Report

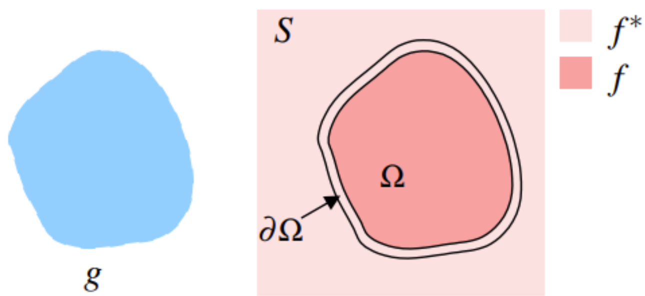
> PB20020480 王润泽
>
> Environment：Windows11 MATLAB R2021A

1 Introduction

基于泊松方程的图像融合，并实现实时用户交互

实现图形融合指：设映射函数 $f:(x,y)\rightarrow(R,G,B)$，那么如下图所示，$f$ 是定义域在 Ω处的待融合图像，$f^*=f_b$是定义域为 S 的背景图（background），g_f 是原来的原始图像(foreground)， 要解决的问题是让二者能自然的融合。

所谓自然融合，就是在保持原图像内部梯度(最小化新图与原图的梯度差异)的前提下，让粘贴后图像的边界值与新的背景图相同，以实现无缝粘贴的效果。



2 Method

2.1 Poisson Image Editing

Mathematical Formation

从数学上讲，对于嵌入新背景待求的新图像$f(x,y)$，背景图形为$f_b(x,y)$和前景图像为$g_f(x,y)$，而要解决的问题等价于解最优化问题：

$$\min_f \iint_\Omega |\nabla f-\nabla g_f|^2 \ \text{ with } f|_{\partial\Omega}=f_b|_{\partial\Omega} \tag{1}$$

利用变分法通过 Euler-Lagrange equation 可转化为具有Dirichlet边界条件的Poisson方程：

$$\Delta f=\Delta g_f \text{ over } \Omega \ \text{ with } f|_{\partial\Omega}=f_b|_{\partial\Omega} \tag{2}$$

如果令 $\widetilde{f}=f-g_f$，$(f_b-g_f)=\varphi$那么该问题就可以转换成求解 Laplace 方程的边界问题：

$$\Delta\widetilde{f}=0 \text{ over } \Omega \ \text{ with}\widetilde{f}|_{\partial\Omega}=(f^*-g)|_{\partial\Omega}=\varphi|_{\partial\Omega} \tag{3}$$

这里的 f_b,g_f,φ都是已知的条件，而 $\widetilde{f}$ 是待求解的函数。

Numerical Equation

为了进行数值上的求解，则要对 Δf 离散化处理，处理方式利用有限差分的形式，设像素点步长为 $h=1$ 对于 S区域内任意点 $\mathbf{p}=(i,j)$来说，该点对应 f 值记作 f_p，那么有

$$\Delta f(\mathbf{p}) \approx \frac{4f(i,j)-f(i+1,j)-f(i-1,j)-f(i,j+1)-f(i,j-1)}{4h^2} \tag{4}$$

为了表达式的简单，定义N_p为S中的每一个像素p四个方向连接邻域，令$\langle p,q\rangle$为满足$q\in N_p$的像素对，即 $q\in\{(i+1,j),(i-1,j),(i,j+1),(i,j-1)\}$，则可以得到数值方程解法

$$\text{for all } p\in\Omega,\ |N_p|\widetilde{f}_p-\sum_{q\in N_p\cap\Omega}\widetilde{f}_q=\sum_{q\in N_p\cap\partial\Omega}\varphi_p \tag{5}$$

Algorithm

设 $\widetilde{f}_{ij}=u_{ij},\varphi_p=\varphi_{ij}$

$$4u_{i,j}-u_{i,j-1}-u_{i-1,j}-u_{i+1,j}-u_{i,j+1}=0 \quad (i,j)\in\Omega\backslash\partial\Omega \tag{6}$$

$$u_{k,l}=\varphi(k,l) \quad (k,l)\in\partial\Omega \tag{7}$$

如果以矩形区域举例，$\Omega=\{(i,j)|0\le i\le m,0\le j\le m\}$

则对于上式一共有 $(m+1)\times(n+1)$个未知数 u_{ij}，公式（5）与公式（6）一共有 $(m+1)\times(n+1)$ 个约束条件，且这些条件线性无关，故是可解的。

对于更加一般的边界，算法描述如下

0. 初始化，设 $\Omega\backslash\partial\Omega$内的像素点共有 N 个，建立 $N\times N$ 系数矩阵`sparse_mat=0`,以及代求N维待求向量 `vec` 。同时假设区域 S 内公有 $n\times m$各像素点，从起始点出发。
1. 遍历区域 S 内的像素点（i,j）
2. 如果 $(i,j)\in\Omega\backslash\partial\Omega$，设`index(i,j) = sub2ind(i,j)`
   - `sparse_mat[index(i,j)][index(i,j)]= 4`
   - 如果 (i,j)周围的点 $\mathbf{q}\in\Omega\backslash\partial\Omega$,那么 `sparse_mat[index(i,j)][index(q)]=-1`
   - 如果 (i,j)周围的点 $\mathbf{q}\in\partial\Omega$,那么 `vec[index(q)]=`$\varphi$`[index(q)]`
   - 周围点 $\mathbf{q}$ 是指 $(i-1,j),(i+1,j),(i,j-1),(i,j+1)$
3. 求解方程 `sparse_mat` * `x`=`vec`, where `x(index(i,j)) = u(i,j)`.

最终解得 $\widetilde{f}_{ij}=u_{ij}$，得到最终图像的像素值为：

$$f(i,j)=\widetilde{f}(i,j)+g_f(i,j)$$

其中 $g_f(i,j)$ 为原来的前景图像的像素值，$\widetilde{f}(i,j)$ 为刚求解得到的值。

2.2 Boundary and Domain

为了能良好的确定边界，首先要待采样边界的范围，代码中采取的策略是：*将所选定义域限定在小范围矩形中*

```
%% preprocess.m
%x_min,y_min 是区域左上角
%x_max,y_max 是区域右下角
width = x_max - x_min + 1;
height = y_max - y_min + 1;
source_start = [x_min, y_min];
```

当缩小了范围后，采用了 **MATLAB**的 `inpolygon` 函数来确定图像中的点是否在所设置的定义域内部，用 `mask` 来表示矩形中的点是否在边界内。

```
%% preprocess.m
%确定定义域和边界
mask = zeros(height, width);
n = height * width;
xv = source_points(:, 2);
yv = source_points(:, 1);
xq = reshape(meshgrid(1:height, 1:width)', 1, n) + source_start(2) - 1;
yq = reshape(meshgrid(1:width, 1:height), 1, n) + source_start(1) - 1;
[in, ~] = inpolygon(xq, yq, xv, yv);
mask(in) = 1;%在矩形内部，则为1
num_inside = sum(in);
inside_index = find(in);%所有内部点的索引
```

这样就可以很好的确定边界与定义域了。

2.3 Sparse Matrix

在预处理中，按照 **2.1 Algorithm** 的方法，构造的矩阵具有稀疏性，故采用了稀疏矩阵来表达矩阵，节省空间开销。同时构建矩阵只需要前景图像（原图）位置即可，可以重用稀疏矩阵，**实现实时 Poisson 图像融合。**

同时观察到矩阵是对称矩阵

$$\text{sparseMat}(index(i,j)) = \text{sparseMat}(index(j,i))$$

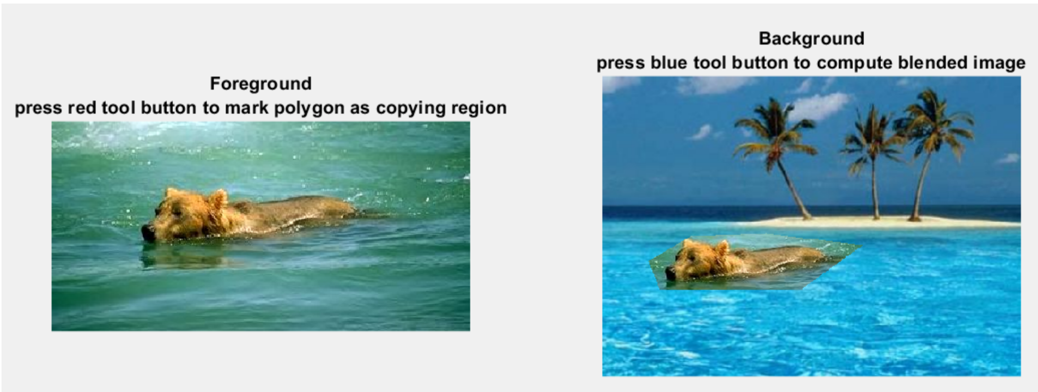
故在预处理阶段采用 **Cholesky** 分解的方法，将矩阵分解为一个下三角矩阵L和其转置，那么在求解线性方程组时，也可以重用分解结果。

由于用户在实时移动图像时，移动过程是连续的，所以每次移动所解出的线性方程组的解差别不会很大，可以重用上次解的结果作为本次计算时解的初值，提高稀疏矩阵迭代求解的效率。

```
%%blendImagePoisson.m
num_inside = sum(sum(mask));
X = zeros(num_inside,3);
tol = 1e-11; % 收敛容许误差
maxit = 1000; % 最大迭代次数
%X0 是上次求解的结果
%L 是Cholesky预分解得到的下三角矩阵
[X(:,1), ~, ~, ~] = pcg(spm, B(:,1), tol, maxit, L, L',X0(:,1));
[X(:,2), ~, ~, ~] = pcg(spm, B(:,2), tol, maxit, L, L',X0(:,2));
[X(:,3), ~, ~, ~] = pcg(spm, B(:,3), tol, maxit, L, L',X0(:,3));
X0 = X;
imret = blendImage(im1, im2, target_start, source_start, mask, X);
```

3 Result

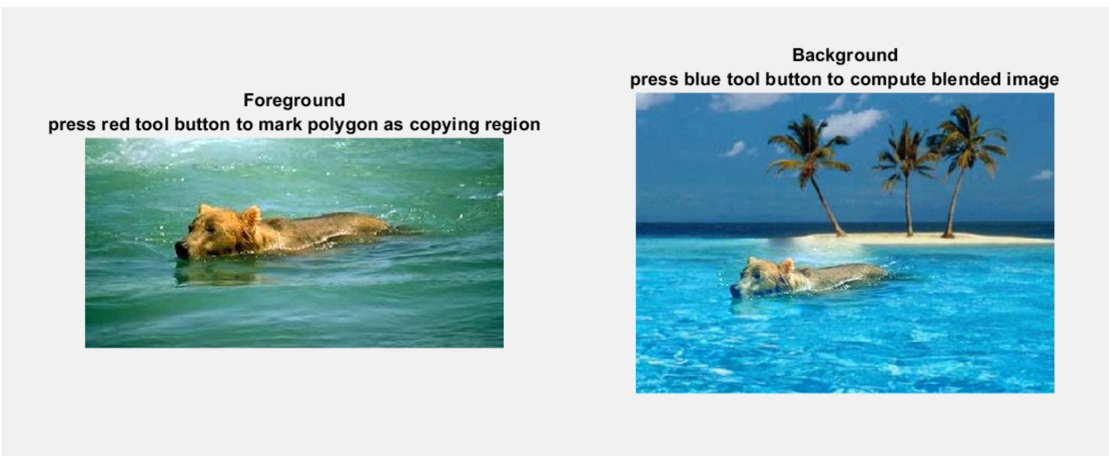
Normal Paste



这只是简单拷贝

Poisson Editing

实验结果如下:



由图可见确实实现了图像的融合，效果很好

实时交互

在提供的程序中，可以实现用户拖动目标框，实时得到融合结果，这得益于矩阵重用的结果。

4 Summary

- 本次实验熟悉了 **MATLAB** 中稀疏矩阵用法，且利用矩阵预分解方法实现高效的交互操作
- 通过对 **Poisson Editing** 算法的学习，了解到保持图像梯度不变而改变偏移值，可以对图像融合产生良好的效果。在实验中也掌握了 $Laplace$ 方程数值解的方法