AD-Uebung zum 22. Oktober

Arne Beer, MN 6489196
Merve Yilmaz, MN 6414978
Sascha Schulz, MN 6434677

22. Oktober 2013

1. (a)

$$\frac{1}{n} \prec 1 \prec \log\log n \prec \log n \asymp \log n^3 \prec \log n^{logn} \prec n^{0.01} \prec n^{0.5} \prec n \cdot \log n \prec n^8 \prec 2^n \prec 8^n \prec n! \prec n^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$f_1 \in o(f_2)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log\log n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$f_2 \in o(f_3)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\log n}{\log n}$$

Satz von l'Hospital: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = \frac{1}{\infty} = 0$

$$f_3 \in o(f_4)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log n^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n^3}{\log n} = 3$$

$$f_4 \in \Theta(f_5)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n^3}{\log n^{logn}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-3} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$f_5 \in o(f_6)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n^{\log n}}{n^{0.01}}$$

Satz von l'Hospital: $\lim_{n\to\infty} \frac{200 \cdot \log n}{n^{0.01}}$

Satz von l'Hospital: $\lim_{n\to\infty} 20000 \cdot \frac{1}{n} \cdot n^{0.99} = \lim_{n\to\infty} \frac{20000}{n^{0.01}} = \frac{1}{\infty} = 0$

$$f_6 \in o(f_7)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{0.01}}{n^{0.5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{0.49}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$f_7 \in o(f_8)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{0.5}}{n \cdot \log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \log n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$f_8 \in o(f_9)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \log n}{n^8} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^7}$$

Satz von l'Hospital: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{7 \cdot n^7} = \frac{1}{\infty} = 0$

$$f_9 \in o(f_{10})$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^8}{2^n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Eine Exponentialfunktion waechst wesentlich schneller, als eine Polynomfunktion, daher die Schlussfolgerung.

$$f_{10} \in o(f_{11})$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{8^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{(2^3)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2^n)^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$f_{11} \in o(f_{12})$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8^n}{n!} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Fuer $n!$ gilt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot (n-1) \cdot (n)$ mit n Multiplikationen.
Fuer 8^n gilt $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdots 8 \cdot 8$ mit n Multiplikationen.
Da bei $n!$ die Multiplikanden ansteigen und bei 8^n konstant bleiben, folgt, dass $n!$ wesentlich schneller waechst als 8^n

$$f_{12} \in o(f_{13})$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Fuer $n!$ gilt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$, wobei $(n-1)$ Multiplikationen vorliegen.
Fuer n^n gilt $n \cdot n \cdot \cdots \cdot n \cdot n$, wobei ebenfalls $(n-1)$ Multiplikationen vorliegen.
Daraus folgt, das n^n schneller waechst als $n!$.

$$f_{13} \in o(f_{14})$$

(b) i. Um die Regel zu beweisen, muss gelten $\log_b n \in O(\log_2 n)$ und $\log_2 n \in O(\log_b n)$. Am einfachsten ist es zu beweisen, dass es fuer alle $\log_n$ mit $n \in \mathbb{N}$, also $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ gilt.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{log_a n}{log_b n}$$

$$\text{Satz von l'Hospital: } \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n \cdot \ln b}{\ln n \cdot \ln a} = \frac{\ln b}{\ln a} < \infty$$

Dieses Ergebnis ist folglich immer fuer jedes $a, b \in \mathbb{N}$ ein fester Wert und somit gilt auch $\log_b n \in \Theta(\log_2 n)$ fuer ein $b > 1$

ii. Sobald gilt $f \in O(g)$ ist $\lim\limits_{x\to\infty} |\frac{f(x)}{g(x)}| < \infty$.

Da fuer $g \in \omega(f)$ jedoch $\lim\limits_{x\to\infty} |\frac{f(x)}{g(x)}| = 0$ gelten muss, kann man nicht von $f \in O(g)$ auf $g \in \omega(f)$ schlussfolgern.

iii. Fuer die Summe $f_c(n) := \sum_{i=0}^{n} c^i$ gilt mit c = 1, dass $f_c(n) := \sum_{i=0}^{n} 1^i$.
Fuer jeden Ausdruck der Form 1^n mit $n \in \mathbb{R}$ gilt $1^n = 1$. Daher laesst sich die Summe $f_c(n) := \sum_{i=0}^{n} c^i$ fuer $c = 1$ zusammenfassen als $f_c(n) := \sum_{i=0}^{n} c^i = n$.
Also muss fuer $f_c(n) \in \Theta(n)$ mit $c = 1$ gelten, dass $f_c(n) \in O(n)$ und $n \in O(f_c)$ Dies ist erfuellt, da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1 < \infty$

Um den Beweis in die entgegengesetze Richtung durchzufuehren, muss abgesichert sein, dass die Summe linear waechst, sodass $f_c(n) \in \Theta(n)$ gilt. Dies ist nur gewaehrleistet, wenn c^i weder gegen 0 noch gegen ∞ strebt, was wiederum nur gilt, falls $c = 1$. Dementsprechend gilt die gegenseitige Beziehung $f_c(n) \in \Theta(n) \Leftrightarrow c = 1$

2. (a) Es Soll bewiesen werden, dass fuer alle $F_n \geq 2^{0.5n}$ fuer alle $n \geq 6$

Induktionsannahme:

$$F_n \geq 2^{0.5n} \text{ fuer alle } n \geq 6$$

Induktionsanfang:

$$F_6 = 8 \geq 2^3 = 8 \text{ wahre Aussage}$$

Induktionsschritt:

$$F_{n+1} \geq 2^{0.5\cdot(n+1)}$$
$$\Leftrightarrow F_n + F_{n-1} \geq 2^{0.5\cdot(n+1)} = 2^{0.5n} \cdot \sqrt{2}$$

Durch Anwendung der Induktionsannahme folgt:

$$\Leftrightarrow F_n + F_{n-1} \geq 2^{0.5n} + 2^{0.5\cdot(n-1)}$$

Es gilt: Wenn $a \geq c$
und $b \geq d$
dann ist $a + b \geq c + d$

$F_n \geq 2^{0.5n}$ ist durch die Induktionsannahme bewiesen. Nun wird eine weiter vollstaendige Induktion fuer den zweiten Ausdruck durchgefuehrt.

Induktionsannahme:

$$F_{n-1} \geq 2^{0.5n-1} \text{ fuer alle } n \geq 7$$

Induktionsanfang:

$$F_{7-1} = 8 \geq 2^{0.5\cdot(7-1)} = 8 \text{ wahre Aussage}$$

Induktionsschritt:

$$F_n \geq 2^{0.5\cdot(n)}$$

Durch Anwendung der Induktionsannahme des ersten Beweises ist die Aussage wahr und bewiesen.
Somit gilt:

$$F_n + F_{n-1} \geq 2^{0.5n} + 2^{0.5\cdot(n-1)}$$

(b) Es Soll bewiesen werden, dass fuer alle $F_n \leq 2^n$ fuer alle $n \geq 0$

Induktionsannahme:

$$F_n \leq 2^n \text{ fuer alle } n \geq 0$$

Induktionsanfang:

$$F_0 = 0 \leq 2^1 = 1 \text{ wahre Aussage}$$

Induktionsschritt:

$$F_{n+1} \leq 2^{n+1}$$
$$\Leftrightarrow F_n + F_{n-1} \leq 2^{n+1} = 2^n \cdot 2$$

Durch Anwendung der Induktionsannahme folgt:

$$\Leftrightarrow F_n + F_{n-1} \leq 2^n + 2^{n-1}$$

Es gilt:

$$F_{n+1} \leq 2^n \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow F_{n+1} \leq 2^n + 2^n$$
$$2^n + 2^{n-1} \leq 2^n + 2^n$$

daher gilt, dass Die Fibonnaci-Reihe immer kleiner als 2^n ist.

3. (a) Es soll bewiesen werden, dass die Fibonacci-Reihe sich durch die folgende Matrizen-Multiplikation berrechnen laesst:

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Daraus laesst sich schlussfolgern, dass das Ergebnis der Matrix die an den Stellen $M_{1,0}$ und $M_{1,1}$ equivalent zu F_n und F_{n+1} sein muessen.

Wenn man sich die Zwischenergebnisse der Matrix M ansieht, erkennt man folgendes Muster:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$$

Induktionsannahme:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$$

Induktionsanfang: $n = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2 & F_3 \end{pmatrix}$$

Aussage stimmt.

Induktionsschritt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Induktionsannahme:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} F_n & F_n + F_{n-1} \\ F_{n+1} & F_{n+1} + F_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix}$$

Somit ist bewiesen, dass die Aussage fuer alle $n \geq 0$ gilt.

(b) Fuer jedes X^n mit $n \geq 4$ laesst sich n in Primfaktoren zerlegen, sodass sich X^n als $(X^{\frac{n}{a}})^a$. Dieses Vorgehen laesst sich fuer jeden weiteren Primfaktor wiederholen, sodass die Laufzeit im besten Falle lediglich $\log_2 n$ betraegt.

(c) Fuer eine Multiplikation zweier 2x2 Matrizen werden 8 Multiplikationen und 4 Additionen benoetigt. Fuer A^n werden nach dem vorherigen Verfahren ledigliche $\log n$ Multiplikationen benoetigt. Dementsprechend betraegt die Laufzeit $\log(n) \cdot 8 \cdot O(l^{1.59}) \cdot 4 \cdot O(l)$. Fuer die Berrechnung mithilfe eines Arrays benoetigen wir eine ungefaehre Laufzeit von $n^2 \cdot O(l)$. Wenn man sich bitweise Addition von zwei Zahlen betrachtet, ist der maximale Zuwachs an Bits der groessten Zahl gleich eins. Da insgesamt n Additionen stattfinden und die Startzahl 1 Bit hat, ist die theoretisch maximal erreichbare Zahl $(n+1)$. In der Praxis wird diese Zahl natuerlich nicht erreicht. Dementsprechend kann man mit $\log(n) \cdot 8 \cdot O((n+1b)^{1.59})s \cdot 4 \cdot O(n+1)$ und $n^2 \cdot O(n+1)$ als schlechtesten Fall rechnen. Die Matrizenmultiplikation ist folglich die performanteste, da sie im Gegenzug zur Array-Berrechnung lediglich von $log(n)$, anstatt von n^2 abhaengig ist.