Descrição do problema

Neste trabalho estuda-se o posicionamento das cabeças de leitura/escrita de um disco rígido, avaliando-se estratégias de actuação do braço que as suporta para conseguir um reposicionamento rápido.

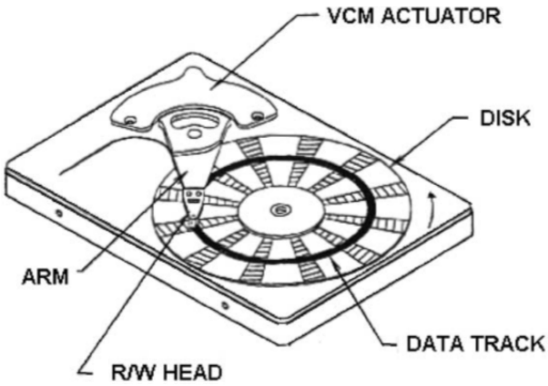


Fig. 1 – Estrutura mecânica dum disco rígido.

A figura 1 mostra a estrutura mecânica dum disco rígido. A superfície do disco contém milhares de pistas de gravação (*tracks*) concêntricas, que são lidas ou escritas por uma cabeça magnética. A cabeça é suportada por um sistema de suspensão e transporte, pairando a muito curtas distâncias (da ordem de µm) da superfície do disco em rotação. Um servomotor movimenta o braço, posicionando a cabeça sobre a pista pretendida, sendo desejável que esta operação seja precisa e rápida. O sistema mecânico em estudo consiste no servomotor, braço, e cabeça magnética. A entrada do sistema é uma tensão, u, aplicada ao servomotor, sendo a saída, y, a posição radial da cabeça sobre o disco. Aproxima-se a dinâmica deste sistema por

$$\ddot{y} = u - b\dot{y}$$

onde b é uma constante associada a um termo que modela o efeito do atrito. Em unidades apropriadas o módulo da entrada de controlo não pode exceder o valor máximo 1 e toma-se como valor numérico nominal $b = 0$.

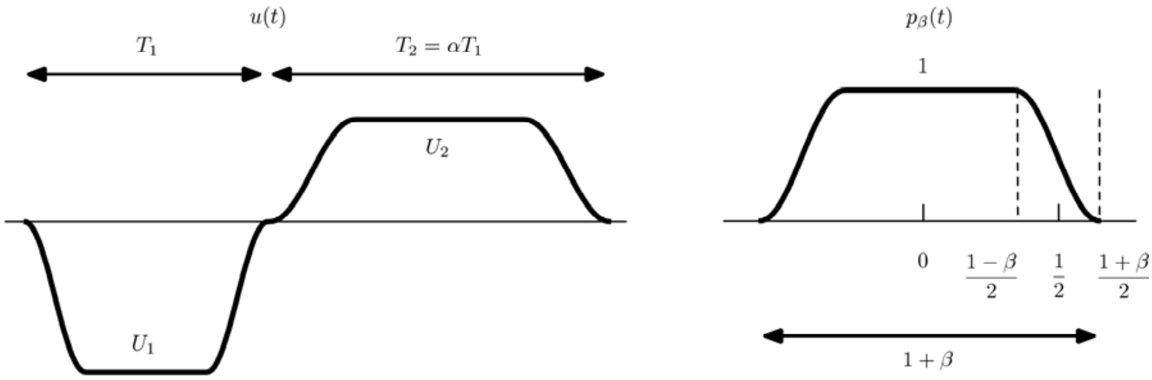
O posicionamento da cabeça pode ser formulado, de forma canónica, como um problema de actuação que leva o estado do sistema duma configuração inicial (em unidades apropriadas) $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$ para $y(T) = 0, \dot{y}(T) = 0$, sendo desejável que o intervalo *T* seja o menor possível. O **objectivo deste**

trabalho é comparar diferentes estratégias para controlo do braço da unidade de disco.

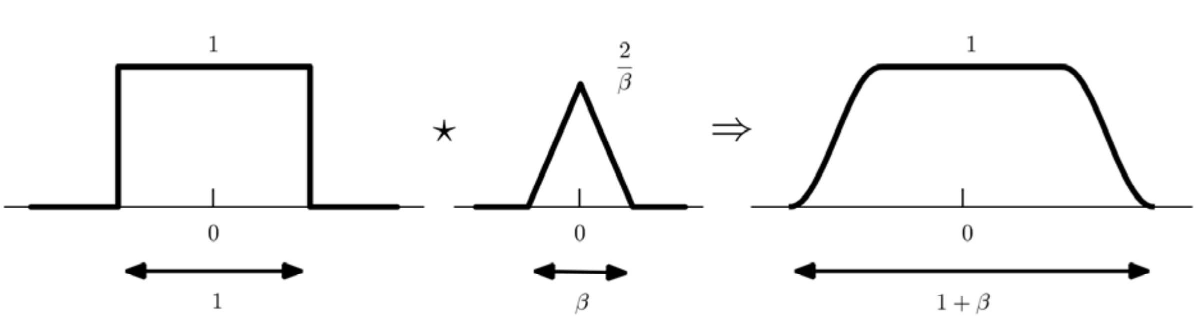
O trabalho proposto enfatiza os aspectos relacionados com a optimalidade do sinal de comando do braço, e com a forma de lidar com os erros de posicionamento. A obtenção duma solução analítica para um problema formal de controlo óptimo não se enquadra nos objectivos da disciplina de Modelação e Simulação[1], adoptando-se aqui uma abordagem baseada em simulação.

Trabalho a realizar

Considere sinais de controlo $u(t)$ obtidos por concatenação de pares de impulsos semelhantes (figura 2a). Um sinal $u(t)$ pode ser expresso como uma sobreposição de duas réplicas deslocadas e escaladas (no tempo e em



(a)



(b)

Fig. 2 – (a) Estrutura dos sinais a aplicar ao sistema (b) Modelo para o impulso protótipo

[1] A solução analítica é dada pelas técnicas de Controlo Óptimo e estuda-se no 2º ciclo, na disciplina de Controlo em Espaço de Estados.

amplitude) de impulsos protótipo $p_\beta(t)$ cujo modelo de geração (conceptual) está representado na figura 2b. O parâmetro $0 \leq \beta \ \leq 1$ controla a suavidade dos flancos dos impulsos.

1. **(Em casa)** Obtenha uma expressão analítica para $p_\beta(t)$

2. Desenvolva uma função para geração do impulso protótipo. Esta recebe como entrada um vector de instantes temporais, t, e o parâmetro β. Devolve os valores de $p_\beta(t)$ calculados nesses instantes.

3. Desenvolva uma função para gerar $u(t)$ a partir do protótipo. Esta recebe como entrada a duração total da forma de onda, T, o parâmetro α, o parâmetro β, as amplitudes U1 e U2 e o número de pontos de cada um dos impulsos, n1 e n2. Devolve o vector com os instantes de tempo (com n1+n2-1 elementos) e $u(t)$. Note que na figura 2a se tem para o primeiro impulso (por exemplo) $u_1(t) = -U_1 p_\beta\left(\frac{t-\frac{T_1}{2}}{\mu_1}\right)$, com $\mu_1 = \frac{T_1}{1+\beta}$.

4. **(Em casa)** Verifique que o protótipo tem área unitária, ou seja, $\int_{-\infty}^{\infty} p_\beta(t)dt = 1$. Com base neste resultado calcule a área de uma versão escalada em amplitude e no tempo, $\int_{-\infty}^{\infty} U p_\beta\left(\frac{t}{\mu}\right) dt = U\mu$.

5. **(Em casa)** Quando a entrada $u(t)$ é constante mostre que no plano de fase $(y, \dot{y})$ o estado do sistema percorre uma trajectória parabólica. A figura 3 ilustra uma estratégia baseada neste resultado que conduz o estado do sistema do ponto inicial para a origem em dois passos, por aplicação sucessiva de um par de impulsos rectangulares com igual duração e amplitudes simétricas ± 1 (o que corresponde ao caso $\alpha = 1$, $\beta = 0$).

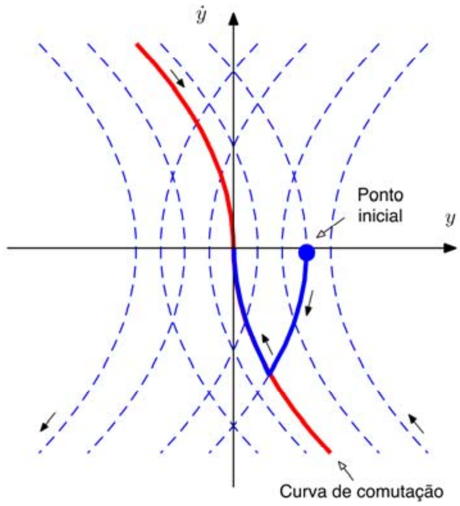


Fig. 3 – Diagrama de comutação com entrada bi-nível simétrica.

6. **(Em casa) Dados** α e β pretende-se agora determinar os parâmetros U1, U2, e T (ou T1, T2) para que $u(t)$ conduza o sistema da configuração inicial dada $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$ para a configuração final desejada $y(T) = 0, \dot{y}(T) = 0$ em tempo mínimo. **Sem recorrer à expressão analítica** de $p_\beta(t)$ comece por relacionar as amplitudes das duas réplicas, U1 e U2, para que $\dot{y}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)dt = 0$. De seguida calcule[2] $y(T) = y(0) + \int_0^T \dot{y}(t)dt$ em função de U1, T1, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Atendendo a que $y(T) - y(0) = -1$, expresse U1 em função de T1. Finalmente, imponha a restrição $|U_1|, |U_2| \leq 1$, para obter o valor mínimo admissível para T em função de α e β. Qual o valor de α que minimiza esse tempo?

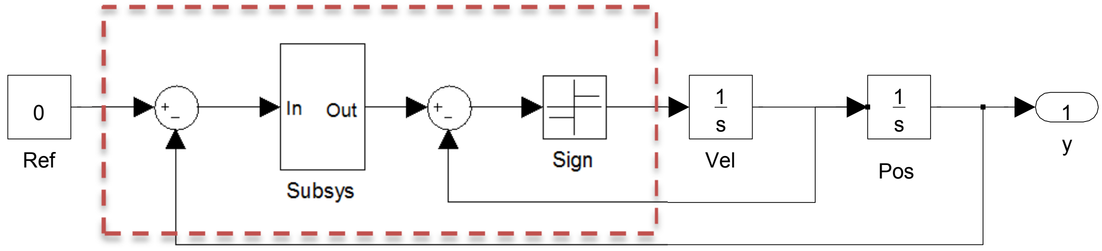
7. Simule o sistema com entradas compostas de acordo com a alínea anterior para 3 pares diferentes de α, β, confirmando os resultados analíticos. Analise também o comportamento de uma versão perturbada do sistema nominal com $b = 0.025$.

8. Retomando a estratégia de actuação com impulsos rectangulares simétricos ± 1 da figura 3, pretende-se realizá-la usando uma arquitectura de controlo em malha fechada representada na figura 4a. Agora, os impulsos rectangulares que compõem $u(t)$ não são gerados *a priori*, mas sim dinamicamente em função da evolução do próprio sistema. Neste contexto,

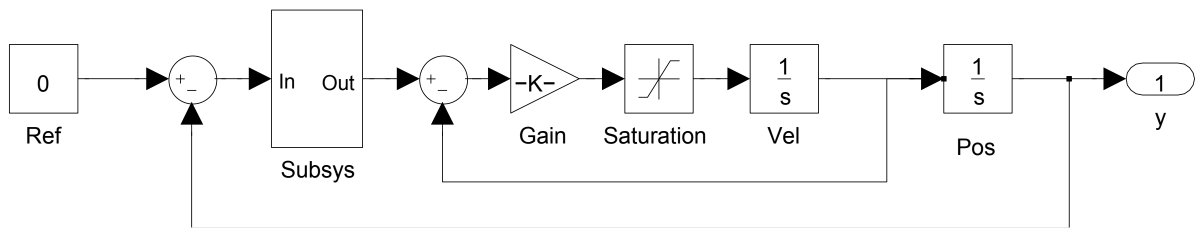
---

[2] Para este cálculo é suficiente conhecer a área total do protótipo escalado (já calculada) atendendo ás simetrias dos flancos de $\dot{y}(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau$.

ao conjunto dos dois ramos de parábola da figura 3 que convergem na origem chama-se *curva de comutação.* Realizando o subsistema “Subsys” da figura 4a um mapeamento descrito por $f(x) = \mathrm{sgn}(x)\sqrt{2|x|}$, **represente** a função de geração da entrada $u(y, \dot{y})$ (região tracejada no diagrama de blocos) e **explique** o princípio de funcionamento global da estrutura de controlo



(a)



(b)

Fig. 4 – Controlo do sistema em cadeia fechada
(a) Estrutura ideal (b) Estrutura para simulação

9. Realize simulações que ilustrem o funcionamento do sistema em malha fechada da figura 4b, verificando a sua equivalência com a estratégia de malha aberta usada anteriormente[3] para impulsos rectangulares. **Justifique** as caraterísticas oscilatórias do sinal de controlo que obteve em malha fechada após convergência do estado do sistema para a vizinhança da origem. Este comportamento, conhecido por *chattering*, é problemático?

10. A figura 5 apresenta uma arquitectura de controlo modificada que evita o *chattering* na entrada. Em traços gerais este método altera a curva de

[3] Para evitar problemas numéricos no cálculo da evolução do modelo é aconselhável substituir o bloco “Sign” por uma saturação em ± 1 com uma estreita zona linear. Isto consegue-se ligando um bloco de ganho elevado em cascata com um bloco de saturação em ± 1. **Atenção aos parâmetros deste bloco, que não correspondem aos valores por omissão da biblioteca do SIMULINK**.

comutação, especificando um intervalo $\pm y_l$ em torno da origem onde o seu andamento passa a ser linear, e atribuindo à curva uma espessura não nula no plano de fase. O mapeamento do subsistema "Subsys" é dado pela expressão

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k_1}{k_2} x, & \text{se } |x| \le y_l \\ \operatorname{sgn}(x) \left[\sqrt{2|x|} - \dfrac{1}{k_2} \right], & \text{se } |x| > y_l \end{cases}$$

onde as constantes $k_1 = 1/y_l$, $k_2 = \sqrt{2k_1}$ asseguram que a curva de comutação e a sua derivada são contínuas. Dê um significado mais preciso a esta descrição sumária, **representando** a função de geração da entrada $u(y, \dot{y})$ (região tracejada no diagrama de blocos) para um valor adequado de y_l e **explicando** o princípio de funcionamento.

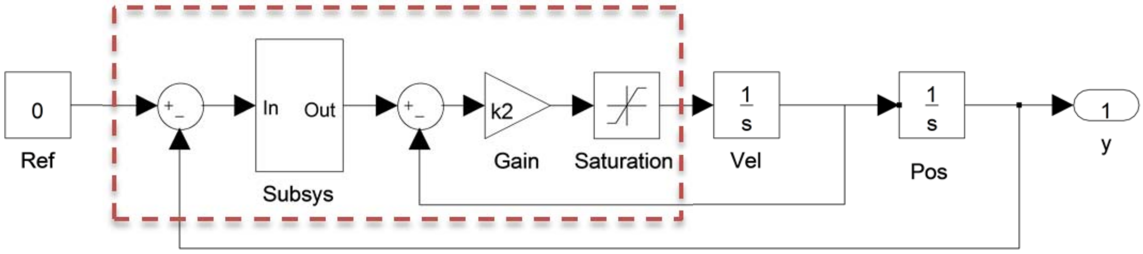


Fig. 5 – Arquitectura modificada que evita oscilações no sinal de controlo.

11. Implemente este sistema em SIMULINK e compare a evolução do estado e do sinal de controlo com o caso do sistema básico em cadeia fechada. Quantifique a degradação no tempo de resposta e discuta o seu impacto. Compare também com a resposta do sistema linear que se obtém retendo apenas o ramo superior da função $f(x)$ definida acima, estendido para todo o x.

12. À semelhança da configuração em cadeia aberta analise o comportamento do sistema perturbado com $b = 0.025$. Compare com os resultados em cadeia aberta e discuta a robustez dos dois tipos de estrutura.

13. Simule o sistema da figura 5 com referências não nulas, aplicando na entrada “Ref” sinais constantes por troços e sequências de rampas. Comente a fidelidade de seguimento que obteve nos dois casos.