Mathe
Abi Lernzettel

Leon Feuerstein

Inhalt

Kapitel 1: Allgemeinwissen

1.1 Wichtige Formeln

1.1.1 Ableitung - Aufleitung

Aufleitungsregeln
Ableitungsregeln

Kapitel 2: Analysis

2.1 Grundlagen der Differenzialrechnung

2.1.1 Ableitungsregeln

Aufbau: Name der Regel.
Erste Formel die allgemeine Formel (neutral).
Zweite Formel (optional) ein Zahlenbeispiel.

Konstantenregel:
$f(x) = n \rightarrow f'(x) = 0$
$f(x) = 3 \rightarrow f'(x) = 0$

Potenzregel:
$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = x^5 \rightarrow f'(x) = 5x^4$

Faktorregel:
$f(x) = a \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = a \cdot g'(x)$
$f(x) = 3 \cdot x^2 \rightarrow f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot x^1 = 6x$

Summenregel/Differenzregel:
$f(x) = g(x) + h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$
$f(x) = g(x) - h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) - h'(x)$

Produktregel:
$f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Kettenregel:
$f(x) = u(v(x)) \rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

2.1.1.1 Zu Beachten

- $ln(x)$ abgeleitet ist $\frac{1}{x}$
- e^x abgeleitet bleibt gleich (e^x)

2.1.2 Monotonie und Grümmung

Montonie:
Monotonie bezieht sich auf das Verhalten einer Funktion in Bezug darauf, ob sie stetig zunimmt oder abnimmt. Eine Funktion wird als monoton steigend bezeichnet, wenn für zwei Punkte x_1 und x_2 mit

$x_1 < x_2$ der Funktionswert an x_1 kleiner oder gleich dem Funktionswert an x_2 ist. Umgekehrt wird eine Funktion als monoton fallend bezeichnet, wenn für zwei Punkte x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ der Funktionswert an x_1 größer oder gleich dem Funktionswert an x_2 ist.

Krümmung:
Die Krümmung einer Funktion beschreibt, wie stark eine Kurve von einer Geraden abweicht. Mathematisch gesehen wird die Krümmung einer Funktion durch die zweite Ableitung der Funktion beschrieben. Eine positive zweite Ableitung bedeutet, dass die Funktion eine nach oben geöffnete Krümmung (konkav) hat, während eine negative zweite Ableitung eine nach unten geöffnete Krümmung (konvex) anzeigt. Eine Krümmung von null bedeutet, dass die Funktion an dieser Stelle eine Wendepunkt hat, wo die Krümmung ihre Richtung ändert.

2.1.3 Extrem- und Wendepunkte

Extrempunkte:
Extrempunkte sind Punkte auf dem Graphen einer Funktion, an denen die Funktion entweder ein lokales Maximum oder Minimum erreicht.

- Lokales Maximum: An einem lokalen Maximum ist der Funktionswert größer als in der unmittelbaren Umgebung. Mathematisch bedeutet dies, dass die erste Ableitung der Funktion an diesem Punkt null ist ($f'(x) = 0$) und die zweite Ableitung negativ ist ($f''(x) < 0$).
- Lokales Minimum: An einem lokalen Minimum ist der Funktionswert kleiner als in der unmittelbaren Umgebung. Hier ist ebenfalls die erste Ableitung null ($f'(x) = 0$), jedoch ist die zweite Ableitung positiv ($f''(x) > 0$).

Wendepunkte:
Ein Wendepunkt ist ein Punkt auf dem Graphen einer Funktion, an dem sich das Krümmungsverhalten ändert. Das bedeutet, die Funktion wechselt an diesem Punkt von konkav zu konvex oder umgekehrt.

- Bestimmung von Wendepunkten: Ein Wendepunkt liegt vor, wenn die zweite Ableitung der Funktion null ist ($f''(x) = 0$) und die dritte Ableitung nicht null ist ($f'''(x) \neq 0$).

2.1.4 Tangente und Normale

Tangente:
Eine Tangente an den Graphen einer Funktion an einem bestimmten Punkt ist eine Gerade, die den Graphen genau an diesem Punkt berührt. Die Steigung der Tangente entspricht der Ableitung der Funktion an diesem Punkt.
Um die Tangente bestimmen zu können ($f(x) = m \cdot x + c$):

- m: $f'(\alpha)$. Bei dem α der x-Wert ist, an dem die Tangente gesucht wird.
- c: $f(\alpha)$. Bei dem α der x-Wert ist, an dem die Tangente gesucht wird.

Normale:
Eine Normale ist ein Graph der Orthogonal zur Tangente verläuft. Auch dieser wird durch die Tangentengleichung ($f(x) = m \cdot x + c$) bestimmt und kann von der Tangente bestimmt werden.
Tangente: $f(x) = m \cdot x + c$
Normale: $f(x) = -\frac{1}{m} \cdot x + c$

2.1.5 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen sind mathematische Probleme, bei denen eine Zielfunktion unter Berücksichtigung zusätzlicher Bedingungen optimiert werden soll. Diese werden häufig in Form von Textaufgaben verwendet oder einfach mit einer Formel und mithilfe von Text.

!!! Offen für neue + bessere Beispiele !!!
Beispiel:
Ein Unternehmen produziert zwei Arten von Produkten, X und Y. Der Gewinn pro verkaufter Einheit beträgt 10 Euro für Produkt X und 15 Euro für Produkt Y. Das Unternehmen möchte die Gesamtgewinnmarge maximieren und muss gleichzeitig sicherstellen, dass mindestens 100 Einheiten des Produkts X verkauft werden.

- **Zielfunktion:** Maximiere die Gesamtgewinnmarge $G = 10x + 15y$, wobei x die Anzahl der Einheiten von Produkt X und y die Anzahl der Einheiten von Produkt Y ist.
- **Nebenbedingung:** Verkaufsmenge von X muss mindestens 100 Einheiten betragen $x \geq 100$

Lösungsschritte:

1. Formulieren der Zielfunktion und Nebenbedingung:
   $G = 10x + 15y$
2. Lösen:
   Wegen Nebenbedingung setze $x = 100$ somit:
   $G = 10 \cdot 100 + 15y = 1000 + 15y$

Also ist das Ergebnis: $G = 1000 + 15y$

2.2 Integrale

Integrale sind das aufsummieren von Funktionen.
Linien aufsummiert $\rightarrow$ Fläche.
Flächen aufsummiert $\rightarrow$ Volumen.

2.2.1 Stammfunktion

Auch als Aufleiten bekannt.

2.2.1.1 (Aufleitungs-) Regeln

Aufbau: Name der Regel.
Erste Formel die allgemeine Formel (neutral).
Zweite Formel (optional) ein Zahlenbeispiel.

Konstantenregel:
$f(x) = n \ \rightarrow \ F(x) = n \cdot x + C$
Dabei ist n eine konstante Zahl.
$f(x) = 3 \ \rightarrow \ F(x) = 3x + C$

Faktorregel:

$f(x) = a \cdot x \rightarrow F(x) = a \cdot X + C$
Dabei ist x ein beliebiger Wert wie: $x^2, 3x, etc.$ und X ist die Aufleitung des Wertes.

Potenzregeln:
$f(x) = x^n \ \rightarrow \ F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
Dabei ist n eine konstante Zahl.
$f(x) = a \cdot x^3 \ \rightarrow \ F(x) = a \cdot \frac{1}{3+1} \cdot x^{3+1} + C = a \cdot \frac{x^4}{4} + C$

Summenregel:
$f(x) = h + k \rightarrow F(x) = H + K$
Dabei ist h und k ein beliebiger Wert wie z.B.: x^2, $3x$, $4x^3 4$, etc.

2.2.1.2 Zu Beachten

- Aufleitung von e. (e^x bleib unverändert)
- Wuzeln können auch als Exponent geschrieben werden ($\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$)
- $ln(x)$ aufgeleitet ist e^x

2.2.2 Flächeninhalt

Um den Flächeninhalt eines Graphen zu bestimmen berechnet man die Stammfunktion des Graphen. Dann berechnet man das Integral von a zu b um die Fläche zu bestimmen.

Beispiel:
Funktion: $f(x) = x^2$
Gesucht ist der Flächeninhalt von 1 bis 4. Somit:
$\int_1^4 x^2 \ dx$

$\rightarrow [\frac{1}{3}x^3]_1^4$

$\rightarrow (\frac{1}{3}4^3) - (\frac{1}{3}1^3) = 21$

2.2.3 Rotationskörper

Formel:
Allgemein:
$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \ dx$

Oder aufgebrochen in:
$g(x) = \pi \cdot x^2$
$f(x) = g(x)$
dann um Volumen zu berechnen:
$f(x) \rightarrow \ F(x)$
und die grenzen für das Integral angeben

Dabei steht $g(x)$ für die Formel eines runden Flächeninhalts. Für x in der Formel für $f(x)$ wird die Formel für den gegebenen Körper eingegeben. Dieser wird dann als Volumen durch das die Aufleitung aufsummiert um das Volumen zu bekommen.

2.2.4 Uneigendliche Integrale

Uneigendliche Integrale sind Integrale mit bestimmten Eigenschaften. Dabei bestehen diese Eigenschaften aus unendlichen Grenzen oder Funktionen als Grenzen. Das Ziel dabei ist das Ergebnis möglichst genau beschreiben zu können ohne dabei ein genaues Ergebnis als Zahl erhalten zu müssen.
Beispiele dafür:
$\int_a^\infty x^2\, dx \rightarrow$ Ergebnis wird unendlich groß
$\int_\infty^1 \frac{1}{x}\, dx \rightarrow$ Ergebnis nähert sich 0 an

2.2.5 Mittelwerte

2.3 Exponential und Logarithmusfunktion

2.3.1 Ableitung von e und ln(x)

Ableitung von e:
$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$
$\Rightarrow e$ bleibt bei der Ableitung gleich.

Ableitung von ln(x):
$f(x) = ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

2.3.2 Euler'sche Zahl: e

Die Euler'sche Zahl e ist eine Zahl die bei ihrer Ableitung identisch bleibt.
Die Formel für e (nicht wichtig zu wissen):
$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ..$

2.3.3 Exponentialrechnung

2.3.4 Graphen

2.3.5 Logarithmusfunktion

2.3.6 Parameter

2.3.7 Umkehrfunktion

Umkehrfunktion ist die Umkehrung einer Funktion.
Beispiel anhand von Zahlenbeispiel:

1. Gegeben Funktion: $f(x) = 3x^2$
2. Umbenennung: $y = 3x^2$
3. Nach x Auflösen: $3x^2 = y$
4. Aksgleichen: $x = \sqrt{\frac{y}{3}}$
5. Ergebnis: $f(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}$

2.4 Funktionen und ihre Graphen

2.4.1 Strecken, Verschieben und Spiegeln von Graphen

2.4.2 Linearfaktordarstellung

2.4.3 Lösen von Gleichungen

2.4.4 Trigonometrische Funktionen

2.4.5 waagerechte und senkrechte Asymptoten

2.4.6 Graph und Funktionstherm

2.4.7 Untersuchen von Funktionscharen

2.4.8 Näherungsweise: Berechnen von Nullstellen

2.5 Lineare Gleichungssysteme

2.5.1 Gauß-Verfahren

2.5.2 Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme

2.5.3 Lineare Gleichungssysteme mit Parametern auf der rechten Seite

2.5.4 Bestimmen von ganz rationaler Funktionen

Kapitel 3: Vektoren/Geometrie

3.1 Geraden und Ebenen

3.1.1 Vektoren im Raum

3.1.2 Geraden im Raum

3.1.3 Ebenen im Raum - Parameterform

3.1.4 Skalarprodukt

3.1.5 Ebenenformen

3.1.5.1 Koordinatenform

3.1.5.2 Normalenform

3.1.5.3 Parameterform

Die Parameterform ist durch einen Stützvektor $\vec{p}$ und zwei Richtungsvektoren $\vec{h}$ und $\vec{k}$ definiert.
$E : \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{h} + t \cdot \vec{k}$

Oder als Zahlenbeispiel (die $x_1|x_2$ Ebene):
$E : \vec{x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + s \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + t \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ ß \end{Bmatrix}$

Kann mithilfe des Kreuzprodukts zur Normalenform umgewandelt werden:

$\vec{p}$: ist jeweils der Stützvektor $\vec{x}$: bleibt der Punkt

3.1.6 Ebenen veranschaulichen

3.1.7 Lage von Ebenen und Geraden

3.1.8 Lage von Ebenen

3.2 Abstände und Winkel

3.2.1 Abstand von Punkt zu Ebene

3.2.2 Abstand von Punkt zu Gerade

3.2.3 Spiegelung und Symmetrie

3.2.4 Winkel zwischen Vektoren

Mithilfe der Formel des Skalarprodukts herleitbar.
$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\alpha)$
$\rightarrow cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$
Dabei steht $cos(\alpha)$ für den Winkel und kann mithilfe des Taschenrechners mit $cos^{-1}(\sigma)$ in Grad umgewandelt werden. σ steht hierbei für $cos(\alpha)$

Zahlenbeispiel:
$\vec{a} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$
Berechne benötigte Werte:

- $\vec{a} \bullet \vec{b} = 5 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 12$
- $|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{11}$
- $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{17}$

Setze ein:
$cos(\alpha) = \frac{12}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{17}} = 0.877$
Gebe in Taschenrechner ein:
$cos^{-1}(0.877) = 28.717$
Somit ist der Winkel: $28.717°$

3.2.5 Schnittwinkel

3.2.6 Vektorprodukt - Kreuzprodukt

3.2.7 Modellierung von geradlinigen Bewegungen

3.2.8 Vektorielle Beweise

Kapitel 4: Stochastik

Kapitel 5: Das fehlt noch/muss ergänzt werden

- mittelwerte bei integralen
- analysis: funktionen und ihre graphen
- analysis: exponential und logarithmusfunktionen
- alles zu vektoren
- alles zu stochastik