Ubrizgavanje tekućine u vertikalni kanal

Petra Brčić

1 Uvod

Ovaj rad je završni projekt za kolegij Znanstveno računanje 2. Cilj je implementirati neku od naučenih metoda i primijeniti ju za računanje rubnog problema ubrizgavanja tekućine u vertikalni kanal.

2 Problem

Promatramo problem ubrizgavanja tekućine u jednu stranu dugog vertikalnog kanala. Jednadžbe koje opisuju ovaj problem su Navier-Stokes i jednadžbe provođenja, no one se mogu reducirati i dobivamo sljedeći sustav

$$f''' - R[(f')^2 - ff''] + RA = 0$$

$$h'' + Rfh' + 1 = 0$$

$$\theta'' + Pf\theta' = 0$$

$$f(0) = f'(0) = 0, f(1) = 1, f'(1) = 0$$

$$h(0) = h(1) = 0$$

$$\theta(0) = 0, \theta(1) = 1$$

Ovdje f i h su dvije potencijalne funkcije, θ je funkcija distribucije temperature i A je nedefinirana konstanta. Dva su parametra poznatih vrijednosti, R je Reynoldsov broj i P je Pecletov broj (npr. $P = 0.7R$).

3 Rješenje problema

Primijetimo najprije da je potproblem

$$f''' - R[(f')^2 - ff''] + RA = 0$$

$$f(0) = f'(0) = 0, f(1) = 1, f'(1) = 0$$

odvojen od ostalih, pa ga možemo riješiti odvojeno. Tada su

$$h'' + Rfh' + 1 = 0$$

$$h(0) = h(1) = 0$$

i

$$\theta'' + Pf\theta' = 0$$

$$\theta(0) = 0, \theta(1) = 1$$

dva zasebna, linearna standardna problema drugog reda. Sada vidimo da smo početni problem efektivno podijelili na tri potproblema.

Pogledajmo sada

$$f''' - R[(f')^2 - ff''] + RA = 0$$

$$f(0) = f'(0) = 0, f(1) = 1, f'(1) = 0.$$

Imamo nelinearnu običnu diferencijalnu jednadžbu trećeg reda za f s kontstantom A koja je određena s četiri dana početna uvjeta. Jedan način da jednadžbu dovedemo u standardnu formu je da ju deriviramo i dobijemo

$$f'''' = R[f'f'' - ff'''].$$

Sada imamo problem zapisan u standardnom obliku

$$f'''' = R[f'f'' - ff''']$$

$$f(0) = f'(0) = 0, f(1) = 1, f'(1) = 0$$

koji više ne uključuje A eksplicitno. Jedan, još generalniji, trik je da konstantu A tretiramo kao još jednu zavisnu varijablu dodavanjem obične diferencijalne jednadžbe

$$A' = 0.$$

Problem

$$f''' - R[(f')^2 - ff''] + RA = 0$$

$$f(0) = f'(0) = 0, f(1) = 1, f'(1) = 0$$

$$A' = 0.$$

je sada ponovno dan u standarnoj formi.

Težina rješavanja nelinearnog problema je numerički ovisna, na tipičan način, o Reynoldsovom broju R. Za umjerenu vrijednost R, recimo $R = 10$, prolem je jednostavan, ali postane teži povećanjem vrijednosti. Za $R = 10000$ dolazi do brze promjene u nekim vrijednostima rješenja oko $x = 0$. To se zove granični sloj.