AR06_txt_ MRAC_vst...

MRAC vstupno-výstupný

Obsah

1 MRC vo všeobecnosti

Mimochodom, MRC je skratka pre *Model Reference Control.*

V predchádzajúcich častiach učebného textu sme uvažovali riadený systém, ktorého stavové veličiny sú merateľné a navyše matica A má Frobeniovu kanonickú formu. To umožnilo použiť zákon riadenia v tvare stavového regulátora. Pre systémy, ktoré nespĺňajú tieto podmienky je potrebné vyvinúť zákon riadenia, ktorý využíva len vstupný a výstupný signál systému (nie sú potrebné stavové veličiny systému), pretože často len tieto sú dostupné. Pritom musia existovať také parametre zákona riadenia, pri ktorých sa model uzavretého regulačného obvodu zhoduje s referenčným modelom (dostatočná štrukturálna flexibilita zákona riadenia). Je tiež dôležité aby pre realizáciu zákona riadenia nebolo potrebné použiť derivačné členy, pretože implementácia derivácie je vždy náročná.

1.1 O pozorovateľovi stavu s redukovaným rádom

V predchádzajúcich častiach učebného textu sa ukázalo, že ak je stavový vektor $x \in \mathbb{R}^n$ merateľný, potom zákon riadenia v tvare[1] $u(t) = \Theta_1^\mathsf{T}(t)x(t) + \Theta_2(t)r(t)$ zabezpečí splnenie cieľa riadenia. V takom prípade je adaptovaný člen $\Theta_1^\mathsf{T}(t)x(t)$ odhadom ideálneho člena $\Theta_1^{\star\mathsf{T}}(t)x(t)$. Avšak, keď stavový vektor $x(t)$ nie je merateľný odhad ideálneho člena $\Theta_1^{\star\mathsf{T}}(t)x(t)$ je potrebné zabezpečiť pomocou dostupných signálov. Dostupnými signálmi sú akčný zásah $u(t)$ a výstupná veličina $y(t)$. To sa dosiahne parametrizáciou odhadu ideálneho člena, teda zmenou tohto adaptovaného člena, ktorá je zvyčajne založená na využití pozorovateľa stavu s redukovaným rádom [4].

Riadený SISO lineárny systém n-tého rádu sa uvažuje v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \tag{1a}$$

$$y(t) = x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{1b}$$

kde $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n-1}$ je časť stavového vektora, ktorá nie je merateľná a ostatné vektory a matice majú zodpovedajúce rozmery. Pre odvodenie príslušného pozorovateľa stavu sa parametre systému (1) považujú za známe.

Systém (1) možno zapísať v tvare

$$\dot{x}_2(t) = A_{22}x_2(t) + (A_{21}x_1(t) + b_2u(t)) \tag{2a}$$

$$\dot{x}_1(t) = A_{12}x_2(t) + (A_{11}x_1(t) + b_1u(t)) \tag{2b}$$

Z pohľadu návrhu pozorovateľa stavu $x_2(t)$ sa signály $x_1(t)$ a $u(t)$ považujú za merateľné vstupy (platí $y(t) = x_1(t)$). Zároveň sa signál $\dot{x}_1(t)$ považuje za výstup pozorovaného systému. Pozorovateľ stavu je preto v tvare

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = A_{22}\hat{x}_2(t) + (A_{21}x_1(t) + b_2u(t)) + L\left(\dot{x}_1(t) - A_{12}\hat{x}_2(t) - (A_{11}x_1(t) + b_1u(t))\right) \tag{3}$$

kde $L \in \mathbb{R}^{n-1}$ je voliteľný konštantný vektor.

Pre chybu pozorovania stavu $\tilde{x}_2(t)$ platí $\tilde{x}_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$. Dynamiku tejto chyby opisuje rovnica

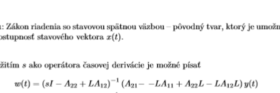
$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = (A_{22} - LA_{12})\,\tilde{x}_2(t) \tag{4}$$

Z toho vyplýva, že vektor L má byť zvolený tak, že matica $A_{22} - LA_{12}$ je asymptoticky stabilná. Potom chyba pozorovania sa asymptoticky blíži k nule.

Získanie (meranie) signálu $\dot{x}_1(t)$ je z praktického hľadiska problematické. Preto sa zavádza signál $w(t)$ taký, že $\hat{x}_2(t) = w(t) + Ly(t)$. Je zrejmé, že $\dot{w}(t) = \dot{\hat{x}}_2(t) + L\dot{y}(t)$. Po dosadení a úpravách

$$\dot{w}(t) = (A_{22} - LA_{12})\,w(t) + (A_{21} - LA_{11} + A_{22}L - LA_{12}L)\,y(t) + (b_2 - Lb_1)\,u(t) \tag{5}$$

[1] Zákon riadenia $u(t) = \Theta_1^\mathsf{T}(t)x(t) + \Theta_2(t)r(t)$ a zákon riadenia $u(t) = k^\mathsf{T}(t)x(t) + l(t)r(t)$ sa po formálnej stránke zhodujú, len označenie adaptovaných parametrov je iné.



Obr. 1: Zákon riadenia so stavovou spätnou väzbou – pôvodný tvar, ktorý je umožnený pre dostupnosť stavového vektora $x(t)$.

S využitím s ako operátora časovej derivácie je možné písať

$$\begin{aligned} w(t) = {} & (sI - A_{22} + LA_{12})^{-1}(A_{21} - \; -LA_{11} + A_{22}L - LA_{12}L)\,y(t) \\ & + (sI - A_{22} + LA_{12})^{-1}(b_2 - Lb_1)\,u(t) \end{aligned} \tag{6}$$

čo je možné vyjadriť aj v tvare

$$w(t) = \operatorname{diag}(g_u)\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]u(t) + \operatorname{diag}(g_y)\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]y(t) \tag{7}$$

kde $g_u \in \mathbb{R}^{n-1}$ a $g_y \in \mathbb{R}^{n-1}$ sú vektory konštánt, preto $\operatorname{diag}(g_u)$ a $\operatorname{diag}(g_y)$ sú diagonálne matice, $\alpha(s)$ je vektor mocnín operátora s v tvare $\alpha^\mathsf{T}(s) = \left[s^{n-2}, \ldots, s, 1\right]$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$, a nakoniec polynóm $\Lambda(s) = \det(sI - A_{22} + LA_{12})$ je monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$ daný voľbou vektora L. Ako bolo uvedené $\hat{x}_2(t) = w(t) + Ly(t)$, potom

$$\hat{x}_2(t) = \operatorname{diag}(g_u)\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]u(t) + \operatorname{diag}(g_y)\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]y(t) + Ly(t) \tag{8}$$

V úvode časti uvedený ideálny člen $\Theta_1^{\star\mathsf{T}}(t)x(t)$ je teda možné parametrizovať nasledovne. Stavový vektor $x(t)$ je nahradený odhadom $\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} y(t) & \hat{x}_2(t) \end{bmatrix}^\mathsf{T}$, a tiež sa rozdelí $\Theta_1^\star(t) = \begin{bmatrix} k_y^\star & k_2^{\star\mathsf{T}} \end{bmatrix}^\mathsf{T}$, pričom $k_y^\star \in \mathbb{R}$, potom

$$\Theta_1^{\star\mathsf{T}}(t)\hat{x}(t) = k_y^\star y(t) + k_2^{\star\mathsf{T}}\hat{x}_2(t)$$

... máme MRAC stavový

ale stav x nie vždy máme ...

... chceme MRAC vstupno výstupný

problém $u = k^T x + lr$

nemáme ...

riešenie: $u = k^T \hat{x} + lr$

$\hat{x}$ je čo? dobrá otázka ...

$\hat{x}$ nech je výstupom pozorovateľa stavu...

potom:

pre vstup-výstup systém vždy existuje opis:

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = c^T x$$

pozorovateľ: $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + L(y - c^T\hat{x})$

vstupy? výstupy? parametre?

„dôkaz" že $\hat{x} \to x$

odchýlka $\tilde{x} = x - \hat{x} \to 0$

$\dot{\tilde{x}} = ?$ ← chceme stabil!

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + \cancel{bu} - A\hat{x} - \cancel{bu} - L(c^T x - c^T\hat{x})$$
$$= A\tilde{x} - Lc^T\tilde{x}$$
$$\dot{\tilde{x}} = \underbrace{(A - Lc^T)}_{\text{... voľba } L \text{ tak aby toto bolo stabilné...}}\tilde{x}$$

$\hat{x}$ ... teda môže byť výstupom pozorovateľa stavu

AVŠAK! potrebovali by sme A, b, c .... (nemáme v adapt. riadení...)

ako získať $\hat{x}$?

uvážme: $u = k^T \hat{x} + lr$

adaptuje sa

adaptuje sa

- výstup „nejakého" dyn. systému ...
- lineárneho ...
- má parametre a signály ... aké?

$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} - Lc^T\hat{x} + bu + Ly$ ← pozorovateľ, len v inom tvare ...

$\Downarrow$

jedn. matica

$sI\hat{x} = (A - Lc^T)\hat{x} + bu + Ly$

Laplaceov operátor

$$\left[sI - (A - Lc^T)\right]\hat{x} = bu + Ly$$

$$\hat{x} = \underbrace{\left[sI - (A - Lc^T)\right]^{-1}}_{\text{čo je toto? matica...}} bu + \underbrace{\left[sI - (A - Lc^T)\right]^{-1} L}_{\text{...detto...}} y$$

taká inverzia vyzerá cca takto:

$\dfrac{1}{\det(\cdots)}$

polynóm (každý prvok matice...)

polynóm

označme $\Lambda(s)$

$\Lambda(s) = \det\left(sI - (A - Lc^T)\right)$

„stabilný" polynóm ...

vektor ⇒ jeho prvky sú polynómy...

označme $G_u(s)$

vektor polynómov

takže:

$$\hat{x} = \left[\frac{\left[G_u(s)\right]}{\Lambda(s)}\right]u + \frac{\left[G_y(s)\right]}{\Lambda(s)}y$$

tiež vektor polynómov ale iný...

vektor prenosových funkcií ...

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{c} \dfrac{g_{11}s^1 + \ldots}{\Lambda(s)} \\ \dfrac{g_{22}s^2 + g_{21}s^1 + \ldots \text{ whatever}}{\Lambda(s)} \end{array}\right.$$

$$\hat{x}_2(t) = \mathrm{diag}(g_u)\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]u(t) + \mathrm{diag}(g_y)\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]y(t) + Ly(t) \tag{8}$$

V úvode časti uvedený ideálny člen ${\Theta_1^{\star}}^{\mathsf{T}}(t)x(t)$ je teda možné parametrizovať nasledovne. Stavový vektor $x(t)$ je nahradený odhadom $\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} y(t) & \hat{x}_2(t)\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$, a tiež sa rozdelí $\Theta_1^{\star}(t) = \begin{bmatrix} k_y^{\star} & {k_2^{\star}}^{\mathsf{T}}\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$, pričom $k_y^{\star} \in \mathbb{R}$, potom

$$\begin{aligned}{\Theta_1^{\star}}^{\mathsf{T}}(t)\hat{x}(t) =& k_y^{\star}y(t) + {k_2^{\star}}^{\mathsf{T}}\hat{x}_2(t)\\ =& k_y^{\star}y(t) + {k_2^{\star}}^{\mathsf{T}}\mathrm{diag}(g_u)\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]u(t) + {k_2^{\star}}^{\mathsf{T}}\mathrm{diag}(g_y)\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]y(t) + {k_2^{\star}}^{\mathsf{T}}Ly(t)\end{aligned} \tag{9}$$

V tomto bode text sa pre jednoduchosť a lepšiu názornosť zavedie úplne nové označovanie, ktorým sa mení označenie niektorých parametrov zákona riadenia, a teda význam pôvodného označovania. Pôvodný ideálny člen formálne zodpovedá výrazu ${\overline{\Theta}_1^{\star}}^{\mathsf{T}}\hat{x}(t)$ a nové označovanie vyplýva zo zapísania rovnice (9) v tvare

$${\overline{\Theta}_1^{\star}}^{\mathsf{T}}\hat{x}(t) = {\Theta_1^{\star}}^{\mathsf{T}}\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]u(t) + {\Theta_2^{\star}}^{\mathsf{T}}\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]y(t) + \Theta_3^{\star}y(t) \tag{10}$$

kde sa vzhľadom na (9) zaviedlo označenie ${\Theta_1^{\star}}^{\mathsf{T}} = {k_2^{\star}}^{\mathsf{T}}\mathrm{diag}(g_u)$, ${\Theta_2^{\star}}^{\mathsf{T}} = {k_2^{\star}}^{\mathsf{T}}\mathrm{diag}(g_y)$ a $\Theta_3^{\star} = k_y^{\star} + {k_2^{\star}}^{\mathsf{T}}L$.

Z uvedeného vyplýva, že ideálny stavový zákon riadenia použitý v predchádzajúcich častiach je možné re-parametrizovať do tvaru

$$u(t) = {\Theta_1^{\star}}^{\mathsf{T}}\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]u(t) + {\Theta_2^{\star}}^{\mathsf{T}}\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]y(t) + \Theta_3^{\star}y(t) + \Theta_4^{\star}r(t) \tag{11}$$

prenosových funkcií...

$$\begin{bmatrix} \dfrac{g_{11}s^1 + \dots}{\Lambda(s)} \\ \dfrac{g_{22}s^2 + g_{21}s^1 + \dots \text{ whatever}}{\Lambda(s)} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

nejaké koeficienty

$$\Downarrow$$

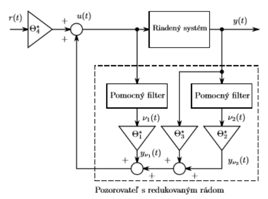
vektor čísiel

štvorcová matica

$$\left[\frac{\Big[\mathrm{diag}(g_u)\Big]\Big[\alpha(s)\Big]}{\Lambda(s)}\right]$$

vektor mocnín s

polynóm...



Obr. 2: Pozorovateľ s redukovaným rádom.

V prvých dvoch členoch zákona riadenia (11) sú použité takzvané pomocné filtre. Tieto generujú pomocné signály $\nu_1(t)$ a $\nu_2(t)$ upresnené nižšie. Napríklad prvý člen pravej strany v rovnici (11) možno zapísať v tvare

$$y_{\nu_1}(t) = {\Theta_1^{\star}}^{\mathsf{T}}\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]u(t) = \frac{\Theta_{1(n-2)}^{\star}s^{n-2} + \dots + \Theta_{11}^{\star}s + \Theta_{10}^{\star}}{s^{n-1} + \lambda_{n-2}s^{n-2} + \dots + \lambda_1 s + \lambda_0}u(t) \tag{12}$$

kde $\Theta_1^{\star} = \begin{bmatrix}\Theta_{1(n-2)}^{\star} & \cdots & \Theta_{11}^{\star} & \Theta_{10}^{\star}\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$, alebo v stavovom priestore v tvare (48) na strane 9. Po označení jednotlivých vektorov a matíc v (48) je prvý pomocný filter v tvare

$$\dot{\nu}_1(t) = \Lambda\nu_1(t) + qu(t) \tag{13a}$$

$$y_{\nu_1}(t) = {\Theta_1^{\star}}^{\mathsf{T}}\nu_1(t) \tag{13b}$$

Z uvedeného plynie, že prvý pomocný filter má v stavovom priestore tvar $\dot{\nu}_1(t) = \Lambda\nu_1(t) + qu(t)$, kde ν_1(t) je vektor pomocných signálov generovaných prvým pomocným filtrom (stavový vektor prvého pomocného filtra). Tento je násobený parametrami zákona riadenia ${\Theta_1^{\star}}^{\mathsf{T}}$. Analogicky, druhý prídavný filter má v stavovom priestore tvar $\dot{\nu}_2(t) = \Lambda\nu_2(t) + qy(t)$. Zákon riadenia využívajúci len vstupno-výstupné signály riadeného systému je potom v tvare

$$u(t) = {\Theta_1^{\star}}^{\mathsf{T}}\nu_1(t) + {\Theta_2^{\star}}^{\mathsf{T}}\nu_2(t) + \Theta_3^{\star}y(t) + \Theta_4^{\star}r(t) \tag{14}$$

1.2 Formulácia problému riadenia s referenčným modelom

Riešením MRC (Model Reference Control – Riadenie s referenčným modelom) problému je taký zákon riadenia u, ktorý zabezpečí, že výstup sústavy y sleduje výstup referenčného modelu y_m pri danom referenčnom signály r.

Uvažujme sústavu opísanú prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p\frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \tag{15}$$

kde $Z_p(s)$ je monický, hurwitzov polynóm stupňa m, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa n a k_p je tzv. *vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy*. *Relatívny stupeň* sústavy je $n^* = n - m$.

takže:

$$\hat{x} = \frac{\mathrm{diag}(g_u)\,\alpha(s)}{\Lambda(s)}u + \frac{\mathrm{diag}(g_y)\,\alpha(s)}{\Lambda(s)}y$$

potom zákon riadenia:

$$u = k^{\mathsf{T}}\hat{x} + \ell r$$

$$u = \underbrace{k^{\mathsf{T}}\mathrm{diag}(g_u)}_{\text{vektor čísiel!}}\underbrace{\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]u}_{\text{vektor signálov!}} + k^{\mathsf{T}}\mathrm{diag}(g_y)\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]y + \ell r$$

....detto

$\Downarrow$ označíme Θ_1^{T}

$$u = \Theta_1^{\mathsf{T}}\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]u + \Theta_2^{\mathsf{T}}\left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}\right]y + \ell r$$

parametre

sig...

... použili sme full-order observer

... ak použijeme pozorovateľ s redukovaným rádom, taký že výstup. sys. je rovno jedna stavová veličina a nemusíme ju pozorovať tak

nebude na skúške...

Polynóm sa nazýva *monický* ak je koeficient pri najvyššej mocnine s (v tomto prípade) rovný jednotke. Polynóm sa nazýva *hurwitzov* ak sú reálne časti všetkých koreňov polynómu záporné.

Nech referenčný model je daný prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m\frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \tag{16}$$

kde k_m je vysokofrekvenčné zosilnenie referenčného modelu, polynóm $Z_m(s)$ je monický Hurwitzov polynóm stupňa m_m, $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa n_m, pričom relatívny stupeň $n_m^* = n_m - m_m = n^*$.

Zákon riadenia, ktorý rieši MRC problém je nasledovný. Najskôr uvedieme jeho všeobecný zápis, avšak pre lepšiu názornosť budeme riešenie MRC problému vyšetrovať na zjednodušenom konkrétnom príklade. Všeobecný tvar zákona riadenia, ktorý rieši MRC problém je

$$u = {\Theta_1^{\star}}^{\mathsf{T}}\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}u + {\Theta_2^{\star}}^{\mathsf{T}}\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}y + \Theta_3^{\star}y + \Theta_4^{\star}r \tag{17}$$

kde $\alpha(s)$ je vektor obsahujúci mocniny s, $\alpha(s) = \left[s^{n-2}, \dots, s, 1\right]^{\mathsf{T}}$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$. Vektory $\Theta_1^{\star} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\Theta_2^{\star} \in \mathbb{R}^{n-1}$ a skaláry $\Theta_3^{\star} \in \mathbb{R}^1$, $\Theta_4^{\star} \in \mathbb{R}^1$ sú konštantné parametre zákona riadenia, ktorých hodnoty hľadáme. $\Lambda(s)$ je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$ obsahujúci $Z_m(s)$ ako faktor

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s)Z_m(s) \tag{18}$$

a teda aj $\Lambda_0(s)$ je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm zodpovedajúceho stupňa.

1.2.1 Ilustrácia na príklade systému 2. rádu

Uvažujme systém opísaný prenosovou funkciou v tvare

$$y(s) = k_p\frac{s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}u(s) \tag{19}$$

kde a_i, b_i sú konštanty ($b_0 > 0$). Referenčný model zvoľme tak aby mal rovnaký relatívny stupeň ako sústava.

$$y_m(s) = W_m(s)r(s) = k_m\frac{s + b_{0m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{0m}}r(s) \tag{20}$$

V tomto konkrétnom príklade, zákon riadenia, ktorý rieši MRC problém je v tvare

$$u(s) = \Theta_1^{\star}\frac{1}{(s+\lambda)}u(s) + \Theta_2^{\star}\frac{1}{(s+\lambda)}y(s) + \Theta_3^{\star}y(s) + \Theta_4^{\star}r(s) \tag{21}$$

kde sme použili $\alpha(s) = 1$ a $\Lambda(s) = (s+\lambda)$. V tomto prípade $\Theta_1^{\star}$, $\Theta_2^{\star}$ aj $\Theta_3^{\star}$ a $\Theta_4^{\star}$ sú skalárne konštanty – parametre zákona riadenia. Zákon riadenia (21) možno upraviť do tvaru

$$\left(1 - \frac{\Theta_1^{\star}}{(s+\lambda)}\right)u(s) = \left(\frac{\Theta_2^{\star}}{(s+\lambda)} + \Theta_3^{\star}\right)y(s) + \Theta_4^{\star}r(s) \tag{22a}$$

$$\left(\frac{(s+\lambda) - \Theta_1^{\star}}{(s+\lambda)}\right)u(s) = \left(\frac{\Theta_2^{\star} + \Theta_3^{\star}(s+\lambda)}{(s+\lambda)}\right)y(s) + \Theta_4^{\star}r(s) \tag{22b}$$

$$u(s) = \frac{\Theta_2^{\star} + \Theta_3^{\star}(s+\lambda)}{(s+\lambda) - \Theta_1^{\star}}y(s) + \frac{\Theta_4^{\star}(s+\lambda)}{(s+\lambda) - \Theta_1^{\star}}r(s) \tag{22c}$$

Dosadením (22c) do (19) získame prenosovú funkciu URO v tvare (23):

$$y(s) = k_p \frac{s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}\left(\frac{\Theta_2^\star + \Theta_3^\star(s+\lambda)}{(s+\lambda)-\Theta_1^\star}y(s) + \frac{\Theta_4^\star(s+\lambda)}{(s+\lambda)-\Theta_1^\star}r(s)\right) \tag{23a}$$

$$\left(1 - \frac{k_p(s+b_0)\left(\Theta_2^\star+\Theta_3^\star(s+\lambda)\right)}{(s^2+a_1s+a_0)\left((s+\lambda)-\Theta_1^\star\right)}\right)y(s) = \frac{k_p(s+b_0)\Theta_4^\star(s+\lambda)}{(s^2+a_1s+a_0)\left((s+\lambda)-\Theta_1^\star\right)}r(s) \tag{23b}$$

$$\left(\frac{(s^2+a_1s+a_0)\left((s+\lambda)-\Theta_1^\star\right) - k_p(s+b_0)\left(\Theta_2^\star+\Theta_3^\star(s+\lambda)\right)}{(s^2+a_1s+a_0)\left((s+\lambda)-\Theta_1^\star\right)}\right)y(s) = \\ = \frac{k_p(s+b_0)\Theta_4^\star(s+\lambda)}{(s^2+a_1s+a_0)\left((s+\lambda)-\Theta_1^\star\right)}r(s) \tag{23c}$$

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{k_p(s+b_0)\Theta_4^\star(s+\lambda)}{(s^2+a_1s+a_0)\left((s+\lambda)-\Theta_1^\star\right) - k_p(s+b_0)\left(\Theta_2^\star+\Theta_3^\star(s+\lambda)\right)} \tag{23d}$$

Prenosovú funkciu (23d) označme $G_c(s)$. Výstupná veličina sústavy bude sledovať výstupnú veličinu referenčného modelu ak $G_c(s) = W_m(s)$. Táto podmienka bude splnená ak

$$\Theta_4^\star = \frac{k_m}{k_p} \tag{24}$$

$$(s+\lambda) = \Lambda_0(s)(s+b_{0m}) = (s+b_{0m}) \tag{25}$$

pričom (24) je prvou podmienkou zhody, (25) je voľbou polynómu $\Lambda(s)$ stupňa $n-1$ kde v tomto prípade $\Lambda_0(s) = 1$ a teda $\lambda = b_{0m}$ a druhou podmienkou zhody je

$$(s^2+a_1s+a_0)\left((s+\lambda)-\Theta_1^\star\right) - k_p(s+b_0)\left(\Theta_2^\star+\Theta_3^\star(s+\lambda)\right) \\ = (s+b_0)(s^2+a_{1m}s+a_{0m}) \tag{26}$$

Potom možno (23d) zapísať v tvare

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{k_p(s+b_0)\frac{k_m}{k_p}(s+b_{0m})}{(s+b_0)(s^2+a_{1m}s+a_{0m})} = \frac{k_m(s+b_{0m})}{(s^2+a_{1m}s+a_{0m})} = W_m(s) \tag{27}$$

V prenosovej funkcii (27) dochádza ku vzájomnému vykráteniu sa polynómu $(s+b_0)$. Táto operácia je možná, pretože tieto polynómy majú korene v zápornej polrovine komplexnej roviny a teda sú stabilné (Hurwitzove). Taký je predpoklad pre $Z_p(s)$. Polynómy, ktoré nie sú Hurwitzove nemožno v prenosovej funkcii navzájom vykrátiť. Podmienku zhody (26) je možné zapísať aj v maticovom tvare porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách na oboch stranách

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -k_p \\ -a_1 & -k_p & -(k_pb_{0m}+k_pb_0) \\ -a_0 & -k_pb_0 & -k_pb_0b_{0m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Theta_1^\star \\ \Theta_2^\star \\ \Theta_3^\star\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1m}+b_0-b_{0m}-a_1 \\ a_{0m}+b_0a_{1m}-a_1b_{0m}-a_0 \\ b_0a_{0m}-a_0b_{0m}\end{bmatrix} \tag{28}$$

čo je sústava algebraických rovníc v tvare $M_s\Theta_s = p_s$ a teda existencia takého vektora Θ_s, ktorý spĺňa rovnosť, je závislá od vlastností matice M_s. Z podmienok zhody (24) a (28) plynú konkrétne hodnoty parametrov zákona riadenia, ktoré riešia daný MRC problém.

PODMIENKY ZHODY

ilustrované na príklade sys. 2. rádu

bude na skúške

Predchádzajúci postup je možné zapísať prehľadnejšie (pre prehľadnosť vynecháme aj zátvorky s laplaceovou premennou (s)):

Zákon riadenia

URO?

$u = \dots$

$y = \bigcirc u$

$\frac{y}{r} = ?$

$\alpha(s)$

$$u = \frac{\Theta_1^\star}{\Lambda}u + \frac{\Theta_2^\star}{\Lambda}y + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r \tag{29a}$$

$$\left(1 - \frac{\Theta_1^\star}{\Lambda}\right)u = \left(\frac{\Theta_2^\star}{\Lambda} + \Theta_3^\star\right)y + \Theta_4^\star r \tag{29b}$$

$$\frac{\Lambda - \Theta_1^\star}{\Lambda}u = \frac{\Theta_2^\star + \Theta_3^\star\Lambda}{\Lambda}y + \Theta_4^\star r \tag{29c}$$

$$u = \frac{\Theta_2^\star + \Theta_3^\star\Lambda}{\Lambda - \Theta_1^\star}y + \frac{\Theta_4^\star\Lambda}{\Lambda - \Theta_1^\star}r \tag{29d}$$

Uzavretý regulačný obvod

$$y = k_p\frac{Z_p}{R_p}\left(\frac{\Theta_2^\star+\Theta_3^\star\Lambda}{\Lambda-\Theta_1^\star}y + \frac{\Theta_4^\star\Lambda}{\Lambda-\Theta_1^\star}r\right) \tag{30a}$$

$$\left(1 - \frac{k_pZ_p\left(\Theta_2^\star+\Theta_3^\star\Lambda\right)}{R_p\left(\Lambda-\Theta_1^\star\right)}\right)y = \frac{k_pZ_p\Theta_4^\star\Lambda}{R_p\left(\Lambda-\Theta_1^\star\right)}r \tag{30b}$$

$$\frac{R_p\left(\Lambda-\Theta_1^\star\right) - k_pZ_p\left(\Theta_2^\star+\Theta_3^\star\Lambda\right)}{R_p\left(\Lambda-\Theta_1^\star\right)}y = \frac{k_pZ_p\Theta_4^\star\Lambda}{R_p\left(\Lambda-\Theta_1^\star\right)}r \tag{30c}$$

$$y = \frac{k_pZ_p\Theta_4^\star\Lambda}{R_p\left(\Lambda-\Theta_1^\star\right) - k_pZ_p\left(\Theta_2^\star+\Theta_3^\star\Lambda\right)}r \tag{30d}$$

$y_m = k_m \frac{\boxed{Z_m}}{R_m}$

Podmienky zhody

toto je bonusová úloha v rámci referátu...

$$\boxed{\Theta_4^\star = \frac{k_m}{k_p}} \tag{31a}$$

$$\boxed{\Lambda = Z_m} \tag{31b}$$

DZ(s)

$$R_p\left(\Lambda-\Theta_1^\star\right) - k_pZ_p\left(\Theta_2^\star+\Theta_3^\star\Lambda\right) = Z_pR_m \tag{31c}$$

1.2.2 Zovšeobecnenie pre systém n. rádu

Pri uvažovaní všeobecného zákona riadená v tvare (17) má prenosová funkcia uzavretého regulačného obvodu tvar

$$y = \frac{k_pZ_p\Theta_4^\star\Lambda^2}{\Lambda\left(R_p\left(\Lambda - \Theta_1^{\star\top}\alpha(s)\right) - k_pZ_p\left(\Theta_2^{\star\top}\alpha(s) + \Theta_3^\star\Lambda\right)\right)}r \tag{32}$$

a podmienky zhody

$$\Theta_4^\star = \frac{k_m}{k_p} \tag{33a}$$

$$\Lambda = \Lambda_0Z_m \tag{33b}$$

$$R_p\left(\Lambda - \Theta_1^{\star\top}\alpha(s)\right) - k_pZ_p\left(\Theta_2^{\star\top}\alpha(s) + \Theta_3^\star\Lambda\right) = Z_p\Lambda_0R_m \tag{33c}$$

Predpoklady pri, ktorých sú tieto podmienky splniteľné sú intuitívne zrejmé z predchádzajúceho príkladu v časti 1.2.1. Hlbšou analýzou MRC problému sa v tomto kurze zaoberať nebudeme. Poslucháča odkazujeme na odporúčanú literatúru, kde nájde všetky potrebné (matematické) detaily k riešeniu MRC problému.

1.3 Teoretický opis výsledného URO v stavovom priestore

V tejto časti vyjadríme uzavretý regulačný obvod, ktorý vznikne riešením MRC problému, pomocou opisu v stavovom priestore.

1.3.1 Ilustrácia na príklade systému 2. rádu

Opäť začneme zjednodušeným príkladom 1.2.1, a v ďalšej časti dodáme pre úplnosť všeobecný zápis URO v stavovom priestore.

Sústava v tvare (15), konkrétne (19), môže byť reprezentovaná opisom v stavovom priestore v tvare

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{34a}$$

$$y = c^\top x \tag{34b}$$

kde x je vektor stavových veličín sústavy a A; b; $c^\top$ sú konštantné matice (vektory) zodpovedajúcich rozmerov. V tomto prípade nekladieme žiadne podmienky na formu (kanonickú) matice A, ako to bolo v prípade stavového MRAC-u.

Uvažujeme zákon riadenia (21), pripomeňme:

$$u(s) = \Theta_1^\star\frac{1}{(s+\lambda)}u(s) + \Theta_2^\star\frac{1}{(s+\lambda)}y(s) + \Theta_3^\star y(s) + \Theta_4^\star r(s) \tag{35}$$

$u = \Theta_1 \; \Theta_2 \; \Theta_3 \; \Theta_4$

$u = k^\top \underline{x} + l r$

V prvých dvoch členoch zákona riadenia (35) sú použité takzvané prídavné filtre, ktorých vstupom je buď akčný zásah u (vstupný signál sústavy) alebo výstupná (riadená) veličina y. Tieto prídavné filtre sú tiež nazývané pomocné, či prídavné generátory, generujú prídavné (pomocné) signály. Oba prídavné filtre sú rovnaké, v tomto prípade dané prenosovou funkciou $\frac{1}{(s+\lambda)}$. Výstupné signály filtrov sú v tomto prípade skalárne signály. Vo všeobecnosti sú výstupné signály pomocných filtrov vektory signálov s rovnakým rozmerom ako vektory parametrov $\Theta_1^\star$ a $\Theta_2^\star$, viď všeobecný zápis zákona riadenia (17). Označme výstupné signály prídavných filtrov ν_1 a ν_2. Tieto signály sa násobia parametrami zákona riadenia $\Theta_1^\star$ a $\Theta_2^\star$. Prídavné filtre možno zapísať v tvare

$$\dot{\nu}_1 = -\lambda\nu_1 + u \tag{36a}$$

$$\dot{\nu}_2 = -\lambda\nu_2 + y = -\lambda\nu_2 + c^\top x \tag{36b}$$

Jednoduchým pridaním týchto pomocných signálov k sústave máme sústavu rovníc:

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{37a}$$

$$\dot{\nu}_1 = -\lambda\nu_1 + u \tag{37b}$$

$$\dot{\nu}_2 = -\lambda\nu_2 + c^\top x \tag{37c}$$

$$y = c^\top x \tag{37d}$$

?

Sústavu rovníc (37) budeme nazývať *doplnená sústava*. Doplnenú sústavu (37) možno zapísať v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\nu}_1\\ \dot{\nu}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 0\\ c^\top & 0 & -\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \nu_1\\ \nu_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b\\ 1\\ 0\end{bmatrix} u \tag{38a}$$

$$y = \begin{bmatrix}c^\top & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \nu_1\\ \nu_2\end{bmatrix} \tag{38b}$$

X

a po označení jednotlivých matíc a vektorov

$$\dot{X} = A_o X + B_c u \tag{39a}$$

$$y = C_c^\top X \tag{39b}$$

Zákon riadenia (35) zapíšeme v takom vektorovom tvare, v ktorom je možné využiť stavový vektor doplnenej sústavy X:

$$u = \Theta_c^{\star\top} D X + \Theta_4^\star r \tag{40}$$

kde $\Theta_c^\star = \begin{bmatrix}\Theta_3^\star & \Theta_1^\star & \Theta_2^\star\end{bmatrix}^\top$; $\Theta_4^\star$ sú parametre zákona riadenia a maticu

$y \quad \nu_1 \quad \nu_2 \quad r$

$$D = \begin{bmatrix}c^\top & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

"$u = k^T x + l r$"

sme zaviedli práve preto aby sme v zákone riadenia (40) mohli priamo písať stavový vektor X. Tvar, v ktorom sa zákon riadenia (40) viac podobá na pôvodný zápis (35), a ktorý vyplýva priamo z (40) je

$$u = \Theta_1^\star\nu_1 + \Theta_2^\star\nu_2 + \Theta_3^\star c^\top x + \Theta_4^\star r \tag{41a}$$

$$u = \Theta_1^\star\nu_1 + \Theta_2^\star\nu_2 + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r \tag{41b}$$

Dosadením (40) do (39) získame opis URO v stavovom priestore v tvare (výstupnú rovnicu vynechávame, pretože sa nemení)

$$\dot{X} = A_o X + B_c\left(\Theta_c^{\star\top} D X + \Theta_4^\star r\right) \tag{42a}$$

$$\dot{X} = A_o X + B_c\Theta_c^{\star\top} D X + B_c\Theta_4^\star r \tag{42b}$$

$$\dot{X} = \left(A_o + B_c\Theta_c^{\star\top} D\right) X + B_c\Theta_4^\star r \tag{42c}$$

$$\boxed{\dot{X} = A_c X + B_c\Theta_4^\star r} \tag{42d}$$

"$y = c^T X$"

kde

$$\begin{aligned} A_c &= A_o + B_c\Theta_c^{\star\top} D\\ &= \begin{bmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 0\\ c^\top & 0 & -\lambda\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Theta_3^\star & \Theta_1^\star & \Theta_2^\star\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c^\top & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 0\\ c^\top & 0 & -\lambda\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b\Theta_3^\star & b\Theta_1^\star & b\Theta_2^\star\\ \Theta_3^\star & \Theta_1^\star & \Theta_2^\star\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c^\top & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 0\\ c^\top & 0 & -\lambda\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b\Theta_3^\star c^\top & b\Theta_1^\star & b\Theta_2^\star\\ \Theta_3^\star c^\top & \Theta_1^\star & \Theta_2^\star\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}A + b\Theta_3^\star c^\top & b\Theta_1^\star & b\Theta_2^\star\\ \Theta_3^\star c^\top & -\lambda + \Theta_1^\star & \Theta_2^\star\\ c^\top & 0 & -\lambda\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{43}$$

Pretože uzavretý regulačný obvod zapísaný v tvare

$$\dot{X} = A_c X + B_c\Theta_4^\star r \tag{44a}$$

$$y = C_c^\top X \tag{44b}$$

obsahuje ideálne parametre zákona riadenia, teda také, ktoré spĺňajú podmienky zhody musí sa tento zhodovať s referenčným modelom. Preto tzv. *neminimálna reprezentácia* prenosovej funkcie referenčného modelu (16) v stavovom priestore je

$y_m = k_m \frac{Z_m}{R_m}$

$$\dot{X}_m = A_c X_m + B_c\Theta_4^\star r \tag{45a}$$

$$y_m = C_c^\top X_m \tag{45b}$$

?

$e = x - x_m$

$e = X - X_m$

kde X_m sú stavové veličiny neminimálnej reprezentácie modelu

1.3.2 Zovšeobecnenie pre systém n. rádu

$\dot{\Theta} = -\text{sign}(\ )\ \Gamma\left(\cancel{e^T P b}\right)\omega$ $\quad e_1$

Uvažujeme zákon riadenia (17), pripomeňme:

$$u = \Theta_1^{\star\top}\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}u + \Theta_2^{\star\top}\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}y + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r \tag{46}$$

kde $\alpha(s)$ je vektor obsahujúci mocniny s, $\alpha(s) = \left[s^{n-2}, \ldots, s, 1\right]^\top$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$. Vektory $\Theta_1^\star, \Theta_2^\star \in \mathbb{R}^{n-1}$ a skaláry $\Theta_3^\star, \Theta_4^\star \in \mathbb{R}^1$ sú konštantné parametre zákona riadenia. $\Lambda(s)$ je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$.

Napríklad prvý člen v (46) možno zapísať v tvare

$$y_{\nu_1} = \Theta_1^{\star\top}\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}u = \frac{\Theta_{1(n-2)}^\star s^{n-2} + \cdots + \Theta_{11}^\star s + \Theta_{10}^\star}{s^{n-1} + \lambda_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \lambda_1 s + \lambda_0}u \tag{47}$$

kde $\Theta_1^\star = \begin{bmatrix}\Theta_{1(n-2)}^\star & \cdots & \Theta_{11}^\star & \Theta_{10}^\star\end{bmatrix}^\top$, alebo v stavovom priestore v tvare

$$\begin{bmatrix}\dot{\nu}_{1(n-2)}\\ \dot{\nu}_{1(n-3)}\\ \dot{\nu}_{1(n-4)}\\ \vdots\\ \dot{\nu}_{10}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\lambda_{n-2} & -\lambda_{n-3} & \cdots & -\lambda_2 & -\lambda_1 & -\lambda_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu_{1(n-2)}\\ \nu_{1(n-3)}\\ \nu_{1(n-4)}\\ \vdots\\ \nu_{10}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}u \tag{48a}$$

$$y_{\nu_1} = \begin{bmatrix}\Theta_{1(n-2)}^\star & \Theta_{1(n-3)}^\star & \Theta_{1(n-4)}^\star & \cdots & \Theta_{10}^\star\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu_{1(n-2)}\\ \nu_{1(n-3)}\\ \nu_{1(n-4)}\\ \vdots\\ \nu_{10}\end{bmatrix} \tag{48b}$$

Označme v (48) jednotlivé vektory a maticu:

$$\dot{\nu}_1 = \Lambda\nu_1 + qu \tag{49a}$$
$$y_{\nu_1} = {\Theta_1^\star}^\top \nu_1 \tag{49b}$$

Z uvedeného vyplýva, že prvý prídavný filter má v stavovom priestore tvar $\dot{\nu}_1 = \Lambda\nu_1 + qu$ kde ν_1 je vektor pomocných signálov generovaných prvým pomocným generátorom (stavový vektor prvého pomocného generátora). Tento je násobený parametrami zákona riadenia ${\Theta_1^\star}^\top$. Analogicky, druhý prídavný filter má v stavovom priestore tvar $\dot{\nu}_2 = \Lambda\nu_2 + qy = \Lambda\nu_2 + qc^\top x$. Doplnená sústava vo všeobecnom tvare je

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{50a}$$
$$\dot{\nu}_1 = \Lambda\nu_1 + qu \tag{50b}$$
$$\dot{\nu}_2 = \Lambda\nu_2 + qc^\top x \tag{50c}$$
$$y = c^\top x \tag{50d}$$

Potom v (39) sú

$$x = \begin{bmatrix} x \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}; \quad A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ qc^\top & 0 & \Lambda \end{bmatrix}; \quad b_c = \begin{bmatrix} b \\ q \\ 0 \end{bmatrix}; \quad c_c^\top = \begin{bmatrix} c^\top & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{51}$$

Zákon riadenia (46) zapíšeme vo vektorovom tvare:

$$u = {\Theta_c^\star}^\top Dx + \Theta_4^\star r \tag{52}$$

kde $\Theta_c^\star = \begin{bmatrix} \Theta_3^\star & {\Theta_1^\star}^\top & {\Theta_2^\star}^\top \end{bmatrix}^\top$; $\Theta_4^\star$ sú parametre zákona riadenia a maticu

$$D = \begin{bmatrix} c^\top & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

sme zaviedli práve preto aby sme v zákone riadenia (52) mohli priamo písať stavový vektor x. Tvar, v ktorom sa zákon riadenia (52) viac podobá na pôvodný zápis (46), a ktorý vyplýva priamo z (52) je

$$u = {\Theta_1^\star}^\top \nu_1 + {\Theta_2^\star}^\top \nu_2 + \Theta_3^\star c^\top x + \Theta_4^\star r \tag{53a}$$
$$u = {\Theta_1^\star}^\top \nu_1 + {\Theta_2^\star}^\top \nu_2 + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r \tag{53b}$$

Dosadením (52) do (39), v ktorej sú ale matice (51), získame opis URO v stavovom priestore v tvare (44), a matica A_c má tvar

$$\begin{aligned} A_c &= A_o + b_c {\Theta_c^\star}^\top D \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ qc^\top & 0 & \Lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ q \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_3^\star & {\Theta_1^\star}^\top & {\Theta_2^\star}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^\top & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ qc^\top & 0 & \Lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\Theta_3^\star & b{\Theta_1^\star}^\top & b{\Theta_2^\star}^\top \\ q\Theta_3^\star & q{\Theta_1^\star}^\top & q{\Theta_2^\star}^\top \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^\top & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ qc^\top & 0 & \Lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\Theta_3^\star c^\top & b{\Theta_1^\star}^\top & b{\Theta_2^\star}^\top \\ q\Theta_3^\star c^\top & q{\Theta_1^\star}^\top & q{\Theta_2^\star}^\top \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A + b\Theta_3^\star c^\top & b{\Theta_1^\star}^\top & b{\Theta_2^\star}^\top \\ q\Theta_3^\star c^\top & \Lambda + q{\Theta_1^\star}^\top & q{\Theta_2^\star}^\top \\ qc^\top & 0 & \Lambda \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{54}$$

Pretože takto všeobecne opísaný URO obsahuje ideálne parametre zákona riadenia, teda také, ktoré spĺňajú podmienky zhody musí sa tento zhodovať so všeobecným


```
        except:
            break

sig_dummy_ext = sig_vysl

# Spustenie simulacie

t_log, x_log, y_log, u_log, y_m_log = fcn_simSch2(
    sim_t_start,
    sim_T_s,
    sim_finalIndex,
    sig_dummy_ext,
    )

```

3 SPR prenosové funkcie, MKY lemma

3.1 Striktne pozitívne reálne prenosové funkcie

Pojem *Pozitívne reálna* (PR) a *Striktne pozitívne reálna* (SPR) prenosová funkcia zohráva dôležitú úlohu v analýze stability nie len adaptívnych systémov [1]. Je preto dôležité disponovať kritériom, ktoré umožní zistiť, či príslušná prenosová funkcia je SPR ([3] str. 164).

Podľa definície 3.5.1 a 3.5.2 v [1], str. 127, prenosová fukcia $G(s)$ komplexnej premennej s sa nazýva pozitívne reálna (PR) ak

1. $G(s)$ je reálna pre reálne s.
2. $\Re\{G(s)\} \geq 0$ pre všetky $\Re\{s\} > 0$. ??

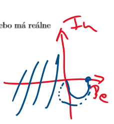
Prenosová funkcia $G(s)$ je striktne pozitívne reálna (SPR) ak existuje reálne kladné číslo ε také, že $G(s - \varepsilon)$ je PR.

Prakticky nie je jednoduché zistiť, či uvedené podmienky sú splnené. V nasledujúcom uvedieme ekvivalentné nutné a postačujúce podmienky pozitívnej reálnosti. Platnosť týchto podmienok sa dá ľahko overiť. Prenosová funkcia $G(s)$ je PR keď vyhovuje všetkým nasledujúcim podmienkam

1. $G(s)$ je reálna pre všetky reálne s.
2. Menovateľ $G(s)$ má korene v ľavej polrovine komplexnej roviny alebo má reálne korene na imaginárnej osi.
3. $\Re\{G(j\omega)\} \geq 0$ pre všetky reálne ω.

Pre vyjadrenie reálnej časti funkcie $G(j\omega)$ je výhodné využiť, že platí:

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{(c + jd)(c - jd)} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{c^2 + d^2}$$



3.2 Meyerova-Kalmanova-Yakubovichova Lemma

Pre danú stabilnú maticu A, vektory b, c a skalár $d \geq 0$, platí nasledujúce: Ak

$$G(s) = d + c^\top (sI - A)^{-1} b$$

je SPR, potom pre danú maticu $L = L^\top > 0$ existujú skalár $v > 0$, vektor q a matica $P = P^\top > 0$ také, že

$$A^\top P + PA = -qq^\top - vL$$
$$Pb - c = \pm q\sqrt{2d}$$

Tak znie veta, ktorá, ako sa ukáže, je veľmi užitočná pri návrhu MRAC využívajúceho len vstupno-výstupné informácie.

V tomto kurze ju využijeme v menej všeobecnom tvare. Nech je systém daný trojicou A_c, $\overline{B}_c$, C_c a A_c nech je stabilná matica. Ak $W_m(s) = C_c^\top (sI - A_c)^{-1} \overline{B}_c$ je SPR, potom platí, že

b

$$A_c^\top P + P A_c = -Q$$
$$P\overline{B}_c = C_c$$

$e^\top P b$

kde $Q = Q^\top > 0$. A je to práve fakt, že ak je $W_m(s)$ SPR tak platí $P\overline{B}_c = C_c$, ktorý umožní zredukovať zákon adaptácie tak, že v ňom vystupuje len odchýlka výstupných veličín sústavy a referenčného modelu [2].

$e_1 = C_c^\top e$

4 Adaptačná odchýlka

4.1 Model sústavy a referenčný model

$e^\top C_c$

$C_c^\top e$

$\Downarrow$

e_1

Uvažujme sústavu opísanú prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \tag{105}$$

kde $Z_p(s)$ je monický Hurwitzov polynóm stupňa m, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa n a k_p je tzv. *vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy*. *Relatívny stupeň* sústavy je $n^* = n - m$. Predpokladajme, že relatívny stupeň n^* sústavy je známy. Pre zjednodušenie tiež predpokladajme, že aj stupne n a m polynómov sú známe, pričom vo všeobecnosti známe nemusia byť. Koeficienty polynómov $Z_p(s)$ a $R_p(s)$ (parametre sústavy) sú neznáme. Hodnota a znamienko zosilnenia k_p nech je známe.

Sústava v tvare (105) môže byť reprezentovaná opisom v stavovom priestore v tvare

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{106a}$$
$$y = c^\top x \tag{106b}$$

kde x je vektor stavových veličín sústavy a A, b, $c^\top$ sú matice (vektory) zodpovedajúcich rozmerov pričom hodnoty ich prvkov sú neznáme.

Cieľom riadenia je: Nech všetky signály uzavretého regulačného obvodu sú ohraničené a výstupná veličina y sústavy nech sleduje výstupnú veličinu referenčného modelu, ktorý je daný prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \tag{107}$$

kde k_m je vysokofrekvenčné zosilnenie, $Z_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa m_m, $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa n_m, pričom relatívny stupeň $n_m^* = n_m - m_m = n^*$. Všetky parametre (koeficienty polynómov a k_m) referenčného modelu sú známe, dané „projektantom“.

4.2 Zákon riadenia

Ako bolo ukázané v predchádzajúcich témach predmetu, zákon riadenia v tvare

$$u = {\Theta_1^\star}^\top \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + {\Theta_2^\star}^\top \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r \tag{108}$$

zabezpečí, že priebeh výstupnej veličiny y sa zhoduje s priebehom výstupnej veličiny referenčného modelu y_m ak sú parametre zákona vypočítané z podmienok zhody

$$\Theta_4^\star = \frac{k_m}{k_p} \tag{109a}$$
$$\Lambda = \Lambda_0 Z_m \tag{109b}$$
$$R_p \left(\Lambda - {\Theta_1^\star}^\top \alpha(s)\right) - k_p Z_p \left({\Theta_2^\star}^\top \alpha(s) + \Theta_3^\star \Lambda\right) = Z_p \Lambda_0 R_m \tag{109c}$$