第十五届全国大学生数学竞赛初赛试卷及参考解答
（非数学 B 类，2023 年）

考试形式：闭卷 考试时间：150 分钟 满分：100 分

一、（本题 30 分，每小题 6 分）

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^{2x-1}=$__________.

【解】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)^{2(x+2)-5}=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right)^2\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)^{-5}=\mathrm{e}^2$.

【注】本题主要考察第二个重要极限，当然还可以利用幂指函数化为指数与对数函数形式，然后利用等价无穷小代换来求解，即$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^{2x-1}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)\ln\frac{x+3}{x+2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)\ln(1+\frac{1}{x+2})}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x+2}}=\mathrm{e}^2$.

（2）设$z=f\left(x^2-y^2,xy\right)$，且$f(u,v)$有连续的二阶偏导数，则$\dfrac{\partial z^2}{\partial x\partial y}=$__________.

【解】$z_x=2xf_1+yf_2$，$z_{xy}=2x\left(f_{11}(-2y)+xf_{12}\right)+f_2+y\left(f_{21}(-2y)+xf_{22}\right)$

$=f_2-4xyf_{11}+2\left(x^2-y^2\right)f_{12}+xyf_{22}$.

【注】多元复合函数的二阶混合偏导问题是高等数学考试中常考的题型，此类题目主要考察学生是否能区分中间变量和基变量及链式法则问题，难度较小.

（3）设曲线$y=\ln(1+ax)+1$与曲线$y=2xy^3+b$在$(0,1)$处相切，则$a+b=$__________.

【解】将$(0,1)$代入曲线$y=2xy^3+b$的方程，得$b=1$.曲线$y=\ln(1+ax)+1$与曲线$y=2xy^3+1$在$(0,1)$处相切，它们在$x=0$处导数值相等，对方程$y=2xy^3+1$两边求导，得$y'=2y^3+6xy^2y'$，从而$y'(0)=2$，故$\left.\dfrac{a}{1+ax}\right|_{x=0}=2$，得$a=2$，故$a+b=3$.

【注】本题主要考察两个曲线在某点处有公切线问题，难度较小.

（4）设函数$y=y(x)$由方程$y=1+\arctan(xy)$所决定，则$y'(0)=$__________.

【解】将$x=0$代入原方程，得$y=1$.方程两边对x求导，易得$y'=\dfrac{xy'+y}{1+x^2y^2}$.当$x=0,y=1$时，

$y'(0)=1$.

【注】本题主要考察隐函数的导数问题，难度较小.

（5）计算$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}\dfrac{\cos y}{y}\mathrm{d}y=$__________.

英伽教育

【解】交换积分顺序，得 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}} \dfrac{\cos y}{y}\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{y} \dfrac{\cos y}{y}\mathrm{d}y = \int_0^1 (1-y)\cos y\mathrm{d}y = 1-\cos 1.$

【注】如果在二重积分题目中，已经给了积分顺序，则一定要用到交换积分次序，直接计算要么比较麻烦，要不在第一次积分时，不在存在初等原函数.本题中还用到了分部积分，要记住口诀：“反对幂指三，靠后进微分”的顺序.

二、（本题 14 分）设曲线 $y=3ax^2+2bx+\ln c$ 经过 $(0,0)$ 点，且当 $0\le x\le 1$ 时 $y\ge 0$.设该曲线与直线 $x=1$，x 轴所围图形的平面图形 D 的面积为 1.试求常数 a,b,c 的值，使得 D 绕 x 轴一周后，所得旋转体的体积最小.

【解】曲线 $y=3ax^2+2bx+\ln c$ 经过 $(0,0)$ 点，故 $\ln c=0, c=1$. D 的面积 $A=\int_0^1\left(3ax^2+2bx\right)\mathrm{d}x$ $=a+b=1$. D 绕 x 轴一周所得到的旋转体体积 $V=\pi\int_0^1\left(3ax^2+2bx\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\dfrac{9}{5}a^2+3ab+\dfrac{4}{3}b^2\right)$ $=\pi\left(\dfrac{2}{15}a^2+\dfrac{1}{3}a+\dfrac{4}{3}\right)$. $V'(a)=\pi\left(\dfrac{4}{15}a+\dfrac{1}{3}\right)$.不难得到，当 $a=-\dfrac{5}{4}$ 时，旋转体得体积最小，此时，$b=\dfrac{9}{4}, c=1$.

【注】本题主要考察一元函数积分学的几何应用，图形的面积及旋转体的体积问题.推导最小值点时，用其他办法如配方也可以.本题与第一届全国大学生数学竞赛非数学类初赛的第六题基本一样，只是将图形的面积由 $\dfrac{1}{3}$ 变为1.

三、（本题 14 分）解方程 $\left(x^2+y^2+3\right)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\left(2y-\dfrac{x^2}{y}\right)$.

【解】原方程变形为 $\dfrac{2y\mathrm{d}y}{2x\mathrm{d}x}=\dfrac{2\left(2y^2-x^2\right)}{x^2+y^2+3}$.令 $u=x^2, v=y^2$，则原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\dfrac{2(2v-u)}{u+v+3}$.解方程 $2v-u=0, u+v+3=0$，得到 $u=-2, v=-1$，再令 $U=u+2, V=v+1$，上述方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}U}=\dfrac{2(2V-U)}{U+V}$.作变量替换 $W=\dfrac{V}{U}$ 得到 $U\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}U}=-\dfrac{W^2-3W+2}{W+1}$.这是可分离变量微分方程，解之得 $U(W-2)^3=C(W-1)^2$，回代得 $\left(y^2-2x^2-3\right)^3=C\left(y^2-x^2-1\right)^2$.

【注】变量代换是求解常微分方程中常用的方法，本题中还用到了平移变换及齐次方程的理论，此题目为《常微分方程教程（第二版）》丁同仁、李承治，习题 2-4 的 2（3）题目.

四、（本题 14 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数.

英伽教育

【解】因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n(2n-1)}}=1$，所以收敛半径为 1.当 $x=\pm 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ 绝对收敛，故收敛域为$[-1,1]$.记该幂级数的和函数为$S(x)$，则在$(-1,1)$上，$\dfrac{1}{2}S''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\dfrac{1}{1+x^2}$，

$S'(x)=2\int_0^x\dfrac{1}{1+s^2}\mathrm{d}s=2\arctan x, x\in(-1,1)$. $S(x)=2\int_0^x\arctan s\mathrm{d}s=2x\arctan x-\ln\left(1+x^2\right)$，

$x\in(-1,1)$. $S(x)$ 在收敛域上连续，故 $S(x)=2\int_0^x\arctan s\mathrm{d}s=2x\arctan x-\ln\left(1+x^2\right), x\in[-1,1]$.

【注】本题求收敛半径时也可以用比值审敛法进行求解.求幂级数和函数时，一般利用间接法，如果系数中含有分母一般先求导再积分，如果系数中含有整式一般先积分再求导，最终还可能会用到在区间端点处的 Abel 收敛准则.

五、（本题 14 分）设 $f(x)$ 在$[0,1]$上可导且 $f(0)>0$，$f(1)>0$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$.证明：（1）$f(x)$ 在$[0,1]$上至少有两个零点；（2）在$(0,1)$内至少存在一点ξ，使得 $f'(\xi)+3f^3(\xi)=0$.

【证明】（1）首先在$(0,1)$内至少存在一点x_0使得 $f\left(x_0\right)<0$.否则若对于任意的$x\in[0,1]$，$f(x)\geq 0$. $f(x)$ 连续且不恒为零，故$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>0$.与题设矛盾.其次，因为 $f(x)$ 连续，在区间$\left[0,x_0\right]$和$\left[x_0,1\right]$上分别应用零点定理知，存在$\xi_1\in\left(0.x_0\right),\xi_2\in\left(x_0,1\right)$使得 $f\left(\xi_1\right)=0, f\left(\xi_2\right)=0$.

（2）令 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\int_0^x 3f^2(t)\mathrm{d}t}$，则 F 在$[0,1]$上连续，$(0,1)$上可导且 $F\left(\xi_1\right)=F\left(\xi_2\right)=0$.由罗尔定理，存在$\xi\in\left(\xi_1,\xi_2\right)\subset(0,1)$使得 $F'(\xi)=0$.又 $F'(x)=\left(f'(x)+3f^3(x)\right)\mathrm{e}^{\int_0^x 3f^2(t)\mathrm{d}t}$，所以 $f'(\xi)+3f^3(\xi)=0$.

【注】微分中值定理问题，解决问题的关键在于构造辅助函数，可以利用平时总结的经验进行构造，也可以利用求解微分方程的方法进行构造，本题中构造了一个变上限形式，大家需要注意这种形式的应用.

六、（本题 14 分）设 $f(x)$ 在$[0,1]$上有连续的导数且 $f(0)=0$.求证：

$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\leq 4\int_0^1(1-x)^2\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x$，并求使上式成为等式的 $f(x)$.

【解】利用分部积分法$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}(1-x)=(x-1)f^2(x)\Big|_0^1-2\int_0^1(x-1)f(x)f'(x)\mathrm{d}x$

$=2\int_0^1(1-x)f'(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x$.由 Cauchy-Schwartz 不等式，有$\int_0^1(1-x)f'(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x$

$\leq\left(\int_0^1(1-x)^2\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$.于是$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\leq 4\int_0^1(1-x)^2\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x$.等式成立时应

英伽教育

有常数λ使得$(1-x)f'(x)=\lambda f(x)$.故当$x\in(0,1)$时，有$\left((1-x)^{\lambda}f(x)\right)'=(1-x)^{\lambda-1}\left((1-x)f'(x)\right.$ $\left.-\lambda f(x)\right)=0$.因而存在常数$c$使得$f(x)=c(1-x)^{-\lambda}(0<x<1)$.因为$f(x)$在$[0,1]$上连续，所以当$x\to 0$时，$f(x)\to 0$，故$c=0$.于是$f\equiv 0$.所以使得题中不等式成为等式的函数是$f(x)\equiv 0$.

【注】竞赛中，积分不等式是常考的一种题型，出现频率较高，一般会考察 Cauchy-Schwartz 不等式，本题中的关键为凑出$1-x$，一般将微分$\mathrm{d}x$进行处理，凑出关于$1-x$的形式，然后再利用分部积分，让$1-x$出现在被积函数的位置，然后再利用 Cauchy-Schwartz 不等式即可得到我们想要的结果.

英伽教育