2023 年第八届“数维杯”大学生
数学建模挑战赛论文

题　　目　列车运行控制与策略优化研究

摘　要

作为一种非常便利且快捷的出行方式，轨道交通往往会成为很多城市人群的选择，目前已经占据了城市耗能的相当一部分比例。本文通过数学模型和算法针对列车的运行控制和策略进行了优化研究，以期降低列车运行时的能耗。

针对问题一，本文建立了一个列车动力学微分方程模型，用以刻画列车在一定牵引力或制动力的作用下的运动轨迹。求解时采用了欧拉法对微分方程进行数值解的求取，并通过 Matlab 编程实现。首先计算了最短耗时的列车运行过程，并分别以最短耗时延长 10 秒、20 秒、50 秒、150 秒和 300 秒为约束条件，以耗能最小化为目标函数，分别求出了相应的列车行驶方案和速度、牵引制动力、能量消耗与路程的关系曲线。算法运行平均需要约 0.01 秒，运行效率和精度较好。

针对问题二，在原来的基础上对列车的速度限制变化、行驶过程中地形坡度的变化、牵引电机的复杂状态变化以及再生制动电机使用进行了考虑，完善了模型。以能耗最小为目标函数，并同样通过欧拉法进行求解，再次计算了列车行驶的轨迹以及一系列的关系曲线。算法运行平均需要约 0.02 秒，同样具备很好的即时性及精度。

针对问题三，考虑列车在既定行驶计划执行的中途发生情况，改变为另一个行驶计划。沿用问题二的模型，以原定行驶方案进行求解，并将转折点的列车状态作为初始条件代入另一个行驶方案的模型中进行求解，得到转变后的行驶方案。

最后，本文进行了算法的误差分析，并讨论了模型的优缺点和推广性，以期为城轨系统提供有效的算力支撑。

关键词　列车动力学；微分方程模型；欧拉法；列车运行控制优化

目录

一、问题背景

城市轨道交通作为常见的现代公共交通方式，具有经济、环保、高效的特点，是减少能源消耗和碳排放的重要行业；推进城市轨道交通运营模式优化更是实现节能减排、碳中和目标的重要手段。

截至 2022 年底，城轨交通已经覆盖国内 55 个城市，中国内地城轨交通运行线路总长度已超 10000km，城市轨道交通的运营规模正在持续扩大中，已经成为城市耗能的一个重要组成[1]。如能够对列车的运行控制进行优化，列车耗能将能够极为有效地得到减少。列车的运行控制是一个热门课题，目前国内外学者在列车行驶方案的优化方向做了诸多研究。贾斌等考虑城市轨道交通客流量的不确定性，提出了一种能够符合客流量控制方案的多目标优化模型，并通过机会约束的随机场景优化算法进行模型求解[2]，有效地折衷考虑了列车载人、行驶时间和耗能的方案优化；Qu, Boyang 等人提出了一种利用改进的 IBSO 算法来列车耗能最低的驾驶策略[3]，考虑了速度限制、坡度、最大加速和减速以及随速度变化的最大牵引力和制动力，以满足实际约束。尚梦影通过应用智能算法针对降低列车行驶成本进行了详细的研究。杨彦强等人提出了一种分段目标速度控制策略，设计了一种双重惩罚机制的实数编码遗传算法求解模型，方法很好的做到了列车运行的节能。

本文切入实际问题，针对列车运行控制优化进行了动力学研究，力图开发一个泛化的、灵活的模型和高效率的求解算法，以期能为城轨运营提供算力支持。

二、问题重述

列车在行驶过程中需要消耗能量，实际运营中也需要考虑行驶的速度、所花的时间，以满足客流的需求。我们需要建立一套数学模型来定量地研究列车行驶速度、行驶时间、消耗的电能以及诸多关系问题，并通过模型提出合理的优化控制方案，为城市轨道交通系统提供算力支持。

问题一：建立一个模型，以模拟列车在水平轨道上从站台 A 到站台 B 的运行过程。以下是一些列车的参数：站台 A 到站台 B 的距离为 5144.7 米，列车的速度上限为 100 公里/小时，列车的质量为 176.3 吨，列车旋转部件的旋转质量因数为 1.08，电机的最大牵引力为 310kN，机械制动部件的最大制动力为 760kN。列车所受到的阻力符合如下的 Davis 阻力方程：

$$f = 2.0895 + 0.0098v + 0.0065v^2 \tag{1}$$

式中：速度的单位为米/秒，阻力的单位为千牛。

编写一个程序以求解这个模型，并根据运算结果绘制列车运行过程中的速度-距离曲线、牵引力-距离曲线、时间-距离曲线和能量消耗-距离曲线。首先得到列车以最短时间到达站台 B 的曲线，并分别增加 10 秒、20 秒、50 秒、150 秒和 300 秒的时间到达站台 B 的曲线，总共六组曲线。

问题二：铁路路况往往十分复杂，并且列车行驶的轨道经常会具有一定的坡度，因而重力经常会影响列车的行驶。列车的使用的牵引电机的效率也不是固定不变的，会因为高速行驶时产生反电动势而产生复杂的变化。此外，现代列车的电机还具备再生制动

的功能，能够在列车制动时转换一部分动能为电能进行存储。考虑路况信息以及电机的复杂动态过程。建立一个优化模型，求解优化方案得到可行的速度轨迹以追求使得运行过程的能耗尽可能低。参照问题一，获取列车以最短时间到达站台 B、在最短运行时间上分别增加 10s、20s、50s、150s、300s 到达站台 B 总共六组曲线。

问题三：考虑列车在既定行驶计划执行到中途时发生改变。以下面这个情景为例：列车从起点出发，原计划于 320s 后到达终点，行至 2000m 位置时由于前方突发事故，需延迟 60s 到达终点，此时需要改变列车的行驶方案。建立一个模型以用于设计优化方案，能够时列车调整速度轨迹的情况下尽可能地实现列车的节能运行。为了实现快速的调整，要求设计的算法程序能够快速地进行反应，以尽可能快地速度得到调整后的新方案。同样需要作出列车运行过程的速度-距离曲线、牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线与能量消耗-距离曲线。

三、问题分析

3.1 问题 1 的分析

问题 1 属于物理上的动力学问题，要求计算速度-距离曲线、牵引制动力-距离线、时间-距离曲线与能量消耗-距离曲线等。解决问题 1 的关键在于建立一个微分方程模型以刻画列车的运行过程，通过这个微分方程将列车在运行过程中施加的牵引力和制动力变化转换为列车的运动过程。

另外，在计算机条件下，求解微分方程的方法可以采用欧拉法、龙格-库塔法等方法计算数值解。本文拟采用欧拉法进行求解，控制步长大小，编写一个能够折衷考虑运行速度和求解精度的求解程序。

3.2 问题 2 的分析

问题 2 是问题 1 的复杂化版本，需要额外考虑多种因素的影响：

①坡度会导致重力在列车行驶方向上产生分力，从而导致影响列车的运动。

②路面情况会改变列车的最大限速，使其不能以一个稳定的速度行驶。

③列车的电机在车速较大时会降低有效的牵引力，使得牵引力在列车行驶的过程中有着更为复杂的变化。

④列车电机具备的再生制动功能为节省能耗提供了新的途径。

以上种种导致问题 2 需要建立一个相对于问题 1 而言更加复杂的模型，同时也会考验算法是否能够应对这样的变化。

3.2 问题 3 的分析

问题 3 是建立在问题 2 上的一个衍生问题，即考虑列车在既定的行驶计划执行到中途能否灵活地进行行驶计划的改变。本问题会沿用问题 2 的模型，但会在模型的求解过程上有一些变化。由于我们会建立一个微分方程模型，改变模型的初始条件可以得到不同的模拟结果。因此，对于列车在执行原来的行驶计划的过程中改变为另一个行驶计划，

只需以列车状态发生改变的临界作为微分方程模型的初始状态，将终止条件更改成需要的状态进行重新求解即可。另外，为了能够尽可能快地对改变列车的行驶方案，要求设计的算法能够快速对情况的改变进行反应，以实现对列车行驶计划的实时更新。

四、模型假设

1.假设列车在行驶过程中不会发生故障或损坏，能够精确地执行控制指令。

2.假设列车的牵引电机和机械制动系统能够一瞬间达到指定的用力大小，不会有误差，也不具有时间延迟。

3.列车在响应自动化指令上消耗的能量忽略不计（例如启动制动系统消耗的能量等）。

4.假设列车在运行过程中不会发生质量的减损或增加。

5.假设列车运行过程全程的重力加速度不变，为 9.81 m/s^2。

6.天气因素不做考虑。

五、定义与符号说明

表 1 符号说明表

符号定义	符号说明
m	表示列车的质量。
f_t	表示列车受到的阻力。
F_{N_t}	表示列车受到的牵引力，该变量是决策变量，可以随意调控。
F_{R_t}	表示列车受到的制动力，同样是决策变量，可以随意调控。
ρ	表示列车的旋转质量因数，用于计算列车在驱动下的有效质量。
v_t	表示列车的运动速度。
x_t	列车行驶的距离
t_end	为抵达 B 站的最终时间。
$vLim$	表示列车的最大速度限制
D	需要行驶的距离。本题中指的是从车站 A 到车站 B 的站距，为 5144.7m。
$NLim$	牵引力的上限

$RLim$	机械制动力的上限。
C	列车消耗的电能。
F_{Q_t}	表示电机的再生制动力。为问题 2 新增的决策变量，可以调控。
F_{G_t}	表示列车在存在坡度的情况下受重力影响在运行方向上受到的外力
P_x	表示在列车开行距离达到 x 处的坡度。
g	重力加速度。
t_Min	由求解出来的最短时间。
t_Epd	列车抵达车站 B 的延迟时间
η_N	表示牵引力做功的效率。由附件 2 提供，其值为 0.9。
η_Q	是再生制动转换为电能存储的效率。
V_N^{trans}	表示牵引力的恒功率区切换点的速度由附件 2 给出。
V_Q^{trans}	为再生制动力的恒功率区切换点的速度，由附件 2 给出。
$QLim_t'$	表示列车的最大再生制动力限制。
x_T	列车在接收到突发事故报警时的所在位置已经行驶的距离。该变量是一个指定值。
v_T	列车在接收到突发事故报警时的速度。该变量是一个计算值。
t_T	是列车在接收到突发事故报警时的时间。该变量是一个计算值。
t_plus	进行方案调整后需要延迟到站的时间。

六、模型的建立与求解

6.1 问题 1 的模型建立与求解

6.1.1 问题 1 模型建立前的准备

首先需要解释一些概念，以便给出问题 1 的模型。

列车相对于整条铁路而言，可以被视作质点。因此有牛顿第二定律：

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{2}$$

式中：

F 为列车受到的合外力。

a 为列车的加速度。

基于该式，可将列车运行过程中的受力转换为加速度，以描述列车的运动过程。

图 1 和图 2 分别是在题目给定的条件下，列车在加速过程中和制动过程中的主要受力。

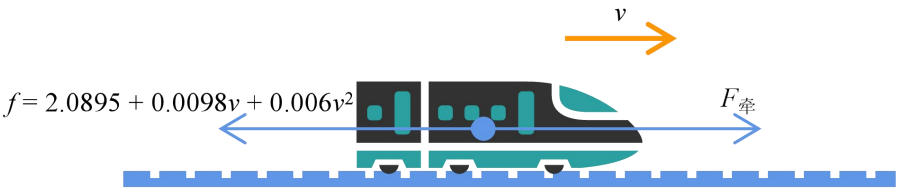


图 1 列车在加速过程中的主要受力

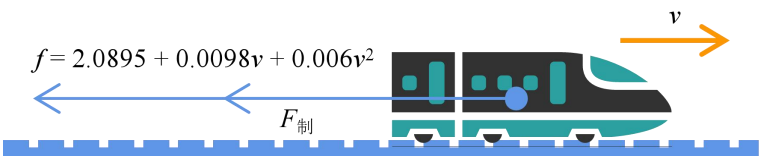


图 2 列车在制动过程中的主要受力

列车在加速过程中，主要受力为牵引力和阻力；在制动过程中，主要受力为制动力和阻力。

由于列车受到的阻力满足 Davis 阻力方程，该方程与速度 v 正相关，在列车加速的过程中，受到的阻力也在不断变大。对于变加速度的运动，需要通过微分方程模型来刻画列车的行驶。

另外，还需说明的是，牵引力做功并不一定全部转换成列车的平动动能和克服阻力做的功，还包括列车一些旋转部件的转动动能。如图 3 所示。

对于这一部分的考虑，可以将列车的实际质量乘上一个“旋转质量因数”，得到列车的“有效质量”。这样计算列车加速度时，通过将驱动列车的合外力除以列车的“有效质量”，计算得到列车的实际加速度，用于修正合外力做功在平动动能上的亏损值。这个“旋转质量因数”题目中已经给出，值为 1.08。

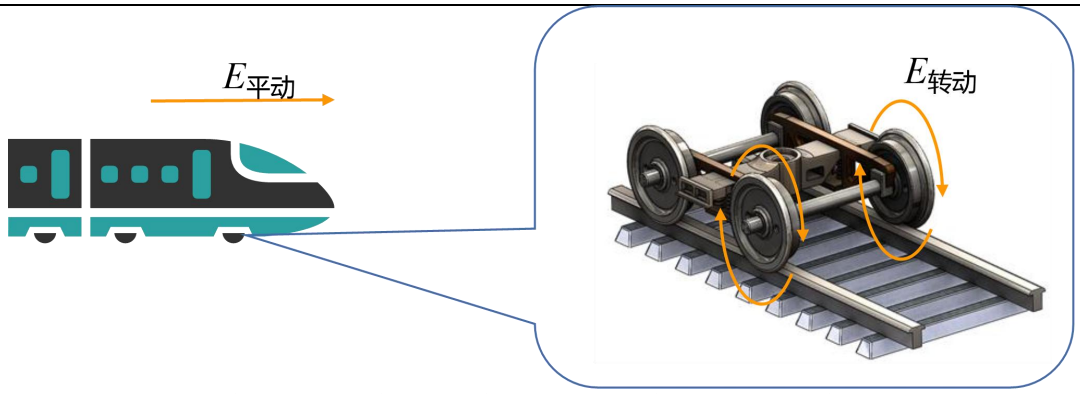


图 3 牵引力做功转换到列车上的能量包含平动动能和转动动能

6.1.2 列车动力学微分方程模型的建立

在问题一的模型中，我们假设列车是沿水平直线行驶的，不考虑地形坡度，同时也不考虑其他限制，只考虑单方向的受力影响。此时，对于列车的加速度，应满足如下与时间、受力有关的微分方程：

微分方程一：牛顿第二定律计算列车的加速度

$$\rho m \frac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t} = -f_t + F_{N_t} - F_{R_t} \tag{3}$$

式中：

ρ表示列车的旋转质量因数，用于计算列车在驱动下的有效质量。

v_t 表示列车的运动速度；

m 表示列车的质量；

f_t 表示列车受到的阻力；

F_{N_t} 表示列车受到的牵引力，该变量是决策变量，可以随意调控。

F_{R_t} 表示列车受到的制动力，同样是决策变量，可以随意调控。

在这些参数中，v_t、f_t、F_{N_t}、F_{R_t} 都是关于时间 t 的函数。

dv 比上 dt，表示速度对时间求一阶导，得到的是列车的加速度。

微分方程二：计算列车的移动距离

$$\frac{\mathrm{d}x_t}{\mathrm{d}t} = v_t \tag{4}$$

式中：

x 表示列车的位移距离，它也是关于时间 t 的函数。

位移距离对时间 t 求一阶导，得到的是列车的速度。

由于问题一我们只讨论列车从站台 A 移动到站台 B，只需考虑在这样一段运动区间内列车的牵引或制动方案，并且抵达 B 站需要停靠。因此，初速度和终速度都必须为 0，则有下式：

约束条件一：限制列车的始末速度为 0。

$$\begin{aligned} v_0 &= 0 \\ v_{t\_end} &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

式中：

t_end 为抵达 B 站的最终时间。

除此以外，我们还规定列车在运行的时间里不能超出最大速度限制。

约束条件二：限制列车的最大行驶速度。

$$v_t \le vLim,\ \ t \in (0, t\_end) \tag{6}$$

式中：

vLim 表示列车的最大速度限制。题目给定的值是 100 km/h。

约束条件三：规定时间终点就是列车抵达车站 B 的时刻。

$$x_{t\_end} = D,\ \ t \in (0, t\_end) \tag{7}$$

式中：

D 是需要行驶的距离。本题中指的是从车站 A 到车站 B 的站距，为 5144.7m。

约束条件四：限制列车的最大牵引力。

$$F_{N_t} \le NLim,\ \ t \in (0, t\_end) \tag{8}$$

式中：

NLim 为牵引力的上限。

约束条件五：限制列车的最大制动力。

$$F_{R_t} \le RLim,\ \ t \in (0, t\_end) \tag{9}$$

式中：

RLim 为机械制动力的上限。

约束条件六：阻力与速度的关系。

$$f_t \le 2.0895 + 0.0098 v_t + 0.0065 v_t^2 \tag{10}$$

综上所述，建立如下微分方程总模型：

$$\begin{cases} \rho m \dfrac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t} = -f_t + F_{N_t} - F_{R_t} \\ \dfrac{\mathrm{d}x_t}{\mathrm{d}t} = v_t \\ v_0 = 0 \\ v_{t\_end} = 0 \\ v_t \le vLim,\ \ t \in (0, t\_end) \\ x_{t\_end} = D,\ \ t \in (0, t\_end) \\ F_{N_t} \le NLim,\ \ t \in (0, t\_end) \\ F_{R_t} \le RLim,\ \ t \in (0, t\_end) \\ f_t \le 2.0895 + 0.0098 v_t + 0.0065 v_t^2 \end{cases}$$

若要求在该微分方程模型下列车抵达车站 B 的最短时间，则可以下式为该模型的**目标函数**：

$$\min f = t\_end \tag{11}$$

根据上述约束和微分方程可以求得列车轨迹。题目还要求计算列车耗能，由于问题一不考虑再生充能，因此直接计算牵引力做功即可。

计算式：耗能总量。

$$C_t = \int_0^t F_{N_t} x_t \mathrm{d}t \tag{12}$$

式中：

C 为列车消耗的电能。

6.1.3 问题 1 模型的求解过程、结果与讨论

涉及微分方程的求解，本文采用 Matlab 编程，使用欧拉法[6]对每一步进行微元划分，计算每一步的速度、加速度、位移，以得到列车在一定的外力作用下的运动轨迹。（程序代码详见附件）。

接下来，首先以最短时间抵达车站 B 为例，计算并给出速度-距离曲线、牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线与能量消耗-距离曲线。

➢最短时间的运行方案

要使得列车可以以最短时间抵达车站 B，则必须使列车以最快的速度进行移动，因此加速阶段应使用最大的牵引力、减速时使用最大的制动力，如此实现最快移动。

该情况下，列车应按为“定外力变加速度”模式移动，将列车的运动分为如图 4 的三个一般阶段：

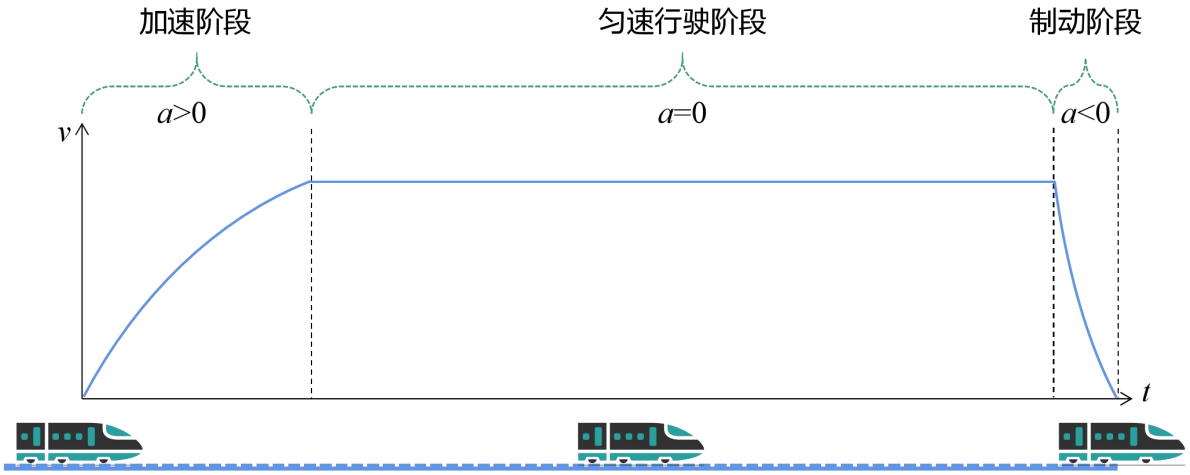


图 4 定外力变加速度模式下列车的一般运行阶段

①加速阶段，在这一阶段牵引力 F_N 的大小固定，且应大于阻力 f。在最短时间运行方案下，F_N 固定为最大值 310 kN。随着速度的增大，阻力 f 逐渐增大，因此呈现出来的速度-时间曲线应为凸曲线。

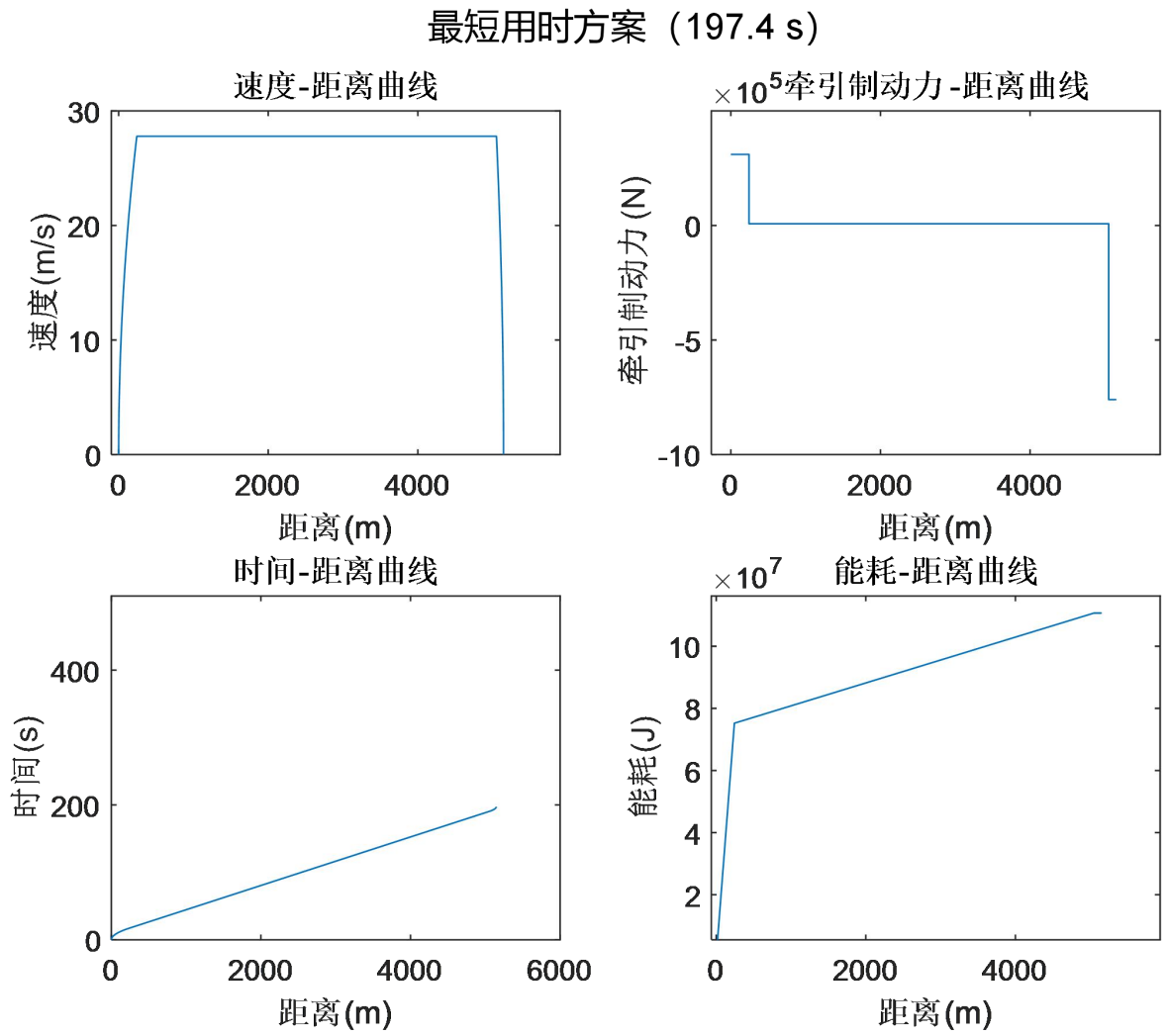
②匀速行驶阶段。一般列车在这一阶段不改变速度，而以匀速行驶。这一阶段牵引力 F_N 的大小固定，且应等于阻力 f。由于本题限制列车最大运动速度为 100km/h，因此在最短时间方案下，匀速阶段的列车行驶速度应为最大速度 100km/h。这一阶段的速度-时间曲线应为水平直线。

③制动阶段，在这一阶段制动力 F_R 的大小固定。在最短时间方案下，F_R 固定为最大值为 760 kN。随着速度的减小，阻力 f 逐渐减小，因此呈现出来的速度-时间曲线应为凹曲线。

如果在有限的距离内列车无法加速到该速度，则阶段②可以直接省略，只包含①、③两个过程。

接下来，开始运算：

取欧拉法求解微分方程的时间间隔 t_interval=0.05 秒，计算列车运行轨迹。随后，将四组曲线绘制成图，得到如图 5 的结果。



注：匀速运行阶段的牵引制动力不为 0，而为 7377 N。

图 5 最短耗时的运行方案图

如图所示，列车开始运动后，以最大牵引力加速至最大速度 27.78m/s，随后匀速行驶，在接近终点时以最大制动力使列车停止，得到如上四幅曲线图。最终，最短用时方案为 197.4 秒。

以 0.05s 为步长执行的欧拉法 Matlab 微分方程求解程序仅使用了 0.013291 秒。可见求解速度非常快，欧拉算法能够在较短的时间计算得到较好的效果。

➢延时抵达方案

问题要求探究延时抵达终点的不同运行方案。我们规定一个延时变量，以追加约束、改变目标函数的行驶来转换求解内容。

追加研究内容的约束条件：列车必须精准延时抵达车站 B。

$$t\_end = t\_Min + t\_Epd \tag{13}$$

式中，*t_Min* 是由刚才求解出来的最短时间，为 197.4 秒。*t_Epd* 是列车延时抵达车站 B 的时间，题目规定为五组，分别是延长 10s、20s、50s、150s、300s。

新的目标函数：耗能尽可能最小化。

$$\min f = C \tag{14}$$

因此对于延时抵达方案，需求解的模型应如下：

$$\min f = C$$

$$s.t.\begin{cases} \rho m\dfrac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t} = -f_t + F_{N_t} - F_{R_t} \\ \dfrac{\mathrm{d}x_t}{\mathrm{d}t} = v_t \\ v_0 = 0 \\ v_{t\_end} = 0 \\ v_t \le vLim,\ \ t \in (0, t\_end) \\ x_{t\_end} = D,\ \ t \in (0, t\_end) \\ F_{N_t} \le NLim,\ \ t \in (0, t\_end) \\ F_{R_t} \le RLim,\ \ t \in (0, t\_end) \\ f_t \le 2.0895 + 0.0098v_t + 0.0065v_t^2 \\ C_t = \int_0^t F_{N_t} x_t \mathrm{d}t \\ t\_end = t\_Min + t\_Epd \end{cases}$$

选择该式作为目标函数也是出于对实际的考虑。当我们不追求最短时间抵达目标，而以固定时间抵达目标时，应最好在可行范围内选择一个耗能最小的移动方案。

采用欧拉法的 Matlab 程序求解微分方程，并编写一个单纯形法搜索解的算法外壳，将该微分方程求解函数嵌入其中，计算可以得到如图 6、7、8 的五组曲线图：

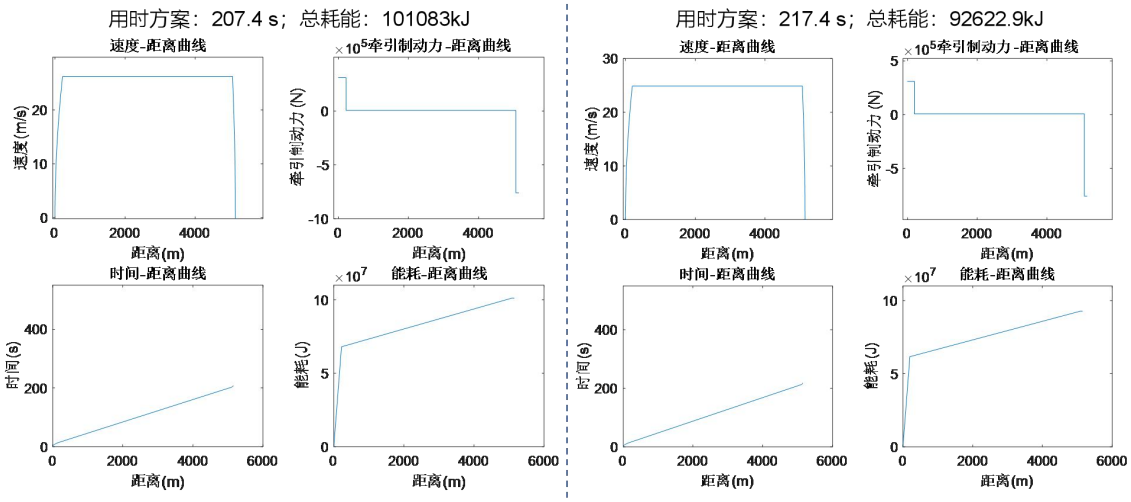


图 6 耗时+10s(左)和+20s(右)的运行方案图

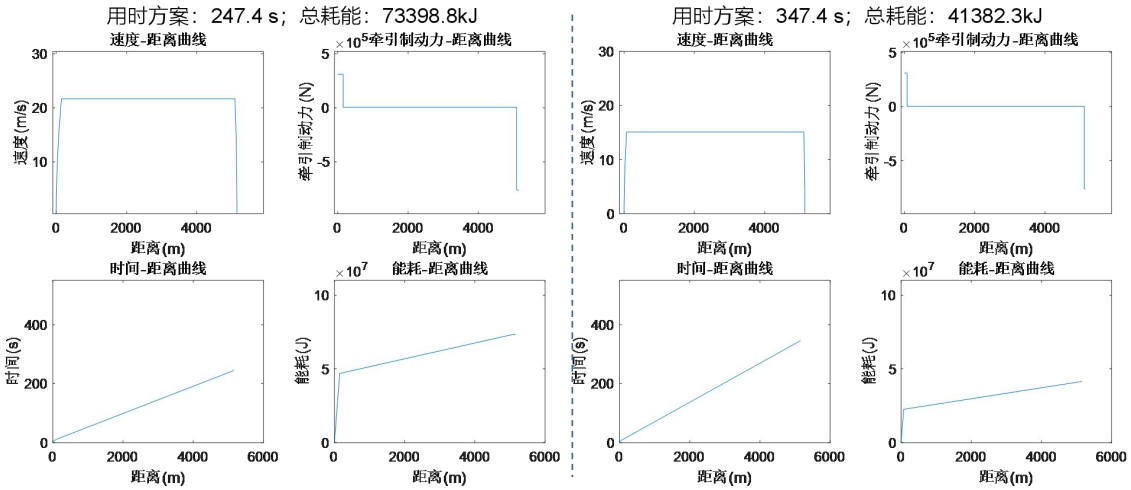


图 7 耗时+50s(左)和+150s(右)的运行方案图

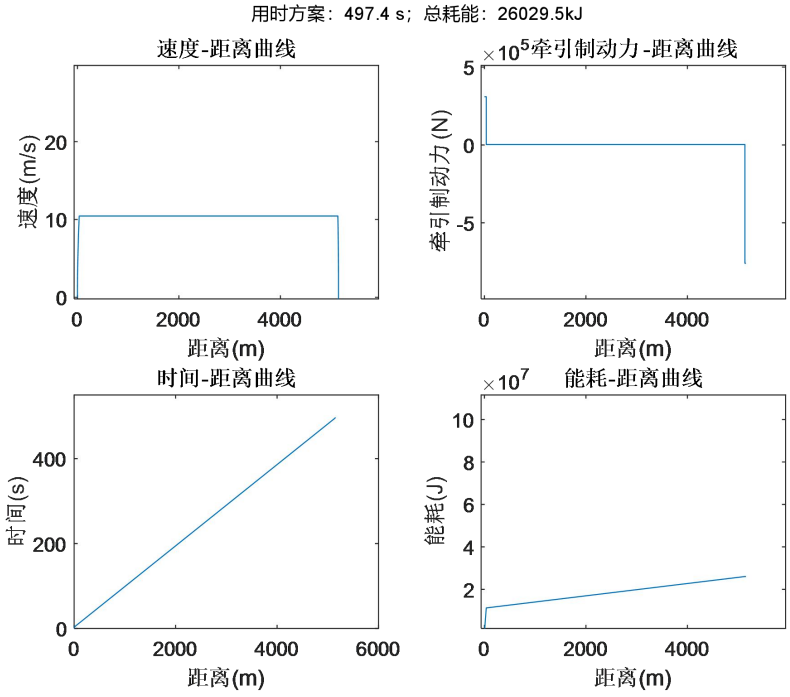


图 8 耗时+300s 的运行方案图

从问题一的运行结果我们可以看出：延长抵达车站 B 的时间，可以很大程度降低最大能耗。这也是由于提高速度地情况下受到地空气阻力更大、列车动能更大，因此若要缩短抵达车站 B 的时间，势必全程遭受更大的阻力、需要更多的牵引力做功来提高列车的动能。然而，实际情况下我们既希望列车能够快速抵达，又希望耗电尽可能少，这两个目标是矛盾的。因此需要选择一个折衷的方案，在能耗能接受的范围内尽可能地加快列车的行驶速度。

对于这五次方案的求解用时如下表：

表 2 问题 1 欧拉法微分方程模型求解耗时记录表

延时时间	程序计算耗时（不包含图像绘制时间）
10s	0.010645s
20s	0.013663s
50s	0.011201s
150s	0.015233s
300s	0.017059s

求解速度近乎即时。可以看出我们的求解算法不仅能够有效给出列车地开行方案，而且能够非常高速地计算出列车的行驶轨迹，还可以快速地找到低耗能的最优求解结果。

6.2 问题 2 的模型建立与求解

6.2.1 问题 2 模型建立前的准备

建立问题 2 的模型前，仍有一些概念需要解释说明。

➢速度限制与速度调整

列车在开行过程中存在速度限制。如果维持在最大速度行驶，遭遇限速降低，需保证在速度所有的时间中完全小于等于限制速度，因此必须提前减速。如图 9 所示。

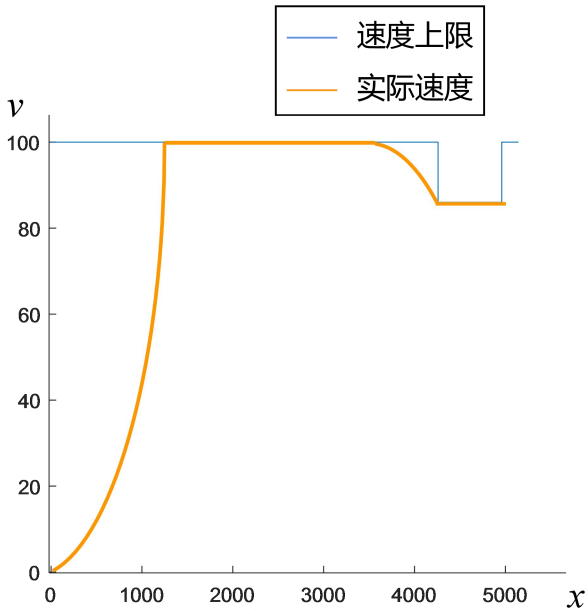


图 9 针对速度限制的速度调整示意图

➢坡度与重力在运动方向上的分力

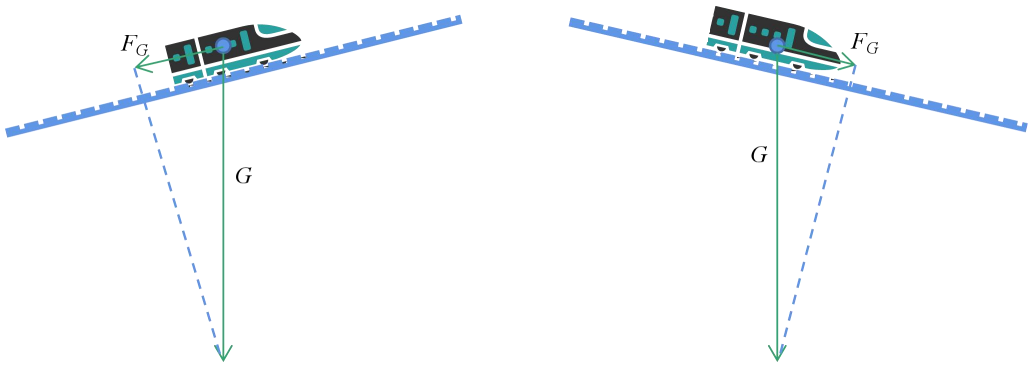


图 10 坡度带来的重力方向上的分力

如图 10，当列车行驶过程中存在坡度时，列车自身重力会对列车在行进方向或反方向上施加一个分力。这个力同样影响列车的加速度，从而影响到施加的牵引力和制动力的大小。

➢高速行驶下的牵引力亏损

附件 2 指出，牵引电机在列车高速行驶下会因为线圈对磁场的高速切割运动产生反电动势，这种反电动势会导致牵引力的下降。因考虑这一部分因素，对牵引力施加额外的约束条件。

➢再生制动与能量存储

附件 2 指出，电机可以通过再生制动的方式将部分动能转换为电能存储下来，从而能够创造出一个不同于机械制动力的额外作用力。如图 11 所示。

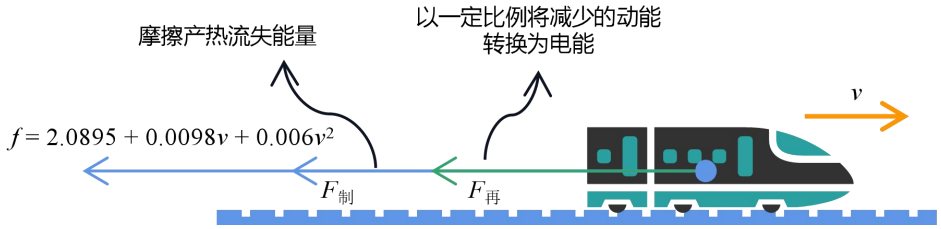


图 11 再生制动力与其他阻力的区别

再生制动与牵引电机一样会受到高速运动的影响而降低制动力的上限，需要进行相关的约束。再生制动力对列车做功，减少的动能能够以一定比例转换为电能。在附件 2 中给出了转换比例，为 0.6。

6.2.2 复杂电机过程与路况的列车动力学模型的建立

在问题 2 中我们需要解决的问题是考虑复杂的电机动态过程和路况的列车动力学模拟，因此，可对问题 1 的模型进行修改和追加得到问题 2 的新模型。

修改原模型微分方程一：牛顿第二定律计算列车的加速度

$$m\rho\frac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t} = -f_t + F_{N_t}\eta_N - F_{R_t} - F_{Q_t} - F_{G_t} \tag{15}$$

式中：

η_N 表示牵引力做功的效率。由附件 2 提供，其值为 0.9。

F_{Q_t} 表示电机的再生制动力。为问题 2 新增的决策变量，可以调控。

F_{G_t} 表示列车在存在坡度的情况下受重力影响在运行方向上受到的外力，它的计算式如下：

$$F_{G_t} = \sin(\arctan(P_{x_t})) \cdot mg \tag{16}$$

式中：

P_x 表示在列车开行距离达到 x 处的坡度。

g 表示重力加速度。

修改原模型约束条件二：限制列车的最大行驶速度。

$$v_t \le vLim'_t,\ \ t \in (0, t\_end) \tag{17}$$

式中：

$vLim'_t$ 表示列车的最大速度限制。在问题 2 中，该限制不再为固定的 100km/h，而是一个随时间变化的函数，由附件 1 给出。

修改原模型约束条件四：限制列车的最大牵引力和最大制动力。

$$F_{N_t} \le NLim'_t,\ \ t \in (0, t\_end) \tag{18}$$

式中：

$NLim'_t$ 表示列车的最大牵引力限制。在问题 2 中，该限制不再为固定的 310kN，而会受到反电动势的影响，在高速运动的情况下会有所减小。

修改的计算公式：能耗计算。

$$C_t = \int_0^t F_{N_t} x_t \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\eta_Q \int_0^t \frac{F_{Q_t}^2}{m} t^2 \mathrm{d}t \tag{19}$$

式中：

η_Q 是再生制动转换为电能存储的效率。

由于在问题 2 中存在列车的再生制动功能，可以将一部分通过再生制动降低的列车动能存储为电能，故通过再生制动力 F_Q 导致动能发生的降低可按一定比例 η_Q 转换成电能。

以上是对原模型的修改部分，下面介绍追加的约束部分。

追加的约束条件五：高速运动的反电动势对牵引力的影响。

$$NLim'_t = \begin{cases} NLim, & v_t \le V_N^{trans} \\ NLim \dfrac{V_N^{trans}}{v_t}, & v_t > V_N^{trans} \end{cases} \tag{20}$$

式中：

V_N^{trans} 表示牵引力的恒功率区切换点的速度。

追加的约束条件六：再生制动力的约束以及高速运动的反电动势对再生制动力的影响。

$$F_{Q_t} \le QLim'_t \tag{21}$$

式中：

$QLim'_t$ 表示列车的最大再生制动力限制。其满足下式：

$$QLim_t' = \begin{cases} QLim, & v_t \le V_Q^{trans} \\ QLim\dfrac{V_Q^{trans}}{v_t}, & v_t > V_Q^{trans} \end{cases} \tag{22}$$

式中：

V_Q^{trans} 为再生制动力的恒功率区切换点的速度，由附件 2 给出，为 17m/s。

$QLim$ 为再生制动力的恒功率区的最大值，附件 2 给出其值为 260 kN。

综上所述，建立如下**微分方程总模型**：

$$s.t.\begin{cases} m\rho\dfrac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t} = -f_t + F_{N_t}\eta_N - F_{R_t} - F_{Q_t} - F_{G_t} \\ F_{G_t} = \sin(\arctan(P_{x_t}))\cdot mg \\ \dfrac{\mathrm{d}x_t}{\mathrm{d}t} = v_t \\ v_0 = 0 \\ v_{t\_end} = 0 \\ v_t \le vLim_t', \ \ t \in (0, t\_end) \\ x_{t\_end} = D, \ \ t \in (0, t\_end) \\ F_{N_t} \le NLim_t', \ \ t \in (0, t\_end) \\ F_{R_t} \le RLim, \ \ t \in (0, t\_end) \\ f_t \le 2.0895 + 0.0098v_t + 0.0065v_t^2 \\ C_t = \int_0^t F_{N_t} x_t \mathrm{d}t - \dfrac{1}{2}\eta_Q \int_0^t \dfrac{F_{Q_t}^2}{m} t^2 \mathrm{d}t \\ t\_end = t\_Min + t\_Epd \\ NLim_t' = \begin{cases} NLim, & v_t \le V_N^{trans} \\ NLim\dfrac{V_N^{trans}}{v_t}, & v_t > V_N^{trans} \end{cases} \\ F_{Q_t} \le QLim_t' \\ QLim_t' = \begin{cases} QLim, & v_t \le V_Q^{trans} \\ QLim\dfrac{V_Q^{trans}}{v_t}, & v_t > V_Q^{trans} \end{cases} \end{cases}$$

由于问题 2 同样需要先计算列车耗时最短的列车开行方案，因此，设置目标函数如

下，以求得最短时间。

$$\min f = t\_end \tag{23}$$

6.2.3 问题 2 模型的求解过程、结果与讨论

➢最短时间的运行方案

相较于问题 1，问题 2 的模型更为复杂，有一些较难处理的约束条件。为了更好的应用单纯形法进行求解，我们在算法中加入了一步“有效化”的过程，用以将搜索解的过程中查找到的无效解进行有效化。

计算列车运行轨迹的核心算法仍采用欧拉法。设置微元步长为 0.05 秒，计算得到如下结果：

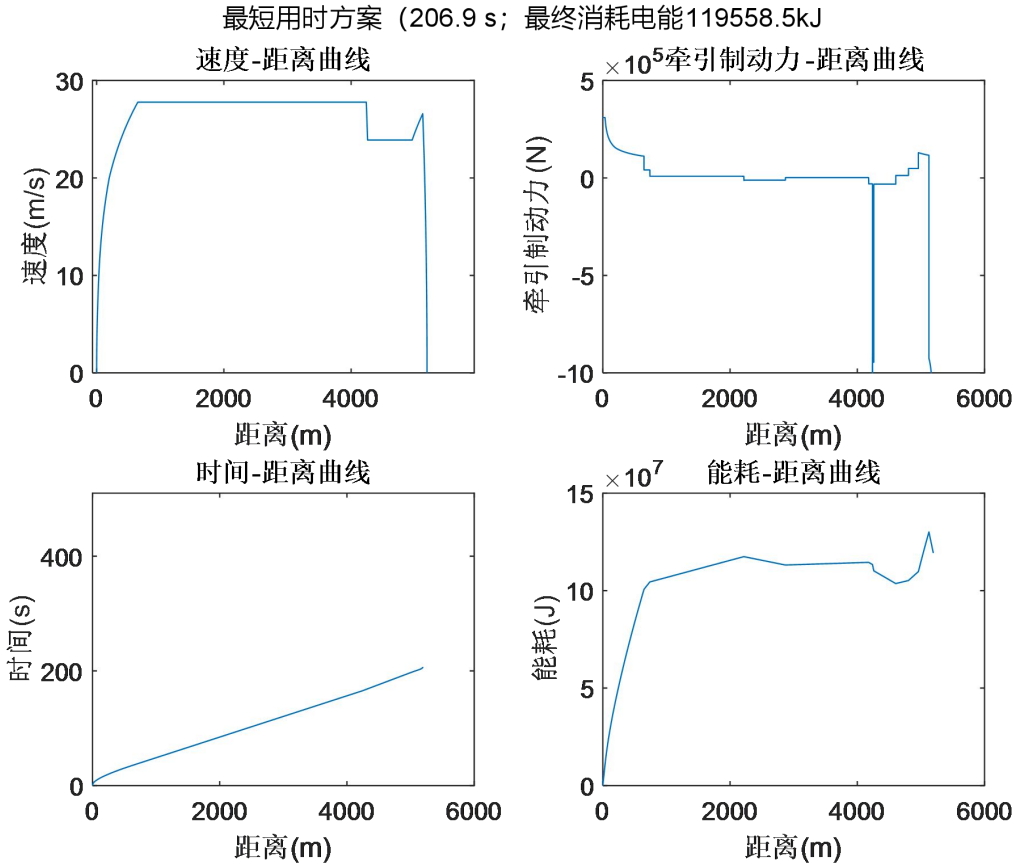


图 12 考虑电机复杂状态和路况下的列车最短耗时运行方案

图像有一些需要解读的地方：

①在速度-距离曲线上，约 4100 米附近出现了一次减速。这表明列车正在为了应对在 4259 米至 4960 米的区域内速度限制的降低到 86km/h 而进行的减速。在 4960 米后，列车再次进行提速，但是终点位于 5144.7 米处，剩下的距离不足以使得列车再一次加速到 100km/h，从而导致没有经过匀速行驶的阶段而直接制动减速抵达终点。

②在牵引制动力-距离曲线上出现了约 4100 米附近出现了一次剧降和剧升，这是由于在该位置进行了一次从 100km/h 到 86km/h 的短暂的减速导致的。

③能耗曲线在部分位置出现了下降，这表明列车可能正在进行再生制动，将一部分过剩的动能转换成了电能并存储。

从程序开始运行计时，到程序求解完成，花费的总时间为 0.059715 秒。这表明我们的程序运行效率仍然是非常高的。虽然相比与问题 1 的 0.013291 秒而言，时间延长至

大约 5 倍之多（这可能是由于加入了更多的运算步骤，比如对牵引力、再生制动力的变化、能量的存储等），但是效率仍旧是非常高的，体感上依然是几乎瞬间完成的计算。

➢延时抵达方案

这一部分与问题 1 的操作相同。采用将抵达时间作为刚性约束条件，而将电能消耗最小化作为目标函数进行重新求解。这一部分的整体模型如下：

$$\min f = C$$

$$s.t.\begin{cases} m\rho\dfrac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t} = -f_t + F_{N_t}\eta_N - F_{R_t} - F_{Q_t} - F_{G_t} \\ F_{G_t} = \sin(\arctan(P_{x_t}))\cdot mg \\ \dfrac{\mathrm{d}x_t}{\mathrm{d}t} = v_t \\ v_0 = 0 \\ v_{t\_end} = 0 \\ v_t \le vLim'_t, \quad t \in (0, t\_end) \\ x_{t\_end} = D, \quad t \in (0, t\_end) \\ F_{N_t} \le NLim_t', \quad t \in (0, t\_end) \\ F_{R_t} \le RLim, \quad t \in (0, t\_end) \\ f_t \le 2.0895 + 0.0098v_t + 0.0065v_t^2 \\ C_t = \int_0^t F_{N_t} x_t \mathrm{d}t - \dfrac{1}{2}\eta_Q \int_0^t \dfrac{F_{Q_t}^2}{m} t^2 \mathrm{d}t \\ t\_end = t\_Min + t\_Epd \\ NLim_t' = \begin{cases} NLim, & v_t \le V_N^{trans} \\ NLim\dfrac{V_N^{trans}}{v_t}, & v_t > V_N^{trans} \end{cases} \\ F_{Q_t} \le QLim_t' \\ QLim_t' = \begin{cases} QLim, & v_t \le V_Q^{trans} \\ QLim\dfrac{V_Q^{trans}}{v_t}, & v_t > V_Q^{trans} \end{cases} \\ t\_end = t\_Min + t\_Epd \end{cases}$$

利用 Matlab 编程实现单纯形法对解的搜索。仍然采用欧拉法对微分方程模型进行求解和数值计算，将得到的五组结果绘制成如图 13、14、15。

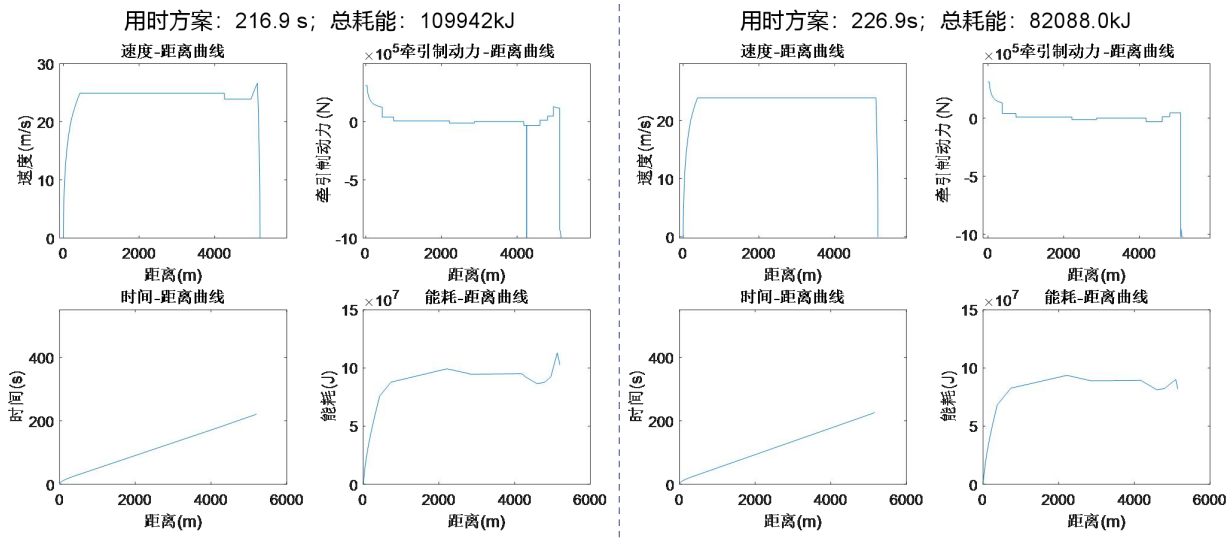


图 13 考虑电机复杂状态和路况下耗时+10s(左)和+20s(右)的运行方案图

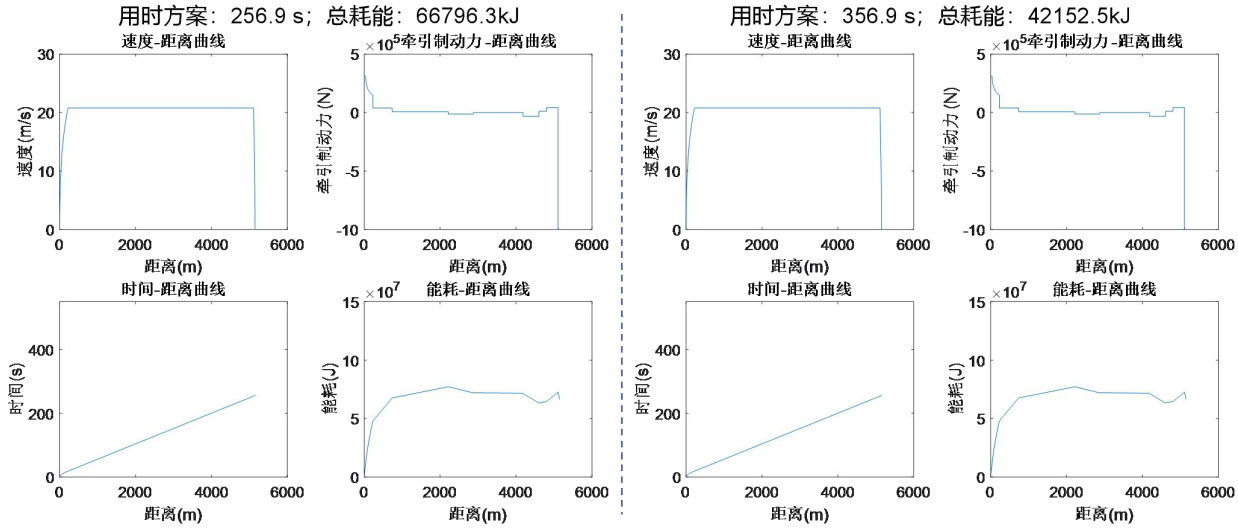


图 14 考虑电机复杂状态和路况下耗时+50s(左)和+150s(右)的运行方案图

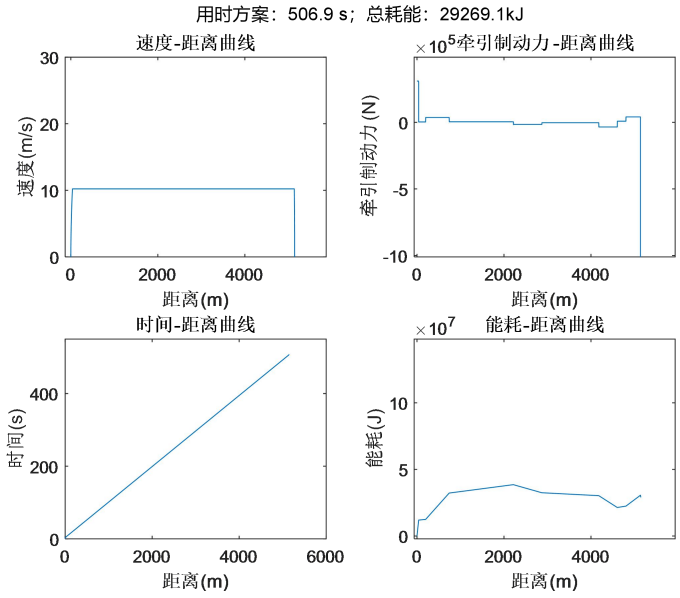


图 15 考虑电机复杂状态和路况下耗时+300s 的运行方案图

预期抵达车站 B 的时间延长后，电能消耗的变化趋势也和问题 1 相一致。值得额外关注的是，在延长时间达到 20 秒以上时，、列车也不再受到速度限制的影响，能够以一个均匀的速度进行行驶。

对于这五次方案的求解用时如下表：

表 3 问题 2 欧拉法微分方程模型求解耗时记录表

延时时间	程序计算耗时
10s	0.018508s
20s	0.023738s
50s	0.018270s
150s	0.021037s
300s	0.038670s

求解速度近乎即时。虽与问题 1 相比运行速度稍显逊色，但仍能够做到体感上无时间延迟就能够迅速完成计算，能够在实际列车运行中做到实时规划开行方案。

6.3 问题 3 的模型建立与求解

6.3.1 问题 3 模型建立前的准备

对于问题 3，考虑一种风险应对模型，即能够在风险发生时调整自身的行驶策略来控制最终抵达终点站的时间。这个流程应该是按图 16 所示的方式。

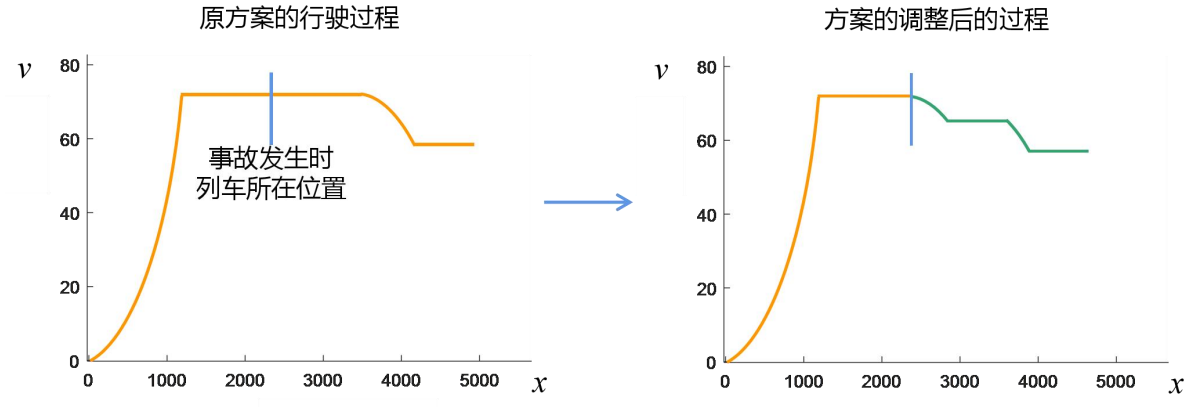


图 16 列车行驶方案调整示意图

而对于这种情形的解决方法，主要在于模型的求解策略上。

以我们的问题为例：列车从起点出发，原计划于 320s 后到达终点，列车运行至 2000m 位置时由于前方的突发事故，需要延迟 60s 到达终点。对应求解策略应该如下所示：

①首先是以起点位置 x=0、初速度 v0=0 的状态下，以目标抵达时间 t_end=320s、目标位置 x_target=5144.7m 进行模型的求解，得到原始的行驶方案。

②在 2000m 处调整方案，计算 2000m 处对应的初速度 v1，对应行驶的时间 t1，用作调整前的初状态。

③重新求解模型。以当前位置 x=2000m、初速度 v0=v1 的状态下，以目标抵达时间 t_end=(320+60-t1) s、目标位置 x_target=5144.7m 进行模型求解，得到调整后的一个最优

方案。

由于是控制了固定的时间的列车行驶方案规划，两次规划都应以消耗的电能最小化为最终优化目标。

6.3.2 列车行驶方案调整模型的建立

由于列车行驶方案调整前和调整后是两个不一样的模型，为了区分两个模型，我们使用两套不一样的符号变量。其具体的区别如下表所示。

调整前模型的符号名示例	调整后模型的符号名示例
a	na

对于调整前，列车的行驶方案模型的初始条件如下：

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ x_0 = 0 \\ t_0 = 0 \\ t\_end = t\_set \\ x_{t\_end} = D \end{cases} \tag{24}$$

式中：

t_set 为原方案规定的行驶时间。

而调整后，列车的行驶方案模型的初始条件如下：

$$\begin{cases} nv_0 = v\_T \\ nx_0 = x\_T \\ nt_0 = t\_T \\ nt\_end = t\_set + t\_plus \\ x_{nt\_end} = D \end{cases} \tag{25}$$

式中：

x_T 是列车在接收到突发事故报警时的所在位置已经行驶的距离。该变量是一个**指定值**。

v_T 是列车在接收到突发事故报警时的速度。该变量是一个计算值，由确定的 x_T 计算得到相应的 v_T 。

t_T 是列车在接收到突发事故报警时的时间。该变量是一个计算值，由确定的 x_T 计算得到相应的 t_T 。

t_plus 是进行方案调整后需要延迟到站的时间。

两个模型通过一个衔接计算式来进行关联。

调整前的模型在进行独立求解的基础上，通过计算调整时的列车状态，作为调整后模型的初始条件进行再一次求解。因此，得到问题 3 的总模型如下：

$$\min f_1 = C$$

$$\begin{cases} m\rho\dfrac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t} = -f_t + F_{N_t}\eta_N - F_{R_t} - F_{Q_t} - F_{G_t} \\ F_{G_t} = \sin(\arctan(P_{x_t}))\cdot mg \\ \dfrac{\mathrm{d}x_t}{\mathrm{d}t} = v_t \\ v_t \le vLim_t', \quad t \in (0, t\_end) \\ x_{t\_end} = D, \quad t \in (0, t\_end) \\ F_{N_t} \le NLim_t', \quad t \in (0, t\_end) \\ F_{R_t} \le RLim, \quad t \in (0, t\_end) \\ f_t \le 2.0895 + 0.0098v_t + 0.0065v_t^2 \\ C_t = \int_0^t F_{N_t} x_t \mathrm{d}t - \dfrac{1}{2}\eta_Q \int_0^t \dfrac{F_{Q_t}^2}{m} t^2 \mathrm{d}t \\ t\_end = t\_Min + t\_Epd \\ NLim_t' = \begin{cases} NLim, & v_t \le V_N^{trans} \\ NLim\dfrac{V_N^{trans}}{v_t}, & v_t > V_N^{trans} \end{cases} \\ F_{Q_t} \le QLim_t' \\ QLim_t' = \begin{cases} QLim, & v_t \le V_Q^{trans} \\ QLim\dfrac{V_Q^{trans}}{v_t}, & v_t > V_Q^{trans} \end{cases} \\ v_0 = 0 \\ x_0 = 0 \\ t_0 = 0 \\ t\_end = t\_set \\ x_{t\_end} = D \end{cases}$$

$$\min f_2 = C$$

$$\begin{cases} m\rho\dfrac{\mathrm{d}nv_t}{\mathrm{d}nt} = -nf_t + nF_{N_t}\eta_N - nF_{R_t} - nF_{Q_t} - nF_{G_t} \\ nF_{G_t} = \sin(\arctan(P_{nx_t}))\cdot mg \\ \dfrac{\mathrm{d}nx_t}{\mathrm{d}nt} = nv_t \\ nv_t \le nvLim_t', \quad t \in (0, t\_end) \\ nx_{nt\_end} = D, \quad t \in (0, t\_end) \\ nF_{N_t} \le nNLim_t', \quad t \in (0, t\_end) \\ nF_{R_t} \le RLim, \quad t \in (0, t\_end) \\ nf_t \le 2.0895 + 0.0098v_t + 0.0065v_t^2 \\ nC_t = \int_0^t nF_{N_t} nx_t \mathrm{d}t - \dfrac{1}{2}\eta_Q \int_0^t \dfrac{nF_{Q_t}^2}{m} t^2 \mathrm{d}t \\ nt\_end = nt\_Min + nt\_Epd \\ nNLim_t' = \begin{cases} NLim, & nv_t \le V_N^{trans} \\ NLim\dfrac{V_N^{trans}}{nv_t}, & nv_t > V_N^{trans} \end{cases} \\ nF_{Q_t} \le nQLim_t' \\ nQLim_t' = \begin{cases} QLim, & nv_t \le V_Q^{trans} \\ QLim\dfrac{V_Q^{trans}}{nv_t}, & nv_t > V_Q^{trans} \end{cases} \\ nv_0 = v\_T \\ nx_0 = x\_T \\ nt_0 = t\_T \\ nt\_end = t\_set + t\_plus \\ x_{nt\_end} = D \end{cases}$$

两个模型通过下式进行衔接：

$$\text{当 } x_t = x\_T \text{ 时, } t = t\_T \text{ 且 } v_t = v\_T \tag{26}$$

接下来进行分步求解即可。

6.3.3 问题 3 模型的求解过程、结果与讨论

采用与第二问相同的方法，首先计算以 320s 抵达车站 B 求解模型。

得到列车行驶方案如图 17：

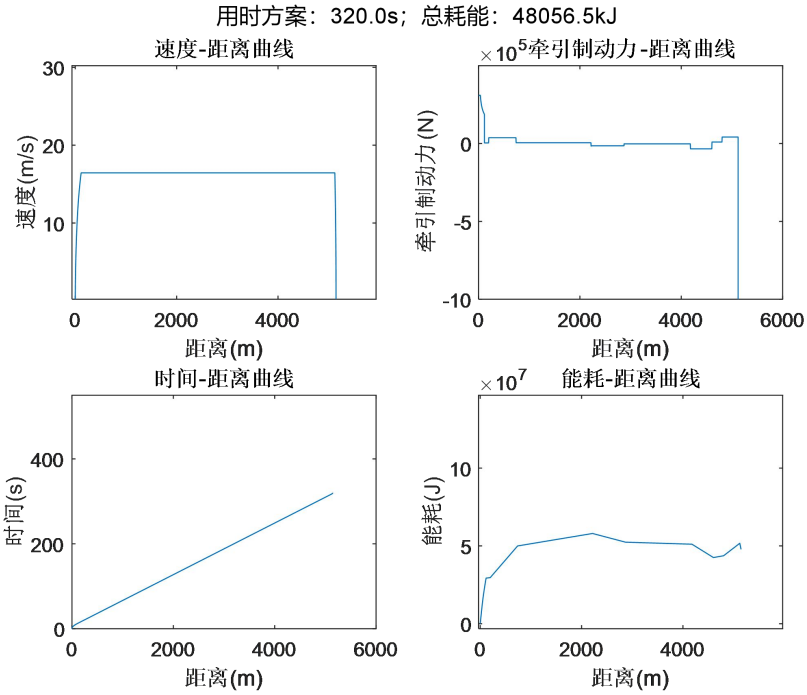


图 17 调整前方案图

在原本的方案下，当列车行驶到 2000m 处时，速度为 16.44m/s，时间为 127.4 秒。

将该状态作为调整后模型的初始状态，进行再一次求解。将调整后的过程替代，得到行驶方案如图 18：

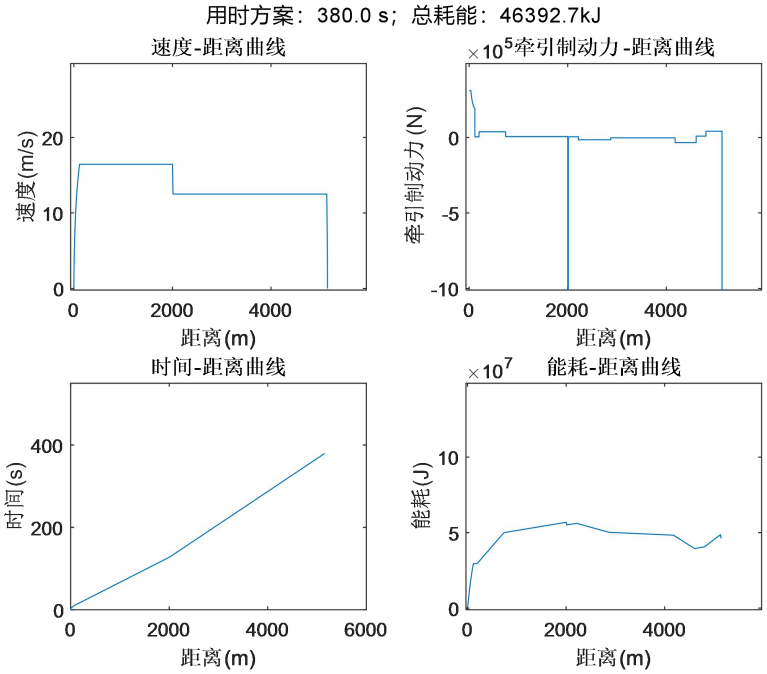


图 18 调整后方案图

方案调整用时：0.093074 秒。

运算速度仍旧接近于即时。可以看出我们的这套模型和算法拥有极高的响应速度，在接到前方事故的警报时，可以几乎立即地制定新的行驶方案并执行。如此一来就能够尽可能地降低列车的反应耗时，能够立即进行风险应对。

七、模型的评价及优化

7.1 误差分析

程序的计算误差主要来自于欧拉法求解微分方程模型时产生的一些残余误差。这种误差会随着欧拉法的微元步长的缩小而缩小。因此，选取更小的步长会导致更小的误差，但是这样也会导致求解时间过长。

本文在三个问题的求解过程中均采用 0.05 秒为步长（列车运行时间）进行欧拉法数值解的求取。以问题 2 为例，我们选取不同的步长进行求解并计时，同时输出每次运行结果的电能消耗的总量，得到如下运行结果表。

表 3 问题 2 欧拉法微分方程模型求解耗时记录表

微元步长选取	程序计算耗时	耗能
0.5s	0.009365s	120391714.4 J
0.05s	0.023738s	119558461.6 J
0.01s	0.554977s	119508504.4 J
0.001s	259.42237s	119503612.5 J
0.0001s	——（耗时过长）	——（未能等到计算结果）

分析该表可以得到以下结论：

①采用更小的步长会导致额外的计算耗时。0.5s 和 0.05s 的步长下耗时变化尚不显著。但采取更细微的步长会导致计算耗时指数型增长，不利于实际计算。

②采用更小的步长能够计算得到更精确的结果。0.5s 的步长下耗能计算明显偏高，误差较大，不利于模型的实际使用。0.05s 以及更细微的步长下耗能的变化更加精细。但是牺牲了大量计算耗时得到的精度提高实质上是得不偿失的。

这也是为什么在本篇论文中我们选取了 0.05 秒作为我们实际的微元步长。为了保证计算的“即时性”和“精度”，这个步长是一个折衷的选择。

7.2 模型的优点

本问建立的模型能够针对列车在复杂路况、复杂的电机状态下精确计算出列车的运行轨迹、耗能和储能变化、速度变化等信息，并且程序求解速度快、精度高，能够很好地用于实际城轨系统中，作为列车运行控制策略的算力支撑。

7.3 模型的缺点

模型所应对的环境仍具有较大的局限性，例如我们没有更详细的把握到列车牵引力

的变化规律，只考虑了将其瞬间调整到任意一个值；也没有考虑到一些可能存在的因素，比如天气带来的影响：雨天和晴天是否会带来不同的阻力影响等。模型如要应用于实际，还需要对更多的待考虑因素进行考察和分析。

7.4 模型的推广

本文中建立的模型是一阶微分方程模型，其建模思想可以应用于各种动力学相关的问题，例如无人机运行控制研究、投射物轨迹研究等。模型的泛化性良好，欧拉法微分方程的求解策略和对应的算法适应性良好，可以作为动力学研究的案例进行推广。

参考文献

[1] 侯秀芳,冯晨,左超等.2022 年中国内地城市轨道交通线路概况[J]. 都市快轨交通,2023,36(01):9-13.

[2]贾斌,朱凌,李树凯等.城市轨道交通小交路计划与客流控制协同优化策略[J].交通运输系统工程与信息,2022,22(01):124-132.DOI:10.16097/j.cnki.1009-6744.2022.01.014

[3]Qu, B. Y., Zhou, Q., Zhu, Y. S., Liang, J., Yue, C. T., Jiao, Y. C., . . . Suganthan, P. N. (2021). An improved brain storm optimisation algorithm for energy-efficient train operation problem. International Journal of Bio-Inspired Computation, 17(4), 236-245. Retrieved from <Go to ISI>://WOS:000679392800004.

[4] 尚梦影. 城轨列车节能运行协同智能优化与控制[D]. 北京交通大学,2022.DOI:10.26944/d.cnki.gbfju.2022.000360.

[5]杨彦强,刘海东,麻存瑞等.列车节能运行目标速度控制优化研究[J].交通运输系统工程与信息,2019,19(01):138-144.DOI:10.16097/j.cnki.1009-6744.2019.01.021.

[6] 任春年,李会荣,魏倩茹.基于 MATLAB 一阶微分方程的仿真[J]. 现代信息科技,2021,5(15):160-162.DOI:10.19850/j.cnki.2096-4706.2021.15.043.

附 录

源代码如下
问题一主要求解脚本：Q1.m
问题二主要求解脚本：Q2.m
问题三主要求解脚本：Q3.m
不考虑复杂路况和电机的延时方案规划函数：find_best_scheme.m
考虑复杂路况和电机的延时方案规划函数：find_best_scheme2.m
其他为辅助函数

Q1.m

```
clear
close all
clc


max_FN=310000;%最大牵引(N)
max_FR=760000;%最大制动(N)
rou=1.08;%旋转质量因数
D=5144.7;%站间距(m)
max_V=100/3.6;%最大速(m/s)
mass=176300;%列车质量(kg)

%% 欧拉法计算最短时间
tic
t_interval=0.1;%微元
max_time=600;
x_accelerate=0;
x_retardation=0;

%Stage 1
EU1=0;
t1=[0];
v1=[0];
FN1=[max_FN];
a1=[FN1(end)/(mass*rou)-calc_f(v1(end))/(mass*rou)];
f1=0;
x1=[0];
while v1<max_V
    t1=[t1;t1(end)+t_interval];
    v1=[v1;v1(end)+a1(end)*t_interval];
    FN1=[FN1;max_FN];
    f1=[f1;calc_f(v1(end))];
    a1=[a1;FN1(end)/(mass*rou)-f1(end)/(mass*rou)];
    x1=[x1;x1(end)+v1(end)*t_interval];
    EU1=[EU1;EU1(end)+FN1(end)*(x1(end)-x1(end-1))];
end

v1(end)=max_V;

```

```
40.
41.
42.
43.  %Stage3
44.  EU3=0;
45.  t3=[0];
46.  v3=[100/3.6];
47.  FN3=[-max_FR];
48.  a3=[FN3(end)/(mass*rou)-calc_f(v3(end))/(mass*rou)];
49.  f3=calc_f(v3(end));
50.  x3=[0];
51.  while v3>0
52.      t3=[t3;t3(end)+t  interval];
53.      v3=[v3;v3(end)+a3(end)*t_interval];
54.      FN3=[FN3;-max_FR];
55.      f3=[f3;calc_f(v3(end))];
56.      a3=[a3;FN3(end)/(mass*rou)-f3(end)/(mass*rou)];
57.      x3=[x3;x3(end)+v3(end)*t_interval];
58.      EU3=[EU3;EU3(end)];
59.  end
60.
61.
62.  %Stage2
63.  EU2=0;
64.  t2=0;
65.  v2=[100/3.6];
66.  FN2=calc_f(v2(end));
67.  a2=0;
68.  f2=FN2;
69.  x2=[0];
70.  while x2(end)<D-x1(end)-x3(end)
71.      t2=[t2;t2(end)+t_interval];
72.      v2=[v2;100/3.6];
73.      FN2=[FN2;calc_f(v2(end))];
74.      f2=[f2;calc  f(v2(end))];
75.      a2=[a2;0];
76.      x2=[x2;x2(end)+v2(end)*t  interval];
77.      EU2=[EU2;EU2(end)+FN2(end)*(x2(end)-x2(end-1))];
78.  end
79.
80.  t=[t1;t2+t1(end);t3+t2(end)+t1(end)];
81.  v=[v1;v2;v3];
82.  FN=[FN1;FN2;FN3];
83.  a=[a1;a2;a3];
84.  f=[f1;f2;f3];
85.  x=[x1;x2+x1(end);x3+x2(end)+x1(end)];
86.  EU=[EU1;EU2+EU1(end);EU3+EU2(end)+EU1(end)];
87.
88.  toc
89.  %绘制
90.
91.  subplot(2,2,1)
```

```
plot(x,v)
set(gca,'ylim',[0,30])
xlabel('距离(m)')
ylabel('速度(m/s)')
title("速度-距离曲线")

subplot(2,2,2)
plot(x,FN)
set(gca,'ylim',[-1000000,500000])
xlabel('距离(m)')
ylabel('牵引制动力(N)')
title("牵引制动力-距离曲线")

subplot(2,2,3)
plot(x,t)
set(gca,'ylim',[0,510])
xlabel('距离(m)')
ylabel('时间(s)')
title("时间-距离曲线")

subplot(2,2,4)
plot(x,EU)
xlabel('距离(m)')
ylabel('能耗(J)')
title("能耗-距离曲线")
set(gca,'ylim',[0,110000000])


min_time=t(end);
%加 10 秒、20 秒、50 秒、150 秒和 300 秒
time_plus=[10,20,50,150,300];
for tp=time_plus
    tic
    [t,v,FN,a,f,x,EU]=find_best_scheme(min_time+tp,0.2);
    toc
    figure
    subplot(2,2,1)
    plot(x,v)
    set(gca,'ylim',[0,30])
    xlabel('距离(m)')
    ylabel('速度(m/s)')
    title("速度-距离曲线")

    subplot(2,2,2)
    plot(x,FN)
    set(gca,'ylim',[-1000000,500000])
    xlabel('距离(m)')
    ylabel('牵引制动力(N)')
    title("牵引制动力-距离曲线")

    subplot(2,2,3)
```

```
plot(x,t)
set(gca,'ylim',[0,550])
xlabel('距离(m)')
ylabel('时间(s)')
title("时间-距离曲线")

subplot(2,2,4)
plot(x,EU)
set(gca,'ylim',[0,110000000])
xlabel('距离(m)')
ylabel('能耗(J)')
title("能耗-距离曲线")
end
```

find_best_scheme.m

```
function [t,v,FN,a,f,x,EU]=find best scheme(total time,step length)


t_interval=step_length;

max_FN=310000;%最大牵引(N)
max_FR=760000;%最大制动(N)
rou=1.08;%旋转质量因数
D=5144.7;%站间距(m)
max_V=100/3.6;%最大速(m/s)
mass=176300;%列车质量(kg)

%% 欧拉法计算最短时间
max_time=600;
x_accelerate=0;
x_retardation=0;

delta_T=zeros(11,1);
for v_mean=0:10:100
    max_V=v_mean/3.6;

    %Stage 1
    EU1=0;
    t1=[0];
    v1=[0];
    FN1=[max_FN];
    a1=[FN1(end)/(mass*rou)-calc_f(v1(end))/(mass*rou)];
    f1=0;
    x1=[0];
    while v1<max_V
        t1=[t1;t1(end)+t_interval];
        v1=[v1;v1(end)+a1(end)*t_interval];
        FN1=[FN1;max_FN];
        f1=[f1;calc_f(v1(end))];
        a1=[a1;FN1(end)/(mass*rou)-f1(end)/(mass*rou)];
```

```
        x1=[x1;x1(end)+v1(end)*t_interval];
        EU1=[EU1;EU1(end)+FN1(end)*(x1(end)-x1(end-1))];
    end

    v1(end)=max_V;

    %Stage3
    EU3=0;
    t3=[0];
    v3=[max_V];
    FN3=[-max_FR];
    a3=[FN3(end)/(mass*rou)-calc_f(v3(end))/(mass*rou)];
    f3=calc_f(v3(end));
    x3=[0];
    while v3>0
        t3=[t3;t3(end)+t_interval];
        v3=[v3;v3(end)+a3(end)*t_interval];
        FN3=[FN3;-max_FR];
        f3=[f3;calc_f(v3(end))];
        a3=[a3;FN3(end)/(mass*rou)-f3(end)/(mass*rou)];
        x3=[x3;x3(end)+v3(end)*t_interval];
        EU3=[EU3;EU3(end)];
    end


    %Stage2
    t_total=t1(end)+t3(end)+(D-x1(end)-x3(end))/max_V;
    delta_T(v_mean/10+1)=abs(t_total-total_time);
end

[delta_T1,sequence]=sort(delta_T);
nearby=10*sequence(1)-10;

delta_T=zeros(11,1);
v_means=[nearby-10:2:nearby+10];
for i=1:11
    v_mean=v_means(i);
    max_V=v_mean/3.6;
    %Stage 1
    EU1=0;
    t1=[0];
    v1=[0];
    FN1=[max_FN];
    a1=[FN1(end)/(mass*rou)-calc_f(v1(end))/(mass*rou)];
    f1=0;
    x1=[0];
    while v1<max_V
        t1=[t1;t1(end)+t_interval];
        v1=[v1;v1(end)+a1(end)*t_interval];
        FN1=[FN1;max_FN];
        f1=[f1;calc_f(v1(end))];
        a1=[a1;FN1(end)/(mass*rou)-f1(end)/(mass*rou)];
```

```
        x1=[x1;x1(end)+v1(end)*t_interval];
        EU1=[EU1;EU1(end)+FN1(end)*(x1(end)-x1(end-1))];
    end

    v1(end)=max_V;

    %Stage3
    EU3=0;
    t3=[0];
    v3=[max_V];
    FN3=[-max_FR];
    a3=[FN3(end)/(mass*rou)-calc_f(v3(end))/(mass*rou)];
    f3=calc_f(v3(end));
    x3=[0];
    while v3>0
        t3=[t3;t3(end)+t_interval];
        v3=[v3;v3(end)+a3(end)*t_interval];
        FN3=[FN3;-max_FR];
        f3=[f3;calc_f(v3(end))];
        a3=[a3;FN3(end)/(mass*rou)-f3(end)/(mass*rou)];
        x3=[x3;x3(end)+v3(end)*t_interval];
        EU3=[EU3;EU3(end)];
    end


    %Stage2
    t_total=t1(end)+t3(end)+(D-x1(end)-x3(end))/max_V;
    delta_T(i)=abs(t_total-total_time);
end

[delta_T1,sequence]=sort(delta_T);
nearby=nearby-10+sequence(1)*2-2;


delta_T=zeros(11,1);
v_means=[nearby-2:0.4:nearby+2];
for i=1:11
    v_mean=v_means(i);
    max_V=v_mean/3.6;
    %Stage 1
    EU1=0;
    t1=[0];
    v1=[0];
    FN1=[max_FN];
    a1=[FN1(end)/(mass*rou)-calc_f(v1(end))/(mass*rou)];
    f1=0;
    x1=[0];
    while v1<max_V
        t1=[t1;t1(end)+t_interval];
        v1=[v1;v1(end)+a1(end)*t_interval];
        FN1=[FN1;max_FN];
```

```
        f1=[f1;calc_f(v1(end))];
        a1=[a1;FN1(end)/(mass*rou)-f1(end)/(mass*rou)];
        x1=[x1;x1(end)+v1(end)*t_interval];
        EU1=[EU1;EU1(end)+FN1(end)*(x1(end)-x1(end-1))];
    end

    v1(end)=max_V;

    %Stage3
    EU3=0;
    t3=[0];
    v3=[max_V];
    FN3=[-max_FR];
    a3=[FN3(end)/(mass*rou)-calc_f(v3(end))/(mass*rou)];
    f3=calc_f(v3(end));
    x3=[0];
    while v3>0
        t3=[t3;t3(end)+t_interval];
        v3=[v3;v3(end)+a3(end)*t_interval];
        FN3=[FN3;-max_FR];
        f3=[f3;calc_f(v3(end))];
        a3=[a3;FN3(end)/(mass*rou)-f3(end)/(mass*rou)];
        x3=[x3;x3(end)+v3(end)*t_interval];
        EU3=[EU3;EU3(end)];
    end


    %Stage2
    t_total=t1(end)+t3(end)+(D-x1(end)-x3(end))/max_V;
    delta_T(i)=abs(t_total-total_time);
end

[delta_T1,sequence]=sort(delta_T);
nearby=nearby-2+sequence(1)*0.4-0.4;




max_V=nearby/3.6;
%Stage 1
EU1=0;
t1=[0];
v1=[0];
FN1=[max_FN];
a1=[FN1(end)/(mass*rou)-calc_f(v1(end))/(mass*rou)];
f1=0;
x1=[0];
while v1<max_V
    t1=[t1;t1(end)+t_interval];
    v1=[v1;v1(end)+a1(end)*t_interval];
    FN1=[FN1;max_FN];
```

```
    f1=[f1;calc_f(v1(end))];
    a1=[a1;FN1(end)/(mass*rou)-f1(end)/(mass*rou)];
    x1=[x1;x1(end)+v1(end)*t_interval];
    EU1=[EU1;EU1(end)+FN1(end)*(x1(end)-x1(end-1))];
end

v1(end)=max_V;

%Stage3
EU3=0;
t3=[0];
v3=[max_V];
FN3=[-max_FR];
a3=[FN3(end)/(mass*rou)-calc_f(v3(end))/(mass*rou)];
f3=calc_f(v3(end));
x3=[0];
while v3>0
    t3=[t3;t3(end)+t_interval];
    v3=[v3;v3(end)+a3(end)*t_interval];
    FN3=[FN3;-max_FR];
    f3=[f3;calc_f(v3(end))];
    a3=[a3;FN3(end)/(mass*rou)-f3(end)/(mass*rou)];
    x3=[x3;x3(end)+v3(end)*t_interval];
    EU3=[EU3;EU3(end)];
end


EU2=0;
t2=0;
v2=[max_V];
FN2=calc_f(v2(end));
a2=0;
f2=FN2;
x2=[0];
while x2(end)<D-x1(end)-x3(end)
    t2=[t2;t2(end)+t_interval];
    v2=[v2;max_V];
    FN2=[FN2;calc_f(v2(end))];
    f2=[f2;calc_f(v2(end))];
    a2=[a2;0];
    x2=[x2;x2(end)+v2(end)*t_interval];
    EU2=[EU2;EU2(end)+FN2(end)*(x2(end)-x2(end-1))];
end

t=[t1;t2+t1(end);t3+t2(end)+t1(end)];
v=[v1;v2;v3];
FN=[FN1;FN2;FN3];
a=[a1;a2;a3];
f=[f1;f2;f3];
x=[x1;x2+x1(end);x3+x2(end)+x1(end)];
EU=[EU1;EU2+EU1(end);EU3+EU2(end)+EU1(end)];
```

Calc_f.m

```
function f=calc_f(v)
%% 计算阻力

f=2.0895+0.0098*v+0.0065*v^2;
f=f*1000;

end
```

Q2.m

```
clear
close all
clc

data=readmatrix('附件一.xls');


hold on
set(gca,'ylim',[0,100])
plot(data(:,1),data(:,4))
xlabel('距离')
ylabel('速度')

hold off

tic
podu=zeros(6000,1);
for i=1:5144
    for j=2:length(data(:,1))
        if i<=data(j,1) && i>=data(j-1,1)
            podu(i)=data(j-1,2)/1000;
            break
        end
    end
end
podu(5145:end)=data(end,2)/1000;


max_FN=310000;%最大牵引(N)
max_FR=760000;%最大制动(N)
max_FQ=260000;%最大再生制动(N)
rou=1.08;%旋转质量因数
D=5144.7;%站间距(m)
max_V=100/3.6;%最大速(m/s)
mass=176300;%列车质量(kg)
```

```
g=9.81;%重力加速度

p_FN=0.9;%牵引力转换
p_FQ=0.6;%再生制动转换

%% 欧拉法计算最短时间
t_interval=0.5;%微元
max_time=600;

%Stage 1
FG1=sin(atan(podu(1)))*mass*g*rou;
EU1=0;
t1=[0];
v1=[0];
FN1=[max_FN];
a1=[FN1(end)*p_FN/(mass*rou)-calc_f(v1(end))/(mass*rou)];
f1=0;
x1=[0];
while v1<max_V
    t1=[t1;t1(end)+t_interval];
    v1=[v1;v1(end)+a1(end)*t_interval];
    if v1(end)<10
        FN1=[FN1;max_FN];
    else
        FN1=[FN1;max_FN*10/v1(end)];
    end
    f1=[f1;calc_f(v1(end))];
    x1=[x1;x1(end)+v1(end)*t_interval];
    podu1=podu(floor(x1(end))+1);
    FG1=[FG1;sin(atan(podu1))*mass*g*rou;];
    a1=[a1;FN1(end)*p_FN/(mass*rou)-f1(end)/(mass*rou)-FG1(end)/(mass*rou)];
    if a1(end)<0
        d=1;
    end
    if FN1>0
        EU1=[EU1;EU1(end)+FN1(end)*(x1(end)-x1(end-1))];
    elseif FN1>-260000
        EU1=[EU1;EU1(end)+FN1(end)*(x1(end)-x1(end-1))*0.6];
    else
        EU1=[EU1;EU1(end)+(-260000)*(x1(end)-x1(end-1))*0.6];
    end
end

v1(end)=max_V;



%Stage3
EU3=0;
t3=[0];
v3=[100/3.6];
```

```
FN3=[-max_FR-max_FQ];
a3=[FN3(end)/(mass*rou)-calc_f(v3(end))/(mass*rou)];
f3=calc_f(v3(end));
x3=[0];
while v3>86/3.6
    t3=[t3;t3(end)+t_interval];
    v3=[v3;v3(end)+a3(end)*t_interval];
    if v3(end)<17
        FN3=[FN3;-max_FR-max_FQ];
    else
        FN3=[FN3;-max  FR-max  FQ*17/v3(end)];
    end

    f3=[f3;calc_f(v3(end))];
    a3=[a3;FN3(end)/(mass*rou)-f3(end)/(mass*rou)];
    x3=[x3;x3(end)+v3(end)*t_interval];
    EU3=[EU3;EU3(end)+(-260000)*(x3(end)-x3(end-1))*0.6];
end
v3(end)=86/3.6;


%Stage2
FG2=sin(atan(podu(floor(x1(end)))))*mass*g*rou;
EU2=0;
t2=0;
v2=[100/3.6];
FN2=(calc_f(v2(end))+FG2(end))/p_FN;
a2=0;
f2=FN2;
x2=[0];
while x2(end)<4259.1-x1(end)-x3(end)
    t2=[t2;t2(end)+t_interval];
    v2=[v2;100/3.6];
    f2=[f2;calc_f(v2(end))];
    a2=[a2;0];
    x2=[x2;x2(end)+v2(end)*t_interval];
    podu2=podu(floor(x2(end)+x1(end)));
    FG2=[FG2;sin(atan(podu2))*mass*g*rou;];
    if FN2>0
        FN2=[FN2;calc_f(v2(end))+FG2(end)/p_FN];
    else
        FN2=[FN2;calc_f(v2(end))+FG2(end)];
    end
    if FN2>0
        EU2=[EU2;EU2(end)+FN2(end)*(x2(end)-x2(end-1))];
    elseif FN2>-260000
        EU2=[EU2;EU2(end)+FN2(end)*(x2(end)-x2(end-1))*0.6];
    else
        EU2=[EU2;EU2(end)+(-260000)*(x2(end)-x2(end-1))*0.6];
    end
end

```

```
x2(end)=4259-x1(end)-x3(end);


%Stage4
FG4=sin(atan(podu(floor(x3(end)+x2(end)+x1(end)))))*mass*g*rou;
EU4=0;
t4=0;
v4=[86/3.6];
FN4=(calc_f(v4(end))+FG4(end))/p_FN;
a4=0;
f4=FN4*p_FN;
x4=[0];
while x4(end)<4960-4259.1
    t4=[t4;t4(end)+t_interval];
    v4=[v4;86/3.6];

    f4=[f4;calc_f(v4(end))];
    a4=[a4;0];
    x4=[x4;x4(end)+v4(end)*t_interval];
    podu4=podu(floor(x4(end)+x3(end)+x2(end)+x1(end)));
    FG4=[FG4;sin(atan(podu4))*mass*g*rou;];
    FN4=[FN4;calc_f(v4(end))+FG4(end)];
    if FN4(end)>0
        FN4(end)=FN4(end)/p_FN;
    end
    %EU4=[EU4;EU4(end)+FN4(end)*(x4(end)-x4(end-1))];
    if FN4>0
        EU4=[EU4;EU4(end)+FN4(end)*(x4(end)-x4(end-1))];
    elseif FN4>-260000
        EU4=[EU4;EU4(end)+FN4(end)*(x4(end)-x4(end-1))*0.6];
    else
        EU4=[EU4;EU4(end)+(-260000)*(x4(end)-x4(end-1))*0.6];
    end
end


%Stage5
FG5=sin(atan(podu(floor(x4(end)+x3(end)+x2(end)+x1(end)))))*mass*g*rou;
EU5=0;
t5=0;
v5=[86/3.6];
FN5=max_FN*10/v5;
a5=[FN5(end)/(mass*rou)-calc_f(v5(end))/(mass*rou)];
f5=calc_f(v5(end));
x5=[0];
while x5(end)<165
    t5=[t5;t5(end)+t_interval];
    v5=[v5;v5(end)+a5(end)*t_interval];
    if v5(end)<10
        FN5=[FN5;max_FN];
    else
        FN5=[FN5;max_FN*10/v5(end)];
```

```
    end
    f5=[f5;calc_f(v5(end))];

    x5=[x5;x5(end)+v5(end)*t_interval];
    podu5=podu(floor(x5(end)+x4(end)+x3(end)+x2(end)+x1(end))-3);
    FG5=[FG5;sin(atan(podu5))*mass*g*rou;];
    a5=[a5;FN5(end)/(mass*rou)-f5(end)/(mass*rou)-FG5(end)/(mass*rou)];

    if FN5>0
        EU5=[EU5;EU5(end)+FN5(end)*(x5(end)-x5(end-1))];
    elseif FN5>-260000
        EU5=[EU5;EU5(end)+FN5(end)*(x5(end)-x5(end-1))*0.6];
    else
        EU5=[EU5;EU5(end)+(-260000)*(x5(end)-x5(end-1))*0.6];
    end
end


%Stage6

EU6=0;
t6=[0];
v6=[v5(end)];
FN6=[-max_FR-max_FQ*17/v6];
a6=[FN6(end)/(mass*rou)-calc_f(v6(end))/(mass*rou)];
f6=calc_f(v6(end));
x6=[0];
while v6>0
    t6=[t6;t6(end)+t_interval];
    v6=[v6;v6(end)+a6(end)*t_interval];
    if v6(end)<17
        FN6=[FN6;-max_FR-max_FQ];
    else
        FN6=[FN6;-max_FR-max_FQ*17/v6(end)];
    end
    f6=[f6;calc_f(v6(end))];
    a6=[a6;FN6(end)/(mass*rou)-f6(end)/(mass*rou)];
    x6=[x6;x6(end)+v6(end)*t_interval];
    EU6=[EU6;EU6(end)+(-260000)*(x6(end)-x6(end-1))*0.6];
end
v6(end)=0;



t=[t1;t2+t1(end);t3+t2(end)+t1(end);t4+t3(end)+t2(end)+t1(end);t5+t4(end)+t3(end)+t2(end)+t1(end);t6+t5(end)+t4(end)+t3(end)+t2(end)+t1(end)];
v=[v1;v2;v3;v4;v5;v6];
FN=[FN1;FN2;FN3;FN4;FN5;FN6];
a=[a1;a2;a3;a4;a5;a6];
```

```
f=[f1;f2;f3;f4;f5;f6];
x=[x1;x2+x1(end);x3+x2(end)+x1(end);x4+x3(end)+x2(end)+x1(end);x5+x4(end)+x3(end)+x2(end)+x1(end);x6+x5(end)+x4(end)+x3(end)+x2(end)+x1(end)];
EU=[EU1;EU2+EU1(end);EU3+EU2(end)+EU1(end);EU4+EU3(end)+EU2(end)+EU1(end);EU5+EU4(end)+EU3(end)+EU2(end)+EU1(end);EU6+EU5(end)+EU4(end)+EU3(end)+EU2(end)+EU1(end)];
%绘制
toc

subplot(2,2,1)
plot(x,v)
set(gca,'ylim',[0,30])
xlabel('距离(m)')
ylabel('速度(m/s)')
title("速度-距离曲线")

subplot(2,2,2)
plot(x,FN)
set(gca,'ylim',[-1000000,500000])
xlabel('距离(m)')
ylabel('牵引制动力(N)')
title("牵引制动力-距离曲线")

subplot(2,2,3)
plot(x,t)
set(gca,'ylim',[0,510])
xlabel('距离(m)')
ylabel('时间(s)')
title("时间-距离曲线")

subplot(2,2,4)
plot(x,EU)
xlabel('距离(m)')
ylabel('能耗(J)')
title("能耗-距离曲线")
set(gca,'ylim',[0,150000000])


min_time=t(end);
%加 10 秒、20 秒、50 秒、150 秒和 300 秒
time_plus=[10,20,50,150,300];
for tp=time_plus
    tic
    [t,v,FN,a,f,x,EU]=find best scheme2(min time+tp,0.2,podu);
    toc
    figure
    subplot(2,2,1)
    plot(x,v)
    set(gca,'ylim',[0,30])
    xlabel('距离(m)')
    ylabel('速度(m/s)')
    title("速度-距离曲线")

```

```
subplot(2,2,2)
plot(x,FN)
set(gca,'ylim',[-1000000,500000])
xlabel('距离(m)')
ylabel('牵引制动力(N)')
title("牵引制动力-距离曲线")

subplot(2,2,3)
plot(x,t)
set(gca,'ylim',[0,550])
xlabel('距离(m)')
ylabel('时间(s)')
title("时间-距离曲线")

subplot(2,2,4)
plot(x,EU)
set(gca,'ylim',[0,150000000])
xlabel('距离(m)')
ylabel('能耗(J)')
title("能耗-距离曲线")
end
```

find_best_scheme2.m

```
function [t,v,FN,a,f,x,EU]=find_best_scheme2(total_time,step_length,podu)


t_interval=step_length;

max_FN=310000;%最大牵引(N)
max_FR=760000;%最大制动(N)
max_FQ=260000;%最大再生制动(N)
rou=1.08;%旋转质量因数
D=5144.7;%站间距(m)
max_V=100/3.6;%最大速(m/s)
mass=176300;%列车质量(kg)
g=9.81;%重力加速度

p_FN=0.9;%牵引力转换
p_FQ=0.6;%再生制动转换

%% 欧拉法计算最短时间
max_time=600;


delta_T=zeros(11,1);
for v_mean=0:10:100
```

```
    max_V=v_mean/3.6;

%Stage 1
    FG1=sin(atan(podu(1)))*mass*g*rou;
    EU1=0;
    t1=[0];
    v1=[0];
    FN1=[max_FN];
    a1=[FN1(end)*p_FN/(mass*rou)-calc_f(v1(end))/(mass*rou)];
    f1=0;
    x1=[0];
    while v1<max_V
        t1=[t1;t1(end)+t_interval];
        v1=[v1;v1(end)+a1(end)*t_interval];
        if v1(end)<10
            FN1=[FN1;max_FN];
        else
            FN1=[FN1;max_FN*10/v1(end)];
        end
        f1=[f1;calc_f(v1(end))];
        x1=[x1;x1(end)+v1(end)*t_interval];
        podu1=podu(floor(x1(end))+1);
        FG1=[FG1;sin(atan(podu1))*mass*g*rou;];
        a1=[a1;FN1(end)*p_FN/(mass*rou)-f1(end)/(mass*rou)-FG1(end)/(mass*rou)];
        if a1(end)<0
            d=1;
        end
        if FN1>0
            EU1=[EU1;EU1(end)+FN1(end)*(x1(end)-x1(end-1))];
        elseif FN1>-260000
            EU1=[EU1;EU1(end)+FN1(end)*(x1(end)-x1(end-1))*0.6];
        else
            EU1=[EU1;EU1(end)+(-260000)*(x1(end)-x1(end-1))*0.6];
        end
    end

    v1(end)=max_V;


    if max_V>86/3.6

        %Stage3
        EU3=0;
        t3=[0];
        v3=[100/3.6];
        FN3=[-max_FR-max_FQ];
        a3=[FN3(end)/(mass*rou)-calc_f(v3(end))/(mass*rou)];
        f3=calc_f(v3(end));
        x3=[0];
        while v3>86/3.6
            t3=[t3;t3(end)+t_interval];
            v3=[v3;v3(end)+a3(end)*t_interval];
```

```
            if v3(end)<17
                FN3=[FN3;-max_FR-max_FQ];
            else
                FN3=[FN3;-max_FR-max_FQ*17/v3(end)];
            end

            f3=[f3;calc_f(v3(end))];
            a3=[a3;FN3(end)/(mass*rou)-f3(end)/(mass*rou)];
            x3=[x3;x3(end)+v3(end)*t_interval];
            EU3=[EU3;EU3(end)+(-260000)*(x3(end)-x3(end-1))*0.6];
        end
        v3(end)=86/3.6;

    else
        %Stage3
        EU3=0;
        t3=[0];
        v3=max_V;
        FN3=[-max_FR-max_FQ];
        a3=[FN3(end)/(mass*rou)-calc_f(v3(end))/(mass*rou)];
        f3=calc_f(v3(end));
        x3=[0];
        while v3>0
            t3=[t3;t3(end)+t_interval];
            v3=[v3;v3(end)+a3(end)*t_interval];
            if v3(end)<17
                FN3=[FN3;-max_FR-max_FQ];
            else
                FN3=[FN3;-max_FR-max_FQ*17/v3(end)];
            end
            f3=[f3;calc_f(v3(end))];
            a3=[a3;FN3(end)/(mass*rou)-f3(end)/(mass*rou)];
            x3=[x3;x3(end)+v3(end)*t_interval];
            EU3=[EU3;EU3(end)+(-260000)*(x3(end)-x3(end-1))*0.6];
        end
        v3(end)=0;
    end

    %Stage2
    t_total=t1(end)+t3(end)+(D-x1(end)-x3(end))/max_V;
    delta_T(v_mean/10+1)=abs(t_total-total_time);
end

[delta_T1,sequence]=sort(delta_T);
nearby=10*sequence(1)-10;

delta_T=zeros(11,1);
v_means=[nearby-10:2:nearby+10];
for i=1:11
    v_mean=v_means(i);
    max_V=v_mean/3.6;
%Stage 1
```

```
FG1=sin(atan(podu(1)))*mass*g*rou;
EU1=0;
t1=[0];
v1=[0];
FN1=[max_FN];
a1=[FN1(end)*p_FN/(mass*rou)-calc_f(v1(end))/(mass*rou)];
f1=0;
x1=[0];
while v1<max_V
    t1=[t1;t1(end)+t_interval];
    v1=[v1;v1(end)+a1(end)*t  interval];
    if v1(end)<10
        FN1=[FN1;max  FN];
    else
        FN1=[FN1;max_FN*10/v1(end)];
    end
    f1=[f1;calc_f(v1(end))];
    x1=[x1;x1(end)+v1(end)*t_interval];
    podu1=podu(floor(x1(end))+1);
    FG1=[FG1;sin(atan(podu1))*mass*g*rou;];
    a1=[a1;FN1(end)*p_FN/(mass*rou)-f1(end)/(mass*rou)-FG1(end)/(mass*rou)];
    if a1(end)<0
        d=1;
    end
    if FN1>0
        EU1=[EU1;EU1(end)+FN1(end)*(x1(end)-x1(end-1))];
    elseif FN1>-260000
        EU1=[EU1;EU1(end)+FN1(end)*(x1(end)-x1(end-1))*0.6];
    else
        EU1=[EU1;EU1(end)+(-260000)*(x1(end)-x1(end-1))*0.6];
    end
end

v1(end)=max_V;


if max  V>86/3.6

    %Stage3
    EU3=0;
    t3=[0];
    v3=[100/3.6];
    FN3=[-max_FR-max_FQ];
    a3=[FN3(end)/(mass*rou)-calc_f(v3(end))/(mass*rou)];
    f3=calc_f(v3(end));
    x3=[0];
    while v3>86/3.6
        t3=[t3;t3(end)+t_interval];
        v3=[v3;v3(end)+a3(end)*t  interval];
        if v3(end)<17
            FN3=[FN3;-max  FR-max  FQ];
        else
```

```
            FN3=[FN3;-max_FR-max_FQ*17/v3(end)];
        end

        f3=[f3;calc_f(v3(end))];
        a3=[a3;FN3(end)/(mass*rou)-f3(end)/(mass*rou)];
        x3=[x3;x3(end)+v3(end)*t_interval];
        EU3=[EU3;EU3(end)+(-260000)*(x3(end)-x3(end-1))*0.6];
    end
    v3(end)=86/3.6;

else
    %Stage3
    EU3=0;
    t3=[0];
    v3=max_V;
    FN3=[-max_FR-max_FQ];
    a3=[FN3(end)/(mass*rou)-calc_f(v3(end))/(mass*rou)];
    f3=calc_f(v3(end));
    x3=[0];
    while v3>0
        t3=[t3;t3(end)+t_interval];
        v3=[v3;v3(end)+a3(end)*t_interval];
        if v3(end)<17
            FN3=[FN3;-max_FR-max_FQ];
        else
            FN3=[FN3;-max_FR-max_FQ*17/v3(end)];
        end
        f3=[f3;calc_f(v3(end))];
        a3=[a3;FN3(end)/(mass*rou)-f3(end)/(mass*rou)];
        x3=[x3;x3(end)+v3(end)*t_interval];
        EU3=[EU3;EU3(end)+(-260000)*(x3(end)-x3(end-1))*0.6];
    end
    v3(end)=0;
end

%Stage2
t_total=t1(end)+t3(end)+(D-x1(end)-x3(end))/max_V;
delta_T(i)=abs(t_total-total_time);
end

[delta_T1,sequence]=sort(delta_T);
nearby=nearby-10+sequence(1)*2-2;


delta_T=zeros(11,1);
v_means=[nearby-2:0.4:nearby+2];
for i=1:11
    v_mean=v_means(i);
    max_V=v_mean/3.6;
 %Stage 1
    FG1=sin(atan(podu(1)))*mass*g*rou;
```

```
EU1=0;
t1=[0];
v1=[0];
FN1=[max_FN];
a1=[FN1(end)*p_FN/(mass*rou)-calc_f(v1(end))/(mass*rou)];
f1=0;
x1=[0];
while v1<max_V
    t1=[t1;t1(end)+t_interval];
    v1=[v1;v1(end)+a1(end)*t_interval];
    if v1(end)<10
        FN1=[FN1;max  FN];
    else
        FN1=[FN1;max_FN*10/v1(end)];
    end
    f1=[f1;calc_f(v1(end))];
    x1=[x1;x1(end)+v1(end)*t_interval];
    podu1=podu(floor(x1(end))+1);
    FG1=[FG1;sin(atan(podu1))*mass*g*rou;];
    a1=[a1;FN1(end)*p_FN/(mass*rou)-f1(end)/(mass*rou)-FG1(end)/(mass*rou)];
    if a1(end)<0
        d=1;
    end
    if FN1>0
        EU1=[EU1;EU1(end)+FN1(end)*(x1(end)-x1(end-1))];
    elseif FN1>-260000
        EU1=[EU1;EU1(end)+FN1(end)*(x1(end)-x1(end-1))*0.6];
    else
        EU1=[EU1;EU1(end)+(-260000)*(x1(end)-x1(end-1))*0.6];
    end
end

v1(end)=max_V;


if max_V>86/3.6

    %Stage3
    EU3=0;
    t3=[0];
    v3=[100/3.6];
    FN3=[-max_FR-max_FQ];
    a3=[FN3(end)/(mass*rou)-calc_f(v3(end))/(mass*rou)];
    f3=calc_f(v3(end));
    x3=[0];
    while v3>86/3.6
        t3=[t3;t3(end)+t_interval];
        v3=[v3;v3(end)+a3(end)*t_interval];
        if v3(end)<17
            FN3=[FN3;-max_FR-max_FQ];
        else
            FN3=[FN3;-max_FR-max_FQ*17/v3(end)];
```

```
            end

            f3=[f3;calc_f(v3(end))];
            a3=[a3;FN3(end)/(mass*rou)-f3(end)/(mass*rou)];
            x3=[x3;x3(end)+v3(end)*t_interval];
            EU3=[EU3;EU3(end)+(-260000)*(x3(end)-x3(end-1))*0.6];
        end
        v3(end)=86/3.6;

    else
        %Stage3
        EU3=0;
        t3=[0];
        v3=max_V;
        FN3=[-max_FR-max_FQ];
        a3=[FN3(end)/(mass*rou)-calc_f(v3(end))/(mass*rou)];
        f3=calc_f(v3(end));
        x3=[0];
        while v3>0
            t3=[t3;t3(end)+t_interval];
            v3=[v3;v3(end)+a3(end)*t_interval];
            if v3(end)<17
                FN3=[FN3;-max_FR-max_FQ];
            else
                FN3=[FN3;-max_FR-max_FQ*17/v3(end)];
            end
            f3=[f3;calc_f(v3(end))];
            a3=[a3;FN3(end)/(mass*rou)-f3(end)/(mass*rou)];
            x3=[x3;x3(end)+v3(end)*t_interval];
            EU3=[EU3;EU3(end)+(-260000)*(x3(end)-x3(end-1))*0.6];
        end
        v3(end)=0;
    end

    %Stage2
    t_total=t1(end)+t3(end)+(D-x1(end)-x3(end))/max_V;
    delta_T(i)=abs(t_total-total_time);
end

[delta_T1,sequence]=sort(delta_T);
nearby=nearby-2+sequence(1)*0.4-0.4;




max_V=nearby/3.6;

if max_V>86/3.6
    %Stage 1
    FG1=sin(atan(podu(1)))*mass*g*rou;
    EU1=0;
```

```
t1=[0];
v1=[0];
FN1=[max_FN];
a1=[FN1(end)*p_FN/(mass*rou)-calc_f(v1(end))/(mass*rou)];
f1=0;
x1=[0];
while v1<max_V
    t1=[t1;t1(end)+t_interval];
    v1=[v1;v1(end)+a1(end)*t_interval];
    if v1(end)<10
        FN1=[FN1;max_FN];
    else
        FN1=[FN1;max_FN*10/v1(end)];
    end
    f1=[f1;calc_f(v1(end))];
    x1=[x1;x1(end)+v1(end)*t_interval];
    podu1=podu(floor(x1(end))+1);
    FG1=[FG1;sin(atan(podu1))*mass*g*rou;];
    a1=[a1;FN1(end)*p_FN/(mass*rou)-f1(end)/(mass*rou)-FG1(end)/(mass*rou)];
    if a1(end)<0
        d=1;
    end
    if FN1>0
        EU1=[EU1;EU1(end)+FN1(end)*(x1(end)-x1(end-1))];
    elseif FN1>-260000
        EU1=[EU1;EU1(end)+FN1(end)*(x1(end)-x1(end-1))*0.6];
    else
        EU1=[EU1;EU1(end)+(-260000)*(x1(end)-x1(end-1))*0.6];
    end
end

v1(end)=max_V;




%Stage3
EU3=0;
t3=[0];
v3=max_V;
FN3=[-max_FR-max_FQ];
a3=[FN3(end)/(mass*rou)-calc_f(v3(end))/(mass*rou)];
f3=calc_f(v3(end));
x3=[0];
while v3>86/3.6
    t3=[t3;t3(end)+t_interval];
    v3=[v3;v3(end)+a3(end)*t_interval];
    if v3(end)<17
        FN3=[FN3;-max_FR-max_FQ];
    else
        FN3=[FN3;-max_FR-max_FQ*17/v3(end)];
    end
```

```
388.
389.        f3=[f3;calc_f(v3(end))];
390.        a3=[a3;FN3(end)/(mass*rou)-f3(end)/(mass*rou)];
391.        x3=[x3;x3(end)+v3(end)*t_interval];
392.        EU3=[EU3;EU3(end)+(-260000)*(x3(end)-x3(end-1))*0.6];
393.    end
394.    v3(end)=86/3.6;
395.
396.
397.    %Stage2
398.    FG2=sin(atan(podu(floor(x1(end)))))*mass*g*rou;
399.    EU2=0;
400.    t2=0;
401.    v2=max_V;
402.    FN2=(calc_f(v2(end))+FG2(end))/p_FN;
403.    a2=0;
404.    f2=FN2;
405.    x2=[0];
406.    while x2(end)<4259.1-x1(end)-x3(end)
407.        t2=[t2;t2(end)+t_interval];
408.        v2=[v2;max_V];
409.        f2=[f2;calc_f(v2(end))];
410.        a2=[a2;0];
411.        x2=[x2;x2(end)+v2(end)*t_interval];
412.        podu2=podu(floor(x2(end)+x1(end)));
413.        FG2=[FG2;sin(atan(podu2))*mass*g*rou;];
414.        if FN2>0
415.            FN2=[FN2;calc_f(v2(end))+FG2(end)/p_FN];
416.        else
417.            FN2=[FN2;calc_f(v2(end))+FG2(end)];
418.        end
419.        if FN2>0
420.            EU2=[EU2;EU2(end)+FN2(end)*(x2(end)-x2(end-1))];
421.        elseif FN2>-260000
422.            EU2=[EU2;EU2(end)+FN2(end)*(x2(end)-x2(end-1))*0.6];
423.        else
424.            EU2=[EU2;EU2(end)+(-260000)*(x2(end)-x2(end-1))*0.6];
425.        end
426.    end
427.
428.    x2(end)=4259-x1(end)-x3(end);
429.
430.
431.    %Stage4
432.    FG4=sin(atan(podu(floor(x3(end)+x2(end)+x1(end)))))*mass*g*rou;
433.    EU4=0;
434.    t4=0;
435.    v4=[86/3.6];
436.    FN4=(calc_f(v4(end))+FG4(end))/p_FN;
437.    a4=0;
438.    f4=FN4*p_FN;
439.    x4=[0];
```

```
while x4(end)<4960-4259.1
    t4=[t4;t4(end)+t_interval];
    v4=[v4;86/3.6];

    f4=[f4;calc_f(v4(end))];
    a4=[a4;0];
    x4=[x4;x4(end)+v4(end)*t_interval];
    podu4=podu(floor(x4(end)+x3(end)+x2(end)+x1(end)));
    FG4=[FG4;sin(atan(podu4))*mass*g*rou;];
    FN4=[FN4;calc_f(v4(end))+FG4(end)];
    if FN4(end)>0
        FN4(end)=FN4(end)/p  FN;
    end
    %EU4=[EU4;EU4(end)+FN4(end)*(x4(end)-x4(end-1))];
    if FN4>0
        EU4=[EU4;EU4(end)+FN4(end)*(x4(end)-x4(end-1))];
    elseif FN4>-260000
        EU4=[EU4;EU4(end)+FN4(end)*(x4(end)-x4(end-1))*0.6];
    else
        EU4=[EU4;EU4(end)+(-260000)*(x4(end)-x4(end-1))*0.6];
    end
end


%Stage5
FG5=sin(atan(podu(floor(x4(end)+x3(end)+x2(end)+x1(end)))))*mass*g*rou;
EU5=0;
t5=0;
v5=[86/3.6];
FN5=max_FN*10/v5;
a5=[FN5(end)/(mass*rou)-calc_f(v5(end))/(mass*rou)];
f5=calc_f(v5(end));
x5=[0];
while x5(end)<165
    t5=[t5;t5(end)+t  interval];
    v5=[v5;v5(end)+a5(end)*t_interval];
    if v5(end)<10
        FN5=[FN5;max  FN];
    else
        FN5=[FN5;max_FN*10/v5(end)];
    end
    f5=[f5;calc_f(v5(end))];

    x5=[x5;x5(end)+v5(end)*t_interval];
    podu5=podu(floor(x5(end)+x4(end)+x3(end)+x2(end)+x1(end))-3);
    FG5=[FG5;sin(atan(podu5))*mass*g*rou;];
    a5=[a5;FN5(end)/(mass*rou)-f5(end)/(mass*rou)-FG5(end)/(mass*rou)];

    if FN5>0
        EU5=[EU5;EU5(end)+FN5(end)*(x5(end)-x5(end-1))];
    elseif FN5>-260000
        EU5=[EU5;EU5(end)+FN5(end)*(x5(end)-x5(end-1))*0.6];
```

```
    else
        EU5=[EU5;EU5(end)+(-260000)*(x5(end)-x5(end-1))*0.6];
    end
end


%Stage6

EU6=0;
t6=[0];
v6=[v5(end)];
FN6=[-max_FR-max_FQ*17/v6];
a6=[FN6(end)/(mass*rou)-calc_f(v6(end))/(mass*rou)];
f6=calc_f(v6(end));
x6=[0];
while v6>0
    t6=[t6;t6(end)+t_interval];
    v6=[v6;v6(end)+a6(end)*t_interval];
    if v6(end)<17
        FN6=[FN6;-max_FR-max_FQ];
    else
        FN6=[FN6;-max_FR-max_FQ*17/v6(end)];
    end
    f6=[f6;calc_f(v6(end))];
    a6=[a6;FN6(end)/(mass*rou)-f6(end)/(mass*rou)];
    x6=[x6;x6(end)+v6(end)*t_interval];
    EU6=[EU6;EU6(end)+(-260000)*(x6(end)-x6(end-1))*0.6];
end
v6(end)=0;


t=[t1;t2+t1(end);t3+t2(end)+t1(end);t4+t3(end)+t2(end)+t1(end);t5+t4(end)+t3(end)+t2(end)+t1(end);t6+t5(end)+t4(end)+t3(end)+t2(end)+t1(end)];
v=[v1;v2;v3;v4;v5;v6];
FN=[FN1;FN2;FN3;FN4;FN5;FN6];
a=[a1;a2;a3;a4;a5;a6];
f=[f1;f2;f3;f4;f5;f6];
x=[x1;x2+x1(end);x3+x2(end)+x1(end);x4+x3(end)+x2(end)+x1(end);x5+x4(end)+x3(end)+x2(end)+x1(end);x6+x5(end)+x4(end)+x3(end)+x2(end)+x1(end)];
EU=[EU1;EU2+EU1(end);EU3+EU2(end)+EU1(end);EU4+EU3(end)+EU2(end)+EU1(end);EU5+EU4(end)+EU3(end)+EU2(end)+EU1(end);EU6+EU5(end)+EU4(end)+EU3(end)+EU2(end)+EU1(end)];


else
    %Stage 1
    FG1=sin(atan(podu(1)))*mass*g*rou;
    EU1=0;
    t1=[0];
    v1=[0];
    FN1=[max_FN];
    a1=[FN1(end)*p_FN/(mass*rou)-calc_f(v1(end))/(mass*rou)];
    f1=0;
    x1=[0];
    while v1<max_V
```

```
    t1=[t1;t1(end)+t_interval];
    v1=[v1;v1(end)+a1(end)*t_interval];
    if v1(end)<10
        FN1=[FN1;max_FN];
    else
        FN1=[FN1;max_FN*10/v1(end)];
    end
    f1=[f1;calc_f(v1(end))];
    x1=[x1;x1(end)+v1(end)*t_interval];
    podu1=podu(floor(x1(end))+1);
    FG1=[FG1;sin(atan(podu1))*mass*g*rou;];
    a1=[a1;FN1(end)*p  FN/(mass*rou)-f1(end)/(mass*rou)-FG1(end)/(mass*rou)];
    if a1(end)<0
        d=1;
    end
    if FN1>0
        EU1=[EU1;EU1(end)+FN1(end)*(x1(end)-x1(end-1))];
    elseif FN1>-260000
        EU1=[EU1;EU1(end)+FN1(end)*(x1(end)-x1(end-1))*0.6];
    else
        EU1=[EU1;EU1(end)+(-260000)*(x1(end)-x1(end-1))*0.6];
    end
end

v1(end)=max  V;

%Stage3
EU3=0;
t3=[0];
v3=max_V;
FN3=[-max_FR-max_FQ];
a3=[FN3(end)/(mass*rou)-calc_f(v3(end))/(mass*rou)];
f3=calc_f(v3(end));
x3=[0];
while v3>0
    t3=[t3;t3(end)+t_interval];
    v3=[v3;v3(end)+a3(end)*t  interval];
    if v3(end)<17
        FN3=[FN3;-max  FR-max  FQ];
    else
        FN3=[FN3;-max_FR-max_FQ*17/v3(end)];
    end
    f3=[f3;calc_f(v3(end))];
    a3=[a3;FN3(end)/(mass*rou)-f3(end)/(mass*rou)];
    x3=[x3;x3(end)+v3(end)*t_interval];
    EU3=[EU3;EU3(end)+(-260000)*(x3(end)-x3(end-1))*0.6];
end
v3(end)=0;

%Stage2
FG2=sin(atan(podu(floor(x1(end)))))*mass*g*rou;
EU2=0;
```

```
    t2=0;
    v2=max_V;
    FN2=(calc_f(v2(end))+FG2(end))/p_FN;
    a2=0;
    f2=FN2;
    x2=[0];
    while x2(end)<D-x1(end)-x3(end)
        t2=[t2;t2(end)+t_interval];
        v2=[v2;max_V];
        f2=[f2;calc_f(v2(end))];
        a2=[a2;0];
        x2=[x2;x2(end)+v2(end)*t  interval];
        podu2=podu(floor(x2(end)+x1(end)));
        FG2=[FG2;sin(atan(podu2))*mass*g*rou;];
        if FN2>0
            FN2=[FN2;calc_f(v2(end))+FG2(end)/p_FN];
        else
            FN2=[FN2;calc_f(v2(end))+FG2(end)];
        end
        if FN2>0
            EU2=[EU2;EU2(end)+FN2(end)*(x2(end)-x2(end-1))];
        elseif FN2>-260000
            EU2=[EU2;EU2(end)+FN2(end)*(x2(end)-x2(end-1))*0.6];
        else
            EU2=[EU2;EU2(end)+(-260000)*(x2(end)-x2(end-1))*0.6];
        end
    end

    x2(end)=D-x1(end)-x3(end);

    t=[t1;t2+t1(end);t3+t2(end)+t1(end)];
    v=[v1;v2;v3];
    FN=[FN1;FN2;FN3];
    a=[a1;a2;a3];
    f=[f1;f2;f3];
    x=[x1;x2+x1(end);x3+x2(end)+x1(end)];
    EU=[EU1;EU2+EU1(end);EU3+EU2(end)+EU1(end)];

end
```

Q3.m

```
clear
close all
clc


clear
close all
clc
```

```
9.
10. data=readmatrix('附件一.xls');
11.
12.
13.
14. podu=zeros(6000,1);
15. for i=1:5144
16.     for j=2:length(data(:,1))
17.         if i<=data(j,1) && i>=data(j-1,1)
18.             podu(i)=data(j-1,2)/1000;
19.             break
20.         end
21.     end
22. end
23. podu(5145:end)=data(end,2)/1000;
24.
25.
26. max_FN=310000;%最大牵引(N)
27. max_FR=760000;%最大制动(N)
28. max_FQ=260000;%最大再生制动(N)
29. rou=1.08;%旋转质量因数
30. D=5144.7;%站间距(m)
31. max_V=100/3.6;%最大速(m/s)
32. mass=176300;%列车质量(kg)
33. g=9.81;%重力加速度
34.
35. p_FN=0.9;%牵引力转换
36. p_FQ=0.6;%再生制动转换
37.
38. %% 欧拉法计算最短时间
39. t_interval=0.05;%微元
40. max_time=600;
41.
42. %Stage 1
43. FG1=sin(atan(podu(1)))*mass*g*rou;
44. EU1=0;
45. t1=[0];
46. v1=[0];
47. FN1=[max_FN];
48. a1=[FN1(end)*p  FN/(mass*rou)-calc  f(v1(end))/(mass*rou)];
49. f1=0;
50. x1=[0];
51. while v1<max_V
52.     t1=[t1;t1(end)+t_interval];
53.     v1=[v1;v1(end)+a1(end)*t_interval];
54.     if v1(end)<10
55.         FN1=[FN1;max_FN];
56.     else
57.         FN1=[FN1;max_FN*10/v1(end)];
58.     end
59.     f1=[f1;calc_f(v1(end))];
```

```
    x1=[x1;x1(end)+v1(end)*t_interval];
    podu1=podu(floor(x1(end))+1);
    FG1=[FG1;sin(atan(podu1))*mass*g*rou;];
    a1=[a1;FN1(end)*p_FN/(mass*rou)-f1(end)/(mass*rou)-FG1(end)/(mass*rou)];
    if a1(end)<0
        d=1;
    end
    if FN1>0
        EU1=[EU1;EU1(end)+FN1(end)*(x1(end)-x1(end-1))];
    elseif FN1>-260000
        EU1=[EU1;EU1(end)+FN1(end)*(x1(end)-x1(end-1))*0.6];
    else
        EU1=[EU1;EU1(end)+(-260000)*(x1(end)-x1(end-1))*0.6];
    end
end

v1(end)=max_V;



%Stage3
EU3=0;
t3=[0];
v3=[100/3.6];
FN3=[-max_FR-max_FQ];
a3=[FN3(end)/(mass*rou)-calc_f(v3(end))/(mass*rou)];
f3=calc_f(v3(end));
x3=[0];
while v3>86/3.6
    t3=[t3;t3(end)+t_interval];
    v3=[v3;v3(end)+a3(end)*t_interval];
    if v3(end)<17
        FN3=[FN3;-max_FR-max_FQ];
    else
        FN3=[FN3;-max_FR-max_FQ*17/v3(end)];
    end

    f3=[f3;calc_f(v3(end))];
    a3=[a3;FN3(end)/(mass*rou)-f3(end)/(mass*rou)];
    x3=[x3;x3(end)+v3(end)*t_interval];
    EU3=[EU3;EU3(end)+(-260000)*(x3(end)-x3(end-1))*0.6];
end
v3(end)=86/3.6;


%Stage2
FG2=sin(atan(podu(floor(x1(end)))))*mass*g*rou;
EU2=0;
t2=0;
v2=[100/3.6];
FN2=(calc_f(v2(end))+FG2(end))/p_FN;
```

```
a2=0;
f2=FN2;
x2=[0];
while x2(end)<4259.1-x1(end)-x3(end)
    t2=[t2;t2(end)+t_interval];
    v2=[v2;100/3.6];
    f2=[f2;calc_f(v2(end))];
    a2=[a2;0];
    x2=[x2;x2(end)+v2(end)*t_interval];
    podu2=podu(floor(x2(end)+x1(end)));
    FG2=[FG2;sin(atan(podu2))*mass*g*rou;];
    if FN2>0
        FN2=[FN2;calc  f(v2(end))+FG2(end)/p  FN];
    else
        FN2=[FN2;calc_f(v2(end))+FG2(end)];
    end
    if FN2>0
        EU2=[EU2;EU2(end)+FN2(end)*(x2(end)-x2(end-1))];
    elseif FN2>-260000
        EU2=[EU2;EU2(end)+FN2(end)*(x2(end)-x2(end-1))*0.6];
    else
        EU2=[EU2;EU2(end)+(-260000)*(x2(end)-x2(end-1))*0.6];
    end
end

x2(end)=4259-x1(end)-x3(end);


%Stage4
FG4=sin(atan(podu(floor(x3(end)+x2(end)+x1(end)))))*mass*g*rou;
EU4=0;
t4=0;
v4=[86/3.6];
FN4=(calc_f(v4(end))+FG4(end))/p_FN;
a4=0;
f4=FN4*p_FN;
x4=[0];
while x4(end)<4960-4259.1
    t4=[t4;t4(end)+t  interval];
    v4=[v4;86/3.6];

    f4=[f4;calc_f(v4(end))];
    a4=[a4;0];
    x4=[x4;x4(end)+v4(end)*t_interval];
    podu4=podu(floor(x4(end)+x3(end)+x2(end)+x1(end)));
    FG4=[FG4;sin(atan(podu4))*mass*g*rou;];
    FN4=[FN4;calc_f(v4(end))+FG4(end)];
    if FN4(end)>0
        FN4(end)=FN4(end)/p  FN;
    end
    %EU4=[EU4;EU4(end)+FN4(end)*(x4(end)-x4(end-1))];
    if FN4>0
```

```
        EU4=[EU4;EU4(end)+FN4(end)*(x4(end)-x4(end-1))];
    elseif FN4>-260000
        EU4=[EU4;EU4(end)+FN4(end)*(x4(end)-x4(end-1))*0.6];
    else
        EU4=[EU4;EU4(end)+(-260000)*(x4(end)-x4(end-1))*0.6];
    end
end


%Stage5
FG5=sin(atan(podu(floor(x4(end)+x3(end)+x2(end)+x1(end)))))*mass*g*rou;
EU5=0;
t5=0;
v5=[86/3.6];
FN5=max_FN*10/v5;
a5=[FN5(end)/(mass*rou)-calc_f(v5(end))/(mass*rou)];
f5=calc_f(v5(end));
x5=[0];
while x5(end)<165
    t5=[t5;t5(end)+t_interval];
    v5=[v5;v5(end)+a5(end)*t_interval];
    if v5(end)<10
        FN5=[FN5;max_FN];
    else
        FN5=[FN5;max_FN*10/v5(end)];
    end
    f5=[f5;calc_f(v5(end))];

    x5=[x5;x5(end)+v5(end)*t_interval];
    podu5=podu(floor(x5(end)+x4(end)+x3(end)+x2(end)+x1(end))-3);
    FG5=[FG5;sin(atan(podu5))*mass*g*rou;];
    a5=[a5;FN5(end)/(mass*rou)-f5(end)/(mass*rou)-FG5(end)/(mass*rou)];

    if FN5>0
        EU5=[EU5;EU5(end)+FN5(end)*(x5(end)-x5(end-1))];
    elseif FN5>-260000
        EU5=[EU5;EU5(end)+FN5(end)*(x5(end)-x5(end-1))*0.6];
    else
        EU5=[EU5;EU5(end)+(-260000)*(x5(end)-x5(end-1))*0.6];
    end
end


%Stage6

EU6=0;
t6=[0];
v6=[v5(end)];
FN6=[-max_FR-max_FQ*17/v6];
a6=[FN6(end)/(mass*rou)-calc_f(v6(end))/(mass*rou)];
f6=calc_f(v6(end));
x6=[0];
```

```
while v6>0
    t6=[t6;t6(end)+t_interval];
    v6=[v6;v6(end)+a6(end)*t_interval];
    if v6(end)<17
        FN6=[FN6;-max_FR-max_FQ];
    else
        FN6=[FN6;-max_FR-max_FQ*17/v6(end)];
    end
    f6=[f6;calc_f(v6(end))];
    a6=[a6;FN6(end)/(mass*rou)-f6(end)/(mass*rou)];
    x6=[x6;x6(end)+v6(end)*t  interval];
    EU6=[EU6;EU6(end)+(-260000)*(x6(end)-x6(end-1))*0.6];
end
v6(end)=0;




t=[t1;t2+t1(end);t3+t2(end)+t1(end);t4+t3(end)+t2(end)+t1(end);t5+t4(end)+t3(end)+t2(end)+t1(end);t6+t5(end)+t4(end)+t3(end)+t2(end)+t1(end)];
v=[v1;v2;v3;v4;v5;v6];
FN=[FN1;FN2;FN3;FN4;FN5;FN6];
a=[a1;a2;a3;a4;a5;a6];
f=[f1;f2;f3;f4;f5;f6];
x=[x1;x2+x1(end);x3+x2(end)+x1(end);x4+x3(end)+x2(end)+x1(end);x5+x4(end)+x3(end)+x2(end)+x1(end);x6+x5(end)+x4(end)+x3(end)+x2(end)+x1(end)];
EU=[EU1;EU2+EU1(end);EU3+EU2(end)+EU1(end);EU4+EU3(end)+EU2(end)+EU1(end);EU5+EU4(end)+EU3(end)+EU2(end)+EU1(end);EU6+EU5(end)+EU4(end)+EU3(end)+EU2(end)+EU1(end)];

tic
min_time=t(end);
%加 10 秒、20 秒、50 秒、150 秒和 300 秒
time_plus=[320-min_time];
for tp=time_plus
    [t,v,FN,a,f,x,EU]=find_best_scheme2(min_time+tp,0.2,podu);
    figure
    subplot(2,2,1)
    plot(x,v)
    set(gca,'ylim',[0,30])
    xlabel('距离(m)')
    ylabel('速度(m/s)')
    title("速度-距离曲线")

    subplot(2,2,2)
    plot(x,FN)
    set(gca,'ylim',[-1000000,500000])
    xlabel('距离(m)')
    ylabel('牵引制动力(N)')
    title("牵引制动力-距离曲线")

```

```
    subplot(2,2,3)
    plot(x,t)
    set(gca,'ylim',[0,550])
    xlabel('距离(m)')
    ylabel('时间(s)')
    title("时间-距离曲线")

    subplot(2,2,4)
    plot(x,EU)
    set(gca,'ylim',[0,150000000])
    xlabel('距离(m)')
    ylabel('能耗(J)')
    title("能耗-距离曲线")
end

tic
for i=1:length(x)
    if x(i)>2000
        x0=x(i);
        v0=v(i);
        t0=t(i);
        number=i;
        break
    end
end
target=12.505;



%Stage3
EU3=0;
t3=0;
v3=v0;
FN3=-max_FR-max_FQ;
if v0>17
    FN3=-max_FR-max_FQ*17/v3(end);
end
a3=FN3(end)/(mass*rou)-calc_f(v3(end))/(mass*rou);
f3=calc_f(v3(end));
x3=0;
while v3>target
    t3=[t3;t3(end)+t_interval];
    v3=[v3;v3(end)+a3(end)*t_interval];
    if v3(end)<17
        FN3=[FN3;-max_FR-max_FQ];
    else
        FN3=[FN3;-max_FR-max_FQ*17/v3(end)];
    end

    f3=[f3;calc_f(v3(end))];
    a3=[a3;FN3(end)/(mass*rou)-f3(end)/(mass*rou)];
    x3=[x3;x3(end)+v3(end)*t_interval];
```

```
    EU3=[EU3;EU3(end)+(-260000)*(x3(end)-x3(end-1))*0.6];
end
v3(end)=target;


%Stage5
EU5=0;
t5=0;
v5=target;
FN5=-max_FR-max_FQ;
if v5>17
    FN5=-max_FR-max_FQ*17/v5(end);
end
a5=FN5(end)/(mass*rou)-calc_f(v5(end))/(mass*rou);
f5=calc_f(v5(end));
x5=0;
while v5>0
    t5=[t5;t5(end)+t_interval];
    v5=[v5;v5(end)+a5(end)*t_interval];
    if v5(end)<17
        FN5=[FN5;-max_FR-max_FQ];
    else
        FN5=[FN5;-max_FR-max_FQ*17/v5(end)];
    end

    f5=[f5;calc_f(v5(end))];
    a5=[a5;FN5(end)/(mass*rou)-f5(end)/(mass*rou)];
    x5=[x5;x5(end)+v5(end)*t_interval];
    EU5=[EU5;EU5(end)+(-260000)*(x5(end)-x5(end-1))*0.6];
end
v5(end)=0;


%Stage4
FG4=sin(atan(podu(floor(x1(end)))))*mass*g*rou;
EU4=0;
t4=0;
v4=target;
FN4=(calc_f(v4(end))+FG4(end));

a4=0;
f4=FN4;
x4=0;
while x4(end)<D-2000-x3(end)-x5(end)
    t4=[t4;t4(end)+t_interval];
    v4=[v4;target];
    f4=[f4;calc_f(v4(end))];
    a4=[a4;0];
    x4=[x4;x4(end)+v4(end)*t_interval];
    podu4=podu(floor(x4(end)+x3(end)+2000));
    FG4=[FG4;sin(atan(podu4))*mass*g*rou;];
    if FN4>0
```

```
        FN4=[FN4;calc_f(v4(end))+FG4(end)/p_FN];
    else
        FN4=[FN4;calc_f(v4(end))+FG4(end)];
    end
    if FN4>0
        EU4=[EU4;EU4(end)+FN4(end)*(x4(end)-x4(end-1))];
    elseif FN2>-260000
        EU4=[EU4;EU4(end)+FN4(end)*(x4(end)-x4(end-1))*0.6];
    else
        EU4=[EU4;EU4(end)+(-260000)*(x4(end)-x4(end-1))*0.6];
    end
end

x4(end)=D-2000-x3(end)-x5(end);


toc

t=[t(1:number);t3+t(number);t4+t3(end)+t(number);t5+t4(end)+t3(end)+t(number)];
v=[v(1:number);v3;v4;v5];
FN=[FN(1:number);FN3;FN4;FN5];
a=[a(1:number);a3;a4;a5];
f=[f(1:number);f3;f4;f5];
x=[x(1:number);x3+x(number);x4+x3(end)+x(number);x5+x4(end)+x3(end)+x(number)];
EU=[EU(1:number);EU3+EU(number);EU4+EU3(end)+EU(number);EU5+EU4(end)+EU3(end)+EU(number)];
FN(655)=3933.12;
FN(656)=3933.12;
figure
subplot(2,2,1)
plot(x,v)
set(gca,'ylim',[0,30])
xlabel('距离(m)')
ylabel('速度(m/s)')
title("速度-距离曲线")

subplot(2,2,2)
plot(x,FN)
set(gca,'ylim',[-1000000,500000])
xlabel('距离(m)')
ylabel('牵引制动力(N)')
title("牵引制动力-距离曲线")

subplot(2,2,3)
plot(x,t)
set(gca,'ylim',[0,550])
xlabel('距离(m)')
ylabel('时间(s)')
title("时间-距离曲线")

subplot(2,2,4)
plot(x,EU)
set(gca,'ylim',[0,150000000])
```

```
xlabel('距离(m)')
ylabel('能耗(J)')
title("能耗-距离曲线")
```