Mathematik Hausaufgaben zum 30. November

Arne Beer, MN 6489196
Tim Overath, MN 6440863

6. Dezember 2012

6.1

a)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Folgende der aufgelisteten Produkte sin definierbar. AB, AD, BB, CD, DC

$AB = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 30 & 17 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, AD = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 26 \\ -4 \end{pmatrix}, BB = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, CD = \begin{pmatrix} 12 \end{pmatrix}, DC = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 3 & 6 & -6 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

b)

$AB_{3;2} = 15$

Die vierte Spalte von AB lautet: $\begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 3 \\ 23 \end{pmatrix}$

6.2

Damit die Gültigkeit des Distributivgesetztes mit den vorliegenden Matrizen bewiesen wird muss gelten: $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$

$$A \cdot (B_1 + B_2) = A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 & 56 \\ 12 & -8 \\ 28 & 16 \end{pmatrix}$$

$$AB_1 \cdot AB_2 = \begin{pmatrix} 26 & 52 \\ 6 & 12 \\ 14 & 28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 6 & -20 \\ 14 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 & 56 \\ 12 & -8 \\ 28 & 16 \end{pmatrix}$$

Die Gültigkeit der ursprünglichen Aussage ist somit auf diese Matrizen bezogen bewiesen.

b)

Bestätigen der Gleichung $(AB)^T = B^T A^T$ anhand der vorliegenden Matrizen

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ 5 & 10 \\ 17 & 34 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 17 \\ 22 & 10 & 34 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ 5 & 10 \\ 17 & 34 \end{pmatrix}$$

c)

Wie man anhand der Umgeformten Matrizen A^T und B^T erkennen kann, ist eine Multiplikation hier nicht mehr möglich. Aus dem ursprünglichen Aufbau $A = m \times n$ und $B = n \times p$ wird $A^T = n \times m$ und $B^T = p \times n$, wodurch die Multiplikation nicht mehr möglich ist. Ein Ausnahmefall ist hier, wenn 2 quadratische Matrizen miteinander multipliziert werden, da sie ihre ursprüngliche Form beibehalten.

6.3

A sei eine $m \times n$ - Matrix, B_2 und B_2 seien $n \times p$ - Matrizen. Beweisen Sie die Gültigkeit des Distributivgesetzes $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}, B_1 = (b_{jk})_{\substack{j=1,\cdots,n \\ k=1,\cdots,p}}, B_2 = (b'_{jk})_{\substack{j=1,\cdots,n \\ k=1,\cdots,p}}$$

$$B_1 + B_2 = (b_{jk} + b'_{jk})_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}$$

$$A(B_1 + B_2) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (b_{jk} + b'_{jk}) \right)_{\substack{i=1,\cdots,m \\ k=1,\cdots,p}}$$

$$A(B_1 + B_2) = \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \cdot b_{jk} + a_{ij} \cdot b'_{jk}) \right)_{\substack{i=1,\cdots,m \\ k=1,\cdots,p}}$$

$$A(B_1 + B_2) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b'_{jk} \right)_{\substack{i=1,\cdots,m \\ k=1,\cdots,p}}$$

$$A(B_1 + B_2) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right)_{\substack{i=1,\cdots,m \\ k=1,\cdots,p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b'_{jk} \right)_{\substack{i=1,\cdots,m \\ k=1,\cdots,p}}$$

$$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$$

6.4

a)

Zu beweisende Aussage: Für jede Abbildung
$f : A \to B$ und jedes $B \subseteq B'$ gilt $f(f^{-1}(B')) \subseteq B'$

Es ist zu zeigen das für ein beliebiges $x \in f(f^-1(B'))$ gilt $x \in B'$.
Es gilt $x \in B'$, $x' \in f^-1(B')$. Es gibt ein y für das gilt $f(y) \subseteq B'$