P05P06

pondelok 24. marca 2025 14:24

AR06_txt_MRAC_vs...

MRAC vstupno-výstupný

Obsah

1 **MRC vo všeobecnosti** 2
1.1 O pozorovateľovi stavu s redukovaným rádom 2
1.2 Formulácia problému riadenia s referenčným modelom 4
1.2.1 Ilustrácia na príklade systému 2. rádu 5
1.2.2 Zovšeobecnenie pre systém n. rádu 7
1.3 Teoretický opis výsledného URO v stavovom priestore 7
1.3.1 Ilustrácia na príklade systému 2. rádu 7
1.3.2 Zovšeobecnenie pre systém n. rádu 9

2 **Cvičenie šieste ako príklad k téme *MRC vo všeobecnosti*** 11
2.1 Úlohy 11
2.2 Riešenie úloh 12
2.2.1 Úloha prvá 12
2.2.2 Úloha druhá 15

3 **SPR prenosové funkcie, MKY lemma** 24
3.1 Striktne pozitívne reálne prenosové funkcie 24
3.2 Meyerova-Kalmanova-Yakubovichova Lemma 24

4 **Adaptačná odchýlka** 25
4.1 Model sústavy a referenčný model 25
4.2 Zákon riadenia 25
4.3 Rovnica adaptačnej odchýlky 26

5 **Zákon adaptácie pri $n^* = 1$** 27

6 **Zákon adaptácie pri $n^* = 2$** 29
6.1 Priamočiary postup 29
6.2 Metóda doplnenej odchýlky 32
6.2.1 Prvá možnosť 32
6.2.2 Druhá možnosť 33

7 **Cvičenie siedme ako príklad k téme *Zákon adaptácie pri $n^* = 1$*** 34
7.1 Úlohy 34
7.2 Riešenie úloh 35
7.3 Dodatok k riešeniu (prevažne o nastavovaní rýchlosti adaptácie) 42

8 **Príklad k téme *Zákon adaptácie pri $n^* = 2$*** 44
8.1 Celkový pohľad na úlohu 45
8.1.1 Celkový pohľad na riadený systém (z hľadiska návrhu riadiaceho systému) 46
8.2 Návrh adaptívneho riadiaceho systému 49
8.2.1 Model riadeného systému 49
8.2.2 Cieľ riadenia a referenčný model 49
8.2.3 Podmienky zhody 50
8.2.4 Otázka relatívneho stupňa riadeného systému 50
8.2.5 Zákon riadenia 51
8.2.6 Zákon adaptácie 52
8.2.7 Vytvorenie predstavy o nastavení rýchlosti adaptácie 54
8.3 Nasadenie na uvažovaný nelineárny systém 56

9 **Otázky a úlohy** 58

1 MRC vo všeobecnosti

Mimochodom, MRC je skratka pre Model Reference Control.

V predchádzajúcich častiach učebného textu sme uvažovali riadený systém, ktorého stavové veličiny sú merateľné a navyše matica A má Frobeniovu kanonickú formu. To umožnilo použiť zákon riadenia v tvare stavového regulátora. Pre systémy, ktoré nespĺňajú tieto podmienky je potrebné vyvinúť zákon riadenia, ktorý využíva len vstupný a výstupný signál systému (nie sú potrebné stavové veličiny systému), pretože často len tieto sú dostupné. Pritom musia existovať také parametre zákona riadenia, pri ktorých sa model uzavretého regulačného obvodu zhoduje s referenčným modelom (dostatočná štrukturálna flexibilita zákona riadenia). Je tiež dôležité aby pre realizáciu zákona riadenia nebolo potrebné použiť derivačné členy, pretože implementácia derivácie je vždy náročná.

1.1 O pozorovateľovi stavu s redukovaným rádom

V predchádzajúcich častiach učebného textu sa ukázalo, že ak je stavový vektor $x \in \mathbb{R}^n$ merateľný, potom zákon riadenia v tvare[1] $u(t) = \Theta_1^T(t)x(t) + \Theta_2(t)r(t)$ zabezpečí splnenie cieľa riadenia. V takom prípade je adaptovaný člen $\Theta_1^T(t)x(t)$ odhadom ideálneho člena $\Theta_1^{*T}(t)x(t)$. Avšak, keď stavový vektor $x(t)$ nie je merateľný odhad ideálneho člena $\Theta_1^{*T}(t)x(t)$ je potrebné zabezpečiť pomocou dostupných signálov. Dostupnými signálmi sú akčný zásah $u(t)$ a výstupná veličina $y(t)$. To sa dosiahne parametrizáciou odhadu ideálneho člena, teda zmenou tohto adaptovaného člena, ktorá je zvyčajne založená na využití pozorovateľa stavu s redukovaným rádom [1].

Riadený SISO lineárny systém n-tého rádu sa uvažuje v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \tag{1a}$$

$$y(t) = x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{1b}$$

kde $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n-1}$ je časť stavového vektora, ktorá nie je merateľná a ostatné vektory a matice majú zodpovedajúce rozmery. Pre odvodenie príslušného pozorovateľa stavu sa parametre systému (1) považujú za známe.

Systém (1) možno zapísať v tvare

$$\dot{x}_2(t) = A_{22}x_2(t) + (A_{21}x_1(t) + b_2u(t)) \tag{2a}$$

$$\dot{x}_1(t) = A_{12}x_2(t) + (A_{11}x_1(t) + b_1u(t)) \tag{2b}$$

Z pohľadu návrhu pozorovateľa stavu $x_2(t)$ sa signály $x_1(t)$ a $u(t)$ považujú za merateľné vstupy (platí $y(t) = x_1(t)$). Zároveň sa signál $\dot{x}_1(t)$ považuje za výstup pozorovaného systému. Pozorovateľ stavu je preto v tvare

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = A_{22}\hat{x}_2(t) + (A_{21}x_1(t) + b_2u(t)) + L\left(\dot{x}_1(t) - A_{12}\hat{x}_2(t) - (A_{11}x_1(t) + b_1u(t))\right) \tag{3}$$

kde $L \in \mathbb{R}^{n-1}$ je voliteľný konštantný vektor.

Pre chybu pozorovania stavu $\tilde{x}_2(t)$ platí $\tilde{x}_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$. Dynamiku tejto chyby opisuje rovnica

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = (A_{22} - LA_{12})\,\tilde{x}_2(t) \tag{4}$$

Z toho vyplýva, že vektor L má byť zvolený tak, že matica $A_{22} - LA_{12}$ je asymptoticky stabilná. Potom chyba pozorovania sa asymptoticky blíži k nule.

Získanie (meranie) signálu $\dot{x}_1(t)$ je z praktického hľadiska problematické. Preto sa zavádza signál $w(t)$ taký, že $\hat{x}_2(t) = w(t) + Ly(t)$. Je zrejmé, že $\dot{w}(t) = \dot{\hat{x}}_2(t) + L\dot{y}(t)$. Po dosadení a úpravách

$$\dot{w}(t) = (A_{22} - LA_{12})\,w(t) + (A_{21} - LA_{11} + A_{22}L - LA_{12}L)\,y(t) + (b_2 - Lb_1)\,u(t) \tag{5}$$

[1] Zákon riadenia $u(t) = \Theta_1^T(t)x(t) + \Theta_2(t)r(t)$ a zákon riadenia $u(t) = k^T(t)x(t) + l(t)r(t)$ sa po formálnej stránke zhodujú, len označenie adaptovaných parametrov je iné.

$$u = k^T x + lr$$

$$\hat{x}$$

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = c^T x$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + \boxed{L(y - \hat{y})}$$

$$\hat{y} = c^T\hat{x}$$

$$\hat{x} = ?$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} (\cdot)$$

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = \dot{\tilde{x}}$$

$$\dot{\tilde{x}} = Ax + \cancel{bu} - A\hat{x} - \cancel{bu} - L(y - \hat{y})$$

$$= A\tilde{x} - L(c^T x - c^T\hat{x})$$

$$- L(c^T\tilde{x})$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A - Lc^T)\tilde{x}$$

$$\dot{x} = Ax$$

$$u = k^T\hat{x} + lr = \Theta^T\omega$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + (Ly + Lc^T\hat{x})$$

$$(A + Lc^T)\hat{x} + bu + Ly$$

$$\boxed{\hat{x} = ?}$$

$$\dot{\hat{x}} = \dots$$

$$s\hat{x} = (A - Lc^T)\hat{x} + bu + Ly$$

$$sI\hat{x} = (A - Lc^T)\hat{x} + bu + Ly$$

$$(sI - (A - Lc^T))\hat{x} = bu + Ly$$

$$\hat{x} = (sI - (A - Lc^T))^{-1}[bu + Ly]$$

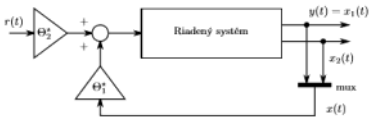
$$\hat{x} = (sI - A + Lc^T)^{-1}bu + (\quad)^{-1}Ly$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}(\quad)$$

zavádza signál $w(t)$ taký, že $\dot{x}_2(t) = w(t) + Ly(t)$. Je zrejmé, že $\dot{w}(t) = \ddot{x}_2(t) + L\dot{y}(t)$. Po dosadení a úpravách

$$\dot{w}(t) = (A_{22} - LA_{12})\,w(t) + (A_{21} - LA_{11} + A_{22}L - LA_{12}L)\,y(t) + (b_2 - Lb_1)\,u(t) \quad (5)$$

[1]Zákon riadenia $u(t) = \Theta_1^{*T}(t)x(t) + \Theta_3(t)r(t)$ a zákon riadenia $u(t) = k^T(t)x(t) + l(t)r(t)$ sa po formálnej stránke zhodujú, len označenie adaptovaných parametrov je iné.



Obr. 1: Zákon riadenia so stavovou spätnou väzbou – pôvodný tvar, ktorý je umožnený pre dostupnosť stavového vektora $x(t)$.

S využitím s ako operátora časovej derivácie je možné písať

$$\begin{aligned} w(t) = {} & (sI - A_{22} + LA_{12})^{-1}\,(A_{21} - -LA_{11} + A_{22}L - LA_{12}L)\,y(t) \\ & + (sI - A_{22} + LA_{12})^{-1}\,(b_2 - Lb_1)\,u(t) \end{aligned} \quad (6)$$

čo je možné vyjadriť aj v tvare

$$w(t) = \mathrm{diag}(g_w)\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]u(t) + \mathrm{diag}(g_y)\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]y(t) \quad (7)$$

kde $g_w \in \mathbb{R}^{n-1}$ a $g_y \in \mathbb{R}^{n-1}$ sú vektory konštánt, preto $\mathrm{diag}(g_w)$ a $\mathrm{diag}(g_y)$ sú diagonálne matice, $\alpha(s)$ je vektor mocnín operátora s v tvare $\alpha^T(s) = [s^{n-2}, \ldots, s, 1]$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$, a nakoniec polynóm $\Lambda(s) = \det(sI - A_{22} + LA_{12})$ je monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$ daný voľbou vektora L. Ako bolo uvedené $\dot{x}_2(t) = w(t) + Ly(t)$, potom

$$\dot{x}_2(t) = \mathrm{diag}(g_w)\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]u(t) + \mathrm{diag}(g_y)\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]y(t) + Ly(t) \quad (8)$$

V úvode časti uvedený ideálny člen $\Theta_1^{*T}(t)x(t)$ je teda možné parametrizovať nasledovne. Stavový vektor $x(t)$ je nahradený odhadom $\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} y(t) & \hat{x}_2(t) \end{bmatrix}^T$, a tiež sa rozdelí $\Theta_1^*(t) = \begin{bmatrix} k_y^* & k_2^{*T} \end{bmatrix}^T$, pričom $k_y^* \in \mathbb{R}$, potom

$$\begin{aligned} \Theta_1^{*T}(t)\hat{x}(t) = {} & k_y^* y(t) + k_2^{*T}\hat{x}_2(t) \\ = {} & k_y^* y(t) + k_2^{*T}\mathrm{diag}(g_w)\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]u(t) + k_2^{*T}\mathrm{diag}(g_y)\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]y(t) + k_2^{*T}Ly(t) \end{aligned} \quad (9)$$

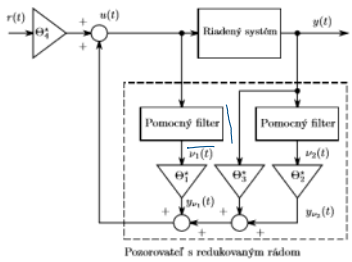
V tomto bode text sa pre jednoduchosť a lepšiu názornosť zavedie úplne nové označovanie, ktorým sa mení označenie niektorých parametrov zákona riadenia, a teda význam pôvodného označovania. Pôvodný ideálny člen formálne zodpovedá výrazu $\overline{\Theta}_1^{*T}\hat{x}(t)$ a nové označovanie vyplýva zo zapísania rovnice (9) v tvare

$$\overline{\Theta}_1^{*T}\hat{x}(t) = \Theta_1^{*T}\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]u(t) + \Theta_2^{*T}\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]y(t) + \Theta_3^* y(t) \quad (10)$$

kde sa vzhľadom na (9) zaviedlo označenie $\Theta_1^{*T} = k_2^{*T}\mathrm{diag}(g_w)$, $\Theta_2^{*T} = k_2^{*T}\mathrm{diag}(g_y)$ a $\Theta_3^* = k_y^* + k_2^{*T}L$.

Z uvedeného vyplýva, že ideálny stavový zákon riadenia použitý v predchádzajúcich častiach je možné re-parametrizovať do tvaru

$$u(t) = \Theta_1^{*T}\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]u(t) + \Theta_2^{*T}\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]y(t) + \Theta_3^* y(t) + \Theta_4^* r(t) \quad (11)$$



Obr. 2: Pozorovateľ s redukovaným rádom.

V prvých dvoch členoch zákona riadenia (11) sú použité takzvané pomocné filtre. Tieto generujú pomocné signály $\nu_1(t)$ a $\nu_2(t)$ upresnené nižšie. Napríklad prvý člen pravej strany v rovnici (11) možno zapísať v tvare

$$y_{\nu_1}(t) = \Theta_1^{*T}\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]u(t) = \frac{\Theta_{1(n-2)}^* s^{n-2} + \cdots + \Theta_{11}^* s + \Theta_{10}^*}{s^{n-1} + \lambda_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \lambda_1 s + \lambda_0}u(t) \quad (12)$$

kde $\Theta_1^* = \begin{bmatrix} \Theta_{1(n-2)}^* & \cdots & \Theta_{11}^* & \Theta_{10}^* \end{bmatrix}^T$, alebo v stavovom priestore v tvare (48) na strane 9. Po označení jednotlivých vektorov a matíc v (48) je prvý pomocný filter v tvare

$\dot{x} = Ax + bu$

$$\dot{\nu}_1(t) = A\nu_1(t) + qu(t) \quad (13a)$$
$$y_{\nu_1}(t) = \Theta_1^{*T}\nu_1(t) \quad (13b)$$

Z uvedeného plynie, že prvý pomocný filter má v stavovom priestore tvar $\dot{\nu}_1(t) = A\nu_1(t) + qu(t)$, kde $\nu_1(t)$ je vektor pomocných signálov generovaných prvým pomocným filtrom (stavový vektor prvého pomocného filtra). Tento je násobený parametrami zákona riadenia Θ_1^{*T}. Analogicky, druhý pridaný filter má v stavovom priestore tvar $\dot{\nu}_2(t) = A\nu_2(t) + qy(t)$. Zákon riadenia využívajúci len vstupno-výstupné signály riadeného systému je potom v tvare

$$u(t) = \Theta_1^{*T}\nu_1(t) + \Theta_2^{*T}\nu_2(t) + \Theta_3^* y(t) + \Theta_4^* r(t) \quad (14)$$

1.2 Formulácia problému riadenia s referenčným modelom

Riešením MRC (Model Reference Control – Riadenie s referenčným modelom) problému je taký zákon riadenia u, ktorý zabezpečí, že výstup sústavy y sleduje výstup referenčného modelu y_m pri danom referenčnom signály r.

Uvažujme sústavu opísanú prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p\frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \quad (15)$$

$$|\Gamma| = \frac{1}{\det(\Gamma)}\left(\begin{bmatrix} \frac{\bullet}{\Lambda(s)} & \frac{0}{\Lambda(s)} \\ \frac{////}{\Lambda(s)} & \frac{\times}{\Lambda(s)} \end{bmatrix}\right.$$

$$\hat{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\Lambda(s)}\begin{bmatrix} \cdots & \vdots \\ \cdots & \vdots \end{bmatrix} & \vdots \\ \vdots & \end{bmatrix}}_{\Lambda(s)} bu + \ldots$$

$$c^T \begin{bmatrix} s^{\text{TAZNA}} \\ \vdots \\ s^0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} s^{n-1} \\ \vdots \\ s^0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \cdot & & \\ & \ddots & \\ & & \cdot \end{bmatrix}\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}u + \ldots$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & & \\ & \ddots & \\ & & \cdot \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}u}_{s^i y \ldots}$$

$$u = k^T\hat{x} + lr$$

$$u = k^T\left(\begin{bmatrix} \mathrm{diag}_1 \end{bmatrix}\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}u + \begin{bmatrix} \mathrm{diag}_2 \end{bmatrix}\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}y\right) + lr$$

$$u = \Theta_1^T\underbrace{\left(\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}u\right)}_{\boxed{\nu_1}} + \Theta_2^T\underbrace{\left(\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}y\right)}_{\nu_2} + \Theta_3 r$$

$$\Theta_1^T\nu_1 + \Theta_2^T\nu_2 + \Theta_3 r$$

$$u = \Theta^T\omega$$

Riešením MRC (Model Reference Control – Riadenie s referenčným modelom) problému je taký zákon riadenia u, ktorý zabezpečí, že výstup sústavy y sleduje výstup referenčného modelu y_m pri danom referenčnom signály r.

Uvažujme sústavu opísanú prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \tag{15}$$

kde $Z_p(s)$ je monický, hurwitzov polynóm stupňa m, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa n a k_p je tzv. *vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy*. *Relatívny stupeň* sústavy je $n^* = n - m$.

Polynóm sa nazýva *monický* ak je koeficient pri najvyššej mocnine s (v tomto prípade) rovný jednotke. Polynóm sa nazýva *hurwitzov* ak sú reálne časti všetkých koreňov polynómu záporné.

Nech referenčný model je daný prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = \boxed{W_m(s)} = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \tag{16}$$

kde k_m je vysokofrekvenčné zosilnenie referenčného modelu, polynóm $Z_m(s)$ je monický Hurwitzov polynóm stupňa m_m, $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa n_m, pričom relatívny stupeň $n_m^* = n_m - m_m = n^*$.

Zákon riadenia, ktorý rieši MRC problém je nasledovný. Najskôr uvedieme jeho všeobecný zápis, avšak pre lepšiu názornosť budeme riešenie MRC problému vyšetrovať na zjednodušenom konkrétnom príklade. Všeobecný tvar zákona riadenia, ktorý rieši MRC problém je

$$u = \Theta_1^{*\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{*\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^* y + \Theta_4^* r \tag{17}$$

kde $\alpha(s)$ je vektor obsahujúci mocniny s, $\alpha(s) = \left[s^{n-2}, \ldots, s, 1\right]^{\mathsf{T}}$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$. Vektory $\Theta_1^* \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\Theta_2^* \in \mathbb{R}^{n-1}$ a skaláry $\Theta_3^* \in \mathbb{R}^1$, $\Theta_4^* \in \mathbb{R}^1$ sú konštantné parametre zákona riadenia, ktorých hodnoty hľadáme. $\Lambda(s)$ je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$ obsahujúci $Z_m(s)$ ako faktor

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s) \tag{18}$$

a teda aj $\Lambda_0(s)$ je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm zodpovedajúceho stupňa.

1.2.1 Ilustrácia na príklade systému 2. rádu

Uvažujme systém opísaný prenosovou funkciou v tvare

$$y(s) = k_p \frac{s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} u(s) \tag{19}$$

kde a_i, b_i sú konštanty ($b_0 > 0$). Referenčný model zvoľme tak aby mal rovnaký relatívny stupeň ako sústava.

$$y_m(s) = W_m(s) r(s) = k_m \frac{s + b_{0m}}{s^2 + a_{1m} s + a_{0m}} r(s) \tag{20}$$

$u = ?$

V tomto konkrétnom príklade, zákon riadenia, ktorý rieši MRC problém je v tvare

$$u(s) = \Theta_1^* \frac{1}{(s+\lambda)} u(s) + \Theta_2^* \frac{1}{(s+\lambda)} y(s) + \Theta_3^* y(s) + \Theta_4^* r(s) \tag{21}$$

$\Lambda(s)$

kde sme použili $\alpha(s) = 1$ a $\Lambda(s) = (s + \lambda)$. V tomto prípade Θ_1^*, Θ_2^* aj Θ_3^* a Θ_4^* sú skalárne konštanty – parametre zákona riadenia. Zákon riadenia (21) možno upraviť do tvaru

$$\left(1 - \frac{\Theta_1^*}{(s+\lambda)}\right) u(s) = \left(\frac{\Theta_2^*}{(s+\lambda)} + \Theta_3^*\right) y(s) + \Theta_4^* r(s) \tag{22a}$$

$$\left(\frac{(s+\lambda) - \Theta_1^*}{(s+\lambda)}\right) u(s) = \left(\frac{\Theta_2^* + \Theta_3^*(s+\lambda)}{(s+\lambda)}\right) y(s) + \Theta_4^* r(s) \tag{22b}$$

$$u(s) = \frac{\Theta_2^* + \Theta_3^*(s+\lambda)}{(s+\lambda) - \Theta_1^*} y(s) + \frac{\Theta_4^*(s+\lambda)}{(s+\lambda) - \Theta_1^*} r(s) \tag{22c}$$

$\frac{y}{r} = ?$

Dosadením (22c) do (19) získame prenosovú funkciu URO v tvare (23):

$$y(s) = k_p \frac{s+b_0}{s^2+a_1 s+a_0}\left(\frac{\Theta_2^* + \Theta_3^*(s+\lambda)}{(s+\lambda)-\Theta_1^*} y(s) + \frac{\Theta_4^*(s+\lambda)}{(s+\lambda)-\Theta_1^*} r(s)\right) \tag{23a}$$

$$\left(1 - \frac{k_p(s+b_0)\left(\Theta_2^* + \Theta_3^*(s+\lambda)\right)}{(s^2+a_1 s+a_0)\left((s+\lambda)-\Theta_1^*\right)}\right) y(s) = \frac{k_p(s+b_0)\Theta_4^*(s+\lambda)}{(s^2+a_1 s+a_0)\left((s+\lambda)-\Theta_1^*\right)} r(s) \tag{23b}$$

$$\left(\frac{(s^2+a_1 s+a_0)\left((s+\lambda)-\Theta_1^*\right) - k_p(s+b_0)\left(\Theta_2^* + \Theta_3^*(s+\lambda)\right)}{(s^2+a_1 s+a_0)\left((s+\lambda)-\Theta_1^*\right)}\right) y(s) = \tag{23c}$$

$$= \frac{k_p(s+b_0)\Theta_4^*(s+\lambda)}{(s^2+a_1 s+a_0)\left((s+\lambda)-\Theta_1^*\right)} r(s)$$

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{k_p(s+b_0)\Theta_4^*(s+\lambda)}{(s^2+a_1 s+a_0)\left((s+\lambda)-\Theta_1^*\right) - k_p(s+b_0)\left(\Theta_2^* + \Theta_3^*(s+\lambda)\right)} \tag{23d}$$

Prenosovú funkciu (23d) označme $G_c(s)$. Výstupná veličina sústavy bude sledovať výstupnú veličinu referenčného modelu ak $G_c(s) = W_m(s)$. Táto podmienka bude splnená ak

$$\Theta_4^* = \frac{k_m}{k_p} \tag{24}$$

$$(s+\lambda) = \Lambda_0(s)(s+b_{0m}) = (s+b_{0m}) \tag{25}$$

pričom (24) je prvou podmienkou zhody, (25) je voľbou polynómu $\Lambda(s)$ stupňa $n-1$ kde v tomto prípade $\Lambda_0(s) = 1$ a teda $\lambda = b_{0m}$ a druhou podmienkou zhody je

$$\begin{aligned}&(s^2+a_1 s+a_0)\left((s+\lambda)-\Theta_1^*\right) - k_p(s+b_0)\left(\Theta_2^* + \Theta_3^*(s+\lambda)\right)\\ &= (s+b_0)(s^2+a_{1m}s+a_{0m})\end{aligned} \tag{26}$$

Potom možno (23d) zapísať v tvare

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{k_p(s+b_0)\frac{k_m}{k_p}(s+b_{0m})}{(s+b_0)(s^2+a_{1m}s+a_{0m})} = \frac{k_m(s+b_{0m})}{(s^2+a_{1m}s+a_{0m})} = W_m(s) \tag{27}$$

V prenosovej funkcii (27) dochádza ku vzájomnému vykráteniu sa polynómu $(s+b_0)$. Táto operácia je možná, pretože tieto polynómy majú korene v zápornej polrovine komplexnej roviny a teda sú stabilné (Hurwitzove). Taký je predpoklad pre $Z_p(s)$. Polynómy, ktoré nie sú Hurwitzove nemožno v prenosovej funkcii navzájom vykrátiť. Podmienku zhody (26) je možné zapísať aj v maticovom tvare porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách na oboch stranách

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -k_p \\ -a_1 & -k_p & -(k_p b_{0m} + k_p b_0) \\ -a_0 & -k_p b_0 & -k_p b_0 b_{0m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1^* \\ \Theta_2^* \\ \Theta_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1m} + b_0 - b_{0m} - a_1 \\ a_{0m} + b_0 a_{1m} - a_1 b_{0m} - a_0 \\ b_0 a_{0m} - a_0 b_{0m} \end{bmatrix} \tag{28}$$

čo je sústava algebraických rovníc v tvare $M_s \Theta_s = p_s$ a teda existencia takého vektora Θ_s, ktorý spĺňa rovnosť, je závislá od vlastností matice M_s. Z podmienok zhody (24) a (28) plynú konkrétne hodnoty parametrov zákona riadenia, ktoré riešia daný MRC problém.

Predchádzajúci postup je možné zapísať prehľadnejšie (pre prehľadnosť vynecháme aj zátvorky s laplaceovou premennou (s)):

Zákon riadenia

$$u = \frac{\Theta_1^*}{\Lambda} u + \frac{\Theta_2^*}{\Lambda} y + \Theta_3^* y + \Theta_4^* r \tag{29a}$$

$$\left(1 - \frac{\Theta_1^*}{\Lambda}\right) u - \left(\frac{\Theta_2^*}{\Lambda} + \Theta_3^*\right) y + \Theta_4^* r \tag{29b}$$

$$\frac{\Lambda - \Theta_1^*}{\Lambda} u = \frac{\Theta_2^* + \Theta_3^* \Lambda}{\Lambda} y + \Theta_4^* r \tag{29c}$$

$$u = \frac{\Theta_2^* + \Theta_3^* \Lambda}{\Lambda - \Theta_1^*} y + \frac{\Theta_4^* \Lambda}{\Lambda - \Theta_1^*} r \tag{29d}$$

Uzavretý regulačný obvod

$$y = k_p \frac{Z_p}{R_p}\left(\frac{\Theta_2^* + \Theta_3^* \Lambda}{\Lambda - \Theta_1^*} y + \frac{\Theta_4^* \Lambda}{\Lambda - \Theta_1^*} r\right) \tag{30a}$$

t.f. URO

$$\left(1 - \frac{k_p Z_p\left(\Theta_2^* + \Theta_3^* \Lambda\right)}{R_p\left(\Lambda - \Theta_1^*\right)}\right) y = \frac{k_p Z_p \Theta_4^* \Lambda}{R_p\left(\Lambda - \Theta_1^*\right)} r \tag{30b}$$

$\frac{k_m}{k_p}$ Z_m^{n-1}! $\Lambda = Z_m \cdot (\Lambda_0)$

$$\frac{R_p\left(\Lambda - \Theta_1^*\right) - k_p Z_p\left(\Theta_2^* + \Theta_3^* \Lambda\right)}{R_p\left(\Lambda - \Theta_1^*\right)} y = \frac{k_p Z_p \Theta_4^* \Lambda}{R_p\left(\Lambda - \Theta_1^*\right)} r \tag{30c}$$

RM $\overset{?}{=}$ URO

$$y = \frac{k_p Z_p \Theta_4^* \Lambda}{R_p\left(\Lambda - \Theta_1^*\right) - k_p Z_p\left(\Theta_2^* + \Theta_3^* \Lambda\right)} r \tag{30d}$$

$Z_m k_m$

$R_m Z_p$

$y = \frac{k_m Z_m}{R_m}$

Podmienky zhody

$$\Theta_4^* = \frac{k_m}{k_p} \tag{31a}$$

$$\Lambda = Z_m \tag{31b}$$

$$R_p\left(\Lambda - \Theta_1^*\right) - k_p Z_p\left(\Theta_2^* + \Theta_3^* \Lambda\right) = Z_p R_m \tag{31c}$$

1.2.2 Zovšeobecnenie pre systém n. rádu

Pri uvažovaní všeobecného zákona riadenia v tvare (17) má prenosová funkcia uzavretého regulačného obvodu tvar

$$y = \frac{k_p Z_p \Theta_4^* \Lambda^{\mathrm{T}}}{\Lambda\left(R_p\left(\Lambda - \Theta_1^{\mathrm{T}} \alpha(s)\right) - k_p Z_p\left(\Theta_2^{\mathrm{T}} \alpha(s) + \Theta_3^* \Lambda\right)\right)} r \tag{32}$$

a podmienky zhody

$$\Theta_4^* = \frac{k_m}{k_p} \tag{33a}$$

$$\Lambda = \Lambda_0 Z_m \tag{33b}$$

$$R_p\left(\Lambda - \Theta_1^{\mathrm{T}} \alpha(s)\right) - k_p Z_p\left(\Theta_2^{\mathrm{T}} \alpha(s) + \Theta_3^* \Lambda\right) = Z_p \Lambda_0 R_m \tag{33c}$$

Predpoklady pri, ktorých sú tieto podmienky splniteľné sú intuitívne zrejmé z predchádzajúceho príkladu v časti 1.2.1. Hlbšou analýzou MRC problému sa v tomto kurze zaoberať nebudeme. Poslucháča odkazujeme na odporúčanú literatúru, kde nájde všetky potrebné (matematické) detaily k riešeniu MRC problému.

1.3 Teoretický opis výsledného URO v stavovom priestore

V tejto časti vyjadríme uzavretý regulačný obvod, ktorý vznikne riešením MRC problému, pomocou opisu v stavovom priestore.

1.3.1 Ilustrácia na príklade systému 2. rádu

Opäť začneme zjednodušeným príkladom 1.2.1, a v ďalšej časti dodáme pre úplnosť všeobecný zápis URO v stavovom priestore.

Sústava v tvare (15), konkrétne (19), môže byť reprezentovaná opisom v stavovom priestore v tvare

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{34a}$$

$$y = c^{\mathrm{T}} x \tag{34b}$$

kde x je vektor stavových veličín sústavy a A; b; c^{T} sú konštantné matice (vektory) zodpovedajúcich rozmerov. V tomto prípade nekladieme žiadne podmienky na formu (kanonickú) matice A, ako to bolo v prípade stavového MRAC-u.

Uvažujeme zákon riadenia (21), pripomeňme:

$$u(s) = \Theta_1^* \boxed{\frac{1}{(s+\lambda)} u(s)} + \Theta_2^* \boxed{\frac{1}{(s+\lambda)} y(s)} + \Theta_3^* y(s) + \Theta_4^* r(s) \tag{35}$$

$\to y_f$

θ_{1*}

V prvých dvoch členoch zákona riadenia (35) sú použité takzvané prídavné filtre, ktorých vstupom je buď akčný zásah u (vstupný signál sústavy) alebo výstupná (riadená) veličina y. Tieto prídavné filtre sú tiež nazývané pomocné, či prídavné generátory, generujú prídavné (pomocné) signály. Oba prídavné filtre sú rovnaké, v tomto prípade dané prenosovou funkciou $\frac{1}{(s+\lambda)}$. Výstupné signály filtrov sú v tomto prípade skalárne signály. Vo všeobecnosti sú výstupné signály pomocných filtrov vektory signálov s rovnakým rozmerom ako vektory parametrov Θ_1^* a Θ_2^*, viď všeobecný zápis zákona riadenia (17). Označme výstupné signály prídavných filtrov ν_1 a ν_2. Tieto signály sa násobia parametrami zákona riadenia Θ_1^* a Θ_2^*. Prídavné filtre možno zapísať v tvare

$$\dot{\nu}_1 = -\lambda\nu_1 + u \tag{36a}$$
$$\dot{\nu}_2 = -\lambda\nu_2 + y = -\lambda\nu_2 + c^{\mathrm{T}}x \tag{36b}$$

Jednoduchým pridaním týchto pomocných signálov k sústave máme sústavu rovníc:

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{37a}$$
$$\dot{\nu}_1 = -\lambda\nu_1 + u \tag{37b}$$
$$\dot{\nu}_2 = -\lambda\nu_2 + c^{\mathrm{T}}x \tag{37c}$$
$$y = c^{\mathrm{T}}x \tag{37d}$$

Sústavu rovníc (37) budeme nazývať ***doplnená sústava***. Doplnenú sústavu (37) možno zapísať v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\nu}_1 \\ \dot{\nu}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ c^{\mathrm{T}} & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{38a}$$
$$y = \begin{bmatrix} c^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} \tag{38b}$$

a po označení jednotlivých matíc a vektorov

$$\dot{X} = A_e X + B_e u \tag{39a}$$
$$y = C_e^{\mathrm{T}} X \tag{39b}$$

Zákon riadenia (35) zapíšeme v takom vektorovom tvare, v ktorom je možné využiť stavový vektor doplnenej sústavy X:

$$u = \Theta_e^{*\mathrm{T}} DX + \Theta_4^* r \tag{40}$$

kde $\Theta_e^* = \begin{bmatrix} \Theta_3^* & \Theta_1^* & \Theta_2^* \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$; Θ_4^* sú parametre zákona riadenia a matica

$$D = \begin{bmatrix} c^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$y = c^T x$ $\quad DX = \begin{bmatrix} y \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}$

sme zaviedli práve preto aby sme v zákone riadenia (40) mohli priamo písať stavový vektor X. Tvar, v ktorom sa zákon riadenia (40) viac podobá na pôvodný zápis (35), a ktorý vyplýva priamo z (40) je

$$u = \Theta_1^*\nu_1 + \Theta_2^*\nu_2 + \Theta_3^* c^{\mathrm{T}} x + \Theta_4^* r \tag{41a}$$
$$u = \Theta_1^*\nu_1 + \Theta_2^*\nu_2 + \Theta_3^* y + \Theta_4^* r \tag{41b}$$

Dosadením (40) do (39) získame opis URO v stavovom priestore v tvare (výstupnú rovnicu vynechávame, pretože sa nemení)

$$\dot{X} = A_e X + B_e\left(\Theta_e^{*\mathrm{T}} DX + \Theta_4^* r\right) \quad \text{URO} \tag{42a}$$
$$\dot{X} = A_e X + B_e\Theta_e^{*\mathrm{T}} DX + B_e\Theta_4^* r \tag{42b}$$
$$\dot{X} = \left(A_e + B_e\Theta_e^{*\mathrm{T}} D\right) X + B_e\Theta_4^* r \tag{42c}$$
$$\dot{X} = A_m X + B_e\Theta_4^* r \tag{42d}$$

URO = RM

kde

$$\begin{aligned} A_e &= A_m + B_e\Theta_e^{*\mathrm{T}} D \quad \text{"k"} \qquad A_m = A + b^T k \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ c^{\mathrm{T}} & 0 & -\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_3^* & \Theta_1^* & \Theta_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ c^{\mathrm{T}} & 0 & -\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\Theta_3^* & b\Theta_1^* & b\Theta_2^* \\ \Theta_3^* & \Theta_1^* & \Theta_2^* \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ c^{\mathrm{T}} & 0 & -\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\Theta_3^* c^{\mathrm{T}} & b\Theta_1^* & b\Theta_2^* \\ \Theta_3^* c^{\mathrm{T}} & \Theta_1^* & \Theta_2^* \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A + b\Theta_3^* c^{\mathrm{T}} & b\Theta_1^* & b\Theta_2^* \\ \Theta_3^* c^{\mathrm{T}} & -\lambda + \Theta_1^* & \Theta_2^* \\ c^{\mathrm{T}} & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{43}$$

Pretože uzavretý regulačný obvod zapísaný v tvare

$$\dot{X} = A_e X + B_e\Theta_4^* r \tag{44a}$$
$$y = C_e^{\mathrm{T}} X \tag{44b}$$

obsahuje ideálne parametre zákona riadenia, teda také, ktoré spĺňajú podmienky zhody musí sa tento zhodovať s referenčným modelom. Preto tzv. *neminimálna reprezentácia* prenosovej funkcie referenčného modelu (16) v stavovom priestore je

$$\dot{X}_m = A_e X_m + B_e\Theta_4^* r \tag{45a}$$
$$y_m = C_e^{\mathrm{T}} X_m \tag{45b}$$

kde X_m sú stavové veličiny neminimálnej reprezentácie modelu

1.3.2 Zovšeobecnenie pre systém n. rádu

Uvažujeme zákon riadenia (17), pripomeňme:

$$u = \Theta_1^{*\mathrm{T}}\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}u + \Theta_2^{*\mathrm{T}}\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}y + \Theta_3^* y + \Theta_4^* r \tag{46}$$

kde $\alpha(s)$ je vektor obsahujúci mocniny s, $\alpha(s) = \left[s^{n-2}, \ldots, s, 1\right]^{\mathrm{T}}$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$. Vektory $\Theta_1^*, \Theta_2^* \in \mathbb{R}^{n-1}$ a skaláry $\Theta_3^*, \Theta_4^* \in \mathbb{R}^1$ sú konštantné parametre zákona riadenia. $\Lambda(s)$ je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$.

Napríklad prvý člen v (46) možno zapísať v tvare

$$y_{\nu_1} = \Theta_1^{*\mathrm{T}}\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}u = \frac{\Theta_{1(n-2)}^* s^{n-2} + \cdots + \Theta_{11}^* s + \Theta_{10}^*}{s^{n-1} + \lambda_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \lambda_1 s + \lambda_0}u \tag{47}$$

kde $\Theta_1^* = \begin{bmatrix} \Theta_{1(n-2)}^* & \cdots & \Theta_{11}^* & \Theta_{10}^* \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, alebo v stavovom priestore v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{\nu}_{1(n-2)} \\ \dot{\nu}_{1(n-3)} \\ \dot{\nu}_{1(n-4)} \\ \vdots \\ \dot{\nu}_{10} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\lambda_{n-2} & -\lambda_{n-3} & \cdots & -\lambda_2 & -\lambda_1 & -\lambda_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \nu_{1(n-2)} \\ \nu_{1(n-3)} \\ \nu_{1(n-4)} \\ \vdots \\ \nu_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{48a}$$

$\dot{\nu}_1 = -\lambda\nu_1 + u$

$$y_{\nu_1} = \begin{bmatrix} \Theta_{1(n-2)}^* & \Theta_{1(n-3)}^* & \Theta_{1(n-4)}^* & \cdots & \Theta_{10}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{1(n-2)} \\ \nu_{1(n-3)} \\ \nu_{1(n-4)} \\ \vdots \\ \nu_{10} \end{bmatrix} \tag{48b}$$

Označme v (48) jednotlivé vektory a maticu:

$$\dot{\nu}_1 = \Lambda\nu_1 + qu \tag{49a}$$
$$y_{\nu_1} = \Theta_1^{*\mathsf{T}}\nu_1 \tag{49b}$$

Z uvedeného vyplýva, že prvý prídavný filter má v stavovom priestore tvar $\dot{\nu}_1 = \Lambda\nu_1 + qu$ kde ν_1 je vektor pomocných signálov generovaných prvým pomocným generátorom (stavový vektor prvého pomocného generátora). Tento je násobený parametrami zákona riadenia $\Theta_1^{*\mathsf{T}}$. Analogicky, druhý prídavný filter má v stavovom priestore tvar $\dot{\nu}_2 = \Lambda\nu_2 + qy = \Lambda\nu_2 + qc^{\mathsf{T}}x$. Doplnená sústava vo všeobecnom tvare je

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{50a}$$
$$\dot{\nu}_1 = \Lambda\nu_1 + qu \tag{50b}$$
$$\dot{\nu}_2 = \Lambda\nu_2 + qc^{\mathsf{T}}x \tag{50c}$$
$$y = c^{\mathsf{T}}x \tag{50d}$$

Potom v (39) sú

$$x = \begin{bmatrix} x \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}; \quad A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ qc^{\mathsf{T}} & 0 & \Lambda \end{bmatrix}; \quad b_c = \begin{bmatrix} b \\ q \\ 0 \end{bmatrix}; \quad c_c^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} c^{\mathsf{T}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{51}$$

Zákon riadenia (46) zapíšeme vo vektorovom tvare:

$$u = \Theta_c^{*\mathsf{T}}Dx + \Theta_4^* r \tag{52}$$

kde $\Theta_c^* = \begin{bmatrix} \Theta_3^* & \Theta_1^{*\mathsf{T}} & \Theta_2^{*\mathsf{T}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$; Θ_4^* sú parametre zákona riadenia a maticu

$$D = \begin{bmatrix} c^{\mathsf{T}} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

sme zaviedli práve preto aby sme v zákone riadenia (52) mohli priamo písať stavový vektor x. Tvar, v ktorom sa zákon riadenia (52) viac podobá na pôvodný zápis (46), a ktorý vyplýva priamo z (52) je

$$u = \Theta_1^{*\mathsf{T}}\nu_1 + \Theta_2^{*\mathsf{T}}\nu_2 + \Theta_3^* c^{\mathsf{T}}x + \Theta_4^* r \tag{53a}$$
$$u = \Theta_1^{*\mathsf{T}}\nu_1 + \Theta_2^{*\mathsf{T}}\nu_2 + \Theta_3^* y + \Theta_4^* r \tag{53b}$$

Dosadením (52) do (39), v ktorej sú ale matice (51), získame opis URO v stavovom priestore v tvare (44), a matica A_c má tvar

$$\begin{aligned}
A_c &= A_o + b_c\Theta_c^{*\mathsf{T}}D \\
&= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ qc^{\mathsf{T}} & 0 & \Lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ q \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_3^* & \Theta_1^{*\mathsf{T}} & \Theta_2^{*\mathsf{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^{\mathsf{T}} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ qc^{\mathsf{T}} & 0 & \Lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\Theta_3^* & b\Theta_1^{*\mathsf{T}} & b\Theta_2^{*\mathsf{T}} \\ q\Theta_3^* & q\Theta_1^{*\mathsf{T}} & q\Theta_2^{*\mathsf{T}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^{\mathsf{T}} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ qc^{\mathsf{T}} & 0 & \Lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\Theta_3^* c^{\mathsf{T}} & b\Theta_1^{*\mathsf{T}} & b\Theta_2^{*\mathsf{T}} \\ q\Theta_3^* c^{\mathsf{T}} & q\Theta_1^{*\mathsf{T}} & q\Theta_2^{*\mathsf{T}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A + b\Theta_3^* c^{\mathsf{T}} & b\Theta_1^{*\mathsf{T}} & b\Theta_2^{*\mathsf{T}} \\ q\Theta_3^* c^{\mathsf{T}} & \Lambda + q\Theta_1^{*\mathsf{T}} & q\Theta_2^{*\mathsf{T}} \\ qc^{\mathsf{T}} & 0 & \Lambda \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{54}$$

Pretože takto všeobecne opísaný URO obsahuje ideálne parametre zákona riadenia, teda také, ktoré spĺňajú podmienky zhody musí sa tento zhodovať so všeobecným

referenčným modelom (16), ktorého neminimálna reprezentácia v stavovom priestore má tvar

$$\dot{x}_m = A_c x_m + \bar{b}_c r \tag{55a}$$
$$y_m = c_c^{\mathsf{T}} x_m \tag{55b}$$

kde x_m sú stavové veličiny neminimálnej reprezentácie referenčného modelu a kde sme označili $\bar{b}_c = b_c\Theta_4^*$.

2 Cvičenie šieste ako príklad k téme *MRC vo všeobecnosti*

Tento príklad sa týka riadenia s referenčným modelom avšak bez adaptácie. Cieľom tu teda nie je návrh adaptívneho riadiaceho systému. Cieľom je oboznámenie sa s riešením MRC problému (problému návrhu (výpočtu) riadenia s referenčným modelom). Tu uvedené zároveň slúži na priebežné zopakovanie vybraných tém súvisiacich s numerickou simuláciou.

2.1 Úlohy

1. Uvažujme riadený systém[2], ktorý pracuje v pásme danom dvomi pracovnými bodmi. V týchto dvoch hraničných pracovných bodoch prenosová funkcia systému nie je rovnaká, vyskytujú sa mierne rozdiely v hodnotách koeficientov jednotlivých polynómov, pričom stupne polynómov sú zhodné, konkrétne:

$$G_{OP_1} = 0,1659\frac{s + 22}{s^2 + 3,1423s + 2,6539} \tag{56}$$
$$G_{OP_2} = 0,1669\frac{s + 20,7618}{s^2 + 2,3422s + 2,7293} \tag{57}$$

- Určte *nominálnu* prenosovú funkciu sústavy tak, že jej koeficienty sú priemery hodnôt oboch prenosových funkcií (56) a (57).
- Pre nominálnu prenosovú funkciu sústavy určte polynómy Z_p, R_p a zosilnenie k_p pričom

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p\frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \tag{58}$$

kde $Z_p(s)$ je monický polynóm stupňa m, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa n a k_p je tzv. *vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy. Relatívny stupeň* sústavy je $n^* = n - m$.
- Zistite, či polynóm $Z_p(s)$ je Hurwitzov.

2. Vyriešte MRC problém pre nominálnu prenosovú funkciu sústavy, uvažujte referenčný model daný prenosovou funkciou v tvare

$$W_m(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3.5s + 3} \tag{59}$$

Referenčný model je daný prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m\frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \tag{60}$$

kde k_m je vysokofrekvenčné zosilnenie referenčného modelu, $Z_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa m_m, $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa n_m, pričom relatívny stupeň $n_m^* = n_m - m_m = n^*$.

Riešením MRC problému je taký zákon riadenia u, ktorý zabezpečí, že výstup sústavy y sleduje výstup referenčného modelu y_m pri danom referenčnom signály (vstupe referenčného modelu) r. Všeobecný tvar zákona riadenia, ktorý rieši MRC problém je

$$u = \Theta_1^{*\mathsf{T}}\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}u + \Theta_2^{*\mathsf{T}}\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}y + \Theta_3^* y + \Theta_4^* r \tag{61}$$

[2] Uvedený riadený systém je prevzatý z článku publikovanom v prestížnom elektronickom časopise posterus.sk (nemýliť si so Šliničkom, už nevychádza), viď [2].

kde $\alpha(s)$ je vektor obsahujúci mocniny s, $\alpha(s) = \left[s^{n-2}, \ldots, s, 1\right]^{\mathsf{T}}$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$. Vektory $\Theta_1^* \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\Theta_2^* \in \mathbb{R}^{n-1}$ a skaláry $\Theta_3^* \in \mathbb{R}^1$, $\Theta_4^* \in \mathbb{R}^1$ sú konštantné parametre zákona riadenia, ktorých hodnoty hľadáme. $\Lambda(s)$ je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$ obsahujúci $Z_m(s)$ ako faktor

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s) \tag{62}$$

a teda aj $\Lambda_0(s)$ je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm zodpovedajúceho stupňa.

- Na základe všeobecného tvaru zákona riadenia (61) určte zákon riadenia pre uvažovaný konkrétny prípad.
- Vypočítajte parametre Θ_1^*, Θ_2^*, Θ_3^*, Θ_4^*.
- Zostavte simulačnú schému uzavretého regulačného obvodu a overte vypočítané parametre zákona riadenia.

2.2 Riešenie úloh

V zadaní sa hovorí:

Uvažujme riadený systém, ktorý pracuje v pásme danom dvomi pracovnými bodmi. V týchto dvoch hraničných pracovných bodoch prenosová funkcia systému nie je rovnaká, vyskytujú sa mierne rozdiely v hodnotách koeficientov jednotlivých polynómov, pričom stupne polynómov sú zhodné, konkrétne:

$$G_{OP_1} = 0,1659 \frac{s + 22}{s^2 + 3,1423s + 2,6539}$$
$$G_{OP_2} = 0,1669 \frac{s + 20,7618}{s^2 + 2,3422s + 2,7293}$$

Mimochodom, ide o prenosové funkcie zodpovedajúce dynamiky „laboratórnych procesov - motorčekov", ktoré sú v laboratóriu D330. Sú identifikované pre okolie rôznych pracovných bodov, teda raz sú otáčky motora nízke, raz vysoké - nemá význam tu hovoriť o fyzikálnych veličinách, pretože je to merané (a ovládané) len ako napäťové rozsahy o až 10 V (azda si niektorý čitateľ spomína). Možno nemá význam o tom vôbec hovoriť.

2.2.1 Úloha prvá

Bod prvý

Určte *nominálnu* prenosovú funkciu sústavy tak, že jej koeficienty sú priemery hodnôt oboch prenosových funkcií (56) a (57).

$$G_n(s) = 0,1664 \, \frac{s + 21,3809}{s^2 + 2,7423s + 2,6916} \tag{63}$$

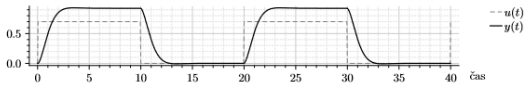
Uvedené je prenosová funkcia systému 2. rádu (dva póly, jedna nula).

Pre azda ešte lepšiu predstavu o riadenom systéme, nakreslime priebeh výstupnej veličiny pre isté skokové priebehy vstupnej veličiny - viď obr. 3.

Simulované priebehy vznikli s využitím nasledujúceho kódu (Python) - viď výpis kódu 1:

Výpis kódu 1: Súbor `ar06_prMRC_lenRS.py`

```
from scipy.integrate import odeint

# odeint je ODE solver a tu nim budeme riesit
# Linear Time Invariant System, a jeho zapis ako (maticova)
# sustava diferencialnych rovnic je - vid nasled. funkciu,
# pricom metoda "matmul" je zamozrejme maticove nasobenie


def fcn_LTIS(x, t, A, b, u):

```

Obr. 3: Priebeh výstupnej veličiny systému (63) pre isté skokové priebehy vstupnej veličiny. Naozaj len mimochodom: čas je reálne v sekundách, a jednotky zobrazených veličín sú volty (via meracia karta).

```
    dotx = np.matmul(A, x) + np.matmul(b, u)                    #

    return dotx

# Vytvorme teraz funkciu, ktora bude realizovat simulacnu schemu.
# Argumentami funkcie su parametre suvisiace s casom
# a vopred dane (zname) signaly.

def fcn_simSch1(t_start, T_s, finalIndex, sig_dummy_ext):       #

    #-----------------------------------------
    # Parametre riadeneho systemu

    A = np.array([[0, 1], [-2.6916, -2.7423]])
    b = np.array([[0], [1]])
    c = np.array([[3.5578], [0.1664]])

    #-----------------------------------------------------
    # Do pola t_log sa bude logovat cas. Pole ma finalIndex
    # riadkov a 1 stlpec a je plne nul. Potom sa ma prvu
    # poziciu (index 0) zapise hodnota t_start

    t_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    t_log[0,:] = t_start

    #-----------------------------------------
    # Zaciatocne podmienky pre stavovy vektor nech su x_0
    # co je vektor rovnako velky ako vektor b

    x_0 = np.zeros(b.shape[0])

    # Stavovy vektor sa bude logovat do pola x_log s prislusnym
    # poctom stlpcov (detto y_log pre vyst. velicinu)

    x_log = np.zeros([finalIndex, len(x_0)])
    x_log[0,:] = x_0

    y_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    y_log[0,:] = np.dot(c.T, x_0.reshape(-1,1))

    #-------------------------

    u_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    u_log[0,:] = 0

    #-----------------------------------------------------
    # Jedna iteracia for cyklu je posun v case o T_s.
    # ODE solver hlada riesenie pre casovy rozsah timespan.
    # Pred danou iteraciou pozname vsetko z predchadzajucej
    # iteracie (idx-1)
    # Pocas iteracie si _log-ujeme "vysledky"

    timespan = np.zeros(2)
    for idx in range(1, int(finalIndex)):

        timespan[0] = t_log[idx-1,:]
        timespan[1] = t_log[idx-1,:] + T_s

        t_log[idx,:] = timespan[-1]
        # posledny prvok v poli je zapisany (logovany)

        # -------------
        # solver odeint pouzije fcn_LTIS, zaciatocne podmienky
```

```python
        # stavu su z predch. iteracie (x_log[idx-1,:]), riesi
        # na casovom rozsahu timespan a dalej (do fcn_LTIS) sa
        # posunu uvedene parametre/hodnoty (args)

        ode0ut = odeint(fcn_LTIS,
                        x_log[idx-1,:],
                        timespan,
                        args=(A, b, u_log[idx-1,:])
                        )

        x_log[idx,:] = ode0ut[-1,:]
        # ode0ut obsahuje hodnoty stavu x pre cely timespan,
        # ale zapisujeme len poslednu hodnotu stavu x

        y_log[idx,:] = np.dot(c.T, x_log[idx,:].reshape(-1,1))
        # okrem stavu (stavovych velicin) chceme aj
        # vystupnu velicinu y

        # --------------------------

        u_log[idx,:] = sig_dummy_ext[idx,:]
        # v tejto simulacii len citame "externy" signal
        # a pouzivame ho ako vstup do systemu


    return [t_log, x_log, y_log, u_log, ]



# Vytvorme teraz vsetko potrebne pre "spustenie" simulacie,
# teda pre zavolanie prave vytvorenej funkcie fcn_simSch1.
# Hovorme tomu "nastavenie simulacie". Casove nastavenie:

sim_t_start = 0
sim_t_final = 40
sim_T_s = 0.05
sim_finalIndex = int(((sim_t_final - sim_t_start)/sim_T_s) + 1)


# Dalej je potrebne vytvorit (vopred znamy) signal.
# Co sa tu deje ponechajme bez komentara, ale vysledkom
# je proste "signal" pouzitelny v simulacii...

period_time = 20
period_tab = np.array([[0, 0.7],
                       [10, 0],
                       ])

sig_vysl = np.zeros([sim_finalIndex, 1])

for period in range(int(sim_t_final/period_time) + 1):
    for idx in range( int((period*period_time)/sim_T_s), int((period*period_time + period_time)/sim_T_s)):
        lastValue = period_tab[:,1][(period_tab[:,0] + (period*period_time))<=idx*sim_T_s ][-1]
        try:
            sig_vysl[idx] = lastValue
        except:
            break

sig_dummy_ext = sig_vysl


# Teraz mozme "spustit" simulaciu:

t_log, x_log, y_log, u_log, = fcn_simSch1(
                                  sim_t_start,
                                  sim_T_s,
                                  sim_finalIndex,
                                  sig_dummy_ext,
                                  )
```

Bod druhý

Pre nominálnu prenosovú funkciu sústavy určte polynómy Z_p, R_p a zosilnenie k_p pričom

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)}$$

kde $Z_p(s)$ je monický polynóm stupňa m, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa n a k_p je tzv. *vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy*. *Relatívny stupeň* sústavy je $n^* = n - m$.

$$Z_p(s) = s + 21,3809 \tag{64a}$$

$$R_p(s) = s^2 + 2,7423s + 2,6916 \tag{64b}$$

$$k_p = 0,1664 \tag{64c}$$

$Z_p(s)$ je monický polynóm, pretože pri najvyššej mocnine „premennej" (operátor s) je koeficient 1. Rovnako polynóm $R_p(s)$ je monický. Relatívny stupeň prenosovej funkcie je $n^* = 2 - 1 = 1$

Bod tretí

Zistite, či polynóm $Z_p(s)$ je Hurwitzov.

Je. Hurwitzov polynóm totiž znamená, že „polynóm je stabilný", a tým sa myslí, že korene polynómu sú v ľavej polrovine komplexnej roviny. Koreň polynómu $Z_p(s) = s + 21,3809$ je $s = -21,3809$ čo je na reálnej osi v záporných číslach, a teda v ľavej polrovine komplexnej roviny.

2.2.2 Úloha druhá

Vyriešte MRC problém pre nominálnu prenosovú funkciu sústavy, uvažujte referenčný model daný prenosovou funkciou v tvare

$$W_m(s) - \frac{s+3}{s^2 + 3.5s + 3}$$

Referenčný model je daný prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} - W_m(s) - k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)}$$

kde k_m je vysokofrekvenčné zosilnenie referenčného modelu, $Z_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa m_m, $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa n_m, pričom relatívny stupeň $n_m^* = n_m - m_m = n^*$.

Riešením MRC problému je taký zákon riadenia u, ktorý zabezpečí, že výstup sústavy y sleduje výstup referenčného modelu y_m pri danom referenčnom signály (vstupe referenčného modelu) r. Všeobecný tvar zákona riadenia, ktorý rieši MRC problém je

$$u = \Theta_1^T \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^T \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^* y + \Theta_4^* r$$

kde $\alpha(s)$ je vektor obsahujúci mocniny s, $\alpha(s) = \left[s^{n-2}, \ldots, s, 1\right]^T$ ak $n > 2$, inak $\alpha(s) = 0$. Vektory $\Theta_1^* \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\Theta_2^* \in \mathbb{R}^{n-1}$ a skaláry $\Theta_3^* \in \mathbb{R}^1$, $\Theta_4^* \in \mathbb{R}^1$ sú konštantné parametre zákona riadenia, ktorých hodnoty hľadáme. $\Lambda(s)$ je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$ obsahujúci $Z_m(s)$ ako faktor

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s)$$

a teda aj $\Lambda_0(s)$ je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm zodpovedajúceho stupňa.

Všimnime si, že dosť podstatnou vlastnosťou referenčného modelu je, že má rovnaký relatívny stupeň ako riadený systém, teda $n_m^* = n_m - m_m = n^*$. Referenčný model nemusí mať rovnaký rád ako riadený systém. Musí však mať rovnaký relatívny stupeň. Plynie to z požiadaviek (predpokladov) pri riešení MRC problému (úlohy riadenia s referenčným modelom) vo všeobecnosti.

Bod prvý

Na základe všeobecného tvaru zákona riadenia (61) určte zákon riadenia pre uvažovaný konkrétny prípad.

$\alpha(s)$ je vektor, ktorého dĺžka závisí od rádu riadeného systému (zjavne má dĺžku $n-1$). V tomto prípade $n = 2$, čo spĺňa $n \geq 2$. Preto $\alpha(s) = \left[s^{2-2}\right]^{\mathsf{T}} = \left[s^{0}\right]^{\mathsf{T}} = \left[1\right]^{\mathsf{T}} = 1$. A teda $\alpha(s)$ bude v tomto prípade jednoducho číslo 1. Je to známa vec, nie je to parametrom zákona riadenia.

Vektory $\Theta_1^* \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\Theta_2^* \in \mathbb{R}^{n-1}$ budú mať v tomto prípade tiež len jeden prvok (sú dĺžky $n-1$) a teda len rovno píšme čísla Θ_1^* a Θ_2^*. K tomu Θ_3^*, Θ_4^* sú vždy len skaláre. V tomto prípade sú tieto štyri čísla parametrami zákona riadenia. Tieto parametre sú predmetom výpočtu/hľadania, ak chceme použiť tento konkrétny zákon riadenia.

Polynóm $\Lambda(s)$ nie je „neznámou". Nie je to parameter zákona riadenia v tom pravom zmysle. Je ľubovoľný ak sú dodržané uvedené podmienky/predpoklady. Pri jeho voľbe je užitočné uvažovať o tom, že tento polynóm možno interpretovať vzhľadom na *pozorovateľ stavu* a jeho dynamické vlastnosti. Súvislosť pozorovateľa stavu s tu používaným zákonom riadenia bola uvedená v učebnom texte. Akokoľvek, ak $\Lambda(s)$ spĺňa dané podmienky je to ok. V tomto prípade (vlastne nie je veľa ľubovôle):

$$\Lambda(s) = Z_m(s) = s + \lambda \tag{65}$$

kde $\lambda = 3$, pretože $Z_m(s) = s + 3$.

Práve sme určili zákon riadenia pre uvažovaný konkrétny prípad:

$$u(s) = \Theta_1^* \frac{1}{(s+\lambda)} u(s) + \Theta_2^* \frac{1}{(s+\lambda)} y(s) + \Theta_3^* y(s) + \Theta_4^* r(s) \tag{66}$$

Bod druhý

Vypočítajte parametre Θ_1^*, Θ_2^*, Θ_3^*, Θ_4^*.

Pre prehľadnosť označme

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{67}$$

a

$$W_m(s) = k_m \frac{s + b_{0m}}{s^2 + a_{1m} s + a_{0m}} \tag{68}$$

Potom je možné ukázať (a v učebnom texte je to ukázané), že uzavretý regulačný obvod sa bude zhodovať s referenčným modelom ak bude platiť:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -k_p \\ -a_1 & -k_p & -(k_p b_{0m} + k_p b_0) \\ -a_0 & -k_p b_0 & -k_p b_0 b_{0m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1^* \\ \Theta_2^* \\ \Theta_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1m} + b_0 - b_{0m} - a_1 \\ a_{0m} + b_0 a_{1m} - a_1 b_{0m} - a_0 \\ b_0 a_{0m} - a_0 b_{0m} \end{bmatrix} \tag{69a}$$

$$\Theta_4^* = \frac{k_m}{k_p} \tag{69b}$$

Vypočítajme:

Výpis kódu 2: Súbor `ar06_prMRC_idealTh.py`

```
kp = 0.1664
b0 = 21.3809
a1 = 2.7423
a0 = 2.6916

km = 1
b0m = 3
a1m = 3.5
a0m = 3

M = np.array([[-1,  0, -kp],
              [-a1, -kp, -(kp*b0m + kp*b0)],
              [-a0, -kp*b0, -kp*b0*b0m],
             ])

N = np.array([[a1m + b0 - b0m - a1],
              [a0m + b0*a1m - a1*b0m - a0],
              [b0*a0m - a0*b0m],
             ])

Theta_c = np.linalg.solve(M,N)

Theta_4 = km/kp
```


Teda:

$$\begin{bmatrix} \Theta_1^* \\ \Theta_2^* \\ \Theta_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18,3809 \\ 11,8071 \\ -4,5535 \end{bmatrix} \tag{70a}$$

$$\Theta_4^* = 6,0096 \tag{70b}$$

Bod tretí

Zostavte simulačnú schému uzavretého regulačného obvodu a overte vypočítané parametre zákona riadenia.

Ako realizovať numerickú simuláciu riadeného systému sme (všeličiako) ukázali v predchádzajúcom. Riadený systém je daný ako prenosová funkcia. Tú je možné previesť na opis systému v stavovom priestore a potom je možné použiť ODE solver (tak ako bolo ukázané).

O prevode prenosovej funkcie na opis v stavovom priestore

Mimochodom, prevod z prenosovej funkcie na stavový opis nie je jednoznačný. Záleží na voľbe stavových veličín (stavového priestoru). Tu si dovolíme uviesť voľbu stavových veličín tak, že výsledkom je opis systému v tzv. normálnej forme riaditeľnosti.

Prenosovú funkciu riadeného systému, ktorou sa tu zaoberáme, je možné, vo všeobecnosti, napísať v tvare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{71}$$

pričom tu „nesedí" označovanie a b_0 nie je to isté b_0 ako pred tým. Tu nám ide o tvar vo všeobecnosti, a ten ostal zachovaný... (snáď je to pre čitateľa dostatočne jasné)

Otázka je ako túto prenosovú funkciu previesť na opis v stavovom priestore - ako zvoliť stavové veličiny. Pre prípad, keď je v čitateľi len konštanta (systém nemá nuly), je voľba stavových veličín značne intuitívna. Preto napíšme prenosovú funkciu (71) ako dve prenosové funkcie v sérii nasledovne

$$\frac{z(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{72}$$

$$\frac{y(s)}{z(s)} = b_1 s + b_0 \tag{73}$$

kde sme zaviedli pomocnú veličinu z.

Prvú prenosovú funkciu (72) možno prepísať na diferenciálnu rovnicu druhého rádu v tvare

$$\ddot{z}(t) + a_1 \dot{z}(t) + a_0 z(t) = u(t) \tag{74}$$

Túto je možné previesť na sústavu diferenciálnych rovníc prvého rádu - voľbou stavových veličín. Napríklad nech

$$x_1(t) = z(t) \tag{75}$$

kde $x_1(t)$ je prvá stavová veličina. Potom platí

$$\dot{x}_1(t) = \dot{z}(t) \tag{76}$$

Druhú stavovú veličinu zvolme

$$x_2(t) = \dot{z}(t) \tag{77}$$

a teda

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{z}(t) \tag{78}$$

V tomto bode môžeme ľahko písať

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{79}$$

To je prvá diferenciálna rovnica! Obsahuje len novo zavedené stavové veličiny ($x_1(t)$ a $x_2(t)$). Druhá diferenciálna rovnica je vlastne (78). Avšak, vieme signál $\ddot{z}(t)$ vyjadriť len pomocou novo zavedených stavových veličín? Vieme. Z (74) je zrejmé, že

$$\ddot{z}(t) = -a_1\dot{z}(t) - a_0 z(t) + u(t) = -a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + u(t) \tag{80}$$

takže (78) je

$$\dot{x}_2(t) = -a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + u(t) \tag{81}$$

a to je druhá diferenciálna rovnica...

Obe rovnice spolu:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{82}$$
$$\dot{x}_2(t) = -a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + u(t) \tag{83}$$

A v maticovom zápise:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{84}$$

Vráťme sa k prenosovej funkcii (73). Túto možno napísať ako diferenciálnu rovnicu v tvare

$$y(t) = b_1\dot{z}(t) + b_0 z(t) \tag{85}$$

Avšak, my sme už urobili voľbu taká, že $\dot{z}(t) = x_2(t)$ a $z(t) = x_1(t)$. Takže diferenciálnu rovnicu (85) môžme písať ako

$$y(t) = b_1 x_2(t) + b_0 x_1(t) \tag{86}$$

alebo v maticovom tvare

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{87}$$

Celý systém s novo zavedenými stavovými veličinami teda je v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{88}$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{89}$$

a ak označíme stavový vektor ako $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$, potom je systém v známom tvare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \tag{90a}$$
$$y(t) = c^T x(t) \tag{90b}$$

kde matica A a vektory b a c sú zrejmé...

Sústava diferenciálnych rovníc (90) je vo vhodnom tvare pre potreby ODE solvera. V skripte (vo výpise kódu 1) je takáto sústava realizovaná (podľa požiadaviek ODE solvera) funkciou `fcn_LTIS()` uvedenej na riadku 40.

O referenčnom modeli

Prenosová funkcia referenčného modelu je v tvare (68). Ako túto prenosovú funkciu previesť do tvaru sústavy diferenciálnych rovníc by malo byť zrejmé z predchádzajúceho textu.

Vzhľadom na princíp fungovania tu zostavovanej simulačnej schémy (funkcia `fcn_simSch1` vo výpise kódu 1, riadok 48), je možné realizovať numerickú simuláciu aj jednoduchšie ako to typicky predpokladá ODE solver. Pomocou jednoduchej sumácie.

Potrebujeme poznať „prírastok k stavovému vektoru“ v každej iterácii (`for` cyklu). Tento „prírastok“ je daný veľkosťou zmeny stavového vektora (v čase) a dĺžkou času, počas ktorého táto zmena platí.

Poznáme veľkosť zmeny stavového vektora? Áno, doslova: $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$. V prípade referenčného modelu by sme však označili jednotlivé prvky špecifickejšie, teda $\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + b_m r(t)$ (vstupom RM je samozrejme $r(t)$). Toto môžeme dokonca implementovať s pomocou už existujúcej funkcie `fcn_LTIS()`:

```
dotx_m = fcn_LTIS(x_m_log[idx-1,:], 0, A_m, b_m, ref_sig)
```

Ako dlho bude „trvať“ táto zmena? V simulačnej schéme `fcn_simSch1` to určuje parameter (argument) `T_s`.

„Prírastok k stavovému vektoru“ potom je `dotx_m * T_s`. A tento prírastok je potrebné pripočítať k predchádzajúcej („starej“) hodnote stavového vektora, teda obyčajná sumácia („numerický integrál“):

```
x_m_log[idx,:] = x_m_log[idx-1,:] + dotx_m * T_s
```

Tým sme získali hodnotu stavového vektora v aktuálnom kroku („novú“ hodnotu). My však v tomto prípade potrebujeme výstupnú veličinu (nie stavový vektor), teda

```
y_m_log[idx,:] = np.dot(c_m.T, x_m_log[idx,:].reshape(-1,1))
```

kde by mali byť jednotlivé premenné (a funkcie) viac-menej už čitateľovi jasné... Snáď len toľko, že `c_m.T` je transponované pole `c_m` a že `reshape(-1,1)` je metóda, ktorá zmení tvar poľa na toľko riadkov koľko treba (prvý argument `-1`) a práve jeden stĺpec (druhý argument `1`).

O zákone riadenia

Zákon riadenia má v tomto prípade tvar - viď (21). To je však zápis vo frekvenčnej oblasti s operátorom s.

Tu však potrebujeme zákon riadenia v časovej oblasti. Dovolíme si preto písať

$$u(t) = \Theta_1^* \left[\frac{1}{(s+\lambda)}\right] u(t) + \Theta_2^* \left[\frac{1}{(s+\lambda)}\right] y(t) + \Theta_3^* y(t) + \Theta_4^* r(t) \tag{91}$$

kde sme zmiešali písanie operátora s a času t.

Autor pozná takýto (alebo podobný) spôsob zápisu práve z literatúry o klasickom adaptívnom riadení[3]. Tu nie je cieľom porušovať matematické vzťahy a podobne. Tu je cieľom zjednodušene vyjadriť praktický zápis, akým je (91), vo vzťahu k pôvodnej teórii daného zákona riadenia (kde mimochodom je takýto zápis veľmi užitočný)

Autor sa však mnoho krát stretáva s nevôľou čitateľov/poslucháčov prijať uvedený spôsob zápisu, prípadne si to vyžaduje dodatočné vysvetľovanie.

Akokoľvek, čo vlastne predstavuje napríklad prvý člen na pravej strane rovnice (91)? Ešte lepšie, prvý člen na pravej strane rovnice (21)? Označme prvý člen na pravej strane rovnice (21) takto:

$$y_{\nu_1}(s) = \Theta_1^* \frac{1}{(s+\lambda)} u(s) \tag{92}$$

Je to teda samostatný dynamický systém daný prenosovou funkciou. Vstupom je v tomto prípade signál $u(s)$. Tento signál je „filtrovaný“ vždy známym filtrom, ktorého vlastnosti sú dané polynómom $\Lambda(s)$. Vznikne „nový signál“ (prefiltrované u) a tento je potom vynásobený parametrom zákona riadenia, v tomto prípade Θ_1^*. Uvedený samostatný dynamický systém je možné vyjadriť aj opisom v stavovom priestore. Pre tento konkrétny príklad

$$\dot{\nu}_1(t) = -\lambda\nu_1(t) + u(t) \tag{93a}$$
$$y_{\nu_1}(t) = \Theta_1^* \nu_1(t) \tag{93b}$$

kde sme zaviedli pomocnú stavovú veličinu $\nu_1(t)$. Vieme aj reálne generovať (vyrobiť) tento pomocný signál $\nu_1(t)$? Je to jednoducho stavová veličina lineárneho dynamického systému, v princípe rovnakého ako je referenčný model, alebo model riadeného systému.

[3] viď napr. knihu G. Tao., Adaptive control design and analysis. [1]

Takže vieme reálne generovať pomocný signál $\nu_1(t)$. Prvý člen zákona riadenia (91) teda nahrádza výraz

$$\Theta_1^* \nu_1(t) \tag{94}$$

pričom $\nu_1(t)$ je signál, ktorý vieme vyrobiť...

Druhý člen zákona riadenia (91), analogicky, nahrádza výraz

$$\Theta_2^* \nu_2(t) \tag{95}$$

kde $\nu_2(t)$ je daný diferenciálnou rovnicou

$$\dot{\nu}_2(t) = -\lambda \nu_2(t) + y(t) \tag{96}$$

Zákon riadenia (91) je teda možné zapísať v tvare

$$u(t) = \Theta_1^* \nu_1(t) + \Theta_2^* \nu_2(t) + \Theta_3^* y(t) + \Theta_4^* r(t) \tag{97}$$

Čo sú parametre a čo sú signály v tomto zákone riadenia? Rozdeľme ich do vektorov. Vektora parametrov a vektora signálov

$$u(t) = \begin{bmatrix} \Theta_1^* & \Theta_2^* & \Theta_3^* & \Theta_4^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ y(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \tag{98}$$

a označme

$$u(t) = \Theta^{*\mathrm{T}} \omega \tag{99}$$

Vieme vyrobiť všetky signály v signálnom vektore ω? Vieme. Poznáme parametre vo vektore Θ^*? Poznáme.

V tejto chvíli nič nebráni zostaveniu simulačnej schémy uzavretého regulačného obvodu.

O formálnej súvislosti s MRAC stavovým

Pre lepšiu konzistenciu uvedeného s učebným textom je vhodné zmeniť poradie prvkov v signálnom vektore ω. Učebný text totiž pracuje s myšlienkou čo najviac pripodobniť odvodenie „MRAC vstupno-výstupného" k odvodeniu, ktoré definuje „MRAC stavový". Dôvodom je, že ak máme k dispozícii stavový opis systému práve v normálnej forme riaditeľnosti, potom odvodenie (viac-menej akéhokoľvek) zákona riadenia je najjednoduchšie možné po formálnej stránke. Najpriamočiarejšie. Bez nutnosti formulácie predpokladov navyše, formálnych konštrukcií a podobne.

Inými slovami, ak máme dostupný postup návrhu (odvodenie) nejakého riadiaceho systému, v tomto prípade Adaptívneho riadenia s referenčným modelom s využitím Lyapunovovej teórie stability, potom je veľmi výhodné snažiť sa tento postup uplatniť vo všeobecnosti.

Ak tento postup máme pri predpoklade, že sú dostupné práve tie stavové veličiny, ktoré vedú na opis riadeného systému práve v normálnej forme riaditeľnosti, potom by bolo výhodné aby sme „novú úlohu" formálne previedli do tvaru, ktorý zodpovedá známemu postupu.

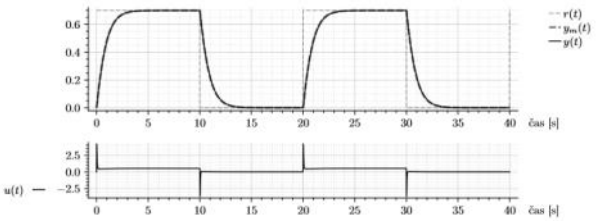
To sa deje pri odvodení „MRAC vstupno-výstupného" práve vtedy, keď sa zavedie pojem ***doplnená sústava***, alebo ***doplnený riadený systém***. To má čitateľ možnosť vidieť v učebnom texte. „Doplnkom" sú práve signály, ktoré sme tu označili ako $\nu_1(t)$ a $\nu_2(t)$.

Výsledkom je, že zákon riadenia sa uvažuje v tvare

$$u(t) = \Theta_c^{*\mathrm{T}} D X(t) + \Theta_4^* r(t) \tag{100}$$

kde $\Theta_c^* = \begin{bmatrix} \Theta_3^* & \Theta_1^{*\mathrm{T}} & \Theta_2^{*\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$; Θ_4^* sú parametre zákona riadenia a maticu

$$D = \begin{bmatrix} c^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$



Obr. 4: Porovnanie priebehu výstupu referenčného modelu a výstupnej veličiny riadeného systému

sme zaviedli práve preto aby sme v zákone riadenia (100) mohli priamo písať doplnený stavový vektor $X(t)$, teda

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{bmatrix} \tag{101}$$

Všimnime si ale, že

$$D X(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{bmatrix} \tag{102}$$

čo je veľmi dôležité, pretože signál $y(t)$ máme, ale signál $x(t)$ (pochopiteľne) nemáme.

Pre prípad (100) teda môžeme zaviesť signálny vektor ω v poradí:

$$\omega = \begin{bmatrix} D X(t) \\ r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \tag{103}$$

Ak raz zvolíme poradie signálov vo vektore ω, potom je tým jednoznačne určené aj poradie signálov vo vektore parametrov, v tomto prípade

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_3^* \\ \Theta_1^* \\ \Theta_2^* \\ \Theta_4^* \end{bmatrix} \tag{104}$$

O simulačnej „schéme" (skôr o „simulačnom skripte")

Nasledujúci výpis kódu 3 obsahuje funkciu `fcn_sim3ch2`. Je postavená na rovnakých princípoch ako sme videli v kóde 1. Navyše však obsahuje aj realizáciu neadaptívnej verzie riadiaceho systému, ktorý používa tu diskutovaný zákon riadenia.

Overenie správnosti vypočítaných parametrov zákona riadenia je realizované grafickým porovnaním priebehu výstupu referenčného modelu a výstupnej veličiny riadeného systému - viď obr. 4.

Výpis kódu 3: Súbor `ar06_prMRC.py`, simulačná schéma uzavretého regulačného obvodu

```
def fcn_LTIS(x, t, A, b, u):
```

```python
    dotx = np.matmul(A, x) + np.matmul(b, u)
    return dotx


def fcn_simSch2(t_start, T_s, finalIndex, sig_dummy_ext):

    #-----------------------------------------
    # Riadeny system

    A = np.array([[0, 1], [-2.6916, -2.7423]])
    b = np.array([[0], [1]])
    c = np.array([[3.5578], [0.1664]])

    #-------------------------
    # Referencny model

    A_m = np.array([[0, 1], [-3.0, -3.5]])
    b_m = np.array([[0], [1]])
    c_m = np.array([[3], [1]])

    #-------------------------
    # Pomocne filtre

    Lambda_pom = np.array([[-3]])
    q_pom = np.array([[1]])

    #-----------------------------------------------------
    t_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    t_log[0,:] = t_start

    #-----------------------------------------
    x_0 = np.zeros(b.shape[0])

    x_log = np.zeros([finalIndex, len(x_0)])
    x_log[0,:] = x_0

    y_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    y_log[0,:] = np.dot(c.T, x_0.reshape(-1,1))

    #-------------------------
    x_m_0 = np.zeros(b_m.shape[0])

    x_m_log = np.zeros([finalIndex, len(x_m_0)])
    x_m_log[0,:] = x_m_0

    y_m_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    y_m_log[0,:] = np.dot(c_m.T, x_m_0.reshape(-1,1))

    #-------------------------
    nu1_log = np.zeros([finalIndex, q_pom.shape[0]])
    nu2_log = np.zeros([finalIndex, q_pom.shape[0]])

    #-------------------------
    u_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    u_log[0,:] = 0

    #-----------------------------------------------------
    timespan = np.zeros(2)
    for idx in range(1, int(finalIndex)):

        timespan[0] = t_log[idx-1,:]
        timespan[1] = t_log[idx-1,:] + T_s

        t_log[idx,:] = timespan[-1]

        # ------------

        odeOut = odeint(fcn_LTIS,
                        x_log[idx-1,:],
                        timespan,
                        args=(A, b, u_log[idx-1,:])
                        )

        x_log[idx,:] = odeOut[-1,:]
        y_log[idx,:] = np.dot(c.T, x_log[idx,:].reshape(-1,1))


        # -------------------------
        # Referencny model:
```



```python
        ref_sig = sig_dummy_ext[idx-1, :]

        dotx_m = fcn_LTIS(x_m_log[idx-1,:], 0, A_m, b_m, ref_sig)

        x_m_log[idx,:] = x_m_log[idx-1,:] + dotx_m * T_s

        y_m_log[idx,:] = np.dot(c_m.T, x_m_log[idx,:].reshape(-1,1))

        # -------------------------
        # Pomocne filtre:

        dotnu1 = fcn_LTIS(nu1_log[idx-1,:], 0, Lambda_pom, q_pom, u_log[idx-1,:])
        nu1_log[idx,:] = nu1_log[idx-1,:] + dotnu1 * T_s

        dotnu2 = fcn_LTIS(nu2_log[idx-1,:], 0, Lambda_pom, q_pom, y_log[idx-1,:])
        nu2_log[idx,:] = nu2_log[idx-1,:] + dotnu2 * T_s

        # -------------------------
        # Vektor omega:

        omega = np.array([
            y_log[idx,:],
            nu1_log[idx-1,:],
            nu2_log[idx-1,:],
            ref_sig,
        ])

        # -------------------------
        # Vektor Theta:

        Theta = np.array([[-4.5535],
                          [-18.3809],
                          [11.8071],
                          [6.0096],
                         ])

        # -------------------------

        u_log[idx,:] = np.dot(Theta.T, omega)[0]

    return [t_log, x_log, y_log, u_log, y_m_log]

# ----------------------------------------------------
# Nastavenie simulacie

sim_t_start = 0
sim_t_final = 40
sim_T_s = 0.01
sim_finalIndex = int(((sim_t_final - sim_t_start)/sim_T_s) + 1)

# Preddefinovany signal (pouzity ako referencny signal)

period_time = 20
period_tab = np.array([[0, 0.7],
                       [10, 0],
                      ])

sig_vysl = np.zeros([sim_finalIndex, 1])

for period in range(int(sim_t_final/period_time) + 1):
    for idx in range( int((period*period_time)/sim_T_s), int((period*period_time + period_time)/sim_T_s)):
        lastValue = period_tab[:,1][(period_tab[:,0] + (period*period_time))<=idx*sim_T_s ][-1]
        try:
            sig_vysl[idx] = lastValue
        except:
            break

sig_dummy_ext = sig_vysl

# Spustenie simulacie

t_log, x_log, y_log, u_log, y_m_log = fcn_simSch2(
    sim_t_start,
    sim_T_s,
    sim_finalIndex,
    sig_dummy_ext,
    )
```

3 SPR prenosové funkcie, MKY lemma

3.1 Striktne pozitívne reálne prenosové funkcie

Pojem *Pozitívne reálna* (PR) a *Striktne pozitívne reálna* (SPR) prenosová funkcia zohráva dôležitú úlohu v analýze stability nie len adaptívnych systémov [3]. Je preto dôležité disponovať kritériom, ktoré umožní zistiť, či príslušná prenosová funkcia je SPR ([4] str. 164).

Podľa definície 3.5.1 a 3.5.2 v [3], str. 127, prenosová fukcia $G(s)$ komplexnej premennej s sa nazýva pozitívne reálna (PR) ak

1. $G(s)$ je reálna pre reálne s.
2. $\Re\{G(s)\} \geq 0$ pre všetky $\Re\{s\} > 0$.

Prenosová funkcia $G(s)$ je striktne pozitívne reálna (SPR) ak existuje reálne kladné číslo ε také, že $G(s-\varepsilon)$ je PR.

Prakticky nie je jednoduché zistiť, či uvedené podmienky sú splnené. V nasledujúcom uvedieme ekvivalentné nutné a postačujúce podmienky pozitívnej reálnosti. Platnosť týchto podmienok sa dá ľahko overiť. Prenosová funkcia $G(s)$ je PR keď vyhovuje všetkým nasledujúcim podmienkam

1. $G(s)$ je reálna pre všetky reálne s.
2. Menovateľ $G(s)$ má korene v ľavej polrovine komplexnej roviny alebo má reálne korene na imaginárnej osi.
3. $\Re\{G(j\omega)\} \geq 0$ pre všetky reálne ω.

Re

$j\omega$

Pre vyjadrenie reálnej časti funkcie $G(j\omega)$ je výhodné využiť, že platí:

$$\frac{a+jb}{c+jd} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{c^2+d^2}$$

3.2 Meyerova-Kalmanova-Yakubovichova Lemma

Pre danú stabilnú maticu A, vektory b, c a skalár $d \geq 0$, platí nasledujúce: Ak

$$G(s) = d + c^{\mathrm{T}}(sI - A)^{-1} b$$

je SPR, potom pre danú maticu $L = L^{\mathrm{T}} > 0$ existujú skalár $v > 0$, vektor q a matica $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ také, že

$$A^{\mathrm{T}}P + PA = -qq^{\mathrm{T}} - vL$$
$$Pb - c = \pm q\sqrt{2d}$$

Tak znie veta, ktorá, ako sa ukáže, je veľmi užitočná pri návrhu MRAC využívajúceho len vstupno-výstupné informácie.

V tomto kurze ju využijeme v menej všeobecnom tvare: Nech je systém daný trojicou A_c, $\overline{B}_c$, C_c a A_c nech je stabilná matica. Ak $W_m(s) = C_c^{\mathrm{T}}(sI - A_c)^{-1}\overline{B}_c$ je SPR, potom platí, že

$$A_c^{\mathrm{T}}P + PA_c = -Q$$
$$\boxed{P\overline{B}_c = C_c}$$

$\dot{\Theta} = -\mathrm{sig}(q^{\mathrm{T}}e)$

kde $Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$. A je to práve fakt, že ak je $W_m(s)$ SPR tak platí $P\overline{B}_c = C_c$, ktorý umožní zredukovať zákon adaptácie tak, že v ňom vystupuje len odchýlka výstupných veličín sústavy a referenčného modelu.

$(PB)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}$

$B^{\mathrm{T}}P = C^{\mathrm{T}}$

$\| C^{\mathrm{T}}e$

$e_1 = y - y_m$

4 Adaptačná odchýlka

$e_1 = ?$

$e_1 = y - y_m$

$e_1 \leftarrow$ odchýlka !!!

4.1 Model sústavy a referenčný model

Uvažujme sústavu opísanú prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \tag{105}$$

kde $Z_p(s)$ je monický Hurwitzov polynóm stupňa m, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa n a k_p je tzv. *vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy*. *Relatívny stupeň* sústavy je $n^* = n - m$. Predpokladajme, že relatívny stupeň n^* sústavy je známy. Pre zjednodušenie tiež predpokladajme, že aj stupne n a m polynómov sú známe, pričom vo všeobecnosti známe nemusia byť. Koeficienty polynómov $Z_p(s)$ a $R_p(s)$ (parametre sústavy) sú neznáme. Hodnota a znamienko zosilnenia k_p nech je známe.

Sústava v tvare (105) môže byť reprezentovaná opisom v stavovom priestore v tvare

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{106a}$$
$$y = c^{\mathrm{T}}x \tag{106b}$$

kde x je vektor stavových veličín sústavy a A, b, c^{T} sú matice (vektory) zodpovedajúcich rozmerov pričom hodnoty ich prvkov sú neznáme.

Cieľom riadenia je: Nech všetky signály uzavretého regulačného obvodu sú ohraničené a výstupná veličina y sústavy nech sleduje výstupnú veličinu referenčného modelu, ktorý je daný prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \tag{107}$$

kde k_m je vysokofrekvenčné zosilnenie, $Z_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa m_m, $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa n_m, pričom relatívny stupeň $n_m^* = n_m - m_m = n^*$. Všetky parametre (koeficienty polynómov a k_m) referenčného modelu sú známe, dané „projektantom".

4.2 Zákon riadenia

Ako bolo ukázané v predchádzajúcich témach predmetu, zákon riadenia v tvare

$$u = \Theta_1^{*\mathrm{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{*\mathrm{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^* y + \Theta_4^* r \tag{108}$$

zabezpečí, že priebeh výstupnej veličiny y sa zhoduje s priebehom výstupnej veličiny referenčného modelu y_m ak sú parametre zákona vypočítané z podmienok zhody

$$\Theta_4^* = \frac{k_m}{k_p} \tag{109a}$$
$$\Lambda = \Lambda_0 Z_m \tag{109b}$$
$$R_p\left(\Lambda - \Theta_1^{*\mathrm{T}}\alpha(s)\right) - k_p Z_p\left(\Theta_2^{*\mathrm{T}}\alpha(s) + \Theta_3^*\Lambda\right) = Z_p \Lambda_0 R_m \tag{109c}$$

Pretože parametre sústavy (105) sú neznáme, zákon riadenia (108) nemožno použiť. Použije sa zákon riadenia v tvare

$$u = \Theta_1^{\mathrm{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{\mathrm{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3 y + \Theta_4 r \tag{110}$$

kde Θ_1, Θ_2, Θ_3 a Θ_4 sú odhadmi ideálnych parametrov Θ_1^*, Θ_2^*, Θ_3^* a Θ_4^* v každom čase t. Je potrebné nájsť zákon adaptácie, ktorý priebežne generuje (identifikuje) hodnoty $\Theta_1(t)$, $\Theta_2(t)$, $\Theta_3(t)$ a $\Theta_4(t)$.

Pomocné filtre vystupujúce v zákone riadenia v stavovom priestore sú (viď predch. článok)

$$\dot{\nu}_1 = \Lambda\nu_1 + qu \tag{111a}$$
$$\dot{\nu}_2 = \Lambda\nu_2 + qc^{\mathrm{T}}x \tag{111b}$$

a uvažovaný zákon riadenia je

$$u = \Theta_c^{\mathrm{T}} DX + \Theta_4 r \tag{112}$$

kde $\Theta_c = \left[\Theta_5^* \quad \Theta_1^{\mathrm{T}} \quad \Theta_2^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$, Θ_4 sú parametre zákona riadenia a

$$D = \begin{bmatrix} c^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

4.3 Rovnica adaptačnej odchýlky

Pridanie pomocných filtrov (111) k stavovému opisu sústavy (106) vedie k „doplnenej sústave" (viď predch. časti predmetu) v tvare

$$\dot{X} = A_o X + B_c u \tag{113a}$$
$$y = C_c^{\mathrm{T}} X \tag{113b}$$

Parametrizácia doplnenej sústavy (113) pomocou ideálnych parametrov zákona riadenia sa dosiahne pripočítaním a odpočítaním ideálneho vstupného výrazu $B_c u^* = B_c \Theta_c^{*\mathrm{T}} DX + B_c \Theta_4^* r$

$$\dot{X} = A_o X + B_c u + B_c \Theta_c^{*\mathrm{T}} DX + B_c \Theta_4^* r - B_c \Theta_c^{*\mathrm{T}} DX - B_c \Theta_4^* r \tag{114a}$$
$$\dot{X} = \left(A_o + B_c \Theta_c^{*\mathrm{T}} D\right) X + B_c \Theta_4^* r + B_c \left(u - \Theta_c^{*\mathrm{T}} DX - \Theta_4^* r\right) \tag{114b}$$

Z predchádzajúcich častí vieme, že $A_c = A_o + B_c \Theta_c^{*\mathrm{T}} D$, $\overline{B}_c = B_c \Theta_4^*$ a tiež, že neminimálnu reprezentáciu referenčného modelu (107) možno (teoreticky) zapísať v tvare

$$\dot{X}_m = A_c X_m + \overline{B}_c r \tag{115a}$$
$$y_m = C_c^{\mathrm{T}} X_m \tag{115b}$$

Potom parametrizovaná doplnená sústava (114b) je

$$\dot{X} = A_c X + \overline{B}_c r + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*}\left(u - \Theta_c^{*\mathrm{T}} DX - \Theta_4^* r\right) \tag{116a}$$
$$y = C_c^{\mathrm{T}} X \tag{116b}$$

Definujme *adaptačnú odchýlku* v tvare

$$e = X - X_m \tag{117}$$
$$e_1 = y - y_m \tag{118}$$

potom:

$$\dot{X} - \dot{X}_m = A_c (X - X_m) + \overline{B}_c r - \overline{B}_c r + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*}\left(u - \Theta_c^{*\mathrm{T}} DX - \Theta_4^* r\right) \tag{119a}$$
$$y - y_m = C_c^{\mathrm{T}} (X - X_m) \tag{119b}$$

a teda

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*}\left(u - \Theta_c^{*\mathrm{T}} DX - \Theta_4^* r\right) \tag{120a}$$
$$e_1 = C_c^{\mathrm{T}} e \tag{120b}$$

čo je základná rovnica opisujúca dynamiku adaptačnej odchýlky v stavovom priestore, ktorú možno vyjadriť v tvare prenosovej funkcie uvážením, že platí

$$W_m(s) = C_c^{\mathrm{T}} (sI - A_c)^{-1} \overline{B}_c \tag{121}$$

Potom (120) v tvare prenosovej funkcie je

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^*}\left(u - \Theta_c^{*\mathrm{T}} DX - \Theta_4^* r\right) \tag{122}$$

$\Theta^* = ?$

$\frac{e_1}{e}$

Odhadom odchýlky e_1 nech je $\hat{e}_1$, ktorá je závislá od odhadov $\Theta_c(t)$, $\Theta_4(t)$.

$$\hat{e}_1 = W_m(s) l \left(u - \Theta_c DX - \Theta_4 r\right) \tag{123}$$

kde l je odhadom hodnoty $\frac{1}{\Theta_4^*}$. Pretože uvažujeme zákon riadenia $u = \Theta_c^{\mathrm{T}} DX + \Theta_4 r$, tak $\hat{e}_1 = 0$. To znamená, že rovnica (123) nie je potrebná pre identifikáciu neznámych parametrov Θ_c^*, Θ_4^* a ako chybu odhadu týchto parametrov možno použiť priamo rovnicu adaptačnej odchýlky (122).

5 Zákon adaptácie pri $n^* = 1$

Uvažujme, že relatívny stupeň sústavy (105) je $n^* = 1$. Prenosová funkcia referenčného modelu $W_m(s)$ sa volí tak, aby jej relatívny stupeň bol zhodný s relatívnym stupňom sústavy. Relatívny stupeň referenčného modelu $n_m^* = 1$ umožňuje aby prenosová funkcia $W_m(s)$ bola navrhnutá ako striktne pozitívne reálna (SPR).

Nech $W_m(s) = C_c^{\mathrm{T}} (sI - A_c)^{-1} \overline{B}_c$ je SPR. Potom podľa MKY lemmy v časti 3.2 existuje taká matica P, pre ktorú platí

$$A_c^{\mathrm{T}} P + P A_c = -Q \tag{124a}$$
$$P\overline{B}_c = C_c \tag{124b}$$

kde $Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$. Táto skutočnosť sa v ďalšom využije pri voľbe kandidáta na Lyapunovovu funkciu.

Dosadením (112) za u do (122) máme

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^*}\left(\theta_c^{\mathrm{T}} DX + \theta_4 r\right) \tag{125}$$

kde $\theta_c = \Theta_c - \Theta_c^*$ a $\theta_4 = \Theta_4 - \Theta_4^*$. Zavedením vektora chyby nastavenia parametrov zákona riadenia $\theta = \left[\theta_c^{\mathrm{T}} \quad \theta_4\right]^{\mathrm{T}}$ a signálneho vektora $\omega = \left[(DX)^{\mathrm{T}} \quad r\right]^{\mathrm{T}}$ máme známy tvar adaptačnej odchýlky

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^*}\left(\theta^{\mathrm{T}} \omega\right) \tag{126}$$

$\theta = \Theta - \Theta^*$

alebo

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*}\left(\theta^{\mathrm{T}} \omega\right) \tag{127a}$$
$$e_1 = C_c^{\mathrm{T}} e \tag{127b}$$

V tomto prípade rovnica (126) alebo (127) dáva do vzťahu chybu nastavenia parametrov zákona riadenia Θ a adaptačnú odchýlku e_1 cez SPR prenosovú funkciu.

Predpokladajme, že štruktúra zákona adaptácie je daná diferenciálnou rovnicou všeobecne zapísanou v tvare

$$\dot{\theta} = f(e_1, \omega) \tag{128}$$

teda aby zákon adaptácie bol funkciou len výstupnej adaptačnej odchýlky e_1 a nie aj jej derivácií e, pretože tieto nie sú dostupné, nakoľko nie sú dostupné stavové veličiny sústavy.

Zvoľme kandidáta na Ljapunovovu funkciu v tvare

$$V = e^{\mathrm{T}} P e + \left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right| \theta^{\mathrm{T}} \Gamma^{-1} \theta \tag{129}$$

u_m

$\frac{\alpha}{\mu} = k_p \frac{Z_p}{R_p}$ $\qquad$ $\frac{\alpha_m}{\mu} = k_m \frac{Z_m}{R_m}$

$u = \Theta_1^T \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^T \frac{\alpha}{\Lambda} y + \Theta_3 y + \Theta_4 r$

$n-1$ $\qquad$ $n-1$, Z_m

$y_{v_1} = \Theta_1^T \left(\frac{\alpha}{\Lambda} u\right)$

$\dot{x} = Ax + bu$

$y = c^T x$

$\boxed{\dot{y}_1 = \Lambda y_1 + q u}$

$y_{v_1} = \Theta_1 v_1$

$\dot{x} = Ax + bu$

$\dot{y}_1 = \Lambda y_1 + qu$

$\dot{y}_2 = \Lambda y_2 + q c^T x$

$c^T x$

$u = \Theta_1^T y_1 + \Theta_2^T y_2 + \Theta_3 y + \Theta_4 r$

ZIADENÝ

$\boxed{\dot{X} = A_o X + B_c u \qquad y = C^T X}$

$\boxed{u = \quad X + \Theta_4 r}$

URO:

$\dot{X} = A_c X + \overline{B}_c r$ $\qquad$ $\dot{X}_m = A_c X_m + \overline{B}_c r$

$y = C_c^T X$ $\qquad$ $y_m = C_c^T X_m$

$e_1 = ?$

$e_1 = y - y_m$

$e = X - X_m$

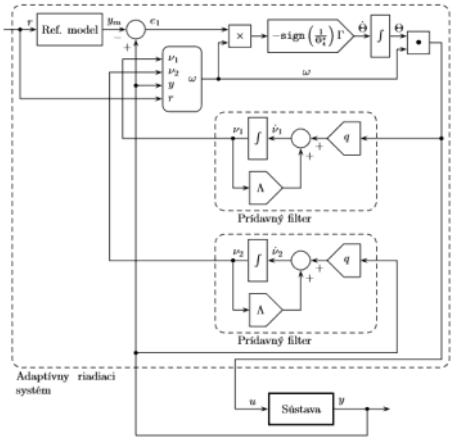
$\dot{e} = ? = \dot{X} - \dot{X}_m$

$e_1 = \ldots$

$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*}\left(u - \Theta_c^{*T} X + \Theta_4^* r\right)$

$e_1 = C_c^T e$

$\Downarrow$



Obr. 5: Bloková schéma MRAC so vstupno-výstupnou štruktúrou riadenia pri $n^* = 1$

kde $\Gamma > 0$ je ľubovoľná diagonálna matica, $\left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right|$ je absolútna hodnota prevrátenej hodnoty parametra Θ_4^* a $P = P^T > 0$ spĺňa rovnice (124), ktoré vyplývajú z MKY lemmy.

$$\dot{V} = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + \left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right| \left(\theta^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} + \theta^T \Gamma^{-1} \dot{\theta}\right) \tag{130}$$

Poznáme (127) odkiaľ $\dot{e}^T = e^T A_c^T + \omega^T \theta \frac{1}{\Theta_4^*} \overline{B}_c^T$, po dosadení týchto výrazov:

$$\dot{V} = \left(e^T A_c^T + \omega^T \theta \frac{1}{\Theta_4^*} \overline{B}_c^T\right) P e + e^T P \left(A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^T \omega\right) + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right| \theta^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{131}$$

$$\dot{V} = e^T (-Q) e + 2 e^T P \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^T \omega + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right| \theta^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{132}$$

Pripomeňme, že platí $P\overline{B}_c = C_c$ (to vďaka tomu, že $W_m(s)$ je SPR), potom

$$\dot{V} = e^T (-Q) e + 2 e^T C_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^T \omega + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right| \theta^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{133}$$

Všimnime si, že $e^T C_c = C_c^T e = e_1$. Práve tento moment umožní aby zákon adaptácie $\dot{\theta} = f(e_1, \omega)$ bol funkciou e_1 a nie e. Časová derivácia $\dot{V}$

$$\dot{V} = e^T (-Q) e + 2 e_1 \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^T \omega + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right| \theta^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{134}$$

bude záporne definitná ak

$$0 = 2 e_1 \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^T \omega + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right| \theta^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{135a}$$

$$2\left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right| \theta^T G^{-1} \dot{\theta} = -2 e_1 \frac{1}{\Theta_4^*} \Theta^T \omega \tag{135b}$$

$$\left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right| \Gamma^{-1} \dot{\theta} = -e_1 \,\mathrm{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right) \left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right| \omega \tag{135c}$$

$$\Gamma^{-1} \dot{\theta} = -\mathrm{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right) e_1 \omega \tag{135d}$$

$$\dot{\theta} = -\mathrm{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right) e_1 \Gamma \omega \tag{135e}$$

Rovnako ako sme zaviedli vektor Θ, zaveďme aj vektor parametrov zákona riadenia v tvare
$\Theta = \begin{bmatrix}\Theta_c^T & \Theta_4\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}\Theta_3 & \Theta_1^T & \Theta_2^T & \Theta_4\end{bmatrix}^T$ a vektor ω možno zapísať v tvare $\omega = \begin{bmatrix}y & \nu_1^T & \nu_2^T & r\end{bmatrix}^T$. Potom zákon adaptácie je

$$\dot{\Theta} = -\mathrm{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right) \Gamma e_1 \omega \tag{136}$$

a uvažovaný zákon riadenia možno zapísať v tvare $u = \Theta^T \omega$.

6 Zákon adaptácie pri $n^* = 2$

6.1 Priamočiary postup

Uvažujme relatívny stupeň sústavy (105) $n^* = 2$. Prenosová funkcia referenčného modelu $W_m(s)$ sa volí tak, aby jej relatívny stupeň bol zhodný s relatívnym stupňom sústavy, teda $n_m^* = 2$. To ale znamená (bez dôkazu), že prenosová funkcia $W_m(s)$ nie je SPR. Preto nie je možné použiť predchádzajúci postup a je ho potrebné modifikovať.

Rovnica pre adaptačnú odchýlku (122)

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^*} \left(u - \Theta_c^{*T} D X - \Theta_4^* r\right) \tag{137}$$

je stále platná (pri jej odvodení nehral relatívny stupeň sústavy žiadnu úlohu).

Využime identitu $(s+\rho)(s+\rho)^{-1} = 1$ kde ρ je ľubovoľná kladná konštanta a prepíšme rovnicu (122) do tvaru

$$e_1 = W_m(s)(s+\rho)(s+\rho)^{-1} \frac{1}{\Theta_4^*} \left(u - \Theta_c^{*T} D X - \Theta_4^* r\right) \tag{138}$$

$\frac{1}{s+\rho}$

čo možno prepísať do tvaru

$$e_1 = W_m(s)(s+\rho) \frac{1}{\Theta_4^*} \left(u_f - \Theta^{*T} \omega_f\right) \tag{139}$$

kde sme zaviedli $u_f = (s+\rho)^{-1} u$, $\omega_f = (s+\rho)^{-1} \omega$ a Θ^* je rovnaký ako Θ avšak obsahuje ideálne parametre.

Nech prenosová funkcia $W_m(s)(s+\rho)$ je zvolená tak, že je to SPR prenosová funkcia. Potom rovnica

$$e_1 = W_m(s)(s+\rho) \frac{1}{\Theta_4^*} \left(\theta^T \omega_f\right) \tag{140}$$

kde $\theta = \Theta - \Theta^*$ dáva do vzťahu chybu nastavenia parametrov zákona riadenia θ a adaptačnú odchýlku e_1 cez SPR prenosovú funkciu. Reprezentácia rovnice (140) v stavovom priestore je

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c (s+\rho) \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^T \omega_f \tag{141a}$$

$$e_1 = C_c^T e \tag{141b}$$

$\dot{e} = \dot{z} = \dot{X} - \dot{X}_m$

$e_1 = \ldots$

$\Downarrow$

$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^*} (\ldots)$

$\Theta^T \omega - \Theta^{*T} \omega$

$\tilde{\theta}^T \omega$

$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^*} \tilde{\theta}^T \omega$

SPR

$W_m(s)$

$\Downarrow$

$\begin{bmatrix} A_c & \overline{B}_c \\ C_c & \end{bmatrix}$

$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \tilde{\theta}^T \omega$

$\dot{\theta} = \dot{z}$

$V = e^T P e + \left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right| \theta^T \Gamma^{-1} \theta$

$\dot{\theta} = -\mathrm{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right) \left(e^T P \overline{B}_c\right) \Gamma \omega$

$A_c^T P + P A_c$

$C_c = P \overline{B}_c \Rightarrow C_c^T = \overline{B}_c^T P$

$\overline{B}_c^T P e$

$\Downarrow$

$e_1 = C_c^T e$

$\dot{\Theta} = -\mathrm{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right) e_1 \Gamma \omega$

kde s teraz predstavuje operátor derivácie $\frac{d}{dt}$, rovnako ako bodka „·" nad e. V ďalšom sa tiež stretneme s takýmto významom symbolu s, pričom na to nebudeme zvlášť upozorňovať, konkrétny význam symbolu s vyplynie z kontextu. Preto

$$se = A_c e + s\left(\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*}\theta^\mathsf{T}\omega_f\right) + \rho\left(\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*}\theta^\mathsf{T}\omega_f\right) \tag{142a}$$

$$s\left(e - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*}\theta^\mathsf{T}\omega_f\right) = A_c e + \rho\left(\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*}\theta^\mathsf{T}\omega_f\right) \tag{142b}$$

Označme $e - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*}\theta^\mathsf{T}\omega_f = \overline{e}$, potom $e = \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*}\theta^\mathsf{T}\omega_f + \overline{e}$ a teda

$$s\overline{e} = A_c\left(\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*}\theta^\mathsf{T}\omega_f + \overline{e}\right) + \rho\left(\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*}\theta^\mathsf{T}\omega_f\right) \tag{143a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e = C_c^\mathsf{T}\left(\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*}\theta^\mathsf{T}\omega_f + \overline{e}\right) \tag{143b}$$

$$\dot{\overline{e}} = A_c\overline{e} + A_c\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*}\theta^\mathsf{T}\omega_f + \rho\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*}\theta^\mathsf{T}\omega_f \tag{144a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T}\overline{e} + C_c^\mathsf{T}\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*}\theta^\mathsf{T}\omega_f \tag{144b}$$

Pretože $C_c^\mathsf{T} B_c = 0$ tak aj $C_c^\mathsf{T}\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*}\theta^\mathsf{T}\omega_f = 0$, potom

$$\dot{\overline{e}} = A_c\overline{e} + \left(A_c\overline{B}_c + \rho\overline{B}_c\right)\frac{1}{\Theta_4^*}\theta^\mathsf{T}\omega_f \tag{145a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T}\overline{e} \tag{145b}$$

Označme $A_c\overline{B}_c + \rho\overline{B}_c = B_1$, potom

$$\dot{\overline{e}} = A_c\overline{e} + B_1 \frac{1}{\Theta_4^*}\theta^\mathsf{T}\omega_f \tag{146a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T}\overline{e} \tag{146b}$$

je stavová reprezentácia systému (140) daného prenosovou funkciou $W_m(s)(s+\rho)$, pričom $\overline{e}$ je vektor jeho stavových veličín.

Funkcia $W_m(s)(s+\rho) = C_c^\mathsf{T}(sI - A_c)^{-1}B_1$ je SPR. Potom podľa MKY lemmy v časti 3.2 existuje taká matica P, pre ktorú platí

$$A_c^\mathsf{T} P + PA_c = -Q \tag{147a}$$

$$PB_1 = C_c \tag{147b}$$

kde $Q = Q^\mathsf{T} > 0$.

Predpokladajme, že štruktúra zákona adaptácie je daná diferenciálnou rovnicou všeobecne zapísanou v tvare

$$\dot{\theta} = f(e_1, \omega_f) \tag{148}$$

Zvoľme kandidáta na Ljapunovovu funkciu v tvare

$$V = \overline{e}^\mathsf{T} P\overline{e} + \left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right| \theta^\mathsf{T}\Gamma^{-1}\theta \tag{149}$$

kde $\Gamma > 0$ je ľubovoľná diagonálna matica, $\left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right|$ je absolútna hodnota prevrátenej hodnoty parametra Θ_4^* a $P = P^\mathsf{T} > 0$ spĺňa rovnice (147), ktoré vyplývajú z MKY lemmy.

$$\dot{V} = \dot{\overline{e}}^\mathsf{T} P\overline{e} + \overline{e}^\mathsf{T} P\dot{\overline{e}} + \left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right| \left(\dot{\theta}^\mathsf{T}\Gamma^{-1}\theta + \theta^\mathsf{T}\Gamma^{-1}\dot{\theta}\right) \tag{150}$$

Poznáme (146) odkiaľ $\dot{\overline{e}}^\mathsf{T} = \overline{e}^\mathsf{T} A_c^\mathsf{T} + \omega_f^\mathsf{T}\theta\frac{1}{\Theta_4^*}B_1^\mathsf{T}$, po dosadení týchto výrazov:

$$\dot{V} = \left(\overline{e}^\mathsf{T} A_c^\mathsf{T} + \omega_f^\mathsf{T}\theta\frac{1}{\Theta_4^*}B_1^\mathsf{T}\right)P\overline{e} + \overline{e}^\mathsf{T} P\left(A_c\overline{e} + B_1\frac{1}{\Theta_4^*}\theta^\mathsf{T}\omega_f\right) + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right|\theta^\mathsf{T}\Gamma^{-1}\dot{\theta} \tag{151}$$

$$\dot{V} = \overline{e}^\mathsf{T}(-Q)\overline{e} + 2\overline{e}^\mathsf{T} PB_1\frac{1}{\Theta_4^*}\theta^\mathsf{T}\omega_f + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right|\theta^\mathsf{T}\Gamma^{-1}\dot{\theta} \tag{152}$$

Pripomeňme, že platí $PB_1 = C_c$, potom

$$\dot{V} = \overline{e}^\mathsf{T}(-Q)\overline{e} + 2\overline{e}^\mathsf{T} C_c\frac{1}{\Theta_4^*}\theta^\mathsf{T}\omega_f + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right|\theta^\mathsf{T}\Gamma^{-1}\dot{\theta} \tag{153}$$

Všimnime si, že $\overline{e}^\mathsf{T} C_c = C_c^\mathsf{T}\overline{e} = e_1$. Časová derivácia $\dot{V}$

$$\dot{V} = \overline{e}^\mathsf{T}(-Q)\overline{e} + 2e_1\frac{1}{\Theta_4^*}\theta^\mathsf{T}\omega_f + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right|\theta^\mathsf{T}\Gamma^{-1}\dot{\theta} \tag{154}$$

bude záporne definitná ak

$$0 = 2e_1\frac{1}{\Theta_4^*}\theta^\mathsf{T}\omega_f + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right|\theta^\mathsf{T}\Gamma^{-1}\dot{\theta} \tag{155a}$$

$$2\left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right|\theta^\mathsf{T}\Gamma^{-1}\dot{\theta} = -2e_1\frac{1}{\Theta_4^*}\theta^\mathsf{T}\omega_f \tag{155b}$$

$$\left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right|\Gamma^{-1}\dot{\theta} = -e_1\,\mathrm{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right)\left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right|\omega_f \tag{155c}$$

$$\Gamma^{-1}\dot{\theta} = -\mathrm{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right)e_1\omega_f \tag{155d}$$

$$\dot{\theta} = -\mathrm{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right)e_1\Gamma\omega_f \tag{155e}$$

Potom zákon adaptácie je

$$\dot{\Theta} = -\mathrm{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right)\Gamma e_1\omega_f \tag{156}$$

Signálny vektor ω_f má zložky $\omega_f = \begin{bmatrix} y_f & \nu_1^\mathsf{T}{}_f & \nu_2^\mathsf{T}{}_f & r_f \end{bmatrix}^\mathsf{T}$. Tieto signály získame jednoducho prechodom pôvodných signálov y, ν_1^T, ν_2^T a r cez filtre s prenosovou funkciou v tvare $\frac{1}{s+\rho}$.

Vstupom do sústavy je u. Pri odvodení zákona adaptácie sme ale uvažovali $u_f = (s+\rho)^{-1}u$ odkiaľ $u = (s+\rho)u_f$. Signál u_f možno zapísať aj v tvare $u_f = \Theta^\mathsf{T}\omega_f$. Teda $u = (s+\rho)\Theta^\mathsf{T}\omega_f$, z čoho vyplýva, že

$$u = \Theta^\mathsf{T}\omega + \dot{\Theta}^\mathsf{T}\omega_f \tag{157}$$

Pre objasnenie (157) naznačíme, že:

$$\begin{aligned}
&(s+\rho)\Theta^\mathsf{T}\omega_f \\
&s\left(\Theta^\mathsf{T}\omega_f\right) + \rho\Theta^\mathsf{T}\omega_f \\
&s\left(\Theta^\mathsf{T}\right)\omega_f + \Theta^\mathsf{T}s\left(\omega_f\right) + \rho\Theta^\mathsf{T}\omega_f \\
&\dot{\Theta}^\mathsf{T}\omega_f + \Theta^\mathsf{T}s\left(\frac{1}{(s+\rho)}\omega\right) + \rho\Theta^\mathsf{T}\frac{1}{(s+\rho)}\omega \\
&\dot{\Theta}^\mathsf{T}\omega_f + \Theta^\mathsf{T}\frac{s}{(s+\rho)}\omega + \Theta^\mathsf{T}\frac{\rho}{(s+\rho)}\omega \\
&\dot{\Theta}^\mathsf{T}\omega_f + \Theta^\mathsf{T}\frac{s+\rho}{(s+\rho)}\omega \\
&\dot{\Theta}^\mathsf{T}\omega_f + \Theta^\mathsf{T}\omega
\end{aligned}$$

6.2 Metóda doplnenej odchýlky

Vo všeobecnosti, zákon riadenia, ktorý rieši MRC problém je $u = \Theta^{\mathsf{T}}\omega$. Pri jeho dosadení do všeobecne platnej rovnice adaptačnej odchýlky (122) máme rovnicu adaptačnej odchýlky v tvare

$$e_1 = W_m(s)\frac{1}{\Theta_4^*}\theta^{\mathsf{T}}\omega \tag{158}$$

V rovnici (138) sme použili identitu $(s+\rho)(s+\rho)^{-1} = 1$, čo vo všeobecnosti je $L(s)L(s)^{-1} = 1$.

Rovnicu (158) sme v predchádzajúcom tvare doplnili do tvaru

$$e_1 = W_m(s)L(s)L(s)^{-1}\frac{1}{\Theta_4^*}\theta^{\mathsf{T}}\omega \tag{159}$$

a z rovnice (139) vyplíva, že (159) možno prepísať do tvaru

$$e_1 = W_m(s)L(s)\frac{1}{\Theta_4^*}\theta^{\mathsf{T}}L(s)^{-1}\omega \tag{160}$$

Rovnica (160) môže byť zapísaná aj v tvare

$$e_1 = W_m(s)\frac{1}{\Theta_4^*}\left(L(s)\theta L(s)^{-1}\right)^{\mathsf{T}}\omega \tag{161}$$

kde sme vymenili pozície $\frac{1}{\Theta_4^*}$ a $L(s)$, čo je možné, pretože $\frac{1}{\Theta_4^*}$ je len konštanta a nie funkcia času, a táto rovnica dáva do vzťahu chybu nastavenia parametrov zákona riadenia s adaptačnou odchýlkou. V stavovom priestore má rovnica „doplnenej" adaptačnej odchýlky (161) tvar

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^*}\left(L(s)\theta L(s)^{-1}\right)^{\mathsf{T}}\omega \tag{162a}$$

$$e_1 = C_c^{\mathsf{T}} e \tag{162b}$$

Adaptačná odchýlka je definovaná ako $e = X - X_m$ a $e_1 = y - y_m$. Sú dve možnosti ako dosiahnúť aby výsledok odčítania rovníc parametrizovanej doplnenej sústavy, kde stavový vektor je X, a neminimálnej reprezentácie referenčného modelu, kde stavový vektor je X_m, bol v tvare doplnenej adaptačnej odchýlky (162).

6.2.1 Prvá možnosť

Výsledok je rovnaký ako v predchádzajúcej časti:

Rovnicu parametrizovanej doplnenej sústavy (116) po dosadení za $u = \Theta^{\mathsf{T}}\omega$ možno zapísať v tvare

$$\dot{X} = A_c X + \overline{B}_c r + \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^*}\theta^{\mathsf{T}}\omega \tag{163a}$$

$$y = C_c^{\mathsf{T}} X \tag{163b}$$

Zavedieme také pravidlo, že keď $W_m(s)$ nie je možné navrhnúť ako SPR, tak v rovnici (163) nahradíme Θ^{T} výrazom $\left(L(s)\theta L(s)^{-1}\right)^{\mathsf{T}}$, kde $L(s)$ je dané tým, že $W_m(s)L(s)$ je zvolená ako SPR prenosová funkcia. Teda

$$\dot{X} = A_c X + \overline{B}_c r + \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^*}\left(L(s)\theta L(s)^{-1}\right)^{\mathsf{T}}\omega \tag{164a}$$

$$y = C_c^{\mathsf{T}} X \tag{164b}$$

Pripomeňme

$$\dot{X}_m = A_c X_m + \overline{B}_c r \tag{165a}$$

$$y_m = C_c^{\mathsf{T}} X_m \tag{165b}$$

Odčítaním (165) od (164) získame rovnicu „doplnenej" adaptačnej odchýlky (162), ktorá zabezpečuje (podrobne ukázané v predchádzajúcom), že chyba nastavenia parametrov zákona riadenia θ je vo vzťahu z adaptačnou odchýlkou e_1 cez SPR prenosovú funkciu.

Pretože rovnica parametrizovanej doplnenej sústavy je modifikovaná podľa zavedeného pravidla, tak aj zákon riadenia je modifikovaný do tvaru $u = \left(L(s)\Theta L(s)^{-1}\right)^{\mathsf{T}}\omega$. V prípade, že $L(s) = (s+\rho)$ (ako v predchádzajúcom), tak výraz $L(s)\Theta^{\mathsf{T}}L(s)^{-1}$ je funkčne ekvivalentný výrazu

$$L(s)\Theta^{\mathsf{T}}L(s)^{-1} = \Theta^{\mathsf{T}} + \dot{\Theta}^{\mathsf{T}}L(s)^{-1} \tag{166}$$

a teda modifikovaný zákon riadenia má v tomto prípade tvar $u = \Theta^{\mathsf{T}}\omega + \dot{\Theta}^{\mathsf{T}}\omega_f$.

6.2.2 Druhá možnosť

Výsledkom je algoritmus nazývaný *metóda doplnenej odchýlky*:

Namiesto nahradenia θ^{T} výrazom $\left(L\theta L^{-1}\right)^{\mathsf{T}}$ v rovnici parametrizovanej doplnenej sústavy pridáme vstupný signál v tvare $\frac{1}{\Theta_4^*}\left(\theta - L\theta L^{-1}\right)^{\mathsf{T}}\omega$ do referenčného modelu nasledovne

$$\dot{X}_m = A_c X_m + \overline{B}_c\left(r + \frac{1}{\Theta_4^*}\left(\theta - L\theta L^{-1}\right)^{\mathsf{T}}\omega\right) \tag{167a}$$

$$y_m = C_c^{\mathsf{T}} X_m \tag{167b}$$

$$\dot{X}_m = A_c X_m + \overline{B}_c r + \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^*}\left(\theta - L\theta L^{-1}\right)^{\mathsf{T}}\omega \tag{168a}$$

$$y_m = C_c^{\mathsf{T}} X_m \tag{168b}$$

Rovnica parametrizovanej doplnenej sústavy sa teraz nemení (nemodifikuje)

$$\dot{X} = A_c X + \overline{B}_c r + \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^*}\theta^{\mathsf{T}}\omega \tag{169a}$$

$$y = C_c^{\mathsf{T}} X \tag{169b}$$

Odčítaním (168) od (169) podľa definície adaptačnej odchýlky máme

$e_1 = ?$

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^*}\theta^{\mathsf{T}}\omega - \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^*}\left(\theta - L\theta L^{-1}\right)^{\mathsf{T}}\omega \tag{170a}$$

$$e_1 = C_c^{\mathsf{T}} e \tag{170b}$$

?

Výraz

$$\left(\theta - L\theta L^{-1}\right) = L\left(L^{-1}\theta - \theta L^{-1}\right) \tag{171}$$

Potom

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^*}\theta^{\mathsf{T}}\omega - \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^*}\left(L\left(L^{-1}\theta - \theta L^{-1}\right)\right)^{\mathsf{T}}\omega \tag{172a}$$

$$e_1 = C_c^{\mathsf{T}} e \tag{172b}$$

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^*}\theta^{\mathsf{T}}\omega - \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^*}L\left(L^{-1}\theta^{\mathsf{T}} - \theta^{\mathsf{T}}L^{-1}\right)\omega \tag{173a}$$

$$e_1 = C_c^{\mathsf{T}} e \tag{173b}$$

Rovnicu (173) je možné prepísať do požadovaného tvaru (162) nasledovne:

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^*}\theta^{\mathsf{T}}\omega - \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^*}LL^{-1}\theta^{\mathsf{T}}\omega - \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^*}L\theta^{\mathsf{T}}L^{-1}\omega \tag{174a}$$

$$e_1 = C_c^{\mathsf{T}} e \tag{174b}$$

$$\begin{bmatrix} V_{m1} \\ V_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{\Lambda(s)} \\ \frac{1}{\Lambda(s)} \end{bmatrix} u$$

Λ stupeň $n-1$

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} L \theta^\top L^{-1} \omega \tag{175a}$$

$$e_1 = C_c^\top e \tag{175b}$$

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \left(L \theta L^{-1}\right)^\top \omega \tag{176a}$$

$$e_1 = C_c^\top e \tag{176b}$$

Rovnica (173) v tvare prenosovej funkcie je

$$e_1 = W_m \frac{1}{\Theta_4^*} \left(\theta^\top \omega - L \left(L^{-1} \theta^\top - \theta^\top L^{-1}\right) \omega\right) \tag{177}$$

$$e_1 = W_m \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega - W_m \frac{1}{\Theta_4^*} L \left(L^{-1} \theta^\top - \theta^\top L^{-1}\right) \omega \tag{178}$$

Platí

$$\begin{aligned} L^{-1}\theta^\top - \theta^\top L^{-1} &= L^{-1}\left(\Theta - \Theta^*\right)^\top - \left(\Theta - \Theta^*\right)^\top L^{-1} \\ &= \left(L^{-1}\Theta^\top - \Theta^\top L^{-1}\right) - \left(L^{-1}\Theta^{*\top} - \Theta^{*\top} L^{-1}\right) \\ &= \left(L^{-1}\Theta^\top - \Theta^\top L^{-1}\right) \end{aligned} \tag{179}$$

pretože Θ^* nie je funkciou času a teda $L^{-1}\Theta^{*\top} = \Theta^{*\top} L^{-1}$. Potom

$$e_1 = W_m \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega - W_m L \frac{1}{\Theta_4^*} \left(L^{-1}\Theta^\top \omega - \Theta^\top L^{-1} \omega\right) \tag{180}$$

$y - y_m$

$$\boxed{e_1 = \underbrace{W_m \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega}_{} - \overbrace{W_m L \frac{1}{\Theta_4^*} \left(L^{-1}u - \Theta^\top \omega_f\right)}^{u_p}} \tag{181}$$

kde označíme: $e_m = W_m \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega$ je odchýlka medzi výstupom pôvodného nemodifikovaného referenčného modelu a signál $e_d = W_m L \frac{1}{\Theta_4^*} \left(L^{-1}u - \Theta^\top \omega_f\right)$ sa pridá k tejto odchýlke, čím vznikne modifikovaný signál e_1 a tento sa použije v zákone adaptácie.

Rovnicu parametrizovanej doplnenej sústavy (169) sme neznenili, preto sa v tomto prípade nemení ani zákon riadenia $u = \Theta^\top \omega$.

7 Cvičenie siedme ako príklad k téme *Zákon adaptácie pri* $n^* = 1$

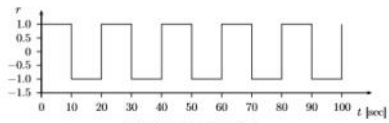
Tento príklad v princípe dopĺňa zákon adaptácie k riadiacemu systému, ktorý je predmetom návrhu v predchádzajúcej časti 2.

7.1 Úlohy

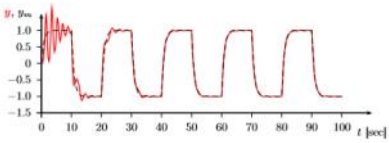
1. Pre nominálnu prenosovú funkciu – pozri zadanie a riešenie príkladu v časti 2 – pre túto nominálnu prenosovú funkciu riadeného systému navrhnite adaptívne riadenie s referenčným modelom so vstupno-výstupnou štruktúrou zákona riadenia (merateľný je len výstup riadeného systému a samozrejme vstup). Pre odvodenie zákona adaptácie použite priamu Lyapunovou metódu. Nech referenčný model je v tvare

$$W_m(s) = \frac{s+3}{s^2 + 3.5s + 3} \tag{182}$$

- Určte zákon riadenia, ktorý sa bude používať v adaptívnom riadiacom systéme.
- Vypočítajte ideálne parametre zákona riadenia.
- Zistite, či $W_m(s)$ je striktne pozitívne reálna (SPR) prenosová funkcia.



Obr. 6: Referenčný signál r



Obr. 7: Výsledok simulácie

- Napíšte rovnicu výstupnej adaptačnej odchýlky e_1.
- Pre systém diferenciálnych rovníc $(\dot{e}, \dot{\theta})$, kde $\dot{\theta}$ sa najskôr uvažuje vo všeobecnom tvare (na začiatku odvodenia sa uvažuje len všeob. funkcia f) zvoľte kandidáta na Lyapunovovu funkciu a odvoďte (skonkretizujte) predpis (pravú stranu) pre $\dot{\theta}$.
- Určte zákon adaptácie, ktorý sa bude používať v adaptívnom riadiacom systéme
- Zvoľte Γ (jednoducho, zvoľte všetky ľubovoľne voliteľné prvky zákona/zákonov adaptácie).
- Začiatočné hodnoty adaptovaných parametrov zvoľte nulové.
- Zostavte adaptívny riadiaci systém (simulačnú schému) a pridajte ho k simulovanej sústave.
- Použite obdĺžnikový referenčný signál r ako na Obr. 6. Vzorové výsledky simulácie sú na Obr. 7.

7.2 Riešenie úloh

Začiatok úlohy prvej znie:

Pre nominálnu prenosovú funkciu – pozri zadanie a riešenie príkladu v časti 2 – pre túto nominálnu prenosovú funkciu riadeného systému navrhnite adaptívne riadenie s referenčným modelom so vstupno-výstupnou štruktúrou zákona riadenia (merateľný je len výstup riadeného systému a samozrejme vstup). Pre odvodenie zákona adaptácie použite priamu Lyapunovou metódu. Nech referenčný model je v tvare

$$W_m(s) = \frac{s+3}{s^2 + 3.5s + 3} \tag{183}$$

Bod prvý

Určte zákon riadenia, ktorý sa bude používať v adaptívnom riadiacom systéme.

Viď (21).

Avšak! Hovoríme o *adaptívnom* riadiacom systéme. Prečo sa „adaptujeme"? Pretože nepoznáme hodnoty parametrov riadeného systému. A keďže tieto nepoznáme, nedokážeme vypočítať (ideálne) parametre zákona riadenia, ktorými sú Θ_1^*, Θ_2^*, Θ_3^* a Θ_4^* (nedokážeme to v „adaptívnom prípade").

Λ stupeň $n-1$

$\uparrow$

n^*

$\begin{bmatrix} y_{n2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\Lambda(s)} \end{bmatrix}$

$\frac{d(s)}{\Lambda(s)}$

$\Lambda(s) = s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0$ $\quad \dot{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_0 & -\lambda_1 \end{bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

$\dot{v}_1 = \Lambda v_1 + q u$

$\dot{v}_2 = \Lambda v_2 + q y$

$\frac{\dot{y}_p}{u} = k_p \frac{Z_p}{R_p}$ $\quad \frac{\dot{y}_m}{v} = k_m \frac{Z_m}{R_m}$

$u = \Theta^T \omega \rightarrow u = \Theta_1^T v_1 + \Theta_2^T v_2 + \Theta_3 y + \Theta_4 r$

$\dot{\Theta} = -\operatorname{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right) e_1 \Gamma \omega_f$

$\omega_f = \frac{\Gamma 1}{L} \omega$

$e_1 = ?$

$e_1 = (y - y_m) - W_m L \operatorname{sign}(\Theta_4^*)\left(\frac{1}{L} u - \Theta^T \omega_f\right)$

$u = \Theta^T \omega + \dot{\Theta} \omega_f$

$e_1 = y - y_m$

Preto, v adaptívnom riadiacom systéme sa používa zákon riadenia, kde sú ideálne („hviezdičkované") parametre zákona riadenia nahradené ich odhadmi. Tieto odhady sa „adaptujú" (priebežne identifikujú) a teda sa menia v čase. Preto píšeme (v tomto prípade), že adaptovanými parametrami zákona riadenia sú $\Theta_1(t)$, $\Theta_2(t)$, $\Theta_3(t)$ a $\Theta_4(t)$. Takže v ***adaptívnom*** riadiacom systéme bude zákon riadenia:

$$u(t) = \Theta_1(t)\left[\frac{1}{(s+\lambda)}\right]u(t) + \Theta_2(t)\left[\frac{1}{(s+\lambda)}\right]y(t) + \Theta_3(t)y(t) + \Theta_4(t)r(t) \tag{184}$$

Bod druhý

Vypočítajte ideálne parametre zákona riadenia.

Urobili sme tak v časti 2.2.2, v Bode druhom.

Bod tretí

Zistite, či $W_m(s)$ je striktne pozitívne reálna (SPR) prenosová funkcia.

Máme prenosovú funkciu

$$W_m(s) = \frac{s+3}{s^2+3,5s+3} \tag{185}$$

V prvom bode nás zaujíma, či $W_m(s)$ je reálna pre všetky reálne s. Ak za s dosadíme reálne číslo, potom $W_m(s)$ je reálne číslo.

Ďalej nás zaujíma, či menovateľ $W_m(s)$ má korene v ľavej polrovine komplexnej roviny alebo má reálne korene na imaginárnej osi. Korene polynómu $s^2+3,5s+3$ sú $s_1=-2$ a $s_2=-1,5$. Takže táto podmienka je splnená.

A nakoniec je otázka, či $\Re\{W_m(j\omega)\} \geq 0$ pre všetky reálne ω. Vykonajme teda $W_m(s) \to W_m(j\omega)$:

$$W_m(j\omega) = \frac{j\omega+3}{(j\omega)^2+3,5j\omega+3} \tag{186}$$

Toto je (vlastne) nejaké komplexné číslo. Samotná ω nech je reálne číslo. Upravme.

$$W_m(j\omega) = \frac{j\omega+3}{(j\omega)^2+3,5j\omega+3} \tag{187a}$$

$$= \frac{j\omega+3}{-\omega^2+3,5j\omega+3} \tag{187b}$$

$$= \frac{j\omega+3}{(3-\omega^2)+j3,5\omega} \tag{187c}$$

Je potrebné získať reálnu časť komplexného čísla $W_m(j\omega)$. Pre vyjadrenie reálnej časti je výhodné využiť, že platí:

$$\frac{a+jb}{c+jd} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{c^2+d^2}$$

Takže:

$$W_m(j\omega) = \frac{(j\omega+3)}{((3-\omega^2)+j3,5\omega)}\frac{\left((3-\omega^2)-j3,5\omega\right)}{\left((3-\omega^2)-j3,5\omega\right)} \tag{188a}$$

$$= \frac{(j\omega+3)\left((3-\omega^2)-j3,5\omega\right)}{(3-\omega^2)^2+(3,5\omega)^2} \tag{188b}$$

$$= \frac{9-3\omega^2-j10,5\omega+j3\omega-j\omega^3+3,5\omega^2}{(3-\omega^2)^2+(3,5\omega)^2} \tag{188c}$$

Reálna časť z toho je

$$\Re\{W_m(j\omega)\} = \frac{9+0,5\omega^2}{(3-\omega^2)^2+(3,5\omega)^2} \tag{189}$$

a teda platí $\Re\{W_m(j\omega)\} \geq 0 \;\forall\; \omega \in \mathbb{R}$. Prenosová funkcia $W_m(s)$ je SPR.

Bod štvrtý

Napíšte rovnicu výstupnej adaptačnej odchýlky e_1.

Výstupná adaptačná odchýlka je, samozrejme, $e_1(t) = y(t) - y_m(t)$. Tu sa však myslí písanie rovnice, ktorá opisuje dynamiku adaptačnej odchýlky. Teda

$$e_1(t) = [W_m(s)]\,\frac{1}{\Theta_4^*}\left(\theta^{\mathrm{T}}(t)\,\omega(t)\right) \tag{190}$$

kde pre podrobný význam jednotlivých symbolov odkazujeme čitateľa na študijný materiál k príslušnej téme. V skratke, je jasné, že $W_m(s)$ je prenosová funkcia referenčného modelu, Θ_4^* je jeden y ideálnych parametrov zákona riadenia, $\theta^{\mathrm{T}}(t)$ je vektor pozostávajúci z odchýlok medzi ideálnymi parametrami zákona riadenia a ich odhadmi a $\omega(t)$ je signálny vektor zákona riadenia.

Mimochodom, toto je veľmi veľmi dôležitá rovnica celkovo v oblasti akejkoľvek priebežnej identifikácie parametrov (alebo adaptácie ak chcete). Podrobnosti sú ďaleko nad rámec tohto textu...

Bod piaty

Pre systém diferenciálnych rovníc $(\dot{e}, \dot{\theta})$, kde $\dot{\theta}$ sa najskôr uvažuje vo všeobecnom tvare (na začiatku odvodenia sa uvažuje len všeob. funkcia f) zvoľte kandidáta na Lyapunovovu funkciu a odvoďte (skonkretizujte) predpis (pravú stranu) pre $\dot{\theta}$.

Ako je čitateľovi iste známe, rovnicu opisujúcu dynamiku adaptačnej odchýlky je možné zapísať aj pomocou nejakého stavového vektora, konkrétne sa v učebnom texte uvádza

$$\dot{e}(t) = A_c e(t) + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*}\left(\theta^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)\right) \tag{191a}$$

$$e_1(t) = C_c^{\mathrm{T}} e(t) \tag{191b}$$

pričom $W_m(s) = C_c^{\mathrm{T}}\left(sI - A_c\right)^{-1}\overline{B}_c$ a pre ďalšie podrobnosti viď príslušný učebný text.

Tu vieme, čo je signál $e_1(t)$ a aj ho vieme merať/získať. Vonkoncom nevieme merať/získať stavový vektor $e(t)$. Ale vieme, že existuje. Teoreticky.

Nič nebráni zostaveniu systému diferenciálny rovníc v tvare

$$\dot{e}(t) = A_c e(t) + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*}\left(\theta^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)\right) \tag{192a}$$

$$\dot{\theta}(t) = f(e_1(t), \omega(t)) \tag{192b}$$

a tento systém má, ako je uvedené v učebnom texte, veľmi výhodné vlastnosti vzhľadom na možnosti adaptácie (priebežnej identifikácie) pre dosiahnutie cieľa riadenia.

Inými slovami, ak systém diferenciálnych rovníc (192) bude stabilný (plus pár miliónov detailov detailov), tak stavový vektor $e(t)$ sa bude asymptoticky (s časom) blížiť k nule. Je potom jasné, že aj adaptačná odchýlka $e_1(t)$ sa bude blížiť k nule, čo je cieľ riadenia. Podrobnosti prečo to tak je, sa najlepšie ukazujú na prípade MRAC stavového (ako sme spomenuli v jednom odstavci vyššie - v časti 2.2.2, v Bode treťom).

Jasným (viac-menej) kandidátom na Lyapunovovu funkciu pre systém (192) teda je (si dovolíme nepísať signály ako funkcie času, teda napr. píšeme len e nie $e(t)$)

$$V = e^{\mathrm{T}} P e + \left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right| \theta^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\theta \tag{193}$$

Cesta potom vedie do bodu, kde máme

$$\dot{V} = e^{\mathrm{T}}\left(-Q\right)e + 2\left(e^{\mathrm{T}} P \overline{B}_c\right)\frac{1}{\Theta_4^*}\theta^{\mathrm{T}}\omega + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right|\theta^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\dot{\theta} \tag{194}$$

a chceme zabezpečiť aby časová derivácia $\dot{V}$ bola záporne definitná. Na pravej strane rovnice (194), člen $e^{\mathrm{T}}\left(-Q\right)e$ je záporne definitný (vždy menší ako nula). Ak by na

pravej strane rovnice (194) zvyšné dva členy neboli platilo by požadované $\dot{V} \leq 0$. Inými slovami žiadame:

$$0 = 2\left(e^{\mathsf{T}} P \overline{B}_c\right) \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^{\mathsf{T}} \omega + 2 \left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right| \theta^{\mathsf{T}} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{195a}$$

$$2 \left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right| \theta^{\mathsf{T}} G^{-1} \dot{\theta} = -2\left(e^{\mathsf{T}} P \overline{B}_c\right) \frac{1}{\Theta_4^*} \Theta^{\mathsf{T}} \omega \tag{195b}$$

$$\left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right| \Gamma^{-1} \dot{\theta} = -\left(e^{\mathsf{T}} P \overline{B}_c\right) \mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right) \left|\frac{1}{\Theta_4^*}\right| \omega \tag{195c}$$

$$\Gamma^{-1} \dot{\theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right) \left(e^{\mathsf{T}} P \overline{B}_c\right) \omega \tag{195d}$$

$$\dot{\theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right) \left(e^{\mathsf{T}} P \overline{B}_c\right) \Gamma \omega \tag{195e}$$

Tu sme, v princípe, práve získali hľadaný zákon adaptácie, teda predpis, ktorý hovorí ako sa mení vektor θ. Avšak, obsahuje vektor e. Ten nemáme. Všetko uvedené je len teoretické.

Tu sa využije veľmi významná vlastnosť, že prenosová funkcia $W_m(s)$ je SPR. Pripomeňme, že pre ňu platí $W_m(s) = C_c^{\mathsf{T}} (sI - A_c)^{-1} \overline{B}_c$ a s využitím tejto reprezentácie referenčného modelu je možné využiť Meyerovu-Kalmanovu-Yakubovichovu Lemmu (vetu). Podľa nej platí

$$A_c^{\mathsf{T}} P + P A_c = -Q$$
$$P \overline{B}_c = C_c$$

kde by sme mali byť oboznámený čo konkrétne teraz sú uvedené matice...

Keďže platí $P\overline{B}_c = C_c$, tak máme

$$\dot{\theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right) \left(e^{\mathsf{T}} P \overline{B}_c\right) \Gamma \omega \tag{196a}$$

$$\dot{\theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right) \left(e^{\mathsf{T}} C_c\right) \Gamma \omega \tag{196b}$$

Výraz $e^{\mathsf{T}} C_c$ je skalár. Takže $e^{\mathsf{T}} C_c = C_c^{\mathsf{T}} e$. A potom je jasné, že $C_c^{\mathsf{T}} e = e_1$. Preto môžeme písať

$$\dot{\theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right) e_1 \Gamma \omega \tag{197}$$

Toto je stále hľadaný zákon adaptácie. Ale už neobsahuje nedostupný (len teoretický) vektor e ale dostupný signál e_1, čo je jednoducho výstupná adaptačná odchýlka.

Bod šiesty

Určte zákon adaptácie, ktorý sa bude používať v adaptívnom riadiacom systéme.

Práve sme tak urobili v predchádzajúcom bode. Zákon adaptácie je

$$\dot{\Theta}(t) = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right) e_1(t)\, \Gamma\, \omega(t) \tag{198}$$

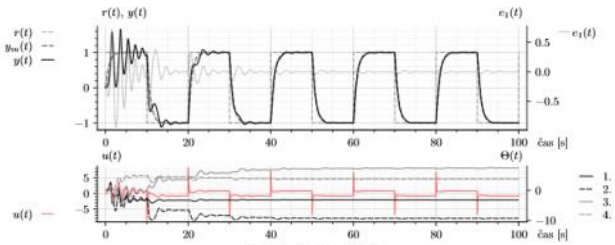
Pripomeňme, že signálny vektor zákona riadenia v tomto prípade je

$$\omega(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \tag{199}$$

takže zákon adaptácie detailnejšie napísaný je

$$\dot{\Theta}(t) = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right) e_1(t) \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \tag{200}$$

kde sme ako príklad zvolili maticu Γ diagonalnu s kladnými číslami $\gamma_1, \cdots, \gamma_4$ na diagonále.



Obr. 8: Výsledok simulácie

Bod siedmi

Zvoľte Γ (jednoducho, zvoľte všetky ľubovoľne voliteľné prvky zákona/zákonov adaptácie).

Voľba matice Γ ako diagonálnej matice v prvom rade spĺňa podmienky pre túto maticu (má byť symetrická a kladne definitná). Má to však aj praktický význam. Matica Γ je hlavným nástrojom ako ovplyvniť vlastnosť zákona adaptácie, ktorá sa nazýva rýchlosť adaptácie. Ak je navyše diagonálna, vieme relatívne nezávisle ovplyvňovať rýchlosť adaptácie jednotlivých prvkov vektora adaptovaných parametrov. Uvažujme teda o matici Γ v tvare

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_4 \end{bmatrix} \tag{201}$$

V tomto prípade máme vektor adaptovaných parametrov v tvare

$$\Theta(t) = \begin{bmatrix} \Theta_3(t) \\ \Theta_1(t) \\ \Theta_2(t) \\ \Theta_4(t) \end{bmatrix} \tag{202}$$

Ak by sme chceli ovplyvniť rýchlosť s akou sa mení napr. parameter $\Theta_2(t)$, je to možné urobiť zmenou veľkosti čísla γ_3 v matici Γ. Ak zvýšime γ_3, potom $\Theta_2(t)$ bude dosahovať v princípe vyššie hodnoty, a naopak...

Bod ôsmy až desiaty

- Začiatočné hodnoty adaptovaných parametrov zvoľte nulové.
- Zostavte adaptívny riadiaci systém (simulačnú schému) a pridajte ho k simulovanej sústave.
- Použite obdĺžnikový referenčný signál r ako na Obr. 6. Vzorové výsledky simulácie sú na Obr. 7.

Nasledujúci výpis kódu 4 obsahuje funkciu `fcn_sim8ch3`. Je postavená na rovnakých princípoch ako sme tu už viac krát uviedli. Rozdielom oproti predchádzajúcej simulácii vo výpise kódu 3 je pridanie zákona adaptácie (nahradenie pevne stanovených hodnôt vektora `Theta`).

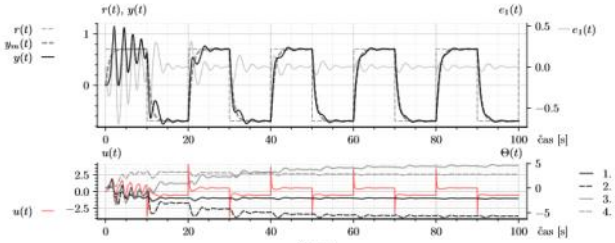
Výsledky simulácie pre uvedené zadanie sú na obr. 8.

Výpis kódu 4: Súbor `ar06_prMRAC_v01.py`, simulačná schéma adaptívneho riadiaceho systému

```python

def fcn_LTIS(x, t, A, b, u):
    dotx = np.matmul(A, x) + np.matmul(b, u)
    return dotx


def fcn_simSch3(t_start, T_s, finalIndex, sig_dummy_ext):

    #-----------------------------------------
    # Riadeny system

    A = np.array([[0, 1], [-2.6916, -2.7423]])
    b = np.array([[0], [1]])
    c = np.array([[3.5578], [0.1664]])

    #-------------------------
    # Referencny model

    A_m = np.array([[0, 1], [-3.0, -3.5]])
    b_m = np.array([[0], [1]])
    c_m = np.array([[3], [1]])

    #-------------------------
    # Pomocne filtre

    Lambda_pom = np.array([[-3]])
    q_pom = np.array([[1]])

    #-----------------------------------------------------
    t_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    t_log[0,:] = t_start

    #-----------------------------------------
    x_0 = np.zeros(b.shape[0])

    x_log = np.zeros([finalIndex, len(x_0)])
    x_log[0,:] = x_0

    y_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    y_log[0,:] = np.dot(c.T, x_0.reshape(-1,1))

    #-------------------------
    x_m_0 = np.zeros(b_m.shape[0])

    x_m_log = np.zeros([finalIndex, len(x_m_0)])
    x_m_log[0,:] = x_m_0

    y_m_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    y_m_log[0,:] = np.dot(c_m.T, x_m_0.reshape(-1,1))

    #-------------------------
    nu1_log = np.zeros([finalIndex, q_pom.shape[0]])
    nu2_log = np.zeros([finalIndex, q_pom.shape[0]])

    #-------------------------
    Theta_log = np.zeros([finalIndex, 4])

    #-------------------------
    u_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    u_log[0,:] = 0

    #-----------------------------------------------------
    timespan = np.zeros(2)
    for idx in range(1, int(finalIndex)):

        timespan[0] = t_log[idx-1,:]
        timespan[1] = t_log[idx-1,:] + T_s

        t_log[idx,:] = timespan[-1]

        # ------------

        odeOut = odeint(fcn_LTIS,
                        x_log[idx-1,:],
                        timespan,
                        args=(A, b, u_log[idx-1,:])
                        )

        x_log[idx,:] = odeOut[-1,:]
```



```python
        y_log[idx,:] = np.dot(c.T, x_log[idx,:].reshape(-1,1))

        # -------------------------
        # Referencny model:

        ref_sig = sig_dummy_ext[idx-1, :]

        dotx_m = fcn_LTIS(x_m_log[idx-1,:], 0, A_m, b_m, ref_sig)

        x_m_log[idx,:] = x_m_log[idx-1,:] + dotx_m * T_s

        y_m_log[idx,:] = np.dot(c_m.T, x_m_log[idx,:].reshape(-1,1))

        # -------------------------
        # Adaptacna odchylka

        adaptError = y_log[idx-1,:] - y_m_log[idx-1,:]

        # -------------------------
        # Pomocne filtre

        dotnu1 = fcn_LTIS(nu1_log[idx-1,:], 0, Lambda_pom, q_pom, u_log[idx-1,:])
        nu1_log[idx,:] = nu1_log[idx-1,:] + dotnu1 * T_s

        dotnu2 = fcn_LTIS(nu2_log[idx-1,:], 0, Lambda_pom, q_pom, y_log[idx-1,:])
        nu2_log[idx,:] = nu2_log[idx-1,:] + dotnu2 * T_s

        # -------------------------
        # Vektor omega:

        omega = np.array([y_log[idx,:],
                          nu1_log[idx-1,:],
                          nu2_log[idx-1,:],
                          ref_sig,
                         ])

        # -------------------------
        # Zakon adaptacie

        Gamma = np.diag(np.array([5, 50, 50, 5]))

        dotTheta = - np.matmul(Gamma, omega) * adaptError

        Theta_log[idx,:] = Theta_log[idx-1,:] + dotTheta.reshape(1,-1) * T_s

        # -------------------------
        # Zakon ZakonRiadenia

        u_log[idx,:] = np.dot(Theta_log[idx-1,:].T, omega)[0]

    return [t_log, x_log, y_log, u_log, y_m_log, Theta_log]

# ---------------------------------------------------
# Nastavenie simulacie

sim_t_start = 0
sim_t_final = 100
sim_T_s = 0.01
sim_finalIndex = int(((sim_t_final - sim_t_start)/sim_T_s) + 1)

# Preddefinovany signal (pouzity ako referencny signal)

period_time = 20
period_tab = np.array([[0, 1],
                       [10, -1],
                      ])

sig_vysl = np.zeros([sim_finalIndex, 1])

for period in range(int(sim_t_final/period_time) + 1):
    for idx in range( int((period*period_time)/sim_T_s), int((period*period_time + period_time)/sim_T_s)):
        lastValue = period_tab[:,1][(period_tab[:,0] + (period*period_time))<=idx*sim_T_s ][-1]
        try:
            sig_vysl[idx] = lastValue
        except:
            break
```



Obr. 9

```
sig_dummy_ext = sig_vys1

# Spustenie simulacie

t_log, x_log, y_log, u_log, y_m_log, Theta_log = fcn_simSch3(
    sim_t_start,
    sim_T_s,
    sim_finalIndex,
    sig_dummy_ext,
    )
```

7.3 Dodatok k riešeniu (prevažne o nastavovaní rýchlosti adaptácie)

Vo svetle toho, že v tomto príklade je použitý model reálneho systému – jednosmerného motora, uvažujme realistickejšiu simuláciu. Zmysluplné okolie pracovného bodu je $\pm 0,7$ [V], teda má význam žiadať od výstupnej veličiny $y(t)$ maximálne hodnoty $\pm 0,7$ a akčný zásah môže byť v rozsahu cca ± 5 (tiež vo voltoch, ale to sú už príliš podrobnosti kedže čitateľ zrejme nepozná detaily k riadenému systému).

Prípad 1

Preto, použime rovnaké nastavenie adaptívneho riadiaceho systému ako vo „vzorovej" (umelo vymyslenej) simulácii a v prvom rade zmeňme priebej referenčného signálu (maximálne hodnoty $\pm 0,7$). Výsledok je na obr. 9.

Priebeh veličín riadeného systému, výstupnej aj vstupnej, je v poriadku z hľadiska rozsahov (v okolí pracovných bodov to zodpovedá reálnemu systému (motorčeku)). Povedzme však, že rýchlosť adaptácie (výsledok na obr. 9) je nevyhovujúca. Nech je požiadavka taká, že v čase 100 má byť riadiaci systém už adaptovaný. Je teda potrebné upraviť voliteľný parameter zákona adaptácie, ktorý vo veľkej miere určuje rýchlosť adaptácie. Tým ja matica Γ. V tomto „vzorovom" prípade vidíme, že sa uvažuje

```
Gamma = np.diag(np.array([5, 50, 50, 5]))
```

Prípad 2

Výslednú rýchlosť adaptácie však neovplyvňuje len matica Γ ale samozrejme všetky prvky v zákone adaptácie. Teda signálny vektor ω a samozrejme adaptačná odchýlka. Všetky tieto signály - ich charakter a vplyv na rýchlosť adaptácie, závisia od toho ako veľmi tzv. *vybudíme* systém.

Pod vybudením sa myslí navodenie takých podmienok, aby sa prejavili takpovediac všetky vlastnosti systému. V tu uvažovanej schéme je viac menej jedinou možnosťou ako „vybudiť" riadený systém je riadiť ho tak, že sledujeme relatívne „zložitý" referenčný signál. Naopak, ak referenčný signál je „jednoduchý", tak je ho aj jednoduché sledovať,

a takpovediac blok adaptácie ľahko nájde vhodné parametre zákona riadenia (tak aby $y(t)$ sledovalo $y_m(t)$)[4].

Jednoduchým (v princípe najjednoduchším) referenčným signálom je sínusoida („obsahuje" len jednu frekvenciu, obdĺžnikový signál „obsahuje" nekonečne veľa frekvencií). Vyskúšajme teda $r(t)$ ako harmonický signál s periódou 20 [časových jednotiek - sekúnd v realite] a amplitúdou 0,7 [voltov v realite]. Pritom pre začiatok uvažujme

```
Gamma = np.diag(np.array([1, 1, 1, 1]))
```

Výsledok je na obr. 10. Adaptačná odchýlka sa s časom zmenšuje, ale povedzme, že nie dostatočne rýchlo.

Prípad 3

Na priebehu adaptovaných parametrov (vektor $\Theta(t)$) je vidieť, že najrýchlejšie zmeny boli pri parametri Θ_4. Skúsme docieliť, aby sa aj ostatné parametre menili rýchlejšie - prípadne, aby sa parameter Θ_4 menil pomalšie. Jednoducho, aby adaptácia všetkých parametrov prebiehala „relatívne rovnako rýchlo".

S pomocou cieľavedomého experimentovania a kvalifikovaného odhadu[5] sme, dajme tomu, dospeli k nasledujúcim hodnotám v matici Γ:

```
Gamma = np.diag(np.array([3, 5, 10, 0.5]))
```

Výsledok je na obr. 11. Je možné konštatovať, že všetky parametre sa menili (na začiatku určite) rovnako rýchlo. Celková rýchlosť zmenšovania sa adaptačnej odchýlky je však pri tom relatívne rovnaká ako v predchádzajúvom prípade.

Prípad 4

Ak by sme teraz chceli zvýšiť celkovú rýchlosť adaptácie, je možné urobiť napr.:

```
Gamma = np.diag(np.array([3, 5, 10, 0.5])*2)
```

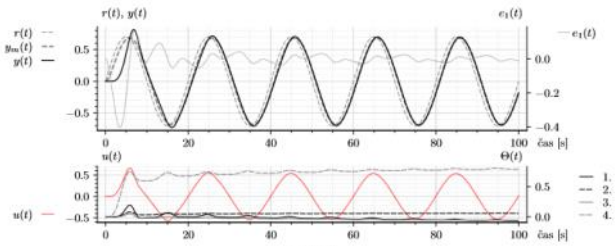
Výsledok je na obr. 12.

Prípad 5

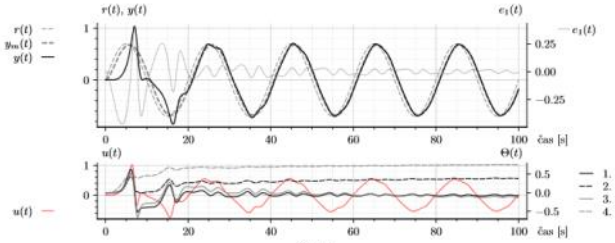
Vyskúšajme s touto voľbou Γ zložitejší referenčný signál obdobne ako v prípade 1. Výsledok je na obr. 13. Rýchlosť zmeny jednotlivých adaptovaných parametrov je relatívne rovnaká, avšak celková rýchlosť adaptácie nie je dostatočná.

[4] Mimochodom, referenčný signál by sme si v praxi pravdepodobne nemohli len tak zvoliť, ak, tak asda pre „fázu učenia/adaptácie" a podobne. Aj toto treba mať na pamäti pri uvažovaní o tu uvedených poznámkach.

[5] Nie, na toto neexistuje univerzálny návod.



Obr. 10



Obr. 11

Prípad 6

Preto:

```
Gamma = np.diag(np.array([3, 5, 10, 0.5])*10)
```

Výsledok je na obr. 14. Rýchlosť adaptácie sme jednoznačne zvýšili a mohli by sme ju zvyšovať aj viac.

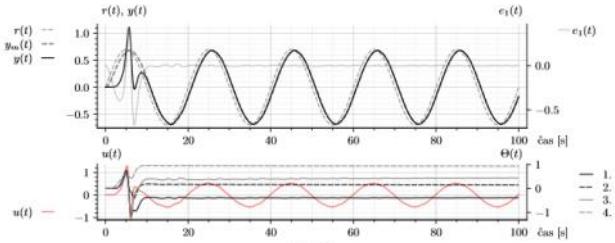
Prípad 7

Všimnime si ale, že sme uvažovali signál $r(t)$ len v kladných hodnotách. „Nevybudili" sme systém v celom potenciálnom rozsahu okolia pracovného bodu. Skúsme preto ponechať aktuálne nastavenie Γ ale zmeniť $r(t)$ - viď obr. 15.

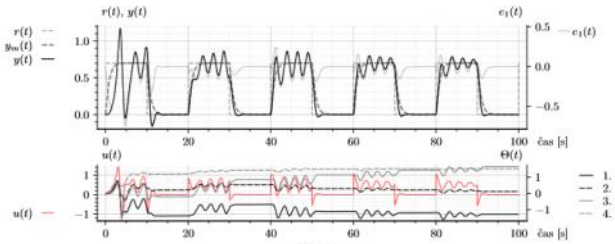
Zmena $r(t)$, v zmysle, že je viac „budiaci", sa jednoznačne prejavila v rýchlosti ustálenia sa adaptovaných parametrov a mierne aj na rýchlosti zmenšovania sa adaptačnej odchýlky.

8 Príklad k téme *Zákon adaptácie pri* $n^* = 2$

V predchádzajúcom príklade sme sa zaoberali prípadom, keď model riadeného systému bola prenosová funkcia, ktorej relatívny stupeň bol $n^* = 1$. V tejto časti je príklad, keď riadený systém má význam modelovať prenosovou funkciou s relatívnym stupňom $n^* = 2$.



Obr. 12



Obr. 13

8.1 Celkový pohľad na úlohu

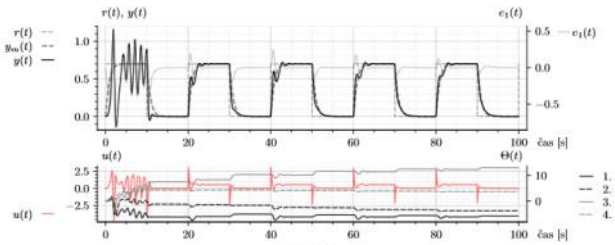
Nech riadeným systémom je kyvadlo a nech riadenou veličinou je poloha (uhol) kyvadla. Zároveň, nech riadený systém je daný diferenciálnou rovnicou opisujúcu dynamiku rotačného pohybu kyvadla. Rovnica je v tvare

$$ml^2\ddot{\varphi}(t) + \beta\dot{\varphi}(t) + mgl\sin\varphi(t) = u(t) \qquad (203)$$

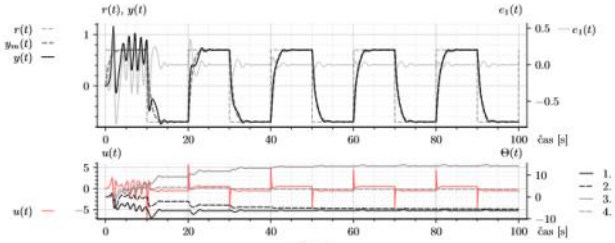
kde hmotný bod s hmotnosťou m [kg] pripevnený na ramene so zanedbateľnou hmotnosťou a dĺžkou l [m] kmitá (otáča sa okolo osi). Kmity sú tlmené viskóznym trením s koeficientom β [kg m^2 s^{-1}]. Uhol medzi zvislicou a ramenom kyvadla je označený φ [rad] a gravitačné zrýchlenie je $g = 9,81$ [m s^{-2}]. Signál $u(t)$ [kg m^2 s^{-2}] je externý moment sily pôsobiaci na rameno kyvadla, $\dot{\varphi}(t)$ [rad s^{-1}] je uhlová rýchlosť a $\ddot{\varphi}(t)$ [rad s^{-2}] je uhlové zrýchlenie ramena kyvadla. Číselné hodnoty parametrov kyvadla sú nasledovné:

$$m = 1 \quad [\text{kg}]$$
$$l = 1 \quad [\text{m}]$$
$$\beta = 2 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \quad [\text{kg m}^2\ \text{s}^{-1}]$$

Cieľom je riadiť polohu kyvadla v okolí rôznych pracovných bodov. Uvažujme však,



Obr. 14



Obr. 15

že pracovné body sú z intervalu polôh kyvadla 0 až 90 stupňov. Konkrétna voľba pracovných bodov ako aj voľba veľkosti ich okolia sa ponechávajú na čitateľa.

Nech dynamika výstupnej veličiny riadeného systému v ktoromkoľvek pracovnom bode je daná referenčným modelom, ktorým je lineárny dynamický systém s pólmi $p_1 = -2$ a $p_2 = -1$. Samozrejmé je, že tento lineárny dynamický systém bude mať jednotkové statické zosilnenie.

Referenčný model

Ak vieme, že RM je druhého rádu, a tiež vlastne vieme (aj keď sme to ešte explicitne neukázali), že sa zaoberáme riadeným systémom, ktorého (lineárny) model má relatívny stupeň $n^* = 2$, potom z toho plynie, že referenčný model má tvar

$$W_m(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \tag{204}$$

8.1.1 Celkový pohľad na riadený systém (z hľadiska návrhu riadiaceho systému)

Pre lepšiu predstavu o riadenom systéme ho opíšme v stavovom priestore. Voľbou stavových veličín $x_1(t) = \varphi(t)$ a $x_2(t) = \dot{\varphi}(t)$ máme

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{\beta}{ml^2} x_2(t) - \frac{g}{l} \sin(x_1(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u(t) \tag{205a}$$

$$y(t) = x_1(t) \tag{205b}$$

kde sme pre prehľadnosť v nasledujúcom zaviedli aj výstupnú veličinu $y(t) = \varphi(t)$.

Toto je, zjavne, nelineárny časovo-invariantný systém druhého rádu. Tu sa však zaoberáme takou triedou riadiacich systémov, ktoré predpokladajú lineárny model riadeného systému. Jeho parametre môžu byť neznáme (môžu sa meniť), ale musí byť lineárny.

Linearizácia v okolí pracovného bodu

Uvažovaný riadený systém je možné linearizovať v okolí pracovného bodu.

V prvom rade potrebujeme poznať pracovný bod. Pre zvolenú hodnotu (ustálenú) na vstupe systému, označme ju u_{PB}, potrebujeme poznať príslušnajúcu hodnotu (ustálenú) na výstupe, označme ju y_{PB}.

Tu máme k dispozícii analytický opis riadeného systému (203). V ustálenom stave (časové derivácie nulové) máme

$$(mgl) \sin(y_{PB}) = u_{PB} \tag{206a}$$

$$y_{PB} = \arcsin\left(\frac{1}{(mgl)} u_{PB}\right) \tag{206b}$$

Toto je, samozrejme, prevodová charakteristika riadeného systému. Nie je to priamka. To znamená, že v jednom pracovnom bode (v okolí jedného pracovného bodu) bude statické zosilnenie (sklon prevodovej charakteristiky) iné, ako v inom pracovnom bode (v okolí iného pracovného bodu).

Mimochodom, zvoľme si veľkosť okolia pracovného bodu. Dobrou pomôckou je grafické zobrazenie prevodovej charakteristiky. To sa ponecháva na čitateľa (autor je lenivý). Tu si zvoľme okolie z veľkosťou ± 3 [°] (cca $0,0524$ [rad]) na strane výstupnej veličiny a buďme s ním spokojný v tom zmysle, že pri takýchto malých odchýlkach si prevodová charakteristika zachováva prakticky rovnaký sklon ako v pracovnom bode.

Ďalej je potrebné zaviesť veličiny, ktoré budú takpovediac odchýlkami od hodnôt v pracovnom bode. Konkrétne

$$\Delta u(t) = u(t) - u_{PB} \tag{207a}$$

$$\Delta y(t) = y(t) - y_{PB} \tag{207b}$$

kde sme teta definovali Δ odchýlky od pracovného bodu. To znamená, že pôvodné veličiny sú

$$u(t) = u_{PB} + \Delta u(t) \tag{208a}$$

$$y(t) = y_{PB} + \Delta y(t) \tag{208b}$$

$$x_1(t) = x_{1PB} + \Delta x_1(t) \tag{208c}$$

$$x_2(t) = x_{2PB} + \Delta x_2(t) \tag{208d}$$

kde sme rovnako zaviedli „odchýlkové veličiny“ aj pre stavové veličiny so systému (205). Vzhľadom na takto uvedený pracovný bod je možné analyticky linearizovať dynamický systém (205) s využitím rozvoja funkcie do Taylorovho radu.

Vo všeobecnosti, autonómny dynamický systém je

$$\dot{x} = F(x) \tag{209}$$

kde funkcia $F(x)$ je, vo všeobecnosti, nelineárna. V pracovnom bode x_{PB}, pričom $x = x_{PB} + \Delta x$ a Δx je odchýlka od bodu x_{PB}, v tomto pracovnom bode je možné aproximovať funkciu $F(x)$ prvými dvomi členmi Taylorovho rozvoja, teda

$$F(x) = F(x_{PB} + \Delta x) \approx F(x_{PB}) + \left.\frac{\partial F(x)}{\partial x}\right|_{x=x_{PB}} \Delta x \tag{210}$$

Obdobne, ak by sme mali neautonómny dynamický systém

$$\dot{x} = F(x, u) \tag{211}$$

kde u je vstupný signál systému, tak aproximácia v zmysle Taylorovho rozvoja by bola

$$F(x, u) \approx F(x_{PB}, u_{PB}) + \left.\frac{\partial F(x, u)}{\partial x}\right|_{x=x_{PB}} \Delta x + \left.\frac{\partial F(x, u)}{\partial u}\right|_{u=u_{PB}} \Delta u \tag{212}$$

kde sme samozrejme zaviedli $u = u_{PB} + \Delta u$ tak ako pri x.

Konečne, pre prípad kyvadla môžme o (205) uvažovať ako o dvoch funkciách takých, že

$$\dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, u) = x_2 \tag{213}$$

$$\dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2, u) = -\frac{\beta}{ml^2} x_2 - \frac{g}{l} \sin(x_1) + \frac{1}{ml^2} u \tag{214}$$

Ich aproximácie potom sú

$$F_1 \approx F_1(x_{1PB}, x_{2PB}, u_{PB}) + \left.\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right|_{x_{1PB}} \Delta x_1 + \left.\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right|_{x_{2PB}} \Delta x_2 + \left.\frac{\partial F_1}{\partial u}\right|_{u_{PB}} \Delta u \tag{215}$$

$$F_2 \approx F_2(x_{1PB}, x_{2PB}, u_{PB}) + \left.\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right|_{x_{1PB}} \Delta x_1 + \left.\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right|_{x_{2PB}} \Delta x_2 + \left.\frac{\partial F_2}{\partial u}\right|_{u_{PB}} \Delta u \tag{216}$$

Konkretizujme jednotlivé výrazy. Vzhľadom na to, že pracovný bod je bodom na prevodovej charakteristike, tak

$$F_1(x_{1PB}, x_{2PB}, u_{PB}) = 0 \tag{217}$$
$$F_2(x_{1PB}, x_{2PB}, u_{PB}) = 0 \tag{218}$$

a ďalej

$$\left.\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right|_{x_1=x_{1PB}} = 0 \qquad \left.\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right|_{x_2=x_{2PB}} = 1 \qquad \left.\frac{\partial F_1}{\partial u}\right|_{u=u_{PB}} = 0 \tag{219}$$
$$\left.\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right|_{x_1=x_{1PB}} = -\frac{g}{l}\cos(x_{1PB}) \quad \left.\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right|_{x_2=x_{2PB}} = -\frac{\beta}{ml^2} \quad \left.\frac{\partial F_2}{\partial u}\right|_{u=u_{PB}} = \frac{1}{ml^2} \tag{220}$$

Preto

$$F_1(x_1, x_2, u) \approx \Delta x_2 \tag{221}$$
$$F_2(x_1, x_2, u) \approx -\frac{g}{l}\cos(x_{1PB})\,\Delta x_1 - \frac{\beta}{ml^2}\Delta x_2 + \frac{1}{ml^2}\Delta u \tag{222}$$

K tomu ak uvážime, že ľavú strana rovnice (205) je možné písať ako

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\left(x_{1PB} + \Delta x_1(t)\right) \\ \frac{d}{dt}\left(x_{2PB} + \Delta x_2(t)\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1(t) \\ \Delta\dot{x}_2(t) \end{bmatrix} \tag{223}$$

pretože x_{1PB} a x_{2PB} sú len čísla nezávislé od času, tak s aproximáciami funkcií $F_1(x_1, x_2, u)$ a $F_2(x_1, x_2, u)$ prejde (205) do tvaru

$$\Delta\dot{x}_1(t) = \Delta x_2(t) \tag{224a}$$
$$\Delta\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l}\cos(x_{1PB})\,\Delta x_1 - \frac{\beta}{ml^2}\Delta x_2 + \frac{1}{ml^2}\Delta u \tag{224b}$$
$$\Delta y(t) = \Delta x_1(t) \tag{224c}$$

kde sme zohľadnili, že musí platiť $\Delta y(t) = \Delta x_1(t)$, keďže máme $y(t) = x_1(t)$. Tento dynamický systém je možné zapísať aj v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1(t) \\ \Delta\dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(y_{PB}) & -\frac{\beta}{m\,l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\,l^2} \end{bmatrix} \Delta u(t) \tag{225a}$$
$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix} \tag{225b}$$

Toto je lineárny dynamický systém, ktorý je možné zapísať v tvare prenosovej funkcie

$$\frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)} = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{226}$$

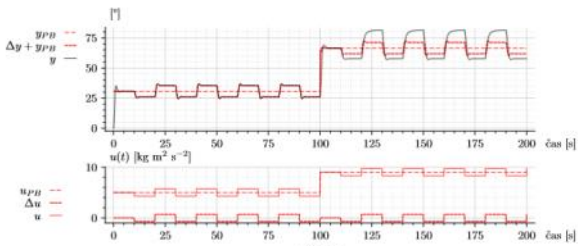
kde

$$b_0 = \frac{1}{m\,l^2} \tag{227a}$$
$$a_0 = \frac{g}{l}\cos(y_{PB}) - \frac{g}{l}\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{(mgl)}u_{PB}\right)\right) \tag{227b}$$
$$a_1 = \frac{\beta}{m\,l^2} \tag{227c}$$

Je teda zrejmé, že statické a dynamické vlastnosti tohto lineárneho systému sú závislé od pracovného bodu.

Ilustrácia potreby adaptácie

Z uvedeného je zrejmé, že statické a dynamické vlastnosti tohto lineárneho systému sú závislé od pracovného bodu. Ak by sme navrhli riadiaci systém, tak, že sa splní cieľ riadenia v okolí jedného pracovného bodu, potom v inom pracovnom bode (v jeho okolí) by tento nesplňal cieľ riadenia.



Obr. 16

Ukážme zmenu vlastností (statických aj dynamických) riideného systému (nelineárneho kavydla), tak, že budeme robiť skokové zmeny v okolí jedného pracovného bodu, a potom v okolí iného pracovného bodu.

Zvoľme pracovné body

$$u_{PB1} = 5 \qquad y_{PB1} = 0,5348\ [\text{rad}] = 30,64\ [\text{deg}] \tag{228a}$$
$$u_{PB2} = 9 \qquad y_{PB2} = 1,1616\ [\text{rad}] = 66,55\ [\text{deg}] \tag{228b}$$

Pre prvý praconý bod (u_{PB1}, y_{PB1}) vypočítajme aj parametre lineárneho modelu (platného len v okolí pracovného bodu)

$$k_p = 1 \tag{229a}$$
$$a_0 = 8,44 \tag{229b}$$
$$a_1 = 3,13 \tag{229c}$$

Simulujme teraz aj nelineárny systém, aj lineárny systém (celý čas s parametrami (229)), pričom vstupom nech sú skokové zmeny v okolí zvolených pracovných bodov. Výsledok je na obr. 16.

V prvom pracovnom bode sa lineárny a nelineárny systém zhodujú ale v druhom už nie. Aby sa zhodoval, musel by lineárny model zmeniť (prispôsobiť) parametre. Inými slovami, parametre modelu riadeného systému sa menia v závislosti od pracovného bodu. Preto je potrebné mať adaptívny riadiaci systém...

8.2 Návrh adaptívneho riadiaceho systému

8.2.1 Model riadeného systému

Model riadeného systému je v tvare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \tag{230}$$

kde $k_p > 0$, $Z_p(s) = 1$ a $R_p(s) = s^2 + a_1 s + a_0$, pričom parametre a_1 a a_0 sú neznáme (prípadne sa menia spĺňajúc však vlastnosti kvázistacionárnosti). Rád systému (stupeň polynómu $R_p(s)$) je $n = 2$ a relatívny stupeň uvedenej prenosovej funkcie je $n^* = 2$.

8.2.2 Cieľ riadenia a referenčný model

Cieľom riadenia je aby výstupná veličina riadeného systému sledovala výstupnú veličinu referenčného modelu, ktorý je daný prenodovou funkciou v tvare

$$W_m(s) = \frac{y_m(s)}{r(s)} = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \tag{231}$$

kde $k_m = 2$, $Z_m(s) = 1$ a $R_m(s) = s^2 + 3s + 2$. Relatívny stupeň referenčného modelu sa zhoduje s relatívnym stupňom riadeného systému.

Inými slovami, cieľom riadenia je aby sa uzavretý regulačný obvod (spojenie riadiaceho a riadeného systému) zhodoval (z hľadiska ich výstupných veličín) s referenčným modelom.

8.2.3 Podmienky zhody

Keďže navrhujeme klasickú schému MRAC, v prvom rade je potrebné ukázať, že existujú podmienky zhody medzi referenčným modelom a uzavretým regulačným obvodom. Teda ukázať, že existuje riešenie MRC problému (pre tento daný konkrétny prípad).

Všeobecný tvar zákona riadenia, ktorý rieši MRC problém je

$$u(t) = \left[\Theta_1^{*\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right] u(t) + \left[\Theta_2^{*\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right] y(t) + \Theta_3^* y(t) + \Theta_4^* r(t) \tag{232}$$

kde $\alpha(s)$ je vektor obsahujúci mocniny s, $\alpha(s) = \left[s^{n-2}, \ldots, s, 1\right]^{\mathsf{T}}$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$. Vektory $\Theta_1^* \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\Theta_2^* \in \mathbb{R}^{n-1}$ a skaláry $\Theta_3^* \in \mathbb{R}^1$, $\Theta_4^* \in \mathbb{R}^1$ sú konštantné parametre zákona riadenia, ktorých hodnoty hľadáme. $\Lambda(s)$ je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$ obsahujúci $Z_m(s)$ ako faktor

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s) \tag{233}$$

a teda aj $\Lambda_0(s)$ je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm zodpovedajúceho stupňa.

Prenosová funkcia uzavretého regulačného obvodu má následne tvar

$$y = \frac{k_p Z_p \Theta_4^* \Lambda^2}{\Lambda\left(R_p\left(\Lambda - \Theta_1^{*\mathsf{T}}\alpha(s)\right) - k_p Z_p\left(\Theta_2^{*\mathsf{T}}\alpha(s) + \Theta_3^*\Lambda\right)\right)} r \tag{234}$$

Potom ak platí (podmienky zhody)

$$\Theta_4^* = \frac{k_m}{k_p} \tag{235a}$$

$$\Lambda = \Lambda_0 Z_m \tag{235b}$$

$$R_p\left(\Lambda - \Theta_1^{*\mathsf{T}}\alpha(s)\right) - k_p Z_p\left(\Theta_2^{*\mathsf{T}}\alpha(s) + \Theta_3^*\Lambda\right) = Z_p \Lambda_0 R_m \tag{235c}$$

tak uzavretý regulačný obvod a referenčný model sa zhodujú.

Je možné ukázať[6], že uvedené podmienky zhody (235) majú riešenie práve vtedy ak sú splnené podmienky už doteraz uvedené a k tomu musí platiť, že $Z_p(s)$ a $Z_m(s)$ sú monické a Hurwitzove polynómy (riadený systém a RM musia mať „stabilné nuly“) a relatívny stupeň RM je rovnaký ako relatívny stupeň riadeného systému. Uvedené je splnené a preto existujú také ideálne parametre zákona riadenia (Θ_1^*, Θ_2^*, Θ_3^* a Θ_4^*), ktoré spĺňajú cieľ riadenia.

Keďže tieto hodnoty existujú, má význam ich hľadať. Má význam ich identifikovať. Má význam ich priebežne identifikovať. Má význam adaptovať parametre riadiaceho systému.

Ak by sme nevedeli, či je vôbec možná zhoda medzi URO a RM, potom by sme nevedeli, či vôbec môže byť adaptácia (priebežná identifikácia, strojové učenie atď., atď.) úspešná.

8.2.4 Otázka relatívneho stupňa riadeného systému

Vzhľadom na fakt, že $n^* = 2$, v ďalšom sa bude využívať postup návrhu MRAC, ktorý je známy pod názvom *metóda doplnenej (adaptačnej) odchýlky*. Táto metóda si vyžaduje voľbu istého polynómu $L(s)$ takého, ktorý zabezpečí, že prenosová funkcia $W_m(s)L(s)$ je striktne pozitívne reálna (SPR).

V prvom rade je potrebné zvoliť stupeň polynómu $L(s)$.

[6] Ale to tu ani náhodou robiť nebudeme...

Prenosová funkcia $W_m(s)$ má relatívny stupeň $n_m^* = 2$. Aby nejaká prenosová funkcia vôbec mohla byť striktne pozitívne reálna, nemôže mať relatívny stupeň vyšší ako 1. Voľbou stupňa $L(s)$ môžme zvoliť relatívny stupeň $W_m(s)L(s)$.

Ak bude $L(s) = s + \rho$, kde ρ je nejaké reálne číslo, potom relatívny stupeň $W_m(s)L(s)$ je 1.

Mimochodom, tiež vieme, že sa zaoberáme identitou, takou, že $L(s)L^{-1}(s) = 1$. Potrebujeme teda „pracovať“ aj s prevrátenou hodnotou polynómu $L(s)$ (potrebujeme „deliť polynómom“) a teda v tomto prípade musí platiť, že $\rho > 0$.

Podmienky SPR pre $W_m(s)L(s)$ sú v tomto prípade formálne splnené (viď literatúra/učebný text) okrem jednej, z ktorej plynie konkrétna voľba hodnoty parametra ρ, a to, že $\Re\left\{W_m(j\omega)L(j\omega)\right\} \geq 0$ pre všetky reálne ω.

V tomto prípade

$$W_m(j\omega)L(j\omega) = \frac{(2\rho + j2\omega)\left((2-\omega^2) - j3\omega\right)}{(2-\omega^2)^2 + (3\omega)^2} \tag{236}$$

a teda

$$\Re\left\{W_m(j\omega)L(j\omega)\right\} = 4\rho - 2\rho\omega^2 + 6\omega^2 \tag{237}$$

keďže $4\rho > 0$ potom musí platiť $2\rho\omega^2 \leq 6\omega^2$ a teda $0 < \rho \leq 3$. Zvoľme

$$\rho = 3 \tag{238}$$

8.2.5 Zákon riadenia

Zákon riadenia (s adaptovanými parametrami) bude mať v tomto prípade tvar

$$u(t) = \Theta_1(t)\left[\frac{1}{(s+\lambda)}\right] u(t) + \Theta_2(t)\left[\frac{1}{(s+\lambda)}\right] y(t) + \Theta_3(t) y(t) + \Theta_4(t) r(t) \tag{239}$$

Voľba dynamiky pomocných filtrov

Zákon riadenia využíva pomocné filtre, ktorých dynamika je daná voľbou polynómu $\Lambda(s)$. V tomto prípade $\Lambda(s) = s + \lambda$.

Polynóm $\Lambda(s)$ má súvislosť s pojmom pozorovateľ stavu, ktorý sa používa pri zostavení zákona riadenia v prípade MRC problému vo všeobecnosti. Kým teda polynóm $\Lambda(s)$ musí spĺňať isté formálne podmienky, ktoré sme už uviedli, mal by zohľadňovať aj súvislosť s pozorovateľom stavu.

Dynamika pozorovateľa stavu by vo väčšine prípadov mala byť rýchlejšia ako ostatné dynamiky vystupujúce v systéme ako celku. V tomto prípade však viac-menej nepoznáme napríklad dynamiku riadeného systému. Poznám len dynamiku referenčného modelu. Preto zabezpečme, aby polynóm $\Lambda(s)$ určoval rýchlejšiu dynamiku oproti referenčnému modelu.

Frekvenčné pásmo referenčného modelu odráža parameter a_{0m}. Zvoľme preto

$$\lambda = 10 \cdot a_{0m} \tag{240}$$

Implementácia zákona riadenia

Ide o lineárny zákon riadenia. Preto je ho možné zapísať v tvare

$$u(t) = \Theta^{\mathsf{T}}(t)\omega(t) \tag{241}$$

kde $\omega(t)$ je tzv. signálny vektor a $\Theta(t)$ je vektor parametrov zákona riadenia. Ku každému signálu vo vektore $\omega(t)$ jednoznačne prislúcha parameter (prvok) z vektrora $\Theta(t)$.

Je potrebné zostaviť signálny vektor $\omega(t)$.

Prvý člen v (teoretickom) zákone riadenia je možné zapísať ako prenosovú funkciu (zaviedli sme jej fiktívny výstup y_{ν_1} a dovoľujeme si nepísať všetky formálne detaily/predpoklady ako $y_{\nu_1}(s)$ a podobne)

$$y_{\nu_1} = \frac{\Theta_1}{(s+\lambda)} u \tag{242}$$

To je možné zapísať opisom v stavovom priestore:

$$\dot{\nu}_1 = -\lambda\nu_1 + u \tag{243a}$$
$$y_{\nu_1} = \Theta_1\nu_1 \tag{243b}$$

kde sme zaviedli stavovú veličinu (vo všeobecnosti stavový vektor) ν_1. Prvý člen zákona riadenia teda nahrádza výraz

$$\Theta_1\nu_1 \tag{244}$$

Analogicky, druhý člen zákona riadenia nahrádza výraz $\Theta_2\nu_2$ pričom $\dot{\nu}_2 = -\lambda\nu_2 + y$.

Signálny vektor $\omega(t)$ teraz môžme zostaviť napr. ako

$$\omega(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \tag{245}$$

Tejto voľbe potom prislúcha vektor parametrov $\Theta(t)$ v tvare

$$\Theta(t) = \begin{bmatrix} \Theta_3(t) \\ \Theta_1(t) \\ \Theta_2(t) \\ \Theta_4(t) \end{bmatrix} \tag{246}$$

Jednotlivé signály v signálnom vektore $\omega(t)$ sú buď priamo dostupné ($y(t)$, $r(t)$), alebo je ich potrebné vyrobiť pomocnými filtrami ($\nu_1(t)$, $\nu_2(t)$).

8.2.6 Zákon adaptácie

Zákon adaptácie je v tomto prípade v tvare

$$\dot{\Theta}(t) = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right)\Gamma\, e_1(t)\,\omega_f(t) \tag{247}$$

kde vektor $\omega_f(t)$ má zložky $\omega_f(t) = \begin{bmatrix} y_f(t) & \nu_{1f}(t) & \nu_{2f}(t) & r_f(t) \end{bmatrix}^\mathsf{T}$. Tieto signály získame jednoducho prechodom pôvodných signálov $y(t)$, $\nu_1(t)$, $\nu_2(t)$ a $r(t)$ cez filtre s prenosovou funkciou v tvare $\frac{1}{s+\rho}$.

Matica $\Gamma > 0$ má rozmer daný dĺžkou vektora $\omega_f(t)$, čo je v tomto prípade **4**, teda matica Γ má rozmer 4×4. Bude sa uvažovať diagonálna matica Γ s kladnými číslami na diagonále (spĺňa kladnú definitnosť).

Signál $e_1(t)$ je v tomto prípade signál doplnenej adaptačnej odchýlky. Je možné ukázať, že tento signál je výsledkom rovnice

$$e_1(t) = (y(t) - y_m(t)) - \mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right)[W_m(s)L(s)]\left(\left[L(s)^{-1}\right]u(t) - \Theta^\mathsf{T}(t)\omega_f(t)\right) \tag{248}$$

Implementácia zákona adaptácie

Matica Γ Matica Γ sa uvažuje, ako bolo uvedené, v tvare

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_4 \end{bmatrix} \tag{249}$$

s kladnými číslami $\gamma_1, \cdots, \gamma_4$.

Vektor $\omega_f(t)$ Vektor $\omega_f(t)$ je možné získať aj tak, že zostavýme MIMO systém, ktorý bude mať na vstupe signál (vektor) $\omega(t)$ a na výstupe samotrejme $\omega_f(t)$. Takýto MIMO systém je vlastne len niekoľko filtrov paralelne vedľa seba.

Vysvetlíme to na príklade len dvoch signálov z vektora $\omega(t)$. Konkrétne $r(t)$ a $y(t)$. Potrebujeme spraviť napr.

$$y_f(s) = \frac{1}{s+\rho}y(s) \tag{250}$$

To sa dá zapísať aj ako (v stavovom priestore/opise)

$$\dot{y}_f(t) = -\rho y_f(t) + y(t) \tag{251}$$

Rovnako aj

$$\dot{r}_f(t) = -\rho r_f(t) + r(t) \tag{252}$$

Posledné dve rovnice je možné zapísať aj spolu v jednej maticovej rovnici

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_f(t) \\ \dot{r}_f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & -\rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_f(t) \\ r_f(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \tag{253}$$

Takže, ak potrebujeme „naraz“ filtrovať signálny vektor $\omega(t)$ je to možné urobiť v zmysle:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_f(t) \\ \dot{\nu}_{1f}(t) \\ \dot{\nu}_{2f}(t) \\ \dot{r}_f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_f(t) \\ \nu_{1f}(t) \\ \nu_{2f}(t) \\ r_f(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(t) \\ \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \tag{254}$$

$$\omega_f(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_f(t) \\ \nu_{1f}(t) \\ \nu_{2f}(t) \\ r_f(t) \end{bmatrix} \tag{255}$$

Mimochodom, rovnako sa dá postupovať aj keď je $L(s)$ vyššieho ako 1. stupňa (čo možno nie je z uvedeného očividné, ale dá sa).

Signál $\left(\left[L(s)^{-1}\right]u(t) - \Theta^\mathsf{T}(t)\omega_f(t)\right)$ Tento signál je potrebný pre doplnenie adaptačnej odchýlky v rovnici (248).

Označme ho $u_{W_m L}(t)$.

Má dve zložky. Jednou zložkou je $\Theta^\mathsf{T}(t)\omega_f(t)$. Oba prvky sú k dispozícii, takže túto zložku máme k dispozícii.

Druhou zložkou je signál $\left[L(s)^{-1}\right]u(t) = u_f(s) = \frac{1}{s+\rho}u(s)$ a teda toto je možné zrealizovať ako

$$\dot{u}_f(t) = -\rho u_f(t) + u(t) \tag{256}$$

Formálne teda signál $u_{W_m L}(t)$ je

$$u_{W_m L}(t) = u_f(t) + \Theta^\mathsf{T}(t)\omega_f(t) \tag{257}$$

Signál doplňajúci adaptačnú odchýlku Tento signál v rovnici (248) teraz môžme písať v tvare

$$e_d(t) = \mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right)[W_m(s)L(s)]\,u_{W_m L}(t) \tag{258}$$

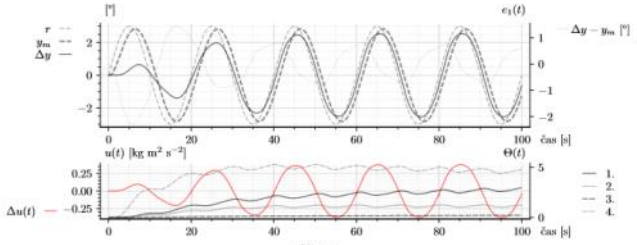
V prvom rade, znamienko $\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right)$ je známe. Prenosová funkcia $W_m(s)L(s)$ je v tomto prípade v tvare

$$W_m(s)L(s) = \frac{k_m s + k_m\rho}{s^2 + a_{1m}s + a_{0m}} \tag{259}$$

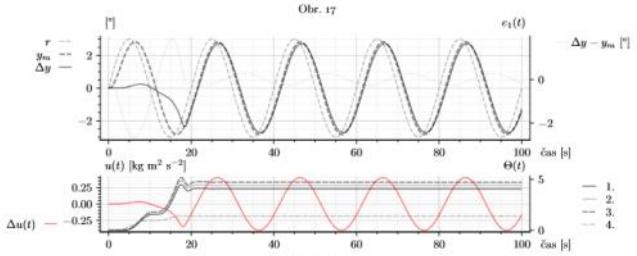
Teda signál $e_d(t)$ je možné získať sústavou diferenciálnych rovníc v tvare

$$\dot{x}_{W_m L}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{0m} & -a_{1m} \end{bmatrix} x_{W_m L}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_{W_m L}(t) \tag{260}$$

$$e_d(t) = \mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right)\begin{bmatrix} k_m\rho & k_m \end{bmatrix} x_{W_m L}(t) \tag{261}$$



Obr. 17



Obr. 18

Výsledná adaptačná odchýlka Výslednú (doplnenú) adaptačnú odchýlku je teraz možné písať ako

$$e_1(t) = y(t) - y_m(t) - e_d(t) \tag{262}$$

8.2.7 Vytvorenie predstavy o nastavení rýchlosti adaptácie

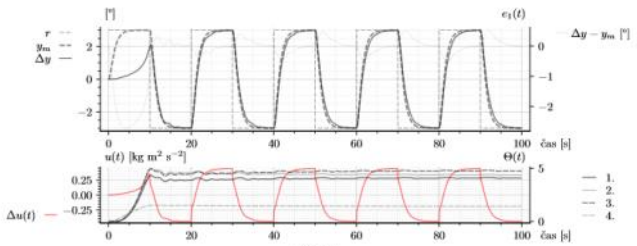
Majme nejakú predstavu o riadenom systéme. V realite azda vždy budeme mať. Tu sa to teraz myslí, tak, že máme aspoň nejakú predstavu o parametroch lineárneho modelu skutočného riadeného systému (nelineárneho kyvadla). Použime tie isté parametre, aké sme už použili pre ilustračné účely, teda hodnoty parametrov (229). Zostavme simulačnú schému MRAC vstupno-výstupného avšak s tým, že riadeným systémom je priamo tento lineárny model. Umožní nám to vytvoriť si predstavu o tom, ako zvoliť maticu Γ tak, aby rýchlosť adaptácie bola prijateľná.

Pre začiatok, uvažujme všetky váhy (prvky na diagonále) v Γ rovnaké, o veľkosti „aby sa niečo dialo". V tomto prípade je to

$$\Gamma = \mathtt{diag}\left(\begin{bmatrix}1000 & 1000 & 1000 & 1000\end{bmatrix}\right)$$

a zároveň uvažujeme harmonický signál s relatívne nízkou frekvenciou pre najjednoduchší možný prípad čo sa „obtiažnosti adaptácie" týka. Výsledok je na obr. 17.

Je zrejmé, že je potrebné ladiť Γ tak, aby rýchlosť zmeny adaptovaných parametrov bola (aspoň na začiatku) čo najviac rovnaká. Po chvíli experimentovania sa dá dospieť



Obr. 19

k voľbe

$$\Gamma = \mathtt{diag}\left(\begin{bmatrix}7290 & 12150 & 121500 & 270\end{bmatrix}\right)$$

a výsledok je na obr. 18. Toto je už uspokojivý priebeh adaptovaných parametrov čo sa rýchlosti adaptácie týka.

Fungovalo by toto nastavenie aj pre iný priebeh referenčného signálu? Viď výsledok na obr. 19. Kupodivu fungovalo.

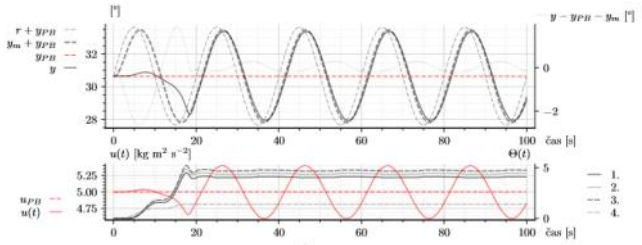
8.3 Nasadenie na uvažovaný nelineárny systém

Fungovalo by toto riadenie aj keby bolo nasadené na nelineárny systém? Teda priamo na nelineárne kyvadlo. Vyskúšajme - viď obr. 20. Fungovalo. ... Aj pre obdĺžnikový referenčný signál? Fungovalo. ... viď obr. 21.

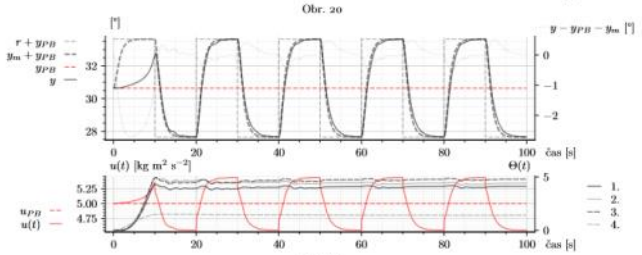
Vyskúšajme teraz simuláciu, kde v čase 100 zmeníme pracovný bod na hodnotu $u_{PB} = 6$ (z pôvodnej hodnoty $u_{PB} = 5$), necháme ustáliť sa kyvadlo v novom pracovno bode a potom budeme chcieť aby výstup sledoval RM tak ako v predch. pracovnom bode. Avšak, v čase 100 zároveň vypneme adaptáciu. Teda necháme adaptované parametre na hodnote, na ktorej boli v čase 100. Výsledok je na obr. 22.

Je zrejmé, že ak bol riadiaci systém nasadaptovaný v jednom pracovnom bode, v inom už nespĺňa cieľ radenia.

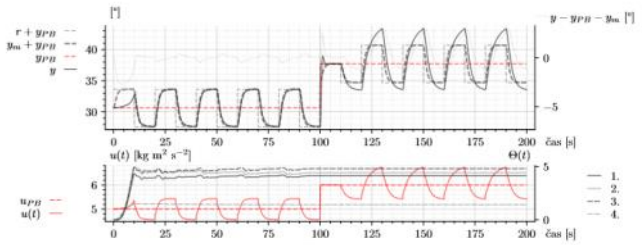
Zapnime preto adaptáciu aj po prechode do nového pracovného bodu. Výsledok je na obr. 23. Parametre riadiacebo systému sa adaptovali na nový pracovný bod. Môžme spraviť aj zmenu na iný pracovný bod, napríklad na $u_{PB} = 9$. Výsledok je na obr. 24. Prípadne ešte extrémnejšiu zmenu z $u_{PB} = 1$ na $u_{PB} = 9$. Výsledok je na obr. 25.



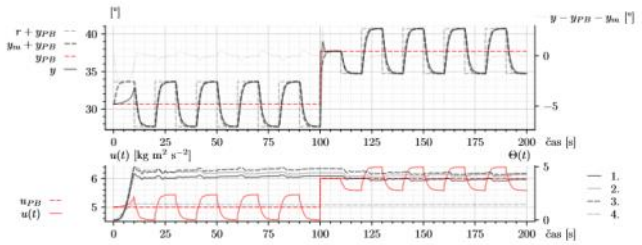
Obr. 20



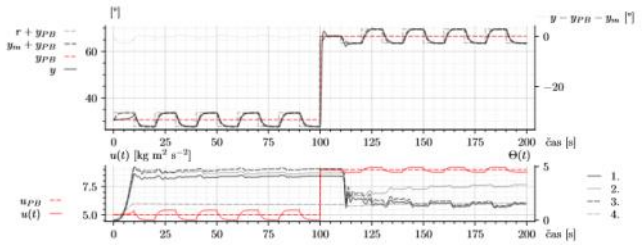
Obr. 21



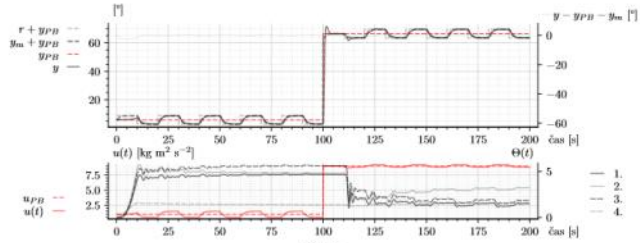
Obr. 22



Obr. 23



Obr. 24



Obr. 25

9 Otázky a úlohy

1. Je daný model systému

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + b_0 u(t)\\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

kde $a_0, a_1, b_0 > 0$ sú neznáme parametre systému, $u(t)$ je vstup, $y(t)$ je výstup a $x_1(t)$, $x_2(t)$ sú stavové veličiny systému. Tiež je daný referenčný model v tvare

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{1m}(t)\\ \dot{x}_{2m}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_{0m} & -a_{1m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{1m}(t)\\ x_{2m}(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ b_{0m}\end{bmatrix} r(t)$$

$$y_m(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{1m}(t)\\ x_{2m}(t)\end{bmatrix}$$

kde $a_{0m}, a_{1m}, b_{0m} > 0$ sú známe parametre referenčného modelu, $r(t)$ je referenčný signál, $y_m(t)$ je výstup a $x_{1m}(t)$, $x_{2m}(t)$ sú stavové veličiny referenčného modelu.

(a) Napíšte model systému v tvare prenosovej funkcie

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)}$$

kde $Z_p(s)$ je monický, hurwitzov polynóm stupňa m, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa n a k_p je vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy. Napíšte referenčný model v tvare prenosovej funkcie

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)}$$

kde k_m je vysokofrekvenčné zosilnenie referenčného modelu, polynóm $Z_m(s)$ je monický Hurwitzov polynóm stupňa m_m, $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa n_m.

(b) Cieľom riadenia je $y = y_m$. Navrhnite ideálny zákon riadenia v tvare

$$u = \Theta_1^{*\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{*\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^* y + \Theta_4^* r$$

kde $\alpha(s)$ je vektor obsahujúci mocniny s, $\alpha(s) = \left[s^{n-2}, \ldots, s, 1\right]^{\mathsf{T}}$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$. Vektory $\Theta_1^*, \Theta_2^* \in \mathbb{R}^{n-1}$ a skaláry $\Theta_3^*, \Theta_4^* \in \mathbb{R}^1$ sú konštantné parametre zákona riadenia, ktorých hodnoty hľadáme. $\Lambda(s)$ je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$ obsahujúci $Z_m(s)$ ako faktor

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s)$$

a teda aj $\Lambda_0(s)$ je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm zodpovedajúceho stupňa.

2. Odvoďte podmienky zhody pre MRAC vstupno-výstupný
3. Odvoďte podmienky zhody uzavretého regulačného obvodu a referenčného modelu.

Model riadeného systému: $\dfrac{y(s)}{u(s)} = k_p \dfrac{Z_p(s)}{R_p(s)}$ rád systému $n = 2$, relatívny stupeň $n^* = 1$

Referenčný model: $\dfrac{y_m(s)}{r(s)} = k_m \dfrac{Z_m(s)}{R_m(s)}$

Zákon riadenia: $u(s) = \dfrac{\Theta_1^*}{\Lambda(s)} u(s) + \dfrac{\Theta_2^*}{\Lambda(s)} y(s) + \Theta_3^* y(s) + \Theta_4^* r(s)$

4. Zistite či je prenosová funkcia $G(s)$ striktne pozitívne reálna (SPR):

$$G(s) = \frac{2s+1}{(3s+1)(s+1)}$$

5. Pre aké hodnoty a, b, c je prenosová funkcia $G(s) = \dfrac{as+1}{(bs+1)(cs+1)}$ striktne pozitívne reálna.
6. Schematicky znázornite MRAC vstupno-výstupný pri $n^* = 1$
7. Schematicky znázornite MRAC vstupno-výstupný pri $n^* = 2$
8. Čo je cieľom riadenia pri návrhu adaptívneho riadiaceho systému s referenčným modelom so zákonom adaptácie navrhnutým pomocou Lyapunovovej teórie stability?
9. Je daný model systému

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + b_0 u(t)\\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

kde $a_0, a_1, b_0 > 0$ sú neznáme parametre systému, $u(t)$ je vstup, $y(t)$ je výstup a $x_1(t)$, $x_2(t)$ sú stavové veličiny systému. Tiež je daný referenčný model v tvare

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{1m}(t)\\ \dot{x}_{2m}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_{0m} & -a_{1m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{1m}(t)\\ x_{2m}(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ b_{0m}\end{bmatrix} r(t)$$

$$y_m(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{1m}(t)\\ x_{2m}(t)\end{bmatrix}$$

kde $a_{0m}, a_{1m}, b_{0m} > 0$ sú známe parametre referenčného modelu, $r(t)$ je referenčný signál, $y_m(t)$ je výstup a $x_{1m}(t)$, $x_{2m}(t)$ sú stavové veličiny referenčného modelu.

(a) Napíšte model systému v tvare prenosovej funkcie

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)}$$

kde $Z_p(s)$ je monický, hurwitzov polynóm stupňa m, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa n a k_p je vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy. Napíšte referenčný model v tvare prenosovej funkcie

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)}$$

kde k_m je vysokofrekvenčné zosilnenie referenčného modelu, polynóm $Z_m(s)$ je monický Hurwitzov polynóm stupňa m_m, $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa n_m.

(b) Ideálnym cieľom riadenia je $y = y_m$. Navrhnite ideálny zákon riadenia v tvare

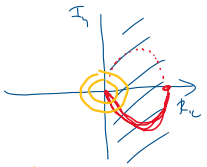
$$u = \Theta_1^{*\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{*\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^* y + \Theta_4^* r$$

kde $\alpha(s)$ je vektor obsahujúci mocniny s, $\alpha(s) = \left[s^{n-2}, \ldots, s, 1\right]^{\mathsf{T}}$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$. Vektory $\Theta_1^*, \Theta_2^* \in \mathbb{R}^{n-1}$ a skaláry $\Theta_3^*, \Theta_4^* \in \mathbb{R}^1$ sú konštantné parametre zákona riadenia, ktorých hodnoty hľadáme. $\Lambda(s)$ je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$ obsahujúci $Z_m(s)$ ako faktor

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s)$$

a teda aj $\Lambda_0(s)$ je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm zodpovedajúceho stupňa.

$$\frac{1}{j\omega+1} = G(j\omega)$$



Kn L

S is real G je real

$s \leftarrow j\omega$

$$\frac{2j\omega+1}{(3j\omega+1)(j\omega+1)} \Rightarrow \frac{2j\omega+1}{(-3\omega^2+1)+j(\omega+3\omega)} \cdot \frac{a-jb}{a-jb} =$$

$$(a+jb)(a-jb) = a^2+b^2$$

$$+2\cdot 4\omega^2 - 3\omega^2 + 1 \Rightarrow 5\omega^2+1$$

$$= \frac{(2j\omega+1)\cdot\left((-3\omega^2+1) - j(4\omega)\right)}{(-3\omega^2+1)^2 + (\omega+3\omega)^2}$$

(c) Cieľom riadenia je $y \to y_m$ a stabilita celého riadiaceho systému. Navrhnite adaptívny riadiaci systém, pričom uvažujte model riadeného systému v tvare prenosovej funkcie a tiež referenčný model v tvare prenosovej funkcie z predchádzajúceho bodu 9a.

Literatúra

[1] G. Tao. *Adaptive control design and analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 2003.

[2] M. Tárník. "Direct Model Reference Adaptive Control of Small Laboratory DC Motor". In: *posterus.sk* 4.1 (2011). URL: `http://www.posterus.sk/?p=9659`.

[3] P. Ioannou a B. Fidan. *Adaptive Control Tutorial*. Society for Industrial a Applied Mathematics, USA., 2006.

[4] J. Murgaš a I. Hejda. *Adaptívne riadenie technologických procesov*. Slovenská technická univerzita v Bratislave, 1993.