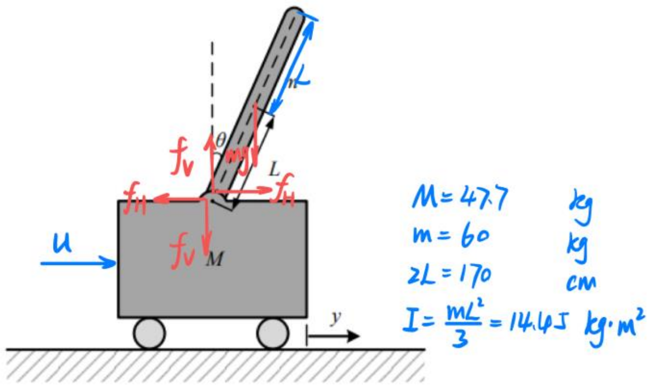
Simulink 平衡小车

1. 建立系统数学模型

小车的各参数如下图所示，小车受到的外力为 u，位移为 y，杆的倾角为θ。设车轮滚动只有静摩擦，没有滑动，且系统中没有阻尼。



1.1 受力分析

先对**小车**进行受力分析，水平方向上有：

$$M\ddot{y} = u - f_H$$

再对**摆**进行受力分析，水平方向有：

$$f_H = m\frac{d^2}{dt^2}(y + l sin\theta)$$

即：

$$f_H = m\ddot{y} + ml(\ddot{\theta} cos\theta - \dot{\theta}^2 sin\theta)$$

摆在竖直方向上有：

$$f_V - mg = m\frac{d^2}{dt^2}(l cos\theta)$$

即：

$$f_V = mg - ml(\ddot{\theta} sin\theta + \dot{\theta}^2 cos\theta)$$

对摆应用动量矩定理，以θ顺时针方向旋转为正，设摆绕着质心的转动惯量为 I，则有：

$$f_V l sin\theta - f_H l cos\theta = I\ddot{\theta}$$

整理可得：

$$(M + m)\ddot{y} + ml\ddot{\theta} cos\theta - ml\dot{\theta}^2 sin\theta = u \qquad (1)$$

$$ml\ddot{y} cos\theta + (I + ml^2)\ddot{\theta} - mgl sin\theta = 0 \qquad (2)$$

1.2 传递函数

在系统平衡点附近，θ很小，并且假设其角速度$\dot{\theta}$也很小，则可进行近似处理$cos\theta \approx 1, sin\theta \approx \theta, sin\theta \cdot \dot{\theta} \approx 0$。对方程（1）（2）在平衡点附近线性化后，进行 Laplace 变化可得：

$$mls^2\theta + (M+m)s^2x = u$$

$$(I+ml^2)s^2\theta + mls^2x = mgl\theta$$

又有已知

$$I = \frac{1}{3}ml^2$$

于是分别可以得到力 u 和角度θ、角度θ和位移 y 的传递函数

$$G_1(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{\left(\frac{4}{3}Ml + \frac{7}{3}ml\right)s^2 + (M+m)g}$$

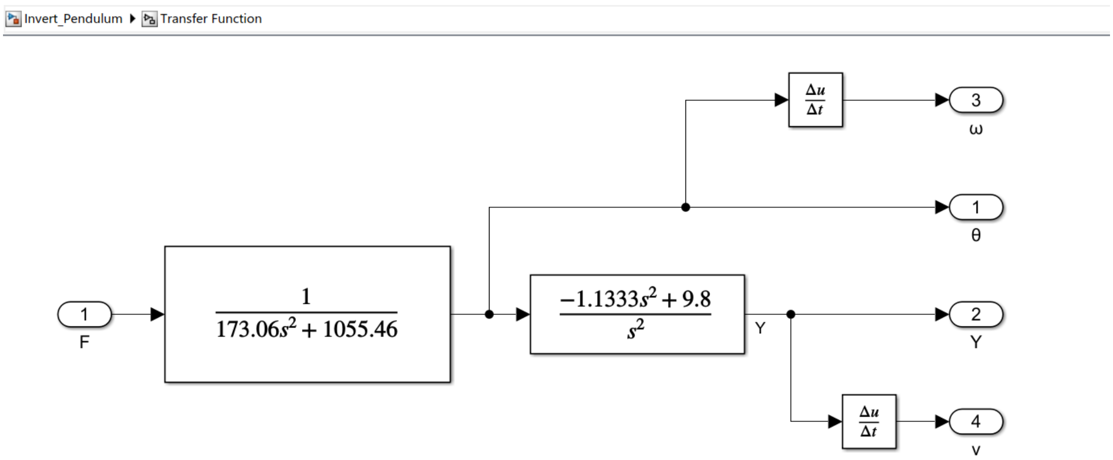
$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{\Theta(s)} = \frac{-\frac{4}{3}ls^2 + g}{s^2}$$

代入系统参数，可以得到传递函数的数值表达形式：

$$G_1(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{173.06s^2 + 1055.46}$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{\Theta(s)} = \frac{-1.1333s^2 + 9.8}{s^2}$$

角速度$\dot{\theta}$和速度$\dot{y}$分别将θ，y对时间 t 求微分即可得到。输入到 Simulink 中如下：



1.3 状态空间

为了使用线性系统理论的知识对系统进行分析和控制，需要对上述的非线性系统在在平

衡点附近进行线性化。在系统平衡点附近，θ很小，并且假设其角速度$\dot{\theta}$也很小，则可进行近似处理$cos\theta \approx 1, sin\theta \approx \theta, sin\theta \cdot \dot{\theta} \approx 0$。从而得到一阶倒立摆系统在平衡点附近的线性化模型为：

$$\begin{bmatrix} M+m & ml \\ ml & I+ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ mgl\theta \end{bmatrix}$$

定义系统的状态变量为$\boldsymbol{x} = (y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})$，系统的输入量为小车外力$u$，系统输出为小车的位移$y$、小车速度$v = \dot{y}$，倾角$\theta$和角速度$\omega = \dot{\theta}$。则可得系统的状态空间方程为：

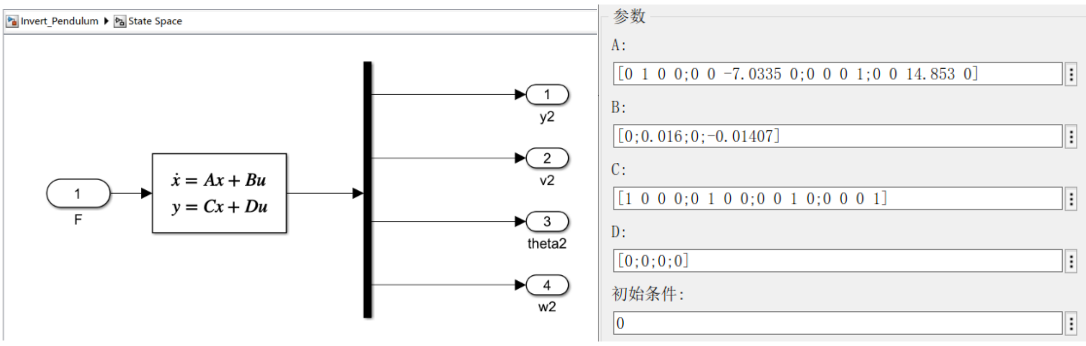
$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-m^2gl^2}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{mgl(M+m)}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{I+ml^2}{I(M+m)+Mml^2} \\ 0 \\ \dfrac{-ml}{I(M+m)+Mml^2} \end{bmatrix} u$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

代入系统参数，可以得到一阶倒立摆系统的状态空间方程：

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7.0335 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 14.853 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.016 \\ 0 \\ -0.01407 \end{bmatrix} u$$

输入到 Simulink 中，如下所示：

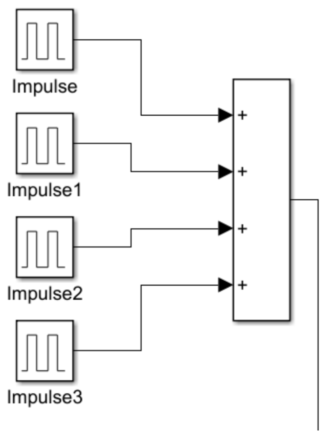


2. 控制器设计

2.1 外部冲击设置

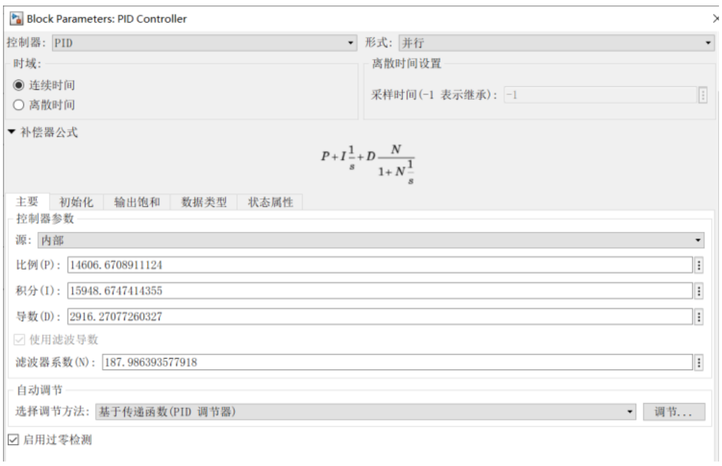
为了验证小车系统外部冲击设置成 0.1s 的脉冲，为了更好地展示效果，间隔 2s 共设置 4 个冲击，冲击幅度设置为 10^5，第一个第三个冲击方向为正，第二个第四个冲击方向为负。

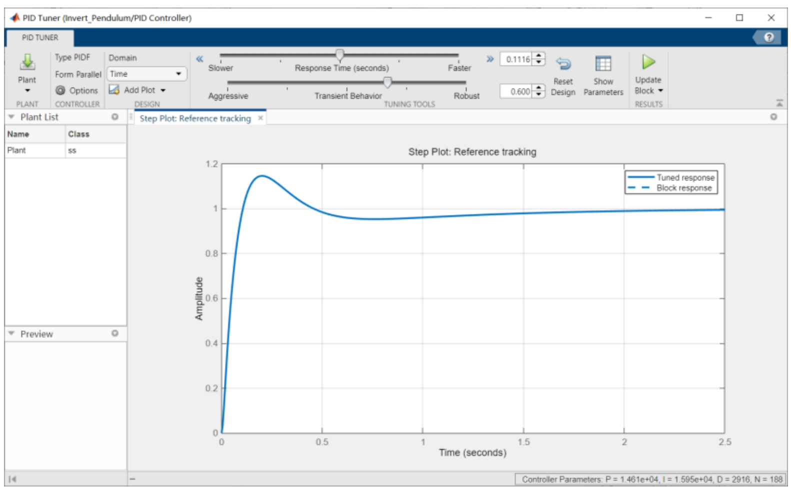
在 Simulink 中的设置如下所示：



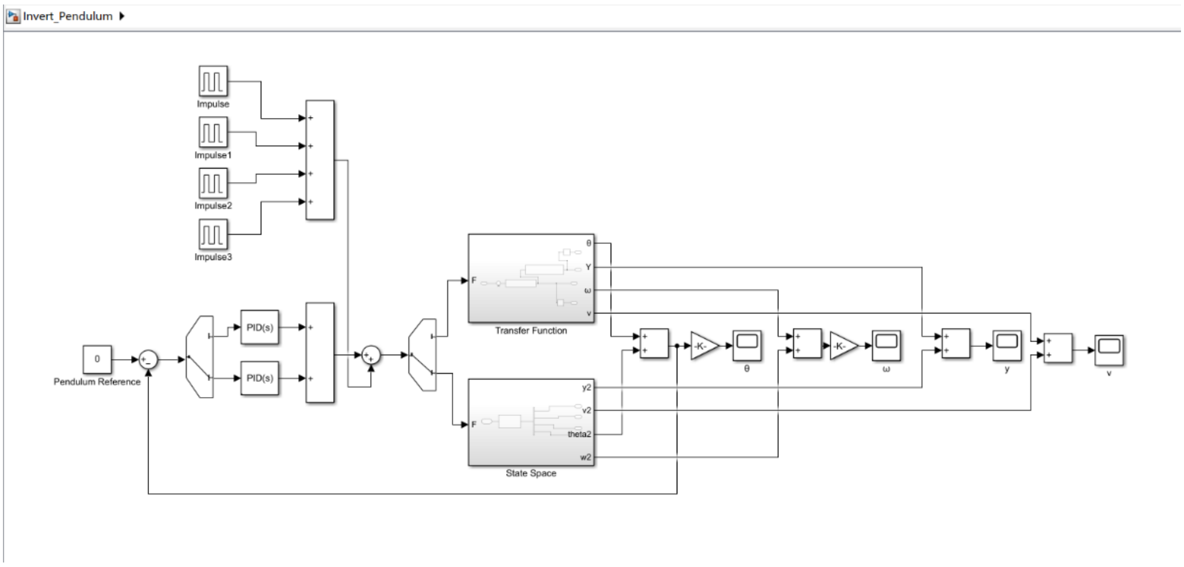
2.2 PID 控制器设计

在加入外部冲击后，开始设计 PID 控制器对平衡车进行控制。在 Simulink 功能块中使用 PID Controller 模块对平衡车进行反馈调节，使用 PID Tuner 调整 PID 参数，调整出的相应曲线大致如下所示。这样能基本保证小车的相应时间较快但不过度相应，且稳态误差较小。





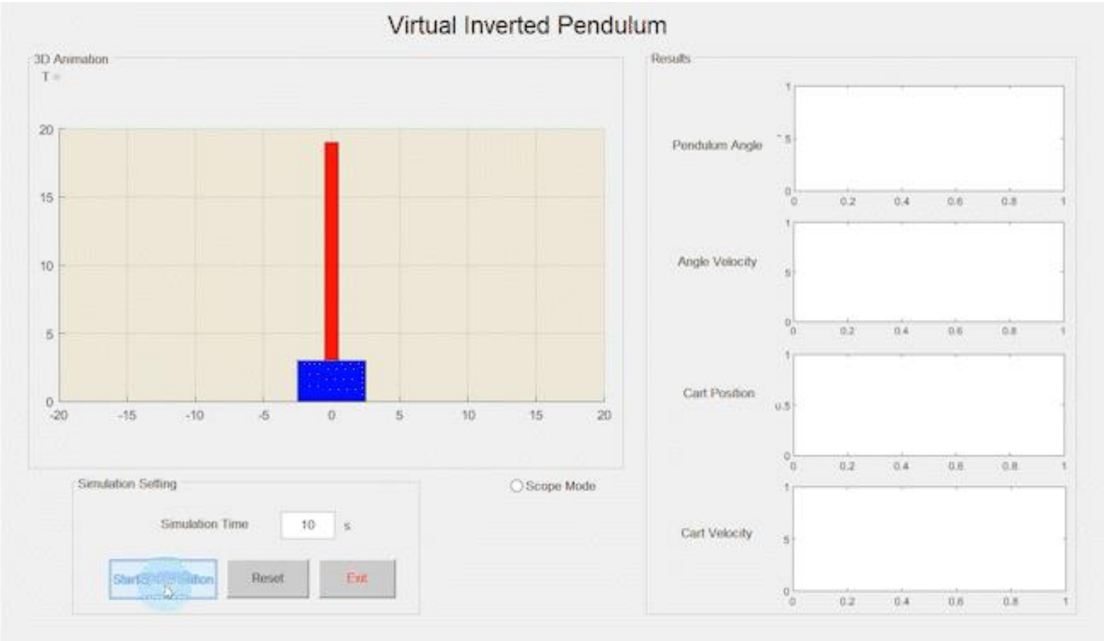
加入外部冲击和 PID 控制后，系统整体的 Simulink 框架如下所示：



3. 实验效果展示

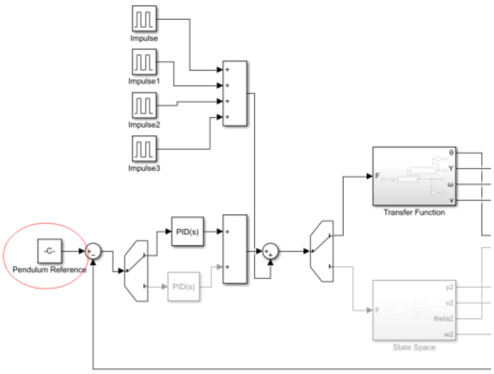
平衡效果

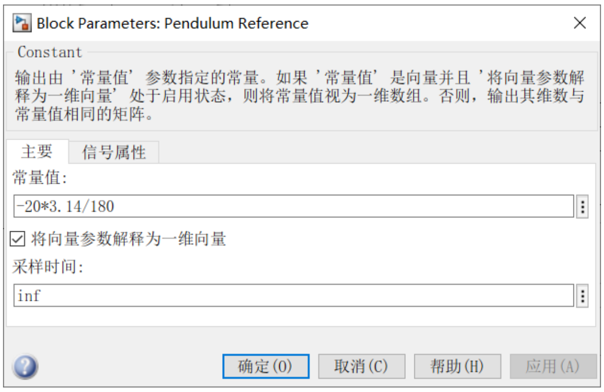
在四次外部冲击下，小车的平衡效果如下所示：



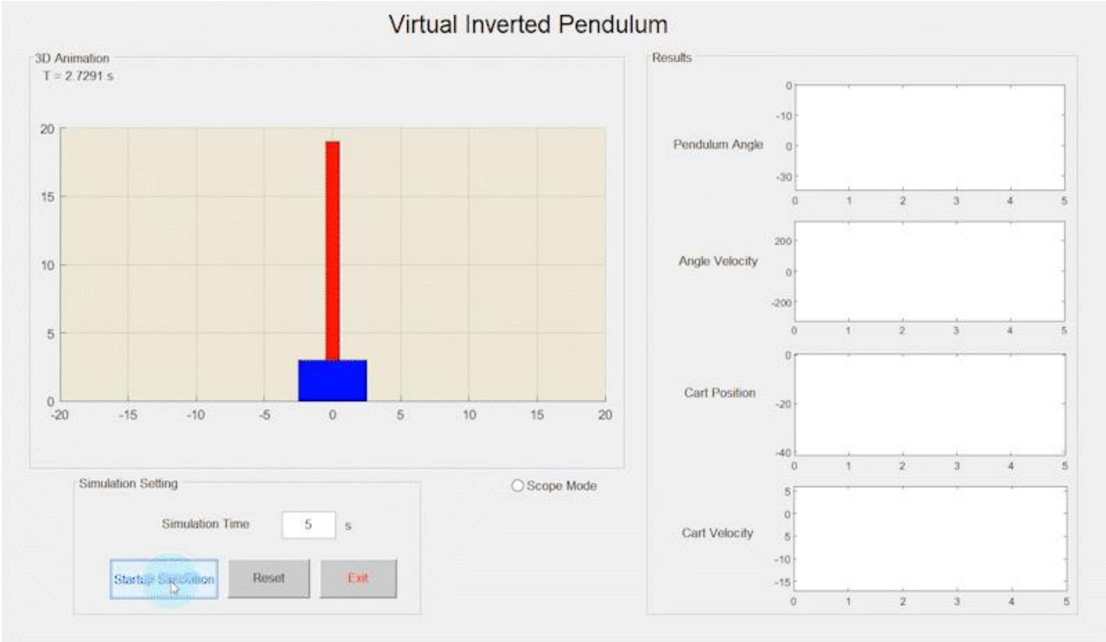
改变阶跃输入

在改变 Pendulum Reference 参数以后，可以实现平衡小车以预定倾角前进或者后退，本例中设置倾角为-20°。





改变 R(s)后的仿真效果如下所示：



改变质量

为模拟实际场景中不同用户使用平衡车的情况，改变质量 M (±20%)后将新的小车模型(传递函数/状态空间)进行仿真计算(不改变 PID 控制器的参数)，仿真结果如下所示，可以看出平衡车系统在质量在一定范围内变化时仍然能够保持平衡。