HAS101X — Révisions d'analyse réelle

Sacha Cardonna

Faculté des Sciences, Université de Montpellier

Octobre 2024

Fonctions usuelles

Définition d'une fonction

Une fonction associe à chaque élément d'un ensemble de départ un unique élément d'un ensemble d'arrivée. Soit f une fonction telle qu'elle possède :

- Un ensemble de départ : $\mathcal{D}_f$ (exemple : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathbb{N}$...)
- Un ensemble d'arrivée : $\mathcal{A}$ (exemple : $\mathcal{A} = \mathbb{R}^+$, $[0, \pi]$, $\mathbb{Z}$...)

On note alors

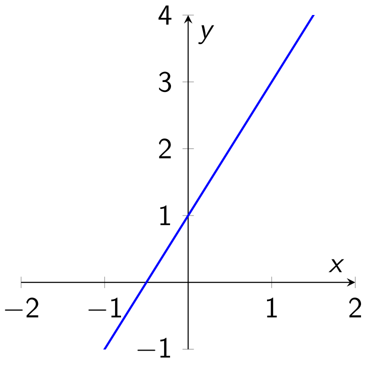
$$\begin{aligned} f : \mathcal{D}_f &\to \mathcal{A} \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Fonction affine

Forme : $f(x) = ax + b$

Propriétés

- a est le coefficient directeur (pente)
- b est l'ordonnée à l'origine
- Représentation graphique : droite

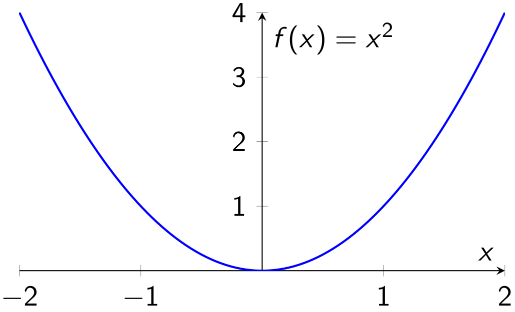


$f(x) = 2x + 1$

Fonction carré

Forme : $f(x) = x^2$
Propriétés

- Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées
- Minimum en $x = 0$

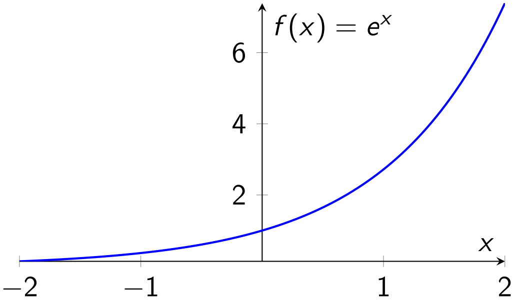


Fonction exponentielle

Forme : $f(x) = e^x$

Propriétés

- Croissante sur $\mathbb{R}$ et toujours positive
- $f(0) = 1$

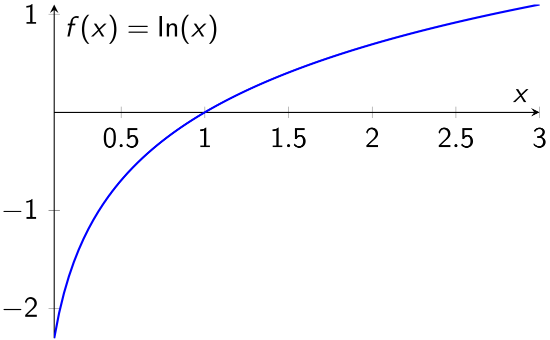


Fonction logarithme népérien

Forme : $f(x) = \ln(x)$

Propriétés

- Définie pour $x > 0$
- Croissante sur $]0, +\infty[$



Liens entre $\ln(x)$ et e^x

Relation fondamentale

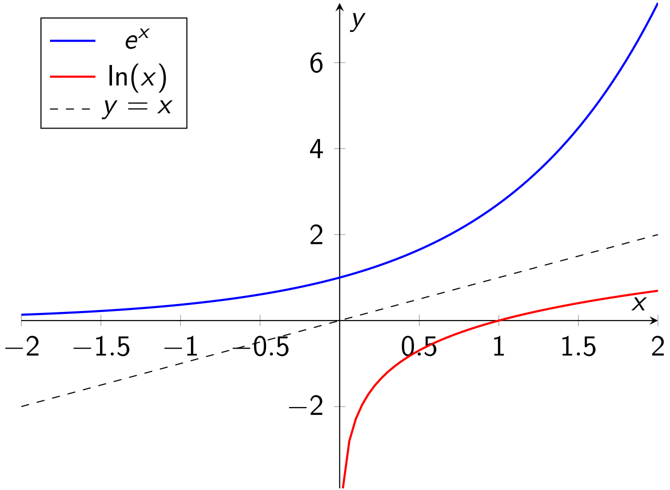
- $\ln(x)$ est l'inverse de la fonction exponentielle e^x.
- Cela signifie que :

$$\begin{aligned} e^{\ln(x)} &= x, \quad \text{pour tout } x > 0 \\ \ln(e^x) &= x, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Propriétés graphiques

- Les graphiques de e^x et $\ln(x)$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.
- e^x est définie et croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\ln(x)$ est définie pour $x > 0$ et croissante sur $(0, +\infty)$.

Liens entre $\ln(x)$ et e^x



Formules importantes : ln et e^x

Logarithme népérien

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$

Exponentielle

- $e^0 = 1$
- $e^1 = e$
- $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $e^{n \cdot a} = (e^a)^n$

Polynômes

Définition d'un polynôme du second degré

Forme générale :

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

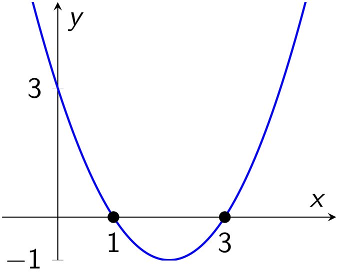
Caractéristiques

- a, b, c sont des coefficients réels ($a, b, c \in \mathbb{R}$).
- Le graphe d'un polynôme du second degré est une parabole.
- Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut (minimum).
- Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas (maximum).

Exemples : Comparaison entre $a > 0$ et $a < 0$

Cas 1 : $a > 0$
Exemple : $P(x) = x^2 - 4x + 3$

- $\Delta = 4$, deux racines réelles $x_1 = 1$, $x_2 = 3$
- Parabole tournée vers le haut



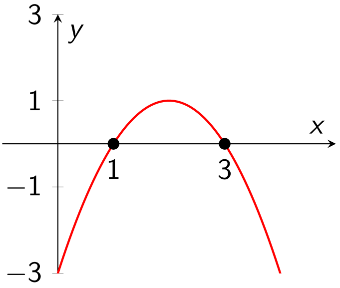
$P(x) = x^2 - 4x + 3$

Exemples : Comparaison entre $a > 0$ et $a < 0$

Cas 2 : $a < 0$

Exemple : $P(x) = -x^2 + 4x - 3$

- $\Delta = 4$, deux racines réelles $x_1 = 1$, $x_2 = 3$
- Parabole tournée vers le bas



$P(x) = -x^2 + 4x - 3$

Résolution d'une équation quadratique

$$(E) : ax^2 + bx + c = 0$$

Pour résoudre l'équation (E), on utilise le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Cas possibles

- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution réelle double :

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle (deux solutions complexes).

Factorisation à partir des racines

Lorsque le discriminant Δ est positif ou nul, on peut factoriser le polynôme à partir de ses racines.

Forme factorisée

- Si $\Delta > 0$ (deux racines distinctes) :

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Si $\Delta = 0$ (racine double) :

$$P(x) = a(x - x_1)^2$$

Exemple : Si $P(x) = 2x^2 - 4x + 2$, alors $\Delta = 0$ et $x_1 = x_2 = 1$, donc :

$$P(x) = 2(x - 1)^2$$

Qu'est-ce qu'un tableau de signes ?

Définition

- Un tableau de signes est un outil graphique qui permet de représenter les variations du signe d'un polynôme ou d'une fonction sur un intervalle donné.
- Il est particulièrement utile pour déterminer où un polynôme est positif, négatif ou nul.

Exemple

- On représente les racines du polynôme et on observe les variations de signe entre ces racines.
- Pour un polynôme du second degré, on identifie ses racines et le comportement du signe entre celles-ci.

Tableau de signes d'un polynôme du second degré

Exemple : $P(x) = x^2 - 4x + 3$

Étape 1 : Trouver les racines

- Résolvons $P(x) = 0$.
- $x^2 - 4x + 3 = 0$ a pour racines $x = 1$ et $x = 3$.

Étape 2 : Tableau de signes (dsl j'arrivais pas à faire un tableau)

- $P(x) > 0$ sur $]-\infty, 1[$ et $]3, +\infty[$
- $P(x) = 0$ en $x = 1$ et $x = 3$
- $P(x) < 0$ sur $]1, 3[$

Tableau de signes d'un polynôme factorisé

Exemple : $P(x) = (x-1)(x-3)$ donc $P(x) = 0$ pour $x = 1$ ou 3.

Signe de chaque facteur et du polynôme

- Pour $x - 1$:
  - $x - 1 < 0$ si $x < 1$
  - $x - 1 = 0$ si $x = 1$
  - $x - 1 > 0$ si $x > 1$
- Pour $x - 3$:
  - $x - 3 < 0$ si $x < 3$
  - $x - 3 = 0$ si $x = 3$
  - $x - 3 > 0$ si $x > 3$
- Pour $P(x) = (x-1)(x-3)$:
  - $P(x) > 0$ pour $x \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$
  - $P(x) = 0$ pour $x = 1$ et $x = 3$
  - $P(x) < 0$ pour $x \in]1, 3[$

Limites

Définition intuitive d'une limite

Limite d'une fonction

Soit $f(x)$ une fonction définie au voisinage d'un point a.
On dit que $f(x)$ tend vers une limite $L \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a si, pour les valeurs de x proches de a, les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de L.

Notation

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

- Si $f(x)$ se rapproche de L lorsque $x \to a$, alors L est la limite de $f(x)$ en a.

Définition formelle d'une limite

Définition formelle

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

signifie que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout x vérifiant $0 < |x - a| < \delta$, on ait $|f(x) - L| < \epsilon$.

Interprétation

Cela signifie que l'on peut rendre $f(x)$ aussi proche de L que l'on souhaite en choisissant x suffisamment proche de a.

Notation : $\lim_{x \to a^+}$ pour limite à droite et $\lim_{x \to a^-}$ pour limite à gauche.

Limites à l'infini

Limite à l'infini

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

signifie que, lorsque x tend vers $+\infty$, les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de L.

Limite à moins l'infini

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

signifie que, lorsque x tend vers $-\infty$, les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de L.

Limite infinie

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

signifie que $f(x)$ devient aussi grand (ou petit) que l'on veut lorsque x se rapproche de a.

Limites fondamentales et usuelles

Limites fondamentales et usuelles

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ pour tout $n > 0$

Exemples de calcul de limites

Exemple 1 : Calcul de $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

$$\lim_{x \to 2} (x+2) = 4$$

Exemple 2 : Calcul de $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+3x}{x^2-5x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+3x}{x^2-5x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{5}{x}} = 2$$

Formules et règles importantes

Règle de limite

- $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

Règle de L'Hôpital

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ ou $\pm\infty$, alors :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

à condition que la limite du quotient des dérivées existe.

Formes indéterminées

Certaines limites mènent à des expressions du type $0/0$, ∞/∞, $0 \cdot \infty$, etc...
Ces expressions sont appelées **formes indéterminées**, car elles ne permettent pas de conclure directement sur la limite. Par exemple :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

En effet, lorsque $x \to 0$, $\sin(x) \to 0$ et $x \to 0$, donc on a une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$.

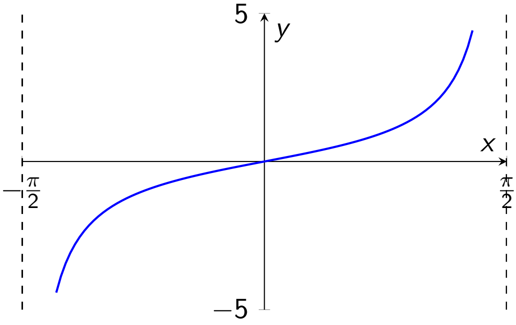
Résolution avec la règle de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

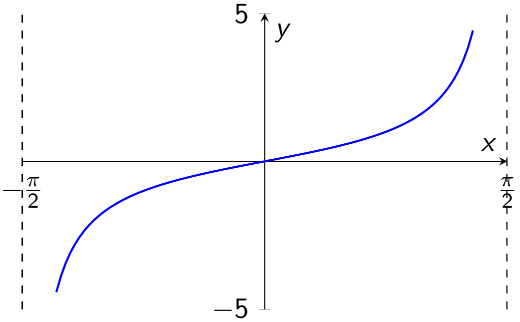
Limites de la fonction tangente sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Fonction : $f(x) = \tan(x)$

- $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to 0} \tan(x) = 0$



Limites de la fonction tangente sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



Interprétation

- La fonction tangente a des asymptotes verticales en $x = \pm\frac{\pi}{2}$.
- Elle tend vers l'infini en approchant ces points : $+\infty$ à gauche et $-\infty$ à droite.

Dérivation

Définition de la dérivée

Dérivée d'une fonction

- La dérivée d'une fonction f en un point $x = a$ représente le taux de variation instantané de la fonction en ce point.
- Géométriquement, cela correspond à la pente de la tangente à la courbe de f en ce point.

Définition formelle

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Notation

- $f'(x)$ ou $\frac{df}{dx}$ ou $\frac{d}{dx}f(x)$
- La dérivée est définie pour tout x où la limite existe.

Interprétation géométrique

Dérivée et tangente

- La dérivée d'une fonction en un point $x = a$ est la pente de la tangente à la courbe en ce point.
- Si $f'(a) > 0$, la fonction est croissante en a.
- Si $f'(a) < 0$, la fonction est décroissante en a.
- Si $f'(a) = 0$, le point a peut être un extremum (maximum ou minimum).

Formules de dérivation

Principales formules de dérivation

- Dérivée d'une constante : $(c)' = 0$
- Dérivée de x^n : $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
- Dérivée de e^x : $(e^x)' = e^x$
- Dérivée de $\ln(x)$: $(\ln(x))' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$
- Dérivée de $\sin(x)$: $(\sin(x))' = \cos(x)$
- Dérivée de $\cos(x)$: $(\cos(x))' = -\sin(x)$

Formules de dérivation : produits, quotients, puissances

Formules dans les cas où u et v sont des fonctions

- Dérivée d'un produit :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

- Dérivée d'un quotient :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

- Dérivée d'une puissance :

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

- Dérivée d'une composée (règle de la chaîne) :

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Exemple de calcul de dérivées

Exemple 1 : Dérivée de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

Exemple 2 : Dérivée de $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ (règle du quotient)

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

Exemple 3 : Dérivée de $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ (règle de la chaîne)

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$$

Lien entre dérivée et tableau de signes

Rôle de la dérivée

- La dérivée $f'(x)$ permet de déterminer si une fonction $f(x)$ est croissante ou décroissante sur un intervalle.
- Le signe de $f'(x)$ donne des informations sur les variations de $f(x)$:
  - Si $f'(x) > 0$, la fonction $f(x)$ est croissante.
  - Si $f'(x) < 0$, la fonction $f(x)$ est décroissante.
  - Si $f'(x) = 0$, cela peut indiquer un extremum (maximum ou minimum).

Méthodologie

1. Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe sur les différents intervalles.
2. Utiliser le tableau de signes de $f'(x)$ pour déduire les variations de $f(x)$.

Tableau de signes et variations de la fonction

Exemple : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Étape 1 : Calcul de la dérivée

- $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

Étape 2 : Signe de $f'(x)$

- $f'(x) > 0$ pour $x \in]-\infty, 0[$ et $x > 2$
- $f'(x) < 0$ pour $x \in]0, 2[$
- $f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = 2$

Tableau de variation simplifié

Étape 3 : Tableau de variation de $f(x)$

Signe de $f'(x)$:

- $f'(x) > 0$ sur $]-\infty, 0[$ et $]2, +\infty[$ (croissance)
- $f'(x) < 0$ sur $]0, 2[$ (décroissance)
- $f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = 2$ (extrema locaux)

Variations de $f(x)$:

- $f(x)$ est croissante sur $]-\infty, 0[$ et $]2, +\infty[$
- $f(x)$ est décroissante sur $]0, 2[$
- $f(x)$ atteint un maximum local en $x = 0$ et un minimum local en $x = 2$

Méthodologie pour construire un tableau de variation de f

1. **Calcul de la dérivée** : Trouver $f'(x)$.
2. **Trouver les racines de $f'(x)$** : Résoudre $f'(x) = 0$ pour trouver les valeurs critiques de x où la fonction change de comportement (ou pas).
3. **Faire le tableau de signes de $f'(x)$** : Analyser les signes de $f'(x)$ dans les différents intervalles.
4. **En déduire les variations de $f(x)$** : Utiliser le tableau de signes pour déterminer si $f(x)$ est croissante ou décroissante dans chaque intervalle.
5. **Construire le tableau de variation** : Résumer les variations de $f(x)$ et identifier les extrema locaux.

Intégration

Lien entre dérivée et intégration

Lien : théorème fondamental de l'analyse

- Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$, alors :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

où C est une constante d'intégration.

- Cela signifie que l'intégration est l'opération inverse de la dérivation.

Exemple

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Définition de l'intégrale indéfinie

Intégrale indéfinie

$$\int f(x)\,dx$$

L'intégrale indéfinie d'une fonction $f(x)$ est l'ensemble de toutes ses primitives. Elle représente une fonction dont la dérivée est égale à $f(x)$.

Forme générale

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ et C est une constante d'intégration.

Exemple

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$$

Définition de l'intégrale définie

Intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

L'intégrale définie de $f(x)$ entre les bornes a et b est une mesure de l'aire sous la courbe $y = f(x)$ entre $x = a$ et $x = b$.

Formule

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$.

Exemple

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{3}\cdot 1^3\right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Formules usuelles d'intégration

Principales formules :

- $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x \, dx = e^x + C$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
- $\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C$
- $\int \sec^2(x) \, dx = \tan(x) + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan(x) + C$

Formules d'intégration avec u et v des fonctions

Formules importantes

- Intégration d'un quotient (règle de la fraction) :

$$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u(x)| + C$$

- Intégrale d'une composée (substitution) :

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

où $u = g(x)$.

- Intégrale d'une fonction puissance :

$$\int u^n \cdot u'\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

Propriétés des intégrales

Propriétés de l'intégrale définie :

- Linéarité :

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\int_a^b k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int_a^b f(x)\, dx$$

- Changement de bornes :

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

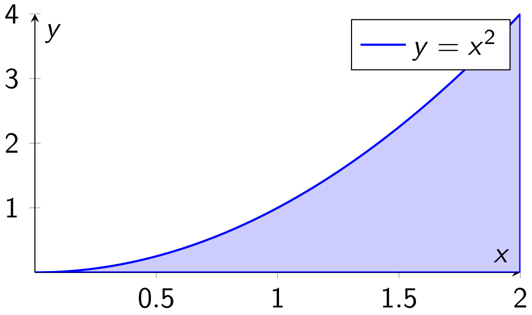
- Additivité :

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$$

Exemple d'intégration avec un graphe

Exemple : Calcul de l'aire sous la courbe $y = x^2$ entre $x = 0$ et $x = 2$.

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$



Trigonométrie

Propriétés des fonctions trigonométriques

Fonction cosinus

- **Périodicité :** $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
- **Symétrie paire :** $\cos(-x) = \cos(x)$
- **Valeurs particulières :** $\cos(0) = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos(\pi) = -1$

Fonction sinus

- **Périodicité :** $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
- **Symétrie impaire :** $\sin(-x) = -\sin(x)$
- **Valeurs particulières :** $\sin(0) = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\sin(\pi) = 0$

Fonction tangente

- **Lien** cos/sin **:** $\tan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
- **Périodicité :** $\tan(x + \pi) = \tan(x)$
- **Symétrie impaire :** $\tan(-x) = -\tan(x)$
- **Valeurs particulières :** $\tan(0) = 0$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

Formules importantes de trigonométrie

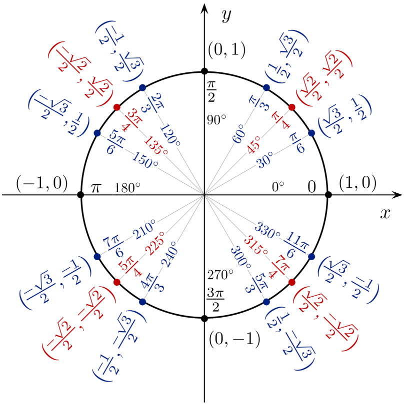
Formules d'addition et de soustraction :

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
- $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \quad (\text{si } \tan(a)\tan(b) \neq 1)$
- $\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)} \quad (\text{si } \tan(a)\tan(b) \neq -1)$

Formules d'angle double :

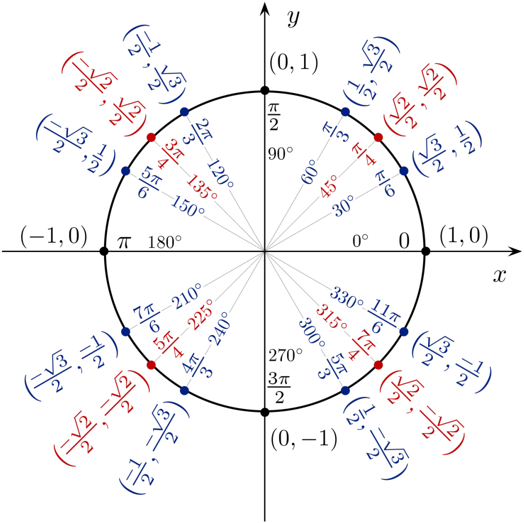
- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
- $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)} \quad (\text{si } \tan(a) \neq \pm 1)$

Cercle trigonométrique



- Le cosinus correspond à l'axe des abscisses (x).
- Le sinus correspond à l'axe des ordonnées (y).
- Période 2π pour le cosinus et le sinus.

Cercle trigonométrique



Propriétés du cercle trigonométrique

- Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1, centré à l'origine $(0, 0)$ du plan.
- Les angles sont mesurés en radians dans le sens anti-horaire à partir de l'axe des abscisses positif.
- Un angle θ sur le cercle est associé à un point $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ sur le cercle.
- **Périodicité :** Les fonctions $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont périodiques de période 2π, car $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$ et $\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$.
- **Symétrie :**
  - $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ (fonction paire).
  - $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ (fonction impaire).

Propriétés du cercle trigonométrique

Quadrants :

- Dans le **premier quadrant** ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$), $\sin(\theta) > 0$ et $\cos(\theta) > 0$.
- Dans le **deuxième quadrant** ($\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$), $\sin(\theta) > 0$ et $\cos(\theta) < 0$.
- Dans le **troisième quadrant** ($\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$), $\sin(\theta) < 0$ et $\cos(\theta) < 0$.
- Dans le **quatrième quadrant** ($\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$), $\sin(\theta) < 0$ et $\cos(\theta) > 0$.

Identité fondamentale :

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Résolution d'équations trigonométriques : $\cos(x)$ et $\sin(x)$

Avec le cosinus

- $\cos(x) = a$ admet des solutions si $-1 \leq a \leq 1$.
- Sur $\mathbb{R}$, les solutions sont :

$$x = \pm \arccos(a) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Exemple : $\cos(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Avec le sinus :

- $\sin(x) = a$ admet des solutions si $-1 \leq a \leq 1$.
- Sur $\mathbb{R}$, les solutions sont :

$$x = \arcsin(a) + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \arcsin(a) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Exemple : $\sin(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Résolution sur un intervalle restreint et sur $\mathbb{R}$

Sur un intervalle restreint :

- Résoudre $\cos(x) = \frac{1}{2}$ sur $[0, 2\pi]$:

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

Sur $\mathbb{R}$:

- Résoudre $\cos(x) = \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Cela couvre toutes les solutions avec les multiples de 2π (on rajoute tous les tours possible).

Exemples de résolution d'équations trigonométriques

Exemple 1 : Résolution de $\cos(x) = 0$ **sur** $[0, 2\pi]$

$$\cos(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

Exemple 2 : Résolution de $\sin(x) = \frac{1}{2}$ **sur** $\mathbb{R}$

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Exemple 3 : Résolution de $\tan(x) = 1$ **sur** $[0, 2\pi]$

$$\tan(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{4}$$

Résolution de l'équation $\cos(2x) = \frac{1}{2}$

Étape 1 : Simplification de l'équation

- On a $\cos(2x) = \frac{1}{2}$.
- La solution de $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ est $\theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Ici, $\theta = 2x$, donc $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Étape 2 : Résolution pour x

- Diviser par 2 pour isoler x :

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- C'est la solution générale sur $\mathbb{R}$.

Résolution de l'équation $\cos(2x) = \frac{1}{2}$

Étape 3 : Solutions sur un intervalle restreint

- Si on veut les solutions sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, on doit chercher les valeurs de x dans cet intervalle.
- L'équation générale est $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$.
- On vérifie les valeurs de k qui permettent d'obtenir des solutions dans $[0, 2\pi]$:

$$\text{Pour } k = 0 : x = \frac{\pi}{6}, \quad x = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{Pour } k = 1 : x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}, \quad x = \frac{5\pi}{6} + \pi = \frac{11\pi}{6}$$

- Donc les solutions dans $[0, 2\pi]$ sont :

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

Résolution de l'équation $\cos(2x) = \cos(x)$

Étape 1 : Utilisation de la formule de double angle

- Rappel : $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$
- Substituer dans l'équation :

$$2\cos^2(x) - 1 = \cos(x)$$

Étape 2 : Réarranger l'équation pour obtenir une forme quadratique

- Réarranger l'équation :

$$2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$$

- Il s'agit maintenant d'une équation quadratique en $\cos(x)$.

Résolution de l'équation $\cos(2x) = \cos(x)$

Étape 3 : Résolution de l'équation quadratique

- On résout l'équation $2y^2 - y - 1 = 0$, où $y = \cos(x)$.
- Utiliser la formule du discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$$

- Les solutions sont :

$$y_1 = \frac{1+3}{4} = 1, \quad y_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$

- Donc $\cos(x) = 1$ ou $\cos(x) = -\frac{1}{2}$.

Étape 4 : Solutions finales

- Si $\cos(x) = 1$, alors $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $\cos(x) = -\frac{1}{2}$, alors :

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Des questions ?