# Mathe Abi Lernzettel

Leon Feuerstein

# Inhalt

	_	inwissen
1.1		ige Formeln
	1.1.1	Ableitung - Aufleitung
2	Analysis	
		lagen der Differenzialrechnung
2.1	2.1.1	
		1.1.1 Zu Beachten
	2.1.2	
		Monotonie und Grümmung
	2.1.3	Extrem- und Wendepunkte
	2.1.4	Tangente und Normale
	2.1.5	Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen
2.2		ale
	2.2.1	Stammfunktion
	2.	2.1.1 (Aufleitungs-) Regeln
	2.	2.1.2 Zu Beachten
	2.2.2	Flächeninhalt
	2.2.3	Rotationskörper
	2.2.4	Uneigendliche Integrale
	2.2.5	Mittelwerte
23		nential und Logarithmusfunktion
2.5	2.3.1	Ableitung von e und $ln(x)$
	2.3.2	Euler'sche Zahl: e
	2.3.2	Exponentialrechnung
	2.3.4	
		Graphen
	2.3.5	Logarithmusfunktion
	2.3.6	Parameter
	2.3.7	Umkehrfunktion
2.4		ionen und ihre Graphen
	2.4.1	Strecken, Verschieben und Spiegeln von Graphen
	2.4.2	Linearfaktordarstellung
	2.4.3	Lösen von Gleichungen
	2.4.4	Trigonometrische Funktionen
	2.4.5	waagerechte und senkrechte Asymptoten
	2.4.6	Graph und Funktionstherm
	2.4.7	Untersuchen von Funktionscharen
	2.4.8	Näherungsweise: Berechnen von Nullstellen
2.5	Linear	e Gleichungssysteme
	2.5.1	Gauß-Verfahren
	2.5.2	Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme
	2.5.3	Lineare Gleichungssysteme mit Parametern auf der rechten Seite

	2.5.4	Bestimmen von ganz rationaler Funktionen	9
3 '	Vektorer	n/Geometrie	LO
3.1		en und Ebenen	
· · -	3.1.1	Vektoren im Raum	
	3.1.2	Geraden im Raum	
	3.1.3	Ebenen im Raum - Parameterform	
	3.1.4	Skalarprodukt	
	3.1.5	Ebenenformen	
		L.5.1 Koordinatenform	
		1.5.2 Normalenform	
	3.1.6	Parameterform	
	3.1.7	Ebenen veranschaulichen	
	3.1.8	Lage von Ebenen und Geraden	
	3.1.9	Lage von Ebenen	
3.2		nde und Winkel	
J.2	3.2.1	Abstand von Punkt zu Ebene	
	3.2.2	Abstand von Punkt zu Gerade	
	3.2.3	Spiegelung und Symmetrie	
	3.2.4	Winkel zwischen Vektoren	
	3.2.4	Schnittwinkel	
	3.2.5	Vektorprodukt - Kreuzprodukt	
	3.2.7	Modellierung von geradlinigen Bewegungen	
	3.2.8		
	3.2.0	Vektorielle Beweise	ΙТ
4	Stochast	ik	12
		lagen der Wahrscheinlichkeit	
т.1	4.1.1	Elementare Kombinatorik	
	4.1.2	Pfadregeln und Erwartungswerte	
	4.1.3	Bedingte Wahrscheinlichkeit	
	4.1.4	Stochastische Unabhängigkeiten	
	4.1.4	Formel von Bernoulli und Binomialverteilung	
	4.1.5	Erwartungswert und Histogramm	
	4.1.7	Problemlösen mit der Binomalverteilung	
4.2			
4.2	4.2.1	lverteilung	
		Normalverteilung	
	4.2.2	Gauß'sche Glockenfunktion	
	4.2.3	Sigma-Regeln	
	4.2.4	Umkehraufgaben zur Normalverteilung	
	4.2.5		12
4.3			12
	4.3.1	9 31	12
	4.3.2	71	12
	4.3.3	71	12
	4.3.4	Zweiseitiger Hypothesentest	12
5	Das febl	t noch/muss ergänzt werden	13

# Kapitel 1: Allgemeinwissen

# 1.1 Wichtige Formeln

# 1.1.1 Ableitung - Aufleitung

Aufleitungsregeln Ableitungsregeln

# Kapitel 2: Analysis

# 2.1 Grundlagen der Differenzialrechnung

## 2.1.1 Ableitungsregeln

Aufbau: Name der Regel.

Erste Formel die allgemeine Formel (neutral).

Zweite Formel (optional) ein Zahlenbeispiel.

#### Konstantenregel:

$$\overline{f(x) = n \to f'(x)} = 0$$
  
$$f(x) = 3 \to f'(x) = 0$$

#### Potenzregel:

$$\overline{f(x) = x^n} \to f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$
$$f(x) = x^5 \to f'(x) = 5x^4$$

#### Faktorregel:

$$\overline{f(x) = a \cdot g(x)} \to f'(x) = a \cdot g'(x)$$
  
$$f(x) = 3 \cdot x^2 \to f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot x^1 = 6x$$

#### Summenregel/Differenzregel:

$$\frac{f(x) = g(x) + h(x) \to f'(x)}{f(x) = g(x) - h(x) \to f'(x)} = g'(x) + h'(x)$$

#### Produktregel:

$$\overline{f(x) = u(x)} \cdot v(x) \to f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

#### Kettenregel:

$$\overline{f(x) = u(v(x))} \rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

#### 2.1.1.1 Zu Beachten

- ln(x) abgeleitet ist  $\frac{1}{x}$
- $e^x$  abgeleitet bleibt gleich  $(e^x)$

## 2.1.2 Monotonie und Grümmung

#### Montonie:

Monotonie bezieht sich auf das Verhalten einer Funktion in Bezug darauf, ob sie stetig zunimmt oder abnimmt. Eine Funktion wird als monoton steigend bezeichnet, wenn für zwei Punkte  $x_1$  und  $x_2$  mit

 $x_1 < x_2$  der Funktionswert an  $x_1$  kleiner oder gleich dem Funktionswert an  $x_2$  ist. Umgekehrt wird eine Funktion als monoton fallend bezeichnet, wenn für zwei Punkte  $x_1$  und  $x_2$  mit  $x_1 < x_2$  der Funktionswert an  $x_1$  größer oder gleich dem Funktionswert an  $x_2$  ist.

#### Krümmung:

Die Krümmung einer Funktion beschreibt, wie stark eine Kurve von einer Geraden abweicht. Mathematisch gesehen wird die Krümmung einer Funktion durch die zweite Ableitung der Funktion beschrieben. Eine positive zweite Ableitung bedeutet, dass die Funktion eine nach oben geöffnete Krümmung (konkav) hat, während eine negative zweite Ableitung eine nach unten geöffnete Krümmung (konvex) anzeigt. Eine Krümmung von null bedeutet, dass die Funktion an dieser Stelle eine Wendepunkt hat, wo die Krümmung ihre Richtung ändert.

## 2.1.3 Extrem- und Wendepunkte

#### Extrempunkte:

Extrempunkte sind Punkte auf dem Graphen einer Funktion, an denen die Funktion entweder ein lokales Maximum oder Minimum erreicht.

- Lokales Maximum: An einem lokalen Maximum ist der Funktionswert größer als in der unmittelbaren Umgebung. Mathematisch bedeutet dies, dass die erste Ableitung der Funktion an diesem Punkt null ist (f'(x) = 0) und die zweite Ableitung negativ ist (f''(x) < 0).
- Lokales Minimum: An einem lokalen Minimum ist der Funktionswert kleiner als in der unmittelbaren Umgebung. Hier ist ebenfalls die erste Ableitung null (f'(x) = 0), jedoch ist die zweite Ableitung positiv (f''(x) > 0).

### Wendepunkte:

Ein Wendepunkt ist ein Punkt auf dem Graphen einer Funktion, an dem sich das Krümmungsverhalten ändert. Das bedeutet, die Funktion wechselt an diesem Punkt von konkav zu konvex oder umgekehrt.

Bestimmung von Wendepunkten: Ein Wendepunkt liegt vor, wenn die zweite Ableitung der Funktion null ist (f''(x) = 0) und die dritte Ableitung nicht null ist  $(f'''(x) \neq 0)$ .

### 2.1.4 Tangente und Normale

#### Tangente:

Eine Tangente an den Graphen einer Funktion an einem bestimmten Punkt ist eine Gerade, die den Graphen genau an diesem Punkt berührt. Die Steigung der Tangente entspricht der Ableitung der Funktion an diesem Punkt.

Um die Tangente bestimmen zu können  $(f(x) = m \cdot x + c)$ :

- m:  $f'(\alpha)$ . Bei dem  $\alpha$  der x-Wert ist, an dem die Tangente gesucht wird.
- c:  $f(\alpha)$ . Bei dem  $\alpha$  der x-Wert ist, an dem die Tangente gesucht wird.

#### Normale:

Eine Normale ist ein Graph der Orthogonal zur Tangente verläuft. Auch dieser wird durch die Tangentengleichung  $(f(x) = m \cdot x + c)$  bestimmt und kann von der Tangente bestimmt werden.

Tangente:  $f(x) = m \cdot x + c$ Normale:  $f(x) = -\frac{1}{m} \cdot x + c$ 

## 2.1.5 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen sind mathematische Probleme, bei denen eine Zielfunktion unter Berücksichtigung zusätzlicher Bedingungen optimiert werden soll. Diese werden häufig in Form von Textaufgaben verwendet oder einfach mit einer Formel und mithilfe von Text.

#### !!! Offen für neue + bessere Beispiele !!!

#### Beispiel:

Ein Unternehmen produziert zwei Arten von Produkten, X und Y. Der Gewinn pro verkaufter Einheit beträgt 10 Euro für Produkt X und 15 Euro für Produkt Y. Das Unternehmen möchte die Gesamtgewinnmarge maximieren und muss gleichzeitig sicherstellen, dass mindestens 100 Einheiten des Produkts X verkauft werden.

- **Zielfunktion:** Maximiere die Gesamtgewinnmarge G = 10x + 15y, wobei x die Anzahl der Einheiten von Produkt X und y die Anzahl der Einheiten von Produkt Y ist.
- Nebenbedingung: Verkaufsmenge von X muss mindestens 100 Einheiten betragen  $x \ge 100$

Lösungsschritte:

- 1. Formulieren der Zielfunktion und Nebenbedingung: G=10x+15y
- 2. Lösen:

Wegen Nebenbedingung setze x=100 somit:

 $G = 10 \cdot 100 + 15y = 1000 + 15y$ 

Also ist das Ergebnis: G = 1000 + 15y

# 2.2 Integrale

Integrale sind das aufsummieren von Funktionen.

Linien aufsummiert  $\rightarrow$  Fläche.

Flächen aufsummiert  $\rightarrow$  Volumen.

#### 2.2.1 Stammfunktion

Auch als Aufleiten bekannt.

#### 2.2.1.1 (Aufleitungs-) Regeln

Aufbau: Name der Regel.

Erste Formel die allgemeine Formel (neutral). Zweite Formel (optional) ein Zahlenbeispiel.

#### Konstantenregel:

$$\overline{f(x) = n \rightarrow F}(x) = n \cdot x + C$$

Dabei ist n eine konstante Zahl.

$$f(x) = 3 \rightarrow F(x) = 3x + C$$

Faktorregel:

$$f(x) = a \cdot x \to F(x) = a \cdot X + C$$

Dabei ist x ein beliebiger Wert wie:  $x^2, 3x, etc.$  und X ist die Aufleitung des Wertes.

Potenzregeln:

$$\overline{f(x) = x^n} \to F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Summenregel:

$$\overline{f(x) = h + k} \to F(x) = H + K$$

Dabei ist h und k ein beliebiger Wert wie z.B.:  $x^2$ , 3x,  $4x^34$ , etc.

#### 2.2.1.2 Zu Beachten

- Aufleitung von e. ( $e^x$  bleib unverändert)
- Wuzeln können auch als Exponent geschrieben werden  $({}^n\sqrt{x}=x^{\frac{1}{n}})$
- ln(x) aufgeleitet ist  $e^x$

#### 2.2.2 Flächeninhalt

Um den Flächeninhalt eines Graphen zu bestimmen berechnet man die Stammfunktion des Graphen. Dann berechnet man das Integral von a zu b um die Fläche zu bestimmen.

Beispiel:

Funktion: 
$$f(x) = x^2$$

Gesucht ist der Flächeninhalt von 1 bis 4. Somit:

$$\int_1^4 x^2 dx$$

$$\rightarrow [\frac{1}{3}x^3]_1^4$$

$$\rightarrow (\frac{1}{3}4^3) - (\frac{1}{3}1^3) = 21$$

#### 2.2.3 Rotationskörper

Formel:

Allgemein:

$$V = \pi \cdot \int_{a}^{b} (f(x))^{2} dx$$

Oder aufgebrochen in:

$$g(x) = \pi \cdot x^2$$

$$f(x) = g(x)$$

dann um Volumen zu berechnen:

$$f(x) \to F(x)$$

und die grenzen für das Integral angeben

Dabei steht g(x) für die Formel eines runden Flächeninhalts. Für x in der Formel für f(x) wird die Formel für den gegebenen Körper eingegeben. Dieser wird dann als Volumen durch das die Aufleitung aufsummiert um das Volumen zu bekommen.

## 2.2.4 Uneigendliche Integrale

Uneigendliche Integrale sind Integrale mit bestimmten Eigenschaften. Dabei bestehen diese Eigenschaften aus unendlichen Grenzen oder Funktionen als Grenzen. Das Ziel dabei ist das Ergebnis möglichst genau beschreiben zu können ohne dabei ein genaues Ergebnis als Zahl erhalten zu müssen. Beispiele dafür:

8

 $\int_a^\infty \frac{1}{x^2} \, dx \to \text{Ergebnis wird unendlich groß}$   $\int_a^1 \frac{1}{x} \, dx \to \text{Ergebnis n\"ahert sich 0 an}$ 

### 2.2.5 Mittelwerte

# 2.3 Exponential und Logarithmusfunktion

## 2.3.1 Ableitung von e und ln(x)

Ableitung von e:  $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$ 

 $\Rightarrow$  *e* bleibt bei der Ableitung gleich.

Ableitung von ln(x):

$$\overline{f(x) = ln(x) \to f'}(x) = \frac{1}{x}$$

### 2.3.2 Euler'sche Zahl: e

Die Euler'sche Zahl e ist eine Zahl die bei ihrer Ableitung identisch bleibt.

Die Formel für e (nicht wichtig zu wissen):

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$$

# 2.3.3 Exponentialrechnung

# 2.3.4 Graphen

# 2.3.5 Logarithmusfunktion

### 2.3.6 Parameter

#### 2.3.7 Umkehrfunktion

Umkehrfunktion ist die Umkehrung einer Funktion. Beispiel anhand von Zahlenbeispiel:

1. Gegeben Funktion:  $f(x) = 3x^2$ 

2. Umbenennung:  $y = 3x^2$ 

3. Nach x Auflösen:  $3x^2 = y$ 

4. Aksgleichen:  $x = \sqrt{\frac{y}{3}}$ 

5. Ergebnis:  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}$ 

## 2.4 Funktionen und ihre Graphen

- 2.4.1 Strecken, Verschieben und Spiegeln von Graphen
- 2.4.2 Linearfaktordarstellung
- 2.4.3 Lösen von Gleichungen
- 2.4.4 Trigonometrische Funktionen
- 2.4.5 waagerechte und senkrechte Asymptoten
- 2.4.6 Graph und Funktionstherm
- 2.4.7 Untersuchen von Funktionscharen
- 2.4.8 Näherungsweise: Berechnen von Nullstellen
- 2.5 Lineare Gleichungssysteme
- 2.5.1 Gauß-Verfahren
- 2.5.2 Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme
- 2.5.3 Lineare Gleichungssysteme mit Parametern auf der rechten Seite
- 2.5.4 Bestimmen von ganz rationaler Funktionen

# Kapitel 3: Vektoren/Geometrie

## 3.1 Geraden und Ebenen

- 3.1.1 Vektoren im Raum
- 3.1.2 Geraden im Raum
- 3.1.3 Ebenen im Raum Parameterform
- 3.1.4 Skalarprodukt
- 3.1.5 Ebenenformen
- 3.1.5.1 Koordinatenform
- 3.1.5.2 Normalenform
- 3.1.6 Parameterform
- 3.1.7 Ebenen veranschaulichen
- 3.1.8 Lage von Ebenen und Geraden
- 3.1.9 Lage von Ebenen

## 3.2 Abstände und Winkel

- 3.2.1 Abstand von Punkt zu Ebene
- 3.2.2 Abstand von Punkt zu Gerade
- 3.2.3 Spiegelung und Symmetrie

### 3.2.4 Winkel zwischen Vektoren

Mithilfe der Formel des Skalarprodukts herleitbar.

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\alpha)$$

$$\rightarrow cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Dabei steht  $cos(\alpha)$  für den Winkel und kann mithilfe des Taschenrechners mit  $cos^{-1}(\sigma)$  in Grad umgewandelt werden.  $\sigma$  steht hierbei für  $cos(\alpha)$ 

Zahlenbeispiel:

$$\vec{a} = \begin{cases} 5\\0\\1 \end{cases} \qquad \vec{b} = \begin{cases} 2\\3\\2 \end{cases}$$

### Berechne benötigte Werte:

• 
$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 5 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 12$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{17}$$

## Setze ein:

$$cos(\alpha) = \frac{12}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{17}} = 0.877$$
 Gebe in Taschenrechner ein:

 $\begin{aligned} cos^{-1}(0.877) &= 28.717\\ \text{Somit ist der Winkel: } 28.717^{\circ} \end{aligned}$ 

- 3.2.5 **Schnittwinkel**
- 3.2.6 Vektorprodukt - Kreuzprodukt
- 3.2.7 Modellierung von geradlinigen Bewegungen
- 3.2.8 Vektorielle Beweise

# Kapitel 4: Stochastik

4.1	Grundlagen der Wahrscheinlichkeit
4.1.1	Elementare Kombinatorik
4.1.2	Pfadregeln und Erwartungswerte
4.1.3	Bedingte Wahrscheinlichkeit
4.1.4	Stochastische Unabhängigkeiten
4.1.5	Formel von Bernoulli und Binomialverteilun
4.1.6	Erwartungswert und Histogramm
4.1.7	Problemlösen mit der Binomalverteilung
4.2	Normalverteilung
4.2.1	Normalverteilung
4.2.2	Gauß'sche Glockenfunktion
4.2.3	Sigma-Regeln
4 0 4	
4.2.4	Umkehraufgaben zur Normalverteilung
4.2.4	Umkehraufgaben zur Normalverteilung Stetige Zufallsgrößen
	5
4.2.5	Stetige Zufallsgrößen
4.2.5 4.3	Stetige Zufallsgrößen  Testen mit der Binomialverteilung  Einseitiger Hypothesentest

Zweiseitiger Hypothesentest

4.3.4

# Kapitel 5: Das fehlt noch/muss ergänzt werden

- mittelwerte bei integralen
- analysis: funktionen und ihre graphen
- analysis: exponential und logarithmusfunktionen
- alles zu vektoren
- alles zu stochastik