



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE TUCURUÍ
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**AEROPÊNDULO, PROTOTIPAGEM E SIMULADOR GRÁFICO COMO
FERRAMENTA PARA ESTUDOS DE TÉCNICAS DE CONTROLE E MODELAGEM
POR IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS**

OSÉIAS DIAS DE FARIAS

**TUCURUÍ-PA
2023**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE TUCURUÍ
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

OSÉIAS DIAS DE FARIAS

AEROPÊNDULO, PROTOTIPAGEM E SIMULADOR GRÁFICO COMO FERRAMENTA
PARA ESTUDOS DE TÉCNICAS DE CONTROLE E MODELAGEM POR
IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Trabalho de conclusão de curso apresentado
ao colegiado da Faculdade de Engenharia Elétrica,
do Campus Universitário de Tucuruí, da
Universidade Federal do Pará, como requisito
necessário para obtenção do título de Bacharel
em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Raphael Barros Teixeira

TUCURUÍ-PA

2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE TUCURUÍ
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

**AEROPÊNDULO, PROTOTIPAGEM E SIMULADOR GRÁFICO COMO
FERRAMENTA PARA ESTUDOS DE TÉCNICAS DE CONTROLE E MODELAGEM
POR IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS**

AUTOR: OSÉIAS DIAS DE FARIAS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO SUBMETIDO À BANCA EXAMINADORA APROVADA PELO COLEGIADO DA FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA, SENDO JULGADO

.....

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Raphael Barros Teixeira
Orientador / UFPA-CAMTUC-FEE

Prof. Dr. NOME PRIMEIRO AVALIADOR
Membro 1 / UFPA-CAMTUC-FEE

Prof. Dr. NOME PRIMEIRO AVALIADOR
Membro 2 / UFPA-CAMTUC-FEE

Resumo

Resumo aqui

Palavras Chave: Aeropêndulo, identificação de sistema, protótipo, simulador, técnicas de controle.

Abstract

Texto do abstract (inglês)

Keywords: Palavras chave em inglês.

SUMÁRIO

Resumo	iv	
Abstract	v	
Sumário	vi	
1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Justificativa	1
1.2	Objetivos	2
1.2.1	Objetivos Gerais	2
1.2.2	Objetivos Específicos	2
1.3	Escopo do Trabalho	3
1.4	Gêmeo Digital	3
2	DESENVOLVIMENTO	4
2.1	Aeropêndulo	4
2.1.1	Descrição do Sistema	4
2.1.2	Fundamentação Teórica	4
2.1.3	Modelagem Analítica	4
2.1.4	Modelo Matemático do Motor CC Série	5
2.1.4.1	Modelagem da Parte Mecânica do Motor CC Série	7
2.1.4.2	Modelagem da Parte Elétrica do Motor CC Série	8
2.1.4.3	Linearização do modelo do Motor CC Série	9
2.1.5	Modelo Matemático Braço do Aeropêndulo	12
2.1.6	Junção dos subsistemas	14
2.2	Implementação do Protótipo	15
2.2.1	Protótipo Aeropêndulo	15
2.2.2	Parte estrutural do sistema	15
2.2.3	Parte Elétrica do sistema	16
2.2.3.1	Potenciômetro $50k\Omega$	17
2.2.3.2	Placa de desenvolvimento Esp32	17
2.2.3.3	Fonte Chaveada 2A, 5V, 25W	18
2.2.3.4	Módulo Driver L298n	18

2.2.3.5	Conjunto (suporte motor cw/ccw hélice) para drones fpv racing quadcopter	19
2.2.3.6	Componentes eletrônicos (resistivos e capacitivos)	20
2.2.4	Montagem do Protótipo	20
2.2.5	Parte Física	20
2.2.6	Parte Elétrica	20
2.3	Desenvolvimento dos Softwares	22
2.3.1	Linguagens Python, C e C++	22
2.3.2	Gêmeo Digital - Simulador Aeropêndulo	23
2.3.2.1	Biblioteca VPython	23
2.3.2.2	Arquitetura do Simulador	24
2.3.3	Interface Gráfica para visualização e obtenção dos sinais do sistema	24
2.3.3.1	Biblioteca CustomTkinter e Matplotlib	25
2.3.3.2	Biblioteca PySerial, NumPy e Pandas	25
2.3.3.3	Descrição das partes da interface gráfica	26
2.3.4	Firmware do microcontrolador	28
3	RESULTADOS E DISCUSSÕES	29
3.1	Implementação do Protótipo e Softwares	29
3.2	Ensaio em Malha Aberta	30
3.2.1	Onda Quadrada	30
3.2.2	Onda Dente de Serra	30
3.2.3	Onda Senoidal	30
3.3	Identificação de sistema aplicado ao Aeropêndulo	30
3.3.1	Sinal PRBS	30
3.3.1.1	Aplicação do sinal PRBS ao sistema	30
3.3.2	Identificação usando Mínimos quadrados	30
3.4	Projeto de controlador PI usando o sistema identificado	30
3.5	Ensaio em Malha Fechada com Controlador Projetado	30
4	CONCLUSÃO	31
4.0.1	Considerações Finais	31
4.0.2	Trabalhos Futuros	31
	REFERÊNCIAS	32



INTRODUÇÃO

1.1 Justificativa

Sistemas de controle têm como finalidade modelar, analisar e projetar controladores para que um sistema possa atender a requisitos de projeto específicos. Para atingir esse objetivo, é necessário aplicar técnicas que permitam abstrair o comportamento do sistema em termos de equações matemáticas. No entanto, é importante lembrar que, ao abstrair sistemas físicos dessa maneira, o preço pago está na percepção e interpretação da dinâmica do sistema.

Além disso, a implementação de controladores requer a expertise em diferentes áreas da engenharia, tais como eletrônica analógica e digital, programação, processamento de sinais, circuitos elétricos, entre outras. Dessa forma, torna-se necessário integrar conhecimentos multidisciplinares para a implementação bem-sucedida de controladores em sistemas reais.

No entanto, no estudo de sistemas de controle, é comum que os discentes enfrentem desafios em seu primeiro contato com a área, especialmente devido à necessidade de aplicar abstrações matemáticas para representar a dinâmica de sistemas físicos. Essa etapa inicial pode parecer complexa, porém é crucial para a compreensão e domínio dos conceitos fundamentais envolvidos na análise e controle de sistemas.

Uma das principais razões pelas quais os estudantes encontram dificuldades é a transição do mundo físico para o mundo matemático abstrato, onde os sistemas são modelados por equações diferenciais, transformadas de Laplace e outros formalismos matemáticos. Para muitos, essa mudança pode parecer distante da realidade observada, o que pode causar alguma resistência inicial.

No entanto, para superar essa barreira de aprendizagem, é fundamental buscar métodos que possibilitem aos discentes visualizar a dinâmica desses sistemas de forma interessante. Uma

abordagem promissora é a utilização de protótipos, que permitem aos alunos observar a dinâmica analisada matematicamente no mundo real. Essa aplicação prática fornece uma conexão mais tangível entre os conceitos abstratos e suas aplicações concretas, tornando o aprendizado mais envolvente e compreensível.

Adicionalmente, o uso de simuladores pode ser altamente benéfico. Ao inserir as respostas obtidas por meio dos modelos matemáticos como entrada nos simuladores, o processo de aprendizado integra ferramentas matemáticas e de visualização. Dessa forma, os alunos podem interagir com os sistemas em diferentes cenários, observando como as variáveis influenciam o comportamento dos sistemas de controle. Essa abordagem interativa e experimental ajuda a solidificar conceitos e aprimorar a compreensão do funcionamento desses sistemas complexos.

Ao combinar a teoria matemática com a prática através de protótipos e simuladores, o processo de aprendizado torna-se mais fluido e estimulante. Os alunos podem perceber a relevância das abstrações matemáticas na resolução de problemas reais, o que reduzirá a resistência inicial e aumentará o interesse pela área de sistemas de controle.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivos Gerais

Este trabalho visa realizar um estudo mais aprofundado do comportamento dinâmico de um aeropêndulo, utilizando técnicas de sistemas de controle. Para isso, será desenvolvido um projeto completo que integra um protótipo, um simulador e uma interface gráfica para plotagem de gráficos dos sinais em tempo real do sistema. Acrescentando a isso, a proposta é aplicar os conhecimentos obtidos durante a graduação e sintetizar técnicas de sistemas de controle em uma planta física, com o intuito de observar o comportamento da dinâmica do sistema. Para essa tarefa, serão mescladas tecnologias de diferentes áreas do curso de engenharia elétrica, o que torna o projeto ainda mais interessante e desafiador.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Desenvolver o protótipo de Aeropêndulo;
- Desenvolver um simulador 3D (Gêmeo Digital);
- Desenvolver uma interface gráfica com menu para manipular o comportamento do sistema em tempo real;
- Obter um modelo da planta por identificação de sistemas;
- Projetar controlador e implementar na planta.

1.3 Escopo do Trabalho

1.4 Gêmeo Digital



DESENVOLVIMENTO

2.1 Aeropêndulo

2.1.1 Descrição do Sistema

teste teste teste teste

2.1.2 Fundamentação Teórica

O processo que envolve modelagem de sistemas físicos em termos de equações matemáticas é uma das partes mais importantes no estudo de sistemas de controle. Segundo Ogata (2014, p. 11), O modelo matemático de um sistema dinâmico é definido como um conjunto de equações que representa a dinâmica do sistema com precisão ou, pelo menos, razoavelmente bem.

A dinâmica de muitos sistemas mecânicos, elétricos, térmicos, econômicos, biológicos ou outros pode ser descrita em termos de equações diferenciais. Essas equações diferenciais são obtidas pelas leis físicas que regem dado sistema — por exemplo, as leis de Newton para sistemas mecânicos e as leis de Kirchhoff para sistemas elétricos. Devemos sempre ter em mente que construir modelos matemáticos adequados é a parte mais importante da análise de sistemas de controle como um todo, Ogata (2014, p. 11).

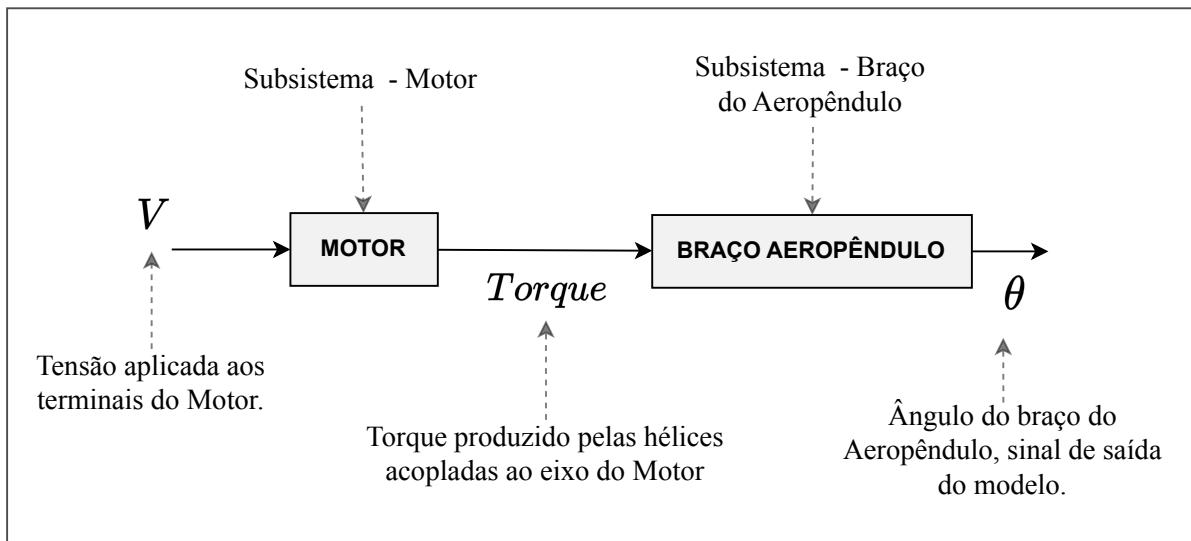
Para realizar a modelagem do aeropêndulo pode-se aplicar diferentes métodos, ...

2.1.3 Modelagem Analítica

Uma abordagem inicial para modelar sistemas físicos consiste em empregar as leis fundamentais da física. Além disso, em situações mais complexas, é viável decompor o sistema em subsistemas menores e, em seguida, desenvolver modelos para cada um deles. Por fim, é possível conectar

esses modelos, de forma a obter uma representação aproximada do sistema real. Dessa maneira, podemos obter uma compreensão mais aprofundada e abrangente da dinâmica do sistema em questão. A Figura 1 mostra um diagrama da representação do Aeropêndulo como um conjunto de subsistemas.

Figura 1 – Subsistemas do Aeropêndulo.



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

2.1.4 Modelo Matemático do Motor CC Série

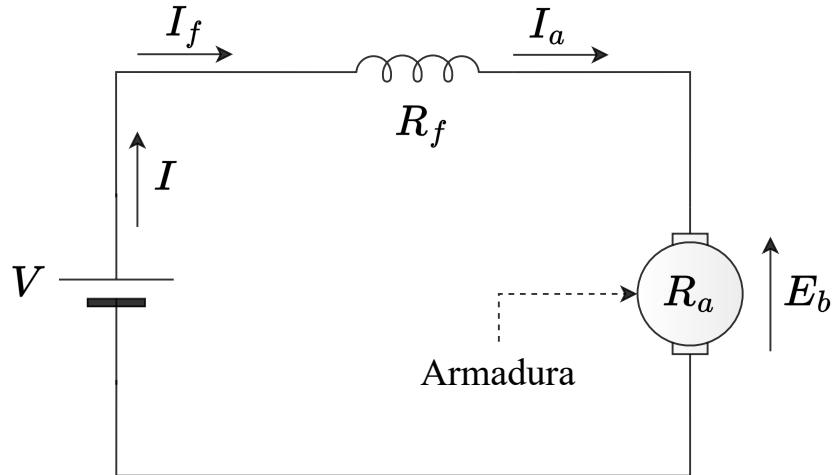
Os motores CC série tem como principal característica possuir o enrolamento de campo em série com o enrolamento de armadura, essa configuração resulta em um motor com torque de partida alto, porém, o torque reduz a medida que a velocidade aumenta devido ao aumento da Força Eletromotriz FEM. Por conta desse aumento de FEM os motores CC Séries tem uma regulação de velocidade ruim, quando se aumenta a carga no eixo do motor a velocidade é reduzida que por sua vez reduz a FEM e então o torque aumenta para conseguir atuar na carga.

No motor série, o aumento de carga é acompanhado por elevações da corrente, da FMM de armadura e do fluxo de campo do estator (desde que o ferro não esteja completamente saturado). Como o fluxo aumenta com a carga, a velocidade deve cair para se manter o equilíbrio entre a tensão aplicada e a força contraeletromotriz. Além disso, o aumento na corrente de armadura, causado pelo aumento de conjugado, é menor do que no motor em derivação devido ao aumento de fluxo. O motor série é, portanto, um motor de velocidade variável, [Umans \(2014, p. 410\)](#).

No entanto, mesmo motores cc série com dimensões reduzidas geram torques altos com baixo consumo de corrente. Visando melhorar seu desempenho, é possível projetar controladores de malha fechada capazes de tornar esses motores mais eficientes na regulação de velocidade.

(LICEAGA-CASTRO *et al.*, 2017) foi usando como base para realizar a modelagem o motor CC série, A Figura 2 mostra um diagrama da configuração do motor CC Série, no qual o enrolamento de campo está conectado em série com o enrolamento de armadura, dessa forma, a corrente de campo é igual a corrente de armadura $i = i_f = i_a$.

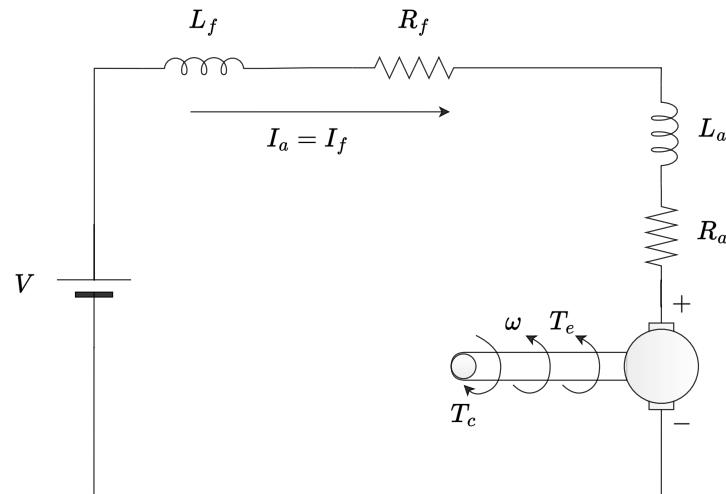
Figura 2 – Motor CC Série.



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

Na Figura 3, mostra o diagrama eletromecânico do motor, nele pode-se observar que os componentes elétricos estão todos em série, no qual o enrolamento de campo possui uma parte resistiva e outra indutiva, assim como o enrolamento de armadura, já a parte mecânica possui uma velocidade angular dada por ω , torque eletromagnético do motor dado por T_e e torque da Carga T_c .

Figura 3 – Diagrama Elétrico/Mecânico Motor CC Série.



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

2.1.4.1 Modelagem da Parte Mecânica do Motor CC Série

Primeiramente a parte mecânica do motor será modelada, um motor cc série é composto por uma parte rotativa "armadura", de modo que, essa parte, gera um momento de inércia J_m no eixo do motor e um fator de amortecimento viscoso b , além disso, o eixo possui uma velocidade angular $\dot{\omega}$.

Assim, a equação 2.1, obtida a partir de ([LICEAGA-CASTRO et al., 2017](#)), descreve o modelo mecânico do motor CC Série.

$$J_m \ddot{\omega}(t) = T_e(t) - b\dot{\omega}(t) - T_c(t) \quad (2.1)$$

Ao expressar o torque $T_e(t)$ em função das outras variáveis, obtém-se a equação 2.2.

$$T_e(t) = J_m \ddot{\omega}(t) + b\dot{\omega}(t) + T_c(t) \quad (2.2)$$

Onde:

- T_e : Torque Eletromagnético produzido pelo Motor;
- J_m : Momento de Inércia do Eixo do Motor;
- $\ddot{\omega}$: Aceleração Angular do Eixo do Motor;
- $\dot{\omega}$: Velocidade Angular do Eixo do Motor;
- b : Fator de Amortecimento Viscoso;
- T_c : Torque de Carga.

Tanto a Força Eletromotriz $E_A(t)$ quanto o Torque Eletromagnético $T_e(t)$ dependem do fluxo magnético do entreferro Φ , com isso, tem-se as equações 2.3 e 2.4.

$$E_a(t) = \dot{\omega}(t)\Phi(i) \quad (2.3)$$

$$T_e(t) = i(t)\Phi(i) \quad (2.4)$$

O Fluxo magnético depende da corrente $i(t)$, assim, as equações 2.1 e 2.2 são não-lineares. Além disso, pode-se aproximar o fluxo Φ por uma relação linear, K_0 , ao desprezar a saturação magnética.

$$\Phi(i) = K_0 i(t) \quad (2.5)$$

A constante K_0 é a indutância mútua entre a armadura e o enrolamento de campo. Agora pode-se encontrar o modelo não-linear da parte mecânica do Motor CC Série, substituindo 2.5 em 2.4, obtém-se a expressão 2.7:

$$T_e(t) = i(t)K_0i(t) \quad (2.6)$$

$$T_e(t) = K_0i^2(t) \quad (2.7)$$

Substituindo 2.7 em 2.2, é possível encontrar o modelo da parte mecânica do motor CC série, assim, tem-se a expressão 2.8.

$$K_0i^2(t) = J_m\ddot{\omega}(t) + b\dot{\omega}(t) + T_c(t) \quad (2.8)$$

2.1.4.2 Modelagem da Parte Elétrica do Motor CC Série

Para a parte elétrica, utilizou-se a lei de Kirchhoff das tensões para modelar o sistema. assim como a parte mecânica, o modelo da parte elétrica foi baseado de ([LICEAGA-CASTRO et al., 2017](#)), o motor em questão é um motor de corrente contínua CC série, Dessa forma, $i_a = i_f$, portanto, obtém-se a expressão 2.9.

$$V(t) = (R_a + R_f)i(t) + (L_a + L_f)\frac{d}{dt}i(t) + E_a \quad (2.9)$$

Onde:

- V : Tensão da Fonte;
- R_a : Resistência da Armadura;
- R_f : Resistência de Campo;
- i_a : Corrente da Armadura;
- i_f : Corrente de Campo;
- E_A : Tensão Contro Eletromotriz Gerada pela Armadura;
- L_a : Impedância da Armadura;
- L_f : Impedância de Campo.

Como os componentes elétricos então em série, pode-se obter uma resistência total assim como uma indutância:

$$R = R_a + R_f \quad (2.10)$$

$$L = L_a + L_f \quad (2.11)$$

$$V(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t) + E_a \quad (2.12)$$

Substituindo 2.5 em 2.3, obtém-se a equação 2.13.

$$E_a(t) = \dot{\omega}(t)K_0 i(t) \quad (2.13)$$

Por fim, pode-se encontrar a equação que descreve a parte elétrica do sistema ao substituir 2.13 em 2.12, assim, obtendo a equação 2.14.

$$V(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t) + \dot{\omega}(t)K_0 i(t) \quad (2.14)$$

Dessa forma, as equações que modelam um Motor CC série são expressas por 2.15 e 2.16, em que 2.15 esta relacionada a parte mecânica e 2.16 a parte elétrica.

$$K_0 i^2(t) = J_m \ddot{\omega}(t) + b \dot{\omega}(t) + T_c(t) \quad (2.15)$$

$$V(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t) + \dot{\omega}(t)K_0 i(t) \quad (2.16)$$

2.1.4.3 Linearização do modelo do Motor CC Série

Para projetos de controle lineares é preciso linearizar o modelo encontrado, para isso, vamos reorganizar as equações 2.15 e 2.16, assim obtém-se as equações 2.17 e 2.18:

$$\ddot{\omega}(t) = \frac{K_0}{J_m} i^2(t) - \frac{b}{J_m} \dot{\omega}(t) - \frac{1}{J_m} T_c(t) \quad (2.17)$$

$$\frac{d}{dt} i(t) = \frac{R}{L} i(t) - \frac{K_0}{L} \dot{\omega}(t) i(t) + \frac{1}{L} V(t) \quad (2.18)$$

reescrevendo as equações de estados na forma matricial,

$$x_1 = \dot{\omega} \quad (2.19)$$

$$x_2 = i \quad (2.20)$$

Coeficientes da equação de estado 2.17.

$$a_1 = \frac{K_0}{J_m}; \quad a_2 = \frac{b}{J_m}; \quad a_3 = \frac{1}{J_m} \quad (2.21)$$

Coeficientes da equação de estado 2.18.

$$b_1 = \frac{R}{L}; \quad b_2 = \frac{K_0}{L}; \quad b_3 = \frac{1}{L} \quad (2.22)$$

Representação no espaço de estados do motor CC Série não-linear

$$\dot{x}_1 = a_1 x_2^2 - a_2 x_1 - a_3 T_c \quad (2.23)$$

$$\dot{x}_2 = -b_1 x_2 - b_2 x_1 x_2 + b_3 V \quad (2.24)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 x_2^2 - a_2 x_1 - a_3 T_c \\ -b_1 x_2 - b_2 x_1 x_2 + b_3 V \end{bmatrix} = f(x, u) \quad (2.25)$$

O ponto de equilíbrio (x_1^0, x_2^0) das equações 2.23 e 2.24 é encontrado zerando as derivadas, como mostrado em 2.26 e 2.27.

$$x_2^0 = \sqrt{\frac{a_2 x_1^0 + a_3 T_c}{a_1}} \quad (2.26)$$

$$V = \frac{x_2^0(b_1 + b_2 x_1^0)}{b_3} \quad (2.27)$$

A linearização de 2.23 e 2.24 em torno do ponto de equilíbrio é obtida encontrando o jacobiano das mesmas, assim se obtêm as matrizes A e B .

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.28)$$

$$y = Cx \quad (2.29)$$

Em que,

$$A = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{x_1^0, x_2^0} = \begin{bmatrix} -a_2 & 2a_1 x_2^0 \\ -b_2 x_2^0 & -(b_1 + b_2 x_1^0) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$$B = \frac{\partial f(x, y)}{\partial u} \Big|_{x_1^0, x_2^0} = \begin{bmatrix} -a_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$C = [1, 0] \quad (2.32)$$

$$(2.33)$$

Onde,

$$u = \begin{bmatrix} T_c \\ V \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$y = \dot{\omega}(t) \quad (2.35)$$

Se o torque de carga for considerado zero, $T_c = 0$, temos as seguintes expressões,

$$x_2^0 = \sqrt{\frac{a_2 x_1^0}{a_1}}; \quad V = \frac{x_2^0(b_1 + b_2 x_1^0)}{b_3}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Agora é possível encontrar a função de transferência $G(s)$ associada as matrizes de estados A, B, C linearizadas, para isso usa-se a expressão 2.37.

$$G(s) = \frac{\dot{\omega}(s)}{V(s)} = C(sI - A)^{-1}B \quad (2.37)$$

Substituindo as matrizes A, B e C em 2.37, chega-se a expressão 2.38.

$$G(s) = \frac{\dot{\omega}(s)}{V(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a_2 & 2a_1 x_2^0 \\ -b_2 x_2^0 & -(b_1 + b_2 x_1^0) \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -a_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Assim, obtém-se a função de transferência linearizada em função dos parâmetros do motor CC Série, como mostra a equação 2.39.

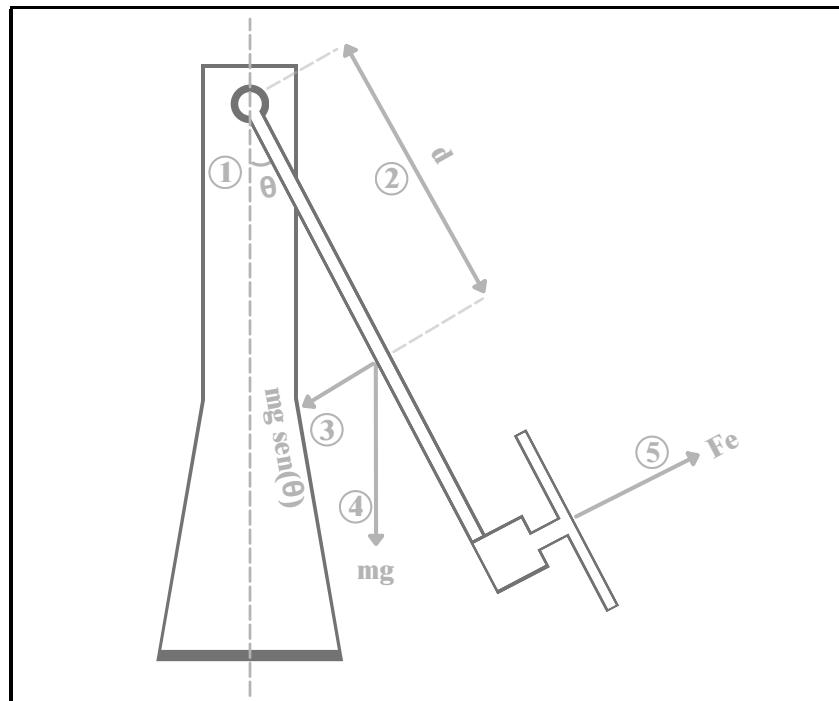
$$G(s) = \frac{\dot{\omega}(s)}{V(s)} = \frac{2K_0 \sqrt{\frac{bx_1^0}{K_0}}}{J_m L s^2 + 3K_0 b x_1^0 + R b + s (J_m K_0 x_1^0 + J_m R + L b)} \quad (2.39)$$

2.1.5 Modelo Matemático Braço do Aeropêndulo

Os sistemas mecânicos têm como uma de suas características os graus de liberdade, da sigla em inglês 6DoF - (Six degrees of freedom) que em português se diz (Seis graus de liberdade), com esses seis graus de liberdade é possível mover a planta em todas as direções e ângulos, o aeropêndulo tem um grau de liberdade, sendo o ângulo θ , assim o sistema tem apenas uma variável a ser controlada a partir do empuxo gerado pelas hélices, que por sua vez depende da velocidade angular do eixo do motor CC Série acoplado ao braço do aeropêndulo. dessa forma, podemos analisar o sistema a partir da entrada e da saída, sendo a entrada a tensão no motor e a saída o ângulo θ do braço do aeropêndulo.

Como discutido antes, pode-se dividir o sistema em dois subsistemas, o motor CC Série e o braço do aeropêndulo. Para o motor CC Série, já foi realizado a modelagem na sessão 2.1.4, para essa sessão será realizada a modelagem do braço do aeropêndulo, ([MOHAMMADBAGHERI; YAGHOOBI, 2011](#)) foi usado como base para se obter a equação que modela a dinâmica do braço.

Figura 4 – Diagrama esquemático do Aeropêndulo.



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

O modelo matemático do braço do aeropêndulo é derivado a partir das leis de Newton e do momento angular, como mostra ([MOHAMMADBAGHERI; YAGHOOBI, 2011](#)). assim, se obtém a equação 2.40.

$$F_e = J_b \ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mgd \sin \theta \quad (2.40)$$

Onde:

- F_e : Empuxo gerado pela hélice
- J_b : Momento de inércia do Braço
- θ : posição angular do Aeropêndulo
- c : coeficiente de amortecimento viscoso
- m : massa do Aeropêndulo
- d : a distância entre o centro de massa e o ponto de pivô

A entrada do subsistema do braço do aeropêndulo é a força de empuxo proporcionada pela hélice, porém, o modelo do motor CC Série tem como saída a velocidade angular, dessa forma é preciso encontrar uma relação entre a velocidade $\dot{\omega}$ e o empuxo F_e , essa relação é não linear como mostra [xx], $F_e = K_m\omega^2$, porém é possível aproximar por uma relação linear, $F_e = K_m\dot{\omega}$. Com isso, pode-se relacionar a velocidade angular $\dot{\omega}$ com o empuxo F_e gerado pela hélice do aeropêndulo.

O modelo encontrado tem uma parcela não linear dada por $\sin \theta$, para aplicar técnicas de projeto de controle é preciso obter o modelo linearizado da planta, isso pode ser feito considerando $\sin \theta \approx \theta$ para pequenas variações em torno de θ . dessa forma, temos a seguinte linearização:

$$F_e = J_b\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mgd\theta \quad (2.41)$$

Aplicando a transformada de Laplace para encontrar a função de transferência do subsistema, tem-se:

$$F_e(s) = s^2J_b\theta(s) + sc\theta(s) + mgd\theta(s) \quad (2.42)$$

$$F_e(s) = (s^2J_b + sc + mgd)\theta(s) \quad (2.43)$$

$$\frac{\theta(s)}{F_e(s)} = \frac{1}{s^2J_b + sc + mgd} \quad (2.44)$$

Agora que foi obtido o modelo do braço do aeropêndulo, pode-se usar a relação linearizada $F_e = K_m\dot{\omega}$ para usar a saída do modelo do motor cc série como entrada do modelo do braço do aeropêndulo, como mostrado na equação 2.47.

$$\frac{\theta(s)}{K_m\dot{\omega}(s)} = \frac{1}{s^2J_b + sc + mgd} \quad (2.45)$$

$$\frac{\theta(s)}{\dot{\omega}(s)} = \frac{K_m}{s^2J_b + sc + mgd} \quad (2.46)$$

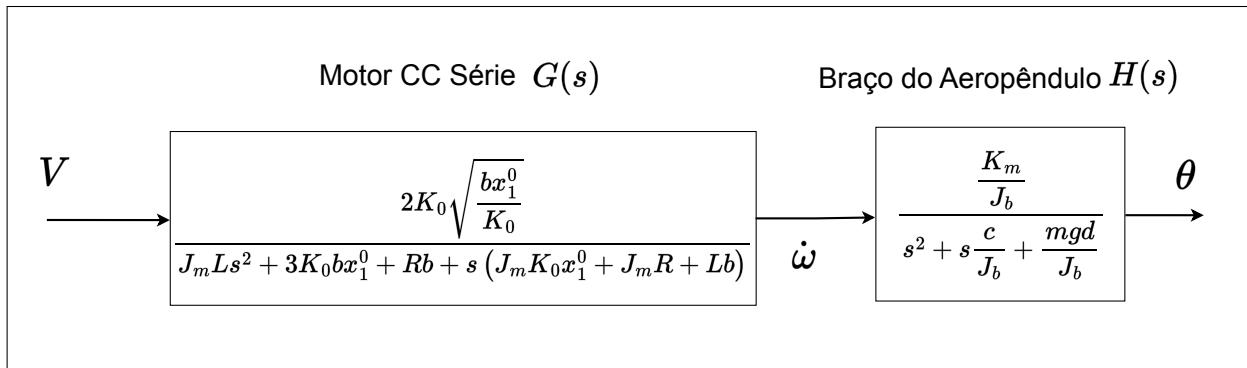
$$H(s) = \frac{\theta(s)}{\dot{\omega}(s)} = \frac{\frac{K_m}{J_b}}{s^2 + s\frac{c}{J_b} + \frac{mgd}{J_b}} \quad (2.47)$$

A equação 2.47 é a função de transferência do braço do aeropêndulo.

2.1.6 Junção dos subsistemas

A partir dos modelos encontrados nas subseções 2.1.4 e 2.1.5 pode-se obter o modelo completo do sistema unindo os subsistemas como mostra a figura 5. com isso, é possível modelar o Aeropêndulo tendo como entrada a tensão no motor CC série e como saída o ângulo do braço.

Figura 5 – Diagrama da junção dos subsistemas do Aeropêndulo.



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

Para obter uma função de transferência que relate a tensão dos terminais do motor com o ângulo do braço do Aeropêndulo, pode-se multiplicar as funções de transferências 2.39 e 2.47 dos subsistemas como mostrado em 2.48, já que estão em série.

$$\frac{\dot{\omega}(s)}{V(s)} \cdot \frac{\theta(s)}{\dot{\omega}(s)} = \frac{2K_0\sqrt{\frac{bx_1^0}{K_0}}}{J_m L s^2 + 3K_0 b x_1^0 + Rb + s(J_m K_0 x_1^0 + J_m R + Lb)} \cdot \frac{\frac{K_m}{J_b}}{s^2 + s\frac{c}{J_b} + \frac{mgd}{J_b}} \quad (2.48)$$

Com isso, encontra-se um modelo matemático linear para representar o sistema, como mostrado em 2.49.

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{2K_0\sqrt{\frac{bx_1^0}{K_0}} \cdot \frac{K_m}{J_b}}{J_m L s^2 + 3K_0 b x_1^0 + Rb + s(J_m K_0 x_1^0 + J_m R + Lb) \cdot \left(s^2 + s\frac{c}{J_b} + \frac{mgd}{J_b}\right)} \quad (2.49)$$

2.2 Implementação do Protótipo

2.2.1 Protótipo Aeropêndulo

O projeto para o desenvolvimento do protótipo consiste em uma estrutura mecânica e componentes eletrônicos, a Figura 6 mostra o protótipo finalizado com a parte estrutural e elétrica montada.

Figura 6 – Protótipo do Aeropêndulo.



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

2.2.2 Parte estrutural do sistema

O material escolhido para a estrutura foi o compensado, as chapas de compensado são materiais versáteis e amplamente utilizados na indústria da construção, marcenaria e artesanato. Elas são fabricadas a partir de finas lâminas de madeira, conhecidas como lâminas de folheado, coladas umas sobre as outras com fibras perpendiculares, conferindo maior estabilidade e resistência mecânica ao produto final, Figura 7.

Já para o braço do Aeropêndulo foi usando Tubo de Fibra de Carbono 3x3x2mm, Figura 8.

Figura 7 – Chapas de compensado.



Fonte: Autor.

Figura 8 – Tubo de Fibra de Vidro de Carbono 3x3x2mm.



Fonte: Autor.

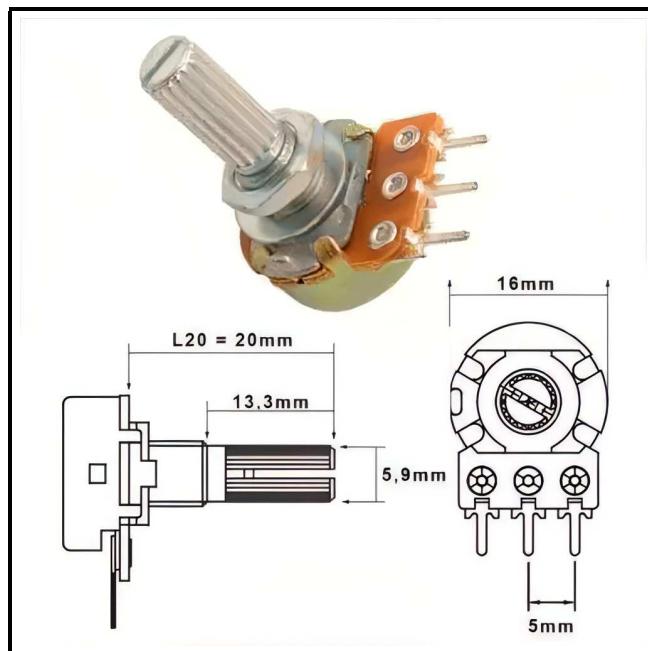
2.2.3 Parte Elétrica do sistema

Foram empregados os seguintes componentes eletrônicos no projeto: um Potenciômetro $50k\Omega$, uma Placa de desenvolvimento Esp32, um Módulo Driver L298n, um Conjunto (suporte/motor/hélice para drones fpv racing quadcopter) e componentes eletrônicos (resistor, capacitor).

2.2.3.1 Potenciômetro $50k\Omega$

O potenciômetro desempenha o papel de *encoder* ao obter o ângulo de inclinação do braço do Aeropêndulo. Essa funcionalidade é viabilizada pelo fato de que, conforme o braço se movimenta, a resistência do potenciômetro se altera, resultando em uma variação na tensão registrada em seus terminais. Essa interação permite estabelecer uma correlação entre a mudança na tensão elétrica e o ângulo de inclinação do braço do Aeropêndulo de maneira precisa e controlada.

Figura 9 – Potenciômetro $50k\Omega$.



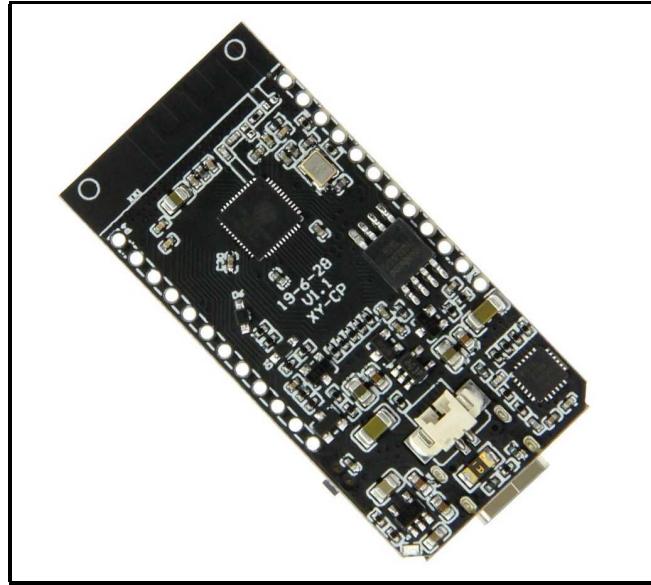
Fonte: Autor.

2.2.3.2 Placa de desenvolvimento Esp32

A placa de desenvolvimento ESP32 é uma poderosa e versátil plataforma que integra o popular microcontrolador ESP32 desenvolvido pela empresa *Espressif*. Projetada para atender às demandas de projetos de Internet das Coisas (IoT) e aplicações de conectividade sem fio, a ESP32 oferece uma vasta gama de recursos e funcionalidades. Equipada com um processador dual-core de 32 bits, Wi-Fi, Bluetooth, interfaces GPIO, I2C, SPI e UART, bem como suporte para memória externa.

A placa desempenhará uma função central no projeto, servindo tanto para a implementação do controlador discreto quanto para a obtenção de dados em tempo real relacionados aos estados do sistema. Esses estados incluem a leitura do sensor de ângulo do braço, a aquisição do sinal de controle e o cálculo do sinal de erro. Adicionalmente, a placa será empregada na geração dos sinais de referência necessários para o funcionamento ideal do sistema. A figura 10 ilustra a placa de desenvolvimento Esp32.

Figura 10 – Placa de desenvolvimento Esp32.



Fonte: Autor.

2.2.3.3 Fonte Chaveada 2A, 5V, 25W

Para a alimentação do motor CC série, foi usado uma fonte de alimentação de 5V/5A, Figura 11.

Figura 11 – Fonte Chaveada 2A, 5V, 25W.

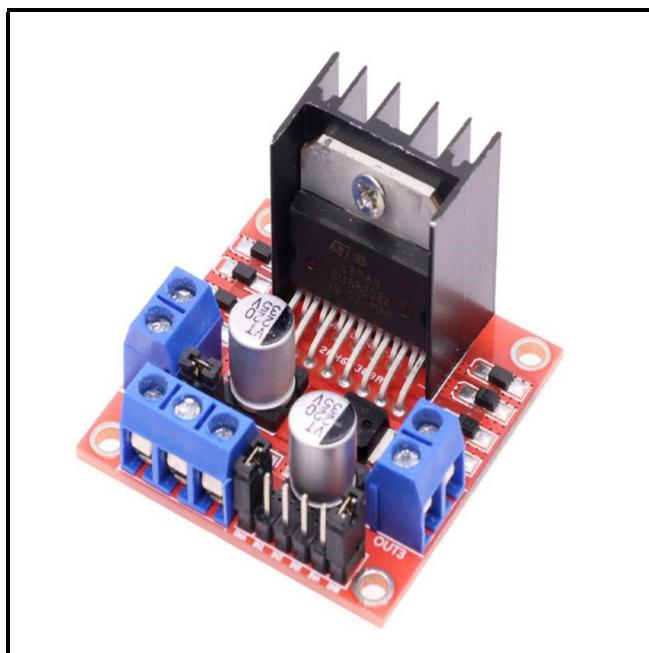


Fonte: Autor.

2.2.3.4 Módulo Driver L298n

Para regular a velocidade no eixo do Motor CC série, empregou-se um Módulo Driver L298n, o qual possibilita controlar a injeção de potência entregue ao motor mediante a aplicação de um sinal PWM em sua entrada. Dessa forma, ao ajustar o sinal PWM, é possível obter uma tensão controlada aplicada de maneira precisa aos terminais do motor. A Figura 12 ilustra o componente em questão.

Figura 12 – Módulo Driver L298n.



Fonte: Autor.

2.2.3.5 Conjunto (suporte motor cw/ccw hélice) para drones fpv racing quadcopter

Para obter-se a força de empuxo na extremidade do braço do Aeropêndulo foi usado um Conjunto (suporte/motor/hélice) para drones fpv racing quadcopter. A Figura 13 ilustra o componente em questão.

Figura 13 – Conjunto (suporte motor cw/ccw hélice).



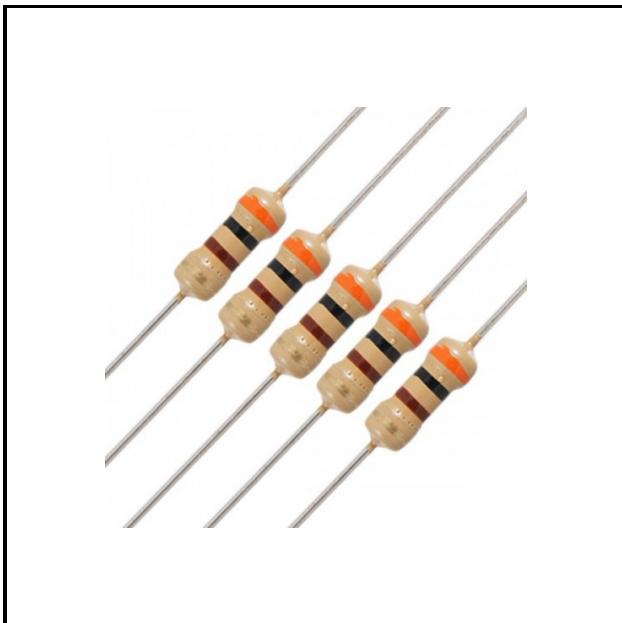
Fonte: Autor.

2.2.3.6 Componentes eletrônicos (resistivos e capacitivos)

Por fim, para que o sinal do sensor (Potenciômetro) seja de boa qualidade, foi usado um filtro RC série, dessa forma, empregou-se um capacitor de um resistor na implementar do filtro. A Figura 14a corresponde aos componentes resistivos e a Figura 14b aos componentes capacitivos.

Figura 14 – Componentes eletrônicos.

(a) Resistores.



Fonte: Autor.

(b) Capacitores.



Fonte: Autor.

2.2.4 Montagem do Protótipo

2.2.5 Parte Física

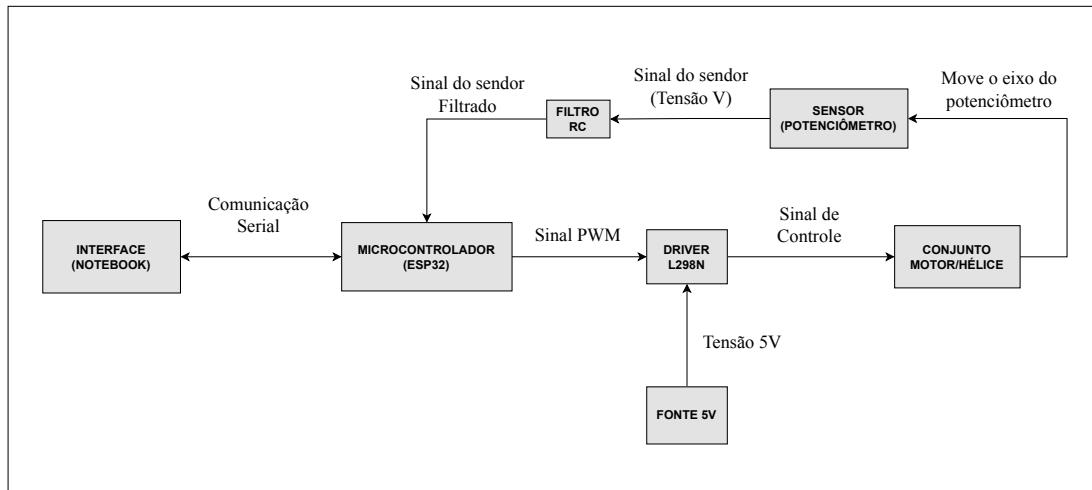
O protótipo foi concebido visando a desmontagem da estrutura, permitindo um transporte mais conveniente. A construção física compreende três componentes com pontos de conexão estratégicos. Ademais, o braço do aeropêndulo pode ser facilmente desacoplado no ponto de pivô, onde se conecta ao eixo do potenciômetro.

2.2.6 Parte Elétrica

A Figura 15 ilustra a dinâmica do fluxo de interligação do sistema elétrico do Aeropêndulo. Notavelmente, o microcontrolador desempenha um papel central ao gerar o sinal de controle PWM, realiza a leitura do sinal filtrado proveniente do sensor (Potenciômetro) e estabelecer comunicação com o computador através da interface serial. Adicionalmente, o driver é alimentado por uma fonte de tensão contínua de 5V, o qual amplifica e aplica o sinal de controle ao motor CC

Série. Esta ação, por sua vez, resulta em uma variação angular no braço do Aeropêndulo por conta do empuxo gerado pelas hélices, impactando diretamente o estado do sensor (Potenciômetro) e sua saída correspondente.

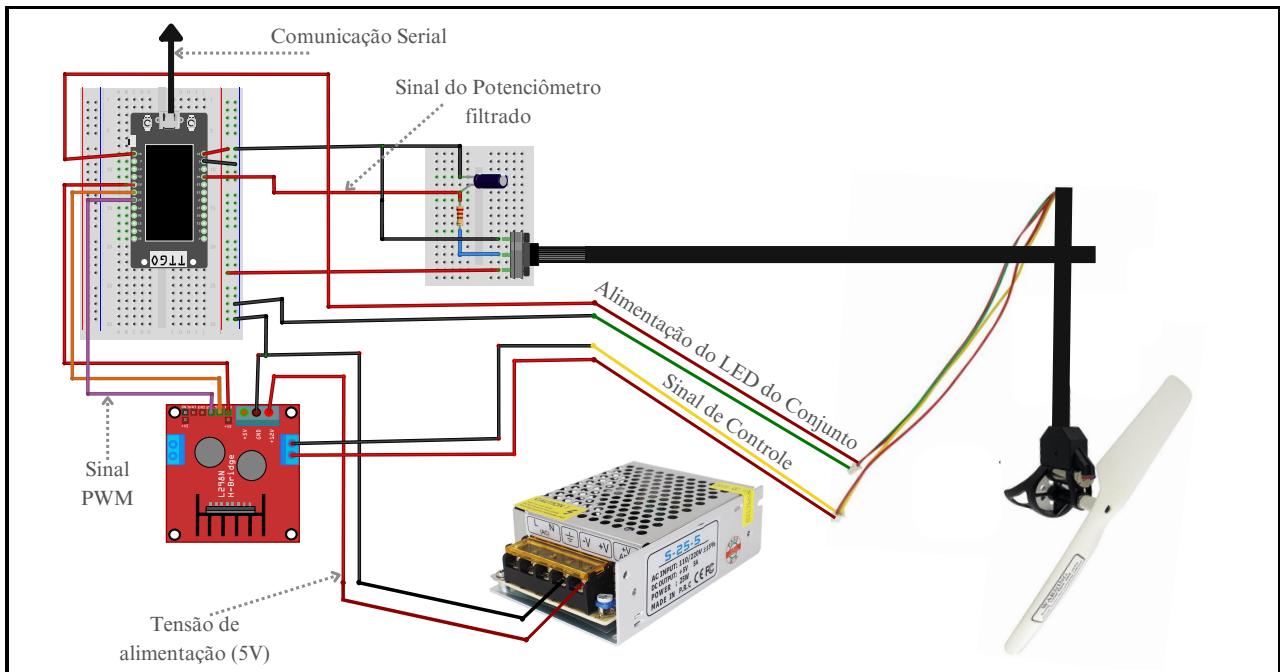
Figura 15 – Diagrama de comunicação do Aeropêndulo.



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

O esquema de ligação dos componentes do sistema elétrico é exemplificado na Figura 16.

Figura 16 – Esquema de conexões do Aeropêndulo.



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

2.3 Desenvolvimento dos Softwares

Para permitir a interação com o protótipo um conjunto de software foi desenvolvido, permitindo aos usuários aplicar diferentes conceitos de sistema de controle e obter uma visualização em tempo real dos estados do sistema através desses softwares, sendo eles, o firmware do microcontrolador, simulador 3D que usa o conceito de Gêmeo Digital explicado na subseção 1.4 e uma interface gráfica com um conjunto de funcionalidades capaz de manipular o sinal de referência e plotar os gráficos dos estados do sistema.

2.3.1 Linguagens Python, C e C++

Para o desenvolvimento dos softwares destinados à visualização de dados e ao simulador, a linguagem de programação escolhida foi o Python. Essa seleção se deu devido à natureza versátil da linguagem, que permite um desenvolvimento ágil de softwares para uma ampla gama de finalidades. Em paralelo, para a programação do microcontrolador, optou-se pelo uso das linguagens C/C++. Essa escolha se fundamenta na ampla adoção dessas linguagens na programação de sistemas embarcados, garantindo um ambiente propício para a eficaz implementação no microcontrolador.

A linguagem Python é uma linguagem de programação interpretada, de alto nível e de propósito geral. Ela é uma das linguagens de programação mais populares do mundo, sendo utilizada em uma ampla gama de aplicações, incluindo computação científica, ciência de dados, engenharia de software e inteligência artificial.

Python é uma linguagem de programação fácil de aprender e usar, mesmo para pessoas com pouca experiência em programação. Ela possui uma sintaxe clara e concisa, o que torna o código mais legível e manutenível. Além disso, Python é uma linguagem de programação poderosa e flexível, capaz de lidar com uma ampla gama de tarefas.

Por estas razões, Python é uma linguagem de programação ideal para a realização de trabalhos de pesquisa e desenvolvimento. Ela é uma ferramenta versátil e poderosa que pode ser utilizada para realizar uma ampla gama de tarefas, desde a análise de dados até a criação de aplicações complexas.

Já C e C++ são linguagens de programação que se concentram na eficiência e na portabilidade. Elas são amplamente utilizadas no desenvolvimento de sistemas operacionais, drivers de dispositivos, compiladores e outros softwares críticos.

C foi criada em 1972 por Dennis Ritchie para o desenvolvimento do sistema operacional Unix. C++ foi criada em 1983 por Bjarne Stroustrup como uma extensão de C para adicionar suporte à programação orientada a objetos.

C e C++ são linguagens de programação poderosas e flexíveis, mas também podem ser complexas e difíceis de aprender. Elas são recomendadas para desenvolvedores que precisam de

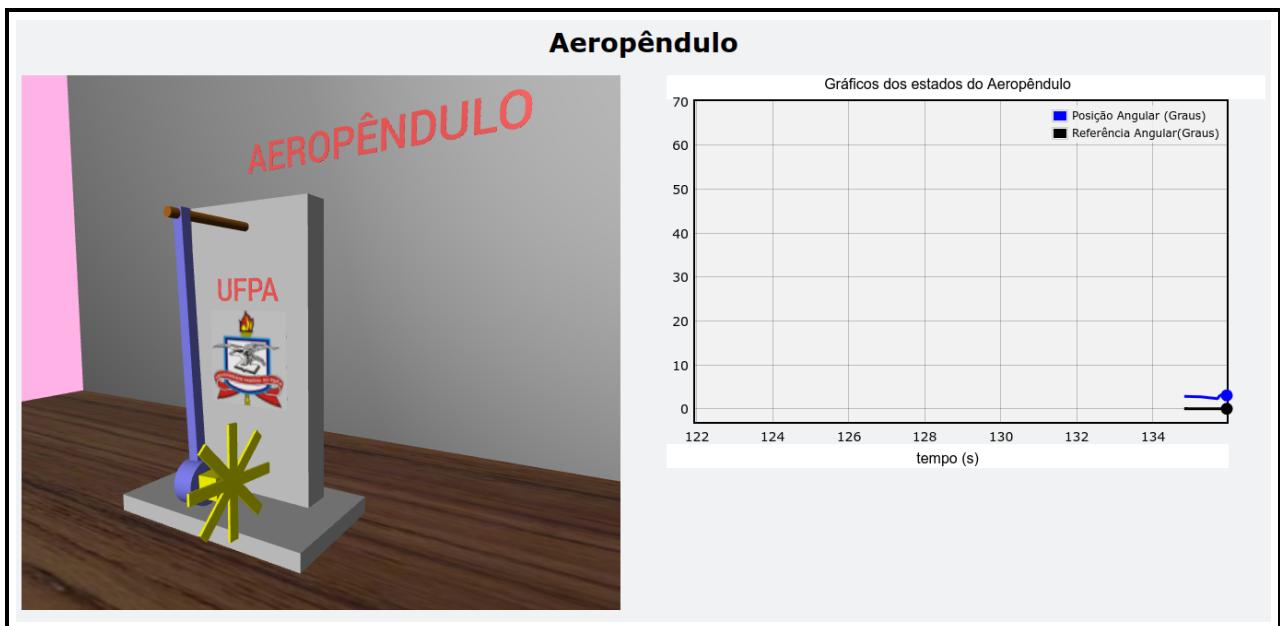
um alto nível de controle sobre o desempenho e a portabilidade de seu código.

2.3.2 Gêmeo Digital - Simulador Aeropêndulo

Para desenvolver o simulador (Gêmeo Digital) foi usado a biblioteca Vpython, essa biblioteca possui um conjunto de funções que permite criar objetos 3D capazes de realizar movimentos rotacionais de translacionais, além disso, é possível plotar gráficos em tempo real. A Figura 18 ilustra a interface do simulador já finalizado, pode-se observar que a interface é composta de duas partes principais, uma que implementa o ambiente 3D com o Aeropêndulo e a outra gera os gráficos do sinal de referência e de saída.

Para atualizar os estados dos gráficos e a posição angular do gêmeo digital em tempo real a aplicação se comunica com a interface gráfica, subseção 2.3.3, com isso é possível realizar a atualização dos estados do gráfico assim como do gêmeo digital tendo como entrada os sinais dos estados do protótipo.

Figura 17 – Gêmeo Digital - Simulador com VPython.



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

2.3.2.1 Biblioteca VPython

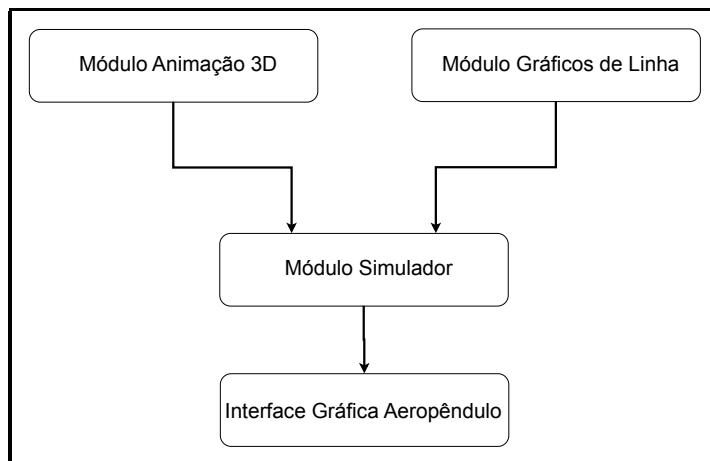
Conforme o site oficial (VPYTHON.ORG, 2023), "O VPython, por ser desenvolvido com a linguagem Python, é uma ferramenta versátil para a criação de animações 3D navegáveis. Ele é fácil de aprender e usar, mesmo para pessoas com pouca experiência em programação. No entanto, ele também oferece uma ampla gama de recursos para programadores e pesquisadores experientes."

Ao criar uma simulação com VPython e executá-la, o simulador será renderizado no navegador de internet padrão do sistema operacional.

2.3.2.2 Arquitetura do Simulador

Para implementar o simulador a arquitetura do sistema consiste de um módulo para gerar os gráficos de linha e outro para desenhar o simulador 3D, existe um módulo que integra e atualiza os estados dos gráficos de linha e do simulador 3D, a Figura 18 mostra como a estrutura do simulador foi pensada, o último bloco é a interface gráfica, subseção 2.3.3, responsável por obter os estados do sistema real, com isso, é possível usar a velocidade angular real do protótipo como entrada para o gêmeo digital, isso faz com que a dinâmica do protótipo seja reproduzida no gêmeo digital, além disso, é possível obter os sinais de referência e de saída e atualizar os gráfios que compõem a interface do simulador.

Figura 18 – Diagrama da arquitetura do simulador.



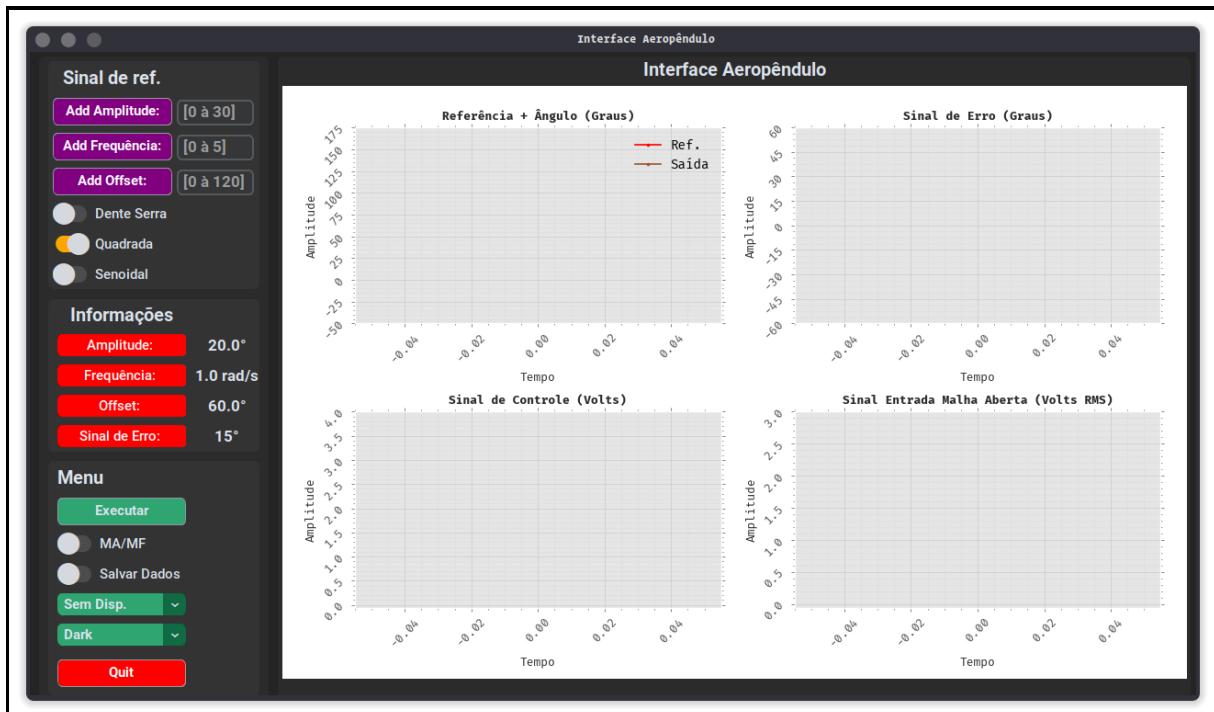
Fonte: elaborado pelo autor (2023).

2.3.3 Interface Gráfica para visualização e obtenção dos sinais do sistema

A interface gráfica consiste de um menu com diferentes opções de controle e visualização dos sinais do sistema e um conjunto de gráficos dinâmicos para visualizar os estados do sistema em tempo real. A Figura 19 mostra a interface do sistema. No entanto, além da parte visual existe a parte de aquisição e processamento de dados, em TI essa parte é chamada de Back-end, o projeto possui uma classe para realizar essa parte de aquisição e tratamento de dados, além de uma classe para detectar automaticamente o microcontrolador conectado a porta USB.

Para ser possível realizar os ensaios, modificação de parâmetros do sinal de referência e coletas de dados é preciso que o microcontrolador execute o firmware, subseção 2.3.4, desenvolvido especificamente para esse propósito, dessa forma, a interface gráfica, Figura 19, conseguirá realizar o pre-processamento dos dados e plotar os sinais nos gráficos e demais atualizações nos softwares.

Figura 19 – Interface Gráfica.



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

2.3.3.1 Biblioteca CustomTkinter e Matplotlib

Para o desenvolvimento da parte gráfica do software foi usado as bibliotecas CustomTkinter e Matplotlib, onde a biblioteca CustomTkinter implementa a estrutura de tela, botões, entradas de texto da aplicação e os módulos *Matplotlib.pyplot* e *Matplotlib.animation* possibilitam gerar gráficos em tempo real em conjunto com CustomTkinter.

Conforme ([SCKIMANSKY TOM, 2023](#)) explica no site oficial da biblioteca, "CustomTkinter é uma biblioteca de UI de desktop python baseada em Tkinter, que fornece widgets de aparência moderna e totalmente personalizáveis. Com CustomTkinter você terá uma aparência consistente em todas as plataformas de desktop (Windows, macOS, Linux)."

De acordo com ([MATPLOTLIB development team, 2023](#)), "Matplotlib é uma biblioteca abrangente para criar visualizações estáticas, animadas e interativas em Python. Matplotlib torna as coisas simples fáceis e as difíceis possíveis."

2.3.3.2 Biblioteca PySerial, NumPy e Pandas

Já para implementar o Back-end foram utilizadas as bibliotecas PySerial, NumPy e Pandas. Sendo que a biblioteca PySerial tem por finalidade realizar a comunicação entre o computador e o microcontrolador usando o protocolo serial via entrada USB, já o NumPy teve sua aplicação no processo de criação das matrizes contendo os dados lidos pela PySerial, por fim, para salvar os

dados de ensaio foi usada a biblioteca Pandas, sendo salvos no formato CSV.

Conforme ([LIECHTI CHRIS, 2023](#)), "A biblioteca PySerial possibilita a comunicação serial entre o computador e o microcontrolador usando conexão USB. Este módulo encapsula o acesso à porta serial. Ele fornece backends para Python rodando em Windows, OSX, Linux, BSD (possivelmente qualquer sistema compatível com POSIX) e IronPython. O módulo denominado "serial" seleciona automaticamente o backend apropriado."

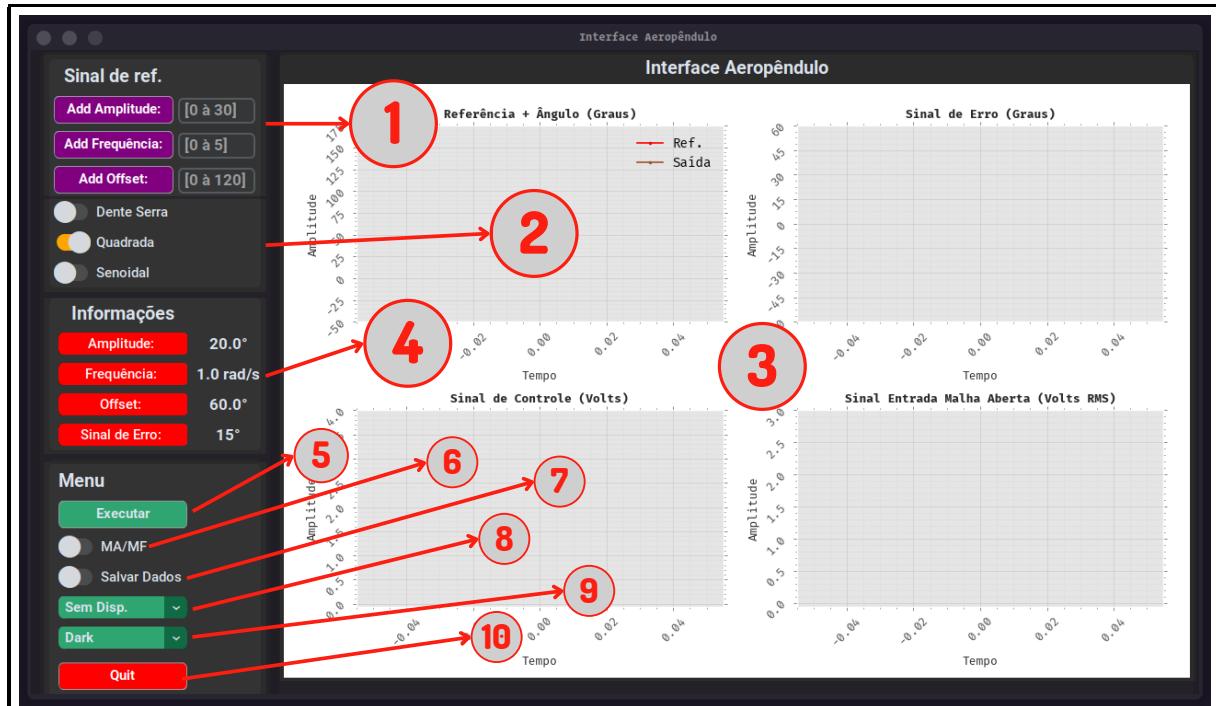
De acordo com ([NETO ANSELMO, 2023](#)), "O NumPy, uma biblioteca essencial para Python, oferece recursos robustos para realizar cálculos numéricos, sendo seu elemento central o ndarray, também conhecido como tensor. O ndarray se destaca por sua homogeneidade, exigindo que todos os elementos pertençam ao mesmo tipo, em contraste com as listas Python."

Segundo ([PANDAS development team , 2023](#)) em site seu oficial da ferramenta, "pandas é uma ferramenta de análise e manipulação de dados de código aberto rápida, poderosa, flexível e fácil de usar, construído sobre a linguagem de programação Python."

2.3.3.3 Descrição das partes da interface gráfica

Nessa subseção será detalhado as partes do software, a Figura 20 está enumerando as partes e suas descrições estão logo abaixo.

Figura 20 – Partes da Interface Gráfica.



Fonte: elaborado pelo autor (2023).

Item 1: Sinal de Referência

Essa parte do software configura os sinais de referência aplicado ao sistema em malha fechada.

Add Amplitude: Configura a amplitude do sinal aplicado a entrada do sistema;

Add Frequência: Configura a frequência do sinal aplicado a entrada do sistema;

Add Offset: Configura a amplitude do offset, ponto de equilíbrio, aplicado a entrada do sistema;

Item 2: Seleção do Sinal de referência

Onda Serra: Ao selecionar essa opção o sinal aplicado ao sistema será um dente de serra com as configurações de amplitude, frequência e offset conforme configurado nos três primeiros sub itens.

Quadrada: Ao selecionar essa opção o sinal aplicado ao sistema será uma onda quadrada com as configurações de amplitude, frequência e offset conforme configurado nos três primeiros sub itens.

Senoidal: Ao selecionar essa opção o sinal aplicado ao sistema será uma onda senoidal com as configurações de amplitude, frequência e offset conforme configurado nos três primeiros sub itens.

Item 3: Gráficos

Gráficos: Nesse item que são plotados os gráficos dos estados do sistema em tempo real.

Item 4: Informações

Amplitude: Mostra a valor da amplitude do sinal de referência;

Frequência: Mostra a valor da frequência do sinal de referência;

Offset: Mostra a valor de offset aplicado ao aeropêndulo, esse valor é adicionado ao sinal de referência, dessa forma o sinal de referência varia em torno de um ponto de equilíbrio;

Sinal de Erro: Mostra a valor do sinal de erro em tempo real.

Item 5: Menu - Executar

Inicializa o ensaio, para isso é preciso que o microcontrolador esteja conectado ao computador.

Item 6: Menu - MA/MF

Comuta entre o sistema em malha aberta e malha fechada.

Item 7: Menu - Salvar Dados

Quando está ativado os dados são salvos em um arquivo CSV com data, hora, minuto e segundo do instante do salvamento, isso facilita que diferentes ensaios sejam realizados sem que os dados do anterior seja sobreescrito.

Item 8: Menu - Selecionar Dispositivo

A aplicação detecta todos os microcontroladores conectados no computador e permite que o usuário realize a seleção do dispositivo desejado para realizar o ensaio.

Item 9: Menu - Selecionar Tema

O software possui tema escuro e claro e essa opção permite que o usuário selecione entre essas duas opções.

Item 10: Menu - Quit

Botão responsável por fechar a aplicação.

2.3.4 Firmware do microcontrolador

teste teste teste



RESULTADOS E DISCUSSÕES

3.1 Implementação do Protótipo e Softwares

Os sistemas propostos tanto físico quanto softwares foram desenvolvidos exitosamente, os procedimentos para a implementação se deu a partir de uma pesquisa bibliográfica e criativa, tendo como resultado o protótipo Figura 1 e os softwares Figuras 2.1 e 2.1.

3.2 Ensaio em Malha Aberta

3.2.1 Onda Quadrada

3.2.2 Onda Dente de Serra

3.2.3 Onda Senoidal

3.3 Identificação de sistema aplicado ao Aeropêndulo

3.3.1 Sinal PRBS

3.3.1.1 Aplicação do sinal PRBS ao sistema

3.3.2 Identificação usando Mínimos quadrados

3.4 Projeto de controlador PI usando o sistema identificado

3.5 Ensaio em Malha Fechada com Controlador Projetado



CONCLUSÃO

4.0.1 Considerações Finais

4.0.2 Trabalhos Futuros

REFERÊNCIAS

- LICEAGA-CASTRO, J. U.; SILLER-ALCALÁ, I. I.; JAIMES-PONCE, J.; ALCÁNTARA-RAMÍREZ, R. Series dc motor modeling and identification. In: *2017 International Conference on Control, Artificial Intelligence, Robotics & Optimization (ICCAIRO)*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 248–253. 6, 7, 8
- LIECHTI CHRIS. *pySerial documentação Oficial*. 2023. Disponível em: <<https://pyserial.readthedocs.io/en/latest/pyserial.html>>. Acesso em: 01 de outubro 2023. 26
- MATPLOTLIB development team. *Site oficial da biblioteca Matplotlib*. 2023. Disponível em: <<https://matplotlib.org>>. Acesso em: 01 de outubro 2023. 25
- MOHAMMADBAGHERI, A.; YAGHOBI, M. A new approach to control a driven pendulum with pid method. In: *2011 UKSim 13th International Conference on Computer Modelling and Simulation*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 207–211. 12
- NETO ANSELMO. *Introdução ao Numerical Python (Numpy)*. 2023. Disponível em: <<http://www opl.ufc.br/post/numpy>>. Acesso em: 01 de outubro 2023. 26
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Brasil: Pearson Education do Brasil, 2014. 4
- PANDAS development team . *Site oficial da biblioteca Pandas*. 2023. Disponível em: <<https://pandas.pydata.org>>. Acesso em: 01 de outubro 2023. 26
- SCKIMANSKY TOM. *Site oficial da biblioteca CustomTkinter*. 2023. Disponível em: <<https://customtkinter.tomschimansky.com>>. Acesso em: 01 de outubro 2023. 25
- UMANS, S. *Máquinas Elétricas de Fitzgerald e Kingsley - 7.ed.* AMGH Editora, 2014. ISBN 9788580553741. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=3Fa2AwAAQBAJ>>. 5
- VPYTHON.ORG. *Site oficial da biblioteca VPython*. 2023. Disponível em: <<https://customtkinter.tomschimansky.com>>. Acesso em: 01 de outubro 2023. 23