

Solución de Ecuaciones diferenciales mediante

Operador Neuronal de Fourier



Óscar Anuar Alvarado Morán
Introducción al Aprendizaje Profundo
IIMAS, UNAM

Tabla de contenido

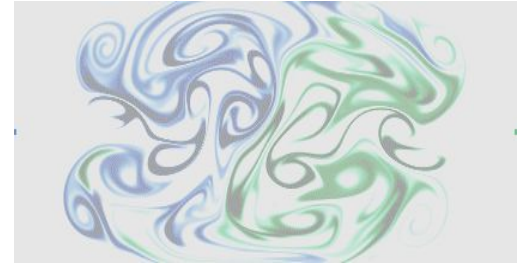
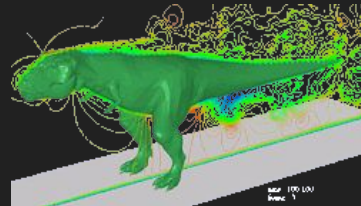
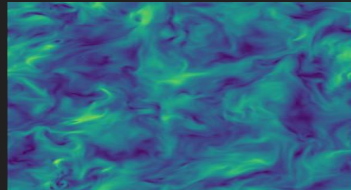
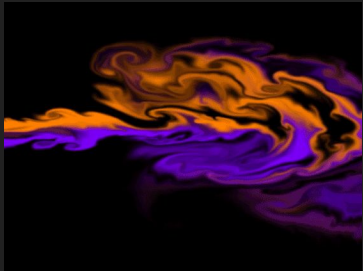
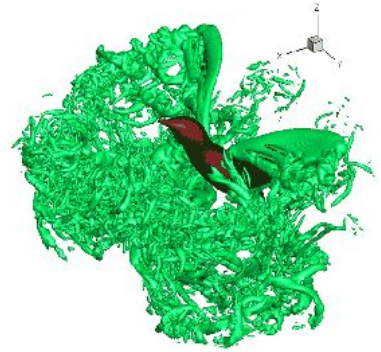
- Breve resumen de la primera exposición
 - Descripción del problema
 - Descripción de la tarea
 - Análisis exploratorio
- Presentación a detalle del trabajo realizado
 - Limpieza y preprocesamiento de datos
 - Modelado de la tarea
 - Arquitectura
 - Descripción de experimentación
 - Presentación y análisis de resultados
 - Comparación con resultados públicos
- Conclusiones
 - Conclusiones del proyecto
 - Limitaciones y dificultades encontradas
 - Formas de mejorar o expandir el trabajo

Ecuaciones de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u}$$

Ecuación de continuidad

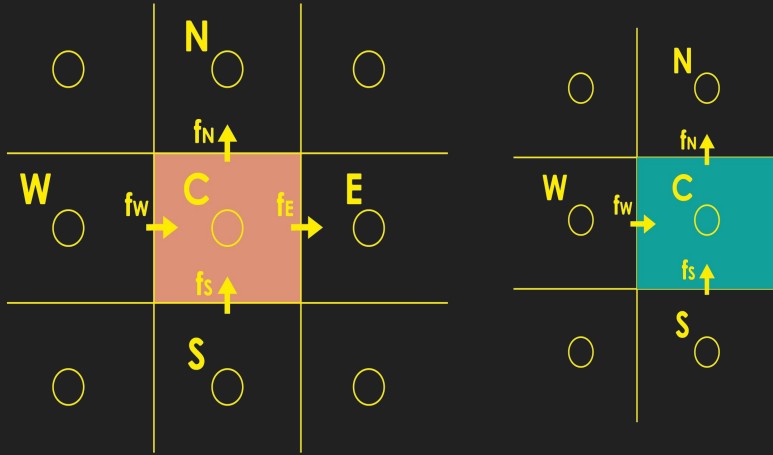
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$



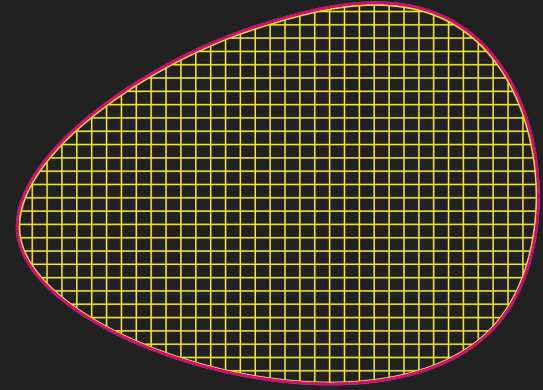
Método del Volumen Finito



Método del Volumen Finito

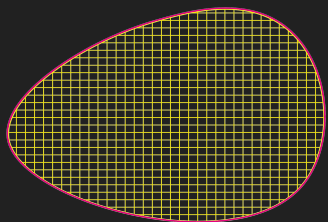


$$a_C u_1 + a_E u_2 + a_W u_3 + a_N u_4 + a_S u_5 = f_1$$

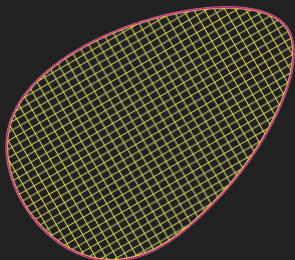


$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & b_{33} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ 0 & & & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Metodología antigua

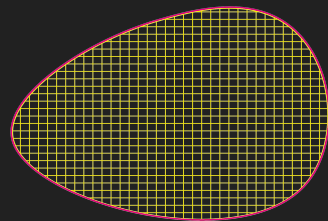


$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & a_{32} & a_{33} & \ddots \\ & & \ddots & a_{(n-1)n} \\ 0 & & & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

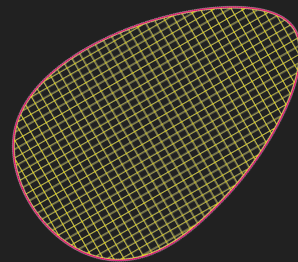


Metodología de Aprendizaje Profundo

a



$$G^\dagger(a) = u$$



Datos <https://cutt.ly/Ov0hc61>

- **Ecuación de Burger**

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x (u^2(x, t)/2) = \nu \partial_{xx} u(x, t)$$

- **Ecuaciones de Navier-Stokes**

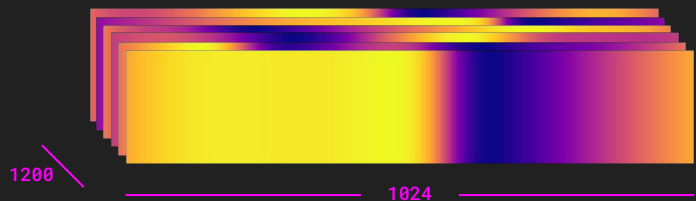
$$\partial_t w(x, t) + u(x, t) \cdot \nabla w(x, t) = \nu \Delta w(x, t) + f(x)$$

$$\nabla \cdot u(x, t) = 0$$

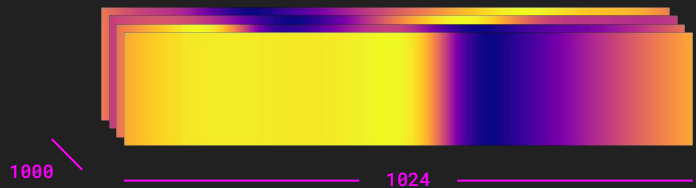
$$w = \nabla \times u$$

Datos

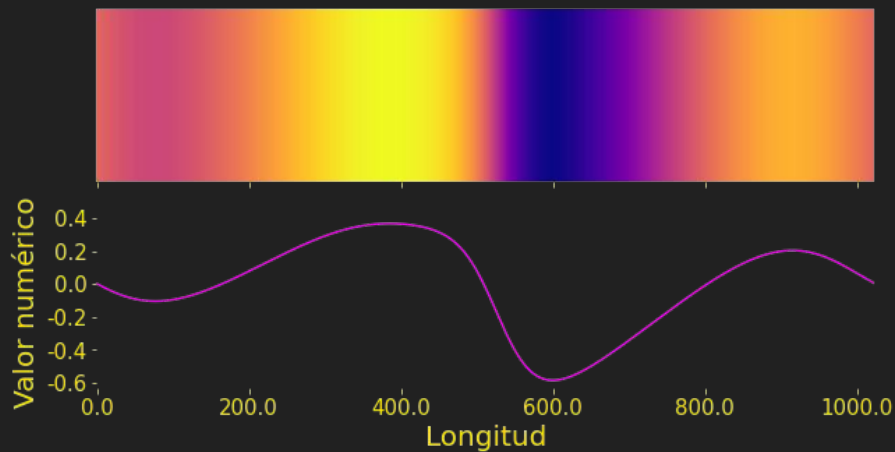
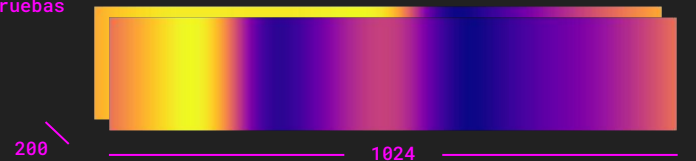
- Ecuación de Burger 1-D



Entrenamiento

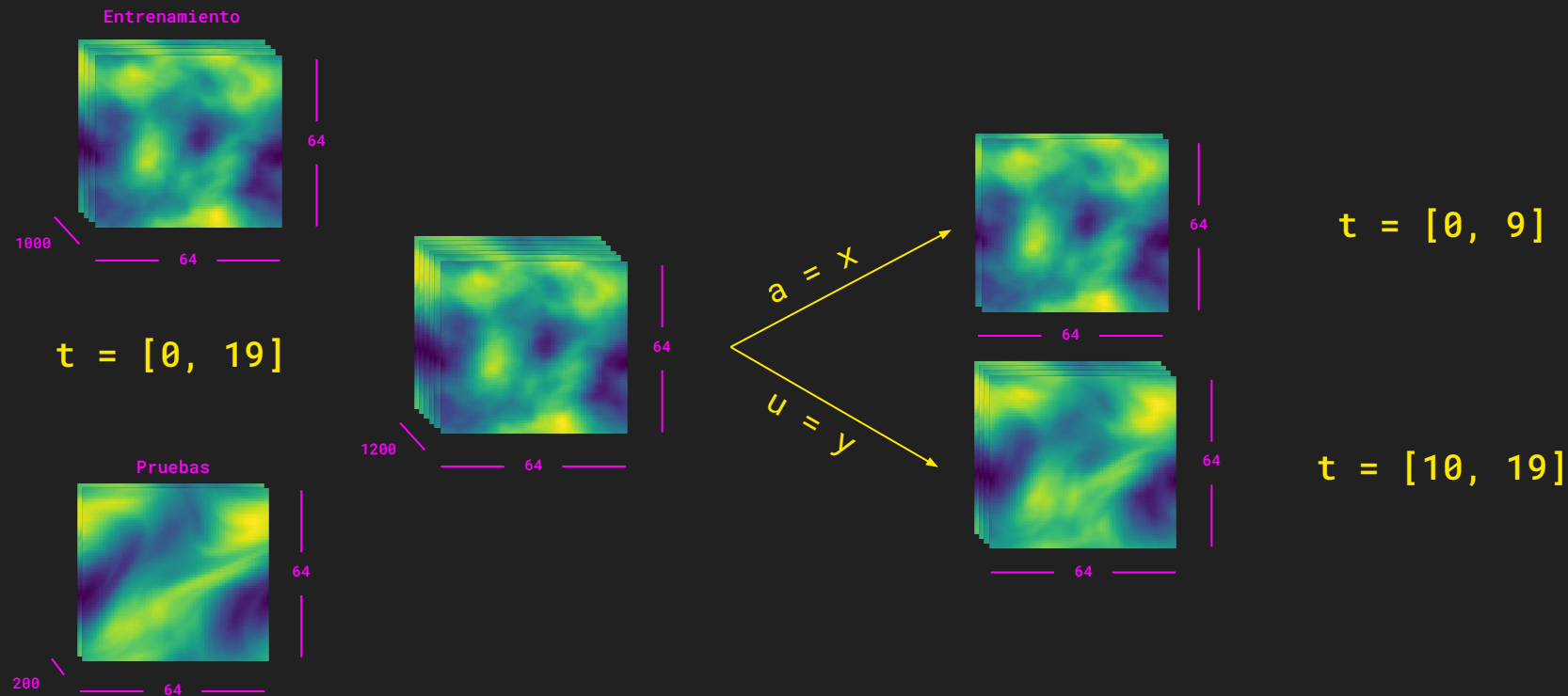


Pruebas



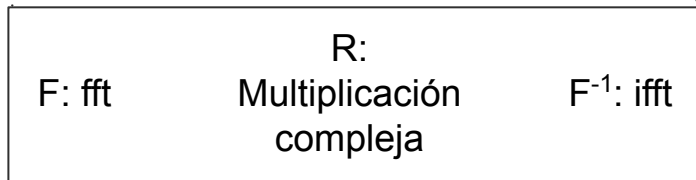
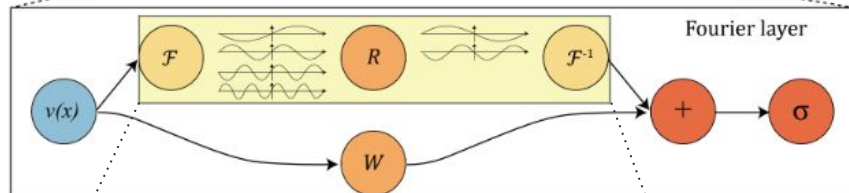
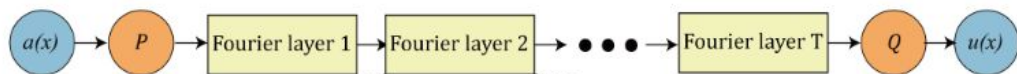
Datos

- Ecuación de Navier Stokes



Arquitectura

- Operador Neuronal de Fourier

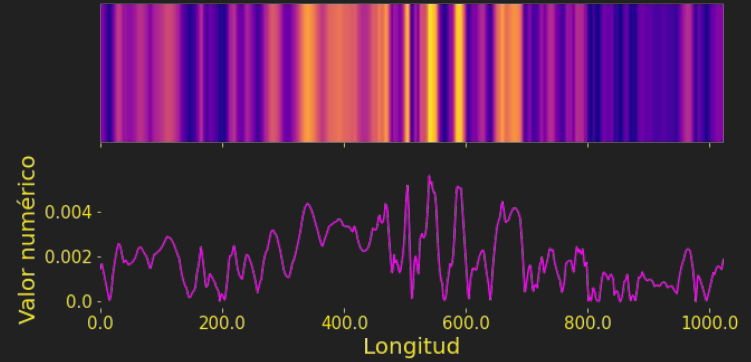
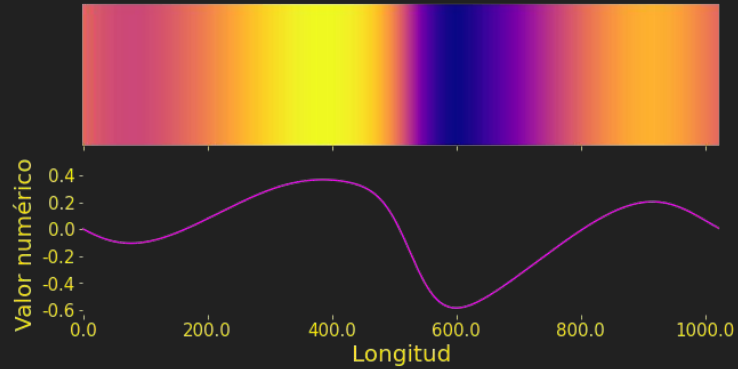
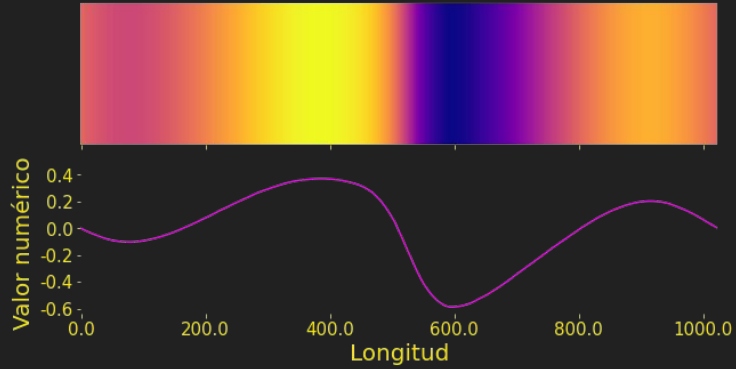


```
FN03d(  
  (fc0): Linear(in_features=13, out_features=20, bias=True)  
  (module): ModuleList(  
    (0): FourierLayerBlock(  
      (rama_superior): SpectralConv3d()  
      (rama_inferior): Conv1d(20, 20, kernel_size=(1,), stride=(1,))  
    )  
    (1): FourierLayerBlock(  
      (rama_superior): SpectralConv3d()  
      (rama_inferior): Conv1d(20, 20, kernel_size=(1,), stride=(1,))  
    )  
    (2): FourierLayerBlock(  
      (rama_superior): SpectralConv3d()  
      (rama_inferior): Conv1d(20, 20, kernel_size=(1,), stride=(1,))  
    )  
    (3): FourierLayerBlock(  
      (rama_superior): SpectralConv3d()  
      (rama_inferior): Conv1d(20, 20, kernel_size=(1,), stride=(1,))  
    )  
  )  
  (fc1): Linear(in_features=20, out_features=128, bias=True)  
  (fc2): Linear(in_features=128, out_features=1, bias=True)  
)
```

Experimentación

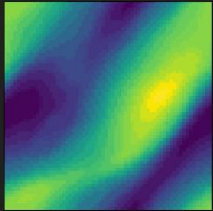
- Entre 2 y 8 capas de Fourier Bien
- Entre 5 y 15 pasos de tiempo para entrenamiento No tan bien
- Learning rate entre 0.01 y 0.0005 No tan bien
- weights entre 10 y 40 Bien

Resultados y análisis

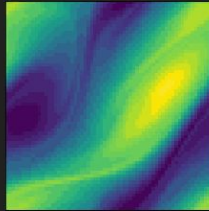


Resultados y análisis

Predichos

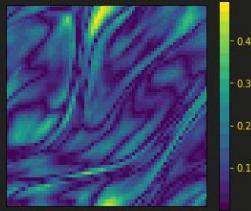


Verdaderos

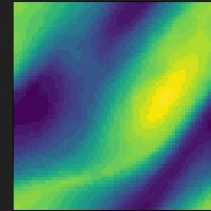


$t = 00$

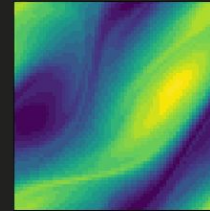
Diferencia
absoluta



Predichos

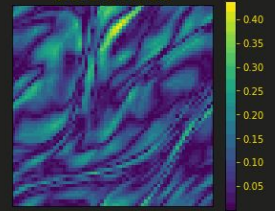


Verdaderos

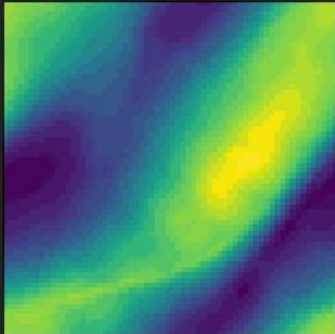


$t = 00$

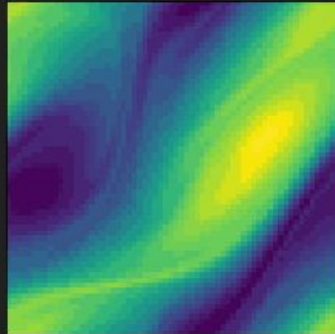
Diferencia
absoluta



Predichos

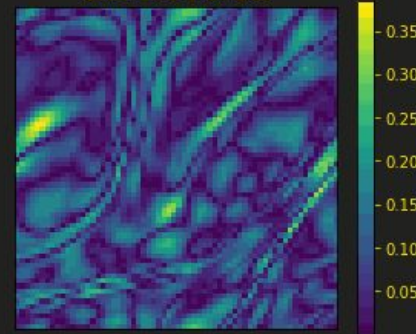


Verdaderos



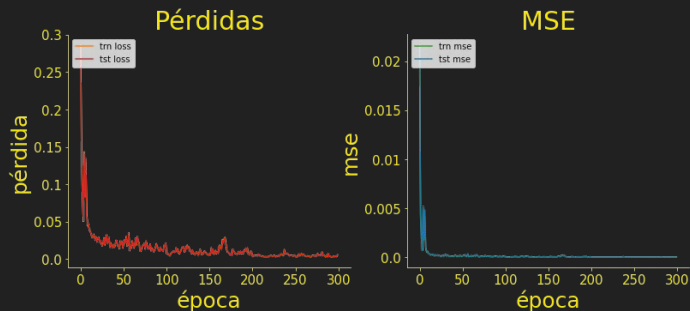
$t = 00$

Diferencia
absoluta

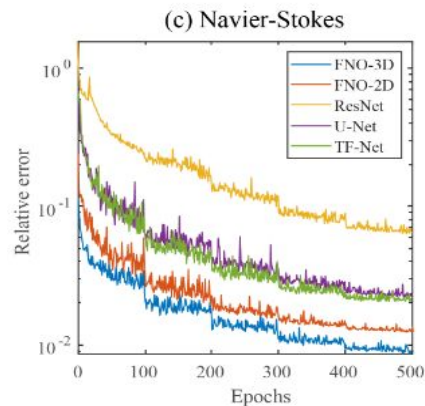
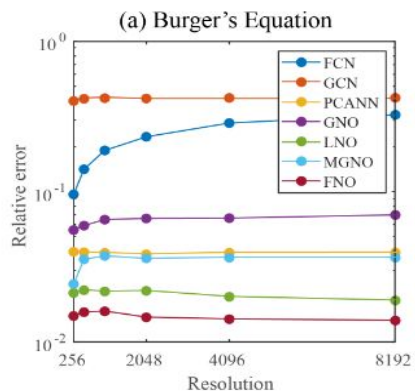
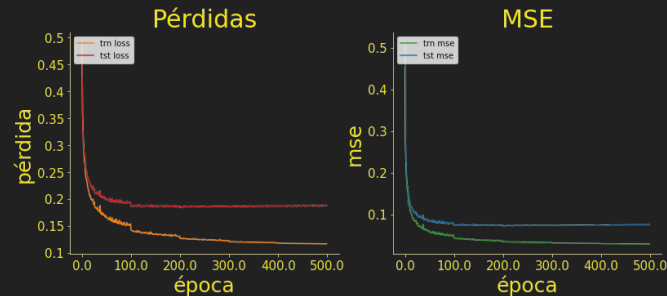


Resultados y análisis

Burger

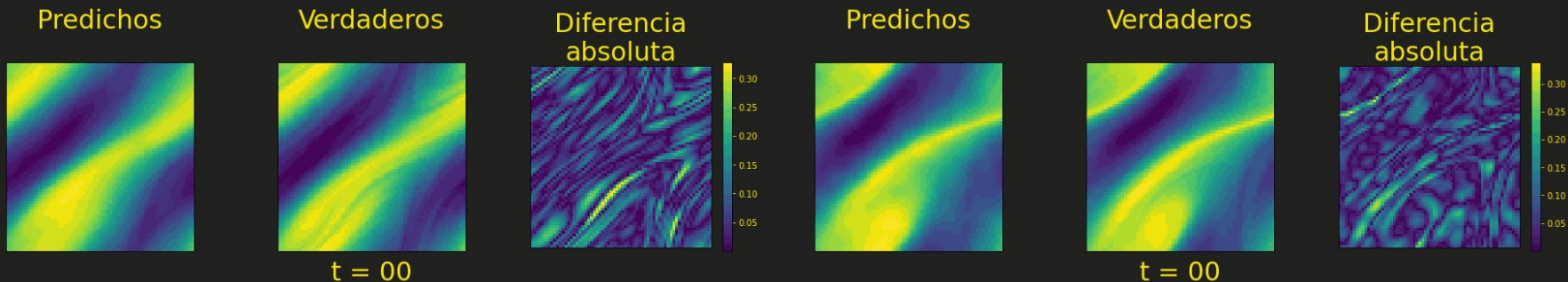


Navier-Stokes



Conclusiones

- Normalización por lotes
- Aumentado de datos o generación de más datos
- Pruebas con diferentes resoluciones
- Experimentación tardada
- Pruebas con los mismos resultados
- Pruebas con condiciones iniciales distintas



Referencias

- Artículo FNO: <https://arxiv.org/pdf/2010.08895.pdf>
- Datos: https://github.com/zongyi-li/fourier_neural_operator
- CFD - Deep Learning histórico: <https://sci-hub.do/10.1017/jfm.2016.803>
- Otras formas de hacer esto:
<https://arxiv.org/pdf/2008.10509.pdf>
<https://www.jmlr.org/papers/volume19/18-046/18-046.pdf>
<https://arxiv.org/pdf/1904.07200.pdf>
- Datos del último artículo: <https://github.com/timudk/SPDENN>
- Visualizaciones tremendas (Deep Fluids): <https://arxiv.org/pdf/1806.02071.pdf>