



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE TUCURUÍ  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

**AEROPÊNDULO, PROTOTIPAGEM E SIMULADOR GRÁFICO COMO  
FERRAMENTA PARA ESTUDOS DE TÉCNICAS DE CONTROLE E MODELAGEM  
POR IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS**

**OSÉIAS DIAS DE FARIAZ**

Tucuruí-PA

2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE TUCURUÍ  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

**OSÉIAS DIAS DE FARIAS**

**AEROPÊNDULO, PROTOTIPAGEM E SIMULADOR GRÁFICO COMO  
FERRAMENTA PARA ESTUDOS DE TÉCNICAS DE CONTROLE E MODELAGEM  
POR IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado  
ao colegiado da Faculdade de Engenharia Elétrica,  
do Campus Universitário de Tucuruí, da  
Universidade Federal do Pará, como requisito  
necessário para obtenção do título de Bacharel  
em Engenharia Elétrica.

**Orientador:** Prof. Dr. Raphael Barros Teixeira

Tucuruí-PA  
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE TUCURUÍ  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

**TÍTULO DO TRABALHO**

AUTOR: **OSÉIAS DIAS DE FARIAS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO SUBMETIDO À BANCA EXAMINADORA APROVADA PELO COLEGIADO DA FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA, SENDO JULGADO

.....

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. Raphael Barros Teixeira  
Orientador / UFPA-CAMTUC-FEE

---

Prof. Dr. NOME PRIMEIRO AVALIADOR  
Membro 1 / UFPA-CAMTUC-FEE

---

Prof. Dr. NOME PRIMEIRO AVALIADOR  
Membro 2 / UFPA-CAMTUC-FEE

# Resumo

Resumo aqui

**Palavras Chave:** Aeropêndulo, identificação de sistema, protótipo, simulador, técnicas de controle.

# Abstract

Texto do abstract (inglês)

**Keywords:** Palavras chave em inglês.

# SUMÁRIO

---

---

<b>Resumo</b>	iv	
<b>Abstract</b>	v	
<b>Sumário</b>	vi	
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	1
1.1	<b>Justificativa</b>	1
1.2	<b>Objetivos</b>	2
1.2.1	Objetivos Gerais	2
1.2.2	Objetivos Específicos	2
1.3	<b>Escopo do Trabalho</b>	2
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	3
2.1	<b>Modelagem e Controle de Sistemas</b>	3
2.1.1	Transformada Laplace	3
2.1.2	Transformada Z	3
2.1.3	Espaço de Estados	3
2.2	<b>Identificação de Sistemas</b>	3
2.2.1	Método dos Mínimos Quadrados	3
2.3	<b>Eletrônica Analógica e Digital</b>	3
2.3.1	Dispositivos Analógicos	3
2.3.2	Dispositivos Digitais	3
<b>3</b>	<b>PROTOTIPO E SIMULADOR</b>	4
3.1	<b>Protótipo</b>	4
3.1.1	Parte estrutural do sistema	5
3.1.2	Parte Elétrica do sistema	5
3.1.2.1	Potenciômetro $50k\Omega$	5
3.1.2.2	Placa de desenvolvimento Esp32	6
3.1.2.3	Fonte Chaveada 2A, 5V, 25W	7
3.1.2.4	Módulo Driver L298n	8
3.1.2.5	Conjunto (suporte motor cw/ccw hélice) para drones fpv racing quadcopter	8

3.1.2.6	Componentes eletrônicos (resistivos e capacitivos) . . . . .	9
3.1.3	Montagem do Protótipo . . . . .	10
3.1.4	Parte Física . . . . .	10
3.1.5	Parte Elétrica . . . . .	10
<b>3.2</b>	<b>Simulador . . . . .</b>	<b>11</b>
3.2.1	Linguagem Python . . . . .	11
3.2.2	Biblioteca VPython . . . . .	11
3.2.3	Simulador Gráfico . . . . .	11
<b>4</b>	<b>INTERFACE GRÁFICA PARA VISUALIZAÇÃO E OBTENÇÃO DOS SINAIS DO SISTEMA . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>4.1</b>	<b>Partes que compõem a interface gráfica . . . . .</b>	<b>12</b>
4.1.1	Conexão com o Microcontrolador . . . . .	12
4.1.2	Colhendo e armazenando os sinais dos ensaios . . . . .	12
4.1.3	Gráficos em tempo real . . . . .	12
<b>4.2</b>	<b>Firmware de comunicação do microcontrolador com a interface . . . . .</b>	<b>12</b>
4.2.1	Recebimento de sinais providos pela interface . . . . .	12
4.2.2	Envio dos sinais do sensor, controle, erro e tempo . . . . .	12
<b>5</b>	<b>DESENVOLVIMENTO . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>5.1</b>	<b>Fundamentação Teórica . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>5.2</b>	<b>Modelagem Matemática Clássica Aplicada ao Aeropêndulo . . . . .</b>	<b>13</b>
5.2.1	Modelo Matemático do Motor CC Série . . . . .	14
5.2.1.1	Modelagem da Parte Mecânica do Motor CC Série . . . . .	15
5.2.1.2	Modelagem da Parte Elétrica do Motor CC Série . . . . .	17
5.2.1.3	Linearização do modelo do Motor CC Série . . . . .	18
5.2.2	Modelo Matemático Braço do Aeropêndulo . . . . .	21
5.2.3	Junção dos subsistemas . . . . .	23
<b>5.3</b>	<b>Modelagem por Identificação de Sistemas Aplicada ao Aeropêndulo . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>6</b>	<b>PROJETO DE CONTROLADORES . . . . .</b>	<b>24</b>
<b>6.1</b>	<b>Projeto de Controle por LGR . . . . .</b>	<b>24</b>
6.1.1	Obtendo o Controlador . . . . .	24
6.1.2	Discretização do controlador Transformada Z . . . . .	24
6.1.3	Implementação do Controlador no Microcontrolador . . . . .	24
<b>6.2</b>	<b>Projeto de Controle por Espaço de Estados . . . . .</b>	<b>24</b>
6.2.1	Obtendo o Controlador . . . . .	24
6.2.2	Discretização do controlador Transformada Z . . . . .	24
6.2.3	Implementação do Controlador no Microcontrolador . . . . .	24

<b>7</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>26</b>
8.0.1	Considerações Finais . . . . .	26
8.0.2	Trabalhos Futuros . . . . .	26
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>27</b>



# INTRODUÇÃO

---

---

## 1.1 Justificativa

Sistemas de controle têm como finalidade modelar, analisar e projetar controladores para que um sistema possa atender a requisitos de projeto específicos. Para atingir esse objetivo, é necessário aplicar técnicas que permitam abstrair o comportamento do sistema em termos de equações matemáticas. No entanto, é importante lembrar que, ao abstrair sistemas físicos dessa maneira, o preço pago está na percepção e interpretação da dinâmica do sistema.

Além disso, a implementação de controladores requer a expertise em diferentes áreas da engenharia, tais como eletrônica analógica e digital, programação, processamento de sinais, circuitos elétricos, entre outras. Dessa forma, torna-se necessário integrar conhecimentos multidisciplinares para a implementação bem-sucedida de controladores em sistemas reais.

No entanto, no estudo de sistemas de controle, é comum que os discentes enfrentem desafios em seu primeiro contato com a área, especialmente devido à necessidade de aplicar abstrações matemáticas para representar a dinâmica de sistemas físicos. Essa etapa inicial pode parecer complexa, porém é crucial para a compreensão e domínio dos conceitos fundamentais envolvidos na análise e controle de sistemas.

Uma das principais razões pelas quais os estudantes encontram dificuldades é a transição do mundo físico para o mundo matemático abstrato, onde os sistemas são modelados por equações diferenciais, transformadas de Laplace e outros formalismos matemáticos. Para muitos, essa mudança pode parecer distante da realidade observada, o que pode causar alguma resistência inicial.

No entanto, para superar essa barreira de aprendizagem, é fundamental buscar métodos que possibilitem aos discentes visualizar a dinâmica desses sistemas de forma interessante. Uma

abordagem promissora é a utilização de protótipos, que permitem aos alunos observar a dinâmica analisada matematicamente no mundo real. Essa aplicação prática fornece uma conexão mais tangível entre os conceitos abstratos e suas aplicações concretas, tornando o aprendizado mais envolvente e compreensível.

Adicionalmente, o uso de simuladores pode ser altamente benéfico. Ao inserir as respostas obtidas por meio dos modelos matemáticos como entrada nos simuladores, o processo de aprendizado integra ferramentas matemáticas e de visualização. Dessa forma, os alunos podem interagir com os sistemas em diferentes cenários, observando como as variáveis influenciam o comportamento dos sistemas de controle. Essa abordagem interativa e experimental ajuda a solidificar conceitos e aprimorar a compreensão do funcionamento desses sistemas complexos.

Ao combinar a teoria matemática com a prática através de protótipos e simuladores, o processo de aprendizado torna-se mais fluido e estimulante. Os alunos podem perceber a relevância das abstrações matemáticas na resolução de problemas reais, o que reduzirá a resistência inicial e aumentará o interesse pela área de sistemas de controle.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivos Gerais

Este trabalho visa realizar um estudo mais aprofundado do comportamento dinâmico de um aeropêndulo, utilizando técnicas de sistemas de controle. Para isso, será desenvolvido um projeto completo que integra um protótipo, um simulador e uma interface gráfica para plotagem de gráficos dos sinais em tempo real do sistema. Acrescentando a isso, a proposta é aplicar os conhecimentos obtidos durante a graduação e sintetizar as diferentes técnicas de sistemas de controle em uma planta física, com o intuito de observar o comportamento da dinâmica do sistema. Para essa tarefa, serão mescladas tecnologias de diferentes áreas do curso de engenharia elétrica, o que torna o projeto ainda mais interessante e desafiador.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

## 1.3 Escopo do Trabalho



# REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

---

---

## 2.1 Modelagem e Controle de Sistemas

### 2.1.1 Transformada Laplace

### 2.1.2 Transformada Z

### 2.1.3 Espaço de Estados

## 2.2 Identificação de Sistemas

### 2.2.1 Método dos Mínimos Quadrados

## 2.3 Eletrônica Analógica e Digital

### 2.3.1 Dispositivos Analógicos

### 2.3.2 Dispositivos Digitais

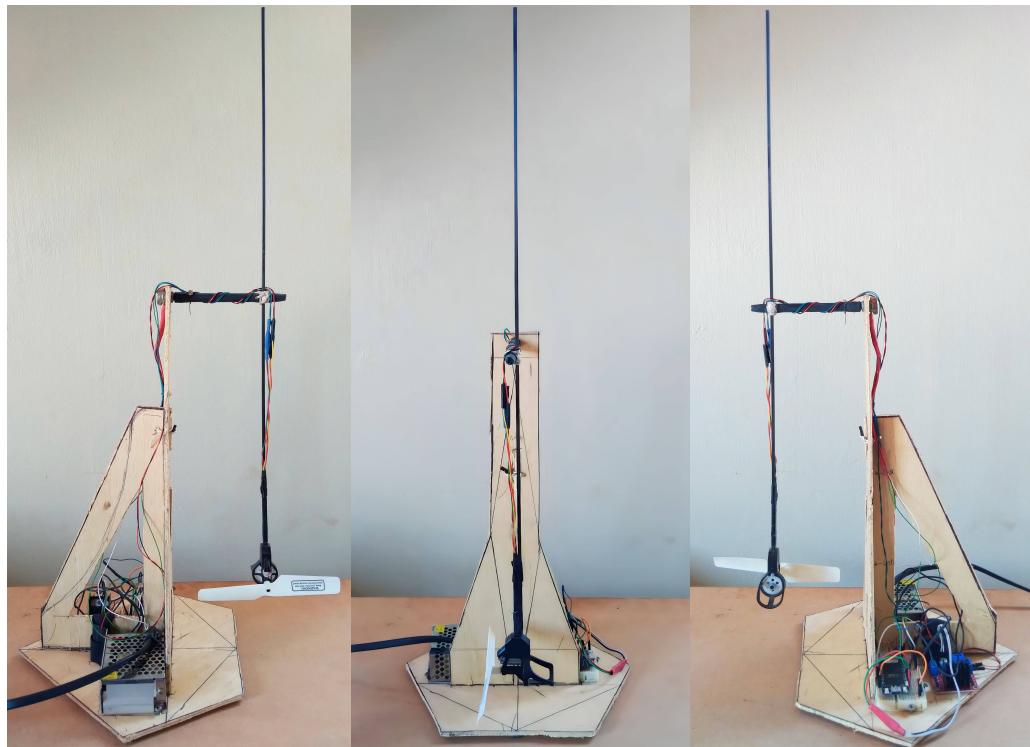
CAPÍTULO  
3

# PROTÓTIPO E SIMULADOR

## 3.1 Protótipo

O projeto para o desenvolvimento do protótipo consiste em uma estrutura mecânica e componentes eletrônicos, a Figura 1 mostra o protótipo finalizado com a parte estrutural e elétrica montada.

Figura 1 – Protótipo do Aeropêndulo.



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

### 3.1.1 Parte estrutural do sistema

O material escolhido para a estrutura foi o compensado, as chapas de compensado são materiais versáteis e amplamente utilizados na indústria da construção, marcenaria e artesanato. Elas são fabricadas a partir de finas lâminas de madeira, conhecidas como lâminas de folheado, coladas umas sobre as outras com fibras perpendiculares, conferindo maior estabilidade e resistência mecânica ao produto final, Figura 2.

Figura 2 – Chapas de compensado.



Fonte: Autor.

Já para o braço do Aeropêndulo foi usando Tubo de Fibra de Vidro de Carbono 3x3x2mm, Figura 3.

### 3.1.2 Parte Elétrica do sistema

Foram empregados os seguintes componentes eletrônicos no projeto: um Potenciômetro  $50k\Omega$ , uma Placa de desenvolvimento Esp32, um Módulo Driver L298n, um Conjunto (suporte/motor/hélice para drones fpv racing quadcopter) e componentes eletrônicos (resistor, capacitor).

#### 3.1.2.1 Potenciômetro $50k\Omega$

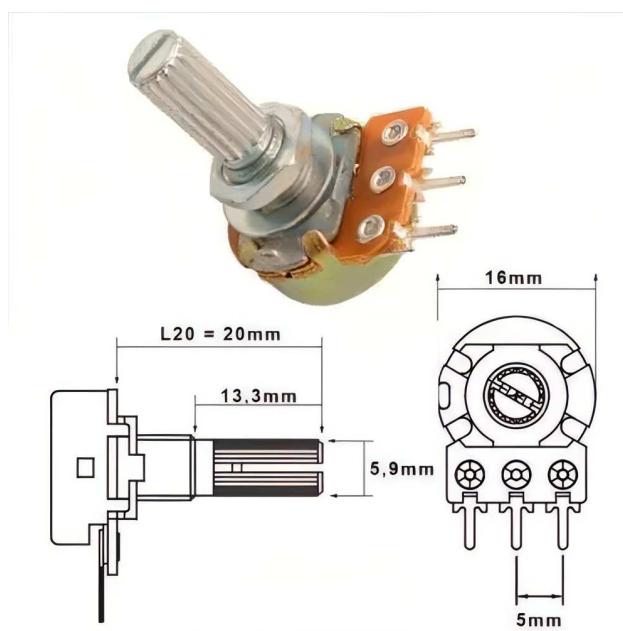
O potenciômetro desempenha o papel de *encoder* ao obter o ângulo de inclinação do braço do Aeropêndulo. Essa funcionalidade é viabilizada pelo fato de que, conforme o braço se movimenta, a resistência do potenciômetro se altera, resultando em uma variação na tensão registrada em seus terminais. Essa interação permite estabelecer uma correlação entre a mudança na tensão elétrica e o ângulo de inclinação do braço do Aeropêndulo de maneira precisa e controlada.

Figura 3 – Tubo de Fibra de Vidro de Carbono 3x3x2mm.



Fonte: Autor.

Figura 4 – Potenciômetro 50kΩ.



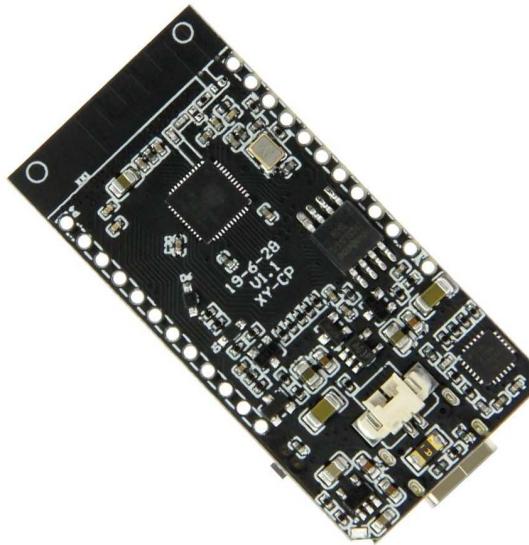
Fonte: Autor.

### 3.1.2.2 Placa de desenvolvimento Esp32

A placa de desenvolvimento ESP32 é uma poderosa e versátil plataforma que integra o popular microcontrolador ESP32 desenvolvido pela empresa *Espressif*. Projetada para atender às demandas de projetos de Internet das Coisas (IoT) e aplicações de conectividade sem fio, a ESP32 oferece uma vasta gama de recursos e funcionalidades. Equipada com um processador dual-core de 32 bits, Wi-Fi, Bluetooth, interfaces GPIO, I2C, SPI e UART, bem como suporte para memória externa.

A placa desempenhará uma função central no projeto, servindo tanto para a implementação do controlador discreto quanto para a obtenção de dados em tempo real relacionados aos estados do sistema. Esses estados incluem a leitura do sensor de ângulo do braço, a aquisição do sinal de controle e o cálculo do sinal de erro. Adicionalmente, a placa será empregada na geração dos sinais de referência necessários para o funcionamento ideal do sistema. A figura 5 ilustra a placa de desenvolvimento Esp32.

Figura 5 – Placa de desenvolvimento Esp32.



Fonte: Autor.

### 3.1.2.3 Fonte Chaveada 2A, 5V, 25W

Para a alimentação do motor CC série, foi usado uma fonte de alimentação de 5V/5A, Figura 6.

Figura 6 – Fonte Chaveada 2A, 5V, 25W.

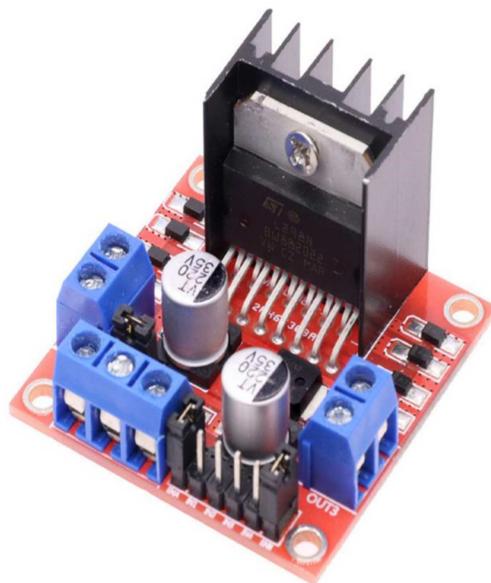


Fonte: Autor.

### 3.1.2.4 Módulo Driver L298n

Para regular a velocidade no eixo do Motor CC série, empregou-se um Módulo Driver L298n, o qual possibilita controlar a injeção de potência entregue ao motor mediante a aplicação de um sinal PWM em sua entrada. Dessa forma, ao ajustar o sinal PWM, é possível obter uma tensão controlada aplicada de maneira precisa aos terminais do motor. A Figura 7 ilustra o componente em questão.

Figura 7 – Módulo Driver L298n.



Fonte: Autor.

### 3.1.2.5 Conjunto (suporte motor cw/ccw hélice) para drones fpv racing quadcopter

Para obter-se a força de empuxo na extremidade do braço do Aeropêndulo foi usado um Conjunto (suporte/motor/hélice) para drones fpv racing quadcopter. A Figura 8 ilustra o componente em questão.

Figura 8 – Conjunto (suporte motor cw/ccw hélice).



Fonte: Autor.

### 3.1.2.6 Componentes eletrônicos (resistivos e capacitivos)

Por fim, para que o sinal do sensor (Potenciômetro) seja de boa qualidade, foi usado um filtro RC série, dessa forma, empregou-se um capacitor de um resistor na implementar do filtro. A Figura 9a corresponde aos componentes resistivos e a Figura 9b aos componentes capacitivos.

Figura 9 – Componentes eletrônicos.

(a) Resistores.



Fonte: Autor.

(b) Capacitores.



Fonte: Autor.

### 3.1.3 Montagem do Protótipo

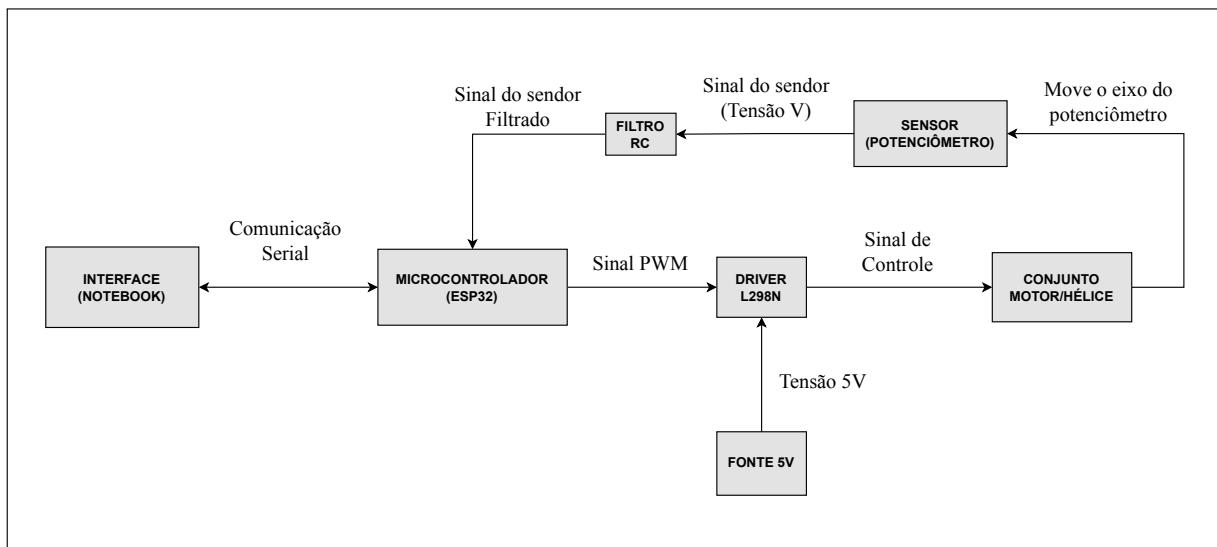
### 3.1.4 Parte Física

O protótipo foi concebido visando a desmontagem da estrutura, permitindo um transporte mais conveniente. A construção física compreende três componentes com pontos de conexão estratégicos. Ademais, o braço do aeropêndulo pode ser facilmente desacoplado no ponto de pivô, onde se conecta ao eixo do potenciômetro.

### 3.1.5 Parte Elétrica

A Figura 10 ilustra a dinâmica do fluxo de interligação do sistema elétrico do Aeropêndulo. Notavelmente, o microcontrolador desempenha um papel central ao gerar o sinal de controle PWM, realiza a leitura do sinal filtrado proveniente do sensor (Potenciômetro) e estabelecer comunicação com o computador através da interface serial. Adicionalmente, o driver é alimentado por uma fonte de tensão contínua de 5V, o qual amplifica e aplica o sinal de controle ao motor CC Série. Esta ação, por sua vez, resulta em uma variação angular no braço do Aeropêndulo por conta do empuxo gerado pelas hélices, impactando diretamente o estado do sensor (Potenciômetro) e sua saída correspondente.

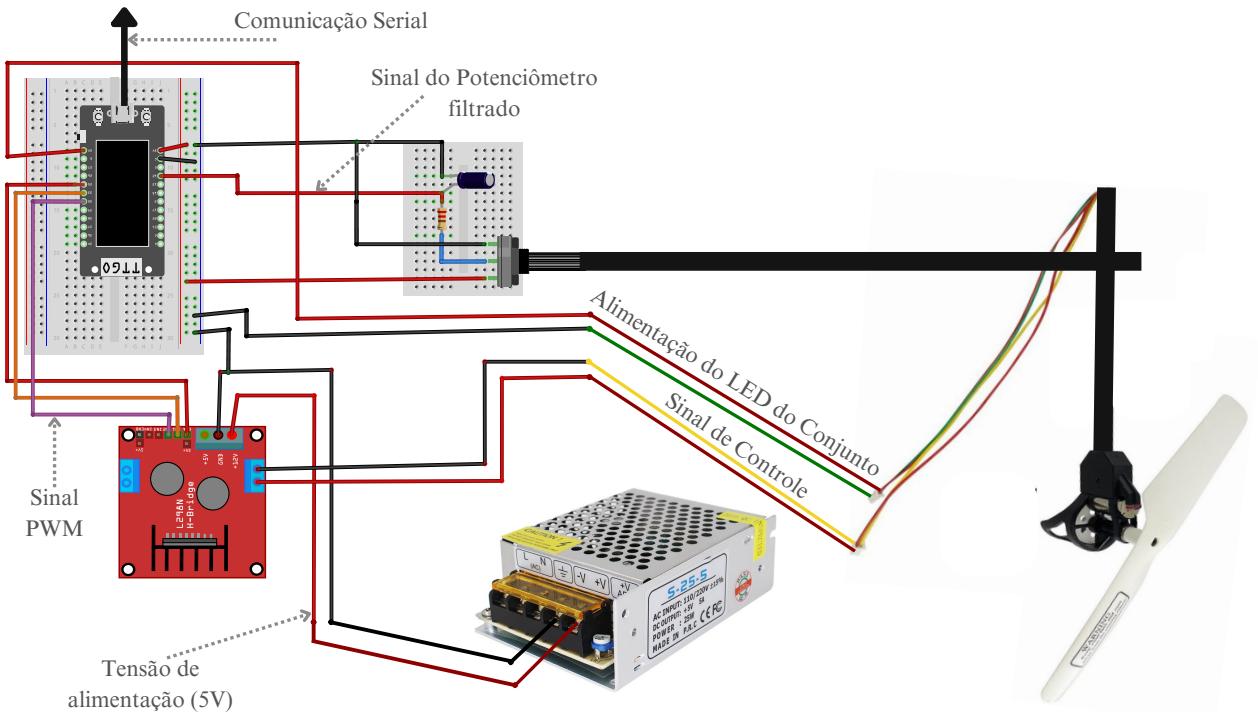
Figura 10 – Diagrama de comunicação do Aeropêndulo.



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

O esquema de ligação dos componentes do sistema elétrico é exemplificado na Figura 11.

Figura 11 – Esquema de conexões do Aeropêndulo.



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

## 3.2 Simulador

### 3.2.1 Linguagem Python

### 3.2.2 Biblioteca VPython

### 3.2.3 Simulador Gráfico



# INTERFACE GRÁFICA PARA VISUALIZAÇÃO E OBTENÇÃO DOS SINAIS DO SISTEMA

---

---

## 4.1 Partes que compõem a interface gráfica

- 4.1.1 Conexão com o Microcontrolador
- 4.1.2 Colhendo e armazenando os sinais dos ensaios
- 4.1.3 Gráficos em tempo real

## 4.2 Firmware de comunicação do microcontrolador com a interface

- 4.2.1 Recebimento de sinais providos pela interface
- 4.2.2 Envio dos sinais do sensor, controle, erro e tempo



# DESENVOLVIMENTO

---

---

## 5.1 Fundamentação Teórica

O processo que envolve modelagem de sistemas físicos em termos de equações matemáticas é uma das partes mais importantes no estudo de sistemas de controle. Segundo [Ogata \(2014, p. 11\)](#), O modelo matemático de um sistema dinâmico é definido como um conjunto de equações que representa a dinâmica do sistema com precisão ou, pelo menos, razoavelmente bem.

A dinâmica de muitos sistemas mecânicos, elétricos, térmicos, econômicos, biológicos ou outros pode ser descrita em termos de equações diferenciais. Essas equações diferenciais são obtidas pelas leis físicas que regem dado sistema — por exemplo, as leis de Newton para sistemas mecânicos e as leis de Kirchhoff para sistemas elétricos. Devemos sempre ter em mente que construir modelos matemáticos adequados é a parte mais importante da análise de sistemas de controle como um todo, [Ogata \(2014, p. 11\)](#).

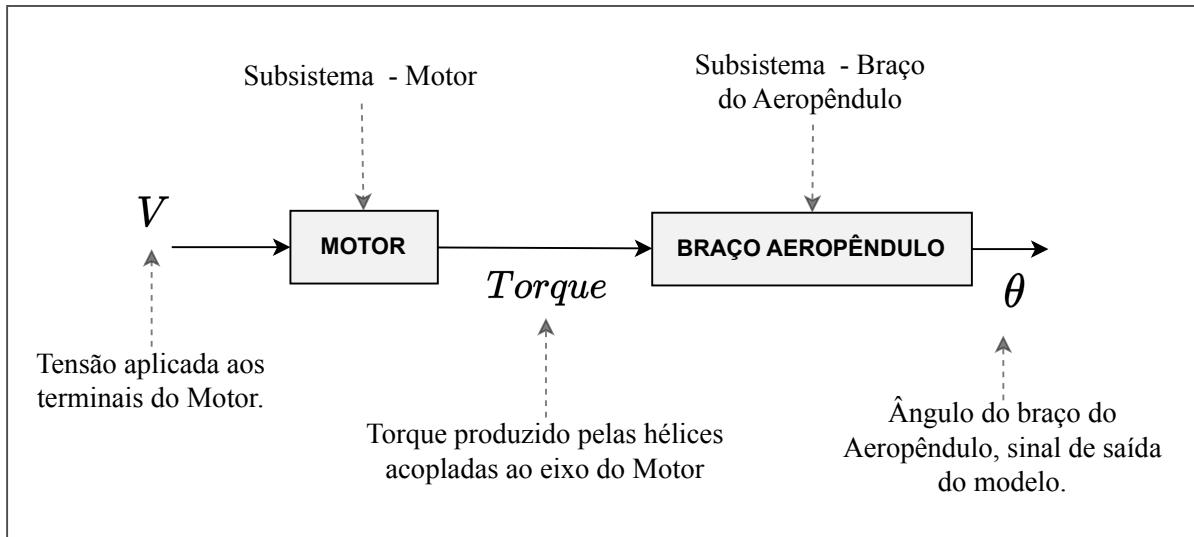
Para realizar a modelagem do aeropêndulo pode-se aplicar diferentes métodos, ...

## 5.2 Modelagem Matemática Clássica Aplicada ao Aeropêndulo

Uma abordagem inicial para modelar sistemas físicos consiste em empregar as leis fundamentais da física. Além disso, em situações mais complexas, é viável decompor o sistema em subsistemas menores e, em seguida, desenvolver modelos para cada um deles. Por fim, é possível conectar esses modelos, de forma a obter uma representação aproximada do sistema real. Dessa maneira, podemos obter uma compreensão mais aprofundada e abrangente da dinâmica do sistema em

questão. A Figura 12 mostra um diagrama da representação do Aeropêndulo como um conjunto de subsistemas.

Figura 12 – Subsistemas do Aeropêndulo.



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

### 5.2.1 Modelo Matemático do Motor CC Série

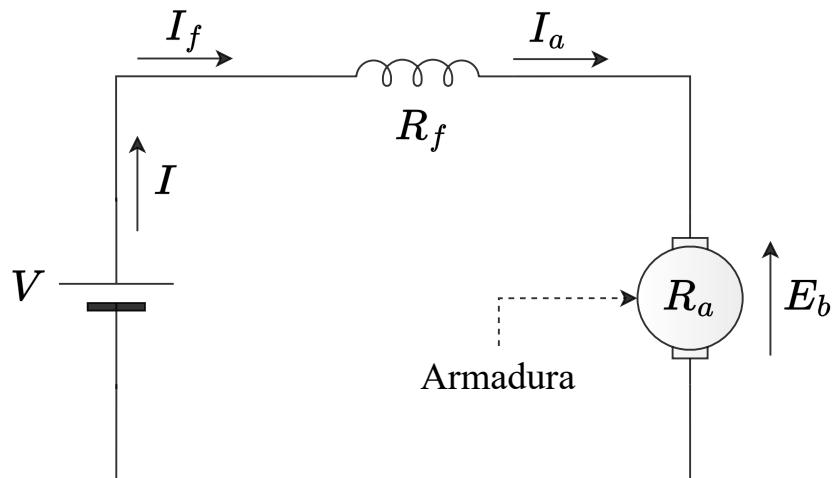
Os motores CC série tem como principal característica possuir o enrolamento de campo em série com o enrolamento de armadura, essa configuração resulta em um motor com torque de partida alto, porém, o torque reduz a medida que a velocidade aumenta devido ao aumento da Força Eletromotriz FEM. Por conta desse aumento de FEM os motores CC Séries tem uma regulação de velocidade ruim, quando se aumenta a carga no eixo do motor a velocidade é reduzida que por sua vez reduz a FEM e então o torque aumenta para conseguir atuar na carga.

No motor série, o aumento de carga é acompanhado por elevações da corrente, da FMM de armadura e do fluxo de campo do estator (desde que o ferro não esteja completamente saturado). Como o fluxo aumenta com a carga, a velocidade deve cair para se manter o equilíbrio entre a tensão aplicada e a força contraeletromotriz. Além disso, o aumento na corrente de armadura, causado pelo aumento de conjugado, é menor do que no motor em derivação devido ao aumento de fluxo. O motor série é, portanto, um motor de velocidade variável, [Umans \(2014, p. 410\)](#).

No entanto, mesmo motores cc série com dimensões reduzidas geram torques altos com baixo consumo de corrente. Visando melhorar seu desempenho, é possível projetar controladores de malha fechada capazes de tornar esses motores mais eficientes na regulação de velocidade.

(LICEAGA-CASTRO *et al.*, 2017) foi usando como base para realizar a modelagem o motor CC série, A Figura 13 mostra um diagrama da configuração do motor CC Série, no qual o enrolamento de campo está conectado em série com o enrolamento de armadura, dessa forma, a corrente de campo é igual a corrente de armadura  $i = i_f = i_a$ .

Figura 13 – Motor CC Série.



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

Na Figura 14, mostra o diagrama eletromecânico do motor, nele pode-se observar que os componentes elétricos estão todos em série, no qual o enrolamento de campo possui uma parte resistiva e outra indutiva, assim como o enrolamento de armadura, já a parte mecânica possui uma velocidade angular dada por  $\dot{\omega}$ , torque eletromagnético do motor dado por  $T_e$  e torque da Carga  $T_c$ .

#### 5.2.1.1 Modelagem da Parte Mecânica do Motor CC Série

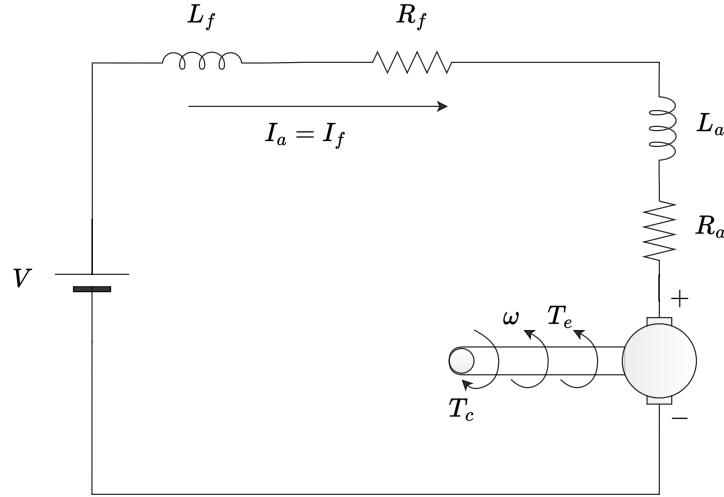
Primeiramente a parte mecânica do motor será modelada, um motor cc série é composto por uma parte rotativa "armadura", de modo que, essa parte, gera um momento de inércia  $J_m$  no eixo do motor e um fator de amortecimento viscoso  $b$ , além disso, o eixo possui uma velocidade angular  $\dot{\omega}$ .

Assim, a equação 5.1, obtida a partir de (LICEAGA-CASTRO *et al.*, 2017), descreve o modelo mecânico do motor CC Série.

$$J_m \ddot{\omega}(t) = T_e(t) - b\dot{\omega}(t) - T_c(t) \quad (5.1)$$

Ao expressar o torque  $T_e(t)$  em função das outras variáveis, obtém-se a equação 5.2.

Figura 14 – Diagrama Elétrico/Mecânico Motor CC Série.



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

$$T_e(t) = J_m \ddot{\omega}(t) + b \dot{\omega}(t) + T_c(t) \quad (5.2)$$

Onde:

- $T_e$ : Torque Eletromagnético produzido pelo Motor;
- $J_m$ : Momento de Inércia do Eixo do Motor;
- $\ddot{\omega}$ : Aceleração Angular do Eixo do Motor;
- $\dot{\omega}$ : Velocidade Angular do Eixo do Motor;
- $b$ : Fator de Amortecimento Viscoso;
- $T_c$ : Torque de Carga.

Tanto a Força Eletromotriz  $E_A(t)$  quanto o Torque Eletromagnético  $T_e(t)$  dependem do fluxo magnético do entreferro  $\Phi$ , com isso, tem-se as equações 5.3 e 5.4.

$$E_a(t) = \dot{\omega}(t)\Phi(i) \quad (5.3)$$

$$T_e(t) = i(t)\Phi(i) \quad (5.4)$$

O Fluxo magnético depende da corrente  $i(t)$ , assim, as equações 5.1 e 5.2 são não-lineares. Além disso, pode-se aproximar o fluxo  $\Phi$  por uma relação linear,  $K_0$ , ao desprezar a saturação magnética.

$$\Phi(i) = K_0 i(t) \quad (5.5)$$

A constante  $K_0$  é a indutância mútua entre a armadura e o enrolamento de campo. Agora pode-se encontrar o modelo não-linear da parte mecânica do Motor CC Série, substituindo 5.5 em 5.4, obtém-se a expressão 5.7:

$$T_e(t) = i(t)K_0 i(t) \quad (5.6)$$

$$T_e(t) = K_0 i^2(t) \quad (5.7)$$

Substituindo 5.7 em 5.2, é possível encontrar o modelo da parte mecânica do motor CC série, assim, tem-se a expressão 5.8.

$$K_0 i^2(t) = J_m \ddot{\omega}(t) + b \dot{\omega}(t) + T_c(t) \quad (5.8)$$

### 5.2.1.2 Modelagem da Parte Elétrica do Motor CC Série

Para a parte elétrica, utilizou-se a lei de Kirchhoff das tensões para modelar o sistema. assim como a parte mecânica, o modelo da parte elétrica foi baseado de ([LICEAGA-CASTRO et al., 2017](#)), o motor em questão é um motor de corrente contínua CC série, Dessa forma,  $i_a = i_f$ , portanto, obtém-se a expressão 5.9.

$$V(t) = (R_a + R_f)i(t) + (L_a + L_f)\frac{d}{dt}i(t) + E_a \quad (5.9)$$

Onde:

- $V$ : Tensão da Fonte;
- $R_a$ : Resistência da Armadura;
- $R_f$ : Resistência de Campo;
- $i_a$ : Corrente da Armadura;
- $i_f$ : Corrente de Campo;
- $E_a$ : Tensão Contro Eletromotriz Gerada pela Armadura;
- $L_a$ : Impedância da Armadura;
- $L_f$ : Impedância de Campo.

Como os componentes elétricos então em série, pode-se obter uma resistência total assim como uma indutância:

$$R = R_a + R_f \quad (5.10)$$

$$L = L_a + L_f \quad (5.11)$$

$$V(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t) + E_a \quad (5.12)$$

Substituindo 5.5 em 5.3, obtém-se a equação 5.13.

$$E_a(t) = \dot{\omega}(t)K_0i(t) \quad (5.13)$$

Por fim, pode-se encontrar a equação que descreve a parte elétrica do sistema ao substituir 5.13 em 5.12, assim, obtendo a equação 5.14.

$$V(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t) + \dot{\omega}(t)K_0i(t) \quad (5.14)$$

Dessa forma, as equações que modelam um Motor CC série são expressas por 5.15 e 5.16, em que 5.15 esta relacionada a parte mecânica e 5.16 a parte elétrica.

$$K_0i^2(t) = J_m\ddot{\omega}(t) + b\dot{\omega}(t) + T_c(t) \quad (5.15)$$

$$V(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t) + \dot{\omega}(t)K_0i(t) \quad (5.16)$$

### 5.2.1.3 Linearização do modelo do Motor CC Série

Para projetos de controle lineares é preciso linearizar o modelo encontrado, para isso, vamos reorganizar as equações 5.15 e 5.16, assim obtém-se as equações 5.17 e 5.18:

$$\ddot{\omega}(t) = \frac{K_0}{J_m}i^2(t) - \frac{b}{J_m}\dot{\omega}(t) - \frac{1}{J_m}T_c(t) \quad (5.17)$$

$$\frac{d}{dt}i(t) = \frac{R}{L}i(t) - \frac{K_0}{L}\dot{\omega}(t)i(t) + \frac{1}{L}V(t) \quad (5.18)$$

reescrevendo as equações de estados na forma matricial,

$$x_1 = \dot{\omega} \quad (5.19)$$

$$x_2 = i \quad (5.20)$$

Coeficientes da equação de estado 5.17.

$$a_1 = \frac{K_0}{J_m}; \quad a_2 = \frac{b}{J_m}; \quad a_3 = \frac{1}{J_m} \quad (5.21)$$

Coeficientes da equação de estado 5.18.

$$b_1 = \frac{R}{L}; \quad b_2 = \frac{K_0}{L}; \quad b_3 = \frac{1}{L} \quad (5.22)$$

Representação no espaço de estados do motor CC Série não-linear

$$\dot{x}_1 = a_1 x_2^2 - a_2 x_1 - a_3 T_c \quad (5.23)$$

$$\dot{x}_2 = -b_1 x_2 - b_2 x_1 x_2 + b_3 V \quad (5.24)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 x_2^2 - a_2 x_1 - a_3 T_c \\ -b_1 x_2 - b_2 x_1 x_2 + b_3 V \end{bmatrix} = f(x, u) \quad (5.25)$$

O ponto de equilíbrio  $(x_1^0, x_2^0)$  das equações 5.23 e 5.24 é encontrado zerando as derivadas, como mostrado em 5.26 e 5.27.

$$x_2^0 = \sqrt{\frac{a_2 x_1^0 + a_3 T_c}{a_1}} \quad (5.26)$$

$$V = \frac{x_2^0(b_1 + b_2 x_1^0)}{b_3} \quad (5.27)$$

A linearização de 5.23 e 5.24 em torno do ponto de equilíbrio é obtida encontrando o jacobiano das mesmas, assim se obtêm as matrizes  $A$  e  $B$ .

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5.28)$$

$$y = Cx \quad (5.29)$$

Em que,

$$A = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{x_1^0, x_2^0} = \begin{bmatrix} -a_2 & 2a_1 x_2^0 \\ -b_2 x_2^0 & -(b_1 + b_2 x_1^0) \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$B = \frac{\partial f(x, y)}{\partial u} \Big|_{x_1^0, x_2^0} = \begin{bmatrix} -a_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

$$C = [1, 0] \quad (5.32)$$

$$(5.33)$$

Onde,

$$u = \begin{bmatrix} T_c \\ V \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$y = \dot{\omega}(t) \quad (5.35)$$

Se o torque de carga for considerado zero,  $T_c = 0$ , temos as seguintes expressões,

$$x_2^0 = \sqrt{\frac{a_2 x_1^0}{a_1}}; \quad V = \frac{x_2^0(b_1 + b_2 x_1^0)}{b_3}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Agora é possível encontrar a função de transferência  $G(s)$  associada as matrizes de estados  $A, B, C$  linearizadas, para isso usa-se a expressão 5.37.

$$G(s) = \frac{\dot{\omega}(s)}{V(s)} = C(sI - A)^{-1}B \quad (5.37)$$

Substituindo as matrizes  $A, B$  e  $C$  em 5.37, chega-se a expressão 5.38.

$$G(s) = \frac{\dot{\omega}(s)}{V(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left( s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a_2 & 2a_1 x_2^0 \\ -b_2 x_2^0 & -(b_1 + b_2 x_1^0) \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -a_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Assim, obtém-se a função de transferência linearizada em função dos parâmetros do motor CC Série, como mostra a equação 5.39.

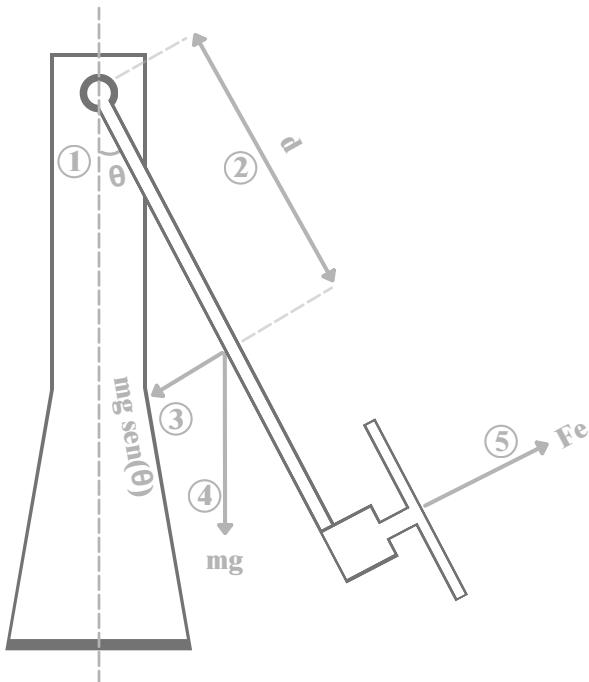
$$G(s) = \frac{\dot{\omega}(s)}{V(s)} = \frac{2K_0 \sqrt{\frac{bx_1^0}{K_0}}}{J_m L s^2 + 3K_0 b x_1^0 + R b + s (J_m K_0 x_1^0 + J_m R + L b)} \quad (5.39)$$

### 5.2.2 Modelo Matemático Braço do Aeropêndulo

Os sistemas mecânicos têm como uma de suas características os graus de liberdade, da sigla em inglês 6DoF - (Six degrees of freedom) que em português se diz (Seis graus de liberdade), com esses seis graus de liberdade é possível mover a planta em todas as direções e ângulos, o aeropêndulo tem um grau de liberdade, sendo o ângulo  $\theta$ , assim o sistema tem apenas uma variável a ser controlada a partir do empuxo gerado pelas hélices, que por sua vez depende da velocidade angular do eixo do motor CC Série acoplado ao braço do aeropêndulo. dessa forma, podemos analisar o sistema a partir da entrada e da saída, sendo a entrada a tensão no motor e a saída o ângulo  $\theta$  do braço do aeropêndulo.

Como discutido antes, pode-se dividir o sistema em dois subsistemas, o motor CC Série e o braço do aeropêndulo. Para o motor CC Série, já foi realizado a modelagem na sessão 5.2.1, para essa sessão será realizada a modelagem do braço do aeropêndulo, ([MOHAMMADBAGHERI; YAGHOOBI, 2011](#)) foi usado como base para se obter a equação que modela a dinâmica do braço.

Figura 15 – Diagrama esquemático do Aeropêndulo.



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

O modelo matemático do braço do aeropêndulo é derivado a partir das leis de Newton e do momento angular, como mostra ([MOHAMMADBAGHERI; YAGHOOBI, 2011](#)). assim, se obtém a equação 5.40.

$$F_e = J_b \ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mgd \sin \theta \quad (5.40)$$

Onde:

- $F_e$ : Empuxo gerado pela hélice
- $J_b$ : Momento de inércia do Braço
- $\theta$ : posição angular do Aeropêndulo
- $c$ : coeficiente de amortecimento viscoso
- $m$ : massa do Aeropêndulo
- $d$ : a distância entre o centro de massa e o ponto de pivô

A entrada do subsistema do braço do aeropêndulo é a força de empuxo proporcionada pela hélice, porém, o modelo do motor CC Série tem como saída a velocidade angular, dessa forma é preciso encontrar uma relação entre a velocidade  $\dot{\omega}$  e o empuxo  $F_e$ , essa relação é não linear como mostra [xx],  $F_e = K_m \omega^2$ , porém é possível aproximar por uma relação linear,  $F_e = K_m \dot{\omega}$ . Com isso, pode-se relacionar a velocidade angular  $\dot{\omega}$  com o empuxo  $F_e$  gerado pela hélice do aeropêndulo.

O modelo encontrado tem uma parcela não linear dada por  $\sin \theta$ , para aplicar técnicas de projeto de controle é preciso obter o modelo linearizado da planta, isso pode ser feito considerando  $\sin \theta \approx \theta$  para pequenas variações em torno de  $\theta$ . dessa forma, temos a seguinte linearização:

$$F_e = J_b \ddot{\theta} + c \dot{\theta} + mgd\theta \quad (5.41)$$

Aplicando a transformada de Laplace para encontrar a função de transferência do subsistema, tem-se:

$$F_e(s) = s^2 J_b \theta(s) + sc\theta(s) + mgd\theta(s) \quad (5.42)$$

$$F_e(s) = (s^2 J_b + sc + mgd)\theta(s) \quad (5.43)$$

$$\frac{\theta(s)}{F_e(s)} = \frac{1}{s^2 J_b + sc + mgd} \quad (5.44)$$

Agora que foi obtido o modelo do braço do aeropêndulo, pode-se usar a relação linearizada  $F_e = K_m \dot{\omega}$  para usar a saída do modelo do motor cc série como entrada do modelo do braço do aeropêndulo, como mostrado na equação 5.47.

$$\frac{\theta(s)}{K_m \dot{\omega}(s)} = \frac{1}{s^2 J_b + sc + mgd} \quad (5.45)$$

$$\frac{\theta(s)}{\dot{\omega}(s)} = \frac{K_m}{s^2 J_b + sc + mgd} \quad (5.46)$$

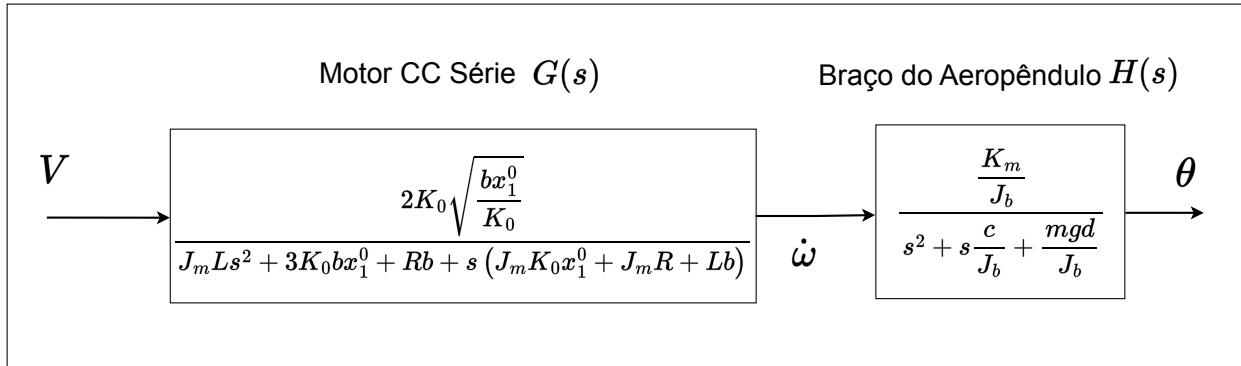
$$H(s) = \frac{\theta(s)}{\dot{\omega}(s)} = \frac{\frac{K_m}{J_b}}{s^2 + s \frac{c}{J_b} + \frac{mgd}{J_b}} \quad (5.47)$$

A equação 5.47 é a função de transferência do braço do aeropêndulo.

### 5.2.3 Junção dos subsistemas

A partir dos modelos encontrados nas subseções 5.2.1 e 5.2.2 pode-se obter o modelo completo do sistema unindo os subsistemas como mostra a figura 16. com isso, é possível modelar o Aeropêndulo tendo como entrada a tensão no motor CC série e como saída o ângulo do braço.

Figura 16 – Diagrama da junção dos subsistemas do Aeropêndulo.



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

Para obter uma função de transferência que relate a tensão dos terminais do motor com o ângulo do braço do Aeropêndulo, pode-se multiplicar as funções de transferências 5.39 e 5.47 dos subsistemas como mostrado em 5.48, já que estão em série.

$$\frac{\omega(s)}{V(s)} \cdot \frac{\theta(s)}{\dot{\omega}(s)} = \frac{2K_0\sqrt{\frac{bx_1^0}{K_0}}}{J_m L s^2 + 3K_0 b x_1^0 + Rb + s(J_m K_0 x_1^0 + J_m R + Lb)} \cdot \frac{\frac{K_m}{J_b}}{s^2 + s\frac{c}{J_b} + \frac{mgd}{J_b}} \quad (5.48)$$

Com isso, encontra-se um modelo matemático linear para representar o sistema, como mostrado em 5.49.

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{2K_0\sqrt{\frac{bx_1^0}{K_0}} \cdot \frac{K_m}{J_b}}{J_m L s^2 + 3K_0 b x_1^0 + Rb + s(J_m K_0 x_1^0 + J_m R + Lb) \cdot \left(s^2 + s\frac{c}{J_b} + \frac{mgd}{J_b}\right)} \quad (5.49)$$

## 5.3 Modelagem por Identificação de Sistemas Aplicada ao Aeropêndulo



# PROJETO DE CONTROLADORES

---

---

## 6.1 Projeto de Controle por LGR

6.1.1 Obtendo o Controlador

6.1.2 Discretização do controlador Transformada Z

6.1.3 Implementação do Controlador no Microcontrolador

## 6.2 Projeto de Controle por Espaço de Estados

6.2.1 Obtendo o Controlador

6.2.2 Discretização do controlador Transformada Z

6.2.3 Implementação do Controlador no Microcontrolador



---

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

---



# CONCLUSÃO

---

---

## 8.0.1 Considerações Finais

## 8.0.2 Trabalhos Futuros

# REFERÊNCIAS

---

---

- LICEAGA-CASTRO, J. U.; SILLER-ALCALÁ, I. I.; JAIMES-PONCE, J.; ALCÁNTARA-RAMÍREZ, R. Series dc motor modeling and identification. In: *2017 International Conference on Control, Artificial Intelligence, Robotics & Optimization (ICCAIRO)*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 248–253. 15, 17
- MOHAMMADBAGHERI, A.; YAGHOOBI, M. A new approach to control a driven pendulum with pid method. In: *2011 UkSim 13th International Conference on Computer Modelling and Simulation*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 207–211. 21
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Brasil: Pearson Education do Brasil, 2014. 13
- UMANS, S. *Máquinas Elétricas de Fitzgerald e Kingsley - 7.ed.* AMGH Editora, 2014. ISBN 9788580553741. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=3Fa2AwAAQBAJ>. 14