

## Задача С. Вывод типа в просто-типизированном лямбда-исчислении

Имя входного файла: стандартный ввод  
Имя выходного файла: стандартный вывод  
Ограничение по времени: 10 секунд  
Ограничение по памяти: 512 мегабайт

На вход вашей программе дается лямбда-выражение в следующей грамматике:

$$\begin{aligned} \langle \text{Выражение} \rangle &::= [\langle \text{Применение} \rangle] \backslash \langle \text{Переменная} \rangle \text{'.'} \langle \text{Выражение} \rangle \\ &\quad | \langle \text{Применение} \rangle \\ \langle \text{Применение} \rangle &::= \langle \text{Применение} \rangle \langle \text{Атом} \rangle | \langle \text{Атом} \rangle \\ \langle \text{Атом} \rangle &::= \text{'('} \langle \text{Выражение} \rangle \text{'')}' | \langle \text{Переменная} \rangle \\ \langle \text{Переменная} \rangle &::= (\text{'a'} \dots \text{'z'}) \{ \text{'a'} \dots \text{'z'} | \text{'0'} \dots \text{'9'} | \text{'_'} \}^* \end{aligned}$$

Аргументы-переменные в применении разделяются пробелом. В остальных случаях пробелы могут отсутствовать. Любые пробелы между нетерминальными символами (кроме пробела, разделяющего аргументы в применении) — а также начальные и конечные пробелы в строке — должны игнорироваться. Символы табуляции и возврата каретки должны трактоваться как пробелы.

Требуется найти наиболее общий тип этого лямбда-выражения и вывести доказательство того, что лямбда-выражение имеет этот тип, а также найти типы свободных переменных, содержащихся в лямбда-выражении, или же сказать, что лямбда-выражение не имеет типа.

В доказательстве вы можете пользоваться следующими правилами:

Правило	Зависимости	Вывод	Дополнительные условия
№1		$\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma$	$x \notin \text{dom}(\Gamma)$
№2	$\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau, N : \sigma$	$\Gamma \vdash MN : \tau$	
№3	$\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$	$\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \rightarrow \tau$	$x \notin \text{dom}(\Gamma)$

### Формат входных данных

В единственной строке входного файла содержится лямбда-выражение в грамматике из условия. Длина выражения не превышает 255 символов.

Гарантируется, что имена всех вложенных абстракций различны, а также имена абстракций не совпадают с именами свободных переменных.

### Формат выходных данных

Если заданное лямбда-выражение не имеет типа, в единственной строке выходного файла должна быть запись «Expression has no type».

Иначе в файле должно быть доказательство. В файле должны отсутствовать пустые строки. Строки доказательства должны идти в правильном порядке. Каждый отступ должен представляться с помощью «\*» — символа «\*» (ASCII 42) и трех последовательных пробелов (ASCII 32). В конце каждой строки должно быть описание правила, которое было применено для вывода этой строки. В остальном следуйте формату из примеров.

Выведенный тип должен быть наиболее общим типом для заданного лямбда-выражения.

### Примеры

стандартный ввод	
x	
стандартный вывод	
x : t1  - x : t1 [rule #1]	

стандартный ввод
$(\lambda x. x) (\lambda y. y)$
стандартный вывод
$\vdash ((\lambda x. x) (\lambda y. y)) : (t2 \rightarrow t2)$ [rule #2] $*$ $\vdash (\lambda x. x) : ((t2 \rightarrow t2) \rightarrow (t2 \rightarrow t2))$ [rule #3] $*$ $*$ $x : (t2 \rightarrow t2) \vdash x : (t2 \rightarrow t2)$ [rule #1] $*$ $\vdash (\lambda y. y) : (t2 \rightarrow t2)$ [rule #3] $*$ $*$ $y : t2 \vdash y : t2$ [rule #1]
стандартный ввод
$\lambda a. a' a z8'$
стандартный вывод
$a' : (t1 \rightarrow (t4 \rightarrow t5)), z8' : t4 \vdash (\lambda a. ((a' a) z8')) : (t1 \rightarrow t5)$ [rule #3] $*$ $a' : (t1 \rightarrow (t4 \rightarrow t5)), z8' : t4, a : t1 \vdash ((a' a) z8') : t5$ [rule #2] $*$ $*$ $a' : (t1 \rightarrow (t4 \rightarrow t5)), z8' : t4, a : t1 \vdash (a' a) : (t4 \rightarrow t5)$ [rule #2] $*$ $*$ $*$ $a' : (t1 \rightarrow (t4 \rightarrow t5)), z8' : t4, a : t1 \vdash a' : (t1 \rightarrow (t4 \rightarrow t5))$ [rule #1] $*$ $*$ $*$ $a' : (t1 \rightarrow (t4 \rightarrow t5)), z8' : t4, a : t1 \vdash a : t1$ [rule #1] $*$ $*$ $a' : (t1 \rightarrow (t4 \rightarrow t5)), z8' : t4, a : t1 \vdash z8' : t4$ [rule #1]