Дискретная математика

том 6 выпуск 2 * 1994

УДК 519.714

О вычислении наборов степеней

© 1994 г. В. В. Кочергин

Исследуется известная задача [4, разд. 4.6.3, упр. 32] о сложности вычисления наборов значений $x^{n_1},\dots,x^{n_m}$ для различных наборов показателей $(n_1,\dots,n_m)$. Пусть $l(x^{n_1},\dots,x^{n_m})$ — наименьшее число операций умножения, достаточное для вычисления набора степеней $x^{n_1},\dots,x^{n_m}$, а $L(n_1,\dots,n_m) = \max l(x^{k_1},\dots,x^{k_m})$, где максимум берется по всем наборам $(k_1,\dots,k_m)$, $1 \leqslant k_i \leqslant n_i$, $i = 1,\dots,m$.

Доказано, что если последовательность наборов вида $\tilde{n} = (n_1,\dots,n_m)$ удовлетворяет условию

$$m + \log_2(\max\{n_1,\dots,n_m\}) = o\left(\frac{\log_2\prod_{i=1}^m n_i}{\log_2\log_2\prod_{i=1}^m n_i}\right),$$

то

$$L(n_1,\dots,n_m) \sim \frac{\log_2\prod_{i=1}^m n_i}{\log_2\log_2\prod_{i=1}^m n_i},$$

причем

$$l(x^{k_1},\dots,x^{k_m}) \sim \frac{\log_2\prod_{i=1}^m k_i}{\log_2\log_2\prod_{i=1}^m k_i}$$

для почти всех наборов $(k_1,\dots,k_m)$ таких, что $1 \leqslant k_i \leqslant n_i$, $i = 1,\dots,m$.

1. Введение

В данной работе исследуется задача вычисления набора значений $x^{n_1},\dots,x^{n_m}$, где $n_i \in \mathbf{N}$, $i = 1,\dots,m$.

Обозначим через $l(x^{n_1},\dots,x^{n_m})$ наименьшее число операций умножения, достаточное для вычисления набора степеней $x^{n_1},\dots,x^{n_m}$. В дальнейшем о сложности вычисления степеней будем говорить на языке схем из двувходовых элементов умножения (аналогично [1]). Таким образом, $l(x^{n_1},\dots,x^{n_m})$ — минимум сложностей $l(S)$ всех схем из двувходовых элементов умножения, вычисляющих набор степеней $x^{n_1},\dots,x^{n_m}$, где сложность $l(S)$ схемы S — это число используемых в схеме S элементов умножения.

Положим $L(n_1,\dots,n_m) = \max l(x^{k_1},\dots,x^{k_m})$, где максимум берется по всем наборам $(k_1,\dots,k_m)$ таким, что $1 \leqslant k_i \leqslant n_i$, $i = 1,\dots,m$.

В 1939 г. Брауэром [2] была установлена асимптотическая формула для вычисления одной степени

$$l(x^n) \sim L(n) \sim \log n,$$

а также была получена верхняя оценка

$$l(x^n) \leqslant L(n) \leqslant \log n + \frac{\log n}{\log\log n} + O\left(\frac{\log n \log\log\log n}{(\log\log n)^2}\right).$$

Заметим, что здесь и всюду в дальнейшем $\log$ означает $\log_2$.

В 1960 г. Эрдеш [3] показал, что для почти всех n эта оценка величины $l(x^n)$ асимптотически неулучшаема, и, следовательно,

$$L(n) = \log n + \frac{\log n}{\log\log n} + o\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right).$$

В 1969 г. Кнут [4, раздел 4.6.3, упр. 32] поставил задачу о вычислении наборов степеней $x^{n_1}, \ldots, x^{n_m}$ для различных наборов $\tilde{n} = (n_1, \ldots, n_m)$.

В 1976 г. Яо [5] доказал, что

$$l(x^{n_1}, \ldots, x^{n_m}) \sim L(n_1, \ldots, n_m) \sim \log\left(\max_{i=1,\ldots,m} n_i\right)$$

для каждого фиксированного m.

Здесь и далее полагаем, что набор $\tilde{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ – s-й член некоторой последовательности наборов, удовлетворяющих условию $\prod_{i=1}^{m(s)} n_i(s) \to \infty$ при $s \to \infty$.

В 1980 г. Пиппенджер [6] получил результат, из которого следует, что если справедливо соотношение

$$m + \log n = o\left(\frac{\log n^m}{\log\log n^m}\right),$$

то

$$L(\underbrace{n, \ldots, n}_{m}) \sim \frac{\log n^m}{\log\log n^m}.$$

В данной работе будет доказано, что при выполнении условия

$$m + \log\left(\max_{i=1,\ldots,m} n_i\right) = o\left(\frac{\log\prod_{i=1}^m n_i}{\log\log\prod_{i=1}^m n_i}\right)$$

справедливо асимптотическое равенство

$$L(n_1, \ldots, n_m) \sim \frac{\log\prod_{i=1}^m n_i}{\log\log\prod_{i=1}^m n_i}.$$

Более того, если выполняется условие

$$m + \log\left(\max_{i=1,\ldots,m} n_i\right) = o\left(\frac{\log\prod_{i=1}^m n_i}{\log\log\prod_{i=1}^m n_i}\right),$$

то для почти всех наборов $(k_1, \ldots, k_m)$ таких, что $1 \leqslant k_i \leqslant n_i$, $i = 1, \ldots, m$, справедливо асимптотическое равенство

$$l(x^{k_1}, \ldots, x^{k_m}) \sim \frac{\log\prod_{i=1}^m k_i}{\log\log\prod_{i=1}^m k_i}.$$

2. Верхняя оценка

Сопоставим произвольному набору $\tilde{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ (не ограничивая общности в дальнейшем будем считать, что $n_1 < \ldots < n_m$) таблицу $T_{\tilde{n}}$ из m булевых строк, вообще говоря, неодинаковой длины, где i-я строка является двоичной записью числа n_i (младший разряд расположен в первом столбце).

Обозначим через $H(T_{\tilde{n}})$ число элементов в таблице $T_{\tilde{n}}$, т. е.

$$H(T_{\tilde{n}}) = \sum_{i=1}^{m}]\log(n_i + 1)[.$$

Доопределим таблицу $T_{\tilde{n}}$ нулями до матрицы размера $m \times]\log(n_m + 1)[$. Полученную матрицу обозначим через $A(T_{\tilde{n}})$.

Сведем задачу о верхней оценке сложности вычисления набора степеней $x^{n_1}, \ldots, x^{n_m}$ к задаче о верхней оценке сложности реализации вентильными схемами специального вида (0–1-вентильными схемами) матрицы $A(T_{\tilde{n}})$ (необходимые определения даны в [7]).

Лемма 1. $l(x^{n_1}, \ldots, x^{n_m}) \leqslant L_{\mathrm{BC}}(A(T_{\tilde{n}})) +]\log(n_m + 1)[- 1$.

Доказательство. Преобразуем произвольную минимальную 0–1-вентильную схему, реализующую матрицу $A(T_{\tilde{n}})$, в схему из двувходовых элементов умножения следующим образом.

(1) Построим подсхему, последовательно вычисляющую $x, x^2, \ldots, x^{2^{]\log(n_m+1)[-1}}$ (потребуется $]\log(n_m + 1)[- 1$ элемент умножения).

(2) Соединим выход элемента умножения, реализующего степень $x^{2^{j-1}}$ с j-м входом 0–1-вентильной схемы, $j = 1, \ldots,]\log(n_m + 1)[$.

(3) Пронумеруем все невходовые вершины вентильной схемы так, чтобы не оказалось путей от вершин с большими номерами к вершинам с меньшими. В порядке возрастания номеров заменим каждую такую вершину вместе со всеми входящими в нее вентилями-ребрами (а их в силу минимальности вентильной схемы должно быть не менее двух) на цепочку элементов умножения, как показано на рис. 1.

(4) Выходом с номером i схемы из элементов умножения, $i = 1, \ldots, m$, будет выход последнего элемента умножения подсхемы, полученной преобразованием по правилу 2 i-го выхода (с входящими в него вентилями) исходной вентильной схемы.

Очевидно, что i-й выход полученной схемы из элементов умножения вычисляет x^{n_i}, $i = 1, \ldots, m$, а сложность этой схемы не превосходит величины $L_{\mathrm{BC}}(A(T_{\tilde{n}})) +]\log(n_m + 1)[- 1$. Лемма 1 доказана.

Обозначим $N = N(\tilde{n}) = \prod_{i=1}^{m} n_i$.

Лемма 2. *Справедлива оценка*

$$l(x^{n_1}, \ldots, x^{n_m}) \leqslant \frac{\log N}{\log\log N}\left(1 + O\left(\left(\frac{\log\log\log N}{\log\log N}\right)^{1/2}\right)\right) + O(m + \log n_m).$$

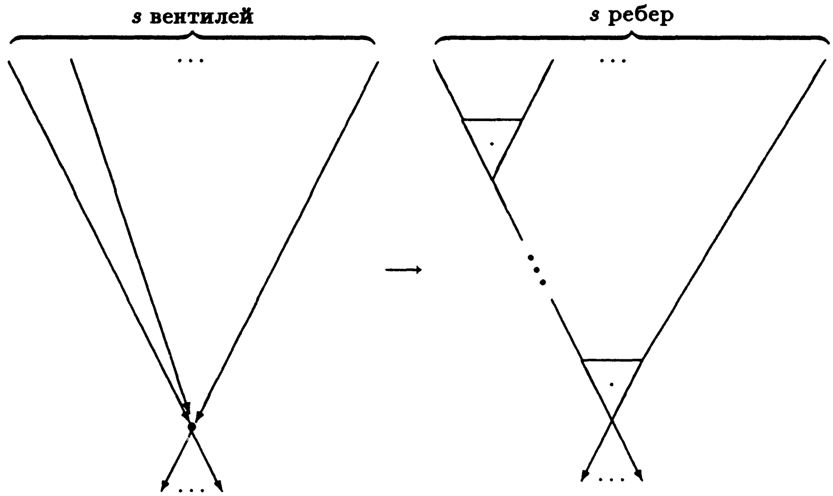

Рис. 1

Доказательство. Используя лемму 1, а также лемму 2 и теорему 3 из [7], получаем, что

$$\begin{aligned} l(x^{n_1},\dots,x^{n_m}) &\leqslant \frac{\log H(T_{\tilde n})}{\log\log H(T_{\tilde n})}\left(1+O\left(\left(\frac{\log\log\log H(T_{\tilde n})}{\log\log H(T_{\tilde n})}\right)^{1/2}\right)\right)+O(m+\log n_m)\\ &\leqslant \left(\frac{\log\prod_{i=1}^m n_i}{\log\log\prod_{i=1}^m n_i}+m\right)\left(1+O\left(\left(\frac{\log\log\log\prod_{i=1}^m(n_i+1)}{\log\log\prod_{i=1}^m n_i}\right)^{1/2}\right)\right)\\ &\quad+O(m+\log n_m)\\ &= \frac{\log N}{\log\log N}\left(1+O\left(\left(\frac{\log\log\log N}{\log\log N}\right)^{1/2}\right)\right)+O(m+\log n_m). \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

3. Нижняя оценка

Введем следующие обозначения: пусть

$$\mathfrak{M}(n_1,\dots,n_m)=\{(k_1,\dots,k_m)\mid k_1<\dots<k_m;\ k_i\in\mathbf{N},\ 1\leqslant k_i\leqslant n_i,\ i=1,\dots,m\};$$

$V(n_1,\dots,n_m;D)$ — число наборов $k_1,\dots,k_m\in\mathfrak{M}(n_1,\dots,n_m)$ с $l(x^{k_1},\dots,x^{k_m})\leqslant D$;
$v(n_1,\dots,n_m;D)$ — число различных минимальных схем сложности не более D, реализующих наборы степеней $x^{k_1},\dots,x^{k_m}$, где $(k_1,\dots,k_m)\in\mathfrak{M}(n_1,\dots,n_m)$;
$v'(n_1,\dots,n_m;d)$ — число различных минимальных схем сложности d, реализующих наборы степеней $x^{k_1},\dots,x^{k_m}$, где $(k_1,\dots,k_m)\in\mathfrak{M}(n_1,\dots,n_m)$.

Лемма 3. *Справедлива оценка*

$$|\mathfrak{M}(n_1,\dots,n_m)|\geqslant\frac{n_1(n_2-1)\dots(n_m-m+1)}{m!}.$$

Лемма 4 (см. [8]). *Справедлива оценка*

$$V(n_1,\dots,n_m;D)\leqslant(3(D+1))^{D+m+1}.$$

Доказательство. Каждая минимальная схема из d пронумерованных в произвольном порядке двувходовых элементов умножения, реализующая набор степеней $x^{k_1},\dots,x^{k_m}$, где $(k_1,\dots,k_m)\in\mathfrak{M}(n_1,\dots,n_m)$, полностью определяется списком из d пар, каждая из которых показывает, что подается на оба входа элемента умножения с соответствующим номером (подается либо x, либо выход элемента умножения с другим номером), а также указанием тех m из d элементов умножения, выходы которых являются выходами схемы.

Заметим, что все $d!$ списков, соответствующих всем возможным способам нумерации элементов умножения одной минимальной схемы, различны, и разным минимальным схемам соответствуют различные списки. Поэтому

$$v'(n_1,\dots,n_m;d)\leqslant\frac{(d+1)^{2d}C_d^m}{d!}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}V(n_1,\dots,n_m;D)&\leqslant v(n_1,\dots,n_m;D)\leqslant 1+\sum_{d=1}^{D}v'(n_1,\dots,n_m;d)\\&\leqslant (D+1)\frac{(D+1)^{2D}C_D^m}{D!}=\frac{(D+1)^{2(D+1)}C_D^m}{D!}.\end{aligned}$$

Используя неравенство $n!\geqslant(n/3)^n$, получаем, что

$$V(n_1,\dots,n_m;D)\leqslant(3(D+1))^{D+1}D^m\leqslant(3(D+1))^{D+m+1}.$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть $m=o(\log N/\log\log N)$. Тогда найдется функция $g(n)>0$ такая, что*

(1) $g(n)\to 0$ *при* $n\to\infty$;

(2) $V(n_1,\dots,n_m;(1-g(N))\log N/\log\log N)/|\mathfrak{M}(n_1,\dots,n_m)|\to 0$ *при* $N\to\infty$.

Доказательство. Так как $m=o(\log N/\log\log N)$, найдется такая функция $f(n)$, что $f(n)\to 0$ при $n\to\infty$ и при всех достаточно больших N выполняется неравенство $m\leqslant f(N)\log N/\log\log N$.

Оценим сверху величину $\log(V(n_1,\dots,n_m;D)/|\mathfrak{M}(n_1,\dots,n_m)|)$:

$$\begin{aligned}\log\frac{V(n_1,\dots,n_m;D)}{|\mathfrak{M}(n_1,\dots,n_m)|}&\leqslant\log\frac{(3(D+1))^{D+m+1}}{n_1(n_2-1)\dots(n_m-m+1)/m!}\\&\leqslant\log\frac{(3(D+1))^{D+m+1}m!}{(n_1/1)(n_2/2)\dots(n_m/m)}\\&=(D+m+1)(\log(D+1)+\log 3)-\log N+2\log(m!).\end{aligned}$$

Положим $g(n) = \max(\sqrt{f(n)}, (\log\log m)^{-1/2})$. Подставляя вместо D величину $(1-g(N))\log N/\log\log N$, получаем, что

$$\begin{aligned}
&\log\frac{V(n_1,\dots,n_m;(1-g(N))\log N/\log\log N)}{|\mathfrak{M}(n_1,\dots,n_m)|}\\
\leqslant\ &\left((1-g(N))\frac{\log N}{\log\log N}+m+1\right)\left(\log\left((1-g(N))\frac{\log N}{\log\log N}+1\right)+\log 3\right)\\
&-\log N+2m\log m\\
=\ &\left(\frac{\log N}{\log\log N}-g(N)\frac{\log N}{\log\log N}+O(m)\right)(\log\log N-\log\log\log N+O(1))\\
&-\log N+O(m\log m)\\
\leqslant\ &-g(N)\log N+O\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)+O\left(g(N)\frac{\log N\log\log\log N}{\log\log N}\right)\\
&+O(m\log\log N)+O(m\log m)\\
\leqslant\ &-g(N)\log N+O\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)+O\left(g(N)\frac{\log N\log\log\log N}{\log\log N}\right)+O(f(N)\log N).
\end{aligned}$$

Последнее выражение стремится к $-\infty$ при $N\to\infty$, так как выполняются следующие соотношения:

$$g(N)>0;\quad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{g(N)\log\log N}=0;\quad \lim_{N\to\infty}\frac{f(N)}{g(N)}=0.$$

Лемма 5 доказана.

4. Объединение верхней и нижней оценок

Теорема 1. *Пусть $m+\log n_m = o(\log N/\log\log N)$. Тогда справедливо асимптотическое равенство*

$$L(n_1,\dots,n_m)\sim\frac{\log N}{\log\log N}.$$

Доказательство. Верхняя оценка непосредственно следует из леммы 2. Рассмотрим оценку снизу. Так как $V(n_1,\dots,n_m;L(n_1,\dots,n_m)) = |\mathfrak{M}(n_1,\dots,n_m)|$, в силу леммы 5 выполняется неравенство

$$L(n_1,\dots,n_m)\geqslant(1-g(N))\frac{\log N}{\log\log N}$$

для некоторой функции $g(n)$ такой, что $g(n)\to 0$ при $n\to\infty$. Теорема 1 доказана.

Значение величины $l(x^{n_1},\dots,x^{n_m})$ может, вообще говоря, сильно отличаться от значения $L(n_1,\dots,n_m)$. Например, при $m =]\log n_1[$, с одной стороны,

$$l(x^{n_1},x^{n_1+1},\dots,x^{n_1+m-1})\sim\log n_1+m\sim 2\log n_1,$$

а с другой, так как $\log N\sim(\log n_1)^2$ и $m+\log(n_1+m-1) = o(\log N/\log\log N)$, справедливо соотношение

$$L(n_1,n_1+1,\dots,n_1+m-1)\sim\frac{\log N}{\log\log N}\sim\frac{(\log n_1)^2}{2\log\log n_1}.$$

Однако, для величины $l(x^{n_1},\dots,x^{n_m})$ справедливо следующее утверждение.

Пусть $m+\log n_m = o(\log N/\log\log N)$ и $K=\prod_{i=1}^m k_i$. Тогда для почти всех наборов $(k_1,\dots,k_m)\in\mathfrak{M}(n_1,\dots,n_m)$ справедливо асимптотическое равенство

$$l(x^{k_1},\dots,x^{k_m})\sim\frac{\log K}{\log\log K},$$

Сформулируем это утверждение более строго.

Обозначим через $U(n_1,\dots,n_m;h)$, где $h(n)$ – некоторая функция, число наборов $(k_1,\dots,k_m)\in\mathfrak{M}(n_1,\dots,n_m)$ таких, что

$$\left|l(x^{k_1},\dots,x^{k_m})-\frac{\log K}{\log\log K}\right|<h(K)\frac{\log K}{\log\log K}.$$

Теорема 2. *Пусть* $m+\log n_m = o(\log N/\log\log N)$. *Тогда найдется функция* $h(n)>0$ *такая, что*

(1) $h(n)\to 0$ *при* $n\to\infty$;

(2) $U(n_1,\dots,n_m;h)/|\mathfrak{M}(n_1,\dots,n_m)|\to 1$ *при* $N\to\infty$.

Доказательство. В силу леммы 2 найдутся положительные c_1 и c_2 такие, что для любого набора $(k_1,\dots,k_m)$, $k_1<\dots<k_m$, справедливо неравенство

$$l(x^{k_1},\dots,x^{k_m})\leqslant\frac{\log K}{\log\log K}+c_1\frac{\log K(\log\log\log K)^{1/2}}{(\log\log K)^{3/2}}+c_2(m+\log k_m).$$

Так как $m+\log n_m = o(\log N/\log\log N)$, найдется функция $f(n)$ такая, что $f(n)\to 0$ при $n\to\infty$ и при всех достаточно больших N выполняется неравенство $m+\log n_m\leqslant f(N)\log N/\log\log N$. Без ограничения общности можно считать, что функция $f(n)$ невозрастающая.

Пусть $g(n)$ – функция, о существовании которой говорится в лемме 5. Тогда найдется $c_3>0$ такое, что для всех достаточно больших n выполняются неравенства

$$0\leqslant\frac{1+c_1}{1-g(n)-c_2f(n)}\leqslant c_3.$$

Далее, если набор $(k_1,\dots,k_m)$ удовлетворяет условию

$$l(x^{k_1},\dots,x^{k_m})\geqslant(1-g(N))\frac{\log N}{\log\log N},$$

то справедливы соотношения

$$\begin{aligned}(1-g(N))\frac{\log N}{\log\log N} &\leqslant \frac{\log K}{\log\log K}+c_1\frac{\log K(\log\log\log K)^{1/2}}{(\log\log K)^{3/2}}+c_2(m+\log k_m)\\ &\leqslant (1+c_1)\frac{\log K}{\log\log K}+c_2f(N)\frac{\log N}{\log\log N},\end{aligned}$$

и, следовательно, если N достаточно велико,

$$\frac{\log N}{\log\log N}\leqslant c_3\frac{\log K}{\log\log K}.$$

Положим $h_0(n)=\max\left(g(n),c_1(\log\log\log n/\log\log n)^{1/2}+c_2c_3f(n)\right)$. Теперь определим функцию $h(n)$ таким образом: $h(n)=\max_{i\geqslant n}h_0(i)$. Очевидно, что

(1) $h(n)$ — невозрастающая функция;

(2) $h(n) \to 0$ при $n \to \infty$;

(3) $h(n) \geqslant h_0(n) \geqslant g(n)$.

Докажем, что функция $h(n)$ удовлетворяет и условию 2 теоремы. Действительно, если для набора $(k_1, \ldots, k_m) \in \mathfrak{M}(n_1, \ldots, n_m)$ выполняется неравенство

$$l(x^{k_1}, \ldots, x^{k_m}) \geqslant (1 - h(N))\frac{\log N}{\log\log N},$$

то тем более выполняется неравенство

$$l(x^{k_1}, \ldots, x^{k_m}) \geqslant (1 - g(N))\frac{\log N}{\log\log N},$$

и поэтому, учитывая, что функция $f(n)$ невозрастающая, получаем, что

$$\begin{aligned} l(x^{k_1}, \ldots, x^{k_m}) &\leqslant \frac{\log K}{\log\log K} + c_1\frac{\log K(\log\log\log K)^{1/2}}{(\log\log K)^{3/2}} + c_2(m + \log k_m) \\ &\leqslant \frac{\log K}{\log\log K}\left(1 + c_1\left(\frac{\log\log\log K}{\log\log K}\right)^{1/2}\right) + c_2 f(N)\frac{\log N}{\log\log N} \\ &\leqslant \frac{\log K}{\log\log K}\left(1 + c_1\left(\frac{\log\log\log K}{\log\log K}\right)^{1/2}\right) + c_2 c_3 f(K)\frac{\log K}{\log\log K} \\ &\leqslant \frac{\log K}{\log\log K}(1 + h(K)). \end{aligned}$$

Следовательно, так как для любого набора $(k_1, \ldots, k_m) \in \mathfrak{M}(n_1, \ldots, n_m)$ справедливо неравенство

$$(1 - h(K))\frac{\log K}{\log\log K} \leqslant (1 - h(N))\frac{\log N}{\log\log N},$$

находим, что

$$\begin{aligned} \frac{U(n_1, \ldots, n_m; h)}{|\mathfrak{M}(n_1, \ldots, n_m)|} &\geqslant \frac{|\mathfrak{M}(n_1, \ldots, n_m)| - V(n_1, \ldots, n_m; (1 - h(N))\log N/\log\log N)}{|\mathfrak{M}(n_1, \ldots, n_m)|} \\ &\geqslant 1 - \frac{V(n_1, \ldots, n_m; (1 - g(N))\log N/\log\log N)}{|\mathfrak{M}(n_1, \ldots, n_m)|}. \end{aligned}$$

В силу выбора функции $g(n)$ (см. лемму 5), получаем, что

$$\frac{U(n_1, \ldots, n_m; h)}{|\mathfrak{M}(n_1, \ldots, n_m)|} \to 1$$

при $N \to \infty$. Теорема 2 доказана.

Добавление при корректуре. После написания данной статьи, С. Б. Гашковым и автором этой работы показано [9], что для вычисления набора степеней $x^{n_1}, \ldots, x^{n_m}$ в любом случае достаточно

$$\log(\max n_i) + \frac{\log N}{\log\log N}(1 + o(1)) + O(m)$$

операций умножения.

Список литературы

1. Кочергин В. В. О сложности вычислений в конечных абелевых группах. *ДАН СССР* (1991) **317**, №2, 291–294.
2. Brauer A. On addition chains. *Bull. Amer. Math. Soc.* (1939) **45**, 736–739.
3. Erdős P. Remarks on number theory III. On addition chains. *Acta Arithm.* (1960) **6**, 77–81.
4. Кнут Д. Е. *Искусство программирования для ЭВМ, т.* 2. Мир, Москва, 1977.
5. Yao A. C.-C. On the evaluation of powers. *SIAM J. Comput.* (1976) **5**, 100–103.
6. Pippenger N. On evaluation of powers and monomials. *SIAM J. Comput.* (1980) **9**, 230–250.
7. Кочергин В. В. О сложности вычислений в конечных абелевых группах. *Математические вопросы кибернетики* (1992) №4, 177–216.
8. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования. *Проблемы кибернетики* (1965) №14, 31–110.
9. Гашков С. Б., Кочергин В. В. Об аддитивных цепочках векторов, вентильных схемах и сложности вычисления степеней *Методы дискретного анализа в теории графов и сложности* (1992) №52, 22–40.

Статья поступила 15.05.92.