

1. 目的

コイルとコンデンサの共振回路実験を行い、共振の性質について理解する。

2. 実験原理

2.1 RLC 回路

図 1 のような抵抗, インダクタ, キャパシタの直列回路を考える. 調和振動子との類推から, 電源電圧を $e(t) = E_m \sin \omega t$, 電流を $i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi)$ とすると, Kirchhoff の法則から以下が成り立つ.

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (1)$$

これは強制振動型の 2 階常微分方程式であり, これを解くと

$$E_m \sin \omega t = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} I_m \sin(\omega t + \phi + \theta) + D \quad (2)$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \quad (3)$$

となる. ここで D は任意定数である. (2) 式が時間 t に関する恒等式となるには, $\phi = -\theta$, $D = 0$ が導かれる. この元で (2) 式は以下のように変形できる.

$$E_m = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} I_m =: Z(\omega) I_m \quad (4)$$

ここで $Z(\omega)$ をインピーダンスと呼び, 単位は Ω である. このことは RLC 回路において, 抵抗に相当する量が存在し, これが電源周波数に依存することを示唆する.

2.2 共振現象

リアクタンス $X(\omega)$ を以下のように定義する.

$$X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (5)$$

ここで $X(\omega) = 0$ となる角周波数を共振角周波数 ω_0 とする. また ω_0 に対する周波数を共振周波数と呼び f_0 で表す. 共振周波数においてインピーダンス $Z(\omega_0) = R$ で最小値を取り, その時に電流

値は最大値 I_{max} を取る.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (6)$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (7)$$

$$I_{max} = \frac{E}{R} \quad (8)$$

このような現象を共振と呼ぶ. また, 抵抗, インダクタ, キャパシタの両端の電圧 V_R, V_L, V_C は

$$\begin{aligned} V_R &= RI \\ V_L &= \omega LI \\ V_C &= \frac{I}{\omega C} \end{aligned} \quad (9)$$

であり, (5) 式から共振周波数において $V_L = V_C$ だとわかる. また (9) 式を用いて (3) 式は

$$\theta = \arctan \left(\frac{V_L - V_C}{V_R} \right) = -\phi \quad (10)$$

とも表され, このことから共振周波数において電流と電圧の位相差は 0 になることがわかる.

2.3 Q 値

電流 I を I_{max} で正規化すると

$$\frac{I}{I_{max}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (11)$$

ここで以下のように無次元量 Q を定義すると (11) 式は以下ようになる.

$$Q := \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (12)$$

$$\frac{I}{I_{max}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (13)$$

ここで $\frac{I}{I_{max}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる角周波数を ω_1, ω_2 とすると

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \quad (14)$$

が言える. 即ち Q 値とは共振曲線の鋭さを表す量である.

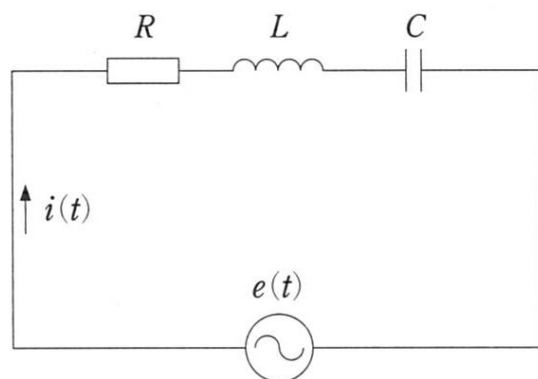


図 1 RLC 回路 [2]

3. 実験方法

3.1 コンデンサーの作製

2 枚の金属板の間に紙を挟むことでコンデンサーとした。紙の厚みをマイクロメーターで、金属板の一边の長さを定規で測定した。また、極板間距離 d が小さくなるように煉瓦で圧縮した。作成したコンデンサーのキャパシタンスを DMT を用いて測定した。

3.2 RLC 回路の作製

図 2 のような RLC 回路を組んだ。周波数発生器の電源電圧はインピーダンスの変化とともに全く異なった値を示すので、並列に接続した電圧計の値を元に電圧を調整した。

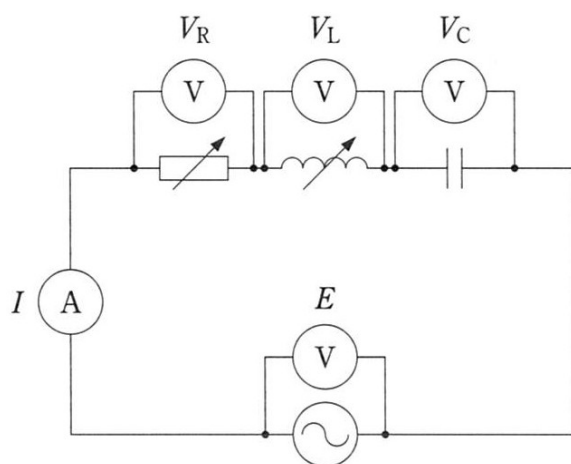


図 2 実験の回路 [2]

3.3 共振周波数の探索

計算機を用いて $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ をあらかじめ計算し, 大まかに周波数発生器の値を合わせておく. その後 $V_L = V_C$ となるように周波数を変化させ, f_0 を探索した. また, 周波数発生器の出力電圧が一定のもとでは, 共振周波数において実際に測定される電圧が最低になるので, これを用いて探索することもできる.

3.4 測定

電源電圧, 抵抗, インダクタンス, キャパシタンスの条件を固定し, 周波数を変化させながら電流を測定することで共振曲線を作製した.

4. 実験結果

4.1 コンデンサーの作製

製作したコンデンサーの条件は表 1 のようになった.

表 1 コンデンサーの条件

項目	値
紙の厚さ	0.065 mm
紙の厚さ (10 枚重ね)	0.675 mm
極板の一辺	398.0 mm
極板の一辺	400.4 mm
キャパシタンス	33.1 nF

従って, 紙の比誘電率 $\bar{\epsilon}$ は以下ようになる.

$$\bar{\epsilon} = \frac{33.1 \times 10^{-9} \times 0.0675 \times 10^{-3}}{\epsilon_0 \times 0.3980 \times 0.4004} \approx 1.58$$

4.2 測定

表 2 に各実験の条件を示す. 図 3 に各実験での共振曲線, 図 4 に f - θ グラフ, 図 5 に f - I/I_{max} グラフを示す. なお, 共振曲線の最尤曲線は最小二乗法により作図しており, そのパラメーターを表 3 に示す.

表 2 実験条件

実験	電源電圧 / V	抵抗 / Ω	キャパシタンス / nF	インダクタンス / mH
1	1.2	0	33.1	50
2	1.2	150	33.1	50
3	1.2	150	33.1	75

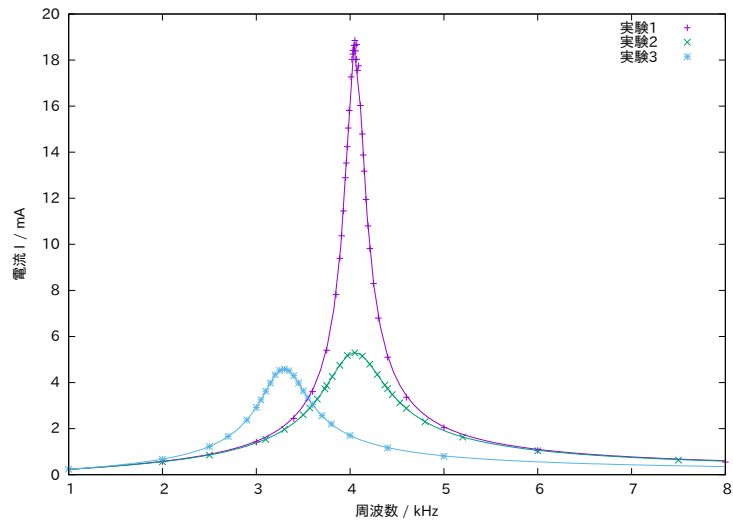


図 3 共振曲線

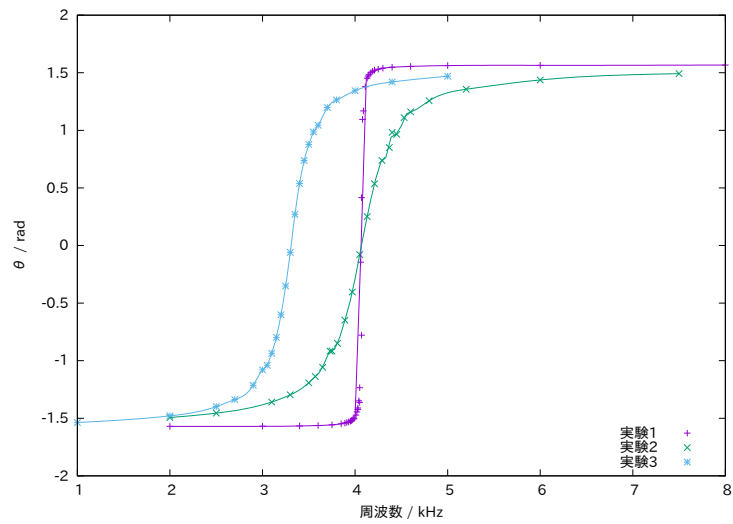


図 4 f - θ グラフ

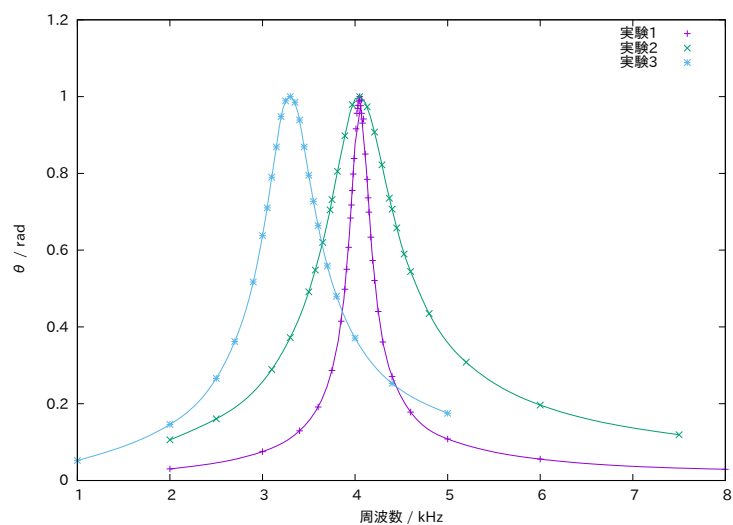


図5 f - I/I_{max} グラフ

表3 共振曲線の最尤曲線

実験	抵抗 / Ω	キャパシタンス / nF	インダクタンス / mH
1	63.99 ± 0.15	53.09 ± 0.29	29.07 ± 0.16
2	226.1 ± 0.3	54.17 ± 0.10	28.51 ± 0.05
3	260.1 ± 0.4	81.32 ± 0.21	28.67 ± 0.07

また, 実験 1~3 に関して V_R , V_L , V_C のグラフを示す.

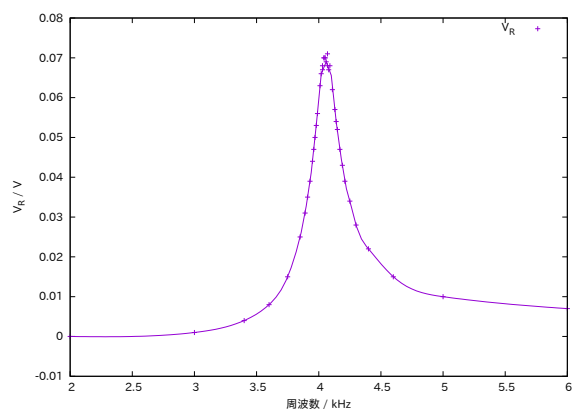


図6 実験1の V_R グラフ

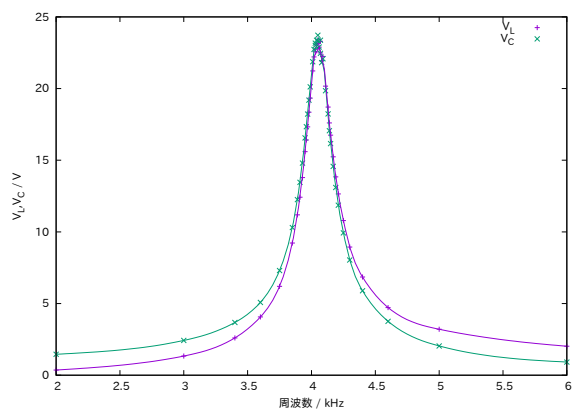


図7 実験1の V_L , V_C グラフ

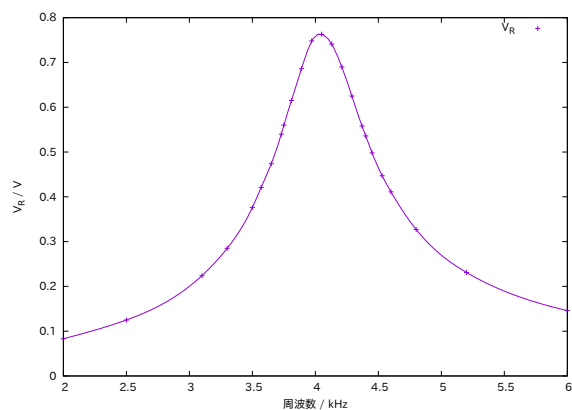


図 8 実験 2 の V_R グラフ

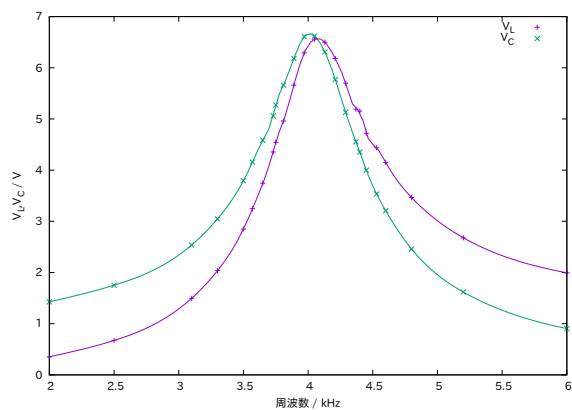


図 9 実験 2 の V_L, V_C グラフ

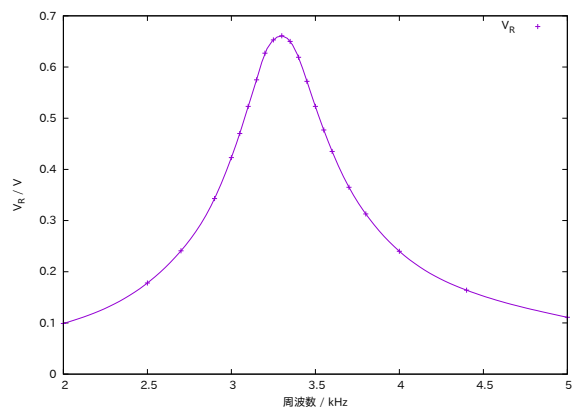


図 10 実験 3 の V_R グラフ

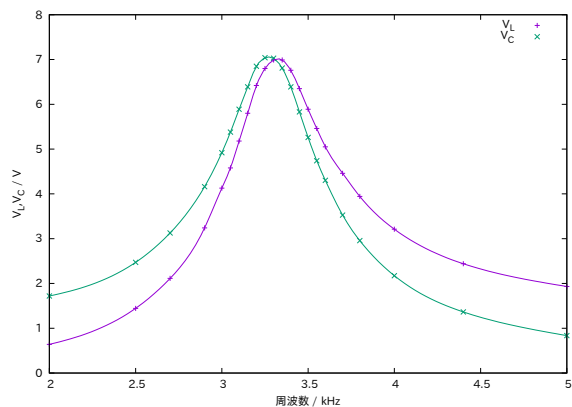


図 11 実験 3 の V_L, V_C グラフ

5. 考察

5.1 紙の比誘電率

5.1.1 厚さの測定方法

今回 1 枚の紙をマイクロメーターで測る, 10 枚重ねて測るなどの方法で紙の厚さを測定した. 紙を複数枚重ねることによって有効数字を増やすことができるが, ここで測定しているのは複数枚の紙の厚さの分布である. したがって, 全ての紙の厚さが同じでないと実験に用いた紙そのものの厚さの測定精度を向上したとは言い難い. また, 紙を重ねたことで間に隙間が生まれたり, 圧力によって厚さが変動すると考えられる. よって, より適切な厚さの測定方法は, 実際に用いる紙の厚さを複数点で測定し, 厚さの分布を求めることだと考えられる.

5.1.2 比誘電率

クラフト紙の比誘電率の文献値は 2.9 である [1]. 一方で実験値は 1.58 となった. これは実験値の約半分である. 原因として以下のようなものが考えられる.

- 極板のズレ
- 極板間距離の変動
- 湿度

今回, 極板の全面積がコンデンサとなっている仮定で比誘電率を測定したが, 実際には配線の関係で極板は完全には重なっていない. また, 極板が曲がっていたり, 重石の圧力不足で極板間距離が大きくなることが考えられる. ここでは仮に, 極板間距離が平均で 30 μm 厚く, また極板が 20 mm ずれていたとすると

$$\bar{\epsilon} = \frac{33.1 \times 10^{-9} \times 0.0975 \times 10^{-3}}{\epsilon_0 \times 0.3980 \times (0.4004 - 0.02 \times 2)} \approx 2.54$$

このように僅かな実験条件の差でも比誘電率は大幅に変動することがわかる.

5.2 共振曲線について

図 3 から, 共振周波数 f_0 は実験 1, 2 ではほぼ変化せず, 実験 3 では減少している. これはインダクタンスの変化によるものであり, (7) 式から自明にわかる.

また, 共振時の電流 I_{max} は可変抵抗の抵抗値を増やした際に大幅に減少し, 可変インダクタンスを増やした際にもわずかに減少していることがわかる. 理論的には回路上の抵抗値が 0 であるため, 実験 1 で I_{max} は発散するが, 実際には有限の値を持つ. これはコイル, 銅線の抵抗, 電磁波の発生などの損失によるものだと考えられる. 実際, 表 3 で示したように, 可変抵抗の抵抗値が 0 であっても 64 Ω 程度の抵抗があり, これが回路全体の抵抗であると考えられる. このことは表 3 の実験 2 の抵抗値 226 Ω から 64 Ω を引くとおよそ 150 Ω になることから正しいと考えられる. またインダクタンスを増やした際に I_{max} が減少したことは, コイルを直列に接続したことにより抵抗値が増加したからだと考えられる. 表 3 から, 実験 3 での抵抗は 260 Ω 程度であり, これから可変抵抗分の 150 Ω を引くとおよそ 110 Ω である. これが全てコイルの寄与であるならば, インダクタンスが 1.5 倍になったのに対して抵抗も 1.7 倍程度の増加であり, 辻褄があう.

5.3 f - V_R , V_L , V_C グラフについて

5.3.1 f - V_R グラフについて

Ohm の法則より, V_R は電流に比例することがわかる. 実際, f - V_R グラフは図 3 とほぼ同じ形状をしている.

5.3.2 f - V_L グラフについて

インダクタンスは一定なので, V_L は $L \frac{di(t)}{dt}$ になる. ここで V_L の最大値を V_{L0} とする. (2) 式から

$$\begin{aligned} V_{L0} &= 2\pi f I_m \\ &= \frac{2\pi L f E_m}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C}\right)^2}} \end{aligned}$$

したがって $f \rightarrow 0$ で $V_{L0} = 0$, $f \rightarrow \infty$ で $V_{L0} = E_m$ となる. 実際, 図 7, 9, 11 では V_{L0} は 0 付近から始まり, ピークを過ぎて E_m に収束しているように見える.

5.3.3 f - V_C グラフについて

同様に V_{C0} は以下のようになる.

$$\begin{aligned} V_{C0} &= \frac{I_m}{2\pi f C} \\ &= \frac{E_m}{2\pi f C \sqrt{R^2 + \left(2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C}\right)^2}} \\ &= \frac{E_m}{2\pi C \sqrt{(Rf)^2 + \left(2\pi f^2 L - \frac{f}{2\pi C}\right)^2}} \end{aligned}$$

したがって $f \rightarrow 0$ で $V_{C0} = E_m$, $f \rightarrow \infty$ で $V_{C0} = 0$ となる. 実際, 図 6, 8, 10 では V_{C0} は E_m 付近から始まり, ピークを過ぎて 0 に収束しているように見える.

5.4 消費電力について

消費電力 P は (2) 式から,

$$\begin{aligned} P &= E_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t + \phi) \\ &= \sqrt{R^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} I_m^2 \sin(\omega t + \phi + \theta) \cdot \sin(\omega t + \phi) \\ &= \sqrt{R^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} I_m^2 (\sin \theta - \sin(2\omega t + 2\phi + \theta)) \end{aligned}$$

ここで電力の平均 \bar{P} を取ると, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}$ での積分で $\sin(2\omega t + 2\phi + \theta) = 0$ なので,

$$\bar{P} = \sqrt{R^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} I_m^2 \sin \theta$$

ここで (4) 式, (3) 式を用いて以下を得る.

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{E_m^2}{\sqrt{R^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin \theta \\ &= \frac{E_m^2}{R\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \sin \theta \\ &= \frac{E_m^2}{2R} \sin 2\theta\end{aligned}$$

このことから電力は θ に対して正弦波で変化するとわかる. 図 4 より, 実験 1 で θ の変化は急激であり, $\theta = 0, \pm \frac{\pi}{2}$ とすると, 全周波数で $\bar{P} = 0$ である. 一方, 実験 2, 3 で θ の変化は比較的滑らかであり, $\theta : -\frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{4}, \theta : \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ で単調減少, $\theta : -\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4}$ で単調増加である.

5.5 Q 値について

5.5.1 実験値と理論値の比較

まず, 実験値による Q 値を調べる. ここでは表 3 に示したパラメータを (4) 式に代入し, これが最大値の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる f_1, f_2 を計算機で求める. その結果を表 4 に示す.

表 4 f_1, f_2 と Q 値 (実験値)

実験	f_1	f_2	Q
1	3.96	4.15	21.5
2	3.73	4.40	6.04
3	3.05	3.57	6.35

一方で Q 値の理論値は (12) 式から求まる. その結果を表 5 に示す.

表 5 f_1, f_2 と Q 値 (理論値)

実験	Q
1	∞
2	8.19
3	10.0

これらの結果から各実験において (特に実験 1) で理論値との間に顕著な差が表れていることがわかる. この差は理論値が回路の抵抗を全く考慮していないことが原因であると考えられる. 実際に表 2 と表 3 を見比べるとキャパシタンスやインダクタンスに比べて抵抗が装置条件と大きく異なることがわかる. このことから回路の共振曲線を測定することでその回路の抵抗, インダクタンス, キャパシタンスを測定できることがわかる. すなわち, インパルス応答により回路の特性を解析できることに対応している.

5.5.2 Q 値の定義

Q 値は正確には以下のように定義される.

$$Q = \frac{\text{回路に蓄えられるエネルギー}}{\text{単位時間あたりに放出するエネルギー}}$$

ここではエネルギーは全てインダクタに蓄えられ, エネルギーの減衰が全て抵抗で起こる場合を考える. このとき蓄えられる全エネルギー W は

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

ただし電流の実効値 $\bar{I} = \frac{I}{\sqrt{2}}$ なので,

$$W = L\bar{I}^2$$

また, 抵抗で一周期 T_0 の間に消費するエネルギー P は

$$P = R\bar{I}^2 T_0$$

したがって

$$Q = 2\pi \frac{W}{P} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

を導ける. これから C に関する表式も同様に導かれる.

また, ある瞬間に回路が蓄える全エネルギーを $E(t)$ とすると

$$Q = -\omega_0 \frac{E(t)}{\frac{dE(t)}{dt}}$$

したがって

$$E(t) = C_0 e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}$$

よって時定数 τ は

$$\tau = \frac{Q}{\omega_0}$$

となり, Q 値が大きいほど長時間エネルギーを保持できる.

5.6 高周波音について

コイルあるいはコンデンサから高周波音が鳴る現象は「鳴き」として一般に知られ, スイッチング電源やマザーボードなどの電源回路で顕著に発生する. これは誘電体が圧電効果により印加電圧に応じて変形し, この変形による振動が音波として聞こえることに起因する. しかし圧電効果は水晶やセラミックなどの物質で顕著であり, 紙でも知覚できるほどの鳴きが発生するかは不明である.

6. 結論

共振の性質や電気回路の周波数特性について理解を深められた.

参考文献

- [1] 国立天文台. 理科年表プレミアム. <http://www.rikanenpyo.jp.kras1.lib.keio.ac.jp>, 2020.
- [2] 慶應義塾大学理工学部. 理工学基礎実験, pp. 76–83. 学術図書出版社, 2020.