



LÓGICA FUZZY

José Manuel Molina López
Grupo de Inteligencia
Artificial Aplicada

CONTENIDO

Introducción

Conjuntos borrosos.

Operaciones básicas

Lógica borrosa

Inferencia borrosa

- Método Mamdani
- Método Sugeno

INTRODUCCIÓN

Inspirado en modo de pensar de una persona, los términos requieren una función que represente la incertidumbre: **abiertos**.

Una persona no necesita para realizar inferencias un conocimiento muy exacto, se maneja con símbolos vagos sobre la realidad.

ORIGEN Y EVOLUCIÓN

Problema básico:

- Las cosas no son o blancas o negras
- Pocos problemas están bien definidos
- Las cosas cambian con el tiempo

1965 Zadeh; Conjuntos Borrosos

1973 Zadeh; Controladores Borrosos

1974 Mamdani; Control de Cementeras

1987 Hitachi; Frenado Metro Sendai

1989 Creación de LIFE

BORROSIDAD

La lógica borrosa es un superconjunto de la lógica booleana.

- Con la lógica booleana las proposiciones son ciertas o falsas
- Con lógica borrosa los valores son “parcialmente ciertos”

Fuzzy=Borroso=Difuso...

DIFFERENCIA FUZZY - PROBABILIDAD

Medida de vaguedad, no error

Ej.: Sea **X**: todos los líquidos, **L**: líquidos potables, $L \subset X$

Supongamos encontramos botellas, A y B

- A: **pertenencia** a L de 0.9
- B: **probabilidad** de L de 0.9
- ¿Cual elegirías?

DIFFERENCIA FUZZY - PROBABILIDAD

Pertenencia 0.9 significa muy similar a líquidos potables

- Podría ser agua de un pozo

Probabilidad 0.9 es diferente:

- 90% potable and 10% no potable (dañino, incluso venenoso)

DIFFERENCIA FUZZY - PROBABILIDAD

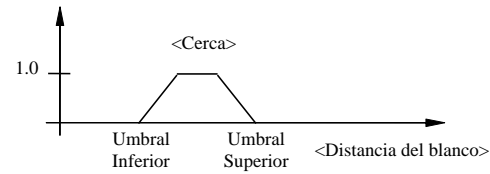
Efecto **evidencia**: al abrir la botella, observamos cerveza en A, lejía en B

- La probabilidad de B en L cae a cero, pero la pertenencia de A no se modifica

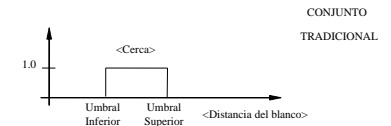
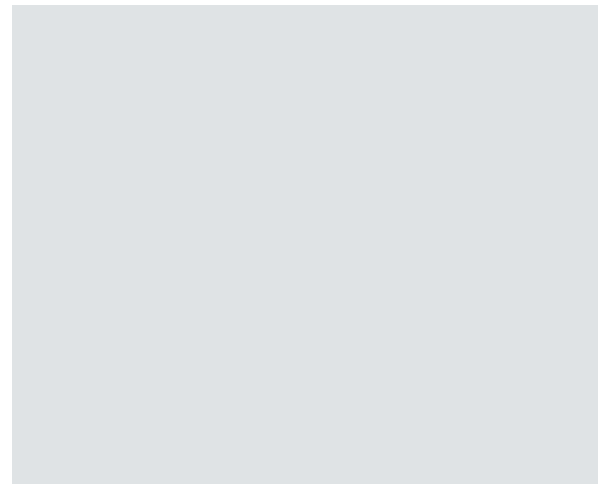
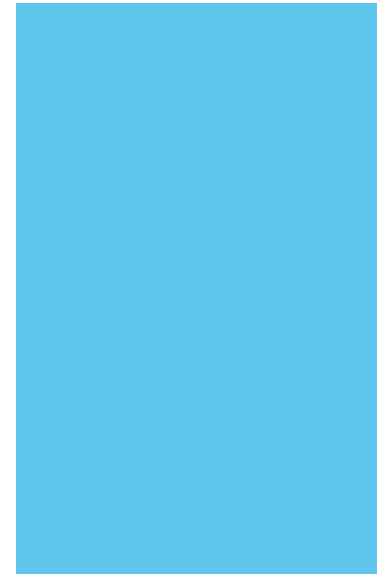
La probabilidad mide lo verosímil de un suceso futuro, la borrosidad caracteriza la ambigüedad de sucesos actuales

CONJUNTOS BORROSOS

Un conjunto borroso representa el grado de verdad o posibilidad de que un concepto sea verdadero.



CONJUNTO BORROSO



CONJUNTO TRADICIONAL

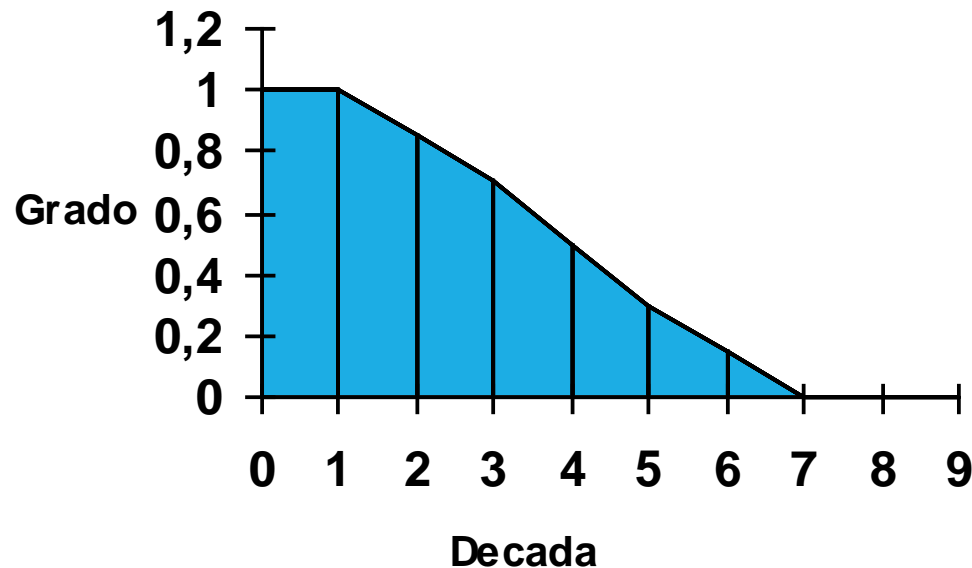
CONJUNTOS BORROSOS

“Universo del discurso”: U

Un conjunto borroso X en U se caracteriza con la función de pertenencia $\mu_x: U \rightarrow [0,1]$.

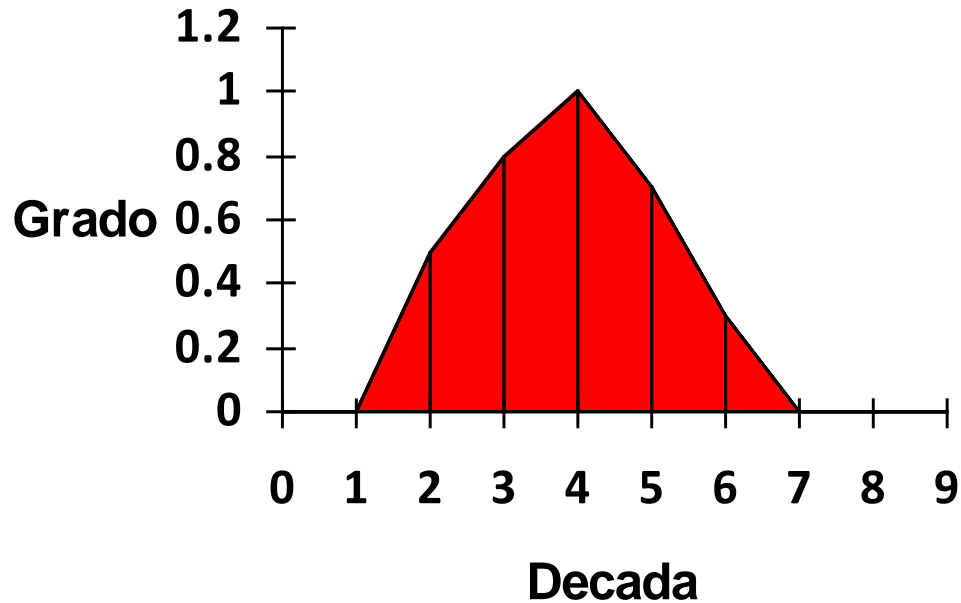
- Representación con pares: $X = \{u, \mu_x(u)\}$
- Notación conjunto discreto
 - $X = \mu_x(u_1)/u_1 + \dots + \mu_x(u_n)/u_n$
 - '+' operador unión, '/' pertenencia a X de u_i

CONJUNTOS BORROSOS



- X_1 , 'generación joven':
 $\{1.0/0 + 1.0/1 + 0.85/2 + 0.7/3 + 0.5/4 + 0.3/5 + 0.15/6 + 0.0/7 + 0.0/8 + 0.0/9\}$

CONJUNTOS BORROSOS



- X_2 , 'generación mediana edad' :
 $\{0.0/0+0.0/1+0.5/2+0.8/3+1.0/4+0.7/5+0.3/6+0.0/7+0.0/8+0.0/9\}$

OPERADORES BORROSOS

Soporte: elementos de U con pertenencia mayor que cero

- Soporte X_2 : $\{2,3,4,5,6\}$
- Conjunto compacto: soporte finito

Singleton: Conjunto con un solo punto en U con pertenencia 1 y resto 0

Corte α de A : $x \in A \mid \mu_{xA}(x) > \alpha$

- Ej.: X_2
 - corte $\alpha = 0.6$: $\{3,4,5\}$
 - corte $\alpha = 0.4$: $\{2,3,4,5\}$

OPERADORES BORROSOS

Igualdad: $A=B$ si $\mu_A(x)=\mu_B(x)$ para $x\in X$

Complemento: A' $\mu_{A'}(x)=1-\mu_A(x)$ para $x\in X$
(equivale a función lógica 'NO')

- $\mu_{A'}(x) = 0.2/2 + 0.4/3 + 0.8/4$

Subconjunto: $A\subseteq B$ sii $\mu_A(x)\leq\mu_B(x)$ para $x\in X$

Subconjunto propio: $A\subset B$ sii $\mu_A(x)\leq\mu_B(x)$ y
 $\mu_A(x)<\mu_B(x)$ para algún $x\in X$

OPERADORES BORROSOS

Unión: $A \cup B$

- $\mu_{A \cup B}(x) = \vee(\mu_A(x), \mu_B(x))$ para $x \in X$
- \vee operador disyunción (función 'O')

Intersección: $A \cap B$

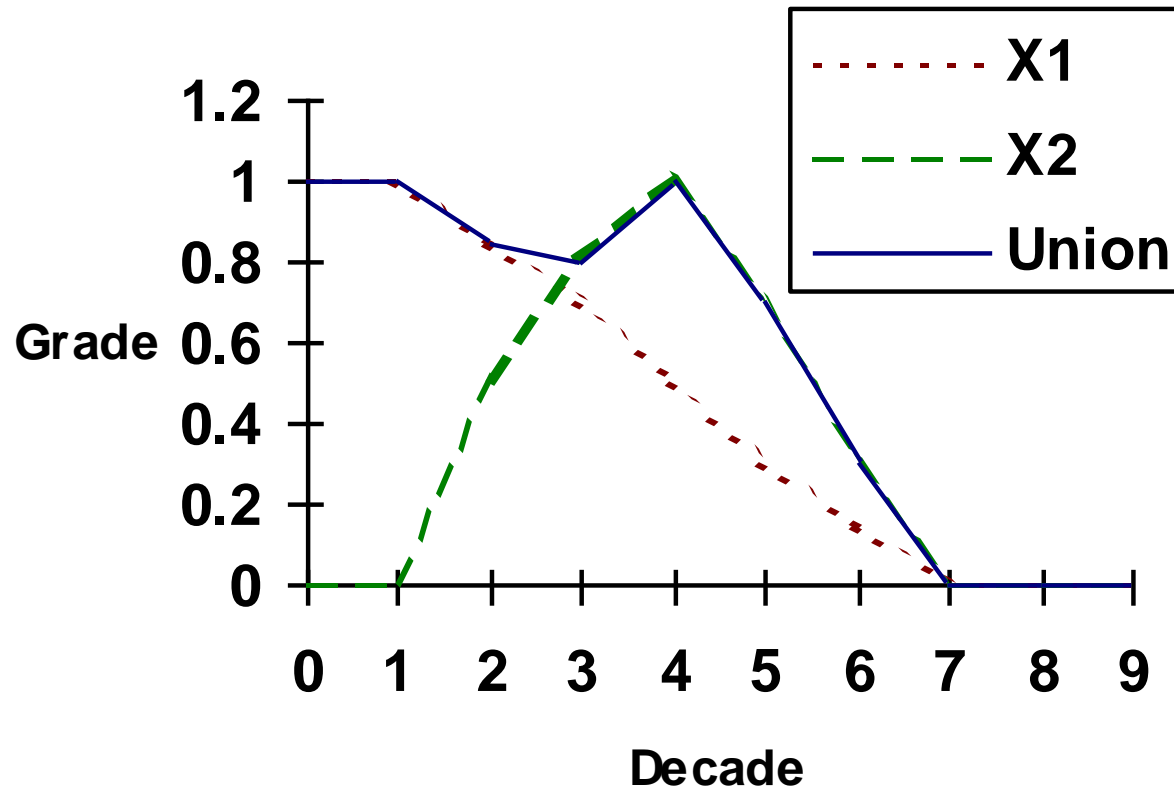
- $\mu_{A \cap B}(x) = \wedge(\mu_A(x), \mu_B(x))$ para $x \in X$
- \wedge operador conjunción (función 'Y')

Producto cartesiano: AB

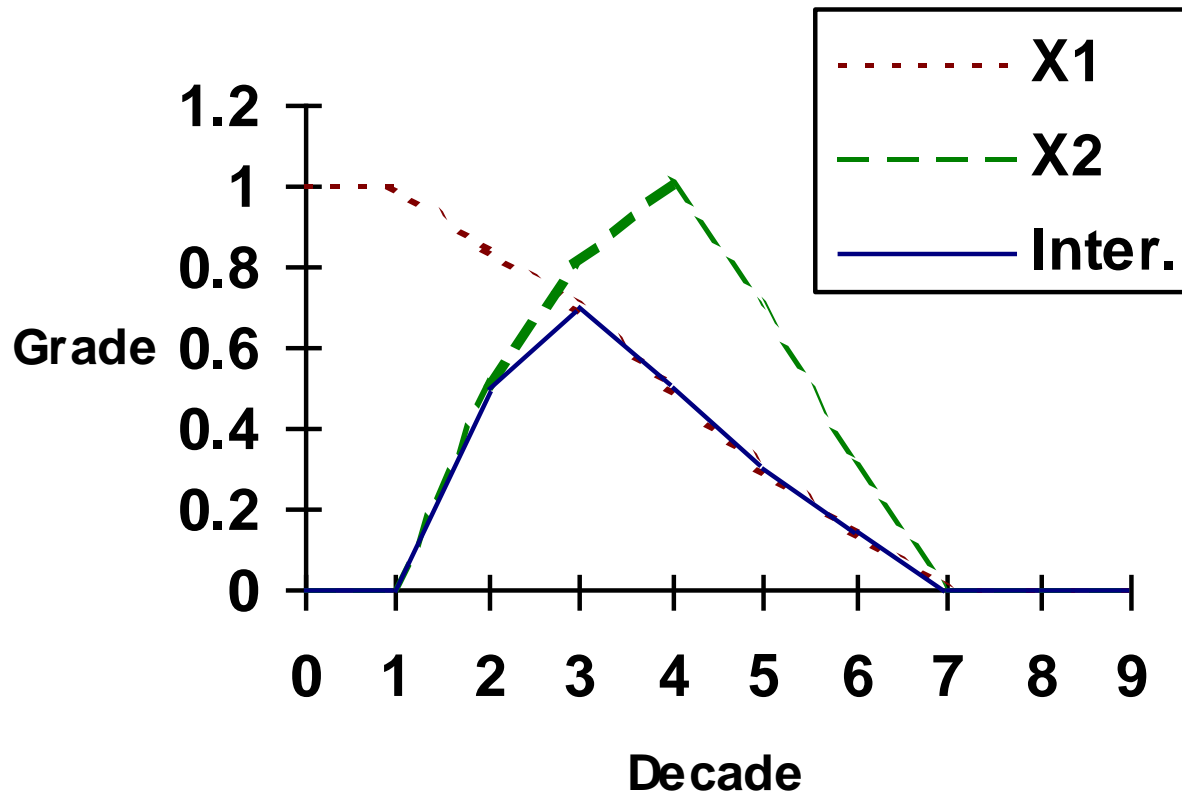
$$\mu_{AB}(x) = \mu_A(x) \mu_B(x)$$

Potencia: A^N $\mu_{A^N}(x) = (\mu_A(x))^N$

EJEMPLO UNIÓN



INTERSECCIÓN

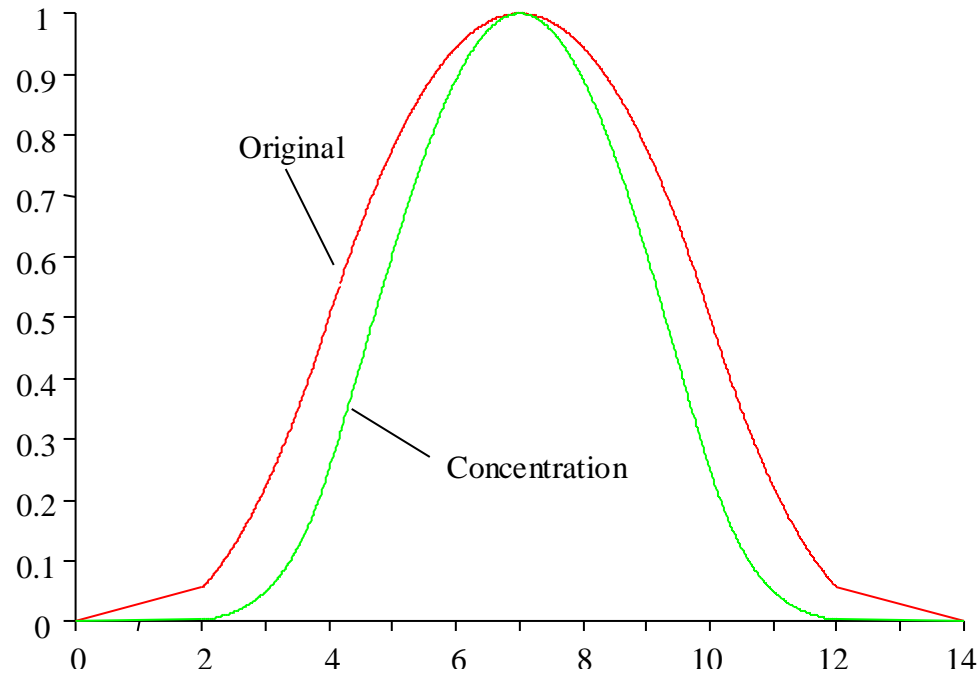


MODIFICADOR “CONCENTRACIÓN”

CON(A) $\mu_{\text{CON(A)}} = (\mu_A(x))^2$ Reduce la pertenencia de elementos de baja μ

- **TALL =**
{0.125/5+0.5/6+0.875/6.5+1/7+1/7.5+1/8}
- **VERY TALL =**
{0.0165/5+0.25/6+0.76/6.5+1/7+1/7.5+1/8} (VERY TALL=TALL²)

MODIFICADOR “CONCENTRACIÓN”

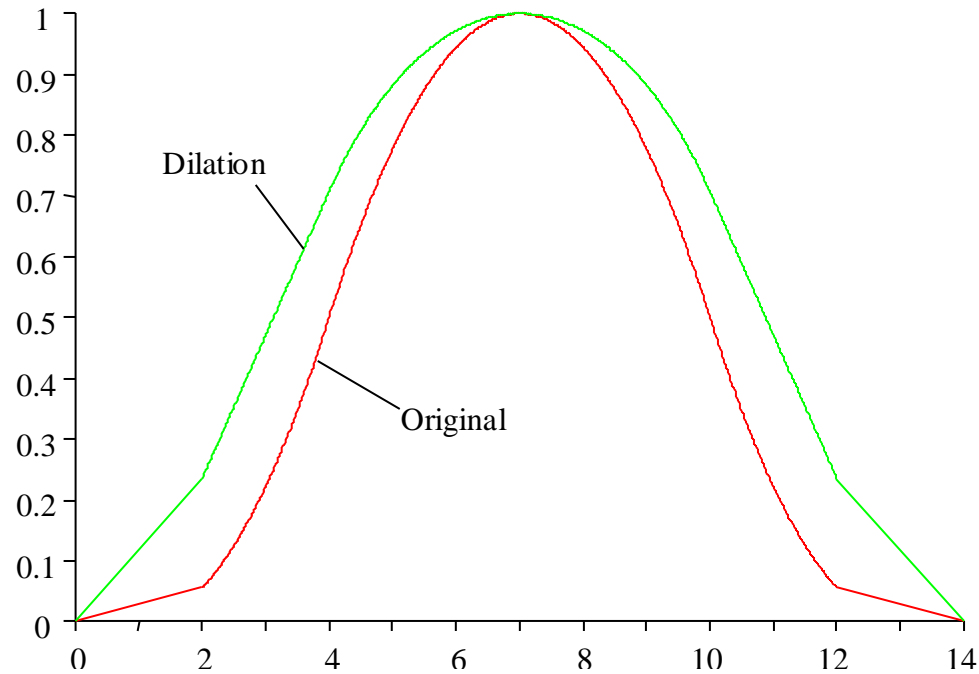


MODIFICADOR “DILUCIÓN”

DIL(A) $\mu_{DIL(A)} = (\mu_A(x))^{0.5}$ Incrementa la pertenencia de elementos de baja μ

- **TALL=**
{0.125/5+0.5/6+0.875/6.5+1/7+1/7.5+1/8}
- **MORE or LESS TALL =**
{0.354/5+0.707/6+0.935/6.5+1/7+1/7.5+1/8} (LESS TALL=TALL^{0.5})

MODIFICADOR “DILUCIÓN”



LÓGICA FUZZY

Generalización de las lógicas multivaluadas,
con $n = \infty$

Diferentes operadores para la disyunción, la conjunción y la negación de proposiciones borrosas, dan lugar a diferentes lógicas con diferentes propiedades

FUNCIÓN DE PERTENENCIA Y VALOR DE VERDAD

En lógica clásica se equiparan

- El valor de verdad v de una proposición $Q(x)$, y la *función característica* del conjunto de elementos que verifican esa proposición $P_Q(x)$

$$v(Q(x)) = P_Q(x)$$

- $v(\text{Mamifero}(\text{León})) = 1$
- $v(\text{Mamifero}(\text{Rana})) = 0$

FUNCIÓN DE PERTENENCIA Y VALOR DE VERDAD

De forma similar, en Lógica borrosa

- El valor de verdad (v) de una proposición B enunciada sobre cierto término x , con B asociado a un concepto borroso: grado de pertenencia de x al conjunto B

$$v(B(x)) = \mu_B(x)$$

- $f(\text{Fiebre}(38^\circ)) = 0.2$
- $f(\text{Joven}(22)) = 1$

FUNCIONES DE VERDAD EN LÓGICA CLÁSICA (BINARIA)

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	F

a	b	$f_{\neg}(a)$	$f_{\wedge}(a,b)$	$f_{\vee}(a,b)$	$f_{\rightarrow}(a,b)$	$f_{\leftrightarrow}(a,b)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

FUNCIONES DE NEGACIÓN

Propiedades

- Límite clásico: $f_{\neg}(1) = 0; f_{\neg}(0) = 1$
- Involución: $f_{\neg}(f_{\neg}(a)) = a$
- Monotonía: $a \leq b \Rightarrow f_{\neg}(a) \geq f_{\neg}(b)$

Funciones

- Lukasiewicz : $f_{\neg}(a) = 1 - a$

- Sugeno:
$$f_{\neg}(a) = \frac{1 - a}{1 - \beta a}$$

- Yager:
$$f_{\neg}(a) = (1 - a^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}$$

FUNCIONES DE CONJUNCIÓN

(T-NORMAS, ★)

Propiedades

- Conmutativa: $f_{\wedge}(a,b) = f_{\wedge}(b,a)$
- Asociativa: $f_{\wedge}(a, f_{\wedge}(b,c)) = f_{\wedge}(f_{\wedge}(a,b), c)$
- Elemento neutro: $f_{\wedge}(a, 1) = a$
- Monotonía: $a \leq b \Rightarrow f_{\wedge}(a,c) \leq f_{\wedge}(b,c)$

Algunas funciones

- Mínimo $f_{\wedge}(a,b) = \min(a,b)$
- Producto $f_{\wedge}(a,b) = a \cdot b$
- Diferencia acotada: $f_{\wedge}(a,b) = \max(0, a + b - 1)$
- Conjunción drástica: $f_{\wedge}(a,b) = f_{\wedge}^{\min}(a,b) = \begin{cases} b & a = 1 \\ a & b = 1 \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$
- Otras...

FUNCIONES DE DISYUNCIÓN (T-CONORMAS Ó S-NORMAS, \oplus)

Propiedades

- Conmutativa: $f_{\vee}(a,b) = f_{\vee}(b,a)$
- Asociativa: $f_{\vee}(a, f_{\vee}(b,c)) = f_{\vee}(f_{\vee}(a,b), c)$
- Elemento neutro: $f_{\vee}(a, 0) = a$
- Monotonía: $a \leq b \Rightarrow f_{\vee}(a, c) \leq f_{\vee}(b, c)$

Algunas funciones

- máximo : $f_{\vee}(a,b) = \max(a,b)$
- Suma algebraica: $f_{\vee}(a,b) = a + b - a \cdot b$
- Suma acotada: $f_{\vee}(a,b) = \min(1, a + b)$
- Disyunción drástica:
$$f_{\vee}(a,b) = f_{\vee}^{\max}(a,b) = \begin{cases} b & a = 0 \\ a & b = 0 \\ 1 & \text{otros} \end{cases}$$

NORMAS Y CONORMAS CONJUGADAS

Norma	Conorma
$\min(a,b)$	$\max(a,b)$
$a \cdot b$	$a + b - a \cdot b$
$\max(0, a + b - 1)$	$\min(1, a + b)$

DEL CONJUNTO BORROSO A LA PROPOSICIÓN

Los conceptos se definen mediante variables lingüísticas: Temperatura

Cada Variable tiene sus etiquetas: Baja, Normal, Alta

Las etiquetas pueden tener modificadores

Con las etiquetas se forman proposiciones

Y sobre ellas se infiere

ETIQUETAS LINGÜÍSTICAS

La Teoría de Conjuntos Difusos puede utilizarse para representar expresiones lingüísticas que se utilizan para describir conjuntos.

Los conjuntos difusos son capaces de captar la vaguedad inherente a la categorización humana, basada en etiquetas lingüísticas

- veloz, bajo, caro, frío...

Una *variable lingüística* es aquella variable cuyos valores son etiquetas lingüísticas definidas sobre un universo de discurso

- Rapidez = {veloz, medio, lento}
- Ambiente = {frío, fresco, confortable, cálido, caluroso}

VARIABLES LINGÜÍSTICAS

Formalmente, una variable lingüística se define como: (X, LX, UX, M_x)

- X : nombre simbólico, ej. *Ambiente*
- LX : etiquetas lingüísticas, ej. {frío, fresco, confortable, cálido, caluroso}
- UX : Dominio, universo sobre el que se aplica la variable, ej. *Temperatura ambiente*
- M_x : Interpretación en términos numéricos

Asigna a cada etiqueta $LX_i \in LX$ un conjunto borroso

Ej. $M_x(\text{frío}) = F_{\text{frío}}$

MODIFICADORES LINGÜÍSTICOS

Se usan modificadores lingüísticos
(adverbios tales como *muy*, *bastante*, *poco*,
casi, etc.).

Se representan mediante operaciones sobre
la función de pertenencia:

- *Mucho (muy cierto)*: $\mu(x)^2$
- *Más o menos*: $\mu(x)^{1/2}$
- *Extremadamente*: $\mu(x)^3$
- *Ligeramente*: $\mu(x)^{1/3}$
- *En cierta manera*: Más o menos y No ligeramente x

PROPOSICIONES BORROSAS

Su aspecto sintáctico es el mismo que en la lógica de predicados,

- particularidad de los modificadores

Su semántica se basa en la teoría de conjuntos borrosos

Proposición borrosa atómica: “ x es A ”

donde “es” se interpreta como “tiene la propiedad”

PROPOSICIONES BORROSAS

Compuestas mediante negación, conjunción y disyunción de predicados

- Operaciones de conjuntos asociadas
- Sobre los predicados se pueden utilizar los modificadores lingüísticos

Ejemplos de proposiciones borrosas:

- Tengo fiebre muy alta y el número de leucocitos es muy elevado
- Mi coche corre mucho y su consumo es moderado
- ...

RAZONAMIENTO BORROSO

Generalización de los métodos de inferencia de la lógica binaria (silogismo clásico)

En la práctica, se suele implementar mediante el uso de reglas Si_Entonces borrosas.

- Si <Antecedente> Entonces <Consecuente>

INFERENCIA BORROSA

Se basa en la noción de modus ponens generalizado

Y en la consideración de las reglas como relaciones borrosas, y la inferencia como composición de relaciones borrosas

El significado de la regla *IF x is A THEN y is B* se representa como una relación R en $X \times Y$ con la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_R(x,y) = \mu_A(x) * \mu_B(y)$$

donde $*$ es un *operador de inferencia borrosa*

INFERENCIA BORROSA

Modus Ponens Clásico

Premisa 1: $A \rightarrow B$

Premisa 2: A

Conclusión: B

R1: Si x es A Entonces y es B

H1: x es A

C: y es B

Modus Ponens Generalizado

Premisa 1: $A \rightarrow B$

Premisa 2: A'

Conclusión: B'

R1: Si x es A Entonces y es B

H1: x es A'

C: y es B'

donde A , B , A' y B' son conjuntos borrosos.

OPERADORES DE INFERENCIA BORROSA

Basados en $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

- Kleene-Dienes: $\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \max(1 - \mu_Q(x), \mu_B(y))$
- Lukasiewicz : $\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \min(1, 1 - \mu_Q(x) + \mu_B(y))$

Basado en $A \rightarrow B \equiv A \wedge B$

- Mamdani: $\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$
- Producto: $\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_A(x) * \mu_B(y)$

Otros operadores

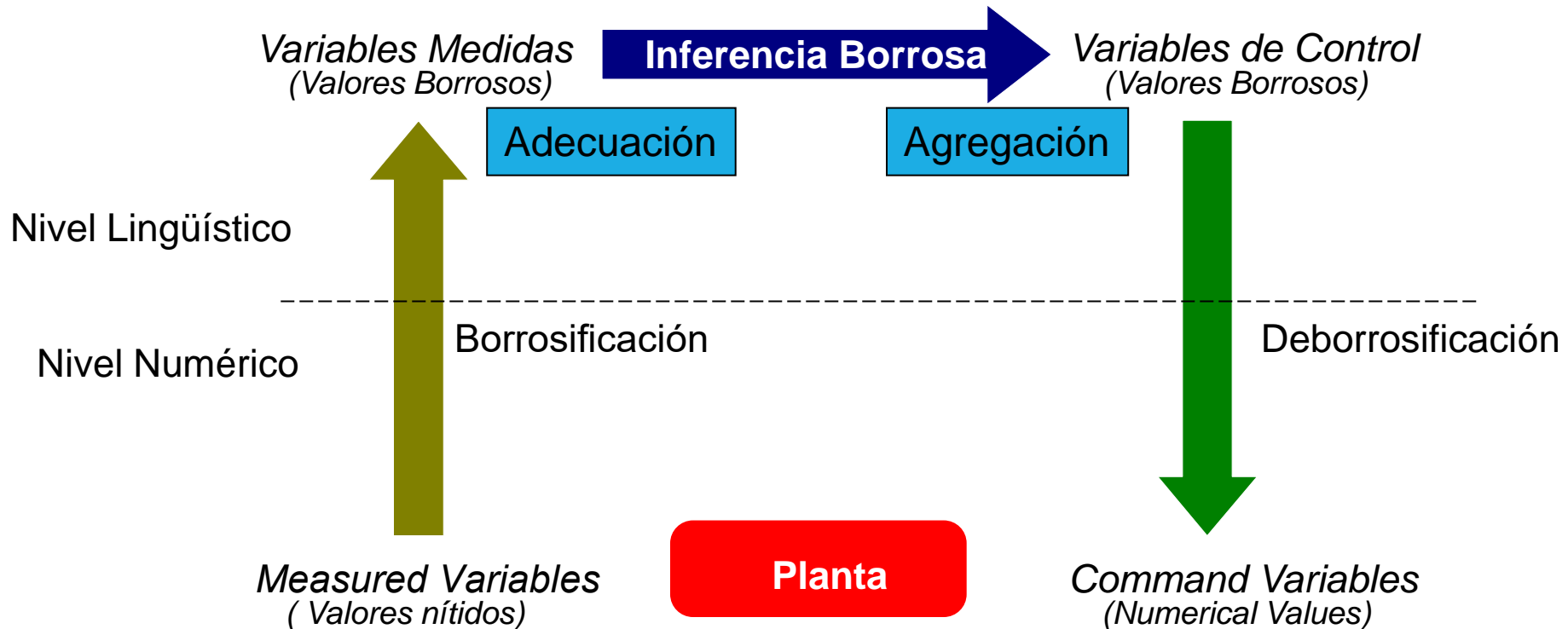
- Zadeh
- Stochastic
- Goguen
- Sharp
- Gödel

INFERENCIA BORROSA

En general el razonamiento borroso consta de los siguientes pasos:

1. Borrosificar: Pasar de valor numérico a borroso (fuzzify)
2. Medir la adecuación de las premisas de las reglas frente a los hechos
3. Realizar la inferencia borrosa: obtener la conclusión de cada regla teniendo en cuenta su adecuación.
4. Agregar las conclusiones individuales de cada regla para obtener conclusiones globales
5. Deborrosificar: Pasar de valores borrosos a numéricos (defuzzify)

INFERENCIA BORROSA



MÉTODOS DE INFERENCIA BORROSA

Métodos directos

- Método directo de Mamdani.
- Método de Takagi & Sugeno.
- Método simplificado.

MÉTODO DIRECTO DE MAMDANI

Este método emplea reglas de inferencia con la siguiente estructura:

IF (x is A) and (y is B) THEN (z is C)

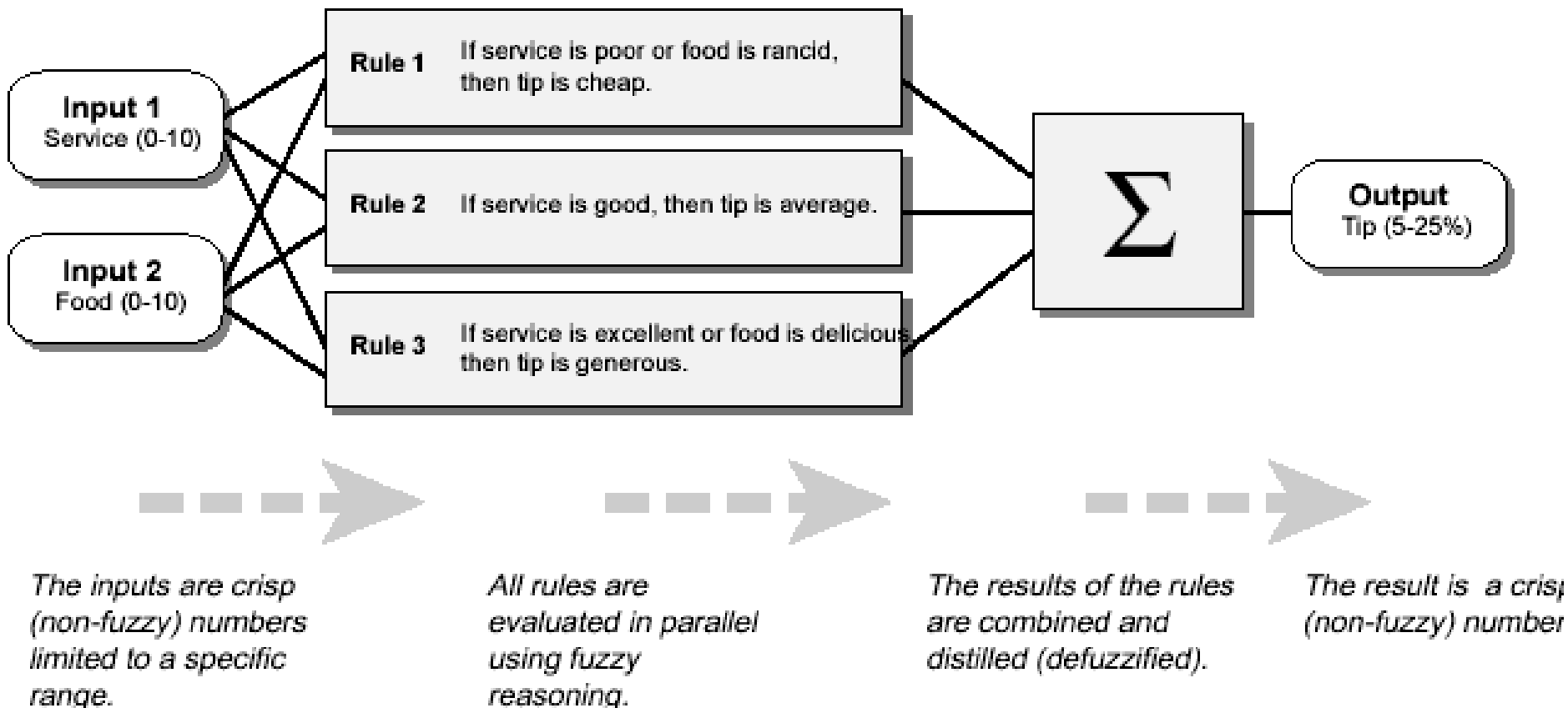
IF (x is A) or (y is B) THEN (z is C)

donde A , B y C son conjuntos difusos

- IF la *temperatura habitación* es “*un poco alta*” Y la *humedad* es “*bastante*” THEN *aire acondicionado* es “*fuerte*”.

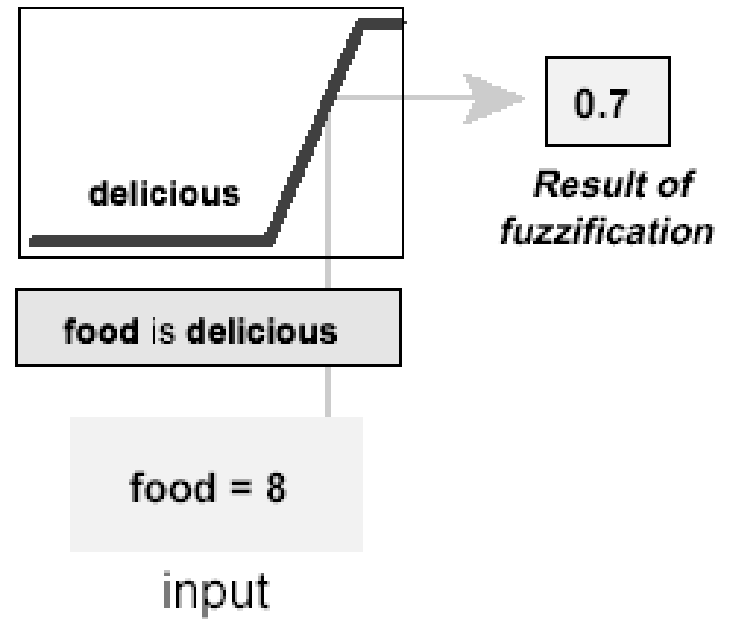
RAZONAMIENTO BORROSO: EJEMPLO

Dinner for two
a 2 input, 1 output, 3 rule system



PASO 1: “BORROSIFICAR” (FUZZIFY)

*1. Fuzzify
inputs.*



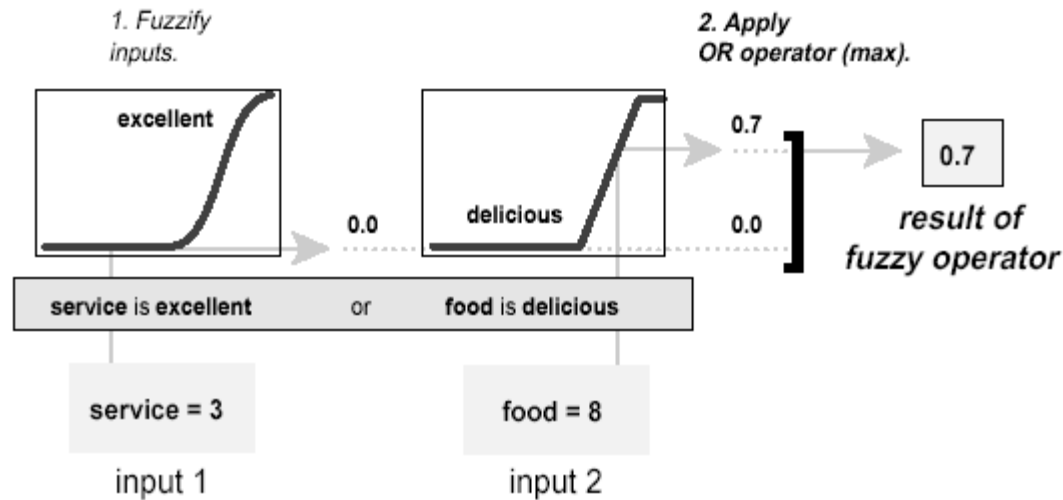
PASO 2: MEDIR LA ADECUACIÓN DE LAS REGLAS A LOS HECHOS

Aplicando un operador de *conjunción* o *disyunción*, según sea la naturaleza del antecedente (and/or)

a) x_1 is A_1 and ... and x_m is A_m
 $\alpha = \mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{A_m}(x_m)$

b) x_1 is A_1 or ... or x_m is A_m
 $\alpha = \mu_{A_1}(x_1) \vee \mu_{A_2}(x_2) \vee \dots \vee \mu_{A_m}(x_m)$

PASO 2: MEDIR LA ADECUACIÓN DE LAS REGLAS A LOS HECHOS



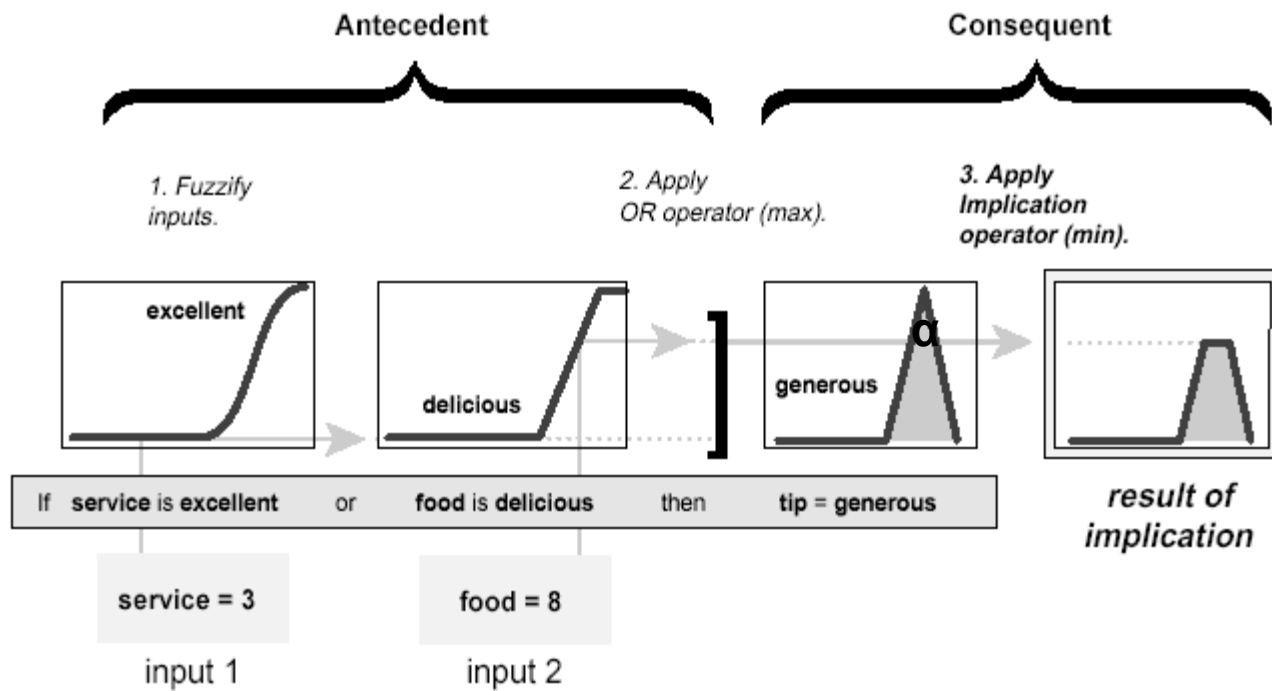
PASO 3: INFERENCIA BORROSA

IF Antecedente THEN (z is C)

Produce un conjunto borroso que resulta de aplicar un operador de inferencia entre la adecuación de la regla y el conjunto borroso de la conclusión C (con función de pertenencia $\mu_C(z)$).

- a) Usando el mínimo $\mu_C(z) = \min(\alpha, \mu_C(z))$
- b) Usando el producto $\mu_C(z) = \alpha \cdot \mu_C(z)$

PASO 3: INFERENCIA BORROSA



PASO 4: AGREGACIÓN

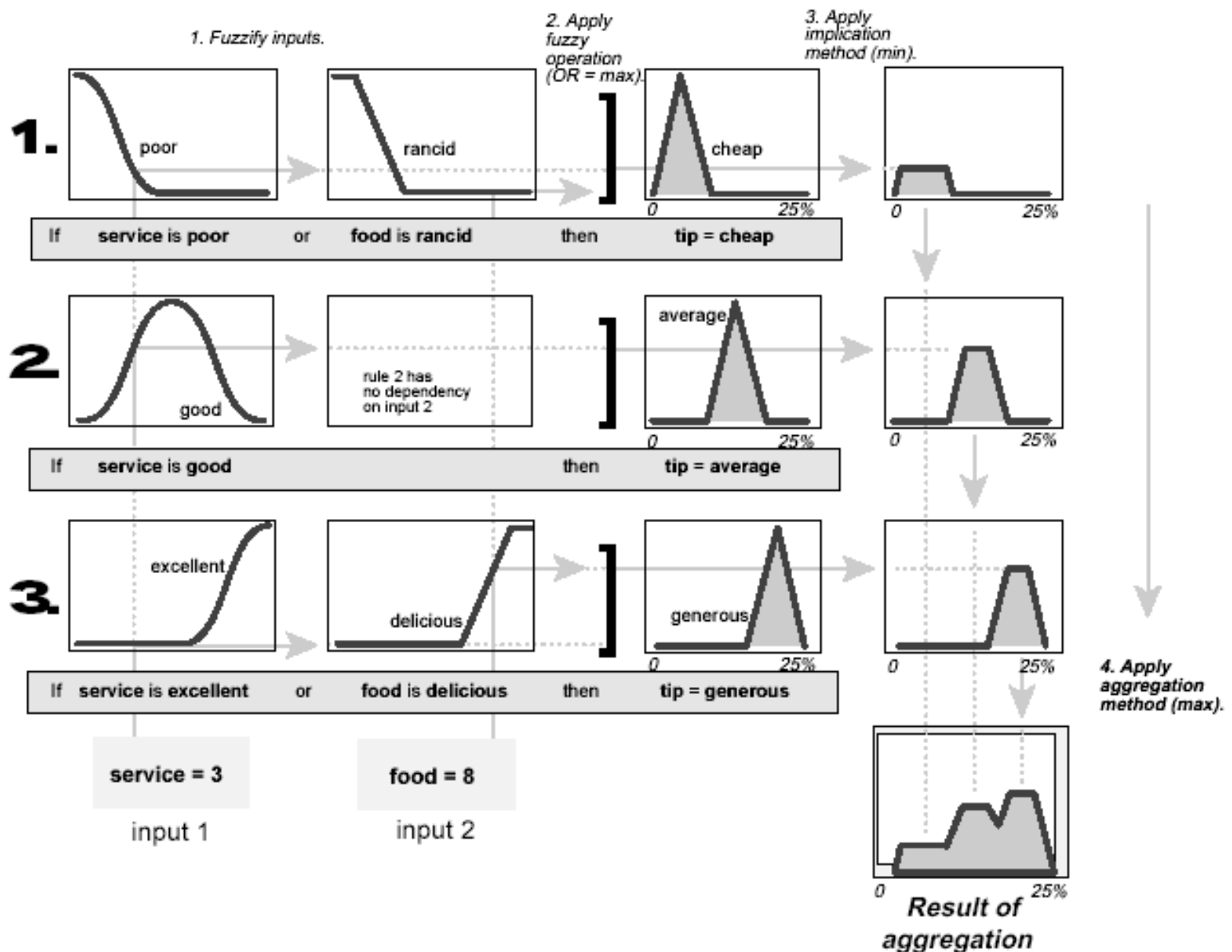
Para cada variable conclusión se agregan los resultados de todas las reglas aplicando un operador, normalmente el *máximo*.

$$\mu_C(z) = \max(\mu_{C1}(z), \mu_{C2}(z), \dots, \mu_{Cm}(z))$$

Normalmente se combina con un operador *min* o *prod* en el paso anterior y se habla de

- Método Max-Min
- Método Max-Prod

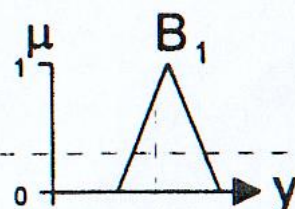
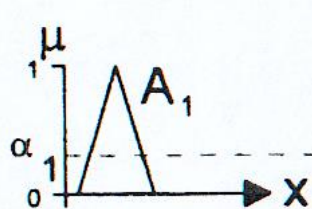
MÉTODO *MAX-MIN*



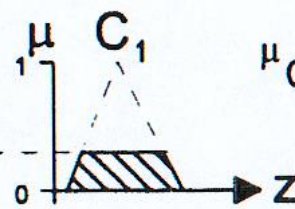
INFERENCIA MAX-MIN

REGLA 1: SI ((x es A_1) Y (y es B_1)) ENTONCES (z es C_1)
 REGLA 2: SI ((x es A_2) Y (y es B_2)) ENTONCES (z es C_2)

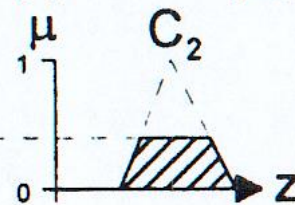
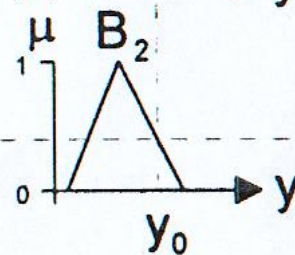
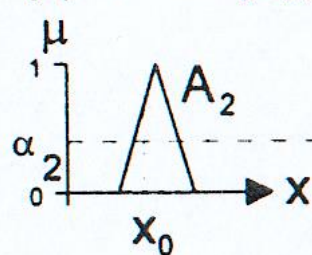
REGLA 1



↑
min

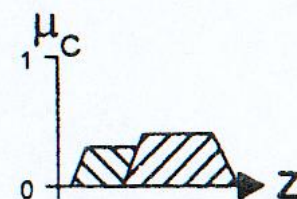


REGLA 2



INFERENCIA MAX-MIN

$$\mu_C(z) = \max_i \{ \min(\alpha_i, \mu_{C_i}(z)) \}$$

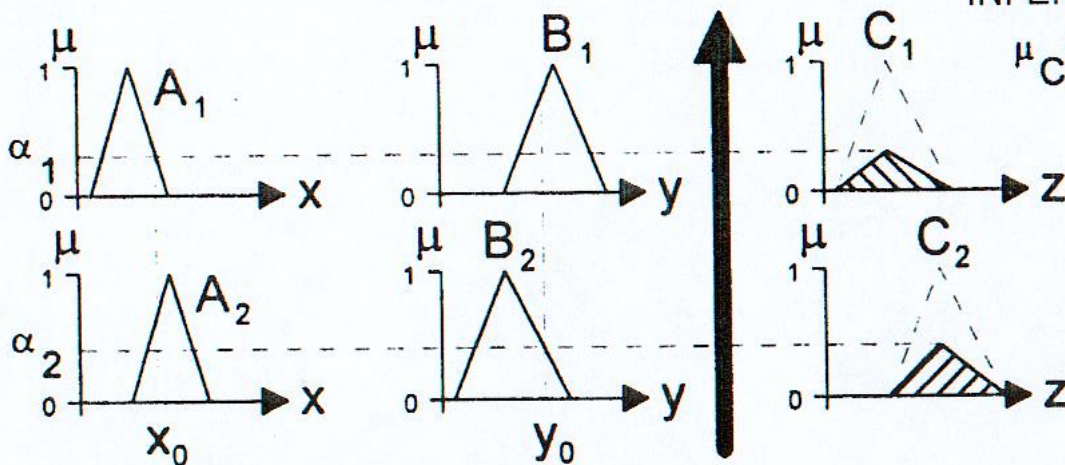


INFERENCIA MAX-PROD

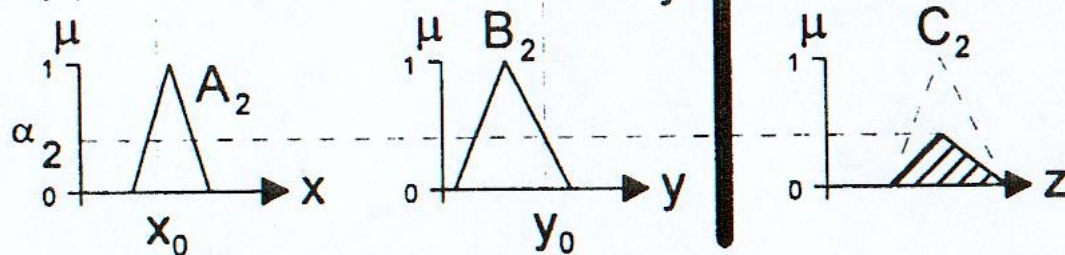
REGLA 1: SI ((x es A_1) Y (y es B_1)) ENTONCES (z es C_1)

REGLA 2: SI ((x es A_2) Y (y es B_2)) ENTONCES (z es C_2)

REGLA 1



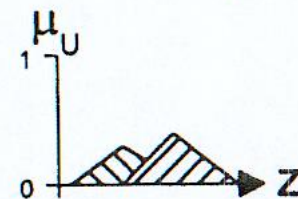
REGLA 2



min

INFERENCIA MAX-PRODUCTO

$$\mu_C(z) = \max_i \{ \alpha_i \cdot \mu_{C_i}(z) \}$$



PASO 5: “DEBORROSIFICAR” (DEFUZZIFY)

Centro de Areas (CoA) o de Gravedad (CoG)

$$u = \frac{\int_U u \cdot \max_k \mu(u) du}{\int_U \max_k \mu(u) du}; k = 1 \dots m$$

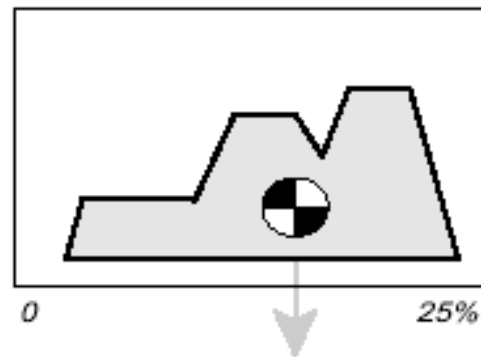
m es el número de reglas agregado

Métodos de Máxima Pertenencia

- El Primero, el Ultimo o la Media de Máxima Pertenencia (MoM)

PASO 5: “DEBORROSIFICAR” (DEFUZZIFY)

Centro de Areas (CoA) o de Gravedad (CoG)



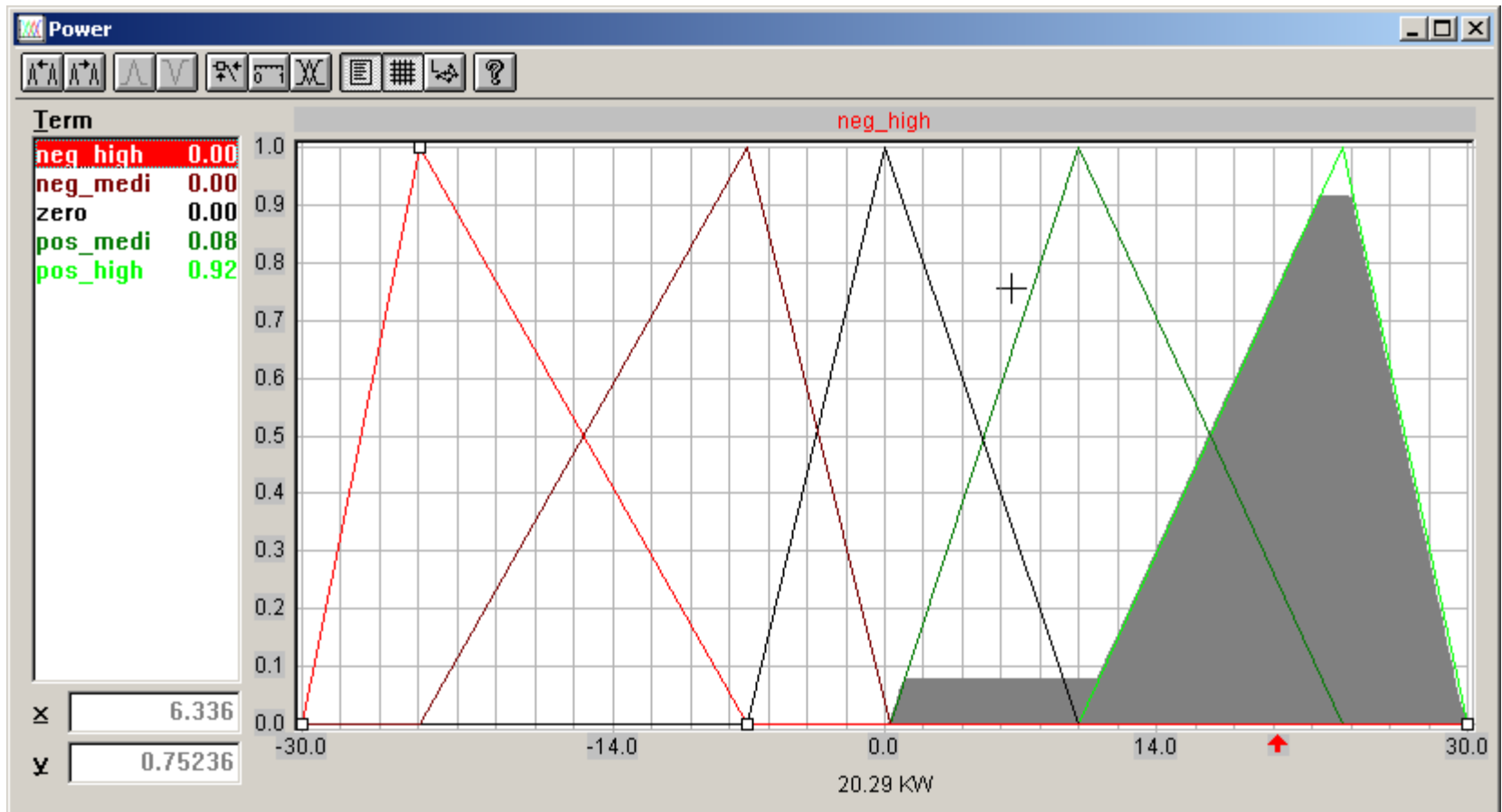
5. Defuzzify the aggregate output (centroid).

tip = 16.7%

Result of defuzzification

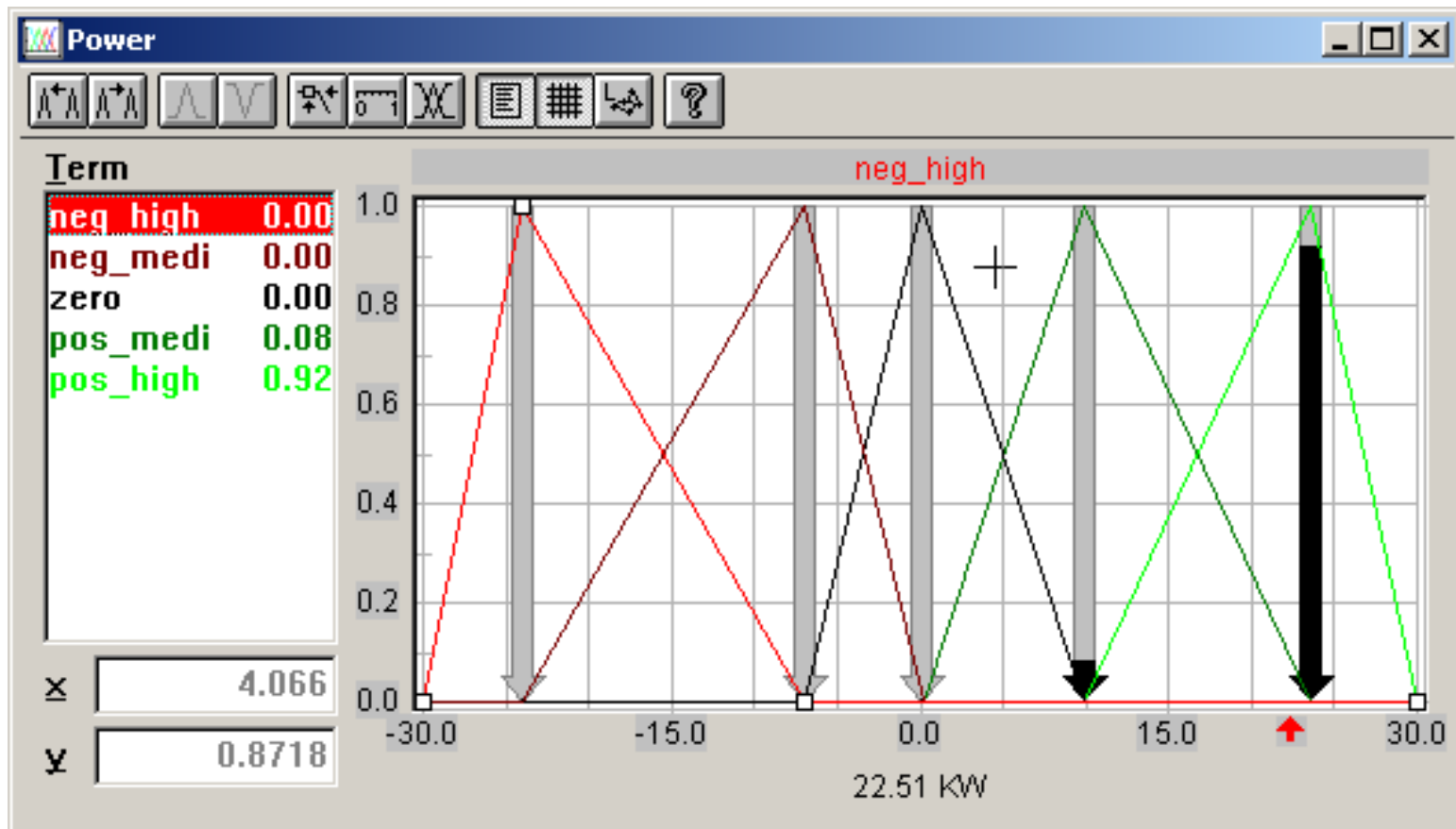
DEBORROSIFICACIÓN

Método del Centro de Areas



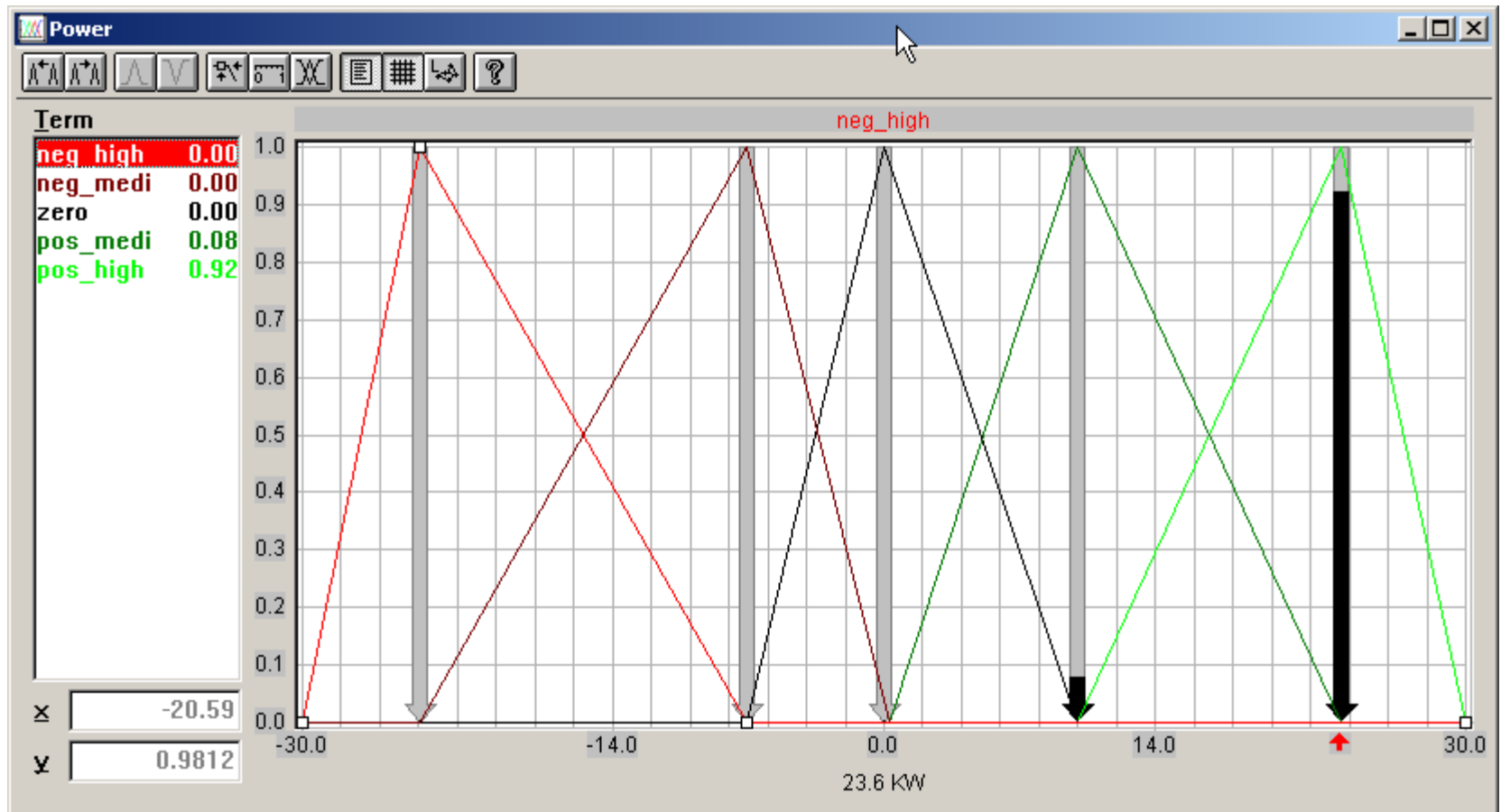
DEBORROSIFICACIÓN

Método del Centro de Máximos



DEBORROSIFICACIÓN

Método de Máxima Pertenencia



EXTENSIÓN CON ENTRADAS BORROSAS (PASO 2)

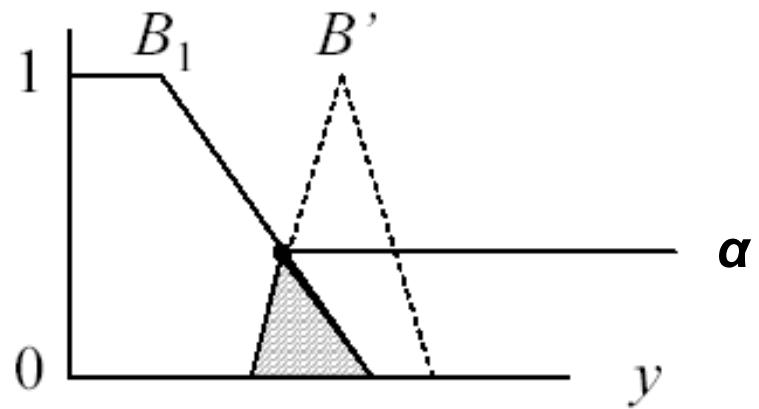
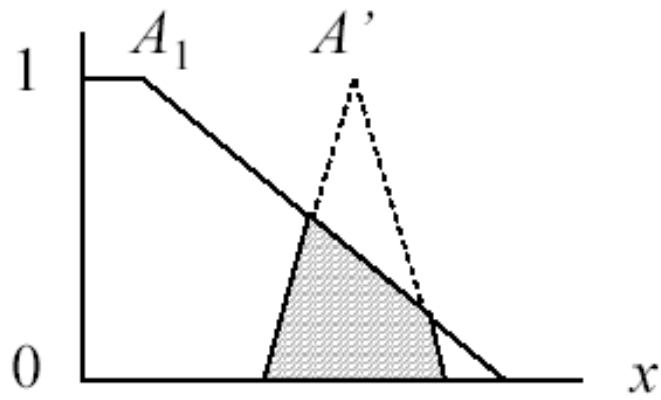
El método anterior era para entradas numéricas (crisp), si las entradas son etiquetas lingüísticas (conjuntos borrosos)

a) x is A_1 and y is B_1

$$\alpha = \max_x (\mu_{A_1}(x) \wedge \mu_{A'}(x)) \wedge \max_y (\mu_{B_1}(y) \wedge \mu_{B'}(y))$$

donde A_1 y B_1 son los conjuntos borrosos especificados en el antecedente de la regla y A' y B' los conjuntos borrosos especificados como entradas.

EXTENSIÓN CON ENTRADAS BORROSAS (PASO 2)



INCONVENIENTES DEL MÉTODO MAMDANI

Inconvenientes:

- El número de reglas se incrementa exponencialmente con el número de variables del antecedente.
- El incremento de reglas hace que la tarea de su construcción sea excesivamente laboriosa.
- Si el número de variables de la premisa es grande, es muy difícil comprender las relaciones causales entre las premisas y los consecuentes.

MÉTODO DE SUGENO- TAKAGI

Este método emplea reglas de inferencia con la siguiente estructura:

- IF x is A and y is B THEN $z = ax + by + c$

donde A, B son conjuntos difusos.

IF la *temperatura de la habitación* es “un poco alta” y la *humedad* es “bastante” THEN *ajusta el aire acondicionado usando temperatura de la habitación $\times 0.2$ + humedad $\times 0.05$.*

MÉTODO DE SUGENO-TAKAGI

La salida de este método de razonamiento borroso viene dada por:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^l w_i y_i}{\sum_{i=1}^l w_i}$$

donde w_i es el grado de adecuación de la regla i e y_i la salida de la regla i .

MÉTODO SUGENO SIMPLIFICADO

Emplea reglas de inferencia con la siguiente estructura:

- IF x is A and y is B THEN $z=c$

donde A, B son conjuntos difusos y c es un valor nítido (crisp)

- IF la *temperatura de la habitación* es “*un poco alta*” y la *humedad* es “*bastante*” THEN *ajusta el aire acondicionado a 8*.

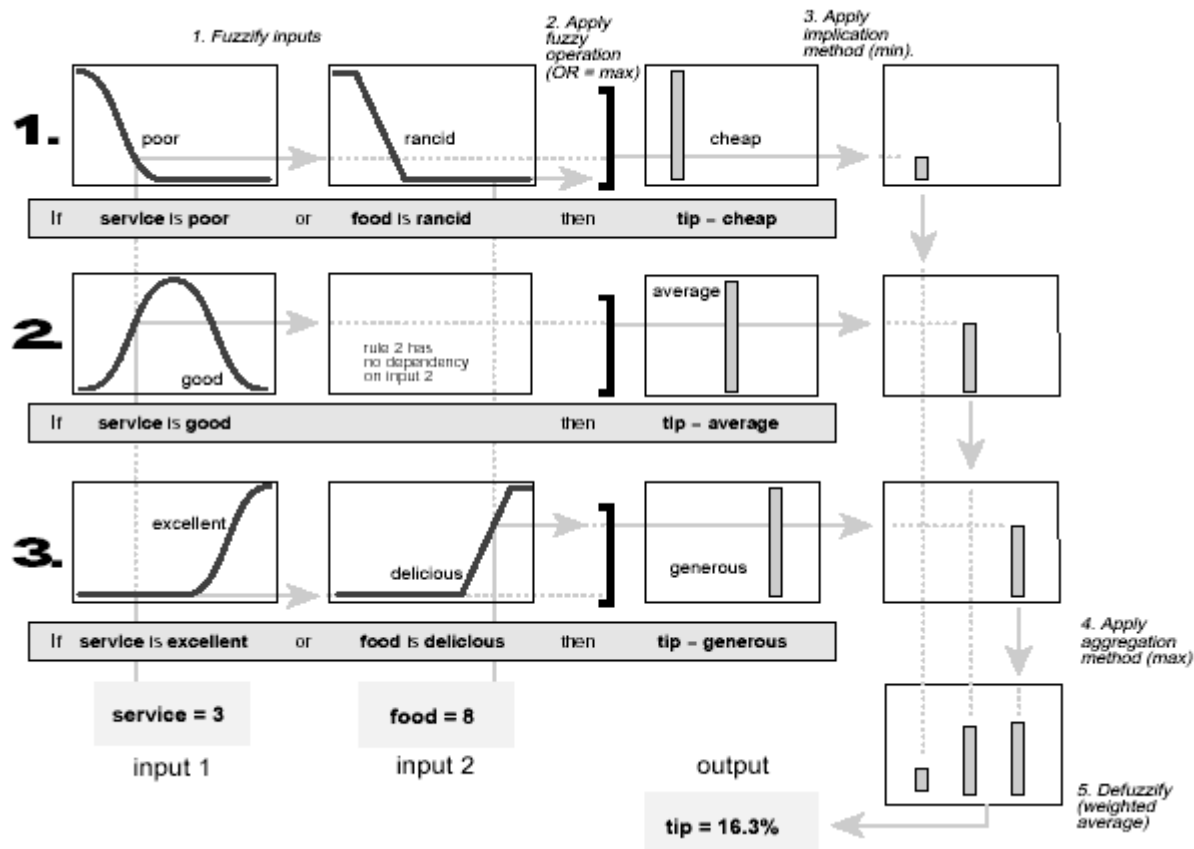
MÉTODO SUGENO SIMPLIFICADO

La salida de este método de razonamiento borroso se calcula como:

$$z = \frac{\sum_{i=1}^l w_i c_i}{\sum_{i=1}^l w_i}$$

donde w_i es el grado de adecuación de la regla i y c_i la conclusión de la regla i .

MÉTODO SIMPLIFICADO



SUPERFICIES INFERENCIA

- Salida en función de 2 entradas

