Mathe
Abi Lernzettel

Leon Feuerstein

Inhalt

1 Allgemeinwissen . . . 3
1.1 Wichtige Formeln . . . 3
1.1.1 Ableitung - Aufleitung . . . 3

2 Analysis . . . 4
2.1 Grundlagen der Differenzialrechnung . . . 4
2.1.1 Ableitungsregeln . . . 4
2.1.1.1 Zu Beachten . . . 4
2.1.2 Monotonie und Grümmung . . . 5
2.1.3 Extrem- und Wendepunkte . . . 5
2.1.4 Tangente und Normale . . . 5
2.1.5 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen . . . 6
2.2 Integrale . . . 6
2.2.1 Stammfunktion . . . 7
2.2.1.1 (Aufleitungs-) Regeln . . . 7
2.2.2 Flächeninhalt . . . 7
2.2.3 Rotationskörper . . . 8
2.2.4 Uneigendliche Integrale . . . 8
2.2.5 Mittelwerte . . . 8
2.3 Exponential und Logarithmusfunktion . . . 8
2.3.1 Ableitung von e und ln(x) . . . 8
2.3.2 Euler'sche Zahl: e . . . 9
2.3.3 Exponentialrechnung . . . 9
2.3.4 Graphen . . . 9
2.3.5 Logarithmusfunktion . . . 9
2.3.6 Parameter . . . 9
2.3.7 Umkehrfunktion . . . 9
2.4 Funktionen und ihre Graphen . . . 11
2.4.1 Strecken, Verschieben und Spiegeln von Graphen . . . 11
2.4.2 Linearfaktordarstellung . . . 11
2.4.3 Lösen von Gleichungen . . . 11
2.4.4 Trigonometrische Funktionen . . . 11
2.4.5 waagerechte und senkrechte Asymptoten . . . 11
2.4.6 Graph und Funktionstherm . . . 11
2.4.7 Untersuchen von Funktionscharen . . . 11
2.4.8 Näherungsweise: Berechnen von Nullstellen . . . 11
2.5 Lineare Gleichungssysteme . . . 11
2.5.1 Gauß-Verfahren . . . 11
2.5.2 Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme . . . 11
2.5.3 Lineare Gleichungssysteme mit Parametern auf der rechten Seite . . . 11
2.5.4 Bestimmen von ganz rationaler Funktionen . . . 11

3 Vektoren/Geometrie . . . 12
3.1 Geraden und Ebenen . . . 12
3.1.1 Vektoren im Raum . . . 12
3.1.2 Geraden im Raum . . . 12
3.1.3 Ebenen im Raum - Parameterform . . . 13
3.1.4 Skalarprodukt . . . 13
3.1.5 Ebenenformen . . . 13
3.1.5.1 Parameterform . . . 13
3.1.5.2 Normalenform . . . 14
3.1.5.3 Koordinatenform . . . 14
3.1.6 Ebenen veranschaulichen . . . 15
3.1.7 Lage von Geraden . . . 15
3.1.7.1 Lotfußpunkt Berechnen . . . 15
3.1.7.2 Schnittpunkt Berechnen . . . 15
3.1.8 Lage von Ebenen und Geraden . . . 15
3.1.8.1 Durchstoßpunkt Berechnen . . . 15
3.1.9 Lage von Ebenen . . . 15
3.1.9.1 Schnittgerade . . . 15
3.2 Abstände und Winkel . . . 15
3.2.1 Abstand von Punkt zu Ebene . . . 15
3.2.2 Abstand von Punkt zu Gerade . . . 15
3.2.3 Spiegelung und Symmetrie . . . 15
3.2.4 Winkel zwischen Vektoren . . . 15
3.2.5 Schnittwinkel . . . 16
3.2.6 Vektorprodukt - Kreuzprodukt . . . 16
3.2.7 Modellierung von geradlinigen Bewegungen . . . 16
3.2.8 Vektorielle Beweise . . . 16

4 Stochastik . . . 17
4.1 Grundlagen der Wahrscheinlichkeit . . . 18
4.1.1 Elementare Kombinatorik . . . 18
4.1.2 Pfadregeln und Erwartungswerte . . . 18
4.1.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit . . . 18
4.1.4 Stochastische Unabhängigkeiten . . . 18
4.1.5 Formel von Bernoulli und Binomialverteilung . . . 18
4.1.6 Erwartungswert und Histogramm . . . 18
4.1.7 Problemlösen mit der Binomalverteilung . . . 18
4.2 Normalverteilung . . . 18
4.2.1 Normalverteilung . . . 18
4.2.2 Gauß'sche Glockenfunktion . . . 18
4.2.3 Sigma-Regeln . . . 18
4.2.4 Umkehraufgaben zur Normalverteilung . . . 18
4.2.5 Stetige Zufallsgrößen . . . 18
4.3 Testen mit der Binomialverteilung . . . 18
4.3.1 Einseitiger Hypothesentest . . . 18
4.3.2 Fehler beim Testen von Hypothesen . . . 18
4.3.3 Wahl der Nullhypothese . . . 18
4.3.4 Zweiseitiger Hypothesentest . . . 18

5 Das fehlt noch/muss ergänzt werden . . . 19

Kapitel 1: Allgemeinwissen

1.1 Wichtige Formeln

1.1.1 Ableitung - Aufleitung

Aufleitungsregeln
Ableitungsregeln

Kapitel 2: Analysis

2.1 Grundlagen der Differenzialrechnung

2.1.1 Ableitungsregeln

Aufbau: Name der Regel.
Erste Formel die allgemeine Formel (neutral).
Zweite Formel (optional) ein Zahlenbeispiel.

Konstantenregel:
$f(x) = n \rightarrow f'(x) = 0$
$f(x) = 3 \rightarrow f'(x) = 0$

Potenzregel:
$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = x^5 \rightarrow f'(x) = 5x^4$

Faktorregel:
$f(x) = a \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = a \cdot g'(x)$
$f(x) = 3 \cdot x^2 \rightarrow f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot x^1 = 6x$

Summenregel/Differenzregel:
$f(x) = g(x) + h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$
$f(x) = g(x) - h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) - h'(x)$

Produktregel:
$f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Kettenregel:
$f(x) = u(v(x)) \rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

2.1.1.1 Zu Beachten

- $ln(x)$ abgeleitet ist $\frac{1}{x}$
- e^x abgeleitet bleibt gleich (e^x)

2.1.2 Monotonie und Grümmung

Montonie:
Monotonie bezieht sich auf das Verhalten einer Funktion in Bezug darauf, ob sie stetig zunimmt oder abnimmt. Eine Funktion wird als monoton steigend bezeichnet, wenn für zwei Punkte x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ der Funktionswert an x_1 kleiner oder gleich dem Funktionswert an x_2 ist. Umgekehrt wird eine Funktion als monoton fallend bezeichnet, wenn für zwei Punkte x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ der Funktionswert an x_1 größer oder gleich dem Funktionswert an x_2 ist.

Krümmung:
Die Krümmung einer Funktion beschreibt, wie stark eine Kurve von einer Geraden abweicht. Mathematisch gesehen wird die Krümmung einer Funktion durch die zweite Ableitung der Funktion beschrieben. Eine positive zweite Ableitung bedeutet, dass die Funktion eine nach oben geöffnete Krümmung (konkav) hat, während eine negative zweite Ableitung eine nach unten geöffnete Krümmung (konvex) anzeigt. Eine Krümmung von null bedeutet, dass die Funktion an dieser Stelle eine Wendepunkt hat, wo die Krümmung ihre Richtung ändert.

2.1.3 Extrem- und Wendepunkte

Extrempunkte:
Extrempunkte sind Punkte auf dem Graphen einer Funktion, an denen die Funktion entweder ein lokales Maximum oder Minimum erreicht.

- Lokales Maximum: An einem lokalen Maximum ist der Funktionswert größer als in der unmittelbaren Umgebung. Mathematisch bedeutet dies, dass die erste Ableitung der Funktion an diesem Punkt null ist ($f'(x) = 0$) und die zweite Ableitung negativ ist ($f''(x) < 0$).
- Lokales Minimum: An einem lokalen Minimum ist der Funktionswert kleiner als in der unmittelbaren Umgebung. Hier ist ebenfalls die erste Ableitung null ($f'(x) = 0$), jedoch ist die zweite Ableitung positiv ($f''(x) > 0$).

Wendepunkte:
Ein Wendepunkt ist ein Punkt auf dem Graphen einer Funktion, an dem sich das Krümmungsverhalten ändert. Das bedeutet, die Funktion wechselt an diesem Punkt von konkav zu konvex oder umgekehrt.

- Bestimmung von Wendepunkten: Ein Wendepunkt liegt vor, wenn die zweite Ableitung der Funktion null ist ($f''(x) = 0$) und die dritte Ableitung nicht null ist ($f'''(x) \neq 0$).

2.1.4 Tangente und Normale

Tangente:
Eine Tangente an den Graphen einer Funktion an einem bestimmten Punkt ist eine Gerade, die den Graphen genau an diesem Punkt berührt. Die Steigung der Tangente entspricht der Ableitung der Funktion an diesem Punkt.
Um die Tangente bestimmen zu können ($f(x) = m \cdot x + c$):

- m: $f'(\alpha)$. Bei dem α der x-Wert ist, an dem die Tangente gesucht wird.

- c: $f(\alpha)$. Bei dem α der x-Wert ist, an dem die Tangente gesucht wird.

Normale:
Eine Normale ist ein Graph der Orthogonal zur Tangente verläuft. Auch dieser wird durch die Tangentengleichung ($f(x) = m \cdot x + c$) bestimmt und kann von der Tangente bestimmt werden.
Tangente: $f(x) = m \cdot x + c$
Normale: $f(x) = -\frac{1}{m} \cdot x + c$

2.1.5 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen sind mathematische Probleme, bei denen eine Zielfunktion unter Berücksichtigung zusätzlicher Bedingungen optimiert werden soll. Diese werden häufig in Form von Textaufgaben verwendet oder einfach mit einer Formel und mithilfe von Text.

!!! Offen für neue + bessere Beispiele !!!
Beispiel:
Ein Unternehmen produziert zwei Arten von Produkten, X und Y. Der Gewinn pro verkaufter Einheit beträgt 10 Euro für Produkt X und 15 Euro für Produkt Y. Das Unternehmen möchte die Gesamtgewinnmarge maximieren und muss gleichzeitig sicherstellen, dass mindestens 100 Einheiten des Produkts X verkauft werden.

- **Zielfunktion:** Maximiere die Gesamtgewinnmarge $G = 10x + 15y$, wobei x die Anzahl der Einheiten von Produkt X und y die Anzahl der Einheiten von Produkt Y ist.
- **Nebenbedingung:** Verkaufsmenge von X muss mindestens 100 Einheiten betragen $x \geq 100$

Lösungsschritte:

1. Formulieren der Zielfunktion und Nebenbedingung:
   $G = 10x + 15y$
2. Lösen:
   Wegen Nebenbedingung setze $x = 100$ somit:
   $G = 10 \cdot 100 + 15y = 1000 + 15y$

Also ist das Ergebnis: $G = 1000 + 15y$

2.2 Integrale

Integrale sind das aufsummieren von Funktionen.
Linien aufsummiert $\rightarrow$ Fläche.
Flächen aufsummiert $\rightarrow$ Volumen.

2.2.1 Stammfunktion

Auch als Aufleiten bekannt.

2.2.1.1 (Aufleitungs-) Regeln

Aufbau: Name der Regel.
Erste Formel die allgemeine Formel (neutral).
Zweite Formel (optional) ein Zahlenbeispiel.

Konstantenregel:
$f(x) = n \ \rightarrow \ F(x) = n \cdot x + C$
Dabei ist n eine konstante Zahl.
$f(x) = 3 \ \rightarrow \ F(x) = 3x + C$

Faktorregel:
$f(x) = a \cdot x \rightarrow F(x) = a \cdot X + C$
Dabei ist x ein beliebiger Wert wie: $x^2, 3x, etc.$ und X ist die Aufleitung des Wertes.

Potenzregeln:
$f(x) = x^n \ \rightarrow \ F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
Dabei ist n eine konstante Zahl.
$f(x) = a \cdot x^3 \ \rightarrow \ F(x) = a \cdot \frac{1}{3+1} \cdot x^{3+1} + C = a \cdot \frac{x^4}{4} + C$

Summenregel:
$f(x) = h + k \rightarrow F(x) = H + K$
Dabei ist h und k ein beliebiger Wert wie z.B.: x^2, $3x$, $4x^34$, etc.

Zu Beachten:

- Aufleitung von e. (e^x bleib unverändert)
- Wuzeln können auch als Exponent geschrieben werden ($\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$)
- $ln(x)$ aufgeleitet ist e^x

2.2.2 Flächeninhalt

Um den Flächeninhalt eines Graphen zu bestimmen berechnet man die Stammfunktion des Graphen. Dann berechnet man das Integral von a zu b um die Fläche zu bestimmen.

Beispiel:
Funktion: $f(x) = x^2$
Gesucht ist der Flächeninhalt von 1 bis 4. Somit:
$\int_1^4 x^2 \ dx$

$\rightarrow [\frac{1}{3}x^3]_1^4$

$\rightarrow (\frac{1}{3}4^3) - (\frac{1}{3}1^3) = 21$

2.2.3 Rotationskörper

Formel:
Allgemein:
$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\ dx$

Oder aufgebrochen in:
$g(x) = \pi \cdot x^2$
$f(x) = g(x)$
dann um Volumen zu berechnen:
$f(x) \rightarrow\ F(x)$
und die grenzen für das Integral angeben

Dabei steht $g(x)$ für die Formel eines runden Flächeninhalts. Für x in der Formel für $f(x)$ wird die Formel für den gegebenen Körper eingegeben. Dieser wird dann als Volumen durch das die Aufleitung aufsummiert um das Volumen zu bekommen.

2.2.4 Uneigendliche Integrale

Uneigendliche Integrale sind Integrale mit bestimmten Eigenschaften. Dabei bestehen diese Eigenschaften aus unendlichen Grenzen oder Funktionen als Grenzen. Das Ziel dabei ist das Ergebnis möglichst genau beschreiben zu können ohne dabei ein genaues Ergebnis als Zahl erhalten zu müssen.
Beispiele dafür:
$\int_a^\infty x^2\ dx \rightarrow$ Ergebnis wird unendlich groß
$\int_\infty^1 \frac{1}{x}\ dx \rightarrow$ Ergebnis nähert sich 0 an

2.2.5 Mittelwerte

2.3 Exponential und Logarithmusfunktion

2.3.1 Ableitung von e und ln(x)

<u>Ableitung von e:</u>
$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$
$\Rightarrow e$ bleibt bei der Ableitung gleich.

<u>Ableitung von ln(x):</u>
$f(x) = ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

2.3.2 Euler’sche Zahl: e

Die Euler'sche Zahl e ist eine Zahl die bei ihrer Ableitung identisch bleibt.
Die Formel für e (nicht wichtig zu wissen):
$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ..$

2.3.3 Exponentialrechnung

2.3.4 Graphen

2.3.5 Logarithmusfunktion

2.3.6 Parameter

2.3.7 Umkehrfunktion

Umkehrfunktion ist die Umkehrung einer Funktion.
Beispiel anhand von Zahlenbeispiel:

1. Gegeben Funktion: $f(x) = 3x^2$
2. Umbenennung: $y = 3x^2$
3. Nach x Auflösen: $3x^2 = y$
4. Aksgleichen: $x = \sqrt{\frac{y}{3}}$
5. Ergebnis: $f(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}$

2.4 Funktionen und ihre Graphen

2.4.1 Strecken, Verschieben und Spiegeln von Graphen

2.4.2 Linearfaktordarstellung

2.4.3 Lösen von Gleichungen

2.4.4 Trigonometrische Funktionen

2.4.5 waagerechte und senkrechte Asymptoten

2.4.6 Graph und Funktionstherm

2.4.7 Untersuchen von Funktionscharen

2.4.8 Näherungsweise: Berechnen von Nullstellen

2.5 Lineare Gleichungssysteme

2.5.1 Gauß-Verfahren

2.5.2 Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme

2.5.3 Lineare Gleichungssysteme mit Parametern auf der rechten Seite

Kapitel 3: Vektoren/Geometrie

3.1 Geraden und Ebenen

3.1.1 Vektoren im Raum

Ein Vektor ist die verschiebung eines Punktes in eine Richtung. Er wird wie folgt definiert:
$\vec{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$
Ein Vektor kann mit einer Zahl Addiert, Subtrahiert, Multipliziert und Dividiert werden.
Zwei Vektoren können miteinander Addiert und Subtrahiert werden. Dies geschiet Element weise.
Zwei Vektoren können nicht Dividert werden. Aber Multipliziert.
Wichtig: Für das Multiplizieren zweier Vektoren gibt es bestimmte Regeln in Form von Skalarprodukt oder Kreuzprodukt.

3.1.2 Geraden im Raum

Geraden im Raum sind kontinuierliche "Vektoren" im Raum. Diese werden wie folgt definiert:
$\vec{x} : \vec{p} + s \cdot \vec{h}$

Dabei steht:

- $\vec{p}$: Stützvektor
- s: länge
- $\vec{h}$: Richtungsvektor

Oder anders geschrieben:
$\vec{x} : \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} + s \cdot \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Bmatrix}$

3.1.3 Ebenen im Raum - Parameterform

Für Ebenen gibt es verschiedene Schreibweisen. Dabei ist die Parameterform eine erweiterte Form der Geraden im Raum. Es gibt jeweils einen Stütz- und Richtungsvektor. Bei der Ebene kommt aber noch ein weiterer Richtungsvektor hinzu um die Ebene zu definieren.
Ebene:
$E : \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{h} + t \cdot \vec{k}$
Dabei ist $\vec{p}$ der Stützvektor und $\vec{h}$ und $\vec{k}$ die beiden Richtungsvektoren.

Weiter schreibweisen der Ebenen gibt es hier. Darunter wird auch die Parameterform weiter erklärt.

3.1.4 Skalarprodukt

Das Skalarpodukt ist eine Art der Vektormultiplikation. Mit dieser Form lässt sich der Winkel und somit auch die orthogonalität zweier Vektoren bestimmen. Allgemein kann man sagen, wenn das Skalarpodukt zweier Vektoren 0 sind, sind diese orthogonal zueinander.

Formel:
$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\alpha)$

Berechnung:

- Allgemeine schreibweise:
  $\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$
- Zahlenbeispiel:
  $\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 26$

3.1.5 Ebenenformen

Folgende Ebenenformen kann wie folg umformen:
Parameterform $\rightarrow$ Normalenform $\rightarrow$ koordinatenform

3.1.5.1 Parameterform

Erklärung:
Die Parameterform ist durch einen Stützvektor $\vec{p}$ und zwei Richtungsvektoren $\vec{h}$ und $\vec{k}$ definiert. Dabei legt der Stützvektor wie bei Geraden die Position im Raum (von $(0|0|0)$) fest. Der erste Richtungsvektor legt eine Gerade fest und der zweite legt die fest. Mithilfe der Parameterform kann einfach die Normalenform hergeleitet werden.

Formel:
$E : \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{h} + t \cdot \vec{k}$

Ausgeschrieben:
$$E : \vec{x} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} + s \cdot \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Bmatrix} + t \cdot \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{Bmatrix}$$
Dabei steht:

- $\vec{p}$: Stützvektor
- $\vec{h}$: Ein Richtungsvektor
- $\vec{k}$: Anderer Richtungsvektor (darf nicht identisch zu $\vec{h}$ sein)

3.1.5.2 Normalenform

Erklärung:
Die Normalenform ist durch den Stützvektor $\vec{p}$, den Normalenvektor $\vec{n}$ und einen Vektor $\vec{x}$ definiert. Dabei steht $\vec{x}$ für einen noch unbekannten Ortsvektor eines beliebigen Punktes auf der Ebene. In kurz: $\vec{x}$ ist ein beliebiger Punkt auf der Ebene.
Durch die Normalenform kann man die Koordinatenform leicht herleiten.

Formel:
$((\vec{p} - \vec{x}) \bullet \vec{n})$

Ausgeschrieben:
$$\left(\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \right) \bullet \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$
Dabei steht:

- $\vec{p}$: Stützvektor
- $\vec{n}$: Normalenvektor
- $\vec{x}$: Punkt

3.1.5.3 Koordinatenform

Erklärung:
Durch die Koordinatenform lässt sich der Normalenvektor leicht ablesen. (in der Formel das $(a|b|c)$ ist der Normalenvektor). Man kann auch einfach Testen ob ein Punkt auf der Ebene liegt indem man den Punkt in die x-Werte einsetzt und schaut ob die Gleichung stimmt.

Formel:
$E : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

Herleitung (von Normalenform):
$E : \vec{x} \bullet \vec{n} = \vec{p} \bullet \vec{n}$
Dabei steht:

- $\vec{x}$: einzugebender Punkt
- $\vec{p}$: Stützvektor
- $\vec{n}$: Normalenvektor

3.1.6 Ebenen veranschaulichen

3.1.7 Lage von Geraden

3.1.7.1 Lotfußpunkt Berechnen

3.1.7.2 Schnittpunkt Berechnen

3.1.8 Lage von Ebenen und Geraden

3.1.8.1 Durchstoßpunkt Berechnen

3.1.9 Lage von Ebenen

3.1.9.1 Schnittgerade

3.2 Abstände und Winkel

3.2.1 Abstand von Punkt zu Ebene

3.2.2 Abstand von Punkt zu Gerade

3.2.3 Spiegelung und Symmetrie

3.2.4 Winkel zwischen Vektoren

Mithilfe der Formel des Skalarprodukts herleitbar.
$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\alpha)$
$\rightarrow cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$
Dabei steht $cos(\alpha)$ für den Winkel und kann mithilfe des Taschenrechners mit $cos^{-1}(\sigma)$ in Grad umgewandelt

werden. σ steht hierbei für $cos(\alpha)$

Zahlenbeispiel:
$\vec{a} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$
Berechne benötigte Werte:

- $\vec{a} \bullet \vec{b} = 5 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 12$
- $|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{11}$
- $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{17}$

Setze ein:
$cos(\alpha) = \frac{12}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{17}} = 0.877$
Gebe in Taschenrechner ein:
$cos^{-1}(0.877) = 28.717$
Somit ist der Winkel: $28.717°$

3.2.5 Schnittwinkel

3.2.6 Vektorprodukt - Kreuzprodukt

Mithilfe des Kreuzprodukts kann man den Normalenvektor zweier Vektoren berechnen.
Formel:
$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin(\alpha)$

Berechnung:
$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$

3.2.7 Modellierung von geradlinigen Bewegungen

3.2.8 Vektorielle Beweise

Kapitel 4: Stochastik

4.1 Grundlagen der Wahrscheinlichkeit

4.1.1 Elementare Kombinatorik

4.1.2 Pfadregeln und Erwartungswerte

4.1.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

4.1.4 Stochastische Unabhängigkeiten

4.1.5 Formel von Bernoulli und Binomialverteilung

4.1.6 Erwartungswert und Histogramm

4.1.7 Problemlösen mit der Binomalverteilung

4.2 Normalverteilung

4.2.1 Normalverteilung

Kapitel 5: Das fehlt noch/muss ergänzt werden

- mittelwerte bei integralen
- analysis: funktionen und ihre graphen
- analysis: exponential und logarithmusfunktionen
- alles zu stochastik
- **Besonders Wichtig!**: Ebenenformen überarbeiten