# Topológia

Metrikus tér fogalma: adott $X$ halmaz (nemüres)

metrika: $d: X \times X \to \mathbb{R} \wedge \forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

feltételek:

$$d(x,y) \geq 0$$
$$d(x,y) = 0 \iff x = y$$
$$d(x,y) = d(y,x)$$
$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

$\Rightarrow (X, d)$ pár a metrikus tér

Konvergens $\Rightarrow$ Cauchy-sorozat

teljes metrikus térre igaz

Tétel.

Ha $(X,d)$ teljes metrikus tér, akkor a $B(K,X)$ metrikus terek is teljesek.

Biz.

Függvénysorozat egyenletes konvergenciája:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \forall x \in X: |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$$d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon$$

Cauchy-sorozat $B(K,X)$-ben

Kell: $(f_n \to f) \in K$

ez az $f_n(t) \to f(t) :=$ def.-ból következik.

ezt alakíthatjuk tovább:

$$d(f_n(t), \underbrace{f(t)}_{\text{korlátos}}) \leq \varepsilon \quad \forall t \in K, \forall n \geq N$$

átalakítjuk

Így: $d(f_N(s), f_N(t)) < M$, $\forall s,t \in K$

elvégezzük a határátmeneteket

$n = N$:

$$d(f(s), f(t)) < M + \cancel{2\varepsilon}, \forall s,t \in K$$

$\square$