

Exercice 1 (Schéma de Heun)

(a) Montrez que la quadrature de Gauss-Radau

$$\int_0^1 g(x) dx \approx \frac{1}{4} g(0) + \frac{3}{4} g\left(\frac{2}{3}\right)$$

est exacte pour n'importe quel polynôme de degré ≤ 2 . Testons l'exactitude sur la base de $\mathbb{R}_2[x] = \text{Vect}(1, x, x^2)$ (on prend donc $g(t) = 1, t, t^2$)

$$\int_0^1 1 dx = 1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}; \quad \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} = 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} = 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9}$$

On voit que $g \mapsto \int_0^1 g(x) dx$ et $g \mapsto \frac{1}{4} g(0) + \frac{3}{4} g\left(\frac{2}{3}\right)$ sont des formes linéaires, elles sont égales sur $\mathbb{R}_2[x]$.

Remarque : pour $g(x) = x^3$, $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} \neq 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{27}$, donc la quadrature n'est pas exacte sur $\mathbb{R}_{\geq 3}[x]$.

(b) Étudions l'erreur de consistante $y(t_0+h) - y_1$. On fait un développement de Taylor à l'ordre 3 :

$$y(t_0+h) = y(t_0) + h y'(t_0) + \frac{h^2}{2} y''(t_0) + \frac{h^3}{6} y'''(t_0) + O(h^4),$$

Remarque : elle suppose que $t \mapsto y(t)$ est au moins C^4 , mais c'est une conséquence simple de $f \in C^\infty$. Pourquoi ? Car $y' = f(y)$, donc $y \in C^0$ et par composition $f(y) \in C^0$ donc $y' \in C^0$, donc $y \in C^1$, mais alors $f(y) \in C^1$ donc $y' \in C^1$, donc $y \in C^2$ etc...

Par récurrence on a donc bien que $y \in C^k$, $\forall k \geq 0$ (un tel argument est appelée "bootstrap").

Calculons les dérivées successives y' , y'' , y''' grâce à l'EDO :

$$\begin{aligned} y' &= f(y) \quad (\Rightarrow y'' = f'(y) \cdot y' = f'(y)f(y) \text{ par composition}) \\ &\Leftrightarrow y''' = f''(y)y'f(y) + f'(y)f(y)y' \text{ par produit} \\ &= f''(y)(f(y))^2 + (f'(y))^2 f(y) \end{aligned}$$

Ainsi on a le développement de Taylor :

$$\begin{aligned} y(t_0+h) &= y_0 + h f(y_0) + \frac{h^2}{2} f'(y_0) f(y_0) \quad (1) \\ &\quad + \frac{h^3}{6} \left\{ f''(y_0) f(y_0)^2 + (f'(y_0))^2 f(y_0) \right\} + o(h^4) \end{aligned}$$

Considérons d'autre part : $y_1 = y_0 + h \left(\frac{1}{1} f(y_0) + \frac{3}{4} f(u_3) \right)$ (1)

or $f(u_3) = f(y_0 + \frac{2h}{3} f(u_2))$, développons-le à l'ordre 2.

Remarque : On développe à l'ordre 2 car $f(u_3)$ est multiplié par h dans (1).

On obtient :

$$f(u_3) = f(y_0) + \frac{2h}{3} f(u_2) f'(y_0) + \frac{2h^2}{9} f(u_2)^2 f''(y_0) + o(h^3). \quad (2)$$

Explicitons maintenant $f(u_2) = f(y_0 + \frac{h}{3} f(y_0))$, pour cela on le développe à l'ordre 1 (cela suffit car $f(u_2)$ sera multiplié au total par h dans (2)) :

$$f(u_2) = f(y_0) + \frac{h}{3} f(y_0) f'(y_0) + o(h^2). \quad (3)$$

Partons maintenant (3) dans (2) :

$$\begin{aligned} f(u_3) &= f(y_0) + \frac{2h}{3} f'(y_0) \left(f(y_0) + \frac{h}{3} f(y_0) f'(y_0) \right) \\ &\quad + \frac{2h^2}{9} f''(y_0) \left(f(y_0) + \frac{h}{3} f(y_0) f'(y_0) \right)^2 + o(h^3) \end{aligned}$$

Remarque : nul besoin de développer $\left(f(y_0) + \frac{h}{3} f(y_0) f'(y_0) \right)^2$ dans ce contexte...

$$\begin{aligned} \text{On a donc } f(u_3) &= f(y_0) + \frac{2h}{3} f''(y_0) f(y_0) \quad (4) \\ &\quad + \frac{2h^2}{9} \left\{ f(y_0) f'(y_0)^2 + f''(y_0) f(y_0)^2 \right\} + o(h^3) \end{aligned}$$

On peut maintenant (4) dans (1).

On a donc :

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h \left\{ \frac{1}{6} f(y_0) + \frac{3}{4} f(y_0) + \frac{h}{2} f'(y_0) f(y_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^2}{6} [f(y_0) f'(y_0)^2 + f''(y_0) f(y_0)^2] \right\} + o(h^4) \quad (H) \\ &= y_0 + h f(y_0) + \frac{h^2}{2} f'(y_0) f(y_0) + \frac{h^3}{6} [f(y_0) f'(y_0)^2 + f''(y_0) f(y_0)^2] + o(h^4) \end{aligned}$$

En comparant (H) avec (T), on trouve bien $y(t_0 + h) - y_1 = o(h^4)$. Donc l'erreur de consistance est en $o(h^4)$.

(c) Soit $T > 0$, et $t_m = mh$, avec $h > 0$ le pas supposé constant.

L'erreur globale est définie comme le $\max_{m \in \llbracket 0, N \rrbracket} |y(t_m) - y_m|$. Le schéma de Heun est un schéma à un pas :

$$y_1 = y_0 + \Phi(t_0, y_0; h)$$

où Φ est la fonctionnelle $\Phi(t_0, y_0; h) := \frac{1}{6} f(y_0) + \frac{3}{4} f(y_0 + \frac{2h}{3} f(y_0 + \frac{h}{3} f(y_0)))$.

De plus, $f \in \text{Lip}_y$ donc $|f(y) - f(z)| \leq L|y - z|$, et il est ainsi facile (mais légèrement chiant) de vérifier que $\Phi \in \text{Lip}_{y_0}$.

Par théorème de convergence des schémas à un pas, on a

$$\max_{m \in \llbracket 0, N \rrbracket} |y(t_m) - y_m| = o(h^3),$$

donc le schéma de Heun est convergent et est d'ordre 3.

Rémarque : les calculs sont + simples du fait que l'ED $y' = f(y)$ est autonome, i.e. f ne dépend pas de t . Cependant, on peut toujours se ramener à une équation autonome. En effet, soit $y' = f(t, y)$. On pose $z(t) = (t, y(t))$. On a donc $z'(t) = (1, y'(t)) = (1, f(t, y)) = (1, f(z))$, et en posant $F(z) := (1, f(z))$, on s'est bien ramené à une ED autonome, mais on a augmenté la dimension de la solution de 1.

Exercice 2 (Schémas multipas)

Écrivons le schéma en prenant $n = j+1$:

$$y_{m+1} + h y_m - 5 y_{m-1} = h \left(h f(t_m, y_m) + 2 f(t_{m-1}, y_{m-1}) \right),$$

il s'agit bien d'un schéma multipas, dont l'erreur de consistance est définie par:

$$y(t_{m+1}) + h y(t_m) - 5 y(t_{m-1}) - h \left(h f(t_m, y_m) + 2 f(t_{m-1}, y_{m-1}) \right),$$

c'est:

$$\varepsilon(h) := y(t_{m+1}) + h y(t_m) - 5 y(t_{m-1}) - h \left(h f(t_m, y_m) + 2 f(t_{m-1}, y_{m-1}) \right).$$

On utilise le fait que $f(t, y(t)) = y'(t)$, et on obtient:

$$\varepsilon(h) = y(t_{m+1}) + h y(t_m) - 5 y(t_{m-1}) - h \left(h y'(t_m) + 2 y'(t_{m-1}) \right).$$

On effectue deux développements de Taylor à l'ordre 4:

$$\circ y(t_{m+1}) = y(t_m) + h y'(t_m) + \frac{h^2}{2} y''(t_m) + \frac{h^3}{6} y'''(t_m) + o(h^4),$$

$$\circ y(t_{m-1}) = y(t_m) - h y'(t_m) + \frac{h^2}{2} y''(t_m) - \frac{h^3}{6} y'''(t_m) + o(h^4),$$

et un autre à l'ordre 2:

$$y'(t_{m-1}) = y'(t_m) - h y''(t_m) + \frac{h^2}{2} y'''(t_m) + o(h^3).$$

On porte maintenant ces 3 développements dans $\varepsilon(h)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(h) &= y(t_m) + h y'(t_m) + \frac{h^2}{2} y''(t_m) + \frac{h^3}{6} y'''(t_m) + y(t_m) \\ &\quad - 5 \left(y(t_m) - h y'(t_m) + \frac{h^2}{2} y''(t_m) - \frac{h^3}{6} y'''(t_m) \right) - 4 h y'(t_m) \\ &\quad + 2 h \left(y'(t_m) - h y''(t_m) + \frac{h^2}{2} y'''(t_m) \right) + o(h^4) \\ &= (1+4-5) y(t_m) + (1+5-4-2) h y'(t_m) + \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 2 \right) h^2 y''(t_m) \\ &\quad + \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6} - 1 \right) h^3 y'''(t_m) + o(h^4) \\ &= o(h^4). \end{aligned}$$

Pour $f \equiv 0$, le schéma produit une suite vérifiant la relation de récurrence linéaire suivante: $y_{m+2} + 4 y_{m+1} - 5 y_m = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + h\lambda - 5 = (\lambda - 1)(\lambda + 5) = 0$, donc les solutions sont $y_m = A \cdot 1^n + B(-5)^n$, où $A, B \in \mathbb{R}$ sont déterminés par la donnée de y_0 et y_1 :

$$\begin{cases} A+B=y_0 \\ A-5B=y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=\frac{y_0-y_1}{6} \\ A=\frac{5}{6}y_0+\frac{1}{6}y_1 \end{cases}$$

Ainsi $y_m = \left(\frac{5}{6}y_0 + \frac{1}{6}y_1\right) + \left(\frac{y_0-y_1}{6}\right)(-5)^n$. Notons que $(-5)^n$ n'est pas borné quand $n \rightarrow \infty$. Ainsi, si au cours du calcul, 2 termes consécutifs ne sont pas égaux à une précision infinie, si par exemple $y_0 - y_1 = \text{eps}$ (préc. machine) alors le facteur $(-5)^n$ va amplifier cette quantité, aussi minime soit-elle, et au bout de quelques dizaines d'itérations, $y_m \sim \frac{\text{eps}}{6} (-5)^n$ sera non borné.

Comme la solution exacte de $y'=0$ est $y = \text{cte}$, le schéma donnera des erreurs de plus en plus grandes et ne convergera pas.

Exercice 3 (Schéma BDF2)

(a) Soit $h > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$. On définit $t_1 := t_0 + h$, $t_2 := t_0 + 2h$, et on se donne 3 valeurs réelles y_0, y_1, y_2 . En considérant le polynôme d'interpolation $q(t)$ vérifiant $q(t_i) = y_i$, $\forall i \in \{0, 1, 2\}$, on vient de se donner en fait 3 noyaux d'interpolation, donc $q \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$. Exprimons le polynôme par la méthode de Newton :

$$q(t) = y(t_0) + (t-t_0)y[t_0, t_1] + (t-t_0)(t-t_1)y[t_0, t_1, t_2]$$

où : $y[t_0, t_1] = \frac{y(t_1) - y(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{y_1 - y_0}{h}$

$$\begin{aligned} y[t_0, t_1, t_2] &= \frac{y[t_1, t_2] - y[t_0, t_1]}{t_2 - t_0} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{y_1 - y_0}{h}}{2h} \\ &= \frac{y_2 - 2y_1 - y_0}{2h^2} \end{aligned}$$

Remarque: si vous n'êtes pas familiers avec les différences divisées de Newton, vous pouvez utiliser l'interpolation de Lagrange.

Ainsi $q(t) = y_0 + (t-t_0) \frac{(y_1-y_0)}{h} + (t-t_0)(t-t_1) \frac{(y_2-2y_1+y_0)}{2h^2}$

(b) Dénivrons le polynôme q par rapport à t :

$$q(t) = \frac{y_1-y_0}{h} + ((t-t_1) + (t-t_0)) \left(\frac{y_2-2y_1+y_0}{2h^2} \right).$$

En posant $t := t_2$, on a :

$$q'(t_2) = \frac{y_1-y_0}{h} + 3h \left(\frac{y_2-2y_1+y_0}{2h^2} \right) = \frac{\frac{3}{2}y_2 - 2y_1 + \frac{1}{2}y_0}{h}.$$

(c) Par définition du schéma de différentiation rétrograde on approxime $y'(t_{m+1})$ par $q'(t_{m+1})$ où q est le polynôme d'interpolation de $y(t)$ aux 3 nœuds t_{m+1}, t_m, t_{m-1} . D'après la formule obtenue en (b):

$$q'(t_{m+1}) = \frac{1}{h} \left(\frac{3}{2}y_{m+1} - 2y_m + \frac{1}{2}y_{m-1} \right),$$

donc en remplaçant dans $y'(t_{m+1}) = f(t_{m+1}, y(t_{m+1}))$, on obtient bien $\frac{3}{2}y_{m+1} - 2y_m + \frac{1}{2}y_{m-1} = h f(t_{m+1}, y_{m+1})$.

(d) Soit $\varphi: y \mapsto \frac{2}{3} \left(2y_m - \frac{1}{2}y_{m-1} + h f(t_{m+1}, y) \right)$. On écrit:

$$\varphi(y) - \varphi(z) = \frac{2h}{3} (f(t_{m+1}, y) - f(t_{m+1}, z))$$

$$\Leftrightarrow |\varphi(y) - \varphi(z)| \leq \frac{2h}{3} L |y - z| \quad \text{car } f(t_{m+1}, \cdot) \in \text{Lip. pour } h \text{ suffisamment petit et } 0 < \frac{2hL}{3} < 1.$$

Donc φ est contractante sur \mathbb{R} et admet un unique point fixe, obtenu comme limite de la suite des itérées. Pour calculer y_{m+1} , on calcule quelques itérations à partir de la valeur initiale y_m , c'est

$$y_{m+1}^{(1)} = \varphi(y_m), \quad y_{m+2}^{(2)} = \varphi(y_{m+1}^{(1)}), \quad \dots, \quad y_{m+j}^{(j)} = \varphi(y_{m+j-1}^{(j)}).$$

Mais comme on a un schéma approché performant, seules quelques itérations suffisent.

(e) Soit la suite récurrente : $\frac{3}{2}y_{m+1} - 2y_m + \frac{1}{2}y_{m-1} = 0$.

D'après le cours, elle est bornée $\forall m \in \mathbb{N}^*$ si les racines de l'éq. caract.

$\frac{3}{2}\lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{2} = 0$ sont de module ≤ 1 , et que les racines de module

1 sont de multiplicité 1. Ici $\frac{3}{2}\lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{3})$,

les racines sont 1 (racine simple) et $\frac{1}{3}$ donc la condition de stabilité est vérifiée.

(f) Exprimons l'erreur de consistante :

$$\begin{aligned}\varepsilon(h) &:= \frac{3}{2}y(t_{m+h}) - 2y(t_m) + \frac{1}{2}y(t_{m-h}) - h f(t_{m+h}, y(t_{m+h})) \\ &= \frac{3}{2}y(t_{m+h}) - 2y(t_m) + \frac{1}{2}y(t_{m-h}) - h y'(t_{m+h}).\end{aligned}$$

Effectuons des développements de Taylor autour de t_m :

$$y(t_{m+h}) = y(t_m) + h y'(t_m) + \frac{h^2}{2} y''(t_m) + O(h^3),$$

$$y(t_{m-h}) = y(t_m) - h y'(t_m) + \frac{h^2}{2} y''(t_m) + O(h^3),$$

$$y'(t_{m+h}) = y'(t_m) + h y''(t_m) + O(h^2).$$

et partons les dans $\varepsilon(h)$:

$$\begin{aligned}\varepsilon(h) &:= \frac{3}{2} \left(y(t_m) + h y'(t_m) + \frac{h^2}{2} y''(t_m) \right) - 2y(t_m) + \frac{1}{2} \left(y(t_m) - h y'(t_m) \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^2}{2} y''(t_m) \right) - h \left(y'(t_m) + h y''(t_m) \right) + O(h^3) \\ &= O(h^3) \text{ donc l'erreur de consistante est bien } O(h^3).\end{aligned}$$

(g) D'après (e), le schéma est stable, d'après (f) il est croissant, donc par théorème de convergence des schémas multiplicatifs, il converge. Comme l'erreur est en $O(h^3)$, il est d'ordre 2.

Exercice 4 (ED avec terme source n'aide)

L'équation différentielle s'écrit $y' = -\frac{1}{\varepsilon}y + \frac{1}{\varepsilon} \cos t$ (équation linéaire).

L'équation homogène a les solutions $\lambda e^{-t/\varepsilon}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, cherchant une solution particulière sous forme $a \cos t + b \sin t$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on trouve ainsi par identification

$$a = \frac{1}{1+\varepsilon^2} \text{ et } b = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} = a\varepsilon.$$

La solution générale est donc :

$$y(t) = \lambda e^{-t/\varepsilon} + \frac{\cos t}{1+\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon \sin t}{1+\varepsilon^2},$$

et avec la C.I. $y(0) = 0$, on a :

$$y(t) = \frac{-1}{1+\varepsilon^2} e^{-t/\varepsilon} + \frac{\cos t}{1+\varepsilon^2} + \varepsilon \frac{\sin t}{1+\varepsilon^2},$$

or comme $\varepsilon \ll 1$, $(1+\varepsilon^2)^{-1} = 1 + O(\varepsilon^2)$ donc

$$y(t) = -e^{-t/\varepsilon} + \cos t + \varepsilon \sin t + O(\varepsilon^2).$$

(a) Le schéma d'Euler est $y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$, ici la fonction f est définie comme $f(t, y) = -\frac{1}{\varepsilon}y + \frac{1}{\varepsilon} \cos t$ donc on a

$$y_{n+1} = y_n + h \left(-\frac{1}{\varepsilon} y_n + \frac{1}{\varepsilon} \cos(t_n) \right) = \left(1 - \frac{h}{\varepsilon} \right) y_n + \frac{h}{\varepsilon} \cos(t_n).$$

(b) Pour résoudre l'équation, on s'inspire de la démarche classique pour l'équation différentielle. On résout d'abord l'équation "homogène":

$$z_{n+1} = \left(1 - \frac{h}{\varepsilon} \right) z_n, \text{ qui est une suite géométrique } z_n = C \left(1 - \frac{h}{\varepsilon} \right)^n, C \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une sol. particulière sous la forme $y_n = A \cos t_m + B \sin t_m$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } y_{n+1} &= A \cos(t_{m+1}) + B \sin(t_{m+1}) = A \cos(t_m+h) + B \sin(t_m+h) \\ &= (A \cosh h + B \sinh h) \cos t_m + (B \cosh h - A \sinh h) \sin t_m. \end{aligned}$$

Par identification avec $y_{n+1} = \left(1 - \frac{h}{\varepsilon} \right) y_n + \frac{h}{\varepsilon} \cos t_m$, on obtient le système 2x2 :

$$\begin{cases} A \cosh h + B \sinh h = A \left(1 - \frac{h}{\varepsilon} \right) + \frac{h}{\varepsilon} \\ -A \sinh h + B \cosh h = B \left(1 - \frac{h}{\varepsilon} \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(\cosh h - (1 - \frac{h}{\varepsilon})) + B \sinh h = \frac{h}{2} \\ -A \sinh h + B(\cosh h - (1 - \frac{h}{\varepsilon})) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow MX = B, \text{ avec } X = (A, B)^T,$$

$$M = \begin{pmatrix} \cosh h - (1 - \frac{h}{\varepsilon}) & \sinh h \\ -\sinh h & \cosh h - (1 - \frac{h}{\varepsilon}) \end{pmatrix} \text{ et } B = \left(\frac{h}{2}, 0 \right)^T.$$

Le déterminant est $\det M = \left(\cosh h - (1 - \frac{h}{\varepsilon}) \right)^2 + \sinh^2 h \geq 0$, donc on peut déterminer A et B . On utilise que $\cosh h = 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$, $\sinh h = h + o(h^2)$ et on écrit $\det M = \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^2 + O\left(\frac{h^3}{\varepsilon}\right) = \frac{h^2}{\varepsilon^2} \left(1 + O(h\varepsilon) \right)$.

$$\text{Ainsi } A = \frac{1}{\det M} \begin{vmatrix} h/\varepsilon & \sinh h \\ 0 & \cosh h - (1 - \frac{h}{\varepsilon}) \end{vmatrix} = \dots = 1 + O(h\varepsilon),$$

$$\text{et } B = \frac{1}{\det M} \begin{vmatrix} \cosh h - (1 - \frac{h}{\varepsilon}) & h/\varepsilon \\ -\sinh h & 0 \end{vmatrix} = \frac{h/\varepsilon \sinh h}{\det M} = \varepsilon + O(h\varepsilon^2).$$

Ainsi la solution générale de (a) est donnée par :

$$\begin{aligned} y_m &= C \left(1 - \frac{h}{\varepsilon} \right)^m + A \cos t_m + B \sin t_m \\ &= C \left(1 - \frac{h}{\varepsilon} \right)^m + \cos t_m + \varepsilon \sin t_m + O(h\varepsilon) \end{aligned}$$

Si on veut $y_0 = 0$, on a $C = -1$, donc

$$y_m = - \left(1 - \frac{h}{\varepsilon} \right)^m + \cos t_m + \varepsilon \sin t_m + O(h\varepsilon).$$

(c) La solution numérique est bornéessi $\left(1 - \frac{h}{\varepsilon} \right)^m$ est borné, ce qui est le casssi $|1 - \frac{h}{\varepsilon}| < 1 \Leftrightarrow h < 2\varepsilon$.

(d) Le schéma d'Euler implicite s'écrit :

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + h f(t_{m+1}, y_{m+1}) \\ &= y_m + h \left(-\frac{1}{\varepsilon} y_{m+1} + \frac{1}{\varepsilon} \cos(t_{m+1}) \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{h}{\varepsilon} \right) y_{m+1} = y_m + \frac{h}{\varepsilon} \cos(t_{m+1}).$$

On commence par résoudre l'équation "homogène" :

$$(1 + \frac{h}{\varepsilon}) z_{m+1} = z_m, \text{ qui est la suite géométrique } z_m = C \left(1 + \frac{h}{\varepsilon}\right)^{-m}, C \in \mathbb{R}.$$

En cherchant une sol. particulière sous la forme $A \cos t_m + B \sin t_m$, on trouve :

$$y_m = C \left(1 + \frac{h}{\varepsilon}\right)^{-m} + \cos t_m + \varepsilon \sin t_m + O(h\varepsilon).$$

Maintenant, y_m est bornée ssi $\left(1 + \frac{h}{\varepsilon}\right)^{-m}$ est bornée, donc ssi $\left|1 + \frac{h}{\varepsilon}\right| < 1$, ce qui est toujours vérifié car $h > 0$.

(e) Sur la figure en haut, pour $h = \frac{1.975}{50}$: on voit que la solution numérique oscille fortement avant de converger très lentement.

Pour $h = \frac{1.275}{50}$, les oscillations sont moins fortes et la convergence semble plus rapide.

Sur la figure en dessous, pour $h = \frac{2.1}{50}$: la solution numérique calculée avec le schéma d'Euler explicite diverge. Cela confirme bien le résultat de la question (c) $\varepsilon = \frac{1}{50}$, si $h > 2\varepsilon$ on a une solution non-bornée. Pour $h < 2\varepsilon$, les oscillations s'estompent, la solution est bornée.

Sur la figure avec Euler implicite, il n'y a pas d'oscillations parasites, la solution est bornée même pour $h > 2\varepsilon$. On remarque tout de même un écart entre les deux solutions pour t petit.

Remarque : La solution exacte $-e^{-t/\varepsilon} + \cos t + \varepsilon \sin t + O(\varepsilon^2)$ comprend une partie transitoire $e^{-t/\varepsilon} = e^{-50t}$ tendant très vite vers 0. Le schéma d'Euler implicite étant d'ordre 1, il n'est pas assez précis pour capturer cette variation brusque entre 0 et 1.

Sur la dernière figure, le schéma est d'ordre 2 et semble capturer la phase transitoire pour t petit, et bien approcher la sol. exacte sans

restriction sur h . L'équation $y' = -\frac{1}{\varepsilon} y + \frac{1}{\varepsilon} \cos t$ possède une solution qui varie très rapidement, ainsi le schéma d'E.E. nécessite de choisir un pas h très petit, sinon il sera instable.

Les schémas implicites donnent des résultats corrects sans restriction sur le pas de temps. Ils sont d'autant + précis que l'onde est élevée.

Remarque : la fonction $f(t, y) = -\frac{1}{\varepsilon} y + \cos t$ est lipschitzienne par rapport à y mais la constante de Lipschitz $L = \frac{1}{\varepsilon} \gg 1$, c'est ce qui rend difficile la convergence des schémas explicites sans fixer un pas h très petit.