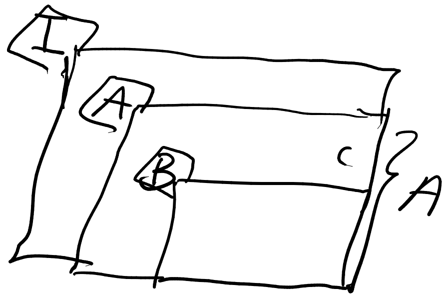
Valószínűségalgebrákra vonatkozó azonosságok

1. azonosság

$$B \subseteq A \Rightarrow P(B) \leqq P(A)$$



$B \subseteq A \Rightarrow A = B + C$, $C = A\overline{B}$, ezért: $BC = 0$

$+$

$\mathcal{A}$ eseményalg. elemei: A

$A \rightarrow P(A) \in \mathbb{R}^+$

$A = B$ vagy C

$C = A$ és $\overline{B}$ metszete

B és $C = 0$

$\Rightarrow B = 0$ Ez igazolja $C = A$ és $\overline{B}$-t is! (Mivel ekkor C sem nulla)

$\rightarrow P(A) = P(B) + P(C)$

$P(C) \geqq 0$

2. azonosság

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1, \ \forall A \in \mathcal{A}$$

$A + \overline{A} = I$ (biztos) és $A\overline{A} = 0$ $\Big\}$ Ebből azonnal következik.

Még pár darab azonosság:

1.) $AB = 0$ esetén:

$P(A+B) = P(A) + P(B)$

II.) $A_i \cdot A_j = 0$ $i \neq j$ esetén is következik ugyanaz.

Tovább általánosítva:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Biz.: $\underbrace{A + B = A + \overline{A}B}_{\text{halmazelméletileg ekvivalens}}$, ha $AB = 0$

$\underset{\text{axióma alapján}}{\Longrightarrow} P(A+B) = P(A) + P(\overline{A}B)$

$B = AB + \overline{A}B \rightarrow B$

$0 = AB \cdot \underset{\text{lehetetlen}}{\overline{A}B}$ $\Big\}$ $\Rightarrow P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$ $\quad -$

$P(A+B) - P(B) = P(A) + \cancel{P(\overline{A}B)} - P(AB) - \cancel{P(\overline{A}B)}$

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Ezt is lehet tovább általánosítani:

TÉTEL.

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \in \mathcal{A}$

$$P(A_1+A_2+\dots+A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \underbrace{S_k^{(n)}}_{\sum\limits_{1\le i_1<i_2\dots<i_k\le n} P(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k})}$$

Magyarán pl.:

$n=2$-re $\sum\limits_{1\le 1<2\le 2} P(A_1A_2)$ jelentése: $\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$ azaz:

1. $P(A_1)+P(A_2)$ 2. $P(A_1A_2)$

$(-1)^0$ $(-1)^1$

Visszakapjuk az előző azonosságot.