

2023 年第八届“数维杯”大学生 数学建模挑战赛论文

题 目 节能列车运行控制优化策

摘 要

在全球提倡铁路可持续发展和大力发展高效运输的时代背景下，做好节能减排的工作十分必要并且形势紧迫。城市轨道交通作为国民经济中耗能最大的行业之一，如何降低运输能耗已经成为保持城市轨道交通持续发展亟待解决的问题。在同一段旅途中，列车使用不同的驾驶策略通常会产生不同的能量和时间的消耗。

本文就列车从 XEQ 站到 SMKXY 站的行驶过程进行建模编程研究，通过已知阶段路程数据将两站之间距离无限微分化，进行无限分割，在很小的时间内我们把列车看作匀加速运动或者匀速运动。并经过受力分析，根据牵引力，制动力，摩擦力，重力的分力，来确定每个阶段列车所对应的加速度以及速度。由此，得到每个阶段的列车行驶过程中的递推公式，来进行编程分析。利用程序来对列车从始发站到终点站整个运行过程进行规划，由此得到不同条件下，列车的运行方案。

针对问题一，我们对整个路程无限分割，对每一个连续的段落做受力分析，得到不同路段所需要的加速度以及列车的初始状态，以此来得知列车行进的路程、速度、能量消耗之间的量化关系。通过递推公式，我们使用 MATLAB 编程通过算法求解这个模型，以此来得到此段路程列车行驶的最优策略，以及程序运行的最短时间，以及所需曲线。

针对问题二，我们使用灰狼算法，使用问题一所建立的模型，以制动力和牵引力为决策变量，以能耗的目标，目的得到列车在行驶过程中所需最小的能耗。通过灰狼智能算法迭代统计，最后得到行驶过程中所需要的制动力以及牵引力，最后得到列车行驶的能耗。最后，做出所需曲线。

针对问题三，列车原计划有规定时间，但是在至 2000 米处，需延迟 60s 到达终点。我们把此行程规划成为两部分。前一部分为正常行驶并且符合在规定时间内到达的速度让列车进行行驶，后一部分为 2000 米后，得到此时列车的行驶状态，确定此时列车的初始状态以及规划此段列车的形式策略，建立优化模型，进行求解。目标为让列车在尽可能节能的情况下，迅速做出优化后的调整。最后做出曲线。

关键词： 节能列车，运行控制策略，灰狼优化算法，节能控制，优化策略

目 录

一、问题重述.....	1
二、问题分析.....	2
2.1 问题 1 的分析.....	2
2.2 问题 2 的分析.....	2
2.3 问题 3 的分析.....	2
三、模型假设.....	2
四、定义与符号说.....	3
五、模型的建立与求解.....	3
5.1 问题 1 的模型建立与求解.....	4
5.1.1 节能列车运行模型的建立.....	4
5.1.2 节能列车运行优化模型的求解.....	5
5.1.3 结果.....	13
5.2 问题 2 的模型建立与求解.....	13
5.2.1 单目标列车优化模型的建立.....	13
5.2.2 基于灰狼优化模型的求解.....	16
5.2.3 结果.....	23
5.3 问题 3 的模型建立与求解.....	23
5.3.1 节能列车运行延时优化模型的建立.....	23
5.3.2 节能列车运行延时优化模型的求解.....	25
5.3.3 结果.....	26
六、模型的评价及优化.....	26
6.1 误差分析.....	26
6.2 模型的优点.....	26
6.3 模型的缺点.....	27
6.4 模型的推广.....	27
参考文献.....	28
附录.....	29

一、问题重述

随着城市化进程的加速和人口的增长，城市交通需求不断增加，特别是在大城市中。为了满足日益增长的交通需求，许多城市已经或正在实施轨道交通系统。然而，轨道交通系统的快速建设和运营确实带来了能耗的显著增长^[1]。在城市轨道交通系统中，主要的能源消耗包括电力、制动能量等。这些能源在系统运行过程中被消耗，从而导致能源浪费和环境负面效应的加剧。例如，大量的电力消耗会导致碳排放量的增加，进而加剧全球气候变化问题。此外，高能耗还可能导致对有限资源的过度开发和环境破坏。为了应对这些问题，许多城市已经开始采取措施来提高轨道交通系统的可持续性^[2]。以北京、上海、广州为例，2018年地铁负荷占全市总负荷的1.5%-2.5%，成为了城市电网的最大单体负荷，给城市能源供应带来了很大的挑战。在“双碳”政策的推动下，城轨系统采取了一系列减碳节能措施，如换用ATO驾驶模式、光伏+地铁等方法，取得了显著的成效。此外，通过城轨系统的需求侧响应策略，可以在保证乘客满意度的前提下降低牵引能耗成本，进一步挖掘城轨系统的减碳节能潜力^[3]。

列车在运行过程中与外界产生各种摩擦，消耗列车牵引的能量。列车运行过程中需要考虑多种因素，如列车与轨道的摩擦、空气阻力、势能变化以及位置限速等。在同一段旅途中，采用不同的驾驶策略通常会产生不同的能量和时间消耗。因此，优化列车驾驶策略对于降低能耗具有重要意义。

试利用数学建模的方法解决以下问题：

问题 1：根据附件 1 以及附件 2 提供的信息，通过数学建模方法编写程序来获取列车运行过程的速度-距离曲线、牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线与能量消耗-距离曲线，并且需要考虑程序的运行时间，使其达到最优。同时，需要获取六种不同情况下的曲线：一种是列车在最短时间内到达站台 B 时的曲线，另外五种分别是在最短运行时间上分别增加 10s、20s、50s、150s 和 300s 后到达站台 B 的曲线。

问题 2：考虑附件一中行驶路途中的坡度变化信息以及限速变化信息，以及附件二中电机的动态特性与参数、静态电机牵引率与制动再生率的信息。在列车预设运行时间为 T 的情况下，需要设计一个可靠的优化方案，以得到能耗最低的速度轨迹。参考问题 1，获取列车以最短时间到达站台 B、以及在最短运行时间上分别增加 10s、20s、50s、150s、300s 到达站台 B 共六组曲线。此外，还需要考虑列车在运行过程中可能出现各种突发情况导致到站时间提前或延迟的情况，使其列车速度轨迹可以根据新的到站时间进行调整。

问题 3：当列车从起点出发，原计划于 320s 后到达终点，列车运行至 2000m 位置时，前方突发事故，需要延迟 60s 到达终点。设计优化方案在保持列车节能运行下，能够快速得到调整后的优化速度轨迹。并绘制列车运行过程的速度-距离曲线、牵引制动力-距离曲线、时间-距离曲线与能量消耗-距离曲线。

二、问题分析

2.1 问题 1 的分析

问题 1 属于数学优化问题，对于解决此类问题，重点分析三个重要点。首先需要明确列车在不同路段的运行状态；其次对各不同时间段平行列车方向的力进行受力分析；最后对连续时间段进行无限分割，在一段很小的时间段内可认为列车处于匀速或匀加速运动状态。综合以上三点，设计整个路段中列车的运行算法以及各指标参数。通过算法得到最短的运行时间，当运行时间加长，则最后一段路程的位移，速度初末状态不变。根据时间得到加速度数值，由此得到各过程的相关参数。

2.2 问题 2 的分析

问题 2 属于数学优化问题，对于解决此类问题，分析的重点在于列车运行时间已经给定，需要对列车运行过程中的速度进行分析。由于以上原因，首先根据问题 1 的分析根据对列车整个运行过程进行无限分割，对分割的每个小段中的牵引力和制动力所做的功进行量化。其次依据能量之间的关系，构建列车运行过程中能量总消耗的表达式，并且通过问题 1 的推论得到约束条件最后我们通过使用枚举法得到最优的牵引力与制动力方案，然后根据列车运行过程中总时长的改变，对其求解得到不同运行时长下的列车最优行驶方案。

2.3 问题 3 的分析

问题 3 属于数学优化问题，对于解决此类问题，需要对列车整个运动过程分两段处理。第一阶段规定用时 320s，利用问题 2 建立的优化模型得到列车运行策略。当使用第一阶段的运行策略行驶 2000m，确定剩余路程所需时间和列车初始状态。依然采用问题 2 的优化模型求解第二阶段。

三、模型假设

1. 在一段被分割成无限小的时间段内可认为列车处于匀速或匀加速运动。
2. 列车运行过程中排除速度波动对模型的影响。
3. 讲列车当作质点，不考虑列车的自身长度。
4. 单列车节能优化控制问题，不考虑再生能源利用，与其他列车无能量交换。

四、定义与符号说

符号定义	符号说明
a	加速度
F_m	牵引力
F_n	制动力
F_g	重力水平分力
F_f	阻力
V	速度
S	路程
X	位移
W	总功
m	质量
g	重力加速度
Δt	时间增量
θ	坡度

五、模型的建立与求解

数据的预处理：

根据附件一中所给从西二旗站到生命科学园站数据，将其划分为 10 个阶段，具体划分如下表 5-1：

表 5-1 列车运行数据			
<i>Distance(m)</i>	<i>Gradient(‰)</i>	<i>Vlimit (km/h)</i>	<i>Stage</i>
0	0.0617284	100	阶段 1
198.966	0.0617284	100	
198.967	16.2346	100	
739.018	16.2346	100	阶段 2
739.018	0.679012	100	
2188.63	0.555556	100	阶段 3
2217.05	-9.81481	100	
2870.8	-9.81481	100	阶段 4
2870.8	-3.02469	100	
4178.29	-3.02469	100	

4178.29	-20.1852	100	阶段 5
4259	-20.1852	100	
4259.1	-20.1852	86	阶段 6
4604.65	-20.1852	86	
4604.66	3.02469	86	阶段 7
4803.62	3.02469	86	
4803.63	20.3086	86	阶段 8
4960	20.3086	86	
4960.1	20.3086	100	阶段 9
5144.7	20.3086	100	阶段 10

5.1 问题 1 的模型建立与求解

5.1.1 节能列车运行模型的建立

针对本问的要求和所需方案,我们认为其中最核心的部分是列车需要最短时间到达站点 B,这其中需要包含考虑:列车的能耗,列车运行的旅途中不同的路段的限速不同,旅途中坡度情况不同,电机的动态特性较为复杂,储能装置在列车节能领域有着重要的应用,列车制动时,会将一定比例的能量储存至储能装置中。基于附件 1 和附件 2 的数据,采用微分思想建立数学建模,将列车运行过程中的一些问题量化为时间问题,并为其建立数学模型^[4]5-1-1 所示:

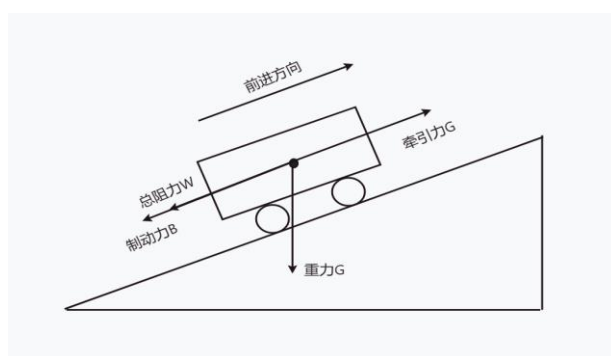


图 5-1-1 列车受力分析图

1) 列车运动方程

$$F_{\text{合}t_i} = m \cdot a \quad (5-1-1)$$

$$F_{\text{合}t_i} = F_{mt_i} - F_{ft_i} - F_{gt_i} - F_{nt_i} \quad (5-1-2)$$

其中, m 为列车的质量, a 为 t_i 时刻列车的加速度, F_{mt_i} 为 t_i 时刻列车的牵引力, F_{nt_i} 为 t_i 时刻列车的制动力, F_{ft_i} 为 t_i 时刻列车受到的阻力, F_{gt_i} 为 t_i 时刻列车自身重力在水平方向的分力。

2) 阻力计算公式

令 t_i 至 t_{i+1} 的时间段列车做匀加速运动, 则:

$$F_{ft_i} = 2.0895 + 0.0098V_{t_i} + 0.006(V_{t_i})^2 \quad (5-1-3)$$

其中, V_{t_i} 为 t_i 时刻列车运行速度。

3) 重力水平分力的计算

$$F_{gt_i} = mg \cdot \sin(\arctan(\theta_{t_i})) \quad (5-1-4)$$

其中, g 为重力加速度, θ_{t_i} 为 t_i 时刻路段的坡度。

4) 牵引力和制动力的计算

在牵引过程中, 牵引力的大小由列车的速度和牵引率决定。在制动过程中, 制动力的大小由列车的速度和制动率决定。在本题中, 我们可以假设列车的牵引率和制动率分别为 0.9 和 0.6。

列车受到牵引力可以表示为:

$$F_m = \min(F_{m_{\max}}, \text{TractionRate} \cdot m \cdot g \cdot \cos \theta) \quad (5-1-5)$$

其中, $F_{m_{\max}}$ 为列车的最大牵引力, TractionRate 为列车的牵引率, g 为重力加速度, θ 为路段的坡度。

列车的制动力可以表示为:

$$F_n = \min(F_{n_{\max}}, \text{BrakingRate} \cdot m \cdot g \cdot \cos \theta) \quad (5-1-6)$$

其中, $F_{n_{\max}}$ 为列车的最大牵引力, BrakingRate 为列车的牵引率, g 为重力加速度, θ 为路段的坡度。

5) 位移和累计路程的计算

令 $t_i \rightarrow t_{i+1}$ 时间段列车看作匀加速运动, 则在 t_{i+1} 时刻的速度为:

$$V_{t_{i+1}} = V_{t_i} + a_{t_i} \cdot \Delta t \quad (5-1-7)$$

其中, $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ 为时间变化量, V_{t_i} 为 t_i 时刻的速度。

列车位移为:

$$X_{t_{i+1}} = V_{t_i} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_{t_i} \cdot \Delta t^2 \quad (5-1-8)$$

列车累计路程为:

$$S_{t_{i+1}} = \sum_{i=1}^{i=i+1} X_{t_i} \quad (5-1-9)$$

6) 能量消耗计算

列车的能量消耗在本题中可以表示为列车的牵引力和制动力所作的功。列车的能量消耗为:

$$W = F_m \cdot S_t + F_n \cdot S_t \quad (5-1-10)$$

5.1.2 节能列车运行优化模型的求解

根据上述理论可知, 为了让列车以最早时间到达, 列车在加速和减速过程中 F_m 与 F_n 分别取最大值, 在各路段行驶过程中, 目标行驶速度为路段的限速值。从而对整个算法

分步处理。

步骤 1: 首先明确列车当前的位置 S_i ，当前速度 V_{t_i} 以及所需状态，根据分析可将列车运行状态分为列车当前行驶速度小于最大速度，列车当前行驶速度等于最大速度和列车当前行驶速度大于最大速度三种，列车分别需要加速，匀速和减速，即：

当路段为 $V_{\text{车}} < V_{\text{max}}$ 时，列车需要加速， $F_m = F_{m\text{max}}$ ， $F_n = 0$ ；

当路段为 $V_{\text{车}} = V_{\text{max}}$ 时，列车需要匀速， $F_{\text{合}} = 0$ ；

当路段为 $V_{\text{车}} > V_{\text{max}}$ 时，列车需要减速， $F_n = F_{n\text{max}}$ ， $F_m = 0$

步骤 2: 设列车行驶时间变化量 $\Delta t = 0.00001$ ，当 $t = t_i + \Delta t$ 时刻时，求列车牵引力 F_{mt} ，列车制动力 F_{nt} ，列车重力水平分力 F_{gt} ，合力 $F_{\text{合}t}$ ，加速度 a_t 。

步骤 3: 然后进一步通过求取的列车牵引力 F_{mt} ，列车制动力 F_{nt} ，列车重力水平分力 F_{gt} ，合力 $F_{\text{合}t}$ ，加速度 a_t 值来求取得列车行驶速度 V_t ，行驶的位移 S_t 。

步骤 4: 综合求得的列车行驶速度 V_t 和行驶的位移 S_t 更新列车位置 X_t ，求得为：

$$X_t = X_{t_i} + S_t$$

更新时间 t ，则为：

$$t = t + \Delta t$$

步骤 5: 根据更新的位置判断：

$$X_t \geq X_{\text{目标}}$$

其中， $X_{\text{目标}}$ 指全程位移。

若满足上述条件，则列车到站，然后判断 $V_{\text{车}t}$ 是否为 0，若列车速度为 0，则列车停止运行，实际路程为 X_t 。若列车速度不为 0，则需要判断明确列车当前位置，当前速度以及所需状态，确定最终的 X_t 值。

若不满足上述条件，则需要重新判断明确列车当前的位置，当前速度以及所需状态。

步骤 6: 统计最短距离算法时间如图 5-1-2 所示：

```
i =
1
Elapsed time is 0.306683 seconds.
运行时间: 0.30693
```

图 5-1-2 算法运行时间

步骤 7: 得到最短时间 t_{min} 的制动力-距离曲线、时间-距离曲线、牵引力-距离曲线和速度-距离曲线如图 5-1-3、图 5-1-4、图 5-1-5 和图 5-1-6 所示：

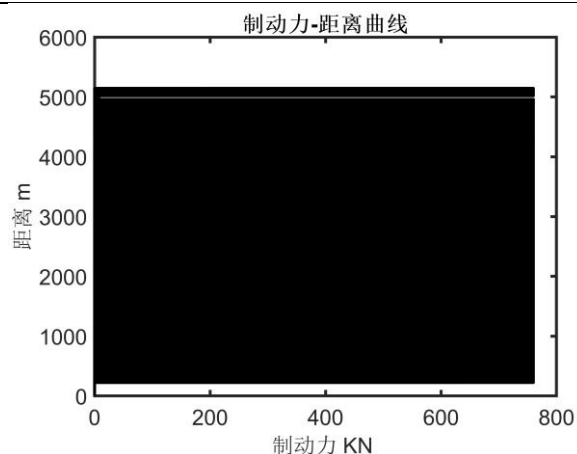


图 5-1-3 制动力-距离曲线

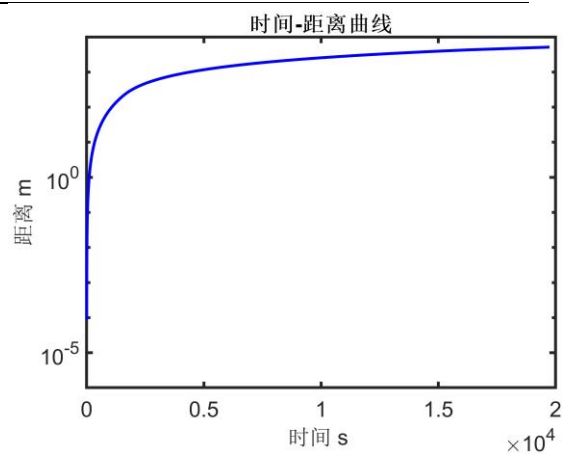


图 5-1-4 时间-距离曲线

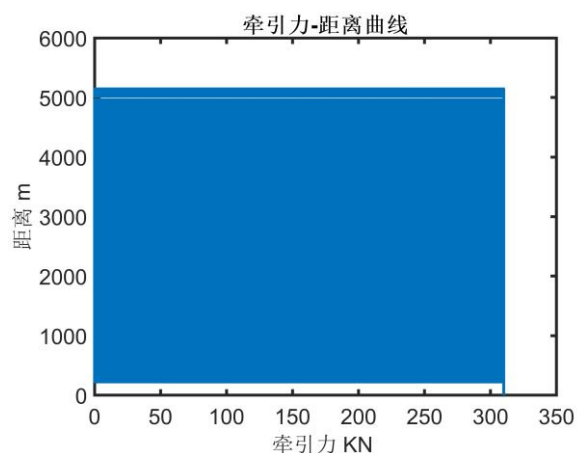


图 5-1-5 牵引力-距离曲线

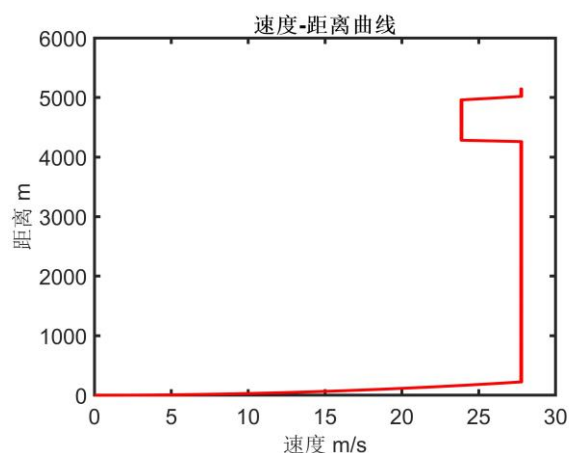


图 5-1-6 速度-距离曲线

根据分析求解，得到列车行驶的能量消耗-距离曲线，如图 5-1-7 所示：

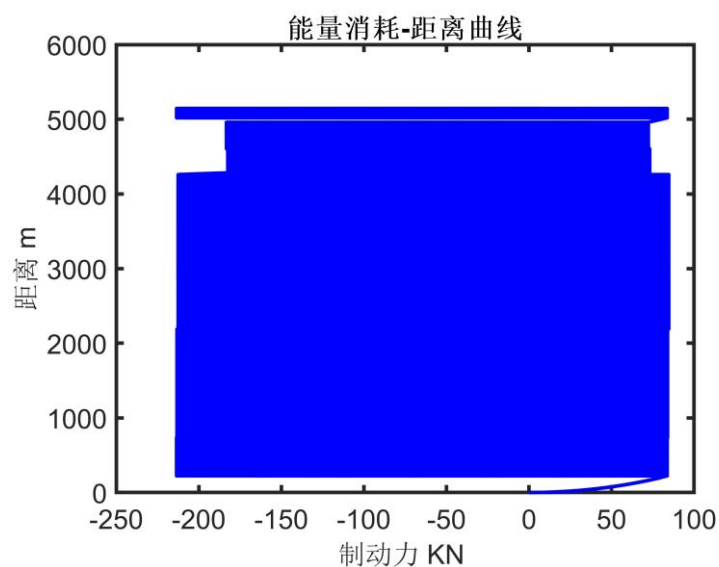


图 5-1-7 能量消耗-距离曲线

根据附件一的 Gradient 值，当其值为负时，需要降低牵引力，导致列车速度降低，列车行驶时间在最短时间的基础上增加 10 秒，得到的曲线如图 5-1-8、图 5-1-9、图

5-1-10 和图 5-1-11 所示:

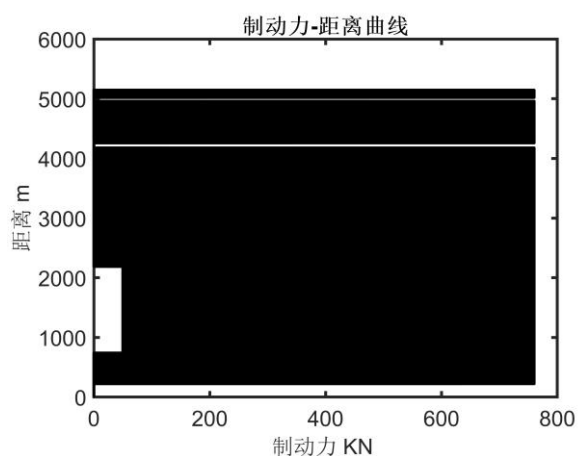


图 5-1-8 制动力-距离曲线

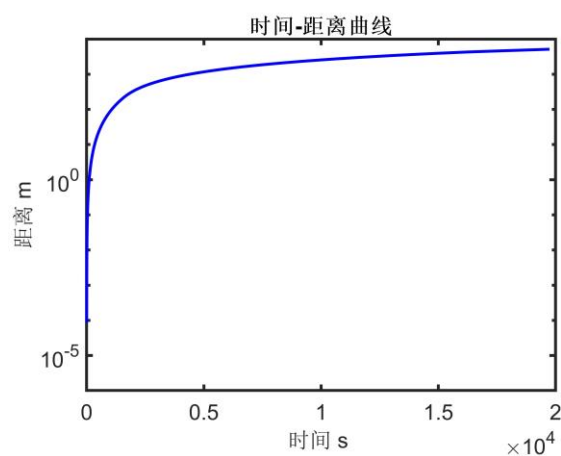


图 5-1-9 时间-距离曲线

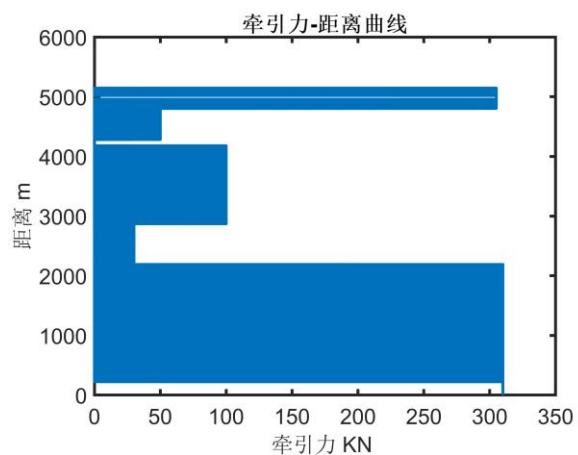


图 5-1-10 牵引力-距离曲线

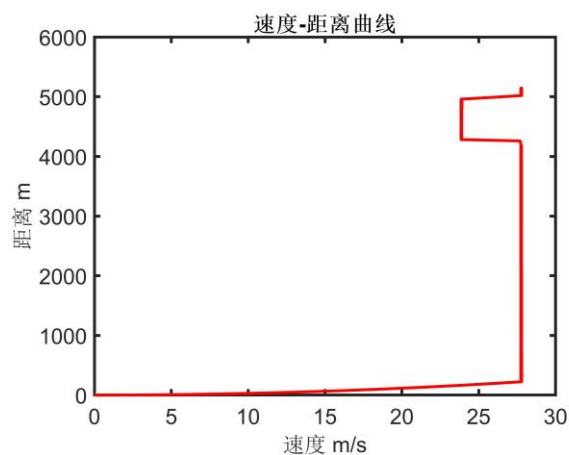


图 5-1-11 速度-距离曲线

列车在最短时间上延迟 10 秒行驶的能量消耗-距离曲线, 如图 5-1-7 所示:

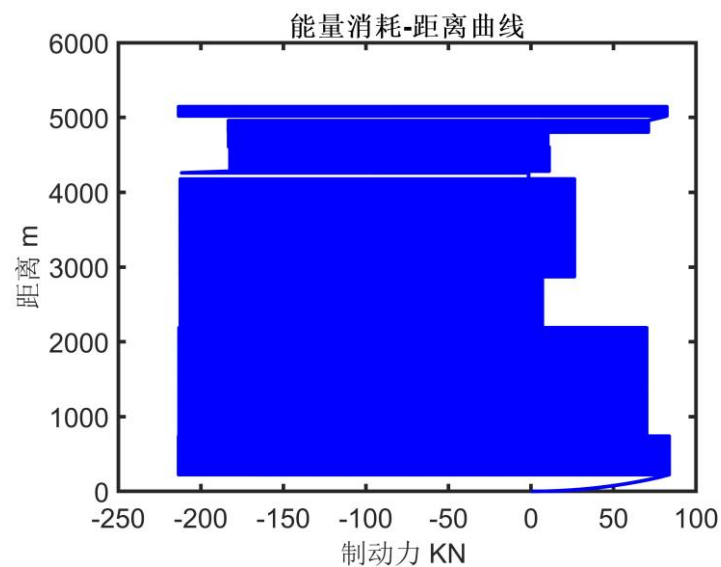


图 5-1-12 能量消耗-距离曲线

列车速度降低，列车行驶时间在最短时间的基础上增加 20 秒，得到的曲线如图 5-1-8、图 5-1-9、图 5-1-10 和图 5-1-11 所示：

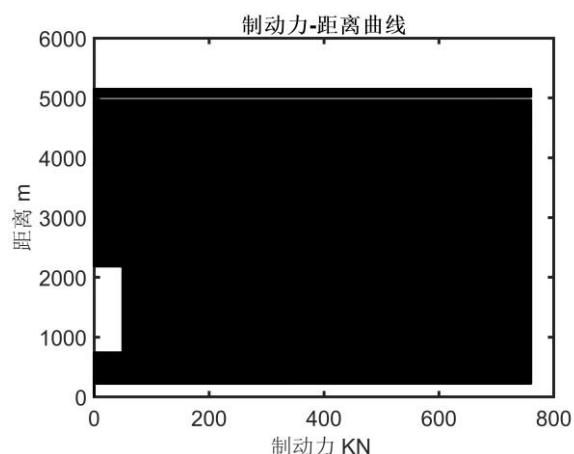


图 5-1-13 制动力-距离曲线

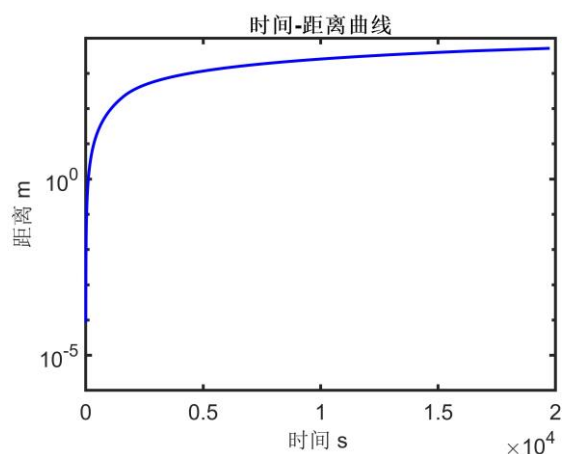


图 5-1-14 时间-距离曲线

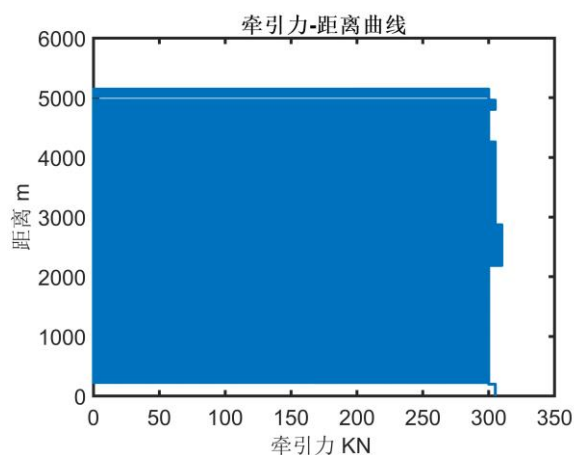


图 5-1-15 牵引力-距离曲线

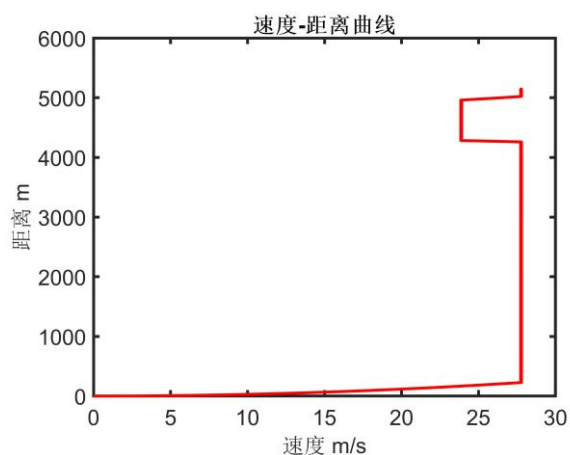


图 5-1-16 速度-距离曲线

列车在最短时间上延迟 20 秒行驶的能量消耗-距离曲线，如图 5-1-7 所示：

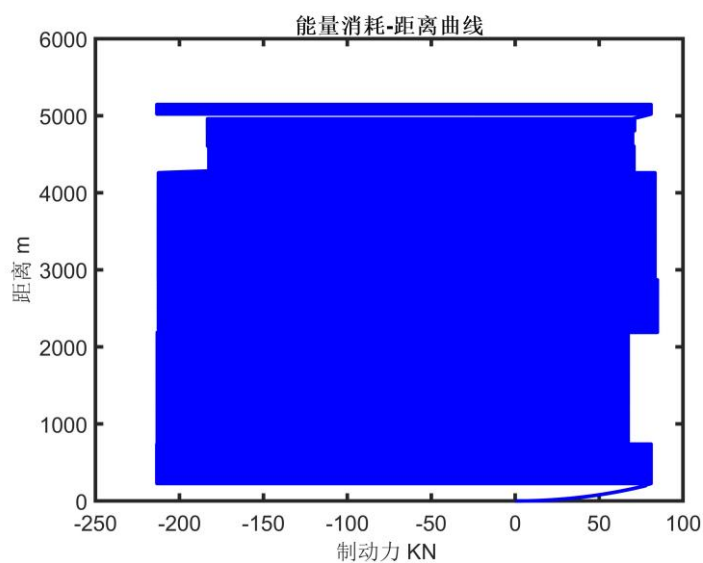


图 5-1-17 能量消耗-距离曲线

列车速度降低，列车行驶时间在最短时间的基础上增加 50 秒，得到的曲线如图 5-1-18、图 5-1-19、图 5-1-20 和图 5-1-21 所示：

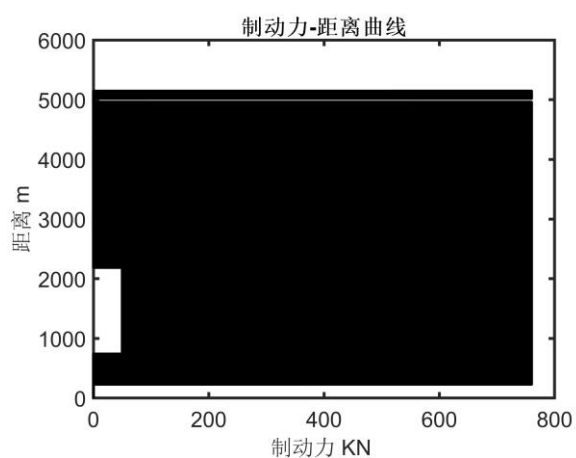


图 5-1-18 制动力-距离曲线

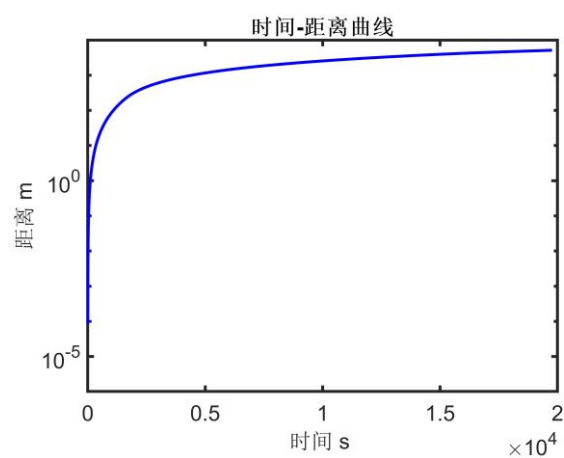


图 5-1-19 时间-距离曲线

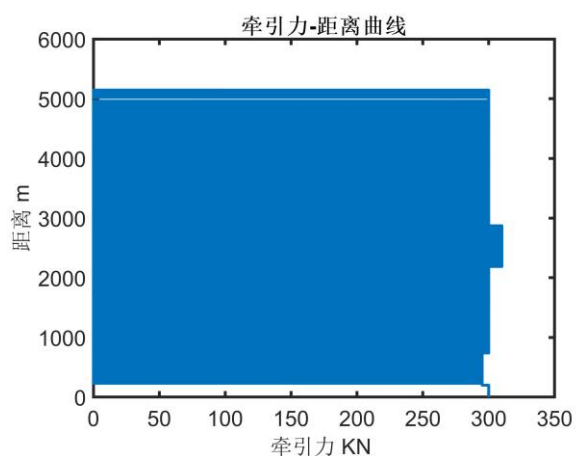


图 5-1-20 牵引力-距离曲线

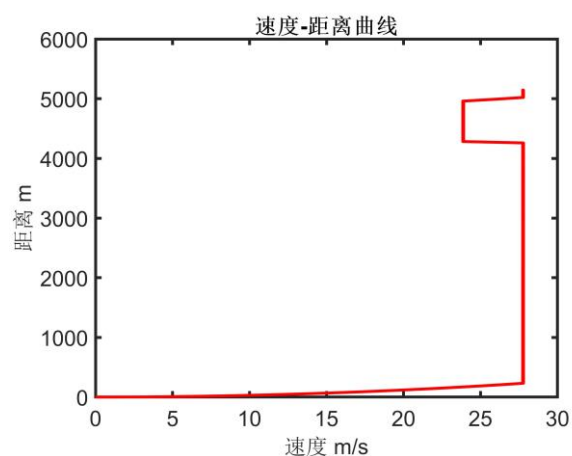


图 5-1-21 速度-距离曲线

列车在最短时间上延迟 50 秒行驶的能量消耗-距离曲线，如图 5-1-22 所示：

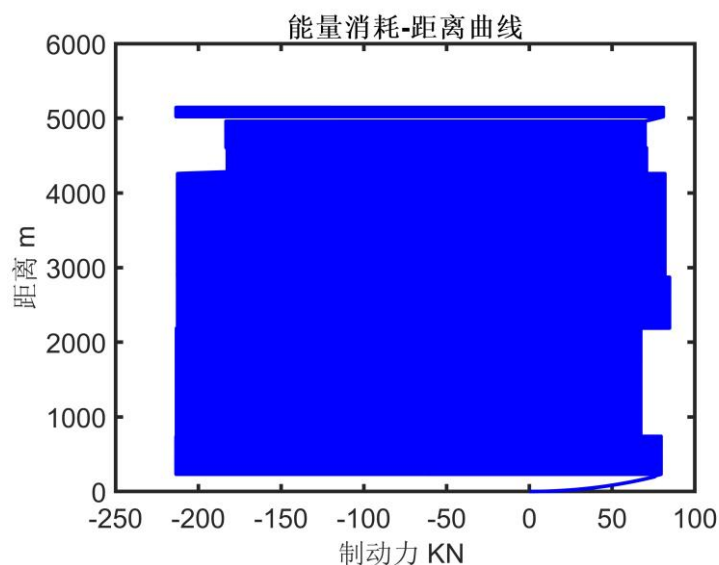


图 5-1-22 能量消耗-距离曲线

列车速度降低，列车行驶时间在最短时间的基础上增加 150 秒，得到的曲线如图 5-1-23、图 5-1-24、图 5-1-25 和图 5-1-26 所示：

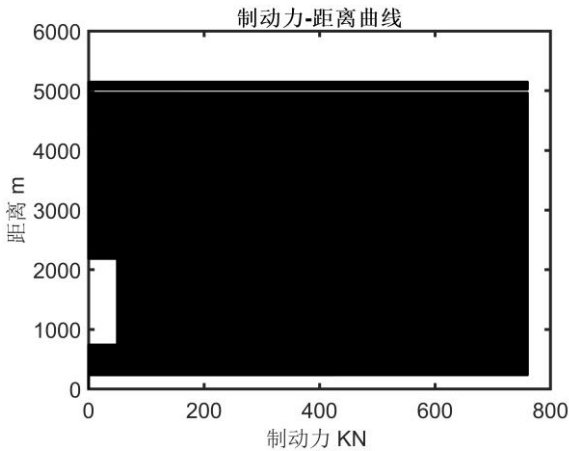


图 5-1-23 制动力-距离曲线

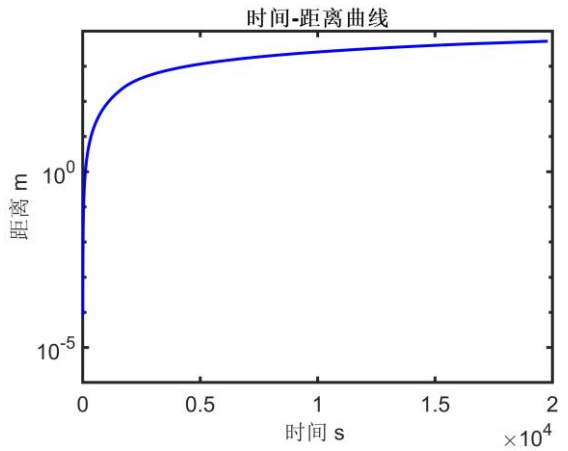


图 5-1-24 时间-距离曲线

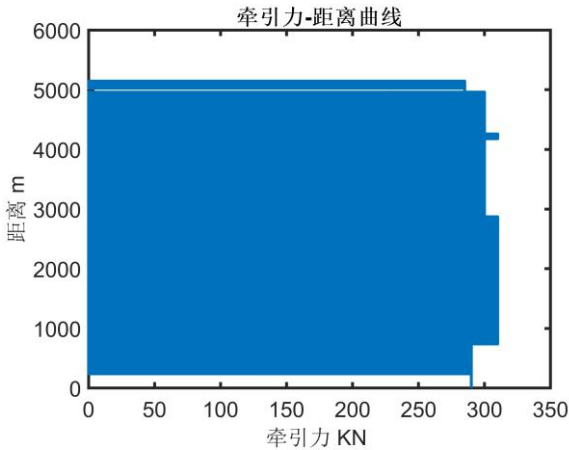


图 5-1-25 牵引力-距离曲线

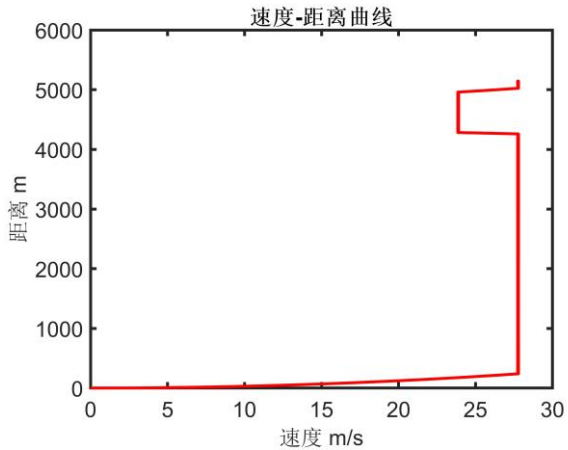


图 5-1-26 速度-距离曲线

列车在最短时间上延迟 150 秒行驶的能量消耗-距离曲线，如图 5-1-27 所示：

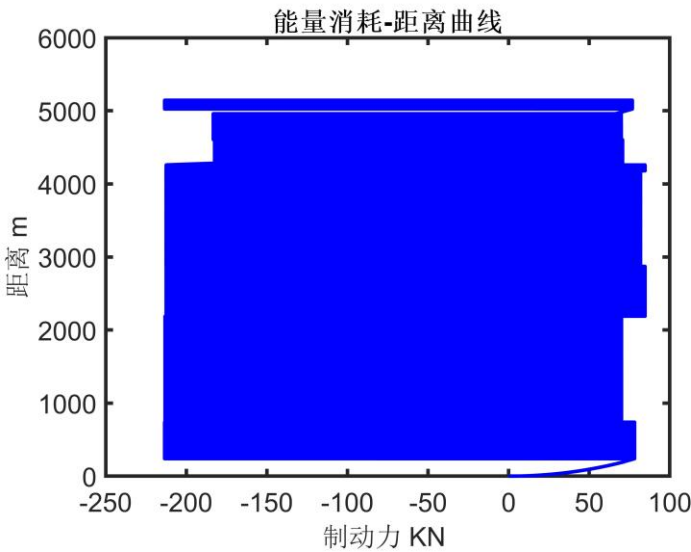


图 5-1-27 能量消耗-距离曲线

通过上述算法可得在列车最后一个减速状态中拉长时间为最优状态。由于整个过程中减速时 $F_{合}$ 为最大值。当 $F_{合}$ 减少时，时间变长。但初始速度不变，使得实际路程变长。故此需要在前一个匀速行驶过程中提前制动。

因此在延迟 300s 的阶段内需要控制牵引力和平均速度来控制列车晚点的时间，得到的曲线如图 5-1-28、图 5-1-29、图 5-1-30 和图 5-1-31 所示：

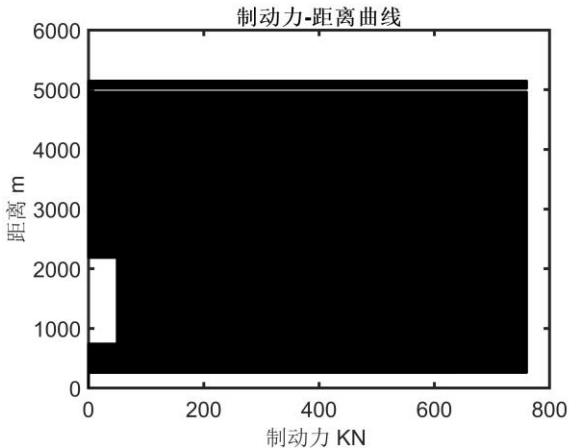


图 5-1-28 制动力-距离曲线

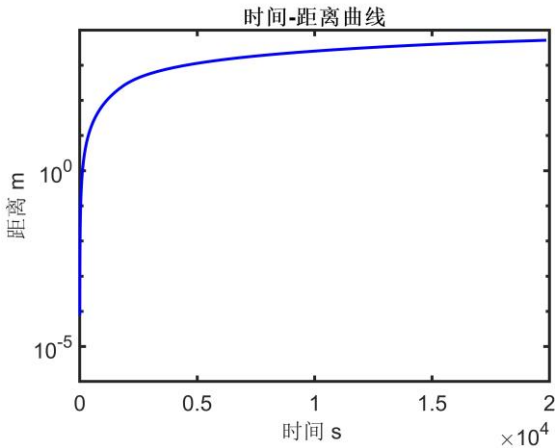


图 5-1-29 时间-距离曲线

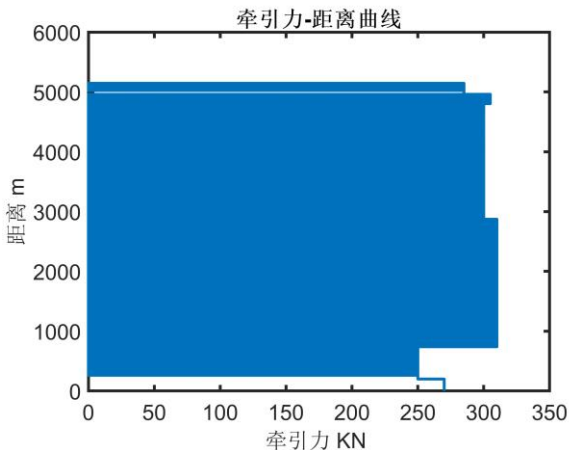


图 5-1-30 牵引力-距离曲线

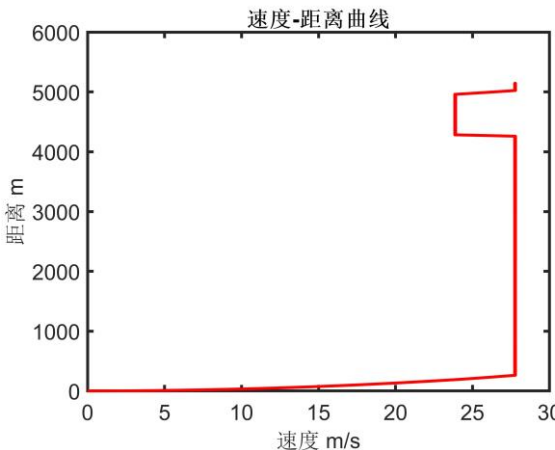


图 5-1-31 速度-距离曲线

列车在最短时间上延迟 300 秒行驶的能量消耗-距离曲线，如图 5-1-32 所示：

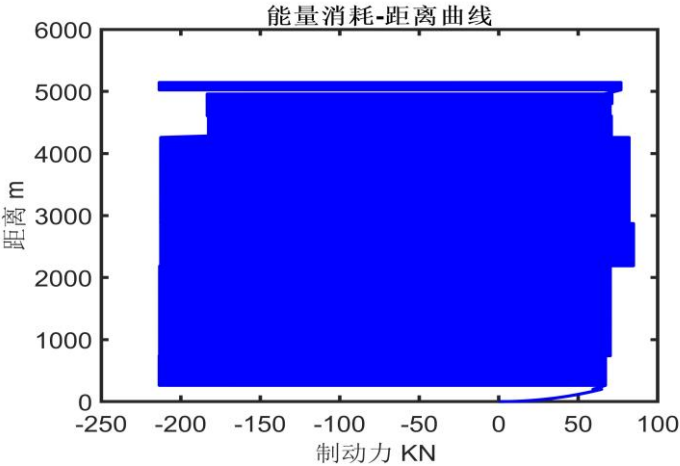


图 5-1-32 能量消耗-距离曲线

5.1.3 结果

基于对列车节能的考虑，使得在列车运行过程中能量消耗最低，能够处于最优运行状态，通过微元法对列车运行时间进行合理规划后得到最短运行时长。通过列车运行过程中突发状况导致的运行时间的加长和列车节能的要求，分析延迟不同时间列车不同的运行状况，使得建立的模型具有一定的现实意义。

5.2 问题 2 的模型建立与求解

5.2.1 单目标列车优化模型的建立

针对本问的要求和所需方案，我们认为其中最核心的部分是列车需要时间 T 内以最低能耗到达站点 B，在参照问题 1 基础上，获取列车以最短时间到达站台 B、在最短运行时间上分别增加 10s、20s、50s、150s、300s 到达站台 B 总共六组曲线。列车在运行过程中可能会出现各种突发情况导致列车需要提前到达站台或延时到达站台，这时列车的运行速度轨迹需要根据新的到站时间而发生变化。若整个周期 T 被均分成 N 小段，对于每个小段的时间为 Δt ，则有 $N \cdot \Delta t = T$ 。

1) 决策变量

为了建立模型，定义决策变量：

$$0 \leq F_m \leq 310$$

$$0 \leq F_n \leq 260$$

2) 目标函数

列车全程的能耗 W

$$\min W = \sum_{i=1}^{i=N} F_{m_i} \cdot S_i + \sum_{i=1}^{i=N} |F_{n_i}| \cdot S_i \quad (5-2-1)$$

3) 约束条件

$$s.t. \begin{cases} S_i = V_{i-1} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_{i-1} \Delta t^2 \\ a_{i-1} = \frac{0.9F_{m_{i-1}} - F_{f_{i-1}} - F_{g_{i-1}} - 0.6F_{n_{i-1}}}{m} \\ F_{f_i} = 2.0895 + 0.0098V_{t_i} + 0.006(V_{t_i})^2 \\ F_{g_i} = mg \sin(\arctan(\alpha)) \\ V_0 = S_0 = 0, \Delta t = 0.001 \\ N \cdot \Delta t = T \end{cases} \quad (5-2-2)$$

其中 V_0 为初始速度， S_0 为初始路程。

4) 灰狼优化算法

灰狼优化算法原理：灰狼是社会性的捕食者，具有严格的社会阶级划分，在一个狼群中，灰狼可分为 alpha、beta、delta 和 omega 四个等级，上级的灰狼支配下级的灰狼，下级的灰狼服从并执行上级灰狼的决策^[4]。如下图 5-2-1 的金字塔型结构所示：

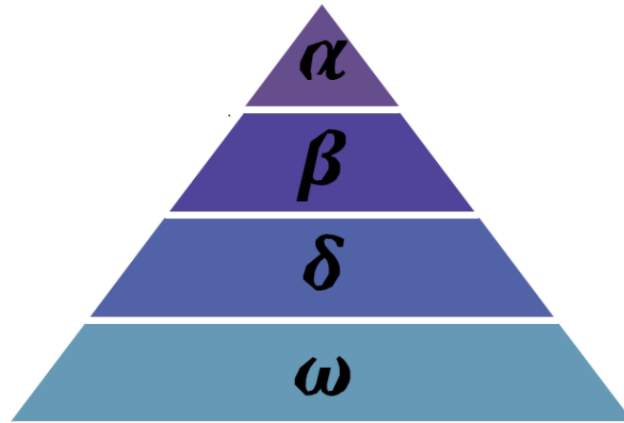


图 5-2-1 金字塔结构

α 位于顶端，代表狼群中的头狼，负责做出狩猎，休息等决策；由于其它的狼需要服从 alpha 狼的命令，所以 alpha 狼也被称为支配狼。另外，alpha 狼不一定是狼群中最强的狼，但就管理能力方面来说，alpha 狼一定是最好的。

β 是 alpha 的从属者，它们的职责是协助 alpha 做出决策，当已有的 alpha 失去优势时，它们也是代替其成为新的 alpha 的最佳候选者；在 alpha 狼去世或衰老后，beta 狼将成为 alpha 狼的最候选者。虽然 beta 狼服从 alpha 狼，但 beta 狼可支配其它社会层级上的狼。

δ 支配底层的 omega，但服从于 alpha 和 beta β 的指令；

ω 位于底端，狼群中的大部分灰狼属于这一阶级，它们负责执行以上三个等级灰狼的决策，协调狼群内部的关系。

优化过程将包围、追捕、攻击三个阶段的任务分配给各等级的灰狼群来完成捕食行为，从而实现全局优化的搜索过程。下面对这三个阶段分别进行介绍：

①包围：

在 GWO 中，灰狼在狩猎过程中利用以下位置更新公式实现对猎物的包围：

$$\vec{X}(t+1) = \vec{X}_p(t+1) - \vec{A} \cdot \vec{D} \quad (5-2-3)$$

$$\vec{D} = \left| \vec{C} \cdot \vec{X}_p(t) - \vec{X}(t) \right| \quad (5-2-4)$$

其中，X 表示灰狼的位置；t 为当前迭代次数； X_p 表示猎物的位置；D 表示灰狼与猎物之间的距离，其计算方式见公式 (5-2-4)。A 和 C 是两个协同系数向量，其计算见公式 (5-2-5) 和公式 (5-2-6)：

$$\vec{A} = 2\vec{a} \cdot \vec{r}_1 - \vec{a} \quad (5-2-5)$$

$$\vec{C} = 2\vec{r}_2 \quad (5-2-6)$$

其中, r_1 、 r_2 是两个一维分量取值在 $[0, 1]$ 内的随机数向量, 向量 A 用于模拟灰狼对猎物的攻击行为, 它的取值受到 a 的影响。收敛因子 a 是一个平衡 GWO 勘探与开发能力的关键参数^[5]。 a 的取值随着迭代次数的增大从 2 到 0 线性递减, 计算公式如 (5-2-14) 所示。

②追捕:

在自然界中, 虽然狩猎过程通常由头狼在 α 狼引导, 其它等级的狼配合对猎物进行包围追捕和攻击, 但在演化计算过程中, 猎物(最优解)位置 X_p 是未知的, 因此在 GWO 中我们认为最优的灰狼为 α , 次优的灰狼为 β , 第三优的灰狼为 δ , 其余的灰狼是 ω , 根据 α (潜在最优解)、 β 和 δ 对猎物的位置有更多知识的这一特性建立模型, 迭代过程中采用 α 、 β 和 δ 来指导 ω 的移动, 从而实现全局优化^[6]。利用 α 、 β 和 δ 的位置 X_α 、 X_β 和 X_δ , 使用下述方程更新所有灰狼的位置:

$$\vec{X}(t+1) = \frac{(\vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \vec{X}_3)}{3} \quad (5-2-7)$$

$$\vec{X}_1 = \vec{X}_\alpha(t) - \vec{A}_1 \cdot \vec{D}_\alpha \quad (5-2-8)$$

$$\vec{X}_2 = \vec{X}_\beta(t) - \vec{A}_2 \cdot \vec{D}_\beta \quad (5-2-9)$$

$$\vec{X}_3 = \vec{X}_\delta(t) - \vec{A}_3 \cdot \vec{D}_\delta \quad (5-2-10)$$

$$\vec{D}_\alpha = |\vec{C}_1 \cdot \vec{X}_\alpha(t) - \vec{X}(t)| \quad (5-2-11)$$

$$\vec{D}_\beta = |\vec{C}_2 \cdot \vec{X}_\beta(t) - \vec{X}(t)| \quad (5-2-12)$$

$$\vec{D}_\delta = |\vec{C}_3 \cdot \vec{X}_\delta(t) - \vec{X}(t)| \quad (5-2-13)$$

灰狼的位置更新方式可以用下图 5-2-2 形象地表示:

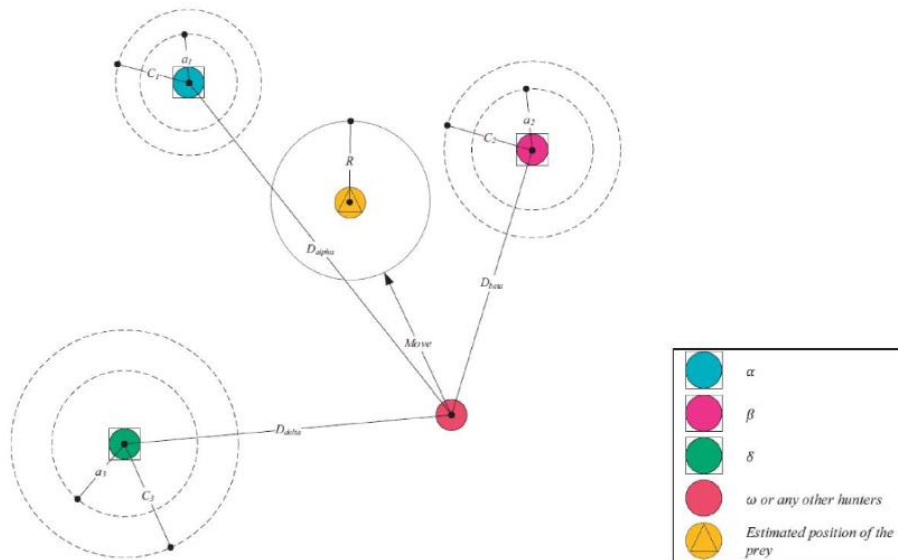


图 5-2-2 位置更新方式

③攻击

在下面的公式(5-2-14)中, t 表示当前迭代次数, T 为设定的最大迭代次数。当 a 的值从 2 递减至 0 时, 其对应的 A 的值也在区间 $[-a, a]$ 变化: a 的取值越大则会使灰狼

远离猎物，希望找到一个更适合的猎物，因而促使狼群进行全局搜索($|A| > 1$)，若 a 的取值越小则会使灰狼靠近猎物，促使狼群进行局部搜索($|A| < 1$)。

$$a = 2 - 2 \cdot t / T \quad (5-2-14)$$

④GWO 算法的优化过程

GWO 算法的优化从随机创建一个灰狼种群（候选方案）开始。在迭代过程中， α ， β 和 δ 狼估计猎物的可能位置（最优解）。GWO 算法的流程图如下图 5-2-3 所示：

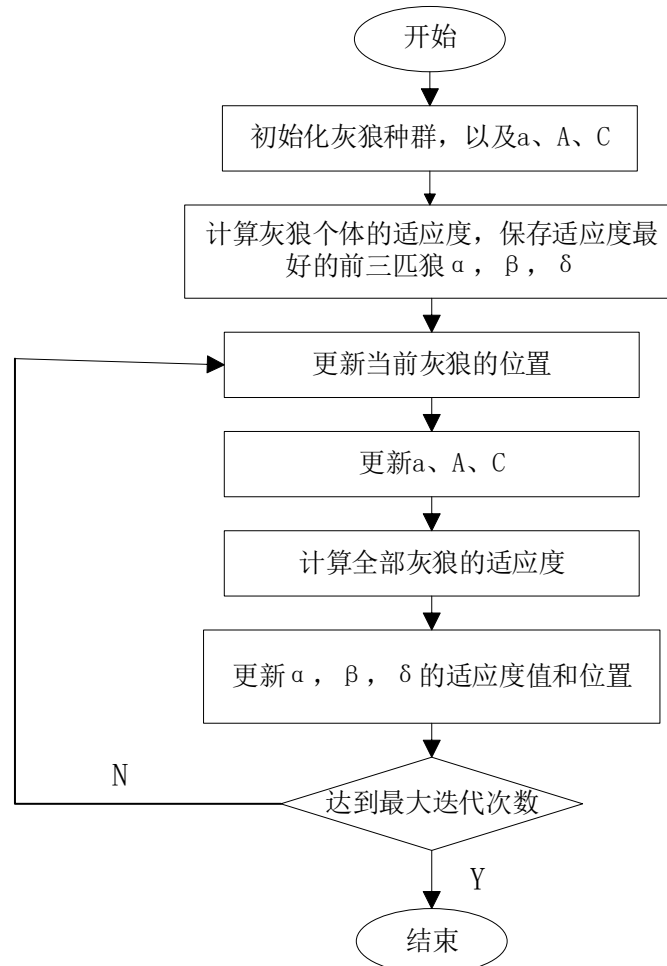


图 5-2-3 灰狼优化算法流程图

5.2.2 基于灰狼优化模型的求解

根据上述理论可知，为了让列车以最低能耗到达，列车在加速和减速过程中 F_m 与 F_n 分别取最优值，在各路段行驶过程中，目标行驶速度为路段的限速值。从而对整个算法分步处理。

步骤 1：首先明确列车当前的位置 S_{t_i} ，当前速度 V_{t_i} ，最优的速度 V^* 以及所需状态，根据分析可将列车运行状态分为下列情况，即：

当路段为 $V_{\text{车}} < V^*$ 时，列车需要加速；

当路段为 $V_{\text{车}} = V^*$ 时，列车需要匀速；

当路段为 $V_{\text{车}} > V^*$ 时, 列车需要减速

步骤 2: 设列车行驶时间变化量 $\Delta t = 0.00001$, 当 $t = t_i + \Delta t$ 时刻时, 求列车牵引力 F_{mt} , 列车制动力 F_{nt} , 列车重力水平分力 F_{gt} , 合力 $F_{\text{合}t}$, 加速度 a_t 。

步骤 3: 然后进一步通过求取的列车牵引力 F_{mt} , 列车制动力 F_{nt} , 列车重力水平分力 F_{gt} , 合力 $F_{\text{合}t}$, 加速度 a_t 值来求取得列车行驶速度 V_t , 行驶的位移 S_t 。

步骤 4: 综合求得的列车行驶速度 V_t 和行驶的位移 S_t 更新列车位置 X_t , 求得为:

$$X_t = X_{t_i} + S_t$$

更新时间 t , 则为:

$$t = t + \Delta t$$

步骤 5: 根据更新的位置判断:

$$X_t \geq X_{\text{目标}}$$

其中, $X_{\text{目标}}$ 指全程位移。

若满足上述条件, 则列车到站, 然后判断 $V_{\text{车}t}$ 是否为 0, 若列车速度为 0, 则列车停止运行, 实际路程为 X_t 。若列车速度不为 0, 则需要判断明确列车当前位置, 当前速度以及所需状态, 确定最终的 X_t 值。

若不满足上述条件, 则需要重新判断明确列车当前的位置, 当前速度以及所需状态。

步骤 6: 得到最短时间的制动力-距离曲线、时间-距离曲线、牵引力-距离曲线和速度-距离曲线如图 5-2-4、图 5-2-5、图 5-2-6 和图 5-2-7 所示:

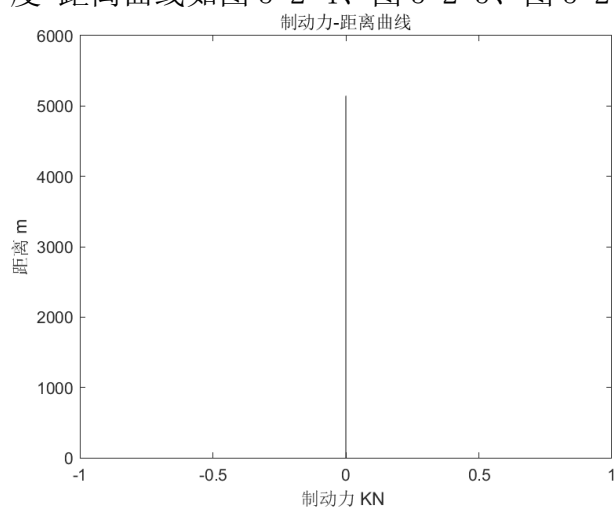


图 5-2-4 制动力-距离曲线

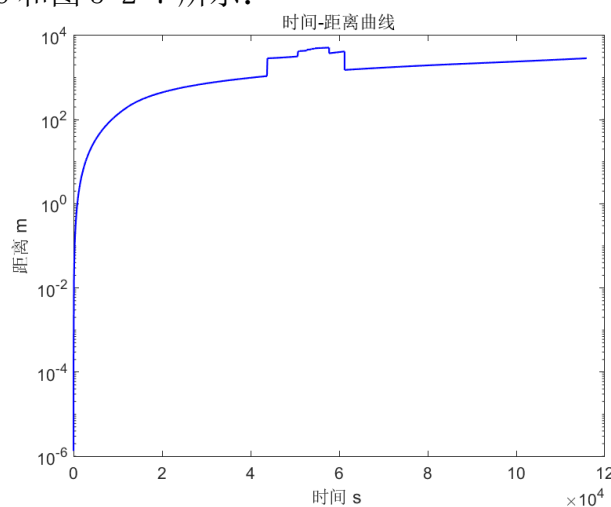


图 5-2-5 时间-距离曲线

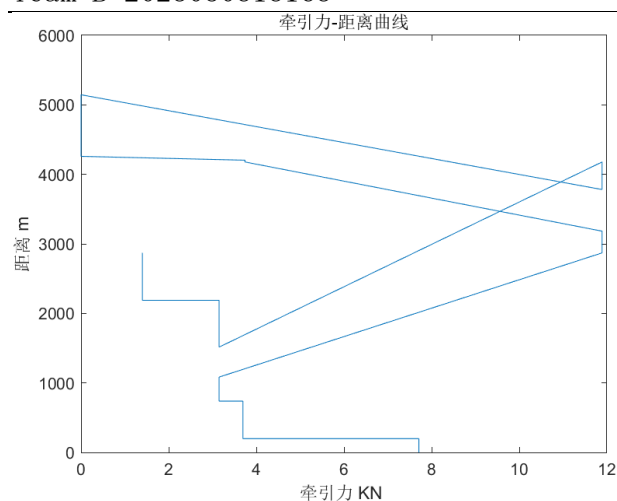


图 5-2-6 牵引力-距离曲线

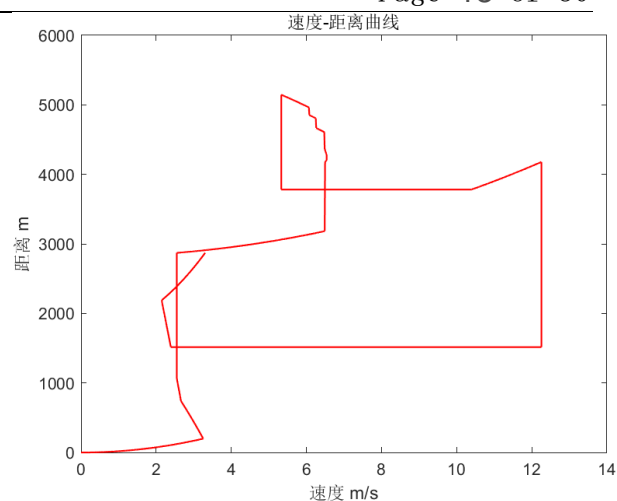


图 5-2-7 速度-距离曲线

列车最短时间的能量消耗-距离曲线，如图 5-2-8 所示：

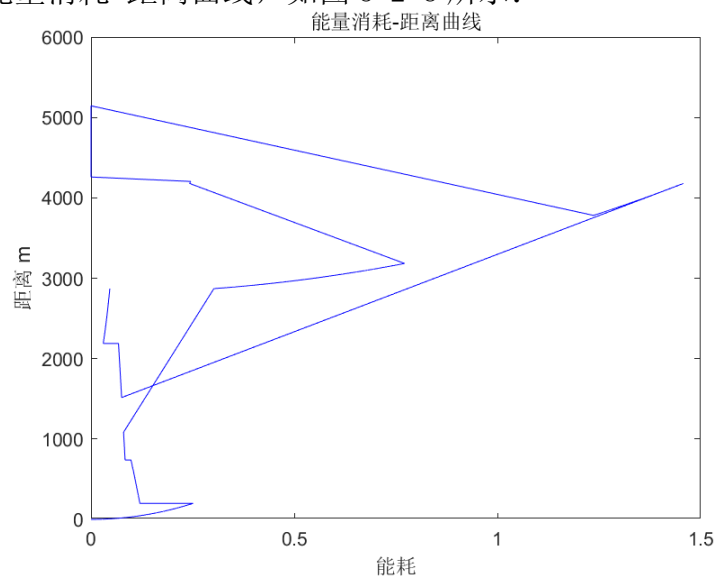


图 5-2-8 能量消耗-距离曲线

列车行驶时间在最短时间的基础上增加 10 秒，得到的曲线如图所示：

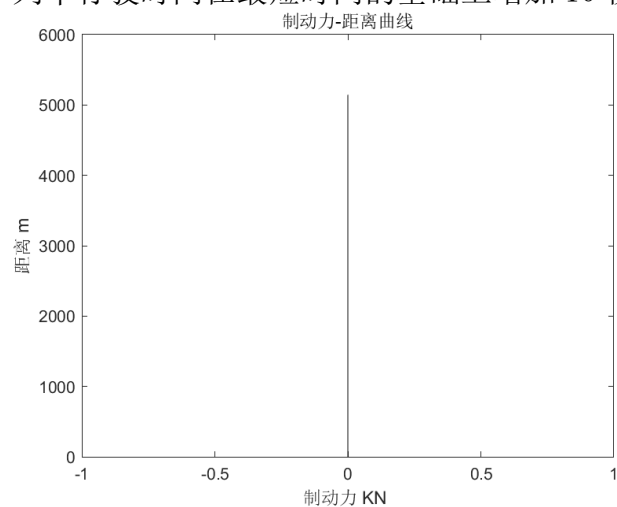


图 5-2-9 制动力-距离曲线

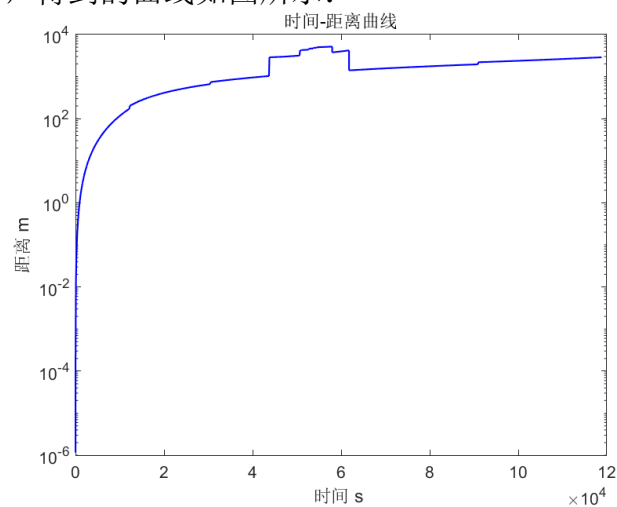


图 5-2-10 时间-距离曲线

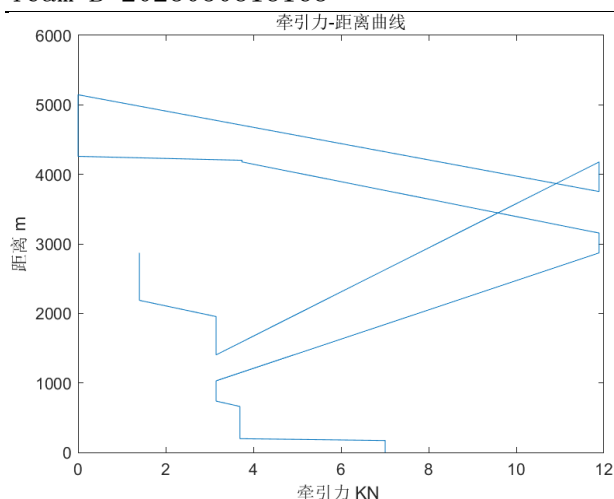


图 5-2-11 牵引力-距离曲线

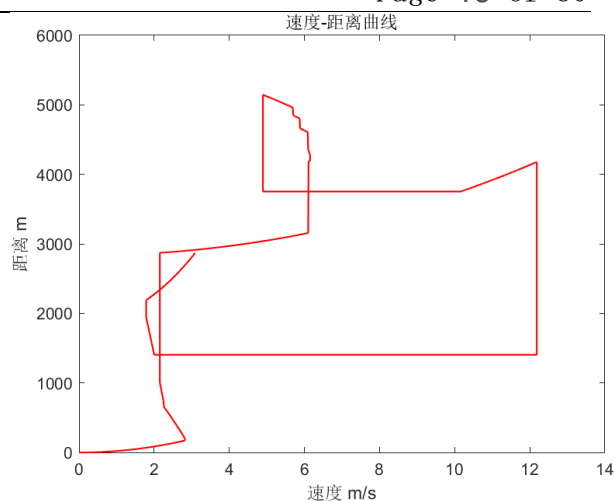


图 5-2-12 速度-距离曲线

列车在最短时间上延迟 10 秒行驶的能量消耗-距离曲线，如图所示：

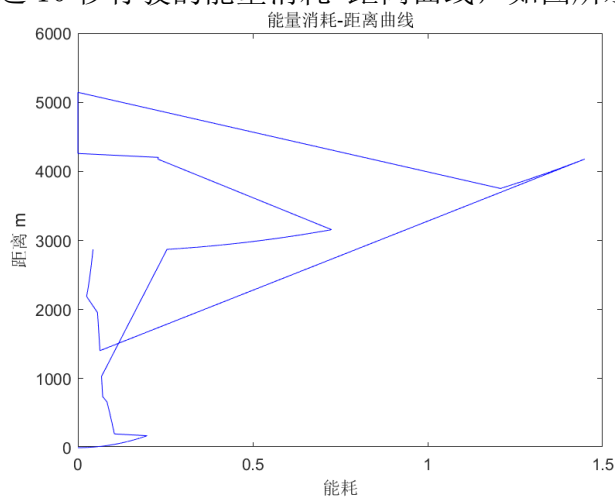


图 5-2-13 能量消耗-距离曲线

列车行驶时间在最短时间的基础上延时 20 秒，得到的曲线如图所示：

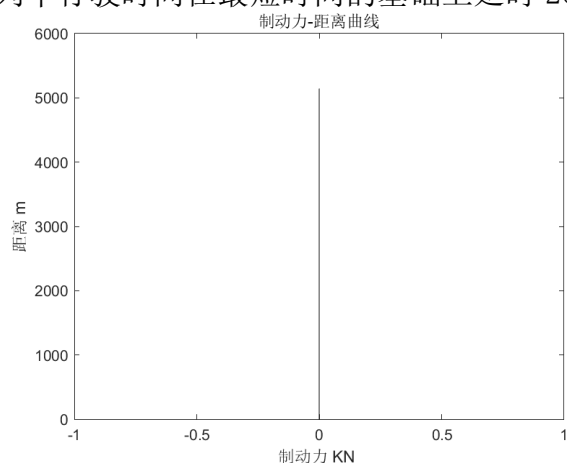


图 5-2-14 制动力-距离曲线

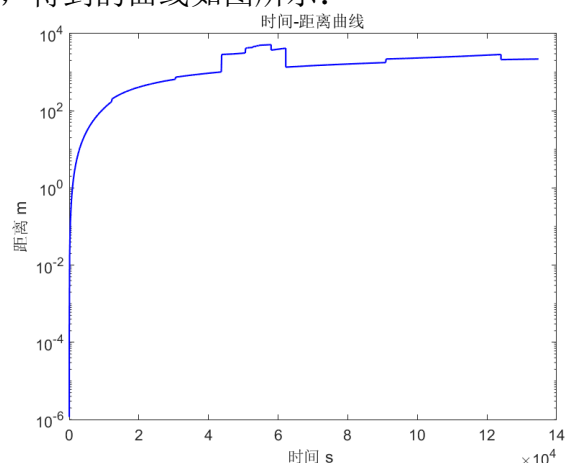


图 5-2-15 时间-距离曲线

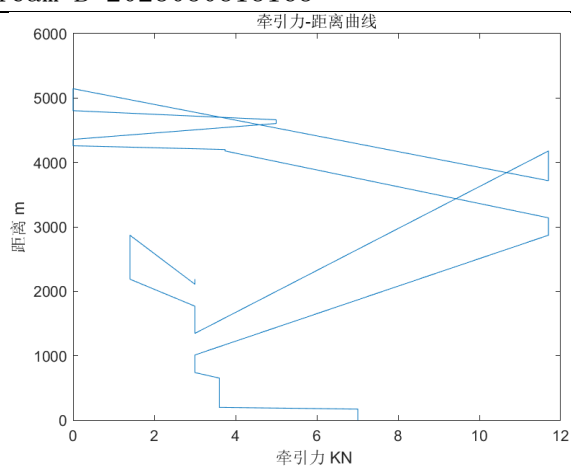


图 5-2-16 牵引力-距离曲线

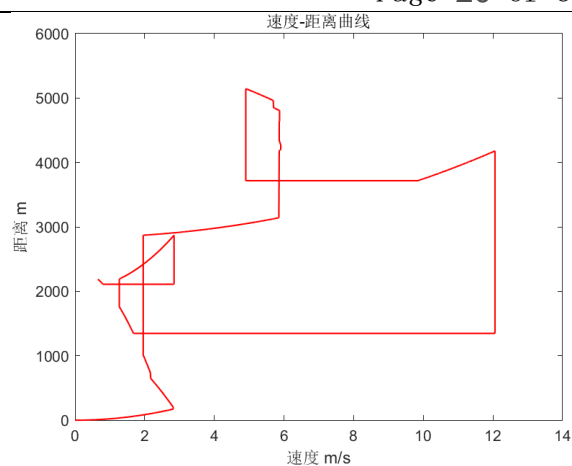


图 5-2-17 速度-距离曲线

列车在最短时间上延迟 20 秒行驶的能量消耗-距离曲线，如图所示：

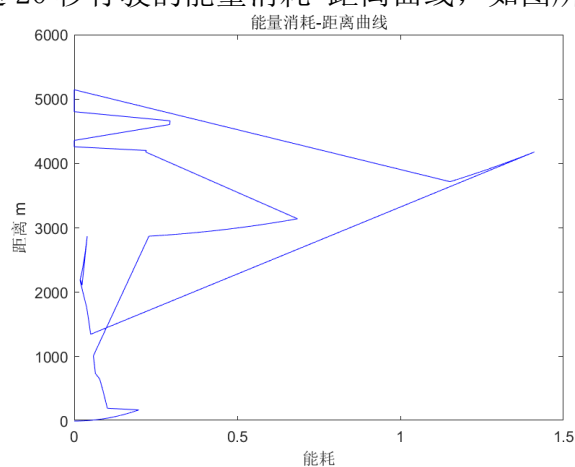


图 5-2-18 能量消耗-距离曲线

列车行驶时间在最短时间的基础上延时 50 秒，得到的曲线如图所示：

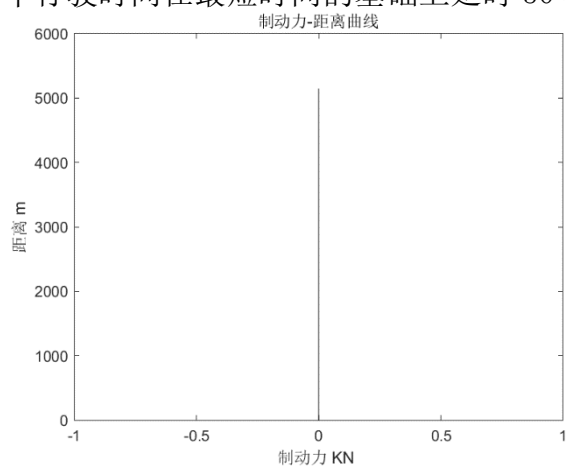


图 5-2-19 制动力-距离曲线

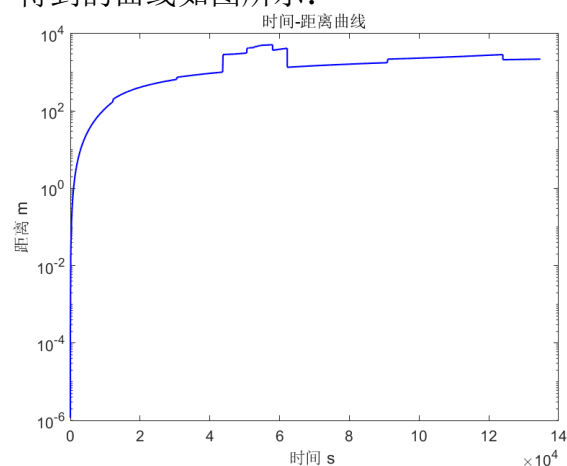


图 5-2-20 时间-距离曲线

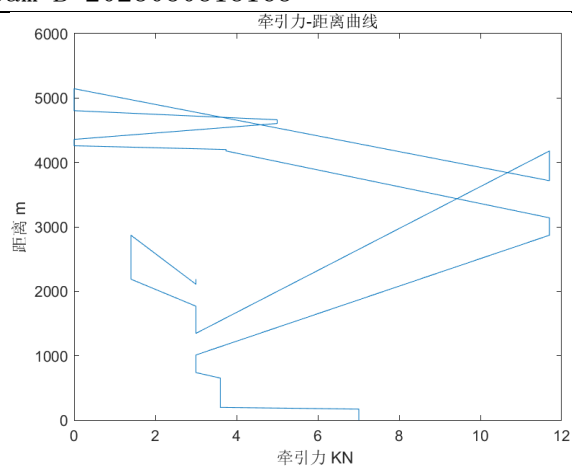


图 5-2-21 牵引力-距离曲线

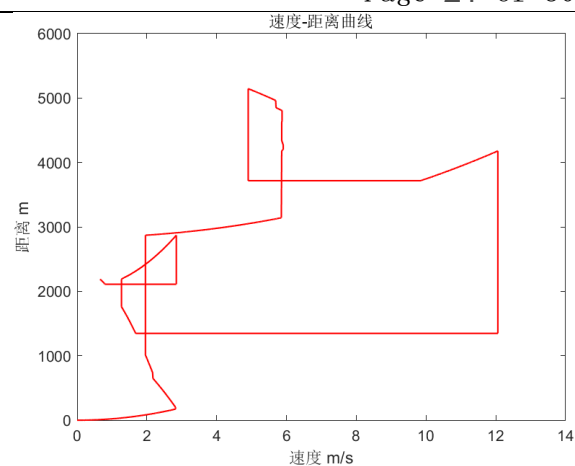


图 5-2-22 速度-距离曲线

列车在最短时间上延迟 50 秒行驶的能量消耗-距离曲线，如图所示：

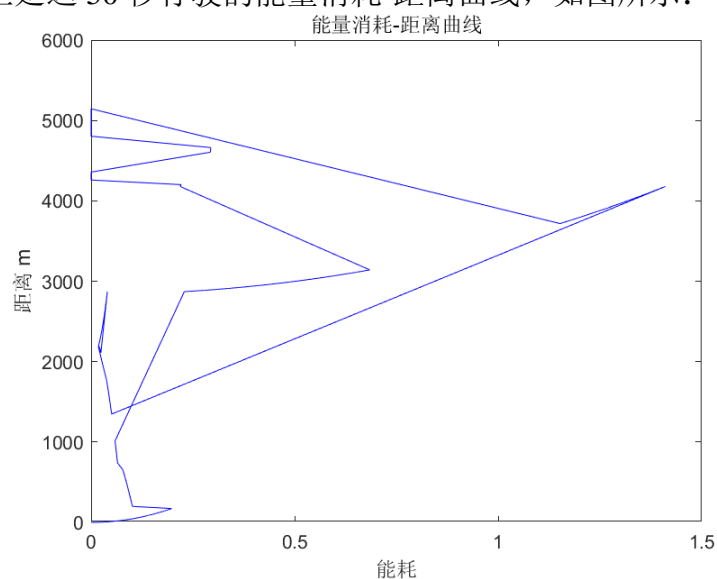


图 5-2-23 能量消耗-距离曲线

列车行驶时间在最短时间的基础上延时 150 秒，得到的曲线如图所示：

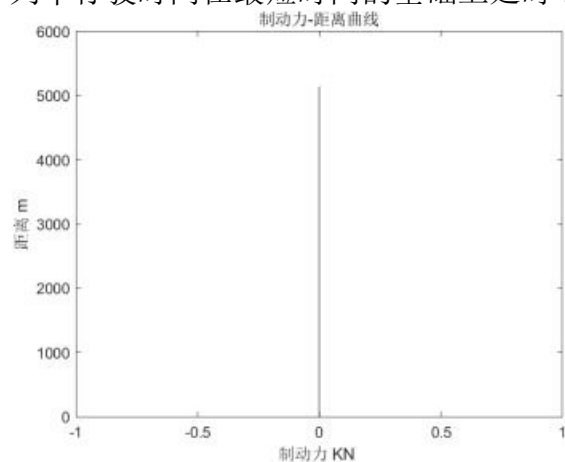


图 5-2-24 制动力-距离曲线

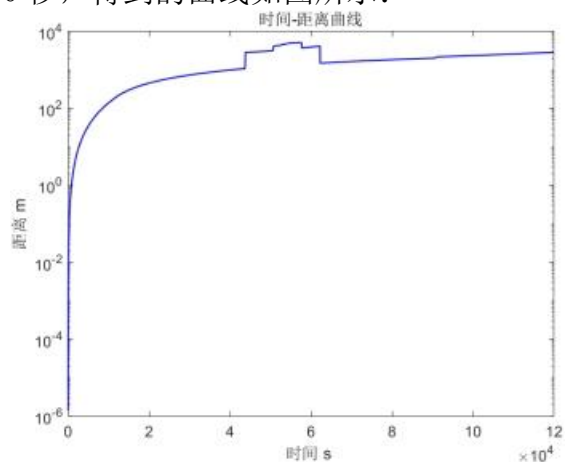


图 5-2-25 时间-距离曲线

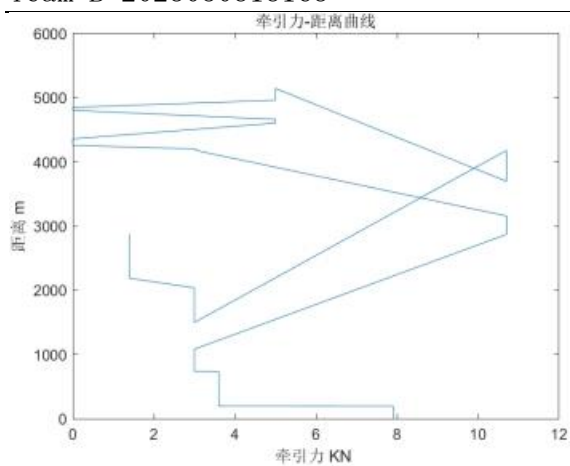


图 5-2-26 牵引力-距离曲线

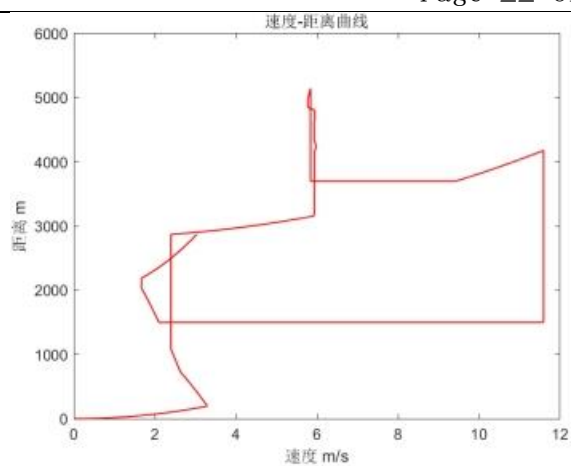


图 5-2-27 速度-距离曲线

列车在最短时间上延迟 150 秒行驶的能量消耗-距离曲线，如图所示：

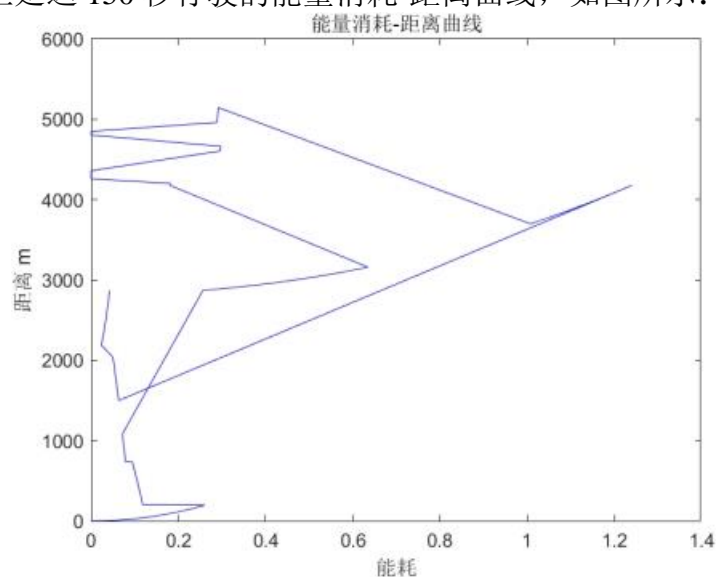


图 5-2-28 能量消耗-距离曲线

列车行驶时间在最短时间的基础上延时 300 秒，得到的曲线如图所示：

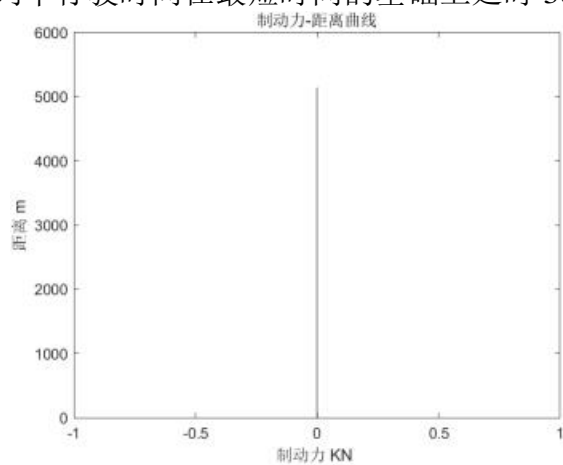


图 5-2-29 制动力-距离曲线

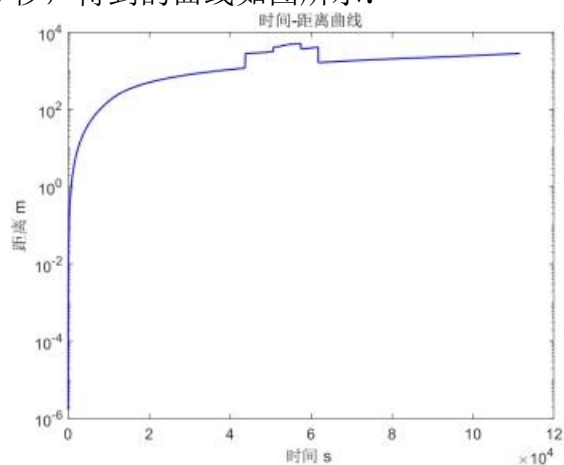


图 5-2-30 时间-距离曲线

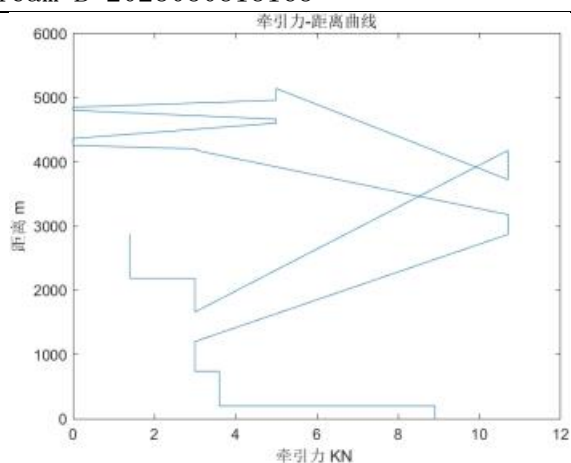


图 5-2-31 牵引力-距离曲线

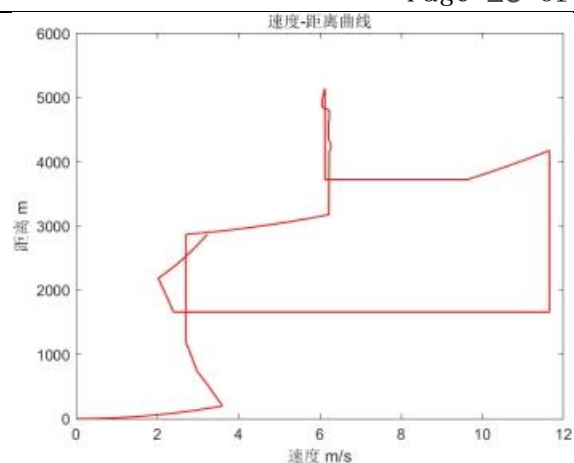


图 5-2-32 速度-距离曲线

列车在最短时间上延迟 300 秒行驶的能量消耗-距离曲线，如图所示：

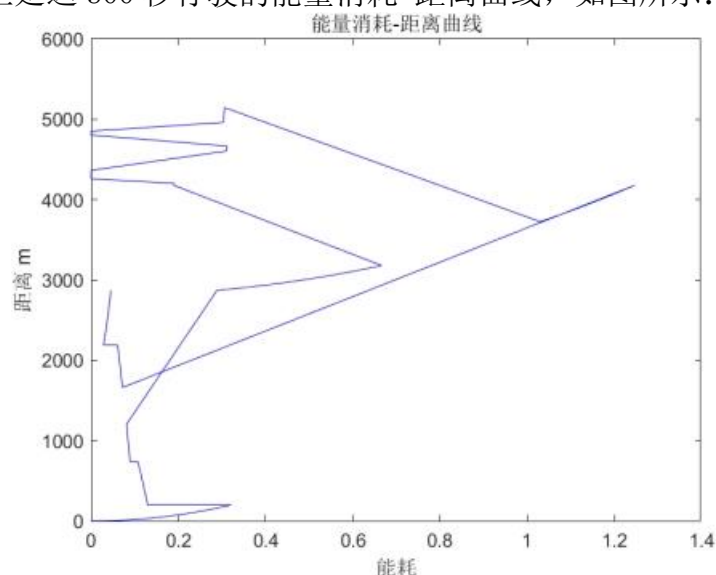


图 5-2-33 能量消耗-距离曲线

5.2.3 结果

基于对列车在规定时间内耗能最低的考虑，通过灰狼优化算法对列车运行时间进行合理规划后得到最优的速度轨迹。通过列车运行过程中突发状况导致的运行时间的加长和列车节能的要求，分析延迟不同时间列车不同的运行状况，使得建立的模型具有一定的现实意义。

5.3 问题 3 的模型建立与求解

5.3.1 节能列车运行延时优化模型的建立

根据问题分析可知，将列车行驶路程分为两个阶段，第一阶段为 2000m 以内的路程，

2000m 以外的路程为第二阶段。第一个阶段将整个周期均分成 N 小段，对于每个小段的时间为 Δt ，则有 $N \cdot \Delta t = T$ 。

1) 决策变量

为了建立模型，定义决策变量：

$$0 \leq F_m \leq 310$$

$$0 \leq F_n \leq 260$$

2) 目标函数

列车全程的能耗 W

$$\min W = \sum_{i=1}^{i=N} F_{m_i} \cdot S_i + \sum_{i=1}^{i=N} |F_{n_i}| \cdot S_i \quad (5-3-1)$$

3) 约束条件

$$s.t. \begin{cases} S_i = V_{i-1} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_{i-1} \Delta t^2 \\ a_{i-1} = \frac{0.9F_{m_{i-1}} - F_{f_{i-1}} - F_{g_{i-1}} - 0.6F_{n_{i-1}}}{m} \\ F_{f_i} = 2.0895 + 0.0098V_{t_i} + 0.006(V_{t_i})^2 \\ F_{g_i} = mg \sin(\arctan(\alpha)) \\ V_0 = S_0 = 0, \Delta t = 0.001, T = 320 \\ N \cdot \Delta t = T \end{cases} \quad (5-3-2)$$

其中 V_0 为初始速度， S_0 为初始路程。

第二个阶段列车延时到站 60s，利用问题 2 的模型分析得到最快的调整策略。

4) 决策变量

为了建立模型，定义决策变量：

$$0 \leq F_m \leq 310$$

$$0 \leq F_n \leq 260$$

5) 目标函数

列车全程的能耗 W

$$\min W = \sum_{i=1}^{i=N} F_{m_i} \cdot S_i + \sum_{i=1}^{i=N} |F_{n_i}| \cdot S_i \quad (5-3-3)$$

6) 约束条件

$$s.t. \begin{cases} S_i = S_{AB} - 2000 \\ a_{i-1} = \frac{0.9F_{m_{i-1}} - F_{f_{i-1}} - F_{g_{i-1}} - 0.6F_{n_{i-1}}}{m} \\ F_{f_i} = 2.0895 + 0.0098V_{t_i} + 0.006(V_{t_i})^2 \\ F_{g_i} = mg \sin(\arctan(\alpha)) \\ V_0 = V_{列}, S_0 = 2000, \Delta t = 0.001 \\ N \cdot \Delta t = T \\ T = 320 - t + 60 \end{cases} \quad (5-3-4)$$

其中 V_0 为初始速度, S_0 为初始路程, $V_{列}$ 为到达 2000m 时列车的速度, S_{AB} 为站台 A 到站台 B 的距离, t 为列车到达 2000m 时的时间。

5.3.2 节能列车运行延时优化模型的求解

将整个节能列车运行延时的求解可分为两个阶段, 第一阶段主要为正常运行, 根据问题 2 可以进行求解; 第二个阶段列车延时到站 60s, 利用问题 2 的模型分析得到最快的调整策略。求解第一阶段路程为 2000m, 所消耗时间为 t , 速度为 $V_{列}$; 第二阶段路程为 2000m 到达站台距离。得到最短时间 t_{min} 的制动力-距离曲线、时间-距离曲线、牵引制动力-距离曲线和速度-距离曲线如图所示:

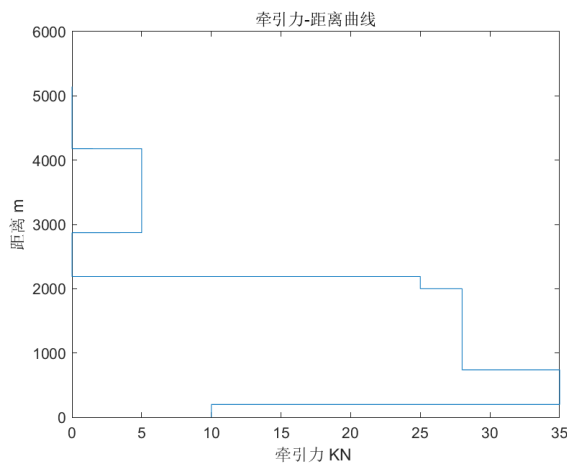


图 5-3-1 牵引力-距离曲线

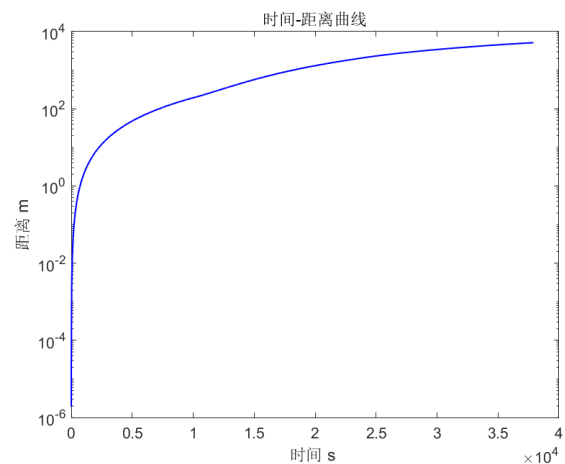


图 5-3-2 时间-距离曲线

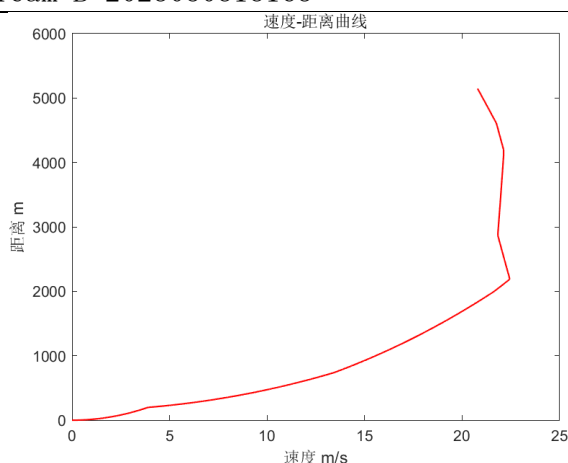


图 5-3-3 速度-距离曲线

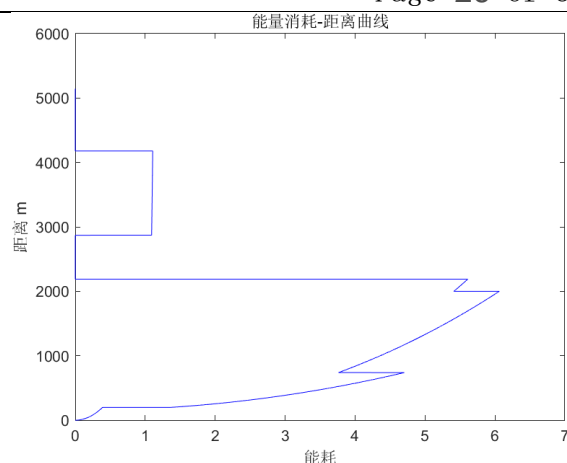


图 5-3-4 能量消耗-距离曲线

5.3.3 结果

基于对列车在延迟 60S 到达站台所耗能最低的考虑,通过分段处理对列车运行进行合理规划后得到最优运行方式。对列车运行过程中突发状况导致的运行时间的加长和列车节能的要求,分析延迟不同时间列车不同的运行状况,使得建立的模型达到了问题要求。

六、模型的评价及优化

6.1 误差分析

在建立模型的过程中,我们使用无限分割微分的思想,把一整个路程分成无数个无限小的段落,在时间很小的范围内,我们认为列车是匀速运动或者匀加速运动。但是这里时间间隔 t 没有取很小的比如 0.000000000000001,这样就会系统产生误差,在模型的建立时每个小路程之间实际可能没有达到认为理想状态,从而影响求解模型得到的列车状态以及能量消耗^[7]。

6.2 模型的优点

- 1)通过利用微分思想分阶段解决问题,将列车运行过程抽象化,从而得到更加准确的模型^[8];同时,利用微分思想使得求解模型变得简单,进而解决列车运行优化问题
- 2)利用灰狼优化算法具有收敛速度快、适用性广、参数调整简单、全局搜索能力强等的优点,使得模型在全局范围内搜索最优解^[9]。避免了陷入局部最优的风险。

3)基于以上两点,并综合其他方法使得建立列车运行模型更加符合列车真实运行状态,同时可以较好解决列车各种突发情况带来的问题,达到列车节能运行的目标。

6.3 模型的缺点

- 1)模型建立依赖的较少数据,使得最终模型可能受到一定影响。
- 2)模型在建立过程中考虑的突发情况不足。
- 3)在分阶段的间隔中没有更好的完善实际模型。

6.4 模型的推广

对于本次建立的模型已基本达到了列车面对不同情况下的最优运行策略,使其达到真正节能减排的目标,本次列车节能运行问题的解决我们运用了两种模型进行解答,但其中的模型都可以推广到现实生活中去,这就很好的体现了数学建模的意义所在,我们可以通过对一个问题的解答,而将其推广到更多的现实事件中。而数据处理及模型求解时充分运用 MATLAB 等数学软件,较好的解决了问题,得到了较为合理的结果。

参考文献

- [1] 刘清德.低碳经济背景下节能减排发展分析[J].中国资源综合利用,2022,40(09):172-174.
- [2] 陶彧佳.新时期环境保护与节能减排问题及对策分析[J].皮革制作与环技,2022,3(11):169-171
- [3] 梁小燕.关于我国环境保护节能减排强化策略探讨[J].资源节约与环保,2021(05):3-4.
- [4] 肖远芯. 城市轨道交通列车运行策略多目标优化研究[D].西南交通大学,2021.
- [5] 李娇杨. 高速列车节能运行模型及智能优化方法研究[D].兰州交通大学,2021.
- [6] 麻存瑞. 高速列车节能运行操纵策略优化方法研究[D].北京交通大学,2019.
- [7] 苏李君,张亚玲,徐小平,郭媛,胡钢,王兴.基于灰狼优化算法的微分方程数值解法[J].计算机应用,2022,42(S2):140-147.
- [8] 陈敏,陈晔,牛兴龙,武志博.求解全局优化问题的多策略改进灰狼算法[J].国外电子测量技术,2022,41(11):22-29.
- [9] 林静玉. 高速飞行列车运行控制系统优化与建模分析[D].北京交通大学,2021.

附录

```

clear
clc
tic%计时开始
%% 给定初始值 v s
i=1;
v(i)=0;
s(i)=0;
t=0.01;
%% 对第一段路程进行求解  $0 \leq s \leq 198.966$ , v最大值为100km/h
while (s<=198.966)
    td=0.0617284 ; %%梯度值
    %判断当前状态,牵引力qy, 重力分量zlf, 制动力zd , 阻力zl
    V=v(i);
    if V<(100/3.6)
        qianyin(i)=305;
        zhidongli(i)=0;
        zhonglifenliang(i)=176.3*9.8/1000*sin(atan(td));
        zuli(i)=2.0895 + 0.0098*v(i) + 0.006*v(i)^2;
        heli(i)= 0.9*qianyin(i) - 0.6*zhidongli(i) - zhonglifenliang(i) - zuli(i) ;
    else if V==(100/3.6)
        heli(i)=0;
        zhonglifenliang(i)=176.3*9.8/1000*sin(atan(td));
        zuli(i)=2.0895 + 0.0098*v(i) + 0.006*v(i)^2;
        zhidongli(i)=0;
        qianyin(i)= zhidongli(i) + zhonglifenliang(i) + zuli(i) ;
    else
        if V>(100/3.6)
            qianyin(i)=0;
            zhidongli(i)=760;
            zhonglifenliang(i)=176.3*9.8/1000*sin(atan(td));
            zuli(i)=2.0895 + 0.0098*v(i) + 0.006*v(i)^2;
            heli(i)= 0.9*qianyin(i) - 0.6*zhidongli(i) - zhonglifenliang(i) - zuli(i) ;
        end
    end
end
end

% 求重力加速度
a(i) = heli(i)*1000/(176.3*1000);
%求最新的速度
v(i+1)=v(i) + a(i)*t;

```

```

%求路程
x(i)=v(i)*t +0.5*a(i)*t.^2;
%求路程累计值
u(i)=s+x(i);
s= u(i);
heliquxian(i) = heli(i)*x(i);
i=i+1 ;
shijian(i)=s;
end

%% 给定初始值 v s
i=1525;
v(i);
u(i);
t=0.01;

%% 对第二段路程进行求解
while (s<=739.018)
    td=16.2346 ; %%梯度值
    %判断当前状态,牵引力qy, 重力分量zlf, 制动力zd , 阻力zl
    V=v(i);
    if V<(100/3.6)
        qianyin(i)=300;
        zhidongli(i)=0;
        zhonglifenliang(i)=176.3*9.8/1000*sin(atan(td));
        zuli(i)=2.0895 + 0.0098*v(i) + 0.006*v(i)^2;
        heli(i)= 0.9*qianyin(i) - 0.6*zhidongli(i) - zhonglifenliang(i) - zuli(i) ;
    else if V==(100/3.6)
        heli(i)=0;
        zhonglifenliang(i)=176.3*9.8/1000*sin(atan(td));
        zuli(i)=2.0895 + 0.0098*v(i) + 0.006*v(i)^2;
        zhidongli(i)=0;
        qianyin(i)= zhidongli(i) + zhonglifenliang(i) + zuli(i) ;
    else
        if V>(100/3.6)
            qianyin(i)=0;

```