

# Aprendizado Automático de Sum-Product Networks (SPN)

Projeto de MAC0215 (Atividade Curricular em Pesquisa)  
Aluno: Renato Lui Geh (Bacharelado em Ciência da Computação)  
Orientador: Denis Deratani Mauá

## 1 INTRODUÇÃO

Para compreendermos melhor as aplicações de uma Sum-Product Network precisamos primeiro entendermos distribuições de probabilidade multivariadas, as dificuldades de representa-las no espaço e o que é inferência de uma distribuição.

### 1.1 DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE MULTIVARIADAS

Uma distribuição de probabilidade multivariada é uma distribuição de probabilidade que resulta na probabilidade de que cada variável aleatória  $X_1, \dots, X_n$ , para  $n \geq 2$ , esteja em um dado intervalo ou conjunto para cada valor  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  correspondente. Se a distribuição possui apenas uma variável aleatória, dizemos que ela é uma distribuição de probabilidade monovariável. Um exemplo de distribuição multivariada segue abaixo:

Consideremos um dado não viciado. Seja  $A = 1$  se o número tirado é par e  $A = 0$  caso contrário. Seja  $B = 1$  se o mesmo número tirado em  $A$  é primo e  $B = 0$  caso contrário. Podemos construir a tabela abaixo:

Tabela 1

	1	2	3	4	5	6
A	0	1	0	1	0	1
B	0	1	1	0	1	0

A distribuição de probabilidade multivariada resultante é:

$$\begin{aligned}P(A = 0, B = 0) &= P\{1\} = \frac{1}{6} \\P(A = 1, B = 0) &= P\{4, 6\} = \frac{2}{6} \\P(A = 0, B = 1) &= P\{3, 5\} = \frac{2}{6} \\P(A = 1, B = 1) &= P\{2\} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

### 1.2 ESCOPO DE UMA DISTRIBUIÇÃO

Denotamos  $P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ , dados valores  $x_1, \dots, x_n$ , uma distribuição de probabilidade multivariada com variáveis aleatórias  $X_1, \dots, X_n$ . Dada uma distribuição de probabilidade, chamamos de escopo da distribuição o conjunto de variáveis que definem o domínio da função, ou seja,  $X_1, \dots, X_n$ . No caso da Tabela 1, o escopo da probabilidade é o conjunto  $\{A, B\}$ .

**Definição.** *Sejam  $P_1(X_1, \dots, X_k)$  e  $P_2(X_k, \dots, Y_n)$  distribuições de probabilidade multivariadas cujos escopos têm mesmo tamanho.*

1. Dizemos que  $P_1$  e  $P_2$  tem mesmo escopo se para toda variável aleatória  $X_i$  em  $P_1$  existe uma variável aleatória  $X_j$  em  $P_2$  tal que  $i = j$ .
2. Dizemos que  $P_1$  e  $P_2$  tem escopos disjuntos se para qualquer variável aleatória  $X_i$  em  $P_1$ , toda variável aleatória  $X_j$  em  $P_2$  obedece a regra  $i \neq j$ .

### 1.3 ESPAÇO DE UMA DISTRIBUIÇÃO MULTIVARIADA

Vamos reutilizar a Tabela 1, renomeando  $A$  para  $X_1$  e  $B$  para  $X_2$ . Portanto teremos  $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$ . Montando a tabela temos que:

Tabela 2

$X_1$	$X_2$	$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$
$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$\frac{1}{6}$
$X_1 = 0$	$X_2 = 1$	$\frac{1}{6}$
$X_1 = 1$	$X_2 = 0$	$\frac{1}{6}$
$X_1 = 1$	$X_2 = 1$	$\frac{1}{6}$

Pode-se ver que uma tabela com todas as possíveis probabilidades de todas as variáveis terá  $2^n$  elementos, onde  $n$  é o número de variáveis aleatórias. Portanto o crescimento em espaço necessário é exponencial, o que é impraticável em conjuntos de dados maiores. A solução vem com o uso de Redes Profundas (ex.: Sum-Product Networks), que tornam  $O(2^n)$  em  $O(n)$  no tamanho do grafo.

### 1.4 INFERÊNCIA

## 2 DEFINIÇÃO

Sum-Product Networks são uma nova classe de modelos probabilísticos cuja inferência é sempre polinomial no tamanho da rede.

**Definição.** Uma SPN é recursivamente, pela definição de Gens e Domingos[4]:

1. Uma distribuição monovariável polinomial.
2. Um produto de SPNs cujos escopos são disjuntos.
3. Uma soma de SPNs com peso não negativo cujos elementos tem mesmo escopo.
4. Nada mais é uma SPN.

Podemos definir graficamente uma SPN como um grafo direcionado acíclico (DAG) onde as folhas são sempre variáveis (ou distribuições monovariáveis), seus nós internos são somas ou produtos e para todo vértice conectando um nó soma com um nó filho há um peso não negativo. Também assume-se que toda soma e produto estão em alturas alternantes, ou seja, todo nó pai de um nó interno que é soma é um produto e vice-versa.

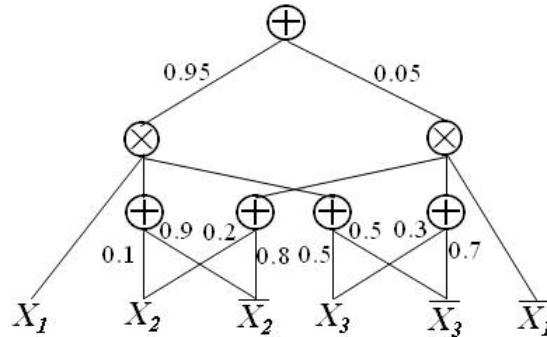


Figura 1: Um exemplo de uma SPN com variáveis Booleanas, onde  $x_1, \dots, x_d$  e  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d$  são folhas e o resto dos nós são somas ou produtos.[6]

Dada uma distribuição multivariada, podemos construir uma SPN.

### 3 CARACTERÍSTICAS

Há várias vantagens de SPNs sobre outras redes de aprendizado:

1. SPNs tem estrutura parecida a outros Modelos Gráficos Probabilísticos (PGM), mas a representação de certos tipos de independência é mais fácil.
2. SPNs tem inferência polinomial no tamanho do grafo, enquanto que inferência em Redes Bayesianas é NP-difícil.
3. Experimentos mostram que aprendizado de arquiteturas SPN tiveram melhores resultados quando comparadas a arquiteturas estáticas.[2]

### 4 APLICAÇÕES

SPNs obtiveram resultados impressionantes em muitos conjuntos de dados[3], tais como:

- Reconstrução de imagens.
- Classificação.
- Reconhecimento de atividade.
- Logs click-through.
- Sequências de ácido nucleico.
- Filtragem colaborativa.

### 5 PROPOSTA

O objetivo deste projeto é realizar uma comparação das principais técnicas de aprendizado automático de Sum-Product Network a partir de um conjunto de dados, avaliando o desempenho e os resultados das técnicas utilizadas.

Será estudada a estrutura e propriedades de uma Sum-Product Network e em seguida aplicada as seguintes técnicas de aprendizado:

- Divisão em subconjuntos mutualmente independentes e EM clustering.[4]
- Busca gulosa.[1]
- Aprendizado com clustering de variáveis.[2]
- Aprendizado por meio de SPNs Bayesianas Não-Paramétricas.[5]

Em seguida o aluno irá comparar as técnicas implementadas e apresentar os resultados.

### 6 ACOMPANHAMENTO

Relatórios semanais serão publicados no seguinte endereço:

<http://www.ime.usp.br/~renatolg/mac0215/doc/reports/>

É também possível acompanhar tanto os relatórios quanto as implementações pelo repositório do projeto:

<https://github.com/RenatoGeh/mac0215/>

## 7 REFERÊNCIAS

### ARTIGOS

- [1] Aaron Dennis e Dan Ventura. “Greedy Structure Search for Sum-Product Networks”. Em: *International Joint Conference on Artificial Intelligence* 24 (2015).
- [2] Aaron Dennis e Dan Ventura. “Learning the Architecture of Sum-Product Networks Using Clustering on Variables”. Em: *Advances in Neural Information Processing Systems* 25 (2012).
- [4] Robert Gens e Pedro Domingos. “Learning the Structure of Sum-Product Networks”. Em: *International Conference on Machine Learning* 30 (2013).
- [5] Sang-Woo Lee, Christopher Watkins e Byoung-Tak Zhang. “Non-Parametric Bayesian Sum-Product Networks”. Em: *Workshop on Learning Tractable Probabilistic Models* (2014).
- [6] Hoifung Poon e Pedro Domingos. “Sum-Product Networks: A New Deep Architecture”. Em: *Uncertainty in Artificial Intelligence* 27 (2011).

### WEBSITES

- [3] University of Washington Department of Computer Science. *Sum-Product Networks*. URL: <http://spn.cs.washington.edu/index.shtml>.

---

Os artigos listados na referência acima podem ser encontrados em: <http://www.ime.usp.br/~renatolg/mac0215/articles/>