rangle_1+1} \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle 1\rangle^{\langle\langle x\rangle.\langle 1\rangle\rangle_1} \qquad \text{(SN.AbIn.39)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \langle 1\rangle.\langle 1\rangle^{\langle x\rangle\langle 1\rangle.} \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle 1\rangle^{\langle x\rangle\langle 1\rangle.} \qquad \text{(SN.AbIn.40)}$$

richtig ist.

Bei näherer Betrachtung können wir nun aber auch leicht sehen, dass es noch weitere Funktionen ähnlicher Art gibt, die dies auch erfüllen, nämlich für alle y:

$$f_y(x) \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle 1\rangle^{\langle x\rangle\langle y\rangle.} \qquad \text{(SN.AbIn.41)}$$

Daher legen wir zusätzlich fest, dass

$$f_y(0) \quad = \quad 1 \qquad \text{(SN.AbIn.42)}$$

$$\Rightarrow \qquad y \quad = \quad 0 \qquad \text{(SN.AbIn.43)}$$

$$\Rightarrow \qquad f(x) \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle 1\rangle^{\langle x\rangle_1} \qquad \text{(SN.AbIn.44)}$$

sein soll und legen uns damit auf die zuerst gefundene Funktion fest, so wie es auch sonst üblich ist.

Dieses Ergebnis ist in meinen Augen ein ganz bemerkenswertes: Denn wir erhalten eine weitere Definition der natürlichen Exponentialfunktion e^x .

Eine neue Definition der e-Funktion

Wir wissen aus der Mathematik der Differentialrechnung, dass die e-Funktion oder die Exponentialfunktion zur Basis e, der Eulerschen Zahl[1], ihre eigene Ableitung ist.[2]

Mit diesem Wissen ist klar, dass wir eine neue Definition der e-Funktion gefunden haben, die sich aus der neuen Definition der Ableitung unmittelbar ergibt:

$$\boxed{\mathrm{e}_{\mathrm{s}}^x \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle 1\rangle^{\langle x\rangle_1}} \qquad \text{(SN.AbIn.45)}$$

Ich nenne ihre Basis e_{s} , weil ich hier ganz genau abgrenzen möchte. Denn die Basis hängt von der Definition der Ableitung ab, bei der wir s benutzt haben. Würden wir beispielsweise s^2 benutzen, wie **hier gezeigt**, würde sich unsere Basis im Prinzip sehr ähnlich, aber doch anders ergeben.

Wenig verwunderlich ist diese Formel in Form der Limes-Definition bekannt:[3]

▼ ausblenden

$$\mathrm{e} \quad := \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{(SN.AbIn.46)}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{e}^x \quad = \quad \left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^x \qquad \text{(SN.AbIn.47)}$$

▲ ausblenden

$$\Leftrightarrow \qquad \mathrm{e}^x \quad = \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x\cdot n} \qquad \text{(SN.AbIn.48)}$$

Diese im Unendlichen schwer durchschaubare Formulierung haben wir gerade vorstehend in einer Schreibweise mit fundamentalen Symbolen beschreiben. Und werden dies gleich nutzen, um die Zahl e auch im unendlich Kleinen genau zu berechnen.

Drücken wir die e-Funktion explizit mit s oder noch differenzierter mit ω aus, erhalten wir:

$$\Leftrightarrow \qquad \mathrm{e}_{\mathrm{s}}^x \quad = \quad \left(1+\frac{1}{\mathrm{s}}\right)^{x\cdot\mathrm{s}} \qquad \text{(SN.AbIn.49)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \mathrm{e}_{\mathrm{s}}^{x} = \left(1 + \frac{1}{\omega^{\omega}}\right)^{x \cdot \omega^{\omega}} \qquad \text{(SN.AbIn.50)}$$

Wir sehen, dass wir die e-Funktion ganz fundamental mit ω durch die vollständige Induktion[4] definieren können.

Und im Hinblick auf den Beweis der **Primzahlprodukt-Vermutung**, der die vollständige Induktion auf Grundlage des unendlichen Produkts aller endlichen Primzahlen ausdrückt, führen wir die e-Funktion auf die Primzahlen zurück:

$$\omega = \prod_{\forall p \in \mathbb{P}} p \qquad \textbf{(SN.PP.172)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \omega = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \cdots \qquad \textbf{(SN.PP.173)}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{e}_{\mathrm{s}}^{x} = \left(1 + \frac{1}{(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \cdots)^{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \cdots}}\right)^{x \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \cdots)^{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \cdots}} \qquad \text{(SN.AbIn.51)}$$

Dies ist in meinen Augen etwas sehr besonderes und ganz konkret und hat damit einen großen Mehrwert gegenüber der Limes-Definition, zusätzlich zum Perspektivwechsel, wie wir gleich sehen werden. Dadurch wird transparent, wie sich die e-Funktion und damit die Zahl e im und aus dem Unendlichen ergibt.

Die e-Funktion und das Pascalsche Dreieck

Berechnen wir nun spaßeshalber die Funktionswerte im infinitesimalen Bereich, dann erkennen wir das Pascalsche Dreieck:

$$\mathrm{e}_{s}^{:\langle x \rangle} = \langle 1 \rangle . \langle 1 \rangle^{\langle . \langle x \rangle \rangle_1} \qquad \text{(SN.AbIn.52)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \mathrm{e}_{s}^{:\langle x \rangle} = \langle 1 \rangle . \langle 1 \rangle^{x} \qquad \text{(SN.AbIn.53)}$$

$$\mathrm{e}_{s}^{0} = 1 \qquad \text{(SN.AbIn.54)}$$

$$\mathrm{e}_{s}^{:\langle 1 \rangle} = \langle 1 \rangle . \langle 1 \rangle \qquad \text{(SN.AbIn.55)}$$

$$\mathrm{e}_{s}^{:\langle 2 \rangle} = \langle 1 \rangle . \langle 2 \rangle \langle 1 \rangle \qquad \text{(SN.AbIn.56)}$$

$$\mathrm{e}_{s}^{:\langle 3 \rangle} = \langle 1 \rangle . \langle 3 \rangle \langle 3 \rangle \langle 1 \rangle \qquad \text{(SN.AbIn.57)}$$

$$\mathrm{e}_s^{:\langle 4\rangle} = \langle 1\rangle.\langle 4\rangle\langle 6\rangle\langle 4\rangle\langle 1\rangle \quad \text{(SN.AbIn.58)}$$

$$\mathrm{e}_s^{:\langle 5\rangle} = \langle 1\rangle.\langle 5\rangle\langle 10\rangle\langle 10\rangle\langle 5\rangle\langle 1\rangle \quad \text{(SN.AbIn.59)}$$

$$\mathrm{e}_s^{:\langle 6\rangle} = \langle 1\rangle.\langle 6\rangle\langle 15\rangle\langle 20\rangle\langle 15\rangle\langle 6\rangle\langle 1\rangle \quad \text{(SN.AbIn.60)}$$

So bekommen wir einen vom Aussehen her vielleicht etwas unerwarteten Einblick in die infinitesimale Feinstruktur der e-Funktion und ihren Zusammenhang mit den Binomischen Formeln und dem Pascalschen Dreieck.

Die Koeffizienten des Pascalschen Dreiecks sind die Binomialkoeffizienten[5], die wir einmal beispielhaft einsetzen:

$$\mathrm{e}_s^{0} = \binom{0}{0} \quad \text{(SN.AbIn.61)}$$

$$\mathrm{e}_s^{:\langle 1\rangle} = \left\langle\binom{1}{0}\right\rangle.\left\langle\binom{1}{1}\right\rangle \quad \text{(SN.AbIn.62)}$$

$$\mathrm{e}_s^{:\langle 2\rangle} = \left\langle\binom{2}{0}\right\rangle.\left\langle\binom{2}{1}\right\rangle\left\langle\binom{2}{2}\right\rangle \quad \text{(SN.AbIn.63)}$$

$$\mathrm{e}_s^{:\langle 3\rangle} = \left\langle\binom{3}{0}\right\rangle.\left\langle\binom{3}{1}\right\rangle\left\langle\binom{3}{2}\right\rangle\left\langle\binom{3}{3}\right\rangle \quad \text{(SN.AbIn.64)}$$

$$\mathrm{e}_s^{:\langle 4\rangle} = \left\langle\binom{4}{0}\right\rangle.\left\langle\binom{4}{1}\right\rangle\left\langle\binom{4}{2}\right\rangle\left\langle\binom{4}{3}\right\rangle\left\langle\binom{4}{4}\right\rangle \quad \text{(SN.AbIn.65)}$$

Wir können dies allgemeiner mit einer Formel für Binomialkoeffizienten mit dem *über*-Operator[6] beschreiben:

$$\Rightarrow \quad \mathrm{e}_s^{:\langle n\rangle} = \sum_{\forall k\in[0,n]_{\mathbb{N}}} \binom{n}{k} \cdot s^{-k} \quad \text{(SN.AbIn.66)}$$

Nachfolgend beleuchten wir die Berechnung der **Summen der einzelnen Spalten der Binomialkoeffizienten** in einer Nebenrechnung.

Die Summen der einzelnen Spalten der Binomialkoeffizienten:

In dieser Rechnung wollen wir die Summen der Spalten der Binomialkoeffizienten des Pascalschen Dreiecks berechnen. Dazu schauen wir uns an, wie sich die Werte der Binomialkoeffizienten aus der vorherigen Spalte ergeben.

Als Ansatz formulieren wir die altbekannte Regel etwas um, wie sich ein Binomialkoeffizient aus der über ihm gelegenen Zeile als Summe ergibt:[7]

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \tag{SN.AbIn.67}$$

$$\Leftrightarrow \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \tag{SN.AbIn.68}$$

$$\Leftrightarrow \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \tag{SN.AbIn.69}$$

Diese Formel können wir durch Rekursion weiter entwickeln

$$\Leftrightarrow \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \left(\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}\right) \tag{SN.AbIn.70}$$

$$\Leftrightarrow \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k} \tag{SN.AbIn.71}$$

und entdecken, dass wir dies so lange fortführen können, bis wir bei einer Zeile n landen, in der der letzte Summand zu Null wird und ab da verschwindet.

Der erste Summand der Null ist, liegt dann bei Zeile $k-1$ und Spalte k, wie wir sehen,

$$\Leftrightarrow \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1} + \binom{k-1}{k} \, , \tag{SN.AbIn.72}$$

was wir beispielhaft überprüfen mit in der der letzte Summand zu Null wird und ab da verschwindet.

Der erste Summand der Null ist, liegt dann bei Zeile $k-1$ und Spalte k, wie wir sehen,

$$\Rightarrow \quad \binom{n}{2} = \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{1} + \cdots + \binom{1}{1} + \binom{1}{2} \tag{SN.AbIn.73}$$

$$\Leftrightarrow \quad \binom{n}{2} = \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{1} + \cdots$$
$$\cdots + \binom{1}{1} + 0 \ , \qquad \text{(SN.AbIn.74)}$$

und daher bricht die Summe dann ab, sodass wir sie folgendermaßen ganz allgemein mit

$$\Leftrightarrow \quad \binom{n}{k} = \sum_{\forall m \in [k-1, n-1]_{\mathbb{N}}} \binom{m}{k-1} \qquad \text{(SN.AbIn.75)}$$

ausdrücken können.

Die Summe der 0-ten Spalte ist schlichtweg:

$$\Rightarrow \quad \binom{n}{0} = 1 \qquad \text{(SN.AbIn.76)}$$

(Hier können wir Ähnlichkeiten mit dem -1-Operator der Operialtheorie erahnen.)
Dies ist die Konstante 1.

Die Summe der 1-ten Spalte ist dann das Zählen:

$$\Rightarrow \quad \binom{n}{1} = \sum_{\forall m \in [0, n-1]_{\mathbb{N}}} \binom{m}{0} \qquad \text{(SN.AbIn.77)}$$

$$\sum_{\forall m \in [0, n-1]_{\mathbb{N}}} \binom{m}{0} = [0_{-1} +]\ 1_0 + 1_1 + 1_2 + 1_3 + \cdots + 1_{n-1} \qquad \text{(SN.AbIn.78)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\forall m \in [0, n-1]_{\mathbb{N}}} \binom{m}{0} = n \qquad \text{(SN.AbIn.79)}$$

(Hier können wir Ähnlichkeiten mit dem 0-Operator, dem Zähloperator, der Operialtheorie sehen.)
Dies ist das Zählen bis zur Zeilennummer.

Die Summe der 2-ten Spalte entspricht also der Gaußschen Summenformel[8] und diese können wir geschlossen ausdrücken mit:

$$\Rightarrow \quad \binom{n}{2} = \sum_{\forall m \in [1, n-1]_{\mathbb{N}}} \binom{m}{1} \qquad \text{(SN.AbIn.80)}$$

$$\sum_{\forall m \in [1,n-1]_{\mathbb{N}}} \binom{m}{1} = [0_0 +]\ 1_1 + 2_2 + 3_3 + 4_4 + 5_5 + \cdots \cdots + m_{n-1} \quad \text{(SN.AbIn.81)}$$

$$\sum_{\forall m \in [1,n-1]_{\mathbb{N}}} \binom{m}{1} = [0_0 +]\ 1_1 + 2_2 + 3_3 + 4_4 + 5_5 + \cdots \cdots + (n-1)_{n-1} \quad \text{(SN.AbIn.82)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\forall m \in [1,n-1]_{\mathbb{N}}} \binom{m}{1} = \frac{(n-1)^2 + (n-1)}{2} \quad \text{(SN.AbIn.83)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\forall m \in [1,n-1]_{\mathbb{N}}} \binom{m}{1} = \frac{(n^2 - 2n + 1) + (n-1)}{2} \quad \text{(SN.AbIn.84)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\forall m \in [1,n-1]_{\mathbb{N}}} \binom{m}{1} = \frac{n^2 - n}{2} \quad \text{(SN.AbIn.85)}$$

Dies entspricht der modifizierten Gaußschen Summenformel, die wir schon aus Formel **BO.Ein.NE.74**.

Die Summe der 3-ten Spalte entspricht also der Summe der ersten XXX Quadratzahlen und diese können wir geschlossen ausdrücken mit:

$$\Rightarrow \quad \binom{n}{3} = \sum_{\forall m \in [2,n-1]_{\mathbb{N}}} \binom{m}{2} \quad \text{(SN.AbIn.86)}$$

$$\sum_{\forall m \in [2,n-1]_{\mathbb{N}}} \binom{m}{2} = [0_1 +]\ 1_2 + 3_3 + 6_4 + 10_5 + 15_6 + \cdots \cdots + \left(\frac{m^2 - m}{2}\right)_{n-1} \quad \text{(SN.AbIn.87)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\forall m \in [2,n-1]_{\mathbb{N}}} \binom{m}{2} = \left[\left(\frac{1^2 - 1}{2}\right)_1 +\right] \left(\frac{2^2 - 2}{2}\right)_2 + \left(\frac{3^2 - 3}{2}\right)_3 + \left(\frac{4^2 - 4}{2}\right)_4 + \left(\frac{5^2 - 5}{2}\right)_5 + \left(\frac{6^2 - 6}{2}\right)_6 + \cdots \cdots + \left(\frac{m^2 - m}{2}\right)_{n-1} \quad \text{(SN.AbIn.88)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\forall m \in [2,n-1]_{\mathbb{N}}} \binom{m}{2} = \frac{1}{2} \cdot \Big(\big(1^2 - 1\big)_1 + \big(2^2 - 2\big)_2 + \big(3^2 - 3\big)_3 + \big(4^2 - 4\big)_4 + \big(5^2 - 5\big)_5 + \big(6^2 - 6\big)_6 + \cdots \cdots + \big(m^2 - m\big)_{n-1} \Big) \tag{SN.AbIn.89}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\forall m \in [2,n-1]_{\mathbb{N}}} \binom{m}{2} = \frac{1}{2} \cdot \Big(\big(1_1^2 + 2_2^2 + 3_3^2 + 4_4^2 + 5_5^2 + 6_6^2 + \cdots + m_{n-1}^2\big) - \big(1_1 + 2_2 + 3_3 + 4_4 + 5_5 + 6_6 + \cdots + m_{n-1}\big) \Big) \tag{SN.AbIn.90}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\forall m \in [2,n-1]_{\mathbb{N}}} \binom{m}{2} = \frac{1}{2} \cdot \Big(\big(1_1^2 + 2_2^2 + 3_3^2 + 4_4^2 + 5_5^2 + 6_6^2 + \cdots + (n-1)_{n-1}^2\big) - \big(1_1 + 2_2 + 3_3 + 4_4 + 5_5 + 6_6 + \cdots + (n-1)_{n-1}\big) \Big) \tag{SN.AbIn.91}$$

Die Summe der ersten x Quadratzahlen können wir folgendermaßen ausdrücken:[9]

$$1_1^2 + 2_2^2 + 3_3^2 + 4_4^2 + 5_5^2 + 6_6^2 + \cdots x_x^2 \tag{SN.AbIn.92}$$

$$= \frac{x \cdot (x+1) \cdot (2x+1)}{6} \tag{SN.AbIn.93}$$

$$= \frac{(x^2 + x) \cdot (2x+1)}{6} \tag{SN.AbIn.94}$$

$$= \frac{2x^3 + x^2 + 2x^2 + x}{6} \tag{SN.AbIn.95}$$

$$= \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6} \tag{SN.AbIn.96}$$

Hierin können wir nun x durch $n-1$ ersetzen, um das Ergebnis weiter zu nutzen:

$$\frac{2x^3+3x^2+x}{6} \tag{SN.AbIn.97}$$

$$= \frac{2\cdot(n-1)^3+3\cdot(n-1)^2+(n-1)}{6} \tag{SN.AbIn.98}$$

$$= \frac{2\cdot(n^3-3n^2+3n-1)+3\cdot(n-1)^2+(n-1)}{6} \tag{SN.AbIn.99}$$

$$= \frac{2\cdot(n^3-3n^2+3n-1)+3\cdot(n^2-2n+1)+(n-1)}{6} \tag{SN.AbIn.100}$$

$$= \frac{2n^3-6n^2+6n-2+3n^2-6n+3+n-1}{6} \tag{SN.AbIn.101}$$

$$= \frac{2n^3-3n^2+n}{6} \tag{SN.AbIn.102}$$

Das Ergebnis setzen wir in unsere vorherige Gesamtsumme für die Reihe der Quadratzahlen ein und für die Reihe der natürlichen Zahlen die Gaußsche Summe:

$$\Rightarrow \sum_{\forall m\in[2,n-1]_{\mathbb{N}}} \binom{m}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{2n^3-3n^2+n}{6}\right) - \left(\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}\right)\right) \tag{SN.AbIn.103}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\forall m\in[2,n-1]_{\mathbb{N}}} \binom{m}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{2n^3-3n^2+n}{6}\right) - \left(\frac{n^2-n}{2}\right)\right) \tag{SN.AbIn.104}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\forall m\in[2,n-1]_{\mathbb{N}}} \binom{m}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{2n^3-3n^2+n}{6}\right) - \left(\frac{3n^2-3n}{6}\right)\right) \tag{SN.AbIn.105}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\forall m\in[2,n-1]_{\mathbb{N}}} \binom{m}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2n^3-6n^2+4n}{6} \tag{SN.AbIn.106}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\forall m\in[2,n-1]_{\mathbb{N}}} \binom{m}{2} = \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6} \qquad \text{(SN.AbIn.107)}$$

Die Berechnung weiterer Anteile erspare ich mir für den Moment.

Aber wir können erahnen und logischerweise sogar absolut sicher sein, dass sich für den Summanden mit der höchsten Potenz nach und nach die Glieder der Taylorreihe(Verweis) ergeben, die summiert zur Eulerschen Zahl e führen.

Wie berechnet sich daraus e_s

Notizen

- Können wir hieraus über die Definition des Über-Operators der Binomialkoeffizienten durch Fakultäten etwas über die Fakultät von s lernen?
- **Das kann so nicht stimmen, oder?** Wir können genau sagen, wieviele Summanden die Summe oder Reihe hat, die den endlichen Anteil von e_s darstellt. Es sind genau $\frac{1}{2}s + 1$, weil s eine gerade Zahl ist und damit der größte Wert im Pascalschen Dreieck bei dieser Potenz liegt. Danach werden die Werte im Pascalschen Dreieck kleiner, so, dass ihre inneren Potenzen nicht mehr bis zum Endlichen reichen, denke ich.

Beim Übergang zum endlichen Exponenten Eins finden offensichtlich Überträge auf höhere Stellen des **superialen Stellenwertsystems** statt:

$$e_s = e_s^1 = e_s^{\langle s\rangle} = \langle 1\rangle.\langle 1\rangle^s \qquad \text{(SN.AbIn.108)}$$

$$\Leftrightarrow \quad e_s = \left\langle\binom{s}{0}\right\rangle.\left\langle\binom{s}{1}\right\rangle\left\langle\binom{s}{2}\right\rangle\left\langle\binom{s}{3}\right\rangle\cdots \\ \cdots\left\langle\binom{s}{s-2}\right\rangle\left\langle\binom{s}{s-1}\right\rangle\left\langle\binom{s}{s}\right\rangle_{-s} \qquad \text{(SN.AbIn.109)}$$

$$\Leftrightarrow \quad e_s = \langle 1\rangle.\langle s\rangle\left\langle\frac{s^2 - s}{2}\right\rangle\left\langle\frac{s^3 - 3s^2 + 2s}{6}\right\rangle\cdots \\ \cdots\left\langle\frac{s^3 - 3s^2 + 2s}{6}\right\rangle\left\langle\frac{s^2 - s}{2}\right\rangle\langle s\rangle\langle 1\rangle_{-s} \qquad \text{(SN.AbIn.110)}$$

$$\Leftrightarrow \quad e_s = \left\langle 1 + 1 + \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{6} + \cdots\right\rangle. \\ \left\langle -\frac{1}{2} - \frac{3\cdot 1^2}{6} + \cdots\right\rangle\left\langle\frac{2}{6} + \cdots\right\rangle\cdots \\ \cdots\left\langle\cdots + \frac{1^3}{6}\right\rangle\left\langle\cdots - \frac{3\cdot 1^2}{6}\right\rangle \\ \left\langle\cdots + \frac{2}{6} + \frac{1^2}{2}\right\rangle\left\langle -\frac{1}{2}\right\rangle\langle 1\rangle\langle 0\rangle\langle 1\rangle_{-s}$$

(SN.AbIn.111)

Beispielrechnung zur Ableitung mit s^2:

Exemplarisch möchte ich einmal die $\mathfrak{e}$-Funktion anhand einer etwas variierten Ableitung definieren, um zu sehen, wie sich dies eventuell auf die Basis der sich so ergebenden $\mathfrak{e}$-Funktion auswirkt.

Die Definition unserer ursprünglichen Ableitung finden wir in Formel **SN.AbIn.4** und ändern die dortige Differenz von s auf s^2:

$$f'(x) \quad := \quad \frac{f(\langle x\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle) - f(x)}{.\langle 0\rangle\langle 1\rangle} \qquad \text{(SN.AbIn.112)}$$

Soll eine Funktion nun ihre eigene Ableitung sein, dann gilt:

$$f'(x) \quad = \quad f(x) \qquad \text{(SN.AbIn.113)}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \quad = \quad \frac{f(\langle x\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle) - f(x)}{.\langle 0\rangle\langle 1\rangle} \qquad \text{(SN.AbIn.114)}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)\cdot .\langle 0\rangle\langle 1\rangle \quad = \quad f(\langle x\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle) - f(x) \qquad \text{(SN.AbIn.115)}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)\cdot .\langle 0\rangle\langle 1\rangle + f(x) \quad = \quad f(\langle x\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle) \qquad \text{(SN.AbIn.116)}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)\cdot (.\langle 0\rangle\langle 1\rangle + 1) \quad = \quad f(\langle x\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle) \qquad \text{(SN.AbIn.117)}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)\cdot \langle 1\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle \quad = \quad f(\langle x\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle) \qquad \text{(SN.AbIn.118)}$$

Nach kurzer Überlegung können wir erraten, dass die Bedingung für unsere Funktion von einer Exponentialfunktion der Basis $\langle 1\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle$ erfüllt werden kann, denn der Parameter der Funktion soll sich um eine superial kleine Einheit erhöhen, wenn mit $\langle 1\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle$ multipliziert wird. Wir erraten also

$$f(x) \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle^{\langle x\rangle_2} \qquad \text{(SN.AbIn.119)}$$

und zeigen durch Einsetzen der letzten in die vorletzte Formel, dass unsere Vermutung

$$\Rightarrow \qquad \langle 1\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle^{\langle x\rangle_2} \cdot \langle 1\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle^{\langle\langle x\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle\rangle_2} \qquad \text{(SN.AbIn.120)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \langle 1\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle^{\langle x\rangle_2+1} \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle^{\langle\langle x\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle\rangle_2} \qquad \text{(SN.AbIn.121)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \langle 1\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle^{\langle x\rangle\langle 0\rangle\langle 1\rangle.} \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle^{\langle x\rangle\langle 0\rangle\langle 1\rangle.} \qquad \text{(SN.AbIn.122)}$$

richtig ist.

Bei näherer Betrachtung können wir nun aber auch leicht sehen, dass es noch weitere Funktionen ähnlicher Art gibt, die dies auch erfüllen, nämlich für alle y:

$$f_y(x) \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle^{\langle x\rangle\langle 0\rangle\langle y\rangle.} \qquad \text{(SN.AbIn.123)}$$

Daher legen wir zusätzlich fest, dass

$$f_y(0) \quad = \quad 1 \qquad \text{(SN.AbIn.124)}$$

$$\Rightarrow \qquad y \quad = \quad 0 \qquad \text{(SN.AbIn.125)}$$

$$\Rightarrow \qquad f(x) \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle^{\langle x\rangle_2} \qquad \text{(SN.AbIn.126)}$$

sein soll und legen uns damit auf die zuerst gefundene Funktion fest, so wie es auch sonst üblich ist.

Auf die Weise ergibt sich für die e-Funktion:

$$\mathrm{e}_{s^2}^{x} \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle^{\langle x\rangle_2} \qquad \text{(SN.AbIn.127)}$$

Nun stellt sich die Frage, ob die Basis unserer sich hierdurch ergebenden e-Funktion auch e_s ist, oder ein davon abweichendes e_2.

Berechnen wir nun spaßeshalber die Funktionswerte im infinitesimalen Bereich, dann erkennen wir das Pascalsche Dreieck:

$$\mathrm{e}_{s^2}^{\langle x\rangle_{-2}} \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle 0\rangle\langle 1\rangle^{\langle\langle x\rangle_{-2}\rangle_2} \qquad \text{(SN.AbIn.128)}$$

$$\Leftrightarrow \quad e_{s^2}^{\langle x \rangle_{-2}} = \langle 1 \rangle . \langle 0 \rangle \langle 1 \rangle^x \qquad \text{(SN.AbIn.129)}$$

$$e_{s^2}^{0} = 1 \qquad \text{(SN.AbIn.130)}$$

$$e_{s^2}^{\langle 1 \rangle_{-2}} = \langle 1 \rangle . \langle 0 \rangle \langle 1 \rangle \qquad \text{(SN.AbIn.131)}$$

$$e_{s^2}^{\langle 2 \rangle_{-2}} = \langle 1 \rangle . \langle 0 \rangle \langle 2 \rangle \langle 0 \rangle \langle 1 \rangle \qquad \text{(SN.AbIn.132)}$$

$$e_{s^2}^{\langle 3 \rangle_{-2}} = \langle 1 \rangle . \langle 0 \rangle \langle 3 \rangle \langle 0 \rangle \langle 3 \rangle \langle 0 \rangle \langle 1 \rangle \qquad \text{(SN.AbIn.133)}$$

$$e_{s^2}^{\langle 4 \rangle_{-2}} = \langle 1 \rangle . \langle 0 \rangle \langle 4 \rangle \langle 0 \rangle \langle 6 \rangle \langle 0 \rangle \langle 4 \rangle \langle 0 \rangle \langle 1 \rangle \qquad \text{(SN.AbIn.134)}$$

$$e_{s^2}^{\langle 5 \rangle_{-2}} = \langle 1 \rangle . \langle 0 \rangle \langle 5 \rangle \langle 0 \rangle \langle 10 \rangle \langle 0 \rangle \langle 10 \rangle \langle 0 \rangle \langle 5 \rangle \langle 0 \rangle \langle 1 \rangle \qquad \text{(SN.AbIn.135)}$$

$$e_{s^2}^{\langle 6 \rangle_{-2}} = \langle 1 \rangle . \langle 0 \rangle \langle 6 \rangle \langle 0 \rangle \langle 15 \rangle \langle 0 \rangle \langle 20 \rangle \langle 0 \rangle \langle 15 \rangle \langle 0 \rangle \langle 6 \rangle \langle 0 \rangle \langle 1 \rangle \qquad \text{(SN.AbIn.136)}$$

So bekommen wir einen vom Aussehen her vielleicht etwas unerwarteten Einblick in die infinitesimale Feinstruktur der e-Funktion und ihren Zusammenhang mit den Binomischen Formeln und dem Pascalschen Dreieck.

Beim Übergang zum endlichen Exponenten Eins finden offensichtlich Überträge auf höhere Stellen des superialen Stellenwertsystems statt:

$$e_{s^2} = e_{s^2}^{1} = e_{s^2}^{\langle s^2 \rangle_{-2}} = \langle 1 \rangle . \langle 0 \rangle \langle 1 \rangle^{s^2} \qquad \text{(SN.AbIn.137)}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad e_s = {} & \left\langle \binom{s^2}{0} \right\rangle . \langle 0 \rangle \left\langle \binom{s^2}{1} \right\rangle \langle 0 \rangle \left\langle \binom{s^2}{2} \right\rangle \\ & \langle 0 \rangle \left\langle \binom{s^2}{3} \right\rangle \cdots \\ & \cdots \langle 0 \rangle \left\langle \binom{s^2}{s^2 - 2} \right\rangle \langle 0 \rangle \left\langle \binom{s^2}{s^2 - 1} \right\rangle \\ & \langle 0 \rangle \left\langle \binom{s^2}{s^2} \right\rangle_{-s^2} \end{aligned} \qquad \text{(SN.AbIn.138)}$$

$$\Leftrightarrow \quad e_s = \langle 1 \rangle . \langle 0 \rangle \left\langle s^2 \right\rangle \langle 0 \rangle \left\langle \frac{s^4 - s^2}{2} \right\rangle \langle 0 \rangle \left\langle \frac{s^6 - 3s^4 + 2s^2}{6} \right\rangle \cdots \cdots \left\langle \frac{s^6 - 3s^4 + 2s^2}{6} \right\rangle \langle 0 \rangle \left\langle \frac{s^4 - s^2}{2} \right\rangle \langle 0 \rangle \left\langle s^2 \right\rangle \langle 0 \rangle \langle 1 \rangle_{-s^2} \tag{SN.AbIn.139}$$

$$\Leftrightarrow \quad e_s = \left\langle 1 + 1 + \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{6} + \cdots \right\rangle . \langle 0 \rangle \left\langle -\frac{1}{2} - \frac{3 \cdot 1^2}{6} + \cdots \right\rangle \langle 0 \rangle \left\langle \frac{2}{6} + \cdots \right\rangle \cdots \cdots \left\langle \cdots + \frac{1^3}{6} \right\rangle \langle 0 \rangle \left\langle \cdots - \frac{3 \cdot 1^2}{6} \right\rangle \langle 0 \rangle \left\langle \cdots + \frac{2}{6} + \frac{1^2}{2} \right\rangle \langle 0 \rangle \left\langle -\frac{1}{2} \right\rangle \langle 0 \rangle \langle 1 \rangle \langle 0 \rangle \langle 0 \rangle \langle 0 \rangle \langle 1 \rangle_{-s^2} \tag{SN.AbIn.140}$$

Wir können hier erkennen, dass wir, trotz der feineren Auflösung der Ableitung keinen Informationsgewinn erzielen. In den ungeraden Potenzen von s reißen einfach Lücken auf, die nichts zusätzliches enthalten. Daran können wir erkennen, dass die superiale Einheit s gerade die optimale Auflösung für Differentiation in diesem Kontext ist.

Hier können wir nun erkennen und logischerweise sogar absolut sicher sein, dass sich im Endlichen die Taylorreihe(Verweis) zur Eulerschen Zahl e ergibt.

$$\Leftrightarrow \quad e_s = \left\langle \sum_{\forall k \in \mathbb{N}} \frac{1^k}{k!} \right\rangle . \left\langle -\frac{1}{2} - \frac{3 \cdot 1^2}{6} + \cdots \right\rangle \left\langle \frac{2}{6} + \cdots \right\rangle \cdots \cdots \left\langle \cdots + \frac{1^3}{6} \right\rangle \left\langle \cdots - \frac{3 \cdot 1^2}{6} \right\rangle \left\langle \cdots + \frac{2}{6} + \frac{1^2}{2} \right\rangle \left\langle -\frac{1}{2} \right\rangle \langle 1 \rangle \langle 0 \rangle \langle 1 \rangle_{-s} \tag{SN.AbIn.141}$$

Wir sehen nun auch, dass die Eulersche Zahl e aktual unendlich viele aktual unendlich kleine Anteile hat, die nicht Null sind und damit eben nicht verschwinden. Denn es ist schlichtweg unmöglich die Ableitung mit einer Differenz zu definieren, die wirklich Null ist! Denn die Differenz muss positiv und kann nicht Null sein, damit sie Sinn macht und nicht undefiniert wird.

Was passiert, wenn wir die Differenz kleiner machen, sehen wir in der nachfolgenden **Beispielrechnung zur Ableitung** mit s^2 anstatt mit s, wie oben definiert. Die aktual unendliche Anzahl an aktual unendlich kleinen Summanden bleibt gleich, auch, wenn die Werte der Summanden kleiner werden.

Strukturell gewinnen wir nichts, wenn wir die Differenz kleiner machen. Es ergeben sich nur Lücken, deren Werte Null sind. Die Summanden ungleich Null bleiben, solange unsere Differenz größer als Null ist. Und das muss sie ja. Das ist Fakt.

Nur durch eine Differenz, die unendlich klein ist, können wir erreichen, dass die Potenzanteile der Differenz in sich nicht überlappende unendliche Größenskalen zerfallen und so das richtige Ergebnis der Rechnung im Endlichen erreicht wird.

Der Ansatz mit dem Limes hat den Charm, dass wir uns scheinbar nicht oder wenig mit den unendlich kleinen Details der Rechnung auseinander setzen müssen.

Aber ich glaube, der Limes-Ansatz hat auf der einen Seite seine Berechtigung, weil er Vorteile in sich trägt, und ist auf der anderen Seite auch ein Trugschluss. Denn gerade diese Details sind sehr interessant sowie erkenntnisreich und lassen erahnen und auch sichtbar werden, was vor sich geht; wie das Räderwerk des Endlichen mit dem unendlich Kleinen und dem unendlich Großen ineinander greift.

Ohne die Erkenntnis dieses Räderwerks wäre ich wohl nie auf die **Primzahlprodukt-Vermutung** gestoßen und schließlich auf ihren Beweis gekommen, der uns neue tiefe arithmetische Einblicke ins Unendliche, in die vollständige Induktion, die Primzahlen und die Primzahlverteilung, gewährt.

In meinen Augen offenbart dieses Räderwerk, dass die Eulersche Zahl e keine rein endliche Zahl sein kann. Sie ist nicht einmal eine Superial-Zahl der hier entwickelten 1. Ordnung, also ein Element von $\mathbb{S}$, weil sie Summanden mit aktual unendlich kleiner Potenz von s in sich trägt. Es ist schlichtweg unmöglich, sie so zu definieren, dass sie die Ableitungsbedingung erfüllt, und keine unendlich kleinen Summanden enthält. Desto kleiner wir die Differenz, die ihr zu Grunde liegt, machen, umso höher wird irgendwann die unendliche Ordnung, die wir benötigen, die Eulersche Zahl zu definieren, ohne, dass wir einen Informationsgewinn haben.

Rein endlich werden kann das Ergebnis, bei genauer Betrachtung, hingegen nicht. Der Limes macht es uns halt einfacher, die tieferen Details nicht zu sehen.

Die „transzendente“ Zahl e gehört dementsprechend nicht zu den rein endlichen Zahlen. Sie ist keine irrationale Zahl in dem Sinne, dass sie nicht durch einen Bruch darstellbar ist, aber ausschließlich endliche Summanden enthält.

Ich rege also an, dass wir den Begriff der Transzendenz, und sicherheitshalber auch den der Irrationalität, wobei ich auf die **Überrationalitätsvermutung** hinweisen möchte, in diesem Sinne tiefer überdenken.

→ Die Quadratur des Kreises – von der eulerschen Zahl e zu π

Die Quadratur des Kreises – von der eulerschen Zahl e zu π

← Die eulersche Zahl e und ihre e-Funktion in der Differentialrechnung

▾ Notizen

Wo Pi noch vorkommt

• Pi ergibt sich über Integration aus dem Pascalschen Dreieck sehr ähnlich wie die Berechnung von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi\cdot x}$ im Zusammenhang mit Sinus und Cosinus: Siehe **Manon Bischoff – Sir Isaac Newton fand Pi im pascalschen Dreieck**.

XXX XXX XXX XXX XXX XXX

$$\mathrm{e}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{i}\cdot x} = \langle 1\rangle.\langle 1\rangle^{\mathrm{i}\cdot x\cdot \mathrm{s}} \qquad \text{(SN.AbIn.QK.1)}$$

$$\mathrm{e}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{i}\cdot x} = \langle 1\rangle.\langle 1\rangle^{\langle \mathrm{i}\cdot x\rangle_1} \qquad \text{(SN.AbIn.QK.2)}$$

$$\mathrm{e}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{i}\cdot x} := \cos_{\mathrm{s}}(x) + \mathrm{i}\cdot \sin_{\mathrm{s}}(x) \qquad \text{(SN.AbIn.QK.3)}$$

XXX XXX XXX XXX XXX XXX

$$\mathrm{e}_{s}^{.\langle \mathrm{i}\cdot x\rangle} = \langle 1\rangle.\langle 1\rangle^{\langle .\langle \mathrm{i}\cdot x\rangle\rangle_1} \qquad \text{(SN.AbIn.QK.4)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}_{s}^{.\langle \mathrm{i}\cdot x\rangle} = \langle 1\rangle.\langle 1\rangle^{\mathrm{i}\cdot x} \qquad \text{(SN.AbIn.QK.5)}$$

XXX XXX XXX XXX XXX XXX

$$(x+y)^{\alpha} = \sum_{\forall k\in\mathbb{N}_\infty} \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k} y^{k} \qquad \text{(SN.AbIn.QK.6)}$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \qquad \text{(SN.AbIn.QK.7)}$$

XXX XXX XXX XXX XXX XXX

$$x = 1 \qquad \text{(SN.AbIn.QK.8)}$$

$$y = .\langle 1\rangle = \mathrm{s}^{-1} \qquad \text{(SN.AbIn.QK.9)}$$

$$\alpha = \mathrm{i}\cdot x \qquad \text{(SN.AbIn.QK.10)}$$

$$\Rightarrow \quad (1+.\langle 1\rangle\ )^{\alpha} = \sum_{\forall k\in XXX\mathbb{N}_\infty} \binom{\alpha}{k} 1^{\alpha-k}\langle 1\rangle_{-1}^{k} \qquad \text{(SN.AbIn.QK.11)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle 1\rangle.\langle 1\rangle^{\alpha} = \sum_{\forall k\in XXX\mathbb{N}_\infty} \binom{\alpha}{k} \langle 1\rangle_{-k} \qquad \text{(SN.AbIn.QK.12)}$$

(SN.AbIn.QK.13)

$$\Leftrightarrow \quad \langle 1\rangle.\langle 1\rangle^{\alpha} = \sum_{\forall k \in XXX\mathbb{N}_\infty} \left\langle \binom{\alpha}{k} \right\rangle_{-k}$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad \text{(SN.AbIn.QK.14)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{(\alpha-0)(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!} \quad \text{(SN.AbIn.QK.15)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\prod_{\forall j \in [0,k-1]_{\mathbb{N}_\infty}} (\alpha - j)}{k!} \quad \text{(SN.AbIn.QK.16)}$$

XXX XXX XXX XXX XXX XXX

$$(\alpha-0) = \alpha \quad \text{(SN.AbIn.QK.17)}$$

$$(\alpha-0)(\alpha-1) = (\alpha)(\alpha-1) \quad \text{(SN.AbIn.QK.18)}$$

$$= (\alpha)(\alpha-1) \quad \text{(SN.AbIn.QK.19)}$$

$$= \alpha^2 - \alpha \quad \text{(SN.AbIn.QK.20)}$$

$$\left(\alpha^2-\alpha\right)(\alpha-2) = \alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha^2 + 2\alpha \quad \text{(SN.AbIn.QK.21)}$$

$$= \alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha \quad \text{(SN.AbIn.QK.22)}$$

$$\left(\alpha^3-3\alpha^2+2\alpha\right)(\alpha-3) = \alpha^4 - 3\alpha^3 + 2\alpha^2 - 3\alpha^3 + 9\alpha^2 - 6\alpha \quad \text{(SN.AbIn.QK.23)}$$

$$= \alpha^4 - 6\alpha^3 + 11\alpha^2 - 6\alpha \quad \text{(SN.AbIn.QK.24)}$$

$$\left(\alpha^4-6\alpha^3+11\alpha^2-6\alpha\right)(\alpha-4) = \alpha^5 - 6\alpha^4 + 11\alpha^3 - 6\alpha^2 - 4\alpha^4 + 24\alpha^3 - 44\alpha^2 + 24\alpha \quad \text{(SN.AbIn.QK.25)}$$

$$= \alpha^5 - 10\alpha^4 + 35\alpha^3 - 50\alpha^2 + 24\alpha \quad \text{(SN.AbIn.QK.26)}$$

XXX XXX XXX XXX XXX XXX

$$e_s^0 \quad = \quad 1 \qquad \text{(SN.AbIn.QK.27)}$$

$$e_s^{\cdot\langle i\rangle} \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle i\rangle \qquad \text{(SN.AbIn.QK.28)}$$

$$e_s^{\cdot\langle 2i\rangle} \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle 2i\rangle\langle 1\rangle \qquad \text{(SN.AbIn.QK.29)}$$

$$e_s^{\cdot\langle 3i\rangle} \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle 3i\rangle\langle 3\rangle\langle 1\rangle \qquad \text{(SN.AbIn.QK.30)}$$

$$e_s^{\cdot\langle 4i\rangle} \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle 4i\rangle\langle 6\rangle\langle 4\rangle\langle 1\rangle \qquad \text{(SN.AbIn.QK.31)}$$

$$e_s^{\cdot\langle 5i\rangle} \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle 5i\rangle\langle 10\rangle\langle 10\rangle\langle 5\rangle\langle 1\rangle \qquad \text{(SN.AbIn.QK.32)}$$

$$e_s^{\cdot\langle 6i\rangle} \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle 6i\rangle\langle 15\rangle\langle 20\rangle\langle 15\rangle\langle 6\rangle\langle 1\rangle \qquad \text{(SN.AbIn.QK.33)}$$

XXX XXX XXX XXX XXX XXX

$$e_s^0 \quad = \quad \binom{0}{0} \qquad \text{(SN.AbIn.QK.34)}$$

$$e_s^{\cdot\langle 1\rangle} \quad = \quad \left\langle\binom{1}{0}\right\rangle.\left\langle\binom{1}{1}\right\rangle \qquad \text{(SN.AbIn.QK.35)}$$

$$e_s^{\cdot\langle 2\rangle} \quad = \quad \left\langle\binom{2}{0}\right\rangle.\left\langle\binom{2}{1}\right\rangle\left\langle\binom{2}{2}\right\rangle \qquad \text{(SN.AbIn.QK.36)}$$

$$e_s^{\cdot\langle 3\rangle} \quad = \quad \left\langle\binom{3}{0}\right\rangle.\left\langle\binom{3}{1}\right\rangle\left\langle\binom{3}{2}\right\rangle\left\langle\binom{3}{3}\right\rangle \qquad \text{(SN.AbIn.QK.37)}$$

$$e_s^{\cdot\langle 4\rangle} \quad = \quad \left\langle\binom{4}{0}\right\rangle.\left\langle\binom{4}{1}\right\rangle\left\langle\binom{4}{2}\right\rangle\left\langle\binom{4}{3}\right\rangle\left\langle\binom{4}{4}\right\rangle \qquad \text{(SN.AbIn.QK.38)}$$

XXX XXX XXX XXX XXX XXX

$$e_s \quad = \quad e_s^1 \quad = \quad e_s^{\cdot\langle s\rangle} \quad = \quad \langle 1\rangle.\langle 1\rangle^s \qquad \text{(SN.}$$

$$\Leftrightarrow \quad e_s = \left\langle \binom{s}{0} \right\rangle . \left\langle \binom{s}{1} \right\rangle \left\langle \binom{s}{2} \right\rangle \left\langle \binom{s}{3} \right\rangle \cdots$$
$$\cdots \left\langle \binom{s}{s-2} \right\rangle \left\langle \binom{s}{s-1} \right\rangle \left\langle \binom{s}{s} \right\rangle_{-s} \quad \text{(SN.}$$

$$\Leftrightarrow \quad e_s = \langle 1 \rangle . \langle s \rangle \left\langle \frac{s^2 - s}{2} \right\rangle \left\langle \frac{s^3 - 3s^2 + 2s}{6} \right\rangle \cdots$$
$$\cdots \left\langle \frac{s^3 - 3s^2 + 2s}{6} \right\rangle \left\langle \frac{s^2 - s}{2} \right\rangle \langle s \rangle \langle 1 \rangle_{-s} \quad \text{(SN.}$$

$$\Leftrightarrow \quad e_s^i = \left\langle 1 + i - \frac{1^2}{2} - i\frac{1^3}{6} + \frac{1^4}{24} - \cdots \right\rangle .$$
$$\left\langle X - \frac{1}{2} - \frac{3 \cdot 1^2}{6} + \cdots \right\rangle \left\langle X\frac{2}{6} + \cdots \right\rangle \cdots \quad \text{(SN.}$$
$$\cdots \left\langle X \cdots + \frac{1^3}{6} \right\rangle \left\langle X \cdots - \frac{3 \cdot 1^2}{6} \right\rangle$$
$$\left\langle X \cdots + \frac{2}{6} + \frac{1^2}{2} \right\rangle \left\langle X - \frac{1}{2} \right\rangle \langle X1 \rangle \langle X0 \rangle \langle X1 \rangle_{-s}$$

$$\Leftrightarrow \quad e_s^{i \cdot x} = \left\langle 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \right\rangle .$$
$$\left\langle X - \frac{1}{2} - \frac{3 \cdot 1^2}{6} + \cdots \right\rangle \left\langle X\frac{2}{6} + \cdots \right\rangle \cdots \quad \text{(SN.}$$
$$\cdots \left\langle X \cdots + \frac{1^3}{6} \right\rangle \left\langle X \cdots - \frac{3 \cdot 1^2}{6} \right\rangle$$
$$\left\langle X \cdots + \frac{2}{6} + \frac{1^2}{2} \right\rangle \left\langle X - \frac{1}{2} \right\rangle \langle X1 \rangle \langle X0 \rangle \langle X1 \rangle_{-s}$$

$$\Leftrightarrow \quad e_s^{i \cdot x} = \left\langle \sum_{\forall k \in \mathbb{N}} \frac{(i \cdot x)^k}{k!} \right\rangle .$$
$$\langle \cdots \rangle \langle \cdots \rangle \cdots \quad \text{(SN.}$$
$$\cdots \langle \cdots \rangle \langle \cdots \rangle$$
$$\langle \cdots \rangle \langle \cdots \rangle \langle \cdots \rangle \langle \cdots \rangle \langle \cdots \rangle_{-s}$$

XXX XXX XXX XXX XXX XXX

Zusammenhang mit π

XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

$$e_s^{i \cdot \pi_s} = -1 = \langle 1 \rangle . \langle 1 \rangle^{\langle i \cdot \pi_s \rangle_1} \quad \text{(SN.AbIn.QK.45)}$$

XXX

$$\Leftrightarrow \quad \langle 1\rangle.\langle 1\rangle^{\langle \mathrm{i}\cdot\pi_\mathrm{s}\rangle_1} = -1 \qquad \text{(SN.AbIn.QK.46)}$$

XXX

$$\Leftrightarrow \quad \langle 1\rangle.\langle 1\rangle = \sqrt[\langle \mathrm{i}\cdot\pi_\mathrm{s}\rangle_1]{-1} \qquad \text{(SN.AbIn.QK.47)}$$

XXX

$$\Leftrightarrow \quad \langle \mathrm{i}\cdot\pi_\mathrm{s}\rangle_1 = \log_{\langle 1\rangle.\langle 1\rangle} -1 \qquad \text{(SN.AbIn.QK.48)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{i}\cdot\pi_\mathrm{s} = \langle \log_{\langle 1\rangle.\langle 1\rangle} -1\rangle_{-1} \qquad \text{(SN.AbIn.QK.49)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi_\mathrm{s} = \frac{\langle \log_{\langle 1\rangle.\langle 1\rangle} -1\rangle_{-1}}{\mathrm{i}} \qquad \text{(SN.AbIn.QK.50)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi_\mathrm{s} = \frac{\left(\log_{\langle 1\rangle.\langle 1\rangle} -1\right)\cdot \mathrm{s}^{-1}}{\mathrm{i}} \qquad \text{(SN.AbIn.QK.51)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi_\mathrm{s} = \frac{\log_{\langle 1\rangle.\langle 1\rangle} -1}{\mathrm{i}\cdot\mathrm{s}} \qquad \text{(SN.AbIn.QK.52)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi_\mathrm{s} = \mathrm{i}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\log_{\langle 1\rangle.\langle 1\rangle} -1 \qquad \text{(SN.AbIn.QK.53)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi_\mathrm{s} = -\mathrm{i}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\log_{\langle 1\rangle.\langle 1\rangle} -1 \qquad \text{(SN.AbIn.QK.54)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi_\mathrm{s} = \langle -\mathrm{i}\cdot\log_{\langle 1\rangle.\langle 1\rangle} -1\rangle_{-1} \qquad \text{(SN.AbIn.QK.55)}$$

XXX

$$a^x = b^{x\cdot\log_b a} \qquad \text{(SN.AbIn.QK.56)}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{e}_\mathrm{s}^x = \langle 1\rangle.\langle 1\rangle^{x\cdot\log_{\langle 1\rangle.\langle 1\rangle}\mathrm{e}_\mathrm{s}} \qquad \text{(SN.AbIn.QK.57)}$$

$$\Rightarrow \quad x\cdot\log_{\langle 1\rangle.\langle 1\rangle}\mathrm{e}_\mathrm{s} = \langle x\rangle_1 \qquad \text{(SN.AbIn.QK.58)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x \cdot \log_{\langle 1\rangle.\langle 1\rangle} \mathrm{e_s} \quad = \quad x \cdot \mathrm{s} \qquad \text{(SN.AbIn.QK.59)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \log_{\langle 1\rangle.\langle 1\rangle} \mathrm{e_s} \quad = \quad \mathrm{s} \qquad \text{(SN.AbIn.QK.60)}$$

XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX XXX

→ Nähere Untersuchung bestimmter Summen

Nähere Untersuchung bestimmter Summen

← Die Quadratur des Kreises – von der eulerschen Zahl e zu π

Im Folgenden beschäftigen wir uns etwas näher mit – unendlichen – Summen, die zum Beispiel auch bei der Berechnung von Integralen auftauchen. Im Fall, dass ihre Ergebnisse schon bekannt sind untersuchen wir, ob wir sie auch noch anders ausdrücken können.

Summen zur Integration von $\langle 2x\rangle.\langle 1\rangle$

Wir kennen nun schon das Ergebnis der Summe **SN.Ein.15**, aller superial kleinen ganzen Superial-Zahlen von Null bis ausschließlich x, die bei der **Integration von** $f'(x) = \langle 2x\rangle.\langle 1\rangle$ **(Stellenwertsystem-Schreibweise)** auftritt. Allerdings wissen wir nicht genau, wie sich diese Summe durch direkte Berechnung der Teilsummen, also ohne das Benutzen der angepassten Gaußschen Summenformel[10], berechnet, die wir aus der Theorie der **Biordinalzahlen** im Abschnitt ›***Es gibt mehr ganze Zahlen von Null bis zu , als der Wert von ausdrückt***‹ nach Formel **BO.Ein.NE.76** bereits kennen.

Die bereits bekannte Summe, in zwei Teilen, ist:

$$\sum_{\forall n \in [0,x[_{\mathbb{S}_Z^{-1}}} n \quad = \quad \frac{x^2 \cdot s}{2} - \frac{x}{2} \qquad \text{(SN.AbIn.NU.1)}$$

Zur Beschreibung der Summe wird eine **Intervall-Menge** genutzt, die auf **ganzen Superial-Zahlen** beruht, welche eine **superiale Potenzebene ins superial kleine skaliert** sind.

Die direkte Berechnung der beiden rechten Teilsummen aus der linken Summe wollen wir nun angehen.

In Formel **SN.Ein.6** haben wir die Elemente, die wir aufsummieren wollen, auszugsweise aufgelistet, wobei der Beginn und das Ende exakt stimmen.

$$[0, x[_{\mathbb{S}_Z^{-1}} = \left\{ \begin{array}{l} 0s^{-1}, 1s^{-1}, 2s^{-1}, \cdots \\ \vdots \\ \cdots \frac{1}{2}x - 2s^{-1},\ \frac{1}{2}x - s^{-1},\ \frac{1}{2}x,\ \frac{1}{2}x + s^{-1},\ \frac{1}{2}x + 2s^{-1}, \cdots \\ \vdots \\ \cdots \frac{2}{3}x - 2s^{-1},\ \frac{2}{3}x - s^{-1},\ \frac{2}{3}x,\ \frac{2}{3}x + s^{-1},\ \frac{2}{3}x + 2s^{-1}, \cdots \\ \vdots \\ \cdots\ x - 3s^{-1}, x - 2s^{-1}, x - s^{-1} \end{array} \right\} \qquad \textbf{(SN.Ein.6)}$$

Die prinzipielle Summe, die diesen superial kleinen ganzen Zahlen zugrunde liegt, besteht ebenfalls aus zwei Summanden:

$$(\forall q \in \mathbb{Q})\,(\forall z \in \mathbb{Z})\left[\, q + z \cdot s^{-1} \quad \in \quad \mathbb{S}_Z^{-1} \,\right] \qquad \text{(SN.AbIn.NU.2)}$$

Für die genaue Menge können wir, angelehnt an die später gefundene Formel **SN.Eig.SVS.1**, folgende Beschreibung geben – wie immer mit $x \in \mathbb{Q}$:

▼ ausblenden

$$[0, s[_{\mathbb{S}_N} = \left\{ a \;\middle|\; (\forall q \in [0,1]_{\mathbb{Q}})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall z \in \mathbb{Z})\left(\forall z^- \in \mathbb{Z}^-\right) \left[a = \begin{cases} n & \text{falls } q = 0 \\ q \cdot s + z & \text{falls } 0 < q < 1 \\ s + z^- & \text{falls } q = 1 \end{cases} \right] \right\} \qquad \textbf{(SN.Eig.SVS.1)}$$

▲ ausblenden

$$[0, x[_{\mathbb{S}_Z^{-1}} = \left\{ a \;\middle|\; (\forall q \in [0,x]_{\mathbb{Q}})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall z \in \mathbb{Z})\left(\forall z^- \in \mathbb{Z}^-\right) \left[a = \begin{cases} n \cdot s^{-1} & \text{falls } q = 0 \\ q + z \cdot s^{-1} & \text{falls } 0 < q < x \\ x + z^- \cdot s^{-1} & \text{falls } q = x \end{cases} \right] \right\} \qquad \text{(SN.AbIn.NU.3)}$$

Wir nehmen einmal an, dass die beiden Summanden der zu summierenden Superial-Zahlen jeweils den beiden einzelnen Teilsummen des bekannten Ergebnisses der zu berechnenden Summe **SN.AbIn.NU.1** entsprechen. Also summieren wir doch einmal zuerst die zweite Teilsumme unserer Superial-Zahlen und anschließen die erste Teilsumme.

Für alle Koeffizienten des ersten Summanden q, von Null bis einschließlich x, läuft der zweite Summand z komplett im Negativen und im Positiven durch, bis auf am Beginn und am Ende, siehe Intervall-Menge **SN.Ein.6**, wo q als $q \cdot x$ benannt ist. Am Beginn laufen nur die natürlichen Koeffizienten n des zweiten Summanden durch, mit der Null, und am Ende laufen nur die rein negativen Koeffizienten z^- durch.

Die Anzahl der superial kleinen ganzen Zahlen von Null bis einschließlich x ist $x \cdot s + 1$. Da für Null und x gemeinsam nur ein ganzer Durchlauf stattfindet, ist die Anzahl der ganzen Durchläufe allerdings nur $x \cdot s$, also Einen weniger.

In jedem Durchlauf werden einmal alle superial kleinen ganzen Zahlen addiert. Von den **Biordinalzahlen** her wissen wir den Wert der Summe aller endlichen ganzen Zahlen aus Formel **BO.Ein.NE.12**:

$$\sum_{\forall z \in \mathbb{Z}} z \quad = \quad -\omega \qquad \text{(BO.Ein.NE.12)}$$

Die Summe, die wir suchen, ist aber nicht die aller endlichen ganzen Zahlen, sondern die aller superial kleinen ganzen Zahlen:

$$\Leftrightarrow \qquad \sum_{\forall z \in \mathbb{Z}} z \cdot s^{-1} \quad = \quad -\omega \cdot s^{-1} \qquad \text{(SN.AbIn.NU.4)}$$

Dabei steht das Symbol ω für die Anzahl der endlichen natürlichen Zahlen, mit der Null, in der Menge $\mathbb{N}$; dies entspricht der Anzahl der Schritte der vollständigen Induktion[11].

An dieser Stelle ist es vermutlich für den ein oder anderen erstaunlich, dass ganz unabhängig von den hier entwickelten Superial-Zahlen in der Theorie der Biordinalzahlen deutlich wird, dass genauso viele endliche und rein negative ganze Zahlen existieren, wie es endliche natürliche Zahlen gibt, also endliche positive ganze Zahlen, mit der Null. Demnach finden wir, bei genauer Untersuchung, eine **fundamentale Asymmetrie** zwischen der ontologischen Struktur der endlichen ganzen Zahlen und der Verteilung ihrer Werte. Dadurch ergibt die Summe aller endlichen ganzen Zahlen die aktual unendlich große und negative Zahl $-\omega$.

Auf der anderen Seite ist die Anzahl der rationalen Koeffizienten von Null bis ausschließlich Eins, nach Formel **SN.Eig.SVS.10**:

$$\#[0, 1[_{\mathbb{Q}} \quad = \quad \frac{s}{2 \cdot \omega} \qquad \text{(SN.Eig.SVS.10)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \#[0, x[_{\mathbb{Q}} \quad = \quad \frac{x \cdot s}{2 \cdot \omega} \qquad \text{(SN.AbIn.NU.4)}$$

Anschließend haben wir die Formel für die Koeffizienten von Null bis ausschließlich x äquivalent mit x erweitert.

So oft addiert sich jetzt das superial kleine $\frac{-\omega}{s}$ auf:

▼ ausblenden

$$\Rightarrow \qquad \#[0,x[_{\mathbb{Q}} \cdot \sum_{\forall z \in \mathbb{Q}} z \cdot s^{-1} \quad = \quad \frac{x \cdot s}{2 \cdot \omega} \cdot \sum_{\forall z \in \mathbb{Q}} z \cdot s^{-1} \qquad \text{(SN.AbIn.NU.6)}$$

▲ ausblenden

$$\Leftrightarrow \qquad \#[0,x[_{\mathbb{Q}} \cdot \sum_{\forall z \in \mathbb{Q}} z \cdot s^{-1} \quad = \quad \frac{x \cdot s}{2 \cdot \omega} \cdot \left(-\omega \cdot s^{-1}\right) \qquad \text{(SN.AbIn.NU.7)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \#[0,x[_{\mathbb{Q}} \cdot \sum_{\forall z \in \mathbb{Q}} z \cdot s^{-1} \quad = \quad -\frac{x}{2} \qquad \text{(SN.AbIn.NU.08)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \#[0,x[_{\mathbb{Q}} \cdot \left(-\omega \cdot s^{-1}\right) \quad = \quad -\frac{x}{2} \qquad \text{(SN.AbIn.NU.09)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boxed{-\#[0,x[_{\mathbb{Q}} \cdot \omega \cdot s^{-1} \quad = \quad -\frac{x}{2}} \qquad \text{(SN.AbIn.NU.10)}$$

Dies entspricht tatsächlich, wie gedacht, der zweiten Teilsumme unserer bekannten Summe **SN.AbIn.NU.1**.

Und es zeigt, dass die in der Theorie der Biordinalzahlen gefundene fundamentale Asymmetrie zwischen der strukturellen Ontologie und den Werten der endlichen ganzen Zahlen, aufgrund derer sich die Summe aller endlichen ganzen Zahlen zu $-\omega$ und die Anzahl aller endlicher ganzen Zahlen zu 2ω ergibt, wirklich korrekt ist. Denn diese Asymmetrie ist ein essentieller und so auch plausibler Bestandteil der Integralrechnung, wie wir sehen.

Die erste Teilsumme unserer superial kleinen ganzen Superial-Zahlen **SN.Ein.6** soll nach unserer Vermutung dem ersten Summanden des uns bekannten Ergebnisses der zu berechnenden Summe **SN.AbIn.NU.1** ergeben.

Die erste Teilsumme unserer zu summierenden Zahlen enthält alle rationalen Zahlen von Null bis einschließlich x. Diese Summe muss allerdings für jede superial kleine Zahl gebildet werden, die in unserer Menge **SN.Ein.6** enthalten ist.

Für die rationale Zahl Null in der ersten Teilsumme gibt es nur die natürlichen Zahlen, mit der Null, als superial kleine Schritte in der zweiten Teilsumme:

$$\left(\sum_{\forall q \in [0]_{\mathbb{Q}}} q\right) \cdot \omega \quad = \quad 0 \cdot \omega \quad = \quad 0 \qquad \text{(SN.AbIn.NU.11)}$$

Für die rationalen Zahlen q mit $0 < q < x$ in der ersten Teilsumme gibt es wirklich alle superial kleinen ganzzahligen Schritte in der zweiten Teilsumme. Da wir die Summe dieser rationalen Zahlen noch nicht kennen, wollen wir sie berechnen und setzen sie gleich unserer neuen Variable y:

$$\left(\sum_{\forall q \in]0,x[_{\mathbb{Q}}} q\right) \cdot 2 \cdot \omega \quad = \quad y \cdot 2 \cdot \omega \qquad \text{(SN.AbIn.NU.12)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sum_{\forall q \in]0,x[_{\mathbb{Q}}} q \quad = \quad y \qquad \text{(SN.AbIn.NU.13)}$$

Dabei ist es gleich, ob die Null in der Indexmenge der Summe dabei ist oder fehlt. Die Summe ist also äquivalent, wenn wir die Null durchs Umdrehen der vorderen Intervall-Klammer in die Summe mit hinein nehmen:

$$\Leftrightarrow \qquad \sum_{\forall q \in [0,x[_{\mathbb{Q}}} q \quad = \quad y \qquad \text{(SN.AbIn.NU.14)}$$

Für die rationale Zahl x in der ersten Teilsumme gibt es nur alle rein negativen ganzen Zahlen als superial kleine Schritte in der zweiten Teilsumme:

$$\left(\sum_{\forall q \in [x]_{\mathbb{Q}}} q\right) \cdot \omega \quad = \quad x \cdot \omega \qquad \text{(SN.AbIn.NU.15)}$$

Alle drei Teile gemeinsam ergeben also den ersten uns bekannten Summanden aus Formel **SN.AbIn.NU.1**, den wir nun direkt berechnen:

> Sei also die Summe der drei Teile der erste Summand unserer Superial-Zahlen und dieser gleich der ersten Teilsumme, die uns schon bekannt ist:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad & \left(\sum_{\forall q \in [0]_{\mathbb{Q}}} q\right) \cdot \omega \\ & + \left(\sum_{\forall q \in]0,x[_{\mathbb{Q}}} q\right) \cdot 2 \cdot \omega \\ & + \left(\sum_{\forall q \in [x]_{\mathbb{Q}}} q\right) \cdot \omega \quad = \quad \frac{x^2 \cdot s}{2} \end{aligned} \qquad \text{(SN.AbIn.NU.16)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 0 \cdot \omega + y \cdot 2 \cdot \omega + x \cdot \omega \quad = \quad \frac{x^2 \cdot s}{2} \qquad \text{(SN.AbIn.NU.17)}$$

▼ ausblenden

$$\Leftrightarrow \qquad y \cdot 2 \cdot \omega + x \cdot \omega \quad = \quad \frac{x^2 \cdot s}{2} \qquad \text{(SN.AbIn.NU.18)}$$

▲ ausblenden

$$\Leftrightarrow \quad (y \cdot 2 + x) \cdot \omega \quad = \quad \frac{x^2 \cdot s}{2} \qquad \text{(SN.AbIn.NU.19)}$$

▼ ausblenden

$$\Leftrightarrow \quad y \cdot 2 + x \quad = \quad \frac{x^2 \cdot s}{2 \cdot \omega} \qquad \text{(SN.AbIn.NU.20)}$$

▲ ausblenden

$$\Leftrightarrow \quad y \cdot 2 + x \quad = \quad \frac{x \cdot s}{2 \cdot \omega} \cdot x \qquad \text{(SN.AbIn.NU.21)}$$

Der erste Faktor des rechten Produkts ist uns schon oben aus Formel **SN.AbIn.NU.4** bekannt und wir können ihn ersetzen:

$$\Leftrightarrow \quad y \cdot 2 + x \quad = \quad \#[0, x[_{\mathbb{Q}} \cdot x \qquad \text{(SN.AbIn.NU.22)}$$

Wir erweitern beide Seiten mit ω und vertauschen links und rechts:

▼ ausblenden

$$\Leftrightarrow \quad (y \cdot 2 + x) \cdot \omega \quad = \quad \#[0, x[_{\mathbb{Q}} \cdot x \cdot \omega \qquad \text{(SN.AbIn.NU.23)}$$

▲ ausblenden

$$\Leftrightarrow \quad \#[0, x[_{\mathbb{Q}} \cdot x \cdot \omega \quad = \quad (y \cdot 2 + x) \cdot \omega \qquad \text{(SN.AbIn.NU.24)}$$

Aus Formel **SN.AbIn.NU.19** kennen wir unsere rechte Seite hier und setzen diese ein:

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\#[0, x[_{\mathbb{Q}} \cdot x \cdot \omega \quad = \quad \frac{x^2 \cdot s}{2}} \qquad \text{(SN.AbIn.NU.25)}$$

Wodurch sich unsere neue Formel ergibt.

So erhalten wir einen neuen Ausdruck für unseren schon bekannten Summanden.

Jetzt können wir die Summe aller superial kleinen Zahlen von Null bis ausschließlich x anders ausdrücken:

Wir ersetzen in der uns bekannten Formel **SN.AbIn.NU.1** die beiden Summanden auf der rechten Seite durch die neuen Ausdrücke **SN.AbIn.NU.10** und **SN.AbIn.NU.25**, die wir durch die jeweils einzelne Summation der beiden Teilsummen unserer superial kleinen Zahlen erhalten haben

$$\sum_{\forall n \in [0,x[_{\mathbb{S}_Z^{-1}}} n = \frac{x^2 \cdot s}{2} - \frac{x}{2} \qquad (\textbf{SN.AbIn.NU.1})$$

▼ ausblenden

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\forall n \in [0,x[_{\mathbb{S}_Z^{-1}}} n = \#[0,x[_{\mathbb{Q}} \cdot x \cdot \omega - \frac{x}{2} \qquad (\text{SN.AbIn.NU.26})$$

▲ ausblenden

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\forall n \in [0,x[_{\mathbb{S}_Z^{-1}}} n = \#[0,x[_{\mathbb{Q}} \cdot x \cdot \omega - \#[0,x[_{\mathbb{Q}} \cdot \omega \cdot s^{-1} \qquad (\text{SN.AbIn.NU.27})$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\sum_{\forall n \in [0,x[_{\mathbb{S}_Z^{-1}}} n = \#[0,x[_{\mathbb{Q}} \cdot \omega \cdot \left(x - s^{-1}\right)} \qquad (\text{SN.AbIn.NU.28})$$

und erhalten eine ganz andere Darstellung, die recht kurz dadurch möglich wird, weil beide Summanden einen gemeinsamen Faktor enthalten, den wir hier ausklammern konnten.

Die Summe unserer superial kleinen Zahlen findet also einen neuen Ausdruck, der in wesentlichen Teilen auf der Anzahl von Elementen in Mengen beruht.

Die Formel **SN.AbIn.NU.19** können wir auch noch anders schreiben, wenn wir unseren Substituenten y wieder durch die ihm gleiche Summe ersetzen. Wir möchten dabei aus den drei Summanden oben zwei sehr anschauliche Summanden machen:

Nehmen wir also Formel **SN.AbIn.NU.19** und ersetzen unseren Substituenten:

$$(y \cdot 2 + x) \cdot \omega = \frac{x^2 \cdot s}{2} \qquad (\textbf{SN.AbIn.NU.19})$$

$$(y + y + x) \cdot \omega = \frac{x^2 \cdot s}{2} \qquad (\text{SN.AbIn.NU.29})$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{\forall q \in [0,x[_{\mathbb{Q}}} q + \sum_{\forall q \in [0,x[_{\mathbb{Q}}} q + x \right) \cdot \omega = \frac{x^2 \cdot s}{2} \qquad (\text{SN.AbIn.NU.30})$$

Hier beachten wir, dass die Intervall-Mengen-Klammern in beiden Summen gleich ausgerichtet sind. Durch eine unterschiedliche Ausrichtung der Klammern können wir die geklammerte Summe umschreiben, weil wir auf der Seite der Null die Klammer einfach ohne Folgen umdrehen und weil wir durch das Umdrehen der Klammer auf der Seite des x den nachfolgenden Summanden x einfach in die Summe integrieren können:

▼ ausblenden

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{\forall q \in [0,x[_{\mathbb{Q}}} q + \sum_{\forall q \in [0,x]_{\mathbb{Q}}} q \right) \cdot \omega = \frac{x^2 \cdot s}{2} \qquad \text{(SN.AbIn.NU.31)}$$

▲ ausblenden

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\left(\sum_{\forall q \in [0,x[_{\mathbb{Q}}} q + \sum_{\forall q \in]0,x]_{\mathbb{Q}}} q \right) \cdot \omega = \frac{x^2 \cdot s}{2}} \qquad \text{(SN.AbIn.NU.32)}$$

Wodurch wir den neuen Ausdruck erhalten haben.

Den neuen Ausdruck für den ersten Summanden des uns bekannten Ergebnisses der superial kleinen ganzen Zahlen, von Null bis ausschließlich x, können wir so interpretieren:

Die erste Summe in der Klammer steht für alle superial kleinen ganzen Zahlen, deren ganzer Zahlenanteil Null oder positiv sind. Die zweite Summe in der Klammer steht für alle superial kleinen ganzen Zahlen, deren ganzer Zahlenanteil rein negativ sind. Jede dieser beiden Summen von rationalen Zahlen gibt es daher ω mal, da es sowohl alle Null oder positiven ganzen Zahlen in der Anzahl ω gibt, als dies auch für alle rein negativen der Fall ist.

Unsere bekannte Gesamtsumme wird dann zu:

$$\sum_{\forall n \in [0,x[_{\mathbb{S}_Z^{-1}}} n = \frac{x^2 \cdot s}{2} - \frac{x}{2} \qquad \text{(\textbf{SN.AbIn.NU.}}$$

▼ ausblenden

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\forall n \in [0,x[_{\mathbb{S}_Z^{-1}}} n = \left(\sum_{\forall q \in [0,x[_{\mathbb{Q}}} q + \sum_{\forall q \in]0,x]_{\mathbb{Q}}} q \right) \cdot \omega - \frac{x}{2} \qquad \text{(SN.AbIn.NU.3}$$

▲ ausblenden

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\forall n \in [0,x[_{\mathbb{S}_Z^{-1}}} n = \left(\sum_{\forall q \in [0,x[_{\mathbb{Q}}} q + \sum_{\forall q \in]0,x]_{\mathbb{Q}}} q \right) \cdot \omega - \#[0, x\, [_{\mathbb{Q}} \cdot \omega \cdot s^{-1} \qquad \text{(SN.AbIn.NU.3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\sum_{\forall n \in [0,x[_{\mathbb{S}_Z^{-1}}} n = \left(\sum_{\forall q \in [0,x[_{\mathbb{Q}}} q + \sum_{\forall q \in]0,x]_{\mathbb{Q}}} q - \#[0,x[_{\mathbb{Q}} \cdot s^{-1} \right) \cdot \omega} \quad \text{(SN.AbIn.NU.3}$$

Ist in jedem Fall interessant, dass ω in allen Summanden vorhanden ist und generell ausgeklammert werden kann. Diese Summe lässt sich noch auf weitere Arten umformen.

Summe aller rationalen Zahlen von Null bis ausschließlich x

Interessant ist auch die Berechnung der Summe der endlichen rationalen Zahlen von Null bis ausschließlich der Zahl x:

Sei Formel **SN.AbIn.NU.19** gegeben, und wir formen um und ersetzen dann auch wieder den Substituenten y

$$(y \cdot 2 + x) \cdot \omega = \frac{x^2 \cdot s}{2} \quad \textbf{(SN.AbIn.NU.19)}$$

▼ ausblenden

$$\Leftrightarrow \quad y \cdot 2 + x = \frac{x^2 \cdot s}{2 \cdot \omega} \quad \text{(SN.AbIn.NU.36)}$$

$$\Leftrightarrow \quad y \cdot 2 = \frac{x^2 \cdot s}{2 \cdot \omega} - x \quad \text{(SN.AbIn.NU.37)}$$

▲ ausblenden

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{x^2 \cdot s}{4 \cdot \omega} - \frac{x}{2} \quad \text{(SN.AbIn.NU.38)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\sum_{\forall q \in [0,x[_{\mathbb{Q}}} q = \frac{x^2 \cdot s}{4 \cdot \omega} - \frac{x}{2}} \,, \quad \text{(SN.AbIn.NU.39)}$$

so erhalten wir einen Ausdruck für die gesuchte Summe.

Ich habe einen Ausdruck für diese Summe bisher noch nicht gesehen und konnte bis heute auch noch nichts vergleichbares finden.

Unsere Biordinalzahlen und Superial-Zahlen sind etwas ganz besonderes, weil sie uns in die Lage versetzen, eine Idee davon zu bekommen, wie wir solche Summen ausdrücken können.

Erstaunlich, wie ähnlich diese Summe der Summe aller superial kleinen Zahlen von

Null bis ausschließlich x ist:

$$\sum_{\forall n \in [0,x[_{\mathbb{S}_Z^{-1}}} n = \frac{x^2 \cdot s}{2} - \frac{x}{2} \qquad (\textbf{SN.AbIn.NU.1})$$

XXX XXX XXX XXX XXX

XXX Im Grunde genommen haben wir damit schon den Beweis für die Richtigkeit dieser Gleichung erbracht. Aber vielleicht können wir ja noch besser verstehen, warum dies so ist?

Wie oben schon erwähnt, wissen wir mit Hilfe der Biordinalzahlen aus dem späteren Abschnitt ›***Was lernen wir über die Größe von und die Struktur von s über die Frage der Vorgänger?***‹ die Anzahl der rationalen Zahlen zwischen Null und ausschließlich der Eins aus Formel **SN.Eig.SVS.1**. Diese haben wir in Formel **SN.AbIn.NU.4** auf ihre Anzahl zwischen Null und ausschließlich x erweitert.

Die Anzahl der rationalen Zahlen zwischen Null und ausschließlich x beläuft sich demnach auf $\frac{x \cdot s}{2 \cdot \omega}$. Ihre Größenordnung s zeigt uns, dass wir auch ein Ergebnis in der Größenordnung s erwarten sollten, wenn wir so viele endliche Zahlen summieren. Das passt schon mal zu unserer gesuchten Summe.

Da es sich bei den rationalen Zahlen um die Koeffizienten endlicher Größe von superial kleinen ganzen Zahlen handelt, müssen sie alle den gleichen Abstand zueinander haben, der sich aus ihrer Dichte ρ_Q berechnet:

▼ ausblenden

$$\rho_Q = \frac{\frac{x \cdot s}{2 \cdot \omega}}{x} \qquad (\text{SN.AbIn.NU.40})$$

▲ ausblenden

$$\rho_Q = \frac{s}{2 \cdot \omega} \qquad (\text{SN.AbIn.NU.41})$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_Q = \frac{2 \cdot \omega}{s} \qquad (\text{SN.AbIn.NU.42})$$

Bei der gesuchten Summe handelt es sich um die Summe von positiven Werten, mit der Null, die sich auf einer Hauptdiagonalen verteilen, wie es auch bei den natürlichen Zahlen der Fall ist. Naiv gesprochen, können wir auch die Summe der natürlichen nehmen und diese auf die entsprechende Dichte skalieren.

Die Summe der endlichen und aktual unendlichen natürlichen Zahlen der ersten n Elemente einer solchen Menge, mit der Null, ergibt sich aus der angepassten Gaußschen Summenformel[12], wie bei den Biordinalzahlen im Abschnitt ›***Es gibt mehr ganze Zahlen von Null bis zu , als der Wert von ausdrückt***‹ nach Formel **BO.Ein.NE.76** angegeben.

$$\sum_{\forall i \in [0,n[_{\mathbb{N}_\infty}} i = \frac{n^2 - n}{2}$$ (BO.Ein.NE.76)

$$\Rightarrow \sum_{\forall i \in [0,\frac{x \cdot s}{2 \cdot \omega}[_{\mathbb{N}_\infty}} i = \frac{\left(\frac{x \cdot s}{2 \cdot \omega}\right)^2 - \frac{x \cdot s}{2 \cdot \omega}}{2}$$ (SN.AbIn.NU.43)

Und das Ergebnis ist jetzt um $\frac{s}{2 \cdot \omega}$ zu weit XXX XXX XXX XXX

XXX XXX XXX XXX XXX

→ *Eigenschaften*

Fußnoten

1. ↑(Primärliteratur einfügen!)

   Internet:

   Vgl. Wikipedia, ***Eulersche Zahl***.
2. ↑(Primärliteratur einfügen!)

   Internet:

   Vgl. Wikipedia, ***Exponentialfunktion***, Ableitung.

   Vgl. Wikipedia, ***Eulersche Zahl***, Bedeutung in der Mathematik.
3. ↑(Primärliteratur einfügen!)

   Internet:

   Vgl. Wikipedia, ***Exponentialfunktion***, Definition.

   Vgl. Wikipedia, ***Eulersche Zahl***, Definition.
4. ↑(Primärliteratur einfügen!)

   Internet:

   Vgl. Wikipedia, ***Unendlichkeitsaxiom***, Formulierung; Bedeutung für die Mathematik, Natürliche Zahlen.
5. ↑(Primärliteratur einfügen!)

   Internet:

   Vgl. Wikipedia, ***Binomialkoeffizient***.
6. ↑(Primärliteratur einfügen!)

   Internet:

   Vgl. Wikipedia, ***Binomialkoeffizient***.
7. ↑(Primärliteratur einfügen!)

   Internet:

   Vgl. Wikipedia, ***Binomialkoeffizient***, Rekursive Darstellung und Pascalsches Dreieck.
8. ↑(Primärliteratur einfügen!)

   Internet:

   Vgl. Wikipedia, ***Gaußsche Summenformel***.
9. ↑(Primärliteratur einfügen!)

   Internet:

   Vgl. Wikipedia, ***Quadratische Pyramidalzahl***.

   Vgl. Wikipedia, ***Gaußsche Summenformel***, Verwandte Summen.
10. ↑(Primärliteratur einfügen!)

Internet:

Vgl. Wikipedia, ***Gaußsche Summenformel***.

11. ↑(Primärliteratur einfügen!)

Internet:

Vgl. Wikipedia, ***Unendlichkeitsaxiom***, Formulierung; Bedeutung für die Mathematik, Natürliche Zahlen.

12. ↑(Primärliteratur einfügen!)

Internet:

Vgl. Wikipedia, ***Gaußsche Summenformel***.

Stand 31. Januar 2024, 21:00 CET.

Permanente Links:
(Klicke auf die Archivlogos zum Abruf und Ansehen der Archive dieser Seite.)