TC 18 Sep 2019

1 f) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \exists w_1 w_2 \cdot (w = w_1 w_2 \wedge |w_1|_b \geq |w_1|_a)$

1 1) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \forall w_1 w_2 (w = w_1 w_2 \wedge |w_1| \in 2 \Rightarrow |w_1|_b \geq |w_1|_a)\}$

2 E) $A \neq \emptyset \wedge AB = AC \Rightarrow B = C$

falso contraejemplo

$A = \{\lambda, a\}$
$B = \{\lambda, aa\}$
$C = \{\lambda, aa\}$

$AB = BC = \{\lambda, a, aa, aaa\}$

concatenación igual, pero conjuntos B y C distinta

1.1.g)

$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \forall w_1, w_2\ w = w_1 w_2 \Rightarrow |w_1|_b > |w_1|_a\}$

1.2h) $(A \cap B) C \subseteq AC \cap BC$

$\downarrow$

$\forall w \quad w \in (A \cap B) C \Rightarrow w \in AC \cap BC$

$\boxed{X \subseteq Y \equiv \forall w \quad w \in X \Rightarrow w \in Y}$

$w \in (A \cap B) C \Rightarrow \exists x, y \begin{cases} w = xy \\ x \in A \cap B \\ y \in C \end{cases}$

$\Rightarrow \exists x, y \quad \begin{matrix} x \in A \\ x \in B \\ y \in C \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} w = xy \in AC \\ w = xy \in BC \end{matrix} \Rightarrow xy \in AC \cap BC$

$\underbrace{L^* = \{a,b\}^*}_{①} \Leftarrow \underbrace{\{a,b\} \subseteq L}_{\text{es cierto porque}}$

$\Sigma = \{a,b\}$

w_i es a o b

$w_i \in \{a,b\}$

①

$\{a,b\} \subseteq L$

$\supseteq] \quad \forall w \quad w \in \Sigma^* \Rightarrow w \in L^*$

$\exists n$

tiene longitud n $\quad w \in \Sigma^*$, $|w| = n$ $\Rightarrow \{ \cancel{w = 1}$ $\quad w = \underset{\substack{\in \{a,b\} \\ \subseteq L}}{w_1} \underset{\substack{\in \{a,b\} \\ \subseteq L}}{w_2} w_3 \ldots \underset{\substack{\in \{a,b\} \\ \in L}}{w_n} \rightarrow w \in L^n \subseteq L^*$

$L^* = \{a,b\}^* \rightarrow \{a,b\} \subseteq L \qquad L^1 = \{a,b\}$

$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \ldots$

$L^* = \{a,b\}^* \Rightarrow \{a,b\} \subseteq L$

$L^* = \{a,b\}^*$

$\{a,b\} \subseteq \{\{a,b\}^* = L^*$

$\{a,b\} \subseteq L^*$

$a \in \bigcup_{m \geq 0} L^m \Rightarrow \exists m_0 > 0 \quad a \in L^{m_0} = L \, L \, . \, L \Rightarrow a = \omega_1 \, \omega_2 \, .. \, \omega_n$ $\lambda \, a \quad \lambda$

$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

$\omega \in \{a,b\}^* \mid \forall x,y : \{ \omega = xay \rightarrow |x_b| \in \dot{2} \} \}$

(3c) $L_1^* \, L_2^* \supseteq (L_1 L_2)^*$ FALSO

$L_1^* L_2^* = \{ a^n b^m \mid n, m \geq 0 \wedge a \in L_1 \wedge b \in L_2 \}$

concatenación

$(L_1 L_2)^* = \{ (ab)^n \mid n \geq 0 \}$

contra ejemplo

$L_1 = \{a\}$ $\quad L_1^* \, L_2^*$

$L_2 = \{b\}$ $\quad aaa \dots bbb \not\supseteq ababab$

(3f) $(L_1^* \cup L_2^*) \supseteq (L_1 \cup L_2)^*$ FALSO

$L_1 = \{a\}$ $\quad (L_1 \cup L_2)^* = \{\lambda, a, b, ab, aa, ba \dots$

$L_2 = \{b\}$ $\quad (L_1^* \cup L_2^*) = \{\lambda, a, aa, b, bb \dots\}$

$L_1 \cup L_2 = \{a, b\}$

al revés es cierto $\quad \boxed{A \subseteq B \Rightarrow A^* \subseteq B^*}$

$L_1^* \subseteq L_2^* \rightarrow L_1 \subseteq L_2$ falso

$L_1 = \{aa\}$ $\quad L_1^* \subseteq L_2^*$ $\quad L_1^* = \{\lambda, aa, aaaa \dots\} = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$

$L_2 = \{a\}$ $\quad L_1 \not\subseteq L_2$ $\quad L_2^* = \{\lambda, a, aa, aaa \dots\} = \{a^n \mid n \geq 0\}$

25 Sep 2019

3j $\overline{L^*} \subseteq \overline{L} \subseteq \overline{L}^*$

Def

$\overline{L^*} = \{x \in \Sigma^* \mid x \notin L^*\}$

$\overline{L}^* = \{x \in \Sigma^* \mid x \notin L\}^*$

$\overline{L} = \{x \in \Sigma^* \mid x \notin L\}$

$\overline{L} \subseteq \overline{L}^*$ por def

$\overline{L^*} \subseteq \overline{L}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\overline{A} = \{x \in \Sigma^* \mid x \notin A\}$

se cumple la inclusión

$L^* = \{a\}^* = \{\lambda, a, \dots\} = \{a^n / n \geq 0\}$

$\overline{L^*} = \overline{\{a\}^*} = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_b \geq 1\}$

$L = \{a\}$

$\overline{L} = \Sigma^* - \{a\}$ $\quad \overline{L^*} \subseteq \overline{L}$

$\boxed{A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}}$

3e $L_1 \neq \emptyset \wedge L_2 \neq \emptyset \wedge L_1 \cap L_2 \cancel{\neq} = \emptyset \Rightarrow L_1^* \neq L_2^*$

$L_1 \cap L_2 = \{w \in L_1 \cap L_2 \mid w \in L_1 \wedge w \in L_2\} = \emptyset = w$

$\exists\, w_1 \in L_1$ $\quad w_1 \neq w_2$

$\exists\, w_2 \in L_2$

a $\quad$ aaa

$\{|w_1|$ mínimo en $L_1\}$

$\{|w_2|$ mínimo en $L_2\}$

(a) $|w_1| < |w_2| \Rightarrow w_1 \notin L_2^*$

$\wedge\, w_1 \neq \lambda$

ordenados por tamaño

$L_2^* = \{\lambda_1, w_2, \dots\}$

(c) $|w_1| = |w_2|$

$\Downarrow$

$w_1 \notin L_2^*$

$w_2 \notin L_1^*$

ya que al ser el mínimo y de misma cardinalidad, no podemos obtener la otra palabra ya que la conjunción obtiene cardinalidades superiores o palabras ya contenidas

(b) en caso de que $w_1 = \lambda$

$L_1 = \{\lambda\} \Rightarrow L_1^* \neq L_2^*$

porque $L_1 \cap L_2 \cancel{\neq} \emptyset$

aquí habrá más elementos

3p $(L^2)^* \supseteq (L^*)^2$ falso

$L^* = \{a^n \mid n \geq 0\}$

$(L^*)^2 = \{a^n \mid n \geq 0\}^2 = L^*$

$L = \{a\}$

$L^2 = \{aa\}$

$(L^2)^* = \{\lambda, aa, aaaa, \dots\} = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$

pero

$(L^2)^* \subseteq (L^*)^2$

$(L^2)^* \subseteq L^*$

3.5) $(\lambda \in L) \wedge (L^2 \subseteq L) \iff L = L^*$

$\Leftarrow$) $L = L^* \Rightarrow (\lambda \in L) \wedge (L^2 \subseteq L)$

$\lambda \in L^*$ por def

cierto

$L^2 \subseteq L^*$ por def

$\Rightarrow$) $(\lambda \in L) \wedge (L^2 \subseteq L) \Rightarrow L = L^*$

$L \subseteq L^*$ ✓

$L^* \subseteq L$

$\bigcup_{n \geq 0} L^n$ queremos ver $\forall n \geq L^n \subseteq L$

1) $n = 0$ $L^0 = \{\lambda\}$ cierto por H/I

2) $n = 1$ $L^1 = L$ ✓

3) $n = 2$ $L^2 \subseteq L$ ✓

$n = 3$ $L^3 = \underset{\underset{L}{\cap\vert}}{L^2} \cdot \underset{\underset{L}{\cap\vert}}{L}$ $\subseteq L \cdot L = L^2 \subseteq L$ ✓

Inducción

$n = 0$ $L^0 = \{\lambda\} \subseteq L$ ✓

$L^{n-1} \subseteq L$ (HI)

$L^n \subseteq L$

$\underset{\underset{L^{HI}}{\cap\vert}}{L^{n-1}} \cdot L \subseteq L \cdot L = L^2 \subseteq L$

1.2 g) $(A \cup B) \cdot C = AC \cup BC$

$\Rightarrow$) $(A \cup B) C \subseteq AC \cup BC$

$x = w \cdot y \mid w \in (A \cup B) \wedge y \in C$

si $w \in A$ entonces $x = w \cdot y \in AC$ por tanto $x \in AC \cup BC$

si $w \in B$ " $x = w \cdot y \in BC$ " $x \in AC \cup BC$

$\Leftarrow$) $x \in AC \cup BC$ $x = u \cdot v \wedge u \in A \wedge v \in C$

entonces $u \in A \cup B$ como $v \in C$, $x \in (A \cup B) C$

$u \in A$ $u \in A \cup B$

2 Oct 2019

1.4 e)

$\overline{L^R} = \overline{L}^R$

$\Rightarrow$)

$\forall w \mid w \in \overline{L^R} \rightarrow w \notin L^R \xrightarrow{\text{def de complementario}} w^R \notin L \rightarrow w^R \in \overline{L} \rightarrow w \in \overline{L}^R$

definició de reverse

si $w^R \in L \Rightarrow (w^R)^R \in L^R \Rightarrow w \in L^R$

$\Leftarrow$)

$\forall w \mid w \in \overline{L}^R \rightarrow w^R \in \overline{L} \rightarrow$

1.4g) $(L_1 L_2)^R = L_1^R L_2^R \Rightarrow L_1 = L_2$

falso

$L_1 = \{aa\}$

$L_2 = \{aaa\}$

$(L_1 L_2)^R = L_2^R L_1^R = aaaaa = L_1^R L_2^R$

$\forall w$

pero $L_1 \neq L_2$

$L_1 = \{ab\}$

$L_2 = \{ababa\}$

1.6) d $\sigma(L^*) = \sigma(L)^*$ TODO MAL

cierto

Propiedad de omega

$\sigma(L^*) \underset{def}{=} \sigma\left(\bigcup_{n \geq 0} L^n\right) = \sigma(L^0) \cup \sigma(L) \ldots \Leftarrow$

$w \in \sigma(L^*) \Rightarrow \exists m \quad w \in \sigma(L^m) = (\sigma(L))^m \Rightarrow w \in \sigma(L)^*$

$w \in \sigma(L)^* \Rightarrow \exists m \quad w \in \sigma(L)^m = \sigma(L^m) \Rightarrow w \in \sigma(L^*)$

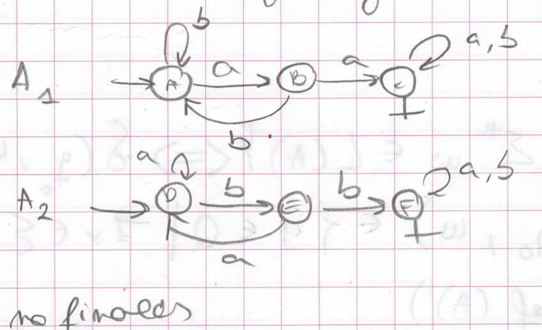
2.2)

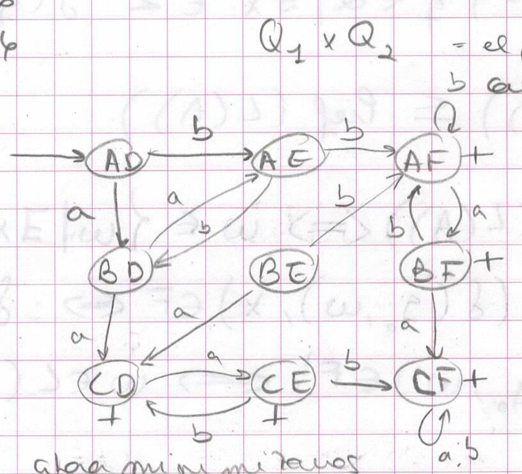
$L_1 = \{xaay \mid x,y \in \{a,b\}^*\}$

$L_2 = \{xbby \mid x,y \in \{a,b\}^*\}$

definición de unión

$Q_1 \times Q_2$ = el producto cartesiano en DFAs

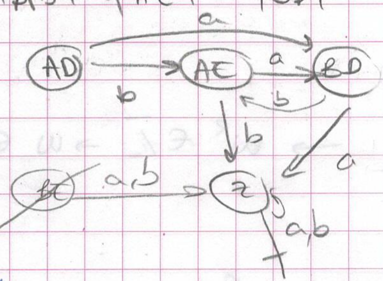


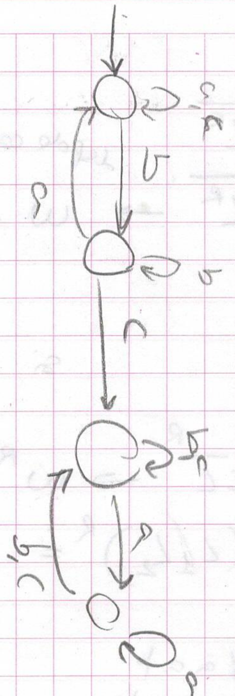


- no finales $\{AD, AE, BD, \cancel{BE}\}$
- finales $\{AF, BF, CF, CD, CE, CF\}$

ahora minimizamos

{AD} {AE} {BD} {BE

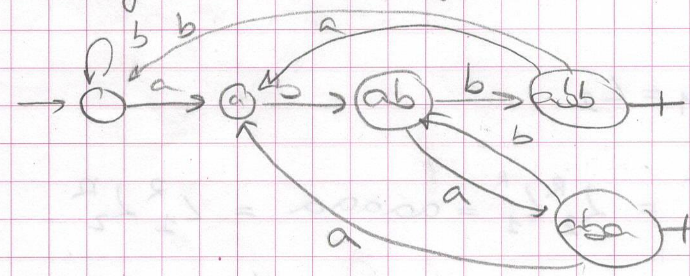




esto es el autómata del mío ≥ 18

2.11

$L = \{ xaby \in \{a,b\}^* \mid |y| = 1 \}$



2.26

calculo de estos

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

en el caso peor es cuando el autómata ya es mínimo y en cada iteración quitas uno

$O(n^2)$

2.31

Dado L, $Pref(L) = \{ w \mid \exists x \in \Sigma^* \; wx \in L \}$

$A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ reconoce L

$Pref(A) = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F' \rangle$

donde $F' = \{ q \in Q \mid \exists x \in \Sigma^* \; \delta(q,x) \in F \}$

$L(Pref(A)) \subseteq Pref(L(A))$

$w \in Pref(L(A)) \Leftrightarrow w \in \{ w \mid \exists x \in \Sigma^* \; w \in L(A) \} \Leftrightarrow \delta(q_0, wx) \in F$

$\Leftrightarrow \delta(\delta(q_0, w), x) \in F \Leftrightarrow \delta(q_0, w) \in \{ q \in Q \mid \exists x \in \Sigma^* \; \delta(q,x) \in F \}$

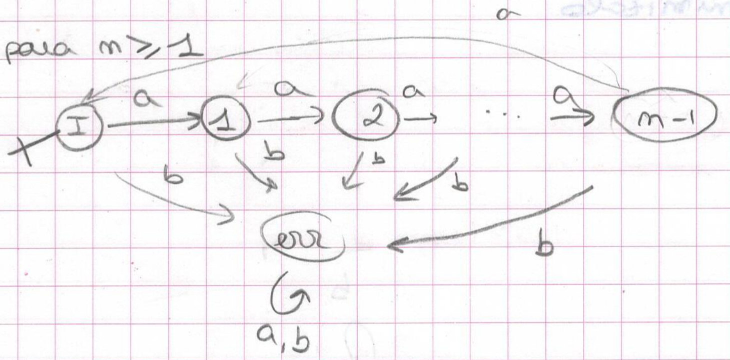
$\Leftrightarrow \delta(q_0, w) \in F' \Leftrightarrow w \in L(Pref(A))$

* Repasar esto

2.35)

$B_m = \{a^k \mid k \text{ es múltiple de } m\}$

para $m \geq 1$

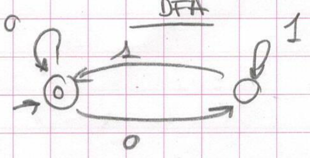


2.34)

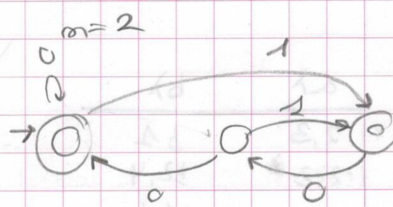
$L_m = \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists k \ (\text{valor}_2(w) = k \cdot 2^m)\}$

$m = 1$

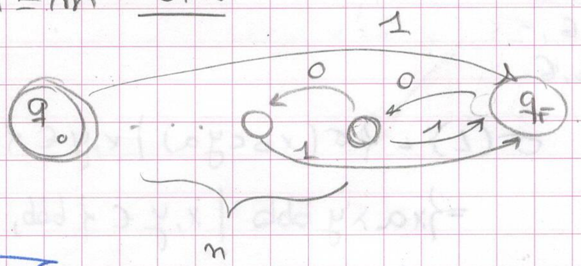
DFA



$m = 2$



$m = m$ DFA



4.3

a) $S \to (S)\,S \mid$

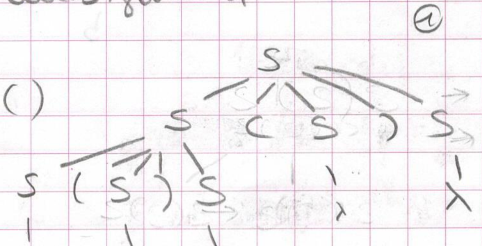
demostrar que no es ambiguo

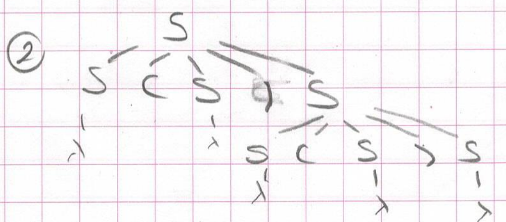
↳ basado en la definición

el primer prefijo de la palabra me obliga a hacer una cosa y por tanto no puedo tener ambigüedad

b) $S \to S\,(S)\,S \mid$

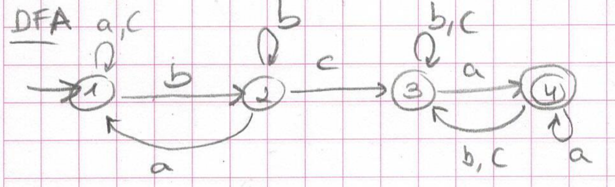
es ambiguo! ejemplo $()()$



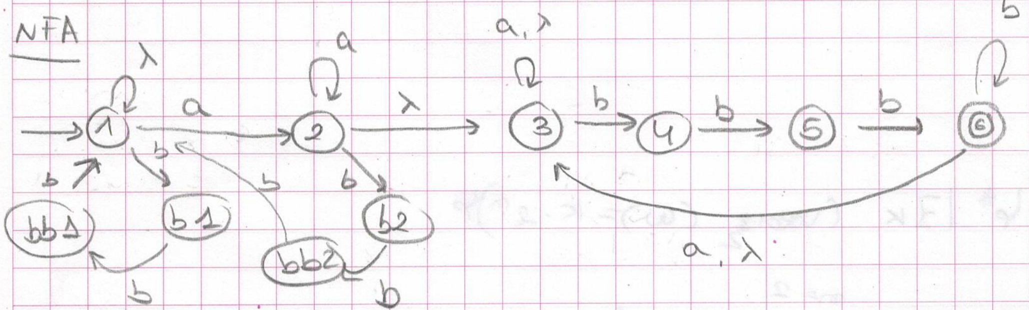


2.18) obtener el DFA min A para $L = \{xbcya \mid x, y \in \{a,b,c\}^*\}$ y dado el morfismo $\sigma(a) = bbb$, $\sigma(b) = a$, $\sigma(c) = \lambda$, calcula el NFA imagen de $\sigma(A)$ determinizalo y minimizalo

DFA



NFA



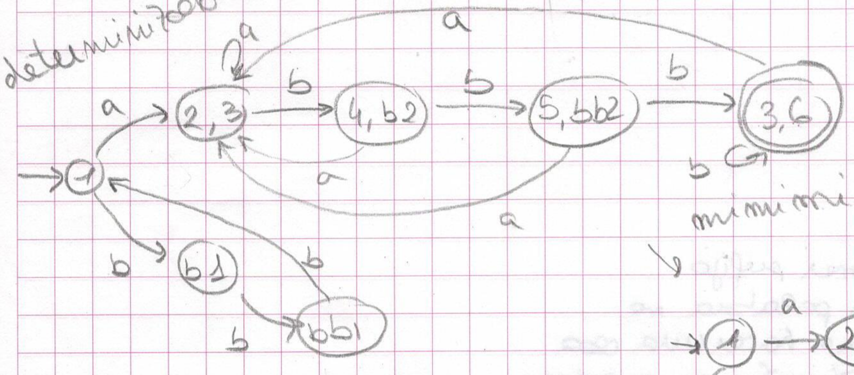
	a	b	λ		aλ	bλ
1	2	b1	1	1	2,3	b1
2	2	b2	2,3	2,3	2,3	b2,4
3	3	4	3	b1	–	bb1
4	–	5	4	b2,4	–	5,bb2
5	–	6	5	bb1	–	b1
6	3	6	3,6	5,bb2	–	3,6
b1	–	bb1	b1	3,6	2,3	3,6
bb1	~~5~~	1	bb1			
b2	–	bb2	b2			
bb2	–	1	bb2			

$\sigma(L) = \{\sigma(xbcya) \mid x, y \in \{a,b,c\}^*\}$

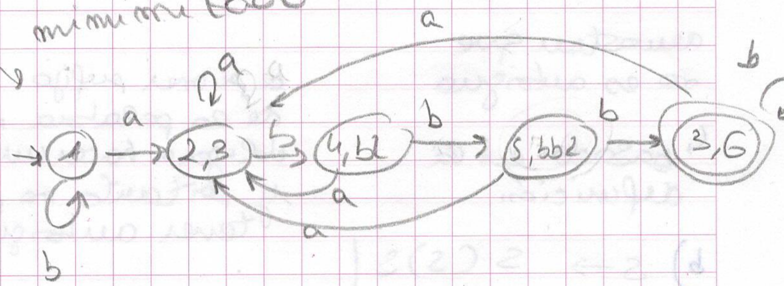
$= \{x a \lambda y bbb \mid x, y \in \{bbb, a, \lambda\}^*\}$

$\{x a y bbb \mid x, y \in \{a, bbb\}^*\}$

determinitzat



minimitzat

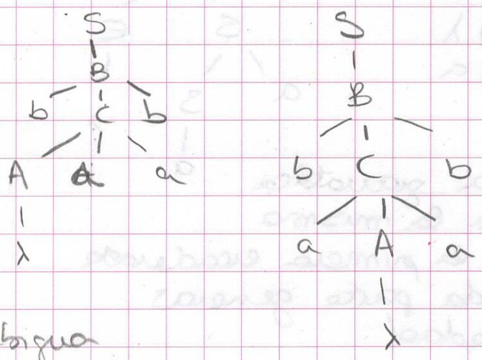


4.3

c)

$S \to aSb \mid B$
$B \to bAa \mid bCb \mid \lambda$
$A \to aAbA \mid bAaA \mid \lambda$
$C \to Aaa \mid aAa \mid aaA$

ejemplo ambiguo baab



árboles distintos para la misma palabra!

4.4

G_1 no ambigua
G_2 no ambigua

$G_1 \cup G_2$ ambigua

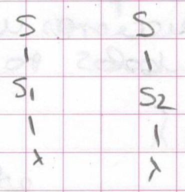
G_1: $S \to aS \mid \lambda$
G_2: $S \to bS \mid \lambda$

LA UNIÓN

$G_1 \cup G_2$ es ambigua

$S \to aS \mid bS \mid \lambda$

se (λ) puede hacerlo 2 maneras



se puede poner como
$S \to S_1 \mid S_2$
$S_1 \to aS_1 \mid \lambda$
$S_2 \to bS_2 \mid \lambda$

4.5

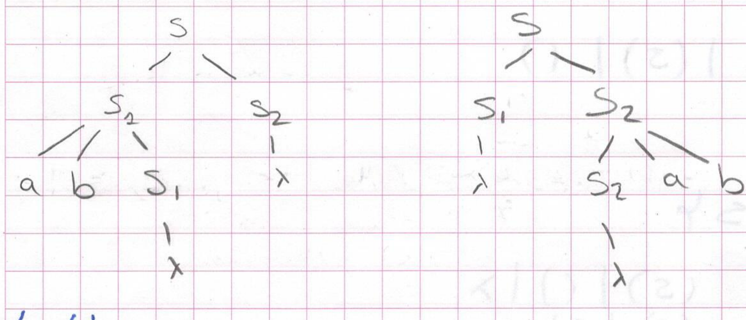
LA CONCATENACIÓN

demuestra que la concatenación $G_1 \cdot G_2$ de dos gramáticas no ambiguas sí podría ser ambigua

$S_1 \to abS_1 \mid \lambda$ $\qquad G_1 = \{\Sigma_1, V_1, P_1, S_1\}$

$S_2 \to S_2ab \mid \lambda$ $\qquad G_2 = \{\Sigma_2, V_2, P_2, S_2\}$

$S \to S_1S_2$ $\qquad (G_1G_2) = \{\Sigma_1 \cup \Sigma_2, V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1S_2\}, S\}$



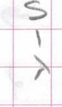
4.6

demuestra que si G no es ambigua su G* puede ser ambigua

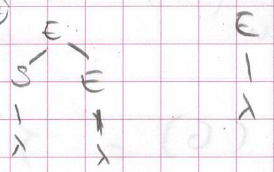
G $\quad S \to aSb \mid \lambda$

G^* $\quad E \to SE \mid \lambda$
$\quad S \to aSb \mid \lambda$

① no ambiguo



② sí ambiguo

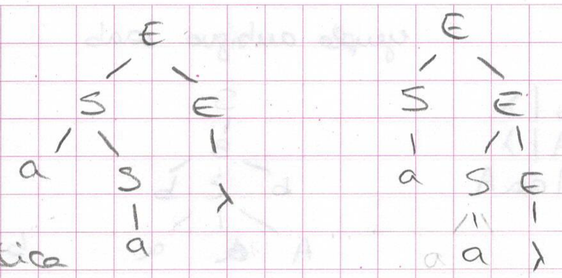


$\neg(G \neg amb \Rightarrow G^* \neg amb) \longrightarrow G \neg amb \wedge G^* amb$

otro ejemplo

$E \rightarrow SE \mid \lambda$

$S \rightarrow aS \mid a$



cuando una gramatica puedes crear la misma palabra con la primera encadenada a la segunda parte generas ambiguedad

4.12

eliminacion de λ-producciones
producciones unarias
símbolos no-útiles

para ver si una palabra está contenida en el alfabeto

(a) $S \rightarrow (S)S \mid \lambda$

$S_0 \rightarrow S \mid \lambda$ ← esto es una producción unaria

$S \rightarrow (S)S \mid (S) \mid ()S \mid S$ * todas las combinaciones posibles

en este paso hemos eliminado los pasos unarios

$S_0 \rightarrow (S)S \mid (S) \mid ()S \mid () \mid \lambda$ * ahora subtituimos S por la de arriba

$S \rightarrow (S)S \mid (S) \mid ()S \mid ()$ → todas las producciones de este lenguaje garantizan que el tamaño crece

gramatica final

(b) $S \rightarrow SS \mid (S) \mid \lambda$

Anulables $(G) = \{S\}$

quitamos las λ producciones
$S' \rightarrow S \mid \lambda$
$S \rightarrow SS \mid S \mid (S) \mid ()$

quitamos producciones unarias

$(S') = \{S', S\}$
$(S) = \{S\}$
$S' \rightarrow SS \mid (S) \mid () \mid \lambda$
$S \rightarrow SS \mid (S) \mid ()$

fecundos (G) = { (,), S', S }
*que generan simbolos

accesible (G) = { S', S }

~~19~~ 20 Nov 2019

3.16)

ab^*

$S \to XS \mid YS$

$X \to ab$
$Y \to ab$

y si se elimina $Y \to aS$ genera igualmente el mismo lenguaje

3.17) coste de eliminar las lambda producciones

$S \to aXbS \mid bYaS \mid \lambda$
$X \to aXbX \mid \lambda$
$Y \to bYaY \mid \lambda$

$S \to aXb \mid abS \mid ab \mid bYa \mid baS \mid ba \mid aXbS \mid bYaS$

$X \to aXb \mid abX \mid ab \mid aXbX$
$Y \to bYa \mid baY \mid ba \mid bYaY$

el coste es exponencial en casos como
$A \to A_1 A_2 A_3 A_4$
$A_1 = a \mid \lambda$
$A_2 \to b \mid \lambda$
$A_3 \to c \mid \lambda$
$A_4 \to d \mid \lambda$

este ejercicio ni torra

pero hay casos en el que el coste puede ser lineal.

3.18) coste temporal y espacial para eliminar producciones unarias

[esto está en el libro]

① identificar para cada variable las variables que tienen producciones unarias.

al final es cuadrático

3.29)

L incontextual infinito

Dem: $\exists G$ $L(G) = L$ y todas sus variables generan un lenguaje infinito

* para cada variable que produce variables finitas ~~gene~~ sustituyes

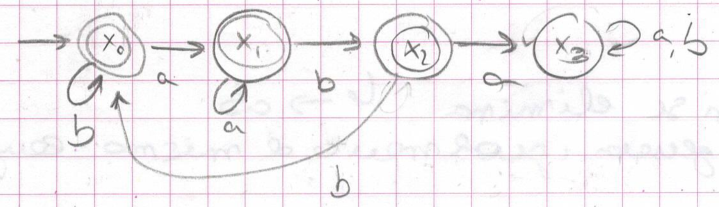
$L(G) = a^+ = L$

$G \begin{cases} S \to SXY \mid b \\ X \to a \\ Y \to aY \mid \lambda \end{cases}$

$\begin{cases} S \to SaY \mid b \\ Y \to aY \mid \lambda \end{cases}$

3.1) lenguaje que no tiene aba

d)



Arden

$X = AX + B \Rightarrow X = A^* B$

$\lambda \notin A$

esquema

$x_0 = x_0 b + a x_1 + \lambda \Rightarrow x_0 = b^*(a x_1 + \lambda) \Rightarrow x_0 = b^* a x_1 + b^*$

$x_1 = a x_1 + b x_2 + \lambda \Rightarrow x_1\ a^*(b x_2 + \lambda) \Rightarrow x_1 = a^* b x_2 + a^*$

$x_2 = a x_3 + b x_0 + \lambda \Rightarrow x_2 = b x_0 + a(a+b)^*$

$x_3 = (a+b) x_3 + \emptyset \Rightarrow x_3 = \emptyset$

$x_0 = b^* a (a^* b x_2 + a^*) + b^* \Rightarrow x_0 = b^* a a^* b x_2 + b^* a a^* + b^*$

$\Rightarrow x_2 = b(b^* a a^* b x_2 + b^* a a^* + b^*) \Rightarrow b b^* a a^* b x_2 + b b^* a a^* + b b^* \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = (b b^* a a^* b)^* (b b^* a a^* + b b^*)$

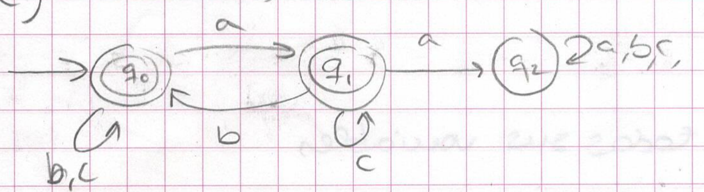
$x_0 = b^* a a^* b ((b b^* a a^* b)^* (b b^* a a^* + b b^*)) + b^* a a^* + b^*$

3.1)

e) lenguaje palabras $\{a, b, c\}^*$ entre dos "a" aparece una b

$w = aba$ $\quad$ $\underline{ab}$

$w \notin aa$



ARDEN

$X = AX + B$

$L_0 = L(A, q_0) = \lambda + a L_1 + (b+c) L_0$

$L_1 = L(A, q_1) = \lambda + a L_2 + b L_0 + c L_1$

$L_2 = L(A, q_2) = (a+b+c) L_2 + \emptyset \Rightarrow L_2 = \emptyset$

$x_2 = \emptyset$

$x_1 = \lambda + b x_0 + c x_1$

$x_1 = c^*(\lambda + b x_0) = c^* + c^* b x_0$

$x_0 = \lambda + a c^* + a c^* b x_0 + (b+c) x_0$

$= (a c^* b + b + c)^* (\lambda + a c^*)$

aquí lo que queremos es

$a^* b \, a \, a^*$

3.4)

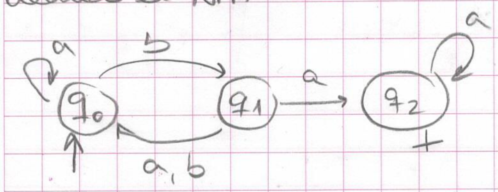
b) $(bb+ba+a)^* baa^* \stackrel{?}{=} a^* b(aa^*b+ba^*b)^* aa^*$

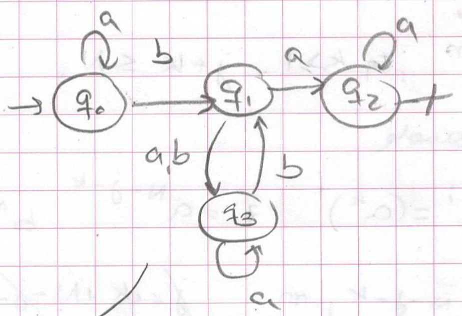
queremos ver si son la misma expresión regular

↓

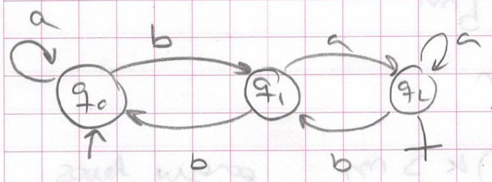
creamos sus DFA, minimizamos como DFA min es único si son iguales queda demostrado que sí

① creamos el NFA





⇓ det + min



cuando det y min tenemos el mismo

5.1) pumping lema

b) demostrar que es un lenguaje no regular

$\forall N \mid N \geq 1$

$\exists w \mid |w| \geq N$

Lema

$|y| \geq 1$

$|xy| \leq N$

$\forall i \geq 0$

el lema!

(L regular $\Rightarrow \exists N \; \forall w \; (w \in L \wedge |w| \geq N) \Rightarrow \exists x,y,z$ tal que

$w = xyz$

$|y| \geq 1$ * bombeo sólo 1

$|xy| \leq N$ * mínima

$\forall n \quad xy^n z \in L$

tenemos

$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\forall N \; \exists w \quad w \in L \wedge |w| \geq N$ y tq

entonces dado N

$\forall x,y,z \quad (w = xyz \wedge |y| \geq 1 \wedge |xy| \leq N)$

$w = a^{3N} b^{3N} \in L$

toda descomposición $\Rightarrow \exists n \geq xy^n z \notin L$

(se sale del lenguaje para algún bombeo)

$xy \in a^+$ * el prefijo de a's

$x = a^k$

$y = a^j$

$z = a^{3N-k-j} b^{3N}$

todas las posibles j y k dan todas las descomposiciones posibles del lema del bombeo

$\Rightarrow L$ no regular

(entonces no es regular)

$y = a^j \qquad y^0 = a^{j \cdot 0}$

$j \geq 1$

$k + j \leq N$

$a^k a^{j \cdot 0}$

→ obtenemos que

$xy^0 z = a^k a^{3N-k-j} b^{3N}$

$a^{3N-j} b^{3N}$

y como $j \geq 1$ sabemos que $3N-j \neq 3N$

y ya no cumple $a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}$

$N = n \quad N \geq m$

5.1) f) $\{a^n b^m \mid n \leq m\}$ $\forall N \geq 1$, $w = a^N b^m$, $|w| \geq N$ $w \in L$

$x = a^j$
$y = a^k$
$z = a^{N-j-k} b^m$ tq $k \geq 1$, $j+k \leq N$

una iteración muy grande
$i \geq m$ $x = a^j$, $y^i = (a^k)^i$ $z = a^{N-j-k} b^m$

iteración

aver
$x y^i z = a^j (a^k)^i a^{N-j-k} b^m = a^{\cancel{j}+ik+N-\cancel{j}-k} b^m$

$a^{N+(i-1)k} b^m$

$N + (i-1)k > m$ porque hemos puesto $i \geq m+1$

$\downarrow$

$N + mk > m$ $\quad i-1 \to \underbrace{m+1-1}_{m}$

esto ya no cumple que $\rightarrow$ $n < m$

5.1) k)
$L = \{ww \in \{a,b\}^*\}$ volem demostrar L és irregular

Reducció a l'absurd:

Suposem que L és regular i $n \in N$ el longitud de bombeig propi de L, i la familia de paraules $a^N b^N a^N b^N \in L$ aplicant el lema de bombeig

1) $w = xyz$ $\quad x = a^k$ $\quad y = a^j$ $\quad z = a^{N-k-j} b^N a^N b^N$ $\quad k+j \leq N$

2) $j \geq 1 \to |y| \geq 1$

3) $\forall i \geq 0$ $\quad x y^i z \in L \Longrightarrow i = 0$ $\quad x y^0 z = \underbrace{a^{N-j} b^N}\underbrace{a^N b^N} \notin L$

Longitudes distintas por tanto no es regular

5.2) consideren el llenguatge $L_k = \{ w \in (0+1)^* \mid valor_2(w) \leq k \}$

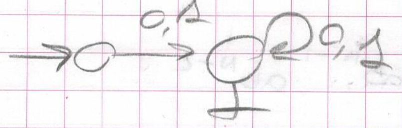
b) din si es o no regular per $\forall k$

$k = 1$

- hago el DFA
- aplico el lema del bombeo

$L_1 = \{ w \in (0,1)^* \mid valor_2(w) \leq 1$

He llegado a la conclusión que es L^+



5.1)

c) $\{ a^n b^m \mid n \neq m \}$

demostracion no regularidad

$\{ a^N b^m \mid n \neq m \}$

$w = xyz$

$x = a^j \quad y = a^k \quad z = a^{N-j-k}$

$|xy| \leq N$

$xy^iz \notin L$

$a^{j+ki+N-j-k} b^m$

$j + ki + N - j - k = m$

$(i-1)k = m - N$

$i = \frac{m-N}{k} + 1$

$m - N = N!$

$m = N! + N$

para esta m encontramos un caso no regular

$w = a^N b^{N+N!}$

$x = a^j \qquad j + k \leq N$

$y = a^k \qquad k \geq 1$

$z = a^{N-j-k} \; b^{N+N!}$

$xy^iz \notin L$

$a^j a^{ik} a^{N-j-k} \; b^{N+N!}$

$a^{N+(i-1)k} \; b^{N+N!} = a^{N+N!} \; b^{N+N!}$

$i = \frac{N!}{k} + 1$

5.1)

a) $L = \{ a^n \mid n$ es primo $\}$

$w = a^M \qquad \forall N \geq 1 \quad M$ sea

$M \geq N$

M primo

$x = a^i$

$y = a^j$

$z = a^{M-i-j}$

$i \leq j \leq N$

caso $|y|$ impar

$|xy^0z| = |xyz| - |y|$

imp imp

$xy^nz = a^i a^{jn} a^{M-i-j}$

$a^{j(n-1)+M}$

compuesto

con $n = M+1$

obtenemos que

$a^{jM+M} = a^{M(j+1)} \notin L$

5.1) $L = \{ab ab^2 \ldots ab^n \mid n \geq 0\} \notin Reg$

q) $|xy| \leq N$ $\quad L^R = \{b^n a b^{n-1} \ldots ba \mid n \geq 0\}$

$n = N$

$N \geq 1$

$x = b^i$

$y = b^j$

$z = b^{N-i-j} ab^{N-1} \quad ab^{N-2}$

bombeo $x y^k z \quad i + jk + N - i - j = N$

$b^i b^{jk} b^{N-i-j} ab^{N-1} ab^{N-2} \ldots ba$

$K = N$

$b^{jN + N - j} = N$

$jN - j = 0$

$jN = j$

$j = 0$

$j \geq 1$ contradicción

5.1)

t) $L = \{w \in (a+b+c)^* \mid |w|_a > |w|_b \vee |w|_b \geq |w|_c\}$

$w = b^{N+1} c^{N+1} \in L$

$x = b^i$

$y = b^j$

$z = b$

$|xy| \leq N$

$|y| \geq 1$

$b^i b^j b^{N+1-i-j} \quad c^{N+1}$

$b^{i+N+1-i-j} \quad c^{N+1}$

en el bombeo 0 $\quad x y^0 z$

$b^{N+1-j} \quad c^{N+1}$

$N+1-j < N+1 \quad j \geq 1$

* y no se cumplen las condiciones del lenguaje

R) $L = \{w_1 * w_2 \mid w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \wedge (|w_1| < |w_2| \vee |w_1| \in \dot{2})\}$

$w = 0^{2N+1} * 0^{2N+2} \quad w \in L$

$x = 0^i$

$y = 0^j$

$z = 0^{2N+1-i-j} * 0^{2N+2}$

bombeo $K = 3$ *

* si bombeo un número impar de veces sigues siendo impar

$0^i 0^{3j} 0^{2N+1-i-j} * 0^{2N+2}$

$0^{2N+2j+1} * 0^{2N+2}$

$0^{2(N+j)+1} * 0^{2N+2} \notin L$

esta es más larga porque $j \geq 1$ y podemos asegurar que es impar

s) $L = \{ u \divideontimes v \mid u, v \in \{a,b\}^* \wedge v$ submot de $u \}$

$w = a^N \divideontimes a^N$

(*) si quiero bombear el sufijo tengo que hacer el reverso del lenguaje y aplicar el lema del Bombeo (que es solo para prefijos)

$x = a^i$

$y = a^j$

$z = a^{N-i-j} \divideontimes a^N$

$j \geq 1$

$|xy| \leq N$

$a^i a^{kj} a^{N-i-j} \divideontimes a^N$

$k = 0$

$a^{\cancel{i}+N-\cancel{i}-j} \divideontimes a^N$

$a^{N-j} \divideontimes a^N$ y con $j \geq 1$ (*)

$N - j < N$ portanto

a^{N-j} ya no es submote a^N

t) $L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid |w| \in \dot{3} \Rightarrow |w|_a = |w|_b \}$

$L = |w| \notin \dot{3} \cup |w| \in \dot{3} \wedge |w|_a = |w|_b$

$w = a^{3N} b^{3N} \Rightarrow w \in L$

$x = a^i$

$y = a^j$

$z = a^{3N-i-j} b^{3N}$

$|xy| \leq N$

$|y| \geq 1$

bombeo $k = 4$

$a^i a^{kj} a^{3N-i-j} b^{3N}$

$a^i a^{4j} a^{3N-i-j} b^{3N}$

$a^{3N+3j} b^{3N}$

$a^{3(N+j)} b^{3N}$ → entonces tanto sufijo como prefijo son $\in \dot{3}$

pero

$3(N+j) \neq 3N$

porque $j \geq 1$

y no se satisface $|w|_a = |w|_b$

$L_k = \{ w \in \{0,1\}^* \mid valor_2(w) \le k \}$

5.2)

(b) esto se demuestra porque el lenguaje és $\{0,1\}^+ - 0^*$

esto porque L_0 no está incluido

$\forall_{k \ge 1}\, L_k = \{0,1\}^* - \{0\}^*$

↑

y esto es regular

$\subseteq$ esto es evidente

$\supseteq$ y el otro es porque

5.2)

(c) $M_k = \{ w \# w \mid w \in L_k \}$

demostración no regular por el contrarecíproco del lema del bombeo.

$\forall N \ge 1,\ w = 1^N \# 1^N \in M_k$

$w = xyz,\ |xy| < N$ y $|y| \ge 1$

$x = 1^j$

$y = 1^{k'}$

$z = 1^{N-j-k'} \# 1^N$

$k' \ge 1$ y $j + k' \le N$ → $w = xy^iz$

$1^j 1^{k'i} 1^{N-j-k'} \# 1^N = 1^{N+k'(i-1)} \# 1^N$

$i \ne 1$ y no cumple

* todos los 1 son 0 así se demuestra para $\forall k$

5.2)

d) $\{ 1w \# 1w \mid 1w \in L_k \}$

todo lenguaje finito es regular

hay que demostrar que lo es

$\{ w \mid 1w \in L_0 \} = \emptyset$

$\{ w \mid 1w \in L_5 \} = \{ \lambda, 0, 1, 10, 11, 100, 101 \}$

5.3) d)

si $i = 0,\ m = 0$ $j + n \ge 2$

si $i = 0,\ m \ne$ $j + n \ge 1$

A i B considerem

$A = \{ a^i b^j \mid i \ne j \}$

$B = \{ b^n a^m \mid n \ne m \}$

$AB = \{ a^i b^{j+n} a^m \mid i \ne j \wedge n = m \}$