

Modeling and Reasoning with Bayesian Networks: Inference by Variable Elimination 6.6-6.9

Relatório semana 5 - MAC0215 (Atividade Curricular em Pesquisa)
Aluno: Renato Lui Geh (Bacharelado em Ciência da Computação)
Orientador: Denis Deratani Mauá

1 ATIVIDADES REALIZADAS NA SEMANA

Durante a semana foram lidos os seguintes tópicos do livro *Modeling and Reasoning with Bayesian Networks*[1]:

6 - Inference by Variable Elimination

- 6.6 - Choosing an Elimination Order
- 6.7 - Computing Posterior Marginals
- 6.8 - Network Structure and Complexity
- 6.9 - Query Structure and Complexity

2 DEFINIÇÃO DAS ATIVIDADES

Foram estudados como encontrar a melhor ordem de eliminação de variáveis[3], definimos o que são grafos de interação de Redes Bayesianas, como calcularmos marginais posteriores (*posterior marginals*), algumas propriedades da estrutura de uma rede e como podar (*prune*) nós e arestas de uma Rede Bayesiana.

Esta seção será dividida em subseções onde veremos os itens enumerados no parágrafo acima. A cada tópico que não tenha sido apresentado ainda vamos abordar a teoria por trás e introduzir o assunto. Separaremos tais explicações em uma subsubseção equivalente. Abaixo está a lista de tópicos que iremos abordar.

1. Escolhendo uma ordem de eliminação
 - 1.1. Subgraphs, induced subgraphs, cliques e spanning subgraphs
 - 1.2. Grafo de interação
2. Computando posterior marginals
 - 2.1. Posterior marginals e joint marginals
 - 2.2. Eliminação de variáveis e posterior marginals
3. Estrutura e complexidade da rede
 - 3.1. Treewidth
 - 3.2. Tree networks, polytrees e multiply connected
4. Pruning
 - 4.1. Pruning nodes
 - 4.2. Pruning edges
 - 4.3. Network pruning
5. Apêndice
 - 5.1. NP-hard e NP-complete

2.1 ESCOLHENDO UMA ORDEM DE ELIMINAÇÃO

Como vimos no relatório anterior[3], queremos criar factors que sejam os menores possíveis. A ordem de eliminação que tiver menor w será a melhor. Dizemos que o w de uma ordem de eliminação é o maior *width* de todos os factors da ordem de eliminação.

Antes de acharmos a melhor ordem de eliminação precisamos saber como calcular o w de uma ordem. Um jeito ingênuo de acharmos é, a cada interação i de uma multiplicação e soma, acharmos o w_i com respeito a $\pi(i)$. No final retornamos o maior w_i .

i	$\pi(i)$	\mathcal{S}	f_i	w
		$\Theta_A \Theta_{B A} \Theta_{C A} \Theta_{D BC} \Theta_{E C}$		
1	B	$\Theta_A \Theta_{C A} \Theta_{E C} f_1(A, C, D)$	$f_1 = \sum_B \Theta_{B A} \Theta_{D BC}$	3
2	C	$\Theta_A f_2(A, D, E)$	$f_2 = \sum_C \Theta_{C A} \Theta_{E C} f_1(A, C, D)$	3
3	A	$f_3(D, E)$	$f_3 = \sum_A \Theta_A f_2(A, D, E)$	2
4	D	$f_4(E)$	$f_4 = \sum_D f_3(D, E)$	1

Na tabela acima a segunda coluna indica a variável $\pi(i)$ que queremos eliminar. A terceira coluna é o resultado da substituição de $\pi(i)$ pelo factor resultante na quarta coluna, onde multiplicamos e somamos as CPTs onde $\pi(i)$ está presente. A última coluna é o w_i de cada eliminação. Pode-se ver que o w dessa ordem é 3, já que é o maior w entre todas as iterações. Note que não precisamos realmente computar a eliminação das variáveis. De fato não fazemos tais eliminações, mas a cada $\pi(i)$ que aparecem nos factors $f(\mathbf{X}_k)$ substituímos tais factors por um novo factor sob as variáveis $\cup_k \mathbf{X}_k \setminus \pi(i)$.

Um outro jeito de se achar a *width* de uma ordem de eliminação é por meio de um grafo não direcionado que representa as interações das CPTs de uma Rede Bayesiana. Antes de definirmos esse grafo vamos introduzir alguns conceitos fundamentais sobre grafos.

2.1.1 Subgraphs, induced subgraphs, cliques e spanning subgraphs

Vamos definir $V(G)$ como o conjunto de vértices do grafo G . Similarmente, $E(G)$ é o conjunto de arestas do grafo G . Dizemos que um grafo é não direcionado se para cada vértice x, y em G , tanto xy quanto yx são arestas válidas em G .

Primeiro vamos ver a definição de subgrafo:

Definição. Um grafo H é um subgrafo de G se $V(H)$ é um subconjunto de $V(G)$ e $E(H)$ é subconjunto de $E(G)$. Dizemos que G é o supergrafo de H se H é subgrafo de G .

Vamos agora definir o que é um grafo induzido:

Definição. Um subgrafo H de um grafo G é dito induzido se para cada par de vértices x, y em H , xy é uma aresta de H se e somente se xy é uma aresta em G . Ou seja, H é um subgrafo induzido de G se as arestas em H são exatamente as arestas que aparecem em G sob o mesmo conjunto de vértices. Se $V(H)$ é um subconjunto S de $V(G)$, então H pode ser escrito como $G[S]$ e é dito ser induzido por S .

Agora iremos definir o que é a completude de um grafo:

Definição. Dizemos que um grafo G é completo se todo par de vértices distintos em G é conectado por uma aresta única.

Definimos agora o que é um clique:

Definição. Um clique é um subconjunto de vértices de um grafo não direcionado tal que o subgrafo induzido dele seja completo. Ou seja, todo par distinto de vértices em um clique é adjacente.

Vamos também definir o que é um *spanning subgraph*:

Definição. Dizemos que um subgrafo H cobre (*spans*) um grafo G se ele tem mesmo conjunto de vértices que G . H é então dito o *spanning subgraph* de G .

2.1.2 Grafo de interação

Agora que temos uma noção básica sobre grafos podemos definir o grafo de interação.

Definição. Seja f_1, \dots, f_n o conjunto de factors. O grafo de interação G desses factors é um grafo não direcionado construído de tal forma que os nós de G são as variáveis que aparecem nos factors f_1, \dots, f_n . Há uma aresta entre duas variáveis em G se e somente se essas variáveis aparecem no mesmo factor.

Em outras palavras, as variáveis \mathbf{X}_i de cada factor f_i formam um clique em G , ou seja, as variáveis emparelhadas são adjacentes.

$\mathcal{S}_1 : \Theta_A \Theta_{B A} \Theta_{C A} \Theta_{D BC} \Theta_{E C}$	
$\mathcal{S}_2 : \Theta_A \Theta_{C A} \Theta_{E C} f_1(A, C, D)$	
$\mathcal{S}_3 : \Theta_A f_2(A, D, E)$	
$\mathcal{S}_4 : f_3(D, E)$	
$\mathcal{S}_5 : f_4(E)$	

Tabela 1 Grafo de interação resultante da eliminação das variáveis B, C, A, D nessa ordem.

A Tabela 1 mostra como fica o grafo de interação ao eliminarmos as variáveis B, C, A, D nessa ordem. É importante notar que:

1. Se G é o grafo de interação dos factors \mathcal{S} , então eliminar a variável $\pi(i)$ de \mathcal{S} leva a construção de um factor sob os vizinhos de $\pi(i)$ em G . Por exemplo, eliminar a variável B do factor \mathcal{S}_1 da Tabela 1 gera um factor sob as variáveis A, C, D , que são os vizinhos de B no grafo de interação.
2. Seja \mathcal{S}' os factors que resultam da eliminação da variável $\pi(i)$ dos factors \mathcal{S} . Se G' e G são os grafos de interação de \mathcal{S}' e \mathcal{S} respectivamente, então G' pode ser obtido de G da seguinte forma:
 - (a) Adicione uma aresta em G entre cada par de vizinhos da variável $\pi(i)$ que não estejam já conectados por uma aresta.
 - (b) Remova a variável $\pi(i)$ de G .

Pode-se ver que (a) corresponde a multiplicar os factors que contém a variável $\pi(i)$ em \mathcal{S} e (b) equivale a somar a variável $\pi(i)$ do factor resultante.

Computar a *width* de uma ordem é útil quando temos um número pequeno de ordens. No entanto, quando temos um número muito grande de ordens precisamos achar uma ordem ótima de um jeito melhor. Achar uma ordem ótima é NP-difícil (*NP-hard*), mas podemos usar várias heurísticas que resultam em boas ordens.

Uma das heurísticas mais populares é a *min-degree*: sempre elimine a variável que acarreta na construção do menor factor possível. Se usarmos o grafo de interação podemos ver que a heurística diz que devemos eliminar a variável que tem o menor número de vizinhos no grafo de interação atual. A *min-degree* é ótima para redes que possuem uma ordem de eliminação de *width* ≤ 2 .

Outra heurística que na maioria das vezes é mais efetiva que a *min-degree* é a *min-fill*, onde nós eliminamos a variável de tal forma que precisemos adicionar o menor número possível de arestas no grafo de interação.

2.2 COMPUTANDO POSTERIOR MARGINALS

Vamos mostrar agora como computar posterior marginals a partir de eliminação de variáveis. Mas primeiro vamos definir o que é posterior marginal e joint marginals.

2.2.1 Posterior marginals e joint marginals

Dada uma distribuição de probabilidade conjunta[2] $Pr(x_1, \dots, x_n)$ a distribuição marginal $Pr(x_1, \dots, x_m)$, $m \leq n$ é definida como:

$$Pr(x_1, \dots, x_m) = \sum_{x_{m+1}, \dots, x_n} Pr(x_1, \dots, x_n) \quad (1)$$

Ou seja, a distribuição marginal pode ser vista como uma *projeção* da distribuição conjunta num conjunto menor X_1, \dots, X_m .

Quando a distribuição marginal é computada dada uma evidência \mathbf{e} ,

$$Pr(x_1, \dots, x_m | \mathbf{e}) = \sum_{x_{m+1}, \dots, x_n} Pr(x_1, \dots, x_n | \mathbf{e}), \quad (2)$$

Então dizemos que ela é uma *posterior marginal*. Quando uma distribuição marginal não é dada nenhuma evidência, então dizemos que ela é uma *prior marginal*.

Vamos agora definir uma marginal conjunta (*joint marginal*). Uma joint marginal é uma variação da posterior marginal da forma $P(\mathbf{Q}, \mathbf{e})$. Ou seja, ao invés de computarmos a probabilidade de \mathbf{q} dado \mathbf{e} , $Pr(\mathbf{q}, \mathbf{e})$, nós computamos a probabilidade de \mathbf{q} e \mathbf{e} , $Pr(\mathbf{q}, \mathbf{e})$. Por exemplo, tomemos as Tabelas 2 e 3 dados $\mathbf{Q} = \{D, E\}$ e $\mathbf{e} : A = true, B = false$ na mesma rede da Tabela 1:

D	E	$Pr(\mathbf{Q} \mathbf{e})$	D	E	$Pr(\mathbf{Q}, \mathbf{e})$
true	true	0.448	true	true	0.21504
true	false	0.192	true	false	0.09216
false	true	0.112	false	true	0.05376
false	false	0.248	false	false	0.11904

Tabelas 2 e 3 Posterior marginal e joint marginal respectivamente.

A terceira linha da Tabela 3 (joint marginal) diz que:

$$Pr(D = false, E = true, A = true, B = false) = 0.05376 \quad (3)$$

Ao somarmos todas as probabilidades da joint marginal nesse factor, teremos como resultado 0.48, que é a probabilidade de evidência $\mathbf{e} : A = true, B = false$. Se somarmos todas as probabilidades que aparecem na joint marginal, teremos sempre a probabilidade da evidência \mathbf{e} . Isso quer dizer que podemos computar a posterior marginal $Pr(\mathbf{Q}|\mathbf{e})$ normalizando a joint marginal $Pr(\mathbf{Q}, \mathbf{e})$.

2.2.2 Eliminação de variáveis e posterior marginals

Podemos usar eliminação de variáveis para computar joint marginals se zerarmos todas as linhas na distribuição de probabilidade conjunta onde há uma inconsistência[3] com a evidência \mathbf{e} . Mais formalmente dizemos que:

Definição. A redução de um factor $f(\mathbf{X})$ dado uma evidência e é um outro factor sob as variáveis \mathbf{X} denotado por f^e e definido como:

$$f^e(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \sim e \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4)$$

Portanto, dado o factor da Tabela 2 e evidência $\mathbf{e} : E = true$, teríamos:

D	E	f^e
true	true	0.448
true	false	0
false	true	0.112
false	false	0

Para facilitar omitimos todas as linhas zeradas:

D	E	f^e
true	true	0.448
false	true	0.112

Dado $\mathbf{Q} = \{D, E\}$ e $\mathbf{e} : A = \text{true}, B = \text{false}$, a marginal conjunta $Pr(\mathbf{Q}, \mathbf{e})$ pode ser computada como:

$$Pr(\mathbf{Q}, \mathbf{e}) = \sum_{A, B, C} (\Theta_{E|C} \Theta_{D|BC} \Theta_{C|A} \Theta_{B|A} \Theta_A)^{\mathbf{e}} \quad (5)$$

Como pode-se ver, ainda temos o problema da complexidade, já que precisamos multiplicar todas as CPTs para depois eliminar as variáveis. No entanto, podemos aplicar o seguinte teorema:

Teorema. *Se f_1 e f_2 são dois factors e e é uma instância, então:*

$$(f_1 f_2)^e = f_1^e f_2^e \quad (6)$$

Portanto podemos reduzir para:

$$Pr(\mathbf{Q} = \{D, E\}, \mathbf{e}) = \sum_{A, B, C} \Theta_{E|C}^{\mathbf{e}} \Theta_{D|BC}^{\mathbf{e}} \Theta_{C|A}^{\mathbf{e}} \Theta_{B|A}^{\mathbf{e}} \Theta_A^{\mathbf{e}} \quad (7)$$

Essa forma mantém a distribuição de probabilidade conjunta em forma fatorada e portanto permite eliminarmos as variáveis nas CPTs reduzidas.

Para calcularmos a posterior marginal $Pr(C|A = \text{true})$, dados:

$$\begin{aligned} Pr(C = \text{true}, A = \text{true}) &= 0.192 \\ Pr(C = \text{false}, A = \text{true}) &= 0.408 \\ Pr(A = \text{true}) &= 0.600 \end{aligned} \quad (8)$$

Precisamos normalizar o factor, ou seja:

C	$Pr(C A = \text{true})$
true	0.32
false	0.68

Portanto $Pr(C = true|A = true) = 0.32$ e $Pr(C = false|A = true) = 0.68$.

Note que se tentarmos calcular $Pr(\mathbf{Q}|\mathbf{e})$ com \mathbf{Q} vazio, estaremos calculando um factor trivial com valor igual a probabilidade de evidência \mathbf{e} .

2.3 ESTRUTURA E COMPLEXIDADE DA REDE

Apesar de termos duas Redes Bayesianas com o mesmo número de variáveis, as ordens de eliminação ótimas de cada uma podem ser diferentes entre si. Isso por causa da *treewidth* das redes. Vamos definir o que é uma *treewidth*, falar sobre NP-completude e NP-dificuldade e em seguida classificar as várias estruturas que uma rede pode ter.

2.3.1 Treewidth

Definimos como *treewidth* o número que quantifica o quanto uma rede se assemelha à estrutura de uma árvore. Em particular, quanto mais similar a uma árvore, menor o seu *treewidth*.

Um ponto importante sobre *treewidth* é que não há nenhuma ordem de eliminação completa onde sua *width* é menor que a *treewidth* da rede. Adicionalmente, existe uma ordem de eliminação cuja *width* é igual à *treewidth* da rede e ela é ótima. No entanto, determinar tal ordem é NP-difícil. Discutiremos mais sobre isso no Apêndice deste relatório.

Vamos descrever algumas características da *treewidth*:

- O número de nós não tem efeito na *treewidth*.
- O número de pais por nó tem efeito direto na *treewidth*. Se um número de pais por nó chega k , então o *treewidth* não é menor que k .
- Loops tendem a aumentar a *treewidth*.
- O número de loops não tem efeito na *treewidth*. As interações geradas pelo loop tem efeito direto na *treewidth*.

Vamos agora falar sobre algumas classes de redes com *treewidths* conhecidas.

2.3.2 Tree networks, polytrees e multiply connected

Polytree networks, também conhecidas como *singly connected networks* são redes onde há no máximo um caminho (não direcionado) entre qualquer dois nós. A *treewidth* dessas redes é k , onde k é o número máximo de pais que qualquer nó pode ter.

Tree networks são *polytrees* onde cada nó tem no máximo um pai, e portanto sua *treewidth* é no máximo 1.

Multiply connected são aquelas que não são *singly connected*.

2.4 PRUNING

REFERÊNCIAS

- [1] Adnan Darwiche. *Modeling and Reasoning with Bayesian Networks*. 1st Edition. Cambridge University Press, 2009.
- [2] Renato Lui Geh. *Aprendizado Automático de Sum-Product Networks (SPN)*. 2015. URL: <http://www.ime.usp.br/~renatolg/mac0215/doc/project/relatorio.pdf>.
- [3] Renato Lui Geh. *Modeling and Reasoning with Bayesian Networks: Inference by Variable Elimination 6.1-6.5*. 2. 2015. URL: <http://www.ime.usp.br/~renatolg/mac0215/doc/reports/week2/relatorio.pdf>.