Mathematik Hausaufgaben zum 15./16. November

Arne Beer, MN 6489196
Tim Overath, MN 6440863

27. November 2012

1.

a)

Es existieren 7^5 Abbildungen $g : X \to Y$
Davon sind $\frac{7!}{2!} = 2520$ injektiv
Es gibt $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot = 10290$ für $g : X \to Y$ bei denen g(2), g(3) und g(4) drei verschiedene Elemente sind.

b)

Es gibt $\left(\begin{array}{c} 49 \\ 6 \end{array} \right) = 13983816$ Tips bei Lotto „6 aus 49 "

c)

Es werden die Anzahl der Möglichkeiten der Teilmeingen 997-1000 berrechnet, da nach mindestens 997 Teilmengen gefragt wird.

$$\binom{1000}{997} + \binom{1000}{998} + \binom{1000}{999} + \binom{1000}{1000} = 166667501$$

2.

a)

$$x^5y^{11}in(x+y)^{16} \to \binom{16}{5}$$

$$x^3y^5z^2in(x+y+z)^{10} \to \frac{10!}{3! \cdot 5! \cdot 2!}$$

b)

CAPPUCINO: $\frac{10!}{3! \cdot 2!} = 302400$ Möglichkeiten

MANGOLASSI: $\frac{10!}{2! \cdot 2!} = 907200$ Möglichkeiten

SELTERWASSER: $\frac{12}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 6652800$ Möglichkeiten

c)

Es handelt sich hierbei um ein Ziehen mit Zurücklegen und ohne Reihenfolge Demnach gilt:

$$\binom{6+10-1}{6} = \binom{15}{6} = 720$$

Es gibt 720 Möglichkeiten eine Kiste mit 6 Flaschen zusammenzustellen.

3.

a)

Induktionsannahme für ein $n \geq 3$:

$$\sum_{i=3}^{n} \left(\begin{array}{c} i \\ i-3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n+1 \\ 4 \end{array} \right)$$

Induktionsanfang mit n=3:

$$\sum_{i=3}^{3} \left(\begin{array}{c} i \\ i-3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 4 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{3!}{3! \cdot 0!} = \frac{4!}{4!}$$

$$\Rightarrow 1 = 1 \text{ Wahre Aussage}$$

Induktionsschritt:

$$\sum_{i=3}^{n+1} \binom{i}{i-3} = \binom{n+2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \binom{n+2}{4} = \binom{n+1}{4} + \binom{n+1}{n+1-3}$$

$$\Leftrightarrow \binom{n+2}{4} = \binom{n+1}{4} + \frac{(n+1)!}{3! \cdot (n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow \binom{n+2}{4} = \binom{n+1}{4} + \frac{(n+1)!}{3! \cdot (n+1-3)!}$$

$$\Leftrightarrow \binom{n+2}{4} = \binom{n+1}{4} + \binom{n+1}{3}$$

Die Aussage ist durch die uns bekannte Rekursionsformel bewiesen. Die Behauptung stimmt demnach.

4.

a)

Anzahl derjenigen $k \in \mathbb{N}(1 \leq k \leq 2000)$, die weder durch 3,5 oder 7 teilbar sind:
Es sei $S = k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 1000$ und $N = |S| = 2000$

$A_1 = \{k \in S : 3 \mid k\} \Rightarrow |A_1| = \lfloor \frac{2000}{3} \rfloor = 666$

$A_2 = \{k \in S : 5 \mid k\} \Rightarrow |A_2| = \lfloor \frac{2000}{5} \rfloor = 400$

$A_3 = \{k \in S : 7 \mid k\} \Rightarrow |A_3| = \lfloor \frac{2000}{7} \rfloor = 285$

$A_1 \cup A_2 = \{k \in S : 15 \mid k\} \Rightarrow |A_1 \cup A_2| = \lfloor \frac{2000}{15} \rfloor = 133$

$A_2 \cup A_3 = \{k \in S : 35 \mid k\} \Rightarrow |A_2 \cup A_3| = \lfloor \frac{2000}{35} \rfloor = 57$

$A_3 \cup A_1 = \{k \in S : 21 \mid k\} \Rightarrow |A_3 \cup A_1| = \lfloor \frac{2000}{21} \rfloor = 95$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{k \in S : 105 \mid k\} \Rightarrow |A_1| = \lfloor \frac{2000}{105} \rfloor = 19$

Insgesamt erhält man:
$|S\ (A_1 \cap A_2 \cap A_3)| = 2000 - (666 + 400 + 285) + 133 + 95 + 57 - 19 = 915$

b)

Anzahl derjenigen $k \in \mathbb{N}(1 \leq k \leq 1000)$, die weder durch 3, 5, 7 oder 11 teilbar sind:
Es sei $S = k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 1000$ und $N = |S| = 1000$

$A_1 = \{k \in S : 3 \mid k\} \Rightarrow |A_1| = \lfloor \frac{1000}{3} \rfloor = 333$

$A_2 = \{k \in S : 5 \mid k\} \Rightarrow |A_2| = \lfloor \frac{1000}{5} \rfloor = 200$

$A_3 = \{k \in S : 7 \mid k\} \Rightarrow |A_3| = \lfloor \frac{1000}{7} \rfloor = 142$

$A_4 = \{k \in S : 11 \mid k\} \Rightarrow |A_3| = \lfloor \frac{1000}{11} \rfloor = 90$

$A_1 \cup A_2 = \{k \in S : 15 \mid k\} \Rightarrow |A_1 \cup A_2| = \lfloor \frac{1000}{15} \rfloor = 66$

$A_1 \cup A_3 = \{k \in S : 21 \mid k\} \Rightarrow |A_1 \cup A_2| = \lfloor \frac{1000}{21} \rfloor = 47$

$A_1 \cup A_4 = \{k \in S : 33 \mid k\} \Rightarrow |A_1 \cup A_2| = \lfloor \frac{1000}{33} \rfloor = 30$

$A_2 \cup A_3 = \{k \in S : 35 \mid k\} \Rightarrow |A_1 \cup A_2| = \lfloor \frac{1000}{35} \rfloor = 28$

$A_2 \cup A_4 = \{k \in S : 55 \mid k\} \Rightarrow |A_1 \cup A_2| = \lfloor \frac{1000}{55} \rfloor = 18$

$A_3 \cup A_4 = \{k \in S : 77 \mid k\} \Rightarrow |A_1 \cup A_2| = \lfloor \frac{1000}{77} \rfloor = 12$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{k \in S : 105 \mid k\} \Rightarrow |A_1| = \lfloor \frac{1000}{105} \rfloor = 9$

$A_1 \cup A_2 \cup A_4 = \{k \in S : 165 \mid k\} \Rightarrow |A_1| = \lfloor \frac{1000}{165} \rfloor = 6$

$A_1 \cup A_3 \cup A_4 = \{k \in S : 231 \mid k\} \Rightarrow |A_1| = \lfloor \frac{1000}{231} \rfloor = 4$

$A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{k \in S : 385 \mid k\} \Rightarrow |A_1| = \lfloor \frac{1000}{385} \rfloor = 2$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_3 = \{k \in S : 1155 \mid k\} \Rightarrow |A_1| = \lfloor \frac{1000}{1155} \rfloor = 0$

Insgesamt erhält man:
$|S\ (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)| = 1000 - (333 + 200 + 142 + 90) + 66 + 47 + 30 + 28 + 18 + 12 - (9 + 6 + 4 + 2) + 0 = 415$