第十五届全国大学生数学竞赛预赛试题

(数学 A 类, 2023)

科目名称：数学竞赛

考试形式：闭卷 考试时间： 150 分钟 满分： 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	15	15	20	15	15	20	100
得 分							

注意：

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、(本题满分 15) 在空间中给定直线 L 及直线外定点 P. 设 M 是过 P 点且与直线 L 相切的球面的球心. 问: 所有可能的球心 M 构成何种曲面? 证明你的结论.

二、(本题满分 15 分) 设 $f(x,y,z)=x^2+\left(y^2+z^2\right)(1-x)^3$.

(1) 计算 f 的驻点.

(2) 求 f 在 Σ 上的最小值, 其中, Σ 是 $\left\{(x,y,z) \mid |x| \leqslant 2, y^2+z^2 \leqslant 4\right\}$ 的边界.

(3) 求 f 在椭球 $x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3} \leq 1$ 上的最小值.

三、(本题满分 20 分) 设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间, $\mathbf{A}$ 是 V 上的一个线性变换. 证明: 存在 $\alpha \in V$ 使得 $\left\{\alpha, \mathbf{A}\alpha, \cdots, \mathbf{A}^{n-1}\alpha\right\}$ 成为 V 的一组基当且仅当对于 $\mathbf{A}$ 的任一特征值 λ, λ 的几何重数为 1 .

四、(本题满分 15 分) 设 $n \geqslant 3$ 为自然数, $\theta=\dfrac{2\pi}{n}$. 对任意 $1 \leq s,t \leq n$, 取 $a_{st}=\sin(s+t)\theta$, 令矩阵 $A=(a_{st})_{n\times n}$, 计算 $E+A^{2023}$ 的行列式, 其中 E 为 n 阶单位矩阵.

五、(本题满分 15 分) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 非空有界, $\mathrm{c} \in \mathbb{R}^n$, c 非零. 用 $\operatorname{diam} E=\sup\limits_{\mathrm{x},\mathrm{y}\in E}\|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|$ 表示 E 的直径, 记 $E+\mathrm{c}=\{\mathrm{x}+\mathrm{c} \mid \mathrm{x} \in E\}$. 证明: $\operatorname{diam} E<\operatorname{diam}(E \cup(E+\mathrm{c}))$.

六、(本题满分 20 分) 设 $a=\sqrt[3]{3}, x_1=a, x_{n+1}=a^{x_n}(n=1,2\ldots)$. 证明: 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 极限存在, 但不是 3 .