Mathe
Abi Lernzettel

Leon Feuerstein

Inhalt

Kapitel 1: Analysis

1.1 Grundlagen der Differenzialrechnung

1.1 Ableitungsregeln

Aufbau: Name der Regel.
Erste Formel die allgemeine Formel (neutral).
Zweite Formel (optional) ein Zahlenbeispiel.

Konstantenregel:
$f(x) = n$
$\implies f'(x) = 0$

Potenzregel:
$f(x) = x^n$
$\implies f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Faktorregel:
$f(x) = a \cdot g(x)$
$\implies f'(x) = a \cdot g'(x)$

Summenregel/Differenzregel:
$f(x) = g(x) + h(x)$
$\implies f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Produktregel:
$f(x) = u(x) \cdot v(x)$
$\implies f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Kettenregel:
$f(x) = u(v(x))$
$\implies f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

1.1.1 Zu Beachten

- $ln(x)$ abgeleitet ist $\frac{1}{x}$
- e^x abgeleitet bleibt gleich (e^x). Bei e wird die Kettenregel angewendet.

1.2 Monotonie und Grümmung

Montonie:
Monotonie bezieht sich auf das Verhalten einer Funktion in Bezug darauf, ob sie stetig zunimmt oder abnimmt. Eine Funktion wird als monoton steigend bezeichnet, wenn für zwei Punkte x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ der Funktionswert an x_1 kleiner oder gleich dem Funktionswert an x_2 ist. Umgekehrt wird eine Funktion als monoton fallend bezeichnet, wenn für zwei Punkte x_1 und x_2 mit $x_1 > x_2$ der Funktionswert an x_1 größer oder gleich dem Funktionswert an x_2 ist.

Krümmung:
Die Krümmung einer Funktion beschreibt, wie stark eine Kurve von einer Geraden abweicht. Mathematisch gesehen wird die Krümmung einer Funktion durch die zweite Ableitung der Funktion beschrieben. Eine

positive zweite Ableitung bedeutet, dass die Funktion eine nach oben geöffnete Krümmung (konkav) hat, während eine negative zweite Ableitung eine nach unten geöffnete Krümmung (konvex) anzeigt. Eine Krümmung von null bedeutet, dass die Funktion an dieser Stelle eine Wendepunkt hat, wo die Krümmung ihre Richtung ändert.

1.3 Extrem- und Wendepunkte

Extrempunkte:
Extrempunkte sind Punkte auf dem Graphen einer Funktion, an denen die Funktion entweder ein lokales Maximum oder Minimum erreicht.

- **Lokales Maximum**: An einem lokalen Maximum ist der Funktionswert größer als in der unmittelbaren Umgebung. Mathematisch bedeutet dies, dass die erste Ableitung der Funktion an diesem Punkt null ist ($f'(x) = 0$) und die zweite Ableitung negativ ist ($f''(x) < 0$).
- **Lokales Minimum**: An einem lokalen Minimum ist der Funktionswert kleiner als in der unmittelbaren Umgebung. Hier ist ebenfalls die erste Ableitung null ($f'(x) = 0$), jedoch ist die zweite Ableitung positiv ($f''(x) > 0$).

Wendepunkte:
Ein Wendepunkt ist ein Punkt auf dem Graphen einer Funktion, an dem sich das Krümmungsverhalten ändert. Das bedeutet, die Funktion wechselt an diesem Punkt von konkav zu konvex oder umgekehrt.

- **Bestimmung von Wendepunkten**: Ein Wendepunkt liegt vor, wenn die zweite Ableitung der Funktion null ist ($f''(x) = 0$) und die dritte Ableitung nicht null ist ($f'''(x) \neq 0$).

1.4 Tangente und Normale

Tangente:
Eine Tangente an den Graphen einer Funktion an einem bestimmten Punkt ist eine Gerade, die den Graphen genau an diesem Punkt berührt. Die Steigung der Tangente entspricht der Ableitung der Funktion an diesem Punkt.
Um die Tangente bestimmen zu können ($f(x) = m \cdot x + c$):

- m: $f'(\alpha)$. Bei dem α der x-Wert ist, an dem die Tangente gesucht wird.
- c: $f(\alpha)$. Bei dem α der x-Wert ist, an dem die Tangente gesucht wird.

Normale:
Eine Normale ist ein Graph der Orthogonal zur Tangente verläuft. Auch dieser wird durch die Tangentengleichung ($f(x) = m \cdot x + c$) bestimmt und kann von der Tangente bestimmt werden.
Tangente: $f(x) = m \cdot x + c$
Normale: $f(x) = -\frac{1}{m} \cdot x + c$

1.5 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen sind mathematische Probleme, bei denen eine Zielfunktion unter Berücksichtigung zusätzlicher Bedingungen optimiert werden soll. Diese werden häufig in Form von Textaufgaben verwendet oder einfach mit einer Formel und mithilfe von Text.

!!! Offen für neue + bessere Beispiele !!!

Beispiel:
Ein Unternehmen produziert zwei Arten von Produkten, X und Y. Der Gewinn pro verkaufter Einheit beträgt 10 Euro für Produkt X und 15 Euro für Produkt Y. Das Unternehmen möchte die Gesamtgewinnmarge maximieren und muss gleichzeitig sicherstellen, dass mindestens 100 Einheiten des Produkts X verkauft werden.

- **Zielfunktion:** Maximiere die Gesamtgewinnmarge $G = 10x + 15y$, wobei x die Anzahl der Einheiten von Produkt X und y die Anzahl der Einheiten von Produkt Y ist.
- **Nebenbedingung:** Verkaufsmenge von X muss mindestens 100 Einheiten betragen $x \geq 100$

Lösungsschritte:

1. Formulieren der Zielfunktion und Nebenbedingung:
   $G = 10x + 15y$
2. Lösen:
   Wegen Nebenbedingung setze $x = 100$ somit:
   $G = 10 \cdot 100 + 15y = 1000 + 15y$

Also ist das Ergebnis: $G = 1000 + 15y$

1.2 Integrale

Integrale sind das aufsummieren von Funktionen.
Linien aufsummiert $\rightarrow$ Fläche.
Flächen aufsummiert $\rightarrow$ Volumen.

2.1 Stammfunktion (Aufleiten)

Aufbau: Name der Regel.
Erste Formel die allgemeine Formel (neutral).
Zweite Formel (optional) ein Zahlenbeispiel.

Konstantenregel:
$f(x) = n$
$\Longrightarrow \; F(x) = n \cdot x + C$
Dabei ist n eine konstante Zahl.
$f(x) = 3 \;\rightarrow\; F(x) = 3x + C$

Faktorregel:
$f(x) = a \cdot x$
$\Longrightarrow \; F(x) = a \cdot X + C$
Dabei ist x ein beliebiger Wert wie: $x^2, 3x, etc.$ und X ist die Aufleitung des Wertes.

Potenzregeln:
$f(x) = x^n$
$\Longrightarrow \; F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
Dabei ist n eine konstante Zahl.
$f(x) = a \cdot x^3$
$\Longrightarrow \; F(x) = a \cdot \frac{1}{3+1} \cdot x^{3+1} + C = a \cdot \frac{x^4}{4} + C$

Summenregel:
$f(x) = h + k$
$\Longrightarrow \; F(x) = H + K$
Dabei ist h und k ein beliebiger Wert wie z.B.: x^2, $3x$, $4x^3 4$, etc.

Zu Beachten:

- Aufleitung von e. (e^x bleib unverändert)
- Wuzeln können auch als Exponent geschrieben werden ($\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$)
- $ln(x)$ aufgeleitet ist e^x

2.2 Flächeninhalt

Um den Flächeninhalt eines Graphen zu bestimmen berechnet man die Stammfunktion des Graphen. Dann berechnet man das Integral von a zu b um die Fläche zu bestimmen.

Beispiel:
Funktion: $f(x) = x^2$
Gesucht ist der Flächeninhalt von 1 bis 4. Somit:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^4 x^2\,dx \\ &\implies \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_1^4 && \mid \text{Aufgeleitet} \\ &\implies \left(\tfrac{1}{3}4^3\right) - \left(\tfrac{1}{3}1^3\right) && \mid \text{Eingesetzt} \end{aligned}$$

2.3 Rotationskörper

Formel:

Allgemein:
$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\ dx$

Oder aufgebrochen in:
$g(x) = \pi \cdot x^2$
$f(x) = g(x)$
dann um Volumen zu berechnen:
$f(x) \to\ F(x)$
und die grenzen für das Integral angeben

Dabei steht $g(x)$ für die Formel eines runden Flächeninhalts. Für x in der Formel für $f(x)$ wird die Formel für den gegebenen Körper eingegeben. Dieser wird dann als Volumen durch das die Aufleitung aufsummiert um das Volumen zu bekommen.

2.4 Uneigendliche Integrale

Uneigendliche Integrale sind Integrale mit bestimmten Eigenschaften. Dabei bestehen diese Eigenschaften aus unendlichen Grenzen oder Funktionen als Grenzen. Das Ziel dabei ist das Ergebnis möglichst genau beschreiben zu können ohne dabei ein genaues Ergebnis als Zahl erhalten zu müssen.
Beispiele dafür:
$\int_a^\infty x^2\ dx \to$ Ergebnis wird unendlich groß
$\int_\infty^1 \frac{1}{x}\ dx \to$ Ergebnis nähert sich 0 an

2.5 Mittelwerte

Um den Mittelwert eines Integrals zu berechnen, berechnet man zuerst das Integral und Teilt durch den Bereich des gegeben Integrals:

$f(x) = \int_0^4 x^2 \; dx$

Hierbei muss nun das Integral von 0 bis 4 ausgerechnet werden. Dann wird das Integral einfach erstmal wie sonst auch ausgerechnet.
Für das Ergebnis wird absofort y genommen.
Zuletzt nimmt man den unterschied der grenzen des Integrals (in diesem Beispiel ist dies von 0 bis 4) und berechnet den Unterschied $(4 - 0 = 4)$ und Teil y durch dieses.

In Kurz:

$f(x) = \int_i^k x \; dx$
$\rightarrow f(x) = \frac{1}{k-i} \int_i^k x \; dx$

1.3 Exponential-/Logarithmusfunktion

3.1 Ableitung von e und ln(x)

Ableitung von e:
$f(x) = e^x$
$\implies f'(x) = e^x$
(e bleibt bei der Ableitung gleich)

Ableitung von ln(x):
$f(x) = ln(x)$
$\implies f'(x) = \frac{1}{x}$

3.2 Euler'sche Zahl: e

Die Euler'sche Zahl e ist eine Zahl die bei ihrer Ableitung identisch bleibt.
Die Formel für e (nicht wichtig zu wissen):

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ..$$

3.3 Exponentialrechnung

Exponentialrechungen bestehen meistens aus:
$f(x) = e^{(n \cdot x)} + c$
Dabei steht e für die Eulerische Zahl, x für die Steigung für jeden Schritt, n für den Faktor und c die Verschiebung in der y-Achse.
Zu beachten:

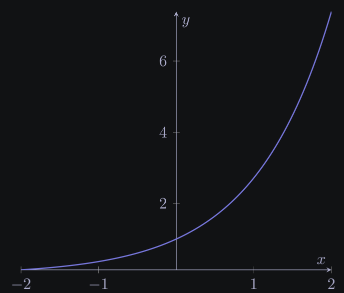
- $n < 1$: Exponentieller Zerfall

- $n > 1$: Exponentielle Steigung
- $n = 0$: Gerade Parallel zur x-Achse auf der höhe c

3.4 Graphen

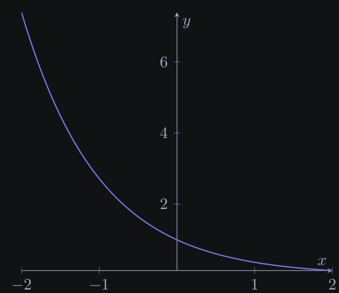
Exponentielle Steigung:

Funktion: $f(x) = e^x$



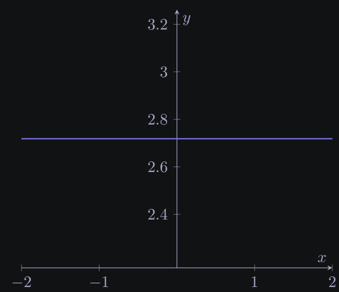
Exponentieller Zerfall:

Funktion: $f(x) = e^{-x}$



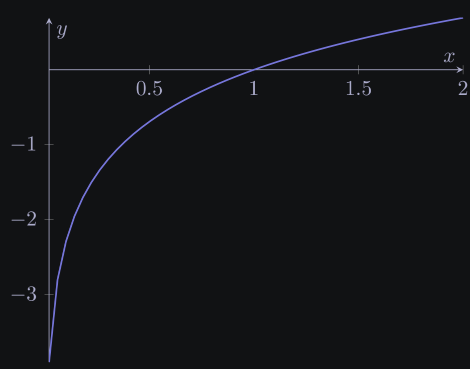
Konstant (nicht Exponential):

Funktion: $f(x) = e^1$



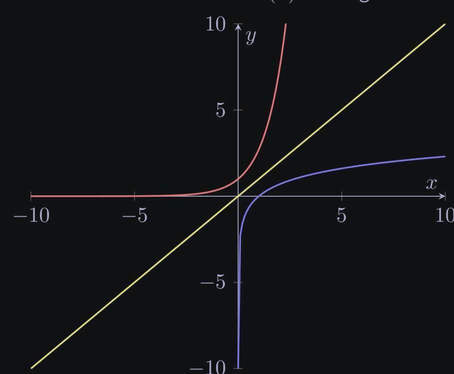
Logarithmusfunktion:

Funktion: $f(x) = ln(x)$



Vergleich: e/ln/x=y:

Funktionen: e^x und $ln(x)$ im vergleich



3.5 Logarithmusfunktion

3.6 Parameter

$f_a(x) = e^{x-a}$
Rest fehlt!!

3.7 Umkehrfunktion

Umkehrfunktion ist die Umkehrung einer Funktion.
Dabei wird ein gegebener Term wie $f(x) = x^2$ genommen und $f(x)$ mit y und und das x^2 durch y^2 ersetzt.

$$f(x) = y^2$$
$$\rightarrow y = x^2$$

Dann wird nach x aufgelößt.

Beispiel anhand von Zahlenbeispiel:

1. Gegeben Funktion: $f(x) = 3x^2$
2. Umbenennung: $y = 3x^2$
3. Nach x Auflösen: $3x^2 = y$
4. Ausgleichen: $x = \sqrt{\frac{y}{3}}$
5. Ergebnis: $f(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}$

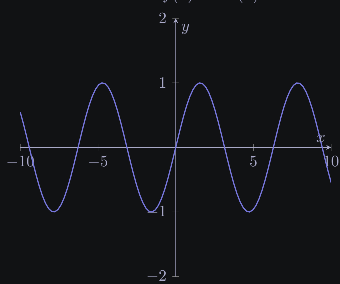
1.4 Funktionen und ihre Graphen

4.1 Strecken, Verschieben und Spiegeln von Graphen

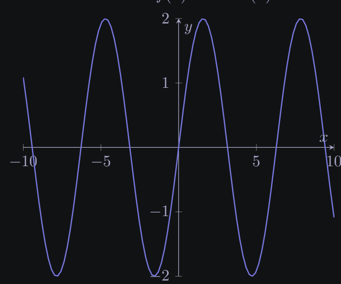
4.1.1 Strecken und Stauchen

Vertikale Streckung:
$f(x) \rightarrow \; a \cdot f(x)$
$a > 1$ ist eine **Streckung**
$a < 1$ ist eine **Stauchung**

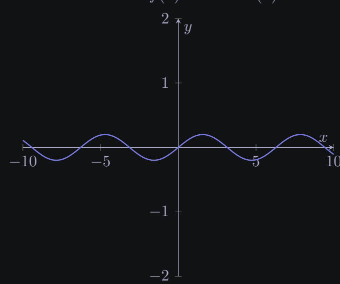
Funktion: $f(x) = sin(x)$



Funktion: $f(x) = 2 \cdot sin(x)$

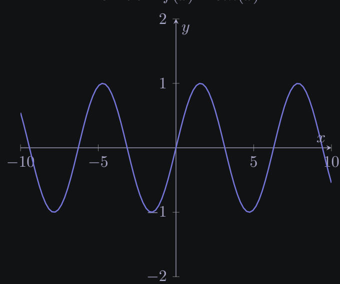


Funktion: $f(x) = 0.2 \cdot sin(x)$

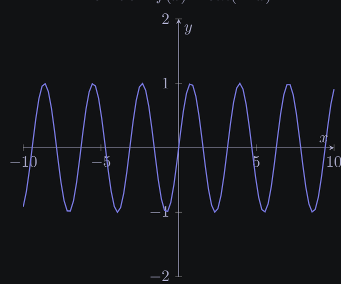


Horzontale Streckung:
$f(x) \rightarrow \; f(x \cdot b)$
$b > 1$ ist eine **Stauchung**
$0 < b < 1$ ist eine **Streckung**

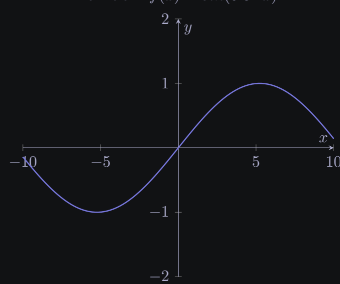
Funktion: $f(x) = sin(x)$



Funktion: $f(x) = sin(2 \cdot x)$



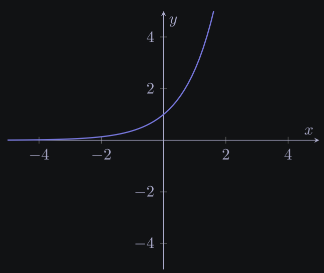
Funktion: $f(x) = sin(0.3 \cdot x)$



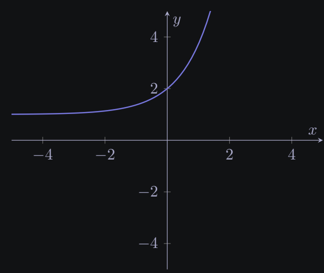
4.1.2 Verschieben

Vertikale Verschiebung:
$f(x) \to \ f(x) + c$
$c > 0$ eine Verschiebung nach oben
$c < 0$ eine Verschiebung nach unten

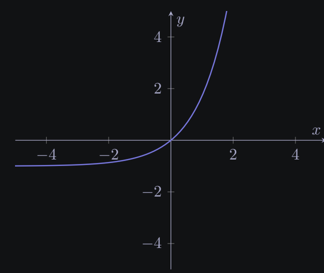
Funktion: $f(x) = e^x$



Funktion: $f(x) = e^x + 1$

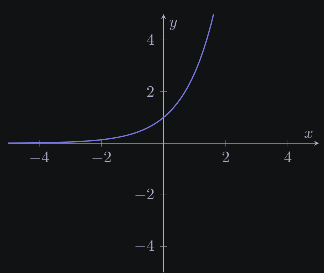


Funktion: $f(x) = e^x - 1$

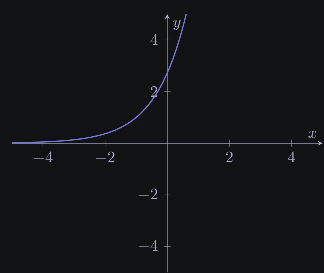


Horzontale Verschiebung:
$f(x) \to \ f(x - d)$
$d > 0$ eine Verschiebung nach rechts
$d < 0$ eine Verschiebung nach links

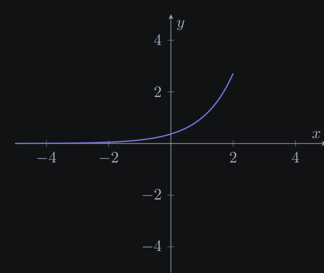
Funktion: $f(x) = e^x$



Funktion: $f(x) = e^{x+1}$



Funktion: $f(x) = e^{x-1}$

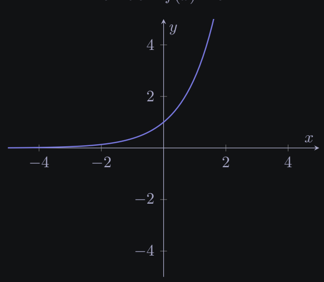


4.1.3 Spiegelung

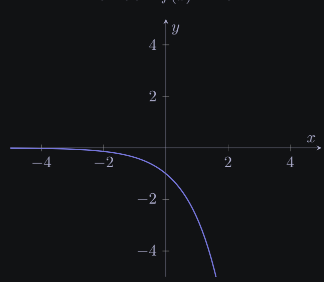
y-Achse:
$f(x) \to \ f(-x)$

x-Achse:
$f(x) \to \ -f(x)$

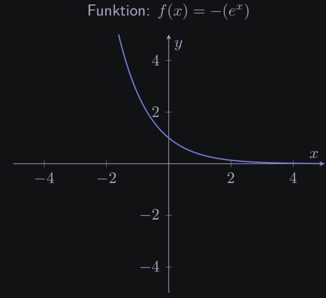
Funktion: $f(x) = e^x$



Funktion: $f(x) = -e^x$



Funktion: $f(x) = -(e^x)$



4.2 Linearfaktordarstellung

4.3 Lösen von Gleichungen

Quadratische Gleichungen:
$ax^2 + bx + c = 0$
$\rightarrow$ Mitternachtsformel$= x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

Satz vom Nullprodukt:
$p(x) \cdot q(x) = 0$
$\rightarrow$ $p(x) = 0$ oder $q(x) = 0$

Ausklammern:
$ax^3 + bx^2 + cx = 0$
$\rightarrow$ $x \cdot (ax^2 + bx + c) = 0$

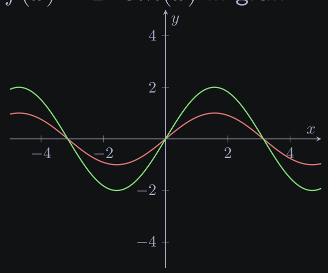
Substitionen:
$a \cdot e^2x + b \cdot e^x + c = 0$
$\rightarrow$ $Z = e^x$
$= a \cdot z^x + b \cdot z + c = 0 \rightarrow$ Mitternachtsformel

4.4 Trigonometrische Funktionen

4.4.1 Amplitude ändern

Strecken in y-Richtung:
$f(x) = a \cdot sin(x)$
$a < 1$: Stauchen
$a > 1$: Strecken

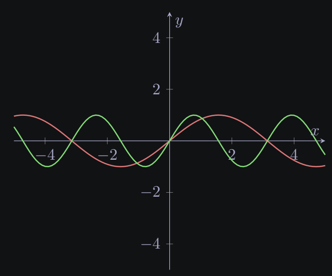
$f(x) = sin(x)$ in rot
$f(x) = 2 \cdot sin(x)$ in grün



4.4.2 Periode ändern

Streckung in x-Richtung:
$f(x) = a \cdot sin(b \cdot x)$
$b < 1$: Stauchen
$b > 1$: Strecken

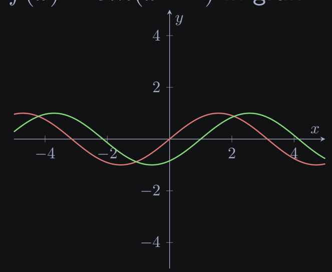
$f(x) = sin(x)$ in rot
$f(x) = sin(2 \cdot x)$ in grün



4.4.3 Verschieben

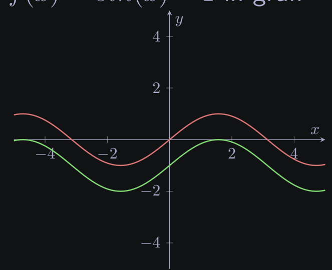
Verschieben in x-Richtung:
$f(x) = a \cdot sin(b \cdot (x - c))$
$c < 0$: Verschiebung nach links
$c > 0$: Verschiebung nach rechts
(beachte das minus wodurch das c nochmal umgedreht wird und deshalb $c = 1$ zu $x - 1$ wird und nach rechts verschoben wird)

$f(x) = sin(x)$ in rot
$f(x) = sin(x - 1)$ in grün



Verschieben in y-Richtung:
$f(x) = a \cdot sin(b \cdot (x - c)) + d$
$d < 0$: Verschiebung nach unten
$d > 0$: Verschiebung nach oben

$f(x) = sin(x)$ in rot
$f(x) = sin(x) - 1$ in grün



4.5 waagerechte und senkrechte Asymptoten

4.6 Graph und Funktionsterm

4.7 Untersuchen von Funktionscharen

4.8 Näherungsweise: Berechnen von Nullstellen

1.5 Lineare Gleichungssysteme

5.1 Gauß-Verfahren

Das Gauß-Verfahren ist eine Art der Lösung eines linearen Gleichungssystem. Das Gauß-Verfahren wird mithilfe der Matrixschreibweise ausgerechnet.

Hier ist nur eine ganz kurze Erklärung! Für mehr hier Klicken.

Beispiel:
Das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 5 \\ 4x - y + 5z &= 6 \\ -2x + 2y + 3z &= -4 \end{aligned}$$

Vereinfachen zur Matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{array}\right]$$

Dabei ist es wichtig **Nullen** zu erschaffen indem man Zeilen miteinander **Addiert** oder **Subtrahiert**.
Man kann auch einzelne Zeilen **Multiplizieren** oder **Dividieren** um dies zu vereinfachen/möglich machen.
Die Nullen müssen ein einer Pyramidenartigen anordnung bestehen um das Ergebnis (rechte Seite) eindeutig bestimmen zu können.

Etwa so:
Wichtig: Zahlen werden hier nur ersetzt und nicht wirklich ausgerechnet!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{array}\right]$$

Damit kann man die Gleichung: $3x_3 = -4$ aufstellen um x_3 zu bekommen.
Danach hat man $-1x_2 + 5x_3 = 6$ und kann für x_3 das Ergebnis von davor einsetzen.

5.2 Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme + Bestimmtheit

Eindeutige Lösung:
Es gibt genau einen Satz von Werten, der alle Gleichungen erfüllt.
Ein zwei Dimensionen würde es bedeuten, dass sich die Linien in einem Punkt schneiden würden.
(**genau einen Schnittpunkt**)

Beispiel:

$x + y = 5$
$x - y = 1$

Man kann diese Gleichung nur mit $x = 3$ und $y = 2$ Lösen.
Deshalb eindeutig bestimmbar.

Unendlich viele Lösungen:
Es gibt verschiedene Sätze von Werten, die die Gleichungen erfüllen.
Dies passiert, wenn die Linien identisch sind.
(**unendlich viele Schnittpunkte**)

Beispiel:

$2x + 4y = 8$
$x + 2y = 4$

Die zwei Gleichungen sind ein Vielfaches von einander.
Somit sind diese identisch.

Keine Lösung:
Es gibt keinen einzigen Satz von Werten, der alle Gleichungen erfüllt.
Das passiert, wenn die Linien parallel sind.
(**keinen Schnittpunkt**)

Beispiel:

$x + y = 2$
$x + y = 5$

Diese Gleichung ist nicht lösbar.
Somit hat diese auch keine Lösung.

Unterbestimmt:
Es gibt nur 2 valide Gleichungen in einem 3 Dimensionalen Gleichungssystem.
Wenn eine Gleichung ein Vielfaches einer anderen ist.

Beispiel:

$x + y + 4z = 5$
$2x + 2y + 8z = 10$ | Vielfaches von der ersten Gleichung
$3x + 1y - z = 3$

Das System hat nicht genügend Information um eindeutig bestimmt zu werden.
Es gibt unendlich viele Lösungen.
Man kann diese Gleichung lösen indem man Parameter einsetzt. Mehr dazu hier.

Überbestimmt:
Es gibt 3 Gleichungen in einem 2 Dimensionalen Gleichungssystem.

Beispiel:

$x + y = 4$
$3y - 2y = 9$
$-2x + 2y = 1$

Drei unterschiedliche Gleichungen jedoch in einem 2 dimensionalen Gleichungssystem und somit überbestimmt.
Es ist eine geringe Wahrscheinlichkeit einer Lösung.

5.3 Lineare Gleichungssysteme mit Parametern (auch auf rechten Seite)

5.4 Bestimmen von ganz rationaler Funktionen

Kapitel 2: Vektoren/Geometrie

2.1 Geraden und Ebenen

1.1 Vektoren im Raum

Ein Vektor ist die verschiebung eines Punktes in eine Richtung. Er wird wie folgt definiert:

$$\vec{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

Ein Vektor kann mit einer Zahl Addiert, Subtrahiert, Multipliziert und Dividiert werden.
Zwei Vektoren können miteinander Addiert und Subtrahiert werden. Dies geschiet Element weise.
Zwei Vektoren können nicht Dividert werden. Aber Multipliziert.
Wichtig: Für das Multiplizieren zweier Vektoren gibt es bestimmte Regeln in Form von Skalarprodukt oder Kreuzprodukt.

1.2 Geraden im Raum

Geraden im Raum sind kontinuierliche "Vektoren" im Raum. Diese werden wie folgt definiert:

$$\vec{x} : \vec{p} + s \cdot \vec{h}$$

Dabei steht:

- $\vec{p}$: Stützvektor
- s: länge
- $\vec{h}$: Richtungsvektor

Oder anders geschrieben:

$$\vec{x} : \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} + s \cdot \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Bmatrix}$$

1.3 Ebenen im Raum - Parameterform

Für Ebenen gibt es verschiedene Schreibweisen. Dabei ist die Parameterform eine erweiterte Form der Geraden im Raum. Es gibt jeweils einen Stütz- und Richtungsvektor. Bei der Ebene kommt aber noch ein weiterer Richtungsvektor hinzu um die Ebene zu definieren.

Ebene:

$$E : \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{h} + t \cdot \vec{k}$$

Dabei ist $\vec{p}$ der Stützvektor und $\vec{h}$ und $\vec{k}$ die beiden Richtungsvektoren.

Weiter schreibweisen der Ebenen gibt es hier. Darunter wird auch die Parameterform weiter erklärt.

1.4 Skalarprodukt

Das Skalarpodukt ist eine Art der Vektormultiplikation. Mit dieser Form lässt sich der Winkel und somit auch die orthogonalität zweier Vektoren bestimmen. Allgemein kann man sagen, wenn das Skalarpodukt zweier Vektoren 0 sind, sind diese orthogonal zueinander.

Formel:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\alpha)$$

Berechnung:

- Allgemeine schreibweise:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

- Zahlenbeispiel:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 26$$

1.5 Ebenenformen

Es gibt folgende Wege Ebenen im Raum darzustellen:

Parameterform: $E : \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{h} + t \cdot \vec{k}$

Normalenform: $E : \vec{x} = \big((\vec{p} - \vec{x}) \bullet \vec{n_0}\big)$

Koordinatenform: $E : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

Man kommt auf die jeweiligen Formen von: Parameterform $\rightarrow$ Normalenform $\rightarrow$ Koordinatenform

1.5.1 Parameterform

Erklärung:

Die Parameterform ist durch einen Stützvektor $\vec{p}$ und zwei Richtungsvektoren $\vec{h}$ und $\vec{k}$ definiert. Dabei legt der Stützvektor wie bei Geraden die Position im Raum (von $(0|0|0)$) fest. Der erste Richtungsvektor legt eine Gerade fest und der zweite legt die fest. Mithilfe der Parameterform kann einfach die Normalenform hergeleitet werden.

Formel:

$$E : \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{h} + t \cdot \vec{k}$$

Ausgeschrieben:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

Dabei steht:

- $\vec{p}$: Stützvektor
- $\vec{h}$: Ein Richtungsvektor
- $\vec{k}$: Anderer Richtungsvektor (darf nicht identisch zu $\vec{h}$ sein)

1.5.2 Normalenform

Erklärung:

Die Normalenform ist durch den Stützvektor $\vec{p}$, den Normalenvektor $\vec{n}$ und einen Vektor $\vec{x}$ definiert. Dabei steht $\vec{x}$ für einen noch unbekannten Ortsvektor eines beliebigen Punktes auf der Ebene. In kurz: $\vec{x}$ ist ein beliebiger Punkt auf der Ebene.
Durch die Normalenform kann man die Koordinatenform leicht herleiten.

Formel:

$$((\vec{p} - \vec{x}) \bullet \vec{n_0})$$

Ausgeschrieben:

$$\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Dabei steht:

- $\vec{p}$: Stützvektor
- $\vec{n}$: Normalenvektor
- $\vec{x}$: Punkt

1.5.3 Koordinatenform

Erklärung:

Durch die Koordinatenform lässt sich der Normalenvektor leicht ablesen. (in der Formel das $(a|b|c)$ ist der Normalenvektor). Man kann auch einfach Testen ob ein Punkt auf der Ebene liegt indem man den Punkt in die x-Werte einsetzt und schaut ob die Gleichung stimmt.

Formel:

$$E : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

Herleitung (von Normalenform):

$$E : \vec{x} = (\vec{x} - \vec{p}) \bullet \vec{n}$$

$$E : \vec{x} = \vec{x} \bullet \vec{n} = \vec{p} \bullet \vec{n}$$

Dabei steht:

- $\vec{x}$: einzugebender Punkt
- $\vec{p}$: Stützvektor
- $\vec{n}$: Normalenvektor

1.6 Ebenen veranschaulichen

1.7 Lage von Geraden (Schnitt-/Lotfußpunkt)

Geraden können können zueinander Identisch, Parallel und Windschief liegen.

Dabei kann man bei Windschiefen oder Parallel liegende Geraden den abstand berechnen.
Für Geraden die einen Schnittpunkt besitzen kann man direkt den Schnittpunkt berechnen.
Bei Geraden die keinen Schnittpunkt besitzen kann man den geringsten Abstand, den Lotfußpunkt berechnen.

1.7.1 Lotfußpunkt Berechnen

Bei windschiefen Geraden:
Um den geringsten Abstand zweier Windschiefen geraden zu berechnen, erstellt man eine Hilfsebene aus einer Geraden indem man den zweiten Richtungsvektor für die Ebene aus dem Richtungsvektor aus der zweiten Geraden nimmt. Dann muss man einen beliebigen Abstand von Gerade und Ebene ausrechnen und hat damit das Ergebnis.

Formel:
Gegeben:
$g : \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u}$
$h : \vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{v}$
Berechnung:
$d(g; h) = |(\vec{q} - \vec{p}) \bullet \vec{n_0}|$

Dabei ist $\vec{n_0}$: $\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

Zahlenbeispiel:
Gegeben:

$$g : \vec{x} = \begin{Bmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{Bmatrix} + \lambda \cdot \begin{Bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$h : \vec{x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \mu \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Berechnung:
$d(g; h) = |(\vec{q} - \vec{p}) \bullet \vec{n_0}|$

$$= | \begin{Bmatrix} 9 - 0 \\ -8 + 1 \\ 6 - 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ -7 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

Für $\vec{n}$ Kreuzprodukt anwenden von Richtungsvektoren (mehr dazu hier).
Ausgerechnet:

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$|\vec{n}| = 3$
Einsetzen:

$$\begin{Bmatrix} 9 \\ -7 \\ 5 \end{Bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{3} = 3$$

1.7.2 Schnittpunkt Berechnen

1.8 Lage von Ebenen und Geraden

1.8.1 Durchstoßpunkt Berechnen

1.9 Lage von Ebenen (Schnittgerade)

1.10 Volumen von Spatel

Um das Volumen eines Spatel zu berechnen, berechnet man erst die Grundfläche mit dem Kreuzprodukt aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Um die höhe zu berechnen nimmt man das voherige ergebnis und "projeziert" dies mithilfe dem Skalaprodukt auf den gegebenen Vektor $\vec{c}$.

Formel: $V = \vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b})$

2.2 Abstände und Winkel

2.1 Abstand von Punkt zu Gerade

Erklärung:

Um den Abstand von einem Punkt zu einer Geraden zu berechnen erstellt man eine Hilfsebene. Diese dient dazu, den Durchstoßpunkt und somit den Lotfußpunkt zu finden (kürzester Weg zur Geraden). Die Ebene wird erst durch die Normalenform und damit in die Koordinatenform umgeformt.

Damit kann man dann die komplette Gerade $\vec{x}$ einsetzen (jeweils für die Axen) und letztendlich ausgleichen. Das Ergebnis (eine Zahl) wird dann für λ eingesetz und hat somit F. Mit dem Ergebnis: F und dem Punkt P berechnen man den Betrag $|\overrightarrow{PF}|$.
Damit hat man den Abstand von Punkt zu Gerade.

Zahlenbeispiel:
Gegeben:

- Punkt: $P(5|6|-1)$
- Gerade: $\vec{g} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \lambda \cdot \begin{Bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{Bmatrix}$

Durchführung:

- Aufstellen der Normalenform:

$$E : (\vec{x} - \vec{p}) \bullet \vec{n} = 0$$
$$E : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$
$$\Rightarrow \vec{x} \bullet \vec{n} = \vec{p} \bullet \vec{n}$$
$$= x_1 \cdot 6 + x_2 \cdot 3 + x_3 \cdot 6 = 42$$

- Setze Gerade in $\vec{x}$ ein:

$$\begin{aligned} 6(1+6s) + 3(1+3s) + 6(1+6s) &= 42 \\ 6 + 3 + 6 + 6s + 3s + 6s &= 42 \\ 15 + 81s &= 42 \\ s &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Setzte das Ergebnis für λ ein und erhalte F:

$$g(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechne $|\overrightarrow{PF}|$:

$$|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}|$$
$$= \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

Somit ist die Länge: 6

2.2 Hess'sche Normalenform: Abstand von Punkt zu Ebene

Von der Normalenform:

Um den Abstand von einem Punkt zur gerade zu berechnen ersetzt man $\vec{x}$ durch den Punkt und teilt den Normalenvektor durch den Betrag des Normalenvektor (Normalisieren). Am Ende muss man noch den Betrag von dem Ergebnis (ein Vektor) gezogen werden und man hat die Länge.

$$\begin{aligned} &((\vec{x} - \vec{p}) \bullet \vec{n}) \\ \Longrightarrow &((\vec{r} - \vec{p}) \bullet \vec{n_0}) = b \\ \Longrightarrow &|((\vec{r} - \vec{p}) \bullet \vec{n_0})| = d \end{aligned}$$

Dabei ist b der Abstand, d wäre die Länge und $\vec{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$.

Von der Koordinatenform:

Um den Abstand von einem Punkt zur Ebene in der Koordinatenform zu berechenen, formt man die Koordinatenform um und setzt für $\vec{x}$ den Punkt ($\vec{r}$) ein.

$$\begin{aligned} &n_1 \cdot r_1 + n_2 \cdot r_2 + n_3 \cdot r_3 = b \\ \Longrightarrow &\frac{\vec{n} \cdot \vec{r} - b}{\vec{n_0}} = b \\ \Longrightarrow &|\frac{\vec{n} \cdot \vec{r} - b}{\vec{n_0}}| = d \end{aligned}$$

Dabei ist b der Abstand, d wäre die Länge und $\vec{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

Mit Lotfußpunkt:
Man nimmt den Betrag von dem Lotfußpunkt $\vec{L}$ und dem Punkt $\vec{P}$. Dann hat man:

$$|\overrightarrow{PL}|$$

2.3 Spiegelung und Symmetrie

Spielgelungsmöglichkeiten:

- Über eine Achse:
  Beim spiegeln von einer Achse kehrt man die anderen Achsen um.

  Beispiel:

  - Spiegelung auf x_1-Ebene für Punkt $P(1|2|3) \implies P'(1|-2|-3)$
  - Spiegelung auf x_2- und x_3-Ebene für Punkt $P(1|2|3) \implies P'(-1|2|3)$

- Über den Ursprung ($(0|0|0)$):
  Beim spiegeln auf dem Ursprung werden alle Werte umgekehrt.

  Beispiel:

  - Spiegeln von Punkt $P(1|2|3) \implies P'(-1|-2|-3)$

- Über einen anderen Punkt:
  Man berechnet den Richtungsvektor $\vec{R}$ von Punkt P zu dem Spiegelpunkt Z und berechnet $P + 2\vec{R}$

  Beispiel:

  - Spiegelung von Punkt $P(1|2|3)$ über Spiegelpunkt $Z(4|5|4)$

    $$\implies \vec{R} = \overrightarrow{PZ} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 5-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

    Berechne den Spiegelpunkt $P + 2\vec{R}$:

    $$P'(1 + 2 \cdot 3|2 + 2 \cdot 3|3 + 2 \cdot 1) = P'(7|8|5)$$

2.4 Winkel zwischen Vektoren

Auch Schnittwinkel genannt. Mithilfe der Formel des Skalarprodukts herleitbar.

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\alpha)$$

$$\rightarrow cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Dabei steht $cos(\alpha)$ für den Winkel und kann mithilfe des Taschenrechners mit $cos^{-1}(\sigma)$ in Grad umgewandelt werden. σ steht hierbei für $cos(\alpha)$

Zahlenbeispiel:

$$\vec{a} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Berechne benötigte Werte:

- $\vec{a} \bullet \vec{b} = 5 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 12$
- $|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{11}$
- $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{17}$

Setze ein:

$$cos(\alpha) = \frac{12}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{17}} = 0.877$$

Gebe in Taschenrechner ein:

$$cos^{-1}(0.877) = 28.717$$

Somit ist der Winkel: $28.717°$

2.5 Vektorprodukt - Kreuzprodukt

Mithilfe des Kreuzprodukts kann man den Normalenvektor zweier Vektoren berechnen.
Formel:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin(\alpha)$$

Berechnung des Kreuzprodukts:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

2.6 Modellierung von geradlinigen Bewegungen

2.7 Vektorielle Beweise

Kapitel 3: Stochastik

3.1 Grundlagen der Wahrscheinlichkeit

1.1 Elementare Kombinatorik

- 5 Stühle, 5 Schüler, Unterscheidbare Schüler:
  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
- 5 Stühle, 3 Schüler, Unterscheidbare Schüler:
  $\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3$
- 5 Stühle, 3 Schüler, nur besetzt/nicht besetzt:
  $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \binom{5}{3} = (5 \text{ über } 3)$

1.2 Pfadregeln und Erwartungswerte

1.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

1.4 Stochastische Unabhängigkeiten

1.5 Formel von Bernoulli und Binomialverteilung

Anwendungen:

Die Formel von Bernoulli wird bei Wahrscheinlichkeiten wie einem Münzwurf eingesetzt. Das heißt bei Wahrscheinlichkeiten die immer die selbe Chance haben (Münzwurf 50% pro Seite)

Formel:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Hierbei bedeuten:

- $\binom{n}{k}$ (ausgesprochen "n über k"). n ist anzahl der Versuche und k die anzahl der Möglichkeiten. Wird wie folgt berechnet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k!)}$$

- p^k: Die Wahrscheinlichkeit, dass k Erfolge auftreten.
- q^{n-k}: Auch $(1-p)^{n-k}$ geschrieben. Gibt die Misserfolge an. (Restwahrscheinlichkeit um auf 100% zu kommen)

Also ist $P(X = k)$ die Wahrscheinlichkeit, dass in n Versuchen genau k Erfolge erzielt werden, wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit in jedem Versuch p beträgt.

1.6 Erwartungswert und Histogramm

1.7 Problemlösen mit der Binomalverteilung

3.2 Normalverteilung

2.1 Normalverteilung

2.2 Gauß'sche Glockenfunktion

2.3 Sigma-Regeln

2.4 Umkehraufgaben zur Normalverteilung

2.5 Stetige Zufallsgrößen

3.3 Testen mit der Binomialverteilung

3.1 Einseitiger Hypothesentest

3.2 Fehler beim Testen von Hypothesen

3.3 Wahl der Nullhypothese

3.4 Zweiseitiger Hypothesentest

Kapitel 4: Allgemeinwissen

4.1 Wichtige Formeln

1.1 Ableitung - Aufleitung

Aufleitungsregeln

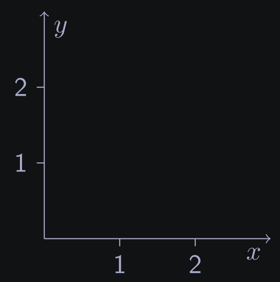
Ableitungsregeln

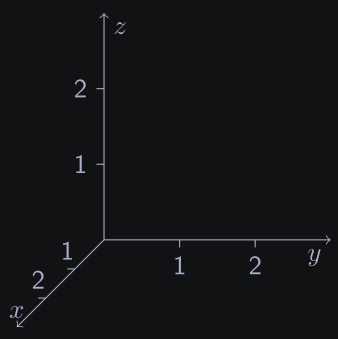
Hess'sche Normalenform

4.2 Notationen

4.3 Schreibweisen

3.1 Graphen beschriften





Kapitel 5: Klausurrelevant

J2.1:

Basic:

- Ableiten
- Integrale
- Extrem- und Wendepunkte
- Tangente und Normale

Vektoren:

- Hess'sche Normalenform
- Symmetrie
- Winkel zwischen Vektoren

Wahrscheinlichkeit (Neu):

- Basics
- Bernoulli

J2.2: