第十五届全国大学生数学竞赛预赛试题

(数学 B 类, 2023)

科目名称：数学竞赛

考试形式：闭卷　考试时间：150 分钟　满分：100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	15	15	20	15	15	20	100
得 分							

注意：

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、(本题满分 15)　在空间中给定两不同点 P 和 Q. 过 P 点直线 $L(P)$ 和过 Q 点直线 $L(Q)$ 正交于点 M. 问：所有可能的正交点 M 构成何种曲面? 证明你的结论.

二、(本题满分 15 分) 设 $f(x,y,z)=x^2+\left(y^2+z^2\right)(1-x)^3$.

(1) 计算 f 的驻点.

(2) 求 f 在 Σ 上的最小值, 其中, Σ 是 $\left\{(x,y,z)\,\middle|\,|x|\leqslant 2, y^2+z^2\leqslant 4\right\}$ 的边界.

(3) 求 f 在椭球 $x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}\leq 1$ 上的最小值.

三、(本题满分 20 分)　设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间, $\mathbf{A}$ 是 V 上的一个线性变换. 证明: 存在 $\alpha\in V$ 使得 $\left\{\alpha,\mathbf{A}\alpha,\cdots,\mathbf{A}^{n-1}\alpha\right\}$ 成为 V 的一组基当且仅当对于 $\mathbf{A}$ 的任一特征值 λ,λ 的几何重数为 1 .

四、(本题满分 15 分) 证明对任意 n 阶方阵 A, 存在主对角线上元素为 1 和 -1 的 n 阶对角矩阵 J 使得 $A+J$ 可逆.

五、(本题满分 15 分) 设 $f(x)=x^n(1-x)^n$, 且

$$F(x)=f(x)-f''(x)+f^{(4)}(x)-\cdots+(-1)^n f^{(2n)}(x).$$

计算并化简 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F'(x)\sin x-F(x)\cos x\right)$.

六、(本题满分 20 分) 设非负函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微, 无穷积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且存在 $[0,+\infty)$ 上的非负函数 g, 使得

$$f'(x)\leq g(x),\quad x\geq 0 \tag{1}$$

分别就下列三种情形, 证明 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(i) $\int_0^{+\infty} g(x) \mathrm{d}x$ 收敛.

(ii) $g(x) = C > 0$, 其中 C 为常数.

(iii) $g(x) = Cf^p(x)$, 其中 $C > 0, p > 0$ 为常数.