Probability Prepared

① 概率基础

1. 样本空间, 概率测度.

→ $A \cup B$: 和. $A \cap B$: 积. $A - B$ $(\omega \in A, \omega \notin B)$: 差.

→ $A \cap B = \phi$: 互不相容/互斥. $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \phi$: 逆事件/对立 $\boxed{A/B}$

→ 概率为0不代表空集 (eg. ——•—— 单点).

→ 对不相容事件, $P(\cup A_k) = \sum P(A_k)$ (有限可加性).

↳ 对 $A \subset B$, 则 A, $B-A$ 互不相容, $P(B-A) = P(B) - P(A)$.

→ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, 故 $P(A\bar{B}) = P(A(1-B)) = P(\underset{(AB\subset A)}{A-AB}) = P(A) - P(AB)$.

→ 加法定律: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

2. 概率型

→ 匹配问题 (4把钥匙开4门, 至少一门打开概率).

设 $A_i = \{key\ i 开门\ i\}$. $P(A_i) = \frac{A_4^3}{A_4^4} = \frac{1}{4}$.

$P(A_iA_j) = \frac{A_2^2}{A_4^4} = \frac{1}{3\times 4}$, $P(A_iA_jA_k) = \frac{1}{A_4^4} = \frac{1}{2\times3\times4}$.

则 $P(至少一个) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \sum P(A_i) - \sum P(A_iA_j) + \sum P(A_iA_jA_k) - P(A_1A_2A_3A_4)$

$= 4\times\frac{1}{4} - C_4^2\cdot\frac{1}{4\times3} + C_4^3\times\frac{1}{4\times3\times2} - \frac{1}{4\times3\times2\times1} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}$

→ 几何概型, $P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega}$, 画图坐标图解.

3. 条件概率

→ $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, B发生情况下A发生的概率

→ 可列可加性, $P(\cup A_k | B) = \sum P(A_k|B)$.

→ 全概率公式, $P(A) = \sum P(A|B_i)P(B_i)$.

→ Bayes 公式. $P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum P(A|B_j)P(B_j)}$.

4. 独立性.

→ $P(AB) = P(A)P(B)$ 则称为独立.

→ 独立性与不相容无关. 且不同时成立.

→ A_1, A_2, A_3 相互独立: $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$ 成立, 且 $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ 也是.

② 随机变量.

1. 离散随机变量

→ $F(x)=P\{X\le x\}$ 为分布函数(cdf).

→ 各类分布：

↳ 单点分布，$P\{X=c\}=1$.

↳ 两点分布(伯努利)，$P\{X=1\}=p$，$P\{X=0\}=1-p$.

↳ n重伯努利(有放回) → 二项，$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ (k从0开始)，记为 $X\sim b(n,p)$

↳ n重伯，直到首次成功. 几何分布：$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}\cdot p$，(用了k次) $(k=1,2,3)$ 从1开始 

↳ 直到成功r次(用了k次)，负二项分布：$p(k)=C_{k-1}^{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$ $(k=1,2,3)$. 

↳ 对盒中有n个球，r黑/n-r白. 无重复抽取m，取出了k个黑球.

$P\{X=k\}=\dfrac{C_r^k\cdot C_{n-r}^{m-k}}{C_n^m}$，$k=1,2,\dots,m$. (超几何).

↳ 泊松分布：$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$k=0,1,\dots$，则 $X\sim P(\lambda)$

表示单位时间内随机事件发生的次数.

↳ 泊松流：$X\sim P(\lambda t)$，$P\{X=k\}=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$.

→ 泊松定理：对于 $np=\lambda$，则有：$\underbrace{C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}_{二项\approx泊松}$

仅需当n足够大，p足够小.

2. 连续随机变量.

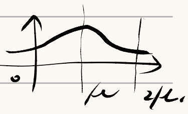
→ 离散 — {pmf (mass)，频率函数；cdf，分布函数}
连续 — {pdf (density)，密度函数；cdf，分布函数}

→ $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$，$f(t)\ge 0$ 恒，为密度函数. (X本身很连续)

且 $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)=1$，$f(x)=F'(x)$.

且任意点，$P\{X=c\}=0$，但不代表不可能事件(曲线高度 — p集中程度).

→ 对 $F(x_p)=p$，则称 x_p 为 $f(x)$ 的 p 分位数.

→ 正态分布：$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<\infty$. 

记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 关于μ对称，且取最大值 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.

↳ $\mu=0$, $\sigma^2=1$ 为标准正态, $\varphi(x)$ 概率, $\Phi(x)$ 密度.
且对任意 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 有 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.
↳ eg. 对 $X\sim N(50,100)$, $P\{X\le 70\}=\Phi\left(\frac{70-50}{10}\right)=\Phi(2)$.
↳ 3σ 原则, $P\{\mu-3\sigma<X\le\mu+3\sigma\}=99.74\%$.

→ 均匀分布: 对 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其它\end{cases}$ 为均匀分布, $X\sim U(a,b)$.
↳ 因等无先知原则: 不知, 即设均匀分布.

→ 指数分布. 对 $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ $(x>0)$, 为关于 $\lambda>0$ 的指数分布.
记为 $X\sim Exp(\lambda)$, 且 $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ $(x>0)$.
↳ 与泊松流的关系: 对 $X\sim P(\lambda t)$, 记 Y 为第一个质量出现时间,
$P\{Y>t\}=P\{X=0\}=e^{-\lambda t}$, 则 $F(t)=P\{Y\le t\}=1-P\{Y>t\}=1-e^{-\lambda t}$
即 $Y\sim Exp(\lambda)$.
↳ λ 又称失效率, $\frac{1}{\lambda}$ 为平均寿命 (θ).
↳ 具无记忆特征, $P\{X>s+t \mid X>s\}=P\{X>t\}$.

3. 随机变量的函数.

→ 对于离散型, 要点在于找到对应的等价事件.

eg. $Y=(X-1)^2$, 则

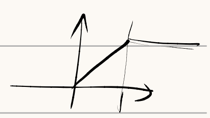
X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

⇒

Y	4	1	0
p_k	0.2	0.7 合并	0.1

→ 对连续型, 对 $y=g(x)$, $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}=F_X(g^{-1}(y))$
若求 $f_Y(y)$, 则求导, $f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X(g^{-1}(y))\cdot|(g^{-1}(y))'|$.
↳ 推导得 $aX+b\sim N(a\mu+b,(a\sigma)^2)$.
↳ 且对有 $y=g(x)=x^2$ 分段单调 (注意是关于 x 的, $g(x)$ 上的分段).
则 $f_Y(y)=\sum|h_i'(y)|\cdot f(h_i(y))$, $h_1(y)$, $h_2(y)$, … 有意义. (否则 $f_Y(y)=0$).

→ 任意分布函数的分布服从 $(0,1)$ 均匀分布. ($Z=F(X)$, 则 $Z\sim U(0,1)$).
而反向地, $U\sim U(0,1)$, $X=F^{-1}(U)$, 则 X 的分布函数为 $F(x)$.



eg. $X\sim Exp(\lambda)$, $Y=F(X)$, 则 $Y=F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ ⇒ $0\le Y\le 1$.
则 $y\le 0$, $F_Y(y)=0$; $y\ge 1$, $F_Y(y)=1$. 而 $0<y<1$, $F_Y(y)=P\{1-e^{-\lambda X}\le y\}=P\{X\le-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)\}$
$=1-e^{-\lambda[-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)]}=y$.

③ 联合分布

1. 基础

→ 离散：$P\{X=x_i, Y=y_j\} = p(x_i, y_j) = p_{ij}$. 或用表格表示.

$P\{X=x_i\} = P(\{X=x_i\} \cap \Lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} P\{X=x_i, Y=y_j\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = p_{i\cdot}$

→ 连续：$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$，且 $f(u,v) \geq 0$，$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v) = 1$.

且 $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$.

如 $f(x,y) = ke^{-x-y}$，求 k，则做积分

→ 边缘密度，$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$，$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$.

→ 对 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，则 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

其中 $|\rho| < 1$. ⟹ 后续之，$\rho = 0$ 时，X，Y 才互相独立.

→ 二维均匀分布，$f(x,y) = \begin{cases} 1/A, & (x,y) \in G \\ 0, & 其它. \end{cases}$

→ 独立性：若 $F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$，则 X，Y 相互独立.

或对离散型，$P\{X=x_i, Y=y_j\} = P\{X=x_i\} \cdot P\{Y=y_j\}$ 对 $\forall i,j$ 成立.

或对连续型，$f(x,y) \overset{a.e.}{=} f_X(x) \cdot f_Y(y)$，则独立.

↳ 又如，已知独立，则从 $f_X(x)$，$f_Y(y)$ 即可知 $f(x,y)$.

→ 二维条件分布，

对于离散型，$P\{X=x_i \mid Y=y_j\} = \dfrac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}$.

$p_{X|Y}(x_i|y_j) = P\{X=x_i, Y=y_j\}$，为条件分布函数.

而对于连续型，$f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$，为条件密度.

和 $F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)\,du$，为条件分布.

↳ 连续全概率：$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) f_X(x)\,dx$.

2. 联合函数，极值与顺序统计量.

→ $Z = X+Y$ 的分布.（连续型）

则 $F_Z = P\{Z \leq z\} = P\{X+Y \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} f(x,y)\,dx\,dy$

$= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,dx$.

若X,Y独立时推导得卷积公式，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,dy$.

↳ 推导入正态，得 $a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n \sim N(\sum a_i\mu_i,\ \sum a_i^2\sigma_i^2)$，

其中相互独立 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$.

→ $Z=X+Y$ 的分布（离散型）.

对 $P\{X=i\}=p_i$，$P\{Y=j\}=q_j$，则 $P\{Z=k\}=\sum_{i=1}^{k-1}P\{X=i\}\cdot P\{Y=k-i\}$

$=\sum_{j=1}^{k-1}P\{X=k-j\}\cdot P\{Y=j\}$.（与离散卷积类似）.

→ $Z=\frac{X}{Y}$ 的分布，$F_Z(z)=P\{X/Y\le z\}=\iint_{\frac{x}{y}\le z}f(x,y)\,dxdy$

↳ Jacobi，对 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，$Oxy\to O'uv$，

则 $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$，则 $\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{D'}f[x(u,v),y(u,v)]\cdot|J|\,dudv$.

则此处取 $\begin{cases}x/y=u\\ y=y\end{cases}$，$\begin{cases}x=yu\\ y=y\end{cases}$，$J=\begin{vmatrix}y & u\\ 0 & 1\end{vmatrix}=y$. 则 $F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(uy,y)|y|\,dy\right)du$

则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(zy,y)\,|y|\,dy$.

→ $X\sim F_X(x)$，$Y\sim F_Y(y)$ 且X,Y相互独立，则：

$F_{max}(z)=P\{\max(X,Y)\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}=P\{X\le z\}\cdot P\{Y\le z\}=F_X(z)\cdot F_Y(z)$.

$F_{min}(z)=P\{\min(X,Y)\le z\}=1-P\{\min(X,Y)>z\}=1-P\{X>z\}\cdot P\{Y>z\}$

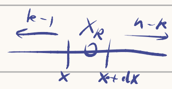
$=1-(1-P\{X\le z\})(1-P\{Y\le z\})=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$.

且可推广到n. 且若独立同分布，则 $F_{max}(z)=F^2(z)$，$F_{min}(z)=1-(1-F(z))^2$.

求导，得 $f_{max}(z)=nf(z)[F(z)]^{n-1}$，$f_{min}(z)=nf(z)[1-F(z)]^{n-1}$.

又可表示为 $X_{(1)}=\min(X_1,\ldots,X_n)$，$X_{(n)}=\max(X_1,\ldots,X_n)$.

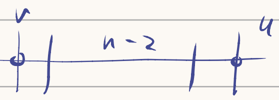
→ 求任意 $X_{(k)}$：$P\{x\le X_{(k)}\le x+dx\}=\frac{n!}{(k-1)!\times1\times(n-k)!}F^{k-1}(x)[1-F(x)]^{n-k}f(x)\,dx$.



又定义得，这就是 $f_k(x)\,dx$，则 $f_k(x)=$

→ 对 $V=X_{(1)}$，$U=X_{(n)}$，求联合密度

则 $P\{v\le X_{(1)}\le v+dv,\ u\le X_{(n)}\le u+du\}=f(u,v)\,dudv$



$=n(n-1)[F(u)-F(v)]^{n-2}f(u)\,du\,f(v)\,dv$.

则 $f(u,v)=n(n-1)f(v)f(u)[F(u)-F(v)]^{n-2}$，$u\ge v$.

③ 随机变量的数字特征

1. 期望

→ 离散型，期望：$E(X)=\sum x_k p_k=\sum x_k P\{X=x_k\}$

连续型，期望：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$.（若 $=\infty$，则期望不存在）.

→ 马尔可夫不等式. 对 r.v. 满足 $P\{X\geq 0\}=1$，且 $E(X)$ 存在，则 $P\{X\geq t\}\leq \frac{E(X)}{t}$.

↳ 离散情形推导：$E(X)=\sum_x xp(x)=\sum_{x<t} xp(x)+\sum_{x\geq t} xp(x)$

$\geq \sum_{x\geq t} xp(x)\geq \sum_{x\geq t} tp(x)=tP\{X\geq t\}$.

即 $P\{X\geq t\}\leq\frac{E(X)}{t}$. 则可估量大致概率.

→ 函数的数学期望：离散型：$E(Y)=E(g(X))=\sum g(x_k)\, p_k$ 代替 x.

连续型：$E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx$

且可推广到高维：离散型：$E(Z)=E(g(X,Y))=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)\cdot p_{ij}$.

连续型：$E(Z)=E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\,dx\,dy$.

eg. $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x,y)\,dx\,dy$.

→ 数学期望的性质：$E(cX)=cE(X)$. / 对任意 X, Y，$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

对 X, Y 独立，$E(XY)=E(X)E(Y)$.

对 a_i 为常数，X_i 为 r.v.，则 $E(\sum a_i X_i)=\sum a_i E(X_i)$.

2. 方差

→ $Var(X)=D(X)=E(X-E(X))^2$. 而 $\sqrt{D(X)}$ 称为标准差.

↳ 常用形式推导：$D(X)=E(X-E(X))^2=E(X^2)-2E(XE(X))+E(E(X))^2$

$=E(X^2)-2E(X)\cdot E(X)+[E(X)]^2$（$E(X)$ 是常数）.

$=E(X^2)-[E(X)]^2$. X^2 本身

→ 常用分布的期望与方差推导（$p(\lambda)$, $b(n,p)$, $U(a,b)$, $exp(\frac{1}{\theta})$, $N(\mu,\sigma^2)$）

① $p(\lambda)$. 则 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. 则 $E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\cdot\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$

$=e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda}=\lambda$.

$E(X^2)=E[X(X-1)+X]=\sum k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+E(X)$

$=e^{-\lambda}\cdot\lambda^2\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda=\lambda^2+\lambda$.

则 $D(X)=\lambda^2+\lambda-(\lambda)^2=\lambda$.

② $b(n,p)$. 则 $P\{X=k\}=C_n^k\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$

由于是n重独立伯努利试验，$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)$

$=n\cdot E(X_1)=np$

$D(X)=D(X_1+\cdots+X_n)=n\cdot D(X_1)=n\cdot[(1-p)^2\cdot p+(0-p)\cdot(1-p)]$

$=np(1-p)$.

③ $U(a,b)$. 则 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其它.\end{cases}$

则 $E(X)=\frac{a+b}{2}$, $E(X^2)=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}dx=\frac{1}{3}(b^3-a^3)/(b-a)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$.

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{(b-a)^2}{12}$.

④ $EXP(\frac{1}{\theta})$. 则 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}\cdot e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

$E(X)=\int_0^{\infty}\frac{x}{\theta}\cdot e^{-\frac{x}{\theta}}dx$, 设 $m=-\frac{x}{\theta}$, $dm=-\frac{1}{\theta}$.

原式 $=\int_0^{-\infty}\theta\cdot m\cdot e^m dm=\int_{-\infty}^0\theta e^m dm=\theta$.

$E(X^2)=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{\theta}\cdot e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\int_{-\infty}^0 m^2\cdot\theta^2\cdot e^m dm=-2\int_{-\infty}^0 m\cdot\theta^2\cdot e^m dm$

$=2\int_{-\infty}^0\theta^2 e^m dm=2\theta^2$.

则 $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\theta^2$.

⑤ $N(\mu,\sigma^2)$. 应知道 $E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$.

而对 $E(|\frac{X-\mu}{\sigma}|)$，则含义，

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|t|}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=2\int_0^{\infty}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

$\to D(X)=0$, $X\overset{a.e.}{=}c$.

→ 方差的性质. $D(c)=0$, $D(cX)=c^2D(X)$,

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$. 独立则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

同理 $D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)$.

那么P量之，P小于.

→ 切比雪夫不等式：对 $E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$, 则对 $\forall\varepsilon>0$, $P\{|X-\mu|\ge\varepsilon\}\le\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ 方差在上.

└→ 推导：令 $Y=(X-\mu)^2$, $E(Y)=E(X-E(X))^2=D(X)=\sigma^2$.

则用 Markov, 得 $P\{|X-\mu|\ge\varepsilon\}=P\{Y\ge\varepsilon^2\}\le\frac{E(Y)}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

└ $P\{X\ge t\}\le\frac{E(X)}{t}$.

3. 协方差.

→ 协方差 $Cov(X,Y)=E[X-E(X)][Y-E(Y)]=E(XY)-E(X)E(Y)$.

└→ 性质：$Cov(aX,bY)=ab\,Cov(X,Y)$.

$Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$.

推广：对 $U=a+\sum^n b_iX_i$, $V=c+\sum^m d_jY_j$

$Cov(U,V)=\sum^n\sum^m b_id_j\,Cov(X_i,Y_j)$.

→ 协方差与独立关系：$Cov(X, Y) \neq 0$，则 X, Y 必不独立.

(不相关)

$Cov(X, Y) = 0$，则 X, Y 不一定独立（可能存在非线性关系）.

(特例：二维 N 分布，$Cov = 0 \Leftrightarrow$ 独立)

而独立 $\Rightarrow$ 不相关（$Cov(X, Y) = 0$）once 成立.

(类似 $N(0,1)$ 化)

→ 考虑 无量纲化的 X, Y：$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$，$Y^* = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$.

称 $\rho_{XY} = Cov(X^*, Y^*) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 为 X, Y 的相关系数.

↳ 且有：$|\rho_{XY}| \leq 1$，且当 $|\rho_{XY}| = 1$，则 Y 与 X 呈完全线性关系.

$\begin{cases} \rho_{XY} = 1：正相关 \\ \rho_{XY} = -1：负相关 \end{cases}$，且 $\rho_{XY} = 0$ 为不相关.

→ 矩. $\begin{cases} E(X^k) —— k 阶原点矩，E(X) 为 1 阶原点矩. \\ E(X - E(X))^k —— k 阶中心矩，D(X) 为 2 阶中心矩. \\ E[(X - E(X))^k (Y - E(Y))^l] — k+l 阶混合中心矩，Cov(X, Y) 为 2 阶混合中心矩. \end{cases}$

⑤ 大数定律、中心极限

1. 大数定律

→ 回到频率：n次试验，n_A次事件发生，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n_A}{n} = p$. (r.v.) (频率) (概率)

→ 设 $\xi, \xi_1 \cdots \xi_n$ 是一列随机变量，$\forall \varepsilon > 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon\}=0$，
则称 $\{\xi_n\}$ 依概率收敛于 ξ，记为 $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$.
随 $n\uparrow$，则误差 $|\xi_n-\xi|$ 较大的可能性 $\downarrow$.

组合

→ 则得伯努利大数定理，$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\frac{n_A}{n}-p|\ge\varepsilon\}=0$. $(P(A)=p)$. (即，频率 $\xrightarrow{n}$ 概率).

→ 切比雪夫大数定理，$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum X_i-\mu|\ge\varepsilon\} = \lim\limits_{n\to\infty} P\{|\bar{X}-\mu|\ge\varepsilon\}=0$.
(对于 $E(X_i)=\mu$, $D(X_i)=\sigma^2$ 的独立 r.v. 列，(不求同分布) 有同 $D.E$).
(来自 Chebyshev 不等式，$P\{|\xi-E(\xi)|\ge\varepsilon\}\le\frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$. (算术均值 $\xrightarrow{n}$ 期望).

→ 辛钦大数定理，对独立同分布 $\{X_n\}$，$E(X_1)=\mu$，
则也有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum X_k-\mu|\ge\varepsilon\}=0$.
要求只 $\exists E(X_1)$ (不是 $E(X_i)$，可不同)
只对 E 存在时，才有整体期望对同一值收敛 (任一离散/连续分布不一定存在).

2. 中心极限

→ 对 $\{X_n\}$ 为独立 r.v. 列，$E(X_n)=\mu_n$，$D(X_n)=\sigma_n^2$ 均可不同.
令 $Z_n = \dfrac{\sum X_k - E(\sum X_k)}{\sqrt{D(\sum X_k)}}$，当 X_k 作用均很小时，$\lim\limits_{n\to\infty} Z_n \sim N(0,1)$.

→ 中心极限定理. Z_n 的分布函数 $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum X_k - \sum \mu_k}{\sqrt{\sum \sigma_k^2}} \le x\right\}$
$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \phi(x)$.

则称 $\{X_n\}$ 服从中心极限定理.

独立同分布的中心极限定理. $\{X_n\}$ 为独立同分布的 r.v. 列，均有 $E(X_k)=\mu$，$D(X_k)=\sigma^2$.
则 $Z_n = \dfrac{\sum X_k - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \phi(x)$.
即若 $X_1+\cdots+X_n \overset{\text{近似}}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$.
若求 $Y=\frac{1}{n}\sum X_k^2$ 在 $n\to\infty$ 时，
则 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2$ (因 $Y=\overline{X_i^2}$ 的定义)

eg.

例 某单位电话交换机接有500部电话，在所有通话中有96%次通话是在各分机内进行的. 假定每部分机是否需要打外线是相互独立的，问要配备多少条外线才能以95%的概率保证每个分机要用外线时不必等候？

解 在任一时刻，记

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{第}k\text{台分机要用外线} \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \quad (k=1,2,\cdots,500)$$

则 $P\{X_k=1\}=0.04$.
$np=20$，$np(1-p)=19.2$.
则 $N(20, 19.2)$.
则 $\Phi\left(\frac{N-20}{\sqrt{19.2}}\right)\ge 0.95$.
$N\ge 27.23$. $N=28$.

→ 棣莫弗-拉普拉斯：$\{\eta_n\}$ 为参数 n, p 的二项分布 r.v. 列，则总有：
$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \phi(x)$.
(因 η_n 来自于 n 重伯努利，$\eta_n = X_1+X_2+\cdots+X_n$.)

⑥ 数理统计基础.

→ 研究总体数量指标，{总体 $X\sim F(x)$，个体 x 的各值}。

抽由n个个体(抽样) 得 $X_1\sim X_n$ 为样本，二重性 { 观察前：独立同分布 r.v；观察后：n个具体观察数据.

容量：总体包含的个体数. 有限总体 / 无限总体.

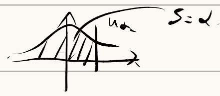
→ 统计量：X_i 为样本，若函数 $g(X_1,\dots,X_n)$ 不含任何未知参数，则称为统计量.

↳ 常用统计量：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum (X_i-\overline{X})^2$.

$A_k=\frac{1}{n}\sum X_i^k$ (k阶原点矩)，$B_k=\frac{1}{n}\sum (X_i-\overline{X})^k$ (k阶中心矩).

且有：$E(\overline{X})=\mu$，$D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$，$E(S^2)=\sigma^2$ (样本方差期望).

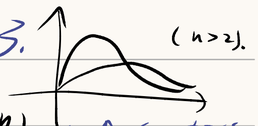
→ N的分位点：$N(0,1)$ 的 α 分位点记为 u_α.



$\Phi(u_\alpha)=P\{X\le u_\alpha\}=\alpha$.

→ χ^2分布. X_i 为 $X\sim N(0,1)$ 样本。令 $\chi^2=X_1^2+\dots+X_n^2$，称为自由度 n 的 χ^2 分布. (也要互相独立).

即 $\chi^2\sim\chi^2(n)$. → 若为 $N(\mu,\sigma^2)$，则需 $\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ 才行.



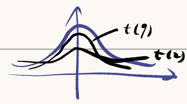
且可加，$\left|\begin{array}{l} X_1^2+\dots+X_{n_1}^2\sim\chi^2(n_1) \\ Y_1^2+\dots+Y_{n_2}^2\sim\chi^2(n_2)\end{array}\right| \Rightarrow X_1^2+\dots+X_{n_1}^2+Y_1^2+\dots+Y_{n_2}^2\sim\chi^2(n_1+n_2)$.

(n↑，重心右移，曲线趋于平缓).

且 $E(\chi^2)=n$，$D(\chi^2)=2n$.

$\chi^2(n)$ 的 α 分位点记为 $\chi^2_\alpha(n)$.

→ t分布. 设 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且 X,Y 独立，令 $t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$，服从自由度为 n 的 t 分布，记为 $t(n)$.

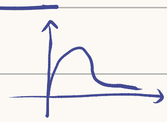


n↑，曲线逼近正分布的形状.

$n>2$ 时，$E(T)=0$，$D(T)=\frac{n}{n+2}$.

$t(n)$ 的 α 分位点为 $t_\alpha(n)$.

→ F分布. 设 $U\sim\chi^2(n_1)$，$V\sim\chi^2(n_2)$，且 U,V 独立，称 $F=\frac{U/n_1}{V/n_2}$ 服从自由度为 (n_1,n_2) 的 F 分布.



$F(n_1,n_2)$ 的 α 分位点为 $F_\alpha(n_1,n_2)$.

且有"互反"公式，$F_\alpha(n_1,n_2)=1/(F_{1-\alpha}(n_2,n_1))$

↓ next.

一) 五个抽样分布定理.

[1] 定理1: $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. $\Rightarrow$ 则 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

└推导: $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$, $E(\overline{X}) = n\cdot\frac{1}{n}\mu = \mu$

$D(\overline{X}) = n\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

[2] 定理2: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\overline{X}$, S^2 为样本均值/方差

则 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 且 $\overline{X}$, S^2 相互独立.

└推导: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i-\overline{X})^2$, $(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n}[X_i-\mu-(\overline{X}-\mu)]^2$

$= \sum(X_i-\mu)^2 - 2\sum(X_i-\mu)(\overline{X}-\mu) + n(\overline{X}-\mu)^2$

$= 2\cdot(\overline{X}-\mu)\cdot(\sum X_i - n\mu) = 2(\overline{X}-\mu)(n\cdot\overset{\frac{1}{n}\sum X_i}{\overline{X}}-n\mu)$

$= \sum(X_i-\mu)^2 - n(\overline{X}-\mu)^2$;

则 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \underbrace{\sum\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2}_{\chi^2(n)} - \underbrace{\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2}_{\chi^2(1)} = \chi^2(n-1)$.

[3] 定理3: $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.

└推导: $Y = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

则 $\frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/n-1}} = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ (根据 $\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$ 的定义).

即: $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$. 样本方差

[4] 定理4: $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$. ($\sigma_1$, σ_2 不同时).

└推导: $\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1)$, $\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1)$.

则有: $\frac{\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}/(n_1-1)}{\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}/(n_2-1)} \sim F(n_1-1, n_2-1)$.

[5] 定理5: $\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$, $S_w = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{(n_1+n_2-2)}$.

└推导: $\overline{X}-\overline{Y} \sim N(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2})$.

则 $\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1)$. (若 σ 同为前提).

由定理3得, $\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$.

⑦参数估计

1. 点估计

→ 定义：构造统计量 $\theta(X_1,\dots,X_n)$ 作为参数 θ 的估计量。

↳ 总体 $X\sim F(x;\theta_1,\dots,\theta_m)$，$\theta_i$ 为未知参数，X_i 为样本。

记 $\theta=(\theta_1,\dots,\theta_m)$，则可记 $X\sim F(x;\theta)$，θ 取值范围称为"参数空间" Θ。

→ 矩估计法。对 $X\sim F(x;\theta_1,\dots,\theta_n)$，且 $\alpha_k=E(X^k)$ 总体矩均存在，

由辛钦大数定律知样本 k 阶矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\xrightarrow{P}E(X^k)=\alpha_k$

即对较大 n，$A_k\approx\alpha_k=E(X^k)$。

且约定 $g(\theta)$ 矩估计为 $g(\hat\theta)$。

↳ eg. X在$[a,b]$上均匀分布，求a,b矩估计量。
则 $\alpha_1=E(X)$，$\alpha_2=E(X^2)$。
可得 $a=\alpha_1-\sqrt{3(\alpha_2-\alpha_1^2)}$，$b=\alpha_1+\sqrt{3(\alpha_2-\alpha_1^2)}$。
以 $A_1=\frac{1}{n}\sum X_i$ (即$\bar X$)，$A_2=\frac{1}{n}\sum X_i^2$ 代替，得 $\hat a$、$\hat b$。

→ 最大似然估计。对 $P(X=x)=p(x;\theta)$，$L(\theta)=P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$。

且使 $L(\theta)$ 最大值点 $\hat\theta(x_1,\dots,x_n)$，为最大似然估计值 (MLE Value)。（$X\to$ 估计量）

（即，发生什么，就认为什么概率大）。

常取自然对数，$\ln L(\theta)=\sum\ln p(x_i;\theta)$，然后 $\frac{d\ln L}{d\theta}=0$ 即极值。

若多参数，则 $\frac{\partial\ln L}{\partial\theta_i}=0$ 列方程组。

又如若无法可解，如 $X\sim U(a,b)$ 求MLE，则定义出发。

最小的极限发生在 $X_{(1)}=\hat a$，最大的极限发生在 $X_{(n)}=\hat b$。

2. 估计量评价标准。

→ 无偏性，$E_\theta(\hat\theta)=\theta$，为无偏估计。（$\lim_{n\to\infty}b_n(\hat\theta)=0$，渐近无偏）。

↳ eg. 对 $\hat\mu=\bar X$，$\hat\sigma^2=S^2$，$E(\hat\mu)=E(\bar X)=\mu$，$E(\hat\sigma^2)=E(S^2)=\sigma^2$，无偏。

修正样本方差 $\tilde S^2=\frac{n-1}{n}S^2$，$E(\tilde S^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2\to\sigma^2$，仅是渐近无偏。

↳ min/max 相关无偏性推论：

$X\sim U(0,\theta)$，则 $\hat\theta_L=X_{(n)}=\max X_i$。

$F_{max}(z)=[F(z)]^n$，$f_{max}(z)=nf(z)(F(z))^{n-1}$。

$E(\hat\theta_L)=\int_{-\infty}^{\infty}z\cdot f_{max}(z)\,dz$。

→ 有效性：方差小的更好。（$D(\hat\theta_1)\le D(\hat\theta_2)$，则 $\hat\theta_1$ 比 $\hat\theta_2$ 更有效）

$X\sim U(0,\theta)$，求 $\hat\theta_M=2\bar X$，$\hat\theta=\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ 有效性（2者无偏）。

↳ 则 $D_\theta(\hat\theta_M)=4\cdot D_\theta(\bar X)=\frac{4}{n}\cdot D_\theta(X)=\frac{4}{n}\cdot\frac{\theta^2}{12}$。

$D_\theta(\hat\theta)=\frac{(n+1)^2}{n^2}D_\theta(X_{(n)})=\frac{(n+1)^2}{n^2}\int_0^\theta\Big(\underbrace{z-\frac{n}{n+1}\theta}_{E(X_{(n)})}\Big)^2\cdot\underbrace{n\cdot\frac{1}{\theta}\cdot\left(\frac{z}{\theta}\right)^{n-1}}_{概率(f_{max})}dz$

去平方

$D(X)=E(X-E(X))^2$

$f_{max}(z)=nf(z)\cdot[F(z)]^{n-1}$，$F(z)=\int_0^z\frac{1}{\theta}dz=\frac{z}{\theta}$

→ 相合性: $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\hat\theta_n-\theta|\ge\varepsilon\}=0$, 则相合 ($\hat\theta_n \xrightarrow{P} \theta$, $n\to\infty$ 时).

矩估计一定相合, 相合不一定无偏, 无偏也相合.

2. 区间估计

① 单正态总体, σ 已知, 求 μ.

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $P\{\bar X - c < \mu < \bar X + c\} = 1-\alpha$.

$\bar X \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, 则 $\frac{\bar X-\mu}{\sigma/\sqrt n}\sim N(0,1)$, $P\{-u_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar X-\mu}{\sigma/\sqrt n} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\alpha$.

则 $\mu\in(\bar X - \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt n/\sigma}, \bar X + \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt n/\sigma})$ 是 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

② 单正态总体, σ 未知, 求 μ.

无须 σ, 则 $\frac{\bar X-\mu}{S/\sqrt n}\sim t(n-1)$, $P\{-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\bar X-\mu}{S/\sqrt n} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} = 1-\alpha$,

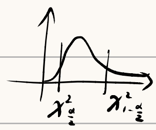
则 $\mu\in(\bar X - \frac{S}{\sqrt n}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar X + \frac{S}{\sqrt n}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1))$.

或, 若单侧, 则单侧置信上限 $\bar\mu = \bar X + \frac{S}{\sqrt n}t_{1-\alpha}(n-1)$,

~ 下限 $\underline{\mu} = \bar X - \frac{S}{\sqrt n}t_{1-\alpha}(n-1)$.

③ 单正态总体, σ^2, μ 未知, 求 σ^2 (注意, 若问标准差 σ, 则还要开方一次).

不含 μ, 则 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,



则 $P\{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} = 1-\alpha$.

$\sigma^2\in\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\}$, 置信水平 $1-\alpha$. → p.s.: 还有 μ 已知, 求 σ^2.

则 $\sum(\frac{x_i-\mu}{\sigma_0})^2$, 即 $\chi^2(n)$ 定义.

④ 双正态总体, σ_1^2, σ_2^2 已知, 求 $\mu_1-\mu_2$.

则 $\frac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$.

故有 $\left((\bar X-\bar Y) - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar X-\bar Y) + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$.

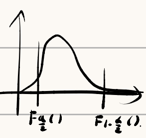
⑤ 双正态总体, X, Y 有同 σ^2 且未知, 求 $\mu_1-\mu_2$.

则 $\frac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$, $S_w^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{(n_1+n_2-2)}$.

故 $\left((\bar X-\bar Y)\pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\cdot S_w\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$

⑥ 双正态总体, μ_1, σ_1^2, μ_2, σ_2^2 均未知, 求 σ_1^2/σ_2^2.

则 $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1, n_2-1)$.



则 $1-\alpha$ 区间为 $\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}()}, \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}()}\right)$.

⑬假设检验.

→ 原假设H_0，备择假设H_1.

原则：①保护原假设，错拒A比错拒B更严重 ⇒ $H_0 = A$.

② 原假设为维护现状（eg. 无改进）⟶ 拒绝即明显理由支持备择.

③ 原取简单的. ④ 取与"看似～～"相反的.（想证明的反证法）.

→ 模式：①假设：eg. $H_0: \mu=0$，$H_1: \mu\neq 0$.

② 给出统计量，确认拒绝域.（Err I：弃真（H_0）更严重，Err II：接受伪H_0）.

③ 使I错概率小，少于α（显著水平）.⟶"H_0为真，但拒绝H_0的概率".

④ 则 P(弃真)$=\alpha$ 即临界值，则得拒绝域.

⑤ 用 $\bar{x}$, s^2 算实际情况，落在拒绝域中即拒绝原假设

→ 类型：单/σ^2已知/μ ⇒ u检验　　单边：H_0用$\geq$, $\leq$，H_1则$<$, $>$.

单/σ^2未知/μ ⇒ t检验　　如"明显提升"

单/μ, σ^2未知/σ^2 ⇒ $\chi^2(n-1)$检验　　双边：H_0用$=$，H_1为$\neq$.

单/μ已知 σ^2未知/σ^2 ⇒ $\chi^2(n)$检验　　如"是否正常""是否不同"

（用 $\sum\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2$，$\chi^2(n)$定义).

双/σ_1^2, σ_2^2已知/$\mu_1-\mu_2$ ⇒ u检验.（$\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$）

双/$\sigma^2=\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知/$\mu_1-\mu_2$ ⇒ t检验.（$\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$）(eg. 新工艺提高水准，$\mu_1-\mu_2$ 单边).

双/μ_1, μ_2未知/$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ ⇒ F检验（$\frac{S_1^2}{S_2^2}$）.（eg. 加工精度提高：$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$，单边).