

# 2023 第八届“数维杯”大学生数学建模竞赛论文

## 题 目 节能列车运行控制优化策略

### 摘 要

针对问题一，以城市轨道交通电气化进程中能耗增长为背景，以欧拉数值法为基础，建立了模拟列车运行过程的动力学模型。通过考虑列车与轨道的摩擦、空气阻力、势能变化以及位置限速等因素，获取列车的速度-距离曲线、牵引力制动力-距离曲线、时间-距离曲线以及能量消耗-距离曲线。在模型中，我们考虑运行在水平轨道上的列车，通过给定站台 A 到站台 B 的距离、速度上限、列车质量、旋转部件惯性质量因数、列车电机最大牵引力和机械制动部件最大制动力，设定初始条件、定义微分方程，利用欧拉数值法进行迭代更新，得到了列车的运行状态。根据程序模拟运行结果，可观察到列车在不同路段内的速度变化、牵引制动力的变化、运行时间以及能量消耗。此外，还模拟运行在不同时间限制下列车到达站台 B 的情况，得到了六组曲线数据。

针对问题二，在对列车运行过程建立的动力学模型的基础上，可以使用粒子群优化算法来求解列车在给定路段上的最优速度轨迹。为了保证安全性和节能减排目标，在目标函数中我们将能耗消耗作为约束条件，并且根据路段坡度信息对最大速度进行限制。在粒子群算法中，通过计算该速度轨迹的能耗消耗来确定各个速度的适应度。为了更加准确地估计列车的能耗，我们需要考虑列车运行过程中的变速运动。通过计算列车在不同速度下的牵引功率和制动功率，在满足最大牵引力和最大制动力的情况下，确定列车在每个时间段内的加速度和制动度。然后，根据牵引功率和制动功率计算每个时间段的能耗，最终求得整段路程的总能耗。

针对问题三，介绍了两种优化方法解决问题三：建立速度曲线进行算法优化、采用分阶段求解路程和遗传算法。同时需要根据实时情况进行动态调整和优化，以确保列车安全、节能、快速地到达终点站。

**关键词:** 欧拉数值法，遗传算法

# 目 录

<b>一、问题重述</b>	<b>1</b>
1.1 引言 . . . . .	1
1.2 要解决的具体问题 . . . . .	1
<b>二、问题分析</b>	<b>3</b>
2.1 问题一的分析 . . . . .	3
2.2 问题二的分析 . . . . .	4
<b>三、模型假设</b>	<b>5</b>
<b>四、名词解释与符号说明</b>	<b>5</b>
4.1 名词解释与说明 . . . . .	5
4.2 主要符号与说明 . . . . .	5
<b>五、模型的建立与求解</b>	<b>5</b>
5.1 问题一的分析 and 求解 . . . . .	6
5.1.1 欧拉数值模型的建立 . . . . .	6
5.1.2 问题一模型的求解 . . . . .	11
5.1.3 问题一结果 . . . . .	14
5.2 问题二的求解 and 分析 and 求解 . . . . .	20
5.2.1 对问题的分析 . . . . .	20
5.2.2 对问题的求解 . . . . .	21
5.3 问题三的分析 and 求解 . . . . .	25
5.3.1 问题描述 . . . . .	25
5.3.2 优化目标 . . . . .	25
5.3.3 问题分析 . . . . .	25
5.3.4 模型假设 . . . . .	26

5.3.5	模型求解及结果展示 . . . . .	27
<b>六、模型的评价</b>		<b>30</b>
6.1	优点 . . . . .	30
6.1.1	问题一 . . . . .	30
6.1.2	问题二 . . . . .	30
6.1.3	问题三 . . . . .	30
6.2	缺点 . . . . .	31
6.2.1	问题一 . . . . .	31
6.2.2	问题二 . . . . .	31
6.2.3	问题三 . . . . .	31
<b>参考文献</b>		<b>33</b>

# 一、 问题重述

## 1.1 引言

在城市交通电气化进程快速推进的同时，与之相应的能耗增长和负面效应也在迅速增加。城市轨道交通中的快速增长的能耗给城轨交通的可持续性发展带来负担。2018 年，北京、上海、广州地铁负荷占全市总负荷的 1.5%-2.5%，成为了城市电网的最大单体负荷 [1]。在“双碳”政策下，城轨系统换用 ATO 驾驶模式、光伏 + 地铁等方法都取得了较好的减碳节能效果。城轨系统的需求侧响应可以在保证乘客满意度的情况下降低牵引能耗成本 [2]，可进一步发掘城轨系统减碳节能的潜力。

在列车运行过程中，列车与外界会产生各种摩擦，进而消耗列车牵引的能量。列车运行过程中，被考虑的因素较多，如列车与轨道的摩擦、列车受到的空气阻力、列车势能的变化、列车运行过程中的位置限速等。在同一段旅途中，列车使用不同的驾驶策略通常会产生不同的能量和时间的消耗。

## 1.2 要解决的具体问题

1. **问题一：**假设一辆列车在水平轨道上运行，从站台 A 运行至站台 B，其间距为 5144.7m，运行的速度上限为 100km/h，列车质量为 176.3t，列车旋转部件惯性的旋转质量因数  $\rho = 1.08$ ，列车电机的最大牵引力为 310KN，机械制动部件的最大制动力为 760KN。列车受到的阻力满足 Davis 阻力方程  $f = 2.0895 + 0.0098 \times v + 0.006 \times v^2$ ，该公式中的速度单位为 m/s，阻力单位为 KN。

你如何通过建模方法编写程序以获得列车运行过程的速度-距离曲线、牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线与能量消耗-距离曲线？程序的运行时间是多长？需要获取列车以最短时间到达站台 B、在最短运行时间上分别增加 10s、20s、50s、150s、300s 到达站台 B 总共六组曲线。

2. **问题二：**在列车运行的实际情况中，需要考虑的因素更多，模型也更加复杂。列车运行的旅途中不同的路段的限速是不同的，旅途中亦有不同的坡度情况，电机的动态特性也更加复杂，此外，储能装置在列车节能领域有着重要的应用，列车制动时，会将一定比例的能量储存

至储能装置中，以待后续使用。如图1-1所示。

本赛题提供两个附件。从 XEQ 站至 SMKXY 站的路况数据与包含电机牵引/制动动态特性的列车相关参数数据。介绍如下：

**附件一：**从 XEQ 站至 SMKXY 站的路况数据 (xls 格式)，其包含 XEQ 站到 SMKXY 站的路途中的坡度变化信息以及限速变化信息。详情见附件一.xls。

**附件二：**附件二介绍了电机的动态特性与参数并给出了静态电机牵引率与制动再生率。详情见附件二.docx。

考虑附件一、二的路况信息以及电机的复杂动态过程。若列车计划运行时间为  $T$ ，请你设计优化方案得到可行的速度轨迹，使得运行过程的能耗降低（越低越好）。参照问题一，获取列车以最短时间到达站台 B、在最短运行时间上分别增加 10s、20s、50s、150s、300s 到达站台 B 总共六组曲线。列车在运行过程中可能会出现各种突发情况导致列车需要提前到达站台或延时到达站台。列车的运行速度轨迹需要根据新的到站时间而发生变化。

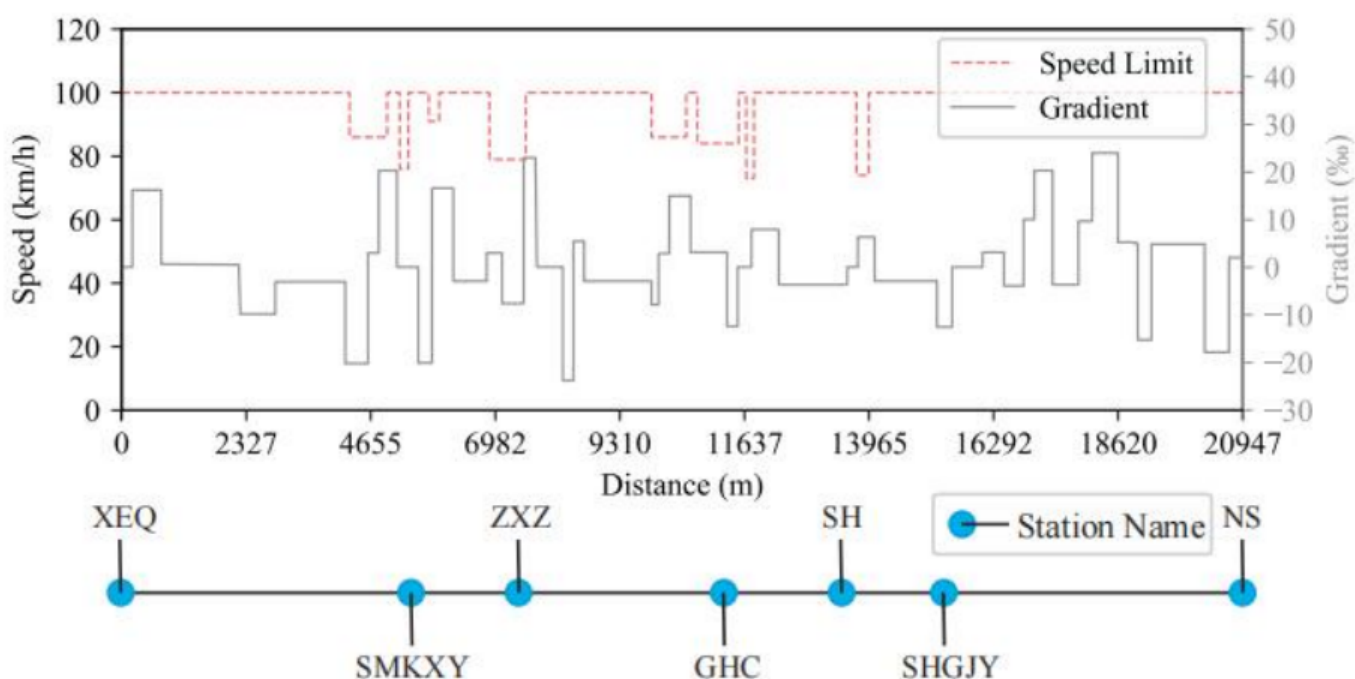


图 1-1: 复杂路况的运行旅途

3. **问题三：**列车从起点出发，原计划于 320s 后到达终点，列车运行至

2000m 位置时，由于前方突发事故，需要延迟 60s 到达终点。请你设计优化方案在保持列车节能运行下，能够快速（越快越好）得到调整后的优化速度轨迹。作出列车运行过程的速度-距离曲线、牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线与能量消耗-距离曲线。

## 二、 问题分析

### 2.1 问题一的分析

**对问题 1 研究意义的分析：**问题 1 属于列车运行过程的数学建模问题。通过建立数学模型，可以获得列车在不同条件下的运行速度、牵引制动力、时间和能量消耗等曲线。这有助于了解列车在不同情况下的性能表现，为优化列车运行提供依据。

**对于解决此类问题一般数学方法的分析：**针对列车运行过程中的速度、牵引制动力、时间和能量消耗等变化，我们可以使用数值方法进行建模和求解。其中，欧拉数值法是一种常用的数值方法，适用于对微分方程进行数值近似求解。

**对题目中所给数据特点的分析：**附件中给出了列车在水平轨道上的运行数据，包括列车间距、速度上限、列车质量、惯性旋转质量因数、最大牵引力、最大制动力以及阻力方程。这些数据反映了列车运行过程中的关键参数和限制条件，是建立数学模型的基础。

**对问题 1 的题目要求进行分析：**问题 1 要求通过建模方法编写程序，获得列车最短运行时间下的速度-距离曲线、牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线和能量消耗-距离曲线，以及程序的运行时间。这些曲线能够描述列车在不同位置的运行状态和能耗情况，有助于评估列车的性能和效率。此外，还需获取列车以最短时间到达站台 B、在最短运行时间上分别增加 10s、20s、50s、150s、300s 到达站台 B 总共六组曲线。

由于以上原因，我们首先建立一个基于欧拉数值法的数学模型 I，模拟列车在理想条件下的运行过程。然后，建立一个模型 II，通过调整运行时间来观察对应的速度-距离曲线、牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线和能量消耗-距离曲线的变化。最后，将模型 I 和模型 II 的结果进行比较，分析

不同条件下列车的运行情况和能耗差异。

## 2.2 问题二的分析

**对问题 2 研究意义的分析：**问题 2 属于列车运行过程的数学建模问题。通过建立数学模型，以路况信息及复杂动态过程为问题一的约束条件，来获得列车可行的运行轨迹、牵引制动力、时间和能量消耗等曲线。这有助于了解列车在不同情况下的性能表现，为优化列车运行提供依据。

**对于解决此类问题一般数学方法的分析：**针对列车运行过程中的速度、牵引制动力、时间和能量消耗等变化，我们可以使用粒子群优化算法来设计一条能耗最小的速度轨迹，并根据路况信息和列车动态特性进行相应的限制和调整，以达到行驶安全和经济的目的。

**对题目中所给数据特点的分析：**附件中给出了列车从 XEQ 站到 SMKXY 站的路途中的坡度变化信息以及限速变化信息和电机的动态特性。其中，列车的质量和运行距离是确定的，而坡度信息决定速度上限、电机的恒转矩区和弱磁区则反映了列车加速度和减速度的范围；阻力则决定了列车运行过程中所受到的衰减力大小。

**对问题 2 的题目要求进行分析：**问题 2 要求通过建模方法编写程序，以获得列车在给定运行时间  $T$  下能耗最低的可行速度轨迹，并生成牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线和能量消耗-距离曲线，以及程序的运行时间。这些曲线可以用于描述列车在不同位置的运行状态和能耗情况，进而评估列车的性能和效率。此外，还需要获取列车以最短时间到达站台 B 的曲线，以及在最短运行时间上分别增加 10s、20s、50s、150s、300s 到达站台 B 总共六组曲线，以探索速度轨迹变化对列车能耗的影响。

为达成以上目标，我们首先需要在设计速度轨迹时，考虑列车的加速度和减速度限制，以保证列车的安全性和运行效率。同时，还需考虑列车行驶路段的坡度、阻力等因素，以优化能耗表现。然后，通过数值计算方法，可以对列车在不同速度下的能耗进行计算，并选择最小能耗的轨迹方案。最后，在得到初步的结果后，需要对速度轨迹进行进一步检验和优化，以满足列车的安全性和运行效率等要求。此外，还需根据题目要求获取列

车在不同速度轨迹下到达站台 B 的曲线，以探索速度轨迹变化对列车能耗的影响。

### 三、 模型假设

1. 假设问题一中，站点之间的坡度为 0，列车做的是直线运动；
2. 假设牵引力和制动力产生的时间忽略不计，也即列车可在瞬间达到最大牵引力和最大制动力；
3. 忽略空气阻力和摩擦力；
4. 列车匀速运动时， $F_{\text{阻力}} = F_{\text{牵引力}}$
5. 假设列车在某个固定长度的间隔内，所受的阻力恒定，阻力值为该间隔内初始速度的对应值。

### 四、 名词解释与符号说明

#### 4.1 名词解释与说明

1. **列车所受合力：**在列车加速阶段，所受合力为： $F_{\text{合力}} = F_{\text{牵引力}} - F_{\text{阻力}}$ ；在列车减速阶段，列车所受合力为： $F_{\text{合力}} = F_{\text{制动力}} + F_{\text{阻力}}$ ；在列车匀速阶段，所受合力为： $F_{\text{合力}} = F_{\text{阻力}} - F_{\text{牵引力}} = 0$ 。
2. **欧拉数值法：**一种常见的数值求解微分方程的方法，适用于初值问题。它基于离散化的思想，通过逐步逼近微分方程的解。本题中，列车受到的阻力  $f$  与速度  $v$  相关，属于变加速运动。因此考虑采用欧拉数值法，通过逼近的思想来求解模型。

#### 4.2 主要符号与说明

### 五、 模型的建立与求解

#### 数据的预处理：

1. 问题一中，列车旋转部件惯性的旋转质量因数与问题似乎无关，不予考虑该数据。
2. 根据列车受到的阻力  $f$  (N)，获取列车运行最大速度时的阻力，分析列车在不同阶段的受力情况。
3. 在列车所受阻力恒定的情况下，分析列车加速、匀速、减速的运动



序号	符号	符号说明
1	$v$	行车速度 (m/s)
2	$F_{\text{阻力}}$	列车受到的阻力 $f$ (N)
3	$F_{\text{牵引力}}$	列车牵引力 (N)
4	$F_{\text{制动力}}$	列车制动力 (N)
5	$n$	间隔数量
6	$d_n$	间隔距离 (m)
7	$d_{\text{acc}}$	加速距离 (m)
8	$t_{\text{acc}}$	加速时间 (s)
9	$d_{\text{uniform}}$	匀速距离 (m)
10	$t_{\text{uniform}}$	匀速时间 (s)
11	$d_{\text{de}}$	减速距离 (m)
12	$t_{\text{de}}$	减速时间 (s)
13	$\text{programtime}$	程序运行时间 (s)
14	$t_{\text{total}}$	列车总运行时间 (s)
15	$m_{\text{train}}$	列车质量 (kg)
16	$v_{\text{limit}}$	列车速度上限 (s)
17	$s$	站点距离 (m)
18	$a_{\text{acc}}$	加速过程的加速度 ( $m/s^2$ )
19	$v_{n-\text{final}}$	当前间隔区间的最终速度 ( $m/s$ )
20	$v_0$	当前间隔区间的初始速度 ( $m/s$ )
21	$t_n$	当前间隔区间的运行时间 (s)
22	$a_{\text{de}}$	减速过程的加速度 ( $m/s^2$ )

时间、距离。

4. 将所有参数的单位统一，在本论文中，速度的单位均为 m/s，力的单位均为 N, 质量的单位均为 kg。

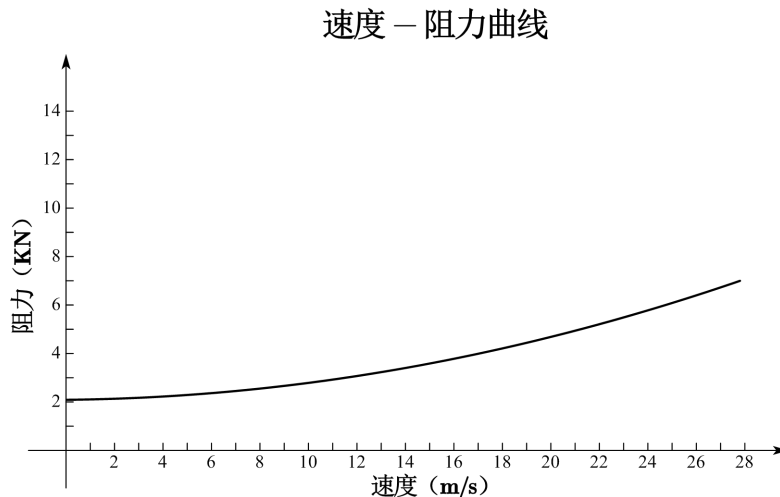
其中，阻力全程与速度相关，速度-阻力的图像如下所示：

## 5.1 问题一的分析 and 求解

### 5.1.1 欧拉数值模型的建立

模型建立的内容要点如下：

1. 列车受力分析：考虑列车在运行过程中受到的各种力，包括牵引力、阻力和制动力。根据列车运行的物理原理，建立列车受力平衡方程。
2. 阻力计算：根据给定的阻力方程，计算列车在不同速度下受到的阻力。阻力方程通常包括与速度相关的线性阻力和二次阻力项。



**图 5-2: 速度-阻力对应关系**

3. 加速度和速度计算：通过列车受力平衡方程，计算列车在每个时间步长内的净加速度。使用欧拉数值法，将时间和速度离散化，通过积分计算出每个时间步长内的速度。
4. 时间和能量消耗计算：通过将时间和距离离散化，并根据速度计算每个时间步长内的行驶时间。同时，根据列车的牵引力和速度，计算每个时间步长内的能量消耗。
5. 数据记录与存储：在模拟过程中，记录并存储每个时间步长内的距离、速度、牵引力、时间和能量消耗等数据。
6. 绘制曲线：将模拟过程中记录的数据，根据距离绘制速度-距离曲线，牵引力-距离曲线，时间-距离曲线和能量消耗-距离曲线。
7. 参数调整与分析：根据模拟结果，可以调整模型中的参数，并进行进一步的分析和优化，以满足不同的运行要求和限制条件。

### **模型的主要类别：**

1. Train (列车类)：该类用于表示列车的属性和行为。它可以包含列车的质量、最大牵引力、最大制动力等参数。该类可以具有以下方法：
  1. 计算列车在某一位置上的牵引力和制动力；
  2. 根据列车当前速度和受到的阻力，计算列车在下一时刻的速度；
  3. 根据列车当前位置和速度，计算列车在下一时刻的位置；
  4. 根据列车的质量、速度和位置，计算列车的动能；

5. 根据列车的速度和位置，计算列车在下一时刻的能量消耗。
2. **Resistance** (阻力类): 该类用于计算列车受到的阻力。它可以包含阻力方程的参数。该类可根据列车当前速度，计算列车受到的阻力。
3. **Simulation** (模拟类): 该类用于进行模拟并获取所需的曲线数据。它可以包含列车和阻力对象，并管理列车的运行过程。该类可以具有以下方法:
  1. 初始化列车和阻力对象;
  2. 根据指定的时间增量和总运行时间，运行模拟并记录列车的速度、位置、牵引力、制动力、时间和能量消耗;
  3. 根据不同的到达时间要求，运行模拟并记录列车的速度、位置、牵引力、制动力、时间和能量消耗。

通过以上类别，可建立一个基于欧拉数值法的列车运行模拟程序。运行时间取决于所需模拟的总运行时间和时间增量的选择，一般来说，较小的增量和较长的总运行时间会导致程序具有较长的运行时间。

#### **建模目的:**

1. 运行优化: 建立列车运行模型以优化运行策略，如列车的加速、减速、换挡和调度等，以最大程度地提高运行效率、减少能耗或缩短运行时间。
2. 安全评估: 通过建立列车运行模型，评估列车在不同条件下的安全性能，如在弯道、坡道、受限速区域或紧急制动情况下的制动距离和稳定性。
3. 能耗分析: 建立列车运行模型以分析和优化能耗，包括评估列车在不同速度和负载条件下的能源消耗，提出减少能耗的策略和措施。
4. 设备设计与评估: 通过建立列车运行模型，评估不同设备、部件或系统的性能，如电机、制动器、轨道等，以指导设备的设计、选择和优化。
5. 运行仿真: 使用列车运行模型进行仿真，以模拟实际运行场景和条件，评估运行方案的可行性、验证系统的可靠性，并预测列车的运行行为和性能。

6. 制定规章制度：通过建立列车运行模型，分析列车运行的安全要求和限制条件，制定相应的规章制度和运营标准，确保列车运行的安全性和顺畅性。

### 建模要点：

在建模列车运行过程中的速度-距离曲线、牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线和能量消耗-距离曲线时，欧拉数值法可以作为一种简单而有效的方法。

欧拉数值法是一种数值积分方法，用于近似求解常微分方程。在这种方法中，我们将运动过程离散化为许多小的时间步长，并计算每个时间步长上的速度、牵引制动力、时间和能量消耗。

以下是使用欧拉数值法建模列车运行过程的要点：

1. 步长选择：选择合适的步长非常重要，它会影响模拟的准确性和计算的效率。步长太大可能导致结果不准确，步长太小则会增加计算时间。可以根据模型的要求和计算机性能进行调整。通常，选择一个合理的初始步长，然后根据需要进行逐步细化。
2. 运动方程建模：根据列车运动的物理规律，建立列车的运动方程。在这种情况下，你可以考虑以下因素：列车与轨道的摩擦、空气阻力、势能变化等。这些因素会对列车的加速度和速度产生影响。结合牵引力和制动力的限制，可以得到列车的运动方程。
3. 牵引力和制动力建模：根据列车的运动方程和给定的最大牵引力和最大制动力，建立牵引力和制动力与速度的关系。使用 Davis 阻力方程来计算列车受到的阻力。
4. 能量消耗建模：根据列车的运动方程和能量守恒原理，建立能量消耗与速度和时间的关系。考虑列车受到的阻力、牵引力和制动力，可以计算出列车在每个时间步长上的能量消耗。
5. 迭代计算：使用欧拉数值法进行迭代计算。从初始状态开始，根据列车的运动方程和牵引力-速度关系，计算出每个时间步长上的速度。然后根据速度和阻力方程，计算出每个时间步长上的牵引力和制动力。通

过累加时间步长，可以计算出时间和距离的关系，并进一步计算出能量消耗。

6. 最短时间到达站台 B 的情况：对于需要列车以最短时间到达站台 B 的情况，可以使用优化算法（例如最速下降法）来调整列车的驾驶策略。在每个时间步长内，根据当前位置和速度，通过调整牵引力和制动力的大小，使得列车在最短时间内达到目标位置。通过迭代计算，可以得到列车在最短时间下的速度-距离曲线、牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线和能量消耗-距离曲线。
7. 对于在最短运行时间上增加特定时间到达站台 B 的情况，可以在驾驶策略中引入额外的等待时间，使得列车在规定的时间内到达目标位置。通过调整等待时间的大小，可以获得相应的时间-距离曲线。
8. 程序的运行时间取决于所选的时间步长、迭代次数和计算机的性能。通常情况下，使用欧拉数值法进行列车运行模拟的计算时间可以在几秒到几分钟之间，具体取决于模型的复杂性和所需的精度。

### **建立模型：**

在这个问题中，使用欧拉数值法来建模列车的运行过程。欧拉数值法是一种常见的数值方法，用于近似求解微分方程。我们将列车的运行过程建模为一个动力学系统，并利用欧拉数值法来模拟该系统的运行。

下面是使用欧拉数值法建模列车运行过程的要点：

1. 定义变量：首先，我们需要定义一些变量来描述列车的运行状态，如时间、距离、速度、速度上限、牵引力和制动力等。这些变量将在模拟过程中进行更新。此外，还需设定将列车运行区间划分的间隔数。
2. 设定初始条件：我们需要设定初始条件，包括列车的初始位置、初始阻力、初始速度和初始时间等。这些初始条件将作为模拟的起点。
3. 定义微分方程：根据列车运行的物理规律，我们可以得到速度和加速度之间的关系。在这种情况下，我们可以使用列车的质量、阻力和牵引力来建立微分方程。根据题目中给出的 Davis 阻力方程，可以计算列车受到的阻力。然后，我们可以使用牛顿第二定律 ( $F = ma$ ) 来计算列

车的加速度。

4. 迭代更新：使用欧拉数值法，我们可以通过离散化时间和距离来进行迭代计算。根据列车的当前状态和微分方程，我们可以计算出列车在下一个时间步长内的速度和位置。然后，我们将这些计算结果作为新的列车状态，继续进行下一步的迭代计算。
5. 终止条件：我们设置多个终止条件，加速阶段，列车的速度达到速度上限 27.8m/s 时停止加速；列车到达终点时停止模拟，且到达终点时，速度刚好为 0；站点间的总距离减去加速和减速的距离，即为匀速运动的距离。
6. 记录数据：在每个时间步长，我们可以记录列车的速度、距离、牵引力和制动力等数据。这样我们就可以得到速度-距离曲线、牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线和能量消耗-距离曲线。程序的运行时间取决于所选的时间步长和模拟的总时间。较小的时间步长和较长的模拟时间将导致更准确的结果，但也会增加计算的时间。根据具体的要求，可以选择适当的时间步长和模拟时间，以平衡计算效率和结果的准确性。

### 5.1.2 问题一模型的求解

根据题目，可得：

$$s = 5144.7, m_{train} = 176300, v_{limit} = 27.8$$

$$d_n = s/n$$

$$F_{\text{牵引力-max}} = 310000, F_{\text{制动力-max}} = 760000$$

$$F_{\text{阻力}} = 2.0895 + 0.0098 \times v + 0.006 \times v^2$$

因此，加速过程的公式可表示为：

$$a_{acc} = \frac{(F_{\text{牵引力}} - F_{\text{阻力}})}{m_{train}},$$

$$v_{n-final} = \sqrt{v_0^2 + 2 \times a_{acc} \times d_n}$$

$$t_n = \frac{v_{n-final} - v_0}{a_{acc}}$$

**Algorithm 1** 列车加速运动模型

- 
- 1: 初始化参数:  $mass, traction_{force}, velocity_{limit}, k_1, k_2, k_3, num_{segments}, total_{distance}$
  - 2: 计算变量:  $segment_{length} = \frac{total_{distance}}{num_{segments}}$ ,
  - 3: 初始化空列表:  $data$  For  $i = 0$  to  $num_{segments} - 1$
  - 4: From  $initial_{velocity}$  gets  $velocity$
  - 5: 计算阻力:  $resistance$  gets  $(k_1 + k_2 * velocity + k_3 * velocity^2) * 1000$
  - 6: 计算加速度:  $acceleration$  gets  $(traction_{force} - resistance) / mass$
  - 7: 计算末速度:  $final_{velocity}$  gets  $\sqrt{initial_{velocity}^2 + 2 * acceleration * segment_{length}}$
  - 8: 计算小段所需时间:  $t$  gets  $(final_{velocity} - initial_{velocity}) / acceleration$
  - 9: **if**  $final_{velocity} > velocity_{limit}$  **then**
  - 10:      $final_{velocity}$  gets  $Velocity_{limit}$
  - 11: 更新距离和速度:  $distance_{traveled}$  gets  $distance_{traveled} + segment_{length}$
  - 12:  $velocity$  gets  $final_{velocity}$
  - 13: 累加时间并将其添加到列表中:      $elapsed_{time}$  gets  $elapsed_{time} + t, data.append([distance_{traveled}, velocity, elapsed_{time}])$
  - 14: **if**  $velocity$  get  $velocity_{limit}$  **then**
  - 15:     结束运动模拟
  - 16: 将数据转换为 DataFrame 格式:  $df$  gets  $pd.DataFrame(data, columns = ['Distance', 'Velocity', 'Time'])$
  - 17: 获取时间的累加值:  $df['Time_{cumsum}']$  gets  $df['Time'].cumsum()$
  - 18: 将数据写入 Excel 表格中:  $df.to_{excel}('p1 - aacc + 10.xlsx', sheet_{name} = 'Sheet1', index = False)$
  - 19: 输出结果
-

根据上述数据，可得模型如下：

减速过程的公式可表示为：

$$a_{de} = \frac{(F_{制动力} + F_{阻力})}{m_{train}},$$

$$v_{n-final} = \sqrt{v_{limit}^2 + 2 \times a_{de} \times d_n}$$

$$t_n = \frac{v_{n-final} - v_{limit}}{a_{de}}$$

根据上述数据，可得模型如下：

---

**Algorithm 2** 列车减速运动模型

---

```

初始化参数: mass, breaking_force, velocity_limit, k1, k2, k3, num_segments, total_distance
2: 计算变量: segment_length = df * total_distance / num_segments,
   初始化空列表: data For i = 0 to num_segments - 1
4: From velocity_limit gets velocity
   计算阻力: resistance gets (k1 + k2 * velocity + k3 * velocity^2) * 1000
6: 计算加速度: acceleration gets (breaking_force + resistance) / mass
   计算末速度: final_velocity gets sqrt(velocity_limit^2 - 2 * acceleration * segment_length)
8: 计算小段所需时间: t gets (final_velocity - velocity_limit) / acceleration
   if final_velocity < 0 then
10:   gets final_velocity
   更新距离和速度: distance_traveled gets distance_traveled + segment_length
12: final_velocity gets velocity
   累加时间并将其添加到列表中: elapsed_time gets elapsed_time + t, data.append([distance_traveled, velocity, elapsed_time])
14: if distance_traveled get 0 then
   结束运动模拟
16: 将数据转换为 DataFrame 格式: df gets pd.DataFrame(data, columns = ['Distance', 'Velocity', 'Time'])
   获取时间的累加值: df['Time_cumsum'] gets df['Time'].cumsum()
18: 将数据写入 Excel 表格中: df.to_excel('p1 - aacc + 10.xlsx', sheet_name = 'Sheet1', index = False)
   输出结果

```

---

本问题将匀速运动的速度设置为 27.8m/s, 匀速运动的距离为:  $d_{uniform} = s - d_{acc} - d_{de}$ , 匀速运动的时间为:  $t_{uniform} = \frac{d_{uniform}}{v_{limit}}$ 。



将牵引力和制动力均设为最大时，得到的运行时间即为最短的运行时间；在最短运行时间上分别增加 10s、20s、50s、150s、300s 到达站台 B，可通过调整牵引力、制动力来实现。

此外，本论文还针对不同的步长间隔对应的实验结果做了研究。

### 5.1.3 问题一结果

#### 1. 不同步长的间隔，对应的实验结果

我们选取了不同的间隔数量进行实验。其中，间隔数越多，越符合真实的加减速情况。间隔数为 1 的时候，视为匀加速、匀减速运动。由表可知，间隔数越多，间隔距离越短。加速、减速、匀速的时间是固定的，间隔数量越多，越能逼近现实中列车真实运行情况，但也会造成程序运行时间过长。综合考虑当间隔数为 1000 的时候，程序的运行时间较短，且加减速距离、时间也比较符合真实情况。因此，以下所有的实验均在间隔数为 1000 的基础上进行。

间隔数	间隔距离 (m)	加速距离 (m)	加速时间 (s)	匀速距离 (m)	匀速时间 (s)	减速距离 (m)	减速时间 (s)	程序运行时间 (s)
1	5144.70	219.76	15.81	4924.94	177.16	89.64	6.45	0.01
100	51.45	257.23	17.18	4785.17	172.13	102.30	12.28	0.12
500	10.29	226.37	16.12	4823.73	173.52	94.60	8.37	0.15
1000	5.14	221.20	16.12	4830.90	173.77	92.60	6.42	0.15
5000	1.03	221.12	16.10	4831.28	173.79	92.30	6.39	0.18
10000	0.51	221.12	16.10	4831.28	173.79	92.30	6.39	0.21
100000	0.05	221.07	16.10	4831.53	173.80	92.10	6.35	0.96

#### 2. 最短运行时间

当牵引力为 310KN，制动力为 760KN 时，列车在站点间的运行时间最短。列车运行过程的速度-距离曲线、牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线与能量消耗-距离曲线如图所示。由速度-距离曲线可知，列车在 310KN 的牵引力作用下的加速距离为 221.2 m；之后列车的速度达到最大值 27.8m/s，进行 4806.6m 的匀速运动之后进入减速阶段，减速的距离为 116.9m。由牵引力/制动力曲线可知，列车在加速阶段受到的牵引力为 310KN，减速阶段的制动力为 760KN，匀速阶段的牵引力为 6999.9N。列车所受的合力受速度

最短运行时间

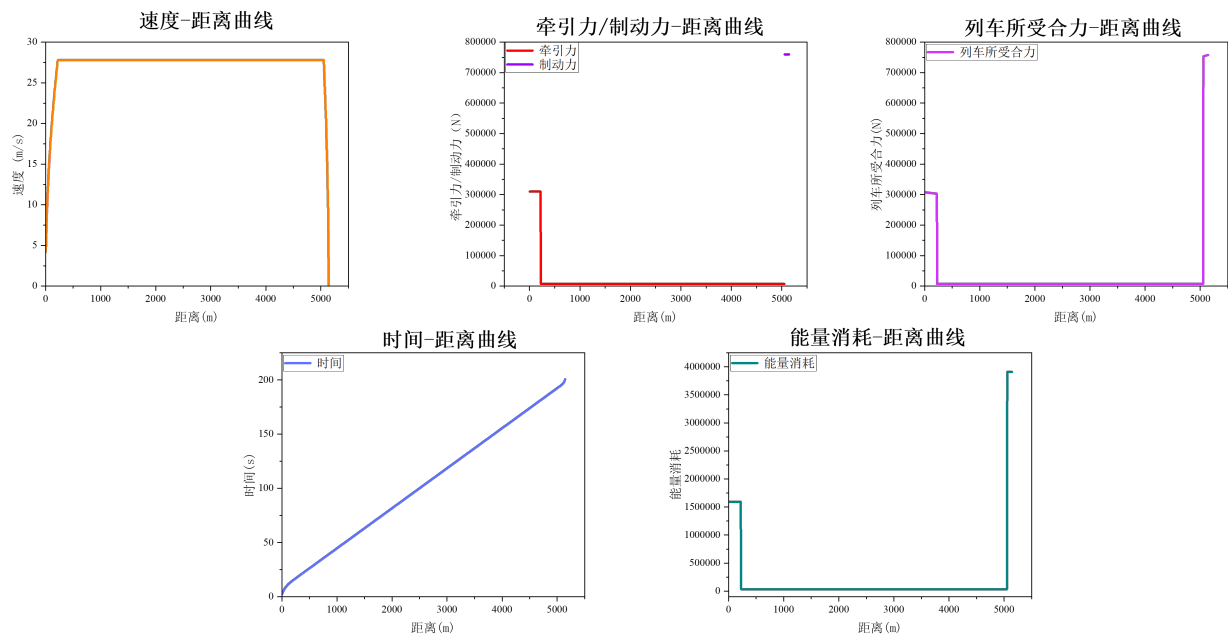


图 5-3: 最短运行时间

的影响，但变化趋势与牵引力/制动力一致。由时间-距离曲线可知，列车加速的时间为 16.1s，减速时间为 6.4s，匀速运动时间为 172.9 s。由时间-距离曲线可知,列车在单位距离的能量消耗会受速度、牵引力的同时左右，但变化趋势与牵引力/制动力基本保持一致。

3. 最短运行时间 +10s

我们通过减少牵引力、制动力的数值，可增加加速、减速的时间，进而达到增加列车运行时间的效果，如下表所示。

从表格中可以看出，在牵引力和制动力的数值越小的情况下，列车的加速、减速时间会相应地变长，总运行时间也会随之增加。相反地，牵引力和制动力的数值越大，则列车加速、减速时间会缩短，总运行时间也会越短。此外，在牵引力和制动力的作用下，列车的匀速运动速度也同时变化。综上所述，通过对牵引力和制动力的调整，我们可以优化列车的运行时间，并在不同的运行需求下选择最适合的牵引力和制动力组合。这对于铁路交通运输的效率和安全性都有很重要的意义。

当牵引力为 236000N，制动力为 435000N 时，列车在站点间的运行时间

	牵引力 (N)	制动力 (N)	加速时 间 (s)	匀速时 间 (s)	减速时 间 (s)	总运行时 间 (s)	匀速运动 的速度
最短运行时间	310000.0	760000.0	16.1	172.9	6.4	195.4	27.8
最短运行时间 +10s	236000	435000	21.3	172.9	11.2	205.4	27.1
最短运行时间 +20s	192000	296000	26.1	172.9	16.4	215.4	26.3
最短运行时间 +50s	139750	131000	36.1	172.9	36.4	245.4	23.9
最短运行时间 +150s	78150	42309	66.1	172.9	106.4	345.4	15.9
最短运行时间 +300s	33369	27629	166.1	172.9	156.4	495.4	3.74

在最短的基础上 +10s。列车运行过程的速度-距离曲线、牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线与能量消耗-距离曲线如图所示。由速度-距离曲线可知，列车在 236000N 的牵引力作用下的加速距离为 293.3 m；之后列车的速度达到最大值 27.8m/s，进行 4697.1m 的匀速运动之后进入减速阶段，减速的距离为 154.3m。由牵引力/制动力曲线可知，列车在加速阶段受到的牵引力为 236000N，减速阶段的制动力为 435000N，匀速阶段的牵引力为 6999.9N。列车所受的合力受速度的影响，但变化趋势与牵引力/制动力一致。由时间-距离曲线可知，列车加速的时间为 21.3 s，减速时间为 11.2 s，匀速运动时间为 172.9 s。由时间-距离曲线可知，列车在单位距离的能量消耗会受速度、牵引力的同时左右，但变化趋势与牵引力/制动力基本保持一致。

#### 4. 最短运行时间 +20s

当牵引力为 192000N，制动力为 296000N 时，列车在站点间的运行时间在最短的基础上 +20s。列车运行过程的速度-距离曲线、牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线与能量消耗-距离曲线如图所示。由速度-距离曲线可知，列车在 192000N 的牵引力作用下的加速距离为 360.1 m；之后列车的速度达到最大值 27.8m/s，进行 4,558.2m 的匀速运动之后进入减速阶段，减速的距离为 226.4m。由牵引力/制动力曲线可知，列车在加速阶段受到的牵引力为

## 最短运行时间 +10s

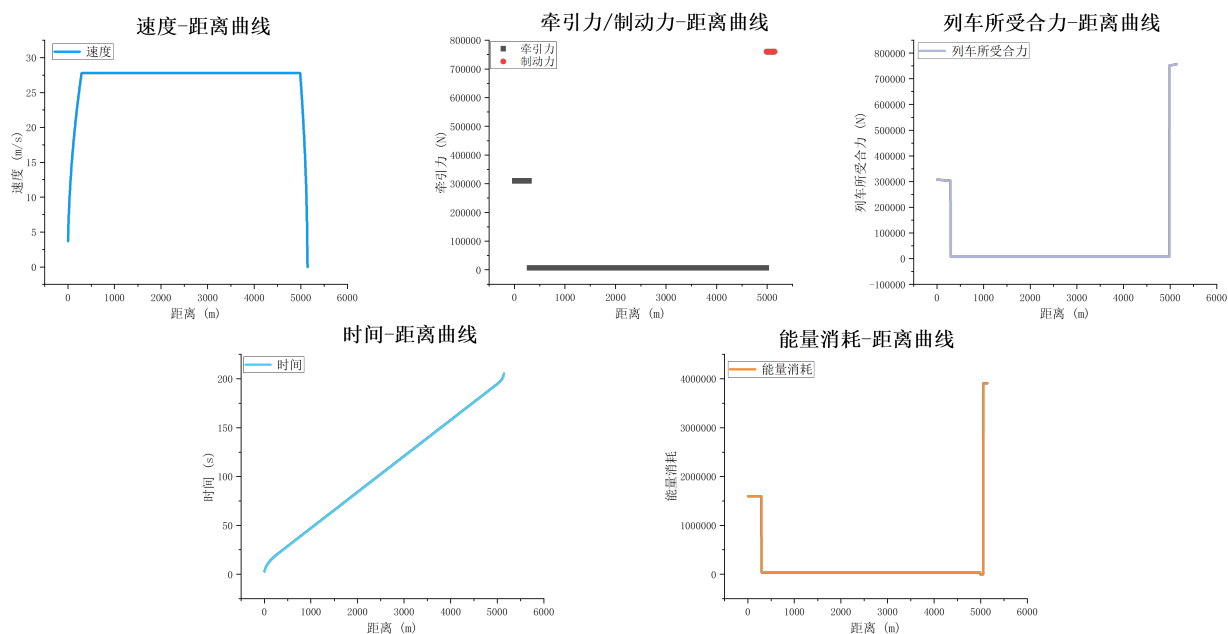


图 5-4: 最短运行时间 +10s

## 最短运行时间 +20s

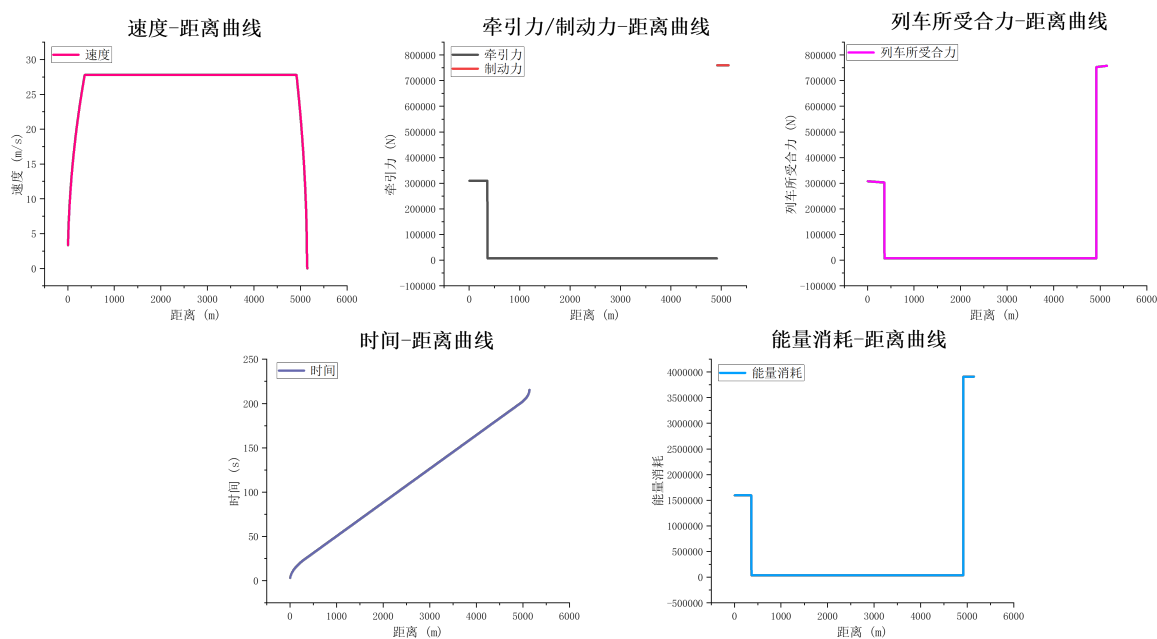


图 5-5: 最短运行时间 +20s

192000N, 减速阶段的制动力为 296000N, 匀速阶段的牵引力为 6999.9N。列车所受的合力受速度的影响, 但变化趋势与牵引力/制动力一致。由时间-距离曲线可知, 列车加速的时间为 26.1s, 减速时间为 16.4s, 匀速运动时间为 172.9 s。由时间-距离曲线可知, 列车在单位距离的能量消耗会受速度、牵引力的同时左右, 但变化趋势与牵引力/制动力基本保持一致。

### 5. 最短运行时间 +50s

当牵引力为 139750N, 制动力为 131000N 时, 列车在站点间的运行时间在最短的基础上 +50s。列车运行过程的速度-距离曲线、牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线与能量消耗-距离曲线如图所示。由速度-距离曲线可知,

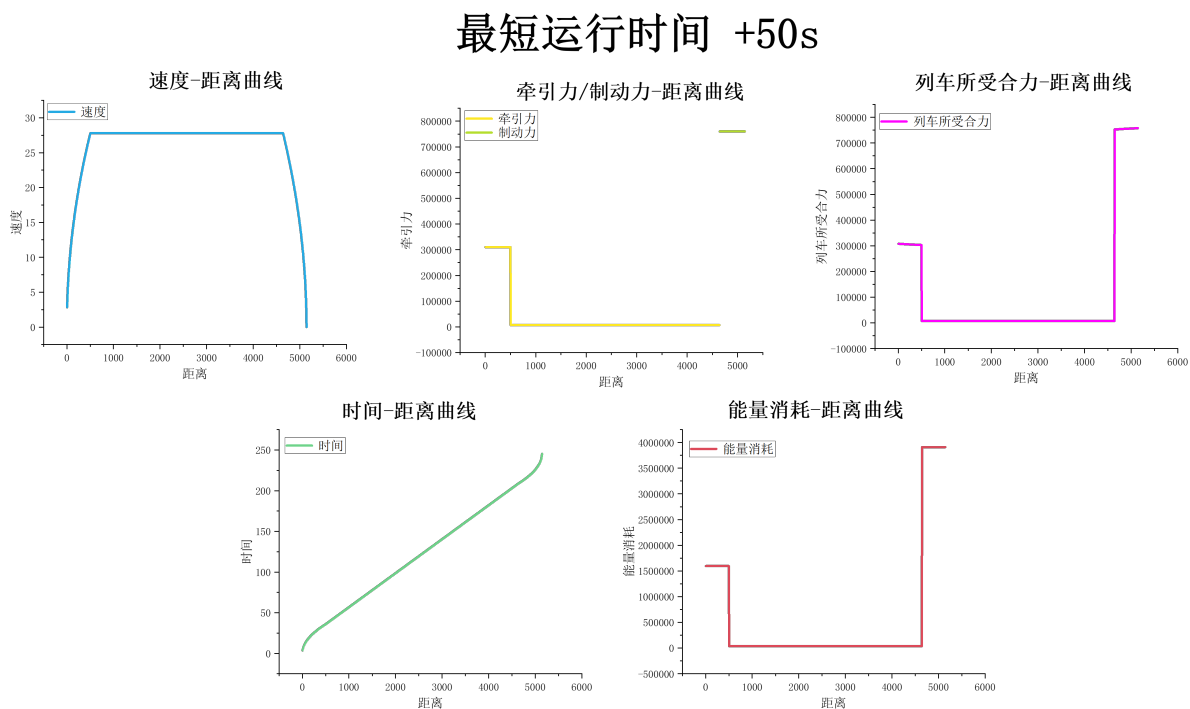


图 5-6: 最短运行时间 +50s

列车在 139750N 的牵引力作用下的加速距离为 499.0m; 之后列车的速度达到最大值 27.8m/s, 进行 4,141.5m 的匀速运动之后进入减速阶段, 减速的距离为 504.2m。由牵引力/制动力曲线可知, 列车在加速阶段受到的牵引力为 192000N, 减速阶段的制动力为 131000N, 匀速阶段的牵引力为 6999.9N。列车所受的合力受速度的影响, 但变化趋势与牵引力/制动力一致。由时间-距离曲线可知, 列车加速的时间为 36.1s, 减速时间为 36.4s, 匀速运动时间为

172.9 s。由时间-距离曲线可知,列车在单位距离的能量消耗会受速度、牵引力的同时左右,但变化趋势与牵引力/制动力基本保持一致。

## 6. 最短运行时间 +150s

当牵引力为 78150N,制动力为 42309N 时,列车在站点间的运行时间在最短的基础上 +150s。列车运行过程的速度-距离曲线、牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线与能量消耗-距离曲线如图所示。由速度-距离曲线可知,

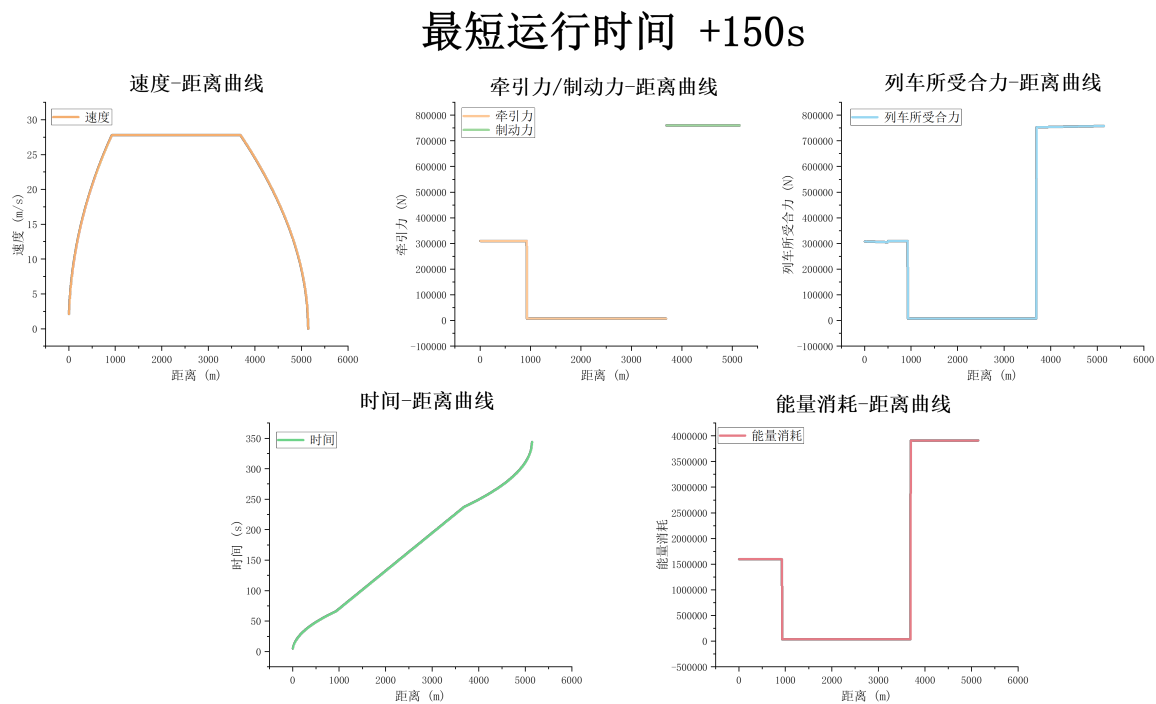


图 5-7: 最短运行时间 +150s

列车在 78150N 的牵引力作用下的加速距离为 926.1m;之后列车的速度达到最大值 27.8m/s,进行 2,762.6m 的匀速运动之后进入减速阶段,减速的距离为 1,456.0m。由牵引力/制动力曲线可知,列车在加速阶段受到的牵引力为 78150N,减速阶段的制动力为 42309N,匀速阶段的牵引力为 6999.9N。列车所受的合力受速度的影响,但变化趋势与牵引力/制动力一致。由时间-距离曲线可知,列车加速的时间为 66.1s,减速时间为 106.4s,匀速运动时间为 172.9 s。由时间-距离曲线可知,列车在单位距离的能量消耗会受速度、牵引力的同时左右,但变化趋势与牵引力/制动力基本保持一致。

## 7. 最短运行时间 +300s

当牵引力为 33369N, 制动力为 27629N 时, 列车在站点间的运行时间在最短的基础上 +300s。列车运行过程的速度-距离曲线、牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线与能量消耗-距离曲线如图所示。由速度-距离曲线可知,

### 最短运行时间 +300s

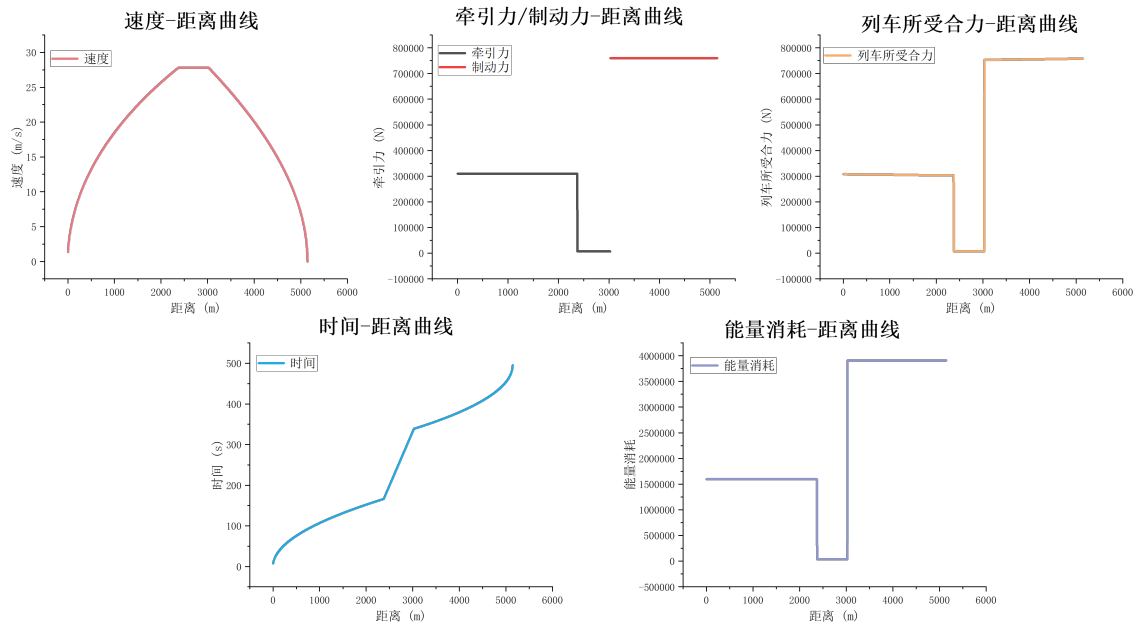


图 5-8: 最短运行时间 +300s

列车在 33369N 的牵引力作用下的加速距离为 2371.7m; 之后列车的速度达到最大值 27.8m/s, 进行 653.4m 的匀速运动之后进入减速阶段, 减速的距离为 2,119.6m。由牵引力/制动力曲线可知, 列车在加速阶段受到的牵引力为 33369N, 减速阶段的制动力为 27629N, 匀速阶段的牵引力为 6999.9N。列车所受的合力受速度的影响, 但变化趋势与牵引力/制动力一致。由时间-距离曲线可知, 列车加速的时间为 166.1s, 减速时间为 156.4s, 匀速运动时间为 172.9 s。由时间-距离曲线可知, 列车在单位距离的能量消耗会受速度、牵引力的同时左右, 但变化趋势与牵引力/制动力基本保持一致。

## 5.2 问题二的求解和分析的求解

### 5.2.1 对问题的分析

在确定了路况拟合曲线之后, 可以开始进行速度轨迹的设计与优化。列车的速度轨迹可以划分为三个阶段: 加速、平稳和制动阶段。在设计过程

中, 需要考虑列车受到的总阻力, 即 Davis 阻力和摩擦阻力, 以及列车的牵引力、制动力等因素。问题二有两个约束条件。其一是安全考虑, 列车在不同路段斜坡度的不同限制了最大速度。其二是交流电机的运行方式, 在达到速度点时会切换牵引力和制动力。

### 5.2.2 对问题的求解

#### 能源消耗进行量化

##### (1) 牵引力作功

恒转矩区: 反电动势小于最大电压, 电机运行只受到最大电流限制, 可以输出最大转矩, 最大输出功率与转速成正比上升;

弱磁区 (恒功率区): 反电动势逼近最大电压, 采用弱磁控制维持电压平衡, 同时受到最大电压和最大电流的限制; 牵引过程的两个阶段表示如下

$$f_1^{tra} \begin{cases} f_1^{tra} & 0 \leq v \leq 10 \\ f_1^{tra} \times \frac{v_1^{tra}}{v} & 10 \leq v \end{cases} f_1^{tra} = 310KN$$

##### (2) 匀速阶段牵引做功

列车在达到最大速度后, 忽略空气阻力和摩擦力等因素, 列车以最大速度做匀速运动。牵引力的数值利用公式计算

$$F_{tra} = F_{阻力} = 2.0895 + 0.0098 \times v + 0.006 \times v^2$$

##### (3) 制动力做功

恒转矩区: 反电动势小于最大电压, 电机运行只受到最大电流限制, 可以输出最大转矩, 最大输出功率与转速成正比上升;

弱磁区 (恒功率区): 反电动势逼近最大电压, 采用弱磁控制维持电压平衡, 同时受到最大电压和最大电流的限制; 牵引过程的两个阶段表示如下

$$f_1^{tra} \begin{cases} f_1^{tra} & 0 \leq v \leq 17 \\ f_1^{tra} \times \frac{v_1^{tra}}{v} & 17 \leq v \end{cases} f_1^{tra} = 260kN$$

电机牵引制动过程具有转换效率, 本赛题考虑静态效率因子, 即电机牵引效率因子为 0.9, 电机再生制动效率因子为 0.6。根据能量转换公式我们建



立出列车在不同速度下所运行距离的能量消耗

$$E = F \times S$$

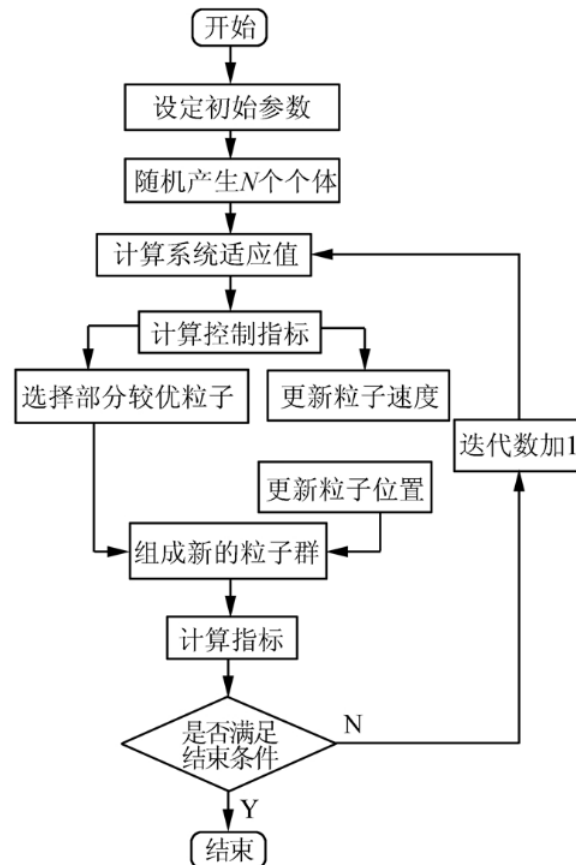


图 5-9: 粒子群优化算法流程图

## 数据处理

附录一提供了从 XEQ 站至 SMKXY 站的路况数据，其包含 XEQ 站到 SMKXY 站的路途中的坡度变化信息以及限速变化信息。具体信息详见表。在列车后半路程时最大速度为 87km/h，为了防止能耗过多，我们决定不在对列车进行加速，保持 87km/h 匀速行驶。

## 模型建立

1. 输入路况信息和列车参数，包括最大允许行驶速度、质量、惯性系数、最大牵引力、最大制动力等。
2. 将路段按照累加距离分割成若干小路段，每个小路段长度为 100m，并将每个小路段按照其路径相似性划分成若干子路径。

表 5-1: EQ 站至 SMKXY 站的路况数据表

道路距离	0m - 4259m	4529.1m - 4960m	4960.1m - 5144.7m
速度限制	27.8m/s	23.888m/s	27.8m/s

3. 对于每个小路段，利用 B 样条曲线进行拟合，得到该子路径的拟合曲线，然后将所有子路径的拟合曲线拼接起来，得到完整的路况拟合曲线。

4. 分别计算每个小路段的坡度，并根据坡度信息和列车动态特性，计算每个小路段的最大允许行驶速度  $v_{\max}$ 。

5. 将整个路程分为  $N$  个等分时间段，每个时间段的长度为  $t$ ，总时长为  $T=N*t$ ，其中  $t$  可以根据实际情况进行调整。

6. 初始化一组粒子，每个粒子表示一条速度轨迹，随机生成初始速度。

对于每个粒子，按照以下步骤执行：

- 计算出该粒子对应的速度轨迹上各个时间段内的速度值。
- 根据速度值计算出各个时间段内的加速度和制动度，并检查是否超过限制条件（最大牵引力和最大制动力）。
- 根据加速度、制动度和速度计算出该时间段内的能耗。
- 将各个时间段内的能耗累加起来，计算出该速度轨迹的能耗消耗（目标函数）。
- 判断该速度轨迹的适应度是否优于历史上最优的个体位置和全局最优位置，如果是则更新历史上最优的个体位置和全局最优位置。

总之，在问题二的解答过程中，需要综合考虑路况信息、列车动态特性以及优化算法等多种复杂因素，结合具体问题特点进行细致分析和求解。

### 模型求解

此问题我们采用粒子群算法求解出的结果如表所示。增加  $T$  后，我们选择对牵引力和制动力改变以能耗小为约束求解出模型如图 5-10 所示

列车行驶距离	列车行驶时间 (s)	列车行驶速度 (m/s)	牵引力/制动力 (N)	距离间隔的能耗 (J)
0	0	0	310000	0
28.81	5.75	10	$(310000 * 10) / V$	893110
432.67	25.56	27.8	6998.98	61364.16
4223.83	161.93	27.8	$(760000 * 17) / V$	26534253.02
4259.1	163.29	23.888	6464.06164	17598.46
5071.97	197.32	23.888	$(760000 * 17) / V$	5254441.79
5111.31	199.23	17	760000	24634.35
5144.7	203.15	0	0	25371.81

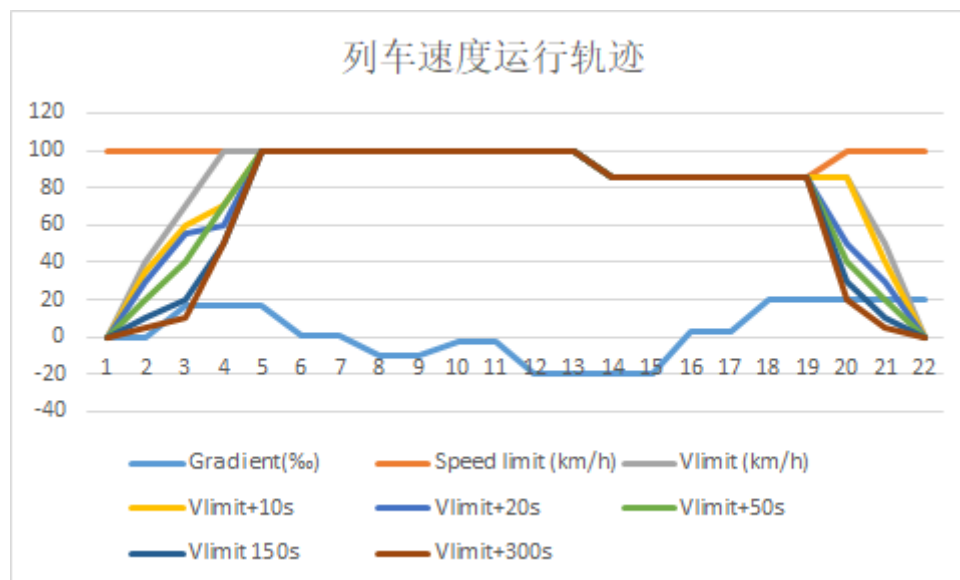


图 5-10: 列车运行速度曲线及路况信息

## 5.3 问题三的分析和求解

### 5.3.1 问题描述

列车从起点出发，原计划于 320s 后到达终点，列车运行至 2000m 位置时，由于前方突发事故，需要延迟 60s 到达终点。请你设计优化方案在保持列车节能运行下，能够快速（越快越好）得到调整后的优化速度轨迹。作出列车运行过程的速度-距离曲线、牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线与能量消耗-距离曲线。

### 5.3.2 优化目标

- 1、最小化列车运行时间，以保证列车在规定的时间内到达终点站；
- 2、调度列车的速度和牵引力，以实现节能运行，减少能源消耗；
- 3、保证列车的安全性，防止超速、交通事故等危险情况的发生；
- 4、根据应用需求，考虑其他的优化目标，如降低列车的噪声和振动，减少车辆的维修保养成本等。

这些优化目标需要在实际应用中进行权衡和平衡，以求达到最佳的优化效果。同时，在进行列车运行调度的过程中，还需要考虑到各种复杂的因素，如列车模型、路况变化、天气因素等等，以确保优化方案的可行性和有效性。根据该问题，我们重点考虑的优化目标为前两点：在保持节能运行的前提下保持列车能够快速运行。

### 5.3.3 问题分析

方法一：在列车行驶过程中，列车需要在原计划到达终点的时间（即 320s）延迟 60s 才能到达终点。因此，我们可以将目标设置为在保证列车安全、节能的前提下，尽量缩短列车的运行时间，以在 380s 内到达终点。为了完成这项任务，可以采用以下步骤：

首先，需要获取列车以最短时间到达站台 B 的速度曲线，并记录该曲线下的能耗消耗。然后，在最短运行时间上分别增加 10s、20s、50s、150s、300s 到达站台 B 总共六组曲线，并记录每组曲线下的能耗消耗。这样可以获得一系列带有不同到站时间限制的速度轨迹，并对其进行能耗比较。接下来，针对每组曲线，需要设计合适的控制策略和算法，并根据路段限速、

坡度等因素进行优化控制，以满足到站时间的要求，同时使能耗消耗最低。可以考虑使用控制器参数优化、遗传算法、蚁群算法等算法进行优化调整。其次，在进行能耗优化时，需要充分考虑列车的物理约束条件，如牵引力和制动力的限制，以保证列车的安全运行和节能效果。此外，还需要考虑到列车的实际能耗数据和行驶环境等因素。然后，对比每组曲线的能耗消耗，选择能耗消耗最低的一组曲线对应的速度轨迹作为最优速度轨迹。针对列车提前或延时到站的情况，需要及时修改列车的速度轨迹，重新优化能耗，以满足新的到站时间要求。最后，根据得到的优化速度轨迹，可以绘制列车运行过程的速度-距离曲线、牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线与能量消耗-距离曲线，进行评估和分析，并为实际运营提供实用的参考意见。

方法二：首先对列车的整体运行过程分成两个阶段来处理。第一阶段我们规定列车行驶时间为 320s，通过问题二中所建立的耗能最小优化模型得到列车的行驶策略。其次使用第一阶段运行时间最小优化策略行驶 2km，并且确定剩余路段所需时间和当前列车的初始状态。最后对于剩下的路程所需要的行驶策略，采用问题二中所建立的优化模型来进行求解。

#### 5.3.4 模型假设

假设列车与轨道之间的摩擦力使用 Davis 阻力模型进行描述，阻力大小受到列车在运行过程中所受的压力和速度影响，可以用以下公式计算：

$$f = 2.0895 + 0.0098v + 0.006v^2$$

$v$  表示列车速度。

列车的动力学模型可以用常微分方程组进行描述，假设列车的质心不会发生水平移动，列车的速度和加速度分别沿着与轨道相切和法线方向。可以用以下公式计算列车的加速度：

$$a = \frac{1}{m}(F_{trac} - f - f_g \sin(\theta))$$

其中  $m$  表示列车质量， $F_{trac}$  表示电机牵引力， $f$  表示列车阻力， $f_g$  表示重力， $\theta$  为列车运行时的坡度。

列车的功率可以用电机传输效率、电机输出扭矩和电机转速表示。在本模型中，我们假设电机传输效率为常数  $\eta$ ，电机输出扭矩  $T_m$  与电机转速

$\omega$  成正比例关系，即：

$$T_m(t) = k \cdot \omega(t)$$

其中， $k$  为比例系数。

考虑到列车的能耗问题，我们需要将电机所消耗的功率进行约束。假设电机最大输出功率为  $P_{\max}$ ，则有以下约束条件：

$$P_m(t) \leq P_{\max}$$

最终，为了实现优化目标，我们可以将运行时间和能耗作为目标函数，建立如下的优化问题：

$$\underset{v(t), p_m(t)}{\min} \int_0^{s_f} \frac{1}{V(s)} ds + \alpha \int_0^{s_f} P_m(t) dt$$

其中， $S_f$  表示列车行驶的路程， $\alpha$  是牵引力平方的惩罚因子。

### 5.3.5 模型求解及结果展示

对于此问题我们可以分为两个阶段分别采用遗传算法进行求解，遗传算法步骤如下，算法流程图 5-11 所示：

1、定义染色体编码方式：我们可以选取两个浮点数作为染色体编码，分别表示电机输出扭矩  $T_m$  和电机转速  $\omega$ 。例如，我们可以将  $T_m$  和  $\omega$  的取值范围分别编码为  $[0, T_{\max}]$  和  $[0, \omega_{\max}]$  内的两个实数，将染色体长度指定为 2。

2、定义适应度函数：我们需要定义一个适应度函数来评价个体的适应性。在这里，我们可以将列车的运行时间作为适应度函数。

3、初始化种群：根据染色体编码方式随机生成一定数量的初始个体，构成种群。

4、选择操作：通过轮盘赌或锦标赛等方法选择优秀个体，保留到下一代。

5、交叉操作：对选择出来的个体进行交叉，生成下一代个体。例如，可以采用单点交叉或多点交叉等方式进行。

6、变异操作：对新一代个体进行变异，增加种群的多样性。例如，可以对染色体中的单个基因进行随机变换。

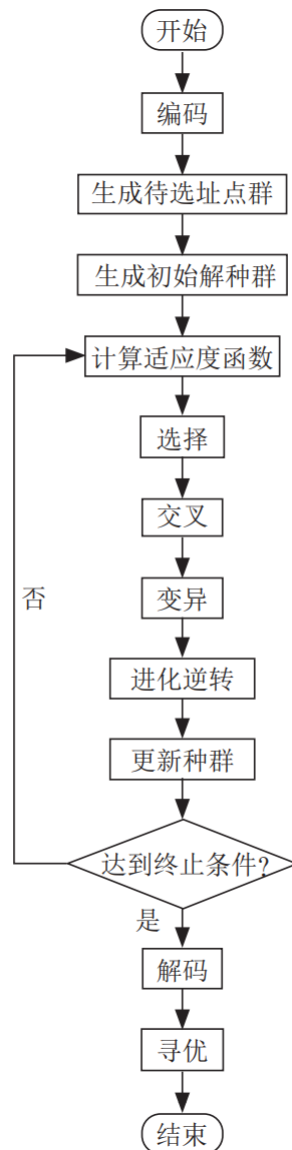


图 5-11: 遗传算法流程图

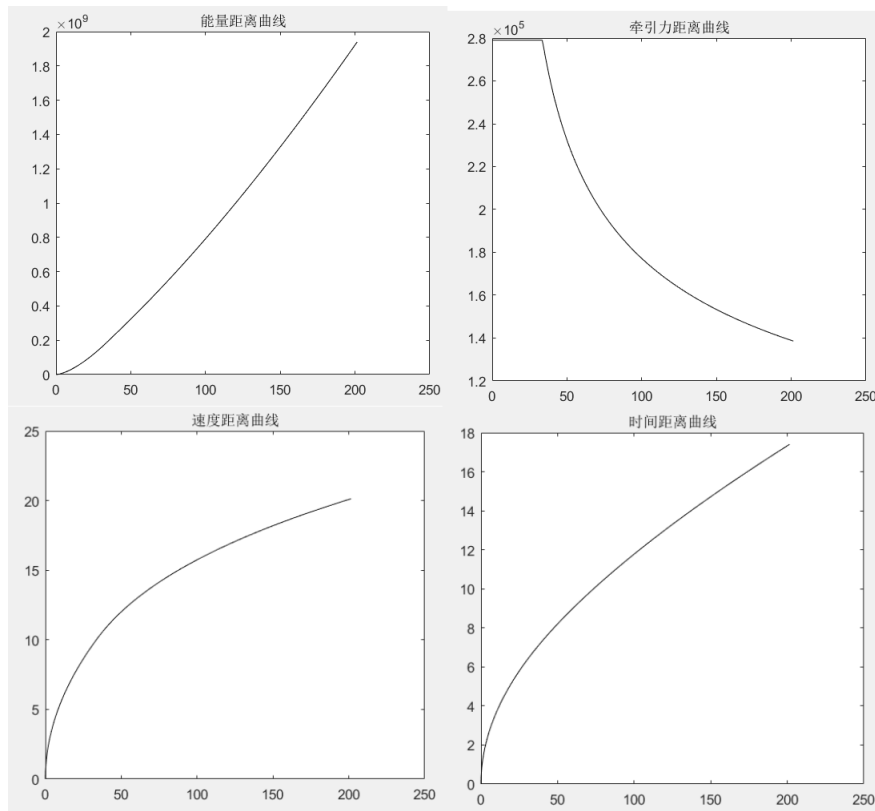


图 5-12: 2km 前运行曲线图

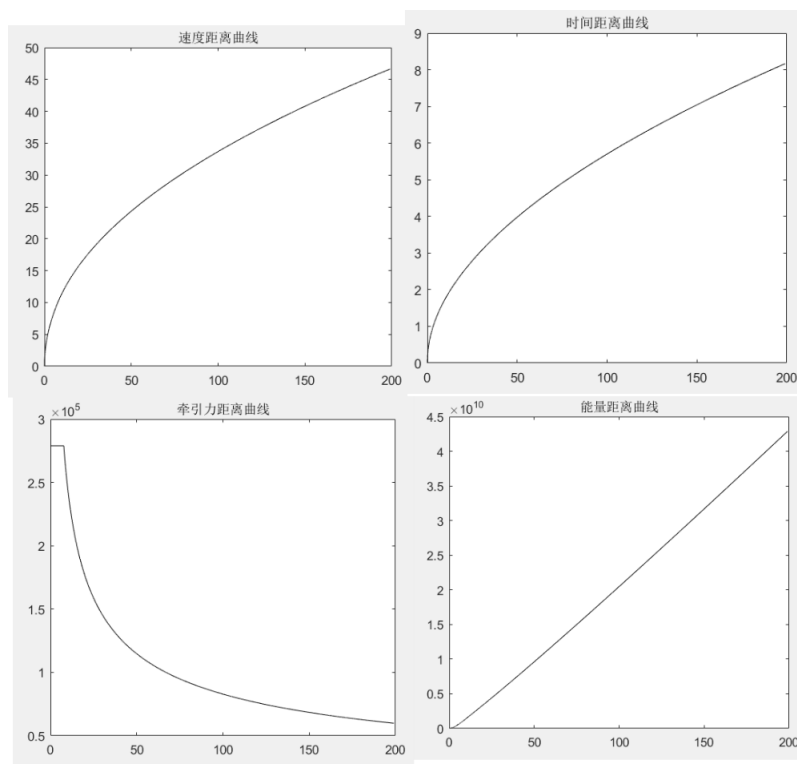


图 5-13: 2km 后运行曲线图



7、终止条件：当达到预定的迭代次数或符合要求的适应度值时，停止遗传算法，输出结果。算法结果：如图 5-12 和 5-13 所示。

## 六、 模型的评价

### 6.1 优点

#### 6.1.1 问题一

1. 相对简单：欧拉数值法是一种简单而常见的数值方法，易于理解和实现。它不需要复杂的数学推导或高级算法，适用于初学者或简单的模型建立。
2. 可调节性：使用欧拉数值法建模，可以通过调整时间步长和模拟时间来平衡计算效率和结果准确性。较小的时间步长和较长的模拟时间将提供更准确的结果，但计算时间会增加。可以根据具体需求进行调整。
3. 可拓展性：该模型可以扩展到考虑更多的因素和复杂性，如加入更多的阻力项、考虑曲线轨道等。通过适当修改微分方程和迭代过程，可以对模型进行扩展和改进。

#### 6.1.2 问题二

1. 该算法能够较好地处理高维、非线性等复杂问题，能够考虑多个变量对目标函数的影响。
2. 粒子群算法有较好的全局搜索能力和收敛速度，可以有效地搜索到全局最优解，即最优速度轨迹。
3. 该算法可以自适应地调整粒子的位置和速度，从而更快地找到最优解。可以很好地处理约束条件，可以满足列车行驶速度、安全和环保等多种要求。

#### 6.1.3 问题三

1. 能够在保证列车安全和节能的前提下，实现列车尽快到达终点站，达到最小化运行时间的优化目标。
2. 通过对不同到站时间限制下的速度轨迹进行能耗比较，从而选择出能耗消耗最低的速度轨迹，实现节能运行的优化目标。
3. 考虑了路段限速、坡度等因素，综合考虑列车的物理约束条件和行驶

环境等因素，保证了列车的安全性和可靠性。

4. 遗传算法具有全局搜索和优化能力，可以在解空间中搜索最优解。通过设计适当的遗传操作，可以对种群进行有效地进化，使其不断逼近最优解。相比于其他优化方法，遗传算法具有较好的鲁棒性和适应性。

## 6.2 缺点

### 6.2.1 问题一

1. 近似性：欧拉数值法是一种近似方法，其精确度受到时间步长的影响。较大的时间步长会导致较大的误差，特别是在快速变化的情况下。因此，对于高精度的模拟需求，可能需要采用更复杂的数值方法。
2. 简化模型：该模型假设列车在水平轨道上运行，并使用简化的阻力方程和牵引力模型。这些假设和简化可能无法完全准确地描述实际情况，尤其在考虑复杂的轨道结构、不均匀路况和列车特性等方面。因此，在实际应用中，可能需要更复杂的模型来更准确地描述列车运行过程。
3. 时间消耗：模拟的总时间和时间步长会直接影响程序的运行时间。较小的时间步长和较长的模拟时间将导致更准确的结果，但同时也会增加计算的时间。因此，在进行大规模模拟或实时模拟时，可能需要考虑计算资源和时间消耗。

### 6.2.2 问题二

1. 粒子算法的收敛速度较慢，需要进行多次迭代才能达到较好的优化效果。
2. 算法需要预先指定迭代次数或收敛阈值，过大或过小均会影响最终结果的精度和效率。
3. 粒子初始化位置对算法的性能影响较大，不同的初始化位置往往会导致不同的搜索结果。

### 6.2.3 问题三

1. 模型的复杂度较高，需要对每组曲线进行控制策略和算法的设计和 optimization，计算量较大。
2. 在进行能耗优化时，需要充分考虑列车的各种约束条件，如牵引力和制动力的限制，这会使得优化过程更复杂。

3. 模型的可行性和有效性还需要考虑到其他因素，如列车的实际运行状况、天气因素等等，这增加了实际应用中的不确定性和挑战性。
4. 遗传算法收敛速度可能较慢。遗传算法通常依赖于大量的随机样本来搜索解空间，因此需要经过多次迭代才能达到最优解。此外，随着解空间维数的增加，遗传算法的计算复杂度也会急剧增加，可能导致计算成本和时间的大幅增加。因此，在实际应用时，需要根据问题特点和计算资源的限制，权衡选择合适的求解方法。

## 参考文献

- [1] 韩涛, 魏玉光, 王怀相, 夏阳, 罗莹. 铁路集装箱客运化班列停站方案与运行图协同优化研究 [J/OL]. 铁道科学与工程学报:1-13[2023-05-14].DOI:10.19713/j.cnki.43-1423/u.T20230311.
- [2] 李兰鹏. 基于蚁群算法的城市轨道交通列车节能运行优化模型仿真分析 [J]. 城市轨道交通研究,2023,26(02):11-15.DOI:10.16037/j.1007-869x.2023.02.003.
- [3] 姚慧欣. 考虑城市轨道交通通行限制的列车运行速度自动控制方法 [J]. 自动化与仪器仪表,2023(01):106-110.DOI:10.14016/j.cnki.1001-9227.2023.01.106.
- [4] 吴晓刚, 陈宇, 郭豪琦, 杜玖玉. 城市地铁列车整车能耗和运行时间平衡优化 [J]. 哈尔滨理工大学学报,2022,27(06):1-12+177.DOI:10.15938/j.jhust.2022.06.001.
- [5] 李华柏, 黄杰. 基于遗传算法高速动车组列车全线速度优化节能运行控制研究 [J]. 科技传播,2022,14(23):81-83+92.DOI:10.16607/j.cnki.1674-6708.2022.23.026. <http://wenku.baidu.com/view/7bc33214680203d8ce2f24c4.html>
- [6] 胡鹏. 城市轨道交通列车运行能耗优化及仿真 [D]. 西南交通大学,2013.
- [7] 朱鹏飞. 高速铁路列车追踪行车模拟研究与分析 [D]. 西南交通大学,2013.
- [8] 城市轨道交通施工安全及交通组织 [S].2014.
- [9] 杨吉忠. 考虑空气动力效应时高速列车运行安全平稳性研究 [D]. 西南交通大学,2010.

## 附 录

### 程序一：列车加速阶段的求解模型：

---

```
import math
import pandas as pd
import time

start_time = time.time() # 记录代码开始时间

# 列车质量
mass = 176300 # kg

# 列车加速度阶段的牵引力
traction_force = 33369 # N

# 列车速度上限
velocity_limit = 27.8 # m/s

# 列车阻力公式参数
k1 = 2.0895
k2 = 0.0098
k3 = 0.006

# 列车加速度阶段的数量（小段数）
num_segments = 1000

# 列车站点间的总距离
total_distance = 5144.7 # m

# 列车在每个小段内的长度
segment_length = total_distance / num_segments # m

# 初始化变量
distance_traveled = 0
velocity = 0
elapsed_time = 0 # 修改变量名为 elapsed_time

# 存储每一小段的距离、速度、时间
data = []

# 开始模拟列车运动
for i in range(num_segments):
```

```
# 当前小段的起始速度
initial_velocity = velocity

# 计算当前小段内的阻力
resistance = (k1 + k2 * velocity + k3 * velocity ** 2) * 1000

# 计算当前小段内的加速度
acceleration = (traction_force - resistance) / mass

# 计算当前小段内的末速度
final_velocity = math.sqrt(initial_velocity ** 2 + 2 * acceleration * segment_length)

t = (final_velocity - initial_velocity) / acceleration

# 如果末速度超过速度上限，则以速度上限为准
if final_velocity > velocity_limit:
    final_velocity = velocity_limit

# 更新列车的距离和速度
distance_traveled += segment_length
velocity = final_velocity

# 累加时间并将其添加到列表中
elapsed_time += t
data.append([distance_traveled, velocity, elapsed_time])

# 如果列车达到速度上限，结束运动模拟
if velocity >= velocity_limit:
    break

# 将数据转换为DataFrame格式
df = pd.DataFrame(data, columns=['Distance', 'Velocity', 'Time'])

# 获取时间的累加值
df['Time_cumsum'] = df['Time'].cumsum()

# 将数据写入Excel表格中
df.to_excel('p1-aacc+10.xlsx', sheet_name='Sheet1', index=False)

print("列车在运行 %.2f 米的距离后达到速度上限 %.2f m/s" % (distance_traveled, velocity_limit))
print("达到速度上限所需的时间为 %.2f 秒" % elapsed_time)

end_time = time.time() # 记录代码结束时间
execution_time = end_time - start_time # 计算代码运行时间
print("代码运行时间为 %.2f 秒" % execution_time)
```

---

## 程序二：列车减速阶段的求解模型：

---

```
import math
import pandas as pd

# 列车质量
mass = 176300 # kg

# 列车初始速度
initial_velocity = 27.8 # m/s

# 列车终点速度
final_velocity = 0 # m/s

# 列车制动力
braking_force = 27629 # N

# 列车站点间的距离
distance = 5144.7 # m

num_segments = 1000

# 每个小段的长度
segment_length = distance / 1000 # m

# 列车当前速度
velocity = initial_velocity # m/s

# 列车运行距离
total_distance = 0 # m

# 列车运行时间
total_time = 0 # s

# 创建空的 DataFrame，用于保存数据
df = pd.DataFrame(columns=["距离(m)", "速度(m/s)", "时间(s)"])

# 逐个小段计算列车运行距离和时间，直到速度降为0
for i in range(num_segments):
    # 当前小段开始速度
    segment_initial_velocity = velocity
```

```

# 计算当前小段的阻力
resistance = (2.0895 + 0.0098 * velocity + 0.006 * velocity ** 2) * 1000
# N

# 计算当前小段的减速度
acceleration = (braking_force + resistance) / mass # m/s^2

# # 计算当前小段内的末速度
# final_velocity = math.sqrt(segment_initial_velocity ** 2 - 2 * acceleration * segment_length)

# 计算当前小段内的末速度
temp = segment_initial_velocity ** 2 - 2 * acceleration * segment_length
if temp < 0:
    final_velocity = 0
else:
    final_velocity = math.sqrt(temp)

# 计算当前小段的运行时间
segment_time = (velocity - final_velocity) / acceleration # s

# 如果末速度超过速度上限，则以速度上限为准
if final_velocity < 0:
    final_velocity = 0

# # 计算当前小段的运行距离
# segment_distance = velocity * segment_time - 0.5 * acceleration * segment_time ** 2
# m

# 更新列车当前速度
velocity -= acceleration * segment_time

# 更新列车总运行距离
total_distance += segment_length

# 更新列车总运行时间
total_time += segment_time

# 将当前小段的数据保存到DataFrame中
df.loc[i] = [segment_length, velocity, segment_time]

# 输出当前小段的距离、速度和时间
print("第 {} 小段：距离 {:.2f} 米，速度 {:.2f} 米/秒，时间 {:.2f} 秒".format(i+1, segment_length, velocity, segment_time))

# 如果速度已经降为0，则跳出循环

```



```

    if final_velocity <= 0:
        break

# 计算每个小段的累计距离，速度和时间
df["总距离(m)"] = df["距离(m)"].cumsum()
df["总速度(m/s)"] = df["速度(m/s)"].cumsum()
df["总时间(s)"] = df["时间(s)"].cumsum()

# 将DataFrame保存到Excel文件中
filename = "p1-de.xlsx"
with pd.ExcelWriter(filename) as writer:
    df.to_excel(writer, index=False)

# 输出结果
print("列车在运行 %.2f 米的距离时速度降为0。" % total_distance)
print("速度降为0时所需的时间为 %.2f 秒。" % total_time)

```

---

### 程序三：列车速度运行轨迹的求解模型：

---

```

import math

distance = 5144.7 # 距离，单位为米
speed_limit = 100 # 速度上限，单位为km/h
mass = 176.3 # 质量，单位为吨
inertia_factor = 1.08 # 旋转惯量因子
max_traction_force = 310 # 最大牵引力，单位为kN
max_brake_force = 760 # 最大制动力，单位为kN

# 计算Davis阻力
def davis_friction(v):
    v_ms = v / 3.6 # 将速度从km/h转换为m/s
    return 2.0895 + 0.0098*v_ms + 0.006*v_ms**2

# 计算列车受到的总阻力
def total_friction(v):
    return davis_friction(v) * mass * 9.8

# 计算列车加速度
def acceleration(v):
    net_traction_force = max_traction_force - total_friction(v)
    return net_traction_force / mass

# 计算列车制动加速度

```

```
def brake_acceleration(v):  
    return max_brake_force / mass  
  
# 计算列车能耗  
def energy_consumption(v, a):  
    return total_friction(v) * v / 1000 + mass * (inertia_factor/2) * (a/(9.8*1000))**2  
def Force(final_velocity):  
    traction_force = (310000 * 10) / final_velocity #计算弱磁区的力  
    back_force = (760000 * 17) / final_velocity #计算弱磁区的力  
    return traction_force, back_force  
# 在速度上限内遍历所有速度，找到最小的能耗值和对应速度  
min_energy = math.inf  
for v in range(1, speed_limit + 1):  
    a = acceleration(v)  
    energy = energy_consumption(v, a)  
    if energy < min_energy:  
        min_energy = energy  
        optimal_v = v  
  
print("The optimal speed is %dkm/h, and the minimum energy consumption is %.2fkWh." % (optimal_v, min_energy))
```