Problemas básicos NP-Completos

Vertex Cover $\preceq$ Hamiltonian Circuit

Eva Peso Adán   Evian Concepción Peña
Francisco Marqués Armas   Raimon Mejías Hernández
Saúl Sosa Díaz

Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología, Universidad de La Laguna

La Laguna, 20 de noviembre de 2023

1 Capítulo 1

1.1 Problemas Involucrados

VERTEX COVER (VC):

ENTRADA: Un grafo $G = (V, E)$ y un entero positivo $K \leq |V|$.
PREGUNTA: ¿Existe un Cubrimiento de Vertices de tamaño k o menor para G que es un subconjunto $V' \subseteq V$ tal que $|V'| \leq K$ y para cada arista $u, v \in E$, y al menos uno de u y v pertenecen a V'?

HAMILTONIAN CIRCUIT (HC):

ENTRADA: Un grafo $G = (V, E)$
PREGUNTA: G contiene un ciclo Hamiltoniano, el cual es, un ordenamiento $< v_1, v_2, ..., v_n >$ de los vértices de G, donde $n = |V|$, tal que $v_n, v_1 \in E$ y $v_i, v_{i+1} \in E \; \forall i, 1 \leq i < n$?

1.2 Demostración de NP-Completitud

Teorema 1. *Halmitonian Circuit es NP-Completo.*

Demostración. Es fácil comprobar que $HC \in NP$, ya que se puede encontrar un algoritmo para una Máquina de Turing No Determinista (NDTM) que reconozca el lenguaje L(HC, e) para un esquema de codificación e, en un número de pasos acotado por una función polinomial.

Transformamos VC en HC. Sea $G = (V, E)$ una instancia de VC y el entero positivo $K \leq |V|$. Construimos una instancia $G' = (V', E')$ tal que G' tiene un circuito Hamiltoniano sólo si G tiene un VC de tamaño K o menor. La construcción de G' es la siguiente:

En primer lugar, G' tendrá K "vértices selectores" $a_1, a_2, ..., a_K$, K que serán usados para seleccionar K vértices del conjunto de vértices de V en G. En segundo lugar, por cada vértice en E, G' tendrá un componente para el contiene un componente de "cubrimiento de pruebas" que se usará para garantizar que al menos uno de los puntos finales de la arista está seleccionado entre los K vértices. El componente para $e = u, v \in E$ tiene 12 vértice:

$$V'_e = \{(u, e, i), (v, e, i) : 1 \leq i \leq 6\}$$

Y 14 aristas:

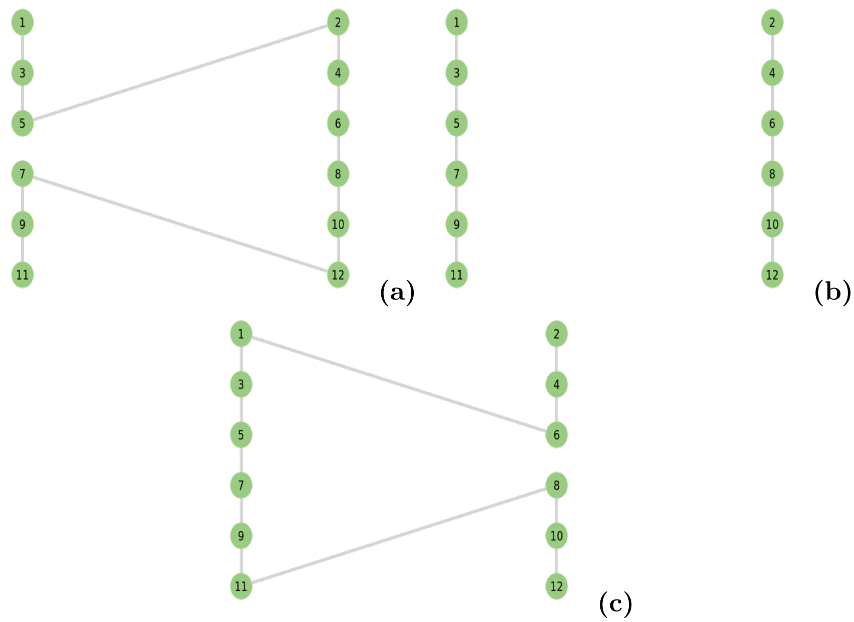
$$\begin{gathered} E'_e = \{(u, e, i), (u, e, i+1), (v, e, i), (v, e, i+1) : 1 \leq i \leq 5\} \\ \cup \{(u, e, 6), (u, e, 1), (v, e, 6), (v, e, 1)\} \end{gathered}$$

Figura 1. *Gadget para una arista $u, v \in E$.*

En la construcción completa, los únicos vértices que estarán involucrados en aristas adicionales son $(u, e, 1)$, $(v, e, 1)$, $(u, e, 6)$, y $(v, e, 6)$. Esto implica que cualquier circuito Hamiltoniano de G' tendrá que recorrer los vértices en E'_e en una de las tres configuraciones enseñadas en la figura 2. Por tanto, si un circuito "entra" en el componente $(u, e, 1)$ tendrá que "salir" en $(u, e, 6)$, y viceversa. De manera similar, si un circuito "entra" en el componente $(v, e, 1)$ tendrá que "salir" en $(v, e, 6)$, y visitar los 12 vértices en los componentes o sólo los 6 vértices $(u, e, i), 1 \leq i \leq 6$.

Las aristas adicionales servirán para unir parejas de componentes de componentes de cubrimiento de pruebas. Para cada vértice $v \in V$, con los vértices incidentes en v ordenados (arbitrariamente) como $e_{v[1]}, e_{v[2]}, ..., e_{v[deg(v)]}$, donde deg(v) es el grado de v en G, es decir, el número de aristas incidentes en v. Todos los componentes de cubrimiento de pruebas correspondientes a estas aristas (teniendo v como punto final) están unidos por las siguientes aristas conectoras:

$$E'_v = \{\{(v, e_{v[j]}, 6), (v, e_{v[j+1]}, 1)\} 1 \leq i \leq deg(v)\}$$



(a) (b) (c)

Figura 2. *(a),(b) y (c) Son las tres posibles configuraciones de un ciclo Hamiltoniano dentro de los Gadgets para $e = \{u,\ v\}$, El caso (a) se corresponde cuando u forma parte de la cobertura pero v no. El caso (b) para cuando tanto u como v forman parte de la cobertura y por ultimo (c) se corresponde cuando u no forma parte de la cobertura pero v si.*

La conexión final de aristas en G' une el primer y último vértice de cada uno de los caminos a cada uno de los vértices selectores $a_1, a_2, ..., a_k$. Estas aristas se especifican de la siguiente manera:

$$E'' = a_i, (v, e_{v[1]}, 1), a_i, (v, e_{[deg(v)]}, 6) \colon 1 \leq i \leq K, v \in V$$

El grafo completo $G' = (V', E')$ tiene:

$$V' = a_i : 1 \leq i \leq K \cup (\cup_{e \in E} V'_e)$$

con

$$E' = (\cup_{e \in E} E'_e) \cup (\cup_{v \in V} E'_v) \cup E''.$$

No es difícil ver que G' pueden ser construidos a partir de G y K en tiempo polinomial.

Entonces G' tiene un ciclo Hamiltoniano si y solo si G tiene un Vertex Cover de tamaño K o menor. Suponiendo que $< v_1, v_2, ..., v_n >$, donde $n = |V'|$, es un ciclo Hamiltoniano para G'. Considerando cualquier porción del circuito que empieza en el vértice en el conjunto $a_1, a_2, ..., a_k$, y acaba en el vértice contenido en $a_1, a_2, ..., a_k$, y no encuentra el vértice de manera interna en el ciclo. Porque de las restricciones previamente mencionadas en la manera en la que ciclo Hamiltoniano pasa a través de un cubrimiento de componentes, esta porción de circuito debe pasar a través de un conjunto de cubrimiento de componentes correspondiendo a exactamente esas aristas de E que son incidentes en un vértice particular $v \in V$.

Cada uno de los cubrimientos de componentes es recorrido en uno de los modos (a), (b), o (c) de la figura 2 y ningún vértice de los recubrimientos de componentes es encontrado. Los K vértices de $a_1, a_2, ..., a_k$, divide el ciclo Hamiltoniano en K caminos correspondiente a un vértice $v \in V$. Ya que el circuito Hamiltoniano tiene que incluir cada uno de los componentes del cubrimiento de pruebas, y ya que los vértices del componente de cubrimiento de pruebas sólo puede ser recorrido por un camino correspondiente a un punto final de e, cada arista en E debe incluir al menos un punto final entre los K vértices seleccionados. Por tanto, este conjunto de K vértices forma el VC deseado para G.

Por otro lado, supongamos que $V* \subseteq V$ es un VC de tamaño K o menor para G. Entonces, podemos asumir que $|V*| = K$, ya que vértices adicionales de V siempre pueden ser añadidos y seguiremos teniendo un VC. Sean los elementos de $V*$ $v_1, v_2, ..., v_k$. Las aristas siguientes han sido elegidas para estar en el circuito h Hamiltoniano para G'. Desde el componente de cubrimiento de pruebas representando cada arista $e = u, v \in E$, elige las aristas especificadas en la figura 2 (a), (b) o (c) dependiendo de si $u, v \cap V*$ es igual a u, v o u, v, respectivamente. Una de estas tres posibilidades debe ser cierta, ya que $V*$ es un VC para G. A continuación, escoge las aristas en E'_{v_i}, para $1 \leq i \leq K$. Finalmente, escoge las aristas

$$\{a_i, (v_i, e_{v_i[1]}, 1), 1 \leq i \leq K\}$$

$$\{a_{i+1}(v_i, e_{v_i[deg(v_i)]}, 6), 1 \leq i \leq K\}$$

y

$$\{a_{i+1}(v_i, e_{v_i[deg(v_i)]}, 6)\}.$$

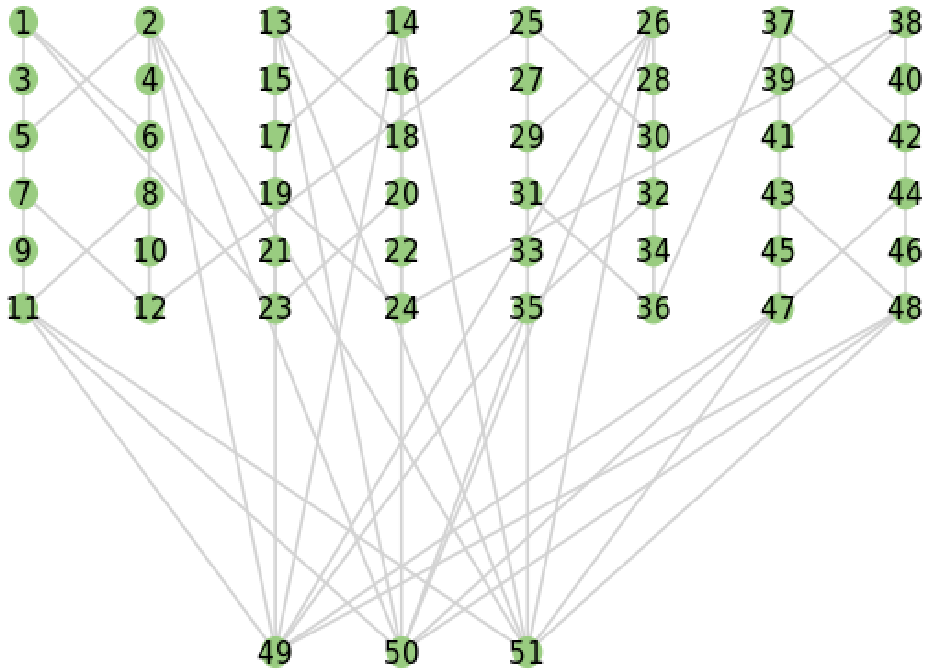


Figura 3. *Grafo resultante de la transformación polinómica de VC a HC*

Siglas

VC : Vertex Cover.

HC : Hamiltonian Circuit.

NDTM : Non-Deterministic Turing Machine.