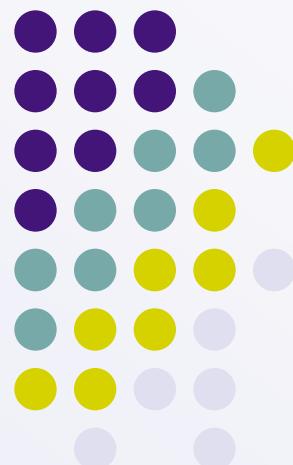




Introdução à Computação Gráfica

Marcel P. Jackowski
mjack@ime.usp.br

Aula #17



Objetivos

- Curvas B-Spline
 - Espaçamento não-uniforme entre nós
 - Vetor padrão de nós
- Splines racionais
 - B-splines racionais não-uniformes
- Superfícies paramétricas
- Superfícies de subdivisão

Funções de Base Spline

- Queremos exprimir curvas como pontos ponderados por intermédio de funções da base B-Spline

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^m B_{i,d}(t) P_i$$

onde m é o número de pontos do polígono de controle e d é o grau da B-spline que se quer usar

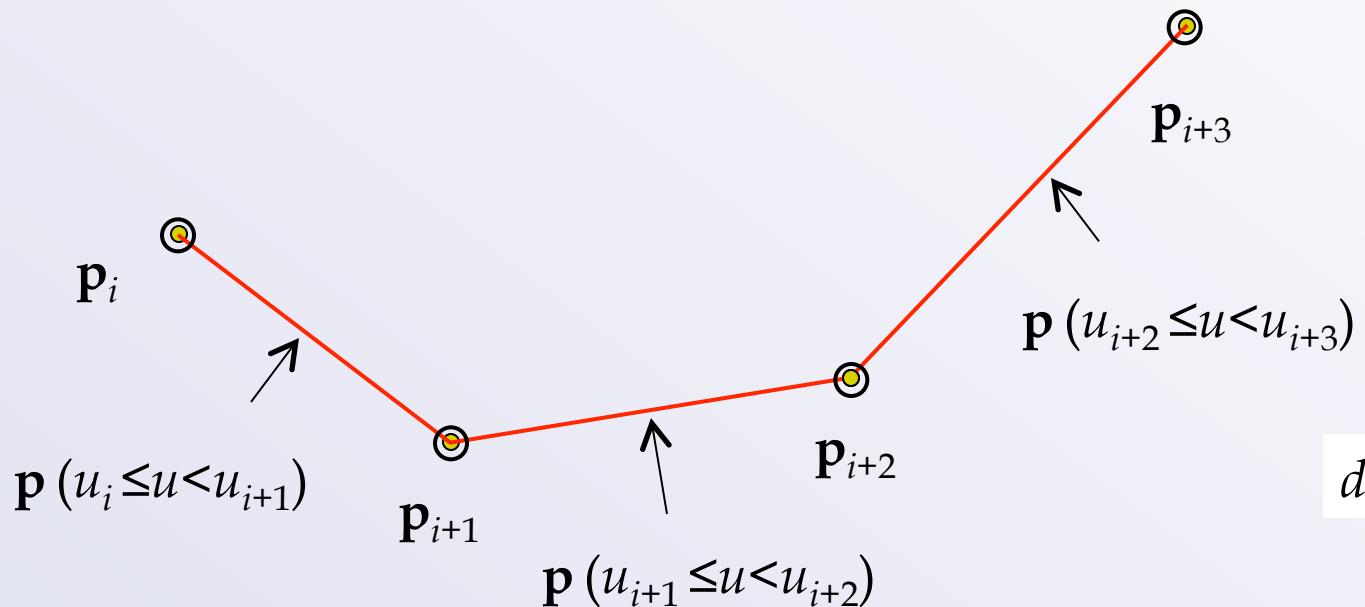
Utiliza-se da recorrência Cox-de Boor para determinar as funções da base B-spline de grau k como uma interpolação linear das funções de grau $k-1$

Recorrência Cox-De Boor

$$B_{k,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{para } u_k \leq u < u_{k+1}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$B_{k,d}(u) = \frac{u - u_k}{u_{k+d} - u_k} B_{k,d-1} + \frac{u_{k+d+1} - u}{u_{k+d+1} - u_{k+1}} B_{k+1,d-1}$$

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^m B_{i,d}(u) \mathbf{p}_i$$

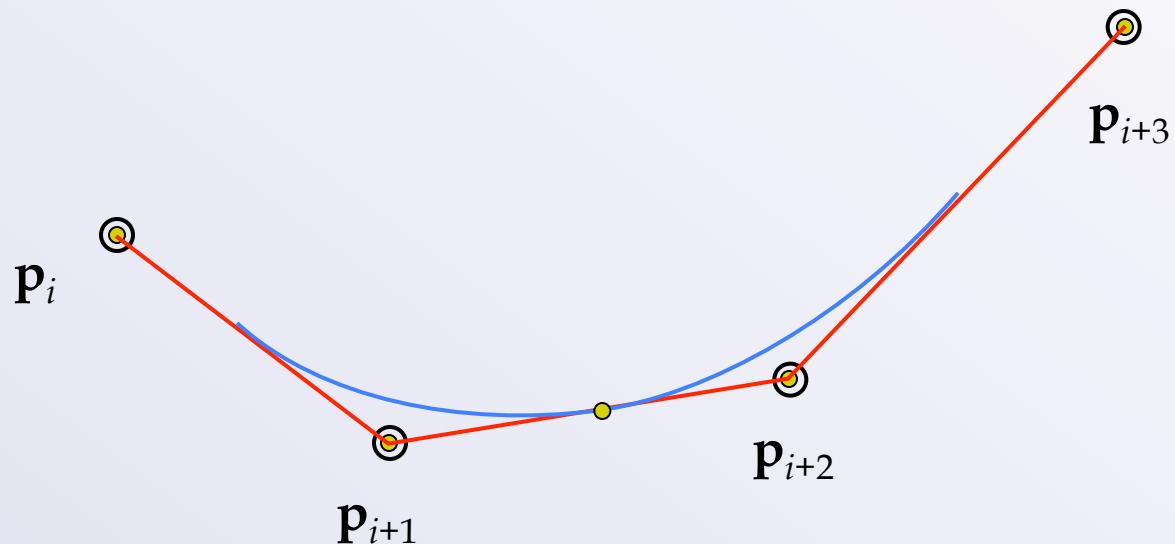


Recorrência Cox-De Boor

$$B_{k,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{para } u_k \leq u < u_{k+1}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$B_{k,d}(u) = \frac{u - u_k}{u_{k+d} - u_k} B_{k,d-1} + \frac{u_{k+d+1} - u}{u_{k+d+1} - u_{k+1}} B_{k+1,d-1}$$

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^m B_{i,d}(u) \mathbf{p}_i$$

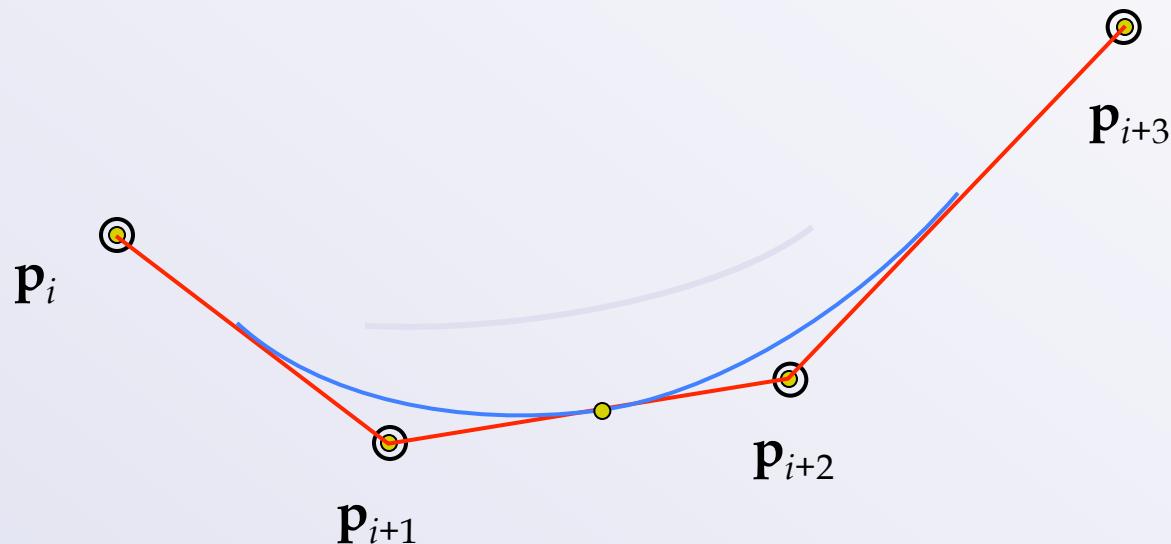


Recorrência Cox-De Boor

$$B_{k,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{para } u_k \leq u < u_{k+1}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$B_{k,d}(u) = \frac{u - u_k}{u_{k+d} - u_k} B_{k,d-1} + \frac{u_{k+d+1} - u}{u_{k+d+1} - u_{k+1}} B_{k+1,d-1}$$

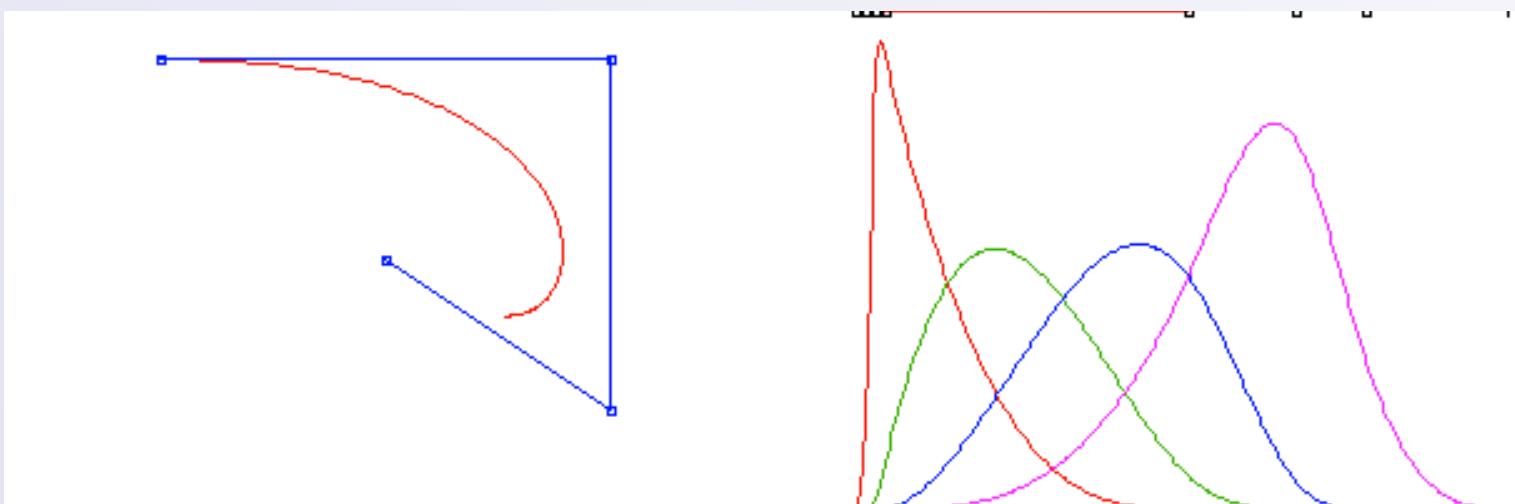
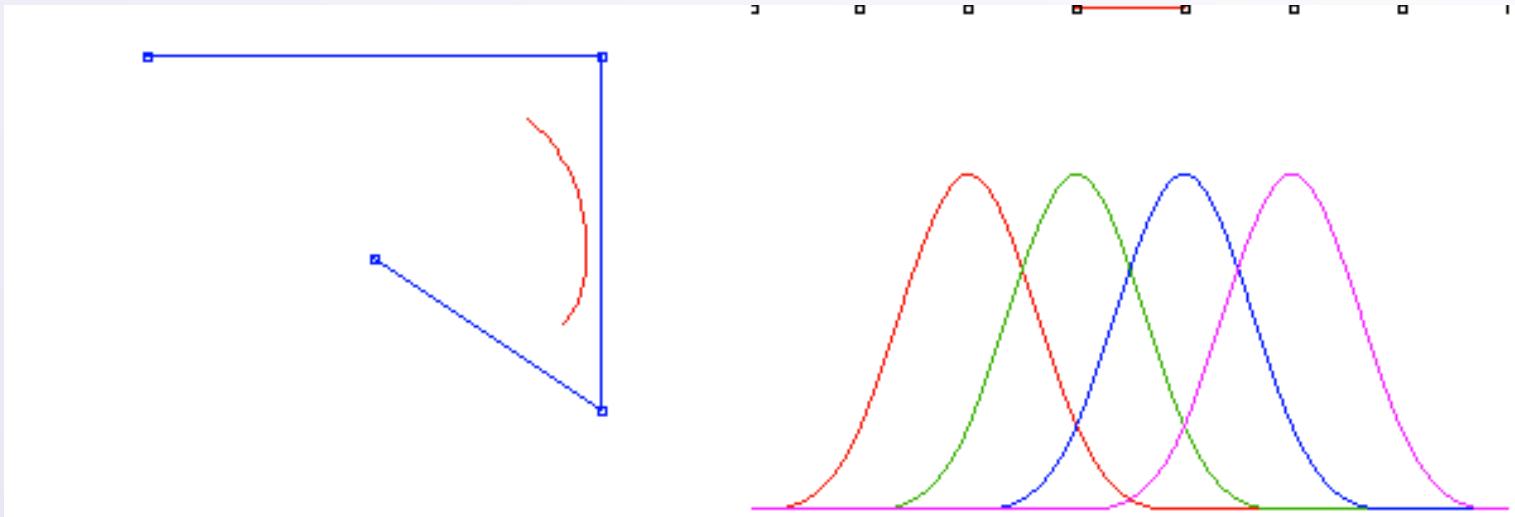
$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^m B_{i,d}(u) \mathbf{p}_i$$



Propriedades das B-Splines

- Dados $n+1$ pontos ($\mathbf{P}_0 \dots \mathbf{P}_n$), é composta de $(n-d+1)$ curvas de grau d emendadas com continuidade $d-1$ nos $n+d+1$ nós $u_0, u_1, \dots, u_{n+d+1}$
- Cada ponto da curva é afetado por $d+1$ pontos de controle
- Cada ponto de controle afeta $d+1$ segmentos
- Curva restrita ao fecho convexo do polígono de controle
- Invariância sob transformações afim

Exemplos de vetor de nós



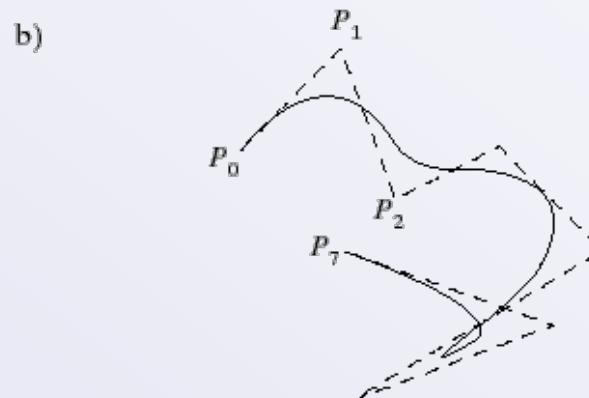
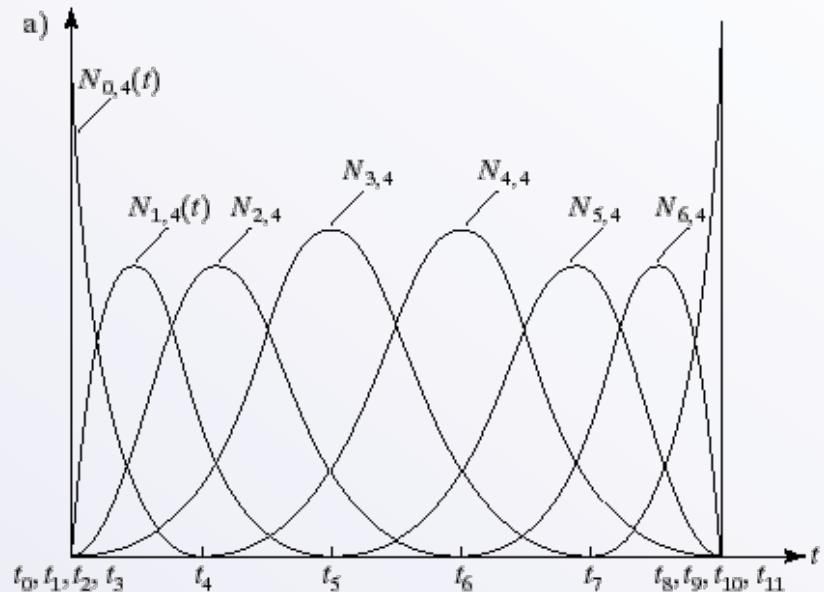
Vetor padrão de nós

- O **vetor padrão de nós** para uma B-spline de ordem m começa e termina com um nó de multiplicidade m e atribui um espaçamento unitário para os nós restantes.
- Se tivermos 8 pontos de controle e utilizarmos B-splines cúbicas ($m = 4$), o vetor padrão será:

$$\mathbf{T} = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5)$$

Vetor padrão (2)

- As funções $N_{0,4}(t)$ e $N_{7,4}(t)$ se tornam discontinuos e possuem suporte 1.
- Somente $N_{3,4}(t)$ e $N_{4,4}(t)$ possui suporte 4.
- As funções restantes possuem suporte 2 ou 3, e suas curvas se tornam mais distorcidas quando aproximam o primeiro e último nó.

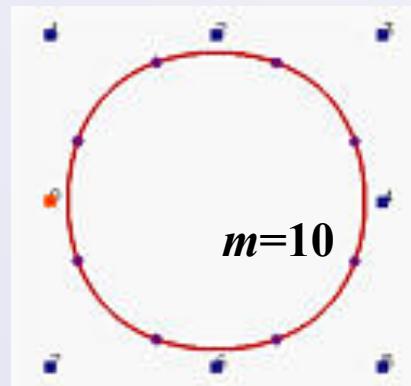
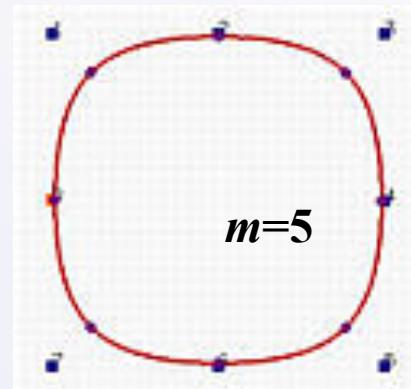
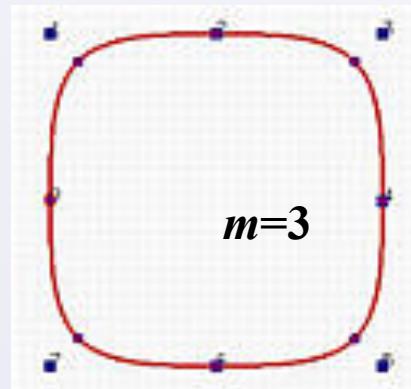
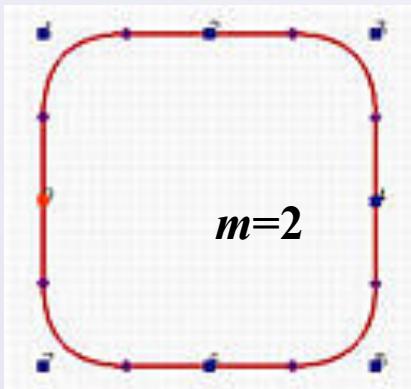


Vetor padrão (3)

- O vetor padrão para $(L+1)$ pontos de controle e B-splines de ordem m é criado da seguinte forma:
 - Define-se $L+1+m$ nós, representados por t_0, \dots, t_{L+m}
 - Os primeiros m nós, t_0, \dots, t_{m-1} terão valor 0 (As primeiras m funções base começarão em $t = 0$.)
 - Os nós t_m, \dots, t_L aumentam em incrementos de 1, do valor 1 até o valor $L - m + 1$.
 - Os m nós finais t_{L+1}, \dots, t_{L+m} , possuem valor $L - m + 2$.

Aproximação de círculos

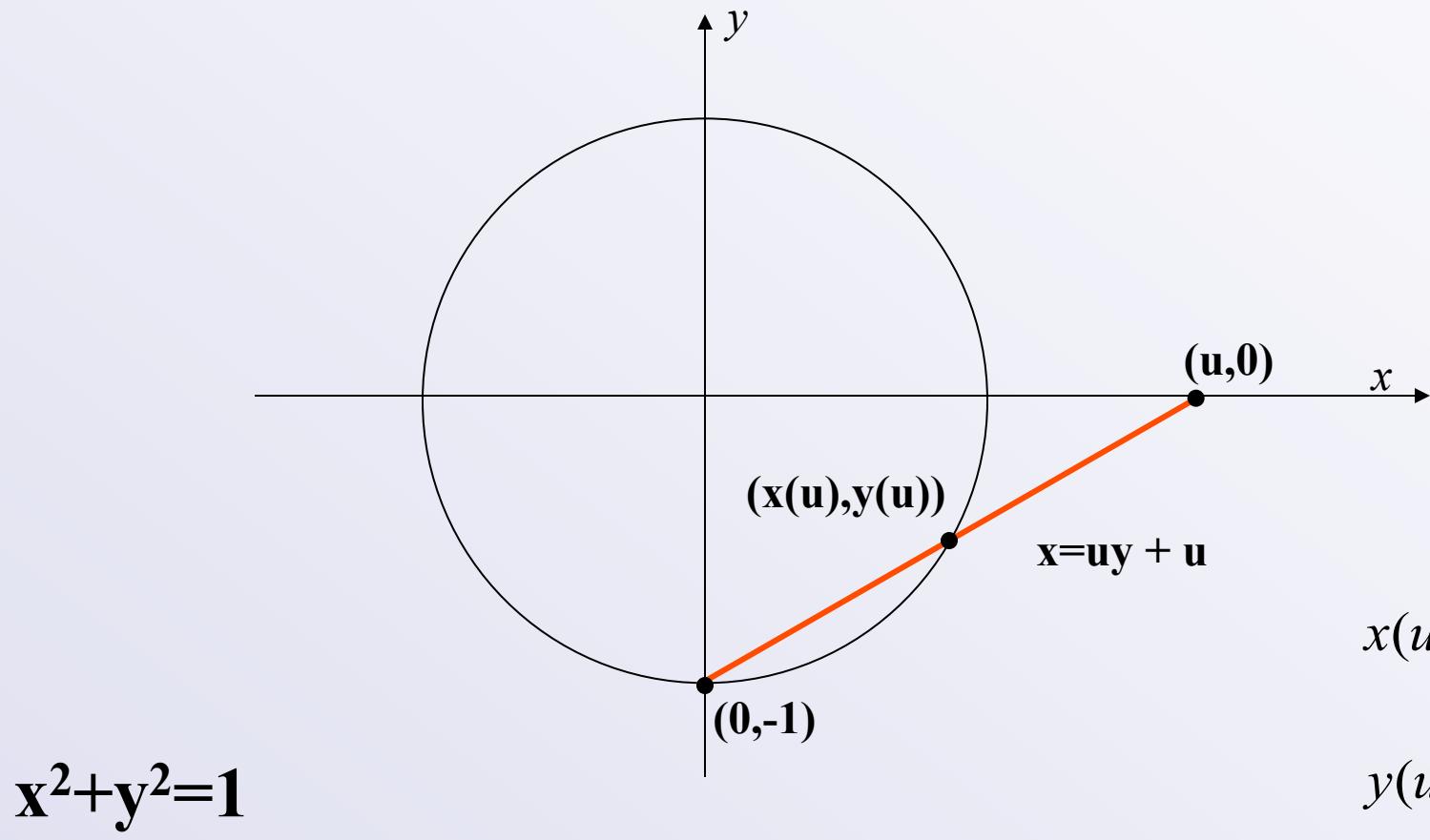
- Usando B-splines



Neste slide, m refere-se ao grau

Curvas racionais

- Parametrização do círculo



Curvas racionais

- Podemos expressar essa parametrização em coordenadas homogêneas por:

$$x(u) = 1 - u^2$$

$$y(u) = 2u$$

$$w(u) = 1 + u^2$$

Ou seja, ele possui representação em 3D, mas a sua projeção (2D) é a entidade que nos interessa

$$x(u) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

$$y(u) = \frac{2u}{1 + u^2}$$

Curvas paramétricas racionais

- Funções são razões
 - Avaliadas em coordenadas homogêneas:
$$[x(t), y(t), z(t), w(t)] \rightarrow \left[\frac{x(t)}{w(t)}, \frac{y(t)}{w(t)}, \frac{z(t)}{w(t)} \right]$$
- São projeções de \mathbb{R}^4 em \mathbb{R}^3 ;
- Podem representar seções cônicas (círculos, elipses, etc) de forma exata.
- Invariantes à transformações projetivas;

Splines racionais

$$P(t) = \sum_{k=0}^L P_k R_k(t)$$

- B-spline normal:

$$R_k = N_{k,m}(t)$$

- B-spline racional:

$$R_k(t) = \frac{w_k N_{k,m}(t)}{\sum_{l=0}^L w_l N_{l,m}(t)}$$

Splines racionais (2)

- $N_{k,m}(t)$ são B-splines de ordem m .
- Os pesos são positivos para garantir que o denominador não seja zero.
- O vetor de nós que define as funções B-splines são normalmente não-uniformes.
 - Esta família de curvas é chamada **de B-splines racionais não-uniformes**, ou simplesmente **NURBS**.

Splines racionais (3)

- O numerador de $P(t)$ é uma combinação linear dos pontos de controle.
- Ele também deve ser uma combinação afim dos pontos P_k .
- Escalando todos os w_k de forma com que eles somem 1 faz com que $P(t)$ seja uma combinação afim de P_k .
- Se $w_j = 0$, ponto P_j não possui influência na curva.

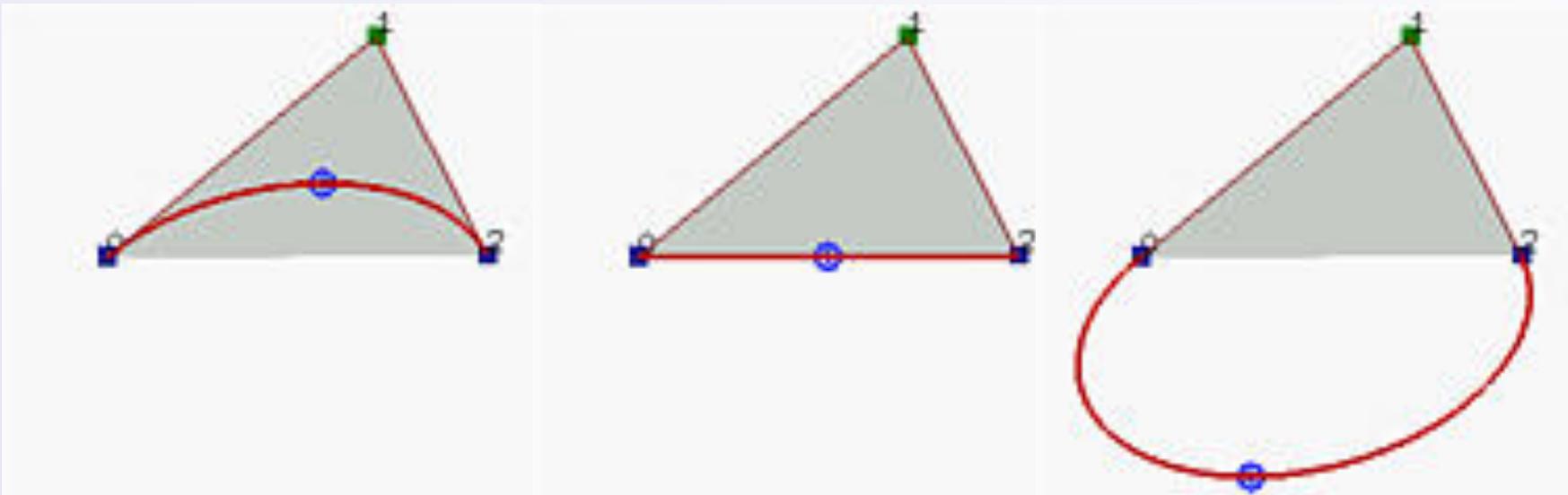
$$P(t) = \frac{\sum_{k=0}^L w_k P_k N_{k,m}(t)}{\sum_{k=0}^L w_k N_{k,m}(t)}$$

Splines racionais (4)

- Se todos os pesos forem os mesmos, teremos a forma de uma B-spline normal.
- Quando os pesos forem diferentes, $P_k(t)$ passará a ser um NURBS.

$$R_k(t) = \frac{w_k N_{k,m}(t)}{\sum_{l=0}^L w_l N_{l,m}(t)}$$

Splines racionais (5)



$$\begin{aligned} w_0 = w_2 &= 1.0 \\ w_1 &= 0.5 \end{aligned}$$

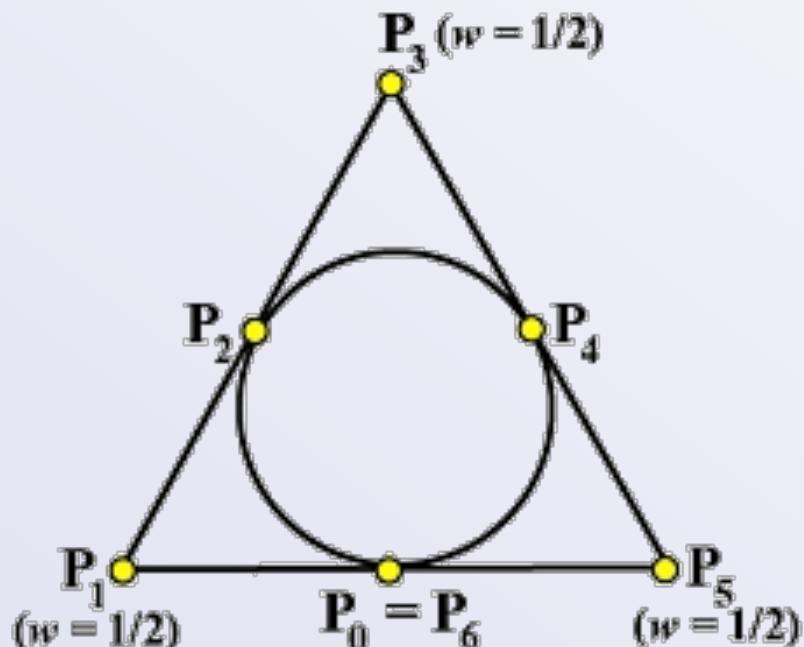
$$\begin{aligned} w_0 = w_2 &= 1.0 \\ w_1 &= 0.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_0 = w_2 &= 1.0 \\ w_1 &= -0.5 \end{aligned}$$

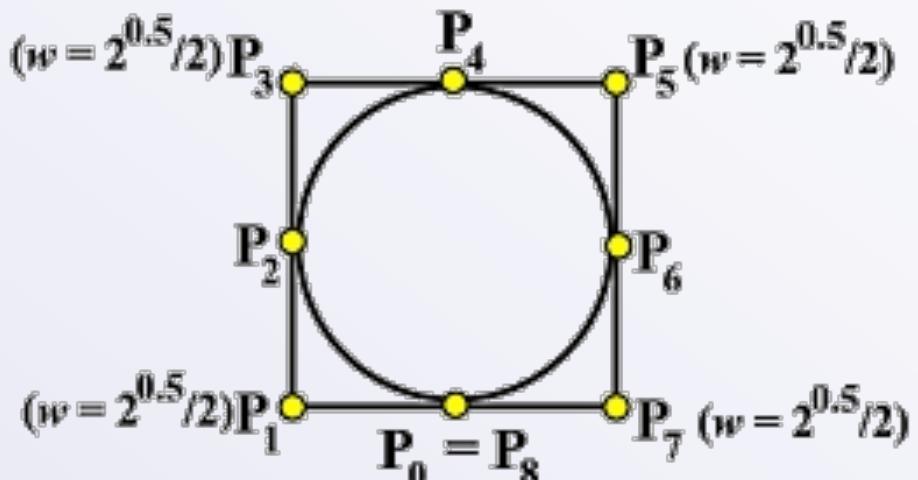
- Efeito resultante da escolha de pesos

Desenhando círculos com NURBS

- Aproximações com B-Splines de grau 2



0, 0, 0, 1/3, 1/3, 2/3, 2/3, 1, 1, 1



0, 0, 0, 1/4, 1/4, 1/2, 1/2, 3/4, 3/4, 1, 1, 1

NURBS

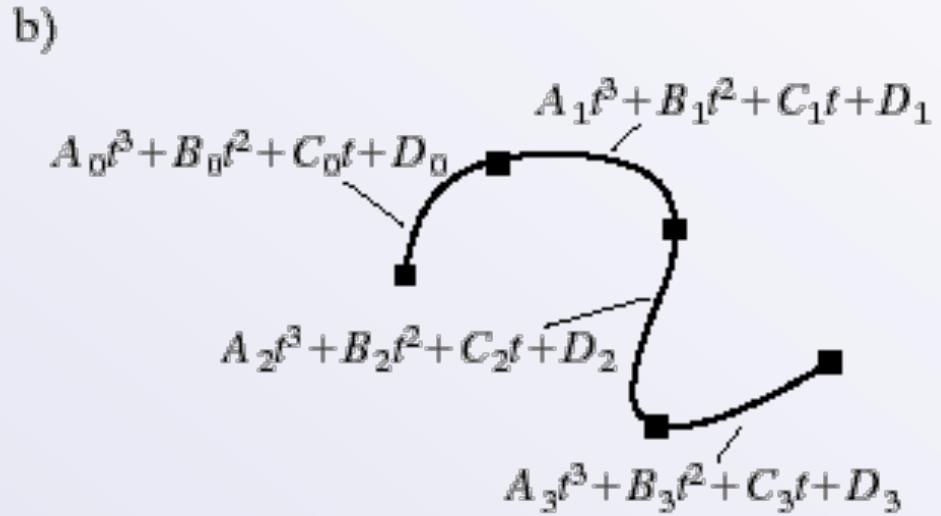
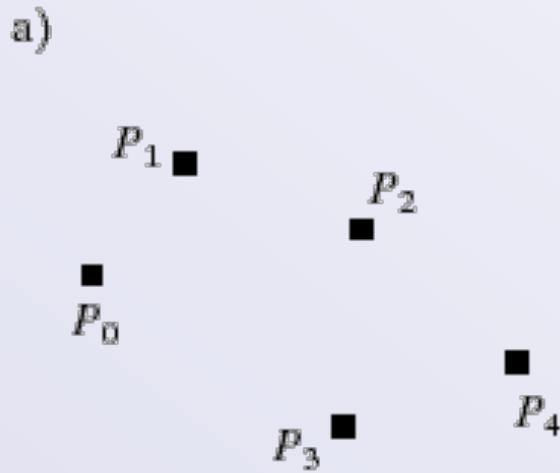
- NURBS são curvas genéricas e flexíveis.
- Elas incluem as curvas B-splines como um caso especial, fazendo com que o mesmo algoritmo de desenho possa ser utilizado.
- Facilitam o desenho de seções cônicas.
- Outras técnicas de desenho permitem ainda um grau maior da forma da curva.
 - Variação da separação entre os nós.
 - Adicionar pontos extras a fim de controlar o comportamento da curva nos pontos extremos.

Interpolação de curvas

- Em certas circunstâncias gostaríamos que uma curva passasse por todos os pontos de controle.
- Uma curva deste tipo pode resultar em pouco controle local e/ou presença de “ondulações” entre pontos de controle.
- Usando uma multiplicidade adequada, podemos fazer com que a curva B-spline interpole os pontos de controle.
- Todavia, gostaríamos de interpolar diretamente todos os pontos de controle escolhidos pelo operador.

Polinomiais cúbicas piecewise

- O operador desenha uma seqüência de pontos P_0, P_1, \dots, P_L , e gera uma curva suficientemente suave que passe por todos os pontos.



Polinomiais cúbicas piecewise

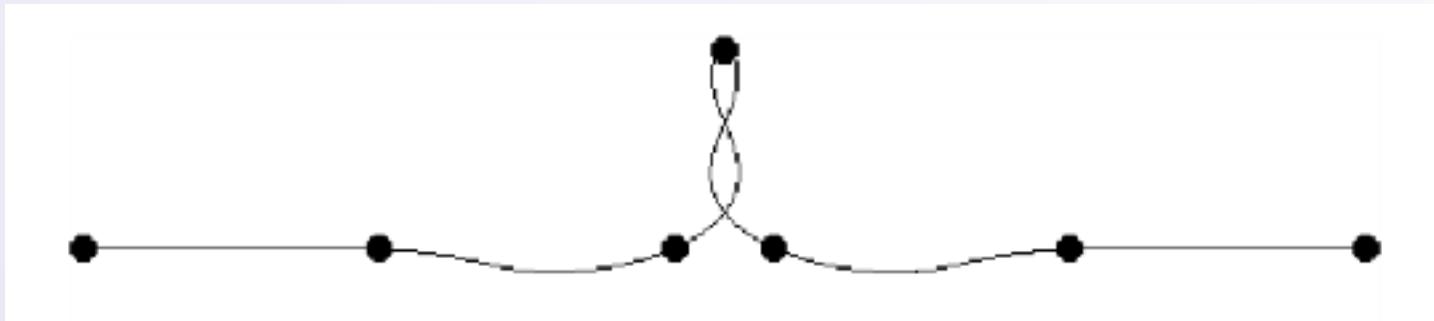
- Cada segmento desta curva é determinada por uma polinomial cúbica:
 - $R_k(t) = A_k t^3 + B_k t^2 + C_k t + D_k$ para $k = 0, 1, \dots, L-1$, e t em $[0, 1]$.
 - R_k é um vetor: possui componentes x e y .
- Quais são os valores de A_k , B_k , C_k , and D_k ?
 - Interpolaremos em y ; o caso x é similar.
 - O segmento cúbico k da curva é dado por:
 - $y_k(t) = a_k t^3 + b_k t^2 + c_k t + d_k$ e sua derivada é $y'_k = s_k$

Polinomiais cúbicas piecewise

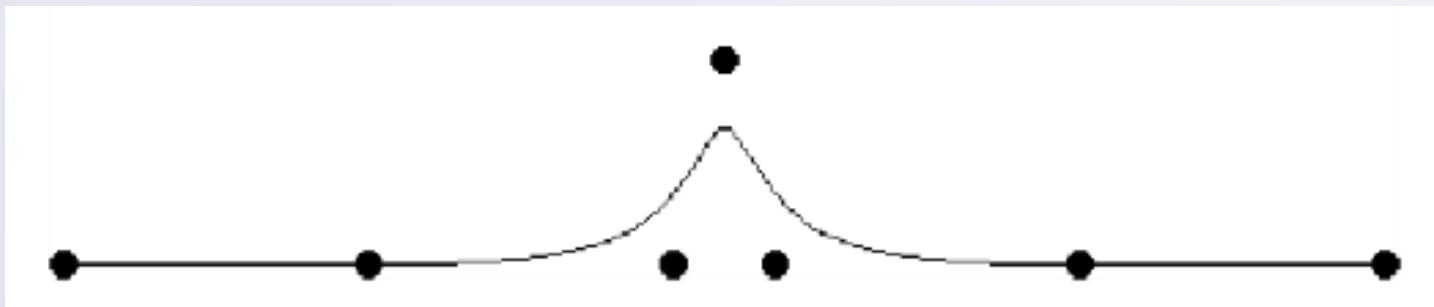
- Cada segmento deve interpolar valor de y_k em $t = 0$ e o valor de y_{k+1} em $t = 1$:
 - $t = 0: d_k = y_k$.
 - $t = 1: a_k + b_k + c_k + d_k = y_{k+1}$
- A derivada $y_k'(t) = 3a_k t^2 + 2b_k t + c_k$ deve ser igual aos valores s_k em $t = 0$ e s_{k+1} em $t = 1$:
 - $t = 0: c_k = s_k$,
 - $t = 1: 3a_k + 2b_k + c_k = s_{k+1}$
- Estas condições devem ser válidas para $k = 0, \dots, L-1$, resultando em $4L$ condições para os $4L$ coeficientes desconhecidos.
 - Curva resultante é 1-suave (C^1).

Interpolação ou aproximação

- Pode resultar em oscilações não desejáveis:



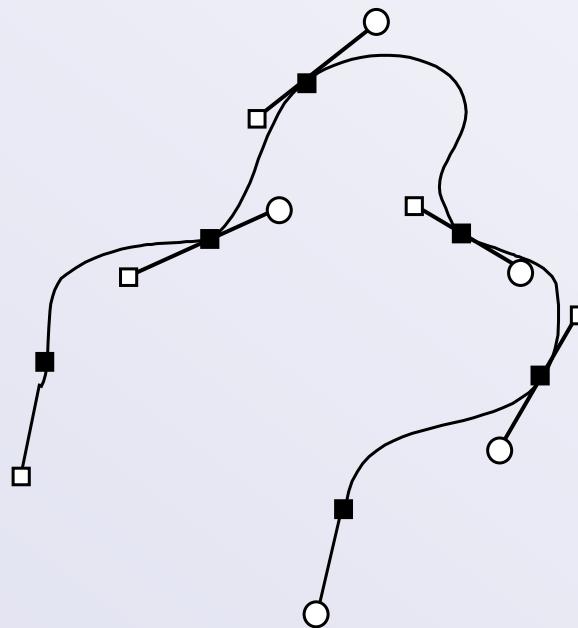
Talvez a aproximação seja melhor:



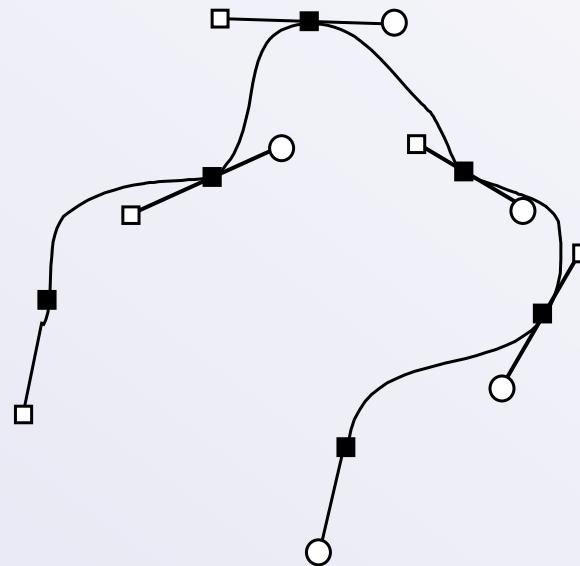
Vetores tangente

- Um programa de CAD pode oferecer maneiras de selecionar a direção e magnitude dos vetores tangentes.

a).

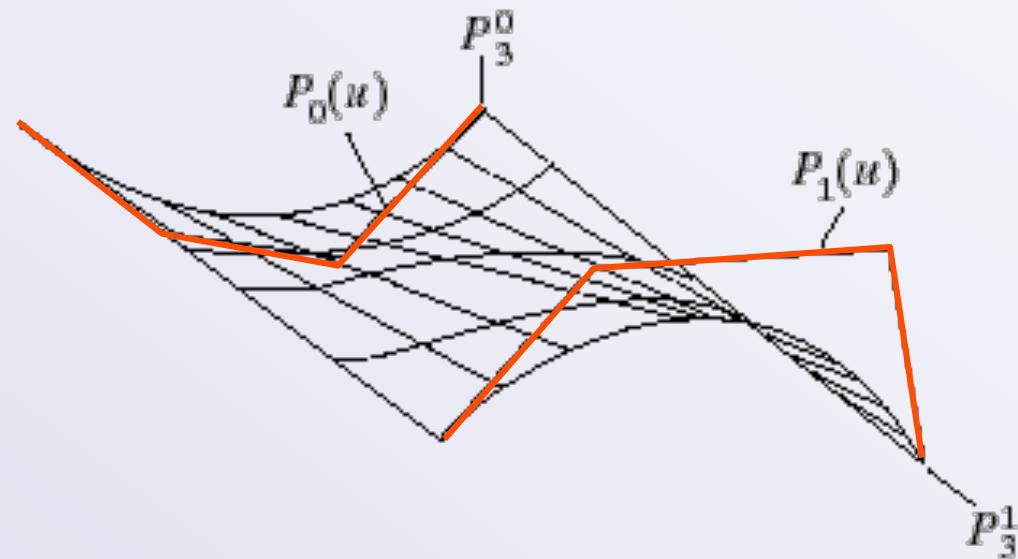


b).



Modelagem de superfícies

- Superfícies de revolução e retalhos (“patches”) podem ser desenhados usando curvas Bézier ou B-spline.



Superfícies de revolução

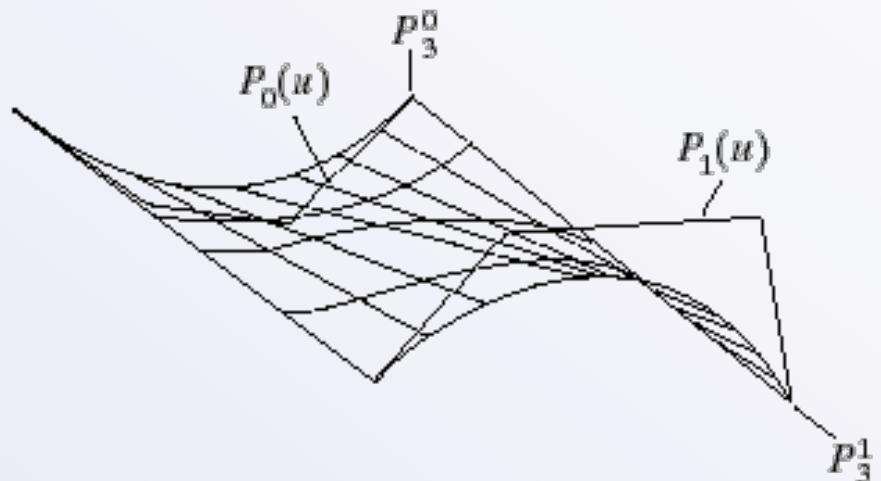
- Uma superfície de revolução é definido por duas curvas de fronteira $P_0(u)$ e $P_1(u)$, conectadas em cada valor de u por uma linha reta.
- A expressão paramétrica para uma superfície de revolução é simplesmente uma interpolação linear entre P_0 e P_1 .

$$P(u, v) = (1 - v) P_0(u) + v P_1(u).$$

- $P_0(u)$ e $P_1(u)$ poderão ser curvas B-spline (ou curvas Bézier).

Superfícies de revolução

- Ambas as curvas $P_0(u)$ e $P_1(u)$ são Bézier cúbicas. $P_0(u)$ é baseada nos pontos $P_0^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0$, e $P_1(u)$ é baseada nos pontos $P_0^1, P_1^1, P_2^1, P_3^1$.



Superfícies de revolução

- A equação para esta superfície é:

$$P(u, v) = \sum_{k=0}^3 ((1 - v)P_k^0 + vP_k^1)B_k^3(u)$$

- Seus contornos v são linhas retas ligando pontos correspondentes nas duas curvas Bézier.
- Os contornos u são curvas Bézier cujos pontos de controle são o resultado da interpolação dos pontos de controle das duas curvas Bézier.
- Curvas B-spline ou NURBS poderiam também ser usadas como curvas finais.

Superfícies de revolução B-spline

- Uma superfície de revolução é formada quando um **perfil** $C(v) = (X(v), Z(v))$ é rotacionado no eixo z (ou x, ou y)
- A superfície possuirá a forma paramétrica:

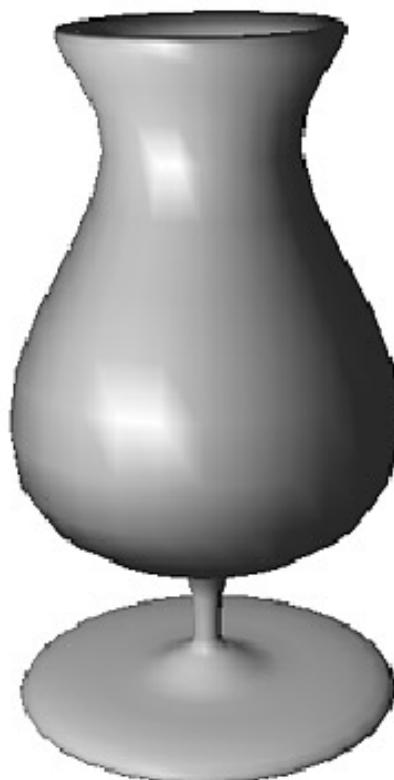
$$P(u, v) = (X(v)\cos(u), X(v)\sin(u), Z(v))$$

Superfícies de revolução B-spline

a) profile: a B-spline curve



b) the goblet surface of revolution



Retalhos Bézier

- Um retalho Bézier utiliza curvas Bézier para ambos os contornos em u e v .
- Exemplo: se os contornos em u forem Bézier cúbicas e os contornos em v forem Bézier quadráticas, a superfície paramétrica será:

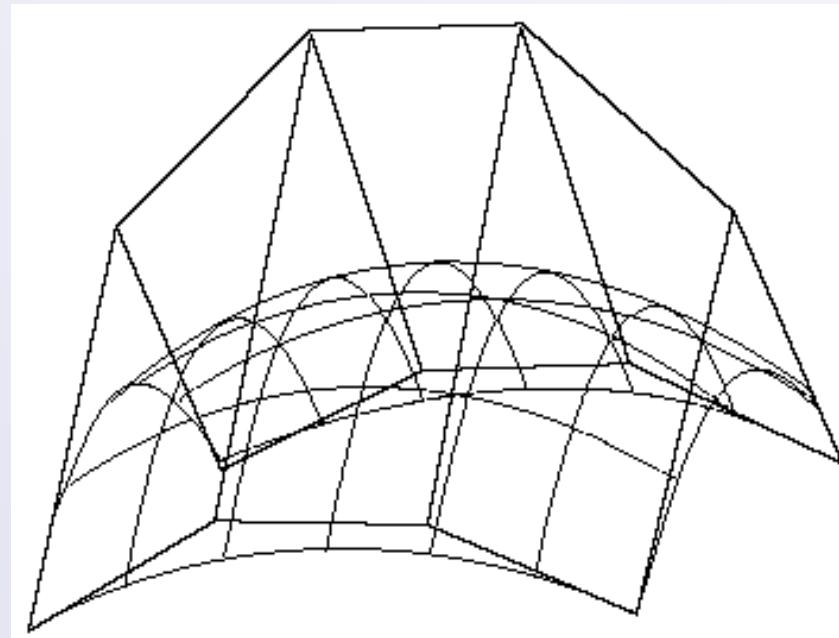
$$P(u, v) = \sum_{k=0}^3 \left(\sum_{i=0}^2 P_{i,k} B_i^2(v) \right) B_k^3(u)$$

- Necessitando de 12 pontos de controle.

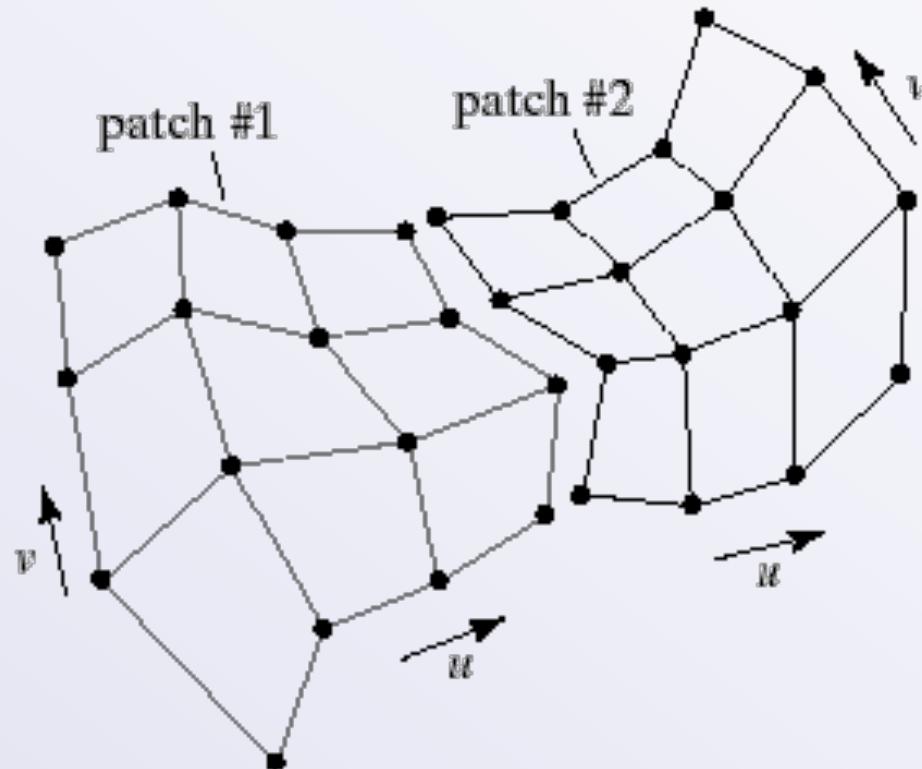
Exemplo

- u e v variam de 0 to 1. A equação do retalho é:

$$P(u, v) = \sum_{k=0}^L \sum_{i=0}^M P_{i,k} B_i^M(u) B_k^L(v)$$

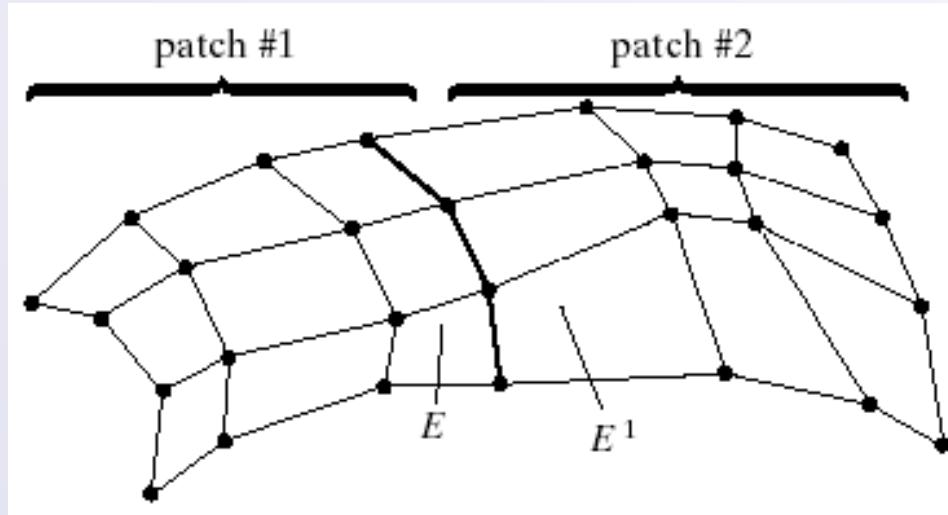


Unindo retalhos Bézier



Unindo retalhos Bézier (2)

- Para unir dois retalhos, precisamos fazer com que os pontos de controle da fronteira sejam iguais.
- O mais difícil é garantir continuidade C_1 na junção dos dois retalhos.
 - O vetor normal estará garantido em cada ponto;



Retalhos B-spline

- Funções B-spline podem ser utilizadas para atingir um grau maior no controle do design de superfícies:

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^M \sum_{k=0}^L P_{i,k} N_{i,m}(u) N_{k,n}(v)$$

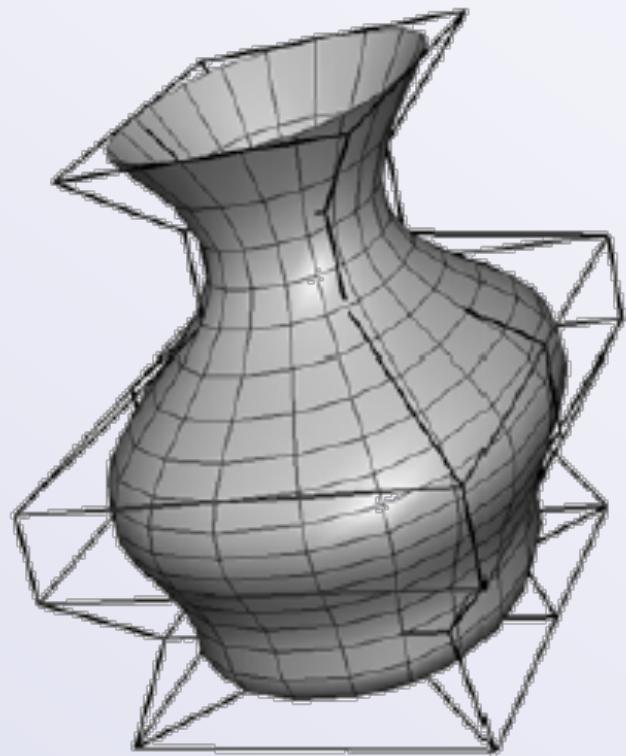
- $N_{i,m}(u)$ e $N_{k,n}(v)$ são bases B-spline, possivelmente de diferente ordem;
- Agora temos dois vetores de nós, um para u e outro para v.

Retalhos B-spline (2)

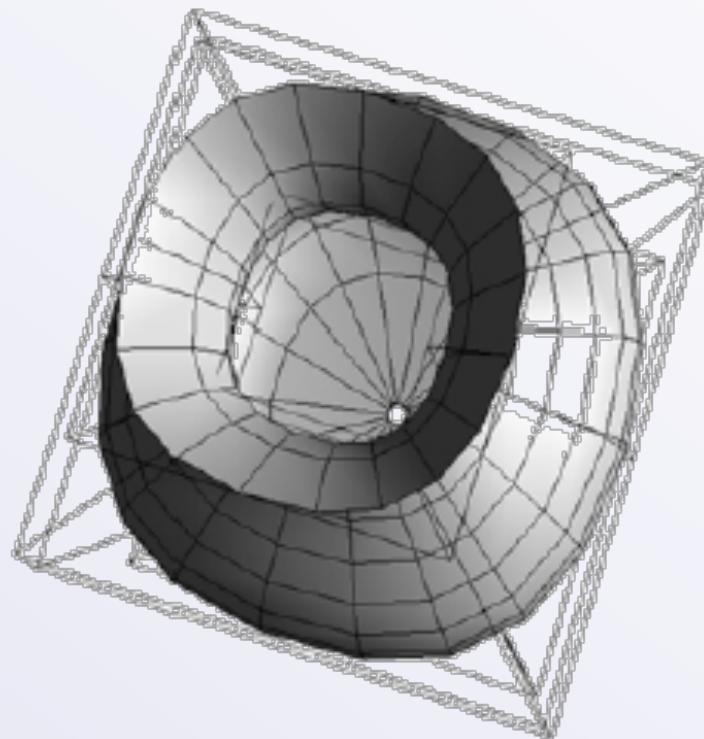
- Usualmente o vetor padrão de nós é utilizado para que os cantos do poliedro sejam interpolados.
- Surperfícies fechadas (em u ou v ou ambas) serão formadas se os pontos de controle forem duplicados.
- O poliedro de controle consiste de $(L+1)(M+1)$ pontos de controle, onde u e v variam entre 0 e o valor máximo dos seus respectivos vetores de nós.

Retalhos B-spline (3)

a)



b)

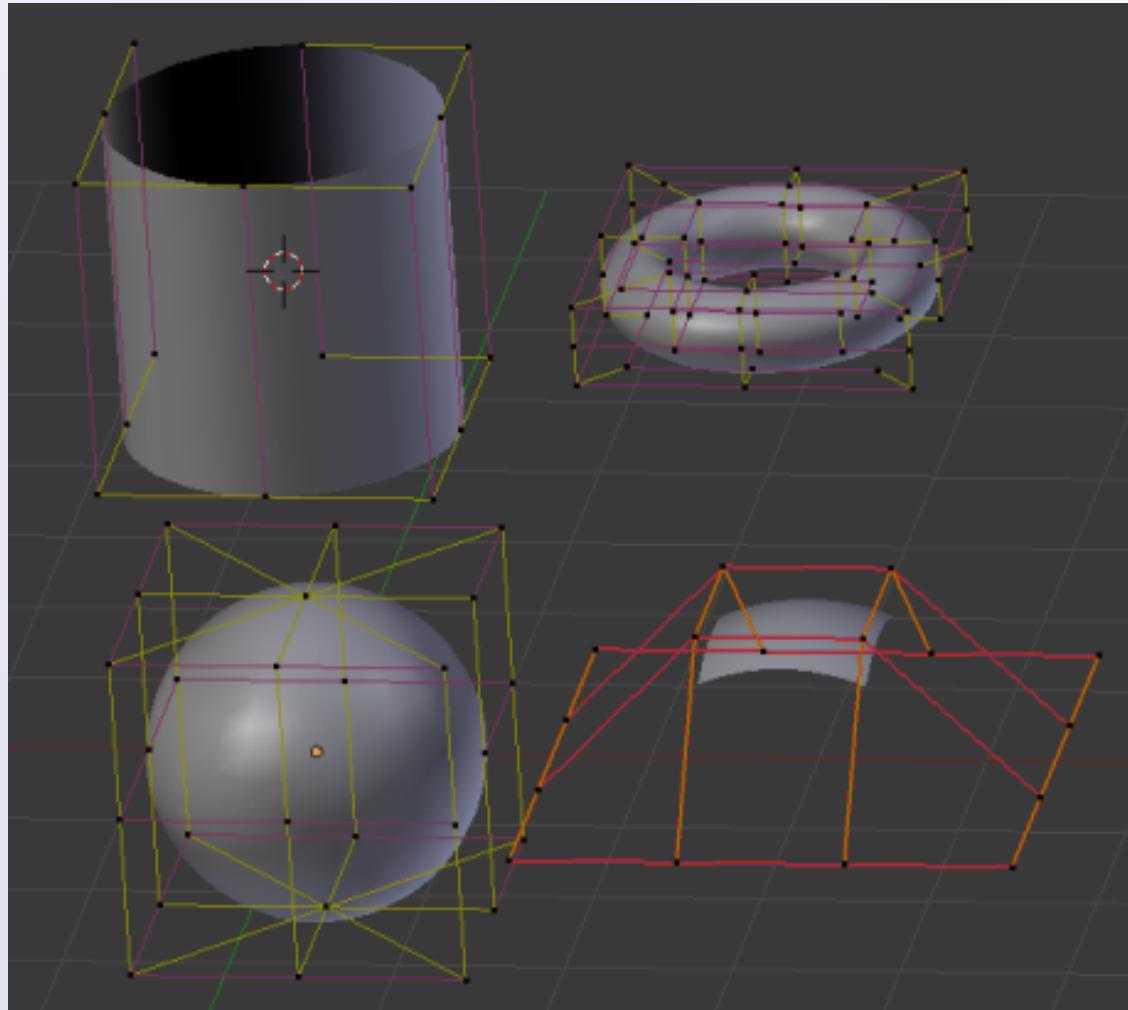


Retalhos NURBS

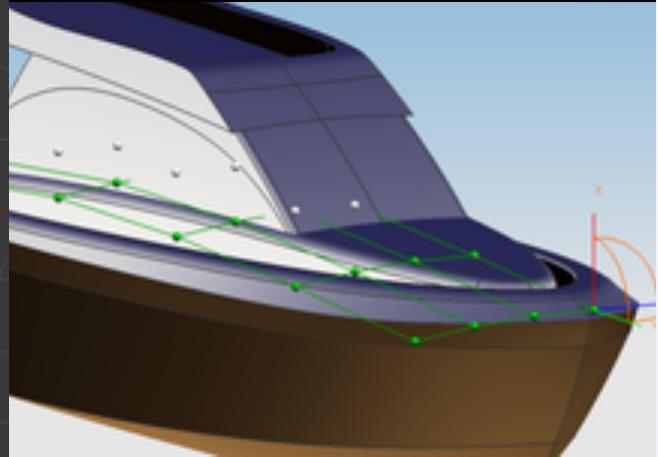
- Da mesma forma podemos extender curvas NURBS para superfícies NURBS.

$$P(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^M \sum_{k=0}^L w_{i,k} P_{i,k} N_{i,m}(u) N_{k,n}(v)}{\sum_{i=0}^M \sum_{k=0}^L w_{i,k} N_{i,m}(u) N_{k,n}(v)}$$

Retalhos NURBS



2008(cjhammertech@gmail.com)



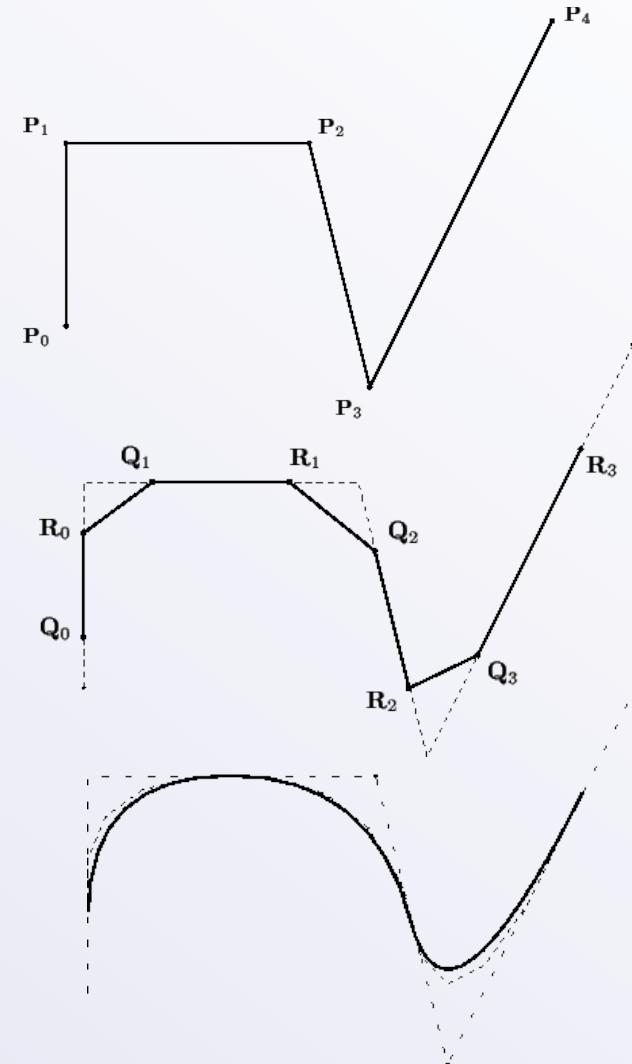
Curvas e superfícies de subdivisão

- Idéia: Refinar sucessivamente o polígono (poliedro) de controle

Entrada: Polígono ou malha do poliedro

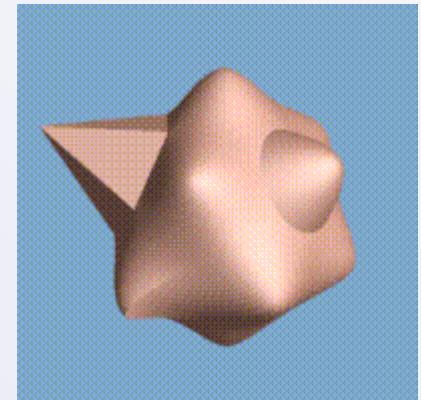
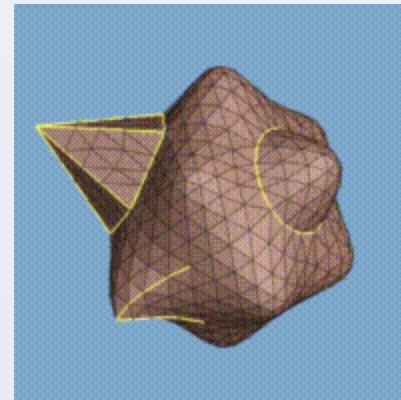
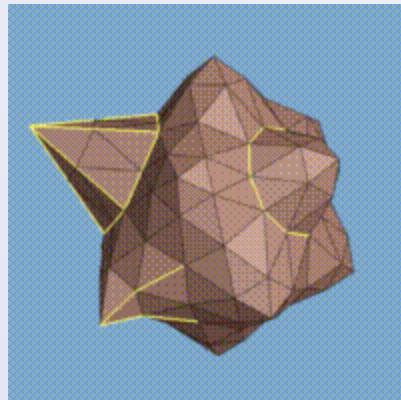
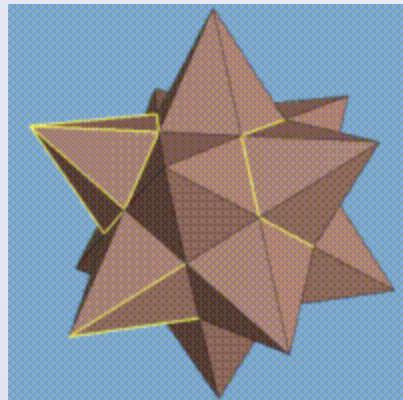
Processo: Subdividir a geometria

Saída: Curva ou superfície suave



Superfícies de subdivisão

- Alguns modelos produzem uma geometria cujo nível de detalhe não é suficiente.
- Nem sempre isso é possível modelar tais objetos com B-splines
 - Retalhos são retangulares
- Descontinuidades não são facilmente incorporadas.



Vantagens

- Fácil de gerar geometrias mais complexas
- Renderização eficiente
- Facilidade na criação de ferramentas de animação

*O filme Bug's Life ("Vida de inseto") foi o primeiro filme a usar superfícies de subdivisão.
(Toy Story utilizou NURBS)*

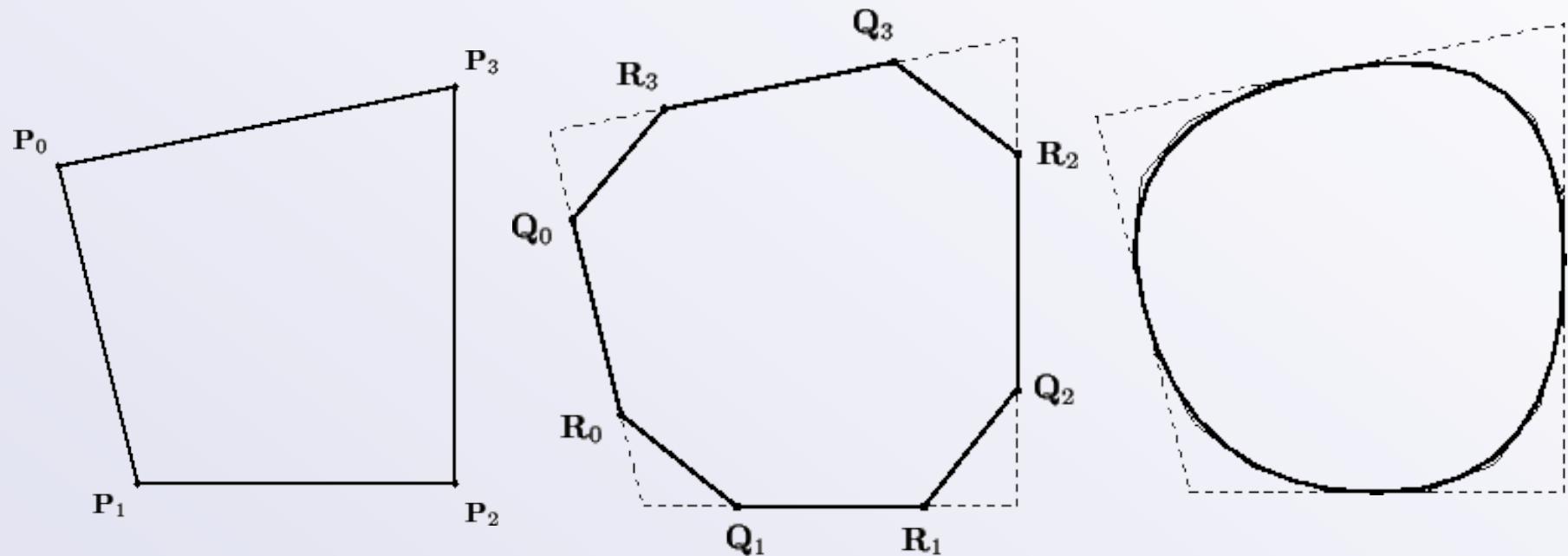


Desvantagens

- Dificuldade na especificação de precisão da modelagem
- Análise da continuidade (“suavidade”) é geralmente difícil para um novo método de subdivisão
- É de natureza não-parametrizada
 - Dificuldade na avaliação (cálculo) de pontos da superfície ou curva

Algoritmo de Chaiken

- Publicado em 1974



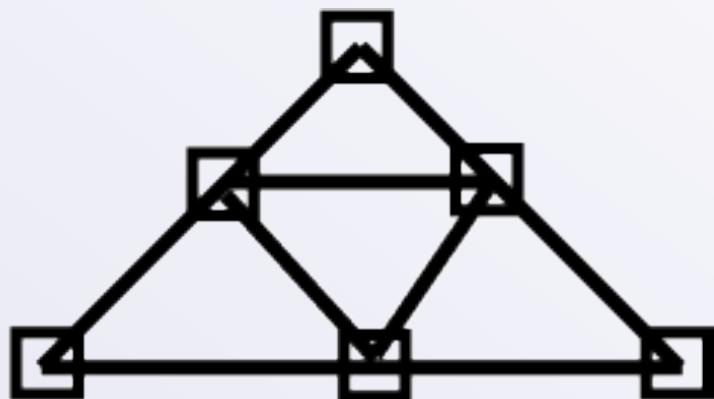
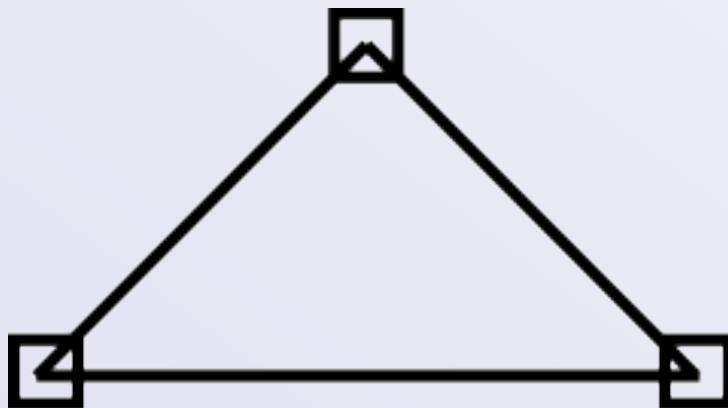
Um método baseado na “poda de cantos”

Algoritmo de Chaiken

- Riesenfeld (1975)
 - Percebeu que o método de Chaiken na verdade gerava curvas B-splines quadráticas!
- Gerou interesse na área teórica dos algoritmos de subdivisão
- Criação dos primeiros algoritmos de subdivisão de superfícies:
 - Doo-Sabin
 - Catmull-Clark

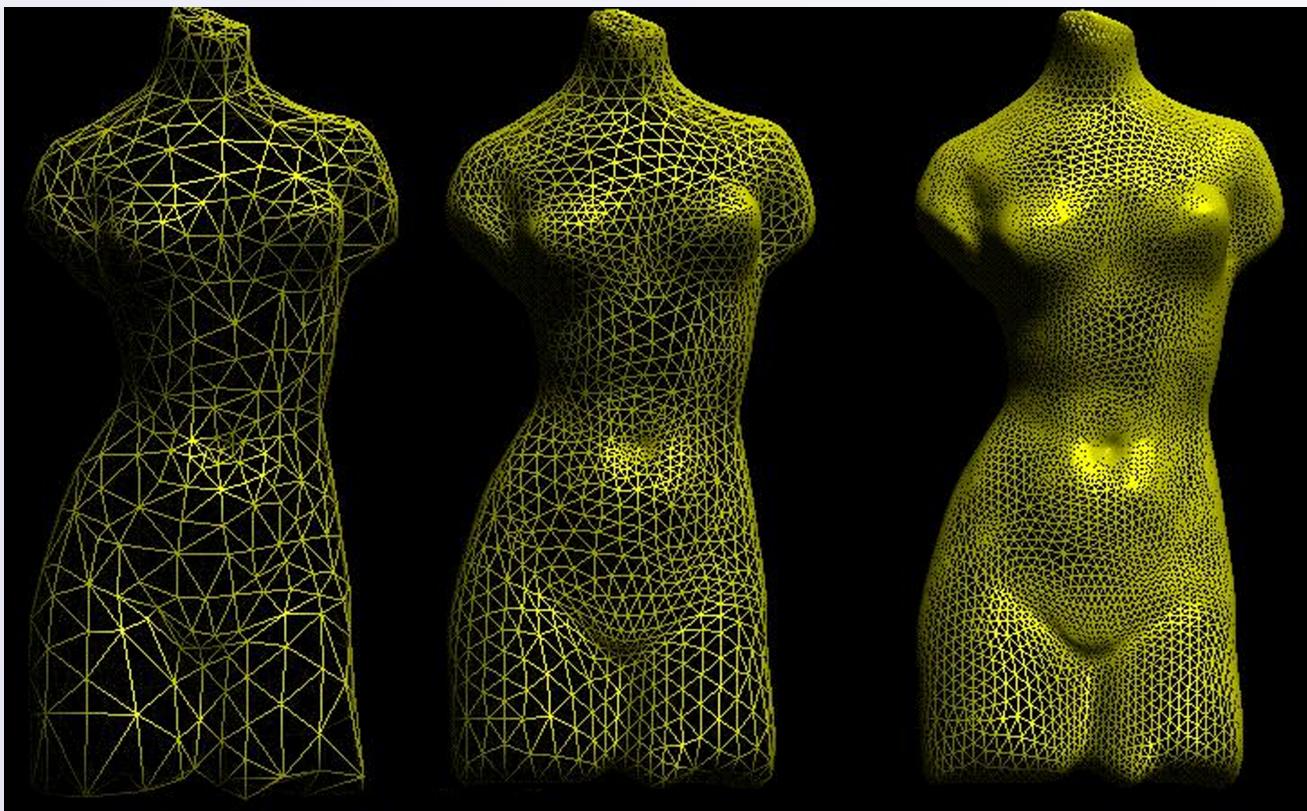
Superfícies de subdivisão

- Para criar faces adicionais, cria-se arestas conectando os pontos médios de cada face, transformando uma face triangular e quatro outras faces.

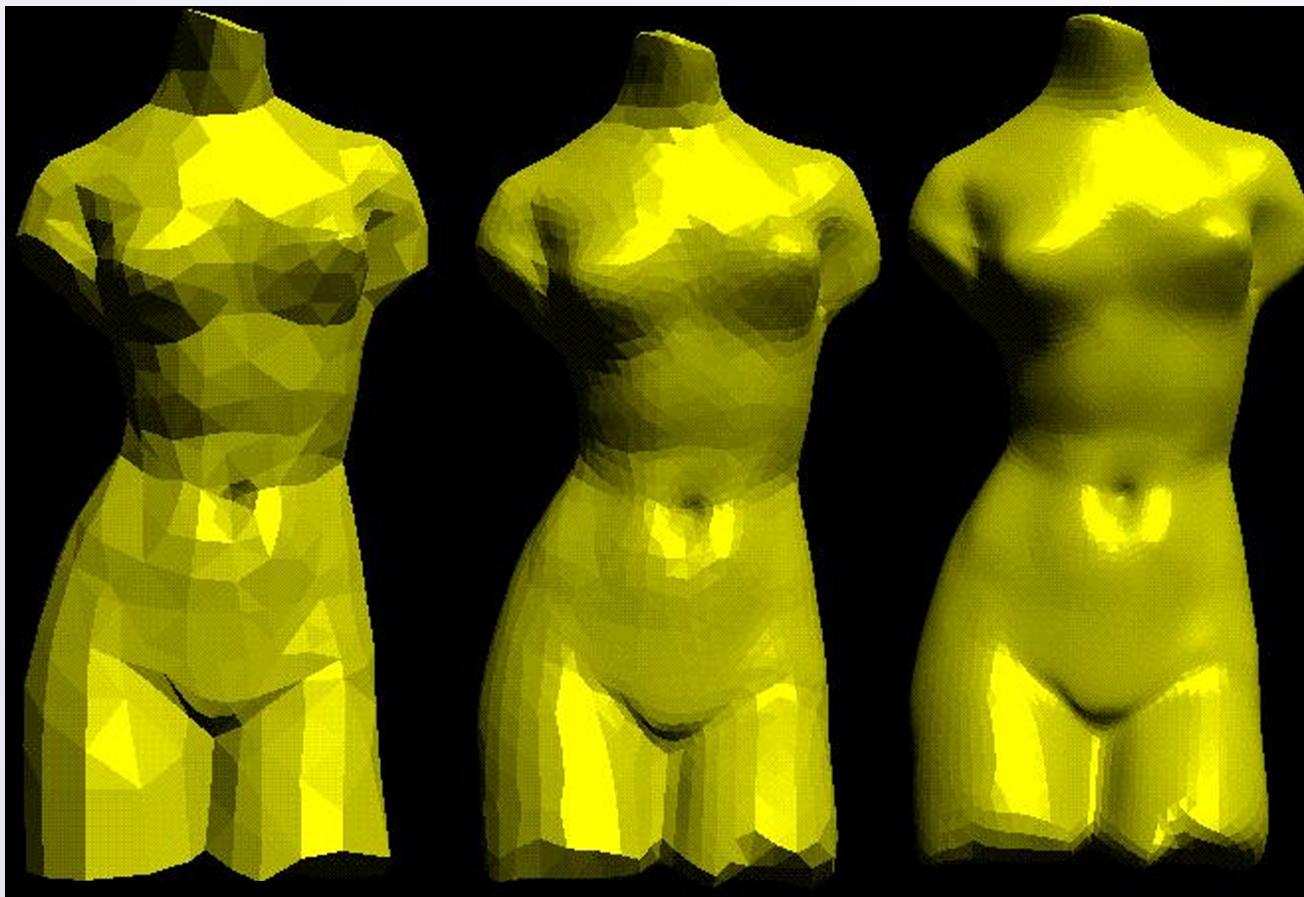


Superfícies de subdivisão

- Novas faces não necessitam de novos dados.

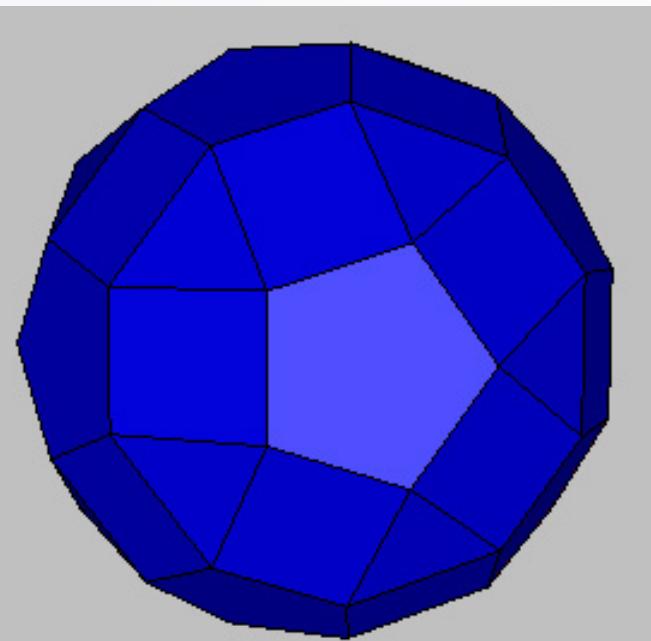
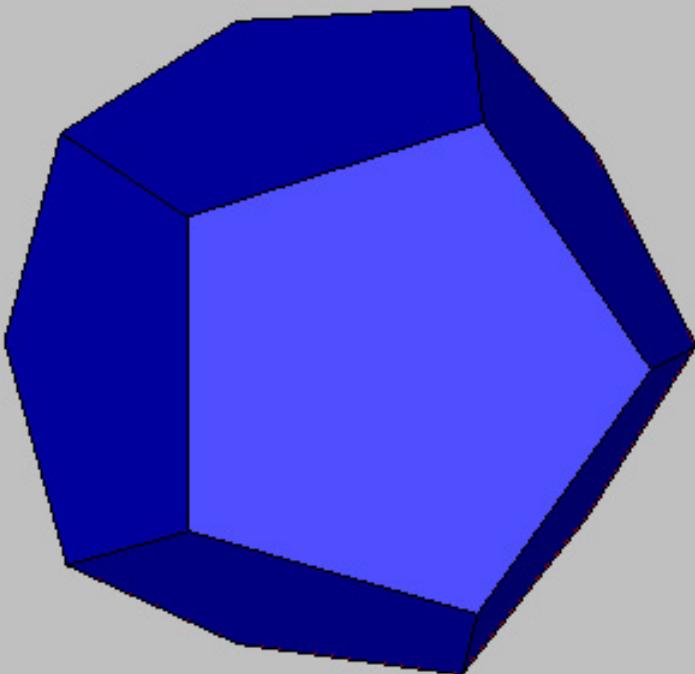


Superfícies de subdivisão

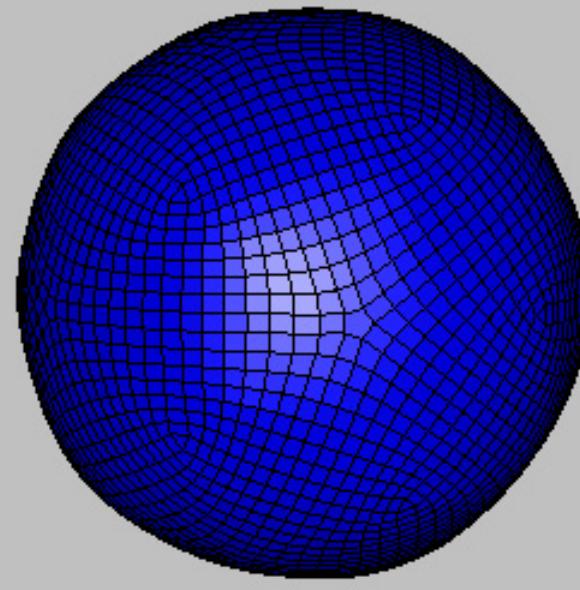


Doo-Sabin

Entrada: malha de polígonos



1 nível



**Após vários
níveis**

Doo-Sabin (1978)

- Generalização do conceito de Chaiken para superfícies quadráticas B-Spline.

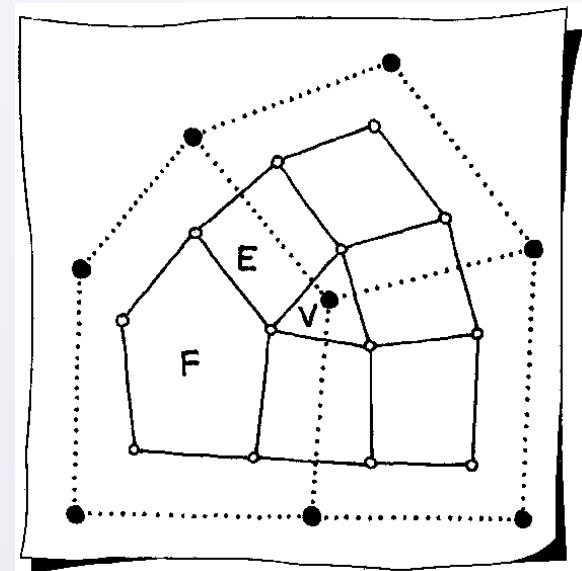
Entrada: malha de polígonos

Algoritmo:

- 1) Determina pontos de cada face
- 2) Conecta pontos para achar novas faces:
F-faces, E-faces, V-faces

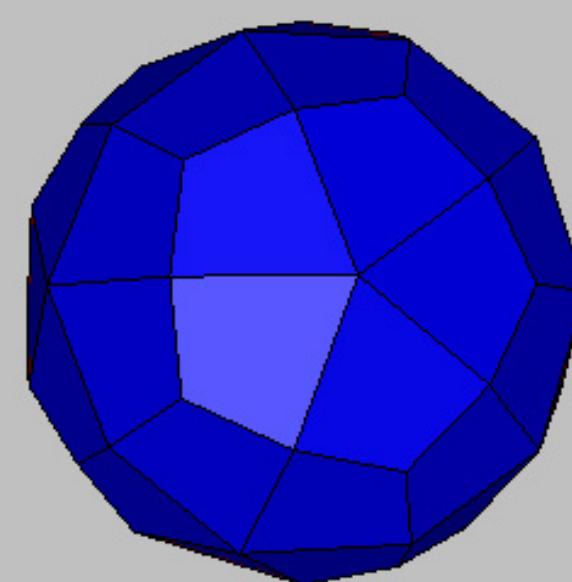
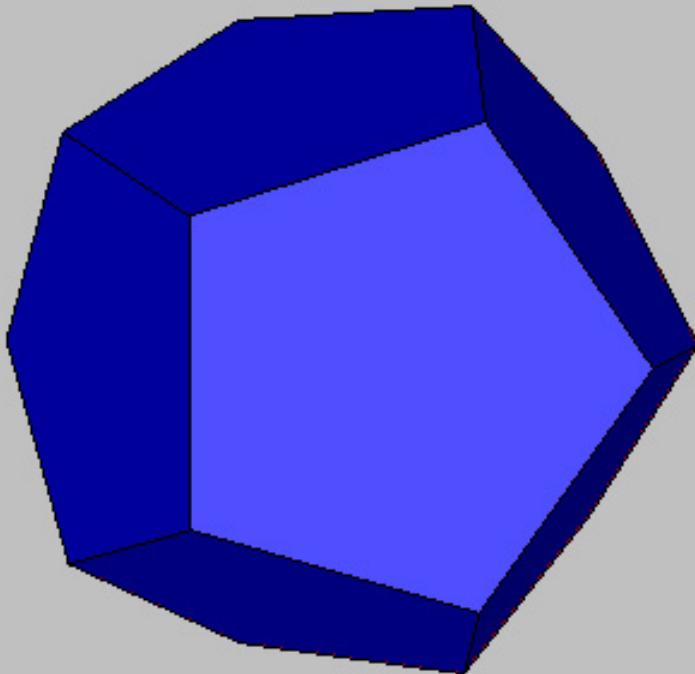
Reita...

Saída: malha de polígonos;
na maioria faces com 4 lados
com algumas exceções em F- & V-faces;
valence = 4 em qualquer vértice

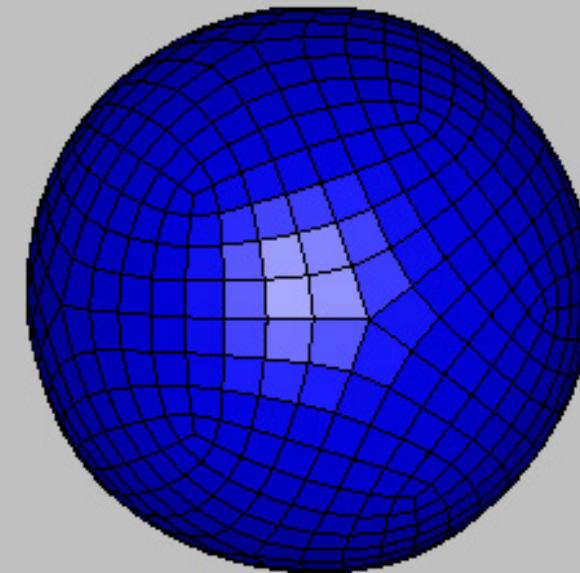


Catmull-Clark

Entrada: malha de polígonos



1 nível



**Após vários
níveis**

Catmull-Clark (1978)

- Generalização da ideia de Chaiken utilizando superfícies B-Splines cúbicas.

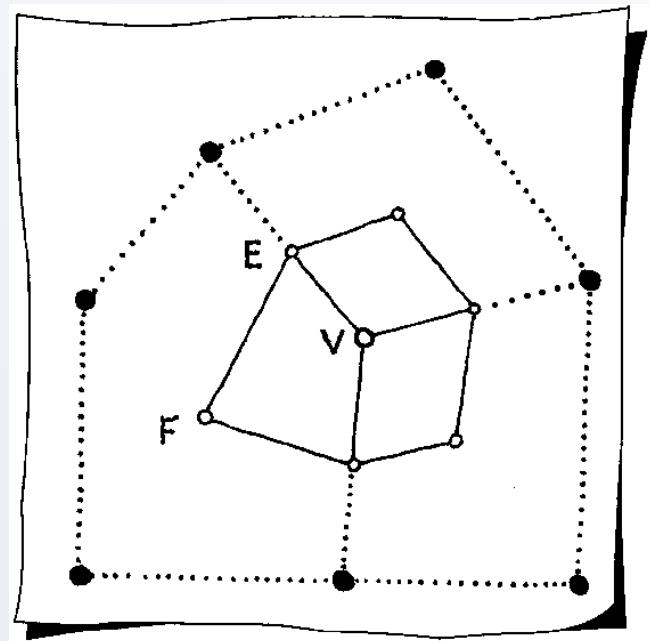
Entrada: Malha poliedral

Algoritmo:

- 1) Forme os pontos F: centróides dos vértices das faces
- 2) Forme os pontos E: combo de vértices de arestas e pontos F
- 3) Forme os pontos V: média dos Es
- 4) Forme novas faces (F-E-V-E)

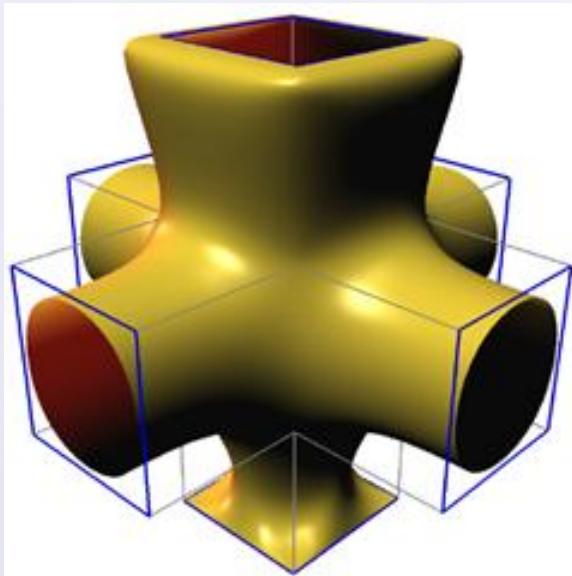
Repita....

Output: malha com faces de 4 lados

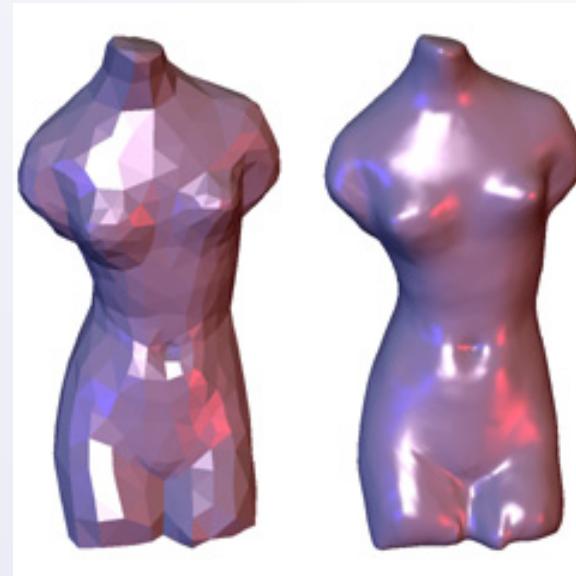


Extensões

- Muitas outras técnicas foram desenvolvidas desde então...



maior controle de suavidade



**interpolação
(butterfly scheme)**