

# Doplnkový text

## Obsah

<b>1</b>	<b>Kyvadlo</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Niekoľko (dost' veľa) úvodných pojmov</b>	<b>2</b>
2.1	Modelovanie systému . . . . .	2
2.2	Numerické riešenie diferenciálnych rovníc (a ODE solver) . . . . .	4
2.2.1	ODE solver . . . . .	4
2.2.2	Rovnica vyššieho rádu ako sústava rovníc 1. rádu . . . . .	4
2.2.3	Používanie ODE solvera . . . . .	6
2.3	Vektorové pole a fázový portrét . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Stabilita</b>	<b>10</b>
3.1	Stabilita lineárnych systémov . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Linearizácia a jej použitie pri analýze stability</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Analýza stability pomocou Lyapunovových funkcií</b>	<b>14</b>
5.1	Lyapunovove funkcie . . . . .	14
5.2	Analýza stability . . . . .	15
5.3	Lyapunovova rovnica . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Otázky a úlohy</b>	<b>17</b>

CIELOM tohto textu je najmä uviesť vybrané výsledky Lyapunovovej teórie stability tak ako sú používané v ďalších častiach predmetu. K tomu je však potrebné pripomenúť niektoré pojmy z teórie systémov. Zároveň táto časť slúži na zoznámenie sa s označovaním a zapisovaním, aké je používané v rámci textov k predmetu. Všetky uvedené pojmy a princípy budú ilustrované pomocou názorných príkladov, kde skúmaným systémom bude kyvadlo.

## 1 Kyvadlo

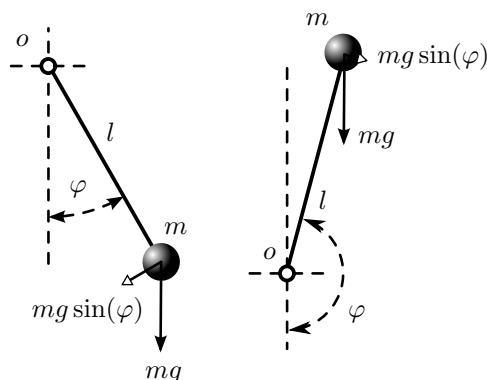
Uvažujme kyvadlo, ktorého kmity sú tlmené viskóznym trením s koeficientom  $\beta$  [kg m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>]. Kyvadlo je na Obr. 1, kde hmotný bod s hmotnosťou  $m$  [kg] pripevnený na rameno so zanedbateľnou hmotnosťou a dĺžkou  $l$  [m] kmitá,  $o$  označuje os otáčania kolmú na rovinu, v ktorej kyvadlo kmitá, uhol medzi zvislicou a ramenom kyvadla je označený  $\varphi$  [rad] a gravitačné zrýchlenie  $g$  [m s<sup>-2</sup>].

Pohybová rovnica opisujúca dynamiku rotačného pohybu kyvadla je v tvare

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -\beta \dot{\varphi} - mgl \sin \varphi + u \quad (1a)$$

$$ml^2 \ddot{\varphi} + \beta \dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = u \quad (1b)$$

kde  $u$  [kg m<sup>2</sup> s<sup>-2</sup>] je externý moment sily pôsobiaci na rameno kyvadla,  $\dot{\varphi}$  [rad s<sup>-1</sup>] je uhlová rýchlosť a  $\ddot{\varphi}$  [rad s<sup>-2</sup>] je uhlové zrýchlenie ramena kyvadla.



Obr. 1: Kyvadlo

## 2 Niekoľko (dosť veľa) úvodných pojmov

### 2.1 Modelovanie systému

Rovnica (1) je modelom uvažovaného dynamického systému. Model je matematická reprezentácia v tomto prípade fyzikálneho systému. Model umožňuje uvažovať o systéme a predpovedať ako sa bude systém správať. Uvedený model opisuje vstupno-výstupné správanie sa dynamického systému, kde vstupom je externý moment sily  $u$  a výstupom je uhol  $\varphi$ , avšak budeme pracovať aj opisom systému v „stavovom priestore“.

Stav systému je súbor premenných (súbor veličín), ktoré sumarizujú minulosť systému pre potreby predpovede budúcnosti systému. Pre fyzikálny systém je stav zložený z premenných potrebných pre výpočet zmeny hmotnosti, hybnosti a energie. Kľúčovou otázkou pri vytváraní modelu je ako presne má byť táto zmena popísaná.

Stavové premenné tvoria vektor  $x \in \mathbb{R}^n$ , ktorý sa nazýva *stavový vektor*. Vstupy, pomocou ktorých je systém riadený, tvoria vektor vstupov  $u \in \mathbb{R}^p$  a merateľné výstupy systému tvoria vektor výstupov  $y \in \mathbb{R}^q$ . V tomto prípade máme  $p = q = 1$ . Dynamický systém potom možno reprezentovať rovnicami v tvare

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2a)$$

$$y = h(x, u) \quad (2b)$$

kde  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  a  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  sú hladké funkcie. Model v takomto tvare nazývame *model v stavovom priestore*.

Rozmer stavového vektora sa nazýva *řád systému*. Systém (2) sa nazýva *časovo-invariantný* pretože funkcie  $f$  a  $h$  nie sú priamo závislé na čase  $t$ . Pri časovo-variantných systémoch sú. Model pozostáva z dvoch funkcií: funkcia  $f$  určuje rýchlosť zmeny stavového vektora ako funkciu stavu  $x$  a vstupu  $u$ , a funkcia  $h$  určuje merateľné výstupy ako funkciu stavu  $x$  a vstupu  $u$ .

Systém sa nazýva *lineárny* ak sú funkcie  $f$  a  $h$  lineárne vzhľadom na  $x$  a  $u$ . Lineárny model v stavovom priestore má tvar

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3a)$$

$$y = Cx + Du \quad (3b)$$

Tabuľka 1: Parametre kyvadla

Parameter	Hodnota	Jednotky
$m$	1	kg
$l$	1	m
$g$	9,81	m s <sup>-2</sup>
$\beta$	$2 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{g/l}$	kg m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>

kde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$  sú konštantné matice. Takýto systém sa nazýva lineárny a časovo-invariantný, v skratke LTI z anglického linear and time-invariant. Matica  $A$  sa nazýva dynamická matica, matica  $B$  sa nazýva vstupná matica, matica  $C$  sa nazýva výstupná matica a matica  $D$  sa nazýva priamy člen. Drvivá väčšina systémov nemá priamy člen, čo znamená, že vstup nemá priamy vplyv na výstup.

Iná forma lineárnych diferenciálnych rovníc, ktorá je zovšeobecnením avšak linearizovanej dynamickej rovnice kyvadla (o linearizácii neskôr), má tvar

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)} y}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_0 y = b_0 u \quad (4)$$

kde  $t$  je nezávisle premenná (čas),  $y(t)$  je závisle premenná (výstup) a  $u(t)$  je vstup. Zápis  $\frac{d^n y}{dt^n}$  značí  $n$ -tú deriváciu  $y$  podľa času  $t$  (namiesto  $n$  bodiek). Hovoríme, že rovnica (4) je diferenciálna rovnica  $n$ -tého rádu, ktorá modeluje dynamiku systému  $n$ -tého rádu. Tento model môže byť konvertovaný na model v stavovom priestore napríklad definovaním stavového vektora v tvare

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{(n-1)} y}{dt^{(n-1)}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

potom model v stavovom priestore možno zapísať v tvare

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & x_{n-1} \\ & & & x_{n-2} \\ & & & \vdots \\ -a_{n-1}x_n & -\dots & -a_0x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 u \end{bmatrix} \quad (6a)$$

$$y = x_1 \quad (6b)$$

čo po vhodnej definícii matíc  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$  má tvar (3).

Ešte všeobecnejší systém získame ak výstup bude lineárnou kombináciou všetkých stavových veličín (predpokladáme, že výstup nezávisí priamo od vstupu), teda

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (7)$$

Potom model v stavovom priestore je

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \quad (8a)$$

$$y = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{n-2} \ c_{n-1} \ c_n] x \quad (8b)$$

Vráťme sa späť k nelineárnym dynamickým systémom. Model kyvadla (1b) je nelineárna diferenciálna rovnica. Rovnicu (1b) upravíme na tvar

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\beta}{ml^2} \dot{\varphi} - \frac{g}{l} \sin(\varphi) + \frac{1}{ml^2} u \quad (9)$$

Stavom kyvadla sú dve veličiny: uhol natočenia ramena kyvadla  $\varphi$  a uhlová rýchlosť ramena kyvadla  $\dot{\varphi}$ . Stavový vektor má preto dva prvky  $x^T = [x_1 \ x_2]$ , kde  $x_1 = \varphi$  a  $x_2 = \dot{\varphi}$ . Model kyvadla v stavovom priestore je v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\beta}{ml^2} x_2 - \frac{g}{l} \sin(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u \quad (10a)$$

$$\varphi = x_1 \quad (10b)$$

Toto je nelineárny časovo-invariantný systém druhého rádu.

Mimochodom, miestami v ďalšom texte budeme uvažovať tento systém, avšak bez vstupu, inými slovami externý moment sily je nulový,  $u = 0$ . Potom

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\beta}{ml^2}x_2 - \frac{g}{l}\sin(x_1) \end{bmatrix} \quad (11a)$$

$$\varphi = x_1 \quad (11b)$$

Toto je autonómny nelineárny časovo-invariantný systém druhého rádu. Jeho správanie závisí len od začiatočného stavu na začiatku uvažovaného času.

## 2.2 Numerické riešenie diferenciálnych rovníc (a ODE solver)

Majme rovnicu opisujúcu dynamiku rotačného pohybu kyvadla. Rovnica je v tvare

$$ml^2\ddot{\varphi}(t) + \beta\dot{\varphi}(t) + mgl\sin\varphi(t) = u(t) \quad (12)$$

Samozrejme, ide o diferenciálnu rovnicu. Presnejšie o obyčajnú diferenciálnu rovnicu 2. rádu, ktorá je nehomogénna (vyskytuje sa v nej „externý signál“ (vstup)). Cieľom je nájsť numerické riešenie tejto rovnice pre dané začiatočné podmienky a pre prípadné dané vstupy (vstupné signály).

Analytické riešenie diferenciálnej rovnice je v podstate nejaká funkcia času (a prípadne iných veličín). Numerické riešenie je postupnosť hodnôt, číselných hodnôt, ktoré pri daných predpokladoch vyhovujú diferenciálnej rovnici. Je postupnosť hodnôt - vektor hodnôt, ku ktorému prislúcha časový vektor určujúci časovú postupnosť hodnôt numerického riešenia. Tu sme vynechali pár miliónov detailov, ale snáď sa dá vytušiť, čo sa tu myslí pod numerickým riešením.

### 2.2.1 ODE solver

Pre hľadanie numerického riešenia využijeme ODE solver. ODE je skratka pre obyčajné diferenciálne rovnice (ordinary differential equation).

Úlohou ODE solvera je nájsť numerické riešenie na základe rovnice (diferenciálnej), ktorú je možné vo všeobecnosti zapísať v tvare

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \dots) \quad (13)$$

kde  $f$  je funkcia, ktorej argumenty sú čas  $t$ , prirodzene, samotný výstupný (hľadaný, neznámy) signál  $x(t)$  a prípadne iné ďalšie parametre či veličiny - napríklad externý vstup. Uvedená rovnica doslova predpisuje aká je časová zmena signálu  $x(t)$ . Časová zmena signálu, inými slovami časová derivácia (derivácia podľa času) je označená ako  $\dot{x}(t)$ .

Ak teda do funkcie  $f$  dosadíme hodnoty argumentov (čas, signál  $x(t)$ , a prípadne iné), získame hodnotu časovej zmeny  $\dot{x}(t)$ . Na základe informácie o  $\dot{x}(t)$ , ktorá zodpovedá aktuálnemu (dosadenému) signálu  $x(t)$ , môžeme určiť hodnotu  $x(t)$  o nejaký čas neskôr. Túto novú hodnotu  $x(t)$  možno opäť dosadiť do funkcie  $f$  a následne nájsť ďalšiu ešte ďalej v čase - atď. ODE solver využíva práve tento jednoduchý princíp pre postupné hľadanie hodnôt (numerických hodnôt) signálu  $x(t)$ .

Vo všeobecnosti sa uvedený princíp nazýva numerická integrácia. ODE solver teda numericky integruje. Je množstvo metód pre numerickú integráciu, ktoré sa líšia spôsobom riešenia problémov súvisiacich so samotným procesom numerickej integrácie (voľba (optimalizácia) časového kroku integrácie, zohľadnenie matematických vlastností daného typu diferenciálnych rovníc a iné). ODE solvre sa môžu líšiť aj samotnou implementáciou niektorej z metód numerickej integrácie. Podrobnejší opis ODE solvera je nad rámec tohto textu.

### 2.2.2 Rovnica vyššieho rádu ako sústava rovníc 1. rádu

ODE solver z princípu pracuje s diferenciálnou rovnicou prvého rádu, prípadne so sústavou diferenciálnych rovníc 1. rádu. Napríklad sústavu dvoch rovníc prvého rádu

je možné vo všeobecnosti zapísať v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = F \left( t, \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \dots \right) \quad (14)$$

V našom prípade hľadáme riešenie pre rovnicu druhého rádu. Každú diferenciálnu rovnicu vyššieho rádu je možné zapísať ako sústavu rovníc prvého rádu. V takejto novej sústave rovníc, vo všeobecnosti, vznikli nové veličiny (signály), ktoré sa vo všeobecnosti môžu líšiť od pôvodných veličín (signálov) v pôvodnej rovnici vyššieho rádu.

Nové veličiny vystupujúce v sústave rovníc sa v teórii systémov súhrnne označujú ako stav systému (stavové veličiny systému). Ak poznáme aktuálny stav systému potom spravidla vieme určiť predchádzajúce aj budúce stavy (vo všeobecnosti).

Napr. v rovnici kyvadla vystupujú veličiny (signály)  $\ddot{\varphi}(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$  a  $\varphi(t)$ . Je zrejmé (možno nie nad slnko jasné), že ako stav systému je možné zvoliť veličiny  $\varphi(t)$  a  $\dot{\varphi}(t)$ , teda polohu a uhlovú rýchlosť kyvadla. Ak poznáme tieto, poznáme celú históriu a budúcnosť pohybu kyvadla.

Môže existovať viac možností voľby stavových veličín. Pri lineárnych systémoch je možností nekonečne veľa (nekonečne veľa stavových priestorov). Z praktického hľadiska však majú význam len niektoré voľby - napr. pri pohybových systémoch, akým je kyvadlo, sú to prirodzene polohy, rýchlosti, zrýchlenie, trh atď., v závislosti od rádu systému.

Jednou z možností ako previesť rovnicu vyššieho rádu na sústavu rovníc prvého rádu je nasledovný postup. V tomto prípade je zhodou okolností výsledkom aj prakticky využiteľný stavový priestor (stavové veličiny  $\varphi(t)$  a  $\dot{\varphi}(t)$ ). Nech

$$x_1(t) = \varphi(t) \quad (15)$$

potom

$$\dot{x}_1(t) = \dot{\varphi}(t) \quad (16)$$

Ďalej nech

$$\dot{x}_1(t) = \dot{\varphi}(t) = x_2(t) \quad (17)$$

a to znamená, že

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{\varphi}(t) \quad (18)$$

Tým sme získali veličiny  $x_1(t) = \varphi(t)$  a  $x_2(t) = \dot{\varphi}(t)$ . Je možné zostaviť stavový vektor  $x = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$  a teda  $\dot{x} = [\dot{x}_1(t) \ \dot{x}_2(t)]^T$ .

Cieľom je konkretizovať funkciu  $F$  v rovnici

$$\dot{x} = F(t, x, \dots) \quad (19)$$

čo je kompaktný zápis sústavy

$$\dot{x}_1(t) = F_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots) \quad (20)$$

$$\dot{x}_2(t) = F_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots) \quad (21)$$

Prvú rovnicu v tomto prípade máme:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (22)$$

Druhá rovnica vyplynie z postrehu, že pôvodnú rovnicu druhého rádu možno zapísať v tvare

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}(t) &= -\frac{\beta}{ml^2} \dot{\varphi}(t) - \frac{g}{l} \sin(\varphi(t)) + \frac{1}{ml^2} u(t) \\ &= -\frac{\beta}{ml^2} x_2(t) - \frac{g}{l} \sin(x_1(t)) + \frac{1}{ml^2} u(t) \end{aligned} \quad (23)$$

kde sú využité novo zavedené stavové veličiny  $x_1(t)$  a  $x_2(t)$ . Je zrejmé, že druhá rovnica sústavy je

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{\beta}{ml^2} x_2(t) - \frac{g}{l} \sin(x_1(t)) + \frac{1}{ml^2} u(t) \quad (24)$$

a teda rovnice kyvadla v stavovom priestore sú

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{\beta}{ml^2}x_2(t) - \frac{g}{l}\sin(x_1(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u(t) \quad (25)$$

čím je funkcia  $F$  jasne stanovená (skonkretizovaná) a sústava spĺňa požiadavky pre využitie v ODE solveri.

### 2.2.3 Používanie ODE solvera

ODE solver ako funkcia v programe môže mať napríklad nasledujúce vstupy (argumenty) a výstupy:

```
x = odesolver(fcnF, init, timeVect)
```

kde  $x$  je, samozrejme, hľadané numerické riešenie. Prvým argumentom je funkcia s názvom `fcnF`, ktorá implementuje sústavu diferenciálnych rovníc v zmysle predchádzajúceho textu. `init` označuje začiatočné hodnoty stavových veličín. `timeVect` označuje časové okamihy (vzorky), v ktorých hľadáme hodnoty numerického riešenia.

#### MATLAB

MATLAB obsahuje hneď niekoľko ODE solverov. Tu budeme používať `ode45`.

Vytvoríme funkciu, ktorá realizuje sústavu diferenciálnych rovníc (25), avšak, uvažujme, že vstupný signál  $u(t)$  je nulový. Teda neuvažujme vstupný signál vôbec. Ešte inými slovami, externý moment sily je nulový,  $u(t) = 0$  a preto potom možno písať

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\beta}{ml^2}x_2 - \frac{g}{l}\sin(x_1) \end{bmatrix} \quad (26)$$

Toto je autonómny nelineárny časovo-invariantný systém druhého rádu. Jeho správanie závisí len od začiatočného stavu na začiatku uvažovaného času.

Funkcia, ktorá realizuje uvedenú sústavu, môže byť nasledovná:

Celý súbor `PravaStr.m`

```
1 function dotx = PravaStr(t,x)
2
3 global m l g beta
4
5 dotx1 = x(2);
6 dotx2 = -(beta/m*l^2)*x(2) - (g/l)*sin(x(1));
7
8 dotx = [dotx1; dotx2];
9
10 end
```

Vytvoríme „hlavný skript“, v ktorom všetko potrebné nastavíme a v ktorom budeme volať ODE solver. Ako prvé nech su globálne premenné (v tomto prípade parametre kyvadla):

Časť súboru `hlSkript.m`

```
1 global m l g beta
2
3 m = 1; %kg
4 l = 1; %m
5 g = 9.81; %m/s^2
6 beta = 2*0.5*sqrt(g/l); %kgm^2/s
```

Definujme časový vektor, ktorý určí pre aké časové okamihy ODE solver vráti numerické riešenie:

Časť súboru `hlSkript.m`

```
7 timeVect = 0:0.1:5;
```

Zavolajme ODE solver, pričom ostáva zvoliť začiatočné podmienky - začiatočný stav kyvadla. Nech začiatočný stav je  $x_1(0) = 0.25$  [rad] a  $x_2(0) = 0$  [rad/s].

Časť súboru hlSkript.m

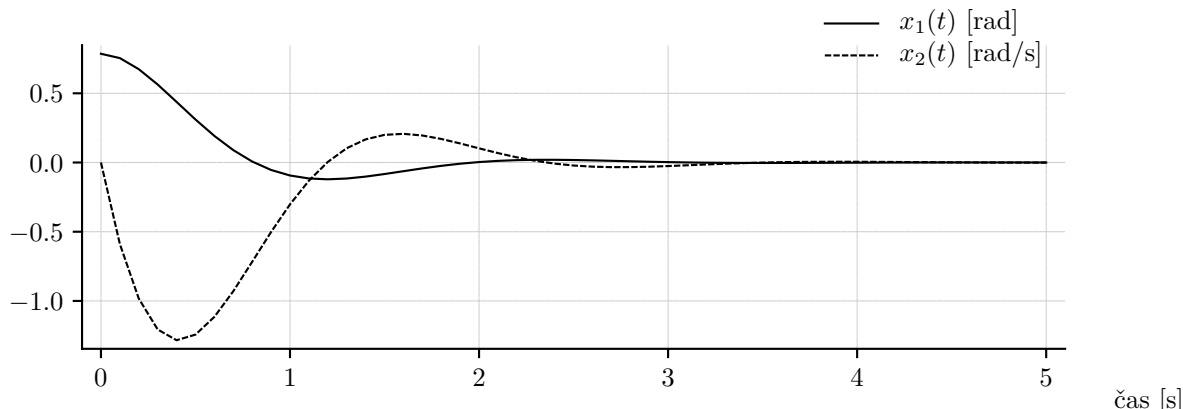
```
8 [t,x] = ode45(@(t,x) PravaStr(t,x), timeVect, [pi/4; 0]);
```

Premenná  $x$  teraz obsahuje dva stĺpce - prvý stĺpec je prvá stavová veličina a druhý stĺpec je druhá stavová veličina. Pre nakreslenie vypočítaného riešenia:

Časť súboru hlSkript.m

```
9 figure(1)
10 plot(t,x)
```

Výsledné numerické riešenie je graficky znázornené na obr. 2.

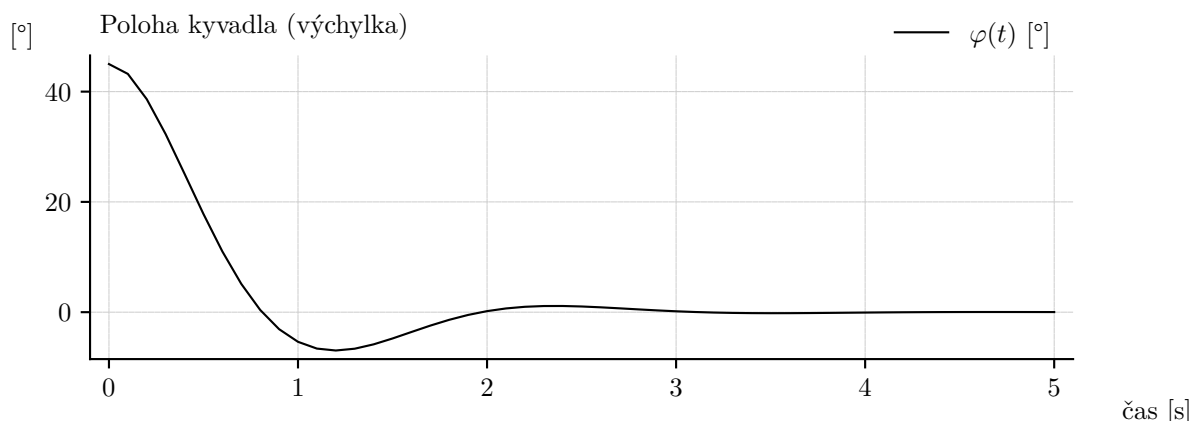


Obr. 2: Grafické zobrazenie numerického riešenia

Na obr. 2 ide však len o akési základné zobrazenie. Zmyslupnnejšie by napríklad mohlo byť, ak by sme do grafu nakreslili len priebeh polohy (výchylky) kyvadla samostatne a navyše nie v radiánoch ale v stupňoch – viď obr. 3. Pre takýto obrázok možno do hl. skriptu pridať:

Časť súboru hlSkript.m

```
11 figure(2)
12 plot(t,x(:,1)*180/pi)
```



Obr. 3: Grafické zobrazenie priebehu polohy kyvadla

## Python

Pre informáciu, nasledovne by vyzeralo hľadanie numerického riešenia v rámci jazyka Python.

Knižnica [SciPy](#), presnejšie [scipy.integrate](#) obsahuje ODEsolver s názvom `odeint`. Vytvoríme skript využívajúci tento ODE solver:

Skript v Python-e

```

1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import odeint
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 m = 1.0
6 l = 1.0
7 g = 9.81
8 beta = 2 * 0.5 * np.sqrt(g/l)
9
10 def fcn_rovniceKyvadla(x, t, u):
11     x_1, x_2 = x
12     dotx_1 = x_2
13     dotx_2 = -(beta/m*l**2) * x_2 - (g/l) * np.sin(x_1) + (1.0/m*l
14         **2) * u
15     return [dotx_1, dotx_2]
16
17 timeVect = np.arange(0, 5.1, 0.1)
18
19 u = 0
20
21 x = odeint(fcn_rovniceKyvadla,
22     [np.pi/4, 0], # zaciatočne podmienky
23     timeVect,
24     args=(u,),
25 )
26
27 plt.figure(1)
28 plt.plot(timeVect, x)
29 plt.xlabel(u'cas [s]')
30 plt.legend(['$x_1(t)$ [rad]', '$x_2(t)$ [rad/s]'])
31
32 plt.figure(2)
33 plt.plot(timeVect, x[:,0]*180/np.pi)
34 plt.xlabel(u'cas [s]')
35 plt.ylabel(u'$x_1(t)$ [stupne]')

```

Pozornému čitateľovi iste neuniklo, že uvedený skript v Pythone obsahuje funkciu, ktorá realizuje sústavu diferenciálnych rovníc (25), ale v tomto prípade zahŕňa aj vstupnú veličinu  $u(t)$ . Táto je potom v tomto prípade nastavená na nulovú hodnotu.

## 2.3 Vektorové pole a fázový portrét

Kvalitatívne správanie sa nelineárneho dynamického systému je dôležité pre porozumenie kľúčovým konceptom Lyapunovovej teórie stability systémov. Pre analýzu je dôležitá istá trieda systémov nazývaná planárne dynamické systémy. Tieto systémy majú dve stavové veličiny  $x \in \mathbb{R}^2$ , čo umožňuje znázorniť stavový priestor v rovine so súradnicovým systémom  $(x_1, x_2)$ . Navyše výsledky kvalitatívnej analýzy platia vo všeobecnosti a môžu byť použité aj pri systémoch vyššieho rádu. Preto sú tieto systémy dôležité z hľadiska analýzy. Do tejto triedy systémov patrí aj model kyvadla.

Výhodným spôsobom ako porozumieť správaniu dynamického systému so stavom  $x \in \mathbb{R}^2$  je nakresliť *fázový portrét systému*. Začneme zavedením konceptu *vektorového poľa*. Pre systém obyčajných diferenciálnych rovníc zapísaných kompaktne vo vektorovej rovnici (ako rovnica (11a)) v tvare

$$\dot{x} = F(x) \quad (27)$$

pravá strana rovnice definuje v každom  $x \in \mathbb{R}^n$  rýchlosť  $F(x) \in \mathbb{R}^n$ . Táto rýchlosť hovorí o tom ako sa  $x$  mení a môže byť reprezentovaná vektorom.

Pri planárnom dynamickom systéme, každý stav zodpovedá bodu v rovine a  $F(x)$  je vektor rýchlosti reprezentujúci veľkosť a smer zmeny (rýchlosti) daného stavu. Tieto vektory môžeme vykresliť na mriežke bodov v rovine a získať tak vizuálny obraz dynamiky systému, tak ako na Obr. 4. Pre vykreslenie tohto vektorového poľa boli použité parametre kyvadla uvedené v Tabuľke 1 a tieto parametre budú používané aj v ďalšom.

Vektorové pole na obr. 4 bolo vygenerované v Matlabe použitím nasledujúceho kódu:

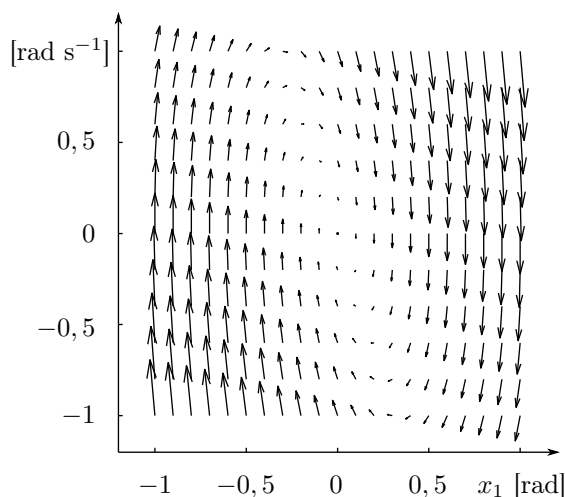
Kód pre vygenerovanie obr. 4

```

1 m = 1; %kg

```





Obr. 4: Vektorové pole znázorňujúce dynamiku kyvadla (obrázok vytvorený v MATLABe, viď text)

```

2 l = 1; %m
3 g = 9.81; %m/s^2
4 beta = 2*0.5*sqrt(g/l); %kgm^2/s
5 [x1, x2] = meshgrid(-1:.1:1, -1:.2:1);
6 x1dot = x2;
7 x2dot = -(beta/m*l^2).*x2 - (g/l).*sin(x1);
8 quiver(x1,x2,x1dot,x2dot,1.5);
9 axis([-1.2 1.2 -1.2 1.2])
10 axis equal

```

Body, v ktorých je vektor rýchlosti nulový sú obzvlášť zaujímavé, pretože definujú stacionárne body systému: ak je autonómny systém v takom stave na začiatku, ostane v tom stave po celý čas.

Fázový portrét (nazývaný aj Fázový diagram) pozostáva z „prúdnic“ nakreslených podľa vektorového poľa. Inými slovami, pre istú množinu začiatočných stavov vykreslíme riešenia diferenciálnej rovnice v rovine a smer pohybu v stavovom priestore vyznačíme šípkou. To zodpovedá sledovaniu „šípky vektorového poľa“ v každom bode stavového priestoru a nakresleniu výslednej trajektórie. Po vykreslení niekoľkých trajektórií pre rôzne začiatočné stavy získame fázový portrét ako na Obr. 5.

Zdrojový kód pre MATLAB pre získanie tohto obrázku je nasledovný:

Kód pre vygenerovanie obr. 5

```

1 global m l g beta
2 m = 1; %kg
3 l = 1; %m
4 g = 9.81; %m/s^2
5 beta = 2*0.5*sqrt(g/l); %kgm^2/s
6
7 for uhlovarychlost = -2:4:2
8     for uhol = -360:22.5:360
9         [t,x]=ode45(@PravaStr,[0 5],[uhol*pi/180 uhlovarychlost]);
10        hold on
11        stav = x;
12        x = x(1:5:end-70,:);
13        x1dot = x(:,2);
14        x2dot=-(beta/m*l^2)*x(:,2)-(g/l)*sin(x(:,1));
15        quiver(x(:,1),x(:,2),x1dot,x2dot,0.5,'k')
16        plot(stav(:,1),stav(:,2),'k');
17        hold off
18    end
19 end
20
21 axis equal
22 axis([-2*pi 2*pi -2 2])

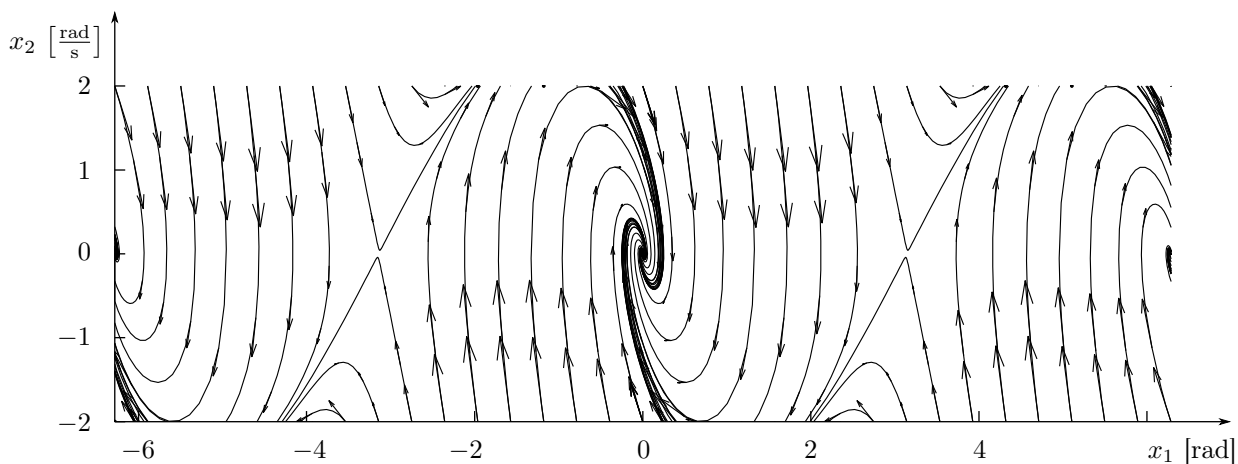
```

kde funkcia PravaStr je

```

1 function dotx = PravaStr(t,x)
2     global m l g beta

```



Obr. 5: Fázový portrét kyvadla (obrázok vytvorený v Matlabe, viď text pre zdrojový kód)

```

3 dotx(1)=x(2);
4 dotx(2)=-(beta/m*1^2)*x(2)-(g/l)*sin(x(1));
5 dotx=dotx';
6 end

```

Fázový portrét je nástroj, ktorý umožňuje posudzovať celkovú dynamiku systému pomocou vykreslenia niekoľkých riešení v stavovom priestore (rovine) systému. Napríklad je možné vidieť, či sa všetky trajektórie s narastajúcim časom približujú k jednému bodu alebo či ide o komplikovanejšie správanie systému. Fázový portrét však nehovorí o veľkosti rýchlosti zmeny stavu (avšak toto môže byť odvodené z dĺžky vektorov vo vektorovom poli systému).

*Ekvilibrium dynamického systému* je bod v stavovom priestore, ktorý reprezentuje rovnovážne podmienky pre dynamiku systému. Ide o stacionárny bod, v ktorom je vektor rýchlosti trajektórie systému nulový, ako už bolo uvedené.

Hovoríme, že stav  $x_e$  je ekvilibrium dynamického systému

$$\dot{x} = F(x)$$

ak  $F(x_e) = 0$ . Ak má autonómny systém začiatočnú podmienku  $x(0) = x_e$ , potom ostane v tomto stave a riešenie má tvar  $x(t) = x_e$  po celý čas  $t > 0$ , kde sme uvažovali začiatočný čas  $t_0 = 0$ .

Stacionárne body (ekvilibriá) patria medzi najdôležitejšiu vlastnosť dynamického systému, pretože definujú stavy s nemennými pracovnými podmienkami systému. Systém môže mať nula, jeden alebo viac stacionárnych bodov.

Stacionárne body uvažovaného kyvadla sú

$$x_e = \begin{bmatrix} \pm n\pi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

kde  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Pre párne  $n$  sú to stavy keď kyvadlo visí smerom dole a pre nepárne  $n$  je kyvadlo v inverznej polohe. Fázový portrét na Obr. 5 je nakreslený pre  $-2\pi \leq x_1 \leq 2\pi$ , teda na obrázku je päť stacionárnych bodov.

### 3 Stabilita

Pripomeňme, že sa zaoberáme autonómnym systémom (homogénnou diferenciálnou rovnicou) v tvare

$$\dot{x} = F(x) \quad (29)$$

a tiež pripomeňme, čo rozumieme pod pojmom riešenie systému, alebo skrátené riešenie. Hovoríme, že  $x(t)$  je *riešenie* diferenciálnej rovnice (29) na časovom intervale od  $t_0 \in \mathbb{R}$  do  $t_f \in \mathbb{R}$  ak

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)) \quad \text{pre } t_0 < t < t_f \quad (30)$$

Daná diferenciálna rovnica môže mať mnoho riešení, najčastejšie nás však zaujíma úloha so zadaným začiatočným stavom, inými slovami so zadanými začiatočnými podmienkami, kedy  $x(t)$  je predpísané v začiatočnom čase  $t_0$  a úlohou je nájsť riešenie vyhovujúce pre celý budúci čas  $t > t_0$ . Vtedy  $x(t)$  je riešenie diferenciálnej rovnice (29) so začiatočným stavom  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  v čase  $t_0$  ak

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{a} \quad \frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)) \quad \text{pre } t_0 < t < t_f \quad (31)$$

Najčastejšie sa stretávame s diferenciálnymi rovnicami, pre ktoré existuje jedinečné riešenie, navyše pre celý čas  $t > t_0$  čo znamená že  $t_f = \infty$ . Častým je tiež, že funkcia  $F$  je nezávislá od času, preto môžeme uvažovať  $t_0 = 0$ .

*Stabilita riešenia* určuje či iné riešenia v blízkosti skúmaného riešenia ostávajú v jeho blízkosti, približujú sa k nemu alebo sa od neho vzdalujú. Uvedieme niekoľko neformálnych a formálnych definícií stability:

Nech  $x(t; a)$  je riešenie diferenciálnej rovnice so začiatočným stavom  $a$ . Toto riešenie je stabilné ak iné riešenia, ktoré začínajú v blízkosti  $a$  zostávajú v blízkosti  $x(t; a)$ . Formálne, hovoríme, že riešenie  $x(t; a)$  je stabilné ak pre všetky  $\epsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  taká, že

$$\|b - a\| < \delta \Rightarrow \|x(t; b) - x(t; a)\| < \epsilon, \quad \forall t > 0 \quad (32)$$

Všimnime si, že to neznamena, že  $x(t; b)$  sa približuje k  $x(t; a)$ , len ostáva v jeho blízkom okolí. Navyše hodnota  $\delta$  môže závisieť od  $\epsilon$ , teda napríklad ak chceme ostať blízko nejakého riešenia potom musíme začať veľmi blízko tohto riešenia. Takto definovaná stabilita sa nazýva *stabilita v zmysle Lyapunova*.

Ilustrujeme uvedenú podmienku (32) na riešení diferenciálnej rovnice kyvadla (11a). Začiatočný čas zvolme  $t_0 = 0$  [s], konečný čas zvolme  $t_f = 1,4$  [s], začiatočnú polohu kyvadla zvolme  $\varphi = 45^\circ$  a začiatočná rýchlosť kyvadla nech je nulová. Začiatočný stav v stavovom priestore je  $a = [0,7854 \quad 0]^T$ . Týmto začiatočným podmienkam prislúcha riešenie  $x(t; a)$ , ktoré je znázornené v stavovom priestore na Obr. 6a, kde je vyznačený aj začiatočný stav  $a$ . Nebudeme skúmať všetky  $\epsilon > 0$ , preskúmame len jedno. Napríklad pre  $\epsilon = 0,15$  hľadáme  $\delta > 0$ , ktorá spĺňa podmienku (32). Taká  $\delta$  existuje, pretože pre riešenie  $x(t; b)$ , ktoré začína v stave  $b = [0,8727 \quad 0]^T$  platí, že  $\|x(t; b) - x(t; a)\| < \epsilon$ , čo je zrejmé z Obr. 6a a aj z Obr. 6b, kde je navyše predĺžený čas riešenia až do nekonečna. Potom sme našli napríklad  $\delta = 0,1$  pretože platí

$$\|b - a\| = \sqrt{(0,8721 - 0,7854)^2 + (0 - 0)^2} = 0,0873 < 0,1 \quad (33)$$

čo je tiež zrejmé najmä z Obr. 6b. Týmto sme nezistili nič o stabilite riešenia  $x(t; a)$ , pretože sme neoverili, či je podmienka (32) splnená pre všetky  $\epsilon > 0$ .

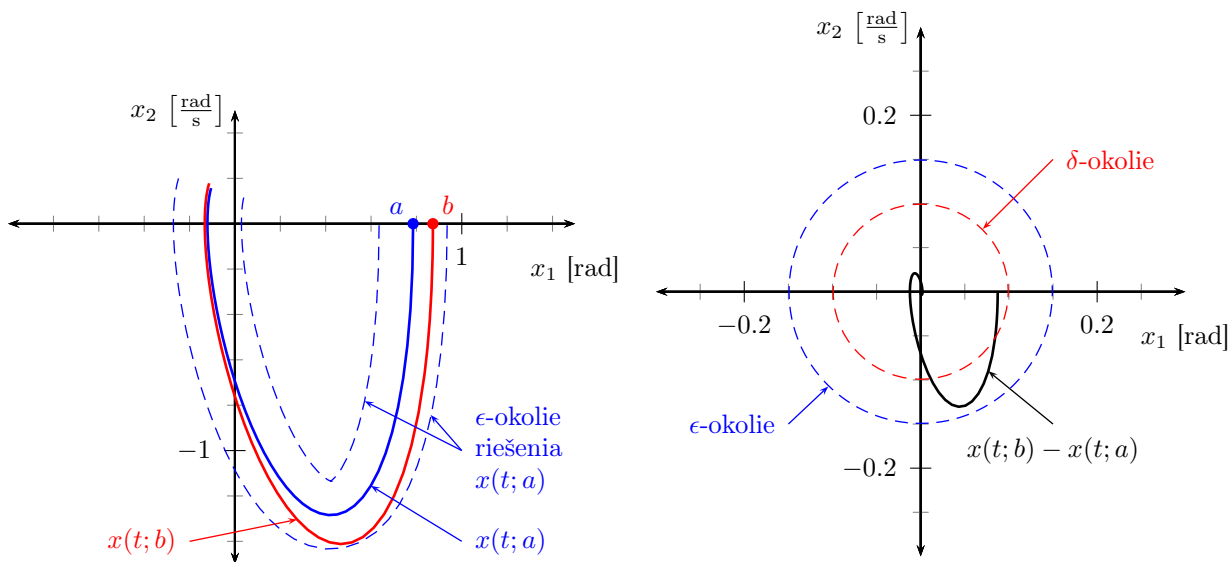
Ak je riešenie stabilné v zmysle Lyapunova, ale trajektórie okolitých riešení k nemu nekonvergujú, hovoríme, že riešenie je *neutrálne stabilné*.

Riešenie  $x(t; a)$  je *asymptoticky stabilné* ak je stabilné v zmysle Lyapunova a zároveň  $x(t; b) \rightarrow x(t; a)$  s rastúcim časom  $t \rightarrow \infty$  pri začiatočnom stave  $b$ , ktorý je dostatočne blízko stavu  $a$ .

Veľmi dôležitým špeciálnym prípadom je ak pre skúmané riešenie platí  $x(t; a) = x_e$ . Potom nehovoríme o stabilite riešenia ale o *stabilite stacionárneho bodu*. Príkladom asymptoticky stabilného stacionárneho bodu sú body

$$x_{e-2} = \begin{bmatrix} -2\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{e0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{a} \quad x_{e2} = \begin{bmatrix} 2\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

na Obr. 5, vidíme, že ak začíname blízko asymptoticky stabilného stacionárneho bodu, s narastajúcim časom sa k nemu približujeme.



(a) Trajektórie riešení systému v stavovom priestore pre rôzne začiatočné stavy  $a$  a  $b$  v časovom intervale  $t_0 < t < t_f$  (b) Trajektória rozdielu dvoch riešení daných začiatočnými stavmi  $a$  a  $b$  v časovom intervale  $t_0 < t < \infty$

Obr. 6: Ilustračný príklad k definícii stability riešenia systému

Riešenie  $x(t; a)$  je *nestabilné* ak nie je stabilné. Konkrétnejšie, hovoríme, že riešenie  $x(t; a)$  je nestabilné ak pre akékoľvek dané  $\epsilon > 0$  neexistuje  $\delta > 0$  taká, že ak  $\|b - a\| < \delta$  potom  $\|x(t; b) - x(t; a)\| < \epsilon$ ,  $\forall t > 0$ . Príkladom nestabilného stacionárneho bodu sú body

$$x_{e-1} = \begin{bmatrix} -\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a \quad x_{e1} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

na Obr. 5.

Predchádzajúce definície nezohľadňujú oblasť, na ktorej môžu byť použité. Presnejšie je definovať riešenie ako *lokálne stabilné* (alebo *lokálne asymptoticky stabilné*) ak je stabilné pre všetky začiatočné stavy  $x \in B_r(a)$ , kde  $B_r(a) = \{x : \|x - a\| < r\}$  je oblasť s polomerom  $r > 0$  okolo bodu  $a$ . Riešenie je *globálne stabilné* ak je stabilné pre všetky  $r > 0$ .

### 3.1 Stabilita lineárnych systémov

Lineárny dynamický systém má tvar

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \quad (34)$$

kde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je štvorcová matica. Začiatok stavového priestoru je vždy stacionárnym bodom lineárneho systému a stabilita tohto stacionárneho bodu môže byť určená pomocou vlastných čísel matice  $A$ .

Vlastné čísla  $\lambda(A)$  sú korene *charakteristického polynómu* systému  $\det(sI - A)$ , kde  $s \in \mathbb{C}$  je komplexná premenná a  $I$  je jednotková matica. Konkrétne vlastné číslo ( $i$ -te vlastné číslo) označujeme  $\lambda_i$ , pričom  $\lambda_i \in \lambda(A)$ .

Pre lineárny systém stabilita stacionárneho bodu (ako veľmi dôležitého špeciálneho prípadu spomedzi všetkých riešení) závisí len od matice  $A$ , čo znamená, že stabilita je vlastnosť systému. Pre lineárny systém preto hovoríme o stabilite systému namiesto o stabilite konkrétneho riešenia alebo ekvilibria.

Stabilitu lineárneho systému možno zhrnúť do jednej vety:

*Systém*

$$\dot{x} = Ax$$

je *asymptoticky stabilný vtedy a len vtedy keď reálne časti všetkých vlastných čísel matice  $A$  sú záporné a systém je nestabilný keď aspoň jedno vlastné číslo matice  $A$  má kladnú reálnu časť.*

## 4 Linearizácia a jej použitie pri analýze stability

Výhodnou vlastnosťou diferenciálnych rovníc je, že je často možné určiť lokálnu stabilitu stacionárneho bodu pomocou aproximácie nelineárneho systému lineárnym systémom.

Uvažujme nelineárny systém

$$\dot{x} = F(x) \quad (35)$$

ktorý má ekvilibrium v bode  $x_e$ . Zaujímá nás stabilita tohto stacionárneho bodu. Aproximujme (linearizujme) nelineárnu funkciu  $F(x)$  v okolí bodu  $x_e$  pomocou prvých dvoch členov Taylorovho radu

$$F(x) \approx F(x_e) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_e} (x - x_e) \quad (36)$$

Platí  $F(x_e) = 0$ , a zavedieme nový stavový vektor  $z = x - x_e$ . To znamená, že  $x = z + x_e$ , potom  $\dot{x} = \dot{z} + \dot{x}_e$ , avšak  $x_e$  sa s časom nemení a preto platí  $\dot{x} = \dot{z}$ . Lineárna aproximácia pôvodného nelineárneho systému v okolí bodu  $x_e$  má potom tvar

$$\dot{z} = Az \quad (37)$$

kde

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_e} \quad (38)$$

V prípade kyvadla je nelineárny model systému v tvare (11a) a teda

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{\beta}{ml^2} x_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Linearizujeme nelineárny model systému (11a) v okolí rovnovážneho stavu  $x_e = [0 \ 0]^T$ . Kľúčovým je výpočet matice  $A$  podľa (38). V tomto prípade máme

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} (F_1) & \frac{\partial}{\partial x_2} (F_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} (F_2) & \frac{\partial}{\partial x_2} (F_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(x_1) & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix} \quad (40)$$

Po dosadení hodnôt stacionárneho bodu za  $x_1 = 0$  (a  $x_2 = 0$ ) do (40) máme

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix} \quad (41)$$

a vzhľadom na fakt, že v tomto prípade  $x_e = 0$  je linearizovaný model systému v tvare

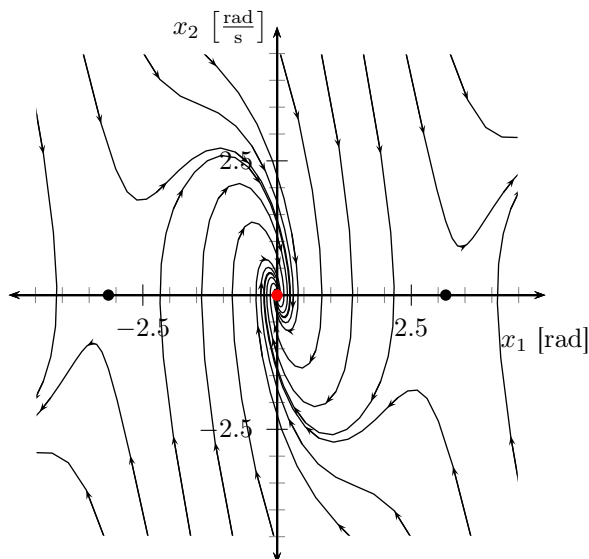
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Lokálna stabilita stacionárneho bodu nelineárneho systému teraz môže byť určená pomocou vlastných čísel matice  $A$ .

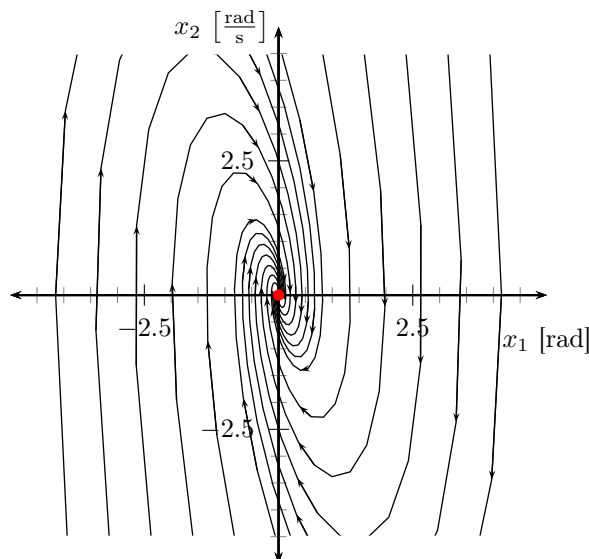
Mimochodom výsledný lineárny model (42) je rovnaký, ako keby sme uvažovali, len malé výchylky kyvadla (malé hodnoty uhla  $\varphi$ ), pri ktorých dostatočne presne platí, že  $\sin(\varphi) \approx \varphi$  (angl. Small-angle approximation).

Skutočnosť, že lineárny model môže byť použitý pre opis správania nelineárneho systému v okolí rovnovážneho stavu je veľmi výhodná. Je to možné využiť aj pre návrh spätnoväzbového regulátora, ktorý udržiava stav nelineárneho systému v okolí rovnovážneho stavu. Pritom samotný regulátor je navrhnutý pre lineárnu aproximáciu systému. Keďže stav systému je regulátorom udržiavaný blízko stacionárneho bodu, tak aj lineárna aproximácia použitá pri stabilizácii je dostatočne presná.

Na Obr. 7 je porovnanie fázových portrétov nelineárneho modelu kyvadla a linearizovaného modelu kyvadla v okolí začiatku stavového priestoru. Všimnime si, že v okolí stacionárneho bodu (začiatku súradnicového systému) sú tieto fázové portréty takmer identické.



(a) Fázový portrét nelineárneho modelu kyvadla



(b) Fázový portrét lineárneho modelu kyvadla

Obr. 7: Porovnanie fázových portrétov nelineárneho systému a jeho linearizovanej aproximácie

## 5 Analýza stability pomocou Lyapunovových funkcií

Vráťme sa opäť k nelineárnym systémom v tvare

$$\dot{x} = F(x)$$

Máme definované kedy je riešenie nelineárneho dynamického systému stabilné. Teraz hľadáme odpoveď na otázku ako dokázať, že dané riešenie je stabilné, asymptoticky stabilné alebo nestabilné. Pri fyzikálnych systémoch môžeme vyvodiť závery o stabilite podľa toho či systém na danej trajektórii stráca energiu, inými slovami či hodnota energie klesá (disipatívny systém), alebo nie. Zovšeobecnenie tejto techniky pre ľubovoľný dynamický systém je založené na použití Lyapunovových funkcií na miesto energie.

V tejto časti sa venujeme použitiu Lyapunovových funkcií pri určovaní stability riešenia dynamického systému. Konkrétne nás zaujíma stabilita stacionárnych bodov. Je výhodné uvažovať, že vyšetřovaný stacionárny bod je v začiatku stavového priestoru, teda  $x_e = 0$ . Ak nie je, vždy je možné prepísať rovnice systému zavedením nových (posunutých) stavových veličín  $z = x - x_e$ .

### 5.1 Lyapunovove funkcie

*Lyapunovova funkcia*  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sa používa (podobne ako energia) pri vyšetřovaní stability (riešenia) systému. Zjednodušene povedané, ak nájdeme nezápornú funkciu, ktorá je klesajúca pozdĺž trajektórie systému, môžeme usúdiť, že bod, v ktorom táto funkcia dosiahne minimum je stabilným (lokálne) stacionárnym bodom systému.

Pre formálny opis uvedeného je potrebných niekoľko definícií: Hovoríme, že spojitá funkcia  $V$  je *kladne definitná* ak  $V(x) > 0$  pre všetky  $x \neq 0$  a  $V(0) = 0$ , a podobne, funkcia je *záporne definitná* ak  $V(x) < 0$  pre všetky  $x \neq 0$  a  $V(0) = 0$ . Hovoríme, že funkcia  $V$  je *kladne semidefinitná* ak  $V(x) \geq 0$  pre všetky  $x$ , teda  $V(x)$  môže byť nulová aj v inom bode ako  $x = 0$ , podobne, funkcia je *záporne semidefinitná* ak  $V(x) \leq 0$  pre všetky  $x$ .

Teorém, ktorý charakterizuje stabilitu stacionárneho bodu dynamického systému, ktorý je v začiatku stavového priestoru, je nasledovný:

*Nech  $V$  je nezáporná skalárna funkcia na  $\mathbb{R}^n$  a nech  $\dot{V}$  reprezentuje časovú deriváciu*

funkcie  $V$  pozdĺž trajektórie dynamického systému  $\dot{x} = F(x)$ :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} F(x).$$

Nech  $B_r$  je okolie začiatku súradnicového systému s polomerom  $r$ . Ak existuje  $r > 0$  taký, že  $V$  je kladne definitná funkcia a  $\dot{V}$  je záporne semidefinitná funkcia pre všetky  $x \in B_r$ , potom  $x = 0$  je lokálne stabilný stacionárny bod v zmysle Lyapunova. Ak  $V$  je kladne definitná a  $\dot{V}$  je záporne definitná pre všetky  $x \in B_r$ , potom  $x = 0$  je lokálne asymptoticky stabilný bod.

Ak  $V$  spĺňa práve uvedené podmienky, potom hovoríme, že  $V$  je (lokálna) Lyapunovova funkcia systému.

## 5.2 Analýza stability

Výsledky uvedené vyššie majú pre planárne systémy svoju geometrickú reprezentáciu. Pre kladne definitnú  $V$  môžeme definovať vrstevnice ako body v stavovom priestore, ktoré spĺňajú  $V(x) = c$ , kde  $c > 0$ . Tam, kde platí  $\dot{V} < 0$  vektorové pole ukazuje vždy smerom k „nižšej“ vrstevnici, od vrstevnice  $c_2$  k  $c_1$ , kde  $c_2 > c_1$ . To znamená, že trajektória smeruje k menším a menším hodnotám funkcie  $V$  a ak  $\dot{V}$  je záporne definitná, potom sa  $x$  približuje k nule. Aj toto ilustruje nasledujúci príklad určenia stability stacionárneho bodu kyvadla.

Lyapunovove funkcie často nie je jednoduché nájsť, a tiež nie sú unikátne. V mnohých prípadoch je výhodné pri hľadaní vhodného kandidáta na Lyapunovovu funkciu začať funkciou, ktorá vyjadruje celkovú energiu systému, najmä pri fyzikálnych systémoch. Tak je to aj v nasledujúcom príklade.

Uvažujme nelineárny model kyvadla, podľa (11a), v tvare

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (43a)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{\beta}{ml^2} x_2 \quad (43b)$$

Úlohou je vyšetriť stabilitu stacionárneho bodu  $x_e = [0 \ 0]^T$ . V tomto prípade teda nie je potrebné posúvať súradnicový systém, pretože vyšetrovaný stacionárny bod je v začiatku.

Ako kandidáta na Lyapunovovu funkciu použijeme celkovú (mechanickú) energiu systému. Nulovú potenciálnu energiu nech má kyvadlo pre  $\varphi = x_1 = 0$ . Potenciálna energia je  $U = mgh$ , kde  $h = 2l - l - l \cos(x_1)$ , teda

$$U = mgl - mgl \cos(x_1) \quad (44)$$

Pri rotačnom pohybe, vykonávanom kyvadlom, je (rotačná) kinetická energia

$$K = \frac{1}{2} ml^2 \dot{x}_2^2 \quad (45)$$

Celková energia kyvadla je súčtom kinetickej a potenciálnej energie.

Kandidát na Lyapunovovu funkciu systému je potom v tvare

$$V = \frac{1}{2} ml^2 \dot{x}_2^2 + mgl - mgl \cos(x_1) \quad (46)$$

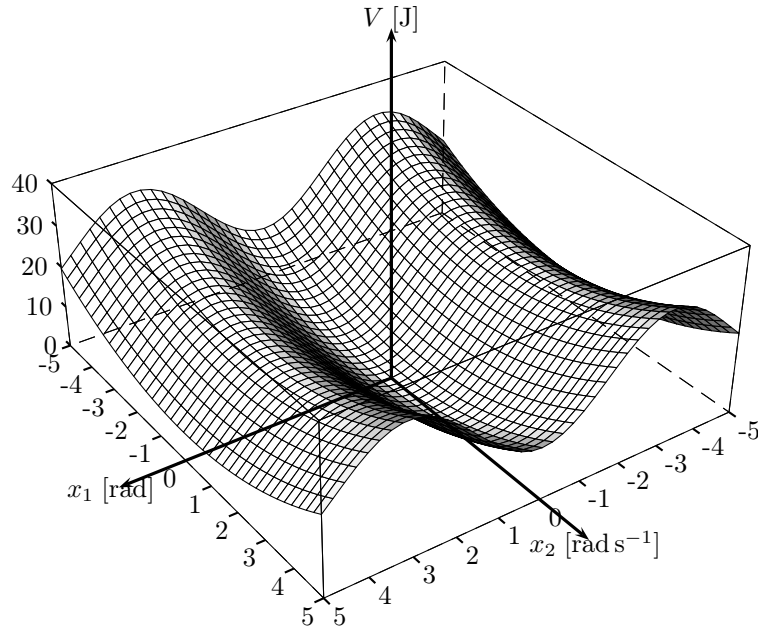
Funkcia (46) je znázornená na Obr. 8. Táto funkcia je nezáporná pre všetky  $x_1$  a  $x_2$ , avšak nie je kladne definitná pre všetky  $x_1$  a  $x_2$ , pretože bod  $x_e = [0 \ 0]^T$  nie je jediný, kde funkcia nadobúda nulu. Ak uvažujeme len okolie začiatku  $B_r$  s polomerom  $0 < r < \pi$ , potom funkcia  $V$  je kladne definitná, pretože vtedy  $-\pi < x_1 < \pi$  a len pre  $x_e = [0 \ 0]^T$  máme  $V(x_e) = 0$ .

Časová derivácia funkcie pozdĺž trajektórie je

$$\dot{V} = ml^2 \dot{x}_2 \left( -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{\beta}{ml^2} \dot{x}_2 \right) + mgl \sin(x_1) \dot{x}_1 \quad (47a)$$

$$\dot{V} = -mgl \dot{x}_2 \sin(x_1) - \beta \dot{x}_2^2 + mgl \sin(x_1) \dot{x}_1 \quad (47b)$$

$$\dot{V} = -\beta \dot{x}_2^2 \quad (47c)$$



Obr. 8: Znázornenie celkovej mechanickej energie kyvadla  $V$  ako funkcie stavu kyvadla (46)

Funkcia  $\dot{V}$  je záporne definitná pre všetky  $x_2$  a  $x_1$ , a teda aj pre tie, ktoré patria do uvažovaného okolia  $B_r$ . Preto môžeme hovoriť, že na uvažovanom okolí stacionárneho bodu existuje Lyapunovova funkcia systému a preto je tento systém lokálne stabilný.

Ak chceme určiť stabilitu inému stacionárnemu bodu, napr.  $x_e = [\pi \ 0]^T$ , je potrebné najskôr posunúť tento bod do začiatku stavového priestoru. Zavedieme nové posunuté stavové veličiny:

$$z = x - x_e = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

potom platí

$$x_1 = z_1 + \pi \quad (49a)$$

$$x_2 = z_2 \quad (49b)$$

Dosadením (49) do pôvodného systému (43) máme nový posunutý systém, ktorý má vyšetrovaný bod v začiatku stavového priestoru v tvare

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (50a)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= -\frac{g}{l} \sin(z_1 + \pi) - \frac{\beta}{ml^2} z_2 = \\ &= \frac{g}{l} \sin(z_1) - \frac{\beta}{ml^2} z_2 \end{aligned} \quad (50b)$$

Mimochodom, (50) je model inverzného kyvadla.

Môžeme vyskúšať zvoliť toho istého kandidáta na Lyapunovovu funkciu ako (46) s dosadením (49), potom

$$V = \frac{1}{2} ml^2 z_2^2 + mgl - mgl \cos(z_1 + \pi) \quad (51a)$$

$$V = \frac{1}{2} ml^2 z_2^2 + mgl + mgl \cos(z_1) \quad (51b)$$

Okamžite vidíme, že táto funkcia nemôže byť kandidátom na Lyapunovovu funkciu, pretože v nulovom bode (začiatku) nemá nulovú hodnotu  $V(0) \neq 0$  a teda nie je kladne definitná.



Aby sme dokázali, že daný stacionárny bod je *nestabilný* (v tomto prípade vieme, že je nestabilný), musíme nájsť takú funkciu  $V(x)$ , ktorá je v okolí rovnovážneho bodu kladne definitná a jej časová derivácia pozdĺž trajektórie systému je *tiež kladne definitná funkcia*.

...nájsť takú funkciu pre inverzné kyvadlo vôbec nie je jednoduché. Užitočnejším v tomto prípade je linearizovať systém v okolí daného stacionárneho bodu a určiť stabilitu tohto lineárneho systému pomocou vlastných čísel dynamickej matice alebo tiež pomocou Lyapunovovej funkcie. O druhej možnosti hovorí nasledujúca časť.

### 5.3 Lyapunovova rovnica

Ako sme už uviedli, vo všeobecnosti nie je jednoduché nájsť vhodného kandidáta na Lyapunovovu funkciu. Pre lineárny dynamický systém v tvare

$$\dot{x} = Ax \quad (52)$$

je však možné skonštruovať Lyapunovovu funkciu systematickým spôsobom, nasledovne:

Uvažujme kvadratickú formu ako kandidáta na Lyapunovovu funkciu

$$V(x) = x^T P x \quad (53)$$

kde  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je symetrická matica, teda platí  $P = P^T$ . Podmienka aby  $V$  bola kladne definitná je v tomto prípade ekvivalentná podmienke, že  $P$  je *kladne definitná matica*:  $x^T P x > 0, \forall x \neq 0$ , čo zapisujeme ako  $P > 0$ . Platí, že ak je matica  $P$  symetrická, potom je matica  $P$  kladne definitná vtedy a len vtedy keď všetky vlastné čísla tejto matice sú reálne a kladné.

Časová derivácia uvažovaného kandidáta na Lyapunovovu funkciu pozdĺž trajektórie systému v tomto prípade je

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = x^T (A^T P + P A) x = -x^T Q x \quad (54)$$

Požiadavka aby  $\dot{V}$  bola záporne definitná znamená, že matica  $Q$  musí byť kladne definitná. Preto, pre nájdenie Lyapunovovej funkcie pre lineárny systém je postačujúce zvoliť maticu  $Q > 0$  a vyriešiť tzv. *Lyapunovovu rovnicu*:

$$A^T P + P A = -Q \quad (55)$$

čo je lineárna algebraická rovnica, ktorú možno riešiť pomocou lineárnej algebry. Dá sa ukázať, že táto rovnica má riešenie vždy ak vlastné čísla matice  $A$  sú v ľavej polrovine komplexnej roviny (ich reálne časti sú záporné) a navyše nájdená  $P$  je kladne definitná ak  $Q$  je kladne definitná. Preto je vždy možné nájsť kvadratickú Lyapunovovu funkciu pre stabilný lineárny systém.

## 6 Otázky a úlohy

1. Je zadaný systém v tvare:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Načrtnite (zhruba) fázový portrét systému alebo aspoň vektorové pole systému.

2. Linearizujte model kyvadla v okolí stacionárneho bodu  $x_e = [\pi \ 0]^T$ . Bonus: Aký typ stacionárneho bodu je uvedený bod? Svoju odpoveď zdôvodnite.
3. Pomocou kandidáta na Lyapunovovu funkciu vyšetrite stabilitu systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) \end{aligned}$$

4. Pomocou kandidáta na Lyapunovovu funkciu vyšetrite stabilitu systému.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 x_1 + x_2 & k_1 &> 0 \\ \dot{x}_2 &= -k_2 x_1 & k_2 &> 0 \end{aligned}$$