Uzavretý regulačný obvod

$$y = k_p \frac{Z_p}{R_p} \left(\frac{\Theta_2^\star + \Theta_3^\star \Lambda}{\Lambda - \Theta_1^\star} y + \frac{\Theta_4^\star \Lambda}{\Lambda - \Theta_1^\star} r \right) \tag{30a}$$

$$\left(1 - \frac{k_p Z_p \left(\Theta_2^\star + \Theta_3^\star \Lambda \right)}{R_p \left(\Lambda - \Theta_1^\star \right)} \right) y = \frac{k_p Z_p \Theta_4^\star \Lambda}{R_p \left(\Lambda - \Theta_1^\star \right)} r \tag{30b}$$

$$\frac{R_p \left(\Lambda - \Theta_1^\star \right) - k_p Z_p \left(\Theta_2^\star + \Theta_3^\star \Lambda \right)}{R_p \left(\Lambda - \Theta_1^\star \right)} y = \frac{k_p Z_p \Theta_4^\star \Lambda}{R_p \left(\Lambda - \Theta_1^\star \right)} r \tag{30c}$$

$$y = \frac{k_p Z_p \Theta_4^\star \Lambda}{R_p \left(\Lambda - \Theta_1^\star \right) - k_p Z_p \left(\Theta_2^\star + \Theta_3^\star \Lambda \right)} r \tag{30d}$$

Podmienky zhody

$$\Theta_4^\star = \frac{k_m}{k_p} \tag{31a}$$

$$\Lambda = Z_m \tag{31b}$$

$$R_p \left(\Lambda - \Theta_1^\star \right) - k_p Z_p \left(\Theta_2^\star + \Theta_3^\star \Lambda \right) = Z_p R_m \tag{31c}$$

1.2.2 Zovšeobecnenie pre systém n. rádu

Pri uvažovaní všeobecného zákona riadená v tvare (17) má prenosová funkcia uzavretého regulačného obvodu tvar

$$y = \frac{k_p Z_p \Theta_4^\star \Lambda^2}{\Lambda \left(R_p \left(\Lambda - {\Theta_1^\star}^\mathsf{T} \alpha(s) \right) - k_p Z_p \left({\Theta_2^\star}^\mathsf{T} \alpha(s) + \Theta_3^\star \Lambda \right) \right)} r \tag{32}$$

a podmienky zhody

$$\Theta_4^\star = \frac{k_m}{k_p} \tag{33a}$$

$$\Lambda = \Lambda_0 Z_m \tag{33b}$$

$$R_p \left(\Lambda - {\Theta_1^\star}^\mathsf{T} \alpha(s) \right) - k_p Z_p \left({\Theta_2^\star}^\mathsf{T} \alpha(s) + \Theta_3^\star \Lambda \right) = Z_p \Lambda_0 R_m \tag{33c}$$

Predpoklady pri, ktorých sú tieto podmienky splniteľné sú intuitívne zrejmé z predchádzajúceho príkladu v časti 1.2.1. Hlbšou analýzou MRC problému sa v tomto kurze zaoberať nebudeme. Poslucháča odkazujeme na odporúčanú literatúru, kde nájde všetky potrebné (matematické) detaily k riešeniu MRC problému.

1.3 Teoretický opis výsledného URO v stavovom priestore

V tejto časti vyjadríme uzavretý regulačný obvod, ktorý vznikne riešením MRC problému, pomocou opisu v stavovom priestore.

1.3.1 Ilustrácia na príklade systému 2. rádu

Opäť začneme zjednodušeným príkladom 1.2.1, a v ďalšej časti dodáme pre úplnosť všeobecný zápis URO v stavovom priestore.

Sústava v tvare (15), konkrétne (19), môže byť reprezentovaná opisom v stavovom priestore v tvare

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{34a}$$

$$y = c^\mathsf{T} x \tag{34b}$$

kde x je vektor stavových veličín sústavy a A; b; c^T sú konštantné matice (vektory) zodpovedajúcich rozmerov. V tomto prípade nekladieme žiadne podmienky na formu (kanonickú) matice A, ako to bolo v prípade stavového MRAC-u.

Uvažujeme zákon riadenia (21), pripomeňme:

$$u(s) = \Theta_1^\star \frac{1}{(s+\lambda)} u(s) + \Theta_2^\star \frac{1}{(s+\lambda)} y(s) + \Theta_3^\star y(s) + \Theta_4^\star r(s) \tag{35}$$

V prvých dvoch členoch zákona riadenia (35) sú použité takzvané prídavné filtre, ktorých vstupom je buď akčný zásah u (vstupný signál sústavy) alebo výstupná (riadená) veličina y. Tieto prídavné filtre sú tiež nazývané pomocné, či prídavné generátory, generujú prídavné (pomocné) signály. Oba prídavné filtre sú rovnaké, v tomto prípade dané prenosovou funkciou $\frac{1}{(s+\lambda)}$. Výstupné signály filtrov sú v tomto prípade skalárne signály. Vo všeobecnosti sú výstupné signály pomocných filtrov vektory signálov s rovnakým rozmerom ako vektory parametrov $\Theta_1^\star$ a $\Theta_2^\star$, viď všeobecný zápis zákona riadenia (17). Označme výstupné signály prídavných filtrov ν_1 a ν_2. Tieto signály sa násobia parametrami zákona riadenia $\Theta_1^\star$ a $\Theta_2^\star$. Prídavné filtre možno zapísať v tvare

$$\dot{\nu}_1 = -\lambda \nu_1 + u \tag{36a}$$

$$\dot{\nu}_2 = -\lambda \nu_2 + y = -\lambda \nu_2 + c^\mathsf{T} x \tag{36b}$$

Jednoduchým pridaním týchto pomocných signálov k sústave máme sústavu rovníc:

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{37a}$$

$$\dot{\nu}_1 = -\lambda \nu_1 + u \tag{37b}$$

$$\dot{\nu}_2 = -\lambda \nu_2 + c^\mathsf{T} x \tag{37c}$$

$$y = c^\mathsf{T} x \tag{37d}$$

Sústavu rovníc (37) budeme nazývať *doplnená sústava*. Doplnenú sústavu (37) možno zapísať v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\nu}_1 \\ \dot{\nu}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ c^\mathsf{T} & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{38a}$$

$$y = \begin{bmatrix} c^\mathsf{T} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} \tag{38b}$$

a po označení jednotlivých matíc a vektorov

$$\dot{X} = A_o X + B_c u \tag{39a}$$

$$y = C_c^\mathsf{T} X \tag{39b}$$

Zákon riadenia (35) zapíšeme v takom vektorovom tvare, v ktorom je možné využiť stavový vektor doplnenej sústavy X:

$$u = {\Theta_c^\star}^\mathsf{T} D X + \Theta_4^\star r \tag{40}$$

kde $\Theta_c^\star = \begin{bmatrix} \Theta_3^\star & \Theta_1^\star & \Theta_2^\star \end{bmatrix}^\mathsf{T}$; $\Theta_4^\star$ sú parametre zákona riadenia a maticu

$$D = \begin{bmatrix} c^\mathsf{T} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sme zaviedli práve preto aby sme v zákone riadenia (40) mohli priamo písať stavový vektor X. Tvar, v ktorom sa zákon riadenia (40) viac podobá na pôvodný zápis (35), a ktorý vyplýva priamo z (40) je

$$u = \Theta_1^\star \nu_1 + \Theta_2^\star \nu_2 + \Theta_3^\star c^\mathsf{T} x + \Theta_4^\star r \tag{41a}$$

$$u = \Theta_1^\star \nu_1 + \Theta_2^\star \nu_2 + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r \tag{41b}$$

Dosadením (40) do (39) získame opis URO v stavovom priestore v tvare (výstupnú rovnicu vynechávame, pretože sa nemení)

$$\dot{X} = A_o X + B_c \left({\Theta_c^\star}^\mathsf{T} D X + \Theta_4^\star r \right) \tag{42a}$$

$$\dot{X} = A_o X + B_c {\Theta_c^\star}^\mathsf{T} D X + B_c \Theta_4^\star r \tag{42b}$$

$$\dot{X} = \left(A_o + B_c {\Theta_c^\star}^\mathsf{T} D \right) X + B_c \Theta_4^\star r \tag{42c}$$

$$\dot{X} = A_c X + B_c \Theta_4^\star r \tag{42d}$$

kde

$$
\begin{aligned}
A_c &= A_o + B_c \Theta_c^{\star\top} D \\
&= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ c^\top & 0 & -\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_3^\star & \Theta_1^\star & \Theta_2^\star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^\top & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ c^\top & 0 & -\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\Theta_3^\star & b\Theta_1^\star & b\Theta_2^\star \\ \Theta_3^\star & \Theta_1^\star & \Theta_2^\star \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^\top & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ c^\top & 0 & -\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\Theta_3^\star c^\top & b\Theta_1^\star & b\Theta_2^\star \\ \Theta_3^\star c^\top & \Theta_1^\star & \Theta_2^\star \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A + b\Theta_3^\star c^\top & b\Theta_1^\star & b\Theta_2^\star \\ \Theta_3^\star c^\top & -\lambda + \Theta_1^\star & \Theta_2^\star \\ c^\top & 0 & -\lambda \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Pretože uzavretý regulačný obvod zapísaný v tvare

$$\dot{X} = A_c X + B_c \Theta_4^\star r \tag{44a}$$

$$y = C_c^\top X \tag{44b}$$

obsahuje ideálne parametre zákona riadenia, teda také, ktoré spĺňajú podmienky zhody musí sa tento zhodovať s referenčným modelom. Preto tzv. *neminimálna reprezentácia* prenosovej funkcie referenčného modelu (16) v stavovom priestore je

$$\dot{X}_m = A_c X_m + B_c \Theta_4^\star r \tag{45a}$$

$$y_m = C_c^\top X_m \tag{45b}$$

kde X_m sú stavové veličiny neminimálnej reprezentácie modelu

1.3.2 Zovšeobecnenie pre systém n. rádu

Uvažujeme zákon riadenia (17), pripomeňme:

$$u = \Theta_1^{\star\top} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{\star\top} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r \tag{46}$$

$\frac{\boxed{\begin{matrix} s \\ 1 \end{matrix}}}{\Lambda} \Rightarrow \frac{s}{\Lambda}$, $\frac{1}{\Lambda}$

kde $\alpha(s)$ je vektor obsahujúci mocniny s, $\alpha(s) = \left[s^{n-2}, \ldots, s, 1\right]^\top$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$. Vektory $\Theta_1^\star, \Theta_2^\star \in \mathbb{R}^{n-1}$ a skaláry $\Theta_3^\star, \Theta_4^\star \in \mathbb{R}^1$ sú konštantné parametre zákona riadenia. $\Lambda(s)$ je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$.

Napríklad prvý člen v (46) možno zapísať v tvare

$$y_{\nu_1} = \Theta_1^{\star\top} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u = \frac{\Theta_{1(n-2)}^\star s^{n-2} + \cdots + \Theta_{11}^\star s + \Theta_{10}^\star}{s^{n-1} + \lambda_{n-2} s^{n-2} + \cdots + \lambda_1 s + \lambda_0} u \tag{47}$$

kde $\Theta_1^\star = \left[\Theta_{1(n-2)}^\star \quad \cdots \quad \Theta_{11}^\star \quad \Theta_{10}^\star\right]^\top$, alebo v stavovom priestore v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{\nu}_{1(n-2)} \\ \dot{\nu}_{1(n-3)} \\ \dot{\nu}_{1(n-4)} \\ \vdots \\ \dot{\nu}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_{n-2} & -\lambda_{n-3} & \cdots & -\lambda_2 & -\lambda_1 & -\lambda_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{1(n-2)} \\ \nu_{1(n-3)} \\ \nu_{1(n-4)} \\ \vdots \\ \nu_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{48a}$$

$$y_{\nu_1} = \begin{bmatrix} \Theta_{1(n-2)}^\star & \Theta_{1(n-3)}^\star & \Theta_{1(n-4)}^\star & \cdots & \Theta_{10}^\star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{1(n-2)} \\ \nu_{1(n-3)} \\ \nu_{1(n-4)} \\ \vdots \\ \nu_{10} \end{bmatrix} \tag{48b}$$

Označme v (48) jednotlivé vektory a maticu:

$$\dot{\nu}_1 = \Lambda \nu_1 + q u \tag{49a}$$

$$y_{\nu_1} = \Theta_1^{\star\top} \nu_1 \tag{49b}$$

Z uvedeného vyplýva, že prvý prídavný filter má v stavovom priestore tvar $\dot{\nu}_1 = \Lambda \nu_1 + q u$ kde ν_1 je vektor pomocných signálov generovaných prvým pomocným generátorom (stavový vektor prvého pomocného generátora). Tento je násobený parametrami zákona riadenia $\Theta_1^{\star\top}$. Analogicky, druhý prídavný filter má v stavovom priestore tvar $\dot{\nu}_2 = \Lambda \nu_2 + q y = \Lambda \nu_2 + q c^\top x$. Doplnená sústava vo všeobecnom tvare je

$$\dot{x} = A x + b u \tag{50a}$$

$$\dot{\nu}_1 = \Lambda \nu_1 + q u \tag{50b}$$

$$\dot{\nu}_2 = \Lambda \nu_2 + q c^\top x \tag{50c}$$

$$y = c^\top x \tag{50d}$$

Potom v (39) sú

$$x = \begin{bmatrix} x \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}; \quad A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ q c^\top & 0 & \Lambda \end{bmatrix}; \quad b_c = \begin{bmatrix} b \\ q \\ 0 \end{bmatrix}; \quad c_c^\top = \begin{bmatrix} c^\top & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{51}$$

Zákon riadenia (46) zapíšeme vo vektorovom tvare:

$$u = \Theta_c^{\star\top} D x + \Theta_4^\star r \tag{52}$$

kde $\Theta_c^\star = \left[\Theta_3^\star \quad \Theta_1^{\star\top} \quad \Theta_2^{\star\top}\right]^\top$; $\Theta_4^\star$ sú parametre zákona riadenia a maticu

$$D = \begin{bmatrix} c^\top & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

sme zaviedli práve preto aby sme v zákone riadenia (52) mohli priamo písať stavový vektor x. Tvar, v ktorom sa zákon riadenia (52) viac podobá na pôvodný zápis (46), a ktorý vyplýva priamo z (52) je

$$u = \Theta_1^{\star\top} \nu_1 + \Theta_2^{\star\top} \nu_2 + \Theta_3^\star c^\top x + \Theta_4^\star r \tag{53a}$$

$$u = \Theta_1^{\star\top} \nu_1 + \Theta_2^{\star\top} \nu_2 + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r \tag{53b}$$

Dosadením (52) do (39), v ktorej sú ale matice (51), získame opis URO v stavovom priestore v tvare (44), a matica A_c má tvar

$$
\begin{aligned}
A_c &= A_o + b_c \Theta_c^{\star\top} D \\
&= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ q c^\top & 0 & \Lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ q \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_3^\star & \Theta_1^{\star\top} & \Theta_2^{\star\top} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^\top & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ q c^\top & 0 & \Lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\Theta_3^\star & b\Theta_1^{\star\top} & b\Theta_2^{\star\top} \\ q\Theta_3^\star & q\Theta_1^{\star\top} & q\Theta_2^{\star\top} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^\top & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ q c^\top & 0 & \Lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\Theta_3^\star c^\top & b\Theta_1^{\star\top} & b\Theta_2^{\star\top} \\ q\Theta_3^\star c^\top & q\Theta_1^{\star\top} & q\Theta_2^{\star\top} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A + b\Theta_3^\star c^\top & b\Theta_1^{\star\top} & b\Theta_2^{\star\top} \\ q\Theta_3^\star c^\top & \Lambda + q\Theta_1^{\star\top} & q\Theta_2^{\star\top} \\ q c^\top & 0 & \Lambda \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{54}
$$

Pretože takto všeobecne opísaný URO obsahuje ideálne parametre zákona riadenia, teda také, ktoré spĺňajú podmienky zhody musí sa tento zhodovať so všeobecným referenčným modelom (16), ktorého neminimálna reprezentácia v stavovom priestore má tvar

$$\dot{x}_m = A_c x_m + \overline{b}_c r \tag{55a}$$

$$y_m = c_c^\mathsf{T} x_m \tag{55b}$$

kde x_m sú stavové veličiny neminimálnej reprezentácie referenčného modelu a kde sme označili $\overline{b}_c = b_c \Theta_4^\star$.

2 Cvičenie šieste ako príklad k téme *MRC vo všeobecnosti*

Tento príklad sa týka riadenia s referenčným modelom avšak bez adaptácie. Cieľom tu teda nie je návrh adaptívneho riadiaceho systému. Cieľom je oboznámenie sa s riešením MRC problému (problému návrhu (výpočtu) riadenia s referenčným modelom). Tu uvedené zároveň slúži na priebežné zopakovanie vybraných tém súvisiacich s numerickou simuláciou.

2.1 Úlohy

1. Uvažujme riadený systém[2], ktorý pracuje v pásme danom dvomi pracovnými bodmi. V týchto dvoch hraničných pracovných bodoch prenosová funkcia systému nie je rovnaká, vyskytujú sa mierne rozdiely v hodnotách koeficientov jednotlivých polynómov, pričom stupne polynómov sú zhodné, konkrétne:

$$G_{OP_1} = 0,1659 \frac{s + 22}{s^2 + 3,1423s + 2,6539} \tag{56}$$

$$G_{OP_2} = 0,1669 \frac{s + 20,7618}{s^2 + 2,3422s + 2,7293} \tag{57}$$

- Určte *nominálnu* prenosovú funkciu sústavy tak, že jej koeficienty sú priemery hodnôt oboch prenosových funkcií (56) a (57).
- Pre nominálnu prenosovú funkciu sústavy určte polynómy Z_p, R_p a zosilnenie k_p pričom

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \tag{58}$$

kde $Z_p(s)$ je monický polynóm stupňa m, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa n a k_p je tzv. *vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy*. *Relatívny stupeň* sústavy je $n^* = n - m$.

- Zistite, či polynóm $Z_p(s)$ je Hurwitzov.

2. Vyriešte MRC problém pre nominálnu prenosovú funkciu sústavy, uvažujte referenčný model daný prenosovou funkciou v tvare

$$W_m(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3.5s + 3} \tag{59}$$

Referenčný model je daný prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \tag{60}$$

kde k_m je vysokofrekvenčné zosilnenie referenčného modelu, $Z_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa m_m, $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa n_m, pričom relatívny stupeň $n_m^* = n_m - m_m = n^*$.

Riešením MRC problému je taký zákon riadenia u, ktorý zabezpečí, že výstup sústavy y sleduje výstup referenčného modelu y_m pri danom referenčnom signály (vstupe referenčného modelu) r. Všeobecný tvar zákona riadenia, ktorý rieši MRC problém je

$$u = \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r \tag{61}$$

[2] Uvedený riadený systém je prevzatý z článku publikovanom v prestížnom elektronickom časopise posterus.sk (nemýliť si so Slniečkom, už nevychádza), viď [5].

```
            except:
                break

sig_dummy_ext = sig_vysl

# Spustenie simulacie

t_log, x_log, y_log, u_log, y_m_log = fcn_simSch2(
    sim_t_start,
    sim_T_s,
    sim_finalIndex,
    sig_dummy_ext,
    )
```

3 SPR prenosové funkcie, MKY lemma

3.1 Striktne pozitívne reálne prenosové funkcie

Pojem *Pozitívne reálna* (PR) a *Striktne pozitívne reálna* (SPR) prenosová funkcia zohráva dôležitú úlohu v analýze stability nie len adaptívnych systémov [1]. Je preto dôležité disponovať kritériom, ktoré umožní zistiť, či príslušná prenosová funkcia je SPR ([3] str. 164).

Podľa definície 3.5.1 a 3.5.2 v [1], str. 127, prenosová fukcia $G(s)$ komplexnej premennej s sa nazýva pozitívne reálna (PR) ak

1. $G(s)$ je reálna pre reálne s.
2. $\Re\{G(s)\} \geq 0$ pre všetky $\Re\{s\} > 0$. ??

Prenosová funkcia $G(s)$ je striktne pozitívne reálna (SPR) ak existuje reálne kladné číslo ε také, že $G(s-\varepsilon)$ je PR.

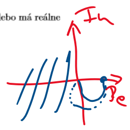
Prakticky nie je jednoduché zistiť, či uvedené podmienky sú splnené. V nasledujúcom uvedieme ekvivalentné nutné a postačujúce podmienky pozitívnej reálnosti. Platnosť týchto podmienok sa dá ľahko overiť. Prenosová funkcia $G(s)$ je PR keď vyhovuje všetkým nasledujúcim podmienkam

!

1. $G(s)$ je reálna pre všetky reálne s.
2. Menovateľ $G(s)$ má korene v ľavej polrovine komplexnej roviny alebo má reálne korene na imaginárnej osi.
3. $\Re\{G(j\omega)\} \geq 0$ pre všetky reálne ω.

Pre vyjadrenie reálnej časti funkcie $G(j\omega)$ je výhodné využiť, že platí:

$$\frac{a+jb}{c+jd} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{c^2+d^2}$$



3.2 Meyerova-Kalmanova-Yakubovichova Lemma

Pre danú stabilnú maticu A, vektory b, c a skalár $d \geq 0$, platí nasledujúce: Ak

$$G(s) = d + c^\top (sI - A)^{-1} b$$

je SPR, potom pre danú maticu $L = L^\top > 0$ existujú skalár $v > 0$, vektor q a matica $P = P^\top > 0$ také, že

$$A^\top P + PA = -qq^\top - vL$$
$$Pb - c = \pm q\sqrt{2d}$$

Tak znie veta, ktorá, ako sa ukáže, je veľmi užitočná pri návrhu MRAC využívajúceho len vstupno-výstupné informácie.

V tomto kurze ju využijeme v menej všeobecnom tvare. Nech je systém daný trojicou A_c, $\overline{B}_c$, C_c a A_c nech je stabilná matica. Ak $W_m(s) = C_c^\top (sI - A_c)^{-1} \overline{B}_c$ je SPR, potom platí, že

b

$$A_c^\top P + PA_c = -Q$$
$$P\overline{B}_c = C_c$$

$e^\top P b$

kde $Q = Q^\top > 0$. A je to práve fakt, že ak je $W_m(s)$ SPR tak platí $P\overline{B}_c = C_c$, ktorý umožní zredukovať zákon adaptácie tak, že v ňom vystupuje len odchýlka výstupných veličín sústavy a referenčného modelu [2].

$\varepsilon = C_c^\top e$

4 Adaptačná odchýlka

$y - y_m$

$e^\top C_c$

$C_c^\top e$

$\Downarrow$

e_1

4.1 Model sústavy a referenčný model

Uvažujme sústavu opísanú prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \tag{105}$$

kde $Z_p(s)$ je monický Hurwitzov polynóm stupňa m, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa n a k_p je tzv. *vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy*. *Relatívny stupeň* sústavy je $n^* = n - m$. Predpokladajme, že relatívny stupeň n^* sústavy je známy. Pre zjednodušenie tiež predpokladajme, že aj stupne n a m polynómov sú známe, pričom vo všeobecnosti známe nemusia byť. Koeficienty polynómov $Z_p(s)$ a $R_p(s)$ (parametre sústavy) sú neznáme. Hodnota a znamienko zosilnenia k_p nech je známe.

Sústava v tvare (105) môže byť reprezentovaná opisom v stavovom priestore v tvare

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{106a}$$
$$y = c^\top x \tag{106b}$$

kde x je vektor stavových veličín sústavy a A, b, $c^\top$ sú matice (vektory) zodpovedajúcich rozmerov pričom hodnoty ich prvkov sú neznáme.

Cieľom riadenia je: Nech všetky signály uzavretého regulačného obvodu sú ohraničené a výstupná veličina y sústavy nech sleduje výstupnú veličinu referenčného modelu, ktorý je daný prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \tag{107}$$

kde k_m je vysokofrekvenčné zosilnenie, $Z_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa m_m, $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa n_m, pričom relatívny stupeň $n_m^* = n_m - m_m = n^*$. Všetky parametre (koeficienty polynómov a k_m) referenčného modelu sú známe, dané „projektantom“.

4.2 Zákon riadenia

Ako bolo ukázané v predchádzajúcich témach predmetu, zákon riadenia v tvare

$$u = \Theta_1^{\star\top} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{\star\top} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r \tag{108}$$

zabezpečí, že priebeh výstupnej veličiny y sa zhoduje s priebehom výstupnej veličiny referenčného modelu y_m ak sú parametre zákona vypočítané z podmienok zhody

$$\Theta_4^\star = \frac{k_m}{k_p} \tag{109a}$$
$$\Lambda = \Lambda_0 Z_m \tag{109b}$$
$$R_p\left(\Lambda - \Theta_1^{\star\top}\alpha(s)\right) - k_p Z_p\left(\Theta_2^{\star\top}\alpha(s) + \Theta_3^\star \Lambda\right) = Z_p \Lambda_0 R_m \tag{109c}$$

Pretože parametre sústavy (105) sú neznáme, zákon riadenia (108) nemožno použiť. Použije sa zákon riadenia v tvare

$$u = \Theta_1^\mathsf{T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^\mathsf{T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3 y + \Theta_4 r \tag{110}$$

kde Θ_1, Θ_2, Θ_3 a Θ_4 sú odhadmi ideálnych parametrov $\Theta_1^\star$, $\Theta_2^\star$, $\Theta_3^\star$ a $\Theta_4^\star$ v každom čase t. Je potrebné nájsť zákon adaptácie, ktorý priebežne generuje (identifikuje) hodnoty $\Theta_1(t)$, $\Theta_2(t)$, $\Theta_3(t)$ a $\Theta_4(t)$.

Pomocné filtre vystupujúce v zákone riadenia v stavovom priestore sú (viď predch. článok)

$$\dot{\nu}_1 = \Lambda \nu_1 + qu \tag{111a}$$
$$\dot{\nu}_2 = \Lambda \nu_2 + qc^\mathsf{T} x \tag{111b}$$

a uvažovaný zákon riadenia je

$$u = \Theta_c^\mathsf{T} DX + \Theta_4 r \tag{112}$$

kde $\Theta_c = \begin{bmatrix} \Theta_3^\star & \Theta_1^\mathsf{T} & \Theta_2^\mathsf{T} \end{bmatrix}^\mathsf{T}$, Θ_4 sú parametre zákona riadenia a

$$D = \begin{bmatrix} c^\mathsf{T} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

4.3 Rovnica adaptačnej odchýlky

Pridanie pomocných filtrov (111) k stavovému opisu sústavy (106) vedie k „doplnenej sústave“ (viď predch. časti predmetu) v tvare

$$\dot{X} = A_o X + B_c u \tag{113a}$$
$$y = C_c^\mathsf{T} X \tag{113b}$$

Parametrizácia doplnenej sústavy (113) pomocou ideálnych parametrov zákona riadenia sa dosiahne pripočítaním a odpočítaním ideálneho vstupného výrazu $B_c u^\star = B_c \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX + B_c \Theta_4^\star r$

$$\dot{X} = A_o X + B_c u + B_c \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX + B_c \Theta_4^\star r - B_c \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - B_c \Theta_4^\star r \tag{114a}$$
$$\dot{X} = \left(A_o + B_c \Theta_c^{\star\mathsf{T}} D\right) X + \boxed{B_c \Theta_4^\star r} + B_c \left(u - \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{114b}$$

Z predchádzajúcich častí vieme, že $A_c = A_o + B_c \Theta_c^{\star\mathsf{T}} D$, $\overline{B}_c = B_c \Theta_4^\star$ a tiež, že neminimálnu reprezentáciu referenčného modelu (107) možno (teoreticky) zapísať v tvare

$\dot{e} = \dot{X} - \dot{X}_m$
$e_1 = y - y_m$

$$\dot{X}_m = A_c X_m + \overline{B}_c r \tag{115a}$$
$$y_m = C_c^\mathsf{T} X_m \tag{115b}$$

Potom parametrizovaná doplnená sústava (114b) je

$$\dot{X} = A_c X + \overline{B}_c r + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(u - \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{116a}$$
$$y = C_c^\mathsf{T} X \tag{116b}$$

Definujme *adaptačnú odchýlku* v tvare

$$e = X - X_m \tag{117}$$
$$e_1 = y - y_m \tag{118}$$

potom:

$$\dot{X} - \dot{X}_m = A_c (X - X_m) + \overline{B}_c r - \overline{B}_c r + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(u - \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{119a}$$
$$y - y_m = C_c^\mathsf{T} (X - X_m) \tag{119b}$$

$\dot{e} = A_m e + b\left(u - k^{*\mathsf{T}} x - l^* r\right)$

a teda

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(u - \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{120a}$$
$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{120b}$$

čo je základná rovnica opisujúca dynamiku adaptačnej odchýlky v stavovom priestore, ktorú možno vyjadriť v tvare prenosovej funkcie uvážením, že platí

$\Theta^* \leftarrow ??!!!$

$$\boxed{W_m(s) = C_c^\mathsf{T} (sI - A_c)^{-1} \overline{B}_c} \tag{121}$$

Potom (120) v tvare prenosovej funkcie je

$e = X - X_m$?

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(u - \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{122}$$

e_1

Odhadom odchýlky e_1 nech je $\hat{e}_1$, ktorá je závislá od odhadov $\Theta_c(t)$, $\Theta_4(t)$.

$$\hat{e}_1 = W_m(s) l \left(u - \Theta_c DX - \Theta_4 r\right) \tag{123}$$

kde l je odhadom hodnoty $\frac{1}{\Theta_4^\star}$. Pretože uvažujeme zákon riadenia $u = \Theta_c^\mathsf{T} DX + \Theta_4 r$, tak $\hat{e}_1 = 0$; $\forall t$. To znamená, že rovnica (123) nie je potrebná pre identifikáciu neznámych parametrov $\Theta_c^\star$, $\Theta_4^\star$ a ako chybu odhadu týchto parametrov možno použiť priamo rovnicu adaptačnej odchýlky (122).

5 Zákon adaptácie pri $n^* = 1$

Uvažujme, že relatívny stupeň sústavy (105) je $n^* = 1$. Prenosová funkcia referenčného medelu $W_m(s)$ sa volí tak, aby jej relatívny stupeň bol zhodný s relatívnym stupňom sústavy. Relatívny stupeň referenčného modelu $n_m^* = 1$ umožňuje aby prenosová funkcia $W_m(s)$ bola navrhnutá ako striktne pozitívne reálna (SPR).

?

Nech $W_m(s) = C_c^\mathsf{T} (sI - A_c)^{-1} \overline{B}_c$ je SPR. Potom podľa MKY lemmy v časti 3.2 existuje taká matica P, pre ktorú platí

$$A_c^\mathsf{T} P + P A_c = -Q \tag{124a}$$
$$P \overline{B}_c = C_c \tag{124b}$$

!

kde $Q = Q^\mathsf{T} > 0$. Táto skutočnosť sa v ďalšom využije pri voľbe kandidáta na Lyapunovovu funkciu.

Dosadením (112) za u do (122) máme

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(\theta_c^\mathsf{T} DX + \theta_4 r\right) \tag{125}$$

$W_m = \frac{k_m Z_m}{R_m}$

kde $\theta_c = \Theta_c - \Theta_c^\star$ a $\theta_4 = \Theta_4 - \Theta_4^\star$. Zavedením vektora chyby nastavenia parametrov zákona riadenia $\theta = \begin{bmatrix} \theta_c^\mathsf{T} & \theta_4 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ a signálneho vektora $\omega = \begin{bmatrix} (DX)^\mathsf{T} & r \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ máme známy tvar adaptačnej odchýlky

$$\boxed{e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(\theta^\mathsf{T} \omega\right)} \tag{126}$$

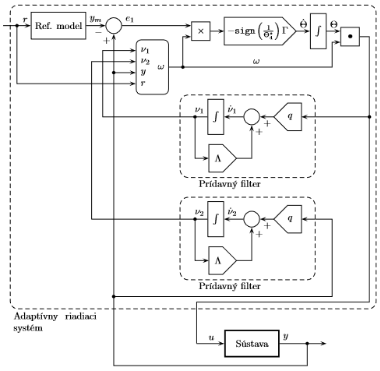
alebo

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(\theta^\mathsf{T} \omega\right) \tag{127a}$$
$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{127b}$$

V tomto prípade rovnica (126) alebo (127) dáva do vzťahu chybu nastavenia parametrov zákona riadenia Θ a adaptačnú odchýlku e_1 cez SPR prenosovú funkciu.

Predpokladajme, že štruktúra zákona adaptácie je daná diferenciálnou rovnicou všeobecne zapísanou v tvare

$$\boxed{\dot{\theta} = f(e_1, \omega)} \tag{128}$$



Obr. 5: Bloková schéma MRAC so vstupno-výstupnou štruktúrou riadenia pri $n^\star = 1$

teda aby zákon adaptácie bol funkciou len výstupnej adaptačnej odchýlky e_1 a nie aj jej derivácií e, pretože tieto nie sú dostupné, nakoľko nie sú dostupné stavové veličiny sústavy.

Zvoľme kandidáta na Ljapunovovu funkciu v tvare

$$V = e^\top P e + \left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \theta^\top \Gamma^{-1} \theta \tag{129}$$

$V \geq 0$

$\dot{V} \leq 0$

kde $\Gamma > 0$ je ľubovolná diagonálna matica, $\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|$ je absolútna hodnota prevrátenej hodnoty parametra $\Theta_4^\star$ a $P = P^\top > 0$ spĺňa rovnice (124), ktoré vyplývajú z MKY lemmy.

$$\dot{V} = \dot{e}^\top P e + e^\top P \dot{e} + \left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \left(\dot{\theta}^\top \Gamma^{-1} \theta + \theta^\top \Gamma^{-1} \dot{\theta}\right) \tag{130}$$

Poznáme (127) odkiaľ $\dot{e}^\top = e^\top A_c^\top + \omega^\top \theta \frac{1}{\Theta_4^\star} \overline{B}_c^\top$, po dosadení týchto výrazov:

$$\dot{V} = \left(e^\top A_c^\top + \omega^\top \theta \frac{1}{\Theta_4^\star} \overline{B}_c^\top\right) P e + e^\top P \left(A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\top \omega\right) + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \theta^\top \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{131}$$

$$\dot{V} = e^\top (-Q) e + \underbrace{2e^\top P \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\top \omega + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \theta^\top \Gamma^{-1} \dot{\theta}}_{=0} \tag{132}$$

$e^\top P \overline{B}_c$

$[\cdot]$

$\overline{B}_c^\top P^\top e^\top$

Pripomeňme, že platí $\boxed{P\overline{B}_c = C_c}$ (to vďaka tomu, že $W_m(s)$ je SPR), potom

$$\dot{V} = e^\top (-Q) e + 2e^\top C_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\top \omega + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \theta^\top \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{133}$$

$\overline{B}_c^\top P^\top e$

$C_c^\top e = e_1$

Všimnime si, že $e^\top C_c = C_c^\top e = e_1$. Práve tento moment umožní aby zákon adaptácie $\dot{\theta} = f(e_1, \omega)$ bol funkciou e_1 a nie e. Časová derivácia $\dot{V}$

$$\boxed{\dot{V} = e^\top (-Q) e + \underbrace{2e_1 \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\top \omega + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \theta^\top \Gamma^{-1} \dot{\theta}}_{=0}} \tag{134}$$

bude záporne definitná ak

$$0 = 2e_1 \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\top \omega + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \theta^\top \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{135a}$$

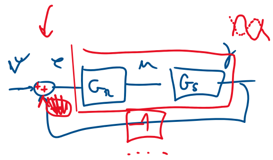
$$2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \theta^\top G^{-1} \dot{\theta} = -2e_1 \frac{1}{\Theta_4^\star} \Theta^\top \omega \tag{135b}$$

$$\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \Gamma^{-1} \dot{\theta} = -e_1 \,\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right) \left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \omega \tag{135c}$$

$$\Gamma^{-1} \dot{\theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right) e_1 \omega \tag{135d}$$

$$\dot{\theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right) e_1 \Gamma \omega \tag{135e}$$

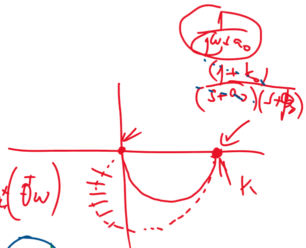
$\omega = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ y \\ r \end{bmatrix}$



Rovnako ako sme zaviedli vektor Θ, zavedieme aj vektor parametrov zákona riadenia v tvare
$\Theta = \left[\Theta_c^\top \quad \Theta_4\right]^\top = \left[\Theta_3 \quad \Theta_1^\top \quad \Theta_2^\top \quad \Theta_4\right]^\top$ a vektor ω možno zapísať v tvare $\omega = \left[y \quad \nu_1^\top \quad \nu_2^\top \quad r\right]^\top$. Potom zákon adaptácie je

$$\dot{\Theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right) \Gamma e_1 \omega \tag{136}$$

a uvažovaný zákon riadenia možno zapísať v tvare $u = \Theta^\top \omega$.



6 Zákon adaptácie pri $n^* = 2$

6.1 Priamočiary postup

Uvažujme relatívny stupeň sústavy (105) $n^* = 2$. Prenosová funkcia referenčného medelu $W_m(s)$ sa volí tak, aby jej relatívny stupeň bol zhodný s relatívnym stupňom sústavy, teda $n_m^* = 2$. To ale znamená (bez dôkazu), že prenosová funkcia $W_m(s)$ nie je SPR. Preto nie je možné použiť predchádzajúci postup a je ho potrebné modifikovať.

Rovnica pre adaptačnú odchýlku (122)

$$e_1 = \boxed{W_m(s)} \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(u - \Theta_c^{\star\top} D X - \Theta_4^\star r\right) \tag{137}$$

$e_1 = W_m \, \theta^\top \omega$

je stále platná (pri jej odvodení nehral relatívny stupeň sústavy žiadnu úlohu).

Využime identitu $\boxed{(s+\rho)(s+\rho)^{-1} = 1}$ kde ρ je ľubovolná kladná konštanta a prepíšme rovnicu (122) do tvaru

$$e_1 = W_m(s)(s+\rho)(s+\rho)^{-1} \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(u - \Theta_c^{\star\top} D X - \Theta_4^\star r\right) \tag{138}$$

$W_m(s) \, L(s) \, \overline{L}(s)$

$\frac{1}{L(s)}$

čo možno prepísať do tvaru

$$e_1 = W_m(s)(s+\rho) \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(u_f - \Theta^{\star\top} \omega_f\right) \tag{139}$$

kde sme zaviedli $\boxed{u_f = (s+\rho)^{-1} u}$, $\boxed{\omega_f = (s+\rho)^{-1} \omega}$ a $\Theta^\star$ je rovnaký ako Θ avšak obsahuje ideálne parametre.

$u_f = \frac{1}{L} u$ $\quad$ u? $\quad$ $u = L u_f$ $\quad$?? $\quad$ $u = \Theta^\top \omega$

Nech prenosová funkcia $W_m(s)(s+\rho)$ je zvolená tak, že je to SPR prenosová funkcia. Potom rovnica

$$e_1 = W_m(s)(s+\rho)\frac{1}{\Theta_4^\star}\left(\theta^\top \omega_f\right) \tag{140}$$

kde $\theta = \Theta - \Theta^\star$ dáva do vzťahu chybu nastavenia parametrov zákona riadenia θ a adaptačnú udchýlku e_1 cez SPR prenosovú funkciu. Reprezentácia rovnice (140) v stavovom priestore je

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c (s+\rho)\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f \tag{141a}$$

$$e_1 = C_c^\top e \tag{141b}$$

kde s teraz predstavuje operátor derivácie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, rovnako ako bodka „˙" nad e. V ďalšom sa tiež stretneme s takýmto významom symbolu s, pričom na to nebudeme zvlášť upozorňovať, konkrétny význam symbolu s vyplynie z kontextu. Preto

$$se = A_c e + s\left(\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f\right) + \rho\left(\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f\right) \tag{142a}$$

$$s\left(e - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f\right) = A_c e + \rho\left(\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f\right) \tag{142b}$$

Označme $e - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f = \overline{e}$, potom $e = \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f + \overline{e}$ a teda

$$s\overline{e} = A_c\left(\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f + \overline{e}\right) + \rho\left(\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f\right) \tag{143a}$$

$$e_1 = C_c^\top e = C_c^\top\left(\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f + \overline{e}\right) \tag{143b}$$

$$\dot{\overline{e}} = A_c\overline{e} + A_c\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f + \rho\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f \tag{144a}$$

$$e_1 = C_c^\top \overline{e} + C_c^\top \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f \tag{144b}$$

Pretože $C_c^\top B_c = 0$ tak aj $C_c^\top \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f = 0$, potom

$$\dot{\overline{e}} = A_c\overline{e} + \left(A_c\overline{B}_c + \rho\overline{B}_c\right)\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f \tag{145a}$$

$$e_1 = C_c^\top \overline{e} \tag{145b}$$

Označme $A_c\overline{B}_c + \rho\overline{B}_c = B_1$, potom

$$\dot{\overline{e}} = A_c\overline{e} + B_1\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f \tag{146a}$$

$$e_1 = C_c^\top \overline{e} \tag{146b}$$

je stavová reprezentácia systému (140) daného prenosovou funkciou $W_m(s)(s+\rho)$, pričom $\overline{e}$ je vektor jeho stavových veličín.

Funkcia $W_m(s)(s+\rho) = C_c^\top\left(sI - A_c\right)^{-1} B_1$ je SPR. Potom podľa MKY lemmy v časti 3.2 existuje taká matica P, pre ktorú platí

$$A_c^\top P + PA_c = -Q \tag{147a}$$

$$PB_1 = C_c \tag{147b}$$

kde $Q = Q^\top > 0$.

Predpokladajme, že štruktúra zákona adaptácie je daná diferenciálnou rovnicou všeobecne zapísanou v tvare

$$\dot{\theta} = f(e_1, \omega_f) \tag{148}$$

Zvoľme kandidáta na Ljapunovovu funkciu v tvare

$$V = \overline{e}^\top P\overline{e} + \left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\theta^\top \Gamma^{-1}\theta \tag{149}$$

kde $\Gamma > 0$ je ľubovolná diagonálna matica, $\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|$ je absolútna hodnota prevrátenej hodnoty parametra $\Theta_4^\star$ a $P = P^\top > 0$ spĺňa rovnice (147), ktoré vyplývajú z MKY lemmy.

$$\dot{V} = \dot{\overline{e}}^\top P\overline{e} + \overline{e}^\top P\dot{\overline{e}} + \left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\left(\dot{\theta}^\top \Gamma^{-1}\theta + \theta^\top \Gamma^{-1}\dot{\theta}\right) \tag{150}$$

Poznáme (146) odkiaľ $\dot{\overline{e}}^\top = \overline{e}^\top A_c^\top + \omega_f^\top \theta \frac{1}{\Theta_4^\star} B_1^\top$, po dosadení týchto výrazov:

$$\dot{V} = \left(\overline{e}^\top A_c^\top + \omega_f^\top \theta \frac{1}{\Theta_4^\star} B_1^\top\right) P\overline{e} + \overline{e}^\top P\left(A_c\overline{e} + B_1\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f\right) + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\theta^\top \Gamma^{-1}\dot{\theta} \tag{151}$$

$$\dot{V} = \overline{e}^\top(-Q)\overline{e} + 2\overline{e}^\top PB_1\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\theta^\top \Gamma^{-1}\dot{\theta} \tag{152}$$

Pripomeňme, že platí $PB_1 = C_c$, potom

$$\dot{V} = \overline{e}^\top(-Q)\overline{e} + 2\overline{e}^\top C_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\theta^\top \Gamma^{-1}\dot{\theta} \tag{153}$$

Všimnime si, že $\overline{e}^\top C_c = C_c^\top \overline{e} = e_1$. Časová derivácia $\dot{V}$

$$\dot{V} = \overline{e}^\top(-Q)\overline{e} + 2e_1\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\theta^\top \Gamma^{-1}\dot{\theta} \tag{154}$$

bude záporne definitná ak

$$0 = 2e_1\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\theta^\top \Gamma^{-1}\dot{\theta} \tag{155a}$$

$$2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\theta^\top \Gamma^{-1}\dot{\theta} = -2e_1\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\top \omega_f \tag{155b}$$

$$\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\Gamma^{-1}\dot{\theta} = -e_1\,\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right)\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\omega_f \tag{155c}$$

$$\Gamma^{-1}\dot{\theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right)e_1\omega_f \tag{155d}$$

$$\dot{\theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right)e_1\Gamma\omega_f \tag{155e}$$

Potom zákon adaptácie je

$$\dot{\Theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right)\Gamma e_1\omega_f \tag{156}$$

Signálny vektor ω_f má zložky $\omega_f = \begin{bmatrix} y_f & \nu_{1f}^\top & \nu_{2f}^\top & r_f \end{bmatrix}^\top$. Tieto signály získame jednoducho prechodom pôvodných signálov y, $\nu_1^\top$, $\nu_2^\top$ a r cez filtre s prenosovou funkciou v tvare $\frac{1}{s+\rho}$.

Vstupom do sústavy je u. Pri odvodení zákona adaptácie sme ale uvažovali $u_f = (s+\rho)^{-1}u$ odkiaľ $u = (s+\rho)u_f$. Signál u_f možno zapísať aj v tvare $u_f = \Theta^\top \omega_f$. Teda $u = (s+\rho)\Theta^\top \omega_f$, z čoho vyplýva, že

?

$$\boxed{u = \Theta^\top \omega + \dot{\Theta}^\top \omega_f} \tag{157}$$

$u = \Theta^\top \omega$

Pre objasnenie (157) naznačíme, že:

$$
\begin{aligned}
&(s+\rho)\Theta^{\mathsf{T}}\omega_f\\
&s\left(\Theta^{\mathsf{T}}\omega_f\right)+\rho\Theta^{\mathsf{T}}\omega_f\\
&s\left(\Theta^{\mathsf{T}}\right)\omega_f+\Theta^{\mathsf{T}}s\left(\omega_f\right)+\rho\Theta^{\mathsf{T}}\omega_f\\
&\dot{\Theta}^{\mathsf{T}}\omega_f+\Theta^{\mathsf{T}}s\left(\frac{1}{(s+\rho)}\omega\right)+\rho\Theta^{\mathsf{T}}\frac{1}{(s+\rho)}\omega\\
&\dot{\Theta}^{\mathsf{T}}\omega_f+\Theta^{\mathsf{T}}\frac{s}{(s+\rho)}\omega+\Theta^{\mathsf{T}}\frac{\rho}{(s+\rho)}\omega\\
&\dot{\Theta}^{\mathsf{T}}\omega_f+\Theta^{\mathsf{T}}\frac{s+\rho}{(s+\rho)}\omega\\
&\dot{\Theta}^{\mathsf{T}}\omega_f+\Theta^{\mathsf{T}}\omega
\end{aligned}
$$

6.2 Metóda doplnenej odchýlky

Vo všeobecnosti, zákon riadenia, ktorý rieši MRC problém je $u=\Theta^{\mathsf{T}}\omega$. Pri jeho dosadení do všeobecne platnej rovnice adaptačnej odchýlky (122) máme rovnicu adaptačnej odchýlky v tvare

$$e_1=W_m(s)\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^{\mathsf{T}}\omega \tag{158}$$

V rovnici (138) sme použili identitu $(s+\rho)(s+\rho)^{-1}=1$, čo vo všeobecnosti je $L(s)L(s)^{-1}=1$.

Rovnicu (158) sme v predchádzajúcom tvare doplnili do tvaru

$$e_1=W_m(s)L(s)L(s)^{-1}\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^{\mathsf{T}}\omega \tag{159}$$

a z rovnice (139) vyplíva, že (159) možno prepísať do tvaru

$$e_1=W_m(s)L(s)\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^{\mathsf{T}}L(s)^{-1}\omega \tag{160}$$

Rovnica (160) može byť zapísaná aj v tvare

$$e_1=W_m(s)\frac{1}{\Theta_4^\star}\left(L(s)\theta L(s)^{-1}\right)^{\mathsf{T}}\omega \tag{161}$$

kde sme vymenili pozície $\frac{1}{\Theta_4^\star}$ a $L(s)$, čo je možné, pretože $\frac{1}{\Theta_4^\star}$ je len konštanta a nie funkcia času, a táto rovnica dáva do vzťahu chybu nastavenia parametrov zákona riadenia s adaptačnou odchýlkou. V stavovom priestore má rovnica „doplnenej“ adaptačnej odchýlky (161) tvar

$$\dot{e}=A_ce+\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\left(L(s)\theta L(s)^{-1}\right)^{\mathsf{T}}\omega \tag{162a}$$

$$e_1=C_c^{\mathsf{T}}e \tag{162b}$$

Adaptačná odchýlka je definovaná ako $e=X-X_m$ a $e_1=y-y_m$. Sú dve možnosti ako dosiahnúť aby výsledok odčítania rovníc parametrizovanej doplnenej sústavy, kde stavový vektor je X, a neminimálnej reprezentácie referenčného modelu, kde stavový vektor je X_m, bol v tvare doplnenej adaptačnej odchýlky (162).

6.2.1 Prvá možnosť

Výsledok je rovnaký ako v predchádzajúcej časti:

Rovnicu parametrizovanej doplnenej sústavy (116) po dosadení za $u=\Theta^{\mathsf{T}}\omega$ možno zapísať v tvare

$$\dot{X}=A_cX+\overline{B}_cr+\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^{\mathsf{T}}\omega \tag{163a}$$

$$y=C_c^{\mathsf{T}}X \tag{163b}$$