

## 1. 目的

様々な波形のフーリエ級数展開を行い, その正しさを確認し, 理論を理解する.

## 2. 実験原理

### 2.1 フーリエ級数について

周期  $2L$  の区分的になめらかな関数  $f(x)$  は以下のように展開され, これをフーリエ級数 (Fourier Series) と呼ぶ.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

ここでは簡単のため周期  $2L = 2\pi$  としたが,  $x = \frac{\pi}{L}x'$  と変数変換することで任意の周期  $2L$  を取り扱うことができる. また, 級数は収束するものとする.

これは任意の周期関数が様々な周波数の三角関数の重ね合わせとして表せることを表している. また  $a_n, b_n$  を並べることで, 関数の周波数成分の強度を取り出すことができる. ここで  $a_n, b_n$  はフーリエ係数と呼ばれ, 以下のように与えられる.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (3)$$

ただし  $a_0$  については (1) 式の両辺を  $-\pi$  から  $\pi$  で積分することで

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \\ &= \frac{a_0}{2} \pi \\ \therefore a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \end{aligned} \quad (4)$$

と与えられる.

また (2) 式, (3) 式は  $\cos x, \sin x$  の積が以下の性質を持つことから容易に確かめられる.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin mx = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx = \delta_{mn} \quad (6)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx = \delta_{mn} \quad (7)$$

ここで  $\delta_{mn}$  は Kronecker のデルタである.

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (8)$$

これは三角関数が周波数成分ごとに直交していることを表す. また  $a_n \cos nx$ ,  $b_n \sin nx$  は規格化されているので, フーリエ級数は無限次元の正規直交関数系であると言える. したがって (2) 式, (3) 式は関数と正規直交基底の内積を取ることで成分表示をすることと対応している.

## 2.2 複素数型のフーリエ級数と完全性 [1]

オイラーの式  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  を用いると

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}}}{2} \quad (9)$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}}}{2} \quad (10)$$

と表される. ここで  $\bar{x}$  は  $x$  の複素共役である. これを (1) 式に代入すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n (e^{inx} + \overline{e^{inx}}) + b_n (e^{inx} - \overline{e^{inx}}) \right\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{inx} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \left( \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} \right) e^{inx} \\ &=: \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \end{aligned} \quad (11)$$

となり, これを複素数型のフーリエ級数と呼ぶ. ただし  $c_n$  は以下のように与えられる.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{inx}} f(x) dx \quad (12)$$

(12) 式を (11) 式に代入すると

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{in(x-x')} f(x') dx' \quad (13)$$

ここで  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{in(x-x')}$  について考える. これは公比  $e^{i(x-x')}$  の無限等比級数なので

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{in(x-x')} &= \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N e^{in(x-x')} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{-i(x-x')N} - e^{i(x-x')(N+1)}}{1 - e^{i(x-x')}} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{-i(x-x')(N+\frac{1}{2})} - e^{i(x-x')(N+\frac{1}{2})}}{e^{-\frac{i}{2}(x-x')} - e^{\frac{i}{2}(x-x')}} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin \{(N + \frac{1}{2})(x - x')\}}{\sin \{\frac{1}{2}(x - x')\}} \\
 &=: \lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N(x - x') \\
 &=: \delta(x - x')
 \end{aligned} \tag{14}$$

ここで  $\delta(x)$  は dirac の  $\delta$  関数である. すなわち任意の関数  $\varphi(x)$ ,  $\epsilon > 0$  について以下を満たすものとする.

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases}$$

$$\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \varphi(x') \delta(x - x') dx' = \varphi(x)$$

これを用いて (13) 式を計算する.

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x') \delta(x - x') dx' \tag{15}$$

$$= f(x) \tag{16}$$

以上から任意の関数のフーリエ展開が元の関数と一致することが言え, フーリエ級数は完全性を持つと言える. よってフーリエ級数は完全正規直交関数系である. しかし完全性は無限級数を計算して初めて満たされるので, 次数を下げると完全性は失われる. したがって実用的な計算においては元の関数との乖離が生じる.

## 2.3 振幅と位相のスペクトル

(1) 式は三角関数の合成を用いて以下のように表される.

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(nx - \phi_n) \tag{17}$$

ただし  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  ( $n \neq 0$ ),  $A_0 = \frac{a_0}{2}$ ,  $\phi_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$

$A_n$ : 第  $n$  次高調波の振幅,  $\phi_n$ : 第  $n$  次高調波の位相

である. またそれぞれの集合  $\{A\}$ ,  $\{\phi\}$  は振幅, 位相のスペクトルと呼ばれ, プリズムによる分光などで観測される. この表式は工学分野でよく用いられる.

### 3. 結果と考察

#### 3.1 $f(x) = \sin x$ の場合

##### 3.1.1 結果

表 1 に正規化したフーリエ係数, 位相を示す. またデジタイザからの入力波形と 1 次の波形を図 3.1.1, 各次数の振幅を図 3.1.2, 各次数の位相を図 3.1.3 に示す.

表 1 正弦波のフーリエ係数, 位相

次数 $n$	$a_n$	$b_n$	$A_n$	$\phi_n$
0	0.0212	-	0.0106	-
1	0.0046	1.0000	1.0000	1.5662
2	-0.0034	-0.0081	0.0088	-1.9631
3	-0.0025	-0.0085	0.0088	-1.8555
4	-0.0004	-0.0023	0.0023	-1.7596
5	0.0012	0.0023	0.0026	1.1035
6	0.0007	0.0012	0.0014	1.0311
7	0.0005	-0.0008	0.0009	-0.9570
8	-0.0003	0.0006	0.0007	2.0839
9	0.0033	0.0000	0.0033	-0.0104
10	-0.0009	0.0003	0.0009	2.8579

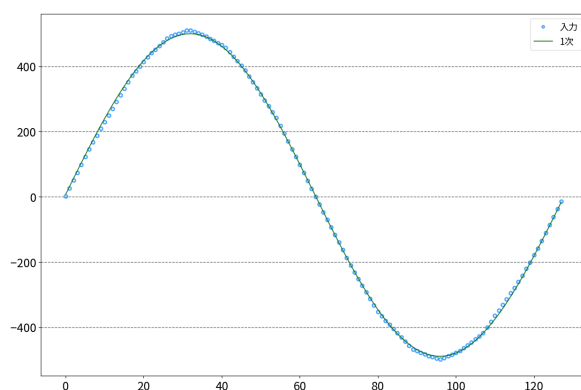


図 3.1.1 正弦波の入力波形と 1 次の波形

##### 3.1.2 考察・課題

(17) 式からわかるように, フーリエ係数  $A_0$  は入力波形の定常成分を表し, その値は  $A_0 = \frac{a_0}{2}$  である. これを教科書の式  $f(x) = A + B \sin(2\pi/T)$  [2] 見比べたとき,  $A = A_0$  であり, したがって

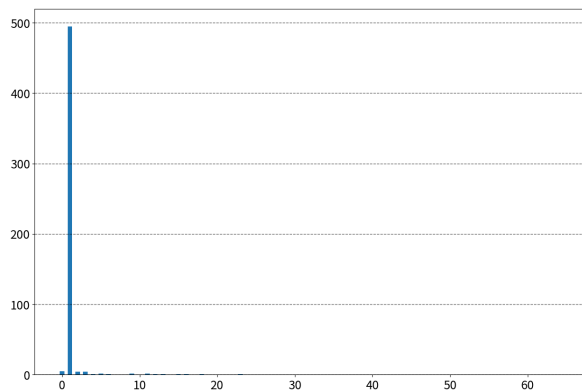


図 3.1.2 正弦波の各次数での振幅

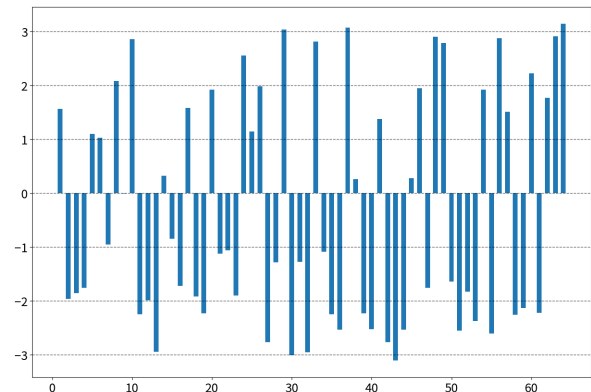


図 3.1.3 正弦波の各次数での位相

$a_0 = 2A$  である. また入力波形は 1 周期の正弦波なので, フーリエ係数は  $b_1$  のみが値を持ち, これは  $B$  と一致するはずである. 実際に表 1 から  $b_1$  のみが大きな値を持ち, 他の成分は非常に少ないことがわかる.

表 1 と教科書の表 1(以下理論値) を比較する. ただし表 1 は  $A_1$  で正規化してることに注意する. 表 1 から  $b_1, A_1$  の値が 1.0000 であり, 他は非常に小さな値であることがわかる. また  $\frac{\pi}{2} \simeq 1.5707$  であり,  $\phi_1$  と近い. またそれ以外の次数で  $\phi_n$  はランダムな値を取っている. 印刷した入力波形が有限の幅を持ち, また離散化誤差が生じることを考えれば, データは理論値とよく一致している.

## 3.2 $f(x) = \sin^2 x$ の場合

### 3.2.1 結果

表 2 に  $A_2$  で正規化したフーリエ係数, 位相を示す. またデジタイザからの入力波形と 1 次の波形を図 3.2.1, 入力波形と 2 次の波形を図 3.2.2, 各次数の振幅を図 3.2.3, 各次数の位相を図 3.2.4 に示す.

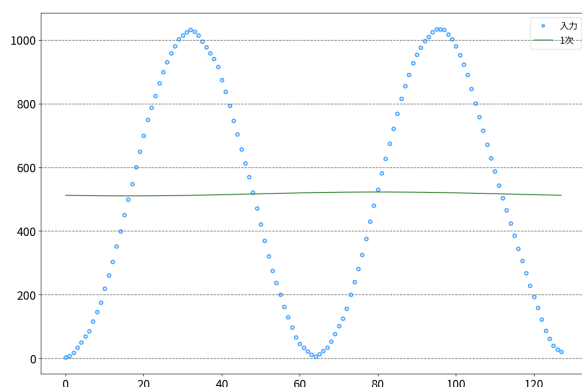


図 3.2.1  $\sin^2 x$  の入力波形と 1 次の波形

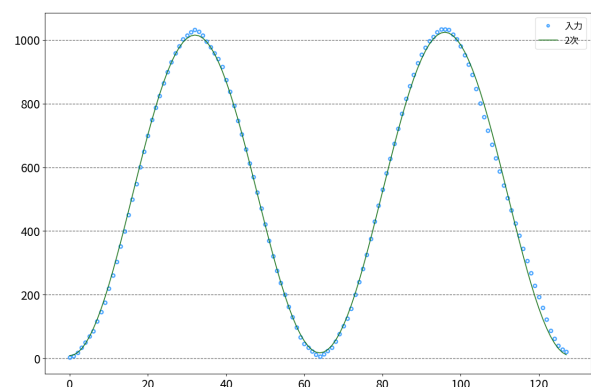


図 3.2.2  $\sin^2 x$  の入力波形と 2 次の波形

表 2  $\sin^2 x$  のフーリエ係数, 位相

次数 $n$	$a_n$	$b_n$	$A_n$	$\phi_n$
0	2.0531	0.0000	1.0265	0.0000
1	-0.0085	-0.0087	0.0121	-2.3472
2	-1.0000	0.0010	1.0000	3.1406
3	0.0203	-0.0115	0.0233	-0.5137
4	0.0082	-0.0201	0.0217	-1.1818
5	-0.0054	-0.0101	0.0115	-2.0634
6	-0.0115	-0.0017	0.0116	-2.9970
7	-0.0068	0.0032	0.0075	2.7050
8	-0.0006	0.0070	0.0070	1.6498
9	0.0006	0.0034	0.0034	1.4017
10	-0.0004	0.0018	0.0018	1.7971

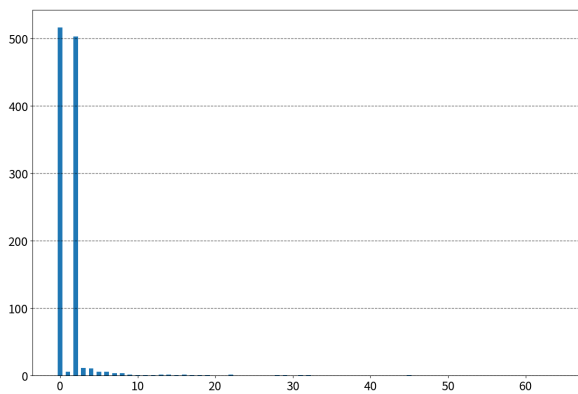


図 3.2.3  $\sin^2 x$  の各次数での振幅

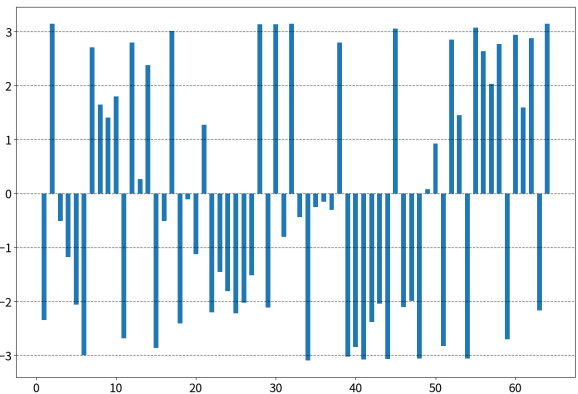


図 3.2.4  $\sin^2 x$  の各次数での位相

### 3.2.2 考察・課題

$A \sin^2 x = A \frac{1+\cos(2x+\pi)}{2}$  より, 理論的にこの曲線は, 定常成分  $A_0 = \frac{A}{2}$ , 2 次成分  $A_2 = \frac{A}{2}$ ,  $\phi_2 = \pi$  のみの成分を持つことがわかる. 図 3.2.3 から, 実際に定常成分, 2 次成分がほぼ等しい値を持ち, それ以外の値が非常に小さいことがわかる. また  $\phi_2$  も  $\pi$  に近い値を取っている.

## 3.3 $f(x) = \cos x$ の場合

### 3.3.1 結果

表 3 に正規化したフーリエ係数, 位相を示す. またデジタイザからの入力波形と 1 次の波形を図 3.3.1, 各次数の振幅を図 3.3.2, 各次数の位相を図 3.3.3 に示す.

表 3 余弦波のフーリエ係数, 位相

次数 $n$	$a_n$	$b_n$	$A_n$	$\phi_n$
0	0.0393	-	0.0197	-
1	0.9999	0.0129	1.0000	0.0129
2	-0.0030	-0.0101	0.0106	-1.8554
3	-0.0092	-0.0028	0.0096	-2.8423
4	0.0031	0.0014	0.0034	0.4293
5	0.0023	-0.0057	0.0062	-1.1836
6	-0.0028	-0.0059	0.0065	-2.0184
7	0.0017	0.0000	0.0017	-0.0086
8	0.0000	-0.0011	0.0011	-1.5334
9	0.0028	-0.0018	0.0033	-0.5723
10	-0.0009	0.0007	0.0011	2.4475

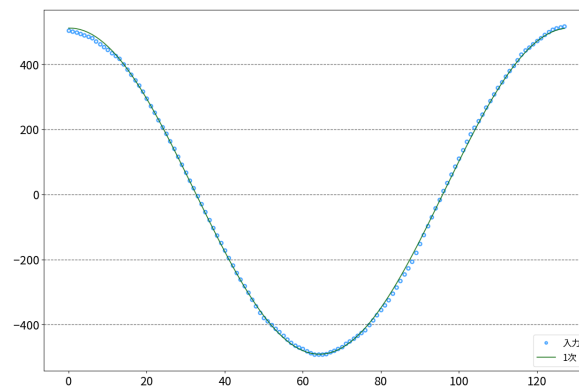


図 3.3.1 余弦波の入力波形と 1 次の波形

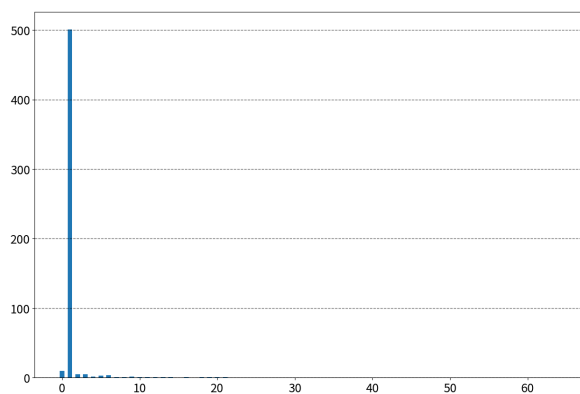


図 3.3.2 余弦波の各次数での振幅

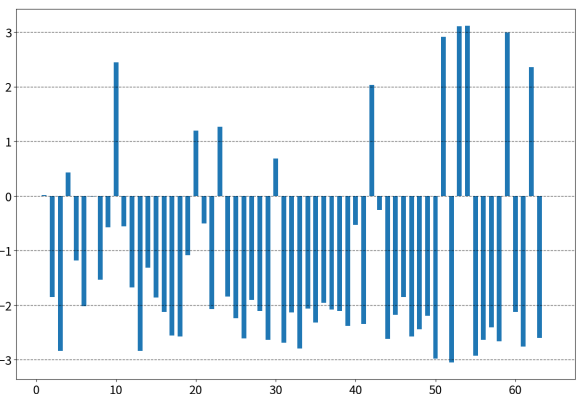


図 3.3.3 余弦波の各次数での位相

### 3.3.2 考察・課題

図 3.3.2 からわかるように, このフーリエ級数は 1 次の項のみが大きな値を持ち, 他は非常に小さい. このことから, 位相は 1 次でのみ意味にある値を持ち, 他はランダムな値を持つと考えられる.  $\phi_1 \simeq 0$  であり, これは理論値と一致する.

## 3.4 矩形波と三角波

### 3.4.1 矩形波の結果

表 4 に正規化したフーリエ係数, 位相を示す. またデジタイザからの入力波形と 1 次から 17 次の波形を図 3.4.1 ~ 図 3.4.4, 各次数の振幅を図 3.4.5, 各次数の位相を図 3.4.6 に示す.

表 4 矩形波のフーリエ係数, 位相

次数 $n$	$a_n$	$b_n$	$A_n$	$\phi_n$
0	1.6271	-	0.8135	-
1	-0.9999	0.0114	1.0000	3.1302
2	-0.0080	-0.0014	0.0081	-2.9718
3	0.3328	-0.0180	0.3333	-0.0541
4	0.0080	-0.0017	0.0082	-0.2135
5	-0.1991	0.0153	0.1997	3.0647
6	-0.0081	-0.0005	0.0081	-3.0840
7	0.1415	-0.0171	0.1425	-0.1199
8	0.0081	-0.0007	0.0081	-0.0842
9	-0.1095	0.0161	0.1107	2.9957
10	-0.0085	-0.0006	0.0086	-3.0709

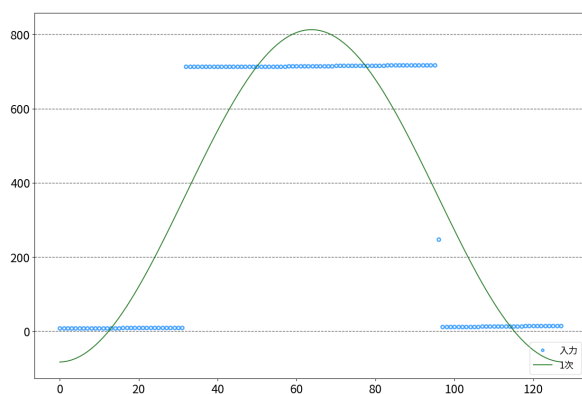


図 3.4.1 矩形波の入力波形と 1 次の波形

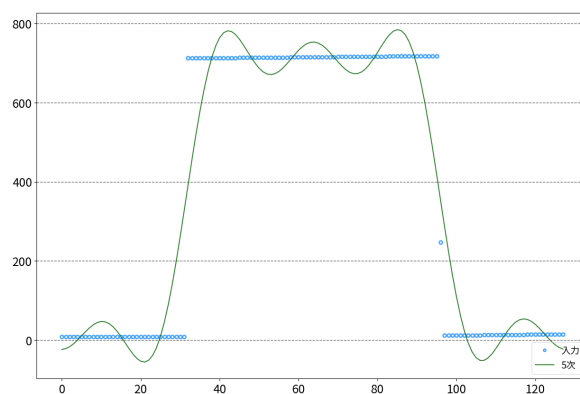


図 3.4.2 矩形波の入力波形と 5 次の波形



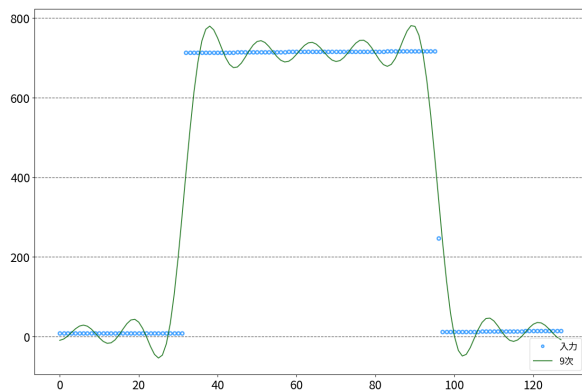


図 3.4.3 矩形波の入力波形と 9 次の波形

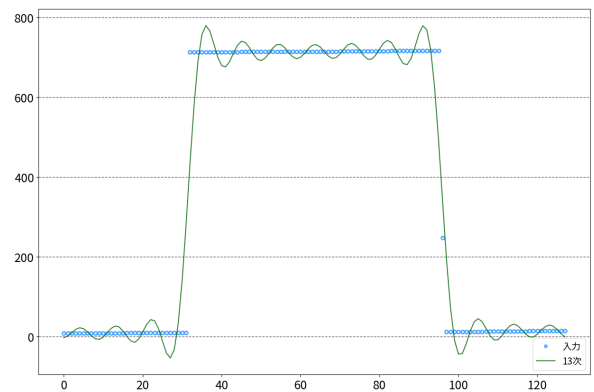


図 3.4.4 矩形波の入力波形と 13 次の波形

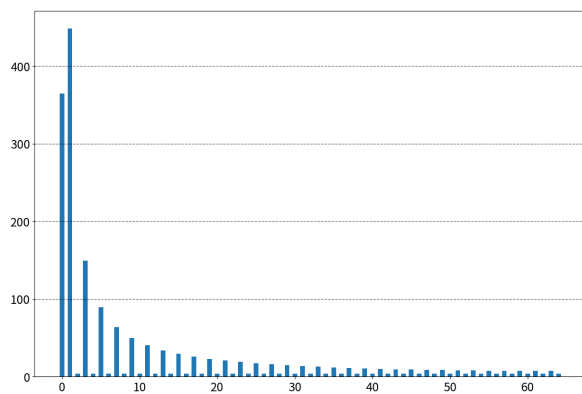


図 3.4.5 矩形波の各次数での振幅

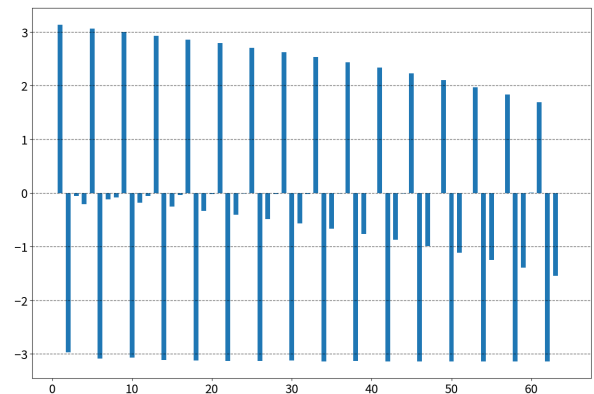


図 3.4.6 矩形波の各次数での位相

### 3.4.2 三角波の結果

表 5 に正規化したフーリエ係数, 位相を示す. またデジタイザからの入力波形と 1 次の波形を図 3.4.7, 入力波形と 5 次の波形を図 3.4.8, 各次数の振幅を図 3.4.9, 各次数の位相を図 3.4.10 に示す.

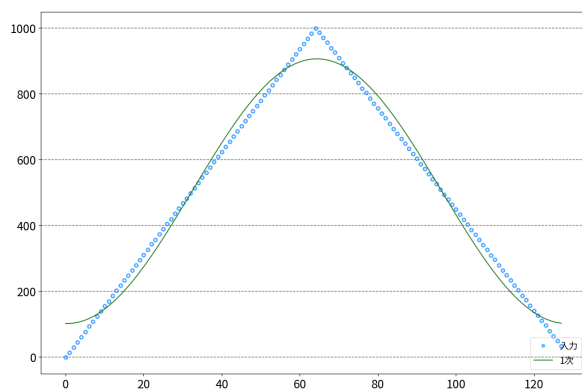


図 3.4.7 三角波の入力波形と 1 次の波形

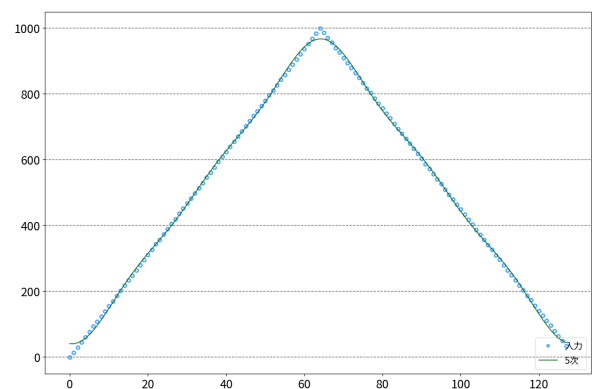


図 3.4.8 三角波の入力波形と 5 次の波形

表 5 三角波のフーリエ係数, 位相

次数 $n$	$a_n$	$b_n$	$A_n$	$\phi_n$
0	2.5026	-	1.2513	-
1	-0.9998	-0.0185	1.0000	-3.1231
2	-0.0004	-0.0067	0.0067	-1.6249
3	-0.1113	-0.0061	0.1115	-3.0867
4	-0.0005	-0.0032	0.0033	-1.7120
5	-0.0406	-0.0037	0.0408	-3.0505
6	-0.0003	-0.0022	0.0022	-1.7267
7	-0.0208	-0.0026	0.0210	-3.0150
8	-0.0004	-0.0017	0.0018	-1.8227
9	-0.0129	-0.0020	0.0131	-2.9898
10	-0.0004	-0.0013	0.0014	-1.8446

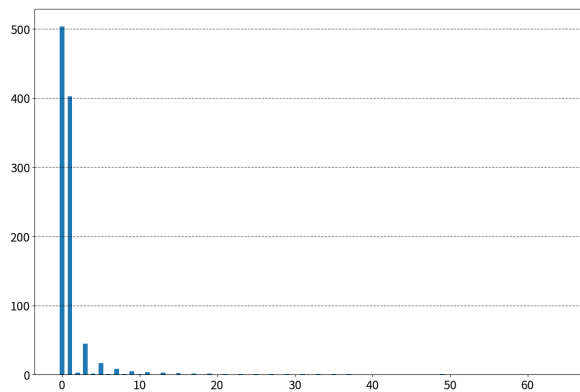


図 3.4.9 三角波の各次数での振幅

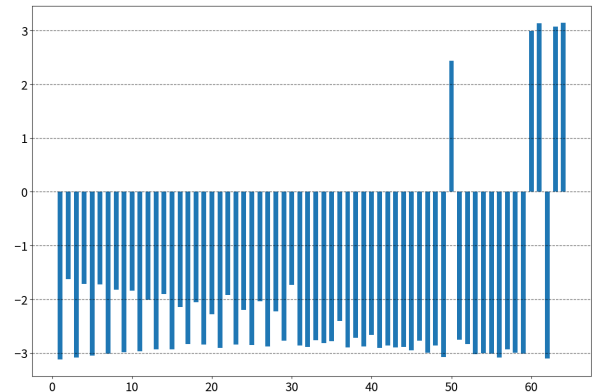


図 3.4.10 三角波の各次数での位相

### 3.4.3 考察・課題

矩形波, 三角波共に不連続点で入力データと合成波のズレが大きくなっている. これは合成波の次数が低く, 完全性が満たされていないために発生する. より高次の三角関数を用いることで急激な変化に対しても再現性を高められる.

また, 矩形波のフーリエ係数は以下ようになる.

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 1 \\
 a_n &= \begin{cases} -\frac{2A}{n\pi} \sin \frac{n}{2}\pi & n \text{ が奇数} \\ 0 & n \text{ が偶数} \end{cases} \\
 b_n &= 0
 \end{aligned}$$

このことから、矩形波のフーリエ係数は次数が奇数のときのみ成分を持ち、これは次数に反比例することがわかる。実際に図 3.4.11 から、正規化したフーリエ係数が  $1/n$  とよく一致していることがわかる。

また、三角波のフーリエ係数は以下ようになる。

$$a_0 = 1$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{-4A}{n^2\pi^2} & n \text{ が奇数} \\ 0 & n \text{ が偶数} \end{cases}$$

$$b_n = 0$$

このことから、三角波のフーリエ係数は次数が奇数のときのみ成分を持ち、これは次数の二乗に反比例することがわかる。実際に図 3.4.12 から、正規化したフーリエ係数が  $1/n^2$  とよく一致していることがわかる。また、以上の議論や図 3.4.13 から、三角波のほうが矩形波よりも速く収束することがわかる。

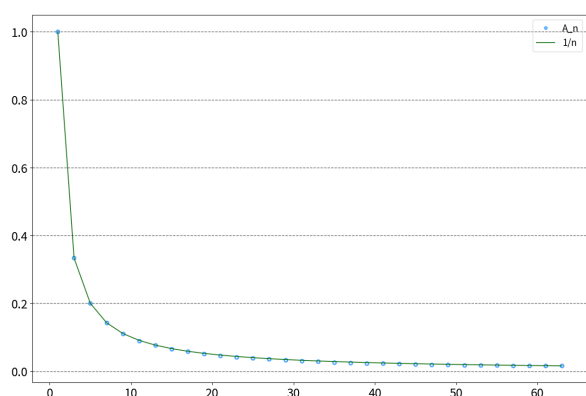


図 3.4.11 矩形波のフーリエ係数の収束

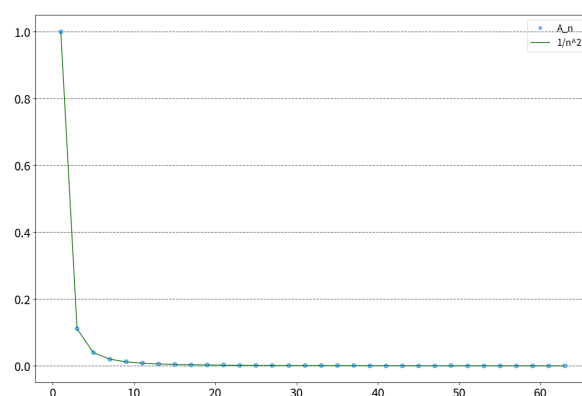


図 3.4.12 三角波のフーリエ係数の収束

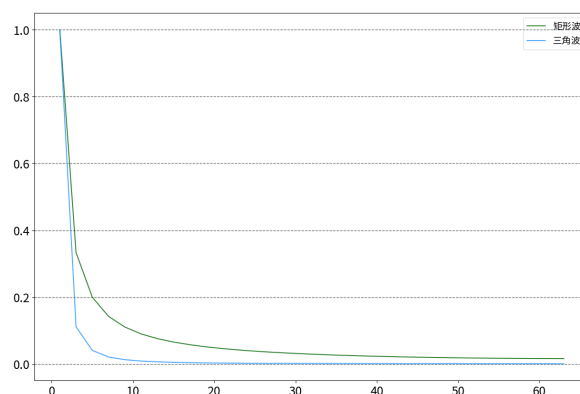


図 3.4.13 矩形波と三角波の収束の比較

## 3.5 鋸波

### 3.5.1 鋸波 1

表 6 に正規化したフーリエ係数, 位相を示す. またデジタイザからの入力波形と 1 次の波形を図 3.5.1, 入力波形と 30 次の波形を図 3.5.2, 入力波形と 64 次の波形を図 3.5.3, 各次数の振幅を図 3.5.4, 各次数の位相を図 3.5.5 に示す.

表 6 鋸波 1 のフーリエ係数, 位相

次数 $n$	$a_n$	$b_n$	$A_n$	$\phi_n$
0	0.0076	-	0.0038	-
1	0.0230	1.0000	1.0003	0.0033
2	-0.0246	-0.4996	0.5002	-0.0035
3	0.0244	0.3327	0.3336	0.0032
4	-0.0245	-0.2492	0.2504	-0.0036
5	0.0246	0.1990	0.2005	0.0031
6	-0.0245	-0.1655	0.1673	-0.0037
7	0.0245	0.1415	0.1436	0.0030
8	-0.0245	-0.1234	0.1258	-0.0038
9	0.0245	0.1093	0.1120	0.0029
10	-0.0245	-0.0980	0.1010	-0.0039

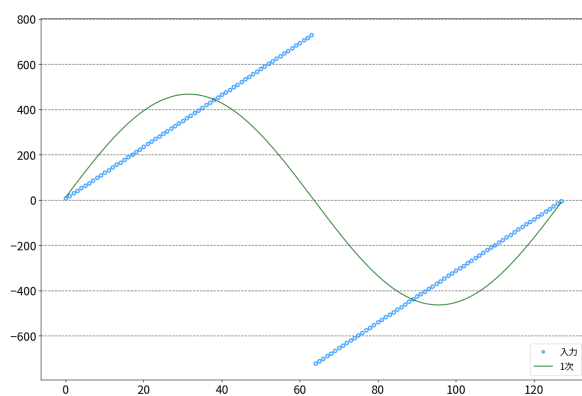


図 3.5.1 鋸波 1 の入力波形と 1 次の波形

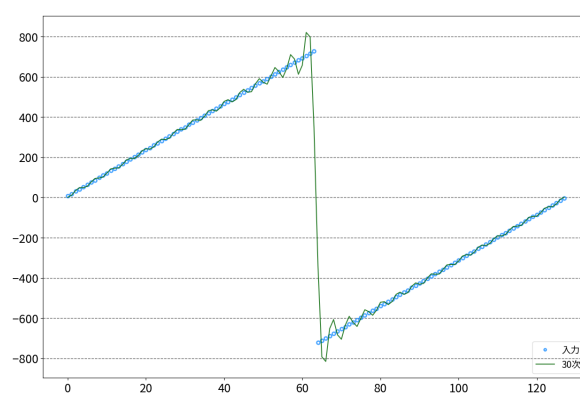


図 3.5.2 鋸波 1 の入力波形と 30 次の波形

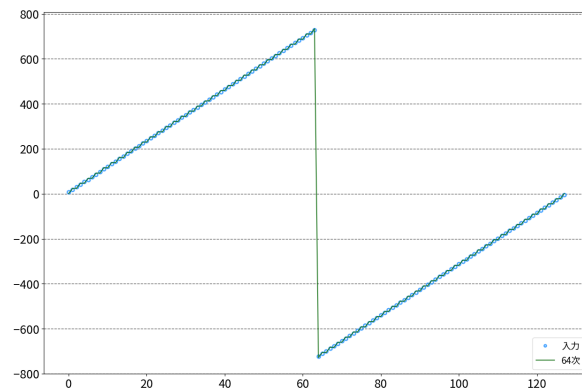


図 3.5.3 鋸波 1 の入力波形と 64 次の波形

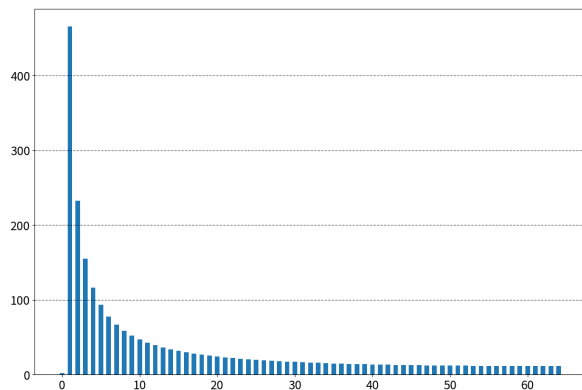


図 3.5.4 鋸波 1 の各次数での振幅

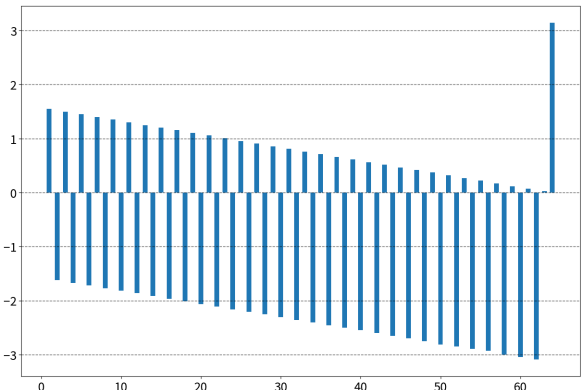


図 3.5.5 鋸波 1 の各次数での位相

### 3.5.2 鋸波 2

表 7 に正規化したフーリエ係数, 位相を示す. またデジタイザからの入力波形と 30 次の波形を図 3.5.6, 入力波形と 64 次の波形を図 3.5.7, 入力波形と 64 次の波形を図 3.5.7, 各次数の振幅を図 3.5.8, 各次数の位相を図 3.5.9 に示す.

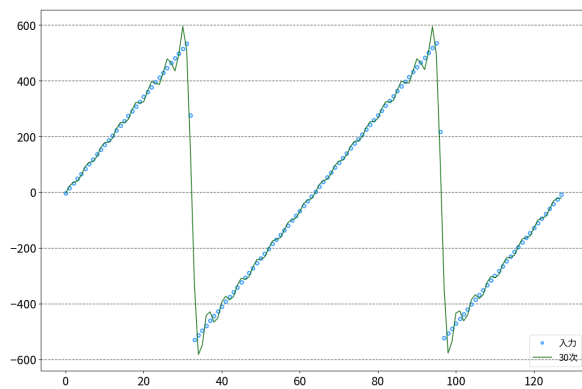


図 3.5.6 鋸波 2 の入力波形と 30 次の波形

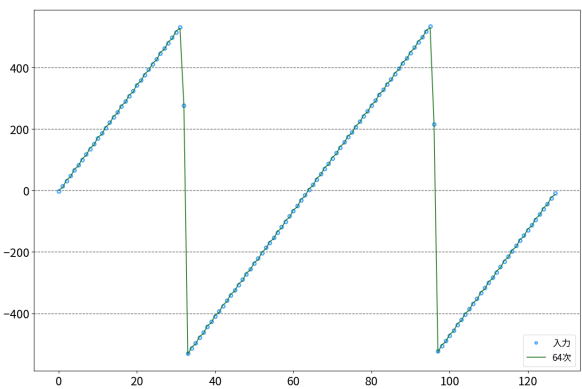


図 3.5.7 鋸波 2 の入力波形と 64 次の波形

表 7 鋸波 2 のフーリエ係数, 位相

次数 $n$	$a_n$	$b_n$	$A_n$	$\phi_n$
0	0.0373	-	0.0187	-
1	0.0021	-0.0064	0.0067	-1.2528
2	-0.0234	0.9997	1.0000	1.5942
3	-0.0021	-0.0068	0.0071	-1.8673
4	0.0218	-0.5041	0.5046	-1.5276
5	0.0005	0.0007	0.0009	0.9698
6	-0.0224	0.3320	0.3327	1.6381
7	-0.0010	-0.0046	0.0047	-1.7884
8	0.0217	-0.2497	0.2506	-1.4840
9	0.0002	0.0017	0.0018	1.4383
10	-0.0222	0.1961	0.1973	1.6833

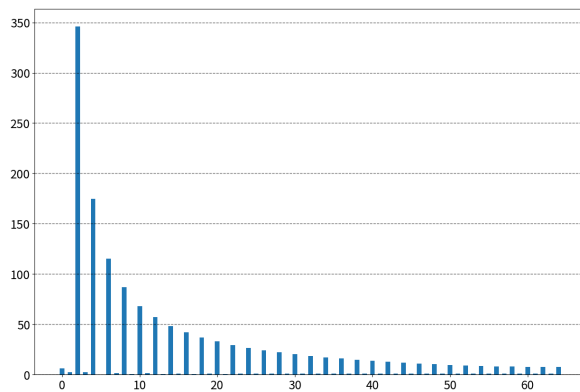


図 3.5.8 鋸波 2 の各次数での振幅

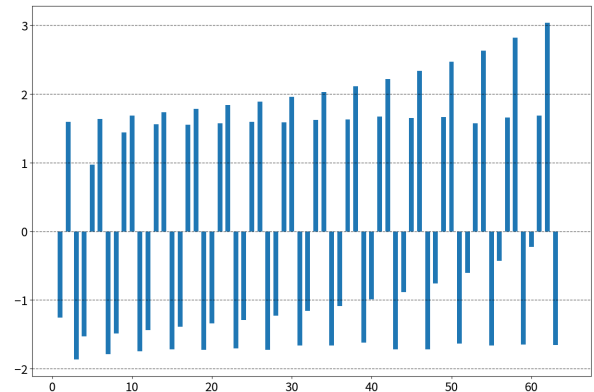


図 3.5.9 鋸波 2 の各次数での位相

### 3.5.3 考察・課題

矩形波, 三角波と同様に不連続点付近では合成波と入力データの差が大きくなっていることがわかる. 図 3.5.3, 図 3.5.7 からわかるように次数を高めることでこの差を小さくすることができる.

また鋸波 1 のフーリエ係数は以下のようになる.

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

一方で鋸波 2 のフーリエ係数は以下ようになる。

$$a_n = 0$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ が奇数} \\ \frac{4(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{n\pi} & n \text{ が偶数} \end{cases}$$

このことから、鋸波 1 は  $1/n$ 、鋸波 2 は  $2/n$  の速度で収束することがわかる。実際、図 3.5.10、図 3.5.11 のように各係数の収束と  $1/n$ 、 $2/n$  はよく一致する。また、鋸波 1、2 は次数が低い場合収束の速度が大きく異なるが  $n \rightarrow \infty$  では同じ速度で収束することがわかる。

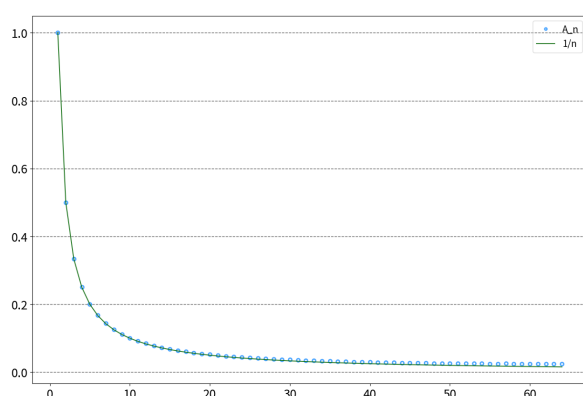


図 3.5.10 鋸波 1 のフーリエ係数の収束

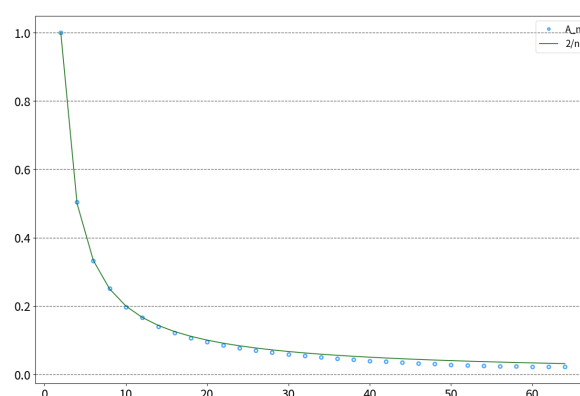


図 3.5.11 鋸波 2 のフーリエ係数の収束

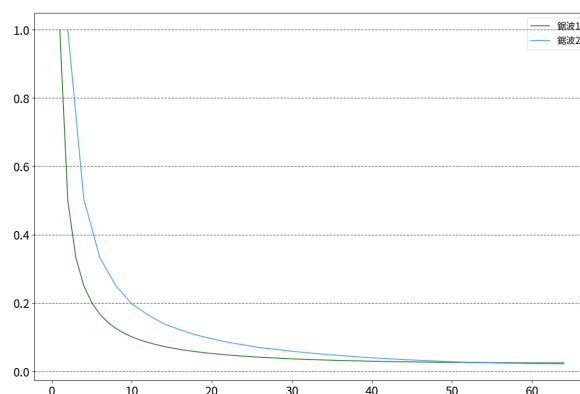


図 3.5.12 鋸波 1 と鋸波 2 の収束の比較

## 3.6 減衰振動

表 8 に正規化したフーリエ係数、位相を示す。またデジタイザからの入力波形と 6 次の波形を図 3.6.1、入力波形と 15 次の波形を図 3.6.2、入力波形と 30 次の波形を図 3.6.3、各次数の振幅を図 3.6.4、各次数の位相を図 3.6.5 に示す。

表 8 減衰振動のフーリエ係数, 位相

次数 $n$	$a_n$	$b_n$	$A_n$	$\phi_n$
0	-0.1360	-	0.0680	-
1	-0.2485	-0.0462	0.2528	-2.9579
2	-0.2743	-0.0415	0.2775	-2.9915
3	-0.3126	-0.0742	0.3213	-2.9085
4	-0.4030	-0.1319	0.4240	-2.8252
5	-0.5422	-0.3763	0.6600	-2.5349
6	-0.0065	-1.0000	1.0000	-1.5773
7	0.4272	-0.3288	0.5390	-0.6559
8	0.2683	-0.1100	0.2899	-0.3892
9	0.1948	-0.0622	0.2045	-0.3091
10	0.1368	-0.0262	0.1393	-0.1889

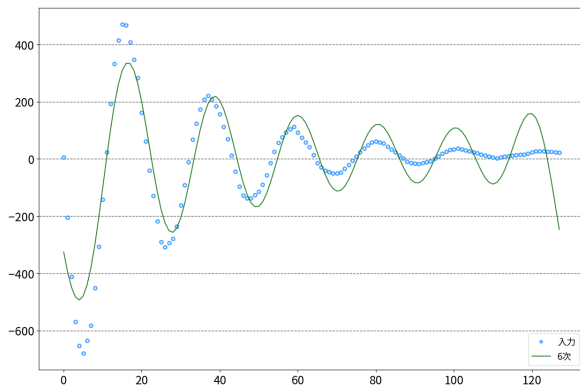


図 3.6.1 減衰振動の入力波形と 6 次の波形

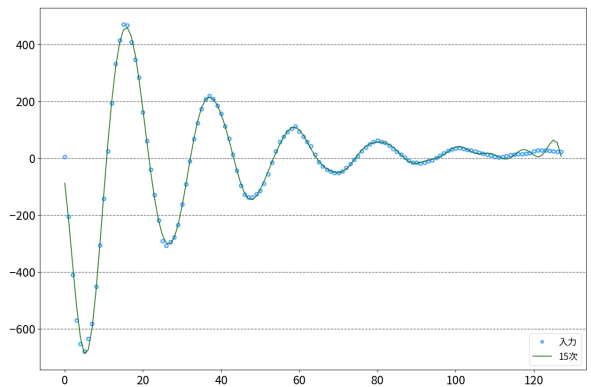


図 3.6.2 減衰振動の入力波形と 15 次の波形

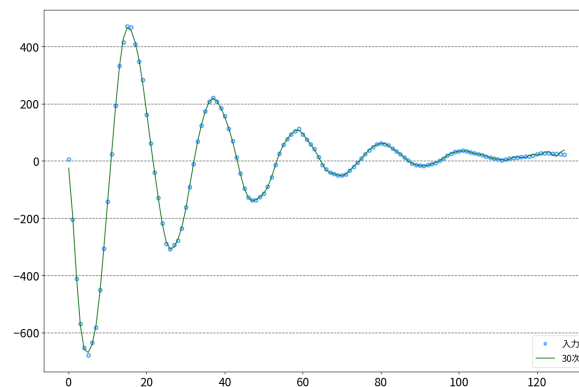


図 3.6.3 減衰振動の入力波形と 30 次の波形



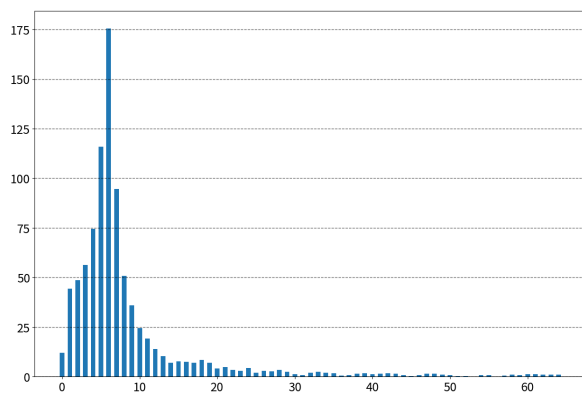


図 3.6.4 減衰振動の各次数での振幅

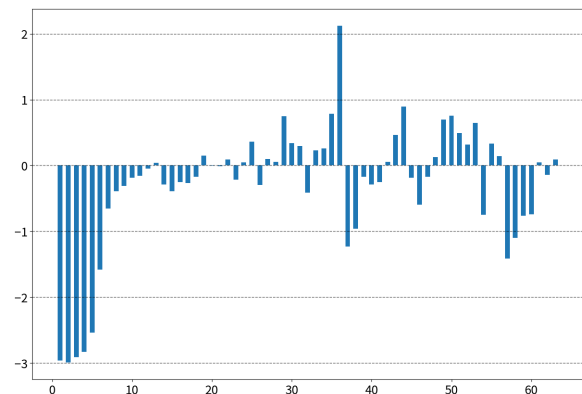


図 3.6.5 減衰振動の各次数での位相

### 3.6.1 考察・課題

図 3.6.1, 図 3.6.2 のように, 曲線の始端と終端付近で入力データと合成波のズレが大きくなっている. これは本来  $[0, \infty)$  周期である減衰振動を  $[0, 2\pi]$  周期として計算したために生じている. 確かに, 図 3.6.1 では始端と終端がつながっている様子がわかる.

## 3.7 うなり

表 9 に正規化していないフーリエ係数, 位相を示す. またデジタイザからの入力波形と 4 次の波形を図 3.7.1, 入力波形と 5 次の波形を図 3.7.2, 入力波形と 6 次の波形を図 3.7.3, 各次数の振幅を図 3.7.4, 各次数の位相を図 3.7.5 に示す.

表 9 うなり波のフーリエ係数, 位相 (非正規)

次数 $n$	$a_n$	$b_n$	$A_n$	$\phi_n$
0	51.2	-	25.6	-
1	-16.9	-1.5	16.9	-3.1
2	4.4	-12.8	13.5	-1.2
3	-0.1	3.5	3.5	1.6
4	-0.2	10.8	10.8	1.6
5	323.7	-16.4	324.1	-0.1
6	-302.4	-88.1	314.9	-2.9
7	-1.1	-6.6	6.7	-1.7
8	-1.6	0.6	1.7	2.8
9	-2.1	3.1	3.7	2.2
10	-13.1	-1.0	13.1	-3.1

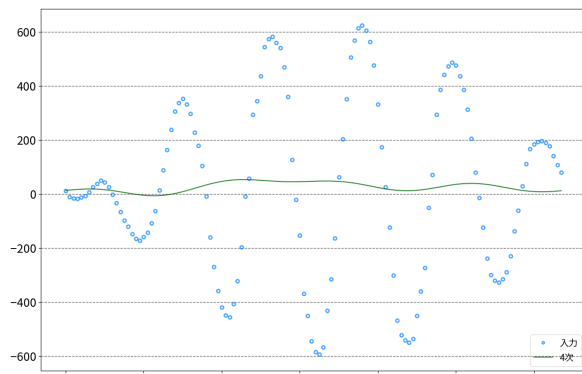


図 3.7.1 うなり波の入力波形と 4 次の波形

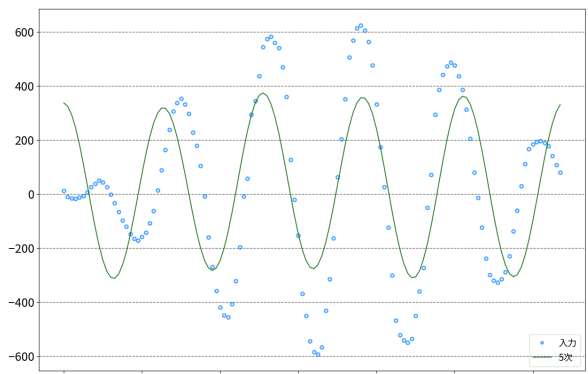


図 3.7.2 うなり波の入力波形と 5 次の波形

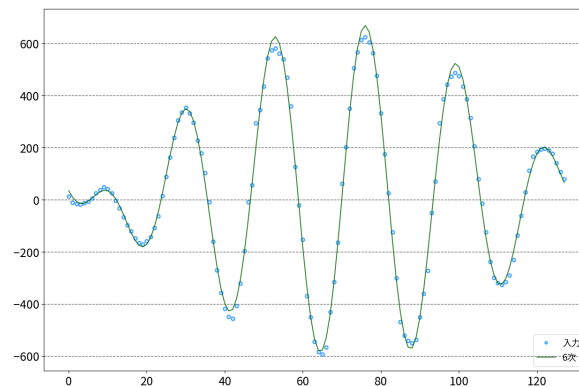


図 3.7.3 うなり波の入力波形と 6 次の波形

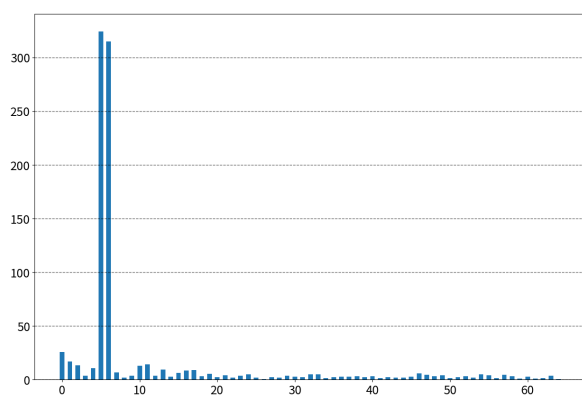


図 3.7.4 うなり波の各次数での振幅

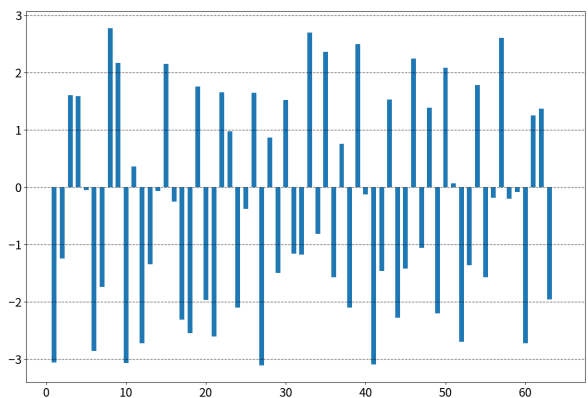


図 3.7.5 うなり波の各次数での位相

### 3.8 考察・課題

図 3.7.4 から入力データは 5 次と 6 次の成分を主に持っていることがわかる。実際に 4 次までの合成波では入力データをほとんど再現していないのに対して、5 次、6 次ではズレが大幅に減少して

いるのがわかる。

2つの余弦波成分を持つ関数は以下のように与えられる。

$$f(x) = A_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx - \phi_n\right) + A_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}mx - \phi_m\right)$$

表 9 から  $A_n = 324$ ,  $A_m = 315$ ,  $\phi_n = 0$ ,  $\phi_m = -\pi$  とした場合の曲線を図 3.8.1 に示す。このように、フーリエ級数から推定した  $f(x)$  と入力データはよく一致している。

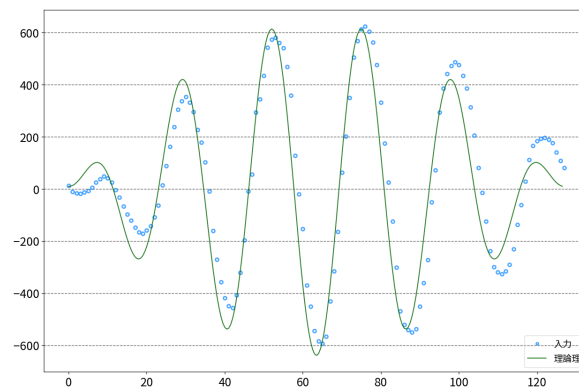


図 3.8.1 入力データと  $f(x)$

## 3.9 パルスと $\delta$ 関数

### 3.9.1 パルス (広)

デジタイザからの入力波形と 4 次の波形を図 3.9.1, 入力波形と 30 次の波形を図 3.9.2, 各次数の振幅を図 3.9.3, 各次数の位相を図 3.9.4 に示す。

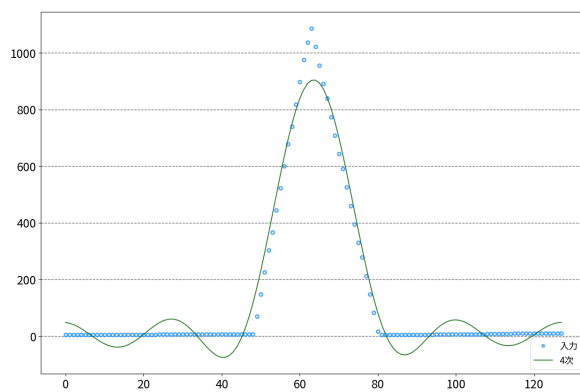


図 3.9.1 パルス (広) の入力波形と 4 次の波形

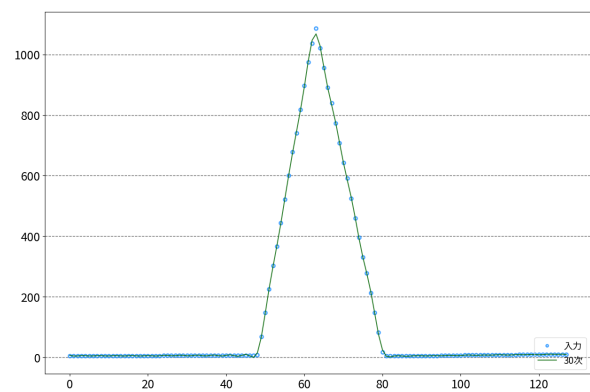


図 3.9.2 パルス (広) の入力波形と 30 次の波形

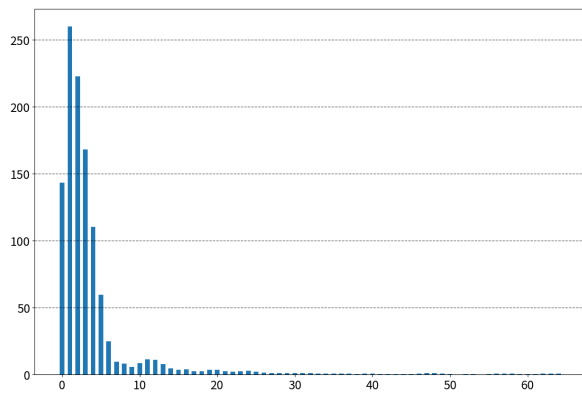


図 3.9.3 パルス (広) の各次数での振幅

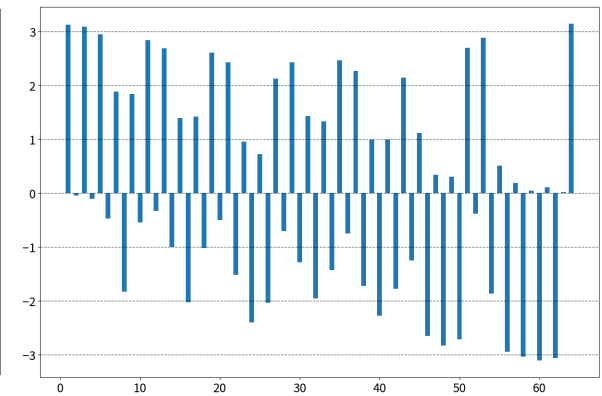


図 3.9.4 パルス (広) の各次数での位相

### 3.9.2 パルス (中)

デジタイザからの入力波形と 4 次の波形を図 3.9.5, 入力波形と 30 次の波形を図 3.9.6, 各次数の振幅を図 3.9.7, 各次数の位相を図 3.9.8 に示す。

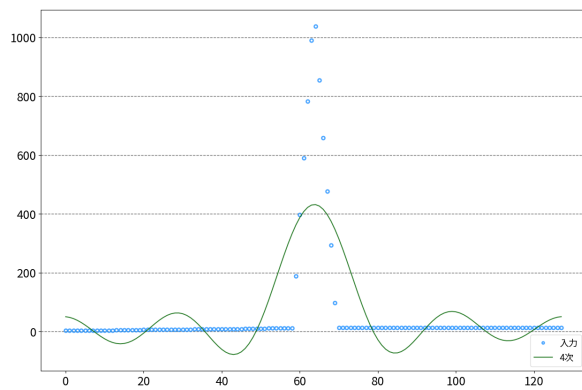


図 3.9.5 パルス (中) の入力波形と 4 次の波形

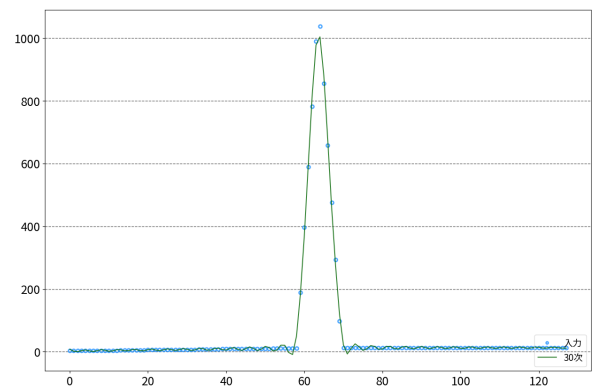


図 3.9.6 パルス (中) の入力波形と 30 次の波形

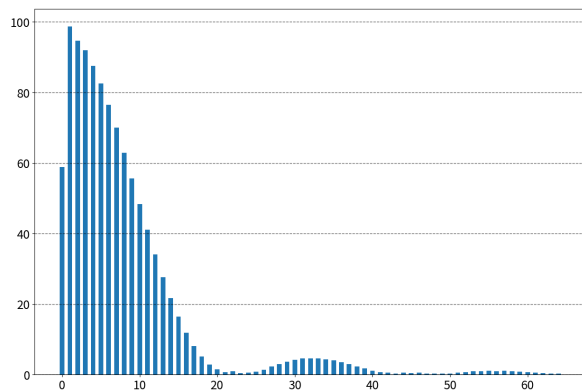


図 3.9.7 パルス (中) の各次数での振幅

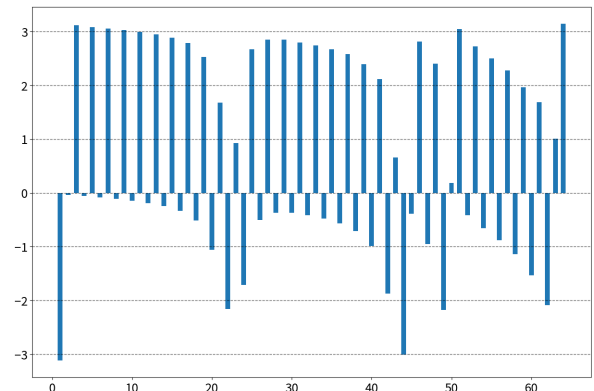


図 3.9.8 パルス (中) の各次数での位相

### 3.9.3 パルス (狭)

デジタイザからの入力波形と 4 次の波形を図 3.9.9, 入力波形と 30 次の波形を図 3.9.10, 各次数の振幅を図 3.9.11, 各次数の位相を図 3.9.12 に示す.

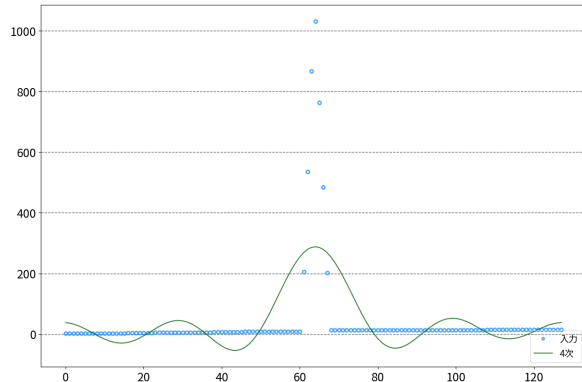


図 3.9.9 パルス (狭) の入力波形と 4 次の波形

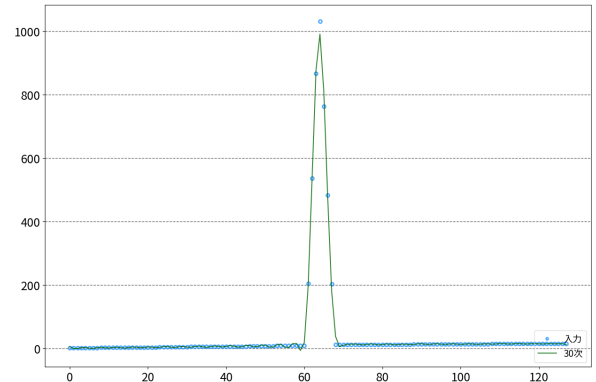


図 3.9.10 パルス (狭) の入力波形と 30 次の波形

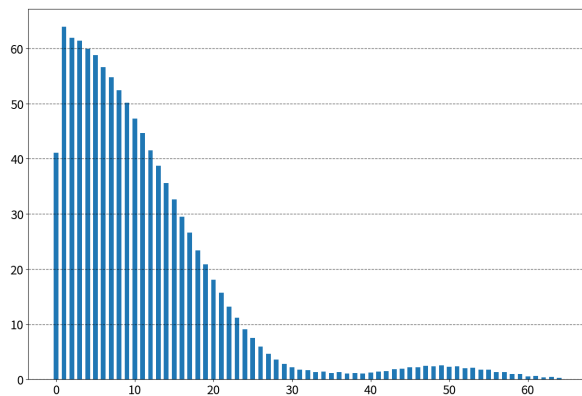


図 3.9.11 パルス (狭) の各次数での振幅

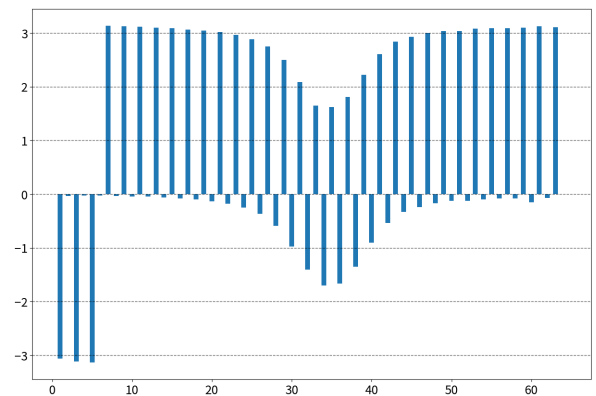


図 3.9.12 パルス (狭) の各次数での位相

### 3.9.4 $\delta$ 関数

デジタイザからの入力波形と 30 次の波形を図 3.9.13, 入力波形と 64 次の波形を図 3.9.14, 各次数の振幅を図 3.9.15, 各次数の位相を図 3.9.16 に示す.

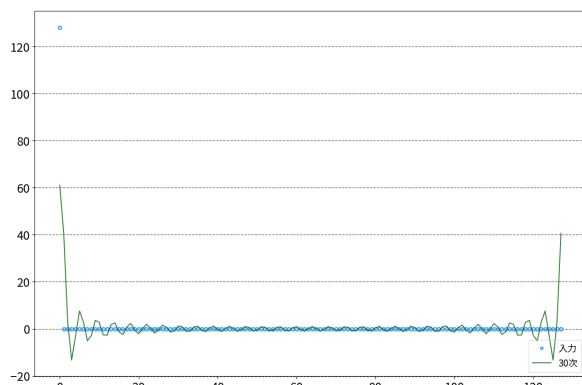


図 3.9.13  $\delta$  関数の入力波形と 30 次の波形

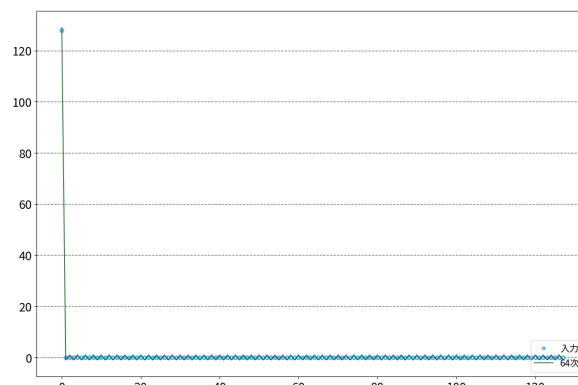


図 3.9.14  $\delta$  関数の入力波形と 64 次の波形

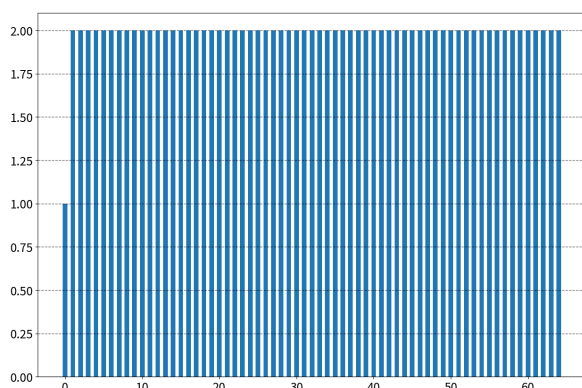


図 3.9.15  $\delta$  関数の各次数での振幅

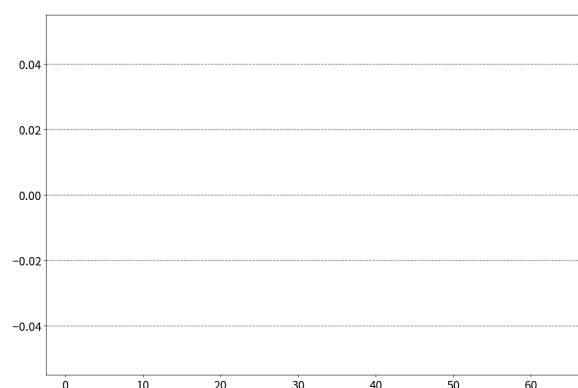


図 3.9.16  $\delta$  関数の各次数での位相

### 3.9.5 考察・課題

図 3.9.17 に各パルス,  $\delta$  関数でのフーリエ係数の収束を示す. 図 3.9.17 のように, パルス幅が狭くなるほど収束は遅くなり, パルス幅が 0 即ち  $\delta$  関数ではすべての次数で一定の係数を持っている. パルス幅が狭くなるほど関数は急激な変化をするため, より高い次数が必要になるのは直感と一致する.

また, フーリエ係数の計算が周波数空間での関数の成分表示を求めることであり, 周波数空間での基底と関数の内積を取る操作であることを考慮すると,  $x = 0$  でのみ値を持つ  $\delta$  関数と  $\sin nx$  の内積は,  $\sin n \cdot 0 = 0$  なので常に 0 だとわかる. このことから位相  $\phi_n$  が全次数で 0 であることもわかる. 同様に  $\cos nx$  との内積は,  $\cos n \cdot 0 = 1$  なので常に同じ値となる.

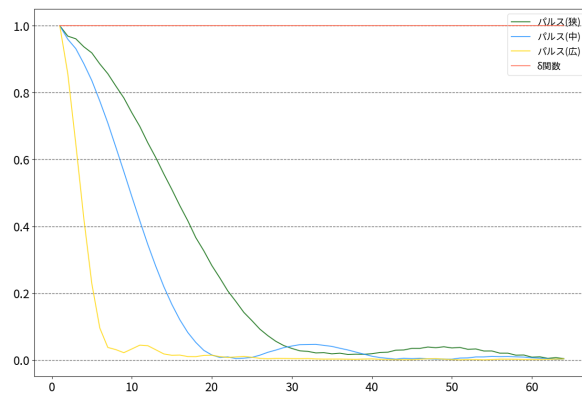


図 3.9.17 各パルス,  $\delta$  関数のフーリエ係数の収束

## 4. 結論

様々な波形についてフーリエ級数展開を行い, この正しさを確認し, 理論を理解した.

## 参考文献

- [1] 吉岡大二郎. 振動と波動, pp. 95–104. 東京大学出版会, 東京.
- [2] 慶應義塾大学理工学部. 理工学基礎実験, pp. 76–83. 学術図書出版社, 2020.