第十五届全国大学生数学竞赛初赛试卷参考答案
(非数学 B 类, 2023 年)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	30	14	14	14	14	14	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 30 分，每小题 6 分)

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+3}{x+2})^{2x-1}=$ ______.

(2) 设 $z=f(x^2-y^2,xy)$, 且 $f(u,v)$ 有连续的二阶偏导数, 则 $\dfrac{\partial z^2}{\partial x\partial y}=$ ______.

(3) 设曲线 $y=\ln(1+ax)+1$ 与曲线 $y=2xy^3+b$ 在 $(0,1)$ 处相切, 则 $a+b=$ ______.

(4) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1+\arctan(xy)$ 所决定, 则 $y'(0)=$ ______.

(5) 计算 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}\dfrac{\cos y}{y}\mathrm{d}y=$ ______.

解答. (1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x+2})^{2(x+2)-5}=\mathrm{e}^2$.

(2)

$$\begin{aligned} z_x &= 2xf_1+yf_2,\\ z_{xy} &= 2x(f_{11}(-2y)+xf_{12})+f_2+y(f_{21}(-2y)+xf_{22})\\ &= f_2-4xyf_{11}+2(x^2-y^2)f_{12}+xyf_{22}. \end{aligned}$$

(3) 易得 $b=1,a=2$, 故 $a+b=3$.

(4) 易得 $y'(x)=\frac{xy'+y}{1+x^2y^2}$. 当 $x=0$ 时，$y'(0)=1$.

(5) 交换积分顺序，得

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\cos y}{y} \mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{y} \frac{\cos y}{y} \mathrm{d}y = \int_0^1 (1-y)\cos y \mathrm{d}y = 1 - \cos 1.$$

得分	
评阅人	

二、(本题 14 分) 设曲线 $y=3ax^2+2bx+\ln c$ 经过 $(0,0)$ 点，且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时 $y\geqslant 0$. 设该曲线与直线 $x=1$, x 轴所围图形的平面图形 D 的面积为 1. 试求常数 a,b,c 的值，使得 D 绕 x 轴一周后，所得旋转体的体积最小.

解答. 由于曲线$y=3ax^2+2bx+\ln c$ 经过 $(0,0)$ 点，故 $\ln c=0, c=1$. D 的面积 $A=\int_0^1(3ax^2+2bx)\mathrm{d}x=a+b=1.$ .... (4 分)
D 绕 x 轴一周所得到的旋转体体积

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^1(3ax^2+2bx)^2\mathrm{d}x \\ &= \pi(\frac{9}{5}a^2+3ab+\frac{4}{3}b^2) \\ &= \pi(\frac{2}{15}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{4}{3}). \end{aligned}$$

.... (10 分)

$$V'(a)=\pi(\frac{4}{15}a+\frac{1}{3}).$$

不难得到，当 $a=-\frac{5}{4}$ 时，旋转体得体积最小，此时，$b=\frac{9}{4}, c=1.$. (14 分)

注：推导最小值点时，用其他办法如配方也可以.

得分	
评阅人	

三、(本题 14 分) 解方程

$$(x^2+y^2+3)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x(2y-\frac{x^2}{y}).$$

解答. 原方程变形为 $\dfrac{y\mathrm{d}y}{x\mathrm{d}x} = \dfrac{2(2y^2-x^2)}{x^2+y^2+3}$.

令 $u=x^2, v=y^2$, 则原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \dfrac{2(2v-u)}{u+v+3}$. .... (5 分)

解方程 $2v-u=0, u+v+3=0$, 得到 $u=-2, v=-1$, 再令 $U=u+2, V=v+1$, 上述方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}U} = \dfrac{2(2V-U)}{U+V}$. .... (8 分)

作变量替换 $W=\frac{V}{U}$ 得到 $U\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}U} = -\dfrac{W^2-3W+2}{W+1}$. .... (11 分)

这是分离变量方程，解之得 $U(W-2)^3 = C(W-1)^2$, 回代得

$$(y^2-2x^2-3)^3 = C(y^2-x^2-1)^2.$$

.... (14 分)

专业:________ 座位号:________ 考场号:________ 所在院校:________ 准考证号:________ 姓名:________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

四、 (本题 14 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数.

解答. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n(2n-1)}}=1$, 所以收敛半径为 1.

当 $x=\pm1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ 绝对收敛，故收敛域为 $[-1,1]$. .... (5 分)

记该幂级数的和函数为 $S(x)$, 则在 $(-1,1)$ 上，

$$\frac{1}{2}S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}.$$

.... (9 分)

$$S'(x)=2\int_0^x\frac{1}{1+s^2}\mathrm{d}s=2\arctan x,\quad x\in(-1,1).$$

$$S(x)=2\int_0^x\arctan s\mathrm{d}s=2x\arctan x-\ln(1+x^2),\quad x\in(-1,1).$$

由于 $S(x)$ 在收敛域上连续，所以

$$S(x)=2\int_0^x\arctan s\mathrm{d}s=2x\arctan x-\ln(1+x^2),\quad x\in[-1,1].$$

.... (14 分)

得分	
评阅人	

五、(本题 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导且 $f(0)>0$, $f(1)>0$, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明：

(1) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上至少有两个零点；

(2) 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi)+3f^3(\xi)=0$.

证明. (1) 首先我在 $(0,1)$ 上至少存在一点 x_0 使得 $f(x_0)<0$. 否则若对于任意的 $x\in[0,1]$, $f(x)\geqslant 0$. $f(x)$ 连续且不恒为零，故 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>0$. 与题设矛盾. (5 分)

其次，因为 $f(x)$ 连续，在区间 $[0,x_0]$ 和 $[x_0,1]$ 上分别应用零点定理知，存在 $\xi_1\in(0.x_0),\xi_2\in(x_0,1)$ 使得 $f(\xi_1)=0, f(\xi_2)=0$. .... (8 分)

(2) 令 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\int_0^x 3f^2(s)\mathrm{d}s}$, 则 F 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 上可导且 $F(\xi_1)=F(\xi_2)=0$. 由罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=0$.

又 $F'(x)=(f'(x)+3f^3(x))\mathrm{e}^{\int_0^x 3f^2(s)\mathrm{d}s}$, 所以 $f'(\xi)+3f^3(\xi)=0$. ...... (14 分)

得分	
评阅人	

六、(本题 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数且 $f(0)=0$. 求证：

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 (1-x)^2|f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

并求使上式成为等式的 $f(x)$.

解答. 由分部积分法

$$\begin{aligned}\textstyle\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x &= (x-1)f^2(x)\Big|_0^1 - \textstyle\int_0^1(x-1)2f(x)f'(x)\mathrm{d}x\\ &= 2\textstyle\int_0^1(1-x)f'(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

…………………………………………………………… (4 分)

由 Cauchy 积分不等式, 有

$$\int_0^1(1-x)f'(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^1(1-x)^2(f'(x))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

于是

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1(1-x)^2|f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

…………………………………………………………… (10 分)

等式成立时应有常数 c 使得 $(1-x)f'(x)=cf(x)$. 因此当 $x\in(0,1)$ 时, 有

$$((1-x)^c f(x))' = (1-x)^{c-1}\big((1-x)f'(x)-cf(x)\big)=0.$$

因而存在常数 d 使得 $f(x)=d(1-x)^{-c}$ $(0<x<1)$.
当 $x\to 0$ 时， $f(x)\to 0$, 故 $d=0$. 于是 $f=0$. 所以使得题中不等式成为等式的函数是 $f(x)=0$. ………………………………………… (14 分)