ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2006. Серия 1. Том 13, № 2. 38–58

УДК 519.7

# ОБ АСИМПТОТИКЕ СЛОЖНОСТИ АДДИТИВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ СИСТЕМ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ*)

*В. В. Кочергин*

Изучается сложность вычисления систем целочисленных линейных форм. Для системы из $p$ линейных форм от $q$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_q$, заданной целочисленной матрицей $A$ размера $p \times q$, обозначим через $l_2(A)$ минимальное число операций сложения и вычитания, достаточное для вычисления по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_q$ заданной системы линейных форм (при этом разрешается многократное использование промежуточных результатов вычислений).

Получена (теорема 1) нижняя оценка этой величины:

$$l_2(A) \geqslant \log D(A),$$

где $D(A)$ — максимум абсолютных величин миноров матрицы $A$, взятый по всем минорам, начиная с миноров порядка 1 и заканчивая минорами порядка $\min(p, q)$.

Кроме того, доказано (теорема 2), что для любой последовательности матриц $A(n)$ размера $p(n) \times q(n)$, удовлетворяющей условию $p + q = o\left((\log\log D(A))^{1/2}\right)$ при $n \to \infty$, справедлива оценка

$$l_2(A) \leqslant \log D(A) + o(\log D(A)).$$

Таким образом, для любых фиксированных (и даже слаборастущих) размерах матрицы, задающей систему целочисленных линейных форм, верхняя оценка сложности вычисления этой системы асимптотически совпадает с нижней.

## Введение

Рассматривается поставленная в [6] задача о сложности вычисления систем целочисленных линейных форм, которая может быть сформулирована следующим образом. Пусть задана система из $p$ линейных форм

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект–05–01–00994) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (проекты НШ–1807.2003.1 и НШ–5400.2006.1).

от $q$ переменных

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1q}x_q,$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2q}x_q,$$
$$\ldots$$
$$y_p = a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pq}x_q,$$

описываемая целочисленной матрицей $A = (a_{ij})$ размера $p \times q$. Обозначим через $l_2(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ (будем использовать также обозначение $l_2(A)$) минимальное число операций сложения и вычитания, достаточное для вычисления по заданным переменным $x_1, x_2, \ldots, x_q$ системы линейных форм $\{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ (разрешается многократное использование промежуточных результатов вычислений).

Величину $l_2(A)$ можно определить также на языке аддитивных цепочек [1]. Обобщённой (обобщённость заключается в том, что наряду с операцией сложения разрешено использование и операции вычитания) аддитивной цепочкой для целочисленной матрицы $A = (a_{ij})$ размера $p \times q$ называется последовательность $q$-мерных векторов (наборов) вида

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{v}_q = (0, 0, \ldots, 1),$$
$$\mathbf{v}_{q+1}, \mathbf{v}_{q+2}, \ldots, \mathbf{v}_{q+r},$$

начинающаяся с $q$ единичных векторов и удовлетворяющая условиям:

1) для каждого $k$, $q+1 \leqslant k \leqslant q+r$, найдутся два натуральных числа (не обязательно различных) $i$ и $j$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, таких, что либо $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j$, либо $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$ (сложение и вычитание векторов покомпонентное);

2) $\{(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1q}), (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2q}), \ldots,$
$$(a_{p1}, a_{p2}, \ldots, a_{pq})\} \subseteq \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{q+r}\}.$$

Число $r$ называется длиной цепочки. Очевидно, что минимальная длина таких обобщённых аддитивных цепочек для матрицы $A$ равна $l_2(A)$.

Отметим, что эту задачу можно рассматривать не в аддитивной, а в мультипликативной постановке (как это чаще и делается, в том числе и в настоящей статье). В этом случае через $l_2(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ обозначают минимальное число операций умножения и деления, достаточное для вычисления по заданным переменным $x_1, x_2, \ldots, x_q$ системы функций

$$z_1 = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}}, \quad z_2 = x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}}, \quad \ldots, \quad z_p = x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}$$

с целочисленными показателями степеней $a_{ij}$ ($i = 1, 2, \ldots, p$; $j = 1, 2, \ldots, q$). Очевидно, что $l_2(z_1, z_2, \ldots, z_p) = l_2(A)$.

В [6] поставлена задача изучения поведения величины $l_2(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ и доказано, что сложность системы целочисленных линейных форм $\{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ от $q$ переменных, заданной матрицей $A = (a_{ij})$ размера $p\times q$, и сложность двойственной системы целочисленных линейных форм $\{\widehat{y}_1, \widehat{y}_2, \ldots, \widehat{y}_q\}$ от $p$ переменных, заданной транспонированной матрицей $A^T = (a_{ji})$ размера $q \times p$, для любой матрицы $A$ без нулевых строк и столбцов связаны соотношением

$$l_2(y_1, y_2, \ldots, y_p) + p = l_2(\widehat{y}_1, \widehat{y}_2, \ldots, \widehat{y}_q) + q \quad \left(l_2(A) + p = l_2\left(A^T\right) + q\right).$$

В [2] для величины $L_2(p, q, K)$, численно равной $\max l_2(y_1, y_2, \ldots, y_p)$, где максимум берётся по всем системам целочисленных линейных форм $\{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ от $q$ переменных, в которых все коэффициенты не превосходят по модулю величины $K$, на основе результатов Н. Пиппенджера [8] найдена (при слабых ограничениях) асимптотика роста*:

$$L_2(p, q, K) = \min(p, q)\log K + \frac{pq\log(2K+1)}{\log(pq\log K)}\left(1 + O\left(\frac{\log\log(pq\log K)}{\log(pq\log K)}\right)^{1/2}\right) + O(\max(p, q)).$$

Для того чтобы сформулировать основные результаты, введём некоторые определения.

Пусть $A$ — матрица размера $p \times q$ с элементами $a_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $j = 1, 2, \ldots, q$, а число $k$ удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant k \leqslant \min(p, q)$. Для наборов индексов $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ и $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ таких, что $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant p$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant q$, обозначим через $A(i_1, i_2, \ldots, i_k;\, j_1, j_2, \ldots, j_k)$ квадратную матрицу порядка $k$, состоящую из элементов, находящихся на пересечении $k$ строк с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и $k$ столбцов с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$.

Положим

$$D(A) = \max_{1\leqslant k\leqslant\min(p,q)}\left(\max_{(i_1,i_2,\ldots,i_k;\, j_1,j_2,\ldots,j_k)} |\det A(i_1, i_2, \ldots, i_k;\, j_1, j_2, \ldots, j_k)|\right).$$

Таким образом, $D(A)$ — это максимум абсолютных величин миноров матрицы $A$, где максимум берется по всем минорам.

*Здесь и далее $\log x$ означает $\log_2 x$.

В настоящей статье получены абсолютная нижняя оценка (теорема 1):

$$l_2(A) = l_2(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \dots x_q^{a_{2q}},\ \dots,\ x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \dots x_q^{a_{pq}}) \geqslant \log D(A)$$

и верхняя оценка (теорема 2), из которой, в частности, следует, что для любых фиксированных $p$ и $q$ при $D(A) \to \infty$ справедливо асимптотическое неравенство

$$l_2(A) = l_2(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \dots x_q^{a_{2q}},\ \dots,\ x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \dots x_q^{a_{pq}}) \leqslant (1 + o(1)) \log D(A).$$

## 1. Нижняя оценка

При доказательстве нижней оценки в качестве модели вычисления удобно использовать схемы из функциональных элементов (см., например, [4] и [5]). Будем говорить, что схема $S$ с $q$ входами, помеченными переменными $x_1, x_2, \dots, x_q$, все элементы которой являются двухвходовыми и вычисляют либо произведение, либо частное функций, подаваемых на входы этих элементов, *реализует* систему функций

$$\{x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \dots x_q^{a_{2q}},\ \dots,\ x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \dots x_q^{a_{pq}}\}$$

с целочисленными показателями степеней, если для каждой функции системы найдётся вершина (соответствующая функциональному элементу или входу) схемы, в которой вычисляется эта функция. Сложность $l_2(S)$ схемы $S$ — это число функциональных элементов умножения и деления в схеме $S$. Очевидно, что

$$l_2(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \dots x_q^{a_{2q}},\ \dots,\ x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \dots x_q^{a_{pq}}) = \min l_2(S),$$

где минимум берётся по всем схемам, реализующим систему функций

$$\{x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \dots x_q^{a_{2q}},\ \dots, x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \dots x_q^{a_{pq}}\}.$$

**Лемма 1.** *Пусть в $k$ вершинах схемы $S$ с входами $x_1, x_2, \dots, x_k$ реализуется система функций*

$$\{x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_k^{a_{1k}},\ x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \dots x_k^{a_{2k}},\ \dots,\ x_1^{a_{k1}} x_2^{a_{k2}} \dots x_k^{a_{kk}}\},$$

*задаваемая целочисленной матрицей $A = (a_{ij})$ размера $k \times k$. Тогда*

$$2^{l_2(S) - \delta(S)} \geqslant |\det A|,$$

*где величина величина $\delta(S)$ равна $0$, если в схеме $S$ нет ни одного элемента деления и в вершинах схемы $S$ реализуются только функции, являющиеся степенями входных переменных, и равна $1$ в остальных случаях.*

Доказательство. Пусть входные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_k$ фиксированы. Утверждение леммы будем доказывать индукцией по сложности схемы $S$, т. е. по величине $l_2(S)$.

Если $l_2(S) = 0$, то в вершинах схемы $S$ (а в схеме есть только входные вершины) вычисляются функции $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Следовательно, в каждой строке матрицы $A$, задающей такую систему функций, имеется по одной единице и по $n-1$ нулей. Поэтому $\delta(S) = 0$ и $|\det A| \leqslant 1$. Тогда

$$2^{l_2(S)-\delta(S)} = 1 \geqslant |\det A|.$$

Докажем утверждение леммы для произвольной схемы $S$ сложности $l_2(S)$, $l_2(S) \geqslant 1$, в предположении, что для любой схемы сложности менее $l_2(S)$ лемма справедлива. Пусть $v_1$ — невходовая вершина (элемент) схемы $S$, в которой реализуется функция, не использующаяся для дальнейших вычислений в схеме $S$, т. е. эта функция не подаётся на вход никакого элемента схемы.

Схему, получающуюся из схемы $S$ удалением вершины $v_1$ и дуг, входящих в эту вершину, обозначим через $S'$. Очевидно, что $l_2(S') = l_2(S) - 1$.

Пусть в схеме $S$ произвольным образом выбраны $k$ вершин. Если среди выбранных вершин нет вершины $v_1$, то утверждение леммы для этих $k$ вершин следует из предположения индукции, так как

$$2^{l_2(S)-\delta(S)} \geqslant 2^{l_2(S')} \geqslant 2^{l_2(S')-\delta(S')} \geqslant |\det A|.$$

Если вершина $v_1$ выбрана более одного раза, то утверждение леммы также выполняется, так как в этом случае в соответствующей матрице будут две одинаковые строки, и определитель этой матрицы будет равен 0. Далее будем считать, что среди выбранных вершин вершина $v_1$ содержится ровно один раз. Пусть в вершине $v_1$ вычисляется функция $x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_k^{a_{1k}}$, а в остальных выбранных вершинах $v_2, v_3, \ldots, v_k$ — соответственно функции $x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_k^{a_{2k}}$, $x_1^{a_{31}} x_2^{a_{32}} \ldots x_k^{a_{3k}}$, …, $x_1^{a_{k1}} x_2^{a_{k2}} \ldots x_k^{a_{kk}}$.

Пусть на входы элемента, соответствующего вершине $v_1$, подаются функции $x_1^{a'_{11}} x_2^{a'_{12}} \ldots x_k^{a'_{1k}}$ и $x_1^{a''_{11}} x_2^{a''_{12}} \ldots x_k^{a''_{1k}}$, вычисляемые в вершинах $v'$ и $v''$ соответственно.

Если вершине $v_1$ соответствует операция умножения, то выполняется равенство

$$x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_k^{a_{1k}} = x_1^{a'_{11}+a''_{11}} x_2^{a'_{12}+a''_{12}} \ldots x_k^{a'_{1k}+a''_{1k}},$$

а если соответствует операция деления, — то равенство

$$x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_k^{a_{1k}} = x_1^{a'_{11}-a''_{11}} x_2^{a'_{12}-a''_{12}} \dots x_k^{a'_{1k}-a''_{1k}}.$$

Обозначим через $A'$ и $A''$ матрицы, получающиеся из матрицы $A$ заменой первой строки на строки $(a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{1k})$ и $(a''_{11}, a''_{12}, \dots, a''_{1k})$ соответственно.

*Случай* 1. Условие $\delta(S) = \delta(S')$ выполняется.

Тогда, обозначив через $\pi(\sigma)$ число транспозиций в подстановке $\sigma$, получаем

$$\begin{aligned} |\det A| &= \left| \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\pi(\sigma)} (a'_{1,\sigma(1)} \pm a''_{1,\sigma(1)}) a_{2,\sigma(2)} \dots a_{k,\sigma(k)} \right| \\ &= \left| \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\pi(\sigma)} a'_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{k,\sigma(k)} \right. \\ &\left. \pm \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\pi(\sigma)} a''_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{k,\sigma(k)} \right| \\ &= \left| \det A' \pm \det A'' \right| \leqslant \left| \det A' \right| + \left| \det A'' \right|. \end{aligned}$$

Для наборов вершин $(v', v_2, \dots, v_k)$ и $(v'', v_2, \dots, v_k)$ схемы $S'$ по предположению индукции справедливо утверждение леммы. Поэтому

$$\begin{aligned} |\det A| \leqslant \left| \det A' \right| + \left| \det A'' \right| \leqslant 2^{l_2(S') - \delta(S')} + 2^{l_2(S') - \delta(S')} \\ = 2 \cdot 2^{l_2(S) - 1 - \delta(S)} = 2^{l_2(S) - \delta(S)}. \end{aligned}$$

*Случай* 2. Условие $\delta(S) = \delta(S')$ не выполняется.

Тогда справедливы равенства $\delta(S) = 1$ и $\delta(S') = 0$. Из условия $\delta(S') = 0$ следует, что в матрицах $A'$ и $A''$ в каждой строке имеется ровно по одному ненулевому элементу. Из условия $\delta(S) = 1$ следует, что либо ненулевые элементы первых строк матриц $A'$ и $A''$ находятся в разных столбцах, либо ненулевые элементы первых строк матриц $A'$ и $A''$ находятся в столбцах с одним номером, но вершине $v_1$ соответствует операция деления. Покажем, что в обоих случаях выполняется неравенство

$$|\det A| \leqslant \max \left( \left| \det A' \right|, \left| \det A'' \right| \right).$$

Действительно, если ненулевые элементы первых строк матриц $A'$ и $A''$ находятся в разных столбцах, то в одной из матриц $A'$ и $A''$ (без ограничения общности будем считать, что в матрице $A''$) найдутся две пропорциональные строки. Тогда

$$|\det A| = \left|\det A' \pm \det A''\right| = \left|\det A'\right| = \max\left(\left|\det A'\right|, \left|\det A''\right|\right).$$

Если же ненулевые элементы первых строк матриц $A'$ и $A''$ находятся в столбцах с одним номером, а вершине $v_1$ соответствует операция деления, то в матрице $A$ имеется ровно $k$ ненулевых элементов, находящихся на тех же местах, что и в матрицах $A'$ и $A''$, причем ненулевой элемент, находящийся в первой строке матрицы $A$, равен разности ненулевых (причем положительных) элементов, находящихся в первых строках в матрицах $A'$ и $A''$, а остальные ненулевые элементы матрицы $A$ совпадают с соответствующими ненулевыми элементами матриц $A'$ и $A''$. Поэтому

$$|\det A| = \left|\det A' - \det A''\right| \leqslant \max\left(\left|\det A'\right|, \left|\det A''\right|\right).$$

Теперь, используя предположение индукции, получаем

$$|\det A| \leqslant \max\left(\left|\det A'\right|, \left|\det A''\right|\right) \leqslant 2^{l_2(S')-\delta(S')} = 2^{l_2(S)-1} = 2^{l_2(S)-\delta(S)}.$$

Лемма 1 доказана.

Отметим, что подобный способ доказательства нижней оценки для другой задачи содержится в [7].

**Теорема 1.** *Пусть система функций*

$$\{x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\ldots x_q^{a_{2q}},\ \ldots,\ x_1^{a_{p1}}x_2^{a_{p2}}\ldots x_q^{a_{pq}}\}$$

*задана ненулевой целочисленной матрицей $A = (a_{ij})$ размера $p\times q$. Тогда*

$$l_2\left(x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\ldots x_q^{a_{2q}},\ \ldots,\ x_1^{a_{p1}}x_2^{a_{p2}}\ldots x_q^{a_{pq}}\right) \geqslant \log D(A).$$

Доказательство. Пусть $S$ — минимальная схема, реализующая систему функций $\{x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\ldots x_q^{a_{2q}},\ \ldots,\ x_1^{a_{p1}}x_2^{a_{p2}}\ldots x_q^{a_{pq}}\}$. Пусть число $k$ и наборы индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и $j_1, j_2, \ldots, j_k$, удовлетворяющие условиям $1 \leqslant k \leqslant \min(p,q)$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant p$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant q$, выбраны таким образом, чтобы выполнялось равенство $|\det A(i_1, i_2, \ldots, i_k;\, j_1, j_2, \ldots, j_k)| = D(A)$. Поскольку матрица $A$ ненулевая, $|\det A(i_1, i_2, \ldots, i_k;\, j_1, j_2, \ldots, j_k)| \geqslant 1$.

Преобразуем схему $S$ в схему $S_1$, добавив к $S$ новую вершину, в которой вычисляется функция, тождественно равная единице как результат деления $x_{i_1}$ на $x_{i_1}$, и затем подав функцию 1 на все входы исходной схемы, кроме входов, которым приписаны переменные $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}$.

Тогда в вершинах схемы $S_1$, соответствующих вершинам исходной схемы, в которых вычислялись функции

$$x_1^{a_{i_1,1}} x_2^{a_{i_1,2}} \ldots x_q^{a_{i_1,q}},\ x_1^{a_{i_2,1}} x_2^{a_{i_2,2}} \ldots x_q^{a_{i_2,q}},\ \ldots,\ x_1^{a_{i_k,1}} x_2^{a_{i_k,2}} \ldots x_q^{a_{i_k,q}},$$

будут вычисляться функции

$$x_{j_1}^{a_{i_1,j_1}} x_{j_2}^{a_{i_1,j_2}} \ldots x_{j_k}^{a_{i_1,j_k}},\ x_{j_1}^{a_{i_2,j_1}} x_{j_2}^{a_{i_2,j_2}} \ldots x_{j_k}^{a_{i_2,j_k}},\ \ldots,\ x_{j_1}^{a_{i_k,j_1}} x_{j_2}^{a_{i_k,j_2}} \ldots x_{j_k}^{a_{i_k,j_k}}.$$

Очевидно, что $l_2(S_1) \leqslant l_2(S) + 1$. Применяя лемму 1 с учётом того, что в схеме $S_1$ есть элемент деления, получаем

$$l_2(S_1) - 1 \geqslant \log |\det A(i_1, i_2, \ldots, i_k;\, j_1, j_2, \ldots, j_k)| = \log D(A).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} l_2\left(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}},\ \ldots,\ x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}\right) &= l_2(S) \\ &\geqslant \log D(A). \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Для величины $l_1(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}}, x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}}, \ldots, x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}})$, определяемой как минимальное число операций, достаточное для вычисления по заданным переменным $x_1, x_2, \ldots, x_q$ системы одночленов

$$x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}},\quad x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}},\quad \ldots,\ x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}$$

с целыми неотрицательными показателями степеней $a_{ij}$, справедлива такая же нижняя оценка.

**Следствие.** *Пусть система одночленов*

$$\{x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}},\ \ldots,\ x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}\}$$

*задана ненулевой целочисленной матрицей* $A = (a_{ij})$ *размера* $p \times q$ *с неотрицательными элементами. Тогда*

$$l_1\left(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}},\ \ldots,\ x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}\right) \geqslant \log D(A).$$

Это следствие обобщает нижнюю оценку, полученную в [3] для случая $p = 2$ и $q = 2$.

## 2. Верхняя оценка

Далее для удобства, чтобы выражения вида $\log\log x$ были определены для любых неотрицательных $x$, введём функцию $\overline{\log}x$ следующим образом:

$$\overline{\log}x = \begin{cases} \log x & \text{при } x \geqslant 2, \\ 1 & \text{при } 0 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

**Лемма 2.** *Существуют положительные константы $c_1$ и $c_2$ такие, что для любой целочисленной матрицы $A = (a_{ij})$ размера $p \times q$ с неотрицательными элементами, удовлетворяющими условиям*

$$a_{11} \geqslant a_{i1}, \quad a_{11} \geqslant a_{1j}, \quad a_{ij} = \left\lfloor a_{i1}\frac{a_{1j}}{a_{11}} \right\rfloor, \quad i = 2,3,\dots,p; \;\; j = 2,3,\dots,q,$$

*выполняется неравенство*

$$l_1\left(x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\dots x_q^{a_{1q}}, x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\dots x_q^{a_{2q}}, \dots, x_1^{a_{p1}}x_2^{a_{p2}}\dots x_q^{a_{pq}}\right) \leqslant \log a_{11} + c_1(p+q)\frac{\log a_{11}}{\overline{\log}\,\overline{\log}a_{11}} + c_2\frac{pq}{\overline{\log}(pq)}\overline{\log}\,\overline{\log}a_{11}.$$

Доказательство. Пусть $u$ — натуральный параметр, значение которого определим позже.

Представим числа $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{p1}$ в системе счисления по основанию $2^u$. Пусть значность представления для самого большого из них — числа $a_{11}$ — равна $t$. Тогда

$$a_{i1} = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}2^u + \ldots + \alpha_{i,t-1}2^{(t-1)u}, \quad i = 1,2,\dots,p,$$

где $0 \leqslant \alpha_{ik} < 2^u$, $i = 1,2,\dots,p$; $k = 0,1,\dots,t-1$; $\alpha_{1,t-1} \geqslant 1$. Отметим, что при этом справедливы соотношения $(t-1)u \leqslant \log a_{11} \leqslant tu$.

Теперь положим

$$\varrho_{jk} = \left\lfloor \frac{a_{1j}}{a_{11}}2^{ku} \right\rfloor, \quad j = 2,3,\dots,q; \;\; k = 0,1,\dots,t-1.$$

Покажем, что

$$2^u\varrho_{jk} \leqslant \varrho_{j,k+1} \leqslant 2^u\varrho_{jk} + 2^u - 1, \quad j = 2,3,\dots,q; \;\; k = 0,1,\dots,t-2.$$

Действительно, с одной стороны,

$$\frac{\varrho_{j,k+1}}{\varrho_{jk}} = \frac{\left\lfloor \frac{a_{1j}}{a_{11}}2^{(k+1)u} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{a_{1j}}{a_{11}}2^{ku} \right\rfloor} \geqslant \frac{\left\lfloor \left\lfloor \frac{a_{1j}}{a_{11}}2^{ku} \right\rfloor 2^u \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{a_{1j}}{a_{11}}2^{ku} \right\rfloor} = 2^u,$$

а с другой,

$$\varrho_{j,k+1} - 2^u \varrho_{jk} = \left\lfloor \frac{a_{1j}}{a_{11}} 2^{ku} 2^u \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a_{1j}}{a_{11}} 2^{ku} \right\rfloor 2^u < \frac{a_{1j}}{a_{11}} 2^{ku} 2^u - \left( \frac{a_{1j}}{a_{11}} 2^{ku} - 1 \right) 2^u = 2^u.$$

Следовательно, учитывая целочисленность величины $\varrho_{j,k+1} - 2^u \varrho_{jk}$, имеем

$$\varrho_{j,k+1} - 2^u \varrho_{jk} \leqslant 2^u - 1.$$

При $i = 1, 2, \ldots, p$ и $j = 2, 3, \ldots, q$ положим

$$\widetilde{a}_{ij} = \alpha_{i0} \varrho_{j0} + \alpha_{i1} \varrho_{j1} + \ldots + \alpha_{i,t-1} \varrho_{j,t-1}.$$

Тогда

$$\widetilde{a}_{ij} = \sum_{k=0}^{t-1} \alpha_{ik} \left\lfloor \frac{a_{1j}}{a_{11}} 2^{ku} \right\rfloor \leqslant \frac{a_{1j}}{a_{11}} \sum_{k=0}^{t-1} \alpha_{ik} 2^{ku} = \alpha_{i1} \frac{a_{1j}}{a_{11}}.$$

Отсюда в силу условий леммы и целочисленности величины $\widetilde{a}_{ij}$ имеем неравенство $\widetilde{a}_{ij} \leqslant a_{ij}$.

С другой стороны,

$$\widetilde{a}_{ij} = \sum_{k=0}^{t-1} \alpha_{ik} \left\lfloor \frac{a_{1j}}{a_{11}} 2^{ku} \right\rfloor \geqslant \sum_{k=0}^{t-1} \alpha_{ik} \left( \frac{a_{1j}}{a_{11}} 2^{ku} - 1 \right) = \alpha_{i1} \frac{a_{1j}}{a_{11}} - \sum_{k=0}^{t-1} \alpha_{ik} > \alpha_{ij} - t 2^u.$$

Таким образом, $0 \leqslant a_{ij} - \widetilde{a}_{ij} \leqslant t 2^u, \quad i = 1, 2, \ldots, p; \quad j = 2, 3, \ldots, q.$

Перейдём непосредственно к описанию процесса совместного вычисления одночленов $x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}}, x_2^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}}, \ldots, x_p^{a_{p1}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{pq}}$. Этот процесс состоит из пяти этапов.

I *этап.* Вычисление системы степеней

$$x_j^{\beta}, \quad j = 1, 2, \ldots, q; \ \beta = 1, 2, \ldots, 2^u.$$

Очевидно, что на первом этапе достаточно $q 2^u$ операций умножения.

II *этап.* Вычисление системы одночленов

$$x_1^{2^{ku}} x_2^{\varrho_{2k}} x_3^{\varrho_{3k}} \ldots x_q^{\varrho_{qk}}, \quad k = 1, 2, \ldots, t-1.$$

В силу неравенств $\varrho_{i1} \leqslant 2^u$, $i = 1, 2, \dots, q$, с использованием степеней, вычисленных на первом этапе, одночлен $x_1^{2^u} x_2^{\varrho_{21}} x_3^{\varrho_{31}} \dots x_q^{\varrho_{q1}}$ можно получить, использовав не более $q$ операций умножения.

Пусть уже вычислен одночлен $x_1^{2^{ku}} x_2^{\varrho_{2k}} x_3^{\varrho_{3k}} \dots x_q^{\varrho_{qk}}$ $(1 \leqslant k \leqslant t-2)$. Покажем, как тогда можно вычислить одночлен $x_1^{2^{(k+1)u}} x_2^{\varrho_{2,k+1}} x_3^{\varrho_{3,k+1}} \dots x_q^{\varrho_{q,k+1}}$.

Сначала одночлен $x_1^{2^{ku}} x_2^{\varrho_{2k}} x_3^{\varrho_{3k}} \dots x_q^{\varrho_{qk}}$ возведём $u$ раз в квадрат. Получим

$$\left(x_1^{2^{ku}} x_2^{\varrho_{2k}} x_3^{\varrho_{3k}} \dots x_q^{\varrho_{qk}}\right)^{2^u} = x_1^{2^{(k+1)u}} x_2^{\varrho_{2k} 2^u} x_3^{\varrho_{3k} 2^u} \dots x_q^{\varrho_{qk} 2^u}.$$

Далее, учитывая, что $0 \leqslant \varrho_{j,k+1} - 2^u \varrho_{jk} \leqslant 2^u - 1$, $j = 2, 3, \dots, q$, для вычисления одночлена $x_2^{\varrho_{2,k+1} - 2^u \varrho_{2k}} x_3^{\varrho_{3,k+1} - 2^u \varrho_{3k}} \dots x_q^{\varrho_{q,k+1} - 2^u \varrho_{qk}}$, с использованием степеней, вычисленных на первом этапе, достаточно не более $q-1$ операции умножения.

Таким образом, при каждом $k$, $1 \leqslant k \leqslant t-2$, на вычисление следующего одночлена $x_1^{2^{(k+1)u}} x_2^{\varrho_{2,k+1}} x_3^{\varrho_{3,k+1}} \dots x_q^{\varrho_{q,k+1}}$ с помощью уже вычисленных требуется не более $u+q$ операций умножения. Следовательно, всего на II этапе потребуется не более $(t-1)(u+q)$ операций умножения.

III *этап.* Вычисление системы одночленов

$$x_1^{a_{i1}} x_2^{\widetilde{a}_{i2}} x_3^{\widetilde{a}_{i3}} \dots x_q^{\widetilde{a}_{iq}}, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Из равенства

$$x_1^{a_{i1}} x_2^{\widetilde{a}_{i2}} x_3^{\widetilde{a}_{i3}} \dots x_q^{\widetilde{a}_{iq}} = \left(x_1 x_2^{\varrho_{21}} x_3^{\varrho_{31}} \dots x_q^{\varrho_{q1}}\right)^{\alpha_{i0}} \left(x_1^{2^u} x_2^{\varrho_{21}} x_3^{\varrho_{31}} \dots x_q^{\varrho_{q1}}\right)^{\alpha_{i1}} \dots \left(x_1^{2^{(t-1)u}} x_2^{\varrho_{2,t-1}} x_3^{\varrho_{3,t-1}} \dots x_q^{\varrho_{q,t-1}}\right)^{\alpha_{i,t-1}}$$

следует, что для вычисления этого одночлена при каждом $i$, $1 \leqslant i \leqslant p$, требуется не более $t+2^u$ операций умножения. Действительно, вычислить одночлен $z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \dots z_t^{\beta_t}$, где $0 \leqslant \beta_k \leqslant 2^u - 1$; $k = 1, 2, \dots, t$, от заданных выражений $z_1, z_2, \dots, z_t$ можно следующим образом.

Положим $I_s = \{k \mid 1 \leqslant k \leqslant t,\ \beta_k = s\}$, $s = 1, 2, \dots, 2^u - 1$. Очевидно, что $|I_1| + |I_2| + \dots + |I_{2^u-1}| \leqslant t$.

Последовательно определим одночлены $f_{2^u-1}, f_{2^u-2}, \dots, f_1$ от переменных $z_1, z_2, \dots, z_t$:

$$f_{2^u-1} = \prod_{k \in I_{2^u-1}} z_k; \qquad f_s = f_{s+1} \prod_{k \in I_s} z_k, \quad s = 2^u-2, 2^u-3, \dots, 1.$$

Теперь, считая, что произведение пустого множества сомножителей по определению равно единице, вычислим последовательно все отличные от единицы одночлены

$$\prod_{k\in I_{2^u-1}} z_k,\ \prod_{k\in I_{2^u-2}} z_k,\ \ldots,\prod_{k\in I_1} z_k,$$

использовав на это не более $t-|\{I_s \mid |I_s|\neq 0\}|$ операций умножения. Далее с использованием не более $|\{I_s \mid |I_s|\neq 0\}|$ операций умножения можно вычислить одночлены $f_{2^u-1}, f_{2^u-2},\ldots,f_1$.

Окончательно, использовав ещё не более $2^u-1$ операцию умножения, получаем одночлен

$$f_{2^u-1}f_{2^u-2}\ldots f_1 = \left(\prod_{k\in I_{2^u-1}} z_k\right)^{2^u-1}\left(\prod_{k\in I_{2^u-2}} z_k\right)^{2^u-2}\ldots\left(\prod_{k\in I_1} z_k\right)^{1}$$
$$=\left(\prod_{k\in I_{2^u-1}} z_k^{\beta_k}\right)\left(\prod_{k\in I_{2^u-2}} z_k^{\beta_k}\right)\ldots\left(\prod_{k\in I_1} z_k^{\beta_k}\right)=z_1^{\beta_1}z_2^{\beta_2}\ldots z_t^{\beta_t}.$$

Таким образом, для вычисления одночлена $z_1^{\beta_1}z_2^{\beta_2}\ldots z_t^{\beta_t}$ было использовано не более $t+2^u$ операций умножения.

Итак, на III этапе достаточно использовать $p(t+2^u)$ операций умножения.

IV *этап.* Вычисление системы одночленов

$$x_2^{a_{i2}-\widetilde{a}_{i2}}x_3^{a_{i3}-\widetilde{a}_{i3}}\ldots x_q^{a_{iq}-\widetilde{a}_{iq}},\quad i=1,2,\ldots,p.$$

В силу неравенств $a_{ij}-\widetilde{a}_{ij}\leqslant t2^u$, $i=1,2,\ldots,p$; $j=2,3,\ldots,q$, из основного результата работы [8] следует, что для вычисления этой системы одночленов достаточно

$$\log(t2^u)\min(p,q)+O\left(\frac{pq}{\log(pq)}\log(t2^u)\right)+O(p+q)$$

операций умножения.

V *этап.* Вычисление системы одночленов

$$x_1^{a_{i1}}x_2^{a_{i2}}\ldots x_q^{a_{iq}},\quad i=1,2,\ldots,p.$$

С использованием одночленов, вычисленных на III и IV этапах, нужную систему можно получить, использовав не более $p$ операций умножения.

Таким образом, окончательно имеем

$$l_1\left(x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\ldots x_q^{a_{2q}},\ldots,\ x_1^{a_{p1}}x_2^{a_{p2}}\ldots x_q^{a_{pq}}\right)$$
$$\leqslant q2^u+(t-1)(u+q)+p(t+2^u)+\log(t2^u)\min(p,q)$$
$$+O\left(\frac{pq}{\log(pq)}\log(t2^u)\right)+O(p+q)+p\leqslant (t-1)u+O\big((p+q)(t+2^u)\big)$$
$$+O\left(\frac{pq}{\log(pq)}\log(t2^u)\right).$$

Отсюда и из неравенства $(t-1)u\leqslant\log a_{11}$ следует, что

$$l_1\left(x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\ldots x_q^{a_{1q}},x_2^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\ldots x_q^{a_{2q}},\ldots,x_p^{a_{p1}}x_2^{a_{12}}\ldots x_q^{a_{pq}}\right)$$
$$\leqslant\log a_{11}+O\big((p+q)(t+2^u)\big)+O\left(\frac{pq}{\log(pq)}\log(t2^u)\right).$$

При достаточно больших значениях $a_{11}$ (при ограниченных некоторой величиной значениях $a_{11}$ утверждение леммы следует из предыдущего соотношения, так как в этом случае $t$ и $u$ тоже ограничены) положим $u=\lfloor\log\log a_{11}-2\log\log\log a_{11}\rfloor$. Тогда, учитывая неравенство $(t-1)u\leqslant\log a_{11}$, имеем

$$t\leqslant\frac{\log a_{11}}{\lfloor\log\log a_{11}-2\log\log\log a_{11}\rfloor}+1,\quad 2^u\leqslant\frac{\log a_{11}}{(\log\log a_{11})^2}.$$

Следовательно,

$$l_1\left(x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\ldots x_q^{a_{2q}},\ldots,\ x_1^{a_{p1}}x_2^{a_{p2}}\ldots x_q^{a_{pq}}\right)$$
$$\leqslant\log a_{11}+O\left((p+q)\frac{\log a_{11}}{\log\log a_{11}}\right)+O\left(\frac{pq}{\log(pq)}\log\log a_{11}\right).$$

Лемма 2 доказана.

**Лемма 3.** *Пусть элементы матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ размера $k\times k$ удовлетворяют неравенствам $|a_{ij}-b_{ij}|\leqslant 1$, $i=1,\ldots,k$; $j=1,\ldots,k$. Тогда при условии $D(A)\geqslant 1$ выполняется неравенство*

$$|\det B|\leqslant k^{2k}D(A).$$

Доказательство. Положим $\varepsilon_{ij}=b_{ij}-a_{ij},\ i=1,\ldots,k;\ j=1,\ldots,k$. Обозначим $j$-е столбцы матриц $A$ и $B$ через $A_j$ и $B_j$ соответственно, а через $E_j$ обозначим вектор-столбец $(\varepsilon_{1j}, \varepsilon_{2j}, \ldots, \varepsilon_{kj})^T$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Тогда

$$\begin{aligned}
&|\det B| = |\det(B_1, B_2, \ldots, B_k)| = |\det(A_1 + E_1, A_2 + E_2, \ldots, A_k + E_k)| \\
&= \Big| \det(A_1, A_2, \ldots, A_k) + \Big( \det(E_1, A_2, \ldots, A_k) + \det(A_1, E_2, A_3, \ldots, A_k) + \ldots \\
&\quad + \det(A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}, E_k) \Big) + \Big( \det(E_1, E_2, A_3, \ldots, A_k) \\
&\quad + \det(E_1, A_2, E_3, A_4, \ldots, A_k) + \ldots + \det(A_1, \ldots, A_{k-2}, E_{k-1}, E_k) \Big) \\
&\qquad \ldots \\
&\quad + \Big( \det(E_1, \ldots, E_{k-1}, A_k) + \det(E_1, \ldots, E_{k-2}, A_{k-1}, E_k) + \ldots \\
&\quad + \det(A_1, E_2, \ldots, E_k) \Big) + \det(E_1, E_2, \ldots, E_k) \Big| \\
&\leqslant D(A) + C_k^1 k D(A) + C_k^2 k(k-1) D(A) + \ldots + C_k^{k-1} k! D(A) + k! \\
&\qquad \leqslant 2^k k! D(A) \leqslant k^{2k} D(A).
\end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

**Лемма 4.** *Существуют положительные константы $c_1$ и $c_2$ такие, что для любой системы функций вида*

$$\{x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}}, x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}}, \ldots x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}\},$$

*заданной целочисленной матрицей $A = (a_{ij})$ размера $p \times q$, выполняется неравенство*

$$\begin{aligned}
&l_2\left(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}}, x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}}, \ldots, x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}\right) \\
&\qquad \leqslant \log D(A) + c_1 \min(p,q)(p+q) \left( \frac{\log a}{\overline{\log}\, \overline{\log} a} + \min(p,q) \right) \\
&\qquad\qquad + c_2 \min(p,q) \frac{pq}{\overline{\log}(pq)} \left( \overline{\log}\, \overline{\log} a + \min(p,q) \right),
\end{aligned}$$

*где $a = \max |a_{ij}|$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $|a_{11}| = a$. В качестве констант $c_1$ и $c_2$ возьмём константы из леммы 2. Будем считать, что $c_1 > 1$ и $c_2 > 1$. Проведём индукцию по величине $\min(p,q)$.

База индукции. Докажем, что при $\min(p,q) = 1$ утверждение теоремы справедливо.

Пусть $p = 1$, т. е. $A = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1q})$. Сначала вычислим функции $y_j = x_j^{-1}$ при всех таких индексах $j$, что $a_{1j} < 0$, а затем применим оценку из леммы 2. Отметим, что для вычисления не более $q$ обратных величин требуется не более $q+1$ операций деления. Поэтому

$$\begin{aligned} l_2\left(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}}\right) &\leqslant l_1\left(y_1^{|a_{11}|} y_2^{|a_{12}|} \ldots y_q^{|a_{1q}|}\right) + q + 1 \\ &\leqslant \log a + c_1(q+1)\frac{\log a}{\overline{\log}\,\overline{\log} a} + c_2\frac{q}{\overline{\log} q}\overline{\log}\,\overline{\log} a + q + 1 \\ &\leqslant \log D(A) + c_1 \min(p,q)(p+q)\left(\frac{\log a}{\overline{\log}\,\overline{\log} a} + \min(p,q)\right) \\ &\quad + c_2 \min(p,q)\frac{pq}{\overline{\log}(pq)}\left(\overline{\log}\,\overline{\log} a + \min(p,q)\right). \end{aligned}$$

Пусть $q = 1$, т. е. $A = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{p1})^T$. Теперь сначала применим оценку из леммы 2 для вычисления системы $\left\{x^{|a_{11}|}, x^{|a_{21}|}, \ldots, x^{|a_{p1}|}\right\}$, а затем при всех таких индексах $i$, что $a_{i1} < 0$, вычислим функции $x^{a_{i1}} = x^{-|a_{i1}|}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} l_2\left(x^{a_{11}}, x^{a_{21}}, \ldots, x^{a_{p1}}\right) &\leqslant l_1\left(x^{|a_{11}|}, x^{|a_{21}|}, \ldots, x^{|a_{p1}|}\right) + p + 1 \\ &\leqslant \log a + c_1(p+1)\frac{\log a}{\overline{\log}\,\overline{\log} a} + c_2\frac{p}{\overline{\log} p}\overline{\log}\,\overline{\log} a + p + 1 \\ &\leqslant \log D(A) + c_1 \min(p,q)(p+q)\left(\frac{\log a}{\overline{\log}\,\overline{\log} a} + \min(p,q)\right) \\ &\quad + c_2 \min(p,q)\frac{pq}{\overline{\log}(pq)}\left(\overline{\log}\,\overline{\log} a + \min(p,q)\right). \end{aligned}$$

Шаг индукции. Положив

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \ \ 1 & \text{при } x \geqslant 0, \\ -1 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

не изменяя абсолютных значений элементов матрицы A, определим ещё одну целочисленную матрицу размера $p \times q$ — матрицу $B = (b_{ij})$ — следующим образом:

$$b_{i1} = a_{i1} \operatorname{sgn} a_{i1}, \quad b_{ij} = a_{ij} \operatorname{sgn}(a_{i1} a_{11} a_{1j}),\ i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, q.$$

Отметим, что в матрице $B$ все элементы первого столбца и все элементы первой строки неотрицательны. Кроме того, $b_{11} = a \geqslant |b_{ij}|$, $i = 1, 2, \ldots, p$; $j = 1, 2, \ldots, q$.

Матрицу $A$ по матрице $B$ можно восстановить следующим образом. Сначала $i$-ю строку матрицы $B$, $i = 1, 2, \dots, p$, домножим на $\mathrm{sgn} a_{i1}$ (это соответствует переходу от функции $x_1^{b_{i1}} x_2^{b_{i2}} \dots x_q^{b_{iq}}$ к функции

$$x_1^{-b_{i1}} x_2^{-b_{i2}} \dots x_q^{-b_{iq}} = \left(x_1^{b_{i1}} x_2^{b_{i2}} \dots x_q^{b_{iq}}\right)^{-1}$$

в случае, когда выполняется неравенство $a_{i1} < 0$), а затем $j$-й столбец полученной матрицы, $j = 1, 2, \dots, q$, домножим на величину $\mathrm{sgn}(a_{1j} a_{11})$ (это соответствует замене переменной $x_j$ на $x_j^{-1}$ во всех функциях в случае, когда выполняется неравенство $a_{1j} a_{11} < 0$). Поэтому, в частности, $D(A) = D(B)$.

Учитывая, что вычисление не более чем $p + q$ обратных величин требует не более $p + q + 1$ операций деления, получаем

$$\begin{aligned} & l_2\left(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_q^{a_{1q}}, x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \dots x_q^{a_{2q}}, \dots, x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \dots x_q^{a_{pq}}\right) \\ & \leqslant l_2\left(x_1^{b_{11}} x_2^{b_{12}} \dots x_q^{b_{1q}}, x_1^{b_{21}} x_2^{b_{22}} \dots x_q^{b_{2q}}, \dots, x_1^{b_{p1}} x_2^{b_{p2}} \dots x_q^{b_{pq}}\right) + p + q + 1. \end{aligned}$$

Положим

$$b'_{ij} = b_{i1} \frac{b_{1j}}{b_{11}}, \quad b''_{ij} = \left\lfloor b_{i1} \frac{b_{1j}}{b_{11}} \right\rfloor, \quad i = 1, 2, \dots, p;\ j = 1, 2, \dots, q.$$

Заметим, что справедливы неравенства

$$0 \leqslant b''_{ij} \leqslant b'_{ij} \leqslant \min(b_{i1}, b_{1j}), \quad i = 1, 2, \dots, p;\ j = 1, 2, \dots, q.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} & l_2\left(x_1^{b_{11}} x_2^{b_{12}} \dots x_q^{b_{1q}}, x_1^{b_{21}} x_2^{b_{22}} \dots x_q^{b_{2q}}, \dots, x_1^{b_{p1}} x_2^{b_{p2}} \dots x_q^{b_{pq}}\right) \\ & \qquad \leqslant l_2\left(x_1^{b_{11}} x_2^{b_{12}} \dots x_q^{b_{1q}}, x_1^{b_{21}} x_2^{b''_{22}} \dots x_q^{b''_{2q}}, \dots, x_1^{b_{p1}} x_2^{b''_{p2}} \dots x_q^{b''_{pq}}\right) \\ & \quad + l_2\left(x_2^{b_{22} - b''_{22}} x_3^{b_{23} - b''_{23}} \dots x_q^{b_{2q} - b''_{2q}}, x_2^{b_{32} - b''_{32}} x_3^{b_{33} - b''_{33}} \dots x_q^{b_{3q} - b''_{3q}}, \dots, \right. \\ & \qquad\qquad \left. x_2^{b_{p2} - b''_{p2}} x_3^{b_{p3} - b''_{p3}} \dots x_q^{b_{pq} - b''_{pq}}\right) + p. \end{aligned}$$

Используя лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} & l_2\left(x_1^{b_{11}} x_2^{b_{12}} \dots x_q^{b_{1q}}, x_1^{b_{21}} x_2^{b''_{22}} \dots x_q^{b''_{2q}}, \dots, x_1^{b_{p1}} x_2^{b''_{p2}} \dots x_q^{b''_{pq}}\right) \\ & \qquad \leqslant l_1\left(x_1^{b_{11}} x_2^{b_{12}} \dots x_q^{b_{1q}}, x_1^{b_{21}} x_2^{b''_{22}} \dots x_q^{b''_{2q}}, \dots, x_1^{b_{p1}} x_2^{b''_{p2}} \dots x_q^{b''_{pq}}\right) \end{aligned}$$

$$\leqslant \log b_{11} + c_1(p+q)\frac{\log b_{11}}{\overline{\log}\,\overline{\log} b_{11}} + c_2\frac{pq}{\overline{\log}(pq)}\overline{\log}\,\overline{\log} b_{11}$$
$$= \log a + c_1(p+q)\frac{\log a}{\overline{\log}\,\overline{\log} a} + c_2\frac{pq}{\overline{\log}(pq)}\overline{\log}\,\overline{\log} a.$$

Теперь оценим сверху величину

$$l_2\left(x_2^{b_{22}-b''_{22}}x_3^{b_{23}-b''_{23}}\dots x_q^{b_{2q}-b''_{2q}}, x_2^{b_{32}-b''_{32}}x_3^{b_{33}-b''_{33}}\dots x_q^{b_{3q}-b''_{3q}},\dots,\right.$$
$$\left. x_2^{b_{p2}-b''_{p2}}x_3^{b_{p3}-b''_{p3}}\dots x_q^{b_{pq}-b''_{pq}}\right).$$

Матрицу

$$\begin{pmatrix} b_{22}-b''_{22} & b_{23}-b''_{23} & \dots & b_{2q}-b''_{2q} \\ b_{32}-b''_{32} & b_{33}-b''_{33} & \dots & b_{3q}-b''_{3q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p2}-b''_{p2} & b_{p3}-b''_{p3} & \dots & b_{pq}-b''_{pq} \end{pmatrix}$$

размера $(p-1)\times(q-1)$ обозначим через $\widetilde{B}$. По предположению индукции с учётом очевидного неравенства $\max|b_{ij}-b''_{ij}| \leqslant 2a$ имеем

$$l_2\left(x_2^{b_{22}-b''_{22}}x_3^{b_{23}-b''_{23}}\dots x_q^{b_{2q}-b''_{2q}}, x_2^{b_{32}-b''_{32}}x_3^{b_{33}-b''_{33}}\dots x_q^{b_{3q}-b''_{3q}},\dots,\right.$$
$$\left. x_2^{b_{p2}-b''_{p2}}x_3^{b_{p3}-b''_{p3}}\dots x_q^{b_{pq}-b''_{pq}}\right) \leqslant \log D\big(\widetilde{B}\big)$$
$$+ c_1\min(p-1,q-1)(p+q-2)\left(\frac{\log\max|b_{ij}-b''_{ij}|}{\overline{\log}\,\overline{\log}\max|b_{ij}-b''_{ij}|} + \min(p-1,q-1)\right)$$
$$+ c_2\min(p-1,q-1)\frac{(p-1)(q-1)}{\overline{\log}((p-1)(q-1))}\big(\overline{\log}\,\overline{\log}\max|b_{ij}-b''_{ij}|$$
$$+\min(p-1,q-1)\big) \leqslant \log D\big(\widetilde{B}\big) + c_1(\min(p,q)-1)(p+q-2)$$
$$\times\left(\frac{\log a}{\overline{\log}\,\overline{\log} a} + \min(p,q)\right) + c_2(\min(p,q)-1)\frac{pq}{\overline{\log}(pq))}\big(\overline{\log}\,\overline{\log} a + \min(p,q)\big).$$

Пусть число $k$ и наборы индексов $i_1, i_2, \dots, i_k$ и $j_1, j_2, \dots, j_k$, удовлетворяющие условиям $1 \leqslant k \leqslant \min(p,q)$, $2 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant p$, $2 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_k \leqslant q$, выбраны таким образом, что выполняется равенство

$$D\big(\widetilde{B}\big) = \left|\det\begin{pmatrix} b_{i_1,j_1}-b''_{i_1,j_1} & b_{i_1,j_2}-b''_{i_1,j_2} & \dots & b_{i_1,j_k}-b''_{i_1,j_k} \\ b_{i_2,j_1}-b''_{i_2,j_1} & b_{i_2,j_2}-b''_{i_2,j_2} & \dots & b_{i_2,j_k}-b''_{i_2,j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i_k,j_1}-b''_{i_k,j_1} & b_{i_k,j_2}-b''_{i_k,j_2} & \dots & b_{i_k,j_k}-b''_{i_k,j_k} \end{pmatrix}\right|.$$

Тогда, применяя лемму 3, получаем

$$
D\begin{pmatrix} b_{22}-b''_{22} & b_{23}-b''_{23} & \dots & b_{2q}-b''_{2q}\\ b_{32}-b''_{32} & b_{33}-b''_{33} & \dots & b_{3q}-b''_{3q}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{p2}-b''_{p2} & b_{p3}-b''_{p3} & \dots & b_{pq}-b''_{pq}\end{pmatrix}
$$
$$
=\left|\det\begin{pmatrix} (b_{i_1,j_1}-b'_{i_1,j_1})+(b'_{i_1,j_1}-b''_{i_1,j_1}) & \dots & (b_{i_1,j_k}-b'_{i_1,j_k})+(b'_{i_1,j_k}-b''_{i_1,j_k})\\ (b_{i_2,j_1}-b'_{i_2,j_1})+(b'_{i_2,j_1}-b''_{i_2,j_1}) & \dots & (b_{i_2,j_k}-b'_{i_2,j_k})+(b'_{i_2,j_k}-b''_{i_2,j_k})\\ \dots & \dots & \dots\\ (b_{i_k,j_1}-b'_{i_k,j_1})+(b'_{i_k,j_1}-b''_{i_k,j_1}) & \dots & (b_{i_k,j_k}-b'_{i_k,j_k})+(b'_{i_k,j_k}-b''_{i_k,j_k})\end{pmatrix}\right|
$$
$$
\leqslant k^{2k}D\begin{pmatrix} b_{i_1,j_1}-b'_{i_1,j_1} & b_{i_1,j_2}-b'_{i_1,j_2} & \dots & b_{i_1,j_k}-b'_{i_1,j_k}\\ b_{i_2,j_1}-b'_{i_2,j_1} & b_{i_2,j_2}-b'_{i_2,j_2} & \dots & b_{i_2,j_k}-b'_{i_2,j_k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{i_k,j_1}-b'_{i_k,j_1} & b_{i_k,j_2}-b'_{i_k,j_2} & \dots & b_{i_k,j_k}-b'_{i_k,j_k}\end{pmatrix}.
$$

Перенумерацией строк и столбцов последней матрицы можно добиться того, что при некотором $s$, $1\leqslant s\leqslant k$, будет справедливо равенство

$$
D\begin{pmatrix} b_{i_1,j_1}-b'_{i_1,j_1} & b_{i_1,j_2}-b'_{i_1,j_2} & \dots & b_{i_1,j_k}-b'_{i_1,j_k}\\ b_{i_2,j_1}-b'_{i_2,j_1} & b_{i_2,j_2}-b'_{i_2,j_2} & \dots & b_{i_2,j_k}-b'_{i_2,j_k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{i_k,j_1}-b'_{i_k,j_1} & b_{i_k,j_2}-b'_{i_k,j_2} & \dots & b_{i_k,j_k}-b'_{i_k,j_k}\end{pmatrix}
$$
$$
=\left|\det\begin{pmatrix} b_{i_1,j_1}-b'_{i_1,j_1} & b_{i_1,j_2}-b'_{i_1,j_2} & \dots & b_{i_1,j_s}-b'_{i_1,j_s}\\ b_{i_2,j_1}-b'_{i_2,j_1} & b_{i_2,j_2}-b'_{i_2,j_2} & \dots & b_{i_2,j_s}-b'_{i_2,j_s}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{i_s,j_1}-b'_{i_s,j_1} & b_{i_s,j_2}-b'_{i_s,j_2} & \dots & b_{i_s,j_s}-b'_{i_s,j_s}\end{pmatrix}\right|.
$$

Обозначим через $B_j$, $j=1,j_1,j_2,\dots,j_s$, вектор-столбец $(b_{i_1,j}, b_{i_2,j},\dots,b_{i_s,j})^T$ высоты $s$, а через $B'_j$, $j=j_1,j_2,\dots,j_s$, вектор-столбец $\left(b'_{i_1,j},b'_{i_2,j},\dots,b'_{i_s,j}\right)^T$ высоты $s$. Тогда

$$
\det\begin{pmatrix} b_{i_1,j_1}-b'_{i_1,j_1} & b_{i_1,j_2}-b'_{i_1,j_2} & \dots & b_{i_1,j_s}-b'_{i_1,j_s}\\ b_{i_2,j_1}-b'_{i_2,j_1} & b_{i_2,j_2}-b'_{i_2,j_2} & \dots & b_{i_2,j_s}-b'_{i_2,j_s}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{i_s,j_1}-b'_{i_s,j_1} & b_{i_s,j_2}-b'_{i_s,j_2} & \dots & b_{i_s,j_s}-b'_{i_s,j_s}\end{pmatrix}
$$

$$= \det \begin{pmatrix} b_{i_1,j_1} - b_{i_1,1}\frac{b_{1,j_1}}{b_{11}} & b_{i_1,j_2} - b_{i_1,1}\frac{b_{1,j_2}}{b_{11}} & \dots & b_{i_1,j_s} - b_{i_1,1}\frac{b_{1,j_s}}{b_{11}} \\ b_{i_2,j_1} - b_{i_2,1}\frac{b_{1,j_1}}{b_{11}} & b_{i_2,j_2} - b_{i_2,1}\frac{b_{1,j_2}}{b_{11}} & \dots & b_{i_2,j_s} - b_{i_2,1}\frac{b_{1,j_s}}{b_{11}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i_s,j_1} - b_{i_s,1}\frac{b_{1,j_1}}{b_{11}} & b_{i_s,j_2} - b_{i_s,1}\frac{b_{1,j_2}}{b_{11}} & \dots & b_{i_s,j_s} - b_{i_s,1}\frac{b_{1,j_s}}{b_{11}} \end{pmatrix}$$

$$= \det\left(B_{j_1} - \frac{b_{1,j_1}}{b_{11}}B_1, B_{j_2} - \frac{b_{1,j_2}}{b_{11}}B_1, \dots, B_{j_s} - \frac{b_{1,j_s}}{b_{11}}B_1\right)$$

$$= \det(B_{j_1}, B_{j_2}, \dots, B_{j_s}) - \det\left(\frac{b_{1,j_1}}{b_{11}}B_1, B_{j_2}, \dots, B_{j_s}\right)$$

$$- \det\left(B_{j_1}, \frac{b_{1,j_2}}{b_{11}}B_1, B_{j_3}, \dots, B_{j_s}\right) - \dots - \det\left(B_{j_1}, B_{j_2}, \dots, B_{j_{s-1}}, \frac{b_{1,j_s}}{b_{11}}B_1\right)$$

$$= \frac{1}{b_{11}}\Big(b_{11}\det(B_{j_1}, B_{j_2}, \dots, B_{j_s}) - b_{1,j_1}\det(B_1, B_{j_2}, \dots, B_{j_s})$$

$$+ b_{1,j_2}\det(B_1, B_{j_1}, B_{j_3}, \dots, B_{j_s}) - \dots (-1)^s b_{1,j_s}\det\big(B_1, B_{j_1}, \dots, B_{j_{s-1}}\big)\Big).$$

С другой стороны, используя формулу разложения определителя по первой строке, получаем

$$\det\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,j_1} & b_{1,j_2} & \dots & b_{1,j_s} \\ b_{i_1,1} & b_{i_1,j_1} & b_{i_1,j_2} & \dots & b_{i_1,j_s} \\ b_{i_2,1} & b_{i_2,j_1} & b_{i_2,j_2} & \dots & b_{i_2,j_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i_s,1} & b_{i_s,j_1} & b_{i_s,j_2} & \dots & b_{i_s,j_s} \end{pmatrix} = b_{11}\det(B_{j_1}, B_{j_2}, \dots, B_{j_s})$$

$$- b_{1,j_1}\det(B_1, B_{j_2}, \dots, B_{j_s}) + b_{1,j_2}\det(B_1, B_{j_1}, B_{j_3}, \dots, B_{j_s}) - \dots$$
$$(-1)^s b_{1,j_s}\det\big(B_1, B_{j_1}, \dots, B_{j_{s-1}}\big).$$

Следовательно,

$$D\begin{pmatrix} b_{i_1,j_1} - b'_{i_1,j_1} & b_{i_1,j_2} - b'_{i_1,j_2} & \dots & b_{i_1,j_k} - b'_{i_1,j_k} \\ b_{i_2,j_1} - b'_{i_2,j_1} & b_{i_2,j_2} - b'_{i_2,j_2} & \dots & b_{i_2,j_k} - b'_{i_2,j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i_k,j_1} - b'_{i_k,j_1} & b_{i_k,j_2} - b'_{i_k,j_2} & \dots & b_{i_k,j_k} - b'_{i_k,j_k} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{b_{11}}\left|\det\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,j_1} & b_{1,j_2} & \dots & b_{1,j_s} \\ b_{i_1,1} & b_{i_1,j_1} & b_{i_1,j_2} & \dots & b_{i_1,j_s} \\ b_{i_2,1} & b_{i_2,j_1} & b_{i_2,j_2} & \dots & b_{i_2,j_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i_s,1} & b_{i_s,j_1} & b_{i_s,j_2} & \dots & b_{i_s,j_s} \end{pmatrix}\right| \leqslant \frac{D(B)}{b_{11}} = \frac{D(A)}{a}.$$

Применяя полученные оценки, имеем

$$l_2\Big(x_2^{b_{22}-b''_{22}}x_3^{b_{23}-b''_{23}}\dots x_q^{b_{2q}-b''_{2q}}, x_2^{b_{32}-b''_{32}}x_3^{b_{33}-b''_{33}}\dots x_q^{b_{3q}-b''_{3q}}, \dots,$$

$$x_2^{b_{p2}-b''_{p2}} x_3^{b_{p3}-b''_{p3}} \dots x_q^{b_{pq}-b''_{pq}}\Big) \leqslant \log \frac{D(A)}{a} + 2\min(p,q)\log\min(p,q) + c_1(\min(p,q)-1)(p+q-2)\left(\frac{\log a}{\overline{\overline{\log}}\,\overline{\overline{\log}} a} + \min(p,q)\right) + c_2(\min(p,q)-1)\frac{pq}{\overline{\overline{\log}}(pq))}\left(\overline{\overline{\log}}\,\overline{\overline{\log}} a + \min(p,q)\right).$$

Таким образом,

$$l_2\left(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_q^{a_{1q}}, x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \dots x_q^{a_{2q}}, \dots, x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \dots x_q^{a_{pq}}\right) \leqslant l_2\left(x_1^{b_{11}} x_2^{b_{12}} \dots x_q^{b_{1q}}, x_1^{b_{21}} x_2^{b''_{22}} \dots x_q^{b''_{2q}}, \dots, x_1^{b_{p1}} x_2^{b''_{p2}} \dots x_q^{b''_{pq}}\right) + l_2\Big(x_2^{b_{22}-b''_{22}} x_3^{b_{23}-b''_{23}} \dots x_q^{b_{2q}-b''_{2q}}, x_2^{b_{32}-b''_{32}} x_3^{b_{33}-b''_{33}} \dots x_q^{b_{3q}-b''_{3q}}, \dots,$$

$$x_2^{b_{p2}-b''_{p2}} x_3^{b_{p3}-b''_{p3}} \dots x_q^{b_{pq}-b''_{pq}}\Big) + (p+q+1) + p \leqslant \log a + c_1(p+q)\frac{\log a}{\overline{\overline{\log}}\,\overline{\overline{\log}} a} + c_2\frac{pq}{\overline{\overline{\log}}(pq)}\overline{\overline{\log}}\,\overline{\overline{\log}} a + \log\frac{D(A)}{a} + 2\min(p,q)\log\min(p,q) + c_1(\min(p,q)-1)(p+q)\left(\frac{\log a}{\overline{\overline{\log}}\,\overline{\overline{\log}} a} + \min(p,q)\right) + c_2(\min(p,q)-1)\frac{pq}{\overline{\overline{\log}}(pq))}\left(\overline{\overline{\log}}\,\overline{\overline{\log}} a + \min(p,q)\right) + 2(p+q)$$

$$\leqslant \log D(A) + c_1\min(p,q)(p+q)\left(\frac{\log a}{\overline{\overline{\log}}\,\overline{\overline{\log}} a} + \min(p,q)\right) + \big(2(p+q) - c_1(p+q)\min(p,q)\big) + c_2\min(p,q)\frac{pq}{\overline{\overline{\log}}(pq)}\left(\overline{\overline{\log}}\,\overline{\overline{\log}} a + \min(p,q)\right) + \left(2\min(p,q)\log\min(p,q) - c_2\frac{pq}{\overline{\overline{\log}}(pq)}\min(p,q)\right) \leqslant \log D(A) + c_1\min(p,q)(p+q)\left(\frac{\log a}{\overline{\overline{\log}}\,\overline{\overline{\log}} a} + \min(p,q)\right) + c_2\min(p,q)\frac{pq}{\overline{\overline{\log}}(pq)}\left(\overline{\overline{\log}}\,\overline{\overline{\log}} a + \min(p,q)\right).$$

Лемма 4 доказана.

Из леммы 4 непосредственно следует

**Теорема 2.** *Пусть последовательность целочисленных матриц* $A(n) = \big(a_{ij}(n)\big)$ *размера* $p(n) \times q(n)$ *при* $n \to \infty$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{p+q}{(\log\log D(A))^{1/2}} \to 0.$$

*Тогда*

$$l_2\left(x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\dots x_q^{a_{1q}}, x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\dots x_q^{a_{2q}}, \dots, x_1^{a_{p1}}x_2^{a_{p2}}\dots x_q^{a_{pq}}\right) \leqslant \log D(A) + o\big(\log D(A)\big).$$

**Замечание.** В соответствии с леммой 4 в формулировке теоремы 2 можно указать более слабые ограничения (при этом более сложного вида), при которых справедлива верхняя оценка вида $\log D(A) + o\big(\log D(A)\big)$. Кроме того, саму оценку в лемме 4 можно немного улучшить. Однако наиболее важным представляется содержащееся в теореме 2 утверждение о том, что при любых фиксированных (и даже слаборастущих) размерах матрицы, задающей систему функций, верхняя оценка сложности вычисления этой системы асимптотически совпадает с нижней оценкой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Кнут Д. Е.** Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. М.: Мир, 1977.

2. **Кочергин В. В.** Об аддитивных вычислениях систем целочисленных линейных форм // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 1993, № 6. С. 97–101.

3. **Кочергин В. В.** О сложности вычисления пары одночленов от двух переменных // Дискретная математика. 2005. Т. 17, вып. 4. С. 116–142.

4. **Лупанов О. Б.** Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14. М.: Наука, 1965. С 31–110.

5. **Севидж Д. Е.** Сложность вычислений. М.: Изд.-во Факториал. 1998.

6. **Сидоренко А. Ф.** Сложность аддитивных вычислений семейств целочисленных линейных форм // Записки научных семинаров ЛОМИ. Т. 105. Л.: Наука, 1981. С. 53–61.

7. **Morgenstern J.** Note on a lower bound of the linear complexity of the fast Fourier transform // J. Assoc. Comput. Mach. 1973. V. 20, N 2. P. 305–306.

8. **Pippenger N.** On evaluation of powers and monomials // SIAM J. Comput. 1980. V. 9, N 2. P. 230–250.

Адрес автора:

МГУ, мех.-мат. факультет,
Воробьёвы горы,
119992 Москва,
Россия.
E-mail: vvkoch@yandex.ru,
koch@procenter.net.ru

Статья поступила
19 января 2006 г.