

# O adaptívnej stabilizácii

## Obsah

<b>1 Cvičenie prvé</b>	<b>1</b>
<b>2 Viac k téme cvičenia prvého</b>	<b>2</b>
<b>3 Formálny opis adaptívnej stabilizácie pre systém 1. rádu</b>	<b>5</b>
<b>4 Príklad realizácie niektorých úloh cvičenia prvého</b>	<b>9</b>
4.1 Takpovediac základný prístup . . . . .	9
4.2 O realistickej implementácii riadiaceho systému tu uvedeného . . . . .	12
<b>5 O stabilité (doplnkový text)</b>	<b>14</b>
5.1 Stabilita lineárnych systémov . . . . .	18
5.2 Linearizácia a jej použitie pri analýze stability . . . . .	18
5.3 Analýza stability pomocou Lyapunovových funkcií . . . . .	20
5.3.1 Lyapunovove funkcie . . . . .	20
5.3.2 Analýza stability . . . . .	20
5.3.3 Lyapunovova rovnica . . . . .	22
<b>6 Otázky a úlohy</b>	<b>23</b>

## 1 Cvičenie prvé

- Uvažujme riadený systém v tvare

$$\dot{x}(t) = a x(t) + b u(t) \quad (1)$$

kde  $x(t)$  je stavová veličina systému,  $u(t)$  je akčný zásah (výstup) regulátora. Parameter  $b = 1$  a parameter  $a$  je neznáma konštantá.

- Koľkého rádu je systém (1)?
  - Aká je prenosová funkcia daného dynamického systému?
  - Aký je charakteristický polynom a charakteristická rovnica dynamického systému?
  - Aké sú korene charakteristického polynomu?
  - Pre ktoré  $a$  je systém stabilný a pre ktoré  $a$  je nestabilný? Nájdite intervaly.
  - Aké je zosilnenie dynamického systému? Aké sú časové konštanty?
  - Ktorého reálneho systému (napríklad), je vhodným modelom takáto sústava?
- Zostavte simulačnú schému systému (1). Zvoľte konkrétnu hodnotu parametra  $a$  z nájdeného intervalu tak aby riadený systém (1) bol stabilný. Nech začiatočný stav je  $x(0) = 1$  a  $u(t) = 0$ . Simuláciou (pre vhodný časový úsek) ukážte, že  $x = 0$  je rovnovážny stav sústavy.
  - Nech začiatočný stav sústavy  $x(0) = 1$ . Zvoľte konkrétnu hodnotu parametra  $a$  tak aby sústava (1) bola **nestabilná**. Spustite simuláciu a pozorujte nestabilný priebeh stavovej veličiny. Pridajte k riadenému systému regulátor daný nasledovne:

$$u = -k x \quad k > |a| \quad (2)$$

a overte, že URO je stabilný. Vysvetlite. Vyskúšajte rôzne hodnoty zosilnenia  $k$ .

4. Nech začiatočný stav sústavy  $x(0) = 1$ . Zvoľte konkrétnu hodnotu parametra  $a$  tak aby sústava (1) bola **nestabilná**. Pridajte k riadenému systému regulátor daný nasledovne:

$$u = -k x; \quad \dot{k} = x^2 \quad (3)$$

Simuláciou vyšetrite stabilitu URO.

5. Overte, že regulátor z predchádzajúcej úlohy zabezpečí stabilizáciu URO pre rôzne hodnoty  $a$  a rôzne hodnoty začiatočného stavu  $x(0)$  (vyskúšajte rôzne). Teda regulátor je adaptívny! Vysvetlite...

## 2 Viac k téme cvičenia prvého

Zaoberáme sa systémom, ktorého vhodným modelom je diferenciálna rovnica v tvare

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t) \quad (4)$$

kde  $x(t)$  je výstupná veličina,  $u(t)$  je vstupná veličina a konštanta  $a$  je parameter riadeného systému.

Nech je známe, že riadený systém je nestabilný. To znamená, že parameter  $a$  je kladné číslo. Nie je známa hodnota parametra  $a$ , ale je známe jeho znamienko. Keďže riadený systém je nestabilný, po vychýlení z rovnovážneho stavu (rovnovážnej polohy) sa výstupná veličina nevráti na hodnotu v rovnovážnom stave.

Úlohou je navrhnuť taký riadiaci systém, ktorý zabezpečí, že výstupná veličina sa vráti na hodnotu v rovnovážnom stave napriek tomu, že jej začiatočná hodnota (začiatočný stav) je iná ako v rovnovážnom stave. Teda začiatočný stav riadeného systému je vychýlený z rovnovážneho stavu.

Mimochodom, rovnica (4) je dynamický systém, lineárny systém a rád systému je 1 (lineárny dynamický systém 1. rádu). Z toho vyplýva, že v rovnovážnom stave je hodnota výstupu  $y(t)$  nulová.

Diferenciálnu rovnicu (4) je možné (pri uvažovaní nulových začiatočných podmienok) previesť do tvaru prenosovej funkcie. Ak sa uváži, že

$$sx = ax + u \quad (5)$$

kde  $s$  je Laplaceov operátor, pričom tu plní funkciu časovej derivácie, potom možno písat

$$sx - ax = u \quad (6a)$$

$$(s - a)x = u \quad (6b)$$

$$\frac{x}{u} = \frac{1}{(s - a)} \quad (6c)$$

čo je prenosová funkcia zodpovedajúca systému (4). Charakteristický polynom je  $(s - a)$  a koreňom tohto polynómu je (číslo)  $a$ . Keďže je známe, že systém je nestabilný, potom pól systému, teda koreň charakteristického polynómu leží v pravej polrovine komplexnej roviny. To znamená, že  $a > 0$ .

### Samotný riadený systém

S využitím numerickej simulácie ukážme, že systém (4) je pre  $a > 0$  nestabilný. Pri tomto overení je vstupná veličina systému  $u(t)$  nepodstatná. Preto je nastavená na nulovú hodnotu. Nech začiatočná hodnota stavovej veličiny  $x(0) = 1$  a nech hodnota parametra  $a = 1$ . Simulujme 3 časové jednotky. Výsledok numerickej simulácie je na obr. 1.

### Formalizácia požiadaviek na kvalitu riadenia

Úlohou je aby sa výstupná veličina vrátila na nulovú hodnotu (do rovnovážneho stavu). Ale ako rýchlo sa tam má vrátiť? Aké sú požiadavky na prechodný dej pri činnosti riadiaceho systému?

Nech sú tieto požiadavky premietnuté do akéhosi vzorového dynamického systému, ktorý má stavovú veličinu  $x_m(t)$ . Tento vzorový systém je

$$\dot{x}_m(t) = -a_m x_m(t) \quad (7)$$

Jeho parametrom je  $a_m$ . Ak bude  $a_m > 0$ , potom bude tento systém stabilný a teda vždy sa ustáli v rovnovážnom stave, to je v tomto prípade samozrejme nula. Pól systému je  $-a_m$ . Volbou pôlu sa volí dynamika s akou sa systém bude vracať do rovnovážneho stavu. Tento vzorový systém teda zodpovedá úlohe, ktorú máme, a navýše úplne presne špecifikuje akékoľvek iné požiadavky, ktoré nemusia priamo plynúť zo zadania úlohy.

### Teoretická existencia ideálneho riadiaceho systému

Od riadiaceho systému chceme aby pre riadený systém (4) zabezpečil, že výstupná veličina riadeného systému (4)  $x(t)$  sa bude správať práve tak ako veličina  $x_m(t)$ . V ideálnom prípade je teda odchýlka  $e(t) = x(t) - x_m(t)$  nulová. Je vôbec možné zostaviť taký riadiaci systém?

Uvažujme nasledujúci predpis pre výpočet hodnoty akčného zásahu  $u(t)$ .

$$u(t) = -k^* x(t) \quad (8)$$

Zovšeobecnenie budeme takýto predpis nazývať zákon riadenia. Predpisuje ako sa vypočíta akčný zásah. Zákon riadenia obsahuje dva prvky. Signál  $x(t)$ , ktorý je spätnou väzbou od riadeného systému, keďže  $x(t)$  je výstupom riadeného systému, a druhým prvkom zákona riadenia je parameter  $k^*$ .

Dosadme za  $u(t)$  v riadenom systéme. Získa sa tak rovnica uzavretého regulačného obvodu (URO). V tomto prípade v tvare

$$\dot{x}(t) = ax(t) - k^* x(t) \quad (9a)$$

$$\dot{x}(t) = (a - k^*) x(t) \quad (9b)$$

Pripomeňme, že je žiadané aby odchýlka  $e(t) = x(t) - x_m(t)$  bola nulová. Je zrejmé, že ak by platilo  $(a - k^*) = -a_m$ , potom

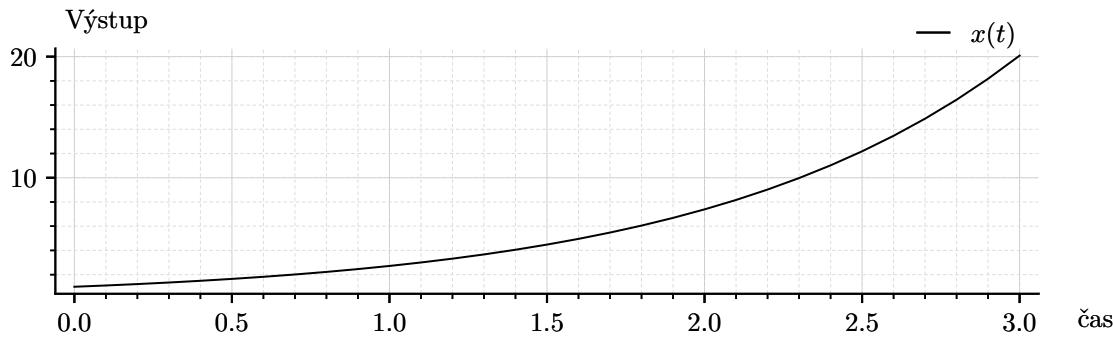
$$\dot{x}(t) = -a_m x(t) \quad (10)$$

URO a uvedený vzorový systém (7) by teda mali úplne rovnaký predpis (rovnakú rovnicu). Samozrejme, v URO vystupuje signál  $x(t)$  a vo vzorovom systéme vystupuje signál  $x_m(t)$ . Inak sú však tieto dva systémy úplne rovnaké. To znamená, že možno písat  $x(t) = x_m(t)$  a teda daná celková úloha je splnená.

Týmto sa ukázalo, že je možné zostaviť taký riadiaci systém, teda nájsť taký zákon riadenia, ktorý rieši danú úlohu.

V tomto prípade sme našli zákon riadenia (8), ku ktorému prislúcha tzv. podmienka zhody, čo v tomto prípade je

$$(a - k^*) = -a_m \quad (11)$$



Obr. 1: Výsledok numerickej simulácie systému (4) pre  $a = 1$  pri začiatočnom stave  $x(0) = 1$ .

Ide o podmienku zhody medzi URO a istým vzorovým systémom, ktorý sa vo všeobecnosti nazýva Referenčný model (RM). RM predpisuje ako sa má správať URO.

Pre riešenie úlohy tohto typu teda v prvom rade musí existovať *podmienka zhody* čo je, pochopiteľne, istá rovnica a táto rovnica musí byť riešiteľná. Neznámou je samozrejme parameter zákona riadenia. V tomto prípade  $k^*$ . Teoretické riešenie je

$$a - k^* = -a_m \quad (12a)$$

$$k^* = a_m + a \quad (12b)$$

Konkrétnu hodnotu parametra  $k^*$  však nevieme určiť pretože nepoznáme konkrétnu hodnotu parametra  $a$ . Ale vieme, že vôbec existuje ideálne  $k^*$ . To je veľmi, veľmi dôležité!

### Zákon riadenia s premenlivým parametrom

Zákon riadenia (8), ktorý má konštantný parameter  $k^*$ , teda nevieme použiť, pretože nevieme vypočítať  $k^*$ . Zachovajme ale štruktúru zákona riadenia (aby stále existovali riešiteľné podmienky zhody) a neznámy parameter  $k^*$  nahradime parametrom, ktorému dovolíme meniť sa v čase. Adaptovať sa. Adaptovať sa tak, aby sme splnili úlohu. Adaptívny zákon riadenia nech teda je

$$u(t) = -k(t)x(t) \quad (13)$$

kde  $k(t)$  je časovo premenlivý parameter.

Parameter  $k(t)$  sa vlastne môže meniť akokoľvek. Cieľom však je splnenie úlohy. To znamená, že ideálne  $e(t) = x(t) - x_m(t) = 0$ . To si však vyžaduje mať možnosť určiť  $k^*$ . Žiadať teda  $e(t) = 0$  v tomto prípade nikam nevedie. Žiadajme ale aby  $e(t) \rightarrow 0$ , teda že odchýlka  $e(t)$  sa asymptoticky blíži k nule. Pritom sa však nevylučuje aby mohla byť aj nulová.

Ak  $e(t) \rightarrow 0$  potom vlastne  $x(t) \rightarrow x_m(t)$ , teda signál  $x(t)$  sa hodnotou približuje k signálu  $x_m(t)$ . Aká je vlastne hodnota signálu  $x_m(t)$ ? Predpisuje ju referenčný model (7). K rovnici (7) chýba explicitne napísaná začiatočná podmienka pre signál  $x_m(t)$ , teda  $x_m(0)$ . Úlohou je aby sa  $x(t)$  dostalo do rovnovážneho stavu. Teda do nuly. Signál  $x_m(t)$  by teda mal byť nulový. A prečo nie hneď aj od začiatku? Nech teda  $x_m(0) = 0$ . Potom vzhľadom na rovnicu (7) je  $x_m(t) = 0$  po celý čas! Ak teda chceme  $e(t) \rightarrow 0$ , potom máme  $x(t) \rightarrow 0$ . Alebo inak povedané  $e(t) = x(t) - x_m(t) = x(t) - 0$ . Teda  $e(t) = x(t)$ .

### Spôsob ako meniť (adaptovať) parameter zákona riadenia

Stále však nie je zrejmé ako adaptovať (meniť) parameter  $k(t)$  tak aby sme splnili modifikovanú požiadavku  $e(t) \rightarrow 0$ .

URO s adaptívnym zákonom riadenia (13) je

$$\dot{x}(t) = (a - k(t))x(t) \quad x(0) \neq 0 \quad (14)$$

Ak by platilo  $(a - k(t)) < 0$ , potom by bol URO stabilný a  $x(t) \rightarrow 0$  pri akejkoľvek začiatočnej hodnote  $x(0)$ . A to je presne požiadavka pre splnenie úlohy. Hodnota parametra  $a$  je však neznáma, ale je zrejmé, že ak bude  $k(t)$  dostatočne veľké (vzhľadom na  $a$ ), potom celý výraz  $(a - k(t))$  bude záporný.

Ako však získat informáciu o tom kedy je  $k(t)$  dostatočne veľké? Ak nie je dostatočne veľké, potom je vo všeobecnosti odchýlka  $e(t)$  nenulová! Teda pri nenulovej  $e(t)$  treba  $k(t)$  meniť (v čase), konkrétnejšie, treba zvyšovať jeho hodnotu. Len ak by platilo, že  $e(t) = 0$ , len vtedy možno prestati meniť  $k(t)$ .

Zmena parametra  $k(t)$  v čase je jeho časová derivácia  $\dot{k}(t)$ .

Pre vzťah

$$\dot{k}(t) = e^2(t) \quad (15)$$

platí, že ak je  $e(t)$  nenulové, tak zmena  $k(t)$  je kladná, a len ak  $e(t) = 0$  aj zmena  $k(t)$  je nulová. Pomocou tohto predpisu pre  $\dot{k}(t)$  teda dosiahneme také zmeny  $k(t)$  v čase, aké sú potrebné pre dosiahnutie  $x(t) \rightarrow 0$  a teda  $e(t) \rightarrow 0$ , čo je splnenie stanoveného cieľa!

Rovnica (15) predpisuje ako sa má meniť parameter zákona riadenia tak aby bol cieľ riadenia splnený. Vo všeobecnosti sa takýto predpis nazýva zákon adaptácie.

Mimochodom, keďže vieme, že v tomto prípade platí  $e(t) = x(t)$ , potom (15) možno písat aj v tvare

$$\dot{k}(t) = x^2(t) \quad (16)$$

ba dokonca aj

$$\dot{k}(t) = e(t)x(t) \quad (17)$$

čo by bol pre skúsenejšieho v tejto oblasti azda najvhodnejší zápis. V tomto prípade praktickejším je tvar (16), pretože si to nevyžaduje žiadny ďalší signál, len  $x(t)$ , ktorý je samozrejme k dispozícii.

### Overenie adaptívneho riadiaceho systému

Zákon adaptácie (16) teraz dopĺňa zákon riadenia (13). K uvedenému ešte pre úplnosť prisľúcha aj referenčný model čo však v tomto prípade možno zanedbať. Tieto súčasti spolu tvoria adaptívny riadiaci systém, ktorý spĺňa danú úlohu.

S využitím numerickej simulácie ukážme, že uvedený adaptívny riadiaci systém stabilizuje riadený systém, t.j. pri začiatočnom stave mimo rovnovážneho stavu zabezpečí asymptotické približovanie sa výstupu riadeného systému k rovnovážnemu stavu. Na obr. 2 sú výsledky použitia tohto adaptívneho riadiaceho systému pre prípad keď je v riadenom systéme  $a = 1$  a  $x(0) = 1$ . Je možné pozorovať vyššie uvedené predpoklady a teda, že parameter  $k(t)$  sa zvyšuje až pokým neprekročí hodnotu parametra  $a$ . Vtedy sa URO stane stabilný a jeho stavová veličina sa z hodnoty, ktorú práve má, prirodzene začne vracať do rovnovážneho stavu, teda na hodnotu nula. Ďalej rýchlosť zmeny parametra  $k(t)$  klesá až sa napokon ustáli. Ustáli sa na hodnote vyššej ako je hodnota parametra  $a$ .

Ten istý adaptívny riadiaci systém sa bude, samozrejme, správať kvalitatívne rovnako pre rôzne hodnoty parametra riadeného systému  $a$  (a pre rôzne začiatočné stavy riadeného systému). Na obr. 3 sú pre ilustráciu znázornené rôzne prípady hodnoty parametra  $a$ . Tým je prezentovaná schopnosť adaptácie uvedeného riadiaceho systému.

## 3 Formálny opis adaptívnej stabilizácie pre systém 1. rádu

Nasledujúci jednoduchý príklad ilustruje situáciu, v ktorej neznalosť hodnoty parametra riadeného systému znemožňuje návrh riadiaceho systému. Adaptívne riadenie rieši tento problém a umožňuje navrhnúť riadiaci systém, ktorý zabezpečí splnenie ciela riadenia pre akúkoľvek hodnotu neznámeho parametra sústavy.

Uvažujme riadený systém v tvare

$$\dot{x} = a x + u \quad (18)$$

kde  $x(t)$  je stavová veličina systému,  $u(t)$  je akčný zásah (výstup) regulátora a parameter  $a$  je neznáma konštantá. Rovnovážny bod systému je v bode  $x = 0$ . Cieľom riadenia je aby stavová veličina  $x$  bola asymptoticky stabilná, teda aby po vychýlení stavu  $x$  z rovnovážneho bodu sa stav postupne približoval (asymptoticky) naspäť k rovnovážnemu bodu. To platí pre nasledujúci systém:

$$\dot{x} = -a_m x \quad (19)$$

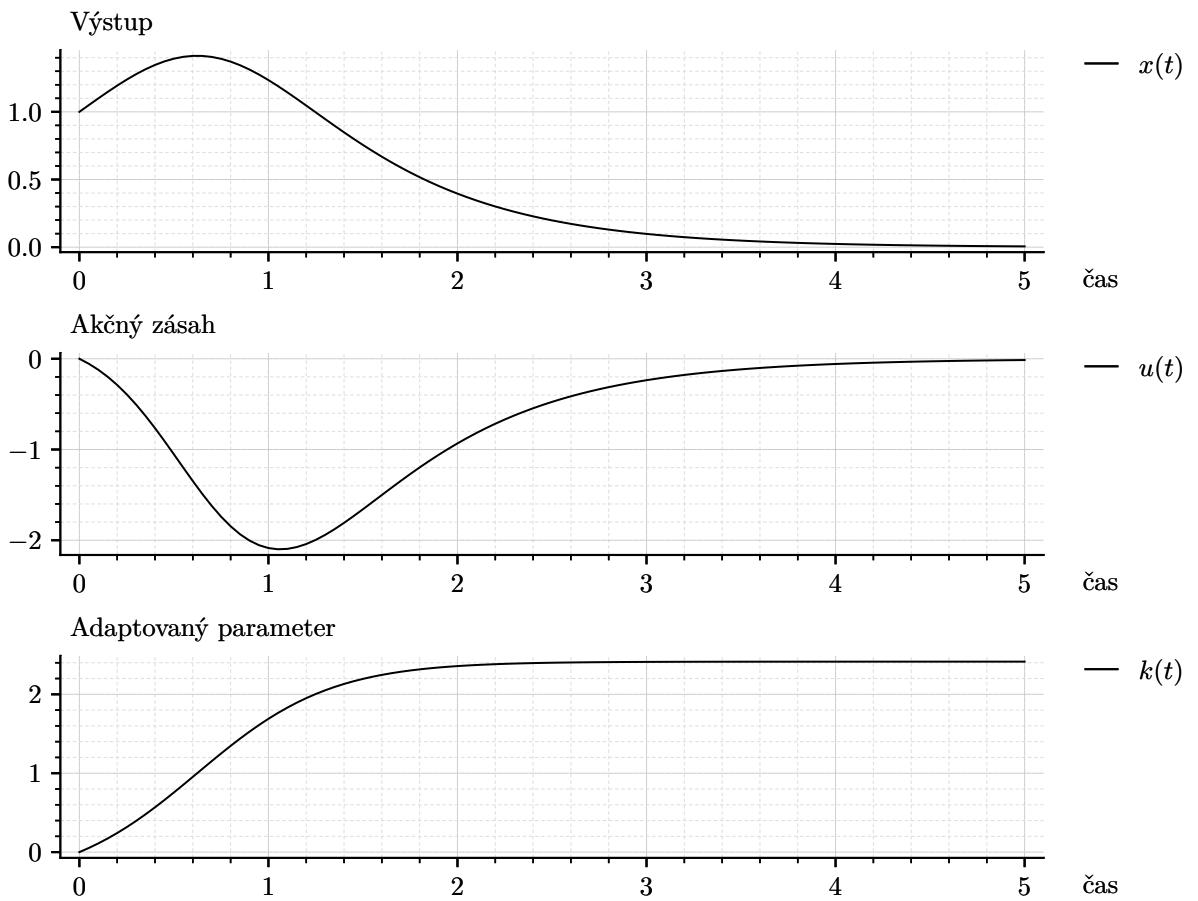
kde konštanta  $a_m > 0$ .

Ak by bol parameter  $a$  známy, potom lineárny regulátor v tvare

$$u = -k x \quad k > |a| \quad (20)$$

zabezpečí splnenie úlohy. V takomto prípade nezáleží, či samotný riadený systém (bez riadenia,  $u = 0$ ) stabilný je alebo nie je. Poznáme absolútну hodnotu  $|a|$  a zosilnenie  $k$  zvolíme väčšie ako  $|a|$ . Potom je zrejmé, že

$$\dot{x} = a x + (-k x) = (a - k) x \quad (21)$$



Obr. 2: Výsledok numerickej simulácie adaptívneho riadiaceho systému pre  $a = 1$  pri začiatočnom stave  $x(0) = 1$ .

je rovnica uzavretého regulačného obvodu (URO) spĺňajúceho cieľ riadenia, pretože v najhoršom (hraničnom) prípade, kedy URO je stabilný, nie však asymptoticky stabilný, ak  $k = |a|$  platí  $(a - |a|) \leq 0$  pre každé  $a$ .

Pre návrh regulátora (20) v podstate stačí poznať horné ohraničenie parametra  $a$ .

Na druhej strane, parameter  $a$  sa môže s časom meniť a jeho horná hranica nemusí byť známa. Pre nevhodne zvolené  $k$  potom môže nastať situácia  $a > k > 0$ . Vtedy URO je nestabilný. Pre neznámu hornú hranicu parametra  $a$  nie je možné navrhnuť riadiaci systém, ktorý vždy zabezpečí splnenie úlohy riadenia — stabilný URO.

Riešenie tejto úlohy metódami Adaptívneho riadenia, ktoré budú popísané podrobne neskôr, vedie na nasledovné:

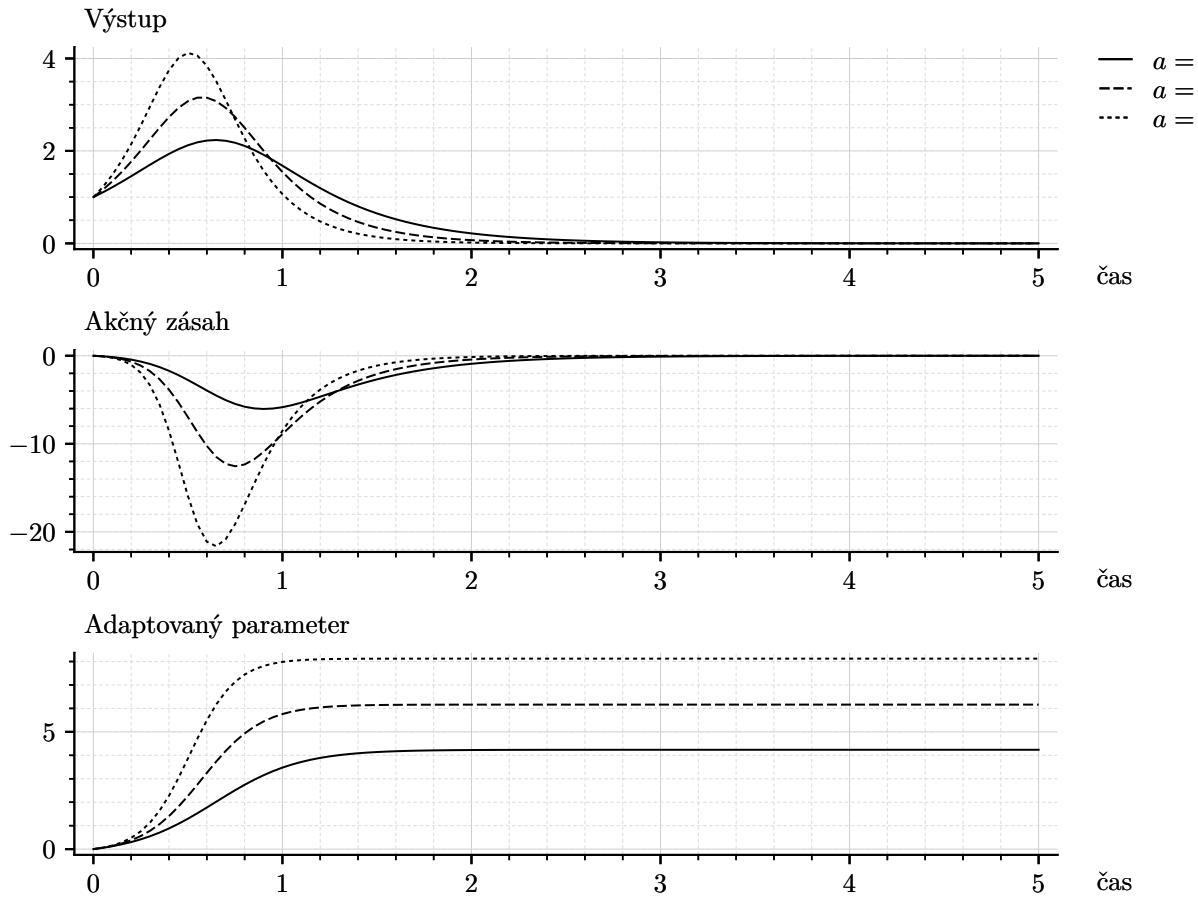
Riadiaci systém v tvare

$$u = -k x; \quad \dot{k} = x^2 \quad (22)$$

zabezpečí, že všetky signály v URO sú ohraničené a  $x$  s časom konverguje do nuly pričom *nezáleží* na hodnote parametra  $a$ . Požiadavkou nie je presné určenie hodnoty parametra  $a$ , ale len stabilizácia systému. Nie je požadovaná ani presná hodnota parametra  $k$ . Adaptívny riadiaci systém len zabezpečí, že  $k$  je ohraničené, teda stabilné. Pre tento konkrétny jednoduchý príklad je zrejmé, že  $k$  sa ustáli na hodnote väčšej ako  $a$ , čo však nehovorí nič o presnej hodnote parametra  $a$  ani  $k$ .

Ukážme, že riadiaci systém (22) stabilizuje stavovú – výstupnú veličinu sústavy (18).

Najskôr upresníme cieľ riadenia. Cieľom je aby  $x$  konvergovalo k nule pre čas  $t \rightarrow \infty$ . Žiadanou hodnotou pre  $x$  je  $r = 0$ . Uvažujeme všeobecný (akýkoľvek) začiatočný stav  $x_0$ . Začiatok je v čase  $t = 0$ , teda:  $x(0) = x_0$ . Cieľ si vyžaduje aby URO bol stabilný. Preto nech želaný pól URO je  $-a_m$ , kde  $a_m > 0$  sa volí podľa požiadaviek na rýchlosť



Obr. 3: Výsledok simulácie adaptívneho riadiaceho systému pre rôzne hodnoty parametra  $a$ . Začiatočný stav riadeného systému je v každom prípade  $x(0) = 1$ .

regulácie. Potom referenčný (ideálny, želaný) priebeh stavu  $x$  opisuje rovnica

$$\dot{x}_m = -a_m x_m \quad (23)$$

kde  $x_m$  stavová veličina ideálneho URO. Je prirodzené očakávať (lepšie povedané, zvoliť si), že začiatočný stav  $x_m(0) = 0$  z čoho vyplýva, že v ďalšom môžeme uvažovať  $x_m = 0$ .

V ideálnom prípade, keď poznáme parameter  $a$ , vieme určiť pre zákon riadenia „ideálne“  $k^*$ :

$$u = -k^* x; \quad k^* = a + a_m \quad (24)$$

Vtedy sa URO presne zhoduje s ideálnym URO, teda s referenčným modelom (23)

$$\dot{x} = a x + (-k^* x) = (a - k^*) x = (a - a - a_m) x = -a_m x \quad (25)$$

Pretože  $a$  je neznáme,  $k^*$  nevieme vypočítať a zákon riadenia (24) nemôže byť použitý.

Žiadaná hodnota pre stavovú veličinu  $x$  je  $r = 0$  a žiadame aby sa hodnota parametra  $k$  približovala k ideálnej hodnote  $k^*$  pretože len vtedy bude pól URO v bode  $-a_m$ . Riadený systém vyjadrimo ako funkciu ideálneho parametra  $k^*$  (teda tak aby rovnica obsahovala parameter  $k^*$ ). Tento krok má súvislosť s tým, že ide v podstate o identifikácii parametra  $k^*$  — bližšie vysvetlenie neskôr. Urobíme to jednoducho pripočítaním a odpočítaním „ideálneho“ zákona riadenia (24) k rovnici riadeného systému (18), potom riadený systém má tvar

$$\dot{x} = a x - k^* x + k^* x + u \quad (26)$$

Pretože  $a - k^* = -a_m$  máme

$$\dot{x} = -a_m x + k^* x + u \quad (27)$$

Definujme tzv. *adaptačnú odchýlku*. Ak adaptačná odchýlka nie je nulová je potrebné adaptovať riadiaci systém tak aby sa skutočný URO zhodoval so želaným URO. Adaptačná odchýlka má tvar

$$e = x - x_m \quad (28)$$

potom platí:

$$\dot{x} - \dot{x}_m = -a_m x + k^* x + u - (-a_m) x \quad (29a)$$

$$\dot{e} = -a_m (x - x_m) + k^* x + u \quad (29b)$$

$$\dot{e} = -a_m e + k^* x + u \quad (29c)$$

Zavedením adaptačnej odchýlky sme posunuli začiatok súradnicového systému stavového priestoru do rovnovážneho bodu riadeného systému. Inými slovami, rovnovážny stav veličiny  $e$  z rovnice (29c) je v začiatku stavového priestoru riadeného systému.

Uvažujeme použitie zákona riadenia v tvare  $u = -k x$ , po dosadení do (29c):

$$\dot{e} = -a_m e + k^* x - k x \quad (30)$$

$$\dot{e} = -a_m e - \theta x \quad (31)$$

kde sme zaviedli pojem *chyba nastavenia parametrov zákona riadenia*, ktorý označíme  $\theta$ , a v tomto prípade  $\theta = k - k^*$ .

Chceme dokázať, že riadiaci systém (22) stabilizuje uzavretý regulačný obvod. Platí  $\dot{\theta} = \dot{k} - \dot{k}^*$ . Avšak  $k^* = \text{konšt.}$  a teda  $\dot{k}^* = 0$ , preto  $\dot{\theta} = \dot{k} = x^2$ . Vyšetrením stability systému diferenciálnych rovníc v tvare

$$\dot{e} = -a_m e - \theta x \quad (32a)$$

$$\dot{\theta} = x^2 \quad (32b)$$

dokážeme stabilitu URO.

Zvoľme kandidáta na Ljapunovovu funkciu

$$V = \frac{(e(t))^2}{2} + \frac{(\theta(t))^2}{2} \quad (33)$$

Derivácia (33) podľa času je

$$\dot{V} = \frac{1}{2} 2 e(t) \dot{e}(t) + \frac{1}{2} 2 \theta(t) \dot{\theta}(t) = e(t) \dot{e}(t) + \theta(t) \dot{\theta}(t) \quad (34)$$

Do (34) dosadíme za  $\dot{e}$  a  $\dot{\theta}$ , máme

$$\dot{V} = e (-a_m e - \theta x) + \theta x^2 \quad (35a)$$

$$\dot{V} = -a_m e^2 - \theta x e + \theta x^2 \quad (35b)$$

Pretože  $e = x - x_m$  a uvažujeme  $x_m = 0$  a teda  $e = x$ , tak rovniciu (35b) možno písat v tvare

$$\dot{V} = -a_m x^2 - \theta x^2 + \theta x^2 \quad (36a)$$

$$\dot{V} = -a_m x^2 \quad (36b)$$

Pre systém (32) sme našli kladne definitnú funkciu  $V$  (Tá funkcia má skoro pre všetky  $x$  a  $\theta$  kladnú hodnotu, len pre  $x = 0$  a  $\theta = 0$  má nulovú hodnotu. Tá nulová hodnota je práve v stacionárnom bode systému (32), ktorého stabilitu vyšetrujeme). Derivácia tejto funkcie je vo všeobecnosti záporne semidefinitná (Je rovná nule v stacionárnom – nulovom bode, a inde môže byť len záporná alebo tiež rovná nule). Teda systém je stabilný. Presný zaver o stabilitu rovnovážneho stavu systému (32) v zmysle všeobecnej teórie stability podľa Ljapunova je, že rovnovážny stav je stabilný (neutrálne) podľa všetkých premenných ( $x$  a  $\theta$ ) a asymptoticky stabilný podľa premennej  $x$ . Prakticky to znamená, že premenná  $x$  dosiahne nulovú hodnotu po skončení prechodového deja, ale premenná  $\theta$  (a teda aj  $k$ ) len konečnú hodnotu. Tým sme ukázali vlastnosti, ktoré zabezpečí *adaptívny* riadiaci systém (22).

## 4 Príklad realizácie niektorých úloh cvičenia prvého

Konkrétnie v tejto časti sa budeme venovať najmä numerickému riešeniu diferenciálnych rovnic (ktoré vystupujú v našom cvičení prvom) s využitím, pochopiteľne, ODE solvera. Načrtнемe však aj všeličo iné. Používa sa tu Python<sup>1</sup>.

### 4.1 Takpovediac základný prístup

Uvažujme riadený systém v tvare

$$\dot{x}(t) = a x(t) + u(t) \quad (37)$$

kde  $x(t)$  je stavová veličina systému,  $u(t)$  je akčný zásah (výstup) regulátora. Parameter  $a$  je neznáma konštantá.

Funkcia, ktorá realizuje diferenciálnu rovnicu riadeného systému, nech je v nasledujúcom tvaru, kde sa hneď aj predpokladá, že  $u(t) = 0$ .

Výpis kódu 1: Súbor ar02\_file02.py

```
22 def fcn_difRovnice_01(x, t, param_a):
23
24     a = param_a
25
26     u = 0
27
28     dotx = a*x + u
29
30     return dotx
```

Zostavme simulačnú schému pre riadený systém. Zvolme konkrétnu hodnotu parametra  $a$  tak aby riadený systém bol stabilný. Nech začiatočný stav je  $x(0) = 1$  a  $u(t) = 0$ . Simuláciou (pre vhodný časový úsek) ukážme, že  $x = 0$  je rovnovážny stav riadeného systému.

Simulačnú schému nech realizuje nasledujúca funkcia:

Výpis kódu 2: Súbor ar02\_file02.py

```
41 def fcn_simSch_01(t_start, t_final, T_s, param_a):
42
43     #-----
44     t_log = np.arange(sim_t_start, sim_t_final+sim_T_s, sim_T_s).
45     reshape(-1,1)
46
47     #-----
48     x_0 = 1
49
50     #-----
51     odeOut = odeint(fcn_difRovnice_01,
52                      x_0,
53                      t_log[:,0],
54                      args=(param_a,))
55
56     return [t_log, odeOut]
```

Nastavme a spustime simuláciu:

Výpis kódu 3: Súbor ar02\_file02.py

```
68 # Nastavenia simulacie
69
70 sim_t_start = 0
71 sim_t_final = 3
72 sim_T_s = 0.1
73
74 param_a = -1
75
76 # -----
77
78 # Simulacia
79
```

<sup>1</sup>Rovnako dobre by sa to dalo zostrojiť v akomkoľvek programovacom jazyku, v ktorom máme k dispozícii ODE solver. Prípadne aj ten ODE solver by sme si naprogramovali...

```

80 t_log, x_log, = fcn_simSch_01(sim_t_start, sim_t_final, sim_T_s,
81     param_a)

```

Všetko potrebné je teraz zaznamenané v premenných  $t_{\text{log}}$  a  $x_{\text{log}}$ . Nakreslime obrázok (pre prehľadnosť je kód kreslenia obrázku v samostatnom súbore a nie priamo tu v nasledujúcej bunkе):

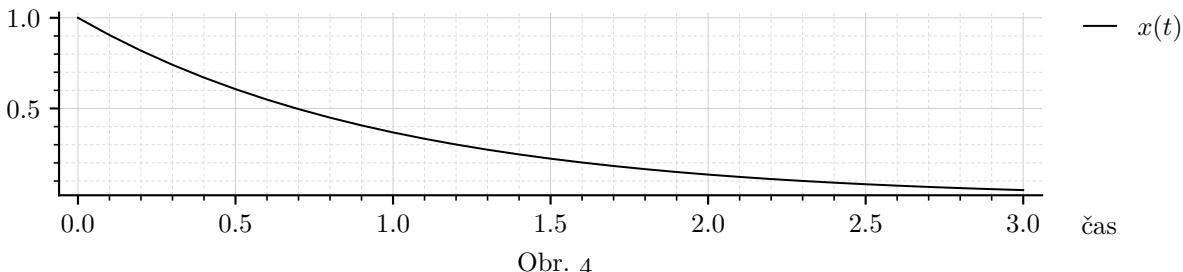
Výpis kódu 4: Súbor ar02\_file02.py

```

91 # Obrázok
92
93 figName = 'figsc_ar02_fig03'
94 figNameNum = 0
95
96 exec(open('./figjobs/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())
97

```

Výstup



V prípade, že parameter  $a$  je zvolený tak aby bol riadený systém nestabilný, výsledok je:

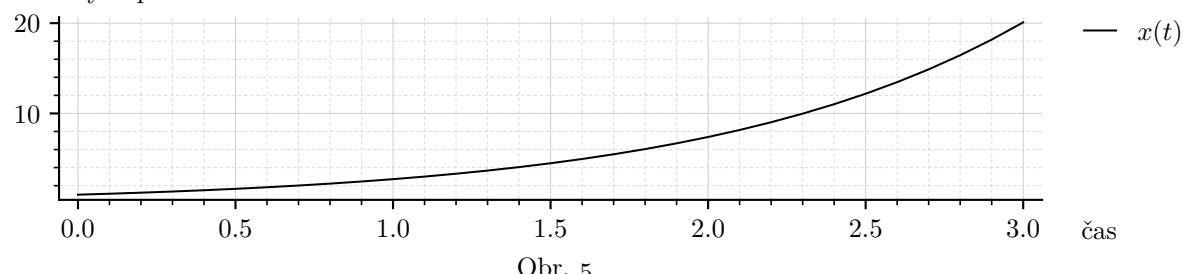
Výpis kódu 5: Súbor ar02\_file02.py

```

105 param_a = 1
106
107 # Simulacia
108
109 t_log, x_log, = fcn_simSch_01(sim_t_start, sim_t_final, sim_T_s,
110     param_a)
111
112 # Obrázok
113
114 figName = 'figsc_ar02_fig03'
115 figNameNum = 1
116
117 exec(open('./figjobs/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())

```

Výstup



Nech začiatočný stav riadeného systému je  $x(0) = 1$ . Ponechajme konkrétnu hodnotu parametra  $a$  tak aby riadený systém bol nestabilný. Pridajme k riadenému systému riadiaci systém daný nasledovne:

$$u = -k x; \quad \dot{k} = x^2 \quad (38)$$

Simuláciou vyšetrime stabilitu URO.

Funkcia, ktorá realizuje potrebné diferenciálne rovnice nech je nasledovná:

Výpis kódu 6: Súbor ar02\_file02.py

```

149 def fcn_difRovnice_02(x, t, param_a):

```

```

150     x, k = x
151
152     a = param_a
153
154     dotk = x**2
155
156     u = -k*x
157
158     dotx = a*x + u
159
160     return [dotx, dotk]
161
162

```

Simulačná schéma, opäť realizovaná ako funkcia:

Výpis kódu 7: Súbor ar02\_file02.py

```

171 def fcn_simSch_02(t_start, t_final, T_s, param_a):
172
173     #-----
174     t_log = np.arange(sim_t_start, sim_t_final+sim_T_s, sim_T_s).
175     reshape(-1,1)
176
177     #-----
178     x_0 = [1, 0]
179
180     #-----
181     odeOut = odeint(fcn_difRovnice_02,
182                     x_0,
183                     t_log[:,0],
184                     args=(param_a,))
185
186     return [t_log, odeOut]
187

```

Nastavenie a spustenie simulácie, pričom pripomeňme, že parameter  $a$  je stále nastavený tak, aby riadený systém bol nestabilný.

Výpis kódu 8: Súbor ar02\_file02.py

```

196 # Nastavenia simulacie
197
198 sim_t_start = 0
199 sim_t_final = 5
200 sim_T_s = 0.05
201
202 # Simulacia
203
204 t_log, x_log, = fcn_simSch_02(sim_t_start, sim_t_final, sim_T_s,
205     param_a)

```

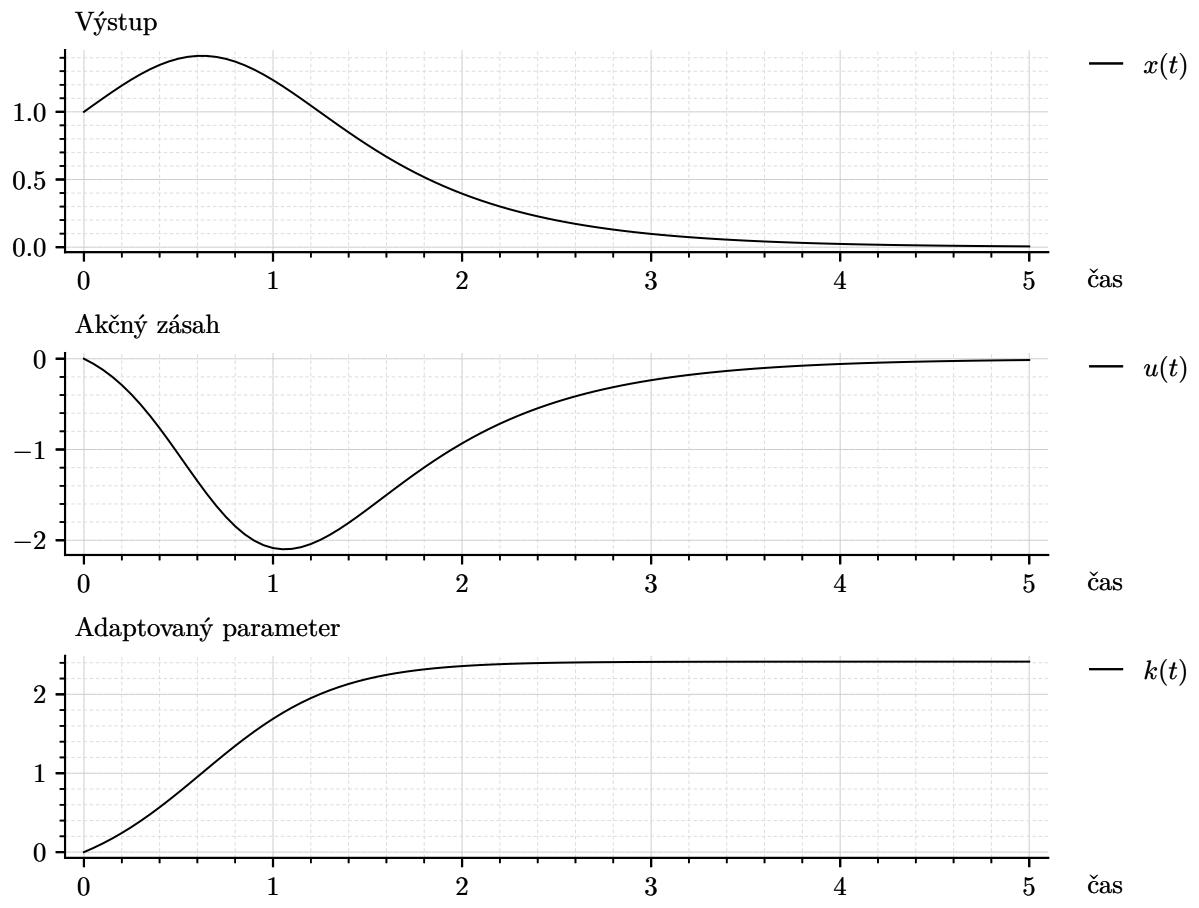
Obrázok, ktorý zobrazuje okrem výstupnej veličiny riadeného systému aj iné veličiny potrebné pre posúdenie stability celého uzavretého regulačného obvodu.

Výpis kódu 9: Súbor ar02\_file02.py

```

212 # Obrázok
213
214 figName = 'figsc_ar02_fig01'
215 figNameNum = 3
216
217 exec(open('./figjobs/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())
218

```



Obr. 6

Ciel riadenia je splnený, čo v tomto prípade znamená, že výstupná veličina sa približuje k nulovej hodnote, a všetky signály uzavretého regulačného obvodu sú ohraničené. To znamená, že URO je stabilný.

Podrobnejšia diskusia z pohľadu Adaptívneho riadenia je nad rámec konkrétnie tejto časti krátkych poznámok.

## 4.2 O realistickej implementácii riadiaceho systému tu uvedeného

Uvažujme riadený systém v tvare

$$\dot{x}(t) = a x(t) + u(t) \quad (39)$$

kde  $x(t)$  je stavová veličina systému,  $u(t)$  je akčný zásah (výstup) regulátora. Parameter  $a$  je neznáma konštantá.

Funkcia, ktorá realizuje diferenciálnu rovnicu riadeného systému, nech je v tvare:

Výpis kódu 10: Súbor ar02\_file03.py

```
26 def fcn_difRovnice_01(x, t, a, u):
27     dotx = a*x + u
28
29     return dotx
30
```

Nech začiatočný stav riadeného systému je  $x(0) = 1$  a nech hodnota parametra  $a$  je taká aby riadený systém bol nestabilný. Pridajme k riadenému systému riadiaci systém daný nasledovne:

$$u = -k x; \quad \dot{k} = x^2 \quad (40)$$

Simulačná schéma, ktorá realizuje numerickú simuláciu riadeného systému pomocou ODE solvera, a zároveň realizuje istú implementáciu daného riadiaceho systému, je nasledovná:

Výpis kódu 11: Súbor ar02\_file03.py

```
39 def fcn_simSch_03(t_start, T_s, finalIndex, param_a):
40
41     #-----
42     # casovy vektor
43
44     t_log = np.zeros([finalIndex, 1])
45     t_log[0,:] = t_start
46
47     #-----
48     # vektor stavu riadeneho systemu
49
50     x_0 = np.array([1])
51
52     x_log = np.zeros([finalIndex, len(x_0)])
53     x_log[0,:] = x_0
54
55     #-----
56     # vektor adaptovaneho parametra
57
58     k_log = np.zeros([finalIndex, 1])
59
60     #-----
61     # vektor akcneho zasahu
62
63     u_log = np.zeros([finalIndex, 1])
64
65     #-----
66
67     timespan = np.zeros(2)
68     for idx in range(1, int(finalIndex)):
69
70         #-----
71         # Riadeny system - simulacia (pomocou ODESolvera)
72
73         timespan[0] = t_log[idx-1,:]
74         timespan[1] = t_log[idx-1,:] + T_s
75
76         odeOut = odeint(fcn_difRovnice_01,
77                         x_log[idx-1,:],
78                         timespan,
79                         args=(param_a, u_log[idx-1,:]))
80
81
82         x_log[idx,:] = odeOut[-1,:]
83         t_log[idx,:] = timespan[-1]
84
85         #-----
86         # Riadiaci system:
87
88         # zakon adaptacie:
89         deltk = x_log[idx-1,:]*x_log[idx-1,:]
90
91         # adaptovany parameter (numericka integracia - vlastne
92         # sumator)
93         k_log[idx,:] = k_log[idx-1,:] + (deltk * T_s)
94
95         # zakon riadenia:
96         u_log[idx,:] = -k_log[idx-1,:]*x_log[idx-1,:]
97
98     return [t_log, x_log, u_log, k_log]
```

Nastavme a spustime simuláciu:

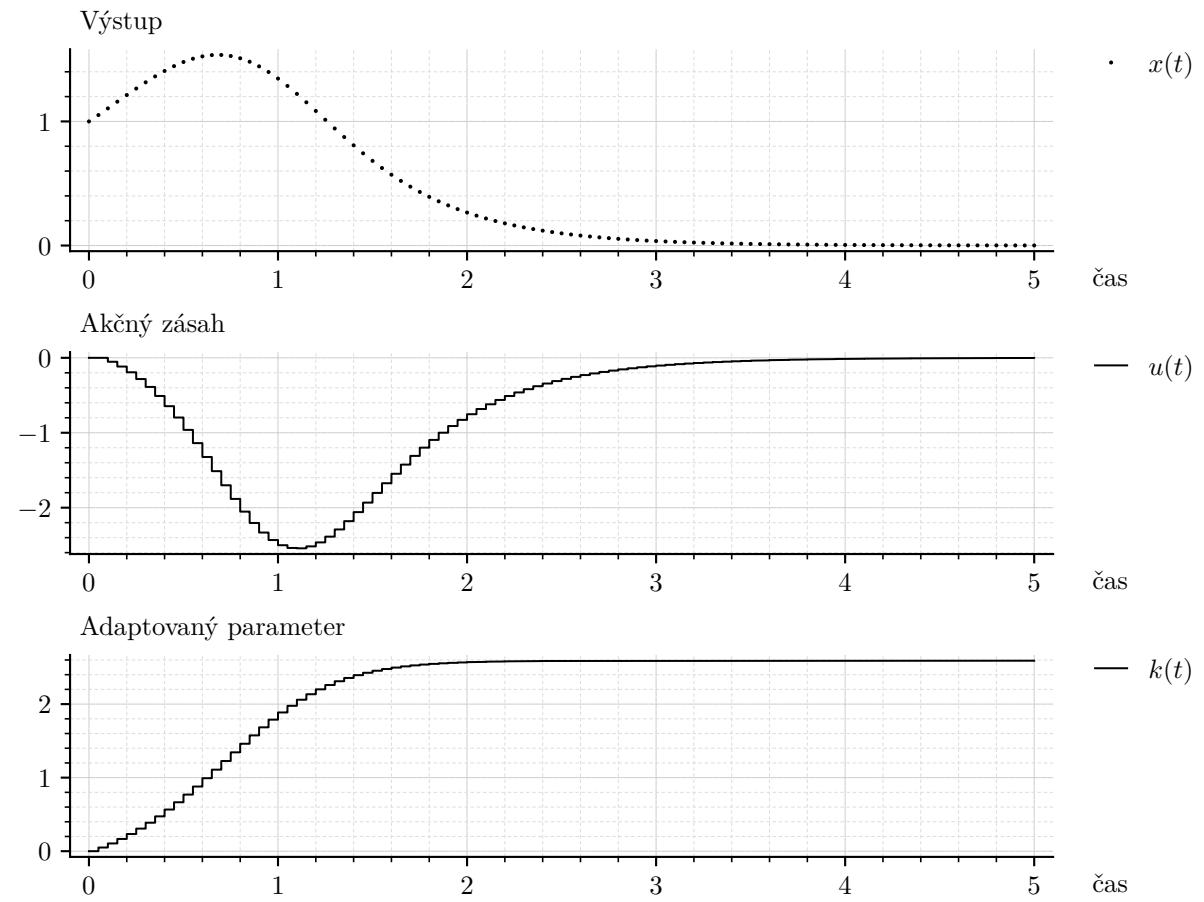
Výpis kódu 12: Súbor ar02\_file03.py

```
114 # Nastavenia simulacie
115 sim_t_start = 0
116 sim_t_final = 5
117 sim_T_s = 0.05
118 sim_finalIndex = int(((sim_t_final - sim_t_start)/sim_T_s) + 1)
119
120 param_a = 1
121
122 # Simulacia
123 t_log, x_log, u_log, k_log, = fcn_simSch_03(sim_t_start,
124                                         sim_T_s,
125                                         sim_finalIndex,
126                                         param_a,
127                                         )
```

Obrázok, ktorý zobrazuje okrem výstupnej veličiny riadeného systému aj iné veličiny potrebné pre posúdenie stability celého uzavretého regulačného obvodu.

Výpis kódu 13:

```
135 figName = 'figsc_ar02_f03_f01'
136 figNameNum = 0
137
138 exec(open('./figjobs/' + figName + '.py', encoding='utf-8')).read()
139
```



Obr. 7

V čom je tá implementácia „realistická“? To je na diskusiu, ktorú tu autor neuvádza...

## 5 O stabilité (doplňkový text)

### Riešenie

Majme autonómny dynamický systém vo všeobecnosti v tvare (homogénna diferenciálna rovnica)

$$\dot{x} = F(x) \quad (41)$$

Hovoríme, že  $x(t)$  je *riešenie* diferenciálnej rovnice (41) na časovom intervale od  $t_0 \in \mathbb{R}$  do  $t_f \in \mathbb{R}$  ak

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)) \quad \text{pre } t_0 < t < t_f \quad (42)$$

Daná diferenciálna rovnica môže mať mnoho riešení, najčastejšie nás však zaujíma úloha so zadaným začiatočným stavom, inými slovami so zadanými začiatočnými podmienkami, kedy  $x(t)$  je predpísané v začiatočnom čase  $t_0$  a úlohou je nájsť riešenie vyhovujúce pre celý budúci čas  $t > t_0$ . Vtedy  $x(t)$  je riešenie diferenciálnej rovnice (41) so začiatočným stavom  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  v čase  $t_0$  ak

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{a} \quad \frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)) \quad \text{pre } t_0 < t < t_f \quad (43)$$

Najčastejšie sa stretávame s diferenciálnymi rovnicami, pre ktoré existuje jedinečné riešenie, navyše pre celý čas  $t > t_0$  čo znamená že  $t_f = \infty$ . Častým je tiež, že funkcia  $F$  je nezávislá od času, preto môžeme uvažovať  $t_0 = 0$ .

### Stabilita riešenia

*Stabilita riešenia* určuje či iné riešenia v blízkosti skúmaného riešenia ostávajú v jeho blízkosti, približujú sa k nemu alebo sa od neho vzdalačujú. Uvedieme niekoľko neformálnych a formálnych definícií stability.

Nech  $x(t; a)$  je riešenie diferenciálnej rovnice so začiatokným stavom  $a$ . Toto riešenie je stabilné ak iné riešenia, ktoré začínajú v blízkosti  $a$  zostávajú v blízkosti  $x(t; a)$ . Formálne, hovoríme, že riešenie  $x(t; a)$  je stabilné ak pre všetky  $\epsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  taká, že

$$\|b - a\| < \delta \Rightarrow \|x(t; b) - x(t; a)\| < \epsilon, \forall t > 0 \quad (44)$$

Všimnime si, že to neznamená, že  $x(t; b)$  sa približuje k  $x(t; a)$ , len ostáva v jeho blízkom okolí. Navyše hodnota  $\delta$  môže závisieť od  $\epsilon$ , teda napríklad ak chceme ostať blízko nejakého riešenia potom musíme začať veľmi blízko tohto riešenia. Takto definovaná stabilita sa nazýva *stabilita v zmysle Lyapunova*.

### Príklad

Ilustrujeme uvedenú podmienku (44) na riešení diferenciálnej rovnice kyvadla.

Uvažujme kyvadlo, ktorého kmity sú tlmené viskóznym trením s koeficientom  $\beta$  [ $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ ]. Kyvadlo je na Obr. 8, kde hmotný bod s hmotnosťou  $m$  [ $\text{kg}$ ] pripojený na ramene so zanedbatelnou hmotnosťou a dĺžkou  $l$  [ $\text{m}$ ] kmitá,  $o$  označuje os otáčania kolmú na rovinu, v ktorej kyvadlo kmitá, uhol medzi zvislicou a ramenom kyvadla je označený  $\varphi$  [rad] a gravitačné zrýchlenie  $g$  [ $\text{m s}^{-2}$ ].

Pohybová rovnica opisujúca dynamiku rotačného pohybu kyvadla je v tvare

$$ml^2\ddot{\varphi} = -\beta\dot{\varphi} - mgl \sin \varphi + u \quad (45a)$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = u \quad (45b)$$

kde  $u$  [ $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$ ] je externý moment sily pôsobiaci na rameno kyvadla,  $\dot{\varphi}$  [rad  $\text{s}^{-1}$ ] je uhlová rýchlosť a  $\ddot{\varphi}$  [rad  $\text{s}^{-2}$ ] je uhlové zrýchlenie ramena kyvadla.

Model kyvadla (45b) je nelineárna diferenciálna rovnica. Rovnicu (45b) upravíme na tvar

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\beta}{ml^2}\dot{\varphi} - \frac{g}{l} \sin(\varphi) + \frac{1}{ml^2}u \quad (46)$$

Stavom kyvadla sú dve veličiny: uhol natočenia ramena kyvadla  $\varphi$  a uhlová rýchlosť ramena kyvadla  $\dot{\varphi}$ . Stavový vektor má preto dva prvky  $x^T = [x_1 \ x_2]$ , kde  $x_1 = \varphi$  a  $x_2 = \dot{\varphi}$ . Model kyvadla v stavovom priestore je v tvaru

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\beta}{ml^2}x_2 - \frac{g}{l} \sin(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}u \quad (47a)$$

$$\varphi = x_1 \quad (47b)$$

Toto je nelineárny časovo-invariantný systém druhého rádu.

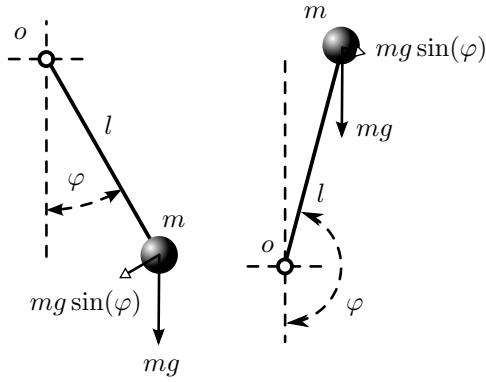
Z hľadiska stability má význam uvažovať tento systém, avšak bez vstupu, inými slovami externý moment sily je nulový,  $u = 0$ . Potom

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\beta}{ml^2}x_2 - \frac{g}{l} \sin(x_1) \end{bmatrix} \quad (48a)$$

$$\varphi = x_1 \quad (48b)$$

Toto je autonómny nelineárny časovo-invariantný systém druhého rádu. Jeho správanie závisí len od začiatkového stavu na začiatku uvažovaného času.

Začiatokný čas zvolme  $t_0 = 0$  [s], konečný čas zvolme  $t_f = 1, 4$  [s], začiatoknú polohu kyvadla zvolme  $\varphi = 45^\circ$  a začiatokná rýchlosť kyvadla nech je nulová. Začiatokný



Obr. 8: Kyvadlo

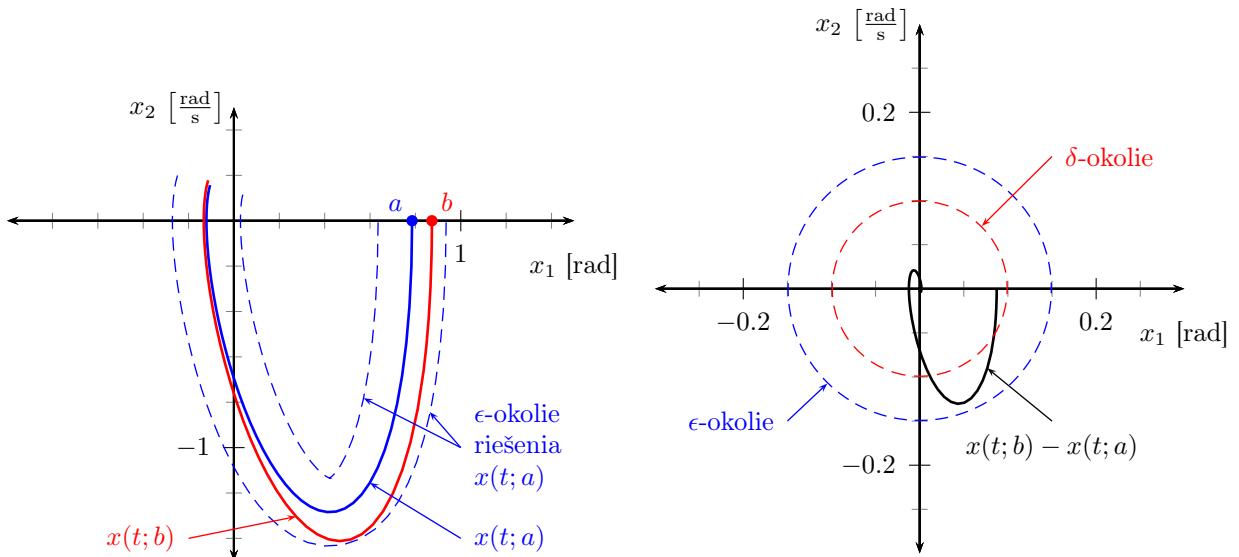
Tabuľka 1: Parametre kyvadla

Parameter	Hodnota	Jednotky
$m$	1	kg
$l$	1	m
$g$	9,81	$\text{m s}^{-2}$
$\beta$	$2 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{g/l}$	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$

stav v stavovom priestore je  $a = [0, 7854 \ 0]^\top$ . Týmto začiatočným podmienkam príslúcha riešenie  $x(t; a)$ , ktoré je znázornené v stavovom priestore na Obr. 9a, kde je vyznačený aj začiatočný stav  $a$ . Nebudeme skúmať všetky  $\epsilon > 0$ , preskúmame len jedno. Napríklad pre  $\epsilon = 0,15$  hľadáme  $\delta > 0$ , ktorá splňa podmienku (44). Taká  $\delta$  existuje, pretože pre riešenie  $x(t; b)$ , ktoré začína v stave  $b = [0, 8727 \ 0]^\top$  platí, že  $\|x(t; b) - x(t; a)\| < \epsilon$ , čo je zrejmé z Obr. 9a a aj z Obr. 9b, kde je navyše predĺžený čas riešenia až do nekonečna. Potom sme našli napríklad  $\delta = 0,1$  pretože platí

$$\|b - a\| = \sqrt{(0,8721 - 0,7854)^2 + (0 - 0)^2} = 0,0873 < 0,1 \quad (49)$$

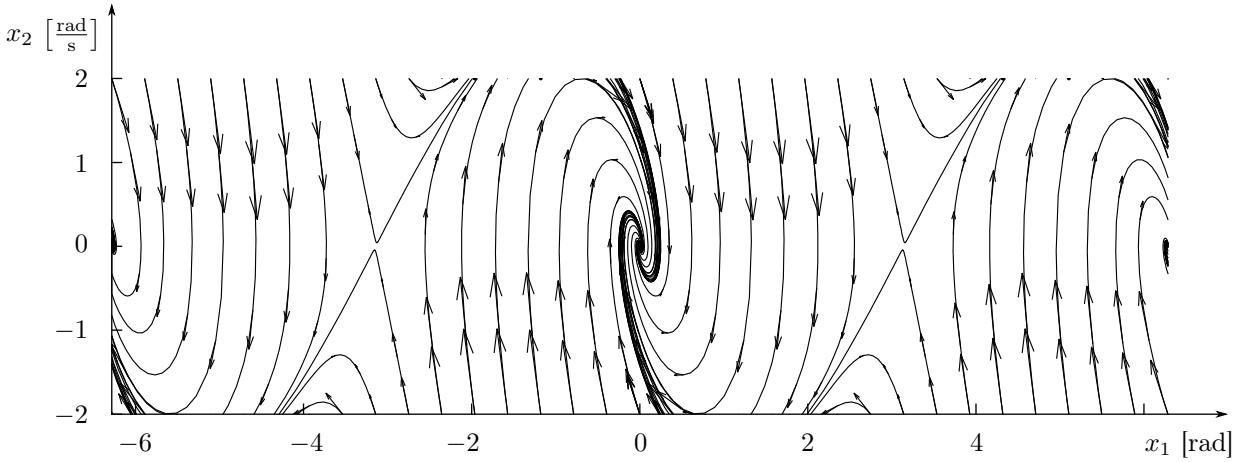
čo je tiež zrejmé najmä z Obr. 9b. Týmto sme nezistili nič o stabilite riešenia  $x(t; a)$ ,



(a) Trajektórie riešení systému v stavovom priestore pre rôzne začiatočné stavy  $a$  a  $b$  v časovom intervale  $t_0 < t < t_f$

(b) Trajektória rozdielu dvoch riešení daných začiatočnými stavmi  $a$  a  $b$  v časovom intervale  $t_0 < t < \infty$

Obr. 9: Ilustračný príklad k definícii stability riešenia systému



Obr. 10: Fázový portrét kyvadla

pretože sme neoverili, či je podmienka (44) splnená pre všetky  $\epsilon > 0$ .

Ak je riešenie stabilné v zmysle Lyapunova, ale trajektórie okolitých riešení k nemu nekonvergujú, hovoríme, že riešenie je *neutrálne stabilné*.

Riešenie  $x(t; a)$  je *asymptoticky stabilné* ak je stabilné v zmysle Lyapunova a zároveň  $x(t; b) \rightarrow x(t; a)$  s rastúcim časom  $t \rightarrow \infty$  pri začiatočnom stave  $b$ , ktorý je dostatočne blízko stavu  $a$ .

Veľmi dôležitým špeciálnym prípadom je ak pre skúmané riešenie platí  $x(t; a) = x_e$ . Potom nehovoríme o stabilité riešenia ale o *stabilité stacionárneho bodu*. Príkladom asymptoticky stabilného stacionárneho bodu sú body

$$x_{e_{-2}} = \begin{bmatrix} -2\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{e_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{a} \quad x_{e_2} = \begin{bmatrix} 2\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

na Obr. 10, vidíme, že ak začíname blízko asymptoticky stabilného stacionárneho bodu, s narastajúcim časom sa k nemu približujeme.

Zdrojový kód pre MATLAB pre získanie tohto obrázku je nasledovný:

Kód pre vygenerovanie obr. 10

```

1 global m l g beta
2 m = 1; %kg
3 l = 1; %m
4 g = 9.81; %m/s^2
5 beta = 2*0.5*sqrt(g/l); %kgm^2/s
6
7 for uhlovarychlost = -2:4:2
8     for uhol = -360:22.5:360
9         [t,x]=ode45(@PravaStr,[0 5],[uhol*pi/180 uhlovarychlost]);
10        hold on
11        stav = x;
12        x = x(1:5:end-70,:);
13        x1dot = x(:,2);
14        x2dot=-(beta/m*l^2)*x(:,2)-(g/l)*sin(x(:,1));
15        quiver(x(:,1),x(:,2),x1dot,x2dot,0.5,'k')
16        plot(stav(:,1),stav(:,2), 'k');
17        hold off
18    end
19 end
20
21 axis equal
22 axis([-2*pi 2*pi -2 2])

```

kde funkcia PravaStr je

```

1 function dotx = PravaStr(t,x)
2     global m l g beta
3     dotx(1)=x(2);
4     dotx(2)=-(beta/m*l^2)*x(2)-(g/l)*sin(x(1));
5     dotx=dotx';
6 end

```

Riešenie  $x(t; a)$  je *nestabilné* ak nie je stabilné. Konkrétnejšie, hovoríme, že riešenie  $x(t; a)$  je nestabilné ak pre akékoľvek dané  $\epsilon > 0$  neexistuje  $\delta > 0$  taká, že ak

$\|b - a\| < \delta$  potom  $\|x(t; b) - x(t; a)\| < \epsilon, \forall t > 0$ . Príkladom nestabilného stacionárneho bodu sú body

$$x_{e_{-1}} = \begin{bmatrix} -\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{a} \quad x_{e_1} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

na Obr. 10.

Predchádzajúce definície nezohľadňujú oblasť, na ktorej môžu byť použité. Presnejšie je definovať riešenie ako *lokálne stabilné* (alebo *lokálne asymptoticky stabilné*) ak je stabilné pre všetky začiatok stavy  $x \in B_r(a)$ , kde  $B_r(a) = \{x : \|x - a\| < r\}$  je oblasť s polomerom  $r > 0$  okolo bodu  $a$ . Riešenie je *globálne stabilné* ak je stabilné pre všetky  $r > 0$ .

## 5.1 Stabilita lineárnych systémov

Lineárny dynamický systém má tvar

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \quad (50)$$

kde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je štvorcová matica. Začiatok stavového priestoru je vždy stacionárnym bodom lineárneho systému a stabilita tohto stacionárneho bodu môže byť určená pomocou vlastných čísel matice  $A$ .

Vlastné čísla  $\lambda(A)$  sú korene *charakteristického polynómu* systému  $\det(sI - A)$ , kde  $s \in \mathbb{C}$  je komplexná premenná a  $I$  je jednotková matica. Konkrétnie vlastné číslo ( $i$ -te vlastné číslo) označujeme  $\lambda_i$ , pričom  $\lambda_i \in \lambda(A)$ .

Pre lineárny systém stabilita stacionárneho bodu (ako veľmi dôležitého špeciálneho prípadu spomedzi všetkých riešení) závisí len od matice  $A$ , čo znamená, že stabilita je vlastnosť systému. Pre lineárny systém preto hovoríme o stabiliti systému namiesto o stabiliti konkrétneho riešenia alebo ekvilibria.

Stabilitu lineárneho systému možno zhrnúť do jednej vety:

*Systém*

$$\dot{x} = Ax$$

*je asymptoticky stabilný vtedy a len vtedy keď reálne časti všetkých vlastných čísel matice  $A$  sú záporné a systém je nestabilný keď aspoň jedno vlastné číslo matice  $A$  má kladnú reálnu časť.*

## 5.2 Linearizácia a jej použitie pri analýze stability

Výhodnou vlastnosťou diferenciálnych rovíc je, že je často možné určiť lokálnu stabilitu stacionárneho bodu pomocou aproximácie nelineárneho systému lineárnym systémom.

Uvažujme nelineárny systém

$$\dot{x} = F(x) \quad (51)$$

ktorý má ekvilibrium v bode  $x_e$ . Zaujíma nás stabilita tohto stacionárneho bodu. Aproximujme (linearujme) nelineárnu funkciu  $F(x)$  v okolí bodu  $x_e$  pomocou prvých dvoch členov Taylorvho radu

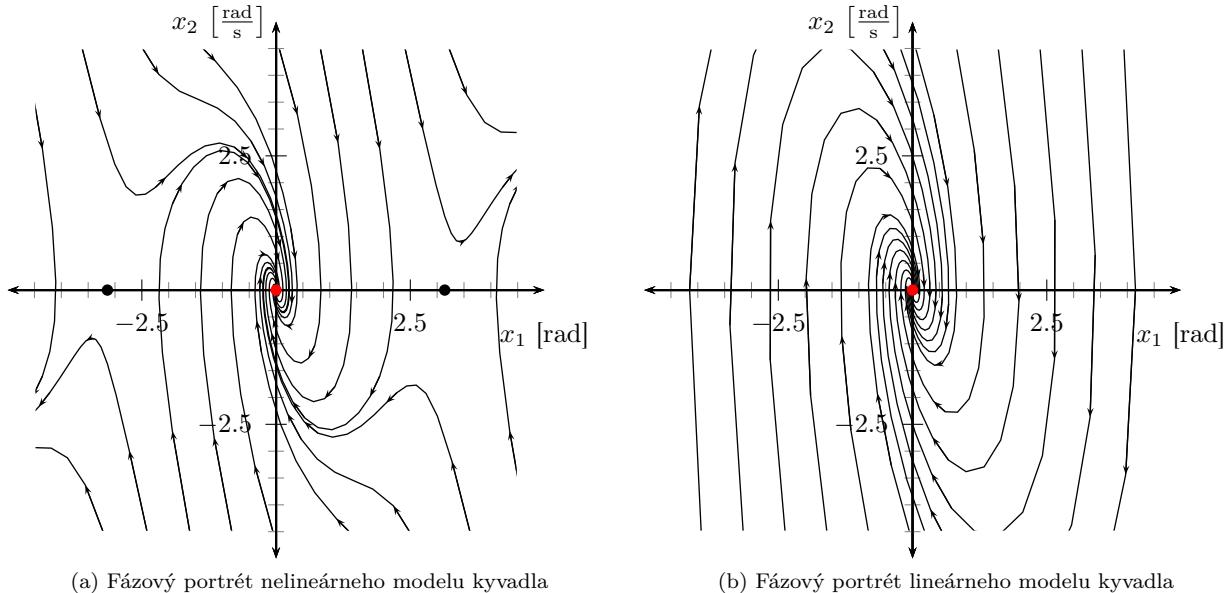
$$F(x) \approx F(x_e) + \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x_e} (x - x_e) \quad (52)$$

Platí  $F(x_e) = 0$ , a zavedieme nový stavový vektor  $z = x - x_e$ . To znamená, že  $x = z + x_e$ , potom  $\dot{x} = \dot{z} + \dot{x}_e$ , avšak  $x_e$  sa s časom nemení a preto platí  $\dot{x} = \dot{z}$ . Lineárna approximácia pôvodného nelineárneho systému v okolí bodu  $x_e$  má potom tvar

$$\dot{z} = Az \quad (53)$$

kde

$$A = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x_e} \quad (54)$$



Obr. 11: Porovnanie fázových portrétov nelineárneho systému a jeho linearizovanej approximácie

V prípade kyvadla je nelineárny model systému v tvare (48a) a teda

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{\beta}{ml^2} x_2 \end{bmatrix} \quad (55)$$

Linearizujme nelineárny model systému (48a) v okolí rovnovážného stavu  $x_e = [0 \ 0]^T$ . Klúčovým je výpočet matice  $A$  podľa (54). V tomto prípade máme

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} (F_1) & \frac{\partial}{\partial x_2} (F_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} (F_2) & \frac{\partial}{\partial x_2} (F_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(x_1) & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix} \quad (56)$$

Po dosadení hodnôt stacionárneho bodu za  $x_1 = 0$  (a  $x_2 = 0$ ) do (56) máme

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix} \quad (57)$$

a vzädom na fakt, že v tomto prípade  $x_e = 0$  je linearizovaný model systému v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (58)$$

Lokálna stabilita stacionárneho bodu nelineárneho systému teraz môže byť určená pomocou vlastných čísel matice  $A$ .

Mimochodom výsledný lineárny model (58) je rovnaký, ako keby sme uvažovali, len malé výchylky kyvadla (malé hodnoty uhla  $\varphi$ ), pri ktorý dostatočne presne platí, že  $\sin(\varphi) = \varphi$  (angl. Small-angle approximation).

Skutočnosť, že lineárny model môže byť použitý pre opis správania nelineárneho systému v okolí rovnovážného stavu je veľmi výhodná. Je to možné využiť aj pre návrh spätnoväzbového regulátora, ktorý udržiava stav nelineárneho systému v okolí rovnovážného stavu. Pritom samotný regulátor je navrhnutý pre lineárnu approximáciu systému. Kedže stav systému je regulátorom udržiavaný blízko stacionárneho bodu, tak aj lineárna approximácia použitá pri stabilizácii je dostatočne presná.

Na Obr. 11 je porovnanie fázových portrétov nelineárneho modelu kyvadla a linearizovaného modelu kyvadla v okolí začiatku stavového priestoru. Všimnime si, že v okolí stacionárneho bodu (začiatku súradnicového systému) sú tieto fázové portréty takmer identické.

### 5.3 Analýza stability pomocou Lyapunovových funkcií

Vráťme sa opäť k nelineárnym systémom v tvare

$$\dot{x} = F(x)$$

Máme definované kedy je riešenie nelineárneho dynamického systému stabilné. Teraz hľadáme odpoveď na otázku ako dokázať, že dané riešenie je stabilné, asymptoticky stabilné alebo nestabilné. Pri fyzikálnych systémoch môžeme vyvodiť závery o stabiliti podľa toho či systém na danej trajektórii stráca energiu, inými slovami či hodnota energie klesá (dissipatívny systém), alebo nie. Zovšeobecnenie tejto techniky pre ľubovoľný dynamický systém je založené na použití Lyapunovových funkcií na miesto energie.

V tejto časti sa venujeme použitiu Lyapunovových funkcií pri určovaní stability riešenia dynamického systému. Konkrétnie nás zaujíma stabilita stacionárnych bodov. Je výhodné uvažovať, že vyšetrovaný stacionárny bod je v začiatku stavového priestoru, teda  $x_e = 0$ . Ak nie je, vždy je možné prepísať rovnice systému zavedením nových (posunutých) stavových veličín  $z = x - x_e$ .

#### 5.3.1 Lyapunovove funkcie

*Lyapunovova funkcia*  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sa používa (podobne ako energia) pri vyšetrovaní stability (riešenia) systému. Zjednodušene povedané, ak nájdeme nezápornú funkciu, ktorá je klesajúca pozdĺž trajektórie systému, môžeme usúdiť, že bod, v ktorom táto funkcia dosiahne minimum je stabilným (lokálne) stacionárnym bodom systému.

Pre formálny opis uvedeného je potrebných niekoľko definícií: Hovoríme, že spojitá funkcia  $V$  je *kladne definitná* ak  $V(x) > 0$  pre všetky  $x \neq 0$  a  $V(0) = 0$ , a podobne, funkcia je *záporne definitná* ak  $V(x) < 0$  pre všetky  $x \neq 0$  a  $V(0) = 0$ . Hovoríme, že funkcia  $V$  je *kladne semidefinitná* ak  $V(x) \geq 0$  pre všetky  $x$ , teda  $V(x)$  môže byť nulová aj v inom bode ako  $x = 0$ , podobne, funkcia je *záporne semidefinitná* ak  $V(x) \leq 0$  pre všetky  $x$ .

Teorém, ktorý charakterizuje stabilitu stacionárneho bodu dynamického systému, ktorý je v začiatku stavového priestoru, je nasledovný:

Nech  $V$  je nezáporná skalárna funkcia na  $\mathbb{R}^n$  a nech  $\dot{V}$  reprezentuje časovú deriváciu funkcie  $V$  pozdĺž trajektórie dynamického systému  $\dot{x} = F(x)$ :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} F(x).$$

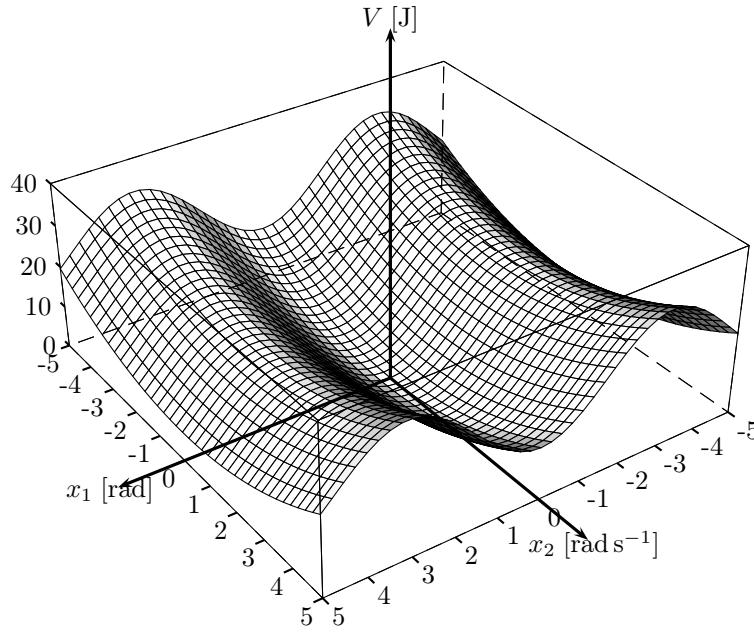
Nech  $B_r$  je okolie začiatku súradnicového systému s polomerom  $r$ . Ak existuje  $r > 0$  taký, že  $V$  je kladne definitná funkcia a  $\dot{V}$  je záporne semidefinitná funkcia pre všetky  $x \in B_r$ , potom  $x = 0$  je lokálne stabilný stacionárny bod v zmysle Lyapunova. Ak  $V$  je kladne definitná a  $\dot{V}$  je záporne definitná pre všetky  $x \in B_r$ , potom  $x = 0$  je lokálne asymptoticky stabilný bod.

Ak  $V$  spĺňa práve uvedené podmienky, potom hovoríme, že  $V$  je (lokálna) *Lyapunovova funkcia* systému.

#### 5.3.2 Analýza stability

Výsledky uvedené vyššie majú pre planárne systémy svoju geometrickú reprezentáciu. Pre kladne definitnú  $V$  môžeme definovať vrstevnice ako body v stavovom priestore, ktoré spĺňajú  $V(x) = c$ , kde  $c > 0$ . Tam, kde platí  $\dot{V} < 0$  vektorové pole ukazuje vždy smerom k „nižšej“ vrstevnici, od vrstevnice  $c_2$  k  $c_1$ , kde  $c_2 > c_1$ . To znamená, že trajektória smeruje k menším a menším hodnotám funkcie  $V$  a ak  $\dot{V}$  je záporne definitná, potom sa  $x$  približuje k nule. Aj toto ilustruje nasledujúci príklad určenia stability stacionárneho bodu kyvadla.

Lyapunovove funkcie často nie je jednoduché nájsť, a tiež nie sú unikátne. V mnohých prípadoch je výhodné pri hľadaní vhodného kandidáta na Lyapunovovu funkciu začať funkciou, ktorá vyjadruje celkovú energiu systému, najmä pri fyzikálnych systémoch. Tak je to aj v nasledujúcim príklade.



Obr. 12: Znázormenie celkovej mechanickej energie kyvadla  $V$  ako funkcie stavu kyvadla (62)

Uvažujme nelineárny model kyvadla, podľa (48a), v tvare

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (59a)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{\beta}{ml^2} x_2 \quad (59b)$$

Úlohou je vyšetriť stabilitu stacionárneho bodu  $x_e = [0 \ 0]^\top$ . V tomto prípade teda nie je potrebné posúvať súradnicový systém, pretože vyšetrovaný stacionárny bod je v začiatku.

Ako kandidáta na Lapunovovu funkciu použijeme celkovú (mechanickú) energiu systému. Nulovú potenciálnu energiu nech má kyvadlo pre  $\varphi = x_1 = 0$ . Potenciálna energia je  $U = mgh$ , kde  $h = 2l - l - l \cos(x_1)$ , teda

$$U = mgl - mgl \cos(x_1) \quad (60)$$

Pri rotačnom pohybe, vykonávanom kyvadlom, je (rotačná) kinetická energia

$$K = \frac{1}{2} ml^2 x_2^2 \quad (61)$$

Celková energia kyvadla je súčtom kinetickej a potenciálnej energie.

Kandidát na Lyapunovovu funkciu systému je potom v tvare

$$V = \frac{1}{2} ml^2 x_2^2 + mgl - mgl \cos(x_1) \quad (62)$$

Funkcia (62) je znázornená na Obr. 12. Táto funkcia je nezáporná pre všetky  $x_1$  a  $x_2$ , avšak nie je kladne definitná pre všetky  $x_1$  a  $x_2$ , pretože bod  $x_e = [0 \ 0]^\top$  nie je jediný, kde funkcia nadobúda nulu. Ak uvažujeme len okolie začiatku  $B_r$  s polomerom  $0 < r < \pi$ , potom funkcia  $V$  je kladne definitná, pretože vtedy  $-\pi < x_1 < \pi$  a len pre  $x_e = [0 \ 0]^\top$  máme  $V(x_e) = 0$ .

Časová derivácia funkcie pozdĺž trajektórie je

$$\dot{V} = ml^2 x_2 \left( -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{\beta}{ml^2} x_2 \right) + mgl \sin(x_1) x_2 \quad (63a)$$

$$\dot{V} = -mgl x_2 \sin(x_1) - \beta x_2^2 + mgl \sin(x_1) x_2 \quad (63b)$$

$$\dot{V} = -\beta x_2^2 \quad (63c)$$

Funkcia  $\dot{V}$  je záporne definitná pre všetky  $x_2$  a  $x_1$ , a teda aj pre tie, ktoré patria do uvažovaného okolia  $B_r$ . Preto môžeme hovoriť, že na uvažovanom okolí stacionárneho bodu existuje Lyapunovova funkcia systému a preto je tento systém lokálne stabilný.

Ak chceme určiť stabilitu inému stacionárному bodu, napr.  $x_e = [\pi \ 0]^\top$ , je potrebné najskôr posunúť tento bod do začiatku stavového priestoru. Zavedieme nové posunuté stavové veličiny:

$$z = x - x_e = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (64)$$

potom platí

$$x_1 = z_1 + \pi \quad (65a)$$

$$x_2 = z_2 \quad (65b)$$

Dosadením (65) do pôvodného systému (59) máme nový posunutý systém, ktorý má vyšetrovaný bod v začiatku stavového priestoru v tvare

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (66a)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= -\frac{g}{l} \sin(z_1 + \pi) - \frac{\beta}{ml^2} z_2 = \\ &= \frac{g}{l} \sin(z_1) - \frac{\beta}{ml^2} z_2 \end{aligned} \quad (66b)$$

Mimochodom, (66) je model inverzného kyvadla.

Môžeme vyskúsať zvoliť toho istého kandidáta na Lyapunovovu funkciu ako (62) s dosadením (65), potom

$$V = \frac{1}{2} ml^2 z_2^2 + mgl - mgl \cos(z_1 + \pi) \quad (67a)$$

$$V = \frac{1}{2} ml^2 z_2^2 + mgl + mgl \cos(z_1) \quad (67b)$$

Okamžite vidíme, že táto funkcia nemôže byť kandidátom na Lyapunovovu funkciu, pretože v nulovom bode (začiatku) nemá nulovú hodnotu  $V(0) \neq 0$  a teda nie je kladne definitná.

Aby sme dokázali, že daný stacionárny bod je *nestabilný* (v tomto prípade vieme, že je nestabilný), musíme nájsť takú funkciu  $V(x)$ , ktorá je v okolí rovnovážneho bodu kladne definitná a jej časová derivácia pozdĺž trajektórie systému je *tiež kladne definitná funkcia*.

... nájsť takú funkciu pre inverzné kyvadlo vôbec nie je jednoduché. Užitočnejším v tomto prípade je linearizovať systém v okolí daného stacionárneho bodu a určiť stabilitu tohto lineárneho systému pomocou vlastných čísel dynamickej matice alebo tiež pomocou Lyapunovovej funkcie. O druhej možnosti hovorí nasledujúca časť.

### 5.3.3 Lyapunovova rovnica

Ako sme už uviedli, vo všeobecnosti nie je jednoduché nájsť vhodného kandidáta na Lyapunovovu funkciu. Pre lineárny dynamický systém v tvare

$$\dot{x} = Ax \quad (68)$$

je však možné skonštruovať Lyapunovovu funkciu systematickým spôsobom, nasledovne:

Uvažujme kvadratickú formu ako kandidáta na Lyapunovovu funkciu

$$V(x) = x^\top Px \quad (69)$$

kde  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je symetrická matica, teda platí  $P = P^\top$ . Podmienka aby  $V$  bola kladne definitná je v tomto prípade ekvivalentná podmienke, že  $P$  je *kladne definitná matica*:  $x^\top Px > 0, \forall x \neq 0$ , čo zapisujeme ako  $P > 0$ . Platí, že ak je matica  $P$  symetrická,

potom je matica  $P$  kladne definitná vtedy a len vtedy keď všetky vlastné čísla tejto matice sú reálne a kladné.

Časová derivácia uvažovaného kandidáta na Lyapunovovu funkciu pozdĺž trajektórie systému v tomto prípade je

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = x^T (A^T P + PA) x = -x^T Q x \quad (70)$$

Požiadavka aby  $\dot{V}$  bola záporne definitná znamená, že matica  $Q$  musí byť kladne definitná. Preto, pre nájdenie Lyapunovovej funkcie pre lineárny systém je postačujúce zvolať maticu  $Q > 0$  a vyriešiť tzv. *Lyapunovovu rovnicu*:

$$A^T P + PA = -Q \quad (71)$$

čo je lineárna algebraická rovnica, ktorú možno riešiť pomocou lineárnej algebry. Dá sa ukázať, že táto rovnica má riešenie vždy ak vlastné čísla matice  $A$  sú v ľavej polrovine komplexnej roviny (ich reálne časti sú záporné) a navyše nájdená  $P$  je kladne definitná ak  $Q$  je kladne definitná. Preto je vždy možné nájsť kvadratickú Lyapunovovu funkciu pre stabilný lineárny systém.

## 6 Otázky a úlohy

- Vyšetrite stabilitu systému

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= -a_m e(t) + \theta(t) x(t) \\ \dot{\theta}(t) &= -e(t)x(t)\end{aligned}$$

kde  $a_m > 0$ .

- Je zadaný systém v tvare:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2\end{aligned}$$

Načrtnite (zhruba) fázový portrét systému alebo aspoň vektorové pole systému.

- Linearizujte model kyvadla v okolí stacionárneho bodu  $x_e = [\pi \ 0]^T$ . Bonus: Aký typ stacionárneho bodu je uvedený bod? Svoju odpoveď zdôvodnite.
- Pomocou kandidáta na Lyapunovovu funkciu vyšetrite stabilitu systému

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t)\end{aligned}$$

- Pomocou kandidáta na Lyapunovovu funkciu vyšetrite stabilitu systému.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1 x_1 + x_2 & k_1 > 0 \\ \dot{x}_2 &= -k_2 x_1 & k_2 > 0\end{aligned}$$