



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE TUCURUÍ  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

**AEROPÊNDULO, PROTOTIPAGEM E SIMULADOR GRÁFICO COMO  
FERRAMENTA PARA ESTUDOS DE TÉCNICAS DE CONTROLE E MODELAGEM  
POR IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS**

**OSÉIAS DIAS DE FARIAS**

Tucuruí-PA

2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE TUCURUÍ  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

**OSÉIAS DIAS DE FARIAS**

**AEROPÊNDULO, PROTOTIPAGEM E SIMULADOR GRÁFICO COMO  
FERRAMENTA PARA ESTUDOS DE TÉCNICAS DE CONTROLE E MODELAGEM  
POR IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado da Faculdade de Engenharia Elétrica, do Campus Universitário de Tucuruí, da Universidade Federal do Pará, como requisito necessário para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Elétrica.

**Orientador:** Prof. Dr. Raphael Barros Teixeira

Tucuruí-PA

2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE TUCURUÍ  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

**TÍTULO DO TRABALHO**

**AUTOR: OSÉIAS DIAS DE FARIAS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO SUBMETIDO À BANCA EXAMINADORA APRO-  
VADA PELO COLEGIADO DA FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA, SENDO JULGADO  
.....

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. Raphael Barros Teixeira  
Orientador / UFPA-CAMTUC-FEE

---

Prof. Dr. NOME PRIMEIRO AVALIADOR  
Membro 1 / UFPA-CAMTUC-FEE

---

Prof. Dr. NOME PRIMEIRO AVALIADOR  
Membro 2 / UFPA-CAMTUC-FEE

# Resumo

Resumo aqui

**Palavras Chave:** Aeropêndulo, identificação de sistema, protótipo, simulador, técnicas de controle.

# Abstract

Texto do abstract (inglês)

**Keywords:** Palavras chave em inglês.

# SUMÁRIO

---

<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Sumário</b>	<b>vi</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Justificativa	1
1.2 Objetivos	2
1.2.1 Objetivos Gerais	2
1.2.2 Objetivos Específicos	2
1.3 Escopo do Trabalho	2
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>3</b>
2.1 Modelagem e Controle de Sistemas	3
2.1.1 Transformada Laplace	3
2.1.2 Transformada Z	3
2.1.3 Espaço de Estados	3
2.2 Identificação de Sistemas	3
2.2.1 Método dos Mínimos Quadrados	3
2.3 Eletrônica Analógica e Digital	3
2.3.1 Dispositivos Analógicos	3
2.3.2 Dispositivos Digitais	3
<b>3 PROTÓTIPO E SIMULADOR</b>	<b>4</b>
3.1 Prototipagem	4
3.1.1 Parte estrutural do sistema	5
3.1.2 Parte Elétrica do sistema	5
3.1.3 Montagem do Protótipo	5
3.2 Simulador usando Python	5
3.2.1 Linguagem Python	5
3.2.2 Biblioteca VPython	5
3.2.3 Simulador Gráfico	5

<b>4</b>	<b>INTERFACE GRÁFICA PARA VISUALIZAÇÃO E OBTENÇÃO DOS SINAIS DO SISTEMA . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>4.1</b>	<b>Partes que compõem a interface gráfica . . . . .</b>	<b>6</b>
4.1.1	Conexão com o Microcontrolador . . . . .	6
4.1.2	Colhendo e armazenando os sinais dos ensaios . . . . .	6
4.1.3	Gráficos em tempo real . . . . .	6
<b>4.2</b>	<b>Firmware de comunicação do microcontrolador com a interface . . . . .</b>	<b>6</b>
4.2.1	Recebimento de sinais providos pela interface . . . . .	6
4.2.2	Envio dos sinais do sensor, controle, erro e tempo . . . . .	6
<b>5</b>	<b>DESENVOLVIMENTO . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>5.1</b>	<b>Fundamentação Teórica . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>5.2</b>	<b>Modelagem Matemática Clássica Aplicada ao Aeropêndulo . . . . .</b>	<b>7</b>
5.2.1	Modelo Matemático do Motor CC Série . . . . .	8
5.2.1.1	Modelagem da Parte Mecânica do Motor CC Série . . . . .	10
5.2.1.2	Modelagem da Parte Elétrica do Motor CC Série . . . . .	11
5.2.1.3	Linearização do modelo do Motor CC Série . . . . .	12
5.2.2	Modelo Matemático Braço do Aeropêndulo . . . . .	15
5.2.3	Junção dos subsistemas . . . . .	17
<b>5.3</b>	<b>Modelagem por Identificação de Sistemas Aplicada ao Aeropêndulo . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>6</b>	<b>PROJETO DE CONTROLADORES . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>6.1</b>	<b>Projeto de Controle por LGR . . . . .</b>	<b>18</b>
6.1.1	Obtendo o Controlador . . . . .	18
6.1.2	Discretização do controlador Transformada Z . . . . .	18
6.1.3	Implementação do Controlador no Microcontrolador . . . . .	18
<b>6.2</b>	<b>Projeto de Controle por Espaço de Estados . . . . .</b>	<b>18</b>
6.2.1	Obtendo o Controlador . . . . .	18
6.2.2	Discretização do controlador Transformada Z . . . . .	18
6.2.3	Implementação do Controlador no Microcontrolador . . . . .	18
<b>7</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>20</b>
8.0.1	Considerações Finais . . . . .	20
8.0.2	Trabalhos Futuros . . . . .	20
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>21</b>

---

# INTRODUÇÃO

---

## 1.1 Justificativa

Sistemas de controle têm como finalidade modelar, analisar e projetar controladores para que um sistema possa atender a requisitos de projeto específicos. Para atingir esse objetivo, é necessário aplicar técnicas que permitam abstrair o comportamento do sistema em termos de equações matemáticas. No entanto, é importante lembrar que, ao abstrair sistemas físicos dessa maneira, o preço pago está na percepção e interpretação da dinâmica do sistema.

Além disso, a implementação de controladores requer a expertise em diferentes áreas da engenharia, tais como eletrônica analógica e digital, programação, processamento de sinais, circuitos elétricos, entre outras. Dessa forma, torna-se necessário integrar conhecimentos multidisciplinares para a implementação bem-sucedida de controladores em sistemas reais.

No entanto, no estudo de sistemas de controle, é comum que os discentes enfrentem desafios em seu primeiro contato com a área, especialmente devido à necessidade de aplicar abstrações matemáticas para representar a dinâmica de sistemas físicos. Essa etapa inicial pode parecer complexa, porém é crucial para a compreensão e domínio dos conceitos fundamentais envolvidos na análise e controle de sistemas.

Uma das principais razões pelas quais os estudantes encontram dificuldades é a transição do mundo físico para o mundo matemático abstrato, onde os sistemas são modelados por equações diferenciais, transformadas de Laplace e outros formalismos matemáticos. Para muitos, essa mudança pode parecer distante da realidade observada, o que pode causar alguma resistência inicial.

No entanto, para superar essa barreira de aprendizagem, é fundamental buscar métodos que possibilitem aos discentes visualizar a dinâmica desses sistemas de forma interessante. Uma



abordagem promissora é a utilização de protótipos, que permitem aos alunos observar a dinâmica analisada matematicamente no mundo real. Essa aplicação prática fornece uma conexão mais tangível entre os conceitos abstratos e suas aplicações concretas, tornando o aprendizado mais envolvente e compreensível.

Adicionalmente, o uso de simuladores pode ser altamente benéfico. Ao inserir as respostas obtidas por meio dos modelos matemáticos como entrada nos simuladores, o processo de aprendizado integra ferramentas matemáticas e de visualização. Dessa forma, os alunos podem interagir com os sistemas em diferentes cenários, observando como as variáveis influenciam o comportamento dos sistemas de controle. Essa abordagem interativa e experimental ajuda a solidificar conceitos e aprimorar a compreensão do funcionamento desses sistemas complexos.

Ao combinar a teoria matemática com a prática através de protótipos e simuladores, o processo de aprendizado torna-se mais fluido e estimulante. Os alunos podem perceber a relevância das abstrações matemáticas na resolução de problemas reais, o que reduzirá a resistência inicial e aumentará o interesse pela área de sistemas de controle.

## **1.2 Objetivos**

### **1.2.1 Objetivos Gerais**

Este trabalho visa realizar um estudo mais aprofundado do comportamento dinâmico de um aeropêndulo, utilizando técnicas de sistemas de controle. Para isso, será desenvolvido um projeto completo que integra um protótipo, um simulador e uma interface gráfica para plotagem de gráficos dos sinais em tempo real do sistema. Acrescentando a isso, a proposta é aplicar os conhecimentos obtidos durante a graduação e sintetizar as diferentes técnicas de sistemas de controle em uma planta física, com o intuito de observar o comportamento da dinâmica do sistema. Para essa tarefa, serão mescladas tecnologias de diferentes áreas do curso de engenharia elétrica, o que torna o projeto ainda mais interessante e desafiador.

### **1.2.2 Objetivos Específicos**

## **1.3 Escopo do Trabalho**

---

# REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

---

## **2.1 Modelagem e Controle de Sistemas**

### **2.1.1 Transformada Laplace**

### **2.1.2 Transformada Z**

### **2.1.3 Espaço de Estados**

## **2.2 Identificação de Sistemas**

### **2.2.1 Método dos Mínimos Quadrados**

## **2.3 Eletrônica Analógica e Digital**

### **2.3.1 Dispositivos Analógicos**

### **2.3.2 Dispositivos Digitais**

---

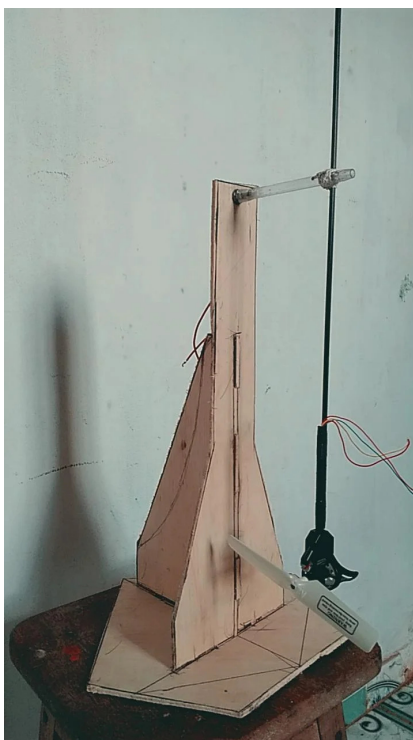
# PROTÓTIPO E SIMULADOR

---

## 3.1 Prototipagem

O projeto para o desenvolvimento do protótipo consiste em uma estrutura mecânica e componentes eletrônicos, a Figura 1 mostra o protótipo finalizado com a parte estrutural e elétrica montada.

Figura 1 – Protótipo do Aeropêndulo.



Fonte – Autor.

### **3.1.1 Parte estrutural do sistema**

O material escolhido para a estrutura foi o compensado, as chapas de compensado são materiais versáteis e amplamente utilizados na indústria da construção, marcenaria e artesanato. Elas são fabricadas a partir de finas lâminas de madeira, conhecidas como lâminas de folheado, coladas umas sobre as outras com fibras perpendiculares, conferindo maior estabilidade e resistência mecânica ao produto final.

### **3.1.2 Parte Elétrica do sistema**

### **3.1.3 Montagem do Protótipo**

## **3.2 Simulador usando Python**

### **3.2.1 Linguagem Python**

### **3.2.2 Biblioteca VPython**

### **3.2.3 Simulador Gráfico**

---

# INTERFACE GRÁFICA PARA VISUALIZAÇÃO E OBTENÇÃO DOS SINAIS DO SISTEMA

---

## **4.1 Partes que compõem a interface gráfica**

### **4.1.1 Conexão com o Microcontrolador**

### **4.1.2 Colhendo e armazenando os sinais dos ensaios**

### **4.1.3 Gráficos em tempo real**

## **4.2 Firmware de comunicação do microcontrolador com a interface**

### **4.2.1 Recebimento de sinais providos pela interface**

### **4.2.2 Envio dos sinais do sensor, controle, erro e tempo**

---

# DESENVOLVIMENTO

---

## 5.1 Fundamentação Teórica

O processo que envolve modelagem de sistemas físicos em termos de equações matemáticas é uma das partes mais importante no estudo de sistemas de controle. Segundo [Ogata \(2014, p. 11\)](#), O modelo matemático de um sistema dinâmico é definido como um conjunto de equações que representa a dinâmica do sistema com precisão ou, pelo menos, razoavelmente bem.

A dinâmica de muitos sistemas mecânicos, elétricos, térmicos, econômicos, biológicos ou outros pode ser descrita em termos de equações diferenciais. Essas equações diferenciais são obtidas pelas leis físicas que regem dado sistema — por exemplo, as leis de Newton para sistemas mecânicos e as leis de Kirchhoff para sistemas elétricos. Devemos sempre ter em mente que construir modelos matemáticos adequados é a parte mais importante da análise de sistemas de controle como um todo, [Ogata \(2014, p. 11\)](#).

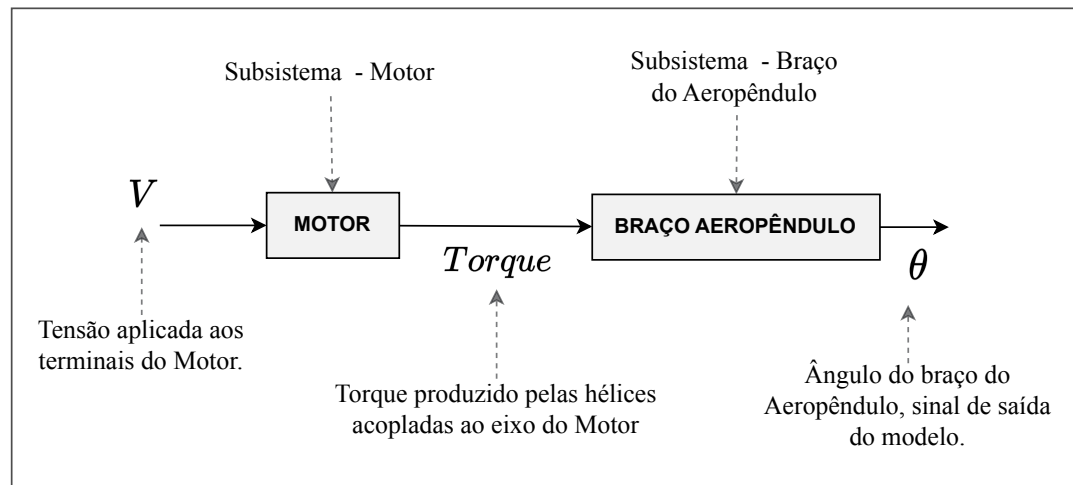
Para realizar a modelagem do aeropêndulo pode-se aplicar diferentes métodos,

## 5.2 Modelagem Matemática Clássica Aplicada ao Aeropêndulo

Uma abordagem inicial para modelar sistemas físicos consiste em empregar as leis fundamentais da física. Além disso, em situações mais complexas, é viável decompor o sistema em subsistemas menores e, em seguida, desenvolver modelos para cada um deles. Por fim, é possível conectar esses modelos, de forma a obter uma representação aproximada do sistema real. Dessa maneira, podemos obter uma compreensão mais aprofundada e abrangente da dinâmica do sistema em

questão. A Figura 2 mostra um diagrama da representação do Aeropêndulo como um conjunto de subsistemas.

Figura 2 – Subsistemas do Aeropêndulo.



Fonte – Autor.

### 5.2.1 Modelo Matemático do Motor CC Série

Os motores CC série tem como principal característica possuir o enrolamento de campo em série com o enrolamento de armadura, essa configuração resulta em um motor com torque de partida alto, porém, o torque reduz a medida que a velocidade aumenta devido ao aumento da Força Eletromotriz FEM. Por conta desse aumento de FEM os motores CC Séries tem uma regulação de velocidade ruim, quando se aumenta a carga no eixo do motor a velocidade é reduzida que por sua vez reduz a FEM e então o torque aumenta para conseguir atuar na carga.

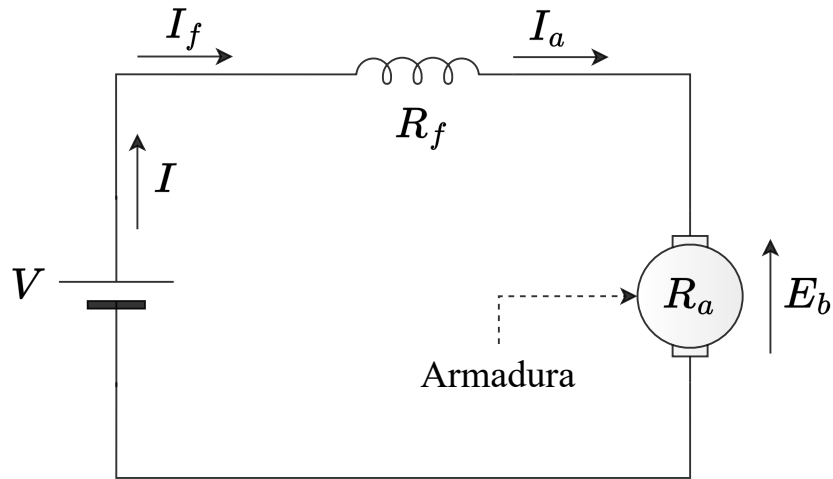
No motor série, o aumento de carga é acompanhado por elevações da corrente, da FMM de armadura e do fluxo de campo do estator (desde que o ferro não esteja completamente saturado). Como o fluxo aumenta com a carga, a velocidade deve cair para se manter o equilíbrio entre a tensão aplicada e a força contraeletromotriz. Além disso, o aumento na corrente de armadura, causado pelo aumento de conjugado, é menor do que no motor em derivação devido ao aumento de fluxo. O motor série é, portanto, um motor de velocidade variável, [Umans \(2014, p. 410\)](#).

No entanto, mesmo motores cc série com dimensões reduzidas geram torques altos com baixo consumo de corrente. Visando melhorar seu desempenho, é possível projetar controladores de malha fechada capazes de tornar esses motores mais eficientes na regulação de velocidade.

([LICEAGA-CASTRO et al., 2017](#)) foi usando como base para realizar a modelagem o motor CC série, A Figura 3 mostra um diagrama da configuração do motor CC Série, no qual o enrolamento

de campo está conectado em série com o enrolamento de armadura, dessa forma, a corrente de campo é igual a corrente de armadura  $i = i_f = i_a$ .

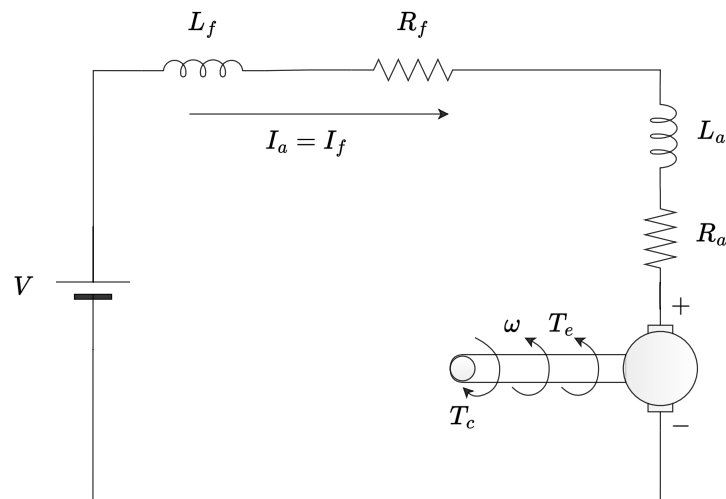
Figura 3 – Motor CC Série.



Fonte – Adaptado de (LICEAGA-CASTRO *et al.*, 2017).

Na Figura 4, mostra o diagrama eletromecânico do motor, nele pode-se observar que os componentes elétricos estão todos em série, no qual o enrolamento de campo possui uma parte resistiva e outra indutiva, assim como o enrolamento de armadura, já a parte mecânica possui uma velocidade angular dada por  $\omega$ , torque eletromagnético do motor dado por  $T_e$  e torque da Carga  $T_c$ .

Figura 4 – Diagrama Elétrico/Mecânico Motor CC Série.



Fonte – Adaptado de (LICEAGA-CASTRO *et al.*, 2017).



### 5.2.1.1 Modelagem da Parte Mecânica do Motor CC Série

Primeiramente a parte mecânica do motor será modelada, um motor cc série é composto por uma parte rotativa "armadura", de modo que, essa parte, gera um momento de inércia  $J_m$  no eixo do motor e um fator de amortecimento viscoso  $b$ , além disso, o eixo possui uma velocidade angular  $\dot{\omega}$ .

Assim, a equação 5.1, obtida a partir de (LICEAGA-CASTRO *et al.*, 2017), descreve o modelo mecânico do motor CC Série.

$$J_m \ddot{\omega}(t) = T_e(t) - b\dot{\omega}(t) - T_c(t) \quad (5.1)$$

Ao expressar o torque  $T_e(t)$  em função das outras variáveis, obtém-se a equação 5.2.

$$T_e(t) = J_m \ddot{\omega}(t) + b\dot{\omega}(t) + T_c(t) \quad (5.2)$$

Onde:

- $T_e$ : Torque Eletromagnético produzido pelo Motor;
- $J_m$ : Momento de Inércia do Eixo do Motor;
- $\ddot{\omega}$ : Aceleração Angular do Eixo do Motor;
- $\dot{\omega}$ : Velocidade Angular do Eixo do Motor;
- $b$ : Fator de Amortecimento Viscoso;
- $T_c$ : Torque de Carga.

Tanto a Força Eletromotriz  $E_A(t)$  quanto o Torque Eletromagnético  $T_e(t)$  dependem do fluxo magnético do entreferro  $\Phi$ , com isso, tem-se as equações 5.3 e 5.4.

$$E_a(t) = \dot{\omega}(t)\Phi(i) \quad (5.3)$$

$$T_e(t) = i(t)\Phi(i) \quad (5.4)$$

O Fluxo magnético depende da corrente  $i(t)$ , assim, as equações 5.1 e 5.2 são não-lineares. Além disso, pode-se aproximar o fluxo  $\Phi$  por uma relação linear,  $K_0$ , ao desprezar a saturação magnética.

$$\Phi(i) = K_0 i(t) \quad (5.5)$$

A constante  $K_0$  é a indutância mútua entre a armadura e o enrolamento de campo. Agora pode-se encontrar o modelo não-linear da parte mecânica do Motor CC Série, substituindo 5.5 em 5.4, obtém-se a expressão 5.7:

$$T_e(t) = i(t)K_0i(t) \quad (5.6)$$

$$T_e(t) = K_0i^2(t) \quad (5.7)$$

Substituindo 5.7 em 5.2, é possível encontrar o modelo da parte mecânica do motor CC série, assim, tem-se a expressão 5.8.

$$K_0i^2(t) = J_m\ddot{\omega}(t) + b\dot{\omega}(t) + T_c(t) \quad (5.8)$$

#### 5.2.1.2 Modelagem da Parte Elétrica do Motor CC Série

Para a parte elétrica, utilizou-se a lei de Kirchhoff das tensões para modelar o sistema. assim como a parte mecânica, o modelo da parte elétrica foi baseado de (LICEAGA-CASTRO *et al.*, 2017), o motor em questão é um motor de corrente contínua CC série, Dessa forma,  $i_a = i_f$ , portanto, obtém-se a expressão 5.9.

$$V(t) = (R_a + R_f)i(t) + (L_a + L_f)\frac{d}{dt}i(t) + E_a \quad (5.9)$$

Onde:

- $V$ : Tensão da Fonte;
- $R_a$ : Resistência da Armadura;
- $R_f$ : Resistência de Campo;
- $i_a$ : Corrente da Armadura;
- $i_f$ : Corrente de Campo;
- $E_A$ : Tensão Contro Eletromotriz Gerada pela Armadura;
- $L_a$ : Impedância da Armadura;
- $L_f$ : Impedância de Campo.

Como os componentes elétricos então em série, pode-se obter uma resistência total assim como uma indutância:

$$R = R_a + R_f \quad (5.10)$$

$$L = L_a + L_f \quad (5.11)$$

$$V(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt}i(t) + E_a \quad (5.12)$$

Substituindo 5.5 em 5.3, obtém-se a equação 5.13.

$$E_a(t) = \dot{\omega}(t)K_0i(t) \quad (5.13)$$

Por fim, pode-se encontrar a equação que descreve a parte elétrica do sistema ao substituir 5.13 em 5.12, assim, obtendo a equação 5.14.

$$V(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt}i(t) + \dot{\omega}(t)K_0i(t) \quad (5.14)$$

Dessa forma, as equações que modelam um Motor CC série são expressas por 5.15 e 5.16, em que 5.15 esta relacionada a parte mecânica e 5.16 a parte elétrica.

$$K_0i^2(t) = J_m\ddot{\omega}(t) + b\dot{\omega}(t) + T_c(t) \quad (5.15)$$

$$V(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt}i(t) + \dot{\omega}(t)K_0i(t) \quad (5.16)$$

### 5.2.1.3 Linearização do modelo do Motor CC Série

Para projetos de controle lineares é preciso linearizar o modelo encontrado, para isso, vamos reorganizar as equações 5.15 e 5.16, assim obtêm-se as equações 5.17 e 5.18:

$$\ddot{\omega}(t) = \frac{K_0}{J_m}i^2(t) - \frac{b}{J_m}\dot{\omega}(t) - \frac{1}{J_m}T_c(t) \quad (5.17)$$

$$\frac{d}{dt}i(t) = \frac{R}{L}i(t) - \frac{K_0}{L}\dot{\omega}(t)i(t) + \frac{1}{L}V(t) \quad (5.18)$$

reescrevendo as equações de estados na forma matricial,

$$x_1 = \dot{\omega} \quad (5.19)$$

$$x_2 = i \quad (5.20)$$

Coeficientes da equação de estado 5.17.

$$a_1 = \frac{K_0}{J_m}; \quad a_2 = \frac{b}{J_m}; \quad a_3 = \frac{1}{J_m} \quad (5.21)$$

Coeficientes da equação de estado 5.18.

$$b_1 = \frac{R}{L}; \quad b_2 = \frac{K_0}{L}; \quad b_3 = \frac{1}{L} \quad (5.22)$$

Representação no espaço de estados do motor CC Série não-linear

$$\dot{x}_1 = a_1 x_2^2 - a_2 x_1 - a_3 T_c \quad (5.23)$$

$$\dot{x}_2 = -b_1 x_2 - b_2 x_1 x_2 + b_3 V \quad (5.24)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 x_2^2 - a_2 x_1 - a_3 T_c \\ -b_1 x_2 - b_2 x_1 x_2 + b_3 V \end{bmatrix} = f(x, u) \quad (5.25)$$

O ponto de equilíbrio  $(x_1^0, x_2^0)$  das equações 5.23 e 5.24 é encontrado zerando as derivadas, como mostrado em 5.26 e 5.27.

$$x_2^0 = \sqrt{\frac{a_2 x_1^0 + a_3 T_c}{a_1}} \quad (5.26)$$

$$V = \frac{x_2^0 (b_1 + b_2 x_1^0)}{b_3} \quad (5.27)$$

A linearização de 5.23 e 5.24 em torno do ponto de equilíbrio é obtida encontrando o jacobiano das mesmas, assim se obtêm as matrizes  $A$  e  $B$ .

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5.28)$$

$$y = Cx \quad (5.29)$$

Em que,

$$A = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x_1^0, x_2^0} = \begin{bmatrix} -a_2 & 2a_1x_2^0 \\ -b_2x_2^0 & -(b_1 + b_2x_1^0) \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$B = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial u} \right|_{x_1^0, x_2^0} = \begin{bmatrix} -a_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

$$C = [1, 0] \quad (5.32)$$

$$(5.33)$$

Onde,

$$u = \begin{bmatrix} T_c \\ V \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$y = \dot{\omega}(t) \quad (5.35)$$

Se o torque de carga for considerado zero,  $T_c = 0$ , temos as seguintes expressões,

$$x_2^0 = \sqrt{\frac{a_2x_1^0}{a_1}}; \quad V = \frac{x_2^0(b_1 + b_2x_1^0)}{b_3}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Agora é possível encontrar a função de transferência  $G(s)$  associada as matrizes de estados  $A, B, C$  linearizadas, para isso usa-se a expressão 5.37.

$$G(s) = \frac{\dot{\omega}(s)}{V(s)} = C(sI - A)^{-1}B \quad (5.37)$$

Substituindo as matrizes  $A, B$  e  $C$  em 5.37, chega-se a expressão 5.38.

$$G(s) = \frac{\dot{\omega}(s)}{V(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left( s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a_2 & 2a_1x_2^0 \\ -b_2x_2^0 & -(b_1 + b_2x_1^0) \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -a_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Assim, obtém-se a função de transferência linearizada em função dos parâmetros do motor CC Série, como mostra a equação 5.39.

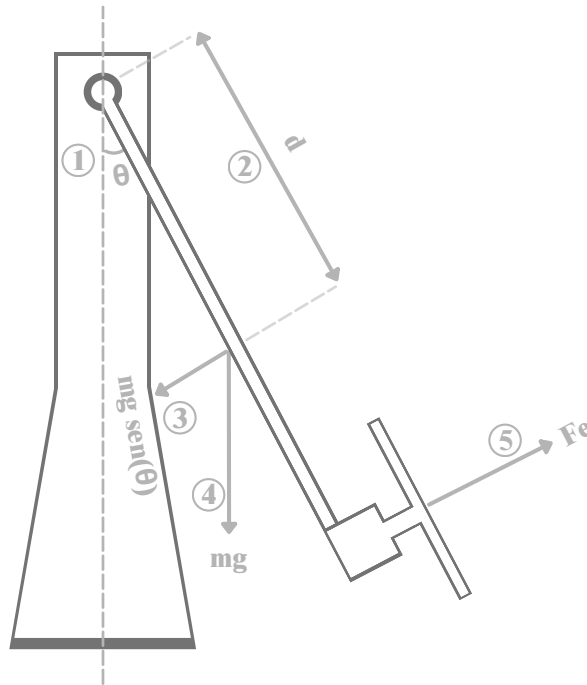
$$G(s) = \frac{\dot{\omega}(s)}{V(s)} = \frac{2K_0 \sqrt{\frac{bx_1^0}{K_0}}}{J_m L s^2 + 3K_0 b x_1^0 + Rb + s(J_m K_0 x_1^0 + J_m R + Lb)} \quad (5.39)$$

### 5.2.2 Modelo Matemático Braço do Aeropêndulo

Os sistemas mecânicos têm como uma de suas características os graus de liberdade, da sigla em inglês 6DoF - (Six degrees of freedom) que em português quer dizer (Seis graus de liberdade), com esses seis graus de liberdade é possível mover a planta em todas as direções e ângulos, o aeropêndulo tem um grau de liberdade, sendo o ângulo  $\theta$ , assim o sistema tem apenas uma variável a ser controlada a partir do empuxo gerado pelas hélices, que por sua vez depende da velocidade angular do eixo do motor CC Série acoplado ao braço do aeropêndulo. dessa forma, podemos analisar o sistema a partir da entrada e da saída, sendo a entrada a tensão no motor e a saída o ângulo  $\theta$  do braço do aeropêndulo.

como discutido antes, pode-se dividir o sistema em dois subsistemas, o motor CC Série e o braço do aeropêndulo. para o motor CC Série, já foi realizada a modelagem na sessão 5.2.1, para essa sessão será realizada a modelagem do braço do aeropêndulo, (MOHAMMADBAGHERI; YAGHOOBI, 2011) foi usando como base para se obter a equação que modela a dinâmica do braço.

Figura 5 – Diagrama esquemático do Aeropêndulo.



Fonte – Autor.

O modelo matemático do braço do aeropêndulo é derivado a partir das leis de Newton e do momento angular, como mostra (MOHAMMADBAGHERI; YAGHOOBI, 2011). assim, se obtém a equação 5.40.

$$F_e = J_b \ddot{\theta} + c \dot{\theta} + mgd \sin \theta \quad (5.40)$$

Onde:

- $F_e$ : Empuxo gerado pela hélice
- $J_b$ : Momento de inércia do Braço
- $\theta$ : posição angular do Aeropêndulo
- $c$ : coeficiente de amortecimento viscoso
- $m$ : massa do Aeropêndulo
- $d$ : a distância entre o centro de massa e o ponto de pivô

A entrada do subsistema do braço do aeropêndulo é a força de empuxo proporcionada pela hélice, porém, o modelo do motor CC Série tem como saída a velocidade angular, dessa forma é preciso encontrar uma relação entre a velocidade  $\dot{\omega}$  e o empuxo  $F_e$ , essa relação é não linear como mostra [xx],  $F_e = K_m \dot{\omega}^2$ , porém é possível aproximar por uma relação linear,  $F_e = K_m \dot{\omega}$ . Com isso, pode-se relacionar a velocidade angular  $\dot{\omega}$  com o empuxo  $F_e$  gerado pela hélice do aeropêndulo.

O modelo encontrado tem uma parcela não linear dada por  $\sin \theta$ , para aplicar técnicas de projeto de controle é preciso obter o modelo linearizado da planta, isso pode ser feito considerando  $\sin \theta \approx \theta$  para pequenas variações em torno de  $\theta$ . dessa forma, temos a seguinte linearização:

$$F_e = J_b \ddot{\theta} + c \dot{\theta} + mgd\theta \quad (5.41)$$

Aplicando a transformada de Laplace para encontrar a função de transferência do subsistema, tem-se:

$$F_e(s) = s^2 J_b \theta(s) + sc \theta(s) + mgd \theta(s) \quad (5.42)$$

$$F_e(s) = (s^2 J_b + sc + mgd) \theta(s) \quad (5.43)$$

$$\frac{\theta(s)}{F_e(s)} = \frac{1}{s^2 J_b + sc + mgd} \quad (5.44)$$

Agora que foi obtido o modelo do braço do aeropêndulo, pode-se usar a relação linearizada  $F_e = K_m \dot{\omega}$  para usar a saída do modelo do motor cc série como entrada do modelo do braço do aeropêndulo, como mostrado na equação 5.47.

$$\frac{\theta(s)}{K_m \dot{\omega}(s)} = \frac{1}{s^2 J_b + sc + mgd} \quad (5.45)$$

$$\frac{\theta(s)}{\dot{\omega}(s)} = \frac{K_m}{s^2 J_b + sc + mgd} \quad (5.46)$$

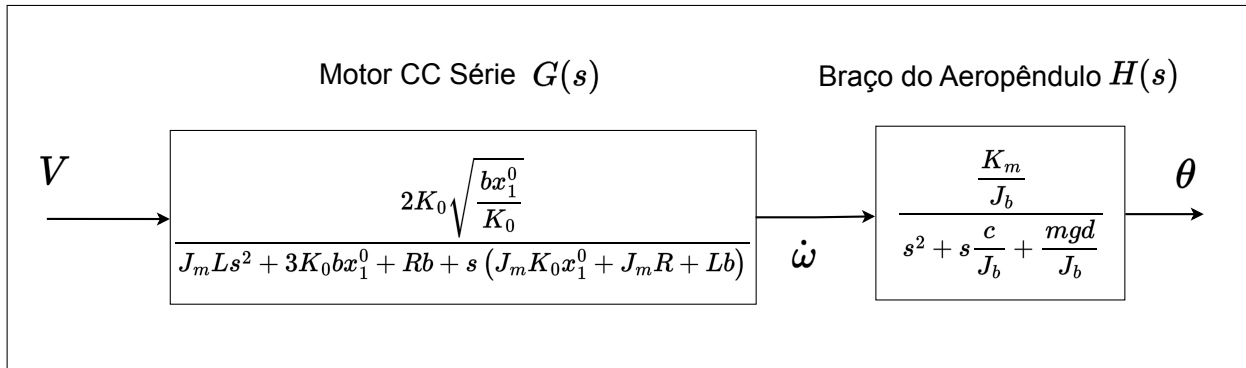
$$H(s) = \frac{\theta(s)}{\dot{\omega}(s)} = \frac{\frac{K_m}{J_b}}{s^2 + s \frac{c}{J_b} + \frac{mgd}{J_b}} \quad (5.47)$$

A equação 5.47 é a função de transferência do braço do aeropêndulo.

### 5.2.3 Junção dos subsistemas

A partir dos modelos encontrados nas subseções 5.2.1 e 5.2.2 pode-se obter o modelo completo do sistema unindo os subsistemas como mostra a figura 6. com isso, é possível modelar o Aeropêndulo tendo como entrada a tensão no motor CC série e como saída o ângulo do braço.

Figura 6 – Diagrama da junção dos subsistemas do Aeropêndulo.



Fonte – Autor.

Para obter uma função de transferência que relacione a tensão dos terminais do motor com o ângulo do braço do Aeropêndulo, pode-se multiplicar as funções de transferências 5.39 e 5.47 dos subsistemas como mostrado em 5.48, já que estão em série.

$$\frac{\dot{\omega}(s)}{V(s)} \cdot \frac{\theta(s)}{\dot{\omega}(s)} = \frac{2K_0\sqrt{\frac{bx_1^0}{K_0}}}{J_m L s^2 + 3K_0 b x_1^0 + Rb + s(J_m K_0 x_1^0 + J_m R + Lb)} \cdot \frac{\frac{K_m}{J_b}}{s^2 + s\frac{c}{J_b} + \frac{mgd}{J_b}} \quad (5.48)$$

Com isso, encontra-se um modelo matemático linear para representar o sistema, como mostrado em 5.49.

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{2K_0\sqrt{\frac{bx_1^0}{K_0}} \cdot \frac{K_m}{J_b}}{J_m L s^2 + 3K_0 b x_1^0 + Rb + s(J_m K_0 x_1^0 + J_m R + Lb) \cdot \left(s^2 + s\frac{c}{J_b} + \frac{mgd}{J_b}\right)} \quad (5.49)$$

## 5.3 Modelagem por Identificação de Sistemas Aplicada ao Aeropêndulo



---

# PROJETO DE CONTROLADORES

---

## **6.1 Projeto de Controle por LGR**

### **6.1.1 Obtendo o Controlador**

### **6.1.2 Discretização do controlador Transformada Z**

### **6.1.3 Implementação do Controlador no Microcontrolador**

## **6.2 Projeto de Controle por Espaço de Estados**

### **6.2.1 Obtendo o Controlador**

### **6.2.2 Discretização do controlador Transformada Z**

### **6.2.3 Implementação do Controlador no Microcontrolador**

---

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

---

---

# CONCLUSÃO

---

## 8.0.1 Considerações Finais

## 8.0.2 Trabalhos Futuros

---

# REFERÊNCIAS

---

LICEAGA-CASTRO, J. U.; SILLER-ALCALÁ, I. I.; JAIMES-PONCE, J.; ALCÁNTARA-RAMÍREZ, R. Series dc motor modeling and identification. In: *2017 International Conference on Control, Artificial Intelligence, Robotics Optimization (ICCAIRO)*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 248–253. 8, 9, 10, 11

MOHAMMADBAGHERI, A.; YAGHOUBI, M. A new approach to control a driven pendulum with pid method. In: *2011 UkSim 13th International Conference on Computer Modelling and Simulation*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 207–211. 15

OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Brasil: Pearson Education do Brasil, 2014. 7

UMANS, S. *Máquinas Elétricas de Fitzgerald e Kingsley - 7.ed.* AMGH Editora, 2014. ISBN 9788580553741. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=3Fa2AwAAQBAJ>>. 8