

# 基于光纤传感器的平面曲线重建算法建模

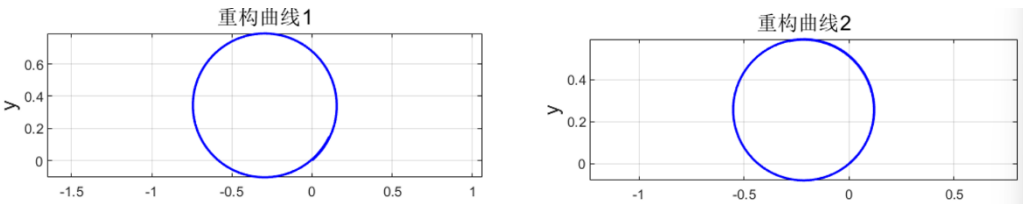
## 摘要

随着光纤传感技术的不断发展，光纤传感器在各种监测方面具有明显的优势。将光纤传感技术与重构算法结合，在获取应变分布及形变情况等方面具有重要意义。本文针对光纤传感器中的平面曲线重构问题，基于**线性插值**的方法和**离散逼近**的思想,建立了平面曲线重构模型，并利用所建立的重构模型计算了曲率。

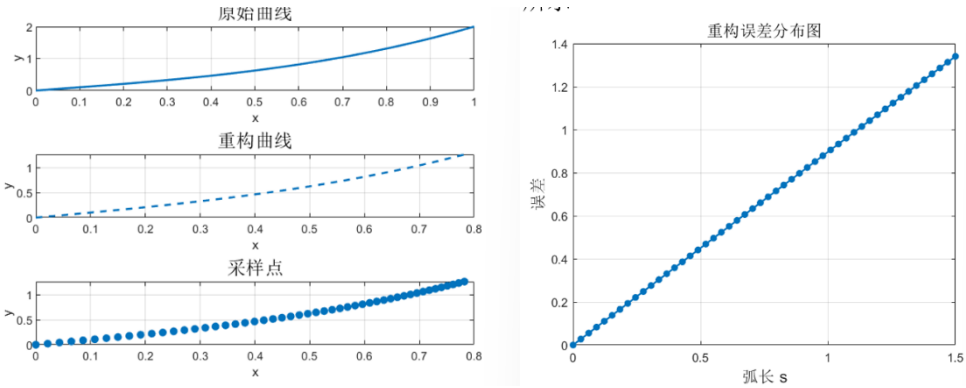
针对问题一，我们首先利用题目所给的波长与曲率的关系直接计算要求的传感器的曲率；接着，给出**线性插值**的基本公式，利用**线性插值**模型对要求的中间位置的曲率进行了估计。曲率结果如下：

横坐标	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
测试 1 曲率 $k$	2.2181	2.2177	2.2172	2.2167	2.2195
测试 2 曲率 $k$	2.9822	2.9810	2.9796	2.9781	2.9772

针对问题二，根据计算出各传感点处的曲率，由于光纤受力后传感器坐标位置会改变，但是弧长不变，我们将传感器初始位置间距作为弧长间距，插值出**曲率-弧长**函数通过**切角递推算法**递推得到的离散点坐标用平滑的曲线连接，得到重构后的曲线如下图所示：



针对问题三，针对给定的三次多项式进行等弧长间距采样，需要先通过**离散逼近**的方法得到等间距弧长采样点对应的弧长函数，然后在采样后再通过三次样条插值得到曲率函数，最后通过曲率函数进行**累积积分**，得到每个采样点的切角，再通过切角重构曲线。得到重构曲线后，将其与采样点进行**均方差**计算，得到误差分布。结果如下：



最后，本文我们对本文所建立的模型进行了评价，提出了改进方法。本文建立的模型也能够应用于在图像处理、模式识别等领域方面。

**关键词：** 切角递推算法    曲线重构    线性插值    离散逼近    误差分析

---

## 目录

一、 问题重述 .....	1
1.1 问题背景 .....	1
1.2 问题提出 .....	1
二、 问题分析 .....	2
三、 模型假设与符号说明 .....	3
3.1 模型基本假设 .....	3
3.2 符号说明 .....	3
四、 模型建立与求解 .....	4
4.1 问题一模型建立与求解 .....	4
4.1.1 问题一求解思路 .....	4
4.1.2 问题一模型建立 .....	4
4.1.3 问题一模型求解与分析 .....	5
4.2 问题二模型建立与求解 .....	6
4.2.1 问题二求解思路 .....	6
4.2.2 问题二模型建立 .....	6
问题三模型建立与求解 .....	8
4.2.3 问题三求解思路 .....	8
4.2.4 问题三模型建立 .....	9
4.2.1 问题三模型求解与分析 .....	10
五、 模型评价与推广 .....	12
5.1 模型的优点 .....	12
5.2 模型的改进 .....	12
参考文献 .....	14
附录 .....	15

## 一、问题重述

### 1.1 问题背景

光纤是上世纪 70 年代由诺贝尔奖得主高昆先生发明，现在已经普及到千家万户。光纤传感技术具有感知和传输外界待测信号两个功能。感知是指外界环境中的待测信号按照一定的变化规律使得光纤中光波的物理特征参量，比如强度、波长、相位等发生变化，从而实现外界信号对光信号的实时调制。传输是指经过调制后光波传输至解调仪器，将光信号转化为电信号，并进行数据处理算出所测物理信号，完成解调过程<sup>[1]</sup>。

因为光纤传感器的传输载体为光波，所以相比于传统的电类传感器等其他传感器有着独特的优势。其主要有以下优点：环境适应力强。光纤具有耐高压，耐腐蚀，耐高温等特点，可用于存在高压电、易燃易爆品的恶劣环境和特殊场所；抗电磁干扰能力强。光纤主要由二氧化硅制成，是一种绝缘材料，待测信号被调制于光信号中，在电磁干扰较强的场所，光纤传感系统的性能不会受到影响，具有更高的可靠性；质量轻，体积小，可弯曲，在布设光纤时可将其制成任意形状，可广泛用于医学，航空航天等领域；灵敏度高；可实现长距离、高分辨率分布式传感测量。光纤传感的分辨率和传感单元的复用能力；可测量多种物理参数。如温度、压力、加速度、位移、振动、液体流速、气体浓度、电压、电流、电场、磁场等。综上所述，正是因为光纤传感器具有一系列的显著优势，使得其在众多领域有广泛的应用前景<sup>[2]</sup>。

### 1.2 问题提出

问题一：需要根据给出的波长测量数据，构建数学模型，估算平面光栅各个传感点(FBG1-FBG6)的曲率。并在初始点坐标为原点，初始的水平光纤方向为 $x$ 轴，垂直方向为 $y$ 轴，光纤在平面内受力后在初始位置的切线与水平方向的夹角为 45 度的假设下，模型估算特定横坐标相应位置处的曲率。

问题二：需要根据题目给出的波长测量数据和问题一求出的曲率，构建数学模型，分别重构平面曲线，并分析曲线的特点。

问题三：需要根据平面曲线方程 $y = x^3 + x(0 \leq x \leq 1)$ ，选择适当的等间距弧长采样，计算这些采样点的曲率。然后以采样的曲率为基础，构建数学模型，重构平面曲线，并分析重构曲线与原始曲线出现误差的原因。

## 二、问题分析

平面曲线被广泛应用于图像处理、地理信息系统、CAD 设计等领域。研究曲线重构算法<sup>[3]</sup>有助于提取、处理和分析曲线数据，从而更好地理解 and 利用这些数据。研究平面曲线重构算法对于数据处理、数字建模、图像处理、科学研究等领域都具有重要意义，能够推动相关技术和领域的发展与应用<sup>[4]</sup>。

问题一：根据题目给出的波长数据以及题目给定的波长与曲率之间的关系，直接计算出六个传感器在两个不同测试状态下的曲率；进一步，为了预测在特定坐标位置处的曲率值，我们可以**线性插值**法进行模拟，并将其作为输入条件，结合初始位置条件进行**迭代计算**，得到特定坐标位置处的曲率值。

问题二：首先需要根据波长测量数据计算出平面光栅各传感点的曲率，然后建立模型估算横坐标位置处的曲率，接着利用计算得到的曲率值结合插值方法重构平面曲线，最后对重构曲线的平滑性和曲率变化趋势等几何特征进行分析。

问题三：可以先通过**离散逼近**的方法得到其弧长对应采样点的弧长函数，然后在采样后通过**三次样条插值**得到曲率函数，最后通过曲率函数进行**累积积分**，得到每个采样点的切角，再通过**切角重构**曲线。得到重构曲线后，将其与采样点进行**均方差**计算，得到误差分布。

### 三、模型假设与符号说明

#### 3.1 模型基本假设

- (1) 假设我们所构建的模型能够有效的放映波长与曲率的关系。
- (2) 假设传感器间距在模型构建过程中保证不变。
- (3) 假设所测量的波长数据准确无误差。
- (4) 假设所构建的平面曲率模型不受其他因素影响。

#### 3.2 符号说明

表 1 符号说明

符号	含义	单位
$k$	曲率	$rad / m$
$s$	弧长	$m$
$\Delta\theta$	切线角增量	$^{\circ}$
$\Delta x$	横坐标增量	$m$
$\Delta y$	纵坐标增量	$m$
$x^*$	重构后的横坐标	$m$
$y^*$	重构后的纵坐标	$m$
$a_i, b_i, c_i, d_i$	三次样条插值代拟合参数	
$erro$	重构曲线与采样点坐标的均方差	
$c$	常数，本文取 4200	
$\lambda_0$	初始状态下的光纤波长	
$\lambda$	初始状态下的光纤波长	
$x$	横坐标	
$y$	纵坐标	

## 四、模型建立与求解

### 4.1 问题一模型建立与求解

平面曲率曲线重构算法<sup>[5]</sup>的基本思路可以如下描述：根据起始点及其切线建立合适的固定坐标系，然后根据曲线位于同一密切平面末点以及末点处切线建立起运动坐标系，相邻的密切平面是由上一密切平面中曲线末点的切线矢量决定，再根据正交曲率和该密切平面内的曲线弧长进行相对坐标转换计算，达到运动坐标的运动分析目的，最后迭代计算最后得到初始固定坐标系下的各点的绝对坐标。

#### 4.1.1 问题一求解思路

1. 根据题目所给数据和公式 $k = \frac{c(\lambda - \lambda_0)}{\lambda_0}$ 进行曲率计算；

2. 建立曲率估算模型：线性插值是一种常用的数学方法，用于在给定一些已知数据点的情况下，通过构造一条直线来估计未知数据点的值。它是插值方法中最简单和最常用的一种。线性插值可以应用于多个领域，包括科学、工程、计算机图形学、金融等。在本文中，我们将介绍线性插值的原理、公式和一些常见的使用场景。

线性插值<sup>[6]</sup>的原理基于一个简单的假设：在两个已知数据点之间，未知数据点的值可以通过线性关系进行估计。这意味着假设两个已知数据点之间的数据变化是连续的，且可以由一条直线来近似表示。

3. 估算横坐标 $x$ 轴相应位置处的曲率。

#### 4.1.2 问题一模型建立

针对估算光栅各个传感点的曲率问题，直接利用题目所给的波长与曲率的关系式： $k = \frac{c(\lambda - \lambda_0)}{\lambda_0}$ 进行计算，将题目所给数据直接代入关系式进行即可得结果。

线性插值<sup>错误!未找到引用源。</sup>就是通过两个采样点 $(x_0, y_0)$ 和 $(x_1, y_1)$ ，做一条直线 $P_1(x_0) = y_0, P_1(x_1) = y_1$ 。因此，可以写出直线 $c$ 的以下的两种表达式：

$$(1) \text{ 点斜式: } P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$(2) \text{ 对称式: } P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1$$

在点斜式中， $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ 即为差商，即当 $x_1 \rightarrow x_0$ 时，它就是 $y'_0$ 。将其带入点斜式方程中，可得到 $P_1(x)$ 的极限形式：

$$P_1(x) = y_0 + y'_0(x - x_0).$$

线性插值的步骤如下：

(1) 确定两个已知数据点  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$ 。

(2) 计算斜率  $y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ 。

4.1.3 问题一模型求解与分析

根据题目所给出的两侧测量数据，估算的平面光栅各个传感点(FBG1—FBG6)的曲率结果如表 2 所示：

表 2 传感点(FBG1—FBG6) 的曲率

测量点	初始状态 1	曲率	初始状态 2	曲率
FBG1	1529	2.2195	1540	2.9864
FBG2	1529	2.2167	1540	2.9782
FBG3	1529	2.2332	1540	2.9727
FBG4	1529	2.2305	1540	2.9809
1FBG5	1529	2.2360	1540	2.9837
FBG6	1529	2.2222	1540	2.9756

当我们以初始坐标为原点，初始的光纤方向为 $x$ 轴，垂直方向为 $y$ 轴，光纤在平面内受力后在初始位置的切线与水平方向的夹角为 45 度时，曲率插值结果如图 1 所示：

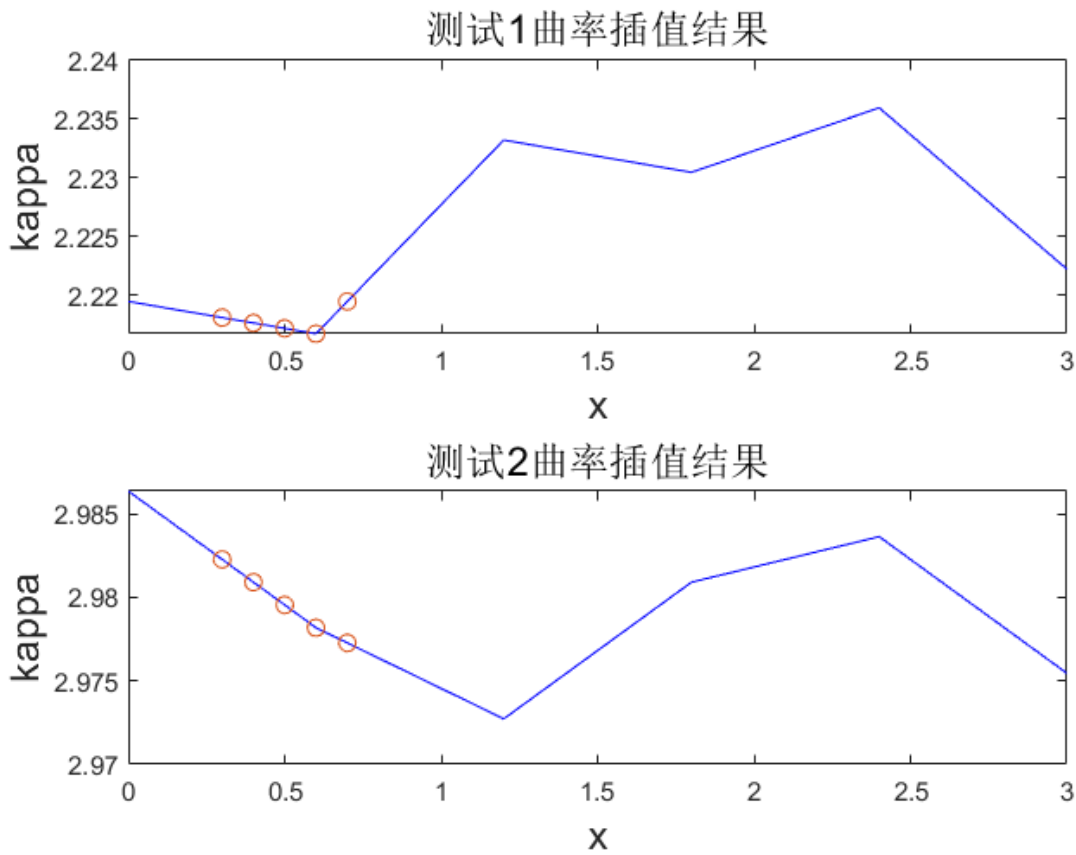


图 1 曲率插值结果

横坐标 $x$ 轴相应位置处的曲率结果如表 3 所示：

表 3 在横坐标 $x$ 轴相应位置处的曲率

横坐标	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
测试 1 曲率 $k$	2.2181	2.2177	2.2172	2.2167	2.2195
测试 2 曲率 $k$	2.9822	2.9810	2.9796	2.9781	2.9772

## 4.2 问题二模型建立与求解

### 4.2.1 问题二求解思路

首先根据已给出的波长测量数据，计算出各传感点处的曲率，由于光纤受力后传感器坐标位置会改变，但是弧长不变，我们将传感器初始位置间距作为弧长间距，可以通过如下部分，重构曲线。

- 1、弧长离散化，并将传感点处的曲率和原弧长点作为插值数据，代入离散后的弧长，通过三次样条插值出曲率-弧长函数。
- 2、通过切角递推算法，代入曲率-弧长函数与问题一中光纤的初始切角和初始坐标点，进行逐步递推，得到每个离散点的坐标该变量。
- 3、最后将每个递推得到的离散点坐标用平滑的曲线连接，得到重构后的曲线。

### 4.2.2 问题二模型建立

#### 1. 切角递推算法

切角递推算法<sup>[7]</sup>是一种用于计算曲线上各点切线角度的方法。在曲线重构或曲线分析中，切线角度是一个重要的参数，可以描述曲线的走向和形状。切角递推算法通过已知的曲率数据和初始切线角度，逐步计算出曲线上各点的切线角度。

#### 2. 计算曲率

对于曲线而言，只要曲线上两点距离足够近，就可以近似认为这两点之间的弧是一段微圆弧。设曲线上一段微圆弧 $(x_{n+1}, y_{n+1}) \Delta s_n$ 的起点 $O_n$ 与终点 $O_{n+1}$ 处的曲率分别为 $k_n$ 、 $k_{n+1}$ ，其对应的坐标分别为 $(x_n, y_n)$ 、 $(x_{n+1}, y_{n+1})$ ； $l_n$ 为弧段对应的弦长， $\Delta\theta_n$ 为弧段在 $O_n$ 和 $O_{n+1}$ 两处切线的夹角； $\theta_n$ 和 $\theta_{n+1}$ 分别表示弧段在 $O_n$ 和 $O_{n+1}$ 处的切线与 $x$ 轴正方向的夹角。由几何关系得：



$$\begin{cases} \Delta\theta_n = \theta_{n+1} - \theta_n \\ l_n = 2 \frac{\sin(\frac{\Delta\theta_n}{2})}{k_n}, (k_n \neq 0) \\ l_n = \Delta s_n, (k_n = 0) \\ \Delta x_n = l_n \cdot \cos(\theta_n - \frac{\Delta\theta_n}{2}) \\ \Delta y_n = l_n \cdot \sin(\theta_n - \frac{\Delta\theta_n}{2}) \\ x_{n+1} = x_n + \Delta x_n \\ y_{n+1} = y_n + \Delta y_n \end{cases} \quad (1)$$

其中切角可以由三次样条<sup>[8]</sup>插值出曲率-弧长函数 $k(s)$ ，通过下式利用如梯形法等数值积分得到：

$$\theta = \int k(s) ds \quad (2)$$

重构曲线结果如图 2 示

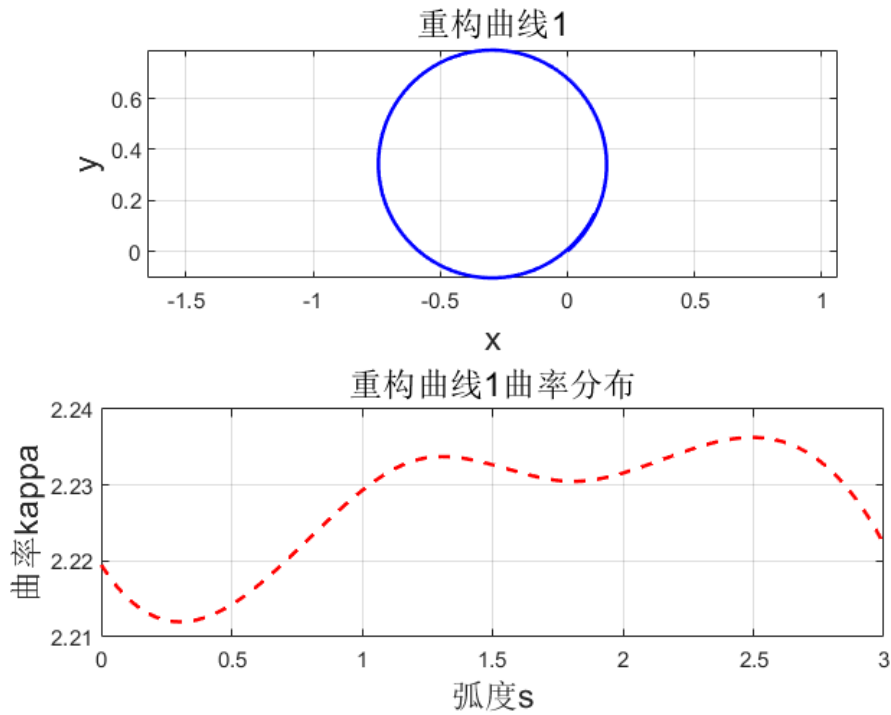


图 2 由测试 1 波长数据重构的曲线 1 和曲率分布

由错误!未找到引用源。分析可得由测试 1 波长数据重构后曲线为圆形，由于离散的点足够多，所以曲线较为平滑。从曲率分布图中，我们可以得到重构曲线 1 的曲率最大值为  $2.36 \text{ rad/m}$ ，位于弧长为  $2.485 \text{ m}$  处；重构曲线 1 的曲率最小值为  $2.212 \text{ rad/m}$ ，位于弧长为  $0.303 \text{ m}$  处。

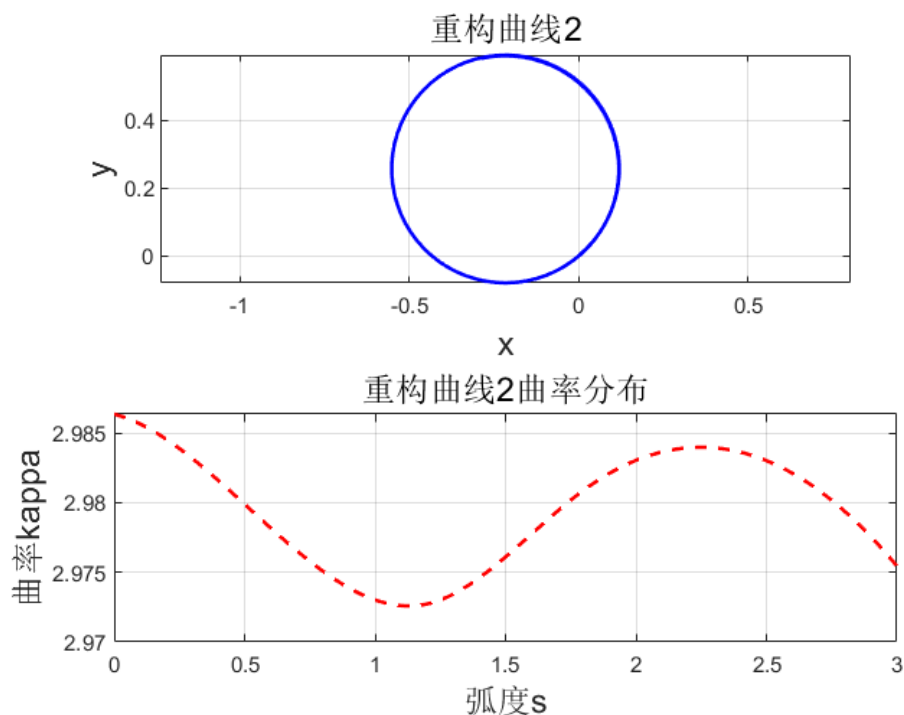


图 3 由测试 2 波长数据重构的曲线 2 和曲率分布

由图 3 分析可得由测试 2 波长数据重构后曲线也是为圆形，由于离散的点足够多，所以曲线较为平滑。从曲率分布图中，我们可以得到重构曲线 1 的曲率最大值为  $2.986 \text{ rad/m}$ ，位于弧长为  $0 \text{ m}$  处；重构曲线 1 的曲率最小值为  $2.937 \text{ rad/m}$ ，位于弧长为  $1.212 \text{ m}$  处。

### 问题三模型建立与求解

#### 4.2.3 问题三求解思路

##### 1. 采样点计算

由于问题三给出一条三次多项式形式的平面方程  $y = x^3 + x$ ，要求以适当的等间距弧长采样。由于题目中标注有  $0 \leq x \leq 1$ ，所以我们可以设定在参数区间  $[0,1]$ ，选则一定数量的采样点，同时规定等间距弧长，即每两个点之间弧长变化值相同。

##### 2. 曲率计算

采样后，可以通过参数方程的形式，定义原平面方程  $y = x^3 + x$  的曲率解析式，通过该曲率解析式，代入采样点，得到离散的曲率采样点数据，然后通过三次样条插值近似出曲率函数。同时还可以通过该参数方程计算得到弧长函数，计算可以将参数区间  $[0,1]$  分成很多个小段，用每个小段的长度近似代替弧长。

##### 3. 重构曲线

得到曲率函数和弧长函数后，我们可以通过数值积分方法，计算得到切线角增量，在通过其更新切线角，最后根据切线角递推得到曲线坐标增量，更新曲线坐标。将更新后的曲线坐标用平滑曲线连接，得到重构后的曲线。

#### 4. 误差分析

我们在误差分析方面采用重构后的曲线坐标与采样点坐标之间的均方差作为分析数据，并且通过对比重构后的曲线和原曲线之间的曲率分布、坐标分布，分析误差出现的原因。

#### 4.2.4 问题三模型建立

##### 1. 参数方程建立

将三次多项式形式的平面方程  $y = x^3 + x$ ，通过  $\begin{cases} x = t \\ y = t^3 + t \end{cases}$ ， $0 \leq t \leq 1$  转换为参数方程，通过该参数方程可以得到以下公式：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 3t^2 + 1 \\ \frac{d^2y}{dt^2} = 6t \end{cases} \quad (3)$$

由此可以得到曲率和微分弧长的解析式：

$$k = \frac{\left| \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt} \right|}{\sqrt{\left( \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}} \quad (4)$$

$$ds = \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2} \quad (5)$$

通过微分弧长解析式，代入离散采样点再通过差分近似微分的方法，同时进行累积求和，得到弧长函数。

$$\begin{cases} ds(i) = \sqrt{\left( \frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right)^2 + \left( \frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right)^2} \\ s(i) = s(i-1) + ds(i) \end{cases} \quad (6)$$

##### 2. 曲率函数建立

通过采样点与弧长函数，可以插值出对应参数采样点  $t_i$ ，通过代入采样点计算出采样点对应的曲率  $k(t)$ 。得到采样点的曲率，可以通过三次样条插值出弧长  $s$  和曲率  $k$  对应的曲率函数  $k(s)$ 。

$$k(s) = a_i s^3 + b_i s^2 + c_i s + d_i \quad (7)$$

### 3. 切线角及坐标重构

初始切线角为  $\theta_1 = \arctan(3t_1^2 + 1)$ ，切线角增量通过曲率梯形积分得到：

$$\Delta\theta = \int k(s) ds \quad (8)$$

然后通过初始切线角递推得到，各个采样点的切线角。

坐标增量通过切线角的三角函数形式积分得到：

$$\begin{cases} \Delta x = \int \cos(\theta) ds \\ \Delta y = \int \sin(\theta) ds \end{cases} \quad (9)$$

在通过曲线采样初始点(0,0)，通过坐标增量，递推得到各个采样点重构后的坐标。

### 4. 误差分析

通过重构后的坐标与采样点的坐标，计算两者的均方差作为误差分析<sup>[9]</sup>的函数，其公式如下：

$$erro = \sqrt{(x^* - x)^2 + (y^* - y)^2} \quad (10)$$

#### 4.2.1 问题三模型求解与分析

1. 采样点曲率结果如错误!未找到引用源。所示，采样点曲率和重构曲率匹配度很高，误差较小。

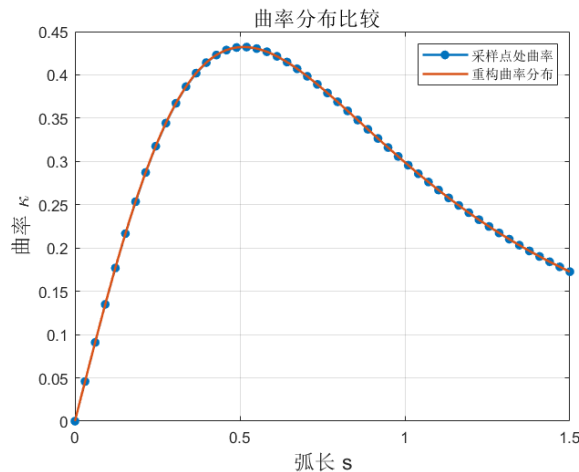


图 4 采样点曲率与曲率函数重构曲率比较

2. 重构曲线结果如错误!未找到引用源。所示

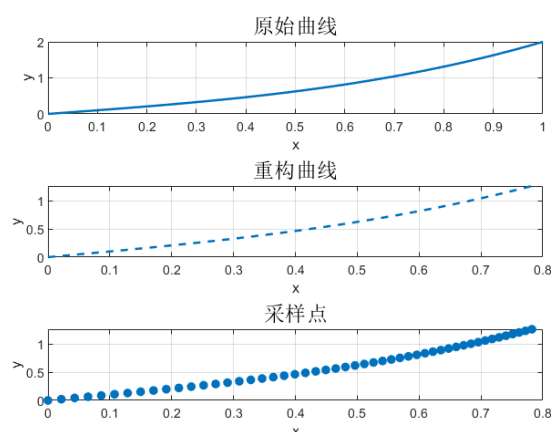


图 5 原始曲线与重构曲线比较

3. 误差分布结果如错误!未找到引用源。所示

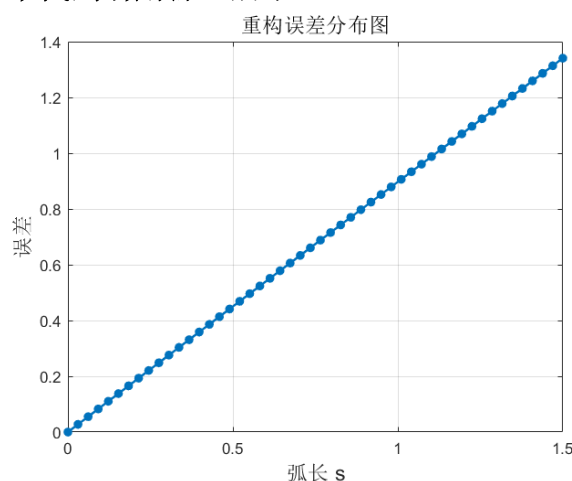


图 6 重构误差分布图

由错误!未找到引用源。所得的重构误差分布图可以看出，随着弧长  $s$  增加，误差在线性增大。由于在问题 3 中不管是切线角重构，还是坐标重构，均使用累加梯形积分的形式。所以随着弧长  $s$  增加，数值积分存在的误差也在不断增加。

累加数值积分误差则主要来源于对积分区间的离散化以及数值积分公式的近似性。当积分区间被划分为较小的子区间时，累加数值积分的结果将更接近真实值，但计算量也会相应增加。在数值积分中，可以通过增加子区间的数量或选择更高精度的数值积分公式来提高精度。此外，还可以利用误差估计和校正技术来进一步减小误差。

## 五、模型评价与推广

### 5.1 模型的优点

**本文问题一建立的线性插值模型的优点：**

- (1) 简单易懂：线性插值方法易于理解和实现，不需要复杂的计算和参数设定。
- (2) 计算速度快：相比于其他高阶插值方法，线性插值计算速度较快，适用于需要快速插值的情况。
- (3) 稳定性好：线性插值在大多数情况下稳定可靠，不容易产生振荡或不稳定现象。
- (4) 保留了数据趋势：线性插值通过直线连接相邻数据点，保留了数据之间的趋势变化。

**本文问题三建立的三次样条插值的优点：**

- (1) 光滑性：三次样条插值生成的插值曲线在节点处有一阶导数和二阶导数的连续性，曲线较为光滑。
- (2) 逼近性：三次样条插值能够较好地逼近原始数据，插值精度比线性插值更高。  
防止振荡：三次样条插值在插值过程中通常不会出现振荡现象，提高了插值结果的稳定性。
- (3) 保持形状特征：三次样条插值在插值过程中会尽量保持原始数据的形状特征，不会过度拟合数据。

### 5.2 模型的缺点

**本文问题一线性插值模型的缺点**

- (1) 精度有限：线性插值方法的精度相对较低，无法很好地逼近复杂非线性数据。
- (2) 局限性：对于某些数据分布情况，线性插值可能无法准确拟合数据，造成插值误差较大。
- (3) 不光滑：线性插值生成的函数曲线在拟合点之间不是光滑连续的，可能会导致不自然的拟合结果。

**本文问题三建立的三次样条插值的缺点：**

- (1) 计算复杂度：三次样条插值的计算复杂度相对较高，尤其是在要求较高精度和大规模数据插值时。
- (2) 过度拟合：对于数据噪声较大或数据间隔不均匀的情况，三次样条插值可能会过度拟合数据，产生不必要的振荡。
- (3) 边界处理：对于边界条件的处理较为复杂，需要额外的设置和调整，一定程度上影响了插值结果的准确性。

### 5.3 模型的改进

为了提高精度，解决线性插值的局限性，我们可以采用如下方法进行如下改进：

- (1) 双线性插值：将线性插值扩展至二维空间，用于图像处理、地理信息系统等领域。
- (2) 线性样条插值：在线性插值的基础上引入样条函数，提高插值精度并保持光滑性。
- (3) 分段线性插值：将数据分段进行线性插值，适用于数据变化较为复杂的情况。
- (4) 加权线性插值：给予不同数据点不同的权重，改进线性插值对数据点的影响。

针对于三次样条插值，我们可以采用以下方法进行改进：

- (1) 立方样条插值：将三次样条插值推广到更高阶的立方样条插值，提高插值精度和光滑性。
- (2) 非均匀三次样条插值：对间隔不均匀的数据进行插值，提高逼近效果，适用于不规则分布的数据集。
- (3) 变分样条插值：通过变分原理优化三次样条插值曲线，获取更优的插值结果，提高插值精度。
- (4) 多变量三次样条插值：将三次样条插值拓展到多维数据的插值问题，应用于图像处理、模式识别等领域。

#### 5.4 模型的推广

线性插值和三次样条插值作为常见的插值方法，在各种领域和场景中都有广泛的应用。其中**线性插值**可以用于数值分析、图像处理、地理信息系统、信号处理、金融领域、工程建模等领域。此外三次样条插值可以应用于计算机图形学、医学图像处理、机器学习、经济学、动力学模拟、地质勘探等方面。

总的来说，线性插值和三次样条插值在科学研究、工程应用、数据处理和模型建立等领域有着广泛的应用，能够处理和分析各种类型的数据，并帮助我们更好地理解 and 利用数据。

---

## 参考文献

- [1]. 程文胜. 基于超弱光纤光栅的曲线重构方法研究[D]. 三峡大学, 2021.
- [2]. 田金容. 基于多芯光纤和光频域反射的三维曲线重构方法研究[D]. 华中科技大学, 2022.
- [3]. 冯荻. 基于光纤光栅应变传感的结构变形重构技术研究[D]. 大连理工大学, 2020.
- [4]. 吕安强, 黄崇武, 乐彦杰, 等. 基于分布式应变的三芯光纤形态重构算法 研究[J]. 光电子·激光, 2021, 32 (07): 784-790.
- [5]. 张力宁, 张定华, 刘元明, 赵西峰. 基于曲率图小波分解的平面曲线广顺方法 [J]. 计算机应用研究, 2005, 22 (11): 250-252.
- [6]. 王科俊, 賁晔. 基于线性插值的步态识别算法[J]. 华中科技大学学报 (自然科学版). 2010, 38 (2): 41-44.
- [7]. 谭明享, 张东生. 基于频域反射的分布式光纤传感变形重构研究[J]. 光纤通信技术. 2021, 45 (12): 17-20.
- [8]. 金红杰, 钟悦, 臧利国, 吕添. 基于三次样条插值谐波叠加技术的随机路面重构方法研究[J]. 振动与冲击. 2023, 42 (10): 23-30.
- [9]. 杨晗, 谭川东, 盛晋银, 司磊, 段黎明. 基于工业 CT 的零件内外曲面形位误差分析[J]. 仪器仪表学报. 2021, 42 (11): 230-238.



## 附录

### 附录 1

#### 基于 matlab 的问题一求解代码

```
clc;clear;
% 给定波长数据
lambda0_1 = 1529 * ones(1,6);
lambda0_2 = 1540 * ones(1,6);
delta_lambda_1 = [0.808, 0.807, 0.813, 0.812, 0.814, 0.809];
delta_lambda_2 = [1.095, 1.092, 1.090, 1.093, 1.094, 1.091];

% 将波长数据转化为曲率数据
c = 4200;
kappa_1 = c * (delta_lambda_1) ./ lambda0_1;
kappa_2 = c * (delta_lambda_2) ./ lambda0_2;

sensor_posion=0:0.6:3;
x_p=0.3:0.1:0.7;

k_interp_1=interp1(sensor_posion,kappa_1,x_p,"linear");
k_interp_2=interp1(sensor_posion,kappa_2,x_p,"linear");
%% 可视化
subplot(2,1,1)
plot(sensor_posion,kappa_1,"b-");
hold on;
scatter(x_p,k_interp_1);
title('测试 1 曲率插值结果');
xlabel('x'); ylabel('kappa');
hold off;

subplot(2,1,2)
plot(sensor_posion,kappa_2,"b-");
hold on;
scatter(x_p,k_interp_2);
title('测试 2 曲率插值结果');
xlabel('x'); ylabel('kappa');
hold off;
```

#### 基于 matlab 的问题二求解代码

```
clc;clear;
% 给定波长数据
lambda0_1 = 1529 * ones(1,6);
lambda0_2 = 1540 * ones(1,6);
```

```

delta_lambda_1 = [0.808, 0.807, 0.813, 0.812, 0.814, 0.809];
delta_lambda_2 = [1.095, 1.092, 1.090, 1.093, 1.094, 1.091];
% 传感器位置对应弧长
s = 0.6 * (0:5);
% 将波长数据转化为曲率数据
c = 4200;
kappa_1 = c * (delta_lambda_1) ./ lambda0_1;
kappa_2 = c * (delta_lambda_2) ./ lambda0_2;

% 对弧长 s 进行细化离散, 用于三次样条插值构建 k(s)
s1 = linspace(s(1), s(end), 100);
delta_s=s1(2)-s1(1);
ks1 = spline(s, kappa_1);
ks2 = spline(s, kappa_2);
kappa_interp1 = ppval(ks1, s1);
kappa_interp2 = ppval(ks2, s1);
% 数值积分计算, 每个离散点的切角, 形成切角离散数据
theta01 = pi/4; % 初始切线角
theta02 = pi/4;
theta1 = cumtrapz(s1, kappa_interp1) + theta01;
theta2 = cumtrapz(s1, kappa_interp2) + theta02;
num_theta=size(theta1,2);

x_1(1)=0;y_1(1)=0;
x_2(1)=0;y_2(1)=0;
% 切角递推
for n=1:(num_theta-1)
    delta_theta1(n)=theta1(n+1)-theta1(n);
    delta_theta2(n)=theta2(n+1)-theta2(n);
    if kappa_interp1(n)~=0
        l1(n)=2*sin(delta_theta1(n)/2)/kappa_interp1(n);
    else
        l1(n)=delta_s;
    end

    if kappa_interp2(n)~=0
        l2(n)=2*sin(delta_theta2(n)/2)/kappa_interp2(n);
    else

```

```

        l2(n)=delta_s;
    end

    delta_x_1(n)=l1(n)*cos(theta1(n)-delta_theta1(n)/2);
    delta_y_1(n)=l1(n)*sin(theta1(n)-delta_theta1(n)/2);

    delta_x_2(n)=l2(n)*cos(theta2(n)-delta_theta2(n)/2);
    delta_y_2(n)=l2(n)*sin(theta2(n)-delta_theta2(n)/2);

    x_1(n+1)=delta_x_1(n)+x_1(n);
    y_1(n+1)=delta_y_1(n)+y_1(n);

    x_2(n+1)=delta_x_2(n)+x_2(n);
    y_2(n+1)=delta_y_2(n)+y_2(n);
end

% 3. 曲率极值点
[max_kappa1, max_index1] = max(kappa_interp1);
[min_kappa1, min_index1] = min(kappa_interp1);
[max_kappa2, max_index2] = max(kappa_interp2);
[min_kappa2, min_index2] = min(kappa_interp2);
% 输出曲线特征

fprintf("曲线 1 的最大曲率为: %.3e 1/m, 位于 %.3f m 处\n", max_kappa1, s1(max_index1));
fprintf("曲线 1 的最小曲率为: %.3e 1/m, 位于 %.3f m 处\n\n", min_kappa1, s1(min_index1));

fprintf("曲线 2 的最大曲率为: %.3e 1/m, 位于 %.3f m 处\n", max_kappa2, s1(max_index2));
fprintf("曲线 2 的最小曲率为: %.3e 1/m, 位于 %.3f m 处\n", min_kappa2, s1(min_index2));
%% 可视化
figure;
subplot(2,1,1)
plot(x_1,y_1,'b-', 'LineWidth', 1.5);
title('重构曲线 1');
xlabel('x'); ylabel('y');
axis equal;grid on;

```

```
subplot(2,1,2)
plot(s1,kappa_interp1, 'r--', 'LineWidth', 1.5)
title('重构曲线 1 曲率分布');
xlabel('弧度 s'); ylabel('曲率 kappa');
grid on;
```

```
figure;
subplot(2,1,1)
plot(x_2,y_2,'b-', 'LineWidth', 1.5);
title('重构曲线 2');
xlabel('x'); ylabel('y');
axis equal;grid on;
subplot(2,1,2)
plot(s1,kappa_interp2, 'r--', 'LineWidth', 1.5)
title('重构曲线 2 曲率分布');
xlabel('弧度 s'); ylabel('曲率 kappa');
grid on;
```

### 基于 matlab 的问题三求解代码

```
clc;clear;
% 设置等间距弧长采样参数
a = 0; b = 1; % x 在[0,1]采样区间
n = 100; % 弧长函数划分数
m = 50; % 采样点数量
Delta_s = 1.5/(m-1); % 等间距弧长增量

% 定义原始曲线参数方程  $y=x^3+x$ 
x = @(t) t;
y = @(t) t.^3 + t;
dx = @(t) 1;
dy = @(t) 3*t.^2 + 1; %y'=3t^2+1
ddx = @(t) 0;
ddy = @(t) 6*t; %y''=6t
% 曲率参数方程解析式
kappa = @(t) abs(dx(t).*ddy(t)-dy(t).*ddx(t))./((dx(t).^2+dy(t).^2).^(3/2));

% 弧长函数使用离散数值逼近
t = linspace(a,b,n+1)';
ds = sqrt((x(t(2:end))-x(t(1:end-1))).^2+(y(t(2:end))-y(t(1:end-1))).^2);
```

```

s = [0; cumsum(ds)]; % 弧长函数离散值使用 ds 累加求和,首列添加 0, 作为初始点

% 等间距弧长采样
s_sample = (0:m-1)*Delta_s; % 弧长行向量
t_sample = interp1(s,t,s_sample,'spline'); % 参数值 t 等间距弧长采样
x_sample = x(t_sample); % x 坐标采样
y_sample = y(t_sample); % y 坐标采样
kappa_sample = kappa(t_sample); % 曲率采样

% 三次样条插值重构曲率-弧长函数
cs = spline(s_sample,kappa_sample); % 三次样条插值
s_dense = linspace(0,s_sample(end),500)'; % 再细化弧长采样点
kappa_dense = ppval(cs,s_dense); % 得到更加细化的 k(s)曲率-弧长函数值

% 曲率积分重构切线角
theta_0 = atan(3*t_sample(1)^2+1); % 初始切线角 arctan(y'(t1))
theta_dense = theta_0+cumtrapz(s_dense,kappa_dense); % theta1=theta0+积分 k*ds
theta_sample = theta_0+cumtrapz(s_sample,kappa_sample);

x_recon(1) = x_sample(1);
y_recon(1) = y_sample(1);

% 切线角积分重构坐标
x_recon = cumtrapz(s_dense, cos(theta_dense));
y_recon = cumtrapz(s_dense, sin(theta_dense));
x_recon = x_sample(1)+x_recon;
y_recon = y_sample(1)+y_recon;

% 重构误差分析
%使用均方差分析误差
err = sqrt((x_sample-x_recon(1:m)).^2+(y_sample-y_recon(1:m)).^2);
RMSE = sqrt(mean(err.^2));
MAE = max(err);

%% 可视化
% 原始曲线与重构曲线比较
t_dense = linspace(a,b,500)';
figure;

subplot(3,1,1)
plot(x(t_dense),y(t_dense),'LineWidth',1.5);
xlabel('x'); ylabel('y');
title('原始曲线');
grid on;

subplot(3,1,2);

```

```

plot(x_recon,y_recon,'--','LineWidth',1.5);
xlabel('x'); ylabel('y');
title('重构曲线');
grid on;

subplot(3,1,3);
plot(x_sample,y_sample,'.','MarkerSize',20);
xlabel('x'); ylabel('y');
title('采样点');
grid on;

figure;
plot(s_sample, err, '-.', 'MarkerSize',20,'LineWidth',1.5);
xlabel('弧长 s'); ylabel('误差');
title('重构误差分布图');
grid on;

% 曲率分布比较
figure;
plot(s_sample, kappa_sample, '-.', 'MarkerSize',20,'LineWidth',1.5);
hold on;
plot(s_dense, kappa_dense, 'LineWidth',1.5);
xlabel('弧长 s'); ylabel('曲率 \kappa');
legend('采样点处曲率','重构曲率分布','Location','NorthEast');
title('曲率分布比较');
grid on;

```