基于样条插值和曲率积分的曲线重构

摘 要

对于问题一，首先我们根据题中所给的曲率与波长公式，利用平面光栅各个传感点(FBG1-FBG6)收集到的波长数据，算出对应传感点的曲率。参考文献证明了曲率满足样条插值的条件，且三次样条插值也更符合曲率线连续性，也更符合光纤的实际应用场景。因此我们选用了**三次样条插值**方法，在过程中用间距对弧长进行近似，求出了测试 1 和测试 2 中其他点的曲率。

对于问题二，我们通过**曲率积分**建立了曲线重构的模型：在给定曲线的**起始点坐标**和**初始切线角度**的情况下，利用曲率求得切线的旋转角度，使用**割线角近似**的方法，根据现有的坐标、步长、切线角度计算出下一个点的坐标，不断循环，重构出整条曲线。同时，为了提高重构曲线的准确性和平滑性，我们继续沿用了问题一中的**三次样条插值法**获得更多曲率数据，并调整步长，观察不同迭代次数下曲线的变化，最后分析出曲线的特征，结合现实情况分析出现这些现象的原因。

对于问题三，首先我们利用弧长积分求出数值将其归一化处理，进行等距分割，并反解出分割点的坐标和曲率值，总共采样了 6 个点的数据。然后，我们使用问题二建立的曲率积分模型进行曲率重构，并把结果和$y = x^3 + x$进行对比求出相对误差，最后我们讨论了出现这种误差的可能原因，根据这些原因总结出了我们模型的优点和不足。

关键词：三次样条插值法，曲率积分，曲率连续化，形状重建

一、问题重述

1.1 问题背景

光纤传感技术是一种随着光纤和光通信技术的发展而兴起的新型传感器技术。它利用光波作为传感信号，通过光纤作为传输载体来感知外界环境中的信号。其基本原理是，当外界环境参数发生变化时，会导致光纤传感器中光波的参数（如波长、相位、强度等）发生变化，从而调制光信号。光纤传感器具有质地轻、体积小、弯曲性能优异、抗电磁干扰能力强、灵敏度高、易于安装使用等优点。

在光纤传感技术中，最关键的是实时获取结构的应变信息，然后通过解调出来的应变参数来重新构建结构的形变或位移。这项技术已经在许多领域得到实际应用，例如能够对结肠部位进行形状重建等。通过光纤传感器解调系统获得的应变信息，可以间接推导出曲率等信息，并且基于这些信息对曲线进行重构。

1.2 问题重述

题目中提供了两组不同初始状态下受力前后，六个传感器位置处信号的波长值。本文基于以上信息建立数学模型解决以下问题：

问题一：建立一个数学模型，通过给定的波长测量数据和光纤受力情况，估算出各个传感点的曲率。根据建立的模型，给定的波长测量数据来估算平面光栅各个传感点（FBG1-FBG6）的曲率；进一步，当初始点坐标为原点，初始的水平光纤方向为x轴，垂直方向为y轴，求解当光纤在平面内受到力后，在初始位置的切线与水平方向的夹角为45度时，横坐标x轴相应位置处的曲率。

问题二：根据表1中提供的波长测量数据和问题1中已求得的曲率，建立数学模型来重构平面曲线，并对曲线的特点进行分析。

问题三：根据给定的平面曲线方程$y = x^3 + x$（其中$0 \le x \le 1$），通过等间距弧长采样计算曲率，以此为基础构建数学模型来重构平面曲线，并分析重构曲线与原始曲线之间的误差产生原因。

二、 问题的分析

2.1 问题一分析

问题一要求我们建立模型，采用给出波长测量数据和x轴横坐标计算曲率。查阅文献，选择符合曲率线连续性、一阶可导、二节可导的**三次样条插值法**进行计算，并根据参考文献，将**曲率k**看作**因变量**，**横坐标x**看作**自变量**，采用**自然边界**，进行三次样条插值，求出其他点的曲率。

2.2 问题二分析

问题二要求我们根据已有信息，建立数学模型来重构平面曲线，并对曲线的特点进行分析。

针对问题二，利用**曲率积分**进行曲线重构。在给定曲线的**起始点坐标**和**初始切线角度**的情况下，计算传感器处曲率；再使用**三次样条插值法**，增加数据点密度，采用更多的数据点来保证曲线的准确性和光滑性；使用**割线角近似**的方法，根据现有的坐标、步长、切线角度计算出下一个点的坐标，循环计算恰当的次数，得出最终的平面曲线。

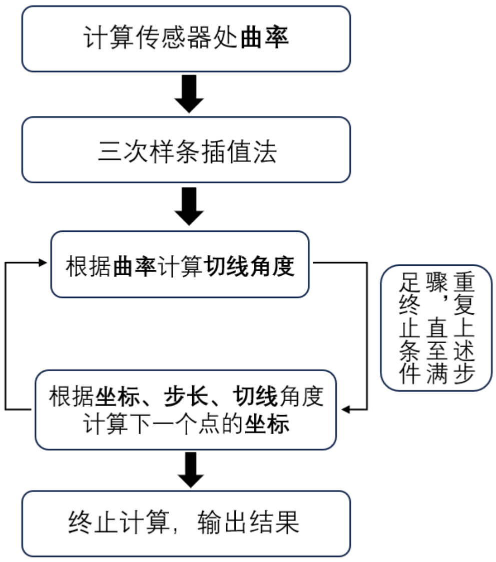

图 1.重构平面曲线模型

2.3 问题三分析

问题三要求我们根据给定的平面曲线方程$y = x^3 + x$，通过等间距弧长采

样计算曲率，并以此为基础构建数学模型来重构平面曲线。首先通过计算曲线的弧长函数，将弧长函数归一化，计算出采样点的弧长信息，再通过弧长反解出采样点的坐标信息。并使用第二问的曲线重构方法进行重构，最后进行原始曲线与重构曲线的误差分析。

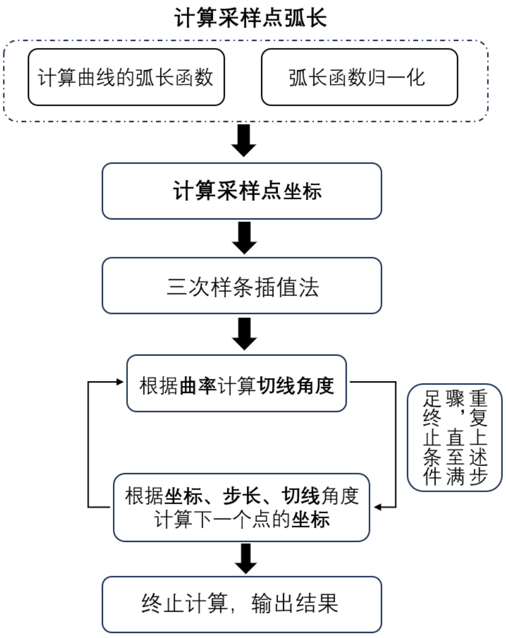

图 2.采样-重构平面曲线模型

三、符号说明

表 1 符号说明表

符号	说明	单位
(x_0, y_0)	曲线的起始点坐标	--
i	第i次循环计算	--
k_i	第i次计算的曲率	--
θ_0	初始切线角度	度
θ_i	第i 次计算的切线角度	度
h	步长	米
λ	波长	Hz
s	弧长	米

注：表中未出现的符号在文中均有详细说明

四、问题一的模型建立和求解

4.1 求解平面光栅各个传感点(FBG1-FBG6)处曲率

根据题目中给出的波长与曲线曲率的计算公式可知，已知初始状态和光纤受力后的状态的波长，就可以求出曲线的曲率，其中，c 为常数，取值为 4200。

$$k=\frac{c(\lambda-\lambda_0)}{\lambda_0} \tag{1}$$

文中分别给出了两种不同初始状态情况下的各个传感点的初始状态波长和受力后波长，根据题目中的波长曲率公式，可以估算平面光栅各个传感点(FBG1-FBG6)的曲率。

表 2 波长(纳米)测量数据

测量点	初始状态 1	测试 1	初始状态 2	测试 2
FBG1	1529	1529.808	1540	1541.095
FBG2	1529	1529.807	1540	1541.092
FBG3	1529	1529.813	1540	1541.090
FBG4	1529	1529.812	1540	1541.093
FBG5	1529	1529.814	1540	1541.094
FBG6	1529	1529.809	1540	1541.091

通过计算，得出两种测量情况下平面光栅各个传感点处的曲率数据如下：

表 3 传感点（FBG1-FBG6）处曲率

测量点	测试 1 曲率	测试 2 曲率
FBG1	2.21949	2.98636
FBG2	2.21674	2.97818
FBG3	2.23322	2.97273
FBG4	2.23048	2.98091
FBG5	2.23597	2.98364
FBG6	2.22224	2.97545

4.2 三次样条插值法

根据题意，要根据已求出的平面光栅六个传感点的数据来求出 x 轴特定位置的曲率（x=0.3，0.4，0.5，0.6，0.7）。查阅文献资料后，我们选择符合**曲率线连续性、一阶可导、二节可导**的**三次样条插值法**进行计算。

样条曲线是实际工程中作**曲线平滑**时常使用的工具，**三次样条**是其中精度较高的一种。使用三次样条插值法，将用于坐标点连续化拟合的方法用于曲率连续化拟合。该插值方法具有在相邻两段曲率插值曲线连接点处的一阶和二阶导数相等的特性，能够保证拟合出来的曲率连续化曲线是**绝对光滑**的，更加满足实际曲率曲线的特点。在弯曲幅度较大的曲线中能够比线性曲率插值更接近于真实的曲率曲线[1]。

三次样条插值法公式如下：

$$\begin{aligned} &s(x) = s_i(x)(x_i \le x \le x_{i+1}) \\ &s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \end{aligned} \tag{2}$$

三次样条插值法的微分式为：

$$\begin{aligned} &S_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2 \\ &S_i'' = 2c_i + 6d_i(x - x_i) \end{aligned} \tag{3}$$

将步长 $h_i = x_{i+1} - x_i$ 代入样条曲线的条件式中，可以得到一个关于同一未知数线性方程组，通过解这个方程组，确定其系数。

$$\begin{aligned} a_i &= y_i \\ b_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{2} m_i - \frac{h_i}{6}(m_{i+1} - m_i) \\ c_i &= \frac{m_i}{2} \\ d_i &= \frac{m_{i+1} - m_i}{6h_i} \end{aligned} \tag{4}$$

根据上述公式，求解出 x 轴特定位置处的曲率。

4.3 三次样条插值法求解横坐标 x 轴特定位置的曲率

假设初始点坐标为原点，初始的水平光纤方向为 x 轴，垂直方向为 y 轴，光纤在平面内受力后在初始位置的切 线与水平方向的夹角为 45°。

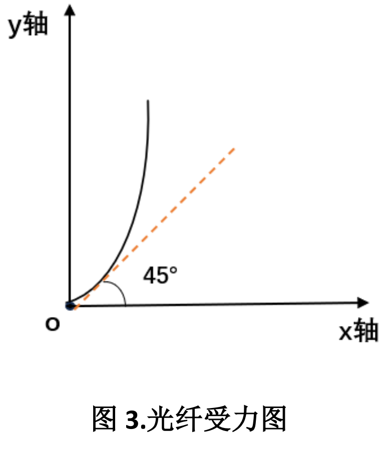

图 3.光纤受力图

根据题意，绘制出上图。通过三次样条插值法，估算下列表格中横坐标 x 轴相应位置处（ x=0.3，0.4，0.5，0.6，0.7）的曲率。

4.3.1 测试 1 情况下 x 轴特定位置的曲率

在测试 1 情况下， 根据第一题第一小问中求得的曲率，进行三次样条插值法求解 X 轴特定位置处的曲率。在进行三次样条插值后的平面曲线如下图所示。

下图中红色空心点代表原始数据，蓝色曲线代表三次样条插值后的结果，横轴为 x 轴，纵轴为 y 轴曲率，根据题意，我们需要求解横轴 x=0.3，0.4，0.5，0.6，0.7 时的曲率

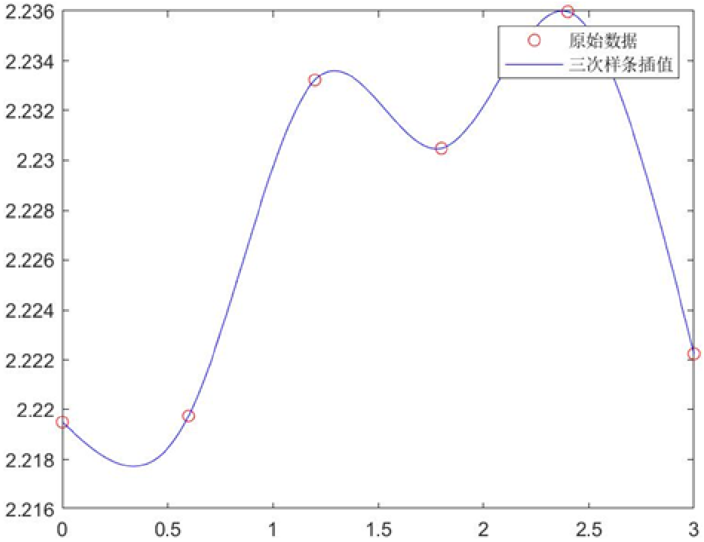

图 4.测试 1 曲率三次样条插值图

使用 SPSS 进行求解，结果如下：

$$在\ x = 0.3\ 处的\ y\ 值为\ 2.21776$$

$$在\ x = 0.4\ 处的\ y\ 值为\ 2.21843$$

$$在\ x = 0.5\ 处的\ y\ 值为\ 2.21851$$

$$在\ x = 0.6\ 处的\ y\ 值为\ 2.21974$$

$$在\ x = 0.7\ 处的\ y\ 值为\ 2.22179$$

4.3.2 测试 2 情况下 x 轴特定位置的曲率

测试 2 情况同理，首先得出测试 2 曲率三次样条插值图。再使用 SPSS 进行求解。

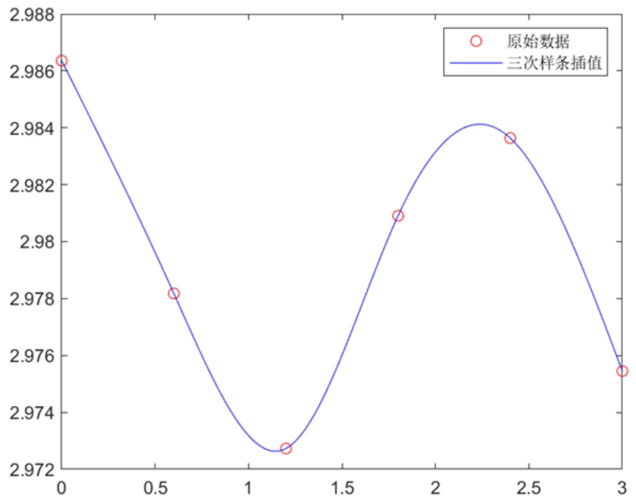

图 5.测试 2 曲率三次样条插值图

两种情况下的横坐标对应位置的曲率结果如下：

表 4 横坐标 x 轴相应位置处的曲率

横坐标x（米）	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**
测试 1 曲率 k	2. 21776	2. 21843	2. 21851	2. 21974	2. 22179
测试 2 曲率 k	2. 98238	2. 98085	2. 97960	2. 97818	2. 97671

五、问题二的模型建立与求解

根据如下步骤对平面曲线进行重构。

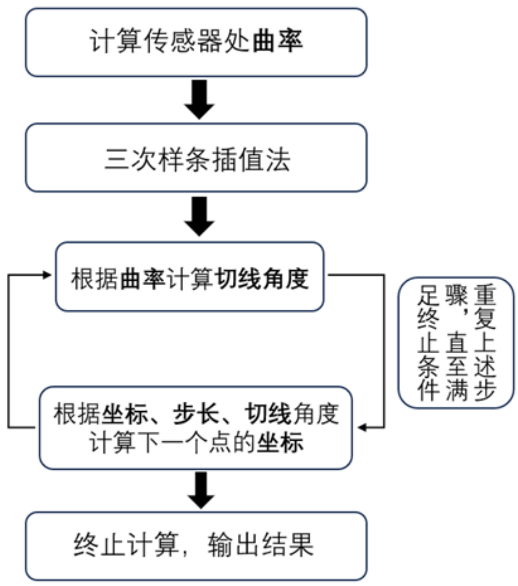

图 6.重构平面曲线模型

首先，根据给定曲线的起始点坐标(x_0, y_0)和初始切线角度θ_0，计算初始点处的曲率；其次，采用三次样条插值法增加数据点；最后，进行循环计算；再根据迭代次数，曲线的特性和精度要求进行调整，确定合适的步长 h，循环计算，直到达到终止条件，例如达到指定的 x 值或计算的点数达到要求。

循环计算的步骤如下：

a.使用题目中给出的波长-曲率公式，结合已知的波长，计算当前点处的曲率k_i

b.计算切线角度θ_i，可以通过使用当前点的切线方程 dy/dx = tan(θ_i) 和曲率 k_i 计算得到。

c.计算下一个点的坐标(x_{i+1}, y_{i+1})。根据当前点的坐标(x_i, y_i)、步长 h和切线角度θ_i，可以使用以下公式计算下一个点的坐标

$$\begin{aligned} x_i + 1 &= x_{\ i} + h * cos(\theta a_i) \\ y_i + 1 &= y_{\ i} + h * sin(\theta a_i) \end{aligned} \tag{5}$$

d.更新当前点坐标和切线角度，将当前点坐标设置为(x_{i+1}, y_{i+1})，将切线角度设置为 θ_i。

5.1 测试数据一

只采用已知的 6 个数据确定平面曲线，绘制出的平面曲线图如下：

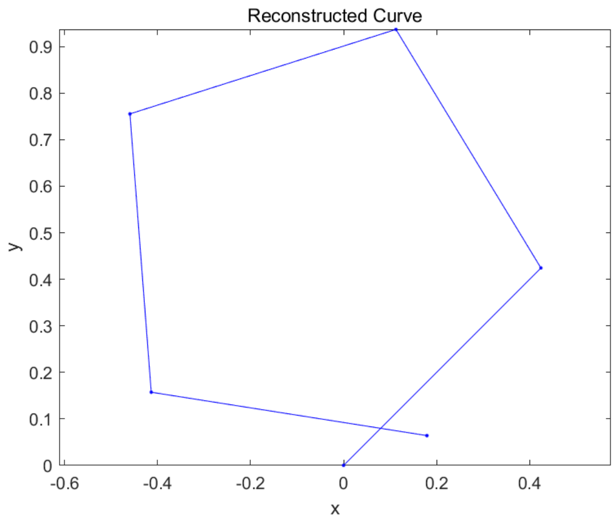

图 7.六个坐标确定的平面曲线（测试 1）

采用三次样条插值法增加数据点，且进行 100 次循环计算后的平面曲线如图所示：

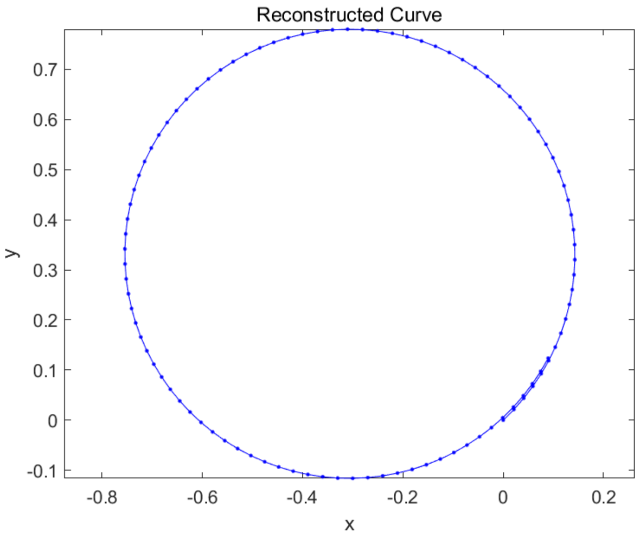

图 8.重构后的平面曲线（测试 1）

重构后的平面曲线类似于圆形，可能是由于受力，导致光纤出现的圆形形变。

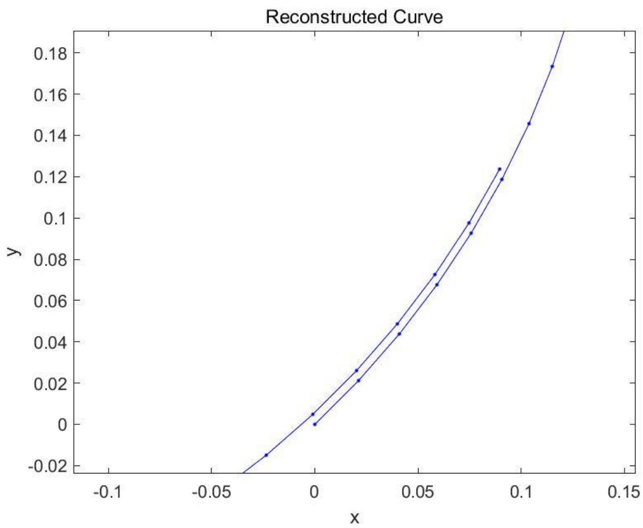

图 9.重构后的平面曲线局部（测试 1）

放大重构后平面曲线 0-0.1 处的局部图像，可以看出，测试 1 的曲线向水平方向延伸。

5.2 测试数据二

采用测试数据二中已知的 6 个数据确定平面曲线，绘制出的平面曲线图如下：

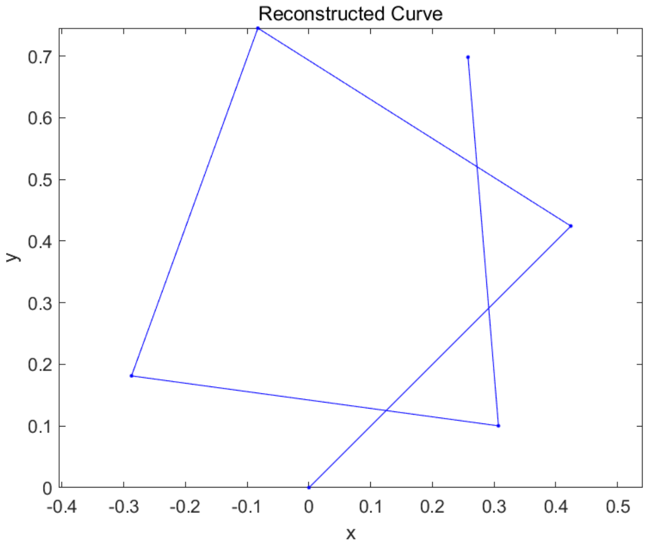

图 10.六个坐标确定的平面曲线（测试 2）

重构后的平面曲线类似于圆形，可能是由于受力而产生的圆形形变。可以看到，测试 2 的平面曲线形状比测试 1 平面曲线的形状重合的部分更多。

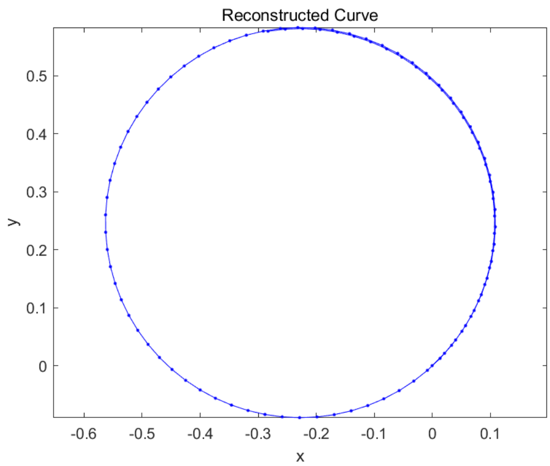

图 11 重构后的的平面曲线（测试 2）

5.3 平面曲线特征.

5.3.1 曲线形状

无论是测试 1 还是测试 2，在步长减小的曲线重构下，曲线中间都会形成近似于圆形的形状，它们的区别是两端部位的切线不同，最终可能会导致测试 1 的曲线向靠向水平方向延伸，而测试 2 的曲线可能会继续形成第二个圆。参考实际光纤情况后，我们合理推断测试 2 比测试 1 在两端的受力更大，并且预测如果受力继续增大，在三维情况下，曲线中间会出现是螺旋线结构。

图 12. 生活中的类似情况

5.3.2 曲线的斜率曲率变化

由原始测量数据和插值数据可以看出曲线的曲率变化其实非常小，这也导致了整体曲线的斜率变化非常平滑，最终在曲线中间出现类似于圆的形状。

六、问题三的模型建立与求解

针对问题三，首先对六个传感器位置处的信号进行采样，计算等弧长参数值，通过均匀分割[0, 1]范围来获得等弧长间距的参数值，**归一化弧长函数**，计算出采样点弧长后，**反解**出 x, y 值。沿用第二问中的方法，进行**三次样条插值**后，进行**循环计算**，完成对**曲线的重构**。，对比重构曲线和原始曲线间的相对误差，并查阅文献，对重构曲线和原始曲线间误差产生的原因进行分析。

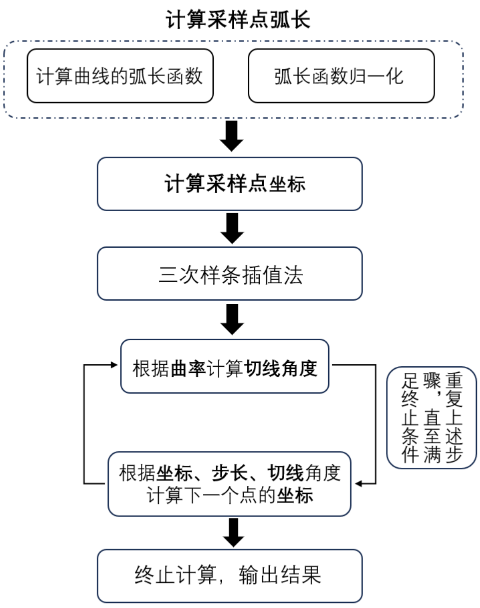

图 13. 问题三模型建立

6.1 采样点弧长计算

首先请根据平面曲线方程$y = x^3 + x$ (0 ⩽ x⩽ 1)，以适当的等间距弧长采样，计算这些采样点的曲率,步骤如下：

6.1.1 计算曲线的弧长函数

使用弧长公式来计算弧长。

$$\begin{gathered} ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ s = \int_a^b ds \end{gathered} \tag{6}$$

6.1.2 弧长函数归一化

为了使得弧长函数 $s(x)$ 变成一个$[0,1]$范围内的归一化函数，我们将其除以总弧长，得到归一化弧长函数 $s\_norm(x)$。根据归一化弧长函数 $s\_norm(x)$，我们可以通过均匀分割$[0,1]$范围来获得等弧长间距的参数值。

6.2 采样点坐标计算

对于每个采样点，我们根据题目中给出的**波长-曲率公式**计算采样点的曲率值。并通过代码算出采样点的 x，y 坐标，得到采样点的坐标、曲率信息后，仿照问题二中重构曲线的步骤流程进行重构。六个采样点确定的平面曲线形状如图所示：

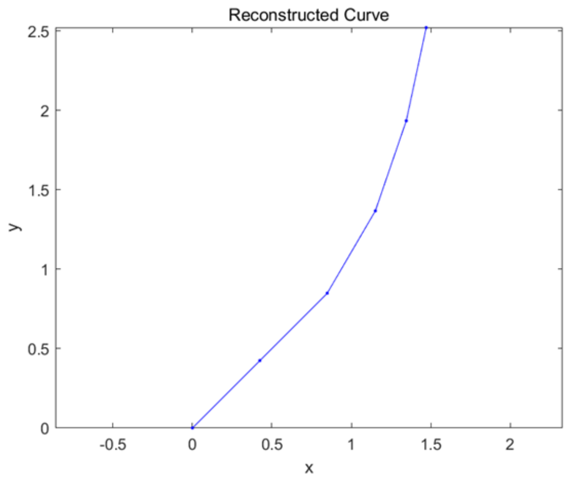

图 14. 六个采样点确定的平面曲线

6.3 曲线重构

进行三次样条插值法、循环计算后重构的平面曲线如图所示：

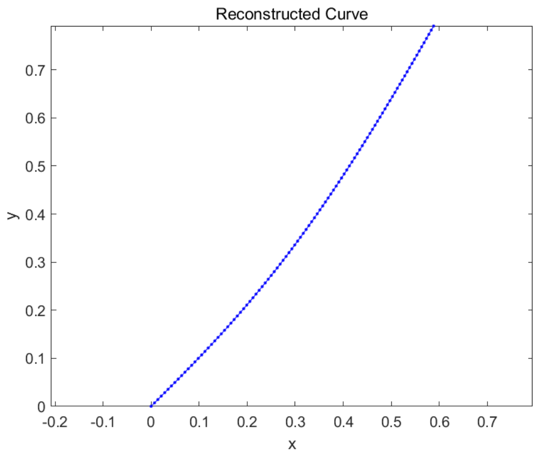

图 13. 重构后的平面曲线

6.4 原始曲线与重构曲线的误差分析

对比原始曲线和重构曲线，绘制如下相对误差图：

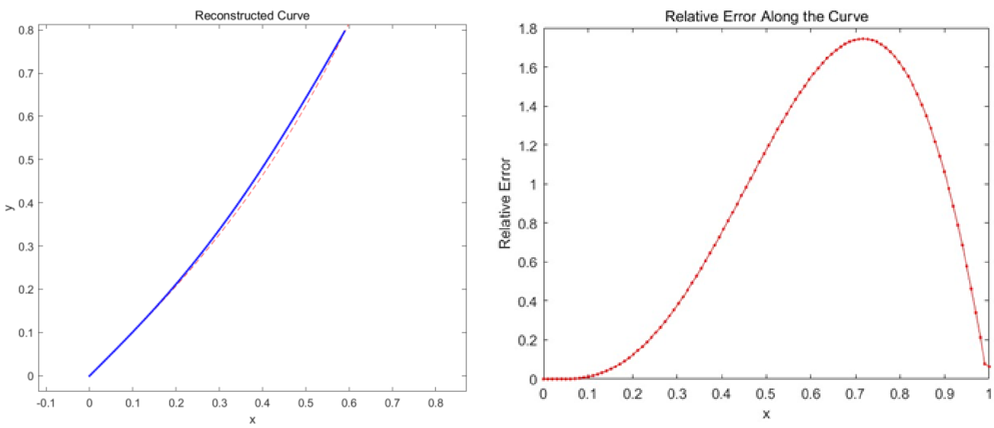

图 15 原始曲线与重构曲线间的相对误差

可能引起误差的原因如下：

6.4.1 采样误差

原始曲线的离散点采样不够密集或不足够均匀，导致在重构过程中丢失一些细节信息，从而引入误差。特别是在曲线的快速变化区域或具有高频振荡的部分，采样不足可能会导致误差的增加。

6.4.2 插值误差

如果使用三次样条插值方法对离散的曲率数据进行重构，插值本身可能引入一定的误差。插值方法在填补数据点之间的空隙时，可能无法完全准确地还原原始曲线的特征，导致误差的产生。

6.4.3 模型误差

我们在曲率模型的建立过程中用了一些近似代替方法进行简化，会导致误差的产生，在曲线积分过程中，数值计算误差也可能会积累并引入误差。例如，浮点数计算的舍入误差或数值积分方法的近似性可能会对曲线的重构结果产生影响。

七、模型评价和展望

模型优点：

1. 我们在阅读大量文献后，选择了比较适合光纤问题的样条插值方法，最终结果也很好。
2. 在曲线重构的过程中，将插值和曲率积分结合，让曲线更加平滑，准确性更好。

模型缺点：

1. 在第一问的时候，我们并未用到初始点和初始斜率，可以在样条插值的边界条件处进行约束和改进。
2. 在曲线重构模型的建立过程中，使用了近似代替来简化模型。

模型展望和改进：

1.引入基于曲率的能量函数，对三次 Hermite 插值方法进行能量优化。具体来说，在给定插值点的位置矢量及切矢量的情况下，通过在两相邻节点引入两个新的节点，提出了一类保持 C'连续的三次 Hermite 插值曲线的构造方法，分别通过基于曲率.挠率的能量函数对其进行优化。

2.在已知多项式结构的情况下，可以尝试使用拟合的办法进行对照，多模型结合判断，提高准确性。

八、参考文献

[1]肖海,章亚男,沈林勇,等.光纤光栅曲线重建算法中的曲率连续化研究[J].仪器仪表学报,2016,37(05):993-999.DOI:10.19650/j.cnki.cjsi.2016.05.005.

[2]数值计算笔记之插值（四）三次样条插值_自由边界条件-CSDN 博客

九、附录

附录 1
介绍：曲率计算与基于数值积分的位置重构

```
import numpy as np

# step1
# 算平面光栅各个传感点（FBG1-FBG2）的曲率
# 波长 r 与曲线斜率 k：k=c(r-r0)/r0
c = 4200
# 波长初始状态 1
r0_0 = 1529
r0_1 = 1540
# 波长初始状态 2
r0 = np.array([1529.808, 1529.807, 1529.813, 1529.812, 1529.814, 1529.809])
r1 = np.array([1541.095, 1541.092, 1541.090, 1541.093, 1541.094, 1541.091])
# 计算曲率
k_0 = c*(r0-r0_0)/r0_0
k_1 = c*(r1-r0_1)/r0_1
print("k_0:")
print(k_0)
print("k_1:")
print(k_1)

# step2
# 建立模型估算 x 轴相应位置处的曲率
# 假设初始位置为原点，初始角度为 45 度
m0 = np.pi/4  # 弧度
dist = 0.6  # 传感器间距，米
n_sen = len(k_0)

# 重建光纤在受力后的位置
def integrate_positions(curvatures, initial_angle, spacing, n_sensors):
    angles = np.zeros(n_sensors)  # 角度
    x_positions = np.zeros(n_sensors)  # x
    y_positions = np.zeros(n_sensors)  # y

    # 初始位置
    x_positions[0] = spacing * np.cos(initial_angle)
    y_positions[0] = spacing * np.sin(initial_angle)
    angles[0] = initial_angle + curvatures[0] * spacing
```

```
    for i in range(1, n_sensors):
        angles[i] = angles[i-1] + curvatures[i] * spacing
        x_positions[i] = x_positions[i-1] + spacing * np.cos(angles[i])
        y_positions[i] = y_positions[i-1] + spacing * np.sin(angles[i])

    return x_positions, y_positions, angles

# 计算两次测试的光纤位置
x_positions_1, y_positions_1, angles_1 = integrate_positions(k_0, m0, dist, n_sen)
x_positions_2, y_positions_2, angles_2 = integrate_positions(k_1, m0, dist, n_sen)

print("x_1:")
print(x_positions_1)
print("y_1:")
print(y_positions_1)
print("x_2:")
print(x_positions_2)
print("y_2:")
print(y_positions_2)

# step3
# 估算曲率
import pandas as pd

# 测试 1
# test1_pre_cur = test1_inter(np.array([0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7]))
# # 测试 2
# test2_pre_cur = test2_inter(np.array([0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7]))
#
# df = pd.DataFrame({
#     '横坐标 x(米)': [0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7],
#     '测试 1 曲率 k': test1_pre_cur,
#     '测试 2 曲率 k': test2_pre_cur
# })
#
# print(df)
```

附录 2

介绍：绘制重构曲线

```
% 已知数据
x_known = [0.6, 1.2, 1.8, 2.4, 3.0, 3.6];
curvature_known = [2.21949, 2.21974, 2.23322, 2.23048, 2.23597, 2.22224];
```

```
startPoint = [0, 0]; % 起始点坐标
initialAngle = pi/4; % 初始切线角度（与水平方向夹角 45°）

% 步长和迭代次数
h = 0.6; % 步长
numIterations = numel(x_known) - 1; % 迭代次数

% 初始化点坐标和切线角度
points = zeros(numIterations+1, 2);
points(1, :) = startPoint;
currentAngle = initialAngle;

% 曲率积分计算
for i = 2:numIterations+1
    % 计算下一个点坐标
    x_prev = points(i-1, 1);
    y_prev = points(i-1, 2);
    x = x_prev + h * cos(currentAngle);
    y = y_prev + h * sin(currentAngle);
    points(i, :) = [x, y];

    % 计算下一个点处的切线角度
    k = curvature_known(i-1); % 当前点的曲率
    currentAngle = currentAngle + h * k;
end

% 绘制曲线
plot(points(:, 1), points(:, 2), 'b.-');
axis equal;
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Reconstructed Curve');

% 显示最后一个点的坐标和切线角度
disp("最后一个点坐标：");
disp(points(end, :));
disp("最后一个点切线角度：");
disp(currentAngle);
```

附录 3
介绍：三次样条插值

```
% 已知数据
```

```
x_known = [0.6, 1.2, 1.8, 2.4, 3.0, 3.6];
curvature_known = [2.21949, 2.21974, 2.23322, 2.23048, 2.23597, 2.22224];
startPoint = [0, 0]; % 起始点坐标
initialAngle = pi/4; % 初始切线角度（与水平方向夹角 45°）

% 三次样条插值
x_interp = linspace(x_known(1), x_known(end), 100); % 插值后的 x 值
curvature_interp = spline(x_known, curvature_known, x_interp); % 插值后的曲率值

% 步长和迭代次数
h = (x_interp(end) - x_interp(1)) / numel(x_interp); % 步长
numIterations = numel(x_interp) - 1; % 迭代次数

% 初始化点坐标和切线角度
points = zeros(numIterations+1, 2);
points(1, :) = startPoint;
currentAngle = initialAngle;

% 曲率积分计算
for i = 2:numIterations+1
   % 计算下一个点坐标
   x_prev = points(i-1, 1);
   y_prev = points(i-1, 2);
   x = x_prev + h * cos(currentAngle);
   y = y_prev + h * sin(currentAngle);
   points(i, :) = [x, y];

   % 计算下一个点处的切线角度
   k = curvature_interp(i-1); % 当前点的曲率
   currentAngle = currentAngle + h * k;
end

% 绘制曲线
plot(points(:, 1), points(:, 2), 'b.-');
axis equal;
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Reconstructed Curve');

% 显示最后一个点的坐标和切线角度
disp("最后一个点坐标：");
disp(points(end, :));
disp("最后一个点切线角度：");
disp(currentAngle)
```

附录 4
介绍：三次样条插值，绘制插值后曲线

```
% 输入数据点
x = [0, 0.6, 1.2, 1.8, 2.4, 3.0];      % x 坐标
y = [2.21949, 2.21974, 2.23322, 2.23048, 2.23597, 2.22224];      % y 坐标

% 计算自然边界三次样条插值
n = length(x);
h = diff(x);
alpha = 3 * (y(3:n) - y(2:n-1))./h(2:n-1) - 3 * (y(2:n-1) - y(1:n-2))./h(1:n-2);
l = ones(1, n);
mu = zeros(1, n);
z = zeros(1, n);

l(1) = 1;
mu(1) = 0;
z(1) = 0;

for i = 2:n-1
   l(i) = 2 * (x(i+1) - x(i-1)) - h(i-1) * mu(i-1);
   mu(i) = h(i) / l(i);
   z(i) = (alpha(i-1) - h(i-1) * z(i-1)) / l(i);
end

l(n) = 1;
z(n) = 0;
c = zeros(1, n);
b = zeros(1, n);
d = zeros(1, n);

for j = n-1:-1:1
   c(j) = z(j) - mu(j) * c(j+1);
   b(j) = (y(j+1) - y(j)) / h(j) - h(j) * (c(j+1) + 2 * c(j)) / 3;
   d(j) = (c(j+1) - c(j)) / (3 * h(j));
end

% 生成插值结果
num_points = 200;   % 插值点数量
xi = linspace(min(x), max(x), num_points);
yi = zeros(1, num_points);

for i = 1:num_points
```

```
    idx = find(x <= xi(i), 1, 'last');
    if isempty(idx)
        idx = 1;
    elseif idx == n
        idx = n-1;
    end
    dx = xi(i) - x(idx);
    yi(i) = y(idx) + b(idx) * dx + c(idx) * dx^2 + d(idx) * dx^3;
end

% 计算 x = 0.3、0.4 和 0.5 处的 y 值
x_values = [0.3, 0.4, 0.5,0.6,0.7];
y_values = zeros(size(x_values));

for i = 1:numel(x_values)
    x_interp = x_values(i);

    % 找到最近的插值节点
    [~, index] = min(abs(x - x_interp));

    % 计算插值得到的 y 值
    y_values(i) = y(index) + b(index) * (x_interp - x(index)) + c(index) * (x_interp - x(index))^2 + d(index) * (x_interp - x(index))^3;
end

% 输出结果
for i = 1:numel(x_values)
    fprintf('在 x = %.1f 处的 y 值为 %.5f\n', x_values(i), y_values(i));
end

% 绘制原始数据和插值结果曲线
plot(x, y, 'ro', xi, yi, 'b-');
hold on;
legend('原始数据', '三次样条插值');
```

附录 5

介绍：插值后计算曲率

```
% 输入数据点
x = [0, 0.6, 1.2, 1.8, 2.4, 3.0];  % 横坐标
curvature = [2.21949, 2.21974, 2.23322, 2.23048, 2.23597, 2.22224];  % 曲率

% 使用样条插值方法得到更多的 x 和曲率 k 的值
num_points = 100;  % 插值点数量
```

```
xi = linspace(min(x), max(x), num_points);
ki = spline(x, curvature, xi);  % 使用样条插值计算得到插值点的曲率值

% 初始化原始坐标 y
y = zeros(size(xi));

% 根据曲线积分计算原始坐标 y
for i = 2:length(xi)
   % 计算曲线段的长度
   dx = xi(i) - xi(i-1);

   % 累积曲线段的长度，乘以曲率作为坐标 y 的增量
   y(i) = y(i-1) + dx*dx * ki(i-1);
end

% 绘制原始坐标 y 关于横坐标 x 的图像
plot(xi, y, 'b-', 'LineWidth', 2);
hold on;
xlabel('横坐标 x');
ylabel('纵坐标 y');
title('原始坐标 y 关于横坐标 x 的图像');
```