Seient ~~21~~ 22 | TC | 15 Sep 2020

Antoni Lozano

antoni@cs.upc.edu

◦ Hector Hernandez
◦ Nil F.
Jose Antonio T.

Concatenació

$|\lambda x| = |x\lambda| = |x|$

$k \in \mathbb{N}$

$x^k = k \cdot |x|$

exponenciació

$x^i = \begin{cases} \lambda & \text{si } i=0 \\ x\,x^{i-1} & \text{si } i>0 \end{cases}$

Ordenació canònica dels mots és l'ordenació per mida creixent primer i lexicogràfic, després

$\Sigma^* = \{ s_1 s_2 \dots s_k \mid k \in \mathbb{N} \wedge s_i \in \Sigma \ \forall i \text{ tal que } 1 \le i \le k \}$

Llenguatge

Un llenguatge sobre Σ és un subconjunt de Σ^*, donat un alfabet Σ

Operacions

- complementari de A com $\bar{A} = \{ x \in \Sigma^* \mid x \notin A \}$
- concatenació $A \cdot B = \{ x \cdot y \mid x \in A \wedge y \in B \}$
- intersecció, reunió, producte cartesià com a conjunt
- estrella de Kleene de A com $A^* = \bigcup_{k \ge 0} A^k$
- el tancament positiu de A^+ com $A^+ = \bigcup_{k > 0} A^k$

el producte cartesià dona parells

* exponenciació es associativa

1.1g

$L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \forall x y : w = xy \rightarrow |x|_b \geq |x|_a \}$

1.b) $L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \forall x y : w = xaby \rightarrow |y|_{ba} \geq 1 \}$

1.e) $L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \forall x, y : w = xby \rightarrow |x|_a \notin \dot{2} \}$

Marc demanec tots els mots ho compleixen $\{a, b\}^*$

$L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \exists x, y, z \quad w = xy = zx \wedge |w| > |x| > 0 \}$

2)

a) $xy = yx$ Fals

$x = abra$
$y = cadabra$

$xy = abracadabra$
$yx = cadabraabra$

d) $AB = BA$

$A = \{xy \mid x \in A \wedge y \in B\}$

sigui $A = \{a\}$ $B = \{b\}$ $AB = \{ab\}$ $\neq$ $B = \{ba\}$

e) $A \neq \emptyset \wedge AB = AC \rightarrow B = C$

$\{a, ab\}$ $\{\lambda, b\}$ $\{ab\}$ λ, aa $\{a, aa\}$ $\{\lambda, a, aa\}$

ab abb a, ab ba ba

$\{\lambda, aa\}$ $\{a\}$ $\{\lambda, a\}$ a, ba λ, ba

a, aa, aaa a, aa, ba, baa

3g

$(L_1 \cap L_2)^* \subseteq (L_1^* \cap L_2^*)$

① $L_1 \cap L_2 \subseteq L_1 \rightarrow (L_1 \cap L_2)^* \subseteq L_1^*$

② $L_1 \cap L_2 \subseteq L_2 \rightarrow (L_1 \cap L_2)^* \subseteq L_2^*$

① $\wedge$ ② $\rightarrow (L_1 \cap L_2)^* \subseteq L_1^* \cap L_2^*$

3h $(L_1 \cap L_2)^* \supseteq (L_1^* \cap L_2^*)$

3. j $\overline{L^*} \overset{①}{\subseteq} \overline{L} \overset{②}{\subseteq} \overline{L}^*$

$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$

$\overline{L^*} = \emptyset$

$\overline{L}^* = \overline{L}^0 \cup \overline{L}^1 \overline{L}^2$

①

$L \subseteq L^*$ cert per def

$\Leftrightarrow \forall x \; x \in L \rightarrow x \in L^*$

$\Leftrightarrow$ contrarecíproco

$\Leftrightarrow \forall x \; x \in \overline{L^*} \rightarrow x \in \overline{L}$

$\Leftrightarrow \overline{L^*} \subseteq \overline{L}$

②

$\overline{L}^* = \bigcup_{k \geq 0} \overline{L}^k$

$= \overline{L}^0 \cup \overline{L}^1 \cup \overline{L}^2 \ldots$

$\uparrow$ $\overline{L}$

per def es cert que $\overline{L} \subseteq \overline{L}^*$

3 k) $\overline{L}^* \supseteq \overline{L} \supseteq \overline{L}^*$ fals

pertant $\emptyset \supseteq \overline{L}$ es demostra que es fals

② contraexemple

$\overline{L} \supseteq \overline{L}^*$ fals

$L = \{aa\}$

$\overline{L} = \{\lambda, a, aaa, \dots\}$

$\overline{L}^* = \bigcup_{n \geq 0} \overline{L}^n = \{a\}^*$

$\overline{L} \supseteq \overline{L}^*$ falso porque $aa \notin \overline{L} \wedge aa \in \overline{L}^*$

3 o) $(L^2)^* \subseteq (L^*)^2$

$(L^*)^2 = L^*$ perque L^* conte λ pertant

$(L^2)^* \subseteq L^*$ qualsevol cosa està inclosa en L^*

3 p) $(L^2)^* \supseteq (L^*)^2$

$(L^2)^* \supseteq L^*$

$L = \{aa\}$ $L^2 = \{aaaa\}$

$L^* = \{a\}^*$

5 a) $\sigma(a_1 a_2 \dots a_n) = a_1 a_1\ a_2 a_2 \dots a_n a_n$

és cert si $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$

si $x = a_1 \dots a_n$
$y = b_1 \dots b_m$

$\sigma(a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m) = \sigma(a_1 \dots a_n)\sigma(b_1 \dots b_m)$

$= a_1 a_1 \dots a_n a_n\ b_1 b_1 \dots b_m b_m$

4) a)

$(xy)^R = y^R x^R$

def recursiva de x^R

$x^R = \begin{cases} \lambda & \text{si } x = \lambda \\ x'^R a & \text{si } x = ax' \end{cases}$

$a \in \Sigma$

$x' \in \Sigma^*$

cert

si $x = x_1 \dots x_n$ $\quad y = y_1 \dots y_m$

$(xy)^R = (x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m)^R$ aplicant el revers de def

$y_m \dots y_1 x_n \dots x_1 = y^R x^R$

4b) (L

$(L_1 L_2)^R = L_2^R L_1^R$

$\forall L_1, L_2 \quad L_1 L_2 = \{x, y \mid x \in L_1 \wedge y \in L_2\}$

$L^R = \{w^R \mid w \in L\}$

Definim L_3 com $\{xy \mid x \in L_1 \wedge y \in \cancel{y} \in L_2\} \rightarrow L_3^R = \{w^R w \in L_3\}$

$L^R = \{a, b, ba\}$ $\quad \overline{L^R} = \{\Sigma^* \setminus \{a, b, ba\}$

$L = \{a, b, ab\}$ $\quad \overline{L} = \{\Sigma^* \setminus \{a, b, ab\}$

$\overline{L}^R = \{$

4e)

$\overline{L}^R = \overline{L^R}$

$(\overline{L})^R = \{w^R \mid w \in \overline{L}\} = \{w \mid w^R \in \overline{L}\}$

$\overline{L^R} = \{w \mid w \in L^R\} = \{w \mid w^R \in \overline{L}\}$

$w \notin L^R \leftrightarrow w^R \notin L$

4g)

$(L_1 L_2)^R = L_1^R L_2^R \rightarrow L_1 = L_2$

contraejemplo $\quad \Sigma = \{a, b\}$ $\quad L_1 L_2 = \{a\} \rightarrow (L_1 L_2)^R = \{a\}$

$L_1 = \{\lambda\}$

$L_2 = \{a\}$

y queda claro que $L_1 \neq L_2$

TC 29 Sep 2020

5b) $\sigma(a_1 a_2 a_3 \dots a_n) = a_1 a_2 a_2 a_3 \dots \underbrace{a_n a_n}_{n}$

false $x = a$ $y = a$

$\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ $\xrightarrow{\text{entonces}}$ $aaa = aa$

demostración por reducción

si es un morfismo

5g) $\sigma(w) = \lambda$

$\sigma(w_1)\sigma(w_2) =$

$\sigma(w_1 \cdot w_2) = \lambda = \lambda\lambda = \sigma(w_1)\sigma(w_2)$

la λ es la identitat de l'operació de la concatenació

5e) $\sigma(w) = a^{|w|}$

cert propietat $|xy| = |x| + |y|$

$\sigma(xy) = a^{|xy|} = a^{|x|+|y|} = a^{|x|}a^{|y|} = \sigma(x)\sigma(y)$

5g) $\sigma(w) = \sigma_1(\sigma_2(w))$ per a morfismes $\sigma_1\ \sigma_2$

$\sigma(xy) = \sigma_1(\sigma_2(xy)) = \sigma_1(\sigma_2(x)\sigma_2(y)) = \sigma_1(\sigma_2(x))\sigma_1(\sigma_2(y))$

por definición de σ_1 morfismo

$= \sigma(x)\sigma(y)$.

5f) $\sigma(w) = w^R$ fals

$w = 10$ $x = 1$ $y = 0$

$\sigma(1) = 1$ $\sigma(0) = 0$ $\sigma(10) = 10$

6a)

$\sigma(L_1 L_2) = \sigma(L_1)\sigma(L_2)$ cert

$\sigma(L_1 L_2) = \{\sigma(w_1 w_2) \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\} =$ def morfism

$= \{\sigma(w_1)\sigma(w_2) \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}$ def de concatenació

$= \{\sigma(w_1) \mid w_1 \in L_1\}\{\sigma(w_2) \mid w_2 \in L_2\}$

$= \sigma(L_1)\sigma(L_2)$

6 d) $\sigma(L^*) = \sigma(L)^*$ cierto

$$\sigma(L^*) = \sigma\left(\bigcup_{n\geq 0} L^n\right) = \bigcup_{n\geq 0} \sigma(L^n) = \bigcup_{n\geq 0} (\sigma(L))^n = \sigma(L)^*$$

def de L^*

por las propiedades del morfismo podemos ponerlo dentro

e) $\sigma(L^R) = \sigma(L)^R$ FALSO

$L = \{aaba\}$ $\quad \sigma : \{a,b\}^* \longrightarrow \{0,1\}^*$

$\sigma(L^R) = \sigma(\{abaa\}) = 01\lambda 0101$ $\quad \sigma(a) = 01 \quad \sigma(b) = \lambda$

$(\sigma(L))^R = \sigma(\{aaba\})^R = \{010101\}^R = \{101010\}$

6 g) $\sigma(L) = L \longrightarrow \forall x \in L : \sigma(x) = x$ FALS

contra exemple

$\sigma(a) = b$ $\quad L = \{a, b\}$

$\sigma(b) = a$

$\sigma(L) = L$

$\sigma(L) = \sigma(\{a,b\}) = \{\sigma(a), \sigma(b)\} = \{a, b\}$

y el morfismo no es $\sigma(x) = x$

7 a) $|L_1| \cdot |L_2| = |L_1 \cdot L_2|$ $\longrightarrow$ falso!

def concatenacio

$L_1 L_2 = \{xy \mid x \in L_1 \wedge y \in L_2\}$

$L_1 L_2$

$L_1 = \{\lambda, a\}$

$L_2 = \{a, aa\}$

$L_1 L_2 = \{a, aa, aaa\}$

$|L_1 L_2| = 3 \neq 4 = |L_1| \cdot |L_2|$

d) $|L^n| = |L|^n$

$L_1 = \{\lambda, a\}$ $\quad n = 3 \quad L^n = L \cdot L \cdot L$

$L_1 L_1 L_1 = \{\lambda, a, aa\}\{\lambda, a\} = \{\lambda, a, aa, aaa\} = |L^3| = 4$

$|L| = 2$

$|L|^3 = 8 \neq 4 = |L^3|$

8 a) shiftar L $\quad S(L)\{vu \mid uv \in L\}$ $\quad$ $\boxed{u}\boxed{v} \in L$ $\quad$ $\boxed{v}\boxed{u} \in S(L)$

$S(L)^* \subseteq S(L^*)$

es FALS

todo subconjunto pertenece a su $*$

$w = w_1 w_2 \in L \xrightarrow{\text{def } S} w_2 w_1 \in S(L) \xrightarrow{S(L) \subseteq S(L)^*}$

$w = w_1 w_2 \in L \xrightarrow{L \subseteq L^*} w_1 w_2 \in L^* \xrightarrow{\text{def } S} w_2 w_1 \in S(L^*)$

6 d) $\sigma(L^*) = \sigma(L)^*$ cierto

$\sigma(L^*) = \sigma\left(\bigcup_{n\geq 0} L^n\right) = \bigcup_{n\geq 0} \sigma(L^n) = \bigcup_{n\geq 0} (\sigma(L))^n = \sigma(L)^*$

def de L^*

por las propiedades del morfismo podemos ponerlo dentro

e) $\sigma(L^R) = \sigma(L)^R$ FALSO

$L = \{aaba\}$

$\sigma : \{a,b\}^* \longrightarrow \{0,1\}^*$

$\sigma(a) = 01$ $\quad \sigma(b) = \lambda$

$\sigma(L^R) = \sigma(\{abaa\}) = 01\lambda 0101$

$(\sigma(L))^R = \sigma(\{aaba\})^R = \{010101\}^R = \{101010\}$

6 g) $\sigma(L) = L \longrightarrow \forall x \in L : \sigma(x) = x$ FALS

contraexemple

$\sigma(a) = b$

$\sigma(b) = a$

$L = \{a, b\}$

$\sigma(L) = L$

$\sigma(L) = \sigma(\{a,b\}) = \{\sigma(a), \sigma(b)\} = \{a, b\}$

y el morfismo no es $\sigma(x) = x$

7 a) $|L_1| \cdot |L_2| = |L_1 \cdot L_2|$ $\longrightarrow$ falso!

def concatenació

$L_1 L_2 = \{xy \mid x \in L_1 \wedge y \in L_2\}$

$L_1 L_2$

$L_1 = \{\lambda, a\}$

$L_2 = \{a, aa\}$

$L_1 L_2 = \{a, aa, aaa\}$

$|L_1 L_2| = 3 \neq 4 = |L_1| \cdot |L_2|$

8a) contraejemplo

$L = \{ab\}$ $\quad abba \in L$ $\notin S(L)$

$S(L) = \{ab, ba\}$

b) contraejemplo

$L = \{ab, ba\}$ $\boxed{aabb}$

$\cdot L \cdot L$

$= \{\lambda, a, aa, aaa\} = |L^3| = 4$

8a) $\{vu \mid uv \in L\}$

$\in L$

$\in S(L)$

$S(L)^* \subseteq S(L^*)$

es FALS

$w = w_1 w_2 \in L \xrightarrow{\text{def } S} w_2 w_1 \in S(L) \xrightarrow{S(L) \subseteq S(L)^*}$ todo subconjunto pertenece a su *

$w = w_1 w_2 \in L \xrightarrow{L \subseteq L^*} w_1 w_2 \in L^* \xrightarrow{\text{def } S} w_2 w_1 \in S(L^*)$

9 demostrar que es falso $aw = wb$

Si contamos

$$|aw|_a = 1 + |w|_a > |w|_a = |wb|_a$$

1.1 1.10

trobar el llenguatge $L = \Sigma \overline{L}$

$L = \Sigma \overline{L}$
$= \lambda + \Sigma \overline{L}$

llavors $L = \lambda + \Sigma \overline{L}$ i $\overline{L} = \Sigma L$

$L = \lambda + \Sigma \Sigma L$
$= \lambda + \Sigma^2 L$
$= \lambda + \Sigma^2 (\lambda + \Sigma^2 L)$
$= \lambda + \Sigma^2 + \Sigma^4 L$

per inducció veiem que L es els llenguatges de mida parella

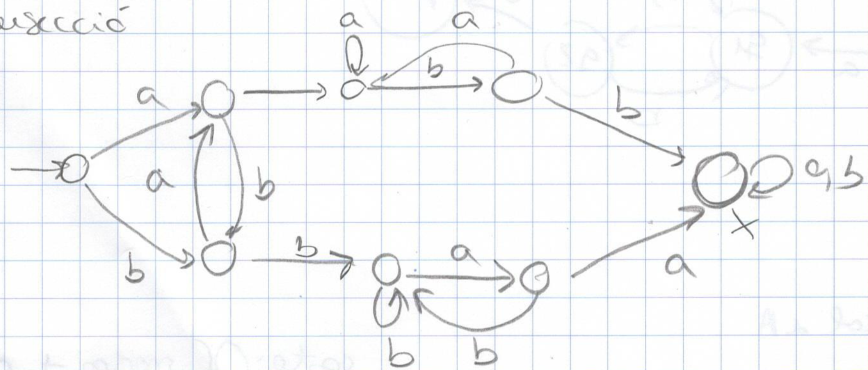
$$\bigcup_{k \geq 0} \Sigma^{2k}$$

Tema 2

2.1

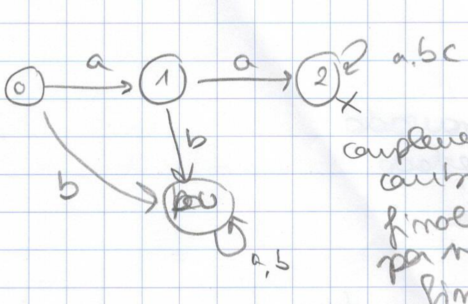
$L_1 = \{ xaay \mid x, y \in \{a,b\}^* \}$ $L_2 = \{ xbby \mid x, y \in \{a,b\}^* \}$

intersecció



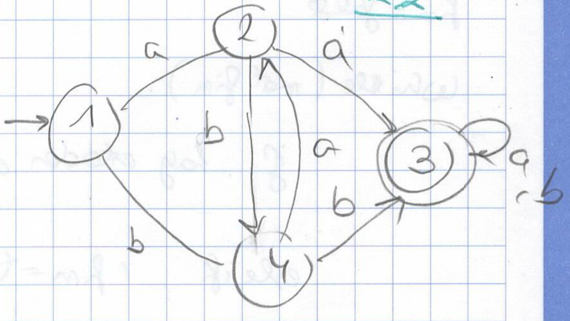
en la unión es el mismo pero con muchos estados finales pero se debe minimizar

2.4

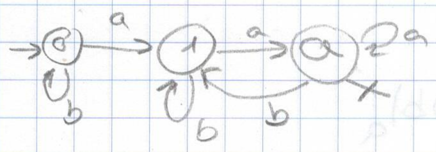


completa cambiar finales por no finales

2.2



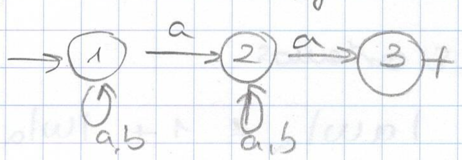
2.7



NFA

xaya

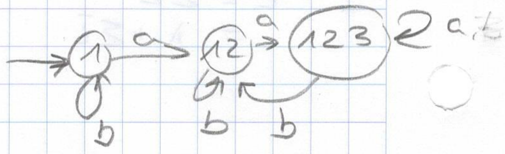
$x,y \in \{a,b\}^*$



	a	b
→ 1	{1,2}	{1}
2	{2,3}	{2}
3	$\emptyset$	$\emptyset$

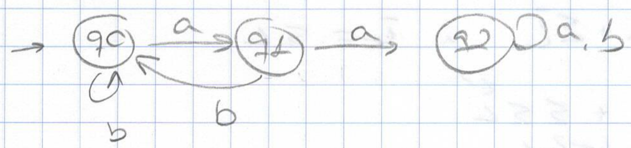
	a	b
→ 1	12	1
12	123	12
+ 123	123	12

finales tots els que contenen un final

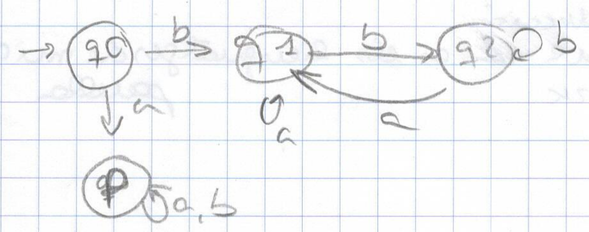


2.8

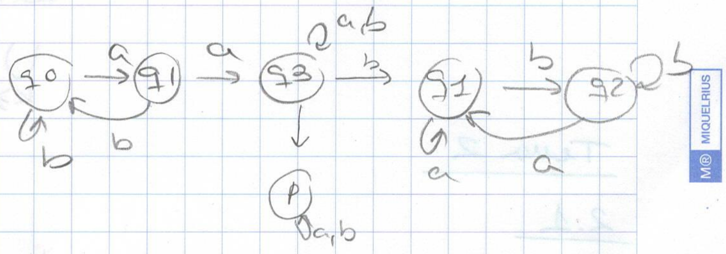
$L_1 = \{ xaay \mid x,y \in \{a,b\}^* \}$



$L_2 = \{ bxyb \mid xy \in \{a,b\}^* \}$

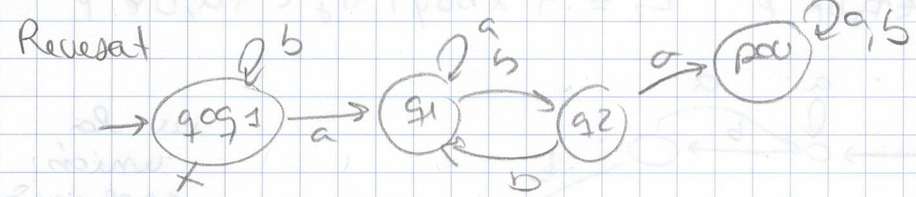


NFA $A_1 \cdot A_2$



2.13

Revesat



2.21

marcamos estado inicial de A

fin = false

while (not fin):

if hay estados accesibles no marcado
marcamos los estado

esle if (fin = true)

if hemos marcado un estado final true

output true

coste: O(nodos + aristas)

2.23 coste $O(2^n |\Sigma|$ (coste de minimizar un DFA?)

2.27

① $L(M') = (L_1 \cap \overline{L_2}) \cup (\overline{L_1} \cap L_2)$ ← diferencia simètrica

② si ($L(M') == \emptyset$) return true
sino return false

poc eficient

fer l'autòmat de L_1 i L_2
l'autòmat mínim es igual
i després comparar (com comparar graf es molt difícil
compararem les taules de transicions
de cada autòmat i les comparem)

cost més que lineal
perquè minimitzar no
es lineal.

2.28

Si vols veure si està inclòs pots fer l'intersecció i t'ha de sortir l'inclòs

$L(A_1) \subseteq L(A_2) \iff L(A_1) \cap L(A_2) = L(A_1)$

llavors fas l'intersecció i minimitzes
el mínim de $L(A_1) \cap L(A_2)$ ha de ser igual al $L(A_1)$

Explicación Gramáticas

$AB \rightarrow S \rightarrow S_A S_B$
$A^* \quad S \rightarrow S S_A \mid \lambda$
operacions tancades

$S \rightarrow aBS \mid bAS \mid \lambda$
$A \rightarrow bAA \mid a$
$B \rightarrow aBB \mid b$

$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid |x_a| = |x_b|\}$

13 Oct 2020

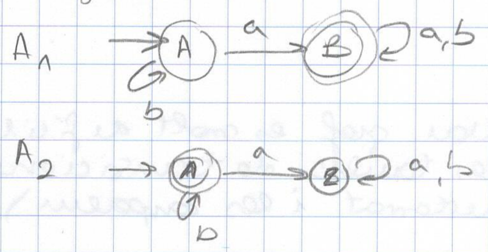
Ex 29

a) DFAs A_1 A_2 són mínims

$A_1 \cap A_2$ el producte cartesià (la intersecció) es mínim?

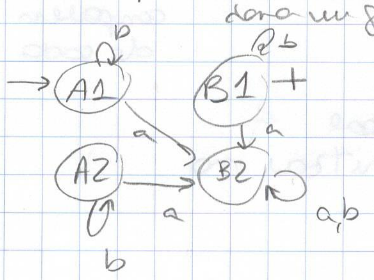
Doncs no, ni la $\cap$ ni la $\cup$ (reunió)

contra exemple



la intersecció es buit $\emptyset$
perquè $A_2 = \overline{A}_1$ $\quad A_1 \cap \overline{A}_1 = \emptyset$

pero el producte dona un graf enorme



no es mínim

c)

1) A es DFA mínim
2) $A = \langle Q, \Sigma, \delta, F \rangle$
3) $\overline{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q-F \rangle$

per reducción al absurdo

asumimos $\overline{A}$ no es mínim $\xrightarrow{\text{fem el mínim}}$ $\overline{A}'$ DFA complementari mínim

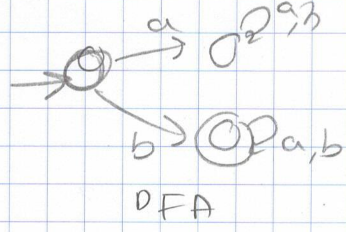
$\overline{A}'$ te menys estats que $\overline{A}$ → si fem el complementari $\overline{\overline{A}'}$ ⇒

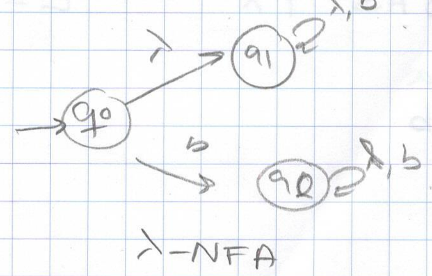
A' i es el DFA mínim que reconeix el llenguatge $L(A)$

~~pero~~ Llavors com el DFA mínim es únic i no son iguals →

A no era mínim → CONTRADICCIÓ.

d) $\sigma(a) = \lambda$ contraexemple





13 Oct 2020

2.31

L $\quad$ $\text{Prefixos}(L) = \{ w \mid \exists x \;\; wx \in L \}$

donat DFA A, com es pot construir un altre DFA, $\text{Prefix}(A)$ tal que

$$L(\text{Prefixos}(A)) = \text{Prefixos}(L(A))$$

on $\text{Prefix}(A) = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F' \rangle$ on $F' = \{ q \in Q \mid \exists x \;\; qx \in F \}$

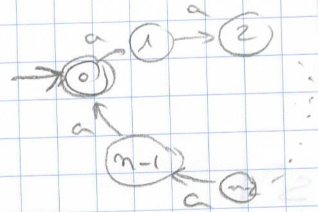
Demostració

$$w \in L(\text{Prefix}(A)) \Leftrightarrow q_0 w \in F' \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists x \;\; q_0 wx \in F \Leftrightarrow$$

$$\exists x \;\; wx \in L(A) \Leftrightarrow w \in \text{Prefix}(L(A))$$

2.35

$B_m = \{ a^k \mid k \in \dot{m} \}$ $\quad$ A_m



$A_m = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, \{q_0\} \rangle$

$\Sigma = \{a\}$

$Q = \{q_0, \dots, q_{m-1}\}$

$\delta(q_i, a) = q_{(i+1)\% m}$

$L(A_m) = B_m$

demostració

arribem al estat $k\% m$

Fet: $\delta(q_0, a^k) = q_{k\% m}$

es pot demostrar per inducció

ara demostrem la igualtat

$$a^k \in L(A_m) \Leftrightarrow \delta(q_0, a^k) \in F \Longleftrightarrow \delta(q_0, a^k) = q_0$$

$$\underset{\text{tenint en compte el fet}}{\Longleftrightarrow} q_{k\% m} = q_0 \Leftrightarrow k\% m = 0 \Leftrightarrow k \in \dot{m}$$

$$\underset{\text{def de } B_m}{\Leftrightarrow} a^k \in B_m$$

Sabem que arribem a un estat $k\% m$

3.16

?

3.1

$V = \{S, T, x, y, z\}$

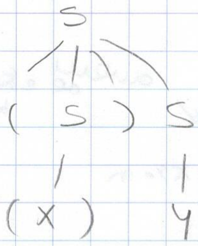
$\Sigma \{0 \dots 9, +, -, \times, \div\}$

$S \to x \mid x+S \mid x-S$

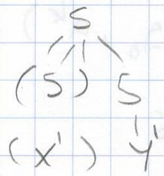
3.3

a) $S \to (S)S \mid$

es no ambiguo.



x) es prefix de x'



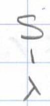
perque $|x)|_{(} < |x)|_{)}$,

Volem demostrar que si $S \xrightarrow{*} w$

w té un únic arbre de derivació

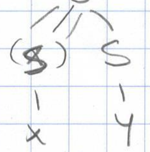
Inducció en $|w|$

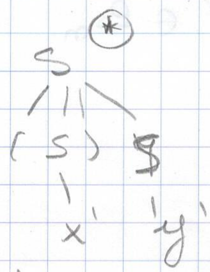
$|w| = 0$: $w = \lambda$



$|w| > 0$: $w = (x)y$

Suponemos (*) un altre arbre de derivació





com x és prefix propi de x'

$\to$ x) és prefix de x'

$\to |x)|_{(} < |x)|_{)}$

Lema:

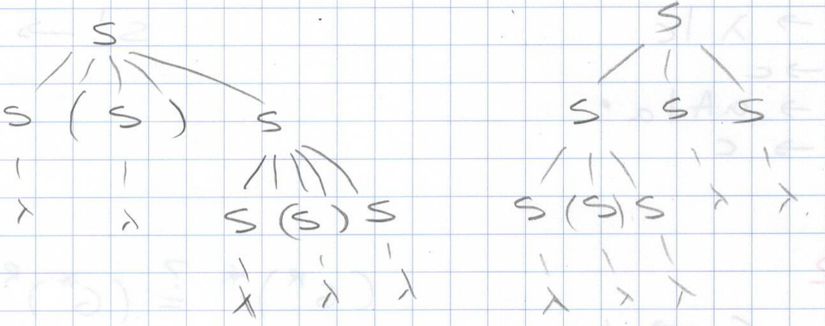
Si $S \xrightarrow{*} w$ Llavors

$\forall$ prefix w' de w $|w'|_{(} \geq |w'|_{)}$

20 Oct 2020

3.3 b) ambigu $S \to S(S)S \mid \lambda$ $\Sigma = \{(,)\}$

Paraula ()()



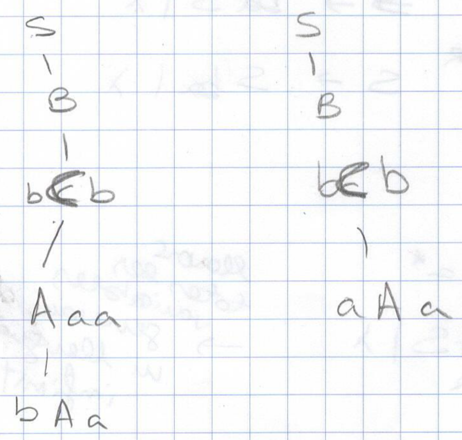
c) ambigua

$S \to aSb \mid B$

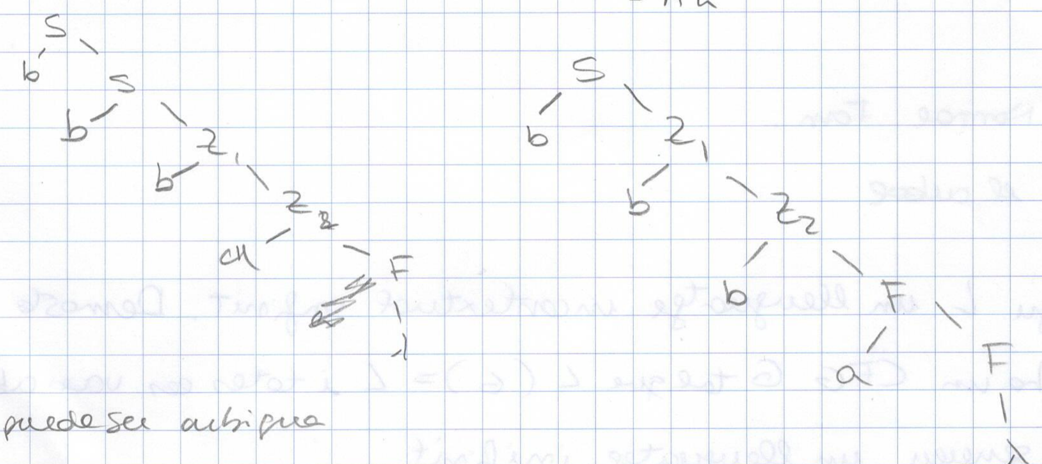
$B \to bAa \mid bCb \mid \lambda$

$A \to aAbA \mid bAaA \mid \lambda$

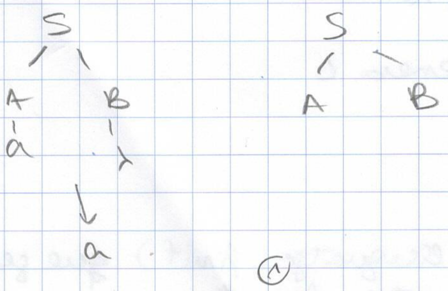
$C \to Aaa \mid aAa \mid aaA$



f) ambigua



3.5) puede ser ambigua



3.12

$S \to BC \mid \lambda$

$A \to aA \mid \lambda$

$B \to \mid bB$

$C \to c$

① eliminació λ

$S' \to S \mid \lambda$

$S \to BC$

$A \to aA \mid a$

$B \to bB$

$C \to c$

② eliminació de produccions unaries

$(S) = (S)$

$(A) = (A)$

$(B) = (B)$

$(C) = (C)$ no hay

③ eliminación de produccion unaries

eliminació fructifer (la B)

$S' \to \lambda \mid c$
$S \to c$
$A \to aA \mid a$
$C \to c$

eliminació de no accesibles

$S' \to \lambda \mid c$

3.23

$(G^R)^* \overset{?}{=} (G^*)^R$

c) $S \to ab$

$(G^R)^*$ $S \to baS \mid \lambda$ mismo lenguaje

$(G^*)^R$ $S \to Sba \mid \lambda$ arboles distintos

3.29

per a^*

$S \to AS \mid \lambda$
$A \to a$

llavors totes les variables $\to$ generan un llenguatge infinit

$S \to aS \mid \lambda$

3.26

Chomsky Normal Form.

y reconer el arbol

3.29 Sigu L un llenguatge incontextual infinit. Demostr que hi ha un CFG G tal que $L(G) = L$ i totes les variables de G generen un llenguatge inifinit

L es infinit sabem que G genera L

$L(G) = L$

Si G conté una variable X (en llenguatge finit) que genera un llenguatge finit per ex. $L_X = \{w_1, \dots w_k\}$

Llavors podem substituir cada producció $A \to \alpha_1 X \alpha_2$

α_1 i α_2 son produccion (amb variables i terminals)

per exemple

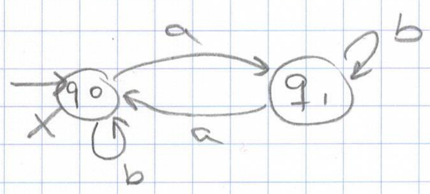
$\underbrace{-YY}_{\alpha_1} X \underbrace{ab}_{\alpha_2}$

per $A \to \alpha_1 w_1 \alpha_2 \mid$
$\alpha_1 w_2 \alpha_2 \mid$
$\alpha_1 w_k \alpha_2 \mid$

$\alpha_1, \alpha_2 \in (V \cup \Sigma)^*$

4.1

a)



$L_0 = L(A, q_0)$

$L_1 = L(A, q_1)$

$$\begin{cases} L_0 = \lambda + bL_0 + aL_1 \\ L_1 = aL_0 + bL_1 \end{cases}$$

$X_0 = \lambda + bX_0 + aX_1$

$X_1 = \underbrace{aX_0}_{B} + \underbrace{b}_{A}X_1$

$X_1 = b^* a X_0$

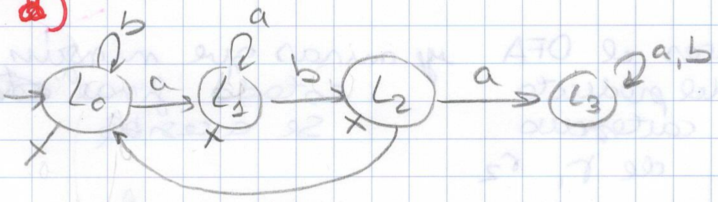
$X_0 = \lambda + bX_0 + ab^*aX_0$

$X_0 = \underbrace{\lambda}_{B} + \underbrace{(b + ab^*a)}_{A} X_0$

$X_0 = (b + ab^*a)^* \lambda$

$X_0 = (b + ab^*a)^*$

4.1. d)



$L_0 = \lambda + bL_0 + aL_1$

$L_1 = \underbrace{aL_1}_{A} + \underbrace{bL_2}_{B} + \lambda$

$L_2 = aL_3 + bL_0 + \lambda$

$L_3 = (a + b)L_3 \longrightarrow L_3 = \emptyset$

$L_0 = \lambda + bL_0 + aL_1$

$L_1 = a^*$

$L_2 = bL_0 + \lambda$

$L_3 = \emptyset$

$L_0 = \lambda + bL_0 +$ [illegible]

$L_1 = a^* bbL_0$

$L_2 = bL_0$

$L_3 = \emptyset$

4 a
demostren

$a^*(b+\cancel{c}a)^* = (a+b^*c)^* b^*$

a

~~Tema~~ 4

5 a) $L(r_1) = L(r_2)$

definició: Llenguatge associat a una expressió

generem el DFA de r_1 ~~y~~ r_2 després els minimitzem
Si dues expressions regulars reconeix el

1 $\{\lambda\}$, $\emptyset$, $\{a\}$, si és λ, $\emptyset$, a

2) $L(r_1) \cup L(r_2)$ o $L(r_1) \cdot L(r_2)$
si $r = (r_1 + r_2)$ o $r = r_1 r_2$

3) $(L(r_1))^*$ si $r = (r_1)^*$

b) $L(r_1) \subseteq L(r_2)$

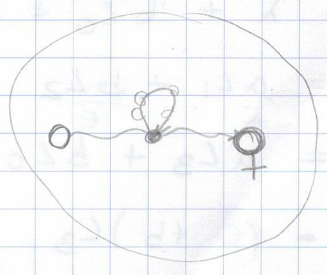
semblant de generar el DFA ~~dels dos~~ mínim de r_2 y i la de $r_2 + r_1$ ← esto es la unión
~~els minimitzes~~

Si els ~~dos~~ DFA son identics vol dir que r_1 no aporta i per tant $r_1 \subseteq r_2$

e) $L(r_1) \cap L(r_2) \; \cancel{\neq} \; = \emptyset$ haces el DFA del producto cartesiano de r_1 r_2 y miras que ningún estado final ~~este~~ se accesible

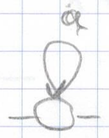
f) $|L(r_1) \cap L(r_2)| = \infty$

A

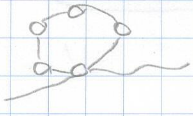


esto ocurre si existe un camino del estado inicial al final y en este camino haya un estado que forme parte de un ciclo o

↳ es decir que sea de la forma



o que sea un ciclo de estados

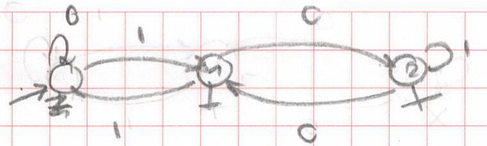


Formal

$\exists$ un camí de q_0 a un estat aceptado d F $\}$?

y $\exists q' \in F$ $\exists$ c camí de q_0 a q'

4.6



$X_0 = X_0 0 + X_1 1 + \lambda$

$X_1 = X_2 0 + X_0 1$

$X_2 = \underbrace{X_1 0}_{B} + X_2 \underbrace{1}_{A}$

arden (bis) ⊛ las flechas que llegan

$X = xA + B$

$x = BA^*$

$$\begin{cases} x_1 = x_1 0 1^* 0 + \underbrace{x_0 1}_{B} \\ x_2 = x_1 0 1^* \end{cases}$$

el llenguatge del automat es

$B + C \rightarrow 1 + 2$

$x_1 = x_0 1 (0 1^* 0)^*$

$x_0 = x_0 0 + x_0 1 (0 1^* 0)^* 1 + \lambda$

$x_0 (\underbrace{0 + 1(0 1^* 0)^* 1}_{A}) + \underbrace{\lambda}_{B}$

$x_0 = (0 + 1(0 1^* 0)^* 1)^* 0$

bueno y ahora acabar de substituir

5.1 g)

$\{a^n b^m \mid m \geq n\}$

se puede hacer como $a^N b^N$

$w = a^j a^{ik} a^{N-j-k} b^N$

$= a^{N-k-ik} b^N$

$= a^{N-k} b^N$ per $i = 0$

$=$

$x = a^j$

$y = a^k$

$z = a^{N-j-k} b^N$

No pertany perque

$\underbrace{N-k}_{n} < \underbrace{N}_{m}$

$n < m$

j)

$w = a^N b a^N$

$x = a^j$

$y = a^k$

$z = a^{N-j-k} b a^N$

$w = a^j a^{ik} a^{N-j-k} b a^N$

$= a^{N-k-ik} b a^N$ $\quad i = 0$

$= a^{N-k} b a^N \notin L$

no es palindrom perque no hi ha ni la mateixa quantitat de lletres

$w c w \mid w \in \{a,b\}^*$

17 Nov 2020

a) $\{a^n b^n \mid n \in \dot{2}\}$

Dem

$w = \cancel{a} a^{2N} b^{2N}$

$\forall N \geq 1 \quad \exists w \in L \quad |w| \geq N \wedge$

$|w| = 2N \geq N$

$|xy| \leq N$

$|y| \geq 1$

$x = a^j$
$y = a^k$
$z =$

1. c) $\{a^n b^m \mid n \neq m\} \in REG$

com es regular fem el complementari

$\overline{\{a^n b^m \mid n \neq m\}} \in REG$

este se hace con la intersección ya que también es regular

1 d)

$A = \{a^{2n} b^n \mid n \in \dot{2}\}$

Suponemos que es regular

$N \geq 1$, fem $w = a^{4N} b^{2N} \in L$

$x = a^j$
$y = a^k$
$z = a^{4N-j-k} b^{2N}$, amb $k \geq 1$, $j+k \leq N$

veiem que $i \neq 1 \quad w = xy^i z \notin L$

Ejemplo $i = 0 \rightarrow \quad 4N - j - k \neq 2(2N)$ # deja de ser multiple de 2

$k \geq 1$

Los numeros de Fibonacci

Lema $\forall k \geq 0$

$F_{m+1} \geq k$

$N \geq 1$, tria $w = a^{F_{N+3}}$

$|w| \geq F_{N+1} \geq N$

$$\begin{cases} x = a^j \\ y = a^k & k \geq 1 \\ z = a^{F_{N3} - j - k} \end{cases}$$

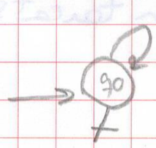
$w = xyz \quad i = 2$

$w' = xy^iz = a^{F_{N+3}+k}$

$$F_{N+3} < F_{N+3} + k \leq F_{N+3} + N \leq F_{N+3} + F_{N+1} < \underbrace{F_{N+3} + F_{N+2}}_{F_{N+4}}$$

5.2)

b) es Regular DFA



$\bigcup_{k \geq 1} L_k = \{0,1\}^*$

c) $\{ w \# w \mid w \in L_k \}$ este es No Regular

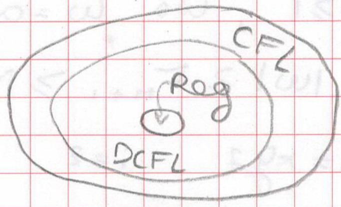
a) $\{ 1w \# 1w \mid \underbrace{1}_{\text{este es un nº finito}} w \in L_k \}$ y es Regular hacer DFA

Todo lenguaje

FINIT es REGULAR

Tema 5b

Recursiu



8. a)

$\sigma^{-1}(B) \cap A$

$B \in CFL$, $\sigma^{-1}(B) \in CFL$

$A \in Reg \rightarrow A \cap B \in CFL$

b) $\overline{\sigma^{-1}(C)}$

DCFL perque $C \in DCFL$

DCFL son tancats per morfisme invers i per complementari.

c) C^R

$C \in DCFL$ els DCFL no son tancats per Revers però sí que es CFL

d) $S(C)$ shiftat

$S(C)$ no es un CFL (eeeh... ni idea)

contraexemple creo que no DCFL

$L_2 = (012)^*$ que es regular i CFL

f) $(\overline{A \cap C}) \cup B \rightarrow CFL$

$\underbrace{A}_{Reg} \cap \underbrace{C}_{DCFL}$

DCFL y el complementari també es DCFL

que també es CFL y la unión de CFL's es CFL

el resultado es CFL

es $CFL \cup CFL \rightarrow DFL$?

g) $(\bar{A} - \sigma(B) \cap \bar{C})$ resultat CFL

$\bar{A} \rightarrow Reg$, $\bar{C} \rightarrow DCFL$

$\overline{Reg} \rightarrow Reg$ $\overline{DCFL} \rightarrow DCFL$

9) $L(G) \subseteq L(A) \iff L(G) - L(A) = \emptyset$

$\iff L(G) \cap \overline{L(A)} = \emptyset$

10) mirar fotos!

TC 15 dic 2020

6.6 Los lenguajes decidibles

c) Resta de conjuntos $L_1 - L_2$

M: generar un TM

entrada w

simular $M_1(w)$ i $M_2(w)$

si M_1 accepta w i M_2 rebutja w → ACCEPTAR

else REBUTJAR

La idea:

M accepta $w \leftrightarrow M_1$ accepta $\wedge$ M_2 rebutja

$\Leftrightarrow w \in L_1 \wedge w \notin L_2$

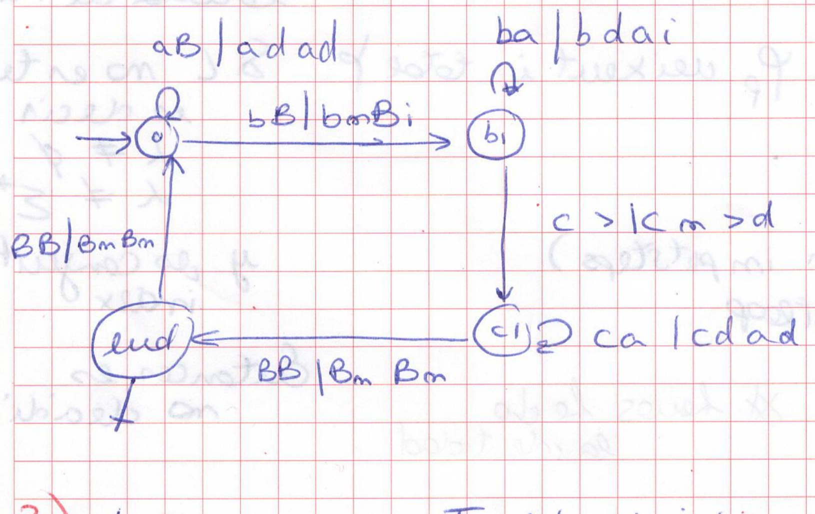
$\Leftrightarrow w \in L_1 - L_2$

2

a) $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

amb una 2 cinta TM

1) Copiem les a a la cinta buida
2) Comprovem que el nº b es igual al de a de la segona
3) Comprovem que el nº c es igual que les a de la segona



B = blanc

> = indica l'inici

3) Las maquinas de T deterministas no son más expresivas que las indeterminista. Pues con suficientes cintas puedes ~~convertir~~ simular con la determinista una indeterminista

6. d) Reverse de lenguajes decidibles es decidible

• $C \in Dec \iff C^R \in Dec$

Si $L(M_1) = C$ y $\forall x : M_1(x)\downarrow$ entonces $\exists\, M_2(x)\downarrow$ tal que $L(M_2) = C^R$

entrada w

per a tota subdivisió de w

8. b concatenació de semidecidibles

d d

Reg / PDA

9b $A = \{x \mid \exists y \; M_x(y)\downarrow\}$

$= \{x \mid \exists y \; \langle x,y \rangle \in B\}$

50/50

buit

K WP

CFG

és $B = \{\langle x,y \rangle \mid M_x(y)\downarrow\}$

g i mirar

Tema 7

1. m) $\overline{K} \leq L = \{p \mid \varphi_p$ definit i total$\}$

Teorema de Rice

Si L no es trivial es decir $L \neq \emptyset$, $L \neq \Sigma^*$ y es conjunt de index

Entonces es no decidible

M_p: input y {

if ($m_x x$ stops in inputsteps)

infiniteloop

else

output y;

** hemos hecho la identidad

L es no semidecidible

tenga se en cuenta que

$x \in \overline{K} \rightarrow M_x(x)\uparrow$

(se cuelga)

22 Dic 2020

Tema 7

2. g) $\{p \mid Dom(\varphi_p) \in Dec\} = C_g$

$\overline{K} \leq C_g$ (no semi-decidible)

$x \longmapsto p$: | entrada y
| simular $M_x(x)$
| simular $M_y(y)$
| retorna 1

si $x \in \overline{K} \to$ $M_x(x)\uparrow$ $Dom(\varphi_p) = \emptyset \in Dec$

$x \notin \overline{K} \to M_x(x)\downarrow \to Dom(\varphi_p) = K \notin Dec$

1. a)

$\{p \mid L_p$ es finito $\}$

hay infinitos p que cumplen esa condicion $\xrightarrow{\text{so}}$

Todos los lenguajes infinitos son no decidibles

· esto se puede demostrar por teorema de Rice para No decidible

· Tampoco parece semidecidible así que hacemos reducción a $\overline{K}$

entonces $\overline{K} \leq L$

input y {
 run m x x
 accept;
}

en caso de que $x \in \overline{K}$ entonces $L(M_p) = L_p = \emptyset$

si $x \notin \overline{K}$ entonces $M_x(x)\downarrow$ acepta

$\cancel{L_p}(M_p) = L_p = \Sigma^* = \mathbb{N}$

1. c)

$C = \{p \mid M_p(p) = p\}$ ($\varphi_p(p) = p$) $\longrightarrow$ este no es conjunt d'index

Rice

$C \neq \emptyset$
$C \neq \mathbb{N}$
C és conjunt d'index

$\Big\} \to C$ és indecidible

es no decidible pero semidecidible

entrada p
simular $M_p(p)$
si $\downarrow$ $i = p$ accept
si $\downarrow$ $i \neq p$ reject

$\longrightarrow$ para demostrar esto $\varphi_p(p) = p$

$p \in C$ $\varphi_p = \varphi_q \longrightarrow \varphi_q(p) = p$

pero esto no acaba de funcionar

ahora demostramos que no es decidible

$K \leq \{p \mid M_p(p) = p\}$

$x \mapsto M_p$: entrada y

simular $M_x(x)$

retorna y

si $x \in K \to M_x(x)\downarrow \to \forall y \; M_p(y) = y \to M_p(p) = p$

si $x \notin K \to M_x(x)\uparrow \to \forall y \; M_p(y) \uparrow$ no para $\to p \notin L$

7.1 d)

$\{p \mid \exists y : M_y(p) = p\}$ es decidible

porque siempre existirá una máquina que cumpla esto. Que es la identidad

$L = \{p \mid p \leq 100 \;\wedge\; Dom(\varphi_p) \in Dec\}$

$= \underbrace{\{p \mid p \leq 100\}}_{\text{este es un conjunto finito}} \cap \{p \mid Dom(\varphi_p) \in Dec\}$

$\longrightarrow$ como es finito es decidible

porque podríamos hacer una máquina que los fuese comprobando todos.

$L = \{ p \mid$

es el conjunto de los naturales porque siempre podemos encontrar un y

$\overline{K} \times \overline{K} = \{ (x,y) \mid x \in \overline{K} \wedge y \in K \}$

$L = \{ x \mid$ 3 apareix x vegades en $\pi \} \subseteq \mathbb{N}$

π es irracional $\rightarrow$ no és periòdic

$\forall x$ el decimal 3 apareix x vegades en l'ex. decimal de π)

si cert $L = \mathbb{N}$ decidible

fals - $L = \{0, 1, 2, \ldots n\}$ es finit $\rightarrow$ decidible.

3. f) $\langle x,y \rangle \mid 0 \leq x \leq 9 \wedge$ el decimal x aparece y veces consecutivas en las secuencia de decimales del número π

1) o bé π és un núm normal es a dir, te una distribució uniforme de les xifres i per tant cada secuencia de xifres inclosa la de y cop x apareix en el conjunt