Dinâmica de um metrónomo básico

O metrónomo é um dispositivo de relojoaria que produz um sinal audível (e visual) de cadência regular, sendo utilizado sobretudo para fins de estudo ou interpretação musical. O metrónomo mecânico consiste num pêndulo cujas oscilações, reguladas pela posição de um peso numa haste, podem ser mais lentas ou mais rápidas, correspondendo a diferentes compassos.

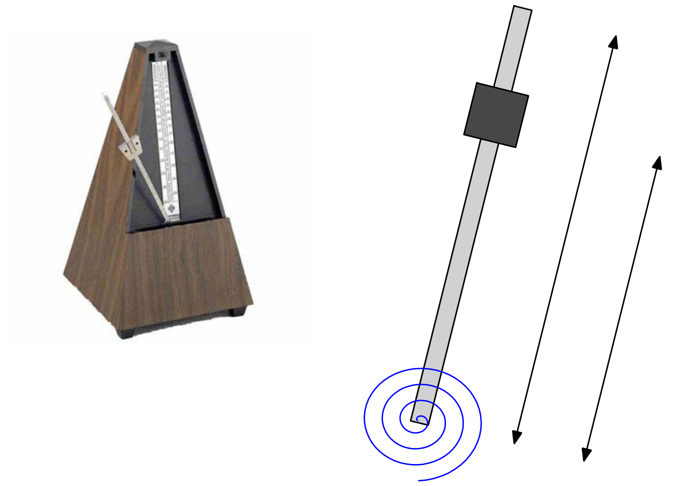

Fig. 1- Estrutura do braço do metrónomo.

A figura 1 ilustra de forma esquemática o braço de um metrónomo, constituído por uma barra metálica de comprimento *L* e massa *M*, onde se coloca uma massa *m* adicional à distância *l* (ajustável) do eixo de rotação. A barra está ligada a uma mola não linear que permite as oscilações mecânicas do sistema ao fornecer o binário $k\theta\left(1+\frac{\theta^2}{100}\right)$, onde *k* é a constante da mola. No seu movimento a mola está sujeita a atrito $\beta\dot{\theta}$, onde β é o coeficiente de atrito, e à aceleração de gravidade $g \approx 9.8\mathrm{ms}^{-2}$, que na figura actua em sentido vertical descendente. O mecanismo de relojoaria do metrónomo permite aplicar um binário externo ao sistema da figura para o manter em oscilação, actuando sobre a deflexão da mola.

Trabalho a realizar

1 (Em casa) Estabeleça a equação diferencial (de 2ª ordem) que rege a evolução do ângulo θ.

Nota: Para o cálculo do momento de inércia associado à massa *m*, assuma que esta é pontual. Para o cálculo do momento de inércia associado à massa *M* assuma que a massa está uniformemente distribuída ao longo da barra.

2 (Em casa) Tomando como variáveis $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta}$ (posição e velocidade angular do braço), e admitindo pequenos ângulos de deflexão θ, obtenha uma descrição equivalente do sistema (linearizado) com um modelo de estado. Tome como entrada o binário externo aplicado à mola e como saída ângulo de deflexão

3 (Em casa) Uma maneira padrão de escrever a função de transferência de um SLIT de 2ª ordem é

$$G \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

em que ζ (coeficiente de amortecimento) e ω_n (frequência natural das oscilações não amortecidas) são parâmetros cujos valores definem a resposta do sistema. Sugere-se que relembre a relação entre o valor destes parâmetros e as respostas no tempo e na frequência recorrendo à referência bibliográfica [2].

Obtenha a função de transferência correspondente ao sistema mecânico modelado na questão anterior, e comparando com a função de transferência padrão obtenha expressões para G, ζ e ω_n em termos dos parâmetros físicos do sistema.

4 (Em casa) Com base nas expressões que obteve em 3), diga:

a) Se a resposta do sistema será sempre oscilatória (como pretendido);

b) Se as oscilações se podem manter indefinidamente, sem aplicação de binário externo;

c) Se a posição da massa *m* sobre a haste influencia a rapidez das oscilações;

d) Que alterações antevê na frequência se a posição do sistema da figura 1 for alterada, passando a oscilar num plano horizontal, em vez da configuração vertical especificada?

5. Nesta alínea e nas seguintes, salvo indicação em contrário, considere que o binário aplicado é nulo. Recorrendo ao SIMULINK simule as equações de estado que obteve em 2). Nesta alínea **não** pode utilizar o bloco que permite simular directamente o modelo de estado. Deverá utilizar apenas integradores, ganhos e outros blocos elementares.

Utilize os seguintes valores numéricos para os parâmetros do modelo:

$$L = 0.5 \text{ m},\ M = 0.15 \text{ Kg},\ l = 0.4 \text{ m},\ m = 0.2 \text{ Kg},\ k = 3 \text{ Nm/rad},\ \beta = 0.1 \text{ Nms/rad}$$

Represente os gráficos das variáveis de estado em função do tempo e no espaço de estados. Tome como condição inicial

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi/4 \end{bmatrix}.$$

6. Modifique agora o diagrama de simulação no SIMULINK por forma a utilizar o bloco com o modelo de estado pré-definido. Repare que neste caso tem que definir as matrizes B, C e D do modelo com dimensões adequadas. Para efeitos da simulação, como convém escolher a matriz C? De aqui em diante deverá usar este diagrama para o sistema linearizado, a menos que especificado em contrário.

7. Considere os parâmetros e condições iniciais dados acima, e para β considere duas situações distintas:

a) $\beta = 0$ e b) $\beta = 1$

Trace as respostas no tempo das variáveis de estado e a correspondente evolução no plano de estado.

Em gráficos à parte, trace ainda respostas sobrepostas no plano de estado para algumas condições iniciais que considere significativas para caracterizar

o retrato de fase do sistema. Sobreponha a estes gráficos o campo de vectores que define a equação diferencial. Este campo é definido associando a cada ponto do espaço de estados x o vector Ax que indica a direcção seguida pelas trajectórias de estado nesse ponto. O campo de vectores pode ser traçado com a função *quiver*.

Calcule os valores e vectores próprios da matriz A para cada valor de β, bem como para o valor usado na questão 5, e discuta a sua relação com as respostas obtidas no plano de estado[1].

8. (Em casa – justificar a escolha, relacionando-a com os modos do sistema) Nas condições anteriores, com $\beta = 1\,\mathrm{Nms/rad}$, escolha dois conjuntos de condições iniciais que conduzam a trajectórias rectilíneas no plano de fase. Ilustre ambas as situações no plano de fase.

9. (Em casa – descrever a estratégia de dimensionamento) Para $L = 0.25\,\mathrm{m}$, $M = 0.1\,\mathrm{Kg}$, $k = 0.35\,\mathrm{Nm/rad}$ e $\beta = 0.001\,\mathrm{Nms/rad}$ dimensione a massa m no sistema mecânico da figura 1 e defina dois valores para o comprimento $l \geq 0.05\,\mathrm{m}$ que permitam obter no metrónomo as cadências de 50 BPM[2] (*lento*) e 150 BPM (*allegro*). O código desenvolvido deve permitir refazer o projecto para outras frequências (que serão oportunamente fornecidas a cada grupo) com um mínimo de intervenção do operador. Confirme por simulação o dimensionamento que efectuou[3], tomando $\theta_0 = 45^{\mathrm{o}}$ e $\dot{\theta}_0 = 0$. Nos gráficos com as respostas temporais sobreponha a envolvente teórica da posição angular, comentando a sua adequação às observações e as diferenças observadas para as duas cadências.

---

[1] Pode usar o comando *eig* para obter os valores e vectores próprios de uma matriz.

[2] BPM significa *beats per minute,* ou seja, é o número de vezes por minuto que o braço oscilante do metrónomo atinge **uma das duas** posições extremas. Assim, a frequência de batimentos corresponde ao **dobro** da frequência de oscilação.

[3] Para estimar a frequência empírica de oscilação use o comando *findpeaks* para localizar os máximos/mínimos da posição angular ao longo do tempo.

10. Simule o modelo não linear do metrónomo que obteve inicialmente e caracterize os desvios de frequência observados. Proponha e teste uma forma de refinar o dimensionamento das posições da massa *m* para que as cadências de oscilação se aproximem mais dos valores pretendidos.

11. Modifique o modelo do sistema não linear para simular a existência de um mecanismo de relojoaria no metrónomo que impulsiona (aplicando binário externo) durante breves instantes o pêndulo quando este passa pela vertical, contrariando assim o natural decaimento para zero da amplitude das oscilações. A presença deste sistema afecta significativamente a frequência de oscilação pretendida?

12. Considerando que o binário externo é diferente de zero e que a saída é a posição angular θ, utilize a função *bode* para traçar as curvas de resposta em frequência para as duas posições da massa determinadas na questão 9. Comente as diferenças relevantes entre as curvas. Que dispositivo poderia fornecer a este sistema mecânico o tipo de entrada subjacente ao diagrama de Bode?

13. (Em casa – descrever a estratégia de medição da massa) Embora o dispositivo para aplicação de binário externo referido na questão anterior não seja útil para um metrónomo (porquê?), pode ser usado em conjunto com o sistema mecânico para criar uma "balança" que permite medir a massa *m* sem calcular a frequência natural de oscilação do pêndulo. Suponha então que pode aplicar um binário externo sinusoidal com frequência ajustável, ou até realizar um varrimento, mas **desconhecendo a sua amplitude**. Podendo observar apenas a **amplitude de oscilação** para cada frequência, explique como poderia determinar a massa *m* conhecendo a sua posição *l* sobre a barra. Realize uma simulação (com o sistema linearizado) que ilustre o desempenho do método proposto.