Mathematik Hausaufgaben zum 8./9. November

Arne Beer, MN 6489196
Time Overath, MN 6440863

27. November 2012

1 Rechenbeispiele

1.1 Kongruenzaufgaben

1)

$$177 \not\equiv 18 \pmod 5, \text{ da } 177 - 18 = 159 \text{ und } 5 \nmid 159$$

2)

$$177 \equiv -18 \pmod 5, \text{ da } 177 + 18 = 195 \text{ und } 5 \mid 195$$

3)

$$-89 \not\equiv -12 \pmod 6, \text{ da } -89 + 12 = 77 \text{ und } 6 \nmid 77$$

4)

$$-123 \not\equiv 33 \pmod{13}, \text{ da } -123 - 23 = 146 \text{ und } 13 \nmid 146$$

5)

$$39 \equiv -1 \pmod{40}, \text{ da } 39 + 1 = 40 \text{ und } 40 \mid 40$$

6)

$$77 \equiv 0 \pmod{11}, \text{ da } 77 - 0 = 77 \text{ und } 11 \mid 77$$

7)

$$2^{51} \not\equiv 51 \pmod 2, \text{ da } 2^{51} - 51 = 2 \cdot 2^{50} - 2 \cdot 25 - 1 = 2 \cdot (2^{50} - 25) - 1$$

$$\Rightarrow \ 2 \nmid 2 \cdot (2^{50} - 25) - 1 \text{ , weil } 2 \mid 2 \cdot n \text{ und } 2 \nmid 2 \cdot n - 1 \text{ , wobei } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{oder } 2^{51} - 51 = 2251799813685197 \text{ und } 2 \nmid 2251799813685197$$

1.2 Euklidischer Algorithmus

$$\text{Bestimmung des ggT(7293,378)}$$
$$7293 = 19 \cdot 378 + 111$$
$$378 = 3 \cdot 111 + 45$$
$$111 = 2 \cdot 45 + 21$$
$$45 = 2 \cdot 21 + 3$$
$$21 = 7 \cdot 3 + 0$$
$$\Rightarrow \text{ggT}(7293, 216) = 3$$

1.3 Berechnung von Werten

$$\lceil \sqrt{7} \rceil = 3, \lfloor \sqrt{7} \rfloor = 2, \lceil 7, 1 \rceil = 8 \lfloor 7, 1 \rfloor = 7$$
$$\lceil -7, 1 \rceil = -7, \lfloor -7, 1 \rfloor = -8 \lceil -7 \rceil = -7, \lfloor -7 \rfloor = -7$$

2 Beweise

2.1 Regel (2)

Beweise:

$$\text{Aus } b_1 \mid a_1 \text{ und } b_2 \mid a_2 \text{ folgt } b_1 \cdot b_2 \mid a_1 \cdot a_2$$
$$b_1 \mid a_1 \text{ und } b_2 \mid a_2 \text{ ist equivalent zu } a_1 = b_1 \cdot n_1 \text{ und } a_2 = b_2 \cdot n_2$$
$$\Rightarrow a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot n_1 \cdot b_2 \cdot n_2$$

Eingesetzt in die Behauptung $b_1 \cdot b_2 \mid a_1 \cdot a_2$ ergibt sich: $b_1 \cdot b_2 \mid b_1 \cdot b_2 \cdot n_1 \cdot n_2$

Somit ist die Aussage bewiesen

2.2 Regel (3)

Beweise:

$$\text{gilt } c \cdot b \mid c \cdot a \text{ , dann gilt auch } b \mid a \text{ für } c \neq 0$$

Allgemeine Definition von Teilern:

$$a = n \cdot b \text{ wobei } a, n, b \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow \text{für } c \cdot b \mid c \cdot a \text{ gilt } c \cdot a = n \cdot c \cdot b$$
$$\Rightarrow a = n \cdot b \text{ was equivalent zur Aussage } b \mid a \text{ ist}$$

2.3 Regel (4)

Zu beweisen:

$$\text{Aus } b \mid a_1 \text{ und } b \mid a_2 \text{ folgt } b \mid c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot a_2 \text{ für beliebige } c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$$

Beweis:

$$\text{Es gilt: } b \mid a_1 \Leftrightarrow a_1 = n_1 \cdot b \text{ und } b \mid a_2 \Leftrightarrow a_2 = n_2 \cdot b$$

Eingesetzt in die Behauptung $b \mid a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2$ ergibt sich $b \mid b \cdot (c_1 \cdot n_1 + c_2 \cdot n_2)$

Somit ist die Aussage bewiesen

3 Aufgabe 3

3.1 Beweis durch Vollständige Induktion

Induktionsannahme:

$$3 \mid (n^3 + 2 \cdot n)$$

Induktionsanfang:

$$3 \mid (1^3 + 2 \cdot 1) \text{ wahre Aussage}$$

Induktionsschritt:

$$3 \mid (n+1)^3 + 2 \cdot (n+1) =$$

$$3 \mid n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2$$

Durch Anwendung der Induktionsannahme folgt:

$$3 \mid n^3 + 2 \cdot n$$

$$\text{und } 3 \mid 3 \cdot (n^2 + n + 1)$$

$$\Rightarrow \; 3 \mid n^3 + 2n + 3n^2 + 3n + 3$$

3.2 b)

Für jedes $n \in N$ $2^n \cdot 2^n$ - Schrachbrett muss es einen Teiler 3 geben bei dem der Rest 1 bleibt. D.h.

$$2^1 \cdot 2^1 = 4$$

und 3 teilt 4 mit dem Rest 1

Induktionsannahme:

$$3 \mid 2^n \cdot 2^n \text{ mit Rest } 1$$

Induktionsanfang:

$$3 \mid 2^1 \cdot 2^1 \text{ mit Rest } 1$$

Induktionsschritt:

$$3 \mid 2^{n+1} \cdot 2^{n+1} \text{ mit Rest } 1$$

$$3 \mid 2 \cdot 2^n \cdot 2^n \cdot 2 \text{ mit Rest } 1$$

$$3 \mid 2^n \cdot 2^n \cdot 4 \text{ mit Rest } 1$$

Anwendung der Annahme:

$$3 \mid 2^n \cdot 2^n \text{ mit Rest } 1$$

$$3 \mid 4 \text{ mit Rest } 1$$

Dadurch ist die Aussage bewiesen.

4 Funktionen

4.1

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

$$g(x, y) = (xy^2, xy^2 - 3x, (x^2 - 2)y)$$

Für Injektivität muss gelten:

$$f(x, y) \neq f(a, b) \text{ wobei } x, y \neq a, b \quad \text{und } x, y \in \mathbb{Q}$$

Beweis:

$$xy^2 = ab^2 \tag{1}$$

$$xy^2 - 3x = ab^2 - 3a \tag{2}$$

$$x^2y - 2y = a^2b - 2b \tag{3}$$

(2) in (3)

$$xy^2 + x^2y - 3x - 2y = ab^2 + a^2b - 3a - 2b \tag{4}$$

(1) in (2) in (3)

$$2 \cdot xy^2 + x^2y - 3x - 2y = 2 \cdot ab^2 + a^2b - 3a - 2b$$

$$xy^2 + x^2y - 3x - 2y - ab^2 + 3a + 2b = a^2b \tag{5}$$

(5) in (4)

$$xy^2 + x^2y - 3x - 2y = ab^2 + xy^2 + x^2y - 3x - 2y - ab^2 - 3a - 2b + 3a + 2b$$

$$\Rightarrow xy^2 = ab^2 \text{ steht im Wiederspruch mit } x, y \neq a, b$$

$$\Rightarrow \text{Die Funktion ist Injektiv}$$

4.2

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$h(z) = (z + 2, z - 1)$$

Für Surjektivität muss gelten:

zu jedem Tupel (b,c), wobei $(b, c) \in \mathbb{Z}$, ist mindestens ein a, wobei $a \in \mathbb{Z}$, definiert mit $f(a) = (b, c)$

Beweis:
Darstellung des Tupels (2,2)

$$2 = z + 2 \text{ und } 2 = z - 1$$

$$\Rightarrow z + 2 = z - 1$$

$$\Rightarrow 2 = -1$$

Die Aussage ist falsch und somit ist Funktion nicht Surjektiv, da das Tupel nicht abgebildet werden kann.