

Mathe
Abi Lernzettel

Leon Feuerstein

Inhalt

1	Allgemeinwissen	3
1.1	Wichtige Formeln	3
1.1.1	Ableitung - Aufleitung	3
2	Analysis	4
2.1	Grundlagen der Differenzialrechnung	4
2.1.1	Ableitungsregeln	4
2.1.1.1	Zu Beachten	4
2.1.2	Monotonie und Grümmung	4
2.1.3	Extrem- und Wendepunkte	5
2.1.4	Tangente und Normale	5
2.1.5	Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen	6
2.2	Integrale	6
2.2.1	Stammfunktion	6
2.2.1.1	(Aufleitungs-) Regeln	6
2.2.1.2	Zu Beachten	7
2.2.2	Flächeninhalt	7
2.2.3	Rotationskörper	7
2.2.4	Uneigentliche Integrale	8
2.2.5	Mittelwerte	8
2.3	Exponential und Logarithmusfunktion	8
2.3.1	Ableitung von e und $\ln(x)$	8
2.3.2	Euler'sche Zahl: e	8
2.3.3	Exponentialrechnung	8
2.3.4	Graphen	8
2.3.5	Logarithmusfunktion	8
2.3.6	Parameter	8
2.3.7	Umkehrfunktion	8
2.4	Funktionen und ihre Graphen	9
2.4.1	Strecken, Verschieben und Spiegeln von Graphen	9
2.4.2	Linearfaktordarstellung	9
2.4.3	Lösen von Gleichungen	9
2.4.4	Trigonometrische Funktionen	9
2.4.5	waagerechte und senkrechte Asymptoten	9
2.4.6	Graph und Funktionstherm	9
2.4.7	Untersuchen von Funktionscharen	9
2.4.8	Näherungsweise: Berechnen von Nullstellen	9
2.5	Lineare Gleichungssysteme	9
2.5.1	Gauß-Verfahren	9
2.5.2	Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme	9
2.5.3	Lineare Gleichungssysteme mit Parametern auf der rechten Seite	9

2.5.4	Bestimmen von ganz rationaler Funktionen	9
3	Vektoren/Geometrie	10
3.1	Geraden und Ebenen	10
3.1.1	Vektoren im Raum	10
3.1.2	Geraden im Raum	10
3.1.3	Ebenen im Raum - Parameterform	10
3.1.4	Skalarprodukt	10
3.1.5	Ebenenformen	10
3.1.5.1	Koordinatenform	10
3.1.5.2	Normalenform	10
3.1.6	Parameterform	10
3.1.7	Ebenen veranschaulichen	10
3.1.8	Lage von Ebenen und Geraden	10
3.1.9	Lage von Ebenen	10
3.2	Abstände und Winkel	10
3.2.1	Abstand von Punkt zu Ebene	10
3.2.2	Abstand von Punkt zu Gerade	10
3.2.3	Spiegelung und Symmetrie	10
3.2.4	Winkel zwischen Vektoren	10
3.2.5	Schnittwinkel	10
3.2.6	Vektorprodukt - Kreuzprodukt	10
3.2.7	Modellierung von geradlinigen Bewegungen	10
3.2.8	Vektorielle Beweise	10
4	Stochastik	11
4.1	Grundlagen der Wahrscheinlichkeit	11
4.1.1	Elementare Kombinatorik	11
4.1.2	Pfadregeln und Erwartungswerte	11
4.1.3	Bedingte Wahrscheinlichkeit	11
4.1.4	Stochastische Unabhängigkeiten	11
4.1.5	Formel von Bernoulli und Binomialverteilung	11
4.1.6	Erwartungswert und Histogramm	11
4.1.7	Problemlösen mit der Binomalverteilung	11
4.2	Normalverteilung	11
4.2.1	Normalverteilung	11
4.2.2	Gauß'sche Glockenfunktion	11
4.2.3	Sigma-Regeln	11
4.2.4	Umkehraufgaben zur Normalverteilung	11
4.2.5	Stetige Zufallsgrößen	11
4.3	Testen mit der Binomialverteilung	11
4.3.1	Einseitiger Hypothesentest	11
4.3.2	Fehler beim Testen von Hypothesen	11
4.3.3	Wahl der Nullhypothese	11
4.3.4	Zweiseitiger Hypothesentest	11
5	Das fehlt noch/muss ergänzt werden	12

Kapitel 1: Allgemeinwissen

1.1 Wichtige Formeln

1.1.1 Ableitung - Aufleitung

Aufleitungsregeln

Ableitungsregeln

Kapitel 2: Analysis

2.1 Grundlagen der Differenzialrechnung

2.1.1 Ableitungsregeln

Aufbau: Name der Regel.

Erste Formel die allgemeine Formel (neutral).

Zweite Formel (optional) ein Zahlenbeispiel.

Konstantenregel:

$$f(x) = n \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = 3 \rightarrow f'(x) = 0$$

Potenzregel:

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = x^5 \rightarrow f'(x) = 5x^4$$

Faktorregel:

$$f(x) = a \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = a \cdot g'(x)$$

$$f(x) = 3 \cdot x^2 \rightarrow f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot x^1 = 6x$$

Summenregel/Differenzregel:

$$f(x) = g(x) + h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

$$f(x) = g(x) - h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) - h'(x)$$

Produktregel:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Kettenregel:

$$f(x) = u(v(x)) \rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

2.1.1.1 Zu Beachten

- $\ln(x)$ abgeleitet ist $\frac{1}{x}$
- e^x abgeleitet bleibt gleich (e^x)

2.1.2 Monotonie und Grümmung

Monotonie:

Monotonie bezieht sich auf das Verhalten einer Funktion in Bezug darauf, ob sie stetig zunimmt oder abnimmt. Eine Funktion wird als monoton steigend bezeichnet, wenn für zwei Punkte x_1 und x_2 mit

$x_1 < x_2$ der Funktionswert an x_1 kleiner oder gleich dem Funktionswert an x_2 ist. Umgekehrt wird eine Funktion als monoton fallend bezeichnet, wenn für zwei Punkte x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ der Funktionswert an x_1 größer oder gleich dem Funktionswert an x_2 ist.

Krümmung:

Die Krümmung einer Funktion beschreibt, wie stark eine Kurve von einer Geraden abweicht. Mathematisch gesehen wird die Krümmung einer Funktion durch die zweite Ableitung der Funktion beschrieben. Eine positive zweite Ableitung bedeutet, dass die Funktion eine nach oben geöffnete Krümmung (konkav) hat, während eine negative zweite Ableitung eine nach unten geöffnete Krümmung (konvex) anzeigt. Eine Krümmung von null bedeutet, dass die Funktion an dieser Stelle einen Wendepunkt hat, wo die Krümmung ihre Richtung ändert.

2.1.3 Extrem- und Wendepunkte

Extrempunkte:

Extrempunkte sind Punkte auf dem Graphen einer Funktion, an denen die Funktion entweder ein lokales Maximum oder Minimum erreicht.

- Lokales Maximum: An einem lokalen Maximum ist der Funktionswert größer als in der unmittelbaren Umgebung. Mathematisch bedeutet dies, dass die erste Ableitung der Funktion an diesem Punkt null ist ($f'(x) = 0$) und die zweite Ableitung negativ ist ($f''(x) < 0$).
- Lokales Minimum: An einem lokalen Minimum ist der Funktionswert kleiner als in der unmittelbaren Umgebung. Hier ist ebenfalls die erste Ableitung null ($f'(x) = 0$), jedoch ist die zweite Ableitung positiv ($f''(x) > 0$).

Wendepunkte:

Ein Wendepunkt ist ein Punkt auf dem Graphen einer Funktion, an dem sich das Krümmungsverhalten ändert. Das bedeutet, die Funktion wechselt an diesem Punkt von konkav zu konvex oder umgekehrt.

- Bestimmung von Wendepunkten: Ein Wendepunkt liegt vor, wenn die zweite Ableitung der Funktion null ist ($f''(x) = 0$) und die dritte Ableitung nicht null ist ($f'''(x) \neq 0$).

2.1.4 Tangente und Normale

Tangente:

Eine Tangente an den Graphen einer Funktion an einem bestimmten Punkt ist eine Gerade, die den Graphen genau an diesem Punkt berührt. Die Steigung der Tangente entspricht der Ableitung der Funktion an diesem Punkt.

Um die Tangente bestimmen zu können ($f(x) = m \cdot x + c$):

- $m: f'(\alpha)$. Bei dem α der x-Wert ist, an dem die Tangente gesucht wird.
- $c: f(\alpha)$. Bei dem α der x-Wert ist, an dem die Tangente gesucht wird.

Normale:

Eine Normale ist ein Graph, der orthogonal zur Tangente verläuft. Auch dieser wird durch die Tangentengleichung ($f(x) = m \cdot x + c$) bestimmt und kann von der Tangente bestimmt werden.

Tangente: $f(x) = m \cdot x + c$

Normale: $f(x) = -\frac{1}{m} \cdot x + c$

2.1.5 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen sind mathematische Probleme, bei denen eine Zielfunktion unter Berücksichtigung zusätzlicher Bedingungen optimiert werden soll. Diese werden häufig in Form von Textaufgaben verwendet oder einfach mit einer Formel und mithilfe von Text.

!!! Offen für neue + bessere Beispiele !!!

Beispiel:

Ein Unternehmen produziert zwei Arten von Produkten, X und Y. Der Gewinn pro verkaufter Einheit beträgt 10 Euro für Produkt X und 15 Euro für Produkt Y. Das Unternehmen möchte die Gesamtgewinnmarge maximieren und muss gleichzeitig sicherstellen, dass mindestens 100 Einheiten des Produkts X verkauft werden.

- **Zielfunktion:** Maximiere die Gesamtgewinnmarge $G = 10x + 15y$, wobei x die Anzahl der Einheiten von Produkt X und y die Anzahl der Einheiten von Produkt Y ist.
- **Nebenbedingung:** Verkaufsmenge von X muss mindestens 100 Einheiten betragen $x \geq 100$

Lösungsschritte:

1. Formulieren der Zielfunktion und Nebenbedingung:
 $G = 10x + 15y$
2. Lösen:
Wegen Nebenbedingung setze $x = 100$ somit:
 $G = 10 \cdot 100 + 15y = 1000 + 15y$

Also ist das Ergebnis: $G = 1000 + 15y$

2.2 Integrale

Integrale sind das aufsummieren von Funktionen.

Linien aufsummiert \rightarrow Fläche.

Flächen aufsummiert \rightarrow Volumen.

2.2.1 Stammfunktion

Auch als Aufleiten bekannt.

2.2.1.1 (Aufleitungs-) Regeln

Aufbau: Name der Regel.

Erste Formel die allgemeine Formel (neutral).

Zweite Formel (optional) ein Zahlenbeispiel.

Konstantenregel:

$$f(x) = n \rightarrow F(x) = n \cdot x + C$$

Dabei ist n eine konstante Zahl.

$$f(x) = 3 \rightarrow F(x) = 3x + C$$

Faktorregel:

$$f(x) = a \cdot x \rightarrow F(x) = a \cdot X + C$$

Dabei ist x ein beliebiger Wert wie: $x^2, 3x, \text{etc.}$ und X ist die Aufleitung des Wertes.

Potenzregeln:

$$f(x) = x^n \rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Dabei ist n eine konstante Zahl.

$$f(x) = a \cdot x^3 \rightarrow F(x) = a \cdot \frac{1}{3+1} \cdot x^{3+1} + C = a \cdot \frac{x^4}{4} + C$$

Summenregel:

$$f(x) = h + k \rightarrow F(x) = H + K$$

Dabei ist h und k ein beliebiger Wert wie z.B.: $x^2, 3x, 4x^3, \text{etc.}$

2.2.1.2 Zu Beachten

- Aufleitung von e . (e^x bleib unverändert)
- Wurzeln können auch als Exponent geschrieben werden ($^n\sqrt{x} = x^{\frac{1}{n}}$)
- $\ln(x)$ aufgeleitet ist e^x

2.2.2 Flächeninhalt

Um den Flächeninhalt eines Graphen zu bestimmen berechnet man die Stammfunktion des Graphen. Dann berechnet man das Integral von a zu b um die Fläche zu bestimmen.

Beispiel:

$$\text{Funktion: } f(x) = x^2$$

Gesucht ist der Flächeninhalt von 1 bis 4. Somit:

$$\int_1^4 x^2 dx$$

$$\rightarrow \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^4$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{3} 4^3 \right) - \left(\frac{1}{3} 1^3 \right) = 21$$

2.2.3 Rotationskörper

Formel:

Allgemein:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Oder aufgebrochen in:

$$g(x) = \pi \cdot x^2$$

$$f(x) = g(x)$$

dann um Volumen zu berechnen:

$$f(x) \rightarrow F(x)$$

und die grenzen für das Integral angeben

Dabei steht $g(x)$ für die Formel eines runden Flächeninhalts. Für x in der Formel für $f(x)$ wird die Formel für den gegebenen Körper eingegeben. Dieser wird dann als Volumen durch das die Aufleitung aufsummiert um das Volumen zu bekommen.

2.2.4 Uneigendliche Integrale

2.2.5 Mittelwerte

2.3 Exponential und Logarithmusfunktion

2.3.1 Ableitung von e und ln(x)

Ableitung von e:

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$$

$\Rightarrow e$ bleibt bei der Ableitung gleich.

Ableitung von ln(x):

$$f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

2.3.2 Euler'sche Zahl: e

Die Euler'sche Zahl e ist eine Zahl die bei ihrer Ableitung identisch bleibt.

Die Formel für e (nicht wichtig zu wissen):

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ..$$

2.3.3 Exponentialrechnung

2.3.4 Graphen

2.3.5 Logarithmusfunktion

2.3.6 Parameter

2.3.7 Umkehrfunktion

Umkehrfunktion ist die Umkehrung einer Funktion.

Beispiel anhand von Zahlenbeispiel:

1. Gegeben Funktion: $f(x) = 3x^2$

2. Umbenennung: $y = 3x^2$

3. Nach x Auflösen: $3x^2 = y$

4. Akgleichen: $x = \sqrt{\frac{y}{3}}$

5. Ergebnis: $f(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}$

2.4 Funktionen und ihre Graphen

2.4.1 Strecken, Verschieben und Spiegeln von Graphen

2.4.2 Linearfaktordarstellung

2.4.3 Lösen von Gleichungen

2.4.4 Trigonometrische Funktionen

2.4.5 waagerechte und senkrechte Asymptoten

2.4.6 Graph und Funktionstherm

2.4.7 Untersuchen von Funktionscharen

2.4.8 Näherungsweise: Berechnen von Nullstellen

2.5 Lineare Gleichungssysteme

2.5.1 Gauß-Verfahren

2.5.2 Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme

2.5.3 Lineare Gleichungssysteme mit Parametern auf der rechten Seite

2.5.4 Bestimmen von ganz rationaler Funktionen

Kapitel 3: Vektoren/Geometrie

3.1 Geraden und Ebenen

3.1.1 Vektoren im Raum

3.1.2 Geraden im Raum

3.1.3 Ebenen im Raum - Parameterform

3.1.4 Skalarprodukt

3.1.5 Ebenenformen

3.1.5.1 Koordinatenform

3.1.5.2 Normalenform

3.1.6 Parameterform

3.1.7 Ebenen veranschaulichen

3.1.8 Lage von Ebenen und Geraden

3.1.9 Lage von Ebenen

3.2 Abstände und Winkel

3.2.1 Abstand von Punkt zu Ebene

3.2.2 Abstand von Punkt zu Gerade

3.2.3 Spiegelung und Symmetrie

3.2.4 Winkel zwischen Vektoren

3.2.5 Schnittwinkel

3.2.6 Vektorprodukt - Kreuzprodukt

3.2.7 Modellierung von geradlinigen Bewegungen

3.2.8 Vektorielle Beweise

Kapitel 4: Stochastik

4.1 Grundlagen der Wahrscheinlichkeit

- 4.1.1 Elementare Kombinatorik
- 4.1.2 Pfadregeln und Erwartungswerte
- 4.1.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit
- 4.1.4 Stochastische Unabhängigkeiten
- 4.1.5 Formel von Bernoulli und Binomialverteilung
- 4.1.6 Erwartungswert und Histogramm
- 4.1.7 Problemlösen mit der Binomialverteilung

4.2 Normalverteilung

- 4.2.1 Normalverteilung
- 4.2.2 Gauß'sche Glockenfunktion
- 4.2.3 Sigma-Regeln
- 4.2.4 Umkehraufgaben zur Normalverteilung
- 4.2.5 Stetige Zufallsgrößen

4.3 Testen mit der Binomialverteilung

- 4.3.1 Einseitiger Hypothesentest
- 4.3.2 Fehler beim Testen von Hypothesen
- 4.3.3 Wahl der Nullhypothese
- 4.3.4 Zweiseitiger Hypothesentest

Kapitel 5: Das fehlt noch/muss ergänzt werden