

第十五届全国大学生数学竞赛预赛试题

(非数学 B 类, 2023)

科目名称: 数学竞赛

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	30	14	14	14	14	14	100
得分							

注意:

- 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
- 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
- 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分)

- 求极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+2} \right)^{2x-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $z = f(x^2 - y^2, xy)$, 且 $f(u, v)$ 有连续的二阶偏导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设曲线 $y = \ln(1 + ax) + 1$ 与曲线 $y = 2xy^3 + b$ 在 $(0, 1)$ 处相切, 则 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 + \arctan(xy)$ 所决定, 则 $y'(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 计算 $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\cos y}{y} dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、(本题满分 14 分) 设曲线 $y = 3ax^2 + 2bx + \ln c$ 经过 $(0, 0)$ 点, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $y \geq 0$. 且该曲线与直线 $x = 1, x$ 轴所围图形的平面图形 D 的面积为 1. 试求: 常数 a, b, c 的值, 使得 D 绕 x 轴一周后, 所得旋转体体积最小.

三、(本题满分 14 分) 解方程

$$(x^2 + y^2 + 3) \frac{dy}{dx} = 2x \left(2y - \frac{x^2}{y} \right)$$

四、(本题满分 14 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数.

五、(本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导且 $f(0) > 0, f(1) > 0, \int_0^1 f(x) dx = 0$. 证明:

- $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上至少有两个零点;
- 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得: $f'(\xi) + 3f^3(\xi) = 0$.

六、(本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续的导数且 $f(0) = 0$. 求证:

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq 4 \int_0^1 (1-x)^2 |f'(x)|^2 dx$$

并求使上式成为等式的 $f(x)$.

英伽教育