

# プログラミング実習 題目登録

佐々木良輔

2020 年 6 月 26 日

## 題目：水ロケットのシミュレーションが可能な CFD の開発

### 背景

水ロケットは圧縮空気で水などの液体を噴射し、その反作用によって飛翔するロケット模型であり、宇宙工学の教材として世界中で幅広く用いられている。

水ロケットの競技会では、しばしば地上に設置したターゲットを狙って水ロケットを発射し、どれだけターゲットに近く着地したかを競うことがある。こうした競技会でより高いスコアを狙う場合、弾道の予測が有効であり、そのためには水ロケットの推力を予測する必要があるが、水ロケットの推力を与える計算式は一般に知られていない。

したがって、本研究では水ロケットの推力計算に応用可能な CFD ソルバーの開発を行う。

### 方法

水ロケットでは、ノズルから噴射された直後の液体の流れを調べる必要があるため、数値解析には粒子法を用いる。粒子法とは流体を多数の粒子の集合であるとし、各粒子について計算を行うことで流体の動きをシミュレートする手法である。格子法に比べて事前に解析領域を定める必要がない、飛散などの現象を再現できる、メッシュの切り方に依存しないなどの特徴がある。特に今回は非圧縮性流れを扱うため MPS (Moving Particle Semi-implicit) 法を用いる。[2][1] MPS 法では液体の圧力を粒子数密度を用いて表し、これを一定とするように計算することで非圧縮性を課す。本研究は CFD ソルバーの開発が目的であるので、検証に用いるモデルは図 1 のような簡単な箱の中の液体の挙動をシミュレーションする。

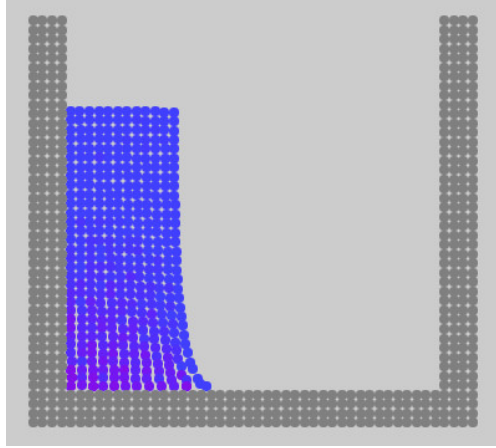


図1 検証モデル (青点：液体粒子, 灰点：壁)[1]

水は非圧縮性流体とできるので, Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (1)$$

ここで  $\mathbf{u}$  は速度である. 連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

したがって

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (4)$$

と表される.

MPS 法では粒子間相互作用モデルを用いる. 粒子間相互作用モデルでは重み係数  $w$  を用いて粒子間の相互作用に重みをつける. 重み係数  $w$  を以下のように定義する.[5][6]

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1 & 0 \leq r \leq r_e \\ 0 & r_e < r \end{cases} \quad (5)$$

$r$  は粒子間の距離である. これは粒子間距離が  $r_e$  以下の粒子同士が相互作用することを表している. これを用いて粒子数密度  $n_i$  を以下のように定義する.

$$n_i = \sum_{j \neq i} w(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (6)$$

$n_i$  が初期条件  $n^0$  と一致するようにすることで非圧縮性条件を課す. 粒子間相互作用モデルでは各

演算子を以下のように離散化する.[4]

$$\langle \nabla f \rangle_i = \frac{d}{n^0} \sum_{i \neq j} \left( \frac{f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) w(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|) \right) \quad (7)$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i = \frac{2d}{n^0} \sum_{i \neq j} \frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2} w(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|) \quad (8)$$

$$\langle \nabla^2 f \rangle_i = \frac{2d}{\lambda n^0} \sum_{i \neq j} (f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_i)) w(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|) \quad (9)$$

$$\text{where } \lambda = \frac{\sum_{i \neq j} |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2 w(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|)}{\sum_{i \neq j} w(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|)}$$

ここで  $d$  は空間の次元であり, 今回は  $d = 2$  である.

MPS 法は Semi-implicit とあるとおり, 陰解法と陽解法を組み合わせで計算する. 陽解法とは, 現在のタイムステップの値をのみを用いて次のタイムステップの値を決定する手法である. 一方では陰解法ではまず現在のタイムステップから次のベクトル場を仮に決定し, それに基づいて計算する. その後, 条件を用いて補正するのが陰解法である. MPS 法では Navier-Stokes 方程式の第 2 項 (粘性項) と第 3 項 (外力項) を陽的に解き, 第 1 項 (移流項) と連続の式を陰的に解く.

(7) から (9) 式を用いて (3), (4) 式の離散化をする.

$$\frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} = \left[ -\frac{1}{\rho} \nabla p \right]^{k+1} + [\mu \nabla^2 \mathbf{u}]^k + [\mathbf{f}]^k \quad (10)$$

$$[\nabla \cdot \mathbf{u}]^{k+1} = 0 \quad (11)$$

$[\phi]^k$  は  $\phi$  のタイムステップ  $k$  時点での値を指す. 移流項, 連続の式は陰的に解くため  $k+1$  ステップである.  $\mathbf{u}$  を移流項, 粘性項と外力項成分に分け, それぞれ  $\mathbf{u}^*$ ,  $\mathbf{u}'$  とする.

$$\frac{\Delta \mathbf{u}'}{\Delta t} = \frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = \left[ -\frac{1}{\rho} \nabla p \right]^{k+1} \quad (12)$$

$$\frac{\Delta \mathbf{u}^*}{\Delta t} = \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{k+1}}{\Delta t} = [\mu \nabla^2 \mathbf{u}]^k + [\mathbf{f}]^k \quad (13)$$

ここで  $\mathbf{u}^*$  は仮速度であり, 移流項での補正を行っていない速度ベクトルである. (13) 式において未知数は  $\mathbf{u}^*$  のみなので, 計算することができる. また (12) 式に辺々  $\nabla$  をかけると

$$\frac{\langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle^{k+1} - \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \langle \nabla^2 p \rangle^{k+1} \quad (14)$$

ここで連続の式から  $\langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle^{k+1} = 0$  なので

$$\langle \nabla^2 p \rangle^{k+1} = \rho \frac{\langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle^*}{\Delta t} \quad (15)$$

となる. つぎに (2) 式を離散化すると

$$\frac{\rho^* - \rho}{\Delta t} + \rho \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle^* = 0 \quad (16)$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle^* = -\frac{1}{\Delta t} \frac{\rho^* - \rho}{\rho} \quad (17)$$

ここで密度  $\rho$  が粒子数密度  $n_i$  と比例することを用いて

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle^* \simeq -\frac{1}{\Delta t} \frac{n^* - n^0}{n^0} \quad (18)$$

これと (15) 式から

$$\langle \nabla^2 p \rangle^{k+1} = -\frac{\rho^0}{\Delta t^2} \frac{n^* - n^0}{n^0} \quad (19)$$

以上と (7) から (9) 式を用いることで, 実際に計算機上で連立方程式として圧力を計算することができる. よって (12) 式, (13) 式が解け, タイムステップの計算が終了する.[3]

## 参考文献

- [1] 粒子法 el-element blog. <http://el-element.com/blog/2017/12/19/particle-method/>. (Accessed on 06/21/2020).
- [2] 粒子法による流れの数値解析. <http://www.nagare.or.jp/download/noauth.html?d=21-3-t02.pdf&dir=31>. (Accessed on 06/20/2020).
- [3] 越塚 誠一室谷 浩平. 粒子法入門 流体シミュレーションの基礎から並列計算と可視化まで . 丸善出版, 2014.
- [4] 東京工業大学デジタル創作同好会. そばやのワク ワク流体シミュレーション~mps 編~ — 東京工業大学デジタル創作同好会 trap. <https://trap.jp/post/345/>, 11 2017. (Accessed on 06/24/2020).
- [5] 廣瀬三平. 流体シミュレーションにおける様々な手法. [https://www.imi.kyushu-u.ac.jp/PDF/Hirose\\_20160612.pdf](https://www.imi.kyushu-u.ac.jp/PDF/Hirose_20160612.pdf), 6 2016. (Accessed on 06/24/2020).
- [6] 物理ベースコンピュータグラフィックス研究室. Mps 法の理論 - pukiwiki for pbeg lab. <http://www.slis.tsukuba.ac.jp/~fujisawa.makoto.fu/cgi-bin/wiki/index.php?MPS%CB%A1%A4%CE%CD%FD%CF%CO>. (Accessed on 06/20/2020).