第十五届全国大学生数学竞赛初赛试卷参考答案
(数学 B 类, 2023 年)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	20	15	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、 (本题 15 分) 在空间中给定两不同点 P 和 Q. 过 P 点直线 $L(P)$ 和过 Q 点直线 $L(Q)$ 正交于点 M. 问：所有可能的正交点 M 构成何种曲面？证明你的结论.

证明. 在空间中建立直角坐标系，使得线段 PQ 的中点为原点 O, 直线 PQ 为 $x-$轴, $P=(-a,0,0)$, $Q=(a,0,0)$ $(a>0)$.

……………………………………………………………(5 分)

设过 P 点直线 $L(P)$ 和过 Q 点直线 $L(Q)$ 正交于 $M=(x,y,z)$ 点，则有

$$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{QM}=0,$$

……………………………………………………………(10 分)

$$(x+a,y,z)\cdot(x-a,y,z)=0,$$

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

为球面.

……………………………………………………………(15 分)

得分	
评阅人	

二、 (本题 15 分) 设 $f(x,y,z)=x^2+(y^2+z^2)(1-x)^3$.

(1) 计算 f 的驻点.

(2) 求 f 在 Σ 上的最小值, 其中,

Σ 是 $\left\{(x,y,z)\big||x|\leqslant 2,\, y^2+z^2\leqslant 4\right\}$ 的边界.

(3) 求 f 在椭球 $x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}\leqslant 1$ 上的最小值.

解答. (1)

$$\begin{cases} f_x(x,y,z)=2x-3(y^2+z^2)(1-x)^2, \\ f_y(x,y,z)=2y(1-x)^3, \\ f_z(x,y,z)=2z(1-x)^3. \end{cases}$$

求解 $f_x(x_0,y_0,z_0)=f_y(x_0,y_0,z_0)=f_z(x_0,y_0,z_0)=0$ 的点可得函数在整个空间上只有唯一的驻点 $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$.

(**注.** 易见由上述方程的第二式可得 $x_0=1$ 或 $y_0=0$. 但 $x_0=1$ 与第一个式子矛盾. 因此 $x_0=0$, 进而又有 $y_0=z_0=0$.)

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(5 分)

(2) $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3$, 其中

$$\Sigma_1=\left\{(x,y,z)\big|x\in[-2,2],y^2+z^2=4\right\},$$
$$\Sigma_2=\left\{(x,y,z)\big|x=2,y^2+z^2\leqslant 4\right\},$$
$$\Sigma_3=\left\{(x,y,z)\big|x=-2,y^2+z^2\leqslant 4\right\}.$$

在 Σ_1 上,

$$f(x,y,z)=x^2+4(1-x)^3=g_1(x),\qquad x\in[-2,2].$$

作为一元函数, 考虑 g_1 在 $[-2,2]$ 内的驻点:

$$g_1'(\xi)=2\xi-12(1-\xi)^2=0.$$

可得: $\xi_1=\frac{3}{2},\quad \xi_2=\frac{2}{3}$.

我们有

$$g_1(2)=0,\quad g_1(-2)=112,\quad g_1\Big(\frac{3}{2}\Big)=\frac{7}{4},\quad g_1\Big(\frac{2}{3}\Big)=\frac{16}{27}.$$

故 f 在 Σ_1 上的最小值为 0.

(**注:** 以上讨论说明 $g_1(2)=0$ 以及 $g_1(-2),g_1\big(\frac{3}{2}\big),g_1\big(\frac{2}{3}\big)\geqslant 0$ 即可. 或不必求驻点, 直接说明 $g_1\geqslant 0$ 且 $g_1(2)=0$.)

在 Σ_2 上,

$$f(x,y,z)=4-(y^2+z^2)=g_2(x,y)\geqslant 0,\qquad y^2+z^2\leqslant 4.$$

在 Σ_3 上,

$$f(x,y,z)=4+27(y^2+z^2)=g_3(x,y)\geqslant 0,\qquad y^2+z^2\leqslant 4.$$

故 f 在 Σ 上的最小值为 0.

…………………………………………………………(10 分)

(3) 注意到椭球 $x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}\leqslant 1$ 完全在 Σ 围成的区域 Ω 内, 而且函数 f 在 Ω 内有唯一驻点 $(0,0,0)$, $f(0,0,0)=0$. 因此, f 在 $\overline{\Omega}$ 上的最小值为 0. 进而 f 在该椭球上的最小值就是 0.

…………………………………………………………(15 分)

得分	
评阅人	

三、 (本题 20 分) 设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间, $\mathbf{A}$ 是 V 上的一个线性变换. 证明: 存在 $\alpha \in V$ 使得 $\{\alpha, \mathbf{A}\alpha, \cdots, \mathbf{A}^{n-1}\alpha\}$ 成为 V 的一组基当且仅当对于 $\mathbf{A}$ 的任一特征值 λ, λ 的几何重数为 1.

解答. 必要性. 设存在 $\alpha \in V$ 使得 $\{\alpha, \mathbf{A}\alpha, \cdots, \mathbf{A}^{n-1}\alpha\}$ 成为 V 的一组基, 显然 $\mathbf{A}$ 在该基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & * \\ 1 & 0 & & & * \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & * \\ & & & 1 & * \end{pmatrix}.$$

....(2 分)

对任意 $c \in \mathbb{C}$,

$$cI - A = \begin{pmatrix} c & & & & * \\ -1 & c & & & * \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & c & * \\ & & & -1 & * \end{pmatrix},$$

其左下角的 $n-1$ 阶子式非零, 所以 $\mathrm{rank}(cI - A) \geq n-1$, 从而齐次线性方程组

$$(cI - A)X = 0$$

的解空间维数为 $n - \mathrm{rank}(cI - A) \leq 1$.

....(5 分)

又对 $\mathbf{A}$ 的任一特征值 λ,

$$(\lambda I - A)X = 0$$

一定有非零解, 它的解空间维数 ≥ 1. 所以齐次线性方程组

$$(\lambda I - A)X = 0$$

的解空间维数为 1, 即 λ 的几何重数为 1.

....(8 分)

充分性: 设 $\mathbf{A}$ 的互不相同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 代数重数分别为 $d_1, d_2, \cdots, d_s$, 其中 $d_1 + d_2 + \cdots + d_s = n$, 即 $\mathbf{A}$ 的特征多项式为

$$f(x) = (x-\lambda_1)^{d_1}(x-\lambda_2)^{d_2}\cdots(x-\lambda_s)^{d_s}.$$

对于 $1 \leq i \leq s$, 记 $V_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^{d_i}$, 其中 $\mathbf{I}$ 为恒等变换, 则 V_{λ_i} 为 $\mathbf{A}$-不变子空间且

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}.$$

……………………………………………………………… (11 分)

由于 λ_i 的几何重数为 1, 故 $\mathbf{A}|_{V_{\lambda_i}}$ 的 Jordan 标准型为

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{d_i \times d_i}.$$

所以存在 $\alpha_i \in V_{\lambda_i}$ 使得 $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^{d_i-1}\alpha_i \neq 0$.

……………………………………………………………… (14 分)

令

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s,$$

则 $\{\alpha, \mathbf{A}\alpha, \cdots, \mathbf{A}^{n-1}\alpha\}$ 是 V 的一组基. 若否, 则 $\alpha, \mathbf{A}\alpha, \cdots, \mathbf{A}^{n-1}\alpha$ 线性相关, 从而存在次数 $\leq n-1$ 的非零多项式 $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ 使得 $p(\mathbf{A})\alpha = 0$. 由于 V_{λ_i} 为 $\mathbf{A}$-不变子空间, 所以 $p(\mathbf{A})\alpha_i \in V_{\lambda_i}$. 由

$$0 = p(\mathbf{A})\alpha = p(\mathbf{A})\alpha_1 + p(\mathbf{A})\alpha_2 + \cdots + p(\mathbf{A})\alpha_s$$

可知 $p(\mathbf{A})\alpha_i = 0$. 由于 $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^{d_i-1}\alpha_i \neq 0$, 所以 $(x-\lambda_i)^{d_i}$ 是 $\mathbf{A}$ 的零化 α_i 的次数最低的多项式, 从而

$$(x-\lambda_i)^{d_i} \mid p(x).$$

……………………………………………………………… (18 分)

又当 $i \neq j$ 时, $(x-\lambda_i)^{d_i}$ 与 $(x-\lambda_j)^{d_j}$ 互素, 所以

$$(x-\lambda_1)^{d_1}(x-\lambda_2)^{d_2}\cdots(x-\lambda_s)^{d_s} \mid p(x),$$

即 $f(x) \mid p(x)$, 这与 $\deg p(x) < \deg f(x)$ 且 $p(x) \neq 0$ 矛盾.

……………………………………………………………… (20 分)

得分	
评阅人	

四、(本题 15 分) 证明对任意 n 阶方阵 A, 存在主对角线上元素为 1 或 -1 的 n 阶对角矩阵 J 使得 $A+J$ 可逆.

解答. 对 n 做归纳. 当 $n=1$ 时, $A=(a)$, 显然 $a+1$ 或者 $a-1$ 中一定有一个数非零, 结论成立. .... (2 分)

设结论对 $n-1$ 阶矩阵成立, 下面考察 n 阶方阵 A. 记

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 A_1 为 $n-1$ 阶矩阵, α 为 $n-1$ 维行向量, β 为 $n-1$ 维列向量, a_{nn} 为一个数. 由归纳假设, 存在主对角线上元素为 1 或 -1 的 $n-1$ 阶对角矩阵 J_1 使得 A_1+J_1 可逆. .... (5 分)

从而

$$\begin{aligned}
&\left|A+\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right|-\left|A+\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right| \\
=&\begin{vmatrix} A_1+J_1 & \beta \\ \alpha & a_{nn}+1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} A_1+J_1 & \beta \\ \alpha & a_{nn}-1 \end{vmatrix} \\
=&\begin{vmatrix} A_1+J_1 & \beta-\beta \\ \alpha & (a_{nn}+1)-(a_{nn}-1) \end{vmatrix} \\
=&\ 2|A_1+J_1|\neq 0.
\end{aligned}$$

这表明上式最左边的两个行列式中至少有一个非零. .... (11 分)

令

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 若 \quad \left|A+\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right|\neq 0,$$

或者

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad 若 \quad \left|A+\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right|\neq 0,$$

则 J 为主对角线上元素为 1 或 -1 的 n 阶对角矩阵且 $|A+J|\neq 0$, 即 $A+J$ 可逆, 所以结论对 n 阶矩阵成立. .... (14 分)

由归纳法原理, 结论对任意方阵成立. .... (15 分)

专业:____ 座位号:____ 考场号:____ 所在院校:____ 准考证号:____ 姓名:____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、 (本题 15 分) 设 $f(x)=x^n(1-x)^n$,

$$F(x)=f(x)-f''(x)+f^{(4)}(x)-\cdots+(-1)^n f^{(2n)}(x).$$

计算并化简 $\frac{d}{dx}\big(F'(x)\sin x-F(x)\cos x\big)$.

证明.
$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(F'(x)\sin x-F(x)\cos x)\\
&=F''(x)\sin x+F'(x)\cos x-F'(x)\cos x+F(x)\sin x\\
&=(F''(x)+F(x))\sin x \quad \cdots\cdots (5\text{ 分})\\
&=\big(f(x)+(-1)^n f^{(2n+2)}(x)\big)\sin x \quad \cdots\cdots (10\text{ 分})\\
&=f(x)\sin x=x^n(1-x)^n\sin x. \quad \cdots\cdots (15\text{ 分})
\end{aligned}$$

得分	
评阅人	

六、 (本题 20 分) 设非负函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微, 无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛, 且存在 $[0,+\infty)$ 上的非负函数 g, 使得

$$f'(x) \le g(x), \qquad x \ge 0. \tag{1}$$

分别就下列三种情形, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(i) $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ 收敛.

(ii) $g(x) = C > 0$, 其中 C 为常数.

(iii) $g(x) = Cf^p(x)$, 其中 $C > 0, p > 0$ 为常数.

证明. **法 I.** (i) 由条件 (1),

$$f(x) \le f(y) + \int_y^x g(x)\,dx \le f(y) + \int_y^{+\infty} g(x)\,dx, \qquad 0 \le y < x.$$

所以 f 在 $[0,+\infty)$ 上有界. 于是

$$\varlimsup_{x\to+\infty} f(x) \le f(y) + \int_y^{+\infty} g(x)\,dx, \qquad 0 \le y < +\infty$$

进而由无穷积分 $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ 收敛, 得到

$$\varlimsup_{x\to+\infty} f(x) \le \varliminf_{x\to+\infty} f(x)$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 存在, 又无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛, 从而 $A = 0$.

…………………………………………………………(10 分)

(ii) 我们用反证法证明结论.

假设结论不成立, 那么存在正数 a 和正数数列 $\{x_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, $f(x_n) \ge a, n = 1, 2, \cdots$. 显然不妨设

$$x_n > \frac{a}{2C}, \qquad n = 1, 2, \cdots. \tag{2}$$

在区间 $[x_n - \frac{a}{2C}, x_n]$ 上对不等式 (1) 从 x 积分到 x_n, 利用 (2) 得到

$$f(x_n) - f(x) \le C(x_n - x). \Rightarrow a - f(x) \le C(x_n - x) \le C \cdot \frac{a}{2C} = \frac{a}{2}.$$

我们有

$$f(x) \geq \frac{a}{2}, x_n - \frac{a}{2C} \leq x \leq x_n, n = 1, 2, \cdots.$$

从而

$$\int_{x_n - \frac{a}{2C}}^{x_n} f(x)dx \geq \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2C} = \frac{a^2}{4C}, n = 0, 1, 2, \cdots.$$

此与 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛的 Cauchy 准则矛盾, 证毕.

…………………………………………………………(15 分)

(iii) 假设结论不成立, 那么存在正数 a 和正数数列 $\{x_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, $f(x_n) \geq a, n = 1, 2, \cdots$. 显然不妨设

$$x_n > b = \frac{a}{2a^{p-1}C}, n = 1, 2, \cdots. \tag{3}$$

现在证明 f 在区间 $[x_n - b, x_n]$ 上的最小值 m_n 大于一个正常数.

设 $t_n \in [x_n - b, x_n], f(t_n) = m_n$. 我们分两种情况来讨论.

1. $m_n = a$, 则有 $f(x) \geq a, x \in [x_n - b, x_n]$.

2. $m_n < a$, 因为 $f(x_n) \geq a$, 所以 $t_n < x_n$. 记 $T_n = \sup\{t; f(x) < a, x \in [t_n, t)\}$, 那么, 由 f 的连续性知道, $t_n < T_n \leq x_n, f(T_n) = a$.

在 t_n 和 T_n 处应用不等式 (1), 利用 (3) 得到

$$a - m_n = f(T_n) - f(t_n) \leq C\int_{t_n}^{T_n} f^p(x)dx \leq Ca^p(T_n - t_n) \leq Ca^p b = \frac{a}{2}.$$

即

$$\frac{a}{2} \leq m_n \leq f(x), \qquad x \in [x_n - b, x_n].$$

综合两种情况, 我们总有

$$f(x) \geq \frac{a}{2}, x \in [x_n - b, x_n].$$

于是

$$\int_{x_n - b}^{x_n} f(x)dx \geq \frac{ab}{2} = \frac{a}{4C} > 0,$$

此与 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛的 Cauchy 准则矛盾, 证毕.

…………………………………………………………(20 分)

法 2. 我们对三种情形作统一处理. 设 $g(x) = Cf^p(x) + h(x)$, 其中 $C \geqslant 0$, $p \geqslant 0$ 为常数(0^0 理解为 1), h 非负且 $\int_0^{+\infty} h(x)\,dx$ 收敛.

任取 $m \geqslant 16C+2$, 由 Cauchy 准则, 存在 $N = N_m \geqslant 1$ 使得当 $n \geqslant N$ 时, $\int_{\frac{n}{m^2}}^{\frac{n+1}{m^2}} \big(f(x)+h(x)\big)\,dx < \dfrac{1}{4m^3}$. 因此, 结合 f 非负, 对于任何 $n \geqslant N$, 有 $\xi_n \in [\frac{n}{m^2}, \frac{n+1}{m^2}]$ 使得 $f(\xi_n) < \frac{1}{4m}$.

我们断言当 $x > \frac{N+1}{m^2}$ 时, $f(x) \leqslant \frac{1}{m}$.

否则, 有 $\eta_1 > \frac{N+1}{m^2}$, 使得 $f(\eta_1) > \frac{1}{m}$. 我们有 $k \geqslant N$ 使得 $\xi_k < \eta_1 < \xi_k + \frac{2}{m^2}$.

进一步, 设 η_2 为 $f - \frac{1}{m}$ 在 $[\xi_k, \eta_1]$ 中最小的零点, η_3 为 $f - \frac{1}{2m}$ 在 $[\xi_k, \eta_2]$ 中最大的零点. 则在 $[\eta_3, \eta_2]$ 上 $\frac{1}{2m} \leqslant f \leqslant \frac{1}{m} < 1$. 从而

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2m} =& f(\eta_2) - f(\eta_3) = \int_{\eta_3}^{\eta_2} f'(t)\,dt \\
\leqslant& \int_{\eta_3}^{\eta_2} \Big(Cf^p(t) + h(t)\Big)\,dt \leqslant \int_{\eta_3}^{\eta_2} \Big(C + h(t)\Big)\,dt \\
\leqslant& \frac{2C}{m^2} + \frac{1}{2m^3} \leqslant \frac{1}{4m}.
\end{aligned}
$$

矛盾.

因此, 当 $x > \frac{N+1}{m}$ 时, $f(x) \leqslant \frac{1}{m}$. 由此即得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

…………………………………………………………………………(20 分)