Persamaan Regresi Bentuk Matrix

No.

Date :

Perhatikan model linear berikut

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon \quad \cdots (1)$$

Karena terdiri dari n pengamatan, yang berpasangan, maka model diatas menjadi

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \quad \text{untuk } i = 1, 2, 3 \ldots n$$

atau

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon_1 \\ Y_2 &= \beta_0 + \beta_1 X_2 + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ Y_n &= \beta_0 + \beta_1 X_n + \varepsilon_n \end{aligned}$$

Rumus diatas dapat dirubah ke dalam bentuk matrik berikut :

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \\ \vdots \\ \hat{Y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 X_1 \\ \beta_0 & \beta_1 X_2 \\ \vdots & \vdots \\ \beta_0 & \beta_1 X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \\ \vdots \\ \hat{Y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

dan kemudian dapat disederhanakan menjadi:

$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad \ldots(2)$$

Seperti yang kita ketahui bahwa:

$$e = Y - \hat{Y} \qquad \ldots(3)$$

$$e = \begin{bmatrix} Y_1 - \hat{Y}_1 \\ Y_2 - \hat{Y}_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ Y_n - \hat{Y}_n \end{bmatrix}$$

Untuk n banyaknya observasi, maka error/ Cost funtion nya adalah:

$$E = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \qquad \ldots(4)$$

Apabila diperluas, maka akan berbentuk

$$E = (Y_1 - \hat{Y}_1)^2 + (Y_2 - \hat{Y}_2)^2 + \dots + (Y_n - \hat{Y}_n)^2 \quad \dots(5)$$

Persamaan diatas dapat diubah menjadi bentuk matriks :

$$E = \left[(Y_1 - \hat{Y}_1) \ (Y_2 - \hat{Y}_2) \cdots (Y_n - \hat{Y}_n) \right] \begin{bmatrix} (Y_1 - \hat{Y}_1) \\ (Y_2 - \hat{Y}_2) \\ \vdots \\ (Y_n - \hat{Y}_n) \end{bmatrix} \quad \dots(6)$$

Oleh karena itu, persamaan error/cost funtion menjadi :

$$E = e^T e \quad \dots(7)$$

Maka persamaan error nya menjadi

$$E = (Y - \hat{Y})^T (Y - \hat{Y}) \quad \dots(8)$$

dengan teknik distribusi aljabar linear, maka

$$E = (Y^T - \hat{Y}^T)(Y - \hat{Y}) \quad \dots(9)$$

dilakukan Substitusi $\hat{Y} = X\beta$, sehingga:

$$E = (Y^T - (X\beta)^T)(Y - X\beta)$$

$$E = Y^T Y - Y^T X\beta - (X\beta)^T Y + (X\beta)^T X\beta \quad \ldots(10)$$

Untuk menyederhanakan persamaan (10)

$$(X\beta)^T Y = Y^T X\beta \quad \ldots(11)$$

Setelah disederhanakan, maka persamaan (10) menjadi:

$$E = Y^T Y - 2Y^T X\beta + \beta^T X^T X\beta \quad \ldots(12)$$

Melakukan turunan parsial sehingga

$$\frac{\partial E}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}(Y^T Y - 2Y^T X\beta + \beta^T X^T X\beta)$$

$$= 0 - 2Y^T X + \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta^T X^T X\beta) \quad \ldots(13)$$

dengan menerapkan matriks diferensiasi maka:

$$-2Y^T X + 2X^T X\beta^T = 0$$

$$X^T X\beta^T = Y^T X$$

Menyederhanakan persamaan menjadi :

$$\beta^T = \frac{y^T x}{x^T x}$$

$$\beta^T = y^T x \, (x^T x)^{-1}$$

$$\beta = [\, y^T x \, (x^T x)^{-1} \,]^T$$

$$\beta = ((x^T x)^{-1})^T (y^T x)^T \quad \cdots (14)$$

Pada persamaan diatas, $((x^T x)^{-1})^T$ dapat berlaku sifat $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, maka:

$$((x^T x)^{-1})^T = (x^T x)^{-1} \quad \cdots (15)$$

Pada persamaan (14), $(y^T x)^T$ dapat dikalikan sehingga

$$(y^T x)^T = x^T y \quad \cdots (16)$$

Dengan menggabungkan persamaan (15) dan (16) didapat

$$\beta = (x^T x)^{-1} (x^T y)$$

No.

Date :

$$\beta = (X^T X)^{-1}(X^T Y)$$

$$(X^T X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n & \Sigma X_i \\ \Sigma X_i & \Sigma X_i^2 \end{bmatrix}$$

$$(X^T Y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Sigma Y_i \\ \Sigma X_i Y_i \end{bmatrix}$$

Untuk menguji koefisien regresi dengan menggunakan Tabel anova berikut

Sumber	Df	Jk
Regresi β	1	$\beta^T(X^TY)$
Kekeliruan	$n-2$	$(Y^TY) - \beta^T(X^TY)$
Total	$n-1$	(Y^TY)

Sedangkan

$$F_{hit} = \frac{(Jk\ reg)/1}{(Jk\ kekeliruan)/(n-2)}$$

Tolak H_0 jika $F_{hit} > F_{\alpha;(1:n-2)}$

Varians dari β dalam bentuk matriks

$$Var(\beta) = \sigma^2 (X^TX)^{-1}$$

dengan invers matriks dari (X^TX) adalah

$$(X^TX) = \begin{bmatrix} n & \Sigma X_i \\ \Sigma X_i & \Sigma X_i^2 \end{bmatrix}$$

$$Det = n\Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2 = n\left[\Sigma X_i^2 - \frac{(\Sigma X_i)^2}{n}\right]$$

$$= n\Sigma(X_i - \bar{X})^2$$

Date :

Sehingga

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sum X_i^2}{n\sum (X_i - \bar{X})^2} & \frac{-\sum X_i}{n\sum (X_i - \bar{X})^2} \\ \frac{-\sum X_i}{n\sum (X_i - \bar{X})^2} & \frac{n}{n\sum (X_i - \bar{X})^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{n} + \frac{\bar{X}_i^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} & \frac{-\bar{X}}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \\ \frac{-\bar{X}_i}{\sum (X_i - \bar{X})^2} & \frac{1}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \end{bmatrix}$$

Varian $\hat{Y}$ dengan menggunakan matriks adalah

$$Var(\hat{Y}) = X_k (X^T X)^{-1} X_k^T \sigma^2$$

dengan $X_k = [1 \quad x]$

Contoh

Diketahui

X = Tekanan dalam kg/Cm² yang dipakai Untuk melebarkan kepingan besi.

Y = [redacted] Pelebaran kepingan besi diukur dalam Cm².

Hasil terhadap delapan pengamatan adalah Sebagai beri[kut]

	X	Y	XY	X^2	$(X-\bar{X})^2$	Y^2
	1	6,0	6	1	12,25	36
	2	8.3	16.6	4	6,25	68.89
	3	8,5	25.5	9	2,25	72,25
	4	9.2	36,8	16	0,25	84,64
	5	10,3	51,5	25	0,25	106,09
	6	11,5	69	36	2,25	132,25
	7	14,0	98	49	6,25	196
	8	15,6	124,8	64	12,25	243,36
Σ	36	83,9	428,2	204	42	939,98
avg	4,5					

Tentukanlah :

a. Persamaan regresi Y atas X

b. Varkov dari $\hat{\beta}$

c. Varians dari $\hat{Y}$ jika $X_k = 6,5$

Date :

Penyelesaian

a. $$(X^T X) = \begin{bmatrix} n & \Sigma X_i \\ \Sigma X_i & \Sigma X_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 36 \\ 36 & 209 \end{bmatrix}$$

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\Sigma X_i^2}{n\Sigma (X_i - \bar{X})^2} & \dfrac{-\Sigma X_i}{n\Sigma (X_i - \bar{X})^2} \\ \dfrac{-\Sigma X_i}{n\Sigma (X_i - \bar{X})^2} & \dfrac{n}{n\Sigma (X_i - \bar{X})^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{209}{336} & \dfrac{-36}{336} \\ \dfrac{-36}{336} & \dfrac{8}{336} \end{bmatrix}$$

$$(X^T Y) = \begin{bmatrix} \Sigma Y_i \\ \Sigma X_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 83,4 \\ 428,2 \end{bmatrix}$$

$$(Y^T Y) = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

$$=$$

No.

Date :

$$(Y^T Y) = \begin{bmatrix} 6{,}0 & 8{,}3 & 8{,}5 & 9{,}2 & 10{,}3 & 11{,}5 & 14{,}0 & 15{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6{,}0 \\ 8{,}3 \\ 8{,}5 \\ 9{,}2 \\ 10{,}3 \\ 11{,}5 \\ 14{,}0 \\ 15{,}6 \end{bmatrix}$$

$$(Y^T Y) = 939{,}48$$

$$\beta = (X^T X)^{-1} (X^T Y).$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{209}{336} & \frac{-36}{336} \\ \frac{-36}{336} & \frac{8}{336} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 83{,}4 \\ 428{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}76 \\ 1{,}26 \end{bmatrix}$$

Sehingga persamaan regresinya adalah

$$\hat{Y} = 4{,}76 + 1{,}26X$$

b. Jk regresi $\beta = \beta^T (X^T Y)$

$$= \begin{bmatrix} 4,76 & 1,26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 83,9 \\ 428,[illegible]2 \end{bmatrix} = 936,516$$

$$\text{Jk kekeliruan} = \text{Jk total} - \text{Jk regresi } \beta$$
$$= 939,48 - 936,516$$
$$= 2,969$$

$$\text{RJk kekeliruan} = \frac{\text{Jk kekeliruan}}{(n-2)} = \frac{2,964}{6} = 0,499$$

$$Var(\beta) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

$$= 0,499 \begin{bmatrix} \frac{209}{336} & \frac{-36}{336} \\ \frac{-36}{336} & \frac{8}{336} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2999 & -0,0529 \\ -0,0529 & 0,0118 \end{bmatrix}$$

c. $Var(\hat{Y}) = X_k (X^T X)^{-1} X_k^T \sigma^2$

$$= [1 \quad 6{,}5] \begin{bmatrix} \frac{204}{336} & \frac{-36}{336} \\ \frac{-36}{336} & \frac{8}{336} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6{,}5 \end{bmatrix} 0{,}494$$

$$= [-0{,}08928571 \quad 0{,}047619] \begin{bmatrix} 1 \\ 6{,}5 \end{bmatrix} 0{,}494$$

$$= [0{,}22023779]\, 0{,}494 = [0{,}1088]$$