## Exercice 1 (Schéma de Heun)

(a) Montrons que la quadrature de Gauss-Radau

$$\int_0^1 g(x)\,dx \simeq \frac{1}{4} g(0) + \frac{3}{4} g\left(\frac{2}{3}\right)$$

est exacte pour n'importe quel polynôme de degré $\leq 2$. Testons l'exactitude sur la base de $\mathbb{R}_2[x] = \mathrm{Vect}(1, x, x^2)$ (on prend donc $g(t) = 1, t, t^2$)

$$\int_0^1 1\,dx = 1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \quad ; \quad \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} = 0 + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}$$

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} = 0 + \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}$$

Or comme $g \mapsto \int_0^1 g(x)\,dx$ et $g \mapsto \frac{1}{4}g(0) + \frac{3}{4} g\left(\frac{2}{3}\right)$ sont des formes linéaires, elles sont égales sur $\mathbb{R}_2[x]$.

<u>Remarque</u> : pour $g(x) = x^3$, $\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4} \neq 0 + \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{27}$, donc la quadrature n'est pas exacte sur $\mathbb{R}_{\geq 3}[x]$.

(b) Etudions l'erreur de consistance $y(t_0+h) - y_1$. On fait un développement de Taylor à l'ordre 3 :

$$y(t_0+h) = y(t_0) + h y'(t_0) + \frac{h^2}{2} y''(t_0) + \frac{h^3}{6} y'''(t_0) + o(h^4),$$

<u>Remarque</u> : cela suppose que $t \mapsto y(t)$ est au moins $\mathcal{C}^4$, mais c'est une conséquence simple de $f \in \mathcal{C}^\infty$. Pourquoi ? Car $y' = f(y)$, donc $y \in \mathcal{C}^0$ et par composition $f(y) \in \mathcal{C}^0$ donc $y' \in \mathcal{C}^0$, donc $y \in \mathcal{C}^1$, mais alors $f(y) \in \mathcal{C}^1$ donc $y' \in \mathcal{C}^1$, donc $y \in \mathcal{C}^2$ etc...
Par récurrence on a donc bien que $y \in \mathcal{C}^k$, $\forall k \geq 0$ (un tel argument est appelé "bootstrap").

Calculons les dérivées successives $y', y'', y'''$ grâce à l'EDO :

$$y' = f(y) \iff y'' = f'(y)\cdot y' = f'(y)f(y) \quad \text{par composition}$$

$$\iff y''' = f''(y)\,y' f(y) + f'(y)f'(y)y' \quad \text{par produit}$$

$$= f''(y)\,(f(y))^2 + (f'(y))^2 f(y)$$

Ainsi on a le développement de Taylor :

$$y(t_0+h) = y_0 + h f(y_0) + \frac{h^2}{2} f'(y_0)f(y_0) \qquad (T)$$

$$+ \frac{h^3}{6}\left\{ f''(y_0)f(y_0)^2 + (f'(y_0))^2 f(y_0)\right\} + o(h^4)$$

Considérons d'autre part : $y_1 = y_0 + h\left(\frac{1}{4}f(y_0) + \frac{3}{4}f(u_3)\right)$ (1)

or $f(u_3) = f\left(y_0 + \frac{2h}{3}f(u_2)\right)$, développons-le à l'ordre 2.

Remarque : On développe à l'ordre 2 car $f(u_3)$ est multiplié par $h$ dans (1).

On obtient :

$$f(u_3) = f(y_0) + \frac{2h}{3}f(u_2)f'(y_0) + \frac{2h^2}{9}f(u_2)^2 f''(y_0) + o(h^3). \qquad (2)$$

Explicitons maintenant $f(u_2) = f\left(y_0 + \frac{h}{3}f(y_0)\right)$, pour cela on le développe à l'ordre 1 (cela suffit car $f(u_2)$ sera multiplié au total par $h$ dans (2)) :

$$f(u_2) = f(y_0) + \frac{h}{3}f(y_0)f'(y_0) + o(h^2). \qquad (3)$$

Portons maintenant (3) dans (2) :

$$f(u_3) = f(y_0) + \frac{2h}{3}f'(y_0)\left(f(y_0) + \frac{h}{3}f(y_0)f'(y_0)\right)$$

$$+ \frac{2h^2}{9}f''(y_0)\left(f(y_0) + \frac{h}{3}f(y_0)f'(y_0)\right)^2 + o(h^3)$$

Remarque : nul besoin de développer $\left(f(y_0) + \frac{h}{3}f(y_0)f'(y_0)\right)^2$ dans ce contexte...

On a donc $f(u_3) = f(y_0) + \frac{2h}{3}f'(y_0)f(y_0)$ (4)

$$+ \frac{2h^2}{9}\left\{ f(y_0)f'(y_0)^2 + f''(y_0)f(y_0)^2\right\} + o(h^3)$$

On porte maintenant (4) dans (1).

On a donc :

$$y_1 = y_0 + h\Big\{\frac{1}{4}f(y_0) + \frac{3}{4}f(y_0) + \frac{h}{2}f'(y_0)f(y_0) + \frac{h^2}{6}\left[f(y_0)f'(y_0)^2 + f''(y_0)f(y_0)^2\right]\Big\} + o(h^4) \qquad (\mathcal{H})$$

$$= y_0 + hf(y_0) + \frac{h^2}{2}f'(y_0)f(y_0) + \frac{h^3}{6}\left[f(y_0)f'(y_0)^2 + f''(y_0)f(y_0)^2\right] + o(h^4)$$

En comparant $(\mathcal{H})$ avec $(T)$, on trouve bien $y(t_0+h) - y_1 = o(h^4)$. Donc l'erreur de consistance est en $o(h^4)$.

(c) Soit $T>0$, et $t_n = nh$, avec $h>0$ le pas supposé constant.

L'erreur globale est définie comme le $\max\limits_{n\in[\![0,N]\!]} |y(t_n) - y_n|$. Le schéma de Heun est un schéma à un pas :

$$y_1 = y_0 + \Phi(t_0, y_0; h)$$

où $\Phi$ est la fonctionnelle $\Phi(t_0,y_0;h) := \frac{1}{4}f(y_0) + \frac{3}{4}f\left(y_0 + \frac{2h}{3}f\left(y_0 + \frac{h}{3}f(y_0)\right)\right)$.

De plus, $f \in Lip_y$ donc $|f(y) - f(z)| \leq L|y-z|$, et il est ainsi facile (mais légèrement chiant) de vérifier que $\Phi \in Lip_{y_0}$.

Par théorème de convergence des schémas à un pas, on a

$$\max_{n\in[\![0,N]\!]} |y(t_n) - y_n| = o(h^3),$$

donc le schéma de Heun est convergent et est d'ordre 3.

Remarque : les calculs sont + simples du fait que l'ED $y' = f(y)$ est autonome, i.e. $f$ ne dépend pas de $t$. Cependant, on peut toujours se ramener à une équation autonome. En effet, soit $y' = f(t,y)$. On pose $z(t) = (t, y(t))$. On a donc $z'(t) = (1, y'(t)) = (1, f(t,y)) = (1, f(z))$, et en posant $F(z) := (1, f(z))$, on s'est bien ramené à une ED autonome, mais on a augmenté la dimension de la solution de 1.

## Exercice 2 (Schémas multipas)

Ecrivons le schéma en prenant $n=j+1$ :

$$y_{n+1}+4y_n-5y_{n-1}=h\big(4f(t_n,y_n)+2f(t_{n-1},y_{n-1})\big),$$

il s'agit bien d'un schéma multipas, dont l'erreur de consistance est définie par :

$$y(t_{n+1})+4y(t_n)-5y(t_{n-1})-h\big(4f(t_n,y_n)+2f(t_{n-1},y_{n-1})\big),$$

càd :

$$\varepsilon(h):=y(t_n+h)+4y(t_n)-5y(t_n-h)-h\big(4f(t_n,y_n)+2f(t_n-h,y(t_n-h))\big).$$

On utilise le fait que $f(t,y(t))=y'(t)$, et on obtient :

$$\varepsilon(h)=y(t_n+h)+4y(t_n)-5y(t_n-h)-h\big(4y'(t_n)+2y'(t_n-h)\big).$$

On effectue deux développements de Taylor à l'ordre 4 :

- $y(t_n+h)=y(t_n)+hy'(t_n)+\frac{h^2}{2}y''(t_n)+\frac{h^3}{6}y'''(t_n)+o(h^4)$,
- $y(t_n-h)=y(t_n)-hy'(t_n)+\frac{h^2}{2}y''(t_n)-\frac{h^3}{6}y'''(t_n)+o(h^4)$,

et un autre à l'ordre 2 :

$$y'(t_n-h)=y'(t_n)-hy''(t_n)+\frac{h^2}{2}y'''(t_n)+o(h^3).$$

On porte maintenant ces 3 développements dans $\varepsilon(h)$ :

$$\begin{aligned}
\varepsilon(h)=\ & y(t_n)+hy'(t_n)+\frac{h^2}{2}y''(t_n)+\frac{h^3}{6}y'''(t_n)+y(t_n)\\
&-5\Big(y(t_n)-hy'(t_n)+\frac{h^2}{2}y''(t_n)-\frac{h^3}{6}y'''(t_n)\Big)-4hy'(t_n)\\
&+2h\Big(y'(t_n)-hy''(t_n)+\frac{h^2}{2}y'''(t_n)\Big)+o(h^4)\\
=\ & (1+4-5)y(t_n)+(1+5-4-2)hy'(t_n)+\Big(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+2\Big)h^2y''(t_n)\\
&+\Big(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}-1\Big)h^3y'''(t_n)+o(h^4)\\
=\ & o(h^4).
\end{aligned}$$

Pour $f\equiv 0$, le schéma produit une suite vérifiant la relation de récurrence linéaire suivante : $y_{n+2}+4y_{n-1}-5y_n=0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + h\lambda - 5 = (\lambda-1)(\lambda+5) = 0$, donc les solutions sont $y_n = A \cdot 1^n + B(-5)^n$, où $A, B \in \mathbb{R}$ sont déterminés par la donnée de $y_0$ et $y_1$ :

$$\begin{cases} A+B = y_0 \\ A-5B = y_1 \end{cases} \iff \begin{cases} B = \dfrac{y_0-y_1}{6} \\ A = \dfrac{5}{6}y_0 + \dfrac{1}{6}y_1 \end{cases}$$

Ainsi $y_n = \left(\frac{5}{6}y_0 + \frac{1}{6}y_1\right) + \left(\frac{y_0-y_1}{6}\right)(-5)^n$. Notons que $(-5)^n$ n'est pas borné quand $n \to \infty$. Ainsi, si au cours du calcul, 2 termes consécutifs ne sont pas égaux à une précision infinie, si par exemple $y_0 - y_1 = eps$ (préc. machine) alors le facteur $(-5)^n$ va amplifier cette quantité, aussi minime soit-elle, et au bout de quelques dizaines d'itérations, $y_n \sim \frac{eps}{6}(-5)^n$ sera non borné. Comme la solution exacte de $y' = 0$ est $y = cte$, le schéma donnera des erreurs de plus en plus grandes et ne convergera pas.

## Exercice 3 (Schéma BDF2)

(a) Soit $h > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$. On définit $t_1 := t_0 + h$, $t_2 = t_0 + 2h$, et on se donne 3 valeurs réelles $y_0, y_1, y_2$. En considérant le polynôme d'interpolation $q(t)$ vérifiant $q(t_i) = y_i$, $\forall i \in \{0,1,2\}$, on vient de se donner en fait 3 nœuds d'interpolation, donc $q \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$. Exprimons le polynôme par la méthode de Newton :

$$q(t) = y(t_0) + (t-t_0)\, y[t_0,t_1] + (t-t_0)(t-t_1)\, y[t_0,t_1,t_2]$$

où : • $y[t_0,t_1] = \dfrac{y(t_1)-y(t_0)}{t_1-t_0} = \dfrac{y_1-y_0}{h}$

• $$y[t_0,t_1,t_2] = \frac{y[t_1,t_2]-y[t_0,t_1]}{t_2-t_0} = \frac{\frac{y_2-y_1}{h} - \frac{y_1-y_0}{h}}{2h}$$

$$= \frac{y_2 - 2y_1 - y_0}{2h^2}$$

Remarque : si vous n'êtes pas familiers avec les différences divisées de Newton, vous pouvez utiliser l'interpolation de Lagrange.

Ainsi $q(t) = y_0 + (t-t_0)\frac{(y_1-y_0)}{h} + (t-t_0)(t-t_1)\frac{(y_2-2y_1+y_0)}{2h^2}$

(b) Dérivons le polynôme $q$ par rapport à $t$ :

$$q'(t) = \frac{y_1-y_0}{h} + \left((t-t_1)+(t-t_0)\right)\left(\frac{y_2-2y_1+y_0}{2h^2}\right).$$

En posant $t := t_2$, on a :

$$q'(t_2) = \frac{y_1-y_0}{h} + 3h\left(\frac{y_2-2y_1+y_0}{2h^2}\right) = \frac{3/2\, y_2 - 2y_1 + 1/2\, y_0}{h}.$$

(c) Par définition du schéma de différentiation rétrograde on approxime $y'(t_{n+1})$ par $q'(t_{n+1})$ où $q$ est le polynôme d'interpolation de $y(t)$ aux 3 nœuds $t_{n+1}, t_n, t_{n-1}$. D'après la formule obtenue en (b) :

$$q'(t_{n+1}) = \frac{1}{h}\left(\frac{3}{2}y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2}y_{n-1}\right),$$

donc en remplaçant dans $y'(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$, on obtient bien

$$\frac{3}{2}y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} = h f(t_{n+1}, y_{n+1}).$$

(d) Soit $\varphi : y \mapsto \frac{2}{3}\left(2y_n - \frac{1}{2}y_{n-1} + h f(t_{n+1}, y)\right)$. On écrit :

$$\varphi(y) - \varphi(z) = \frac{2h}{3}\left(f(t_{n+1}, y) - f(t_{n+1}, z)\right)$$

$\Leftrightarrow |\varphi(y) - \varphi(z)| \leq \frac{2h}{3} L |y-z|$ car $f(t_{n+1}, \cdot) \in Lip.$ pour $h$ suffisamment petit et $0 < \frac{2hL}{3} < 1$.

Donc $\varphi$ est contractante sur $\mathbb{R}$ et admet un unique point fixe, obtenu comme limite de la suite des itérées. Pour calculer $y_{n+1}$, on calcule quelques itérations à partir de la valeur initiale $y_n$, càd

$$y_{n+1}^{(1)} = \varphi(y_n),\ y_{n+2}^{(2)} = \varphi(y_{n+1}^{(1)}),\ \dots,\ y_{n+j}^{(j)} = \varphi(y_{n+j-1}^{(j)}).$$

Mais comme on a un schéma approché performant, seules quelques itérations suffiront.

(e) Soit la suite récurrente : $\frac{3}{2}y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} = 0$.

D'après le cours, elle est bornée $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ssi les racines de l'eq. caract. $\frac{3}{2}\lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{2} = 0$ sont de module $\leq 1$, et que les racines de module 1 sont de multiplicité 1. Ici $\frac{3}{2}\lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{3})$, les racines sont 1 (racine simple) et $\frac{1}{3}$ donc la condition de stabilité est vérifiée.

(f) Exprimons l'erreur de consistance :

$$\begin{aligned}\varepsilon(h) &:= \frac{3}{2}y(t_n+h) - 2y(t_n) + \frac{1}{2}y(t_n-h) - h f(t_n+h, y(t_n+h)) \\ &= \frac{3}{2}y(t_n+h) - 2y(t_n) + \frac{1}{2}y(t_n-h) - h y'(t_n+h).\end{aligned}$$

Effectuons des développements de Taylor autour de $t_n$ :

- $y(t_n+h) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + o(h^3)$,
- $y(t_n-h) = y(t_n) - hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + o(h^3)$,
- $y'(t_n+h) = y'(t_n) + hy''(t_n) + o(h^2)$.

et portons les dans $\varepsilon(h)$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon(h) &:= \frac{3}{2}\left(y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n)\right) - 2y(t_n) + \frac{1}{2}\left(y(t_n) - hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n)\right) - h\left(y'(t_n) + hy''(t_n)\right) + o(h^3) \\ &= o(h^3)\end{aligned}$$

donc l'erreur de consistance est bien $o(h^3)$.

(g) D'après (e), le schéma est stable, d'après (f) il est croissant, donc par théorème de convergence des schémas multipas, il converge. Comme l'erreur est en $o(h^3)$, il est d'ordre 2.

## Exercice 4 (ED avec terme source raide)

L'équation différentielle s'écrit $y' = -\frac{1}{\varepsilon} y + \frac{1}{\varepsilon}\cos t$ (equation linéaire).

L'équation homogène a les solutions $\lambda e^{-t/\varepsilon}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, cherchant une solution particulière sous forme $a\cos t + b\sin t$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on trouve ainsi par identification

$$a = \frac{1}{1+\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} = a\varepsilon.$$

La solution générale est donc :

$$y(t) = \lambda e^{-t/\varepsilon} + \frac{\cos t}{1+\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon \sin t}{1+\varepsilon^2},$$

et avec la C.I. $y(0)=0$, on a :

$$y(t) = \frac{-1}{1+\varepsilon^2} e^{-t/\varepsilon} + \frac{\cos t}{1+\varepsilon^2} + \varepsilon \frac{\sin t}{1+\varepsilon^2},$$

or comme $\varepsilon \ll 1$, $(1+\varepsilon^2)^{-1} = 1 + o(\varepsilon^2)$ donc

$$y(t) = -e^{-t/\varepsilon} + \cos t + \varepsilon \sin t + o(\varepsilon^2).$$

(a) Le schéma d'Euler est $y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$, ici la fonction $f$ est définie comme $f(t,y) = -\frac{1}{\varepsilon} y + \frac{1}{\varepsilon}\cos t$ donc on a

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{-1}{\varepsilon} y_n + \frac{1}{\varepsilon}\cos(t_n)\right) = \left(1 - \frac{h}{\varepsilon}\right) y_n + \frac{h}{\varepsilon}\cos(t_n).$$

(b) Pour résoudre l'équation, on s'inspire de la démarche classique pour l'équation différentielle. On résout d'abord l'équation "homogène" :

$$z_{n+1} = \left(1 - \frac{h}{\varepsilon}\right) z_n, \text{ qui est une suite géométrique } z_n = c\left(1-\frac{h}{\varepsilon}\right)^n,\ c \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une sol. particulière sous la forme $y_n = A\cos t_n + B\sin t_n$.

Ainsi : $y_{n+1} = A\cos(t_{n+1}) + B\sin(t_{n+1}) = A\cos(t_n + h) + B\sin(t_n + h)$

$$= (A\cos h + B\sin h)\cos t_n + (B\cos h - A\sin h)\sin t_n.$$

Par identification avec $y_{n+1} = \left(1 - \frac{h}{\varepsilon}\right) y_n + \frac{h}{\varepsilon}\cos t_n$, on obtient le système 2x2 :

$$\begin{cases} A\cos h + B\sin h = A\left(1-\frac{h}{\varepsilon}\right) + \frac{h}{\varepsilon} \\ -A\sin h + B\cos h = B\left(1-\frac{h}{\varepsilon}\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A\left(\cos h - \left(1 - \frac{h}{\varepsilon}\right)\right) + B \sin h = \frac{h}{2} \\ -A \sin h + B\left(\cos h - \left(1 - \frac{h}{\varepsilon}\right)\right) = 0 \end{cases}$$

$\iff MX = B$, avec $X = (A, B)^T$,

$$M = \begin{pmatrix} \cos h - \left(1 - \frac{h}{\varepsilon}\right) & \sin h \\ -\sin h & \cos h - \left(1 - \frac{h}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \left(\frac{h}{2}, 0\right)^T.$$

Le déterminant est $\det M = \left(\cos h - \left(1 - \frac{h}{\varepsilon}\right)\right)^2 + \sin^2 h \geqslant 0$, donc on peut déterminer A et B. On utilise que $\cos h = 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^4)$, $\sin h = h + o(h^3)$ et on écrit $\det M = \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^2 + O\left(\frac{h^3}{\varepsilon}\right) = \frac{h^2}{\varepsilon^2}\left(1 + O(h\varepsilon)\right)$.

Ainsi $A = \frac{1}{\det M} \begin{vmatrix} h/\varepsilon & \sin h \\ 0 & \cos h - \left(1 - \frac{h}{2}\right) \end{vmatrix} = \dots = 1 + O(h\varepsilon)$,

et $B = \frac{1}{\det M} \begin{vmatrix} \cos h - \left(1 - \frac{h}{2}\right) & h/\varepsilon \\ -\sin h & 0 \end{vmatrix} = \frac{h/\varepsilon \sin h}{\det M} = \varepsilon + o(h\varepsilon^2)$.

Ainsi la solution générale de (a) est donnée par :

$$\begin{aligned} y_n &= C\left(1 - \frac{h}{\varepsilon}\right)^n + A \cos t_n + B \sin t_n \\ &= C\left(1 - \frac{h}{\varepsilon}\right)^n + \cos t_n + \varepsilon \sin t_n + o(h\varepsilon) \end{aligned}$$

Si on veut $y_0 = 0$, on a $C = -1$, donc

$$y_n = -\left(1 - \frac{h}{\varepsilon}\right)^n + \cos t_n + \varepsilon \sin t_n + O(h\varepsilon).$$

(c) La solution numérique est bornée ssi $\left(1 - \frac{h}{\varepsilon}\right)^n$ est bornée, ce qui est le cas ssi $\left|1 - \frac{h}{\varepsilon}\right| < 1 \iff h < 2\varepsilon$.

(d) Le schéma d'Euler implicite s'écrit :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1}) \\ &= y_n + h\left(\frac{-1}{\varepsilon} y_{n+1} + \frac{1}{\varepsilon}\cos(t_{n+1})\right) \end{aligned}$$

$$\iff \left(1 + \frac{h}{\varepsilon}\right) y_{n+1} = y_n + \frac{h}{\varepsilon}\cos(t_{n+1}).$$

On commence par résoudre l'équation "homogène" :

$(1+\frac{h}{\varepsilon}) z_{n+1} = z_n$, qui est la suite géométrique $z_n = C(1+\frac{h}{\varepsilon})^{-n}$, $C \in \mathbb{R}$.

En cherchant une sol. particulière sous la forme $A\cos t_n + B \sin t_n$, on trouve :

$$y_n = C(1+\frac{h}{\varepsilon})^{-n} + \cos t_n + \varepsilon \sin t_n + O(h\varepsilon).$$

Maintenant, $y_n$ est bornée ssi $(1+\frac{h}{\varepsilon})^{-n}$ est bornée, donc ssi $\left|1+\frac{h}{\varepsilon}\right| < 1$, ce qui est toujours vérifié car $h>0$.

(e) Sur la figure en haut, pour $h = \frac{1.975}{50}$ : on voit que la solution numérique oscille fortement avant de converger très lentement.

Pour $h = \frac{1.875}{50}$, les oscillations sont moins fortes et la convergence semble plus rapide.

Sur la figure en dessous, pour $h = \frac{2.1}{50}$ : la solution numérique calculée avec le schéma d'Euler explicite diverge. Cela confirme bien le résultat de la question (c) $\varepsilon = \frac{1}{50}$, si $h > 2\varepsilon$ on a une solution non-bornée. Pour $h < 2\varepsilon$, les oscillations s'estompent, la solution est bornée.

Sur la figure avec Euler implicite, il n'y a pas d'oscillations parasites, la solution est bornée même pour $h > 2\varepsilon$. On remarque tout de même un écart entre les deux solutions pour $t$ petit.

Remarque : La solution exacte $-e^{-t/\varepsilon} + \cos t + \varepsilon \sin t + O(\varepsilon^2)$ comprend une partie transitoire $e^{-t/\varepsilon} = e^{-50t}$ tendant très vite vers 0. Le schéma d'Euler implicite étant d'ordre 1, il n'est pas assez précis pour capturer cette variation brusque entre 0 et 1.

Sur la dernière figure, le schéma est d'ordre 2 et semble capturer la phase transitoire pour $t$ petit, et bien approcher la sol. exacte sans restriction sur h. L'équation $y' = -\frac{1}{\varepsilon} y + \frac{1}{\varepsilon} \cos t$ possède une solution qui varie brusquement, ainsi le schéma d'E.E. nécessite de choisir un pas h très petit, sinon il sera instable.

Les schémas implicites donnent des résultats corrects sans restriction sur le pas de temps. Ils sont d'autant + précis que l'ordre est élevé.

<u>Remarque</u> : la fonction $f(t,y) = -\frac{1}{\varepsilon} y + \cos t$ est lipschitzienne par rapport à y mais la constante de Lipschitz $L = \frac{1}{\varepsilon} >> 1$, c'est ce qui rend difficile la convergence des schémas explicites sans fixer un pas h très petit.