Ubrizgavanje tekućine u vertikalni kanal

Petra Brčić

10.07.2018.

1 Uvod

Ovaj rad je završni projekt za kolegij Znanstveno računanje 2. Cilj je implementirati neku od naučenih metoda i primijeniti ju za računanje rubnog problema ubrizgavanja tekućine u vertikalni kanal.

2 Problem

Promatramo problem ubrizgavanja tekućine u jednu stranu dugog verikalnog kanala. Jednadžbe koje opisuju ovaj problem su Navier-Stokes i jednadžbe provodenja koje se mogu reducirati i dobivamo sljedeći sustav

$$
\begin{gathered}
f''' - R[(f')^2 - ff''] + RA = 0 \\
h'' + Rfh' + 1 = 0 \\
\theta'' + Pf\theta' = 0 \\
f(0) = f'(0) = 0, f(1) = 1, f'(1) = 0 \\
h(0) = h(1) = 0 \\
\theta(0) = 0, \theta(1) = 1
\end{gathered}
$$

Ovdje f i h su dvije potencijalne funkcije, θ je funkcija distribucije temperature i A je nedefinirana konstanta. Dva su parametra poznatih vrijednosti, R je Reynoldsov broj i P je Pecletov broj (npr. $P = 0.7R$).

3 Rješenje problema

U samom zadatku je predloženo nekoliko ideja kako doći do rješenja. Jedno od njih je da najprije riješimo problem

$$
\begin{gathered}
f''' - R[(f')^2 - ff''] + RA = 0 \\
f(0) = f'(0) = 0, f(1) = 1, f'(1) = 0
\end{gathered}
$$

jer je odvojen od ostalih. To je nelinearna obična diferencijalna jednadžba trećeg reda za f s kontstantom A koja je odredena s četiri dana početna uvjeta. Jedan način da jednadžbu dovedemo u standardnu formu je da ju najprije deriviramo i dobijemo

$$f'''' = R[f'f'' - ff'''].$$

Sada imamo problem napisan u standardnom obliku

$$f'''' = R[f'f'' - ff''']$$

$$f(0) = f'(0) = 0, f(1) = 1, f'(1) = 0$$

koji više ne uključuje A eksplicitno. Jedan, još generalniji, trik je da konstantu A tretiramo kao još jednu zavisnu varijablu dodavanjem obične diferencijalne jednadžbe

$$A' = 0.$$

Problem

$$f''' - R[(f')^2 - ff''] + RA = 0$$
$$f(0) = f'(0) = 0, f(1) = 1, f'(1) = 0$$
$$A' = 0$$

je sada ponovno dan u standarnoj formi.
Tada su

$$h'' + Rfh' + 1 = 0$$
$$h(0) = h(1) = 0$$

i

$$\theta'' + Pf\theta' = 0$$
$$\theta(0) = 0, \theta(1) = 1$$

dva zasebna, linearna standardna problema drugog reda. Sada vidimo da smo početni problem efektivno podijelili na tri potproblema.

Težina rješavanja nelinearnog problema je numerički ovisna, na tipičan način, o Reynoldsovom broju R. Za umjerenu vrijednost R, recimo $R = 10$, prolem je jednostavan, ali postane teži povećanjem vrijednosti. Za $R = 10000$ dolazi do brze promjene u nekim vrijednostima rješenja oko $x = 0$. To se zove granični sloj.

Moj pristup numeričkom rješavanju ovog rubnog problema nešto je drugačiji. Odabrala sam riješiti ga u Matlabu koristeći built-in funkcije `bvpinit` i `bvp4c`. Kod za moje rješenje problema se može pronaći na GitHub repozitoriju[1].

Za Reynoldsov broj $R = 10$ ovaj problem se može riješiti grubim pogađanjem, no kako se R povećava problem postaje sve teži za rješavanje upravo zbog spomenutog graničnog sloja oko $x = 0$. Rješenje za npr. $R = 100$ se računa po neprekidnosti, tj. rješenje za jednu vrijednost R se koristi kao pretpostavka za svaki $R = R * 10$. Ovaj problem je relativno skup za `bvp4c` jer je profinjenija mreža potrebna za rješavanje problema graničnog sloja, također imamo 7 nepoznatih funkcija i jedan dodatni nepoznati parametar A. Dakako, ovdje uzimamo u obzir da smo sve jednadžbe problema supstituirali i dobili sustav običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

Najprije rješavamo problem za $R = 10$. Moramo definirati sve što nam je potrebno za pozivanje funkcija `bvp4c`. Da bi dobili početne uvjete s kojima će funkcija rješavati rubni problem koristimo funkciju `bvpinit` koja vraća strukturu `sol` gdje je `sol.x` vektor koji sadrži vektor od 10 ekvidistantnih točkaka na intervalu $[0, 1]$, `sol.y` je matrica jedinica (kao početni guess) - za svaku komponentu rješenja u svakoj od točaka iz `sol.x`, te nepoznati parametar A se za prvo računatu vrijednosr R postavlja na 1.
Funkcija `bvp4c` implementira kolokaciju s Lobatto IIIa metodom trećeg stupnja, čiji koeficijenti su dani sa

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 5/24 & 1/3 & -1/24 \\
1 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\
\hline
A_{s=3} & 1/6 & 2/3 & 1/6
\end{array}$$

[1] https://github.com/Qkvad/FlowInChannel

a sama metoda je dana sa

$$Y_{ni} = y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_n + c_j h, Y_{nj}), i = 1, ..., s$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^{s} b_j f(t_n + c_j h, Y_{nj}).$$

Rješenje za sve veće R se računa koristeći dobivene vrijednosti za manji R koje su ulaz kao pretpostavke na parametre. Nakon prolaska kroz petlju za `i++` do $R = 10000$ dobivamo rješenje dano na slici 1.

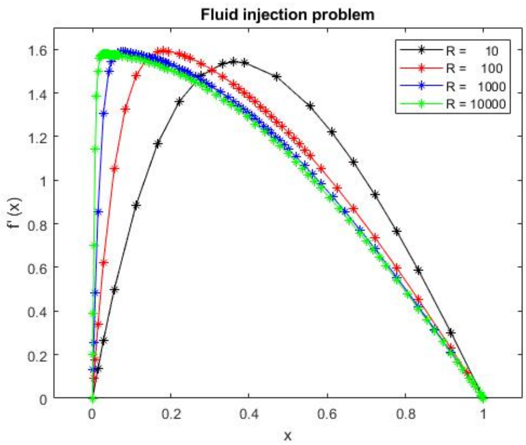

Figure 1: Prikaz rješenja za različite R

Promotrimo samo na slici malo mrežu kada se približavamo $x = 0$, $*$ su označenje točke, primijetimo koliko su gušće za vrijednosti blizu $x = 0$ za različite vrijednosti R, to u upravo granični sloj (boundary layer). Rezultati za nepoznate vrijednosti parametra A za odgovarajuće vrijednosti Reynoldsovog broja su dane u sljedećoj tablici.

R	A
10	3.81
100	2.76
1000	2.55
10000	2.49