

# O samonastavujúcom sa regulátore

## Obsah

<b>1</b>	<b>Konkrétny príklad</b>	<b>1</b>
1.1	Riadený systém . . . . .	2
1.2	ARX model . . . . .	2
1.3	Štruktúra riadenia . . . . .	2
1.4	Výpočet parametrov regulátora . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Identifikácia parametrov lineárneho modelu</b>	<b>3</b>
2.1	Metóda najmenších štvorcov . . . . .	3
2.2	Rekurzívna metóda najmenších štvorcov . . . . .	4
2.2.1	Súhrn . . . . .	6
2.2.2	Štart algoritmu . . . . .	6
2.2.3	Modifikácia algoritmu - zabúdanie . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Cvičenie druhé</b>	<b>7</b>
3.1	Ukážka simulačnej schémy pre simuláciu daného riadeného systému . . . . .	7
3.2	Doplnenie algoritmu RMNŠ do simulačnej schémy . . . . .	9
3.3	Algoritmus RMNŠ pri zašumených dátach . . . . .	13
3.3.1	Bez zabúdania . . . . .	15
3.3.2	So zabúdaním . . . . .	16
3.4	Iná ukážka simulačnej schémy pre simuláciu RMNŠ . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Metóda rozmiestňovania pólov</b>	<b>20</b>
4.1	Rovnica URO . . . . .	20
4.2	Polynóm $T$ . . . . .	22
4.2.1	Alternatívny spôsob určenia polynómu $T$ . . . . .	22
4.3	Súhrn pre tento prípad . . . . .	23
4.4	Rýchlostný algoritmus metódy rozmiestňovania pólov . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Cvičenie tretie</b>	<b>24</b>
5.1	Konkrétny príklad samonastavujúceho sa regulátora . . . . .	24
5.2	Simulácia v Simulinku . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Otázky a úlohy</b>	<b>30</b>

## 1 Konkrétny príklad

**P**RINCÍP samonastavujúceho sa regulátora (Self-Tuning Regulator, i.e. STR) spočíva v tom, že v každej perióde vzorkovania sa identifikujú parametre modelu riadeného systému a následne, s využitím identifikovaných parametrov modelu, sa pomocou určitej metódy vypočítajú parametre regulátora.

Hneď v prvej vete sme použili pojem perióda vzorkovania. Je teda zrejmé, že celý riadiaci systém bude pracovať v diskretnéj časovej oblasti. Modelom riadeného systému bude ARX (Auto Regressive eXogenous) model. Štruktúra riadenia bude tzv. „trojzložková“. Tromi zložkami sú polynómy  $R$ ,  $S$  a  $T$ . Tieto polynómy majú svoje koeficienty, ktoré sú zároveň parametrami riadiacej štruktúry, vlastne parametrami regulátora. Skonkretizujme teraz tento všeobecný popis.

## 1.1 Riadený systém

Riadený systém nech predstavuje prenosová funkcia v tvare

$$G(s) = \frac{0,15}{s^2 + 0,3s + 0,2} \quad (1)$$

Ide o prenosovú funkciu druhého rádu, ktorá má v čitateli polynóm nultého stupňa, teda nemá nuly.

## 1.2 ARX model

Nech modelom riadeného systému je ARX (AutoRegressive eXogenous) model. Vo všeobecnosti ARX model má tvar

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + \xi(k) \quad (2)$$

kde

$$\begin{aligned} B(z^{-1}) &= b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b} \\ A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a} \end{aligned} \quad (3)$$

a  $\xi(k)$  predstavuje poruchy a šum. V ďalšom budeme uvažovať  $\xi(k) = 0$ . ARX model vyjadrený v tvare diferenčnej rovnice:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_{n_a} y(k-n_a) + b_1 u(k-1) + \dots + b_{n_b} u(k-n_b) \quad (4)$$

Nech modelom sústavy je diferenčná rovnica v tvare (4), kde hodnoty  $n_a = 2$  a  $n_b = 2$ . Potom táto diferenčná rovnica má tvar

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) \quad (5)$$

V maticovom zápise:

$$y(k) = h^T \Theta \quad (6)$$

kde  $h^T = [-y(k-1) \quad -y(k-2) \quad u(k-1) \quad u(k-2)]$  a  $\Theta = [a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2]^T$ . Neznámymi parametrami modelu teda sú koeficienty  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  a  $b_2$ .

## 1.3 Štruktúra riadenia

Štruktúra riadenia je zrejmä zo zápisu „trojzložkového“ zákona riadenia

$$\begin{aligned} R(z^{-1})u(k) &= T(z^{-1})r(k) - S(z^{-1})y(k) \\ u(k) &= \frac{T(z^{-1})}{R(z^{-1})}r(k) - \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})}y(k) \end{aligned} \quad (7)$$

kde  $R$ ,  $S$  a  $T$  sú polynómy v tvare

$$\begin{aligned} R(z^{-1}) &= 1 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2} + \dots + r_{n_r} z^{-n_r} \\ S(z^{-1}) &= s_0 + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2} + \dots + s_{n_s} z^{-n_s} \\ T(z^{-1}) &= t_0 + t_1 z^{-1} + t_2 z^{-2} + \dots + t_{n_t} z^{-n_t} \end{aligned} \quad (8)$$

Ako už bolo uvedené, koeficienty polynómov sú parametrami regulátora. Počet parametrov regulátora závisí od stupňa jednotlivých polynómov. Pre tento príklad sú stupne polynómov nasledovné:  $n_r = 1$ ,  $n_s = 1$  a  $n_t = 0$ . Potom počet parametrov regulátora je  $n_r + n_s + 1 + n_t + 1$ . Teda  $1 + 1 + 1 + 0 + 1 = 4$ .

Zákon riadenia je možné zapísať aj v tvare diferenčnej rovnice

$$u(k) = -r_1 u(k-1) - s_0 y(k) - s_1 y(k-1) + t_0 r(k) \quad (9)$$

## 1.4 Výpočet parametrov regulátora

Metóda, pomocou ktorej sa v tomto prípade budú počítať parametre regulátora bude *Pole placement* – Metóda rozmiestňovania pólov uzavretého regulačného obvodu (URO). Ako už názov naznačuje, metóda spočíva v predpísaní rozmiestnenia pólov URO. Inými slovami, predpisujú sa korene charakteristického polynómu URO. Voľbou polohy pólov URO je možné zvoliť dynamické vlastnosti URO. Poloha pólov sa zadáva zvolením *želaného polynómu*, ktorý má také korene, aké si želáme. Ak napr. žiadame, aby URO mal dynamiku druhého rádu, tak želaný polynóm bude 2. stupňa.

Pripomeňme, že v tomto prípade ide o „diskrétny“ polynóm, pretože riadiaci systém pracuje v diskkrétnej oblasti, t.j. model sústavy je „diskrétny“ a aj zákon riadenia je „diskrétny“.

Parametre regulátora sa vypočítajú z porovnania koeficientov pri rovnakých mocninách charakteristického polynómu URO a želaného polynómu. Charakteristický polynóm URO sa bude skladať z polynómov modelu sústavy a zo zložiek regulátora, čo sú polynómy vystupujúce v zákone riadenia. Koeficienty polynómov modelu sústavy považujeme za známe, pretože ich získame identifikáciou. Koeficienty polynómov zo zákona riadenia – parametre regulátora sú neznáme. Získame ich riešením rovnice, kde na jednej strane je charakteristický polynóm URO a na druhej strane je želaný polynóm. Takáto rovnica sa nazýva *Diofantická rovnica*.

## 2 Identifikácia parametrov lineárneho modelu

Uvažujeme lineárny model v tvare (6). Parametre modelu budeme určovať *rekurzívnou metódou najmenších štvorcov*. Najskôr však odvodíme tzv. Off – line odhad parametrov modelu.

### 2.1 Metóda najmenších štvorcov

Predpokladajme, že sme spravili  $N$  experimentov – meraní. Napr.: na vstup sústavy sme priviedli „vhodný“ signál a s nejakou periódou vzorkovania sme zaznamenávali hodnoty vstupného aj výstupného (zo sústavy) signálu. Teda máme nameraných  $N$  hodnôt vstupu, ku ktorým prislúcha  $N$  hodnôt výstupu.

V  $i$ -tom experimente sme namerali hodnotu výstupného signálu  $y_i$ . Nech model má odhadnuté „nejaké“ parametre. Potom ak privedieme na vstup modelu hodnotu  $u_i$ , čo je nameraná hodnota vstupného signálu prislúchajúca k  $y_i$ , na výstupe modelu bude odhad  $\hat{y}_i$ . Tento odhad bude vo všeobecnosti rozdielny od nameranej hodnoty. Namiesto „nejakých“ hodnôt parametrov modelu určíme také, pre ktoré bude platiť, že suma štvorcov odchýlok vo všetkých nameraných bodoch bude minimálna.

Odchýlka v  $i$ -tom experimente je  $e_i = y_i - \hat{y}_i$ . Odhad výstupu v  $i$ -tom experimente je  $\hat{y}_i = h_i^T \Theta$ , čo je rovnaký zápis ako v (6), len namiesto času  $k$  je použitý index  $i$ . Všetky odchýlky v  $N$  meraniach sú:

$$\begin{aligned} e_1 &= y_1 - h_1^T \Theta \\ &\vdots \\ e_N &= y_N - h_N^T \Theta \end{aligned} \quad (10)$$

čo možno zapísať aj takto:

$$e = y - \begin{bmatrix} h_1^T \\ \vdots \\ h_N^T \end{bmatrix} \Theta \quad (11)$$

Vektor  $h_1^T$ , za predpokladu, že začiatočný čas je  $t_0 = 0$  a prvá vzorka vstupu a výstupu bola nameraná v čase  $t(k=1) = 1 \cdot T_{vz}$  je  $h_1^T = [-y(0) \ 0 \ u(0) \ 0]$ . Analogicky  $h_5^T = h(5)^T = [-y(4) \ -y(3) \ u(4) \ u(3)]$ .

Pre lepšiu názornosť nech je nameraných 5 vzoriek (a tiež hodnoty  $y(0)$ ,  $u(0)$ ).

Potom všetky odchýlky je možné zapísať takto:

$$e = y - \begin{bmatrix} -y(0) & 0 & u(0) & 0 \\ -y(1) & -y(0) & u(1) & u(0) \\ -y(2) & -y(1) & u(2) & u(1) \\ -y(3) & -y(2) & u(3) & u(2) \\ -y(4) & -y(3) & u(4) & u(3) \end{bmatrix} \Theta \quad (12)$$

Všeobecný zápis

$$e = y - H\Theta \quad (13)$$

Ako už bolo uvedené, vektor  $\Theta$ , čo je vektor parametrov modelu určíme tak, aby suma štvorcov odchýlok bola minimálna. Zavedme účelovú funkciu v tvare

$$J(\Theta) = \frac{1}{2} e^T e = \frac{1}{2} (y - H\Theta)^T (y - H\Theta) \quad (14)$$

Je potrebné nájsť extrém tejto účelovej funkcie, čo znamená derivovať ju podľa vektora parametrov modelu.

$$J(\Theta) = \frac{1}{2} (y - H\Theta)^T (y - H\Theta) = \frac{1}{2} (y^T y - y^T H\Theta - \Theta^T H^T y + \Theta^T H^T H\Theta) \quad (15)$$

S využitím rovnosti

$$\nabla_x (x^T a) = \nabla_x (a^T x) = a \quad (16)$$

máme

$$\begin{aligned} \nabla_{\Theta} (y^T y) &= 0 \\ \nabla_{\Theta} (y^T H\Theta) &= (y^T H)^T = H^T y \\ \nabla_{\Theta} (\Theta^T H^T y) &= H^T y \\ \nabla_{\Theta} (\Theta^T H^T H\Theta) &= (H^T H\Theta + (\Theta^T H^T H)^T) = H^T H\Theta + H^T H\Theta \end{aligned}$$

teda

$$\begin{aligned} \nabla_{\Theta} (J) &= \frac{1}{2} (-H^T y - H^T y + H^T H\Theta + H^T H\Theta) \\ &= \frac{1}{2} (-2H^T y + 2H^T H\Theta) \\ &= -H^T y + H^T H\Theta \end{aligned} \quad (17)$$

V extréme je hodnota  $\nabla_{\Theta} (J)$  nulová, teda

$$\begin{aligned} 0 &= -H^T y + H^T H\Theta \\ H^T H\Theta &= H^T y \end{aligned} \quad (18)$$

a nakoniec

$$\Theta = (H^T H)^{-1} H^T y \quad (19)$$

Rovnica (19) sa nazýva Gaussov vzorec.

Keďže  $\nabla_{\Theta} \nabla_{\Theta} (J) = (H^T H) = H^T H$  a  $H^T H = R$  je kladne definitná, pretože  $H$  je nenulová a teda  $H^T H$  je symetrická a kladne definitná, potom nájdený extrém je minimum. Matica  $R$  sa nazýva informačná matica a  $P = R^{-1}$  sa nazýva disperzná matica (alebo aj Kovariančná matica) s  $(n_a + n_b)$  riadkami a  $(n_a + n_b)$  stĺpcami.

Dosadením do Gaussovho vzorca získame Off-line odhad parametrov modelu.

## 2.2 Rekurzívna metóda najmenších štvorcov

Predpokladajme, že poznáme odhad parametrov modelu v predchádzajúcom kroku  $(k-1)$  a chceme získať odhad parametrov modelu v aktuálnom kroku  $k$ . Ak poznáme odhad parametrov v kroku  $(k-1)$ , je zrejmé, že poznáme aj maticu  $P(k-1)$ .

Pre lepšiu názornosť nech situácia je takáto: Aktuálny krok je  $k = 2$ . V kroku  $(k-1)$ , teda v kroku  $k = 1$  bola matica  $P(k-1)$ . Ak prejdeme z kroku  $(k-1)$  do

kroku  $k$ , znamená to pridať nový riadok matice  $H$ . Novým riadkom je vektor  $h^T(k)$ . Pre krok  $k$  môžeme písať Gausov vzorec:

$$\Theta(k) = \left( \begin{bmatrix} H^T(k-1) & h(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(k-1) \\ h^T(k) \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} H^T(k-1) & h(k) \end{bmatrix} y(k) \quad (20)$$

Odkiaľ matica  $P(k)$  je

$$\begin{aligned} P(k) &= \left( \begin{bmatrix} H^T(k-1) & h(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(k-1) \\ h^T(k) \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= (H^T(k-1)H(k-1) + h(k)h^T(k))^{-1} \\ &= (P(k-1)^{-1} + h(k)h^T(k))^{-1} \end{aligned} \quad (21)$$

V rovnici (21) sa vyskytuje inverzia matice, ktorej rozmer závisí od počtu parametrov modelu. Tento počet môže byť veľký, a inverzia takto veľkej matice môže byť nerealizovateľná. Použitie Woodburryho lemmy o inverzií matíc rieši tento problém. Platí (v tomto texte nebudeme uvádzať dôkaz Woodburryho lemmy)

$$(A + BD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(DA^{-1}B + 1)^{-1}DA^{-1} \quad (22)$$

Použitím (22) prejde (21) do tvaru

$$\begin{aligned} P(k) &= P(k-1) - P(k-1)h(k)(1 + h^T(k)P(k-1)h(k))^{-1} \cdot h^T(k)P(k-1) \\ &= P(k-1) - Y(k)h^T(k)P(k-1) \end{aligned} \quad (23)$$

kde

$$Y(k) = \frac{P(k-1)h(k)}{1 + h^T(k)P(k-1)h(k)}$$

je tzv. „zosilnenie“. Rovnica (23) je rekurzívnym vzťahom pre výpočet novej matice  $P$  z predchádzajúcej matice  $P$ .

Odhad parametrov modelu v kroku  $k$  je

$$\Theta(k) = P(k)H^T(k)y(k) = P(k) \sum_{i=1}^k h(i)y_i = P(k) \left( \sum_{i=1}^{k-1} h(i)y_i + h(k)y(k) \right) \quad (24)$$

Z (21) je zrejmé že platí

$$P^{-1}(k) = P(k-1) + h(k)h(k)^T \quad (25a)$$

$$P^{-1}(k-1) = P^{-1}(k) - h(k)h^T(k) \quad (25b)$$

Potom

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} h^T(i)y_i &= P^{-1}(k-1)\Theta(k-1) = (P^{-1}(k) - h(k)h^T(k))\Theta(k-1) \\ &= P^{-1}(k)\Theta(k-1) - h(k)h^T(k)\Theta(k-1) \end{aligned} \quad (26)$$

čo umožní písať odhad parametrov modelu v kroku  $k$  v tvare

$$\begin{aligned} \Theta(k) &= P(k) (P^{-1}(k)\Theta(k-1) - h(k)h^T(k)\Theta(k-1) + h(k)y(k)) \\ &= P(k)P^{-1}(k)\Theta(k-1) - P(k)h(k)h^T(k)\Theta(k-1) + P(k)h(k)y(k) \\ &= I\Theta(k-1) + P(k)h(k)(y(k) - h^T(k)\Theta(k-1)) \\ &= \Theta(k-1) + P(k)h(k)e(k) \end{aligned} \quad (27)$$

Tabuľka 1: Algoritmus rekurzívnej MNŠ

1. Odchýlka (rezíduum)	$e(k) = y(k) - h^T(k)\Theta(k-1)$
2. Zosilnenie	$Y(k) = \frac{P(k-1)h(k)}{1 + h^T(k)P(k-1)h(k)}$
3. Kovariančná matica	$P(k) = P(k-1) - Y(k)h^T(k)P(k-1)$
4. Nový odhad parametrov	$\Theta(k) = \Theta(k-1) + Y(k)e(k)$

Rovnicu (27) môžeme priviesť aj do iného tvaru. Platí:

$$\begin{aligned}
 \Theta(k) &= \Theta(k-1) + P(k)h(k)e(k) \\
 &= \Theta(k-1) + (P(k-1) - Y(k)h^T(k)P(k-1))h(k)e(k) \\
 &= \Theta(k-1) + \left( P(k-1)h(k) - \frac{P(k-1)h(k)h^T(k)P(k-1)h(k)}{1 + h^T(k)P(k-1)h(k)} \right) e(k) \\
 &= \Theta(k-1) \\
 &\quad + \left( \frac{P(k-1)h(k) + P(k-1)h(k)h^T(k)P(k-1)h(k)}{1 + h^T(k)P(k-1)h(k)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{P(k-1)h(k)h^T(k)P(k-1)h(k)}{1 + h^T(k)P(k-1)h(k)} \right) e(k) \\
 &= \Theta(k-1) + \left( \frac{P(k-1)h(k)}{1 + h^T(k)P(k-1)h(k)} \right) e(k) \\
 &\quad + \left( \frac{P(k-1)h(k)h^T(k)P(k-1)h(k)}{1 + h^T(k)P(k-1)h(k)} \right) e(k) \\
 &\quad - \left( \frac{P(k-1)h(k)h^T(k)P(k-1)h(k)}{1 + h^T(k)P(k-1)h(k)} \right) e(k) \\
 &= \Theta(k-1) + \left( \frac{P(k-1)h(k)}{1 + h^T(k)P(k-1)h(k)} \right) e(k)
 \end{aligned} \tag{28}$$

Potom

$$\Theta(k) = \Theta(k-1) + Y(k)e(k) \tag{29}$$

Rovnica (29) je rekurzívnym vzťahom pre výpočet nových parametrov modelu z predchádzajúcich hodnôt parametrov modelu.

### 2.2.1 Súhrn

Algoritmus rekurzívnej metódy najmenších štvorcov je zhrnutý v Tabuľke 1.

### 2.2.2 Štart algoritmu

Disperzná matica má začiatkový tvar

$$P(0) = \alpha I \tag{30}$$

kde  $I$  je jednotková matica rovnakého rozmeru ako  $P$  a  $\alpha$  je reálne číslo napríklad z intervalu  $\langle 10, 10^6 \rangle$ .

Začiatkové hodnoty parametrov modelu môžu byť napríklad nulové, t.j. vektor  $\Theta$  je nulový vektor príslušnej dĺžky:

$$\Theta(0) = 0 \tag{31}$$

Nie je to však pravidlo a začiatkové hodnoty parametrov modelu môžu byť v princípe akékoľvek. Tieto hodnoty sa spravidla využívajú v ďalších výpočtoch a tak napríklad môže vzniknúť požiadavka, že niektorý z parametrov nemôže byť nulový (napr. pre delenie nulou) a podobne. Tiež môže existovať približný, hrubý odhad týchto hľadaných (identifikovaných) parametrov a tento je potom často výhodné použiť ako začiatkový.

Tabuľka 2: Algoritmus rekurzívnej MNŠ s exponenciálnym zabúdaním

1.	Odchýlka (rezíduum)	$e(k) = y(k) - h^T(k)\Theta(k-1)$
2.	Zosilnenie	$Y(k) = \frac{P(k-1)h(k)}{\lambda + h^T(k)P(k-1)h(k)}$
3.	Kovariančná matica	$P(k) = \frac{1}{\lambda} (P(k-1) - Y(k)h^T(k)P(k-1))$
4.	Nový odhad parametrov	$\Theta(k) = \Theta(k-1) + Y(k)e(k)$

### 2.2.3 Modifikácia algoritmu - zabúdanie

V účelovej funkcii (14) sa nepredpokladá žiadne váhovanie jednotlivých prvkov vektora odchýlok  $e$ . Všetky prvky majú rovnakú váhu. Z pohľadu rekurzívneho algoritmu to znamená, že najstaršie odchýlky majú rovnakú váhu ako najnovšie. Často však môže byť veľmi výhodné ak by novšie vzorky, teda novšie zistené odchýlky mali vyššiu váhu ako staršie. Inými slovami výhodné by bolo zabúdať na staršie odchýlky a uvažovať len tie novšie.

V účelovej funkcii (14) je možné uvažovať váhovaciu maticu  $W$  nasledovne:

$$J(\Theta) = \frac{1}{2} e^T W e \quad (32)$$

kde matica

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & w_N \end{bmatrix} \quad (33)$$

umožní realizovať váhovanie jednotlivých štvorcov odchýlok.

Ak zvolíme váhovacie koeficienty ako  $w_i = \lambda^{N-i}$  potom sa takého váhovanie nazýva exponenciálne zabúdanie. Číslo  $\lambda$  sa volí z intervalu  $(0, 1)$ , pričom typické hodnoty sú  $\lambda = 0,99$  či  $\lambda = 0,95$ . Potom je zrejmé, že najnovšia vzorka, najnovší štvorec odchýlky, má váhu (je prenasobený číslom)  $w_N = \lambda^{N-N} = 1$ . Všetky ostatné váhovacie koeficienty majú nižšiu hodnotu (hodnota exponenciálne klesá ako sa znižuje poradové číslo  $i$ ).

Ak aplikujeme ten istý postup pre získanie rekurzívneho algoritmu MNŠ ako v prípade bez exponenciálneho zabúdania, tak verzia so zabúdaním vedie na algoritmus sumarizovaný v tabuľke 2.

## 3 Cvičenie druhé

1. Zrealizujme priebežnú identifikáciu parametrov ARX modelu tak ako to predpokladá konkrétny príklad v časti 1. Vyskúšajte verziu bez exponenciálneho zabúdania a s exponenciálnym zabúdaním.

### 3.1 Ukážka simulačnej schémy pre simuláciu daného riadeného systému

Cieľom nasledujúceho je zostaviť (univerzálnu) simulačnú schému, do ktorej je možné následne doplniť v podstate akýkoľvek riadiaci systém.

Simulačná schéma v tomto prípade realizuje len simuláciu samotného riadeného systému. Vstupný signál riadeného systému je tu zvolený (daný vopred), nie je generovaný riadiacim systémom.

Riadený systém nech predstavuje prenosová funkcia v tvare

$$G(s) = \frac{0,15}{s^2 + 0,3s + 0,2} \quad (34)$$

Ide o prenosovú funkciu druhého rádu, ktorá má v čitateli polynóm nultého stupňa, teda nemá nuly.

Parametre riadeného systému vo forme vstupného vektora matice dynamiky potom sú:

Výpis kódu 1: Súbor ar03\_pr01.py

```
24 A = np.array([[0, 1], [-0.2, -0.3]])
25 b = np.array([[0], [0.15]])
```

Funkcia, ktorá realizuje diferenciálne rovnice riadeného systému, nech je nasledovná:

Výpis kódu 2: Súbor ar03\_pr01.py

```
31 def fcn_difRovnice(x, t, u):
32
33     dotx = np.dot(A,x) + np.dot(b,u)
34
35     return dotx
```

Simulačnú schému nech realizuje nasledujúca funkcia:

Výpis kódu 3: Súbor ar03\_pr01.py

```
44 def fcn_simSch_01_zaklad(t_start, T_s, finalIndex, sig_u_ext):
45
46     #-----
47     t_log = np.zeros([finalIndex, 1])
48     t_log[0,:] = t_start
49
50     #-----
51     x_0 = np.array([0, 0])
52
53     x_log = np.zeros([finalIndex, len(x_0)])
54     x_log[0,:] = x_0
55
56     #-----
57
58
59     #-----
60     timespan = np.zeros(2)
61     for idx in range(1, int(finalIndex)):
62
63         timespan[0] = t_log[idx-1,:]
64         timespan[1] = t_log[idx-1,:] + T_s
65
66         u = sig_u_ext[idx-1,:]
67
68         odeOut = odeint(fcn_difRovnice,
69                        x_log[idx-1,:],
70                        timespan,
71                        args=(u,))
72
73
74         x_log[idx,:] = odeOut[-1,:]
75         t_log[idx,:] = timespan[-1]
76
77     return [t_log, x_log]
```

Nastavenia potrebné pre samotnú simuláciu a vygenerovanie signálov, ktoré sa používajú pri simulácii (ktoré sú dopredu známe - dané):

Výpis kódu 4: Súbor ar03\_pr01.py

```
86 # Nastavenia simulacie
87
88 sim_t_start = 0
89 sim_t_final = 200
90 sim_T_s = 0.1
91 sim_finalIndex = int(((sim_t_final - sim_t_start)/sim_T_s) + 1)
```

Pre simuláciu je potrebné vytvoriť vstupný signál  $u(t)$  pre riadený systém. Nech je nasledovný:

Výpis kódu 5: Súbor ar03\_pr01.py

```
100 tab_delt_u = np.array([
101                        [0, 0],
102                        [1, 1],
```



```

103         [50, 0],
104         [100, -1],
105         [150, 0],
106     ])
107
108
109     sig_delt_u = np.zeros([sim_finalIndex, 1])
110     for idx in range(sig_delt_u.shape[0]):
111         lastValue = tab_delt_u[:,1][tab_delt_u[:,0]<=idx*sim_T_s][-1]
112         sig_delt_u[idx] = lastValue
113
114
115     sig_u_ext = sig_delt_u

```

Vstupný signál  $u(t)$  je zobrazený na obr. 1.

Spustenie simulácie:

Výpis kódu 6: Súbor ar03\_pr01.py

```

129 # Spustenie simulacie
130
131 t_log, x_log = fcn_simSch_01_zaklad(
132     sim_t_start,
133     sim_T_s,
134     sim_finalIndex,
135     sig_u_ext,
136 )

```

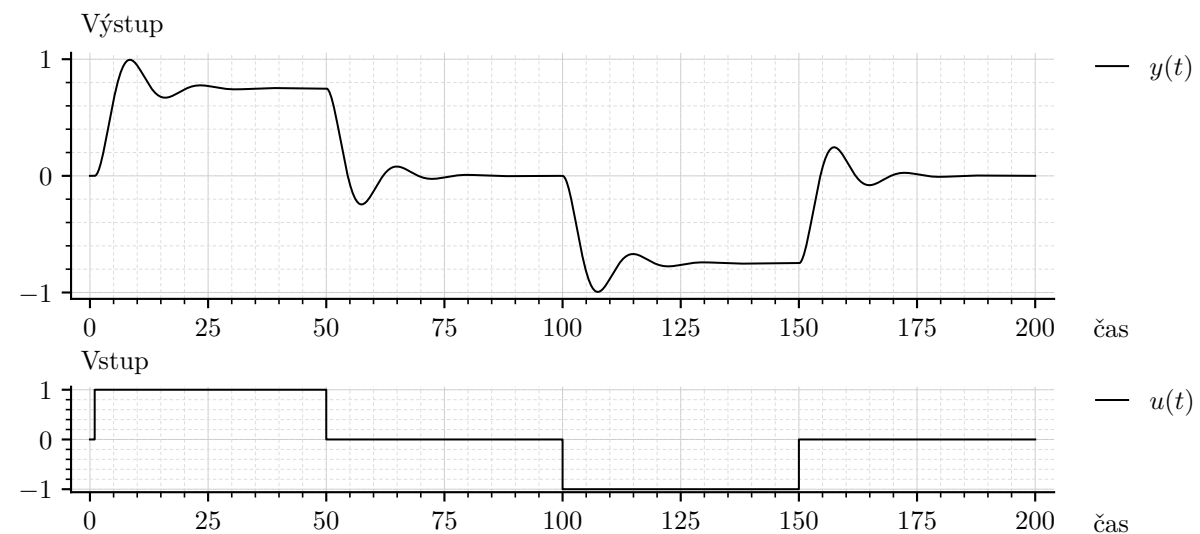
Nakreslenie obrázka (pre prehľadnosť je kód v samostatnom súbore):

Výpis kódu 7: Súbor ar03\_pr01.py

```

144 # Obrázok
145
146 figName = 'figsc_ar03_fig01'
147 figNameNum = 1
148
149 exec(open('./figjobs/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())
150

```



Obr. 1

### 3.2 Doplnenie algoritmu RMNŠ do simulačnej schémy

V predchádzajúcom bola vytvorená simulačná schéma pre simuláciu uvažovaného riadeného systému. Tu je cieľom doplniť do simulačnej schémy algoritmus RMNŠ.

Pre úplnosť, ARX (AutoRegressive eXogenous) model, ktorý je identifikovaný (klasickou RMNŠ), je vo všeobecnosti nasledovný:

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + \xi(k) \quad (35)$$

kde

$$\begin{aligned} B(z^{-1}) &= b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b} \\ A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a} \end{aligned} \quad (36)$$

a  $\xi(k)$  predstavuje poruchy a šum. V ďalšom budeme uvažovať  $\xi(k) = 0$ . ARX model vyjadrený v tvare diferenčnej rovnice:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_{n_a} y(k-n_a) + b_1 u(k-1) + \dots + b_{n_b} u(k-n_b) \quad (37)$$

Nech modelom riadeného systému je diferenčná rovnica v uvedenom tvare, kde hodnoty  $n_a = 2$  a  $n_b = 2$ . Potom táto diferenčná rovnica má tvar

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) \quad (38)$$

V maticovom zápise:

$$y(k) = h^T \Theta \quad (39)$$

kde  $h^T = [-y(k-1) \ -y(k-2) \ u(k-1) \ u(k-2)]$  a  $\Theta = [a_1 \ a_2 \ b_1 \ b_2]^T$ . Neznámymi parametrami modelu teda sú koeficienty  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  a  $b_2$ .

Takpovediac diferenčné rovnice riadeného systému ostávajú samozrejme rovnaké ako sme ich realizovali v predchádzajúcom, teda aj tu („na začiatku skriptu“) platí výpis kódu 1 a 2.

Simulačnú schému nech realizuje nasledujúca funkcia:

Výpis kódu 8:

Súbor ar03\_pr02.py

```
45 def fcn_simSch_02_lenRMNS(t_start, T_s, finalIndex, sig_u_ext):
46
47     #-----
48     t_log = np.zeros([finalIndex, 1])
49     t_log[0,:] = t_start
50
51     #-----
52     x_0 = np.array([0, 0])
53
54     x_log = np.zeros([finalIndex, len(x_0)])
55     x_log[0,:] = x_0
56
57     #-----
58
59     u_log = np.zeros([finalIndex, 1])
60
61     #-----
62
63     RMNS_theta_0 = np.array([[ 0.001],
64                             [ 0.001],
65                             [ 0.001],
66                             [ 0.001]])
67
68     RMNS_theta_log = np.zeros([finalIndex, len(RMNS_theta_0)])
69     RMNS_theta_log[0,:] = RMNS_theta_0.reshape(1,-1)
70
71     RMNS_P_0 = np.identity(4) * 10**6
72
73     RMNS_P_log = np.zeros([finalIndex, RMNS_P_0.size])
74     RMNS_P_log[0,:] = RMNS_P_0.reshape(1,-1)
75
76     #----
77
78     RMNS_y_predict_log = np.zeros([finalIndex, 1])
79
80     #-----
81     timespan = np.zeros(2)
82     for idx in range(1, int(finalIndex)):
83
84         timespan[0] = t_log[idx-1,:]
85         timespan[1] = t_log[idx-1,:] + T_s
86
87         odeOut = odeint(fcn_difRovnice,
88                        x_log[idx-1,:],
```

```

89         timespan,
90         args=(u_log[idx-1,:],)
91     )
92
93     x_log[idx,:] = odeOut[-1,:]
94     t_log[idx,:] = timespan[-1]
95
96     #-----
97     # ALGORITMUS RMNS
98     y_k = x_log[idx,0]
99
100     h_k = np.array([[-x_log[idx-1,0]],
101                    [-x_log[idx-2,0]], # pozor na to idx-2 !!!
102                    [u_log[idx-1,0]],
103                    [u_log[idx-2,0]], # pozor na to idx-2 !!!
104                    ])
105
106     theta_km1 = RMNS_theta_log[idx-1,:].reshape(4,-1)
107     P_km1 = RMNS_P_log[idx-1,:].reshape(4,4)
108
109     #-----
110     lambdaKoeff = 1.0
111
112     e_k = y_k - np.matmul(h_k.T, theta_km1)
113     Y_k = np.matmul(P_km1, h_k) / (lambdaKoeff + np.matmul(np.
114     matmul(h_k.T, P_km1), h_k))
115     P_k = (1/lambdaKoeff) * (P_km1 - np.matmul(np.matmul(Y_k, h_k.
116     T), P_km1))
117     theta_k = theta_km1 + Y_k * e_k
118
119     #----
120     RMNS_theta_log[idx,:] = theta_k.reshape(1,-1)
121     RMNS_P_log[idx,:] = P_k.reshape(1,-1)
122
123     #-----
124     RMNS_y_predict_log[idx,:] = np.matmul(h_k.T, theta_km1)
125
126     #-----
127     u_log[idx,:] = sig_u_ext[idx-1,:]
128
129     return [t_log, x_log, RMNS_y_predict_log, RMNS_theta_log]

```

V uvedenej simulačnej schéme je implementovaný RMNS algoritmus, ktorého výstupom je vektor parametrov  $\theta_k$  a následne je tiež vypočítaná (v každom cykle) jednokroková predikcia výstupného signálu zapisovaná do vektora `RMNS_y_predict_log`.

Všimnime si tiež napríklad, že faktor zabúdania  $\lambda$  (premenná `lambdaKoeff`) je nastavený na hodnotu  $\lambda = 1$ , teda algoritmus nevyužíva zabúdanie.

Nastavenia potrebné pre samotnú simuláciu a vygenerovanie signálov, ktoré sa používajú pri simulácii (ktoré sú dopredu známe - dané):

Výpis kódu 9: Súbor `ar03_pr02.py`

```

138 # Nastavenia simulacie
139
140 sim_t_start = 0
141 sim_t_final = 55
142 sim_T_s = 0.25
143 sim_finalIndex = int(((sim_t_final - sim_t_start)/sim_T_s) + 1)

```

Pre simuláciu je potrebné vytvoriť vstupný signál  $u(t)$  pre riadený systém. Nech je nasledovný:

Výpis kódu 10: Súbor `ar03_pr02.py`

```

152 # Preddefinovane signaly
153
154 period_time = 40
155 period_tab = np.array([
156     [0, 1],
157     [10, 0],
158     [20, -1],
159     [30, 0],
160     ])
161
162 sig_vysl = np.zeros([sim_finalIndex, 1])
163

```

```

164 for period in range(int(sim_t_final/period_time) + 1):
165
166     for idx in range( int((period*period_time)/sim_T_s), int((period*
167         period_time + period_time)/sim_T_s)):
168
169         lastValue = period_tab[:,1][(period_tab[:,0] + (period*
170             period_time))<=idx*sim_T_s ][-1]
171         try:
172             sig_vysl[idx] = lastValue
173         except:
174             break
175 sig_u_ext = sig_vysl

```

Spustenie simulácie:

Výpis kódu 11: Súbor ar03\_pr02.py

```

189 # Spustenie simulacie
190
191 t_log, x_log, RMNS_y_predict_log, RMNS_theta_log =
192     fcn_simSch_02_lenRMNS(
193         sim_t_start,
194         sim_T_s,
195         sim_finalIndex,
196         sig_u_ext,
197     )

```

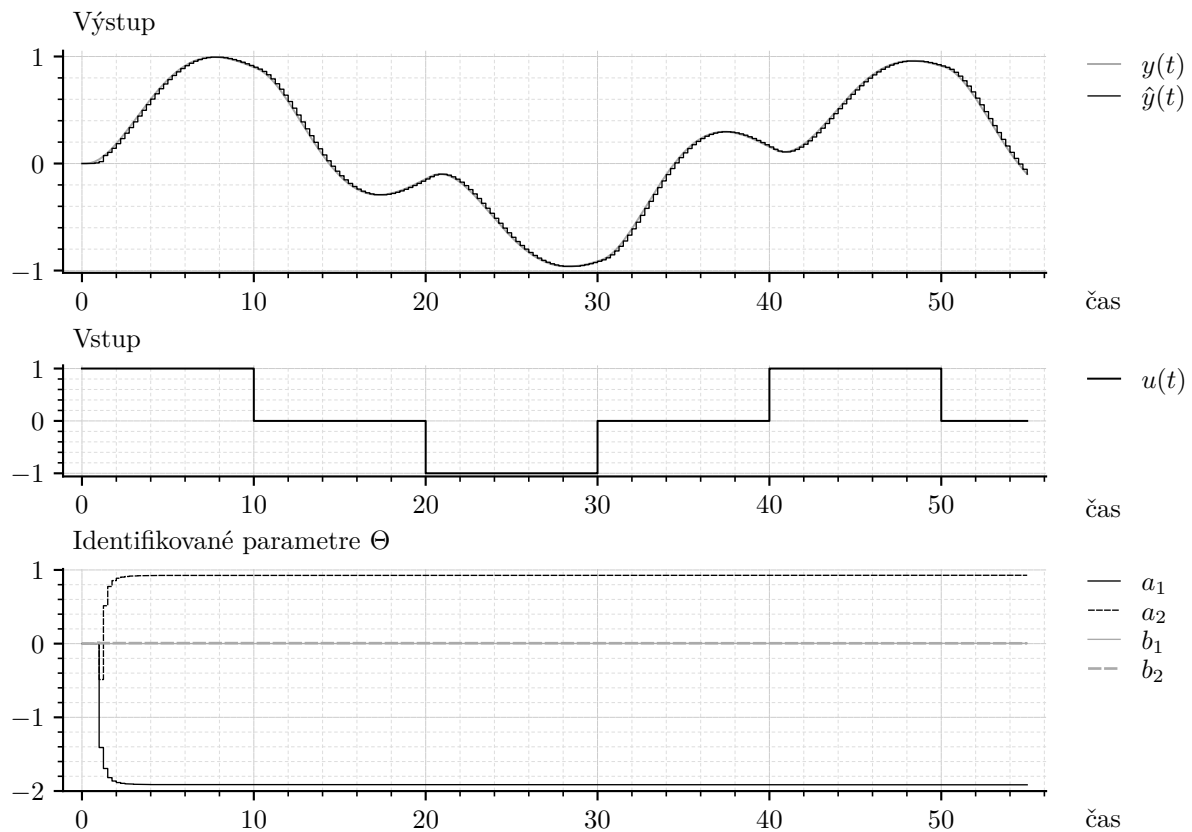
Nakreslenie obrázku (pre prehľadnosť je kód v samostatnom súbore):

Výpis kódu 12: Súbor ar03\_pr02.py

```

204 # Obrázok
205
206 figName = 'figsc_ar03_fig02'
207 figNameNum = 0
208
209 exec(open('./figjobs/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())
210

```



Obr. 2

Pre zaujímavosť, priebežne identifikované parametre  $\Theta$  sú zapisované do poľa RMNS\_theta\_log. Posledný riadok v tomto poli je:

Výpis kódu 13: Súbor ar03\_pr02.py

```
218 print(RMNS_theta_log[-1,:])

[-1.91569536  0.92772642  0.00456786  0.00445568]
```

### 3.3 Algoritmus RMNŠ pri zašumených dátach

V predchádzajúcom bola vytvorená simulačná schéma pre simuláciu uvažovaného riadeného systému a bol do nej doplnený algoritmus RMNŠ.

Výstupná veličina samotného simulovaného riadeného systému je, pochopiteľne, bez šumu. Tu je cieľom preskúmať ako je RMNŠ schopný vysporiadať sa s prítomnosťou šumu v dátach výstupnej veličiny.

Aj tu platí, že diferenciálne rovnice riadeného systému ostávajú samozrejme rovnaké ako sme ich realizovali v predchádzajúcom, teda aj tu („na začiatku skriptu“) platí výpis kódu 1 a 2.

Simulačnú schému nech realizuje nasledujúca funkcia:

Výpis kódu 14: Súbor ar03\_pr03.py

```
45 # Simulacna schema:
46
47 def fcn_simSch_02_lenRMNS_noise(t_start, T_s, finalIndex, sig_u_ext,
    lambdaKoef):
48
49     #-----
50     t_log = np.zeros([finalIndex, 1])
51     t_log[0,:] = t_start
52
53     #-----
54     x_0 = np.array([0, 0])
55
56     x_log = np.zeros([finalIndex, len(x_0)])
57     x_log[0,:] = x_0
58
59
60     y_log_noise = np.zeros([finalIndex, 1])
61     y_log_noise[0,0] = x_log[0,0]
62
63     #-----
64
65     u_log = np.zeros([finalIndex, 1])
66
67     #-----
68
69     RMNS_theta_0 = np.array([[ 0.001],
70                             [ 0.001],
71                             [ 0.001],
72                             [ 0.001]])
73
74
75     RMNS_theta_log = np.zeros([finalIndex, len(RMNS_theta_0)])
76     RMNS_theta_log[0,:] = RMNS_theta_0.reshape(1,-1)
77
78     RMNS_P_0 = np.identity(4) * 10**2
79
80     RMNS_P_log = np.zeros([finalIndex, RMNS_P_0.size])
81     RMNS_P_log[0,:] = RMNS_P_0.reshape(1,-1)
82
83     RMNS_y_predict_log = np.zeros([finalIndex, 1])
84
85     #-----
86     timespan = np.zeros(2)
87     for idx in range(1, int(finalIndex)):
88
89         timespan[0] = t_log[idx-1,:]
90         timespan[1] = t_log[idx-1,:] + T_s
91
92         odeOut = odeint(fcn_difRovnice,
93                        x_log[idx-1,:],
94                        timespan,
95                        args=(u_log[idx-1,:],)
96                        )
97
```

```

98     x_log[idx,:] = odeOut[-1,:]
99     t_log[idx,:] = timespan[-1]
100
101     # Tu sa umelo pridava sum k vystupnej velicine riadeného
systemu
102
103     y_log_noise[idx,0] = x_log[idx,0] + np.random.normal(0, 0.1,
size=1)
104
105     #-----
106     # ALGORITMUS RMNS
107
108     # Pri RMNS sa vyuziva zasumena vystupna velicina
109
110     y_k = y_log_noise[idx,0]
111
112     h_k = np.array([[-y_log_noise[idx-1,0]],
113                    [-y_log_noise[idx-2,0]], # pozor na idx-2 !!!
114                    [u_log[idx-1,0]],
115                    [u_log[idx-2,0]], # pozor na idx-2 !!!
116                    ])
117
118     theta_km1 = RMNS_theta_log[idx-1,:].reshape(4,-1)
119     P_km1 = RMNS_P_log[idx-1,:].reshape(4,4)
120
121     #-----
122     e_k = y_k - np.matmul(h_k.T, theta_km1)
123     Y_k = np.matmul(P_km1, h_k) / (lambdaKcoef + np.matmul(np.
matmul(h_k.T, P_km1), h_k))
124     P_k = (1/lambdaKcoef) * (P_km1 - np.matmul(np.matmul(Y_k, h_k.
T), P_km1))
125     theta_k = theta_km1 + Y_k * e_k
126
127     #-----
128     RMNS_theta_log[idx,:] = theta_k.reshape(1,-1)
129     RMNS_P_log[idx,:] = P_k.reshape(1,-1)
130
131     RMNS_y_predict_log[idx,:] = np.matmul(h_k.T, theta_km1)
132
133     #-----
134     u_log[idx,:] = sig_u_ext[idx-1,:]
135
136     return [t_log, x_log, RMNS_y_predict_log, RMNS_theta_log,
y_log_noise]
137

```

V uvedenej simulačnej schéme je implementovaný RMNS algoritmus, ktorého výstupom je vektor parametrov  $\theta_k$  a následne je tiež vypočítaná (v každom cykle) jednokroková predikcia výstupného signálu zapisovaná do vektora  $RMNS\_y\_predict\_log$ .

Nastavenia potrebné pre samotnú simuláciu a vygenerovanie signálov, ktoré sa používajú pri simulácii (ktoré sú dopredu známe - dané):

Výpis kódu 15: Súbor ar03\_pr03.py

```

146 # Nastavenia simulacie
147
148 sim_t_start = 0
149 sim_t_final = 250
150 sim_T_s = 0.1
151 sim_finalIndex = int(((sim_t_final - sim_t_start)/sim_T_s) + 1)

```

Pre simuláciu je potrebné vytvoriť vstupný signál  $u(t)$  pre riadený systém. Nech je nasledovný:

Výpis kódu 16: Súbor ar03\_pr03.py

```

160 # Preddefinovane signaly
161
162 period_time = 200
163 period_tab = np.array([
164     [0, 1],
165     [80, 0],
166     [120, -1],
167     [180, 0],
168 ])
169
170 sig_vysl = np.zeros([sim_finalIndex, 1])
171
172 for period in range(int(sim_t_final/period_time) + 1):

```

```

173
174     for idx in range( int((period*period_time)/sim_T_s), int((period*
period_time + period_time)/sim_T_s)):
175
176         lastValue = period_tab[:,1][(period_tab[:,0] + (period*
period_time))<=idx*sim_T_s ][-1]
177         try:
178             sig_vysl[idx] = lastValue
179         except:
180             break
181
182     sig_u_ext = sig_vysl

```

### 3.3.1 Bez zabúdania

Ďalším nastavením, špeciálne dôležitým v tomto príklade je koeficient zabúdania  $\lambda$ :

Výpis kódu 17: Súbor ar03\_pr03.py

```

189     sim_lambdaKoeff = 1.0

```

Pamätajte teda, že faktor zabúdania  $\lambda$  (premenná `lambdaKoeff`) je tu nastavený na hodnotu  $\lambda = 1$ , teda algoritmus nevyužíva zabúdanie.

Spustenie simulácie:

Výpis kódu 18: Súbor ar03\_pr03.py

```

201     # Spustenie simulacie
202
203     t_log, x_log, RMNS_y_predict_log, RMNS_theta_log, y_log_noise =
        fcn_simSch_02_lenRMNS_noise(
204         sim_t_start,
205         sim_T_s,
206         sim_finalIndex,
207         sig_u_ext,
208         sim_lambdaKoeff
209     )

```

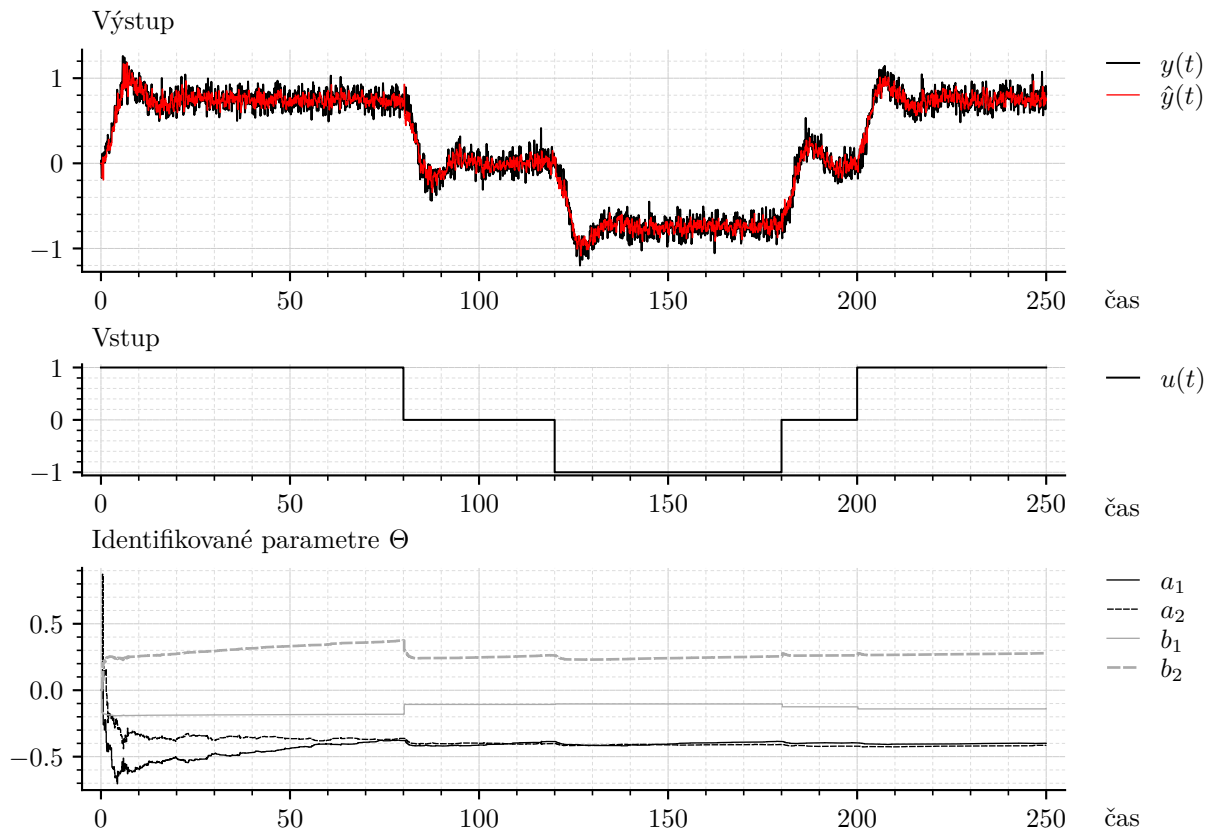
Nakreslenie obrázka (pre prehľadnosť je kód v samostatnom súbore):

Výpis kódu 19: Súbor ar03\_pr03.py

```

217     # Obrázok
218
219     figName = 'figsc_ar03_fig03'
220     figNameNum = 0
221
222     exec(open('./figjobs/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())
223

```



Obr. 3

### 3.3.2 So zabúdaním

Iná simulácia nech je s nasledovným koeficientom zabúdania:

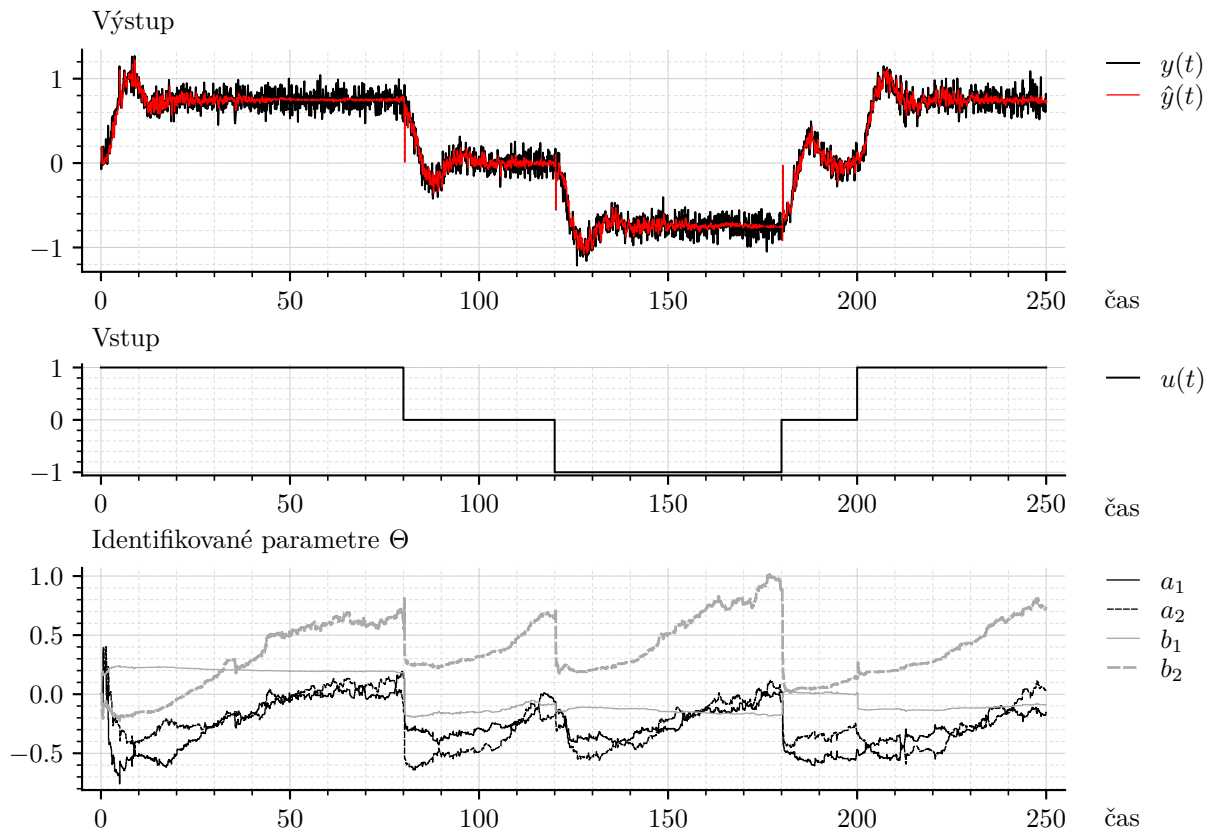
Výpis kódu 20: Súbor ar03\_pr03.py

```

238 sim_lambdaKoeff = 0.987
239
240 # Spustenie simulacie
241
242 t_log, x_log, RMNS_y_predict_log, RMNS_theta_log, y_log_noise =
    fcn_simSch_02_lenRMNS_noise(
243     sim_t_start,
244     sim_T_s,
245     sim_finalIndex,
246     sig_u_ext,
247     sim_lambdaKoeff
248 )
249
250 # Obrázok
251
252 figName = 'figsc_ar03_fig03'
253 figNameNum = 1
254
255 exec(open('./figjobs/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())

```





Obr. 4

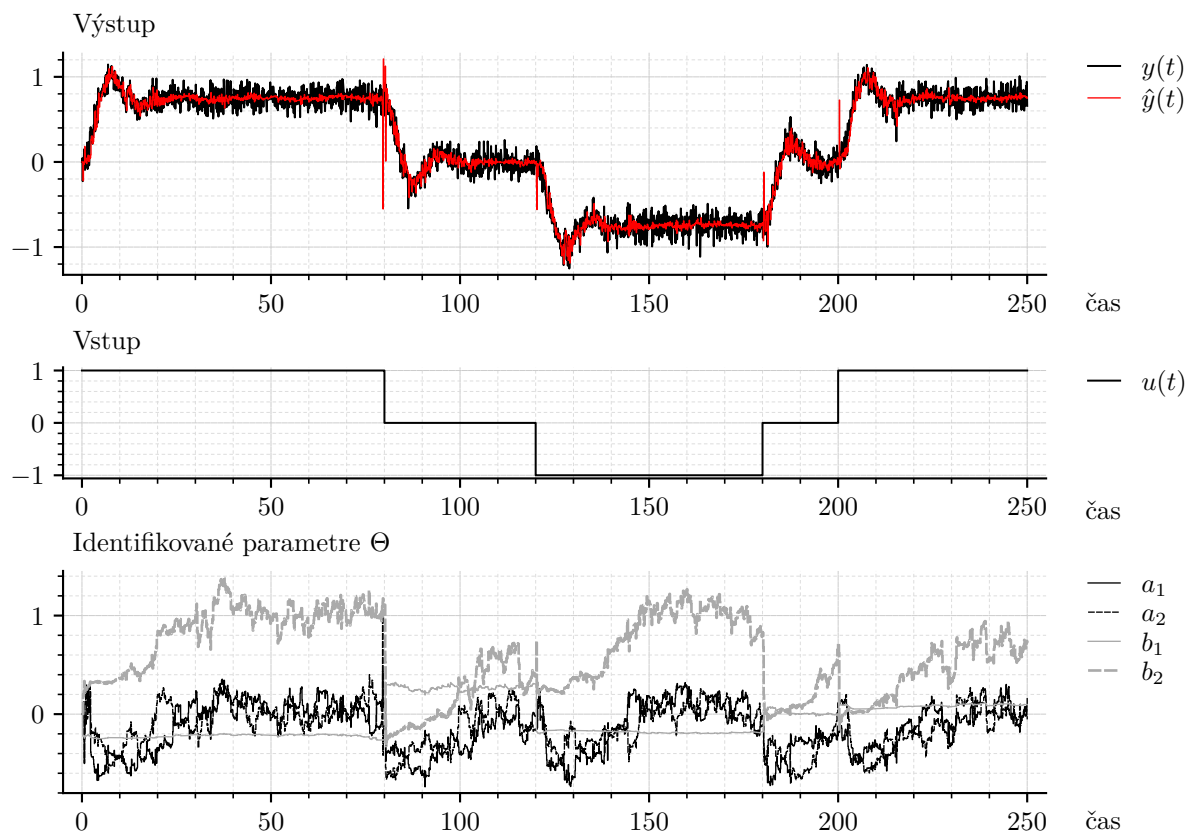
Extrémnou voľbou koeficientu zabúdania pre tento prípad by bolo:

Výpis kódu 21: Súbor ar03\_pr03.py

```

278 sim_lambdaKcoef = 0.957
279
280 # Spustenie simulacie
281
282 t_log, x_log, RMNS_y_predict_log, RMNS_theta_log, y_log_noise =
    fcn_simSch_02_lenRMNS_noise(
283     sim_t_start,
284     sim_T_s,
285     sim_finalIndex,
286     sig_u_ext,
287     sim_lambdaKcoef
288 )
289
290 # Obrázok
291
292 figName = 'figsc_ar03_fig03'
293 figNameNum = 2
294
295 exec(open('./figjobs/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())

```

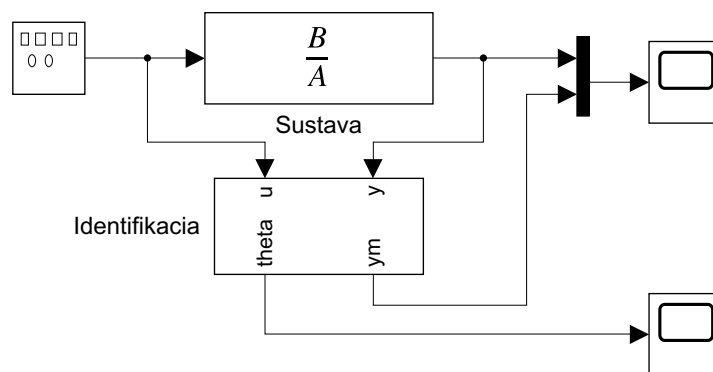


Obr. 5

### 3.4 Iná ukážka simulačnej schémy pre simuláciu RMNS

V tejto časti sa použije Simulink pre riešenie úloh ako v predchádzajúcom.

Majme sústavu, lepšie povedané dynamický systém (ktorý neskôr budeme riadiť), a k tomu istý blok, ktorého funkciou je realizovať priebežnú identifikáciu predmetného systému. Schematicky znázornené:



Obr. 6

Blok Identifikácia slúži na priebežnú identifikáciu a teda jeho hlavným výstupom sú parametre  $\Theta$  a tiež sa uvažuje výstupná veličina modelu  $\hat{y}$  (na obr. označená ako  $y_m$ ).

Pred spustením schémy (v Simulinku) je samozrejme potrebné inicializovať parametre riadeného systému (sústavy) a ako sa ukáže aj iné veci (v tomto prípade). Je to realizované v skripte:

Výpis kódu 22: Súbor ar03\_spustima\_RMNS.m

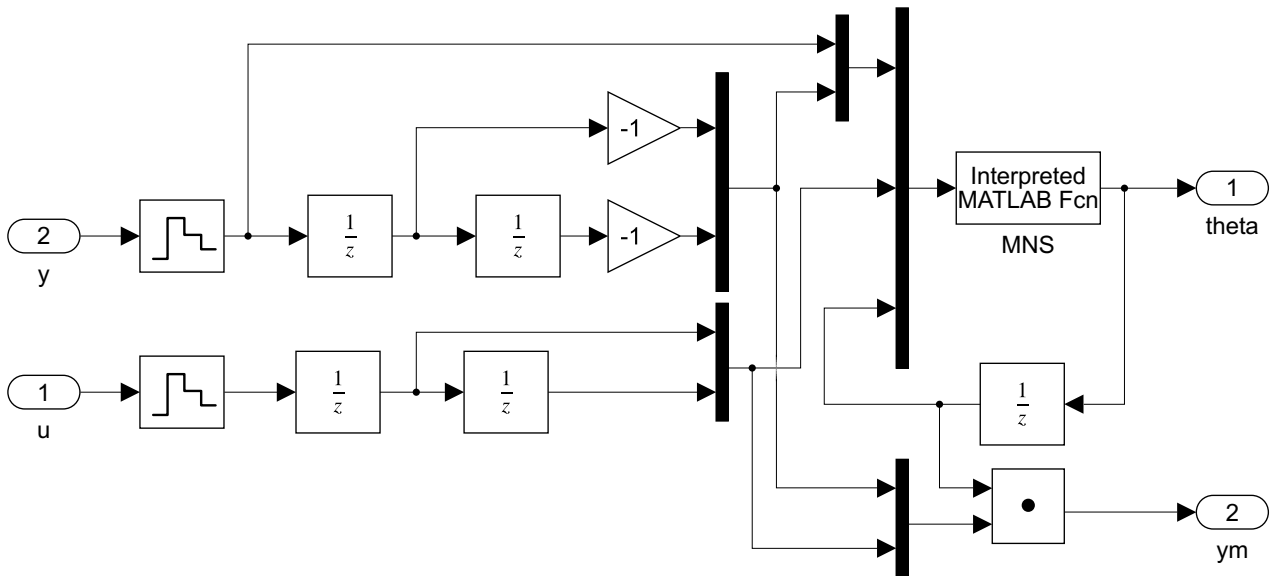
```
1 clear all;
2 clc
```

```

3
4 global P
5
6 % Perioda vzorkovania
7 Tvz = 0.1;
8
9 % Identifikovana sustava
10 B = [0 0.15];
11 A = [1 0.3 0.2];
12
13 % Prepis do diskretneho tvaru (len tak pre zaujimavost...)
14 Gs = tf(B,A);
15 Gz = c2d(Gs,Tvz);
16 [Bz,Az] = tfdata(Gz,'v')
17
18 % Startovacia matica P
19 P = 10^6 * eye(4,4) ;

```

Samotný blok Identifikácia je realizovaný nasledovne:



Obr. 7

Obsahuje vzorkovanie signálov (zero order hold) a oneskorovanie signálov (v zmysle  $z^{-1}$ ). Tým je realizované získavanie tzv. signálneho vektora a podobne. Ďalej je súčasťou bloku funkcia, ktorá realizuje samotný algoritmus RMNŠ. Kód funkcie:

Výpis kódu 23: Súbor MNS.m

```

1 function odhadTheta = MNS(vst)
2 global P
3
4 P_n = P;
5
6 theta = vst(6:9);
7
8 h_n1 = [vst(2:5)];
9 y_n1 = vst(1);
10
11 e_n1 = y_n1 - h_n1' * theta;
12 Y_n1 = (P_n*h_n1)/(1+h_n1'*P_n*h_n1);
13 P_n1 = P_n - Y_n1*h_n1'*P_n;
14 odhadTheta = theta + Y_n1*e_n1;
15
16 P = P_n1;

```

## 4 Metóda rozmiestňovania pólov

Pripomeňme, že zákon riadenia (štruktúra riadenia) samonastavujúceho sa regulátora v uvažovanom konkrétnom prípade je v tvare

$$R(z^{-1})u(k) = T(z^{-1})r(k) - S(z^{-1})y(k) \quad (40a)$$

$$u(k) = \frac{T(z^{-1})}{R(z^{-1})}r(k) - \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})}y(k) \quad (40b)$$

kde  $R$ ,  $S$  a  $T$  sú polynómy v tvare

$$R(z^{-1}) = 1 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2} + \dots + r_{n_r} z^{-n_r} \quad (41a)$$

$$S(z^{-1}) = s_0 + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2} + \dots + s_{n_s} z^{-n_s} \quad (41b)$$

$$T(z^{-1}) = t_0 + t_1 z^{-1} + t_2 z^{-2} + \dots + t_{n_t} z^{-n_t} \quad (41c)$$

Ako už bolo uvedené, koeficienty polynómov sú parametrami regulátora. Počet parametrov regulátora závisí od stupňa jednotlivých polynómov. Pre uvažovaný konkrétny príklad sú stupne polynómov nasledovné:  $n_r = 1$ ,  $n_s = 1$  a  $n_t = 0$ . Potom počet parametrov regulátora je  $n_r + n_s + 1 + n_t + 1$ . Teda  $1 + 1 + 1 + 0 + 1 = 4$ . Zákon riadenia je možné zapísať aj v tvare diferenčnej rovnice:

$$u(k) = -r_1 u(k-1) - s_0 y(k) - s_1 y(k-1) + t_0 r(k) \quad (42)$$

Uvažujme zákon riadenia v tvare (40), ktorého parametre budeme počítat pomocou metódy rozmiestňovania pólov. Najprv odvodíme rovnicu uzavretého obvodu (URO).

### 4.1 Rovnica URO

Model riadeného systému je

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) \quad (43)$$

Dosadením (7) do (43) máme

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1}) \left( \frac{T(z^{-1})}{R(z^{-1})}r(k) - \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})}y(k) \right) \quad (44)$$

Úpravou

$$Ay(k) = \frac{BT}{R}r(k) - \frac{BS}{R}y(k) \quad (45a)$$

$$RAy(k) = BTr(k) - BSy(k) \quad (45b)$$

$$(RA + BS)y(k) = BTr(k) \quad (45c)$$

$$y(k) = \frac{BT}{(AR + BS)}r(k) \quad (45d)$$

$$\frac{y(k)}{r(k)} = \frac{BT}{(AR + BS)} \quad (45e)$$

Charakteristický polynóm uzavretého regulačného obvodu je:

$$A(z^{-1})R(z^{-1}) + B(z^{-1})S(z^{-1}) \quad (46)$$

Nech želaný polynóm je

$$P(z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_{n_p} z^{-n_p} \quad (47)$$

potom diofantická rovnica, z ktorej sa vypočítajú koeficienty polynómov  $R$  a  $S$  je

$$A(z^{-1})R(z^{-1}) + B(z^{-1})S(z^{-1}) = P(z^{-1}) \quad (48)$$

V tomto prípade máme

$$A = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \quad (49a)$$

$$B = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \quad (49b)$$

$$R = 1 + r_1 z^{-1} \quad (49c)$$

$$S = s_0 + s_1 z^{-1} \quad (49d)$$

a nech želaný polynóm pre tento prípad je

$$P = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} \quad (50)$$

Diofantická rovnica pre tento prípad

$$\begin{aligned} & (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) (1 + r_1 z^{-1}) + (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) (s_0 + s_1 z^{-1}) \\ & = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} \end{aligned} \quad (51)$$

Roznásobením

$$\begin{aligned} & 1 + r_1 z^{-1} + a_1 z^{-1} + a_1 r_1 z^{-2} + a_2 z^{-2} + a_2 r_1 z^{-3} \\ & + b_1 s_0 z^{-1} + b_1 s_1 z^{-2} + b_2 s_0 z^{-2} + b_2 s_1 z^{-3} \\ & = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} \end{aligned} \quad (52)$$

Na ľavej strane ponecháme členy, v ktorých sa nachádzajú neznáme koeficienty polynómov zo zákona adaptácie a ostatné členy presunieme na pravú stranu

$$\begin{aligned} & r_1 z^{-1} + a_1 r_1 z^{-2} + a_2 r_1 z^{-3} + b_1 s_0 z^{-1} + b_1 s_1 z^{-2} + b_2 s_0 z^{-2} + b_2 s_1 z^{-3} \\ & = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} - 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} \end{aligned} \quad (53)$$

Po úprave

$$\begin{aligned} & (r_1 + b_1 s_0) z^{-1} + (a_1 r_1 + b_1 s_1 + b_2 s_0) z^{-2} + (a_2 r_1 + b_2 s_1) z^{-3} \\ & = (p_1 - a_1) z^{-1} + (p_2 - a_2) z^{-2} \end{aligned} \quad (54)$$

Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách získame rovnice

$$r_1 + b_1 s_0 = p_1 - a_1 \quad (55a)$$

$$a_1 r_1 + b_2 s_0 + b_1 s_1 = p_2 - a_2 \quad (55b)$$

$$a_2 r_1 + b_2 s_1 = 0 \quad (55c)$$

V maticovom zápise:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ a_1 & b_2 & b_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Maticový zápis vyplývajúci z diofantickej rovnice v prípade, keď stupne polynómov  $R$ ,  $S$  a  $P$  sú všeobecné, je v tvare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_2 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_a} & \vdots & \vdots & \cdots & 1 & b_{n_b} & \vdots & \vdots & \cdots & b_1 \\ 0 & \ddots & \vdots & \cdots & a_1 & 0 & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n_a} & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_{n_r} \\ s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{n_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

Takáto sústava rovníc bude mať riešenie ak

$$n_r = n_b - 1 \quad (58a)$$

$$n_s = n_a - 1 \quad (58b)$$

## 4.2 Polynóm $T$

Zatiaľ sme vypočítali koeficienty polynómov  $R$  a  $S$ . Otázkou ostáva, ako určiť polynóm  $T$ . Je potrebné určiť jeho stupeň a vypočítať koeficienty. V úvode sme „zvolili“, že stupeň polynómu  $T$  je  $n_t = 0$ . Teda jediným koeficientom bude  $t_0$ . Ukážme teraz, že jednou z možností, ako určiť polynóm  $T$ , je žiadať nulovú regulačnú odchýlku v ustálenom stave. Dostaneme tak polynóm  $T$  práve nultého stupňa a aj výpočet koeficientu  $t_0$ .

Keďže charakteristická rovnica URO je rovnaká ako želaný polynóm  $P$ , je možné písať rovnicu uzavretého obvodu v tvare

$$y(k) = \frac{BT}{P}r(k) \quad (59)$$

Aby platilo

$$y(\infty) = r(\infty) \quad (60)$$

musí byť

$$BT = P \quad (61a)$$

$$T = \frac{P}{B} \quad (61b)$$

A keďže „donekonečna“ je v diskkrétnej doméne „dojednotky“, teda  $z = 1$ , potom

$$T = \frac{P(1)}{B(1)} \quad (62)$$

čo v tomto prípade znamená

$$T(z^{-1}) = \frac{1 + p_1 + p_2}{b_1 + b_2} = t_0 \quad (63)$$

### 4.2.1 Alternatívy spôsobu určenia polynómu $T$

#### Alternatíva 1

Ďalší spôsob ako určiť koeficienty polynómu  $T$  je nasledovný. Nájdeme obraz referenčného signálu tak, že jeho časovú formu pretransformujeme pomocou Z-transformácie. Totiž v mnohých prípadoch je možné dopredu určiť časový priebeh referenčného signálu a navyše sa referenčný signál skladá zo skokov, rámp a podobných, pomocou Z-transformácie, ľahko transformovateľných signálov. Obraz referenčného signálu je

$$\{r(t)\}_q = \frac{F(q^{-1})}{G(q^{-1})} \quad (64)$$

Tento obraz použijeme vo vzťahu pre regulačnú odchýlku:

$$e = r - y = r - \frac{BT}{P}r = \frac{F}{G} - \frac{BT}{P} \frac{F}{G} = \frac{F(P - BT)}{GP} = \frac{FN}{P} \quad (65)$$

kde sme označili

$$\frac{P - BT}{G} = N \quad (66)$$

Z tohto označenia môžeme písať diofantickú rovnicu, ktorá doplní (48), a vznikne tak sústava.

$$GN + BT = P \quad (67)$$

Z tejto rovnice sa dá určiť aj polynóm vyššieho ako nultého stupňa.

## Alternatíva 2

Ďalší spôsob ako určiť koeficienty polynómu  $T$  je takýto: ak bude polynóm  $T$  obrátenou hodnotou polynómu  $B$ , teda  $T = 1/B$ , zaistí sa tak nie len nulová regulačná odchýlka v ustálenom stave, ale aj to, že polynóm  $B$  nebude mať žiadny vplyv na dynamiku URO. Dynamika URO bude daná len želaným charakteristickým polynómom  $P$ , takto:

$$y(t) = \frac{1}{P}r(t) \quad (68)$$

Zákon riadenia potom môžeme uvažovať v tvare

$$Ru(t) = \frac{1}{B}r(t) - Sy(t) \Rightarrow r = BRu + BSy \quad (69)$$

Ale ak  $B = q^{-D}\tilde{B}$ , tak aby sme mohli napísať predchádzajúcu rovnicu musíme dať  $q^{-D}$  na druhú stranu k  $r$ . Teda:

$$rq^D = \tilde{B}Ru + \tilde{B}Sy \quad (70)$$

Ak potom vyjadríme akčný zásah, je zrejmé, že bude závisieť od budúcich hodnôt referenčného signálu  $u(t) = r(t+D) - \dots$ . Toto však nemusí byť prekážkou, pretože v mnohých prípadoch je referenčný signál dopredu známy.

### 4.3 Súhrn pre tento prípad

Zhrňme výpočty potrebné pre určenie parametrov regulátora pre tento prípad.

Hodnoty parametrov modelu  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  a  $b_2$  sú po identifikácii (v danej perióde vzorkovania) známe a prirodzene sú známe aj hodnoty koeficientov želaného polynómu  $P$ . Hodnoty parametrov regulátora získame riešením

$$\begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ a_1 & b_2 & b_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (71)$$

a

$$t_0 = \frac{1 + p_1 + p_2}{b_1 + b_2} \quad (72)$$

### 4.4 Rýchlostný algoritmus metódy rozmiestňovania pólov

Táto subsekcia je tu len pre ilustráciu širších obzorov týkajúcich sa oblasti používania metódy rozmiestňovania pólov v prípadoch podobných tomuto.

Keďže ide o rýchlostný algoritmus, je potrebné vyjadriť prírastok akčnej veličiny:

$$\Delta u(t) = u(t) - u(t-1) = (1 - q^{-1})u(t) \quad (73)$$

$$u(t) = \frac{\Delta u(t)}{(1 - q^{-1})} \quad (74)$$

Riadený systém a jeho ARX model (s nulovým šumom):

$$Ay(t) = Bu(t) \quad (75)$$

do ktorého dosadíme  $u(t)$  a upravíme...

$$Ay(t) = B \frac{\Delta u(t)}{(1 - q^{-1})} \quad (76a)$$

$$(1 - q^{-1})Ay(t) = B\Delta u(t) \quad (76b)$$

Zákon riadenia uvažujeme v tvare:

$$\Delta u(t) = \frac{S}{R}(r(t) - y(t)) \quad (77)$$

Rovnica URO potom bude mať tvar

$$(1 - q^{-1})Ay(t) = B\Delta u(t) \quad (78a)$$

$$(1 - q^{-1})Ay(t) = B\frac{S}{R}(r(t) - y(t)) \quad (78b)$$

$$(1 - q^{-1})ARy(t) = BS(r(t) - y(t)) \quad (78c)$$

$$(1 - q^{-1})ARy(t) = BSr(t) - BSy(t) \quad (78d)$$

$$((1 - q^{-1})AR + BS)y(t) = BSr(t) \quad (78e)$$

$$y(t) = \frac{BS}{(1 - q^{-1})AR + BS}r(t) \quad (78f)$$

Takže charakteristický polynóm je

$$P = (1 - q^{-1})AR + BS \quad (79)$$

Ale veď potom

$$BS = P - (1 - q^{-1})AR \quad (80)$$

a tak rovnica URO:

$$y(t) = \frac{P - (1 - q^{-1})AR}{P}r(t) \quad (81a)$$

$$y(t) = \left( \frac{P}{P} - \frac{(1 - q^{-1})AR}{P} \right) r(t) \quad (81b)$$

$$y(t) = r(t) - \frac{(1 - q^{-1})AR}{P}r(t) \quad (81c)$$

Ak sa teraz opýtame aká bude regulačná odchýlka v ustálenom stave t.j.  $y(\infty)$ ,  $r(\infty)$  a čo je najdôležitejšie  $q = 1$  potom:

$$\begin{aligned} y(\infty) &= r(\infty) - \frac{(1 - 1)AR}{P}r(\infty) \\ y(\infty) &= r(\infty) \end{aligned} \quad (82)$$

Teda regulačná odchýlka v ustálenom stave bude nulová (pretože sa zhodujú hodnoty referenčného signálu a výstupnej veličiny).

## 5 Cvičenie tretie

1. Zrealizujte (v simulačnom prostredí) samonastavujúci sa regulátor tak ako to predpokladá uvažovaný konkrétny príklad.

Nech želaným charakteristickým polynómom (pre uvažovaný konkrétny príklad) je  $P(z^{-1}) = 1 + p_1z^{-1} + p_2z^{-2}$  pričom  $p_1 = -1,6$  a  $p_2 = 0,64$ , teda dvojnásobný koreň  $z_{1,2} = 0,8$ .

Alternatívne, nech v želanom charakteristickom je  $p_1 = -0,8$  a  $p_2 = 0,16$ , teda dvojnásobný koreň  $z_{1,2} = 0,4$ .

Pozn: pre uvažovaný príklad sa odporúča perióda vzorkovania  $T_{vz} = 0,1$  [čas].

### 5.1 Konkrétny príklad samonastavujúceho sa regulátora

V predchádzajúcom bola prezentovaná simulačná schéma, v ktorej bol implementovaný algoritmus RMNŠ.

Tu je cieľom doplniť do simulačnej schémy výpočet, ktorý na základe priebežne identifikovaných parametrov riadeného systému vypočíta hodnoty parametrov daného zákona riadenia a následne vypočíta samotný akčný zásah.

Výpočet parametrov zákona riadenia využíva metódu rozmisťovania pólov URO a je dplnený výpočtom pre zabezpečenie nulovej trvalej regulačnej odchýlky.



Nech želaným charakteristickým polynómom (pre uvažovaný konkrétny príklad) je  $P(z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}$  pričom  $p_1 = -1,6$  a  $p_2 = 0,64$ , teda dvojnásobný koreň  $z_{1,2} = 0,8$ .

Pozn: pre uvažovaný príklad sa odporúča perióda vzorkovania  $T_{vz} = 0,1$  [čas].

V tomto konkrétnom príklade uvažovaný zákon riadenia je možné zapísať v tvare diferenčnej rovnice:

$$u(k) = -r_1 u(k-1) - s_0 y(k) - s_1 y(k-1) + t_0 r(k) \quad (83)$$

Hodnoty parametrov modelu  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  a  $b_2$  sú po identifikácii (v danej perióde vzorkovania) známe a prirodzene sú známe aj hodnoty koeficientov želaného polynómu  $P$ . Hodnoty parametrov regulátora získame riešením

$$\begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ a_1 & b_2 & b_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (84)$$

a

$$t_0 = \frac{1 + p_1 + p_2}{b_1 + b_2} \quad (85)$$

Aj tu platí, že diferenčné rovnice riadeného systému ostávajú samozrejme rovnaké ako sme ich realizovali v predchádzajúcom, teda aj tu („na začiatku skriptu“) platí výpis kódu 1 a 2.

Ďalej nech simulačnú schému realizuje nasledujúca funkcia:

Výpis kódu 24:

Súbor ar03\_pr04.py

```
43 def fcn_simSch_05_STR(t_start, T_s, finalIndex, sig_r_ext):
44
45     #-----
46     t_log = np.zeros([finalIndex, 1])
47     t_log[0,:] = t_start
48
49     #-----
50     x_0 = np.array([0, 0])
51
52     x_log = np.zeros([finalIndex, len(x_0)])
53     x_log[0,:] = x_0
54     #-----
55
56     RMNS_theta_0 = np.array([[ -1.5],
57                             [ 0.5],
58                             [ -2e-5],
59                             [ 1.5e-3]])
60
61     RMNS_theta_log = np.zeros([finalIndex, len(RMNS_theta_0)])
62     RMNS_theta_log[0,:] = RMNS_theta_0.reshape(1,-1)
63
64     RMNS_P_0 = np.diag([10*2, 10**2, 10**5, 10**5])
65
66     RMNS_P_log = np.zeros([finalIndex, RMNS_P_0.size])
67     RMNS_P_log[0,:] = RMNS_P_0.reshape(1,-1)
68
69     RMNS_y_predict_log = np.zeros([finalIndex, 1])
70
71     #-----
72
73     u_log = np.zeros([finalIndex, 1])
74     # v tomto bode by sa dalo vypocitat u_0, ale tu na to kasleme
75
76     #-----
77     timespan = np.zeros(2)
78     for idx in range(1, int(finalIndex)):
79
80         timespan[0] = t_log[idx-1,:]
81         timespan[1] = t_log[idx-1,:] + T_s
82
83         odeOut = odeint(fcn_difRovnice,
84                         x_log[idx-1,:],
85                         timespan,
86                         args=(u_log[idx-1,:],))
```

```

87         )
88
89         x_log[idx,:] = odeOut[-1,:]
90         t_log[idx,:] = timespan[-1]
91
92         #-----
93         # ALGORITMUS RMNS
94         y_k = x_log[idx,0]
95
96         h_k = np.array([[-x_log[idx-1,0]],
97                        [-x_log[idx-2,0]], # pozor na idx-2 !!!
98                        [u_log[idx-1,0]],
99                        [u_log[idx-2,0]], # pozor na idx-2 !!!
100                       ])
101
102         theta_km1 = RMNS_theta_log[idx-1,:].reshape(4,-1)
103         P_km1 = RMNS_P_log[idx-1,:].reshape(4,4)
104
105         #-----
106         lambdaKcoef = 0.95
107
108         e_k = y_k - np.matmul(h_k.T, theta_km1)
109
110         Y_k = np.matmul(P_km1, h_k) / (lambdaKcoef + np.matmul(np.
111            matmul(h_k.T, P_km1), h_k))
112
113         P_k = (1/lambdaKcoef) * (P_km1 - np.matmul(np.matmul(Y_k, h_k.
114            T), P_km1))
115         theta_k = theta_km1 + Y_k * e_k
116
117         #-----
118         RMNS_theta_log[idx,:] = theta_k.reshape(1,-1)
119         RMNS_P_log[idx,:] = P_k.reshape(1,-1)
120
121         RMNS_y_predict_log[idx,:] = np.matmul(h_k.T, theta_km1)
122
123         #-----
124         # Vypocty pre parametre zakona riadenia a akcny zasah
125
126         # koeficienty zelaneho polynomu:
127
128         par_p1 = -1.6
129         par_p2 = 0.64
130
131         # parametre riadeného systému
132
133         par_a1 = RMNS_theta_log[idx-1,0]
134         par_a2 = RMNS_theta_log[idx-1,1]
135         par_b1 = RMNS_theta_log[idx-1,2]
136         par_b2 = RMNS_theta_log[idx-1,3]
137
138         # Parametre RST regulatora
139
140         matrix_A = np.array([[1, par_b1, 0],
141                             [par_a1, par_b2, par_b1],
142                             [par_a2, 0, par_b2],
143                             ])
144
145         matrix_b = np.array([par_p1 - par_a1,
146                             [par_p2 - par_a2],
147                             [0],
148                             ])
149
150         params_r1_s0_s1 = np.linalg.solve(matrix_A, matrix_b)
151
152         par_t0 = (1 + par_p1 + par_p2)/(par_b1 + par_b2)
153
154         # vypocita sa akcny zasah u(k)
155
156         par_RST = np.array([params_r1_s0_s1[0,0], params_r1_s0_s1
157            [1,0], params_r1_s0_s1[2,0], par_t0])
158         vekt_omega = np.array([-u_log[idx-1,0], -x_log[idx,0], -x_log
159            [idx-1,0], sig_r_ext[idx,0]])
160
161         u_log[idx,:] = np.dot(par_RST, vekt_omega)
162
163         #-----
164
165         return [t_log, x_log, u_log, RMNS_y_predict_log, RMNS_theta_log]

```

V uvedenej simulačnej schéme je implementovaný RMNS algoritmus rovnako ako v predchádzajúcom...

Všimnime si však, že faktor zabúdania  $\lambda$  (premenná `lambdaKoeef`) je nastavený na hodnotu  $\lambda = 0,95$ .

Tiež je potrebné všimnúť si, že štartovacie hodnoty RMNS algoritmu sú:

```
RMNS_theta_0 = np.array([[ -1.5], [ 0.5], [ -2e-5], [ 1.5e-3]])
```

a

```
RMNS_P_0 = np.diag([10**2, 10**2, 10**5, 10**5])
```

Nastavenia potrebné pre samotnú simuláciu a vygenerovanie signálov, ktoré sa používajú pri simulácii (ktoré sú dopredu známe - dané):

Výpis kódu 25: Súbor `ar03_pr04.py`

```
171 # Nastavenia simulacie
172
173 sim_t_start = 0
174 sim_t_final = 38
175 sim_T_s = 0.1
176 sim_finalIndex = int(((sim_t_final - sim_t_start)/sim_T_s) + 1)
177
178
179 # Preddefinovane signaly
180
181 period_time = 40
182 period_tab = np.array([
183     [0, 1],
184     [10, 0],
185     [20, -1],
186     [30, 0],
187 ])
188
189 sig_vysl = np.zeros([sim_finalIndex, 1])
190
191 for period in range(int(sim_t_final/period_time) + 1):
192     for idx in range(int((period*period_time)/sim_T_s), int((period*
193         period_time + period_time)/sim_T_s)):
194
195         lastValue = period_tab[:,1][(period_tab[:,0] + (period*
196             period_time))<=idx*sim_T_s ][-1]
197         try:
198             sig_vysl[idx] = lastValue
199         except:
200             break
201
202 sig_r_ext = sig_vysl
```

Spustenie simulácie:

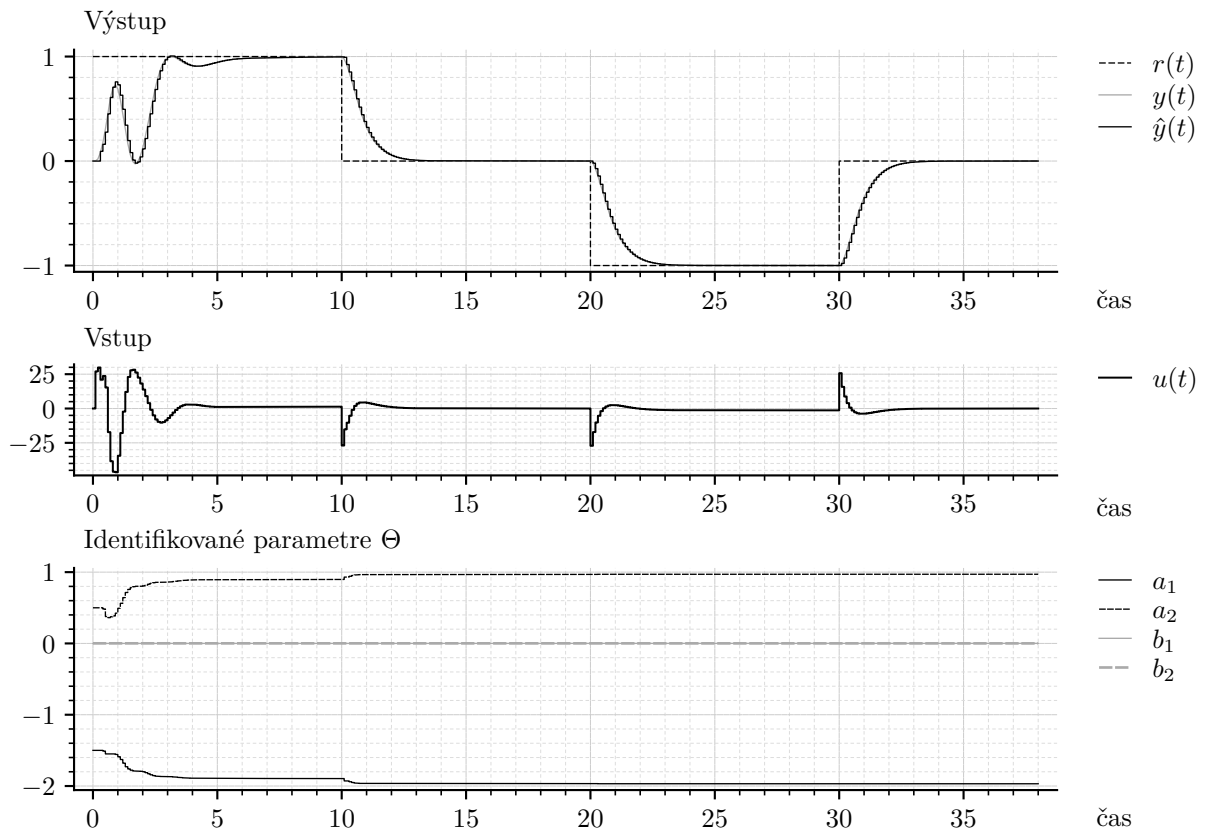
Výpis kódu 26: Súbor `ar03_pr04.py`

```
219 # Spustenie simulacie
220
221 t_log, x_log, u_log, RMNS_y_predict_log, RMNS_theta_log =
222     fcn_simSch_05_STR(
223         sim_t_start,
224         sim_T_s,
225         sim_finalIndex,
226         sig_r_ext,
227     )
```

Nakreslenie obrázka:

Výpis kódu 27: Súbor `ar03_pr04.py`

```
234 # Obrázok
235
236 figName = 'figsc_ar03_fig04'
237 figNameNum = 0
238
239 exec(open('./figjobs/' + figName + '.py', encoding='utf-8').read())
240
```



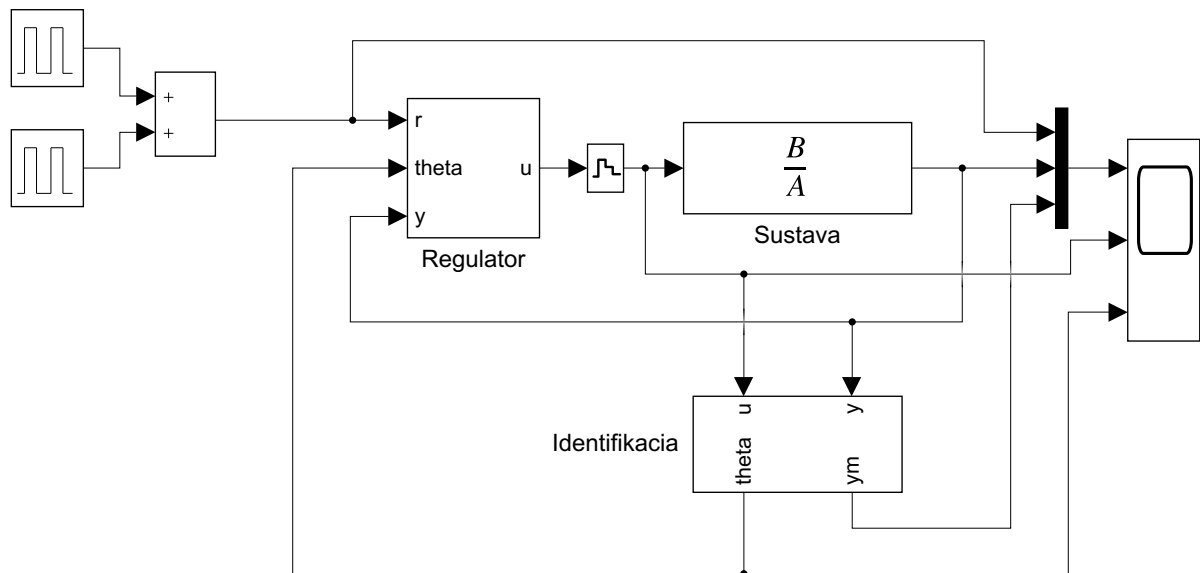
Obr. 8

## 5.2 Simulácia v Simulinku

V tejto časti sa použije Simulink pre riešenie úloh ako v predchádzajúcom.

Máme riadený systém, ku ktorému sme v predchádzajúcom vyrobili blok pre priebežnú identifikáciu. Teraz pridajme blok, ktorý bude realizovať výpočet akčného zásahu.

Schematicky znázornené:



Obr. 9

Pred spustením schémy (v Simulinku) je samozrejme potrebné inicializovať parametre riadeného systému (sústavy) a ako sa ukáže aj iné veci (v tomto prípade). Je to realizované v skripte:

Výpis kódu 28: Súbor ar03\_spustima\_STR.m

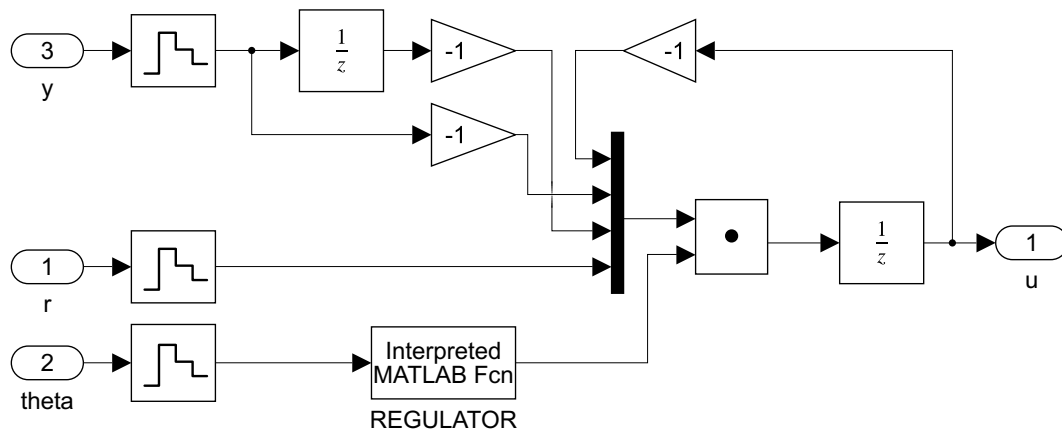
```
1 clear all;
2 clc
3
4 global P ZP lambdaKoeff
5
6 % Perioda vzorkovania
7 Tvz = 0.1;
8
9 % Identifikovaná sústava
10 B = [0 0.15];
11 A = [1 0.3 0.2];
12
13 % Zelany polynom
14 ZP = conv([1 -0.8],[1 -0.8]);
15
16 lambdaKoeff = 0.95
17
18 % Startovacia matica P
19 P = diag([20, 10^2, 10^5, 10^5]) ;
```

Blok Identifikácia je realizovaný ako na obr. 7 a používa funkciu:

Výpis kódu 29: Súbor MNSvRST.m

```
1 function odhadTheta = MNSvRST(vst)
2 global P lambdaKoeff
3
4 P_n = P;
5
6 theta = vst(6:9);
7
8 h_n1 = [vst(2:5)];
9 y_n1 = vst(1);
10
11 e_n1 = y_n1 - h_n1' * theta;
12 Y_n1 = (P_n*h_n1)/(lambdaKoeff + h_n1'*P_n*h_n1);
13 P_n1 = (1/lambdaKoeff) * (P_n - Y_n1*h_n1'*P_n);
14 odhadTheta = theta + Y_n1*e_n1;
15
16 P = P_n1;
```

Blok Regulátor je realizovaný nasledovne:



Obr. 10

Funkcia, ktorú používa blok Regulátor je nasledovná:

Výpis kódu 30: Súbor REGULATOR.m

```
1 function vyst = REGULATOR(theta)
2
3 global ZP
4
5 a1 = theta(1);
6 a2 = theta(2);
7 b1 = theta(3);
8 b2 = theta(4);
9
10 MATICA = [1 b1 0; a1 b2 b1; a2 0 b2];
```

```

11 PRAVASTRANA = [ZP(2) - a1; ZP(3) - a2; 0];
12 RS = MATICA\PRAVASTRANA;
13
14 T = (1 + ZP(2) + ZP(3))/(b1 + b2);
15
16 vyst = [RS' T]';

```

## 6 Otázky a úlohy

1. Stručne vysvetlite princíp rekurzívnej metódy najmenších štvorcov.
2. Napíšte Gaussov vzorec a podrobne vysvetlite jednotlivé prvky
3. Vyjadrite ARX model v tvare diskkrétnej prenosovej funkcie alebo v tvare diferenčnej rovnice.
4. Odvoďte Gaussov vzorec a ukážte, že nájdený extrém je minimum.
5. Aké (ktoré) prvky obsahuje signálny vektor pri priebežnej identifikácii metódou najmenších štvorcov? (Čo tvorí prvky signálneho vektora pri priebežnej identifikácii metódou najmenších štvorcov?)
6. Modelom riadeného systému je ARX model. Zákon riadenia má tvar  $R(z^{-1})u(k) = T(z^{-1})r(k) - S(z^{-1})y(k)$ . Nájdite charakteristický polynóm URO.
7. Modelom riadeného systému je ARX model. Zákon riadenia má tvar  $u(k) = \Delta u(k)/(1 - z^{-1})$ , kde

$$\Delta u(k) = \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})}(r(k) - y(k))$$

Nájdite charakteristický polynóm URO.

8. Stručne vysvetlite výpočet parametrov regulátora metódou pole-placement.
9. Vysvetlite podstatu metód návrhu polynómu  $T(z^{-1})$  pri STR.