Valószínűségekkel kapcsolatos

Az előző jegyzet tételének bizonyítása:

TÉTEL.

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\underbrace{S_k^{(n)}}_{\displaystyle\sum_{1\le i_1<i_2\ldots<i_k\le n} P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k})}$$

Magyarán pl.:

$n=2$-re $\quad \sum_{1\le 1<2\le 2} P(A_1A_2)$ jelentése: $\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$ azaz:

1. $P(A_1)+P(A_2)$ $\quad (-1)^0$

2. $P(A_1A_2)$ $\quad (-1)^1$

Visszakapjuk az előző azonosságot.

Ez a tétel egy speciális ($r=0$) esete a következő tételnek:

TÉTEL.

$$V_r^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-r}(-1)^k\binom{r+k}{k}S_{r+k}^{(n)}$$

↳ annak a valószínűsége, hogy r-ik következik be

Megj.:

A szummával addig adunk össze, amíg nem következett be a várt esemény.

Kiválasztja a nem bekövetkezőket az összes közül.

Biz.)

Továbbvezet egy következő absztrakciós szintű problémára.

Ehhez pár alapismeret azonban kell:

Minimális eseményalgebrát keresünk $A_1, A_2, \ldots A_n$ között. (jele: $\mathcal{A}$)

Ez 2^n elemi eseményt $\leftarrow$ általános halmazelméleti ismeret

azaz:

$(2^n)^2$ eseményt tartalmaz.

↑ 2-t variálunk (mivel az a legkevesebb)

$\forall B\in\mathcal{A} \Leftrightarrow P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots)\in\mathcal{A}$ $\qquad B=\omega_1+\omega_2+\ldots$

Valamint $\underset{\text{(elemi esemény)}}{\omega}=A_{i_1}A_{i_2}A_{i_k}\overline{A}_{j_1}\ldots\overline{A}_{j_{n-k}}$

Pár kombinatorikus minta (statisztikák)

Maxwell–Boltzmann: N fiók n tárgy

Fizikában részecskés helyzetet lehet velük modellezni.

$$P_k = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{N}\right)^k \left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k}$$

ami ekvivalens ezzel: $\dfrac{\binom{n}{k}(N-1)^{n-k}}{\text{összes}}$

Bose–Einstein: n forint N személy

$$\frac{\binom{N+n-1}{n}}{\text{összes}}$$

Fermi–Dirac: $\dfrac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \dfrac{n}{N}$ (N elemből n elem)