# 第十五届全国大学生数学竞赛预赛试题

(非数学 A 类, 2023)

## 科目名称：数学竞赛

考试形式：闭卷　考试时间：150 分钟　满分：100 分

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总 分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 满 分 | 30 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 100 |
| 得 分 | | | | | | | |

**注意：**

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

---

**一、填空题（本题满分 30 分，每小题 6 分）**

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^3+9}-6}{2-\sqrt{x^3-23}}=$______.

(2) 设 $z=f\left(x^2-y^2,xy\right)$, 且 $f(u,v)$ 有连续的二阶偏导数, 则 $\dfrac{\partial z^2}{\partial x\partial y}=$______.

(3) 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$, 则 $f^{(n)}(0)=$______.

(4) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$ 的收敛域为______.

(5) 设曲面 $\Sigma$ 是平面 $y+z=5$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 所截得的部分, 则 $\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=$______.

**二、(本题满分 14 分)** 解方程

$$(x^2+y^2+3)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\left(2y-\frac{x^2}{y}\right)$$

**三、(本题满分 14 分)** 设 $\Sigma_1$ 是以 $(0,4,0)$ 为顶点且与曲面 $\Sigma_2:\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{3}=1(y>0)$ 相切的圆锥面，求曲面 $\Sigma_1$ 与 $\Sigma_2$ 所围成的空间区域的体积.

**四、(本题满分 14 分)** 设 $I_n=n\displaystyle\int_1^a\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$, 其中 $a>1$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

**五、(本题满分 14 分)** 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数且 $f(0)=0$，求证：

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\le 4\int_0^1(1-x)^2|f'(x)|^2\mathrm{d}x$$

并求使上式成为等式的 $f(x)$.

**六、(本题满分 14 分)** 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_0=\dfrac{1}{3}$，且有

$$x_{n+1}=\frac{x_n^2}{1-x_n+x_n^2}, n\geq 0$$

证明：无穷级数 $\sum\limits_{n=0}^{n} x_n$ 收敛并求其和.