



Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2023-2024



HA8401H - PEIP Semestre 4

Calcul Différentiel et Intégral en Plusieurs Variables

Philippe Castillon, Benjamin Charlier, Matthieu Hillairet (¹)

Version du 22 février 2024.

1. Département de Mathématiques, CC 051, Université Montpellier II, Pl. Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5.
Mèl : philippe.castillon@umontpellier.fr

Table des matières

1 Motivations, premières notions	5
1.1 Motivations	5
1.2 Fonctions de plusieurs variables	6
1.2.1 Définitions, exemples	6
1.2.2 Représentation	6
1.2.3 Ensembles de niveaux	8
1.2.4 Fonctions partielles	10
1.3 Fonctions vectorielles	11
1.3.1 Courbes paramétrées	11
1.3.2 Fonctions vectorielles de plusieurs variables, champ de vecteurs	13
2 Courbes paramétrées	15
2.1 Fonctions vectorielles d'une variable réelle	15
2.1.1 Limite et continuité	15
2.1.2 Dérivabilité	17
2.2 Courbes paramétrées	19
2.2.1 Définition, exemples	19
2.2.2 Interprétation cinématique et paramétrage	20
2.2.3 Longueur, abscisse curviligne	23
2.3 Étude d'un arc paramétré	24
2.3.1 Étude locale	24
2.3.2 Branches infinies	25
2.3.3 Courbes en coordonnées polaires	26
2.3.4 Plan d'étude d'un arc paramétré	27
3 Topologie de \mathbb{R}^n	29
3.1 Normes et distances sur \mathbb{R}^n	29
3.1.1 Définition, exemples	29
3.1.2 Boules ouvertes, fermées	30
3.1.3 Normes équivalentes	31
3.2 limites et continuité	32
3.2.1 Limites de suites	32
3.2.2 Limites de fonctions	33
3.2.3 Continuité	36
3.3 Notions élémentaires de topologie	37
3.3.1 Ouverts et fermés	37
3.3.2 Intérieur et adhérence	38
3.3.3 Compacité	39

4 Calcul différentiel sur \mathbb{R}^n	41
4.1 Différentiabilité	41
4.1.1 Fonctions partielles, dérivées partielles	41
4.1.2 Différentiabilité	42
4.1.3 Vecteur gradient et matrice jacobienne	44
4.2 Fonctions de classe C^1	45
4.2.1 Définition, propriétés	45
4.2.2 Difféomorphismes	46
4.2.3 Fonctions implicites	47
4.3 Dérivées d'ordres supérieurs	48
4.3.1 Définitions et propriétés	48
4.3.2 Formule de Taylor et matrice hessienne	49
4.3.3 Étude des extréma locaux	50
5 Intégrales multiples	55
5.1 Rappel sur les intégrales simples	55
5.1.1 Construction de l'intégrale de Riemann	55
5.1.2 Intégrales à paramètres	55
5.2 Intégrales doubles	56
5.2.1 Intégrales double sur un rectangle	57
5.2.2 Parties élémentaires, parties simples	58
5.2.3 Intégrales doubles sur une partie simple	59
5.2.4 Propriétés des intégrales doubles	59
5.3 Intégrales triples	60
5.3.1 Intégrales triples sur un pavé	60
5.3.2 Sommation par piles, sommations par tranches	60
5.4 Formule de changement de variables	61
5.4.1 Cas des intégrales doubles	61
5.4.2 Cas des intégrales triples	62
5.5 Circulation d'un champ de vecteurs	62
5.5.1 Définitions et propriétés	62
5.5.2 Champs de gradient	64
5.5.3 Formule de Green-Riemann	64

Chapitre 1

Motivations, premières notions

1.1 Motivations

L'étude des fonctions d'une variable réelle peut être vue comme l'étude d'une seule quantité (la valeur prise par la fonction) dépendant d'un seul paramètre (la variable). Cependant, les phénomènes physiques sont généralement décrits par plusieurs quantités qui dépendent de plusieurs paramètres. On peut citer par exemple

- en thermodynamique, les quantités appelées fonctions d'état (comme l'entropie, l'enthalpie, l'énergie interne...) dépendent de paramètres appelés variables d'états (généralement la pression, le volume et la température). Cette dépendance est donnée par la nature du système considéré (gaz parfait, gaz de Van der Walls,...)
- En cinématique, on s'intéresse à la position et/ou à la vitesse d'un solide ponctuel en fonction du temps. On a une seule variable (le temps) et plusieurs quantités (les coordonnées de la position du point, celles de son vecteur vitesse). Là encore, la relation entre ces quantités et la variable est donnée par la nature du système physique (solide pesant dans un champ gravitationnel, solide chargé dans un champ électromagnétique,...)
- Si on s'intéresse à la dynamique du solide, les quantités précédentes décrivent la position de son centre de gravité, et il faut rajouter les quantités décrivant le mouvement du solide autour de son centre de gravité.
- En météorologie, on va par exemple considérer la température (une quantité), la pression (une quantité) et les vents (deux quantités : direction et vitesse) en fonction de la position (latitude et longitude deux variables)

Pour donner un cadre mathématique permettant la description de ces phénomènes physiques, il faut s'intéresser à des "fonctions" de la forme

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$$

Pour ces fonctions, la "variable" est un n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et les "valeurs prises" sont des p -uplets $(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^p$.

Le but de ce cours est de d'étendre pour ces fonctions les notions connues pour les fonctions d'une seule variable à valeurs réelles :

- Limite
- continuité
- dérivabilité
- intégration

1.2 Fonctions de plusieurs variables

1.2.1 Définitions, exemples

Définition 1.2.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une fonction f de n variables et à valeurs réelles (aussi appelé champ scalaire) est une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans \mathbb{R} . Elle fait correspondre à tout point $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ un unique point $y = f(x)$ de \mathbb{R} . On la note

$$f : \begin{cases} D & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

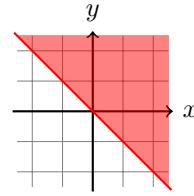
Dans la suite de ce chapitre nous donnerons principalement des exemples où $n = 2$ et $n = 3$.

Exemple. Le domaine de définition la fonction $f(x, y) = \sqrt{x + y}$ est l'ensemble

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0\}.$$

C'est la partie du plan représentée à droite.

Les valeurs prises par la fonction parcourent tout l'ensemble des réels positifs ou nul : $f(D) = \mathbb{R}^+$.

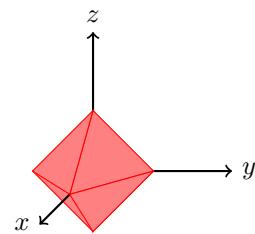


Exemple. Le domaine de définition de la fonction $f(x, y, z) = \ln(1 - |x| - |y| - |z|)$ est l'ensemble

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| < 1\}$$

qui est représenté à droite.

Les valeurs prises par la fonction parcourent tout l'ensemble des réels positifs ou nul : $f(D) = \mathbb{R}$.



1.2.2 Représentation

Définition 1.2.2. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de n variables définie sur D . Le graphe de f est le sous-ensemble $\mathcal{G}(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ défini par

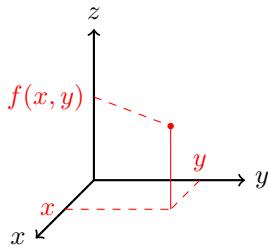
$$\mathcal{G}(f) = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \mid (x_1, \dots, x_n) \in D\}$$

Si $n = 1$ et $D \subset \mathbb{R}$, on retrouve la définition usuelle du graphe d'une fonction d'une variable. On peut représenter $\mathcal{G}(f)$ par une courbe dans le plan.

Lorsque $n \geq 3$, le graphe de f est un sous-ensemble d'un espace à $n + 1 \geq 4$ dimensions, qu'il est donc difficile de représenter.

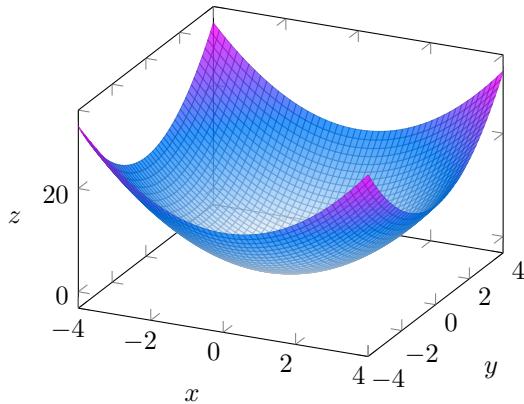
Dans le cas où $n = 2$, le graphe $\mathcal{G}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$ est un sous ensemble de \mathbb{R}^3 . Lorsque la fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est régulière on peut représenter ce graphe comme une surface (on peut penser à un "drap qui flotte") dans \mathbb{R}^3 .

Les axes Ox et Oy (qui forment le plus souvent le plan horizontal dans les représentations graphiques) sont réservés aux variables x et y tandis que l'axe Oz (le plus souvent l'axe vertical) représente la valeur de $z = f(x, y)$. Ainsi, pour tout $(x, y) \in D$ on a le point $(x, y, f(x, y)) \in \mathcal{G}(f)$.

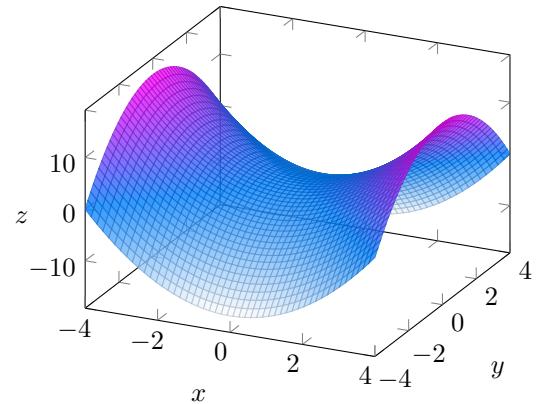


Pour visualiser ces surfaces dans l'espace, on peut utiliser une représentation en perspective

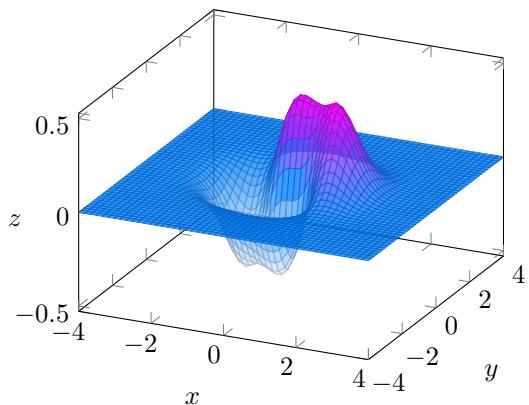
Exemple. Voici quelques exemples de graphes de fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Les couleurs ne servent qu'à améliorer la lisibilité.



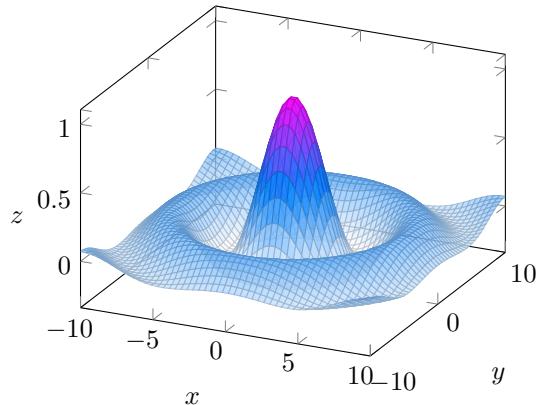
$$\text{Paraboloïde : } f(x, y) = x^2 + y^2$$



$$\text{Selle de cheval : } f(x, y) = x^2 - y^2$$



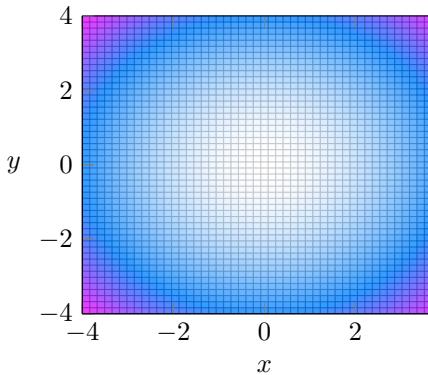
$$f(x, y) = (x^3 + y) \exp(-x^2 - y^2)$$



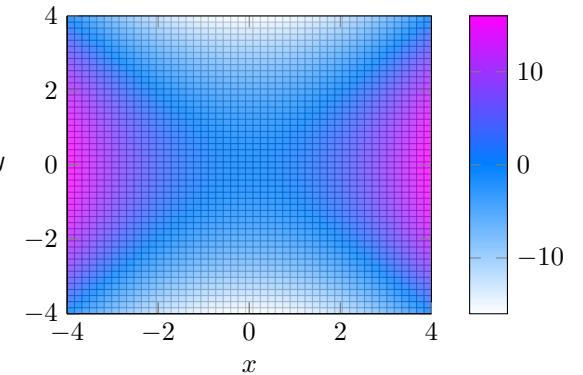
$$f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) / \sqrt{x^2 + y^2}$$

Une autre méthode de visualisation consiste à utiliser un code couleur pour représenter les différentes valeurs prises par la fonction : la façon dont les couleurs codent l'intensité du signal est indiqué par une échelle de couleurs présente à côté du graphique.

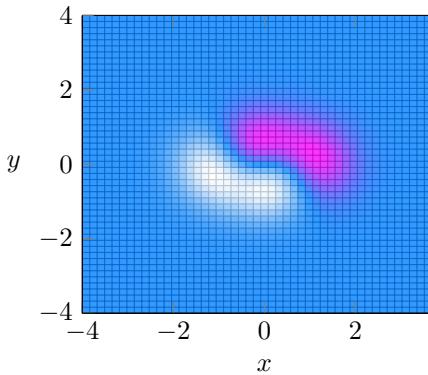
Exemple. Voici par exemple les fonctions du paragraphe précédent.



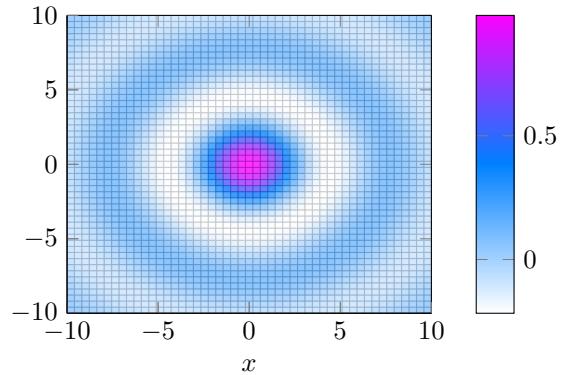
$$\text{Paraboloïde : } f(x, y) = x^2 + y^2$$



$$\text{Selle de cheval : } f(x, y) = x^2 - y^2$$

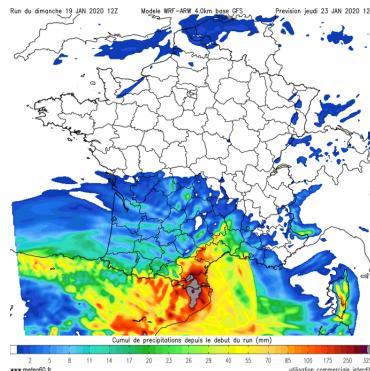


$$f(x, y) = (x^3 + y) \exp(-x^2 - y^2)$$



$$f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) / \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemple. Un exemple issu des prévisions météo donnant les cumuls de pluie prévu par un modèle :



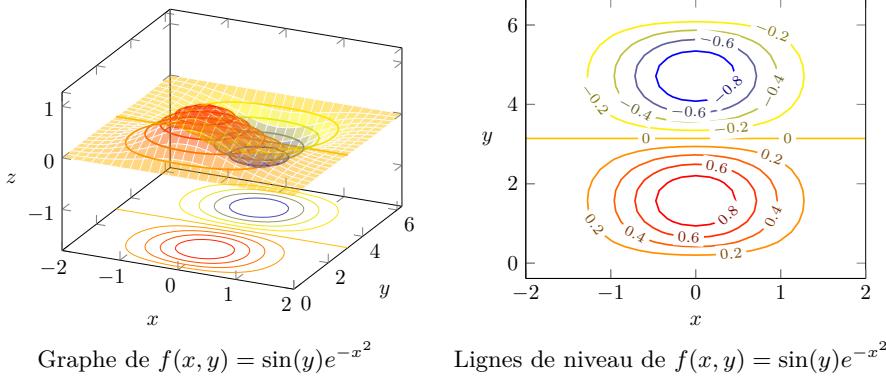
1.2.3 Ensembles de niveaux

Définition 1.2.3. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de n variables définie sur D . L'ensemble de niveau λ de f est

$$\mathcal{L}_\lambda(f) = \{x \in D \mid f(x) = \lambda\}.$$

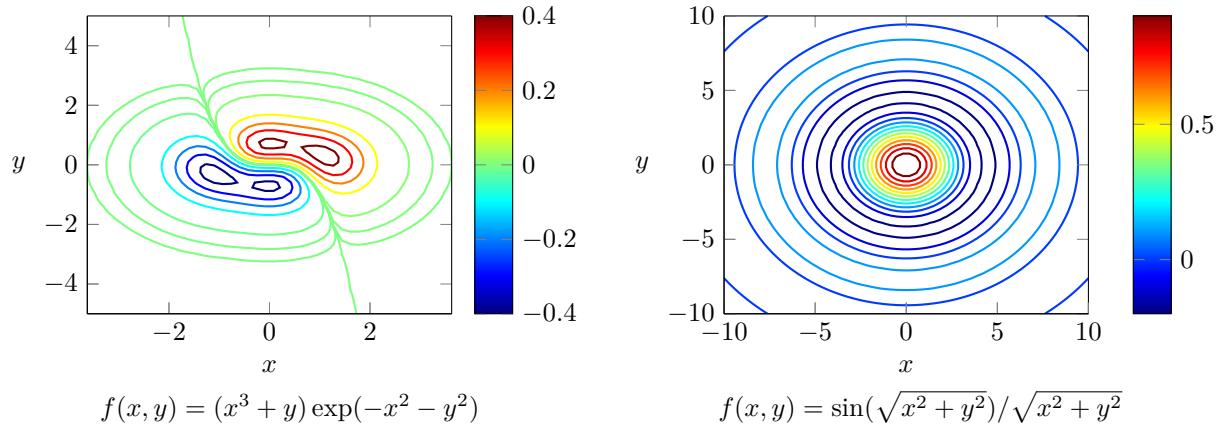
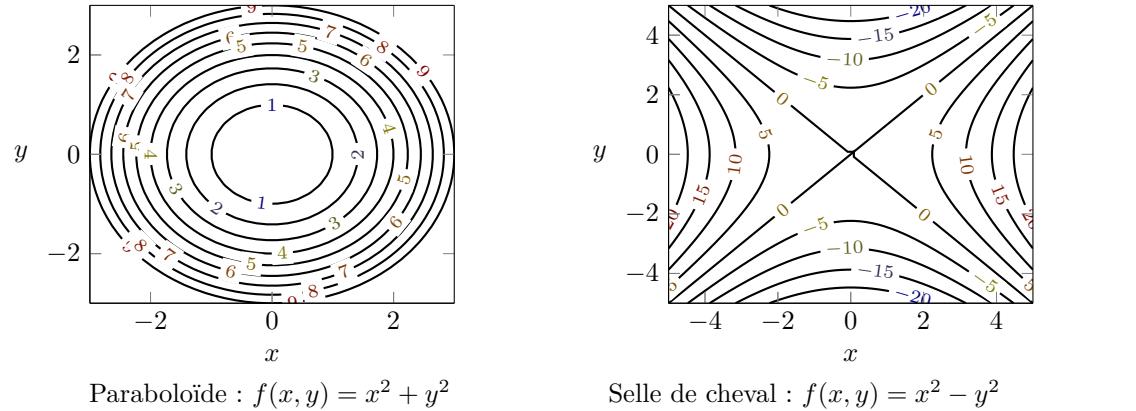
Dans le cas des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , on parle de lignes de niveau. Si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}_\lambda(f)$, alors $f(x_1, \dots, x_n) = \lambda$ et $(x_1, \dots, x_n, \lambda) \in \mathcal{G}(f)$. Réciproquement, si un point $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{G}(f)$ a

pour dernière coordonnée $x_{n+1} = \lambda$, alors $f(x_1, \dots, x_n) = \lambda$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}_\lambda(f)$. On peut donc tracer les lignes de niveau en projetant sur le plan horizontal $z = 0$ la courbe donnée par l'intersection du plan horizontal de hauteur λ (ie. le plan d'équation $z = \lambda$) et le graphe de la fonction f .

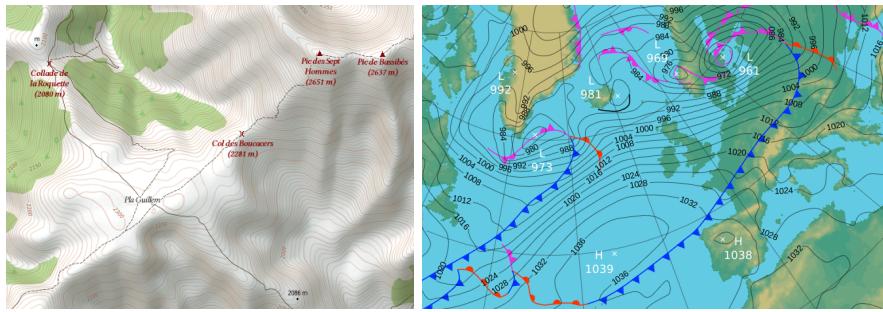


En pratique, on représente simultanément différentes courbes de niveau pour visualiser les différents niveaux du graphe. Cette représentation s'apparente aux cartes géographiques où le niveau correspond à l'altitude. En bref, les courbes de niveau d'une fonction $(x, y) \mapsto f(x, y)$ fournissent une représentation géométrique de f dans le plan, alors que son graphe en donne une dans l'espace.

Exemple. Voici les lignes de niveau des fonctions du paragraphe précédent représentées en couleur ou avec des labels.

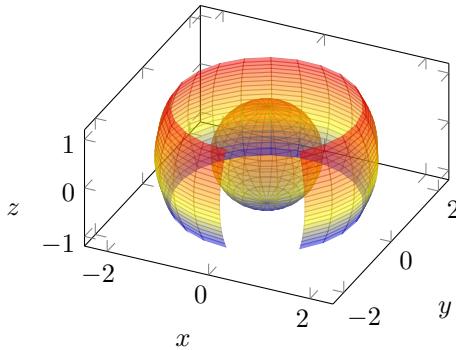


Quelques exemples de la vie courante :

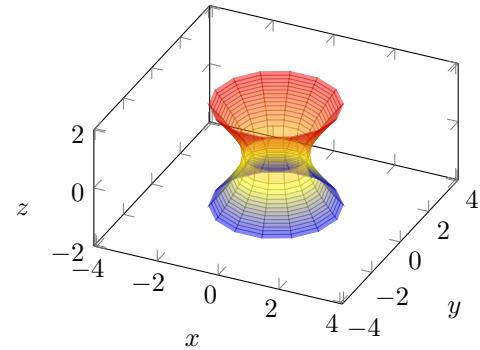


Pour les fonctions de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} , les ensembles de niveau sont appelés surfaces de niveau. Ces surfaces sont des sous-ensembles de \mathbb{R}^3 et cela permet de représenter la fonction alors qu'il serait délicat de représenter son graphe, qui est un sous-ensemble de \mathbb{R}^4 .

Exemple. Lorsque la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est polynomiale, on parle de surfaces algébriques. En voici deux exemples classiques :



Sphère : surfaces de niveau 1 et 4 (tronquée) de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$



Paraboloïde : Surface de niveau 1 de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

1.2.4 Fonctions partielles

Une façon d'étudier les fonctions de n variables est de se ramener à des fonctions d'une seule variable en "gelant" $n - 1$ variables.

Définition 1.2.4. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de n variables définie sur D . Pour $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$. et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la i ème fonction partielle en a de f est la fonction d'une variable

$$f_a^i : \begin{cases} D_a^i & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{cases}$$

où $D_a^i = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) \in D\}$.

Une fonction partielle de f étant une fonction d'une seule variable, son graphe est une courbe du plan. Cette courbe s'obtient en intersectant le graphe $\mathcal{G}(f)$ par un plan affine de dimension 2 dans \mathbb{R}^{n+1} .

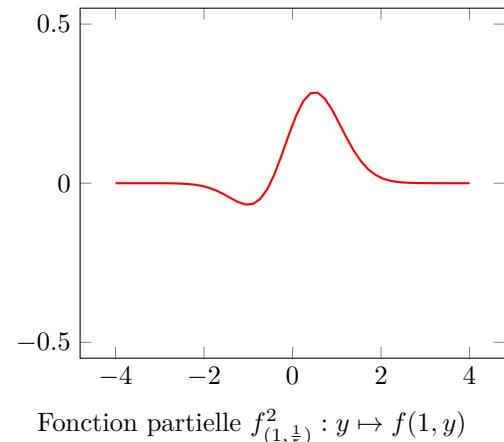
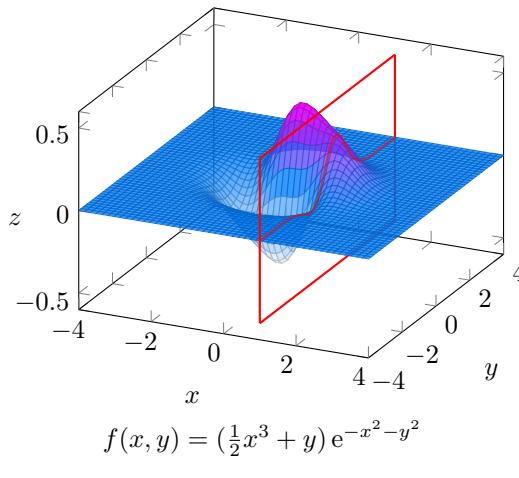
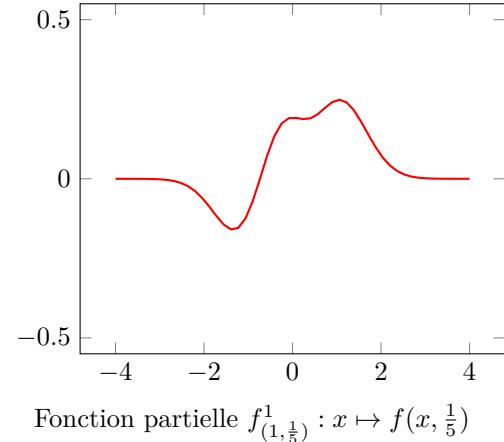
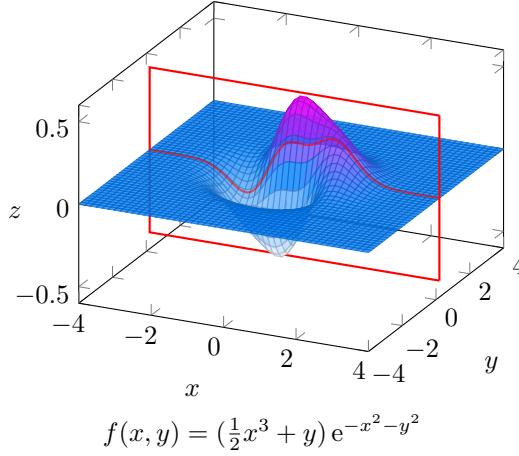
Dans le cas où $n = 2$, si $(a, b) \in D$ les fonctions partielles de f en (a, b) sont

$$f_{(a,b)}^1 : x \mapsto f(x, b) \quad \text{et} \quad f_{(a,b)}^2 : y \mapsto f(a, y).$$

L'intersection du graphe $\mathcal{G}(f)$ avec le plan affine d'équation $y = b$ donne $\{(x, b, f(x, b)) \mid (x, b) \in D\}$ et en projetant cet ensemble sur le plan des (x, z) on obtient $\{(x, f(x, b)) \mid x \in D_{(a,b)}^1\}$ qui est le graphe de la fonction $f_{(a,b)}^1$.

De même, l'intersection de $\mathcal{G}(f)$ avec le plan d'équation $x = a$ donne $\{(a, y, f(a, y)) \mid (a, y) \in D\}$ et en projetant cet ensemble sur le plan des (y, z) on obtient $\{(y, f(a, y)) \mid y \in D_{(a,b)}^2\}$ qui est le graphe de la fonction $f_{(a,b)}^2$.

Exemple. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (\frac{1}{2}x^3 + y)e^{-x^2-y^2}$, et soit $(a, b) = (1, \frac{1}{5})$. Les fonctions partielles de f en (a, b) sont $f_{(1, \frac{1}{5})}^1 : x \mapsto f(x, \frac{1}{5}) = (\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{5})e^{-x^2-\frac{1}{25}}$ et $f_{(1, \frac{1}{5})}^2 : y \mapsto f(1, y) = (\frac{1}{2} + y)e^{-1-y^2}$. On en a les représentations suivantes :



On reviendra sur cette notion de fonctions partielles dans le chapitre sur la différentiabilité des fonctions de plusieurs variables.

1.3 Fonctions vectorielles

1.3.1 Courbes paramétrées

Définition 1.3.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une fonction vectorielle d'une variable réelle est une application f définie sur un sous ensemble $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans \mathbb{R}^n . On la note note

$$f : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto f(t) \end{cases}$$

L'ensemble des applications de I dans \mathbb{R}^n se notera $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n . Alors toute $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ est définie par ses fonctions coordonnées $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f : t \mapsto f(t) = f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + \dots + f_n(t)e_n = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)).$$

En pratique, on considérera pratiquement toujours les cas $n = 2$ ou $n = 3$. En munissant \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 de leurs bases canoniques respectives, on peut alors identifier un vecteur à la matrice de ses coordonnées. On pourra donc noter également

$$f : t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad f : t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}$$

En résumé, considérer une fonction vectorielle d'une variable réelle, c'est simplement considérer n fonctions réelles de la variable réelle, ces fonctions étant "regroupée" sous la forme d'une fonction vectorielle.

Représentation

Le graphe d'une courbe paramétrée peut se définir de façon analogue aux graphes considérés précédemment. Ainsi, le graphe de $f : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto f(t) \end{cases}$ est donné par

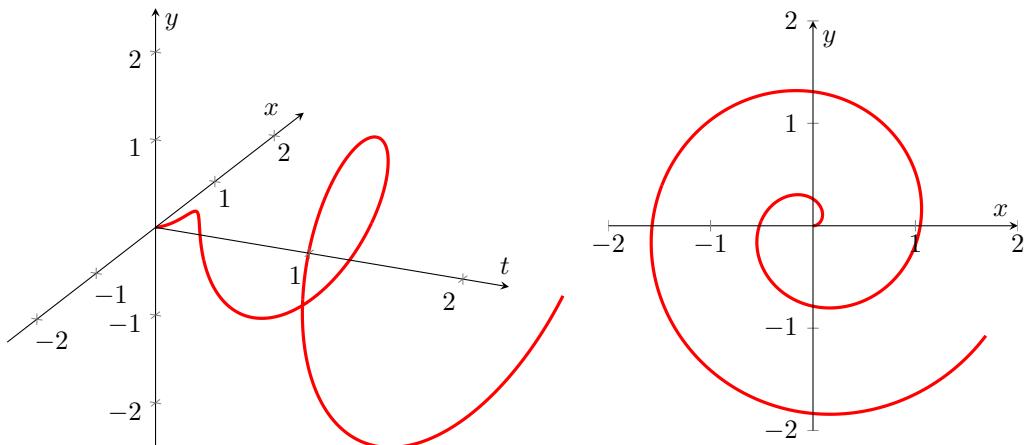
$$\mathcal{G}(f) = \left\{ (t, f_1(t), \dots, f_n(t)) \mid t \in I \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Dans la pratique on représente uniquement les valeurs prises par la fonction dans \mathbb{R}^n , et on l'appelle le support de la courbe paramétrée.

$$\mathcal{C}(f) = \left\{ (f_1(t), \dots, f_n(t)) \mid t \in I \right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Si un point est sur le support, on sait que c'est une valeur prise par la fonction, mais on ne sait pas pour quelle valeur de la variable t elle est atteinte.

Exemple. Considérons la fonction $f : \begin{cases} [0, 2] & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto (t \cos(6t), t \sin(6t)) \end{cases}$. Son graphe et son support sont représentés ci-dessous. Son support et la projection de son graphe sur le plan des (x, y) , on oublie la première coordonnée t .



1.3.2 Fonctions vectorielles de plusieurs variables, champ de vecteurs

Définition 1.3.2. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $D \subset \mathbb{R}^n$. Une fonction vectorielle de n variables réelle est une application f définie sur D et à valeurs dans \mathbb{R}^p . On la note note

$$f : \begin{cases} D & \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{cases}$$

L'ensemble des applications de D dans \mathbb{R}^n se notera $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^n)$.

Ici, $x \in D$ est un vecteur de \mathbb{R}^n , il s'écrit donc $x = (x_1, \dots, x_n)$, et pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ la fonction f_i est une fonction de n variables.

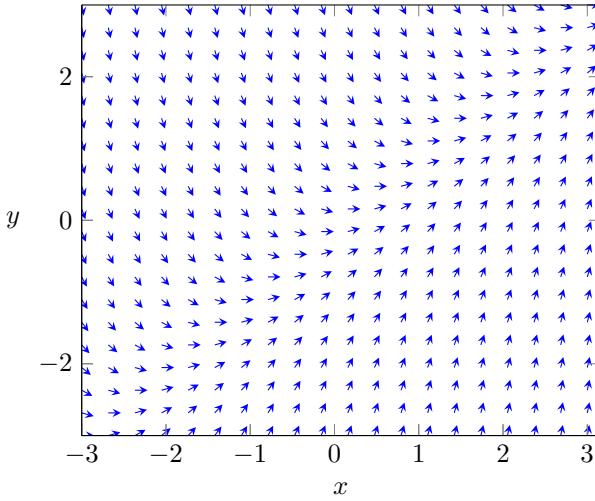
Comme pour les courbes paramétrées, la donnée d'un fonction vectorielle $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ est la donnée de p fonctions réelle de n variables réelles. On peut encore définir le graphe d'une telle fonction qui est un sous ensemble de \mathbb{R}^{n+p} , mais en général, on ne cherchera pas à les représenter.

Le seul cas où on peut représenter une telle fonction est celui des "champs de vecteurs".

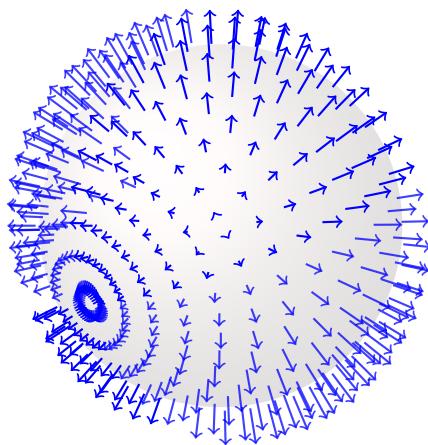
Définition 1.3.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $D \subset \mathbb{R}^n$. Un champ de vecteurs sur D est une application vectorielle $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Lorsque $n = 2$ ou 3 , on peut représenter un champ de vecteurs $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ par une collection de flèches : en chaque point $x \in D$ est représenté le vecteur $f(x) \in \mathbb{R}^n$. La terminologie "champ de vecteurs" est donc appropriée.

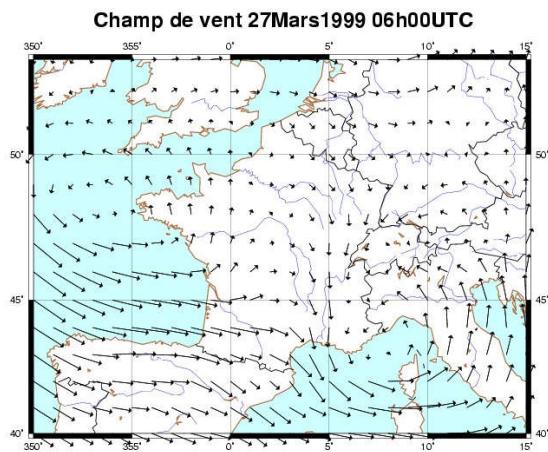
Exemple. Le champ de vecteurs $f(x, y) = \frac{0.15}{\sqrt{1+(x-y)^2}} (1, x - y)$ défini sur $D = \mathbb{R}^2$:



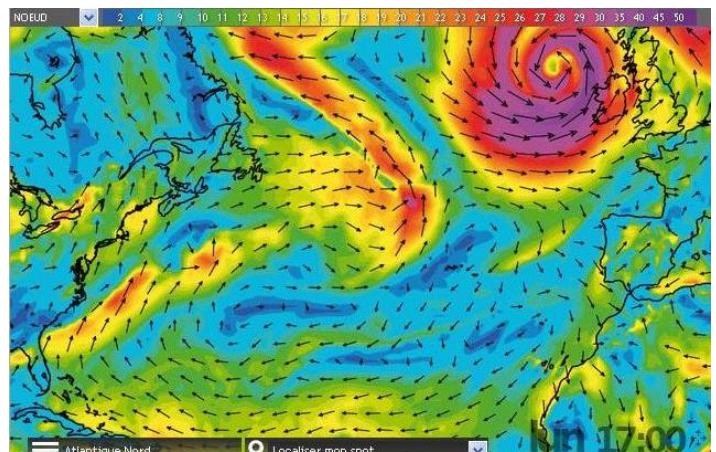
Exemple. Un champ de vecteurs $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini sur $D = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. On a $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. En chaque point du domaine de définition on a donc un vecteur ("une flèche") représenté :



Exemple. Exemples de la vie courante : cartes des vents.



Un représentation classique



l'intensité est donnée par un code couleur

Chapitre 2

Courbes paramétrées

2.1 Fonctions vectorielles d'une variable réelle

Définition 2.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une fonction vectorielle d'une variable réelle est une application f définie sur un sous ensemble $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans \mathbb{R}^n . On la note note

$$f : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto f(t) \end{cases}$$

L'ensemble des applications de I dans \mathbb{R}^n se notera $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$.

Comme vu au chapitre précédent, une fonction vectorielle à valeur dans \mathbb{R}^n est la donnée de n fonctions réelles.

Comme pour les fonctions réelles, les opérations usuelles sur \mathbb{R}^n définissent des opérations sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$:

- l'addition $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n) \times \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ définie par $(f, g) \mapsto f + g$ avec

$$\forall t \in I \quad (f + g)(t) = f(t) + g(t)$$

- pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ l'application $(\alpha, f) \mapsto \alpha f$ est une application $\mathbb{R} \times \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ (appelée multiplication externe). Elle est définie par

$$\forall t \in I \quad (\alpha f)(t) = \alpha f(t)$$

Ces opérations ont les propriétés qui font de $\mathcal{F}(I, E)$ un espace vectoriel :

- la somme est associative, commutative, admet un élément neutre (la fonction nulle $t \mapsto 0$) et chaque $f \in \mathcal{F}(I, E)$ admet un opposé $-f$ défini par $(-f)(t) = -f(t)$.
- la multiplication externe est associative et distributive sur la somme.

Proposition 2.1.2. L'espace $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel (de dimension infinie).

Preuve. La démonstration ne pose pas de problème particulier : il faut vérifier un à un les axiomes des \mathbb{R} -espace vectoriel. Noter que c'est le fait que l'espace d'arrivée \mathbb{R}^n soit un \mathbb{R} -espace vectoriel qui fait fonctionner le tout. \square

2.1.1 Limite et continuité

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle. On note $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions coordonnées pour $i = 1, \dots, n$. Avec ces notations on a :

Définition 2.1.3 (limite).

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ admet une limite $\ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ quand t tend vers $a \in I$, et on note $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \ell$, si $\lim_{t \rightarrow a} f_i(t) = \ell_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

En bref, f admet une limite en a si toutes ses fonctions coordonnées convergent en a , on a

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow a} f_1(t) \\ \vdots \\ \lim_{t \rightarrow a} f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} = \ell$$

Remarque. Cette notion de limite hérite de plusieurs des propriétés de la limite des fonctions réelles :

- la définition s'adapte sans difficulté aux notions de limites à droite (*i.e.* quand $t \rightarrow a$ avec $t > a$) noté $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t)$ et limite à gauche (*i.e.* quand $t \rightarrow a$ avec $t < a$) notée $\lim_{t \rightarrow a^-} f(t)$. En particulier, si $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow a^-} f(t) = \ell$ alors f admet ℓ pour limite en a .
- Si la limite existe, elle est unique.

Par ailleurs, on peut se ramener à la limite d'une fonction réelle en utilisant la norme euclidienne.

Proposition 2.1.4. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle, $a \in I$ et $\ell \in \mathbb{R}^n$. On a $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \ell$ si et seulement si $\lim_{t \rightarrow a} \|f(t) - \ell\| = 0$

On peut donc formaliser la définition de la limite de la façon suivante : soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle, $a \in I$ et $\ell \in \mathbb{R}^n$. On a $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall t \in I \quad |t - a| < \alpha \Rightarrow \|f(t) - \ell\| < \varepsilon.$$

Cette utilisation de la norme pour définir la notion de limite sera généralisée au chapitre suivant pour traiter le cas des fonctions de plusieurs variables.

Limite de suites

On définit de façon analogue la limite d'une suite vectorielle.

Définition 2.1.5. Une suite vectorielle de \mathbb{R}^n est une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n indexée par \mathbb{N} . On la note $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, où $u_k \in \mathbb{R}^n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n , pour tout $k \in \mathbb{N}$, le vecteur u_k s'écrit

$$u_k = u_{k,1}e_1 + \cdots + u_{k,n}e_n = (u_{k,1}, \dots, u_{k,n})$$

où (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^n . Comme pour les fonctions, une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n est la donnée de n suites réelles. La définition de la convergence est aussi similaire :

Définition 2.1.6. On dit que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet une limite $\ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, et on note $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \ell$, si $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{k,i} = \ell_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Comme pour les fonctions, on passe à la limite coordonnées à coordonnées, et on peut aussi utiliser la norme. Pour une suite vectorielle $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \ell$ si et seulement si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k - \ell\| = 0$, c'est à dire si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \geq N \Rightarrow \|u_k - \ell\| < \varepsilon.$$

Caractérisation séquentielle

De même que dans le cas des fonctions réelles on a la caractérisation séquentielle suivante :

Proposition 2.1.7 (caractérisation séquentielle). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a \in I$ et $\ell \in \mathbb{R}^n$.

On a $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \ell$ si et seulement si, $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(t_k) = \ell \in \mathbb{R}^n$ pour toute suite $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = a$

Dans cet énoncé, la suite $(f(t_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite vectorielle. Par conséquent, $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(t_k) = \ell$ signifie que pour tout $i = 1, \dots, n$ on a $f_i(t_k) \rightarrow \ell_i$ quand $k \rightarrow +\infty$.

Ce critère est très utile pour montrer qu'un fonction n'a pas de limite en a : si on trouve deux suites $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que

- $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = a$
- $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(s_k) = \ell_1$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(t_k) = \ell_2$
- $\ell_1 \neq \ell_2$

alors la fonction f n'a pas de limite en a .

Continuité

Comme pour les fonctions réelles, la notion de limite permet de définir la notion de continuité. Plus précisément on a :

Définition 2.1.8. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle. On dit que f est continue en $a \in I$ si

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$$

La fonction f est continue sur I si elle est continue en tout point $a \in I$.

Compte tenu de la définition de la limite, une fonction vectorielle est dite continue en a si toutes ses fonctions coordonnées sont continues en a . Si l'intervalle I est minoré (resp. majoré), on peut étendre facilement la définition de continuité à droite (resp. à gauche) pour le réel a situé à l'extrémité inférieure (resp. supérieure) de I .

On rappelle que la continuité est une notion locale : la continuité au point a de la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dépend des valeurs prises par la fonction au voisinage de a . En particulier, elle ne dépend pas des valeurs prises sur tout l'intervalle I (ce n'est pas une notion globale), et elle ne dépend pas uniquement de la valeur de la fonction au point a (ce n'est pas une notion ponctuelle).

Dans la suite, on notera $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions continues de $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^n .

Proposition 2.1.9. L'espace fonctionnel $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Preuve. Même remarque que pour la preuve de la Proposition 2.1.2 □

2.1.2 Dérivabilité

Comme pour la continuité, la dérivabilité se définit coordonné à coordonné.

Définition 2.1.10 (dérivabilité). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle. On dit que f est dérivable en $a \in I$ si toutes les fonctions coordonnées de f sont dérivables en a . La dérivée de f en a est alors

$$f'(a) = \begin{pmatrix} f'_1(a) \\ \vdots \\ f'_n(a) \end{pmatrix}$$

La fonction f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I .

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a $f'_i(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(a+h) - f_i(a)}{h}$ et par conséquent

$$f'(a) = \begin{pmatrix} f'_1(a) \\ \vdots \\ f'_n(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(a+h) - f_1(a)}{h} \\ \vdots \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h} \end{pmatrix} = \lim_{h \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{f_1(a+h) - f_1(a)}{h} \\ \vdots \\ \frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h} \end{pmatrix} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a+h) - f(a))$$

La définition de la drivée est donc la même que pour les fonctions réelles, c'est la limite du "taux d'accroissement" qui se définit avec les opérations d'espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Soient $f : t \mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t))$ une fonction vectorielle dérivable, et $a \in I$:

Pour tout i , la fonction f_i admet un DL à l'ordre 1 en a :

$$f_i(t) = f_i(a) + (t-a)f'_i(a) + (t-a)\varepsilon_i(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow a} \varepsilon_i(t) = 0$$

On obtient alors pour la fonction vectorielle f le développement suivant

$$f(t) = f(a) + (t-a)f'(a) + (t-a)\varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \vdots \\ \varepsilon_n(t) \end{pmatrix} \xrightarrow[t \rightarrow a]{} 0$$

Si $f'(a) \neq 0$, le support de la fonction $\delta : t \mapsto f(a) + (t-a)f'(a)$ est la droite passant par $f(a)$ de vecteur directeur $f'(a)$, c'est la droite tangente au support de f .

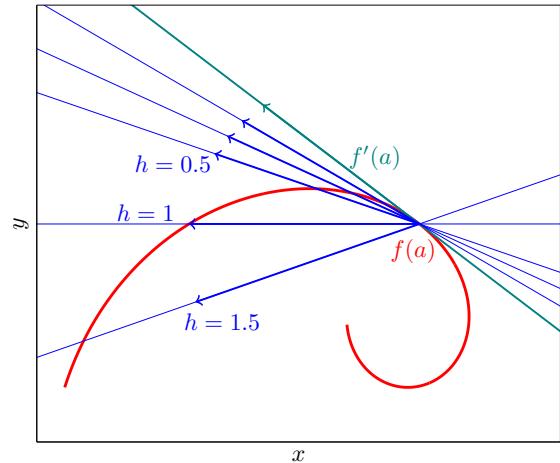
L'égalité $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a+h) - f(a))$ permet de voir la tangente comme la limite des droites sécantes.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(t) = (t \cos t, t \sin t)$$

Sur la figure on a représenté

- le support de la fonction f
- les droites passant par $f(a)$ et $f(a+h)$ pour différentes valeurs de h
- les vecteurs $\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$ pour ces mêmes valeurs de h
- la droite tangente au support de f en $f(a)$ et le vecteur $f'(a)$.



Bien sûr, si les fonctions coordonnées sont suffisamment régulières, on peut généraliser la définition aux dérivées d'ordres supérieurs. On alors $f'' = \begin{pmatrix} f''_1 \\ \vdots \\ f''_n \end{pmatrix}$ et plus généralement on note $f^{(k)} = \begin{pmatrix} f_1^{(k)} \\ \vdots \\ f_n^{(k)} \end{pmatrix}$ le vecteur des dérivées k -ème. On notera enfin $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions vectorielles admettant une dérivée d'ordre k continue (i.e. dont les fonctions coordonnées sont $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$).

Accroissements finis

On rappelle que le théorème des accroissements finis (TAF) pour une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Sous cette forme, le théorème ne se généralise pas aux fonctions vectorielles.

Exemple. On considère la fonction vectorielle $t \mapsto (\sin(t), \sin(2t))$.

On a le résultat plus faible suivant mais qui est valable pour les fonctions vectorielles et numériques :

Théorème 2.1.11 (Inégalité des accroissements finis). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe $M \geq 0$ tel que $\|f'(x)\| \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$. Alors $\|f(a) - f(b)\| \leq M(b - a)$.

2.2 Courbes paramétrées

2.2.1 Définition, exemples

Définition 2.2.1. Une courbe paramétrée (on dit aussi un arc paramétrée) de \mathbb{R}^n , est la donnée d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et d'une application $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 sur I .

L'image $\phi(I) \subset \mathbb{R}^n$ de ϕ est le support de la courbe paramétrée ϕ .

Lorsque ϕ est de classe \mathcal{C}^k on dit que la courbe paramétrée est de classe \mathcal{C}^k .

Exemple.

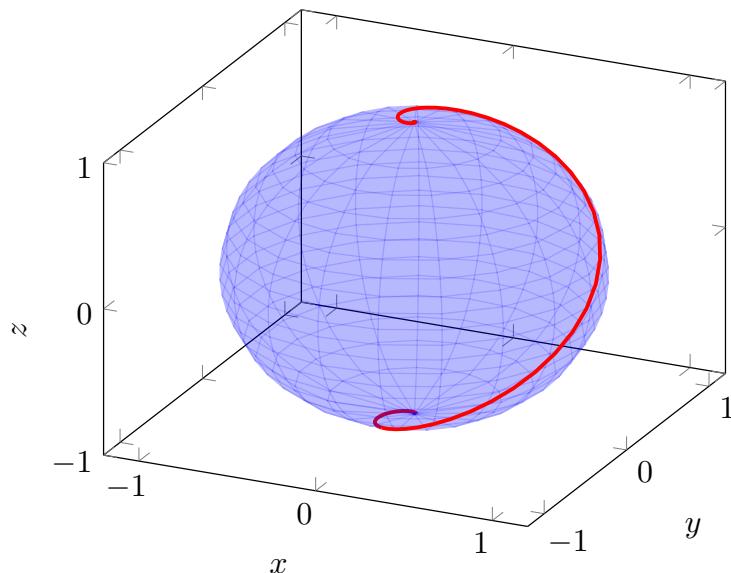
1. Soient $a \in \mathbb{R}^3$ un point et $v \in \mathbb{R}^3$ un vecteur. L'application $\phi : t \mapsto a + tv$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ est une courbe paramétrée dont le support est une droite affine passant par a et de direction v .
2. Soit $I = [0, 2\pi]$ et $a, b > 0$. Alors $\phi : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto (a \cos(t), b \sin(t)) \end{cases}$ est une courbe paramétrée dont le support est une ellipse.

Exemple. $\phi : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto \frac{1}{\cosh t}(\cos t, \sin t, \sinh t) \end{cases}$ est une courbe paramétrée de \mathbb{R}^3 .

Les calcul (du carré) de la norme euclidienne de $\phi(t)$ donne

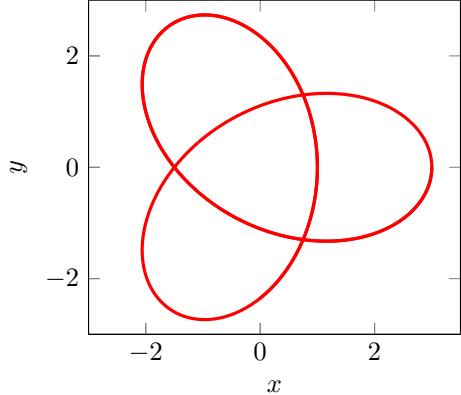
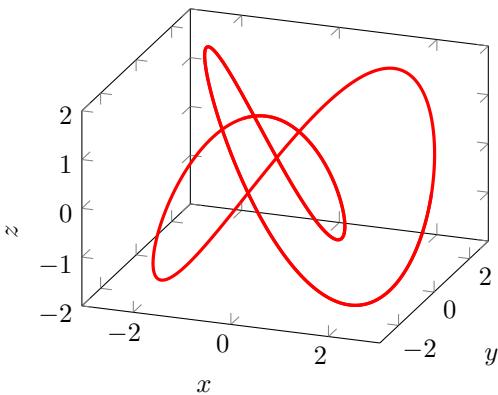
$$\begin{aligned} \|\phi(t)\|^2 &= \frac{1}{\cosh^2 t}(\cos^2 t + \sin^2 t + \sinh^2 t) \\ &= \frac{1}{\cosh^2 t}(1 + \sinh^2 t) \\ &= \frac{1}{\cosh^2 t} \cosh^2 t \\ &= 1 \end{aligned}$$

On en déduit que le support de ϕ est contenu dans la sphère de rayon 1 centrée à l'origine.



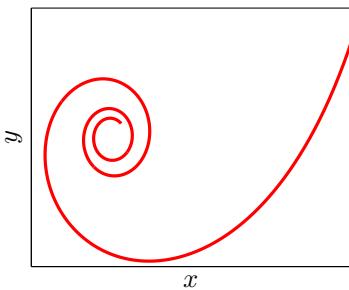
Exemple. Le trèfle gauche : $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) + 2\cos(2t) \\ \sin(t) - 2\sin(2t) \\ -2\sin(3t) \end{pmatrix}$ est une courbe paramétrée de \mathbb{R}^3 .

Sa projection sur le plan $z = 0$ donne la trèfle $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) + 2\cos(2t) \\ \sin(t) - 2\sin(2t) \end{pmatrix}$

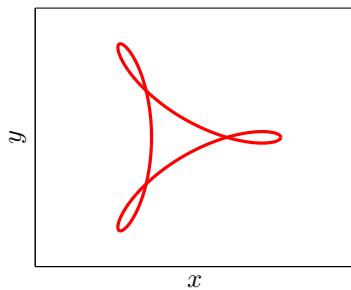


Définition 2.2.2. Soit $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée. Un point $M \in \mathbb{R}^n$ est un point multiple de ϕ si $M \in \phi(I)$ et M possède plusieurs antécédents par ϕ .

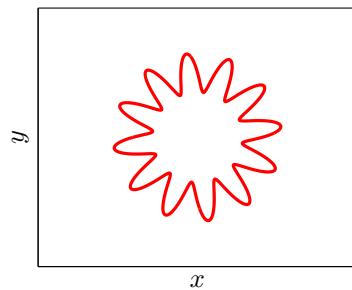
1. La courbe paramétrée ϕ est simple si tout point $M \in \phi(I)$ possède un unique antécédent par ϕ (*i.e.* ϕ n'a aucun point multiple).
2. La courbe paramétrée ϕ est fermé si $I = [a, b]$ et $\phi(a) = \phi(b)$
3. La courbe paramétrée ϕ est fermé simple si $I = [a, b]$, $\phi(a) = \phi(b)$ et ϕ est simple sur $[a, b]$ (*i.e.* $M = \phi(a) = \phi(b)$ est l'unique point multiple de ϕ).



Une courbe simple



Une courbe fermée



Une courbe fermée simple

2.2.2 Interprétation cinématique et paramétrage

Soit $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^2 . On considère que la variable $t \in I$ désigne le temps et on interprète les valeurs prises par ϕ et ses dérivées de la façon suivante :

1. $\phi(t) \in \mathbb{R}^n$ est la position dans l'espace \mathbb{R}^n d'un mobile ponctuel à l'instant $t \in I$.
2. $\phi'(t)$ est la vitesse du mobile.
3. $\phi''(t)$ est l'accélération du mobile.
4. le support de $\phi(I)$ correspond à la trajectoire du mobile.

Une courbe paramétrée ne décrit pas simplement la trajectoire parcourue, mais aussi la façon dont elle est parcourue, en donnant la position à chaque instant t . Le chemin parcouru par le mobile ne change pas si on modifie la façon dont il est parcouru.

Pour formaliser cela on introduit la définition suivante :

Définition 2.2.3. Soient I et J deux intervalles ouverts de \mathbb{R} . Une fonction $\theta : I \rightarrow J$ est un \mathcal{C}^k difféomorphisme si

1. θ une fonction bijective (on note θ^{-1} son inverse) ;
2. θ est de classe \mathcal{C}^k ;
3. $\theta^{-1} : J \rightarrow I$ est aussi de classe \mathcal{C}^k .

Remarque. La définition d'un difféomorphisme θ implique que les dérivées θ' et $(\theta^{-1})' = \frac{1}{\theta' \circ \theta^{-1}}$ ne s'annulent pas sur leur intervalle de définition respectif.

Exemple. L'application $\theta : t \mapsto t^3$ n'est pas un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de \mathbb{R} dans \mathbb{R} car sa fonction réciproque n'est pas dérivable en 0. Mais l'application $t \mapsto t^3 + t$ est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (Exercice : le montrer).

Les \mathcal{C}^k difféomorphismes sont les changements de variables ayant une régularité suffisante pour reparamétriser les courbes de classe \mathcal{C}^k tout en conservant cette régularité. Plus précisément on a :

Définition 2.2.4. Soit $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^k (où $k \geq 1$) et J un intervalle de \mathbb{R} .

On dit que $\theta : J \rightarrow I$ est un reparamétrage (ou un changement de paramètre) si θ est une bijection \mathcal{C}^k .

Si de plus θ est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme de J sur I , on dit alors que θ est un reparamétrage admissible.

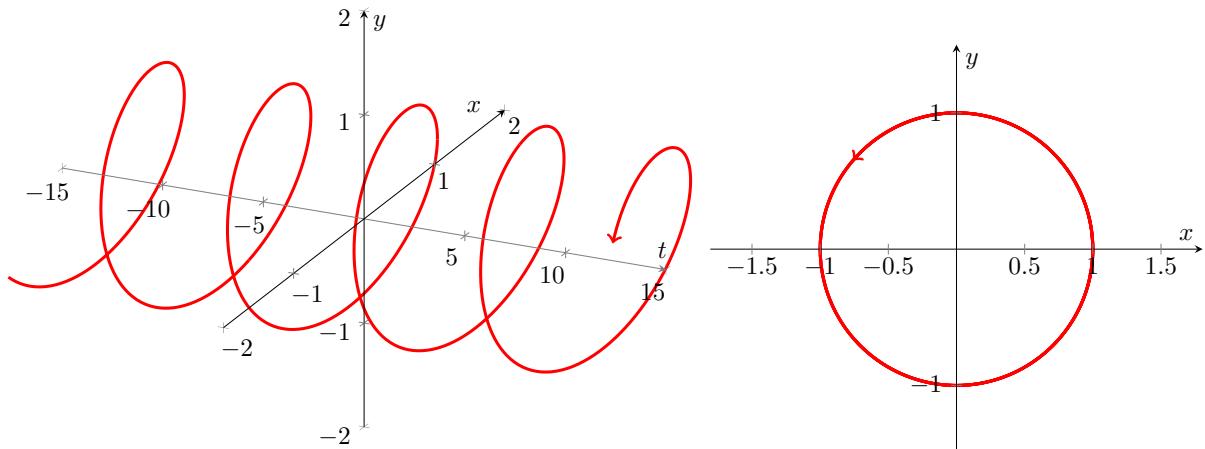
Le reparamétrage de ϕ par θ est la (nouvelle) courbe paramétrée $\phi \circ \theta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Remarque. La courbe paramétrée $\phi \circ \theta$ est encore de classe \mathcal{C}^k , par composition d'applications \mathcal{C}^k .

Comme $\theta : J \rightarrow I$ est une bijection, le reparamétrage ne change pas le support de la courbe. Si on note $\Gamma_0 = \phi(I)$ et $\Gamma_1 = \phi \circ \theta(J) = \phi(\theta(J))$, on a $\Gamma_0 = \Gamma_1$.

Par contre, ce qui change est la façon dont le support est parcouru par la courbe.

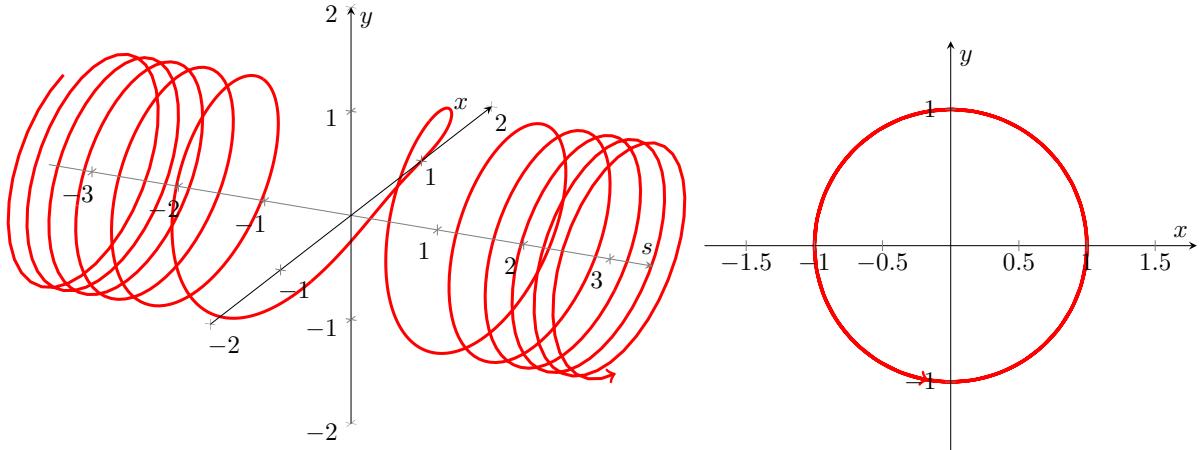
Exemple. Considérons $\phi_0 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{cases}$. Le support $\Gamma_0 = \phi_0(\mathbb{R})$ est le cercle unité (parcouru une infinité de fois...), et on peut représenter le graphe et le support de ϕ_0 .



Considérons maintenant le difféomorphisme $\theta : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ s & \longmapsto s^3 + s \end{cases}$, le reparamétrage de la courbe ϕ_0

par θ donne $\phi_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s & \longmapsto (\cos(s^3 + s), \sin(s^3 + s)) \end{cases}$.

Le tracé du graphe de ϕ_1 montre que ces deux courbes paramétrées sont différentes, alors que le support est toujours le cercle unité.



Les deux courbes Γ_0 et Γ_1 ont le même support et décrivent toutes le cercle unité du plan. Mais les vitesses de parcours sont différentes.

Vitesse et reparamétrage

Définition 2.2.5. Une courbe paramétrée $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 est régulière si $\phi'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Remarque. Soit $\phi_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière, et $\phi_1 = \phi_0 \circ \theta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ cette courbe reparamétrisée par $\theta : J \rightarrow I$. La dérivation des fonctions composées donne, pour tout $s \in J$,

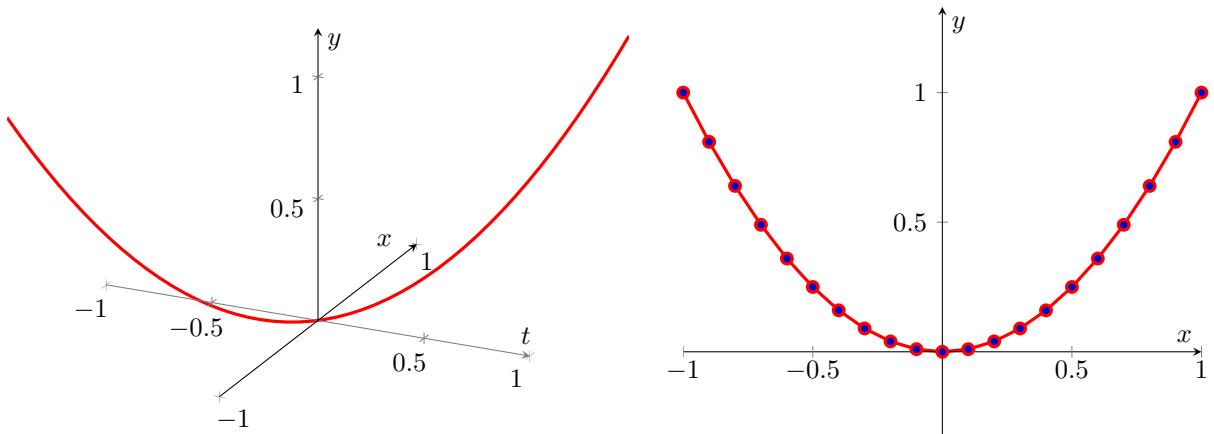
$$\phi'_1(s) = \phi'_0(\theta(s))\theta'(s)$$

Comme ϕ_0 est régulière, on a $\phi'_0(\theta(s)) \neq 0$ pour tout $s \in J$. Si de plus θ est un reparamétrage admissible, alors on a également $\theta'(s) \neq 0$ pour tout $s \in J$ et par conséquent $\phi'_1(s) \neq 0$ pour tout $s \in J$. Le reparamétrage d'une courbe régulière par un reparamétrage admissible donne une courbe paramétrée régulière.

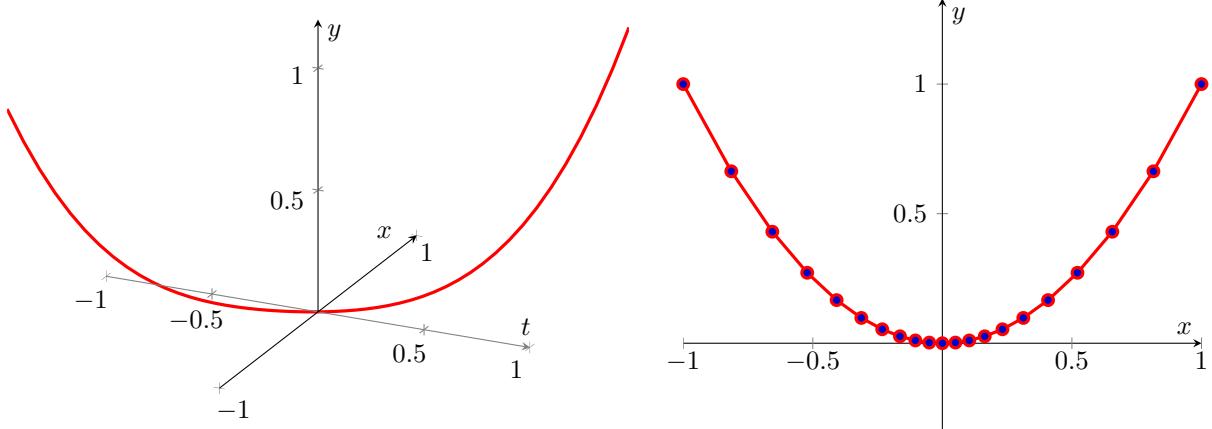
Par contre, si θ n'est pas admissible, il existe $s_0 \in J$ tel que $\theta'(s_0) = 0$ et on a alors $\phi'_1(s_0) = 0$. Donc ϕ_1 n'est pas régulière.

En résumé : les reparamétrages admissibles sont les reparamétrages qui préservent le caractère régulier des courbes paramétrées.

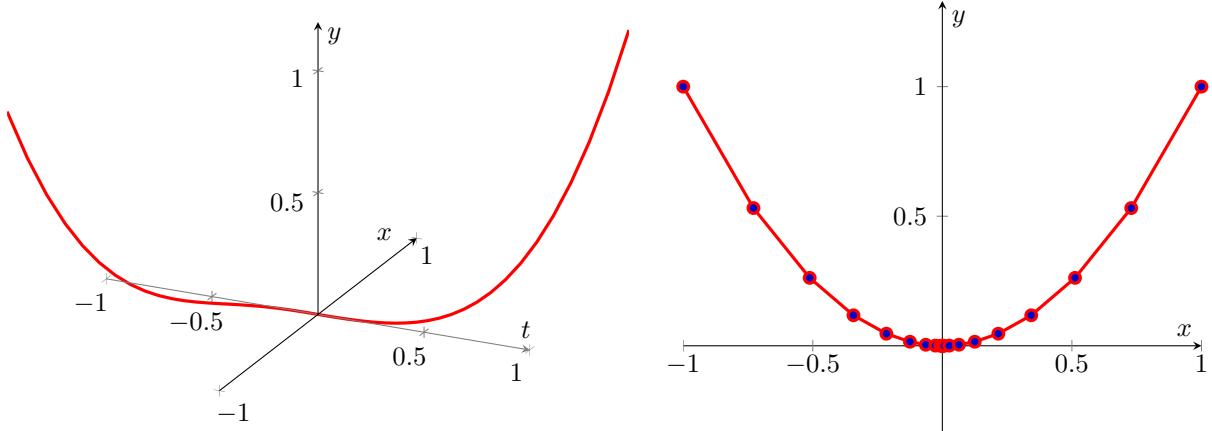
Exemple. Considérons la courbe paramétrée définie par $\phi_0(t) = (t, t^2)$ pour $t \in \mathbb{R}$:



La courbe paramétrée définie par $\phi_1(t) = (t^3 + t, (t^3 + t)^2)$ avec $t \in \mathbb{R}$ est un reparamétrage admissible de ϕ_0 :



La courbe paramétrée définie par $\phi_2(t) = (t^3, t^6)$ avec $t \in \mathbb{R}$ n'est pas un reparamétrage admissible de ϕ_0 :



La courbe géométrique associée est toujours la parabole d'équation $y = x^2$ mais on a "créé un arrêt" car $\phi'_2(0)$ est nul.

2.2.3 Longueur, abscisse curviligne

Définition 2.2.6. Soit $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^1 . La longueur de ϕ est le nombre réel

$$L(\phi) = \int_a^b \|\phi'(t)\| dt.$$

Remarque. A priori, la longueur pourrait dépendre du paramétrage, mais ce n'est pas le cas : si $\phi_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe paramétrée et $\phi_1 = \phi_0 \circ \theta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un reparamétrage de ϕ_0 alors $L(\phi_1) = L(\phi_0)$.

La longueur devient donc une caractéristique du support $\Gamma = \phi(I)$ de la courbe paramétrée ϕ , et pour calculer la longueur de ce support, on peut choisir n'importe quel paramétrage (mais il faut bien en choisir un pour faire les calculs...)

Remarque. On définit généralement la longueur d'une courbe Γ comme suit : si l'ensemble des longueurs $L_\sigma > 0$ des lignes polygonales inscrites dans Γ où σ décrit les subdivisions de $[a, b]$ admet une borne

supérieure $L = \sup_{\sigma} L_{\sigma}$, on dit que l'arc Γ est rectifiable (noter que l'ensemble des courbes rectifiables est plus grand que l'ensemble des courbes \mathcal{C}^1). Le réel L est appelé longueur de Γ . Les deux définitions coïncident dans le cas des courbes \mathcal{C}^1 .

Définition 2.2.7 (Abscisse curviligne). Soit $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^1 et soit réel $t_0 \in I$. L'abscisse curviligne d'origine t_0 est la fonction

$$\sigma : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \int_{t_0}^t \|\phi'(u)\| du \end{cases}$$

Proposition 2.2.8. Soit $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ un arc paramétré régulier de classe \mathcal{C}^1 . L'abscisse curviligne sur ϕ permet de définir un nouveau paramétrage admissible de cet arc.

Preuve.

□

Utiliser l'abscisse curviligne de ϕ comme nouveau paramètre, c'est décider de parcourir le support de ϕ à une vitesse de norme constante égale à 1.

2.3 Étude d'un arc paramétré

2.3.1 Étude locale

Soit $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^k (où $k \in \mathbb{N}^*$ est suffisamment grand), et soit $t_0 \in D$. La formule de Taylor-Young en $t_0 \in D$ s'écrit

$$\phi(t_0 + h) = \phi(t_0) + h\phi'(t_0) + \frac{h^2}{2}\phi''(t_0) + \cdots + \frac{h^k}{k!}\phi^{(k)}(t_0) + |h|^k \varepsilon(h).$$

où $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfait $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. Si les vecteurs dérivées de ϕ ne sont pas tous nul en t_0 , on note :

1. p le plus petit entier non nul tel que $\phi^{(p)}(t_0) \neq 0$.
2. q le premier entier supérieur à p tel que $\phi^{(q)}(t_0)$ ne soit pas colinéaire à $\phi^{(p)}(t_0)$. Autrement dit, pour tout entier $i \in \{p, \dots, q-1\}$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que : $\phi^{(i)}(t_0) = \lambda_i \phi^{(p)}(t_0)$.

La formule de Taylor-Young devient :

$$\phi(t_0 + h) = \phi(t_0) + \left(\sum_{i=p}^{q-1} \lambda_i \frac{h^i}{i!} \right) \phi^{(p)}(t_0) + \frac{h^q}{q!} \phi^{(q)}(t_0) + |h|^q \varepsilon(h).$$

où $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est tel que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$, $\phi^{(p)}(t_0) \neq 0$ et $(\phi^{(p)}(t_0), \phi^{(q)}(t_0))$ est une famille libre.

Définition 2.3.1. Avec les notations ci-dessus, le point $M_0 = \phi(t_0)$ est un point :

1. stationnaire si $\phi'(t_0) = 0$ (c'est à dire si $p > 1$).
2. régulier si $\phi'(t_0) \neq 0$ (c'est à dire si $p = 1$).
3. birégulier si $\phi'(t_0)$ et $\phi''(t_0)$ ne sont pas colinéaires (c'est à dire si $p = 1$ et $q = 2$).

Par ailleurs, la tangente à ϕ au point M_0 est la droite affine passant par M_0 et dirigée par le vecteur $\phi^{(p)}(t_0)$.

Remarque. L'entier p et la droite tangente $M_0 + \mathbb{R}\phi^{(p)}(t_0)$ sont invariants par changement de paramétrage admissible.

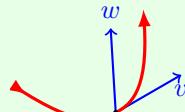
En dimension $n = 2$, les entiers p et q définis plus haut permettent de décrire le comportement de la courbe au voisinage de t_0 , et il y a 4 situations possibles suivant les parités de p et q .

Définition 2.3.2. Soit $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^k (où $k \in \mathbb{N}^*$ est suffisamment grand), et soit $t_0 \in D$. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que le développement de Taylor-Young en t_0 s'écrit

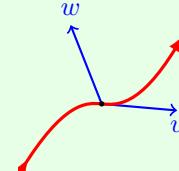
$$\phi(t_0 + h) = \phi(t_0) + \left(\sum_{i=p}^{q-1} \lambda_i \frac{h^i}{i!} \right) \phi^{(p)}(t_0) + \frac{h^q}{q!} \phi^{(q)}(t_0) + |h|^q \varepsilon(h).$$

On pose $M_0 = \phi(t_0)$, les vecteurs $v = \phi^{(p)}(t_0)$ et $w = \phi^{(q)}(t_0)$ forment une base de \mathbb{R}^2 et (M_0, v, w) est un repère du plan. Suivant les parités de p et q , on distingue 4 types de points pour M_0 :

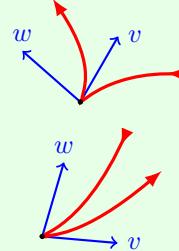
1. Si p est impair et q est pair, alors M_0 est un point ordinaire.



2. Si p est impair et q est impair, alors M_0 est point d'inflexion.



3. Si p est pair et q est impair, alors M_0 est point rebroussement de première espèce.



4. Si p est pair et q est pair, alors M_0 est point rebroussement de deuxième espèce.

Dans cette définition, le vecteur v donne la direction de la tangente, la parité de p indique si la courbe traverse l'axe dirigé par w et la parité de q indique si la courbe traverse la tangente.

2.3.2 Branches infinies

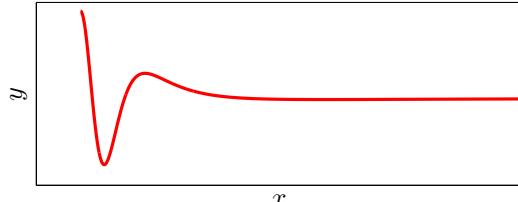
L'étude locale renseigne le comportement de la courbe au voisinage d'un point de D . Reste à voir ce qu'il se passe aux bornes du domaine de définition.

Soit $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée du plan \mathbb{R}^2 . Pour $t \in D$, on pose $\phi(t) = (x(t), y(t))$ et $\|\phi(t)\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$. Dans ce qui suit, a désigne une borne de D (éventuellement infinie).

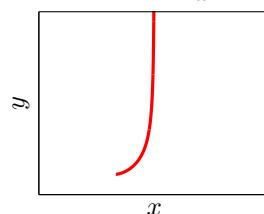
Définition 2.3.3. On dit que ϕ admet une branche infinie en a si $\lim_{t \rightarrow a} \|\phi(t)\| = +\infty$

Plusieurs cas se présentent

1. Si $\lim_{t \rightarrow a} |x(t)| = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow a} |y(t)| = y_0$, alors la courbe ϕ admet la droite horizontale d'équation $y = y_0$ pour asymptote.

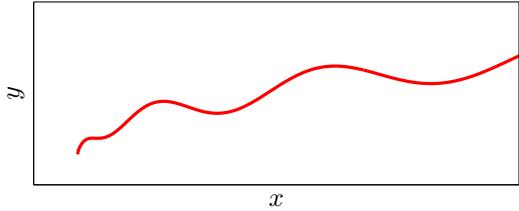


2. Si $\lim_{t \rightarrow a} |x(t)| = x_0$ et $\lim_{t \rightarrow a} |y(t)| = +\infty$, alors la courbe ϕ admet la droite verticale d'équation $x = x_0$ pour asymptote.



3. On suppose que $\lim_{t \rightarrow a} |x(t)| = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow a} |y(t)| = +\infty$, alors

- (a) Si $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, on dit que ϕ admet une branche parabolique de direction $\mathbb{R}(1, 0)$.

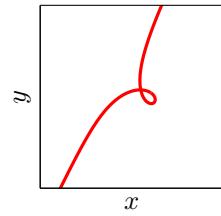


- (b) Si $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, on dit que ϕ admet une branche parabolique de direction $\mathbb{R}(0, 1)$.

- (c) Si $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha$, deux cas se présentent

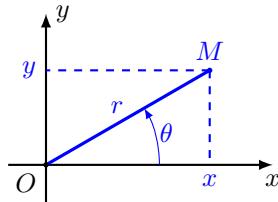
- i. Si $\lim_{t \rightarrow a} y(t) - \alpha x(t) = \pm\infty$, on dit que ϕ admet une branche parabolique de direction $\mathbb{R}(1, \alpha)$.

- ii. Si $\lim_{t \rightarrow a} y(t) - \alpha x(t) = \beta$, on dit que ϕ admet la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ pour asymptote. Dans ce cas, on étudie la position de la courbe ϕ par rapport à l'asymptote. Pour cela, on étudie le signe de $(y(t) - \alpha x(t) - \beta)$ au voisinage de a .



2.3.3 Courbes en coordonnées polaires

Les coordonnées polaires (r, θ) d'un point $M \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sont l'angle orienté θ entre l'axe des abscisses et la demi-droite $[O, M)$ et la distance à l'origine r . Les coordonnées cartésiennes du point M sont alors $(r \cos \theta, r \sin \theta)$.



L'équation d'une courbe en coordonnées polaires est la donnée d'une fonction $r : \begin{cases} D & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto r(\theta) \end{cases}$ où $D \subset \mathbb{R}$. Le support de cette courbe est l'ensemble des points du plan \mathbb{R}^2 dont les coordonnées polaires sont $(r(\theta), \theta)$.

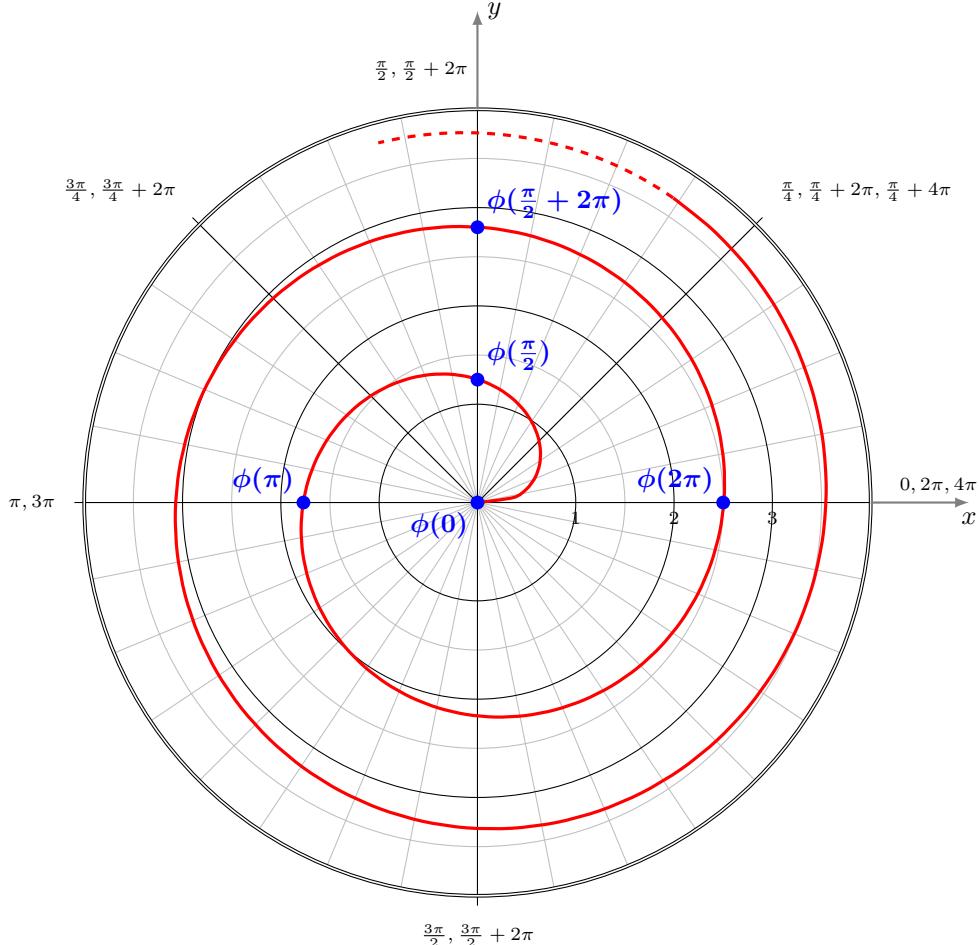
Étant donné les relations entre coordonnées polaires et cartésiennes, cela revient à utiliser θ comme paramètre et à considérer le support de la courbe paramétrée $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta).$$

Remarque.

- Une fois écrite sous cette forme, on voit que la fonction $\theta \mapsto r(\theta)$ n'a aucune raison d'être strictement positive. Dans la pratique, on pourra donc considérer des équations en polaires pour lesquelles la fonction r prend des valeurs négatives.
- La fonction $\theta \mapsto r(\theta)$ n'a aucune raison d'être périodique et la demi-droite d'angle θ peut couper la courbe en plusieurs points si ..., $r(\theta - 4\pi), r(\theta - 2\pi), r(\theta), r(\theta + 2\pi), r(\theta + 4\pi), \dots$ prennent des valeurs différentes.

Exemple. Ci dessous la courbe d'équation polaire $r(\theta) = \sqrt{\theta}$ définie pour $\theta \in \mathbb{R}_+$.



Les propriétés des coordonnées polaires permettent de déduire des symétries de la courbe à partir de propriétés de parité de la fonction $\theta \mapsto r(\theta)$:

- Si $r(-\theta) = r(\theta)$ alors la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
- Si $r(-\theta) = -r(\theta)$ alors la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si $r(\pi - \theta) = r(\theta)$ alors la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si $r(\theta + \pi) = r(\theta)$ alors la courbe est symétrique par rapport à l'origine.

2.3.4 Plan d'étude d'un arc paramétré

Voici comment peut s'organiser l'étude d'une courbe paramétrée $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$. On suppose ici que ϕ est dans \mathbb{R}^2 (c'est donc une courbe du plan) et on note $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ les fonctions coordonnées.

Domaine de définition de la courbe.

Si le domaine de définition de ϕ n'est pas donné, il faut le déterminer à partir des expressions de $x(t)$ et $y(t)$. La position du point $\phi(t)$ est définie si et seulement si ses coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont définies, le domaine de définition de ϕ est donc l'intersection des domaines de définition des fonctions x et y .

Il faut ensuite déterminer un domaine d'étude (plus petit que le domaine de définition) grâce aux symétries, périodicités...

Vecteur dérivé.

Calcul des dérivées des coordonnées de $t \mapsto \phi(t)$.

Les valeurs de t pour lesquelles $x'(t) = 0$ (et $y'(t) \neq 0$) fournissent les points à tangente verticale et les valeurs de t pour lesquelles $y'(t) = 0$ (et $x'(t) \neq 0$) fournissent les points à tangente horizontale. Enfin, les valeurs de t pour lesquelles $x'(t) = y'(t) = 0$ fournissent les points singuliers, en lesquels on n'a encore aucun renseignement sur la tangente.

Tableau de variations conjointes.

L'étude de x' et y' permet de connaître les variations de x et y . On reporte les résultats obtenus des variations conjointes des fonctions x et y dans un tableau. Cela donne alors un tableau à compléter :

t	
$x'(t)$	
x	
y	
$y'(t)$	

Ce tableau est le tableau des variations des deux fonctions x et y ensemble. Il nous montre l'évolution du point $\phi(t)$.

Étude des points singuliers.

À l'aide de la partie précédente, on peut facilement déterminer les points stationnaires (les temps t où l'on a $x'(t) = y'(t) = 0$). On peut alors étudier le comportement local de la courbe en ces points (rebroussement, inflexion, etc...).

Étude des branches infinies.

À l'aide de l'étude précédente, si $\|\phi(t)\|$ tend vers $+\infty$ à une borne du domaine de définition.

Construction méticuleuse de la courbe.

On place dans l'ordre

- les deux axes et les unités.
- les droites asymptotes s'il y en a
- les points importants avec leur tangente (points à tangente verticale, horizontale, points singuliers, points d'intersection avec une droite asymptote,...)

Points multiples.

On cherche les points multiples s'il y a lieu. On attend souvent de commencer la construction de la courbe pour voir s'il y a des points multiples et si on doit les chercher.

Chapitre 3

Topologie de \mathbb{R}^n

3.1 Normes et distances sur \mathbb{R}^n

3.1.1 Définition, exemples

Le but de ce chapitre est de formaliser les notions de limite et continuité pour des fonctions de plusieurs variables. Pour cela, on doit donner un sens précis à l'assertion “ x est proche de y ” quand $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Dans le cas des fonctions d'une variable, c'est à dire pour $x, y \in \mathbb{R}$, on dit qu'ils sont proches lorsque la distance de x à y est petite, c'est à dire lorsque $|x - y|$ est petit.

En dimension plus grande, on cherche donc un moyen de mesurer des distances. On en a déjà un avec la norme euclidienne : si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ alors la distance euclidienne de x à y est donnée par

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}.$$

On pourrait se contenter de cette notion de distance et reprendre les définitions de limite et continuité des fonctions d'une variable en remplaçant la valeur absolue $|\cdot|$ par la norme euclidienne. Il se trouve qu'il y a beaucoup d'autres moyens de mesurer des distances qui sont équivalents à la norme euclidienne et qui peuvent être utiles dans certaines situations.

Définition 3.1.1. Une norme sur \mathbb{R}^n est une application $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, \infty[$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Séparation : $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad N(x) \geq 0$ et $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. Homogénéité : $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,
3. Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Dans la suite, on notera le plus souvent $N(\cdot) = \|\cdot\|$. L'espace E muni d'une norme $\|\cdot\|$ est appelé un espace normé et est noté $(E, \|\cdot\|)$.

Exemple. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit les normes usuelles suivantes :

1. la norme 1 est $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$
2. la norme 2 est $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ dispose de propriétés particulières (norme euclidienne).
3. la norme infinie est $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

Comme pour la valeur valeur absolue, on a une seconde inégalité triangulaire :

Proposition 3.1.2. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n , pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Preuve. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a $\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$. Ainsi $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.

De même $\|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$ et donc $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|$. Mis bout à bout on a bien

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

□

Remarque. Cette dernière inégalité nous apprend que si x et y sont proches au sens de la norme $\|\cdot\|$ alors leurs normes $\|x\|$ et $\|y\|$ sont aussi proches. C'est une propriété de continuité de la norme.

Pour avoir notre notion de distance sur \mathbb{R}^n , on a utilisé une norme et l'addition des vecteurs. On ne peut pas étendre cette façon de faire sur des ensembles qui ne sont pas des espaces vectoriels. Pour cela, on a une notion plus générale de distance qui ne fait pas appel à une norme :

Définition 3.1.3. Soit E un ensemble, une distance sur E est une application $d : E \times E \rightarrow [0, +\infty[$ telle que

1. Symétrie : $\forall x, y \in E \quad d(x, y) = d(y, x)$
2. Séparabilité : $\forall x, y \in E \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. Inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in E \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Un espace E muni d'une distance d est appelé espace métrique, et un espace vectoriel normé est un espace métrique particulier :

Proposition 3.1.4. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathbb{R}^n , alors l'application $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur \mathbb{R}^n .

Preuve. Laissé en exercice. □

Remarque. Il existe des distances sur \mathbb{R}^n qui ne sont pas issues de normes. Par exemple, l'application $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

est une distance sur \mathbb{R}^n .

3.1.2 Boules ouvertes, fermées

La notion de norme généralise la notion de valeur absolue dans \mathbb{R} aux espaces vectoriels. La définition suivante généralise la notion d'intervalle ouvert et fermé dans \mathbb{R} aux espaces vectoriels :

Définition 3.1.5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel normé, $a \in E$ et un nombre réel $r > 0$ fixé. L'ensemble

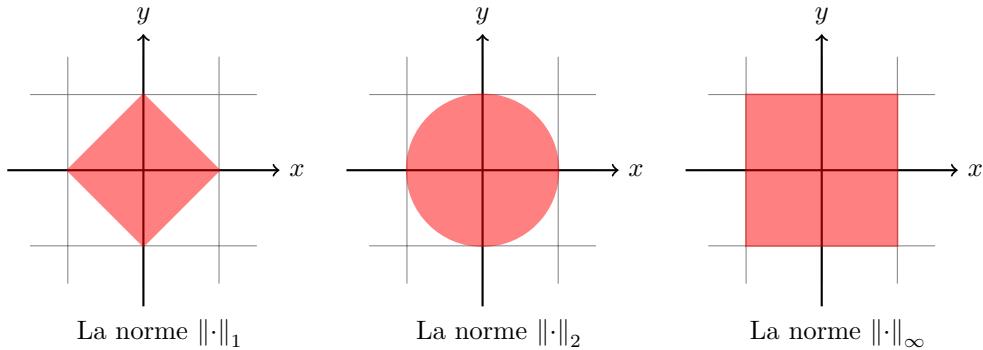
$$B_r(a) = \{u \in E, \|u - a\| < r\}$$

est appelé boule ouverte de centre a et de rayon r . L'ensemble

$$\overline{B_r}(a) = \{u \in E, \|u - a\| \leq r\}$$

est appelé boule fermée de centre a et de rayon r .

Exemple. Voici les boules unités fermées dans $E = \mathbb{R}^2$ pour :



Toutes les parties de \mathbb{R}^n ne sont pas des boules pour une norme.

Proposition 3.1.6. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n . La boule unité $B_1(0)$ a les propriétés suivantes :

1. symétrie par rapport à 0 : $x \in B_1(0) \Leftrightarrow -x \in B_1(0)$
2. bornée : pour tout $x \neq 0$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda x \notin B_1(0)$
3. convexité : pour tout $x, y \in B_1(0)$ et tout $t \in [0, 1]$ on a $(1-t)x + ty \in B_1(0)$

Preuve. 1. Comme $\|-x\| = \|x\|$, on a $\|-x\| < 1 \Leftrightarrow \|x\| < 1$.

2. Soit $x \neq 0$, on a $\|x\| \neq 0$ et pour tout $\lambda > \frac{1}{\|x\|}$ on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| > 1$, donc $\lambda x \notin B_1(0)$.

3. Soient $x, y \in B_1(0)$ et $t \in [0, 1]$. On a alors

$$\|(1-t)x + ty\| \leq \|(1-t)x\| + \|ty\| = |1-t| \|x\| + |t| \|y\|.$$

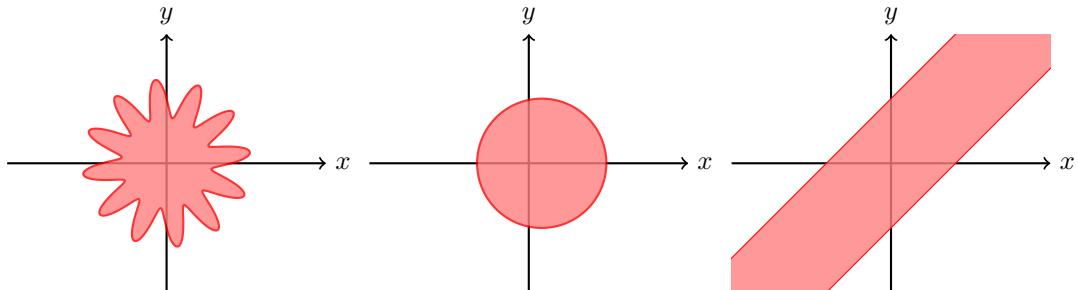
Comme $1-t \geq 0$, $t \geq 0$, $\|x\| < 1$ et $\|y\| < 1$ on obtient

$$\|(1-t)x + ty\| \leq (1-t) \|x\| + t \|y\| < (1-t) + t = 1$$

donc $(1-t)x + ty \in B_1(0)$. □

Il se trouve que les trois conditions énoncées dans la propositions précédentes caractérise les boules unités de normes : si $A \subset \mathbb{R}^n$ vérifie ces trois propriétés, alors il existe une norme sur \mathbb{R}^n dont la boule unité est égale à A .

Exemple. Existe-t-il une norme dont la boule est l'un des ensembles suivants :



3.1.3 Normes équivalentes

Comme il y a beaucoup de normes sur \mathbb{R}^n , laquelle choisir définir les notions de limites et continuité ? Réponse : peu importe. Les définitions de limite et continuité vont s'énoncer à l'aide d'une norme, mais l'utilisation de normes différentes donneront des définitions équivalentes. Ce résultat va reposer sur la notion de "normes équivalentes"

Définition 3.1.7 (Normes équivalentes). On dit que deux normes $N_1, N_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ sont équivalentes (et on note $N_1 \sim N_2$) s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

La relation \sim définit une relation d'équivalence sur les normes : elle est

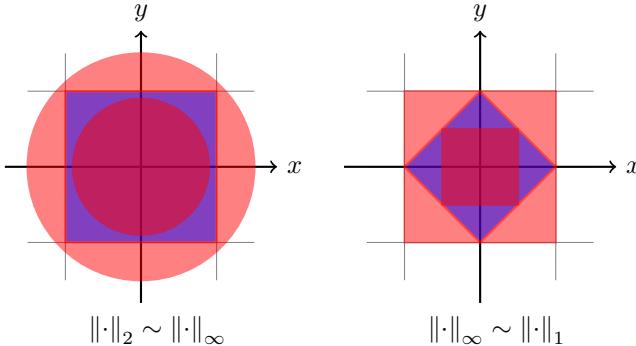
- réflexive : pour toute norme N on a $N \sim N$
- symétrique : pour toutes normes N_1 et N_2 on a $N_1 \sim N_2 \Leftrightarrow N_2 \sim N_1$
- transitive : pour toutes normes N_1, N_2 et N_3 on a $(N_1 \sim N_2 \text{ et } N_2 \sim N_3) \Rightarrow N_1 \sim N_3$.

Par ailleurs, on a l'interprétation géométrique suivante en termes de boules :

Proposition 3.1.8. Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur \mathbb{R}^n , et soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$ on a alors

$$B^{N_1}(a, \frac{r}{\beta}) \subset B^{N_2}(a, r) \subset B^{N_1}(a, \frac{r}{\alpha})$$

Preuve. Application directe de la définition des boules. Laissée en exercice. □



On va traduire la notion de proximité avec un point $a \in \mathbb{R}^n$ en utilisant la norme. Donc, être proche de a , ça sera être dans une boule de petit rayon centrée en a . Si les normes N_1 et N_2 sont équivalentes, être dans une boule de petit rayon pour N_1 , c'est aussi être dans une boule de petit rayon pour N_2 , et vice versa.

La question est maintenant : quelle norme utiliser dans \mathbb{R}^n ? Réponse : n'importe laquelle.

Théorème 3.1.9. Dans un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Preuve. Admis dans ce cours. □

Remarque. Ce n'est pas vrai en dimension infinie.

3.2 limites et continuité

3.2.1 Limites de suites

Au chapitre précédent, on a déjà défini la notion de limite d'une suite de vecteurs en considérant la convergence coordonnée à coordonnée, et on avait remarqué que cette notion de convergence peut s'exprimer de façon équivalente avec la norme euclidienne (cf. définition 2.1.6 et discussion qui suit). En considère maintenant une norme arbitraire sur \mathbb{R}^n .

Définition 3.2.1 (Limite d'une suite). Soit $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ une norme sur \mathbb{R}^n , $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points dans \mathbb{R}^n et $\ell \in \mathbb{R}^n$. On dit que la suite u converge vers ℓ au sens de la norme N si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \geq k_0 \Rightarrow N(u_k - \ell) < \varepsilon$$

En reprenant la définition de la convergence d'une suite réelle, on remarque que cette définition est équivalente au fait que la suite réelle $(N(u_k - \ell))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 (i.e. $\lim_{k \rightarrow \infty} N(u_k - \ell) = 0$).

Par ailleurs, deux normes équivalentes ont les mêmes suites convergentes :

Proposition 3.2.2. Soient $N_1, N_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux normes sur \mathbb{R}^n (qui sont nécessairement équivalentes). Pour toutes suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de \mathbb{R}^n et $\ell \in \mathbb{R}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \ell$ au sens de la norme N_1 ,
2. $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \ell$ au sens de la norme N_2 .

Preuve. Comme les normes sont équivalentes, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$N_2(u_k - \ell) \leq \beta N_1(u_k - \ell) \quad \text{et} \quad N_1(u_k - \ell) \leq \frac{1}{\alpha} N_2(u_k - \ell).$$

Si $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \ell$ au sens de la norme N_1 , alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} N_1(u_k - \ell) = 0$ et la première inégalité donne $\lim_{k \rightarrow +\infty} N_2(u_k - \ell) = 0$. Donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \ell$ au sens de la norme N_2 .

Si $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \ell$ au sens de la norme N_1 , alors un raisonnement similaire avec la seconde inégalité montre que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \ell$ au sens de la norme N_1 . \square

Dans la suite, on pourra donc dire qu'une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , sans préciser la norme utilisée pour définir cette convergence.

On rappelle le résultat vu au chapitre précédent : dans \mathbb{R}^n une suite converge si toutes les suites de ses coordonnées convergent :

Proposition 3.2.3.

Soit $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}} = \begin{pmatrix} u_{k,1} \\ \vdots \\ u_{k,n} \end{pmatrix}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R}^n et $\ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \ell$ dans \mathbb{R}^n
2. Pour tout $i = 1, \dots, n$ on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{k,i} = \ell_i$ dans \mathbb{R}

Preuve.

\square

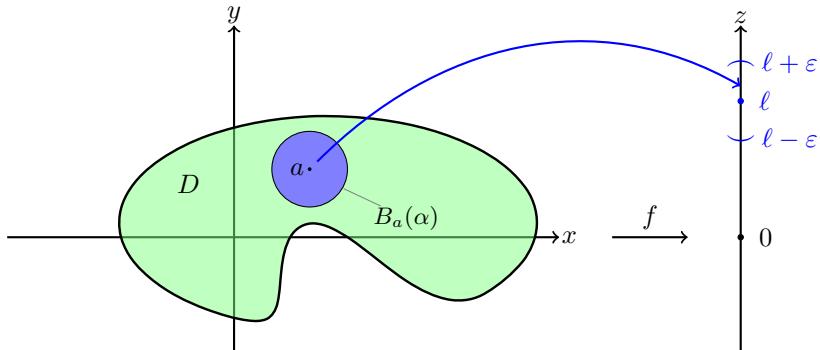
On rappelle également que la limite, si elle existe, est unique.

3.2.2 Limites de fonctions

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application. On peut définir la continuité de f en munissant \mathbb{R}^n d'une norme N et \mathbb{R}^p d'une norme M .

Définition 3.2.4 (Limite de fonction). On suppose que \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p sont munis respectivement de normes N et M . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in D$. On dit que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^p$ en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in D \quad N(x - a) < \alpha \Rightarrow M(f(x) - \ell) < \varepsilon$$

Illustration de la limite $\ell \in \mathbb{R}$ d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en a .**Remarque.**

1. Comme en dimension finie les normes sont équivalentes, la définition précédente ne dépend pas du choix des normes sur \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p . Dans tout ce qui suit
 - on parlera de limite sans préciser la norme si ce n'est pas nécessaire
 - on notera $\|\cdot\|$ toutes les normes que nous rencontrerons si elle n'ont pas besoin d'être précisées
 - dans la pratique, si on a besoin d'utiliser une norme particulière, on choisira celle qui nous arrange le mieux, et on le précisera par la notation. Par exemple, si on choisit d'utiliser la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n , on le précisera par la notation $\|\cdot\|_2$.
2. Si elle existe, la limite d'une fonction est unique.

Quelques propriétés des limites

Proposition 3.2.5 (limite et opérations). La notion de limite a les propriétés suivantes :

- Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ deux fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et $a \in D$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda\ell + \mu m$.
- Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}^n$, et $a \in D$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \ell m$.
- Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$, et $a \in D$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \neq 0$ alors f ne s'annule pas au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{\ell}$.

Preuve.

□

Proposition 3.2.6 (limite et composition de fonctions). Soit $f : D \rightarrow E$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}^p$, et soit $g : E \rightarrow \mathbb{R}^q$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f(x)) = \ell$.

Preuve.

□

Proposition 3.2.7 (Caractérisation séquentielle de la limite). Soit $f : D \rightarrow F$ une fonction définie sur $D \subset E$ et $a \in E$ un point adhérent à D (i.e. $a \in \bar{D}$). Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f a pour limite ℓ en a
2. pour toute suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de D qui converge vers a , la suite $f(u_k)$ tend vers ℓ .

Preuve.

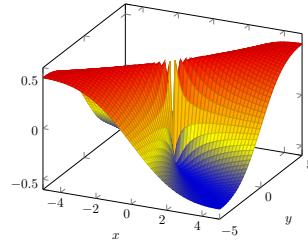
□

Calculer des limites en pratique

Les propositions 3.2.6 et 3.2.7 sont utiles pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in D$. Pour montrer que f n'a pas de limite en a , on a deux possibilités :

- en utilisant la caractérisation séquentielle, il suffit de trouver deux suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de même limite $a \in D$ et telles que $(f(u_k))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(f(v_k))_{k \in \mathbb{N}}$ ne possèdent pas la même limite.
- en utilisant la composition des limites, il suffit de trouver deux fonctions $g_1, g_2 : I \rightarrow D$ telles que $\lim_{t \rightarrow t_0} g_1(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} g_2(t) = a$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} f(g_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow t_0} f(g_2(t))$.

Exemple. Étude de la limite en 0 de $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.



Montrer qu'une fonction admet une limite en un point

Proposition 3.2.8. Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$, et $\ell \in \mathbb{R}^p$. S'il existe une fonction $s : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = 0$ et pour tout $x \in D$

$$\|f(x) - \ell\| \leq s(\|x - a\|)$$

alors on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Preuve.

□

Remarque. Pour les fonctions de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cette dernière proposition suggère de passer en coordonnées polaires centrées en a , comme dans l'exemple ci dessous. En effet, la coordonnée r du point (x, y) est alors la norme euclidienne $\|x - a\|_2$, et il faut alors majorer $\|f(x) - \ell\|$ par une expression de la forme $s(r)$ avec $\lim_{r \rightarrow 0} s(r) = 0$.

Exemple. Calcul de limite en pratique : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \frac{6x^2y}{x^2+y^2}$. Montrons de plusieurs manières que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

1. Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ on a $x^2 + y^2 \geq x^2$ et donc

$$\left| \frac{6x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| = 6|y| \leq 6\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

2. Pour démontrer l'existence d'une limite pour une fonction de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ il est souvent utile de passer en coordonnées polaires pour ramener le calcul d'une limite de fonction de deux variables à celui

d'une limite d'une fonction d'une seule variable. Ainsi, pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ on a :

$$\left| \frac{6x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \left| \frac{6r^2 \cos^2(\theta)r \sin(\theta)}{r^2} \right| \leq 6r \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0$$

3.2.3 Continuité

Comme en dimension 1, la continuité des fonctions se définit à partir de la limite :

Définition 3.2.9. Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$, et $a \in D$. On dit que f est continue en a si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in D}} f(x) = f(a).$$

La fonction f est continue sur D si f est continue en tout point de D .

En reprenant la définition de la limite, on obtient que $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ est continue en $a \in D$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in D \quad \|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

La continuité est une notion locale.

Exemple. Si $E = \mathbb{R}^n$ les fonctions polynomiales sont continues. En particulier les fonctions $s, p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $s(x, y) = x + y$ et $p(x, y) = xy$ sont continues sur \mathbb{R}^2 .

La continuité étant définie à partir de la notion de limite, elle hérite des propriétés de cette dernière. En particulier, il résulte des propositions 3.2.5 et 3.2.6 que la notion de continuité est stable par les opérations algébriques usuelles :

Proposition 3.2.10. La notion de continuité est stable pour les opérations suivantes :

- Combinaison linéaire : soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ deux fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et $a \in D$. Si f et g sont continues en a , alors $\lambda f + \mu g$ est continue en a .
- Produit : soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}^n$, et $a \in D$. Si f et g sont continues en a , alors fg est continue en a .
- Inverse : soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$, et $a \in D$. Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de a et continue en a .
- Composition : soit $f : D \rightarrow E$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}^p$, et soit $g : E \rightarrow \mathbb{R}^q$. Si f est continue en $a \in D$ et g est continue en $f(a) \in E$, alors $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ est continue en a .

Preuve.

□

Par ailleurs, on a également une caractérisation séquentielle de la continuité, et on peut utiliser les mêmes méthodes pour montrer qu'une fonction est ou n'est pas continue en un point.

Exemple. L'application $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, mais elle n'est pas continue en $(0, 0)$.

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ elle est le quotient de deux polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc continue comme quotient de fonction continue.

En $(0, 0)$, on a $\lim_{t \rightarrow 0} (t, t) = (0, 0)$, et $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$, donc f n'est pas continue en $(0, 0)$.

3.3 Notions élémentaires de topologie

3.3.1 Ouverts et fermés

Définition 3.3.1. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n . On dit que

1. une partie U de \mathbb{R}^n est un ouvert pour la norme $\|\cdot\|$ si pour tout $a \in U$, il existe un réel $r > 0$ tel que $B_r(a) \subset U$.
2. une partie F de \mathbb{R}^n est un fermé pour la norme $\|\cdot\|$ si son complémentaire $F^c = \mathbb{R}^n \setminus F = \{u \in E | u \notin F\}$ est une partie ouverte.

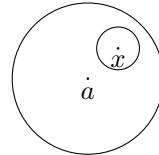
Exemple.

- Le demi plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y < 0\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
- Le demi plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y \leq 0\}$ est un fermé de \mathbb{R}^2 .
- la partie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \text{ et } y > 0\}$ n'est ni ouverte, ni fermée.

Par ailleurs, on montre facilement qu'une intersection (resp. une union) de deux ouverts est un ouvert. De même, une intersection (resp. une union) de deux fermés est un fermé.

Proposition 3.3.2. *Dans \mathbb{R}^n , une boule ouverte pour la norme $\|\cdot\|$ est un ouvert et une boule fermée est un fermé.*

Preuve. Soit $B_r(a)$ une boule ouverte de \mathbb{R}^n et $x \in B_r(a)$. La boule $B_\rho(x)$ où $\rho = \frac{r - \|a-x\|}{2}$ est incluse dans $B_r(a)$.



□

Les parties ouvertes et fermées sont définies à l'aide d'une norme. Donc, à priori, les notions d'ouvert et de fermé dépendent de la norme utilisée. Mais pour deux normes équivalentes, les parties ouvertes (et fermées) sont les mêmes :

Proposition 3.3.3. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ une partie de \mathbb{R}^n , et N_1, N_2 deux normes sur \mathbb{R}^n (en particulier, elles sont équivalentes). La partie U est un ouvert pour N_1 si et seulement si U est un ouvert pour N_2 .*

Preuve.

□

Dans la suite, on pourra parler d'ouverts et/ou de fermés sans préciser la norme à priori.

Proposition 3.3.4 (Caractérisation séquentielle des fermés). *Soit F une partie non vide de \mathbb{R}^n . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. La partie F est fermée.
2. Pour toute suite convergente $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de points de F on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k \in F$.

Preuve.

□

Cette proposition est très utile pour montrer qu'une partie est fermée quand elle est définie par des inégalités larges. Par exemple, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | e^x \leq y \leq 3 - x^2\}$ est une partie fermée de \mathbb{R}^2 .

Les notions d'ouverts et de fermées sont reliées à la continuité des fonctions par le résultat suivant :

Théorème 3.3.5. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction continue définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$.

1. si $U \subset \mathbb{R}^p$ un ensemble ouvert, alors $f^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert.
2. si $F \subset \mathbb{R}^p$ un ensemble fermé, alors $f^{-1}(F) \subset \mathbb{R}^n$ est un fermé.

Preuve.

□

Remarque. Les propriétés précédentes sont en fait des caractérisations de la continuité : $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) est un ouvert (resp. un fermé).

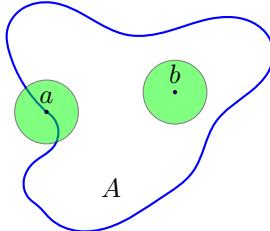
Le résultat précédent peut aussi être utilisé pour montrer qu'une partie est ouverte ou fermée. Par exemple, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < e^{x^2 - y^2} < 3\}$ est un ouvert. En effet, la fonction $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$ est continue sur \mathbb{R}^2 et $A = f^{-1}(]1, 3[)$. Comme $]1, 3[$ est un ouvert de \mathbb{R} , son image réciproque par f est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

3.3.2 Intérieur et adhérence

Il existe des parties qui ne sont ni ouvertes, ni fermées, mais à toute partie $A \subset \mathbb{R}^n$ on peut associer naturellement une partie ouverte et une partie fermée qui lui sont "proches".

Définition 3.3.6. Soit A une partie de \mathbb{R}^n et $a \in \mathbb{R}^n$. On dit que a est un point

1. intérieur à A si on peut trouver un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ tel que $a \in U$ et $U \subset A$. L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et est noté $\text{int } A$.
2. adhérent à A si tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ qui contient a satisfait $U \cap A \neq \emptyset$. L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et est noté \bar{A} .



Le point a est adhérent à A et b est intérieur à A .

Remarque. L'intérieur et l'adhérence d'une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ ont les propriétés suivantes :

- on a $\text{int } A \subset A \subset \bar{A}$.
- la partie $\text{int } A$ est ouverte et la partie \bar{A} est fermée.
- si $U \subset \mathbb{R}^n$ est ouverte et $U \subset A$, alors $U \subset \text{int } A$: l'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A .
- si $F \subset \mathbb{R}^n$ est fermée et $A \subset F$, alors $\bar{A} \subset F$: l'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A .
- $a \in \bar{A}$ si et seulement si il existe une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = a$.

Exemple.

Le dernier point de la remarque précédente nous dit que les points adhérent à A sont exactement les points qu'on peut atteindre comme limite de points de A .

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in \bar{D}$. Comme a est limite de points de D , on peut alors donner un sens à la limite de $f(x)$ quand x tends vers a : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in D \quad \|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$$

Tout ce qui a été dit sur la limite de f en un point de D est encore valable pour la limite en un point de \bar{D} .

En particulier, si une fonction f est définie sur D , alors $\bar{D} \setminus D$ est l'ensemble des points où on peut espérer prolonger f par continuité.

Proposition-Définition 3.3.7. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$, et soit $a \in \bar{D} \setminus D$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, la fonction \tilde{f} définie sur $D \cup \{a\}$ par $\tilde{f}(a) = \ell$ et $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in D$ est l'unique fonction continue en a dont la restriction à D est égale à f . On appelle \tilde{f} le prolongement par continuité de f à $\{a\}$.

Preuve.

□

3.3.3 Compacité

Parmi les théorème associés à la continuité pour les fonctions d'une variable, il y a les propriétés des fonctions continues sur un segment : Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors elle est bornée et atteint ses bornes. Dit autrement, $f([a, b])$ est un intervalle borné (car f est bornée) et fermé (car les bornes sont atteintes). La preuve utilise une propriété des suites bornées : de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Ces résultats s'étendent de \mathbb{R} à \mathbb{R}^n .

Définition 3.3.8. Une partie K de \mathbb{R}^n est compacte si de toute suite de points de K on peut extraire une sous suite convergente dont la limite est dans K .

Cette définition peut sembler ad-hoc pour ce qu'on veut démontrer ensuite, mais on a une caractérisation simple des parties compactes. Dans ce qui suit, une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est dite bornée s'il existe $R > 0$ tel que $A \subset B_R(0)$.

Théorème 3.3.9 (Bolzano-Weierstrass). Les parties compactes de \mathbb{R}^n sont les parties fermées et bornées.

Preuve. Admise dans ce cours... mais identique à la preuve dans le cas réel.

□

On a alors l'analogue dans \mathbb{R}^n de la propriété des fonctions continues sur un segment :

Théorème 3.3.10. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction continue définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$. Si $K \subset D$ un ensemble compact, alors $f(K) \subset \mathbb{R}^q$ est une partie compacte de \mathbb{R}^p .

Preuve.

□

En reprenant les notation de l'énoncé, comme $f(K)$ est compacte, elle est aussi bornée, et la fonction f est bornée sur tout compact.

Parmi les autres théorèmes liés à la continuité, le théorème de valeurs intermédiaires a aussi un analogue pour les fonctions de plusieurs variables. Il faut faire appel pour cela à des notions qui dépassent le cadre de ce cours.