

2023 年第八届“数维杯”大学生

数学建模挑战赛论文

题 目 基于动态规划模型的多阶段列车运行控制策略优化

摘 要

随着各城市的城轨线网规模的不断扩大，能量消耗问题已经成为了我国城市轨道交通行业中一个亟待解决的问题，降低列车的牵引动力能耗是减少系统整体能耗和运营成本的有效途径。

针对问题一，我们提出了多阶段联合规划模型以求解模型，仿真结果表明我们所提出的多阶段联合规划模型可以在约束条件下实现动态的列车行驶规划，并且求解可以满足全局最优解。

针对问题二，我们提出了一个动态能耗规划模型进行模型的求解，其主要目标是在不同时间、速度的条件下，以功耗最小化为目标从而调整多阶段的功率分配策略。仿真结果表明，我们所提出的动态能耗规划模型可以在能耗相对最低的条件下实现列车不同阶段的阶段最优化，从而在约束条件下实现全局最优解。

针对问题三，我们提出了一个双阶段动态延时优化算法以求解模型，其主要目标是针对意外事件对模型进行调整从而动态的调整列车的运行模式，仿真结果表明我们所提出的双阶段动态延时优化算法可以低功耗的同时实现列车行驶模式的动态调整。

综上所述，本文针对不同问题所提出的动态规划模型均适用于不同的列车运行模式，并且仿真结果证明了本文所提出的模型可以在约束条件下实现最优解。

关键词：节能运行；能量消耗；多阶段联合规划模型；动态能耗规划模型；动态延时优化模型

目 录

摘 要	1
一、 问题重述	1
1.1 问题 1 重述	1
1.2 问题 2 重述	1
1.3 问题 3 重述	2
二、 问题分析	2
2.1 问题 1 的分析	2
2.2 问题 2 的分析	4
2.3 问题 3 的分析	5
2.4 列车运行受力分析	6
2.4.1 牵引力	6
2.4.2 制动力	7
2.4.3 运行阻力	7
三、 模型假设	9
四、 定义与符号说明	9
五、 模型的建立与求解	10
5.1 问题 1 的模型建立与求解	10
5.1.1 多阶段联合规划模型的建立	10
5.1.2 多阶段联合规划模型的求解	11
5.1.3 多阶段联合规划模型的结果	11
5.2 问题 2 的模型建立与求解	15
5.2.1 动态能耗规划模型的建立	15
5.2.2 动态能耗规划模型的求解	15
5.2.3 动态能耗规划模型结果	21
5.3 问题 3 的模型建立与求解	22
5.3.1 双阶段动态延时优化模型的建立	22
5.3.2 双阶段动态延时优化模型的求解	23
5.3.3 双阶段动态延时优化模型结果	23
六、 模型的评价及优化	24
6.1 误差分析	24
6.2 模型的优点	24
6.3 模型的缺点	25
6.4 模型的推广	25
参考文献	27
附录	28

一、问题重述

城市交通电气化进程的快速推进给人们的出行需求得到了很好的满足,但与此同时也给城轨道交通用电的可持续发展带来了巨大能耗负担和负面效应现象。

在列车运行过程中,列车与外界会产生各种摩擦,进而消耗列车牵引的能量。列车运行过程中,被考虑的因素较多,如列车与轨道的摩擦、列车受到的空气阻力、列车势能的变化、列车运行过程中的位置限速等。在同一段旅途中,列车使用不同的驾驶策略通常会产生不同的能量和时间的消耗。

1.1 问题 1 重述

假设一辆质量($M_0 = 176.3t$)和旋转质量系数($\rho = 1.08$)相对固定的列车 P 在相距为 $5144.7m$ 的两个站台 A 到 B 之间的水平轨道上运行,运行的速度上限为 $100km/h$, 列车电机的最大牵引力为 $f_{\text{牵引力}} = 310KN$, 机械制动部件的最大制动力为 $f_{\text{制动力}} = 760KN$; 列车在运行过程中受到的阻力所满足戴维斯方程定义为:

$$f = 2.0895 + 0.0098v + 0.006v^2 \quad (1)$$

其中, 公式中的速度单位是 m/s , 阻力的单位是 KN 。

现在需要建立模型编写程序来获取列车在运行过程中的速度-距离曲线、牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线-能量消耗-距离曲线、运行时间大小值、以最短时间达到站台 B 以及在最短运行时间上分布增加 $10s$ 、 $20s$ 、 $50s$ 、 $150s$ 和 $300s$ 到达站台 B 的六组曲线。

1.2 问题 2 重述

在参考选题所提供的附件 1 和附件 2 的路况信息以及电机的复杂动态过程, 假设列车的计划运行时间为 T , 参照问题 1 最短时间到达站台 B 以及在最短时间上增加不同时间的 6 组曲线图, 设计优化方案得到可行的速度轨迹, 同时建立合适的模型使得列车在运行过程中的能耗越低越好。

1.3 问题 3 重述

列车 P 从起点出发，原计划在 $320s$ 之后到达站台 B ，但列车运行到距站台 B $2000m$ 的位置时前方突发事故，需要延迟 $60s$ 才能到达终点。因此，该问题需要设计最优的方案在列车保持节能运行的情况下，以越快越好的速度到达终点并得到调整后的优化速度轨迹。同时需要绘制出列车运行过程中的速度-距离曲线、牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线与能量消耗-距离曲线。

二、问题分析

2.1 问题 1 的分析

在物理动力学中，加速度 a 与受力情况 F 之间存在如下关系：

$$a = \frac{F}{m} \quad (2)$$

$$F = f_{\text{牵引力}} - f_{\text{制动力}} - f_{\text{阻力}} \quad (3)$$

其中， $m = M_0 \cdot \rho$ 。 M_0 是列车的质量，大小为 $176.3t$ （吨）， ρ 是列车旋转部件惯性的旋转质量因数，大小为 1.08 。

针对不同的加速阶段，牵引力和制动力之间又有以下关系：

$$\begin{cases} \text{加速: } f_{\text{牵引力}} = 310kN, f_{\text{阻力}} = f, f_{\text{制动力}} = 0, \\ \text{匀速: } f_{\text{牵引力}} = f_{\text{阻力}}, f_{\text{制动力}} = 0 \\ \text{减速: } f_{\text{牵引力}} = 0, f_{\text{制动力}} = 760kN, f_{\text{阻力}} = f \end{cases} \quad (4)$$

其中 f 是列车在运行过程中所受的阻力满足的戴维斯方程，表示为公式(1)，在匀速过程中列车到达最大速度时所受的阻力小于牵引力。

在物理动力学中，路程 s 、时间 t 、速度 v 和加速度 a 之间存在以下微分方程：

$$\begin{cases} ds = vdt \\ dv = a dt \end{cases} \quad (5)$$

(1) 速度-距离

针对速度和距离曲线，在列车行驶的整个过程中，有 $s_1 + s_2 + s_3 = 5144.7m$ ，

由公式(4)可以推出 $ds = \frac{v}{a} dv = \frac{v \cdot m}{F} dv$ ，对式子两边不定积分，可分别得到在加速和减速阶段的速度 v 和距离 s 之间的关系表达式为：

$$s_1 = \log(v - 50783336241502881919^{(1/2)/31457280} + 49/60) * ((58232143872 * 50783336241502881919^{(1/2)}) / 7254762320214697417 - 15867) - \log(v + 50783336241502881919^{(1/2)/31457280} + 49/60) * ((58232143872 * 50783336241502881919^{(1/2)}) / 7254762320214697417 + 15867) \quad (6)$$

$$s_3 = (101906251776 * 2^{(1/2)} * 3927758750517035233^{(1/2)} * \operatorname{atan}((3211264 * 2^{(1/2)} * 3927758750517035233^{(1/2)}) / 3927758750517035233 + (3932160 * 2^{(1/2)} * 3927758750517035233^{(1/2)} * v) / 3927758750517035233)) / 3927758750517035233 - 15867 * \log(v^2 + (49 * v) / 30 + 52370391665999875 / 412316860416) \quad (7)$$

$$s_2 = 5144.7 - s_1 - s_3 \quad (8)$$

(2)时间-距离

针对时间和距离曲线，有 $\frac{1}{v} ds = dt$ ，将式子(6)得到的表达式用 s 和 v 带入积分，可以分别得到加速与减速过程的路程 s 和时间 t 的表达式，为：

$$v_1 = (1586979257546964992 * \tanh((48430763474944 * t) / 6784325656892985)) / 7005381708107057 - 49/60 \quad (9)$$

$$s_1 = (222308783125069332480 * \log(\exp((96861526949888 * t) / 6784325656892985) + 1)) / 7005381708107057 - (95562019156515145313 * t) / 420322902486423420 \quad (10)$$

$$t_1 = (6784325656892985 * \operatorname{atanh}(12112304973317101553 / 95218755452817899520)) / 48430763474944 \approx 18s \quad (11)$$

$$\begin{cases} v_2 = 28m/s \\ t_2 = \frac{s_2}{v_2} \approx 172s \end{cases} \quad (12)$$

$$v_3 = (981939687629258752 * \tan((14983210565632 * t) / 1334146363269959)) / 2755234639921221 - 2416035378717212519014879 / 2958410667816995052847104 \quad (13)$$

$$s_3 = (43717308031630016512 * \log(\tan((14983210565632 * t) / 1334146363269959)^2 + 1)) / 2755234639921221 - (2416035378717212519014879 * t) / 2958410667816995052847104 \quad (14)$$

$$t_3 = (1334146363269959 * \operatorname{atan}(1587933564141263703 / 19638793752585175040)) / 14983210565632 \approx 7s \quad (15)$$

(3)牵引制动力-距离

针对牵引制动力和距离曲线，有以下表达式：

$$\begin{cases} \text{加速：速度加大且小于 } 100\text{km/h}, f_{\text{牵}} = 310\text{kN}, f_{\text{制}} = 0, \text{行驶路程为 } s_1 \\ \text{匀速：速度等于最大速度 } 100\text{km/h}, f_{\text{牵}} = f_{\text{阻}}, f_{\text{制}} = 0, \text{行驶路程为 } s_2 \\ \text{减速：速度减小}, f_{\text{牵}} = 0, f_{\text{制}} = 760\text{kN}, \text{行驶路程为 } s_3 \end{cases} \quad (16)$$

将 $v = 100\text{km/h} \approx 28\text{m/s}$ 带入公式(1)中，可求得阻力 $f_{\text{阻}} \approx 7.46\text{kN}$ 。

(4)能量消耗-距离

针对能量消耗和距离曲线，列车在运行过程中的能量消耗是牵引力和制动力做功的能量，在动力学中由 $W = Fs$ ，能量做功可分为三个过程：

$$\begin{cases} \text{加速：牵引力做功，牵引力恒定为最大牵引力 } 310\text{kN}, W_1 = f_{\text{牵}} \cdot s_1 \\ \text{匀速：牵引力做功，牵引力恒定为最大速度时的阻力}, W_2 = f_{\text{牵}} \cdot s_2 \\ \text{减速：制动力做功，制动力恒定为最大制动力}, W_3 = f_{\text{制}} \cdot s_3 \end{cases} \quad (17)$$

列车在行驶过程中，用最短时间从站台 A 到站台 B，即为以上分析的过程，加速阶段牵引力最大制动力最小，到达限定速度匀速行驶减速阶段的制动力最大牵引力最小。

2.2 问题 2 的分析

节能性指标主要是表示列车在运行过程中消耗能量的多少，是本文所研究的重点。列车牵引能耗的变化也是一个连续的过程，在本文的算法中可以将其离散化，分别计算列车在每个时间间隔 Δt 中的能耗，最后进行求和，可以用下式表示：

$$K_E = \sum F_j \times v_j \times \Delta t \quad (18)$$

其中， F_j 表示的是列车在第 j 个时间间隔内所输出的牵引力(N)， v_j 表示的是列车在第 j 个时间间隔内的平均运行速度(m/s)。

在城市轨道交通系统中，列车运行时的能量消耗包括纯牵引能耗和辅助系统能耗两个部分，本文着重点在于研究纯牵引能耗。在电力动力学中通常有两种计算方式：一种是基于物理学原理的，这种算法不考虑制动能的再生利用，列车站间运行过程可以看作是牵引力做功的过程，在较短的时间步长内可以假设牵引力

不变, 列车单位时间内运行的能耗可以等效为牵引力与运行距离的乘积, 运行全程总能耗即为单位时间步长能耗的累加, 如式子(18)所示。另一种是基于电气原理的, 列车在运行过程中所需要的能量均来源于供电系统, 通过能耗曲线可以获取每个时刻的电流值和电压值, 由此可计算出单位时间步长内的能量消耗值, 累加即可得到列车运行的总能耗, 该过程可以用以下式子^[1]表示:

$$Q_y = \begin{cases} \frac{U_w \sum I_{p1} \cdot \lambda_y \cdot t}{3600} \\ \frac{U_w \sum I_{p2} \cdot t}{3600} \end{cases} \quad (19)$$

其中, 前者表示最高负荷, 后者表示部分负荷, Q_y 表示牵引耗电量($kW \cdot h$), U_w 表示受电弓网压(kV), I_{p1} 表示机动车最高负荷的平均有功电流(A), λ_y 表示的是牵引力使用系数, I_{p2} 是机车部分负荷的平均有功电流, t 是牵引工况的时间(s)。在本文中, 我们主要采用基于动力物理学的方法进行列车运行过程的分析。

2.3 问题 3 的分析

列车的运行准时性指标表示的是列车从起点运行到行程终点处并停稳时所用的时间与计划运行之间之间的差值。然而, 列车在站点间运行时所需要耗费的时间通常是由运行计划图所给定的, 或早或晚都会影响到该线路上其他列车的运行状况, 而实际运行的时间如果与计划运行的时间相差太多会很大程度的影响到整个线路运行的安排。本文拟定于实际运行的时间如果超过计划运行时间的 20% 范围内则为不合格, 假设列车在运行过程中计划运行的时间为 $T_s(s)$, 运行时实际消耗的时间为 $T(s)$, 则运行准时性指标模型的计算公式可以表示为:

$$Z_t = |T - T_s| \quad (20)$$

在本次模型中, 由于列车运行前方发生了事故, 在原计划的时间上再延迟 60s 到达终点, 即 $T_s = 380s$, 所设计的模型需要在保障列车节能的情况下以最快的速度和时间到达终点, 优化速度轨迹。

2.4 列车运行受力分析

2.4.1 牵引力

由列车的牵引制动模块输出的与列车运行方向相同的力被称为列车的牵引力^[2]。牵引力是列车运行的基础，列车在运行过程中接收来自第三轨或接触网的供电，并通过动力传动装置转换为机械能，带动轮对的转动，随后通过轮对与钢轨的接触产生牵引力^[2]。轮对如果不与钢轨产生接触或摩擦，就只能使自身旋转而不能带动列车前进^[2]。

列车的牵引力实际来自于钢轨与轮周之间的切向外力，这个力的大小不但受列车电机输出的功率大小影响，同时也取决于列车所在位置的轮轨粘着系数。轮轨粘着系数会受到轮轨间接触面的平整度与湿度的影响，在粘着系数相同的条件下，列车的负载越大轮轨间的粘着力也就越大。列车的牵引力本质上是轮轨粘着力反作用力，因此列车的牵引力不能大于轮轨间的粘着力，若大于这个值则会造成列车轮对的空转打滑。列车的牵引力由城轨列车的电机产生，其大小受电机输出功率、机械传动效率、列车实时速度、工况、负载以及轮轨间粘着系数等多方面因素的影响。在计算列车的牵引力时，通常会以列车牵引特性曲线作为牵引力的数据来源。列车的牵引特性曲线是一组列车的牵引力随列车运行速度与负载变化的曲线，图 2-1 为城轨列车牵引特性曲线的图例。

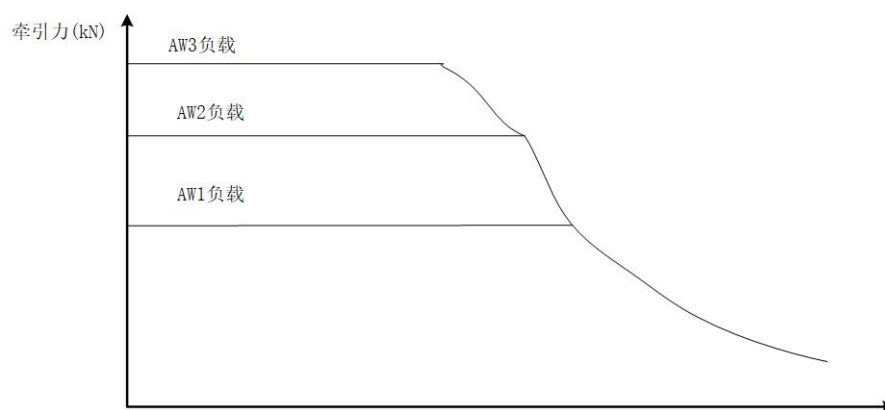


图 2-1 牵引力特效曲线

其中， AW_1 、 AW_2 和 AW_3 分别表示对应列车的空载、额定载荷和超载的情况。

列车的牵引特性曲线通常分为两部分，左侧较平稳的部分为低速度区，列车

输出的牵引力不随速度的增加而改变,此时限制列车牵引力增大的因素主要是轮轨间的粘着系数。右侧为恒功率区,此时列车电机已达到最大功率,列车牵引力的输出大小随速度的增加呈双曲线关系下降。城市轨道交通列车的牵引力可以无极变化,在相应的负载情况下,列车在每个速度点位可以输出牵引力特效曲线包络线下的任意一个值。

2.4.2 制动力

由列车的牵引制动力模块输出的与列车运行方向相反的力被成为列车的制动力^[2]。列车的制动力与正的运行阻力(即与列车运行方向相反的阻力)的作用效果相似。两者都可以阻止列车继续向前运动,但列车的制动力是人为可控的,而且列车的制动力通常都会比运行阻力大很多,因为在某些路段上列车需要克服负的列车阻力(即与列车运行方向相同的阻力)进行减速制动操作。图 2-2 为制动力下的特效曲线图。

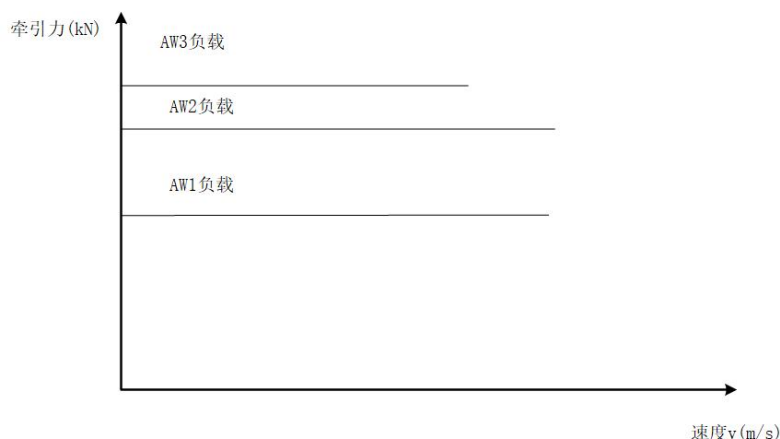


图 2-2 制动力特性曲线

2.4.3 运行阻力

城市轨道交通列车在运行过程中主要受到的运行阻力可以分为基本阻力和附加阻力两种。基本阻力包括列车在自身动力传动过程中所产生的摩擦力和冲击力,还有运行时所受到的空气阻力。附加阻力主要包括线路上坡道、曲线、隧道等土建因素所产生的阻力。

(1) 起动阻力

物体在某处所受的静摩擦力会大于其在同一位置所受的滑动摩擦力和滚动摩擦力，列车在起动的低速阶段同样会受到一个类似于静摩擦力的起动阻力。计算中通常都是采用综合大量计算后的试验值。列车单位起动阻力的表达式如下^[2]：

$$w_q = e \quad (21)$$

其中， w_q 表示的是列车单位起动阻力(N/kN)， e 列车起动阻力的试验值。

(2) 基本阻力

列车运行过程中所受的基本阻力主要是由列车动力传动过程中的摩擦力与冲动力、轮轨之间滑动与滚动摩擦力、空气阻力等方面组成。随着运行过程中列车速度的不断增加，车内装置在动力传动过程中所造成的摩擦和冲击都会变得剧烈，轮轨间的摩擦力也会逐渐增大，空气阻力同样会相应的增加，因此影响列车运行基本阻力最关键的因素是列车运行速度。列车在实际运行过程中所受的基本阻力还取决于多方面的因素，例如列车的结构、运行状态、线路状况、天气因素等。可以用以下公式来计算列车所受到的基本阻力^[2]：

$$w_0 = a + b \times v + c \times v^2 \quad (22)$$

其中， a 、 b 、 c 表示的是基本阻力系数，每种列车的阻力系数都不相同，一般由生产厂家给出； w_0 表示的是单位基本阻力(N/kN)。

(3) 坡道附加阻力

不同于列车的起动阻力与基本阻力，列车在运行过程中所受到的附加阻力受列车自身因素的影响很小，附加阻力的大小变化通常都是由于线路环境变化而引起的。列车在坡道上运行时，所受的重力可以转化为两个方向的分力与平行于轨道平面的分力。平行于轨道平面的分力即为坡道附加阻力。坡道附加阻力与其他阻力不同，起到的作用并不只是阻碍列车的运行，在上坡道时其方向与列车运行方向相反，会阻碍列车的运行；但在下坡道时其方向与列车运行方向相同，可以代替一部分牵引力的作用。在力学的有关规定中，坡道的坡度被定义为坡道终点与起点之间的高度差与坡道长度之比可以用字母 k 表达，单位为‰（千分率），结果一般会精确到小数点后两位，上坡道的坡度为正值，下坡道的坡度为负值。列车在坡道上所受到的附加阻力在 5.2 节将详细介绍。

三、模型假设

本文的主要目的是应用多目标优化算法求解单列车运行驾驶策略的问题。求解目标主要为列车运行时的能耗及运行时间，在保证列车运行的节能和准确性的同时，以最优的方案得到列车节能优化驾驶策略。因此求解的主要对象是找到满足优化目标和约束条件的最优解。

在应用多目标粒子群算法对列车运行曲线的优化问题进行求解之前，应该先明确优化对象的基本参数，这些参数主要包括：

- 1)列车参数：列车型号、编组情况、列车质量、列车牵引和制动系数等；
- 2)线路参数：运行线路的长度、坡度、曲度、限速情况等；
- 3)运行参数：列车区间运行时间等；
- 4)算法参数：粒子维数、种群个数、惯性因子以及算法涉及的其他参数。

以上参数的选取和输入是应用多目标粒子群算法优化问题的基础，只有明确这些参数的取值，问题的研究才具有实际意义。

四、定义与符号说明

全文的符号和参数定义如表 4-1 所示

表 4-1 符号和参数定义

符号定义	符号说明
M_d	列车整体的等效换算质量
M_0	列车原始的质量
M_p	列车转动部分的等效换算质量
ρ	旋转质量系数
$F_{\text{合}}$	列车所受合力
w_s	列车单位坡道所受的附加阻力
g	重力加速度
W_s	列车所受到的坡道附加阻力
l_{BC}	坡道高度差
l_{AB}	坡道长度
k	坡度千分数

θ	坡度角
T_s	列车在运行过程中计划运行的时间
Q_y	牵引耗电量
U_w	受电弓网压
I_{p1}	机动车最高负荷的平均有功电流
λ_y	牵引力使用系数
I_{p2}	机车部分负荷的平均有功电流
Δt	时间间隔
K_E	列车能耗
F_j	列车第 j 个时间间隔内所输出的牵引力
v_j	列车第 j 个时间间隔内的平均运行速度

五、模型的建立与求解

5.1 问题 1 的模型建立与求解

5.1.1 多阶段联合规划模型的建立

列车在实际运行的过程中，会受到牵引力、运行阻力(包括基本阻力、附加阻力和起动阻力)和列车制动力的共同作用。一般而言，首先根据线路限速选择合适的目标速度，列车在最大牵引力作用下加速运行，随后缓慢加速，当速度上升到目标速度后转化为匀速运动，限速下降时则通过惰行和最大制动力降低列车的运行速度。

针对问题 1，将列车视为均匀分布刚性质量带的运行过程计算方法，本文设计了一个可以使列车所受阻力线性平滑变化的改进型多阶段联合列车模型，然后对列车的运行过程进行了受力分析，分析了列车所使用的牵引制动力特性曲线，与其所受的基本阻力与附加阻力的情况，建立了列车运行受力模型，得出了列车在线路上行驶时的运动学方程与列车优化速度曲线性能评价模型。从不同的运行目标的角度分析，列车在运行过程中典型的控制策略共有三种，分别为最快速运行策略、最经济运行策略和混合优化运行策略^[3]，控制策略曲线如下图 5-1 所示。

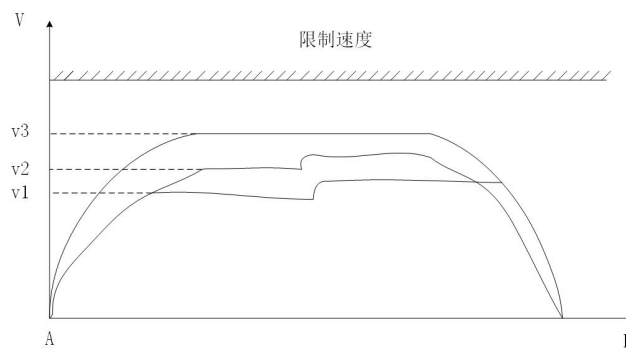


图 5-1 列车运行速度的控制策略曲线图

5.1.2 多阶段联合规划模型的求解

列车在相对条件固定、在水平上运动时，结合 2.1 节牵引制动力和距离的分析中，利用相关公式和 Matlab 软件可以求解出 s_1 、 s_2 和 s_3 的值分别为：

$$s_1 \approx 244m, s_2 \approx 4803m, s_3 \approx 98m$$

5.1.3 多阶段联合规划模型的结果

根据 2.1 节的分析，利用 Matlab 对模型进行编写程序和仿真，可以得到分别如以下图 5-2、5-3、5-4 和 5-5 所示的曲线结果。

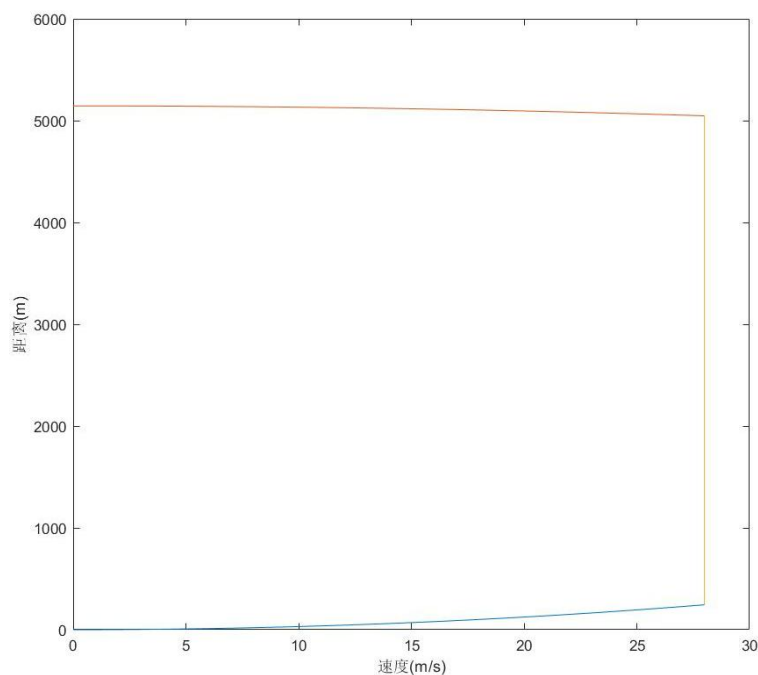


图 5-2 速度-距离曲线图

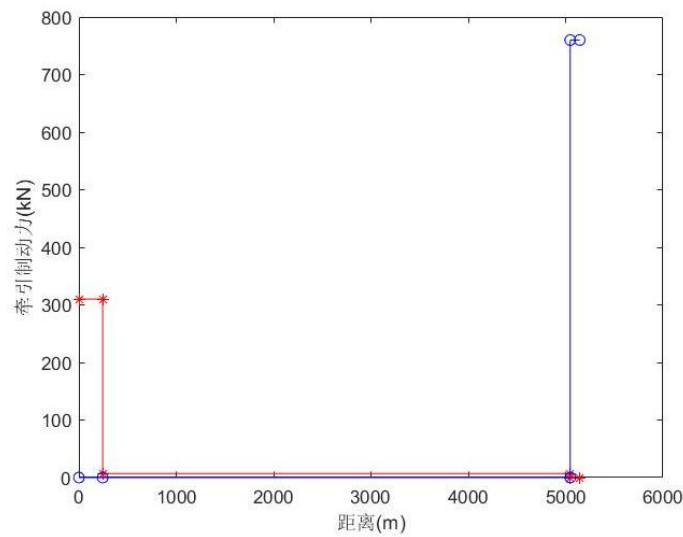


图 5-3 牵引制动力-距离曲线图

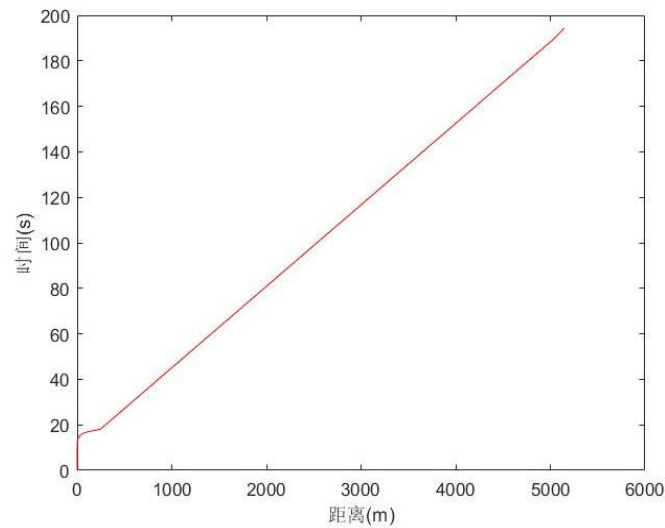


图 5-4 时间-距离曲线图

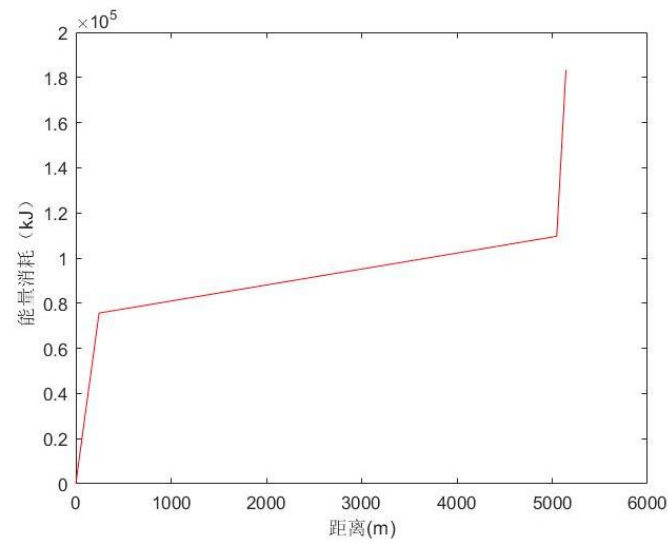


图 5-5 能量消耗-距离曲线图

列车运行过程中针对不同约束下的运行时间如下表 5-1 所示。

表 5-1 程序运行时间表

程序运行过程曲线	运行时间(s)
速度-距离	1.1595
牵引制动力-距离	0.2253
时间-距离	0.1703
能量消耗-距离	12.8692

在列车最短运行时间上分别加 10s、20s、50s、150s 和 300s，列车运行同样分三个阶段：加速，匀速，减速，改变加速阶段的牵引力大小，匀速运行的速度大小，减速阶段的制动力大小都能延长运行时间。所得到的结果分别如下图 5-6、5-7、5-8、5-9 和 5-10 所示：

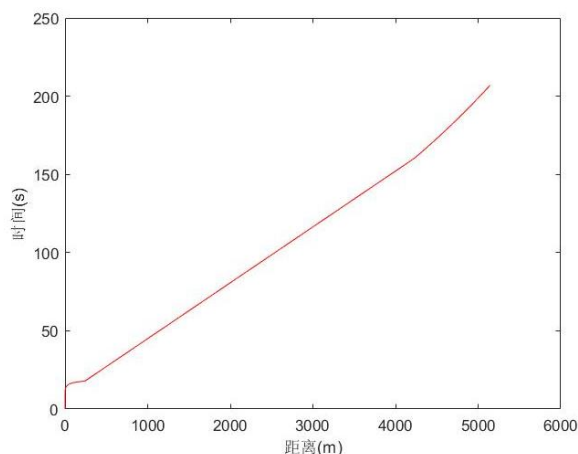


图 5-6 最短运行时间加 10s 的时间-距离曲线图

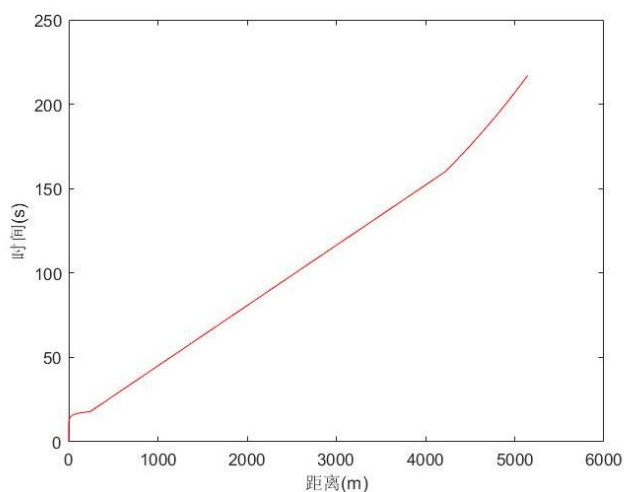


图 5-7 最短运行时间加 20s 的时间-距离曲线图

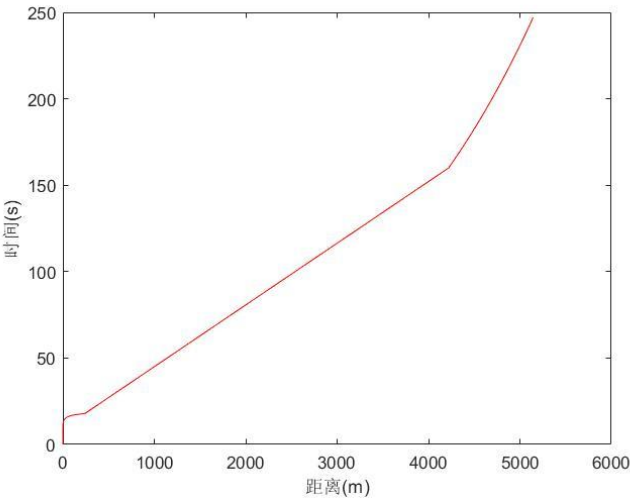


图 5-8 最短运行时间加 50s 的时间-距离曲线图

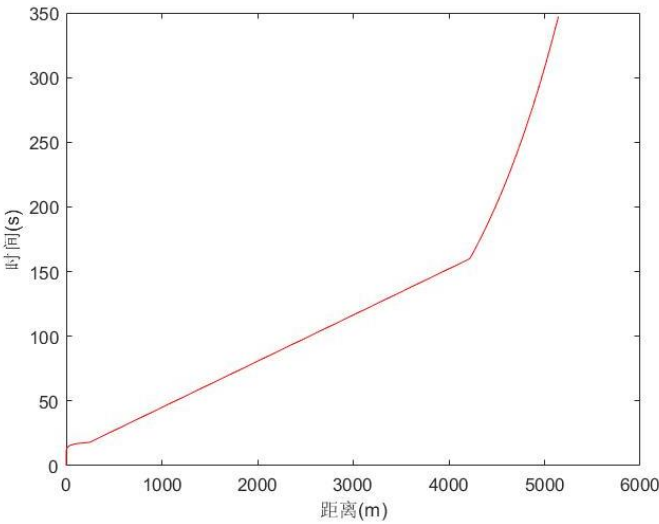


图 5-9 最短运行时间加 150s 的时间-距离曲线图

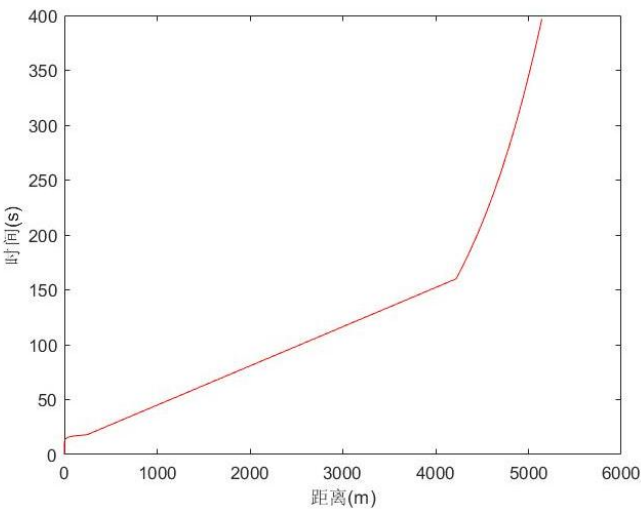


图 5-10 最短运行时间加 300s 的时间-距离曲线图

5.2 问题 2 的模型建立与求解

5.2.1 动态能耗规划模型的建立

针对问题 2，本文首先通过预测模型求解列车运行中关键点的目标时间和速度，随后应用极大值原理使列车在每两个点之间的运行过程准时并使牵引能耗最小化。同时使用遗传算法求解出列车的最小牵引力能耗速度曲线。

设计了一个可以使列车所受阻力线性平滑变化的改进型多质点列车模型，然后对列车的运行过程进行了受力分析，分析了列车所使用的牵引制动力特性曲线，与其所受的基本阻力与附加阻力的情况，建立了列车运行受力模型，得出了列车在线路上行驶时的运动学方程与列车优化速度曲线性能评价模型。

5.2.2 动态能耗规划模型的求解

本题建模的主要目标函数是求解能耗条件下，在不同的运行时间内，速度的运行轨迹。因为需要考虑电机的复杂动态情况以及路况，所以我们首先对此两部分进行建模和分析。建模过程中所有公式所涉及的单位均是国际标准单位，之后的建模将在此基础上进行建模，见表 5-2。

表 5-2 相关符号定义以及范围

参数定义	参数范围	参数名称
$m(kg)$	1.763×10^5	列车质量
$f_{\text{牵引}}(N)$	3.1×10^5	牵引力
$f_{\text{制动}}(N)$	7.6×10^5	制动力
κ	0.9	牵引效率因子
η	0.6	制动效率因子
ρ	1.08	列车旋转因子

首先，我们根据附件二所述的牵引电机运行范围分析得到牵引力和制动力的数学模型：

$$f_{\text{牵引}} = \begin{cases} \max(f_{\text{牵引}}), 0 \leq v \leq 10 \\ \max(f_{\text{牵引}}) \frac{10}{v}, 10 \leq v \leq 40 \end{cases} \quad (27)$$

此时电机牵引效率因子为 0.9，电机再生制动效率因子为 0.6。

$$f_{\text{制动}} = \begin{cases} \max(f_{\text{制动}}), 0 \leq v \leq 17 \\ \max(f_{\text{制动}}) \frac{17}{v}, 17 \leq v \leq 40 \end{cases} \quad (28)$$

接着我们对列车形式过程中的路况进行分析，因为列车并非在水平的路面进行，所以列车在运行过程中重力在被分解为水平方向和垂直方向的两个力，见图 5-11 的(a)和(b)所示。对于图 5-11 的(a)说明了上坡时候动力的分布图，此时重力一部分分解为与列车垂直的压力的压力，一部分分解为与运动方向相反的阻力。图 5-11 的(b)说明了在下坡阶段，重力分解为与物体垂直的压力以及有运动方向相反的力，因此上坡阶段重力会进一步影响上坡时候的功耗，下坡的时候重力会加速下坡，从而减小列车运行的功耗。

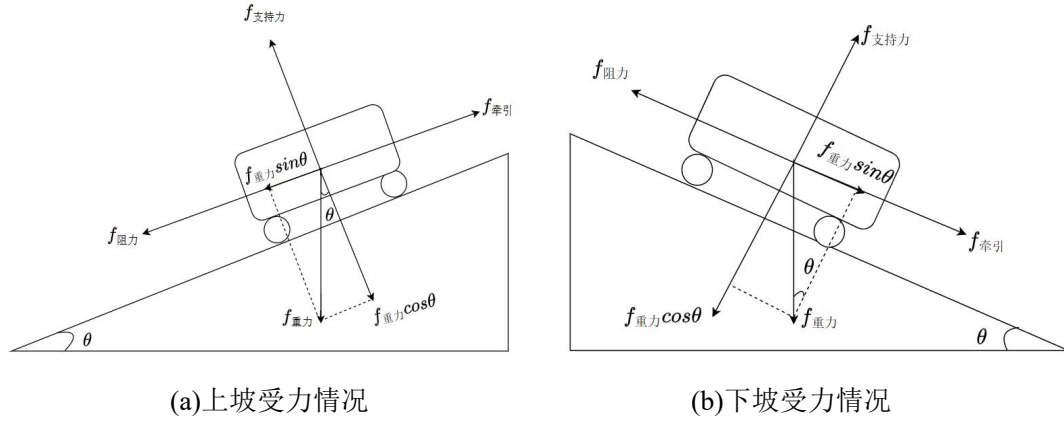


图 5-11 列车坡道受力分析

基于以上的分析，以附件 1 所属的路况为例，其在大致可以分为上坡，下坡，再上坡三个阶段，见图 5-12。

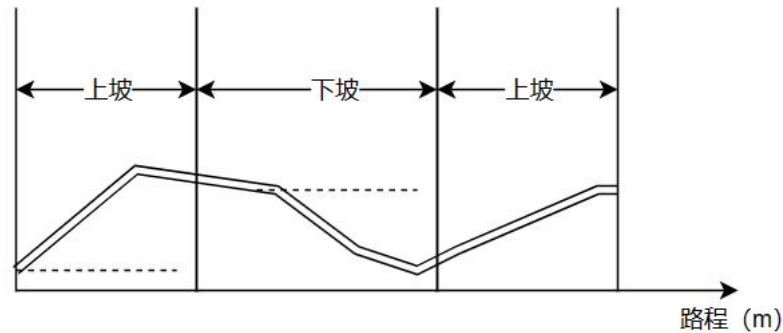


图 5-12 列车行驶路程图解

在已知列车的路况前提下，我们我们进一步将列车分为加速、匀速、减速、

滑行四个阶段进行分析，见图 5-13。接下来我们将对每个部分进行模型的建立。

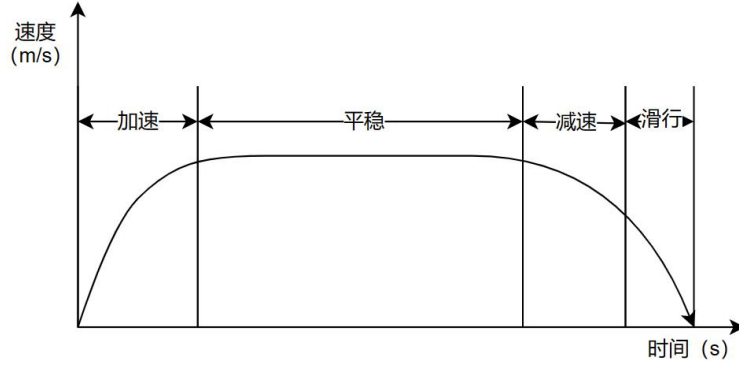


图 5-13 列车行驶速度变化规律

(1) 加速阶段

在加速阶段，根据图 5-13 所述，此时列车处于上坡状态，受力分析图见图 5-11(a)，此时因为列车处于加速状态，所以此时 $f_{制动力} = 0$ ，因为牵引力和列车的速度有关，因此我们建立以下的分段函数。

当列车行驶速度 $0 \leq v \leq 10 \text{ m/s}$ 时，此时列车在相对列车的水平方向合力为：

$$F_1 = \max(f_{牵引力}) - f(v) - mg \sin \theta \quad (29)$$

当列车行驶速度 $10 \leq v \leq 27.7 \text{ m/s}$ 时，此时列车在相对列车的水平方向合力为：

$$F_1 = \max(f_{牵引力}) \frac{17}{v} - f(v) - mg \sin \theta \quad (30)$$

在相对列车的垂直方向上，重力的分量和支力相同，此时

$$f_{支持力} = mg \cos \theta \quad (31)$$

此时动能的变化和势能的变化分别为：

$$W_{动能} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (32)$$

$$W_{势能} = mgh_1 \quad (33)$$

根据物理学中功率和力的关系 $P = Fv$ ，此时列车的力的功率为：

$$P_1 = F_1 v = (\max(f_{牵引力}) - f(v) - mg \sin \theta) v \quad (34)$$

此时在时间 t_1 内，其消耗的能量为：

$$W_1 = P_1 t_1 \quad (35)$$

根据能量守恒定理，并且考虑列车牵引力、制动力，以及列车质量的影响，此时能量转换为内能转化为机械能：

$$\kappa\eta W_1 = W_{11} + W_{12} \quad (36)$$

此时最终的公式为速度和时间的公式的变化公式，我们可以通过调整速度和时间的比例关系从而影响能量的消耗。

(2) 匀速阶段

在匀速阶段，此时列车在相对列车的水平方向时平衡的，此时的水平方向受力分为上坡阶段和下坡的阶段。在上坡阶段，此时受力方程为：

$$f_{\text{牵引力}} = f(v) + mg \sin \theta \quad (37)$$

在下坡阶段，此时的受力方程为：

$$f(v) = f_{\text{牵引力}} + mg \sin \theta \quad (38)$$

考虑列车牵引力、制动力，以及列车质量的影响，此时的能量的表达式为

$$\kappa\eta W_2 = P_2 t_2 = F(f_{\text{牵引}}, f_v) v t_2 \quad (39)$$

其中 $F(f_{\text{牵引}}, f_v)$ 表示根据上下坡动态调整功率计算。

(3) 减速阶段

在减速阶段，根据附件二所述，此时列车处于上坡状态，受力分析图见图一，此时因为列车处于减速状态，所以此时 $f_{\text{牵引力}} = 0$ ，因为制动力和列车的速度有关，因此我们建立以下受力模型：

当列车行驶速度 $0 \leq v \leq 17m/s$ 时，此时列车在相对列车的水平方向合力为：

$$F_{31} = \max(f_{\text{制动力}}) + f(v) + mg \sin \theta \quad (40)$$

当列车行驶速度 $17 \leq v \leq 27.7m/s$ 时，此时列车在相对列车的水平方向合力为：

$$F_{32} = \max(f_{\text{制动力}}) \frac{17}{v} + f(v) + mg \sin \theta \quad (41)$$

在相对列车的垂直方向上，重力的分量和支力相同，此时

$$f_{\text{支持力}} = mg \cos \theta \quad (42)$$

此时动能的变化和势能的变化分别为：

$$W_{31} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_3^2 \quad (43)$$

$$W_{32} = mgh_3 \quad (44)$$

根据物理学中功率和力的关系 $P = Fv$ ，此时列车的力的功率为：

$$P_3 = F(F_{31}, F_{32})v \quad (45)$$

考虑列车牵引力、制动力，以及列车质量的影响，此时在时间 t_3 内，根据能量守恒定理，此时能量转换为内能转化为机械能：

$$W_{31} + W_{32} = \kappa\eta P_3 t_3 \quad (46)$$

因为列车在制动阶段，列车的制动力一部分转化为内能，一部分转化为能量进行存储，此时存储的能量为：

$$W_{\text{再生}} = (1 - \eta)P_3 t_3 \quad (47)$$

(4) 惯性滑行阶段

在列车不再对外做功时 $f_{\text{牵引力}} = 0$ ， $f_{\text{制动力}} = 0$ 此时列车因为惯性的原因会继续运动，此时的受力分析模型见图 5-14。

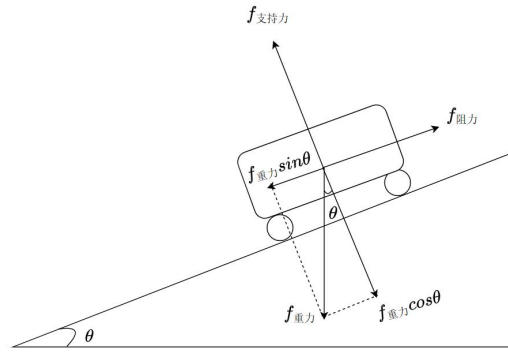
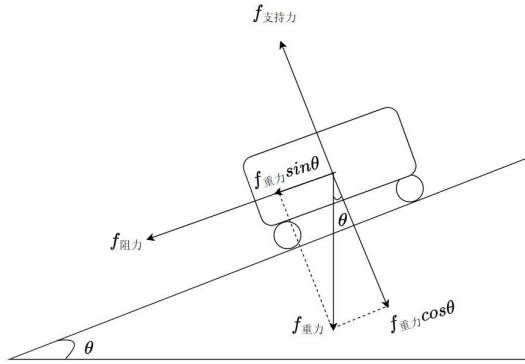


图 5-14 无外力时系统的受力分析图($v \neq 0$) 图 5-15 无外力时系统的受力分析图($v = 0$)

此时列车在相对于列车的水平方向的受力分析为：

$$F_{41} = \max(f_{\text{制动}}) + f(v) + mg \sin \theta \quad (48)$$

当速度 $v = 0$ 时，此时列车停止运动，此时受力分析，见图 5-15。通过分析图 5-15 可以知道，因为列车处于上坡的状态，所以此时阻力方向变化，此时的受力方程为：

$$F_{42} = mg \sin \theta - f(v) \quad (49)$$

此时前两个阶段的动能和势能变化为：

$$W_{41} = \frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (50)$$

$$W_{42} = mgh_4 \quad (51)$$

此时根据能量守恒定理，我们可以知道：

$$W_{41} + W_{42} = \kappa \eta P_{42} t_4 \quad (52)$$

根据附录一所述的梯度信息，在滑行阶段 $mg \sin \theta > f(v)$ ，此时列车有下滑的趋势，因此此时要增加一个牵引力从而使列车保持平行，此时受力分析图见图七。

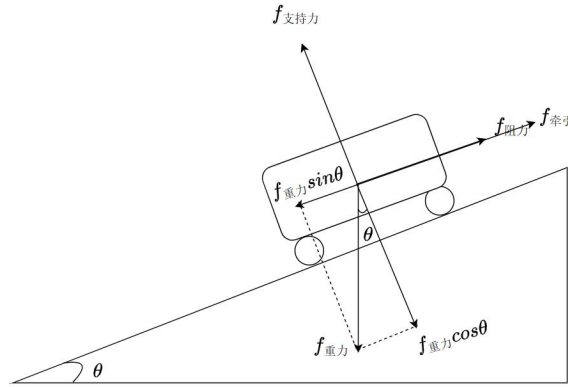


图 5-16 加入牵引力下系统的受力分析图（ $v = 0$ ）

此时受力方程为：

$$mg \sin \theta = f(v) + f_{\text{牵引}} \quad (53)$$

根据上面四个阶段的分析，此时列车最终的功率和速度、运行时间相关，其可以建模为：

$$W = f_1(v, t) \quad (54)$$

我们的目标函数是：

$$J(W) = f_1(v, t) \quad (55)$$

$0 \leq v \leq 27.7$

此时我们是时间最短的条件下，使的功率尽可能的低，此时我们可以通过上述的分析结果利用仿真软件从而得到不同时间尺度下的列车的行驶模式。

在时间最短的情况下，此时列车在加速阶段需要将速度加到最快，匀速行驶

阶段直接以最大速度行驶，在加速阶段，此时分为两个阶段加速，减速阶段直接以最大的制动力减速即可。在在最短运行时间上分别增加 10s、20s、50s、150s、300s，此时最短时间已知，我们通过调整各部分的时间以及功率分配从而在功率最小的情况下实现不同路程的运行。

5.2.3 动态能耗规划模型结果

在此次仿真中，首先我们以距离为横坐标，理论给定的梯度信息为左纵坐标 0、限速为右总坐标为基准进行仿真。路径的梯度信息以及限度信息，从而在此基础上进行仿真。所得到的仿真结果分别如下图所示。

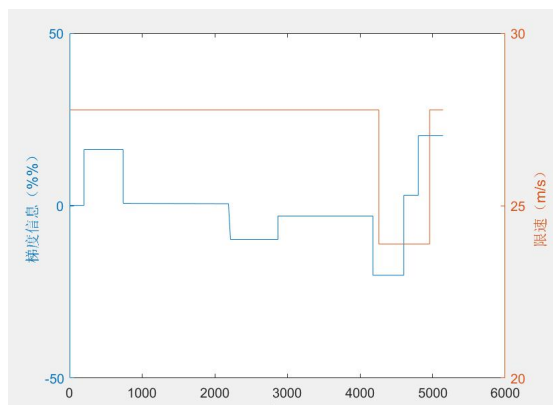


图 5-17 梯度和限速图表

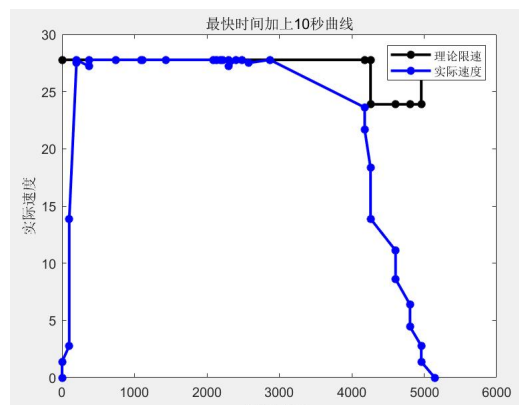


图 5-18 最优时间曲线

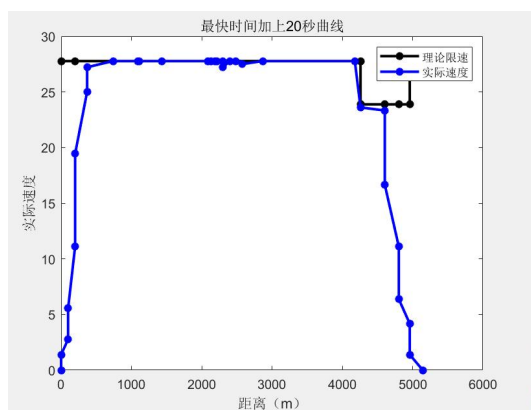


图 5-19 最快时间加上 20 秒曲线

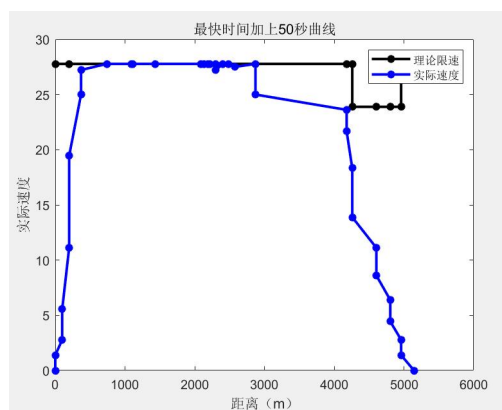


图 5-20 最快时间加上 50 秒曲线

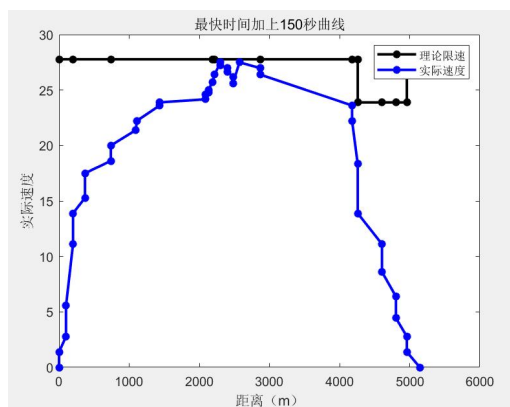


图 5-21 最快时间加上 150 秒曲线

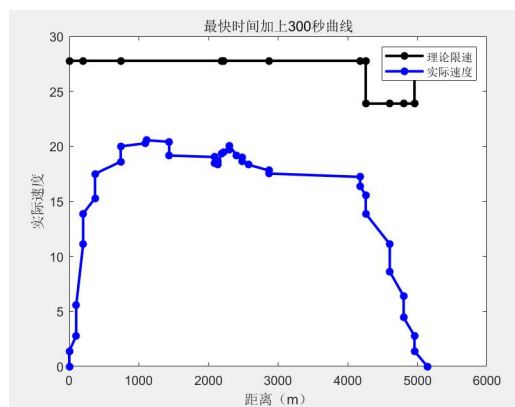


图 5-22 最快时间加上 300 秒曲线

随着时间的列车运行的时间的增加,此时我们不在需要附加一些额外的能量从而达到,从而保证列车最快时间的到达,在这种前提下,对于加速阶段而言,此时列车的牵引力不需要达到最大,只需要慢慢的提升;对于下坡阶段,因为列车的重力在相对于运动的水平方向有一定的分量,因此此时借助重力的分量可以一定程度的减小牵引力的消耗。在列车减速即将停止阶段,我们可以利用惯性定理,从而减少制动力的消耗,因此,基于以上的分析,我们在图 5-17 至图 5-22 对列车在不同的运动时间下的速度和距离曲线进行仿真,其仿真结果和我们所分析的结果相同,因此验证了我们仿真结果的正确性。

5.3 问题 3 的模型建立与求解

5.3.1 双阶段动态延时优化模型的建立

本文的优化目标主要集中在两个点上,一个是减少列车运行过程中在站点间的能量消耗问题,另外一个是在优化列车节能运行曲线的基础上保证列车运行的准时性。本文在对城市轨道交通列车运行进行优化时,主要优化目标是时间和能耗,两者相互制约。要实现列车在运行过程中保持节能即最小化能耗目标,就要在列车运行过程中尽量采用惰行工况,以减小列车的牵引能耗。但惰行距离长就会相应增加列车的运行时间,可能无法满足列车准时性的要求,因此列车运行控制本身就是一个多目标优化的问题。在求解约束性目标函数时,并不存在绝对的最优解,但可以根据多目标优化问题的解的特效,可以得到在均衡各项指标的前提下,偏好某一项指标的 Pareto 最优解。

5.3.2 双阶段动态延时优化模型的求解

根据第三题的分析,此时列车的行驶分为正常行驶阶段和调整阶段行驶两个阶段。在正常行驶阶段,我们按照第二题所述的模型直接进行分析即可,此时目标函数为:

$$J(W) = f_1(v, t) \quad (56)$$

$$0 \leq v \leq 27.7, \quad t = 320$$

对于第一个阶段,我们使用模型二的约束条件直接求解,第二个阶段因为涉及到模型的调整,因此需要对第一个阶段的结果进行分析,此时相当与第二个阶段的初始条件为第一个阶段的结果,此时我们全局最优化得不到保证,我们利用局部的最优化从而求解模型,仿真结果表明我们所提出的双阶段动态延时优化算法可以低功耗的同时实现列车行驶模式的动态调整。

5.3.3 双阶段动态延时优化模型结果

模型仿真的结果分别如图 5-23、5-24、5-25、5-26 所示。

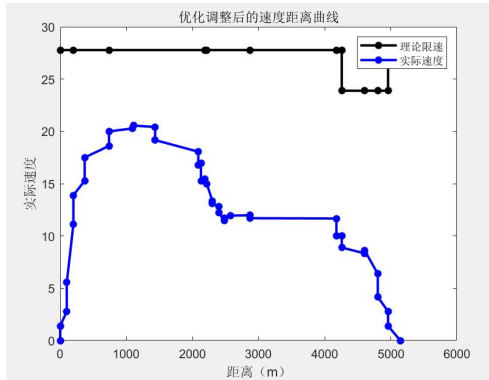


图 5-23 优化后的速度-距离曲线

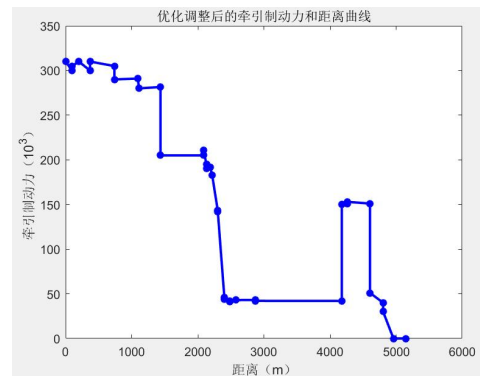


图 5-26 优化后的牵引制动力-距离曲线

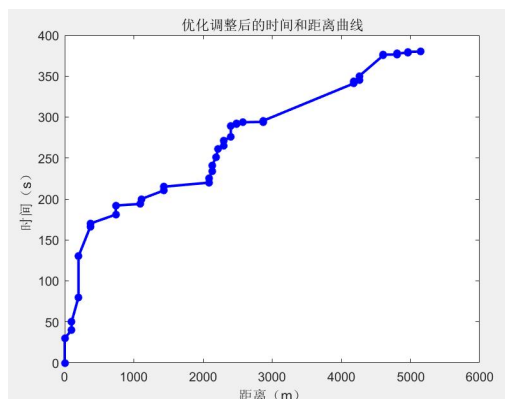


图 5-25 优化后的时间-距离曲线

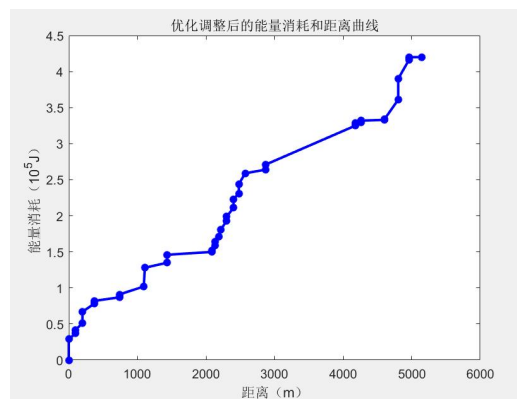


图 5-26 优化后的能量消耗-距离曲线

第三问主要是针对列车在运行过程中遇到意外事件的处理分析。因为突发事件的存在，所以原定于 320s 后到达终点修改为 400，列车运行至 2000m 位置时，需要延迟 60s 到达终点，此时在前一个阶段，列车按照原定计划正常运行，在 2000m 时，此时列车调整运动模型，此时的模型分析和第二部分的模型分析结果差异不多，其具体的仿真结果见图 5-23 至图 5-26，此时通过分析结果我们可以知道，在列车调整运动状态之后，通过最优化列车能耗此时的运动的情况和之前延时所述的模型相同，因此我们此次的模型建立时正确的。

六、模型的评价及优化

6.1 误差分析

针对问题 1，题目给出了速度上限，在速度带入模型数值求解时涉及到了单位换算，有一个量化的过程，以及求解路程和时间时都是四舍五入，因此数值结果存在一定的误差。基于模型进行仿真实验得到的结果图由于上述原因有一定的误差，但总体而言模拟结果是合理的

针对问题 2，使用附件一、二提供的的数据资料进行模型的建立与求解，在求解过程中也涉及到了数据单位换算以及变量转换进行量化的过程，因此数值结果存在一定误差。数值结果的误差对于模拟结果图的影响较小，因此得到的模拟结果正确性较高。

针对问题 3，模型的建立综合考虑了问题 2 提及的路况情况以及电机的动态过程，因此也存在一定的量化误差，后续运行计划的优化中变量调整也存在一定的误差，但误差相对较小，对模拟结果的合理性影响较小。

6.2 模型的优点

本文主要从节能的角度研究城市轨道交通的列车运行控制系统中单列车运行曲线优化问题。将单列车作为研究对象时，考虑节能和准点性两个目标，采用多目标粒子群算法对列车曲线进行求解，结合列车追踪运行的动态特性，采用动态粒子群算法对追踪列车运行曲线进行优化。最后结合实际线路数据对以上算法进行仿真验证，证明采用以上算法优化列车运行曲线可以达到较好的节能效果。

本文具体的研究内容如下：(1)对列车运行过程进行分析，描述列车动力学模型，根据不同的约束条件描述列车追踪运行模型，分析了影响列车节能运行的关键因素，并描述了列车能耗计算模型。(2)采用多目标粒子群算法对单列车运行曲线进行优化。对线路信息进行离散化处理，将节能和准时作为单列车运行曲线的优化目标，结合多目标粒子群算法参数收敛性好的特点,求解列车在区间运行的优化运行曲线。相较于传统多目标优化问题求解方法多目标粒子群算法摒弃了将多个子目标优化问题转化为单目标优化问题的求解方式，不需要依赖设计者的经验值选取系数，能够更好地保持解的多样性。

本文所提出的模型合适、考虑合理，方法得到、结果直观，能够在一定程度上支撑整个列车运行过程中的节能优化问题，为城轨交通的运输发展提供一定的思路 and 选择。

6.3 模型的缺点

(1) 在对列车在运行过程中的受力分析时，本文所采用的都是比较传统的物理动力学公式计算，所得到的结果与列车实际运行中的受力状态有一定的区别。因此所建立的多质点模型需要对列车实际运行的数据作更进一步的分析，以便得到更准确的列车的受力模型。

(2) 在列车实际运行的过程中，动力分析模型所需建立的模型过于复杂。因此，本文只考虑了一部分对列车运行过程中影响最大的一定变量，对于影响较小的参数并未在某种程度上考虑或者使用其他策略补偿这种损失。

(3) 针对列车在运行过程中的能耗可再生问题，本文并未提出完整的优化策略方案，对可再生能馈容量优化模型的能耗计算和再使用缺少一定的分析。

(4) 列车在实际运行优化建模的过程中，运行的能量会来源于牵引供电系统，本文的研究并未对基于电压电流的能耗方式进行计算和定性分析，缺少了一定的对比性和完整性。

6.4 模型的推广

本文所建立的三个模型相对比较简单，能够在一定程度上解决城轨交通运输列车在运行过程中的能耗和准时性问题，原理都相对简单和容易理解。随着社会

的快速发展和需要，对于城轨交通运输来说，降低列车在运行过程中的能量消耗对提高我国的资源利用效率和经济效益具体很重要的意义。本文所建模型虽然在某些因素上并未考虑周全，但所建的模型同样对列车运行时的节能操纵和优化策略方法做了一定的研究，并取得了一些相对较好的结果，是可以简单支撑城轨交通运输的有力保障。而且本文根据列车运行过程中需要解决的能耗和准时问题，从不同的约束下设计了计算和优化的方法，仍然具有一定的可行性和可实用性。

参考文献

- [1] 刘宏泰. 基于列车区间运行优化和能馈装置配置的地铁节能技术研究[D].北京交通大学,2021.DOI:10.26944/d.cnki.gbfju.2021.000467.
- [2] 王卓然. 基于列车运行控制策略优化的城市轨道交通节能研究[D].中国铁道科学研究院,2019.
- [3] 安志强, ATO 目标速度曲线优化及跟随控制研究[D].成都:西南交通大学.Zou.
- [4] 高豪. 城市轨道交通列车节能运行优化研究 [D]. 西南交通大学,2021.DOI:10.27414/d.cnki.gxnju.2021.000003.
- [5] 肖远芯. 城市轨道交通列车运行策略多目标优化研究 [D]. 西南交通大学,2021.DOI:10.27414/d.cnki.gxnju.2021.001623.
- [6] 麻存瑞. 高速列车节能运行操纵策略优化方法研究[D].北京交通大学,2019.
- [7] 柳淑琦. 基于 ATO 控制策略的单车节能优化模型及算法研究[D].北京交通大学,2016.
- [8] 柯倩.高速列车追踪运行节能优化与控制研究[J].科技创新与应用,2018(31):124-125.
- [9] 张天伟,刘涛,商霖.单线铁路双向列车均停站的两区间运行图优化[J].铁道科学与工程学报,2022,19(09):2507-2514.DOI:10.19713/j.cnki.43-1423/u.t20211134.
- [10] 邓连波,钟敏,蔡莉.基于多速度调控的城轨列车区间运行策略优化[J].交通运输系统工程与信息,2021,21(02):111-118.DOI:10.16097/j.cnki.1009-6744.2021.02.016.
- [11] 周峰,丁力,芦毅,刘宇然,刘旭,翁勇南.城市轨道交通列车区间节能运行优化方法[J].城市轨道交通研究,2017,20(09):91-95+101.DOI:10.16037/j.1007-869x.2017.09.019.
- [12] 李兰鹏.基于蚁群算法的城市轨道交通列车节能运行优化模型仿真分析[J].城市轨道交通研究,2023,26(02):11-15.DOI:10.16037/j.1007-869x.2023.02.003.
- [13] 于晓杰. 城市轨道交通列车节能运行优化研究 [J]. 电气化铁道,2020,31(S1):128-132.DOI:10.19587/j.cnki.1007-936x.2020z1.030.
- [14] 胡海涛, et al."交通能源互联网体系架构及关键技术."中国电机工程学报 38.01 (2018):12-24+339. doi:10.13334/j.0258-8013.pcsee.171969.
- [15] Yang, Hongming, et al. "Coordinated demand response of rail transit load and energy storage system considering driving comfort." CSEE Journal of Power and Energy Systems 6.4 (2020): 749-759
- [16] Yang X, Chen A, Ning B, et al. A Stochastic Model for the Integrated Optimization on Metro Timetable and Speed Profile with Uncertain Train Mass[J].Transportation Research, PartB:Methodological, 2016, 91:424-445.

附录

论文部分运行程序代码如下表所示。

```
tic
syms x
y1=(1.08*176.3*x)/(310-2.0895-0.0098*x-0.006*x^2);
fy1=int(y1);
s1=int(y1,0,28);
y2=(1.08*176.3*x)/(-760-2.0895-0.0098*x-0.006*x^2);
fy2=int(y2);
s2=int(y2,0,28);
for i=0:1:28
    ss1=int(y1,0,i);
    yy(i+1)=ss1;
end
plot(0:1:28,yy,'r-*');
hold on
for i=0:1:28
    ss2=int(y2,0,i);
    yy2(i+1)=5144.7+ss2;
end
plot(0:1:28,yy2,'r-*');
hold on
k=28;
yy3=yy2(29);
plot([k,k],[yy(29),yy3], 'r-*');
xlabel('速度(m/s)');
ylabel('距离(m)');
toc
ttm=toc;

tic
f1=310;
f2=2.0985+0.0098*28+0.006*28*28;
```

```

f3=760;
xx1=0:yy(29);
xx2=yy(29):yy2(29);
xx3=yy2(29):5144.7;
w1=f1*xx1;
w2=f2*(xx2-yy(29));
w3=f3*(xx3-yy2(29));
plot(xx1,w1,'r');
hold on
plot(xx2,w2+w1(245),'r');
hold on
plot(xx3,w3+w1(245)+w2(4803),'r');
hold on
ylabel('消耗能量(kJ) ');
xlabel('距离(m)');
toc
ttj=toc;

% =====变量确定=====
m=1.08*176.3*10^3;
f1=310*10^3;
f2=760*10^3;
%% ===== 速 度 - 距 离 曲 线 =====
x=0:28;
y1=zeros(29,1);
y1(1,1)=0;
for i=2:29
y1(i,1)=y1(i-1,1)-0.006*(i.^3)/(3*m)-0.0098*(i.^2)/(2*m)+(f1-f2-2.0895)*i/(m);
end
plot(x,y1);
hold on;
%加速阶段
f11=310*10^3;
f21=0;
y11=zeros(29,1);
y11(1,1)=0;
for i=2:29;

```

```

y11(i,1)=-0.006*(i.^3)/(3*m)-0.0098*(i.^2)/(2*m)+(f11-f21-2.0895)*i/(m)+y11(i-1,1);
end
%匀速阶段
y12=max(y11)+100;
%减速阶段
f13=0;
f23=760*10^3;
y13=zeros(29,1);
y13(1,1)=0;
for i=2:29
%
y13(i,1)=y11(29,1)-(y13(i-1,1)-0.006*(i.^3)/(3*m)-0.0098*(i.^2)/(2*m)+(f13-f23-2.0895)*i/(
m));
y13(i,1)=-(y13(i-1,1)-0.006*(i.^3)/(3*m)-0.0098*(i.^2)/(2*m)+(f13-f23-2.0895)*i/(m));
end
plot(x,y13);
hold on;

%%
=====test_code=====
%the code test different code
%
=====
=====
clear all;
clc
load Data.mat
A=table2array(Untitled);
x=A(:,1);
y1=A(:,2);
y2=A(:,3)./3.6;
[AX]=plotyy(x,y1,x,y2); %双 Y 坐标的建立
hold on;
set(get(gca,'xlabel'),'string','距离 (m) ');
set(get(AX(1),'Ylabel'),'string','梯度信息 (%%) ');
set(get(AX(2),'Ylabel'),'string','限速 (m/s) ');
set(gca,'xTick',[0:1000:10000]); %设定 X 坐标范围
set(AX(1),'ylim',[-50,50]); %设定左侧 Y 坐标范围
set(AX(2),'ylim',[20,30]); %设定右侧 Y 坐标范围
% =====test_code=====
% the code test different code
%
=====

```



```
% clear all;
% clc
m=1.08*176.3*10^3;
f1=3.1*10^5;
f2=7.6*10^5;
% load Data.mat
A=table2array(Untitled);
x1=A(:,1);
y2=A(:,3)/3.6;
plot(x1,y2,'k-*', 'Linewidth', 2);
hold on;
```