

摘要

我们为投资者提供了一个明确的封闭式策略，当来自所有代理人的市场订单流，包括投资者自己的交易，对价格有永久的影响时，投资者会执行一个大订单。当永久性和临时性的价格影响与市场和投资者的交易率呈线性关系时，该策略可以用闭合形式找到。我们是在对市场订单流的随机过程的非常一般的假设下做到这一点的。最佳策略包括Almgren-Chriss执行策略，该策略由执行交易范围内未来预期净订单流的加权平均数（由市场买入和卖出市场订单的比率之差给出）调整，并与永久和临时线性影响的比率成比例。我们使用历史数据对纳斯达克交易的股票进行模型校准，并使用模拟方法来显示该策略的表现。关键词。订单流，算法交易，高频交易，收购，清算，价格影响。

介绍

当机构投资者到市场上执行大订单时，他们要承担直接和间接成本。直接成本包括支付给经纪人和交易所的费用和其他交易成本，这些费用很容易计算，而且事先就知道。间接成本是由交易者市场上的行为导致的价格影响成本，即使在执行订单后也很难量化。在大多数情况下，价格影响对执行价格有不利影响：如果清算股票，收入较低；如果收购股票，成本较高。在本文中，我们确定了当市场订单流的价格影响（由所有市场参与者的交易活动给出，包括投资者自己的交易）影响到资产的中间价格，此外，投资者的交易如何影响她收到的执行价格时的最佳执行策略。

价格影响可以是暂时的，也可以是永久的。市场订单(MO)在限价订单簿(LOB)上行走会对价格产生影响，因为它们获得的平均执行价格比最佳报价要差，并且被认为是暂时的，因为我们假设：LOB会很快补充，并且在重新储存后，对资产的中间价格没有影响。另一方面，投资者的交易活动对中间价格有永久性的影响，因为交易者的订单流，即MO的数量和规模，传达了对资产的中间价格有影响的信息。一般来说，当有正的净订单流（买入量多于卖出量）时，中间价格倾向于向上漂移，而当有负的净订单流（卖出量多于买入量）时，中间价格倾向于向下漂移。因此，当投资者执行一个大订单时，这给市场的订单流增加了单方面的压力，这给中间价格增加了方向性的压力：如果投资者是买入，则上升，如果是卖出则下降。

在本文中，我们假设了订单流的一般随机过程，并提供了当永久和临时影响分别与整个市场的交易率和投资者的执行率呈线性关系时的最佳执行策略的明确闭式表达。最佳策略包括Almgren-Chriss执行策略，该策略由执行交易范围内未来预期净订单流量的加权平均数调整，并与永久和临时线性影响的比例成正比。

本文的其余部分组织如下。在第2节中，我们使用历史数据来估计净订单流对中间价格的永久影响效应，并使用LOB数据来估计临时价格影响。在第3节中，我们设定了执行策略的模型，提出了订单流所遵循的一般随机过程，并得出了最佳执行策略。最后，在第4节中，我们用模拟的方法来展示策略的性能，第5节是结论。

订单流、交易活动和价格影响

在这一节中，我们介绍了2014年在纳斯达克交易的股票的永久和临时价格影响的统计数据 and 参数估计。为了集中讨论，也为了便于表述，在这一节中我们介绍了四只股票的结果--在附录中我们展示了17只股票的结果，见表A.7和A.8。在表1的第一行，我们显示了永久价格影响的参数估计值 \hat{b} ，而在第二行（括号内）我们显示其标准偏差。我们假设净订单流量和中间价格的变化之间存在线性关系，因此对于每个交易日，我们进行回归：

$$\Delta S_n = b \mu_n + \varepsilon_n, \quad (1)$$

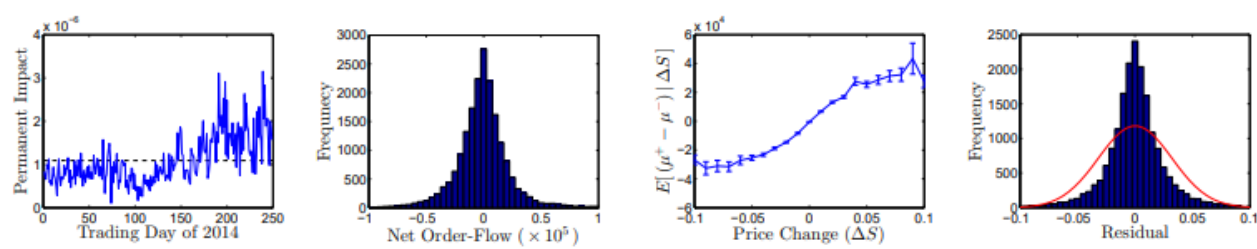
其中 $\Delta S_n = S_{n\tau} - S_{(n-1)\tau}$ 是中间价格的变化， μ_n 是净订单流，定义为 $[(n-1)\tau, n\tau]$ 时间段内买入和卖出MO的数量之差， ε_n 是误差项（假定为正态）。在实证分析中，我们选择 $\tau=5$ 分钟。1表中显示了通过首先去除上下0.5%的尾巴，然后对模型（1）进行稳健的线性回归，得出的 b 的每日估计值的平均值和标准偏差。

	INTC	PNC	CNQR	BXS
\hat{b}	1.09×10^{-6} (0.54×10^{-6})	1.99×10^{-5} (0.88×10^{-5})	0.89×10^{-4} (0.58×10^{-4})	2.72×10^{-5} (1.57×10^{-5})
\hat{k}	0.44×10^{-6} (2.37×10^{-7})	1×10^{-5} (0.49×10^{-5})	0.76×10^{-4} (0.61×10^{-4})	1.72×10^{-5} (1.35×10^{-5})
$\frac{\hat{b}}{\hat{k}}$	2.5 (0.76)	2.11 (1.05)	1.1 (0.56)	1.73 (0.92)
ADV	5,489,503 (2,542,732)	382,020 (139,898)	164,904 (101,910)	92,525 (54,475)
Midprice	30.26 (4.37)	84.67 (3.22)	105.96 (16.42)	22.88 (1.55)
σ (open-to-close)	16.34%	15.25%	29.07%	26.46%
σ (5 min)	17.87%	17.95%	38.23%	36.47%
λ^+	438.86 (248.85)	206.79 (69.29)	96.47 (58.39)	47.64 (22.19)
$\mathbb{E}[\eta^+]$	1048.99 (351.13)	136.35 (16.16)	128.79 (34.09)	143.36 (33.42)
λ^-	453.91 (264.63)	209.22 (71.7)	99.96 (59.38)	48.19 (24.09)
$\mathbb{E}[\eta^-]$	1013.83 (306.58)	143.73 (16.95)	136.23 (49.1)	143.23 (34.24)

Table 1: Permanent and temporary price impact parameters for Nasdaq stocks, average volume of MOs, average midprice, σ volatility (annualized) of price returns using open-to-close prices and 5-minute windows, hourly mean arrival of MOs λ^\pm , and average volume of MOs $\mathbb{E}[\eta^\pm]$. The standard deviation of the estimate is shown in parentheses. Data are from Nasdaq 2014.

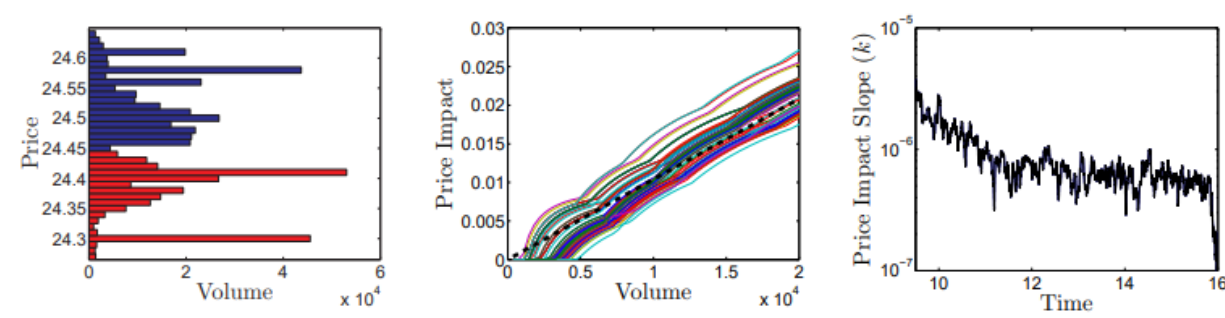
在表格的第三行，我们显示了临时影响的参数估计。为了估计这个参数，我们用 k 来表示，我们假设临时价格影响在交易速度上是线性的，所以投资者收到的执行价格和中间价格之间的差异是

$k \Delta Q$ ，其中 ΔQ 是交易量。在连续时间设置中， $\Delta Q = v \Delta t$ ，当代理人在一个小的时间间隔 Δt 内以 v 的速度进行交易。为了估计影响参数 k ，我们每秒拍下LOB买入方的快照，确定各种交易量的每股价格（通过走过LOB），计算每股价格和当时的最佳报价之间的差异，并进行线性回归。线性回归的斜率是对当时每股临时价格影响的估计。我们对每个交易日的每一秒钟都这样做，在表格中我们报告了当我们排除了交易日的第一个和最后半个小时，并去除0.5%的上下尾巴时，这些每日估计值的平均值和标准偏差。虽然这里我们只使用LOB的买入方，因为后面我们会详细讨论清算策略，包括两边都不影响结果，估计 K 的数量级在统计学上对两边都是一样的。此外，第五行显示了每日比率 b/k 的平均值和标准偏差。我们观察到，CNQR显示最小的比率为1.1，INTC显示最大的比率为2.5--在本节末尾我们将更详细地讨论这个比率。



该表还报告了每只股票的日均成交量（ADV），平均中间价，以及使用开盘到收盘的价格和采用5分钟窗口计算的价格回报的（年化）波动率（ σ ）（以消除任何由于微观结构噪声造成的过度虚假波动）。此外，我们还报告了平均（每小时）买入和卖出MO的数量，分别为 λ_+ 和 λ_- ，以及MO的平均量，分别为 $E[\eta_+]$ 和 $E[\eta_-]$ 。例如，在纳斯达克，INTC每小时收到439个市场买入订单，每个订单平均为1,049股。对于LOB的两边，MO到达和平均成交量的参数估计在统计上是相同的。这在很长的时间尺度上是可以预期的。在一天中可能有几天或一段时间，买入或卖出一方有更多的活动，但在较长的时间范围内，买入和卖出的MO是对称的。

此外，为了展示永久价格影响参数的可变性，图1的第一部分描述了2014年每一天的 b 的估计值--虚线表示平均 \hat{b} 。当全年的所有5分钟窗口合并时，所有股票的 \hat{b} 对应的 p 值都显著小于0.01%。然而，在任何一天，该参数可能不太显著（即 p 值可能更大）。第二个面板显示了使用2014年所有数据的5分钟净订单流量的柱状图。2 最后，第四个面板显示的是订单流量对价格变化的每日稳健回归的综合残差的直方图，红色实线显示的是高斯拟合。



当全年的所有5分钟窗口都被合并时，就会出现这种情况。然而，在任何一天，该参数可能不那么重要（即 P 值可能更大）。第二个面板显示了使用2014年所有数据的5分钟净订单流量的柱状图。2 最后，第四个面板显示的是订单流量对价格变化的每日稳健回归的综合残差的直方图，红色实线显示的是高斯拟合。

在图2中，我们展示了2014年11月3日上午11点INTC的LOB快照（左上角），以及从11:00到11:01每一秒，不同成交量的MO在LOB的买入方所面临的每股价格影响（从最佳报价中衡量），以及截距设置为零的线性回归（虚线）。自然，影响函数在一分钟内波动，不同规模的交易所产生的影响也随之波动。线性回归提供了这一分钟内临时影响的近似值。第三张图片显示了这个线性影响模型的斜率在整个一天中是如何波动的。我们看到，最大的影响往往发生在早上，然后这种影响趋于平缓，并在整个一天中保持平缓，而在一天结束时，这种影响会减弱。这样的模式在所有日子里的一些资产中都可以看到。

上面的分析分别看了临时和永久的影响，但它们的联合动态是执行算法中的一个相关量。清算和收购策略考虑到了源于走账的成本和永久性影响之间的权衡。特别是，当这两种影响在交易率中都是线性的时候，这种权衡在一定程度上被比率 b/k 所体现。在图3的左侧，我们显示了INTC的每日对 (b, k) 的散点图，很明显，临时影响和永久影响之间存在着正相关。永久影响高（低）的日子通常是那些相同数量的MO必须消耗更多（更少）的书的水平。图的右侧描述了 b/k 的直方图，显示这个比率在0.5和5之间，大约在2.5左右对称。

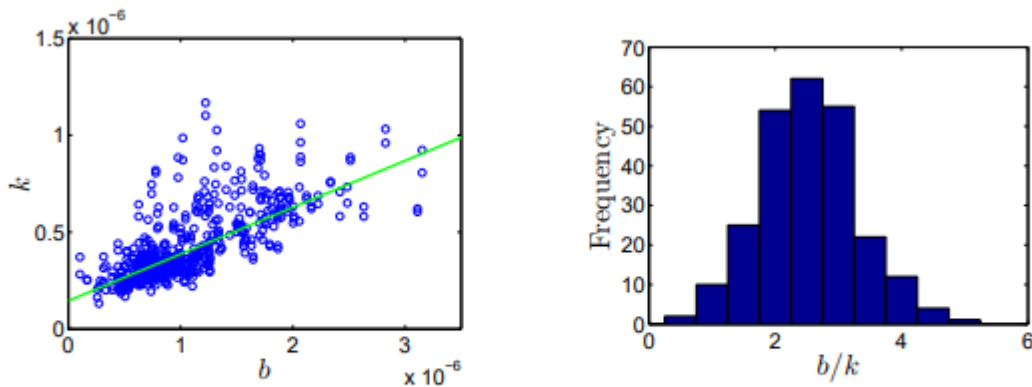


Figure 3: Price Impact INTC using daily observations for 2014.

此外，在其他条件相同的情况下， b/k 比率高的股票与比率低的股票的清算方式应该不同。当比率较高时，最佳策略对当前和预期的净订单流量的反应更为突然。例如，在清算方案中，如果预期净订单流量是负的（中间价格的负趋势），那么最佳的做法是更快地执行股票，以避免股票价格下跌的不利影响。如果预期净订单流量是正的，那么最好放慢速度，清算更少的股票，以利用中间价格的积极趋势。这个结果在我们下面制定的一些策略中得到了明确的印证--例如见（14）和后面的讨论。

最后，表2显示了 b 和 k 之间的关联性，以及它们的偏斜度。我们观察到，临时和永久性影响是正相关的，并且是正偏斜的。直观地讲，人们期望这两种影响是正相关的，因为执行算法，如这里

提出的算法，必须权衡永久和临时影响。

	INTC	PNC	CNQR	BXS
$corr(b, k)$	0.72	0.00	0.61	0.41
$skew(b)$	1.13	0.57	0.33	1.19
$skew(k)$	1.59	6.79	1.13	2.97

Table 2: Skewness of b and k and their correlation.

模型

投资者必须选择她发送MO的速度，以便在交易期限 T 内清算 N 股。这里我们重点讨论清算问题--收购问题的设置是类似的。我们用 $\nu = (\nu_t)_{\{0 \leq t \leq T\}}$ 来表示清算速度，这是投资者所控制的，库存是 $Q^\nu = (Q_t^\nu)_{\{0 \leq t \leq T\}}$ ，它受她交易速度的影响，并满足以下条件

$$dQ_t^\nu = -\nu_t dt, \quad Q_0^\nu = \mathfrak{N}. \quad (2)$$

投资者的交易速度以两种方式影响价格。一种是影响中间价格的永久性影响，另一种是暂时性影响，只影响她卖出股票时获得的价格。

永久性的影响

我们假设当投资者发送MO来清算股票时，她的行为会引起中间价格的下行。同样，来自市场其他部分的订单流也会影响到中间价格的动态，也请参见Cartea和Jaimungal (2015b)。特别是，其他交易者发送买入和卖出指令的速度，在此表示为 $\mu^+ = \{\mu_t^+\}_{0 \leq t \leq T}$ and $\mu^- = \{\mu_t^-\}_{0 \leq t \leq T}$ ，共同假设的马尔科夫、卡德拉格和有界的P-a.s.，也分别对中间价格施加了向上和向下的压力。因此，中间价格过程 $S^\nu = (S_t^\nu)_{\{0 \leq t \leq T\}}$ 满足随机微分方程 (SDE)：

$$dS_t^\nu = (g(\mu_t^+) - g(\mu_t^- + \nu_t)) dt + \sigma dW_t, \quad S_0^\nu = S, \quad (3)$$

在这里， $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 表示由于订单流动而对中间价格产生的永久性影响。

$W = (W_t)_{\{0 \leq t \leq T\}}$ 是一个标准的布朗运动，而 μ^\pm 独立于 W

这里，布朗成分 W 代表了在没有MO的情况下，由于限价订单的重新洗牌而导致的中间价格的变化。这种重新洗牌发生在LOB的不同层次，包括最佳报价，以反映市场对资产基本价值的看法。此外，人们也可以把净订单流的影响看作是由于过量的买入或卖出压力而诱发资产中间价格的趋势（短暂的）。在算法交易文献中已经研究了中间价格趋势的影响，例如见Lorenz和Schied (2013)，Cartea等人 (2014)，Cartea等人 (2013)，Cartea和Jaimungal (2013)。

我们注意到，尽管在（3）中我们允许价格影响函数 g 的选择具有普遍性，但选择集应该只包含那些不允许价格操纵的选择。下面我们假设 $g(x)$ 对 x 是线性的，这就排除了价格操纵或套利。关于永久价格影响的形状和假设的一般讨论，见Almgren（2003），Gatheral（2010），Alfonsi等人（2010）Gatheral等人（2012）。

暂时性的影响

在任何时候，在市场上以最佳出价显示和提供的股票数量： $(S_t^\nu - \frac{1}{2}\Delta)$ 是有限的，这里 $\Delta \geq 0$ 是买卖价差，假定为常数。一个大的MO会走账，所以获得的每股平均价格会比当前的买入价差。这在我们的模型中得到了体现，因为一个规模为 νdt 的订单获得的每股执行价格为

$$\hat{S}_t^\nu = S_t^\nu - (\frac{1}{2}\Delta + f(\nu_t)) , \quad (4)$$

在这里 $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 表示投资者的交易行为对她可以执行交易的价格所产生的临时影响。在这个设置中，MO的影响是暂时的，只影响发送MO的交易者收到的价格，而且，LOB会无限快地恢复到MO到来之前的状态，见Almgren（2003），Alfonsi等人（2010），Kharroubi和Pham（2010），Gatheral等人（2012），Schied（2013），Guéant和Lehalle（2013）的进一步讨论和概括，放松弹性假设。也请看Graewe等人（2013）对非线性影响在交易期结束前的渐进行为，以及解决方案的平滑性的讨论。此外，正如Frei和Westray（2013）所指出的，鉴于市场影响模型的预测准确性极低（通常 $<5\%R^2$ ），脱线性模型所带来的复杂性增加的成本将超过更好地描述市场影响的任何收益。

最后，投资者的现金过程 X_t^ν 满足随机微分方程：

$$dX_t^\nu = \hat{S}_t^\nu \nu_t dt , \quad X_0^\nu = x . \quad (5)$$

性能标准和价值函数

投资者的表现标准是

$$H^\nu(t, x, S, \boldsymbol{\mu}, q) = \mathbb{E}_{t,x,S,\boldsymbol{\mu},q} \left[X_T + Q_T^\nu (S_T^\nu - \frac{1}{2}\Delta - \alpha Q_T^\nu) - \phi \int_t^T (Q_u^\nu)^2 du \right] , \quad (6)$$

where $\boldsymbol{\mu} = \{\mu^+, \mu^-\}$, and the expectation operator $\mathbb{E}_{t,x,S,\boldsymbol{\mu},q}[\cdot]$ represents expectation conditioned on (with a slight abuse of notation) $X_t = x$, $S_{t-} = S$, $\mu_{t-}^+ = \mu^+$, $\mu_{t-}^- = \mu^-$ and $Q_t = q$,

and her value function is

$$H(t, x, S, \boldsymbol{\mu}, q) = \sup_{\nu \in \mathcal{A}} H^\nu(t, x, S, \boldsymbol{\mu}, q), \quad (7)$$

where \mathcal{A} is the set of admissible strategies consisting of \mathcal{F} -predictable processes such that $\int_0^T |\nu_u| du < +\infty$, \mathbb{P} -a.s..

绩效标准 (6) 的右侧包含三个术语。第一个是投资者在整个交易期间变现股票的终端现金。第二项是投资者在策略结束时清算任何剩余库存 Q^ν 在 T 时获得的收益。这些剩余的存货在中间价格 S^ν 在 T 下被清算，并承担了与跨越价差、流动性占用费和市场影响有关的成本，这由清算惩罚参数 $\alpha \geq 0$ 来体现。

最后，第三项是运行惩罚 $\phi \int_t^T (Q_u^\nu)^2$ 其中 $\phi \geq 0$ 是库存惩罚参数。这个惩罚并不影响投资者的收入，但会影响最佳清算速度。当库存惩罚参数 ϕ 的值较高时，清算速度在交易期限开始时就会很高，所以这个参数可以被解释为一个紧迫性参数。在代理人考虑模型不确定性的情况下，包括这种运行中的库存惩罚也是合理的，即她是模糊性厌恶者。Cartea 等人 (2013) 表明，包括运行惩罚等同于代理人考虑具有随机漂移的替代模型，但使用相对熵来惩罚这些模型。在这种情况下， ϕ 的值越高，代理人对中间价格的趋势越没有信心。