# Veľmi stručný prehľad Adaptívneho riadenia

## Obsah


1 **História a nedávna história** 1

2 **Schémy Adaptívneho riadenia** 2
2.1 Základná schéma AR . . . 2
2.1.1 Robustné riadenie . . . 2
2.2 Gain Scheduling . . . 2
2.3 Priame a nepriame AR . . . 3

3 **Otázky a úlohy** 4


## 1 História a nedávna história

Názvy *Adaptívny systém* a *Adaptívne riadenie* boli v publikáciách prvý krát použité okolo roku 1950. Motiváciou pre vývoj adaptívnych regulátorov bol návrh autopilota pre vysokovýkonné experimentálne lietadlá na začiatku 50-tych rokov.

Lietadlo operuje vo veľkom rozsahu rýchlostí a výšok. Komplexná dynamika lietadla môže byť pre daný pracovný bod (rýchlosť, výška) aproximovaná lineárnym modelom v tvare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1a}$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{1b}$$

pričom $A$, $B$, $C$ a $D$ sú funkciou pracovného bodu, ktorý sa mení v čase (teda $A$, $B$, $C$ a $D$ sú funkciou času).

Zjednodušene, tá istá výchylka „smerovky“ (alebo kormidla na lodi) spôsobí pri rôznych rýchlostiach iný moment sily (ktorý otáča lietadlo alebo loď). Teda mení sa parameter riadeného systému, ktorý môže byť opísaný napríklad prenosovou funkciou, ktorej vstupom je výchylka kormidla a výstupom je kurz (natočenie) lode.

Toľko veľmi stručné zhrnutie inak veľmi rozsiahlej histórie Adaptívneho riadenia.

Ako príklad súčasného/nedávneho využitia Adaptívneho riadenia možno uviesť opäť systémy riadenia letu. V správe *The Impact of Control Technology, T. Samad and A.M. Annaswamy (eds.), IEEE Control Systems Society, 2011, available at www.ieeecss.org.* je uvedený takýto príklad.

Názvom *The Joint Direct Attack Munition* sa označuje navádzací systém, ktorý konvertuje nenavádzané bomby na *smart* muníciu schopnú činnosti v každom počasí. V tomto systéme sa uplatňuje robustné a adaptívne riadenie. Navzájom sa dopĺňajú a kombinujú.

Tento príklad uvádzame najmä preto, aby sme čitateľa upozornili na uvedenú správu. Medzičasom (2014) je dostupná aj druhá edícia tejto správy, dostupné na: http://ieeecss.org/impact-control-technology-2nd-edition.

Autor si na začiatku roka 2022 uvedomuje možnú zmätenosť čitateľa ak sa za súčasnosť, či nedávnu minulosť označujú roky 2011, prípadne 2014. Ide však o obdobie, keď vznikal tento učebný text. Adaptívne riadenie, ako pojem, sa možno vytráca,

(a) Základá schéma adaptívneho riadenia

(b) Schéma Gain Scheduling

Obr. 1: Základá schéma adaptívneho riadenia a schéma Gain Scheduling

avšak princípy, najmä v spojení s identifikáciou systémov vo všeobecnosti, sú viac ako aktuálne. Nájdeme ich prezlečené alebo zaradené pod pojmy ako je strojové učenie (machine learning), spracovanie signálov (signal processing) alebo priebežná identifikácia systémov.

Podobne, ak sa čitateľovi zdá odporúčaná literatúra staršieho dáta, nech má na pamäti, že ide o relatívne novinky v čase poslednej rozsiahlejšej aktualizácie tohto učebného materiálu – predovšetkým kniha [1] z roku 2006. Ostatné sa dajú považovať za klasické učebnice tohto predmete a do popredia tu dávame knihu [2] najmä pre skutočnosť, že je voľne dostupná tu: https://viterbi-web.usc.edu/~ioannou/RobustAdaptiveBook95pdf/Robust_Adaptive_Control.pdf.

# 2 Schémy Adaptívneho riadenia

Túto časť možno chápať aj ako veľmi stručné[1] rozdelenie Adaptívneho riadenia.

## 2.1 Základná schéma AR

Priebeh výstupnej veličiny obsahuje informáciu o stave $x$ systému a o parametroch systému. Preto by nejaký sofistikovaný spätnoväzbový riadiaci systém mal byť schopný vysporiadať sa so zmenami v riadenom systéme a zabezpečiť dosiahnutie požadovaného cieľa riadenia. Tieto myšlienky viedli k návrhu spätnoväzbovej štruktúry riadenia, ktorá je základom adaptívneho riadenia.

V štandardnom regulačnom obvode (v uzavretom regulačnom obvode – URO) je použitý regulátor, ktorého parametre (zosilnenia) je možné meniť (aj v počas činnosti). K uzavretému obvodu je pridaný mechanizmus pre nastavovanie zosilnení regulátora. Podľa spôsobu určenia zmeny zosilnení regulátora (v reakcii na zmenu parametrov riadeného systému a teda na zmenu v dynamike sústavy a porúch) sa odlišujú rôzne typy schém adaptívneho riadenia.

### 2.1.1 Robustné riadenie

Pre vysporiadanie sa so zmenami parametrov riadeného systému môže byť navrhnutý aj regulátor s konštantnými zosilneniami — týmto sa zaoberá *Robustné riadenie*. Regulátor navrhnutý metódami robustného riadenia sa však nepovažuje za adaptívny regulátor aj keď dokáže zvládnuť zmenu parametrov sústavy.

## 2.2 Gain Scheduling

Uvažujme, že v pracovnom bode $i$ sú parametre modelu lietadla $A_i$, $B_i$, $C_i$ a $D_i$ známe. Pre daný pracovný bod teda vieme určiť regulátor, ktorý zabezpečí vyšpecifikované

[1] Všetko je tu akosi veľmi stručné...

(a) Priame adaptívne riadenie

(b) Nepriame adaptívne riadenie

Obr. 2: Principiálne schémy priameho a nepriameho adaptívneho riadenia

ciele. Zosilnenia takého regulátora označme $\Theta_i$. Pri uvažovaní viacerých pracovných bodov máme množinu zosilnení: $\Theta_1, \ldots, \Theta_i, \ldots, \Theta_N$, kde $N$ je počet uvažovaných pracovných bodov.

Po detegovaní pracovného bodu sa na regulátore nastavia (prepnú) príslušné zosilnenia (parametre regulátora). Tento spôsob adaptácie sa nazýva „Prepínanie parametrov regulátora“ — *Gain Scheduling* (GS).

Prechody medzi pracovnými bodmi sa riešia napríklad interpoláciou určených zosilnení alebo zvýšením počtu uvažovaných (detegovaných) pracovných bodov.

Dvomi prvkami, ktoré sú charakteristické pre GS sú *Look-up Table* (Vyhľadávacia tabuľka – tabuľka, v ktorej sa vyhľadávajú príslušné zosilnenia) a *meranie pomocných veličín*, takých ktoré sú vo vhodnom vzťahu s pracovným bodom. Na základe merania pomocných veličín sa rozhoduje (určuje), v ktorom pracovnom bode sústava operuje a podľa toho sa vyhľadajú a prepnú príslušné zosilnenia regulátora.

Výhodou GS je, že zosilnenia regulátora sa menia okamžite po detegovaní nového pracovného bodu. Výhodou je teda rýchlosť nájdenia teoreticky správnych parametrov regulátora. Časté a rýchle zmeny zosilnení regulátora však môžu viesť k nestabilite celého systému. Preto sa pridávajú obmedzenia pre frekvenciu prepínania.

Nevýhodou je, že mechanizmus prepínania a zosilnenia sú určené vopred (off-line) a teda kompenzácia prípadnej odchýlky od predpokladaného správania nie je možná. Nepredvídateľné zmeny dynamiky sústavy môžu viesť k zhoršeniu kvality riadenia alebo až k úplnému zlyhaniu. Ďalšou nevýhodou sú vysoké náklady na návrh a najmä na implementáciu, ktoré narastajú so zvyšujúcim sa počtom pracovných bodov.

## 2.3 Priame a nepriame AR

Vo všeobecnosti, adaptívny regulátor sa skladá z on-line estimátora (priebežná identifikácia) neznámych parametrov a zákona riadenia (algoritmus riadenia, regulátor). Zákon riadenia je motivovaný prípadom keď hodnoty parametrov sústavy sú známe, avšak konštantné zosilnenia sú nahradené časovo premenlivými.

Spôsob akým je on-line estimátor, nazývaný *Zákon adaptácie*, skombinovaný so zákonom riadenia určuje jeden z dvoch prístupov v adaptívnom riadení: Priame adaptívne riadenie a Nepriame adaptívne riadenie.

Pri nepriamom adaptívnom riadení sa priebežne identifikujú parametre uvažovaného modelu systému a následne sú tieto použité pri výpočte zosilnení zákona riadenia. Predpokladá sa pri tom, že identifikované parametre systému sú istotne ekvivalentné so skutočnými parametrami systému. Medzivýpočet potrebný pre výpočet parametrov zákona riadenia charakterizuje nepriame adaptívne riadenie.

Pri priamom adaptívnom riadení je model systému parametrizovaný z hľadiska parametrov zákona riadenia. Rovnica modelu systému je vyjadrená tak, že obsahuje

ideálne parametre zákona riadenia. Práve tieto parametre sú priebežne identifikované (pretože ideálne parametre sú neznáme) – adaptované. Výstupom priebežnej identifikácie (zákona adaptácie) sú teda priamo parametre zákona riadenia. Nie je potrebný medzivýpočet ako v prípade nepriameho adaptívneho riadenia.

## Literatúra


[1] P. Ioannou and B. Fidan. *Adaptive Control Tutorial.* Society for Industrial and Applied Mathematics, USA., 2006.

[2] P. Ioannou and J. Sun. *Robust Adaptive Control.* Prentice Hall, Inc, 1996.


# 3 Otázky a úlohy

1. Nakreslite základnú schému adaptívneho riadenia.
2. Nakreslite schému Gain Scheduling.
3. Nakreslite schému priameho adaptívneho riadenia.
4. Nakreslite schému nepriameho adaptívneho riadenia.
5. Vysvetlite rozdiel medzi priamym a nepriamym adaptívnym riadením.

# O adaptívnej stabilizácii

## Obsah


**1 Cvičenie prvé** **1**

**2 Viac k téme cvičenia prvého** **2**

**3 Formálny opis adaptívnej stabilizácie pre systém 1. rádu** **6**

**4 Otázky a úlohy** **8**

**5 Príklad realizácie niektorých úloh cvičenia prvého** **9**

5.1 Takpovediac základný prístup . . . . . 9

5.2 O realistickej implementácii riadiaceho systému tu uvedeného . . . . . 12


## 1 Cvičenie prvé

1. Uvažujme riadený systém v tvare

$$\dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,u(t) \tag{1}$$

kde $x(t)$ je stavová veličina sytému, $u(t)$ je akčný zásah (výstup) regulátora. Parameter $b = 1$ a parameter $a$ je neznáma konštanta.

- Koľkého rádu je systém (1)?
- Aká je prenosová funkcia daného dynamického systému?
- Aký je charakteristický polynóm a charakteristická rovnica dynamického systému?
- Aké sú korene charakteristického polynómu?
- Pre ktoré $a$ je systém stabilný a pre ktoré $a$ je nestabilný? Nájdite intervaly.
- Aké je zosilnenie sústavy? Aké sú časové konštanty?
- Ktorého reálneho systému (napríklad), je vhodným modelom takáto sústava?

2. Zostavte simulačnú schému systému (1). Zvoľte konkrétnu hodnotu parametra $a$ z nájdeného intervalu tak aby riadený systém (1) bol stabilný. Nech začiatočný stav je $x(0) = 1$ a $u(t) = 0$. Simuláciou (pre vhodný časový úsek) ukážte, že $x = 0$ je rovnovážny stav sústavy.

3. Nech začiatočný stav sústavy $x(0) = 1$. Zvoľte konkrétnu hodnotu parametra $a$ tak aby sústava (1) bola **nestabilná**. Spustite simuláciu a pozorujte nestabilný priebeh stavovej veličiny. Pridajte k riadenému systému regulátor daný nasledovne:

$$u = -k\,x \qquad k > |a| \tag{2}$$

a overte, že URO je stabilný. Vysvetlite. Vyskúšajte rôzne hodnoty zosilnenia $k$.

4. Nech začiatočný stav sústavy $x(0) = 1$. Zvoľte konkrétnu hodnotu parametra $a$ tak aby sústava (1) bola **nestabilná**. Pridajte k riadenému systému regulátor daný nasledovne:

$$u = -k\,x; \qquad \dot{k} = x^2 \tag{3}$$

Simuláciou vyšetrite stabilitu URO.

5. Overte, že regulátor z predchádzajúcej úlohy zabezpečí stabilizáciu URO pre rôzne hodnoty $a$ a rôzne hodnoty začiatočného stavu $x(0)$ (vyskúšajte rôzne). Teda regulátor je adaptívny! Vysvetlite...

Obr. 1: Výsledok numerickej simulácie systému (4) pre $a = 1$ pri začiatočnom stave $x(0) = 1$.

## 2 Viac k téme cvičenia prvého

Zaoberáme sa systémom, ktorého vhodným modelom je diferenciálna rovnica v tvare

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t) \tag{4}$$

kde $x(t)$ je výstupná veličina, $u(t)$ je vstupná veličina a konštanta $a$ je parameter riadeného systému.

Nech je známe, že riadený systém je nestabilný. To znamená, že parameter $a$ je kladné číslo. Nie je známa hodnota parametra $a$, ale je známe jeho znamienko. Keďže riadený systém je nestabilný, po vychýlení z rovnovážneho stavu (rovnovážnej polohy) sa výstupná veličina nevráti na hodnotu v rovnovážnom stave.

Úlohou je navrhnúť taký riadiaci systém, ktorý zabezpečí, že výstupná veličina sa vráti na hodnotu v rovnovážnom stave napriek tomu, že jej začiatočná hodnota (začiatočný stav) je iná ako v rovnovážnom stave. Teda začiatočný stav riadeného systému je vychýlený z rovnovážneho stavu.

Mimochodom, rovnica (4) je dynamický systém, lineárny systém a rád systému je 1 (lineárny dynamický systém 1. rádu). Z toho vyplýva, že v rovnovážnom stave je hodnota výstupu $y(t)$ nulová.

Diferenciálnu rovnicu (4) je možné (pri uvažovaní nulových začiatočných podmienok) previesť do tvaru prenosovej funkcie. Ak sa uváži, že

$$sx = ax + u \tag{5}$$

kde $s$ je Laplaceov operátor, pričom tu plní funkciu časovej derivácie, potom možno písať

$$sx - ax = u \tag{6a}$$

$$(s - a)\, x = u \tag{6b}$$

$$\frac{x}{u} = \frac{1}{(s - a)} \tag{6c}$$

čo je prenosová funkcia zodpovedajúca systému (4). Charakteristický polynóm je $(s - a)$ a koreňom tohto polynómu je (číslo) $a$. Keďže je známe, že systém je nestabilný, potom pól systému, teda koreň charakteristického polynómu leží v pravej polrovine komplexnej roviny. To znamená, že $a > 0$.

### Samotný riadený systém

S využitím numerickej simulácie ukážme, že systém (4) je pre $a > 0$ nestabilný. Pri tomto overení je vstupná veličina systému $u(t)$ nepodstatná. Preto je nastavená na nulovú hodnotu. Nech začiatočná hodnota stavovej veličiny $x(0) = 1$ a nech hodnota parametra $a = 1$. Simulujme 3 časové jednotky. Výsledok numerickej simulácie je na obr. 1.

### Formalizácia požiadaviek na kvalitu riadenia

Úlohou je aby sa výstupná veličina vrátila na nulovú hodnotu (do rovnovážneho stavu). Ale ako rýchlo sa tam má vrátiť? Aké sú požiadavky na prechodný dej pri činnosti riadiaceho systému?

Nech sú tieto požiadavky premietnuté do akéhosi vzorového dynamického systému, ktorý má stavovú veličinu $x_m(t)$. Tento vzorový systém je

$$\dot{x}_m(t) = -a_m x_m(t) \tag{7}$$

Jeho parametrom je $a_m$. Ak bude $a_m > 0$, potom bude tento systém stabilný a teda vždy sa ustáli v rovnovážnom stave, to je v tomto prípade samozrejme nula. Pól systému je $-a_m$. Voľbou pólu sa volí dynamika s akou sa systém bude vracať do rovnovážneho stavu. Tento vzorový systém teda zodpovedá úlohe, ktorú máme, a navyše úplne presne špecifikuje akékoľvek iné požiadavky, ktoré nemusia priamo plynúť zo zadania úlohy.

### Teoretická existencia ideálneho riadiaceho systému

Od riadiaceho systému chceme aby pre riadený systém (4) zabezpečil, že výstupná veličina riadeného systému (4) $x(t)$ sa bude správať práve tak ako veličina $x_m(t)$. V ideálnom prípade je teda odchýlka $e(t) = x(t) - x_m(t)$ nulová. Je vôbec možné zostaviť taký riadiaci systém?

Uvažujme nasledujúci predpis pre výpočet hodnoty akčného zásahu $u(t)$.

$$u(t) = -k^* x(t) \tag{8}$$

Zovšeobecnene budeme takýto predpis nazývať zákon riadenia. Predpisuje ako sa vypočíta akčný zásah. Zákon riadenia obsahuje dva prvky. Signál $x(t)$, ktorý je spätnou väzbou od riadeného systému, keďže $x(t)$ je výstupom riadeného systému, a druhým prvkom zákona riadenia je parameter $k^*$.

Dosaďme za $u(t)$ v riadenom systéme. Získa sa tak rovnica uzavretého regulačného obvodu (URO). V tomto prípade v tvare

$$\dot{x}(t) = ax(t) - k^* x(t) \tag{9a}$$

$$\dot{x}(t) = (a - k^*)\, x(t) \tag{9b}$$

Pripomeňme, že je žiadané aby odchýlka $e(t) = x(t) - x_m(t)$ bola nulová. Je zrejmé, že ak by platilo $(a - k^*) = -a_m$, potom

$$\dot{x}(t) = -a_m x(t) \tag{10}$$

URO a uvedený vzorový systém (7) by teda mali úplne rovnaký predpis (rovnakú rovnicu). Samozrejme, v URO vystupuje signál $x(t)$ a vo vzorovom systéme vystupuje signál $x_m(t)$. Inak sú však tieto dva systémy úplne rovnaké. To znamená, že možno písať $x(t) = x_m(t)$ a teda daná celková úloha je splnená.

Týmto sa ukázalo, že je možné zostaviť taký riadiaci systém, teda nájsť taký zákon riadenia, ktorý rieši danú úlohu.

V tomto prípade sme našli zákon riadenia (8), ku ktorému prislúcha tzv. podmienka zhody, čo v tomto prípade je

$$(a - k^*) = -a_m \tag{11}$$

Ide o podmienku zhody medzi URO a istým vzorovým systémom, ktorý sa vo všeobecnosti nazýva Referenčný model (RM). RM predpisuje ako sa má správať URO.

Pre riešenie úlohy tohto typu teda v prvom rade musí existovať *podmienka zhody* čo je, pochopiteľne, istá rovnica a táto rovnica musí byť riešiteľná. Neznámou je samozrejme parameter zákona riadenia. V tomto prípade $k^*$. Teoretické riešenie je

$$a - k^* = -a_m \tag{12a}$$

$$k^* = a_m + a \tag{12b}$$

Konkrétnu hodnotu parametra $k^*$ však nevieme určiť pretože nepoznáme konkrétnu hodnotu parametra $a$. Ale vieme, že vôbec existuje ideálne $k^*$. To je veľmi, veľmi dôležité!

### Zákon riadenia s premenlivým parametrom

Zákon riadenia (8), ktorý má konštantný parameter $k^*$, teda nevieme použiť, pretože nevieme vypočítať $k^*$. Zachovajme ale štruktúru zákona riadenia (aby stále existovali riešiteľné podmienky zhody) a neznámy parameter $k^*$ nahraďme parametrom, ktorému dovolíme meniť sa v čase. Adaptovať sa. Adaptovať sa tak, aby sme splnili úlohu. Adaptívny zákon riadenia nech teda je

$$u(t) = -k(t)x(t) \tag{13}$$

kde $k(t)$ je časovo premenlivý parameter.

Parameter $k(t)$ sa vlastne môže meniť akokoľvek. Cieľom však je splnenie úlohy. To znamená, že ideálne $e(t) = x(t) - x_m(t) = 0$. To si však vyžaduje mať možnosť určiť $k^*$. Žiadať teda $e(t) = 0$ v tomto prípade nikam nevedie. Žiadajme ale aby $e(t) \to 0$, teda že odchýlka $e(t)$ sa asymptoticky blíži k nule. Pritom sa však nevylučuje aby mohla byť aj nulová.

Ak $e(t) \to 0$ potom vlastne $x(t) \to x_m(t)$, teda signál $x(t)$ sa hodnotou približuje k signálu $x_m(t)$. Aká je vlastne hodnota signálu $x_m(t)$? Predpisuje ju referenčný model (7). K rovnici (7) chýba explicitne napísaná začiatočná podmienka pre signál $x_m(t)$, teda $x_m(0)$. Úlohou je aby sa $x(t)$ dostalo do rovnovážneho stavu. Teda do nuly. Signál $x_m(t)$ by teda mal byť nulový. A prečo nie hneď aj od začiatku? Nech teda $x_m(0) = 0$. Potom vzhľadom na rovnicu (7) je $x_m(t) = 0$ po celý čas! Ak teda chceme $e(t) \to 0$, potom máme $x(t) \to 0$. Alebo inak povedané $e(t) = x(t) - x_m(t) = x(t) - 0$. Teda $e(t) = x(t)$.

### Spôsob ako meniť (adaptovať) parameter zákona riadenia

Stále však nie je zrejmé ako adaptovať (meniť) parameter $k(t)$ tak aby sme splnili modifikovanú požiadavku $e(t) \to 0$.

URO s adaptívnym zákonom riadenia (13) je

$$\dot{x}(t) = (a - k(t))\, x(t) \qquad x(0) \neq 0 \tag{14}$$

Ak by platilo $(a - k(t)) < 0$, potom by bol URO stabilný a $x(t) \to 0$ pri akejkoľvek začiatočnej hodnote $x(0)$. A to je presne požiadavka pre splnenie úlohy. Hodnota parametra $a$ je však neznáma, ale je zrejmé, že ak bude $k(t)$ dostatočne veľké (vzhľadom na $a$), potom celý výraz $(a - k(t))$ bude záporný.

Ako však získať informáciu o tom kedy je $k(t)$ dostatočne veľké? Ak nie je dostatočne veľké, potom je vo všeobecnosti odchýlka $e(t)$ nenulová! Teda pri nenulovej $e(t)$ treba $k(t)$ meniť (v čase), konkrétnejšie, treba zvyšovať jeho hodnotu. Len ak by platilo, že $e(t) = 0$, len vtedy možno prestať meniť $k(t)$.

Zmena parametra $k(t)$ v čase je jeho časová derivácia $\dot{k}(t)$.

Pre vzťah

$$\dot{k}(t) = e^2(t) \tag{15}$$

platí, že ak je $e(t)$ nenulové, tak zmena $k(t)$ je kladná, a len ak $e(t) = 0$ aj zmena $k(t)$ je nulová. Pomocou tohto predpisu pre $\dot{k}(t)$ teda dosiahneme také zmeny $k(t)$ v čase, aké sú potrebné pre dosiahnutie $x(t) \to 0$ a teda $e(t) \to 0$, čo je splnenie stanoveného cieľa!

Rovnica (15) predpisuje ako sa má meniť parameter zákona riadenia tak aby bol cieľ riadenia splnený. Vo všeobecnosti sa takýto predpis nazýva zákon adaptácie.

Mimochodom, keďže vieme, že v tomto prípade platí $e(t) = x(t)$, potom (15) možno písať aj v tvare

$$\dot{k}(t) = x^2(t) \tag{16}$$

ba dokonca aj

$$\dot{k}(t) = e(t)x(t) \tag{17}$$

čo by bol pre skúsenejšieho v tejto oblasti azda najvhodnejší zápis. V tomto prípade praktickejším je tvar (16), pretože si to nevyžaduje žiadny ďalší signál, len $x(t)$, ktorý je samozrejme k dispozícii.

Obr. 2: Výsledok numerickej simulácie adaptívneho riadiaceho systému pre $a = 1$ pri začiatočnom stave $x(0) = 1$.

### Overenie adaptívneho riadiaceho systému

Zákon adaptácie (16) teraz dopĺňa zákon riadenia (13). K uvedenému ešte pre úplnosť prislúcha aj referenčný model čo však v tomto prípade možno zanedbať. Tieto súčasti spolu tvoria adaptívny riadiaci systém, ktorý spĺňa danú úlohu.

S využitím numerickej simulácie ukážme, že uvedený adaptívny riadiaci systém stabilizuje riadený systém, t.j. pri začiatočnom stave mimo rovnovážneho stavu zabezpečí asymtotické približovanie sa výstupu riadeného systému k rovnovážnemu stavu. Na obr. 2 sú výsledky použitia tohto adaptívneho riadiaceho systému pre prípad keď je v riadenom systéme $a = 1$ a $x(0) = 1$. Je možné pozorovať vyššie uvedené predpoklady a teda, že parameter $k(t)$ sa zvyšuje až pokým neprekročí hodnotu parametra $a$. Vtedy sa URO stane stabilným a jeho stavová veličina sa z hodnoty, ktorú práve má, prirodzene začne vracať do rovnovážneho stavu, teda na hodnotu nula. Ďalej rýchlosť zmeny parametra $k(t)$ klesá až sa napokon ustáli. Ustáli sa na hodnote vyššej ako je hodnota parametra $a$.

Ten istý adaptívny riadiaci systém sa bude, samozrejme, správať kvalitatívne rovnako pre rôzne hodnoty parametra riadeného systému $a$ (a pre rôzne začiatočné stavy riadeného systému). Na obr. 3 sú pre ilustráciu znázornené rôzne prípady hodnoty parametra $a$. Tým je prezentovaná schopnosť adaptácie uvedeného riadiaceho systému.

Obr. 3: Výsledok simulácie adaptívneho riadiaceho systému pre rôzne hodnoty parametra $a$. Začiatočný stav riadeného systému je v každom prípade $x(0) = 1$.

# 3 Formálny opis adaptívnej stabilizácie pre systém 1. rádu

Nasledujúci jednoduchý príklad ilustruje situáciu, v ktorej neznalosť hodnoty parametra riadeného systému znemožňuje návrh riadiaceho systému. Adaptívne riadenie rieši tento problém a umožňuje navrhnúť riadiaci systém, ktorý zabezpečí splnenie cieľa riadenia pre akúkoľvek hodnotu neznámeho parametra sústavy.

Uvažujme riadený systém v tvare

$$\dot{x} = a\,x + u \tag{18}$$

kde $x(t)$ je stavová veličina systému, $u(t)$ je akčný zásah (výstup) regulátora a parameter $a$ je neznáma konštanta. Rovnovážny bod systému je v bode $x = 0$. Cieľom riadenia je aby stavová veličina $x$ bola asymptoticky stabilná, teda aby po vychýlení stavu $x$ z rovnovážneho bodu sa stav postupne približoval (asymptoticky) naspäť k rovnovážnemu bodu. To platí pre nasledujúci systém:

$$\dot{x} = -a_m\,x \tag{19}$$

kde konštanta $a_m > 0$.

Ak by bol parameter $a$ známy, potom lineárny regulátor v tvare

$$u = -k\,x \qquad k > |a| \tag{20}$$

zabezpečí splnenie úlohy. V takomto prípade nezáleží, či samotný riadený systém (bez riadenia, $u = 0$) stabilný je alebo nie je. Poznáme absolútnu hodnotu $|a|$ a zosilnenie $k$ zvolíme väčšie ako $|a|$. Potom je zrejmé, že

$$\dot{x} = a\,x + (-k\,x) = (a - k)\;x \tag{21}$$

je rovnica uzavretého regulačného obvodu (URO) spĺňajúceho cieľ riadenia, pretože v najhoršom (hraničnom) prípade, kedy URO je stabilný, nie však asymptoticky stabilný, ak $k = |a|$ platí $(a - |a|) \leq 0$ pre každé $a$.

Pre návrh regulátora (20) v podstate stačí poznať horné ohraničenie parametra $a$.

Na druhej strane, parameter $a$ sa môže s časom meniť a jeho horná hranica nemusí byť známa. Pre nevhodne zvolené $k$ potom môže nastať situácia $a > k > 0$. Vtedy URO je nestabilný. Pre neznámu hornú hranicu parametra $a$ nie je možné navrhnúť riadiaci systém, ktorý vždy zabezpečí splnenie úlohy riadenia — stabilný URO.

Riešenie tejto úlohy metódami Adaptívneho riadenia, ktoré budú popísané podrobne neskôr, vedie na nasledovné:

Riadiaci systém v tvare

$$u = -k\,x; \qquad \dot{k} = x^2 \tag{22}$$

zabezpečí, že všetky signály v URO sú ohraničené a $x$ s časom konverguje do nuly pričom *nezáleží* na hodnote parametra $a$. Požiadavkou nie je presné určenie hodnoty parametra $a$, ale len stabilizácia systému. Nie je požadovaná ani presná hodnota parametra $k$. Adaptívny riadiaci systém len zabezpečí, že $k$ je ohraničené, teda stabilné. Pre tento konkrétny jednoduchý príklad je zrejmé, že $k$ sa ustáli na hodnote väčšej ako $a$, čo však nehovorí nič o presnej hodnote parametra $a$ ani $k$.

Ukážme, že riadiaci systém (22) stabilizuje stavovú – výstupnú veličinu sústavy (18).

Najskôr upresníme cieľ riadenia. Cieľom je aby $x$ konvergovalo k nule pre čas $t \to \infty$. Žiadanou hodnotou pre $x$ je $r = 0$. Uvažujeme všeobecný (akýkoľvek) začiatočný stav $x_0$. Začiatok je v čase $t = 0$, teda: $x(0) = x_0$. Cieľ si vyžaduje aby URO bol stabilný. Preto nech želaný pól URO je $-a_m$, kde $a_m > 0$ sa volí podľa požiadaviek na rýchlosť regulácie. Potom referenčný (ideálny, želaný) priebeh stavu $x$ opisuje rovnica

$$\dot{x}_m = -a_m\,x_m \tag{23}$$

kde $x_m$ stavová veličina ideálneho URO. Je prirodzené očakávať (lepšie povedané, zvoliť si), že začiatočný stav $x_m(0) = 0$ z čoho vyplíva, že v ďalšom môžme uvažovať $x_m = 0$.

V ideálnom prípade, keď poznáme parameter $a$, vieme určiť pre zákon riadenia „ideálne“ $k^*$:

$$u = -k^*\,x; \qquad k^* = a + a_m \tag{24}$$

Vtedy sa URO presne zhoduje s ideálnym URO, teda s referenčným modelom (23)

$$\dot{x} = a\,x + (-k^*\,x) = (a - k^*)\;x = (a - a - a_m)\;x = -a_m\,x \tag{25}$$

Pretože $a$ je neznáme, $k^*$ nevieme vypočítať a zákon riadenia (24) nemôže byť použitý.

Žiadaná hodnota pre stavovú veličinu $x$ je $r = 0$ a žiadame aby sa hodnota parametra $k$ približovala k ideálnej hodnote $k^*$ pretože len vtedy bude pól URO v bode $-a_m$. Riadený systém vyjadríme ako funkciu ideálneho parametra $k^*$ (teda tak aby rovnica obsahovala parameter $k^*$). Tento krok má súvislosť s tým, že ide v podstate o identifikáciu parametra $k^*$ — bližšie vysvetlenie neskôr. Urobíme to jednoducho pripočítaním a odpočítaním „ideálneho“ zákona riadenia (24) k rovnici riadeného systému (18), potom riadený systém má tvar

$$\dot{x} = a\,x - k^*\,x + k^*\,x + u \tag{26}$$

Pretože $a - k^* = -a_m$ máme

$$\dot{x} = -a_m\,x + k^*\,x + u \tag{27}$$

Definujme tzv. *adaptačnú odchýlku.* Ak adaptačná odchýlka nie je nulová je potrebné adaptovať riadiaci systém tak aby sa skutočný URO zhodoval so želaným URO. Adaptačná odchýlka má tvar

$$e = x - x_m \tag{28}$$

potom platí:

$$\dot{x} - \dot{x}_m = -a_m\, x + k^*\, x + u - (-a_m)\, x \tag{29a}$$
$$\dot{e} = -a_m\, (x - x_m) + k^*\, x + u \tag{29b}$$
$$\dot{e} = -a_m\, e + k^*\, x + u \tag{29c}$$

Zavedením adaptačnej odchýlky sme posunuli začiatok súradnicového systému stavového priestoru do rovnovážneho bodu riadeného systému. Inými slovami, rovnovážny stav veličiny $e$ z rovnice (29c) je v začiatku stavového priestoru riadeného systému.

Uvažujeme použitie zákona riadenia v tvare $u = -k\, x$, po dosadení do (29c):

$$\dot{e} = -a_m\, e + k^*\, x - k\, x \tag{30}$$
$$\dot{e} = -a_m\, e - \theta\, x \tag{31}$$

kde sme zaviedli pojem *chyba nastavenia parametrov zákona riadenia*, ktorý označíme $\theta$, a v tomto prípade $\theta = k - k^*$.

Chceme dokázať, že riadiaci systém (22) stabilizuje uzavretý regulačný obvod. Platí $\dot{\theta} = \dot{k} - \dot{k^*}$. Avšak $k^* =$ konšt. a teda $\dot{k^*} = 0$, preto $\dot{\theta} = \dot{k} = x^2$. Vyšetrením stability systému diferenciálnych rovníc v tvare

$$\dot{e} = -a_m\, e - \theta\, x \tag{32a}$$
$$\dot{\theta} = x^2 \tag{32b}$$

dokážeme stabilitu URO.

Zvoľme kandidáta na Ljapunovovu funkciu

$$V = \frac{(e(t))^2}{2} + \frac{(\theta(t))^2}{2} \tag{33}$$

Derivácia (33) podľa času je

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\, 2\, e(t)\, \dot{e}(t) + \frac{1}{2}\, 2\, \theta(t)\, \dot{\theta}(t) = e(t)\, \dot{e}(t) + \theta(t)\, \dot{\theta}(t) \tag{34}$$

Do (34) dosadíme za $\dot{e}$ a $\dot{\theta}$, máme

$$\dot{V} = e\, (-a_m\, e - \theta\, x) + \theta\, x^2 \tag{35a}$$
$$\dot{V} = -a_m\, e^2 - \theta\, x\, e + \theta\, x^2 \tag{35b}$$

Pretože $e = x - x_m$ a uvažujeme $x_m = 0$ a teda $e = x$, tak rovnicu (35b) možno písať v tvare

$$\dot{V} = -a_m\, x^2 - \theta\, x^2 + \theta\, x^2 \tag{36a}$$
$$\dot{V} = -a_m\, x^2 \tag{36b}$$

Pre systém (32) sme našli kladne definitnú funkciu $V$ (Tá funkcia má skoro pre všetky $x$ a $\theta$ kladnú hodnotu, len pre $x = 0$ a $\theta = 0$ má nulovú hodnotu. Tá nulová hodnota je práve v stacionárnom bode systému (32), ktorého stabilitu vyšetrujeme). Derivácia tejto funkcie je vo všeobecnosti záporne semidefinitná (Je rovná nule v stacionárnom – nulovom bode, a inde môže byť len záporná alebo tiež rovná nule). Teda systém je stabilný. Presný zaver o stabilite rovnovážneho stavu systému (32) v zmysle všeobecnej teórie stability podľa Ljapunova je, že rovnovážny stav je stabilný (neutrálne) podľa všetkých premenných ($x$ a $\theta$) a asymptoticky stabilný podľa premennej $x$. Prakticky to znamená, že premenná $x$ dosiahne nulovú hodnotu po skončení prechodového deja, ale premenná $\theta$ (a teda aj $k$) len konečnú hodnotu. Tým sme ukázali vlastnosti, ktoré zabezpečí *adaptívny* riadiaci systém (22).

# 4 Otázky a úlohy

1. Vyšetrite stabilitu systému

$$\dot{e}(t) = -a_m\, e(t) + \theta(t)\, x(t)$$
$$\dot{\theta}(t) = -e(t) x(t)$$

kde $a_m > 0$.

# 5 Príklad realizácie niektorých úloh cvičenia prvého

Konkrétne v tejto časti sa budeme venovať najmä numerickému riešeniu diferenciálnych rovníc (ktoré vystupujú v našom cvičení prvom) s využitím, pochopiteľne, ODE solvera. Načrtneme však aj všeličo iné. Používa sa tu Python[1].

## 5.1 Takpovediac základný prístup

Uvažujme riadený systém v tvare

$$\dot{x}(t) = a\,x(t) + u(t) \tag{37}$$

kde $x(t)$ je stavová veličina sytému, $u(t)$ je akčný zásah (výstup) regulátora. Parameter $a$ je neznáma konštanta.

Funkcia, ktorá realizuje diferenciálnu rovnicu riadeného systému, nech je v nasledujúcom tvare, kde sa hneď aj predpokladá, že $u(t) = 0$.

Výpis kódu 1: Súbor `ar02_file02.py`

```
def fcn_difRovnice_01(x, t, param_a):

    a = param_a

    u = 0

    dotx = a*x + u

    return dotx
```

Zostavme simulačnú schému pre riadený systém. Zvoľme konkrétnu hodnotu parametra $a$ tak aby riadený systém bol stabilný. Nech začiatočný stav je $x(0) = 1$ a $u(t) = 0$. Simuláciou (pre vhodný časový úsek) ukážme, že $x = 0$ je rovnovážny stav riadeného systému.
Simulačnú schému nech realizuje nasledujúca funkcia:

Výpis kódu 2: Súbor `ar02_file02.py`

```
def fcn_simSch_01(t_start, t_final, T_s, param_a):

    #-----------------------------------------
    t_log = np.arange(sim_t_start, sim_t_final+sim_T_s, sim_T_s).
    reshape(-1,1)

    #-----------------------------------------
    x_0 = 1

    #-----------------------------------------
    odeOut = odeint(fcn_difRovnice_01,
                    x_0,
                    t_log[:,0],
                    args=(param_a,)
                    )

    return [t_log, odeOut]
```

Nastavme a spustime simuláciu:

Výpis kódu 3: Súbor `ar02_file02.py`

```
# Nastavenia simulacie

sim_t_start = 0
sim_t_final = 3
sim_T_s = 0.1

param_a = -1

# %% ------------------------------------------------------------

# Simulacia

```

[1] Rovnako dobre by sa to dalo zostrojiť v akomkoľvek programovacom jazyku, v ktorom máme k dispozícii ODE solver. Prípadne aj ten ODE solver by sme si naprogramovali...

```
t_log, x_log, = fcn_simSch_01(sim_t_start, sim_t_final, sim_T_s,
    param_a)


```

Všetko potrebné je teraz zaznamenáné v premenných `t_log` a `x_log`. Nakreslime obrázok (pre prehľadnosť je kód kreslenia obrázku v samostatnom súbore a nie priamo tu v nasledujúcej bunke):

Výpis kódu 4: Súbor `ar02_file02.py`

```
# Obrazok

figName = 'figsc_ar02_fig03'
figNameNum = 0

exec(open('./misc/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())

```

Výstup

Obr. 4

V prípade, že parameter $a$ je zvolený tak aby bol riadený systém nestabilný, výsledok je:

Výpis kódu 5: Súbor `ar02_file02.py`

```
param_a = 1

# Simulacia

t_log, x_log, = fcn_simSch_01(sim_t_start, sim_t_final, sim_T_s,
    param_a)

# Obrazok

figName = 'figsc_ar02_fig03'
figNameNum = 1

exec(open('./misc/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())

```

Výstup

Obr. 5

Nech začiatočný stav riadeného systému je $x(0) = 1$. Ponechajme konkrétnu hodnotu parametra $a$ tak aby riadený systém bol nestabilný. Pridajme k riadenému systému riadiaci systém daný nasledovne:

$$u = -k\,x; \qquad \dot{k} = x^2 \tag{38}$$

Simuláciou vyšetrime stabilitu URO.
Funkcia, ktorá realizuje potrebné diferenciálne rovnice nech je nasledovná:

Výpis kódu 6: Súbor `ar02_file02.py`

```python
def fcn_difRovnice_02(x, t, param_a):

    x, k = x

    a = param_a

    dotk = x**2

    u = -k*x

    dotx = a*x + u

    return [dotx, dotk]

```

Simulačná schéma, opäť realizovaná ako funkcia:

Výpis kódu 7: Súbor ar02_file02.py

```python
def fcn_simSch_02(t_start, t_final, T_s, param_a):

    #-----------------------------------------
    t_log = np.arange(sim_t_start, sim_t_final+sim_T_s, sim_T_s).
    reshape(-1,1)

    #-----------------------------------------
    x_0 = [1, 0]

    #-----------------------------------------
    odeOut = odeint(fcn_difRovnice_02,
                    x_0,
                    t_log[:,0],
                    args=(param_a,)
                    )

    return [t_log, odeOut]

```

Nastavenie a spustenie simulácie, pričom pripomeňme, že parameter $a$ je stále nastavený tak, aby riadený systém bol nestabilný.

Výpis kódu 8: Súbor ar02_file02.py

```python
# Nastavenia simulacie

sim_t_start = 0
sim_t_final = 5
sim_T_s = 0.05

# Simulacia

t_log, x_log, = fcn_simSch_02(sim_t_start, sim_t_final, sim_T_s,
    param_a)

```

Obrázok, ktorý zobrazuje okrem výstupnej veličiny riadeného systému aj iné veličiny potrebné pre posúdenie stability celého uzavretého regulačného obvodu.

Výpis kódu 9: Súbor ar02_file02.py

```python
# Obrazok

figName = 'figsc_ar02_fig01'
figNameNum = 1

exec(open('./misc/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())

```

Obr. 6

Cieľ riadenia je splnený, čo v tomto prípade znamená, že výstupná veličina sa približuje k nulovej hodnote, a všetky signály uzavretého regulačného obvodu sú ohraničené. To znamená, že URO je stabilný.

Podrobnejšia diskusia z pohľadu Adaptívneho riadenia je nad rámec konkrétne tejto časti krátkych poznámok.

## 5.2 O realistickej implementácii riadiaceho systému tu uvedeného

Uvažujme riadený systém v tvare

$$\dot{x}(t) = a\,x(t) + u(t) \tag{39}$$

kde $x(t)$ je stavová veličina systému, $u(t)$ je akčný zásah (výstup) regulátora. Parameter $a$ je neznáma konštanta.

Funkcia, ktorá realizuje diferenciálnu rovnicu riadeného systému, nech je v tvare:

Výpis kódu 10: Súbor `ar02_file03.py`

```
def fcn_difRovnice_01(x, t, a, u):

    dotx = a*x + u

    return dotx
```

Nech začiatočný stav riadeného systému je $x(0) = 1$ a nech hodnota parametra $a$ je taká aby riadený systém bol nestabilný. Pridajme k riadenému systému riadiaci systém daný nasledovne:

$$u = -k\,x; \qquad \dot{k} = x^2 \tag{40}$$

Simulačná schéma, ktorá realizuje numerickú simuláciu riadeného systému pomocou ODE solvera, a zároveň realizuje istú implementáciu daného riadiaceho systému, je nasledovná:

Výpis kódu 11: Súbor ar02_file03.py

```
def fcn_simSch_03(t_start, T_s, finalIndex, param_a):

    #----------------------------------------
    # casovy vektor

    t_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    t_log[0,:] = t_start

    #----------------------------------------
    # vektor stavu riadeneho systemu

    x_0 = np.array([1])

    x_log = np.zeros([finalIndex, len(x_0)])
    x_log[0,:] = x_0

    #----------------------------------------
    # vektor adaptovaneho parametra

    k_log = np.zeros([finalIndex, 1])

    #----------------------------------------
    # vektor akcneho zasahu

    u_log = np.zeros([finalIndex, 1])

    #----------------------------------------

    timespan = np.zeros(2)
    for idx in range(1, int(finalIndex)):

        #-------------------------------------
        # Riadeny system - simulacia (pomocou ODEsolvera)

        timespan[0] = t_log[idx-1,:]
        timespan[1] = t_log[idx-1,:] + T_s

        odeOut = odeint(fcn_difRovnice_01,
                        x_log[idx-1,:],
                        timespan,
                        args=(param_a, u_log[idx-1,:])
                        )

        x_log[idx,:] = odeOut[-1,:]
        t_log[idx,:] = timespan[-1]

        #-------------------------------------
        # Riadiaci system:

        # zakon adaptacie:
        deltk = x_log[idx-1,:]*x_log[idx-1,:]

        # adaptovany parameter (numericka integracia - vlastne sumator)
        k_log[idx,:] = k_log[idx-1,:] +  (deltk * T_s)

        # zakon riadenia:
        u_log[idx,:] = -k_log[idx-1,:] * x_log[idx-1,:]

    return [t_log, x_log, u_log, k_log]

```

Nastavme a spustime simuláciu:

Výpis kódu 12: Súbor ar02_file03.py

```
# Nastavenia simulacie
sim_t_start = 0
sim_t_final = 5
sim_T_s = 0.05
sim_finalIndex = int(((sim_t_final - sim_t_start)/sim_T_s) + 1)

param_a = 1

# Simulacia
t_log, x_log, u_log, k_log, = fcn_simSch_03(sim_t_start,
                                            sim_T_s,
                                            sim_finalIndex,
                                            param_a,
                                            )
```

Obrázok, ktorý zobrazuje okrem výstupnej veličiny riadeného systému aj iné veličiny potrebné pre posúdenie stability celého uzavretého regulačného obvodu.

Výpis kódu 13: Súbor `ar02_file03.py`

```
figName = 'figsc_ar02_f03_f01'
figNameNum = 0

exec(open('./misc/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())
```

Obr. 7

V čom je tá implementácia „realistická“? To je na diskusiu, ktorú tu autor neuvádza pretože je lenivý a naničhodný.

# O samonastavujúcom sa regulátore

## Obsah


**1 Konkrétny príklad 1**
1.1 Riadený systém . . . 2
1.2 ARX model . . . 2
1.3 Štruktúra riadenia . . . 2
1.4 Výpočet parametrov regulátora . . . 3

**2 Identifikácia parametrov lineárneho modelu 3**
2.1 Metóda najmenších štvorcov . . . 3
2.2 Rekurzívna metóda najmenších štvorcov . . . 4
2.2.1 Súhrn . . . 6
2.2.2 Štart algoritmu . . . 6
2.2.3 Modifikácia algoritmu - zabúdanie . . . 7

**3 Cvičenie druhé 7**
3.1 Ukážka simulačnej schémy pre simuláciu daného riadeného systému . . . 7
3.2 Doplnenie algoritmu RMNŠ do simulačnej schémy . . . 9
3.3 Algoritmus RMNŠ pri zašumených dátach . . . 13
3.3.1 Bez zabúdania . . . 15
3.3.2 So zabúdaním . . . 16
3.4 Iná ukážka simulačnej schémy pre simuláciu RMNŠ . . . 18

**4 Metóda rozmiestňovania pólov 20**
4.1 Rovnica URO . . . 20
4.2 Polynóm $T$ . . . 22
4.2.1 Alternatívy spôsob určenia polynómu $T$ . . . 22
4.3 Súhrn pre tento prípad . . . 23
4.4 Rýchlostný algoritmus metódy rozmiestňovania pólov . . . 23

**5 Cvičenie tretie 24**
5.1 Konkrétny príklad samonastavujúceho sa regulátora . . . 24
5.2 Simulácia v Simulinku . . . 28

**6 Otázky a úlohy 30**


## 1 Konkrétny príklad

Princíp samonastavujúceho sa regulátora (Self-Tuning Regulator, i.e. STR) spočíva v tom, že v každej perióde vzorkovania sa identifikujú parametre modelu riadeného systému a následne, s využitím identifikovaných parametrov modelu, sa pomocou určitej metódy vypočítajú parametre regulátora.

Hneď v prvej vete sme použili pojem perióda vzorkovania. Je teda zrejmé, že celý riadiaci systém bude pracovať v diskrétnej časovej oblasti. Modelom riadeného systému bude ARX (Auto Regressive eXogenous) model. Štruktúra riadenia bude tzv. „trojzložková“. Tromi zložkami sú polynómy $R$, $S$ a $T$. Tieto polynómy majú svoje koeficienty, ktoré sú zároveň parametrami riadiacej štruktúry, vlastne parametrami regulátora. Skonkretizujme teraz tento všeobecný popis.

## 1.1 Riadený systém

Riadený systém nech predstavuje prenosová funkcia v tvare

$$G(s) = \frac{0,15}{s^2 + 0,3s + 0,2} \tag{1}$$

Ide o prenosovú funkciu druhého rádu, ktorá má v čitateli polynóm nultého stupňa, teda nemá nuly.

## 1.2 ARX model

Nech modelom riadeného systému je ARX (AutoRegressive eXogenous) model. Vo všeobecnosti ARX model má tvar

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + \xi(k) \tag{2}$$

kde

$$\begin{aligned} B(z^{-1}) &= b_1 z^{-1} + \ldots + b_{n_b} z^{-n_b} \\ A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{n_a} z^{-n_a} \end{aligned} \tag{3}$$

a $\xi(k)$ predstavuje poruchy a šum. V ďalšom budeme uvažovať $\xi(k) = 0$. ARX model vyjadrený v tvare diferenčnej rovnice:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \ldots - a_{n_a} y(k-n_a) + b_1 u(k-1) + \ldots + b_{n_b} u(k-n_b) \tag{4}$$

Nech modelom sústavy je diferenčná rovnica v tvare (4), kde hodnoty $n_a = 2$ a $n_b = 2$. Potom táto diferenčná rovnica má tvar

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) \tag{5}$$

V maticovom zápise:

$$y(k) = h^{\mathsf{T}} \Theta \tag{6}$$

kde $h^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} -y(k-1) & -y(k-2) & u(k-1) & u(k-2) \end{bmatrix}$ a $\Theta = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$. Neznámymi parametrami modelu teda sú koeficienty $a_1$, $a_2$, $b_1$ a $b_2$.

## 1.3 Štruktúra riadenia

Štruktúra riadenia je zrejmá zo zápisu „trojzložkového“ zákona riadenia

$$\begin{aligned} R(z^{-1})u(k) &= T(z^{-1})r(k) - S(z^{-1})y(k) \\ u(k) &= \frac{T(z^{-1})}{R(z^{-1})} r(k) - \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})} y(k) \end{aligned} \tag{7}$$

kde $R$, $S$ a $T$ sú polynómy v tvare

$$\begin{aligned} R(z^{-1}) &= 1 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2} + \ldots + r_{n_r} z^{-n_r} \\ S(z^{-1}) &= s_0 + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2} + \ldots + s_{n_s} z^{-n_s} \\ T(z^{-1}) &= t_0 + t_1 z^{-1} + t_2 z^{-2} + \ldots + t_{n_t} z^{-n_t} \end{aligned} \tag{8}$$

Ako už bolo uvedené, koeficienty polynómov sú parametrami regulátora. Počet parametrov regulátora závisí od stupňa jednotlivých polynómov. Pre tento príklad sú stupne polynómov nasledovné: $n_r = 1$, $n_s = 1$ a $n_t = 0$. Potom počet parametrov regulátora je $n_r + n_s + 1 + n_t + 1$. Teda $1 + 1 + 1 + 0 + 1 = 4$.

Zákon riadenia je možné zapísať aj v tvare diferenčnej rovnice

$$u(k) = -r_1 u(k-1) - s_0 y(k) - s_1 y(k-1) + t_0 r(k) \tag{9}$$

## 1.4 Výpočet parametrov regulátora

Metóda, pomocou ktorej sa v tomto prípade budú počítať parametre regulátora bude *Pole placement* – Metóda rozmiestňovania pólov uzavretého regulačného obvodu (URO). Ako už názov naznačuje, metóda spočíva v predpísaní rozmiestnenia pólov URO. Inými slovami, predpisujú sa korene charakteristického polynómu URO. Voľbou polohy pólov URO je možné zvoliť dynamické vlastnosti URO. Poloha pólov sa zadáva zvolením *želaného polynómu*, ktorý má také korene, aké si želáme. Ak napr. žiadame, aby URO mal dynamiku druhého rádu, tak želaný polynóm bude 2. stupňa.

Pripomeňme, že v tomto prípade ide o „diskrétny“ polynóm, pretože riadiaci systém pracuje v diskrétnej oblasti, t.j. model sústavy je „diskrétny“ a aj zákon riadenia je „diskrétny“.

Parametre regulátora sa vypočítajú z porovnania koeficientov pri rovnakých mocninách charakteristického polynómu URO a želaného polynómu. Charakteristický polynóm URO sa bude skladať z polynómov modelu sústavy a zo zložiek regulátora, čo sú polynómy vystupujúce v zákone riadenia. Koeficienty polynómov modelu sústavy považujeme za známe, pretože ich získame identifikáciou. Koeficienty polynómov zo zákona riadenia – parametre regulátora sú neznáme. Získame ich riešením rovnice, kde na jednej strane je charakteristický polynóm URO a na druhej strane je želaný polynóm. Takáto rovnica sa nazýva *Diofantická rovnica*.

# 2 Identifikácia parametrov lineárneho modelu

Uvažujeme lineárny model v tvare (6). Parametre modelu budeme určovať *rekurzívnou metódou najmenších štvorcov*. Najskôr však odvodíme tzv. Off – line odhad parametrov modelu.

## 2.1 Metóda najmenších štvorcov

Predpokladajme, že sme spravili $N$ experimentov – meraní. Napr.: na vstup sústavy sme priviedli „vhodný“ signál a s nejakou periódou vzorkovania sme zaznamenávali hodnoty vstupného aj výstupného (zo sústavy) signálu. Teda máme nameraných $N$ hodnôt vstupu, ku ktorým prislúcha $N$ hodnôt výstupu.

V i-tom experimente sme namerali hodnotu výstupného signálu $y_i$. Nech model má odhadnuté „nejaké“ parametre. Potom ak privedieme na vstup modelu hodnotu $u_i$, čo je nameraná hodnota vstupného signálu prislúchajúca k $y_i$, na výstupe modelu bude odhad $\hat{y}_i$. Tento odhad bude vo všeobecnosti rozdielny od nameranej hodnoty. Namiesto „nejakých“ hodnôt parametrov modelu určme také, pre ktoré bude platiť, že suma štvorcov odchýlok vo všetkých nameraných bodoch bude minimálna.

Odchýlka v i-tom experimente je $e_i = y_i - \hat{y}_i$. Odhad výstupu v i-tom experimente je $\hat{y}_i = h_i^\mathsf{T}\Theta$, čo je rovnaký zápis ako v (6), len namiesto času $k$ je použitý index $i$. Všetky odchýlky v $N$ meraniach sú:

$$\begin{aligned} e_1 &= y_1 - h_1^\mathsf{T}\Theta \\ &\vdots \\ e_N &= y_N - h_N^\mathsf{T}\Theta \end{aligned} \tag{10}$$

čo možno zapísať aj takto:

$$e = y - \begin{bmatrix} h_1^\mathsf{T} \\ \vdots \\ h_N^\mathsf{T} \end{bmatrix} \Theta \tag{11}$$

Vektor $h_1^\mathsf{T}$, za predpokladu, že začiatočný čas je $t_0 = 0$ a prvá vzorka vstupu a výstupu bola nameraná v čase $t(k = 1) = 1 \cdot T_{vz}$ je $h_1^\mathsf{T} = [-y(0) \quad 0 \quad u(0) \quad 0]$. Analogicky $h_5^\mathsf{T} = h(5)^\mathsf{T} = [-y(4) \quad -y(3) \quad u(4) \quad u(3)]$.

Pre lepšiu názornosť nech je nameraných 5 vzoriek (a tiež hodnoty $y(0)$, $u(0)$).

Potom všetky odchýlky je možné zapísať takto:

$$e = y - \begin{bmatrix} -y(0) & 0 & u(0) & 0 \\ -y(1) & -y(0) & u(1) & u(0) \\ -y(2) & -y(1) & u(2) & u(1) \\ -y(3) & -y(2) & u(3) & u(2) \\ -y(4) & -y(3) & u(4) & u(3) \end{bmatrix} \Theta \tag{12}$$

Všeobecný zápis

$$e = y - H\Theta \tag{13}$$

Ako už bolo uvedené, vektor $\Theta$, čo je vektor parametrov modelu určíme tak, aby suma štvorcov odchýlok bola minimálna. Zaveďme účelovú funkciu v tvare

$$J(\Theta) = \frac{1}{2} e^{\mathsf{T}} e = \frac{1}{2} (y - H\Theta)^{\mathsf{T}} (y - H\Theta) \tag{14}$$

Je potrebné nájsť extrém tejto účelovej funkcie, čo znamená derivovať ju podľa vektora parametrov modelu.

$$J(\Theta) = \frac{1}{2} \left(y - H\Theta\right)^{\mathsf{T}} \left(y - H\Theta\right) = \frac{1}{2} \left(y^{\mathsf{T}} y - y^{\mathsf{T}} H\Theta - \Theta^{\mathsf{T}} H^{\mathsf{T}} y + \Theta^{\mathsf{T}} H^{\mathsf{T}} H\Theta\right) \tag{15}$$

S využitím rovnosti

$$\nabla_x \left(x^{\mathsf{T}} a\right) = \nabla_x \left(a^{\mathsf{T}} x\right) = a \tag{16}$$

máme

$$\begin{aligned} \nabla_\Theta \left(y^{\mathsf{T}} y\right) &= 0 \\ \nabla_\Theta \left(y^{\mathsf{T}} H\Theta\right) &= \left(y^{\mathsf{T}} H\right)^{\mathsf{T}} = H^{\mathsf{T}} y \\ \nabla_\Theta \left(\Theta^{\mathsf{T}} H^{\mathsf{T}} y\right) &= H^{\mathsf{T}} y \\ \nabla_\Theta \left(\Theta^{\mathsf{T}} H^{\mathsf{T}} H\Theta\right) &= \left(H^{\mathsf{T}} H\Theta + \left(\Theta^{\mathsf{T}} H^{\mathsf{T}} H\right)^{\mathsf{T}}\right) = H^{\mathsf{T}} H\Theta + H^{\mathsf{T}} H\Theta \end{aligned}$$

teda

$$\begin{aligned} \nabla_\Theta \left(J\right) &= \frac{1}{2} \left(-H^{\mathsf{T}} y - H^{\mathsf{T}} y + H^{\mathsf{T}} H\Theta + H^{\mathsf{T}} H\Theta\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-2H^{\mathsf{T}} y + 2H^{\mathsf{T}} H\Theta\right) \\ &= -H^{\mathsf{T}} y + H^{\mathsf{T}} H\Theta \end{aligned} \tag{17}$$

V extréme je hodnota $\nabla_\Theta \left(J\right)$ nulová, teda

$$\begin{aligned} 0 &= -H^{\mathsf{T}} y + H^{\mathsf{T}} H\Theta \\ H^{\mathsf{T}} H\Theta &= H^{\mathsf{T}} y \end{aligned} \tag{18}$$

a nakoniec

$$\Theta = \left(H^{\mathsf{T}} H\right)^{-1} H^{\mathsf{T}} y \tag{19}$$

Rovnica (19) sa nazýva Gaussov vzorec.

Keďže $\nabla_\Theta \nabla_\Theta \left(J\right) = \left(H^{\mathsf{T}} H\right) = H^{\mathsf{T}} H$ a $H^{\mathsf{T}} H = R$ je kladne definitná, pretože $H$ je nenulová a teda $H^{\mathsf{T}} H$ je symetrická a kladne definitná, potom nájdený extrém je minimum. Matica $R$ sa nazýva informačná matica a $P = R^{-1}$ sa nazýva disperzná matica (alebo aj Kovariančná matica) s $(n_a + n_b)$ riadkami a $(n_a + n_b)$ stĺpcami.

Dosadením do Gaussovho vzorca získame Off–line odhad parametrov modelu.

## 2.2 Rekurzívna metóda najmenších štvorcov

Predpokladajme, že poznáme odhad parametrov modelu v predchádzajúcom kroku $(k-1)$ a chceme získať odhad parametrov modelu v aktuálnom kroku $k$. Ak poznáme odhad parametrov v kroku $(k-1)$, je zrejmé, že poznáme aj maticu $P(k-1)$.

Pre lepšiu názornosť nech situácia je takáto: Aktuálny krok je $k = 2$. V kroku $(k-1)$, teda v kroku $k = 1$ bola matica $P(k-1)$. Ak prejdeme z kroku $(k-1)$ do

kroku $k$, znemená to pridať nový riadok matice $H$. Novým riadkom je vektor $h^\mathsf{T}(k)$. Pre krok $k$ môžme písať Gausov vzorec:

$$\Theta(k) = \left( \begin{bmatrix} H^\mathsf{T}(k-1) & h(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(k-1) \\ h^\mathsf{T}(k) \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} H^\mathsf{T}(k-1) & h(k) \end{bmatrix} y(k) \tag{20}$$

Odkiaľ matica $P(k)$ je

$$\begin{aligned} P(k) &= \left( \begin{bmatrix} H^\mathsf{T}(k-1) & h(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(k-1) \\ h^\mathsf{T}(k) \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \left( H^\mathsf{T}(k-1)H(k-1) + h(k)h^\mathsf{T}(k) \right)^{-1} \\ &= \left( P(k-1)^{-1} + h(k)h^\mathsf{T}(k) \right)^{-1} \end{aligned} \tag{21}$$

V rovnici (21) sa vyskytuje inverzia matice, ktorej rozmer závisí od počtu parametrov modelu. Tento počet môže byť veľký, a inverzia takto veľkej matice môže byť nerealizovateľná. Použitie Woodburryho lemmy o inverzií matíc rieši tento problém. Platí (v tomto texte nebudeme uvádzať dôkaz Woodburryho lemmy)

$$(A + BD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B \left( DA^{-1}B + 1 \right)^{-1} DA^{-1} \tag{22}$$

Použitím (22) prejde (21) do tvaru

$$\begin{aligned} P(k) &= P(k-1) - P(k-1)h(k) \left( 1 + h^\mathsf{T}(k)P(k-1)h(k) \right)^{-1} \cdot h^\mathsf{T}(k)P(k-1) \\ &= P(k-1) - Y(k)h^\mathsf{T}(k)P(k-1) \end{aligned} \tag{23}$$

kde

$$Y(k) = \frac{P(k-1)h(k)}{1 + h^\mathsf{T}(k)P(k-1)h(k)}$$

je tzv. „zosilnenie“. Rovnica (23) je rekurzívnym vzťahom pre výpočet novej matice $P$ z predchádzajúcej matice $P$.

Odhad parametrov modelu v kroku $k$ je

$$\Theta(k) = P(k)H^\mathsf{T}(k)y(k) = P(k) \sum_{i=1}^{k} h(i)y_i = P(k) \left( \sum_{i=1}^{k-1} h(i)y_i + h(k)y(k) \right) \tag{24}$$

Z (21) je zrejmé že platí

$$P^{-1}(k) = P(k-1) + h(k)h(k)^\mathsf{T} \tag{25a}$$

$$P^{-1}(k-1) = P^{-1}(k) - h(k)h^\mathsf{T}(k) \tag{25b}$$

Potom

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} h^\mathsf{T}(i)y_i &= P^{-1}(k-1)\Theta(k-1) = \left( P^{-1}(k) - h(k)h^\mathsf{T}(k) \right) \Theta(k-1) \\ &= P^{-1}(k)\Theta(k-1) - h(k)h^\mathsf{T}(k)\Theta(k-1) \end{aligned} \tag{26}$$

čo umožní písať odhad parametrov modelu v kroku $k$ v tvare

$$\begin{aligned} \Theta(k) &= P(k) \left( P^{-1}(k)\Theta(k-1) - h(k)h^\mathsf{T}(k)\Theta(k-1) + h(k)y(k) \right) \\ &= P(k)P^{-1}(k)\Theta(k-1) - P(k)h(k)h^\mathsf{T}(k)\Theta(k-1) + P(k)h(k)y(k) \\ &= I\Theta(k-1) + P(k)h(k) \left( y(k) - h^\mathsf{T}(k)\Theta(k-1) \right) \\ &= \Theta(k-1) + P(k)h(k)e(k) \end{aligned} \tag{27}$$

Tabuľka 1: Algoritmus rekurzívnej MNŠ

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Odchýlka (rezíduum) | $e(k) = y(k) - h^{\mathsf{T}}(k)\Theta(k-1)$ |
| 2. | Zosilnenie | $Y(k) = \dfrac{P(k-1)h(k)}{1 + h^{\mathsf{T}}(k)P(k-1)h(k)}$ |
| 3. | Kovariančná matica | $P(k) = P(k-1) - Y(k)h^{\mathsf{T}}(k)P(k-1)$ |
| 4. | Nový odhad parametrov | $\Theta(k) = \Theta(k-1) + Y(k)e(k)$ |

Rovnicu (27) môžeme priviesť aj do iného tvaru. Platí:

$$
\begin{aligned}
\Theta(k) &= \Theta(k-1) + P(k)h(k)e(k) \\
&= \Theta(k-1) + \big(P(k-1) - Y(k)h^{\mathsf{T}}(k)P(k-1)\big)\, h(k)e(k) \\
&= \Theta(k-1) + \left(P(k-1)h(k) - \frac{P(k-1)h(k)h^{\mathsf{T}}(k)P(k-1)h(k)}{1 + h^{\mathsf{T}}(k)P(k-1)h(k)}\right) e(k) \\
&= \Theta(k-1) \\
&+ \left(\frac{P(k-1)h(k) + P(k-1)h(k)h^{\mathsf{T}}(k)P(k-1)h(k)}{1 + h^{\mathsf{T}}(k)P(k-1)h(k)}\right. \\
&- \left.\frac{P(k-1)h(k)h^{\mathsf{T}}(k)P(k-1)h(k)}{1 + h^{\mathsf{T}}(k)P(k-1)h(k)}\right) e(k) \\
&= \Theta(k-1) + \left(\frac{P(k-1)h(k)}{1 + h^{\mathsf{T}}(k)P(k-1)h(k)}\right) e(k) \\
&+ \left(\frac{P(k-1)h(k)h^{\mathsf{T}}(k)P(k-1)h(k)}{1 + h^{\mathsf{T}}(k)P(k-1)h(k)}\right) e(k) \\
&- \left(\frac{P(k-1)h(k)h^{\mathsf{T}}(k)P(k-1)h(k)}{1 + h^{\mathsf{T}}(k)P(k-1)h(k)}\right) e(k) \\
&= \Theta(k-1) + \left(\frac{P(k-1)h(k)}{1 + h^{\mathsf{T}}(k)P(k-1)h(k)}\right) e(k)
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Potom

$$\Theta(k) = \Theta(k-1) + Y(k)e(k) \tag{29}$$

Rovnica (29) je rekurzívnym vzťahom pre výpočet nových parametrov modelu z predchádzajúcich hodnôt parametrov modelu.

### 2.2.1 Súhrn

Algoritmus rekurzívnej metódy najmenších štvorcov je zhrnutý v Tabuľke 1.

### 2.2.2 Štart algoritmu

Disperzná matica má začiatočný tvar

$$P(0) = \alpha I \tag{30}$$

kde $I$ je jednotková matica rovnakého rozmeru ako $P$ a $\alpha$ je reálne číslo napríklad z intervalu $\langle 10,\ 10^6 \rangle$.

Začiatočné hodnoty parametrov modelu môžu byť napríklad nulové, t.j. vektor $\Theta$ je nulový vektor príslušnej dĺžky:

$$\Theta(0) = 0 \tag{31}$$

Nie je to však pravidlo a začiatočné hodnoty parametrov modelu môžu byť v princípe akékoľvek. Tieto hodnoty sa spravidla využívajú v ďalších výpočtoch a tak napríklad môže vzniknúť požiadavka, že niektorý z parametrov nemôže byť nulový (napr. pre delenie nulou) a podobne. Tiež môže existovať približný, hrubý odhad týchto hľadaných (identifikovaných) parametrov a tento je potom často výhodné použiť ako začiatočný.

Tabuľka 2: Algoritmus rekurzívnej MNŠ s exponenciálnym zabúdaním

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Odchýlka (rezíduum) | $e(k) = y(k) - h^{\mathsf{T}}(k)\Theta(k-1)$ |
| 2. | Zosilnenie | $Y(k) = \dfrac{P(k-1)h(k)}{\lambda + h^{\mathsf{T}}(k)P(k-1)h(k)}$ |
| 3. | Kovariančná matica | $P(k) = \dfrac{1}{\lambda}\left(P(k-1) - Y(k)h^{\mathsf{T}}(k)P(k-1)\right)$ |
| 4. | Nový odhad parametrov | $\Theta(k) = \Theta(k-1) + Y(k)e(k)$ |

### 2.2.3 Modifikácia algoritmu - zabúdanie

V účelovej funkcii (14) sa nepredpokladá žiadne váhovanie jednotlivých prvkov vektora odchýlok $e$. Všetky prvky majú rovnakú váhu. Z pohľadu rekurzívneho algoritmu to znamená, že najstaršie odchýlky majú rovnakú váhu ako najnovšie. Často však môže byť veľmi výhodné ak by novšie vzorky, teda novšie zistené odchýlky mali vyššiu váhu ako staršie. Inými slovami výhodné by bolo zabúdať na staršie odchýlky a uvažovať len tie novšie.

V účelovej funkcii (14) je možné uvažovať váhovaciu maticu $W$ nasledovne:

$$J(\Theta) = \frac{1}{2}e^{\mathsf{T}}We \tag{32}$$

kde matica

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & w_N \end{bmatrix} \tag{33}$$

umožní realizovať váhovanie jednotlivých štvorcov odchýlok.

Ak zvolíme váhovacie koeficienty ako $w_i = \lambda^{N-i}$ potom sa takého váhovanie nazýva exponenciálne zabúdanie. Číslo $\lambda$ sa volí z intervalu $(0, 1\rangle$, pričom typické hodnoty sú $\lambda = 0,99$ či $\lambda = 0,95$. Potom je zrejmé, že najnovšia vzorka, najnovší štvorec odchýlky, má váhu (je prenásobený číslom) $w_N = \lambda^{N-N} = 1$. Všetky ostatné váhovacie koeficienty majú nižšiu hodnotu (hodnota exponenciálne klesá ako sa zmenšuje poradové číslo $i$).

Ak aplikujeme ten istý postup pre získanie rekurzívneho algoritmu MNŠ ako v prípade bez exponenciálneho zabúdania, tak verzia so zabúdaním vedie na algoritmus sumarizovaný v tabuľke 2.

# 3 Cvičenie druhé

1. Zrealizujme priebežnú identifikáciu parametrov ARX modelu tak ako to predpokladá konkrétny príklad v časti 1. Vyskúšajte verziu bez exponenciálneho zabúdania a s exponenciálnym zabúdaním.

## 3.1 Ukážka simulačnej schémy pre simuláciu daného riadeného systému

Cieľom nasledujúceho je zostaviť (univerzálnu) simulačnú schému, do ktorej je možné následne doplniť v podstate akýkoľvek riadiaci systém.

Simulačná schéma v tomto prípade realizuje len simuláciu samotného riadeného systému. Vstupný signál riadeného systému je tu zvolený (daný vopred), nie je generovaný riadiacim systémom.

Riadený systém nech predstavuje prenosová funkcia v tvare

$$G(s) = \frac{0,15}{s^2 + 0,3s + 0,2} \tag{34}$$

Ide o prenosovú funkciu druhého rádu, ktorá má v čitateli polynóm nultého stupňa, teda nemá nuly.

Parametre riadeného systému vo forme vstupného vektora matice dynamiky potom sú:

Výpis kódu 1: Súbor ar03_pr01.py

```
A = np.array([[0, 1], [-0.2, -0.3]])
b = np.array([[0], [0.15]])
```

Funkcia, ktorá realizuje diferenciálne rovnice riadeného systému, nech je nasledovná:

Výpis kódu 2: Súbor ar03_pr01.py

```
def fcn_difRovnice(x, t, u):

    dotx = np.dot(A,x) + np.dot(b,u)

    return dotx
```

Simulačnú schému nech realizuje nasledujúca funkcia:

Výpis kódu 3: Súbor ar03_pr01.py

```
def fcn_simSch_01_zaklad(t_start, T_s, finalIndex, sig_u_ext):

    #-----------------------------------------
    t_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    t_log[0,:] = t_start

    #-----------------------------------------
    x_0 = np.array([0, 0])

    x_log = np.zeros([finalIndex, len(x_0)])
    x_log[0,:] = x_0

    #-----------------------------------------


    #-----------------------------------------
    timespan = np.zeros(2)
    for idx in range(1, int(finalIndex)):

        timespan[0] = t_log[idx-1,:]
        timespan[1] = t_log[idx-1,:] + T_s

        u = sig_u_ext[idx-1,:]

        odeOut = odeint(fcn_difRovnice,
                        x_log[idx-1,:],
                        timespan,
                        args=(u,)
                        )

        x_log[idx,:] = odeOut[-1,:]
        t_log[idx,:] = timespan[-1]

    return [t_log, x_log]
```

Nastavenia potrebné pre samotnú simuláciu a vygenerovanie signálov, ktoré sa používajú pri simulácii (ktoré sú dopredu známe - dané):

Výpis kódu 4: Súbor ar03_pr01.py

```
# Nastavenia simulacie

sim_t_start = 0
sim_t_final = 200
sim_T_s = 0.1
sim_finalIndex = int(((sim_t_final - sim_t_start)/sim_T_s) + 1)
```

Pre simuláciu je potrebné vytvoriť vstupný signál $u(t)$ pre riadený systém. Nech je nasledovný:

Výpis kódu 5: Súbor ar03_pr01.py

```
tab_delt_u = np.array([
                      [0, 0],
                      [1, 1],
```

```
                        [50, 0],
                        [100, -1],
                        [150, 0],
                        ])


sig_delt_u = np.zeros([sim_finalIndex, 1])
for idx in range(sig_delt_u.shape[0]):
    lastValue = tab_delt_u[:,1][tab_delt_u[:,0]<=idx*sim_T_s ][-1]
    sig_delt_u[idx] = lastValue


sig_u_ext = sig_delt_u
```

Vstupný signál $u(t)$ je zobrazený na obr. 1.

Spustenie simulácie:

Výpis kódu 6: Súbor `ar03_pr01.py`

```
# Spustenie simulacie

t_log, x_log = fcn_simSch_01_zaklad(
                    sim_t_start,
                    sim_T_s,
                    sim_finalIndex,
                    sig_u_ext,
                    )
```

Nakreslenie obrázka (pre prehľadnosť je kód v samostatnom súbore):

Výpis kódu 7: Súbor `ar03_pr01.py`

```
# Obrazok

figName = 'figsc_ar03_fig01'
figNameNum = 0

exec(open('./misc/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())

```

Obr. 1

## 3.2 Doplnenie algoritmu RMNŠ do simulačnej schémy

V predchádzajúcom bola vytvorená simulačná schéma pre simuláciu uvažovaného riadeného systému. Tu je cieľom doplniť do simulačnej schémy algoritmus RMNŠ.

Pre úplnosť, ARX (AutoRegressive eXogenous) model, ktorý je identifikovaný (klasickou RMNŠ), je vo všeobecnosti nasledovný:

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + \xi(k) \tag{35}$$

kde

$$
\begin{aligned}
B(z^{-1}) &= b_1 z^{-1} + \ldots + b_{n_b} z^{-n_b} \\
A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{n_a} z^{-n_a}
\end{aligned}
\tag{36}
$$

a $\xi(k)$ predstavuje poruchy a šum. V ďalšom budeme uvažovať $\xi(k) = 0$. ARX model vyjadrený v tvare diferenčnej rovnice:

$$
y(k) = -a_1 y(k-1) - \ldots - a_{n_a} y(k-n_a) + b_1 u(k-1) + \ldots + b_{n_b} u(k-n_b) \tag{37}
$$

Nech modelom riadeného systému je diferenčná rovnica v uvedenom tvare, kde hodnoty $n_a = 2$ a $n_b = 2$. Potom táto diferenčná rovnica má tvar

$$
y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) \tag{38}
$$

V maticovom zápise:

$$
y(k) = h^{\mathsf{T}} \Theta \tag{39}
$$

kde $h^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} -y(k-1) & -y(k-2) & u(k-1) & u(k-2) \end{bmatrix}$ a $\Theta = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$. Neznámymi parametrami modelu teda sú koeficienty $a_1$, $a_2$, $b_1$ a $b_2$.

Takpovediac diferenciálne rovnice riadeného systému ostavajú samozrejme rovnaké ako sme ich realizovali v predchádzajúcom, teda aj tu („na začiatku skriptu“) platí výpis kódu 1 a 2.

Simulačnú schému nech realizuje nasledujúca funkcia:

Výpis kódu 8: Súbor `ar03_pr02.py`

```
def fcn_simSch_02_lenRMNS(t_start, T_s, finalIndex, sig_u_ext):

    #-----------------------------------------
    t_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    t_log[0,:] = t_start

    #-----------------------------------------
    x_0 = np.array([0, 0])

    x_log = np.zeros([finalIndex, len(x_0)])
    x_log[0,:] = x_0

    #-----------------------------------------

    u_log = np.zeros([finalIndex, 1])

    #-----------------------------------------

    RMNS_theta_0 = np.array([[ 0.001],
                             [ 0.001],
                             [ 0.001],
                             [ 0.001]])

    RMNS_theta_log = np.zeros([finalIndex, len(RMNS_theta_0)])
    RMNS_theta_log[0,:] = RMNS_theta_0.reshape(1,-1)

    RMNS_P_0 = np.identity(4) * 10**6

    RMNS_P_log = np.zeros([finalIndex, RMNS_P_0.size])
    RMNS_P_log[0,:] = RMNS_P_0.reshape(1,-1)

    #----

    RMNS_y_predict_log = np.zeros([finalIndex, 1])

    #-----------------------------------------
    timespan = np.zeros(2)
    for idx in range(1, int(finalIndex)):

        timespan[0] = t_log[idx-1,:]
        timespan[1] = t_log[idx-1,:] + T_s

        odeOut = odeint(fcn_difRovnice,
                        x_log[idx-1,:],
```

```
                        timespan,
                        args=(u_log[idx-1,:],)
                        )

        x_log[idx,:] = odeOut[-1,:]
        t_log[idx,:] = timespan[-1]

        #--------------------
        # ALGORITMUS RMNS
        y_k = x_log[idx,0]

        h_k = np.array([[-x_log[idx-1,0]],
                        [-x_log[idx-2,0]], # pozor na to idx-2 !!!
                        [u_log[idx-1,0]],
                        [u_log[idx-2,0]], # pozor na to idx-2 !!!
                        ])

        theta_km1 = RMNS_theta_log[idx-1,:].reshape(4,-1)
        P_km1 = RMNS_P_log[idx-1,:].reshape(4,4)

        #----------
        lambdaKoef = 1.0

        e_k = y_k - np.matmul(h_k.T, theta_km1)
        Y_k =  np.matmul(P_km1, h_k) / (lambdaKoef + np.matmul(np.matmul(h_k.T, P_km1), h_k))
        P_k = (1/lambdaKoef) * (P_km1 - np.matmul(np.matmul(Y_k, h_k.T), P_km1))
        theta_k = theta_km1 + Y_k * e_k

        #----

        RMNS_theta_log[idx,:] = theta_k.reshape(1,-1)
        RMNS_P_log[idx,:] = P_k.reshape(1,-1)

        #----------

        RMNS_y_predict_log[idx,:] = np.matmul(h_k.T, theta_km1)

        #--------------------
        u_log[idx,:] = sig_u_ext[idx-1,:]

    return [t_log, x_log, RMNS_y_predict_log, RMNS_theta_log]
```

V uvedenej simulačnej schéme je implementovaný RMNŠ algoritmus, ktorého výstupom je vektor parametrov `theta_k` a následne je tiež vypočítaná (v každom cykle) jednokroková predikcia výstupného signálu zapisovaná do vektora `RMNS_y_predict_log`.

Všimnime si tiež napríklad, že faktor zabúdania $\lambda$ (premenná `lambdaKoef`) je nastavený na hodnotu $\lambda = 1$, teda algoritmus nevyužíva zabúdanie.

Nastavenia potrebné pre samotnú simuláciu a vygenerovanie signálov, ktoré sa používajú pri simulácii (ktoré sú dopredu známe - dané):

Výpis kódu 9: Súbor `ar03_pr02.py`

```
# Nastavenia simulacie

sim_t_start = 0
sim_t_final = 55
sim_T_s = 0.25
sim_finalIndex = int(((sim_t_final - sim_t_start)/sim_T_s) + 1)
```

Pre simuláciu je potrebné vytvoriť vstupný signál $u(t)$ pre riadený systém. Nech je nasledovný:

Výpis kódu 10: Súbor `ar03_pr02.py`

```
# Preddefinovane signaly

period_time = 40
period_tab = np.array([
                       [0, 1],
                       [10, 0],
                       [20, -1],
                       [30, 0],
                       ])

sig_vysl = np.zeros([sim_finalIndex, 1])

```

```python
for period in range(int(sim_t_final/period_time) + 1):


    for idx in range( int((period*period_time)/sim_T_s), int((period*period_time + period_time)/sim_T_s)):

        lastValue = period_tab[:,1][(period_tab[:,0] + (period*period_time))<=idx*sim_T_s ][-1]
        try:
            sig_vysl[idx] = lastValue
        except:
            break

sig_u_ext = sig_vysl
```

Spustenie simulácie:

Výpis kódu 11: Súbor `ar03_pr02.py`

```python
# Spustenie simulacie

t_log, x_log, RMNS_y_predict_log, RMNS_theta_log = fcn_simSch_02_lenRMNS(
    sim_t_start,
    sim_T_s,
    sim_finalIndex,
    sig_u_ext,
    )
```

Nakreslenie obrázku (pre prehľadnosť je kód v samostatnom súbore):

Výpis kódu 12: Súbor `ar03_pr02.py`

```python
# Obrazok

figName = 'figsc_ar03_fig02'
figNameNum = 0

exec(open('./misc/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())

```

Obr. 2

Pre zaujímavosť, priebežne identifikované parametre Θ sú zapisované do poľa `RMNS_theta_log`. Posledný riadok v tomto poli je:

Výpis kódu 13: Súbor ar03_pr02.py

```
print(RMNS_theta_log[-1,:])
```

```
[-1.91569536  0.92772642  0.00456786  0.00445568]
```

## 3.3 Algoritmus RMNŠ pri zašumených dátach

V predchádzajúcom bola vytvorená simulačná schéma pre simuláciu uvažovaného riadeného systému a bol do nej doplnený algoritmus RMNŠ.

Výstupná veličina samotného simulovaného riadeného systému je, pochopiteľne, bez šumu. Tu je cieľom preskúmať ako je RMNŠ schopný vysporiadať sa s prítomnosťou šumu v dátach výstupnej veličiny.

Aj tu platí, že diferenciálne rovnice riadeného systému ostávajú samozrejme rovnaké ako sme ich realizovali v predchádzajúcom, teda aj tu („na začiatku skriptu“) platí výpis kódu 1 a 2.

Simulačnú schému nech realizuje nasledujúca funkcia:

Výpis kódu 14: Súbor ar03_pr03.py

```
# Simulacna schema:

def fcn_simSch_02_lenRMNS_noise(t_start, T_s, finalIndex, sig_u_ext,
    lambdaKoef):

    #-----------------------------------------
    t_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    t_log[0,:] = t_start

    #-----------------------------------------
    x_0 = np.array([0, 0])

    x_log = np.zeros([finalIndex, len(x_0)])
    x_log[0,:] = x_0


    y_log_noise = np.zeros([finalIndex, 1])
    y_log_noise[0,0] = x_log[0,0]

    #-----------------------------------------

    u_log = np.zeros([finalIndex, 1])

    #-----------------------------------------

    RMNS_theta_0 = np.array([[ 0.001],
                             [ 0.001],
                             [ 0.001],
                             [ 0.001]])


    RMNS_theta_log = np.zeros([finalIndex, len(RMNS_theta_0)])
    RMNS_theta_log[0,:] = RMNS_theta_0.reshape(1,-1)

    RMNS_P_0 = np.identity(4) * 10**2

    RMNS_P_log = np.zeros([finalIndex, RMNS_P_0.size])
    RMNS_P_log[0,:] = RMNS_P_0.reshape(1,-1)

    RMNS_y_predict_log = np.zeros([finalIndex, 1])

    #-----------------------------------------
    timespan = np.zeros(2)
    for idx in range(1, int(finalIndex)):

        timespan[0] = t_log[idx-1,:]
        timespan[1] = t_log[idx-1,:] + T_s

        odeOut = odeint(fcn_difRovnice,
                        x_log[idx-1,:],
                        timespan,
                        args=(u_log[idx-1,:],)
                        )

```

```
        x_log[idx,:] = odeOut[-1,:]
        t_log[idx,:] = timespan[-1]

        # Tu sa umelo pridava sum k vystupnej velicine riadeneho systemu

        y_log_noise[idx,0] = x_log[idx,0] + np.random.normal(0, 0.1, size=1)

        #---------------------
        # ALGORITMUS RMNS

        # Pri RMNS sa vyuziva zasumena vystupna velicina

        y_k = y_log_noise[idx,0]

        h_k = np.array([[-y_log_noise[idx-1,0]],
                        [-y_log_noise[idx-2,0]], # pozor na idx-2 !!!
                        [u_log[idx-1,0]],
                        [u_log[idx-2,0]], # pozor na idx-2 !!!
                        ])

        theta_km1 = RMNS_theta_log[idx-1,:].reshape(4,-1)
        P_km1 = RMNS_P_log[idx-1,:].reshape(4,4)

        #----------
        e_k = y_k - np.matmul(h_k.T, theta_km1)
        Y_k =  np.matmul(P_km1, h_k) / (lambdaKoef + np.matmul(np.matmul(h_k.T, P_km1), h_k))
        P_k = (1/lambdaKoef) * (P_km1 - np.matmul(np.matmul(Y_k, h_k.T), P_km1))
        theta_k = theta_km1 + Y_k * e_k

        #----------
        RMNS_theta_log[idx,:] = theta_k.reshape(1,-1)
        RMNS_P_log[idx,:] = P_k.reshape(1,-1)

        RMNS_y_predict_log[idx,:] = np.matmul(h_k.T, theta_km1)

        #---------------------
        u_log[idx,:] = sig_u_ext[idx-1,:]

    return [t_log, x_log, RMNS_y_predict_log, RMNS_theta_log, y_log_noise]

```

V uvedenej simulačnej schéme je implementovaný RMNŠ algoritmus, ktorého výstupom je vektor parametrov `theta_k` a následne je tiež vypočítaná (v každom cykle) jednokroková predikcia výstupného signálu zapisovaná do vektora `RMNS_y_predict_log`.

Nastavenia potrebné pre samotnú simuláciu a vygenerovanie signálov, ktoré sa používajú pri simulácii (ktoré sú dopredu známe - dané):

Výpis kódu 15: Súbor `ar03_pr03.py`

```
# Nastavenia simulacie

sim_t_start = 0
sim_t_final = 250
sim_T_s = 0.1
sim_finalIndex = int(((sim_t_final - sim_t_start)/sim_T_s) + 1)
```

Pre simuláciu je potrebné vytvoriť vstupný signál $u(t)$ pre riadený systém. Nech je nasledovný:

Výpis kódu 16: Súbor `ar03_pr03.py`

```
# Preddefinovane signaly

period_time = 200
period_tab = np.array([
                      [0, 1],
                      [80, 0],
                      [120, -1],
                      [180, 0],
                      ])

sig_vysl = np.zeros([sim_finalIndex, 1])

for period in range(int(sim_t_final/period_time) + 1):
```

```python

    for idx in range( int((period*period_time)/sim_T_s), int((period*period_time + period_time)/sim_T_s)):

        lastValue = period_tab[:,1][(period_tab[:,0] + (period*period_time))<=idx*sim_T_s ][-1]
        try:
            sig_vysl[idx] = lastValue
        except:
            break

sig_u_ext = sig_vysl
```

### 3.3.1 Bez zabúdania

Ďalším nastavením, špeciálne dôležitým v tomto príklade je koeficient zabúdania $\lambda$:

Výpis kódu 17: Súbor `ar03_pr03.py`

```python
sim_lambdaKoef = 1.0
```

Pamätajme teda, že faktor zabúdania $\lambda$ (premenná `lambdaKoef`) je tu nastavený na hodnotu $\lambda = 1$, teda algoritmus nevyužíva zabúdanie.
Spustenie simulácie:

Výpis kódu 18: Súbor `ar03_pr03.py`

```python
# Spustenie simulacie

t_log, x_log, RMNS_y_predict_log, RMNS_theta_log, y_log_noise = fcn_simSch_02_lenRMNS_noise(
    sim_t_start,
    sim_T_s,
    sim_finalIndex,
    sig_u_ext,
    sim_lambdaKoef
    )
```

Nakreslenie obrázka (pre prehľadnosť je kód v samostatnom súbore):

Výpis kódu 19: Súbor `ar03_pr03.py`

```python
# Obrazok

figName = 'figsc_ar03_fig03'
figNameNum = 0

exec(open('./misc/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())

```

Obr. 3

### 3.3.2 So zabúdaním

Iná simulácia nech je s nasledovným koeficientom zabúdania:

Výpis kódu 20: Súbor `ar03_pr03.py`

```
sim_lambdaKoef = 0.987

# Spustenie simulacie

t_log, x_log, RMNS_y_predict_log, RMNS_theta_log, y_log_noise =
    fcn_simSch_02_lenRMNS_noise(
    sim_t_start,
    sim_T_s,
    sim_finalIndex,
    sig_u_ext,
    sim_lambdaKoef
    )

# Obrazok

figName = 'figsc_ar03_fig03'
figNameNum = 1

exec(open('./misc/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())
```

Obr. 4

Extrémnou voľbou koeficientu zabúdania pre tento prípad by bolo:

Výpis kódu 21: Súbor `ar03_pr03.py`

```
sim_lambdaKoef = 0.957

# Spustenie simulacie

t_log, x_log, RMNS_y_predict_log, RMNS_theta_log, y_log_noise =
    fcn_simSch_02_lenRMNS_noise(
    sim_t_start,
    sim_T_s,
    sim_finalIndex,
    sig_u_ext,
    sim_lambdaKoef
    )

# Obrazok

figName = 'figsc_ar03_fig03'
figNameNum = 2

exec(open('./misc/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())
```

Obr. 5

## 3.4 Iná ukážka simulačnej schémy pre simuláciu RMNŠ

V tejto časti sa použije Simulink pre riešenie úloh ako v predchádzajúcom.

Majme sústavu, lepšie povedané dynamický systém (ktorý neskôr budeme riadiť), a k tomu istý blok, ktorého funkciou je realizovať priebežnú identifikáciu predmetného systému. Schematicky znázornené:

Obr. 6

Blok Identifikácia slúži na priebežnú identifikáciu a teda jeho hlavným výstupom sú parametre Θ a tiež sa uvažuje výstupná veličina modelu $\hat{y}$ (na obr. označená ako `ym`).

Pred spustením schémy (v Simulinku) je samozrejme potrebné inicializovať parametre riadeného systému (sústavy) a ako sa ukáže aj iné veci (v tomto prípade). Je to realizované v skripte:

Výpis kódu 22: Súbor `ar03_spustima_RMNS.m`

```
clear all;
clc
```

```
global P

% Perioda vzorkovania
Tvz = 0.1;

% Identifikovana sustava
B = [0 0.15];
A = [1 0.3 0.2];

% Prepis do diskretneho tvaru (len tak pre zaujimavost...)
Gs = tf(B,A);
Gz = c2d(Gs,Tvz);
[Bz,Az] = tfdata(Gz,'v')

% Startovacia matica P
P = 10^6 * eye(4,4) ;
```

Samotný blok Identifikácia je realizovaný nasledovne:

Obr. 7

Obsahuje vzorkovanie signálov (zero order hold) a oneskorovanie signálov (v zmysle $z^{-1}$). Tým je realizované získavanie tzv. signálneho vektora a podobne. Ďalej je súčasťou bloku funkcia, ktorá realizuje samotný algoritmus RMNŠ. Kód funkcie:

Výpis kódu 23: Súbor `MNS.m`

```
function odhadTheta = MNS(vst)
global P

P_n = P;

theta = vst(6:9);

h_n1 = [vst(2:5)];
y_n1 = vst(1);

e_n1 = y_n1 - h_n1' * theta;
Y_n1 = (P_n*h_n1)/(1+h_n1'*P_n*h_n1);
P_n1 = P_n - Y_n1*h_n1'*P_n;
odhadTheta = theta + Y_n1*e_n1;

P = P_n1;
```

# 4 Metóda rozmiestňovania pólov

Pripomeňme, že zákon riadenia (štruktúra riadenia) samonastavujúceho sa regulátora v uvažovanom konkrétnom príklade je v tvare

$$R(z^{-1})u(k) = T(z^{-1})r(k) - S(z^{-1})y(k) \tag{40a}$$

$$u(k) = \frac{T(z^{-1})}{R(z^{-1})}r(k) - \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})}y(k) \tag{40b}$$

kde $R$, $S$ a $T$ sú polynómy v tvare

$$R(z^{-1}) = 1 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2} + \ldots + r_{n_r} z^{-n_r} \tag{41a}$$

$$S(z^{-1}) = s_0 + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2} + \ldots + s_{n_s} z^{-n_s} \tag{41b}$$

$$T(z^{-1}) = t_0 + t_1 z^{-1} + t_2 z^{-2} + \ldots + t_{n_t} z^{-n_t} \tag{41c}$$

Ako už bolo uvedené, koeficienty polynómov sú parametrami regulátora. Počet parametrov regulátora závisí od stupňa jednotlivých polynómov. Pre uvažovaný konkrétny príklad sú stupne polynómov nasledovné: $n_r = 1$, $n_s = 1$ a $n_t = 0$. Potom počet parametrov regulátora je $n_r + n_s + 1 + n_t + 1$. Teda $1+1+1+0+1 = 4$. Zákon riadenia je možné zapísať aj v tvare diferenčnej rovnice:

$$u(k) = -r_1 u(k-1) - s_0 y(k) - s_1 y(k-1) + t_0 r(k) \tag{42}$$

Uvažujme zákon riadenia v tvare (40), ktorého parametre budeme počítať pomocou metódy rozmiestňovania pólov. Najprv odvodíme rovnicu uzavretého obvodu (URO).

## 4.1 Rovnica URO

Model riadeného systému je

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) \tag{43}$$

Dosadením (7) do (43) máme

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})\left(\frac{T(z^{-1})}{R(z^{-1})}r(k) - \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})}y(k)\right) \tag{44}$$

Úpravou

$$Ay(k) = \frac{BT}{R}r(k) - \frac{BS}{R}y(k) \tag{45a}$$

$$RAy(k) = BTr(k) - BSy(k) \tag{45b}$$

$$(RA + BS)\,y(k) = BTr(k) \tag{45c}$$

$$y(k) = \frac{BT}{(AR + BS)}r(k) \tag{45d}$$

$$\frac{y(k)}{r(k)} = \frac{BT}{(AR + BS)} \tag{45e}$$

Charakteristický polynóm uzavretého regulačného obvodu je:

$$A(z^{-1})R(z^{-1}) + B(z^{-1})S(z^{-1}) \tag{46}$$

Nech želaný polynóm je

$$P(z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \ldots + p_{n_p} z^{-n_p} \tag{47}$$

potom diofantická rovnica, z ktorej sa vypočítajú koeficienty polynómov $R$ a $S$ je

$$A(z^{-1})R(z^{-1}) + B(z^{-1})S(z^{-1}) = P(z^{-1}) \tag{48}$$

V tomto prípade máme

$$A = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \tag{49a}$$
$$B = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \tag{49b}$$
$$R = 1 + r_1 z^{-1} \tag{49c}$$
$$S = s_0 + s_1 z^{-1} \tag{49d}$$

a nech želaný polynóm pre tento prípad je

$$P = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} \tag{50}$$

Diofantická rovnica pre tento prípad

$$\begin{aligned}&\left(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}\right)\left(1 + r_1 z^{-1}\right) + \left(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}\right)\left(s_0 + s_1 z^{-1}\right)\\ &= 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}\end{aligned} \tag{51}$$

Roznásobením

$$\begin{aligned}&1 + r_1 z^{-1} + a_1 z^{-1} + a_1 r_1 z^{-2} + a_2 z^{-2} + a_2 r_1 z^{-3}\\ &+ b_1 s_0 z^{-1} + b_1 s_1 z^{-2} + b_2 s_0 z^{-2} + b_2 s_1 z^{-3}\\ &= 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}\end{aligned} \tag{52}$$

Na ľavej strane ponecháme členy, v ktorých sa nachádzajú neznáme koeficienty polynómov zo zákona adaptácie a ostatné členy presunieme na pravú stranu

$$\begin{aligned}&r_1 z^{-1} + a_1 r_1 z^{-2} + a_2 r_1 z^{-3} + b_1 s_0 z^{-1} + b_1 s_1 z^{-2} + b_2 s_0 z^{-2} + b_2 s_1 z^{-3}\\ &= 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} - 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}\end{aligned} \tag{53}$$

Po úprave

$$\begin{aligned}&\left(r_1 + b_1 s_0\right) z^{-1} + \left(a_1 r_1 + b_1 s_1 + b_2 s_0\right) z^{-2} + \left(a_2 r_1 + b_2 s_1\right) z^{-3}\\ &= \left(p_1 - a_1\right) z^{-1} + \left(p_2 - a_2\right) z^{-2}\end{aligned} \tag{54}$$

Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách získame rovnice

$$r_1 + b_1 s_0 = p_1 - a_1 \tag{55a}$$
$$a_1 r_1 + b_2 s_0 + b_1 s_1 = p_2 - a_2 \tag{55b}$$
$$a_2 r_1 + b_2 s_1 = 0 \tag{55c}$$

V maticovom zápise:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ a_1 & b_2 & b_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{56}$$

Maticový zápis vyplývajúci z diofantickej rovnice v prípade, keď stupne polynómov $R$, $S$ a $P$ sú všeobecné, je v tvare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_2 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_a} & \vdots & \vdots & \cdots & 1 & b_{n_b} & \vdots & \vdots & \cdots & b_1 \\ 0 & \ddots & \vdots & \cdots & a_1 & 0 & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n_a} & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n_r} \\ s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{n_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{57}$$

Takáto sústava rovníc bude mať riešenie ak

$$n_r = n_b - 1 \tag{58a}$$
$$n_s = n_a - 1 \tag{58b}$$

## 4.2 Polynóm $T$

Zatiaľ sme vypočítali koeficienty polynómov $R$ a $S$. Otázkou ostáva, ako určiť polynóm $T$. Je potrebné určiť jeho stupeň a vypočítať koeficienty. V úvode sme „zvolili“, že stupeň polynómu $T$ je $n_t = 0$. Teda jediným koeficientom bude $t_0$. Ukážme teraz, že jednou z možností, ako určiť polynóm $T$, je žiadať nulovú regulačnú odchýlku v ustálenom stave. Dostaneme tak polynóm $T$ práve nultého stupňa a aj výpočet koeficientu $t_0$.

Keďže charakteristická rovnica URO je rovnaká ako želaný polynóm $P$, je možné písať rovnicu uzavretého obvodu v tvare

$$y(k) = \frac{BT}{P} r(k) \tag{59}$$

Aby platilo

$$y(\infty) = r(\infty) \tag{60}$$

musí byť

$$BT = P \tag{61a}$$

$$T = \frac{P}{B} \tag{61b}$$

A keďže „donekonečna“ je v diskrétnej doméne „dojednotky“, teda $z = 1$, potom

$$T = \frac{P(1)}{B(1)} \tag{62}$$

čo v tomto prípade znamená

$$T(z^{-1}) = \frac{1 + p_1 + p_2}{b_1 + b_2} = t_0 \tag{63}$$

### 4.2.1 Alternatívy spôsob určenia polynómu $T$

#### Alternatíva 1

Ďalší spôsob ako určiť koeficienty polynómu $T$ je nasledovný. Nájdeme obraz referenčného signálu tak, že jeho časovú formu pretransformujeme pomocou Z-transformácie. Totiž v mnohých prípadoch je možné dopredu určiť časový priebeh referenčného signálu a navyše sa referenčný signál skladá zo skokov, rámp a podobných, pomocou Z-transformácie, ľahko transformovateľných signálov. Obraz referenčného signálu je

$$\{r(t)\}_q = \frac{F\left(q^{-1}\right)}{G\left(q^{-1}\right)} \tag{64}$$

Tento obraz použijeme vo vzťahu pre regulačnú odchýlku:

$$e = r - y = r - \frac{BT}{P} r = \frac{F}{G} - \frac{BT}{P}\frac{F}{G} = \frac{F(P - BT)}{GP} = \frac{FN}{P} \tag{65}$$

kde sme označili

$$\frac{P - BT}{G} = N \tag{66}$$

Z tohto označenia môžeme písať diofantickú rovnicu, ktorá doplní (48), a vznikne tak sústava.

$$GN + BT = P \tag{67}$$

Z tejto rovnice sa dá určiť aj polynóm vyššieho ako nultého stupňa.

#### Alternatíva 2

Ďalší spôsob ako určiť koeficienty polynómu $T$ je takýto: ak bude polynóm $T$ obrátenou hodnotou polynómu $B$, teda $T = 1/B$, zaistí sa tak nie len nulová regulačná odchýlka v ustálenom stave, ale aj to, že polynóm $B$ nebude mať žiadny vplyv na dynamiku URO. Dynamika URO bude daná len želaným charakteristickým polynómom $P$, takto:

$$y(t) = \frac{1}{P} r(t) \tag{68}$$

Zákon riadenia potom môžeme uvažovať v tvare

$$Ru(t) = \frac{1}{B} r(t) - Sy(t) \quad \Rightarrow \quad r = BRu + BSy \tag{69}$$

Ale ak $B = q^{-D}\tilde{B}$, tak aby sme mohli napísať predchádzajúcu rovnicu musíme dať $q^{-D}$ na druhú stranu k $r$. Teda:

$$rq^D = \tilde{B}Ru + \tilde{B}Sy \tag{70}$$

Ak potom vyjadríme akčný zásah, je zrejmé, že bude závisieť od budúcich hodnôt referenčného signálu $u(t) = r(t + D) - \ldots$ Toto však nemusí byť prekážkou, pretože v mnohých prípadoch je referenčný signál dopredu známy.

## 4.3 Súhrn pre tento prípad

Zhrňme výpočty potrebné pre určenie parametrov regulátora pre tento prípad.

Hodnoty parametrov modelu $a_1$, $a_2$, $b_1$ a $b_2$ sú po identifikácii (v danej perióde vzorkovania) známe a prirodzene sú známe aj hodnoty koeficientov želaného polynómu $P$. Hodnoty parametrov regulátora získame riešením

$$\begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ a_1 & b_2 & b_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{71}$$

a

$$t_0 = \frac{1 + p_1 + p_2}{b_1 + b_2} \tag{72}$$

## 4.4 Rýchlostný algoritmus metódy rozmiestňovania pólov

Táto subsekcia je tu len pre ilustráciu širších obzorov týkajúcich sa oblasti používania metódy rozmiesňovania pólov v prípadoch podobných tomuto.

Keďže ide o rýchlostný algoritmus, je potrebné vyjadriť prírastok akčnej veličiny:

$$\Delta u(t) = u(t) - u(t-1) = (1 - q^{-1})u(t) \tag{73}$$

$$u(t) = \frac{\Delta u(t)}{(1 - q^{-1})} \tag{74}$$

Riadený systém a jeho ARX model (s nulovým šumom):

$$Ay(t) = Bu(t) \tag{75}$$

do ktorého dosadíme $u(t)$ a upravíme...

$$Ay(t) = B\frac{\Delta u(t)}{(1 - q^{-1})} \tag{76a}$$

$$(1 - q^{-1})Ay(t) = B\Delta u(t) \tag{76b}$$

Zákon riadenia uvažujeme v tvare:

$$\Delta u(t) = \frac{S}{R}(r(t) - y(t)) \tag{77}$$

Rovnica URO potom bude mať tvar

$$(1-q^{-1})Ay(t) = B\Delta u(t) \tag{78a}$$

$$(1-q^{-1})Ay(t) = B\frac{S}{R}(r(t)-y(t)) \tag{78b}$$

$$(1-q^{-1})ARy(t) = BS(r(t)-y(t)) \tag{78c}$$

$$(1-q^{-1})ARy(t) = BSr(t) - BSy(t) \tag{78d}$$

$$((1-q^{-1})AR+BS)y(t) = BSr(t) \tag{78e}$$

$$y(t) = \frac{BS}{(1-q^{-1})AR+BS}r(t) \tag{78f}$$

Takže charakteristický polynóm je

$$P = \left(1-q^{-1}\right)AR + BS \tag{79}$$

Ale veď potom

$$BS = P - \left(1-q^{-1}\right)AR \tag{80}$$

a tak rovnica URO:

$$y(t) = \frac{P-(1-q^{-1})AR}{P}r(t) \tag{81a}$$

$$y(t) = \left(\frac{P}{P} - \frac{(1-q^{-1})AR}{P}\right)r(t) \tag{81b}$$

$$y(t) = r(t) - \frac{(1-q^{-1})AR}{P}r(t) \tag{81c}$$

Ak sa teraz opýtame aká bude regulačná odchýlka v ustálenom stave t.j. $y(\infty)$, $r(\infty)$ a čo je najdôležitejšie $q=1$ potom:

$$\begin{aligned} y(\infty) &= r(\infty) - \frac{(1-1)AR}{P}r(\infty) \\ y(\infty) &= r(\infty) \end{aligned} \tag{82}$$

Teda regulačná odchýlka v ustálenom stave bude nulová (pretože sa zhodujú hodnoty referenčného signálu a výstupnej veličiny).

# 5 Cvičenie tretie

1. Zrealizujte (v simulačnom prostredí) samonastavujúci sa regulátor tak ako to predpokladá uvažovaný konkrétny príklad.

   Nech želaným charakteristickým polynómom (pre uvažovaný konkrétny príklad) je $P(z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}$ pričom $p_1 = -1,6$ a $p_2 = 0,64$, teda dvojnásobný koreň $z_{1,2} = 0,8$.

   Alternatívne, nech v želanom charakteristickom je $p_1 = -0,8$ a $p_2 = 0,16$, teda dvojnásobný koreň $z_{1,2} = 0,4$.

   Pozn: pre uvažovaný príklad sa odporúča perióda vzorkovania $T_{vz} = 0,1$ [čas].

## 5.1 Konkrétny príklad samonastavujúceho sa regulátora

V predchádzajúcom bola prezentovaná simulačná schéma, v ktorej bol implementovaný algoritmus RMNŠ.

Tu je cieľom doplniť do simulačnej schémy výpočet, ktorý na základe priebežne identifikovaných parametrov riadeného systému vypočíta hodnoty parametrov daného zákona riadenia a následne vypočíta samotný akčný zásah.

Výpočet parametrov zákona riadenia využíva matódu rozmistňovania pólov URO a je dplnený výpočtom pre zabezpečenie nulovej trvalej regulačnej odchýlky.

Nech želaným charakteristickým polynómom (pre uvažovaný konkrétny príklad) je $P(z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}$ pričom $p_1 = -1,6$ a $p_2 = 0,64$, teda dvojnásobný koreň $z_{1,2} = 0,8$.

Pozn: pre uvažovaný príklad sa odporúča perióda vzorkovania $T_{vz} = 0,1$ [čas].

V tomto konkrétnom príklade uvažovaný zákon riadenia je možné zapísať v tvare diferenčnej rovnice:

$$u(k) = -r_1 u(k-1) - s_0 y(k) - s_1 y(k-1) + t_0 r(k) \tag{83}$$

Hodnoty parametrov modelu $a_1$, $a_2$, $b_1$ a $b_2$ sú po identifikácii (v danej perióde vzorkovania) známe a prirodzene sú známe aj hodnoty koeficientov želaného polynómu $P$. Hodnoty parametrov regulátora získame riešením

$$\begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ a_1 & b_2 & b_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{84}$$

a

$$t_0 = \frac{1 + p_1 + p_2}{b_1 + b_2} \tag{85}$$

Aj tu platí, že diferenciálne rovnice riadeného systému ostávajú samozrejme rovnaké ako sme ich realizovali v predchádzajúcom, teda aj tu („na začiatku skriptu“) platí výpis kódu 1 a 2.

Ďalej nech simulačnú schému realizuje nasledujúca funkcia:

Výpis kódu 24: Súbor `ar03_pr04.py`

```
def fcn_simSch_05_STR(t_start, T_s, finalIndex, sig_r_ext):

    #-----------------------------------------
    t_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    t_log[0,:] = t_start

    #-----------------------------------------
    x_0 = np.array([0, 0])

    x_log = np.zeros([finalIndex, len(x_0)])
    x_log[0,:] = x_0
    #-----------------------------------------

    RMNS_theta_0 = np.array([[ -1.5],
                             [ 0.5],
                             [ -2e-5],
                             [ 1.5e-3]])

    RMNS_theta_log = np.zeros([finalIndex, len(RMNS_theta_0)])
    RMNS_theta_log[0,:] = RMNS_theta_0.reshape(1,-1)

    RMNS_P_0 = np.diag([10*2, 10**2, 10**5, 10**5])

    RMNS_P_log = np.zeros([finalIndex, RMNS_P_0.size])
    RMNS_P_log[0,:] = RMNS_P_0.reshape(1,-1)

    RMNS_y_predict_log = np.zeros([finalIndex, 1])

    #-----------------------------------------

    u_log = np.zeros([finalIndex, 1])
        # v tomto bode by sa dalo vypocitat u_0, ale tu na to kasleme

    #-----------------------------------------
    timespan = np.zeros(2)
    for idx in range(1, int(finalIndex)):

        timespan[0] = t_log[idx-1,:]
        timespan[1] = t_log[idx-1,:] + T_s

        odeOut = odeint(fcn_difRovnice,
                        x_log[idx-1,:],
                        timespan,
                        args=(u_log[idx-1,:],)
```

```
                        )

        x_log[idx,:] = odeOut[-1,:]
        t_log[idx,:] = timespan[-1]

        #--------------------
        # ALGORITMUS RMNS
        y_k = x_log[idx,0]

        h_k = np.array([[-x_log[idx-1,0]],
                        [-x_log[idx-2,0]],  # pozor na idx-2 !!!
                        [u_log[idx-1,0]],
                        [u_log[idx-2,0]],
                        ])

        theta_km1 = RMNS_theta_log[idx-1,:].reshape(4,-1)
        P_km1 = RMNS_P_log[idx-1,:].reshape(4,4)

        #----------
        lambdaKoef = 0.95

        e_k = y_k - np.matmul(h_k.T, theta_km1)

        Y_k =  np.matmul(P_km1, h_k) / (lambdaKoef + np.matmul(np.matmul(h_k.T, P_km1), h_k))

        P_k = (1/lambdaKoef) * (P_km1 - np.matmul(np.matmul(Y_k, h_k.T), P_km1))
        theta_k = theta_km1 + Y_k * e_k

        #----------

        RMNS_theta_log[idx,:] = theta_k.reshape(1,-1)
        RMNS_P_log[idx,:] = P_k.reshape(1,-1)

        RMNS_y_predict_log[idx,:] = np.matmul(h_k.T, theta_km1)

        #--------------------
        # Vypocty pre parametre zakona riadenia a akcny zasah

        # koeficienty zelaneho polynomu:

        par_p1 = -1.6
        par_p2 = 0.64

        # parametre riadeneho systemu

        par_a1 = RMNS_theta_log[idx-1,0]
        par_a2 = RMNS_theta_log[idx-1,1]
        par_b1 = RMNS_theta_log[idx-1,2]
        par_b2 = RMNS_theta_log[idx-1,3]

        # Parametre RST regulatora

        matrix_A = np.array([[     1, par_b1,      0],
                             [par_a1, par_b2, par_b1],
                             [par_a2,      0, par_b2],
                             ])

        matrix_b = np.array([[par_p1 - par_a1],
                             [par_p2 - par_a2],
                             [0],
                             ])

        par_r1, par_s0, par_s1, = np.linalg.solve(matrix_A, matrix_b)

        par_t0 = (1 + par_p1 + par_p2)/(par_b1 + par_b2)

        # vypocita sa akcny zasah u(k)

        par_RST = np.array([par_r1, par_s0, par_s1, par_t0])
        vekt_omega = np.array([-u_log[idx-1,:], -x_log[idx,0], -x_log[idx-1,0], sig_r_ext[idx,0]])

        u_log[idx,:] = np.dot(par_RST, vekt_omega)

        #--------------------

    return [t_log, x_log, u_log, RMNS_y_predict_log, RMNS_theta_log]
```

V uvedenej simulačnej schéme je implementovaný RMNŠ algoritmus rovnako ako

v predchádzajúcom...

Všimnime si však, že faktor zabúdania $\lambda$ (premenná `lambdaKoef`) je nastavený na hodnotu $\lambda = 0,95$.

Tiež je potrebné všimnúť si, že štartovacie hodnoty RMNŠ algoritmu sú:

`RMNS_theta_0 = np.array([[-1.5], [0.5], [-2e-5], [1.5e-3]])`

a

`RMNS_P_0 = np.diag([10*2, 10**2, 10**5, 10**5])`

Nastavenia potrebné pre samotnú simuláciu a vygenerovanie signálov, ktoré sa používajú pri simulácii (ktoré sú dopredu známe - dané):

Výpis kódu 25: Súbor `ar03_pr04.py`

```
# Nastavenia simulacie

sim_t_start = 0
sim_t_final = 38
sim_T_s = 0.1
sim_finalIndex = int(((sim_t_final - sim_t_start)/sim_T_s) + 1)


# Preddefinovane signaly

period_time = 40
period_tab = np.array([
                      [0, 1],
                      [10, 0],
                      [20, -1],
                      [30, 0],
                      ])

sig_vysl = np.zeros([sim_finalIndex, 1])

for period in range(int(sim_t_final/period_time) + 1):

    for idx in range( int((period*period_time)/sim_T_s), int((period*period_time + period_time)/sim_T_s)):

        lastValue = period_tab[:,1][(period_tab[:,0] + (period*period_time))<=idx*sim_T_s ][-1]
        try:
            sig_vysl[idx] = lastValue
        except:
            break

sig_r_ext = sig_vysl

```

Spustenie simulácie:

Výpis kódu 26: Súbor `ar03_pr04.py`

```
# Spustenie simulacie

t_log, x_log, u_log, RMNS_y_predict_log, RMNS_theta_log = fcn_simSch_05_STR(
    sim_t_start,
    sim_T_s,
    sim_finalIndex,
    sig_r_ext,
    )
```

Nakreslenie obrázka:

Výpis kódu 27: Súbor `ar03_pr04.py`

```
# Obrazok

figName = 'figsc_ar03_fig04'
figNameNum = 0

exec(open('./misc/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())

```

Obr. 8

## 5.2 Simulácia v Simulinku

V tejto časti sa použije Simulink pre riešenie úloh ako v predchádzajúcom.

Máme riadený systém, ku ktorému sme v predchádzajúcom vyrobili blok pre priebežnú identifikáciu. Teraz pridajme blok, ktorý bude realizovať výpočet akčného zásahu. Schematicky znázornené:

Obr. 9

Pred spustením schémy (v Simulinku) je samozrejme potrebné inicializovať parametre riadeného systému (sústavy) a ako sa ukáže aj iné veci (v tomto prípade). Je to realizované v skripte:

Výpis kódu 28: Súbor `ar03_spustima_STR.m`

```
clear all;
clc

global P ZP lambdaKoef

% Perioda vzorkovania
Tvz = 0.1;

% Identifikovana sustava
B = [0 0.15];
A = [1 0.3 0.2];

% Zelany polynom
ZP = conv([1 -0.8],[1 -0.8]);

lambdaKoef = 0.95

% Startovacia matica P
P = diag([20, 10^2, 10^5, 10^5]) ;
```

Blok Identifikácia je realizovaný ako na obr. 7 a používa funkciu:

Výpis kódu 29: Súbor `MNSvRST.m`

```
function odhadTheta = MNSvRST(vst)
global P lambdaKoef

P_n = P;

theta = vst(6:9);

h_n1 = [vst(2:5)];
y_n1 = vst(1);

e_n1 = y_n1 - h_n1' * theta;
Y_n1 = (P_n*h_n1)/(lambdaKoef + h_n1'*P_n*h_n1);
P_n1 = (1/lambdaKoef) * (P_n - Y_n1*h_n1'*P_n);
odhadTheta = theta + Y_n1*e_n1;

P = P_n1;
```

Blok Regulátor je realizovaný nasledovne:

Obr. 10

Funkcia, ktorú používa blok Regulátor je nasledovná:

Výpis kódu 30: Súbor `REGULATOR.m`

```
function vyst = REGULATOR(theta)

global ZP

a1 = theta(1);
a2 = theta(2);
b1 = theta(3);
b2 = theta(4);

MATICA = [1 b1 0; a1 b2 b1; a2 0 b2];
```

```
PRAVASTRANA = [ZP(2) - a1; ZP(3) - a2; 0];
RS = MATICA\PRAVASTRANA;

T = (1 + ZP(2) + ZP(3))/(b1 + b2);

vyst = [RS' T]';
```

# 6 Otázky a úlohy

1. Stručne vysvetlite princíp rekurzívnej metódy najmenších štvorcov.
2. Napíšte Gaussov vzorec a podrobne vysvetlite jednotlivé prvky
3. Vyjadrite ARX model v tvare diskrétnej prenosovej funkcie alebo v tvare diferenčnej rovnice.
4. Odvoďte Gaussov vzorec a ukážte, že nájdený extrém je minimum.
5. Aké (ktoré) prvky obsahuje signálny vektor pri priebežnej identifikácii metódou najmenších štvorcov? (Čo tvorí prvky signálneho vektora pri priebežnej identifikácii metódou najmenších štvorcov?)
6. Modelom riadeného systému je ARX model. Zákon riadenia má tvar $R(z^{-1})u(k) = T(z^{-1})r(k) - S(z^{-1})y(k)$. Nájdite charakteristický polynóm URO.
7. Modelom riadeného systému je ARX model. Zákon riadenia má tvar $u(k) = \Delta u(k)/(1 - z^{-1})$, kde
$$\Delta u(k) = \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})}(r(k) - y(k))$$
Nájdite charakteristický polynóm URO.
8. Stručne vysvetlite výpočet parametrov regulátora metódou pole-placement.
9. Vysvetlite podstatu metód návrhu polynómu $T(z^{-1})$ pri STR.

# MRAC gradientný

## Obsah


1 **Riadenie s referenčným modelom** **1**
1.1 MRAC . . . . . 2

2 **MIT algoritmus adaptácie: MRAC gradientný** **2**
2.1 Príklad: Adaptácia dopredného zosilnenia . . . . . 3
2.2 Príklad: Statický systém 1. rádu . . . . . 4
2.2.1 Návrh adaptívneho riadiaceho systému . . . . . 4
2.2.2 Numerické simulácie . . . . . 7
2.3 Príklad: Systém 2. rádu s astatizmom . . . . . 10
2.3.1 Numerické simulácie . . . . . 13

3 **Otázky a úlohy** **16**


V prvom rade poznámka k nadpisu: MRAC je skratka z *Model Reference Adaptive Control*, čo znamená Adaptívne riadenie s referenčným modelom. Ide o istú schému priameho adaptívneho riadenia, ktorá pre návrh zákona adaptácie využíva myšlienku o gradiente istej účelovej funkcie, ktorej optimom je vlastne splnenie cieľa riadenia. Slangovo povedané: MRAC („mrak“) gradientný.

## 1 Riadenie s referenčným modelom

Pri riadení s referenčným modelom (*model reference control – MRC*) sú žiadané vlastnosti uzavretého regulačného obvodu opísané referenčným modelom, čo je jednoducho lineárny, časovo invariantný systém s prenosovou funkciou $W_m(s)$, ktorého vstupom je referenčná (žiadaná) veličina (hodnota) $r$. Do referenčného modelu sa premietnu požiadavky na výsledný regulačný obvod – URO. Výstup referenčného modelu $y_m$ sa potom správa práve tak, ako to žiadame od výstupnej (riadenej) veličiny systému. URO je chápaný ako celok, ktorý vznikne pripojením zákona riadenia (regulátora) k riadenému systému. Vstupom URO je referenčná veličina $r$ a výstupom je výstupná veličina systému $y$. Podobným spôsobom sa predpisujú požiadavky pri návrhoch napr. servo-systémov.

Zákon riadenia je zostavený tak, že prenosová funkcia URO má rovnakú štruktúru (tvar) ako referenčný model. Tým je daná štruktúra (tvar) zákona riadenia. Nie že by štruktúra bola daná jednoznačne, jednoducho, zákon riadenia musí byť taký, že

Obr. 1: Riadenie s referenčným modelom – principiálna schéma

Obr. 2: Adaptívne riadenie s referenčným modelom – principiálna schéma

umožní zhodu URO a referenčného modelu. Otázkou ostáva nastavenie parametrov, ktoré zákon riadenia obsahuje.

V predchádzajúcom príklade, v ktorom sme sa venovali adaptívnej stabilizácii, má zákon riadenia tvar $u = -k\,x$. Parameter zákona riadenia je $k$. Pri lineárnom regulátore, teda keď je jednoznačné, že parameter $k$ je konštanta, nemení sa v čase, je $k$ určené jednoduchou podmienkou, ktorá však vyžaduje znalosť parametra sústavy. V prípade riadiaceho systému, kde sa pripúšťa, že $k$ sa môže (a má!) meniť v čase (adaptovať sa) je $k$ v každom čase určené predpisom v tvare diferenciálnej rovnice.

## 1.1 MRAC

Na princípe riadenia s referenčným modelom je založená široká trieda metód adaptívneho riadenia nazývaná *Adaptívne riadenie s referenčným modelom* čo je prekladom z angličtiny: *Model Reference Adaptive Control – MRAC*. Niekedy sa zvykne takýto systém riadenia skratkou MRAS – Model Reference Adaptive System.

Pri adaptívnom riadení s referenčným modelom obsahuje riadiaci systém bežnú spätnoväzbovú slučku, v ktorej sú riadený systém a regulátor. Ako už bolo uvedené ďalšia spätnoväzbovú slučka v systéme mení parametre regulátora. Bežná spätnoväzbová slučka sa niekedy nazýva aj vnútorná slučka a spätnoväzbová slučka pre nastavovanie parametrov regulátora sa nazýva vonkajšia slučka. V tomto prípade je spätnou väzbou vo vonkajšej slučke rozdiel medzi výstupom riadeného systému a referenčného modelu, ktorý sa nazýva *adaptačná odchýlka*, označuje sa $e$.

Mechanizmus, ktorý adaptuje parametre regulátora (zákona riadenia) môže byť v adaptívnom riadení s referenčným modelom získaný dvomi spôsobmi. Použitím gradientnej metódy alebo použitím Lyapunovovej teórie stability. Oba prípady sú predmetom ďalších častí, pričom prvý uvedený je označený ako MRAC – gradientntný.

# 2 MIT algoritmus adaptácie: MRAC gradientný

Takzvané MIT pravidlo (MIT rule) je pôvodný mechanizmus adaptácie používaný v adaptívnom riadení s referenčným modelom. Názov vyplýva zo skutočnosti, že bol vyvinutý na MIT (Massachusetts Institute of Technology). Základnú myšlienku vyjadríme v nasledujúcom príklade.

Uvažujme, pre riadenie systému s výstupom $y$ je použitý regulátor s jedným nastaviteľným parametrom $\Theta$. Želané správanie uzavretého regulačného obvodu je špecifikované pomocou referenčného modelu, ktorého výstup je veličina $y_m$. Nech $e = y - y_m$ je adaptačná odchýlka. Jednou z možností ako postupovať pri nastavovaní parametra $\Theta$ je meniť ho tak aby sa účelová funkcia v tvare

$$J(\Theta) = \frac{1}{2}e^2 \tag{1}$$

minimalizovala. Pre zníženie hodnoty funkcie $J$, je rozumné meniť parameter $\Theta$ proti smeru derivácie $J$ podľa $\Theta$ (gradientu funkcie), teda zmenu parametrov možno vyjadriť v tvare

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t} = -\alpha \frac{\partial J}{\partial \Theta} = -\alpha e \frac{\partial e}{\partial \Theta} \tag{2}$$

kde $\alpha > 0$ je voliteľný parameter pre nastavenie veľkosti zmeny adaptovaného parametra a teda rýchlosti adaptácie, nazýva sa aj *adaptačné zosilnenie*. Toto je princíp slávneho MIT algoritmu adaptácie parametrov regulátora.

Tento algoritmus možno použiť aj keď regulátor obsahuje viac ako jeden parameter. Potom $\Theta$ nie je skalár ale vektor a výraz $\frac{\partial J}{\partial \Theta}$ je skutočne gradientom.

Tiež je možné algoritmus modifikovať použitím inej účelovej funkcie, pričom princíp ostáva zachovaný.

Parciálna derivácia $\frac{\partial e}{\partial \Theta}$ sa nazýva *citlivostná funkcia*, hovorí o tom ako veľmi je adaptačná odchýlka $e$ ovplyvnená zmenou parametrov regulátora. Túto funkciu je možné vyjadriť pri predpoklade, že zmeny parametrov regulátora sú o veľa pomalšie ako zmeny všetkých ostatných veličín v systéme. Potom parametre regulátora môžme považovať za nezávislé od času. V ďalšom sa ukáže, že citlivostné funkcie často (nie vždy ako ukazuje nasledujúca časť) obsahujú parametre sústavy a teda neznáme parametre. Preto ich nie je možné priamo použiť a je potrebné nájsť ich vhodnú aproximáciu, takú, ktorá neobsahuje neznáme parametre.

## 2.1 Príklad: Adaptácia dopredného zosilnenia

Uvažujme riadený systém daný prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k}{s+1} \tag{3}$$

kde $k$ je neznámy parameter, ale znamienko parametra $k$ je známe. Úlohou je nájsť dopredný regulátor, ktorý spolu s prenosovou funkciou bude tvoriť systém špecifikovaný referenčným modelom. Referenčný model je definovaný v tvare prenosovej funkcie

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = \frac{k_m}{s+1} \tag{4}$$

Uvažujme zákon riadenia v tvare

$$u = \Theta r \tag{5}$$

kde $u$ je akčný zásah (vstup riadeného systému) a $r$ je žiadaná hodnota. Tento zákon riadenia umožní, že prenosová funkcia zo žiadanej hodnoty $r$ na výstupnú veličinu $y$ je v tvare

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{k\Theta}{s+1} \tag{6}$$

Prenosová funkcia (6) sa zhoduje s prenosovou funkciou referenčného modelu (4) ak

$$\Theta^\star = \frac{k_m}{k} \tag{7}$$

kde parameter regulátora je označený symbolom $^\star$ pretože je to ideálna hodnota, pri ktorej je cieľ riadenia splnený. Táto hodnota však nie je známa, pretože $k$ nie je známe. Veľmi dôležité však je, že sme tým ukázali existenciu takej hodnoty. Ak by ani teoreticky neexistovala ideálna hodnota parametra regulátora, ktorú adaptujeme, samotná adaptácia by nemala zmysel. Rovnica (7) sa nazýva podmienka zhody a pri návrhu adaptívneho riadenia je vždy dôležité ukázať, že podmienky zhody existujú a že majú riešenie.

Pre návrh zákona adaptácie teraz použijeme MIT algoritmus. Adaptačná odchýlka je

$$e = y - y_m \tag{8a}$$

$$e = \frac{k\Theta}{s+1} r - y_m \tag{8b}$$

Pretože $\Theta$ považujeme za nezávislú od času, môžme písať

$$\frac{\partial e}{\partial \Theta} = \frac{k}{s+1} r \tag{9}$$

čo je citlivostná funkcia potrebná, ako už vieme, v zákone adaptácie podľa MIT algoritmu. Obsahuje však neznáme $k$. Ak poznáme znamienko $k$ môže byť toto zosilnenie absorbované do adaptačného zosilnenia $\alpha$. Hodnota $\alpha$ je ľubovolná, preto nie je potrebné poznať presnú hodnotu $k$, len jeho znamienko, aby bolo možné správne zvoliť znamienko konštanty $\alpha$ a zabezpečiť záporné výsledné znamienko v zákone adaptácie. Predpokladali sme, že znamienko $k$ je známe. Preto je možné citlivostnú funkciu použiť v zákone adaptácie tak ako je, okrem zosilnenia $k$. Nie je potrebná žiadna aproximácia ako v iných prípadoch, napríklad v príklade v nasledujúcej časti.

Zákon adaptácie potom je

$$s\Theta = -\alpha e \frac{\partial e}{\partial \Theta} \tag{10}$$

kde $s$ predstavuje operátor derivácie podľa času. Po dosadení (9):

$$s\Theta = -\alpha k e \frac{1}{s+1} r = -\alpha e y_m \tag{11}$$

Keďže máme predpis pre zmenu adaptovaného parametra, zákon adaptácie, stačí už len integrovať výstup zákona adaptácie a získame tak signál adaptovaného parametra zákona riadenia.

Všimnime si, že v tomto bode na základe uvedeného nemôžme urobiť žiadne závery o stabilite celého adaptívneho systému.

Prípad, keď je potrebné aproximovať citlivostnú funkciu, pretože obsahuje viac neznámych parametrov riadeného systému je opísaný, spolu s ďalšími detailmi, v nasledujúcej časti.

## 2.2 Príklad: Statický systém 1. rádu

Nech riadený systém je daný prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0}{s+a_0} \tag{12}$$

teda statický systém 1. rádu.

Vo všeobecnosti sú parametre $a_0$ a $b_0$ neznáme, alebo sa menia v čase (tak, že je možné uplatniť adaptívne riadenie v rozsahu tohto kurzu). Pre potreby numerickej simulácie nech sa použijú hodnoty $a_0 = 0,55$ a $b_0 = 1,0$.

Nech zákon riadenia je v tvare

$$u = \Theta_1 y + \Theta_2 r \tag{13}$$

### 2.2.1 Návrh adaptívneho riadiaceho systému

Navrhnime adaptívny riadiaci systém s využitím gradientného algoritmu adaptácie (MRAC — gradientný). Pri tom nech referenčný model je v tvare

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = \frac{b_m}{s+a_m} \tag{14}$$

kde $a_m = 1,0$ a $b_m = 1,0$.

V prvom rade, je vôbec možné, aby sa, v zmysle riadenia s referenčným modelom, zhodoval uzavretý regulačný obvod (URO) s referenčným modelom? Zostavme URO:

$$y = \frac{b_0}{(s+a_0)} u \tag{15a}$$

$$y = \frac{b_0}{(s+a_0)} \left(\Theta_1 y + \Theta_2 r\right) \tag{15b}$$

$$y = \frac{b_0 \Theta_1 y}{(s+a_0)} + \frac{b_0 \Theta_2 r}{(s+a_0)} \tag{15c}$$

$$(s+a_0)\, y = b_0 \Theta_1 y + b_0 \Theta_2 r \tag{15d}$$

$$(s+a_0)\, y - b_0 \Theta_1 y = b_0 \Theta_2 r \tag{15e}$$

$$(s+a_0-b_0\Theta_1)\, y = b_0 \Theta_2 r \tag{15f}$$

$$y = \frac{b_0 \Theta_2}{(s+a_0-b_0\Theta_1)} r \tag{15g}$$

$$\frac{y}{r} = \frac{b_0 \Theta_2}{(s+a_0-b_0\Theta_1)} \tag{15h}$$

Je potrebné zistiť, kedy, a či vôbec, sa bude prenosová funkcia (15h) zhodovať s referenčným modelom (14). Je očividné, že ak by boli parametre zákona riadenia $\Theta_1$ a $\Theta_2$ také, že

$$a_0 - b_0 \Theta_1^\star = a_m \tag{16a}$$

$$b_0 \Theta_2^\star = b_m \tag{16b}$$

teda

$$\Theta_1^\star = \frac{-a_m + a_0}{b_0} \tag{17a}$$

$$\Theta_2^\star = \frac{b_m}{b_0} \tag{17b}$$

potom by sa URO a RM zhodovali.

Rovnice (17) sú podmienkami zhody. Nie len, že existujú, ale sú aj riešiteľné. To znamená, že má význam pokúšať sa adaptovať zákon riadenia s daným cieľom, pretože je možné teoreticky dosiahnuť zhodu medzi URO a referenčným modelom.

### Neadaptívny zákon riadenia (len tak mimochodom)

Využiť podmienky zhody (17) by sme mohli, ak by sme poznali parametre riadeného systému $a_0$ a $b_0$. My ich poznáme, keďže sme si ich vyššie uviedli pre potreby numerickej simulácie. Preto sa na chvíľu nevenujme adaptívnemu zákonu riadenia a otestujme neadaptívny, teda taký, ktorého parametre sú dané podmienkami zhody (17). Po dosadení čísiel platí

$$\Theta_1^\star = 1 \tag{18a}$$

$$\Theta_2^\star = -0,45 \tag{18b}$$

S využitím týchto parametrov zákona riadenia sa URO zhoduje s referenčným modelom, čo ilustruje obr. 3.

Späť k prípadu, keď navrhujeme adaptívny riadiaci systém s využitím gradientného prístupu, inými slovami, s využitím MIT pravidla. Pripomeňme, že zákon adaptácie má v tomto prípade vo všeobecnosti tvar

$$\dot{\Theta} = -\alpha e \frac{\partial e}{\partial \Theta} \tag{19}$$

V tomto prípade však máme dva parametre zákona riadenia a teda v tomto prípade je $\Theta$ vektorom, $\Theta^\mathsf{T} = \begin{bmatrix}\Theta_1 & \Theta_2\end{bmatrix}$. Z toho vyplíva, že aj citlivostná funkcia $\frac{\partial e}{\partial \Theta}$ je má dva prvky (je vektorom). V každom prípade, pre nájdenie citlivostnej funckie (citlivostných funkcií) je potrebné vyjadriť adaptačnú odchýlku $e$ tak, aby obsahovala

Obr. 3: Výsledok s použitím podmienok zhody (17).

parametre zákona riadenia $\Theta$. Platí $e = y - y_m$. Ak sa za $y$ dosadí výraz, ktorý opisuje URO, potom

$$e = y - y_m \tag{20a}$$

$$e = \frac{b_0\Theta_2}{(s + a_0 - b_0\Theta_1)} r - y_m \tag{20b}$$

$$e = b_0\Theta_2 \left(s + a_0 - b_0\Theta_1\right)^{-1} r - y_m \tag{20c}$$

Tento výraz potom možno derivovať podľa parametrov zákona riadenia $\Theta_1$ a $\Theta_2$.

Nájdime prvú citlivostnú funkciu $\frac{\partial e}{\partial \Theta_1}$.

$$\frac{\partial e}{\partial \Theta_1} = b_0\Theta_2 \left(-1\right) \left(s + a_0 - b_0\Theta_1\right)^{-2} \left(-1\right) b_0 r \tag{21a}$$

$$\frac{\partial e}{\partial \Theta_1} = b_0 \left(s + a_0 - b_0\Theta_1\right)^{-1} \left(\frac{b_0\Theta_2}{(s + a_0 - b_0\Theta_1)} r\right) \tag{21b}$$

$$\frac{\partial e}{\partial \Theta_1} = \frac{b_0}{(s + a_0 - b_0\Theta_1)} y \tag{21c}$$

Ďalej nájdime druhú citlivostnú funkciu $\frac{\partial e}{\partial \Theta_2}$.

$$\frac{\partial e}{\partial \Theta_2} = b_0 \left(s + a_0 - b_0\Theta_1\right)^{-1} r \tag{22a}$$

$$\frac{\partial e}{\partial \Theta_2} = \frac{b_0}{(s + a_0 - b_0\Theta_1)} r \tag{22b}$$

To bolo ľahké. Akokoľvek, nájdené citlivostné fukcie nevieme realizovať, teda nevieme ich použiť v zákone adaptácie. Pretože obsahujú neznáme parametre riadeného systému, parametre $a_0$ a $b_0$. Aproximujme citlivostné funkcie. Ak $\alpha$ v zákone adaptácie je ľubovolné číslo, potom aj $\alpha\, b_0$ je ľubovolné číslo. Teda hodnotu $b_0$ stačí nahradiť len príslušným znamienkom (potrebujeme poznať znamienko parametra $b_0$). Ďalej, polynóm $(s + a_0 - b_0\Theta_1)$ je charakteristickým polynómom URO. To znamená, že ak by sa URO zhodoval s referenčným modelom, potom by pre tento charakteristický polynóm platilo $(s + a_0 - b_0\Theta_1^\star)$. To ale znamená, že by sa zhodoval s charaketristickým polynómom referenčného modelu. Ak predpokladáme, že URO bude aspoň blízko referenčnému modelu počas celej doby, potom je charakteristický polynóm referenčného modelu vhodnou aproximáciou neznámeho polynómu v citlivostných funkciách. Z uvedeného plynie, že aproximácie citlivostných

funkcií by mohli byť:

$$\frac{\partial e}{\partial \Theta_1} \approx \frac{1}{(s+a_m)}\, y \tag{23a}$$

$$\frac{\partial e}{\partial \Theta_2} \approx \frac{1}{(s+a_m)}\, r \tag{23b}$$

S použitím týchto aproximácií citlivostných funkcií je teraz možné zostaviť zákony adaptácie podľa MIT pravidla, teda:

$$\dot{\Theta} = -\alpha e \frac{\partial e}{\partial \Theta} \tag{24a}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_2 \end{bmatrix} = -\alpha e \begin{bmatrix} \frac{\partial e}{\partial \Theta_1} \\ \frac{\partial e}{\partial \Theta_2} \end{bmatrix} \tag{24b}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_2 \end{bmatrix} = -\alpha e \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+a_m)}\, y \\ \frac{1}{(s+a_m)}\, r \end{bmatrix} \tag{24c}$$

Alebo samostatne zapísané:

$$\dot{\Theta}_1 = -\alpha e \left( \frac{1}{(s+a_m)}\, y \right) \tag{25a}$$

$$\dot{\Theta}_2 = -\alpha e \left( \frac{1}{(s+a_m)}\, r \right) \tag{25b}$$

### 2.2.2 Numerické simulácie

#### Neadaptívny zákon riadenia (len tak mimochodom)

Vráťme sa na moment k prípadu, keď sme sa zaoberali neadaptívnym prípadom. Pre všeobecnú úplnosť, takto vyzerá simulačná schéma, ktorej výsledkom je obrázok 3.

Výpis kódu 1: Súbor `ar04_ss1r_nonadapt.py`

```
def fcn_simSch1(t_start, T_s, finalIndex, sig_r_ext):

    A_m = np.array([[-1]])
    b_m = np.array([[1]])

    A = np.array([[-0.55]])
    b = np.array([[1]])
    c = np.array([[1]])

    ThetaStar = np.array([[b_m[-1, 0]],[A_m[-1, 0] - A[-1, 0]]])

    #-----------------------------------------
    t_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    t_log[0,:] = t_start

    #-----------------------------------------
    x_m_0 = np.array([0])

    x_m_log = np.zeros([finalIndex, len(x_m_0)])
    x_m_log[0,:] = x_m_0

    #-------------------------
    x_0 = np.array([0])

    x_log = np.zeros([finalIndex, len(x_0)])
    x_log[0,:] = x_0

    y_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    y_log[0,:] = np.dot(c, x_0)

    #-------------------------
    u_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    u_log[0,:] = 0

    #-----------------------------------------
    timespan = np.zeros(2)
    for idx in range(1, int(finalIndex)):

```

```
        timespan[0] = t_log[idx-1,:]
        timespan[1] = t_log[idx-1,:] + T_s

        t_log[idx,:] = timespan[-1]

        # ------------
        odeOut = odeint(fcn_LTIS,
                        x_m_log[idx-1,:],
                        timespan,
                        args=(A_m, b_m, sig_r_ext[idx-1,:])
                        )

        x_m_log[idx,:] = odeOut[-1,:]

        # ------------
        odeOut = odeint(fcn_LTIS,
                        x_log[idx-1,:],
                        timespan,
                        args=(A, b, u_log[idx-1,:])
                        )

        x_log[idx,:] = odeOut[-1,:]
        y_log[idx,:] = np.dot(c, x_log[idx,:])

        # --------------------------

        omega = np.array([sig_r_ext[idx-1,:], y_log[idx-1,:]])

        u_log[idx,:] = np.dot(ThetaStar.T, omega)

        # ------------

    return [t_log, x_m_log, x_log, y_log, u_log]

```

Uvedenú simulačnú schému uvádzame bez dodatočného komentára. Niektoré použité prvky sa čitateľovi objasnia až vtedy ak sa oboznámi s ďalšími nasledujúcimi časťami učebného textu.

### Adaptívny riadiaci systém

Zvoľme $\alpha = 0,5$ a nech $\Theta_1(0) = 0$ a $\Theta_2(0) = 0$. Výsledky numerickej simulácie sú na obr. 4.

Simulačná schéma je v tomto prípade implementovaná nasledovne:

Výpis kódu 2: Súbor `ar04_ss1r_adapt.py`

```
def fcn_simSch2(t_start, T_s, finalIndex, sig_r_ext):

    A_m = np.array([[-1]])
    b_m = np.array([[1]])

    A = np.array([[-0.55]])
    b = np.array([[1]])
    c = np.array([[1]])

    #-----------------------------------------
    t_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    t_log[0,:] = t_start

    #-----------------------------------------
    x_m_0 = np.array([0])

    x_m_log = np.zeros([finalIndex, len(x_m_0)])
    x_m_log[0,:] = x_m_0

    #-------------------------
    x_0 = np.array([0])

    x_log = np.zeros([finalIndex, len(x_0)])
    x_log[0,:] = x_0

    y_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    y_log[0,:] = np.dot(c, x_0)

    #-------------------------
    u_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    u_log[0,:] = 0

```

Obr. 4: k časti 2.2.2

```
    xf1_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    xf2_log = np.zeros([finalIndex, 1])

    Theta_log = np.zeros([finalIndex, 2])

    #-----------------------------------------
    timespan = np.zeros(2)
    for idx in range(1, int(finalIndex)):

        timespan[0] = t_log[idx-1,:]
        timespan[1] = t_log[idx-1,:] + T_s

        t_log[idx,:] = timespan[-1]

        # ------------
        # Referencny model realizovany pomocou riadneho ode solevera
        # Takyto ode solver nemusi byt vzdy dostupny z pohladu implemetnacie riadiaceho systemu

        odeOut = odeint(fcn_LTIS,
                        x_m_log[idx-1,:],
                        timespan,
                        args=(A_m, b_m, sig_r_ext[idx-1,:])
                        )

        x_m_log[idx,:] = odeOut[-1,:]

        # ------------
        odeOut = odeint(fcn_LTIS,
                        x_log[idx-1,:],
```

```
                        timespan,
                        args=(A, b, u_log[idx-1,:])
                        )

        x_log[idx,:] = odeOut[-1,:]
        y_log[idx,:] = np.dot(c, x_log[idx,:])

        # -------------------------
        alpha = 0.5

        omega = np.array([sig_r_ext[idx-1,:], y_log[idx-1,:]])
        adaptErr = y_log[idx-1, 0] - x_m_log[idx-1, 0]

        # Tu je numericka integracia realizovana jednoducho sumatorom - treba teda dbat na krok integrovania - teda tu to, co volame periodou vzorkovania
        dxf1 = np.matmul(A_m, xf1_log[idx-1,:]) + np.matmul(b_m, [omega[0,0]])
        xf1_log[idx,:] = xf1_log[idx-1,:] + dxf1 * T_s
        dTheta_1 = -alpha * adaptErr * xf1_log[idx-1,:]

        dxf2 = np.matmul(A_m, xf2_log[idx-1,:]) + np.matmul(b_m, [omega[1,0]])
        xf2_log[idx,:] = xf2_log[idx-1,:] + dxf2 * T_s
        dTheta_2 = -alpha * adaptErr * xf2_log[idx-1,:]

        Theta_log[idx,:] = np.array([
            Theta_log[idx-1, 0] + dTheta_1 * T_s,
            Theta_log[idx-1, 1] + dTheta_2 * T_s,
        ]).T


        u_log[idx,:] = np.dot(Theta_log[idx-1,:], omega)

    return [t_log, x_m_log, x_log, y_log, u_log, Theta_log]

```

Ak by sme takúto simulačnú schému chceli zostaviť v Simulinku, mohla by vyzerať nasledovne:

Obr. 5

## 2.3 Príklad: Systém 2. rádu s astatizmom

Uvažujme riadený systém daný prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s} \tag{26}$$

kde $y(s)$ je obraz výstupného signálu, $u(s)$ je obraz vstupného signálu a $a_1$, $b_0$ sú reálne konštanty – neznáme parametre sústavy. V časovej oblasti je modelom sústavy diferenciálna rovnica v tvare

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) = b_0 u(t) \tag{27}$$

Ide o sústavu druhého rádu s astatizmom. Preto je vhodné použiť pre jej riadenie PD (proporcionálno-derivačný) zákon riadenia v tvare

$$u(s) = \Theta_1 \left(r(s) - y(s)\right) - \Theta_2 s y(s) \tag{28}$$

kde $r$ je žiadaná hodnota. Zákon riadenia (28) vznikne úpravou štandardného PD regulátora v tvare

$$u(s) = \left(\Theta_1 + \Theta_2 s\right) e_r(s) \tag{29}$$

kde $e_r = r - y$ je regulačná odchýlka, pričom sa predpokladá, že $r(t) =$ konšt. a teda $\dot{r}(t) = 0$. V časovej oblasti možno napísať štandardný PD regulátor (29) v tvare

$$u(t) = \Theta_1 \left(r(t) - y(t)\right) + \Theta_2 \left(\dot{r}(t) - \dot{y}(t)\right) \tag{30}$$

a upravený PD zákon riadenia (28) má v časovej oblasti tvar

$$u(t) = \Theta_1 \left(r(t) - y(t)\right) - \Theta_2 \dot{y}(t) \tag{31}$$

Dosadením (28) do (26) získame prenosovú funkciu uzavretého regulačného obvodu (URO) v tvare

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{b_0\Theta_1}{s^2 + \left(a_1 + b_0\Theta_2\right) s + b_0\Theta_1} \tag{32}$$

Referenčný model nech je definovaný takto

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = \frac{b_{0m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{0m}} \tag{33}$$

kde $b_{0m} = a_{0m}$ a $a_{1m}$ sú konštanty. Je zrejmé, že ideálne parametre regulátora sú

$$\Theta_1^\star = \frac{a_{0m}}{b_0} \tag{34}$$

$$\Theta_2^\star = \frac{a_{1m} - a_1}{b_0} \tag{35}$$

Pri ideálnych parametroch je adaptačná odchýlka $e$ nulová

$$e = y - y_m \tag{36}$$

Definujme účelovú funkciu vektora parametrov $\Theta = \begin{bmatrix}\Theta_1 & \Theta_2\end{bmatrix}^T$ v tvare

$$J(\Theta) = \frac{1}{2} e^2(\Theta, t) \tag{37}$$

Pri ideálnych parametroch $\Theta^\star$ je adaptačná odchýlka $e$ nulová a účelová funkcia $J(\Theta)$ nadobúda munimum. Preto navrhnime zákon adaptácie parametrov $\Theta$ tak aby sme sa pri ich zmene (adaptácii) pohybovali proti smeru gradientu (vzhľadom na parametre $\Theta$) kvadratickej účelovej funkcie a teda zmenšovali hodnotu účelovej funkcie pretože sa tak približujeme k jej extrému – minimu. Potom aj adaptačná odchýlka $e$ sa bude zmenšovať a výstupná veličina $y$ bude sledovať priebeh veličiny $y_m$, čo je cieľom riadenia. Zákon adaptácie nech má tvar

$$\dot{\Theta} = -\alpha \frac{\partial J}{\partial \Theta} \tag{38}$$

kde $\frac{\partial J}{\partial \Theta}$ je gradient $J$ vzhľadom na parametre $\Theta$ a určuje kladný smer, preto je použité znamienko mínus, čím dostávame smer „proti gradientu“ a $\alpha$ je ľubovolná kladná konštanta, ktorá umožňuje nastaviť „krok“ pohybu, presnejšie rýchlosť pohybu proti

smeru gradientu. Parameter $\alpha$ sa v adaptívnom riadení nazýva *rýchlosť adaptácie* alebo aj *adaptačné zosilnenie*.

Vyjadrime $\frac{\partial J}{\partial \Theta}$ v tvare

$$\frac{\partial J}{\partial \Theta} = \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\frac{1}{2}e^2(\Theta,t)\right) = \frac{1}{2}2e(\Theta,t)\frac{\partial e(\Theta,t)}{\partial \Theta} = e\frac{\partial e}{\partial \Theta} \tag{39}$$

potom zákon adaptácie je v tvare

$$\dot{\Theta} = -\alpha e\frac{\partial e}{\partial \Theta} \tag{40}$$

Rovnicu (36) možno písať v tvare

$$\begin{aligned} e &= \frac{b_0\Theta_1}{s^2 + (a_1 + b_0\Theta_2)\, s + b_0\Theta_1} r - y_m \\ &= b_0\Theta_1 \left(s^2 + (a_1 + b_0\Theta_2)\, s + b_0\Theta_1\right)^{-1} r - y_m \end{aligned} \tag{41}$$

Parciálna derivácia rovnice (41) podľa prvého parametra $\Theta_1$ je

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial \Theta_1} &= \Big((b_0)\left(s^2 + (a_1 + b_0\Theta_2)\, s + b_0\Theta_1\right)^{-1} \\ &\quad - (b_0\Theta_1)\left(s^2 + (a_1 + b_0\Theta_2)\, s + b_0\Theta_1\right)^{-2} b_0\Big) r \\ &= \Big(b_0\left(s^2 + (a_1 + b_0\Theta_2)\, s + b_0\Theta_1\right)^{-1} \\ &\quad \cdot \left(1 - b_0\Theta_1\left(s^2 + (a_1 + b_0\Theta_2)\, s + b_0\Theta_1\right)^{-1}\right)\Big) r \\ &= b_0\left(s^2 + (a_1 + b_0\Theta_2)\, s + b_0\Theta_1\right)^{-1}(r - y) \end{aligned} \tag{42}$$

a parciálna derivácia rovnice (41) podľa druhého parametra $\Theta_2$ je

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial \Theta_2} &= \Big(b_0\Theta_1(-1)\left(s^2 + (a_1 + b_0\Theta_2)\, s + b_0\Theta_1\right)^{-2}(b_0 s)\Big) r \\ &= -(b_0 s)\left(s^2 + (a_1 + b_0\Theta_2)\, s + b_0\Theta_1\right)^{-1} y \end{aligned} \tag{43}$$

Citlivostné funkcie (42) a (43) obsahujú neznáme parametre sústavy a tiež nateraz neznáme parametre regulátora a preto ich nie je možné použiť. Všimnime si, že ak by mali parametre regulátora práve ideálnu hodnotu, teda $\Theta_1 = \Theta_1^\star$ a $\Theta_2 = \Theta_2^\star$ potom platí

$$s^2 + (a_1 + b_0\Theta_2)\, s + b_0\Theta_1 = s^2 + a_{1m}s + a_{0m} \tag{44}$$

A ďalej, ak poznáme znamienko konštanty $b_0$ môže byť toto zosilnenie absorbované do adaptačného zosilnenia $\alpha$. Hodnota $\alpha$ je ľubovolná, preto nie je potrebné poznať presnú hodnotu $b_0$, len jeho znamienko, aby bolo možné správne zvoliť znamienko konštanty $\alpha$ a zabezpečiť záporné výsledné znamienko v zákone adaptácie. Uvážením uvedeného môžeme citlivostné funkcie aproximovať nasledovne

$$\frac{\partial e}{\partial \Theta_1} = \frac{1}{(s^2 + a_{1m}s + a_{0m})}(r - y) \tag{45}$$

$$\frac{\partial e}{\partial \Theta_2} = \frac{-s}{(s^2 + a_{1m}s + a_{0m})} y \tag{46}$$

Zákony adaptácie pre jednotlivé parametre sú potom v tvare

$$\Theta_1 s = -\alpha_1\left(\frac{1}{(s^2 + a_{1m}s + a_{0m})}(r - y)\right) e \tag{47}$$

$$\Theta_2 s = -\alpha_2\left(\frac{-s}{(s^2 + a_{1m}s + a_{0m})} y\right) e \tag{48}$$

kde sme zaviedli samostatné adaptačné zosilnenia $\alpha_1$ a $\alpha_2$ pre oba zákony adaptácie, čo umožní ich lepšie naladenie.

Obr. 6: Simulácia pri $v = 5$ [m/s], viď text v časti 2.3.1

### 2.3.1 Numerické simulácie

Pri návrhu autopilota pre kormidlovanie nákladnej lode sa používa zjednodušený model lode tzv. Nomotov (K. Nomoto – vedec, ktorý sa zaoberal návrhom autopilota pre lode) model, ktorý má tvar prenosovej funkcie:

$$\varphi(s) = \frac{\frac{K}{\tau_1}}{s^2 + \frac{1}{\tau_1}s}\,\delta(s) \tag{49}$$

kde $\varphi(s)$ je uhol natočenia lode v radiánoch (azimut, kurz lode), $\delta$ je uhol vychýlenia kormidla (riadiaca plocha väčšinou v zadnej časti lode ponorená vo vode) v radiánoch. Parametre v prenosovej funkcii (49) sú definované nasledovne

$$K = K_0 \frac{v}{L} \tag{50}$$

$$\tau_1 = \tau_{10} \frac{L}{v} \tag{51}$$

kde $v$ je rýchlosť lode v smere danom uhlom $\varphi(s)$ v metroch za sekundu, $L$ je dĺžka lode v metroch a $K_0$, $\tau_{10}$ sú konštanty závislé na veľkom množstve faktorov (typ lode atď.) Uvažujme nákladnú loď danú parametrami v Tabuľke 1.

Obr. 7: Simulácia pri $v = 2$ [m/s], viď text v časti 2.3.1

Tabuľka 1: Parametre lode

| Parameter | Hodnota |
|---|---|
| $L$ | 161 m |
| $K_0$ | $-3,86$ |
| $\tau_{10}$ | $5,66$ |
| $v$ | 5 m s$^{-1}$ |

Požiadavky na dynamiku kormidlovania nákladnej lode nech sú definované referenčným modelom v tvare prenosovej funkcie:

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = \frac{0,0025}{s^2 + 0,1s + 0,0025} \tag{52}$$

kde $r$ je referenčný kurz (rozkaz kapitána) a $y_m$ je požadovaná reakcia lode (priebeh zmeny kurzu).

Je zrejmé, že uvedený opis riadeného systému (lode) a požiadavky na riadiaci systém dané referenčným modelom sa zhodujú so všeobecným zápisom so začiatku tohto príkladu – opis návrhu adaptívneho riadiaceho systému je teda v časti 2.3.

### Simulácia 1

Zrealizujme akési „vzorové výsledky“, ktoré získame pri uvažovaní rýchlosti lode $v = 5$ [m/s]. Tieto výsledky sú uvedené na obr. 6. Pri simulácii boli použité (voliteľné) hodnoty $\alpha_1 = 0,025$ a $\alpha_2 = 25$.

Obr. 8: Simulácia pri $v = 8$ [m/s], viď text v časti 2.3.1

**Simulácia 2**

Zmeňme simulovanú rýchlosť lode na $v = 2$ [m/s], teda znížime rýchlosť. Pre tento prípad sú výsledky na obr. 7.

**Simulácia 3**

Ak zvýšime rýchlosť lode na $v = 8$ [m/s], tak sa dosiahnu výsledky ako na obr. 8.

**Simulácia 4**

V predchádzajúcom sme síce skúšali rôzne rýchlosti lode $v$ [m/s], avšak počas celej simulácie bola rýchlosť $v$ [m/s] konštantná. Uvažujme prípad, keď sa bude rýchlosť $v$ [m/s] v čase meniť. Táto časová zmena je zobrazená na obr. 9.

Obr. 9

Obr. 10: Simulácia pri $v$ [m/s] podľa obr. 9 pričom parametre zákona riadenia sa neadaptujú.

Rýchlosť sa postupne zmení z hodnoty 5 [m/s] na hodnotu 2 [m/s]. Ak by sme „nastavili“ parametre zákona riadenia tak aby bol cieľ riadenia splnený pri rýchlosti 5 [m/s] a potom ich už nezmenili (neadaptovali), potom by výsledok vyzeral ako na obr. 10.

Nech sú začiatočné parametre zákona riadenia také aby bol cieľ riadenia splnený pri rýchlosti 5 [m/s] ale v tomto prípade uvažujme aj zákon adaptácie – teda parametre zákona riadenia sa môžu adaptovať. Potom výsledok môže vyzerať ako na obr. 11 (nech to pritom ilustruje vhodné nastavenie celkového adaptívneho riadiaceho systému).

# 3 Otázky a úlohy

1. Aká je úloha referenčného modelu v riadení s referenčným modelom?
2. Ktorý signál je vstupom referenčného modelu?
3. Nakreslite principiálnu schému Adaptívneho riadenia s referenčným modelom.
4. Čo znamená skratka MRAC?
5. V krátkosti vysvetlite mechanizmus adaptácie parametrov regulátora, ktorý využíva MIT algoritmus adaptácie (MIT rule).

Obr. 11: Simulácia pri $v$ [m/s] podľa obr. 9 pričom parametre zákona riadenia sa adaptujú.

6. Model riadeného systému je zadaný v tvare prenosovej funkcie:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0}{s}$$

kde $y$ je výstup, $u$ je vstup, $b_0 > 0$ je neznámy parameter systému. Cieľom riadenia je aby výstup $y$ sledoval výstup referenčného modelu $y_m$, ktorý je daný prenosovou funkciou

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = \frac{b_m}{s + a_m}$$

kde $r$ je referenčný signál, $a_m = b_m > 0$ sú známe konštanty. Uvažujte použitie zákona riadenia v tvare

$$u = \Theta(r - y)$$

kde $\Theta$ je parameter zákona riadenia, ktorý je potrebné adaptovať.

Navrhnite zákon adaptácie použitím gradientnej metódy.

7. Podľa Vášho názoru, akú najväčšiu výhodu a nevýhodu má MIT mechanizmus adaptácie využívajúci gradientnú metódu.

8. Navrhnite adaptívny riadiaci systém s využitím gradientného algoritmu adaptácie (MRAC — gradientný). Stručne komentujte postup návrhu.

Riadený systém: $\dfrac{y(s)}{u(s)} = \dfrac{k}{s+1}$, kde $k > 0$. Referenčný model: $\dfrac{y_m(s)}{r(s)} = \dfrac{k_m}{s+1}$. Zákon riadenia: $u = \Theta\, r$.

9. Navrhnite adaptívny riadiaci systém s využitím gradientného algoritmu adaptácie (MRAC — gradientný). Stručne komentujte postup návrhu.

   Riadený systém: $\dfrac{y(s)}{u(s)} = \dfrac{k}{s}$, kde $k > 0$. Referenčný model: $\dfrac{y_m(s)}{r(s)} = \dfrac{c_m}{s+c_m}$. Zákon riadenia: $u = \Theta\,(r - y)$.

10. Navrhnite adaptívny riadiaci systém s využitím gradientného algoritmu adaptácie (MRAC — gradientný). Stručne komentujte postup návrhu.

    Riadený systém: $\dfrac{y(s)}{u(s)} = \dfrac{b}{s+a}$, kde $b > 0$. Referenčný model: $\dfrac{y_m(s)}{r(s)} = \dfrac{b_m}{s+a_m}$. Zákon riadenia: $u = \Theta_1\, y + \Theta_2\, r$.

# MRAC stavový

## Obsah


**1 Stavový regulátor** **1**

**2 MRAC so stavovou štruktúrou riadenia** **4**
2.1 Frobeniov kanonický tvar matice $A$ . . . . . 4
2.2 Model riadeného systému a referenčný model . . . . . 4
2.3 Zákon riadenia . . . . . 5
2.4 Zákon adaptácie . . . . . 5
2.5 Súhrn . . . . . 8

**3 Príklad: Systém 2. rádu vo všeobecnosti** **8**

**4 Príklad: Kyvadlo** **10**
4.1 Celkový pohľad na úlohu . . . . . 10
4.2 Riadený systém (z hľadiska návrhu riadiaceho systému) . . . . . 10
4.3 Návrh adaptívneho riadiaceho systému . . . . . 13
4.3.1 Vytvorenie predstavy o nastavení rýchlosti adaptácie . . . . . 15
4.4 Nasadenie na uvažovaný nelineárny systém . . . . . 16

**5 Otázky a úlohy** **18**


V tejto časti využijeme pri návrhu mechanizmu adaptácie Lyapunovovu teóriu stability. Najprv je však potrebné opísať neadaptívny riadiaci systém, ktorý neskôr doplníme zákonom adaptácie.

## 1 Stavový regulátor

Uvažujme riadený systém, ktorý je zadaný nasledujúcou sústavou rovníc

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad x_1(0) = 0 \tag{1a}$$
$$\dot{x}_2 = -a_1 x_2 - a_0 x_1 + b_0 u \qquad x_2(0) = 0 \tag{1b}$$
$$y = x_1 \tag{1c}$$

kde $y(t)$ je výstupná veličina riadeného systému, $u(t)$ je vstupná veličina (akčný zásah), $x_1(t)$, $x_2(t)$ sú stavové veličiny systému a $a_0$, $a_1$, $b_0$ sú reálne konštanty – parametre riadeného systému. Rovnice (1) je možné zapísať v maticovom tvare:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \tag{2a}$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{2b}$$

Tvar (2) budeme nazývať *opis v stavovom priestore* (alebo skrátene: stavový opis). Vstupno výstupný opis systému (1) v tvare prenosovej funkcie je

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left( s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{3}$$

Navrhnime *stavový regulátor*, ktorý zabezpečí, že stavový opis uzavretého regulačného obvodu sa zhoduje so stavovým opisom referenčného modelu. Inými slovami,

nech priebeh stavových veličín URO, ktorými sú stavové veličiny riadeného systému, je zhodný s priebehom stavových veličín referenčného modelu. Uvažujme teda referenčný model s rovnakým počtom veličín (stavových, výstupných, vstupných) ako riadený systém v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1m} \\ \dot{x}_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{0m} & -a_{1m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{0m} \end{bmatrix} r \tag{4a}$$

$$y_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \end{bmatrix} \tag{4b}$$

kde $y_m(t)$ je vystupná veličina referenčného modelu, $r(t)$ je referenčný signál (podobne ako žiadaná hodnota), $x_{1m}(t)$, $x_{2m}(t)$ sú stavové veličiny referenčného modelu a $a_{0m}$, $a_{1m}$, $b_{0m}$ sú reálne konštanty – parametre referenčného modelu.

Stavový regulátor (stavový zákon riadenia) v tvare

$$u = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + l\, r \tag{5}$$

kde $k_1$, $k_2$, $l$ sú reálne konštanty – parametre regulátora (zosilnenia regulátora) spĺňa danú úlohu ako plynie z nasledujúceho.

Dosadením zákona riadenia (5) do stavového opisu riadeného systému (2) sa získa stavový opis uzavretého regulačného obvodu v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + l\, r \right) \tag{6a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{6b}$$

a po úpravách (rovnicu výstupnej veličiny neuvádzame, pretože sa nemení)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} l\, r \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_0 k_1 & b_0 k_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 l \end{bmatrix} r \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 + b_0 k_1 & -a_1 + b_0 k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 l \end{bmatrix} r \tag{9}$$

Ak žiadame $x_1 = x_{1m}$ a $x_2 = x_{2m}$ potom z porovnania (9) a (4a) plynie

$$-a_0 + b_0 k_1 = -a_{0m} \tag{10a}$$

$$-a_1 + b_0 k_2 = -a_{1m} \tag{10b}$$

$$b_0 l = b_{0m} \tag{10c}$$

odkiaľ

$$k_1 = \frac{-a_{0m} + a_0}{b_0} \tag{11a}$$

$$k_2 = \frac{-a_{1m} + a_1}{b_0} \tag{11b}$$

$$l = \frac{b_{0m}}{b_0} \tag{11c}$$

sú parametre regulátora (5), ktoré spĺňajú cieľ.

Vyššie uvedené sa zvyčajne zapisuje v kratšom tvare nasledovne. Uvažujeme riadený systém v tvare

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{12a}$$

$$y = c^{\mathsf{T}} x \tag{12b}$$

Obr. 1: Bloková schéma systému (12)

pričom ak v tomto tvare zapisujeme sústavu rovníc (1) potom

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pre prepočet opisu v stavovom priestore (12) na vstupno-výstupný opis v tvare prenosovej funkcie platí vzťah

$$\frac{y(s)}{u(s)} = c^{\mathsf{T}} \left(sI - A\right)^{-1} b \tag{13}$$

Systém rovníc (12) možno vyjadriť blokovou schémou na Obr. 1.

Podobne referenčný model

$$\dot{x}_m = A_m x_m + b_m r \tag{14a}$$

$$y_m = c_m^{\mathsf{T}} x_m \tag{14b}$$

kde v predchádzajúcom príklade

$$x_m = \begin{bmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \end{bmatrix} \qquad A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{0m} & -a_{1m} \end{bmatrix} \qquad b_m = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{0m} \end{bmatrix} \qquad c_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zákon riadenia stavového regulátora má vo všeobecnosti tvar

$$u = k^{\mathsf{T}} x + lr \tag{15}$$

kde $k^{\mathsf{T}}$ je vektor parametrov (zosilnení) spätnoväzbového člena a v predchádzajúcom príklade $k^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ a $l$ zosilnenie dopredného člena. V niektorých prípadoch je výhodné zapísať zákon riadenia v tvare

$$u = \Theta^{\mathsf{T}} \omega \tag{16}$$

kde $\Theta$ je vektor parametrov zákona riadenia a $\omega$ je tzv. signálny vektor (vektor obsahujúci signály). V predchádzajúcom príklade je $\Theta^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} k^{\mathsf{T}} & l \end{bmatrix}$ a $\omega^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} x^{\mathsf{T}} & r \end{bmatrix}$. Do tvaru (16) je možné zapísať v podstate akýkoľvek zákon riadenia (regulátor).

Uzavretý regulačný obvod so stavovým regulátorom:

$$\dot{x} = Ax + b\left(k^{\mathsf{T}} x + lr\right) \tag{17a}$$

$$y = c^{\mathsf{T}} x \tag{17b}$$

Po úprave

$$\dot{x} = \left(A + bk^{\mathsf{T}}\right) x + blr \tag{18}$$

Parametre stavového regulátora sa získajú riešením sústavy algebraických rovníc v tvare

$$A + bk^{\mathsf{T}} = A_m \tag{19a}$$

$$bl = b_m \tag{19b}$$

Tieto rovnice sa v adaptívnom riadení nazývajú *podmienky zhody*. Ich splnenie znamená, že URO sa správa rovnako ako referenčný model, a to je cieľom riadenia.

Ďalšou úpravou, v ktorej využijeme funkciu `pinv`(), v rovnakom význame ako sa používa v MATLAB-e, možno priamo vyjadriť parametre stavového regulátora v tvare

$$k^{\mathsf{T}} = \mathtt{pinv}(b)\left(A_m - A\right) \qquad l = \mathtt{pinv}(b) b_m$$

# 2 MRAC so stavovou štruktúrou riadenia

V tejto časti odvodíme adaptívny algoritmus riadenia, ktorý sa zaraďuje do triedy Priame adaptívne riadenie. Pripomeňme Priame adaptívne riadenie:
Model riadeného systému je parametrizovaný pomocou ideálnych parametrov zákona riadenia. To znamená, že rovnica modelu riadeného systému je vyjadrená tak, že obsahuje ideálne parametre zákona riadenia. Pretože najmä tieto parametre sú neznáme, sú priebežne identifikované – adaptované. Výstupom priebežnej identifikácie (zákona adaptácie) sú teda priamo parametre zákona riadenia. Nie je potrebný medzivýpočet ako v prípade nepriameho adaptívneho riadenia.

Pri odvodení zákona riadenia sa v tejto časti bude využívať Ljapunovova priama metóda na rozdiel od využitia gradientného prístupu (aký sa využíva pri MIT pravidle - ktoré sme my nazvali ako MRAC gradientný).

## 2.1 Frobeniov kanonický tvar matice $A$

V tomto prípade uvažujeme zákon riadenia v tvare *stavového regulátora*. To znamená, že predpokladáme riadený systém, ktorého model má štruktúru vhodnú pre použitie práve stavového regulátora. Presnejšie, ak v SISO systéme, napr. (12), opísanom v stavovom priestore má matica $A$ istú kanonickú formu — nazývanú *Frobeniov kanonický tvar matice*, tak existuje riešenie podmienok zhody, akými sú (19). Ak matica $A$ nemá Frobeniov kanonický tvar potom nie je možné splniť podmienky zhody, a teda nie je možné navrhnúť – vypočítať parametre stavového regulátora. Frobeniov kanonický tvar matice vo všeobecnosti je:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{20}$$

Ak poznáme hodnoty parametrov matíc $A$, $b$, $c$, potom je možné prepočítať ľubovoľný tvar matice $A$ do Frobeniovho kanonického tvaru.

Avšak, v adaptívnom riadení sa predpokladá, že parametre systému a teda aj matice $A$ sú neznáme. Preto nie je možné uskutočniť prepočet do Frobeniovho kanonického tvaru – nie je možné nájsť transformačnú maticu. Z toho vyplýva, že MRAC so stavovou štruktúrou riadenia možno použiť napríklad vtedy, keď prirodzeným tvarom modelu riadeného systému je taký, že $A$ má Frobeniov kanonický tvar. Zároveň, samozrejme, stavový vektor musí byť merateľný.

## 2.2 Model riadeného systému a referenčný model

Uvažujme riadený systém, ktorého model má tvar

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{21a}$$

$$y = c^{\mathsf{T}} x \tag{21b}$$

kde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ďalej, $y(t)$ je výstupná veličina riadeného systémy, $u(t)$ je vstupná veličina, $x$ je vektor stavových veličín a $a_0$, $a_1$, $b_0$ sú *neznáme* parametre riadeného systému, ale znamienko parametra $b_0$ je známe.

Cieľom riadenia je zvoliť vhodný algoritmus riadenia, taký že všetky signály uzavretej regulačnej slučky sú ohraničené a stavový vektor $x$ sleduje stavový vektor

referenčného modelu $x_m$ daného v tvare

$$\dot{x}_m = A_m x_m + b_m r \tag{22a}$$
$$y_m = c_m^\mathsf{T} x_m \tag{22b}$$

kde

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{0m} & -a_{1m} \end{bmatrix} \qquad b_m = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{0m} \end{bmatrix} \qquad c_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

kde $y_m(t)$ je vystupná veličina referenčného modelu a $a_{0m}$, $a_{1m}$, $b_{0m}$ sú reálne konštanty – parametre referenčného modelu, ktoré závisia od požiadaviek na správanie sa URO. Referenčný signál $r(t)$ je ohraničený, po častiach spojitý a predpokladá sa, že je zvolený tak (spolu s $a_{0m}$, $a_{1m}$, $b_{0m}$), že priebeh $x_m$ reprezentuje želanú reakciu riadeného systému.

## 2.3 Zákon riadenia

Ako je známe z časti 1, zákon riadenia v tvare

$$u = k^{\star\mathsf{T}} x + l^\star r \tag{23}$$

zabezpečí, že priebeh stavových veličín URO, ktorými sú stavové veličiny riadeného systému, je zhodný s priebehom stavových veličín referenčného modelu ak sú parametre vypočítané z rovníc — z podmienok zhody

$$A + bk^{\star\mathsf{T}} = A_m \tag{24a}$$
$$bl^\star = b_m \tag{24b}$$

Pretože matice $A$ a $b$ obsahujú prvky s neznámou hodnotou, tak zákon riadenia (23) nemôže byť použitý, pretože nie je možné určiť jeho parametre (zosilnenia). Namiesto (23) použijeme zákon riadenia

$$u = k^\mathsf{T}(t) x + l(t) r \tag{25}$$

kde $k(t)$, $l(t)$ sú odhadmi ideálnych parametrov $k^\star$, $l^\star$ v každom čase $t$. Je potrebné nájsť *Zákon adaptácie*, ktorý bude priebežne generovať hodnoty $k(t)$, $l(t)$ tak aby cieľ riadenia bol splnený.

## 2.4 Zákon adaptácie

Prvým krokom pri odvodení zákona adaptácie je parametrizácia riadeného systému pomocou ideálnych parametrov zákona riadenia. Jednoduchým pripočítaním a odpočítaním ideálneho vstupného výrazu $+bk^{\star\mathsf{T}}x + bl^\star r$, ktorý vyplýva z ideálneho zákona riadenia (23) získame

$$\dot{x} = Ax + bk^{\star\mathsf{T}}x + bl^\star r - bk^{\star\mathsf{T}}x - bl^\star r + bu \tag{26}$$

Pretože $A + bk^{\star\mathsf{T}} = A_m$ máme

$$\dot{x} = A_m x + bl^\star r + b\left(u - k^{\star\mathsf{T}}x - l^\star r\right) \tag{27}$$

Definujme tzv. *stavovú adaptačnú odchýlku*

$$e = x - x_m \tag{28}$$

potom

$$\dot{x} - \dot{x}_m = A_m\left(x - x_m\right) + bl^\star r - bl^\star r + b\left(u - k^{\star\mathsf{T}}x - l^\star r\right) \tag{29a}$$
$$\dot{e} = A_m e + b\left(u - k^{\star\mathsf{T}}x - l^\star r\right) \tag{29b}$$

a pri využití všeobecného zápisu zákona riadenia v tvare (16), kde zavedieme $\Theta^{\star\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} k^{\star\mathsf{T}} & l^\star \end{bmatrix}$ a $\omega^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} x^\mathsf{T} & r \end{bmatrix}$

$$\dot{e} = A_m e + b\left(u - \Theta^{\star\mathsf{T}}\omega\right) \tag{30}$$

Rovnica (30) teraz predstavuje model riadeného systému parametrizovaný pomocou ideálnych parametrov zákona riadenia, od ktorého sú zavedením stavovej adaptačnej odchýlky odčítané známe zložky signálu stavových signálov, ktoré vznikli pripočítaním ideálnych vstupných výrazov (tieto zložky sú známe a hlavne ohraničené a teda stabilné). Neznámymi parametrami rovnice (30) sú vektor $\Theta^\star$ ale aj vektor $b$. Hodnoty týchto neznámych vektorov možno získať ich priebežnou identifikáciou.

Rovnica (30) predstavuje skutočný neznámy systém. Zostavíme model rovnice (30) s rovnakou štruktúrou ako rovnica (30), pričom skutočné signály a parametre sú nahradené ich odhadmi

$$\dot{\hat{e}} = A_m \hat{e} + \hat{b}\left(u - \Theta^\mathsf{T}(t)\omega\right) \tag{31}$$

Vstupnými signálmi rovnice (31) sú $\omega$ a $u$. Tieto sú rovnaké aké vstupujú do skutočnej (modelovanej) rovnice (30). Odhadmi neznámich parametrov sú vektor $\hat{b}$ a už vyššie nepriamo zavedený vektor $\Theta(t)$, kde zdôrazňujeme, že ide o funkciu času, pretože sa odhaduje v každom čase $t$. Je zrejmé, že cieľom identifikácie, je nájsť (identifikovať) také parametre $\hat{b}$ a $\Theta(t)$, pri ktorých sa bude odhad adaptačnej odchýlky $\hat{e}$ zhodovať so „skutočnou“ adaptačnou odchýlkou $e$. O tom či sa zhodujú hovorí *chyba odhadu* $\varepsilon = e - \hat{e}$.

Avšak, vstup $u$ je daný zákonom riadenia (25), čo možno zapísať v tvare $u = \Theta^\mathsf{T}(t)\omega$. Súčasne začiatočný stav odhadu $\hat{e}$ je prirodzene zvolený ako nulový $\hat{e}(0) = 0$. To znamená (dosadením za $u$ do (31)), že $\hat{e} = 0; \forall t$ a preto $\varepsilon = e$. Preto pre priebežnú identifikáciu nie je potrebné generovať signál $\hat{e}$, namiesto neho možno použiť priamo adaptačnú odchýlku $e$. Navyše, pretože nie je potrebný $\hat{e}$ tak nie je potrebný ani odhad vektora $\hat{b}$.

Dosadením $u = \Theta^\mathsf{T}(t)\omega$ do (31) máme

$$\dot{e} = A_m e + b\left(\Theta^\mathsf{T}(t)\omega - \Theta^{\star\mathsf{T}}\omega\right) \tag{32}$$

V tomto bode zavedieme chybu nastavenia parametrov zákona riadenia $\theta$

$$\theta = \Theta(t) - \Theta^\star \tag{33}$$

potom

$$\dot{e} = A_m e + b\left(\theta^\mathsf{T}\omega\right) \tag{34}$$

Zostavenie diferenciálnej rovnice (34), ktorá dáva do vzťahu chybu odhadu (identifikácie), ktorou je jednoducho adaptačná odchýlka $e$, a chybu nastavenia parametrov zákona riadenia $\theta$, je významným krokom pri odvodení zákona adaptácie pre priebežné adaptovanie prvkov vektora $\Theta(t)$.

Predpokladáme, že štruktúra zákona adaptácie je daná diferenciálnou rovnicou, všeobecne zapísanou v tvare

$$\dot{\theta} = f\left(e, \omega\right) \tag{35}$$

kde funkcia $f$ má byť určená (je predmetom návrhu). Zákon adaptácie určíme tak, aby systém tvorený diferenciálnymi rovnicami (34) a (35) mal stabilný rovnovážny bod v $e = 0$ a $\theta = 0$, teda v začiatku spoločného priestoru vektora adaptačnej odchýlky $e$ a chyby parametrov $\theta$.

Zvoľme kandidáta na Lyapunovovu funkciu v tvare

$$V = e^\mathsf{T} P e + |b_0| \left(\theta^\mathsf{T}\Gamma^{-1}\theta\right) \tag{36}$$

kde $\Gamma^{-1} = \left(\Gamma^{-1}\right)^\mathsf{T} > 0$ je ľubovolná, *diagonálna*, kladne definitná matica zodpovedajúceho rozmeru a $P = P^\mathsf{T} > 0$ spĺňa Lyapunovovu rovnicu

$$A_m^\mathsf{T} P + P A_m = -Q \tag{37}$$

kde $A_m$ je matica stabilného systému (referenčného modelu) a $Q = Q^\mathsf{T} > 0$ je ľubovolná symetrická kladne definitná matica rovnakého rozmeru ako $A_m$. Zápisom $|b_0|$ značíme absolútnu hodnotu parametra $b_0$.

Každý z členov pravej strany rovnice (36) je tzv. *kvadratická forma*, čo znamená, že je to maticovo zapísaný polynóm. Napríklad v tomto prípade

$$e^\mathsf{T} P e = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = p_1 e_1^2 + p_2 e_2^2 \tag{38}$$

kde sme pre jednoduchosť predpokladali, že $P$ je diagonálna (Rovnako sa však dá postupovať aj pri plnej matici pričom sa ukáže to isté). Príklad (38) predstavuje polynóm, kde vstupnými premennými sú $e_1$, $e_2$ a koeficientami polynómu sú $p_1$ a $p_2$. Je zrejmé, že „výstupom“ polynómu (38) je skalárna hodnota. $e_1$ a $e_2$ sú funkciou času. Časová derivácia výrazu (38) je

$$\frac{\mathrm{d}\left(p_1 e_1^2(t) + p_2 e_2^2(t)\right)}{\mathrm{d}t} = 2p_1 e_1(t)\dot{e}_1(t) + 2p_2 e_2(t)\dot{e}_2(t) \tag{39}$$

Výraz (39) je evidentne možné zapísať v rôznych (maticových) tvaroch

$$2e^\mathsf{T} P \dot{e} = 2\dot{e}^\mathsf{T} P e = \dot{e}^\mathsf{T} P e + e^\mathsf{T} P \dot{e} \tag{40}$$

Podobne možno ukázať vlastnosti všetkých členov (kvadratických foriem) rovnice (36).

Časová derivácia $\dot{V}$ pozdĺž trajektórie systému (34), (35) je

$$\dot{V} = \dot{e}^\mathsf{T} P e + e^\mathsf{T} P \dot{e} + |b_0| \left(\dot{\theta}^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \theta + \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta}\right) \tag{41}$$

Funkcia $V$ a aj jej derivácia $\dot{V}$ sú skalárne funkcie, myslíme tým, že ich závisle premenná („výstupná hodnota“) je skalár, pričom nezávisle premenná („vstupná/é hodnota/y“) môže byť aj vektor.

Pokračujme v úprave derivácie $\dot{V}$

$$\dot{V} = \dot{e}^\mathsf{T} P e + e^\mathsf{T} P \dot{e} + |b_0| \left(2\theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta}\right) \tag{42}$$

Dosadením za $\dot{e}$ (34) a dosadením $\dot{e}^\mathsf{T} = e^\mathsf{T} A_m^\mathsf{T} + \omega^\mathsf{T} \theta b^\mathsf{T}$ do (42)

$$\dot{V} = \left(e^\mathsf{T} A_m^\mathsf{T} + \omega^\mathsf{T} \theta b^\mathsf{T}\right) P e + e^\mathsf{T} P \left(A_m e + b\theta^\mathsf{T} \omega\right) + |b_0| \left(2\theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta}\right) \tag{43}$$

$$\dot{V} = e^\mathsf{T} A_m^\mathsf{T} P e + \omega^\mathsf{T} \theta b^\mathsf{T} P e + e^\mathsf{T} P A_m e + e^\mathsf{T} P b \theta^\mathsf{T} \omega + |b_0| \left(2\theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta}\right) \tag{44}$$

$$\dot{V} = e^\mathsf{T} \left(A_m^\mathsf{T} P + P A_m\right) e + \omega^\mathsf{T} \theta b^\mathsf{T} P e + e^\mathsf{T} P b \theta^\mathsf{T} \omega + |b_0| \left(2\theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta}\right) \tag{45}$$

Platí (podobne ako (40)) $\omega^\mathsf{T} \theta b^\mathsf{T} P e + e^\mathsf{T} P b \theta^\mathsf{T} \omega = 2e^\mathsf{T} P b \theta^\mathsf{T} \omega$, preto

$$\dot{V} = e^\mathsf{T} (-Q) e + 2e^\mathsf{T} P b \theta^\mathsf{T} \omega + |b_0| \left(2\theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta}\right) \tag{46}$$

Prvý člen v derivácii $\dot{V}$ (46) je záporne definitný. Zvyšné dva členy nie sú definitné. Ak by sa tieto členy v rovnici (46) nenachádzali, potom by uvažovaný systém bol stabilný. Tieto členy sa v rovnici (46) nachádzať nebudú ak ich súčet bude nulový. Teda

$$0 = 2e^\mathsf{T} P b \theta^\mathsf{T} \omega + 2\,|b_0|\, \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{47a}$$

$$2\,|b_0|\, \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta} = -2e^\mathsf{T} P b \theta^\mathsf{T} \omega \tag{47b}$$

Platí $b = q\,\mathtt{sign}(b_0)\,|b_0|$, kde $q = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ pričom $q$ má rovnaký rozmer ako $b$. Potom

$$2\,|b_0|\, \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta} = -2e^\mathsf{T} P q\, \mathtt{sign}(b_0)\,|b_0|\, \theta^\mathsf{T} \omega \tag{48a}$$

$$\Gamma^{-1} \dot{\theta} = -e^\mathsf{T} P q\, \mathtt{sign}(b_0) \omega \tag{48b}$$

$$\dot{\theta} = -\Gamma e^\mathsf{T} P q\, \mathtt{sign}(b_0) \omega \tag{48c}$$

Čím sme našli hľadanú funkciu $f$ z rovnice (35). Samotný zákon adaptácie vyplýva z úvahy, že $\theta = \Theta(t) - \Theta^\star$, to znamená že $\dot{\theta} = \dot{\Theta}(t) - \dot{\Theta}^\star$. Avšak $\Theta^\star =$ konšt. a teda $\dot{\Theta}^\star = 0$. Preto $\dot{\theta} = \dot{\Theta}(t)$ a konečne zákon adaptácie je

$$\dot{\Theta} = -\mathtt{sign}(b_0) \Gamma e^\mathsf{T} P q\, \omega \tag{49}$$

Obr. 2: Bloková schéma MRAC so stavovou štruktúrou riadenia

## 2.5 Súhrn

Zhrnutie návrhu Adaptívneho riadenia s referenčným modelom so stavovou štruktúrou zákona riadenia je v Tabuľke 1. Bloková schéma celého systému je na Obr. 2.

# 3 Príklad: Systém 2. rádu vo všeobecnosti

Uvažujme systém, ktorý je zadaný nasledujúcou sústavou rovníc

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad x_1(0) = 0 \tag{50a}$$
$$\dot{x}_2 = -2x_2 - x_1 + 0,5u \qquad x_2(0) = 0 \tag{50b}$$
$$y = x_1 \tag{50c}$$

Tabuľka 1: MRAC so stavovou štruktúrou riadenia — Zhrnutie

| | |
|---|---|
| Riadený systém | $\dot{x} = Ax + bu$<br>$y = c^\mathsf{T}x$ |
| Referenčný model | $\dot{x}_m = A_m x_m + b_m r$<br>$y_m = c_m^\mathsf{T} x_m$ |
| Zákon riadenia | $u = k^\mathsf{T}x + lr$ |
| Podmienky zhody | $A_m = A + bk^{\star\mathsf{T}}$<br>$b_m = bl^\star$ |
| Parametrizácia riadeného systému | $\dot{x} = A_m x + bl^\star r + b\left(u - k^{\star\mathsf{T}}x - l^\star r\right)$ |
| Dynamika adaptačnej odchýlky<br>a odchýlky parametrov zákona riadenia | $\dot{e} = A_m e + b\left(\theta^\mathsf{T}\omega\right)$<br>$\dot{\theta} = f\left(e, \omega\right)$ |
| Zákon adaptácie | $\dot{\Theta} = -\mathtt{sign}(b_0)\Gamma e^\mathsf{T} P q\, \omega$ |

Rovnice (50) je možné zapísať v maticovom tvare:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0,5\end{bmatrix} u \tag{51a}$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \tag{51b}$$

Ide o SISO systém 2. rádu, kde prvá stavová veličina je zároveň aj výstupnou veličinou a znamienko jediného nenulového prvku vektora $b$, teda parametra $b_0$ je + (kladné).

Pre zadaný riadený systém navrhnime adaptívne riadenie s referenčným modelom so stavovou štruktúrou zákona riadenia, pričom referenčný model je v tvare

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{1m}\\ \dot{x}_{2m}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{1m}\\ x_{2m}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix} r \tag{52a}$$

Označme ako zvyčajne

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix}0\\ 0,5\end{bmatrix} \qquad A_m = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix} \qquad b_m = \begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}$$

Je evidentné, že zákon riadenia – stavový regulátor, má v tomto príklade tvar

$$u = \begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + l\, r \tag{53}$$

kde $k_1$, $k_2$, $l$ sú neznáme parametre regulátora (zosilnenia regulátora), ktoré sa budú adaptovať tak aby sa priebeh stavových veličín uzavretého regulačného obvodu zhodoval s priebehom stavových veličín referenčného modelu.

Ideálne parametre zákona riadenia sú

$$\begin{bmatrix}k_1^\star & k_2^\star\end{bmatrix} = \mathtt{pinv}(b)\,(A_m - A) = \begin{bmatrix}-2 & -2\end{bmatrix} \tag{54}$$

$$l^\star = \mathtt{pinv}(b)\, b_m = 4 \tag{55}$$

Všeobecný tvar zákona adaptácie je

$$\dot{\Theta} = -\mathtt{sign}(b_0)\Gamma e^\mathsf{T} P q\, \omega \tag{56}$$

kde $P = P^\mathsf{T} > 0$ spĺňa Lyapunovovu rovnicu $A_m^\mathsf{T} P + P A_m = -Q$ kde $Q = Q^\mathsf{T} > 0$ je ľubovolná symetrická kladne definitná matica rovnakého rozmeru ako $A_m$. Zvoľme napríklad

$$Q = \begin{bmatrix}10 & 12,5\\ 12,5 & 25\end{bmatrix}$$

Maticu $P$ získame riešením Lyapunovovej rovnice príkazom MATLAB-u

$$P = \mathtt{lyap}\left(A_m^\mathsf{T}, Q^\mathsf{T}\right) = \begin{bmatrix}5 & 2.5\\ 2,5 & 5\end{bmatrix} \tag{57}$$

Vektor $q$ má len posledný prvok rovný jednej, ostatné sú nulové, a rozmer má rovnaký ako vektor $b$, teda

$$q = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \tag{58}$$

Výsledkom vynásobenia vektora signálov $e^\mathsf{T} = \begin{bmatrix}e_1 & e_2\end{bmatrix}$, matice $P$ a vektora $q$ je skalár (jednoducho signál s rozmerom $1 \times 1$), ktorý keď sa vynásobý so signálnym vektorom $\omega$, ktorý obsahuje tri signály

$$\omega = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ r\end{bmatrix} \tag{59}$$

tak výsledkom je opäť stĺpcový vektor obsahujúci tri signály.

Adaptujeme tri parametre a výstupom zákona adaptácie sú derivácie týchto troch parametrov

$$\dot{\Theta} = \begin{bmatrix} \dot{k}_1 \\ \dot{k}_2 \\ \dot{l} \end{bmatrix} \tag{60}$$

Preto ak matica $\Gamma^{-1} = \left(\Gamma^{-1}\right)^{\mathsf{T}} > 0$ je ľubovolná, *diagonálna*, kladne definitná, potom je taká aj matica $\Gamma$ a v tomto prípade musí mať rozmer $3 \times 3$. Zvoľme

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{61}$$

Pre získanie okamžitých hodnôt parametrov zákona riadenia je potrebné integrovať výstup zákona adaptácie

$$\Theta = \int \dot{\Theta} \, \mathrm{d}t \tag{62}$$

Integrátor môže mať nastavené tzv. začiatočné podmienky. V tomto prípade tieto predstavujú začiatočné hodnoty adaptovaných parametrov. Ak sú začiatočné hodnoty parametrov nastavené práve na ideálne (ktoré však vo všeobecnosti nepoznáme), priebeh stavových veličín riadeného systému hneď na začiatku spĺňa cieľ riadenia a adaptácia nie je potrebná, teda výstupom zákona adaptácie bude nula – čo zodpovedá tomu, že žiadna zmena (derivácia) parametrov regulátora nie je potrebná. Čím sú začiatočné hodnoty bližšie k ideálnym parametrom regulátora, tým skôr sa dosiahne cieľ riadenia.

# 4 Príklad: Kyvadlo

## 4.1 Celkový pohľad na úlohu

Nech riadeným systémom je kyvadlo a nech riadenou veličinou je poloha (uhol) kyvadla. Zároveň, nech riadený systém je daný diferenciálnou rovnicou opisujúcu dynamiku rotačného pohybu kyvadla. Rovnica je v tvare

$$ml^2\ddot{\varphi}(t) + \beta\dot{\varphi}(t) + mgl\sin\varphi(t) = u(t) \tag{63}$$

kde hmotný bod s hmotnosťou $m$ [kg] pripevnený na ramene so zanedbateľnou hmotnosťou a dĺžkou $l$ [m] kmitá (otáča sa okolo osi). Kmity sú tlmené viskóznym trením s koeficientom $\beta$ [kg m$^2$ s$^{-1}$]. Uhol medzi zvislicou a ramenom kyvadla je označený $\varphi$ [rad] a gravitačné zrýchlenie je $g = 9,81$ [m s$^{-2}$]. Signál $u(t)$ [kg m$^2$ s$^{-2}$] je externý moment sily pôsobiaci na rameno kyvadla, $\dot{\varphi}(t)$ [rad s$^{-1}$] je uhlová rýchlosť a $\ddot{\varphi}(t)$ [rad s$^{-2}$] je uhlové zrýchlenie ramena kyvadla. Číselné hodnoty parametrov kyvadla sú nasledovné:

$$\begin{aligned} m &= 1 \quad [\mathrm{kg}] \\ l &= 1 \quad [\mathrm{m}] \\ \beta &= 2 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \quad [\mathrm{kg\ m^2\ s^{-1}}] \end{aligned}$$

Cieľom je riadiť polohu kyvadla v okolí rôznych pracovných bodov. Uvažujme však, že pracovné body sú z intervalu polôh kyvadla 0 až 90 stupňov. Konkrétna voľba pracovných bodov ako aj voľba veľkosti ich okolia sa ponechávajú na čitateľa.

## 4.2 Riadený systém (z hľadiska návrhu riadiaceho systému)

Pre lepšiu predstavu o riadenom systéme ho opíšme v stavovom priestore. Voľbou stavových veličín $x_1(t) = \varphi(t)$ a $x_2(t) = \dot{\varphi}(t)$ máme

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{\beta}{ml^2}x_2(t) - \frac{g}{l}\sin\left(x_1(t)\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u(t) \tag{64a}$$

$$y(t) = x_1(t) \tag{64b}$$

kde sme pre prehľadnosť v nasledujúcom zaviedli aj výstupnú veličinu $y(t) = \varphi(t)$.

Toto je, zjavne, nelineárny časovo-invariantný systém druhého rádu. Tu sa však zaoberáme takou triedou riadiacich systémov, ktoré predpokladajú lineárny model riadeného systému. Jeho parametre môžu byť neznáme (môžu sa meniť), ale musí byť lineárny.

### Linearizácia v okolí pracovného bodu

Uvažovaný riadený systém je možné linearizovať v okolí pracovného bodu.

V prvom rade potrebujeme poznať pracovný bod. Pre zvolenú hodnotu (ustálenú) na vstupe systému, označme ju $u_{PB}$, potrebujeme poznať prislúchajúcu hodnotu (ustálenú) na výstupe, označme ju $y_{PB}$.

Tu máme k dispozícii analytický opis riadeného systému (63). V ustálenom stave (časové derivácie nulové) máme

$$(mgl)\sin(y_{PB}) = u_{PB} \tag{65a}$$

$$y_{PB} = \arcsin\left(\frac{1}{(mgl)}u_{PB}\right) \tag{65b}$$

Toto je, samozrejme, prevodová charakteristika riadeného systému. Nie je to priamka. To znamená, že v jednom pracovnom bode (v okolí jedného pracovného bodu) bude statické zosilnenie (sklon prevodovej charakteristiky) iné, ako v inom pracovnom bode (v okolí iného pracovného bodu).

Mimochodom, zvoľme si veľkosť okolia pracovného bodu. Dobrou pomôckou je grafické zobrazenie prevodovej charakteristiky. To sa ponecháva na čitateľa (autor je lenivý). Tu si zvoľme okolie z veľkosťou $\pm 3$ [°] (cca $0,0524$ [rad]) na strane výstupnej veličiny a buďme s ním spokojný v tom zmysle, že pri takýchto malých odchýlkach si prevodová charakteristika zachováva prakticky rovnaký sklon ako v pracovnom bode.

Ďalej je potrebné zaviesť veličiny, ktoré budú takpovediac odchýlkami odhodnôt v pracovnom bode. Konkrétne

$$\Delta u(t) = u(t) - u_{PB} \tag{66a}$$

$$\Delta y(t) = y(t) - y_{PB} \tag{66b}$$

kde sme teta definovali $\Delta$ odchýlky od pracovného bodu. To znamená, že pôvodné veličiny sú

$$u(t) = u_{PB} + \Delta u(t) \tag{67a}$$

$$y(t) = y_{PB} + \Delta y(t) \tag{67b}$$

$$x_1(t) = x_{1PB} + \Delta x_1(t) \tag{67c}$$

$$x_2(t) = x_{2PB} + \Delta x_2(t) \tag{67d}$$

kde sme rovnako yaviedli „odchýlkové veličiny“ aj pre stavové veličiny so systému (64). Dosaďme v (64), čo v prvom rade znamená, že

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_{1PB} + \Delta x_1(t)\right) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_{2PB} + \Delta x_2(t)\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1(t) \\ \Delta\dot{x}_2(t) \end{bmatrix} \tag{68}$$

pretože $x_{1PB}$ a $x_{2PB}$ su len čísla nezávislé od času. Potom na základe (64) môžme písať

$$\Delta\dot{x}_1(t) = (x_{2PB} + \Delta x_2(t)) \tag{69a}$$

$$\Delta\dot{x}_2(t) = -\frac{\beta}{ml^2}\left(x_{2PB} + \Delta x_2(t)\right) - \frac{g}{l}\sin\left(\left(x_{1PB} + \Delta x_1(t)\right)\right) + \frac{1}{ml^2}\left(u_{PB} + \Delta u(t)\right) \tag{69b}$$

$$\Delta y(t) = \Delta x_1(t) \tag{69c}$$

kde sme zohľadnili, že musi platiť $\Delta y(t) = \Delta x_1(t)$, keďže máme $y(t) = x_1(t)$. Rovnice (69) opisujú stále to isté nelineárne kyvadlo, avšak pomocou iných („odchýlkových“)

veličín. Je to užitočné preto, že tento „nový“ systém má ustálený stav $x_e$ (ekvilibrium) v bode

$$x_e = \begin{bmatrix} \Delta x_{e1} \\ \Delta x_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{70}$$

a to samozrejme pri $\Delta u(t) = 0$. V tomto „novom“ ustálenom stave, očividne, pre pôvodné veličiny platí, že $u(t) = u_{PB}$ a $y(t) = y_{PB}$. Teda systém je ustálený v pracovnom bode. V tomto „novom“ ekvilibriu, je možné systém štandardne linearizovať. Výsledkom je

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1(t) \\ \Delta \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(y_{PB}) & -\frac{\beta}{m\ l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ l^2} \end{bmatrix} \Delta u(t) \tag{71a}$$

$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix} \tag{71b}$$

Toto je lineárny dynamický systém, ktorý je možné zapísať v tvare prenosovej funkcie

$$\frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)} = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{72}$$

kde

$$b_0 = \frac{1}{m\ l^2} \tag{73a}$$

$$a_0 = \frac{g}{l}\cos(y_{PB}) = \frac{g}{l}\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{(mgl)}u_{PB}\right)\right) \tag{73b}$$

$$a_1 = \frac{\beta}{m\ l^2} \tag{73c}$$

Je teda zrejmé, že statické a dynamické vlastnosti tohto lineárneho systému sú závislé od pracovného bodu.

### Ilustrácia potreby adaptácie

Z uvedeného je zrejmé, že statické a dynamické vlastnosti tohto lineárneho systému sú závislé od pracovného bodu. Ak by sme navrhli riadiaci systém, tak, že sa splní cieľ riadenia v okolí jedného pracovného bodu, potom v inom pracovnom bode (v jeho okolí) by tento nespĺňal cieľ riadenia.

Ukážme zmenu vlastností (statických aj dynamických) rideného systému (nelineárneho kavydla), tak, že budeme robiť skokové zmeny v okolí jedného pracovného bodu, a potom v okolí iného pracovného bodu.

Zvoľme pracovné body

$$u_{PB1} = 5 \qquad y_{PB1} = 0,5348\ [\text{rad}] = 30,64\ [\text{deg}] \tag{74a}$$

$$u_{PB2} = 9 \qquad y_{PB2} = 1,1616\ [\text{rad}] = 66,55\ [\text{deg}] \tag{74b}$$

Pre prvý praconý bod $(u_{PB1}, y_{PB1})$ vypočítajme aj parametre lineárneho modelu (platného len v okolí pracovného bodu)

$$b_0 = 1 \tag{75a}$$

$$a_0 = 8,44 \tag{75b}$$

$$a_1 = 3,13 \tag{75c}$$

Simulujme teraz aj nelineárny systém, aj lineárny systém (celý čas s parametrami (75)), pričom vstupom nech sú skokové zmeny v okolí zvolených pracovných bodov. Výsledok je na obr. 3.

V prvom pracovnom bode sa lineárny a nelineárny systém zhodujú ale v druhom už nie. Aby sa zhodoval, musel by lineárny model zmeniť (prispôsobiť) parametre. Inými slovami, parametre modelu riadeného systému sa menia v závislosti od pracovného bodu. Preto je potrebné mať adaptívny riadiaci systém...

Obr. 3: Porovnanie výstupov lineárneho a nelineárneho systému v okolí rôznych pracovných bodov.

#### Dostupnosť stavových veličín

Zároveň si vzhľadom na uvedené dovoľujeme zdôrazniť dostupnosť stavových veličín pre spätnú väzbu. Stavovými veličinami sú poloha a rýchlosť kyvadla. Jednoznačne ide o veličiny, ktoré je možné merať. Pre simuláciu na obr. 3 uvádzame aj explicitné vykreslenie priebehu stavových veličín – viď. obr. 4

### 4.3 Návrh adaptívneho riadiaceho systému

Model riadeného systému sa uvažuje v tvare (71). Ide o SISO systém 2. rádu, kde prvá stavová veličina je zároveň aj výstupnou veličinou a znamienko jediného nenulového prvku vektora $b$, teda parametra $b_0$, je + (kladné). Na parametre riadeného systému opísaného v stavovom priestore sa tu budeme odvolávať klasickým označovaním $A$, $b$ a prípadne $c^\mathsf{T}$.

Pre uvedený riadený systém navrhnime adaptívne riadenie s referenčným modelom so stavovou štruktúrou zákona riadenia, pričom referenčný model nech je v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1m} \\ \dot{x}_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} r \tag{76a}$$

Obr. 4: Porovnanie výstupov lineárneho a nelineárneho systému v okolí rôznych pracovných bodov.

Je zrejmé, že zákon riadenia má v tomto príklade tvar

$$u = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + l\, r \tag{77}$$

kde $k_1$, $k_2$, $l$ sú neznáme parametre regulátora (zosilnenia regulátora), ktoré sa budú adaptovať tak aby sa priebeh stavových veličín uzavretého regulačného obvodu zhodoval s priebehom stavových veličín referenčného modelu.

Ideálne parametre zákona riadenia sú vo všeobecnosti

$$\begin{bmatrix} k_1^\star & k_2^\star \end{bmatrix} = \mathtt{pinv}(b)\,(A_m - A) \tag{78}$$

$$l^\star = \mathtt{pinv}(b) \tag{79}$$

Všeobecný tvar zákona adaptácie je

$$\dot{\Theta} = -\mathtt{sign}(b_0)\Gamma e^\mathsf{T} P q\, \omega \tag{80}$$

kde $P = P^\mathsf{T} > 0$ spĺňa Lyapunovovu rovnicu $A_m^\mathsf{T} P + P A_m = -Q$ kde $Q = Q^\mathsf{T} > 0$ je ľubovolná symetrická kladne definitná matica rovnakého rozmeru ako $A_m$. Zvoľme napríklad

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maticu $P$ získame riešením Lyapunovovej rovnice nástrojom z Python knižnice SciPy, metódou `linalg.solve_continuous_lyapunov()`. Výsledok:

$$P = \begin{bmatrix} 1,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 \end{bmatrix} \tag{81}$$

Vektor $q$ má len posledný prvok rovný jednej, ostatné sú nulové, a rozmer má rovnaký ako vektor $b$, teda

$$q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{82}$$

Výsledkom vynásobenia vektora signálov $e^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix}$, matice $P$ a vektora $q$ je skalár (jednoducho signál s rozmerom $1 \times 1$), ktorý keď sa vynásobý so signálnym vektorom $\omega$, ktorý obsahuje tri signály

$$\omega = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ r \end{bmatrix} \tag{83}$$

tak výsledkom je opäť stĺpcový vektor obsahujúci tri signály.

Adaptujeme tri parametre a výstupom zákona adaptácie sú derivácie týchto troch parametrov

$$\dot{\Theta} = \begin{bmatrix} \dot{k}_1 \\ \dot{k}_2 \\ \dot{l} \end{bmatrix} \tag{84}$$

Preto ak matica $\Gamma^{-1} = \left(\Gamma^{-1}\right)^\mathsf{T} > 0$ je ľubovolná, *diagonálna*, kladne definitná, potom je taká aj matica $\Gamma$ a v tomto prípade musí mať rozmer $3 \times 3$. Zvoľme

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 24000 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 12000 \end{bmatrix} \tag{85}$$

Pre získanie okamžitých hodnôt parametrov zákona riadenia je potrebné integrovať výstup zákona adaptácie

$$\Theta = \int \dot{\Theta}\, \mathrm{d}t \tag{86}$$

Obr. 5

### 4.3.1 Vytvorenie predstavy o nastavení rýchlosti adaptácie

Majme nejakú predstavu o riadenom systéme. V realite azda vždy budeme mať. Tu sa to teraz myslí, tak, že máme aspoň nejakú predstavu o parametroch lineárneho modelu skutočného riadeného systému (nelineárneho kyvadla). Použime tie isté parametre, aké sme už použili pre ilustračné účely, teda hodnoty parametrov (75). Zostavme simulačnú schému MRAC stavového avšak s tým, že riadeným systémom je priamo tento lineárny model. Umožní nám to vytvoriť si predstavu o tom, ako zvoliť maticu $\Gamma$ tak, aby rýchlosť adaptácie bola prijateľná.

Pre začiatok, uvažujme všetky váhy (prvky na diagonále) v $\Gamma$ rovnaké, o veľkosti „aby sa niečo dialo“. V tomto prípade je to

$$\Gamma = \texttt{diag}\left(\begin{bmatrix}1000 & 1000 & 1000\end{bmatrix}\right)$$

a zároveň uvažujeme harmonický signál s relatívne nízkou frekvenciou pre najjednoduchší možný prípad čo sa „obtiažnosti adaptácie“ týka. Výsledok je na obr. 5.

Je zrejmé, že je potrebné ladiť $\Gamma$ tak, aby rýchlosť zmeny adaptovaných parametrov (alebo aspoň väčšiny z nich) bola (aspoň na začiatku) čo najviac rovnaká. Po chvíli experimentovania sa dá dospieť k voľbe

$$\Gamma = \texttt{diag}\left(\begin{bmatrix}24000 & 400 & 12000\end{bmatrix}\right)$$

ako sme už uviedli, a výsledok je na obr. 6.

Obr. 6

Obr. 7

Toto je už uspokojivý priebeh adaptovaných parametrov čo sa rýchlosti adaptácie týka.

Fungovalo by toto nastavenie aj pre iný priebeh referenčného signálu? Viď výsledok na obr. 7. Kupodivu fungovalo.

## 4.4 Nasadenie na uvažovaný nelineárny systém

Fungovalo by toto riadenie aj keby bolo nasadené na nelineárny systém? Teda priamo na nelineárne kyvydlo? Vyskúšajme - viď obr. 8.

Fungovalo... Aj pre obdĺžnikový referenčný signál? Fungovalo... viď obr. 9.

Vyskúšajme teraz simuláciu, kde v čase 100 zmeníme pracovný bod na hodnotu $u_{PB} = 6$ (z pôvodnej hodnoty $u_{PB} = 5$), necháme ustáliť sa kyvadlo v novom pracovnom bode a potom budeme chcieť aby výstup sledoval RM tak ako v predch. pracovnom bode. Avšak, v čase 100 zároveň vypneme adaptáciu. Teda necháme adaptované parametre na hodnote, na ktorej boli v čase 100. Výsledok je na obr. 10.

Obr. 8

Obr. 9

Je zrejmé, že ak bol riadiaci systém naadaptovaný v jednom pracovnom bode, v inom už nespĺňa cieľ radenia.

Zapnime preto adaptáciu aj po prechode do nevého pracovného bodu. Výsledok je na obr. 11. Parametre riadiaceho systému sa adaptovali na nový pracovný bod.

Môžme spraviť aj zmenu na iný pracovný bod, napríklad na $u_{PB} = 9$. Výsledok je na obr. 12.

Obr. 10

Obr. 11

## 5 Otázky a úlohy

1. Parametre riadeného systému sú: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Parametre referenčného modelu sú: $A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $b_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vypočítajte parametre ($k$ a $l$) stavového zákona riadenia $u = k^\mathsf{T} x + l\, r$, ktoré zabezpečia, že $x$ sleduje $x_m$.

Obr. 12

2. Model riadeného systému je zadaný v tvare prenosovej funkcie:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0}{s}$$

kde $y$ je výstup, $u$ je vstup, $b_0 > 0$ je neznámy parameter systému. Cieľom riadenia je aby výstup $y$ sledoval výstup referenčného modelu $y_m$, ktorý je daný prenosovou funkciou

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = \frac{b_m}{s + a_m}$$

kde $r$ je referenčný signál, $a_m = b_m > 0$ sú známe konštanty. Uvažujte použitie zákona riadenia v tvare

$$u = \Theta(r - y)$$

kde $\Theta$ je parameter zákona riadenia, ktorý je potrebné adaptovať.

Navrhnite zákon adaptácie použitím Lyapunovovej teórie stability.

3. Je daný model systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + b_0 u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

kde $a_0, a_1, b_0 > 0$ sú neznáme parametre systému, $u(t)$ je vstup, $y(t)$ je výstup a $x_1(t)$, $x_2(t)$ sú stavové veličiny systému. Tiež je daný referenčný model v tvare

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{1m}(t) \\ \dot{x}_{2m}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{0m} & -a_{1m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1m}(t) \\ x_{2m}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{0m} \end{bmatrix} r(t) \\ y_m(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1m}(t) \\ x_{2m}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

kde $a_{0m}, a_{1m}, b_{0m} > 0$ sú známe parametre referenčného modelu, $r(t)$ je referenčný signál, $y_m(t)$ je výstup a $x_{1m}(t)$, $x_{2m}(t)$ sú stavové veličiny referenčného modelu.

(a) Navrhnite ideálny stavový regulátor pre zadaný systém, ktorý zabezpečí, že stavové veličiny URO sa správajú rovnako ako stavové veličiny referenčného modelu.

(b) Navrhnite priamy adaptívny stavový regulátor pre zadaný systém, ktorý zabezpečí, že stavové veličiny URO asymptiticky sledujú stavové veličiny referenčného modelu a zároveň celý adaptívny uzavretý riadiaci obvod je stabilný.

4. Odvoďte rovnicu dynamiky stavovej adaptačnej odchýlky pre MRAC so stavovou štruktúrou zákona riadenia.

5. Navrhnite adaptívny riadiaci systém so stavovým zákonom riadenia a so zákonom adaptácie navrhnutým pomocou Lyapunovovej teórie stability.

| | |
|---|---|
| Model riadeného systému: | $\dot{x} = A\,x + b\,u$<br>$y = c^{\mathsf{T}} x$ |
| Referenčný model: | $\dot{x}_m = A_m\,x_m + b_m\,r$<br>$y_m = c_m^{\mathsf{T}}\,x_m$ |
| Zákon riadenia: | $u = k^{\mathsf{T}} x + l\,r$ |

6. Nakreslite blokovú schému realizácie adaptívneho riadiaceho systému opísaného nasledovne (podľa možností použite základné bloky ako v simulinku):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= b\,u & b &> 0 \\ \dot{x}_m &= -a_m\,x_m + b_m\,r & a_m &= b_m > 0 \\ u &= \Theta\,\omega & \omega &= r - x \\ \dot{\Theta} &= -\gamma\,\omega\,e & \gamma &> 0 \end{aligned}$$

# MRAC vstupno-výstupný

## Obsah


**1 MRC vo všeobecnosti 2**
1.1 O pozorovateľovi stavu s redukovaným rádom . . . 2
1.2 Formulácia problému riadenia s referenčným modelom . . . 4
1.2.1 Ilustrácia na príklade systému 2. rádu . . . 5
1.2.2 Zovšeobecnenie pre systém $n$. rádu . . . 7
1.3 Teoretický opis výsledného URO v stavovom priestore . . . 7
1.3.1 Ilustrácia na príklade systému 2. rádu . . . 7
1.3.2 Zovšeobecnenie pre systém $n$. rádu . . . 9

**2 Príklad k téme *MRC vo všeobecnosti* 11**
2.1 Úlohy . . . 11
2.2 Riešenie úloh . . . 12
2.2.1 Úloha prvá . . . 12
2.2.2 Úloha druhá . . . 15

**3 SPR prenosové funkcie, MKY lemma 24**
3.1 Striktne pozitívne reálne prenosové funkcie . . . 24
3.2 Meyerova-Kalmanova-Yakubovichova Lemma . . . 24

**4 Adaptačná odchýlka 25**
4.1 Model sústavy a referenčný model . . . 25
4.2 Zákon riadenia . . . 25
4.3 Rovnica adaptačnej odchýlky . . . 26

**5 Zákon adaptácie pri $n^* = 1$ 27**

**6 Zákon adaptácie pri $n^* = 2$ 29**
6.1 Priamočiary postup . . . 29
6.2 Metóda doplnenej odchýlky . . . 32
6.2.1 Prvá možnosť . . . 32
6.2.2 Druhá možnosť . . . 33

**7 Príklad k téme *Zákon adaptácie pri* $n^* = 1$ 34**
7.1 Úlohy . . . 35
7.2 Riešenie úloh . . . 35
7.3 Dodatok k riešeniu (prevažne o nastavovaní rýchlosti adaptácie) . . . 42

**8 Príklad k téme *Zákon adaptácie pri* $n^* = 2$ 45**
8.1 Celkový pohľad na úlohu . . . 46
8.1.1 Celkový pohľad na riadený systém (z hľadiska návrhu riadiaceho systému) 47
8.2 Návrh adaptívneho riadiaceho systému . . . 49
8.2.1 Model riadeného systému . . . 49
8.2.2 Cieľ riadenia a referenčný model . . . 49
8.2.3 Podmienky zhody . . . 49
8.2.4 Otázka relatívneho stupňa riadeného systému . . . 50
8.2.5 Zákon riadenia . . . 51
8.2.6 Zákon adaptácie . . . 52
8.2.7 Vytvorenie predstavy o nastavení rýchlosti adaptácie . . . 54
8.3 Nasadenie na uvažovaný nelineárny systém . . . 55

**9 Otázky a úlohy 57**

# 1 MRC vo všeobecnosti

Mimochodom, MRC je skratka pre *Model Reference Control*.

V predchádzajúcich častiach učebného textu sme uvažovali riadený systém, ktorého stavové veličiny sú merateľné a navyše matica $A$ má Frobeniovu kanonickú formu. To umožnilo použiť zákon riadenia v tvare stavového regulátora. Pre systémy, ktoré nespĺňajú tieto podmienky je potrebné vyvinúť zákon riadenia, ktorý využíva len vstupný a výstupný signál systému (nie sú potrebné stavové veličiny systému), pretože často len tieto sú dostupné. Pritom musia existovať také parametre zákona riadenia, pri ktorých sa model uzavretého regulačného obvodu zhoduje s referenčným modelom (dostatočná štrukturálna flexibilita zákona riadenia). Je tiež dôležité aby pre realizáciu zákona riadenia nebolo potrebné použiť derivačné členy, pretože implementácia derivácie je vždy náročná.

## 1.1 O pozorovateľovi stavu s redukovaným rádom

V predchádzajúcich častiach učebného textu sa ukázalo, že ak je stavový vektor $x \in \mathbb{R}^n$ merateľný, potom zákon riadenia v tvare[1] $u(t) = \Theta_1^\mathsf{T}(t)x(t) + \Theta_2(t)r(t)$ zabezpečí splnenie cieľa riadenia. V takom prípade je adaptovaný člen $\Theta_1^\mathsf{T}(t)x(t)$ odhadom ideálneho člena $\Theta_1^{\star\mathsf{T}}(t)x(t)$. Avšak, keď stavový vektor $x(t)$ nie je merateľný odhad ideálneho člena $\Theta_1^{\star\mathsf{T}}(t)x(t)$ je potrebné zabezpečiť pomocou dostupných signálov. Dostupnými signálmi sú akčný zásah $u(t)$ a výstupná veličina $y(t)$. To sa dosiahne parametrizáciou odhadu ideálneho člena, teda zmenou tohto adaptovaného člena, ktorá je zvyčajne založená na využití pozorovateľa stavu s redukovaným rádom [4].

Riadený SISO lineárny systém $n$-tého rádu sa uvažuje v tvare

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}u(t) \tag{1a}$$

$$y(t) = x_1(t) = \begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} \tag{1b}$$

kde $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n-1}$ je časť stavového vektora, ktorá nie je merateľná a ostatné vektory a matice majú zodpovedajúce rozmery. Pre odvodenie príslušného pozorovateľa stavu sa parametre systému (1) považujú za známe.

Systém (1) možno zapísať v tvare

$$\dot{x}_2(t) = A_{22}x_2(t) + (A_{21}x_1(t) + b_2u(t)) \tag{2a}$$

$$\dot{x}_1(t) = A_{12}x_2(t) + (A_{11}x_1(t) + b_1u(t)) \tag{2b}$$

Z pohľadu návrhu pozorovateľa stavu $x_2(t)$ sa signály $x_1(t)$ a $u(t)$ považujú za merateľné vstupy (platí $y(t) = x_1(t)$). Zároveň sa signál $\dot{x}_1(t)$ považuje za výstup pozorovaného systému. Pozorovateľ stavu je preto v tvare

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = A_{22}\hat{x}_2(t) + (A_{21}x_1(t) + b_2u(t)) + L\left(\dot{x}_1(t) - A_{12}\hat{x}_2(t) - (A_{11}x_1(t) + b_1u(t))\right) \tag{3}$$

kde $L \in \mathbb{R}^{n-1}$ je voliteľný konštantný vektor.

Pre chybu pozorovania stavu $\tilde{x}_2(t)$ platí $\tilde{x}_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$. Dynamiku tejto chyby opisuje rovnica

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = (A_{22} - LA_{12})\,\tilde{x}_2(t) \tag{4}$$

Z toho vyplýva, že vektor $L$ má byť zvolený tak, že matica $A_{22} - LA_{12}$ je asymptoticky stabilná. Potom chyba pozorovania sa asymptoticky blíži k nule.

Získanie (meranie) signálu $\dot{x}_1(t)$ je z praktického hľadiska problematické. Preto sa zavádza signál $w(t)$ taký, že $\hat{x}_2(t) = w(t) + Ly(t)$. Je zrejmé, že $\dot{w}(t) = \dot{\hat{x}}_2(t) + L\dot{y}(t)$. Po dosadení a úpravách

$$\dot{w}(t) = (A_{22} - LA_{12})\,w(t) + (A_{21} - LA_{11} + A_{22}L - LA_{12}L)\,y(t) + (b_2 - Lb_1)\,u(t) \tag{5}$$

[1] Zákon riadenia $u(t) = \Theta_1^\mathsf{T}(t)x(t) + \Theta_2(t)r(t)$ a zákon riadenia $u(t) = k^\mathsf{T}(t)x(t) + l(t)r(t)$ sa po formálnej stránke zhodujú, len uznačenie adaptovaných parametrov je iné.

Obr. 1: Zákon riadenia so stavovou spätnou väzbou – pôvodný tvar, ktorý je umožnený pre dostupnosť stavového vektora $x(t)$.

S využitím $s$ ako operátora časovej derivácie je možné písať

$$\begin{aligned} w(t) = &\left(sI - A_{22} + LA_{12}\right)^{-1}\left(A_{21} - -LA_{11} + A_{22}L - LA_{12}L\right)y(t) \\ &+ \left(sI - A_{22} + LA_{12}\right)^{-1}\left(b_2 - Lb_1\right)u(t) \end{aligned} \tag{6}$$

čo je možné vyjadriť aj v tvare

$$w(t) = \mathrm{diag}(g_u)\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]u(t) + \mathrm{diag}(g_y)\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]y(t) \tag{7}$$

kde $g_u \in \mathbb{R}^{n-1}$ a $g_y \in \mathbb{R}^{n-1}$ sú vektory konštánt, preto $\mathrm{diag}(g_u)$ a $\mathrm{diag}(g_y)$ sú diagonálne matice, $\alpha(s)$ je vektor mocnín operátora $s$ v tvare $\alpha^\mathsf{T}(s) = \left[s^{n-2}, \ldots, s, 1\right]$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$, a nakoniec polynóm $\Lambda(s) = \det\left(sI - A_{22} + LA_{12}\right)$ je monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$ daný voľbou vektora $L$. Ako bolo uvedené $\hat{x}_2(t) = w(t) + Ly(t)$, potom

$$\hat{x}_2(t) = \mathrm{diag}(g_u)\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]u(t) + \mathrm{diag}(g_y)\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]y(t) + Ly(t) \tag{8}$$

V úvode časti uvedený ideálny člen $\Theta_1^{\star\mathsf{T}}(t)x(t)$ je teda možné parametrizovať nasledovne. Stavový vektor $x(t)$ je nahradený odhadom $\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} y(t) & \hat{x}_2(t) \end{bmatrix}^\mathsf{T}$, a tiež sa rozdelí $\Theta_1^\star(t) = \begin{bmatrix} k_y^\star & k_2^{\star\mathsf{T}} \end{bmatrix}^\mathsf{T}$, pričom $k_y^\star \in \mathbb{R}$, potom

$$\begin{aligned} \Theta_1^{\star\mathsf{T}}(t)\hat{x}(t) =& k_y^\star y(t) + k_2^{\star\mathsf{T}}\hat{x}_2(t) \\ =& k_y^\star y(t) + k_2^{\star\mathsf{T}}\mathrm{diag}(g_u)\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]u(t) + k_2^{\star\mathsf{T}}\mathrm{diag}(g_y)\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]y(t) + k_2^{\star\mathsf{T}}Ly(t) \end{aligned} \tag{9}$$

V tomto bode text sa pre jednoduchosť a lepšiu názornosť zavedie úplne nové označovanie, ktorým sa mení označenie niektorých parametrov zákona riadenia, a teda význam pôvodného označovania. Pôvodný ideálny člen formálne zodpovedá výrazu $\overline{\Theta}_1^{\star\mathsf{T}}\hat{x}(t)$ a nové označovanie vyplýva zo zapísania rovnice (9) v tvare

$$\overline{\Theta}_1^{\star\mathsf{T}}\hat{x}(t) = \Theta_1^{\star\mathsf{T}}\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]u(t) + \Theta_2^{\star\mathsf{T}}\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]y(t) + \Theta_3^\star y(t) \tag{10}$$

kde sa vzhľadom na (9) zaviedlo označenie $\Theta_1^{\star\mathsf{T}} = k_2^{\star\mathsf{T}}\mathrm{diag}(g_u)$, $\Theta_2^{\star\mathsf{T}} = k_2^{\star\mathsf{T}}\mathrm{diag}(g_y)$ a $\Theta_3^\star = k_y^\star + k_2^{\star\mathsf{T}}L$.

Z uvedeného vyplýva, že ideálny stavový zákon riadenia použitý v predchádzajúcich častiach je možné re-parametrizovať do tvaru

$$u(t) = \Theta_1^{\star\mathsf{T}}\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]u(t) + \Theta_2^{\star\mathsf{T}}\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]y(t) + \Theta_3^\star y(t) + \Theta_4^\star r(t) \tag{11}$$

Obr. 2: Pozorovateľ s redukovaným rádom.

V prvých dvoch členoch zákona riadenia (11) sú použité takzvané pomocné filtre. Tieto generujú pomocné signály $\nu_1(t)$ a $\nu_2(t)$ upresnené nižšie. Napríklad prvý člen pravej strany v rovnici (11) možno zapísať v tvare

$$y_{\nu_1}(t) = \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right] u(t) = \frac{\Theta_{1(n-2)}^\star s^{n-2} + \cdots + \Theta_{11}^\star s + \Theta_{10}^\star}{s^{n-1} + \lambda_{n-2} s^{n-2} + \cdots + \lambda_1 s + \lambda_0} u(t) \tag{12}$$

kde $\Theta_1^\star = \begin{bmatrix}\Theta_{1(n-2)}^\star & \cdots & \Theta_{11}^\star & \Theta_{10}^\star\end{bmatrix}^\mathsf{T}$, alebo v stavovom priestore v tvare (48) na strane 9. Po označení jednotlivých vektorov a matíc v (48) je prvý pomocný filter v tvare

$$\dot{\nu}_1(t) = \Lambda \nu_1(t) + q u(t) \tag{13a}$$

$$y_{\nu_1}(t) = \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \nu_1(t) \tag{13b}$$

Z uvedeného plynie, že prvý pomocný filter má v stavovom priestore tvar $\dot{\nu}_1(t) = \Lambda\nu_1(t) + qu(t)$, kde $\nu_1$(t) je vektor pomocných signálov generovaných prvým pomocným filtrom (stavový vektor prvého pomocného filtra). Tento je násobený parametrami zákona riadenia $\Theta_1^{\star\mathsf{T}}$. Analogicky, druhý prídavný filter má v stavovom priestore tvar $\dot{\nu}_2(t) = \Lambda\nu_2(t) + qy(t)$. Zákon riadenia využívajúci len vstupno-výstupné signály riadeného systému je potom v tvare

$$u(t) = \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \nu_1(t) + \Theta_2^{\star\mathsf{T}} \nu_2(t) + \Theta_3^\star y(t) + \Theta_4^\star r(t) \tag{14}$$

## 1.2 Formulácia problému riadenia s referenčným modelom

Riešením MRC (Model Reference Control – Riadenie s referenčným modelom) problému je taký zákon riadenia $u$, ktorý zabezpečí, že výstup sústavy $y$ sleduje výstup referenčného modelu $y_m$ pri danom referenčnom signály $r$.

Uvažujme sústavu opísanú prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \tag{15}$$

kde $Z_p(s)$ je monický, hurwitzov polynóm stupňa $m$, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa $n$ a $k_p$ je tzv. *vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy. Relatívny stupeň* sústavy je $n^* = n - m$.

Polynóm sa nazýva *monický* ak je koeficient pri najvyššej mocnine $s$ (v tomto prípade) rovný jednotke. Polynóm sa nazýva *hurwitzov* ak sú reálne časti všetkých koreňov polynómu záporné.

Nech referenčný model je daný prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \tag{16}$$

kde $k_m$ je vysokofrekvenčné zosilnenie referenčného modelu, polynóm $Z_m(s)$ je monický Hurwitzov polynóm stupňa $m_m$, $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa $n_m$, pričom relatívny stupeň $n_m^* = n_m - m_m = n^*$.

Zákon riadenia, ktorý rieši MRC problém je nasledovný. Najskôr uvedieme jeho všeobecný zápis, avšak pre lepšiu názornosť budeme riešenie MRC problému vyšetrovať na zjednodušenom konkrétnom príklade. Všeobecný tvar zákona riadenia, ktorý rieši MRC problém je

$$u = \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r \tag{17}$$

kde $\alpha(s)$ je vektor obsahujúci mocniny $s$, $\alpha(s) = \left[s^{n-2}, \ldots, s, 1\right]^\mathsf{T}$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$. Vektory $\Theta_1^\star \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\Theta_2^\star \in \mathbb{R}^{n-1}$ a skaláry $\Theta_3^\star \in \mathbb{R}^1$, $\Theta_4^\star \in \mathbb{R}^1$ sú konštantné parametre zákona riadenia, ktorých hodnoty hľadáme. $\Lambda(s)$ je ľubovolný monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$ obsahujúci $Z_m(s)$ ako faktor

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s) \tag{18}$$

a teda aj $\Lambda_0(s)$ je ľubovolný monický Hurwitzov polynóm zodpovedajúceho stupňa.

### 1.2.1 Ilustrácia na príklade systému 2. rádu

Uvažujme systém opísaný prenosovou funkciou v tvare

$$y(s) = k_p \frac{s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} u(s) \tag{19}$$

kde $a_i, b_i$ sú konštanty ($b_0 > 0$). Referenčný model zvoľme tak aby mal rovnaký relatívny stupeň ako sústava.

$$y_m(s) = W_m(s) r(s) = k_m \frac{s + b_{0m}}{s^2 + a_{1m} s + a_{0m}} r(s) \tag{20}$$

V tomto konkrétnom príklade, zákon riadenia, ktorý rieši MRC problém je v tvare

$$u(s) = \Theta_1^\star \frac{1}{(s+\lambda)} u(s) + \Theta_2^\star \frac{1}{(s+\lambda)} y(s) + \Theta_3^\star y(s) + \Theta_4^\star r(s) \tag{21}$$

kde sme použili $\alpha(s) = 1$ a $\Lambda(s) = (s + \lambda)$. V tomto prípade $\Theta_1^\star$, $\Theta_2^\star$ aj $\Theta_3^\star$ a $\Theta_4^\star$ sú skalárne konštanty – parametre zákona riadenia. Zákon riadenia (21) možno upraviť do tvaru

$$\left(1 - \frac{\Theta_1^\star}{(s+\lambda)}\right) u(s) = \left(\frac{\Theta_2^\star}{(s+\lambda)} + \Theta_3^\star\right) y(s) + \Theta_4^\star r(s) \tag{22a}$$

$$\left(\frac{(s+\lambda) - \Theta_1^\star}{(s+\lambda)}\right) u(s) = \left(\frac{\Theta_2^\star + \Theta_3^\star (s+\lambda)}{(s+\lambda)}\right) y(s) + \Theta_4^\star r(s) \tag{22b}$$

$$u(s) = \frac{\Theta_2^\star + \Theta_3^\star (s+\lambda)}{(s+\lambda) - \Theta_1^\star} y(s) + \frac{\Theta_4^\star (s+\lambda)}{(s+\lambda) - \Theta_1^\star} r(s) \tag{22c}$$

Dosadením (22c) do (19) získame prenosovú funkciu URO v tvare (23):

$$y(s) = k_p \frac{s+b_0}{s^2+a_1 s+a_0} \left( \frac{\Theta_2^\star + \Theta_3^\star(s+\lambda)}{(s+\lambda)-\Theta_1^\star} y(s) + \frac{\Theta_4^\star(s+\lambda)}{(s+\lambda)-\Theta_1^\star} r(s) \right) \tag{23a}$$

$$\left(1 - \frac{k_p(s+b_0)\left(\Theta_2^\star + \Theta_3^\star(s+\lambda)\right)}{(s^2+a_1 s+a_0)\left((s+\lambda)-\Theta_1^\star\right)}\right) y(s) = \frac{k_p(s+b_0)\Theta_4^\star(s+\lambda)}{(s^2+a_1 s+a_0)\left((s+\lambda)-\Theta_1^\star\right)} r(s) \tag{23b}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{(s^2+a_1 s+a_0)\left((s+\lambda)-\Theta_1^\star\right) - k_p(s+b_0)\left(\Theta_2^\star + \Theta_3^\star(s+\lambda)\right)}{(s^2+a_1 s+a_0)\left((s+\lambda)-\Theta_1^\star\right)}\right) y(s) = \\ = \frac{k_p(s+b_0)\Theta_4^\star(s+\lambda)}{(s^2+a_1 s+a_0)\left((s+\lambda)-\Theta_1^\star\right)} r(s) \end{aligned} \tag{23c}$$

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{k_p(s+b_0)\Theta_4^\star(s+\lambda)}{(s^2+a_1 s+a_0)\left((s+\lambda)-\Theta_1^\star\right) - k_p(s+b_0)\left(\Theta_2^\star + \Theta_3^\star(s+\lambda)\right)} \tag{23d}$$

Prenosovú funkciu (23d) označme $G_c(s)$. Výstupná veličina sústavy bude sledovať výstupnú veličinu referenčného modelu ak $G_c(s) = W_m(s)$. Táto podmienka bude splnená ak

$$\Theta_4^\star = \frac{k_m}{k_p} \tag{24}$$

$$(s+\lambda) = \Lambda_0(s)(s+b_{0m}) = (s+b_{0m}) \tag{25}$$

pričom (24) je prvou podmienkou zhody, (25) je voľbou polynómu $\Lambda(s)$ stupňa $n-1$ kde v tomto prípade $\Lambda_0(s) = 1$ a teda $\lambda = b_{0m}$ a druhou podmienkou zhody je

$$\begin{aligned} &(s^2+a_1 s+a_0)\left((s+\lambda)-\Theta_1^\star\right) - k_p(s+b_0)\left(\Theta_2^\star + \Theta_3^\star(s+\lambda)\right) \\ &= (s+b_0)(s^2+a_{1m}s+a_{0m}) \end{aligned} \tag{26}$$

Potom možno (23d) zapísať v tvare

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{k_p(s+b_0)\frac{k_m}{k_p}(s+b_{0m})}{(s+b_0)(s^2+a_{1m}s+a_{0m})} = \frac{k_m(s+b_{0m})}{(s^2+a_{1m}s+a_{0m})} = W_m(s) \tag{27}$$

V prenosovej funkcii (27) dochádza ku vzájomnému vykráteniu sa polynómu $(s+b_0)$. Táto operácia je možná, pretože tieto polynómy majú korene v zápornej polrovice komplexnej roviny a teda sú stabilné (Hurwitzove). Taký je predpoklad pre $Z_p(s)$. Polynómy, ktoré nie sú Hurwitzove nemožno v prenosovej funkcii navzájom vykrátiť. Podmienku zhody (26) je možné zapísať aj v maticovom tvare porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách na oboch stranách

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -k_p \\ -a_1 & -k_p & -(k_p b_{0m} + k_p b_0) \\ -a_0 & -k_p b_0 & -k_p b_0 b_{0m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1^\star \\ \Theta_2^\star \\ \Theta_3^\star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1m} + b_0 - b_{0m} - a_1 \\ a_{0m} + b_0 a_{1m} - a_1 b_{0m} - a_0 \\ b_0 a_{0m} - a_0 b_{0m} \end{bmatrix} \tag{28}$$

čo je sústava algebraických rovníc v tvare $M_s \Theta_s = p_s$ a teda existencia takého vektora $\Theta_s$, ktorý spĺňa rovnosť, je závislá od vlastností matice $M_s$. Z podmienok zhody (24) a (28) plynú konkrétne hodnoty parametrov zákona riadenia, ktoré riešia daný MRC problém.

Predchchádzajúci postup je možné zapísať prehladnejšie (pre prehľadnosť vynecháme aj zátvorky s laplaceovou premennou $(s)$):

Zákon riadenia

$$u = \frac{\Theta_1^\star}{\Lambda} u + \frac{\Theta_2^\star}{\Lambda} y + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r \tag{29a}$$

$$\left(1 - \frac{\Theta_1^\star}{\Lambda}\right) u = \left(\frac{\Theta_2^\star}{\Lambda} + \Theta_3^\star\right) y + \Theta_4^\star r \tag{29b}$$

$$\frac{\Lambda - \Theta_1^\star}{\Lambda} u = \frac{\Theta_2^\star + \Theta_3^\star \Lambda}{\Lambda} y + \Theta_4^\star r \tag{29c}$$

$$u = \frac{\Theta_2^\star + \Theta_3^\star \Lambda}{\Lambda - \Theta_1^\star} y + \frac{\Theta_4^\star \Lambda}{\Lambda - \Theta_1^\star} r \tag{29d}$$

Uzavretý regulačný obvod

$$y = k_p \frac{Z_p}{R_p} \left( \frac{\Theta_2^\star + \Theta_3^\star \Lambda}{\Lambda - \Theta_1^\star} y + \frac{\Theta_4^\star \Lambda}{\Lambda - \Theta_1^\star} r \right) \tag{30a}$$

$$\left( 1 - \frac{k_p Z_p \left( \Theta_2^\star + \Theta_3^\star \Lambda \right)}{R_p \left( \Lambda - \Theta_1^\star \right)} \right) y = \frac{k_p Z_p \Theta_4^\star \Lambda}{R_p \left( \Lambda - \Theta_1^\star \right)} r \tag{30b}$$

$$\frac{R_p \left( \Lambda - \Theta_1^\star \right) - k_p Z_p \left( \Theta_2^\star + \Theta_3^\star \Lambda \right)}{R_p \left( \Lambda - \Theta_1^\star \right)} y = \frac{k_p Z_p \Theta_4^\star \Lambda}{R_p \left( \Lambda - \Theta_1^\star \right)} r \tag{30c}$$

$$y = \frac{k_p Z_p \Theta_4^\star \Lambda}{R_p \left( \Lambda - \Theta_1^\star \right) - k_p Z_p \left( \Theta_2^\star + \Theta_3^\star \Lambda \right)} r \tag{30d}$$

Podmienky zhody

$$\Theta_4^\star = \frac{k_m}{k_p} \tag{31a}$$

$$\Lambda = Z_m \tag{31b}$$

$$R_p \left( \Lambda - \Theta_1^\star \right) - k_p Z_p \left( \Theta_2^\star + \Theta_3^\star \Lambda \right) = Z_p R_m \tag{31c}$$

### 1.2.2 Zovšeobecnenie pre systém $n$. rádu

Pri uvažovaní všeobecného zákona riadena v tvare (17) má prenosová funkcia uzavretého regulačného obvodu tvar

$$y = \frac{k_p Z_p \Theta_4^\star \Lambda^2}{\Lambda \left( R_p \left( \Lambda - \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \alpha(s) \right) - k_p Z_p \left( \Theta_2^{\star\mathsf{T}} \alpha(s) + \Theta_3^\star \Lambda \right) \right)} r \tag{32}$$

a podmienky zhody

$$\Theta_4^\star = \frac{k_m}{k_p} \tag{33a}$$

$$\Lambda = \Lambda_0 Z_m \tag{33b}$$

$$R_p \left( \Lambda - \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \alpha(s) \right) - k_p Z_p \left( \Theta_2^{\star\mathsf{T}} \alpha(s) + \Theta_3^\star \Lambda \right) = Z_p \Lambda_0 R_m \tag{33c}$$

Predpoklady pri, ktorých sú tieto podmienky splniteľné sú intuitívne zrejmé z predchádzajúceho príkladu v časti 1.2.1. Hlbšou analýzou MRC problému sa v tomto kurze zaoberať nebudeme. Poslucháča odkazujeme na odporúčanú literatúru, kde nájde všetky potrebné (matematické) detaily k riešeniu MRC problému.

## 1.3 Teoretický opis výsledného URO v stavovom priestore

V tejto časti vyjadríme uzavretý regulačný obvod, ktorý vznikne riešením MRC problému, pomocou opisu v stavovom priestore.

### 1.3.1 Ilustrácia na príklade systému 2. rádu

Opäť začneme zjednodušeným príkladom 1.2.1, a v ďalšej časti dodáme pre úplnosť všeobecný zápis URO v stavovom priestore.

Sústava v tvare (15), konkrétne (19), môže byť reprezentovaná opisom v stavovom priestore v tvare

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{34a}$$

$$y = c^\mathsf{T} x \tag{34b}$$

kde $x$ je vektor stavových veličín sústavy a $A$; $b$; $c^\mathsf{T}$ sú konštantné matice (vektory) zodpovedajúcich rozmerov. V tomto prípade nekladieme žiadne podmienky na formu (kanonickú) matice $A$, ako to bolo v prípade stavového MRAC-u.

Uvažujeme zákon riadenia (21), pripomeňme:

$$u(s) = \Theta_1^\star \frac{1}{(s+\lambda)} u(s) + \Theta_2^\star \frac{1}{(s+\lambda)} y(s) + \Theta_3^\star y(s) + \Theta_4^\star r(s) \tag{35}$$

V prvých dvoch členoch zákona riadenia (35) sú použité takzvané prídavné filtre, ktorých vstupom je buď akčný zásah $u$ (vstupný signál sústavy) alebo výstupná (riadená) veličina $y$. Tieto prídavné filtre sú tiež nazývané pomocné, či prídavné generátory, generujú prídavné (pomocné) signály. Oba prídavné filtre sú rovnaké, v tomto prípade dané prenosovou funkciou $\frac{1}{(s+\lambda)}$. Výstupné signály filtrov sú v tomto prípade skalárne signály. Vo všeobecnosti sú výstupné signály pomocných filtrov vektory signálov s rovnakým rozmerom ako vektory parametrov $\Theta_1^\star$ a $\Theta_2^\star$, viď všeobecný zápis zákona riadenia (17). Označme výstupné signály prídavných filtrov $\nu_1$ a $\nu_2$. Tieto signály sa násobia parametrami zákona riadenia $\Theta_1^\star$ a $\Theta_2^\star$. Prídané filtre možno zapísať v tvare

$$\dot{\nu}_1 = -\lambda\nu_1 + u \tag{36a}$$

$$\dot{\nu}_2 = -\lambda\nu_2 + y = -\lambda\nu_2 + c^\mathsf{T} x \tag{36b}$$

Jednoduchým pridaním týchto pomocných signálov k sústave máme sústavu rovníc:

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{37a}$$

$$\dot{\nu}_1 = -\lambda\nu_1 + u \tag{37b}$$

$$\dot{\nu}_2 = -\lambda\nu_2 + c^\mathsf{T} x \tag{37c}$$

$$y = c^\mathsf{T} x \tag{37d}$$

Sústavu rovníc (37) budeme nazývať *doplnená sústava*. Doplnenú sústavu (37) možno zapísať v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\nu}_1 \\ \dot{\nu}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ c^\mathsf{T} & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{38a}$$

$$y = \begin{bmatrix} c^\mathsf{T} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} \tag{38b}$$

a po označení jednotlivých matíc a vektorov

$$\dot{X} = A_o X + B_c u \tag{39a}$$

$$y = C_c^\mathsf{T} X \tag{39b}$$

Zákon riadenia (35) zapíšeme v takom vektorovom tvare, v ktorom je možné využiť stavový vektor doplnenej sústavy $X$:

$$u = \Theta_c^{\star\mathsf{T}} D X + \Theta_4^\star r \tag{40}$$

kde $\Theta_c^\star = \begin{bmatrix} \Theta_3^\star & \Theta_1^\star & \Theta_2^\star \end{bmatrix}^\mathsf{T}$; $\Theta_4^\star$ sú parametre zákona riadenia a maticu

$$D = \begin{bmatrix} c^\mathsf{T} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sme zaviedli práve preto aby sme v zákone riadenia (40) mohli priamo písať stavový vektor $X$. Tvar, v ktorom sa zákon riadenia (40) viac podobá na pôvodný zápis (35), a ktorý vyplíva priamo z (40) je

$$u = \Theta_1^\star \nu_1 + \Theta_2^\star \nu_2 + \Theta_3^\star c^\mathsf{T} x + \Theta_4^\star r \tag{41a}$$

$$u = \Theta_1^\star \nu_1 + \Theta_2^\star \nu_2 + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r \tag{41b}$$

Dosadením (40) do (39) získame opis URO v stavovom priestore v tvare (výstupnú rovnicu vynechávame, pretože sa nemení)

$$\dot{X} = A_o X + B_c \left( \Theta_c^{\star\mathsf{T}} D X + \Theta_4^\star r \right) \tag{42a}$$

$$\dot{X} = A_o X + B_c \Theta_c^{\star\mathsf{T}} D X + B_c \Theta_4^\star r \tag{42b}$$

$$\dot{X} = \left( A_o + B_c \Theta_c^{\star\mathsf{T}} D \right) X + B_c \Theta_4^\star r \tag{42c}$$

$$\dot{X} = A_c X + B_c \Theta_4^\star r \tag{42d}$$

kde

$$
\begin{aligned}
A_c &= A_o + B_c \Theta_c^{\star\mathsf{T}} D \\
&= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ c^\mathsf{T} & 0 & -\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_3^\star & \Theta_1^\star & \Theta_2^\star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^\mathsf{T} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ c^\mathsf{T} & 0 & -\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\Theta_3^\star & b\Theta_1^\star & b\Theta_2^\star \\ \Theta_3^\star & \Theta_1^\star & \Theta_2^\star \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^\mathsf{T} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ c^\mathsf{T} & 0 & -\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\Theta_3^\star c^\mathsf{T} & b\Theta_1^\star & b\Theta_2^\star \\ \Theta_3^\star c^\mathsf{T} & \Theta_1^\star & \Theta_2^\star \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A + b\Theta_3^\star c^\mathsf{T} & b\Theta_1^\star & b\Theta_2^\star \\ \Theta_3^\star c^\mathsf{T} & -\lambda + \Theta_1^\star & \Theta_2^\star \\ c^\mathsf{T} & 0 & -\lambda \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{43}
$$

Pretože uzavretý regulačný obvod zapísaný v tvare

$$\dot{X} = A_c X + B_c \Theta_4^\star r \tag{44a}$$

$$y = C_c^\mathsf{T} X \tag{44b}$$

obsahuje ideálne parametre zákona riadenia, teda také, ktoré spĺňajú podmienky zhody musí sa tento zhodovať s referenčným modelom. Preto tzv. *neminimálna reprezentácia* prenosovej funkcie referenčného modelu (16) v stavovom priestore je

$$\dot{X}_m = A_c X_m + B_c \Theta_4^\star r \tag{45a}$$

$$y_m = C_c^\mathsf{T} X_m \tag{45b}$$

kde $X_m$ sú stavové veličiny neminimálnej reprezentácie modelu

### 1.3.2 Zovšeobecnenie pre systém $n$. rádu

Uvažujeme zákon riadenia (17), pripomeňme:

$$u = \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r \tag{46}$$

kde $\alpha(s)$ je vektor obsahujúci mocniny $s$, $\alpha(s) = \left[s^{n-2}, \dots, s, 1\right]^\mathsf{T}$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$. Vektory $\Theta_1^\star, \Theta_2^\star \in \mathbb{R}^{n-1}$ a skaláry $\Theta_3^\star, \Theta_4^\star \in \mathbb{R}^1$ sú konštantné parametre zákona riadenia. $\Lambda(s)$ je ľubovolný monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$.

Napríklad prvý člen v (46) možno zapísať v tvare

$$y_{\nu_1} = \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u = \frac{\Theta_{1(n-2)}^\star s^{n-2} + \dots + \Theta_{11}^\star s + \Theta_{10}^\star}{s^{n-1} + \lambda_{n-2} s^{n-2} + \dots + \lambda_1 s + \lambda_0} u \tag{47}$$

kde $\Theta_1^\star = \begin{bmatrix} \Theta_{1(n-2)}^\star & \cdots & \Theta_{11}^\star & \Theta_{10}^\star \end{bmatrix}^\mathsf{T}$, alebo v stavovom priestore v tvare

$$
\begin{bmatrix} \dot{\nu}_{1(n-2)} \\ \dot{\nu}_{1(n-3)} \\ \dot{\nu}_{1(n-4)} \\ \vdots \\ \dot{\nu}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_{n-2} & -\lambda_{n-3} & \cdots & -\lambda_2 & -\lambda_1 & -\lambda_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{1(n-2)} \\ \nu_{1(n-3)} \\ \nu_{1(n-4)} \\ \vdots \\ \nu_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{48a}
$$

$$
y_{\nu_1} = \begin{bmatrix} \Theta_{1(n-2)}^\star & \Theta_{1(n-3)}^\star & \Theta_{1(n-4)}^\star & \cdots & \Theta_{10}^\star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{1(n-2)} \\ \nu_{1(n-3)} \\ \nu_{1(n-4)} \\ \vdots \\ \nu_{10} \end{bmatrix} \tag{48b}
$$

Označme v (48) jednotlivé vektory a maticu:

$$\dot{\nu}_1 = \Lambda\nu_1 + qu \tag{49a}$$
$$y_{\nu_1} = \Theta_1^{\star\mathsf{T}}\nu_1 \tag{49b}$$

Z uvedeného vyplýva, že prvý prídavný filter má v stavovom priestore tvar $\dot{\nu}_1 = \Lambda\nu_1 + qu$ kde $\nu_1$ je vektor pomocných signálov generovaných prvým pomocným generátorom (stavový vektor prvého pomocného generátora). Tento je násobený parametrami zákona riadenia $\Theta_1^{\star\mathsf{T}}$. Analogicky, druhý prídavný filter má v stavovom priestore tvar $\dot{\nu}_2 = \Lambda\nu_2 + qy = \Lambda\nu_2 + qc^\mathsf{T}x$. Doplnená sústava vo všeobecnom tvare je

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{50a}$$
$$\dot{\nu}_1 = \Lambda\nu_1 + qu \tag{50b}$$
$$\dot{\nu}_2 = \Lambda\nu_2 + qc^\mathsf{T}x \tag{50c}$$
$$y = c^\mathsf{T}x \tag{50d}$$

Potom v (39) sú

$$x = \begin{bmatrix} x \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}; \quad A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ qc^\mathsf{T} & 0 & \Lambda \end{bmatrix}; \quad b_c = \begin{bmatrix} b \\ q \\ 0 \end{bmatrix}; \quad c_c^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} c^\mathsf{T} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{51}$$

Zákon riadenia (46) zapíšeme vo vektorovom tvare:

$$u = \Theta_c^{\star\mathsf{T}}Dx + \Theta_4^\star r \tag{52}$$

kde $\Theta_c^\star = \begin{bmatrix} \Theta_3^\star & \Theta_1^{\star\mathsf{T}} & \Theta_2^{\star\mathsf{T}} \end{bmatrix}^\mathsf{T}$; $\Theta_4^\star$ sú parametre zákona riadenia a maticu

$$D = \begin{bmatrix} c^\mathsf{T} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

sme zaviedli práve preto aby sme v zákone riadenia (52) mohli priamo písať stavový vektor $x$. Tvar, v ktorom sa zákon riadenia (52) viac podobá na pôvodný zápis (46), a ktorý vyplíva priamo z (52) je

$$u = \Theta_1^{\star\mathsf{T}}\nu_1 + \Theta_2^{\star\mathsf{T}}\nu_2 + \Theta_3^\star c^\mathsf{T}x + \Theta_4^\star r \tag{53a}$$
$$u = \Theta_1^{\star\mathsf{T}}\nu_1 + \Theta_2^{\star\mathsf{T}}\nu_2 + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r \tag{53b}$$

Dosadením (52) do (39), v ktorej sú ale matice (51), získame opis URO v stavovom priestore v tvare (44), a matica $A_c$ má tvar

$$\begin{aligned}
A_c &= A_o + b_c\Theta_c^{\star\mathsf{T}}D \\
&= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ qc^\mathsf{T} & 0 & \Lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ q \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_3^\star & \Theta_1^{\star\mathsf{T}} & \Theta_2^{\star\mathsf{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^\mathsf{T} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ qc^\mathsf{T} & 0 & \Lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\Theta_3^\star & b\Theta_1^{\star\mathsf{T}} & b\Theta_2^{\star\mathsf{T}} \\ q\Theta_3^\star & q\Theta_1^{\star\mathsf{T}} & q\Theta_2^{\star\mathsf{T}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^\mathsf{T} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ qc^\mathsf{T} & 0 & \Lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\Theta_3^\star c^\mathsf{T} & b\Theta_1^{\star\mathsf{T}} & b\Theta_2^{\star\mathsf{T}} \\ q\Theta_3^\star c^\mathsf{T} & q\Theta_1^{\star\mathsf{T}} & q\Theta_2^{\star\mathsf{T}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A + b\Theta_3^\star c^\mathsf{T} & b\Theta_1^{\star\mathsf{T}} & b\Theta_2^{\star\mathsf{T}} \\ q\Theta_3^\star c^\mathsf{T} & \Lambda + q\Theta_1^{\star\mathsf{T}} & q\Theta_2^{\star\mathsf{T}} \\ qc^\mathsf{T} & 0 & \Lambda \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{54}$$

Pretože takto všeobecne opísaný URO obsahuje ideálne parametre zákona riadenia, teda také, ktoré spĺňajú podmienky zhody musí sa tento zhodovať so všeobecným

referenčným modelom (16), ktorého neminimálna reprezentácia v stavovom priestore má tvar

$$\dot{x}_m = A_c x_m + \bar{b}_c r \tag{55a}$$

$$y_m = c_c^\mathsf{T} x_m \tag{55b}$$

kde $x_m$ sú stavové veličiny neminimálnej reprezentácie referenčného modelu a kde sme označili $\bar{b}_c = b_c \Theta_4^\star$.

# 2 Príklad k téme *MRC vo všeobecnosti*

Tento príklad sa týka riadenia s referenčným modelom avšak bez adaptácie. Cieľom tu teda nie je návrh adaptívneho riadiaceho systému. Cieľom je oboznámenie sa s riešením MRC problému (problému návrhu (výpočtu) riadenia s referenčným modelom). Tu uvedené zároveň slúži na priebežné zopakovanie vybraných tém súvisiacich s numerickou simuláciou.

## 2.1 Úlohy

1. Uvažujme riadený systém[2], ktorý pracuje v pásme danom dvomi pracovnými bodmi. V týchto dvoch hraničných pracovných bodoch prenosová funkcia systému nie je rovnaká, vyskytujú sa mierne rozdiely v hodnotách koeficientov jednotlivých polynómov, pričom stupne polynómov sú zhodné, konkrétne:

$$G_{OP_1} = 0,1659 \frac{s + 22}{s^2 + 3,1423s + 2,6539} \tag{56}$$

$$G_{OP_2} = 0,1669 \frac{s + 20,7618}{s^2 + 2,3422s + 2,7293} \tag{57}$$

- Určte *nominálnu* prenosovú funkciu sústavy tak, že jej koeficienty sú priemery hodnôt oboch prenosových funkcií (56) a (57).
- Pre nominálnu prenosovú funkciu sústavy určte polynómy $Z_p$, $R_p$ a zosilnenie $k_p$ pričom

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \tag{58}$$

  kde $Z_p(s)$ je monický polynóm stupňa $m$, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa $n$ a $k_p$ je tzv. *vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy. Relatívny stupeň* sústavy je $n^* = n - m$.
- Zistite, či polynóm $Z_p(s)$ je Hurwitzov.

2. Vyriešte MRC problém pre nominálnu prenosovú funkciu sústavy, uvažujte referenčný model daný prenosovou funkciou v tvare

$$W_m(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3.5s + 3} \tag{59}$$

Referenčný model je daný prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \tag{60}$$

kde $k_m$ je vysokofrekvenčné zosilnenie referenčného modelu, $Z_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa $m_m$, $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa $n_m$, pričom relatívny stupeň $n_m^* = n_m - m_m = n^*$.

Riešením MRC problému je taký zákon riadenia $u$, ktorý zabezpečí, že výstup sústavy $y$ sleduje výstup referenčného modelu $y_m$ pri danom referenčnom signály (vstupe referenčného modelu) $r$. Všeobecný tvar zákona riadenia, ktorý rieši MRC problém je

$$u = \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r \tag{61}$$

[2] Uvedený riadený systém je prevzatý z článku publikovanom v prestížnom elektronickom časopise posterus.sk (nemýliť si so Slniečkom, už nevychádza), viď [5].

kde $\alpha(s)$ je vektor obsahujúci mocniny $s$, $\alpha(s) = \left[s^{n-2}, \ldots, s, 1\right]^{\mathsf{T}}$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$. Vektory $\Theta_1^\star \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\Theta_2^\star \in \mathbb{R}^{n-1}$ a skaláry $\Theta_3^\star \in \mathbb{R}^1$, $\Theta_4^\star \in \mathbb{R}^1$ sú konštantné parametre zákona riadenia, ktorých hodnoty hľadáme. $\Lambda(s)$ je ľubovolný monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$ obsahujúci $Z_m(s)$ ako faktor

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s) \tag{62}$$

a teda aj $\Lambda_0(s)$ je ľubovolný monický Hurwitzov polynóm zodpovedajúceho stupňa.

- Na základe všeobecného tvaru zákona riadenia (61) určte zákon riadenia pre uvažovaný konkrétny prípad.
- Vypočítajte parametre $\Theta_1^\star$, $\Theta_2^\star$, $\Theta_3^\star$, $\Theta_4^\star$.
- Zostavte simulačnú schému uzavretého regulačného obvodu a overte vypočítané parametre zákona riadenia.

## 2.2 Riešenie úloh

V zadaní sa hovorí:

Uvažujme riadený systém, ktorý pracuje v pásme danom dvomi pracovnými bodmi. V týchto dvoch hraničných pracovných bodoch prenosová funkcia systému nie je rovnaká, vyskytujú sa mierne rozdiely v hodnotách koeficientov jednotlivých polynómov, pričom stupne polynómov sú zhodné, konkrétne:

$$G_{OP_1} = 0,1659 \frac{s + 22}{s^2 + 3,1423s + 2,6539}$$
$$G_{OP_2} = 0,1669 \frac{s + 20,7618}{s^2 + 2,3422s + 2,7293}$$

Mimochodom, ide o prenosové funkcie zodpovedajúce dynamiky „laboratórnych procesov - motorčekov“, ktoré sú v laboratóriu D330. Sú identifikované pre okolie rôznych pracovných bodov, teda raz sú otáčky motora nízke, raz vysoké - nemá význam tu hovoriť o fyzikálnych veličinách, pretože je to merané (a ovládané) len ako napäťové rozsahy 0 až 10 V (azda si niektorý čitateľ spomína). Možno nemá význam o tom vôbec hovoriť.

### 2.2.1 Úloha prvá

#### Bod prvý

Určte *nominálnu* prenosovú funkciu sústavy tak, že jej koeficienty sú priemery hodnôt oboch prenosových funkcií (56) a (57).

$$G_n(s) = 0,1664 \, \frac{s + 21,3809}{s^2 + 2,7423s + 2,6916} \tag{63}$$

Uvedené je prenosová funkcia systému 2. rádu (dva póly, jedna nula).

Pre azda ešte lepšiu predstavu o riadenom systéme, nakreslime priebeh výstupnej veličiny pre isté skokové priebehy vstupnej veličiny - viď obr. 3.

Simulované priebehy vznikli s využitím nasledujúceho kódu (Python) - viď výpis kódu 1:

Výpis kódu 1: Súbor `ar06_prMRC_lenRS.py`

```
from scipy.integrate import odeint

# odeint je ODE solver a tu nim budeme riesit
# Linear Time Invariant System, a jeho zapis ako (maticova)
# sustava diferencialnych rovnic je - vid nasled. funkciu,
# pricom metoda "matmul" je samozrejme maticove nasobenie


def fcn_LTIS(x, t, A, b, u):

```

Obr. 3: Priebeh výstupnej veličiny systému (63) pre isté skokové priebehy vstupnej veličiny. Naozaj len mimochodom: čas je reálne v sekundách, a jednotky zobrazených veličín sú volty (via meracia karta).

```
    dotx = np.matmul(A, x) + np.matmul(b, u)                    #

    return dotx

# Vytvorme teraz funkciu, ktora bude realizovat simulacnu schemu.
# Argumentami funkcie su parametre suvisiace s casom
# a vopred dane (zname) signaly.

def fcn_simSch1(t_start, T_s, finalIndex, sig_dummy_ext):       #

    #----------------------------------------
    # Parametre riadeneho systemu

    A = np.array([[0, 1], [-2.6916, -2.7423]])
    b = np.array([[0], [1]])
    c = np.array([[3.5578], [0.1664]])

    #-----------------------------------------------------
    # Do pola t_log sa bude logovat cas. Pole ma finalIndex
    # riadkov a 1 stlpec a je plne nul. Potom sa na prvu
    # poziciu (index 0) zapise hodnota t_start

    t_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    t_log[0,:] = t_start

    #----------------------------------------
    # Zaciatocne podmienky pre stavovy vektor nech su x_0
    # co je vektor rovnako velky ako vektor b

    x_0 = np.zeros(b.shape[0])

    # Stavovy vektor sa bude logovat do pola x_log s prislusnym
    # poctom stlpcov (detto y_log pre vyst. velicinu)

    x_log = np.zeros([finalIndex, len(x_0)])
    x_log[0,:] = x_0

    y_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    y_log[0,:] = np.dot(c.T, x_0.reshape(-1,1))

    #-------------------------

    u_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    u_log[0,:] = 0

    #-----------------------------------------------------
    # Jedna iteracia for cyklu je posun v case o T_s.
    # ODE solver hlada riesenie pre casovy rozsah timespan.
    # Pred danou iteraciou pozname vsetko z predchadzajucej
    # iteracie (idx-1)
    # Pocas iteracie si _log-ujeme "vysledky"

    timespan = np.zeros(2)
    for idx in range(1, int(finalIndex)):

        timespan[0] = t_log[idx-1,:]
        timespan[1] = t_log[idx-1,:] + T_s

        t_log[idx,:] = timespan[-1]
        # posledny prvok v poli je zapisany (logovany)

        # ------------
        # solver odeint pouzije fcn_LTIS, zaciatocne podmienky
```

```python
        # stavu su z predch. iteracie (x_log[idx-1,:]), riesi
        # na casovom rozsahu timespan a dalej (do fcn_LTIS) sa
        # posunu uvedene parametre/hodnoty (args)

        odeOut = odeint(fcn_LTIS,
                        x_log[idx-1,:],
                        timespan,
                        args=(A, b, u_log[idx-1,:])
                        )

        x_log[idx,:] = odeOut[-1,:]
        # odeOut obsahuje hodnoty stavu x pre cely timespan,
        # ale zapisujeme len poslednu hodnotu stavu x

        y_log[idx,:] = np.dot(c.T, x_log[idx,:].reshape(-1,1))
        # okrem stavu (stavovych velicin) chceme aj
        # vystupnu velicinu y

        # -------------------------

        u_log[idx,:] = sig_dummy_ext[idx,:]
        # v tejto simulacii len citame "externy" signal
        # a pouzivame ho ako vstup do systemu


    return [t_log, x_log, y_log, u_log, ]



# Vytvorme teraz vsetko potrebne pre "spustenie" simulacie,
# teda pre zavolanie prave vytvorenej funkcie fcn_simSch1.
# Hovorme tomu "nastavenie simulacie". Casove nastavenie:

sim_t_start = 0
sim_t_final = 40
sim_T_s = 0.05
sim_finalIndex = int(((sim_t_final - sim_t_start)/sim_T_s) + 1)


# Dalej je potrebne vytvorit (vopred znamy) signal.
# Co sa tu deje ponechajme bez komentara, ale vysledkom
# je proste "signal" pouzitelny v simulacii...

period_time = 20
period_tab = np.array([[0, 0.7],
                       [10, 0],
                      ])

sig_vysl = np.zeros([sim_finalIndex, 1])

for period in range(int(sim_t_final/period_time) + 1):
    for idx in range( int((period*period_time)/sim_T_s), int((period*period_time + period_time)/sim_T_s)):
        lastValue = period_tab[:,1][(period_tab[:,0] + (period*period_time))<=idx*sim_T_s ][-1]
        try:
            sig_vysl[idx] = lastValue
        except:
            break

sig_dummy_ext = sig_vysl


# Teraz mozme "spustit" simulaciu:

t_log, x_log, y_log, u_log, = fcn_simSch1(
                                    sim_t_start,
                                    sim_T_s,
                                    sim_finalIndex,
                                    sig_dummy_ext,
                                    )

```

### Bod druhý

Pre nominálnu prenosovú funkciu sústavy určte polynómy $Z_p$, $R_p$ a zosilnenie $k_p$ pričom

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)}$$

kde $Z_p(s)$ je monický polynóm stupňa $m$, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa $n$ a $k_p$ je tzv. *vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy. Relatívny stupeň* sústavy je $n^* = n - m$.

$$Z_p(s) = s + 21,3809 \tag{64a}$$
$$R_p(s) = s^2 + 2,7423s + 2,6916 \tag{64b}$$
$$k_p = 0,1664 \tag{64c}$$

$Z_p(s)$ je monický polynóm, pretože pri najvyššej mocnine „premennej“ (operátor $s$) je koeficient 1. Rovnako polynóm $R_p(s)$ je monický. Relatívny stupeň prenosovej funkcie je $n^* = 2 - 1 = 1$

#### Bod tretí

Zistite, či polynóm $Z_p(s)$ je Hurwitzov.

Je. Hurwitzov polynóm totiž znamená, že „polynóm je stabilný“, a tým sa myslí, že korene polynómu sú v ľavej polrovine komplexnej roviny. Koreň polynómu $Z_p(s) = s + 21,3809$ je $s = -21,3809$ čo je na reálnej osi v záporných číslach, a teda v ľavej polrovine komplexnej roviny.

### 2.2.2 Úloha druhá

Vyriešte MRC problém pre nominálnu prenosovú funkciu sústavy, uvažujte referenčný model daný prenosovou funkciou v tvare

$$W_m(s) = \frac{s+3}{s^2 + 3.5s + 3}$$

Referenčný model je daný prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)}$$

kde $k_m$ je vysokofrekvenčné zosilnenie referenčného modelu, $Z_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa $m_m$, $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa $n_m$, pričom relatívny stupeň $n_m^* = n_m - m_m = n^*$.

Riešením MRC problému je taký zákon riadenia $u$, ktorý zabezpečí, že výstup sústavy $y$ sleduje výstup referenčného modelu $y_m$ pri danom referenčnom signály (vstupe referenčného modelu) $r$. Všeobecný tvar zákona riadenia, ktorý rieši MRC problém je

$$u = \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r$$

kde $\alpha(s)$ je vektor obsahujúci mocniny $s$, $\alpha(s) = \left[s^{n-2}, \ldots, s, 1\right]^\mathsf{T}$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$. Vektory $\Theta_1^\star \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\Theta_2^\star \in \mathbb{R}^{n-1}$ a skaláry $\Theta_3^\star \in \mathbb{R}^1$, $\Theta_4^\star \in \mathbb{R}^1$ sú konštantné parametre zákona riadenia, ktorých hodnoty hľadáme. $\Lambda(s)$ je ľubovolný monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$ obsahujúci $Z_m(s)$ ako faktor

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s)$$

a teda aj $\Lambda_0(s)$ je ľubovolný monický Hurwitzov polynóm zodpovedajúceho stupňa.

Všimnime si, že dosť podstatnou vlastnosťou referenčného modelu je, že má rovnaký relatívny stupeň ako riadený systém, teda $n_m^* = n_m - m_m = n^*$. Referenčný model nemusí mať rovnaký rád ako riadený systém. Musí však mať rovnaký relatívny stupeň. Plynie to z požiadaviek (predpokladov) pri riešení MRC problému (úlohy riadenia s referenčným modelom) vo všeobecnosti.

#### Bod prvý

Na základe všeobecného tvaru zákona riadenia (61) určte zákon riadenia pre uvažovaný konkrétny prípad.

$\alpha(s)$ je vektor, ktorého dĺžka závisí od rádu riadeného systému (zjavne má dĺžku $n-1$). V tomto prípade $n = 2$, čo spĺňa $n \geq 2$. Preto $\alpha(s) = \left[s^{2-2}\right]^\mathsf{T} = \left[s^0\right]^\mathsf{T} = \left[1\right]^\mathsf{T} = 1$. A teda $\alpha(s)$ bude v tomto prípade jednoducho číslo 1. Je to známa vec, nie je to parametrom zákona riadenia.

Vektory $\Theta_1^\star \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\Theta_2^\star \in \mathbb{R}^{n-1}$ budú mať v tomto prípade tiež len jeden prvok (sú dĺžky $n-1$) a teda len rovno píšme čísla $\Theta_1^\star$ a $\Theta_2^\star$. K tomu $\Theta_3^\star$, $\Theta_4^\star$ sú vždy len skaláre. V tomto prípade sú tieto štyri čísla parametrami zákona riadenia. Tieto parametre sú predmetom výpočtu/hľadania, ak chceme použiť tento konkrétny zákon riadenia.

Polynóm $\Lambda(s)$ nie je „neznámou“. Nie je to parameter zákona riadenia v tom pravom zmysle. Je ľubovoľný ak sú dodržané uvedené podmienky/predpoklady. Pri jeho voľbe je užitočné uvažovať o tom, že tento polynóm možno interpretovať vzhľadom na *pozorovateľ stavu* a jeho dynamické vlastnosti. Súvislosť pozorovateľa stavu s tu používaným zákonom riadenia bola uvedená v učebnom texte. Akokoľvek, ak $\Lambda(s)$ spĺňa dané podmienky je to ok. V tomto prípade (vlastne nie je veľa ľubovôle):

$$\Lambda(s) = Z_m(s) = s + \lambda \tag{65}$$

kde $\lambda = 3$, pretože $Z_m(s) = s + 3$.

Práve sme určili zákon riadenia pre uvažovaný konkrétny prípad:

$$u(s) = \Theta_1^\star \frac{1}{(s+\lambda)} u(s) + \Theta_2^\star \frac{1}{(s+\lambda)} y(s) + \Theta_3^\star y(s) + \Theta_4^\star r(s) \tag{66}$$

### Bod druhý

Vypočítajte parametre $\Theta_1^\star$, $\Theta_2^\star$, $\Theta_3^\star$, $\Theta_4^\star$.

Pre prehľadnosť označme

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{67}$$

a

$$W_m(s) = k_m \frac{s + b_{0m}}{s^2 + a_{1m} s + a_{0m}} \tag{68}$$

Potom je možné ukázať (a v učebnom texte je to ukázané), že uzavretý regulačný obvod sa bude zhodovať s referenčným modelom ak bude platiť:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -k_p \\ -a_1 & -k_p & -(k_p b_{0m} + k_p b_0) \\ -a_0 & -k_p b_0 & -k_p b_0 b_{0m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1^\star \\ \Theta_2^\star \\ \Theta_3^\star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1m} + b_0 - b_{0m} - a_1 \\ a_{0m} + b_0 a_{1m} - a_1 b_{0m} - a_0 \\ b_0 a_{0m} - a_0 b_{0m} \end{bmatrix} \tag{69a}$$

$$\Theta_4^\star = \frac{k_m}{k_p} \tag{69b}$$

Vypočítajme:

Výpis kódu 2: Súbor `ar06_prMRC_idealTh.py`

```
kp = 0.1664
b0 = 21.3809
a1 = 2.7423
a0 = 2.6916

km = 1
b0m = 3
a1m = 3.5
a0m = 3

M = np.array([[-1,  0, -kp],
              [-a1, -kp, -(kp*b0m + kp*b0)],
              [-a0, -kp*b0, -kp*b0*b0m],
             ])

N = np.array([[a1m + b0 - b0m - a1],
              [a0m + b0*a1m - a1*b0m - a0],
              [b0*a0m - a0*b0m],
             ])

Theta_c = np.linalg.solve(M,N)

Theta_4 = km/kp
```

Teda:

$$\begin{bmatrix}\Theta_1^\star\\ \Theta_2^\star\\ \Theta_3^\star\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-18,3809\\ 11,8071\\ -4,5535\end{bmatrix} \tag{70a}$$

$$\Theta_4^\star = 6,0096 \tag{70b}$$

### Bod tretí

Zostavte simulačnú schému uzavretého regulačného obvodu a overte vypočítané parametre zákona riadenia.

Ako realizovať numerickú simuláciu riadeného systému sme (všelijako) ukázali v predchádzajúcom. Riadený systém je daný ako prenosová funkcia. Tú je možné previesť na opis systému v stavovom priestore a potom je možné použiť ODE solver (tak ako bolo ukázané).

### O prevode prenosovej funkcie na opis v stavovom priestore

Mimochodom, prevod z prenosovej funkcie na stavový opis nie je jednoznačný. Záleží na voľbe stavových veličín (stavového priestoru). Tu si dovolíme uviesť voľbu stavových veličín tak, že výsledkom je opis systému v tzv. normálnej forme riaditeľnosti.

Prenosovú funkciu riadeného systému, ktorou sa tu zaoberáme, je možné, vo všeobecnosti, napísať v tvare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{71}$$

pričom tu „nesedí“ označovanie a $b_0$ nie je to isté $b_0$ ako pred tým. Tu nám ide o tvar vo všeobecnosti, a ten ostal zachovaný... (snáď je to pre čitateľa dostatočne jasné)

Otázka je ako túto prenosovú funkciu previesť na opis v stavovom priestore - ako zvoliť stavové veličiny. Pre prípad, keď je v čitateli len konštanta (systém nemá nuly), je voľba stavových veličín značne intuitívna. Preto napíšme prenosovú funkciu (71) ako dve prenosové funkcie v sérii nasledovne

$$\frac{z(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{72}$$

$$\frac{y(s)}{z(s)} = b_1 s + b_0 \tag{73}$$

kde sme zaviedli pomocnú veličinu $z$.

Prvú prenosovú funkciu (72) možno prepísať na diferenciálnu rovnicu druhého rádu v tvare

$$\ddot{z}(t) + a_1 \dot{z}(t) + a_0 z(t) = u(t) \tag{74}$$

Túto je možné previesť na sústavu diferenciálnych rovníc prvého rádu - voľbou stavových veličín. Napríklad nech

$$x_1(t) = z(t) \tag{75}$$

kde $x_1(t)$ je prvá stavová veličina. Potom platí

$$\dot{x}_1(t) = \dot{z}(t) \tag{76}$$

Druhú stavovú veličinu zvoľme

$$x_2(t) = \dot{z}(t) \tag{77}$$

a teda

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{z}(t) \tag{78}$$

V tomto bode môžeme ľahko písať

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{79}$$

To je prvá diferenciálna rovnica! Obsahuje len novo zavedené stavové veličiny ($x_1(t)$ a $x_2(t)$). Druhá diferenciálna rovnica je vlastne (78). Avšak, vieme signál $\ddot{z}(t)$ vyjadriť len pomocou novo zavedených stavových veličín? Vieme. Z (74) je zrejmé, že

$$\ddot{z}(t) = -a_1\dot{z}(t) - a_0 z(t) + u(t) = -a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + u(t) \tag{80}$$

takže (78) je

$$\dot{x}_2(t) = -a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + u(t) \tag{81}$$

a to je druhá diferenciálna rovnica...

Obe rovnice spolu:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{82}$$
$$\dot{x}_2(t) = -a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + u(t) \tag{83}$$

A v maticovom zápise:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{84}$$

Vráťme sa k prenosovej funkcii (73). Túto možno napísať ako diferenciálnu rovnicu v tvare

$$y(t) = b_1\dot{z}(t) + b_0 z(t) \tag{85}$$

Avšak, my sme už urobili voľbu takú, že $\dot{z}(t) = x_2(t)$ a $z(t) = x_1(t)$. Takže diferenciálnu rovnicu (85) môžme písať ako

$$y(t) = b_1 x_2(t) + b_0 x_1(t) \tag{86}$$

alebo v maticovom tvare

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{87}$$

Celý systém s novo zavedenými stavovými veličinami teda je v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{88}$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{89}$$

a ak označíme stavový vektor ako $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^\mathsf{T}$, potom je systém v známom tvare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \tag{90a}$$
$$y(t) = c^\mathsf{T} x(t) \tag{90b}$$

kde matica $A$ a vektory $b$ a $c$ sú zrejmé...

Sústava diferenciálnych rovníc (90) je vo vhodnom tvare pre potreby ODE solvera. V skripte (vo výpise kódu 1) je takáto sústava realizovaná (podľa požiadaviek ODE solvera) funkciou `fcn_LTIS()` uvedenej na riadku 40.

### O referenčnom modeli

Prenosová funkcia referenčného modelu je v tvare (68). Ako túto prenosovú funkciu previesť do tvaru sústavy diferenciálnych rovníc by malo byť zrejmé z predchádzajúceho textu.

Vzhľadom na princíp fungovania tu zostavovanej simulačnej schémy (funkcia `fcn_simSch1` vo výpise kódu 1, riadok 48), je možné realizovať numerickú simuláciu aj jednoduchšie ako to typicky predpokladá ODE solver. Pomocou jednoduchej sumácie.

Potrebujeme poznať „prírastok k stavovému vektoru“ v každej iterácii (`for` cyklu). Tento „prírastok“ je daný veľkosťou zmeny stavového vektora (v čase) a dĺžkou času, počas ktorého táto zmena platí.

Poznáme veľkosť zmeny stavového vektora? Áno, doslova: $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$. V prípade referenčného modelu by sme však označili jednotlivé prvky špecifickejšie, teda $\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + b_m r(t)$ (vstupom RM je samozrejme $r(t)$). Toto môžeme dokonca implementovať s pomocou už existujúcej funkcie `fcn_LTIS()`:

```
dotx_m = fcn_LTIS(x_m_log[idx-1,:], 0, A_m, b_m, ref_sig)
```

Ako dlho bude „trvať“ táto zmena? V simulačnej schéme `fcn_simSch1` to určuje parameter (argument) `T_s`.

„Prírastok k stavovému vektoru“ potom je `dotx_m * T_s`. A tento prírastok je potrebné pripočítať k predchádzajúcej („starej“) hodnote stavového vektora, teda obyčajná sumácia („numerický integrál“):

```
x_m_log[idx,:] = x_m_log[idx-1,:] + dotx_m * T_s
```

Tým sme získali hodnotu stavového vektora v aktuálnom kroku („novú“ hodnotu). My však v tomto prípade potrebujeme výstupnú veličinu (nie stavový vektor), teda

```
y_m_log[idx,:] = np.dot(c_m.T, x_m_log[idx,:].reshape(-1,1))
```

kde by mali byť jednotlivé premenné (a funkcie) viac-menej už čitateľovi jasné... Snáď len toľko, že `c_m.T` je transponované pole `c_m` a že `reshape(-1,1)` je metóda, ktorá zmení tvar poľa na toľko riadkov koľko treba (prvý argument `-1`) a práve jeden stĺpec (druhý argument `1`).

### O zákone riadenia

Zákon riadenia má v tomto prípade tvar - viď (21). To je však zápis vo frekvenčnej oblasti s operátorom $s$.

Tu však potrebujeme zákon riadenia v časovej oblasti. Dovolíme si preto písať

$$u(t) = \Theta_1^\star \left[\frac{1}{(s+\lambda)}\right] u(t) + \Theta_2^\star \left[\frac{1}{(s+\lambda)}\right] y(t) + \Theta_3^\star y(t) + \Theta_4^\star r(t) \tag{91}$$

kde sme zmiešali písanie operátora $s$ a času $t$.

Autor pozná takýto (alebo podobný) spôsob zápisu práve z literatúry o klasickom adaptívnom riadení[3]. Tu nie je cieľom porušovať matematické vzťahy a podobne. Tu je cieľom zjednodušene vyjadriť praktický zápis, akým je (91), vo vzťahu k pôvodnej teórii daného zákona riadenia (kde mimochodom je takýto zápis veľmi užitočný)

Autor sa však mnoho krát stretáva s nevôľou čitateľov/poslucháčov prijať uvedený spôsob zápisu, prípadne si to vyžaduje dodatočné vysvetľovanie.

Akokoľvek, čo vlastne predstavuje napríklad prvý člen na pravej strane rovnice (91)? Ešte lepšie, prvý člen na pravej strane rovnice (21)? Označme prvý člen na pravej strane rovnice (21) takto:

$$y_{\nu_1}(s) = \Theta_1^\star \frac{1}{(s+\lambda)} u(s) \tag{92}$$

Je to teda samostatný dynamický systém daný prenosovou funkciou. Vstupom je v tomto prípade signál $u(s)$. Tento signál je „filtrovaný“ vždy známym filtrom, ktorého vlastnosti sú dané polynómom $\Lambda(s)$. Vznikne „nový signál“ (prefiltrované $u$) a tento je potom vynásobený parametrom zákona riadenia, v tomto prípade $\Theta_1^\star$. Uvedený

[3] viď napr. knihu G. Tao., Adaptive control design and analysis. [4]

samostatný dynamický systém je možné vyjadriť aj opisom v stavovom priestore. Pre tento konkrétny príklad

$$\dot{\nu}_1(t) = -\lambda\nu_1(t) + u(t) \tag{93a}$$
$$y_{\nu_1}(t) = \Theta_1^\star \nu_1(t) \tag{93b}$$

kde sme zaviedli pomocnú stavovú veličinu $\nu_1(t)$. Vieme aj reálne generovať (vyrobiť) tento pomocný signál $\nu_1(t)$? Je to jednoducho stavová veličina lineárneho dynamického systému, v princípe rovnakého ako je referenčný model, alebo model riadeného systému. Takže vieme reálne generovať pomocný signál $\nu_1(t)$. Prvý člen zákona riadenia (91) teda nahrádza výraz

$$\Theta_1^\star \nu_1(t) \tag{94}$$

pričom $\nu_1(t)$ je signál, ktorý vieme vyrobiť...

Druhý člen zákona riadenia (91), analogicky, nahrádza výraz

$$\Theta_2^\star \nu_2(t) \tag{95}$$

kde $\nu_2(t)$ je daný diferenciálnou rovnicou

$$\dot{\nu}_2(t) = -\lambda\nu_2(t) + y(t) \tag{96}$$

Zákon riadenia (91) je teda možné zapísať v tvare

$$u(t) = \Theta_1^\star \nu_1(t) + \Theta_2^\star \nu_2(t) + \Theta_3^\star y(t) + \Theta_4^\star r(t) \tag{97}$$

Čo sú parametre a čo sú signály v tomto zákone riadenia? Rozdeľme ich do vektorov. Vektora parametrov a vektora signálov

$$u(t) = \begin{bmatrix} \Theta_1^\star & \Theta_2^\star & \Theta_3^\star & \Theta_4^\star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ y(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \tag{98}$$

a označme

$$u(t) = \Theta^{\star\mathsf{T}} \omega \tag{99}$$

Vieme vyrobiť všetky signály v signálnom vektore $\omega$? Vieme. Poznáme parametre vo vektore $\Theta^\star$? Poznáme.

V tejto chvíli nič nebráni zostaveniu simulačnej schémy uzavretého regulačného obvodu.

### O formálnej súvislosti s MRAC stavovým

Pre lepšiu konzistenciu uvedeného s učebným textom je vhodné zmeniť poradie prvkov v signálnom vektore $\omega$. Učebný text totiž pracuje s myšlienkou čo najviac pripodobniť odvodenie „MRAC vstupno-výstupného“ k odvodeniu, ktoré definuje „MRAC stavový“. Dôvodom je, že ak máme k dispozícii stavový opis systému práve v normálnej forme riaditeľnosti, potom odvodenie (viac-menej akéhokoľvek) zákona riadenia je najjednoduchšie možné po formálnej stránke. Najpriamočiarejšie. Bez nutnosti formulácie predpokladov navyše, formálnych konštrukcií a podobne.

Inými slovami, ak máme dostupný postup návrhu (odvodenie) nejakého riadiaceho systému, v tomto prípade Adaptívneho riadenia s referenčným modelom s využitím Lyapunovovej teórie stability, potom je veľmi výhodné snažiť sa tento postup uplatniť vo všeobecnosti.

Ak tento postup máme pri predpoklade, že sú dostupné práve tie stavové veličiny, ktoré vedú na opis riadeného systému práve v normálnej forme riaditeľnosti, potom by bolo výhodné aby sme „novú úlohu“ formálne previedli do tvaru, ktorý zodpovedá známemu postupu.

To sa deje pri odvodení „MRAC vstupno-výstupného“ práve vtedy, keď sa zavedie pojem *doplnená sústava*, alebo *doplnený riadený systém*. To má čitateľ možnosť vidieť v učebnom texte. „Doplnkom“ sú práve signály, ktoré sme tu označili ako $\nu_1(t)$ a $\nu_2(t)$.

Výsledkom je, že zákon riadenia sa uvažuje v tvare

$$u(t) = \Theta_c^{\star\mathsf{T}} D X(t) + \Theta_4^\star r(t) \tag{100}$$

kde $\Theta_c^\star = \begin{bmatrix}\Theta_3^\star & \Theta_1^{\star\mathsf{T}} & \Theta_2^{\star\mathsf{T}}\end{bmatrix}^\mathsf{T}$; $\Theta_4^\star$ sú parametre zákona riadenia a maticu

$$D = \begin{bmatrix} c^\mathsf{T} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

sme zaviedli práve preto aby sme v zákone riadenia (100) mohli priamo písať doplnený stavový vektor $X(t)$, teda

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{bmatrix} \tag{101}$$

Všimnime si ale, že

$$DX(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{bmatrix} \tag{102}$$

čo je veľmi dôležité, pretože signál $y(t)$ máme, ale signál $x(t)$ (pochopiteľne) nemáme.

Pre prípad (100) teda môžeme zaviesť signálny vektor $\omega$ v poradí:

$$\omega = \begin{bmatrix} DX(t) \\ r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \tag{103}$$

Ak raz zvolíme poradie signálov vo vektore $\omega$, potom je tým jednoznačne určené aj poradie signálov vo vektore parametrov, v tomto prípade

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_3^\star \\ \Theta_1^\star \\ \Theta_2^\star \\ \Theta_4^\star \end{bmatrix} \tag{104}$$

### O simulačnej „schéme“ (skôr o „simulačnom skripte“)

Nasledujúci výpis kódu 3 obsahuje funkciu `fcn_simSch2`. Je postavená na rovnakých princípoch ako sme videli v kóde 1. Navyše však obsahuje aj realizáciu neadaptívnej verzie riadiaceho systému, ktorý používa tu diskutovaný zákon riadenia.

Overenie správnosti vypočítaných parametrov zákona riadenia je realizované grafickým porovnaním priebehu výstupu referenčného modelu a výstupnej veličiny riadeného systému - viď obr. 4.

Výpis kódu 3: Súbor `ar06_prMRC.py`, simulačná schéma uzavretého regulačného obvodu

```python

def fcn_LTIS(x, t, A, b, u):
    dotx = np.matmul(A, x) + np.matmul(b, u)
    return dotx


def fcn_simSch2(t_start, T_s, finalIndex, sig_dummy_ext):

    #----------------------------------------
    # Riadeny system

    A = np.array([[0, 1], [-2.6916, -2.7423]])
    b = np.array([[0], [1]])
    c = np.array([[3.5578], [0.1664]])

    #-------------------------
    # Referencny model

```

Obr. 4: Porovnanie priebehu výstupu referenčného modelu a výstupnej veličiny riadeného systému

```
    A_m = np.array([[0, 1], [-3.0, -3.5]])
    b_m = np.array([[0], [1]])
    c_m = np.array([[3], [1]])

    #-------------------------
    # Pomocne filtre

    Lambda_pom = np.array([[-3]])
    q_pom = np.array([[1]])

    #-------------------------------------------------------
    t_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    t_log[0,:] = t_start

    #----------------------------------------
    x_0 = np.zeros(b.shape[0])

    x_log = np.zeros([finalIndex, len(x_0)])
    x_log[0,:] = x_0

    y_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    y_log[0,:] = np.dot(c.T, x_0.reshape(-1,1))

    #-------------------------
    x_m_0 = np.zeros(b_m.shape[0])

    x_m_log = np.zeros([finalIndex, len(x_m_0)])
    x_m_log[0,:] = x_m_0

    y_m_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    y_m_log[0,:] = np.dot(c_m.T, x_m_0.reshape(-1,1))

    #-------------------------
    nu1_log = np.zeros([finalIndex, q_pom.shape[0]])
    nu2_log = np.zeros([finalIndex, q_pom.shape[0]])

    #-------------------------
    u_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    u_log[0,:] = 0

    #-------------------------------------------------------
    timespan = np.zeros(2)
    for idx in range(1, int(finalIndex)):

        timespan[0] = t_log[idx-1,:]
        timespan[1] = t_log[idx-1,:] + T_s

        t_log[idx,:] = timespan[-1]

        # ------------

        odeOut = odeint(fcn_LTIS,
```

```
                        x_log[idx-1,:],
                        timespan,
                        args=(A, b, u_log[idx-1,:])
                        )

        x_log[idx,:] = odeOut[-1,:]
        y_log[idx,:] = np.dot(c.T, x_log[idx,:].reshape(-1,1))

        # -------------------------
        # Referencny model:

        ref_sig = sig_dummy_ext[idx-1, :]

        dotx_m = fcn_LTIS(x_m_log[idx-1,:], 0, A_m, b_m, ref_sig)

        x_m_log[idx,:] = x_m_log[idx-1,:] + dotx_m * T_s

        y_m_log[idx,:] = np.dot(c_m.T, x_m_log[idx,:].reshape(-1,1))

        # -------------------------
        # Pomocne filtre:

        dotnu1 = fcn_LTIS(nu1_log[idx-1,:], 0, Lambda_pom, q_pom, u_log[idx-1,:])
        nu1_log[idx,:] = nu1_log[idx-1,:] + dotnu1 * T_s

        dotnu2 = fcn_LTIS(nu2_log[idx-1,:], 0, Lambda_pom, q_pom, y_log[idx-1,:])
        nu2_log[idx,:] = nu2_log[idx-1,:] + dotnu2 * T_s

        # -------------------------
        # Vektor omega:

        omega = np.array([y_log[idx,:],
                          nu1_log[idx-1,:].reshape(-1,1),
                          nu2_log[idx-1,:].reshape(-1,1),
                          ref_sig,
                        ])

        # -------------------------
        # Vektor Theta:

        Theta = np.array([[-4.5535],
                          [-18.3809],
                          [11.8071],
                          [6.0096],
                        ])

        # -------------------------

        u_log[idx,:] = np.dot(Theta.T, omega)[0]

    return [t_log, x_log, y_log, u_log, y_m_log]

# ---------------------------------------------------
# Nastavenie simulacie

sim_t_start = 0
sim_t_final = 40
sim_T_s = 0.01
sim_finalIndex = int(((sim_t_final - sim_t_start)/sim_T_s) + 1)

# Preddefinovany signal (pouzity ako referencny signal)

period_time = 20
period_tab = np.array([[0, 0.7],
                       [10, 0],
                      ])

sig_vysl = np.zeros([sim_finalIndex, 1])

for period in range(int(sim_t_final/period_time) + 1):
    for idx in range( int((period*period_time)/sim_T_s), int((period*period_time + period_time)/sim_T_s)):
        lastValue = period_tab[:,1][(period_tab[:,0] + (period*period_time))<=idx*sim_T_s ][-1]
        try:
            sig_vysl[idx] = lastValue
        except:
            break

```

```
sig_dummy_ext = sig_vysl

# Spustenie simulacie

t_log, x_log, y_log, u_log, y_m_log = fcn_simSch2(
    sim_t_start,
    sim_T_s,
    sim_finalIndex,
    sig_dummy_ext,
    )

```

# 3 SPR prenosové funkcie, MKY lemma

## 3.1 Striktne pozitívne reálne prenosové funkcie

Pojem *Pozitívne reálna* (PR) a *Striktne pozitívne reálna* (SPR) prenosová funkcia zohráva dôležitú úlohu v analýze stability nie len adaptívnych systémov [1]. Je preto dôležité disponovať kritériom, ktoré umožní zistiť, či príslušná prenosová funkcia je SPR ([3] str. 164).

Podľa definície 3.5.1 a 3.5.2 v [1], str. 127, prenosová fukcia $G(s)$ komplexnej premennej $s$ sa nazýva pozitívne reálna (PR) ak

1. $G(s)$ je reálna pre reálne $s$.
2. $\Re\{G(s)\} \geq 0$ pre všetky $\Re\{s\} > 0$.

Prenosová funkcia $G(s)$ je striktne pozitívne reálna (SPR) ak existuje reálne kladné číslo $\varepsilon$ také, že $G(s-\varepsilon)$ je PR.

Prakticky nie je jednoduché zistiť, či uvedené podmienky sú splnené. V nasledujúcom uvedieme ekvivalentné nutné a postačujúce podmienky pozitívnej reálnosti. Platnosť týchto podmienok sa dá ľahko overiť. Prenosová funkcia $G(s)$ je PR keď vyhovuje všetkým nasledujúcim podmienkam

1. $G(s)$ je reálna pre všetky reálne $s$.
2. Menovateľ $G(s)$ má korene v ľavej polrovine komplexnej roviny alebo má reálne korene na imaginárnej osi.
3. $\Re\{G(j\omega)\} \geq 0$ pre všetky reálne $\omega$.

Pre vyjadrenie reálnej časti funkcie $G(j\omega)$ je výhodné využiť, že platí:

$$\frac{a+jb}{c+jd} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{c^2+d^2}$$

## 3.2 Meyerova-Kalmanova-Yakubovichova Lemma

Pre danú stabilnú maticu $A$, vektory $b$, $c$ a skalár $d \geq 0$, platí nasledujúce: Ak

$$G(s) = d + c^{\mathsf{T}} (sI - A)^{-1} b$$

je SPR, potom pre danú maticu $L = L^{\mathsf{T}} > 0$ existujú skalár $v > 0$, vektor $q$ a matica $P = P^{\mathsf{T}} > 0$ také, že

$$A^{\mathsf{T}}P + PA = -qq^{\mathsf{T}} - vL$$
$$Pb - c = \pm q\sqrt{2d}$$

Tak znie veta, ktorá, ako sa ukáže, je veľmi užitočná pri návrhu MRAC využívajúceho len vstupno-výstupné informácie.

V tomto kurze ju využijeme v menej všeobecnom tvare: Nech je systém daný trojicou $A_c$, $\overline{B}_c$, $C_c$ a $A_c$ nech je stabilná matica. Ak $W_m(s) = C_c^{\mathsf{T}} (sI - A_c)^{-1} \overline{B}_c$ je SPR, potom platí, že

$$A_c^{\mathsf{T}}P + PA_c = -Q$$
$$P\overline{B}_c = C_c$$

kde $Q = Q^\mathsf{T} > 0$. A je to práve fakt, že ak je $W_m(s)$ SPR tak platí $P\overline{B}_c = C_c$, ktorý umožní zredukovať zákon adaptácie tak, že v ňom vystupuje len odchýlka výstupných veličín sústavy a referenčného modelu [2].

# 4 Adaptačná odchýlka

## 4.1 Model sústavy a referenčný model

Uvažujme sústavu opísanú prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \tag{105}$$

kde $Z_p(s)$ je monický Hurwitzov polynóm stupňa $m$, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa $n$ a $k_p$ je tzv. *vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy. Relatívny stupeň* sústavy je $n^* = n - m$. Predpokladajme, že relatívny stupeň $n^*$ sústavy je známy. Pre zjednodušenie tiež predpokladajme, že aj stupne $n$ a $m$ polynómov sú známe, pričom vo všeobecnosti známe nemusia byť. Koeficienty polynómov $Z_p(s)$ a $R_p(s)$ (parametre sústavy) sú neznáme. Hodnota a znamienko zosilnenia $k_p$ nech je známe.

Sústava v tvare (105) môže byť reprezentovaná opisom v stavovom priestore v tvare

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{106a}$$

$$y = c^\mathsf{T} x \tag{106b}$$

kde $x$ je vektor stavových veličín sústavy a $A$, $b$, $c^\mathsf{T}$ sú matice (vektory) zodpovedajúcich rozmerov pričom hodnoty ich prvkov sú neznáme.

Cieľom riadenia je: Nech všetky signály uzavretého regulačného obvodu sú ohraničené a výstupná veličina $y$ sústavy nech sleduje výstupnú veličinu referenčného modelu, ktorý je daný prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \tag{107}$$

kde $k_m$ je vysokofrekvenčné zosilnenie, $Z_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa $m_m$, $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa $n_m$, pričom relatívny stupeň $n_m^* = n_m - m_m = n^*$. Všetky parametre (koeficienty polynómov a $k_m$) referenčného modelu sú známe, dané „projektantom“.

## 4.2 Zákon riadenia

Ako bolo ukázané v predchádzajúcich témach predmetu, zákon riadenia v tvare

$$u = \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r \tag{108}$$

zabezpečí, že priebeh výstupnej veličiny $y$ sa zhoduje s priebehom výstupnej veličiny referenčného modelu $y_m$ ak sú parametre zákona vypočítané z podmienok zhody

$$\Theta_4^\star = \frac{k_m}{k_p} \tag{109a}$$

$$\Lambda = \Lambda_0 Z_m \tag{109b}$$

$$R_p\left(\Lambda - \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \alpha(s)\right) - k_p Z_p \left(\Theta_2^{\star\mathsf{T}} \alpha(s) + \Theta_3^\star \Lambda\right) = Z_p \Lambda_0 R_m \tag{109c}$$

Pretože parametre sústavy (105) sú neznáme, zákon riadenia (108) nemožno použiť. Použije sa zákon riadenia v tvare

$$u = \Theta_1^\mathsf{T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^\mathsf{T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3 y + \Theta_4 r \tag{110}$$

kde $\Theta_1$, $\Theta_2$, $\Theta_3$ a $\Theta_4$ sú odhadmi ideálnych parametrov $\Theta_1^\star$, $\Theta_2^\star$, $\Theta_3^\star$ a $\Theta_4^\star$ v každom čase $t$. Je potrebné nájsť zákon adaptácie, ktorý priebežne generuje (identifikuje) hodnoty $\Theta_1(t)$, $\Theta_2(t)$, $\Theta_3(t)$ a $\Theta_4(t)$.

Pomocné filtre vystupujúce v zákone riadenia v stavovom priestore sú (viď predch. článok)

$$\dot{\nu}_1 = \Lambda\nu_1 + qu \tag{111a}$$
$$\dot{\nu}_2 = \Lambda\nu_2 + qc^\mathsf{T}x \tag{111b}$$

a uvažovaný zákon riadenia je

$$u = \Theta_c^\mathsf{T} DX + \Theta_4 r \tag{112}$$

kde $\Theta_c = \begin{bmatrix}\Theta_3^\star & \Theta_1^\mathsf{T} & \Theta_2^\mathsf{T}\end{bmatrix}^\mathsf{T}$, $\Theta_4$ sú parametre zákona riadenia a

$$D = \begin{bmatrix} c^\mathsf{T} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

## 4.3 Rovnica adaptačnej odchýlky

Pridanie pomocných filtrov (111) k stavovému opisu sústavy (106) vedie k „doplnenej sústave“ (viď predch. časti predmetu) v tvare

$$\dot{X} = A_o X + B_c u \tag{113a}$$
$$y = C_c^\mathsf{T} X \tag{113b}$$

Parametrizácia doplnenej sústavy (113) pomocou ideálnych parametrov zákona riadenia sa dosiahne pripočítaním a odpočítaním ideálneho vstupného výrazu $B_c u^\star = B_c \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX + B_c \Theta_4^\star r$

$$\dot{X} = A_o X + B_c u + B_c \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX + B_c \Theta_4^\star r - B_c \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - B_c \Theta_4^\star r \tag{114a}$$
$$\dot{X} = \left(A_o + B_c \Theta_c^{\star\mathsf{T}} D\right) X + B_c \Theta_4^\star r + B_c \left(u - \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{114b}$$

Z predchádzajúcich častí vieme, že $A_c = A_o + B_c \Theta_c^{\star\mathsf{T}} D$, $\overline{B}_c = B_c \Theta_4^\star$ a tiež, že neminimálnu reprezentáciu referenčného modelu (107) možno (teoreticky) zapísať v tvare

$$\dot{X}_m = A_c X_m + \overline{B}_c r \tag{115a}$$
$$y_m = C_c^\mathsf{T} X_m \tag{115b}$$

Potom parametrizovaná doplnená sústava (114b) je

$$\dot{X} = A_c X + \overline{B}_c r + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(u - \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{116a}$$
$$y = C_c^\mathsf{T} X \tag{116b}$$

Definujme *adaptačnú odchýlku* v tvare

$$e = X - X_m \tag{117}$$
$$e_1 = y - y_m \tag{118}$$

potom:

$$\dot{X} - \dot{X}_m = A_c \left(X - X_m\right) + \overline{B}_c r - \overline{B}_c r + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(u - \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{119a}$$
$$y - y_m = C_c^\mathsf{T} \left(X - X_m\right) \tag{119b}$$

a teda

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left( u - \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - \Theta_4^\star r \right) \tag{120a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{120b}$$

čo je základná rovnica opisujúca dynamiku adaptačnej odchýlky v stavovom priestore, ktorú možno vyjadriť v tvare prenosovej funkcie uvážením, že platí

$$W_m(s) = C_c^\mathsf{T} \left( sI - A_c \right)^{-1} \overline{B}_c \tag{121}$$

Potom (120) v tvare prenosovej funkcie je

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^\star} \left( u - \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - \Theta_4^\star r \right) \tag{122}$$

Odhadom odchýlky $e_1$ nech je $\hat{e}_1$, ktorá je závislá od odhadov $\Theta_c(t)$, $\Theta_4(t)$.

$$\hat{e}_1 = W_m(s) l \left( u - \Theta_c DX - \Theta_4 r \right) \tag{123}$$

kde $l$ je odhadom hodnoty $\frac{1}{\Theta_4^\star}$. Pretože uvažujeme zákon riadenia $u = \Theta_c^\mathsf{T} DX + \Theta_4 r$, tak $\hat{e}_1 = 0$; $\forall t$. To znamená, že rovnica (123) nie je potrebná pre identifikáciu neznámych parametrov $\Theta_c^\star$, $\Theta_4^\star$ a ako chybu odhadu týchto parametrov možno použiť priamo rovnicu adaptačnej odchýlky (122).

# 5 Zákon adaptácie pri $n^* = 1$

Uvažujme, že relatívny stupeň sústavy (105) je $n^* = 1$. Prenosová funkcia referenčného medelu $W_m(s)$ sa volí tak, aby jej relatívny stupeň bol zhodný s relatívnym stupňom sústavy. Relatívny stupeň referenčného modelu $n_m^* = 1$ umožňuje aby prenosová funkcia $W_m(s)$ bola navrhnutá ako striktne pozitívne reálna (SPR).

Nech $W_m(s) = C_c^\mathsf{T} \left( sI - A_c \right)^{-1} \overline{B}_c$ je SPR. Potom podľa MKY lemmy v časti 3.2 existuje taká matica $P$, pre ktorú platí

$$A_c^\mathsf{T} P + P A_c = -Q \tag{124a}$$

$$P \overline{B}_c = C_c \tag{124b}$$

kde $Q = Q^\mathsf{T} > 0$. Táto skutočnosť sa v ďalšom využije pri voľbe kandidáta na Lyapunovovu funkciu.

Dosadením (112) za $u$ do (122) máme

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^\star} \left( \theta_c^\mathsf{T} DX + \theta_4 r \right) \tag{125}$$

kde $\theta_c = \Theta_c - \Theta_c^\star$ a $\theta_4 = \Theta_4 - \Theta_4^\star$. Zavedením vektora chyby nastavenia parametrov zákona riadenia $\theta = \begin{bmatrix} \theta_c^\mathsf{T} & \theta_4 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ a signálneho vektora $\omega = \begin{bmatrix} (DX)^\mathsf{T} & r \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ máme známy tvar adaptačnej odchýlky

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^\star} \left( \theta^\mathsf{T} \omega \right) \tag{126}$$

alebo

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left( \theta^\mathsf{T} \omega \right) \tag{127a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{127b}$$

V tomto prípade rovnica (126) alebo (127) dáva do vzťahu chybu nastavenia parametrov zákona riadenia $\Theta$ a adaptačnú odchýlku $e_1$ cez SPR prenosovú funkciu.

Predpokladajme, že štruktúra zákona adaptácie je daná diferenciálnou rovnicou všeobecne zapísanou v tvare

$$\dot{\theta} = f(e_1, \omega) \tag{128}$$

Obr. 5: Bloková schéma MRAC so vstupno-výstupnou štruktúrou riadenia pri $n^\star = 1$

teda aby zákon adaptácie bol funkciou len výstupnej adaptačnej odchýlky $e_1$ a nie aj jej derivácií $e$, pretože tieto nie sú dostupné, nakoľko nie sú dostupné stavové veličiny sústavy.

Zvoľme kandidáta na Ljapunovovu funkciu v tvare

$$V = e^\mathsf{T} P e + \left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \theta \tag{129}$$

kde $\Gamma > 0$ je ľubovolná diagonálna matica, $\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|$ je absolútna hodnota prevrátenej hodnoty parametra $\Theta_4^\star$ a $P = P^\mathsf{T} > 0$ spĺňa rovnice (124), ktoré vyplývajú z MKY lemmy.

$$\dot{V} = \dot{e}^\mathsf{T} P e + e^\mathsf{T} P \dot{e} + \left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \left(\dot{\theta}^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \theta + \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta}\right) \tag{130}$$

Poznáme (127) odkiaľ $\dot{e}^\mathsf{T} = e^\mathsf{T} A_c^\mathsf{T} + \omega^\mathsf{T} \theta \frac{1}{\Theta_4^\star} \overline{B}_c^\mathsf{T}$, po dosadení týchto výrazov:

$$\dot{V} = \left(e^\mathsf{T} A_c^\mathsf{T} + \omega^\mathsf{T} \theta \frac{1}{\Theta_4^\star} \overline{B}_c^\mathsf{T}\right) P e + e^\mathsf{T} P \left(A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega\right) + 2 \left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{131}$$

$$\dot{V} = e^\mathsf{T} (-Q) e + 2 e^\mathsf{T} P \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega + 2 \left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{132}$$

Pripomeňme, že platí $P\overline{B}_c = C_c$ (to vďaka tomu, že $W_m(s)$ je SPR), potom

$$\dot{V} = e^{\mathsf{T}}\left(-Q\right)e + 2e^{\mathsf{T}}C_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^{\mathsf{T}}\omega + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\theta^{\mathsf{T}}\Gamma^{-1}\dot{\theta} \tag{133}$$

Všimnime si, že $e^{\mathsf{T}}C_c = C_c^{\mathsf{T}}e = e_1$. Práve tento moment umožní aby zákon adaptácie $\dot{\theta} = f(e_1, \omega)$ bol funkciou $e_1$ a nie $e$. Časová derivácia $\dot{V}$

$$\dot{V} = e^{\mathsf{T}}\left(-Q\right)e + 2e_1\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^{\mathsf{T}}\omega + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\theta^{\mathsf{T}}\Gamma^{-1}\dot{\theta} \tag{134}$$

bude záporne definitná ak

$$0 = 2e_1\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^{\mathsf{T}}\omega + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\theta^{\mathsf{T}}\Gamma^{-1}\dot{\theta} \tag{135a}$$

$$2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\theta^{\mathsf{T}}G^{-1}\dot{\theta} = -2e_1\frac{1}{\Theta_4^\star}\Theta^{\mathsf{T}}\omega \tag{135b}$$

$$\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\Gamma^{-1}\dot{\theta} = -e_1\,\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right)\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\omega \tag{135c}$$

$$\Gamma^{-1}\dot{\theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right)e_1\omega \tag{135d}$$

$$\dot{\theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right)e_1\Gamma\omega \tag{135e}$$

Rovnako ako sme zaviedli vektor $\Theta$, zavedieme aj vektor parametrov zákona riadenia v tvare
$\Theta = \begin{bmatrix}\Theta_c^{\mathsf{T}} & \Theta_4\end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix}\Theta_3 & \Theta_1^{\mathsf{T}} & \Theta_2^{\mathsf{T}} & \Theta_4\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ a vektor $\omega$ možno zapísať v tvare $\omega = \begin{bmatrix}y & \nu_1^{\mathsf{T}} & \nu_2^{\mathsf{T}} & r\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$. Potom zákon adaptácie je

$$\dot{\Theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right)\Gamma e_1\omega \tag{136}$$

a uvažovaný zákon riadenia možno zapísať v tvare $u = \Theta^{\mathsf{T}}\omega$.

# 6 Zákon adaptácie pri $n^* = 2$

## 6.1 Priamočiary postup

Uvažujme relatívny stupeň sústavy (105) $n^* = 2$. Prenosová funkcia referenčného medelu $W_m(s)$ sa volí tak, aby jej relatívny stupeň bol zhodný s relatívnym stupňom sústavy, teda $n_m^* = 2$. To ale znamená (bez dôkazu), že prenosová funkcia $W_m(s)$ nie je SPR. Preto nie je možné použiť predchádzajúci postup a je ho potrebné modifikovať.

Rovnica pre adaptačnú odchýlku (122)

$$e_1 = W_m(s)\frac{1}{\Theta_4^\star}\left(u - \Theta_c^{\star\mathsf{T}}DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{137}$$

je stále platná (pri jej odvodení nehral relatívny stupeň sústavy žiadnu úlohu).

Využime identitu $(s+\rho)(s+\rho)^{-1} = 1$ kde $\rho$ je ľubovolná kladná konštanta a prepíšme rovnicu (122) do tvaru

$$e_1 = W_m(s)(s+\rho)(s+\rho)^{-1}\frac{1}{\Theta_4^\star}\left(u - \Theta_c^{\star\mathsf{T}}DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{138}$$

čo možno prepísať do tvaru

$$e_1 = W_m(s)(s+\rho)\frac{1}{\Theta_4^\star}\left(u_f - \Theta^{\star\mathsf{T}}\omega_f\right) \tag{139}$$

kde sme zaviedli $u_f = (s+\rho)^{-1}u$, $\omega_f = (s+\rho)^{-1}\omega$ a $\Theta^\star$ je rovnaký ako $\Theta$ avšak obsahuje ideálne parametre.

Nech prenosová funkcia $W_m(s)(s+\rho)$ je zvolená tak, že je to SPR prenosová funkcia. Potom rovnica

$$e_1 = W_m(s)(s+\rho)\frac{1}{\Theta_4^\star}\left(\theta^\mathsf{T}\omega_f\right) \tag{140}$$

kde $\theta = \Theta - \Theta^\star$ dáva do vzťahu chybu nastavenia parametrov zákona riadenia $\theta$ a adaptačnú udchýlku $e_1$ cez SPR prenosovú funkciu. Reprezentácia rovnice (140) v stavovom priestore je

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c(s+\rho)\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f \tag{141a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{141b}$$

kde $s$ teraz predstavuje operátor derivácie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, rovnako ako bodka „˙“ nad $e$. V ďalšom sa tiež stretneme s takýmto významom symbolu $s$, pričom na to nebudeme zvlášť upozorňovať, konkrétny význam symbolu $s$ vyplynie z kontextu. Preto

$$se = A_c e + s\left(\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f\right) + \rho\left(\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f\right) \tag{142a}$$

$$s\left(e - \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f\right) = A_c e + \rho\left(\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f\right) \tag{142b}$$

Označme $e - \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f = \overline{e}$, potom $e = \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f + \overline{e}$ a teda

$$s\overline{e} = A_c\left(\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f + \overline{e}\right) + \rho\left(\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f\right) \tag{143a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e = C_c^\mathsf{T}\left(\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f + \overline{e}\right) \tag{143b}$$

$$\dot{\overline{e}} = A_c\overline{e} + A_c\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f + \rho\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f \tag{144a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T}\overline{e} + C_c^\mathsf{T}\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f \tag{144b}$$

Pretože $C_c^\mathsf{T}B_c = 0$ tak aj $C_c^\mathsf{T}\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f = 0$, potom

$$\dot{\overline{e}} = A_c\overline{e} + \left(A_c\overline{B}_c + \rho\overline{B}_c\right)\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f \tag{145a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T}\overline{e} \tag{145b}$$

Označme $A_c\overline{B}_c + \rho\overline{B}_c = B_1$, potom

$$\dot{\overline{e}} = A_c\overline{e} + B_1\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f \tag{146a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T}\overline{e} \tag{146b}$$

je stavová reprezentácia systému (140) daného prenosovou funkciou $W_m(s)(s+\rho)$, pričom $\overline{e}$ je vektor jeho stavových veličín.

Funkcia $W_m(s)(s+\rho) = C_c^\mathsf{T}\left(sI - A_c\right)^{-1}B_1$ je SPR. Potom podľa MKY lemmy v časti 3.2 existuje taká matica $P$, pre ktorú platí

$$A_c^\mathsf{T}P + PA_c = -Q \tag{147a}$$

$$PB_1 = C_c \tag{147b}$$

kde $Q = Q^\mathsf{T} > 0$.

Predpokladajme, že štruktúra zákona adaptácie je daná diferenciálnou rovnicou všeobecne zapísanou v tvare

$$\dot{\theta} = f(e_1, \omega_f) \tag{148}$$

Zvoľme kandidáta na Ljapunovovu funkciu v tvare

$$V = \overline{e}^{\mathsf{T}} P \overline{e} + \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^{\mathsf{T}} \Gamma^{-1} \theta \tag{149}$$

kde $\Gamma > 0$ je ľubovolná diagonálna matica, $\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|$ je absolútna hodnota prevrátenej hodnoty parametra $\Theta_4^\star$ a $P = P^{\mathsf{T}} > 0$ spĺňa rovnice (147), ktoré vyplývajú z MKY lemmy.

$$\dot{V} = \dot{\overline{e}}^{\mathsf{T}} P \overline{e} + \overline{e}^{\mathsf{T}} P \dot{\overline{e}} + \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \left( \dot{\theta}^{\mathsf{T}} \Gamma^{-1} \theta + \theta^{\mathsf{T}} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \right) \tag{150}$$

Poznáme (146) odkiaľ $\dot{\overline{e}}^{\mathsf{T}} = \overline{e}^{\mathsf{T}} A_c^{\mathsf{T}} + \omega_f^{\mathsf{T}} \theta \frac{1}{\Theta_4^\star} B_1^{\mathsf{T}}$, po dosadení týchto výrazov:

$$\dot{V} = \left( \overline{e}^{\mathsf{T}} A_c^{\mathsf{T}} + \omega_f^{\mathsf{T}} \theta \frac{1}{\Theta_4^\star} B_1^{\mathsf{T}} \right) P \overline{e} + \overline{e}^{\mathsf{T}} P \left( A_c \overline{e} + B_1 \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^{\mathsf{T}} \omega_f \right) + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^{\mathsf{T}} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{151}$$

$$\dot{V} = \overline{e}^{\mathsf{T}} \left( -Q \right) \overline{e} + 2 \overline{e}^{\mathsf{T}} P B_1 \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^{\mathsf{T}} \omega_f + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^{\mathsf{T}} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{152}$$

Pripomeňme, že platí $PB_1 = C_c$, potom

$$\dot{V} = \overline{e}^{\mathsf{T}} \left( -Q \right) \overline{e} + 2 \overline{e}^{\mathsf{T}} C_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^{\mathsf{T}} \omega_f + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^{\mathsf{T}} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{153}$$

Všimnime si, že $\overline{e}^{\mathsf{T}} C_c = C_c^{\mathsf{T}} \overline{e} = e_1$. Časová derivácia $\dot{V}$

$$\dot{V} = \overline{e}^{\mathsf{T}} \left( -Q \right) \overline{e} + 2 e_1 \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^{\mathsf{T}} \omega_f + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^{\mathsf{T}} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{154}$$

bude záporne definitná ak

$$0 = 2 e_1 \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^{\mathsf{T}} \omega_f + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^{\mathsf{T}} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{155a}$$

$$2 \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^{\mathsf{T}} \Gamma^{-1} \dot{\theta} = -2 e_1 \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^{\mathsf{T}} \omega_f \tag{155b}$$

$$\left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \Gamma^{-1} \dot{\theta} = -e_1 \, \mathtt{sign} \left( \frac{1}{\Theta_4^\star} \right) \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \omega_f \tag{155c}$$

$$\Gamma^{-1} \dot{\theta} = -\mathtt{sign} \left( \frac{1}{\Theta_4^\star} \right) e_1 \omega_f \tag{155d}$$

$$\dot{\theta} = -\mathtt{sign} \left( \frac{1}{\Theta_4^\star} \right) e_1 \Gamma \omega_f \tag{155e}$$

Potom zákon adaptácie je

$$\dot{\Theta} = -\mathtt{sign} \left( \frac{1}{\Theta_4^\star} \right) \Gamma e_1 \omega_f \tag{156}$$

Signálny vektor $\omega_f$ má zložky $\omega_f = \begin{bmatrix} y_f & \nu_{1_f}^{\mathsf{T}} & \nu_{2_f}^{\mathsf{T}} & r_f \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$. Tieto signály získame jednoducho prechodom pôvodných signálov $y$, $\nu_1^{\mathsf{T}}$, $\nu_2^{\mathsf{T}}$ a $r$ cez filtre s prenosovou funkciou v tvare $\frac{1}{s+\rho}$.

Vstupom do sústavy je $u$. Pri odvodení zákona adaptácie sme ale uvažovali $u_f = (s+\rho)^{-1} u$ odkiaľ $u = (s+\rho) u_f$. Signál $u_f$ možno zapísať aj v tvare $u_f = \Theta^{\mathsf{T}} \omega_f$. Teda $u = (s+\rho) \Theta^{\mathsf{T}} \omega_f$, z čoho vyplýva, že

$$u = \Theta^{\mathsf{T}} \omega + \dot{\Theta}^{\mathsf{T}} \omega_f \tag{157}$$

Pre objasnenie (157) naznačíme, že:

$$
\begin{aligned}
&(s+\rho)\Theta^{\mathsf{T}}\omega_f \\
&s\left(\Theta^{\mathsf{T}}\omega_f\right)+\rho\Theta^{\mathsf{T}}\omega_f \\
&s\left(\Theta^{\mathsf{T}}\right)\omega_f+\Theta^{\mathsf{T}}s\left(\omega_f\right)+\rho\Theta^{\mathsf{T}}\omega_f \\
&\dot{\Theta}^{\mathsf{T}}\omega_f+\Theta^{\mathsf{T}}s\left(\frac{1}{(s+\rho)}\omega\right)+\rho\Theta^{\mathsf{T}}\frac{1}{(s+\rho)}\omega \\
&\dot{\Theta}^{\mathsf{T}}\omega_f+\Theta^{\mathsf{T}}\frac{s}{(s+\rho)}\omega+\Theta^{\mathsf{T}}\frac{\rho}{(s+\rho)}\omega \\
&\dot{\Theta}^{\mathsf{T}}\omega_f+\Theta^{\mathsf{T}}\frac{s+\rho}{(s+\rho)}\omega \\
&\dot{\Theta}^{\mathsf{T}}\omega_f+\Theta^{\mathsf{T}}\omega
\end{aligned}
$$

## 6.2 Metóda doplnenej odchýlky

Vo všeobecnosti, zákon riadenia, ktorý rieši MRC problém je $u = \Theta^{\mathsf{T}}\omega$. Pri jeho dosadení do všeobecne platnej rovnice adaptačnej odchýlky (122) máme rovnicu adaptačnej odchýlky v tvare

$$e_1 = W_m(s)\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^{\mathsf{T}}\omega \tag{158}$$

V rovnici (138) sme použili identitu $(s+\rho)(s+\rho)^{-1} = 1$, čo vo všeobecnosti je $L(s)L(s)^{-1} = 1$.

Rovnicu (158) sme v predchádzajúcom tvare doplnili do tvaru

$$e_1 = W_m(s)L(s)L(s)^{-1}\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^{\mathsf{T}}\omega \tag{159}$$

a z rovnice (139) vyplíva, že (159) možno prepísať do tvaru

$$e_1 = W_m(s)L(s)\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^{\mathsf{T}}L(s)^{-1}\omega \tag{160}$$

Rovnica (160) može byť zapísaná aj v tvare

$$e_1 = W_m(s)\frac{1}{\Theta_4^\star}\left(L(s)\theta L(s)^{-1}\right)^{\mathsf{T}}\omega \tag{161}$$

kde sme vymenili pozície $\frac{1}{\Theta_4^\star}$ a $L(s)$, čo je možné, pretože $\frac{1}{\Theta_4^\star}$ je len konštanta a nie funkcia času, a táto rovnica dáva do vzťahu chybu nastavenia parametrov zákona riadenia s adaptačnou odchýlkou. V stavovom priestore má rovnica „doplnenej“ adaptačnej odchýlky (161) tvar

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\left(L(s)\theta L(s)^{-1}\right)^{\mathsf{T}}\omega \tag{162a}$$

$$e_1 = C_c^{\mathsf{T}} e \tag{162b}$$

Adaptačná odchýlka je definovaná ako $e = X - X_m$ a $e_1 = y - y_m$. Sú dve možnosti ako dosiahnúť aby výsledok odčítania rovníc parametrizovanej doplnenej sústavy, kde stavový vektor je $X$, a neminimálnej reprezentácie referenčného modelu, kde stavový vektor je $X_m$, bol v tvare doplnenej adaptačnej odchýlky (162).

### 6.2.1 Prvá možnosť

Výsledok je rovnaký ako v predchádzajúcej časti:

Rovnicu parametrizovanej doplnenej sústavy (116) po dosadení za $u = \Theta^{\mathsf{T}}\omega$ možno zapísať v tvare

$$\dot{X} = A_c X + \overline{B}_c r + \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^{\mathsf{T}}\omega \tag{163a}$$

$$y = C_c^{\mathsf{T}} X \tag{163b}$$

Zavedieme také pravidlo, že keď $W_m(s)$ nie je možné navrhnúť ako SPR, tak v rovnici (163) nahradíme $\Theta^\mathsf{T}$ výrazom $\left(L(s)\theta L(s)^{-1}\right)^\mathsf{T}$, kde $L(s)$ je dané tým, že $W_m(s)L(s)$ je zvolená ako SPR prenosová funkcia. Teda

$$\dot{X} = A_c X + \overline{B}_c r + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(L(s)\theta L(s)^{-1}\right)^\mathsf{T} \omega \tag{164a}$$

$$y = C_c^\mathsf{T} X \tag{164b}$$

Pripomeňme

$$\dot{X}_m = A_c X_m + \overline{B}_c r \tag{165a}$$

$$y_m = C_c^\mathsf{T} X_m \tag{165b}$$

Odčítaním (165) od (164) získame rovnicu „doplnenej“ adaptačnej odchýlky (162), ktorá zabezpečuje (podrobne ukázané v predchádzajúcom), že chyba nastavenia parametrov zákona riadenia $\theta$ je vo vzťahu z adaptačnou odchýlkou $e_1$ cez SPR prenosovú funkciu.

Pretože rovnica parametrizovanej doplnenej sústavy je modifikovaná podľa zavedeného pravidla, tak aj zákon riadenia je modifikovaný do tvaru $u = \left(L(s)\Theta L(s)^{-1}\right)^\mathsf{T} \omega$. V prípade, že $L(s) = (s+\rho)$ (ako v predchádzajúcom), tak výraz $L(s)\Theta^\mathsf{T} L(s)^{-1}$ je funkčne ekvivalentný výrazu

$$L(s)\Theta^\mathsf{T} L(s)^{-1} = \Theta^\mathsf{T} + \dot{\Theta}^\mathsf{T} L(s)^{-1} \tag{166}$$

a teda modifikovaný zákon riadenia má v tomto prípade tvar $u = \Theta^\mathsf{T}\omega + \dot{\Theta}^\mathsf{T}\omega_f$.

### 6.2.2 Druhá možnosť

Výsledkom je algoritmus nazývaný *metóda doplnenej odchýlky*:

Namiesto nahradenia $\theta^\mathsf{T}$ výrazom $\left(L\theta L^{-1}\right)^\mathsf{T}$ v rovnici parametrizovanej doplnenej sústavy pridáme vstupný signál v tvare $\frac{1}{\theta_4^\star}\left(\theta - L\theta L^{-1}\right)^\mathsf{T}\omega$ do referenčného modelu nasledovne

$$\dot{X}_m = A_c X_m + \overline{B}_c \left(r + \frac{1}{\Theta_4^\star}\left(\theta - L\theta L^{-1}\right)^\mathsf{T}\omega\right) \tag{167a}$$

$$y_m = C_c^\mathsf{T} X_m \tag{167b}$$

$$\dot{X}_m = A_c X_m + \overline{B}_c r + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\left(\theta - L\theta L^{-1}\right)^\mathsf{T}\omega \tag{168a}$$

$$y_m = C_c^\mathsf{T} X_m \tag{168b}$$

Rovnica parametrizovanej doplnenej sústavy sa teraz nemení (nemodifikuje)

$$\dot{X} = A_c X + \overline{B}_c r + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega \tag{169a}$$

$$y = C_c^\mathsf{T} X \tag{169b}$$

Odčítaním (168) od (169) podľa definície adaptačnej odchýlky máme

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\left(\theta - L\theta L^{-1}\right)^\mathsf{T}\omega \tag{170a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{170b}$$

Výraz

$$\left(\theta - L\theta L^{-1}\right) = L\left(L^{-1}\theta - \theta L^{-1}\right) \tag{171}$$

Potom

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\left(L\left(L^{-1}\theta - \theta L^{-1}\right)\right)^\mathsf{T}\omega \tag{172a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{172b}$$

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} L \left( L^{-1} \theta^\mathsf{T} - \theta^\mathsf{T} L^{-1} \right) \omega \tag{173a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{173b}$$

Rovnicu (173) je možné prepísať do požadovaného tvaru (162) nasledovne:

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} L L^{-1} \theta^\mathsf{T} \omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} L \theta^\mathsf{T} L^{-1} \omega \tag{174a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{174b}$$

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} L \theta^\mathsf{T} L^{-1} \omega \tag{175a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{175b}$$

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left( L \theta L^{-1} \right)^\mathsf{T} \omega \tag{176a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{176b}$$

Rovnica (173) v tvare prenosovej funkcie je

$$e_1 = W_m \frac{1}{\Theta_4^\star} \left( \theta^\mathsf{T} \omega - L \left( L^{-1} \theta^\mathsf{T} - \theta^\mathsf{T} L^{-1} \right) \omega \right) \tag{177}$$

$$e_1 = W_m \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega - W_m \frac{1}{\Theta_4^\star} L \left( L^{-1} \theta^\mathsf{T} - \theta^\mathsf{T} L^{-1} \right) \omega \tag{178}$$

Platí

$$\begin{aligned} L^{-1} \theta^\mathsf{T} - \theta^\mathsf{T} L^{-1} &= L^{-1} \left( \Theta - \Theta^\star \right)^\mathsf{T} - \left( \Theta - \Theta^\star \right)^\mathsf{T} L^{-1} \\ &= \left( L^{-1} \Theta^\mathsf{T} - \Theta^\mathsf{T} L^{-1} \right) - \left( L^{-1} \Theta^{\star\mathsf{T}} - \Theta^{\star\mathsf{T}} L^{-1} \right) \\ &= \left( L^{-1} \Theta^\mathsf{T} - \Theta^\mathsf{T} L^{-1} \right) \end{aligned} \tag{179}$$

pretože $\Theta^\star$ nie je funkciou času a teda $L^{-1} \Theta^{\star\mathsf{T}} = \Theta^{\star\mathsf{T}} L^{-1}$. Potom

$$e_1 = W_m \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega - W_m L \frac{1}{\Theta_4^\star} \left( L^{-1} \Theta^\mathsf{T} \omega - \Theta^\mathsf{T} L^{-1} \omega \right) \tag{180}$$

$$e_1 = W_m \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega - W_m L \frac{1}{\Theta_4^\star} \left( L^{-1} u - \Theta^\mathsf{T} \omega_f \right) \tag{181}$$

kde označíme: $e_m = W_m \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega$ je odchýlka medzi výstupom pôvodného nemodifikovaného referenčného modelu a signál $e_d = W_m L \frac{1}{\Theta_4^\star} \left( L^{-1} u - \Theta^\mathsf{T} \omega_f \right)$ sa pridá k tejto odchýlke, čím vznikne modifikovaný signál $e_1$ a tento sa použije v zákone adaptácie.

Rovnicu parametrizovanej doplnenej sústavy (169) sme nezmenili, preto sa v tomto prípade nemení ani zákon riadenia $u = \Theta^\mathsf{T} \omega$.

# 7 Príklad k téme *Zákon adaptácie pri* $n^* = 1$

Tento príklad v princípe dopĺňa zákon adaptácie k riadiacemu systému, ktorý je predmetom návrhu v predchádzajúcej časti 2.

Obr. 6: Referenčný sigál $r$

Obr. 7: Výsledok simulácie

## 7.1 Úlohy

1. Pre nominálnu prenosovú funkciu – pozri zadanie a riešenie príkladu v časti 2 – pre túto nominálnu prenosovú funkciu riadeného systému navrhnite adaptívne riadenie s referenčným modelom so vstupno-výstupnou štruktúrou zákona riadenia (merateľný je len výstup riadeného systému a samozrejme vstup). Pre odvodenie zákona adaptácie použite priamu Lyapunovou metódu. Nech referenčný model je v tvare

$$W_m(s) = \frac{s+3}{s^2+3.5s+3} \tag{182}$$

- Určte zákon riadenia, ktorý sa bude používať v adaptívnom riadiacom systéme.
- Vypočítajte ideálne parametre zákona riadenia.
- Zistite, či $W_m(s)$ je striktne pozitívne reálna (SPR) prenosová funkcia.
- Napíšte rovnicu výstupnej adaptačnej odchýlky $e_1$.
- Pre systém diferenciálnych rovníc ($\dot{e}$, $\dot{\theta}$), kde $\dot{\theta}$ sa najskôr uvažuje vo všeobecnom tvare (na začiatku odvodenia sa uvažuje len všeob. funkcia $f$) zvoľte kandidáta na Lyapunovovu funkciu a odvoďte (skonkretizujte) predpis (pravú stranu) pre $\dot{\theta}$.
- Určte zákon adaptácie, ktorý sa bude používať v adaptívnom riadiacom systéme
- Zvoľte $\Gamma$ (jednoducho, zvoľte všetky ľubovolne voliteľné prvky zákona/zákonov adaptácie).
- Začiatočné hodnoty adaptovaných parametrov zvoľte nulové.
- Zostavte adaptívny riadiaci systém (simulačnú schému) a pridajte ho k simulovanej sústave.
- Použite obdĺžnikový referenčný signál $r$ ako na Obr. 6. Vzorové výsledky simulácie sú na Obr. 7.

## 7.2 Riešenie úloh

Začiatok úlohy prvej znie:

Pre nominálnu prenosovú funkciu – pozri zadanie a riešenie príkladu v časti 2 – pre túto nominálnu prenosovú funkciu riadeného systému navrhnite adaptívne riadenie s referenčným modelom so vstupno-výstupnou štruktúrou zákona riadenia (merateľný

je len výstup riadeného systému a samozrejme vstup). Pre odvodenie zákona adaptácie použite priamu Lyapunovou metódu. Nech referenčný model je v tvare

$$W_m(s) = \frac{s+3}{s^2+3.5s+3} \tag{183}$$

### Bod prvý

Určte zákon riadenia, ktorý sa bude používať v adaptívnom riadiacom systéme.

Viď (21).

Avšak! Hovoríme o *adaptívnom* riadiacom systéme. Prečo sa „adaptujeme“? Pretože nepoznáme hodnoty parametrov riadeného systému. A keďže tieto nepoznáme, nedokážeme vypočítať (ideálne) parametre zákona riadenia, ktorými sú $\Theta_1^\star$, $\Theta_2^\star$, $\Theta_3^\star$ a $\Theta_4^\star$ (nedokážeme to v „adaptívnom prípade“).

Preto, v adaptívnom riadiacom systéme sa používa zákon riadenia, kde sú ideálne („hviezdičkované“) parametre zákona riadenia nahradené ich odhadmi. Tieto odhady sa „adaptujú“ (priebežne identifikujú) a teda sa menia v čase. Preto píšeme (v tomto prípade), že adaptovanými parametrami zákona riadenia sú $\Theta_1(t)$, $\Theta_2(t)$, $\Theta_3(t)$ a $\Theta_4(t)$. Takže v *adaptívnom* riadiacom systéme bude zákon riadenia:

$$u(t) = \Theta_1(t)\left[\frac{1}{(s+\lambda)}\right]u(t) + \Theta_2(t)\left[\frac{1}{(s+\lambda)}\right]y(t) + \Theta_3(t)y(t) + \Theta_4(t)r(t) \tag{184}$$

### Bod druhý

Vypočítajte ideálne parametre zákona riadenia.

Urobili sme tak v časti 2.2.2, v Bode druhom.

### Bod tretí

Zistite, či $W_m(s)$ je striktne pozitívne reálna (SPR) prenosová funkcia.

Máme prenosovú funkciu

$$W_m(s) = \frac{s+3}{s^2+3,5s+3} \tag{185}$$

V prvom bode nás zaujíma, či $W_m(s)$ je reálna pre všetky reálne $s$. Ak za $s$ dosadíme reálne číslo, potom $W_m(s)$ *je* reálne číslo.

Ďalej nás zaujíma, či menovateľ $W_m(s)$ má korene v ľavej polrovine komplexnej roviny alebo má reálne korene na imaginárnej osi. Korene polynómu $s^2+3,5s+3$ sú $s_1 = -2$ a $s_2 = -1,5$. Takže táto podmienka je splnená.

A nakoniec je otázka, či $\Re\{W_m(j\omega)\} \geq 0$ pre všetky reálne $\omega$. Vykonajme teda $W_m(s) \to W_m(j\omega)$:

$$W_m(j\omega) = \frac{j\omega+3}{(j\omega)^2+3,5j\omega+3} \tag{186}$$

Toto je (vlastne) nejaké komplexné číslo. Samotná $\omega$ nech je reálne číslo. Upravme.

$$W_m(j\omega) = \frac{j\omega+3}{(j\omega)^2+3,5j\omega+3} \tag{187a}$$

$$= \frac{j\omega+3}{-\omega^2+3,5j\omega+3} \tag{187b}$$

$$= \frac{j\omega+3}{(3-\omega^2)+j3,5\omega} \tag{187c}$$

Je potrebné získať reálnu časť komplexného čísla $W_m(j\omega)$. Pre vyjadrenie reálnej časti je výhodné využiť, že platí:

$$\frac{a+jb}{c+jd} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{c^2+d^2}$$

Takže:

$$W_m(j\omega) = \frac{(j\omega+3)}{((3-\omega^2)+j3,5\omega)} \frac{\left((3-\omega^2)-j3,5\omega\right)}{((3-\omega^2)-j3,5\omega)} \tag{188a}$$

$$= \frac{(j\omega+3)\left((3-\omega^2)-j3,5\omega\right)}{(3-\omega^2)^2+(3,5\omega)^2} \tag{188b}$$

$$= \frac{9-3\omega^2-j10,5\omega+j3\omega-j\omega^3+3,5\omega^2}{(3-\omega^2)^2+(3,5\omega)^2} \tag{188c}$$

Reálna časť z toho je

$$\Re\left\{W_m(j\omega)\right\} = \frac{9+0,5\omega^2}{(3-\omega^2)^2+(3,5\omega)^2} \tag{189}$$

a teda platí $\Re\left\{W_m(j\omega)\right\} \geq 0 \ \forall\ \omega \in \mathbb{R}$. Prenosová funkcia $W_m(s)$ je SPR.

### Bod štvrtý

Napíšte rovnicu výstupnej adaptačnej odchýlky $e_1$.

Výstupná adaptačná odchýlka je, samozrejme, $e_1(t) = y(t) - y_m(t)$. Tu sa však myslí písanie rovnice, ktorá opisuje dynamiku adaptačnej odchýlky. Teda

$$e_1(t) = [W_m(s)]\,\frac{1}{\Theta_4^\star}\left(\theta^\mathsf{T}(t)\ \omega(t)\right) \tag{190}$$

kde pre podrobný význam jednotlivých symbolov odkazujeme čitateľa na študijný materiál k príslušnej téme. V skratke, je jasné, že $W_m(s)$ je prenosová funkcia referenčného modelu, $\Theta_4^\star$ je jeden y ideálnych parametrov zákona riadenia, $\theta^\mathsf{T}(t)$ je vektor pozostávajúci z odchýlok medzi ideálnymi parametrami zákona riadenia a ich odhadmi a $\omega(t)$ je signálny vektor zákona riadenia.

Mimochodom, toto je veľmi veľmi dôležitá rovnica celkovo v oblasti akejkoľvek priebežnej identifikácie parametrov (alebo adaptácie ak chcete). Podrobnosti sú ďaleko nad rámec tohto textu...

### Bod piaty

Pre systém diferenciálnych rovníc ($\dot{e}$, $\dot{\theta}$), kde $\dot{\theta}$ sa najskôr uvažuje vo všeobecnom tvare (na začiatku odvodenia sa uvažuje len všeob. funkcia $f$) zvoľte kandidáta na Lyapunovovu funkciu a odvoďte (skonkretizujte) predpis (pravú stranu) pre $\dot{\theta}$.

Ako je čitateľovi iste známe, rovnicu opisujúcu dynamiku adaptačnej odchýlky je možné zapísať aj pomocou nejakého stavového vektora, konkrétne sa v učebnom texte uvádza

$$\dot{e}(t) = A_c e(t) + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\left(\theta^\mathsf{T}(t)\omega(t)\right) \tag{191a}$$

$$e_1(t) = C_c^\mathsf{T} e(t) \tag{191b}$$

pričom $W_m(s) = C_c^\mathsf{T}\left(sI - A_c\right)^{-1}\overline{B}_c$ a pre ďalšie podrobnosti viď príslušný učebný text.

Tu vieme, čo je signál $e_1(t)$ a aj ho vieme merať/získať. Vonkoncom nevieme merať/získať stavový vektor $e(t)$. Ale vieme, že existuje. Teoreticky.

Nič nebráni zostaveniu systému diferenciálny rovníc v tvare

$$\dot{e}(t) = A_c e(t) + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\left(\theta^\mathsf{T}(t)\omega(t)\right) \tag{192a}$$

$$\dot{\theta}(t) = f(e_1(t), \omega(t)) \tag{192b}$$

a tento systém má, ako je uvedené v učebnom texte, veľmi výhodné vlastnosti vzhľadom na možnosti adaptácie (priebežnej identifikácie) pre dosiahnutie cieľa riadenia.

Inými slovami, ak systém diferenciálnych rovníc (192) bude stabilný (plus pár miliónov detailov detailov), tak stavový vektor $e(t)$ sa bude asymptoticky (s časom)

blížiť k nule. Je potom jasné, že aj adaptačná odchýlka $e_1(t)$ sa bude blížiť k nule, čo je cieľ riadenia. Podrobnosti prečo to tak je, sa najlepšie ukazujú na prípade MRAC stavového (ako sme spomenuli v jednom odstavci vyššie - v časti 2.2.2, v Bode treťom).

Jasným (viac-menej) kandidátom na Lyapunovovu funkciu pre systém (192) teda je (si dovolíme nepísať signály ako funkcie času, teda napr. píšeme len $e$ nie $e(t)$)

$$V = e^{\mathsf{T}} P e + \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^{\mathsf{T}} \Gamma^{-1} \theta \tag{193}$$

Cesta potom vedie do bodu, kde máme

$$\dot{V} = e^{\mathsf{T}} (-Q)\, e + 2 \left( e^{\mathsf{T}} P \overline{B}_c \right) \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^{\mathsf{T}} \omega + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^{\mathsf{T}} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{194}$$

a chceme zabezpečiť aby časová derivácia $\dot{V}$ bola záporne definitná. Na pravej strane rovnice (194), člen $e^{\mathsf{T}} (-Q)\, e$ je záporne definitný (vždy menší ako nula). Ak by na pravej strane rovnice (194) zvyšné dva členy neboli platilo by požadované $\dot{V} \leq 0$. Inými slovami žiadame:

$$0 = 2 \left( e^{\mathsf{T}} P \overline{B}_c \right) \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^{\mathsf{T}} \omega + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^{\mathsf{T}} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{195a}$$

$$2 \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^{\mathsf{T}} G^{-1} \dot{\theta} = -2 \left( e^{\mathsf{T}} P \overline{B}_c \right) \frac{1}{\Theta_4^\star} \Theta^{\mathsf{T}} \omega \tag{195b}$$

$$\left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \Gamma^{-1} \dot{\theta} = - \left( e^{\mathsf{T}} P \overline{B}_c \right) \mathtt{sign} \left( \frac{1}{\Theta_4^\star} \right) \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \omega \tag{195c}$$

$$\Gamma^{-1} \dot{\theta} = -\mathtt{sign} \left( \frac{1}{\Theta_4^\star} \right) \left( e^{\mathsf{T}} P \overline{B}_c \right) \omega \tag{195d}$$

$$\dot{\theta} = -\mathtt{sign} \left( \frac{1}{\Theta_4^\star} \right) \left( e^{\mathsf{T}} P \overline{B}_c \right) \Gamma \omega \tag{195e}$$

Tu sme, v princípe, práve získali hľadaný zákon adaptácie, teda predpis, ktorý hovorí ako sa mení vektor $\theta$. Avšak, obsahuje vektor $e$. Ten nemáme. Všetko uvedené je len teoretické.

Tu sa využije veľmi významná vlastnosť, že prenosová funkcia $W_m(s)$ je SPR. Pripomeňme, že pre ňu platí $W_m(s) = C_c^{\mathsf{T}} \left( sI - A_c \right)^{-1} \overline{B}_c$ a s využitím tejto reprezentácie referenčného modelu je možné využiť Meyerovu-Kalmanovu-Yakubovichovu Lemmu (vetu). Podľa nej platí

$$\begin{aligned} A_c^{\mathsf{T}} P + P A_c &= -Q \\ P \overline{B}_c &= C_c \end{aligned}$$

kde by sme mali byť oboznámený čo konkrétne teraz sú uvedené matice...

Keďže platí $P\overline{B}_c = C_c$, tak máme

$$\dot{\theta} = -\mathtt{sign} \left( \frac{1}{\Theta_4^\star} \right) \left( e^{\mathsf{T}} P \overline{B}_c \right) \Gamma \omega \tag{196a}$$

$$\dot{\theta} = -\mathtt{sign} \left( \frac{1}{\Theta_4^\star} \right) \left( e^{\mathsf{T}} C_c \right) \Gamma \omega \tag{196b}$$

Výraz $e^{\mathsf{T}} C_c$ je skalár. Takže $e^{\mathsf{T}} C_c = C_c^{\mathsf{T}} e$. A potom je jasné, že $C_c^{\mathsf{T}} e = e_1$. Preto môžeme písať

$$\dot{\theta} = -\mathtt{sign} \left( \frac{1}{\Theta_4^\star} \right) e_1 \Gamma \omega \tag{197}$$

Toto je stále hľadaný zákon adaptácie. Ale už neobsahuje nedostupný (len teoretický) vektor $e$ ale dostupný signál $e_1$, čo je jednoducho výstupná adaptačná odchýlka.

### Bod šiesty

Určte zákon adaptácie, ktorý sa bude používať v adaptívnom riadiacom systéme.

Práve sme tak urobili v predchádzajúcom bode. Zákon adaptácie je

$$\dot{\Theta}(t) = -\texttt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right) e_1(t)\ \Gamma\ \omega(t) \tag{198}$$

Pripomeňme, že signálny vektor zákona riadenia v tomto prípade je

$$\omega(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \tag{199}$$

takže zákon adaptácie detailnejšie napísaný je

$$\dot{\Theta}(t) = -\texttt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right) e_1(t) \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \tag{200}$$

kde sme ako príklad zvolili maticu $\Gamma$ diagonalnu s kladnými číslami $\gamma_1, \cdots, \gamma_4$ na diagonále.

### Bod siedmi

Zvoľte $\Gamma$ (jednoducho, zvoľte všetky ľubovolne voliteľné prvky zákona/zákonov adaptácie).

Voľba matice $\Gamma$ ako diagonálnej matice v prvom rade spĺňa podmienky pre túto maticu (má byť symetrická a kladne definitná). Má to však aj praktický význam. Matica $\Gamma$ je hlavným nástrojom ako ovplyvniť vlastnosť zákona adaptácie, ktorá sa nazýva rýchlosť adaptácie. Ak je navyše diagonálna, vieme relatívne nezávisle ovplyvňovať rýchlosť adaptácie jednotlivých prvkov vektora adaptovaných parametrov. Uvažujme teda o matici $\Gamma$ v tvare

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_4 \end{bmatrix} \tag{201}$$

V tomto prípade máme vektor adaptovaných parametrov v tvare

$$\Theta(t) = \begin{bmatrix} \Theta_3(t) \\ \Theta_1(t) \\ \Theta_2(t) \\ \Theta_4(t) \end{bmatrix} \tag{202}$$

Ak by sme chceli ovplyvniť rýchlosť s akou sa mení napr. parameter $\Theta_2(t)$, je to možné urobiť zmenou veľkosti čísla $\gamma_3$ v matici $\Gamma$. Ak zvýšime $\gamma_3$, potom $\dot{\Theta}_2(t)$ bude dosahovať v princípe vyššie hodnoty, a naopak...

### Bod ôsmy až desiaty

- Začiatočné hodnoty adaptovaných parametrov zvoľte nulové.
- Zostavte adaptívny riadiaci systém (simulačnú schému) a pridajte ho k simulovanej sústave.
- Použite obdĺžnikový referenčný signál $r$ ako na Obr. 6. Vzorové výsledky simulácie sú na Obr. 7.

Nasledujúci výpis kódu 4 obsahuje funkciu `fcn_simSch3`. Je postavená na rovnakých princípoch ako sme tu už viac krát uviedli. Rozdielom oproti predchádzajúcej simulácii vo výpise kódu 3 je pridanie zákona adaptácie (nahradenie pevne stanovených hodnôt vektora `Theta`).

Výsledky simulácie pre uvedené zadanie sú na obr. 8.

Obr. 8: Výsledok simulácie

Výpis kódu 4: Súbor `ar06_prMRAC_v01.py`, simulačná schéma adaptívneho riadiaceho systému

```
def fcn_LTIS(x, t, A, b, u):
    dotx = np.matmul(A, x) + np.matmul(b, u)
    return dotx


def fcn_simSch3(t_start, T_s, finalIndex, sig_dummy_ext):

    #-----------------------------------------
    # Riadeny system

    A = np.array([[0, 1], [-2.6916, -2.7423]])
    b = np.array([[0], [1]])
    c = np.array([[3.5578], [0.1664]])

    #-------------------------
    # Referencny model

    A_m = np.array([[0, 1], [-3.0, -3.5]])
    b_m = np.array([[0], [1]])
    c_m = np.array([[3], [1]])

    #-------------------------
    # Pomocne filtre

    Lambda_pom = np.array([[-3]])
    q_pom = np.array([[1]])

    #-----------------------------------------------------
    t_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    t_log[0,:] = t_start

    #-----------------------------------------
    x_0 = np.zeros(b.shape[0])

    x_log = np.zeros([finalIndex, len(x_0)])
    x_log[0,:] = x_0

    y_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    y_log[0,:] = np.dot(c.T, x_0.reshape(-1,1))

    #-------------------------
    x_m_0 = np.zeros(b_m.shape[0])

    x_m_log = np.zeros([finalIndex, len(x_m_0)])
    x_m_log[0,:] = x_m_0

    y_m_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    y_m_log[0,:] = np.dot(c_m.T, x_m_0.reshape(-1,1))

    #-------------------------
    nu1_log = np.zeros([finalIndex, q_pom.shape[0]])
```

```
    nu2_log = np.zeros([finalIndex, q_pom.shape[0]])

    #-------------------------
    Theta_log = np.zeros([finalIndex, 4])

    #-------------------------
    u_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    u_log[0,:] = 0

    #-----------------------------------------------------
    timespan = np.zeros(2)
    for idx in range(1, int(finalIndex)):

        timespan[0] = t_log[idx-1,:]
        timespan[1] = t_log[idx-1,:] + T_s

        t_log[idx,:] = timespan[-1]

        # ------------

        odeOut = odeint(fcn_LTIS,
                        x_log[idx-1,:],
                        timespan,
                        args=(A, b, u_log[idx-1,:])
                        )

        x_log[idx,:] = odeOut[-1,:]
        y_log[idx,:] = np.dot(c.T, x_log[idx,:].reshape(-1,1))

        # -------------------------
        # Referencny model:

        ref_sig = sig_dummy_ext[idx-1, :]

        dotx_m = fcn_LTIS(x_m_log[idx-1,:], 0, A_m, b_m, ref_sig)

        x_m_log[idx,:] = x_m_log[idx-1,:] + dotx_m * T_s

        y_m_log[idx,:] = np.dot(c_m.T, x_m_log[idx,:].reshape(-1,1))

        # -------------------------
        # Adaptacna odchylka

        adaptError = y_log[idx-1,:] - y_m_log[idx-1,:]

        # -------------------------
        # Pomocne filtre

        dotnu1 = fcn_LTIS(nu1_log[idx-1,:], 0, Lambda_pom, q_pom, u_log[idx-1,:])
        nu1_log[idx,:] = nu1_log[idx-1,:] + dotnu1 * T_s

        dotnu2 = fcn_LTIS(nu2_log[idx-1,:], 0, Lambda_pom, q_pom, y_log[idx-1,:])
        nu2_log[idx,:] = nu2_log[idx-1,:] + dotnu2 * T_s

        # -------------------------
        # Vektor omega:

        omega = np.array([y_log[idx,:],
                          nu1_log[idx-1,:].reshape(-1,1),
                          nu2_log[idx-1,:].reshape(-1,1),
                          ref_sig,
                        ])

        # -------------------------
        # Zakon adaptacie

        Gamma = np.diag(np.array([5, 50, 50, 5]))

        dotTheta = - np.matmul(Gamma, omega) * adaptError

        Theta_log[idx,:] = Theta_log[idx-1,:] + dotTheta.reshape(1,-1) * T_s

        # -------------------------
        # Zakon ZakonRiadenia

        u_log[idx,:] = np.dot(Theta_log[idx-1,:].T, omega)[0]

    return [t_log, x_log, y_log, u_log, y_m_log, Theta_log]
```

```python

# ---------------------------------------------------
# Nastavenie simulacie

sim_t_start = 0
sim_t_final = 100
sim_T_s = 0.01
sim_finalIndex = int(((sim_t_final - sim_t_start)/sim_T_s) + 1)

# Preddefinovany signal (pouzity ako referencny signal)

period_time = 20
period_tab = np.array([[0, 1],
                       [10, -1],
                      ])

sig_vysl = np.zeros([sim_finalIndex, 1])

for period in range(int(sim_t_final/period_time) + 1):
    for idx in range( int((period*period_time)/sim_T_s), int((period*period_time + period_time)/sim_T_s)):
        lastValue = period_tab[:,1][(period_tab[:,0] + (period*period_time))<=idx*sim_T_s ][-1]
        try:
            sig_vysl[idx] = lastValue
        except:
            break

sig_dummy_ext = sig_vysl

# Spustenie simulacie

t_log, x_log, y_log, u_log, y_m_log, Theta_log = fcn_simSch3(
    sim_t_start,
    sim_T_s,
    sim_finalIndex,
    sig_dummy_ext,
    )

```

## 7.3 Dodatok k riešeniu (prevažne o nastavovaní rýchlosti adaptácie)

Vo svetle toho, že v tomto príklade je použitý model reálneho systému – jednosmerného motora, uvažujme realistickejšiu simuláciu. Zmysluplné okolie pracovného bodu je $\pm 0,7$ [V], teda má význam žiadať od výstupnej veličiny $y(t)$ maximálne hodnoty $\pm 0,7$ a akčný zásah môže byť v rozsahu cca $\pm 5$ (tiež vo voltoch, ale to sú už prílišné podrobnosti keďže čitateľ zrejme nepozná detaily k riadenému systému).

### Prípad 1

Preto, použime rovnaké nastavenie adaptívneho riadiaceho systému ako vo „vzorovej“ (umelo vymyslenej) simulácii a v prvom rade zmeňme priebej referenčného signálu. Výsledok je na obr. 9.

Priebeh veličín riadeného systému, vústupnej aj vstupnej, je v poriadku z hľadiska rozsahov (v okolí pracovných bodov to zodpovedá reálnemu systému (motorčeku)). Povedzme však, že rýchlosť adaptácie (výsledok na obr. 9) je nevyhovujúca. Nech je požiadavka taká, že v čase 100 má byť riadiaci systém už adaptovaný. Je teda potrebné upraviť voliteľný parameter zákona adaptácie, ktorý vo veľkej miere určuje rýchlosť adaptácie. Tým ja matica $\Gamma$. V tomto „vzorovom“ prípade vidíme, že sa uvažuje

```python
Gamma = np.diag(np.array([5, 50, 50, 5]))
```

### Prípad 2

Výslednú rýchlosť adaptácie však neovplyvňuje len matica $\Gamma$ ale samozrejme všetky prvky v zákone adaptácie. Teda signálny vektor $\omega$ a samozrejme adaptačná odchýlka. Všetky tieto signály - ich charakter a vplyv na rýchlosť adaptácie, závisia od toho ako veľmi tzv. *vybudíme* systém[4].

[4] Tu si dovolíme smerovať čitateľa na pojem *persistent excitation* v adaptívnych systémoch alebo pri priebežnej identifikácii vo všeobecnosti #UTFG #nooffense.

Obr. 9

Pod vybudením sa myslí navodenie takých podmienok, aby sa prejavili takpovediac všetky vlastnosti systému. V tu uvažovanej schéme je viac menej jedinou možnosťou ako „vybudiť“ riadený systém je riadiť ho tak, že sledujeme relatívne „zložitý“ referenčný signál. Naopak, ak referenčný signál je „jednoduchý“, tak je ho aj jednoduché sledovať, a takpovediac blok adaptácie ľahko nájde vhodné parametre zákona riadenia (tak aby $y(t)$ sledovalo $y_m(t)$)[5].

Jednoduchým (v princípe najjednoduchším) referenčným signálom je sínusoida („obsahuje“ len jednu frekvenciu, obdĺžnikový signál „obsahuje“ nekonečne veľa frekvencií). Vyskúšakme teda $r(t)$ ako harmonický signál s periódou 20 [časových jednotiek - sekúnd v realite] a amplitúdou 0,7 [voltov v realite]. Pritom pre začiatok uvažujme

```
Gamma = np.diag(np.array([1, 1, 1, 1]))
```

Výsledok je na obr. 10. Adaptačná odchýlka sa s časom zmenšuje, ale povedzme, že nie dostatočne rýchlo.

### Prípad 3

Na priebehu adaptovaných parametrov (vektor $\Theta(t)$) je vidieť, že najrýchlejšie zmeny boli pri parametri $\Theta_4$. Skúsme docieliť, aby sa aj ostatné parametre menili rýchlejšie -

[5] Mimochodom, referenčný signál by sme si v praxi pravdepodobne nemohli len tak zvoliť, ak, tak azda pre „fázu učenia/adaptácie“ a podobne. Aj toto treba mať na pamäti pri uvažovaní o tu uvedených poznámkach.

Obr. 10

Obr. 11

prípadne, aby sa parameter $\Theta_4$ menil pomalšie. Jednoducho, aby adaptácia všetkých parametrov prebiehala „relatívne rovnako rýchlo“.

S pomocou cieľavedomého experimentovania a kvalifikovaného odhadu[6] sme, dajme tomu, dospeli k nasledujúcim hodnotám v matici $\Gamma$:

```
Gamma = np.diag(np.array([3, 5, 10, 0.5]))
```

Výsledok je na obr. 11. Je možné konštatovať, že všetky parametre sa menili (na začiatku určite) rovnako rýchlo. Celková rýchlosť zmenšovania sa adaptačnej odchýlky je však pri tom relatívne rovnaká ako v predchádzajúvom prípade.

### Prípad 4

Ak by sme teraz chceli zvýšiť celkovú rýchlosť adaptácie, je možné urobiť napr.:

```
Gamma = np.diag(np.array([3, 5, 10, 0.5])*2)
```

Výsledok je na obr. 12.

### Prípad 5

Vyskúšajme s touto voľbou $\Gamma$ zložitejší referenčný signál ako v prípade 1. Výsledok je na obr. 13. Rýchlosť zmeny jednotlivých adaptovaných parametrov je relatívne rovnaká, avšak celková rýchlosť adaptácie nie je dostatočná.

[6] Nie, na toto neexistuje univerzálny návod.

Obr. 12

Obr. 13

**Prípad 6**

Preto:

```
Gamma = np.diag(np.array([3, 5, 10, 0.5])*10)
```

Výsledok je na obr. 14. Rýchlosť adaptácie sme jednoznačne zvýšili a mohli by sme ju zvyšovať aj viac.

**Prípad 7**

Všimnime si ale, že sme uvažovali signál $r(t)$ len v kladných hodnotách. „Nevybudili“ sme systém v celom potenciálnom rozsahu okolia pracovného bodu. Skúsme preto ponechať aktuálne nastavenie $\Gamma$ ale zmeniť $r(t)$ - viď obr. 15.

Zmena $r(t)$, v zmysle, že je viac „budiaci“, sa jednoznačne prejavila v rýchlosti ustálenia sa adaptovaných parametrov a mierne aj na rýchlosti zmenšovania sa adaptačnej odchýlky.

## 8 Príklad k téme *Zákon adaptácie pri* $n^* = 2$

V predchádzajúcom príklade sme sa zaoberali prípadom, keď model riadeného systému bola prenosová funkcia, ktorej relatívny stupeň bol $n^* = 1$. V tejto časti je príklad, keď riadený systém má význam modelovať prenosovou funkciou s relatívnym stupňom $n^* = 2$.

Obr. 14

Obr. 15

## 8.1 Celkový pohľad na úlohu

Nech riadeným systémom je kyvadlo a nech riadenou veličinou je poloha (uhol) kyvadla. Zároveň, nech riadený systém je daný diferenciálnou rovnicou opisujúcu dynamiku rotačného pohybu kyvadla. Rovnica je v tvare

$$ml^2\ddot{\varphi}(t) + \beta\dot{\varphi}(t) + mgl\sin\varphi(t) = u(t) \tag{203}$$

kde hmotný bod s hmotnosťou $m$ [kg] pripevnený na ramene so zanedbateľnou hmotnosťou a dĺžkou $l$ [m] kmitá (otáča sa okolo osi). Kmity sú tlmené viskóznym trením s koeficientom $\beta$ [kg m$^2$ s$^{-1}$]. Uhol medzi zvislicou a ramenom kyvadla je označený $\varphi$ [rad] a gravitačné zrýchlenie je $g = 9,81$ [m s$^{-2}$]. Signál $u(t)$ [kg m$^2$ s$^{-2}$] je externý moment sily pôsobiaci na rameno kyvadla, $\dot{\varphi}(t)$ [rad s$^{-1}$] je uhlová rýchlosť a $\ddot{\varphi}(t)$ [rad s$^{-2}$] je uhlové zrýchlenie ramena kyvadla. Číselné hodnoty parametrov kyvadla sú nasledovné:

$$\begin{aligned} m &= 1 \quad [\text{kg}] \\ l &= 1 \quad [\text{m}] \\ \beta &= 2 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \quad [\text{kg m}^2\ \text{s}^{-1}] \end{aligned}$$

Cieľom je riadiť polohu kyvadla v okolí rôznych pracovných bodov. Uvažujme však, že pracovné body sú z intervalu polôh kyvadla 0 až 90 stupňov. Konkrétna voľba pracovných bodov ako aj voľba veľkosti ich okolia sa ponechávajú na čitateľa.

Nech dynamika výstupnej veličiny riadeného systému v ktoromkoľvek pracovnom bode je daná referenčným modelom, ktorým je lineárny dynamický systém s pólmi $p_1 = -2$ a $p_2 = -1$. Samozrejmé je, že tento lineárny dynamický systém bude mať jendnotkové statické zosilnenie.

### Referenčný model

Ak vieme, že RM je druhého rádu, a tiež vlastne vieme (aj keď sme to ešte explicitne neukázali), že sa zaoberáme riadeným systémom, ktorého (lineárny) model má relatívny stupeň $n^* = 2$, potom z toho plynie, že referenčný model má tvar

$$W_m(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \tag{204}$$

### 8.1.1 Celkový pohľad na riadený systém (z hľadiska návrhu riadiaceho systému)

Pre lepšiu predstavu o riadenom systéme ho opíšme v stavovom priestore. Voľbou stavových veličín $x_1(t) = \varphi(t)$ a $x_2(t) = \dot{\varphi}(t)$ máme

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{\beta}{ml^2} x_2(t) - \frac{g}{l} \sin\left(x_1(t)\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u(t) \tag{205a}$$

$$y(t) = x_1(t) \tag{205b}$$

kde sme pre prehľadnosť v nasledujúcom zaviedli aj výstupnú veličinu $y(t) = \varphi(t)$.

Toto je, zjavne, nelineárny časovo-invariantný systém druhého rádu. Tu sa však zaoberáme takou triedou riadiacich systémov, ktoré predpokladajú lineárny model riadeného systému. Jeho parametre môžu byť neznáme (môžu sa meniť), ale musí byť lineárny.

#### Linearizácia v okolí pracovného bodu

Uvažovaný riadený systém je možné linearizovať v okolí pracovného bodu.

V prvom rade potrebujeme poznať pracovný bod. Pre zvolenú hodnotu (ustálenú) na vstupe systému, označme ju $u_{PB}$, potrebujeme poznať prislúchajúcu hodnotu (ustálenú) na výstupe, označme ju $y_{PB}$.

Tu máme k dispozícii analytický opis riadeného systému (203). V ustálenom stave (časové derivácie nulové) máme

$$(mgl) \sin\left(y_{PB}\right) = u_{PB} \tag{206a}$$

$$y_{PB} = \arcsin\left(\frac{1}{(mgl)} u_{PB}\right) \tag{206b}$$

Toto je, samozrejme, prevodová charakteristika riadeného systému. Nie je to priamka. To znamená, že v jednom pracovnom bode (v okolí jedného pracovného bodu) bude statické zosilnenie (sklon prevodovej charakteristiky) iné, ako v inom pracovnom bode (v okolí iného pracovného bodu).

Mimochodom, zvoľme si veľkosť okolia pracovného bodu. Dobrou pomôckou je grafické zobrazenie prevodovej charakteristiky. To sa ponecháva na čitateľa (autor je lenivý). Tu si zvoľme okolie z veľkosťou $\pm 3$ [°] (cca $0,0524$ [rad]) na strane výstupnej veličiny a buďme s ním spokojný v tom zmysle, že pri takýchto malých odchýlkach si prevodová charakteristika zachováva prakticky rovnaký sklon ako v pracovnom bode.

Ďalej je potrebné zaviesť veličiny, ktoré budú takpovediac odchýlkami odhodnôt v pracovnom bode. Konkrétne

$$\Delta u(t) = u(t) - u_{PB} \tag{207a}$$

$$\Delta y(t) = y(t) - y_{PB} \tag{207b}$$

kde sme teta definovali $\Delta$ odchýlky od pracovného bodu. To znamená, že pôvodné veličiny sú

$$u(t) = u_{PB} + \Delta u(t) \tag{208a}$$

$$y(t) = y_{PB} + \Delta y(t) \tag{208b}$$

$$x_1(t) = x_{1PB} + \Delta x_1(t) \tag{208c}$$

$$x_2(t) = x_{2PB} + \Delta x_2(t) \tag{208d}$$

kde sme rovnako yaviedli „odchýlkové veličiny“ aj pre stavové veličiny so systému (205). Dosaďme v (205), čo v prvom rade znamená, že

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_{1PB} + \Delta x_1(t)\right) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_{2PB} + \Delta x_2(t)\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1(t) \\ \Delta \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} \tag{209}$$

pretože $x_{1PB}$ a $x_{2PB}$ su len čísla nezávislé od času. Potom na základe (205) môžme písať

$$\Delta\dot{x}_1(t) = (x_{2PB} + \Delta x_2(t)) \tag{210a}$$

$$\Delta\dot{x}_2(t) = -\frac{\beta}{ml^2}\left(x_{2PB} + \Delta x_2(t)\right) - \frac{g}{l}\sin\left(\left(x_{1PB} + \Delta x_1(t)\right)\right) + \frac{1}{ml^2}\left(u_{PB} + \Delta u(t)\right) \tag{210b}$$

$$\Delta y(t) = \Delta x_1(t) \tag{210c}$$

kde sme zohľadnili, že musi platiť $\Delta y(t) = \Delta x_1(t)$, keďže máme $y(t) = x_1(t)$. Rovnice (210) opisujú stále to isté nelineárne kyvadlo, avšak pomocou iných („odchýlkových“) veličín. Je to užitočné preto, že tento „nový“ systém má ustálený stav $x_e$ (ekvilibrium) v bode

$$x_e = \begin{bmatrix} \Delta x_{e1} \\ \Delta x_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{211}$$

a to samozrejme pri $\Delta u(t) = 0$. V tomto „novom“ ustálenom stave, očividne, pre pôvodné veličiny platí, že $u(t) = u_{PB}$ a $y(t) = y_{PB}$. Teda systém je ustálený v pracovnom bode. V tomto „novom“ ekvilibriu, je možné systém štandardne linearizovať. Výsledkom je

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1(t) \\ \Delta\dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos\left(y_{PB}\right) & -\frac{\beta}{m\ l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ l^2} \end{bmatrix} \Delta u(t) \tag{212a}$$

$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix} \tag{212b}$$

Toto je lineárny dynamický systém, ktorý je možné zapísať v tvare prenosovej funkcie

$$\frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)} = \frac{k_p}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{213}$$

kde

$$k_p = \frac{1}{m\ l^2} \tag{214a}$$

$$a_0 = \frac{g}{l}\cos\left(y_{PB}\right) = \frac{g}{l}\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{(mgl)}u_{PB}\right)\right) \tag{214b}$$

$$a_1 = \frac{\beta}{m\ l^2} \tag{214c}$$

Je teda zrejmé, že statické a dynamické vlastnosti tohto lineárneho systému sú závislé od pracovného bodu.

### Ilustrácia potreby adaptácie

Z uvedeného je zrejmé, že statické a dynamické vlastnosti tohto lineárneho systému sú závislé od pracovného bodu. Ak by sme navrhli riadiaci systém, tak, že sa splní cieľ riadenia v okolí jedného pracovného bodu, potom v inom pracovnom bode (v jeho okolí) by tento nespĺňal cieľ riadenia.

Ukážme zmenu vlastností (statických aj dynamických) rideného systému (nelineárneho kavydla), tak, že budeme robiť skokové zmeny v okolí jedného pracovného bodu, a potom v okolí iného pracovného bodu.

Zvoľme pracovné body

$$u_{PB1} = 5 \qquad y_{PB1} = 0,5348\ [\text{rad}] = 30,64\ [\text{deg}] \tag{215a}$$

$$u_{PB2} = 9 \qquad y_{PB2} = 1,1616\ [\text{rad}] = 66,55\ [\text{deg}] \tag{215b}$$

Pre prvý praconý bod $(u_{PB1}, y_{PB1})$ vypočítajme aj parametre lineárneho modelu (platného len v okolí pracovného bodu)

$$k_p = 1 \tag{216a}$$

$$a_0 = 8,44 \tag{216b}$$

$$a_1 = 3,13 \tag{216c}$$

Obr. 16

Simulujme teraz aj nelineárny systém, aj lineárny systém (celý čas s parametrami (216)), pričom vstupom nech sú skokové zmeny v okolí zvolených pracovných bodov. Výsledok je na obr. 16.

V prvom pracovnom bode sa lineárny a nelineárny systém zhodujú ale v druhom už nie. Aby sa zhodoval, musel by lineárny model zmeniť (prispôsobiť) parametre. Inými slovami, parametre modelu riadeného systému sa menia v závislosti od pracovného bodu. Preto je potrebné mať adaptívny riadiaci systém...

## 8.2 Návrh adaptívneho riadiaceho systému

### 8.2.1 Model riadeného systému

Model riadeného systému je v tvare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \tag{217}$$

kde $k_p > 0$, $Z_p(s) = 1$ a $R_p(s) = s^2 + a_1 s + a_0$, pričom parametre $a_1$ a $a_0$ sú neznáme (prípadne sa menia spĺňajúc však vlastnosti kvázistacionárnosti). Rád systému (stupeň polynómu $R_p(s)$) je $n = 2$ a relatívny stupeň uvedenej prenosovej funkcie je $n^* = 2$.

### 8.2.2 Cieľ riadenia a referenčný model

Cieľom riadenia je aby výstupná veličina riadeného systému sledovala výstupnú veličinu referenčného modelu, ktorý je daný prenodovou funkciou v tvare

$$W_m(s) = \frac{y_m(s)}{r(s)} = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \tag{218}$$

kde $k_m = 2$, $Z_m(s) = 1$ a $R_m(s) = s^2 + 3s + 2$. Relatívny stupeň referenčného modelu sa zhoduje s relatívnym stupňom riadeného systému.

Inými slovami, cieľom riadenia je aby sa uzavretý regulačný obvod (spojenie riadiaceho a riadeného systému) zhodoval (z hľadiska ich výstupných veličín) s referenčným modelom.

### 8.2.3 Podmienky zhody

Keďže navrhujeme klasickú schému MRAC, v prvom rade je potrebné ukázať, že existujú podmienky zhody medzi referenčným modelom a uzavretým regulačným obvodom. Teda ukázať, že existuje riešenie MRC problému (pre tento daný konkrétny prípad).

Všeobecný tvar zákona riadenia, ktorý rieši MRC problém je

$$u(t) = \left[\Theta_1^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right] u(t) + \left[\Theta_2^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right] y(t) + \Theta_3^\star y(t) + \Theta_4^\star r(t) \tag{219}$$

kde $\alpha(s)$ je vektor obsahujúci mocniny $s$, $\alpha(s) = \left[s^{n-2}, \ldots, s, 1\right]^\mathsf{T}$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$. Vektory $\Theta_1^\star \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\Theta_2^\star \in \mathbb{R}^{n-1}$ a skaláry $\Theta_3^\star \in \mathbb{R}^1$, $\Theta_4^\star \in \mathbb{R}^1$ sú konštantné parametre zákona riadenia, ktorých hodnoty hľadáme. $\Lambda(s)$ je ľubovolný monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$ obsahujúci $Z_m(s)$ ako faktor

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s) \tag{220}$$

a teda aj $\Lambda_0(s)$ je ľubovolný monický Hurwitzov polynóm zodpovedajúceho stupňa.

Prenosová funkcia uzavretého regulačného obvodu má následne tvar

$$y = \frac{k_p Z_p \Theta_4^\star \Lambda^2}{\Lambda\left(R_p\left(\Lambda - \Theta_1^{\star\mathsf{T}}\alpha(s)\right) - k_p Z_p\left(\Theta_2^{\star\mathsf{T}}\alpha(s) + \Theta_3^\star \Lambda\right)\right)} r \tag{221}$$

Potom ak platí (podmienky zhody)

$$\Theta_4^\star = \frac{k_m}{k_p} \tag{222a}$$

$$\Lambda = \Lambda_0 Z_m \tag{222b}$$

$$R_p\left(\Lambda - \Theta_1^{\star\mathsf{T}}\alpha(s)\right) - k_p Z_p\left(\Theta_2^{\star\mathsf{T}}\alpha(s) + \Theta_3^\star \Lambda\right) = Z_p \Lambda_0 R_m \tag{222c}$$

tak uzavretý regulačný obvod a referenčný model sa zhodujú.

Je možné ukázať[7], že uvedené podmienky zhody (222) majú riešenie práve vtedy ak sú splnené podmienky už doteraz uvedené a k tomu musí platiť, že $Z_p(s)$ a $Z_m(s)$ sú monické a Hurwitzove polynómy (riadený systém a RM musia mať „stabilné nuly“) a relatívny stupeň RM je rovnaký ako relatívny stupeň riadeného systému. Uvedené je splnené a preto existujú také ideálne parametre zákona riadenia ($\Theta_1^\star$, $\Theta_2^\star$, $\Theta_3^\star$ a $\Theta_4^\star$), ktoré spĺňajú cieľ riadenia.

Keďže tieto hodnoty existujú, má význam ich hľadať. Má význam ich identifikovať. Má význam ich priebežne identifikovať. Má význam adaptovať parametre riadiaceho systému.

Ak by sme nevedeli, či je vôbec možná zhoda medzi URO a RM, potom by sme nevedeli, či vôbec môže byť adaptácia (priebežná identifikácia, strojové učenie atď., atď.) úspešná.

### 8.2.4 Otázka relatívneho stupňa riadeného systému

Vzhľadom na fakt, že $n^* = 2$, v ďalšom sa bude využívať postup návrhu MRAC, ktorý je známy pod názvom *metóda doplnenej (adaptačnej) odchýlky*. Táto metóda si vyžaduje voľbu istého polynómu $L(s)$ takého, ktorý zabezpečí, že prenosová funkcia $W_m(s)L(s)$ je striktne pozitívne reálna (SPR).

V prvom rade je potrebné zvoliť stupeň polynómu $L(s)$.

Prenosová funkcia $W_m(s)$ má relatívny stupeň $n_m^* = 2$. Aby nejaká prenosová funkcia vôbec mohla byť striktne pozitívne reálna, nemôže mať relatívny stupeň vyšší ako 1. Voľbou stupňa $L(s)$ môžme zvoliť relatívny stupeň $W_m(s)L(s)$.

Ak bude $L(s) = s + \rho$, kde $\rho$ je nejaké reálne číslo, potom relatívny stupeň $W_m(s)L(s)$ je 1.

Mimochodom, tiež vieme, že sa zaoberáme identitou, takou, že $L(s)L^{-1}(s) = 1$. Potrebujeme teda „pracovať“ aj s prevrátenou hodnotou polynómu $L(s)$ (potrebujeme „deliť polynómom“) a teda v tomto prípade musí platiť, že $\rho > 0$.

Podmienky SPR pre $W_m(s)L(s)$ sú v tomto prípade formálne splnené (viď literatúra/učebný text) okrem jednej, z ktorej plynie konkrétna voľba hodnoty parametra $\rho$, a to, že $\Re\{W_m(j\omega)L(j\omega)\} \geq 0$ pre všetky reálne $\omega$.

[7] Ale to tu ani náhodou robiť nebudeme...

V tomto prípade

$$W_m(j\omega)L(j\omega) = \frac{(2\rho + j2\omega)\left(\left(2-\omega^2\right) - j3\omega\right)}{\left(2-\omega^2\right)^2 + (3\omega)^2} \tag{223}$$

a teda

$$\Re\left\{W_m(j\omega)L(j\omega)\right\} = 4\rho - 2\rho\omega^2 + 6\omega^2 \tag{224}$$

keďže $4\rho > 0$ potom musí platiť $2\rho\omega^2 \leq 6\omega^2$ a teda $0 < \rho \leq 3$. Zvoľme

$$\rho = 3 \tag{225}$$

### 8.2.5 Zákon riadenia

Zákon riadenia (s adaptovanými parametrami) bude mať v tomto prípade tvar

$$u(t) = \Theta_1(t)\left[\frac{1}{(s+\lambda)}\right]u(t) + \Theta_2(t)\left[\frac{1}{(s+\lambda)}\right]y(t) + \Theta_3(t)y(t) + \Theta_4(t)r(t) \tag{226}$$

#### Voľba dynamiky pomocných fitrov

Zákon riadenia využíva pomocné filtre, ktorých dynamika je daná voľbou polynómu $\Lambda(s)$. V tomto prípade $\Lambda(s) = s + \lambda$.

Polynóm $\Lambda(s)$ má súvislosť s pojmom pozorovateľ stavu, ktorý sa používa pri zostavení zákona riadenia v prípade MRC problému vo všeobecnosti. Kým teda polynóm $\Lambda(s)$ musí spĺňať isté formálne podmienky, ktoré sme už uviedli, mal by zohľadňovať aj súvislosť s pozorovateľom stavu.

Dynamika pozorovateľa stavu by vo väčšine prípadov mala byť rýchlejšia ako ostatné dymaniky vystupujúce v systéme ako celku. V tomto prípade však viacmenej nepoznáme napríklad dynamiku riadeného systému. Poznám len dynamiku referenčného modelu. Preto zabezpečme, aby polynóm $\Lambda(s)$ určoval rýchlejšiu dynamiku oproti referenčnému modelu.

Frekvenčné pásmo referenčného modelu odráža parameter $a_{0m}$. Zvoľme preto

$$\lambda = 10 \cdot a_{0m} \tag{227}$$

#### Implementácia zákona riadenia

Ide o lineárny zákon riadenia. Preto je ho možné zapísať v tvare

$$u(t) = \Theta^{\mathsf{T}}(t)\omega(t) \tag{228}$$

kde $\omega(t)$ je tzv. signálny vektor a $\Theta(t)$ je vektor parametrov zákona riadenia. Ku každnému signálu vo vektore $\omega(t)$ jednoznačne prislúcha parameter (prvok) z vektrora $\Theta(t)$.

Je potrebné zostaviť signálny vektor $\omega(t)$.

Prvý člen v (teoretickom) zákone riadenia je možné zapísať ako prenosovú funkciu (zaviedli sme jej fiktívny výstup $y_{\nu_1}$ a dovoľujeme si nepísať všetky formálne detaily/predpoklady ako $y_{\nu_1}(s)$ a podobne)

$$y_{\nu_1} = \frac{\Theta_1}{(s+\lambda)}u \tag{229}$$

To je možné zapísať opisom v stavovom priestore:

$$\dot{\nu}_1 = -\lambda\nu_1 + u \tag{230a}$$

$$y_{\nu_1} = \Theta_1\nu_1 \tag{230b}$$

kde sme zaviedli stavovú veličinu (vo všeobecnosti stavový vektor) $\nu_1$. Prvý člen zákona riadenia teda nahrádza výraz

$$\Theta_1\nu_1 \tag{231}$$

Analogicky, druhý člen zákona riadenia nahrádza výraz $\Theta_2\nu_2$ pričom $\dot{\nu}_2 = -\lambda\nu_2 + y$.

Signálny vektor $\omega(t)$ teraz môžme zostaviť napr. ako

$$\omega(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \tag{232}$$

Tejto voľbe potom prislúcha vektor parametrov $\Theta(t)$ v tvare

$$\Theta(t) = \begin{bmatrix} \Theta_3(t) \\ \Theta_1(t) \\ \Theta_2(t) \\ \Theta_4(t) \end{bmatrix} \tag{233}$$

Jednotlivé signály v signálnom vektore $\omega(t)$ sú buď priamo dostupné ($y(t)$, $r(t)$), alebo je ich potrebné vyrobiť pomocnými filtrami ($\nu_1(t)$, $\nu_2(t)$).

### 8.2.6 Zákon adaptácie

Zákon adaptácie je v tomto prípade v tvare

$$\dot{\Theta}(t) = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right)\Gamma\ e_1(t)\ \omega_f(t) \tag{234}$$

kde vektor $\omega_f(t)$ má zložky $\omega_f(t) = \begin{bmatrix} y_f(t) & \nu_{1f}(t) & \nu_{2f}(t) & r_f(t) \end{bmatrix}^\mathsf{T}$. Tieto signály získame jednoducho prechodom pôvodných signálov $y(t)$, $\nu_1(t)$, $\nu_2(t)$ a $r(t)$ cez filtre s prenosovou funkciou v tvare $\frac{1}{s+\rho}$.

Matica $\Gamma > 0$ má rozmer daný dĺžkou vektora $\omega_f(t)$, čo je v tomto prípade 4, teda matica $\Gamma$ má rozmer $4 \times 4$. Bude sa uvažovať diagonálna matica $\Gamma$ s kladnými číslami na diagonále (spĺňa kladnú definitnosť).

Signál $e_1(t)$ je v tomto prípade signál doplnenej adaptačnej odchýlky. Je možné ukázať, že tento signál je výsledkom rovnice

$$e_1(t) = (y(t) - y_m(t)) - \mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right)[W_m(s)L(s)]\left(\left[L(s)^{-1}\right]u(t) - \Theta^\mathsf{T}(t)\omega_f(t)\right) \tag{235}$$

#### Implementácia zákona adaptácie

**Matica $\Gamma$** Matica $\Gamma$ sa uvažuje, ako bolo uvedené, v tvare

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_4 \end{bmatrix} \tag{236}$$

s kladnými číslami $\gamma_1, \cdots, \gamma_4$.

**Vektor $\omega_f(t)$** Vektor $\omega_f(t)$ je možné získať aj tak, že zostavýme MIMO systém, ktorý bude mať na vstupe signál (vektor) $\omega(t)$ a na výstupe samozrejme $\omega_f(t)$. Takýto MIMO systém je vlastne len niekoľko filtrov paralelne vedľa seba.

Vysvetlime to na príklade len dvoch signálov z vektora $\omega(t)$. Konkrétne $r(t)$ a $y(t)$. Potrebujeme spraviť napr.

$$y_f(s) = \frac{1}{s+\rho}y(s) \tag{237}$$

To sa dá zapísať aj ako (v stavovom priestore/opise)

$$\dot{y}_f(t) = -\rho y_f(t) + y(t) \tag{238}$$

Rovnako aj

$$\dot{r}_f(t) = -\rho r_f(t) + r(t) \tag{239}$$

Posledné dve rovnice je možné zapísať aj spolu v jednej maticovej rovnici

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_f(t) \\ \dot{r}_f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & -\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_f(t) \\ r_f(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \tag{240}$$

Takže, ak potrebujeme „naraz“ filtrovať signálny vektor $\omega(t)$ je to možné urobiť v zmysle:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_f(t) \\ \dot{\nu}_{1f}(t) \\ \dot{\nu}_{2f}(t) \\ \dot{r}_f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_f(t) \\ \nu_{1f}(t) \\ \nu_{2f}(t) \\ r_f(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \tag{241}$$

$$\omega_f(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_f(t) \\ \nu_{1f}(t) \\ \nu_{2f}(t) \\ r_f(t) \end{bmatrix} \tag{242}$$

Mimochodom, rovnako sa dá postupovať aj keď je $L(s)$ vyššieho ako 1. stupňa (čo možno nie je z uvedeného očividné, ale dá sa).

**Signál** $\left(\left[L(s)^{-1}\right] u(t) - \Theta^{\mathsf{T}}(t)\omega_f(t)\right)$ Tento signál je potrebný pre doplnenie adaptačnej odchýlky v rovnici (235).

Označme ho $u_{W_m L}(t)$.

Má dve zložky. Jenou zložkou je $\Theta^{\mathsf{T}}(t)\omega_f(t)$. Oba prvky sú k dispozícii, takže túto zložku máme k dispozícii.

Druhou zložkou je signál $\left[L(s)^{-1}\right] u(t) = u_f(s) = \frac{1}{s+\rho} u(s)$ a teda toto je možné zrealizovať ako

$$\dot{u}_f(t) = -\rho u_f(t) + u(t) \tag{243}$$

Formálne teda signál $u_{W_m L}(t)$ je

$$u_{W_m L}(t) = u_f(t) + \Theta^{\mathsf{T}}(t)\omega_f(t) \tag{244}$$

**Signál dopĺňajúci adaptačnú odchýlku** Tento signál v rovnici (235) teraz môžme písať v tvare

$$e_d(t) = \mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right) \left[W_m(s)L(s)\right] u_{W_m L}(t) \tag{245}$$

V prvom rade, znamienko $\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right)$ je známe. Prenosová funkcia $W_m(s)L(s)$ je v tomto prípade v tvare

$$W_m(s)L(s) = \frac{k_m s + k_m \rho}{s^2 + a_{1m} s + a_{0m}} \tag{246}$$

Teda signál $e_d(t)$ je možné získať sústavou diferenciálnych rovníc v tvare

$$\dot{x}_{W_m L}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{0m} & -a_{1m} \end{bmatrix} x_{W_m L}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_{W_m L}(t) \tag{247}$$

$$e_d(t) = \mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right) \begin{bmatrix} k_m \rho & k_m \end{bmatrix} x_{W_m L}(t) \tag{248}$$

**Výsledná adaptačná odchýlka** Výslednú (doplnenú) adaptačnú odchýlku je teraz možné písať ako

$$e_1(t) = y(t) - y_m(t) - e_d(t) \tag{249}$$

Obr. 17

### 8.2.7 Vytvorenie predstavy o nastavení rýchlosti adaptácie

Majme nejakú predstavu o riadenom systéme. V realite azda vždy budeme mať. Tu sa to teraz myslí, tak, že máme aspoň nejakú predstavu o parametroch lineárneho modelu skutočného riadeného systému (nelineárneho kyvadla). Použime tie isté parametre, aké sme už použili pre ilustračné účely, teda hodnoty parametrov (216). Zostavme simulačnú schému MRAC vstupno-výstupného avšak s tým, že riadeným systémom je priamo tento lineárny model. Umožní nám to vytvoriť si predstavu o tom, ako zvoliť maticu $\Gamma$ tak, aby rýchlosť adaptácie bola prijateľná.

Pre začiatok, uvažujme všetky váhy (prvky na diagonále) v $\Gamma$ rovnaké, o veľkosti „aby sa niečo dialo“. V tomto prípade je to

$$\Gamma = \texttt{diag}\left(\begin{bmatrix}1000 & 1000 & 1000 & 1000\end{bmatrix}\right)$$

a zároveň uvažujeme harmonický signál s relatívne nízkou frekvenciou pre najjednoduchší možný prípad čo sa „obtiažnosti adaptácie“ týka. Výsledok je na obr. 17.

Je zrejmé, že je potrebné ladiť $\Gamma$ tak, aby rýchlosť zmeny adaptovaných parametrov bola (aspoň na začiatku) čo najviac rovnaká. Po chvíli experimentovania sa dá dospieť k voľbe

$$\Gamma = \texttt{diag}\left(\begin{bmatrix}7290 & 12150 & 121500 & 270\end{bmatrix}\right)$$

a výsledok je na obr. 18. Toto je už uspokojivý priebeh adaptovaných parametrov čo sa rýchlosti adaptácie týka.

Obr. 18

Obr. 19

Fungovalo by toto nastavenie aj pre iný priebeh referenčného signálu? Viď výsledok na obr. 19. Kupodivu fungovalo.

## 8.3 Nasadenie na uvažovaný nelineárny systém

Fungovalo by toto riadenie aj keby bolo nasadené na nelineárny systém? Teda priamo na nelineárne kyvadlo. Vyskúšajme - viď obr. 20. Fungovalo... Aj pre obdĺžnikový referenčný signál? Fungovalo... viď obr. 21.

Vyskúšajme teraz simuláciu, kde v čase 100 zmeníme pracovný bod na hodnotu $u_{PB} = 6$ (z pôvodnej hodnoty $u_{PB} = 5$), necháme ustáliť sa kyvadlo v novom pracovno bode a potom budeme chcieť aby výstup sledoval RM tak ako v predch. pracovnom bode. Avšak, v čase 100 zároveň vypneme adaptáciu. Teda necháme adaptované parametre na hodnote, na ktorej boli v čase 100. Výsledok je na obr. 22.

Je zrejmé, že ak bol riadiaci systém naadaptovaný v jednom pracovnom bode, v inom už nespĺňa cieľ radenia.

Zapnime preto adaptáciu aj po prechode do nevého pracovného bodu. Výsledok je na obr. 23. Parametre riadiaceho systému sa adaptovali na nový pracovný bod. Môžme spraviť aj zmenu na iný pracovný bod, napríklad na $u_{PB} = 9$. Výsledok je na obr. 24. Prípadne ešte extrémnejšiu zmenu z $u_{PB} = 1$ na $u_{PB} = 9$. Výsledok je na obr. 25.

Obr. 20

Obr. 21

Obr. 22

Obr. 23

Obr. 24

Obr. 25

# 9 Otázky a úlohy

1. Je daný model systému

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + b_0 u(t)\\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

kde $a_0, a_1, b_0 > 0$ sú neznáme parametre systému, $u(t)$ je vstup, $y(t)$ je výstup a $x_1(t)$, $x_2(t)$ sú stavové veličiny systému. Tiež je daný referenčný model v tvare

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{1m}(t)\\ \dot{x}_{2m}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_{0m} & -a_{1m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{1m}(t)\\ x_{2m}(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ b_{0m}\end{bmatrix} r(t)$$
$$y_m(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{1m}(t)\\ x_{2m}(t)\end{bmatrix}$$

kde $a_{0m}, a_{1m}, b_{0m} > 0$ sú známe parametre referenčného modelu, $r(t)$ je referenčný signál, $y_m(t)$ je výstup a $x_{1m}(t)$, $x_{2m}(t)$ sú stavové veličiny referenčného modelu.

(a) Napíšte model systému v tvare prenosovej funkcie

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)}$$

kde $Z_p(s)$ je monický, hurwitzov polynóm stupňa $m$, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa $n$ a $k_p$ je vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy. Napíšte referenčný model v tvare prenosovej funkcie

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)}$$

kde $k_m$ je vysokofrekvenčné zosilnenie referenčného modelu, polynóm $Z_m(s)$ je monický Hurwitzov polynóm stupňa $m_m$, $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa $n_m$.

(b) Cieľom riadenia je $y = y_m$. Navrhnite ideálny zákon riadenia v tvare

$$u = \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r$$

kde $\alpha(s)$ je vektor obsahujúci mocniny $s$, $\alpha(s) = \left[s^{n-2}, \ldots, s, 1\right]^\mathsf{T}$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$. Vektory $\Theta_1^\star, \Theta_2^\star \in \mathbb{R}^{n-1}$ a skaláry $\Theta_3^\star, \Theta_4^\star \in \mathbb{R}^1$ sú konštantné parametre zákona riadenia, ktorých hodnoty hľadáme. $\Lambda(s)$ je ľubovolný monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$ obsahujúci $Z_m(s)$ ako faktor

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s)$$

a teda aj $\Lambda_0(s)$ je ľubovolný monický Hurwitzov polynóm zodpovedajúceho stupňa.

2. Odvoďte podmienky zhody pre MRAC vstupno-výstupný
3. Odvoďte podmienky zhody uzavretého regulačného obvodu a referenčného modelu.

Model riadeného systému: $\dfrac{y(s)}{u(s)} = k_p \dfrac{Z_p(s)}{R_p(s)}$ rád systému $n = 2$, relatívny stupeň $n^* = 1$

Referenčný model: $\dfrac{y_m(s)}{r(s)} = k_m \dfrac{Z_m(s)}{R_m(s)}$

Zákon riadenia: $u(s) = \dfrac{\Theta_1^\star}{\Lambda(s)} u(s) + \dfrac{\Theta_2^\star}{\Lambda(s)} y(s) + \Theta_3^\star y(s) + \Theta_4^\star r(s)$

4. Zistite či je prenosová funkcia $G(s)$ striktne pozitívne reálna (SPR).

$$G(s) = \frac{2\,s + 1}{(3\,s + 1)(s + 1)}$$

5. Pre aké hodnoty $a$, $b$, $c$ je prenosová funkcia $G(s) = \dfrac{as + 1}{(bs + 1)\,(cs + 1)}$ striktne pozitívne reálna.
6. Schematicky znázornite MRAC vstupno-výstupný pri $n^\star = 1$
7. Schematicky znázornite MRAC vstupno-výstupný pri $n^\star = 2$
8. Čo je cieľom riadenia pri návrhu adaptívneho riadiaceho systému s referenčným modelom so zákonom adaptácie navrhnutým pomocou Lyapunovovej teórie stability?
9. Je daný model systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + b_0 u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

kde $a_0, a_1, b_0 > 0$ sú neznáme parametre systému, $u(t)$ je vstup, $y(t)$ je výstup a $x_1(t)$, $x_2(t)$ sú stavové veličiny systému. Tiež je daný referenčný model v tvare

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{1m}(t) \\ \dot{x}_{2m}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{0m} & -a_{1m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1m}(t) \\ x_{2m}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{0m} \end{bmatrix} r(t) \\ y_m(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1m}(t) \\ x_{2m}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

kde $a_{0m}, a_{1m}, b_{0m} > 0$ sú známe parametre referenčného modelu, $r(t)$ je referenčný signál, $y_m(t)$ je výstup a $x_{1m}(t)$, $x_{2m}(t)$ sú stavové veličiny referenčného modelu.

(a) Napíšte model systému v tvare prenosovej funkcie

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)}$$

kde $Z_p(s)$ je monický, hurwitzov polynóm stupňa $m$, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa $n$ a $k_p$ je vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy. Napíšte referenčný model v tvare prenosovej funkcie

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)}$$

kde $k_m$ je vysokofrekvenčné zosilnenie referenčného modelu, polynóm $Z_m(s)$ je monický Hurwitzov polynóm stupňa $m_m$, $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa $n_m$.

(b) Ideálnym cieľom riadenia je $y = y_m$. Navrhnite ideálny zákon riadenia v tvare

$$u = \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r$$

kde $\alpha(s)$ je vektor obsahujúci mocniny $s$, $\alpha(s) = \left[s^{n-2}, \ldots, s, 1\right]^\mathsf{T}$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$. Vektory $\Theta_1^\star, \Theta_2^\star \in \mathbb{R}^{n-1}$ a skaláry $\Theta_3^\star, \Theta_4^\star \in \mathbb{R}^1$ sú konštantné parametre zákona riadenia, ktorých hodnoty hľadáme. $\Lambda(s)$ je ľubovolný monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$ obsahujúci $Z_m(s)$ ako faktor

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s)$$

a teda aj $\Lambda_0(s)$ je ľubovolný monický Hurwitzov polynóm zodpovedajúceho stupňa.

(c) Cieľom riadenia je $y \to y_m$ a stabilita celého riadiaceho systému. Navrhnite adaptívny riadiaci systém, pričom uvažujte model riadeného systému v tvare prenosovej funkcie a tiež referenčný model v tvare prenosovej funkcie z predchádzajúceho bodu 9a.

## Literatúra


[1] P. Ioannou and B. Fidan. *Adaptive Control Tutorial.* Society for Industrial and Applied Mathematics, USA., 2006.

[2] R. Monopoli. Model reference adaptive control with an augmented error signal. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(5):474 – 484, oct 1974.

[3] J. Murgaš and I. Hejda. *Adaptívne riadenie technologických procesov.* Slovenská technická univerzita v Bratislave, 1993.

[4] G. Tao. *Adaptive control design and analysis.* John Wiley & Sons, Inc., 2003.

[5] M. Tárník. Direct model reference adaptive control of small laboratory dc motor. *posterus.sk*, 4(1), 2011.

# O motorčeku

## Obsah


**1 Úvod** **1**
1.1 Obrázok . . . . . 1
1.2 Značne nesúrodé technické poznámky . . . . . 1

**2 Prevodová charakteristika systému** **2**
2.1 Identifikované hodnoty . . . . . 4

**3 Dynamické vlastnosti systému** **5**
3.1 Identifikované hodnoty . . . . . 10

**4 Simulačný model** **10**
4.1 Overenie simulačného modelu . . . . . 11


## 1 Úvod

Majme malý jednosmerný elektrický motorček a k nemu na spoločnom hriadeli malé tachodynamo, ktorého účelom je snímanie uhlovej rýchlosti motorčeka. Uvedené nech je vo všeobecnosti ovládané mikroprocesorom (s príslušenstvom), v skratke: originálna doska Arduino UNO.

Mikroprocesor generuje PWM signál, ktorý je privedený na výkonový prvok na báze tranzistora FET. Tým je realizované PWM napájanie v tomto prípade 0 až 5 [V]. Zároveň mikroprocesor pomocou AD prevodníka meria napätie generované tachodynamom. Napätie tachodynama je odporovým deličom upravené na rozsah 0 až cca 5 [V] (cca 4,5 [V] pri max napájacom napätí motora) a filtrované kondenzátorom. V neposlednom rade, mikroprocesor komunikuje sériovou linkou s nadradeným systémom (napríklad bežné PC). K dispozícii je tiež manuálne nastaviteľný analógový signál pre ľubovolné použitie – potenciometer na 0 až 5 [V], napätie merané AD prevodníkom mikroprocesora.

### 1.1 Obrázok

Zariadenie je zobrazené na obr. 1 a obr. 2

### 1.2 Značne nesúrodé technické poznámky

- Motorček typ K6A27, štítkové údaje: 12V 8W [1.9A S3 1.65% 8000 1/min], rok výroby 1987
- Tachodynamo K4A2, štítkové údaje: 2V/1000 1/min, max 5000 1/min, rok výroby 1983.
- Výkonový prvok pre realizáciu PWM napájania: HITFET BTS 117
- PWM rozlíšenie: 8 bit.
- ADC rozlíšenie: 10 bit (pre 0-5V)
- Odporový delič, RC filter: 1k/2k, 100$\mu$F. (ten RC filter asi ovplyvňuje aj výslednú dynamiku (tak nejak nezanedbateľnejšie))

Obr. 1

Obr. 2

## 2 Prevodová charakteristika systému

Odmerajme prevodovú charakteristiku uvažovaného systému.

Pripomeňme, že vstupný signál uvažovaného systému je daný generovaním PWM signálu s rozlíšením 8 bitov, teda nadobúda hodnoty 0 až 255. Jednotky tu označujme ako [PWM 8bit]. Obdobne výstupný signál je meranie AD prevodníkom s rozlíšením 10 bitov, teda nadobúda hodnoty 0 až 1023. Jednotky tu označujme ako [ADC 10bit].

Navrhnime a niekoľko krát zrealizujme experiment pre získanie dát pre prevodovú charakteristiku. Výsledok (jednotlivé realizácie merania) zobrazuje obr 3.

V ďalšom kroku takpovediac vystrihnime len tie časové úseky a celkovo len tie úseky, ktoré sú pre prevodovú charakteristiku relevantné. Výsledok je na obr. 4. V prvom rade ide o časové úseky, v ktorých je výstupná veličina ustálená. Avšak z týchto sme odstránili tie, pri ktorých je výstup nulový, a tiež tie, ktoré sme posúdili ako nevhodné. Nevhodnými sa ukázali dáta v čase, ktorému predchádzala skoková zmena vstupu z nuly na maximum. Tiež prvé dve merania pri postupnom zvyšovaní sa pri nízkych hodnotách výstupu odlišujú od ostatných meraní. Pripisujeme to dlhému času (rádovo hodiny) nečinnosti zariadenia (motora) pred meraním.

Obr. 3: Jednotlivé realizácie merania dát pre určenie prevodovej charakteristiky. Prvých 6 meraní postupné zvyšovanie hodnoty na vstupe, posledných 6 meraní postupné znižovanie hodnoty na vstupe.

Obr. 4: Dáta relevantné pre prevodovú charakteristiku.

Obr. 5: Dáta relevantné pre prevodovú charakteristiku.

Nakreslime získané dáta v zmysle prevodovej charakteristiky - viď obr. 5.

Dáta sú aproximované polynomiálnou funkciou, na obr. označené ako polyfit a zároveň je zobrazená aj derivácia tejto polynomiálnej funkcie (označené ako polyder), ktorá zodpovedá premenlivému statickému zosilneniu uvažovaného systému.

## 2.1 Identifikované hodnoty

Nájdený polynóm, ktorý je modelom meranej prevodovej charakteristiky je:

$$f(u) = 9.066e{-}07\ u^4 - 3.41e{-}04\ u^3 - 1.615e{-}02\ u^2 + 2.1808e{+}01\ u - 1.672e{+}03 \quad (1)$$

Derivácia tejto polynomiálnej funkcie, a teda závislosť statického zosilnenia od pracovného bodu systému je:

$$f(u) = 3.626e-06\ u^3 - 1.0231e-03\ u^2 - 3.231e-02\ u + 2.1808e+01 \quad (2)$$

Ak by sme hľadali inverznú závislosť k funkcii (1), teda statický prevod z výstupu na vstup, je možné využiť polynomiálnu závislosť:

$$f(y) = -6.5195e{-}10\ y^4 + 1.364e{-}06\ y^3 - 8.063e{-}04\ y^2 + 2.669e{-}01\ y + 8.0311e{+}01 \quad (3)$$

Obr. 6: Dáta relevantné pre kvázi prechodové charakteristiky. Na x-osi je čas v sekundách a na y-osi sú jednotky výstupnej veličiny.

# 3 Dynamické vlastnosti systému

Spôsob akým boli získané dáta k prevodovej charakteristike v predchádzajúcej časti, teda postupné skoky na rôzne úrovne vstupného signálu, by sa v istom zmysle dal využiť pri získavaní informácie o dynamických vlastnostiach uvažovaného systému. Skokové zmeny na vstupe a následné prechodné deje na výstupe v princípe zachytávajú rovnakú informáciu ako prechodová charakteristika vo všeobecnosti. K prechodovej

Obr. 7: Na x-osi je čas v sekundách.

charakteristike by sa však žiadalo dodať určenie (a odôvodnenie) jednotkovej veľkosti skokovej zmeny a samozrejme pojedať o prípadnom pracovnom bode a jeho okolí, ku ktorému by sa PCH vzťahovala. Napriek tomu, že tu dynamické vlastnosti nebudeme určovať pre dané/zvolené pracovné body, pokúsme sa zachytiť premenlivosť dynamických vlastností na celom pracovnom rozsahu predmetného systému.

Zoskupme jednotlivé prechodové deje, ktoré navzájom súvisia. Výsledok je na obr. 6. Tu sme vystrihli jednotlivé úseky dát zachytávajúce prechodný dej na výstupe systému, posunuli tieto dáta tak, že skoková zmena (na vstupe) nastáva v čase nula.

Obr. 8: Na x-osi je čas v sekundách.

Zároveň sme niektoré merania vyradili pre zjavnú neadekvátnosť merania.

V tomto momente je možné tiež posunúť tieto dáta v y-osi tak, aby mala výstupná veličina nulovú hodnotu pred prechodným dejom. Pre tento účel sa pokúsme využiť v predchádzajúcej časti získaný model prevodovej charakteristiky. Výsledok je na obr. 7.

V princípe sme na obr. 7 dosiahli požadovaný výsledok, teda, že prechodný dej začína v nule, avšak je zrejmé, že jednotlivé merania sú v podstate náhodne posunuté oproti celkovému modelu prevodovej charakteristiky a teda prechodný dej

Obr. 9: Na x-osi je čas v sekundách.

nezačína úplne presne v nule. Korigujme uvedené nepresnosti pre každé meranie zvlášť. Odčítajme v y-osi odchýlku priemeru z času pred 0 [s]. Výsledok je na obr. 8.

Zároveň sme pre jednotlivé prechodové deje vyznačili červenou prerušovanou statické zosilnenie tak ako ho udáva sklon zistenej prevodovej charakteristiky.

Nech sú predmetom nášho záujmu len tie kvázi prechodové charakteristiky, ktoré nastali pri skoku smerom hore (skok vstupnej veličiny systému). Tieto sú zobrazené na obr. 9.

Identifikujme na základe týchto prechodových charakteristík dynamický systém,

Obr. 10: Na x-osi je čas v sekundách.

ktorých ich vystihuje. Identifikujme, samozrejme, pre každý meraný „bod“ (kvázi pracovný bod) zvlášť (bod 1 až bod 19).

Predpokladajme, že dynamické vlastnosti systému v každom pracovnom bode je možné opísať prenosovou funkciou v tvare

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)\,(T_2 s + 1)} \tag{4}$$

Výsledky identifikácie (hodnoty parametrov $T_1$, $T_2$ a $K$) sú uvedené na obr. 10

Obr. 11

pričom Kpr je hodnota zosilnenia systému (v danom pracovnom bode) podľa modelu prevodovej charakteristiky. Na obr. 10 je zároveň grafické porovnanie PCH identifikovanej prenosovej funkcie (hrubšia červená čiara) s nameranými PCH.

Na obr. 11 je porovnaná závislosť zosilnenia systému zistená meraním prevodovej charakteristiky a zistená z kvázi prechodových charakteristík.

Zároveň je tiež na obr. 11 znázornená nameraná závislosť časových konštánt od pracovného bodu.

## 3.1 Identifikované hodnoty

Nájdený polynóm, ktorý aproximuje závislosť parametra $T_1$ na pracovnom bode je:

$$f(u) = 1.0356e-07\ u^3 - 5.199e-05\ u^2 + 7.0762e-03\ u - 1.943e-03 \tag{5}$$

Nájdený polynóm, ktorý aproximuje závislosť parametra $T_2$ na pracovnom bode je:

$$f(u) = -2.1927e-06\ u^2 + 5.5793e-04\ u + 2.2308e-02 \tag{6}$$

# 4 Simulačný model

V tejto časti načrtnime zostrojenie simulačného modelu, ktorý sa bude na základe zistených statických a dynamických vlastností správať vo veľkej miere rovnako ako reálny systém.

Takýto simulačný model je možné vyjadriť napríklad nasledujúcou schémou:

Obr. 12

## 4.1 Overenie simulačného modelu

Simulujme rovnakú situáciu ako pri reálnom meraní a porovnajme výstup simulačného modelu s reálnym nameraným priebehom (tu konkrétne meranie č. 6):

Obr. 13

Je zrejmé, že simulačný model sa v značnej miere správa rovnako ako reálny systém. Pre lepšiu ilustráciu zobrazme aj detail (aby bola lepšie viditeľná dynamika):

Obr. 14

# Doplnkový text

## Obsah


**1 Kyvadlo** **1**

**2 Niekoľko (dosť veľa) úvodných pojmov** **2**
2.1 Modelovanie systému . . . 2
2.2 Numerické riešenie diferenciálnych rovníc (a ODE solver) . . . 4
2.2.1 ODE solver . . . 4
2.2.2 Rovnica vyššieho rádu ako sústava rovníc 1. rádu . . . 4
2.2.3 Používanie ODE solvera . . . 6
2.3 Vektorové pole a fázový portrét . . . 8

**3 Stabilita** **10**
3.1 Stabilita lineárnych systémov . . . 12

**4 Linearizácia a jej použitie pri analýze stability** **13**

**5 Analýza stability pomocou Lyapunovových funkcií** **14**
5.1 Lyapunovove funkcie . . . 14
5.2 Analýza stability . . . 15
5.3 Lyapunovova rovnica . . . 17

**6 Otázky a úlohy** **17**


Cieľom tohto textu je najmä uviesť vybrané výsledky Lyapunovovej teórie stability tak ako sú používané v ďalších častiach predmetu. K tomu je však potrebné pripomenúť niektoré pojmy z teórie systémov. Zároveň táto časť slúži na zoznámenie sa s označovaním a zapisovaním, aké je používané v rámci textov k predmetu. Všetky uvedené pojmy a princípy budú ilustrované pomocou názorných príkladov, kde skúmaným systémom bude kyvadlo.

## 1 Kyvadlo

Uvažujme kyvadlo, ktorého kmity sú tlmené viskóznym trením s koeficientom $\beta$ [kg m$^2$ s$^{-1}$]. Kyvadlo je na Obr. 1, kde hmotný bod s hmotnosťou $m$ [kg] pripevnený na ramene so zanedbateľnou hmotnosťou a dĺžkou $l$ [m] kmitá, $o$ označuje os otáčania kolmú na rovinu, v ktorej kyvadlo kmitá, uhol medzi zvislicou a ramenom kyvadla je označený $\varphi$ [rad] a gravitačné zrýchlenie $g$ [m s$^{-2}$].

Pohybová rovnica opisujúca dynamiku rotačného pohybu kyvadla je v tvare

$$ml^2\ddot{\varphi} = -\beta\dot{\varphi} - mgl\sin\varphi + u \tag{1a}$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + mgl\sin\varphi = u \tag{1b}$$

kde $u$ [kg m$^2$ s$^{-2}$] je externý moment sily pôsobiaci na rameno kyvadla, $\dot{\varphi}$ [rad s$^{-1}$] je uhlová rýchlosť a $\ddot{\varphi}$ [rad s$^{-2}$] je uhlové zrýchlenie ramena kyvadla.

Obr. 1: Kyvadlo

# 2 Niekoľko (dosť veľa) úvodných pojmov

## 2.1 Modelovanie systému

Rovnica (1) je modelom uvažovaného dynamického systému. Model je matematická reprezentácia v tomto prípade fyzikálneho systému. Model umožňuje uvažovať o systéme a predpovedať ako sa bude systém správať. Uvedený model opisuje vstupno-výstupné správanie sa dynamického systému, kde vstupom je externý moment sily $u$ a výstupom je uhol $\varphi$, avšak budeme pracovať aj opisom systému v „stavovom priestore“.

Stav systému je súbor premenných (súbor veličín), ktoré sumarizujú minulosť systému pre potreby predpovede budúcnosti systému. Pre fyzikálny systém je stav zložený z premenných potrebných pre výpočet zmeny hmotnosti, hybnosti a energie. Kľúčovou otázkou pri vytváraní modelu je ako presne má byť táto zmena popísaná.

Stavové premenné tvoria vektor $x \in \mathbb{R}^n$, ktorý sa nazýva *stavový vektor*. Vstupy, pomocou ktorých je systém riadený, tvoria vektor vstupov $u \in \mathbb{R}^p$ a merateľné výstupy systému tvoria vektor výstupov $y \in \mathbb{R}^q$. V tomto prípade máme $p = q = 1$. Dynamický systém potom možno reprezentovať rovnicami v tvare

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{2a}$$

$$y = h(x, u) \tag{2b}$$

kde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ a $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ sú hladké funkcie. Model v takomto tvare nazývame *model v stavovom priestore*.

Rozmer stavového vektora sa nazýva *rád systému*. Systém (2) sa nazýva *časovo-invariantný* pretože funkcie $f$ a $h$ nie sú priamo závislé na čase $t$. Pri časovo-variantných systémoch sú. Model pozostáva z dvoch funkcií: funkcia $f$ určuje rýchlosť zmeny stavového vektora ako funkciu stavu $x$ a vstupu $u$, a funkcia $h$ určuje merateľné výstupy ako funkciu stavu $x$ a vstupu $u$.

Systém sa nazýva lineárny ak sú funkcie $f$ a $h$ lineárne vzhľadom na $x$ a $u$. Lineárny model v stavovom priestore má tvar

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3a}$$

$$y = Cx + Du \tag{3b}$$

Tabuľka 1: Parametre kyvadla

| Parameter | Hodnota | Jednotky |
|---|---|---|
| $m$ | 1 | kg |
| $l$ | 1 | m |
| $g$ | $9,81$ | m s$^{-2}$ |
| $\beta$ | $2 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{g/l}$ | kg m$^2$ s$^{-1}$ |

kde $A$, $B$, $C$ a $D$ sú konštantné matice. Takýto systém sa nazýva lineárny a časovo-invariantný, v skratke LTI z anglického linear and time-invariant. Matica $A$ sa nazýva dynamická matica, matica $B$ sa nazýva vstupná matica, matica $C$ sa nazýva výstupná matica a matica $D$ sa nazýva priamy člen. Drvivá väčšina systémov nemá priamy člen, čo znamená, že vstup nemá priamy vplyv na výstup.

Iná forma lineárnych diferenciálnych rovníc, ktorá je zovšeobecnením avšak linearizovanej dynamickej rovnice kyvadla (o linearizácii neskôr), má tvar

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{(n-1)} y}{\mathrm{d}t^{(n-1)}} + \cdots + a_0 y = b_0 u \tag{4}$$

kde $t$ je nezávisle premenná (čas), $y(t)$ je závisle premenná (výstup) a $u(t)$ je vstup. Zápis $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}$ značí $n$-tú deriváciu $y$ podľa času $t$ (namiesto $n$ bodiek). Hovoríme, že rovnica (4) je diferenciálna rovnica $n$-tého rádu, ktorá modeluje dynamiku systému $n$-tého rádu. Tento model môže byť konvertovaný na model v stavovom priestore napríklad definovaním stavového vektora v tvare

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}^{(n-1)} y}{\mathrm{d}t^{(n-1)}} \end{bmatrix} \tag{5}$$

potom model v stavovom priestore možno zapísať v tvare

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ \vdots \\ -a_{n-1}x_n - \cdots - a_0 x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 u \end{bmatrix} \tag{6a}$$

$$y = x_1 \tag{6b}$$

čo po vhodnej definícii matíc $A$, $B$, $C$ a $D$ má tvar (3).

Ešte všeobecnejší systém získame ak výstup bude lineárnou kombináciou všetkých stavových veličín (predpokladáme, že výstup nezávisí priamo od vstupu), teda

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \tag{7}$$

Potom model v stavovom priestore je

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \tag{8a}$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} & c_n \end{bmatrix} x \tag{8b}$$

Vráťme sa späť k nelineárnym dynamický systémom. Model kyvadla (1b) je nelineárna diferenciálna rovnica. Rovnicu (1b) upravíme na tvar

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\beta}{ml^2}\dot{\varphi} - \frac{g}{l}\sin(\varphi) + \frac{1}{ml^2}u \tag{9}$$

Stavom kyvadla sú dve veličiny: uhol natočenia ramena kyvadla $\varphi$ a uhlová rýchlosť ramena kyvadla $\dot{\varphi}$. Stavový vektor má preto dva prvky $x^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$, kde $x_1 = \varphi$ a $x_2 = \dot{\varphi}$. Model kyvadla v stavovom priestore je v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\beta}{ml^2}x_2 - \frac{g}{l}\sin(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u \tag{10a}$$

$$\varphi = x_1 \tag{10b}$$

Toto je nelineárny časovo-invariantný systém druhého rádu.

Mimochodom, miestami v ďalšom texte budeme uvažovať tento systém, avšak bez vstupu, inými slovami externý moment sily je nulový, $u = 0$. Potom

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\beta}{ml^2} x_2 - \frac{g}{l} \sin(x_1) \end{bmatrix} \tag{11a}$$

$$\varphi = x_1 \tag{11b}$$

Toto je autonómny nelineárny časovo-invariantný systém druhého rádu. Jeho správanie závisí len od začiatočného stavu na začiatku uvažovaného času.

## 2.2 Numerické riešenie diferenciálnych rovníc (a ODE solver)

Majme rovnicu opisujúcu dynamiku rotačného pohybu kyvadla. Rovnica je v tvare

$$ml^2 \ddot{\varphi}(t) + \beta \dot{\varphi}(t) + mgl \sin \varphi(t) = u(t) \tag{12}$$

Samozrejme, ide o diferenciálnu rovnicu. Presnejšie o obyčajnú diferenciálnu rovnicu 2. rádu, ktorá je nehomogénna (vyskytuje sa v nej „externý signál“ (vstup)). Cieľom je nájsť numerické riešenie tejto rovnice pre dané začiatočné podmienky a pre prípadné dané vstupy (vstupné signály).

Analytické riešenie diferenciálnej rovnice je v podstate nejaká funkcia času (a prípadne iných veličín). Numerické riešenie je postuppnosť hodnôt, číselných hodnôt, ktoré pri daných predpokladoch vyhovujú diferenciálnej rovnici. Je postupnosť hodnôt - vektor hodnôt, ku ktorému prislúcha časový vektor určujúci časovú postupnosť hodnôt numerického riešenia. Tu sme vynechali pár miliónov detailov, ale snáď sa dá vytušiť, čo sa tu myslí pod numerickým riešením.

### 2.2.1 ODE solver

Pre hľadanie numerického riešenia využijeme ODE solver. ODE je skratka pre obyčajné diferenciálne rovnice (ordinary differential equation).

Úlohou ODE solvera je nájsť numerické riešenie na základe rovnice (diferenciálnej), ktorú je možné vo všeobecnosti zapísať v tvare

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), \ldots\right) \tag{13}$$

kde $f$ je funkcia, ktorej argumenty sú čas $t$, prirodzene, samotný výstupný (hľadaný, neznámy) signál $x(t)$ a prípadne iné ďalšie parametre či veličiny - napríklad externý vstup. Uvedená rovnica doslova predpisuje aká je časová zmena signálu $x(t)$. Časová zmena signálu, inými slovami časová derivácia (derivácia podľa času) je označená ako $\dot{x}(t)$.

Ak teda do funkcie $f$ dosadíme hodnoty argumentov (čas, signál $x(t)$, a prípadne iné), získame hodnotu časovej zmeny $\dot{x}(t)$. Na základe informácie o $\dot{x}(t)$, ktorá zodpovedá aktuálnemu (dosadenému) signálu $x(t)$, môžeme určiť hodnotu $x(t)$ o nejaký čas neskôr. Túto novú hodnotu $x(t)$ možno opäť dosadiť do funkcie $f$ a následne nájsť ďalšiu ešte ďalej v čase - atď. ODE solver využíva práve tento jednoduchý princíp pre postupné hľadanie hodnôt (numerických hodnôt) signálu $x(t)$.

Vo všeobecnosti sa uvedený princíp nazýva numerická integrácia. ODE solver teda numericky integruje. Je množstvo metód pre numerickú integráciu, ktoré sa líšia spôsobom riešenia problémov súvisiacich so samotným procesom numerickej integrácie (voľba (optimalizácia) časového kroku integrácie, zohľadnenie matematických vlastností daného typu diferenciálnych rovníc a iné). ODE solvre sa môžu líšiť aj samotnou implementáciou niektorej z metód numerickej integrácie. Podrobnejší opis ODE solvera je nad rámec tohto textu.

### 2.2.2 Rovnica vyššieho rádu ako sústava rovníc 1. rádu

ODE solver z princípu pracuje s diferenciálnou rovnicou prvého rádu, prípadne so sústavou diferenciálnych rovníc 1. rádu. Napríklad sústavu dvoch rovníc prvého rádu

je možné vo všeobecnosti zapísať v tvare

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = F\left(t, \begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}, \dots\right) \tag{14}$$

V našom prípade hľadáme riešenie pre rovnicu druhého rádu. Každú diferenciálnu rovnicu vyššieho rádu je možné zapísať ako sústavu rovníc prvého rádu. V takejto novej sústave rovníc, vo všeobecnosti, vznikli nové veličiny (signály), ktoré sa vo všeobecnosti môžu líšiť od pôvodných veličín (signálov) v pôvodnej rovnici vyššieho rádu.

Nové veličiny vystupujúce v sústave rovníc sa v teórii systémov súhrnne označujú ako stav systému (stavové veličiny systému). Ak poznáme aktuálny stav systému potom spravidla vieme určiť predchádzajúce aj budúce stavy (vo všeobecnosti).

Napr. v rovnici kyvadla vystupujú veličiny (signály) $\ddot{\varphi}(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ a $\varphi(t)$. Je zrejmé (možno nie nad slnko jasné), že ako stav systému je možné zvoliť veličiny $\varphi(t)$ a $\dot{\varphi}(t)$, teda polohu a uhlovú rýchlosť kyvadla. Ak poznáme tieto, poznáme celú históriu a budúcnosť pohybu kyvadla.

Môže existovať viac možností voľby stavových veličín. Pri lineárnych systémoch je možností nekonečne veľa (nekonečne veľa stavových priestorov). Z praktického hľadiska však majú význam len niektoré voľby - napr. pri pohybových systémoch, akým je kyvadlo, sú to prirodzene polohy, rýchlosť, zrýchlenie, trh atď., v závislosti od rádu systému.

Jednou z možností ako previesť rovnicu vyššieho rádu na sústavu rovníc prvého rádu je nasledovný postup. V tomto prípade je zhodou okolností výsledkom aj prakticky využiteľný stavový priestor (stavové veličiny $\varphi(t)$ a $\dot{\varphi}(t)$). Nech

$$x_1(t) = \varphi(t) \tag{15}$$

potom

$$\dot{x}_1(t) = \dot{\varphi}(t) \tag{16}$$

Ďalej nech

$$\dot{x}_1(t) = \dot{\varphi}(t) = x_2(t) \tag{17}$$

a to znamená, že

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{\varphi}(t) \tag{18}$$

Tým sme získali veličiny $x_1(t) = \varphi(t)$ a $x_2(t) = \dot{\varphi}(t)$. Je možné zostaviť stavový vektor $x = \begin{bmatrix}x_1(t) & x_2(t)\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ a teda $\dot{x} = \begin{bmatrix}\dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}^\mathsf{T}$.

Cieľom je konkretizovať funkciu $F$ v rovnici

$$\dot{x} = F(t, x, \dots) \tag{19}$$

čo je kompaktný zápis sústavy

$$\dot{x}_1(t) = F_1\left(t, x_1(t), x_2(t), \dots\right) \tag{20}$$

$$\dot{x}_2(t) = F_2\left(t, x_1(t), x_2(t), \dots\right) \tag{21}$$

Prvú rovnicu v tomto prípade máme:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{22}$$

Druhá rovnica vyplynie z postrehu, že pôvodnú rovnicu druhého rádu možno zapísať v tvare

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}(t) &= -\frac{\beta}{ml^2}\dot{\varphi}(t) - \frac{g}{l}\sin\left(\varphi(t)\right) + \frac{1}{ml^2}u(t)\\ &= -\frac{\beta}{ml^2}x_2(t) - \frac{g}{l}\sin\left(x_1(t)\right) + \frac{1}{ml^2}u(t)\end{aligned} \tag{23}$$

kde sú využité novo zavedené stavové veličiny $x_1(t)$ a $x_2(t)$. Je zrejmé, že druhá rovnica sústavy je

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{\beta}{ml^2}x_2(t) - \frac{g}{l}\sin\left(x_1(t)\right) + \frac{1}{ml^2}u(t) \tag{24}$$

a teda rovnice kyvadla v stavovom priestore sú

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{\beta}{ml^2} x_2(t) - \frac{g}{l} \sin\left(x_1(t)\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u(t) \tag{25}$$

čím je funkcia $F$ jasne stanovená (skonkretizovaná) a sústava spĺňa požiadavky pre využitie v ODE solveri.

### 2.2.3 Používanie ODE solvera

ODE solver ako funkcia v programe môže mať napríklad nasledujúce vstupy (argumenty) a výstupy:

```
x = odesolver(fcnF, init, timeVect)
```

kde `x` je, samozrejme, hľadané numerické riešenie. Prvým argumentom je funkcia s názvom `fcnF`, ktorá implementuje sústavu diferenciálnych rovníc v zmysle predchádzajúceho textu. `init` označuje začiatočné hodnoty stavových veličín. `timeVect` označuje časové okamihy (vzorky), v ktorých hľadáme hodnoty numerického riešenia.

#### MATLAB

MATLAB obsahuje hneď niekoľko ODE solverov. Tu budeme používať `ode45`.

Vytvorme funkciu, ktorá realizuje sústavu diferenciálnych rovníc (25), avšak, uvažujme, že vstupný signál $u(t)$ je nulový. Teda neuvažujme vstupný signál vôbec. Ešte inými slovami, externý moment sily je nulový, $u(t) = 0$ a preto potom možno písať

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\beta}{ml^2} x_2 - \frac{g}{l} \sin(x_1) \end{bmatrix} \tag{26}$$

Toto je autonómny nelineárny časovo-invariantný systém druhého rádu. Jeho správanie závisí len od začiatočného stavu na začiatku uvažovaného času.

Funkcia, ktorá realizuje uvedenú sústavu, môže byť nasledovná:

Celý súbor PravaStr.m

```
function dotx = PravaStr(t,x)

global m l g beta

dotx1 =  x(2);
dotx2 = - (beta/m*l^2)*x(2)  -  (g/l)*sin(x(1));

dotx = [dotx1; dotx2];

end
```

Vytvorme „hlavný skript“, v ktorom všetko potrebné nastavíme a v ktorom budeme volať ODE solver. Ako prvé nech su globálne premenné (v tomto prípade parametre kyvadla):

Časť súbora hlSkript.m

```
global m l g beta

m = 1; %kg
l = 1; %m
g = 9.81; %m/s^2
beta = 2*0.5*sqrt(g/l); %kgm^2/s
```

Definujme časový vektor, ktorý určí pre aké časové okamihy ODE solver vráti numerické riešenie:

Časť súbora hlSkript.m

```
timeVect = 0:0.1:5;
```

Zavolajme ODE solver, pričom ostáva zvoliť začiatočné podmienky - začiatočný stav kyvadla. Nech začiatočný stav je $x_1(0) = 0.25$ [rad] a $x_2(0) = 0$ [rad/s].

Časť súbora hlSkript.m

```
[t,x] = ode45(@(t,x) PravaStr(t,x), timeVect, [pi/4; 0]);
```

Premenná `x` teraz obsahuje dva stĺpce - prvý stĺpec je prvá stavová veličina a druhý stĺpec je druhá stavová veličina. Pre nakreslenie vypočítaného riešenia:

Časť súbora hlSkript.m

```
figure(1)
plot(t,x)
```

Výsledné numerické riešenie je graficky znázornené na obr. 2.

Obr. 2: Grafické zobrazenie numerického riešenia

Na obr. 2 ide však len o akési základné zobrazenie. Zmysluplnejšie by napríklad mohlo byť, ak by sme do grafu nakreslili len priebeh polohy (výchylky) kyvadla samostatne a navyše nie v radiánoch ale v stupňoch – viď obr. 3. Pre takýto obrázok možno do hl. skriptu pridať:

Časť súbora hlSkript.m

```
figure(2)
plot(t,x(:,1)*180/pi)
```

Obr. 3: Grafické zobrazenie priebehu polohy kyvadla

### Python

Pre informáciu, nasledovne by vyzeralo hľadanie numerického riešenia v rámci jazyka Python.

Knižnica SciPy, presnejšie scipy.integrate obsahuje ODEsolver s názvom `odeint`. Vytvorme skript využívajúci tento ODE solver:

Skript v Python-e

```python
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

m = 1.0
l = 1.0
g = 9.81
beta = 2 * 0.5 * np.sqrt(g/l)

def fcn_rovniceKyvadla(x, t, u):
    x_1, x_2 = x
    dotx_1 = x_2
    dotx_2 = -(beta/m*l**2) * x_2 - (g/l) * np.sin(x_1) + (1.0/m*l**2) * u
    return [dotx_1, dotx_2]


timeVect = np.arange(0, 5.1, 0.1)

u = 0

x = odeint(fcn_rovniceKyvadla,
           [np.pi/4, 0],   # zaciatocne podmienky
           timeVect,
           args=(u,),
           )

plt.figure(1)
plt.plot(timeVect, x)
plt.xlabel(u'cas [s]')
plt.legend(['$x_1(t)$ [rad]', '$x_2(t)$ [rad/s]'])

plt.figure(2)
plt.plot(timeVect, x[:,0]*180/np.pi)
plt.xlabel(u'cas [s]')
plt.ylabel(u'$x_1(t)$ [stupne]')
```

Pozornému čitateľovi iste neuniklo, že uvedený skript v Pythone obsahuje funkciu, ktorá realizuje sústavu diferenciálnych rovníc (25), ale v tomto prípade zahŕňa aj vstupnú veličinu $u(t)$. Táto je potom v tomto prípade nastavená na nulovú hodnotu.

## 2.3 Vektorové pole a fázový portrét

Kvalitatívne správanie sa nelineárneho dynamického systému je dôležité pre porozumenie kľúčovým konceptom Lyapunovovej teórie stability systémov. Pre analýzu je dôležitá istá trieda systémov nazývaná planárne dynamické systémy. Tieto systémy majú dve stavové veličiny $x \in \mathbb{R}^2$, čo umožňuje znázorniť stavový priestor v rovine so súradnicovým systémom $(x_1, x_2)$. Navyše výsledky kvalitatívnej analýzy platia vo všeobecnosti a môžu byť použité aj pri systémoch vyššieho rádu. Preto sú tieto systémy dôležité z hľadiska analýzy. Do tejto triedy systémov patrí aj model kyvadla.

Výhodným spôsobom ako porozumieť správaniu dynamického systému so stavom $x \in \mathbb{R}^2$ je nakresliť *fázový portrét systému*. Začneme zavedením konceptu *vektorového poľa*. Pre systém obyčajných diferenciálnych rovníc zapísaných kompaktne vo vektorovej rovnici (ako rovnica (11a)) v tvare

$$\dot{x} = F(x) \tag{27}$$

pravá strana rovnice definuje v každom $x \in \mathbb{R}^n$ rýchlosť $F(x) \in \mathbb{R}^n$. Táto rýchlosť hovorí o tom ako sa $x$ mení a môže byť reprezentovaná vektorom.

Pri planárnom dynamickom systéme, každý stav zodpovedá bodu v rovine a $F(x)$ je vektor rýchlosti reprezentujúci veľkosť a smer zmeny (rýchlosti) daného stavu. Tieto vektory môžme vykresliť na mriežke bodov v rovine a získať tak vizuálny obraz dynamiky systému, tak ako na Obr. 4. Pre vykreslenie tohto vektorového poľa boli použité parametre kyvadla uvedené v Tabuľke 1 a tieto parametre budú používané aj v ďalšom.

Vektorové pole na obr. 4 bolo vygenerované v Matlabe použitím nasledujúceho kódu:

Kód pre vygenerovanie obr. 4

```python
m = 1; %kg
```

Obr. 4: Vektorové pole znázorňujúce dynamiku kyvadla (obrázok vytvorený v MATLABe, viď text)

```
l = 1; %m
g = 9.81; %m/s^2
beta = 2*0.5*sqrt(g/l); %kgm^2/s
[x1, x2] = meshgrid(-1:.1:1, -1:.2:1);
x1dot = x2;
x2dot = -(beta/m*l^2).*x2 - (g/l).*sin(x1);
quiver(x1,x2,x1dot,x2dot,1.5);
axis([-1.2 1.2 -1.2 1.2])
axis equal
```

Body, v ktorých je vektor rýchlosti nulový sú obzvlášť zaujímavé, pretože definujú stacionárne body systému: ak je autonómny systém v takom stave na začiatku, ostane v tom stave po celý čas.

Fázový portrét (nazývaný aj Fázový diagram) pozostáva z „prúdnic“ nakreslených podľa vektorového poľa. Inými slovami, pre istú množinu začiatočných stavov vykreslíme riešenia diferenciálnej rovnice v rovine a smer pohybu v stavovom priestore vyznačíme šípkou. To zodpovedá sledovaniu „šípky vektorového poľa“ v každom bode stavového priestoru a nakresleniu výslednej trajektórie. Po vykreslení niekoľkých trajektórii pre rôzne začiatočné stavy získame fázový portrét ako na Obr. 5.

Zdrojový kód pre MATLAB pre získanie tohto obrázku je nasledovný:

Kód pre vygenerovanie obr. 5

```
global m l g beta
m = 1; %kg
l = 1; %m
g = 9.81; %m/s^2
beta = 2*0.5*sqrt(g/l); %kgm^2/s

for uhlovarychlost = -2:4:2
  for uhol = -360:22.5:360
    [t,x]=ode45(@PravaStr,[0 5],[uhol*pi/180 uhlovarychlost]);
    hold on
    stav = x;
    x = x(1:5:end-70,:);
    x1dot = x(:,2);
    x2dot=-(beta/m*l^2)*x(:,2)-(g/l)*sin(x(:,1));
    quiver(x(:,1),x(:,2),x1dot,x2dot,0.5,'k')
    plot(stav(:,1),stav(:,2),'k');
    hold off
  end
end

axis equal
axis([-2*pi 2*pi -2 2])
```

kde funkcia `PravaStr` je

```
function dotx = PravaStr(t,x)
  global m l g beta
```

Obr. 5: Fázový portrét kyvadla (obrázok vytvorený v Matlabe, viď text pre zdrojový kód)

```
  dotx(1)=x(2);
  dotx(2)=-(beta/m*l^2)*x(2)-(g/l)*sin(x(1));
  dotx=dotx';
end
```

Fázový portrét je nástroj, ktorý umožňuje posudzovať celkovú dynamiku systému pomocou vykreslenia niekoľkých riešení v stavovom priestore (rovine) systému. Napríklad je možné vidieť, či sa všetky trajektórie s narastajúcim časom približujú k jednému bodu alebo či ide o komplikovanejšie správanie systému. Fázový portrét však nehovorí o veľkosti rýchlosti zmeny stavu (avšak toto môže byť odvodené z dĺžky vektorov vo vektorovom poli systému).

*Ekvilibrium dynamického systému* je bod v stavovom priestore, ktorý reprezentuje rovnovážne podmienky pre dynamiku systému. Ide o stacionárny bod, v ktorom je vektor rýchlosti trajektórie systému nulový, ako už bolo uvedené.

Hovoríme, že stav $x_e$ je ekvilibrium dynamického systému

$$\dot{x} = F(x)$$

ak $F(x_e) = 0$. Ak má autonómny systém začiatočnú podmienku $x(0) = x_e$, potom ostane v tomto stave a riešenie má tvar $x(t) = x_e$ po celý čas $t > 0$, kde sme uvažovali začiatočný čas $t_0 = 0$.

Stacionárne body (ekvilibriá) patria medzi najdôležitejšiu vlastnosť dynamického systému, pretože definujú stavy s nemennými pracovnými podmienkami systému. Systém môže mať nula, jeden alebo viac stacionárnych bodov.

Stacionárne body uvažovaného kyvadla sú

$$x_e = \begin{bmatrix} \pm n\pi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

kde $n = 0, 1, 2, \ldots$. Pre párne $n$ sú to stavy keď kyvadlo visí smerom dole a pre nepárne $n$ je kyvadlo v inverznej polohe. Fázový portrét na Obr. 5 je nakreslený pre $-2\pi \leq x_1 \leq 2\pi$, teda na obrázku je päť stacionárnych bodov.

# 3 Stabilita

Pripomeňme, že sa zaoberáme autonómnym systémom (homogénnou diferenciálnou rovnicou) v tvare

$$\dot{x} = F(x) \tag{29}$$

a tiež pripomeňme, čo rozumieme pod pojmom riešenie systému, alebo skrátene riešenie. Hovoríme, že $x(t)$ je *riešenie* diferenciálnej rovnice (29) na časovom intervale od $t_0 \in \mathbb{R}$ do $t_f \in \mathbb{R}$ ak

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = F\big(x(t)\big) \qquad \text{pre } t_0 < t < t_f \tag{30}$$

Daná diferenciálna rovnica môže mať mnoho riešení, najčastejšie nás však zaujíma úloha so zadaným začiatočným stavom, inými slovami so zadanými začiatočnými podmienkami, kedy $x(t)$ je predpísané v začiatočnom čase $t_0$ a úlohou je nájsť riešenie vyhovoujúce pre celý budúci čas $t > t_0$. Vtedy $x(t)$ je riešenie diferenciálnej rovnice (29) so začiatočným stavom $x_0 \in \mathbb{R}^n$ v čase $t_0$ ak

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = F\big(x(t)\big) \quad \text{pre } t_0 < t < t_f \tag{31}$$

Najčastejšie sa stretávame s diferenciálnymi rovnicami, pre ktoré existuje jedinečné riešenie, navyše pre celý čas $t > t_0$ čo znamená že $t_f = \infty$. Častým je tiež, že funkcia $F$ je nezávislá od času, preto môžme uvažovať $t_0 = 0$.

*Stabilita riešenia* určuje či iné riešenia v blízkosti skúmaného riešenia ostávajú v jeho blízkosti, približujú sa k nemu alebo sa od neho vzďaľujú. Uvedieme niekoľko neformálnych a formálnych definícií stability:
Nech $x(t;a)$ je riešenie diferenciálnej rovnice so začiatočným stavom $a$. Toto riešenie je stabilné ak iné riešenia, ktoré začínajú v blízkosti $a$ zostávajú v blízkosti $x(t;a)$. Formálne, hovoríme, že riešenie $x(t;a)$ je stabilné ak pre všetky $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ taká, že

$$\|b - a\| < \delta \;\Rightarrow\; \|x(t;b) - x(t;a)\| < \epsilon, \;\forall\, t > 0 \tag{32}$$

Všimnime si, že to neznamená, že $x(t;b)$ sa približuje k $x(t;a)$, len ostáva v jeho blízkom okolí. Navyše hodnota $\delta$ môže závisieť od $\epsilon$, teda napríklad ak chceme ostať blízko nejakého riešenia potom musíme začať veľmi blízko tohto riešenia. Takto definovaná stabilita sa nazýva *stabilita v zmysle Lyapunova.*

Ilustrujeme uvedenú podmienku (32) na riešení diferenciálnej rovnice kyvadla (11a). Začiatočný čas zvoľme $t_0 = 0$ [s], konečný čas zvoľme $t_f = 1,4$ [s], začiatočnú polohu kyvadla zvoľme $\varphi = 45°$ a začiatočná rýchlosť kyvadla nech je nulová. Začiatočný stav v stavovom priestore je $a = \begin{bmatrix} 0,7854 & 0 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$. Týmto začiatočným podmienkam prislúcha riešenie $x(t;a)$, ktoré je znázornené v stavovom priestore na Obr. 6a, kde je vyznačený aj začiatočný stav $a$. Nebudeme skúmať všetky $\epsilon > 0$, preskúmame len jedno. Napríklad pre $\epsilon = 0,15$ hľadajme $\delta > 0$, ktorá spĺňa podmienku (32). Taká $\delta$ existuje, pretože pre riešenie $x(t;b)$, ktoré začína v stave $b = \begin{bmatrix} 0,8727 & 0 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ platí, že $\|x(t;b) - x(t;a)\| < \epsilon$, čo je zrejmé z Obr. 6a a aj z Obr. 6b, kde je navyše predĺžený čas riešenia až do nekonečna. Potom sme našli napríklad $\delta = 0,1$ pretože platí

$$\|b - a\| = \sqrt{(0,8721 - 0,7854)^2 + (0 - 0)^2} = 0,0873 < 0,1 \tag{33}$$

čo je tiež zrejmé najmä z Obr. 6b. Týmto sme nezistili nič o stabilite riešenia $x(t;a)$, pretože sme neoverili, či je podmienka (32) splnená pre všetky $\epsilon > 0$.

Ak je riešenie stabilné v zmysle Lyapunova, ale trajektórie okolitých riešení k nemu nekonvergujú, hovoríme, že riešenie je *neutrálne stabilné.*

Riešenie $x(t;a)$ je *asymptoticky stabilné* ak je stabilné v zmysle Lyapunova a zároveň $x(t;b) \to x(t;a)$ s rastúcim časom $t \to \infty$ pri začiatočnom stave $b$, ktorý je dostatočne blízko stavu $a$.

Veľmi dôležitým špeciálnym prípadom je ak pre skúmané riešenie platí $x(t;a) = x_e$. Potom nehovoríme o stabilite riešenia ale o *stabilite stacionárneho bodu.* Príkladom asymptoticky stabilného stacionárneho bodu sú body

$$x_{e_{-2}} = \begin{bmatrix} -2\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{e_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{a} \quad x_{e_2} = \begin{bmatrix} 2\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

na Obr. 5, vidíme, že ak začíname blízko asymptoticky stabilného stacionárneho bodu, s narastajúcim časom sa k nemu približujeme.

(a) Trajektórie riešení systému v stavovom priestore pre rôzne začiatočné stavy $a$ a $b$ v časovom intervale $t_0 < t < t_f$

(b) Trajektória rozdielu dvoch riešení daných začiatočnými stavmi $a$ a $b$ v časovom intervale $t_0 < t < \infty$

Obr. 6: Ilustračný príklad k definícii stability riešenia systému

Riešenie $x(t;a)$ je *nestabilné* ak nie je stabilné. Konkrétnejšie, hovoríme, že riešenie $x(t;a)$ je nestabilné ak pre akékoľvek dané $\epsilon > 0$ neexistuje $\delta > 0$ taká, že ak $\|b-a\| < \delta$ potom $\|x(t;b) - x(t;a)\| < \epsilon$, $\forall t > 0$. Príkladom nestabilného stacionárneho bodu sú body

$$x_{e_{-1}} = \begin{bmatrix} -\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{a} \quad x_{e_1} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

na Obr. 5.

Predchádzajúce definície nezohľadňujú oblasť, na ktorej môžu byť použité. Presnejšie je definovať riešenie ako *lokálne stabilné* (alebo *lokálne asymptoticky stabilné*) ak je stabilné pre všetky začiatočné stavy $x \in B_r(a)$, kde $B_r(a) = \{x : \|x-a\| < r\}$ je oblasť s polomerom $r > 0$ okolo bodu $a$. Riešenie je *globálne stabilné* ak je stabilné pre všetky $r > 0$.

## 3.1 Stabilita lineárnych systémov

Lineárny dynamický systém má tvar

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \tag{34}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je štvorcová matica. Začiatok stavového priestoru je vždy stacionárnym bodom lineárneho systému a stabilita tohto stacionárneho bodu môže byť určená pomocou vlastných čísel matice $A$.

Vlastné čísla $\lambda(A)$ sú korene *charakteristického polynómu* systému $\det(sI - A)$, kde $s \in \mathbb{C}$ je komplexná premenná a $I$ je jednotková matica. Konkrétne vlastné číslo ($i$-te vlastné číslo) označujeme $\lambda_i$, pričom $\lambda_i \in \lambda(A)$.

Pre lineárny systém stabilita stacionárneho bodu (ako veľmi dôležitého špeciálneho prípadu spomedzi všetkých riešení) závisí len od matice $A$, čo znamená, že stabilita je vlastnosť systému. Pre lineárny systém preto hovoríme o stabilite systému namiesto o stabilite konkrétneho riešenia alebo ekvilibria.

Stabilitu lineárneho systému možno zhrnúť do jednej vety:
*Systém*

$$\dot{x} = Ax$$

*je asymptoticky stabilný vtedy a len vtedy keď reálne časti všetkých vlastných čísel matice $A$ sú záporné a systém je nestabilný keď aspoň jedno vlastné číslo matice $A$ má kladnú reálnu časť.*

# 4 Linearizácia a jej použitie pri analýze stability

Výhodnou vlastnosťou diferenciálnych rovníc je, že je často možné určiť lokálnu stabilitu stacionárneho bodu pomocou aproximácie nelineárneho systému lineárnym systémom.

Uvažujme nelineárny systém

$$\dot{x} = F(x) \tag{35}$$

ktorý má ekvilibrium v bode $x_e$. Zaujíma nás stabilita tohto stacionárneho bodu. Aproximujme (linearzujme) nelineárnu funkciu $F(x)$ v okolí bodu $x_e$ pomocou prvých dvoch členov Taylorvho radu

$$F(x) \approx F(x_e) + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_e} (x - x_e) \tag{36}$$

Platí $F(x_e) = 0$, a zavedieme nový stavový vektor $z = x - x_e$. To znamená, že $x = z + x_e$, potom $\dot{x} = \dot{z} + \dot{x}_e$, avšak $x_e$ sa s časom nemení a preto platí $\dot{x} = \dot{z}$. Lineárna aproximácia pôvodného nelineárneho systému v okolí bodu $x_e$ má potom tvar

$$\dot{z} = Az \tag{37}$$

kde

$$A = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_e} \tag{38}$$

V prípade kyvadla je nelineárny model systému v tvare (11a) a teda

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \; F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{\beta}{ml^2}x_2 \end{bmatrix} \tag{39}$$

Linearizujme nelineárny model systému (11a) v okolí rovnovážneho stavu $x_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$. Kľúčovým je výpočet matice $A$ podľa (38). V tomto prípade máme

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(F_1) & \frac{\partial}{\partial x_2}(F_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(F_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(F_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(x_1) & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix} \tag{40}$$

Po dosadení hodnôt stacionárneho bodu za $x_1 = 0$ (a $x_2 = 0$) do (40) máme

$$A = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix} \tag{41}$$

a vzľadom na fakt, že v tomto prípade $x_e = 0$ je linearizovaný model systému v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Lokálna stabilita stacionárneho bodu nelineárneho systému teraz môže byť určená pomocou vlastných čísel matice $A$.

Mimochodom výsledný lineárny model (42) je rovnaký, ako keby sme uvažovali, len malé výchylky kyvadla (malé hodnoty uhla $\varphi$), pri ktorý dostatočne presne platí, že $\sin(\varphi) = \varphi$ (angl. Small-angle approximation).

Skutočnosť, že lineárny model môže byť použitý pre opis správania nelineárneho systému v okolí rovnovážneho stavu je veľmi výhodná. Je to možné využiť aj pre návrh spätnoväzbového regulátora, ktorý udržiava stav nelineárneho systému v okolí rovnovážneho stavu. Pritom samotný regulátor je navrhnutý pre lineárnu aproximáciu systému. Keďže stav systému je regulátorom udržiavaný blízko stacionárneho bodu, tak aj lineárna aproximácia použitá pri stabilizácii je dostatočne presná.

Na Obr. 7 je porovnanie fázových portrétov nelineárneho modelu kyvadla a linearizovaného modelu kyvadla v okolí začiatku stavového priestoru. Všimnime si, že v okolí stacionárneho bodu (začiatku súradnicového systému) sú tieto fázové portréty takmer identické.

(a) Fázový portrét nelineárneho modelu kyvadla

(b) Fázový portrét lineárneho modelu kyvadla

Obr. 7: Porovnanie fázových portrétov nelineárneho systému a jeho linearizovanej aproximácie

# 5 Analýza stability pomocou Lyapunovových funkcií

Vráťme sa opäť k nelineárnym systémom v tvare

$$\dot{x} = F(x)$$

Máme definované kedy je riešenie nelineárneho dynamického systému stabilné. Teraz hľadáme odpoveď na otázku ako dokázať, že dané riešenie je stabilné, asymptoticky stabilné alebo nestabilné. Pri fyzikálnych systémoch môžme vyvodiť závery o stabilite podľa toho či systém na danej trajektórii stráca energiu, inými slovami či hodnota energie klesá (disipatívny systém), alebo nie. Zovšeobecnenie tejto techniky pre ľubovolný dynamickým systém je založené na použití Lyapunovových funkcií na miesto energie.

V tejto časti sa venujeme použitiu Lyapunovových funkcií pri určovaní stability riešenia dynamického systému. Konkrétne nás zaujíma stabilita stacionárnych bodov. Je výhodné uvažovať, že vyšetrovaný stacionárny bod je v začiatku stavového priestoru, teda $x_e = 0$. Ak nie je, vždy je možné prepísať rovnice systému zavedením nových (posunutých) stavových veličín $z = x - x_e$.

## 5.1 Lyapunovove funkcie

*Lyapunovova funkcia* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sa používa (podobne ako energia) pri vyšetrovaní stability (riešenia) systému. Zjednodušene povedané, ak nájdeme nezápornú funkciu, ktorá je klesajúca pozdĺž trajektórie systému, môžeme usúdiť, že bod, v ktorom táto funkcia dosiahne minimum je stabilným (lokálne) stacionárnym bodom systému.

Pre formálny opis uvedeného je potrebných niekoľko definícií: Hovoríme, že spojitá funkcia $V$ je *kladne definitná* ak $V(x) > 0$ pre všetky $x \neq 0$ a $V(0) = 0$, a podobne, funkcia je *záporne definitná* ak $V(x) < 0$ pre všetky $x \neq 0$ a $V(0) = 0$. Hovoríme, že funkcia $V$ je *kladne semidefinitná* ak $V(x) \geq 0$ pre všetky $x$, teda $V(x)$ môže byť nulová aj v inom bode ako $x = 0$, podobne, funkcia je *záporne semidefinitná* ak $V(x) \leq 0$ pre všetky $x$.

Teorém, ktorý charakterizuje stabilitu stacionárneho bodu dynamického systému, ktorý je v začiatku stavového priestoru, je nasledovný:

*Nech $V$ je nezáporná skalárna funkcia na $\mathbb{R}^n$ a nech $\dot{V}$ reprezentuje časovú deriváciu*

*funkcie $V$ pozdĺž trajektórie dynamického systému $\dot{x} = F(x)$:*

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial x}F(x).$$

*Nech $B_r$ je okolie začiatku súradnicového systému s polomerom $r$. Ak existuje $r > 0$ taký, že $V$ je kladne definitná funkcia a $\dot{V}$ je záporne semidefinitná funkcia pre všetky $x \in B_r$, potom $x = 0$ je lokálne stabilný stacionárny bod v zmysle Lyapunova. Ak $V$ je kladne definitná a $\dot{V}$ je záporne definitná pre všetky $x \in B_r$, potom $x = 0$ je lokálne asymtoticky stabilný bod.*

Ak $V$ spĺňa práve uvedené podmienky, potom hovoríme, že $V$ je (lokálna) *Lyapunovova funkcia* systému.

## 5.2 Analýza stability

Výsledky uvedené vyššie majú pre planárne systémy svoju geometrickú reprezentáciu. Pre kladne definitnú $V$ môžme definovať vrstevnice ako body v stavovom priestore, ktoré spĺňajú $V(x) = c$, kde $c > 0$. Tam, kde platí $\dot{V} < 0$ vektorové pole ukazuje vždy smerom k „nižšej“ vrstevnici, od vrstevnice $c_2$ k $c_1$, kde $c_2 > c_1$. To znamená, že trajektória smeruje k menším a menším hodnotám fukcie $V$ a ak $\dot{V}$ je záporne definitná, potom sa $x$ približuje k nule. Aj toto ilustruje nasledujúci príklad určenia stability stacionárneho bodu kyvadla.

Lyapunovove funkcie často nie je jednoduché nájsť, a tiež nie sú unikátne. V mnohých prípadoch je výhodné pri hľadaní vhodného kandidáta na Lyapunovovu funkciu začať funkciou, ktorá vyjadruje celkovú energiu systému, najmä pri fyzikálnych systémoch. Tak je to aj v nasledujúcom príklade.

Uvažujme nelineárny model kyvadla, podľa (11a), v tvare

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{43a}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{\beta}{ml^2}x_2 \tag{43b}$$

Úlohou je vyšetriť stabilitu stacionárneho bodu $x_e = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$. V tomto prípade teda nie je potrebné posúvať súradnicový systém, pretože vyšetrovaný stacionárny bod je v začiatku.

Ako kandidáta na Lapunovovu funkciu použijeme celkovú (mechanickú) energiu systému. Nulovú potenciálnu energiu nech má kyvadlo pre $\varphi = x_1 = 0$. Potenciálna energia je $U = mgh$, kde $h = 2l - l - l\cos(x_1)$, teda

$$U = mgl - mgl\cos(x_1) \tag{44}$$

Pri rotačnom pohybe, vykonávanom kyvadlom, je (rotačná) kinetická energia

$$K = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 \tag{45}$$

Celková energia kyvadla je súčtom kinetickej a potenciálnej energie.

Kandidát na Lyapunovovu funkciu systému je potom v tvare

$$V = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + mgl - mgl\cos(x_1) \tag{46}$$

Funkcia (46) je znázornená na Obr. 8. Táto funkcia je nezáporná pre všetky $x_1$ a $x_2$, avšak nie je kladne definitná pre všetky $x_1$ a $x_2$, pretože bod $x_e = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ nie je jediný, kde funkcia nadobúda nulu. Ak uvažujeme len okolie začiatku $B_r$ s polomerom $0 < r < \pi$, potom funkcia $V$ je kladne definitná, pretože vtedy $-\pi < x_1 < \pi$ a len pre $x_e = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ máme $V(x_e) = 0$.

Časová derivácia funkcie pozdĺž trajektórie je

$$\dot{V} = ml^2x_2\left(-\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{\beta}{ml^2}x_2\right) + mgl\sin(x_1)x_2 \tag{47a}$$

$$\dot{V} = -mglx_2\sin(x_1) - \beta x_2^2 + mgl\sin(x_1)x_2 \tag{47b}$$

$$\dot{V} = -\beta x_2^2 \tag{47c}$$

Obr. 8: Znázornenie celkovej mechanickej energie kyvadla $V$ ako funkcie stavu kyvadla (46)

Funkcia $\dot{V}$ je záporne definitná pre všetky $x_2$ a $x_1$, a teda aj pre tie, ktoré patria do uvažovaného okolia $B_r$. Preto môžme hovoriť, že na uvažovanom okolí stacionárneho bodu existuje Lyapunovova funkcia systému a preto je tento systém lokálne stabilný.

Ak chceme určiť stabilitu inému stacionárnumu bodu, napr. $x_e = \begin{bmatrix}\pi & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$, je potrebné najskôr posunúť tento bod do začiatku stavového priestoru. Zavedieme nové posunuté stavové veličiny:

$$z = x - x_e = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{48}$$

potom platí

$$x_1 = z_1 + \pi \tag{49a}$$
$$x_2 = z_2 \tag{49b}$$

Dosadením (49) do pôvodného systému (43) máme nový posunutý systém, ktorý má vyšetrovaný bod v začiatku stavového priestoru v tvare

$$\dot{z}_1 = z_2 \tag{50a}$$
$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(z_1 + \pi) - \frac{\beta}{ml^2} z_2 = \\ &= \frac{g}{l}\sin(z_1) - \frac{\beta}{ml^2} z_2 \end{aligned} \tag{50b}$$

Mimochodom, (50) je model inverzného kyvadla.

Môžme vyskúšať zvoliť toho istého kandidáta na Lyapunovovu funkciu ako (46) s dosadením (49), potom

$$V = \frac{1}{2} ml^2 z_2^2 + mgl - mgl\cos(z_1 + \pi) \tag{51a}$$
$$V = \frac{1}{2} ml^2 z_2^2 + mgl + mgl\cos(z_1) \tag{51b}$$

Okamžite vidíme, že táto funkcia nemôže byť kandidátom na Lyapunovovu funkciu, pretože v nulovom bode (začiatku) nemá nulovú hodnotu $V(0) \neq 0$ a teda nie je kladne definitná.

Aby sme dokázali, že daný stacionárny bod je *nestabilný* (v tomto prípade vieme, že je nestabilný), musíme nájsť takú funkciu $V(x)$, ktorá je v okolí rovnovážneho bodu kladne definitná a jej časová derivácia pozdĺž trajektórie systému je *tiež kladne definitná funkcia.*
...nájsť takú funkciu pre inverzné kyvadlo vôbec nie je jednoduché. Užitočnejším v tomto prípade je linearizovať systém v okolí daného stacionárneho bodu a určiť stabilitu tohto lineárneho systému pomocou vlastných čísiel dynamickej matice alebo tiež pomocou Lyapunovovej funkcie. O druhej možnosti hovorí nasledujúca časť.

## 5.3 Lyapunovova rovnica

Ako sme už uviedli, vo všeobecnosti nie je jednoduché nájsť vhodného kandidáta na Lypunovovu funkciu. Pre lineárny dynamický systém v tvare

$$\dot{x} = Ax \tag{52}$$

je však možné skonštruovať Lyapunovovu funkciu systematickým spôsobom, nasledovne:
Uvažujme kvadratickú formu ako kandidáta na Lyapunovovu funkciu

$$V(x) = x^{\mathsf{T}} P x \tag{53}$$

kde $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická matica, teda platí $P = P^{\mathsf{T}}$. Podmienka aby $V$ bola kladne definitná je v tomto prípade ekvivalentná podmienke, že $P$ je *kladne definitná matica*: $x^{\mathsf{T}} P x > 0$, $\forall\, x \neq 0$, čo zapisujeme ako $P > 0$. Platí, že ak je matica $P$ symetrická, potom je matica $P$ kladne definitná vtedy a len vtedy keď všetky vlastné čísla tejto matice sú reálne a kladné.

Časová derivácia uvažovaného kandidáta na Lyapunovovu funkciu pozdĺž trajektórie systému v tomto prípade je

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = x^{\mathsf{T}} \left(A^{\mathsf{T}} P + PA\right) x = -x^{\mathsf{T}} Q x \tag{54}$$

Požiadavka aby $\dot{V}$ bola záporne definitná znamená, že matica $Q$ musí byť kladne definitná. Preto, pre nájdenie Lyapunovovej funkcie pre lineárny systém je postačujúce zvoliť maticu $Q > 0$ a vyriešiť tzv. *Lyapunovovu rovnicu*:

$$A^{\mathsf{T}} P + PA = -Q \tag{55}$$

čo je lineárna algebraická rovnica, ktorú možno riešiť pomocou lineárnej algebry. Dá sa ukázať, že táto rovnica má riešenie vždy ak vlastné čísla matice $A$ sú v ľavej polrovine komlexnej roviny (ich reálne časti sú záporné) a navyše nájdená $P$ je kladne definitná ak $Q$ je kladne definitná. Preto je vždy možné nájsť kvadratickú Lyapunovovu funkciu pre stabilný lineárny systém.

# 6 Otázky a úlohy

1. Je zadaný systém v tvare:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 \end{aligned}$$

   Načrtnite (zhruba) fázový portrét systému alebo aspoň vektorové pole systému.

2. Linearizujte model kyvadla v okolí stacionárneho bodu $x_e = \begin{bmatrix}\pi & 0\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$. Bonus: Aký typ stacionárneho bodu je uvedený bod? Svoju odpoveď zdôvodnite.

3. Pomocou kandidáta na Lyapunovovu funkciu vyšetrite stabilitu systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) \end{aligned}$$

4. Pomocou kandidáta na Lyapunovovu funkciu vyšetrite stabilitu systému.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1\, x_1 + x_2 & \qquad k_1 &> 0 \\ \dot{x}_2 &= -k_2\, x_1 & \qquad k_2 &> 0 \end{aligned}$$