

第一部分：空间解析几何

一、大纲解读

1.向量与坐标

- (1) 向量的定义、表示、向量的线性运算、向量的分解、几何运算.
- (2) 坐标系的概念、向量与点的坐标及向量的代数运算.
- (3) 向量在轴上的射影及其性质、方向余弦、向量的夹角.
- (4) 向量的数量积、向量积和混合积的定义、几何意义、运算性质、计算方法及应用.
- (5) 应用向量求解一些几何、三角问题.

2.轨迹与方程

- (1) 曲面方程的定义：普通方程、参数方程（向量式与坐标式之间的互化）及其关系.
- (2) 空间曲线方程的普通形式和参数方程形式及其关系.
- (3) 建立空间曲面和曲线方程的一般方法、应用向量建立简单曲面、曲线的方程.
- (4) 球面的标准方程和一般方程、母线平行于坐标轴的柱面方程.

3.平面与空间直线

- (1) 平面方程、直线方程的各种形式，方程中各有关字母的意义.
- (2) 从决定平面和直线的几何条件出发，选用适当方法建立平面、直线方程.
- (3) 根据平面和直线的方程，判定平面与平面、直线与直线、平面与直线间的位置关系.
- (4) 根据平面和直线的方程及点的坐标判定有关点、平面、直线之间的位置关系、计算他们之间的距离与交角等；求两异面直线的公垂线方程.

4.二次曲面

- (1) 柱面、锥面、旋转曲面的定义，求柱面、锥面、旋转曲面的方程.
- (2) 椭球面、双曲面与抛物面的标准方程和主要性质，根据不同条件建立二次曲面的标准方程.
- (3) 单叶双曲面、双曲抛物面的直纹性及求单叶双曲面、双曲抛物面的直母线的方法.
- (4) 根据给定直线族求出它表示的直纹面方程，求动直线和动曲线的轨迹问题.

5.二次曲线的一般理论

- (1) 二次曲线的渐进方向、中心、渐近线.
- (2) 二次曲线的切线、二次曲线的正常点与奇异点.
- (3) 二次曲线的直径、共轭方向与共轭直径.
- (4) 二次曲线的主轴、主方向，特征方程、特征根.
- (5) 化简二次曲线方程并画出曲线在坐标系的位置草图.

二、往届考点分析

章 节	届 次	考点及分值
空间解析几何	第十一届初赛 A 类	第一题：二次曲面方程确定（椭球面）（15 分）
	第十一届初赛 B 类	第一题：利用向量求二次曲面轨迹问题（15 分）
	第十二届初赛 A 类	第一题：求直线方程及直线与球面的交点（15 分）
	第十二届初赛 B 类	第一题：求椭球面的外切柱面（15 分）
	第十三届初赛 A 类	第一题：直线绕 z 轴的旋转曲面问题（15 分）

	第十三届初赛 B 类	第一题：与球面相切的锥面问题（15 分）
	第十三届初赛补赛 A 类	第一题：空间中点的轨迹问题（椭球面）（15 分）
	第十三届初赛补赛 B 类	第一题：空间中的平面及其方程（15 分）
	第十四届初赛 A 类	第一题：单叶双曲面上某点处直母线夹角（15 分）
	第十四届初赛 B 类	第一题：直线及其平面方程（15 分）
	第十四届初赛补赛-1A 类	第一题：已知母线和两点求圆柱面方程（15 分）
	第十四届初赛补赛-1B 类	第一题：三个平面相交于一点的条件（15 分）
	第十四届初赛补赛-2A 类	第一题：单叶双曲面上某点处直母线问题（15 分）
	第十四届初赛补赛-2B 类	第一题：平面及其直线方程（15 分）

三、章节专题串讲

章 节	专 题	内 容
空间解析几何	直线与平面	向量代数
		空间中平面及其方程
		点到平面的距离
		空间中直线及其方程
		直线在平面内的投影
	曲线与二次曲面	空间中的二次曲面：柱面、锥面、旋转面（单叶双曲面）
		二次曲面的分类
		直纹面（★）

第二部分：数学分析

一、大纲解读

1.集合与函数

(1) 实数集 \mathbb{R} 、有理数与无理数的稠密性，实数集的界与确界、确界存在性定理、闭区间套定理、聚点定理、有限覆盖定理.

(2) \mathbb{R}^2 上的距离、邻域、聚点、界点、边界、开集、闭集、有界（无界）集、 \mathbb{R}^2 上的闭矩形套定理、聚点定理、有限覆盖定理、基本点列，以及上述概念和定理在 \mathbb{R}^n 上的推广.

(3) 函数、映射、变换概念及其几何意义，隐函数概念，反函数与逆变换，反函数存在性定理，初等函数以及与之相关的性质.

2.极限与连续

(1) 数列极限、收敛数列的基本性质（极限唯一性、有界性、保号性、不等式性质）.

(2) 数列收敛的条件（Cauchy 准则、迫敛性、单调有界原理、数列收敛与其子列收敛的关系），极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ 及其应用.

(3) 一元函数极限的定义、函数极限的基本性质（唯一性、局部有界性、保号性、不等式性质、迫敛性），归结原则和 Cauchy 收敛准则，两个重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ， $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ 及其应用，计算一元函数极限的各种方法，无穷小量与无穷大量、阶的比较，记号 O 与 o 的意义，多元函数重极限与累次极限概念、基本性质，二元函数的二重极限与累次极限的关系.

(4) 函数连续与间断、一致连续性、连续函数的局部性质（局部有界性、保号性），有界闭集上连续函数的性质（有界性、最大值最小值定理、介值定理、一致连续性）.

3.一元函数微分学

(1) 导数及其几何意义、可导与连续的关系、导数的各种计算方法，微分及其几何意义、可微与可导的关系、一阶微分形式不变性.

(2) 微分学基本定理：Fermat 定理，Rolle 定理，Lagrange 定理，Cauchy 定理，Taylor 公式（Peano 余项与 Lagrange 余项）.

(3) 一元微分学的应用：函数单调性的判别、极值、最大值和最小值、凸函数及其应用、曲线的凹凸性、拐点、渐近线、函数图象的讨论、洛必达（L'Hospital）法则、近似计算.

4.多元函数微分学

(1) 偏导数、全微分及其几何意义，可微与偏导存在、连续之间的关系，复合函数的偏导数与全微分，一阶微分形式不变性，方向导数与梯度，高阶偏导数，混合偏导数与顺序无关性，二元函数中值定理与 Taylor 公式.

(2) 隐函数存在定理、隐函数组存在定理、隐函数（组）求导方法、反函数组与坐标变换.

(3) 几何应用（平面曲线的切线与法线、空间曲线的切线与法平面、曲面的切平面与法线）.

(4) 极值问题（必要条件与充分条件），条件极值与 Lagrange 乘数法.

5.一元函数积分学

(1) 原函数与不定积分、不定积分的基本计算方法(直接积分法、换元法、分部积分法)、有理函数积分: $\int R(\cos x, \sin x)dx$ 型, $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 型.

(2) 定积分及其几何意义、可积条件(必要条件、充要条件: $\sum \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$)、可积函数类.

(3) 定积分的性质(关于区间可加性、不等式性质、绝对可积性、定积分第一中值定理)、变上限积分函数、微积分基本定理、N-L 公式及定积分计算、定积分第二中值定理.

(4) 无限区间上的广义积分、Cauchy 收敛准则、绝对收敛与条件收敛、 $f(x)$ 非负时 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的收敛性判别法(比较原则、柯西判别法)、Abel 判别法、Dirichlet 判别法、无界函数广义积分概念及其收敛性判别法.

(5) 微元法、几何应用(平面图形面积、已知截面面积函数的体积、曲线弧长与弧微分、旋转体体积), 其他应用.

6.多元函数积分学

(1) 二重积分及其几何意义、二重积分的计算(化为累次积分、极坐标变换、一般坐标变换).

(2) 三重积分、三重积分计算(化为累次积分、柱坐标、球坐标变换).

(3) 重积分的应用(体积、曲面面积、重心、转动惯量等).

(4) 含参量正常积分及其连续性、可微性、可积性, 运算顺序的可交换性.含参量广义积分的一致收敛性及其判别法, 含参量广义积分的连续性、可微性、可积性, 运算顺序的可交换性.

(5) 第一型曲线积分、曲面积分的概念、基本性质、计算.

(6) 第二型曲线积分概念、性质、计算; Green 公式, 平面曲线积分与路径无关的条件.

(7) 曲面的侧、第二型曲面积分的概念、性质、计算, 高斯公式、Stoke 公式, 两类线积分、两类面积分之间的关系.

7.无穷级数

(1) 数项级数

级数及其敛散性, 级数的和, Cauchy 准则, 收敛的必要条件, 收敛级数基本性质; 正项级数收敛的充分必要条件, 比较原则、比值判别法、根式判别法以及它们的极限形式; 交错级数的 Leibniz 判别法; 一般项级数的绝对收敛、条件收敛性、Abel 判别法、Dirichlet 判别法.

(2) 函数项级数

函数列与函数项级数的一致收敛性、Cauchy 准则、一致收敛性判别法(M-判别法、Abel 判别法、Dirichlet 判别法)、一致收敛函数列、函数项级数的性质及其应用.

(3) 幂级数

幂级数概念、Abel 定理、收敛半径与区间, 幂级数的一致收敛性, 幂级数的逐项可积性、可微性及其应用, 幂级数各项系数与其和函数的关系、函数的幂级数展开、Taylor 级数、Maclaurin 级数.

(4) Fourier 级数

三角级数、三角函数系的正交性、 2π 及 $2l$ 周期函数的 Fourier 级数展开、Bessel 不等式、Riemann-Lebesgue 定理、按段光滑函数的 Fourier 级数的收敛性定理.

二、往届考点分析

章 节	届 次	考点及分值
数学分析	第十一届初赛 A 类（50 分）	第二题：导数不等式问题（15 分）
		第五题：数列的有界性证明（15 分）
		第六题：函数的凹凸性及上下确界问题（20 分）
	第十一届初赛 B 类（50 分）	第二题：广义积分的计算（10 分）
		第三题：数列的极限（单调准则）（15 分）
		第六题：函数的凹凸性及上下确界（15 分）
		第七题：数项级数敛散性证明（10 分）
	第十二届初赛 A 类（50 分）	第二题：数列极限的计算（15 分）
		第五题：数列的敛散性判别（15 分）
		第六题：研究函数的性质（20 分）
	第十二届初赛 B 类（50 分）	第二题：积分不等式证明（15 分）
		第五题：广义积分的计算（15 分）
		第六题：积分不等式证明（20 分）
	第十三届初赛 A 类（50 分）	第二题：多元函数偏导数证明（15 分）
		第五题：含参变量积分（15 分）
		第六题：导数有关的不等式证明（20 分）
	第十三届初赛 B 类（50 分）	第二题：多元函数偏导数证明（15 分）
		第五题：数项级数敛散性判别（15 分）
		第六题：利用凹凸性证明等式（20 分）
	第十三届初赛 A 类补赛（50 分）	第二题：广义积分的计算（15 分）
		第五题：数列的极限（15 分）
		第六题：数项级数的证明与求和（20 分）
	第十三届初赛 B 类补赛（50 分）	第二题：广义积分的计算（15 分）
		第五题：一元积分学最值问题（15 分）
		第六题：数项级数敛散性判别（20 分）
	第十四届初赛 A 类（50 分）	第二题：数列的极限（15 分）
		第五题：定积分定义表达式有关证明（15 分）
		第六题：一致连续性证明（20 分）
	第十四届初赛 B 类（50 分）	第二题：数列的极限（15 分）
		第五题：数项级数收敛及其和（15 分）
		第六题：利用导数证明等式与不等式（20 分）
	第十四届初赛 A 类补 1（50 分）	第二题：积分不等式证明（15 分）
		第五题：数列的极限（利用上下极限）（15 分）
		第六题：含参变量积分（20 分）
	第十四届初赛 B 类补 1（50 分）	第二题：积分不等式证明（15 分）
		第五题：微分中值定理（Rolle 定理）（15 分）
		第六题：原函数存在性问题（20 分）
	第十四届初赛 A 类补 2（50 分）	第二题：映射、聚点、上极限（15 分）
		第五题：积分等式的证明（15 分）
		第六题：实数理论与可微性证明（20 分）
	第十四届初赛 B 类补 2（50 分）	第二题：映射、聚点、上极限（15 分）

		第五题：极限存在性证明（15 分）
		第六题：级数的收敛性判别（20 分）

三、章节专题串讲

章 节	专 题	内 容
数学分析	实数理论	映射、聚点、覆盖定理
	极限与连续	数列的极限
		Stolz 定理
		Cauchy 收敛准则
		单调有界准则与夹逼准则
		一致连续性
		介值定理
	一元函数微分学	导数与微分
		微分中值定理
		导数不等式的证明
		函数的凹凸性应用
	一元函数积分学	不定积分
		定积分
		积分不等式的证明
		Cauchy-Schwartz 不等式
		反常积分的计算
		反常积分的敛散性
	多元函数微分学	多元复合函数求偏导
		泰勒公式、隐函数定理
		二元函数的极值
	多元函数积分学	重积分
		曲线积分
		曲面积分
	含参变量积分	含参变量积分的性质
		含参变量的反常积分
	无穷级数	数项级数
		幂级数
		傅里叶级数

第三部分：高等代数

一、大纲解读

1.多项式

- (1) 数域与一元多项式的概念.
- (2) 多项式整除、带余除法、最大公因式、辗转相除法.
- (3) 互素、不可约多项式、重因式与重根.
- (4) 多项式函数、余数定理、多项式的根及性质.
- (5) 代数基本定理、复系数与实系数多项式的因式分解.
- (6) 本原多项式、Gauss 引理、有理系数多项式的因式分解、Eisenstein 判别法、有理数域上多项式的有理根.
- (7) 多元多项式及对称多项式、韦达 (Vieta) 定理.

2.行列式

- (1) n 级行列式的定义.
- (2) n 级行列式的性质.
- (3) 行列式的计算.
- (4) 行列式按一行 (列) 展开.
- (5) 拉普拉斯 (Laplace) 展开定理.
- (6) 克拉默 (Cramer) 法则.

3.线性方程组

- (1) 高斯 (Gauss) 消元法、线性方程组的初等变换、线性方程组的一般解.
- (2) n 维向量的运算与向量组.
- (3) 向量的线性组合、线性相关与线性无关、两个向量组的等价.
- (4) 向量组的极大无关组、向量组的秩.
- (5) 矩阵的行秩、列秩、秩、矩阵的秩与其子式的关系.
- (6) 线性方程组有解判别定理、线性方程组解的结构.
- (7) 齐次线性方程组的基础解系、解空间及其维数.

4.矩阵

- (1) 矩阵的概念、矩阵的运算 (加法、数乘、乘法、转置等运算) 及其运算律.
- (2) 矩阵乘积的行列式、矩阵乘积的秩与其因子的秩的关系.
- (3) 矩阵的逆、伴随矩阵、矩阵可逆的条件.
- (4) 分块矩阵及其运算与性质.
- (5) 初等矩阵、初等变换、矩阵的等价标准形.
- (6) 分块初等矩阵、分块初等变换.

5.双线性函数与二次型

- (1) 双线性函数、对偶空间.
- (2) 二次型及其矩阵表示.
- (3) 二次型的标准形、化二次型为标准形的配方法、初等变换法、正交变换法.

- (4) 复数域和实数域上二次型的规范形的唯一性、惯性定理.
- (5) 正定、半正定、负定二次型及正定、半正定矩阵.

6.线性空间

- (1) 线性空间的定义与简单性质.
- (2) 维数, 基与坐标.
- (3) 基变换与坐标变换.
- (4) 线性子空间.
- (5) 子空间的交与和、维数公式、子空间的直和.

7.线性变换

- (1) 线性变换的定义、线性变换的运算、线性变换的矩阵.
- (2) 特征值与特征向量、可对角化的线性变换.
- (3) 相似矩阵、相似不变量、哈密尔顿-凯莱定理.
- (4) 线性变换的值域与核、不变子空间.

8.若当标准形

- (1) λ -矩阵.
- (2) 行列式因子、不变因子、初等因子、矩阵相似的条件.
- (3) 若当标准形.

9.欧氏空间

- (1) 内积和欧氏空间、向量的长度、夹角与正交、度量矩阵.
- (2) 标准正交基、正交矩阵、施密特 (Schmidt) 正交化方法.
- (3) 欧氏空间的同构.
- (4) 正交变换、子空间的正交补.
- (5) 对称变换、实对称矩阵的标准形.
- (6) 主轴定理、用正交变换化实二次型或实对称矩阵为标准形.
- (7) 酉空间.

二、往届考点分析

章 节	届 次	考点及分值
高等代数	第十一届初赛 A 类	第三题: 复方阵的特征多项式 (15 分)
		第四题: 正定二次型与实向量空间 (20 分)
	第十一届初赛 B 类	第四题: n 维空间中基的问题 (15 分)
		第五题: 矩阵秩的性质及相似对角化 (20 分)
	第十二届初赛 A 类	第三题: 齐次方程组的解及矩阵的相似问题 (15 分)
		第四题: 复系数多项式零点问题 (20 分)
	第十二届初赛 B 类	第三题: 特征多项式及多项式的互素问题 (15 分)
		第四题: 向量的线性变换及线性无关 (20 分)
	第十三届初赛 A 类	第三题: 多项式根的问题 (15 分)
		第四题: 对称酉矩阵的性质及相关证明 (20 分)
	第十三届初赛 B 类	第三题: 多项式根的问题 (15 分)

		第四题：三阶行列式取值问题（20 分）
	第十三届初赛补赛 A 类	第三题：矩阵的相关证明（15 分）
		第四题：矩阵的迹及特征值（20 分）
	第十三届初赛补赛 B 类	第三题：矩阵的相关证明（15 分）
		第四题：向量空间的维数及特征值问题（20 分）
	第十四届初赛 A 类	第三题：矩阵的可交换性及行列式问题（15 分）
		第四题：证明多项式不可约（20 分）
	第十四届初赛 B 类	第三题：矩阵的可交换性及行列式问题（15 分）
		第四题：利用 Jordan 标准型求字母的值（20 分）
	第十四届初赛补 1A 类	第三题：矩阵的特征值与特征向量（15 分）
		第四题：矩阵的性质及行列式问题（20 分）
	第十四届初赛补 1B 类	第三题：矩阵的特征值与特征向量（15 分）
		第四题：矩阵的行列式有关证明（20 分）
	第十四届初赛补 2A 类	第三题：多项式互素问题（15 分）
		第四题：矩阵的性质及相关证明（20 分）
	第十四届初赛补 2B 类	第三题：多项式互素问题（15 分）
		第四题：实对称矩阵的特征值与特征向量（20 分）

三、章节专题串讲

章 节	专 题	内 容
高等代数	多项式	多项式整除、带余除法、最大公因式、辗转相除法
		互素、不可约多项式、重因式与重根
		多项式函数、余数定理、多项式的根及性质
		多元多项式及对称多项式、韦达（Vieta）定理.
	行列式	行列式的计算
		行列式按一行（列）展开
		拉普拉斯（Laplace）展开定理
	矩阵及其运算	矩阵乘积的行列式、矩阵乘积的秩与其因子的秩的关系
		矩阵的逆、伴随矩阵
		初等矩阵、初等变换、矩阵的等价标准形
		分块初等矩阵、分块初等变换
		矩阵的秩的性质与证明
	线性方程组	线性方程组有解判别定理、线性方程组解的结构
		齐次线性方程组的基础解系、解空间及其维数
	线性变换	特征值与特征向量
		可对角化的线性变换
		相似矩阵、相似不变量、哈密尔顿-凯莱定理
	二次型及其标准形	二次型及其矩阵表示
		二次型的标准形、化二次型为标准形的配方法、初等变换法、正交变换法
		复数域和实数域上二次型规范形的唯一性、惯性定理
		正定、半正定、负定二次型及正定、半正定矩阵
		行列式因子、不变因子、初等因子、矩阵相似的条件

		若当标准形
	线性空间	维数、基与坐标
		基变换与坐标变换、线性子空间
		子空间的交与和、维数公式、子空间的直和

英伽教师