Veľmi stručný prehľad Adaptívneho riadenia

Obsah

1 História a nedávna história

Názvy *Adaptívny systém* a *Adaptívne riadenie* boli v publikáciách prvý krát použité okolo roku 1950. Motiváciou pre vývoj adaptívnych regulátorov bol návrh autopilota pre vysokovýkonné experimentálne lietadlá na začiatku 50-tych rokov.

Lietadlo operuje vo veľkom rozsahu rýchlostí a výšok. Komplexná dynamika lietadla môže byť pre daný pracovný bod (rýchlosť, výška) aproximovaná lineárnym modelom v tvare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1a}$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{1b}$$

pričom A, B, C a D sú funkciou pracovného bodu, ktorý sa mení v čase (teda A, B, C a D sú funkciou času).

Zjednodušene, tá istá výchylka „smerovky“ (alebo kormidla na lodi) spôsobí pri rôznych rýchlostiach iný moment sily (ktorý otáča lietadlo alebo loď). Teda mení sa parameter riadeného systému, ktorý môže byť opísaný napríklad prenosovou funkciou, ktorej vstupom je výchylka kormidla a výstupom je kurz (natočenie) lode.

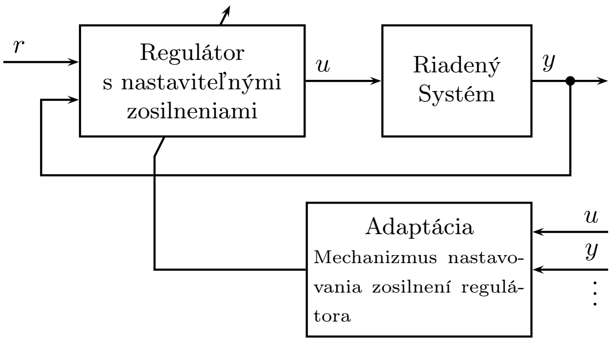
Toľko veľmi stručné zhrnutie inak veľmi rozsiahlej histórie Adaptívneho riadenia.

Ako príklad súčasného/nedávneho využitia Adaptívneho riadenia možno uviesť opäť systémy riadenia letu. V správe *The Impact of Control Technology, T. Samad and A.M. Annaswamy (eds.), IEEE Control Systems Society, 2011, available at www.ieeecss.org.* je uvedený takýto príklad.

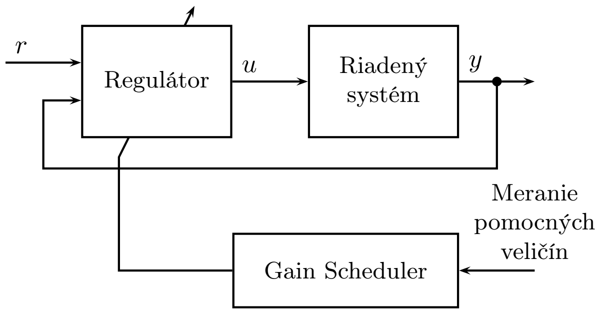
Názvom *The Joint Direct Attack Munition* sa označuje navádzací systém, ktorý konvertuje nenavádzané bomby na *smart* muníciu schopnú činnosti v každom počasí. V tomto systéme sa uplatňuje robustné a adaptívne riadenie. Navzájom sa dopĺňajú a kombinujú.

Tento príklad uvádzame najmä preto, aby sme čitateľa upozornili na uvedenú správu. Medzičasom (2014) je dostupná aj druhá edícia tejto správy, dostupné na: http://ieeecss.org/impact-control-technology-2nd-edition.

Autor si na začiatku roka 2022 uvedomuje možnú zmätenosť čitateľa ak sa za súčasnosť, či nedávnu minulosť označujú roky 2011, prípadne 2014. Ide však o obdobie, keď vznikal tento učebný text. Adaptívne riadenie, ako pojem, sa možno vytráca,



(a) Základá schéma adaptívneho riadenia



(b) Schéma Gain Scheduling

Obr. 1: Základá schéma adaptívneho riadenia a schéma Gain Scheduling

avšak princípy, najmä v spojení s identifikáciou systémov vo všeobecnosti, sú viac ako aktuálne. Nájdeme ich prezlečené alebo zaradené pod pojmy ako je strojové učenie (machine learning), spracovanie signálov (signal processing) alebo priebežná identifikácia systémov.

Podobne, ak sa čitateľovi zdá odporúčaná literatúra staršieho dáta, nech má na pamäti, že ide o relatívne novinky v čase poslednej rozsiahlejšej aktualizácie tohto učebného materiálu – predovšetkým kniha [1] z roku 2006. Ostatné sa dajú považovať za klasické učebnice tohto predmete a do popredia tu dávame knihu [2] najmä pre skutočnosť, že je voľne dostupná tu: https://viterbi-web.usc.edu/~ioannou/RobustAdaptiveBook95pdf/Robust_Adaptive_Control.pdf.

2 Schémy Adaptívneho riadenia

Túto časť možno chápať aj ako veľmi stručné[1] rozdelenie Adaptívneho riadenia.

2.1 Základná schéma AR

Priebeh výstupnej veličiny obsahuje informáciu o stave x systému a o parametroch systému. Preto by nejaký sofistikovaný spätnoväzbový riadiaci systém mal byť schopný vysporiadať sa so zmenami v riadenom systéme a zabezpečiť dosiahnutie požadovaného cieľa riadenia. Tieto myšlienky viedli k návrhu spätnoväzbovej štruktúry riadenia, ktorá je základom adaptívneho riadenia.

V štandardnom regulačnom obvode (v uzavretom regulačnom obvode – URO) je použitý regulátor, ktorého parametre (zosilnenia) je možné meniť (aj v počas činnosti). K uzavretému obvodu je pridaný mechanizmus pre nastavovanie zosilnení regulátora. Podľa spôsobu určenia zmeny zosilnení regulátora (v reakcii na zmenu parametrov riadeného systému a teda na zmenu v dynamike sústavy a porúch) sa odlišujú rôzne typy schém adaptívneho riadenia.

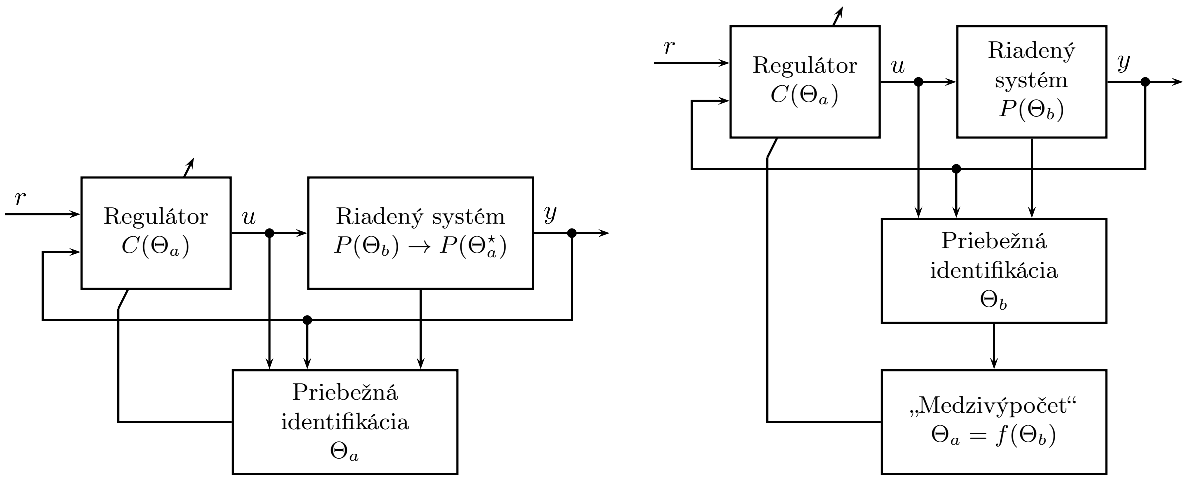
2.1.1 Robustné riadenie

Pre vysporiadanie sa so zmenami parametrov riadeného systému môže byť navrhnutý aj regulátor s konštantnými zosilneniami — týmto sa zaoberá *Robustné riadenie*. Regulátor navrhnutý metódami robustného riadenia sa však nepovažuje za adaptívny regulátor aj keď dokáže zvládnuť zmenu parametrov sústavy.

2.2 Gain Scheduling

Uvažujme, že v pracovnom bode i sú parametre modelu lietadla A_i, B_i, C_i a D_i známe. Pre daný pracovný bod teda vieme určiť regulátor, ktorý zabezpečí vyšpecifikované

[1] Všetko je tu akosi veľmi stručné. . .



(a) Priame adaptívne riadenie

(b) Nepriame adaptívne riadenie

Obr. 2: Principiálne schémy priameho a nepriameho adaptívneho riadenia

ciele. Zosilnenia takého regulátora označme Θ_i. Pri uvažovaní viacerých pracovných bodov máme množinu zosilnení: $\Theta_1, \ldots, \Theta_i, \ldots, \Theta_N$, kde N je počet uvažovaných pracovných bodov.

Po detegovaní pracovného bodu sa na regulátore nastavia (prepnú) príslušné zosilnenia (parametre regulátora). Tento spôsob adaptácie sa nazýva „Prepínanie parametrov regulátora“ — *Gain Scheduling* (GS).

Prechody medzi pracovnými bodmi sa riešia napríklad interpoláciou určených zosilnení alebo zvýšením počtu uvažovaných (detegovaných) pracovných bodov.

Dvomi prvkami, ktoré sú charakteristické pre GS sú *Look-up Table* (Vyhľadávacia tabuľka – tabuľka, v ktorej sa vyhľadávajú príslušné zosilnenia) a *meranie pomocných veličín*, takých ktoré sú vo vhodnom vzťahu s pracovným bodom. Na základe merania pomocných veličín sa rozhoduje (určuje), v ktorom pracovnom bode sústava operuje a podľa toho sa vyhľadajú a prepnú príslušné zosilnenia regulátora.

Výhodou GS je, že zosilnenia regulátora sa menia okamžite po detegovaní nového pracovného bodu. Výhodou je teda rýchlosť nájdenia teoreticky správnych parametrov regulátora. Časté a rýchle zmeny zosilnení regulátora však môžu viesť k nestabilite celého systému. Preto sa pridávajú obmedzenia pre frekvenciu prepínania.

Nevýhodou je, že mechanizmus prepínania a zosilnenia sú určené vopred (off-line) a teda kompenzácia prípadnej odchýlky od predpokladaného správania nie je možná. Nepredvídateľné zmeny dynamiky sústavy môžu viesť k zhoršeniu kvality riadenia alebo až k úplnému zlyhaniu. Ďalšou nevýhodou sú vysoké náklady na návrh a najmä na implementáciu, ktoré narastajú so zvyšujúcim sa počtom pracovných bodov.

2.3 Priame a nepriame AR

Vo všeobecnosti, adaptívny regulátor sa skladá z on-line estimátora (priebežná identifikácia) neznámych parametrov a zákona riadenia (algoritmus riadenia, regulátor). Zákon riadenia je motivovaný prípadom keď hodnoty parametrov sústavy sú známe, avšak konštantné zosilnenia sú nahradené časovo premenlivými.

Spôsob akým je on-line estimátor, nazývaný *Zákon adaptácie*, skombinovaný so zákonom riadenia určuje jeden z dvoch prístupov v adaptívnom riadení: Priame adaptívne riadenie a Nepriame adaptívne riadenie.

Pri nepriamom adaptívnom riadení sa priebežne identifikujú parametre uvažovaného modelu systému a následne sú tieto použité pri výpočte zosilnení zákona riadenia. Predpokladá sa pri tom, že identifikované parametre systému sú istotne ekvivalentné so skutočnými parametrami systému. Medzivýpočet potrebný pre výpočet parametrov zákona riadenia charakterizuje nepriame adaptívne riadenie.

Pri priamom adaptívnom riadení je model systému parametrizovaný z hľadiska parametrov zákona riadenia. Rovnica modelu systému je vyjadrená tak, že obsahuje ideálne parametre zákona riadenia. Práve tieto parametre sú priebežne identifikované (pretože ideálne parametre sú neznáme) – adaptované. Výstupom priebežnej identifikácie (zákona adaptácie) sú teda priamo parametre zákona riadenia. Nie je potrebný medzivýpočet ako v prípade nepriameho adaptívneho riadenia.

Literatúra

[1] P. Ioannou and B. Fidan. *Adaptive Control Tutorial*. Society for Industrial and Applied Mathematics, USA., 2006.

[2] P. Ioannou and J. Sun. *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, Inc, 1996.

3 Otázky a úlohy

1. Nakreslite základnú schému adaptívneho riadenia.
2. Nakreslite schému Gain Scheduling.
3. Nakreslite schému priameho adaptívneho riadenia.
4. Nakreslite schému nepriameho adaptívneho riadenia.
5. Vysvetlite rozdiel medzi priamym a nepriamym adaptívnym riadením.

O adaptívnej stabilizácii

Obsah

1 Cvičenie prvé

1. Uvažujme riadený systém v tvare

$$\dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,u(t) \tag{1}$$

kde $x(t)$ je stavová veličina sytému, $u(t)$ je akčný zásah (výstup) regulátora. Parameter $b = 1$ a parameter a je neznáma konštanta.

- Koľkého rádu je systém (1)?
- Aká je prenosová funkcia daného dynamického systému?
- Aký je charakteristický polynóm a charakteristická rovnica dynamického systému?
- Aké sú korene charakteristického polynómu?
- Pre ktoré a je systém stabilný a pre ktoré a je nestabilný? Nájdite intervaly.
- Aké je zosilnenie sústavy? Aké sú časové konštanty?
- Ktorého reálneho systému (napríklad), je vhodným modelom takáto sústava?

2. Zostavte simulačnú schému systému (1). Zvoľte konkrétnu hodnotu parametra a z nájdeného intervalu tak aby riadený systém (1) bol stabilný. Nech začiatočný stav je $x(0) = 1$ a $u(t) = 0$. Simuláciou (pre vhodný časový úsek) ukážte, že $x = 0$ je rovnovážny stav sústavy.

3. Nech začiatočný stav sústavy $x(0) = 1$. Zvoľte konkrétnu hodnotu parametra a tak aby sústava (1) bola **nestabilná**. Spustite simuláciu a pozorujte nestabilný priebeh stavovej veličiny. Pridajte k riadenému systému regulátor daný nasledovne:

$$u = -k\,x \qquad k > |a| \tag{2}$$

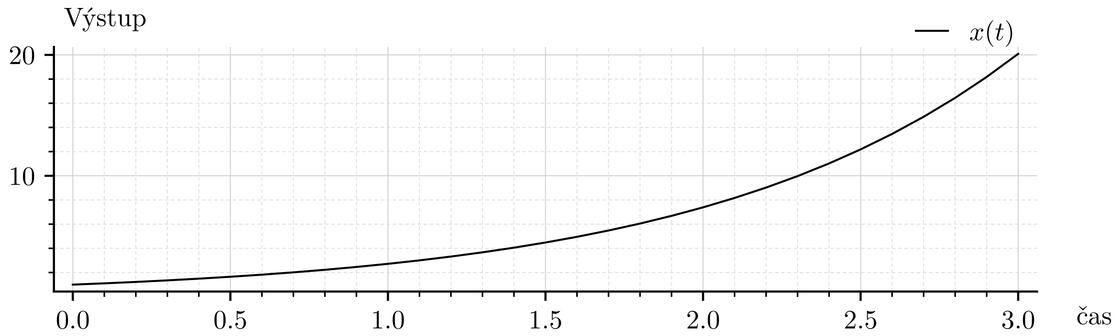
a overte, že URO je stabilný. Vysvetlite. Vyskúšajte rôzne hodnoty zosilnenia k.

4. Nech začiatočný stav sústavy $x(0) = 1$. Zvoľte konkrétnu hodnotu parametra a tak aby sústava (1) bola **nestabilná**. Pridajte k riadenému systému regulátor daný nasledovne:

$$u = -k\,x; \qquad \dot{k} = x^2 \tag{3}$$

Simuláciou vyšetrite stabilitu URO.

5. Overte, že regulátor z predchádzajúcej úlohy zabezpečí stabilizáciu URO pre rôzne hodnoty a a rôzne hodnoty začiatočného stavu $x(0)$ (vyskúšajte rôzne). Teda regulátor je adaptívny! Vysvetlite. . .



Obr. 1: Výsledok numerickej simulácie systému (4) pre $a = 1$ pri začiatočnom stave $x(0) = 1$.

2 Viac k téme cvičenia prvého

Zaoberáme sa systémom, ktorého vhodným modelom je diferenciálna rovnica v tvare

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t) \tag{4}$$

kde $x(t)$ je výstupná veličina, $u(t)$ je vstupná veličina a konštanta a je parameter riadeného systému.

Nech je známe, že riadený systém je nestabilný. To znamená, že parameter a je kladné číslo. Nie je známa hodnota parametra a, ale je známe jeho znamienko. Keďže riadený systém je nestabilný, po vychýlení z rovnovážneho stavu (rovnovážnej polohy) sa výstupná veličina nevráti na hodnotu v rovnovážnom stave.

Úlohou je navrhnúť taký riadiaci systém, ktorý zabezpečí, že výstupná veličina sa vráti na hodnotu v rovnovážnom stave napriek tomu, že jej začiatočná hodnota (začiatočný stav) je iná ako v rovnovážnom stave. Teda začiatočný stav riadeného systému je vychýlený z rovnovážneho stavu.

Mimochodom, rovnica (4) je dynamický systém, lineárny systém a rád systému je 1 (lineárny dynamický systém 1. rádu). Z toho vyplýva, že v rovnovážnom stave je hodnota výstupu $y(t)$ nulová.

Diferenciálnu rovnicu (4) je možné (pri uvažovaní nulových začiatočných podmienok) previesť do tvaru prenosovej funkcie. Ak sa uváži, že

$$sx = ax + u \tag{5}$$

kde s je Laplaceov operátor, pričom tu plní funkciu časovej derivácie, potom možno písať

$$sx - ax = u \tag{6a}$$
$$(s - a)\, x = u \tag{6b}$$
$$\frac{x}{u} = \frac{1}{(s - a)} \tag{6c}$$

čo je prenosová funkcia zodpovedajúca systému (4). Charakteristický polynóm je $(s - a)$ a koreňom tohto polynómu je (číslo) a. Keďže je známe, že systém je nestabilný, potom pól systému, teda koreň charakteristického polynómu leží v pravej polrovine komplexnej roviny. To znamená, že $a > 0$.

Samotný riadený systém

S využitím numerickej simulácie ukážme, že systém (4) je pre $a > 0$ nestabilný. Pri tomto overení je vstupná veličina systému $u(t)$ nepodstatná. Preto je nastavená na nulovú hodnotu. Nech začiatočná hodnota stavovej veličiny $x(0) = 1$ a nech hodnota parametra $a = 1$. Simulujme 3 časové jednotky. Výsledok numerickej simulácie je na obr. 1.

Formalizácia požiadaviek na kvalitu riadenia

Úlohou je aby sa výstupná veličina vrátila na nulovú hodnotu (do rovnovážneho stavu). Ale ako rýchlo sa tam má vrátiť? Aké sú požiadavky na prechodný dej pri činnosti riadiaceho systému?

Nech sú tieto požiadavky premietnuté do akéhosi vzorového dynamického systému, ktorý má stavovú veličinu $x_m(t)$. Tento vzorový systém je

$$\dot{x}_m(t) = -a_m x_m(t) \tag{7}$$

Jeho parametrom je a_m. Ak bude $a_m > 0$, potom bude tento systém stabilný a teda vždy sa ustáli v rovnovážnom stave, to je v tomto prípade samozrejme nula. Pól systému je $-a_m$. Voľbou pólu sa volí dynamika s akou sa systém bude vracať do rovnovážneho stavu. Tento vzorový systém teda zodpovedá úlohe, ktorú máme, a navyše úplne presne špecifikuje akékoľvek iné požiadavky, ktoré nemusia priamo plynúť zo zadania úlohy.

Teoretická existencia ideálneho riadiaceho systému

Od riadiaceho systému chceme aby pre riadený systém (4) zabezpečil, že výstupná veličina riadeného systému (4) $x(t)$ sa bude správať práve tak ako veličina $x_m(t)$. V ideálnom prípade je teda odchýlka $e(t) = x(t) - x_m(t)$ nulová. Je vôbec možné zostaviť taký riadiaci systém?

Uvažujme nasledujúci predpis pre výpočet hodnoty akčného zásahu $u(t)$.

$$u(t) = -k^* x(t) \tag{8}$$

Zovšeobecnene budeme takýto predpis nazývať zákon riadenia. Predpisuje ako sa vypočíta akčný zásah. Zákon riadenia obsahuje dva prvky. Signál $x(t)$, ktorý je spätnou väzbou od riadeného systému, keďže $x(t)$ je výstupom riadeného systému, a druhým prvkom zákona riadenia je parameter k^*.

Dosaďme za $u(t)$ v riadenom systéme. Získa sa tak rovnica uzavretého regulačného obvodu (URO). V tomto prípade v tvare

$$\dot{x}(t) = ax(t) - k^* x(t) \tag{9a}$$
$$\dot{x}(t) = (a - k^*)\, x(t) \tag{9b}$$

Pripomeňme, že je žiadané aby odchýlka $e(t) = x(t) - x_m(t)$ bola nulová. Je zrejmé, že ak by platilo $(a - k^*) = -a_m$, potom

$$\dot{x}(t) = -a_m x(t) \tag{10}$$

URO a uvedený vzorový systém (7) by teda mali úplne rovnaký predpis (rovnakú rovnicu). Samozrejme, v URO vystupuje signál $x(t)$ a vo vzorovom systéme vystupuje signál $x_m(t)$. Inak sú však tieto dva systémy úplne rovnaké. To znamená, že možno písať $x(t) = x_m(t)$ a teda daná celková úloha je splnená.

Týmto sa ukázalo, že je možné zostaviť taký riadiaci systém, teda nájsť taký zákon riadenia, ktorý rieši danú úlohu.

V tomto prípade sme našli zákon riadenia (8), ku ktorému prislúcha tzv. podmienka zhody, čo v tomto prípade je

$$(a - k^*) = -a_m \tag{11}$$

Ide o podmienku zhody medzi URO a istým vzorovým systémom, ktorý sa vo všeobecnosti nazýva Referenčný model (RM). RM predpisuje ako sa má správať URO.

Pre riešenie úlohy tohto typu teda v prvom rade musí existovať *podmienka zhody* čo je, pochopiteľne, istá rovnica a táto rovnica musí byť riešiteľná. Neznámou je samozrejme parameter zákona riadenia. V tomto prípade k^*. Teoretické riešenie je

$$a - k^* = -a_m \tag{12a}$$
$$k^* = a_m + a \tag{12b}$$

Konkrétnu hodnotu parametra k^* však nevieme určiť pretože nepoznáme konkrétnu hodnotu parametra a. Ale vieme, že vôbec existuje ideálne k^*. To je veľmi, veľmi dôležité!

Zákon riadenia s premenlivým parametrom

Zákon riadenia (8), ktorý má konštantný parameter k^*, teda nevieme použiť, pretože nevieme vypočítať k^*. Zachovajme ale štruktúru zákona riadenia (aby stále existovali riešiteľné podmienky zhody) a neznámy parameter k^* nahraďme parametrom, ktorému dovolíme meniť sa v čase. Adaptovať sa. Adaptovať sa tak, aby sme splnili úlohu. Adaptívny zákon riadenia nech teda je

$$u(t) = -k(t)x(t) \tag{13}$$

kde $k(t)$ je časovo premenlivý parameter.

Parameter $k(t)$ sa vlastne môže meniť akokoľvek. Cieľom však je splnenie úlohy. To znamená, že ideálne $e(t) = x(t) - x_m(t) = 0$. To si však vyžaduje mať možnosť určiť k^*. Žiadať teda $e(t) = 0$ v tomto prípade nikam nevedie. Žiadajme ale aby $e(t) \to 0$, teda že odchýlka $e(t)$ sa asymptoticky blíži k nule. Pritom sa však nevylučuje aby mohla byť aj nulová.

Ak $e(t) \to 0$ potom vlastne $x(t) \to x_m(t)$, teda signál $x(t)$ sa hodnotou približuje k signálu $x_m(t)$. Aká je vlastne hodnota signálu $x_m(t)$? Predpisuje ju referenčný model (7). K rovnici (7) chýba explicitne napísaná začiatočná podmienka pre signál $x_m(t)$, teda $x_m(0)$. Úlohou je aby sa $x(t)$ dostalo do rovnovážneho stavu. Teda do nuly. Signál $x_m(t)$ by teda mal byť nulový. A prečo nie hneď aj od začiatku? Nech teda $x_m(0) = 0$. Potom vzhľadom na rovnicu (7) je $x_m(t) = 0$ po celý čas! Ak teda chceme $e(t) \to 0$, potom máme $x(t) \to 0$. Alebo inak povedané $e(t) = x(t) - x_m(t) = x(t) - 0$. Teda $e(t) = x(t)$.

Spôsob ako meniť (adaptovať) parameter zákona riadenia

Stále však nie je zrejmé ako adaptovať (meniť) parameter $k(t)$ tak aby sme splnili modifikovanú požiadavku $e(t) \to 0$.

URO s adaptívnym zákonom riadenia (13) je

$$\dot{x}(t) = (a - k(t))\, x(t) \qquad x(0) \neq 0 \tag{14}$$

Ak by platilo $(a - k(t)) < 0$, potom by bol URO stabilný a $x(t) \to 0$ pri akejkoľvek začiatočnej hodnote $x(0)$. A to je presne požiadavka pre splnenie úlohy. Hodnota parametra a je však neznáma, ale je zrejmé, že ak bude $k(t)$ dostatočne veľké (vzhľadom na a), potom celý výraz $(a - k(t))$ bude záporný.

Ako však získať informáciu o tom kedy je $k(t)$ dostatočne veľké? Ak nie je dostatočne veľké, potom je vo všeobecnosti odchýlka $e(t)$ nenulová! Teda pri nenulovej $e(t)$ treba $k(t)$ meniť (v čase), konkrétnejšie, treba zvyšovať jeho hodnotu. Len ak by platilo, že $e(t) = 0$, len vtedy možno prestať meniť $k(t)$.

Zmena parametra $k(t)$ v čase je jeho časová derivácia $\dot{k}(t)$.

Pre vzťah

$$\dot{k}(t) = e^2(t) \tag{15}$$

platí, že ak je $e(t)$ nenulové, tak zmena $k(t)$ je kladná, a len ak $e(t) = 0$ aj zmena $k(t)$ je nulová. Pomocou tohto predpisu pre $\dot{k}(t)$ teda dosiahneme také zmeny $k(t)$ v čase, aké sú potrebné pre dosiahnutie $x(t) \to 0$ a teda $e(t) \to 0$, čo je splnenie stanoveného cieľa!

Rovnica (15) predpisuje ako sa má meniť parameter zákona riadenia tak aby bol cieľ riadenia splnený. Vo všeobecnosti sa takýto predpis nazýva zákon adaptácie.

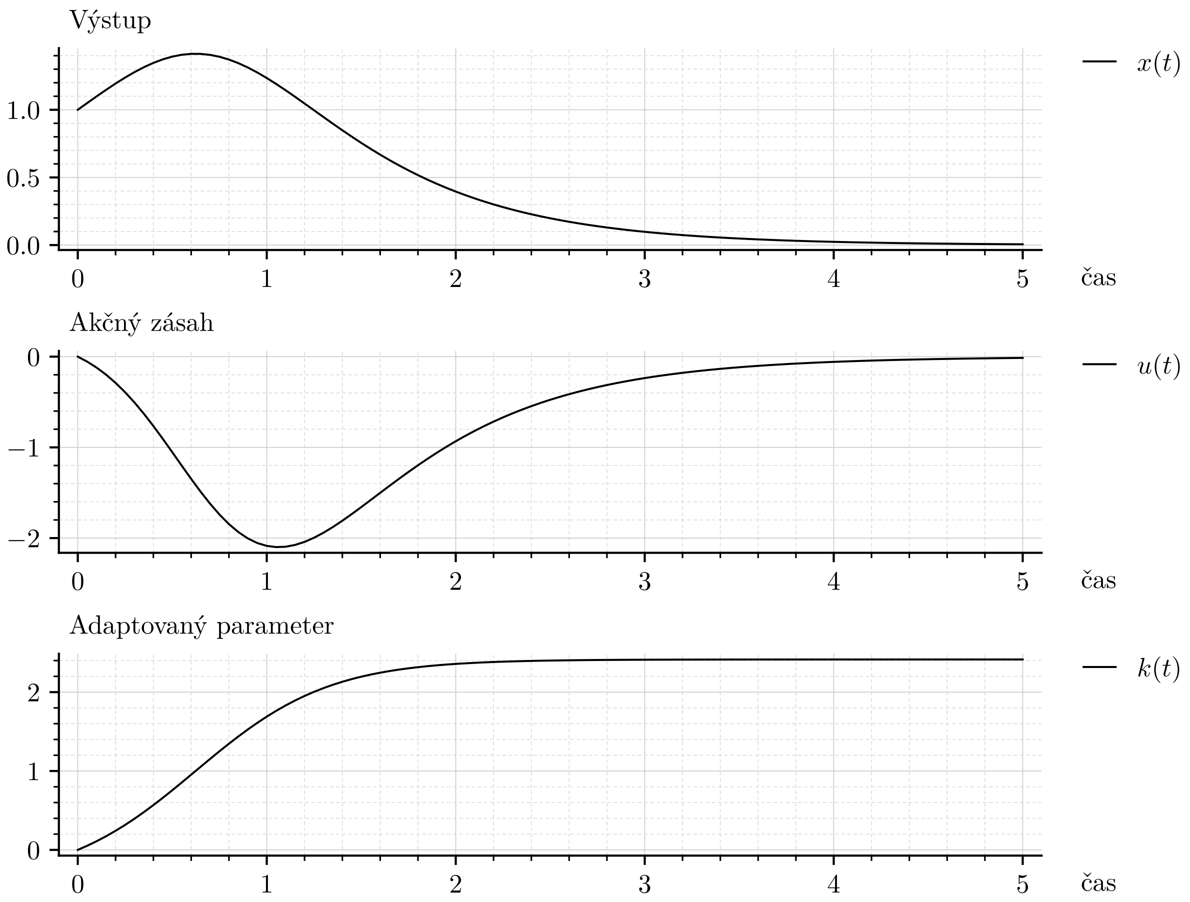
Mimochodom, keďže vieme, že v tomto prípade platí $e(t) = x(t)$, potom (15) možno písať aj v tvare

$$\dot{k}(t) = x^2(t) \tag{16}$$

ba dokonca aj

$$\dot{k}(t) = e(t)x(t) \tag{17}$$

čo by bol pre skúsenejšieho v tejto oblasti azda najvhodnejší zápis. V tomto prípade praktickejším je tvar (16), pretože si to nevyžaduje žiadny ďalší signál, len $x(t)$, ktorý je samozrejme k dispozícii.



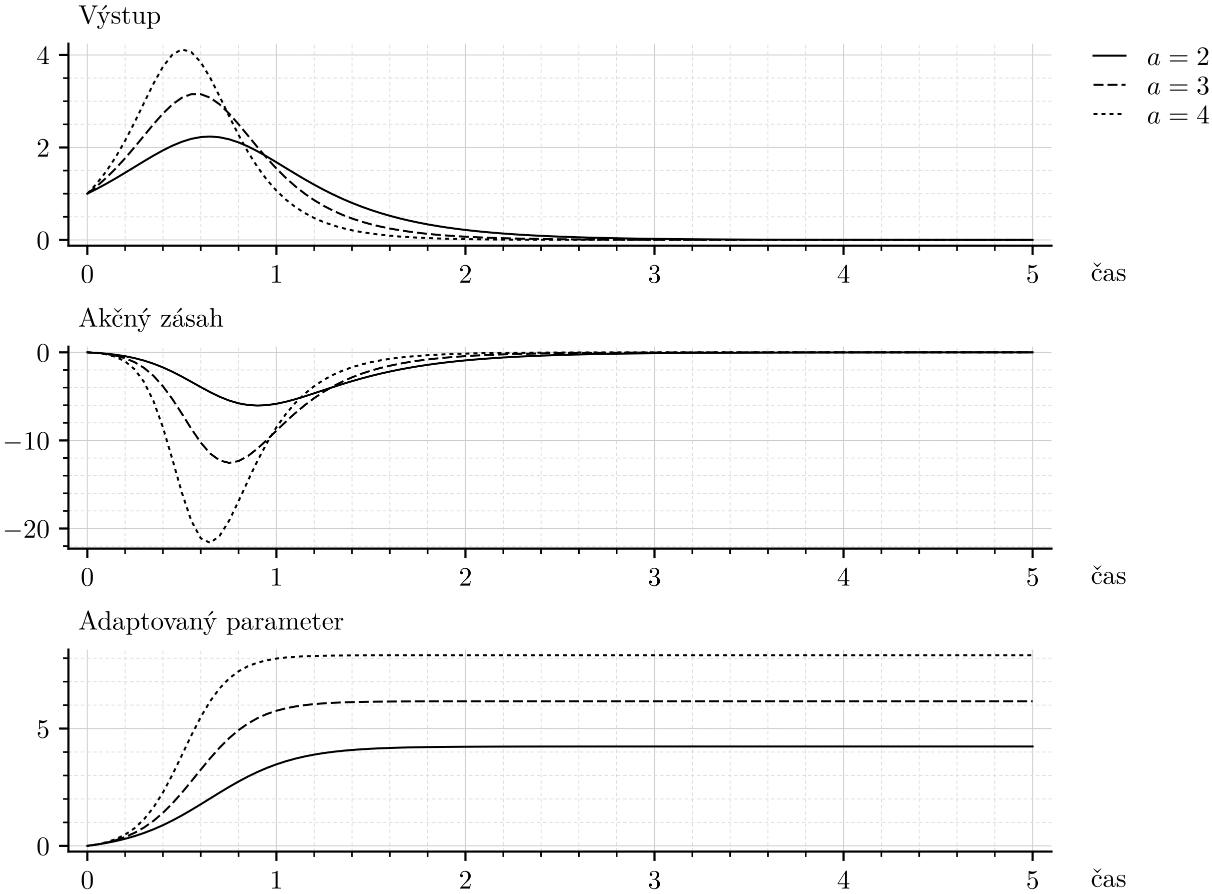
Obr. 2: Výsledok numerickej simulácie adaptívneho riadiaceho systému pre $a = 1$ pri začiatočnom stave $x(0) = 1$.

Overenie adaptívneho riadiaceho systému

Zákon adaptácie (16) teraz dopĺňa zákon riadenia (13). K uvedenému ešte pre úplnosť prislúcha aj referenčný model čo však v tomto prípade možno zanedbať. Tieto súčasti spolu tvoria adaptívny riadiaci systém, ktorý spĺňa danú úlohu.

S využitím numerickej simulácie ukážme, že uvedený adaptívny riadiaci systém stabilizuje riadený systém, t.j. pri začiatočnom stave mimo rovnovážneho stavu zabezpečí asymtotické približovanie sa výstupu riadeného systému k rovnovážnemu stavu. Na obr. 2 sú výsledky použitia tohto adaptívneho riadiaceho systému pre prípad keď je v riadenom systéme $a = 1$ a $x(0) = 1$. Je možné pozorovať vyššie uvedené predpoklady a teda, že parameter $k(t)$ sa zvyšuje až pokým neprekročí hodnotu parametra a. Vtedy sa URO stane stabilným a jeho stavová veličina sa z hodnoty, ktorú práve má, prirodzene začne vracať do rovnovážneho stavu, teda na hodnotu nula. Ďalej rýchlosť zmeny parametra $k(t)$ klesá až sa napokon ustáli. Ustáli sa na hodnote vyššej ako je hodnota parametra a.

Ten istý adaptívny riadiaci systém sa bude, samozrejme, správať kvalitatívne rovnako pre rôzne hodnoty parametra riadeného systému a (a pre rôzne začiatočné stavy riadeného systému). Na obr. 3 sú pre ilustráciu znázornené rôzne prípady hodnoty parametra a. Tým je prezentovaná schopnosť adaptácie uvedeného riadiaceho systému.



Obr. 3: Výsledok simulácie adaptívneho riadiaceho systému pre rôzne hodnoty parametra a. Začiatočný stav riadeného systému je v každom prípade $x(0) = 1$.

3 Formálny opis adaptívnej stabilizácie pre systém 1. rádu

Nasledujúci jednoduchý príklad ilustruje situáciu, v ktorej neznalosť hodnoty parametra riadeného systému znemožňuje návrh riadiaceho systému. Adaptívne riadenie rieši tento problém a umožňuje navrhnúť riadiaci systém, ktorý zabezpečí splnenie cieľa riadenia pre akúkoľvek hodnotu neznámeho parametra sústavy.

Uvažujme riadený systém v tvare

$$\dot{x} = a\,x + u \tag{18}$$

kde $x(t)$ je stavová veličina systému, $u(t)$ je akčný zásah (výstup) regulátora a parameter a je neznáma konštanta. Rovnovážny bod systému je v bode $x = 0$. Cieľom riadenia je aby stavová veličina x bola asymptoticky stabilná, teda aby po vychýlení stavu x z rovnovážneho bodu sa stav postupne približoval (asymptoticky) naspäť k rovnovážnemu bodu. To platí pre nasledujúci systém:

$$\dot{x} = -a_m\,x \tag{19}$$

kde konštanta $a_m > 0$.

Ak by bol parameter a známy, potom lineárny regulátor v tvare

$$u = -k\,x \qquad k > |a| \tag{20}$$

zabezpečí splnenie úlohy. V takomto prípade nezáleží, či samotný riadený systém (bez riadenia, $u = 0$) stabilný je alebo nie je. Poznáme absolútnu hodnotu $|a|$ a zosilnenie k zvolíme väčšie ako $|a|$. Potom je zrejmé, že

$$\dot{x} = a\,x + (-k\,x) = (a - k)\;x \tag{21}$$

je rovnica uzavretého regulačného obvodu (URO) spĺňajúceho cieľ riadenia, pretože v najhoršom (hraničnom) prípade, kedy URO je stabilný, nie však asymptoticky stabilný, ak $k = |a|$ platí $(a - |a|) \leq 0$ pre každé a.

Pre návrh regulátora (20) v podstate stačí poznať horné ohraničenie parametra a.

Na druhej strane, parameter a sa môže s časom meniť a jeho horná hranica nemusí byť známa. Pre nevhodne zvolené k potom môže nastať situácia $a > k > 0$. Vtedy URO je nestabilný. Pre neznámu hornú hranicu parametra a nie je možné navrhnúť riadiaci systém, ktorý vždy zabezpečí splnenie úlohy riadenia — stabilný URO.

Riešenie tejto úlohy metódami Adaptívneho riadenia, ktoré budú popísané podrobne neskôr, vedie na nasledovné:

Riadiaci systém v tvare

$$u = -k\,x; \qquad \dot{k} = x^2 \tag{22}$$

zabezpečí, že všetky signály v URO sú ohraničené a x s časom konverguje do nuly pričom *nezáleží* na hodnote parametra a. Požiadavkou nie je presné určenie hodnoty parametra a, ale len stabilizácia systému. Nie je požadovaná ani presná hodnota parametra k. Adaptívny riadiaci systém len zabezpečí, že k je ohraničené, teda stabilné. Pre tento konkrétny jednoduchý príklad je zrejmé, že k sa ustáli na hodnote väčšej ako a, čo však nehovorí nič o presnej hodnote parametra a ani k.

Ukážme, že riadiaci systém (22) stabilizuje stavovú – výstupnú veličinu sústavy (18).

Najskôr upresníme cieľ riadenia. Cieľom je aby x konvergovalo k nule pre čas $t \to \infty$. Žiadanou hodnotou pre x je $r = 0$. Uvažujeme všeobecný (akýkoľvek) začiatočný stav x_0. Začiatok je v čase $t = 0$, teda: $x(0) = x_0$. Cieľ si vyžaduje aby URO bol stabilný. Preto nech želaný pól URO je $-a_m$, kde $a_m > 0$ sa volí podľa požiadaviek na rýchlosť regulácie. Potom referenčný (ideálny, želaný) priebeh stavu x opisuje rovnica

$$\dot{x}_m = -a_m\,x_m \tag{23}$$

kde x_m stavová veličina ideálneho URO. Je prirodzené očakávať (lepšie povedané, zvoliť si), že začiatočný stav $x_m(0) = 0$ z čoho vyplíva, že v ďalšom môžme uvažovať $x_m = 0$.

V ideálnom prípade, keď poznáme parameter a, vieme určiť pre zákon riadenia „ideálne“ k^*:

$$u = -k^*\,x; \qquad k^* = a + a_m \tag{24}$$

Vtedy sa URO presne zhoduje s ideálnym URO, teda s referenčným modelom (23)

$$\dot{x} = a\,x + (-k^*\,x) = (a - k^*)\,x = (a - a - a_m)\,x = -a_m\,x \tag{25}$$

Pretože a je neznáme, k^* nevieme vypočítať a zákon riadenia (24) nemôže byť použitý.

Žiadaná hodnota pre stavovú veličinu x je $r = 0$ a žiadame aby sa hodnota parametra k približovala k ideálnej hodnote k^* pretože len vtedy bude pól URO v bode $-a_m$. Riadený systém vyjadríme ako funkciu ideálneho parametra k^* (teda tak aby rovnica obsahovala parameter k^*). Tento krok má súvislosť s tým, že ide v podstate o identifikáciu parametra k^* — bližšie vysvetlenie neskôr. Urobíme to jednoducho pripočítaním a odpočítaním „ideálneho“ zákona riadenia (24) k rovnici riadeného systému (18), potom riadený systém má tvar

$$\dot{x} = a\,x - k^*\,x + k^*\,x + u \tag{26}$$

Pretože $a - k^* = -a_m$ máme

$$\dot{x} = -a_m\,x + k^*\,x + u \tag{27}$$

Definujme tzv. *adaptačnú odchýlku.* Ak adaptačná odchýlka nie je nulová je potrebné adaptovať riadiaci systém tak aby sa skutočný URO zhodoval so želaným URO. Adaptačná odchýlka má tvar

$$e = x - x_m \tag{28}$$

potom platí:

$$\dot{x} - \dot{x}_m = -a_m\, x + k^*\, x + u - (-a_m)\, x \tag{29a}$$
$$\dot{e} = -a_m\,(x - x_m) + k^*\, x + u \tag{29b}$$
$$\dot{e} = -a_m\, e + k^*\, x + u \tag{29c}$$

Zavedením adaptačnej odchýlky sme posunuli začiatok súradnicového systému stavového priestoru do rovnovážneho bodu riadeného systému. Inými slovami, rovnovážny stav veličiny e z rovnice (29c) je v začiatku stavového priestoru riadeného systému.

Uvažujeme použitie zákona riadenia v tvare $u = -k\, x$, po dosadení do (29c):

$$\dot{e} = -a_m\, e + k^*\, x - k\, x \tag{30}$$
$$\dot{e} = -a_m\, e - \theta\, x \tag{31}$$

kde sme zaviedli pojem *chyba nastavenia parametrov zákona riadenia*, ktorý označíme θ, a v tomto prípade $\theta = k - k^*$.

Chceme dokázať, že riadiaci systém (22) stabilizuje uzavretý regulačný obvod. Platí $\dot{\theta} = \dot{k} - \dot{k^*}$. Avšak $k^* =$ konšt. a teda $\dot{k^*} = 0$, preto $\dot{\theta} = \dot{k} = x^2$. Vyšetrením stability systému diferenciálnych rovníc v tvare

$$\dot{e} = -a_m\, e - \theta\, x \tag{32a}$$
$$\dot{\theta} = x^2 \tag{32b}$$

dokážeme stabilitu URO.

Zvoľme kandidáta na Ljapunovovu funkciu

$$V = \frac{(e(t))^2}{2} + \frac{(\theta(t))^2}{2} \tag{33}$$

Derivácia (33) podľa času je

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\, 2\, e(t)\, \dot{e}(t) + \frac{1}{2}\, 2\, \theta(t)\, \dot{\theta}(t) = e(t)\, \dot{e}(t) + \theta(t)\, \dot{\theta}(t) \tag{34}$$

Do (34) dosadíme za $\dot{e}$ a $\dot{\theta}$, máme

$$\dot{V} = e\, (-a_m\, e - \theta\, x) + \theta\, x^2 \tag{35a}$$
$$\dot{V} = -a_m\, e^2 - \theta\, x\, e + \theta\, x^2 \tag{35b}$$

Pretože $e = x - x_m$ a uvažujeme $x_m = 0$ a teda $e = x$, tak rovnicu (35b) možno písať v tvare

$$\dot{V} = -a_m\, x^2 - \theta\, x^2 + \theta\, x^2 \tag{36a}$$
$$\dot{V} = -a_m\, x^2 \tag{36b}$$

Pre systém (32) sme našli kladne definitnú funkciu V (Tá funkcia má skoro pre všetky x a θ kladnú hodnotu, len pre $x = 0$ a $\theta = 0$ má nulovú hodnotu. Tá nulová hodnota je práve v stacionárnom bode systému (32), ktorého stabilitu vyšetrujeme). Derivácia tejto funkcie je vo všeobecnosti záporne semidefinitná (Je rovná nule v stacionárnom – nulovom bode, a inde môže byť len záporná alebo tiež rovná nule). Teda systém je stabilný. Presný zaver o stabilite rovnovážneho stavu systému (32) v zmysle všeobecnej teórie stability podľa Ljapunova je, že rovnovážny stav je stabilný (neutrálne) podľa všetkých premenných (x a θ) a asymptoticky stabilný podľa premennej x. Prakticky to znamená, že premenná x dosiahne nulovú hodnotu po skončení prechodového deja, ale premenná θ (a teda aj k) len konečnú hodnotu. Tým sme ukázali vlastnosti, ktoré zabezpečí *adaptívny* riadiaci systém (22).

4 Otázky a úlohy

1. Vyšetrite stabilitu systému

$$\dot{e}(t) = -a_m\, e(t) + \theta(t)\, x(t)$$
$$\dot{\theta}(t) = -e(t)x(t)$$

kde $a_m > 0$.

5 Príklad realizácie niektorých úloh cvičenia prvého

Konkrétne v tejto časti sa budeme venovať najmä numerickému riešeniu diferenciálnych rovníc (ktoré vystupujú v našom cvičení prvom) s využitím, pochopiteľne, ODE solvera. Načrtneme však aj všeličo iné. Používa sa tu Python[1].

5.1 Takpovediac základný prístup

Uvažujme riadený systém v tvare

$$\dot{x}(t) = a\,x(t) + u(t) \tag{37}$$

kde $x(t)$ je stavová veličina sytému, $u(t)$ je akčný zásah (výstup) regulátora. Parameter a je neznáma konštanta.

Funkcia, ktorá realizuje diferenciálnu rovnicu riadeného systému, nech je v nasledujúcom tvare, kde sa hneď aj predpokladá, že $u(t) = 0$.

Výpis kódu 1: Súbor `ar02_file02.py`

```python
def fcn_difRovnice_01(x, t, param_a):

    a = param_a

    u = 0

    dotx = a*x + u

    return dotx
```

Zostavme simulačnú schému pre riadený systém. Zvoľme konkrétnu hodnotu parametra a tak aby riadený systém bol stabilný. Nech začiatočný stav je $x(0) = 1$ a $u(t) = 0$. Simuláciou (pre vhodný časový úsek) ukážme, že $x = 0$ je rovnovážny stav riadeného systému.
Simulačnú schému nech realizuje nasledujúca funkcia:

Výpis kódu 2: Súbor `ar02_file02.py`

```python
def fcn_simSch_01(t_start, t_final, T_s, param_a):

    #-----------------------------------------
    t_log = np.arange(sim_t_start, sim_t_final+sim_T_s, sim_T_s).reshape(-1,1)

    #-----------------------------------------
    x_0 = 1

    #-----------------------------------------
    odeOut = odeint(fcn_difRovnice_01,
                    x_0,
                    t_log[:,0],
                    args=(param_a,)
                    )

    return [t_log, odeOut]
```

Nastavme a spustime simuláciu:

Výpis kódu 3: Súbor `ar02_file02.py`

```python
# Nastavenia simulacie

sim_t_start = 0
sim_t_final = 3
sim_T_s = 0.1

param_a = -1

# %% ----------------------------------------------------------

# Simulacia

```

[1]Rovnako dobre by sa to dalo zostrojiť v akomkoľvek programovacom jazyku, v ktorom máme k dispozícii ODE solver. Prípadne aj ten ODE solver by sme si naprogramovali. . .

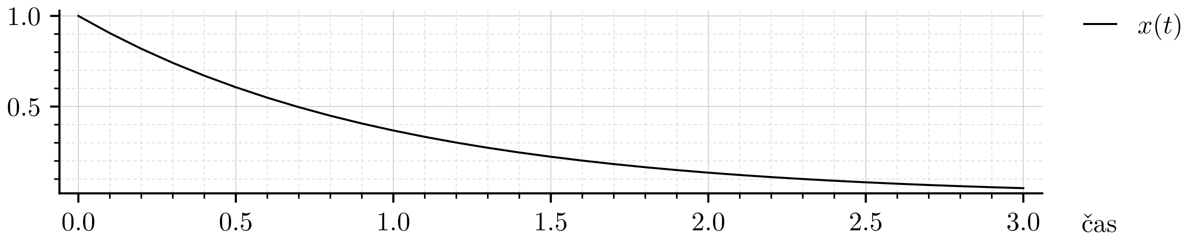
```
t_log, x_log, = fcn_simSch_01(sim_t_start, sim_t_final, sim_T_s,
    param_a)

```

Všetko potrebné je teraz zaznamenáné v premenných `t_log` a `x_log`. Nakreslime obrázok (pre prehľadnosť je kód kreslenia obrázku v samostatnom súbore a nie priamo tu v nasledujúcej bunke):

Výpis kódu 4: Súbor `ar02_file02.py`

```
# Obrazok

figName = 'figsc_ar02_fig03'
figNameNum = 0

exec(open('./misc/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())

```

Výstup



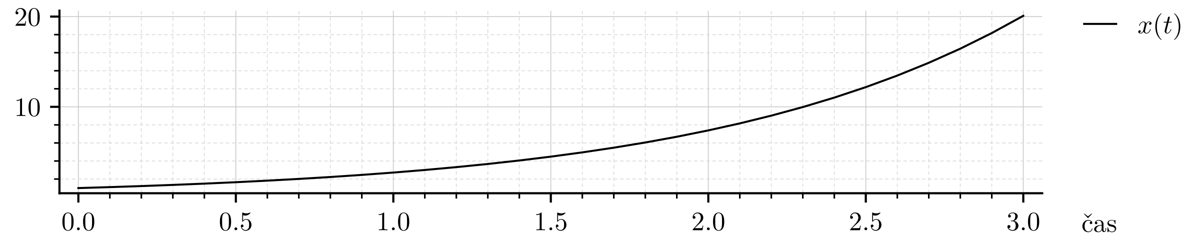
Obr. 4

V prípade, že parameter a je zvolený tak aby bol riadený systém nestabilný, výsledok je:

Výpis kódu 5: Súbor `ar02_file02.py`

```
param_a = 1

# Simulacia

t_log, x_log, = fcn_simSch_01(sim_t_start, sim_t_final, sim_T_s,
    param_a)

# Obrazok

figName = 'figsc_ar02_fig03'
figNameNum = 1

exec(open('./misc/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())

```

Výstup



Obr. 5

Nech začiatočný stav riadeného systému je $x(0) = 1$. Ponechajme konkrétnu hodnotu parametra a tak aby riadený systém bol nestabilný. Pridajme k riadenému systému riadiaci systém daný nasledovne:

$$u = -k\,x; \qquad \dot{k} = x^2 \tag{38}$$

Simuláciou vyšetrime stabilitu URO.
Funkcia, ktorá realizuje potrebné diferenciálne rovnice nech je nasledovná:

Výpis kódu 6: Súbor `ar02_file02.py`

```python
def fcn_difRovnice_02(x, t, param_a):

    x, k = x

    a = param_a

    dotk = x**2

    u = -k*x

    dotx = a*x + u

    return [dotx, dotk]

```

Simulačná schéma, opäť realizovaná ako funkcia:

Výpis kódu 7: Súbor `ar02_file02.py`

```python
def fcn_simSch_02(t_start, t_final, T_s, param_a):

    #----------------------------------------
    t_log = np.arange(sim_t_start, sim_t_final+sim_T_s, sim_T_s).
    reshape(-1,1)

    #----------------------------------------
    x_0 = [1, 0]

    #----------------------------------------
    odeOut = odeint(fcn_difRovnice_02,
                    x_0,
                    t_log[:,0],
                    args=(param_a,)
                    )

    return [t_log, odeOut]

```

Nastavenie a spustenie simulácie, pričom pripomeňme, že parameter a je stále nastavený tak, aby riadený systém bol nestabilný.

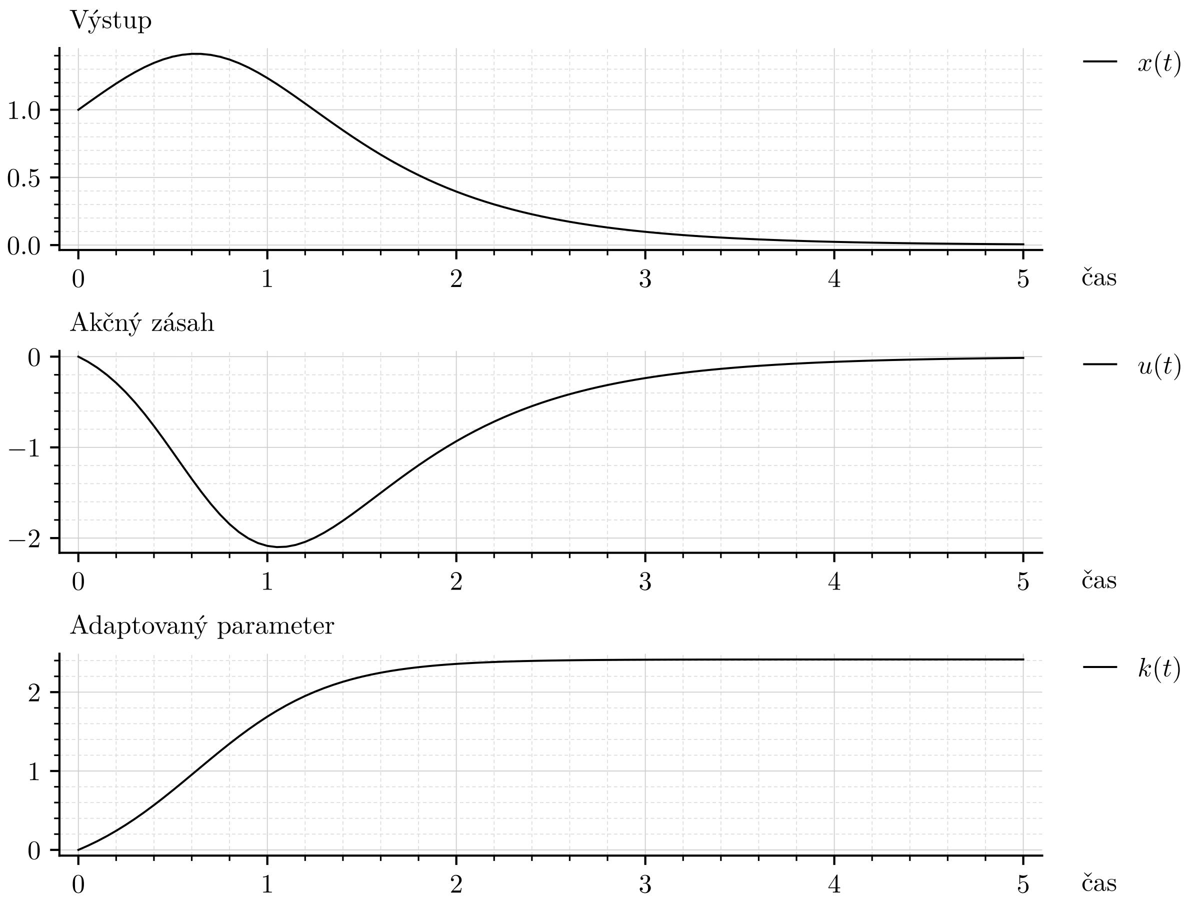
Výpis kódu 8: Súbor `ar02_file02.py`

```python
# Nastavenia simulacie

sim_t_start = 0
sim_t_final = 5
sim_T_s = 0.05

# Simulacia

t_log, x_log, = fcn_simSch_02(sim_t_start, sim_t_final, sim_T_s,
    param_a)

```

Obrázok, ktorý zobrazuje okrem výstupnej veličiny riadeného systému aj iné veličiny potrebné pre posúdenie stability celého uzavretého regulačného obvodu.

Výpis kódu 9: Súbor `ar02_file02.py`

```python
# Obrazok

figName = 'figsc_ar02_fig01'
figNameNum = 1

exec(open('./misc/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())

```



Obr. 6

Cieľ riadenia je splnený, čo v tomto prípade znamená, že výstupná veličina sa približuje k nulovej hodnote, a všetky signály uzavretého regulačného obvodu sú ohraničené. To znamená, že URO je stabilný.

Podrobnejšia diskusia z pohľadu Adaptívneho riadenia je nad rámec konkrétne tejto časti krátkych poznámok.

5.2 O realistickej implementácii riadiaceho systému tu uvedeného

Uvažujme riadený systém v tvare

$$\dot{x}(t) = a\,x(t) + u(t) \tag{39}$$

kde $x(t)$ je stavová veličina systému, $u(t)$ je akčný zásah (výstup) regulátora. Parameter a je neznáma konštanta.

Funkcia, ktorá realizuje diferenciálnu rovnicu riadeného systému, nech je v tvare:

Výpis kódu 10: Súbor `ar02_file03.py`

```python
def fcn_difRovnice_01(x, t, a, u):

    dotx = a*x + u

    return dotx
```

Nech začiatočný stav riadeného systému je $x(0) = 1$ a nech hodnota parametra a je taká aby riadený systém bol nestabilný. Pridajme k riadenému systému riadiaci systém daný nasledovne:

$$u = -k\,x; \qquad \dot{k} = x^2 \tag{40}$$

Simulačná schéma, ktorá realizuje numerickú simuláciu riadeného systému pomocou ODE solvera, a zároveň realizuje istú implementáciu daného riadiaceho systému, je nasledovná:

Výpis kódu 11: Súbor ar02_file03.py

```python
def fcn_simSch_03(t_start, T_s, finalIndex, param_a):

    #-----------------------------------------
    # casovy vektor

    t_log = np.zeros([finalIndex, 1])
    t_log[0,:] = t_start

    #-----------------------------------------
    # vektor stavu riadeneho systemu

    x_0 = np.array([1])

    x_log = np.zeros([finalIndex, len(x_0)])
    x_log[0,:] = x_0

    #-----------------------------------------
    # vektor adaptovaneho parametra

    k_log = np.zeros([finalIndex, 1])

    #-----------------------------------------
    # vektor akcneho zasahu

    u_log = np.zeros([finalIndex, 1])

    #-----------------------------------------

    timespan = np.zeros(2)
    for idx in range(1, int(finalIndex)):

        #-------------------------------------
        # Riadeny system - simulacia (pomocou ODEsolvera)

        timespan[0] = t_log[idx-1,:]
        timespan[1] = t_log[idx-1,:] + T_s

        odeOut = odeint(fcn_difRovnice_01,
                        x_log[idx-1,:],
                        timespan,
                        args=(param_a, u_log[idx-1,:])
                        )

        x_log[idx,:] = odeOut[-1,:]
        t_log[idx,:] = timespan[-1]

        #-------------------------------------
        # Riadiaci system:

        # zakon adaptacie:
        deltk = x_log[idx-1,:]*x_log[idx-1,:]

        # adaptovany parameter (numericka integracia - vlastne sumator)
        k_log[idx,:] = k_log[idx-1,:] +  (deltk * T_s)

        # zakon riadenia:
        u_log[idx,:] = -k_log[idx-1,:] * x_log[idx-1,:]

    return [t_log, x_log, u_log, k_log]

```

Nastavme a spustime simuláciu:

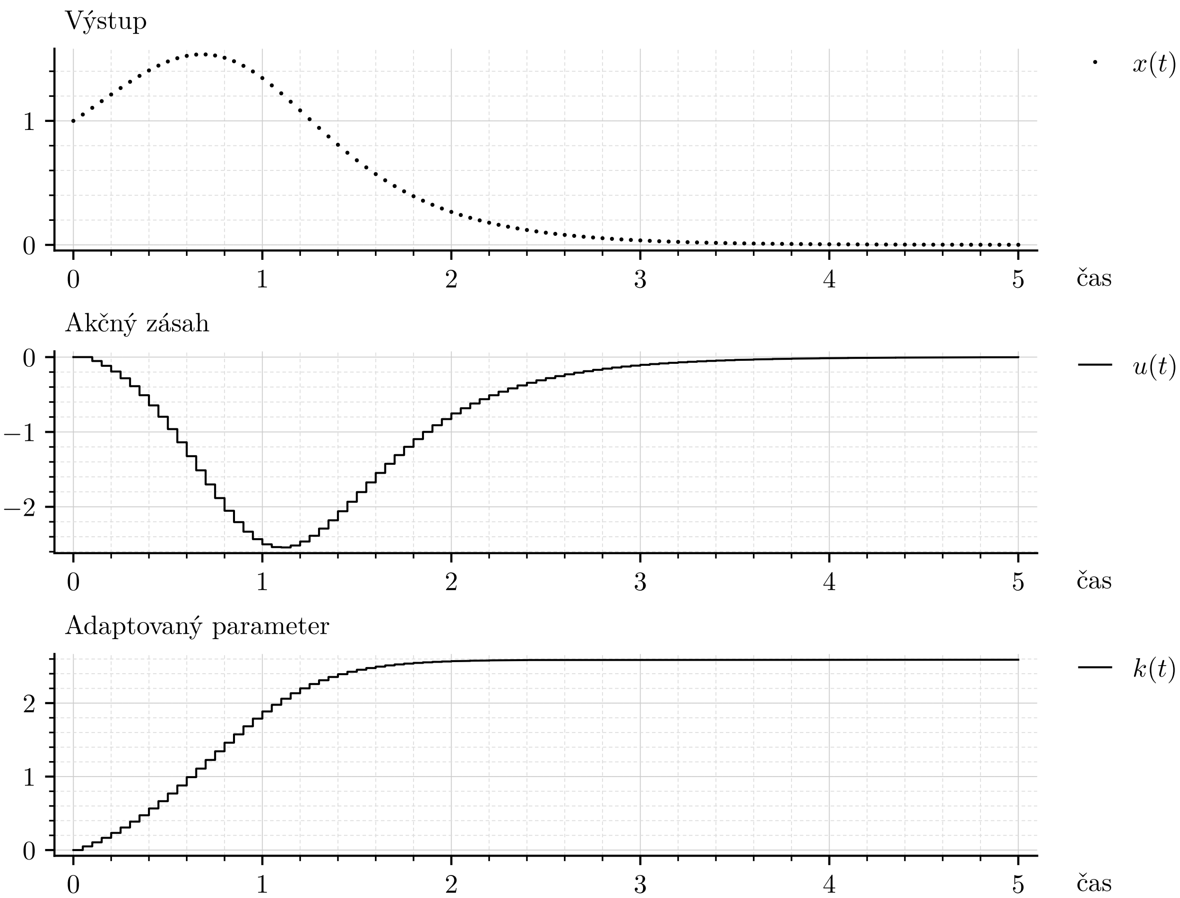
Výpis kódu 12: Súbor ar02_file03.py

```python
# Nastavenia simulacie
sim_t_start = 0
sim_t_final = 5
sim_T_s = 0.05
sim_finalIndex = int(((sim_t_final - sim_t_start)/sim_T_s) + 1)

param_a = 1

# Simulacia
t_log, x_log, u_log, k_log, = fcn_simSch_03(sim_t_start,
                                            sim_T_s,
                                            sim_finalIndex,
                                            param_a,
                                            )
```

Obrázok, ktorý zobrazuje okrem výstupnej veličiny riadeného systému aj iné veličiny potrebné pre posúdenie stability celého uzavretého regulačného obvodu.

Výpis kódu 13: Súbor `ar02_file03.py`

```
figName = 'figsc_ar02_f03_f01'
figNameNum = 0

exec(open('./misc/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())
```



Obr. 7

V čom je tá implementácia „realistická“? To je na diskusiu, ktorú tu autor neuvádza pretože je lenivý a naničhodný.

Doplnkový text

Obsah

Cieľom tohto textu je najmä uviesť vybrané výsledky Lyapunovovej teórie stability tak ako sú používané v ďalších častiach predmetu. K tomu je však potrebné pripomenúť niektoré pojmy z teórie systémov. Zároveň táto časť slúži na zoznámenie sa s označovaním a zapisovaním, aké je používané v rámci textov k predmetu. Všetky uvedené pojmy a princípy budú ilustrované pomocou názorných príkladov, kde skúmaným systémom bude kyvadlo.

1 Kyvadlo

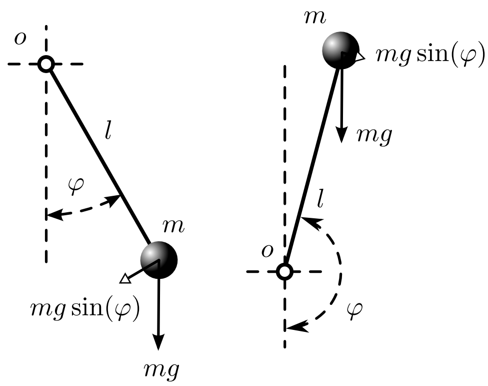
Uvažujme kyvadlo, ktorého kmity sú tlmené viskóznym trením s koeficientom β [kg m^2 s^{-1}]. Kyvadlo je na Obr. 1, kde hmotný bod s hmotnosťou m [kg] pripevnený na ramene so zanedbateľnou hmotnosťou a dĺžkou l [m] kmitá, o označuje os otáčania kolmú na rovinu, v ktorej kyvadlo kmitá, uhol medzi zvislicou a ramenom kyvadla je označený φ [rad] a gravitačné zrýchlenie g [m s^{-2}].

Pohybová rovnica opisujúca dynamiku rotačného pohybu kyvadla je v tvare

$$ml^2\ddot{\varphi} = -\beta\dot{\varphi} - mgl\sin\varphi + u \tag{1a}$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + mgl\sin\varphi = u \tag{1b}$$

kde u [kg m^2 s^{-2}] je externý moment sily pôsobiaci na rameno kyvadla, $\dot{\varphi}$ [rad s^{-1}] je uhlová rýchlosť a $\ddot{\varphi}$ [rad s^{-2}] je uhlové zrýchlenie ramena kyvadla.



Obr. 1: Kyvadlo

2 Niekoľko (dosť veľa) úvodných pojmov

2.1 Modelovanie systému

Rovnica (1) je modelom uvažovaného dynamického systému. Model je matematická reprezentácia v tomto prípade fyzikálneho systému. Model umožňuje uvažovať o systéme a predpovedať ako sa bude systém správať. Uvedený model opisuje vstupno-výstupné správanie sa dynamického systému, kde vstupom je externý moment sily u a výstupom je uhol φ, avšak budeme pracovať aj opisom systému v „stavovom priestore“.

Stav systému je súbor premenných (súbor veličín), ktoré sumarizujú minulosť systému pre potreby predpovede budúcnosti systému. Pre fyzikálny systém je stav zložený z premenných potrebných pre výpočet zmeny hmotnosti, hybnosti a energie. Kľúčovou otázkou pri vytváraní modelu je ako presne má byť táto zmena popísaná.

Stavové premenné tvoria vektor $x \in \mathbb{R}^n$, ktorý sa nazýva *stavový vektor*. Vstupy, pomocou ktorých je systém riadený, tvoria vektor vstupov $u \in \mathbb{R}^p$ a merateľné výstupy systému tvoria vektor výstupov $y \in \mathbb{R}^q$. V tomto prípade máme $p = q = 1$. Dynamický systém potom možno reprezentovať rovnicami v tvare

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{2a}$$
$$y = h(x, u) \tag{2b}$$

kde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ a $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ sú hladké funkcie. Model v takomto tvare nazývame *model v stavovom priestore*.

Rozmer stavového vektora sa nazýva *rád systému*. Systém (2) sa nazýva *časovo-invariantný* pretože funkcie f a h nie sú priamo závislé na čase t. Pri časovo-variantných systémoch sú. Model pozostáva z dvoch funkcií: funkcia f určuje rýchlosť zmeny stavového vektora ako funkciu stavu x a vstupu u, a funkcia h určuje merateľné výstupy ako funkciu stavu x a vstupu u.

Systém sa nazýva lineárny ak sú funkcie f a h lineárne vzhľadom na x a u. Lineárny model v stavovom priestore má tvar

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3a}$$
$$y = Cx + Du \tag{3b}$$

Tabuľka 1: Parametre kyvadla

Parameter	Hodnota	Jednotky
m	1	kg
l	1	m
g	$9,81$	m s^{-2}
β	$2 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{g/l}$	kg m^2 s^{-1}

kde A, B, C a D sú konštantné matice. Takýto systém sa nazýva lineárny a časovo-invariantný, v skratke LTI z anglického linear and time-invariant. Matica A sa nazýva dynamická matica, matica B sa nazýva vstupná matica, matica C sa nazýva výstupná matica a matica D sa nazýva priamy člen. Drvivá väčšina systémov nemá priamy člen, čo znamená, že vstup nemá priamy vplyv na výstup.

Iná forma lineárnych diferenciálnych rovníc, ktorá je zovšeobecnením avšak linearizovanej dynamickej rovnice kyvadla (o linearizácii neskôr), má tvar

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{(n-1)} y}{\mathrm{d}t^{(n-1)}} + \cdots + a_0 y = b_0 u \tag{4}$$

kde t je nezávisle premenná (čas), $y(t)$ je závisle premenná (výstup) a $u(t)$ je vstup. Zápis $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}$ značí n-tú deriváciu y podľa času t (namiesto n bodiek). Hovoríme, že rovnica (4) je diferenciálna rovnica n-tého rádu, ktorá modeluje dynamiku systému n-tého rádu. Tento model môže byť konvertovaný na model v stavovom priestore napríklad definovaním stavového vektora v tvare

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}^{(n-1)}y}{\mathrm{d}t^{(n-1)}} \end{bmatrix} \tag{5}$$

potom model v stavovom priestore možno zapísať v tvare

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ \vdots \\ -a_{n-1}x_n - \cdots - a_0 x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 u \end{bmatrix} \tag{6a}$$

$$y = x_1 \tag{6b}$$

čo po vhodnej definícii matíc A, B, C a D má tvar (3).

Ešte všeobecnejší systém získame ak výstup bude lineárnou kombináciou všetkých stavových veličín (predpokladáme, že výstup nezávisí priamo od vstupu), teda

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \tag{7}$$

Potom model v stavovom priestore je

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \tag{8a}$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} & c_n \end{bmatrix} x \tag{8b}$$

Vráťme sa späť k nelineárnym dynamický systémom. Model kyvadla (1b) je nelineárna diferenciálna rovnica. Rovnicu (1b) upravíme na tvar

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\beta}{ml^2}\dot{\varphi} - \frac{g}{l}\sin(\varphi) + \frac{1}{ml^2}u \tag{9}$$

Stavom kyvadla sú dve veličiny: uhol natočenia ramena kyvadla φ a uhlová rýchlosť ramena kyvadla $\dot{\varphi}$. Stavový vektor má preto dva prvky $x^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$, kde $x_1 = \varphi$ a $x_2 = \dot{\varphi}$. Model kyvadla v stavovom priestore je v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\beta}{ml^2}x_2 - \frac{g}{l}\sin(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u \tag{10a}$$

$$\varphi = x_1 \tag{10b}$$

Toto je nelineárny časovo-invariantný systém druhého rádu.

Mimochodom, miestami v ďalšom texte budeme uvažovať tento systém, avšak bez vstupu, inými slovami externý moment sily je nulový, $u = 0$. Potom

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\beta}{ml^2} x_2 - \frac{g}{l} \sin(x_1) \end{bmatrix} \tag{11a}$$

$$\varphi = x_1 \tag{11b}$$

Toto je autonómny nelineárny časovo-invariantný systém druhého rádu. Jeho správanie závisí len od začiatočného stavu na začiatku uvažovaného času.

2.2 Numerické riešenie diferenciálnych rovníc (a ODE solver)

Majme rovnicu opisujúcu dynamiku rotačného pohybu kyvadla. Rovnica je v tvare

$$ml^2 \ddot{\varphi}(t) + \beta \dot{\varphi}(t) + mgl \sin \varphi(t) = u(t) \tag{12}$$

Samozrejme, ide o diferenciálnu rovnicu. Presnejšie o obyčajnú diferenciálnu rovnicu 2. rádu, ktorá je nehomogénna (vyskytuje sa v nej „externý signál“ (vstup)). Cieľom je nájsť numerické riešenie tejto rovnice pre dané začiatočné podmienky a pre prípadné dané vstupy (vstupné signály).

Analytické riešenie diferenciálnej rovnice je v podstate nejaká funkcia času (a prípadne iných veličín). Numerické riešenie je postuppnosť hodnôt, číselných hodnôt, ktoré pri daných predpokladoch vyhovujú diferenciálnej rovnici. Je postupnosť hodnôt - vektor hodnôt, ku ktorému prislúcha časový vektor určujúci časovú postupnosť hodnôt numerického riešenia. Tu sme vynechali pár miliónov detailov, ale snáď sa dá vytušiť, čo sa tu myslí pod numerickým riešením.

2.2.1 ODE solver

Pre hľadanie numerického riešenia využijeme ODE solver. ODE je skratka pre obyčajné diferenciálne rovnice (ordinary differential equation).

Úlohou ODE solvera je nájsť numerické riešenie na základe rovnice (diferenciálnej), ktorú je možné vo všeobecnosti zapísať v tvare

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), \ldots\right) \tag{13}$$

kde f je funkcia, ktorej argumenty sú čas t, prirodzene, samotný výstupný (hľadaný, neznámy) signál $x(t)$ a prípadne iné ďalšie parametre či veličiny - napríklad externý vstup. Uvedená rovnica doslova predpisuje aká je časová zmena signálu $x(t)$. Časová zmena signálu, inými slovami časová derivácia (derivácia podľa času) je označená ako $\dot{x}(t)$.

Ak teda do funkcie f dosadíme hodnoty argumentov (čas, signál $x(t)$, a prípadne iné), získame hodnotu časovej zmeny $\dot{x}(t)$. Na základe informácie o $\dot{x}(t)$, ktorá zodpovedá aktuálnemu (dosadenému) signálu $x(t)$, môžeme určiť hodnotu $x(t)$ o nejaký čas neskôr. Túto novú hodnotu $x(t)$ možno opäť dosadiť do funkcie f a následne nájsť ďalšiu ešte ďalej v čase - atď. ODE solver využíva práve tento jednoduchý princíp pre postupné hľadanie hodnôt (numerických hodnôt) signálu $x(t)$.

Vo všeobecnosti sa uvedený princíp nazýva numerická integrácia. ODE solver teda numericky integruje. Je množstvo metód pre numerickú integráciu, ktoré sa líšia spôsobom riešenia problémov súvisiacich so samotným procesom numerickej integrácie (voľba (optimalizácia) časového kroku integrácie, zohľadnenie matematických vlastností daného typu diferenciálnych rovníc a iné). ODE solvre sa môžu líšiť aj samotnou implementáciou niektorej z metód numerickej integrácie. Podrobnejší opis ODE solvera je nad rámec tohto textu.

2.2.2 Rovnica vyššieho rádu ako sústava rovníc 1. rádu

ODE solver z princípu pracuje s diferenciálnou rovnicou prvého rádu, prípadne so sústavou diferenciálnych rovníc 1. rádu. Napríklad sústavu dvoch rovníc prvého rádu je možné vo všeobecnosti zapísať v tvare

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = F\left(t, \begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}, \ldots\right) \tag{14}$$

V našom prípade hľadáme riešenie pre rovnicu druhého rádu. Každú diferenciálnu rovnicu vyššieho rádu je možné zapísať ako sústavu rovníc prvého rádu. V takejto novej sústave rovníc, vo všeobecnosti, vznikli nové veličiny (signály), ktoré sa vo všeobecnosti môžu líšiť od pôvodných veličín (signálov) v pôvodnej rovnici vyššieho rádu.

Nové veličiny vystupujúce v sústave rovníc sa v teórii systémov súhrnne označujú ako stav systému (stavové veličiny systému). Ak poznáme aktuálny stav systému potom spravidla vieme určiť predchádzajúce aj budúce stavy (vo všeobecnosti).

Napr. v rovnici kyvadla vystupujú veličiny (signály) $\ddot{\varphi}(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ a $\varphi(t)$. Je zrejmé (možno nie nad slnko jasné), že ako stav systému je možné zvoliť veličiny $\varphi(t)$ a $\dot{\varphi}(t)$, teda polohu a uhlovú rýchlosť kyvadla. Ak poznáme tieto, poznáme celú históriu a budúcnosť pohybu kyvadla.

Môže existovať viac možností voľby stavových veličín. Pri lineárnych systémoch je možností nekonečne veľa (nekonečne veľa stavových priestorov). Z praktického hľadiska však majú význam len niektoré voľby - napr. pri pohybových systémoch, akým je kyvadlo, sú to prirodzene polohy, rýchlosť, zrýchlenie, trh atď., v závislosti od rádu systému.

Jednou z možností ako previesť rovnicu vyššieho rádu na sústavu rovníc prvého rádu je nasledovný postup. V tomto prípade je zhodou okolností výsledkom aj prakticky využiteľný stavový priestor (stavové veličiny $\varphi(t)$ a $\dot{\varphi}(t)$). Nech

$$x_1(t) = \varphi(t) \tag{15}$$

potom

$$\dot{x}_1(t) = \dot{\varphi}(t) \tag{16}$$

Ďalej nech

$$\dot{x}_1(t) = \dot{\varphi}(t) = x_2(t) \tag{17}$$

a to znamená, že

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{\varphi}(t) \tag{18}$$

Tým sme získali veličiny $x_1(t) = \varphi(t)$ a $x_2(t) = \dot{\varphi}(t)$. Je možné zostaviť stavový vektor $x = \begin{bmatrix}x_1(t) & x_2(t)\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ a teda $\dot{x} = \begin{bmatrix}\dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}^\mathsf{T}$.

Cieľom je konkretizovať funkciu F v rovnici

$$\dot{x} = F(t, x, \ldots) \tag{19}$$

čo je kompaktný zápis sústavy

$$\dot{x}_1(t) = F_1\left(t, x_1(t), x_2(t), \ldots\right) \tag{20}$$

$$\dot{x}_2(t) = F_2\left(t, x_1(t), x_2(t), \ldots\right) \tag{21}$$

Prvú rovnicu v tomto prípade máme:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{22}$$

Druhá rovnica vyplynie z postrehu, že pôvodnú rovnicu druhého rádu možno zapísať v tvare

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}(t) &= -\frac{\beta}{ml^2}\dot{\varphi}(t) - \frac{g}{l}\sin\left(\varphi(t)\right) + \frac{1}{ml^2}u(t)\\ &= -\frac{\beta}{ml^2}x_2(t) - \frac{g}{l}\sin\left(x_1(t)\right) + \frac{1}{ml^2}u(t)\end{aligned} \tag{23}$$

kde sú využité novo zavedené stavové veličiny $x_1(t)$ a $x_2(t)$. Je zrejmé, že druhá rovnica sústavy je

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{\beta}{ml^2}x_2(t) - \frac{g}{l}\sin\left(x_1(t)\right) + \frac{1}{ml^2}u(t) \tag{24}$$

a teda rovnice kyvadla v stavovom priestore sú

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{\beta}{ml^2} x_2(t) - \frac{g}{l} \sin\left(x_1(t)\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u(t) \tag{25}$$

čím je funkcia F jasne stanovená (skonkretizovaná) a sústava spĺňa požiadavky pre využitie v ODE solveri.

2.2.3 Používanie ODE solvera

ODE solver ako funkcia v programe môže mať napríklad nasledujúce vstupy (argumenty) a výstupy:

```
x = odesolver(fcnF, init, timeVect)
```

kde `x` je, samozrejme, hľadané numerické riešenie. Prvým argumentom je funkcia s názvom `fcnF`, ktorá implementuje sústavu diferenciálnych rovníc v zmysle predchádzajúceho textu. `init` označuje začiatočné hodnoty stavových veličín. `timeVect` označuje časové okamihy (vzorky), v ktorých hľadáme hodnoty numerického riešenia.

MATLAB

MATLAB obsahuje hneď niekoľko ODE solverov. Tu budeme používať `ode45`.

Vytvorme funkciu, ktorá realizuje sústavu diferenciálnych rovníc (25), avšak, uvažujme, že vstupný signál $u(t)$ je nulový. Teda neuvažujme vstupný signál vôbec. Ešte inými slovami, externý moment sily je nulový, $u(t) = 0$ a preto potom možno písať

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\beta}{ml^2} x_2 - \frac{g}{l} \sin(x_1) \end{bmatrix} \tag{26}$$

Toto je autonómny nelineárny časovo-invariantný systém druhého rádu. Jeho správanie závisí len od začiatočného stavu na začiatku uvažovaného času.

Funkcia, ktorá realizuje uvedenú sústavu, môže byť nasledovná:

Celý súbor PravaStr.m

```
function dotx = PravaStr(t,x)

global m l g beta

dotx1 =  x(2);
dotx2 = - (beta/m*l^2)*x(2)  -  (g/l)*sin(x(1));

dotx = [dotx1; dotx2];

end
```

Vytvorme „hlavný skript“, v ktorom všetko potrebné nastavíme a v ktorom budeme volať ODE solver. Ako prvé nech su globálne premenné (v tomto prípade parametre kyvadla):

Časť súbora hlSkript.m

```
global m l g beta

m = 1; %kg
l = 1; %m
g = 9.81; %m/s^2
beta = 2*0.5*sqrt(g/l); %kgm^2/s
```

Definujme časový vektor, ktorý určí pre aké časové okamihy ODE solver vráti numerické riešenie:

Časť súbora hlSkript.m

```
timeVect = 0:0.1:5;
```

Zavolajme ODE solver, pričom ostáva zvoliť začiatočné podmienky - začiatočný stav kyvadla. Nech začiatočný stav je $x_1(0) = 0.25$ [rad] a $x_2(0) = 0$ [rad/s].

Časť súbora hlSkript.m

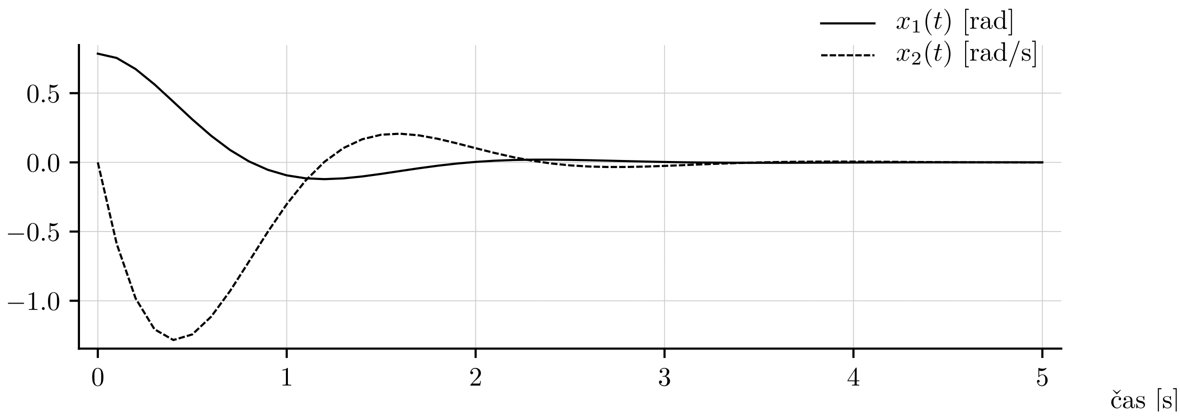
```
[t,x] = ode45(@(t,x) PravaStr(t,x), timeVect, [pi/4; 0]);
```

Premenná **x** teraz obsahuje dva stĺpce - prvý stĺpec je prvá stavová veličina a druhý stĺpec je druhá stavová veličina. Pre nakreslenie vypočítaného riešenia:

Časť súbora hlSkript.m

```
figure(1)
plot(t,x)
```

Výsledné numerické riešenie je graficky znázornené na obr. 2.

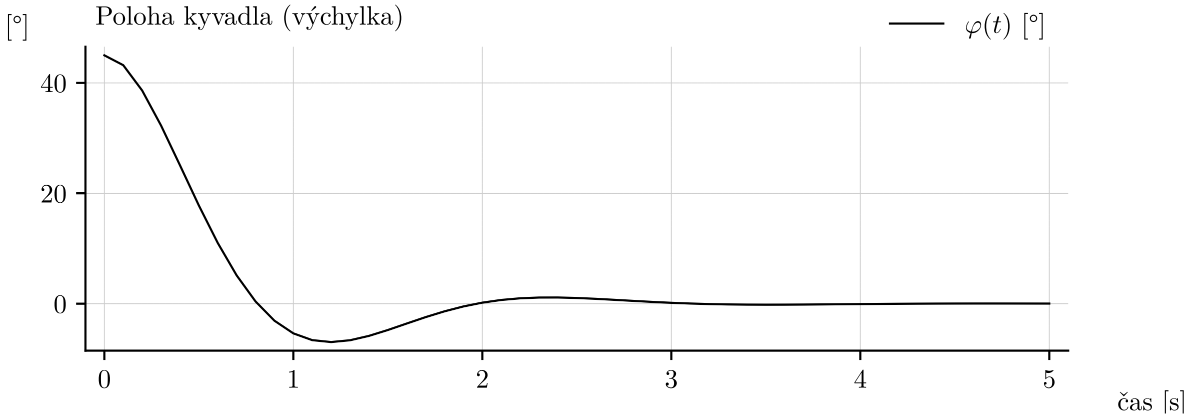


Obr. 2: Grafické zobrazenie numerického riešenia

Na obr. 2 ide však len o akési základné zobrazenie. Zmysluplnejšie by napríklad mohlo byť, ak by sme do grafu nakreslili len priebeh polohy (výchylky) kyvadla samostatne a navyše nie v radiánoch ale v stupňoch – viď obr. 3. Pre takýto obrázok možno do hl. skriptu pridať:

Časť súbora hlSkript.m

```
figure(2)
plot(t,x(:,1)*180/pi)
```



Obr. 3: Grafické zobrazenie priebehu polohy kyvadla

Python

Pre informáciu, nasledovne by vyzeralo hľadanie numerického riešenia v rámci jazyka Python.

Knižnica SciPy, presnejšie scipy.integrate obsahuje ODEsolver s názvom `odeint`. Vytvorme skript využívajúci tento ODE solver:

Skript v Python-e

```python
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

m = 1.0
l = 1.0
g = 9.81
beta = 2 * 0.5 * np.sqrt(g/l)

def fcn_rovniceKyvadla(x, t, u):
    x_1, x_2 = x
    dotx_1 = x_2
    dotx_2 = -(beta/m*l**2) * x_2 - (g/l) * np.sin(x_1) + (1.0/m*l
    **2) * u
    return [dotx_1, dotx_2]


timeVect = np.arange(0, 5.1, 0.1)

u = 0

x = odeint(fcn_rovniceKyvadla,
           [np.pi/4, 0],    # zaciatocne podmienky
           timeVect,
           args=(u,),
           )

plt.figure(1)
plt.plot(timeVect, x)
plt.xlabel(u'cas [s]')
plt.legend(['$x_1(t)$ [rad]', '$x_2(t)$ [rad/s]'])

plt.figure(2)
plt.plot(timeVect, x[:,0]*180/np.pi)
plt.xlabel(u'cas [s]')
plt.ylabel(u'$x_1(t)$ [stupne]')
```

Pozornému čitateľovi iste neuniklo, že uvedený skript v Pythone obsahuje funkciu, ktorá realizuje sústavu diferenciálnych rovníc (25), ale v tomto prípade zahŕňa aj vstupnú veličinu $u(t)$. Táto je potom v tomto prípade nastavená na nulovú hodnotu.

2.3 Vektorové pole a fázový portrét

Kvalitatívne správanie sa nelineárneho dynamického systému je dôležité pre porozumenie kľúčovým konceptom Lyapunovovej teórie stability systémov. Pre analýzu je dôležitá istá trieda systémov nazývaná planárne dynamické systémy. Tieto systémy majú dve stavové veličiny $x \in \mathbb{R}^2$, čo umožňuje znázorniť stavový priestor v rovine so súradnicovým systémom (x_1, x_2). Navyše výsledky kvalitatívnej analýzy platia vo všeobecnosti a môžu byť použité aj pri systémoch vyššieho rádu. Preto sú tieto systémy dôležité z hľadiska analýzy. Do tejto triedy systémov patrí aj model kyvadla.

Výhodným spôsobom ako porozumieť správaniu dynamického systému so stavom $x \in \mathbb{R}^2$ je nakresliť *fázový portrét systému*. Začneme zavedením konceptu *vektorového poľa*. Pre systém obyčajných diferenciálnych rovníc zapísaných kompaktne vo vektorovej rovnici (ako rovnica (11a)) v tvare

$$\dot{x} = F(x) \tag{27}$$

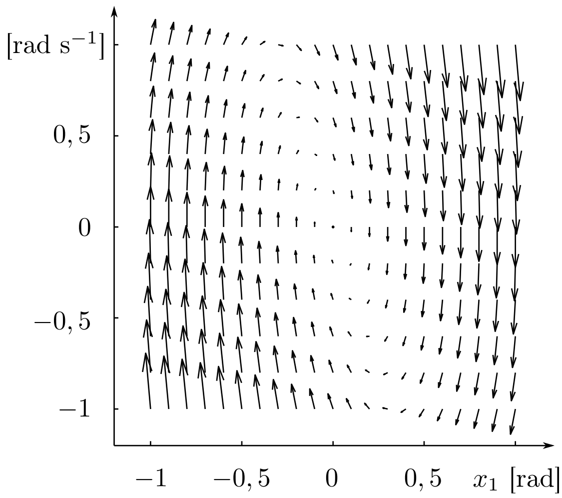
pravá strana rovnice definuje v každom $x \in \mathbb{R}^n$ rýchlosť $F(x) \in \mathbb{R}^n$. Táto rýchlosť hovorí o tom ako sa x mení a môže byť reprezentovaná vektorom.

Pri planárnom dynamickom systéme, každý stav zodpovedá bodu v rovine a $F(x)$ je vektor rýchlosti reprezentujúci veľkosť a smer zmeny (rýchlosti) daného stavu. Tieto vektory môžme vykresliť na mriežke bodov v rovine a získať tak vizuálny obraz dynamiky systému, tak ako na Obr. 4. Pre vykreslenie tohto vektorového poľa boli použité parametre kyvadla uvedené v Tabuľke 1 a tieto parametre budú používané aj v ďalšom.

Vektorové pole na obr. 4 bolo vygenerované v Matlabe použitím nasledujúceho kódu:

Kód pre vygenerovanie obr. 4

```matlab
m = 1; %kg
```



Obr. 4: Vektorové pole znázorňujúce dynamiku kyvadla (obrázok vytvorený v MATLABe, viď text)

```
l = 1; %m
g = 9.81; %m/s^2
beta = 2*0.5*sqrt(g/l); %kgm^2/s
[x1, x2] = meshgrid(-1:.1:1, -1:.2:1);
x1dot = x2;
x2dot = -(beta/m*l^2).*x2 - (g/l).*sin(x1);
quiver(x1,x2,x1dot,x2dot,1.5);
axis([-1.2 1.2 -1.2 1.2])
axis equal
```

Body, v ktorých je vektor rýchlosti nulový sú obzvlášť zaujímavé, pretože definujú stacionárne body systému: ak je autonómny systém v takom stave na začiatku, ostane v tom stave po celý čas.

Fázový portrét (nazývaný aj Fázový diagram) pozostáva z „prúdnic“ nakreslených podľa vektorového poľa. Inými slovami, pre istú množinu začiatočných stavov vykreslíme riešenia diferenciálnej rovnice v rovine a smer pohybu v stavovom priestore vyznačíme šípkou. To zodpovedá sledovaniu „šípky vektorového poľa“ v každom bode stavového priestoru a nakresleniu výslednej trajektórie. Po vykreslení niekoľkých trajektórii pre rôzne začiatočné stavy získame fázový portrét ako na Obr. 5.

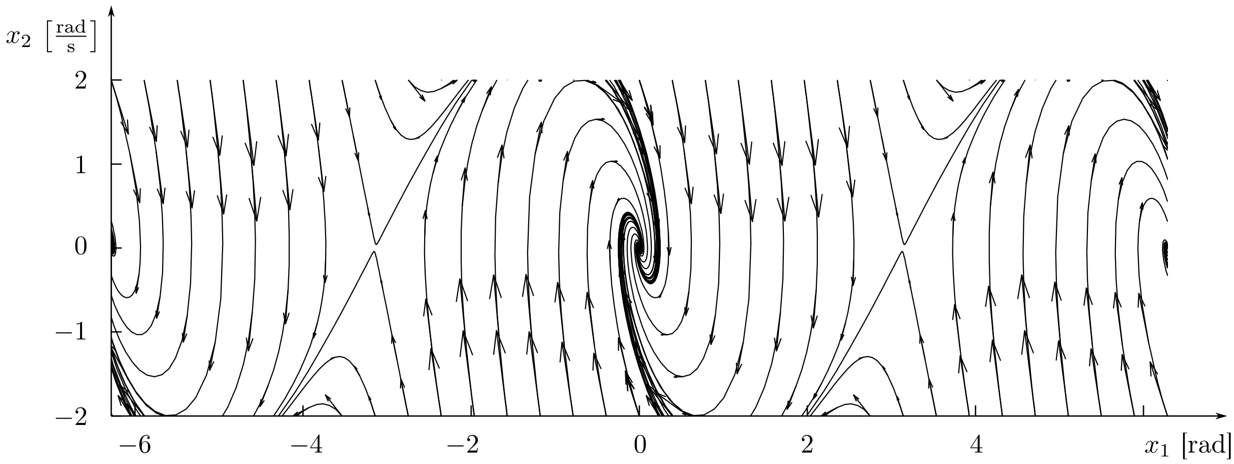
Zdrojový kód pre MATLAB pre získanie tohto obrázku je nasledovný:

Kód pre vygenerovanie obr. 5

```
global m l g beta
m = 1; %kg
l = 1; %m
g = 9.81; %m/s^2
beta = 2*0.5*sqrt(g/l); %kgm^2/s

for uhlovarychlost = -2:4:2
  for uhol = -360:22.5:360
    [t,x]=ode45(@PravaStr,[0 5],[uhol*pi/180 uhlovarychlost]);
    hold on
    stav = x;
    x = x(1:5:end-70,:);
    x1dot = x(:,2);
    x2dot=-(beta/m*l^2)*x(:,2)-(g/l)*sin(x(:,1));
    quiver(x(:,1),x(:,2),x1dot,x2dot,0.5,'k')
    plot(stav(:,1),stav(:,2),'k');
    hold off
  end
end

axis equal
axis([-2*pi 2*pi -2 2])
```

kde funkcia `PravaStr` je

```
function dotx = PravaStr(t,x)
  global m l g beta
```



Obr. 5: Fázový portrét kyvadla (obrázok vytvorený v Matlabe, viď text pre zdrojový kód)

```
  dotx(1)=x(2);
  dotx(2)=-(beta/m*l^2)*x(2)-(g/l)*sin(x(1));
  dotx=dotx';
end
```

Fázový portrét je nástroj, ktorý umožňuje posudzovať celkovú dynamiku systému pomocou vykreslenia niekoľkých riešení v stavovom priestore (rovine) systému. Napríklad je možné vidieť, či sa všetky trajektórie s narastajúcim časom približujú k jednému bodu alebo či ide o komplikovanejšie správanie systému. Fázový portrét však nehovorí o veľkosti rýchlosti zmeny stavu (avšak toto môže byť odvodené z dĺžky vektorov vo vektorovom poli systému).

Ekvilibrium dynamického systému je bod v stavovom priestore, ktorý reprezentuje rovnovážne podmienky pre dynamiku systému. Ide o stacionárny bod, v ktorom je vektor rýchlosti trajektórie systému nulový, ako už bolo uvedené.

Hovoríme, že stav x_e je ekvilibrium dynamického systému

$$\dot{x} = F(x)$$

ak $F(x_e) = 0$. Ak má autonómny systém začiatočnú podmienku $x(0) = x_e$, potom ostane v tomto stave a riešenie má tvar $x(t) = x_e$ po celý čas $t > 0$, kde sme uvažovali začiatočný čas $t_0 = 0$.

Stacionárne body (ekvilibriá) patria medzi najdôležitejšiu vlastnosť dynamického systému, pretože definujú stavy s nemennými pracovnými podmienkami systému. Systém môže mať nula, jeden alebo viac stacionárnych bodov.

Stacionárne body uvažovaného kyvadla sú

$$x_e = \begin{bmatrix} \pm n\pi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

kde $n = 0, 1, 2, \ldots$. Pre párne n sú to stavy keď kyvadlo visí smerom dole a pre nepárne n je kyvadlo v inverznej polohe. Fázový portrét na Obr. 5 je nakreslený pre $-2\pi \le x_1 \le 2\pi$, teda na obrázku je päť stacionárnych bodov.

3 Stabilita

Pripomeňme, že sa zaoberáme autonómnym systémom (homogénnou diferenciálnou rovnicou) v tvare

$$\dot{x} = F(x) \tag{29}$$

a tiež pripomeňme, čo rozumieme pod pojmom riešenie systému, alebo skrátene riešenie. Hovoríme, že $x(t)$ je *riešenie* diferenciálnej rovnice (29) na časovom intervale od $t_0 \in \mathbb{R}$ do $t_f \in \mathbb{R}$ ak

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = F\big(x(t)\big) \qquad \text{pre } t_0 < t < t_f \tag{30}$$

Daná diferenciálna rovnica môže mať mnoho riešení, najčastejšie nás však zaujíma úloha so zadaným začiatočným stavom, inými slovami so zadanými začiatočnými podmienkami, kedy $x(t)$ je predpísané v začiatočnom čase t_0 a úlohou je nájsť riešenie vyhovujúce pre celý budúci čas $t > t_0$. Vtedy $x(t)$ je riešenie diferenciálnej rovnice (29) so začiatočným stavom $x_0 \in \mathbb{R}^n$ v čase t_0 ak

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = F\big(x(t)\big) \quad \text{pre } t_0 < t < t_f \tag{31}$$

Najčastejšie sa stretávame s diferenciálnymi rovnicami, pre ktoré existuje jedinečné riešenie, navyše pre celý čas $t > t_0$ čo znamená že $t_f = \infty$. Častým je tiež, že funkcia F je nezávislá od času, preto môžme uvažovať $t_0 = 0$.

Stabilita riešenia určuje či iné riešenia v blízkosti skúmaného riešenia ostávajú v jeho blízkosti, približujú sa k nemu alebo sa od neho vzďaľujú. Uvedieme niekoľko neformálnych a formálnych definícií stability:
Nech $x(t; a)$ je riešenie diferenciálnej rovnice so začiatočným stavom a. Toto riešenie je stabilné ak iné riešenia, ktoré začínajú v blízkosti a zostávajú v blízkosti $x(t; a)$. Formálne, hovoríme, že riešenie $x(t; a)$ je stabilné ak pre všetky $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ taká, že

$$\|b - a\| < \delta \;\Rightarrow\; \|x(t; b) - x(t; a)\| < \epsilon, \; \forall\, t > 0 \tag{32}$$

Všimnime si, že to neznamená, že $x(t; b)$ sa približuje k $x(t; a)$, len ostáva v jeho blízkom okolí. Navyše hodnota δ môže závisieť od ϵ, teda napríklad ak chceme ostať blízko nejakého riešenia potom musíme začať veľmi blízko tohto riešenia. Takto definovaná stabilita sa nazýva *stabilita v zmysle Lyapunova.*

Ilustrujeme uvedenú podmienku (32) na riešení diferenciálnej rovnice kyvadla (11a). Začiatočný čas zvoľme $t_0 = 0$ [s], konečný čas zvoľme $t_f = 1,4$ [s], začiatočnú polohu kyvadla zvoľme $\varphi = 45°$ a začiatočná rýchlosť kyvadla nech je nulová. Začiatočný stav v stavovom priestore je $a = \begin{bmatrix}0,7854 & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$. Týmto začiatočným podmienkam prislúcha riešenie $x(t; a)$, ktoré je znázornené v stavovom priestore na Obr. 6a, kde je vyznačený aj začiatočný stav a. Nebudeme skúmať všetky $\epsilon > 0$, preskúmame len jedno. Napríklad pre $\epsilon = 0,15$ hľadájme $\delta > 0$, ktorá spĺňa podmienku (32). Taká δ existuje, pretože pre riešenie $x(t; b)$, ktoré začína v stave $b = \begin{bmatrix}0,8727 & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ platí, že $\|x(t; b) - x(t; a)\| < \epsilon$, čo je zrejmé z Obr. 6a a aj z Obr. 6b, kde je navyše predĺžený čas riešenia až do nekonečna. Potom sme našli napríklad $\delta = 0,1$ pretože platí

$$\|b - a\| = \sqrt{(0,8721 - 0,7854)^2 + (0 - 0)^2} = 0,0873 < 0,1 \tag{33}$$

čo je tiež zrejmé najmä z Obr. 6b. Týmto sme nezistili nič o stabilite riešenia $x(t; a)$, pretože sme neoverili, či je podmienka (32) splnená pre všetky $\epsilon > 0$.

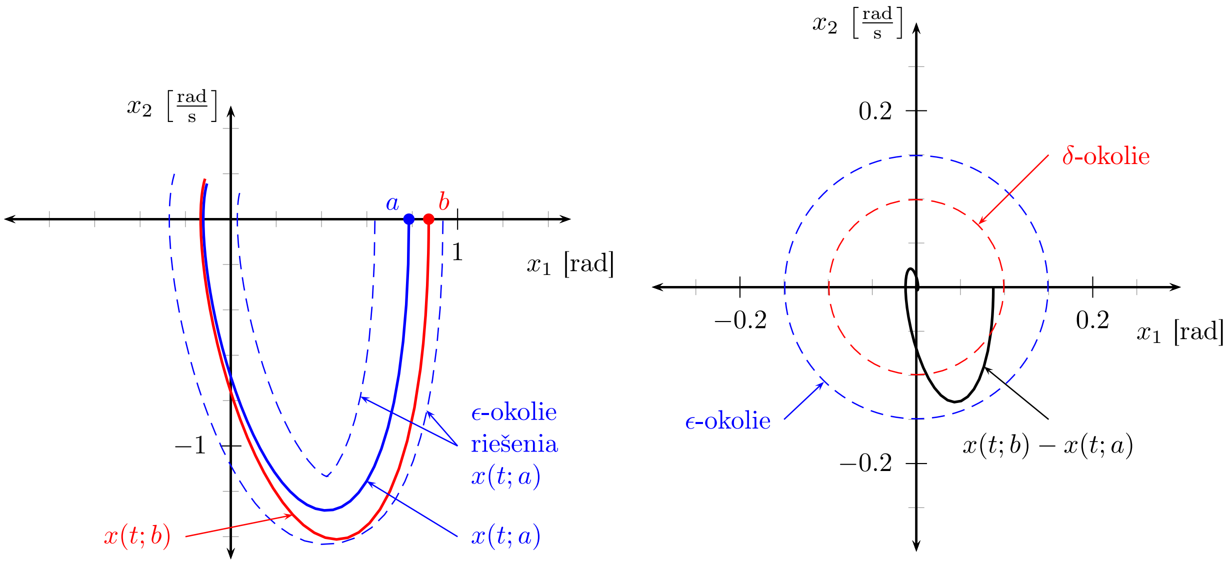
Ak je riešenie stabilné v zmysle Lyapunova, ale trajektórie okolitých riešení k nemu nekonvergujú, hovoríme, že riešenie je *neutrálne stabilné.*

Riešenie $x(t; a)$ je *asymptoticky stabilné* ak je stabilné v zmysle Lyapunova a zároveň $x(t; b) \to x(t; a)$ s rastúcim časom $t \to \infty$ pri začiatočnom stave b, ktorý je dostatočne blízko stavu a.

Veľmi dôležitým špeciálnym prípadom je ak pre skúmané riešenie platí $x(t; a) = x_e$. Potom nehovoríme o stabilite riešenia ale o *stabilite stacionárneho bodu.* Príkladom asymptoticky stabilného stacionárneho bodu sú body

$$x_{e_{-2}} = \begin{bmatrix}-2\pi \\ 0\end{bmatrix}, \quad x_{e_0} = \begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix}, \quad \text{a} \quad x_{e_2} = \begin{bmatrix}2\pi \\ 0\end{bmatrix}$$

na Obr. 5, vidíme, že ak začíname blízko asymptoticky stabilného stacionárneho bodu, s narastajúcim časom sa k nemu približujeme.



(a) Trajektórie riešení systému v stavovom priestore pre rôzne začiatočné stavy a a b v časovom intervale $t_0 < t < t_f$

(b) Trajektória rozdielu dvoch riešení daných začiatočnými stavmi a a b v časovom intervale $t_0 < t < \infty$

Obr. 6: Ilustračný príklad k definícii stability riešenia systému

Riešenie $x(t;a)$ je *nestabilné* ak nie je stabilné. Konkrétnejšie, hovoríme, že riešenie $x(t;a)$ je nestabilné ak pre akékoľvek dané $\epsilon > 0$ neexistuje $\delta > 0$ taká, že ak $\|b-a\| < \delta$ potom $\|x(t;b) - x(t;a)\| < \epsilon$, $\forall t > 0$. Príkladom nestabilného stacionárneho bodu sú body

$$x_{e_{-1}} = \begin{bmatrix} -\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{a} \quad x_{e_1} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

na Obr. 5.

Predchádzajúce definície nezohľadňujú oblasť, na ktorej môžu byť použité. Presnejšie je definovať riešenie ako *lokálne stabilné* (alebo *lokálne asymptoticky stabilné*) ak je stabilné pre všetky začiatočné stavy $x \in B_r(a)$, kde $B_r(a) = \{x : \|x-a\| < r\}$ je oblasť s polomerom $r > 0$ okolo bodu a. Riešenie je *globálne stabilné* ak je stabilné pre všetky $r > 0$.

3.1 Stabilita lineárnych systémov

Lineárny dynamický systém má tvar

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \tag{34}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je štvorcová matica. Začiatok stavového priestoru je vždy stacionárnym bodom lineárneho systému a stabilita tohto stacionárneho bodu môže byť určená pomocou vlastných čísel matice A.

Vlastné čísla $\lambda(A)$ sú korene *charakteristického polynómu* systému $\det(sI - A)$, kde $s \in \mathbb{C}$ je komplexná premenná a I je jednotková matica. Konkrétne vlastné číslo (i-te vlastné číslo) označujeme λ_i, pričom $\lambda_i \in \lambda(A)$.

Pre lineárny systém stabilita stacionárneho bodu (ako veľmi dôležitého špeciálneho prípadu spomedzi všetkých riešení) závisí len od matice A, čo znamená, že stabilita je vlastnosť systému. Pre lineárny systém preto hovoríme o stabilite systému namiesto o stabilite konkrétneho riešenia alebo ekvilibria.

Stabilitu lineárneho systému možno zhrnúť do jednej vety:
Systém

$$\dot{x} = Ax$$

je asymptoticky stabilný vtedy a len vtedy keď reálne časti všetkých vlastných čísel matice A sú záporné a systém je nestabilný keď aspoň jedno vlastné číslo matice A má kladnú reálnu časť.

4 Linearizácia a jej použitie pri analýze stability

Výhodnou vlastnosťou diferenciálnych rovníc je, že je často možné určiť lokálnu stabilitu stacionárneho bodu pomocou aproximácie nelineárneho systému lineárnym systémom.

Uvažujme nelineárny systém

$$\dot{x} = F(x) \tag{35}$$

ktorý má ekvilibrium v bode x_e. Zaujíma nás stabilita tohto stacionárneho bodu. Aproximujme (linearzujme) nelineárnu funkciu $F(x)$ v okolí bodu x_e pomocou prvých dvoch členov Taylorvho radu

$$F(x) \approx F(x_e) + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_e} (x - x_e) \tag{36}$$

Platí $F(x_e) = 0$, a zavedieme nový stavový vektor $z = x - x_e$. To znamená, že $x = z + x_e$, potom $\dot{x} = \dot{z} + \dot{x}_e$, avšak x_e sa s časom nemení a preto platí $\dot{x} = \dot{z}$. Lineárna aproximácia pôvodného nelineárneho systému v okolí bodu x_e má potom tvar

$$\dot{z} = Az \tag{37}$$

kde

$$A = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_e} \tag{38}$$

V prípade kyvadla je nelineárny model systému v tvare (11a) a teda

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};\ F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{\beta}{ml^2} x_2 \end{bmatrix} \tag{39}$$

Linearizujme nelineárny model systému (11a) v okolí rovnovážneho stavu $x_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$. Kľúčovým je výpočet matice A podľa (38). V tomto prípade máme

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(F_1) & \frac{\partial}{\partial x_2}(F_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(F_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(F_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(x_1) & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix} \tag{40}$$

Po dosadení hodnôt stacionárneho bodu za $x_1 = 0$ (a $x_2 = 0$) do (40) máme

$$A = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix} \tag{41}$$

a vzľadom na fakt, že v tomto prípade $x_e = 0$ je linearizovaný model systému v tvare

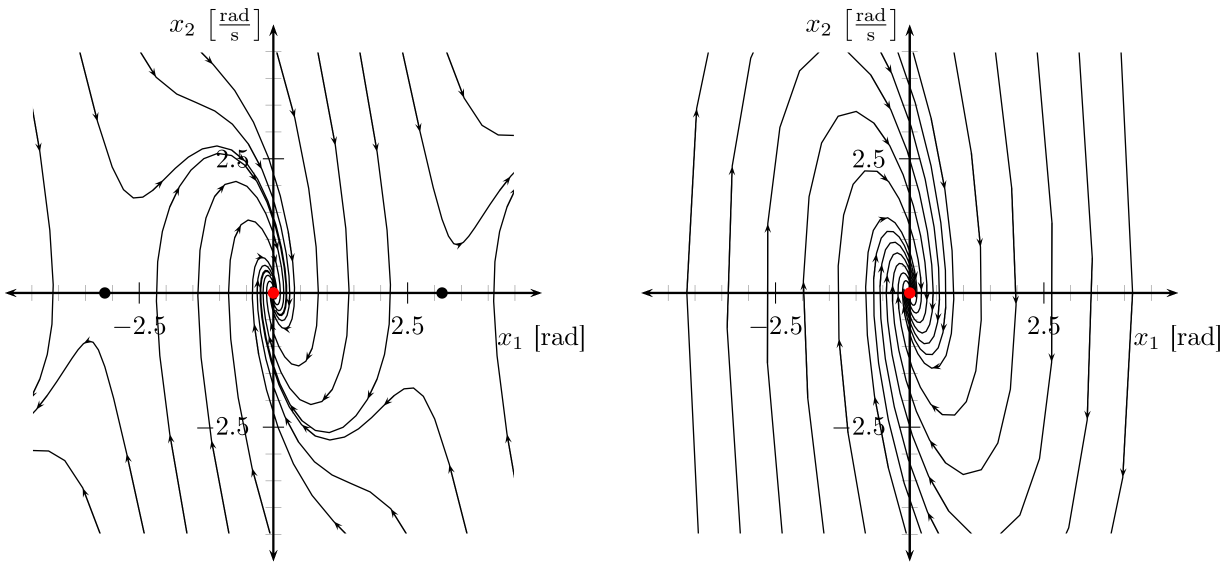
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Lokálna stabilita stacionárneho bodu nelineárneho systému teraz môže byť určená pomocou vlastných čísel matice A.

Mimochodom výsledný lineárny model (42) je rovnaký, ako keby sme uvažovali, len malé výchylky kyvadla (malé hodnoty uhla φ), pri ktorý dostatočne presne platí, že $\sin(\varphi) = \varphi$ (angl. Small-angle approximation).

Skutočnosť, že lineárny model môže byť použitý pre opis správania nelineárneho systému v okolí rovnovážneho stavu je veľmi výhodná. Je to možné využiť aj pre návrh spätnoväzbového regulátora, ktorý udržiava stav nelineárneho systému v okolí rovnovážneho stavu. Pritom samotný regulátor je navrhnutý pre lineárnu aproximáciu systému. Keďže stav systému je regulátorom udržiavaný blízko stacionárneho bodu, tak aj lineárna aproximácia použitá pri stabilizácii je dostatočne presná.

Na Obr. 7 je porovnanie fázových portrétov nelineárneho modelu kyvadla a linearizovaného modelu kyvadla v okolí začiatku stavového priestoru. Všimnime si, že v okolí stacionárneho bodu (začiatku súradnicového systému) sú tieto fázové portréty takmer identické.



(a) Fázový portrét nelineárneho modelu kyvadla

(b) Fázový portrét lineárneho modelu kyvadla

Obr. 7: Porovnanie fázových portrétov nelineárneho systému a jeho linearizovanej aproximácie

5 Analýza stability pomocou Lyapunovových funkcií

Vráťme sa opäť k nelineárnym systémom v tvare

$$\dot{x} = F(x)$$

Máme definované kedy je riešenie nelineárneho dynamického systému stabilné. Teraz hľadáme odpoveď na otázku ako dokázať, že dané riešenie je stabilné, asymptoticky stabilné alebo nestabilné. Pri fyzikálnych systémoch môžme vyvodiť závery o stabilite podľa toho či systém na danej trajektórii stráca energiu, inými slovami či hodnota energie klesá (disipatívny systém), alebo nie. Zovšeobecnenie tejto techniky pre ľubovolný dynamickým systém je založené na použití Lyapunovových funkcií na miesto energie.

V tejto časti sa venujeme použitiu Lyapunovových funkcií pri určovaní stability riešenia dynamického systému. Konkrétne nás zaujíma stabilita stacionárnych bodov. Je výhodné uvažovať, že vyšetrovaný stacionárny bod je v začiatku stavového priestoru, teda $x_e = 0$. Ak nie je, vždy je možné prepísať rovnice systému zavedením nových (posunutých) stavových veličín $z = x - x_e$.

5.1 Lyapunovove funkcie

Lyapunovova funkcia $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sa používa (podobne ako energia) pri vyšetrovaní stability (riešenia) systému. Zjednodušene povedané, ak nájdeme nezápornú funkciu, ktorá je klesajúca pozdĺž trajektórie systému, môžeme usúdiť, že bod, v ktorom táto funkcia dosiahne minimum je stabilným (lokálne) stacionárnym bodom systému.

Pre formálny opis uvedeného je potrebných niekoľko definícií: Hovoríme, že spojitá funkcia V je *kladne definitná* ak $V(x) > 0$ pre všetky $x \neq 0$ a $V(0) = 0$, a podobne, funkcia je *záporne definitná* ak $V(x) < 0$ pre všetky $x \neq 0$ a $V(0) = 0$. Hovoríme, že funkcia V je *kladne semidefinitná* ak $V(x) \geq 0$ pre všetky x, teda $V(x)$ môže byť nulová aj v inom bode ako $x = 0$, podobne, funkcia je *záporne semidefinitná* ak $V(x) \leq 0$ pre všetky x.

Teorém, ktorý charakterizuje stabilitu stacionárneho bodu dynamického systému, ktorý je v začiatku stavového priestoru, je nasledovný:

Nech V je nezáporná skalárna funkcia na $\mathbb{R}^n$ a nech $\dot{V}$ reprezentuje časovú deriváciu *funkcie V pozdĺž trajektórie dynamického systému $\dot{x} = F(x)$:*

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial x}F(x).$$

Nech B_r je okolie začiatku súradnicového systému s polomerom r. Ak existuje $r > 0$ taký, že V je kladne definitná funkcia a $\dot{V}$ je záporne semidefinitná funkcia pre všetky $x \in B_r$, potom $x = 0$ je lokálne stabilný stacionárny bod v zmysle Lyapunova. Ak V je kladne definitná a $\dot{V}$ je záporne definitná pre všetky $x \in B_r$, potom $x = 0$ je lokálne asymtoticky stabilný bod.

Ak V spĺňa práve uvedené podmienky, potom hovoríme, že V je (lokálna) *Lyapunovova funkcia* systému.

5.2 Analýza stability

Výsledky uvedené vyššie majú pre planárne systémy svoju geometrickú reprezentáciu. Pre kladne definitnú V môžme definovať vrstevnice ako body v stavovom priestore, ktoré spĺňajú $V(x) = c$, kde $c > 0$. Tam, kde platí $\dot{V} < 0$ vektorové pole ukazuje vždy smerom k „nižšej“ vrstevnici, od vrstevnice c_2 k c_1, kde $c_2 > c_1$. To znamená, že trajektória smeruje k menším a menším hodnotám fukcie V a ak $\dot{V}$ je záporne definitná, potom sa x približuje k nule. Aj toto ilustruje nasledujúci príklad určenia stability stacionárneho bodu kyvadla.

Lyapunovove funkcie často nie je jednoduché nájsť, a tiež nie sú unikátne. V mnohých prípadoch je výhodné pri hľadaní vhodného kandidáta na Lyapunovovu funkciu začať funkciou, ktorá vyjadruje celkovú energiu systému, najmä pri fyzikálnych systémoch. Tak je to aj v nasledujúcom príklade.

Uvažujme nelineárny model kyvadla, podľa (11a), v tvare

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{43a}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{\beta}{ml^2}x_2 \tag{43b}$$

Úlohou je vyšetriť stabilitu stacionárneho bodu $x_e = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$. V tomto prípade teda nie je potrebné posúvať súradnicový systém, pretože vyšetrovaný stacionárny bod je v začiatku.

Ako kandidáta na Lapunovovu funkciu použijeme celkovú (mechanickú) energiu systému. Nulovú potenciálnu energiu nech má kyvadlo pre $\varphi = x_1 = 0$. Potenciálna energia je $U = mgh$, kde $h = 2l - l - l\cos(x_1)$, teda

$$U = mgl - mgl\cos(x_1) \tag{44}$$

Pri rotačnom pohybe, vykonávanom kyvadlom, je (rotačná) kinetická energia

$$K = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 \tag{45}$$

Celková energia kyvadla je súčtom kinetickej a potenciálnej energie.

Kandidát na Lyapunovovu funkciu systému je potom v tvare

$$V = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + mgl - mgl\cos(x_1) \tag{46}$$

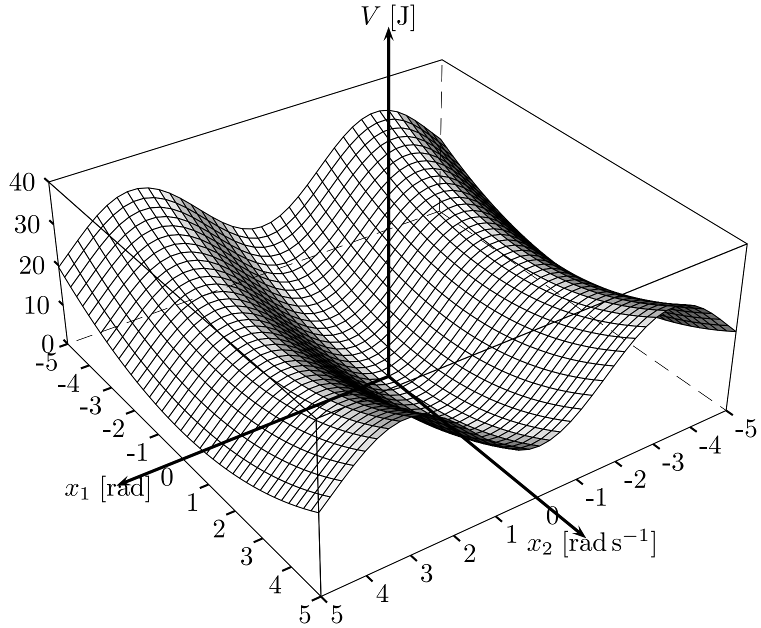
Funkcia (46) je znázornená na Obr. 8. Táto funkcia je nezáporná pre všetky x_1 a x_2, avšak nie je kladne definitná pre všetky x_1 a x_2, pretože bod $x_e = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ nie je jediný, kde funkcia nadobúda nulu. Ak uvažujeme len okolie začiatku B_r s polomerom $0 < r < \pi$, potom funkcia V je kladne definitná, pretože vtedy $-\pi < x_1 < \pi$ a len pre $x_e = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ máme $V(x_e) = 0$.

Časová derivácia funkcie pozdĺž trajektórie je

$$\dot{V} = ml^2x_2\left(-\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{\beta}{ml^2}x_2\right) + mgl\sin(x_1)x_2 \tag{47a}$$

$$\dot{V} = -mglx_2\sin(x_1) - \beta x_2^2 + mgl\sin(x_1)x_2 \tag{47b}$$

$$\dot{V} = -\beta x_2^2 \tag{47c}$$



Obr. 8: Znázornenie celkovej mechanickej energie kyvadla V ako funkcie stavu kyvadla (46)

Funkcia $\dot{V}$ je záporne definitná pre všetky x_2 a x_1, a teda aj pre tie, ktoré patria do uvažovaného okolia B_r. Preto môžme hovoriť, že na uvažovanom okolí stacionárneho bodu existuje Lyapunovova funkcia systému a preto je tento systém lokálne stabilný.

Ak chceme určiť stabilitu inému stacionárnumu bodu, napr. $x_e = \begin{bmatrix}\pi & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$, je potrebné najskôr posunúť tento bod do začiatku stavového priestoru. Zavedieme nové posunuté stavové veličiny:

$$z = x - x_e = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{48}$$

potom platí

$$x_1 = z_1 + \pi \tag{49a}$$

$$x_2 = z_2 \tag{49b}$$

Dosadením (49) do pôvodného systému (43) máme nový posunutý systém, ktorý má vyšetrovaný bod v začiatku stavového priestoru v tvare

$$\dot{z}_1 = z_2 \tag{50a}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(z_1 + \pi) - \frac{\beta}{ml^2} z_2 = \\ &= \frac{g}{l}\sin(z_1) - \frac{\beta}{ml^2} z_2 \end{aligned} \tag{50b}$$

Mimochodom, (50) je model inverzného kyvadla.

Môžme vyskúšať zvoliť toho istého kandidáta na Lyapunovovu funkciu ako (46) s dosadením (49), potom

$$V = \frac{1}{2} ml^2 z_2^2 + mgl - mgl\cos(z_1 + \pi) \tag{51a}$$

$$V = \frac{1}{2} ml^2 z_2^2 + mgl + mgl\cos(z_1) \tag{51b}$$

Okamžite vidíme, že táto funkcia nemôže byť kandidátom na Lyapunovovu funkciu, pretože v nulovom bode (začiatku) nemá nulovú hodnotu $V(0) \neq 0$ a teda nie je kladne definitná.

Aby sme dokázali, že daný stacionárny bod je *nestabilný* (v tomto prípade vieme, že je nestabilný), musíme nájsť takú funkciu $V(x)$, ktorá je v okolí rovnovážneho bodu kladne definitná a jej časová derivácia pozdĺž trajektórie systému je *tiež kladne definitná funkcia*.
. . . nájsť takú funkciu pre inverzné kyvadlo vôbec nie je jednoduché. Užitočnejším v tomto prípade je linearizovať systém v okolí daného stacionárneho bodu a určiť stabilitu tohto lineárneho systému pomocou vlastných čísiel dynamickej matice alebo tiež pomocou Lyapunovovej funkcie. O druhej možnosti hovorí nasledujúca časť.

5.3 Lyapunovova rovnica

Ako sme už uviedli, vo všeobecnosti nie je jednoduché nájsť vhodného kandidáta na Lypunovovu funkciu. Pre lineárny dynamický systém v tvare

$$\dot{x} = Ax \tag{52}$$

je však možné skonštruovať Lyapunovovu funkciu systematickým spôsobom, nasledovne:
Uvažujme kvadratickú formu ako kandidáta na Lyapunovovu funkciu

$$V(x) = x^\mathsf{T} P x \tag{53}$$

kde $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická matica, teda platí $P = P^\mathsf{T}$. Podmienka aby V bola kladne definitná je v tomto prípade ekvivalentná podmienke, že P je *kladne definitná matica*: $x^\mathsf{T} P x > 0$, $\forall\, x \neq 0$, čo zapisujeme ako $P > 0$. Platí, že ak je matica P symetrická, potom je matica P kladne definitná vtedy a len vtedy keď všetky vlastné čísla tejto matice sú reálne a kladné.

Časová derivácia uvažovaného kandidáta na Lyapunovovu funkciu pozdĺž trajektórie systému v tomto prípade je

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = x^\mathsf{T}\left(A^\mathsf{T} P + PA\right)x = -x^\mathsf{T} Q x \tag{54}$$

Požiadavka aby $\dot{V}$ bola záporne definitná znamená, že matica Q musí byť kladne definitná. Preto, pre nájdenie Lyapunovovej funkcie pre lineárny systém je postačujúce zvoliť maticu $Q > 0$ a vyriešiť tzv. *Lyapunovovu rovnicu*:

$$A^\mathsf{T} P + PA = -Q \tag{55}$$

čo je lineárna algebraická rovnica, ktorú možno riešiť pomocou lineárnej algebry. Dá sa ukázať, že táto rovnica má riešenie vždy ak vlastné čísla matice A sú v ľavej polrovine komlexnej roviny (ich reálne časti sú záporné) a navyše nájdená P je kladne definitná ak Q je kladne definitná. Preto je vždy možné nájsť kvadratickú Lyapunovovu funkciu pre stabilný lineárny systém.

6 Otázky a úlohy

1. Je zadaný systém v tvare:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2\end{aligned}$$

   Načrtnite (zhruba) fázový portrét systému alebo aspoň vektorové pole systému.

2. Linearizujte model kyvadla v okolí stacionárneho bodu $x_e = \begin{bmatrix}\pi & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$. Bonus: Aký typ stacionárneho bodu je uvedený bod? Svoju odpoveď zdôvodnite.

3. Pomocou kandidáta na Lyapunovovu funkciu vyšetrite stabilitu systému

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t)\end{aligned}$$

4. Pomocou kandidáta na Lyapunovovu funkciu vyšetrite stabilitu systému.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1\, x_1 + x_2 & k_1 &> 0\\ \dot{x}_2 &= -k_2\, x_1 & k_2 &> 0\end{aligned}$$