

Mathe
Abi Lernzettel

Leon Feuerstein

Inhalt

1	Allgemeinwissen	3
1.1	Wichtige Formeln	3
1.1.1	Ableitung - Aufleitung	3
2	Analysis	4
2.1	Grundlagen der Differenzialrechnung	4
2.1.1	Ableitungsregeln	4
2.1.1.1	Zu Beachten	4
2.1.2	Monotonie und Grümmung	4
2.1.3	Extrem- und Wendepunkte	5
2.1.4	Tangente und Normale	5
2.1.5	Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen	6
2.2	Integrale	6
2.2.1	Stammfunktion	6
2.2.1.1	(Aufleitungs-) Regeln	6
2.2.1.2	Zu Beachten	6
2.2.2	Flächeninhalt	6
2.2.3	Rotationskörper	7
2.2.4	Uneigendliche Integrale	8
2.2.5	Mittelwerte	8
2.3	Exponential und Logarithmusfunktion	8
2.3.1	Ableitung	8
2.3.1.1	Ableitungsregeln	8
2.3.2	Eulerische Zahl: e	8
2.3.3	Exponentialrechnung	8
2.3.4	Graphen	8
2.3.5	Logarithmusfunktion	8
2.3.6	Parameter	8
2.3.7	Umkehrfunktion	8
2.4	Funktionen und ihre Graphen	8
2.4.1	Strecken, Verschieben und Spiegeln von Graphen	8
2.4.2	Linearfaktordarstellung	8
2.4.3	Lösen von Gleichungen	8
2.4.4	Trigonometrische Funktionen	8
2.4.5	waagerechte und senkrechte Asymptoten	8
2.4.6	Graph und Funktionstherm	8
2.4.7	Untersuchen von Funktionscharen	8
2.4.8	Näherungsweise: Berechnen von Nullstellen	8
2.5	Lineare Gleichungssysteme	8
2.5.1	Gauß-Verfahren	8
2.5.2	Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme	8

2.5.3	Lineare Gleichungssysteme mit Parametern auf der rechten Seite	8
2.5.4	Bestimmen von ganz rationaler Funktionen	8
3	Vektoren/Geometrie	9
3.1	Geraden und Ebenen	9
3.1.1	Vektoren im Raum	9
3.1.2	Geraden im Raum	9
3.1.3	Ebenen im Raum - Parameterform	9
3.1.4	Skalarprodukt	9
3.1.5	Ebenenformen	9
3.1.5.1	Koordinatenform	9
3.1.5.2	Normalenform	9
3.1.6	Parameterform	9
3.1.7	Ebenen veranschaulichen	9
3.1.8	Lage von Ebenen und Geraden	9
3.1.9	Lage von Ebenen	9
3.2	Abstände und Winkel	9
3.2.1	Abstand von Punkt zu Ebene	9
3.2.2	Abstand von Punkt zu Gerade	9
3.2.3	Spiegelung und Symmetrie	9
3.2.4	Winkel zwischen Vektoren	9
3.2.5	Schnittwinkel	9
3.2.6	Vektorprodukt - Kreuzprodukt	9
3.2.7	Modellierung von geradlinigen Bewegungen	9
3.2.8	Vektorielle Beweise	9
4	Stochastik	10
4.1	Grundlagen der Wahrscheinlichkeit	10
4.1.1	Elementare Kombinatorik	10
4.1.2	Pfadregeln und Erwartungswerte	10
4.1.3	Bedingte Wahrscheinlichkeit	10
4.1.4	Stochastische Unabhängigkeiten	10
4.1.5	Formel von Bernoulli und Binomialverteilung	10
4.1.6	Erwartungswert und Histogramm	10
4.1.7	Problemlösen mit der Binomalverteilung	10
4.2	Normalverteilung	10
4.2.1	Normalverteilung	10
4.2.2	Gauß'sche Glockenfunktion	10
4.2.3	Sigma-Regeln	10
4.2.4	Umkehraufgaben zur Normalverteilung	10
4.2.5	Stetige Zufallsgrößen	10
4.3	Testen mit der Binomialverteilung	10
4.3.1	Einseitiger Hypothesentest	10
4.3.2	Fehler beim Testen von Hypothesen	10
4.3.3	Wahl der Nullhypothese	10
4.3.4	Zweiseitiger Hypothesentest	10
5	Das fehlt noch/muss ergänzt werden	11

Kapitel 1: Allgemeinwissen

1.1 Wichtige Formeln

1.1.1 Ableitung - Aufleitung

Aufleitungsregeln

Ableitungsregeln

Kapitel 2: Analysis

2.1 Grundlagen der Differenzialrechnung

2.1.1 Ableitungsregeln

Aufbau: Name der Regel.

Erste Formel die allgemeine Formel (neutral).

Zweite Formel (optional) ein Zahlenbeispiel.

Konstantenregel:

$$f(x) = n \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = 3 \rightarrow f'(x) = 0$$

Potenzregel:

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = x^5 \rightarrow f'(x) = 5x^4$$

Faktorregel:

$$f(x) = a \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = a \cdot g'(x)$$

$$f(x) = 3 \cdot x^2 \rightarrow f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot x^1 = 6x$$

Summenregel/Differenzregel:

$$f(x) = g(x) + h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

$$f(x) = g(x) - h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) - h'(x)$$

Produktregel:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Kettenregel:

$$f(x) = u(v(x)) \rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

2.1.1.1 Zu Beachten

- $\ln(x)$ abgeleitet ist $\frac{1}{x}$
- e^x abgeleitet bleibt gleich (e^x)

2.1.2 Monotonie und Grümmung

Monotonie:

Monotonie bezieht sich auf das Verhalten einer Funktion in Bezug darauf, ob sie stetig zunimmt oder abnimmt. Eine Funktion wird als monoton steigend bezeichnet, wenn für zwei Punkte x_1 und x_2 mit

$x_1 < x_2$ der Funktionswert an x_1 kleiner oder gleich dem Funktionswert an x_2 ist. Umgekehrt wird eine Funktion als monoton fallend bezeichnet, wenn für zwei Punkte x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ der Funktionswert an x_1 größer oder gleich dem Funktionswert an x_2 ist.

Krümmung:

Die Krümmung einer Funktion beschreibt, wie stark eine Kurve von einer Geraden abweicht. Mathematisch gesehen wird die Krümmung einer Funktion durch die zweite Ableitung der Funktion beschrieben. Eine positive zweite Ableitung bedeutet, dass die Funktion eine nach oben geöffnete Krümmung (konkav) hat, während eine negative zweite Ableitung eine nach unten geöffnete Krümmung (konvex) anzeigt. Eine Krümmung von null bedeutet, dass die Funktion an dieser Stelle einen Wendepunkt hat, wo die Krümmung ihre Richtung ändert.

2.1.3 Extrem- und Wendepunkte

Extrempunkte:

Extrempunkte sind Punkte auf dem Graphen einer Funktion, an denen die Funktion entweder ein lokales Maximum oder Minimum erreicht.

- Lokales Maximum: An einem lokalen Maximum ist der Funktionswert größer als in der unmittelbaren Umgebung. Mathematisch bedeutet dies, dass die erste Ableitung der Funktion an diesem Punkt null ist ($f'(x) = 0$) und die zweite Ableitung negativ ist ($f''(x) < 0$).
- Lokales Minimum: An einem lokalen Minimum ist der Funktionswert kleiner als in der unmittelbaren Umgebung. Hier ist ebenfalls die erste Ableitung null ($f'(x) = 0$), jedoch ist die zweite Ableitung positiv ($f''(x) > 0$).

Wendepunkte:

Ein Wendepunkt ist ein Punkt auf dem Graphen einer Funktion, an dem sich das Krümmungsverhalten ändert. Das bedeutet, die Funktion wechselt an diesem Punkt von konkav zu konvex oder umgekehrt.

- Bestimmung von Wendepunkten: Ein Wendepunkt liegt vor, wenn die zweite Ableitung der Funktion null ist ($f''(x) = 0$) und die dritte Ableitung nicht null ist ($f'''(x) \neq 0$).

2.1.4 Tangente und Normale

Tangente:

Eine Tangente an den Graphen einer Funktion an einem bestimmten Punkt ist eine Gerade, die den Graphen genau an diesem Punkt berührt. Die Steigung der Tangente entspricht der Ableitung der Funktion an diesem Punkt.

Um die Tangente bestimmen zu können ($f(x) = m \cdot x + c$):

- $m: f'(\alpha)$. Bei dem α der x-Wert ist, an dem die Tangente gesucht wird.
- $c: f(\alpha)$. Bei dem α der x-Wert ist, an dem die Tangente gesucht wird.

Normale:

Eine Normale ist ein Graph der Orthogonal zur Tangente verläuft. Auch dieser wird durch die Tangentengleichung ($f(x) = m \cdot x + c$) bestimmt und kann von der Tangente bestimmt werden.

Tangente: $f(x) = m \cdot x + c$

Normale: $f(x) = -\frac{1}{m} \cdot x + c$

2.1.5 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

2.2 Integrale

Integrale sind das aufsummieren von Funktionen.

Linien aufsummiert \rightarrow Fläche.

Flächen aufsummiert \rightarrow Volumen.

2.2.1 Stammfunktion

Auch als Aufleiten bekannt.

2.2.1.1 (Aufleitungs-) Regeln

Aufbau: Name der Regel.

Erste Formel die allgemeine Formel (neutral).

Zweite Formel (optional) ein Zahlenbeispiel.

Konstantenregel:

$$f(x) = n \rightarrow F(x) = n \cdot x + C$$

Dabei ist n eine konstante Zahl.

$$f(x) = 3 \rightarrow F(x) = 3x + C$$

Faktorregel:

$$f(x) = a \cdot x \rightarrow F(x) = a \cdot X + C$$

Dabei ist x ein beliebiger Wert wie: $x^2, 3x, etc.$ und X ist die Aufleitung des Wertes.

Potenzregeln:

$$f(x) = x^n \rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Dabei ist n eine konstante Zahl.

$$f(x) = a \cdot x^3 \rightarrow F(x) = a \cdot \frac{1}{3+1} \cdot x^{3+1} + C = a \cdot \frac{x^4}{4} + C$$

Summenregel:

$$f(x) = h + k \rightarrow F(x) = H + K$$

Dabei ist h und k ein beliebiger Wert wie z.B.: $x^2, 3x, 4x^3, etc.$

2.2.1.2 Zu Beachten

- Aufleitung von e . (e^x bleib unverändert)
- Wurzeln können auch als Exponent geschrieben werden ($\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$)
- $\ln(x)$ aufgeleitet ist e^x

2.2.2 Flächeninhalt

Um den Flächeninhalt eines Graphen zu bestimmen berechnet man die Stammfunktion des Graphen. Dann berechnet man das Integral von a zu b um die Fläche zu bestimmen.

Beispiel:

$$\text{Funktion: } f(x) = x^2$$

Gesucht ist der Flächeninhalt von 1 bis 4. Somit:

$$\int_1^4 x^2 dx$$

$$\rightarrow \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^4$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{3}4^3\right) - \left(\frac{1}{3}1^3\right) = 21$$

2.2.3 Rotationskörper

Formel:

Allgemein:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Oder aufgebrochen in:

$$g(x) = \pi \cdot x^2$$

$$f(x) = g(x)$$

dann um Volumen zu berechnen:

$$f(x) \rightarrow F(x)$$

und die grenzen für das Integral angeben

Dabei steht $g(x)$ für die Formel eines runden Flächeninhalts. Für x in der Formel für $f(x)$ wird die Formel für den gegebenen Körper eingegeben. Dieser wird dann als Volumen durch das die Aufleitung aufsummiert um das Volumen zu bekommen.

2.2.4 Uneigendliche Integrale

2.2.5 Mittelwerte

2.3 Exponential und Logarithmusfunktion

2.3.1 Ableitung

2.3.1.1 Ableitungsregeln

2.3.2 Eulerische Zahl: e

2.3.3 Exponentialrechnung

2.3.4 Graphen

2.3.5 Logarithmusfunktion

2.3.6 Parameter

2.3.7 Umkehrfunktion

2.4 Funktionen und ihre Graphen

2.4.1 Strecken, Verschieben und Spiegeln von Graphen

2.4.2 Linearfaktordarstellung

2.4.3 Lösen von Gleichungen

2.4.4 Trigonometrische Funktionen

2.4.5 waagerechte und senkrechte Asymptoten

2.4.6 Graph und Funktionstherm

2.4.7 Untersuchen von Funktionscharen

2.4.8 Näherungsweise: Berechnen von Nullstellen

2.5 Lineare Gleichungssysteme

2.5.1 Gauß-Verfahren

2.5.2 Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme

2.5.3 Lineare Gleichungssysteme mit Parametern auf der rechten Seite

2.5.4 Bestimmen von ganz rationaler Funktionen

Kapitel 3: Vektoren/Geometrie

3.1 Geraden und Ebenen

3.1.1 Vektoren im Raum

3.1.2 Geraden im Raum

3.1.3 Ebenen im Raum - Parameterform

3.1.4 Skalarprodukt

3.1.5 Ebenenformen

3.1.5.1 Koordinatenform

3.1.5.2 Normalenform

3.1.6 Parameterform

3.1.7 Ebenen veranschaulichen

3.1.8 Lage von Ebenen und Geraden

3.1.9 Lage von Ebenen

3.2 Abstände und Winkel

3.2.1 Abstand von Punkt zu Ebene

3.2.2 Abstand von Punkt zu Gerade

3.2.3 Spiegelung und Symmetrie

3.2.4 Winkel zwischen Vektoren

3.2.5 Schnittwinkel

3.2.6 Vektorprodukt - Kreuzprodukt

3.2.7 Modellierung von geradlinigen Bewegungen

3.2.8 Vektorielle Beweise

Kapitel 4: Stochastik

4.1 Grundlagen der Wahrscheinlichkeit

- 4.1.1 Elementare Kombinatorik
- 4.1.2 Pfadregeln und Erwartungswerte
- 4.1.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit
- 4.1.4 Stochastische Unabhängigkeiten
- 4.1.5 Formel von Bernoulli und Binomialverteilung
- 4.1.6 Erwartungswert und Histogramm
- 4.1.7 Problemlösen mit der Binomialverteilung

4.2 Normalverteilung

- 4.2.1 Normalverteilung
- 4.2.2 Gauß'sche Glockenfunktion
- 4.2.3 Sigma-Regeln
- 4.2.4 Umkehraufgaben zur Normalverteilung
- 4.2.5 Stetige Zufallsgrößen

4.3 Testen mit der Binomialverteilung

- 4.3.1 Einseitiger Hypothesentest
- 4.3.2 Fehler beim Testen von Hypothesen
- 4.3.3 Wahl der Nullhypothese
- 4.3.4 Zweiseitiger Hypothesentest

Kapitel 5: Das fehlt noch/muss ergänzt werden